Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Matematički fakultet

Univerzitet u Beogradu

Đorđe Čubrić

O STONOVOJ DUALNOSTI

magistarski rad

Beograd, 1988.

Sadržaj

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Uvodne napomene

U ovom radu je dat pregled nekih konstrukcija u kategoriji Bulovih algebri i dualnoj kategoriji Stonovih prostora.

U prvom poglavlju "Osnovni pojmovi" su izložene definicije i stavovi koji će biti korišćeni kroz ceo tekst.

U drugom poglavlju "Stonova teorema" je data ključna teorema za nastanak ove oblasti, takodje su izložene i neke njene posledice.

U trećem poglavlju "Stonova dualnost" su izložene kategorijalne konstrukcije limes i kolimes i data je originalna teorema 3.2.11. o inverznom limesu.

U četvrtom poglavlju "Bulove algebre sa istaknutim filtrom" su svi stavovi originalni, jer Bulove algebre sa istaknutim filtrom i nisu do sada posmatrane kao kategorija.

U petom poglavlju "Podalgebre Bulovih algebri" su dualizovani neki pojmovi i stavovi (5.3. do 5.9.) i dat je jedan kontraprimer za obrat stava 5.2.

Mnogim stavovima koji su deo "folklora" nije pripisan autor, uz neke je navedena literatura u uglastim zagradama što ne znači da je i imenovani autor, dok ime u oblim zagradama ukazuje na autora.

Zahvaljujem se mentoru Žarku Mijajloviću na podstreku i uloženom trudu. Takodje se zahvaljujem Savi Krstiću i Slobodanu Vujoševiću, prvom na pitanju kom je odgovor teorema 3.2.11., a drugom na saradnji u vezi sa 5. poglavljem.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

1. OSNOVNI POJMOVI

U ovom poglavlju će biti date oznake, pojmovi i poznatiji stavovi koji će biti korišćeni kasnije.

1.1. Bulove algebre

Sa $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ ... ćemo označavati algebarske strukture, modele i topološke prostore, a sa A, B, C ... odgovarajuće domene (noseće strukture).

1.1.1. Definicija. Bulova algebra $\mathbf{B} = (B,+,\cdot,',0,1)$ je algebarska struktura koja zadovoljava sledeće zakone:

$x+y = y+x$	$x\cdot y = y\cdot x$
$x+(y\cdot z) = (x+y)\cdot(x+z)$	$x+(y\cdot z) = (x+y)\cdot(x+z)$
$x\cdot 1 = x$	$x+0 = x$
$x\cdot x' = 0$	$x+x' = 1$

Lako se vidi da su asocijativnost, idempotentnost za $\cdot$ i $+$, de Morganovi zakoni... neposredne posledice definicije. Značenja pojmova kao što su: homomorfizam, podalgebra, proizvod algebri, jezgro homomorfizma φ (u oznaci $\ker\varphi$), količnička algebra i kongruencija su uobičajena.

Uvedimo relaciju $\leq$ u datoj Bulovoj algebri na sledeći način: $x \leq y$ akko $x \cdot y = x$. Očigledno je relacija $\leq$ parcijalno uredjenje. Takodje, uvedimo operacije $-$ i Δ na sledeći način:

$x-y = x \cdot y'$ i $x \Delta y = (x-y)+(y-x)$.

Ubuduće ćemo smatrati da Bulova algebra ima bar dva elementa to jest da je $0 \neq 1$.

1.1.2. Definicija. Za datu Bulovu algebru B skup $I \subseteq B$ je ideal akko:

$0 \in I$, $1 \notin I$, ako $x, y \in I$ onda $x+y \in I$,

ako $x \in I$ i $y \leq x$ onda $y \in I$.

Ideal I je maksimalan akko $x \in I$ ili $x' \in I$.

1.1.3. Definicija. $F \subseteq B$ je filtar akko $F' = \{x' \in B: x \in F\}$ je ideal u B. Filtar F je ultrafiltar akko F' je maksimalan ideal.

1.1.4. Teorema. Za svaki filtar F Bulove algebre B i za svaki $x \in B \setminus F$ postoji ultrafiltar $U \subseteq B$ takav da $F \subseteq U$ i $x \notin U$.

Dokaz. Korišćenjem Cornove (Zorn) leme. □

1.1.5. Tvrdjenje. Za svaki homomorfizam $\varphi: A \longrightarrow B$ $\ker\varphi$ je ideal u A. Takodje, svaki ideal $I \subseteq A$ je jezgro nekog homomorfizma.

Dokaz. Dokažimo samo drugi deo tvrdjenja.

$\rho = \{(x,y)\in A\times A\colon x\Delta y\in I\}$ je kongruencija algebre A pa je A/ρ Bulova algebra. Traženi homomorfizam je kanonsko preslikavanje $\varphi\colon A \longrightarrow A/\rho$. □

Umesto A/ρ pisaćemo A/I.

1.2. Stonovi prostori

1.2.1. Definicija. Topološki prostor X je Stonov prostor akko je Hausdorfov (T_2), kompaktan i 0-dimenzion (ima bazu koju čine otvoreno-zatvoreni skupovi).

Pojmovi kao što su: utapanje, homeomorfizam, proizvod i suma topoloških prostora, podprostor... su uobičajeni.

1.2.2 Lema. Neka je $\varphi\colon X \longrightarrow Y$ neprekidna bijekcija izmedju dva kompaktna T_2 topološka prostora. Tada je φ homeomorfizam.

Dokaz. Treba da pokažemo da je φ otvoreno preslikavanje, to jest da za svaki otvoren $U\subseteq X$ $\varphi[U]$ jeste otvoren. Pokažimo najpre da je $Y\setminus\varphi[U]$ kompaktan. Neka V_i $(i\in I)$ čine jedan otvoren pokrivač tog skupa, tada je $\varphi^{-1}[V_i]$ $(i\in I)$ otvoren pokrivač od $X\setminus U$, pa pošto je to takodje kompaktan skup postoji konačan podpokrivač ovog pokrivanja. φ slika tog podpokrivača je konačan podpokrivač početnog pokrivanja, to jest $Y\setminus\varphi[U]$ je kompaktan, dakle zbog osobine T_2 , $\varphi[U]$ je otvoren. □

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

1.2.3. **Definicija.** Kompaktifikacija prostora X je uredjen par (k,K), gde je $k: X \longrightarrow K$ neprekidno preslikavanje, $cl(k[X])=K$ (cl je oznaka za zatvorenje) i X je homeomorfno sa $k[X]$.

Napomena: Zbog homeomorfnosti X sa $k[X]$ preslikavanje k se često izostavlja. Takodje se umesto K piše kX (što je različito od $k[X]$). Nas će zanimati samo kompaktifikacije gde je kX T_2 (očigledno je tada i X T_2).

1.2.4. **Definicija.** U klasi svih kompaktifikacija prostora X se može uvesti relacija ekvivalencije ρ na sledeći način: $k_1X \ \rho \ k_2X$ akko postoji homeomorfizam $f: k_1X \longrightarrow k_2X$ koji je identiteta na X.
Medju tim klasama ekvivalencije se može uvesti relacija $\le$ na sledeći način: $k_1X \le k_2X$ akko postoji neprekidno preslikavanje $f: k_2X \longrightarrow k_1X$ takvo da je $\forall x \in X \ f(x)=x$.
$\le$ je u klasi T_2 kompaktifikacija relacija poretka (kao što je uobičajeno, govorimo o predstavnicima a ne o klasama).

1.2.5. **Teorema.** [Engelking] Ako topološki prostor ima T_2 kompaktifikaciju tada postoji jedinstvena T_2 kompaktifikacija βX takva da za svaki kompaktan T_2 prostor Z i za svako neprekidno $f: X \longrightarrow Z$ postoji neprekidno $F: X \longrightarrow Z$ takvo da $\forall x \in X F(f(x))=x$. $\square$

1.2.6. **Definicija.** Kompaktifikacija βX iz prethodne teoreme se zove Ston-Čehova kompaktifikacija.

1.2.7. Posledica. βX je najveća u klasi svih T_2 kompaktifikacija prostora X. Takodje za dato f i Z kao u teoremi 1.2.5. preslikavanje F je jedinstveno.□

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

2. STONOVA TEOREMA

2.1.Definicija. Neka je B Bulova algebra. Definišimo topološki prostor B^* na sledeći način: nosač od B^* je skup ultrafiltara na B, predbazu čine skupovi oblika $N_a = \{U \in B^*: a \in U\}$, za svako $a \in B$.

2.2.Lema. Ako je B Bulova algebra i ako su $a,b \in B$ tada:

$$N_a \cup N_b = N_{a+b} \qquad N_a \cap N_b = N_{a \cdot b} \qquad (N_a)' = N_{a'}$$

Takodje skupovi N_a čine bazu topološkog prostora B^*.

Dokaz. Dokažimo samo drugu jednakost. $U \in N_a \cap N_b$ akko $a,b \in U$ akko $a \cdot b \in U$ akko $U \in N_{a \cdot b}$. □

2.3.Lema. Skup svih otvoreno-zatvorenih skupova topološkog prostora X čini Bulovu algebru u odnosu na uniju, presek i komplement. Označimo je sa X^*. □

2.4.Teorema (Stone)

1) Neka je B Bulova algebra. Tada je B^* Stonov prostor i B je izomorfno B^{**} izomorfizmom $a \mapsto N_a$.

2) Neka je X Stonov prostor. Tada X^* je Bulova algebra

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

i X je homeomorfno X^{**} homeomorfizmom $x \longmapsto \{N \in X^{*}: x \in N\}$.

Dokaz. 1) B^{*} je T_2 jer za $U \neq V$ iz B^{*} postoji $a \in U \setminus V$ pa po lemi 2.2 $U \in N_a$ i $V \in N_{a'}$, a ove dve okoline su disjunktne.

B^{*} je kompaktan. U suprotnom neka je $(N_a)_{a \in A}$, gde je $A \subseteq B$, neki otvoreni pokrivač. Ako postoji konačan $J \subseteq A$ takav da $\Sigma J = 1$ onda je $(N_a)_{a \in J}$ konačan podpokrivač. Ako takav J ne postoji onda je J sadržano u maksimalnom idealu M po teoremi 1.1.2. M' je ultrafiltar koji ne sadrži nijedno $a \in A$ to jest $(N_a)_{a \in A}$ nije pokrivač.

B^{*} je 0-dimenzion jer su N_a otvoreno-zatvoreni skupovi. Dakle B^{*} jeste Stonov prostor.

Preslikavanje $N: B \longrightarrow B^{**}$ takvo da je $N(a) = N_a$ jeste homomorfizam po lemi 2.2. Neka su $a \neq b$ iz B. Tada postoji ultrafiltar U koji sadrži recimo a i ne sadrži b pa je tada i $N_a \neq N_b$ dakle N je "1-1". Pokažimo još da je "na". Neka je D neki otvoreno-zatvoren skup, pošto je zatvoren podskup kompaktnog skupa i sam je kompaktan, a pošto je otvoren on je unija nekih baznih skupova kojih zbog kompaktnosti možemo odabrati konačno mnogo to jest $D = N_{a_1 + \ldots + a_n}$.

2) X^{*} je Bulova algebra po lemi 2.3. Pokažimo sad da je preslikavanje $\alpha: X \longrightarrow X^{**}$ takvo da $\alpha(x) = \{N \in X^{*}: x \in N\}$ zaista homeomorfizam. Pre svega $\alpha(x)$ jeste ultrafiltar u X^{*}.

α je "1-1" jer je X T_2 i 0-dimenzion.

α je "na" jer je svaka tačka $U \in X^{**}$ ultrafiltar u X^{*} to jest familija otvoreno-zatvorenih skupova u X sa svojstvom

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

konačnog preseka pa zbog kompaktnosti $\cap U\neq\phi$ (neka je $x\in\cap U$).

Dakle $U\subseteq\alpha(x)$, pa pošto su oba ultrafiltri, imamo i jednakost.

α je neprekidno jer za elemenat baze u X^{**}, recimo N_a za neko $a\in X^*$, važi $\alpha^{-1}[N_a] = \{x\in X: a\in\alpha(x)\} = \{x\in X: x\in a\} = a$, a a je otvoreno-zatvoren podskup od X.

Po lemi 1.2.2. α je homeomorfizam. □

2.5 Posledica. Neka je I ideal Bulove algebre B. Tada $(B/I)^*=B^*-U$ gde je U otvoren skup u B^* definsan na sledeći način

$$U=\cup\{a^*: a\in I\}.$$

Takodje, za otvoren podskup U od B^*, B^*-U je Stonov prostor i $(B^*-U)^*=B/I$ gde je I ideal Bulove algebre B definisan ovako

$$I=\{a\in B: a^*\subseteq U\}.$$

Dokaz. U oba slučaja izomorfizam izmedju B/I i Bulove algebre otvoreno-zatvorenih skupova Stonovog prostora $B-U$ je $x/I \mapsto x^*-U$. □

Za dati ideal I na ovakav način odredjen otvoren skup U ćemo označavati sa I^*. Takodje za dati otvoren skup U na ovakav način odredjen ideal I ćemo označavati sa U^*. Lako se vidi da $I^{**}=I$, $U^{**}=U$ pa to i još neki drugi razlozi nam daje za pravo da kažemo da idealima Bulove algebre odgovaraju otvoreni skupovi odgovarajućeg Stonovog prostora i obrnuto. Isto važi za filtre i zatvorene skupove: filtru F pridružujemo zatvoreni skup $F^* = \cap\{x^*: x\in F\}$, a zatvorenom skupu Z pridružujemo filtar $Z^* = \{x\in B: Z\subseteq x^*\}$; takodje važi $Z^{**} = Z$ i $F^{**} = F$. Pošto će nam trebati u 4. poglavlju, pogledajmo dual glavnog

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

filtra F Bulove algebre B generisanog sa a $(F=\{x\in B: a\leq x\})$. $F^* = \cap\{x^*: a\leq x\} = \cap\{x^*: a^*\subseteq x^*\} = a^*$; dakle to je dual generatornog elementa filtra F t.j. dual glavnog filtra je otvoreno zatvoren skup. Isto važi za glavne ideale. U vezi sa ovim javlja se:

1. **Problem.** (Mijajlović) Koji algebarski objekti odgovaraju, u duhu Stonove dualnosti, G_δ i F_σ skupovima?

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

3. Stonova dualnost

3.1. Osnovni pojmovi teorije kategorija

3.1.1. Definicija. Kategorija je unija dve disjunktne klase (zovimo ih klasa objekata i klasa morfizama) sa parcijalno definisanom binarnom, asocijativnom operacijom $\circ$ na klasi morfizama koja zadovoljava sledeće:

(a) postoje dve funkcije p, k iz klase morfizama u klasu objekata, uobičajena oznaka je $f\colon p(f) \longrightarrow k(f)$,

(b) za svaki objekat a postoji morfizam i_a za koji važi $p(i_a) = k(i_a) = a$ i za svaki morfizam za koji je $p(f) = a$ $(k(f) = a)$, $f \circ i_a = f$ $(i_a \circ f = f)$

(c) pomenuta operacija je definisana tačno za one morfizme f, g za koje $k(f) = p(g)$.

Nas će najviše zanimati kategorije Bool koju čine sve Bulove algebre kao klasa objekata i homomorfizmi medju njima kao klasa morfizama sa operacijom $\circ$ definisanom prirodno: $f \circ g = h$ akko $f(g(b)) = h(b)$ za svako $b \in p(g)$ (naravno $p(f) = A$, $k(f) = B$ akko $f\colon A \longrightarrow B$) i kategorija Stone koju čine Stonovi prostori i neprekidna preslikavanja medju njima.

3.1.2. Definicija. Preslikavanje Ψ iz kategorije A u

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

kategoriju B koje slika objekte prve kategorije u objekte druge i morfizme u odgovarajuće morfizme, t.j. tako da prolazi kroz p, k iz 3.1.1. je kovarijantni (kontravarijantni) funktor akko $\varphi(f\circ g) = \varphi(f)\circ\varphi(g)$ ($\varphi(f\circ g) = \varphi(g)\circ\varphi(f)$).

Važan primer funktora je zaboravni (forgetful) funktor (funktor koji ne prenosi strukturu objekata), na primer φ: Bool$\longrightarrow$Set gde je **Set** kategorija svih skupova i svih preslikavanja medju njima takav da za objekat $B\in$Bool $\varphi(B)=B$ a na morfizmima je identiteta.
Takodje identiteta I_A na datoj kategoriji A je funktor.

3.1.3. Definicija. Prirodna transformacija φ izmedju dva funktora φ_1,φ_2: A$\longrightarrow$B je preslikavanje iz objekata od A u morfizme od B tako da $\varphi(a)$: $\varphi_1(a)\longrightarrow\varphi_2(a)$ za svaki objekat a iz A i za svako f: a$\longrightarrow$b u A važi da:

$$\varphi_2(f)\circ\varphi(a)=\varphi(b)\circ\varphi_1(f):\ \varphi_1(a)\longrightarrow\varphi_2(b).$$

Ukoliko je $\varphi(a)$ invertibilno u B za svako a, kažemo da je φ prirodni izomorfizam i pišemo φ: $\varphi_1\cong\varphi_2$.

3.1.4. Definicija. Kategorije A i B su ekvivalentne (koekvivalentne) ako postoje kovarijantni (kontravarijantni) funktori P: A$\longrightarrow$B, Q: B$\longrightarrow$A takvi da $P\circ Q\cong I_B$ i $Q\circ P\cong I_A$.

3.1.5. Teorema. Kategorije Bool i Stone su koekvivalentne.

Dokaz. Ovo je u stvari ponovo iskazana Stonova teorema □

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

3.2. Limesi i kolimesi

U ovom odeljku ćemo posmatrati dve veoma opšte kategorijalne konstrukcije: limes (koji se ponekad naziva inverzan limes) i kolimes (direktan limes). Kao specijalni slučajevi dobijaju se neke druge poznate kategorijalne konstrukcije.

3.2.1. Definicija. Dijagram D u kategoriji C je ma koji podskup objekata iz C i nekih morfizama medju njima.
Napomenimo da D može biti i prazno.

3.2.2. Definicija. Konusom dijagrama D se naziva objekat c iz C zajedno sa morfizmima $f_i\colon c \to d_i$ za svaki objekat d_i iz D tako da za svaki D-morfizam $f\colon d_i \to d_j$ važi $f \circ f_i = f_j$.
Konus dijagrama D ćemo označavati sa $\langle f_i\colon c \to d_i \rangle$.

3.2.3. Definicija. Limes dijagrama D je D-konus $\langle f_i : c \to d_i \rangle$ takav da za svaki drugi D-konus $\langle f_i'\colon c' \to d \rangle$ postoji jedan jedini C morfizam f tako da za svako d_i iz D sledeći dijagrami komutiraju:

$$\begin{tikzcd} & d_i & \\ c \arrow[ur, "f_i"] & & c' \arrow[ul, "f_i'"'] \arrow[ll, "f"] \end{tikzcd} \qquad f_i \circ f = f_i'$$

Limes dijagrama D ćemo označavati sa $\varprojlim D$ i kažemo da $\varprojlim D$ ima svojstvo univerzalnosti medju svim D-konusima.

Primeri. Neka je dat dijagram D u kategoriji C. Ukoliko postoji $\varprojlim D$ imamo sledeće specijalne slučajeve:

3.2.4. Terminalni objekat. Kada je D prazno, $\varprojlim D$ je terminalni objekat, to jest takav objekat t da za svaki objekat c postoji jedinstvn morfizam $f: c \longrightarrow t$.
U kategoriji Bool terminalni objekat ne postoji a u kategoriji Stone to je 1 (prostor sa jednom tačkom).

3.2.5. Ekvilajzer. Kada se D sastoji iz dva objekta a, b i dveju strelica medju njima f, g, tada je $\varprojlim D$ univerzalan medju svim D-konusima koji sadrže objekat c i strelice h, e takve da sledeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "e"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \end{tikzcd}$$

dakle $f \circ e = h = g \circ e$ pa se ovo h obično izostavlja. Označavaćemo ga sa $Ek(f,g)$.
U kategoriji Bool ekvilajzer čine $c = \{x \in a : f(x) = g(x)\}$ (dakle podalgebra od a) i inkluzija. U kategoriji Stone na isti način odredjujemo ekvilajzer.

3.2.6. Proizvod. Kada je dijagram D skup objekata (bez ikakvih strelica) onda dobijamo da je $\varprojlim D$ univerzalan medju konusima koje čine objekat c i morfizmi $f_i: c \longrightarrow d_i$ za svako d_i iz D i označavaćemo ga sa $\prod_{d \in D} d$. Morfizme f_i zovemo projekcije.
U kategorijama Bool i Stone proizvod je uobičajeni proizvod algebarskih struktura, odnosno topoloških prostora.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

3.2.7. **Inverzan limes.** Neka je $(I,\leq)$ prema gore usmeren skup. Kada je D dijagram čiji su objekti indeksirani ovim usmerenim skupom takav da: (a) $i\leq j$ akko postoji tačno jedan D-morfizam $f_{ij}: d_j \longrightarrow d_i$ (b) f_{ii} je identiteta (c) skup D-morfizama je zatvoren za kompozicju; $\varprojlim D$ se naziva inverzan limes. Dakle to je D-konus univerzalan medju D-konusima $\langle f_i: c \longrightarrow d_i \rangle$ sa sledećom osobinom: za svako $i \leq j$ $f_{ij} \circ f_j = f_i$.

Pre nego što pokažemo da su kategorije Bool i Stone zatvorene za inverzan limes dokažimo teoremu o zatvorenosti kategorije za proizvoljan limes (kompletnost kategrije).

3.2.8. **Teorema.** [MacLane] Ako je kategorija C zatvorena za proizvode i ekvilajzere onda je ona zatvorena i za proizvoljne limese.

Dokaz. Neka je dat dijagram D konstruišimo $\varprojlim D$. Označimo sa $P=\prod_{d\in D} d$ i sa $Q=\prod_{f\in D} k(f)$ (podsetimo se $k(f)$ je u stvari kodomen od f). Pošto je $k(f)$ takodje u D imamo projekcije $p_{k(f)}: P \longrightarrow k(f)$ za svako f iz D pa pošto je Q univerzalan medju takvim konusima imamo jedinstveno preslikavanje $p:P \longrightarrow Q$ takvo da $q_{k(f)} \circ p = p_{k(f)}$ za svako f iz D. Takodje za svako f iz D postoji preslikavanje $f \circ p_{i(f)}: P \longrightarrow k(f)$ i opet dobijamo jedinstveno preslikavanje $q: P \longrightarrow Q$ tako da važi $q_{k(f)} \circ q = f \circ p_{p(f)}$. Dokažimo da je $\varprojlim D = \langle f_d: c \longrightarrow d \rangle$ gde je c objekat od $Ek(p,q)$, a $f_d = p_d \circ e$ gde je p_d projekcija od P a e morfizam od $Ek(p,q)$. Zaista $\langle f_d: c \longrightarrow d \rangle$ jeste konus jer za svaki

D-morfizam $f\colon p(f)\longrightarrow k(f)$ važi $f\circ f_{p(f)}=f_{k(f)}$ zbog toga što je

$$f\circ f_{p(f)}=f\circ p_{p(f)}\circ e=q_{k(f)}\circ q\circ e$$

$$f_{k(f)}=p_{k(f)}\circ e=q_{k(f)}\circ p\circ e$$

i e je morfizam iz $Ek(p,q)$ t.j. $p\circ e=q\circ e$.

Univerzalnost D-konusa $\langle f_d\colon c\longrightarrow d\rangle$ sledi iz univerzalnosti $Ek(p,q)$ i P. To jest kada bi smo imali neki drugi D-konus $\langle g_d\colon b\longrightarrow d\rangle$ (dakle $f\circ g_{p(f)}=g_{k(f)}$ za svaki D-morfizam f), tada bi imali zbog univerzalnosti P jedinstven morfizam $g\colon b\longrightarrow P$ takav da (1) $p_d\circ g=g_d$. Takodje zbog univerzalnosti Q imamo jedinstven morfizam $G : b\longrightarrow Q$ tako da važi $q_{k(f)}\circ G=g_{k(f)}$. Pokažimo da iz ovoga sledi $p\circ g = G = q\circ g$; naime:

$$q_{k(f)}\circ(p\circ g) = p_{k(f)}\circ g = g_{k(f)}$$

$$q_{k(f)}\circ(q\circ g) = f\circ p_{p(f)}\circ g = f\circ g_{p(f)} = g_{k(f)}.$$

Dakle jeste $p\circ g=q\circ g$. Zbog univerzalnosti $Ek(p,q)$ imamo da postoji jedinstven morfizam $H\colon b\longrightarrow c$ tako da važi (2) $e\circ H=g$. Množenjem sleva sa p_d imamo $p_d\circ e\circ H=p_d\circ g$ t.j. $f_d\circ H=g_d$. Dakle H jeste morfizam koji razlaže D-konus $\langle g_d\colon b\longrightarrow d\rangle$ na D-konus $\langle f_d\colon c\longrightarrow d\rangle$, dokažimo da je takvo H jedinstveno: kada bi neko $T\colon b\longrightarrow c$ tako da $f_d\circ T=g_d$ t.j. $p_d\circ e\circ T=g_d$, pošto $e\circ T\colon b\longrightarrow P$ iz (1) sledi $e\circ T=g$, iz istog razloga je i $e\circ H=g$. Iz (2) imamo $H=T$, dakle dokazali smo i univerzalnost D-konusa $\langle f_d\colon c\longrightarrow d\rangle$.□

3.2.9 Posledica. Kategorije Bool i Stone su zatvorne za neprazne limese.□

3.2.10. Posledica. Neka je dijagram D inverzna familija kao u primeru 3.2.7. Tada se objekat C konusa $\varprojlim D$ u kategoriji

Bool (Stone) dobija kao podalgebra (podprostor) od objekta $\prod_{d\in D} d$ takva da $x\in C$ akko $f_{ij}(x_j)=x_i$ za svaki D-morfizam f_{ij}, a morfizmi konusa $\varprojlim D$ su restrikcije projekcija.□

U literaturi postoje mnoge konstrukcije inverznog limesa, ali za kategoriju Bool ima navedeno samo par trivijalnih primera. Jednu netrivijalnu, u algebri uobičajenu konstrukciju, daje sledeća teorema.

3.2.11. Teorema. Inverzan limes inverzne familije konačnih faktora date Bulove algebre B je izomorfan 2^k gde je k broj ultrafiltara u B.

Napomene:

(1) Familija konačnih faktora date Bulove algebre B je za nas dijagram D koji čine:

i. D-objekti su B/I, $I\in U$, gde je skup indeksa $U=\{I \text{ ideal u } B: |B/I|<\omega\}$ usmeren skup u odnosu na relaciju nadskup ($I\leq J$ akko $J\subseteq I$). (Usmerenost skupa U proizilazi iz postojanja injektivne funkcije $f: B/I\cap J\longrightarrow B/I\times B/J$, pa je i $|B/I\cap J|<\omega$ t.j. $I\cap J\in U$.)

ii. D-morfizmi su f_{IJ}: $B/J\longrightarrow B/I$ za $I\leq J$ prirodna preslikavanja t.j. $f_{IJ}(b/J)=b/I$. Očigledno su f_{IJ} dobro defnisani homomorfizmi takodje trivijalno je f_{II} identiteta i $f_{IJ}\circ f_{JK}=f_{IK}$ za $I\leq J\leq K$ kao što se i traži u 3.2.7.

(2) Ako je B konačno teorema važi, te od sad podrazumevajmo beskonačnost Bulove algebre B.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Dokaz. Počnimo sa lemama koje će bliže opisati dijagram D.

Lema 1. Neka je $n\in\omega$. Tada:

$B/I\cong 2^n$ akko postoji n različitih maksimalnih ideala $I_1,\dots,I_n$ u B takvih da je $I=I_1\cap\dots\cap I_n$.

Dokaz. ($\leftarrow$) $|B/I|\leq|B/I_1|\cdot\ldots\cdot|B/I_n|=2^n$ kao u napomeni (1). Da važi i obrnuta nejednakost dokazujemo na osnovu sledećeg:

(a) $I_1^{\alpha_1}\cap\dots\cap I_n^{\alpha_n}\neq\emptyset$, $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\{0,1\}$, gde je $I^0=I$, a $I^1=I'$ (za svaka dva maksimalna ideala postoji elemenat koji ih razlikuje. Označimo sa $a_i\in I$ i $a_i\notin I_i$, očigledno $a_1\vee\dots\vee a_i\in I\cap I_1'\dots\cap I_k'$, ako bi bilo više ovakvih I uzeli bi smo konjunkciju ovakvih disjunkata).

(b) Neka je $a_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}\in I_1^{\alpha_1}\cap\dots\cap I_n^{\alpha_n}$. Tada:

$(\alpha_1\dots\alpha_n)\neq(\alpha_1'\dots\alpha_n')\longrightarrow a_{(\alpha_1\dots\alpha_n)}\Delta a_{(\alpha_1'\dots\alpha_n')}\notin I_1\cap\dots\cap I_n$.

(Jer iz $(\alpha_1\dots\alpha_n)\neq(\alpha_1'\dots\alpha_n)$ imamo $a_{(\alpha_1\dots\alpha_n)}\in I_i$ i $a_{(\alpha_1'\dots\alpha_n')}\notin I_i$, za neko $i\in\{1,\dots,n\}$; pa kad bi i

$$a_{(\alpha_1\dots\alpha_n)}\Delta a_{(\alpha_1'\dots\alpha_n')}\in I_i$$

tada $\quad a_{(\alpha_1\dots\alpha_n)}\vee(a_{(\alpha_1\dots\alpha_n)}\Delta a_{(\alpha_1'\dots\alpha_n')})\in I_i$

pa je $\quad a_{(\alpha_1\dots\alpha_n)}\vee a_{(\alpha_1'\dots\alpha_1')}\in I_i$

što povlači $a_{(\alpha_1'\dots\alpha_n')}\in I_i$ a to je kontradikcija.)

($\longrightarrow$) Neka je $g_I\colon B\longrightarrow B/I\cong 2^n$ kanonsko preslikavanje i neka su $k_i\colon B/I\longrightarrow 2$, $i\in\{1,\dots,n\}$, kanonska preslikavanja dobijena sečenjem 2^n po njenim maksimalnim idealima. Primetimo da je $\ker(k_i\circ g_I)$ maksimalni ideal Bulove algebre B. Pokažimo da je $\ker g_I=\ker(k_1\circ g_I)\cap\dots\cap\ker(k_n\circ g_I)$ pa pošto su $k_i\circ g\neq k_j\circ g$ to će nam dati kraj dokaza leme 1. Očigledno važi $\subseteq$, dokažimo još

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$\supseteq$: Pretpostavimo da $b\notin \ker g_I$ t.j. $g_I(b)\neq 0$. Tada postoji maksimalan ideal u 2^n, recimo I_i, koji ne sadrži $g_I(b)$ pa je $(k_i\circ g_I)(b)\neq 0$ t.j. $b\notin \ker(k_i\circ g_I)$.□

Lema 2. Neka su I_i, J_j, $i\in\langle 1,\dots,k\rangle$, $j\in\langle 1,\dots,n\rangle$, maksimalni ideali u B. Tada:

$$I_1\cap\dots\cap I_k=J_1\cap\dots\cap J_n \longrightarrow (\forall i\exists j\ I_i=J_j\ \&\ \forall j\exists i\ I_i=J_j).$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno t.j. (na primer) $\forall j\ I_1\neq J_j$. Tada

$$\forall j\exists a_j\ a_j\in I_1\ \&\ a_j'\in J_j \longrightarrow$$
$$\forall j\ a_1\vee\dots\vee a_n\in I_1\ \&\ a_1'\wedge\dots\wedge a_n'\in J_j \longrightarrow$$
$$a_1\vee\dots\vee a_n\in I_1\ \&\ (a_1\vee\dots\vee a_n)'\in J_1\cap\dots\cap J_n \longrightarrow$$
$$a_1\vee\dots\vee a_n\in I_1\ \&\ (a_1\vee\dots\vee a_n)'\in I_1$$

što je kontradikcija.□

Za ideal $I\in U$ jednakost $I=I_1\cap\dots\cap I_n$, gde su I_i jednoznačno odredjeni maksimalni ideali, zovimo kanonski zapis ideala I.

Lema 3. Neka su $I\lesssim J$ iz U. Tada:

$$2|B/I|<|B/J| \longrightarrow \exists K\in U\ I<K<J.$$

Dokaz. Pokažimo najpre da iz $I\lesssim J$ sledi da je $J=I\cap J_{i_1}\cap\dots\cap J_{i_m}$ za neke maksimalne ideale $J_{i_1},\dots,J_{i_m}$ Bulove algebre B. Naime neka su $I=I_1\cap\dots\cap I_n$, $J=J_1\cap\dots\cap J_k$ kanonski zapisi ideala I, J. Pošto je $I\lesssim J$ t.j. $J\subseteq I$ imamo:

$$J\cap I=I_1\cap\dots\cap I_n\cap J_1\cap\dots\cap J_k=J_1\cap\dots\cap J_k=J$$

pa po lemi 2. svi I_i su neki od J_j; oni preostali J_j ideali su baš $J_{i_1},\dots,J_{i_m}$.

Pošto je $2|B/I|<|B/J|$ imamo da je $m\geq 2$, pa je:

$$I=I_1\cap\ldots\cap I_n\supset I_1\cap\ldots\cap I_n\cap J_{i_1}\supset I_1\cap\ldots I_n\cap J_{i_1}\cap\ldots\cap J_{i_m}=J.$$

(Znak $\supset$ označava pravi podskup.) Traženi ideal K je $I_1\cap\ldots\cap I_n\cap J_{i_1}$.□

Radi lakšeg rada D-morfizme f_{IJ} $(I\leq J)$ označimo sa $f\langle{a_1\ldots a_n \atop b_1\ldots b_m}\rangle$, gde je $I=I_{b_1}\cap\ldots\cap I_{b_m}$ i $J=J_{a_1}\cap\ldots\cap J_{a_n}$ kanonski zapisi ideala I, J, te je $\langle b_1,\ldots,b_m\rangle\subseteq\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$. U novim oznakama D-morfizmi izgledaju ovako:

$$f\langle{a_1\ldots a_n \atop b_1\ldots b_m}\rangle(x/J_{a_1}\cap\ldots\cap J_{a_n})=x/I_{b_1}\cap\ldots\cap I_{b_m}.$$

Najzad, predjimo na dokaz same teoreme.

Neka je k broj ultrafiltara Bulove algebre B. Pokažimo da Bulova algebra 2^k zajedno sa morfizmima

$$F_{\langle a_1\ldots a_n\rangle}:\ 2^k\longrightarrow B/I_{a_1}\cap\ldots\cap I_{a_n}$$

definisanim za svaki $I=I_{a_1}\cap\ldots\cap I_{a_n}$ iz U na sledeći način: $F_{\langle a_1\ldots a_n\rangle}(g)=b/I$ gde je $b\in I_{a_i}$ akko $\pi_{a_i}(g)=0$; jeste $\underleftarrow{\lim}D$. (π_i je i-ta projekcija.)

Pre svega $F\langle a_1\ldots a_n\rangle$ su dobro definisani homomorfizmi. Zatim:

(1) 2^k zajedno sa preslikavanjima $F\langle\ldots\rangle$ čini D-konus. To znači da za svaka dva $\langle b_1,\ldots,b_j\rangle\subseteq\langle a_1,\ldots,a_i\rangle$ konačna podskupa od k važi:

$$f\langle{a_1\ldots a_i \atop b_1\ldots b_j}\rangle\circ F_{\langle a_1\ldots a_i\rangle}=F_{\langle b_1\ldots b_j\rangle}.$$

Ova jednakost se proverava neposredno.

(2) Da je ovaj D-konus univerzalan medju svim D-konusima se proverava na sledeći način:

Neka je dat neki drugi D-konus $\langle G_{\langle a_1\ldots a_n\rangle}:A\longrightarrow B/I_{a_1}\cap\ldots\cap I_{a_n}\rangle$.
Pokažimo najpre da ne postoje dva homomorfizma $h: A\longrightarrow 2^k$ takva da za svaki konačan podskup $\langle a_1,\ldots,a_i\rangle$ od k važi:

(*) $$F_{\langle a_1\ldots a_i\rangle}\circ h=G_{\langle a_1\ldots a_i\rangle}.$$

Pretpostavimo suprotno t.j. neka postoje dva takva morfizma h i r. Pošto je $h\neq r$ postoji $a\in A$ tako da $h(a)\neq r(a)$, pa postoji j takvo da je $\pi_j(h(a))\neq\pi_j(r(a))$. Zbog (*) važi $F_{\langle j\rangle}(h(a))=G_{\langle j\rangle}(a)=F_{\langle j\rangle}(r(a))$ pa odatle po definiciji $F_{\langle j\rangle}$ imamo $\pi_j(h(a))=\pi_j(r(a))$ što je kontradikcija.

(2) Konstruišimo sad jedno takvo h. Neka je $\pi_i\circ h=G_{\langle i\rangle}$.

Pokažimo najpre da je h homomorfizam:

i. $\pi_i(h(a'))=G_{\langle i\rangle}(a')=(G_{\langle i\rangle}(a))'=(\pi_i(h(a)))'=\pi_i((h(a))')$ dakle h prolazi kroz komplement;

ii. Slično za $\vee$.

Pokažimo zatim da $F_{\langle i\rangle}(h(a))=G_{\langle i\rangle}(a)$ za $\forall i<k$. Zaista po definiciji $F_{\langle i\rangle}$ imamo $F_{\langle i\rangle}(h(a))=b/I_i$ gde je $\pi_i(h(a))=0$ akko $b\in I_i$, a po definiciji h $G_{\langle i\rangle}(a)=0$ akko $b\in I_i$, pa je $G_{\langle i\rangle}(a)=0$ akko $F_{\langle i\rangle}(h(a))=0$ jer je kodomen od $F_{\langle i\rangle}$ i $G_{\langle i\rangle}$ dvočlan.

I najzad pokažimo da važi i opšti slučaj t.j. $F_{\langle a_1\ldots a_i\rangle}\circ h=G_{\langle a_1\ldots a_i\rangle}$, za svaki konačan podskup $\langle a_1,\ldots,a_i\rangle$ od k:

(a) Iz definicije preslikavanja $F_{\langle\ldots\rangle}$ proizilazi:

$$\forall x\in 2^k\ F_{\langle a_1\ldots a_n\rangle}(x)=\bigcap_{\alpha\in\langle a_1\ldots a_n\rangle}F_{\langle\alpha\rangle}(x).$$

(b) Takodje iz (a) i malopre dokazanog za $F_{\langle i\rangle}$ i $G_{\langle i\rangle}$ imamo:

$$\forall x\in A\ F_{\langle a_1\ldots a_n\rangle}(h(x))=\bigcap_{\alpha\in\langle a_1\ldots a_n\rangle}G_{\langle\alpha\rangle}(x).$$

(c) Sa druge strane za D-morfizme $f\langle\vdots\vdots\vdots\rangle$ važi:

$$f\langle{}^{a_1\ldots a_i}_{b_1\ldots b_j}\rangle(x)=\bigcap_{\alpha\in\{b_1\ldots b_j\}} f\langle{}^{a_1\ldots a_n}_{\ \ \alpha}\rangle(x).$$

(d) Pošto su $G_{\langle\ldots\rangle}$ morfizmi nekog D-konusa $\forall x\in A$ imamo:

$$G_{\langle a_1\ldots a_n\rangle}(x)=f\langle{}^{a_1\ldots a_n}_{a_1\ldots a_n}\rangle(G_{\langle a_1\ldots a_n\rangle}(x))=$$

$$\bigcap_{\alpha\in\langle a_1\ldots a_n\rangle} f\langle{}^{a_1\ldots a_n}_{\ \ \alpha}\rangle(G_{\langle a_1\ldots a_n\rangle}(x))=$$

$$\bigcap_{\alpha\in\langle a_1\ldots a_n\rangle} G_{\langle\alpha\rangle}(x).$$

(e) Iz (b) i (d) proizilazi ono što smo i hteli:

$$F_{\langle a_1\ldots a_n\rangle}\circ h=G_{\langle a_1\ldots a_n\rangle}.$$

Ovim je i završen dokaz teoreme 3.2.11.□

Konstrukcija u kojoj su strelice obrnute od onih u konstrukciji limesa se naziva kolimes.

3.2.12. Definicija. Kokonus dijagrama D (D-kokonus) u kategoriji C se naziva C-objekat c i skup C-morfizama f_d: d⟶c za svaki D-objekat d tako da za svaki D-morfizam f važi $f_{k(f)}\circ f=f_{p(f)}$ (obeležavaćemo ga na sličan način kao i konus t.j. $\langle f_d$: d⟶c$\rangle$).

3.2.13. Definicija. Kolimes dijagrama D u kategoriji C je D-kokonus $\langle f_d$: d⟶c $\rangle$ kouniverzalan za sve ostale D-kokonuse t.j. ako je $\langle g_d$: d⟶b $\rangle$ D-kokonus tada postoji jedinstven C-morfizam f: c⟶b tako da $f\circ f_d=g_d$ (i obeležavaćemo ga sa $\underrightarrow{\lim}D$).

Sledeće očigledno tvrdjenje zbog njegove važnosti izdvojimo u posebnu teoremu.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

3.2.14. Teorema. Za dati dijagram D kovarijanni funktor φ: A$\longrightarrow$B slika D-konus u φ(D)-konus (isto i za D-kokonus), dok kontravarijantni funktor φ preslikava D-konus u φ(D)-kokonus i obrnuto.

Takodje ako su kategorije A i B koekvivalentne i φ: A$\longrightarrow$B koekvivalencija medju njima tada je $\varphi(\underrightarrow{\lim}\, D)=\underleftarrow{\lim}\,\varphi(D)$ i obrnuto (ekvivalencije ne obrću strelice).□

Sada možemo pogledati iste primere dijagrama i videti koje kolimese daju kao što smo uradili u slučaju limesa.

Primeri. Neka je dat dijagram D u kategoriji C, ukoliko postji $\underrightarrow{\lim}$D on u sledećim specijalnim slučajevima daje:

3.2.15. Inicijalni objekat. Kada je D prazno $\underrightarrow{\lim}$D je C-objekat i takav da za svaki C-objekat a postoji jedinstven C-morfizam f: i$\longrightarrow$a.

U Bool je to 2 a u Stone ne postoji.

3.2.16. Koekvilajzer. Za D koji čine f,g: a$\longrightarrow$b $\underrightarrow{\lim}$D čine objekat c i preslikavanje k: b$\longrightarrow$c tako da k∘f=k∘g i još je kouniverzalan.

U Bool c je b/I a k je kanonski homomorfizam gde je I najmanji ideal u b generisan skupom $\{f(x)\Delta g(x)\colon x\in a\}$. U kategoriji Stone je zbog dualnosti sa Bool zgodnije koekvilajzer izraziti kao dual ekvilajzera u Bool.

3.2.17. Koproizvod Ako je D skup objekata (bez ikakvih strelica) onda se $\underrightarrow{\lim}D$ naziva koproizvod. Postoje i mnogi drugi nazivi: direktna suma, slobodan proizvod...i obeležava se obično sa $\coprod_{d\in D} d$.

U Bool to je slobodan proizvod Bulovih algebri.

3.2.18. Tvrdjenje. [Sikorski] Bulova algebra B je slobodan proizvod Bulovih algebri A_i, $i\in I$ akko su:

a) A_i podalgebre od B,

b) B je generisano sa $\bigcup_{i\in I} A_i$ i

c) Bulove algebre A_i su nezavisne t.j. za $a_i\in A_i\setminus\{0\}$ $a_{1i}\wedge\ldots\wedge a_{ni}\neq 0$. □

3.2.19. Posledica. Koproizvod k četvoročlanih Bulovih algebri je slobodna algebra nad k slobodnih generatora; Stonov dual joj je dekartov proizvod k kopija dvočlanih diskretnih skupova (Kantorov (Cantor) prostor).

Dokaz. Za k slobodnih generatora uzmimo po jedan element različit od 0 i 1. Ukoliko ih preslikamo u neku Bulovu algebru B odredili smo i homomorfizme iz četvoročlanih Bulovih algebri u B pa pošto je koproizvod univerzalan medju takvima postoji homomorfizam iz koproizvoda u B koji proširuje polazno preslikavanje, dakle ovakav koproizvod je slobodna Bulova algebra. Drugi deo tvdjenja sledi iz teoreme 3.2.14. naime:

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

$$(\coprod_{i<k} 4_i)^* = \prod_{i<k} 4_i^* = 2^k.$$

Gde 4 označava četvoročlanu Bulovu algebru a 2 dvočlan diskretan skup. □

U Stone koproizvod je $\beta(\cup\{d: d\in D\})$ t.j. Ston-Čehova kompaktifikacja disjunktne unije prostora iz D.

3.2.20. Posledica. Neka je $fin=\{A\subseteq\omega: |A|<\omega\}$. Tada je $(P(\omega)/fin)^*=\beta\omega-\omega$. (Prvi znak ω sa desne strane jednakosti označava diskretni topološki prostor sa ω elemenata, drugi znak ω sa desne strane jednakosti se koristi kao oznaka za sliku pri kanonskom utapanju diskretnog prostora ω u vlastitu Ston Čehovu kompaktifikaciju.)

Dokaz. Pošto je fin ideal Bulove algebre $P(\omega)$ to imamo na osnovu 2.5.

$$(P(\omega)/fin)^* = P(\omega)^* - fin^*$$

pa pošto je na osnovu 3.2.14. i 3.2.17.

$$P(\omega)^* = (2^\omega)^* = \beta(\coprod_\omega 2^*) = \beta(\coprod_\omega 1) = \beta\omega$$

i $fin^*=\{p\in\beta\omega: p\cap fin\neq\emptyset\}=\{p\in\beta\omega: p \text{ je glavni filtar}\}$ pa je fin^* skup izolovanih tačaka u $\beta\omega$ to jest $fin^*=\omega$. □

3.2.21. Direktan limes. Neka je D koekvivalentan dijagramu iz 3.2.7. t.j. D-objekti su indeksirani prema gore usmerenim skupom $(I,\leq)$, a za D-morfizme važi sledeće: (1) $i\leq j$ akko $\exists! f_{ij}: d_i\longrightarrow d_j$, (2) f_{ii} je identiteta (3) skup D-morfizama je zatvoren za kompoziciju; $\varinjlim D$ je D-kokonus univerzalan medju

D-kokonusima $\langle f_i : d_i \longrightarrow c\rangle$ takvim da za $\forall i \leq j$ $f_j \circ f_{ij} = f_i$.

Zbog koekvivalentnosti kategorija Bool i Stone imamo i mogućnost nalaženja direktnog limesa u njima kao duala odgovarajućeg inverznog limesa.

Teorema dualna teoremi 3.2.8. nam daje jedan kriterijum kokompletnosti neke kategorije:

3.2.22. Teorema. Kategorija zatvorena za koekvilajzere i koproizvode je zatvorena i za proizvoljne limese.□

3.2.23. Posledica Bool i Stone su zatvorene za neprazne kolimese.□

Za razliku od inverznog limesa u literaturi [Gratzer] se mogu naći primeri direktnog limesa lako prenosivi u kategoriju Bool, na primer:

3.2.24. Tvrdjenje. Neka je D dijagram koji čine sve konačno generisane podalgebre algebarske strukture A sa odgovarajućim inkluzijama kao D-morfizmima. Tada je $\underrightarrow{\lim} D = A$ (morfizme koji su inkluzije zanemarujemo)□

3.2.25. Posledica. Svaka Bulova algebra je direktan limes svojih konačnih podalgebri; svaki Stonov prostor je inverzan limes svojih konačnih neprekidnih slika.□

3.2.26. Tvrdjenje. Neka je F filtar u $P(I)$ i neka je $\{A_i : i\in I\}$ klasa algebri. Za $H\in F$ neka je $A_H=\prod\langle A_i : i\in H\rangle$ i neka za $H\supseteq K$ iz F, $\varphi_{HK}: A_H\longrightarrow A_K$ budu prirodni homomorfizmi. Ukoliko sa D označimo dijagram koji čine algebre A_H i homomorfizmi φ_{HK} onda je redukovani proizvod $\prod A_i/F=\varinjlim D$ (opet zanemarujući morfizme).□

3.2.27. Posledica. $2^\omega/fin$ je direktan limes familije konačnih Bulovih algebri. $\beta\omega-\omega$ je inverzan limes familije konačnih Stonovih prostora.□

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

4. Bulove algebre sa istaknutim filtrom

U ovom poglavlju ćemo posmatrati Bulove algebre sa istaknutim filtrima ili idealima t.j. jezik Bulovih algebri proširimo sa unarnim relacijskim znacima F_k, I_j, $k \in K$ i $j \in J$, a teoriji Bulovih algebri dodajmo sledeće rečenice:

$$\forall x,y[(F_k(x) \& y \geq x \longrightarrow F_k(y)) \ \& \ (F_k(x) \& F_k(y) \longrightarrow F_k(x \cdot y))]$$

$$\forall x,y[(I_j(x) \& y \leq x \longrightarrow I_j(y)) \ \& \ (I_j(x) \& I_j(y) \longrightarrow I_j(x+y))]$$

Dakle F_k interpretirajmo kao filtre a I_j kao ideale Bulove algebre. Dozvoljavamo neprave filtre-cele Bulove algebre, takodje i neprave ideale.

O ovakvim strukturama postoji nekoliko radova i uglavnom se tiču odlučivosti i nekih model-teoretskih svojstava; opširnija bibliografija se može naći u [Pal'chunov]. Mi ćemo se zanimati za neka kategorijalna svojstva ovih teorija.

Za sledeća tvrdjenja ništa se ne menja ako radimo samo sa jednom dodatnom unarnom relacijom, recimo F i odgovarajućom rečenicom. Takodje koristićemo istu oznaku za znak relacije kao i za njenu interpretaciju; oznaka (A,F) označavaće Bulovu algebru A sa istaknutim filtrom F.

4.1. Definicija. Kategorija Bulovih algebri sa istaknutim filtrom (u oznaci BoolF) je za nas kategorija čiju klasu

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

objekata čine Bulove algebre sa istaknutim filtrom a morfizmi su homomorfizmi modela t.j. $f:(A,U)\longrightarrow(B,V)$ je BoolF-morfizam akko $f:A\longrightarrow B$ je homomorfizam algebri i $f[U]\subseteq V$. (Očigledno je definicija korektna.)

4.2. Teorema. Kategorija BoolF je kompletna (t.j. zatvorena za neprazne limese).

Dokaz. Dokažimo da je zatvorena za neprazne direktne proizvode i ekvilajzere pa će na osnovu teoreme 3.2.8. proizilaziti i ova teorema.

Zatvorenost za neprazan direktan proizvod:

Neka dijagram $D\subseteq$BoolF čine objekti (A_i,F_i), $i\in I$, a skup morfizama je prazan. Tada $\varprojlim D$ je konus koji čine direktan proizvod modela $(\prod_{i\in I}A_i,F)$ ($\prod_{i\in I}A_i$ je direktan proizvod algebri, a $x\in F$ akko $\forall i(x_i\in F_i)$), a morfizmi ovog konusa su projekcije. Očigledno ovo je D-konus koji pripada BoolF; univerzalnost proizilazi iz univerzalnosti u Bool tog istog modela zanemarujući relacijski znak.

Zatvorenost za ekvilajzere:

Neka je f,g: $(A,U)\longrightarrow(B,V)$ dijagram D u BoolF. Lako se vidi da je (C,W) gde je C podalgebra od A definisana kao u 3.2.5. a $W=C\cap U$, sa inkluzijom kao morfizmom traženi ekvilajzer.□

4.3. Teorema. Kategorija BoolF je zatvorena za kolimese.

Dokaz. Pokažimo najpre da je zatvorena za koproizvode:

4. Bulove algebre sa istaknutim filtrom

Neka dijagram D čine (A_i,F_i) bez ikakvih morfizama. Tada $\underrightarrow{\lim}D$ čine objekat $(\coprod_{i\in I}A_i,F)$ i morfizmi f_i, gde je $\coprod_{i\in I}A_i$, f_i koproizvod algebri A_i u Bool, a F je najmanji filtar u $\coprod_{i\in I}A_i$ generisan sa $\bigcup_{i\in I} f_i[A_i]$.

Zatvorenost za koekvilajzere:

Neka dijagram D čine $f,g:(A,U)\longrightarrow(B,V)$. Tada traženi koekvilajzer u BoolF čine (C,W) i $h:(B,V)\longrightarrow(C,W)$ gde je C, h koekvilajzer u Bool, a $W=h[V]$.

Na osnovu teoreme 3.2.22. BoolF je zatvoreno za kolimese.□

Vidimo da je kategorija BoolF ostala kompletna i kokompletna, ipak ne mora svaka kategorija dobijena od kategorije Bool dodavanjem unarne relacije imati ta svojstva.

Primer. Kategorija BoolN gde za unarnu relaciju N(x) dodajemo aksiomu

$$\forall x(N(x)\longleftrightarrow x\neq 0)$$

dakle objekti kategorije BoolN su (A,N) gde je A Bulova algebra, a N istaknut skup nenultih elemenata od A; morfizmi u BoolN su homomorfizmi modela, dakle slikaju nenulte elemente u nenulte t.j. to su monomorfizmi.

Ova kategorija nije zatvorena za direktne proizvode (samim tim nije kompletna), naime uzmimo dve Bulove algebre sa njihovim nenultim elementima $(2^2,M)$ i $(2^3,N)$ i pokažimo da ne postoji $(C,P)=(2^2,M)\times(2^3,N)$. Ako bi postojalo C bi moralo biti podalgebra od 2^2 te ne bi bilo univerzalno jer bi se

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

moglo na različite načine utopiti, na primer u 2^2.

Vratimo se sada kategoriji BoolF i pogledajmo analogon teoreme 3.2.11.

Prethodno na prirodan način uvedimo $(A,F)/I$ gde je I ideal Bulove algebre A; $(A,F)/I=(A/I,F/I)$ gde je $F/I=\langle x/I:\ x\in F\rangle$. Zaista F/I jeste filtar Bulove algebre A/I.

4.4. Teorema. Inverzan limes u BoolF inverzne familije konačnih faktora Bulove algebre sa istaknutim filtrom (B,N) je $(2^k,U)$ gde je k broj ultrafiltara Bulove algebre B, a U je filtar u 2^k definisan na sledeći način:

$$x\in U \text{ akko } \forall i<k(\pi_i(x)=0 \longrightarrow N\cap I_i\neq\emptyset)$$

gde je π_i i-ta projekcija a I_i i-ti maksimalni ideal od B.

Dokaz. Kao i u teoremi 3.2.14. inverznu familiju čine $(B/I,N/I)$ gde je $|B/I|<\omega$ i za $I\leq J$ Bool-morfizam $f_{IJ}:\ B/J\longrightarrow B/I$ ostaje BoolF-morfizam jer $f_{IJ}[N/J]\subseteq N/I$.

Takodje kao i u teoremi 3.2.11. važi kanonski rastav ideala pa ovakve f_{IJ} možemo kao i ranije pisati u obliku $f\langle{a_1\ldots a_n \atop b_1\ldots b_m}\rangle$, ako je I, odnosno J, kanonski rastavljeno na $I_{a_1}\cap\ldots\cap I_{a_n}$, odnosno, $J_{b_1}\cap\ldots\cap J_{b_m}$.

Kandidat za univerzalni konus ostaje isti t.j. BoolF-objekat je "napravljen" od 2^k isticanjem filtra U kao što je i rečeno u iskazu ove teoreme a i morfizmi ostaju isti

$$F_{\langle a_1\ldots a_n\rangle}:\ (2^k,U)\longrightarrow(B,N)/I_{a_1}\cap\ldots\cap I_{a_n}$$

za svaki ideal I čiji je kanonski zapis $I_{a_1}\cap\ldots\cap I_{a_n}$

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

definisani kao ranije:

$$F_{\langle a_1\dots a_n\rangle}(g)=b/I \text{ gde je } b\in I_{a_i} \text{ akko } \pi_{a_i}(g)=0$$

Definicija je korektna kao i ranije, proverimo sad da je $F_{\langle a_1\dots a_n\rangle}$ zaista BoolF morfizam, t.j. da je

$$F_{\langle a_1\dots a_n\rangle}[U]\subseteq N/I_{a_1}\cap\dots\cap I_{a_n}.$$

Neka je $x\in U$ t.j. po definiciji filtra U

$$\forall i<k((\pi_i(x)=0\longrightarrow N\cap I_i\neq\phi).$$

Tada je $F_{\langle a_1\dots a_n\rangle}(x)=y/I$ gde je $y\in I_{a_i}$ akko $\pi_{a_i}(x)=0$, pa vidimo da svi ideali u kojima je y seku N; neka su ti ideali $I_1,\dots,I_k$ i neka je $y_1\in I_1\cap N,\dots,y_k\in I_k\cap N$, $\langle I_1,\dots,I_k\rangle\subseteq\langle I_{a_1},\dots,I_{a_n}\rangle$. Primetimo da je $y_1\wedge\dots\wedge y_k\in I_1\cap\dots\cap I_k\cap N$ i $y\in I_1\cap\dots\cap I_k$. Elemenat $y\vee(y_1\wedge\dots\wedge y_k)$ je u istim idealima u kojima je i y, a takodje je u N. Očigledno je u N pošto je N filtar; neka je sad $y\in I_{a_i}$ t.j. $a_i\in\langle 1,\dots,k\rangle$ pa je $y_{a_i}\in I_{a_i}$, odatle je i $y_1\wedge\dots\wedge y_k\in I_{a_i}$ te je $y\vee(y_1\wedge\dots\wedge y_k)\in I_{a_i}$; obrnuto kada bi $y\vee(y_1\wedge\dots\wedge y_k)\in I_{a_i}$ bilo bi i $y\in I_{a_i}$.

Da je ovo zaista konus polaznog dijagrama proveravamo kao i ranije.

Pokažimo još da je univerzalan, t.j. neka je;

$$\langle G_{\langle a_1\dots a_n\rangle}:(A,P)\longrightarrow(B,N)/I_{a_1}\cap\dots\cap I_{a_n}\rangle$$

neki drugi konus polaznog dijagrama u kategoriji BoolF i zatim ga na jedinstven način razložimo preko konusa:

$$\langle F_{\langle a_1\dots a_n\rangle}:(2^k,U)\longrightarrow(B,N)/I_{a_1}\cap\dots\cap I_{a_n}\rangle.$$

Za to razlaganje ćemo uzeti

$$h:\ (A,P)\longrightarrow(2^k,U)$$

definisano kao i ranije $\pi_i\circ h=G_{\langle i\rangle}$. Treba pokazati da je h zaista BoolF morfizam t.j. da je $h[P]\subseteq U$. Neka je $p\in P$, tada za

$\forall i<k \quad \pi_i(h(p))=G_{\langle i\rangle}(p)$, a pošto su $G_{\langle i\rangle}$ BoolF-morfizmi $G_{\langle i\rangle}(p)\in N/I_i$, a pošto je I_i maksimalan ideal u B

$$N/I_i=\begin{cases}\{0,1\}, & \text{ako } N\cap I_i\neq\emptyset\\ \{1\}, & \text{inače.}\end{cases}$$

Odatle $\forall i<k(\pi_i(h(p))=0\longrightarrow N\cap I_i\neq\emptyset)$, te je $h(p)\in U$.

Da je h jedinstveno i da zaista razlaže ovaj drugi konus preko polaznog dokazuje se kao i u dokazu teoreme 3.2.11. □

Primetimo da je teorema 3.2.11. posledica ove ako podjemo od objekta (B,B).

Postavlja se prirodno pitanje da li se svaki filtar Bulove algebre 2^k može dobiti na ovakav način? Odgovor nam daje:

4.5. Posledica. $(2^k,U)$ je dobijen kao u gornjoj teoremi akko je U glavni filtar u 2^k.

Dokaz. $(\longrightarrow)$ Neka je $(2^k,U)$ dobijeno od neke algebre (B,N). Definišimo $u\in 2^k$ na sledeći način: $\forall i<k(\pi_i(u)=0$ akko $N\cap I_i\neq\emptyset)$. Pokažimo da je $U=\{x\in 2^k:u\leq x\}$; zaista $u\leq x$ akko $\forall i<k(\pi_i(u)\leq\pi_i(x))$ akko $\forall i<k(\pi_i(x)=0\longrightarrow\pi_i(u)=0)$ akko $\forall i<k(\pi_i(x)=0\longrightarrow N\cap I_i\neq\emptyset)$ akko $x\in U$.

$(\longleftarrow)$ Neka je U glavni filtar generisan elementom $u\in 2^k$. Ako je $u=0$ t.j U je nepravi $(=2^k)$ filtar, onda za polaznu Bulovu algebru možemo uzeti bilo koju Bulovu algebru sa k ultrafiltara i sa istaknutim nepravim filtrom (cela Bulova algebra kao filtar). Neka je sad $u\neq 0$, na primer neka je bar $\pi_0(u)=1$. Tražena Bulova algebra sa istaknutim filtrom je (A,N), gde je $A\leq P(k)$ generisana jednočlanim podskupovima od k; zbog jednostavnijeg označavanja neka elementi kardinala k počinju od 1, i definišimo N. A ima zaista k maksimalnih ideala i svi sem jednog su glavni (taj je ideal konačnih podskupova). Označimo taj maksimalni neglavni ideal sa I_0, a glavne maksimalne ideale sa indeksom jednakim komplementu njihovog najvećeg elementa t.j. $I_i=\{x:\ x\subseteq k\setminus\{i\}\}$.

Definišimo najzad N:

$$N=\cap\{I_i':\ \pi_i(u)=1\}.$$

Pokažimo da ova struktura daje traženi rezultat t.j. $(2^k,U)$. Očigledno A ima tačno k ultrafiltara, pokažimo još da se dobija i traženi glavni filtar U. Prethodno pokažimo sledeće:

(*) $\qquad \forall i<k(N\cap I_i\neq\emptyset$ akko $\pi_i(u)=0)$.

Sa leva u desno očigledno; obrnuto: neka je $\pi_i(u)=0$, po pretpostavci $i\neq0$ pa je I_i glavni maksimalni ideal u A generisan sa $k\setminus\{i\}$ (t.j. $\{i\}'$). Pokažimo da je baš $\{i\}'\in N$, pre svega $\{i\}'\in I_0'$ po definiciji I_0. Takodje $\{i\}\notin I_j$ za svako $j\neq i$ pa je $\{i\}'\in I_j'$ za svako $j\neq i$ pa je svakako $\{i\}'\in N$.

Na osnovu (*) za svako $x\in2^k$ važi:

$$\forall i<k(\pi_i(x)=0\longrightarrow N\cap I_i\neq\emptyset) \text{ akko } \forall i<k(\pi_i(x)=0\longrightarrow\pi_i(u)=0)$$

što kaže da je x u dobijenom filtru akko $x\leq u$ t.j. akko $x\in U$.□

4.6. Tvrdjenje. Svaka Bulova algebra sa istaknutim filtrom (A,N) je direktan limes konačnih podalgebri od A sa nasledjenim filtrima.

Dokaz. Kao i dokaz tvrdjenja 3.2.24 .□

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Svi navedeni pojmovi i stavovi se mogu dualizovati. Neka je **StoneF** kategorija čiji objekti su (X,P) Stonovi prostori sa istaknutim zatvorenim skupom, a morfizmi slikaju istaknut skup prvog u istaknut skup drugog objekta (ne zahteva se da slikaju prvi istaknut skup preko drugog kao što bi se moglo pomisliti). Uobičajeni Stonov funktor, uz korespodenciju izmedju zatvorenih skupova i filtara, uvedenu u 2.5. daje koekvivalenciju izmedju **StoneF** i **BoolF**. Odatle sledi:

4.7. Teorema. Kategorija **StoneF** je zatvorena za limese i neprazne kolimese. □

4.8. Teorema. Direktan limes direktne familije konačnih podobjekata objekta (X,P) u kategoriji **StoneF** je jednak $(\beta|X|,Q)$, gde je $\beta|X|$ Ston-Čehova kompaktifikacija diskretnog prostora sa $|X|$ elemenata, a Q je otvoreno-zatvoren skup dual od glavnog filtra U iz 4.5.

Dokaz. Na osnovu posledice 4.5. i tvrdjenja 2.5. iz kog proizilazi da je glavnom filtru generisanom sa u, Stonov dual otvoreno-zatvoren skup u^*, kao i $(2^{|X|})^*=\beta|X|$ (videti 3.2.17.). □

4.9. Tvrdjenje. Svaki objekat (X,P) iz kategorije **StoneF** je inverzan limes svojih konačnih neprekidnih slika.

Dokaz. Dualno tvrdjenju 4.6. □

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

5. Podalgebre Bulovih algebri

U ovom poglavlju ćemo se zanimati za odnos izmedju podalgebre i nekog elementa unutar date Bulove algebre.

5.1. Lema. (Makinson) Neka je B Bulova algebra i neka je $A \leq B$ i $b \in B \setminus A$. Tada postoje ultrafiltri U i V Bulove algebre B takvi da $b \in U$, $b \notin V$ i $U \cap A = V \cap A$.

Dokaz. Reći ćemo da je $G \subseteq A$ dobar akko za svako $x \in A$ $G \cup \{x \Delta b\}$ ima svojstvo konačnog preseka. Skup svih dobrih podskupova skupa A je parcijalno uredjen relacijom $\subseteq$. Primetimo da je neprazan jer je prazan podskup od A dobar (jer $b \notin A$). Da je zatvoren za unije lanaca se vidi iz toga što je svojstvo biti loš izrazivo pomoću konačno mnogo terama. Po Cornovoj lemi postoji maksimalan dobar skup i označimo ga sa G. Odatle sledi da $G \cup \{0 \Delta b\} = G \cup \{b\}$ i $G \cup \{1 \Delta b\} = G \cup \{b'\}$ imaju svojstvo konačnog preseka. Dakle $G \cup \{b\}$ je sadržano u nekom ultrafiltru U, a $G \cup \{b'\}$ u drugom ultrafiltru V. Pokažimo još da je $U \cap A = V \cap A$. To sledi iz činjenice da je G ultrafiltar u A (jer je G maksimalan dobar). □

Kao neposredni primer primene ove leme navedimo sledeće:

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

5.2. **Tvrdjenje.** (Vujošević) Neka je Bulova algebra A maksimalna podalgebra od B koja ne sadrži $b\in B\setminus A$. Tada je $A(b)=B$.

Dokaz. $A(b)$ označava podalgebru generisanu sa $A\cup\{b\}$. Pretpostavimo suprotno t.j. neka postoji neko $c\in B\setminus A(b)$. Tada po 5.1.1. postoje dva ultrafiltra F, G u B takvi da $c\in F$, $c\notin G$ i $F\cap A(b)=G\cap A(b)$, takodje možemo pretpostaviti $b\in F$ i $b\in G$ (u suprotnom bi $b'\in F$ i $b'\in G$ a to je opet isto jer $A(b)=A(b')$). Primetimo da $b\wedge c\notin A(b)$ i $b\wedge c'\notin A(b)$ zbog $A(b)\cap F=A(b)\cap G$. A je maksimalna takva da $b\notin A$ pa mora biti $b\in A(b\wedge c)$ i $b\in A(b\wedge c')$, t.j. za neke $u_1,u_2,v_1,v_2\in A$ imamo:

$$b=(u_1\wedge(b\wedge c))\vee(v_1\wedge(b\wedge c)') \qquad b=(u_2\wedge(b\wedge c'))\vee(v_2\wedge(b\wedge c'))$$

pa mora biti $v_1\wedge b'=0$ i $v_2\wedge b'=0$, t.j. $v_1\leq b$ i $v_2\leq b$, pa je

$$b=(u_1\wedge b\wedge c)\vee(v_1\wedge c') \qquad b=(u_2\wedge b\wedge c')\vee(v_2\wedge c)$$

t.j. $$b\wedge c'=v_1\wedge c'\leq v_1\leq b \qquad b\wedge c=v_2\wedge c\leq v_2\leq b$$

pa je $b\leq v_1\vee v_2\leq b$, dakle $b=v_1\vee v_2$ za neke $v_1,v_2\in A$ što je suprotno sa pretpostavkom da $b\notin A$. □

Da bi smo iskazali duale prethodnih tvrdjenja treba nam nekoliko pomoćnih lema čiji dokazi su manje-više očigledni.

5.3. Lema. Neka su A, B Bulove algebre i $f\colon A\longrightarrow B$. Tada f je "1-1" i $b\in B\setminus f[A]$ akko $f^*\colon B^*\longrightarrow A^*$ je "na" i $f^*[b^*]$ nije otvoreno zatvoren u A^*.□

5.4. Lema. Neka su A, B, f i b kao u prethodnoj lemi. Tada

$X=(f[A])(b)$ akko postoje "na" preslikavanja $g^*: B^* \longrightarrow X^*$ i $h^*: X^* \longrightarrow A^*$ tako da $h^* \circ g^* = f^*$ i $g^*[b^*]$ je otvoreno-zatvoren u X^* i ako je neko Y^* takvo onda postoji "na" preslikavanje $t^*: Y^* \longrightarrow X^*$ tako da $t^* \circ g_1^* = g^*$ (gde je g_1^* u odnosu na Y^* isto što i g^* u odnosu na X^*). □

Ovakav X^* ćemo zvati minimalna neprekidna slika od B^* koja se slika na A^* tako da je u njemu slika od b^* otvoreno-zatvorena.

5.5. **Lema.** Neka je $f: A \longrightarrow B$ monomorfizam Bulovih algebri i neka je $b \in B \setminus f[A]$. Tada je $f[A]$ maksimalna podalgebra od B koja ne sadrži b akko $f^*[b^*]$ nije otvoreno-zatvoren u A^* i za svako C^* takvo da postoje "na" preslikavanja $g^*: B^* \longrightarrow C^*$, $h^*: C^* \longrightarrow A^*$ takvi da $f^* = h^* \circ g^*$ je $g^*[b^*]$ otvoreno-zatvoren u C^*. □

Ovakvo A^* ćemo zvati maksimalna neprekidna slika od B^* u kojoj $f^*[b^*]$ nije otvoreno-zatvoren skup.

Iskažimo sada duale za 5.1. i 5.2.

5.6. Tvrdjenje. Neka je $f^*: B^* \longrightarrow A^*$ "na" preslikavanje Stonovih prostora takvo da $f^*[b^*]$ nije otvoreno-zatvoren u A^*. Tada postoje $p, q \in B^*$ takvi da $p \in b^*$, $q \notin b^*$ i $f^*(p) = f^*(q)$.

Dokaz. Korišćenjem Stonove teoreeme i leme 5.3. □

5.7. Tvrdjenje. Neka je A^* maksimalna neprekidna slika od B^*

u kojoj slika od b^* nije otvoreno-zatvorena. Tada je minimalna neprekidna slika od B^* koja se slika na A^* tako da je u njoj slika od b^* otvoreno-zatvorena homeomorfna sa B^*.

Dokaz. Pomoću lema 5.4. i 5.5. □

Zanimljivo je da obrat tvrdjenja 5.2. ne važi.

Primer. Neka je B Lindenbaumova algebra iskaznog računa nad iskaznim promenljivim p_i, $i\in\omega$. Sa A označimo podalgebru generisanu sa $\{p_i: i\in\omega\}\setminus\{p\}$. Očigledno $A(p)=B$, ali ne samo da A nije maksimalna algebra koja ne sadrži p već ni za jedan elemenat iz $B\setminus A$ A nije maksimalna podalgebra od B koja ga ne sadrži.

Dokaz. Pretpostavimo da postoji neki $t\in B\setminus A$ takav da je A maksimalna podalgebra koja ga ne sadrži. Tada ćemo naći $C\lneq B$ pravu nadalgebru od A koja ne sadrži t što će biti suprotno sa pretpostavkom o maksimalnosti A. Imamo sledeće disjunktne slučajeve:

1) $t=p$; tada je $C=A(p\wedge q)$ gde je q iskazna promenljiva različita od p.

2) $t=p\wedge a$, $a\in A\setminus\{0,1\}$; tada je $C=A((p\wedge a)\vee p')$.

3) $t=p'\wedge a$, $a\in A\setminus\{0,1\}$; tada je $C=A((p'\wedge a)\vee p)$.

4) $t=(p\wedge a)\vee(p'\wedge b)$, $a,b\in A\setminus\{0\}$, $a\neq b$ imamo dva slučaja non $b\leq a$ i $b<a$; u prvom slučaju je $C=A(p\wedge a)$ a u drugom $C=A(p'\wedge b)$.

5. Podalgebre Bulovih algebri

Pošto je Lindenbaumova algebra B slobodna svako preslikavanje slobodnih generatora u dvočlanu Bulovu algebru je proširivo do homomorfizma pa ispravnost neke jednakosti na B proveravamo zamenjivanjem 0, 1, umesto generatora.

Pokažimo samo treći slučaj (ostali slučajevi su analogni):
Najpre pokažimo da $(p'\wedge a)\vee p\notin A$ t.j. da je C zaista prava nadalgebra od A. Kada bi $(p'\wedge a)\vee p=b\in A$ pa za $p=1$ saznajemo da je $b=1$ a za $p=0$ imamo $a=1$ što je nemoguće. Pokažimo sad da t $p'\wedge a\notin C$. U suprotnom bi postojali $x,y\in A$ takvi da

$$[x\wedge((p'\wedge a)\vee p)]\vee[y\wedge((p'\wedge a)\vee p)']=p'\wedge a$$

pa za $p=1$ vidimo da x mora biti 0, a iz $p=0$ vidimo da je $y\wedge a'=a$ što povlači $a=0$ a to je kontradikcija. □

Dokažimo još jedno tvrdjenje o podalgebrama.

5.8. Tvrdjenje. Svaka podalgebra A Bulove algebre B zajedno sa inkluzijom kao morfizmom je ekvilajzer za neki par morfizama i neku Bulovu algebru C.

Dokaz. Neka je $B\setminus A=\{b_i:\ i<k\}$. Za svako $i<k$ po lemi 5.1. postoje ultrafiltri U_i, V_i takvi da $b_i\in U_i$, $b_i\notin V_i$ i $U_i\cap A=V_i\cap A$. Definišimo sad Bulovu algebru C i morfizme f,g.: $B\longrightarrow C$. $C=2^k$, $\pi_i(f(x))=x/U_i'$, $\pi_i(g(x))=x/V_i'$. Očigledno $f(x)=g(x)$ akko $x\in A$. Dakle $Ek(f,g)=A$ na osnovu 3.2.5. □

5.9. Tvrdjenje. Neprekidna slika Stonovog prostora je jednaka nekom njegovom koekvilajzeru.

Dokaz. Ovo je dual prethodnog tvrdjenja. □

Primetimo da prethodna dva tvrdjenja zajedno sa 3.2.5 i 3.2.16. daje ekvivalentnost pojmova podalgebra i ekvilajzer odnosno neprekidna slika i koekvilajzer.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs

Literatura

1. P. Dwinger, The dual space of the inverse limit of an inverse limit system of Boolean algebras, Indagationes Mathematicae vol. XXVI, 1964. pp 164-172.

2. R. Engelking, General topology, Monografie Matematyzne tom 60, 1977.

3. G. Gratzer, Universal algebra - second edition, Springer 1978.

4. P.R. Halmos, Lectures on Boolean algebras, Springer 1974.

5. P.T. Johnstone, Stone spaces, Cambridge Univ. press 1986.

6. S. Mac Lane, Categories for the working mathematician, Springer 1971.

7. D.C. Makinson, On the number of ultrafilters of an infinite Boolean algebra, Zeitschr.f.math. Logik und Grundlagen d. Math Bd. 15,S. 1969. pp. 121-122

8. Ž. Mijajlović, Saturated Boolean algebras with ultrafilters, Publ. Inst. Math. 26(40), 1979. pp. 175-196.

9. Ž. Mijajlović, An introduction to model theory, Novi Sad 1987.

10. D.E. Pal'chunov, Countably-categorical Boolean Algebras with distinguished ideals, Stud. Log. XLVI, 2, 1987. pp 121-135.

11. R. Sikorski, Boolean algebras-second edition, Springer 1964.

12. S. Vujošević, pismo od 2. marta 1988.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade
elibrary.matf.bg.ac.rs