UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

$\Phi_1 : \mathcal{F}_{n_1} \to \mathcal{F}_{n_1}$
$\Phi_2 : \mathcal{F}_{n_2} \to \mathcal{F}_{n_2}$
$\Phi_1 \times \Phi_2$

RADOJICA PEJOVIĆ

REKURZIVNI OPERATORI

(magistarski rad)

branjeno 17.06.1986.

Komisija:
1. Ž. Mijajlović [mentor]
2. Z. Marković
3. M. Božić

Pitanja. 1. A. Pitanje jedinstvenosti fiksne tačke.
B. Da li ima i nekih drugih fiksnih tačaka osim najmanje fiksne t.
C. Primena?

2. Sličnosti i razlike između r. f-ja i r. op. ; univ. f-ja enum. ? ?

3. Operatori [illegible] [illegible] f-je!

umesto: $\exists \theta_1 \dots \theta_n (\bigwedge \theta_i \subseteq f_i \wedge \dots)$
mora: $\exists (\bigwedge \pi_i \theta \subseteq f_i \wedge \dots)$
ima li razlike?

$\Phi : \mathcal{F}_{n_1} \times \dots \times \mathcal{F}_{n_k} \to \mathcal{F}_n$

BEOGRAD, 1986.

4. M. po [illegible] → rek? (Ili neg se osobine po koord. [illegible] na celu f-ju)

5. Neprekidnost je [illegible] pojam [illegible] da li [illegible] u odnosu na [illegible] je Φ nep.?

6. S obzirom da je reč o generalisanju [illegible] da li [illegible] stvari na ovom već [illegible], [illegible]

PREDGOVOR

Kao prirodan nastavak proučavanja efektivnih operacija nad brojevima javlja se proučavanje takvih operacija nad funkcijama. Osnovna razlika je u tome što je broj konačan a funkcija, po pravilu, beskonačan objekat, pa će glavnu ulogu imati konačna podfunkcija odnosno broj koji joj se može pridružiti. Tako dolazimo do pojma rekurzivnog operatora.

U uvodnom dijelu ovoga rada daju se uobičajene napomene o oznakama i neki poznati rezultati teorije efektivne izračunljivosti koji se kasnije koriste. Dokazani su opštiji oblici teoreme Rice-Shapiro nego što se u navedenoj literaturi mogu naći mada se dokazi potpuno oslanjaju na dokaz dat u knjizi od Cutlanda ([2]).

U drugom dijelu razmatraju se rekurzivni operatori $\Phi : \mathcal{F}_m \rightarrow \mathcal{F}_n$ $(n \geqslant 1)$, gdje su $\mathcal{F}_m$ i $\mathcal{F}_n$ klase m-arnih odnosno n-arnih funkcija nad N. Ovi operatori izloženi su uglavnom na način kako se to čini u [2] (glava 10) pri čemu se i tvrdjenja data za operatore $\Phi : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_1$ ovdje dokazuju za operatore $\Phi : \mathcal{F}_m \rightarrow \mathcal{F}_n$. Dat je i veći broj primjera konkretnih operatora.

U trećem dijelu se razmatraju rekurzivni operatori $\Phi : \mathcal{F}_{m_1} \times \ldots \times \mathcal{F}_{m_k} \rightarrow \mathcal{F}_n$ kao uopštenje operatora iz drugog dijela i dokazuje da važe analogna tvrdjenja. Primjerom 3.3. pokazuje se da se ta tvrdjenja ne mogu svesti na prethodni slučaj na prirodan način tj. primjenom uobičajenih kodiranja k-torki prirodnih brojeva. Dokazuje se teorema o nepokretnoj tački za operatore $\Phi : \mathcal{F}_m \times \ldots \mathcal{F}_m \rightarrow \mathcal{F}_m$ (teorema 3.5.) kao i neka varijanta teoreme o nepokretnoj tački za k-torku operatora $\Phi_i : \mathcal{F}_{m_1} \times \ldots \times \mathcal{F}_{m_k} \rightarrow \mathcal{F}_{m_i}$,

$1 \leqslant i \leqslant k$, (teorema 3.6.) što predstavlja uopštenje i rješenje zadatka formulisanog u [2] (zad. 3, str.207).

U četvrtom dijelu se uvode efektivni operatori nad podskupovima od N tzv. operatori prebrojavanja, a rekurzivni operatori nad funkcijama dobijaju kada se operatori prebrojavanja primjene na jednoznačne skupove. Takav pristup pojmu rekurzivnog operatora dat je u knjizi od Rogersa [6] (glava 9). Uvode se pored rekurzivnih i djelimično rekurzivni i opšterekurzivni operatori i razmatraju odnosi medju njima.

Zahvaljujem se mentoru Dr Žarku Mijajloviću na korisnim sugestijama i velikoj pomoći koju mi je pružio prilikom pisanja ovog rada.

I DIO

UVODNI POJMOVI

Neka je N uobičajena oznaka za skup $\{0,1,2,\ldots\}$. Sa 2^N označavaćemo skup svih podskupova od N. U ovom radu se pojavljuju funkcije iz N^n u N za razne vrijednosti n. Oblast definisanosti funkcije f označavaćemo sa Dom(f), a oblast vrijednosti sa Ran(f). Napominjemo da ćemo pod pojmom funkcija f iz N^n u N podrazumijevati djelimičnu funkciju tj. funkciju čija se oblast definisanosti ne poklapa obavezno sa N^n. Ako je $Dom(f) = N^n$ onda se radi o totalnoj n-arnoj funkciji f iz N^n u N. Sa θ (i odgovarajućim indeksima označavaćemo konačne funkcije tj. funkcije čiji je domen konačan skup, a sa $f_\emptyset$ nigdje ne definisanu funkciju tj. funkciju za koju je $Dom(f\emptyset) = Ran(f\emptyset) = \emptyset$. Za dvije funkcije f i g zapis $f(x) \simeq g(x)$ znači da je vrijednost f(x) definisana akko je definisana vrijednost g(x) i ako je f(x) definisano onda je $f(x) = g(x)$. Sa $\overline{x}$ ćemo označavati n-torku $(x_1, \ldots, x_n)$.

U nastavku navodimo neke osnovne pojmove teorije efektivne izračunljivosti koje ćemo u ovom radu koristiti.

Pod pojmom algoritma ili efektivne procedure (na intuitivnom nivou) podrazumijevamo bilo kakvo mehaničko pravilo ili automatski metod, ili program za izvršavanje nekih matematičkih operacija. Isto tako (neformalno) pod pojmom efektivno izračunljive ili, jednostavno, izračunljive funkcije podrazumijevamo funkciju za koju postoji algoritam kojim se mogu izračunati vrijednosti te funkcije. No, u matematici se javlja potreba za formalizacijom odnosno strogim definisanjem ovih pojmova i počev od 30-tih godina ovog vijeka veliki broj matematičara je radio na tom problemu. Kao rezultat toga imamo čitav niz formalizacija intuitivnog pojma efektivne izračunljivosti. Mi ćemo u ovom radu koristiti, uglavnom, slijedeća dva pristupa.

1. Mašina sa neograničenim registrima (MNR)

Ovaj formalni sistem dali su Shepherdson i Sturgis [Shepherdson J. C., Sturgis H.E.; Computability of recursive functions, J.Assoc. Comput. Machinery 10, 217-255; 1963.] . U nešto izmijenjenom vidu ovaj pristup detaljno je izložen u [2] pa ćemo ovdje navesti samo neke oznake.

Komande anuliranja, dodavanja jedinice, preadresacije i uslovnog prelaza na MNR označavaćemo redom sa $Z(n)$, $S(n)$, $T(m,n)$, $J(m,n,q)$. Neka je P proizvoljan MNR-program i $a_1, \ldots, a_n \in N$ tada $P(a_1, \ldots, a_n)\downarrow$ znači da će se, polazeći od $a_1, \ldots, a_n$ izračunavanje po programu P nekada zaustaviti, a $P(a_1, \ldots, a_n)\uparrow$ znači da se nikada neće zaustaviti. $P(a_1, \ldots, a_n)\downarrow b$ znači da će se, polazeći od $a_1, \ldots, a_n$ izračunavanje po programu P zaustaviti i kao rezultat dati b. Neka je f djelimična funkcija i P proizvoljan MNR-program kažemo da P MNR-izračunava funkciju f ako za svako $a_1, \ldots, a_n, b$ važi $P(a_1, \ldots, a_n)\downarrow b$ akko $(a_1, \ldots, a_n) \in Dom(f)$ i $f(a_1, \ldots, a_n) = b$. Funkcija je MNR izračunljiva ako postoji program koji je MNR - izračunava. Klasu MNR-izračunljivih funkcija označavaćemo sa $\mathcal{J}$, a klasu n-arnih izračunljivih funkcija sa $\mathcal{J}_n$. Pod pojmom izračunljivo podrazumijevaćemo MNR-izračunljivo.

2. Rekurzivne funkcije /Gödel i Kleene, 1936./

Ovaj formalni sistem polazi od nekih osnovnih funkcija kao što su:

a/ nula funkcija $n: x \longrightarrow 0$, $x \in N$

b/ funkcija naslednika $s: x \longrightarrow x+1$, $x \in N$

c/ projekcijske funkcije $p_i^n : (x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow x_i$, $1 \leq i \leq n$, $x_i \in N$

i slijedećih operacija nad funkcijama: zamjena, prosta rekurzija (sa ili bez parametara) i minimizacija.

Najmanja klasa funkcija koja sadrži osnovne funkcije i zatvorena je za operacije zamjene, proste rekurzije i minimizacije predstavlja klasu $\mathcal{R}$ djelimično rekurzivnih funkcija. Uočimo dvije važne podklase ove klase funkcija. Opšterekurzivne funkcije predstavljaju totalne funkcije iz klase $\mathcal{R}$. Prosto rekurzivne funkcije dobijamo ako izostavimo operaciju minimizacije.

Navodimo bez dokaza (dokaz postoji npr. u [2] str.58) slijedeću značajnu teoremu:

Teorema 1.1. Klasa $\mathcal{J}$ (MNR-izračunljivih funkcija) poklapa se sa klasom $\mathcal{R}$ (djelimično rekurzivnih funkcija).

Napominjemo da ćemo u radu koristiti tezu Church-a koju možemo ovako formulisati:

Teza Church-a: Klasa intuitivno izračunljivih funkcija poklapa se sa klasom MNR-izračunljivih funkcija.

S obzirom na prethodnu teoremu i prihvaćenu tezu nećemo praviti razliku izmedju klase intuitivno izračunljivih funkcija, MNR-izračunljivih funkcija i djelimično rekurzivnih funkcija.

Mogućnost numeracije izračunljivih funkcija igra fundamentalnu ulogu u teoriji efektivne izračunljivosti. Mi ćemo u ovom radu fiksirati numeraciju koja je detaljno izložena u [2] a zasniva se na efektivnoj prebrojivosti skupa svih MNR-programa. Napominjemo da bitno koristimo izračunljivost slijedećih bijekcija i njima inverznih funkcija:

a/ $\Pi : N\times N \longrightarrow N$, gdje je $\Pi(m,n) = 2^m(2n+1)-1$. Inverzna funkcija Π^{-1} definisana kao $\Pi^{-1}(x) = (\Pi_1(x), \Pi_2(x))$ gdje je $\Pi_1(x) = (x+1)_1$ (izložilac broja $p_1 = 2$ pri razlaganju $x+1$ na proste množioce)

$$\Pi_2(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{2^{\Pi_1(x)}} - 1\right).$$

b/ $\eta : N^+ \times N^+ \times N^+ \longrightarrow N$ gdje je $\eta(m,n,q) = \Pi(\Pi(m-1,\ n-1),\ q-1)$

$\eta^{-1}(x) = (\Pi_1(\Pi_1(x) + 1,\ \Pi_2(\Pi_1(x)) + 1,\ \Pi_2(x) + 1)$.

c/ $\tau : \bigcup_{k>0} N^k \longrightarrow N$ gdje je $\tau(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 2^{a_1} + 2^{a_1+a_2+1} + \ldots + 2^{a_1+a_2+\ldots+a_n+k-1} - 1$. Inverzna funkcija τ^{-1} dobija se po slijedećoj proceduri: postoje jedinstveni brojevi $0 \leq b_1 < b_2 < \ldots < b_k$ $(k \geq 1)$ tako da je $x+1 = 2^{b_1} + 2^{b_2} + \ldots + 2^{b_n}$ tada je $\tau^{-1}(x) = (a_1, \ldots, a_n)$ gdje je $a_1 = b_1$, $a_{i+1} = b_{i+1} - b_i - 1$ $(1 \leq i \leq k)$.

<u>Teorema 1.2.</u> Skup $\mathcal{K}$ svih komandi MNR je efektivno prebrojiv.

Dokaz: Posmatrajmo bijekciju $\beta : \mathcal{K} \longrightarrow N$ definisanu na slijedeći način:

$\beta(Z(n)) = 4(n-1)$

$\beta(S(n)) = 4(n-1)+1$

$\beta(T(m,n)) = 4\Pi(m-1,\ n-1)+2$

$\beta(J(m,n,q) = 4\eta(m,n,q)+3$

Inverzna funkcija $\beta^{-1}(x)$ dobija se po slijedećoj proceduri: Neka je $x=4u+r$ gdje je $0 \leq r \leq 4$ tada

Za $r=0$ $\beta^{-1}(x) = Z(u+1)$

za $r=1$ $\beta^{-1}(x) = S(u+1)$

za $r=2$ $\beta^{-1}(x) = T(\Pi_1(u)+1,\ \Pi_2(u)+1)$

za $r=3$ $\beta^{-1}(x) = J(m,n,q)$ gdje je $(m,n,q) = \eta^{-1}(u)$.

Funkcije β i β^{-1} su izračunljive jer su izračunljive funkcije Π, Π_1, Π_2, η, η^{-1} .□

<u>Teorema 1.3.</u> Skup $\mathcal{P}$ svih programa MNR je efektivno prebrojiv.

Dokaz: Pomoću bijekcija τ i β definišimo bijekciju $\gamma : \mathcal{P} \longrightarrow N$ tako da je za proizvoljni program P čije su komande $I_1, \ldots, I_s$

$\gamma(P) = \tau(\beta(I_1), \ldots, \beta(I_s))$, analogno pomoću τ^{-1} i β^{-1}

dobijamo inverznu funkciju $\nu^{-1}(x)$. Izračunljivost funkcija ν i ν^{-1} slijedi iz izračunljivosti funkcija τ, β, τ^{-1}, β^{-1}.□

Broj $\nu(P)$ zvaćemo kodnim brojem ili Gödelovim brojem ili jednostavno indeksom programa P i označavati sa P_n program čiji je kodni broj n tj. $\nu(P_n) = n$ odnosno $P_n = \nu^{-1}(n)$.

Na bazi opisane efektivne numeracije programa izvršimo slijedeću numeraciju izračunljivih funkcija: $\phi_a^{(n)}$ je n-arna funkcija izračunljiva po programu P_a. Označavaćemo sa $W_a^{(n)}$ oblast definisanosti funkcije $\phi_a^{(n)}$, a sa $E_a^{(n)}$ oblast vrijednosti funkcije $\phi_a^{(n)}$. Gornji indeks nećemo pisati kada je n=1.

U radu ćemo često koristiti poznatu s-m-n teoremu koju ovdje navodimo bez dokaza.

Teorema 1.4. Za svako $m, n \geqslant 1$ postoji totalna izračunljiva (m+1)-arna funkcija $s_n^m(e, \bar{x})$ tako da važi

$$\phi_e^{(m+n)}(\bar{x}, \bar{y}) \simeq \phi^{(n)}_{s_n^m(e,\bar{x})}(\bar{y}) \quad \text{gdje je } \bar{x}=(x_1,\dots,x_m);\ \bar{y}=(y_1,\dots y_n)$$

Rekurzivne i rekurzivno prebrojive skupove definišemo na uobičajen način. U mnogim dokazima koristimo skup $K = \{x \mid x \in W_x\}$ koji je rekurzivno prebrojiv (r.p.) ali nije rekurzivan.

U [2] je formulisana i dokazana teorema Rice-Shapiro za jednoargumentne izračunljive funkcije. Ovdje ćemo dati dva prirodna uopštenja te teoreme koja ćemo kasnije koristiti.

<u>Teorema 1.5.</u> Neka je $\mathcal{A}$ skup n-arnih izračunljivih funkcija takav da je skup $A = \{x \mid \phi_x^{(n)} \in \mathcal{A}\}$ r.p. tada važi za bilo koju n-arnu izračunljivu funkciju f

$f \in \mathcal{A} \equiv \exists\, \theta(\theta \subset f \text{ i } \theta \in \mathcal{A})$, gdje je θ konačna funkcija.

Dokaz: Neka je f n-arna izračunljiva funkcija. Pretpostavimo da je $f \in \mathcal{A}$ i $\theta \notin \mathcal{A}$ za svaku konačnu podfunkciju $\theta \subset f$. Pošto je K r.p.

postoji izračunljiva funkcija od jednog argumenta čiji je domen K. Znači postoji program P sa svojstvom $P(t)\downarrow$ akko $t \in K$.

Definišimo funkciju g na slijedeći način:

$$g(t, z_1,\dots,z_n) \simeq \begin{cases} f(z_1,\dots,z_n), \text{ ako } P(t)\not\downarrow \text{ za } < z_1,\dots,z_n > \text{ ili manje koraka} \\ \text{ne definisana, ako } P(t)\downarrow \text{ za } < z_1,\dots,z_n > \text{ ili manje koraka} \end{cases}$$

gdje je $< z_1,\dots,z_n >$ Cantor-ovo kodiranje n-torke $(z_1,\dots,z_n)$.

Po tezi Church-a g je izračunljiva pa primjenom s-m-n teoreme imamo $g(t, z_1,\dots,z_n) \simeq \phi^{(n)}_{s(t)}(z_1,\dots,z_n)$, gdje je s(t) totalna izračunljiva funkcija. Po konstrukciji je $\phi^{(n)}_{s(t)} \subset f$. Uočimo implikacije:

$t \in K \Longrightarrow P(t)\downarrow$ za z_o koraka $\Longrightarrow \phi^{(n)}_{s(t)}(z_1,\dots,z_n)$ je definisana samo kad je $<z_1,\dots,z_n> \; < z_o \Longrightarrow \phi^{(n)}_{s(t)}$ je konačna $\Longrightarrow$

$\phi^{(n)}_{s(t)} \notin \mathcal{A} \Longrightarrow s(t) \notin A$

Dakle, $t \in K \Longrightarrow s(t) \notin A$. Isto tako važi

$t \notin K \Longrightarrow P(t)\uparrow \quad g(t, z_1,\dots,z_n) = f(z_1,\dots,z_n) \Longrightarrow \phi^{(n)}_{s(t)} \in \mathcal{A} \Rightarrow s(t) \in A$

Dakle, $t \notin K \Longrightarrow s(t) \in A$. Ove implikacije zajedno daju ekvivalenciju $t \in \bar{K} \Longleftrightarrow s(t) \in A$.

Pošto je s izračunljiva i A po pretpostavci r.p. slijedi da je i $\bar{K}$ r.p. a to je kontradikcija.

Dakle, postoji konačna podfunkcija $\theta \subset f$ i $\theta \in \mathcal{A}$.

Obratno, neka je f n-arna izračunljiva funkcija takva da postoji $\theta \subset f$ i $\theta \in \mathcal{A}$ i neka $f \notin \mathcal{A}$. Definišimo funkciju g na slijedeći način

$$g(t,z_1,\dots,z_n) \simeq \begin{cases} f(z_1,\dots,z_n), \text{ ako je } (z_1,\dots,z_n) \in \mathrm{Dom}(\theta) \text{ ili } t \in K \\ \text{ne definisana u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

Po tezi Churcha g je izračunljiva pa primjenom s-m-n teoreme imamo $g(t,z_1,\dots z_n) \simeq \phi^{(n)}_{s(t)}(z_1,\dots,z_n)$, gdje je s(t) totalna izračunljiva funkcija. Važe implikacije:

$t \in K \Longrightarrow \phi^{(n)}_{s(t)} = f \Longrightarrow \phi^{(n)}_{s(t)} \notin \mathcal{A} \Longrightarrow s(t) \notin A$

$t \notin K \Longrightarrow \phi^{(n)}_{s(t)} = f|Dom(\theta) \Longrightarrow$ (zbog $\theta \subset f$) $\phi^{(n)}_{s(t)} = \theta \Longrightarrow \phi^{(n)}_{s(t)} \in \mathcal{A}$

$\Longrightarrow s(t) \in A$ pa je opet $t \in \overline{K} \Longleftrightarrow s(t) \in A$ što znači da je $\overline{K}$ r.p. a to je nemoguće. Dakle, $f \in \mathcal{A}$.□

Za n=1 imamo slijedeću posledicu:

<u>Posledica</u>. Neka je $\mathcal{A}$ skup jednoargumentnih izračunljivih funkcija takav da je skup $A=\{x \mid \phi_x \in \mathcal{A}\}$ r.p. Tada za proizvodljnu jednoargumentnu izračunljivu funkciju f važi $f \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \exists \theta\ (\theta \subset f$ i $\theta \in \mathcal{A})$, gdje je θ konačna funkcija.

Ova teorema važi i kada je $\mathcal{A}$ skup k-torki izračunljivih funkcija koje mogu imati i različite brojeve argumenata. Dokazujemo i taj oblik teoreme jer ćemo ga kasnije koristiti.

<u>Teorema 1.6.</u> Neka je $\mathcal{A}$ podskup skupa $\mathcal{J}_{m_1} \times \mathcal{J}_{m_2} \times \ldots \times \mathcal{J}_{m_k}$ gdje $\mathcal{J}_{m_i}$ predstavlja skup svih izračunljivih funkcija od m_i argumenata, takav da je $A = \{(e_1,\ldots,e_k) \mid (\phi^{(m_1)}_{e_1},\ldots,\phi^{(m_k)}_{e_k}) \in \mathcal{A}\}$ r.p. Tada za svaku k-torku izračunljivih funkcija $(f_1,\ldots,f_k)$ gdje je $f_i \in \mathcal{J}_{m_i}$ $(1 \leq i \leq k)$ važi:

$(f_1,\ldots,f_k) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \exists \theta_1 \ldots \exists \theta_k\ (\theta_i \subset f_i$ i $(\theta_1,\ldots,\theta_k) \in \mathcal{A})$

Dokaz: Neka je $(f_1,\ldots,f_k) \in \mathcal{A}$ i neka je $(\theta_1,\ldots,\theta_k) \notin \mathcal{A}$ za bilo koju k-torku konačnih podfunkcija $\theta_i \subset f_i$ $(1 \leq i \leq k)$.

Postoji program P sa svojstvom $P_{(t)}\downarrow$ akko $t \in K$. Definišimo funkcije $g_1,\ldots,g_k$ na slijedeći način:

$$g_i(t,z_1,\ldots,z_{m_i}) \simeq \begin{cases} f_i(z_1,\ldots,z_{m_i}), & \text{ako } P(t)\uparrow \text{ za } \langle z_1,\ldots,z_{m_i}\rangle \text{ ili manje koraka} \\ \text{ne definisana}, & \text{ako } P(t)\downarrow \text{ za } \langle z_1,\ldots,z_{m_i}\rangle \text{ ili manje koraka} \end{cases}$$

Funkcije g_i $(1\leq i\leq k)$ su izračunljive pa po s-m-n teoremi važi $g_i(t, z_1,\dots,z_{m_i})\simeq \phi^{(m_i)}_{s_i(t)}(z_1,\dots,z_{m_i})$ gdje su $s_i(t)$ totalne izračunljive funkcije. Po konstrukciji je $\phi^{(m_i)}_{s_i(t)} \subset f_i$. Ako je $t\in K$ važi $P(t)\downarrow$. Neka je z_o broj koraka za koji se $P(t)$ zaustavi. Uočimo skupove $B_1,\dots,B_k$ tako da je $B_i=\{(z_1,\dots,z_{m_i})\mid \langle z_1,\dots,z_{m_i}\rangle < z_o\}$ $(1\leq i\leq k)$. Skupovi B_i su konačni i važi $\mathrm{Dom}\,(\phi^{(m_i)}_{s_i(t)})=B_i$. Dakle, $\phi^{(m_i)}_{s_i(t)}$ su konačne podfunkcije od f_i pa $(\phi^{(m_1)}_{s_1(t)},\dots,\phi^{(m_k)}_{s_k(t)})\notin \mathcal{A}$ odnosno $(s_1(t),\dots,s_k(t))\notin A$. Ako $t\notin K$ onda je $\phi^{(m_i)}_{s_i(t)} = f_i$ pa $(\phi^{(m_1)}_{s_1(t)}),\dots,\phi^{(m_k)}_{s_k(t)})\in \mathcal{A}$ odnosno $(s_1(t),\dots,s_k(t))\in A$. Iz svega ovoga slijedi ekvivalencija $t\in \overline{K}\Longleftrightarrow(s_1(t),\dots,s_k(t))\in A$. Kako je A r.p. i funkcije $s_1,\dots,s_k$ izračunljive biće i $\overline{K}$ r.p. što je nemoguće.

Obratno, neka je $(f_1,\dots,f_k)$, $f_i\in \mathcal{J}_{m_i}$ $(1\leq i\leq k)$ takva k-torka izračunljivih funkcija za koju postoje konačne podfunkcije $\theta_i\subset f_i$ tako da je $(\theta_1,\dots,\theta_k)\in \mathcal{A}$ i $(f_1,\dots,f_k)\notin \mathcal{A}$

Definišimo funkcije $g_1,\dots,g_k$ relacijama

$$g_i(t,z_1,\dots,z_{m_i})\simeq\begin{cases} f_i(z_1,\dots,z_{m_i}), & \text{ako je } (z_1,\dots,z_{m_i})\in \mathrm{Dom}\,(\theta_i) \text{ ili } t\in K\\ \text{ne definisana u ostalim slučajevima} & \end{cases}$$

gdje je $1\leq i\leq k$.

Na osnovu teze Church-a i s-m-n teoreme biće

$g_i(t,z_1,\dots z_{m_i})\simeq \phi^{(m_i)}_{s_i(t)}(z_1,\dots,z_{m_i})$ i $s_i(t)$ su opšterekurzivne.

Važe implikacije: $t\in K \Longrightarrow \phi^{(m_i)}_{s_i(t)} = f_i \Longrightarrow (\phi^{(m_1)}_{s_1(t)},\dots,\phi^{(m_k)}_{s_k(t)}) \notin \mathcal{A}$

odnosno $(s_1(t),\dots,s_k(t)) \notin A$; $t\notin K \Longrightarrow \phi^{m_i}_{s_i(t)} = \Theta_i \Longrightarrow (s_1(t),\dots,$

$\dots,s_k(t)) \in A$. Odavde imamo ekvivalenciju $t\in \overline{K} \Longleftrightarrow (s_1(t),\dots,s_k(t)) \in A$

koja daje kontradikciju $\overline{K}$ je r.p.

Napomenimo na kraju da je iz teoreme 1.5. moguće izvesti vrlo jednostavan dokaz poznate teoreme Rice-a i to za n-arne izračunljive funkcije.

Teorema 1.7. Neka je $\mathcal{B}$ skup n-arnih izračunljivih funkcija takav da je $\mathcal{B} \neq \mathcal{J}_n$ i $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Tada skup $B = \left\{ x \mid \phi^{(n)}_x \in \mathcal{B} \right\}$ nije rekurzivan.

Dokaz: Neka je $\mathcal{B}$ rekurzivan. Skupovi $\mathcal{B}$ i $\mathcal{J}_n/\mathcal{B}$ zadovoljavaju uslove teoreme 1.5. Ako je $f_\emptyset \in \mathcal{B}$ tada za svako $e\in N$ $\phi^{(n)}_e \in \mathcal{B}$ što je suprotno pretpostavci. Ako $f_\emptyset \notin \mathcal{B}$ tada za svako $e \in N$ $\phi^{(n)}_e \notin \mathcal{B}$ što je takodje suprotno pretpostavci. Dakle B nije rekurzivan.□

II DIO

REKURZIVNI OPERATORI $\Phi : \mathcal{F}_m \rightarrow \mathcal{F}_n$ $(n \geq 1)$

REKURZIVNI OPERATORI

Neka je $\mathcal{F}_n$ $(n \geq 1)$ klasa svih djelimičnih funkcija iz N^n u N. Pod operatorom ćemo podrazumijevati funkciju $\Phi : \mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_n$ i operatore ćemo označavati grčkim slovima $\Phi, \Psi, \ldots$. U ovom dijelu ćemo posmatrati samo svuda definisane operatore tj. one čiji se domen poklapa sa cijelom klasom $\mathcal{F}_m$. Cilj nam je da uvedemo izračunljivi (tj. efektivni) operator Φ . Intuitivno je jasno da takav operator mora imati svojstvo da se bilo koja vrijednost izlazne funkcije $\Phi(f)$, ako ona postoji, može efektivno izračunati za konačno vrijeme i na osnovu konačne informacije o ulaznoj funkciji f. Takve operatore možemo ilustrovati slijedećim primjerom.

<u>Primjer 2.1.</u> Posmatrajmo operatore Φ_1 i Φ_2 koji preslikavaju iz $\mathcal{F}_1$ u $\mathcal{F}_1$ i definisani su na slijedeći način:

$$\Phi_1(f) = g_1 \,, \quad \text{gdje je } g_1(x) \simeq 2\, f(x)$$
$$\Phi_2(f) = g_2 \,, \quad \text{gdje je } g_2(x) \simeq \sum_{t \leq x} f(t)$$

Ove operatore možemo smatrati efektivnim jer bilo koju konkretnu vrijednost $g_1(x)$ funkcije g (ako ta vrijednost postoji) možemo efektivno izračunati iz jedne jedine vrijednosti f(x) funkcije f. Isto tako bilo koju vrijednost $g_2(x)$ (ako ona postoji) možemo efektivno izračunati iz konačno mnogo vrijednosti funkcije f, odnosno znajući $f(0), f(1), \ldots, f(x)$.

Znači, $\Phi(f)(x)$ se izračunava na osnovu konačnog dijela θ funkcije f, pa zato operator Φ mora biti tako definisan da i za neku drugu funkciju g čiji je konačni dio takodje θ važi $\Phi(f)(x) \simeq \Phi(g)(x)$.

No prije stroge definicije rekurzivnog operatora uvedimo neke pomoćne pojmove. Pod konačnim dijelom funkcije f podrazumijevamo neku konačnu funkciju θ koja se može produžiti do f. Od posebnog značaja su činjenice da je svaka konačna funkcija izračunljiva i da se svaka konačna funkcija θ može efektivno kodirati brojem $\widetilde{\theta}$. Jedan od načina na koji se to može uraditi je slijedeći: Neka je $\theta \in \mathcal{F}_n$, n-torku prirodnih brojeva $\overline{x}=(x_1,\dots,x_n)$ kodiraćemo brojem $\mathrm{cod}(\overline{x}) = p_1^{x_1+1} \cdot p_2^{x_2+1} \dots p_n^{x_n+1}$ (p_i je i-ti prost broj) a funkciju θ brojem $\widehat{\theta}$ tako da je

$$\widehat{\theta} = 0 \ , \quad \text{ako je Dom } (\theta) = \emptyset$$

$$\widehat{\theta} = \prod_{\overline{x} \in \mathrm{Dom}(\theta)} p_{\mathrm{cod}(\overline{x})}^{\theta(\overline{x})+1} \ , \quad \text{ako je Dom } (\theta) \neq \emptyset$$

Pri ovakvom kodiranju postoji efektivna procedura koja za proizvoljan broj z utvrdjuje da li je $z = \widehat{\theta}$ (gdje je θ neka konačna n-arna funkcija) i u slučaju potvrdnog odgovora utvrdjuje da li neko zadano $\overline{x}$ pripada Dom (θ) i ako pripada izračunava $\theta(\overline{x})$.

<u>Definicija 2.1.</u> Neka je $\Phi : \mathcal{F}_m \to \mathcal{F}_n$. Φ je rekurzivan operator ako postoji izračunljiva funkcija $\phi(z,\overline{x})$ tako da za svako $f \in \mathcal{F}_m$, $\overline{x} \in N^n$ i $y \in N$ važi:

$$\Phi(f)(\overline{x}) \simeq y \Longleftrightarrow \exists\, \theta(\, \theta \subset f \ \text{ i } \ \phi(\widehat{\theta}, \overline{x}) \simeq y).$$

Pokažimo da su operatori Φ_1 i Φ_2 iz primjera 2.1. rekurzivni u smislu ove definicije.

Operator $\Phi_1 : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$ definisan kao $\Phi_1(f) = g_1$, gdje je $g_1(x) \simeq 2f(x)$, je rekurzivan jer je funkcija

$$\phi(z,x) = \begin{cases} 2\theta(x) \ , & \text{ako je } z=\widehat{\theta} \text{ i } x \in \mathrm{Dom}\ (\theta) \\ \text{ne definisana u ostalim slučajevima} & \end{cases}$$

izračunljiva po tezi Church-a i za svako f,x,y važi

$$\begin{aligned} \Phi_1(f)(x) \simeq y &\Longleftrightarrow x \in \mathrm{Dom}(f) \quad \text{i} \quad y=2f(x) \\ &\Longleftrightarrow \exists \theta(\theta \subset f \quad \text{i} \quad x \in \mathrm{Dom}(\theta) \quad \text{i} \quad y=2\,\theta(x)) \\ &\Longleftrightarrow \exists \theta(\theta \subset f \quad \text{i} \quad \phi(\tilde{\theta}, x) \simeq y)). \end{aligned}$$

Operator $\Phi_2 : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1$ definisan kao $\Phi_2(f)=g_2$, gdje je $g_2(x) = \sum_{t\le x} f(t)$, je rekurzivan jer je funkcija

$$\phi(z,x) \simeq \begin{cases} \sum_{t\le x} \theta(t), & \text{ako je } z=\tilde{\theta} \text{ i } 0,1,\dots,x \in \mathrm{Dom}(\theta) \\ \text{ne definisana u ostalim slučajevima} \end{cases}$$

izračunljiva po tezi Church-a i važi

$$\begin{aligned} \Phi_2(f)(x) \simeq y &\Longleftrightarrow 0,1,\dots,x \quad \mathrm{Dom}(f) \quad \text{i } y = \sum_{t\le x} f(t) \\ &\Longleftrightarrow \exists\, \theta(\theta \subset f \text{ i } 0,1,\dots,x \in \mathrm{Dom}(\theta) \quad \text{i } y= \sum_{t\le x} \theta(t)) \\ &\Longleftrightarrow \exists\, \theta(\theta \subset f \text{ i } \phi(\tilde{\theta}, x) \simeq y). \end{aligned}$$

Važna svojstva rekurzivnih operatora su neprekidnost i monotonost.

Definicija 2.2. Operator $\Phi : \mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_n$ je neprekidan ako za proizvoljnu funkciju $f \in \mathcal{F}_m$ i proizvoljne $\bar{x}$ i y važi:

$$\Phi(f)(x) \simeq y \Longleftrightarrow \exists \theta(\theta \subset f \quad \text{i} \quad \Phi(\theta) \quad (\bar{x}) \simeq y).$$

Definicija 2.3. Operator $\Phi : \mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_n$ je monoton ako za proizvoljne funkcije $f,\, g \in \mathcal{F}_m$ važi:

$$f \subset g \Longrightarrow \Phi(f) \subset \Phi(g).$$

Teorema 2.1. Ako je operator rekurzivan onda je on neprekidan i monoton.

Dokaz: Neka je $\Phi : \mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_n$ rekurzivan operator i neka je $\phi(z,\bar{x})$ izračunljiva funkcija koja mu prema definiciji 2.1. odgovara. Tada za proizvoljne $f \in \mathcal{F}_m$, $\bar{x} \in N^n$, $y \in N$ iz $\Phi(f)(\bar{x}) \simeq y$ slijedi $\exists \theta(\theta \subset f$ i $\phi(\tilde{\theta}, \bar{x}) \simeq y)$ a odavde, stavljajući $\theta \subset \theta$, slijedi $\Phi(\theta)(\bar{x}) \simeq y$. Obratno, neka postoji $\theta \subset f$ i $\Phi(\theta)(\bar{x}) \simeq y$ tada $\exists \theta_1 \subset \theta$ i $\phi(\tilde{\theta}_1, \bar{x}) \simeq y$, a odavde, zbog $\theta_1 \subset f$, slijedi $\Phi(f)(\bar{x}) \simeq y$. Dakle Φ je neprekidan operator.

Monotonost slijedi iz neprekidnosti jer ako je $f \subset g$ i $\Phi(f)(\bar{x}) \simeq y$ tada (zbog neprekidnosti) $\exists \theta(\theta \subset f$ i $\Phi(\theta)(\bar{x}) \simeq y)$, no pošto je i $\theta \subset g$ (opet zbog neprekidnosti) slijedi $\Phi(g)(\bar{x}) \simeq y$.□

Znači, važe implikacije

Φ je rekurzivan $\Longrightarrow$ Φ je neprekidan $\Longrightarrow$ Φ je monoton.

Slijedeća teorema daje jedan kriterijum kojim se može provjeriti da li je neki neprekidan operator rekurzivan.

<u>Teorema 2.2.</u> Neka je $\Phi : \mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_n$ neki operator. Φ je rekurzivan akko važi: 1° Φ je neprekidan i 2° funkcija $\phi(z,\bar{x})$ definisana relacijom

$$\phi(z,\bar{x}) \simeq \begin{cases} \Phi(\theta)\ (\bar{x}), & \text{ako je } z=\tilde{\theta} \text{ i } \theta \in \mathcal{F}_m \\ \text{ne definisana u ostalim slučajevima} \end{cases}$$

je izračunljiva.

Dokaz: Neka je Φ rekurzivan i neka je ϕ' funkcija koja mu po definiciji 2.1. odgovora. Uslov 1° slijedi iz prethodne teoreme. Dokazujemo uslov 2°. Za proizvoljne $\bar{x} \in N^n$ i $y \in N$ važi:

$$\phi(z,\bar{x}) \simeq y \iff \exists z(z=\tilde{\theta} \text{ i } \Phi(\theta)(\bar{x}) \simeq y)$$
$$\iff \exists z \exists \theta_1(z=\tilde{\theta} \text{ i } \theta_1 \subset \theta \text{ i } \phi'(\tilde{\theta}_1,\bar{x}) \simeq y)$$

Pošto je funkcija ϕ' izračunljiva, poslednji predikat je djelimično rješiv, pa je djelimično rješiv i predikat "$\phi(z,\bar{x}) \simeq y$", dakle funkcija ϕ je izračunljiva.

Obratno, pretpostavimo da važe uslovi 1° i 2°. Tada je:

$$\Phi(f)(\bar{x}) \simeq y \Longleftrightarrow \exists \theta (\theta \subset f \ \text{ i } \ \Phi(\theta)(\bar{x}) \simeq y) \qquad (\text{iz } 1^\circ)$$

$$\Longleftrightarrow \exists \theta (\theta \subset f \ \text{ i } \ \phi(\tilde{\theta}, \bar{x}) \simeq y) \qquad (\text{iz } 2^\circ)$$

Pošto je ϕ izračunljiva operator je prema definiciji 2.1. rekurzivan.□

Uočavamo da je neprekidnost posebno značajno svojstvo rekurzivnih operatora. Smisao neprekidnosti ovdje je slijedeći:

Neka je $\Phi : \mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_n$ neprekidan operator i neka je $f \in \mathcal{F}_m$. Tada za proizvoljnu konačnu funkciju $\theta' \subset \Phi(f)$ postoji konačna funkcija $\theta \subset f$ tako da je $\theta' \subset \Phi(\theta)$ i za svaku funkciju g koja je "bliska" funkciji f u smislu da se sa njom poklapa na konačnom skupu $\mathrm{Dom}(\theta)$ slika $\Phi(g)$ je u istom smislu "bliska" sa $\Phi(f)$ jer se sa njom poklapa na konačnom skupu $\mathrm{Dom}(\theta')$.

Navodimo primjere raznih operatora.

<u>Primjer 2.2.</u> Operator $\Phi : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1$, definisan relacijom:

$$\Phi(f)(x) \simeq \begin{cases} f(x), \text{ ako je } \mathrm{Dom}(f) \text{ konačan} \\ \text{ne definisana, ako je } \mathrm{Dom}(f) \text{ beskonačan} \end{cases}$$

nije monoton pa nije ni neprekidan ni rekurzivan. Da nije monoton pokazuje se jednostavno. Neka je $g \in \mathcal{F}_1$ bilo koja totalna funkcija i θ bilo koja njena konačna podfunkcija uz ograničenje $\mathrm{Dom}(\theta) \neq \emptyset$. Tada važi $\theta \subset g$ i ne važi $\Phi(\theta) \subset \Phi(g)$.

<u>Primjer 2.3.</u> Operator $\Phi : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1$ definisan relacijom

$$\Phi(f)(x) \simeq \begin{cases} f(x), \text{ ako je } \mathrm{Dom}(f) \text{ beskonačan} \\ \text{ne definisana, ako je } \mathrm{Dom}(f) \text{ konačan} \end{cases}$$

jeste monoton ali nije neprekidan pa nije ni rekurzivan. Pokažimo monotonost. Neka je $f \subset g$, tada i $\mathrm{Dom}(g) \subset \mathrm{Dom}(g)$. Ako je $\mathrm{Dom}(f)$ konačan biće $\Phi(f) \subset \Phi(g)$ jer je uvijek $f_\emptyset \subset \Phi(g)$. Ako je $\mathrm{Dom}(f)$ beskonačan biće i $\mathrm{Dom}(g)$ beskonačan pa je $\Phi(f) \subset \Phi(g)$ jer je $f \subset g$. Operator nije neprekidan jer za svaku konačnu funkciju $\theta \subset f$ važi $\Phi(\theta) = f_{\emptyset}$, dok očigledno ne mora biti $\Phi(f) = f_{\emptyset}$.

Primjer 2.4. Operator $\Phi : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1$ definisan relacijom

$$\Phi(f)(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in W_x \\ 0, & \text{ako } x \notin W_x \end{cases}$$

preslikava svaku funkciju u funkciji $h(x)$ koja je karakteristična funkcija predikata "$x \in W_x$" i koja, kao što je poznato, nije izračunljiva. Operator Φ je očigledno monoton i neprekidan. Medjutim, funkcija

$$\phi(z,x) \simeq \begin{cases} \Phi(\theta)(x), & \text{ako je } z=\widehat{\theta} \text{ i } \theta \in \mathcal{F}_1 \\ \text{ne definisana u ostalim slučajevima} & \end{cases}$$

odnosno

$$\phi(z,x) \simeq \begin{cases} h(x), & \text{ako je } z=\widehat{\theta} \text{ i } \theta \in \mathcal{F}_1 \\ \text{ne definisana u ostalim slučajevima} & \end{cases}$$

nije izračunljiva pa po teoremi 2.2. operator Φ nije rekurzivan.

Primjer 2.5. Operator $\Phi : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1$ definisan relacijom

$$\Phi(f)(x) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ako } x \in \mathrm{Dom}(f) \\ \text{ne definisana} & \text{inače} \end{cases}$$

je rekurzivan. Neprekidnost se jednostavno pokazuje po definiciji. Ako je $\Phi(f)(x) \simeq y$ tada je $x \in \mathrm{Dom}(f)$ pa za θ možemo uzeti restrikciju od f na skup $\{x\}$ i biće $\theta \subset f$ i $\Phi(\theta)(x) \simeq y$. Obratno, ako postoji $\theta \subset f$ i $\Phi(\theta)(x) \simeq Y$ tada je $x \in \mathrm{Dom}(\theta)$ tj. $x \in \mathrm{Dom}(f)$ pa je $\Phi(f)(x) \simeq y$.

Funkcija $$\phi(\tilde{\theta}, x) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ako je } x \in \mathrm{Dom}(\theta) \\ \text{ne definisana inače} & \end{cases}$$

je izračunljiva po tezi Church-a pa je operator Φ rekurzivan.

Primjer 2.6. Operator dijagonalizacije $\Phi : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_1$ definisan relacijom $\Phi(f)(x) \simeq f(x,x)$ je rekurzivan. Očigledna je izračunljivost funkcije $\phi(\tilde{\theta}, x) \simeq \theta(x,x)$ kao i neprekidnost operatora Φ.

Primjer 2.7. Operator Ackermann-a $\Phi : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_2$ definisan relacijama

$$\Phi(f)(0,y) = y+1$$
$$\Phi(f)(x+1,0) \simeq f(x,1)$$
$$\Phi(f)(x+1, y+1) \simeq f(x, f(x+1,y))$$

je rekurzivan. Neprekidnost je jasna iz činjenice da svaka konkretna vrijednost funkcije $\Phi(f)(x,y)$ zavisi najviše od dvije konkretne vrijednosti funkcije f. Funkcija $\phi(\tilde{\theta}, x, y)$ definisana relacijama

$$\phi(\tilde{\theta}, 0, y) = y+1$$
$$\phi(\tilde{\theta}, x+1, 0) \simeq \theta(x,1)$$
$$\phi(\tilde{\theta}, x+1, y+1 \simeq \theta(x, \theta(x+1, y))$$

je izračunljiva po tezi Church-a.

Primjer 2.8. Operator $\Phi : \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_n$ definisan relacijom $\Phi(f) \simeq g \circ f$, gdje je $g \in \mathcal{I}_1$ (tj. proizvoljna izračunljiva funkcija od jednog argumenta) je rekurzivan. Izračunljivost funkcije $\phi(\tilde{\theta}, \overline{x}) \simeq g(\theta(\overline{x}))$ slijedi iz izračunljivosti funkcija g i θ, a neprekidnost je očigledna.

Primjer 2.9. Operator $\Phi : \mathcal{F}_{n+1} \to \mathcal{F}_n$ definisan relacijom $\Phi(f)(\overline{x}) \simeq \mu y\ (f(\overline{x},y) = 0)$ je rekurzivan.
Funkcija $\phi(\tilde{\theta}, \overline{x}) \simeq \mu y\ (\theta(\overline{x}, y) = 0)$ je izračunljiva kao rezultat minimizacije nad izračunljivom funkcijom. Neprekidnost je očigledna.

Rekurzivne operatore $\Phi : \mathcal{F}_m \rightarrow \mathcal{F}_n$ ovdje smo uveli uz ograničenje da je $n \geqslant 1$ i da su definisani na cijelom $\mathcal{F}_m$. Ako u definiciji 2.1. uzmemo da je $n=0$ dobićemo rekurzivne funkcionale što nećemo razmatrati u ovom radu. O rekurzivnim operatorima koji nijesu svuda definisani biće riječi u četvrtom dijelu ovoga rada.

Rekurzivni operatori nad izračunljivim funkcijama

<u>Lema 2.1.</u> Neka je $\Phi : \mathcal{F}_m \rightarrow \mathcal{F}_n$ rekurzivni operator i neka je $f \in \mathcal{F}_m$ izračunljiva funkcija. Tada je funkcija $\Phi(f)$ takodje izračunljiva.

Dokaz: Neka je $\phi(z,\bar{x})$ izračunljiva funkcija koja u skladu sa definicijom 2.1. odgovara operatoru Φ tada važi

$\Phi(f)(\bar{x}) \simeq y \Longleftrightarrow \exists \theta (\theta \subset f$ i $\phi(\tilde{\theta}, \bar{x}) \simeq y)$. Iz izračunljivosti funkcija f i ϕ slijedi da je predikat na desnoj strani je djelimično rješiv pa je funkcija $\Phi(f)$ izračunljiva.

I bez ovog dokaza intuitivno je jasno da je rezultat primjene rekurzivnog operatora na izračunljivu funkciju opet izračunljiva funkcija. Postavlja se pitanje da li je, s obzirom na numeraciju izračunljivih funkcija, indeks funkcije $\Phi(\phi)$ moguće efektivno naći na osnovu indeksa funkcije ϕ. Odmah je jasno da ako postoji funkcija koja izračunava indeks funkcije $\Phi(\phi)$ na osnovu indeksa funkcije ϕ ona mora biti opšterekurzivna (zbog toga što je Φ svuda definisan) i ekstenzionalna u smislu slijedeće definicije (zbog jednoznačnosti preslikavanja Φ).

Definicija 2.4. Totalna funkcija $h:N \longrightarrow N$ je ekstenzionalna ako za proizvoljne a i b važi $\phi_a = \phi_b \Longrightarrow \phi_{h(a)} = \phi_{h(b)}$

Kako mi posmatramo operatore $\Phi : \mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_n$ to nam je potreban opštiji pojam ekstenzionalnosti pa uvodimo m-n-ekstenzionalnu funkciju slijedećom definicijom.

Definicija 2.5. Totalna funkcija $h:N \longrightarrow N$ je m-n-ekstenzionalna ako za proizvoljne a i b važi

$$\phi_a^{(m)} = \phi_b^{(m)} \Longrightarrow \phi_{h(a)}^{(n)} = \phi_{h(b)}^{(n)} .$$

Odgovor na postavljeno pitanje je potvrdan što je suština prvog dijela teoreme Myhill-Shepherdson.

Teorema 2.3. Neka je $\Psi : \mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_n$ rekurzivan operator. Tada postoji m-n-ekstenzionalna izračunljiva funkcija h tako da važi

$$\Psi(\phi_e^{(m)}) = \phi_{h(e)}^{(n)} \qquad (e \in N).$$

Dokaz: Neka je ψ izračunljiva funkcija koja odgovara rekurzivnom operatoru Ψ. Tada važi

$$\Psi(\phi_e^{(m)})(\overline{x}) \simeq y \Longleftrightarrow \exists \theta(\theta \subset \phi_e^{(m)} \text{ i } \psi(\tilde{\theta},\overline{x}) \simeq y).$$

Pokazaćemo da je funkcija g definisana kao

$$g(e, \overline{x}) \simeq \Psi(\phi_e^{(m)})(\overline{x})$$

izračunljiva. No prethodno uvedimo predikat R na slijedeći način:

$$R(z,e,\overline{x},y) \equiv \exists \theta(z = \tilde{\theta} \text{ i } \theta \subset \phi_{(e}^{(m)} \text{ i } \psi(\tilde{\theta},\overline{x}) \simeq y).$$

Predikat R je djelimično rješiv jer za njega postoji slijedeća neformalna djelimično rješavajuća procedura:

1° Utvrdimo da li je za neko θ ispunjeno $z=\widetilde{\theta}$ pa ako jeste nadjimo $\mathrm{Dom}(\theta) = \{\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_k\}$, $\overline{x}_i \in N^m$

2° provjerimo da li je $\theta \subset \phi_e^{(m)}$. izračunavanjem $\phi_e^{(m)}$ $(\overline{x}_i)$ pa ako jeste tada

3° izračunavanjem $\Psi(z,\overline{x})$ provjerimo da li je, ako postoji, jednako y.

Ovom procedurom ćemo za konačno vrijeme ustanoviti istinitost predikata $R(z,e,\overline{x},y)$ ako on to zaista jeste. Dakle, $R(z,e,\overline{x},y)$ je djelimično rješiv pa je i predikat $\exists z\, R(z,e,\overline{x},y)$ djelimično rješiv. Medjutim važi ekvivalencija

$$\exists z R(z,e,\overline{x},y) \Longleftrightarrow \Psi(\phi_e^{(m)})(\overline{x}) \simeq y$$
$$\Longleftrightarrow g(e,\overline{x}) \simeq y$$

Prema tome i "$g(e,\overline{x}) \simeq y$" je djelimično rješiv predikat pa je funkcija g izračunljiva.

Dalje na osnovu s-m-n teoreme slijedi da postoji totalna izračunljiva funkcija h tako da je $g(e,\overline{x}) \simeq \phi_{h(e)}^{(n)}$ $(\overline{x})$ što znači da je

$$\Psi(\phi_e^{(m)})(\overline{x}) \simeq \phi_{h(e)}^{(n)}(\overline{x})$$

odnosno

$$\Psi(\phi_e^{(m)}) = \phi_{h(e)}^{(n)}$$

S obzirom na jednoznačnost operatora Ψ biće zadovoljene implikacije

$$\phi_a^{(m)} = \phi_b^{(m)} \Longrightarrow \Psi(\phi_a^{(m)}) = \Psi(\phi_b^{(m)}) \Longrightarrow \phi_{h(a)}^{(n)} = \phi_{h(b)}^{(n)}$$

kako je h totalna to je i m-n-ekstenzionalna.□

Važi i obrnuto. Svaka m-n-esktenzionalna izračunljiva funkcija h odredjuje jedinstven rekurzivan operator Ψ iz $\mathcal{F}_m$ u $\mathcal{F}_n$ koji primjenjen na izračunljive funkcije ima svojstvo da se indeks funkcije $\Psi(\phi_e^{(m)})$ izračunava kao h(e). To je suština drugog dijela teoreme Myhill-Shepherdson.

<u>Teorema 2.4.</u> Neka je h m-n-ekstenzionalna izračunljiva funkcija. Tada postoji jedinstven rekurzivni operator $\Psi: \mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_n$ tako da za svako $e \in N$ važi

$$\Psi(\phi_e^{(m)}) = \phi_{h(e)}^{n}$$

Dokaz: Definišimo prvo operator $\Psi_o : \mathcal{J}_m \longrightarrow \mathcal{J}_n$ kao

$$\Psi_o(\phi_e^{(m)}) = \phi_{h(e)}^{(n)}$$

Pošto je h m-n-ekstenzionalna operator Ψ_o je korektno definisan. Ψ_o je definisan na svim m-arnim konačnim funkcijama Θ jer su one iz klase $\mathcal{J}_m$. Iskoristićemo teoremu 1.5. (Rice-Shapiro) da pokažemo neprekidnost operatora Ψ_o, tj. da za proizvoljnu izračunljivu m-arnu funkciju f važi

$$(*)\quad \Psi_o(f)(\bar{x}) \simeq y \Longleftrightarrow \exists\theta(\theta \subset f \ \text{ i } \Psi_o(\theta)(\bar{x}) \simeq y).$$

Fiksirajmo $\bar{x} \in N^n$ i $y \in N$ i uočimo skup funkcija $\mathcal{A}$ gdje je

$$\mathcal{A} = \{f \mid f \in \mathcal{J}_m \ \text{ i } \Psi_o(f)(\bar{x}) \simeq y\}$$

Tada je skup $A = \{e \mid \phi_e^{(m)} \in \mathcal{A}\} = \{e \mid \Psi_o(\phi_e^{(m)})(\bar{x}) \simeq y\} =$

$= \{e \mid \phi_{h(e)}^{(n)}(\bar{x}) \simeq y\}$, s obzirom da je h opšterekurzivna, rekurzivno prebrojiv. Po teoremi 1.5. biće $f \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow \exists\theta(\theta \subset f \ \text{ i } \theta \in \mathcal{A})$

što upravo znači da važi (*).

Definišimo operator $\Psi : \mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_n$ relacijom

$\Psi(f)(\bar{x}) \simeq y \equiv \exists\theta(\theta \subset f$ i $\Psi_o(\theta)(\bar{x}) \simeq y)$

Jedinstvenost je očigledna pa dokazujemo slijedeće:

(i) Ψ je korektno definisan

(ii) Ψ je produženje od Ψ_o

(iii) Ψ je rekurzivan.

(i) Potrebno je dokazati jednoznačnost funkcije $\Psi(f)(\bar{x})$, gdje je f proizvoljna funkcija iz $\mathcal{F}_m$. Neka $\Psi(f)(\bar{x})$ nije jednoznačna. Tada postoje funkcije θ_1, $\theta_2 \subset f$ tako da je za neko $\bar{x}$ $\Psi_o(\theta_1)(\bar{x}) \simeq y_1$ i $\Psi_o(\theta_2)(\bar{x}) \simeq y_2$. Uzmimo funkciju θ kao restrikciju funkcije f na konačnom skupu $Dom(\theta_1) \cup Dom(\theta_2)$. Zbog neprekidnosti operatora Ψ_o i $\theta_1, \theta_2 \subset \theta$ biće $y_1 \simeq \Psi_o(\theta_1)(\bar{x}) \simeq \Psi_o(\theta)(\bar{x}) \simeq \Psi_o(\theta_2)(\bar{x}) \simeq y_2$. Dakle, za proizvoljno $\bar{x} \in N^n$ $\Psi(f)(\bar{x})$, ako postoji, jedinstveno je.

(ii) Ψ i Ψ_o se poklapaju na skupu $\mathcal{J}_m$ jer za proizvoljnu funkciju $f \in \mathcal{J}_m$ važi

$\Psi(f)(\bar{x}) \simeq y \Longleftrightarrow \exists\theta(\theta \subset f$ i $\Psi_o(\theta)(\bar{x}) \simeq y) \Longleftrightarrow \Psi_o(f)(\bar{x}) \simeq y$.

Ovim je s obzirom na definiciju operatora Ψ_o dokazano

$$\Psi(\phi_e^{(m)}) = \phi_{h(e)}^{(n)}$$

(iii) Dokažimo da je Ψ rekurzivan po teoremi 2.2. Naprekidnost slijedi neposredno iz definicije.

Da bi dokazali izračunljivost funkcije $\psi(\tilde{\theta}, \bar{x}) \simeq \Psi(\theta)(\bar{x})$ uočimo da je u numeraciji skupa $\mathcal{J}_m$ indeks svake konačne funkcije $\theta \in \mathcal{J}_m$ moguće efektivno naći pomoću koda $\tilde{\theta}$. Dakle, po tezi Church-a, postoji izračunljiva funkcija k tako da je $\theta = \phi_{k(\tilde{\theta})}^{(m)}$. Pa imamo

$$\psi(\tilde{\theta}, \bar{x}) \simeq \Psi(\theta)(\bar{x}) \simeq \Psi(\phi^{(m)}_{k(\theta)})(\bar{x}) \simeq \phi^{(n)}_{h(k(\theta))}(\bar{x}),$$

Što s obzriom na izračunljivost funkcija h i k znači izračunljivost funkcije ψ . Prema tome Ψ je rekurzivan operator.□

Primjedba. Iz dokaza ove teoreme slijedi da za svaku m-n-ekstenzionalnu izračunljivu funkciju h postoji jedinstven neprekidni operator $\Psi : \mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_n$ sa svojstvom

$$\Psi(\phi^{(m)}_e) = \phi^{(n)}_{h(e)}$$

i taj operator je rekurzivan.

Na osnovu navedenih teorema možemo pokazati da je kompozicija rekurzivnih operatora rekurzivan operator.

Teorema 2.5. Neka su $\Phi : \mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_n$ i $\Psi : \mathcal{F}_n \longrightarrow \mathcal{F}_p$ rekurzivni operatori. Tada je operator $\Psi \circ \Phi : \mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_p$ definisan kao

$$(\Psi \circ \Phi)(f)(\bar{x}) \simeq y \iff \Psi(\Phi(f))(\bar{x}) \simeq y; \quad \bar{x} \in N^p; \quad y \in N; \quad n,p \geqslant 1$$

rekurzivan.

Dokaz: Dokažimo prvo neprekidnost operatora $\Psi \circ \Phi$. Iz rekurzivnosti operatora Ψ i Φ slijedi da su oni neprekidni i monotoni. Pa za proizvoljnu funkciju $f \in \mathcal{F}_m$ važi

$$(\Psi \circ \Phi)(f)(\bar{x}) \simeq y \implies \Psi(\Phi(f))(\bar{x}) \simeq y$$

(zbog neprekidnosti Ψ) $\implies \exists \theta_1 [\theta_1 \subset \Phi(f)$ i $\Psi(\theta_1)(\bar{x}) \simeq y]$

(zbog neprekidnosti Φ) $\implies \exists \theta_1 [\exists \theta_2 (\theta_2 \subset f$ i $\theta_1 \subset \Phi(\theta_2))$ i $\Psi(\theta_1)(\bar{x}) \simeq y]$

(zbog monotonosti Ψ) $\implies \exists \theta_2 [\theta_2 \subset f$ i $\Psi(\Phi(\theta_2))(\bar{x}) \simeq y]$

$\implies \exists \theta_2 [\theta_2 \subset f$ i $(\Psi \circ \Phi)(\theta_2)(\bar{x}) \simeq y]$.

Obratno,

$$\exists\theta(\theta\subset f \text{ i } (\Psi\circ\Phi)(\theta)(\bar{x})\simeq y)\Longrightarrow\exists\theta(\theta\subset f \text{ i } \Psi(\Phi(\theta))(\bar{x})\simeq y)$$

zbog monotonosti operatora Φ i Ψ važi

$$\theta\subset f\Longrightarrow\Phi(\theta)\subset\Phi(f)\Longrightarrow\Psi(\Phi(\theta))\subset\Psi(\Phi(f))$$

pa konačno imamo $\Psi(\Phi(f))(\bar{x})\simeq y$ tj. $(\Psi\circ\Phi)(f)(\bar{x})\simeq y$.

Dokazujemo da je operator $\Psi\circ\Phi$ rekurzivan.
Pošto su Φ i Ψ rekurzivni prema teoremi 2.3. njima odgovaraju izračunljive funkcije redom $h_1(x)$ i $h_2(x)$ pri čemu je h_1 m-n-ekstenzionalna i h_2 n-p-ekstenzionalna. Pokažimo da je funkcija h, gdje je $h(x) = h_2(h_1(x))$ m-p-ekstenzionalna.
Zaista iz osobina funkcija h_1 i h_2 slijedi lanac implikacija

$$\phi_a^{(m)} = \phi_b^{(m)} \Longrightarrow \phi_{h_1(a)}^{(n)} = \phi_{h_1(b)}^{(n)} \Longrightarrow \phi_{h_2(h_1(a))}^{(p)} = \phi_{h_2(h_1(b))}^{(p)}$$

$$\Longrightarrow \phi_{h(a)}^{(p)} = \phi_{h(b)}^{(p)}.$$

Izračunljivost funkcije h je očigledna pa na osnovu primjedbe poslije teoreme 2.4. slijedi da postoji jedinstven neprekidan operator $\Omega:\mathcal{F}_m\to\mathcal{F}_p$ tako da je $\Omega(\phi_e^{(m)}) = \phi_{h(e)}^{(p)}$

Kako je operator $\Psi\circ\Phi$ neprekidan i za njega važi:

$$(\Psi\circ\Phi)(\phi_e^{(m)}) = \Psi(\Phi(\phi_e^{(m)})) = \Psi(\phi_{h_1(e)}^{(n)}) = \phi_{h_2(h_1(e))}^{(p)} = \phi_{h(e)}^{(p)}$$

to je $\Omega = \Psi\circ\Phi$. Po teoremi 2.4. Ω je rekurzivan pa je i $\Psi\circ\Phi$ rekurzivan.□

Teorema o nepokretnoj tački za rekurzivne operatore

Teorema kojom se utvrdjuje da za svaki rekurzivni operator postoji izračunljiva funkcija koja predstavlja njegovu najmanju nepokretnu tačku, zove se još i prva teorema o rekurziji (Kleene).

Teorema 2.6. Neka je $\Phi : \mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_m$ rekurzivan operator. Tada postoji funkcija f_Φ tako da važi:

(i) $\Phi(f_\Phi) = f_\Phi$

(ii) ako je za neko $g \in \mathcal{F}_m$ $\Phi(g) = g$, tada je $f_\Phi \subset g$

(iii) f_Φ je izračunljiva.

Dokaz: Pošto je Φ rekurzivan on je monoton i neprekidan. Formirajmo niz funkcija $\{f_n\}$, $n \in N$ na slijedeći način

$$f_o = f_\emptyset$$
$$f_{n+1} = \Phi(f_n)$$

Zbog monotonosti operatora Φ biće $f_n \subset f_{n+1}$ za svako n. Stavimo li $f_\Phi = \bigcup_{n \in N} f_n$ što ima slijedeće značenje: za proizvoljne $\overline{x} \in N^m$ i $y \in N$

$$f_\Phi(\overline{x}) \simeq y \Longleftrightarrow \exists n \, (f_n(\overline{x}) \simeq y)$$

Pokažimo da f_Φ zadovoljava (i), (ii), (iii).

(i) Prvo, $f_\Phi \subset (f_\Phi)$ jer za svako n važi $f_n \subset f_\Phi$ tj. zbog monotonosti operatora Φ, $\Phi(f_n) \subset \Phi(f_\Phi)$ tj. za svako n važi $f_{n+1} \subset \Phi(f_\Phi)$, pa važi i $\bigcup_{n \in N} f_n \subset \Phi(f_\Phi)$ odnosno $f_\Phi \subset \Phi(f_\Phi)$.

Drugo, zbog neprekidnosti operatora Φ biće

$$\Phi(f_\Phi)(\overline{x}) \simeq y \Longleftrightarrow \exists \theta(\theta \subset f_\Phi \text{ i } \Phi(\theta)(\overline{x}) \simeq y)$$

uzmemo li n tako da je $\theta \subset f_n$ opet zbog neprekidnosti operatora Φ biće $\Phi(f_n)(\bar{x}) \simeq y$ tj. $f_{n+1}(\bar{x}) \simeq y$ odnosno $f_\Phi(\bar{x}) \simeq y$ što znači da je $\Phi(f_\Phi) \subset f_\Phi$

Dakle, $\Phi(f_\Phi) = f_\Phi$

(ii) Neka je $g \in \mathcal{F}_m$ i $\Phi(g) = g$. Pošto je $f_o = f_\emptyset \subset g$ i iz $f_k \subset g$ slijedi (zbog monotonosti Φ) $\Phi(f_k) \subset \Phi(g)$ tj. $f_{k+1} \subset g$, zaključujemo indukcijom da je za svako n $f_n \subset g$ što znači $f_\Phi \subset g$.

(iii) Prema teoremi 2.3. postoji izračunljiva funkcija h tako da je $\Phi(\phi_e^{(n)}) = \phi_{h(e)}^{(m)}$. Neka je u numeraciji m-arnih izračunljivih funkcija e_o indeks funkcije $f_\emptyset$ tj. $f_\emptyset = \phi_{e_o}^{(m)}$. Definišimo funkciju k relacijama

$k(0) = e_o$

$k(n+1) = h(k(n))$

Funkcija k je izračunljiva i još za svako n važi $f_n = \phi_{k(n)}^{(m)}$ jer je $f_o = \phi_{k(0)}^{(m)}$, $f_1 = \Phi(f_o) = \Phi(\phi_{k(0)}^{(m)}) = \phi_{h(k(0))}^{(m)} = \phi_{k(1)}^{(m)}$, itd.

Pa će biti: $f_\Phi(\bar{x}) \simeq y \Longleftrightarrow \exists n(\phi_{k(n)}^{(m)}(\bar{x}) \simeq y)$.

Predikat na desnoj strani je djelimično rješiv pa je funkcija f_Φ izračunljiva.□

<u>Primjedba</u>. U dokazu ove teoreme rekurzivnost operatora Φ koristili smo samo da bi dokazali izračunljivost funkcije f_Φ, pa tvrdjenja (i) i (ii) važe za bilo koji neprekidni operator. Isto tako jasno je da ako je f_Φ totalna funkcija onda je ona jedinstvena nepokretna tačka neprekidnog odnosno rekurzivnog operatora.

Razmotrimo nepokretne tačke nekih rekurzivnih operatora.

Primjer 2.10. Operator $\Phi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$ definisan kao

$$\Phi(f)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ako je } x=0 \\ f(x+1), & \text{ako je } x\neq 0 \end{cases}$$

je očigledno rekurzivan. Nepokretna tačka ovog operatora je svaka funkcija oblika

$$f_c(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x=0 \\ c, & \text{ako je } x\neq 0 \end{cases}$$

gdje je $c \in N$, a najmanja nepokretna tačka je

$$f_\Phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x=0 \\ \text{ne definisana}, & \text{ako je } x\neq 0. \end{cases}$$

Iz ovog primjera vidimo da rekurzivan operator može imati više nepokretnih tačaka i da najmanja nepokretna tačka rekurzivnog operatora ne mora biti totalna funkcija.

Primjer 2.11.[1/] Operator $\Phi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$ definisan kao

$$\Phi(f)(x) \simeq \begin{cases} f(f(x+3)), & \text{ako je } x \leqslant 2 \\ x-2, & \text{ako je } x > 2 \end{cases}$$

je očigledno rekurzivan. Nepokretnu tačku ovog operatora dobićemo metodom iz dokaza teoreme 2.6.

Formirajmo niz funkcija $\{f_n\}$ na slijedeći način:

$$f_o = f_\emptyset$$

$$f_1(x) = \Phi(f_o)(x) = \begin{cases} f_o(f_o(x+3)), & \text{ako je } x \leqslant 2 \\ x-2, & \text{ako je } x > 2 \end{cases} = \begin{cases} \text{ne definisana}, & \text{ako je } x \leqslant 2 \\ x-2, & \text{ako je } x>2 \end{cases}$$

1/ Ovaj primjer inspirisan je McCarthy-jevom funkcijom (4 str.226.)

$$f_2(x)=\Phi(f_1)(x) = \begin{cases} f_1(f_1(x+3), & \text{ako je } x \leqslant 2 \\ x-2, & \text{ako je } x > 2 \end{cases} = \begin{cases} \text{ne definisana}, & \text{ako je } x \leqslant 1 \\ 1, & \text{ako je } x=2 \\ x-2, & \text{ako je } x>2 \end{cases}$$

$$f_3(x)=\Phi(f_2)(x)=\begin{cases} f_2(f_2(x+3), & \text{ako je } x \leqslant 2 \\ x-2, & \text{ako je } x>2 \end{cases} = \begin{cases} \text{ne definisana}, & \text{ako je } x = 0 \\ 1, & \text{ako je } 0 < x \leqslant 2 \\ x-2, & \text{ako je } x > 2 \end{cases}$$

$$f_4(x)=\Phi(f_3)(x) = \begin{cases} f_3(f_3(x+3), & \text{ako je } x \leqslant 2 \\ x-2, & \text{ako je } x>2 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \leqslant 2 \\ x-2, & \text{ako je } x>2 \end{cases}$$

Sve ostale funkcije u nizu tj. $f_5(x)$, $f_6(x)$,... su iste kao i funkcija $f_4(x)$. Pošto za svako n očigledno važi $f_n \subset f_{n+1}$ biće $f_\Phi = \bigcup_{n\in N} f_n = f_4$. Dakle, najmanja nepokretna tačka operatora je $f_\Phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \leqslant 2 \\ x-2, & \text{ako je } x > 2 \end{cases}$

Kako je ona svuda definisana funkcija to je ona i jedinstvena nepokretna tačka operatora Φ .

<u>Primjer 2.12.</u> U primjeru 2.7. pokazali smo da je operator Ackermanna rekurzivan. Nepokretna tačka toga operatora biće svaka funkcija ψ koja zadovoljava relacije:

$$\psi(0,y) = y+1$$
$$\psi(x+1,0) \simeq \psi(x,1)$$
$$\psi(x+1, y+1) \simeq \psi(x, \psi(x+1, y)).$$

Koristeći prvu teoremu o rekurziji možemo pokazati da je ovim relacijama definisana jedinstvena, totalna i izračunljiva funkcija. Neka je Φ operator Ackermanna biće $\psi = f_\Phi$. Pošto je Φ rekurzivan to je ψ izračunljiva funkcija. Indukcijom po x i y pokazaćemo da je $\psi(x,y)$ totalna. Prvo, $\psi(0,y)$ je definisano za svako

y. Ako je $\psi(x,y)$ definisano za svako y tada indukcijom po y zaključujemo da je i $\psi(x+1,y)$ definisano za svako y. Dakle, $\psi(x,y)$ je definisano za svako x i svako y. Pošto je $\psi(x,y)$ totalna ona je jedinstvena nepokretna tačka operatora Φ . Funkcija ψ poznata je kao Ackermannova funkcija i istorijski je značajna kao primjer totalne izračunljive funkcije koja nije prosto rekurzivna. Rekurzija koja se ovdje javlja opštija je od proste rekurzije. To je neki oblik dvojne rekurzije.

Ovaj primjer pokazuje kako se prva teorema o rekurziji može iskoristiti da bi se pokazalo da neka definicija rekurzijom ima smisla. Rekurzivne definicije najopštijeg oblika mogu biti predstavljene jednačinom

$$f = \Phi(f)$$

gdje je Φ neki rekurzivni operator. Prva teorema o rekurziji pokazuje da takve definicije imaju smisla tj. da uvijek postoji, čak i izračunljiva funkcija koja zadovoljava gornju jednačinu. Ako želimo jednoznačnost definicije tražićemo najmanju nepokretnu tačku operatora Φ . Dakle, u skladu sa prvom teoremom o rekurziji, klasa izračunljivih funkcija zatvorena je u odnosu na rekurzivne definicije najopštijeg tipa.

Iz teoreme 2.4. i prve teoreme o rekurziji slijedi da za svaku ekstenzionalnu izračunljivu funkciju h postoji broj e tako da je $\phi_{h(e)} = \phi_e$.

Zaista, h odredjuje jedinstven rekurzivan operator Ψ sa svojstvom $\Psi(\phi_a) = \phi_{h(a)}$ i Ψ ima kao nepokretnu tačku izračunljivu funkciju npr. ϕ_e tada važi

$$\phi_e = \Psi(\phi_e) = \phi_{h(e)} .$$

Da isto tvrdjenje važi i za svaku totalnu izračunljivu funkciju (ne mora biti ekstenzionalna) tvrdi druga teorema o rekurziji. Ali u ovome radu neće o tome biti riječi jer se na rekurzivne operatore odnosi samo prva teorema o rekurziji.

III DIO

REKURZIVNI OPERATORI $\Phi : \mathcal{F}_{m_1} \times \mathcal{F}_{m_2} \times \ldots \times \mathcal{F}_{m_k} \longrightarrow \mathcal{F}_n$

U ovom dijelu posmatraćemo operatore koji preslikavaju k-torke funkcija (koje mogu imati i različite brojeve argumenata) u jednu n-arnu funkciju tj. operatore $\Phi : \mathcal{F}_{m_1} \times \mathcal{F}_{m_2} \times \ldots \times \mathcal{F}_{m_k} \longrightarrow \mathcal{F}_n$. Kao i ranije pretpostavićemo da je $n \geqslant 1$ i da je operator definisan na cijelom prostoru $\mathcal{F}_{m_1} \times \mathcal{F}_{m_2} \times \ldots \times \mathcal{F}_{m_k}$.

Intuitivno je jasno da je za rekurzivnost ovakvih operatora potrebno da se bilo koja vrijednost izlazne funkcije, ako ona postoji, može efektivno izračunati pomoću konačno mnogo vrijednosti ulaznih funkcija. U tom smislu rekurzivan je npr. operator $\Phi : \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_n \longrightarrow \mathcal{F}_n$ dat relacijom $\Phi(f,g) \simeq f \circ g$ gdje je $f \in \mathcal{F}_1$ i $g \in \mathcal{F}_n$. Napominjemo da će definicije i teoreme koje se odnose na ove operatore biti uglavnom uopštenja definicija i teorema iz prethodnog dijela.

<u>Definicija 3.1.</u> Neka je $\Phi : \mathcal{F}_{m_1} \times \mathcal{F}_{m_2} \times \ldots \times \mathcal{F}_{m_k} \longrightarrow \mathcal{F}_n$. Φ je rekurzivan operator ako postoji izračunljiva funkcija od k+n argumenata $\phi(z_1,\ldots,z_k,\overline{x})$ tako da za svaku k-torku funkcija $(f_1,\ldots,f_k)$ gdje je $f_i \in \mathcal{F}_{m_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ i svako $\overline{x} \in N^n$ i $y \in N$ važi: $\Phi(f_1,\ldots,f_k)(\overline{x}) \simeq y \Longleftrightarrow \exists \theta_1 \ldots \exists \theta_k (\theta_i \subset f_i \text{ i } \phi(\widetilde{\theta}_1,\ldots \widetilde{\theta}_k,\overline{x}) \simeq y)$ gdje su $\widetilde{\theta}_1,\ldots,\widetilde{\theta}_k$ kodovi konačnih podfunkcija $\theta_1,\ldots,\theta_k$.

<u>Primjer 3.1.</u> Operator $\Phi : \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_n \longrightarrow \mathcal{F}_n$, gdje je $\Phi(f,g) \simeq f \circ g$ i $f \in \mathcal{F}_1$, $g \in \mathcal{F}_n$ rekurzivan je u smislu navedene definicije.

Zaista, funkcija ϕ od 2+n argumenata definisana na slijedeći način

$$\phi(z_1,z_2,\overline{x}) \simeq \begin{cases} \theta_1(\theta_2(\overline{x})), \text{ ako je } z_1 = \widetilde{\theta}_1 \text{ i } z_2 = \widetilde{\theta}_2 \text{ i } \overline{x} \in \mathrm{Dom}(\theta_2) \text{ i } \theta_2(\overline{x}) \in \mathrm{Dom}(\theta_1) \\ \text{ne definisana u ostalim slučajevima} \end{cases}$$

izračunljiva je po tezi Church-a. Osim toga važi:

$$\Phi(f,g)(\bar{x}) \simeq y \iff \bar{x} \in \mathrm{Dom}(g) \text{ i } g(\bar{x}) \in \mathrm{Dom}(f) \text{ i } f(g(\bar{x})) = y$$

$$\iff \exists \theta_2 \subset g \text{ i } \bar{x} \in \mathrm{Dom}(\theta_2) \text{ i } \exists \theta_1 \subset f \text{ i } \theta_2(\bar{x}) \in \mathrm{Dom}(\theta_1) \text{ i }$$

$$\theta_1(\theta_2(\bar{x})) = y$$

$$\iff \exists \theta_1 \exists \theta_2 (\theta_1 \subset f \text{ i } \theta_2 \subset g \text{ i } \phi(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \bar{x}) \simeq y)$$

Dakle, Φ je rekurzivan operator po definiciji 3.1.

<u>Definicija 3.2.</u> Operator $\Phi : \mathcal{F}_{m_1} \times \mathcal{F}_{m_2} \times \ldots \times \mathcal{F}_{m_k} \longrightarrow \mathcal{F}_n$ je neprekidan ako za proizvoljnu k-torku funkcija $(f_1,\ldots,f_k)$, $f_i \in \mathcal{F}_{m_i}$ i proizvoljne $\bar{x} \in N^n$ i $y \in N$ važi:

$$\Phi(f_1,\ldots,f_k)(\bar{x}) \simeq y \iff \exists \theta_1 \ldots \exists \theta_k (\theta_1 \subset f_1, \ldots, \theta_k \subset f_k \text{ i } \Phi(\theta_1,\ldots,\theta_k)(\bar{x}) \simeq y)$$

<u>Definicija 3.3.</u> Operator $\Phi : \mathcal{F}_{m_1} \times \mathcal{F}_{m_2} \times \ldots \times \mathcal{F}_{m_k} \longrightarrow \mathcal{F}_n$ je monoton ako iz $f_1 \subset g_1, \ldots, f_k \subset g_k$ slijedi $\Phi(f_1,\ldots,f_k) \subset \Phi(g_1,\ldots,g_n)$, gdje su $f_i \in \mathcal{F}_{m_i}$ i $g_i \in \mathcal{F}_{m_i}$ za $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

<u>Teorema 3.1.</u> Ako je operator $\Phi : \mathcal{F}_{m_1} \times \mathcal{F}_{m_2} \times \ldots \times \mathcal{F}_{m_k} \longrightarrow \mathcal{F}_n$ rekurzivan onda je on neprekidan i monoton.

Dokaz: Neka je Φ rekurzivan tada postoji izračunljiva funkcija $\phi(z_1,\ldots,z_k,\bar{x})$ tako da za proizvoljnu k-torku funkcija $(f_1,\ldots,f_k)$ i $f_i \in \mathcal{F}_{m_i}$ i $\bar{x} \in N^n$ i $y \in N$ važi:

$$\Phi(f_1,\ldots,f_k)(\bar{x}) \simeq y \iff \exists \theta_1 \ldots \exists \theta_k (\theta_i \subset f_i \text{ i } \phi(\tilde{\theta}_1,\ldots,\tilde{\theta}_k,\bar{x}) \simeq y,$$

pošto je $\theta_i \subset \theta_i$ $(1 \leq i \leq k)$ dobijamo

$$\Phi(\theta_1,\ldots,\theta_k)(\bar{x}) \simeq y.$$

Obratno, neka postoje $\theta_1 \subset f_1, \ldots, \theta_k \subset f_k$ tako da je $\Phi(\theta_1,\ldots,\theta_k)(\bar{x}) \simeq y$ tada zbog rekurzivnosti operatora Φ važi:

$$\Phi(\theta_1,\ldots,\theta_k)(\bar{x}) \simeq y \iff \exists\theta'_1\ldots\exists\theta'_k(\theta'_i\subset\theta_i \text{ i } \phi(\tilde{\theta}'_1,\ldots,\tilde{\theta}'_k,\bar{x})\simeq y)$$

ali pošto je $\theta'_i \subset f_i$ $(1 \leq i \leq k)$ ovo poslednje je ekvivalentno sa $\Phi(f_1,\ldots,f_k)(\bar{x}) \simeq y$. Dakle, Φ je neprekidan operator.

Dokazujemo monotonost. Neka je $f_1 \subset g_1,\ldots,f_k \subset g_k$, gdje je $f_i \in \mathcal{F}_{m_i}$ i $g_i \in \mathcal{F}_{m_i}$ $(1 \leq i \leq k)$. Zbog neprekidnosti operatora Φ biće

$$\Phi(f_1,\ldots,f_k)(\bar{x}) \simeq y \iff \exists\theta_1\ldots\exists\theta_k(\theta_i\subset f_i \text{ i } \Phi(\theta_1,\ldots,\theta_k)(\bar{x})\simeq y)$$

pošto je $\theta_i \subset g_i$ opet zbog neprekidnosti operatora Φ biće $\Phi(g_1,\ldots,g_k)(\bar{x}) \simeq y$.□

Dakle i za ove operatore važe implikacije: Φ je rekurzivan $\Longrightarrow$ Φ je neprekidan $\Longrightarrow$ Φ je monoton.

<u>Lema 3.1.</u> Operator $\Phi : \mathcal{F}_{m_1} \times \mathcal{F}_{m_2} \times\ldots\times \mathcal{F}_{m_k} \longrightarrow \mathcal{F}_n$ je neprekidan ako i samo ako je neprekidan po svakoj komponenti.

Dokaz: Neka je Φ neprekidan. Dokažimo da je neprekidan po j-toj komponenti tj. dokažimo za proizvoljno j, $1 \leq j \leq k$, ekvivalenciju:

$$(*)\ \Phi(f_1,\ldots,f_k)(\bar{x}) \simeq y \iff \exists\theta_j(\theta_j\subset f_j \text{ i } \Phi(f_1,\ldots,\theta_j,\ldots f_k)(\bar{x})\simeq y)$$

$\Longrightarrow$: $\Phi(f_1,\ldots,f_k)(\bar{x}) \simeq y \iff \exists\theta_1,\ldots,\exists\theta_j,\ldots,\exists\theta_k(\theta_1\subset f_1,\ldots,\theta_j\subset f_j,\ldots$
$\ldots,\theta_k\subset f_k$ i $\Phi(\theta_1,\ldots,\theta_j,\ldots,\theta_k)(\bar{x})\simeq y)$

zbog neprekidnosti operatora Φ. Pošto je $\theta_1 \subset f_1,\ldots,\theta_j\subset\theta_j,\ldots$ $\ldots,\theta_k\subset f_k$ zbog monotonosti operatora Φ biće $\Phi(f_1,\ldots,\theta_j,\ldots$ $\ldots,f_k)(\bar{x})\simeq y)$. Dakle

$$\Phi(f_1,\ldots,f_k)(\bar{x}) \simeq y \Longrightarrow \exists\theta_j(\theta_j\subset f_j \text{ i } \Phi(f_1,\ldots,\theta_j,\ldots f_k)(\bar{x})\simeq y.$$

$\Longleftarrow$: Neka postoji $\theta_j \subset f_j$ tako da je $\Phi(f_1, \ldots, \theta_j, \ldots, f_k)(\bar{x}) \simeq y$. Pošto je $f_1 \subset f_1, \ldots, \theta_j \subset f_j, \ldots, f_k \subset f_k$ i operator Φ monoton biće $\Phi(f_1, \ldots, f_k)(\bar{x}) \simeq y$.

Ovim je dokazana ekvivalencija (*).

Obratno, neka je Φ neprekidan po svakoj komponeneti tj. neka za svako j, $1 \leq j \leq k$ važi ekvivalencija (*). Tada je

$$\Phi(f_1, \ldots, f_k)(\bar{x}) \simeq y \Longleftrightarrow \exists\theta_1 (\theta_1 \subset f_1 \text{ i } \Phi(\theta_1, f_2, \ldots, f_k)(\bar{x}) \simeq y)$$
$$\Longleftrightarrow \exists\theta_1\, \exists\theta_2 (\theta_1 \subset f_1, \theta_2 \subset f_2 \text{ i } \Phi(\theta_1, \theta_2, f_3, \ldots, f_k)(\bar{x}) \simeq y)$$
$$\vdots$$
$$\Longleftrightarrow \exists\theta_1 \ldots \exists\theta_k (\theta_1 \subset f_1, \ldots, \theta_k \subset f_k \text{ i } \Phi(\theta_1, \ldots, \theta_k)(\bar{x}) \simeq y).$$

Dakle, Φ je neprekidan operator.□

<u>Teorema 3.2.</u> Neka je $\Phi: \mathcal{F}_{m_1} \times \mathcal{F}_{m_2} \times \ldots \times \mathcal{F}_{m_k} \longrightarrow \mathcal{F}_n$ neki operator. Φ je rekurzivan ako i samo ako važi: 1^o Φ je neprekidan i 2^o funkcija $\phi(z_1, \ldots, z_k, \bar{x})$ definisana relacijom

$$\phi(z_1, \ldots, z_k, \bar{x}) \simeq \begin{cases} \Phi(\theta_1, \ldots, \theta_k)(\bar{x}) \text{ ako je } z_1 = \tilde{\theta}_1, \ldots, z_k = \tilde{\theta}_k \text{ i } \theta_1 \in \mathcal{F}_{m_1}, \ldots \\ \qquad \ldots, \theta_k \in \mathcal{F}_{m_k} \\ \text{ne definisana u ostalim slučajevima} \end{cases}$$

je izračunljiva.

Dokaz: Neka je Φ rekurzivan i neka je ϕ' izračunljiva funkcija od k+n argumenata koja mu po definiciji 3.1. odgovara. Uslov 1^o je ispunjen na osnovu teoreme 3.1. Dokazujemo uslov 2^o.

Za proizvoljne $\bar{x} \in N^n$ važi:

$$\phi(z_1, \ldots, z_k, \bar{x}) \simeq y \Longleftrightarrow \exists z_1 \ldots \exists z_k (z_1 = \tilde{\theta}_1, \ldots, z_k = \tilde{\theta}_k \text{ i}$$
$$\Phi(\theta_1, \ldots, \theta_k)(\bar{x}) \simeq y) \Longleftrightarrow$$

$$\exists z_1,\ldots \exists z_k\ \exists\theta_1'\ldots\exists\theta_k'\ (z_1=\tilde\theta_1,\ldots,z_k=\tilde\theta_k \text{ i } \theta_1'\subset\theta_1,\ldots$$

$$\ldots,\theta_k'\subset\theta_k \text{ i } \phi'(\tilde\theta_1',\ldots,\tilde\theta_k',\bar{x})\simeq y).$$

pošto je funkcija ϕ' izračunljiva poslednji predikat je djelimično rješiv pa je i funkcija ϕ izračunljiva.

Obratno, pretpostavimo da važe uslovi 1° i 2°.

Tada je

$$\Phi(f_1,\ldots,f_k)(\bar{x})\simeq y \Longleftrightarrow \exists\theta_1\ldots\exists\theta_k(\theta_1\subset f_1,\ldots,\theta_k\subset f_k \text{ i } \Phi(\theta_1,\ldots,\theta_k)(\bar{x})\simeq y) \ \underset{1^\circ}{\text{iz}}$$

$$\Longleftrightarrow \exists\theta_1\ldots\exists\theta_k(\theta_1\subset f_1,\ldots,\theta_k\subset f_k \text{ i } \phi(\tilde\theta_1,\ldots,\tilde\theta_k,\bar{x})\simeq y) \ \underset{2^\circ}{\text{iz}}$$

Pošto je funkcija ϕ izračunljiva operator Φ je prema definiciji 3.1. rekurzivan.

Primjenom ove teoreme pokazaćemo da su rekurzivni operatori u slijedećim primjerima.

<u>Primjer 3.2.</u> Operator $\Phi:\mathcal{F}_{n+1}\times\mathcal{F}_{n+1}\longrightarrow\mathcal{F}_{n+1}$ definisan kao

$$\Phi(f,g)(x,\bar{y})\simeq\begin{cases}0, & \text{ako je } g(x,\bar{y})=0\\ f(x+1,\bar{y})+1, & \text{ako je } g(x,\bar{y}) \text{ definisano i različito od } 0\\ \text{ne definisana u ostalim slučajevima}\end{cases}$$

gdje je $x\in N$ i $\bar{y}\in N^n$, je rekurzivan.

Zaista, neprekidnost ovog operatora jasna je iz činjenice da vrijednost izlazne funkcije $\Phi(f,g)(x,\bar{y})$ zavisi od najviše po jedne konkretne vrijednosti ulaznih funkcija f i g. Pa je uslov 1° ispunjen. Osim toga funkcija

$$\phi(\tilde\theta_1,\tilde\theta_2,x,\bar{y})\simeq\Phi(\theta_1,\theta_2)(x,\bar{y})\simeq\begin{cases}0, \text{ ako je } \theta_2(x,\bar{y})=0\\ \theta_1(x+1,\bar{y})+1, \text{ ako je } \theta_2(x,\bar{y}) \text{ def. i razl. od } 0\\ \text{ne definisana u ostalim slučajevima}\end{cases}$$

je izračunljiva jer su θ_1 i θ_2 izračunljive kao konačne funkcije. Dakle, ispunjen je i uslov 2^o pa je prema prethodnoj teoremi Φ rekurzivan operator.

Primjer 3.3. Operator $\Phi : \mathcal{F}_{m_1} \times \mathcal{F}_{m_2} \times \ldots \times \mathcal{F}_{m_k} \rightarrow \mathcal{F}_n$ definisan relacijom

$$\Phi(f_1,\ldots,f_k)(\bar{x}) \simeq h(\bar{x})$$

gdje su f_i proizvoljne funkcije iz $\mathcal{F}_{m_i}$, $\bar{x} \in N^n$ i h fiksirana izračunljiva funkcija iz $\mathcal{F}_n$, je rekurzivan.

Neprekidnost ovog operatora je očigledna. Osim toga za bilo koje konačne funkcije $\theta_i \in \mathcal{F}_{m_i}$ funkcija $\phi(\tilde{\theta}_1,\ldots,\tilde{\theta}_k,\bar{x}) \simeq \Phi(\theta_1,\ldots,\theta_k)(\bar{x}) \simeq h(\bar{x})$ je izračunljiva pa je prema prethodnoj teoremi Φ rekurzivan operator.

Sada ćemo posmatrati, kao i u prethodnom dijelu, kako rekurzivni operatori djeluju na k-torke izračunljivih funkcija.

Lema 3.2. Neka je $\Phi: \mathcal{F}_{m_1} \times \mathcal{F}_{m_2} \times \ldots \times \mathcal{F}_{m_k} \longrightarrow \mathcal{F}_n$ rekurzivni operator i neka su $f_1 \in \mathcal{F}_{m_1},\ldots,f_k \in \mathcal{F}_{m_k}$ izračunljive funkcije. Tada je funkcija $\Phi(f_1,\ldots,f_k)$ takodje izračunljiva.

Dokaz: Pošto je Φ rekurzivan u skladu sa definicijom 3.1. postoji izračunljiva funkcija od k+n argumenata $\phi(z_1,\ldots,z_k,\bar{x})$ tako da za proizvoljne $\bar{x} \in N^n$ i $y \in N$ važi

$$\Phi(f_1,\ldots,f_k)(\bar{x}) \simeq y \Leftrightarrow \exists\theta_1\ldots\exists\theta_k(\theta_1 \subset f_1 \ldots \theta_k \subset f_k \text{ i } \phi(\tilde{\theta}_1,\ldots,\tilde{\theta}_k,\bar{x}) \simeq y)$$

Iz izračunljivosti funkcija $f_1,\ldots,f_k$ i ϕ slijedi da je predikat na desnoj strani djelimično rješiv pa je funkcija $\Phi(f_1,\ldots,f_k)$ izračunljiva.□

Da bi formulisali i dokazali uopštenja prvog i drugog dijela teoreme MYhill-Shepherdson za ove operatore potrebno nam je slijedeće uopštenje pojma ekstenzionalne funkcije.

Definicija 3.4. Totalna funkcija $h:N^k \longrightarrow N$ je ekstenzionalna ako za proizvoljne a_i i b_i $(1 \leq i \leq k)$ važi

$$\phi_{a_1}^{(m_1)} = \phi_{b_1}^{(m_1)} \wedge \phi_{a_2}^{(m_2)} = \phi_{b_2}^{(m_2)} \wedge \dots \wedge \phi_{a_k}^{(m_k)} = \phi_{b_k}^{(m_k)} \Longrightarrow \phi_{h(a_1,\dots,a_k)}^{(n)} =$$

$$= \phi_{h(b_1,\dots,b_k)}^{(n)} \quad .$$

Teorema 3.3. Neka je $\Psi : \mathcal{F}_{m_1} \times \dots \times \mathcal{F}_{m_k} \longrightarrow \mathcal{F}_n$ rekurzivni operator. Tada postoji izračunljiva i ekstenzionalna u smislu definicije 3.4. funkcija h tako da važi

$$\Psi(\phi_{e_1}^{(m_1)}, \dots, \phi_{e_k}^{(m_k)}) = \phi_{h(e_1,\dots,e_k)}^{(n)} \; .$$

Dokaz: Pošto je Ψ rekurzivan operator postoji izračunljiva funkcija od k+n argumenata $\psi(z_1,\dots,z_k,\overline{x})$ tako da važi:

$$\Psi(\phi_{e_1}^{(m_1)}, \dots, \phi_{e_k}^{(m_k)})(\overline{x}) \simeq y \Longleftrightarrow \exists\theta_1 \dots \exists\theta_k(\theta_1 \subset \phi_{e_1}^{(m_1)}, \dots$$

$$\dots, \theta_k \subset \phi_{e_k}^{(m_k)} \quad \text{i} \quad \psi(\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_k, \overline{x}) \simeq y) \; .$$

Posmatrajmo funkciju $g(e_1,\dots,e_k,\overline{x}) \simeq \Psi(\phi_{e_1}^{(m_1)}, \dots, \phi_{e_k}^{(m_k)})(\overline{x})$

i pokažimo da je ona izračunljiva. Prethodno uvodimo predikat

$$R(z_1,\dots,z_k, e_1,\dots e_k,\overline{x},y) \equiv \exists\theta_1 \dots \exists\theta_k(z_1 = \tilde{\theta}_1, \dots, z_k = \tilde{\theta}_k \quad \text{i}$$

$$\theta_1 \subset \phi_{e_1}^{(m_1)}, \dots, \theta_k \subset \phi_{e_k}^{(m_k)} \quad \text{i} \quad \psi(\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_k, \overline{x}) \simeq y) \; .$$

Predikat R je djelimično rješiv jer za njega postoji djelimično rješavajuća procedura analogna proceduri opisanoj u dokazu teoreme 2.3., pa je djelimično rješiv i predikat $\exists z_1 \ldots \exists z_k$ $R(z_1,\ldots,z_k,\ e_1,\ldots,e_k,\ \bar{x},y)$. Medjutim važi:

$$g(e_1,\ldots,e_k,\bar{x}) \simeq y \Longleftrightarrow \Psi(\phi_{e_1}^{(m_1)},\ldots,\ \phi_{e_k}^{(m_k)})(\bar{x}) \simeq y$$

$$\Longleftrightarrow \exists \theta_1 \ldots \exists \theta_k (\ \theta_1 \subset \phi_{e_1}^{(m_1)},\ldots,\ \theta_k \subset \phi_{e_k}^{(m_k)} \quad \text{i}$$

$$\psi(\tilde{\theta}_1,\ldots,\ \tilde{\theta}_k,\bar{x}) \simeq y)$$

$$\Longleftrightarrow \exists z_1 \ldots \exists z_k\ R(z_1,\ldots,z_k,e_1,\ldots,e_k,\bar{x},y)$$

pa je funkcija $g(e_1,\ldots,e_k,\bar{x})$ izračunljiva.

Primijenimo li sada s-m-n teoremu biće $g(e_1,\ldots,e_k,\bar{x}) \simeq$ $\simeq \phi_{h(e_1,\ldots e_k)}^{(n)}(\bar{x})$ gdje je h totalna izračunljiva funkcija.

Dakle važi za proizvoljno $\bar{x} \in N^n$:

$$\Psi(\phi_{e_1}^{(m_1)},\ldots,\ \phi_{e_k}^{(m_k)})(\bar{x}) \simeq \phi_{h(e_1,\ldots,e_k)}^{(n)}(\bar{x}) \ .$$

Zbog jednoznačnosti operatora Ψ važe implikacije

$$\phi_{a_1}^{(m_1)} = \phi_{b_1}^{(m_1)} \wedge \ldots \wedge \phi_{a_k}^{(m_k)} = \phi_{b_k}^{(m_k)} \Longrightarrow \Psi(\phi_{a_1}^{(m_1)},\ldots,\ \phi_{a_k}^{(m_k)}) =$$

$$= \Psi(\phi_{b_1}^{(m_1)},\ldots,\ \phi_{b_k}^{(m_k)}) \Longrightarrow \phi_{h(a_1,\ldots,a_k)}^{(n)} = \phi_{h(b_1,\ldots,b_k)}^{(n)}$$

pa je funkcija h ekstenzionalna u smislu definicije 3.4.□

Važi i obratno tvrdjenje.

Teorema 3.4. Neka je funkcija $h: N^k \longrightarrow N$ izračunljiva i ekstenzionalna u smislu definicije 3.4. Tada postoji jedinstven rekurzivan operator $\Psi : \mathcal{F}_{m_1} \times \mathcal{F}_{m_2} \times \ldots \times \mathcal{F}_{m_k} \longrightarrow \mathcal{F}_n$

tako da svako $(e_1, \ldots, e_k) \in N^k$ važi

$$\Psi(\phi_{e_1}^{(m_1)}, \ldots, \phi_{e_k}^{(m_k)}) = \phi_{h(e_1, \ldots, e_k)}^{(n)} \quad .$$

Dokaz: Definišimo prvo operator $\Psi_o : \mathcal{J}_{m_1} \times \mathcal{J}_{m_2} \times \ldots \times \mathcal{J}_{m_k} \longrightarrow \mathcal{J}_n$ relacijom

$$\Psi_o(\phi_{e_1}^{(m_1)}, \ldots, \phi_{e_k}^{(m_k)}) = \phi_{h(e_1, \ldots, e_k)}^{(n)} \quad .$$

Operator Ψ_o je korektno definisan jer je h ekstenzionalna u smislu definicije 3.4. Primijetimo da je on definisan na svim k-torkama $(\theta_1, \ldots, \theta_k)$, $\theta_i \in \mathcal{F}_{m_i}$ konačnih funkcija jer su one izračunljive.

Primjenom teoreme 1.6. tj. izvjesnog uopštenja teoreme Rice-Shapiro dokazaćemo neprekidnost operatora Ψ_o. Za proizvoljnu k-torku izračunljivih funkcija $(f_1, \ldots, f_k)$, $f_i \in \mathcal{F}_{m_i}$ važi

$$(*) \quad \Psi_o(f_1, \ldots, f_k)(\bar{x}) \simeq y \Longleftrightarrow \exists \theta_1 \ldots \exists \theta_k (\theta_1 \subset f_1, \ldots, \theta_k \subset f_k \text{ i } \Psi_o(\theta_1, \ldots \theta_k)(\bar{x}) \simeq y)$$

Fiksirajmo $\bar{x} \in N^n$ i $y \in N$ i uočimo podskup $\mathcal{A}$ skupa $\mathcal{J}_{m_1} \times \mathcal{J}_{m_2} \times \ldots \times \mathcal{J}_{m_k}$ takav da je

$$\mathcal{A} = \{ (f_1, \ldots, f_k) \mid f_i \in \mathcal{J}_{m_i} \text{ i } \Psi_o(f_1, \ldots, f_k)(\bar{x}) \simeq y$$

Skup $A = \left\{(e_1,\dots,e_k) \,\middle|\, (\phi_{e_1}^{(m_1)},\dots, \phi_{e_k}^{(m_2)}) \in \mathcal{A}\right\}$ je rekurzivno prebrojiv, jer je

$$A = \left\{ (e_1,\dots, {}_k) \,\middle|\, \Psi_o(\phi_{e_1}^{(m_1)},\dots, \phi_{e_k}^{(m_k)})(\bar{x}) \simeq y\right\} =$$

$= \left\{(e_1,\dots,e_k) \,\middle|\, \phi_{h(e_1,\dots,e_k)}^{(n)}(\bar{x}) \simeq y\right\}$. Prema teoremi 1.6. za proizvoljnu k-torku izračunljivih funkcija $(f_1,\dots,f_k)$ gdje je $f_i \in \mathcal{J}_{m_i}$ $(1 \le i \le k)$ važi

$$(f_1,\dots,f_k) \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow \exists \theta_1 \dots \exists \theta_k (\theta_1 \subset f_1,\dots, \theta_k \subset f_k \text{ i } (\theta_1,\dots, \theta_k) \in \mathcal{A})$$

a ovo upravo znači da je ispunjena relacija (*).

Sada ćemo definisati operator $\Psi : \mathcal{F}_{m_1} x\dots x\, \mathcal{F}_{m_k} \longrightarrow \mathcal{F}_n$ pomoću operatora Ψ_o na slijedeći način:

$$\Psi(f_1,\dots,f_k)(\bar{x}) \simeq y \Longleftrightarrow \exists \theta_1 \dots \exists \theta_k (\theta_i \subset f_i \text{ i } \Psi_o(\theta_1,\dots, \theta_k)(\bar{x}) \simeq y)$$

gdje su $f_i \in \mathcal{F}_{m_i}$, $1 \le i \le k$.

Dokažimo da je: (1) Ψ korektno definisan;

(2) Ψ produženje od Ψ_o i $\Psi(\phi_{e_1}^{(m_1)},\dots, \phi_{e_k}^{(m_k)}) = \phi_{h(e_1,\dots,e_k)}^{(n)}$ i

(3) Ψ je rekurzivan.

(1) Neka je $(f_1,\dots,f_k)$, $f_i \in \mathcal{F}_{m_i}$ proizvoljna k-torka funkcija. Treba pokazati da je $\Psi(f_1,\dots,f_k)(\bar{x})$ jednoznačno (ako uopšte postoji). Pretpostavimo suprotno tj. da postoje funkcije $\theta_1 \subset f_1,\dots, \theta_k \subset f_k$ i $\theta_1' \subset f_1,\dots, \theta_k' \subset f_k$ tako da je

$\Psi_o(\theta_1,\ldots,\theta_k)(\bar{x}) \simeq y$ i $\Psi_o(\theta_1',\ldots,\theta_k')(\bar{x}) \simeq y'$. Uzmemo li za funkcije θ_i'' $(1 \leq i \leq k)$ restrikcije funkcija f_i na konačnim skupovima $\mathrm{Dom}(\theta_i) \cup \mathrm{Dom}(\theta_i')$ biće $\theta_i, \theta_i' \subset \theta_i''$. Kako je Ψ_o neprekidan operator važi:

$$y \simeq \Psi_o(\theta_1,\ldots,\theta_k)(\bar{x}) \simeq \Psi_o(\theta_1'',\ldots\theta_k'')(\bar{x}) \simeq \Psi_o(\theta_1',\ldots,\theta_k')(\bar{x}) \simeq y'$$

Dakle za proizvoljno $\bar{x} \in N^n$, $\Psi(f_1,\ldots,f_k)(\bar{x})$ ako postoji jedinstveno je.

(2) Operatori Ψ i Ψ_o se poklapaju na $\mathcal{J}_{m_1} x \ldots x \mathcal{J}_{m_k}$. Zaista, ako je $(f_1,\ldots,f_k)$ proizvoljna k-torka izračunljivih funkcija, gdje je $f_i \in \mathcal{J}_{m_i}$ važi

$$\Psi(f_1,\ldots,f_k)(\bar{x}) \simeq y \Longleftrightarrow \exists\theta_1,\ldots,\exists\theta_k(\theta_i \subset f_i \text{ i } \Psi_o(\theta_1,\ldots,\theta_k)(\bar{x}) \simeq y) \text{ (po def.)}$$

$$\Longleftrightarrow \Psi_o(f_1,\ldots,f_k)(\bar{x}) \simeq y \text{ (zbog rel.(*))}$$

Odavde slijedi

$$\Psi(\phi_{e_1}^{(m_1)},\ldots,\phi_{e_k}^{(m_k)}) = \Psi_o(\phi_{e_1}^{(m_1)},\ldots,\phi_{e_k}^{(m_k)}) = \phi_{h(e_1,\ldots,e_k)}^{(n)} \quad .$$

(3) Neprekidnost operatora Ψ jasna je iz njegove definicije. Da bi dokazali izračunljivost funkcije

$$\psi(\tilde{\theta}_1,\ldots,\tilde{\theta}_k,\bar{x}) \simeq \Psi(\theta_1,\ldots,\theta_k)(\bar{x})$$

koristimo činjenicu da je u numeraciji skupa $\mathcal{J}_{m_i}$ indeks konačne funkcije $\theta_i \in \mathcal{J}_{m_i}$ moguće efektivno naći pomoću koda $\tilde{\theta}_i$, pa po tezi Church-a postoji izračunljiva funkcija t_i tako da je $\theta_i = \phi_{t_i(\tilde{\theta}_i)}^{(m_i)}$. Ovo važi za svako $1 \leq i \leq k$. Pa će biti:

$$\psi(\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_k,\bar{x}) \simeq \Psi(e_1,\dots,e_k)(\bar{x}) \simeq \Psi(\phi^{(m_1)}_{t_1(\tilde{e}_1)},\dots$$

$$\dots,\phi^{(m_k)}_{t_k(\tilde{e}_k)})(\bar{x}) \simeq \phi^{(n)}_{h(t_1(\tilde{e}_1),\dots,t_k(\tilde{e}_k))}(\bar{x}).$$

S obzirom na izračunljivost funkcija $t_1,\dots,t_k$ i funkcije h biće funkcija ψ izračunljiva. Prema teoremi 3.2. Ψ je rekurzivan operator.

Primjetimo da jedinstvenost operatora Ψ slijedi iz načina kako je on definisan. Ovim je teorema dokazana.□

Postavlja se pitanje da li smo ove teoreme mogli dokazati jednostavnim svodjenjem na njihove analogone iz prethodnog dijela primjenom nekog kodiranja k-torki prirodnih brojeva. Ne smanjujući opštost posmatrajmo operator $\Psi: \underbrace{\mathcal{F}_1 \times \dots \times \mathcal{F}_1}_{k\text{-puta}} \longrightarrow \mathcal{F}_1$. Prema teoremi 3.3. postoji izračunljiva i ekstenzionalna funkcija $h: N^k \longrightarrow N$ tako da važi $\Psi(\phi_{e_1},\dots,\phi_{e_k}) = \phi_{h(e_1,\dots,e_k)}$. Pitamo se da li postoji izračunljiva i ekstenzionalna funkcija $s: N \longrightarrow N$ tako da važi:

$$\Psi(\phi_{e_1},\dots,\phi_{e_k}) = \phi_{s(\langle e_1,\dots,e_k\rangle)}$$

gdje je $\langle e_1,\dots,e_k\rangle = c^k(e_1,\dots,e_k)$ tj. Cantor-ovo kodiranje k-torke $(e_1,\dots e_k)$.

Ako takva funkcija postoji prema teoremi 2.4. postoji jedinstven rekurzivan operator $\Psi_s: \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1$ tako da je za svako $\Psi_s(\phi_e) = \phi_{s(e)}$ to dalje znači da se $\Psi(\phi_{e_1},\dots,\phi_{e_k})$ može dobiti kao rezultat uzastopne primjene preslikavanja $(\phi_{e_1},\dots,\phi_{e_k}) \longrightarrow \phi_{\langle e_1,\dots,e_k\rangle}$ i Ψ_s. Medjutim preslikavanje

$(\phi_{e_1},\ldots,\phi_{e_k}) \rightarrow \phi_{\langle e_1,\ldots,e_k\rangle}$ nije korektno definisano jer funkcija $c^k : N^k \longrightarrow N$ nije ekstenzionalna u smislu definicije 3.4. Da bi dokazali da funkcija c^k nije ekstenzionalna ograničićemo se na slučaj kada je $k=2$ i konstruisati slijedeći kontra primjer.

<u>Primjer 3.3.</u> Funkcije $f(x) = x+1$ i $g(x) = 0$ su izračunljive. Napravimo za njih slijedeće MNR-programe.

za funkciju f program A: S(1)

za funkciju g programe B: Z(1) i C: S(1)
Z(1)

U efektivnoj numeraciji programa (teorema 1.3.) odredimo indekse ovih funkcija. Biće

$$\nu(A) = \tau(\beta(S(1))) = \tau(4\cdot(1-1)+1) = \tau(1) = 2^1-1 = 1$$
$$\nu(B) = \tau(\beta(Z(1))) = \tau(4\cdot(1-1)) = \tau(0) = 2^0-1 = 0$$
$$\nu(C) = \tau(\beta(S(1)),\beta(Z(1))) = \tau(1,0) = 2^1+2^{1+0+1} - 1 = 5$$

U numeraciji izračunljivih jednoargumentnih funkcija biće $f = \phi_1$ i $g = \phi_o = \phi_5$.

Dalje je $\langle 1,0\rangle = \binom{1+0+1}{2}+1 = 2$ i $\langle 1,5\rangle = \binom{1+5+1}{2} + 1 = 22$. Ako dešifrujemo programe sa indeksima 2 i 22 dobijamo:

P_2 : Z(1)
Z(1)

i

P_{22} : Z(1)
Z(1)
Z(1)
S(1)

jer je $\tau^{-1}(2) = (0,0)$ i $\tau^{-1}(22) = (0,0,0,1)$. Vidimo da program P_2 izračunava funkciju $g(x) = 0$ a program P_{22} funkciju $h(x) = 1$. Iz svega ovoga slijedi $\phi_1 = \phi_1 \wedge \phi_o = \phi_5$ medjutim

$$\phi_{\langle 1,0\rangle} \neq \phi_{\langle 1,5\rangle}$$

Dakle, Cantor-ovo kodiranje parova (odnosno k-torki) prirodnih brojeva nije ekstenzionalna funkcija u smislu definicije 3.4.

Na istom ovom primjeru možemo pokazati da ni kodiranje $cod(e_1,\dots,e_k) = p_1^{e_1+1} \cdot p_2^{e_2+1} \dots p_k^{e_k+1}$, gdje je p_i i-ti prost broj nije ekstenzionalna funkcija u smislu definicije 3.4.

Ograničimo se opet na slučaj k=2 i zadržimo iste funkcije $f(x) = x+1$ i $g(x) = 0$ pa imamo $f = \phi_1$ i $g = \phi_o = \phi_5$. Dalje je $cod(1,0) = 2^{1+1} \cdot 3^{0+1} = 12$ i $cod(1,5) = 2^{1+1} \cdot 3^{5+1} = 4 \cdot 729 = 2916$. Prema teoremi 1.3. da bi dešifrovali programe čiji su indeksi 12 i 2916 izračunajmo $\tau^{-1}(12) = (0,1,0)$ i $\tau^{-1}(2916) = (0,1,2,0,1,0,1)$. Pošto prema teoremi 1.2. broju 0 odgovara komanda Z(1), broju 1 komanda S(1) a broju 2 komanda T(1,1) odgovarajući programi biće:

P_{12}	:	Z(1) S(1) Z(1)	i	P_{2916}	: Z(1) S(1) T(1,1) Z(1) S(1) Z(1) S(1)

Vidimo da program P_{12} izračunava funkciju $g(x) = 0$ a program P_{2916} funkciju $h(x) = 1$. Opet važi

$$\phi_1 = \phi_1 \quad \text{i} \quad \phi_o = \phi_5 \qquad \text{medjutim} \quad \phi_{cod(1,0)} \neq \phi_{cod(1,5)} .$$

Dakle, ni ovo kodiranje ne predstavlja ekstenzionalnu funkciju u smislu definicije 3.4.

No i dalje ostaje otvoreno pitanje da li postoji kodiranje koje predstavlja ekstenzionalnu funkciju.

Razmotrimo sada u kom obliku teorema o nepokretnoj tački važi za rekurzivne operatore $\Phi : \mathcal{F}_{m_1} \times \ldots \times \mathcal{F}_{m_k} \longrightarrow \mathcal{F}_n$. Za slučaj operatora $\Phi : \mathcal{F}_m \times \ldots \times \mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_m$ imamo teoremu potpuno analognu teoremi 2.6.

Teorema 3.5. Neka je $\Phi : \underbrace{\mathcal{F}_m \times \ldots \times \mathcal{F}_m}_{k\text{-puta}} \longrightarrow \mathcal{F}_m$ rekurzivan operator u smislu definicije 3.1. Tada postoji funkcija $f_\Phi \in \mathcal{F}_m$ tako da važi

(i) $\Phi(f_\Phi, \ldots, f_\Phi) = f_\Phi$

(ii) ako je za neko $g \in \mathcal{F}_m$ ispunjeno $\Phi(g, \ldots, g) = g$ tada je $f_\Phi \subset g$

(iii) f_Φ je izračunljiva funkcija.

Dokaz: Iz rekurzivnosti operatora Φ slijedi da je on nerpekidan i monoton. Formirajmo niz funkcija $\{f_n\}$ tako da je $f_o = f_\emptyset$, gdje je $f_\emptyset$ nigdje ne definisana funkcija iz $\mathcal{F}_m$,

$f_1 = \Phi(f_o, \ldots, f_o), \ldots, f_{n+1} = \Phi(f_n, \ldots, f_n), \ldots$

Zbog monotonosti operatora biće za svako n $f_n \subset f_{n+1}$. Stavimo $f_\Phi = \bigcup_{n \in N} f_n$ što znači da za proizvoljne $\overline{x} \in N^m$ i $y \in N$ važi:

$$f_\Phi(\overline{x}) \simeq y \Longleftrightarrow \exists n (f_n(\overline{x}) \simeq y).$$

Dokažimo (i). Kako je za svako n $f_n \subset f_\Phi$ biće $\Phi(f_n, \ldots, f_n) \subset \Phi(f_\Phi, \ldots, f_\Phi)$ tj. za svako n $f_{n+1} \subset \Phi(f_\Phi, \ldots, f_\Phi)$ što znači i $\bigcup_{n \in N} f_n \subset \Phi(f_\Phi, \ldots, f_\Phi)$ tj. $f_\Phi \subset \Phi(f_\Phi, \ldots, f_\Phi)$.

Obratno, iz neprekidnosti operatora Φ slijedi

$$\Phi(f_\Phi, \ldots, f_\Phi)(\overline{x}) \simeq y \Longleftrightarrow \exists \theta_1 \ldots \exists \theta_k (\theta_i \subset f_\Phi \text{ i } \Phi(\theta_1, \ldots, \theta_k)(\overline{x}) \simeq y)$$

Uzmemo li za θ restrikciju funkcije f_Φ na konačnom skupu

$\bigcup_{1\le i\le k} \mathrm{Dom}(\theta_i)$, biće θ konačna podfunkcija od f_Φ i još za svako $1\le i\le k$ $\theta_i \subset \theta$. Zbog monotonosti operatora Φ iz $\Phi(\theta_1,\dots,\theta_k)(\bar{x}) \simeq y$ slijedi $\Phi(\theta,\dots,\theta)(\bar{x}) \simeq y$. Izaberemo li n tako da je $\theta \subset f_n$ opet zbog monotonosti slijedi $\Phi(f_n,\dots,f_n)(\bar{x}) \simeq y$ tj. $f_{n+1}(\bar{x}) \simeq y$ tj. $f_\Phi(\bar{x}) \simeq y$, što znači $\Phi(f_\Phi,\dots,f_\Phi) \subset f_\Phi$ Dakle, $\Phi(f_\Phi,\dots,f_\Phi) = f_\Phi$.

Dokažimo (ii). Neka je $g \in \mathcal{F}_m$ i $\Phi(g,\dots,g) = g$. Pošto je $f_o = f_\emptyset \subset g$ i iz $f_k \subset g$ slijedi zbog monotonosti operatora Φ $f_{k+1} = \Phi(f_k,\dots,f_k) \subset \Phi(g,\dots,g) = g$ to indukcijom možemo zaključiti da je za svako n $f_n \subset g$ pa je i $\bigcup_{n\in N} f_n \subset g$ tj. $f_\Phi \subset g$.

Dokažimo (iii). Prema teoremi 3.3. postoji izračunljiva funkcija $h : N^k \longrightarrow N$ tako da važi

$$\Phi(\phi^{(m)}_{e_1},\dots,\phi^{(m)}_{e_k}) = \phi^{(m)}_{h(e_1,\dots,e_k)}$$

Neka je u numeraciji m-arnih izračunljivih funkcija e_o indeks funkcije $f_o = f_\emptyset$ definišimo funkciju s kao

$$s(0) = e_o$$

$$s(n+1) = h(s(n),\dots,s(n))$$

Primjetimo da je s izračunljiva i da važi $f_o = \phi^{(m)}_{s(0)}$,

$$f_1 = \Phi(f_o,\dots,f_o) = \Phi(\phi^{(m)}_{s(0)},\dots,\phi^{(m)}_{s(0)}) = \phi^{(m)}_{h(s(0),\dots,s(0))} = \phi^{(m)}_{s(1)}$$

itd.

što znači za svako n, $f_n = \phi^{(m)}_{s(n)}$. Pošto je

$$f_\Phi(\bar{x}) \simeq y \Longleftrightarrow \exists n (f_n(\bar{x}) \simeq y) \Longleftrightarrow \exists n (\phi^{(m)}_{s(n)}(\bar{x}) \simeq y)$$ i zbog izračunljivosti funkcije s predikat na desnoj strani djelimično rješiv pa je f_Φ izračunljiva.□

Navodimo slijedeće primjere nepokretnih tačaka za rekurzivne operatore ove vrste.

<u>Primjer 3.4.</u> Operator $\Phi : \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1$ definisan kao $\Phi(f,g) = f \circ g$, gdje su $f, g \in \mathcal{F}_1$ je rekurzivan (primjer 3.1.). Nepokretne tačke ovog operatora su funkcije $h(x) = x$ ili $n(x) = c$, $c \in N$, a najmanja nepokretna tačka je $f_\Phi = f_\emptyset$.

<u>Primjer 3.5.</u> Operator $\Phi : \mathcal{F}_{n+1} \times \mathcal{F}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{F}_{n+1}$ definisan kao

$$\Phi(f,g,)(x,\overline{y}) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ako je } g(x,\overline{y}) = 0 \\ f(x+1,\overline{y})+1 \ , & \text{ako je } g(x,\overline{y}) \text{ definisano i različ.od } 0 \\ \text{ne definisana u ostalim slučajevima} & \end{cases}$$

gdje su $f, g \in \mathcal{F}_{n+1}$, $x \in N$ i $\overline{y} \in N^n$, je rekurzivan (primjer 3.2). Nepokretna tačka ovog operatora je svaka funkcija oblika $h(x,\overline{y}) \simeq \mu z(k(x+z,\overline{y}) = 0)$ gdje je k bilo koja izračunljiva funkcija iz $\mathcal{F}_{n+1}$.

Dokazujemo ovo tvrdjenje. Prvo, $h(x,\overline{y})$ je izračunljiva kao rezultat primjene minimizacije na izračunljivu funkciju k. Postoje tri mogućnosti:

(1) $h(x,\overline{y}) = 0$, tada je $\Phi(h,h)(x,\overline{y}) = 0$ tj. $\Phi(h,h) = h$

(2) $h(x,\overline{y}) = m$, $m \neq 0$ tada je $\Phi(h,h)(x,\overline{y}) = h(x+1,\overline{y})+1$. Pošto je $m = \mu z(k(x+z,\overline{y}) = 0)$, biće dalje $h(x+1,\overline{y})+1 =$ $= \mu z(k(x+1+z,\overline{y}) = 0) + 1 = m-1+1 = m$.
Dakle opet je $\Phi(h,h) = h$.

(3) $h(x,\overline{y})$ nije definisana tada ni $\Phi(h,h)(x,\overline{y})$ nije definisana. Dakle uvijek je $\Phi(h,h) = h$.
Najmanja nepokretna tačka ovog operatora je očigledno $f_\Phi = f_\emptyset$ tj. nigdje ne definisana funkcija.

Interesantno je posmatrati specijalan slučaj ovog operatora kada je funkcija g fiksirana izračunljiva funkcija iz $\mathcal{J}_{n+1}$. Tada je $\Phi : \mathcal{F}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{F}_{n+1}$ definisan relacijom

$$\Phi(f)(x,\overline{y}) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ako je } g(x,\overline{y}) = 0 \\ f(x+1,\overline{y})+1, & \text{ako je } g(x,\overline{y}) \text{ definisano i različ.od } 0 \\ \text{ne definisana u ostalim slučajevima.} & \end{cases}$$

rekurzivan operator. Najmanja nepokretna tačka ovog operatora je

$f_{\Phi}(x,\overline{y}) \simeq \mu z(g(x+z,\overline{y}) = 0)$.

Na osnovu prve teoreme o rekurziji funkcija $f_{\Phi}(x,\overline{y})$ je izračunljiva. U specijalnom slučaju dobijamo da je izračunljiva funkcija

$$h(\overline{y}) \simeq f_{\Phi}(0,\overline{y}) \simeq \mu z(g(z,\overline{y}) = 0).$$

Medjutim ovo ne znači da smo dokazali da je skup izračunljivih funkcija zatvoren u odnosu na minimizaciju jer smo u dokazu prve teoreme o rekurziji implicitno koristili tu činjenicu. U jednom drugom pristupu pojmu izračunljivosti koji se zasniva na tzv. računu rekurzivnih jednakosti (Kleene) prva teorema o rekurziji dokazuje se bez korišćenja μ-operatora, pa u tom slučaju zatvorenost skupa izračunljivih funkcija u odnosu na minimizaciju može da se dobije iz ovog primjera.

Ako želimo da ipak posmatramo rekurzivne operatore čiji je domen $\mathcal{F}_{m_1} \times \mathcal{F}_{m_2} \times \ldots \times \mathcal{F}_{m_k}$ tada imamo neku varijantu teoreme o nepokretnoj tački ali za k-torku operatora.

<u>Teorema 3.6.</u> Neka su $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k$ rekurzivni operatori takvi da

$$\Phi_i : \mathcal{F}_{m_1} \times \mathcal{F}_{m_2} \times \ldots \times \mathcal{F}_{m_k} \rightarrow \mathcal{F}_{m_i} \qquad (1 \leq i \leq k, \quad m_i \geq 1)$$

Tada postoji k-torka funkcija $(f_{\Phi_1}, f_{\Phi_2}, \ldots, f_{\Phi_k})$, gdje je $f_{\Phi_i} \in \mathcal{F}_{m_i}$ tako da važi:

(1) $\Phi_i(f_{\Phi_1}, \ldots, f_{\Phi_k}) = f_{\Phi_i} \quad (1 \leq i \leq k)$

(2) Za svaku drugu k-torku funkcija $(g_1, \ldots, g_n)$ gdje je $g_i \in \mathcal{F}_{m_i}$ i $\Phi_i(g_1, \ldots, g_k) = g_i$ slijedi da je

$f_{\Phi_1} \subset g_1, \ldots, f_{\Phi_k} \subset g_k$.

(3) Funkcije f_{Φ_i} $(1 \leq i \leq k)$ su izračunljive.

Dokaz:

Formirajmo nizove funkcija $\{f_n^1\}, \ldots, \{f_n^k\}$ na slijedeći način:

$$f_o^1 = \Phi_1(f_\emptyset, \ldots, f_\emptyset), \ldots, f_o^i = \Phi_i(f_\emptyset, \ldots, f_\emptyset), \ldots, f_o^k = \Phi_k(f_\emptyset, \ldots, f_\emptyset)$$

$$f_1^1 = \Phi_1(f_o^1, \ldots, f_o^k), \ldots, f_1^i = \Phi_i(f_o^1, \ldots, f_o^k), \ldots, f_1^k = \Phi_k(f_o^1, \ldots, f_o^k)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f_{n+1}^1 = \Phi_1(f_n^1, \ldots, f_n^k), \ldots, f_{n+1}^i = \Phi_i(f_n^1, \ldots, f_n^k), \ldots, f_{n+1}^k = \Phi_k(f_n^1, \ldots, f_n^k)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

Primjetimo da je zbog monotonosti operatora Φ_i odgovarajući niz $f_o^i, f_1^i, \ldots, f_{n+1}^i \ldots$ rastući. Ovo važi za svako i, $1 \leq i \leq k$.

Neka je $f_{\Phi_1} = \bigcup_{n \in N} f_n^1, \ldots, f_{\Phi_i} = \bigcup_{n \in N} f_n^i, \ldots, f_{\Phi_k} = \bigcup_{n \in N} f_n^k$

gdje unije imaju slijedeće značenje: za neko $\overline{x} \in N^{m_i}$ i $y \in N$

$f_{\Phi_i}(\overline{x}) \simeq y \Longleftrightarrow \exists n (f_n^i(\overline{x}) \simeq y)$. Po konstrukciji ovih funkcija biće $f_{\Phi_i} \in \mathcal{F}_{m_i}$ $(1 \leq i \leq k)$.

Dokazujemo (1). Ako je za neko $\bar{x} \in N^{m_i}$ i $y \in N$ $f_{\Phi_i}(\bar{x}) \simeq y$ tada postoji n tako da je $f_n^i(\bar{x}) \simeq y$ tj. postoji n tako da je $\Phi_i(f_{n-1}^1, \dots, f_{n-1}^k)(\bar{x}) \simeq y$, no pošto je $f_{n-1}^1 \subset f_{\Phi_1}, \dots, f_{n-1}^k \subset f_{\Phi_k}$ i operator Φ_i monoton biće $\Phi_i(f_{\Phi_1}, \dots, f_{\Phi_k})(\bar{x}) \simeq y$. Dakle, $f_{\Phi_i} \subset \Phi_i(f_{\Phi_1}, \dots, f_{\Phi_k})$ za svako i $(1 \leq i \leq k)$. Obratno, ako je za neko $\bar{x} \in N^{m_i}$ i $y \in N$ ispunjeno $\Phi_i(f_{\Phi_1}, \dots, f_{\Phi_k})(\bar{x}) \simeq y$ tada zbog neprekidnosti operatora Φ_i postoje konačne funkcije $\theta_1, \dots, \theta_k$ gdje je $\theta_i \subset f_{\Phi_i}$ tako da važi $\Phi_i(\theta_1, \dots, \theta_k)(\bar{x}) \simeq y$. Pošto je $\theta_i \subset f_{\Phi_i}$ postoji n_i tako da je $\theta_i \subset f_{n_i}^i$. Uzmimo da je $n = \max\limits_{1 \leq i \leq k} n_i$ tada će za svako i $(1 \leq i \leq k)$ biti $f_{n_i}^i \subset f_n^i$ jer je niz $f_o^i, f_1^i, f_2^i, \dots$ rastući. Stoga je $\theta_i \subset f_n^i$ što zbog monotonosti operatora Φ_i daje $\Phi_i(f_n^i, \dots, f_n^i)(\bar{x}) \simeq y$ tj. $f_{n+1}^i(\bar{x}) \simeq y$ što povlači $f_{\Phi_i}(\bar{x}) \simeq y$, pa je i $\Phi_i(f_{\Phi_1}, \dots, f_{\Phi_k}) \subset f_{\Phi_i}$. Ovim je dokazano da je $\Phi_i(f_{\Phi_1}, \dots f_{\Phi_k}) = f_{\Phi_i}$.

Dokazujemo (2). Pretpostavimo da postoji k-torka funkcija $(g_1, \dots, g_k)$, $g_i \in \mathcal{F}_{m_i}$ tako da je $\Phi_i(g_1, \dots, g_k) = g_i$ za svako i $(1 \leq i \leq k)$. Pošto je $f_\emptyset \subset g_i$ za svako i biće

$f_o^i = \Phi_i(f_\emptyset, \dots, f_\emptyset) \subset \Phi_i(g_1, \dots, g_n) = g_i$ iz istog razloga

$f_1^i = \Phi_i(f_o^1, \dots, f_o^k) \subset \Phi_i(g_1, \dots, g_k) = g_i$ nastavljajući ovako zaključujemo da je za svako $n \in N$ i $(1 \leq i \leq k)$ ispunjeno $f_n^i \subset g_i$.

Stoga je i $\bigcup\limits_{n \in N} f_n^i \subset g_i$ tj. $f_{\Phi_i} \subset g_i$. Dakle, $f_{\Phi_1} \subset g_1, \dots, f_{\Phi_k} \subset g_k$.

Dokazujemo (3). Pošto su Φ_i rekurzivni operatori prema teoremi 3.3. postoje izračunljive i ekstenzionalne (u smislu definicije 3.4.) funkcije $h_i : N^k \longrightarrow N$ tako da važi

$$\Phi_i(\phi_{e_1}^{(m)}, \dots, \phi_{e_k}^{(m_k)}) = \phi_{h_i(e_1,\dots,e_k)}^{(m_i)} .$$

Neka je e_o^i indeks funkcije $f_\emptyset$ gdje je $f_\emptyset \in \mathcal{F}_{m_i}$ pri numeraciji izračunljivih funkcija od m_i argumenata. Definisaćemo funkcije p_i $(1 \leq i \leq k)$ na slijedeći način:

$$p_i(0) = h_i(e_o^1, \dots, e_o^k)$$

$$p_i(n+1) = h_i(p_1(n), \dots, p_k(n))$$

Funkcije p_i su izračunljive i još važi:

$$f_o^i = \Phi_i(f_\emptyset, \dots, f_\emptyset) = \Phi_i(\phi_{e_o^1}^{(m_1)}, \dots, \phi_{e_o^k}^{(m_k)}) = \phi_{h_i(e_o^1,\dots,e_o^k)}^{(m_i)} = \phi_{p_i(0)}^{(m_i)}$$

isto tako je

$$f_1^i = \Phi_i(f_o^1, \dots, f_o^k) = \Phi_i(\phi_{p_1(0)}^{(m_1)}, \dots, \phi_{p_k(0)}^{(m_k)}) = \phi_{h_i(p_1(0),\dots,p_k(0))}^{(m_i)} = \phi_{p_i(1}^{(m_i)}$$

nastavljajući ovako zaključujemo da je za svako $n \in N$ i $1 \leq i \leq k$ ispunjeno $f_n^i = \phi_{p_i(n)}^{(m_i)}$ .Konačno imamo da za svako i $(1 \leq i \leq k)$ važi

$$f_{\Phi_i}(\overline{x}) \simeq y \Longleftrightarrow \exists n (f_n^i(\overline{x}) \simeq y) \Longleftrightarrow \exists n (\phi_{p_i(n)}^{(m_i)}(\overline{x}) \simeq y).$$

Poslednji predikat je djelimično rješiv pa je djelimično rješiv i predikat "$f_{\Phi_i}(\overline{x}) \simeq y$" što znači da je funkcija f_{Φ_i} izračunljiva. Ovim je teorema dokazana.

IV DIO

REKURZIVNI OPERATORI $\Phi : 2^N \longrightarrow 2^N$

(OPERATORI PREBROJAVANJA)

Operatori prebrojavanja

Rekurzivni operatori koje smo do sada posmatrali preslikavaju funkcije u funckije. Postavlja se pitanje da li sličan pojam može uvesti i za skupove prirodnih brojeva tj. elemente od 2^N . Odgovor je potvrdan jer i funkcije se mogu shvatiti kao posebna vrsta skupova, pa za neke skupove već imamo takva preslikavanja. Treba ih samo proširiti na sve elemente iz 2^N. Dakle, mi tražimo preslikavanje Φ iz 2^N u 2^N koje će imati slijedeća svojstva:

1° svuda je definisano;

2° pripadnost nekog elementa slici $\Phi(A)$ efektivno zavisi od konačno mnogo elemenata originala A.

Vidimo da će ovdje važnu ulogu imati konačni skupovi pa je podesno izvršiti njihovu numeraciju. To se može uraditi uvodjenjem kanoničkih indeksa konačnih skupova.

<u>Definicija 4.1.</u> Neka je A neprazan konačan skup prirodnih brojeva $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ gdje je $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Broj $2^{x_1} + 2^{x_2} + \ldots$ $\ldots + 2^{x_n}$ nazivamo kanoničkim indeksom skupa A. Kanonički indeks praznog skupa je O. Sa D_x ćemo označavati konačni skup čiji je kanonički indeks x .

Očigledno svaki konačan skup ima jedinstven kanonički indeks i svaki prirodan broj je kanonički indeks nekog konačnog skupa.

<u>Primjer 4.1.</u> Skup $A = \{0,1,2,5\}$ ima kanonički indeks $x = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^5 = 39$ tj. $\{0,1,2,5\} = D_{39}$. Obratno, šta je D_{19} ? U binarnom sistemu zapis broja 19 je 10011 pa je $19 = 2^0 + 2^1 + 2^4$. Dakle $D_{19} = \{0,1,4\}$.

<u>Definicija 4.2.</u> Za svako $z \in N$ preslikavanje $\Phi_z : 2^N \longrightarrow 2^N$, gdje je za bilo koje $A \in 2^N$

$$\Phi_z(A) = \{x \mid \exists u \; (\langle x,u\rangle \in W_z \; \text{ i } \; D_u \subset A)\}$$

zove se operator prebrojavanja.

Očigledno ovakvo preslikavanje je korektno definisano i zadovoljava uslove 1^o i 2^o.

Ovi operatori su u vezi sa slijedećom procedurom koja se može zadati konačnim spiskom instrukcija: Procedura počinje neko izračunavanje algoritamski i s vremena na vrijeme traži ulazni broj, a s vremena na vrijeme daje izlazni broj. Kao ulazni može biti dat bilo koji prirodan broj ili se može desiti da se ne da nikakav broj. Neka je $A \subset N$. Pretpostavimo li da se u svojstvu ulaznih daju elementi skupa A tada će procedura u krajnjem u svojstvu izlaznih dati elemente skupa B u nekom poretku. Poredak u kome se javljaju elementi skupa B može se mijenjati pri promeni poretka ulaznih vrijednosti, ali to ne smatramo značajnim. Ako opisana procedura postoji kažemo da je skup B svodljiv po prebrojivosti na skup A. Kratko rečeno skup B je svodljiv po prebrojivosti na skup A ako postoji efektivna procedura za prebrojavanje skupa B iz bilo kog prebrojavanja skupa A.

Pogledajmo u kakvoj je vezi ovo sa definicijom operatora prebrojavanja. Pretpostavimo da postoji procedura koja svodi po prebrojivosti skup B na skup A. Posmatrajmo sve konačne nizove različitih prirodnih brojeva. Kažemo da je pri toj proceduri broj x izazvan nizom $(y_1,\dots,y_k)$ ako ta procedura daje x u svojstvu izlazne vrijednosti pošto su $y_1,\dots,y_k$ dati, redom, u svojstvu ulaznih vrijednosti ali prije nego što je tražena bilo kakva nova ulazna vrijednost. Proveravajući redom sve konačne nizove možemo rekurzivno prebrojiti skup

$$\{\langle x,u\rangle \mid D_u \text{ sadrži elemente konačnog niza različitih brojeva kojim je izazvan } x\}$$

Dakle, postoji broj z tako da je opisani skup W_z . Dalje je očigledno $x \in B \Longleftrightarrow \exists u\ (\ \langle x,u\rangle \in W_z$ i $D_u \subset A)$, što znači postoji operator prebrojavanja Φ_z tako da je $\Phi_z(A) = B$.

Važi i obrnuto, za svaki operator Φ_z postoji procedura koja $\Phi_z(A)$ svodi po prebrojivosti na A, gdje je A bilo koji element iz 2^N . Tu proceduru možemo ovako opisati. Istovremeno počinjemo prebrojavati W_z i tražiti ulaze. U svojstvu ulaznih dajemo elemente iz A. Kada se $\langle x,u\rangle$ pojavi u W_z provjeravamo da li se D_u sadrži u skupu već dobijenih ulaznih vrijednosti za koje x nije bilo dato kao izlazna vrijednost. U slučaju da se sadrži dopisujemo x spisku izlaznih vrijednosti. Na taj način za bilo koje z i bilo koje A kao skup izlaznih vrijednosti dobijamo jedinstven skup $\{x \mid \exists u\ (\ \langle x,u\rangle \in W_z$ i $D_u \subset A\}$ tj. skup $\Phi_z(A)$.

<u>Napomena</u>: Kad god je intuitivno jasno da postoji efektivna procedura koja skup B svodi po prebrojivosti na skup A smatraćemo da postoji operator prebrojavanja Φ_z tako da je $\Phi_z(A) = B$. U tom smislu jasno je da je identički operator $I : A \longrightarrow A$ operator prebrojavanja. Isto tako ako su Φ i Ψ operatori prebrojavanja kompozicija $\Phi \circ \Psi$ je takodje operator prebrojavanja.

<u>Definicija 4.3.</u> Operator prebrojavanja $\Phi_z : 2^N \longrightarrow 2^N$ je neprekidan ako za proizvoljno $A \in 2^N$ važi:

$x \in \Phi_z(A) \Longleftrightarrow \exists D$ (D je konačan i $D \subset A$ i $x \in \Phi_z(D)$).

Definicija 4.4. Operator prebrojavanja $\Phi_z : 2^N \longrightarrow 2^N$ je monoton ako za proizvoljne $A,B \in 2^N$ važi: $A \subset B \Rightarrow \Phi_z(A) \subset \Phi_z(B)$.

Teorema 4.1. Svaki operator prebrojavanja je neprekidan i monoton.

Dokaz: Neka je Φ_z operator prebrojavanja i $A \subset N$ tada $x \in \Phi_z(A) \Rightarrow \exists u\ (\langle x,u\rangle \in W_z$ i $D_u \subset A)$ stavljajući $D = D_u$ slijedi $x \in \Phi_z(D)$ i D je konačan podskup od A. Obratno ako postoji D (konačan podskup od A) tako da je $x \in \Phi_z(D)$ tada $\exists u(\langle x,u\rangle \in W_z$ i $D_u \subset D)$ no zbog $D_u \subset A$ slijedi $x \in \Phi_z(A)$. Ovim je dokazana neprekidnost. Dokažimo monotonost. Neka je $A \subset B$ i $x \in \Phi_z(A)$ tada $\exists u(\langle x, u\rangle \in W_z$ i $D_u \subset A)$ no pošto je $D_u \subset B$ biće $x \in \Phi_z(B)$.□

Operatori prebrojavanja analogni su, na nivou skupova, opšterekurzivnim funkcijama. Medjutim za razliku od njih raspolažu jednom vrlo povoljnom osobinom a to je mogućnost numeracije. Iz same definicije jasno je da numeracija operatora prebrojavanja počiva na numeraciji rekurzivno prebrojivih skupova $W_o, W_1, \ldots$. I ovdje ćemo zadržati numeraciju uvedenu u uvodnom dijelu.

Primjer 4.2. Odrediti $\Phi_1(X)$, gdje je $X = \{0,1,2,3\}$. U primjeru 3.3. vidjeli smo da je $\varphi_1(x) = x+1$. Dakle $W_1 = N$ osim toga za svako x, $\langle x,o\rangle \in W_1$ i $D_o = \emptyset$ je podskup svakog skupa pa je $\Phi_1(X) = N$ bez obzira na X.

S obzirom da raspolažu numeracijom postavlja se pitanje univerzalnog operatora za operatore prebrojavanja. Za datu numeraciju operatora prebrojavanja može se definisati univerzalni operator $U : 2^N \longrightarrow 2^N$ relacijom $U(A) = \{\langle x,z\rangle \mid x \in \Phi_z(A)\}$. Ovaj operator igra posebno važnu ulogu u algebri operatora prebrojavanja $\mathcal{E} = \{E, I, \circ\}$ gdje je E skup svih operatora prebrojavanja, I je identički operator, a o je kompozicija operatora. Sa algebarske tačke gledišta $\mathcal{E}$ je semigrupa sa jedinicom. U [7] je pokazano da za svako n $(n \geqslant 2)$ postoji prebrojivo mnogo n-elementnih baza algebre $\mathcal{E}$. Ograničimo se na $n=2$ i dokažimo slijedeću teoremu.

<u>Teorema 4.2.</u> Postoji prebrojivo mnogo 2-elementnih baza algebre $\mathcal{E}$. Jednoelementnih baza algebra $\mathcal{E}$ nema.

Dokaz: Prvo, $\mathcal{E}$ nema jednoelementnih baza jer operacija kompozicije čuva kako injektivnost tako i neinjektivnost operatora prebrojavanja.

Zatim, uočimo operator Z tako da je

$Z(A) = \{\langle x,y\rangle \mid \langle x,y+1\rangle \in A\}$. Intuitivno je jasno da je Z operator prebrojavanja. Neka je numeracija rekurzivno prebrojivih skupova takva da je $Z = \Phi_0$ i neka je U univerzalni operator koji odgovara toj numeraciji tj. $U(A) = \{\langle x,z\rangle \mid x \in \Phi_z(A)\}$.

Definišimo, za svako n operator C_n tako da je

$C_n(A) = \{x \mid \langle x,n\rangle \in A\}$. Lako se vidi da je za svako n

$\Phi_n = C_n \circ U$ i $C_{n+1} = C_n \circ Z$. Dalje će biti $\Phi_0 = C_0 \circ U$, $\Phi_1 = C_1 \circ U = C_0 \circ \Phi_0 \circ U$, $\Phi_2 = C_2 \circ U = C_1 \circ \Phi_0 \circ U =$

$= C_0 \circ \Phi_0 \circ \Phi_0 \circ U$, itd. Dakle svaki operator Φ_z može se dobiti pomoću C_0 i U, a kako $\mathcal{E}$ nema jednoelementnih baza biće C_0 i U dvoelementna baza.

Primjetimo, na kraju, da je umjesto C_0 moguće uzeti bilo koje C_k takvo da je $C_k \circ U = Z$, biće opet C_k i U baza. Kako svaki operator ima prebrojivo mnogo indeksa postoji prebrojivo mnogo 2-elementnih baza algebre $\mathcal{E}$.□

Funkcionalni operatori odredjeni operatorima prebrojavanja

Razmatraćemo djelovanje operatora prebrojavanja na odredjene elemente iz 2^N koji odgovaraju funkcijama iz N u N. To su jednoznačni skupovi.

<u>Definicija 4.5.</u> Skup A je jednoznačan akko je jednoznačna relacija $\{(x,y) \mid \langle x,y\rangle \in A\}$.

Primjećujemo da svakoj funkciji $f : N \longrightarrow N$ odgovara jednoznačan skup $\{\langle x, f(x)\rangle \mid x \in \mathrm{Dom}(f)\}$ koji ćemo obilježavati sa $\tau(f)$. Isto tako svakom jednoznačnom skupu A odgovara funkcija f takva da je $\mathrm{Dom}(f) = \{ x \mid \exists y (\langle x,y\rangle \in A)\}$ i pisaćemo $f = \tau^{-1}(A)$ ili $\mathrm{Arg}\, A = \{ x \mid \exists y (\langle x,y\rangle \in A)\}$.

Neka je $\mathcal{F}_1$ klasa svih funkcija iz N u N tada će $\tau\mathcal{F}_1$ biti klasa svih jednoznačnih skupova. Bilo koji funkcionalni operator ψ je preslikavanje podklase od $\mathcal{F}_1$ u $\mathcal{F}_1$ i on odredjuje preslikavanje Γ podklase od $\tau\mathcal{F}_1$ u $\tau\mathcal{F}_1$. Očigledno važe slijedeće relacije $\Gamma = \tau\psi\tau^{-1}$ i $\psi = \tau^{-1}\Gamma\tau$.

Ako imamo bilo koje svuda definisano preslikavanje $\Phi : 2^N \longrightarrow 2^N$ pa ga ograničimo da mu i argumenti i vrijednosti budu jednoznačni skupovi dobili smo funkcionalni operator ψ . To možemo postići na slijedeći način:

(i) $\mathrm{Dom}\,\Psi = \Phi^{-1}(\tau\mathcal{F}_1) \cap \tau\mathcal{F}_1$

(ii) $\Psi = \Phi$ na skupu $\mathrm{Dom}\,\Psi$

U ovom slučaju za funkcionalni operator Ψ kažemo da je odredjen sa Φ.

Interesantno je posmatrati funkcionalne operatore odredjene operatorima prebrojavanja. S obzirom na efektivnost operatora prebrojavanja očigledno je da smo dobili rekurzivne funkcionalne operatore kakve smo već imali u ovom radu. Primijetimo da ovako dobijen funkcionalni operator ne mora biti svuda definisan jer iako je Φ_z svuda definisan ne mora biti $\Phi_z(\tau\mathcal{F}_1) \subset \tau\mathcal{F}_1$.

<u>Definicija 4.6.</u> Ψ je djelimično rekurzivni operator ako je:

(i) Ψ funkcionalni operator

(ii) postoji z tako da je Ψ odredjen operatorom prebrojavanja Φ_z.

<u>Definicija 4.7.</u> Ψ je rekurzivni operator ako je

(i) Ψ djelimično rekurzivni

(ii) $\mathrm{Dom}\,\Psi = \mathcal{F}_1$

Slijedeća klasifikacija odnosi se na vrstu funkcija koje operator preslikava. Ako zahtijevamo da djelimično rekurzivni operator preslikava klasu svih totalnih funkcija (označimo je sa $\mathcal{F}$) u takodje totalne funkcije tada je to opšterekurzivan operator.

<u>Definicija 4.8.</u> Ψ je opšterekurzivni operator ako je

(i) Ψ djelimično rekurzivan

(ii) $\mathcal{F} \subset \mathrm{Dom}\,\Psi$

(iii) $\Psi(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$.

<u>Primjer 4.3.</u> Neka je Φ_z bilo koji operator prebrojavanja koji ima svojstvo da je za svako $X \subset N$ $\Phi_z(X) = N$ (takav je npr. Φ_1). Tada je funkcionalni operator Ψ odredjen sa Φ_z djelimično rekurzivan i još važi $\mathrm{Dom}\Psi = \emptyset$.

<u>Primjer 4.4.</u> Jedinični operator I algebre $\mathcal{E}$ je $I(A) = A$. Može se i formalno pokazati da je to operator prebrojavanja. Neka je z indeks skupa $\{\langle x, 2^x\rangle \mid x \in N\}$ (koji je očigledno r.p. Dakle, $W_z = \{\langle x, 2^x\rangle \mid x \in N\}$. Tada je za proizvoljno A, $\Phi_z(A) = A$. Zaista, $x \in A \Rightarrow \{x\} \subset A \Rightarrow D_{2^x} \subset A$ i $\langle x, 2^x\rangle \in W_z \Rightarrow x \in \Phi_z(A)$. Obratno, $x \in \Phi_z(A) \Rightarrow \exists u(\langle x,u\rangle \in W_z$ i $D_u \subset A) \Rightarrow u = 2^x$ i $D_{2^x} \subset A \Rightarrow \{x\} \subset A \Rightarrow x \in A$ tj. $\Phi_z(A) \subset A$. Dakle, $\Phi_z(A) = A$.

Funkcionalni operator odredjen operatorom Φ_z je opštere-kurzivan.

<u>Primjer 4.5.</u> Neka je z indeks r.p. skupa $\{3,10\}$ tj. neka je $W_z = \{3,10\} = \{\langle 1,0\rangle , \langle 3, 0\rangle\}$. Operator prebrojavanja Φ_z ima svojstvo da je za bilo koje $A \subset N$ $\Phi_z(A) = \{1, 3\}$. Skup $\{1, 3\}$ je jednoznačan i njemu odgovara funkcija

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x=1 \text{ ili } x=3 \\ \text{ne definisana inače} & \end{cases}$$

. Pa funkcionalni operator Ψ odredjen sa Φ_z svaku funkciju preslikava u h tj. on je rekurzivan ali nije opšterekurzivan.

Pokazaćemo da je svaki opšterekurzivni operator i rekurzivan.

<u>Teorema 4.3.</u> Neka je Ψ djelimično rekurzivni operator takav da je $\mathcal{F} \subset \mathrm{Dom}\,\Psi$. Tada je Ψ rekurzivan operator.

Dokaz: Pretpostavimo da Ψ nije rekurzivan i posmatrajmo operator prebrojavanja Φ_z koji odredjuje Ψ . Tada postoje skupovi A i D takvi da je $\Phi_z(D) = A$ gdje je D jednoznačan i konačan (po teoremi 4.1.) i A nije jednoznačan. No skup D može biti produžen do skupa B tako da je $B = \tau(f)$ gdje je f neka svuda definisana funkcija. Zbog $D \subset B$ i monotonosti operatora Φ_z biće

$\Phi_z(D) \subset \Phi_z(B)$ tj. $A \subset \Phi_z(B)$ tj. $\Phi_z(B)$ nije jednoznačan što je suprotno pretpostavci $\mathcal{F} \subset \mathrm{Dom}\Psi$. Dakle Ψ je rekurzivan.□

<u>Posledica</u>. Svaki opšterekurzivni operator je rekurzivan.

Navodimo primjer preslikavanja koje se može produžiti do djelimično rekurzivnog operatora, ali se ne može produžiti do rekurzivnog operatora.

<u>Primjer 4.6.</u> Posmatrajmo preslikavanje Ψ sa svojstvom

$$\Psi(\ \{(1,0)\}\ ) = \{(0,0)\}$$

i

$$\Psi(\ \{(2,0)\}\ ) = \{(0,1)\}$$

Preslikavanje Ψ se može produžiti do djelimično rekurzivnog operatora. Neka je $W_z = \{\langle 0,4\rangle\ ,\ \langle 1,32\rangle\}$. Operator prebrojavanja Φ_z ima svojstvo:

$$\Phi_z(\{2\}) = \{0\}$$

$$\Phi_z(\{5\}) = \{1\}$$

Funkcionalni operator Ψ' odredjen operatorom Φ_z je djelimično rekurzivan i predstavlja produženje preslikavanja Ψ . Pretpostavimo da postoji rekurzivni operator Ψ'', gdje je $\mathrm{Dom}\,\Psi'' = \mathcal{F}_1$ koji je produženje preslikavanja Ψ . U tom slučaju bi operator prebrojavanja kojim je Ψ'' odredjen preslikavao jednoznačan skup $\{2,5\}$ u skup $\{0,1\}$ koji nije jednoznačan, pa Ψ'' ne može biti svuda definisan.

Poznato je da se ne može svaka djelimično rekurzivna funkcija produžiti do opšterekurzivne. Za operatore ovo u izvjesnom smislu ne važi. Posmatramo li operatore na skupu $\mathcal{F}$ (svuda definisanih funkcija) može se pokazati da se svaki djelimično rekurzivni operator može produžiti do rekurzivnog.

Teorema 4.4. Postoji opšterekurzivna funkcija σ , takva da za svako z, ako Φ_z odredjuje djelimično rekurzivan operator Ψ , tada $\Phi_{\sigma(z)}$ odredjuje rekurzivan operator Ψ' sa svojstvom da za svaku svuda definisanu funkciju f važi

$$f \in \mathrm{Dom}\Psi \Rightarrow \Psi'(f) = \Psi(f) .$$

Dokaz: Poznato je ([6] str.87.) da se skup W_z (za svako z) može napisati kao $\{\phi^{(0)}_{f''(z)}, \phi^{(1)}_{f''(z)}, \dots\}$, gdje je f"(z) opšterekurzivna funkcija i funkcija $\phi_{f''(z)}$ obostrano jednoznačna pa je to prebrojavanje skupa W_z bez ponavljanja.

Za dato z, fiksirajmo jedan takav poredak skupa W_z. Ako je $v \in W_z$ kažemo da je u ispred v u W_z ako je $u \in W_z$ i $u = \phi^{(k)}_{f''(z)}$ i $v = \phi^{(p)}_{f''(z)}$ i $k < p$.

Posmatrajmo skup:

$$(*)\{\langle\langle x,y\rangle, t\rangle \mid D_t \text{ je jednoznačan i } \exists_s (D_s \subset D_t \text{ i } \langle\langle x,y\rangle, s\rangle \in W_z$$
$$\text{i } \forall y' \forall s' (\langle\langle x,y'\rangle, s'\rangle \text{ je ispred } \langle\langle x,y\rangle, s\rangle \text{ u } W_z \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D_{s'} \cup D_s \text{ nije jednoznačan}))\}$$

Ovaj skup je rekurzivno prebrojiv i u numeraciji r.p. skupova indeks ovog skupa ravnomjerno zavisi od z, pa postoji opšterekurzivna funkcija σ tako da je ovaj skup $W_{\sigma(z)}$. Dokažimo da $\Phi_{\sigma(z)}$ odredjuje rekurzivan operator tj. da je slika ma kojeg jednoznačnog skupa jednoznačan skup.

Neka je A jednoznačan skup i neka $\Phi_{\sigma(z)}(A)$ nije jednoznačan. Tada važi $\langle x,y_1\rangle \in \Phi_{\sigma(z)}(A)$ i $\langle x,y_2\rangle \in \Phi_{\sigma(z)}(A)$ i $y_1 \neq y_2$, tada $\exists t_1(\langle\langle x,y_1\rangle, t_1\rangle \in W_{\sigma(z)}$ i $D_{t_1} \subset A)$ i $\exists t_2(\langle\langle x,y_2\rangle, t_2\rangle \in W_{\sigma(z)}$ i $D_{t_2} \subset A)$. Pošto su D_{t_1} i D_{t_2} jednoznačni na osnovu (*) postoje s_1 i s_2 tako da je $D_{s_1} \subset D_{t_1}$ i $D_{s_2} \subset D_{t_2}$ i $\langle\langle x,y_1\rangle, s_1\rangle \in W_z$ i

$\langle\langle x,y_2\rangle, s_2\rangle \in W_z$. Ne smanjujući opštost pretpostavimo da je $\langle\langle x,y_1\rangle, s_1\rangle$ ispred $\langle\langle x,y_2\rangle, s_2\rangle$ u W_z pa na osnovu (*) $D_{s_1} \cup D_{s_2}$ nije jednoznačan što je kontradikcija jer je $D_{s_1} \cup D_{s_2} \subset A$. Dakle, $\Phi_{\sigma(z)}$ odredjuje rekurzivan operator.

Neka je f svuda definisana funkcija i $f \in \mathrm{Dom}\,\Psi$ tj. $\Phi_z(\tau(f))$ je jednoznačan skup, dokažimo da je

$$\Phi_{\sigma(z)}(\tau(f)) = \Phi_z(\tau(f))$$

Prvo, $\langle x,y\rangle \in \Phi_{\sigma(z)}(\tau(f)) \Rightarrow \exists t(\langle\langle x,y\rangle, t\rangle \in W_{\sigma(z)}$ i

i $D_t \subset \tau(f)) \Rightarrow \exists t\, \exists s(\langle\langle x,y\rangle, s\rangle \in W_z$ i $D_s \subset D_t \subset \tau(f)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in \Phi_z(\tau(f))$.

Dakle, $\Phi_{\sigma(z)}(\tau(f)) \subset \Phi_z(\tau(f))$.

Obratno, $\langle x,y\rangle \in \Phi_z(\tau(f)) \Rightarrow \exists s(\langle\langle x,y\rangle, s\rangle \in W_z$ i $D_s \subset \tau(f))$. U fiksiranom poretku skupa W_z neka je s prvi broj sa takvim svojstvom. Posmatrajmo skup $S = \{s' \mid \exists y' (\langle\langle x,y'\rangle, s'\rangle$ je ispred $\langle\langle x,y\rangle, s\rangle$ u $W_z)\}$. S je konačan pa je $S = \{s_1,\ldots,s_k\}$. Za svako i $(1 \le i \le k)$ važi $D_{s_i} \not\subset \tau(f)$, jer iz $D_{s_i} \subset \tau(f)$ slijedi $\Phi_z(D_{s_i}) \subset \Phi_z(\tau(f))$, no kako postoji y' tako da je $\langle x,y'\rangle \in \Phi_z(D_{s_i})$ važilo bi $\langle x,y'\rangle \in \Phi_z(\tau(f))$ i $\langle x,y\rangle \in \Phi_z(\tau(f))$ što je nemoguće jer je $\Phi_z(\tau(f)$ jednoznačan. Konstruišimo skup D_t tako da je $D_t \subset \tau(f)$ i $\mathrm{Arg}\, D_t =$ $= \mathrm{Arg}\, D_s \cup \mathrm{Arg}\, D_{s_1} \cup \ldots \cup \mathrm{Arg}\, D_{s_k}$. Biće D_t konačan i jednoznačan i za $\forall s_i$ ($D_{s_i} \cup D_t$ nije jednoznačan) jer $D_{s_i} \not\subset \tau(f)$ i f je svuda definisana. Na osnovu (*) slijedi $\langle\langle x,y,\rangle, t\rangle \in W_{\sigma(z)}$ tj. $\langle x,y\rangle \in \Phi_{\sigma(z)}(\tau(f))$. Ako je $S=\emptyset$ tada je $D_t = D_s$ pa opet važi $\langle x,y\rangle \in \Phi_{\sigma(z)}(\tau(f))$. Ovim je teorema dokazana.□

Ovim smo pokazali da ako je $f = \Psi(g)$ i g svuda definisana i Ψ djelimično rekurzivan tada postoji rekurzivan operator Ψ' tako da je $f = \Psi'(g)$. Medjutim i dalje je otvoreno pitanje da li postoje funkcije g i f takve da se g može preslikati u f djelimično rekurzivnim operatorom ali rekurzivnim operatorom ne može. Odgovor je potvrdan i primjer takvih funkcija dao je D.T.Skordev.

<u>Primjer 4.7.</u> Neka je f proizvoljna svuda definisana funkcija od jedne promenljive koja nije opšterekurzivna i neka je g definisana relacijom:

$$g(z) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } f(c_1(z)) = c_2(z) \\ \text{ne definisana u ostalim slučajevima} \end{cases}$$

gdje su c_1 i c_2 inverzne funkcije Cantor-ovoj kodirajućoj funkciji tj. $\langle c_1(z), c_2(z)\rangle = z$.

Intuitivno je jasno da postoji procedura koja skup $B = \{\langle x, f(x)\rangle \mid x \in N\}$ svodi po prebrojivosti na skup $A = \{\langle z, g(z)\rangle \mid z \in Dom(g)\}$ jer kad god kao ulaz damo $a \in A$ zbog $a = \langle z, 0\rangle$ i $f(c_1(z)) = c_2(z)$ izlaz može biti $b = \langle c_1(z), c_2(z)\rangle = z = c_1(a)$. Dakle postoji djelimično rekurzivan operator Ψ tako da je $f = \Psi(g)$.

Pretpostavimo da postoji rekurzivan operator Ψ' tako da je $f = \Psi'(g)$. Neka je $h(x) = 0$ tada važi $g \subset h$ pa zbog monotonosti operatora Ψ', $\Psi'(g) \subset \Psi'(h)$ tj. $f \subset \Psi'(h)$ tj. $f = \Psi'(h)$ jer je f svuda definisana. Dakle f je izračunljiva jer se dobija djelovanjem rekurzivnog operatora na izračunljivu funkciju, a to je suprotno pretpostavci.

Na kraju razmotrimo mogućnost numeracije operatora koje smo ovdje posmatrali. Vidjeli smo da operatori prebrojavanja, po definiciji, raspolažu numeracijom. Šta je sa djelimično rekurzivnim odnosno rekurzivnim operatorima.

<u>Teorema 4.5.</u> Postoji numeracija klase svih djelimično rekurzivnih operatora.

Dokaz: Neka je Ψ djelimično rekurzivni operator. Postoji Φ_z (operator prebrojavanja) koji ga odredjuje. Numerišimo operator Ψ brojem z. Obratno za svaki broj z, operator prebrojavanja Φ_z odredjuje tačno jedan funkcionalni operator koji je, po definiciji, djelimično rekurzivan.□

Ograničimo li se na skup $\mathcal{F}$ svih totalnih funkcija možemo pokazati da i rekurzivni operatori raspolažu numeracijom.

Teorema 4.6. Postoji numeracija rekurzivnih operatora na skupu $\mathcal{F}$.

Dokaz: U dokazu teoreme 4.4. vidjeli smo da postoji opšterekurzivna funkcija σ takva da je za svako $f \in \mathcal{F}$ i svako $z \in N$

$$\Phi_{\sigma(z)}(\tau(f)) = \Phi_z(\tau(f))$$

i da $\Phi_{\sigma(z)}$ za svako z odredjuje rekurzivan operator. Dakle, moguća je numeracija rekurzivnih operatora na skupu $\mathcal{F}$. □

L I T E R A T U R A

1 Barwise J., Handbook of Mathematical Logic, North-Holland, Amsterdam 1977. (ruski prevod - Nauka, Moskva 1982.)

2 Cutland N.J., Computability: An Introduction to Recursive Function Theory, Cambridge University Press, Cambridge 1980. (ruski prevod - Mir, Moskva 1983.)

3 Maljcev A.I., Algoritmi i rekursivnie funkcii, Nauka, Moskva 1965.

4 Manna Z., Mathematical Theory of Computation, McGraw--Hill, New York 1974.

5 Mijajlović Ž., Marković Z., Došen K., Hilbertovi problemi i logika, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 1986.

6 Rogers H., Theory of Recursive Functions and Effective Computability, Mc Graw-Hill, New York 1967. (ruski prevod - Mir, Moskva 1972.)

7 Zaharov S.D., Ob algebre operatorov perečislenija, Vestn. MGU Mat., meh., 1982. № 5, str.7-11.