UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

MR DRAGAN ACKETA

NEKE KLASE NEIZOMORFNIH MATROIDA

- DOKTORSKA DISERTACIJA -

NOVI SAD, 1984.

P R E D G O V O R

Teorija matroida igra objedinjavajuću ulogu u znatnom delu kombinatorne teorije; izmedju ostalog, ona povezuje, u odredjenom smislu uopštava i baca novo svetlo na teorije grafova, konačnih vektorskih prostora, transverzalâ, blok-šemâ i kombinatornu teoriju mreža. Štaviše, matroidi su tesno povezani sa linearnom algebrom i geometrijom i mogu poslužiti kao jedna veza kombinatorike sa "klasičnijim" oblastima matematike.

Pionirski rad |65| je ostao četvrt veka usamljen, sa par izuzetaka, sve do Tutte-ovih radova |58| i |59|, nakon kojih počinje intenzivan razvoj teorije matroida. U novije vreme matroidi zauzimaju istaknuto mesto i u teoriji kombinatorne optimizacije (videti, npr., |15|,|47|,|64|) i možemo se nadati da će u budućnosti učestati njihove praktične primene.

Postoji više monografijâ iz teorije matroida, naprimer: |20|,|22|,|24|,|27|,|54|,|61|,|62|. Po našem mišljenju knjiga |62| zauzima centralno mesto medju njima, najsveobuhvatnija je i može poslužiti kao izvrstan udžbenik teorije matroida; naše definicije i oznake su uglavnom uskladjene sa tom knjigom. U nekim knjigama je matroidima dodeljen prostor od jedne do nekoliko glava, naprimer, u |12|,|30|,|36|,|47|, |66|.

Posebna interesantnost teorije matroida je mogućnost višestrukog pristupa istom problemu, prevodjenjem tog problema na oblike u kojima se koriste različite definicije i odgovarajuće opšte* reprezentacije matroida. U ovoj disertaciji je naglasak stavljen na jednu manje standardnu opštu reprezentaciju matroida: preko cikličkih potprostora sa pridruženim rangovima (|2|,|23|,|24|,|25|,|33|,|42|,|57|). Takav pristup nam se čini (zbog visoke prosečne ekonomičnosti reprezentacije) najpogodnijim za naše ciljeve; naprimer, mislimo da bi konstrukciju iz Glave I bilo mnogo teže sprovesti uz pomoć neke od "standardnih" reprezentacija matroida.

Zadržimo se malo na naslovu disertacije. Reč "neizomorfnih" naglašava (premda se u većini radova o matroidima to podrazumeva) da kod svih matroida koje razmatramo, način njihovog reprezentovanja, kao i način označavanja njihovog nosača igraju sporednu, nebitnu ulogu (iako ponegde ispitujemo neke specifične reprezentacije matroida, same matroide razmatramo nezavisno od njih; s druge strane, strogo se ogradjujemo od termina "matroid" i "neizomorfna klasa matroida" u |24|, koji imaju isto značenje kao "označeni matroid (sa obeleženim nosačem)" i "matroid" kod nas respektivno).

Što se tiče razmatranih klasâ matroida, centralno mesto u disertaciji zauzima klasa "malih" matroida, preciznije klasa koju čine svih 2198 neizomorfnih matroida na nosačima od najviše osam elemenata. Katalog svih matroida u ovoj klasi je dat kao prilog disertaciji; pritom je kod svakog matroida u katalogu ispitivano nekoliko osobina i navedeno po nekoliko odgovarajućih podataka. Detalji vezani za "male" matroide, metodi korišćeni pri ispitivanju njihovih osobina, kao i neke prateće teoreme (od kojih su pojedine najpre izvedene induktivnim zaključivanjem polazeći od kataloga), se mogu naći u Glavi IV. Pored toga, Glave I i II se odnose na elementarnu konstrukciju dve potklase "malih" matroida (potklase poluprostih "malih" matroida, odnosno potklase P). Značajan oslonac u radu na "malim" matroidima nam je pružio rad |16|, čija polazna osnova je bio neobjavljen rad |41|. Kad je reč o "malim" matroidima, treba pomenuti i radove |32|,|34|,|44|.

---

* Opšta reprezentacija je ona koja se odnosi na sve matroide.

U Glavi III ispitujemo dve beskonačne klase matroida, C-lance i C-kvadrate, koji su dvojako vezani za "male" matroide. S jedne strane, veliku većinu "vrlo malih" matroida (izuzimajući "male" matroide na 8-skupu) čine C-lanci i C-kvadrati. S druge strane, problem povezivanja tipa CF-mreže sa transverzalnošću matroida "napadamo" sa dve strane: polazeći od podataka sadržanih u katalogu "malih" matroida i od teorema o transverzalnosti svih C-lanaca i C-kvadrata.

Klasa C-lanaca je sa drugog aspekta razmatrana u radu |63|, koji koristimo pri dokazivanju transverzalnosti C-lanaca, a ista klasa se pominje i u |24|, str.67.

U disertaciji su znatniji prostor dobile još četiri klase matroida, zasnovane na "standardnijim" svojstvima matroida. Te klase nisu disjunktne ni medjusobno, ni sa ranije navedenim klasama. To su klase pejving, transverzalnih, samodualnih i binarnih matroida.

Matroidi poslednjih triju klasa su posebno označeni u katalogu. Kod transverzalnih i binarnih matroida je interesantno i utvrdjivanje pripadnosti komplementarnim klasama.

Cela Glava II je dodeljena konstrukciji jedne klase "malih" pejving matroida. Odeljci IV-1. i IV-2. sadrže karakterizacije svih onih pejving matroida, koji su istovremeno i binarni, respektivno transverzalni (za prve od njih je rešen i problem prebrajanja).

Transverzalnim matroidima je u disertaciji posvećena posebna pažnja. U Odeljcima III-4, respektivno III-8 je dokazana transverzalnost svih C-lanaca, respektivno svih C-kvadrata. Odeljak IV-2. sadrži postupke korišćene pri ispitivanju transverzalnosti matroida u katalogu, teoreme vezane za te postupke, kao i nekoliko parcijalnih, odnosno nedovršenih, pristupa problemu utvrdjivanja transverzalnosti matroida (karakterizacije transverzalnih matroida) u opštem slučaju. Poslednje strane ovog odeljka su jedino mesto u disertaciji, na kome navodimo i neke hipoteze (tj. nedokazane pretpostavke).

Postoji više radova vezanih za karakterizaciju transverzalnih matroida; pomenimo |18|,|19|,|31|,|42|,|43|,|48|. a za širu problematiku i |23|,|40|,|49|,|63|.

Samodualne C-lance i C-kvadrate prebrajamo u Odeljcima III-2., odnosno III-6. Opšti slučaj utvrdjivanja dualnog matroida i samodualnosti razmatramo u Odeljku IV-4. Pritom posebno razmatramo matroide dvaju podklasa klase samodualnih matroida: ISD- i ESD- matroide. Deo rada |18| i rad |55| se odnose na matroide prve, odnosno druge od ovih podklasa.

Binarne C-lance i C-kvadrate prebrajamo u Odeljcima III-3., odnosno III-7., a opšti slučaj utvrdjivanja binarnosti u IV-4. Na osnovu ključnih karakterizacija iz rada |60|, polazeći od utvrdjene binarnosti, lako rešavamo problem odredjivanja regularnih grafičkih i kografičkih matroida medju "malim" matroidima, C-lancima i C-kvadratima.

Navodimo još neke momente vezane za ovu disertaciju:

Nabrajanjem matroida u katalogu i ispitivanjem nekih njihovih svojstava je rešen veći broj problema prebrajanja različitih "malih" matroida i nekih njihovih podklasa. Po svoj prilici su mali izgledi da se kompletno nabrajanje neizomorfnih matroida nastavi i na 9-nosaču (sve poluproste matroide na 9-skupu bismo verovatno mogli konstruisati metodom opisanim u Glavi I, ali nam se čini da bi odgovarajući prosti matroidi bili teško "uhvatljivi" i uz pomoć kompjutera). Smatramo da bi na nosačima koji imaju više od 8 elemenata imalo smisla nabrajati, odnosno prebrajati, samo neke posebne klase matroida.

Postoji više radova vezanih za ocene broja neizomorfnih matroida na proizvoljnom nosaču, naprimer |17|,|44|,|53|, |63|.

U Glavi III rešavamo problem prebrajanja binarnih, samodualnih i svih C-lanaca i C-kvadrata na proizvoljnom nosaču, a u Glavi IV i opšti problem prebrajanja binarnih pejving matroida i transverzalnih matroida ranga 2 (formula za broj svih neizomorfnih matroida ranga 2 je data u radu |1|).

Tokom izrade disertacije nije korišćen kompjuter, izuzev posredno, primenom rezultata kompjuterski realizovanog rada |16|. Napominjemo da su problemi vezani za matroide po pravilu visoke računske složenosti (videti naprimer |56|) i da nam se stoga čini da će primena kompjutera teško značajnije pospešiti istraživanje u samoj teoriji matroida (ovo ne mora da se odnosi i na primene teorije matroida). Naprimer, poznato je da bez obzira na pristup (način zadavanja matroida), na n-skupu uvek postoji matroid za čiji zapis je potreban broj podataka reda veličine 2^n.

Istaknuta uloga cikličkih potprostora matroida i CF-mrežâ koje oni obrazuju dolazi do izražaja u celoj disertaciji. Konstrukcija iz Glave I je bazirana na primeni osnovnih, tj. specijalnih cikličkih potprostora. Matroide u Glavi II razmatramo isključivo preko njihovih familija cikličkih hiperravni. Definicije klasâ matroida razmatranih u Glavi III su zasnovane na tipu CF-mreže. Najzad, svi metodi za ispitivanje svojstava matroida razmatrani u Odeljcima IV-2., i IV-4., polaze od cikličkih potprostora (primetimo da se ciklički potprostori bitno koriste i prilikom izvodjenja karakterizacije BP-matroidâ u Odeljku IV-1).

Konstrukcije neizomorfnih matroida sa datim svojstvima, analogne našim konstrukcijama u Glavi I i II, se obično dovršavaju izborom po jednog predstavnika iz svake klase medjusobno izomorfnih matroida. Ako je ta klasa potpuno opisana, onda se njen predstavnik ne mora uvek ni izabrati, što ponekad koristimo u Glavi II. U svakom slučaju, neophodno je obezbediti sistematsko pretraživanje neizomorfnih mogućnosti.

Particije u skupovima kombinacija sa ponavljanjem, sastavljenim od atoma prostih matroida kod kojih klase odgovaraju neizomorfnim izvedenim poluprostim matroidima, su predmet detaljnijeg istraživanja u radu |7|. Ova problematika je povezana sa grupama automorfizama (prostih) matroida, kao i sa radovima |26|,|33|,|38|.

Disertacija sadrži uvod, četiri glave i prilog.

Svi rezultati u Glavama I-IV (kao i podaci u katalogu) su originalni (bez obzira na to da li su već publikovani ili ne), ukoliko nije naglašeno drukčije.

U Glavi I je preuzet veći deo sadržaja rada |10| a u Glavi II radova |5| i |6|. Rad |9| je prenet u Glavu III (izuzimajući Odeljke III-5., III-6., III-7.), a rad |11| u Odeljak IV-3., i manje delove Odeljka IV-2. Prilog je rad |8| bez uvoda. Svaka glava je podeljena u po nekoliko odeljaka i sadrži sopstveni manji uvod, koji se pri numerisanju računa kao nulti odeljak.

Teoreme u disertaciji numerišemo kao u sledećem prime-ru: Teorema IV-2.9. je deveta teorema drugog odeljka četvrte glave. Numeracija odeljaka i teorema u Uvodu počinje nulom. Leme po pravilu ne numerišemo; izuzetak predstavljaju neka "sporedna" tvrdjenja u Odeljcima II-4.,III-0. i IV-4. koja smo nazvali lemama, iako nisu vezana za neke odredjene teoreme. Kraj dokaza leme označavamo sa □ , a kraj dokaza teoreme sa ⬚ .

Zahvaljujem se svima koji su mi pomogli u izradi ove disertacije. Posebno se zahvaljujem:

- profesoru Dominicu Welshu, koji mi je omogućio boravak u Oksfordu (gde su dovršene Glave I i II), pomogao u rešavanju mojih matroidnih problema i u nabavci literature iz teorije matroida

- profesoru Andrasu Recskom, za razgovor o matroidima u Egeru i za njegove iscrpne recenzije mojih radova |9| i |11|, koje su značajno uticale na sadržaj cele Glave III, kao i delova Glave IV

- profesoru Franku Hararyu za njegovu saradnju i za ohrabrenje, koje mi je pružio pri dovršavanju Glave I

- profesoru Svetozaru Miliću, koji mi je predložio da se bavim teorijom matroida, nabavio mi prve knjige iz te oblasti, i koji mi je pružio odlučujuću pomoć na mojim prvim koracima u nauci, sve do završetka magistarskog rada

- mentoru profesoru Ratku Tošiću za višestruku pomoć i podršku tokom izrade disertacije, kao i za saradnju u okviru seminara za kombinatoriku

- profesorima Tomu Brylawskom, Henry Crapou, Michel Las Vergnasu, Dragošu Cvetkoviću, Tomažu Pisanskom, Janezu Ušanu i Olgi Hadžić, koji su mi, kroz konsultacije, pružili dragocenu pomoć u izradi ove disertacije

- Institutu za matematiku u Novom Sadu, koji mi je pružio značajnu pomoć izdavanjem kataloga |8| (prilog disertacije sa uvodom na engleskom jeziku) i sudelovanju u troškovima mog učešća na simpozijumima u zemlji i inostranstvu, kao i u troškovima mog puta na naučno usavršavanje

- SIZ-i za naučni rad Vojvodine na finansijskoj podršci, koju mi je pružila za moje naučno usavršavanje u Oksfordu, kao i za učešće u materijalnim troškovima izrade disertacije

- Merimi Marčićev na strpljivom i pedantnom kucanju

- mojoj supruzi Gorici i celoj porodici na njihovoj podršci i strpljenju.

S A D R Ž A J

U V O D

U (ovom) uvodu definišemo veći broj osnovnih pojmova teorije matroida, navodimo neke važnije stavove za njih, a uvodimo i neke standardne oznake. Nakon uvodjenja potrebnih opštih pojmova i oznaka, najpre navodimo šest medjusobno ekvivalentnih definicija matroida, kao i glavne pojmove i "prelazne" stavove vezane za njih, a zatim i ostale potrebne pojmove i stavove teorije matroida. Poseban odeljak dodeljujemo pojmovima i stavovima vezanim za cikličke potprostore, koji imaju istaknutu ulogu u ovoj disertaciji. Stavove iz prva dva odeljka navodimo bez oznaka i bez posebnog isticanja, dok stavove vezane za cikličke potprostore izdvajamo kao teoreme, od kojih neke i dokazujemo.

Ukoliko ne postoji opasnost od zabune, fiksne skupove zadate spiskom svojih elemenata zapisujemo bez zareza i zagrada. Tako pišemo naprimer, "ABC" i "1567" umesto "$\{A,B,C\}$" i "$\{1,5,6,7\}$". Ovakav zapis usvajamo i za promenljive jednočlane skupove, pa često pišemo "y", "$X\setminus y$", "$X \cup y$", umesto "$\{y\}$", "$X\setminus\{y\}$", "$X \cup \{y\}$", respektivno.

n <u>skup</u> (n-<u>hiperravan</u>, itd.) je skup (hiperravan, itd.) koji ima n elemenata (kardinalnosti n).

Kardinalnost skupa X označavamo sa "$|X|$".

Zadržavamo standardne oznake za skupovne ("$\cup$", "$\cap$", "$\setminus$") i logičke ("$\wedge$", "$\vee$", "$\Rightarrow$", "$\Leftrightarrow$") operacije, kvantifikatore ("$\exists$", "$\forall$"), kao i relacije pripadanja ("$\in$") i uključenja ("$\subseteq$")

Mreža je parcijalno uredjen skup $(L,\subseteq)$, za čija svaka dva elementa, x i y, postoji unutar skupa jedinstven infimum (najveće donje ograničenje) i supremum (najmanje gornje ograničenje), u oznaci "$\inf(x,y)$" i "$\sup(x,y)$" respektivno. Operacije infimum i supremum su asocijativne i mogu se primeniti na više od dva elementa odjednom.

Razmatramo isključivo konačne mreže. Kod njih uvek postoji jedinstveni maksimalni (=najveći) element — jedinica mreže, kao i jedinstveni minimalni (=najmanji) element — nula mreže. Kod svih mreža koje razmatramo jedinica je neki konačan skup, elementi (čvorovi), mreže su neki podskupovi tog skupa, a relacija poretka je (skupovna) inkluzija.

Lanac je mreža koja je istovremeno i totalno uredjen skup (svaka dva čvora u lancu medjusobno uporediva).

Element X mreže neposredno pokriva element Y, u oznaci "X n.p. Y" ako je $X \supseteq Y$ i $X \neq Y$, a za svaki element Z te mreže važi

$$(X \supseteq Z \supseteq Y) \Rightarrow (Z = X \vee Z = Y).$$

Relacija neposrednog pokrivanja se pri grafičkom predstavljanju mreže označava neprekidnom pravom crtom, koja spaja odgovarajuće čvorove.

Atom mreže je njen element koji neposredno pokriva nulu.

Mreža inverzna mreži $(L, \subseteq)$ je mreža $(L, \subseteq^{-1})$, pri čemu za svaka dva čvora X i Y skupa L važi:

$$X \subseteq^{-1} Y \Leftrightarrow X \supseteq Y .$$

Dve mreže su izomorfne ako postoji bijekcija izmedju njihovih skupova čvorova, koja očuvava infimume i supremume.

Mreža je samoinverzna ako je izomorfna svojoj inverznoj mreži.

Ako je relacija poretka fiksirana, onda skup čvorova mreže obično poistovećujemo sa samom mrežom.

Graf G je uredjeni par (V,E), gde je V neki konačan skup, a E neka binarna simetrična relacija na skupu V (podskup Dekartovog proizvoda $V \times V$ sa osobinom: Za proizvoljne elemente x i y skupa V važi: $(x,y) \in E \Rightarrow (y,x) \in E$).

PRIMEDBA. Ovom definicijom grafa je obuhvaćen pojam, koji se uobičajeno naziva "neorijentisan graf". Orijentisane grafove ne koristimo.

Elementi skupa V su čvorovi grafa G, a elementi skupa E grane grafa G.

Grafovima se prirodno pridružuju dijagrami u kojima su čvorovi predstavljeni tačkama, a grane neprekidnim linijama koje spajaju odgovarajuće tačke.

Dve grane grafa su incidentne ako imaju zajednički čvor.

n-put u grafu je niz grana oblika

$$(x_1,x_2),(x_2,x_3),\dots,(x_{n-1},x_n),(x_n,x_{n+1}),$$

(svake dve uzastopne grane su incidentne), gde su medju čvorovima $x_1,x_2,\dots,x_n,x_{n+1}$ svaka dva različita, izuzev, eventualno, čvorova x_1 i x_{n+1}.

n-kontura je n-put kod koga je $x_{n+1}=x_1$.

Ako u gornje dve definicije zanemarimo broj grana n, tj. dozvolimo da on uzme proizvoljne prirodne vrednosti, onda dobijamo definicije puta i konture.

PRIMEDBA. Navedene definicije puta i kontura odstupaju od uobičajenih utoliko što ne dozvoljavaju višestruko ponavljanje čvorova, ili, čak, i granâ.

Graf je prost ako nema ni 1-konture ni 2-konture.

U skup čvorova grafa uvodimo relaciju ekvivalencije — povezanost: Dva čvora su povezana ako pripadaju istom putu. Graf je povezan ako ima samo jednu klasu povezanosti; u protivnom se klase povezanosti nazivaju povezanim komponentama. Jednoelementne povezane komponente bez 1-konturâ su izolovani čvorovi, a dvoelementne bez 1-konturâ i 2-konturâ izolovane grane.

Graf je k-povezan ako je iz njega potrebno udaljiti najmanje k grana da bi se učinio nepovezanim.

Dva grafa su izomorfna ako postoji bijekcija izmedju njihovih skupova čvorova koja očuvava grane .

<u>Mečing</u> grafa je proizvoljan skup njegovih grana sa svojstvom da nijedne dve grane u tom skupu nemaju zajednički čvor.

<u>Stepen</u> čvora u grafu je broj grana tog grafa, koje sadrže taj čvor.

<u>Permutacija</u> konačnog skupa S je bijekcija skupa S na sebe. Ako su x,y i z tri razna elementa skupa S, onda je <u>transpozicija</u> (x y) - permutacija α odredjena sa

$$\alpha(x)=y,\ \alpha(y)=x,\quad \alpha(t)=t \quad \text{za svako } t\in S\setminus\{x,y\},$$

a <u>ciklus dužine</u> 3 (xyz) - permutacija β odredjena sa

$$\beta(x)=y,\quad \beta(y)=z,\quad \beta(z)=x,\quad \beta(t)=t,\quad \text{za svako } t\in S\setminus\{x,y,z\}$$

"$\mathrm{rest}_m(n)$" označava ostatak pri deljenju prirodnog broja n prirodnim brojem m.

Funkcije "ceo deo od x" i "ceo deo od x+1" označavamo sa $\lfloor x\rfloor$ i $\lceil x\rceil$ respektivno. Tako je

$$\lfloor 2.8\rfloor = 2,\qquad \lceil 2.4\rceil = 3\ .$$

0-1. DEFINICIJE MATROIDA, ODGOVARAJUĆI OSNOVNI POJMOVI TEORIJE MATROIDA I NEKE VEZE IZMEDJU NJIH

Od većeg broja medjusobno ekvivalentnih definicija matroida ćemo navesti ukupno šest. Polazeći od prve definicije, najpre uvodimo pojmove na kojima se zasnivaju ostale:

1. *DEFINICIJA MATROIDA - PREKO BAZÂ*

Matroid M na konačnom skupu (nosaču) S je uredjen par $(S,\mathcal{B})$, gde je $\mathcal{B}$ familija podskupova od S ($\mathcal{B} \subseteq 2^S$), koja zadovoljava sledeći aksiom ("aksiom zamene").

$$(B_1, B_2 \in \mathcal{B} \wedge x \in B_1 \setminus B_2) \Longrightarrow (\exists y)(y \in B_2 \setminus B_1 \wedge (B_1 \setminus x) \cup y \in \mathcal{B})$$

Skupovi familije $\mathcal{B}$ su baze matroida M. Može se pokazati da su sve baze jednog matroida iste kardinalnosti.

Nezavisni skupovi matroida M su svi podskupovi njegovih baza.

Rang skupa X, $X \subseteq S$, u oznaci "rang(X)" ili "r(X)" je kardinalnost maksimalnog nezavisnog podskupa od X tj.

$$\operatorname{rang}(X) = \max_{B \in \mathcal{B}} |X \cap B|$$

Posebno, rang matroida M se definiše kao rang njegovog nosača S (rang(M) = rang(S)), ekvivalentno, kao kardinalnost njegovih baza.

Funkcija "rang", koja svakom podskupu nosača S pridružuje njegov rang, se naziva rang-funkcija matroida M.

PRIMEDBA. Pojmovi bazâ, nezavisnih skupova i ranga matroida predstavljaju uopštenje odgovarajućih pojmova iz teorije vektorskih prostora.

Ciklovi matroida M su minimalni zavisni podskupovi nosača S (tj. minimalni podskupovi od S, koji nisu nezavisni skupovi matroida M).

Zatvorenje $f(X)$ podskupa X nosača S se definiše sa

$$f(X) = \{y \in S \mid rang(X \cup y) = rang(X)\} ,$$

ili, kako je očigledno da je $X \subseteq f(X)$, sa

$$f(X) = X \cup \{y \in S \setminus X \mid rang(X \cup y) = rang(X)\}$$

Funkcija f, koja svakom podskupu nosača S pridružuje njegovo zatvorenje, se naziva funkcija zatvorenja matroida M:

Zatvoreni skupovi (potprostori) matroida M su podskupovi X nosača S koji su jednaki svom zatvorenju ($f(X) = X$), ekvivalentno, podskupovi X nosača S za koje važi

$$rang(X \cup y) = rang(X) + 1 \quad \text{za svako } y \in S \setminus X .$$

Hiperravni matroida M su njegovi potprostori ranga $rang(M) - 1$.

Svaki od pojmova: nezavisan skup, rang-funkcija, cikl, funkcija zatvorenja, hiperravan, može poslužiti kao osnova za definiciju matroida. U svakoj od pet odgovarajućih definicija pišemo:

"M na S je (S,...)... umesto "Matroid M na konačnom nosaču S je uredjen par (S,...)...".

2. DEFINICIJA MATROIDA - PREKO NEZAVISNIH SKUPOVA

M na S je (S,N), gde je N familija podskupova od S, koja ispunjava uslove:

1. $\Phi \in N$
2. $X \in N \wedge Y \subseteq X \Rightarrow Y \in N$
3. $(X, Y \in N \wedge |X| = |Y| + 1) \Rightarrow (\exists x)(x \in X \setminus Y \wedge Y \cup x \in N)$

Skupove familije N nazivamo nezavisnim skupovima matroida M.

3. DEFINICIJA MATROIDA - PREKO RANG-FUNKCIJE

M na S je (S,rang), gde je "rang"-funkcija koja preslikava podskupove skupa S u nenegativne cele brojeve i koja ispunjava sledeće uslove za svaka dva podskupa X i Y nosača S:

1. $0 \leq \text{rang}(X) \leq |X|$
2. $X \subseteq Y \Rightarrow \text{rang}(X) \leq \text{rang}(Y)$
3. $\text{rang}(X \cup Y) + \text{rang}(X \cap Y) \leq \text{rang}(X) + \text{rang}(Y)$

Funkciju "rang" nazivamo rang-funkcija matroida M.

4. DEFINICIJA MATROIDA - PREKO CIKLOVA

M na S je $(S, \mathcal{C})$, gde je $\mathcal{C}$ familija podskupova od S za koju važi

1. $(C_1, C_2 \in \mathcal{C} \wedge C_1 \neq C_2) \Rightarrow C_1 \nsubseteq C_2$
2. $(C_1, C_2 \in \mathcal{C} \wedge C_1 \neq C_2 \wedge z \in C_1 \cap C_2) \Rightarrow$
   $(\exists C_3)(C_3 \in \mathcal{C} \wedge C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{z\})$

Skupove familije $\mathcal{C}$ nazivamo ciklovima matroida M.

5. DEFINICIJA MATROIDA - PREKO FUNKCIJE ZATVORENJA

M na S je (S,f), gde je f funkcija koja preslikava skup 2^S u sebe, pri čemu za sve podskupove X, Y, kao i za sve elemente x,y skupa S važi

1. $X \subseteq f(X)$
2. $X \subseteq Y \Rightarrow f(X) \subseteq f(Y)$
3. $f(f(X)) = f(X)$
4. $y \in f(X \cup x) \setminus f(X) \Rightarrow x \in f(X \cup y)$

Funkciju f nazivamo funkcija zatvorenja matroida M.

6. DEFINICIJA MATROIDA - PREKO HIPERRAVNI

M na S je $(S, \mathcal{H})$, gde je $\mathcal{H}$ familija podskupova od S, koja ispunjava uslove

1. $(H_1, H_2 \in \mathcal{H} \wedge H_1 \neq H_2) \Rightarrow H_1 \nsubseteq H_2$
2. $(H_1, H_2 \in \mathcal{H} \wedge H_1 \neq H_2 \wedge x \in S \setminus (H_1 \cup H_2)) \Rightarrow$

   $\Rightarrow (\exists H_3)(H_3 \in \mathcal{H} \wedge H_3 \supseteq (H_1 \cap H_2) \cup \{x\})$

Skupove familije $\mathcal{H}$ nazivamo hiperravnima matroida M.

Navodimo još neke stavove, pomoću kojih se neki pojmovi, koji se koriste u definicijama matroida, izražavaju preko drugih takvih pojmova:

Baze su maksimalni nezavisni skupovi.

Baze su minimalni podskupovi nosača, koji nisu sadržani ni u jednoj hiperravni, ekvivalentno, koji su ranga jednakog rangu matroida.

Nezavisni skupovi su svi podskupovi nosača, koji ne sadrže nijedan cikl, a baze su maksimalni podskupovi nosača sa tim svojstvom.

Nezavisni skupovi su podskupovi X nosača sa svojstvom rang(X) = |X|, ekvivalentno, sa svojstvom

$$y \in X \Rightarrow y \notin f(X \setminus y)$$

Zatvorenje f(X) skupa X je skup $X \cup \{x \mid$ postoji cikl C tako da je $C \setminus X = x\}$.

Hiperravni matroida M su maksimalni podskupovi nosača, koji ne sadrže nijednu bazu; ekvivalentno, koji su ranga rang(M)-1

Hiperravan matroida sa nosačem S je podskup X skupa S sa svojstvom

$$f(X) \neq S \quad i \quad f(X \cup y) = S \text{ za svako } y \in S \setminus X$$

Zatvoreni skupovi matroida su nosač, hiperravni i svi različiti preseci dve i više hiperravni.

Neka je $X = \{x_1, \ldots, x_p\}$ podskup nosača i neka je $k_i \in \{0,1\}$ za $1 \leq i \leq p$, pri čemu je $k_i = 0$ ako i samo ako postoji cikl, koji sadrži x_i, a uključen je u $\{x_1, \ldots, x_i\}$. Tada zbir $\sum_{i=1}^{p} k_i$ ne zavisi od korišćene permutacije skupa X i jednak je rang(X).

Navedimo još neka svojstva rang-funkcije:

Za svaki podskup X i za svaki element y nosača važi:

$$\text{rang}(X) \leq \text{rang}(X \cup y) \leq \text{rang}(X) + 1$$
$$\text{rang}(f(X)) = \text{rang}(X)$$

Za svaki cikl C važi $\text{rang}(C) = |C| - 1$

0-2. JOŠ NEKI OSNOVNI POJMOVI TEORIJE MATROIDA

Dva matroida, M_1 na S_1 i M_2 na S_2, su izomorfni ako postoji bijekcija $\varphi : S_1 \to S_2$ sa osobinom: skup X je baza matroida M_1 ako i samo ako je skup $\varphi(X)$ baza matroida M_2. Drugim rečima, izomorfizam dva matroida je bijekcija izmedju njihovih nosača saglasna sa matroidnom strukturom. Kako se matroidna struktura može definisati na više načina, to se i ova saglasnost može uspostavljati i proveravati i posredstvom hiperravni, ciklova, rang-funkcije, itd.

Matroid na datom nosaču je jednoznačno odredjen (do na izomorfizam) kad je data familija njegovih baza. Isto važi i kad se reč "baza" zameni sa "nezavisnih skupova", "ciklova", "potprostora","hiperravni". Matroidi se mogu odrediti i preko svoje rang-funkcije, funkcije zatvorenja, kao i preko nekih drugih pojmova.

Ako je M matroid na nosaču S, onda su komplementi (s obzirom na S) svih baza matroida M - baze drugog matroida na skupu S. Taj matroid se zove dualni matroid matroida M i označava se sa M^*. Očigledno važi

$$(M^*)^* \cong M \quad \text{i} \quad \operatorname{rang}(M^*) = |S| - \operatorname{rang}(M).$$

Komplementi hiperravni matroida M su ciklovi matroida M^*.

Samodualni matroid je matroid koji je izomorfan svom dualnom matroidu. Smenom $\operatorname{rang}(M^*) = \operatorname{rang}(M)$ u poslednju jednakost dobijamo da za svaki samodualni matroid M na nosaču S postoji nenegativan ceo broj m tako da je $|S| = 2m$, $\operatorname{rang}(M) = m$.

Svi nesamodualni matroidi se mogu razbiti u parove uzajamno dualnih matroida.

Izdvajamo dve posebne klase samodualnih matroida:

Identično samodualan (ISD) matroid je samodualan matroid M, kod koga identično preslikavanje nosača uspostavlja izomorfizam matroida M i M^* (ekvivalentno, baze matroida M se javljaju isključivo u komplementarnim (s obzirom na nosač) parovima).

Električno samodualan (ESD) matroid ([55]) je samodualan matroid M na S ($|S| = 2m$), kod koga postoji permutacija α skupa S sa osobinom:

α sadrži (ekvivalentno, α je proizvod) m disjunktnih transpozicija i $\alpha(M) = M^*$.

Može se pokazati da potprostori matroida obrazuju mrežu u kojoj se infimum i supremum dva potprostora X i Y definišu sa:

$$\inf(X,Y) = X \cap Y \;; \qquad \sup(X,Y) = f(X \cup Y)$$

Mreža potprostora matroida zadovoljava i dva posebna uslova: atomarnost i semimodularnost:

Atomarnost: Svaki element mreže, sem nule, je supremum nekog (nepraznog) skupa atoma.

Semimodularnost: Za svaka dva elementa mreže, X i Y važi:

$$(X \text{ n.p. } \inf(X,Y) \wedge Y \text{ n.p.} \inf(X,Y)) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (\sup(X,Y) \text{n.p.} X \wedge \sup(X,Y) \text{n.p. } Y)$$

Mreža koja istovremeno zadovoljava uslove atomarnosti i semimodularnosti se naziva geometrijska mreža. Poznat je i stav obrnut malopredjašnjem: Svaka geometrijska mreža je mreža potprostora nekog matroida.

Mreža potprostora matroida ima i sledeću osobinu:

Neka je F_o proizvoljan potprostor i neka su $F_1, \ldots, F_k$ potprostori za koje važi:

F_k je nula mreže i F_{i-1} n.p. F_i, $1 \le i \le k$. Tada je broj k invarijanta potprostora F_o i važi rang$(F_o) = k$.

Petlja matroida je element njegovog nosača, koji je istovremeno i cikl. Unija svih petlji matroida (eventualno prazna) je njegov jedini potprostor 0 (nula geometrijske mreže). Petlje dualnog matroida M* su kopetlje (polaznog) matroida M.

Matroid je prost ako su svi njegovi potprostori ranga 1 (atomi geometrijske mreže) jednočlani skupovi. Prost matroid očigledno nema petlji.

Matroid je *poluprost* ako nema petlji i nije prost. Tako se svaki matroid nalazi u tačno jednoj od sledeće tri poparno disjunktne klase: matroidi sa petljama, poluprosti matroidi i prosti matroidi.

Pejving matroid je matroid M na skupu S, za koga važi: $(X \subseteq S \wedge |X| \leq \text{rang}(M) - 2) \Rightarrow X$ je nezavisan skup matroida M.

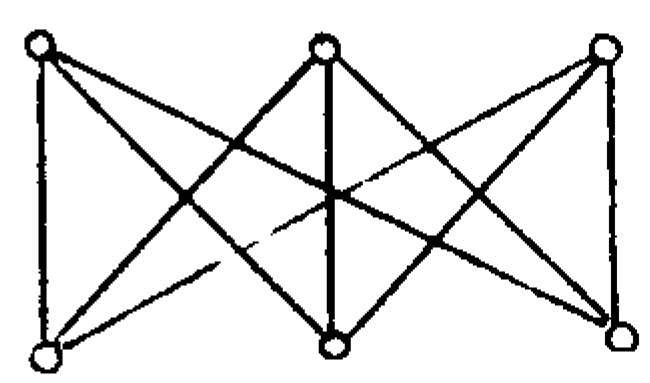
Ako se u definiciji pejving matroida broj "2" zameni brojem "1", onda dobijamo definiciju *uniformnog matroida*. Uniforman matroid ranga r na n-skupu (jedinstven do na izomorfizam) označavamo sa $U_{r,n}$.

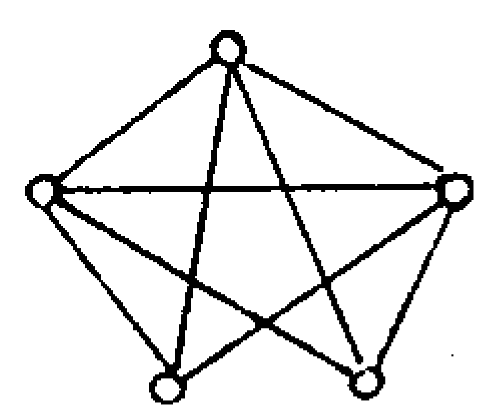
Poligon-matroid grafa G je matroid $M(G)$, čiji nosač je skup grana grafa G i čiji ciklovi su skupovi grana kontura grafa G (ti skupovi ispunjavaju uslove za ciklove matroida). Graf G je *grafička reprezentacija* matroida $M(G)$.

Matroid je *grafički* ako ima grafičku reprezentaciju. Matroid M je *kografički* ako je dualni matroid M^* grafički.

Grafičke reprezentacije grafičkih matroida nisu uvek jednoznačno odredjene. Medjutim, matroid bez petlji, koji je poligon-matroid nekog 3-povezanog grafa G, jednoznačno odredjuje G do na izolovane čvorove.

$M(K_{3,3})$ i $M(K_5)$ su redom poligon-matroidi grafova:

$K_{3,3}$: 

K_5: 

Matroid F_7 (Fano matroid) je matroid ranga 3 na 7-skupu $W = \{A,B,C,D,E,F,G\}$ čije baze su svi 3-podskupovi od W izuzev $\{A,B,C\}$, $\{A,D,E\}$, $\{A,F,G\}$, $\{B,D,G\}$, $\{B,E,F\}$, $\{C,D,F\}$, $\{C,E,G\}$.

F_7^*, $M^*(K_{3,3})$ i $M^*(K_5)$ su dualni matroidi matroida F_7, $M(K_{3,3})$ i $M(K_5)$ respektivno. Matroid F_7^* nazivamo *heptaedron*.

Neka je M matroid na nosaču S, neka $N(M)$ označava familiju svih nezavisnih skupova matroida M, neka je T proizvoljan podskup skupa S i neka je k ceo broj iz intervala $[1, \mathrm{rang}(M)]$. Definišimo četiri vrste podmatroida (matroida M):

Trunkacija ranga k matroida M je matroid M_k na nosaču S, čija familija nezavisnih skupova je:

$$N(M_k) = \{X \mid X \in N(M) \wedge |X| \leq k\}$$

Restrikcija matroida M na skup T je matroid $M|T$ na nosaču T, čija familija nezavisnih skupova je

$$N(M|T) = \{X \mid X \in N(M) \wedge X \subseteq T\}$$

PRIMEDBA. Očigledno je da skupovi iz svake od familijâ $N(M_k)$, $N(M|T)$ zadovoljavaju sva tri uslova za nezavisne skupove matroida.

Kontrakcija matroida M na skup T je matroid $M.T$ na nosaču T, koji definišemo kombinovanjem operatora dualnosti i restrikcije na skup T:

$$M.T \overset{\mathrm{def}}{=\!=} (M^*|T)^*$$

Minor matroida M je matroid koji se može dobiti iz M proizvoljnom kombinacijom restrikcijâ i kontrakcijâ. Može se pokazati da se svaki minor može dobiti primenom samo jedne restrikcije i jedne kontrakcije (redosled njihove primene se može i obrnuti).

Razmatramo i jednu vrstu nadmatroida:

Matroid M je nadgradnja matroida K ako je matroid K (neka) trunkacija matroida M.

Za razliku od trunkacije, nadgradnja odredjenog ranga (većeg od rang (K)) ne mora postojati, a ukoliko postoji, ne mora biti jednoznačno odredjena. Nadgradnja je netrivijalna ukoliko se ne poklapa sa datim matroidom ($M \neq K$).

Neke minore matroida lako prepoznajemo u njegovoj mreži potprostora: Ako su S i T dva urediva potprostora, $S \subseteq T$, onda je matroid $(M|T).(T \setminus S)$ — na nosaču $T \setminus S$ — izomorfan matroidu, čija familija potprostora je

$\{X \mid X$ je potprostor matroida M i $S \subseteq X \subseteq T\}$

Matroid je binaran ako ne sadrži minor izomorfan matroidu $U_{2,4}$.

Binaran matroid je regularan ako ne sadrži minor izomorfan nekom od matroida F_7 i F_7^*.

PRIMEDBA. Binarni i regularni matroidi se obično definišu kao (u izvesnom smislu) reprezentabilni matroidi nad poljem GF(2) i nad svakim poljem respektivno. Njihove gornje definicije se zasnivaju na poznatim Tutte-ovim karakterizacijama binarnih i regularnih matroida (|60|).

Treća Tutte-ova karakterizacija se odnosi na grafičke matroide:

Grafički matroidi su tačno oni regularni matroidi, koji ne sadrže minore izomorfne nekom od matroida $M^*(K_5)$ ili $M^*(K_{3,3})$.

Dualno, kografički matroidi su tačno oni regularni matroidi koji ne sadrže minore izomorfne nekom od matroida $M(K_5)$ ili $M(K_{3,3})$.

POSLEDICA. Svi regularni matroidi na skupovima od najviše 8 elemenata su i grafički i kografički. Naime, nosači matroida $M^*(K_5)$ i $M^*(K_{3,3})$ su redom 10-skup i 9-skup, a potpuno analogna tvrdnja važi i za matroide $M(K_5)$ i $M(K_{3,3})$, pa ti matroidi ne mogu biti minori nekog matroida, čiji nosač nema više od 8 elemenata.

Euklidska reprezentacija matroida M ranga 3 na skupu S je ravanski dijagram sastavljen od pravih i njima incidentnih označenih tačaka (svaka prava u dijagramu sadrži najmanje tri označene tačke) sa osobinom: Označene tačke i nekolinearni 3-skupovi označenih tačaka odgovaraju elementima skupa S i bazama matroida M respektivno.

Ako je $\tau = \{T_1, \dots, T_r\}$ neka familija podskupova konačnog skupa S, parcijalne transverzale familije τ su podskupovi $\{x_1, \dots, x_k\}$ skupa S za koje važi: postoji injekcija α skupa $\{1, \dots, k\}$ u skup $\{1, \dots, r\}$, sa svojstvom $x_i \in T_{\alpha(i)}$, $1 \le i \le k$.

Drugim rečima, parcijalne transverzale familije τ su sistemi različitih predstavnika skupova iz τ (sastavljaju se tako što se iz svakog skupa familije τ uzme po jedan, uvek nov, predstavnik).

Poznato je da su maksimalne parcijalne transverzale proizvoljne (konačne) familije (konačnih) skupova - baze nekog matroida (iz tog sledi i da su sve te maksimalne parcijalne transverzale iste dužine).

Transverzala familije τ je maksimalna parcijalna transverzala, čija dužina (broj elemenata) je jednaka broju skupova iz τ.

Matroid M na skupu S je transverzalan ako postoji familija τ podskupova od S, čije transverzale se poklapaju sa bazama matroida M. Familija τ se zove transverzalna reprezentacija matroida M.

Transverzalan matroid može imati i više različitih transverzalnih reprezentacija. Maksimalna (minimalna) transverzalna reprezentacija matroida M je ona kod koje, dodavanjem (respektivno, oduzimanjem) bilo kog elementa iz bilo kog skupa dobijamo familiju čije transverzale (ili možda maksimalne parcijalne transverzale) su baze nekog matroida, neizomorfnog sa M.

0-3. CIKLIČKI POTPROSTORI I CF-MREŽE. OSNOVNI POTPROSTORI

U ovom odeljku detaljnije razmatramo jedan pojam, koji igra centralnu ulogu u našem pristupu matroidima u ovoj disertaciji (na njemu se zasniva reprezentacija matroida koje najčešće koristimo):

Ciklički potprostori (C-potprostor) je potprostor matroida, koji je istovremeno i unija njegovih ciklova (|42|).

Za neki podskup nosača matroida se uslov "biti unija ciklova matroida" može zameniti ekvivalentnim, u mnogim slučajevima, lakše proverljivim, uslovom na osnovu sledeće teoreme:

TEOREMA 0-3.1. *Neka je* M *matroid na nosaču* S. *Podskup* X *skupa* S *je unija ciklova matroida* M *ako i samo ako važi:*

$$\mathrm{rang}(X \setminus y) = \mathrm{rang}(X), \quad \textit{za svako} \quad y \in X,$$

gde je sa "rang" *označena rang-funkcija matroida* M .

D o k a z. Neka je X unija ciklova (od M) i neka $y \in X$. Tada postoji cikl C, $C \subseteq X$, za koji važi $y \in C$, a svakako važi i

$$\mathrm{rang}(C \setminus y) = \mathrm{rang}(C) = |C| - 1$$

Ako je $C \neq X$, onda označimo

$$X \setminus C = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Ako u treći uslov za rang funkciju matroida:

$$\mathrm{rang}(A) + \mathrm{rang}(B) \geq \mathrm{rang}(A \cup B) + \mathrm{rang}(A \cap B)$$

za sve podskupove nosača A i B

stavimo $\{A,B\} = \{C, (C \setminus y) \cup x_1\}$, onda nalazimo:

$$\mathrm{rang}((C\setminus y) \cup x_1) + \mathrm{rang}(C) \geq \mathrm{rang}(C \cup x_1) + \mathrm{rang}(C \setminus y).$$

Nakon skraćivanja imamo

$$\mathrm{rang}((C\setminus y) \cup x_1) \geq \mathrm{rang}(C \cup x_1),$$

pa na osnovu drugog uslova za rang-funkciju matroida (monotonost) dobijamo

$$\mathrm{rang}((C\setminus y) \cup x_1) = \mathrm{rang}(C \cup x_1).$$

Ovaj rezultat koristimo za skraćivanje u sledećem koraku, koji se od prvog razlikuje samo po tome što se uzima

$$\{A,B\} = \{C \cup x_1, (C\setminus y) \cup \{x_1, x_2\}\}$$

Opisani postupak se ponavlja sve dok se ne iscrpi skup $X \setminus C$, nakon čega imamo

$$\mathrm{rang}(X \setminus y) = \mathrm{rang}(X).$$

Obrnuto, neka je X podskup nosača sa osobinom da za proizvoljno $y \in X$ važi $\mathrm{rang}(X\setminus y) = \mathrm{rang}(X)$. Neka je E neki maksimalan nezavisan podskup skupa $X\setminus y$. Tada važi

$$\mathrm{rang}(E) = \mathrm{rang}(X\setminus y) = \mathrm{rang}(X)$$

Kako je $E\subset E\cup y\subseteq X$, to zbog monotonosti rang-funkcije sledi $\mathrm{rang}(E)=\mathrm{rang}(E\cup y)$.

Kako je

$$|E\cup y| = |E| + 1 = \mathrm{rang}(E) + 1 = \mathrm{rang}(E\cup y) + 1$$

to je skup $E\cup y$ zavisan, pa sadrži neki minimalan zavisan skup, cikl C. Taj cikl mora sadržati element y, jer cikl ne može biti sadržan u nezavisnom skupu E. Kako svaki element skupa X pripada nekom ciklu, to je skup X unija ciklova.

Jasno je da baze (respektivno hiperravni) ekonomičnije opisuju matroide nego nezavisni skupovi (respektivno potprostori) - familija prvih je u oba slučaja uključena u familiju drugih. Medjutim, na osnovu "eksperimenata" nalazimo da i ciklički potprostori u preseku ekonomičnije opisuju matroide nego svi potprostori,iako cikličkim potprostorima treba pridružiti i njegove rangove da bi matroid bio potpuno odredjen. Naime, ako su dati svi ciklički potprostori sa svojim rangovima, onda sve neciklične potprostore ranga r+1 (odgovarajućeg matroida) odredjujemo kao

— maksimalne skupove koji se mogu dobiti dodavanjem jednog komplementarnog (= novog) elementa svim potprostorima ranga r, pod uslovom da nijedan od tih maksimalnih skupova nije uključen u neki ciklički potprostor ranga r+1.

Ako je data mreža svih potprostora matroida, onda su ciklički potprostori nula i svi oni potprostori, koji imaju bar dva elementa više od svih svojih neposrednih prethodnika u toj mreži.

Postoje i matroidi kod kojih su svi potprostori ciklički (to su ekstremni kontraprimeri za apsolutnu veću ekonomičnost opisa preko cikličkih potprostora sa rangovima od opisa preko svih potprostora). Naprimer, udvostručavanjem svakog elementa nosača (zamenom svakog elementa x skupom

$\{x', x''\})$ nekog matroida M_1 na n-skupu, dobijamo matroid M_2 na (2n)-skupu, kod koga su svi potprostori ciklički. Štaviše preslikavanje $M_1 \to M_2$ uspostavlja bijekciju izmedju svih neizomorfnih matroida na n-skupu i jedne klase matroida na (2n)-skupu, kod kojih su svi potprostori ciklički.

Posebno važno obeležje cikličkih potprostora je dato sledećom teoremom:

TEOREMA 0-3.2. *Ciklički potprostori matroida* M *na nosaču* S *obrazuju mrežu u kojoj se infimum i supremum dva ciklička potprostora* X *i* Y *definišu sa:*

$$\inf(X,Y) = S \setminus f^*(S \setminus (X \cap Y)); \quad \sup(X,Y) = f(X \cup Y) ,$$

gde je sa f^* *označena funkcija zatvorenja dualnog matroida* M^*.

Jedan dokaz ove teoreme je dat u radu |2| .

Naglašavamo da se u mrežama svih i mrežama cikličkih potprostora jednog matroida poklapaju nule i supremumi, ali to ne mora biti slučaj sa jedinicama i infimumima.

Mrežu cikličkih potprostora matroida skraćeno nazivamo <u>CF-mreža</u>.

Dok je jedinica mreže svih potprostora sam nosač, dotle je jedinica CF-mreže skup koji nastaje iz nosača izbacivanjem svih kopetlji.

<u>Tip CF-mreže</u> je odgovarajuća mreža, kao čisto algebarska struktura, nastaje apstrahovanjem samih cikličkih potprostora i njihovih rangova u CF-mreži i njihovom zamenom običnim čvorovima mreže (naglasimo, medjutim, da CF-mreža, pored algebarske strukture mreže, nosi i potpunu informaciju o matroidu, izuzev broja kopetlji i podataka vezanih za kopetlje).

Za razliku od mreže svih potprostora, na CF-mrežu nisu nametnuta nikakva algebarska ograničenja, tj. tip CF-mreže može biti proizvoljan:

TEOREMA 0-3.3. *Svaka konačna mreža je tip* CF-*mreže nekog matroida.*

Dokaz ove teoreme se može naći u disertaciji |57| . Taj dokaz predstavlja modifikaciju dokaza poznate Dilworthove teoreme (|28|) da se svaka konačna mreža može potopiti u geometrijsku mrežu; u dokazu je potrebno čvorovima opšte konačne mreže pridružiti skupove i rangove tako da budu ispunjeni uslovi za cikličke potprostore matroida - tom prilikom je pogodno uvesti u razmatranje i necikličke potprostore.

Kad se generiše jedan matroid sa CF-mrežom odredjenog tipa, lako je generisati proizvoljan broj takvih matroida; najjednostavnija mogućnost je da umnožavamo elemente nosača, tj. da ih zamenjujemo poparno disjunktnim konačnim skupovima.

Pored bazâ, i ciklički potprostori su veoma pogodni za generisanje dualnog matroida:

TEOREMA 0-3.4. *Ako je* M *matroid na nosaču* S , *onda važi:*

Skup X *je ciklički potprostor matroida* M *ako i samo ako je skup* $S \setminus X$ *ciklički potprostor dualnog matroida* M^*.

Dokaz ove teoreme je takodje dat u radu | 2 | .

POSLEDICA. Tipovi CF-mreža uzajamno dualnih matroida su uzajamno inverzni. Samodualni matroidi imaju CF-mreže samoinverznog tipa.

Neka je matroid M na nosaču S zadat svojim cikličkim potprostorima sa pridruženim rangovima. Cikličke potprostore odredjujemo na osnovu Teoreme 0-3.4. (komplementiranjem, kao i u slučaju bazâ). Njihove rangove računamo na osnovu jednostavne formule (| 62 |):

$$\mathrm{rang}^*(S \setminus A) = |S| - \mathrm{rang}(S) - |A| + \mathrm{rang}(A) ,$$

gde su sa "rang" i "rang*" redom označene rang-funkcije matroida M i M*, a sa "A" proizvoljan podskup nosača S.

Na osnovu rečenog se veoma jednostavno odredjuje reprezentacija matroida M* preko C-potprostora sa pridruženim rangovima iz odgovarajuće reprezentacije matroida M.

U daljem razmatramo jednu specijalnu vrstu cikličkih potprostora koja nas dovodi do još ekonomičnijeg opisa matroida:

Osnovni potprostor (Os-potprostor) nekog matroida je potprostor F sa sledećim svojstvom: Restrikcija tog matroida na skup F ima netrivijalnu nadgradnju (|25|).

TEOREMA 0-3.5. *Svaki Os-potprostor je i C-potprostor.*

LEMA. *Rang-funkcija matroida ispunjava (za svaki element* y *i za svaki podskup* X *nosača) uslov:*

$$\mathrm{rang}(X \cup y) \leq \mathrm{rang}(X) + 1$$

D o k a z leme. Interesantan je samo slučaj kad $y \notin X$. Tada je $X \cap y = \emptyset$, pa tražena nejednakost sledi iz

$$\mathrm{rang}(X \cup y) + \mathrm{rang}(X \cap y) \leq \mathrm{rang}(X) + \mathrm{rang}(y) ,$$

$\mathrm{rang}(\emptyset) = 0$ (zbog $0 \leq \mathrm{rang}(\emptyset) \leq |\emptyset| = 0$), kao i

$0 \leq \mathrm{rang}(y) \leq |y| = 1$.

D o k a z teoreme. Pretpostavimo da potprostor F ranga r matroida M nije C-potprostor. Tada u skupu F postoji element x sa svojstvom $\mathrm{rang}(F \setminus x) = r-1$.

Skup $F \setminus x$ je potprostor matroida M. Naime, ako označimo $f(F \setminus x) = A$, onda imamo da $A \not\ni x$ i $A \cap F = F \setminus x$, pa je skup $F \setminus x$ potprostor kao presek dva potprostora (kako je $\mathrm{rang}(F \setminus x) = \mathrm{rang}(A)$, to baš mora biti $F \setminus x = A$).

Potprostor $F \setminus x$ je ujedno i hiperravan restrikcije M_F matroida M na skup F. U svakoj netrivijalnoj nadgradnji E (sa rang-funkcijom "rang_E") matroida M_F mora biti

$$\mathrm{rang}_E(F) > r, \quad \text{ali ostaje} \quad \mathrm{rang}_E(F \setminus x) = r - 1 ,$$

što je kontradikcija, budući da se, prema Lemi, dodavanjem jednog elementa rang skupa ne može povisiti za više od 1. Prema tome, matroid F nema netrivijalnih nadgradnji, što znači da potprostor F nije Os-potprostor.

Obrat Teoreme 0-3.5. ne važi. Naprimer, ako su u nekom matroidu skupovi $\{x,y\}$ i $\{z,t\}$ potprostori ranga 1 (pri čemu su x,y,z,t, četiri razna elementa), a skup $\{x,y,z,t\}$ potprostor ranga 2, onda je potprostor $\{x,y,z,t\}$

— C-potprostor koji nije Os-potprostor.

Uopšte, neosnovni ciklički potprostori su tačno oni ciklički potprostori koji se mogu izraziti kao unija neka druga dva ciklička potprostora, X i Y, pri čemu je

$$\mathrm{rang}(X \cup Y) = \mathrm{rang}(X) + \mathrm{rang}(Y) - \mathrm{rang}(X \cap Y)$$

Zatvorenje unije dva C-potprostora je C-potprostor i ukoliko se to zatvorenje poklapa sa samom unijom, a rang te unije je maksimalan moguć, onda takav slučaj možemo smatrati trivijalnim i takav C-potprostor se ne mora registrovati pri opisivanju matroida (kao "predvidiv"). Na sličan način možemo osnovne potprostore registrovati kao "potprostore nepredvidive na osnovu potprostora nižeg ranga", tj. osnovni potprostori ranga r su upravo oni potprostori ranga r, koji nisu minimalni u odnosu na zahteve, koje postavljaju potprostori ranga $\leq r-1$.

Zaključujemo da je matroid na datom nosaču potpuno odredjen familijom svojih Os-potprostora sa pridruženim rangovima; lako je rekonstruisati neosnovne cikličke potprostore i njihove rangove. Opis matroida preko Os-potprostora sa pridruženim rangovima nikad nije manje ekonomičan od opisa preko C-potprostora sa pridruženim rangovima.

Generisanje matroida M ranga r na nosaču S iz njegovih Os-potprostora sa pridruženim rangovima se može i dinamički prikazati:

Nazovimo "homogenim" one matroide koji su ili uniformni ili se mogu dobiti iz uniformnih matroida dodavanjem izvesnog broja petlji.

Podjimo od homogenog matroida ranga r na nosaču S, koji ima, iste petlje, kao i matroid M. Potprostore matroida M generišemo redom po rangovima: kad su generisani svi potprostori ranga $\leq j$, onda najpre generišemo minimalne skupove koji bi mogli biti potprostori ranga $> j$. U sledećem koraku uvodimo date Os-potprostore ranga j+1 i izbacujemo iz familije konstruisanih "potprostora" ranga j+1 one koji su podskupovi Os-potprostora ranga j+1.

Homogeni matroidi nemaju Os-potprostora različitih od nule i, eventualno, nosača. Ostali Os-potprostori se mogu smatrati "nosiocima poremećaja u matroidu". Mreža potprostora proizvoljnog matroida se može generisati iz mreže potprostora odgovarajućeg homogenog matroida naizmeničnim "učitavanjem poremećaja" (= registrovanjem Os-potprostora odredjenog ranga) i "prenošenjem poremećaja naviše kroz mrežu" (= generisanjem familije minimalnih skupova koji zadovoljavaju uslove za potprostore viših rangova).

I GLAVA

KONSTRUKCIJA SVIH NEIZOMORFNIH NEPROSTIH MATROIDA NA SKUPOVIMA OD NAJVIŠE 8 ELEMENATA

U ovoj glavi konstruišemo bez pomoći kompjutera sve neizomorfne neproste matroide na skupovima od najviše 8 elemenata. Za razliku od konstrukcije svih neizomorfnih matroida na skupovima od najviše 7 elemenata, koju smo dali u |3| ovde konstruišemo i neproste matroide na 8-skupu. Pored toga, ovde usklađujemo oznake sa katalogom |16| svih neizomorfnih prostih matroida na skupovima od najviše 8 elemenata, konstruisanim uz pomoć kompjutera, koji je našom konstrukcijom kompletiran (kompletirani katalog "malih" matroida dajemo u prilogu disertacije).

Dodavanje (novog) elementa z *potprostoru* X matroida M na S ($S \not\ni z$) je zamena svih potprostora Y od M, koji sadrže X, sa $Y \cup \{z\}$ (ostali potprostori se ne menjaju). Ako je X nula ili atom geometrijske mreže od M, onda ova operacija generiše potprostore novog matroida na $S \cup \{z\}$ (medjutim, ako bi potprostor X bio višeg ranga, onda bi bio narušen uslov atomarnosti u geometrijskoj mreži).

Postoji očigledna bijekcija izmedju svih neizomorfnih matroida na n-skupu i svih neizomorfnih matroida sa petljama na (n+1)-skupu; ona se uspostavlja dodavanjem jedne petlje (tj. dodavanjem jednog elementa nuli geometrijske mreže) svakom matroidu prve klase. Time se problem konstrukcije neprostih matroida svodi na problem konstrukcije odgovarajućih poluprostih matroida.

Svaki poluprosti matroid sa k atoma na n-skupu ($k < n$; n i k će biti naše standardne oznake u ovoj glavi) nastaje neposrednim dodavanjem n-k (novih) "paralelnih" elemenata atomima nekog prostog matroida na k-skupu. Stoga za konstrukciju neizomorfnih poluprostih matroida na n-skupu ($2 \leq n \leq 8$) koristimo spisak svih neizomorfnih prostih matroida na k-skupu, za svako k izmedju 1 i n-1 (uključno).

PRIMEDBA. Katalog |16| bi se, prema navedenom, mogao koristiti i za konstrukciju neprostih matroida na 9-skupu.

Osnovni problem se sastoji u tome da se odrede sve neizomorfne mogućnosti (tj. one kojima odgovaraju neizomorfni poluprosti matroidi) za dodavanje n-k paralelnih elemenata atomima prostih matroida na k-skupu. Taj problem prevodimo na problem odredjivanja klasa odgovarajuće relacije ekvivalencije na skupu kombinacija sa ponavljanjem dužine n-k, sastavljenih od atoma datog prostog matroida na k-skupu. U radu |7| je učinjen pokušaj opisivanja klasâ te relacije ekvivalencije u opštem slučaju, uz pomoć nekih jednostavnih relacija ekvivalencije.

Po našem mišljenju, mali su izgledi da se napravi efikasan univerzalan algoritam za konstrukciju svih neizomorfnih poluprostih matroida na datom skupu, "izvedenih" iz datog prostog matroida. Naš pristup ovoj konstrukciji, kad su u pitanju "mali" matroidi, je u prvom redu heuristički i čini nam se da ga je najprikladnije opisati preko karakterističnih primera. Primeri su odabrani tako da obuhvate i najkomplikovanije situacije koje se javljaju na razmatranim "malim" skupovima.

Voleli bismo da ubedimo čitaoca da, nakon nalaženja pogodnih reprezentacija korišćenih prostih matroida, nije potrebno više od par sati "ručnog" rada za nalaženje, odnosno za proveru, svih konstruisanih poluprostih matroida. Posebno pogodna okolnost je da za veće vrednosti n-k, kada particije paralelnih elemenata s obzirom na atome postaju komplikovanije, imamo manje vrednosti k, iz čega sledi naglo smanjivanje broja prostih matroida koje treba razmatrati.

Čini nam se da, što se naših potreba tiče, osnovni potprostori, zajedno sa svojim rangovima, u proseku ekonomičnije opisuju proste matroide nego što to čine hiperravni. Iz tog razloga zamenjujemo familije hiperravni, kojima su prosti matroidi predstavljeni u |16|, odgovarajućim familijama Os-potprostora sa pridruženim rangovima. Prilikom ove zamene očuvavamo oznake odgovarajućih atoma, kao i redosled navodjenja prostih matroida iz |16|.

PRIMER 1. Prost matroid ranga 4 na 7-skupu, označen u |16| sa 1 7 17b 15 1 i predstavljen familijom hiperravni

ABCDE, ABCF, ABCG, ADEF, ADEG, CEFG

je u našoj tabeli predstavljen (na 17. mestu medju prostim matroidima ranga 4 na 7-skupu, kao i u katalogu |16|) sledećim redom:

ABC, ADE(2), CEFG(3)

Brojevi u zagradama označavaju rang Os-potprostora koji im prethode (do prethodne zagrade ili do početka reda). Tako su u navedenom primeru skupovi ABC i ADE Os-potprostori ranga 2, dok je rang Os-potprostora CEFG jednak 3.

I-1. OPIS KONSTRUKCIJE "MALIH" POLUPROSTIH MATROIDA

Neka je (najpre) $n-k=1$ i neka je M proizvoljan prost matroid na k-skupu. Neizomorfni poluprosti matroidi na (k+1)-skupu, "izvedeni" iz M, tačno odgovaraju klasama sledeće particije $\underset{M}{\sim}$ na skupu atoma od M:

Za atome x i y definišemo:

$x \underset{M}{\sim} y \leftrightarrow$ matroidi koji nastaju iz M dodavanjem jednog paralelnog elementa atomu x, odnosno atomu y su izomorfni

U daljem zamenjujemo oznaku $\underset{M}{\sim}$ (kao i njoj srodnu oznaku $\overset{2}{\underset{M}{\sim}}$) sa $\sim$ (odnosno sa $\overset{2}{\sim}$), ali podrazumevamo da je u svakom pojedinom slučaju poznat prost matroid na kome je particija definisana.

U najvećem broju slučajeva su klase od $\sim$ očigledne na prvi pogled. Dovoljno je otkriti koji atomi se "nalaze u istoj poziciji " u familiji Os-potprostora, (tj. razlikuju se medjusobno jedino po svojim oznakama).

PRIMER 2. Neka su na sledeći način zadata četiri prosta matroida na 7-skupu:

a) ABC(2), ABCDE, ADFG(3) (ranga 4)

b) ABCDE, ABCFG, ADEFG(4) (ranga 5)

c) ABCD, ABEF, BCEG, BDFG, CDEF(3) (ranga 4)

d) ABCD, ABEF, ACEG, BDFG, CDEF(3) (ranga 4)

Odgovarajuće klase relacije $\sim$ su:

a) {A}, {B,C}, {D}, {E}, {F,G}

A je jedini zajednički atom za sva tri skupa. Atomi B i C se javljaju u 3-skupu i u 5-skupu, dok je D jedini atom koji se javlja baš u 5-skupu i u 4-skupu. Atom E se javlja samo u 5-skupu, dok se F i G javljaju samo u 4-skupu.

b) {A}, {B,C,D,E,F,G}

Svaki od disjunktnih 2-skupova {B,C}, {D,E} i {F,G} se dvaput javlja u nekom Os-potprostoru, zajedno sa atomom A

c) {A,G}, {B}, {C,D,E,F}

Primetimo da proširivanjem familije Os-potprostora skupovima ACFG i ADEG dobijamo hiperravni heptaedrona (matroida F_7^*), kod koga su svi atomi u istoj poziciji. Skupovi {A,G} i {B} su redom presek i komplement unije dvaju "nedostajućih" potprostora.

d) {A,B,C,D,E,F}, {G}

Primetimo da su ACEG i BDFG jedina dva Os-potprostora sa 1-presekom ({G}). Svaki od disjunktnih 2-skupova {A,B}, {C,D}, {E,F} se dvaput javlja u preostala tri C-potprostora i ima dva različita 1-preseka sa skupovima ACEG i BDFG.

Ako je $n-k=2$, onda neizomorfni poluprosti matroidi na (k+2)-skupu, koji nastaju iz prostog matroida M na k-skupu dodavanjem dva paralelna elementa (direktno u atome), tačno odgovaraju klasama sledeće relacije ekvivalencije $\overset{2}{\sim}$ na skupu kombinacijâ sa ponavljanjem dužine 2, sastavljenih od atoma od M:

$\langle x,y\rangle \overset{2}{\sim} \langle z,t\rangle \leftrightarrow$ matroid koji nastaje iz M dodavanjem po jednog paralelnog elementa svakom od atoma x i y je izomorfan matroidu koji nastaje iz M dodavanjem po jednog paralelnog elementa svakom od atoma z i t.

Zagrade "$< >$" koristimo (umesto skupovnih) da naglasimo da elementi unutar njih ne moraju biti različiti. Ako je $x = y$, onda se oba paralelna elementa dodaju istom atomu. Postoji prirodna bijekcija izmedju takvih klasa od $\overset{2}{\sim}$ i klasa relacije $\sim$.

PRIMER 3. Za prost matroid ranga 3 na 6-skupu zadat sa:

ABC, ADE, CEF(2)

klase od $\overset{2}{\sim}$ su:

{AA,CC,EE}, {BB,DD,FF}, {AC,AE,CE}, {BD,BF,DF},
{AB,AD,BC,CF,DE,EF}, {AF,BE,CD}

Naime, lako je proveriti da su klase od $\sim$ {A,C,E} i {B,D,F}. Odgovarajuće klase od $\overset{2}{\sim}$ su {AA,CC,EE} i {BB,DD, FF}. Na prvi pogled postoje tri neizomorfne mogućnosti za dodavanje dva paralelna elementa različitim atomima;da se oba dodaju atomima jedne od klasa relacije $\sim$ ili da se dodaju atomima različitih klasa. Primetimo, medjutim, da u poslednjem slučaju postoje dve neizomorfne mogućnosti. Naprimer, atomi A i B se javljaju zajedno u jednom Os-potprostoru, što nije slučaj sa atomima A i F.

Ako je $n-k > 2$, onda tražimo klase analognih particija.

PRIMER 4. Razmotrimo prost matroid ranga 3 na 4-skupu ABCD, koji je zadat svojim jedinim Os-potprostorom ABC(2). U cilju konstrukcije svih odgovarajućih neizomorfnih poluprostih matroida na 8-skupu, treba da nadjemo što je moguće više kombinacijâ sa ponavljanjem dužine 4, sastavljenih od atoma A, B, C, D, takvih da svake dve od njih

ili a) imaju različite particije brojeva incidencije pojedinih atoma

ili b) navedene particije brojeva su iste, ali razmatrane kombinacije se ne odnose prema particiji {A,B,C}, {D} na izomorfan način.

Tako particija $3+1+0+0$ daje tri neizomorfne mogućnosti; ako su tri paralelna elementa dodata nekom atomu skupa

$\{A,B,C\}$, onda četvrti paralelni element može biti dodat ili atomu D ili nekom drugom atomu skupa $\{A,B,C\}$; ako su tri paralelna elementa dodata atomu D, onda četvrti mora biti dodat nekom atomu skupa $\{A,B,C\}$.

PRIMER 5. Prosti uniformni matroidi nemaju Os-potprostora i u njihovom slučaju je konstrukcija poluprostih matroida izuzetno jednostavna. Ako imaju k atoma, onda postoji bijekcija izmedju odgovarajućih poluprostih matroida na n-skupu i particija prirodnog broja n-k u zbir najviše k prirodnih sabiraka.

Ističemo da je gotovo u svim slučajevima konstrukcija ista, kao i da rangovi Os-potprostora nisu uzeti u obzir. Jedini izuzetak se javlja u slučaju prostog matroida datog sa

ABCD(2), AEFG(3).

Najzad, očigledno je da postoji tačno jedan poluprost matroid ranga 1 na n-skupu, za svako n, $n \geq 2$. To je uniforman matroid $U_{1,n}$, kod koga se jedini atom poklapa sa nosačem.

I-2. OZNAKE U TABELI POLUPROSTIH MATROIDA

U sledećem odeljku dajemo tabelu svih poluprostih matroida sa k atoma na n-skupu, za svako k, $1 \leq k \leq 7$ i za svako n, $k+1 \leq n \leq 8$.

Nosač prostih matroida na k-skupu uvek označavamo sa prvih k slova reči ABCDEFG.

Za svako k, prvi stubac tabele sadrži rangove odgovarajućih matroida.

Prosti matroidi na k-skupu su dati u drugom stupcu. Njihovi Os-potprostori su navedeni redom prema rastućim rangovima, koji su naznačeni u zagradama posle svih Os-potprostora istog ranga. Uniformni prosti matroidi su označeni kratkom crtom na mestu familije Os-potprostora (oni su potpuno odredjeni svojim brojem atoma i rangom). Za k izmedju 2 i 4 dodeljujemo dve vrste tabele svakom prostom matroidu na k-skupu, a za $k \in \{1,5,6,7\}$ samo jednu.

Za fiksno k, navodimo poluproste matroide sa k atoma na n-skupu u posebnoj koloni za svako n, $k+1 \leq n \leq 8$.

Svaki poluprost matroid na n-skupu sa k atoma je u tabeli označen sa jednom reči dužine n-k. Svako slovo reči odgovara atomu prostog matroida označenog u istom redu (ili eventualno u prethodnom redu za $2 \leq k \leq 4$), kome treba dodati jedan "paralelni" element prilikom generisanja razmatranog poluprostog matroida. Ako se neko slovo javlja veći broj puta u reči, onda i odgovarajućem atomu treba dodati isti broj novih elemenata.

Opisane reči su u tabeli medjusobno razdvojene zarezima. Slova unutar reči su uvek data u leksikografskom početku.

PRIMER 6. U vrsti tabele, koja odgovara prostom matroidu ranga 4 na 5-skupu ABCDE, opisanom sa jednim Os-potprostorom ABCD(3), nalazimo reč AAE. Ako dodate paralelne elemente označimo redom sa F, G, H, onda odgovarajući poluprosti matroid na 8-skupu ima sledeću geometrijsku mrežu:

ABCDEFGH

ABCDFG ABEFGH ACEFGH ADEFGH BCEH BDEH CDEH

ABFG ACFG ADFG AEFGH BC BD BEH CD CEH DEH

AFG B C D EH

$\emptyset$

Uvek biramo leksikografski prvu reč kao predstavnika klase reči koje odgovaraju medjusobno izomorfnim poluprostim matroidima. Tako u primeru 2 c) biramo reč C kao predstavnika klase $\{C,D,E,F\}$, a u primeru 4) biramo reč AABD kao predstavnika klase

$\{$AABD, AACD, ABBD, ACCD, BBCD, BCCD$\}$.

I-3. TABELA SVIH NEIZOMORFNIH POLUPROSTIH MATROIDA NA SKUPOVIMA OD NAJVIŠE OSAM ELEMENATA

1 atom		poluprosti matroidi na						
rang	prosti matroidi	2 el.	3 el.	4 el.	5 el.	6 el.	7 el.	8 elemenata
1	—	A	AA	AAA	AAAA	AAAAA	AAAAAA	AAAAAAA

2 atoma		poluprosti matroidi na					
rang	prosti matroidi	3 el.	4 el.	5 el.	6 el.	7 elem.	8 elemenata
2	—	A	AA, AB	AAA, AAB	AAAA, AAAB, AABB	AAAAA, AAAAB, AAABB	AAAAAA, AAAAAB, AAAABB, AAABBB

3 atoma		poluprosti matroidi na				
rang	prosti matroidi	4 el.	5 el.	6 el.	7 el.	8 elemenata
2	—	A	AA, AB	AAA, AAB, ABC	AAAA, AAAB, AABB, AABC	AAAAA, AAAAB, AAABB, AAABC, AABBC
3	—	A	AA, AB	AAA, AAB, ABC	AAAA, AAAB, AABB, AABC	AAAAA, AAAAB, AAABB, AAABC, AABBC

4 atoma		poluprosti matroidi na			
rang	prosti matroidi	5el	6 el.	7 elem.	8 elemenata
2	—	A	AA,AB	AAA,AAB,ABC	AAAA,AAAB,AABB, AABC,ABCD
3	ABC(2)	A,D	AA,DD AB,AD	AAA,DDD,AAB,AAD, ADD,ABC,ABD	AAAA,DDDD,AAAB,AAAD,ADDD,AABB, AADD,AABC,AABD,ABDD,ABCD
3	—	A	AA,AB	AAA,AAB,ABC	AAAA,AAAB,AABB AABC,ABCD
4	—	A	AA,AAB	AAA,AAB,ABC	AAAA,AAAB,AABB, AABC,ABCD

5 atoma		poluprosti matroidi na		
rang	prosti matroidi	6el.	7 elem.	8 elemenata
2	—	A	AA,AB	AAA,AAB,ABC
3	ABCD(2)	A,E	AA,AE,AB,EE	AAA,EEE,AAB,AAE,AEE,ABC,ABE
3	ABC,ADE(2)	A,B	AA,BB,AB,BC,BD	AAA,BBB,AAB,ABB,BBC,BBD,ABC,ABD,BCD
3	ABC(2)	A,D	AA,DD,AB,AD,DE	AAA,DDD,AAB,AAD,ADD,DDE,ABC,ABD,ADE
3	—	A	AA,AB	AAA,AAB,ABC
4	ABC(2)	A,D	AA,DD,AB,AD,DE	AAA,DDD,AAB,AAD,ADD,DDE,ABC,ABD,ADE
4	ABCD(3)	A,E	AA,EE,AB,AE	AAA,EEE,AAB,AAE,AEE,ABC,ABE
4	—	A	AA,AB	AAA,AAB,ABC
5	—	A	AA,AB	AAA,AAB,ABC

6 atoma		poluprosti matroidi na	
rang	prosti matroidi	7 elem.	8 elemenata
2	—	A	AA,AB
3	ABCDE(2)	A,F	AA,FF,AB,AF
3	ABC,ADE,BEF,CDF(2)	A	AA,AB,AF
3	ABCD,AEF(2)	A,B,E	AA,BE,EE,AB,AE,BC,BE,EF
3	ABC,ADE,CEF(2)	A,B	AA,BB,AB,AC,AF,BD
3	ABCD(2)	A,E	AA,EE,AB,AE,EF
3	ABC,DEF(2)	A	AA,AB,AD
3	ABC,ADE(2)	A,B,F	AA,BB,FF,AB,AF,BC,BD,BF
3	ABC(2)	A,D	AA,DD,AB,AD,DE
3	—	A	AA,AB
4	ABCD(2)	A,E	AA,EE,AB,AE,EF
4	ABC,DEF(2)	A	AA,AB,AD
4	ABC,ADE(2)	A,B,F	AA,BB,FF,AB,AF,BC,BD,BF
4	ABC(2),ABCDE(3)	A,D,F	AA,DD,FF,AB,AD,AF,DE,DF
4	ABC(2),ADEF(2)	A,B,D	AA,BB,DD,AB,AD,BC,BD,DE
4	ABC(2)	A,D	AA,DD,AB,AD,DE
4	ABCD,ABEF,CDEF(3)	A	AA,AB,AC
4	ABCDE(3)	A,F	AA,FF,AB,AF
4	ABCD,ABEF(3)	A,C	AA,CC,AB,AC,CD,CE
4	ABCD(3)	A,E	AA,EE,AB,AE,EF
4	—	A	AA,AB
5	ABC(2)	A,D	AA,DD,AB,AD,DE
5	ABCD(3)	A,E	AA,EE,AB,AE,EF
5	ABCDE(4)	A,F	AA,FF,AB,AF
5	—	A	AA,AB
6	—	A	AA,AB

rang	7 atoma prosti matroidi	poluprosti matroidi na 8 elemenata
2	—	A
3	ABCDEF (2)	A,G
3	ABC,ADE,AFG,BDG,BEF,CDF,CEG (2)	A
3	ABC,ADE,AFG,BDG,BEF,CDF (2)	A,C
3	ABCDE,AFG (2)	A,B,F
3	ABCD,AFG,BEG,CEF (2)	A,D,E
3	ABC,ADE,AFG,BDF,BEG (2)	A,C,D
3	ABCD,AEFG (2)	A,B
3	ABC,ADE,BEG,CEF,DFG (2)	A,E
3	ABCDE (2)	A,F
3	ABCD,AEF,DFG (2)	A,B,E,F
3	ABC,ADE,BEF,CDF (2)	A,G
3	ABC,ADE,CEF,DFG (2)	A,B,E
3	ABC,ADE,AFG,CEF (2)	A,B,C
3	ABCD,AEF (2)	A,B,E,G
3	ABCD,EFG (2)	A,E
3	ABC,ADE,CEF (2)	A,B,G
3	ABC,ADE,DFG (2)	A,B,E
3	ABC,ADE,AFG (2)	A,B
3	ABCD (2)	A,E
3	ABC,DEF (2)	A,G
3	ABC,ADE (2)	A,B,F
3	ABC (2)	A,D
3	—	A
4	ABCDE (2)	A,F
4	ABC,ADE,BEF,CDF (2)	A,G
4	ABCD,AEF (2)	A,B,E,G
4	ABCD,EFG (2)	A,E
4	ABC,CEF,ADE (2)	A,B,G
4	ABC,ADE,DFG (2)	A,B,E
4	ABC,ADE,AFG (2)	A,B
4	ABCD (2),AEFG (3)	A,B,E
4	ABCD (2),ABCDEF (3)	A,E,G

rang	7 atoma (1. nastavak) prosti matroidi	poluprosti matroidi na 8 elemenata
4	ABCD(2)	A,E
4	ABC,DEF(2),ABCDEF(3)	A,G
4	ABC,DEF(2),ADEFG(3)	A,B,D,G
4	ABC,DEF(2)	A,G
4	ABC,ADE(2),ABCDEF(3)	A,B,F,G
4	ABC,ADE(2),BDFG,CEFG(3)	A,B,F
4	ABC,ADE(2),ABCFG(3)	A,B,D,F
4	ABC,ADE(2),CEFG(3)	A,B,C,F
4	ABC,ADE(2)	A,B,F
4	ABC(2),ABCDEF(3)	A,D,G
4	ABC(2),ABCDE,ABCFG,DEFG(3)	A,D
4	ABC(2),ABCDE,ADFG,CEFG(3)	A,B,D,F
4	ABC(2),ADEF,BDEG,CDFG(3)	A,D,E
4	ABC(2),ADEFG(3)	A,B,D
4	ABC(2),ABCDE,ABCFG(3)	A,D
4	ABC(2),ABCDE,ADFG(3)	A,B,D,E,F
4	ABC(2),ABCDE,DEFG(3)	A,D,F
4	ABC(2),ADEF,BDEG(3)	A,C,D,F
4	ABC(2),ABCDE(3)	A,D,F
4	ABC(2),ADEF(3)	A,B,D,G
4	ABC(2),DEFG(3)	A,D
4	ABC(2)	A,D
4	ABCD,ABEF,ACFG,ADEG,BCEG,BDFG,CDEF(3)	A
4	ABCDEF(3)	A,G
4	ABCD,ABEF,ADEG,BCEG,BDFG,CDEF(3)	A,B
4	CDEFG,ABCD,ABEF(3)	A,C,G
4	ABCD,ABEF,BCEG,BDFG,CDEF(3)	A,B,C
4	ABCD,ABEF,ACEG,BDFG,CDEF(3)	A,G
4	ABCD,ABEF,BDFG,CDEF(3)	A,B,G
4	ABCDE,DEFG(3)	A,D,F
4	ABCD,ADFG,BEFG,CDEF(3)	A,B,D
4	ABCD,ADEG,BDFG,CDEF(3)	A,D

rang	7 atoma (2.nastavak) prosti matroidi	poluprosti matroidi na 8 elemenata
4	ABCD,ABEF,CDEF(3)	A,G
4	ABCDE(3)	A,F
4	ABCD,BEFG,CDEF(3)	A,B,C
4	ABCD,BDFG,CDEF(3)	A,B,D
4	ABCD,AEFG(3)	A,B
4	ABCD,CDEF(3)	A,C,G
4	ABCD(3)	A,E
4	—	A
5	ABCD(2)	A,E
5	ABC,DEF(2)	A,G
5	ABC,ADE(2)	A,B,F
5	ABC(2),ABCDE(3)	A,D,F
5	ABC(2),ADEF(3)	A,B,D,G
5	ABC(2),DEFG(3)	A,D
5	ABC(2),ABCDEF(4)	A,D,G
5	ABC(2),ADEFG(4)	A,B,D
5	ABC(2)	A,D
5	ABCD,ABEF,CDEF(3)	A,G
5	ABCDE(3)	A,F
5	ABCD,AEFG(3)	A,B
5	ABCD,CDEF(3)	A,C,G
5	ABCD(3),ABEFG,CDEFG(4)	A,E
5	ABCD(3),ABCDEF(4)	A,E,G
5	ABCD(3),CDEFG(4)	A,C,E
5	ABCD(3)	A,E
5	ABCDEF(4)	A,G
5	ABCDE,ABCFG,ADEFG(4)	A,B
5	ABCDE,ABCFG(4)	A,D
5	ABCDE(4)	A,F
5	—	A

rang	7 atoma (3.nastavak) prosti matroidi	poluprosti matroidi na 8 elemenata
6	ABC(2)	A,D
6	ABCD(3)	A,E
6	ABCDE(4)	A,F
6	ABCDEF(5)	A,G
6	—	A
7	—	A

GLAVA II

NOVA KONSTRUKCIJA SVIH NEIZOMORFNIH PEJVING MATROIDA RANGA 4 NA 8- SKUPU

U radu [16] je primenom kompjutera konstruisano, izmedju ostalog, svih 950 neizomorfnih prostih matroida na 8-skupu. U ovoj glavi dajemo elementarnu konstrukciju, bez primene kompjutera, verovatno najinteresantnije (kad je u pitanju (ne)-izomorfnost matroida) potklase P, koju čini 322 pejving matroida ranga 4 na 8-skupu.

<u>Nosač familije skupova</u> je unija svih njenih skupova.

Dve familije skupova F_1 i F_2 sa nosačima G_1 i G_2 respektivno su <u>izomorfne</u> ako postoji bijekcija $\alpha : G_1 \to G_2$ tako da važi

$$X \in F_1 \iff \alpha(X) \in F_2$$

Tokom cele ove glave sa "S" označavamo skup $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

Pejving matroide ranga 4 na 8-skupu razmatramo kao specijalne familije podskupova od S:

<u>P - familija</u> je familija F različitih podskupova od S za koju važi:

a) $X \in F \Rightarrow |X| \geq 4$

b) $X_1, X_2 \in F \Rightarrow |X_1 \cap X_2| \leq 2$

c) $S \notin F$.

Naime, očigledno je da postoji bijekcija izmedju svih neizomorfnih pejving matroida ranga 4 na 8-skupu i svih neizomorfnih P-familijâ. Netrivijalne hiperravni bilo kod od razmatranih matroida tačno odgovaraju skupovima njemu pridružene P-familije. Time se problem koji rešavamo u ovoj glavi svodi na problem elementarne konstrukcije svih neizomorfnih P-familijâ.

Klasu svih neizomorfnih P-familijâ razbijamo u tri disjunktne (i prepokrivajuće) podklase:

<u>A-familija</u> je P-familija F za koju dopunski važi:

d) $(\exists X)(X \in F \wedge |X| \geq 5)$

<u>B-familija</u> je familija F različitih 4-podskupova od S za koju važi:

e) $X_1, X_2 \in F \Rightarrow |X_1 \cap X_2| \in \{0,2\}$

<u>C-familija</u> je familija F različitih 4-podskupova od S za koju važi:

b) $X_1, X_2 \in F \Rightarrow |X_1 \cap X_2| \leq 2$ i

f) $(\exists X_1)(\exists X_2)(X_1, X_2 \in F \wedge |X_1 \cap X_2| = 1)$

PRIMEDBA. C-familiju možemo ekvivalentno definisati kao P-familiju, koja nije ni A-familija, ni B-familija.

Za svaku od ove tri podklase klase P-familijâ dajemo posebnu konstrukciju. Prilikom konstrukcije C-familijâ najpre konstruišemo familije iz jedne manje podklase:

<u>D-familija</u> je C-familija F kod koje se uslov f) može zameniti jačim uslovom

g) $(\forall X_1)(X_1 \in F \Rightarrow (\exists X_2)(X_2 \in F \wedge |X_1 \cap X_2| = 1))$

Nakon konstrukcije svih neizomorfnih D-familija se konstrukcija preostalih neizomorfnih C-familija znatno pojednostavljuje.

Ispostavlja se da postoji ukupno 52 neizomorfne A-familije, 86 neizomorfnih B-familija, kao i 184 neizomorfne C-familije, od kojih su 36 ujedno i D-familije.

Naše glavno sredstvo prilikom konstrukcije svih D-familijâ, kao i konstrukcije najvećeg dela A-familijâ i preostalih C-familijâ, su tri pomoćne klase specijalnih prostih grafova. Prilikom konstrukcije B-familijâ u znatnoj meri koristimo neka svojstva Štajnerovog sistema S(3,4,8).

Neizomorfnost bilo koja dva konstruisana matroida (P-familije) bi trebala da bude očigledna iz naše konstrukcije. To nije slučaj u katalogu |16|. Naprimer, postoji 63 neizomorfna pejving matroida ranga 4 na 8-skupu, koji su u |16| predstavljeni familijama od po sedam 4-hiperravni.

Iscrpnost naše konstrukcije sledi iz |16|. Medjutim, naša razmatranja implicitno sadrže i poseban dokaz da su konstrukcijom zaista obuhvaćene SVE neizomorfne P-familije. Potpuno razumevanje takvog dokaza ponekad zahteva od čitaoca male dodatne analize pojedinih slučajeva; smatramo da ne bi bilo celishodno da navodimo sve detalje takvih analiza, budući da bi se time izlaganje jako rasplinulo.

Cilj naše konstrukcije nije ni u kom slučaju da zameni odgovarajuću konstrukciju iz rada |16|. Štaviše, priznajemo da bismo teško bili u stanju da kompletiramo našu konstrkciju bez pomoći kataloga |16|. Težište naših razmatranja je na analizi grananja situacijâ, koje rezultiraju pojavom klasa neizomorfnih matroida. Kao početni čvor pri ovakvom grananju se uzima neka (konačna) klasa neizomorfnih matroida; grananje se vrši sve dotle dok kao završne čvorove ne dobijemo sve pojedinačne matroide te klase. Naglašavamo da graf, koji bi odgovarao ovom procesu grananja, može da ima i konture (do istog čvora se pri grananju može ponekad stići na više različitih načina).

U slučaju "malih" matroida na skupovima od najviše 8 elemenata nam se čini da je daleko najinteresantnije uzeti za početni čvor opisanog grananja baš klasu P. Ta klasa je relativno kompaktna i broj matroida u njoj nam se ne čini preveLik za davanje kompletnog opisa konstrukcije. S druge strane, teškoće koje su se javile pri pokušajima elementarne rekonstrukcije klase P daleko prevazilaze odgovarajuće teškoće kod svih ostalih matroida na skupovima od najviše 8 elemenata. Najzad, klasa P je jedan od prvih primera "eksplozije pejving matroida srednjeg ranga". Naime, postoji dosta verovatna, ali po svoj prilici izuzetno teško dokaziva, hipoteza da su skoro svi neizomorfni matroidi na n-skupu za velike vrednosti n, upravo pejving matroidi ranga $\frac{n}{2}$ za n parno, odnosno ranga $\frac{n-1}{2}$ i $\frac{n+1}{2}$ za n neparno.

Iako su svi metodi naše konstrukcije pravljeni ad hoc, samo za klasu P, ipak verujemo da ova konstrukcija može pomoći boljem razumevanju načina na koji se "javljaju" neizomorfni matroidi kao i da bi se ova konstrukcija mogla bar donekle uopštiti ili upotrebiti za neko drugo istraživanje.

II-1. DOPUNSKE DEFINICIJE I OZNAKE

Neka je data A-familija F, koja ima tačno jedan 5-skup označen sa X. Na sledeći način definišemo A-graf G od F:

(i) čvorovi od G su elementi od X

(ii) postoji grana $\{a,b\}$ u G ako i samo ako u F postoji 4-skup koji sadrži $\{a,b\}$.

Za dve neincidentne grane upravo definisanog A-grafa G kažemo da su sličnе ako odgovarajući 4-skupovi iz F sadrže isti 2-podskup skupa $S \setminus X$.

Označeni A-graf je prost graf G na pet čvorova, koji nema više od šest grana, takav da

(i) neki disjunktni parovi neincidentnih grana mogu biti istaknuti;

(ii) ako G ima k grana $(4 \leq k \leq 6)$, onda postoji najmanje k-3 istaknutih parova grana u G.

PRIMEDBA. Iz (ii) sledi da G nema čvor stepena 4
Istaknuti parovi grana odredjuju označavanje grafa G.

D-graf D-faminije F je prost graf G takav da

(i) čvorovi od G su 4-skupovi od F

(ii) postoji grana $\{X,Y\}$ u G ako i samo ako je $|X \cap Y| = 1$.

Na sledeći način definišemo binarnu relaciju, označenu sa "$\to$", na skupu granâ D-grafa G.

Ako su $a = \{A_1, A_2\}$ i $b = \{B_1, B_2\}$ dve grane od G, onda

$$a \to b \overset{def}{\iff} A_1 \cap A_2 = S \setminus (B_1 \cup B_2)$$

Markirani D-graf je prost graf G sa datom binarnom relacijom ϕ na skupu svojih grana, takav da postoji D-familija sa D-grafom G_1, koja zadovoljava sledeći uslov

"postoji izomorfizam od G na G_1, koji preslikava relaciju ϕ na relaciju $\to$".

Relacija ϕ odredjuje markiranje od G.

Neka je F C-familija, koja ispunjava sledeći uslov: "D-graf (jedinstvene) maksimalne D-potfamilije F je zvezda". Neka centralni čvor zvezde (ukoliko zvezda ima samo jednu granu, onda proizvoljan čvor) odgovara 4-skupu označenom sa $\{a,b,c,d\}$. Na sledeći način definišemo C-graf G od F:

(i) čvorovi grafa G su a,b,c,d

(ii) grana $\{x,y\}$ postoji u G ako i samo ako u F postoji 4-skup, različit od $\{a,b,c,d\}$, koji sadrži podskup $\{x,y\}$.

Na sledeći način definišemo 2-bojenje upravo definisanog C-grafa G: Čvor x od G je crn ako i samo ako postoji 4-skup X u F tako da važi

$$X \cap \{a,b,c,d\} = \{x\} .$$

U protivnom je čvor x beo.

Obojeni C-graf je prost graf G na četiri čvora, od kojih je svaki ili beo ili crn, uz uslov da je bar jedan čvor crn. Boje čvorova odredjuju bojenje od G.

Naglašavamo da bi se moglo (lako) dokazati da su označeni A-grafovi, odnosno obojeni C-grafovi, izomorfni A-grafovima nekih A-familijá, odnosno C-grafovima nekih C-familijá. Navedene definicije označenih A-grafova i obojenih C-grafova ustvari uključuju karakterizacije grafova, koji se mogu tako predstaviti.

Dva označena A-grafa, respektivno markirana D-grafa, respektivno obojena C-grafa, G_1 i G_2, su izomorfni ako i samo ako postoji grafovski izomorfizam, koji preslikava G_1 na G_2 i koji očuvava označavanje respektivno markiranje, respektivno bojenje.

Familija blokova Štajnerovog sistema S(3,4,8) je familija Φ, gde je

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{l} 1234,\ 1256,\ 1278,\ 1357,\ 1368,\ 1458,\ 1467 \\ 5678,\ 3478,\ 3456,\ 2468,\ 2457,\ 2367,\ 2358 \end{array} \right\}$$

(blokovi su navedeni radi pogodnosti u dva reda).

Komplement bloka X familije Φ je blok $S \setminus X$.

Komplementarna potfamilija potfamilije F od Φ je familija $\bar{F}$ za koju važi

$$F \cup \bar{F} = \Phi \ ; \qquad F \cap \bar{F} = \emptyset \ .$$

Familija Φ_1 je familija onih blokova familije Φ, koji sadrže element 1 (prvi red u navedenom zapisu). Blokove familije Φ, koji ne sadrže element 8, ponekad nazivamo hiperravni heptaedrona, zato što je familija svih takvih blokova izomorfna familiji netrivijalnih hiperravni heptaedrona - matroida F_7^* .

Komplement potfamilije F od Φ je (proizvoljan) blok koji nije u F, ali čiji komplement je sadržan u F. U nekim slučajevima jednostavno kažemo "komplement", kada je F jasno iz konteksta.

Ponekad govorimo o nekim elementima ili nekim podskupovima od S koji dele izomorfnu poziciju u (s obzirom na) potfamiliju F od Φ . Čini nam se da je teško i možda nepotrebno u ovom kontekstu učiniti ovaj pojam sasvim preciznim. Njegovo značenje je da odgovarajući elementi i podskupovi od S treba da budu jednako tretirani pri konstrukciji neizomorfnih potfamilija od Φ , koje sadrže F. Takve elemente i podskupove lako prepoznajemo u svakom pojedinom slučaju. Naprimer, potreban uslov da dva elementa od S dele izomorfnu poziciju u F je da se javljaju isti broj puta u blokovima od F. U većini slučajeva je taj uslov i dovoljan. Sličan zaključak važi i za 2-podskupove od S.

Podskup od S ima specijalnu poziciju u nekoj potfamiliji od Φ ako on deli izomorfnu poziciju (s obzirom na tu potfamiliju) sa nekim drugim podskupom od S.

Dodavanje skupa X familiji F, gde X nije sadržan u F, je operacija koja daje familiju $F \cup \{X\}$. Kažemo da je skup X dodat familiji F.

Ako dodavanje bilo kog od nekoliko različitih skupova istoj familiji F daje izomorfne familije sa jednim skupom više, onda kažemo da biramo jedan od tih skupova. Njegovo dodavanje familiji F daje predstavnika jedne klase medjusobno izomorfnih većih familija.

4-skup X je *dozvoljen* za *P-familiju* F, koja ne sadrži X, ako je $F \cup \{X\}$ P-familija.

4-skup X je *2-dozvoljen za D-familiju* F, koja ne sadrži X, ako je X dozvoljen za F, ali $F \cup \{X\}$ NIJE D-familija.

C-familija F *nastaje iz D-familije* F' ako je F' maksimalna D-potfamilija od F.

II-2. KONSTRUKCIJA SVIH NEIZOMORFNIH A-FAMILIJA

Razlikujemo četiri slučaja kod proizvoljne A-familije F:

SLUČAJ 1. F ima 7-skup X.

Pravila (a) i (b) daju da je $F = \{X\}$.

SLUČAJ 2. F ima 6-skup X.

Lako se vidi da ostali skupovi familije F mogu biti samo 4-skupovi koji sadrže $S \setminus X$, sa svojstvom da ni jedna dva nemaju neki zajednički element u X. Stoga postoji svega četiri neizomorfne A-familije sa 6-skupom, koje imaju izmedju nijednog i tri 4-skupa.

SLUČAJ 3. F ima dva 5-skupa X_1 i X_2

Primetimo najpre da važi $|X_1 \cap X_2| = 2$. Lako je pokazati da svi ostali skupovi od F mogu biti samo 4-skupovi, koji imaju dva elementa u $X_1 \setminus X_2$ i druga dva u $X_2 \setminus X_1$. Najviše tri takva 4-skupa se mogu istovremeno javiti u F i svaka dva od njih moraju imati jedan zajednički element u $X_1 \setminus X_2$, a drugi u $X_2 \setminus X_1$. Tako opet postoje četiri neizomorfne mogućnosti u zavisnosti od broja 4-skupova.

SLUČAJ 4. F ima tačno jedan 5-skup X.

Ako F ima 4-skup koji sadrži $S \setminus X$, onda taj (jedinstveni) 4-skup označavamo sa Y.

TEOREMA II-2.1. *Postoji bijekcija izmedju neizomorfnih:*

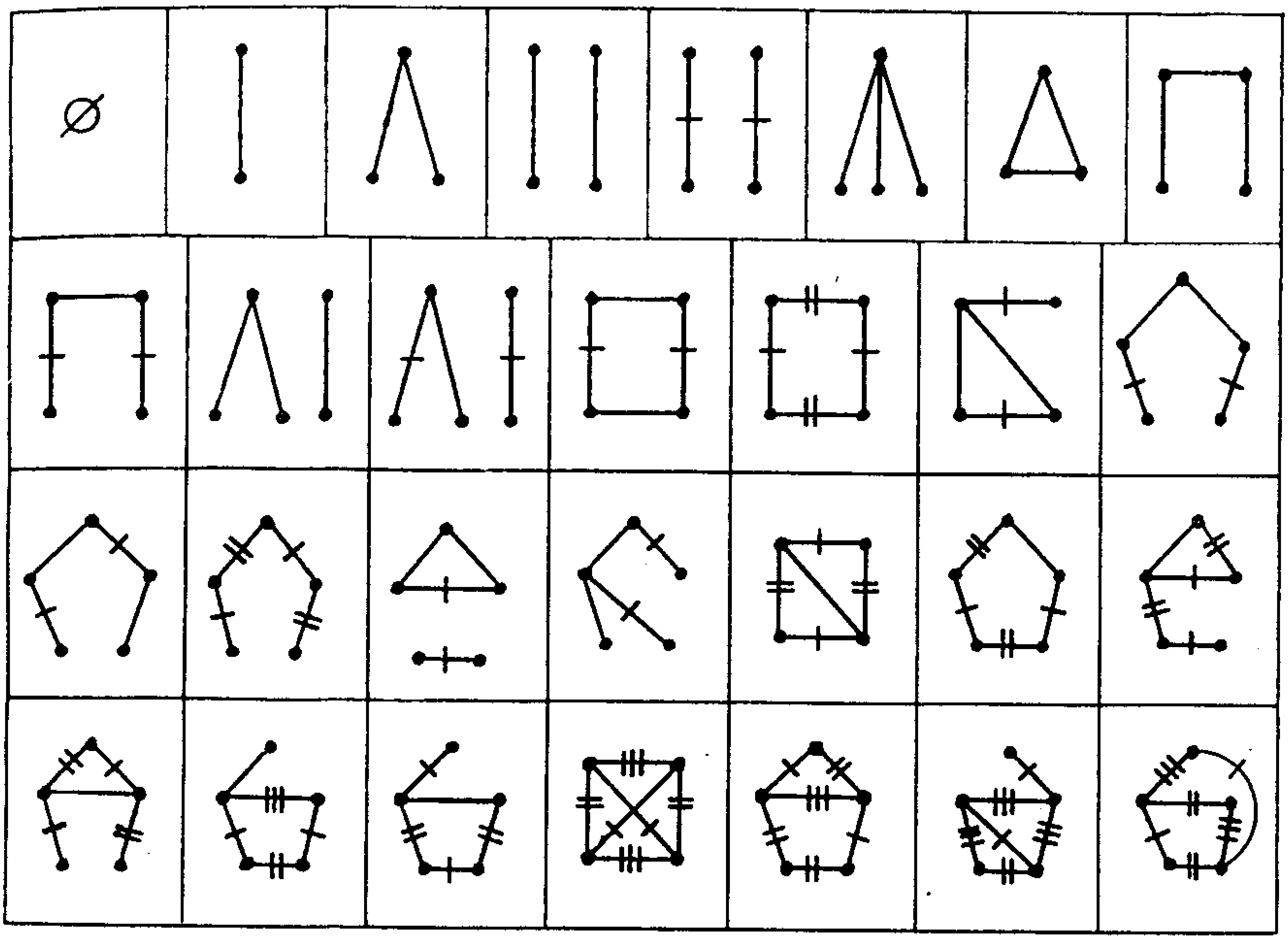
a)	*označenih A-grafova*	*i*	*A-familija koje imaju tačno jedan 4-skup X i koje nemaju Y .*
	označenih A-grafova koji imaju bar jedan izolovani čvor	*i*	*A-familija koje imaju tačno jedan 4-skup X i koje sadrže Y.*

D o k a z. (Skica). Ove bijekcije se realizuju uspostavljanjem takvih izomorfizama izmedju označenih A-grafova i A-grafova A-familijâ, koji preslikavaju parove grana na parove sličnih grana i obratno.

Proizvoljna A-familija F, obuhvaćena Slučajem 4., ima jedinstveni A-graf G sa fiksiranim parovima sličnih grana. Lako se pokazuje da G zadovoljava sve ostale uslove iz definicije označenog A-grafa, kada se parovi sličnih grana interpretiraju kao istaknuti parovi. S druge strane, označeni A-graf jednoznačno odredjuje, do na (očigledni) izomorfizam, odgovarajuću A-familiju. Što se tiče bijekcije b), primetimo da se element $X \cap Y$ ne može javiti u nekom drugom 4-skupu od F. $\square$

Dajemo tabelu svih neizomorfnih označenih A-grafova. Grafovi su dati bez izolovanih čvorova,ukoliko takvi postoje. Dve grane u istom istaknutom paru su uvek precrtane istim brojem kratkih crta. Redosled ovog označavanja nije bitan.

TABELA SVIH NEIZOMORFNIH OZNAČENIH A-GRAFOVA



Poznato je (videti, naprimer, Dodatak od |37|) da navedena tabela uključuje (kad se vrate izolovani čvorovi) sve neizomorfne proste grafove na pet čvorova, koji nemaju više od šest grana i koji nemaju čvor stepena 4. Medjutim, što se tiče iscrpnosti neizomorfnih mogućnosti za označavanje, nju bu trebalo proveriti analiziranjem pojedinih slučajeva. Tako, naprimer, poslednji označeni A-graf u tabeli ima dva čvora stepena 3 povezana sa tri disjunktna puta dužine 2. Svaka grana nije incidentna sa tačno dve od ostalih grana, pa je lako proveriti da postoje samo dve medjusobno izomorfne mogućnosti za označavanje.

Kako postoji 29 neizomorfnih označenih A-grafova, od kojih 14 imaju izolovane čvorove, Teorema II-2.1. daje da u

Slučaju 4. postoji 43 neizomorfne A-familije. Ističemo da tabela označenih A-grafova obezbedjuje neposrednu konstrukciju svake od tih familija.

PRIMEDBA. Dualizacijom pejving matroida, odredjenih sa A-familijama iz slučajeva 3. i 4., možemo izvesti direktnu konstrukciju 47 prostih nepejving matroida ranga 4 na 8-skupu.

II-3. KONSTRUKCIJA SVIH NEIZOMORFNIH B-FAMILIJA

Najpre dokazujemo tri teoreme, koje koristimo pri konstrukciji.

TEOREMA II-3.1. *Svaka B-familija F se može potopiti u Φ.*

D o k a z. Kako tvrdjenje teoreme očigledno važi za praznu familiju, za familiju sa tačno jednim 4-skupom i za familiju sa tačno dva uzajamno komplementarna 4-skupa, to možemo pretpostaviti da B-familija F sadrži dva 4-skupa koji se "seku", $X_1 = \{a,b,c,d\}$ i $X_2 = \{a,b,e,f\}$.

Lako je proveriti da su jedini preostali 4-podskupovi od $S = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, koji nemaju 1- ili 3-preseka sa bilo kojim od skupova X_1, X_2, skupovi unije $I \cup J \cup K$ gde je

$$I = \{\{a,b,g,h\},\ \{c,d,e,f\},\ \{c,d,g,h\},\ \{e,f,g,h\}\}$$

$$J = \begin{cases} \{a,c,e,g\},\ \{a,c,f,h\},\ \{a,d,e,h\},\ \{a,d,f,g\} \\ \{b,d,f,h\},\ \{b,d,e,g\},\ \{b,c,f,g\},\ \{b,c,e,h\} \end{cases}$$

$$K = \begin{cases} \{a,c,e,h\},\ \{a,c,f,g\},\ \{a,d,e,g\},\ \{a,d,f,h\} \\ \{b,d,f,g\},\ \{b,d,e,h\},\ \{b,c,f,h\},\ \{b,c,e,g\} \end{cases}$$

Izmedju skupova familija $I \cup J$ i $I \cup K$ ne postoje "zabranjeni" preseci, dok svaki skup familije J ima ili 1-presek ili 3-presek sa svakim skupom familije K. Tako su jedine dve maksimalne B-familije koje sadrže $X = \{X_1, X_2\}$ familije:

$$X + I + J = \Phi_2 \; ; \qquad X + I + K = \Phi_3 .$$

Medjutim, važi $\Phi_2 \cong \Phi$ i $\Phi_3 \cong \Phi$. Permutacije koje preslikavaju skup $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ na $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, odnosno na $\{1,2,3,4,5,6,8,7\}$ uspostavljaju odgovarajuće izomorfizme. $\square$

TEOREMA II-3.2. *Ako su dve potfamilije familije Φ medjusobno izomorfne, onda su i njihove komplementarne potfamilije medjusobno izomorfne. Drugim rečima, uvek postoji takav izomorfizam izmedju dve izomorfne potfamilije od Φ, koji se može proširiti do automorfizma familije Φ.*

LEMA 1. *Ako permutacija α skupa S ispunjava uslov: " $\alpha(\Phi) \cap \Phi$ sadrži neka tri bloka sa tačno jednim zajedničkim elementom", onda je $\alpha(\Phi) = \Phi$.*

D o k a z leme. Kako je familija $\alpha(\Phi)$ izomorfna sa Φ, dovoljno je dokazati da je $\alpha(\Phi)$ jednoznačno odredjeno sa data tri bloka X_1, X_2, X_3. Neka je $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \{z\}$. Ostala četiri bloka od $\alpha(\Phi)$, koji sadrže element z, moraju biti

$$(X_1 \cap X_2) + (S \setminus (X_1 \cup X_2)), \qquad (X_1 \cap X_3) + (S \setminus (X_1 \cup X_3)),$$
$$(X_2 \cap X_3) + (S \setminus (X_2 \cup X_3)), \quad \{z\} + (X_1 \setminus (X_2 \cup X_3)) + (X_2 \setminus (X_1 \cup X_3)) + (X_3 \setminus (X_1 \cup X_2))$$

gde "+" označava uniju disjunktnih skupova.

Naime, obavezna pojava prva tri bloka je posledica činjenice da se svaki skup od 2-skupova $X_1 \cap X_2$, $X_1 \cap X_3$, $X_2 \cap X_3$ javlja u tačno tri bloka od $\alpha(\Phi)$. Ako slično razmatranje primenimo na 2-skupove

$$\{z\} + (X_1 \setminus (X_2 \cup X_3)), \quad \{z\} + (X_2 \setminus (X_1 \cup X_3)), \quad \{z\} + (X_3 \setminus (X_1 \cup X_2)),$$

onda zaključujemo da se i četvrti od navedenih skupova mora pojaviti u $\alpha(\Phi)$.

Preostalih sedam blokova familije $\alpha(\Phi)$ moraju biti komplementi prvih sedam. $\square$

LEMA 2. *Ako je α neki izomorfizam izmedju dvaju potfamilija F_1 i F_2 familije Φ, od kojih svaka sadrži (izmedju ostalog) tri bloka sa tačno jednim zajedničkim elementom, onda se α može proširiti do automorfizma familije Φ.*

D o k a z leme. Kako kardinalnost $\underline{c}$ nosača familije F_1 nije manja od 7, to se bijekcija α izmedju nosača familija F_1 i F_2 može na jedinstven način proširiti do permutacije $\bar{\alpha}$ skupa S (ako je $c=8$, onda je $\bar{\alpha}=\alpha$). Dokaz se dovršava primenom Leme 1. $\square$

D o k a z teoreme. Zahvaljujući Lemi 2., treba da razmotrimo samo one slučajeve, kod kojih nijedna od dvaju izomorfnih potfamilijâ F_1 i F_2 (od Φ) nema tri bloka sa tačno jednim zajedničkim elementom. Razlikujemo tri slučaja:

SLUČAJ 1. F_1 ima dva bloka koji se seku:

$$X_1 = \{a,b,c,d\}, \qquad X_2 = \{a,b,e,f\}$$

3-skup $\{a,c,e\}$ je sadržan u bloku $X_3 = \{a,c,e,g\}$ familije Φ, za neko $g\in S\setminus(X_1\cup X_2)$. Neka α označava bilo koji izomorfizam familije F_1 na F_2. Na sličan način zaključujemo da u Φ postoji i blok $X_4 = \{\alpha(a),\alpha(c),\alpha(e),v\}$, za neko $v\in S\setminus(\alpha(X_1)\cup\alpha(X_2))$. Očito $X_3\notin F_1$ i $X_4\notin F_2$. Definišimo na sledeći način permutaciju α_1 skupa S:

$$\alpha_1(x)=\alpha(x) \quad \text{za} \quad x\in X_1\cup X_2, \quad \alpha_1(g)=v$$

$$\alpha_1(S\setminus(\{g\}\cup X_1\cup X_2)) = S\setminus(\{v\}\cup\alpha(X_1)\cup\alpha(X_2))$$

Permutacija α_1 uspostavlja izomorfizam izmedju potfamilija $\{X_1,X_2,X_3\}$ i $\{\alpha(X_1),\alpha(X_2),X_4\}$ familije Φ. Tako je, po Lemi 2., α_1 automorfizam od Φ.

Jedini blokovi, koji se po pretpostavci mogu javiti u F_1, pored blokova X_1 i X_2, su:

$$(X_1\cup X_2)\setminus(X_1\cap X_2),\ (X_1\cap X_2)+(S\setminus(X_1\cup X_2)),\ S\setminus X_1,\ S\setminus X_2$$

Kako je $\alpha_1(X_1)=\alpha(X_1)$ i $\alpha_1(X_2)=\alpha(X_2)$, to se slike svakog od ovih blokova, pri preslikavanjima α i α_1, poklapaju.

Iz toga sledi da je α_1 proširenje od α.

SLUČAJ 2. F_1 ima blok $X_1 = \{a,b,c,d\}$, ali nema dva bloka koji se seku:

Postoje dva bloka $X_2 = \{a,b,e,f\}$ i $X_3 = \{a,c,e,g\}$ familije Φ za neke $e,f,g \in S\setminus X_1$. Jasno je da ovi blokovi nisu sadržani u F_1.

Neka α označava proizvoljan izomorfizam familije F_1 na F_2. Slično zaključujemo da u familiji Φ postoje blokovi $X_4 = \{\alpha(a),\alpha(b),h,i\}$ i $X_5 = \{\alpha(a),\alpha(c),h,j\}$ za neke h,i,j iz skupa $S\setminus\alpha(X_1)$. Očigledno je da blokovi X_4 i X_5 nisu sadržani u familiji F_2.

Definišimo sledeću permutaciju α_2 skupa S:

$$\alpha_2(x) = \alpha(x) \quad \text{za} \quad x \in X_1 \ ,$$
$$\alpha_2(e) = h, \quad \alpha_2(f) = i, \quad \alpha_2(g) = j,$$
$$\alpha_2(S\setminus(X_1 \cup X_2 \cup X_3)) = S\setminus(\alpha(X_1) \cup X_4 \cup X_5) \ .$$

Permutacija α_2 uspostavlja izomorfizam izmedju potfamilija $\{X_1,X_2,X_3\}$ i $\{\alpha(X_1),X_4,X_5\}$ familije Φ. Prema Lemi 2, takva permutacija α_2 indukuje i automorfizam familije Φ.

Jedini blok, koji se može javiti u F_1 pored bloka X_1, je $S\setminus X_1$ i

$$\alpha_2(S\setminus X_1) = S\setminus\alpha_2(X_1) = S\setminus\alpha(X_1) = \alpha(S\setminus X_1)$$

dokazuje da je α_2 proširenje od α.

SLUČAJ 3. F_1 nema blokova

$$\Phi\setminus F_1 = \Phi\setminus F_2 = \Phi$$

Time je teorema dokazana. $\square$

POSLEDICA. Neizomorfne potfamilije od Φ, koje imaju više od sedam blokova su jednoznačno (do na izomorfizam) odredjene kao komplementarne potfamilije onih potfamilijâ od Φ, koje nemaju više od šest blokova.

TEOREMA II-3.3. *Tvrdjenje Teoreme II-3.2. ostaje u važnosti i kad se familija Φ zameni familijom Φ_1*

D o k a z. Izostavljamo ga zato što je po ideji sličan prethodnom dokazu, a znatno lakši od njega (udaljavanjem elementa 1 iz svih skupova familije Φ_1, dobijamo prave Fano ravni (projektivne geometrije reda 2), ekvivalentno, hiperravni F_7 i treba da koristimo familije od po tri nekonkurentne prave kao "ključ"). $\square$

Teorema II-3.1. i Posledica Teoreme II-3.2. svode problem konstrukcije svih neizomorfnih B-familija na problem konstrukcije svih neizomorfnih potfamilijâ familije Φ, koje nemaju više od sedam blokova. Ovu poslednju konstrukciju izvodimo korak po korak, počevši od manjih potfamilijâ. Ako je data potfamilija od k blokova, onda, prirodno, treba da tražimo sve njene neizomorfne natfamilije od $k+1$ blokova i izaberemo po jednog predstavnika iz svake klase medjusobno izomorfnih natfamilijâ, kojeg koristimo i u sledećem koraku konstrukcije.

Medjutim, veliki nedostatak ovog postupka je što neizomorfne familije mogu imati izomorfne natfamilije. U cilju svodjenja ovog nedostatka na što je moguće manju meru, razvijamo sledeći pristup:

Tokom cele konstrukcije favorizujemo element 1 skupa S u sledećem smislu:

Nijedan element skupa $\{2,3,4,5,6,7,8\}$ se ne javlja u više blokova od elementa 1 i nijedan 2-podskup od S se ne javlja u tri bloka, ukoliko to nije slučaj i sa nekim 2-podskupom od S, koji sadrži 1,

— u svakoj potfamiliji od Φ, koju konstruišemo kao predstavnika neke klase medjusobno izomorfnih potfamilija.

Ovo ograničenje ne utiče na opštost konstrukcije, budući da se svi elementi, respektivno svi 2-podskupovi, medjusobno dele izomorfnu poziciju u familiji Φ. Štaviše, možemo pretpostaviti da u svakoj potfamiliji od Φ, koju konstruišemo, oni 4-podskupovi koji sadrže element 1, obavezno čine fiksiranog predstavnika odgovarajuće klase medjusobno izomorfnih potfamilija od Φ_1.

Najpre konstruišemo sve neizomorfne potfamilije od Φ_1, a zatim im dodajemo 4-skupove iz $\Phi\setminus\Phi_1$ da bismo konstruisali ostale neizomorfne potfamilije od Φ. Za svaki broj blokova najpre navodimo spisak predstavnika odgovarajućih neizomorfnih potfamilijâ od Φ (predstavnici su medjusobno razdvojeni tačkom i zarezom). Iza ovog spiska, izuzev u trivijalnim slučajevima, sledi kratak opis konstrukcije.

NEIZOMORFNE POTFAMILIJE OD Φ_1

0 blokova: $\emptyset$

1 blok: $A = \{1234\}$

2 bloka: $B = \{1234,\ 1256\}$

Svaka dva bloka familije Φ_1 imaju 2-presek.

3 bloka: $C = \{1234,\ 1256,\ 1278\}$;

$D = \{1234,\ 1256,\ 1357\}$.

U oba slučaja tri navedena bloka imaju zajednički element 1. Oni mogu imati još jedan zajednički element, ali ne moraju.

Teorema II-3.3. daje da postoje tačno dve neizomorfne potfamilije od Φ_1 sa četiri bloka i tačno po jedan sa pet, šest i sedam blokova. Medjutim, kao predstavnike klasa izomorfnosti, koje odgovaraju ovim potfamilijama, ne koristimo komplementarne (u odnosu na Φ_1) potfamilije gore navedenih potfamilija $\emptyset$, A,B,C,D, već leksikografski prve familije u tim klasama

4 bloka: $E = \{1234,\ 1256,\ 1357,\ 1467\}$;

$F = \{1234,\ 1256,\ 1278,\ 1357\}$.

Presek sva tri 4-skupa od Φ_1, koji nedostaju, može biti kardinalnosti 2 ili 1.

5 blokova: $G = \{1234,\ 1256,\ 1278,\ 1357,\ 1368\}$

6 blokova: $H = \{1234,\ 1256,\ 1278,\ 1357,\ 1368,\ 1458\}$

7 blokova: Φ_1

NEIZOMORFNE POTFAMILIJE OD Φ SA NAJVIŠE SEDAM BLOKOVA

0 blokova: $\emptyset$

1 blok : A

2 bloka: B; $A \cup \{5678\}$

Dva bloka mogu biti i disjunktna.

3 bloka: C; D; $B \cup \{3456\}$; $B \cup \{3478\}$.

Nijedan od blokova koji sadrže element 2 se ne može dodati familiji B, inače bi se element 2 javljao u više blokova nego element 1. Iz sličnog razloga se ne može izabrati potfamilija A iz Φ_1. Blok iz $\Phi \setminus \Phi_1$ može ili imati neprazan presek sa oba bloka od B ili samo sa jednim od njih.

4 bloka: E; F; $C \cup \{3456\}$; $D \cup \{2358\}$; $D \cup \{2367\}$; $D \cup \{2468\}$; $B \cup \{3478, 5678\}$.

Nijedan od blokova koji sadrži element 2 se ne može dodati familiji C. Svaki od preostalih blokova (iz $\Phi \setminus \Phi_1$) je komplement nekog bloka iz C. Iz sličnih razloga se nijedan od blokova koji sadrži 2, ili blok 3456, ne može dodati familiji B. Svaki od skupova 2367, 2457, 3456 čini, zajedno sa D, jedinstvenu (do na izomorfizam) potfamiliju od četiri hiperravni hepteadrona, bez zajedničkog elementa za sva četiri skupa (tj. neizomorfnu sa familijom E). Skup 2358 je jedini skup familije $\Phi \setminus \Phi_1$, koji ispunjava sledeća dva uslova: nije uključen u nosač familije D i ima neprazan presek sa svim skupovima od D. Svi komplementi (skupovi) familije D dele izomorfnu poziciju s obzirom na D.

5 blokova: G; $E \cup \{2358\}$; $E \cup \{2367\}$; $F \cup \{2358\}$; $F \cup \{2468\}$; $F \cup \{3456\}$; $C \cup \{3456, 3478\}$; $D \cup \{2468, 3456\}$; $D \cup \{2468, 3478\}$.

Elementi 2,3,4,5,6,7 dele izomorfnu poziciju u familiji E i isti zaključak važi i za skupove od E. Dodajući bilo koji (ali samo jedan) od komplemenata familiji E dobijamo stoga četiri medjusobno izomorfne familije, dok dodavanjem jednog od skupova 2367, 2457, 3456, dobijamo (do na izomorfizam jedinstvenu) familiju od pet hiperravni heptaedrona. Primetimo da skup 1357 ima specijalnu poziciju u F (s obzirom na ostala tri bloka). To je razlog što dodavanje skupa 2468 i dodavanje nekog od preostala tri komplementa familiji F daju dve neizomorfne familije. Blokovi 2358, 2367 i 2457 dele izomorfnu poziciju s obzirom na familiju F. Što se tiče familije C, njoj se moraju dodati dva bloka izmedju 3456, 3478, 5678, što daje tri medjusobno izomorfne mogućnosti. Kad je u pitanju familija D, primetimo da se nijedan od elemenata 2,3,5 ne može dvaput javiti u blokovima od $\Phi \setminus \Phi_1$. Stoga moramo izabrati najmanje jedan blok iz svake od familija {3456, 3478, 5678} {2457, 2468, 5678} i {2367, 2468, 3478}. Očigledno se mora izabrati jedan od "presečnih blokova" 2468, 3478 i 5678, ali treća familija može biti predstavljena i blokom, koji ne postoji u ostale dve. Kako je $(5\cdot 4):8 > 2$, to se neki elementi od S u pet blokova moraju pojaviti tri puta, pa se ne može izabrati potfamilija B iz familije Φ_1.

<u>6 blokova</u>: H; $G \cup \{2358\}$; $G \cup \{2457\}$; $G \cup \{5678\}$; $E \cup \{2367,2457\}$; $E \cup \{2358,2468\}$; $F \cup \{2358,3456\}$; $F \cup \{2367,3456\}$; $F \cup \{2468,3456\}$; $F \cup \{3456,3478\}$; $C \cup \{3456,3478,5678\}$; $D \cup \{2468,3478,5678\}$.

Kako je $\Phi_1 \setminus G = \{1458, 1467\}$, to element 4 ima specijalnu poziciju u familiji G (pored elementa 1). Iz toga sledi da postoje tri neizomorfne mogućnosti da se doda šesti blok familiji G; on može ili biti ili ne biti komplement (nekog bloka iz G); u prvom slučaju moramo praviti razliku izmedju skupa 5678 i komplemenata koji sadrže element 4. Postoji, do na izomorfizam, samo jedna familija od šest blokova na nosaču kardinalnosti 7; ona nastaje iz E. Elementi 2,3,4,5,6,7 dele izomorfnu poziciju u familiji E i imamo još dve neizomorfne mogućnosti; da dodamo ili jedan ili dva komplementa familiji E. Prvu od tih mogućnosti odbacujemo, budući da ona svakako dovodi do pojave 2-podskupa od S, koji ne sadrži element 1 i koji se javlja u tri bloka (takva situacija bi protivrečila favorizovanju elementa 1). Taj slučaj bi bio izomorfan slučaju $F \cup \{2367, 3456\}$. Familija D sadrži element 1 u četiri bloka i element 2 u tri bloka; zaključujemo da bar jedan od dodatnih blokova mora biti izabran iz familije {3456,3478,5678}.

Primetimo da elementi 4,6,8 dele izomorfnu poziciju u familiji F, a to je slučaj i sa elementima 3,5,7. Ako šesti blok nije neki komplement od F, onda postoje dve neizomorfne mogućnosti: presek tog bloka sa jednim komplementom može ili biti ili ne biti uključen u skup {3,5,7}. Ako su oba bloka dodata familiji F komplementi od F, onda imamo dva neizomorfna slučaja,u zavisnosti od toga da li "specijalni" skup 2468 jeste ili nije uključen u konstruisanu familiju.

Nijedan od blokova sa elementom 2 se ne može dodati familiji C; preostaje samo jedna mogućnost sa tom familijom. Kako se element 1 javlja u tri bloka familije D, to nalazimo (zbog $(6\cdot 4) : 8 = 3$) da se svaki element od S mora javiti u tačno tri bloka odgovarajuće familije od šest blokova. Stoga se familiji D moraju dodati tri bloka koji sadrže element 8, ali je lako proveriti da se medju njima ne sme nalaziti blok 2358.

<u>7 blokova</u>: Φ_1; $H \cup \{2358\}$; $H \cup \{2367\}$; $G \cup \{2358,2367\}$;
$G \cup \{2358,2457\}$; $G \cup \{2358,5678\}$; $G \cup \{2457,2468\}$;
$G \cup \{2457,3456\}$; $G \cup \{2457,5678\}$;
$E \cup \{2367,2457,3456\}$; $E \cup \{2358,2468,3478\}$;
$F \cup \{2468,3456,3478\}$; $F \cup \{3456,3478,5678\}$;
$F \cup \{2358,3478,5678\}$.

Postoje dve neizomorfne mogućnosti da se doda sedmi blok familiji H; to može biti ili blok 2358 ili neki od komplemenata (familije H). Već smo primetili da element 4 ima specijalnu poziciju u familiji G. Blok 5678 je jedini komplement familije G bez elementa 4. Medju blokovima dodatim familiji G se može nalaziti ili nijedan ili jedan ili dva komplementa, ali u poslednja dva slučaja mogućnosti koje uključiju skup 5678 nisu izomorfne onim mogućnostima, koje ne uključuju taj skup. Štaviše, elementi 2 i 3 su jedini elementi od S, koji se javljaju u tačno tri bloka od G. Uzimajući to u obzir, kad je u pitanju dodavanje dva komplementa koji sadrže element 4, moramo praviti razliku izmedju slučajeva kad se jedan isti i kad se dva različita od elemenata 2,3 javljaju u ova dva komplementa. Kako se element 2 javlja u samo četiri bloka od E, to se pri dodavanju tri bloka familiji E mora izabrati najmanje jedan blok iz svake od familija {3456,3478, 5678}, {2457,2468,5678}, {2358,2367,5678}, {2367,2468,3478}, {2358,2457,3478},{2358,2468,3456}. Ako nijedan od izabrana tri skupa ne sadrži element 8, onda dobijamo familiju od (svih) sedam (netrivijalnih) hiperravni heptaedrona. Element 1 se ne javlja u istom 2-podskupu u tri bloka familije E. Svaki blok iz {2367,2457,3456} ima sa svakim blokom iz {2358,2468,3478,5678} 2-presek sadržan u nekom bloku od E. Tako je jedina preostala mogućnost da se familiji E dodaju četiri bloka koji sadrže element 8.

Ako podjemo od familije F, onda je očigledno da joj se sme dodati najviše jedan od blokova koji sadrže element 2. Ako su sva tri bloka, dodata familiji F njeni komplementi, onda moramo razlikovati slučajeve kada se medju njima nalazi i kada se ne nalazi "specijalni" skup 2468. Ako su samo dva od dodatih skupova komplementi od F (nijedan od njih ne može u tom slučaju biti 2468), onda postoje dva neizomorfna slučaja u zavisnosti od toga da li postoje ili ne postoje dva dodata bloka sa medjusobnim presekom uključenim u "specijalni" skup {3,5,7}. Medjutim, prvi od ovih slučajeva je izomorfan slučaju $G \cup \{2457,5678\}$.

Nijednu od potfamilijâ C, D familije Φ_1 ne možemo koristiti za generisanje potfamilijâ od Φ sa sedam blokova. Prosečan broj pojavljivanja elemenata iz S u sedam blokova je $28 : 8 > 3$, tako da u S postoji element koji se pojavljuje u više od tri bloka.

Zaključujemo da postoji

$$2\cdot(1+1+2+4+7+9+12)+14 = 86$$

neizomorfnih B-familija.

Postoji vrlo jednostavan postupak, kojim se može proveriti da su konstruisane B-familije zaista neizomorfne po parovima. Ustvari, svake dve od konstruisanih potfamilija od Φ (sa istim brojem blokova) se razlikuju u barem jednom od sledeća dva podatka:

a)) spisku brojeva pojavljivanja elementa 1,2,...,8 u pojedinim blokovima, kod koga redosled elemenata nije bitan;

b)) broju 2-podskupova S koji se javljaju u tri bloka.

Kako se svaki element (respektivno svaki 2-podskup) od S pojavljuje u tačno sedam (respektivno tri) bloka od Φ , to se razlike u a)) i b)) očuvavaju i izmedju komplementarnih potfamilija . Ova okolnost odmah daje, bez upotrebe Teoreme II-3.2., broj neizomorfnih potfamilija od Φ sa više od sedam blokova, koji nije manji od odgovarajućeg broja potfamilija sa manje od sedam blokova. Medjutim, na ovaj način ne možemo dokazati da se ne javljaju neke bitno nove neizomorfne mogućnosti kod potfamilija sa većim blokovima, ili, ekvivalentno, da podaci a)) i b)) u potpunosti odredjuju (do na izomorfizam) neku potfamiliju familije Φ .

II-4. KONSTRUKCIJA SVIH NEIZOMORFNIH D-FAMILIJA

Najpre navodimo dvanaest lakih lema, koje opisiju neka svojstva D-grafova i markiranih D-grafova. Neke od njih koristimo pri konstrukciji D-familijâ. Ove leme s jedne strane daju bolji uvid u D-grafove koje konstruišemo, a mogle bi se koristiti i u nekom drugom pristupu konstrukciji. Leme se zasad ne odnose na neku posebnu teoremu.

LEMA II-4.1. *Svakom elementu skupa* S *odgovara najviše jedna grana* D-*grafa, u smislu da je taj element presek krajnjih čvorova te grane.*

PRIMEDBA. Na slikama grane D-grafova označavamo odgovarajućim presečnim elementima.

D o k a z. Pretpostavimo da istom elementu skupa S odgovaraju dve grane nekog D-grafa. Lako je proveriti da čvorovi tih grana moraju sadržati najmanje devet različitih elemenata, bez obzira na to da li razmatrane dve grane imaju ili nemaju zajednički čvor. $\square$

LEMA II-4.2. *D-graf ne može imati više od osam grana.*

D o k a z. Direktna posledica Leme II-4.1. $\square$

LEMA II-4.3. *Maksimalan stepen čvora u nekom D-grafu ne može biti veći od četiri.*

D o k a z. Direktna posledica Leme II-4.1. $\square$

LEMA II-4.4. *Svakom elementu skupa S odgovara najviše jedna grana D-grafa, u smislu da je taj element komplement (s obzirom na S) unije krajnjih čvorova te grane.*

D o k a z. Sedam elemenata nije dovoljno za krajnje čvorove dvaju grana D-grafa ni u kom slučaju. $\square$

LEMA II-4.5. *Svakoj grani x D-grafa odgovara najviše jedna grana y, tako da važi $x \to y$, i najviše jedna grana z, tako da važi $z \to x$.*

D o k a z. Navedena dva tvrdjenja neposredno slede redom iz Leme II-4.4., odnosno Leme II-4.1. $\square$

LEMA II-4.6. *Ako je $A_1A_2A_3A_4$ 3-put u nekom D-grafu, onda je tačan najmanje jedan od iskaza $A_1A_2 \to A_3A_4$ i $A_3A_4 \to A_1A_2$.*

D o k a z. Pretpostavimo da iskaz $A_1A_2 \to A_3A_4$ nije tačan, tj. da važi: $S \setminus (A_3 \cup A_4) \neq A_1 \cap A_2$. Prema Lemi II-4.1. važi $A_1 \cap A_2 \not\subset A_3$, pa imamo $A_1 \cap A_2 \subset A_4$. Iz ovog sledi $S \setminus (A_1 \cup A_2) \subset A_4$ (inače bi skup A_4 imao 3-presek sa nekim od skupova A_1, A_2). Kako je $|A_3 \cap A_2| = 1$ i $|A_3 \cap A_1| \leq 2$, imamo takodje i $S \setminus (A_1 \cup A_2) \subset A_3$, što daje $A_3A_4 \to A_1A_2$. $\square$

LEMA II-4.7. *Nijedna dva čvora D-grafa ne mogu imati prazan presek.*

D o k a z. U protivnom bi jedan od tih čvorova imao 3-presek sa proizvoljnim čvorom incidentnim drugom čvoru. $\square$

LEMA II-4.8. *Ako su* K *i* L *dva susedna čvora D-grafa i* $K \cap L = \{p\}$, $S \setminus (K \cup L) = \{q\}$, *onda je*

$$L = \{p\} + ((S \setminus K) \cup \{q\})$$

D o k a z. Očigledan. □

LEMA II-4.9. *Ako su* $x = A_1A_2$ *i* $y = B_1B_2$ *dve grane D-grafa takve da važi* $x \to y$, *onda postoji (u tom D-grafu) grana incidentna i sa* x *i sa* y.

D o k a z. Prema Lemi II-4.1., element $B_1 \cap B_2$ ne može istovremeno pripadati skupovima A_1 i A_2. Pretpostavimo da $B_1 \cap B_2 \not\subset A_1$ (na analogan način dalje postupamo i ako $B_1 \cap B_2 \subset A_2$) Prema pretpostavci važi $B_1 \cup B_2 \not\supset A_1 \cap A_2$. Lema II-4.7., kombinovana sa $|A_1 \setminus A_2| = 3$, daje da je ili $|A_1 \cap B_1| = 1$ ili $|A_1 \cap B_2| = 1$, tj. u D-grafu postoji jedna od grana A_1B_1 i A_1B_2. □

LEMA II-4.10. *Ako D-graf sadrži grane* A_1A_2 *i* B_1B_2, *takve da važi* $A_1A_2 \to B_1B_2$, *a ne sadrži nijednu od grana* A_1B_1 *i* A_1B_2, *onda važi* $A_1 \supset B_1 \cap B_2$.

D o k a z. Neposredno sledi iz prethodnog dokaza. □

LEMA II-4.11. *U (nijednom) D-grafu ne postoje neparne konture.*

D o k a z. S obzirom na Lemu II-4.2., treba samo da isključimo mogućnost pojave 3-, 5- i 7-kontura u D-grafu.

3-konture: 3-kontura $A_1A_2A_3$ u D-grafu daje

$$A_3 \cap (A_1 \cap A_2) = \emptyset \text{ i } |A_3 \cap (A_1 \setminus A_2)| = |A_3 \cap (A_2 \setminus A_1)| = 1$$

iz čega sledi $|A_3| \leq 3$, kontradikcija.

5-konture: Pretpostavimo da u nekom D-grafu postoji 5-kontura $A_1A_2A_3A_4A_5$ (sa granama A_iA_{i+1}, $1 \leq i \leq 5$, $A_{5+1} = A_5$). Prema Lemama II-4.6 i II-4.5 možemo pretpostaviti, bez uticaja na opštost, da važi $A_1A_2 \to A_3A_4$ i $A_4A_5 \to A_1A_2$. Iz prve od tih pretpostavki sledi $A_4 \not\supset A_1 \cap A_2$, dok druga od njih, kombinovana sa

Lemom II-4.10 i nepostojanjem granâ A_1A_4 i A_2A_4 daje $A_4 \supset A_1 \cap A_2$, kontradikciju.

7-konture: Neka je $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ (grane A_iA_{i+1}, $1 \le i \le 7$, $A_{7+1} = A_1$) 7-kontura u nekom D-grafu. Slično kao u prethodnom slučaju, pretpostavimo da je $A_1A_2 \to A_3A_4$ i $A_6A_7 \to A_1A_2$. Tada važi $A_4 \not\supset A_1 \cap A_2$, dok Lema II-4.10 daje $A_6 \supset A_1 \cap A_2$. Sada je iskaz $A_5 \supset A_1 \cap A_2$ u suprotnosti sa Lemom II-4.1., dok iskaz $A_5 \not\supset A_1 \cap A_2$ protivreči Lemi II-4.4. □

LEMA II-4.12. *Ako je* $A_1A_2A_3A_4$ *3-put u D-grafu* G *i istovremeno važi* $A_1A_2 \to A_3A_4$ *i* $A_3A_4 \to A_1A_2$, *onda graf* G *sadrži i granu* A_1A_4 *i takodje važe uslovi* $A_1A_4 \to A_2A_3$ *i* $A_2A_3 \to A_1A_4$.

D o k a z. Prema pretpostavkama imamo

$$a = A_1 \cap A_2 = S \setminus (A_3 \cup A_4) \quad \text{i} \quad b = A_3 \cap A_4 = S \setminus (A_1 \cup A_2)$$

Leme II-4.7. i II-4.11. daju

$$|A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_4| = 2 .$$

Kako važi $a \notin A_3 \cup A_4$ i $b \notin A_1 \cup A_2$, to imamo da nijedan od skupova $A_1 \cap A_3$ i $A_2 \cap A_4$ ne sadrži neke od elemenata a i b. Pretpostavke kombinovane sa Lemom II-4.1. daju da su skupovi

$$A_1 \cap A_3, \quad A_2 \cap A_4, \quad A_2 \cap A_3 \quad \text{i} \quad A_1 \cap A_4$$

disjunktni po parovima. Otud sledi da je

$$A_1 \cap A_4 = S \setminus (\{a,b\} + (A_1 \cap A_3) + (A_2 \cap A_4) + (A_2 \cap A_3)),$$

što implicira $|A_1 \cap A_4| = 1$, Kako se suma u zagradi poklapa sa $A_2 \cup A_3$, to imamo $A_1A_4 \to A_2A_3$. Relacija $A_2A_3 \to A_1A_4$ sledi iz

$$A_1 \cup A_4 = (A_1 \cap A_4) + \{a,b\} + (A_1 \cap A_3) + (A_2 \cap A_4). \ \square$$

Naša konstrukcija neizomorfnih D-familija je donekle slična konstrukciji B-familijâ. Polazimo od primera "malih"

D-familija i u svakom slučaju tražimo neizomorfne mogućnosti za njihovo uvećavanje (postepenim) dodavanjem dozvoljenih, ali ne 2-dozvoljenih 4-skupova, čime se dobijaju nove D-familije. S druge strane, moramo uzeti u obzir i 2-dozvoljene 4-skupove za datu D-familiju, budući da oni mogu biti čvorovi nove povezane komponente uvećanog D-grafa. Ovi 4-skupovi se uvek javljaju u komplementarnim parovima, koje označavamo kratkom crticom izmedju njihova dva 4-skupa.

Glavna novina kod konstrukcije neizomorfnih D-familija je u tome što najčešće tražimo neizomorfne mogućnosti za uvećavanje odgovarajućih markiranih D-grafova, umesto za uvećavanje samih D-familija. Takav pristup kasnije opravdavamo Teoremom IV-4.2.

Konstruisane neizomorfne D-familije navodimo posredstvom njihovih markiranih D-grafova u tabeli koja sledi iza konstrukcije. Tipove markiranih D-grafova, navedenih u tabeli, označavamo brojevima u zagradama (od (1) do (36)). Tokom konstrukcije pominjemo sve ove brojeve. Iste oznake često koristimo i za tipove neizomorfnih D-familija koje odgovaraju primerima markiranih D-grafova, navedenim u tabeli.

KONSTRUKCIJA SVIH NEIZOMORFNIH MARKIRANIH D-GRAFOVA I JEDNOG VIŠE

Polazimo od primera najjednostavnijeg D-grafa (tip 1)

$$1234 \quad \underline{\hspace{6em}} \quad 1567$$

1

Možemo bez ikakvog gubitka opštosti razmatranja pretpostaviti da svaki primer (= predstavnik) neizomorfnih markiranih D-grafova koje konstruišemo sadrži ovu granu.

Postoji 36 dozvoljenih (s obzirom na ovu granu) 4-skupova: devet od njih sadrži skup $\{1,8\}$, devet je sadržano u $\{2,3,4,5,6,7\}$, devet ima 1-presek sa $\{1,2,3,4\}$, a devet sa $\{1,5,6,7\}$.

PRIMEDBA. Alternativni dokaz tvrdjenja da D-grafovi nemaju 3-konture sledi iz činjenice da nijedan od dozvoljenih 4-skupova nema 1-presek sa svakim od skupova 1234, 1567.

Dodavanjem bilo kog od poslednjih 18 dozvoljenih 4-skupova (familiji {1234,1567}) dobijamo D-graf tipa (2). Dodavanjem bilo koja dozvoljena 4-skupa sa tačno jednim zajedničkim elementom dobijamo D-graf tipa (3).

Sledeća teorema se odnosi na preostale tipove D-grafova:

TEOREMA II-4.1. *Svaki D-graf sa više od dve grane pripada tačno jednoj od sledeće četiri klase:*

a) *grafovi sa bar jednom 4-konturom,*

b) *grafovi sa bar jednim čvorom stepena većim od* 2

c) *grafovi sa bar jednim 3-putem, koji ne pripadaju nekoj od klasa* a) *i* b)

d) *nepovezani grafovi bez 3-puteva.*

D o k a z. Biće implicitno sadržan u predstojećoj konstrukciji. $\square$

Dajemo posebne konstrukcije za svaku od četiri navedene klase D-grafova (svi grafovi koje pominjemo su D-grafovi, iako to nije uvek eksplicitno istaknuto).

<u>Klasa a):</u> 4-kontura sadrži podgraf tipa (2). Polazeći od familije $F_o = \{1234, 1567, 2568\}$, lako je pokazati da je 3478 jedini 4-skup, čijim dodavanjem nastaje 4-kontura tipa (4). Jedini dozvoljeni 4-skupovi za familiju $F_1 = \{1234, 1567, 2568, 3478\}$ su 1278, 1358, 1368, 1458, 1478 i njihovi komplementi. Nijedan od tih skupova nema 1-presek sa nekim skupom familije F_1, iz čega sledi da je 4-kontura u D-grafu uvek posebna povezana komponenta. Medjutim, neki od dozvoljenih 4-skupova imaju medjusobne 1-preseke. Biramo (da dodamo) 1358 i 2457 i tako dobijamo D-graf tipa (5), čiji svi dozvoljeni 4-skupovi su 1278-3456 i 1468, 2367. Dodajući jedan (respektivno dva) od skupova 1468 i 2367 dobijamo tip (6) (respektivno tip (7)).

Klasa b): Dodavanjem bilo kog od 4-skupova 3578, 3678,4578,4678 familiji $F_o = \{1234,1567,2568\}$, nastaje zvezda (tip (8)), sa centrom 1234. Pretpostavimo da je izabran skup 3578. Dozvoljeni 4-skupovi familije $F = \{1234,1567,2568,3578\}$ su 4678,1468,1478,2467,2478,3467,3468,1278-3456,1368-2457, 1458-2367. Kako nema 1-preseka medju poslednjih šest dozvoljenih (i 2-dozvoljenih) 4-skupova, zaključujemo da su svi grafovi u klasi b) povezani.

Jedina mogućnost da se dobije zvezda sa četiri kraka (tip (9)) je da se doda skup 4678 familiji F. To je maksimalan D-graf, budući da nijedan od njegovih dozvoljenih 4-skupova (poslednjih šest iz gornjeg spiska) nema 1-presek sa bilo kojim od skupova 1234,1567,2568,3578,4678.

Dodavanjem bilo kog od skupova 1468,1478,2467,2478, 3467,3468 familiji F, dobijamo D-graf tipa (10). Ako izaberemo skup 1468, onda su preostali dozvoljeni 4-skupovi 2367,2457, 2467,2478,3467,1278-3456. Ako familiji $G = \{1234,1567,2568,3578, 1468\}$ dodamo skup 2467, onda dobijamo D-graf tipa (11), za koga je lako proveriti da je maksimalan. Ako familiji G dodamo skup 2478 ili skup 3467, onda dobijamo dva medjusobno izomorfna (markirana) D-grafa tipa (12). Medjutim, ako dodamo skup 2367, respektivno skup 2457, familiji G, onda dobijamo dva medjusobno izomorfna (obična) grafa, koji imaju različite markacije (tipovi (13) i (14)).

U sledećem koraku istražujemo mogućnosti za uvećavanje D-grafova koji odgovaraju familijama $G_1 = G \cup \{2478\}$, $G_2 = G \cup \{2367\}$, $G_3 = G \cup \{2457\}$, sa familijama dozvoljenih 4-skupova $\{2367,3456,3467\}$, $\{2457,2478,1278\text{-}3456\}$ i $\{2367,3467, 1278\text{-}3456\}$ respektivno.

Dodavanjem skupa 3467 familiji G_1 dobijamo maksimalan D-graf tipa (15). Dodavanjem skupa 2457 familiji G_2 (identično, skupa 2367 familiji G_3), dobijamo maksimalan D-graf tipa (16). Dodavanjem skupa 2367 familiji G_1, odnosno skupa 2478 familiji G_2, dobijamo dva medjusobno izomorfna markirana D-grafa tipa (17). Dodavanjem skupa 3456 familiji G_1, odnosno skupa 3467 familiji G_3, dobijamo dva medjusobno izomorfna markirana D-grafa tipa (18) (izomorfna grafovima tipa (17), ali sa različitom markacijom). Konačno, dodavanjem (jedinog mogućeg) skupa 3456 familiji $G_1 \cup \{2367\}$ (identično, skupa 2367 familiji $G_1 \cup \{3456\}$), dobijamo maksimalan D-graf tipa (19).

Klasa c): Po treći put polazimo od familije $F_o = \{1234,1567,2568\}$. Ovog puta dodajemo (najpre) jedan od preostalih dozvoljenih 4-skupova, koji imaju 1-presek sa 1567 ili sa 2568, tj. jedan od skupova 1378,1478,2378,2478,3457,3458, 3467,3468. Na taj način dobijamo D-graf tipa (20). Ako izaberemo familiju $H = \{1234,1567,2568,1378\}$, onda su (odgovarajući) dozvoljeni 4-skupovi: 2457,2467,2478,3456,3457,3458,3467,3468, 4578,4678,1458-2367,1468-2357. Dodavanje bilo kog od skupova 3457,3467,4578,4678 familiji H daje D-graf tipa (10). Dodavanje skupa 2478, respektivno skupa 3456, (familiji H) dovodi do pojave markiranog D-grafa tipa (21), respektivno tipa (22), dok dodavanje bilo kog od skupova 2457,2467,3458,3468 daje 4-put markiran na treći način (tip (23)). Ovde takodje imamo (do na izomorfizam) jednu mogućnost da dobijemo granu druge komponente D-grafa. To možemo postići, naprimer, dodavanjem skupova 1458,2357 familiji H. Tako dobijamo tip (24).

Označimo familije $H \cup \{2478\}$, $H \cup \{3456\}$, $H \cup \{2457\}$ respektivno sa H_1, H_2, H_3. Njihove familije dozvoljenih 4-skupova su redom:

{3456,3457,3458,3467,3468,1458-2367,1468-2357},
{2457,2467,2478,4578,4678,1458-2367,1468-2357} i
{1468,3456,3458,3467,3468,4678,1458-2367}

Izostavljamo iz razmatranja sve one mogućnosti za uvećavanje D-grafova tipova (21)-(23), kod kojih se pojavljuje čvor stepena 3.

Ako dodamo skup 3456 familiji H_1 (identično, skup 2478 familiji H_2), onda dobijamo markirani D-graf tipa (25). Primetimo, medjutim, da ovde takodje možemo dobiti tri tipa nepovezanih markiranih D-grafova (tipovi (26),(27) i (28)) dodavanjem naprimer, skupova 1358 i 2357 familijama H_1, H_2 i $H_1 \cup \{3456\}$ respektivno. Ako dodamo skup 3468 familiji H_3, onda dobijamo maksimalni markirani D-graf tipa (29), koji se od D-grafa tipa (25) razlikuje samo po markaciji. Ako familiji H_3 dodamo neki od skupova 1468, odnosno 3458, onda dobijamo D-graf tipa (30). Jedini dozvoljeni 4-skupovi za familiju $H_3 \cup \{1468\}$ su 2367, 3458,3456,3467. Poslednja dva skupa zanemarujemo, zatošto njihovim dodavanjem nastaje čvor stepena 3. Ako se bilo koji od skupova 2367,3458 doda familiji $H_3 \cup \{1468\}$, onda nastaje D-graf tipa (31), ako se dodaju oba ta skupa, onda imamo maksimalan D-graf tipa (32).

Klasa d): Ako ponovo podjemo od familije F_o, onda treba da dodajemo samo one dozvoljene 4-skupove, koji nemaju 1-presek sa bilo kojim od skupova 1234,1567,2568, tj. neke od skupova.

1278-3456, 1358-2467, 1368-2457, 1458-2367, 1468-2357.

Primetimo da skupovi 1278 i 3456 nemaju 1-preseke sa bilo kojim od 4-skupova familije F_o, tako da oni ne mogu biti čvorovi D-grafa. Dodavanjem familiji F_o bilo koje od familija {1358,2367}, {1368,2357}, {1458,2467}, {1468,2457}, respektivno bilo koje od familija {1358,2457}, {1368,2467}, {1458, 2357}, {1468,2367}, dobijamo D-grafove tipa (33), respektivno tipa (34). D-grafovi ova dva tipa su medjusobno izomorfni i bez markacije, ali uočimo sledeću razliku izmedju njih: presečni element, koji odgovara komponenti od jedne grane, sadržan je u čvoru stepena 2 kod tipa (33), što nije slučaj kod tipa (34).

Jedini dozvoljeni 4-skupovi, pored 1278-3456, za familiju $F_o \cup \{1358,2367\}$, odnosno za familiju $F_o \cup \{1358,2457\}$, koji ne uvećavaju komponentu koja odgovara familiji F_o, su 1468,2457, odnosno 1468,2367. Dodavanjem bilo kog, ali samo jednog, od ovih 4-skupova u oba slučaja dobijamo D-graf tipa (35), dok dodavanje oba dozvoljena 4-skupa u oba slučaja daje 4-konturu (tip (6)).

Jedini slučaj koji još treba razmotriti je kad svaka komponenta D-grafa ima samo jednu granu. Polazimo od D-familije $J = \{1234,1567,1258,2367\}$, koja odgovara D-grafu tipa (3)). Jedini dozvoljeni 4-skupovi, koji ne daju neku komponentu sa bar dve grane, su 1368-2457 i 1378-2456. Dodavanjem bilo koje od familija {1368,2456} i {1378,2457} familiji J dobijamo D-graf tipa (36).

Na sledeće dve strane dajemo tabelu (primera) D-grafova koji odgovaraju neizomorfnim D-familijama. Ovi D-grafovi se poklapaju sa odgovarajućim neizomorfnim markiranim D-grafovima, izuzev kod tipova (33) i (34), kod kojih dva izomorfna markirana D-grafa odgovaraju neizomorfnim D-familijama.

Pored objašnjenih oznaka, kod svakog D-grafa u tabeli dajemo, uz redni broj tipa, odvojen crticom, i broj neizomorfnih C-familija koje imaju maksimalnu D-potfamiliju odgovarajućeg tipa. Generisanje ovih brojeva će biti objašnjeno u sledećem odeljku.

Markacija (parovi grana u relaciji →) će biti naznačena u tabeli samo u onim slučajevima kada je neophodna za razlikovanje dva izomorfna grafa koji odgovaraju dvema neizomorfnim D-familijama.

NAPOMENA. Jedini (do na izomorfizam) pejving matroid, kome odgovara D-graf tipa (32) (8-kontura), je, ustvari, Piff-ov ciklički (= sa cikličkom grupom automorfizama) matroid na 8-skupu (|51|). Sasvim je prirodno da takav matroid ima markirani D-graf sa cikličkom grupom automorfizama C_8.

Primećujemo da pet parova neizomorfnih D-familija, kojima odgovaraju izomorfni (bez uzimanja u obzir markacije) D-grafovi, daju u sledećem koraku uvećavanja (broja grana) izomorfne D-familije. Tako (13) i (14) daju (16), (17) i (18) daju (19), (22) i (23) daju (25) (iako bi oni takodje mogli dati i neizomorfne (26) i (27)), (26) i (27) daju (28), a (33) i (34) daju (35). Ovaj proces liči na neku vrstu simetrizacije.

Očigledno je da dvema izomorfnim D-familijama moraju odgovarati izomorfni markirani D-grafovi (izomorfizmi familija očuvavaju 1-preseke). Medjutim, sada ćemo dokazati, da je tačno i obrnuto tvrdjenje, sa jednim jedinim izuzetkom. Time se opravdava naša konstrukcija svih neizomorfnih D-familija iscrpljivanjem mogućnosti za neizomorfne markirane D-grafove, budući da ovo tvrdjenje ne dopušta da se pojave neke nove neizomorfne D-familije, pored konstruisanih.

TABELA (PRIMERA) D-GRAFOVA KOJI ODGOVARAJU NEIZOMORFNIM D-FAMILIJAMA

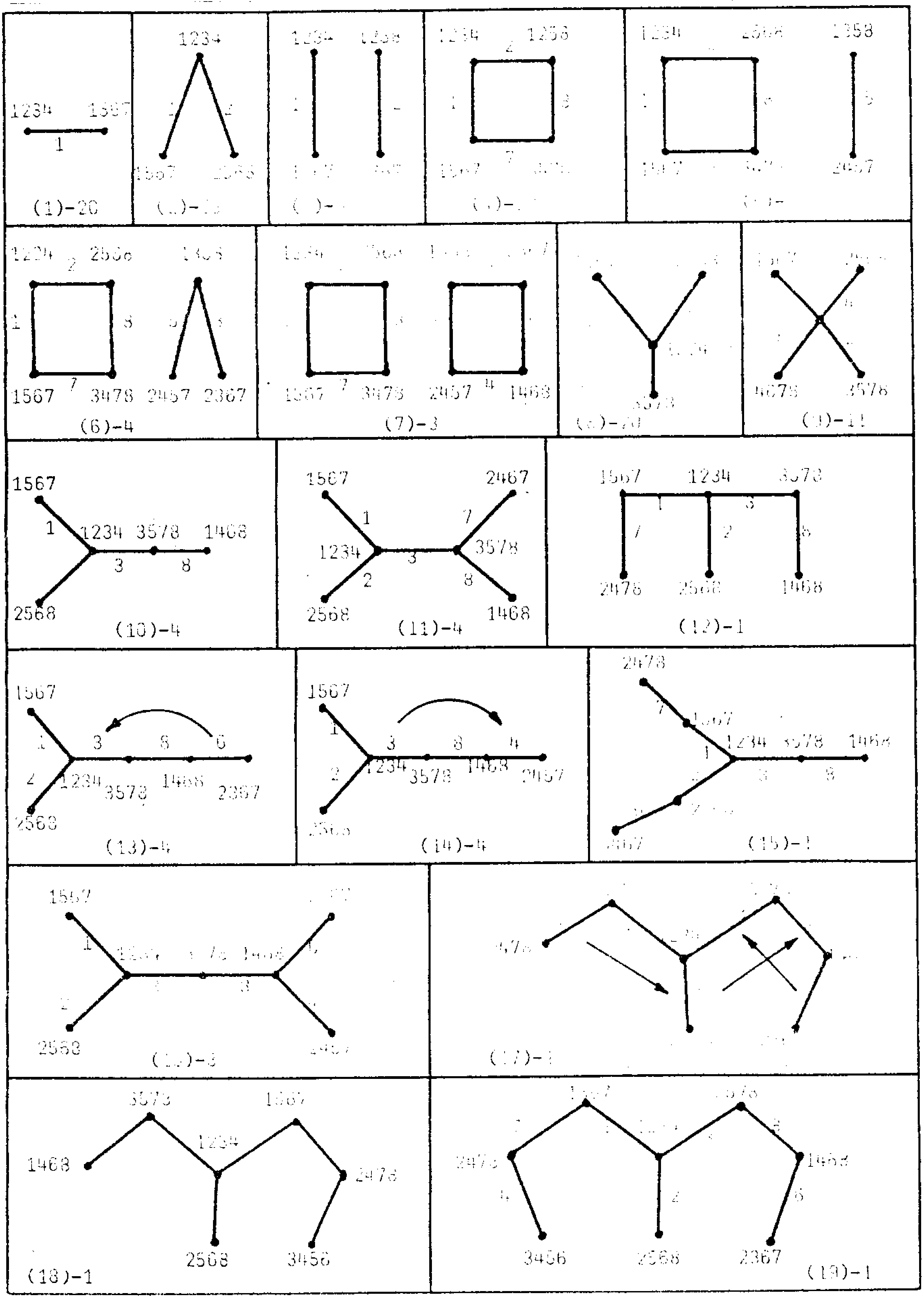
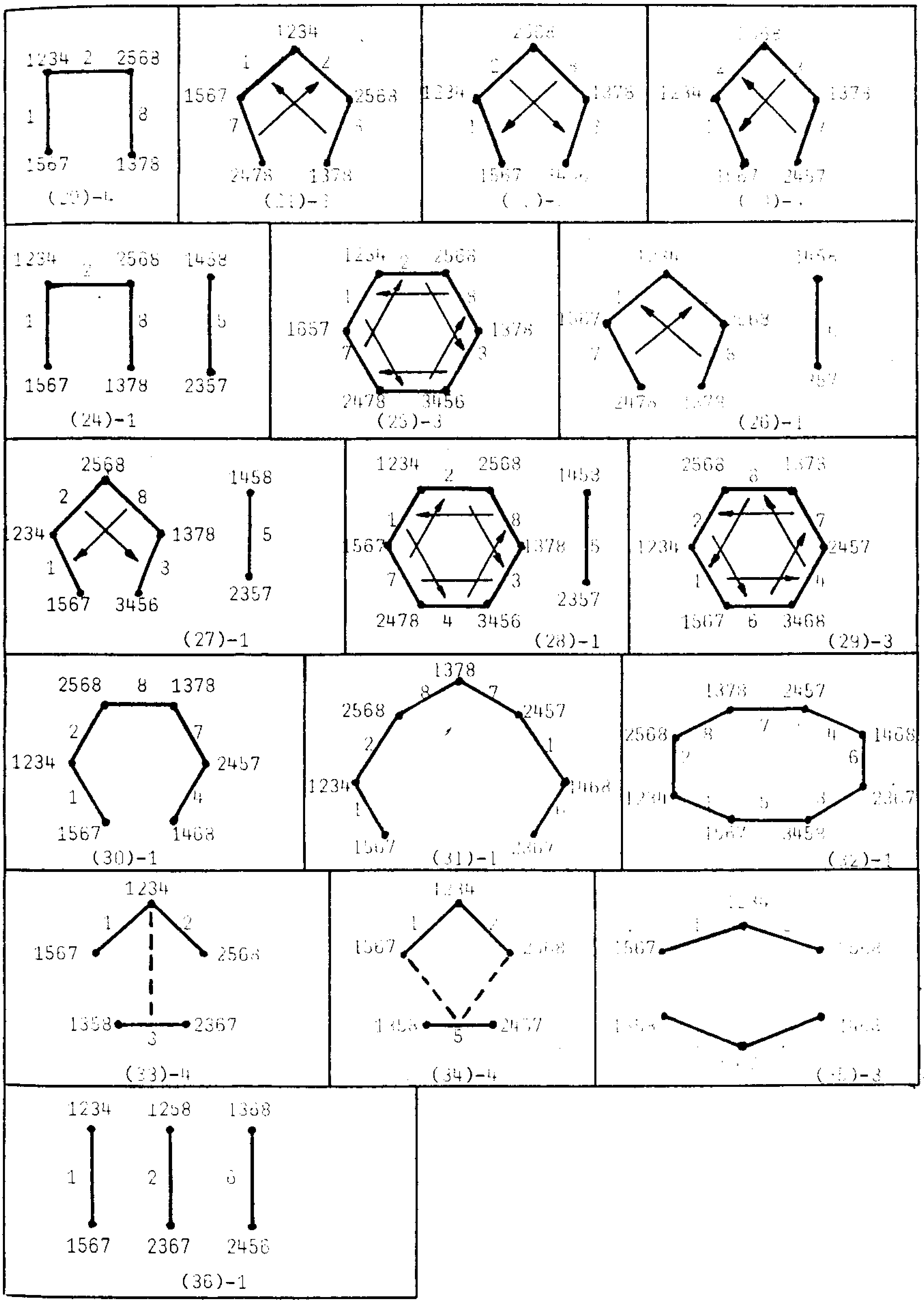


TABELA D-GRAFOVA (NASTAVAK)



TEOREMA II-4.2. *Svake dve D-familije (koje imaju markirane D-grafove) istog tipa ((1)-(36)) su izomorfne.*

Ova teorema se može preformulisati na sledeći način:

TEOREMA II-4.2.' *Ako su dva markirana D-grafa izomorfna i ako nije tačno da svaki od njih ima tačno tri grane u dve povezane komponente, onda su i njima odgovarajuće D-familije takodje izomorfne. Drugim rečima, tipovi (33) i (34) su jedini izuzetak od pravila da neizomorfni markirani D-grafovi tačno odgovaraju neizomorfnim D-familijama. Svaki od tipova (33) i (34) D-grafova odredjuje jednoznačno (do na izomorfizam) odgovarajuću D-familiju.*

LEMA. *Ako su dva markirana D-grafa G_1 i G_2 izomorfna i G_1 sadrži 3-put, koji nije sadržan u nekoj 4-konturi, onda su njima odgovarajuće D-familije (F_1 i F_2 respektivno) takodje izomorfne.*

D o k a z leme. Neka je $\gamma : G_1 \to G_2$ dati izomorfizam i neka je $X_1Y_1Z_1T_1$ 3-put u G_1, takav da X_1T_1 nije grana od G_1. Sliku u G_2 od $X_1Y_1Z_1T_1$ pri primeni γ označavamo sa $X_2Y_2Z_2T_2$. Prema Lemama II-4.6 i II-4.12 važi tačno jedna od relacija $X_1Y_1 \to Z_1T_1$ i $Z_1T_1 \to X_1Y_1$. Prepostavimo da važi prva, drugi slučaj se sasvim slično razmatra.

Imamo $X_2Y_2 \to Z_2T_2$ i za $i \in \{1,2\}$ označavamo:

$$X_i \cap Y_i = a_i; \quad Y_i \cap Z_i = b_i; \quad Z_i \cap T_i = c_i \ ;$$
$$S \setminus (X_i \cup Y_i) = d_i; \quad S \setminus (Y_i \cup Z_i) = e_i \ ;$$
$$(X_i \cap Z_i) \setminus T_i = f_i; \quad Y_i \cap T_i = \{g_i, h_i\}$$

Tvrdimo da najmanje jedna od permutacija

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1 g_1 h_1 \\ a_2 b_2 c_2 d_2 e_2 f_2 g_2 h_2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \beta = \begin{pmatrix} a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1 g_1 h_1 \\ a_2 b_2 c_2 d_2 e_2 f_2 h_2 g_2 \end{pmatrix}$$

indukuje izomorfizam familije F_1 na familiju F_2, čime bi se (kad to bude dokazano) dovršio dokaz Leme.

Za $i \in \{1,2\}$ imamo:

$$X_i = \{a_i, c_i, e_i, f_i\} \; ; \qquad Y_i = \{a_i, b_i, g_i, h_i\}$$

$$Z_i = \{b_i, c_i, d_i, f_i\} \; ; \qquad T_i = \{c_i, e_i, g_i, h_i\}$$

Naime, skup X_i očigledno sadrži elemente a_i i f_i, sadrži e_i po Lemi II-4.4 i sadrži c_i, budući da ne važi $Z_iT_i \to X_iY_i$. Ostala tri para skupova se lako nalaze primenom Leme II-4.8.

Zaključujemo da svako od preslikavanja α i β preslikava skupove X_1, Y_1, Z_1, T_1 na skupove X_2, Y_2, Z_2, T_2 respektivno.

Jedini 4-skupovi, koji su dozvoljeni za X_i, Y_i, Z_i, T_i su (za $i = 1,2$):

$$A_i^1 = \{a_i, c_i, d_i, g_i\}; \quad A_i^2 = \{a_i, c_i, d_i, h_i\} \; ;$$

$$A_i^3 = \{b_i, e_i, f_i, g_i\} \; ; \quad A_i^4 = \{b_i, e_i, f_i, h_i\} \; ;$$

$$A_i^5 = \{a_i, b_i, d_i, e_i\}; \quad A_i^6 = \{d_i, f_i, g_i, h_i\};$$

$$A_i^7 = \{a_i, d_i, f_i, g_i\}; \quad A_i^8 = \{a_i, d_i, f_i, h_i\};$$

$$A_i^9 = \{b_i, d_i, e_i, g_i\}; \quad A_i^{10} = \{b_i, d_i, e_i, h_i\};$$

$$A_i^{11} = \{a_i, d_i, e_i, g_i\}; \quad A_i^{12} = \{a_i, d_i, e_i, h_i\} \; ;$$

$$A_i^{13} = \{d_i, e_i, f_i, g_i\}; \quad A_i^{14} = \{d_i, e_i, f_i, h_i\}$$

Neka skup W_1 pripada $\{A_1^1, \ldots, A_1^{14}\} \cap F$. Najpre dokazujemo da važi bar jedna od relacija $\alpha(W_1) \in F_2$, $\beta(W_1) \in F_2$ i to tako da važi bar jedna od jednakosti $\alpha(W_1) = \gamma(W_1)$, $\beta(W_1) = \gamma(W_1)$.

Ako je $W_1 \in \{A_1^{13}, A_1^{14}\}$, onda u grafu G_1 postoji grana Y_1W_1, iz čega sledi egzistencija grane $Y_2\gamma(W_1)$ u grafu G_2. To daje $\gamma(W_1) \in \{A_2^{13}, A_2^{14}\}$ i obezbedjuje da važi ili $\gamma(W_1) = \alpha(W_1)$ ili $\gamma(W_1) = \beta(W_1)$. Na sličan način, čuvajući susedstvo sa čvorovima Z_i, X_i, T_i respektivno, izvodimo

$$W_1 \in \{A_1^{11}, A_1^{12}\} \Rightarrow \gamma(W_1) \in \{A_2^{11}, A_2^{12}\}$$
$$W_1 \in \{A_1^{6}, A_1^{9}, A_1^{10}\} \Rightarrow \gamma(W_1) \in \{A_2^{6}, A_2^{9}, A_2^{10}\}$$
$$W_1 \in \{A_1^{5}, A_1^{7}, A_1^{8}\} \Rightarrow \gamma(W_1) \in \{A_2^{5}, A_2^{7}, A_2^{8}\}$$

Kako važi i inverzna argumentacija, to imamo i

$$W_1 \in \{A_1^{1}, A_1^{2}, A_1^{3}, A_1^{4}\} \Rightarrow \gamma(W_1) \in \{A_2^{1}, A_2^{2}, A_2^{3}, A_2^{4}\}$$

Medjutim, kako preslikavanje γ očuvava markiranje, to ne može biti, naprimer $\gamma(A_1^6) = A_2^9$, inače podgraf grafa G_1 sa čvorovima $A_1^6, X_1, Y_1, Z_1, T_1$ ne bi imao isto markiranje kao njegova slika pri preslikavanju γ. Takvim i sličnim razmatranjem nalazimo

$$W_1 = A_1^5 \Rightarrow \gamma(W_1) = A_2^5 \; ; \qquad W_1 = A_1^6 \Rightarrow \gamma(W_1) = A_2^6$$
$$W_1 \in \{A_1^{7}, A_1^{8}\} \Rightarrow \gamma(W_1) \in \{A_2^{7}, A_2^{8}\}$$
$$W_1 \in \{A_1^{9}, A_1^{10}\} \Rightarrow \gamma(W_1) \in \{A_2^{9}, A_2^{10}\}$$

Zaključujemo da je skup $\gamma(W_1)$, koji pripada familiji F_2, jednak bar jednom od skupova $\alpha(W_1)$, $\beta(W_1)$, za $W_1 \in \{A_1^5, \ldots$ $\ldots, A_1^{14}\}$.

Ako skup W_1 pripada familiji $\{A_1^1, A_1^2, A_1^3, A_1^4\}$, onda čvor W_1 nije incidentan (u grafu G_1) ni sa jednim od čvorova X_1, Y_1, Z_1, T_1. Kako graf G_1 ne sadrži izolovane čvorove, to je čvor W_1 spojen sa nekim drugim čvorom V_1 grafa G_1. Lako je proveriti da se uredjen par (W_1, V_1) mora nalaziti medju sledećih dvanaest:

$$(A_1^1, A_1^3), (A_1^3, A_1^1), (A_1^2, A_1^4), (A_1^4, A_1^2)$$
$$(A_1^1, A_1^{10}), (A_1^1, A_1^{14}), (A_1^2, A_1^9), (A_1^2, A_1^{13}), (A_1^3, A_1^8),$$
$$(A_1^3, A_1^{12}), (A_1^4, A_1^7), (A_1^4, A_1^{11})$$

dok $\gamma(W_1, V_1)$ mora biti jedan od uredjenih parova, koji se dobijaju iz gornjih parova zamenom donjih indeksa 1 sa 2.

U prva četiri slučaja koristimo da γ preslikava $\{A_1^1, \ldots, A_1^4\}$ na $\{A_2^1, \ldots, A_2^4\}$ i očuvava grane. To daje, naprimer, da važi:

ili $\gamma(\{A_1^1,A_1^3\}) = \{A_2^1,A_2^3\} = \alpha(\{A_1^1,A_1^3\})$

ili $\gamma(\{A_1^1,A_1^3\}) = \{A_2^2,A_2^4\} = \beta(\{A_1^1,A_1^3\})$

Kako $\gamma(A_1^{10}) \in \{A_2^9,A_2^{10}\}$, to imamo da važi

ili $\gamma(\{A_1^1,A_1^{10}\}) = \{A_2^1,A_2^{10}\} = \alpha(\{A_1^1,A_1^{10}\})$

ili $\gamma(\{A_1^1,A_1^{10}\}) = \{A_2^2,A_2^9\} = \beta(\{A_1^1,A_1^{10}\})$

Preostalih sedam slučajeva razmatramo na sličan način.

Sada znamo da se svaki skup familije F_1 preslikava barem jednim od preslikavanja α,β na neki skup familije F_2. Svaki kontraprimer za naše tvrdjenje, koji bi se mogao pojaviti, bi morao biti sledećeg oblika:

Postoje dva skupa P_1 i Q_1 familije F_1 za koje važi

$$\alpha(P_1) \in F_2; \quad \beta(P_1) \notin F_2; \quad \alpha(Q_1) \notin F_2; \quad \beta(Q_1) \in F_2$$

Kako skupovi P_1 i Q_1 imaju različite slike pri preslikavanjima α i β, to sledi

$$|P_1 \cap \{g_1,h_1\}| = |Q_1 \cap \{g_1,h_1\}| = 1$$

U svakom od četiri moguća slučaja imamo

$$\big||P_1 \cap Q_1| - |\alpha(P_1) \cap \beta(Q_1)|\big| = 1$$

Skupovi $\alpha(P_1)$ i $\beta(Q_1)$ su čvorovi grafa G_2, koji su slike čvorova P_1 i Q_1 respektivno pri D-grafovskom izomorfizmu γ. Stoga mora važiti

$$|P_1 \cap Q_1| = 1 \iff |\alpha(P_1) \cap \beta(Q_1)| = 1.$$

Kako i $|P_1 \cap Q_1|$ i $|\alpha(P_1) \cap \beta(Q_1)|$ pripadaju skupu $\{0,1,2\}$ to imamo kontradikciju koja dokazuje lemu. □

D o k a z teoreme. Prema lemi, preostaje da se dokaže jedinstvenost (do na izomorfizam) D-familijâ, koje odgovaraju D-grafovima tipova (1)-(9) i (33)-(36) uključno. Konstruišemo neke od mogućih izomorfizama izmedju bilo koje dve D-familije (koje imaju D-grafove) ovih tipova. Prilikom definisanja odgovarajućih permutacija skupa S, koristimo neke od Lema II-4.1., II-4.4., II-4.9., II-4.12., ali to u većini slulajeva ne navodimo eksplicitno.

Zvezde (tipovi (1), (2), (8), (9)): Neka su data dva D-grafa G_1 i G_2, koji su zvezde istog tipa. Označimo njihove centre (proizvoljno izabrane u slučaju (1)) respektivno sa X_1, X_2 i njihove ostale čvorove (stepena 1) respektivno sa Y_1^i, Y_2^i ($i \in N$; gornja granica za i uzima vrednosti izmedju 1 i 4, zavisno od tipa).

Svaka permutacija α skupa S, koja ispunjava uslove: $\alpha(X_1)=X_2$, kao i

$$\alpha(X_1 \cap Y_1^i) = X_2 \cap Y_2^i; \quad \alpha(S \setminus (X_1 \cap Y_1^i)) = S \setminus (X_2 \cap Y_2^i),$$

uspostavlja izomorfizam izmedju D-familijâ F_1 i F_2, koje odgovaraju grafovima G_1 i G_2 respektivno. Naime, α preslikava skupove familije F_1 na skupove familije F_2, budući da su svi necentralni čvorovi jednoznačno odredjeni prema Lemi II-4.8.

Tipovi (3) i (36): Leme II-4.1. i II-4.9. daju da svaka od dve grane u raznim komponentama D-grafa ima tačno jedan čvor koji sadrži "presečni čvor druge grane".

Neka su X_1Y_1 i Z_1T_1 dve (u slučaju tipa (36) proizvoljne dve) nepovezane grane grafa G_1 i neka su, X_2Y_2 i Z_2T_2 odgovarajuće dve grane grafa G_2, tako da čvorovi označeni sa X_i i Z_i imaju svojstvo opisano u prethodnoj rečenici.

Svaka od permutacija α_1, α_2 skupa S koja zadovoljava (za i=1,2):

$$\alpha_i(X_1)=X_2; \quad \alpha_i(Z_1) = Z_2;$$

$$\alpha_i(X_1 \cap Y_1)=X_2 \cap Y_2; \; \alpha_i(Z_1 \cap T_1) = Z_2 \cap T_2;$$

$$\alpha_i(S\setminus(X_1 \cup Y_1)) = S\setminus(X_2 \cup Y_2); \; \alpha_i(S\setminus(Z_1 \cup T_1)) = S\setminus(Z_2 \cup T_2)$$

preslikava skup $\{X_1, Y_1, Z_1, T_1\}$ na $\{X_2, Y_2, Z_2, T_2\}$ i uspostavlja izomorfizam izmedju odgovarajućih D-familijâ tipa (3).

Što se tiče slučaja (36), označimo preostali par granâ grafova G_1 i G_2 sa U_1V_1, respektivno sa U_2V_2. Lako je proveriti da jedna od permutacijâ α_1, α_2 preslikava skup $\{U_1, V_1\}$

na $\{U_2,V_2\}$, tj. uspostavlja takodje i izomorfizam izmedju odgovarajućih D-familija tipa (36).

D-grafovi sa 4-konturom (tipovi (4),(5),(6),(7)): Neka su $X_1Y_1Z_1T_1$ i $X_2Y_2Z_2T_2$ dve (u slučaju tipa (7) proizvoljne dve) odgovarajuće 4-konture izomorfnih D-grafova G_1 i G_2. Svaka permutacija α skupa S koja zadovoljava, naprimer:

$$(*) \qquad \begin{array}{ll} \alpha(X_1\cap Y_1) = X_2\cap Y_2\ ; & \alpha(Y_1\cap Z_1) = Y_2\cap Z_2\ ; \\ \alpha(Z_1\cap T_1) = Z_2\cap T_2; & \alpha(T_1\cap X_1) = T_2\cap X_2; \\ \alpha(X_1\cap Z_1) = X_2\cap Z_2 & \end{array}$$

preslikava skup $\{X_1,Y_1,Z_1,T_1\}$ na $\{X_2,Y_2,Z_2,T_2\}$ i uspostavlja izomorfizam izmedju odgovarajućih D-familija (u slučaju) tipa (4).

Što se tiče tipa (7), označavamo preostale dve 4-konture grafova G_1 i G_2 sa $P_1Q_1R_1S_1$ i $P_2Q_2R_2S_2$ respektivno i dodatno zahtevamo

$$\begin{array}{ll} \alpha(P_1\cap Q_1) = P_2\cap Q_2; & \alpha(Q_1\cap R_1) = Q_2\cap R_2 \\ \alpha(R_1\cap S_1) = R_2\cap S_2; & \alpha(S_1\cap T_1) = S_2\cap T_2 \end{array}$$

Ovo nije u kontradikciji sa ranije postavljenim uslovima za preslikavanje α. Posebno, preslikavanje α očuvava sledeće svojstvo: 2-preseci nesusednih čvorova jedne 4-konture tačno odgovaraju (neuredjenim) parovima 1-preseka koji odgovaraju nesusednim granama druge 4-konture.

Jedina permutacija α, koja ispunjava sve gore navedene uslove, uspostavlja izomorfizam izmedju odgovarajućih D-familija tipa (7).

Tip (5): Ako preostale grane (van 4-konture) grafova G_1 i G_2, označimo sa U_1V_1 i U_2V_2 respektivno, onda zahtevamo, pored uslova označenih sa (*), i:

$$(**) \qquad \alpha(U_1\cap V_1) = U_2\cap V_2; \quad \alpha(S\setminus(U_1\cup V_1)) = S\setminus(U_2\cup V_2).$$

Primetimo da se može desiti da bude potrebno izmeniti inicijalno preslikavanje čvorova 4-kontura, sa ciljem da se postigne da se čvorovi koji sadrže skup $U_1\cap V_1$ preslikavaju na čvorove koji sadrže $U_2 \cap V_2$. Ako nijedna od dve permutacije α, koje zadovoljavaju uslove (*) i (**), ne indukuje izomorfizam izmedju odgovarajućih D-familija, onda izomorfizam tražimo preko neke od dve permutacije α koje zadovoljavaju (**) i

$$(***) \qquad \begin{array}{ll} \alpha(X_1 \cap Y_1) = Y_2 \cap Z_2; & \alpha(Y_1 \cap Z_1) = Z_2 \cap T_2 \\ \alpha(Z_1 \cap T_1) = T_2 \cap X_2; & \alpha(T_1 \cap X_1) = X_2 \cap Y_2 ; \\ \alpha(X_1 \cap Z_1) = Y_2 \cap T_2 & \end{array}$$

Tip (6): Označimo dodatne grane (izvan kontura) grafova G_1 i G_2 sa U_1V_1, U_1W_1 i U_2V_2, U_2W_2 respektivno.

Izomorfizam izmedju odgovarajućih D-familija tipa (6) se može uspostaviti preko permutacije α skupa S koja zadovoljava $\alpha(U_1) = U_2$ i bilo koji od "paketa" uslova (*) i (***).

Ova permutacija preslikava skup $U_1 \setminus (W_1 \cup V_1)$ na $U_2 \setminus (W_2 \cup V_2)$. Elementi poslednja dva skupa odgovaraju po jednom paru naspramnih grana odgovarajućih 4-kontura.

Tipovi (33) i (34): U oba slučaja označimo grane D-grafova G_i $(i=1,2)$ sa X_iY_i, X_iZ_i, U_iV_i.

Izomorfizam izmedju odgovarajućih D-familija se može realizovati pomoću bilo koje (od dve) permutacije skupa S, koja ispunjava sledeće uslove:

$$\begin{array}{ll} \alpha(X_1 \cap Y_1) = X_2 \cap Y_2; & \alpha(S \setminus (X_1 \cup Y_1)) = S \setminus (X_2 \cup Y_2) \\ \alpha(X_1 \cap Z_1) = X_2 \cap Z_2; & \alpha(S \setminus (X_1 \cup Z_1)) = S \setminus (X_2 \cup Z_2) \\ \alpha(U_1 \cap V_1) = U_2 \cap V_2; & \alpha(S \setminus (U_1 \cup V_1)) = S \setminus (U_2 \cup V_2) \end{array}$$

Tip (35): Primetimo da svaki čvor stepena 2 sadrži tačno jedan presečni element, koji odgovara nekoj grani druge povezane komponente.

Označavamo grane D-grafova G_i $(i=1,2)$ sa X_iY_i, X_iZ_i, U_iV_i, U_iW_i, tako da važi $U_i \supset X_i \cap Y_i$, $X_i \supset U_i \cap V_i$.

Jedina permutacija α skupa S, koja zadovoljava svih šest uslova navedenih u prethodnom slučaju i, pored toga, uslove

$$\alpha(U_1 \cap W_1) = U_2 \cap W_2 \quad \text{i} \quad \alpha(S \setminus (U_1 \cup W_1)) = S \setminus (U_2 \cup W_2)$$

indukuje izomorfizam izmedju odgovarajućih D-familija.

Ovim je kompletiran dokaz Teoreme II-4.2. □

Teorema II-4.2. obezbedjuje da su sve neizomorfne D-familije "pokrivene" našom "konstrukcijom preko primera". Iz nje sledi da svaki primer F_o predstavlja jednu klasu $\mathcal{F}_o$ medjusobno izomorfnih D-familija opisanu preko odgovarajućeg markiranog D-grafa. Dozvoljeni 4-skupovi za familiju F_o predstavljaju dozvoljene 4-skupove za proizvoljnu familiju klase $\mathcal{F}_o$. Neizomorfne mogućnosti za uvećavanje familije F_o predstavljaju neizomorfne mogućnosti za uvećavanje klase $\mathcal{F}_o$, tj. neizomorfne D-familije, koje sadrže neku potfamiliju iz $\mathcal{F}_o$.

II-5. KONSTRUKCIJA SVIH NEIZOMORFNIH C-FAMILIJÂ, KOJE NISU D-FAMILIJE

Polazeći od date D-familije F_o, konstruišemo sve neizomorfne C-familije koje iz nje nastaju, tj. koje imaju F_o kao (jedinstvenu) maksimalnu D-potfamiliju. Ovu konstrukciju primenjujemo na već konstruisane primere ((1)-(36)) D-familijâ i tako dobijamo sve neizomorfne C-familije, budući da pomenuti primeri predstavljaju sve neizomorfne D-familije.

Najpre nalazimo 2-dozvoljene 4-skupove za svih 36 primera D-familijâ. 2-dozvoljeni skupovi se uvek javljaju u komplementarnim parovima (budući da je komplement 2-dozvoljenog skupa 2-dozvoljen).

D-familije tipova (12),(15),(17),(18),(19),(24),(26),(32) (27),(28),(30),(31),(36) nemaju 2-dozvoljenih 4-skupova i poklapaju se sa jedinim odgovarajućim C-familijama.

Označimo komplementarne parove

1258-3467,	1268-3457,	1278-3456		a,b,c	
1358-2467,	1368-2457,	1378-2456	sa	d,e,f	respektivno.
1458-2367,	1468-2357,	1478-2356		g,h,i	

Komplementarni parovi 2-dozvoljenih 4-skupova za date (u tabeli iz prethodnog odeljka) primere preostalih tipova D-familija u sledećoj tabeli (tipovi familijâ su naznačeni u gornjem redu):

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
a,b,c,d,e,f,g,h,i	c,d,e,g,h	e,f	c,d,e,g,h	c

(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(13)	(14)	(16)	(20)	(21)
c	c	c,e,g	c,e,g	c	c	c	c	c	g,h	g,h

(22)	(23)	(25)	(29)	(33)	(34)	(35)
g,h	g	g,h	g	c	c	c

TEOREMA II-5.1. *Sve neizomorfne* C-*familije koje nisu* D-*familije, se mogu konstruisati iz datih (u odeljku* II-4*) primera* D-*familijâ dodavanjem nekih* 2-*dozvoljenih* 4-*skupova iz parova* c,e *i* g.

D o k a z. Prema gore navedenoj tabeli, dovoljno je da damo dokaz za tipove (1),(2),(3),(4),(20),(21),(22),(25).

Primetimo da se nijedna dva 4-skupa, koji se nalaze u dva različita komplementarna para, koji se zajedno javljaju u bilo kom od sledećih 3-skupova komplementarnih parova

$\{a,b,c\}$, $\{d,e,f\}$, $\{g,h,i\}$, $\{a,d,g\}$, $\{b,e,h\}$, $\{c,f,i\}$

ne mogu zajedno dodati nekoj D-familiji, inače bi se pojavili ili 3-preseci ili novi 1-preseci (izmedju nekih 4-skupova u C-familiji).

Ekvivalentno, jedini maksimalni skupovi parova komplementarnih 4-skupova, iz kojih se 4-skupovi mogu istovremeno dodati nekoj D-familiji (tako da nastane C-familija, koja nije D-familija) su:

$\{a,e,i\}$, $\{a,f,h\}$, $\{b,d,i\}$, $\{b,f,g\}$, $\{c,d,h\}$, $\{c,e,g\}$.

Svaka od ovih šest neuredjenih trojki parova 2-dozvoljenih 4-skupova se može pojaviti zajedno sa D-familijom (1). Primetimo, medjutim, da sledeće permutacije skupa S, označene samo pomoću svojih netrivijalnih ciklusa

(57), (567), (576), (67), (56)

Ovim redom, preslikavaju 4-skupove, koji se javljaju u {c,e,g} na 4-skupove iz odgovarajućeg od prvih pet 3-skupova parova. Elementi 5,6,7 se nalaze u izomorfnim pozicijama s obzirom na dati primer tipa (1) (sva tri se nalaze u istom skupu, 1567). Tako dodavanje familiji {1234, 1567} 4-skupova, sadržanih u bilo kom od prvih pet 3-skupova parova, daje izomorfne C-familije sa onima koje se dobijaju dodavanjem familiji {1234, 1567} samo nekih 4-skupova sadržanih u parovima c ili e ili g.

Transpozicija (56) preslikava skup {e,g} na {d,h}, a skup {g} na {h}. Elementi 5 i 6 se uvek zajedno javljaju u skupovima datih primera D-familijâ tipova (2),(4),(20),(21), (22),(25). Iz toga sledi da se 2-dozvoljeni 4-skupovi iz familijâ {d,h}, respektivno {h}, mogu uvek zameniti (kada je u pitanju navedenih šest D-familija i kada se traže samo neizomorfne C-familije) 2-dozvoljenim 4-skupovima iz familija {e,g} respektivno {g}.

Slično, kod datog primera D-familije tipa (3) se 2-dozvoljeni 4-skupovi iz {f} mogu zameniti 2- dozvoljenim 4-skupovima iz {e}, što se izvodi primenom transpozicije (67). □

Dati primeri D-familijâ tipova (3),(5),(6),(7),(10), (11),(13),(14),(16),(20),(21),(22),(23),(25),(29),(33),(34), (35) imaju 2-dozvoljene 4-skupove u samo jednom od parova c,e,g. Postoje najmanje tri neizomorfne C-familije, koje odgovaraju svakoj od ovih D-familija; ove familije nastaju dodavanjem (D-familiji) nijednog, jednog, odnosno oba 2-dozvoljena 4-skupa.

Jedino pitanje, na koje ovde treba odgovoriti,glasi:

"U kojima od ovih 18 slučajeva postoji i četvrta neizomorfna C-familija" ? ili, ekvivalentno:

"U kojima od ovih 18 slučajeva dva 2-dozvoljena 4-skupa nisu u izomorfnoj poziciji sa obzirom na odgovarajuću D-familiju" ?

Nije teško proveriti da ispravan odgovor glasi:
"Kod D-familijâ tipova (5),(6),(10),(11),(13),(14),(20),(23), (33),(34)".

Kao primer dokazujemo da su 4-skupovi 1458 i 2367 u izomorfnoj poziciji s obzirom na dati primer H_2 D-familije tipa (22), ali nisu u izomorfnoj poziciji s obzirom na dati primer H_3 D-familije tipa (23):

Permutacija $\binom{12345678}{38176542}$ skupa S preslikava familiju $H_2 \cup \{1458\}$ na $H_2 \cup \{2367\}$.

Elementi 1 i 7 imaju specijalne, ali medjusobno različite pozicije u familiji H_3. Oba elementa su presečni elementi koji odgovaraju spoljašnjim granama D-grafa (4-puta). Medjutim, element 7 se NE nalazi u dva 4-skupa koji odredjuju granu (u primeru (23) to su, konkretno, skupovi 1234 i 2568), što nije slučaj sa elementom 1 (ekvivalentno, elementi 1 i 7 imaju različit položaj s obzirom na markiranje D-grafa). Iz toga sledi da 4-skupovi 1458 (koji sadrži element 1) i 2367 (koji sadrži element 7) nisu u izomorfnoj poziciji s obzirom na familiju H_3.

TEOREMA II-5.2. *Postoji bijekcija izmedju neizomorfnih C-familija, koje nastaju iz datih primera F_o i F_1 D-familija tipova (2) i (4) respektivno.*

D o k a z. Kako je

$$3478 = (1234\setminus(1567 \cup 2568)) + (((1567 \cup 2568)\setminus(1567 \cup 2568))\setminus 1234),$$

a bilo koji izomorfizam izmedju dve C-familije koje nastaju iz familije $F_o = \{1234,1567,2568\}$ očuvava i $\{1234\}$ i $\{1567, 2568\}$, to zaključujemo da je taj izomorfizam ujedno i izomorfizam izmedju dve C-familije koje nastaju iz familije $F_1 = \{1234,1567,2568,3478\}$ i imaju iste 2-dozvoljene 4-skupove, kao i prve dve C-familije (primetimo da je egzistencija poslednje dve C-familije obezbedjena).

Obrnuto, svaki izomorfizam izmedju dve C-familije, koje nastaju iz F_1, indukuje (kao svoju restrikciju) izomorfizam izmedju njihovih C-potfamilija, koje se dobijaju udaljavanjem istog 4-skupa familije F_1, iz svake od prve dve C-familije. Ove C-potfamilije imaju maksimalne D-potfamilije tipa (2) i stoga je svaka od njih izomorfna nekoj C-familiji, koja nastaje iz F_o. $\square$

Preostaje nam da konstruišemo samo još one neizomorfne C-familije, čije maksimalne D-potfamilije imaju zvezde kao odgovarajuće D-grafove (tipovi (1),(2),(8),(9)).

4-skup 1234 je centar (centralni čvor) datih primera zvezdi koje odgovaraju D-familijama tipova (2),(8) i (9), i mi usvajamo dogovor da je on centar i u slučaju tipa (1). Svaki od 4-skupova iz parova 1278-3456, 1368-2457, 1458-2367 (tj. iz parova iz {c,e,g}) ima 2-presek sa skupom 1234 i nijedna dva od njih nemaju isti 2-presek sa 1234.

TEOREMA II-5.3. *Postoji bijekcija izmedju neizomorfnih C-familija koje nastaju iz (datih primera) D-familija tipova* (1), (2), (8), (9) *i neizomorfnih obojenih C-grafova, koji imaju jedan, dva, tri, četiri crna čvora respektivno.*

D o k a z. Na sledeći način dodeljujemo C-grafove ovim C-familijama:

Četiri čvora ovih C-grafova označavamo sa 1,2,3,4. Čvor 1 (respektivno 2, respektivno 3, respektivno 4) je crn ako i samo ako odgovarajuća C-familija sadrži skup 1567 (respektivno 2568, respektivno 3578, respektivno 4678). Grana 12 (respektivno 13, respektivno 14, respektivno 23, respektivno 24, respektivno 34) postoji u C-grafu ako i samo ako odgovarajuća C-familija sadrži 4-skup 1278 (respektivno 1368, respektivno 1458, respektivno 2367, respektivno 2457, respektivno 3456.

Obrnuto, kada je dat obojeni C-graf, čiji čvorovi su označeni sa 1,2,3,4, tako da su crni čvorovi označeni manjim brojevima, mi jednostavno čitamo sve 4-skupove odgovarajuće C-familije (izuzev skupa 1234, čiju egzistenciju u C-familiji unapred pretpostavljamo), koristeći napred navedenu bijekciju.

(I) Pretpostavimo da su C-grafovi G_1 i G_2 izomorfni, tj. da postoji bijekcija izmedju njihovih skupova čvorova (označenih sa 1,2,3,4), koja očuvava incidenciju i bojenje.

Proširujemo odgovarajuću permutaciju β skupa {1,2,3,4} do permutacije α skupa S definišući:

$$\alpha(i) = \beta(i); \quad \alpha(9-i) = 9 - \beta(i) \quad \text{za} \quad i=1,2,3,4.$$

Tvrdimo da permutacija α uspostavlja izomorfizam izmedju C-familija F_1 i F_2, koje odgovaraju grafovima G_1 i G_2 respektivno.

Prema opisanoj konstrukciji C-familija koje odgovaraju C-grafovima svaka od familija F_1 i F_2 sadrži skup 1234 i iste skupove iz familije $\{1567,2568,3578,4678\}$. Permutacija α očuvava skup 1234, kao i poslednje 4-skupove (kao familiju, a ne mora da očuvava sve pojedine 4-skupove), budući da ona očuvava crne čvorove.

Grana $\{x,y\}$ postoji u grafu G_1 ako i samo ako u grafu G_2 postoji grana $\{\alpha(x),\alpha(y)\}$. Grana $\{x,y\}$, respektivno $\{\alpha(x),\alpha(y)\}$ implicira postojanje 4-skupa $\{x,y,9-y,9-x\}$, u familiji F_1, respektivno 4-skupa $\{\alpha(x),\alpha(y),9-\alpha(y),9-\alpha(x)\}$ u familiji F_2.

(II) Obrnuto, pretpostavimo da su dve C-familije R_1 i R_2, koje nastaju iz istog od datih primera D-familija tipova (1),(2),(8),(9) izomorfne, tj. da postoji permutacija γ skupa S, koja preslikava skupove familije R_1 na skupove od R_2. Preslikavanje γ svakako fiksira skup 1234 u slučaju tipova (2), (8),(9), zbog njegove specijalne pozicije u D-grafu.

Tvrdimo da, u slučaju tipova (2),(8),(9), restrikcija permutacije γ na skup $\{1,2,3,4\}$ uspostavlja izomorfizam izmedju odgovarajućih C-grafova (sa čvorovima označenim sa 1,2,3,4).

Dokaz tvrdjenja:

čvor i je crn u $G_1 \iff R_1$ sadrži $\{i\} \cup (\{5,6,7,8\} \setminus \{9-i\}) \iff R_2$ sadrži $\{\gamma(i) \cup (\{5,6,7,8\} \setminus \{9-\gamma(i)\}) \Rightarrow$ čvor $\gamma(i)$ je crn u G_2.

Čvorovi i,j su susedni u $G_1 \iff$

$\iff R_1$ sadrži $\{i,j\} \cup (\{5,6,7,8\}-\{9-i,9-j\}) \iff$

$\iff R_2$ sadrži $\{\gamma(i),\gamma(j)\} \cup (\{5,6,7,8\}-\{9-\gamma(i),9-\gamma(j)\}) \iff$

$\iff$ čvorovi $\gamma(i)$, $\gamma(j)$ su susedni u G_2.

PRIMEDBA. U dokazu je korišćena činjenica da se svi skupovi iz $\{1567,2568,3578,4678\}$, respektivno iz $\{1278,3456,1368,2457,1458,2367\}$, mogu predstaviti u prvom, respektivno u drugom od dva navedena oblika.

Kad je u pitanju D-familija {1234,1567} (tipa (1)), može se desiti da dati izomorfizam γ izmedju dve odgovarajuće C-familije R_1 i R_2 preslikava skup 1234 na 1567 i obrnuto. Elementi 1 i 8 su svakako fiksne tačke tog izomorfizma.

U ovom slučaju definišemo drugu permutaciju δ skupa S:

$$\delta(1)=1; \quad \delta(8)=8; \quad \delta(i)=9-\gamma(i) \quad \text{za} \quad 2\le i\le 7 .$$

Lako je proveriti da važi

$$\delta(X)=\gamma(X) \quad \text{za svako } X\in\{1278,3456,1368,2457,1458,2367\}$$

i $$\delta(1234)=1234, \quad \delta(1567)=1567.$$

Iz ovoga sledi da postoji izomorfizam izmedju familijâ R_1 i R_2, koji očuvava skup 1234, pa možemo nastaviti kao u prethodna tri slučaja.

Ovim je dovršen dokaz Teoreme II-5.3. □

POSLEDICA 1. *Postoji bijekcija izmedju neizomorfnih* C-*familija, koje nastaju iz (datih primera)* D-*familija tipova* (1) *i* (8).

D o k a z. Direktno sledi razmenom crne i bele boje kod čvorova odgovarajućih C-grafova. □

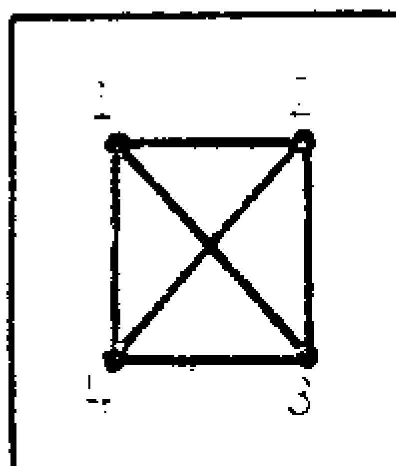
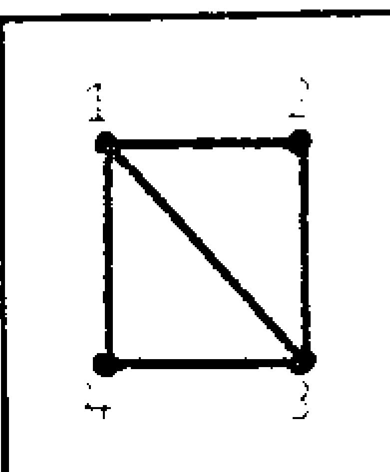
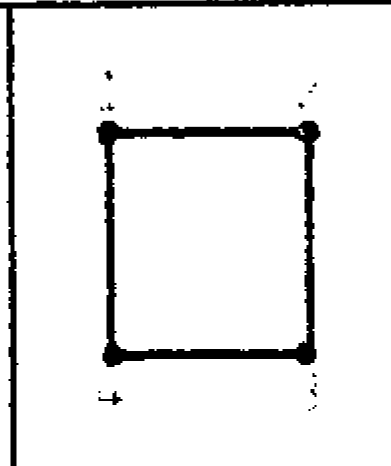
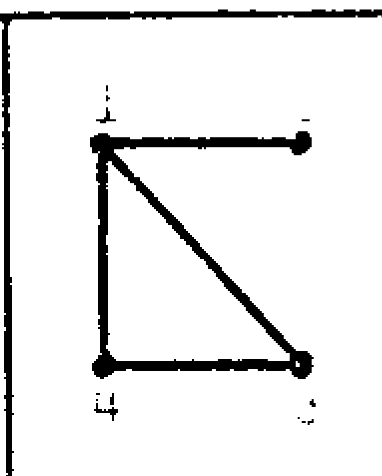
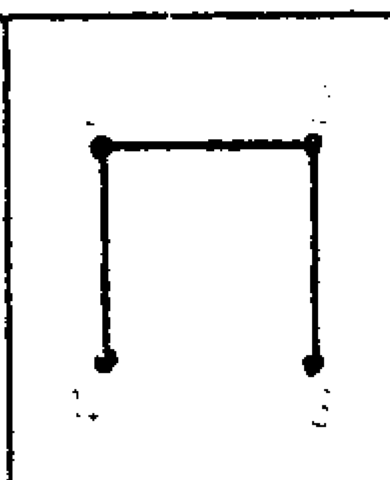
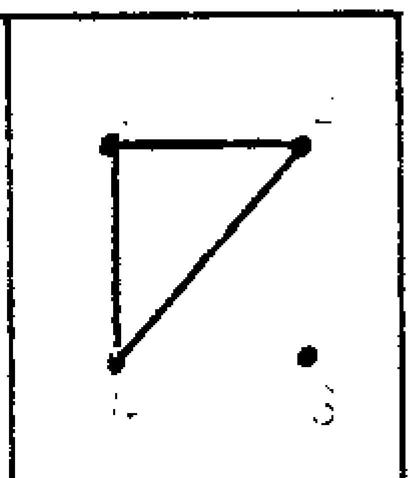
POSLEDICA 2. *Postoji* 11 *neizomorfnih* C-*familija, koje nastaju iz (datog primera)* D-*familije tipa* (9).

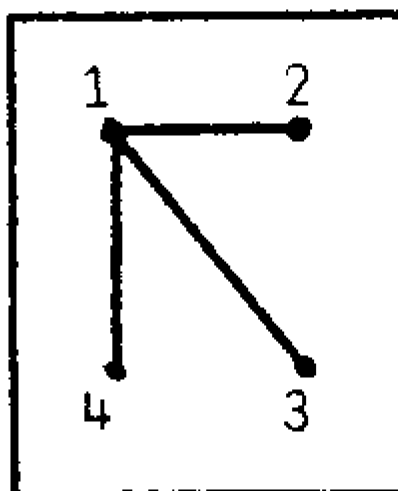
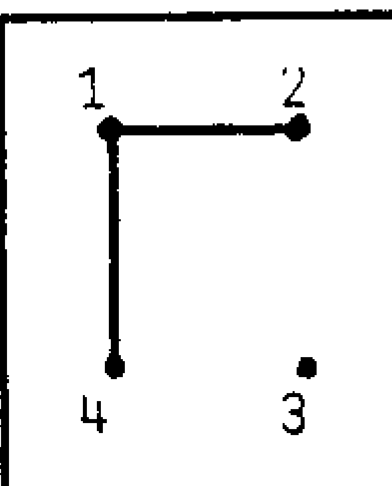
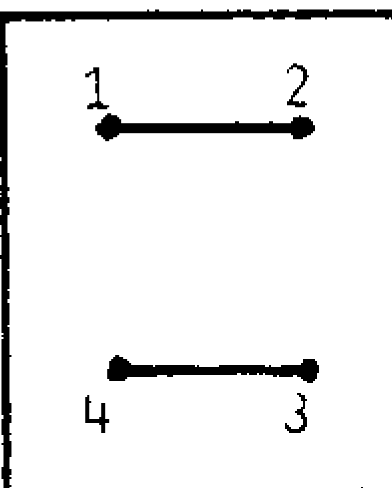
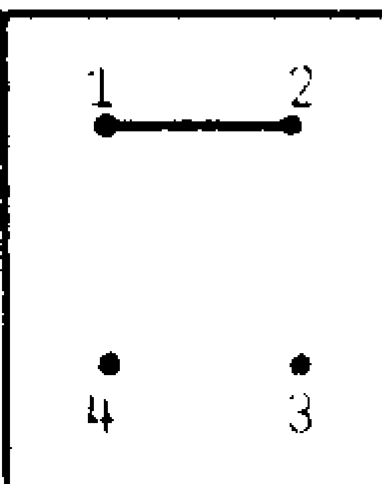
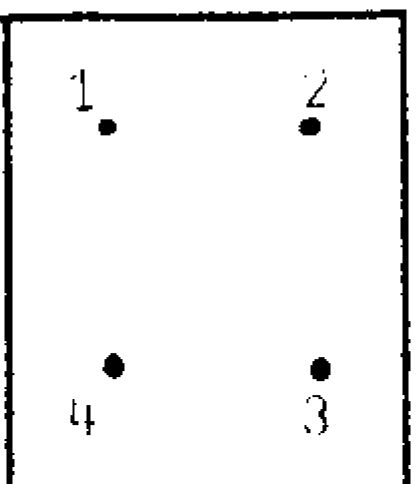
D o k a z. Svi čvorovi odgovarajućih obojenih C-grafova su crni. Koristimo poznatih 11 neizomorfnih prostih grafova na 4 čvora (naprimer, u Dodatku od [37]). □

U cilju dovršenja konstrukcije svih neizomorfnih C-familija, preostaje samo da odredimo sva neizomorfna 2-bojenja čvorova gore pomenutih 11 grafova, u slučajevima kad postoje tačno jedan i tačno dva crna čvora.

Dajemo tabelu neizomorfnih obojenih C-grafova sa jednim i dva crna čvora, navodjenjem njihovih 1-skupova i 2-skupova crnih čvorova ispod odgovarajućih neizomorfnih grafova na četiri čvora. Ukoliko više neizomorfnih 2-bojenja odgovara istom grafu, njihove oznake razdvajamo zarezima.

TABELA NEIZOMORFNIH OBOJENIH C-GRAFOVA
SA JEDNIM I DVA CRNA ČVORA

						
jedan crn čvor je	1	1,2	1	1,2,[illegible]	1,[illegible]	1,3
dva crna čvora su	12	12,13,14	12,13	12,13,2[illegible],34	12,13,23,34	12,13

					
jedan crn čvor je	1,2	1,2,3	1	1,3	1
dva crna čvora su	12,23	12,13,23,24	12,13	12,13,34	12

Naglašavamo (slično kao kod označenih D-grafova) da obojeni C-grafovi obezbedjuju neposredne konstrukcije odgovarajućih, do na izomorfizam odredjenih, C-familija sa maksimalnim D-potfamilijama tipa (1),(2),(4),(8) i (9).

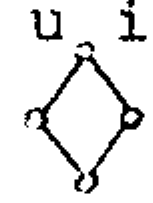
Sumiranjem brojeva neizomorfnih C-familija, koje nastaju iz svih različitih tipova D-familija, nalazimo da postoje 184 neizomorfne C-familije.

III GLAVA

CIKLIČKI LANCI I KVADRATI

U ovoj glavi ispitujemo dve beskonačne klase matroida, čija definicija se zasniva na tipu CF-mreže:

CIKLIČKI LANAC (C-lanac) je matroid čija CF-mreža je lanac. Dužina C-lanca je broj njegovih cikličkih potprostora, umanjen za 1.

CIKLIČKI KVADRAT (C-kvadrat) je matroid koji ima tačno četiri ciklička potprostora, koji nisu u istom lancu (ekvivalentno, matroid čija CF-mreža je tipa )

C-lanci i C-kvadrati preovladjuju medju neizomorfnim matroidima na malim skupovima do zaključno 7 elemenata, kao što se može videti iz sledeće tabele brojeva neizomorfnih matroida:

kardinalnost nosača	0	1	2	3	4	5	6	7	8
C-lanci	1	2	4	8	16	32	64	128	256
C-kvadrati	-	-	-	-	1	6	25	80	219
ostali matroidi	-	-	-	-	-	-	9	98	1249

Prebrajamo sve (neizomorfne), samodualne i binarne C-lance i C-kvadrate na n-skupu. Kod prebrajanja "svih" prebrajamo i matroide fiksnog ranga, a u slučaju C-lanaca i matroide fiksne dužine. Napominjemo da je broj svih i samodualnih C-lanaca na n-skupu dat eksponencijalnom funkcijom, dok se broj binarnih C-lanaca i svih C-kvadrata ponaša polinomski. Ovo je prirodna posledica činjenice da je broj cikličkih potprostora u poslednja dva slučaja ograničen na 3, odnosno na 4.

Prebrajanje C-lanaca i C-kvadrata se svodi na prebrajanje grafičkih matroida u tim klasama na osnovu sledeće leme:

LEMA III-0.1. *Svi binarni C-lanci i C-kvadrati su grafički i kografički (takođe i regularni).*

D o k a z. Ako bi matroid M protivrečio ovoj lemi, onda bi on sadržao minor N, takav da je N ili N^* izomorfan sa nekim od matroida F_7, $M(K_5)$ ili $M(K_{3,3})$. U svakom slučaju, prilično komplikovana CF-mreža od N bi bila sadržana u veoma jednostavnoj CF-mreži od M, što je kontradikcija.□

Prilikom prebrajanja grafičkih C-lanaca i C-kvadrata koristimo i ove pomoćne definicije:

Snop je maksimalan skup poparno paralelnih grana grafa, koji ima bar dve grane;

2+kontura je kontura grafa različita od petlje;

3+kontura je kontura grafa koja ima najmanje tri grane.

Dva grafa su granski disjunktna ako nemaju zajedničkih grana.

Pored prebrajanja, dokazujemo i transverzalnost svih C-kvadrata i C-lanaca.

PRIMEDBA. Drugi dokaz gornje leme sledi na osnovu toga što su binarni transverzalni matroidi uvek grafički i kografički (|31|).

C-LANCI

III-1. BROJ SVIH C-LANACA

TEOREMA III-1.1. *Postoji* 2^n *neizomorfnih C-lanaca na n-skupu i to:*

(a) $\binom{n}{r}$ *-lanaca ranga* r *za* $0 \le r \le n$

(b) $\binom{n+1}{n-2h}$*-lanaca dužine* h *za* $0 \le h \le \frac{n}{2}$

D o k a z. Ograničenja za rang i dužinu su očigledna. Prebrajamo mogućnosti za kardinalnost i rangove svih cikličkih potprostora, budući da ti brojevi potpuno odredjuju odgovarajuće C-lance na n-skupu (time se obezbedjuje i da medju ovako konstruisanim matroidima nema izomorfnih).

(a) Pridružujemo C-lanac ranga r na n-skupu svakoj (r+1)-torci $(x_0, x_1, \ldots, x_r)$ celih brojeva za koju važi:

$$x_0 \geq 0, \quad x_j \geq 1 \quad \text{za} \quad 1 \leq j \leq r, \quad x_0 + x_1 + \ldots + x_r = n$$

na sledeći način:

Jedini C-potprostor ranga 0 je kardinalnosti x_0. Za svako j izmedju 1 i r uspostavljamo vezu:

Ako je $x_j = 1$, onda matroid nema C-potprostor ranga j

Ako $x_j > 1$, onda jedini C-potprostor ranga j ima kardinalnost $x_0 + x_1 + \ldots + x_j$.

(b) Pridružujemo C-lanac dužine h na n-skupu svakoj (2h+2)-torci $(y_0, y_1, \ldots, y_h, z_0, z_1, \ldots, z_h)$ celih brojeva za koju važi

$$y_0 \geq 0, \quad z_0 = 0, \quad y_k > z_k \geq 1 \quad \text{za} \quad 1 \leq k \leq h$$

$$y_0 + y_1 + \ldots + y_h \leq n,$$

na sledeći način:

C-potprostor ranga 0 je kardinalnosti y_0. Kardinalnosti i rangovi ostalih C-potprostora su respektivno $y_0 + y_1 + \ldots + y_k$ i $z_0 + z_1 + \ldots + z_k$, za svako k izmedju 1 i h.

Potrebni i dovoljni uslovi za kardinalnosti i rangove C-potprostora C-lanaca su u oba slučaja očigledno zadovoljeni. Tako, naprimer, kardinalnosti rastu monotono u odnosu na rangove, a razlika kardinalnosti izmedju dva C-potprostora, susedna u lancu, je uvek veća od razlike njihovih rangova.

Budući da je račun vrlo jednostavan u slučaju (a), dajemo ga samo za slučaj (b).

Najpre dokazujemo da za svako t, $2h \leq t \leq n$, postoji $\binom{t}{2h}$ (2h+2)-torki koje zadovoljavaju i dopunski uslov $y_0 + y_1 + \ldots + y_h = t$, tako što uspostavljamo bijekciju izmedju ovih

(2h+2)-torki i reči, sastavljenih od 2h jedinica i t-2h nula. Svaka takva reč odredjuje (i odredjena je sa) 2h+1 intervala nula, koji su medjusobno rastavljeni jedinicama i redom imaju $a_0, a_1, \ldots, a_{2h}$ nula ($a_i \in N \cup \{0\}$ $0 \le i \le 2h$). Bijekcija se uspostavlja preko jednakosti $y_0 = a_0$, $z_0 = 0$, i

$$y_j = a_{2j-1} + a_{2j} + 2, \quad z_j = a_{2j-1} + 1 \quad \text{za} \quad 1 \le j \le h$$

Sumiranjem $\binom{t}{2h}$ za $2h \le t \le n$ dobijamo $\binom{n+1}{n-2h}$. $\square$

III-2. BROJ SAMODUALNIH C-LANACA

TEOREMA III-2.1. *Za svako parno* n *postoji* $2^{n/2}$ *neizomorfnih samodualnih* C-*lanaca na* n-*skupu.*

D o k a z. Koristeći Teoremu 0-3.4., rang -funkciju dualnog matroida i primenjujući samodualnost, nalazimo da u samodualnom C-lancu na n-skupu svakom C-potprostoru kardinalnosti c i ranga r odgovara jedan C-potprostor kardinalnosti, n-c i ranga $\frac{n}{2} - c + r$. Ova korespodencija je uzajamna (za $c = \frac{n}{2}$ se ta dva C-potprostora poklapaju).

Primetimo da je svaki samodualni C-lanac na n-skupu jednoznačno odredjen svojom "donjom polovinom", tj. kardinalnostima i rangovima onih svojih C-potprostora, čija kardinalnost nije veća od $\frac{n}{2}$. S druge strane, ove kardinalnosti i rangovi jednoznačno odredjuju C-lanac na $\frac{n}{2}$-skupu, koji predstavlja jednu restrikciju početnog samodualnog C-lanca. Dokaz se dovršava primenom Teoreme III-1.1. $\square$

III-3. BROJ BINARNIH C-LANACA

TEOREMA III-3.1. *Postoji* $\frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$ *neizomorfnih binarnih (= grafičkih)* C-*lanaca na* n-*skupu.*

LEMA. *Poligon-matroid grafa G je C-lanac ako i samo ako se sve 2+konture od G javljaju u jednoj od sledećih kombinacija:*

a) *prazan skup*

b) *jedan snop sa x grana*

c) *jedna 3+kontura sa y grana*

d) *jedna 3+kontura sa y+1 grana, kod koje je jedna grana zamenjena snopom, koji ima x grana.*

D o k a z leme. Petlje i kopetlje matroida ne utiču na tip njegove CF-mreže, pa ih možemo isključiti iz razmatranja. Snopovi i 3+konture grafa odgovaraju respektivno C-potprostorima ranga 1 i najjednostavnijim C-potprostorima višeg ranga odgovarajućeg poligon-matroida. Primetimo da C-lanac ne može imati dva neuporediva C-potprostora. Lako je zaključiti da binarni C-lanac ne može imati više od dva C-potprostora pozitivnog ranga, kao i da, ukoliko postoje dva takva C-potprostora, onda je uvek (tačno) jedan od njih ranga 1 (tome odgovara slučaj d)). □

D o k a z teoreme. Neka graf G, čiji poligon-matroid je C-lanac na n-skupu, ima z petlji, t kopetlji, x grana u snopu i y grana u 3+konturi (ne računajući zamenjenu granu u slučaju d)). Prema lemi, lako nalazimo da je broj neizomorfnih binarnih C-lanaca na n-skupu jednak broju nenegativnih celobrojnih rešenja jednačine $x+y+z+t=n$, koja zadovoljavaju uslove $x \neq 1$, $y \neq 1$ i $(x,y) \neq (0,2)$.

Dokaz se dovršava elementarnim računom. □

III-4. TRANSVERZALNOST C-LANACA

TEOREMA III-4.1. *C-lanci su transverzalni matroidi.*

D o k a z. Konstrukcija 2^n neizomorfnih transverzalnih matroida na n-skupu je data u radu |63|. Prema Teoremi III-1.1., dovoljno je dokazati sledeću lemu:

LEMA. *Svaki transverzalni matroid iz* |63| *je* C-*lanac.*

D o k a z. Podsećamo da je transverzalan matroid M na n-skupu S bio pridružen (|63|) n-torci $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ nula i jedinica tako da su baze od M bile transverzale familije skupova $F = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, gde je (za $1 \leq p \leq n$)

$$A_p = \{1, 2, \ldots, p\} \qquad \text{ako je} \quad i_p = 1$$

$$A_p = \emptyset \qquad \text{ako je} \quad i_p = 0.$$

Dokazano je (|63|) i da je rang matroida M jednak broju jedinica u I.

Neka su $C_1, C_2, \ldots, C_r$ neprazni skupovi iz F u rastućem redu i neka je $D_0 = S$ i $D_j = S \setminus C_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$

Kako je očigledno D_j potprostor (od M) ranga $r-j$, to je dovoljno dokazati da se svaki C-potprostor od M nalazi medju skupovima D_j.

Neka je W_0 C-potprostor ranga k, koji nije oblika D_j, i neka je D_{r-t} $(t < k)$ maksimalan skup oblika D_j uključen u W_0. Tvrdimo da je

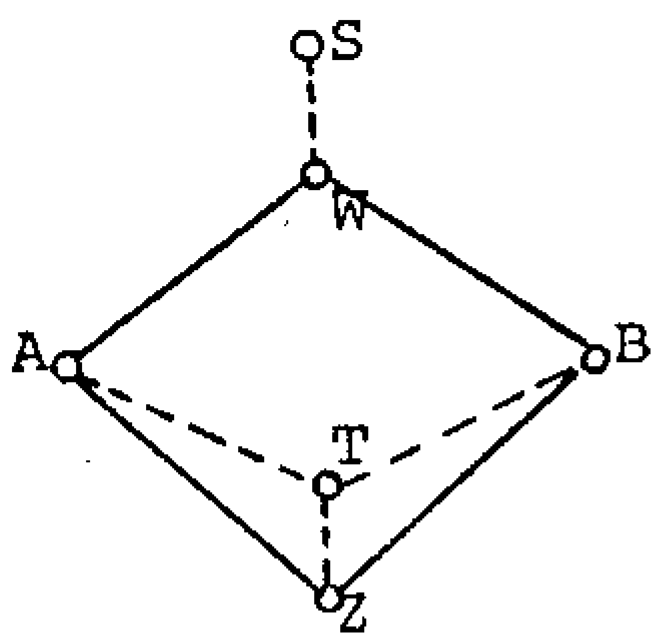
$$|W_0 \setminus D_{r-t}| = k - t.$$

Očigledno je $|W_0 \setminus D_{r-t}| \geq k - t$. Pretpostavimo da je $|W_0 \setminus D_{r-t}| \geq k - t + 1$. Neka je $W_i = W_{i-1} \cap D_{r-q_{i-1}}$, gde je $q_{i-1} = \operatorname{rang}(W_{i-1})$ za $i = 1, 2, \ldots$. Jasno je da postoji prirodan broj p za koji važi $W_p = D_{r-t}$. Svaki skup $W_{i-1} \setminus W_i$ $(1 \leq i \leq p)$ je uključen u skup $C_{r-q_{i-1}}$ i sadrži transverzalu familije $\{C_{r-q_{i-1}}, \ldots, C_{r-q_{i-1}}\}$. Primetimo da postoji indeks h izmedju 1 i p, za koga važi $|W_{h-1} \setminus W_h| > q_{h-1} - q_h$. Skup $W_{h-1} \setminus W_h$ sadrži transverzalu familije $\{C_{r-q_{h-1}}, \ldots, C_{r-h-1}, C_{r-t}\}$. Povezivanjem svih ovih transverzala zaključujemo da skup $W_0 \setminus D_{r-t}$ sadrži transverzalu familije $\{C_{r-k}, \ldots, C_{r-t}\}$. Kako skup D_{r-t} sadrži transverzalu familije $\{C_{r-t+1}, \ldots, C_r\}$, to dobijamo da je $\operatorname{rang}(W_0) \geq$ $\geq k + 1$, što je kontradikcija.

Na osnovu dokazane jednakosti nalazimo da je rang $(W_o \setminus z) = k - 1$ za svako $z \in W_o \setminus D_{r-t}$. U protivnom bi, naime, razlika rangova skupova $W_o \setminus z$ i D_{r-t} bila strogo veća od razlike njihovih kardinalnosti. Postojanje (makar jednog) takvog z je, medjutim, u suprotnosti sa pretpostavkom da je potprostor W_o ciklički potprostor. $\square$

C-KVADRATI

Kao i C-lanci, takose i C-kvadrati mogu u potpunosti (do na izomorfizam) opisati numeričkim parametrima koji ispunjavaju odredjene uslove.



Uvodimo standardne oznake. Na priloženoj šemi je naznačeno šest karakterističnih (zatvorenih) skupova, čiji rangovi i kardinalnosti upotpunosti odredjuju odgovarajući C-kvadrat M:

S je nosač od M, W-jedinica CF-mreže, Z-nula (skup svih petlji od M), A i B - "bokovi" mreže, $T = A \cap B$

Oznake za kardinalnost i rangove razmatranih šest skupova su date u sledećoj tabeli:

skup	Z	T	A	B	W	S
kardinalnost	z	i	a	b	w	n
rang	0	t	p	q	u	r

Može da bude $S \equiv W$, kao i $T \equiv Z$. Ukoliko to nije slučaj, onda su S, odnosno T, neciklički potprostori od M. To ima za posledicu da su razlike kardinalnosti na intervalima $[W,S]$, odnosno $[Z,T]$, jednake odgovarajućim razlikama rangova, iz čega slede jednakosti

$$n - w = r - u, \quad \text{kao i} \quad t = i - z .$$

Možemo eliminisati, naprimer, parametre i i w. C-kvadrat je u potpunosti odredjen sa preostalih devet parametara: z,t,a,p,b,q,u,n,r.

Kako su "bokovi" A i B ravnopravni, to možemo pretpostaviti da važi:

$$p \leq q \text{ , kao i da}$$

$$p = q \quad \text{implicira} \quad a \leq b \text{ .}$$

III-5. BROJ SVIH C-KVADRATA

TEOREMA III-5.1. *Broj* K(n) *neizomorfnih* C-*kvadrata na* n-*skupu je dat formulom:*

$$K(n) = \frac{1}{161.280}\left(n^8 + 8n^7 + 14n^6 - 28n^5 - 196n^4 - 448n^3 \begin{matrix} +496 \\ -134 \end{matrix} n^2 \begin{matrix} +1728 \\ +468 \end{matrix} n \begin{matrix} +0 & , \text{ za } n \text{ parno} \\ +315 & , \text{ za } n \text{ neparno} \end{matrix}\right)$$

(poslednja tri člana se razlikuju za parno i neparno n, *ostali članovi su zajednički).*

D o k a z. Najpre odredjujemo formule za broj neizomorfnih C-kvadrata fiksnog ranga i kardinalnosti nosača, kod kojih važi $S \equiv W$ (time fiksiramo parametre n,r, kao i $u = r$, nakon čega preostaje samo šest delimično slobodnih parametara: z,a,b,t,p,q). Pri ovome posebno razmatramo simetričan $(p = q)$ i nesimetričan $(p < q)$ slučaj (simetrija se, dakle, zasniva na jednakosti rangova bokova). Odgovarajuće brojeve neizomorfnih C-kvadrata sa fiksnim n, $r = u$ označavamo sa $\bar{N}_r(r)$, $\bar{S}_r(n)$ respektivno.

LEMA 1. *Neka je* $f(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i$. *Tada je*

$$\bar{N}_r(n) = \sum_{\substack{p+q \geq r \\ 1 \leq p < q \leq r-1}} \sum_{t=o}^{p+q-r} f(n+t-p-q-1) \quad .$$

D o k a z leme. Najpre fiksiramo i parametre p,q,t i uvodimo oznake $h_1 = a - z - (p+1)$, $h_2 = b - z - (q+1)$. Veličine h_1 i h_2 su očito nenegativne i možda bi ih bilo pogodno nazvati "ekstraprirastima". Naime, razlika kardinalnosti na intervalu izmedju dva susedna C-potprostora u CF-mreži mora biti strogo veća od razlike njihovih rangova. Veličine h_1 i h_2 predstavljaju upravo "neobavezan" prirast kardinalnosti (razlika izmedju stvarne i obavezne (minimalne) razlike kardinalnosti) na intervalima $[Z,A]$, odnosno $[Z,B]$.

Koristeći vezu $|A \cap B| + |A \cup B| = |A| + |B| = a + b$, kao i relacije $|A \cap B| = z + t$, $|A \cup B| \leq n$,

$$a = z + p + h_1 + 1, \qquad b = z + q + h_2 + 1,$$

izvodimo nejednakost $z + h_1 + h_2 \leq n + t - p - q - 2$. Označimo njenu desnu stranu kratko sa d.

Primetimo da su z, h_1, h_2 cele nenegativne veličine, za kojih nema drugih ograničenja osim gornje nejednakosti; svaki od parametara z, h_1, h_2 može uzeti proizvoljnu celu vrednost izmedju 0 i d s tim da bude zadovoljen uslov $z + h_1 + h_2 \leq d$. Umesto parametara a i b možemo da koristimo parametre h_1 i h_2 pri brojanju neizomorfnih mogućnosti. Veličine h_1 i h_2 su bitno različite zbog stalne pretpostavke da je $p < q$.

Zaključujemo da je broj F neizomorfnih C-kvadrata sa fiksiranim parametrima n, $r = u,p,q,t$, kod kojih je $p < q$, jednak broju celobrojnih nenegativnih rešenja nejednačine

$$0 \leq z + h_1 + h_2 \leq d$$

PRIMEDBA. Egzistencija C-kvadrata sa svakom uredjenom trojkom parametara (z, h_1, h_2), koja zadovoljava gornje uslove, sledi otuda što se pri konstrukciji nekog C-kvadrata sa navedenim fiksnim parametrima, svaki od d slobodnih elemenata može ili dodati nuli, ili dodati nekom "boku" ili se uopšte ne mora upotrebiti. S druge strane, jasno je da matroidi sa različitim numeričkim parametrima ne mogu biti izomorfni.

Elementaran račun daje

$$F = \sum_{j=o}^{d} \binom{j+2}{2} = \sum_{j+1=1}^{d+1} \sum_{i=1}^{j+1} i = f(d+1) = f(n+t-p-q-1)$$

Kako je $1 \leq p < q \leq r-1$ i, na osnovu semimodularnosti u geometrijskoj mreži,

$$0 \leq t \leq p+q-u = p+q-r$$

(primetimo da iz poslednje nejednakosti sledi i uslov $p+q \geq r$), to navedena formula za $\bar{N}_r(n)$ nastaje najpre sumiranjem za sve moguće vrednosti parametra t pri fiksnim p i q, a zatim sumiranjem po svim uredjenim parovima (p,q) u dopustivoj oblasti, zavisnoj od r. $\square$

LEMA 2. *Neka je* $g(n) \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor$. *Tada je*

$$\bar{S}_r(n) = \sum_{p=\lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor}^{r-1} \sum_{t=o}^{2p-r} g(n+t-2p-1).$$

D o k a z leme. Ukazujemo samo na razlike od prethodnog nesimetričnog slučaja:

Ako je $p=q$, onda je

$d+1 = n+t-2p-1$, $p+q-r = 2p-r$, a oblast

$\{(p,q) \mid 1 \leq p \leq q \leq r-1 \wedge p+q \geq r\}$ se transformiše u interval

$\lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor \leq p \leq r-1$.

Glavna razlika se sastoji u tome što se u simetričnom slučaju uloge parametara h_1 i h_2 ne razlikuju. Stoga je broj G neizomorfnih C-kvadrata sa fiksnim parametrima $n, r=u,p,q,t$, kod kojih je $p=q$, jednak $\sum_{j=o}^{d} g_j$, gde je g_j broj <u>različitih</u> celobrojnih nenegativnih rešenja jednačine $z+h_1+h_2=j$, uz uslov da se rešenja, koja se dobijaju (jedno iz drugog) samo transformacijom h_1 i h_2, smatraju jednakim.

Tako je $g_j = \sum_{z=o}^{j} \lfloor \frac{j-z+2}{2} \rfloor = \sum_{i=1}^{j+1} \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor$

Prema tome je

$$G = \sum_{j+1=1}^{d+1} g_j = g(d+1) \ ,$$

iz čega sledi navedena formula za $\bar{S}_r(n)$. □

D o k a z teoreme. Koristimo sledeće oznake za brojeve neizomorfnih C-kvadrata odredjenog tipa na n-skupu:

$K(n)$ - broj svih C-kvadrata

$N(n)$ - broj nesimetričnih C-kvadrata ($p < q$)

$S(n)$ - broj simetričnih C-kvadrata ($p = q$)

$N_r(n)$ - broj nesimetričnih C-kvadrata ranga r

$S_r(n)$ - broj simetričnih C-kvadrata ranga r

$\bar{N}_r(n)$ - broj nesimetričnih C-kvadrata ranga r, sa $S \equiv W$

$\bar{S}_r(n)$ - broj simetričnih C-kvadrata ranga r, sa $S \equiv W$

Skicirajmo najpre osnovne korake dokaza:

Jasno je da važi $K(n) = N(n) + S(n)$. S druge strane,

$$N(n) = \sum_{r=3}^{n} N_r(n) \ ; \qquad S(n) = \sum_{r=2}^{n} S_r(n)$$

Naime, rang C-kvadrata nije nikad manji od 2 (na svakom intervalu CF-mreže postoji prirast ranga, veći od nule). Rang C-kvadrata na n-skupu nije nikad veći od n-2, zato što je prirast ranga na svakom intervalu CF-mreže strogo manji od odgovarajućeg prirasta kardinalnosti. Najzad, ne postoje nesimetrični C-kvadrati ranga 2, budući da su njihovi bokovi različitih rangova, pa su najmanji mogući rangovi za te bokove jednaki 1 i 2.

Zapazimo, dalje da je

$$N_r(n) = N_{r-1}(n-1) + \bar{N}_r(n) \ ; \quad S_r(n) = S_{r-1}(n-1) + \bar{S}_r(n)$$

To se objašnjava postojanjem bijekcije izmedju onih C-kvadrata ranga r na n-skupu, za koje važi $S \not\equiv W$ i svih C-kvadrata ranga r-1 na (n-1)-skupu. Ta bijekcija se uspostavlja oduzimanjem (odnosno dodavanjem) jedne kopetlje (elementa iz $S \setminus W$).

Iz poslednjih rekurentnih veza odmah sledi

$$N_r(n) = \sum_{j=3}^{r} \bar{N}_j(n-r+j) \quad ; \quad S_r(n) = \sum_{j=2}^{r} \bar{S}_j(n-r+j)$$

Naposletku treba iskoristiti formule za $\bar{N}_r(n)$ i $\bar{S}_r(n)$ date u Lemama 1 i 2.

Iako se do formule za K(n) može, nakon odgovarajuće kvalitativne analize, lakše doći tehnikom interpolacionih polinoma, mi dajemo izvodjenje prema gornjoj šemi, pri čemu dobijamo usput i formule polinomskog tipa za $\bar{N}_r(n)$, $\bar{S}_r(n)$, $N_r(n)$, $S_r(n)$, $N(n)$, $S(n)$.

Ako f i g označavaju pomoćne funkcije uvedene u lemama, onda primetimo, pre svega, da za $n \in N$

$$f(n) = \frac{1}{6}(n^3 + 3n^2 + 2n); \quad g(n) = \frac{1}{24}\left(2n^3 + 9n^2 + 10n \begin{matrix} +0, & \text{za } n \text{ parno} \\ +3, & \text{za } n \text{ neparno} \end{matrix}\right)$$

Označimo ove dve polinomske formule redom sa $\bar{f}(n)$ i $\bar{g}(n)$.

U nastavku nalazimo i kasnije koristimo pomoćne sume oblika:

$$\sum_{k=1}^{n} k^j, \ 0 \le j \le 7; \qquad \sum_{\substack{k \text{ neparno} \\ k=1}}^{n} k^j, \ 0 \le j \le 3 ;$$

$$\sum_{\substack{k \text{ parno} \\ k=1}}^{n} k^j, \ 0 \le j \le 3 .$$

Poslednja dva tipa sumâ se razlikuju za n parno i n neparno. Nalazimo izraze

$$\sum_{t=o}^{p+q-r} f(n+t-p-q-1) \quad \text{i} \quad \sum_{t=o}^{2p-r} g(n+t-2p-1)$$

u razvijenom obliku. U njih treba uvrstiti sume oblika

$$\sum_{\substack{p+q\ge r \\ 1\le p<q\le r-1}} p^i q^j, \ 0 \le i+j \le 4, \text{ odnosno oblika} \quad \sum_{p=\left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor}^{r-1} p^j, \ 0 \le j \le 4$$

(ove druge sume se nalaze medju pomoćnim sumama za računanje prvih).

Neka je

$$O = \{(p,q) \mid p,q \in N \cup \{0\} \wedge p+q \geq r \wedge 1 \leq p < q \leq r-1\}$$

Primenjen je sledeći razvoj:

$$\sum_{(p,q)\in O} p^i q^j = \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} p^i \sum_{k=1}^{p} (r-k)^j + \sum_{p=\lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor}^{r-1} p^i \sum_{k=1}^{r-p} (r-k)^j$$

U cilju nalaženja 30 ovakvih suma (15 za r parno i 15 za r neparno) su najpre nadjene pomoćne sume oblika

$$\sum_{p=1}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} p^j, \quad \sum_{p=\lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor}^{r-1} p^j, \quad 0 \leq j \leq 5 \text{ (posebno za r parno i za r}$$

neparno), kao i sume oblika

$$\sum_{k=1}^{p} (r-k)^j, \quad \sum_{k=1}^{r-p} (r-k)^j, \quad 0 \leq j \leq 4.$$

Nakon sredjivanja nalazimo:

$$\bar{N}_r^I(n) = \frac{1}{2880} (-84r^6 + 252r^5 - 45r^4 \substack{-300 \\ -360} r^3 \substack{+84 \\ +174} r^2 \substack{+48 \\ +108} r \substack{+0 \\ -45} +$$

$$+ 192nr^5 - 480nr^4 + 20nr^3 \substack{+360 \\ +540} nr^2 \substack{-32 \\ -212} nr \substack{+0 \\ -60} n - 150n^2r^4 +$$

$$+ 300n^2r^3 + 60n^2r^2 \substack{-120 \\ -300} n^2r \substack{+0 \\ -90} n^2 + 40n^3r^3 - 60n^3r^2 -$$

$$- 40n^3r \substack{+0 \\ +60} n^3, \quad \substack{r \text{ parno} \\ r \text{ neparno}})$$

$$\bar{S}_r^I(n) = \frac{1}{1440} (-78r^5 + 165r^4 \substack{+30 \\ +60} r^3 \substack{-120 \\ -210} r^2 + \substack{(+48, -42) \\ +18} r \substack{+0 \\ +45} +$$

$$+ 165nr^4 - 240nr^3 \substack{-60 \\ -150} nr^2 \substack{+60 \\ +240} nr \substack{+0 \\ -15} n - 120n^2r^3 +$$

$$+ 90n^2r^2 \substack{+30 \\ +120} n^2r \substack{+0 \\ -90} n^2 + 30n^3r^2 \substack{+0 \\ -30} n^3 \substack{, \\ ,} \quad \substack{r \text{ parno} \\ r \text{ neparno}})$$

Objašnjenje. Kod članova koji imaju dve alternative za koeficijente, gornja se odnosi na slučaj kad je r parno, a donja na slučaj kad je r neparno. Ukoliko se na mestu za koeficijent nalazi uredjeni par brojeva, onda se njegov prvi element odnosi na slučaj kad je n parno, a drugi na slučaj kad je n neparno. Tako u formuli za $\bar{S}_r^I(n)$, kada je r parno, uz r stoji koeficijent +48 za n parno i -42 za n neparno. Ovakve oznake koristimo i kod narednih formula.

Dopunski indeksi I su uvedeni zato što gornje formule za $\bar{N}_r(n)$, $\bar{S}_r(n)$ važe samo za $n \geq 2r-4$. Razlog za to je što je $\bar{f}(n) \neq f(n) = 0$ za $n \leq -3$ i $\bar{g}(n) \neq g(n) = 0$ za $n \leq -4$, a za relativno velike vrednosti p i q funkcije f i g u formulama za $\bar{N}_r(n)$ i $\bar{S}_r(n)$ respektivno imaju negativne argumente manje od -2, odnosno -3.

Sabirci sa najmanjim argumentom u razvoju $\bar{N}_r(n)$ i $\bar{S}_r(n)$ su redom $f(n-2r+2)$ i $g(n-2r+1)$. Iz toga sledi da je $\bar{N}_r^I(n) = \bar{N}_r(n)$ i $\bar{S}_r^I(n) = \bar{S}_r(n)$ ako i samo ako je $n-2r+2 \geq -2$, odnosno $n-2r+1 \geq -3$, tj. u oba slučaja za $n \geq 2r-4$.

Definišimo dva niza prirodnih brojeva:

$$w(n) = \frac{1}{4}\left(n^2 + 2n \begin{matrix} +0 \\ +1 \end{matrix} \begin{matrix} , & n \text{ parno} \\ , & n \text{ neparno} \end{matrix}\right), \quad y(n) = \frac{1}{2}\left(n \begin{matrix} +0 \\ +1 \end{matrix} \begin{matrix} , & n \text{ parno} \\ , & n \text{ neparno} \end{matrix}\right)$$

Lako je pokazati da važi:

$$\bar{N}_r(n) = \sum_{k=r+1}^{2r-2} w(2r-1-k)f(n-k); \quad \bar{S}_r(n)' = \sum_{k=r+1}^{2r-1} y(2r-k)g(n-k)$$

Koristeći to, kao i relacije

$$\bar{f}(-n) = -\bar{f}(n-2); \quad \bar{g}(-n) = -\bar{g}(n-3),$$

nalazimo da u oblasti $\{(n,r) \mid n,r \in N \wedge r+2 \leq n < 2r-4\}$ funkcije $\bar{N}_r(n)$ i $\bar{S}_r(n)$ treba da budu predstavljene transforisanim izrazima $\bar{N}_r^{II}(n)$ i $\bar{S}_r^{II}(n)$, gde je

$$\bar{N}_r^{II}(n) = \bar{N}_r^I(n) + A_r(n); \quad \bar{S}_r^{II}(n) = \bar{S}_r^I(n) + B_r(n),$$

pri čemu je

$$A_r(n) = \sum_{j=1}^{2r-4-n} w(2r-3-n-j)\bar{f}(j); \quad B_r(n) = \sum_{j=1}^{2r-4-n} y(2r-3-n-j)\bar{g}(j).$$

Računanjem dobijamo formule

$$\bar{N}_r^{II}(n) = \frac{1}{2880}(44r^6 - 132r^5 + 35r^4 \begin{matrix}+180\\+120\end{matrix} r^3 \begin{matrix}-124\\-34\end{matrix} r^2 \begin{matrix}-48\\+12\end{matrix} r \begin{matrix}+\\+\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}+(-45,0)\\+(0,45)\end{matrix} - 192nr^5 + 480nr^4 - 140nr^3 \begin{matrix}-360\\-180\end{matrix} nr^2 \begin{matrix}+176\\-4\end{matrix} nr \begin{matrix}+\\-\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}+48\\-12\end{matrix} n + 330n^2r^4 - 660n^2r^3 + 180n^2r^2 \begin{matrix}+240\\+60\end{matrix} n^2 r \begin{matrix}-52\\+38\end{matrix} n^2 -$$

$$- 280n^3r^3 + 420n^3r^2 - 80n^3 r \begin{matrix}-60\\+0\end{matrix} n^3 + 120n^4r^2 - 120n^4 r +$$

$$+ 5n^4 - 24n^5 r + 12n^5 + 2n^6 \begin{matrix}, r \text{ parno}\\ , r \text{ neparno}\end{matrix})$$

$$\bar{S}_r^{II}(n) = \frac{1}{1440}(18r^5 - 75r^4 \begin{matrix}+30\\+60\end{matrix} r^3 \begin{matrix}+120\\+30\end{matrix} r^2 \begin{matrix}-48\\+(78,12)\end{matrix} r \begin{matrix}+(0,-45)\\+(45,0)\end{matrix} -$$

$$- 75nr^4 + 240nr^3 \begin{matrix}-60\\-150\end{matrix} nr^2 \begin{matrix}-180\\+0\end{matrix} nr \begin{matrix}+(48,3)\\+(-33,12)\end{matrix} n + 120n^2r^3 -$$

$$- 270n^2r^2 \begin{matrix}+30\\+120\end{matrix} n^2 r \begin{matrix}+60\\-30\end{matrix} n^2 - 90n^3r^2 + 120n^3 r \begin{matrix}+0\\-30\end{matrix} n^3 + 30n^4 r -$$

$$- 15n^4 - 3n^5 \begin{matrix}, r \text{ parno}\\ , r \text{ neparno}\end{matrix})$$

Formule za $N_r(n)$ i $S_r(n)$ se takodje javljaju u dva vida: $N_r^I(n)$ i $S_r^I(n)$ za $n \geq 2r-4$, odnosno $N_r^{II}(n)$ i $S_r^{II}(n)$ za $n < 2r-4$. Ova razlika je posledica odgovarajuće razlike kod formulâ za $\bar{N}_r(n)$ i $\bar{S}_r(n)$. Naime,

$$N_r^I(n) = \sum_{j=3}^{r} \bar{N}_j^I(n-r+j); \qquad S_r^I(n) = \sum_{j=2}^{r} \bar{S}_j^I(n-r+j)$$

$$N_r^{II}(n) = \sum_{j=3}^{n-r+4} \bar{N}_j^I(n-r+j) + \sum_{j=n-r+5}^{r} \bar{N}_j^{II}(n-r+j)$$

$$S_r^{II}(n) = \sum_{j=2}^{n-r+4} \bar{S}_j^I(n-r+j) + \sum_{j=n-r+5}^{r} \bar{S}_j^{II}(n-r+j)$$

Račun daje:

$$N_r^I(n) = \frac{1}{40.320}(-256r^7 + 308r^6 + 1316r^5 - 1435r^4 \begin{matrix}-1204\\-1624\end{matrix} r^3 \begin{matrix}+\\+\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}+812\\+1442\end{matrix} r^2 \begin{matrix}+144\\+564\end{matrix} r \begin{matrix}+0\\-315\end{matrix} + 616nr^6 - 504nr^5 - 2800nr^4 + 2100nr^3 \begin{matrix}+\\+\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}+1344\\+2604\end{matrix} nr^2 \begin{matrix}-336\\-1596\end{matrix} nr \begin{matrix}+0\\-420\end{matrix} n - 504n^2r^5 + 210n^2r^4 + 2100n^2r^3 - 840n^2r^2 \begin{matrix}-\\-\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}-336\\-1596\end{matrix} n^2 r \begin{matrix}+0\\+630\end{matrix} n^2 + 140n^3r^4 - 560n^3r^2 \begin{matrix}+0\\+420\end{matrix} n^3 \begin{matrix}, r \text{ parno}\\ , r \text{ neparno}\end{matrix})$$

$$N_r^{II}(n) = \frac{1}{40.320}(-4n^7 + 56n^6r - 336n^5r^2 + 1120n^4r^3 - 2100n^3r^4 +$$

$$+ 2184n^2r^5 - 1176nr^6 + 256r^7 - 14n^6 + 168n^5r - 840n^4r^2 +$$

$$+ 2240n^3r^3 - 3150n^2r^4 + 2184nr^5 - 588r^6 + 56n^5 - 560n^4r +$$

$$+ 1680n^3r^2 - 2380n^2r^3 + 1680nr^4 - 476r^5 + 175n^4 - 1400n^3r +$$

$$+ 3360n^2r^2 - 3500nr^3 + 1365r^4 \substack{-196\\+224} n^3 \substack{+840\\-420} n^2r \substack{-1008\\+\ 252} nr^2 \substack{+\\-}$$

$$\substack{+364\\-\ 56} r^3 \substack{-476\\+154} n^2 \substack{+1568\\+\ 308} nr \substack{-1092\\-\ 462} r^2 \substack{+144\\-276} n \substack{-144\\+276} r \substack{+\\+}$$

$$\left.\begin{matrix} +(0,315) & , r \text{ parno} \\ +(-315,0) & , r \text{ neparno} \end{matrix}\right)$$

$$S_r^{I}(n) = \frac{1}{5760}(-84r^6 + 36r^5 + 375r^4 \substack{-180\\-120} r^3 \substack{+(-156,-246)\\+(-426,-336)} r^2 \substack{+\\+}$$

$$\substack{+(144,-36)\\+\ 84} r \substack{+\qquad 0\\+(135,45)} + 192nr^5 + 30nr^4 - 640nr^3 \substack{+180\\+\ 0} nr^2 \substack{+\\+}$$

$$\substack{+\ 88\\+448} nr \substack{+\ 0\\-30} n - 150n^2r^4 - 120n^2r^3 + 330n^2r^2 \substack{-\ 60\\+120} n^2r \substack{+\\-}$$

$$\substack{+\ \ 0\\-180} n^2 + 40n^3r^3 + 60n^3r^2 - 40n^3r \substack{+\ 0\\-60} n^3 \left.\begin{matrix} , r \text{ parno} \\ , r \text{ neparno} \end{matrix}\right)$$

$$S_r^{II}(n) = \frac{1}{5760}(2n^6 - 24n^5r + 120n^4r^2 - 280n^3r^3 + 330n^2r^4 -$$

$$- 192nr^5 + 44r^6 + 6r^5 - 60nr^4 + 300n^3r^2 - 600n^2r^3 +$$

$$+ 510nr^4 - 156r^5 - 25n^4 + 160n^3r - 270n^2r^2 + 160nr^3 - 25r^4 \substack{-\\-}$$

$$\substack{-\ 60\\-120} n^3 \substack{+300\\+480} n^2r \substack{-540\\-720} nr^2 \substack{+300\\+360} r^3 \substack{+\ 68\\-112} n^2 \substack{-184\\+176} nr \substack{+\\+}$$

$$\substack{+(+116,+26)\\+(-154,-64)} r^2 \substack{-144\qquad\\+(-204,-24)} r \substack{+(0,-45)\\+(135,0)} \left.\begin{matrix} , r \text{ parno} \\ , r \text{ neparno} \end{matrix}\right)$$

PRIMEDBA. Prilikom računanja $N_r^{II}(n)$ i $S_r^{II}(n)$ je pogodno koristiti smenu $a = n - r$.

Formule za $N(n)$ i $S(n)$ se nalaze sumiranjem kroz obe oblasti:

$$N(n) = \sum_{r=3}^{\lfloor \frac{n+4}{2} \rfloor} N_r^{I}(n) + \sum_{r=\lfloor \frac{n+6}{2} \rfloor}^{n-2} N_r^{II}(n)$$

$$S(n) = \sum_{r=2}^{\lfloor \frac{n+4}{2} \rfloor} S_r^{I}(n) + \sum_{r=\lfloor \frac{n+6}{2} \rfloor}^{n-2} S_r^{II}(n)$$

Označimo prve i druge sume u ovim izrazima sa $N^{I}(n)$, $N^{II}(n)$, odnosno sa $S^{I}(n)$, $S^{II}(n)$.

Za ovo sumiranje su potrebne pomoćne sume oblika:

$$\sum_{r=3}^{\lfloor\frac{n+4}{2}\rfloor} r^j, \quad \sum_{r=\lfloor\frac{n+6}{2}\rfloor}^{n-2} r^j, \quad 0 \le j \le 7, \quad \text{kao i}$$

$$\sum_{\substack{r \text{ parno} \\ r=2}}^{\lfloor\frac{n+4}{2}\rfloor} r^j, \quad \sum_{\substack{r \text{ neparno} \\ r=3}}^{\lfloor\frac{n+4}{2}\rfloor} r^j, \quad \sum_{\substack{r \text{ parno} \\ r=\lfloor\frac{n+6}{2}\rfloor}}^{n-2} r^j, \quad \sum_{\substack{r \text{ neparno} \\ r=\lfloor\frac{n+6}{2}\rfloor}}^{n-2} r^j, \quad 0 \le j \le 3.$$

Sume poslednja četiri tipa se razlikuju u zavisnosti od $\text{rest}_4(n)$, pa je to slučaj i sa sumama $N^{I}(n)$, $N^{II}(n)$, $S^{I}(n)$, $S^{II}(n)$. Interesantno je, medjutim, da, nakon sumiranja $N(n) = N^{I}(n) + N^{II}(n)$ i $S(n) = S^{I}(n) + S^{II}(n)$, razlike izmedju slučajeva $\text{rest}_4(n)=1$ i $\text{rest}_4(n)=3$, odnosno slučajeva $\text{rest}_4(n)=0$ i $\text{rest}_4(n)=2$, potpuno nestaju, dok razlike izmedju slučajeva n parno i n neparno ostaju samo kod koeficijenata uz n^2, n, 1 (ovog poslednjeg samo kod $N(n)$), iako su kod formulâ za $N^{I}(n)$, $N^{II}(n)$, $S^{I}(n)$, $S^{II}(n)$ ove razlike postojale kod svih koeficijenata uz $1, n, n^2, \dots, n^7$.

Kao rezultat dobijamo formule

$$N(n) = \frac{1}{161.280}\Big(n^8 + 4n^7 - 28n^6 - 98n^5 + 224n^4 + 616n^3 - 512n^2 \begin{matrix} -1152 \\ -522 \end{matrix}\, n \begin{matrix} +0 \\ +315 \end{matrix} \begin{matrix} , n \text{ parno} \\ , n \text{ neparno} \end{matrix}\Big)$$

$$S(n) = \frac{1}{161.280}\Big(4n^7 + 42n^6 + 70n^5 - 420n^4 - 1064n^3 \begin{matrix} +1008 \\ +378 \end{matrix}\, n^2 \begin{matrix} +2880 \\ +990 \end{matrix}\, n \begin{matrix} , n \text{ parno} \\ , n \text{ neparno} \end{matrix}\Big)$$

POSLEDICA. Skoro svi C-kvadrati (na fiksnom velikom nosaču) su nesimetrični (budući da je broj nesimetričnih C-kvadrata opisan formulom višeg reda).

Sabiranjem poslednje dve formule se dobija tražena formula za $K(n)$. $\square$

Za n izmedju 1 i 24 vrednosti funkcije $K(n)$ su redom:

0,	0,	0,	1,	6,	25,	80,	219,
530,	1171,	2400,	4630,	8484,	14886,	25152,	41130,
65340,	101178,	153120,	227007,	330330,	472615,	665808,	924781.

III-6. BROJ SAMODUALNIH C-KVADRATA

TEOREMA III-6.1. *Za svako parno* n *postoji* $\frac{1}{384}(n^4 + 4n^3 - 4n^2 - 16n)$ *neizomorfnih samodualnih* C-*kvadrata na* n-*skupu*.

D o k a z. Neka $SS(n)$ i $NS(n)$ redom označavaju brojeve neizomorfnih samodualnih C-kvadrata na n-skupu za koje važi $a=b$, odnosno $a<b$ (ove samodualne C-kvadrate bismo mogli nazvati simetričnim, odnosno nesimetričnim, s tim što se ovog puta simetrija zasniva na jednakosti kardinalnosti "bokova"). Najpre ćemo pokazati da je gornja podela u saglasnosti sa opštom pretpostavkom $p \leq q$, budući da kod samodualnih C-kvadrata važi implikacija $p \leq q \Rightarrow a \leq b$.

Neka je samodualni C-kvadrat opisan parametrima z,t,a,p,b,q,w,n,r. Na osnovu Teoreme 0-3.4., se iz samodualnosti mogu izvesti dodatne veze medju ovim parametrima:

Komplement nule C-kvadrata je jedinica CF-mreže dualnog C-kvadrata. Na osnovu toga u samodualnom slučaju sledi veza $z+w=n$, pomoću koje eliminišemo parametar w.

Postoje dve mogućnosti za bokove A i B samodualnog C-kvadrata M (na S): prilikom uspostavljanja izomorfizma sa M^* oni mogu ili redom odgovarati bokovima $S \setminus A$ i $S \setminus B$ (slučaj (1)) ili bokovima $S \setminus B$ i $S \setminus A$ respektivno (slučaj (2)).

Slučaj (1): Iz $|A| = |S \setminus A|$ i $|B| = |S \setminus B|$ sledi

$$a = b = \frac{n}{2}$$

Slučaj (2): Iz $|A| = |S\setminus B|$ sledi $a+b=n$. Kako je

$$p = r(A) = r^{*}(S\setminus B) = |S| - r(S) - |B| + r(B) =$$

$$= n - \frac{n}{2} - b + q = \frac{n}{2} - b + q \ ,$$

to za $p=q$ i u ovom slučaju važi $a = b = \frac{n}{2}$.

Za slučaj $a < b$ je moguć samo slučaj (2), za $a = b \wedge p < q$ je moguć samo slučaj (1), a za $a = b \wedge p = q$ se može realizovati bilo koji od slučajeva (1) i (2).

Ukoliko bi važilo $a > b$, onda bismo imali slučaj (2), pa bi sledilo

$$a > b \Longrightarrow \frac{n}{2} > b \Longrightarrow \frac{n}{2} - b + q > q \Longrightarrow p > q \ ,$$

što je u suprotnosti sa opštom pretpostavkom $p \leq q$.

PRIMEDBA. Na osnovu $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B| = |S|$ se dobija da je potreban uslov $|A \cap B| = |(S\setminus A) \cap (S\setminus B)|$ uvek zadovoljen.

LEMA 1.
$$SS(n) = \sum_{z=0}^{\frac{n}{2}-2} \ \sum_{\substack{1 \leq p \leq q < \frac{n}{2} - z \\ p+q \geq \frac{n}{2} - z}} \left(p + q + z - \frac{n}{2} + 1\right)$$

D o k a z leme. Kako kod simetričnog samodualnog C-kvadrata važi $a = b = r = \frac{n}{2}$, a imamo i $w = n - z$, to za fiksno n preostaju svega četiri delimično slobodna parametra: z,p,q,t. Najpre menjamo parametar t za fiksne z,p,q, zatim p i q za fiksno z, i najzad z:

Rang skupa $A \cup B$ je $\frac{n}{2} - z$. Očigledno važi $t \leq p - 1$, a iz semimodularnosti sledi $0 \leq t \leq p + q - (\frac{n}{2} - z)$. Kako $q + 1 \leq \frac{n}{2} - z$ implicira $p-1 \geq p+q - (\frac{n}{2} - z)$, to je prvo ograničenje za t suvišno i postoji $p+q - \frac{n}{2} + z + 1$ mogućnosti za t, kad su parametri z,p i q fiksirani.

Lako je proveriti da su jedina ograničenja za p i q, kada je z fiksirano, $1 \leq p \leq q < \frac{n}{2} - z$ i $p + q \geq \frac{n}{2} - z$. Najzad, iz $r(W) = \frac{n}{2} - z \geq 2$ sledi $0 \leq z \leq \frac{n}{2} - 2$ (ograničenje $z \leq n - 4$, izvedeno uporedjivanjem kardinalnosti, je suvišno, budući da za $n \geq 4$ važi $\frac{n}{2} - 2 \leq n - 4$), čime se kompletira formula za SS(n). □

LEMA 2. $$NS(n) = \sum_{z=0}^{\frac{n}{2}-3} \sum_{a=z+2}^{\frac{n}{2}-1} \sum_{p=\lceil\frac{a-z}{2}\rceil}^{a-z-1} (2p - a + z + 1) .$$

D o k a z leme. Kako je u nesimetričnom slučaju

$$b = n-a; \quad q = p - \frac{n}{2} + b = p + \frac{n}{2} - a; \quad w = n - z \quad i \quad r = \frac{n}{2} ,$$

to za fiksno n možemo ostaviti svega četiri delimično slobodna parametra: z,a,p,t. Najpre menjamo parametar t za fiksirane z, a,p, zatim p za fiksirane z i a, pa a za fiksirano z i najzad z.

Ograničenja za t su $t \leq p - 1$ i

$$0 \leq t \leq p + q - (\frac{n}{2} - z) = p + (p-a + \frac{n}{2}) - \frac{n}{2} + z = 2p - a + z .$$

Kako iz $a - z \geq p + 1$ sledi $2p - a + z \leq p - 1$, to je i u ovom slučaju prvo ograničenje za t suvišno, pa postoji $2p - a + z + 1$ mogućnost za t, kada su parametri z,p,a fiksirani.

Korišćeno ograničenje za t ima za posledicu i nejednakost $0 \leq 2p - a + z$, iz koje sledi $p \geq \frac{a-z}{2}$. Na osnovu nejednakosti $\mathrm{rang}(A) < |A\backslash Z|$, parametar p zadovoljava za fiksno z i a i ograničenje $p \leq a - z - 1$.

Kako iz $a < b$ sledi $a < \frac{n}{2}$, to zaključujemo da su jedina ograničenja za a, kada je z fiksirano,

$$z + 2 \leq a \leq \frac{n}{2} - 1.$$

Iz poslednje nejednakosti sledi i ograničenje $0 \leq z \leq \frac{n}{2} - 3$ za parametar z, čime je izraz za NS(n) u potpunosti rekonstruisan. □

U daljem postupku transformišemo sume iz Lema 1 i 2 u polinomske formule.

LEMA 3. $$SS(n) = \frac{1}{768}\left(n^4 + 8n^3 + 8n^2 - 32n \begin{array}{ll} + 0, & \text{za } \frac{n}{2} \text{ parno} \\ -48, & \text{za } \frac{n}{2} \text{ neparno} \end{array}\right)$$

za svaki paran prirodan broj n.

D o k a z leme. U izraz za SS(n), naveden u Lemi 1, uvodimo smenu $a = \frac{n}{2} - z$. Označimo

$$A = \{(p,q) \mid p,q \in N \wedge 1 \le p \le q < \frac{n}{2} - z \wedge p+q \ge \frac{n}{2} - z\} .$$

Tada važi:

$$SS(n) = \sum_{a=2}^{\frac{n}{2}} \sum_{A} (p+q-a+1)$$

Nalazimo $\sum_{A} 1 = \frac{1}{4}\left(a^2 \begin{matrix} +0, & a \text{ parno} \\ -1, & a \text{ neparno} \end{matrix}\right)$

$$\sum_{A} p = \frac{1}{8}\left(a^3 \begin{matrix} +0, & a \text{ parno} \\ -a, & a \text{ neparno} \end{matrix}\right), \quad \sum_{A} q = \frac{1}{24}\left(5a^3 - 3a^2 \begin{matrix} -2 \\ -5 \end{matrix}\, a \begin{matrix} +0, & a \text{ parno} \\ +3, & a \text{ neparno} \end{matrix}\right)$$

iz čega sledi

$$\sum_{A} (p+q-a+1) = \frac{1}{24}\left(2a^3 + 3a^2 - 2a \begin{matrix} +0, & a \text{ parno} \\ -3, & a \text{ neparno} \end{matrix}\right)$$

Sumiranje po a daje traženu formulu. $\square$

LEMA 4. $NS(n) = \frac{1}{768}\left(n^4 - 16n^2 \begin{matrix} +0, & \text{za } \frac{n}{2} \text{ parno} \\ +48, & \text{za } \frac{n}{2} \text{ neparno} \end{matrix}\right)$

za svaki paran prirodan broj n .

D o k a z leme. U izraz za NS(n), dat u Lemi 2, uvodimo smenu $b = a - z - 1$, čime ga prevodimo u

$$\sum_{z=0}^{\frac{n}{2}-3} \sum_{b=1}^{\frac{n}{2}-z-2} \sum_{p=\lceil\frac{b+1}{2}\rceil}^{b} (2p-b)$$

Označimo $\sum_{p=\lceil\frac{b+1}{2}\rceil}^{b}$ sa $\sum_1$, $\sum_{b=1}^{\frac{n}{2}-z-2}$ sa $\sum_2$ i $\sum_{z=0}^{\frac{n}{2}-3}$ sa $\sum_3$.

Koristeći pomoćne sume:

$$\sum\nolimits_1 1 = \frac{1}{2}\left(b \begin{matrix} +0, & b \text{ parno} \\ +1, & b \text{ neparno} \end{matrix}\right); \quad \sum\nolimits_1 p = \frac{1}{8}\left(3b^2 \begin{matrix} +2 \\ +4 \end{matrix}\, b \begin{matrix} +0, & b \text{ parno} \\ +1, & b \text{ neparno} \end{matrix}\right)$$

$$\sum\nolimits_2 1 = \frac{1}{2}(n-4) - z; \quad \sum\nolimits_2 b = \frac{1}{8}(n^2 - 6n + 8) + \frac{1}{2}(-n+3)z + \frac{1}{2} z^2 ;$$

$$\sum\nolimits_2 b^2 = \frac{1}{24}(n^3 - 9n^2 + 26n - 24) + \frac{1}{12}(-3n^2 + 18n - 26)z + \frac{1}{2}(n-3)z^2 - \frac{1}{3} z^3$$

$\sum_3 1 = \frac{1}{2}(n-4)$; $\qquad \sum_3 z = \frac{1}{8}(n^2 - 10n + 24)$

$\sum_3 z^2 = \frac{1}{24}(n^3 - 15n^2 + 74n - 120)$

$\sum_3 z^3 = \frac{1}{64}(n^4 - 20n^3 + 148n^2 - 480n + 576)$

jednostavno dolazimo do traženog rezultata. □

Dokaz Teoreme se dovršava sabiranjem izraza u Lemama 3 i 4. Interesantno je da pritom nestaju razlike izmedju slučajeva $rest_4(n) = 0$ i $rest_4(n) = 2$, pa se dobija jedinstven polinom za svako parno n. □

III-7. BROJ BINARNIH C-KVADRATA

TEOREMA III-7.1. *Na* n*-skupu ima* $\frac{1}{2}(n^3 - 8n^2 + 21 - 18)$ *neizomorfnih binarnih (= grafičkih)* C*-kvadrata.*

LEMA. *Poligon-matroid grafa* G *je* C*-kvadrat ako i samo ako se sve* 2+*konture grafa* G *javljaju u nekoj od sledećih kombinacija:*

a) *dva granski disjunktna skupa sa* x *, odnosno* y *grana*
b) *jedan trougao, čije grane su zamenjene snopovima sa* x*, odnosno* y *grana*
c) *jedan snop sa* x *grana i jedna* 3+*kontura sa* y *grana, medjusobno granski disjunktni*
d) *dve granski disjunktne* 3+*konture sa* x*, odnosno* y *grana*
e) *dve* 3+*konture sa* x *, odnosno* y *grana, koje imaju tačno jednu zajedničku granu.*

D o k a z leme. Petlje i kopetlje se mogu zanemariti ali pri kraju dokaza ipak uvodimo skup svih petlji.

Slučajevi a) i b) odgovaraju situaciji kad su oba "boka" ranga 1. Zatvorenje njihove unije je C-potprostor ranga 2. U binarnom slučaju on je jednak uniji bokova (slučaj a)) ili ima samo jedan element više (slučaj b)).

Slučaj c) se javlja kad je jedan bok ranga 1, a drugi većeg ranga.

Ako su oba boka ranga većeg od 1, onda svaki od odgovarajućih skupova sadrži, pored petlji, grane jedne 3+konture. Označimo te dve konture sa C_1 i C_2 a skup svih petlji sa Z. Konture C_1 i C_2 ili nemaju zajedničkih grana (slučaj d)) ili imaju tačno jednu zajedničku granu (slučaj e)). Ukoliko bi, naime, C_1 i C_2 imale više od jedne zajedničke grane, onda bi skup $((C_1 \cup C_2)\setminus(C_1 \cap C_2)) \cup Z$ bio C-potprostor neuporediv sa C-potprostorima $C_1 \cup Z$ i $C_2 \cup Z$. U tom slučaju, medjutim, odgovarajući poligon-matroid ne bi bio C-kvadrat. $\square$

D o k a z teoreme. Neka graf G sa n grana ima z petlji i t grana van konturâ. Ako x i y imaju značenje kao u tvrdjenju leme, onda je lako pokazati da je broj neizomorfnih binarnih C-kvadrata u slučajevima a) - e) jednak broju (različitih) celobrojnih nenegativnih rešenja sledećih jednačina, koja ispunjavaju odgovarajuća ograničenja:

	jednačina	ograničenje
a)	$x+y+z+t=n$	$x \geq 2,\ y \geq x$
b)	$x+y+z+t=n-1$	$x \geq 2,\ y \geq x$
c)	$x+y+z+t=n$	$x \geq 2,\ y \geq 3$
d)	$x+y+z+t=n$	$x \geq 3,\ y \geq x$
e)	$x+y+z+t=n+1$	$x \geq 3,\ y \geq x$

Slučaj c) je jedinstven po tome što u njemu promenljive x i y igraju različite uloge, pa su medjusobno nezavisne, iz čega odmah sledi da je broj rešenja u tom slučaju jednak $\binom{n-2-3+3}{3} = \binom{n-2}{3}$.

Označimo broj različitih rešenja u slučaju a) sa $F(n)$. Lako je pokazati da su tada brojevi različitih rešenja u slučajevima b), d), e) dati redom sa $F(n-1)$, $F(n-2)$, $F(n-1)$. Da bismo izračunali $F(n)$, podelimo $\binom{n-1}{3}$ celobrojnih nenegativnih rešenja jednačine $x+y+z+t=n$, kod kojih važi $x \geq 2$, $y \geq 2$, u tri klase, u zavisnosti od toga koja od relacija $x > y$,

$x = y$ i $x < y$ je zadovoljena. Neka je broj rešenja u tim klasama redom označen sa K, L, K. Lako je pokazati da je $L = \frac{1}{2}(n-2)^2$ za n parno i $L = \frac{1}{4}(n-1)(n-3)$ za n neparno. Otud nalazimo:

$$F(n) = K + L = \frac{1}{24}\left(2n^3 - 9n^2 + 10n \begin{matrix} +0 \text{ , } & n \text{ parno} \\ -3 \text{ , } & n \text{ neparno} \end{matrix}\right).$$

Prema lemi, traženi broj neizomorfnih binarnih C-kvadrata se nalazi sabiranjem

$$\binom{n-2}{3} + F(n) + 2F(n-1) + F(n-2)$$

Interesantno je da nakon sabiranja rezultat više ne zavisi od parnosti n. $\square$

III-8. TRANSVERZALNOST C-KVADRATA

TEOREMA III-8.1. *C-kvadrati su transverzalni matroidi.*

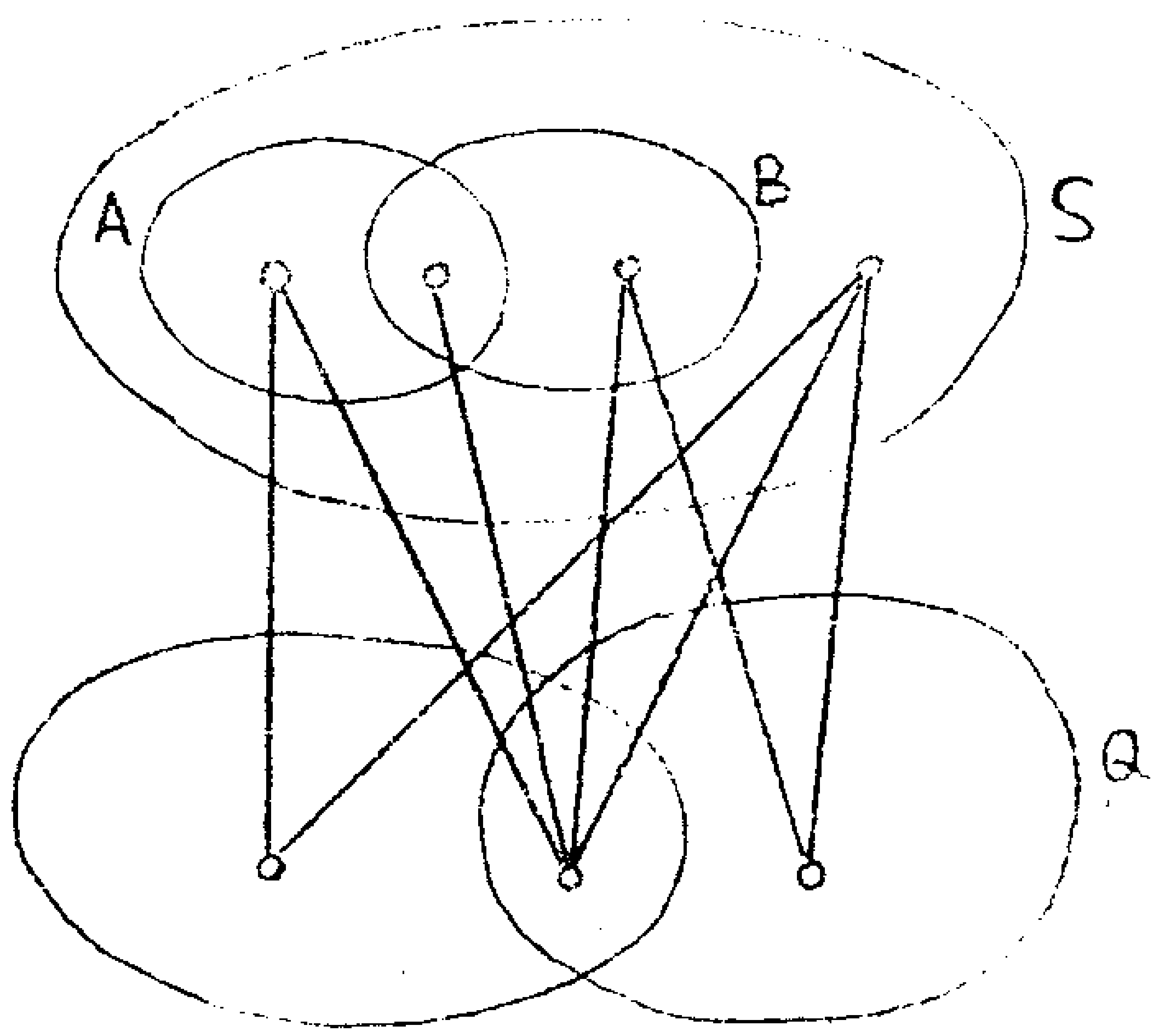
Navodimo dva dokaza ove teoreme.

D o k a z I. (A. Recski) Isključujemo iz razmatranja petlje i kopetlje, budući da njihovo prisustvo ne utiče na transverzalnost. Neka je M C-kvadrat bez petlji i kopetlji na skupu S sa C-potprostorima $\emptyset$ (nula), A, B (bokovi, S (jedinica) rangova 0, p, q, r respektivno (svakako je $p + q \geq r$). Podskup X nosača S je nezavisan u M ako i samo ako su ispunjeni uslovi $|A \cap X| \leq p$, $|B \cap X| \leq q$, $|X| \leq r$. Tada se M može reprezentovati pomoću bipartitnog grafa $G(S,V)$, gde je $V = P \cup Q$, $|P| = p$ $|Q| = q$, $|P \cup Q| = r$, u kome je

- svaki čvor skupa $A \setminus B$ spojen sa svakim čvorom skupa P
- svaki čvor skupa $A \cap B$ spojen sa svakim čvorom skupa $P \cap Q$
- svaki čvor skupa $B \setminus A$ spojen sa svakim čvorom skupa Q
- svaki čvor skupa $S \setminus (A \cup B)$ spojen sa svakim čvorom skupa $P \cup Q$

(na priloženoj šemi svaka grana odgovara jednom kompletnom bipartitnom podgrafu).

G:



Nezavisni skupovi matroida M su tačno oni podskupovi skupa (čvorova iz) S, koji su incidentni granama nekog mečinga (regularnog delimičnog podgrafa stepena 1) grafa G (ako podskup X skupa S ne ispunjava neku od navedene tri nejednakosti za nezavisne skupove, onda on očigledno ne može biti incidentan granama nekog mečinga grafa G.

Ukoliko su, pak, sve tri nejednakosti za skup X zadovoljene, onda lako konstruišemo pridruženi mečing (pogodno je odrediti najpre grane incidentne čvorovima skupa $A \cap B$, a zatim skupova $A \setminus B$ i $B \setminus A$; koristimo da je $|A \cap B| = \text{rang}(A \cap B) \leq \text{rang}(A) + \text{rang}(B) = \text{rang}(A \cup B) = p + q - r$)).

Ovakva reprezentacija dokazuje da je M mečing matroid Naime, M je restrikcija*) na skup S drugog matroida M_1, čiji nezavisni skupovi su tačno oni skupovi čvorova nekog grafa (grafa G(S,V)), koji su incidentni granama nekog mečinga tog grafa.

Poznato je (|62|) da se, pojmovi mečing matroida i transverzalnog matroida poklapaju , iz čega sledi da je matroid M transverzalan. Štaviše, kako je graf G bipartitan, to se iz mečing reprezentacije matroida M lako odredjuje jedna njegova transverzalna reprezentacija; skupovi te familije su tačno skupovi čvorova iz S incidentnih pojedinim čvorovima iz skupa V. $\square$

D o k a z II. Neka je M C-kvadrat ranga r na n-skupu S sa C-potprostorima Z (nula), A,B (bokovi), W (jedinica CF-mreže od M) rangova O, p, q, u respektivno.

*) Mečing matroidi se obično definišu kao matroid M_1, a restrikcije mečing matroida su mečing matroidi.

Dokazujemo da M ima sledeću transverzalnu reprezentaciju:

$$F = \{\underbrace{W\setminus Z,\ldots,W\setminus Z}_{p+q-u},\ \underbrace{W\setminus A,\ldots,W\setminus A}_{u-p},\ \underbrace{W\setminus B,\ldots,W\setminus B}_{u-q},\ \underbrace{S\setminus W,\ldots S\setminus W}_{r-w}$$

Dovoljno je dokazati sledeća dva tvrdjenja:

(1) Svaki r-podskup X od S, koji nije baza od M, nije transverzala od F.

(2) Svaka baza β od M je transverzala od F.

Dokaz tvrdjenja (1). Dokažimo najpre dve leme.

LEMA 1. *Zatvorenje cikla u matroidu je C-potprostor.*

D o k a z leme. Označimo zatvorenje cikla C sa X. Ako je $X = C$, onda je $\mathrm{rang}(X\setminus e) = \mathrm{rang}(X)$ za svako e.

Pretpostavimo da potprostor X nije C-potprostor, tj. da postoji $e \in X$ za koje važi $\mathrm{rang}(X\setminus e) = \mathrm{rang}(X) - 1$. Ako je $e \in C$, onda

$$\mathrm{rang}(X) = \mathrm{rang}(C) = \mathrm{rang}(C\setminus e) \le \mathrm{rang}(X\setminus e) = \mathrm{rang}(X) - 1$$

Ako je $e \in X\setminus C$, onda je jedina razlika u tome što se nejednakost $\mathrm{rang}(C) \le \mathrm{rang}(X\setminus e)$ direktno izvodi.

U oba slučaja imamo kontradikciju sa pretpostavkom. □

LEMA 2. *Ciklovi gore navedenog matroida* M *se mogu podeliti u sledeće četiri klase:*

a) *petlje (elementi skupa* Z*)*

b) $(p+1)$ *- podskupovi od* $A\setminus Z$

c) $(q+1)$ *- podskupovi od* $B\setminus Z$

d) $(u+1)$ *- podskupovi od* $W\setminus Z$, *koji ne sadrže više od* p *elemenata skupa* $A\setminus Z$, *niti više od* q *elemenata skupa* $B\setminus Z$.

D o k a z leme. Prema Lemi 1, jedini mogući rangovi ciklova u M su 0, p, q, u (odgovarajuće kardinalnosti ciklova su za po 1 veće). Svi skupovi u klasama a)-d) su zavisni. Kako oni ne sadrže ciklove drugih kardinalnosti, a neuporedivi su po parovima, to zaključujemo da su svi ti skupovi ciklovi od M, i to jedini. □

Nastavak dokaza tvrdjenja (1): Skup X je zavisan u M i sadrži cikl, koji prema Lemi 2 spada u neku od klasa a), b), c), d). Očigledno je da skupovi iz ovih klasa ne mogu biti parcijalne transverzale od F. □

Dokaz tvrdjenja (2): Dokazujemo da su skupovi:

$$\beta \cap (S\setminus W), \quad \beta \cap (A \cap B), \quad \beta \cap (A\setminus B), \quad \beta \cap (B\setminus A),$$

ovim redom, transverzale poparno disjunktnih potfamilija od F.

Kako je $|S\setminus W| = r - u$ i $|\beta \cap W| \leq u$, to $\beta \supset S\setminus W$, a $S\setminus W$ je transverzala potfamilije $\{\underbrace{S\setminus W, \ldots, S\setminus W}_{r-u}\}$.

Neka je $|\beta \cap (A \cap B)| = m$, $|\beta \cap (A\setminus B)| = \bar{p}$, $|\beta \cap (B\setminus A)| = \bar{q}$ i $|\beta \cap (W\setminus(A \cup B))| = \bar{u}$.

Kako je $m \leq \mathrm{rang}(A \cap B) \leq p + q - u$, to zaključujemo da je $\beta \cap (A \cap B)$ parcijalna transverzala familije $\{\underbrace{W\setminus Z, \ldots, W\setminus Z}_{p+q-u}\}$.

Elementi skupa $\beta \cap (A\setminus B)$ mogu predstavljati samo skupove $W\setminus B$ i $W\setminus Z$ familije F. Mi koristimo ove elemente kao predstavnike nekih $k = \bar{p} - u + q$ kopijâ skupa $W\setminus Z$ ako i samo ako je $\bar{p} > u - q$. Ovakav izbor predstavnika je moguć. zato što iz $\bar{p} + m = |\beta \cap A| \leq \mathrm{rang}(A) = p$ sledi

$$\bar{p} \leq (p + q - u - m) + (u - q)$$

Elementi skupa $\beta \cap (B\setminus A)$ mogu predstavljati samo skupove $W\setminus A$ i $W\setminus Z$ familije F.

Razlikujemo dva slučaja:

(i) $\bar{p} > u - q$ (ii) $\bar{p} \leq u - q$

Slučaj (i). Koristimo

$$m + \bar{p} + \bar{q} \leq |\beta \cap (A \cup B)| \leq \mathrm{rang}(A \cup B) = u,$$

iz čega sledi

$$\bar{q} \leq q - m - (\bar{p} - u + q) = q - m - k, \quad \text{pa i}$$

$$\bar{q} \leq (u - p) + (p + q - u - m - k).$$

Slučaj (ii). Koristeći

$$\bar{q} + m = |\beta \cap B| \leq \text{rang}(B) = q \quad \text{nalazimo}$$

$$\bar{q} \leq (u - p) + (p + q - u - m)$$

U oba slučaja je skup $\beta \cap (B \setminus A)$ parcijalna transverzala od F koja predstavlja "nove", dosad neiskorišćene, skupove iz F.

Najzad, elementi skupa $\beta \cap (W \setminus (A \cup B))$ mogu predstavljati bilo koji od skupova $W \setminus Z$, $W \setminus A$, $W \setminus B$, i , samim tim, u svakom slučaju mogu predstavljati preostalih $\bar{u}$ skupova familije F. $\square$

IV GLAVA

O KATALOGU "MALIH" NEIZOMORFNIH MATROIDA

Na kraju disertacije dajemo, kao dodatak, katalog svih neizomorfnih matroida na skupovima od najviše 8 elemenata. Matroidi u katalogu su predstavljeni mrežama svih svojih cikličkih potprostora (u mrežama su naznačeni i sami ciklički potprostori sa svojim rangovima).

Uz svaki matroid u katalogu dajemo sledeće dodatne podatke: transverzalnost, binarnost (kao i regularnost, koja je kod ovih matroida ekvivalentna grafičkoj reprezentabilnosti), dualni matroid, broj hiperravni, broj baza i broj ciklova. Za grafičke matroide, kao i za većinu transverzalnih matroida (tačnije, za sve one transverzalne matroide, koji nisu C-lanci ili C-kvadrati) navodimo po jednu od odgovarajućih reprezentacija. Medju samodualnim matroidima u katalogu identifikujemo identično samodualne matroide i električno samodualne matroide. Uz proste matroide ranga 3 na 8-skupu dajemo i njihove euklidske reprezentacije. Uz one pejving matroide ranga 4 na 8-skupu, kojima odgovaraju A-grafovi, D-grafovi ili C-grafovi navodimo u katalogu i odgovarajući graf iz neke od tih triju klasa.

Pre navodjenja samog kataloga objašnjavamo oznake, koje se u njemu koriste, kao i metode, kojima su odredjeni podaci u katalogu. Prilikom odredjivanja binarnosti i transverzalnosti pejving matroida, kao i transverzalnosti matroida uopšte, korišćeni su neki opšti stavovi, o kojima govorimo u prva dva odeljka.

U posebnom odeljku navodimo neke sažeto, mahom brojčane, "eksperimentalne" podatke, dobijene iz kataloga. Tako dajemo brojeve neizomorfnih matroida na pojedinim nosačima kardinalnosti izmedju 0 i 8 i to brojeve:

svih, binarnih, regularnih (= grafičkih), transverzalnih, samodualnih (posebno i identično samodualnih i električno samodualnih) matroida.

Pored toga, dajemo i brojeve svih neizomorfnih matroida fiksnog ranga na fiksnom nosaču (sa ≤ 8 elemenata), a ti brojevi su posebno odredjeni i za matroide sa petljama, poluproste matroide i proste matroide.

Najzad, dajemo i prosečne brojeve baza i ciklova kod svih neizomorfnih matroida na n-skupu ($0 \leq n \leq 8$).

Naglašavamo da su stavovi o transverzalnosti matroida koje razmatramo u IV-2., rezultat, pre svega, "eksperimenata" u katalogu. Ustvari, smatramo da bi katalog prvenstveno trebao da igra ulogu osnove za eksperimentalnu proveru hipoteza o matroidima, kao i za postavljanje istih na osnovu induktivnog zaključivanja. Svesni smo ograničenih mogućnosti ovakvog pristupa (naprimer, najmanji regularni negrafički matroid se javlja tek na 9-skupu). Ipak, verujemo da katalog može, u najmanju ruku, pomoći intuiciji, koju imamo o matroidima. Mislimo da bi katalog trebalo dopunjavati i drugim osobinama matroida, a možda i proširivati još nekim klasama neizomorfnih matroida.

IV-1. BINARNI PEJVING MATROIDI

U ovom odeljku dajemo karakterizaciju (tačnije: spisak) svih matroida koji su istovremeno i binarni i pejving. Time se, izmedju ostalog, rešava problem ispitivanja binarnosti pejving matroida, što koristimo pri konstrukciji kataloga. Dajemo i broj binarnih pejving matroida na n-skupu sa svako n.

Binarne pejving matroide skraćeno označavamo kao *BP-matroide*, a binarne pejving matroide ranga r na n-skupu kao *BP-(n,r)-matroide*.

Uopšte, *(n,r)-matroid* je matroid ranga r na n-skupu.

C_n - označava konturu sa n grana.

$C_{n-1}+e$ - označava proizvoljan prost graf sa n grana, koji sadrži graf C_{n-1} i jednu slobodnu granu (van kontura).

TEOREMA IV-1.1. *Matroid je binaran i pejving* (BP) *ako i samo ako pripada jednoj od sledećih osam klasa:*

a) *matroidi ranga* 0

b) *matroidi ranga* 1

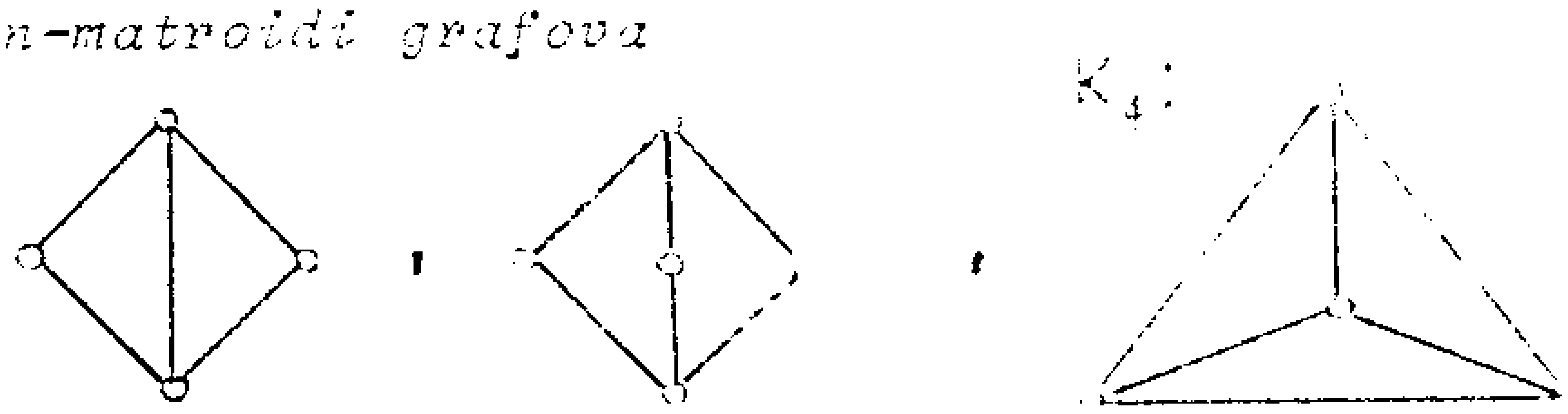
c) *matroidi ranga* 2 *bez petlji i sa dve hiperravni*

d) *matroidi ranga* 2 *bez petlji i sa tri hiperravni*

e) *matroidi ranga* n *na* n-*skupu*

f) *matroidi ranga* n-1 *na* n-*skupu, čije grafičke reprezentacije su* C_n *i* $C_{n-1}+e$

g) *poligon-matroidi grafova*



h) *matroidi* F_7, F_7^* *i* S(3,4,8).

D o k a z. Dokaz teoreme izvodimo preko niza lema.

LEMA 1. *Ako je* $r \geq 3$ *, onda su svi pejving matroidi ranga* r *, koji imaju hiperravan kardinalnosti ne manje od* r+1, *nebinarni.*

D o k a z. Neka je M pejving matroid ranga r i neka je H hiperravan od M, za koju važi $|H| \geq r+1$. Ako je K proizvoljan (r-3)-podskup od H, onda je K nezavisan potprostor od M i ranga (K) = r-3.

Neka je $H \setminus K = \{a,b,c,d,\dots\}$. Tada je restrikcija minora $[K,H]$ na skupu $K \cup \{a,b,c,d\}$, izomorfna sa $U_{2,4}$, iz čega sledi da M nije binaran. $\square$

LEMA 2. *Ako je* $r \geq 3$ *, onda su svi pejving matroidi ranga* r *, koji imaju nosač kardinalnosti ne manji od* r+5 *, nebinarni.*

D o k a z. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji BP-matroid M ranga r na S, za koga važi $|S| \geq r+5$. Sve hiperravni od M su kardinalnosti r-1 ili r, prema Lemi 1.

Neka je P proizvoljan (r-2)-potprostor od M. Kako je M binaran, to je P pokriven sa najviše tri hiperravni H_1, H_2, H_3. Skup $S \setminus P$ je razbijen u podskupove $H_1 \setminus P$, $H_2 \setminus P$, $H_3 \setminus P$. Budući da je $|H_i \setminus P| \leq 2$ za $1 \leq i \leq 3$, to sledi $|S \setminus P| \leq 6$ i $|S| \leq r+4$, kontradikcija. $\square$

LEMA 3. *Ako je* M *pejving matroid ranga* r *na skupu* S $(r \geq 2,\ |S| = n)$, *kod koga su sve hiperravni kardinalnosti* r *i* r-1, *onda je* M^* *pejving matroid ranga* n-r, *kod koga su sve hiperravni kardinalnosti* n-r *ili* n-r-1.

D o k a z. CF-mreža matroida M je tipa

$$\begin{array}{l} n(r) \\ \mid \\ r(r-1) \ \dots \\ \mid \\ 0(0) \end{array}$$

gde su naznačene samo kardinalnosti i rangovi (u zagradi) cikličkih potprostora (tačkice označavaju da može biti više cikličkih potprostora ranga r-1, ali svi moraju biti kardinalnosti r).

Koristeći Teoremu 0-3.4. , kao i vezu izmedju rang-funkcijâ matroida M i M*, nalazimo da je CF-mreža matroida M* tipa

$$\begin{array}{l} \quad n(n-r) \\ \ / \\ n-r(n-r-1) \ \dots \\ \ \backslash \\ \quad 0(0) \end{array}$$

čime se dovršava dokaz. $\square$

Sledeća lema igra ključnu ulogu u dokazu Teoreme:

LEMA 4. *Ako je* M BP-(n,r)-*matroid, pri čemu je* $r \geq 3$ *i* $n-r \geq 3$, *onda* $r \in \{3,4\}$ *i* $n \leq 8$.

D o k a z. Kako je $r \geq 3$, to su po Lemi 1 sve hiperravni od M kardinalnosti r ili r-1, iz čega po Lemi 3 sledi da je M* pejving matroid. Tako je M* BP-(n,n-r)-matroid, kod koga važi $n-r \geq 3$. Iz Leme 2 sledi da je

$$n \leq \operatorname{rang}(M^*) + 4, \text{ tj. } n \leq n-r+4 \text{ ili } r \leq 4 .$$

Ako primenimo Lemu 2 i na početni matroid M, onda dobijamo nejednakost

$$n \leq \operatorname{rang}(M) + 4 = r + 4 \leq 4 + 4 = 8 \quad . \square$$

Lema 4 daje da, ukoliko je $n \geq 9$, onda BP-(n-r)-matroid može postojati samo za $r \in \{0,1,2,n-2,n-1,n\}$, tj. za relativno velike kardinalnosti nosača ne mogu postojati BP-matroidi "srednjih rangova" (tačnije, mogu postojati samo BP-matroidi tri najmanja i tri najveća moguća ranga). Svaku od tih šest mogućnosti za rang ćemo posebno ispitati.

S druge strane, iz Leme 4 sledi da se svi neizomorfni BP-(n,r)-matroidi, kod kojih važi $r \in [3,n-3]$, mogu naći u našem katalogu. Medjutim, mi ih nećemo tako tražiti. Podsetimo da je naš pristup tačno obrnut; teorema o BP-matroidima nam je potrebna upravo radi skraćivanja ispitivanja binarnosti pejving matroida u katalogu.

Sledeća lema rešava pitanje BP-matroida "srednjih rangova":

LEMA 5. *Jedini* BP-(n,r)-matroidi, za koje važi* $r \geq 3$ *i* $r \leq n-3$, *su* $M(K_4)$, F_7, F_7^* *i* $S(3,4,8)$.

D o k a z. Iz $3 \leq n-3$ sledi $n \geq 6$. Prema Lemi 4, jedini uredjeni parovi (n,r), koji mogu zadovoljiti uslove: "postoji BP-(n,r)-matroid i $3 \leq r \leq n-r$", jesu (6,3), (7,3), (7,4), (8,3) i (8,4). Svaki od ovih pet slučajeva posebno razmatramo i dokazujemo odgovarajuću podlemu. U svakom od tih slučajeva, izuzev četvrtog, dobijamo samo jedan BP-matroid a u četvrtom slučaju ne dobijamo nijedan.

LEMA 5a. *Jedini* BP-(6,3)-*matroid je* $M(K_4)$.

D o k a z. Svaki atom nekog BP-(6,3)-matroida M mora biti pokriven sa dve 3-hiperravni i jednom 2-hiperravni (budući da je 2+2+1 jedina particija broja 5 u najviše tri sabirka, od kojih nijedan nije veći od 2). Prema tome, 6 atoma moraju ukupno 12 puta biti pokriveni 3-hiperravnima. S druge strane, svaka 3-hiperravan pokriva tri atoma. Zaključujemo da M mora imati $12/3 = 4$ 3-hiperravni. Kako nijedne dve 3-hiperravni ne mogu imati više od jednog zajedničkog elementa, to je lako pokazati da je M izomorfan sa $M(K_4)$. □

* *I ovde i dalje se podrazumeva "do na izomorfizam".*

LEMA 5b. *Jedini* BP-(7,3)-*matroid je* F_7.

D o k a z. Svaki atom BP-(7,3)-matroida M moraju pokrivati tri 3-hiperravni. Tako 7 atoma moraju ukupno 21 put biti pokriveni 3-hiperravnima. Kako svaka 3-hiperravan pokriva tri atoma, nalazimo da M sadrži sedam 3-hiperravni, od kojih nijedne dve nemaju više od jednog zajedničkog elementa. Jednostavno je pokazati da je Fano matroid (F_7) jedini (do na izomorfizam) koji ispunjava ove uslove. □

LEMA 5c. *Jedini* BP-(7,4)-*matroid je* F_7^* .

D o k a z. Najpre naglašavamo da se ova lema ne može izvesti direktnom dualizacijom prethodne, budući da klasa pejving matroida nije zatvorena u odnosu na dualnost.

Svaki 2-potprostor BP-(7,4)-matroida M je pokriven sa dve 4-hiperravni i jednom 3-hiperravni. Tako su 21 2-potprostora ukupno 42 puta pokrivena 4-hiperravnima. Kako svaka 4-hiperravan pokriva šest 2-potprostora, to sledi da M sadrži sedam 4-hiperravni, od kojih nijedne dve nemaju više od dva zajednička elementa. Lako je pokazati da je matroid M izomorfan sa F_7^*. □

LEMA 5d. *Ne postoje* BP-(8,3)-*matroidi*.

D o k a z. Ako je M BP-(8,3)-matroid, onda su, prema Lemi 1, sve hiperravni od M kardinalnosti 2 ili 3. Iz toga sledi da je svaki atom matroida M pokriven sa najmanje četiri hiperravni, što je u kontradikciji sa binarnošću od M. □

LEMA 5e. *Jedini* BP-(8,4)-*matroid je* S(3,4,8).

D o k a z. Ako je M BP-(8,4)-matroid, onda je svaki 2-potprostor od M pokriven sa tri 4-hiperravni. Stoga je 28 2-potprostora od M ukupno 84 puta pokriveno 4-hiperravnima. Kako svaka 4-hiperravan pokriva šest 2-potprostora, to sledi da M ima 14 4-hiperravni, od kojih nijedne dve nemaju 3-presek.

Jedini pejving matroid ranga 4 na 8-skupu sa takvim osobinama je S(3,4,8), sa familijom (netrivijalnih) hiperravni [illegible] . □

PRIMEDBA. Iako je nepostojanje BP-(8,5)-matroida posledica Leme 4, ono se može lako pokazati:

56 3-potprostora nekog BP-(8,5)-matroida bi bilo tačno 112 puta pokriveno sa 5-hiperravnima, što je nemoguće, s obzirom na to da svaka 5-hiperravan pokriva tačno 10 3-potprostora.

LEMA 6. *Svi matroidi ranga* 0 *i* 1 *su* BP.

D o k a z. Matroid ranga r je pejving ako i samo ako su svi njegovi potprostori ranga ne većeg od r-2 —nezavisni. Taj uslov je "prazno" zadovoljen kod matroida ranga 0 i 1, pa su svi takvi matroidi — pejving matroidi. S druge strane, svi matroidi ranga 0 i 1 su i binarni, budući da ne mogu sadržati minor $U_{2,4}$, koji je ranga 2. □

LEMA 7. *Matroid ranga* 2 *je* BP *ako i samo ako nema petlji i ima dve ili tri hiperravni.*

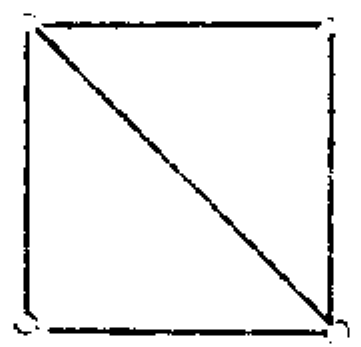
D o k a z. Matroid ranga 2 je pejving matroid ako i samo ako nema petlji. S druge strane, matroid ranga 2 sadrži $U_{2,4}$ minor (drugim rečima, nebinaran je) ako i samo ako sadrži najmanje četiri hiperravni. Najzad, matroid ranga 2 ne može imati samo jednu hiperravan, zato što mreža potprostora matroida ima svojstvo atomarnosti. □

LEMA 8. *Ako postoji* BP-(n,n-2)-*matroid, kod koga važi* $n-2 \geq 3$, *onda* $n \in \{5,6\}$:

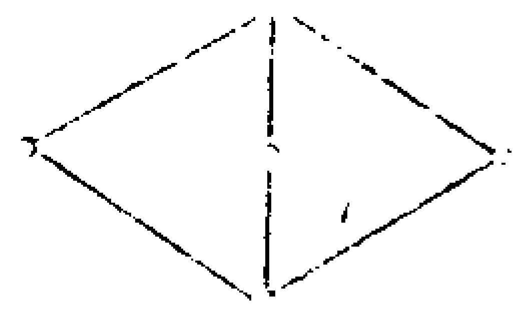
D o k a z. Neka je M BP-(n,n-2)-matroid na nosaču S. Sve cikličke (=netrivijalne) hiperravni od M su kardinalnosti n-2, prema Lemi 1. Zapazimo da je i S ciklički potprostor od M. Nalazimo da binarni (n,2)-matroid M* nema petlji, kao i da su sve njegove cikličke hiperravni kardinalnosti 2.

Kako binarni matroid ranga 2 ne može imati više od tri hiperravni, a sve hiperravni od M^* su kardinalnosti 1 ili 2, to imamo da je $n \leq 3 \cdot 2 = 6$. □

LEMA 9. *Jedina dva* BP-$(n,n-2)$-*matroida, kod kojih je* $n-2 \geq 3$, *su poligon-matroidi grafova*



i



D o k a z. Prema Lemi 8, dovoljno bi bilo ispitati sve $(5,3)$- i $(6,4)$-matroide u katalogu "malih" matroida. Medjutim, lako je dati i direktan dokaz. Shodno dokazu Leme 8., zaključujemo da za $n=6$ matroid M^* ima tri 2-hiperravni, a za $n=5$ M^* ima dve 2-hiperravni i jednu 1-hiperravan. Duali ovih, jednoznačno odredjenih, matroida su upravo matroidi iz tvrdjenja leme. □

LEMA 10. *Za svako* $n \geq 3$ *postoje tačno dva* BP-$(n,n-1)$ *matroida; to su poligon-matroidi grafova* C_n *i* $C_{n-1}+e$.

D o k a z. Svi $(n,n-1)$-matroidi su binarni, zato što su duali binarnih matroida ranga 1. Dualizacijom mreža cikličkih potprostora matroida ranga 1 se zaključuje da $(n,n-1)$-matroidi bez petlji imaju tačno dva ciklička potprostora, od kojih je jedan prazan. Rang drugog cikličkog potprostora može da ima vrednost izmedju 1 i $n-1$, ali razmatrani $(n,n-1)$-matroid je pejving ako i samo ako je taj rang $n-1$ ili $n-2$ (a ta dva slučaja upravo odgovaraju matroidima navedenim u tvrdjenju leme). □

PRIMEDBA. Lema 10 i Lema 6, odnosno Lema 9 i Lema 7, su primeri kako se tvrdjenja o pejving matroidima ne mogu dualizovati. Nasuprot dva BP-matroida ranga $n-1$, postoji n BP-matroida ranga 1 na n-skupu; nasuprot svega devet BP-$(n,n-2)$-matroida, postoji beskonačan broj BP-$(n,2)$-matroida za razne vrednosti n.

LEMA 11. *Svi* (n,n)-*matroidi* $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ *su* BP.

D o k a z. Svi potprostori ovih matroida su nezavisni i stoga su (n,n)-matroidi – pejving matroidi. S druge strane, n disjunktnih (po parovima) grana mogu poslužiti kao grafička reprezentacija ovih matroida, pa su oni i binarni. □

Lema 6 daje klase a) i b), Lema 7 daje klase c) i d), Lema 11 daje klasu e), Lema 10 daje klasu f), Leme 5 i 9 daju klase g) i h) iz tvrdjenja teoreme. Kako su sve mogućnosti za r i n (tj. za rang i kardinalnost nosača) iscrpene, Teorema je dokazana. □

TEOREMA IV-1.2. *Broj* $BP(n)$ *neizomorfnih binarnih pejving matroida na* n*-skupu je za* $0 \leq n \leq 8$ *dat tabelom*

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
BP(n)	1	2	4	7	11	14	18	20	22

a za $n \geq 9$ *je dat izrazom*

$$BP(n) = \frac{1}{12}(n^2 + 18n + 48 + w(n)) ,$$

pri čemu se vrednosti funkcije $w(n)$ *odredjuju iz sledeće tabele:*

$rest_6(n)$	0	1	2	3	4	5
$w(n)$	0	-7	-4	-3	-4	-7

D o k a z. Koristeći Teoremu IV-1.1., prebrajamo matroide u klasama a) – f) za svako n. Poslednje dve klase, g) i h), sadrže samo šest specijalnih matroida na fiksnim "malim" nosačima. Ta okolnost, kao i mogućnost preklapanja neke od klasa a) – d) sa nekom od klasa e) – f) je razlog što pri prebrajanju posebno izdvajamo male vrednosti n; tačnije, što razlikujemo slučajeve $n \leq 8$ i $n \geq 9$.

Odmah vidimo da u klasama a) i c) postoji po jedan, a u klasi b) n neizomorfnih matroida na n-skupu za svako $n \in N \cup \{0\}$. Pritom se matroid iz klase e) poklapa sa matroidom iz klase a) za $n = 0$, odnosno iz klase b) za $n = 1$ (matroid iz klase e) se poklapa i sa jedinim matroidom iz klase c) za $n = 2$).

Za svako $n \geq 3$ postoje po dva neizomorfna matroida iz klase f), ali se za $n=3$ svaki od njih nalazi i u po jednoj od klasa c) i d). Kod BP-$(n,n-2)$-matroida nema preklapanja sa nekom od ostalih klasa, budući da smo pri njihovom razmatranju postavili uslov $n-2 \geq 3$. Što se tiče šest "specijalnih" BP-matroida iz klasa g) i h), po jedan od njih postoji za $n \in \{5,8\}$ i po dva za $n \in \{6,7\}$.

Preostaje da prebrojimo neizomorfne BP-matroide u klasama c) i d), za proizvoljno $n \in N \cup \{0\}$. Lako je videti da su brojevi takvih matroida jednaki $P_2(n)$, odnosno $P_3(n)$, pri čemu je sa $P_k(n)$ označen broj različitih particija prirodnog broja n u zbir od tačno k prirodnih sabiraka (sabirci u takvim zbirovima odgovaraju brojevima elemenata u odgovarajućim atomima odgovarajućih BP-matroida).

Odmah nalazimo da je $P_2(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, tj. $P_2(n)$ je jednako $\frac{n}{2}$ za n parno i $\frac{n-1}{2}$ za n neparno.

LEMA. $P_3(n) = \frac{1}{12}(n^2 + q(n))$, *gde je* $q(n)$ *odredjeno tabelom*

$rest_6(n)$	0	1	2	3	4	5
$q(n)$	0	-1	-4	+3	-4	-1

Šema dokaza I.: Neka je maksimalan od tri sabirka označen sa k, a drugi po veličini sa j. Tada važi

$\lceil \frac{n}{3} \rceil \leq k \leq n-2$, a za fiksno k $\lceil \frac{n-k}{2} \rceil \leq j \leq \min(k,n-k-1)$.

Otuda sledi

$$P_3(n) = \sum_{k=\lceil \frac{n}{3} \rceil}^{n-2} \ \sum_{j=\lceil \frac{n-k}{2} \rceil}^{\min(k,n-k-1)} 1$$

Dokaz se dovršava primenom veze

$\min(k,n-k-1) = k \iff k \leq \frac{n-1}{2}$, kao i posebnim sumiranjem za svako $rest_6(n)$, zbog uslova celobrojnosti donjih granica suma. $\square$

Šema dokaza II.: Jednačina $x+y+z=n$ ima $\binom{n-3+2}{2} = \frac{1}{2}(n^2-3n+2)$ različitih rešenja u skupu prirodnih brojeva. Označimo sa $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ redom brojeve particija n: na tri različita sabirka, na tri sabirka medju kojima su tačno dva jednaka, i na tri medjusobno jednaka sabirka. Tada je:

$$6A(n) + 3B(n) + C(n) = \frac{1}{2}(n^2-3n+2)$$

Odmah vidimo da je $C(n)=1$ za $\mathrm{rest}_3(n)=0$, inače je $C(n)=0$. Lako se nalazi da je $B(n)+C(n)$ jednako $\frac{1}{2}(n-2)$ za n parno, odnosno $\frac{1}{2}(n-1)$ za n neparno. Iz ovih veza se odredjuje $A(n)$, a zatim i

$$P_3(n) = A(n) + B(n) + C(n) \;. \square$$

Sumiranjem brojeva neizomorfnih matroida u svim klasama a) - h) se dovršava dokaz teoreme. $\square$

IV-2. O UTVRDJIVANJU TRANSVERZALNOSTI MATROIDA

Najpre navodimo jednu teoremu, koja je tesno povezana sa Hall-ovom teoremom o svadbama (može se lako izvesti, naprimer iz Hall-ovog dokaza Rado-ove teoreme ([13]).

TEOREMA IV-2-1. *Neka je* M *transverzalan matroid ranga* r *na skupu* S *sa transverzalnom reprezentacijom* $\tau=\{T_1,\ldots,T_r\}$. *Neka je podskup* $S_m=\{x_1,\ldots,x_m\}$ *skupa* S, *gde je* $m<r$, *transverzala potfamilije* $\tau_m=\{T_{i_1},\ldots,T_{i_m}\}$ *familije* τ $(\{i_1,\ldots,i_m\}\subset\{1,\ldots,r\})$ *i neka je* x_{m+1} *takav elemenat skupa* $S\setminus S_m$, *za koji važi da je skup* $S_{m+1}=S_m\cup\{x_{m+1}\}$ *nezavisan. Tada postoji skup* $T_{i_{m+1}}$ *familije* $\tau\setminus\tau_m$ $(i_{m+1}\in J_m=\{1,\ldots,r\}\setminus\{i_1,\ldots,i_m\})$ *za koji važi da je* S_{m+1} *transverzala familije* $\tau_{m+1}=\tau_m\cup T_{i_{m+1}}$.

D o k a z. Teoremu dokazujemo indukcijom po m. $m=0$: Prazan skup je transverzala prazne familije. Ako je skup $\{x_1\}$ nezavisan, onda postoji j, $1 \le j \le r$, takvo da $x_1 \in T_j$. Dovoljno je uzeti $i_1 = j$.

$m-1 \to m$: Označimo tvrdjenje teoreme sa $P(m)$ i pretpostavimo da važi $P(k)$ za sve $k < m$. Pored toga, možemo pretpostaviti da važi $x_k \in T_{i_k}$, $1 \le k \le m$.

Ako postoji $j \in J_m$, takvo da je $x_{m+1} \in T_j$ (slučaj (a_o)), onda je tvrdjenje teoreme očigledno tačno, kad se uzme $i_{m+1}=j$. U protivnom (slučaj (b_o)), budući da je $\operatorname{rang}\{x_{m+1}\} = 1$, postoji k_1, $1 \le k_1 \le m$, takvo da je $x_{m+1} \in T_{i_{k_1}}$. Razlikujemo dva slučaja:

(a1) Postoji $j \in J_m$, takvo da je $x_{k_1} \in T_j$. Svako takvo j ispunjava uslove za i_{m+1}, budući da transverzalu S_{m+1} familije $\tau_m \cup T_j$ možemo izabrati na sledeći način:

$$x_t \in T_{i_t} \quad \text{za} \quad t \in \{1,\dots,m\} \setminus \{k_1\}; \quad x_{m+1} \in T_{i_{k_1}}; \quad x_{k_1} \in T_j$$

(b1) Element x_{k_1} ne pripada nijednom skupu familije $\tau \setminus \tau_m$. Kako je $\operatorname{rang}\{x_{k_1}, x_{m+1}\} = 2$, to mora biti $m \ge 2$, pa po $P(1)$ postoji

$k_2 \in \{1,\dots,m\} \setminus \{k_1\}$, takvo da je $\{x_{k_1}, x_{m+1}\}$

transverzala od $\{T_{i_{k_1}}, T_{i_{k_2}}\}$. U ovom slučaju razlikujemo dva podslučaja:

(a2) Postoji $j \in J_m$, takvo da je $x_{k_2} \in T_j$. Dokaz se dovršava sledećim izborom transverzale S_{m+1} familije $\tau_m \cup T_j$:

$x_t \in T_{i_t}$ za $t \in \{1,\dots,m\} \setminus \{k_1, k_2\}$, $\{x_{k_1}, x_{m+1}\}$ je transverzala od

$$\{T_{i_{k_1}}, T_{i_{k_2}}\}, \quad x_{k_2} \in T_j \quad .$$

(b2) Element x_{k_2} ne pripada nijednom skupu iz $\tau \setminus \tau_m$. Kako je $\operatorname{rang}\{x_{k_1}, x_{k_2}, x_{m+1}\} = 3$, to mora biti $m \ge 3$, pa po $P(2)$

postoji

$k_3 \in \{1,\dots,m\} \setminus \{k_1,k_2\}$, takvo da je skup $\{x_{k_1}, x_{k_2}, x_{m+1}\}$ transverzala familije $\{T_{i_{k_1}}, T_{i_{k_2}}, T_{i_{k_3}}\}$.

U ovom slučaju ((b$_2$)) razlikujemo dva dalja podslučaja ((a$_3$) i (b$_3$) respektivno), u zavisnosti od toga da li x_{k_3} pripada ili ne pripada nekom skupu iz $\tau \setminus \tau_m$.

Ovaj postupak se ponavlja sve dok ne dobijemo da u nekoj q-toj iteraciji ($1 \le q \le m-1$) važi slučaj (a$_q$), pri čemu se dokaz dovršava (ukoliko, pak, važi (b$_q$), onda treba dalje razmatrati podslučajeve (a$_{q+1}$) i (b$_{q+1}$)).

Pretpostavimo da smo ovim postupkom stigli do slučaja (b$_{m-1}$), pri čemu smo primenom $P(m-1)$ ustanovili da je skup $A = \{x_{k_1}, \dots, x_{k_{m-1}}, x_{m+1}\}$ transverzala familije $\{T_{i_{k_1}}, \dots, T_{i_{k_m}}\} = \tau_m$, (to smo mogli ustanoviti i na osnovu toga što se nijedan od m elemenata nezavisnog skupa A ne nalazi u nekom skupu familije $\tau \setminus \tau_m$).

I ovoga puta razlikujemo dva podslučaja, (a$_m$) i (b$_m$), u zavisnosti od toga da li x_{k_m} pripada ili ne pripada nekom skupu iz $\tau \setminus \tau_m$.

U slučaju (a$_m$) postoji $j \in J_m$, takvo da je $x_{k_m} \in T_j$, pa je skup $A \cup \{x_{k_m}\}$ transverzala familije $\tau_m \cup T_j$, što dovršava dokaz teoreme.

Primetimo, medjutim, da je slučaj (b$_m$) nemoguć. Naime, u tom slučaju se elementi $x_{k_1}, \dots, x_{k_m}, x_{m+1}$, tj. svi elementi skupa S_{m+1}, mogu nalaziti samo u nekom skupovima familije τ_m (a ni u jednom skupu familije $\tau \setminus \tau_m$). To je u kontradikciji sa činjenicom da je skup S_{m+1} parcijalna transverzala dužine m+1 familije τ, tj. sa činjenicom da je skup S_{m+1} nezavisan u M.

Ovim je teorema dokazana u svakom slučaju (jedan od slučajeva $(a_0),(a_1),\dots,(a_m)$ mora nastupiti). $\square$

Jedna posledica ove teoreme "o postepenom produžavanju parcijalne transverzale" je sledeća:

TEOREMA IV-2.2. *Neka je* M *transverzalan matroid na skupu* S *i neka je* H *ciklička hiperravan od* M. *Svaka transverzalna reprezentacija matroida* M *mora sadržati skup* $S\setminus H$.

D o k a z. Neka je $\operatorname{rang}(M) = r$ i neka je $\tau = \{T_1,\dots,T_r\}$ proizvoljna transverzalna reprezentacija od M. Bez uticaja na opštost možemo pretpostaviti da je $H = \{x_1,\dots,x_h\}$ $(h \geq r)$, pri čemu $x_i \in T_i$, $1 \leq i \leq r-1$. Naime, kako je $\operatorname{rang}(H) = r-1$, to skup H sadrži nezavisan $(r-1)$-podskup. Prenumeracijom možemo postići da je taj skup baš $\{x_1,\dots,x_{r-1}\}$. On je parcijalna transverzala dužine $r-1$ familije τ i prenumeracijom možemo postići da bude transverzala baš uredjene potfamilije $\{T_1,\dots,T_{r-1}\}$.

Tvrdimo da je $H \cap T_r = \emptyset$. Ako postoji j, $r \leq j \leq h$, tako da je $x_j \in T_r$, onda skup H sadrži transverzalu $\{x_1,\dots,x_{r-1}, x_j\}$ familije τ, što je u suprotnosti sa $\operatorname{rang}(H) = r-1$.

S druge strane, ako postoji i, $1 \leq i \leq r-1$, tako da je $x_i \in T_r$, onda, na osnovu uslova cikličnosti, važi $\operatorname{rang}(H\setminus x_i) = \operatorname{rang}(H) = r-1$, pa postoji k, $r \leq k \leq h$, tako da je skup

$$A = \{x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_{r-1},x_k\} \quad \text{nezavisan.}$$

Kako je skup $A\setminus x_k$ transverzala familije $\{T_1,\dots,T_{i-1},T_{i+1},\dots,T_r\}$, to je prema Teoremi IV-2.1 (za $m = r-2$, $S_m = A\setminus x_k$, $S_{m+1} = A$) skup A transverzala bar jedne od familija $\tau\setminus T_i$ i $\tau\setminus T_r$. U svakom slučaju, budući da je po pretpostavci $x_i \in T_i \cap T_r$, podskup $A \cup x_i$ skupa H je transverzala familije τ, što je opet u kontradikciji sa $\operatorname{rang}(H) = r-1$.

Ako je $x \in S \setminus H$, onda je rang$(\{h_1,\ldots,h_{r-1},x\}) = r$, inače bi element x pripadao zatvorenju skupa $\{h_1,\ldots,h_{r-1}\}$. Zaključimo da je $x \in T_r$, kao i da je $S \setminus H \subseteq T_r$. Kako je $T_r \cap H = \emptyset$ i $T_r \subseteq S$, to je $T_r = S \setminus H$. $\square$

Koristeći ovu teoremu, izvodimo karakterizaciju transverzalnih pejving matroida:

TEOREMA IV-2.3. *Pejving matroid M ranga r na skupu S sa jedinim netrivijalnijim hiperravnima* $H_1,\ldots,H_k$ *je transverzalan ako i samo ako*

$$\left.\begin{array}{l} \text{za svako } t,\ 2 \le t \le k,\ \text{ i svako} \\ \{i_1,\ldots,i_t\} \subseteq \{1,\ldots,k\} \ \text{ važi} \\ |H_{i_1} \cap \ldots \cap H_{i_t}| \le r-t\,. \end{array}\right\} \quad \otimes$$

PRIMEDBA. Za $t=1$ (odakle i za $k=1$) navedena nejednakost nije nikad ispunjena, budući da bi to bilo u suprotnosti sa netrivijalnošću hiperravni H_{i_1}.

D o k a z. Pretpostavimo da uslov $\otimes$ nije zadovoljen, tj. da u M postoje neke netrivijalne hiperravni $H_{i_1},\ldots,H_{i_t}$, $t \ge 2$, tako da je $H_{i_1} \cap \ldots \cap H_{i_t} = D$, gde je $|D| > r-t$.

Prema Teoremi IV-2.2. svaka transverzalna reprezentacija od M mora sadržati skupove $S\setminus H_{i_1},\ldots,S\setminus H_{i_t}$. Nijedan element skupa D se ne može javiti u nekom od tih t "obaveznih" skupova. Kako je $|D| > r-t$, zaključujemo da skup D ne može biti parcijalna transverzala neke transverzalne reprezentacije matroida M. S druge strane, skup D je nezavisan u M, budući da je M pejving matroid. Na osnovu poslednje dve osobine skupa D nalazimo da matroid M nije transverzalan.

Obrnuto, pretpostavimo da je kod nekog pejving matroida M ispunjen uslov $\otimes$. Dokazaćemo da je u tom slučaju familija skupova

$$\tau = \{S\setminus H_1,\ldots,S\setminus H_k,\ \underbrace{S,\ldots,S}_{r-k}\}$$

— transverzalna reprezentacija od M.

Neki r-podskup R skupa S je baza matroida M ako i samo ako nije sadržan u nekom skupu H_i, $1 \leq i \leq k$.

Ako skup R nije baza od M, onda R nije ni transverzala familije τ, budući da je $R \cap (S \setminus H_i) = \emptyset$ za odgovarajuće H_i.

Ako je skup R baza od M, onda ćemo pokazati da R sadrži transverzalu familije $\{S \setminus H_1, \ldots, S \setminus H_k\}$, iz čega svakako sledi da je R transverzala od τ.

Dovoljno je pokazati da familija skupova $\{R \cap (S \setminus H_1, \ldots \ldots, R \cap (S \setminus H_k)\}$ zadovoljava uslove za egzistenciju transverzale.

Kako po pretpostavci skup R nije sadržan ni u jednom od skupova $H_1, \ldots, H_k$, to sledi da je

$$|R \cap (S \setminus H_i)| \geq 1 , \quad 1 \leq i \leq k$$

Za svako t, $2 \leq t \leq k$, i za svako $I = \{i_1, \ldots, i_t\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$. treba pokazati da važi

$$\left| \bigcup_{i \in I} (R \cap (S \setminus H_i)) \right| \geq t$$

Primetimo da je

$$\bigcup_{i \in I} (R \cap (S \setminus H_i)) = R \cap \bigcup_{i \in I} (S \setminus H_i) = R \cap (S \setminus \bigcap_{i \in I} H_i)$$

Uvedimo oznaku $E = S \setminus \bigcap_{i \in I} H_i$. Preostaje da se dokaže da je $|R \cap E| \geq t$.

Kako je $|E| = |S| - |\bigcap_{i \in I} H_i|$, to po pretpostavci ⊗ imamo

$$|E| \geq n - r + t, \quad \text{gde je} \quad n = |S|.$$

Uzimajući u obzir da je

$|R| = r$ i $|R \cup E| \leq n$, dobijamo

$$|R \cap E| = |R| + |E| - |R \cup E| \geq r + n - r + t - n = t. \quad \square$$

POSLEDICA. *Nijedan pejving matroid ranga* r *, koji ima više od* r *netrivijalnih hiperravni, nije transverzalan.*

D o k a z. Ako u (8) stavimo $t > r$, onda nejednakost $|H_{i_1} \cap \ldots \cap H_{i_t}| \leq r - t$ nije zadovoljena .

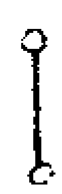
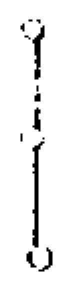
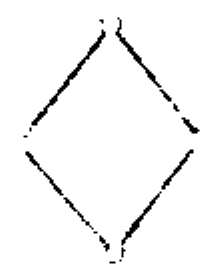
Na osnovu dosadašnjih rezultata lako prebrajamo transverzalne matroide ranga 2:

TEOREMA IV-2.4. *Broj neizomorfnih transverzalnih matroida ranga 2 na n-skupu je dat sledećim izrazom:*

$$\frac{1}{24}\left(2n^3+3n^2-2n \begin{matrix} +0\ , & \text{za } n \text{ parno} \\ -3\ , & \text{za } n \text{ neparno} \end{matrix}\right).$$

D o k a z. Prema Posledici Teoreme IV-2.3., svi matroidi ranga 2, koji imaju više od dve cikličke hiperravni, nisu transverzalni (podsećamo da svi matroidi ranga 2 bez petlji spadaju u pejving matroide, a prisustvo petlji ne utiče na transverzalnost). S druge strane, oni matroidi ranga 2, koji imaju najviše dve cikličke hiperravni,su ili C-lanci ili C-kvadrati, pa su transverzalni prema Teoremama III-4.1. i III-8.1.

Zaključujemo da postoje samo četiri klase transverzalnih matroida ranga 2, sa sledećim tipovima CF-mreža:

a) b)  c)  d) 

Posebno prebrajamo neizomorfne matroide ranga 2 na n-skupu u svakoj od ovih klasa:

<u>KLASA a)</u> ima samo jedan matroid sa n-2 petlji i dve konture;

<u>KLASA b)</u> ima 2(n-2) matroida. Broj petlji kod matroida ranga 2 na n-skupu s 0-1 CF-mrežom može imati bilo koju vrednost izmedju 0 i n-3. U svakom od tih slučajeva rang jedinice CF-mreže može biti ili 1 ili 2.

<u>KLASA c)</u> ima $\binom{n-2}{2} = \frac{1}{2}(n^2 - 5n + 6)$ matroida.

Označimo cikličke potprostore ranga 0, 1, 2 sa A, B, C respektivno. Uvedimo i oznake $x_1 = |A|$, $x_2 = |B \setminus A|$, $x_3 = |C \setminus B|$. Postoji bijekcija izmedju neizomorfnih matroida u ovoj klasi i celobrojnih rešenja jednačine $x_1 + x_2 + x_3 = n$, koja zadovoljavaju uslove $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 2$.

KLASA d) Broj matroida u ovoj klasi je dat izrazom

$$\frac{1}{24}(2n^3 - 9n^2 + 10n \begin{matrix} +0 \\ -3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} ,\ \text{za } n \text{ parno} \\ ,\ \text{za } n \text{ neparno} \end{matrix}) .$$

Primetimo da je ovo ustvari broj neizomorfnih C-kvadrata ranga 2. Svi C-kvadrati ranga 2 su simetrični s obzirom na rangove "bokova" (oba njihova "boka" su ranga 1) i nemaju kopetlje (inače bi im rang bio veći od 2), pa se njihove jedinice CΓ-mreže poklapaju sa nosačem (jedinicom geometrijske mreže). Najzad, kako za r=2 uvek važi $n \geq 2r-4$, to je gore navedeni izraz, prema oznakama uvedenim u Odeljku III-5. prethodne glave, jednak $\bar{S}_2^I(n)$ i lako ga odredjujemo iz nadjene formule za $\bar{S}_r^I(n)$.

Dokaz Teoreme se dovršava sabiranjem brojeva matroida u klasama a) - d) . $\square$

U nastavku uopštavamo Teoremu IV-2.2.

TEOREMA IV-2.5. *Neka je* M *transverzalan matroid ranga* r *na skupu* S *i neka je* K *ciklički potprostor ranga* $k (k < r)$ *od* M. *Tada svaka transverzalna reprezentacija od* M *sadrži* r-k *skupova, čija unija je skup* $S \setminus K$.

D o k a z. Neka je $\tau = \{T_1, \ldots, T_r\}$ proizvoljna transverzalna reprezentacija od M. Ako je $K = \{x_1, \ldots, x_p\} (p > k)$, onda možemo, slično kao u dokazu Teoreme IV-2.2., pretpostaviti da $x_i \in T_i$, $1 \leq i \leq k$. Najpre ćemo dokazati da je

$$K \cap T_j = \emptyset \quad \text{za} \quad k+1 \leq j \leq r.$$

Nasuprot tome, pretpostavimo da za neko j, $k+1 \leq j \leq r$, važi $K \cap T_j \neq \emptyset$. Tada postoji i, $1 \leq i \leq p$, tako da je $x_i \in T_j$.

Ako je $k+1 \leq i \leq p$, onda je podskup $\{x_1, \ldots, x_k, x_i\}$ skupa K transverzala familije $\{T_1, \ldots, T_k, T_j\}$, što je u suprotnosti sa rang(K) = k.

Ako je, pak, $1 \leq i \leq k$, onda, na osnovu cikličnosti skupa K, imamo $\text{rang}(K \setminus x_i) = \text{rang}(K)$, pa postoji m, $k+1 \leq m \leq r$, tako da je skup

$D = \{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k, x_m\}$ nezavisan.

Skup $D \setminus x_m$ je transverzala familije $\alpha = \{T_1, \ldots, T_{i-1}, T_{i+1}, \ldots$ $\ldots, T_k\}$. Prema Teoremi IV-2.1. nalazimo da je skup D transverzala familije $\alpha \cup T_i$ ili familije $\alpha \cup T_q$ za neko q, $k+1 \leq q \leq r$. U prvom slučaju je podskup $D \cup x_i$ skupa K transverzala familije $(\alpha \cup T_i) \cup T_j$, a u drugom slučaju familije $(\alpha \cup T_q) \cup T_i$. U oba slučaja opet imamo kontradikciju sa $\mathrm{rang}(K) = k$.

Uvedimo oznaku $E = \bigcup_{j=k+1}^{r} T_j$. Dokazaćemo da je $E = S \setminus K$.

Kako je K potprostor, to za svako $x \in S \setminus K$ važi $\mathrm{rang}(K \cup x) = \mathrm{rang}(K) + 1$, pa je skup $K \cup x$ parcijalna transverzala dužine $k+1$ familije τ. S obzirom na to da se, prema dokazanom, elementi skupa K mogu nalaziti samo u skupovima $T_1, \ldots, T_k$ familije τ, zaključujemo da postoji j, $k+1 \leq j \leq r$, tako da je $x \in T_j \subseteq E$. Prema tome, imamo da je $S \setminus K \subseteq E$.

S druge strane, kako za svako j, $k+1 \leq j \leq r$, važi $T_j \cap K = \emptyset$, odnosno $T_j \subseteq S \setminus K$, to važi i $E \subseteq S \setminus K$. $\square$

Ako u prethodnu teoremu uvedemo jednu dodatnu pretpostavku za potprostor K, onda možemo preciznije opisati familiju $\{T_{k+1}, \ldots, T_r\}$:

TEOREMA IV-2.6. *Neka je* M *transverzalan matroid ranga* r *na skupu* S *i neka je* K *ciklički potprostor ranga* k $(k < r)$ *od* M, *sa osobinom da u* M *ne postoji ciklički potprostor* X *sa svojstvom* $K \subset X \subset S$. *Tada je svaki* $(r-k)$*-podskup od* $S \setminus K$ *parcijalna transverzala svake transverzalne reprezentacije matroida* M.

PRIMEDBA. Time ujedno tvrdimo da je svaki $(r-k)$-podskup od $S \setminus K$ nezavisan u M.

LEMA. *Neka su* P *i* Q *dva potprostora matroida* M *pri čemu je* $P \subset Q$ *i ne postoji ciklički potprostor* X *u* M *sa svojstvom* $P \subset X \subset Q$.

Ako skup A *ispunjava uslove:*

$$A \subseteq Q \setminus P \quad i \quad |A| \leq \mathrm{rang}(Q) - \mathrm{rang}(P),$$

onda je $\qquad \mathrm{rang}(P \cup A) = \mathrm{rang}(P) + |A| \quad .$

D o k a z leme. Uvodimo oznake $p = \mathrm{rang}(P)$, $q = \mathrm{rang}(Q)$. Dokaz izvodimo indukcijom po $|A|$.

Ako je $|A| = 1$, onda tvrdjenje leme sledi na osnovu toga što je P potprostor (dodavanjem bilo kog novog elementa potprostoru se povišava rang).

Neka tvrdjenje leme važi za $|A| = k$. Ako je $k = q - p$, onda nema šta da se dokazuje, budući da je tvrdjenje leme tačno za svako $|A| \leq \mathrm{rang}(Q) - \mathrm{rang}(P)$. Stoga u daljem pretpostavljamo da je $k < q - p$.

Posmatrajmo skup $A \cup x$, gde je x proizvoljan element skupa $(Q \setminus P) \setminus A$. Očigledno važi

$$p + k \leq \mathrm{rang}(P \cup A \cup x) \leq p + k + 1$$

Pretpostavimo da je

$$\mathrm{rang}(P \cup A \cup x) = p + k = \mathrm{rang}(P \cup A) .$$

U tom slučaju element x pripada zatvorenju skupa $P \cup A$. Označimo potprostor $f(P \cup A)$ sa C. Imamo da važi $|C| \geq |P| + k + 1$ i $\mathrm{rang}(C) = p + k$.

Pretpostavimo da skup C nije uključen u Q. Tada je skup $C \cap Q$ potprostor (kao presek dva potprostora) i to ranga manjeg od p+k (budući da je $\mathrm{rang}(C \cap Q) < \min\{\mathrm{rang}(C), \mathrm{rang}(Q)\} = \min\{p+k, q\} = p+k$). To je u suprotnosti sa činjenicom da skup $C \cap Q$ sadrži podskup $P \cup A$ ranga p+k. Prema tome, potprostor C ispunjava uslov $P \subset C \subset Q$.

Pokazaćemo da je C ciklički potprostor matroida M. Ako bi, nasuprot tome, postojao element y sa svojstvom $\mathrm{rang}(C \setminus y) = \mathrm{rang}(C) - 1 = p + k - 1$, onda bi postojanje bilo kog k-podskupa W skupa $(C \setminus y) \setminus P$ (postoji bar jedno W zbog $|C \setminus y| \geq |P| + k$) bilo u suprotnosti sa induktivnom pretpostavkom, kad se A zameni sa W. Naime, imali bismo

$$\mathrm{rang}(P \cup W) \leq \mathrm{rang}(C \setminus y) = p + k - 1 = \mathrm{rang}(P) + |W| - 1 \; .$$

gde je $|W| = k$.

Zaključujemo da je egzistencija cikličkog potprostora C u kontradikciji sa pretpostavkama leme (C ispunjava iste uslove kao "zabranjeno" X).

Prema tome, svakako važi

$$\operatorname{rang}(P \cup A \cup x) = p + k + 1 = \operatorname{rang}(P) + |A \cup x| ,$$

čime je induktivni dokaz završen. □

Posledice leme. Za sve podskupove F skupa $Q \setminus P$ koji ispunjavaju uslov $|F| < \operatorname{rang}(Q) - \operatorname{rang}(P)$, važi da je $P \cup F$ potprostor matroida M (pri izvodjenju ovog zaključka se koristi i deo dokaza leme, koji se odnosi na $C \subset Q$). Iz toga dalje zaključujemo da je minor $[P,Q]$ matroida M (sa nosačem Q i skupom petlji P) izomorfan uniformnom matroidu $U_{|Q \setminus P|, \operatorname{rang}(Q) - \operatorname{rang}(P)}$. Čini se da je ovaj zaključak od posebnog interesa u slučaju kad su P i Q susedni ciklički potprostori u CF-mreži.

D o k a z teoreme. Koristeći oznake iz dokaza prethodne teoreme, dokazujemo da je svaki $(r-k)$-podskup skupa $S \setminus K$ transverzala familije $\{T_{k+1}, \dots, T_r\}$. Naime, prema Lemi za svako $\{i_1, \dots, i_{r-k}\} \subseteq \{1, 2, \dots, |S| - |K|\}$ važi $\operatorname{rang}(A) = r$, gde je $A = K \cup \{x_{i_1}, \dots, x_{i_{r-k}}\}$. Prema tome, skup A je transverzala familije τ. Kako je $K \cap T_j = \emptyset$ za $k+1 \leq j \leq r$, to je skup $\{x_{i_1}, \dots$ $\dots, x_{i_{r-k}}\}$ transverzala familije $\{T_{k+1}, \dots, T_r\}$. □

Sledeća teorema precizira medjusobni položaj skupova transverzalne reprezentacije, koji se izdvajaju po Teoremi IV-2.5. za uporedive cikličke potprostore:

TEOREMA IV-2.7. *Neka su* P *(ranga* p*) i* Q *(ranga* q*) dva ciklička potprostora transverzalnog matroida* M *ranga* r *na* S, *pri čemu je* $P \subset Q$. *Tada se* $r-q$ *skupova proizvoljne transverzalne reprezentacije* τ, *čija je unija* $S \setminus Q$, *nalazi medju* $r-p$ *skupova od* τ, *čija unija je* $S \setminus P$.

D o k a z. Svaki skup familije τ, koji je uključen u $S \setminus Q$, uključen je i u $S \setminus P$, pa bismo u protivnom imali više od $r-p$ skupova transverzalne reprezentacije uključenih u $S \setminus P$, što bi bilo u suprotnosti sa rang(P) = p. $\square$

Na narednim stranama detaljnije opisujemo postupak dokazivanja netransverzalnosti, odnosno transverzalnosti matroida u katalogu.

Razmatranje se može ograničiti na matroide bez petlji i kopetlji (tj. matroide kod kojih su nula i jedinica CF-mreže redom prazan skup i nosač). Naime, ako skup petlji i skup kopetlji nekog matroida M na S označimo redom sa L i CL, onda je matroid M transverzalan ako i samo ako je transverzalna njegova restrikcija na skup $S\setminus(L\cup CL)$ (ako je M transverzalan, onda za svaku transverzalnu reprezentaciju τ od M mora važiti:

a) nijedan skup familije τ ne sadrži neki element skupa L — u protivnom bismo imali petlju ranga 1;

b) skup CL je parcijalna transverzala of τ - može se pokazati da je skup $S\setminus CL$ ciklički potprostor od M i primeniti Teorema IV-2.6).

Na osnovu Teoremâ III-4.1., III-8.1. i IV-2.3. možemo iz razmatranja o dokazivanju (ne) transverzalnosti isključiti i C-lance, C-kvadrate i pejving matroide.

Dokazivanje netransverzalnosti. Teorema IV-2.2. se može neposredno iskoristiti i za dokazivanje netransverzalnosti mnogih nepejving matroida. Svaki matroid ranga r sa više od r cikličkih hiperravni je netransverzalan.

Na sličan način možemo koristiti i Teoremu IV-2.5. Ako je M matroid ranga r na S, onda svaki koatom (neposredni prethodnik jedinice) K CF-mreže od M implicira pojavu r-rang(K) podskupova od $S\setminus K$ u svakoj transverzalnoj reprezentaciji od M. Ako su K_1 i K_2 dva koatoma CF-mreže od M, onda je $\mathrm{rang}(K_1\cup K_2)=r$, pa ne može postojati skup transverzalne reprezentacije istovremeno uključen u $S\setminus K_1$ i $S\setminus K_2$. Zaključujemo da je netransverzalan i svaki matroid M ranga r, kod koga važi

$$\sum_K (r-\mathrm{rang}(K)) > r ,$$

gde se sumiranje vrši po svim koatomima K CF-mreže od M.

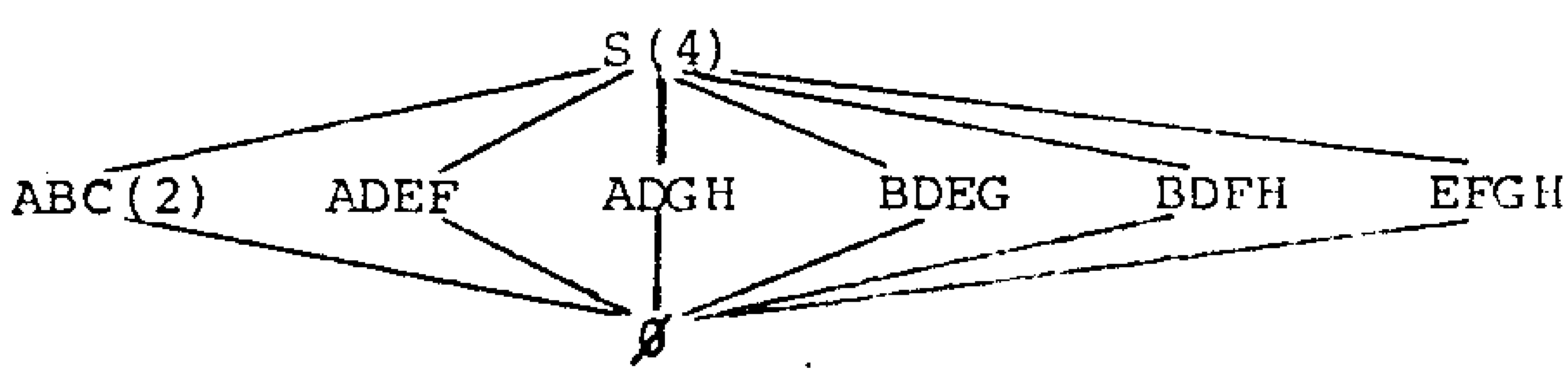
Poznato je da je svaka restrikcija transverzalnog matroida M transverzalan matroid (|24|, str. 66). Ako je nosač restrikcije ciklički potprostor od M, onda u dokazu ove činjenice možemo koristiti i Teoremu IV-2.5. Na osnovu ovoga je za dokaz netransverzalnosti matroida dovoljno naći neku njegovu netransverzalnu restrikciju.

Netransverzalnost se može dokazati uz pomoć Teoreme IV-2.2. i tako što "obavezni" skupovi (tj. oni koji se moraju naći u svakoj transverzalnoj reprezentaciji) imaju neki zavisan skup kao svoju parcijalnu transverzalu, čime se pretpostavka transverzalnosti dovodi u kontradikciju. Kontradikcija sa pretpostavkom transverzalnosti se može izvesti i tako što su neki "obavezni" skupovi nesaglasni sa nekom kombinacijom cikličkih potprostora.

U nekim, komplikovanijim, slučajevima netransverzalnost dokazujemo kontradikcijom, koja se zasniva na primeni Teoreme IV-2.5. Medjutim, u takvim slučajevima se Teorema IV-2.5. primenjuje isključivo na cikličke potprostore ranga r-2, gde je r rang odgovarajućeg matroida.

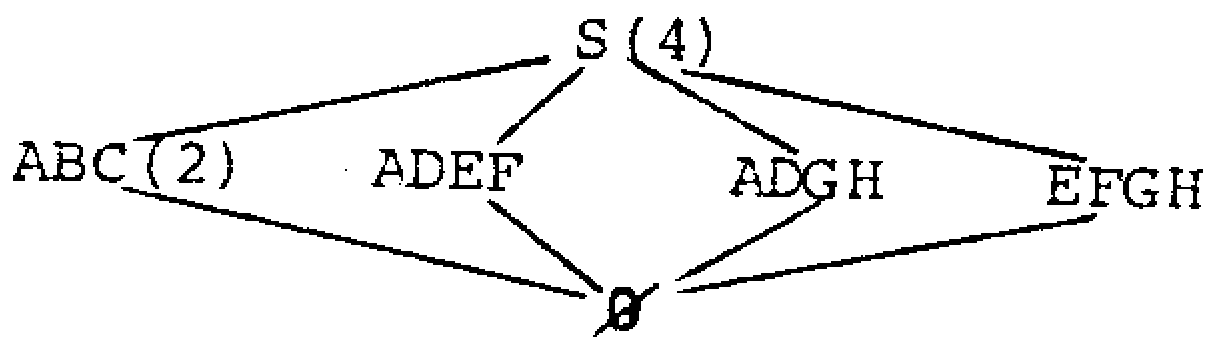
Dokazivanje netransverzalnosti ilustrujemo većim brojem karakterističnih primera, kojima su obuhvaćeni i najkomplikovaniji slučajevi iz kataloga. Uz svaki matroid M navodimo njegovu oznaku (podvučenu), kao i njegovu reprezentaciju (preko CF-mreže sa naznačenim rangovima C-potprostora). Počevši od četvrtog primera, slovo "τ" označava proizvoljnu (tj. bilo koju) transverzalnu reprezentaciju matroida M, pod pretpostavkom da je M transverzalan (od te pretpostavke se polazi, ali se ona naknadno dovodi u kontradikciju).

PRIMER (1): M = 84 S 185



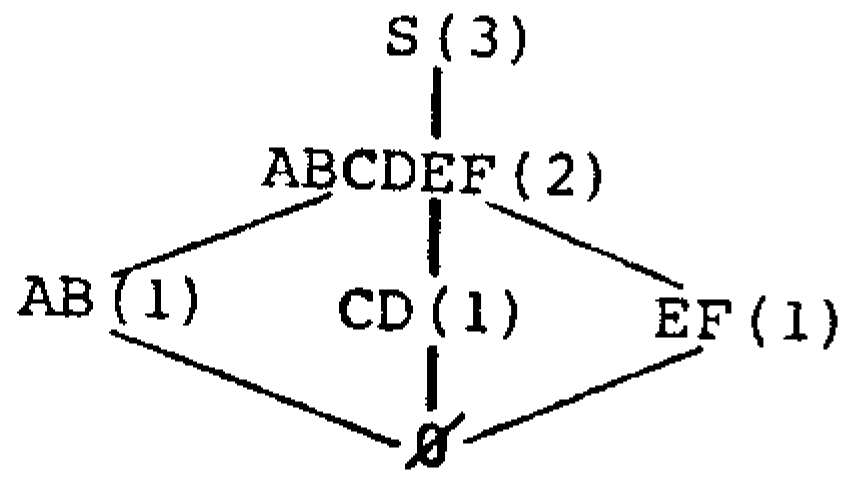
M je netransverzalan, jer je broj njegovih cikličkih hiperravni (5) veći od ranga (4). Analogno se dokazuje netransverzalnost svih matroida sa oznakama izmedju 84 S 186 i 84 S 199.

PRIMER (2): M = 84 S 164

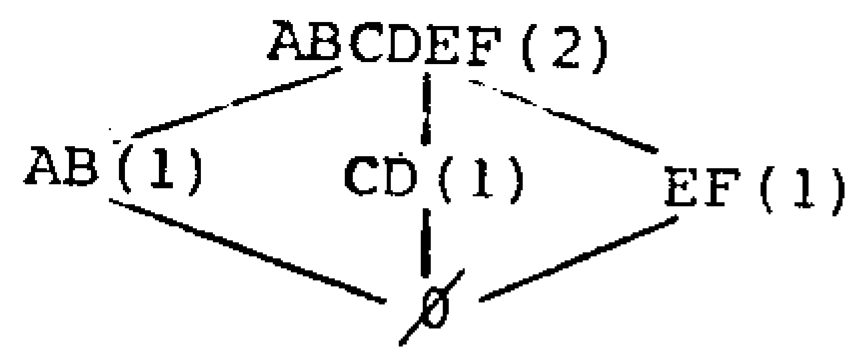


M je netransverzalan, jer je suma razlika ranga matroida i ranga ko atoma CF-mreže veća od ranga matroida ((4-2)+3·(4-3) > 4). Analogno se dokazuje netransverzalnost svih matroida sa oznakama izmedju 84 S 165 i 84 S 184.

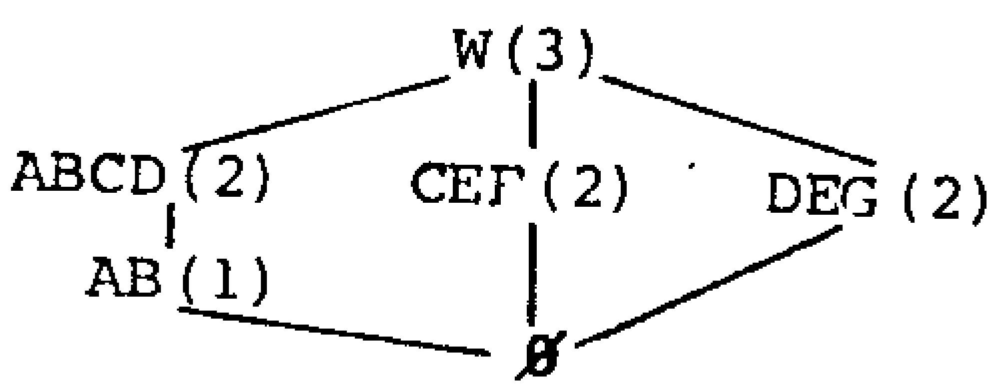
PRIMER (3): M = 83 H 44



M je netransverzalan, budući da je matroid sa CF-mrežom (restrikcija matroida M na skupu ABCDEF, označena u katalogu sa 62 H 6) netransverzalan.

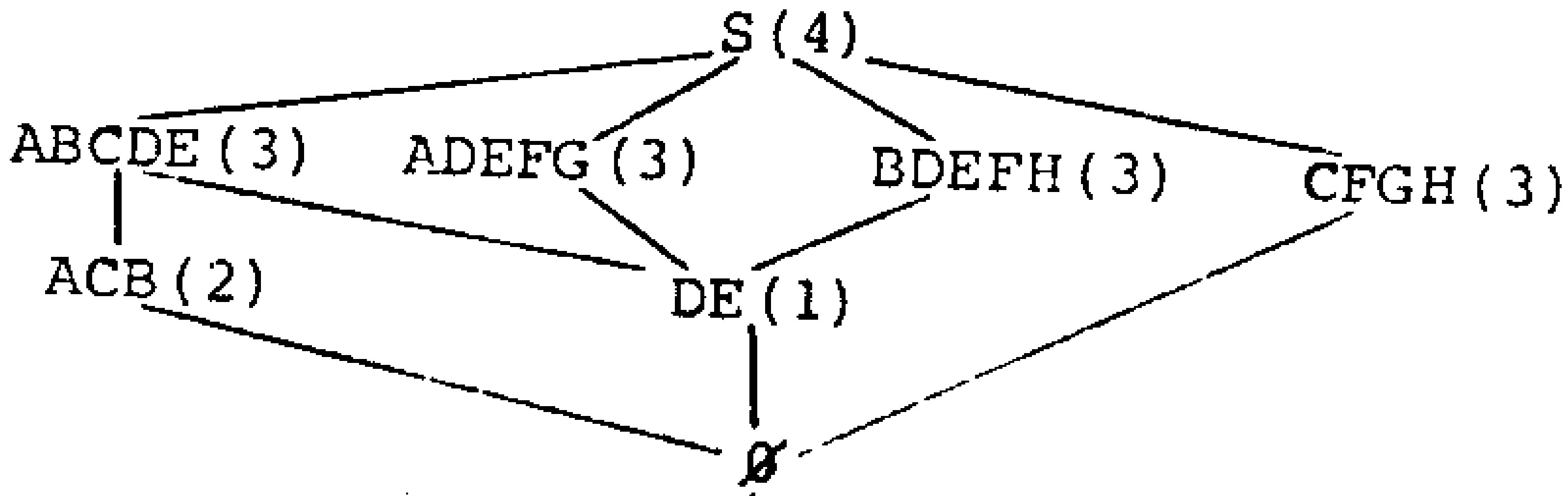


PRIMER (4): M = 73 H 38



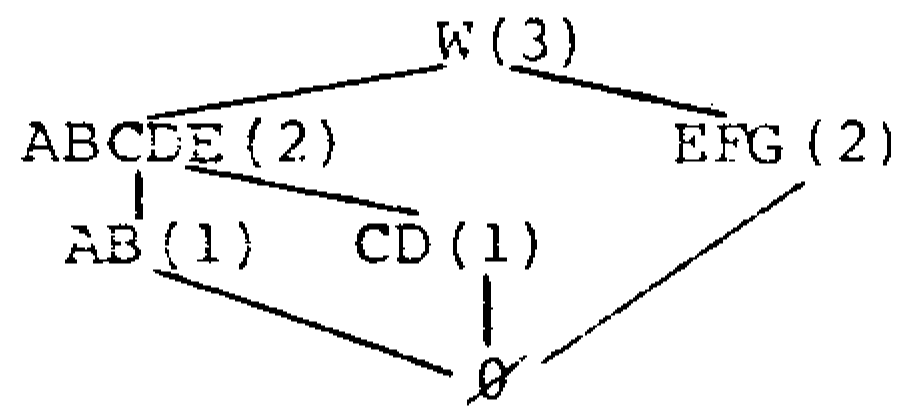
τ mora sadržati skupove ABDG i ABCF, što je u kontradikciji sa rang(AB) = 1.

PRIMER (5): M = 84 H 145



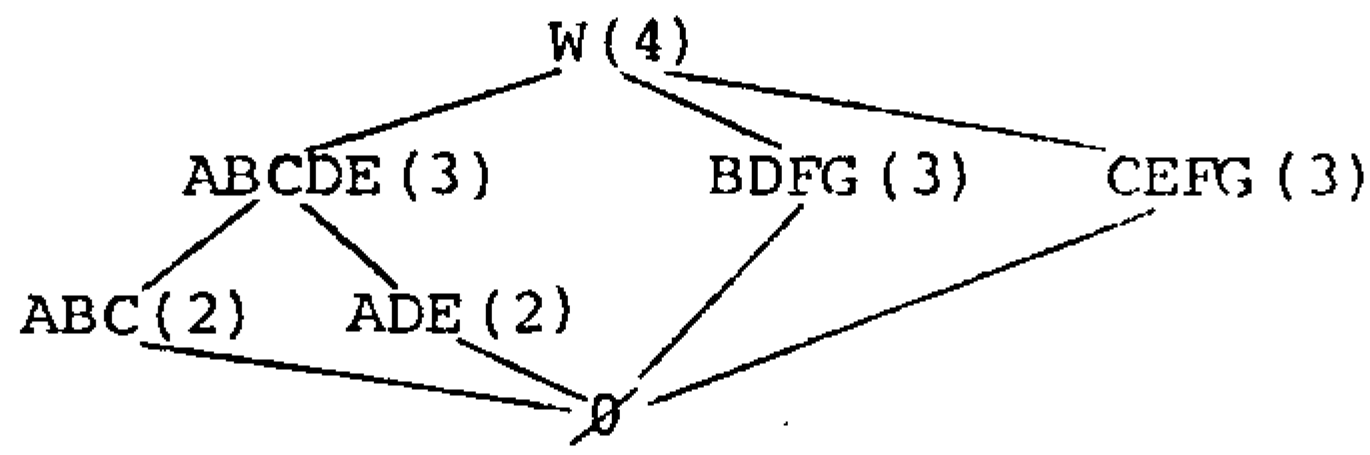
Mora biti τ = {FGH,BCH,ACG,ABDE}. Skup ABC je parcijalna transverzala od τ , što je u suprotnosti sa rang(ABC) = 2.

PRIMER (6): M = 73 H 22



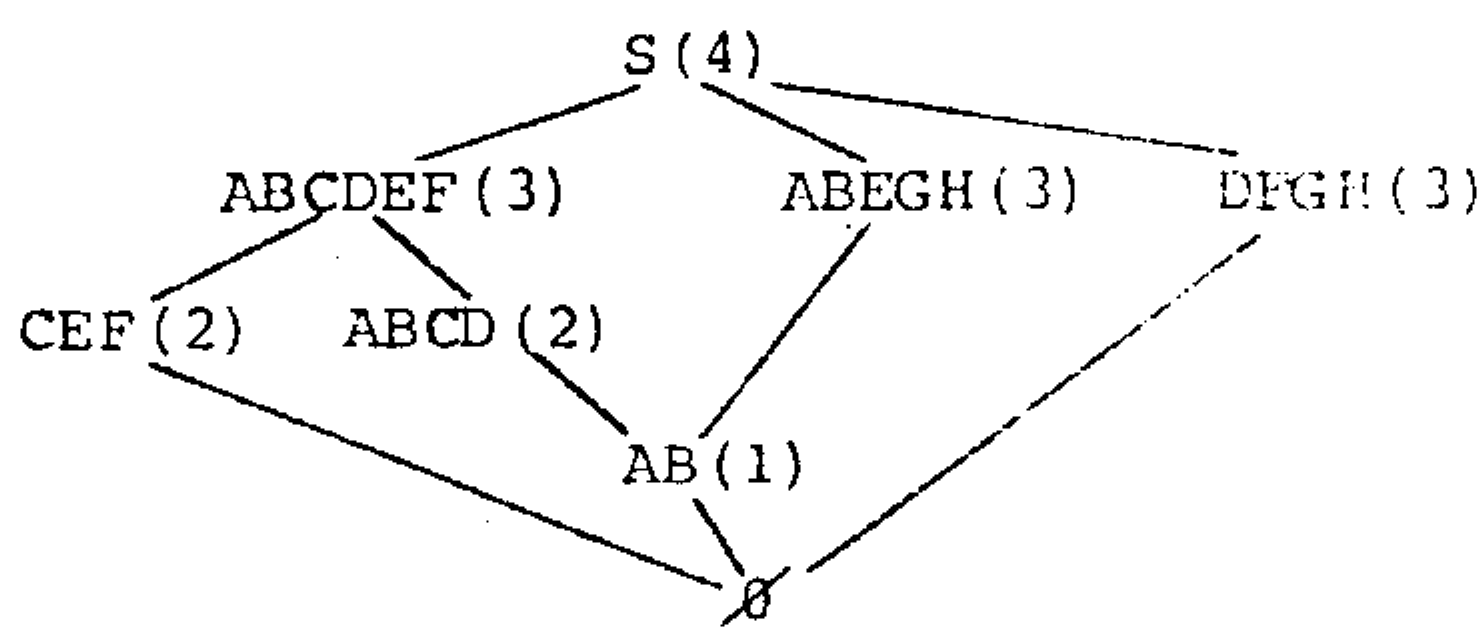
τ mora sadržati skup ABCD. S druge strane, zbog rang(AB) = = rang(CD) = 1, elementi A i B, odnosno elementi C i D, se mogu nalaziti u po samo jednom skupu familije τ . Zaključujemo da se svaki od ova četiri elementa može naći jedino u skupu ABCD, što je u kontradikciji sa rang(ABCD) = 3.

PRIMER (7): M = 74 S 15



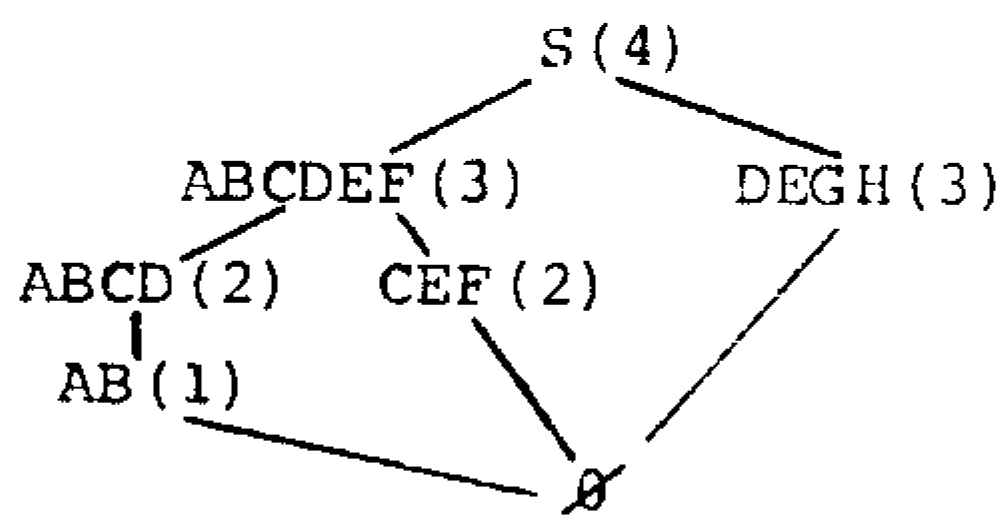
Skupovi ACE i ABD su "obavezni" u τ . Kako je rang(ABCDE) = 3, to se u nekom trećem skupu X familije τ mora nalaziti bar jedan od elemenata A, B, C, D, E. Ako je B ∈ X ili C ∈ X, onda imamo kontradikciju sa rang(ABC) = 2, ukoliko je D ∈ X ili E ∈ X, onda imamo kontradikciju sa rang(ADE) = 2. Najzad, ako je A ∈ X, onda se kontradikcija može ostvariti na bilo koji od ova dva načina.

PRIMER (8): M = 84 H 121



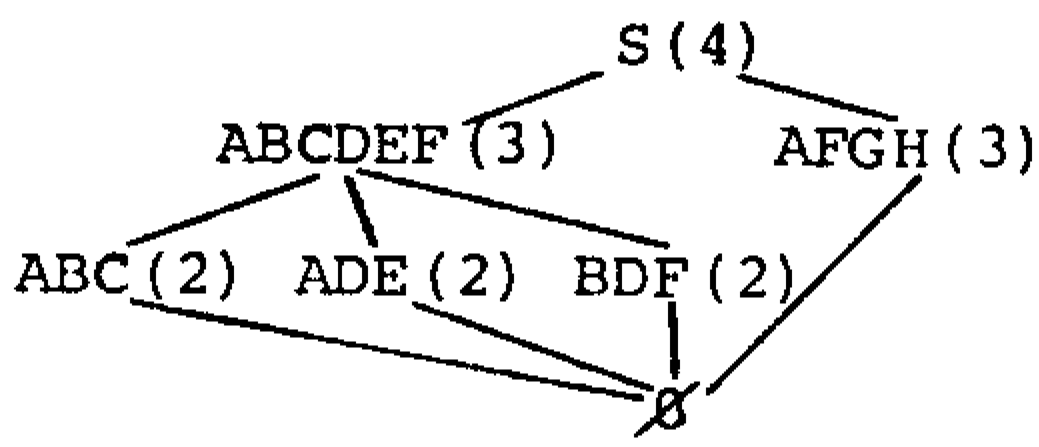
τ mora sadržati skupove GH, CDF i ABCE. Kako je rang(AB) = 1 i rang(CEF) = 2, to nijedan od elemenata A, B, C, E, F ne može pripadati četvrtom skupu familije τ, što je u kontradikciji sa, naprimer, rang(ACE) = 3.

PRIMER (9): M = 84 H 128



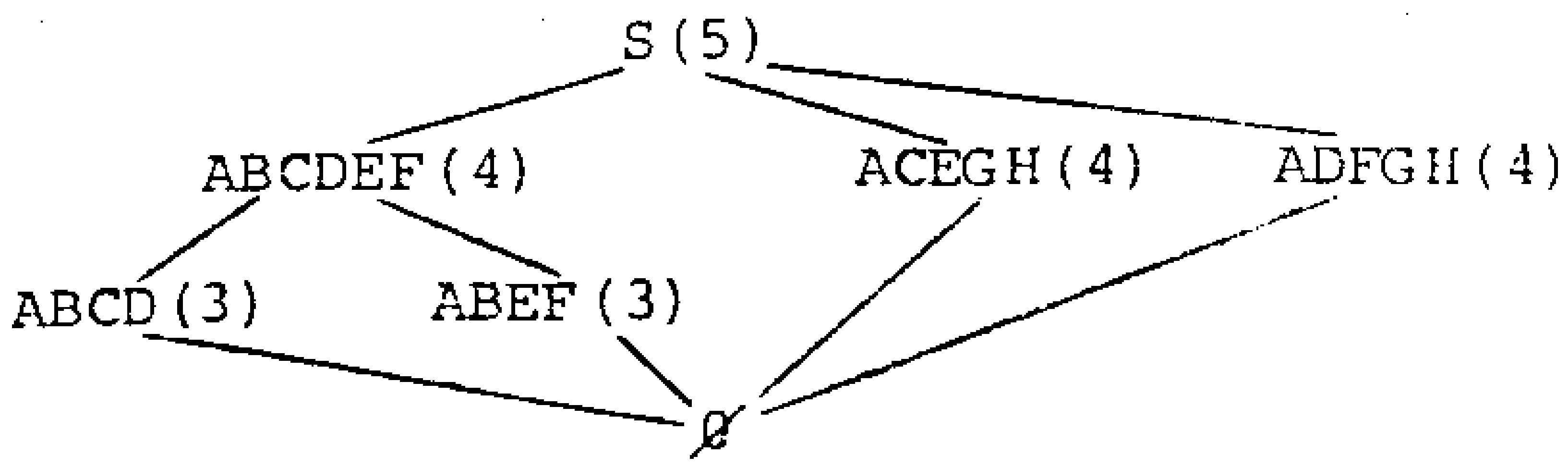
Skupovi GH i ABCF se moraju pojaviti u τ. Ako primenimo Teoremu IV-2.5. na ciklički potprostor CEF, onda nalazimo da τ sadrži i neki nadskup skupa ABD, što je u kontradikciji sa rang(AB) = 1.

PRIMER (10): M = 84 S 62



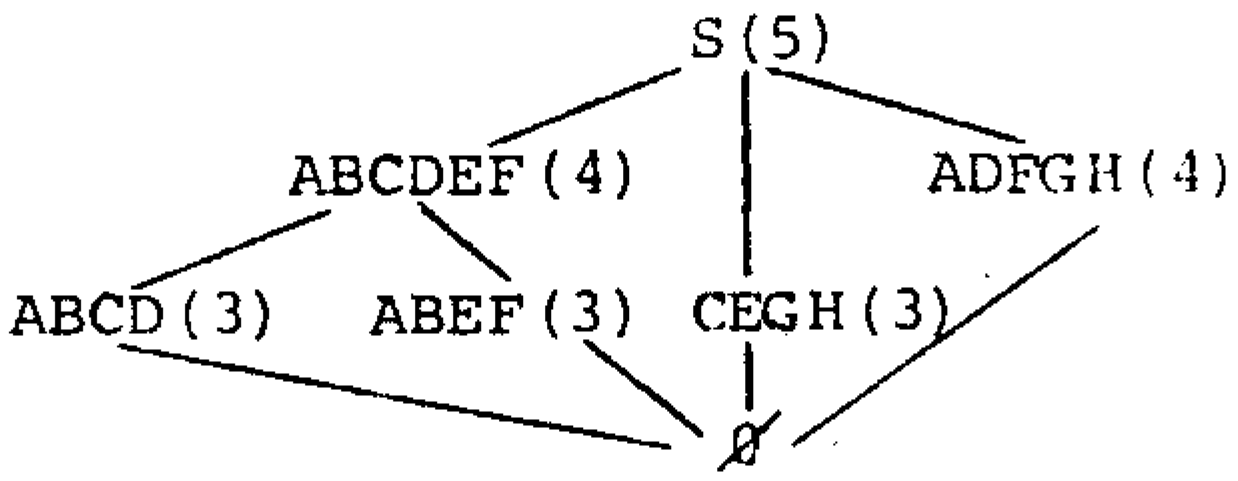
Skupovi GH i BCDE su "obavezni" u τ. Pored toga, τ mora sadržati i nadskupove skupova DEF, BCF i ACE. Ako bi jedan skup iz τ bio zajednički nadskup dvaju od poslednja tri skupa, onda bi neki ciklički potprostor ranga 2 bio parcijalna transverzala familije τ. Naprimer, ako bi familija τ sadržala skup BCDEF, onda bi skupovi ABC i ADE bili njene parcijalne transverzale. Ako bi, pak, τ sadržala neki nadskup skupa ABCDEF, onda bi zbog rang(ABCDEF) = 3 opet postojala neka "zabranjena" parcijalna transverzala dužine 3. Prema tome, τ ima najmanje 5 skupova, što je u kontradikciji sa rang(M) = = 4.

PRIMER (11): M = 85 S 85



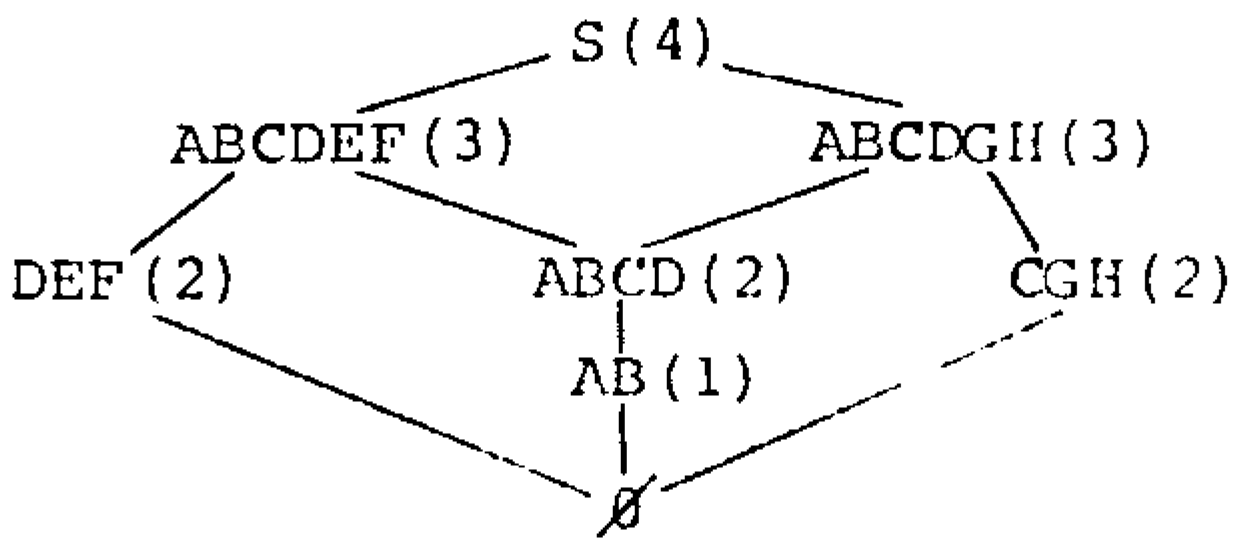
Lako je proveriti da τ ima pet "obaveznih" skupova,od kojih nijedan ne sadrži element A, što je u kontradikciji sa rang(A) = 1.

PRIMER (12): M = 85 S 114



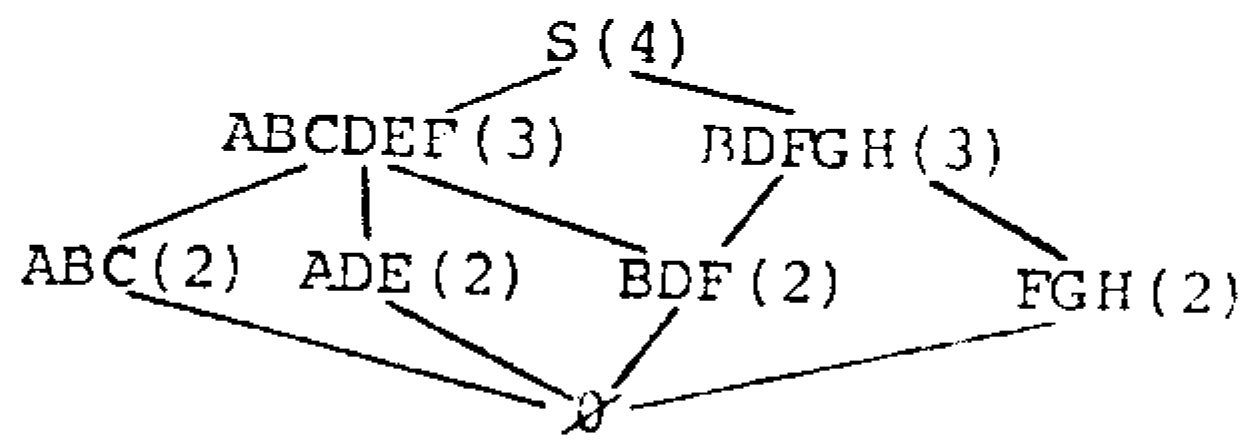
τ mora sadržati skupove GH i BCE, dva podskupa od ABDF, čije parcijalne transverzale su, po Teoremi IV-2.6., svi 2-podskupovi od ABDF, kao i nadskupove skupova EF, odnosno CD. Skup ABCD je parcijalna transverzala familije τ (možemo uzeti da je B predstavnik skupa BCE, AD transverzala podskupova skupa ABDF i C predstavnik nadskupa skupa CD), a to je u kontradikciji sa rang(ABCD) = 3.

PRIMER (13): M = 84 H 97



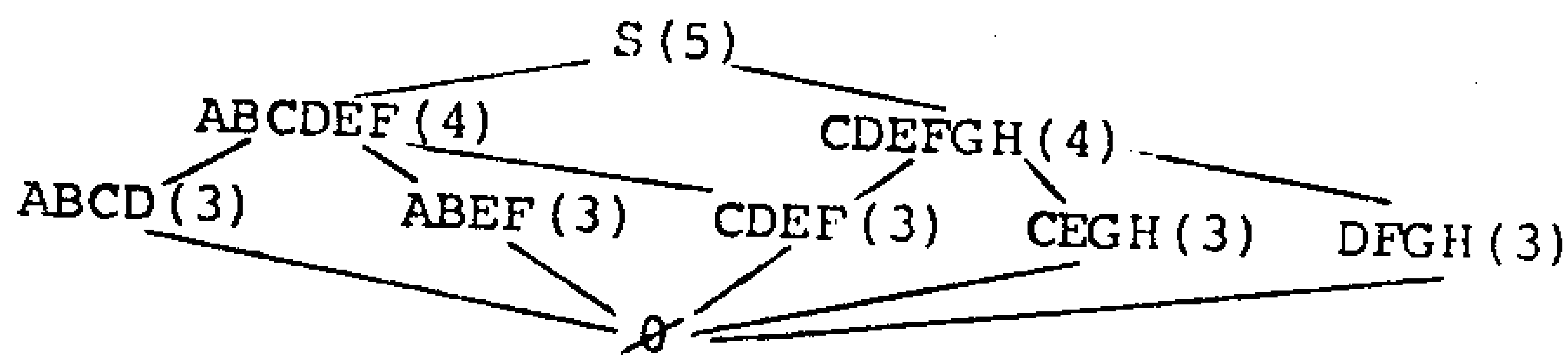
τ svakako sadrži nadskupove skupova ABC (=ABCDEF \ DEF) i ABD (=ABCDGH \ CGH). Kako je rang(AB) = 1, to u τ mora postojati nadskup skupa ABCD, i to je jedini skup familije τ , koji sadrži neki od elemenata A i B. To je u kontradikciji sa zahtevom da postoje dva skupa familije τ , čija unija je skup ABCGH i dva skupa, čija unija je skup ABDEF.

PRIMER (14): $M = 84\ S\ 21$



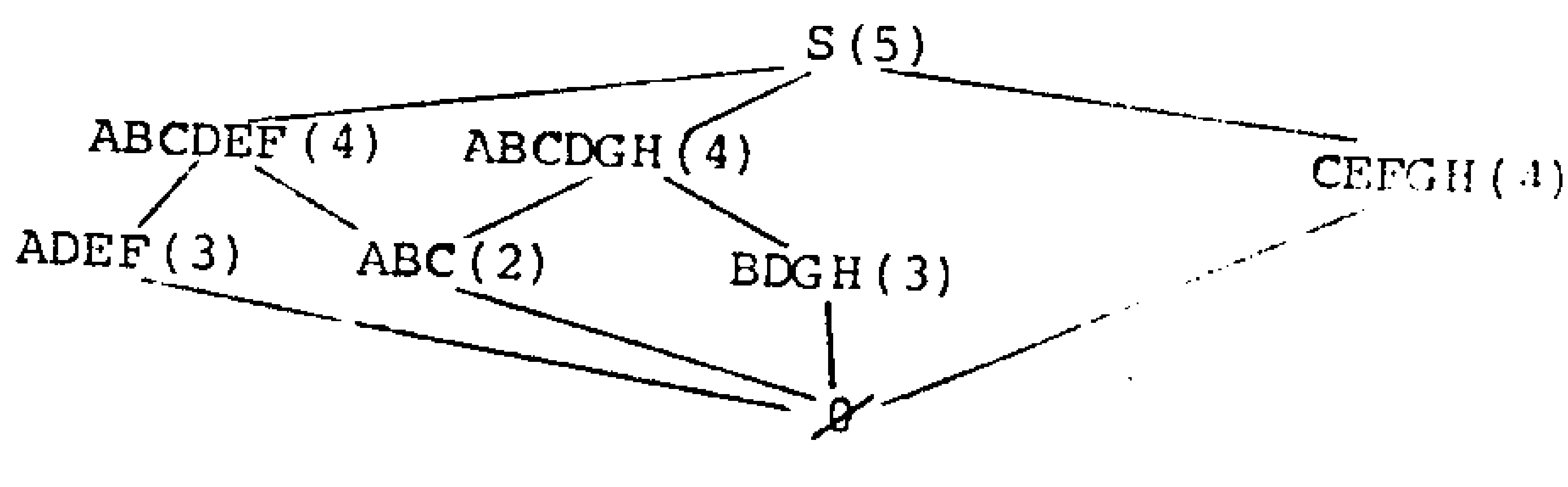
τ mora sadržati skupove GH i ACE, kao i nadskupove skupova DEF, BCF i BD. U τ ne može postojati zajednički nadskup neka dva ili sva tri od poslednja tri skupa, u protivnom ne bi postojala u τ po dva skupa sa unijama DEFGH, BCFGH i ABCDE. Nalazimo da je $|\tau| \geq 5$, što je u kontradikciji sa rang(M) = 4.

PRIMER (15): 85 S 118



τ sadrži "obavezne" skupove GH i AB. Postoje četiri para skupova od τ, čije unije su redom EFGH, CDGH, ABDF i ABCE. Jedan od skupova u svakom paru je AB ili GH, dok se drugi skupovi kod svaka dva para razlikuju. Imamo $|\tau| \geq 6$, što je u kontradikciji sa rang(M) = 5.

PRIMER (16): $M = 85\ S\ 163$



τ obavezno sadrži skupove GH, EF i ABD, kao i nadskupove skupova BC i AC. Ne postoji nadskup skupa ABC u τ, budući da dva para skupova iz τ imaju unije BCGH, odnosno ACEF. Nalazimo da je skup ABC parcijalna transverzala familije τ, što je u kontradikciji sa rang(ABC) = 2.

Dokazivanje transverzalnosti. Najpre dokazujemo jednu teoremu.

TEOREMA IV-2.8. *Neka je M matroid na skupu S. Podskup X nosača S je nazavisan u M ako i samo ako važi* $|X \cap F| \leq$ $\leq \text{rang}(F)$ *za sve cikličke potprostore F matroida M* .

D o k a z. Neka za neki (proizvoljan) podskup F nosača S važi $|X \cap F| > \text{rang}(F)$. Kako je $\text{rang}(F) \geq \text{rang}(X \cap F)$, to važi $|X \cap F| > \text{rang}(X \cap F)$, pa je skup $X \cap F$ zavisan u M, iz čega sledi da je i skup X zavisan u M (svaki podskup nezavisnog skupa bi morao biti nezavisan).

Obrnuto, neka je skup X zavisan u M. Tada X svakako sadrži minimalan zavisan skup, cikl C. Prema Lemi 1. uz Teoremu III-8.1., zatvorenje cikla C je neki ciklički potprostor F. Tada je

$$|X \cap F| \geq |C| > |C| - 1 = \text{rang}(C) = \text{rang}(F) \quad ,$$

pa imamo ciklički potprostor F matroida M, za koji važi

$$|X \cap F| > \text{rang}(F) \quad . \quad \Box$$

Uz svaki transverzalan matroid u katalogu, koji nije C-lanac ili C-kvadrat, navedena je jedna njegova transverzalna reprezentacija. Ako odgovarajući transverzalni matroid nema petlji ili kopetlji, onda je (u svakom pojedinom slučaju) izvršena efektivna provera navedene transverzalne reprezentacije.

Neka je M transverzalan matroid ranga r na n-skupu S i neka je τ njemu pridružena r-familija, za koju tvrdimo da je transverzalna reprezentacija matroida M. Da bismo to i dokazali, dovoljno je dokazati da za svaki (od ukupno $\binom{n}{r}$) r-podskupa X skupa S važi tačno jedno od sledeća dva tvrdjenja:

(1) X je transverzala familije τ

(2) $|X \cap F| > \text{rang}(F)$ za neki ciklički potprostor F matroida M.

Naime, Teorema IV-2.8. daje, s jedne strane, da je svaki r-podskup X od S, za koga važi tvrdjenje (2)—r-nebaza, a s druge strane, da su svi ostali r-podskupovi skupa S — baze matroida M. Ako za sve te "ostale r-podskupove", i samo za njih, važi tvrdjenje (1), onda zaključujemo da se baze matroida M tačno poklapaju sa transverzalama familije τ, iz čega sledi da je τ transverzalna reprezentacija matroida M.

Prilikom primene ovog postupka za testiranje transverzalne reprezentacije su potrebna dva (pod) algoritma:

a) za generisanje svih transverzala date familije

b) za generisanje svih r-podskupova X skupa S, za koje postoji ciklički potprostor F matroida M sa svojstvom $|X \cap F| > \mathrm{rang}(F)$.

Dajemo skice ovih algoritama za opšti slučaj:

a) Neka je $\tau = \{T_1, \ldots, T_r\}$ i neka je

$$\bigcup_{i=1}^{r} T_i = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

Najpre odredjujemo sve one transverzale familije τ, koje sadrže element x_1.

Izaberimo skup T_j tako da je $x_1 \in T_j$. Ako je x_1 predstavnik skupa T_j, onda se problem redukuje na problem generisanja svih transverzala familije

$$\tau_{1j} = \{T_1 \setminus x_1, \ldots, T_{j-1} \setminus x_1, T_{j+1} \setminus x_1, \ldots, T_r \setminus x_1\}$$

Može se pretpostaviti da je ovaj "manji" problem (sa jednim skupom familije manje i sa bar jednim elementom unije manje) — rešen. Na analogan način treba generisati sve transverzale familije τ_{1j} za sve moguće izbore j. Nakon ovoga imamo sve transverzale familije τ, koje sadrže element x_1, samo što je potrebno udaljiti one koje se ponavljaju.

U sledećem koraku algoritma odredjujemo one transverzale familije τ, koje sadrže element x_2, a ne sadrže x_1 (pritom je pogodno krenuti od familije $\tau_1 = \{T_1 \setminus x_1, \ldots, T_r \setminus x_1\}$), itd.

b) Za svaki ciklički potprostor F matroida M se posebno generišu svi r-podskupovi X skupa S za koje važi:

$$|X \cap F| > \text{rang}(F) \quad \text{i}$$

ne postoji ciklički potprostor G matroida M sa svojstvom $G \subset F$ i $|X \cap G| > \text{rang}(G)$.

Nakon ovoga (ili već i usput) eliminisati sve r-pod - skupove koji se ponavljaju.

Uslov "nepostojanja G" je uveden da bi se umanjilo ponavljanje generisanih r-podskupova, da bi se r-podskup X pojavio samo kod minimalnih cikličkih potprostora F za koje važi $|X \cap F| > \text{rang}(F)$. Kako ti minimalni potprostori nisu uvek jedinstveni to uslov "nepostojanja G" nije dovoljan da eliminiše ponovljena generisanja. Naprimer, ako su AB i CD ciklički potprostori ranga 1, onda se svi r-nadskupovi skupa ABCD generišu (najmanje) dvaput.

U cilju primene uslova "nepostojanja G" je pogodno cikličke potprostore matroida M koristiti (za generisanje r-podskupova) redosledom po neopadajućim rangovima. Ako je neki ciklički potprostor F "iskorišćen", onda se svi r-podskupovi nosača, koji sadrže neki podskup skupa F kardinalnosti rang(F) + 1, eliminišu iz daljeg razmatranja (budući da su već jednom generisani).

Primetimo da su u praksi, kod "malih" matroida u katalogu, algoritmi (a) i (b) znatno pojednostavljuju. Njihova primena se prilagodjava svakom pojedinom matroidu.

Naprimer, kod algoritma (a) je pogodno za x_1 izabrati element, koji se javlja u najmanjem broju skupova familije τ. Možemo postaviti kao podciljeve generisanje što većeg broja transverzalâ familije τ, koje su ujedno i transverzale neke familije $A = \{A_1, \ldots, A_r\}$, pri čemu je

$$A_i \subseteq T_i, \quad 1 \le i \le r, \quad \text{i} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{za} \quad i \neq j$$

(broj takvih transverzala familije τ je jednak $\prod_{i=1}^{r} |A_i|$). Prilikom variranja familije A treba nastojati da nova familija A nema nijednu od već generisanih transverzala.

Kod algoritma (b) se velika većina r-nebazâ generiše već pri korišćenju atoma CF-mreže. Svi r-podskupovi cikličkih potprostora kardinalnosti veće od r-1 su r-nebaze, čime se najčešće služimo kod cikličkih hiperravni.

Dokazivanje transverzalnosti se dovršava sabiranjem brojeva r-podskupova skupa S, za koje važi tvrdjenje (1), odnosno tvrdjenje (2); tom prilikom bi kod transverzalnog matroida trebalo dobiti zbir $\binom{n}{r}$.

Da bismo opravdali ovakav završetak dokazivanja transverzalnosti, ukažimo na to da je u svakom pojedinom slučaju lako dokazati da nema r-podskupova nosača, za koje istovremeno važe tvrdjenja (1) i (2). Dovoljno je uočiti da svaka transverzalna reprezentacija τ, koja je u katalogu pridružena nekom transverzalnom matroidu M ranga r, sadrži r - rang(F) skupova disjunktnih sa F, gde je F proizvoljan ciklički potprostor matroida M. Iz toga sledi da svaka transverzala familije τ sadrži najviše rang(F) elemenata skupa F, što ima za posledicu da za nijednu transverzalu familije τ ne važi tvrdjenje (2).

Kod oba algoritma ((a) i (b)) koristimo skraćene oznake za zapis r-podskupova koje generišemo:

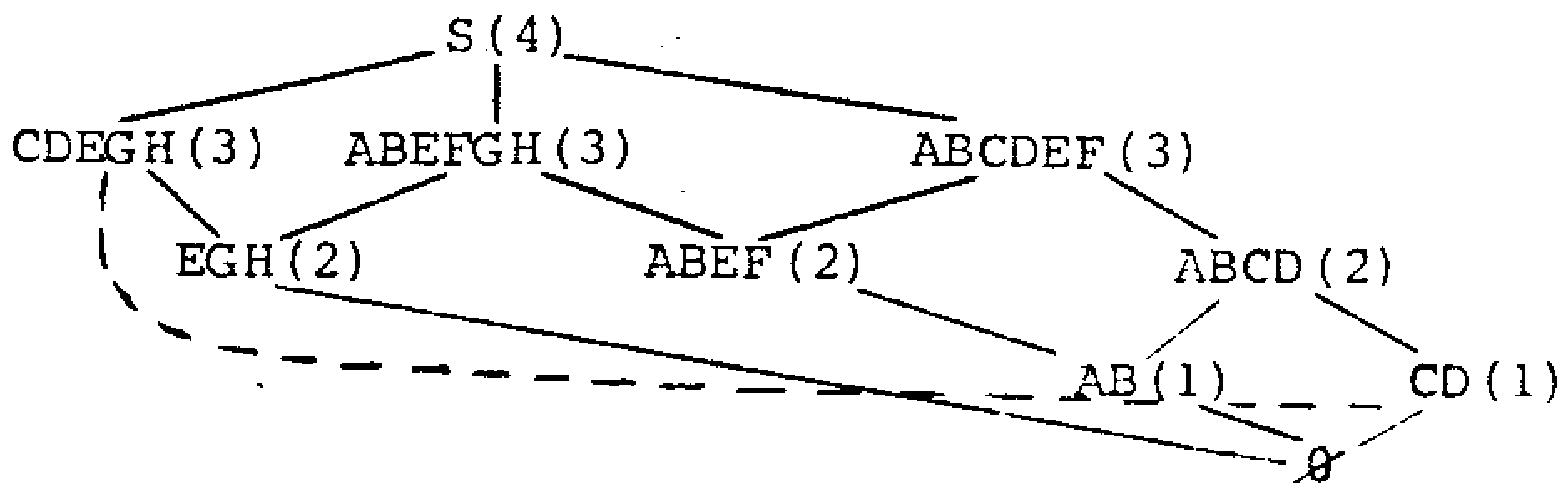
Neka $(A)_{(j)}$ označava skup svih j-podskupova skupa A, za neko j, $1 \leq j \leq |A|$. Ako skup A zapisujemo preko njegovih elemenata, onda ne koristimo zareze i skupovne zagrade.

Ako su skupovi $A_1, \ldots, A_m$ disjunktni po parovima, onda $(A_1)_{(j_1)} \times \ldots \times (A_m)_{(j_m)}$ označava kolekciju svih skupova oblika $X_1 \cup \ldots \cup X_m$, gde $X_i \in (A_i)_{(j_i)}$, $1 \leq i \leq m$ (da bi ti skupovi bili kardinalnosti r, potrebno je da važi $\sum_{i=1}^{m} j_i = r$).

Specijalno, ako je za neko i, $j_i = |A_i|$, onda oznaku $(A_i)_{(j_i)}$ zamenjujemo sa A_i (takodje bez zareza i skupovnih zagrada).

Prema potrebi koristimo i oznaku "\" za oduzimanje skupova.

PRIMER. Pokazaćemo da matroid M, označen u katalogu sa 84 H 40, sa CF-mrežom



ima transverzalnu reprezentaciju

$$\tau = \{EFGH,\ ABF,\ CD,\ GH\}.$$

Primetimo da svaka transverzala familije τ sadrži jedan od elemenata C, D. Najpre generišemo one transverzale, koje sadrže jedan od elemenata A, B. Sve te transverzale sadrže dvočlan podskup skupa EFGH, različit od EF. Ukoliko je F predstavnik skupa ABF, onda skupove EFGH i GH predstavlja neki dvočlan podskup skupa EGH.

U 4-nebaze matroida M spadaju svi 4-podskupovi skupa S, koji sadrže neki od skupova AB ili CD. Ne postoji 3-podskup skupa ABCD, koji ne sadrži neki od skupova AB, CD, tako da ciklički potprostor ABCD ne "daje" nijednu novu 4-nebazu. Koristeći cikličke potprostore EGH i ABEF generišemo 4-nebaze, koje su nadskupovi skupova EGH, odnosno AEF i BEF. Svaki 4-podskup cikličkih potprostora CDEGH i ABCDEF sadrži jedan od skupova CD i EGH, respektivno bar jedan od skupova AB, CD, AEF, BEF, pa ni kod ovih potprostora ne dobijamo nove 4-nebaze. Najzad, poslednje dve 4-nebaze su jedina dva 4-podskupa cikličkog potprostora ABEFGH, koji ne sadrže neki od podskupova AB, AEF, BEF, EGH, tj. AFGH i BFGH.

Zabeležimo u skraćenim oznakama 4-podskupove generisane u gornjem razmatranju:

transverzale familije τ	broj 4-podskupova
$\underset{(1)}{(AB)} \times \underset{(1)}{(CD)} \times \underset{(2)}{[(EFGH) \setminus EF]}$	$2 \times 2 \times (6-1) = 20$
$\underset{(2)}{(EGH)} \times F \times \underset{(1)}{(CD)}$	$3 \times 1 \times 2 = 6$
ukupan broj transverzala:	26

4-nebaze matroida M	broj 4-podskupova
$AB \times \underset{(2)}{(CDEFGH)}$	$1 \times 15 = 15$
$CD \times \underset{(2)}{(ABEFGH)} \setminus ABCD$	$1 \times 15 - 1 = 14$
$\underset{(1)}{(AB)} \times EF \times \underset{(1)}{(CDGH)}$	$2 \times 1 \times 4 = 8$
$EGH \times \underset{(1)}{(ABCDF)}$	$1 \times 5 = 5$
$FGH \times \underset{(1)}{(AB)}$	$1 \times 2 = 2$

ukupan broj 4-nebazà: 44

Primetimo da nijedna transverzala familije τ ne može biti 4-nebaza matroida M (lako je proveriti da se elementi svakog cikličkog potprostora K nalaze samo u rang(K) skupova familije τ).

Kako je $26 + 44 = 70 = \binom{8}{4}$,

to je izvršena particija svih 4-podskupova skupa S na transverzale familije τ i 4-nebaze matroida M, što dokazuje da je familija τ transverzalna reprezentacija matroida M.

PRIMEDBA. Prvi skup transverzala familije τ smo mogli zapisati i kao

$$\left[\underset{(1)}{(EF)} \times \underset{(1)}{(AB)} \times \underset{(1)}{(CD)} \times \underset{(1)}{(GH)}\right] \cup \left[\underset{(1)}{(AB)} \times \underset{(1)}{(CD)} \times (GH)\right]$$

Neka je "q·A" skraćena oznaka za q primeraka (kopijà) skupa A (u nekoj familiji).

Na osnovu ispitivanja transverzalnosti matroida u katalogu naslućujemo sledeću karakterizaciju transverzalnih matroida:

HIPOTEZA. *Neka je* M *matroid bez petlji i kopetlji ranga* r *na skupu* S *, čiji svi ciklički potprostori različiti od* S *i od* $\emptyset$ *su* $F_1, \ldots, F_k$.

Za svaki ciklički potprostor F_j, $1 \le j \le k$, *definišemo nenegativan ceo broj* $a(F_j)$ *na sledeći način:*

Neka su $G_{j1},\dots,G_{jm_j}$ *neposredni sledbenici cikličkog potprostora* F_j *u CF-mreži matroida* M.

Ako uvedemo oznaku

$$b(F_j) = \min_{1\le i\le m_j} \{\mathrm{rang}(G_{ji}) - \mathrm{rang}(F)\} ,$$

onda je $a(F_j) = \max\{0,\ b(F_j) - m_j + 1\}$

Matroid M *je transverzalan (ako i) samo ako je familija*

$$\alpha = \{a(F_1)\cdot(S\setminus F_1),\dots,a(F_k)\cdot(S\setminus F_k),(r - \sum_{i=1}^{k} a(F_i))\cdot S\}$$

njegova transverzalna reprezentacija.

Ova hipoteza je tačna za sve matroide u katalogu. Štaviše, sve transverzalne reprezentacije, koje se pojavljuju u katalogu, su konstruisane kao α u hipotezi, s tim što su u slučaju postojanja kopetlji iste dodate konstruisanoj familiji skupova u vidu jednočlanih skupova.

Naprimer, kod razmatranog transverzalnog matroida za sve cikličke potprostore F, izuzev za F = S, važi b(F) = 1, pa je a(F) = 1 samo kod onih cikličkih potprostora F, koji imaju samo jednog neposrednog sledbenika u CF-mreži. To su ciklički potprostori ABCD, CDEGH, ABEFGH, ABCDEF. Familiju τ čine upravo komplementi tih potprostora.

Dokazivanjem gornje hipoteze bi se problem utvrdjivanja transverzalnosti matroida sveo na testiranje samo jedne transverzalne reprezentacije, koja se može veoma brzo odrediti iz CF-mreže. To testiranje se može obaviti napred opisanim postupkom razbijanja r-podskupova nosača na transverzale i r-nebaze.

Dokazivanje netransverzalnosti bi se često moglo i dalje pojednostaviti. Jedna od posledica hipoteze bi bila da je matroid netransverzalan čim je

$$\sum_{i=1}^{k} a(F_i) > r .$$

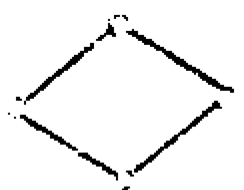
Taj brzo proverljiv uslov je ispunjen kod ogromne većine netransverzalnih "malih" matroida; tako od šesnaest razmatranih primera samo kod jedanaestog nije zadovoljena navedena nejednakost. U tom primeru 11., medjutim, od ukupno 56 5-podskupova nosača samo 20 su transverzale odgovarajuće familije α , a za svega 12 se može utvrditi da su 5-nebaze. Iz toga sledi da ne postoji "obavezna" transverzalna reprezentacija α , pa bi iz hipoteze sledilo da odgovarajući matroid nema nikakvu transverzalnu reprezentaciju.

Primetimo da u transverzalnom slučaju familija α , koja se pominje u hipotezi, predstavlja poznatu (|19|) transverzalnu reprezentaciju matroida M:

TEOREMA IV-2.9. *Ako je familija* α *(konstruisana u formulaciji Hipoteze) transverzalna reprezentacija matroida* M, *onda je* α *(jedinstvena) maksimalna transverzalna reprezentacija matroida* M .

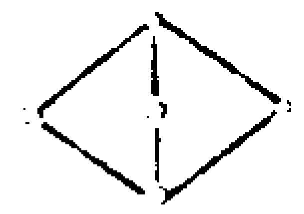
D o k a z. Označimo familiju α skraćeno sa $\alpha = \{A_1, \ldots \ldots, A_r\}$. Neka je β familija skupova, koja se od familije α razlikuje samo u tome što je jedan skup A_i $(1 \leq i \leq r)$ zamenjen sa $A_i \cup x$ za neko $x \in S \setminus A_i$. Skup A_i mora biti oblika $S \setminus F$, gde je F neki ciklički potprostor matroida M. Kako je $x \in F$, to zbog cikličnosti važi $\mathrm{rang}(F \setminus x) = \mathrm{rang}(F)$. Prema tome, skup $F \setminus x$ sadrži parcijalnu transverzalu dužine rang(F) familije $\alpha \setminus A_i$. Dodavanjem elementa x kao predstavnika skupa $A_i \cup x$ nalazimo da skup F sadrži parcijalnu transverzalu dužine $\mathrm{rang}(F) + 1$ familije β . Zaključujemo da je familija β transverzalna reprezentacija nekog matroida različitog od M, iz čega sledi da je α maksimalna transverzalna reprezentacija matroida M. $\square$

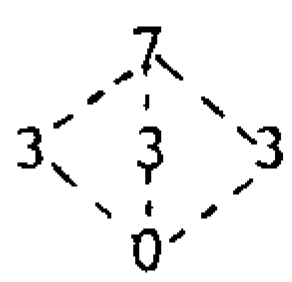
PRIMEDBA. Iz dokaza teoreme sledi da je svaka transverzalna reprezentacija, čiji su svi skupovi komplementi cikličkih potprostora - maksimalna. Na osnovu poznate jedinstvenosti maksimalne transverzalne reprezentacije (|19|) dobijamo sledeću posledicu: Ako je matroid M transverzalan, onda je familija α jedinstvena transverzalna reprezentacija matroida M, sastavljena isključivo od komplemenata cikličkih potprostora.

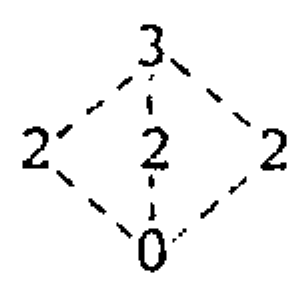
Teoreme III-4.1. i III-8.1. nas navode na još jedno razmatranje u vezi sa transverzalnošću matroida. Naime, one daju da dva tipa CF-mreže, lanci (proizvoljne dužine) i , garantuju transverzalnost odgovarajućih matroida. Postavlja se pitanje da li se takvo tvrdjenje može uopštiti, da li ono važi za još neke tipove (i klase tipova) CF-mreža.

Medjutim, lako je pokazati da se u opštem slučaju karakterizacija transverzalnosti matroida ne može dati preko tipa CF-mreže, čak ni kada se fiksiraju kardinalnosti i rangovi cikličkih potprostora.

Naprimer, matroidi koji su u katalogu označeni sa 73 S17 i 73 S18, imaju sledeće osobine:

Oba matroida imaju CF-mreže tipa , i to tako da su u oba slučaja pridružene šeme kardinalnosti i rangova cikličkih potprostora redom



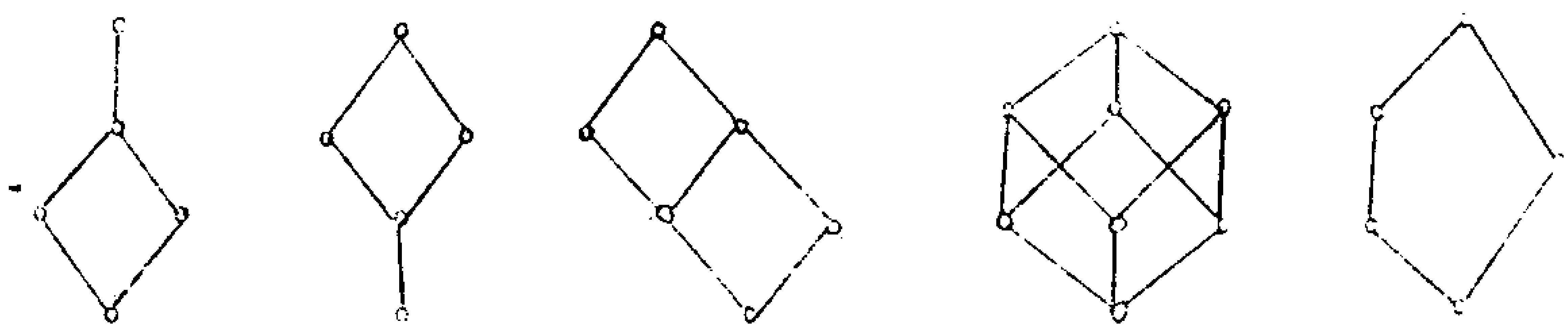
i


.

Ipak, prvi od ovih matroida je transverzalan, a drugi nije.

Neka je T-mreža mreža koja u ulozi CF-mreže (drugim rečima: tip CF-mreže koji) garantuje transverzalnost odgovarajućeg matroida.

Inspekcijom kataloga se može pronaći četrdesetak tipova CF-mreža, kojima u katalogu odgovaraju isključivo transverzalni matroidi. Navodimo neke od njih, koji se češće javljaju:



Na osnovu ispitivanja tih tipova postavljamo sledeće hipoteze:

1. Sve n-dimenzione kocke (mreže izomorfne mrežama svih podskupova konačnog skupa) su T-mreže.
2. Ako su L_1 i L_2 dve T-mreže, onda je T-mreža i mreža L koja nastaje "nadovezivanjem" mreža L_1 i L_2 tako

što se uzme da je

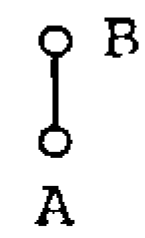
nula od L_1 = nula od L

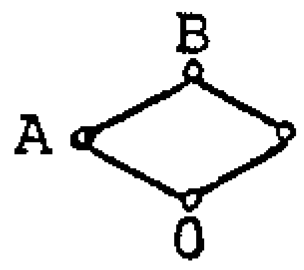
jedinica od L_2 = jedinica od L

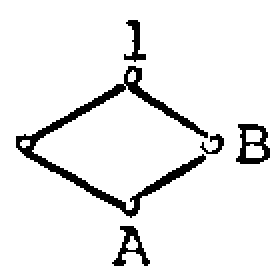
jedinica od L_1 = nula od L_2

(mreža L nema čvorova i grana van skupova čvorova i grana mreža L_1 i L_2).

3. Ako je L T-mreža i ako su A i B dva susedna (uporediva) elementa mreže L ($A < B$), onda je i mreža L_1, koja nastaje iz mreže L umetanjem jednog novog elementa C unutar intervala $[A,B]$ ($A < C < B$) - takodje T-mreža.

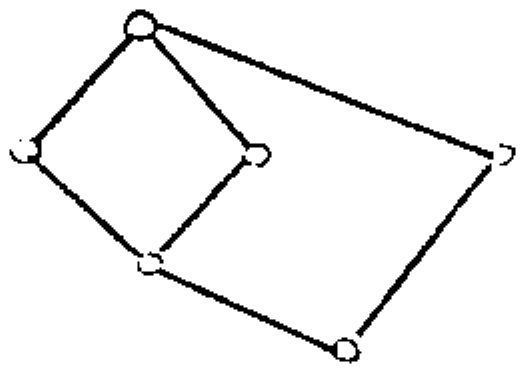
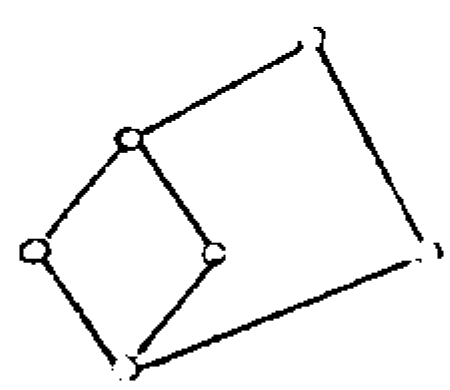
4. Prethodno tvrdjenje ostaje u važnosti i kad se mreža L_1 dobija iz mreže L zamenom intervala 

nekom od mrežâ 

i 

gde su naznačene nula i jedinica mreže L_1.

Primetimo da su tipovi CF-mreža, koji u katalogu odgovaraju isključivo transverzalnim matroidima većinom ili samoinverzni ili njima inverzni tipovi CF-mreža takodje odgovaraju samo transverzalnim matroidima. Ipak, na osnovu sledećeg primera postavljamo hipotezu da mreža inverzna T-mreži ne mora biti T-mreža (kako dualizacija matroida dovodi do invertiranja odgovarajuće CF-mreže, to je ova hipoteza u skladu sa činjenicom da klasa transverzalnih matroida nije zatvorena u odnosu na dualnost).

PRIMER. U katalogu postoji 37 matroida sa CF-mrežom tipa  i svi su transverzalni. Medjutim, od 37 njima dualnih matroida sa CF-mrežom tipa  samo 14 su transverzalni, a ostalih 23 su netransverzalni matroidi.

Postoje brojni tipovi CF-mreža, koji u katalogu odgovaraju isključivo netransverzalnim matroidima. Medjutim, ostavljamo otvorenim pitanje da li postoji tip CF-mreže kome u opštem slučaju odgovaraju samo netransverzalni matroidi, ili obrnuto:

Da li je svaka konačna mreža CF-mreža nekog transverzalnog matroida?

Preostaje da precizno zapišemo početni

PROBLEM. Odrediti klasu $\mathcal{S}$ svih konačnih mreža sa osobinom: "Ako CF-mreža matroida M pripada klasi $\mathcal{S}$, onda je matroid M transverzalan", ili, ekvivalentno: "Okarakterisati T-mreže".

IV-3. NEKI "EKSPERIMENTALNI" PODACI DOBIJENI IZ KATALOGA NEIZOMORFNIH "MALIH" MATROIDA

(a) Broj svih matroida

Najpre dajemo vrednosti funkcije M(n) - broja neizomorfnih matroida na n-skupu, za $0 \leq n \leq 8$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
M(n)	1	2	4	8	17	39	98	306	1724

Dajemo i tabelu brojeva neizomorfnih (n,r)-matroida za $0 \leq n \leq 8$, $0 \leq r \leq n$, u kojoj posebno izdvajamo brojeve odgovarajućih matroida sa petljama, poluprostih matroida i prostih matroida:

TABELA BROJEVA NEIZOMORFNIH MATROIDA

kardinalnost nosača	0	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	[illegible]
rang	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4	0	1	2	3	[illegible]
sa petljama	0	1	0	1	1	0	1	2	1	0	1	3	3	1	0	1	4	7	4	[illegible]
poluprosti	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	3	1	0	0	1	5	5	[illegible]
prosti	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	2	1	0	0	1	4	3
svi	1	1	1	1	2	1	1	3	3	1	1	4	7	4	1	1	5	13	13	5

kardinalnost nosača	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7
rang	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	7
sa petljama	1	5	13	13	5	1	0	1	6	23	38	23	6	1	0
poluprosti	0	1	9	16	7	1	0	0	1	13	47	36	9	1	0
prosti	0	0	1	9	11	4	1	0	0	1	23	49	22	5	1
svi	1	6	23	38	23	4	1	1	7	37	108	108	37	7	1

kardinalnost nosača	8	8	8	8	8	8	8	8	8
rang	0	1	2	3	4	5	6	7	8
sa petljama	1	7	37	108	108	37	7	1	0
poluprosti	0	1	20	149	215	71	11	1	0
prosti	0	0	1	68	617	217	40	6	1
svi	1	8	58	325	940	325	58	8	1

Broj neizomorfnih matroida sa petljama na (n+1)-skupu jednak je broju svih neizomorfnih matroida na n-skupu (ta jednakost važi i po pojedinim rangovima). Tako su u tabeli brojeva neizomorfnih matroida na n-skupu prvih n brojeva u prvom redu tabele, kao i svih n+1 brojeva u četvrtom redu tabele, centralno simetrično rasporedjeni, što je posledica dualnosti. Brojevi poluprostih matroida (drugi red tabele) su odredjeni na osnovu rezultata Glave I, dok su brojevi prostih matroida (treći red tabele) odredjeni u radu |16| .

b) Broj binarnih matroida

Broj $B(n)$ neizomorfnih binarnih matroida na n-skupu je za $0 \leq n \leq 8$ dat u sledećoj tabeli:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
B(n)	1	2	4	8	16	32	68	148	342

Iz ovih brojeva se veoma lako odredjuju brojevi neizomorfnih regularnih, grafičkih i kografičkih matroida na skupovima od najviše 8 elemenata. Naime, Tutte-ove karakterizacione teoreme |60|, koje smo u Uvodu iskoristili za definisanje regularnih, grafičkih i kografičkih matroida, daju sledeće jednostavne posledice:

1. Svi binarni matroidi na skupovima od najviše 6 elemenata su regularni.

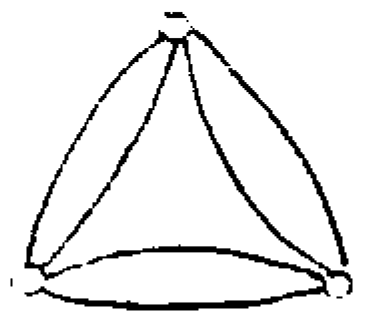
2. Jedina dva binarna neregularna matroida na 7-skupu su F_7 i F_7^* .

3. Svi regularni matroidi na skupovima od najviše 8 elemenata su ujedno i grafički i kografički.

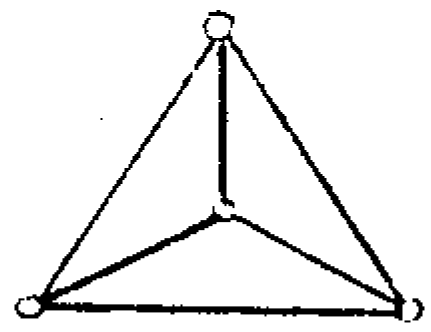
Nakon ovoga preostaje samo još da odredimo broj neizomorfnih binarnih neregularnih matroida na 8-skupu, tj. broj neizomorfnih matroida na 8-skupu, koji imaju bar jedan od matroida F_7 i F_7^* kao svoj minor. Nije teško proveriti da postoji tačno 10 takvih matroida. To su, pre svega, četiri matroida nastala iz F_7, odnosno F_7^*, dodavanjem jednog elementa (petlje) nuli, odnosno jednog (paralelnog) elementa bilo kom atomu. Kako su klasa binarnih, kao i klasa regularnih matroida, zatvorene u odnosu na dualnost, to su i četiri matroida, koji su dualni upravo opisanim matroidima, takodje binarni i neregularni. Najzad, postoje dva samodualna binarna neregularna matroida na 8-skupu: oni su u katalogu označeni sa 84 S 51 i 84 S 433 (drugi od njih je matroid $S(3,4,8)$, sa familijom hiperravni Φ , razmatranom u Glavi II). Restrikcija svakog od ova dva matroida na 7-skup $\{B,C,D,E,F,G,H\}$ je izomorfna matroidu F_7^*; na osnovu toga i samodualnosti odmah sledi da je odgovarajuća kontrakcija izomorfna matroidu F_7.

c) Broj transverzalnih matroida

Poznato je da su svi matroidi na skupovima od najviše 5 elemenata transverzalni, kao i da su jedina dva netransverzalna matroida na 6-skupu poligon-matroidi grafova



i



Postoji 27 neizomorfnih netransverzalnih matroida na 7-skupu i 685 neizomorfnih netransverzalnih matroida na 8 - skupu.

d) Broj samodualnih matroida

Neka oznake SD(n), ISD(n), ESD(n) redom označavaju brojeve neizomorfnih samodualnih, identično samodualnih i električno samodualnih matroida na n-skupu.

Vrednosti ovih funkcija za parne cele brojeve n izmedju 0 i 8 su date u sledećoj tabeli:

n	0	2	4	6	8
SD(n)	1	2	5	18	266
ISD(n)	1	1	2	4	17
ESD(n)	1	2	5	18	257

Medju neizomorfnim samodualnim matroidima na 8-skupu, koji NISU električno samodualni, postoji tačno jedan matroid M_1, koji nije prost, i tačno jedan matroid M_2, koji je identično samodualan. Matroidi M_1 i M_2 su u katalogu redom označeni sa 84 H 157 i 84 S 259.

e) Prosečan broj baza i ciklova

Neka b(n) i c(n) redom označavaju prosečan broj baza respektivno prosečan broj ciklova, kod svih neizomorfnih matroida na n-skupu. U sledećoj tabeli dajemo približne vrednosti funkcija b(n) i c(n) za $0 \leq n \leq 8$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
b(n)	1	1	1,25	1,75	2,71	4,54	7,94	15,59	39,10
c(n)	0	0,5	1	1,62	2,47	3,74	5,81	9,84	21,67

Eksperimentalni podaci za b(n) i c(n) su u skladu sa hipotezom (|62|, str.287)da u proseku, matroidi imaju više baza nego ciklova (prema radu |50|, broj baza je veći od broja ciklova kod SVIH prostih binarnih matroida).

IV-4. O KONSTRUKCIJI KATALOGA "MALIH" MATROIDA

Prosti matroidi na skupovima od najviše 8 elemenata, kao i njihovi brojevi hiperravni, su konstruisani uz pomoć kompjutera u |16|. Naglašavamo da su svi ostali podaci u našem katalogu nadjeni "ručno". Na osnovu konstrukcije sprovedene u Glavi II zaključujemo da bi se i pomenuta konstrukcija prostih matroida mogla praktično realizovati bez pomoći kompjutera, iako bi to bilo prilično komplikovano.

<u>Konstrukcija matroida</u>

Prosti matroidi u našem katalogu su preuzeti iz kataloga |16|, s tim što su "prevedeni" na reprezentacije preko CF-mrežâ. Medjutim, prosti matroidi na 8-skupu nisu navedeni istim redom u oba kataloga. Pored toga, izomorfizam izmedju dva odgovarajuća prosta matroida na 8-skupu u ovim katalozima se ne može uvek uspostaviti na osnovu identične permutacije nosača.

Neizomorfni poluprosti matroidi su konstruisani u Glavi I, a neizomorfni matroidi sa petljama na (n+1)-skupu ($0 \leq n \leq 7$) su lako nadjeni na osnovu prirodne bijekcije sa svim neizomorfnim matroidima na n-skupu (redosled navodjenja matroida je saglasan sa tom bijekcijom).

Provera binarnosti, regularnosti i grafičke reprezentabilnosti

Kod svakog matroida u katalogu samo nastojali da postignemo jedan od sledeća dva cilja:

- ili da pronadjemo neki njegov minor, izomorfan sa $U_{2,4}$ (da dokažemo nebinarnost) ili da pronadjemo neku njegovu grafičku reprezentaciju (da dokažemo grafičku reprezentabilnost).

Samo kod (jedinih) dvanaest binarnih neregularnih matroida u katalogu se može postići nijedan od ova dva cilja, ali kod njih (i samo kod njih) se može naći minor izomorfan sa F_7 ili F_7^*. Zahvaljujući Teoremi IV-1.1., nismo pri konstrukciji kataloga vršili posebnu proveru binarnosti kod pejving matroida.

Matroid na skupu S je nebinaran (tj. sadrži minor izomorfan sa $U_{2,4}$) ako i samo ako postoji skup $X \subseteq S$ i četiri različita elementa a_1, a_2, a_3, a_4 iz $S \setminus X$ tako da važi

$$r(X \cup \{a_1,a_2,a_3,a_4\}) = r(X \cup \{a_i,a_j\}) = r(X) + 2$$
$$\text{za} \quad 1 \leq i,j \leq 4.$$

Dovoljan uslov za nebinarnost je da u CF-mreži postoji interval $[C_i, C_j]$, pri čemu C_j neposredno pokriva C_i i važi

$$|C_j \setminus C_i| \geq r(C_j) - r(C_i) + 2; \quad r(C_j) - r(C_i) \geq 2$$

Provera transverzalnosti

Ova tema je razradjena u Odeljku IV-2.

Ispitivanje dualnosti

Naglašavamo da su svi matroidi u katalogu konstruisani bez primene dualnosti. Samodualni matroidi i parovi uzajamno dualnih matroida u katalogu su naknadno utvrdjeni. Tom prilikom je sprovodjen sledeći postupak:

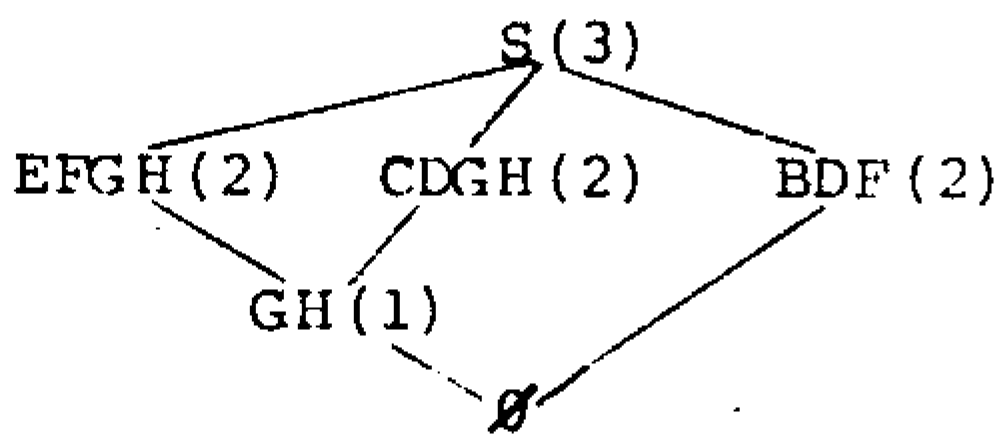
Kako je svaki matroid M u katalogu zadat mrežom svojih cikličkih potprostora sa pridruženim rangovima, to se ciklički potprostori od M* jednostavno nalaze (po Teoremi 0-3.4.

kao komplementi cikličkih potprostora od M, a njihovi rangovi se odredjuju prema vezi izmedju funkcija ranga matroida M i M^*. CF-mreže matroida M i M^* su uzajamno inverzne.

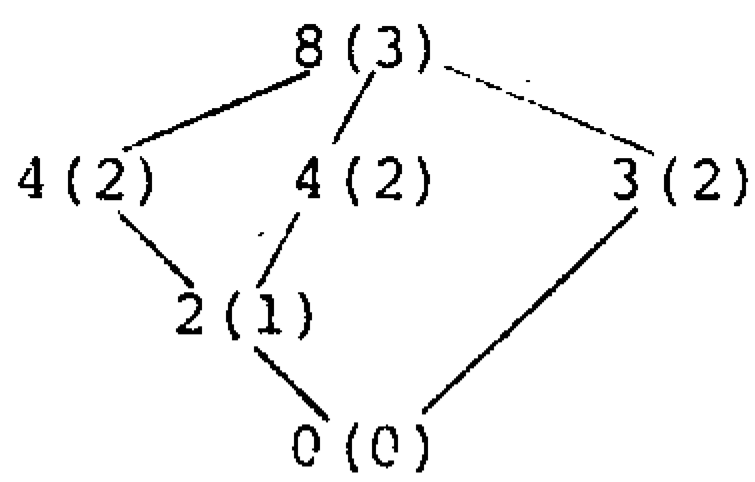
Znatno teži deo posla je odredjivanje matroida u katalogu, izomorfnog sa M^*. Jasno je, pre svega, da taj matroid mora imati odgovarajuća (tj. ista kao i M^*) prva tri podatka iz oznake matroida: kardinalnost nosača, rang i tip ("L", "H" ili "S"). Pored toga, na osnovu konstruisanog M^* su poznati i tip CF-mreže, kardinalnosti i odgovarajući rangovi cikličkih potprostora traženog matroida.

U svakom pojedinom slučaju je konstruisan po jedan izomorfizam, koji preslikava M^* na odgovarajući matroid u katalogu.

PRIMER. Polazeći od CF-mreže matroida M, označenog u katalogu sa 85 S 83, nalazimo da je CF-mreža matroida M^*:



U spisku matroida u katalogu, kod kojih su prve tri oznake "83H", postoje samo dva matroida sa CF-mrežom tipa:



(u mreži su naznačene samo kardinalnost i rangovi (u zagradi) cikličkih potprostora).

Ta dva matroida su M_1 i M_2, označeni u katalogu sa 83 H 132, respektivno sa 83 H 135. Oni su jedini "kandidati" za izomorfizam sa M^*.

Primetimo da svaki izomorfizam α, koji preslikava M^* na M_1 ili M_2, mora preslikavati GH na AB, kao i {EFGH, CDGH} na {ABCD,ABEF}, iz čega sledi da je $\alpha(AB) = GH$.

Ako je $M^* \simeq M_2$, onda je $\alpha(BDF) = EGH$, što je u suprotnosti sa $\alpha^{-1}(GH) = AB$. Zaključujemo da je $M^* \simeq M_1$, što daje $\alpha(BDF) = CEG$. Otuda sledi da mora biti $\alpha(B) = G$, pa i $\alpha(A) = H$

Jedan od četiri moguća izomorfizma $\alpha : M^* \to M_1$ je onaj koji se indukuje permutacijom

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ H & G & D & C & F & E & A & B \end{pmatrix}$$

Druga tri izomorfizma se indukuju permutacijama, koje nastaju iz permutacije $\bar{\alpha}$ množenjem proizvodima transpozicijâ (AB), $(CE)\circ(DF)$, odnosno $(AB)\circ(CE)\circ(DF)$

Kod pejving matroida ranga 4 na 8-skupu su posebno izražene teškoće u prepoznavanju dualnih matroida u katalogu, pa se u tu svrhu služimo posebnim pomoćnim sredstvima.

Primetimo najpre da su klase B-familijâ, C-familijâ, kao i D-familijâ, zatvorene u odnosu na dualnost. To je neposredna posledica činjenice da za proizvoljne 4-podskupove X, Y 8-skupa S važi:

$$|X \cap Y| = 1 \iff |(S \setminus X) \cap (S \setminus Y)| = 1.$$

Zatvorenost (u odnosu na dualnost) važi i za potklase ovih klasa sa fiksnim brojem 4-hiperravni.

Pogodna invarijanta nekog pejving matroida M^* ranga 4 na 8-skupu S je neuredjena osmorka brojeva pojavljivanja pojedinih elemenata od S u 4-hiperravnima od M^* (zbir tih osam brojeva pojavljivanja je očito jednak četvorostrukom broju 4-hiperravni). Tako kandidate za izomorfizam sa M^* tražimo medju onim matroidima u katalogu, kod kojih je ova invarijanta ista kao kod M^*. Ovo posebno koristimo pri dualizaciji B-familijâ.

A-grafovi, D-grafovi i C-grafovi igraju značajnu ulogu pri dualizaciji matroida, koji su njima pridruženi.

Naprimer, pri dualizaciji matroida, čiji redni brojevi u katalogu se nalaze izmedju 84 S 157 i 84 S 199 (uključno) nastaju A-familije sa tačno jednim 5-skupom. Nakon konstrukcije odgovarajućih A-grafova odmah uočavamo parove uzajamno dualnih matroida.

Prilikom dualizacije matroida ranga n na (2n)-skupu ($0 \leq n \leq 4$) moramo uzeti u obzir i mogućnost samodualnosti. Za svaki samodualni matroid M konstruišemo neki izomorfizam, koji preslikava M^* na M.

Identična samodualnost se veoma lako prepoznaje, budući da se ISD-matroid M u potpunosti poklapa sa generisanim M^* (to poklapanje konstatujemo kod odgovarajućih familija cikličkih potprostora sa pridruženim rangovima).

Utvrdjivanje električne samodualnosti

Prilikom provere električne samodualnosti nekog samodualnog matroida M na (2n)-skupu ($0 \leq n \leq 4$) tražimo particiju nosača na n disjunktnih parova elemenata, koji odgovaraju transpozicijama "električne" permutacije Π . Kako Π indukuje izomorfizam matroida M na M^*, to se svaki element x nosača nalazi prema C-potprostorima od M u izomorfnom položaju kao element $y = \Pi(x)$ prema C-potprostorima od M^*. Neuredjene parove $\{x,y\}$ elemenata nosača, koji odgovaraju istoj transpoziciji permutacije Π , označavamo sa $x — y$.

Provera neke "električne" permutacije Π se vrši na sledeći način:

Za svaki C-potprostor F matroida M i za njemu odgovarajući C-potprostor $\Pi(F)$ matroida $M^* \simeq M$, kao i za svaku transpoziciju $x — y$ permutacije Π , treba da važi jedna od sledeće četiri kombinacije uslova (od ukupno 16 mogućnosti):

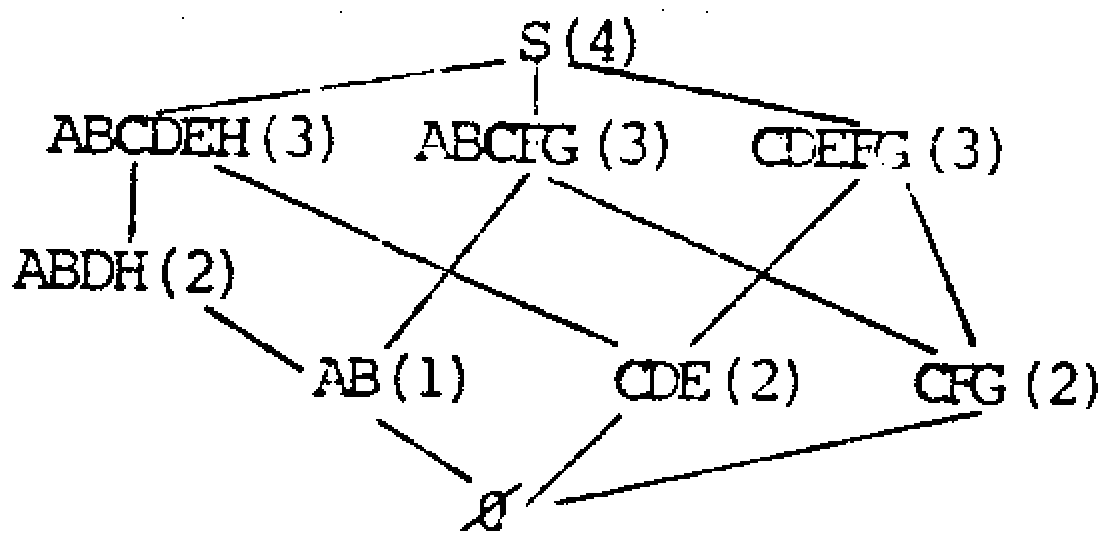
1. $x \in F,\ y \in F,\ x \in \Pi(F),\ y \in \Pi(F)$
2. $x \in F,\ y \notin F,\ x \notin \Pi(F),\ y \in \Pi(F)$
3. $x \notin F,\ y \in F,\ x \in \Pi(F),\ y \notin \Pi(F)$
4. $x \notin F,\ y \notin F,\ y \notin \Pi(F),\ y \notin \Pi(F)$.

Ovo se lako izvodi na osnovu

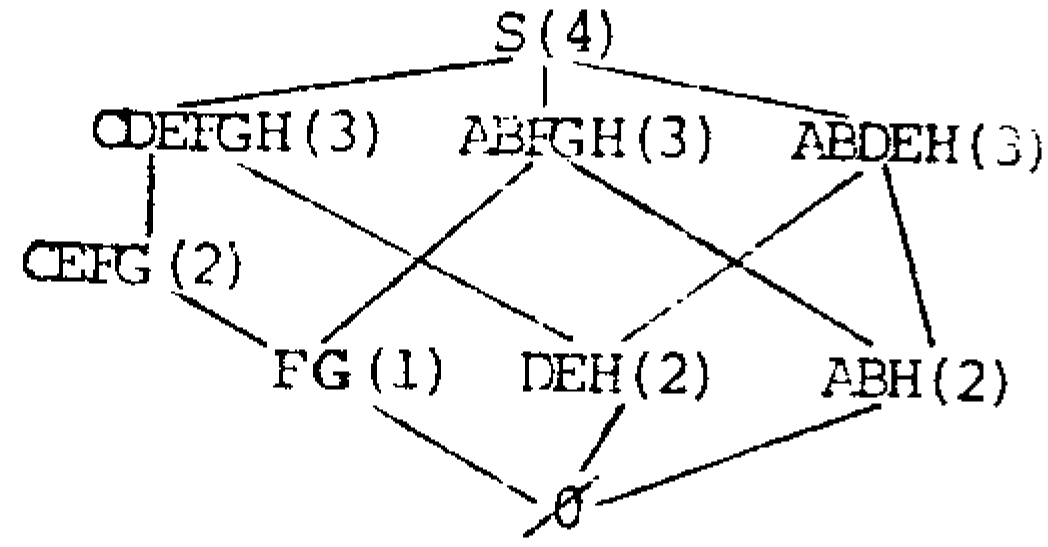
$$y = \Pi(x), \quad x = \Pi(y), \quad \Pi(\Pi(F)) = F.$$

PRIMER. Posmatrajmo samodualni matroid M, označen sa 84 H96. Paralelno razmatramo CF-mreže matroida M i M^*:

M:



M*:



Obe mreže crtamo na isti način, tako da se C-potprostori, koji odgovaraju jedan drugom pri preslikavanju Π, nadju na istim pozicijama.

Svaki izomorfizam, koji preslikava M na M*, mora preslikavati {C} na {H} (to su zajednički elementi jedina dva C-potprostora kardinalnosti 3 i ranga 2 u M i M*), kao i {A,B} na {F,G} (to su jedini C-potprostori ranga 1 u M i M*). Kod "električnog" izomorfizma se, prema tome, mora i {H} preslikavati na {C} i {F,G} na {A,B}. Kako se skup {A,B,D,H} kod svakog izomorfizma ($M \to M^*$) mora preslikavati na {C,E,F,G}, to se kod "električnog" izomorfizma mora {D} preslikavati na {E} i {E} na {D}.

Zaključujemo da postoje dve "električne" permutacije nosača, od kojih svaka indukuje "električni" izomorfizam u oba smera: M na M* i M* na M. Te permutacije se opisane sledećim četvorkama transpozicija:

A - F		A - G
B - G	i	B - F
C - H		C - H
D - E		D - E

Za svaku od ovih permutacija se lako proverava da zadovoljava napred opisani uslov "električnosti".

LEMA IV-4.1. *Svi samodualni* C-*lanci su i električno samodualni.*

D o k a z. Neka su $C_0, C_1, \ldots, C_k$ $(C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_k)$ svi C-potprostori samodualnog C-lanca M na S $(|S| = 2n)$. Definišimo permutaciju Π skupa S na sledeći način:

1) Za svako $x \in S$ važi $\Pi(\Pi(x)) = x$
2) Ako $x \in C_o$, onda $\Pi(x) \in S \setminus C_o$
3) Ako $x \in C_{i+1} \setminus C_i$, gde $0 \leq i \leq \frac{k-2}{2}$, onda $\Pi(x) \in (S \setminus C_{k-i}) \setminus (S \setminus C_{k-i-1})$
4) Ukoliko je k neparno i $x \in D = C_{\frac{k+1}{2}} \setminus C_{\frac{k-1}{2}}$, onda $\Pi(x) \in D \setminus \{x\}$.

Primetimo najpre da permutacija Π nema fiksnih tačaka, budući da se elementi x i $\Pi(x)$ u prva dva slučaja biraju iz disjunktnih skupova, a u trećem je $\Pi(x) \neq x$ eksplicitno dato:

Kako za svako $x \in S$ važi $\Pi(x) \neq x$ i $\Pi(\Pi(x)) = x$, to je permutacija Π proizvod n disjunktnih transpozicija.

Napomenimo da je permutacija Π dobro definisana. Skupovi iz kojih se biraju elementi x i $\Pi(x)$ kod uslova 2) i 3) su iste kardinalnosti na osnovu samodualnosti. U slučaju obuhvaćenom uslovom 4) skup D ima paran broj elemenata, budući da se svi ostali elementi nosača (od ukupno 2n) primenom permutacije Π grupišu u parove.

Najzad, permutacija Π preslikava skup C_i na $S \setminus C_{k-i}$ za $i=1,\dots,k$ i indukuje izomorfizam matroida M na M*. Prema gore rečenom, taj izomorfizam je "električan", pa je matroid M električno samodualan. □

LEMA IV-4.2. *Svi samodualni matroidi na 8-skupu, koji imaju petlje, su i električno samodualni.*

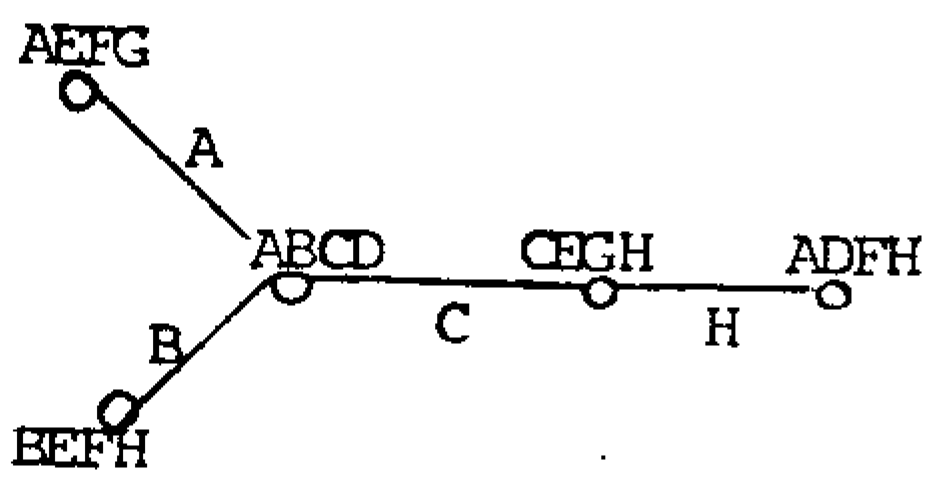
D o k a z. Broj petlji i broj kopetlji kod proizvoljnog samodualnog matroida M (na 8-skupu S) mora biti jedan isti; označimo ga sa k. Pri proizvoljnom izomorfizmu α matroida M na M* se petlje moraju preslikavati na kopetlje i obrnuto. Zaključujemo da je restrikcija M_1 matroida M na skup koji nastaje iz S udaljavanjem svih petlji i kopetlji — samodualni matroid na (8-2k)-skupu (izomorfizam matroida M_1 na M_1^* se može realizovati kao odgovarajuća restrikcija izomorfizma α). Kako su svi samodualni matroidi na skupovima manjim od 8 elemenata električno samodualni (to je uspostavljeno pojedinačnom proverom), to se odgovarajućim proširenjem proizvoljnog "električnog" izomorfizma β_1 matroida M_1 na M_1^*, tako da svaka od novih disjunktnih transpozicija preslikava jednu petlju na kopetlju i obrnuto, dobija "električni" izomorfizam β, koji preslikava matroid M na M* . □

PRIMEDBA. Postupkom analognim dokazu ove Leme je lako pokazati da postoji "prirodna" bijekcija izmedju svih SD, respektivno svih ESD, matroida na (2n)-skupu i svih SD, respektivno svih ESD matroida sa petljama na (2n+2)-skupu.

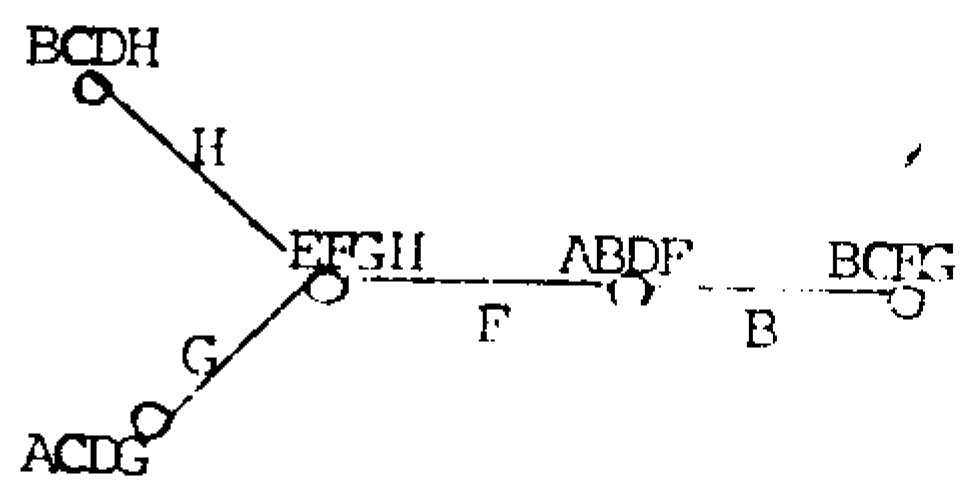
D-grafovi i C-grafovi pružaju znatnu pomoć pri utvrdjivanju električne samodualnosti većine odgovarajućih samodualnih pejving matroida (i kod C-familijâ, koje nisu D-familije, pogodno je razmatrati D-grafove maksimalnih D-podfamilija). Na osnovu ovih grafova se često mogu odmah utvrditi neki parovi elemenata, koji se moraju javiti u istoj transpoziciji svake "električne" permutacije.

PRIMER. Posmatrajmo samodualni matroid M, označen u katalogu sa 84 S 443. D-grafovi matroida M i M* su:

M:



M*:



Zbog specifičnosti položaja odgovarajućih grana D-grafova, za svaku permutaciju nosača Π, koja preslikava M na M*, mora važiti $\Pi(H) = B$, $\Pi(C) = F$. Za "električnu" permutaciju Π važi i $\Pi(B) = H$, pa iz D-grafova nalazimo da važi i $\Pi(A) = G$.

Zaključujemo da je jedina moguća "električna" permutacija, koja preslikava M na M* - proizvod transpozicija A - G, B - H, C - F i D - E. Lako je proveriti da ta permutacija zaista preslikava cikličke potprostore od M na cikličke potprostore od M* (i obrnuto).

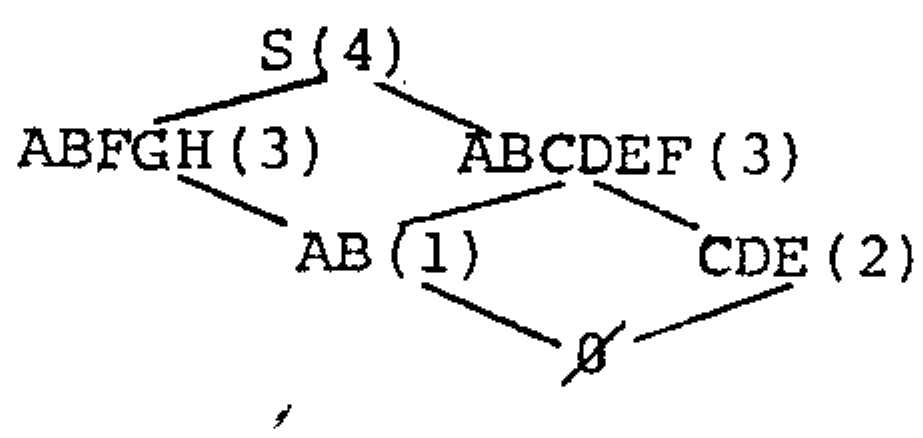
NESD-matroidi

Razmotrimo posebno one samodualne matroide, koji nisu električno samodualni (skraćeno: NESD-matroide). Takvih matroida u katalogu ima svega devet.

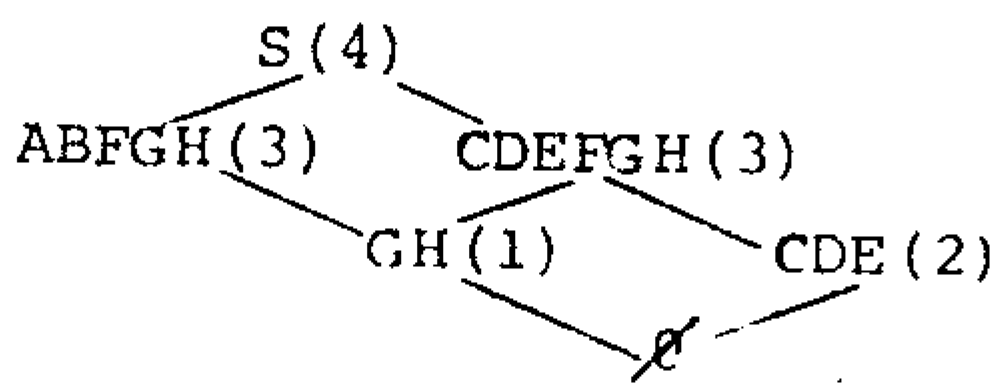
Nepostojanje "električne" permutacije za neki samodualni matroid M se često može ustanoviti (ako može, onda je tako najlakše) pronalaženjem podskupa nosača, koji ima neparan broj elemenata i ima fiksiranu (izomorfnu) poziciju i u M i u M*. Takav skup se pri svakom izomorfizmu matroida M na M* mora preslikati na sebe, a zbog neparnosti se to ne može realizovati prepokrivajućim proizvodom disjunktnih transpozicija. To znači da ne postoji "električni" izomorfizam, koji preslikava matroid M na M*.

Uz svaki NESD-matroid M navodimo odgovarajuću oznaku (redni broj) iz kataloga, kao i šemu dokaza "neelektričnosti". Prva četiri NESD-matroida razmatramo pomoću CF-mreža, a ostale preko D-grafova.

M = 84 H 157:

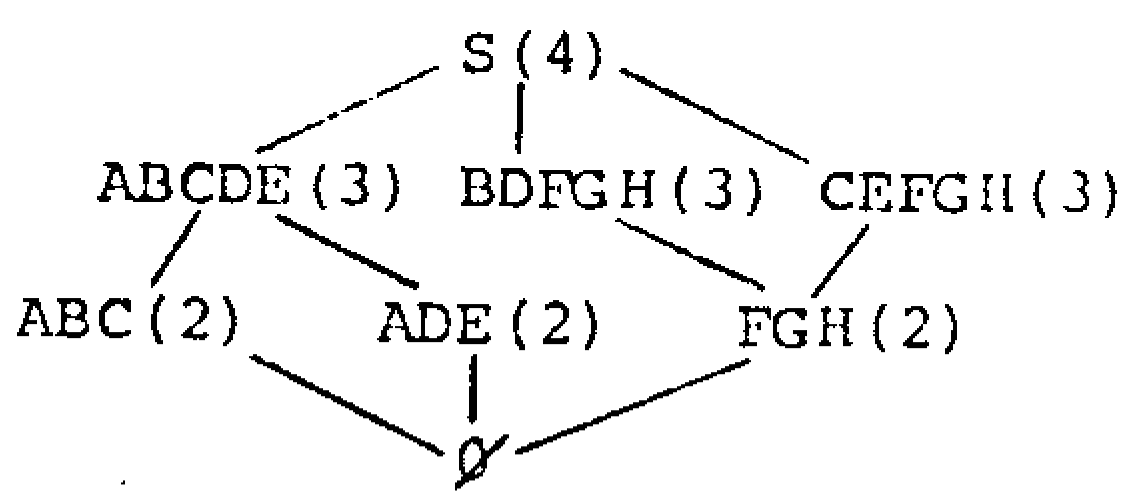


M*:

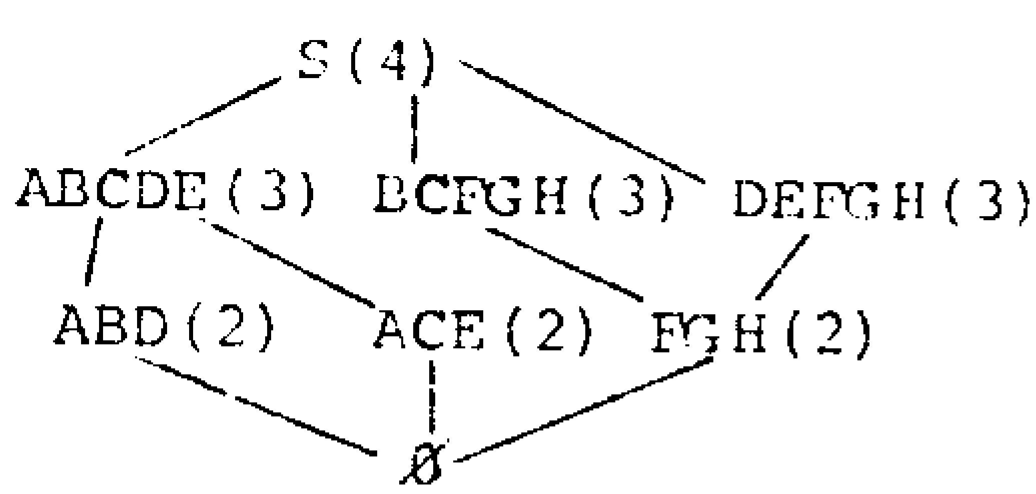


C-potprostor CDE ima isti specifičan položaj i u M i u M*, pa se pri svakom izomorfizmu: M → M* mora preslikavati na sebe.

M = 84 S 43:

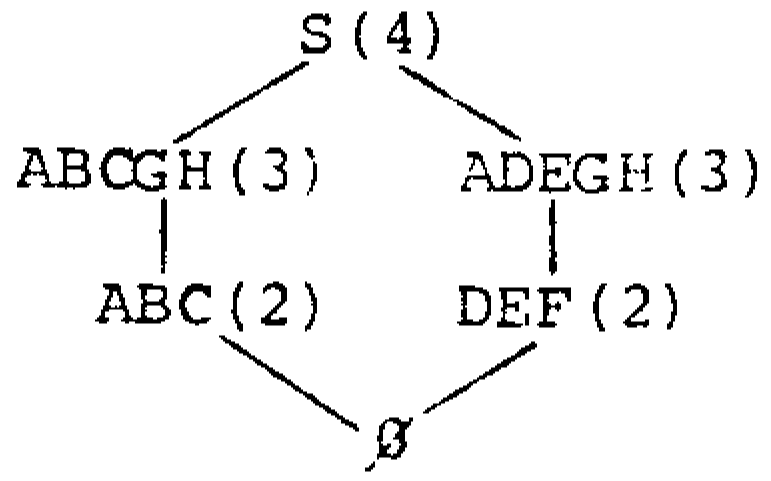


M*:

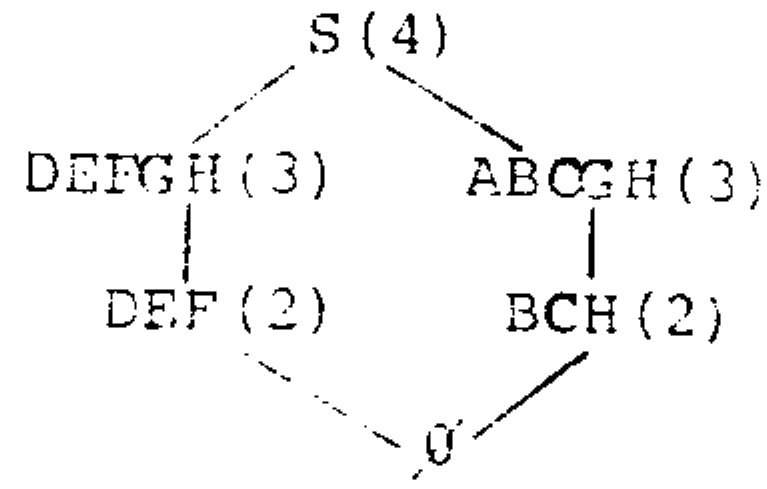


Proizvoljan izomorfizam matroida M na M* mora preslikavati skup FGH na sebe (i mora imati fiksnu tačku A).

M = 84 S 90:

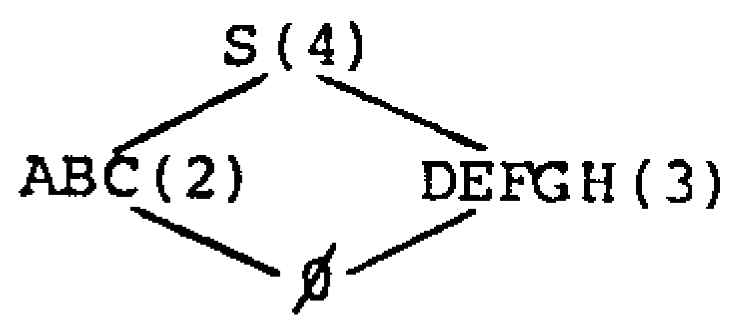


M*:



Element G ima specifičan položaj u M i M* i mora biti fiksna tačka svakog izomorfizma, koji preslikava M na M*. Naime, u oba slučaja je G onaj element iz preseka cikličkih 5-potprostora, koji nije sadržan ni u jednom cikličkom 3-potprostoru.

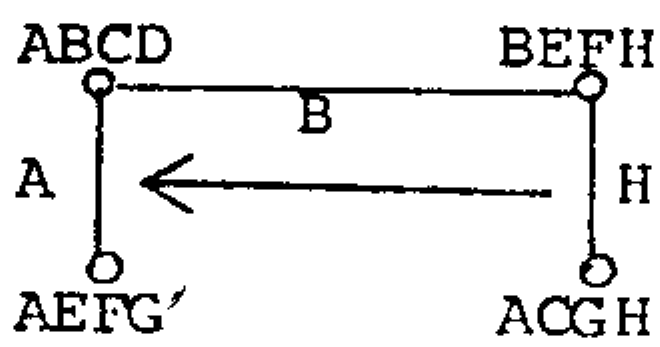
M = 84 S 259:



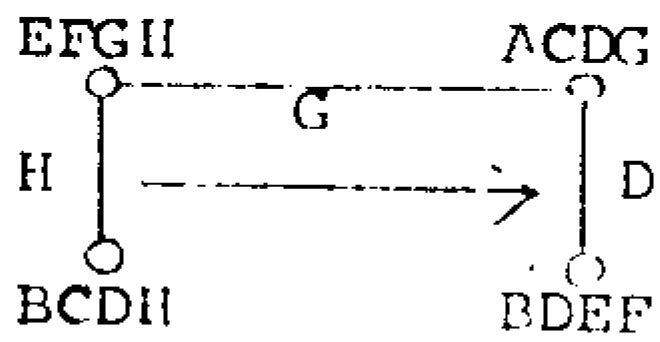
M* ≡ M

Svaki izomorfizam matroida M na M* fiksira skup ABC.

M = 84 S 453:



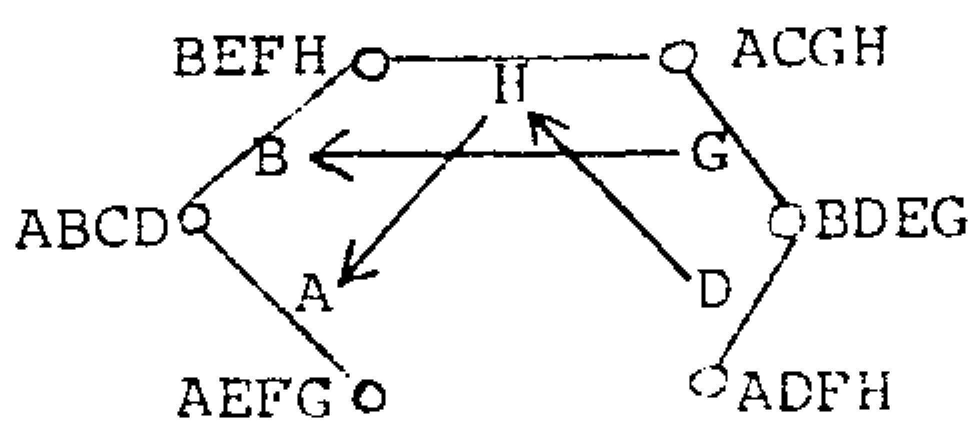
M*:



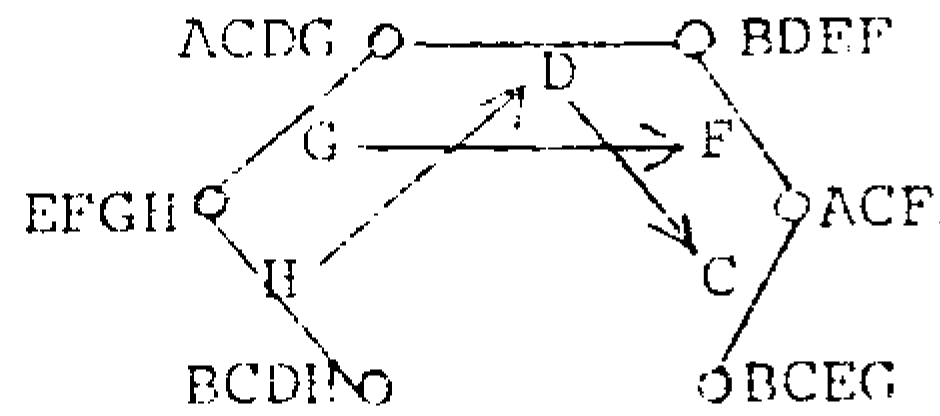
Element H je fiksna tačka svakog izomorfizma matroida M na M*, budući da je to u oba slučaja presečni element, koji odgovara "polaznoj" grani u relaciji "→".

Primetimo da se na osnovu ovoga može odmah izvesti da su i samodualni matroidi M_1 = 84 S 598 i M_2 = 84 S 457 — NESD - matroidi. Naime, C-familija M_1 ima isti D-graf kao i matroid M, a D-familija M_2 takodje ima takav D-graf, s tim što mu je dodata izolovana grana $\underset{ADEH}{\circ}\!\xrightarrow[E]{\hspace{3em}}\!\underset{BCEG}{\circ}$. Zaključujemo da se uočena specifičnost elementa H prenosi i na parove matroida (M_1, M_1^*) i (M_2, M_2^*).

M = 84 S 463

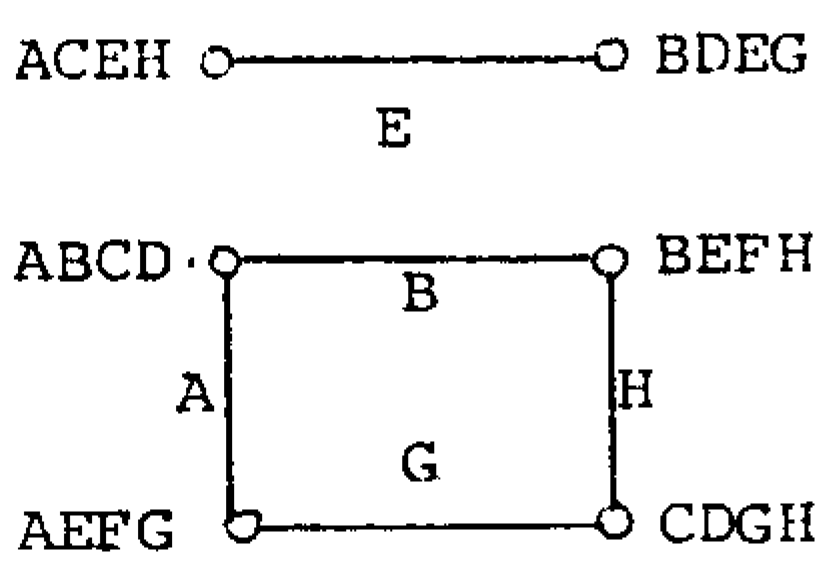


M*:

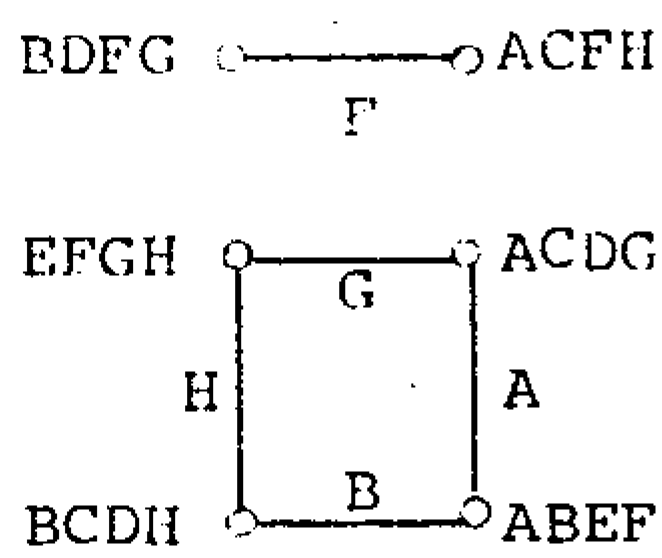


Svaki izomorfizam matroida M na M* fiksira element G. To je presečni element "polazne" grane relacije " → ", primenjene na drugu i četvrtu granu D-grafa (5-puta) (drugačije, to je grana smeštena izmedju dve grane, čiji presečni elementi pripadaju "obaveznoj" transpoziciji D - H).

M = 84 S 438:



M*:



Svaki "električni" izomorfizam matroida M na M* mora biti indukovan permutacijom koja sadrži transpozicije E - F i C - D (elementi E i F su presečni elementi, koji odgovaraju izolovanim granama D-grafova matroida M, odnosno M*, a C i D su jedini elementi, koji se ni u jednom od ova dva D-grafa ne javljaju kao presečni elementi neke grane).

Nalazimo da postoje samo tri mogućnosti za odgovarajuću "električnu" permutaciju. Pored navedene dve transpozicije ona može da sadrži i transpozicije:

1. A - G, B - H	2. A - H, B - G	3. A - B, G - H

Primetimo da se u prva dva slučaja C-potprostor ABCD matroida M preslikava na skup CDGH, a u trećem slučaju na skup ABCD. Kako nijedan od skupova ABCD i CDGH nije C-potprostor matroida M*, to ne postoji "električna" permutacija, koja preslikava C-potprostore matroida M na C-potprostore matroida M*.

Prebrajanje hiperravni, baza i ciklova

Brojevi hiperravni prostih matroida su neposredno preuzeti iz rada |16| .

Broj hiperravni nekog poluprostog matroida M je jednak broju hiperravni prostog matroida M_o , iz koga je M "izveden" (M_o je jedini prost matroid, koji ima geometrijsku mrežu izomorfnu sa geometrijskom mrežom matroida M). U tabeli iz Odeljka I-3. su navedeni svi poluprosti matroidi "izvedeni" iz svih prostih matroida na skupovima od najviše 7 elemenata (tj. svi poluprosti matroidi iz kataloga). Svi poluprosti matroidi "izvedeni" iz datog prostog matroida M_o su navedeni u istoj vrsti tabele u kojoj se nalazi M_o (u slučaju poluprostih matroida sa 2, 3 ili 4 atoma eventualno i u sledećoj vrsti).

Ako je matroid M_1 dobijen dodavanjem jedne petlje matroidu M, koji ima h hiperravni, b baza i c ciklova, onda matroid M_1 ima h hiperravni, b baza i c+1 cikl. Ovaj stav odmah rešava problem prebrajanja hiperravni, baza i ciklova za sve matroide sa petljama.

Dosad je objašnjeno prebrajanje hiperravni kod svih matroida u katalogu. Polazeći od brojeva hiperravni, primenom dualnosti se veoma lako nalaze brojevi ciklova svih matroida u katalogu. Naime, na osnovu teoreme na str. 9. postoji bijekcija izmedju hiperravni od M i ciklova od M*, a samim tim je broj ciklova od M* jednak broju hiperravni od M.

Brojevi bazâ svih transverzalnih matroida, u katalogu koji nisu ni C-lanci, ni C-kvadrati, su utvrdjeni prilikom ispitivanja transverzalnosti (kod provere transverzalne reprezentacije svakog od ovih matroida su efektivno nabrojane sve njegove baze, kao i sve nebaze iste kardinalnosti).

Primenom dualnosti se znatno olakšava i prebrajanje bazâ; broj bazâ matroida M je jednak broju bazâ matroida M* (baze drugog matroida su tačno komplementi (u odnosu na zajednički nosač) baza prvog). Zahvaljujući ovome je dovoljno izvršiti prebrajanje baza kod onih matroida, čiji rang nije veći od polovine kardinalnosti nosača.

Na osnovu svega rečenog, preostaje da se prebroje baze samo kod onih C-lanaca, C-kvadrata, kao i netransverzalnih matroida čiji duali takodje nisu transverzalni, koji nemaju petlje i koji su ranga r na n-skupu ($0 \le n \le 8$), pri čemu je $r \le \frac{n}{2}$. Kod svih ovih matroida nabrajamo upravo one r-skupove, koji nisu baze (što je lakše kad se podje od CF-mreže), slično kao što je radjeno kod provere transverzalnih reprezentacija. Broj baza se dobija oduzimanjem broja r-nebaza od $\binom{n}{r}$.

Primetimo da je kod pejving matroida, a i kod znatnog broja ostalih prostih matroida, prebrajanje baza (a takodje i prebrajanje hiperravni i ciklova) znatno olakšano na osnovu toga što matroidi sa istim tipovima CF-mreža i istim kardinalnostima i rangovima odgovarajućih C-potprostora, imaju, po pravilu, jednaka i tri numerička parametra, čije utvrdjivanje upravo razmatramo.

Naprimer, sve B - , C - i D - familije sa k 4-hiperravni ($0 \le k \le 14$) imaju po 70-k baza, po 56-3k hiperravni i po 56-3k ciklova. Time odjednom rešavamo problem prebrajanja baza, hiperravni i ciklova za 270 matroida u katalogu.

IV-5. OZNAKE KORIŠĆENE U KATALOGU

Sve skupove u katalogu označavamo bez zareza i zagrada. Svi ti skupovi su podskupovi skupa ABCDEFGH. Elementi nosača svih matroida na k-skupu ($1 \le k \le 8$) u katalogu su prvih k slova reči "ABCDEFGH".

Ako je skup ABCDEFG ciklički potprostor nekog matroida na 7-skupu, onda ga kratko označavamo sa "W".

Ako je skup ABCDEFGH ciklički potprostor nekog matroida na 8-skupu, onda ga kratko označavamo sa "S".

Oznake "W" i "S" se ne odnose na skupove u transverzalnim reprezentacijama.

Svaki "mali" matroid ima u katalogu svoje sopstveno pravougaono polje (u daljem samo "polje"). Na svakoj stranici kataloga postoji 14 takvih polja. Na to polje mislimo kad kažemo , naprimer "u levom gornjem uglu polja".

Sledeći podaci su dati unutar polja:

(1) mreža cikličkih potprostora (u sredini polja). Ovo je najvažniji deo podataka, budući da su njime na jednoobrazan način odredjeni svi matroidi u katalogu. Relacija pokrivanja u mreži se označava uobičajenim kratkim linijama. Svakom cikličkom potprostoru mreže je u zagradi pridružen njegov rang, izuzev kod sledeća dva tipa cikličkih potprostora:

kod a) (jedinog) cikličkog potprostora ranga 0 i

kod b) cikličkih potprostora ranga 3, s tim što ovo važi samo za matroide koji su u katalogu navedeni izmedju matroida označenih sa 84 S 157 i 84 S 617 (uključno).

(2) Oznaka za matroid (u gornjem levom uglu polja)

Ova oznaka se sastoji iz četiri dela:

a) kardinalnosti nosača matroida

b) ranga matroida

c) slova L, H ili S, koje se odredjuje na sledeći način:

L - ako matroid ima petlje

H - ako je matroid poluprost

S - ako je matroid prost

d) redni broj matroida u klasi matroida, koji imaju zajednička prva dva podatka.

Naprimer, "84 S 157" označava 157. po redu prost matroid ranga 4 na 8-skupu.

Matroidi u katalogu su navedeni takvim redom, da a) ne opada. Matroidi sa fiksnim a) su uredjeni tako da b) ne opada. Kod matroida sa fiksnim a) i b) najpre navodimo "L", zatim "H" i na kraju "S" matroide.

Koristili smo samo neka delimična pravila pri uspostavljanju poretka obuhvaćenog sa d).

Prosti matroidi na skupovima od najviše 7 elemenata su navedeni istim redom kao u katalogu |16| . Štaviše, oznake ovih matroida u ova dva kataloga se nalaze u potpunoj saglasnosti (ako "prevedemo" cikličke potprostore na hiperravni ili obrnuto, onda parove medjusobno izomorfnih matroida u ova dva kataloga dovodimo do poklapanja).

Poredak poluprostih matroida je prenesen iz Glave I ; dobijen je kombinovanjem upravo opisanog poretka prostih matroida i odredjenog leksikografskog poretka. Poredak svih matroida sa petljama na (n+1)- skupu se dobija direktnim kopiranjem poretka svih matroida na n-skupu, za $0 \leq n \leq 7$.

Poredak prostih matroida na 8-skupu je, uopšteno govoreći, proizvoljan, premda smo nastojali da ga bar donekle osmislimo. Naprimer, u slučaju ranga 4, smo poštovali poredak s obzirom na cikličke potprostore ranga 2, preuzet iz |16|. Medjutim, činilo nam se pogodnijim da napravimo naše sopstveno pregrupisavanje u klasama prostih matroida ranga 4 na 8-skupu sa fiksiranom familijom (cikličkih) potprostora ranga 2. Ovo se posebno odnosi na klasu pejving matroida ranga 4 na 8-skupu, kod koje smo nastojali da poredak u katalogu uskladimo sa redosledom, po kome su ti matroidi konstruisani u Glavi II.

(3) Oznaka dualnog matroida (u gornjem levom uglu polja, tačno ispod oznake (2))

Ako matroid nije samodualan, onda ovu oznaku dajemo na isti način kao oznaku (2), samo što je stavljamo u zagrade.

Uopšteno govoreći, samodualne matroide označavamo slovima "SD" na istom mestu.

Kod identično samodualnih matroida zamenjujemo oznaku "SD" sa "ISD".

Kod samodualnih matroida, koji NISU električno samodualni, zamenjujemo oznaku "SD" sa "NESD". Usvajamo ovakvu oznaku, budući da su samodualni matroidi na skupovima od najviše 8 elemenata u velikoj većini električno samodualni.

Matroid označen sa 84 S 259 je jedini matroid u katalogu, koji istovremeno ima oznake "ISD" i "NESD".

(4) Broj hiperravni, broj baza i broj ciklova (u gornjem desnom uglu polja)

Ovi brojevi su dati upravo navedenim redom i medjusobno razdvojeni kratkim crtama.

(5) Oznaka transverzalnosti (u donjem levom uglu polja)

Kod transverzalnih matroida pišemo slovo "T", a kod netransverzalnih matroida slova "NT".

Kako je u Glavi III pokazano da su svi C-lanci i C - kvadrati transverzalni matroidi, to samo kod preostalih transverzalnih matroida u katalogu navodimo po jednu transverzalnu reprezentaciju (u zagradama odmah posle slova "T").

(6) Oznaka binarnosti (regularnosti, grafičke reprezentabilnosti) (na desnoj strani polja)

Kod svakog grafičkog matroida u katalogu dajemo po jednu grafičku reprezentaciju. Nju biramo uglavnom proizvoljno iz skupa mogućih reprezentacija, jedino usvajamo da su svi ovi grafovi povezani, kao i da su sve petlje nekog grafa incidentne istom čvoru. Grane ovih grafova označavamo odgovarajućim elementima nosača matroida. Medjutim, obično izostavljamo ove poslednje oznake kod nekih grana grafa, ukoliko je i bez njih odgovarajući matroid (zadat svojom CF-mrežom) odredjen iz svoje grafičke reprezentacije do poklapanja.

Kod (jedinih) dvanaest binarnih neregularnih (a samim tim i negrafičkih) matroida, koji se pojavljuju u katalogu, na desnoj strani polja navodimo oznaku "BIN, NON REG" umesto grafičke reprezentacije. Kod nebinarnih matroida na istom mestu pišemo "NB". U većini slučajeva je oznaka "NB" praćena jednim minorom, izomorfnim sa $U_{2,4}$ zapisanim unutar zagrada. Oznaka "NB" stoji sama samo kod (većine) nebinarnih pejving matroida budući da su oni precizno okarakterisani na osnovu rezultata Odeljka IV-1.

Ovi minori dokazuju nebinarnost i dati su svojim CF-mrežama, koje se sastoje samo od nule i jedinice (ukoliko je nula neprazna, onda je rang jednog od ova dva potprostora naznačen u malim zagradama).

(7) Specijalne dodatne oznake kod nekih matroida (na levoj strani polja)

Kod prostih matroida ranga 3 na 8-skupu navodimo njihove euklidske reprezentacije. Tačke u tim reprezentacijama označavamo odgovarajućim elementima nosača matroida.

Ako nekom pejving matroidu ranga 4 na 8-skupu odgovara A-graf, D-graf ili C-graf, onda taj graf navodimo u katalogu.

Precizirajmo načine označavanja ovih grafova:

A-graf (pridruženi matroidima sa oznakama od 84 S 303 do 84 S 347):

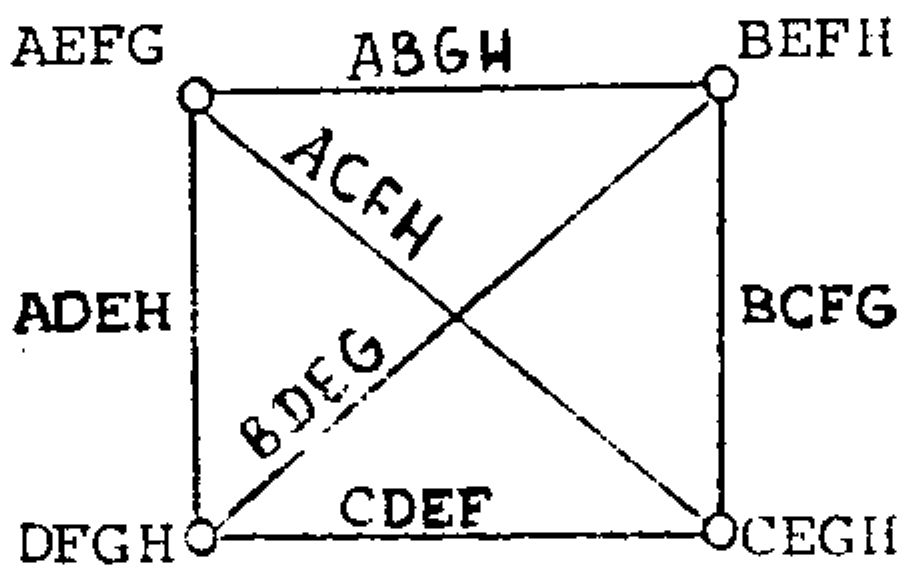
Jedina 5-hiperravan svih ovih matroida je ABCDE, pa su čvorovi A-grafova označeni sa A, B, C, D, E, s tim što se izolovani čvorovi ne ucrtavaju. Pridruživanje grane i označavanje grana crticama su objašnjeni u Glavi II. Oznaka "+" se dodaje nekom A-grafu ukoliko odgovarajući matroid ima jednu (više i ne može imati) 4-hiperravan, koja sadrži podskup FGH.

D-grafovi (pridruženi matroidima sa oznakama od 84 S 434 do 84 S 469).

Način formiranja D-grafova i njihovo markiranje relacijom " $\rightarrow$ " su objašnjeni u Glavi II. Cikličke hiperravni u CF-mrežama ovih matroida su numerisane prirodnim brojevima sleva na desno, počevši sa brojem 1, pa su na taj način označeni odgovarajući čvorovi D-grafova. Grane D-grafova su označene odgovarajućim presečnim elementima dvaju 4-hiperravni. Isprekidane linije kod D-grafova pridruženih matroidima 84 S 466 i 84 S 467 povezuju izolovanu granu tih grafova sa onima od neincidentnih čvorova, koji sadrže "presečni element" izolovane grane.

C-grafovi (pridruženi matroidima sa oznakama od 84 S 470 do 84 S 515 i od 84 S 553 do 84 S 581).

Svi ovi matroidi imaju 4-hiperravan ABCD.



Neka Γ označava graf K_4, čiji čvorovi i grane su označeni tačno kao na priloženom dijagramu.

Sve 4-hiperravni (izuzev ABCD) svih ovih matroida se nalaze medju označenih deset 4-skupova. C-grafovi imaju po 4 čvora (ucrtavaju se kao temena kvadrata).

Neka grana postoji u C-grafu ako i samo ako matroid ima 4-hiperravan pridružen odgovarajućoj grani grafa Γ .

Neki čvor C-grafa je zaokružen malim kružićem ako i samo ako matroid NEMA 4-hiperravan pridruženu odgovarajućem čvoru grafa Γ .

REGISTAR OZNAKA I POJMOVA

K

L

M

M

N

N

O

P

P

Q

R

S

L I T E R A T U R A

|1| Acketa,D.M.: On the enumeration of matroids of rank 2, Zbornik radova PMF Novi Sad 8(1978), 83-90.

|2| Acketa,D.M.: On the essential flats of geometric lattices, Publ. del' Inst.Math. 26(40),(1979),11-17.

|3| Acketa,D.M.: On the construction of all matroids on 7 elements at most, Zbor.rad. PMF Novi Sad 9(1979) 133-151.

|4| Acketa,D.M.: Neki prilozi teoriji matroida, magistarski rad, Novi Sad 1979.

|5| Acketa,D.M.: Another construction of rank 4 paving matroids on 8 elements (I), Zbor.rad. PMF Novi Sad 12(1982), 259-276.

|6| Acketa,D.M.: Another construction of rank 4 paving matroids on 8 elements (II), Zbor.rad. PMF Novi Sad 12(1982), 277-303.

|7| Acketa,D.M.: On the positional partitions of simple matroids, Proc. of the 3 rd algeb.conf., Belgrade 1982, 1-8.

|8| Acketa,D.M.: The catalogue of all non-isomorphic matroids on at most 8 elements, Ins. of Math. Novi Sad, spec. iss. 1, 18+157, 1983.

|9| Acketa,D.M.: On the essential chains and squares,primljeno u Proc. of 6 th Hung.coll. on combinatorics, Col. Math. Soc. Janos Bolyai 37 (1981).

|10| Acketa,D.M.: A construction of non-simple matroids on at most 8 elements, primljeno u J.Combin.Inform. System Sci.

|11| Acketa,D.M.: Some results on "small" matroids, primljeno u Proc. of colloquium on matroid theory, Szeged 1982, Col.Math.Soc. Janos Bolyai.

|12| Aigner,M.: Combinatorial theory, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 1979.

|13| Anderson,I.: A first course in combinatorial mathematics, Oxford Appl.Math. and Comp.Sci. Series, Clarendon Press, Oxford, 1974.

|14| Berge,C.: Graphs and Hypergraphs, North Holland (1973)

|15| Bixby,R.: Matroids and Operations Research,Dept. of Ind. Engineering and Management Sci. NW Univ.Evanston Illinois (preprint).

|16| Blackburn,J.A., Crapo,H.H., Higgs,D.A.: A catalogue of Combinatorial Geometries, Math.Comput. 27(1973) 155-166.

|17| Bollobas,B.: A lower bound for the number of non-isomorphic matroids, J. Combinatorial Theory, 7(1969) 366-368.

|18| Bondy,J.A., Welsh,D.J.A.: Some results on transversal matroids and constructions for identically self-dual matroids, Quart. J.Math. (Oxford), 22(1971) 435-451.

|19| Brualdi,R.A., Dinolt,G.W.: Characterisation of transversal matroids and their presentations, J.Combinatorial Theory

|20| Bruter,C.P.: Elements de la Theorie des Matroides, Springer Lecture Notes 387(1974).

|21| Bruter,C.P.,ed.: Théorie des Matroïdes, Rencontre Franco-Britannique (1970), Springer Lecture Notes , 211(1971).

|22| Bryant,V., Perfect,V,: Independence Theory in Combinatorics, Chapman and Hall, London and New York, 1980.

|23| Brylawski,T.H.: An affine representation for transversal geometries, Studies in Appl. Math., 54(1975), 143-160.

|24| Brylawski,T., Kelly,D.: Matroids and Combinatorial Geometries, Carolina Lecture Series, Chapel Hill (1980).

|25| Crapo,H.H.: Erecting Geometries, Proc. of 2nd Chapel Hill Conf. on Combinatorial Math. (1970), 74-99.

|26| Crapo,H.H., Cheung,A.: On relative position in extensioons of combinatorial geometries, preprint, Waterloo, 1974.

|27| Crapo,H.H., Rota,G.C.: On the Foundations of Combinatorial Theory: Combinatorial Geometries, M.I.T. Press, Cambridge, Mass. (1977).

|28| Crawley,O., Dilworth,R.P.: Algebraic Theory of Lattices Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973.

|29| Cvetković,D., Milić,M.: Teorija grafova i njene primene, Naučna knjiga, Beograd, 1977.

|30| Cvetković,D., Simić,S.: Kombinatorika, klasična i moderna (u štampi).

|31| De Sousa,J., Welsh,D.J.A.: A characterisation of binary transversal matroids, J.Math.Analysis, Appl. 40(1)(1972), 55-59.

|32| Doyen,J.: Sur le nombre d´espaces lineares non isomorphes de n points, Bull. Soc.Math.Belg., v 19, 1967, 421-437.

|33| Duke,R.: Theory and Application of Freedom of Mathematics, Ph.D.Thesis, The Open University, Milton Keynes, 1981.

|34| Fournier,J.C.: Sur la representation sur un corps des matroides á sept et huit elements, C.R.Acad.Sci. Paris, Ser. 270(1970), 810-813.

|35| Glazek,K.: Some old and new problems in the independence theory, Colloquium Math.(1979), 127-189.

|36| Graver,J.E., Watkins,M.E.: Combinatorics with Emphasis on the Theory of Graphs, Springer Verlag (1977)

|37| Harary,F.: Graph Theory, Addison Wesley, 1969.

|38| Harary,F., Piff,M.J., Welsh,D.J.A.: On the automorphism group of a matroid, Discrete Math. 2 (1972), 163-171.

|39| Harary,F., Welsh,D.J.A.: Matroids versus Graphs, The many Facets of Graph Theory, Springer Lecture Notes 110(1969), 155-170.

|40| Heron,A.P.: Some topics in matroid theory, D.Phil.Thesis Oxford (1972).

|41| Higgs,D.A.: Matroids on 6,7 elements (1966),neobjavljeno.

|42| Ingleton,A.W.: Transversal matroids and related structures, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute, Reidel Publ. Company, 1977.

|43| Ingleton,A.W., Piff,M.J.: Gammoids and transversal matroids, J.Combin. Theory, 15(1973), 51-68.

|44| Knuth,D.E.: The asymptotic number of geometries, J.Combinatorial Theory A 17(1974), 398-401.

|45| Knuth,D.E.: Random matroids, J.Combinatorial Theory,( ) 341-352.

|46| Kranjc,M.: Matroidi, podiplomski seminar iz matematike (9), Ljubljana (1976).

|47| Lawler,E.L.: Combinatorial Optimization; Networks and Matroids, Holt, Rinehart & Winston, New York (1975).

|48| Mason,J.H.: A characterization of transversal independence spaces in Theorie des Matroides ed.C.P. Bruter (Springer 1971), 86-94.

|49| Mirsky,L.: Transversal Theory, Academic Press, London, (1971).

|50| Oxley,J.G.: On the numbers of bases and circuits in simple binary matroids. (preprint)

|51| Piff,M.J.: Some problems in combinatorial theory, D.Phil. Thesis, Oxford, (1972).

|52| Piff,M.J.: An upper bound for the number of matroids, J. Combinatorial Theory, 13(1973), 241-245.

|53| Piff,M.J., Welsh,D.J.A.: The number of combinatorial geometries, Bull. London Math. Soc.3(1971),55-56.

|54| Randow, von Rabe:Introduction to the Theory of Matroids, Springer Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer Verlag, (1975).

|55| Recski,A.: On self-dual matroids with applications, Proc. of 6th Hung.coll. on combinatorics, Col.Math. Soc. Janos Bolyai, 37(1981).

|56| Robinson,G.C.,Welsh,D.J.A.: The computational complexity of matroid properties, Math.Proc.Camb.Phil.Soc. 87 (1980), 29-45.

|57| Sims,J.A.: Some problems in matroid theory. D.Phil. thesis, Oxford (1980).

|58| Tutte,W.T.: A Homotopy Theorem for Matroids I and II, Trans.Amer.Math.Soc. 88(1958), 144-174.

|59| Tutte,W.T.: Matroids and Groups, Trans.Amer.Math.Soc. 90(1959), 527-552.

|60| Tutte,W.T.: Lectures on matroids, J.Res.Nat.Bur.Stand. 69 B (1965), 1-48.

|61| Tutte,W.T.: Introduction to the Theory of Matroids,American Elsevier (New York), (1970).

|62| Welsh,D.J.A.: Matroid Theory, London Math. Soc. Monographs, No. 8, Academic Press, (1976).

|63| Welsh,D.J.A.: A bound for the number of matroids, J. Combinatorial Theory 6(1969), 313-316.

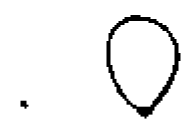
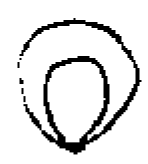
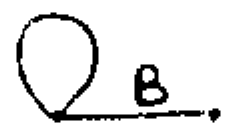
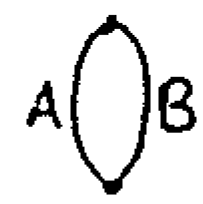
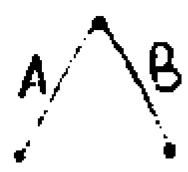
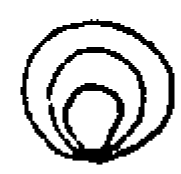
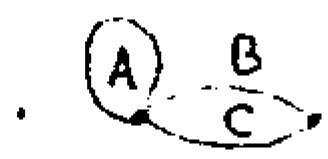
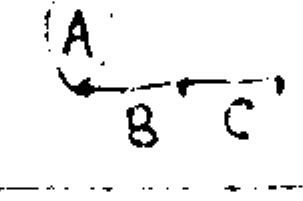
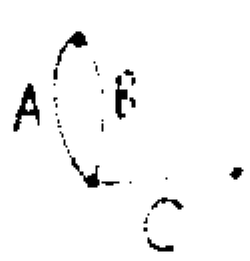
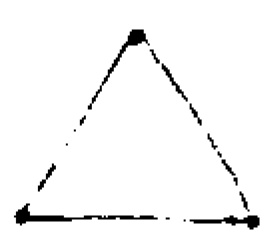
|64| Welsh,D.J.A.: Matroids and Combinatorial Optimization, lectures, Varenna, (1980).

|65| Whitney,H.: On the abstract properties of linear dependence, Amer. J.Math. 57(1935), 509-533.

|66| Wilson,R.J.: Introduction to graph theory, Oliver and Boyd, (1972).

PRILOG

KATALOG SVIH NEIZOMORFNIH MATROIDA NA SKUPOVIMA OD NAJVIŠE 8 ELEMENATA

00S1 (ISD) 0-1-0 Ø Ø T	10L1 (11S1) 0-1-1 A  T
11S1 (10L1) 1-1-0 Ø  T	20L1 (22S1) 0-1-2 AB  T
21L1 (SD) 1-1-1 A  T	21H1 (ISD) 1-2-1 AB(1) | Ø  T
22S1 (20L1) 2-1-0 Ø  T	30L1 (33S1) 0-1-3 ABC  T
31L1 (32L1) 1-1-2 AB  T	31L2 (32H1) 1-2-2 ABC(1) | A  T
31H1 (32S1) 1-3-3 ABC(1) | Ø  T	32L1 (31L1) 2-1-1 A  T
32H1 (31L2) 2-2-1 AB(1) | Ø  T	32S1 (31H1) 3-3-1 ABC(2) | Ø  T

33S1 (30L1) 3-1-0

∅

T

40L1 (44S1) 0-1

ABCD

T

41L1 (43L1) 1-1-3

ABC

T

41L2 (43H1) 1-2

ABCD(1)
|
AB

T

41L3 (43S1) 1-3-4

ABCD(1)
|
A

T

41H1 (43S2) 1-4-

ABCD(1)
|
∅

T

42L1 (SD) 2-1-2

AB

T

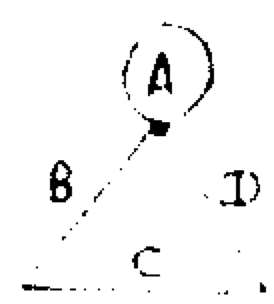
42L2 (SD) 2-2-

ABC(1)
|
A

T

42L3 (42H1) 3-3-2

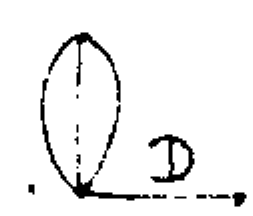
ABCD(2)
|
A



T

42H1 (42L3) 2-3-

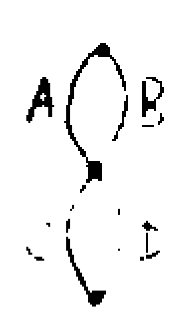
ABC(1)
|
∅



T

42H2 (ISD) 2-4-2

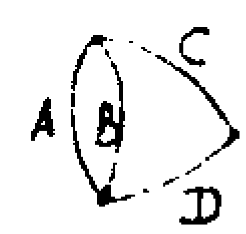
ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅



T

42H3 (SD) 3-5-

ABCD(2)
|
AB(1)
|
∅



T

42S1 (ISD) 4-6-4

ABCD(2)
|
∅

NB (ABCD | ∅)

T

43L1 (41L1) 3-1-1

A

T

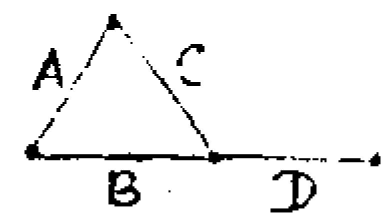
43H1 (41L2) 3-2-1

AB(1)
|
Ø

T

43S1 (41L3) 4-3-1

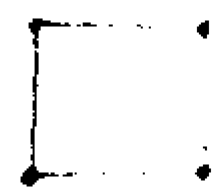
ABC(2)
|
Ø



T

43S2 (41H1) 6-4-1

ABCD(3)
|
Ø



T

44S1 (40L1) 4-1-0

Ø

T

50L1 (55S1) 0-1-5

ABCDE

T

51L1 (54L1) 1-1-4

ABCD

T

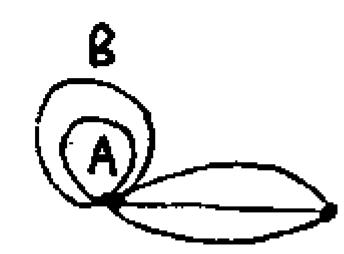
51L2 (54H1) 1-2-4

ABCDE(1)
|
ABC

T

51L3 (54S1) 1-3-5

ABCDE(1)
|
AB



T

51L4 (54S2) 1-4-7

ABCDE(1)
|
A

T

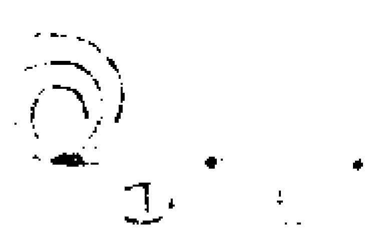
51H1 (54S3) 1-5-10

ABCDE(1)
|
Ø

T

52L1 (53L1) 2-1-3

ABC



T

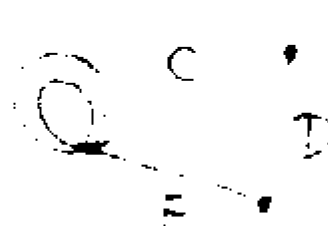
52L2 (53L2) 2-2-3

ABCD(1)
|
AB

T

52L3 (53H1) 3-3-3

ABCDE(1)
|
AB



T

52L4 (53L3) 2-3-4

ABCD(1)
|
A

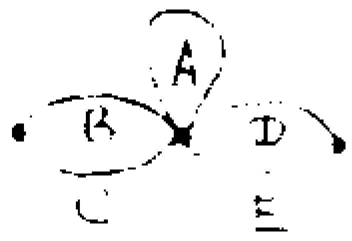
52L5
(53H2)

2-4-3

ABCDE(2)

ABC(1)   ADE(1)

A



T

52L7
(53S1)

4-6-5

ABCDE(2)
|
A

NB(ABCDE | A)

T

52H2
(53H4)

2-6-4

ABCDE(2)

ABC(1)   DE(1)

∅

T

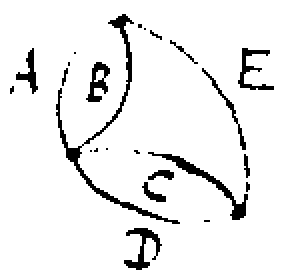
52H4
(53S2)

3-8-6

ABCDE(2)

AB(1)   CD(1)

∅



T

52S1
(53S4)

5-10-10

ABCDE(2)
|
∅

NB(ABCD | ∅)

T

53L2
(52L2)

3-2-2

ABC(1)
|
A

T

53L4
(52H1)

6-4-2

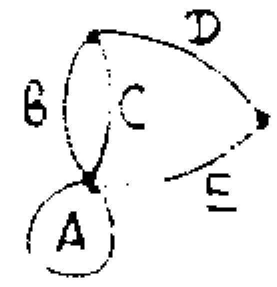
ABCDE(3)
|
A

T

52L6
(53H3)

3-5

ABCDE(2)
|
ABC(1)
|
A

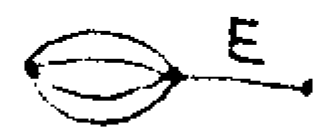


T

52H1
(53L4)

2-4-

ABCD(1)
|
∅

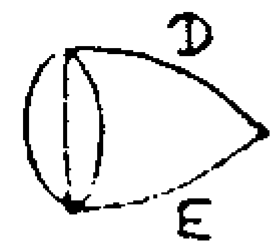


T

52H3
(53H5)

3-7-

ABCDE(2)
|
ABC(1)
|
∅



T

52H5
(53S3)

4-9-

ABCDE(2)
|
AB(1)
|
∅

NB(ACDE | ∅)

T

53L1
(52L1)

3-1-2

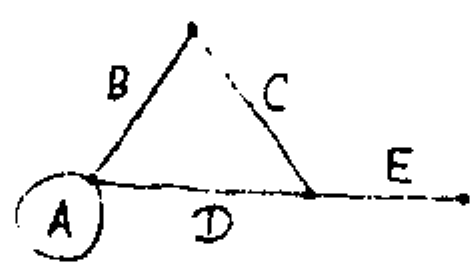
AB

T

53L3
(52L4)

4-3-2

ABCD(2)
|
A

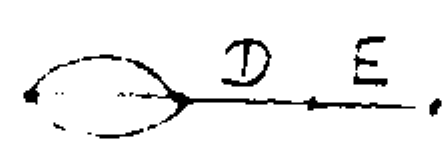


T

53H1
(52L3)

3-3-3

ABC(1)
|
∅



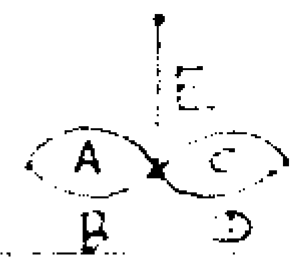
T

53H2 (52L5) — 3-4-2

ABCD(2)

AB(1) CD(1)

∅



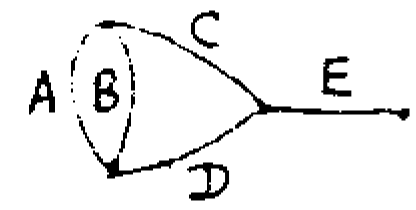
T

53H3 (52L6) — 4-5-3

ABCD(2)

AB(1)

∅



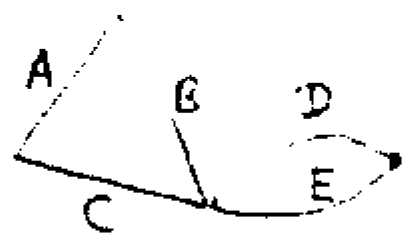
T

53H4 (52H2) — 4-6-2

ABCDE(3)

ABC(2) DE(1)

∅



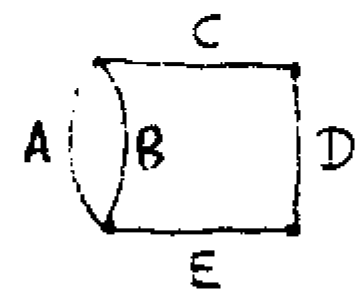
T

53H5 (52H3) — 6-7-3

ABCDE(3)

AB(1)

∅



T

53S1 (52L7) — 5-6-4

ABCD(2)

∅

NB (ABCD | ∅)

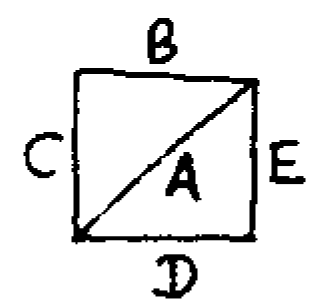
T

53S2 (52H4) — 6-8-3

ABCDE(3)

ABC(2) ADE(2)

∅



T

53S3 (52H5) — 8-9-4

ABCDE(3)

ABC(2)

∅

NB (ABCDE | D)

T

53S4 (52S1) — 10-10-5

ABCDE(3)

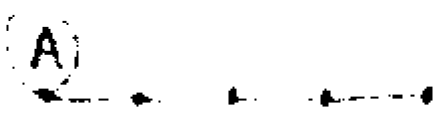
∅

NB (ABCDE | A)

T

54L1 (51L1) — 4-1-1

A

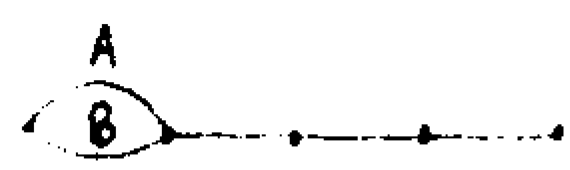


T

54H1 (51L2) — 4-2-1

AB(1)

∅

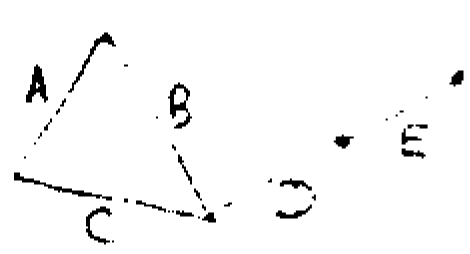


T

54S1 (51L3) — 5-3-1

ABC(2)

∅

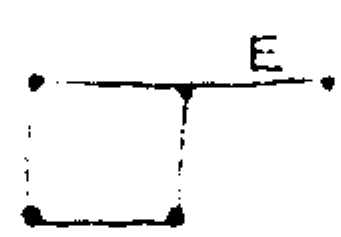


T

54S2 (51L4) — 7-4-1

ABCD(3)

∅

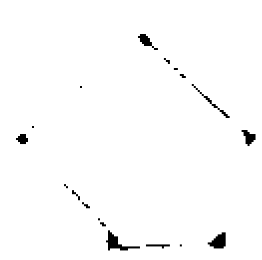


T

54S3 (51H1) — 10-5-1

ABCDE(4)

∅



T

55S1 (50L1) — 5-1-0

∅

T

60L1
(66S1)
0-1-6

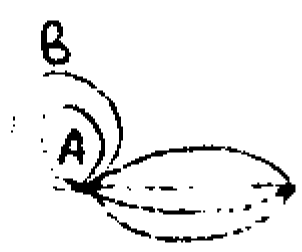
ABCDEF

61L2
(65H1)
1-2-5

ABCDEF(1)
|
ABCD

61L4
(65S2)
1-4-8

ABCDEF(1)
|
AB



61H1
(65S4)
1-6-15

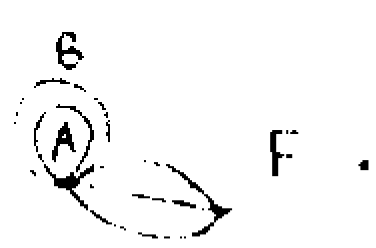
ABCDEF(1)
|
∅

62L2
(64L2)
2-2-4

ABCDE(1)
|
ABC

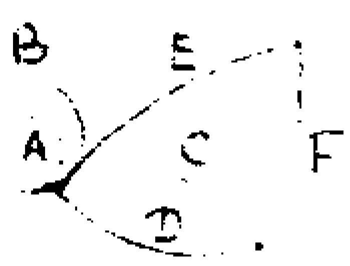
62L4
(64L3)
2-3-5

ABCDE(1)
|
AB



62L6
(64H3)
3-5-5

ABCDEF(2)
|
ABCD(1)
|
AB

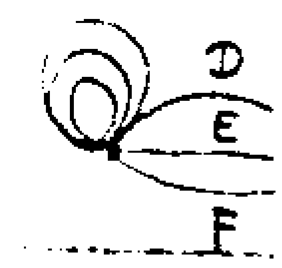


61L1
(65L1)
1-…

ABCDE

61L3
(65S1)
1-…

ABCDEF(1)
|
ABC



61L5
(65S3)
1-5…

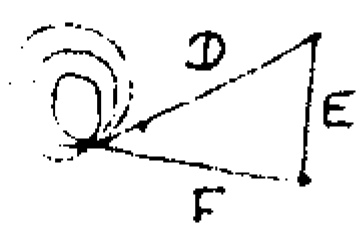
ABCDEF(1)
|
A

62L1
(64L1)
2-1-…

ABCD

62L3
(64H1)
3-3…

ABCDEF(2)
|
ABC



62L5
(64H2)
2-4-…

ABCDEF(2)

ABCD(1) ABEF(1)

AB

62L7
(64S1)
4-6-…

ABCDEF(2)
|
AB

NB (CDE… | ∅

62 L 8
(64 L 4)

2 - 4 - 7

ABCDE(1)
|
A

T

62 L 9
(64 H 4)

2 - 6 - 5

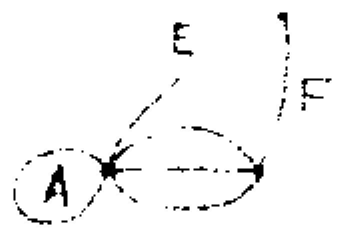
ABCDEF(2)
ABCD(1) AEF(1)
A

T

62 L 10
(64 H 5)

3 - 7 - 7

ABCDEF(2)
|
ABCD(1)
|
A

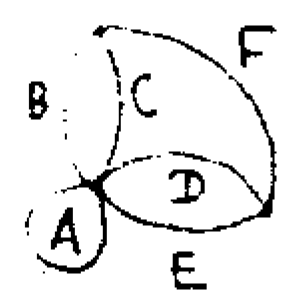


T

62 L 11
(64 S 3)

3 - 8 - 7

ABCDEF(2)
ABC(1) ADE(1)
A



T

62 L 12
(64 S 4)

4 - 9 - 9

ABCDEF(2)
|
ABC(1)
|
A

NB $\begin{pmatrix} CDEF \\ | \\ \varnothing \end{pmatrix}$

T

62 L 13
(64 S 8)

5 - 10 - 11

ABCDEF(2)
|
A

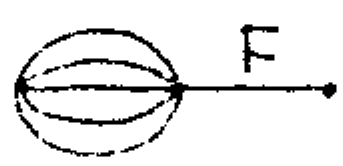
NB $\begin{pmatrix} CDEF \\ | \\ \varnothing \end{pmatrix}$

T

62 H 1
(64 L 5)

2 - 5 - 10

ABCDE(1)
|
∅

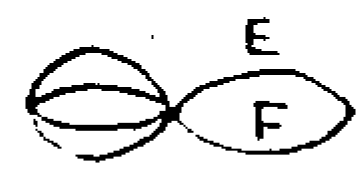


T

62 H 2
(64 H 6)

2 - 8 - 7

ABCDEF(2)
ABCD(1) EF(1)
∅

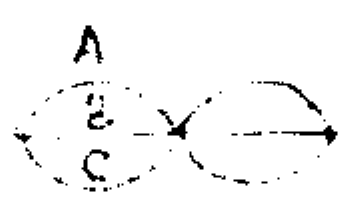


T

62 H 3
(64 S 2)

2 - 9 - 6

ABCDEF(2)
ABC(1) DEF(1)
∅

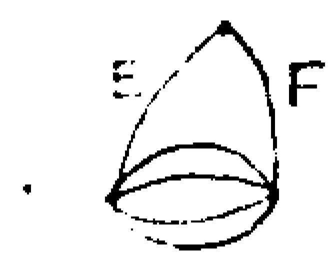


T

62 H 4
(64 H 7)

3 - 9 - 10

ABCDEF(2)
|
ABCD(1)
|
∅

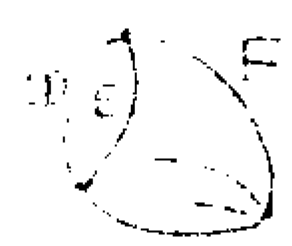


T

62 H 5
(64 S 5)

3 - 11 - 10

ABCDEF(2)
ABC(1) DE(1)
∅

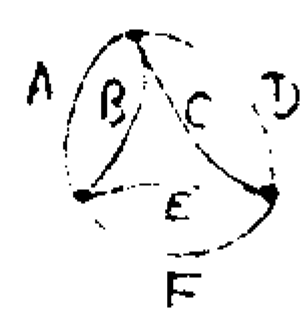


T

62 H 6
(64 S 7)

3 - 12 - 11

ABCDEF(2)
AB(1) CD(1) EF(1)
∅



NT

62 H 7
(64 S 6)

4 - 12 - 13

ABCDEF(2)
|
ABC(1)
|
∅

NB $\begin{pmatrix} ADEF \\ | \\ \varnothing \end{pmatrix}$

T

62 H 8
(64 S 9)

4 - 13 - 14

ABCDEF(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB $\begin{pmatrix} ACEF \\ | \\ \varnothing \end{pmatrix}$

T

62H9
(64S10)
5-14-17

ABCDEF(2)
|
AB(1)
|
∅

NB (CDEF | ∅)

T

62S1
(64S11)
6-

ABCDEF(2)
|
∅

NB (A

T

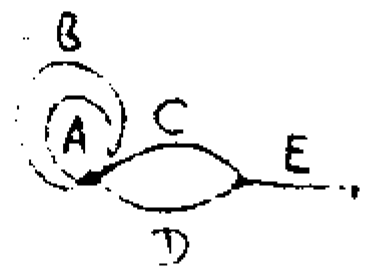
63L1
(SD)
3-1-3

ABC

T

63L2
(SD)
3-

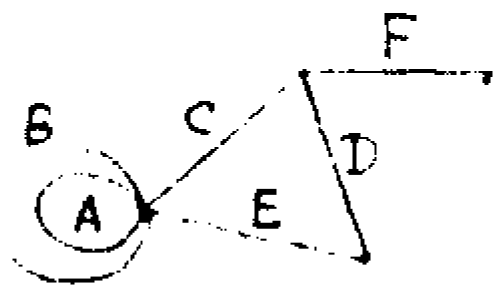
ABCD(1)
|
AB



T

63L3
(63L5)
4-3-3

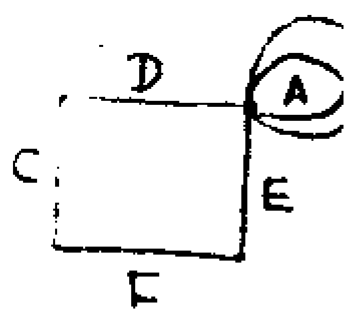
ABCDE(2)
|
AB



T

63L4
(63H1)
6-4

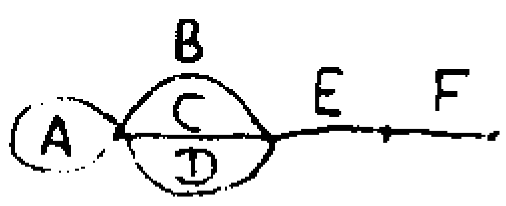
ABCDEF(3)
|
AB



T

63L5
(63L3)
3-3-4

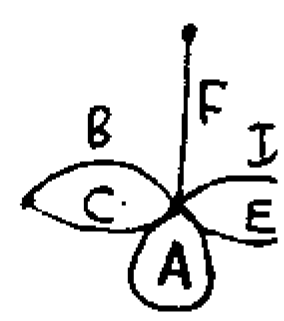
ABCD(1)
|
A



T

63L6
(SD)
3-4-

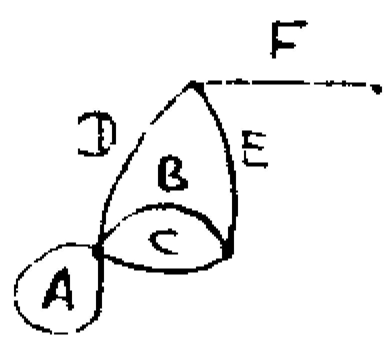
ABCDE(2)
ABC(1) ADE(1)
A



T

63L7
(SD)
4-5-4

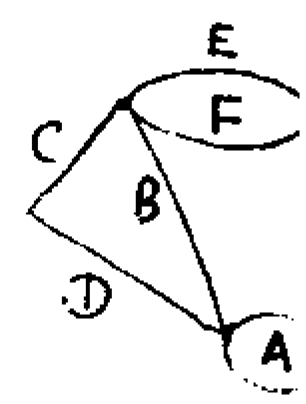
ABCDE(2)
|
ABC(1)
|
A



T

63L8
(63H2)
4-3-

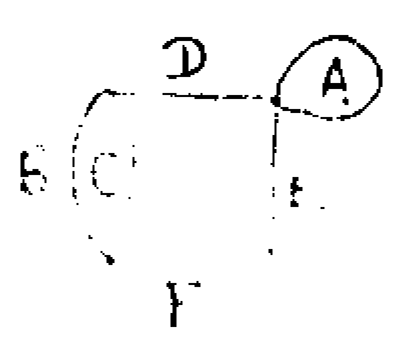
ABCDEF(3)
ABCD(2) AEF(1)
A



T

63L9
(63H?)
6-7-4

ABCDEF(3)
|
ABC(?)
|
A



T

63L10
(SD)
5-6-

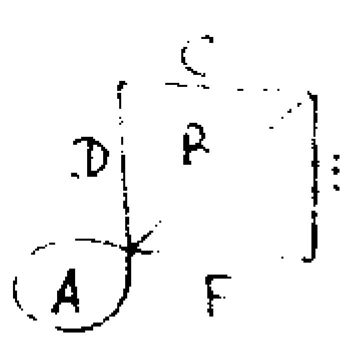
ABCDE(2)
|
A

NB (BCDE | ∅

T

63L11
(63H?)
6-8-4

ABCDEF(3)
ABCD(2) ABE(?)
A



T

63L12
(63H10)
8-9-

ABCDEF(3)
|
ABCD(?)
|
A

NB (ABCDE | AE

T

63L13 (63S1) 10-10-6

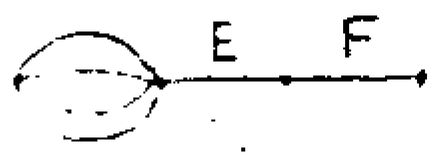
ABCDEF(3)
|
A

NB(ABCDEF | AB)

T

63H1 (63L4) 3-4-6

ABCD(1)
|
Ø



T

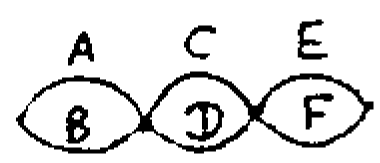
63H2 (63L8) 3-6-4

ABCDE(2)
ABC(1) DE(1)
Ø

T

63H3 (ISD) 3-8-3

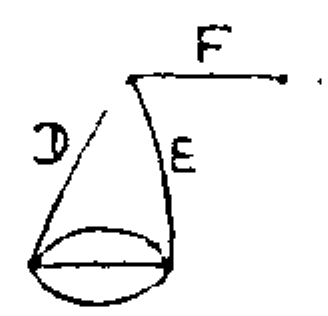
ABCDEF(3)
ABCD(2) ABEF(2) CDEF(2)
AB(1) CD(1) EF(1)
Ø



T(AB, CD, EF)

63H4 (63L9) 4-7-6

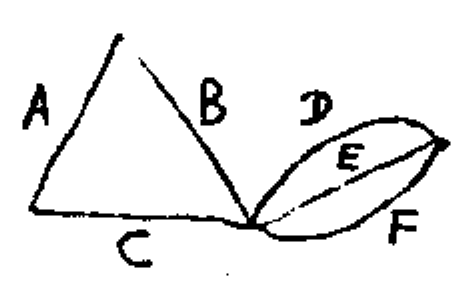
ABCDE(2)
|
ABC(1)
|
Ø



T

63H5 (SD) 4-9-4

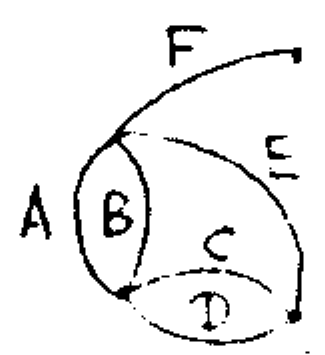
ABCDEF(3)
ABC(2) DEF(1)
Ø



T

63H6 (63L11) 4-8-6

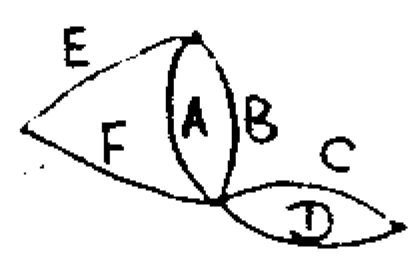
ABCDE(2)
AB(1) CD(1)
Ø



T

63H7 (SD) 4-10-4

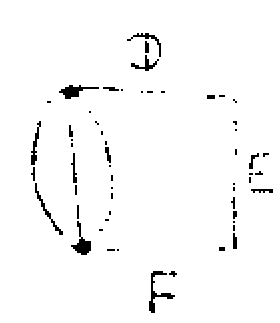
ABCDEF(3)
ABEF(2) ABCD(2)
AB(1) CD(1)
Ø



T(ABEF, CD, EF)

63H8 (SD) 6-10-6

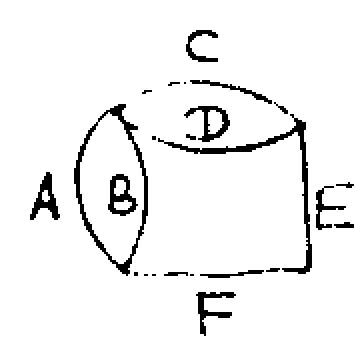
ABCDEF(3)
|
ABC(1)
|
Ø



T

63H9 (63H12) 6-12-6

ABCDEF(3)
|
ABCD(2)
AB(1) CD(1)
Ø



T(ABEF, CDEF, EF)

63H10 (63L12) 5-9-8

ABCDE(2)
|
AB(1)
|
Ø

NB(ACDE | Ø)

T

63H11 (ISD) 5-12-5

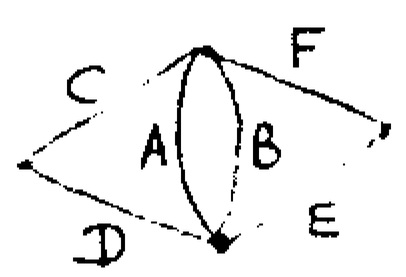
ABCDEF(3)
ABCD(2) EF(1)
Ø

NB(ABCD | Ø)

T

63H12 (63H9) 6-12-6

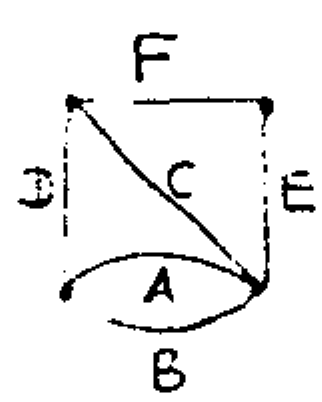
ABCDEF(3)
ABCD(2) ABEF(2)
AB(1)
|
Ø



T(ABCDEF, CD, EF)

63H13 (SD) 6-13-6

ABCDEF(3)
ABCD(2) CEF(2)
|
AB(1)
Ø



T(CDEF, ABD, EF)

63H14 (SD) — 8-14-8

ABCDEF(3) — ABCD(2) — AB(1) — Ø

NB (ACDEF — E(1))

T

63H15 (63S3) — 8-

ABCDEF(3) — ABC(2), DE(1) — Ø

T

63H16 (63S5) — 10-16-10

ABCDEF(3) — AB(1) — Ø

NB (ABCDEF — CD(1))

T

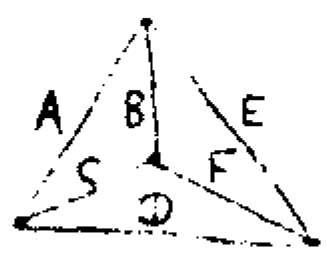
63S1 (63L3) — 6-

ABCDE(2) — Ø

T

63S2 (SD) — 7-16-7

ABCDEF(3) — ABC(2), ADE(2), BEF(2), CDF(2) — Ø



NT

63S3 (63H15) — 8-1

ABCDEF(3) — ABCD(2), AEF(2) — Ø

T

63S4 (SD) — 9-17-9

ABCDEF(3) — ABC(2), ADE(2), CEF(2) — Ø

NB (ABDEF — B(1))

T(DEF, BCF, ABD)

63S5 (63H16) — 10-16

ABCDEF(3) — ABCD(2) — Ø

T

63S6 (ISD) — 11-18-11

ABCDEF(3) — ABC(2), DEF(2) — Ø

NB (ABDEF — A(1))

T

63S7 (SD) — 11-18

ABCDEF(3) — ABC(2), ADE(2) — Ø

T

63S8 (SD) — 13-19-13

ABCDEF(3) — ABC(2) — Ø

NB (ABDEF — B(1))

T

63S9 (ISD) — 15-20

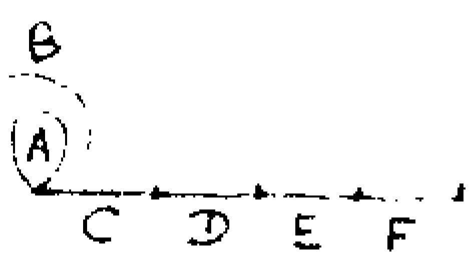
ABCDEF(3) — Ø

NB (ABCD — A(1))

T

64L1 (62L1) — 4-1-2

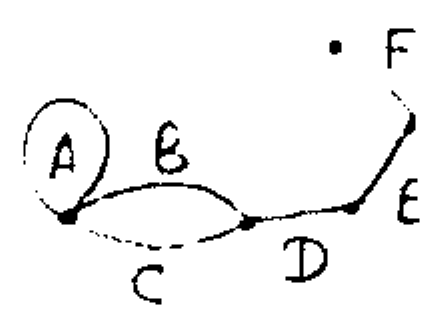
AB



T

64L2 (62L2) — 4-2-

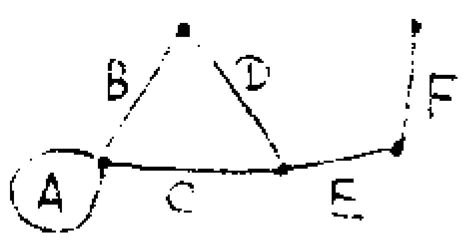
ABC(1) — A



T

64L3 (62L4) 5-3-2

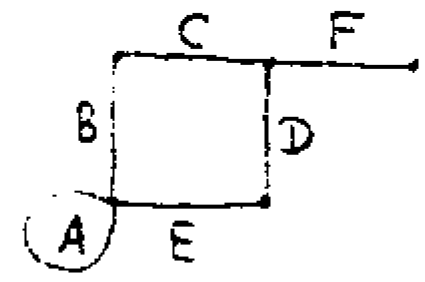
ABCD(2)
|
A



T

64L4 (62L8) 7-4-2

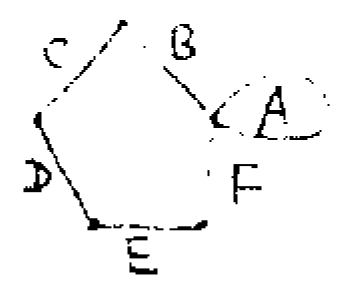
ABCDE(3)
|
A



T

64L5 (62H1) 10-5-2

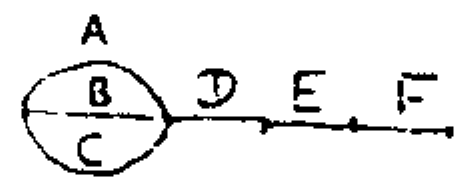
ABCDEF(4)
|
A



T

64H1 (62L3) 4-3-3

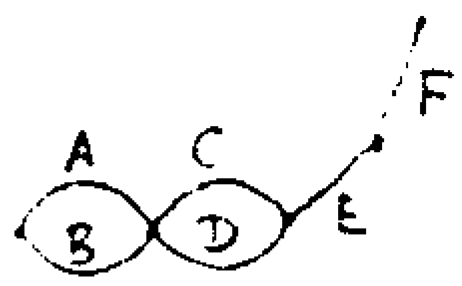
ABC(1)
|
∅



T

64H2 (62L5) 4-4-2

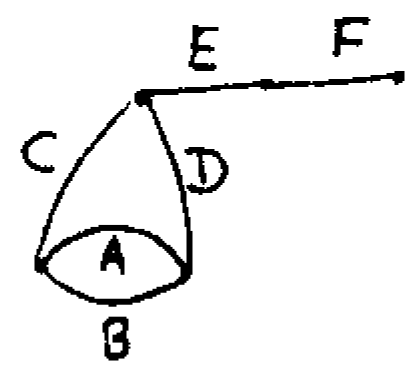
ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅



T

64H3 (62L6) 5-5-3

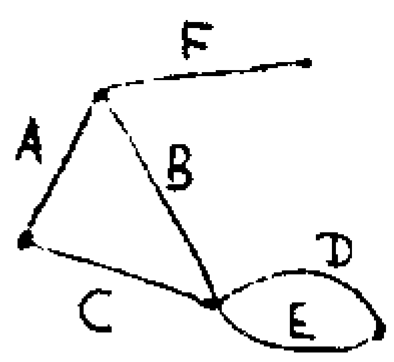
ABCD(2)
|
AB(1)
|
∅



T

64H4 (62L9) 5-6-2

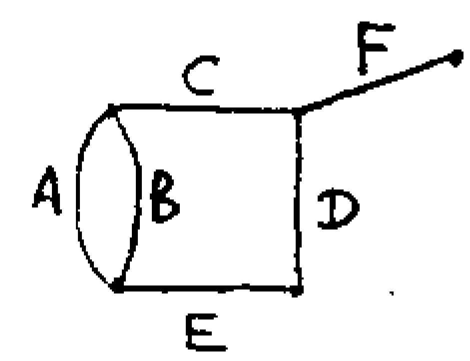
ABCDE(3)
ABC(2) DE(1)
∅



T

64H5 (62L10) 7-7-3

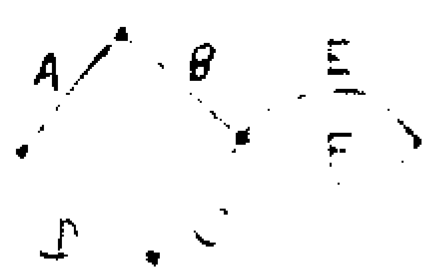
ABCDE(3)
|
AB(1)
|
∅



T

64H6 (62H2) 7-8-2

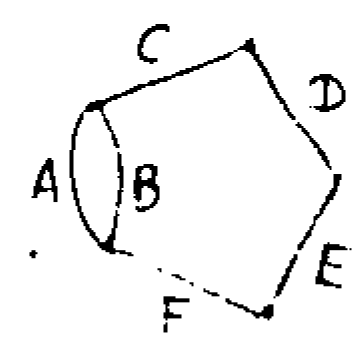
ABCDEF(4)
ABCD(3) EF(1)
∅



T

64H7 (62H4) 10-9-3

ABCDEF(4)
|
AB(1)
|
∅



T

64S1 (62L7) 6-6-4

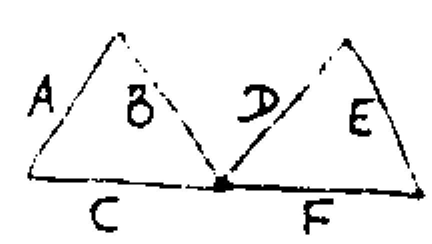
ABCD(2)
|
∅

NB (ABCD | ∅)

T

64S2 (62H3) 6-9-2

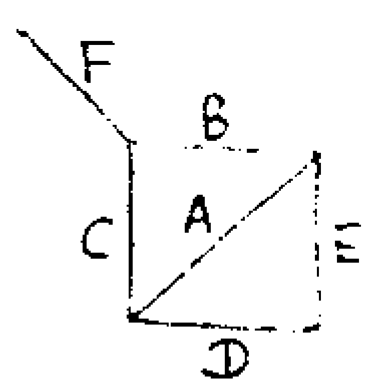
ABCDEF(4)
ABC(2) DEF(2)
∅



T

64S3 (62L11) 7-8-3

ABCDE(3)
ABC(2) ADE(2)
∅



T

64S4 (62L12) 9-9-4

ABCDE(3)
|
ABC(2)
|
∅

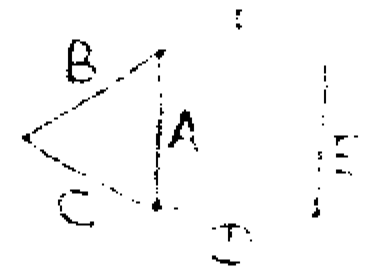
NB (ABCDE | D(1))

T

64 S 5
(62 H 5)

10 – 11 – 3

ABCDEF(4)
ABC(2) ADEF(3)
Ø



64 S 6
(62 H 7)

13 – 12 –

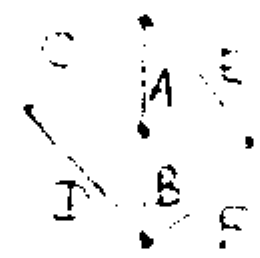
ABCDEF(4)
|
ABC(2)
|
Ø

NB (ABCDE | DE(2))

T
64 S 7
(62 H 6)

11 – 12 – 3

ABCDEF(4)
ABCD(3) ABEF(3) CDEF(3)
Ø



T
64 S 8
(62 L 4)

11 – 10 – 5

ABCDE(3)
|
Ø

NB (ABCDE | A(1))

T(ABCDEF, AB, CD, EF)
64 S 9
(62 H 8)

14 – 13 – 4

ABCDEF(4)
ABCD(3) ABEF(3)
Ø

NB (ABCDEF | CE(2))

T
64 S 10
(62 H 9)

17 – 14 – 5

ABCDEF(4)
|
ABCD(3)
|
Ø

NB (ABCDEF | EF(2))

T
64 S 11
(62 S 1)

20 – 15 – 6

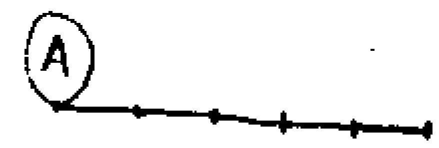
ABCDEF(4)
|
Ø

NB (ABCDEF | AB(2))

T
65 L 1
(61 L 1)

5 – 1 – 1

A



T
65 H 1
(61 L 2)

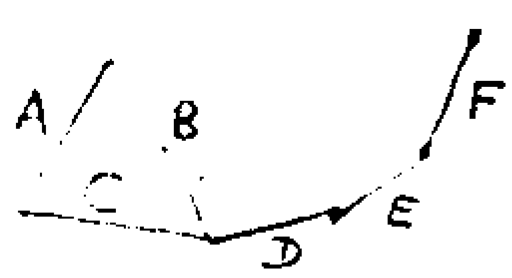
5 – 2 – 1

AB(1)
|
Ø

T
65 S 1
(61 L 3)

6 – 3 – 1

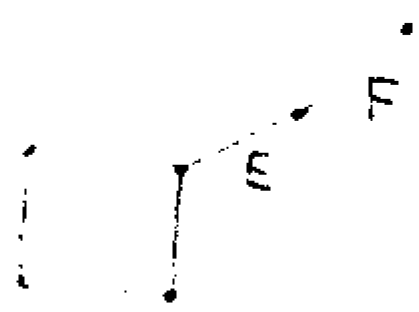
ABC(2)
|
Ø



T
65 S 2
(61 L 4)

8 – 4 – 1

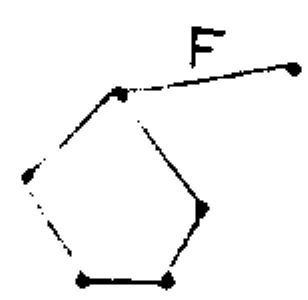
ABCD(3)
|
Ø



T
65 S 3
(61 L 5)

11 – 5 – 1

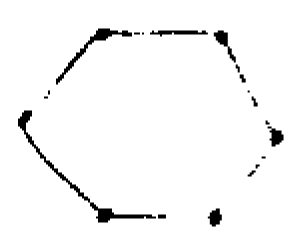
ABCDE(4)
|
Ø



65 S 4
(61 H 1)

15 – 6 – 1

ABCDEF(5)
|
Ø



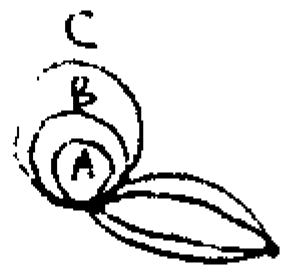
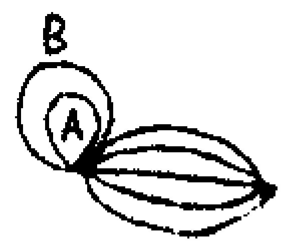
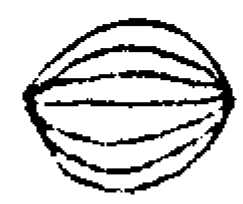
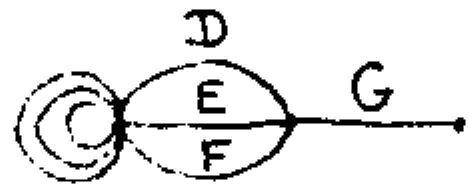
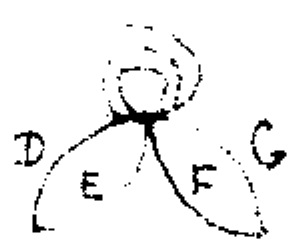
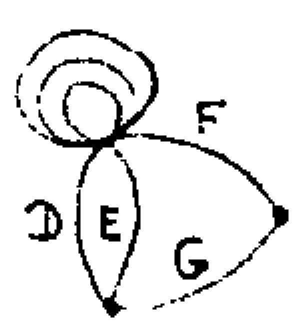
T

66 S 1
(60 L 1)

6 – 1 – 0

Ø

T

70L1 (77S1) 0-0-7 ABCDEFG(=W)  T	71L1 (76L1) 1-1-6 ABCDEF  T
71L2 (76H1) 1-2-6 W(1) | ABCDE  T	71L3 (76S1) 1-3-7 W(1) | ABCD  T
71L4 (76S2) 1-4-9 W(1) | ABC  T	71L5 (76S3) 1-5-12 W(1) | AB  T
71L6 (76S4) 1-6-16 W(1) | A  T	71H1 (76S5) 1-7-21 W(1) | ∅  T
72L1 (75L1) 2-1-5 ABCDE  T	72L2 (75L2) 2-2-5 ABCDEF(1) | ABCD  T
72L3 (75H1) 3-3-5 W(2) | ABCD  T	72L4 (75L3) 2-3-6 ABCDEF(1) | ABC  T
72L5 (75H2) 2-4-5 W(2) / \\ ABCDE(1) ABCFG(1) \\ / ABC  T	72L6 (75H3) 3-5-6 W(2) | ABCDE(1) | ABC  T

72L7 (75S1) 4-6-7

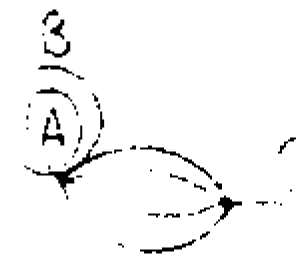
W(2)
|
ABC

NB(DEFG / ø)

T

72L8 (75L4) 2

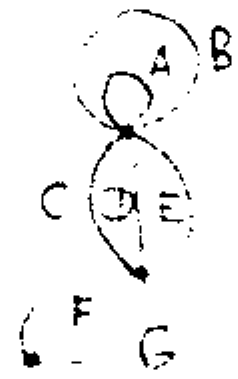
ABCDEF(1)
|
AB



T

72L9 (75H4) 2-6-6

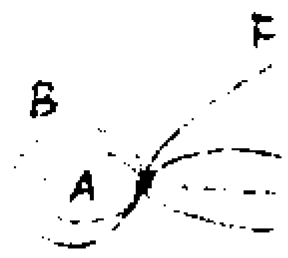
W(2)
ABCDE(1) ABFG(1)
AB



T

72L10 (75H5) 3-

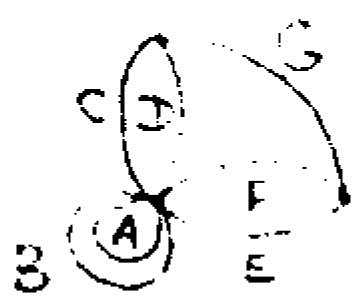
W(2)
|
ABCDE(1)
|
AB



T

72L11 (75S3) 3-8-8

W(2)
ABCD(1) ABEF(1)
AB



T

72L12 (75S4) 4-

W(2)
|
ABCD(1)
|
AB

NB(DE…

T

72L13 (75S11) 5-10-12

W(2)
|
AB

NB(DEFG / ø)

T

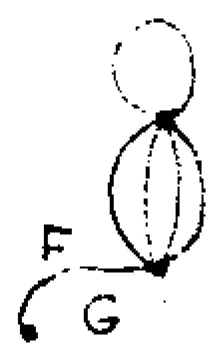
72L14 (75L5) 2-

ABCDEF(1)
|
A

T

72L15 (75H6) 2-8-8

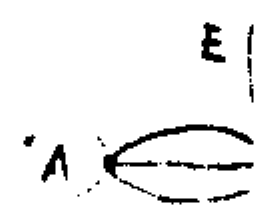
W(2)
ABCDE(1) AFG(1)
A



T

72L16 (75S2) 2-

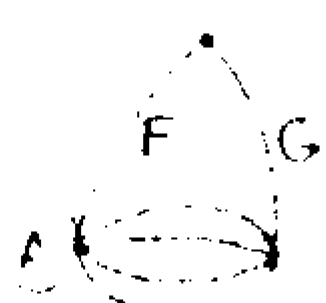
W(2)
ABCD(1) AEFG(1)
A



T

72L17 (75H7) 3-9-11

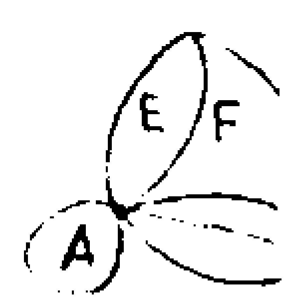
W(2)
|
ABCDE(1)
|
A



T

72L18 (75S5) 3-11

W(2)
ABCD(1) AEF(1)
A



72L19 (75S10) 3-12-12

W(2)
ABC(1) ADE(1) AFG(1)
A

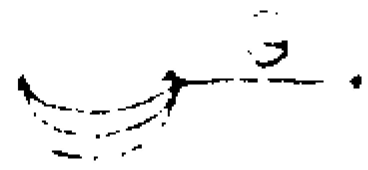
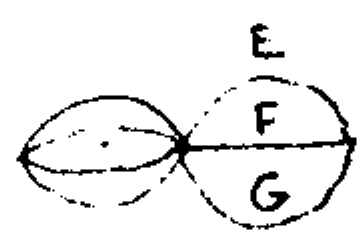
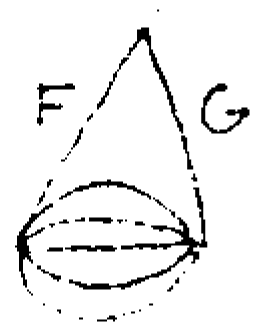
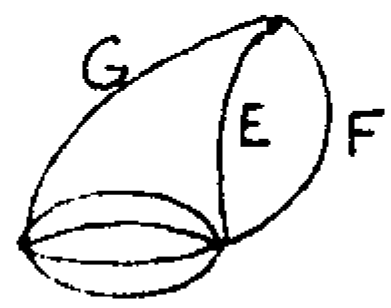
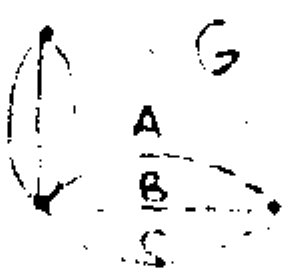
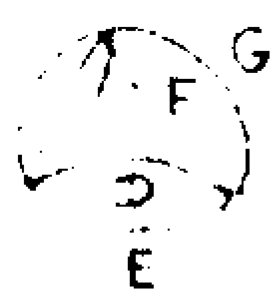
NT

72L20 (75S7) 4-12

W(2)
|
ABCD(1)
|
A

NB(BEF / ø)

T

72L21 (75S13) 4-13-15 W(2) ABC(1) ADE(1) A NB(BCDE / Ø)	72L22 (75S15) 5-14-18 W(2) AB(1) A NB(DEFG / Ø) T
72L23 (75S14) 6-15-21 W(2) A NB(BCDE / Ø)	72H1 2-6-15 ABCDEF(1) Ø  T
72H2 (75H2) 2-10-11 W(2) ABCDE(1) FG(1) Ø 	72H3 (75S6) 2-12-9 W(2) ABCD(1) EFG(1) Ø  T
72H4 (75H9) 3-11-15 W(2) ABCDE(1) Ø 	72H5 (75S8) 3-14-15 W(2) ABCD(1) EF(1) Ø  T
72H6 (75S12) 3-15-15 W(2) ABC(1) DEF(1) Ø 	72H7 (75S11) 3-16-17 W(2) ABC(1) DE(1) FG(1) Ø  UT
72H8 (75S9) 4-16-19 W(2) ABCD(1) Ø NB(AEFG / Ø)	72H9 (75S16) 4-17-21 W(2) AB(1) DE(1) Ø NB(ADFG / Ø)
72H10 (75S12) 4-18-23 W(2) AB(1) CD(1) EF(1) Ø NB(ACEG / Ø) IT	72H11 (75S17) 5-18-25 W(2) ABC(1) Ø NB(DEFG / Ø) T

72H12 (75S2?) 5-19-27

N(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB(ACEF / D)

T

72H13 (75S2?) 6-2

W(2)
AB(1)
∅

NB(C

T

72S1 (75S2?) 7-21-35

W(2)
∅

NB(ABCD / ∅)

T

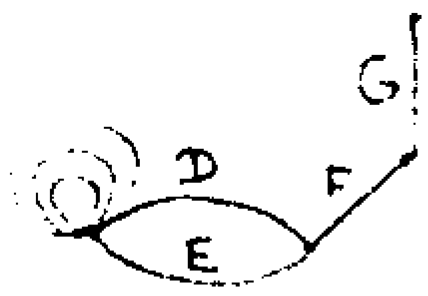
73L1 (74L1) 3-

ABCD

T

73L2 (74L2) 3-2-4

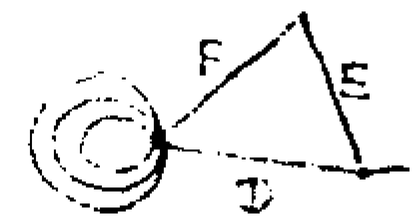
ABCDE(1)
ABC



T

73L3 (74L6) 4-

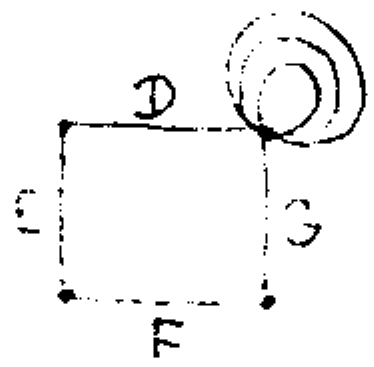
ABCDEF(2)
ABC



T

73L4 (74H1) 6-4-4

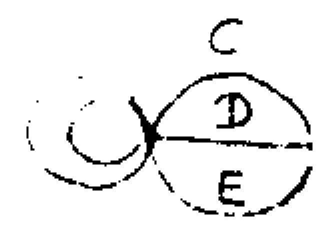
W(3)
ABC



T

73L5 (74L3) 3-3

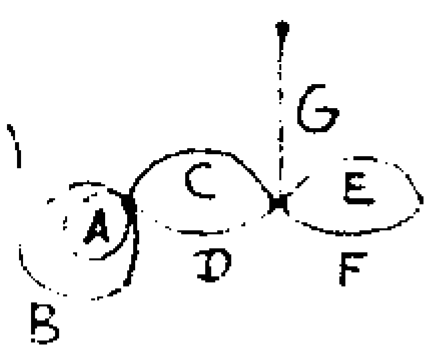
ABCDE(1)
AB



T

73L6 (74L7) 3-4-4

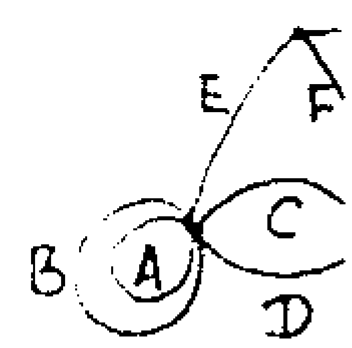
ABCDEF(2)
ABCD(1) ABEF(1)
AB



T

73L7 (74L8) 4-5

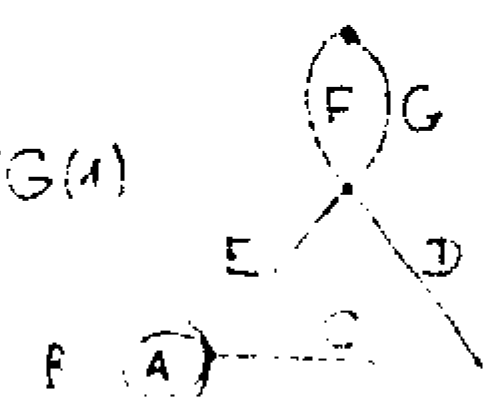
ABCDEF(2)
ABCD(1)
AB



T

73L8 (74H2) 4-6-4

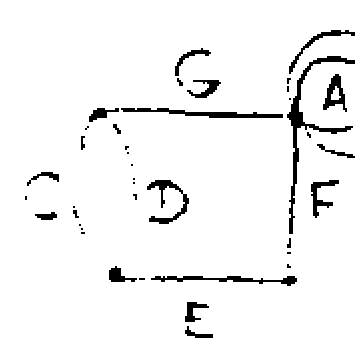
W(3)
ABCDE(2) ABFG(1)
AB



T

73L9 (74H4) 6-7

W(3)
ABCD(1)
AB



T

73L10 (74L13) 5-6-6

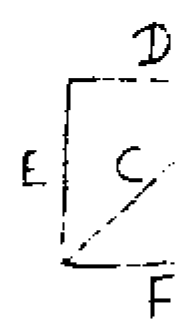
ABCDEF(2)
AB

NB(CDEF / ∅)

T

73L11 (74H6) 6-8

W(3)
ABCDE(2) ABCFG(2)
AB



T

72H12 (75S20) 5-19-27

N(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB(ABEF / D)

T

72H13 (75S21) 6-2

W(2)
|
AB(1)
|
∅

NB(CI

72S1 (75S22) 7-21-35

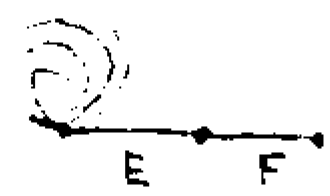
W(2)
|
∅

NB(ABCD / ∅)

T

73L1 (74L1) 3-1

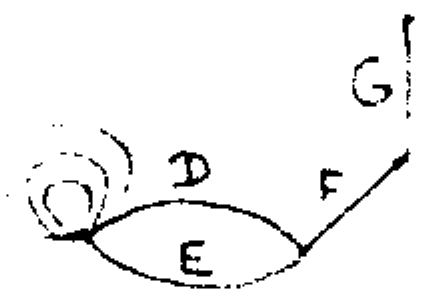
ABCD



T

73L2 (74L2) 3-2-4

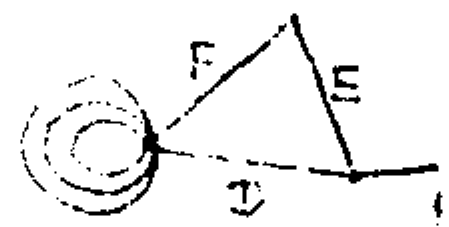
ABCDE(1)
|
ABC



T

73L3 (74L6) 4-3

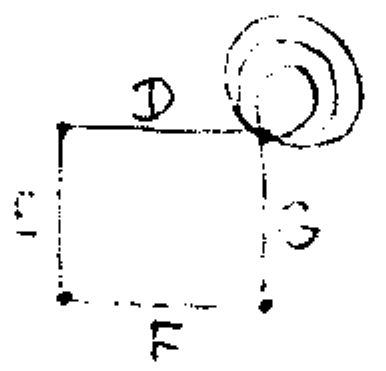
ABCDEF(2)
|
ABC



T

73L4 (74H1) 6-4-4

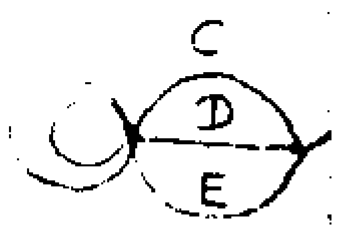
W(3)
|
ABC



T

73L5 (74L3) 3-3

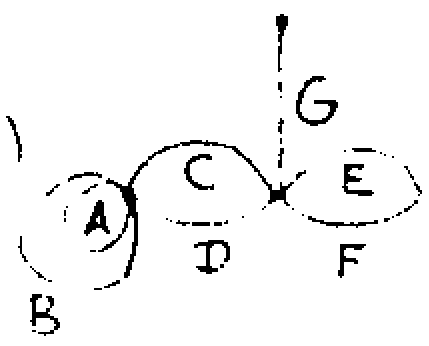
ABCDE(1)
|
AB



T

73L6 (74L7) 3-4-4

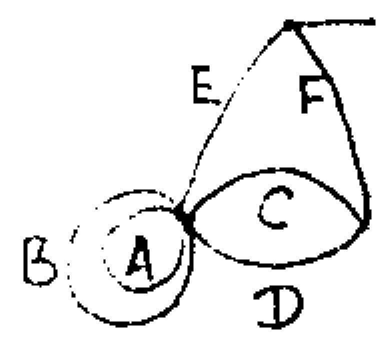
ABCDEF(2)
ABCD(1) ABEF(1)
AB



T

73L7 (74L8) 4-5-

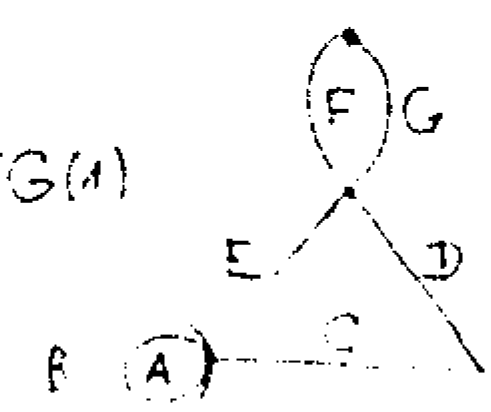
ABCDEF(2)
|
ABCD(1)
|
AB



T

73L8 (74H2) 4-6-4

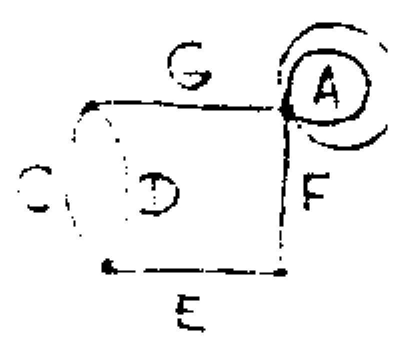
W(3)
ABCDE(2) ABFG(1)
AB



T

73L9 (74H4) 6-7-

W(3)
|
ABCD(1)
|
AB



T

73L10 (74L13) 5-6-6

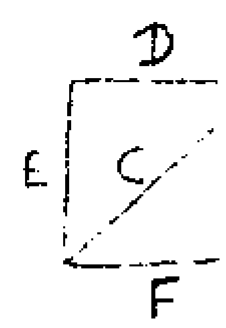
ABCDEF(2)
|
AB

NB(CDEF / ∅)

T

73L11 (74H6) 6-8-

W(3)
ABCDE(2) ABCFG(2)
AB



T

73L12 (74H15) — 8-9-6

W(3)
ABCDE(2)
AB

$NB\begin{pmatrix} W \\ ABF(1) \end{pmatrix}$

73L13 (74S1) — 10-10-7

W(3)
AB

$NB\begin{pmatrix} W(3) \\ ABC \end{pmatrix}$

T

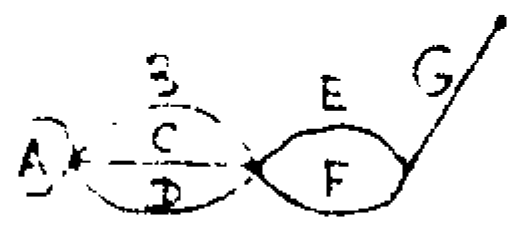
73L14 (74L4) — 3-4-7

ABCDE(1)
A

T

73L15 (74L9) — 3-6-5

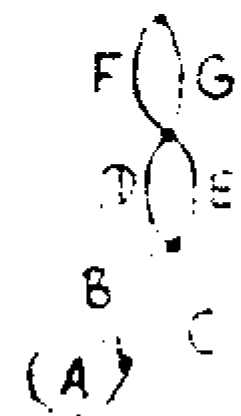
ABCDEF(2)
ABCD(1) AEF(1)
A



T

73L16 (74H3) — 3-8-4

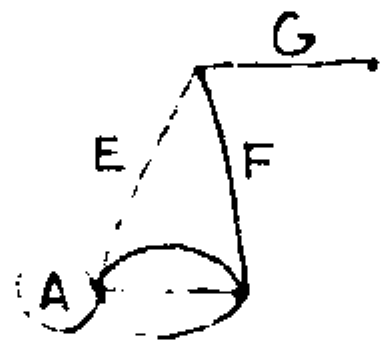
W(3)
ABCDE(2) ABCFG(2) ADEFG(2)
ABC(1) ADE(1) AFG(1)
A



T(BC, DE, FG)

73L17 (74L10) — 4-7-7

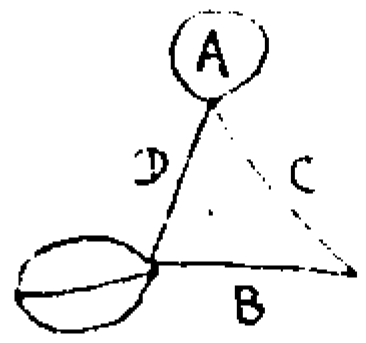
ABCDEF(2)
ABCD(1)
A



T

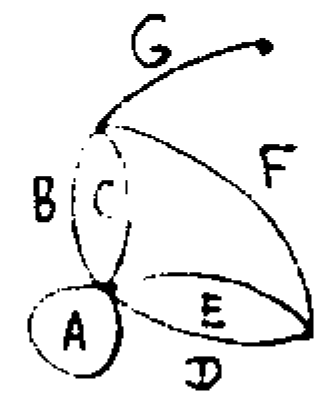
73L18 (74H5) — 4-9-5

W(3)
ABCD(2) AEFG(1)
A



73L19 (74L15) — 4-8-7

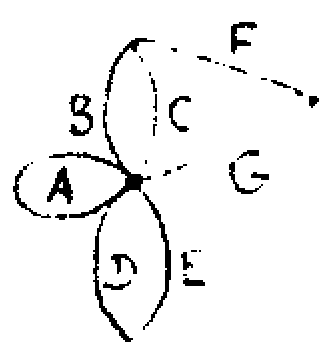
ABCDEF(2)
ABC(1) ADE(1)
A



T

73L20 (74H7) — 4-10-5

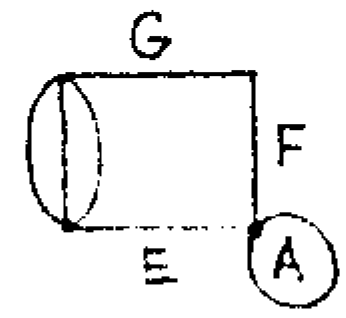
W(3)
ABCFG(2) ABCDE(2)
ABC(1) ADE(1)
A



T(BCFG, DE, FG)

73L21 (74H9) — 6-10-7

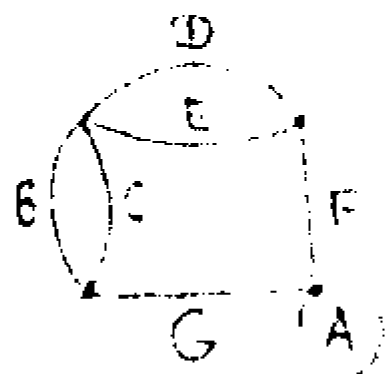
W(3)
ABCD(1)
A



T

73L22 (74H12) — 6-12-7

W(3)
ABCDE(2)
ABC(1) ADE(1)
A



T(BCDE, DEFG, FG)

73L23 (74L16) — 5-9-9

ABCDEF(2)
ABC(1)
A

$NB\begin{pmatrix} BDEF \\ \emptyset \end{pmatrix}$

73L24 (74H13) — 5-12-6

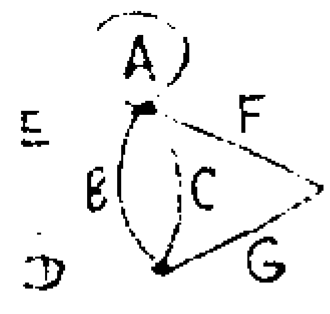
W(3)
ABCDE(2) AFG(1)
A

$NB\begin{pmatrix} BCDE \\ \emptyset \end{pmatrix}$

T

73L25 (74H11) — 6-12-7

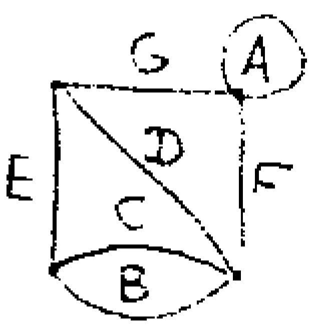
W(3)
ABCDE(2) ABCFG(2)
ABC(1)
A



T(BCDEFG, DE, FG)

73L26 (74H19) 6-13-7

W(3)
ABCDE(2) ADFG(2)
ABC(1)
A



T(DEFG, BCE, FG)

73L27 (74H21) 8-14

W(3)
ABCDE(2)
ABC(1)
A

NB(BDEFG / F(1))

T

73L28 (74S3) 8-15-3

W(3)
ABCD(2) AEF(2)
A

NB(ABCDEG / AC(1))

T

73L29 (74S?) 10-16-

W(3)
ABC(1)
A

NB(ABDEFG / AD(1))

T

73L30 (74L?) 6-10-11

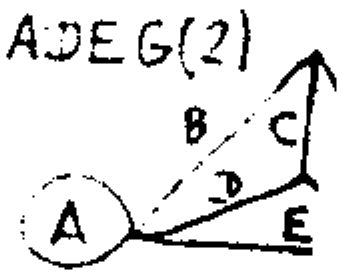
ABCDEF(2)
A

NB(ABCDE / A)

T

73L31 (74S2) 7-16-

W(3)
ABCD(2) ABEF(2) ACFG(2) ADEG(2)
A



NT

73L32 (74H22) 8-15-9

W(3)
ABCDE(2) ABFG(2)
A

NB(ABCDE / A)

T

73L33 (74S5) 9-17-

W(3)
ABCD(2) ABEG(2) ADFG(2)
A

NB(ABCE / AC(

T(EFG, CDF, BCE)

73L34 (74H30) 10-16-11

W(3)
ABCDE(2)
A

NB(BCDE / ∅)

T

73L35 (74S11) 11-18-

W(3)
ABCD(2) AEFG(2)
A

NB(ABCEFG / AB(1))

T

73L36 (74S14) 11-18-12

W(3)
ABCD(2) ABEF(2)
A

NB(ACDEFG / AG(1))

T

73L37 (74S19) 13-19-

W(3)
ABCD(2)
A

NB(ABCEFG / AB(1))

73L38 (74S1?) 13-19-14

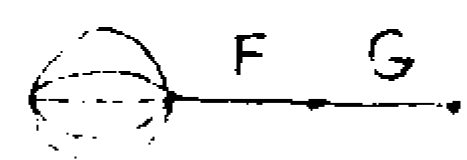
W(3)
ABCD(2)
A

NB(ABCEFG / AB(1))

T

73H1 (74L5) 3-5-1(

ABCDE(1)
∅



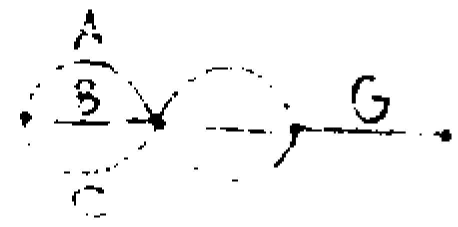
T

73 H 2 (74 L 11) 3-2-7

ABCDEF(2)
ABCD(1) EF(1)
Ø

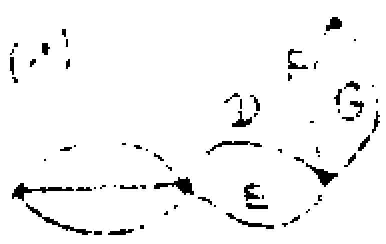
73 H 3 (74 L 10) 3-9-6

AB DEF(2)
AB(1) DE(1)
Ø



73 H 4 (74 H 9) 3-12-5

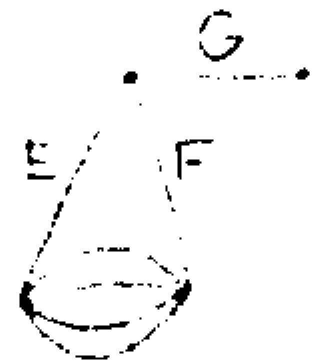
W(3)
ABCDE(2) ABCFG(2) DEFG(2)
ABC(1) DE(1) FG(1)
Ø



T(ABC, DE, FG)

73 H 5 (74 L 12) 4-9-10

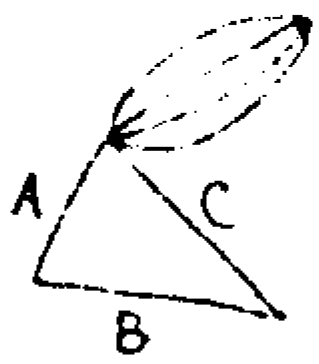
ABCDEF(2)
ABCD(1)
Ø



T

73 H 6 (74 H 10) 4-12-7

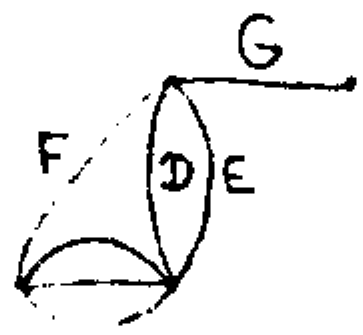
W(3)
ABC(2) DEFG(1)
Ø



T

73 H 7 (74 L 17) 4-11-10

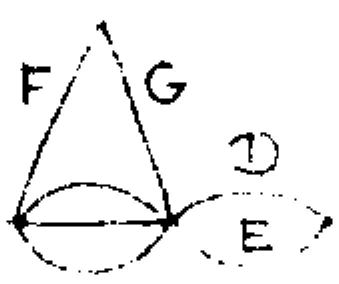
ABCDEF(2)
ABC(1) DE(1)
Ø



T

73 H 8 (74 H 12) 4-14-7

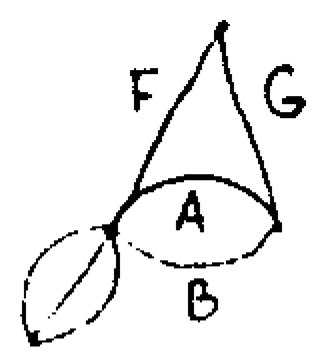
W(3)
ABCFG(2) ABCDE(2)
ABC(1) DE(1)
Ø



T(ABCFG, DE, FG)

73 H 9 (74 H 17) 4-15-6

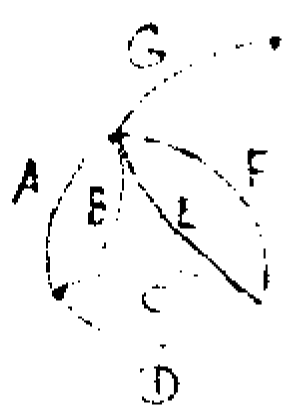
W(3)
ABFG(2) ABCDE(2)
AB(1) CDE(1)
Ø



T(ABFG, CDE, FG)

73 H 10 (74 L 19) 4-12-11

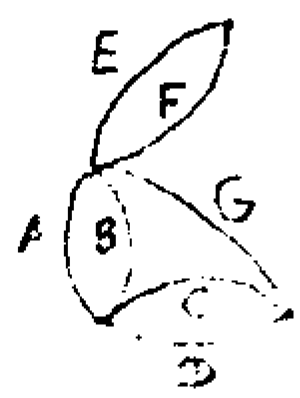
ABCDEF(2)
AB(1) CD(1) EF(1)
Ø



NT

73 H 11 (74 H 20) 4-16-7

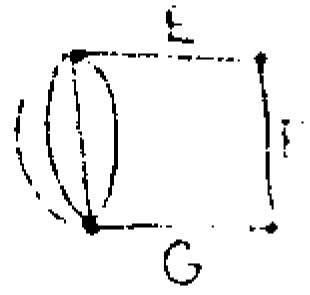
W(3)
ABCD(2) ABEF(2) CDEF(2)
AB(1) CD(1) EF(1)
Ø



T(ABG, CDG, EF)

73 H 12 (74 H 13) 6-13-10

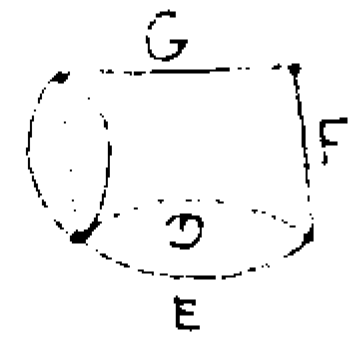
W(3)
ABCD(1)
Ø



T

73 H 13 (74 H 24) 6-17-10

W(3)
ABCDE(2)
ABC(1) DE(1)
Ø



T(ABCFG, DEFG, FG)

73 H 14 (74 S 7) 6-20-11

W(3)
ABCD(2) ABEF(2) CDEF(2)
AB(1) CD(1) EF(1)
Ø

T(ABG, CDG, EFG)

73 H 15 (74 L 18) 5-12-13

ABCDEF(2)
ABC(1)
Ø

NB(ADEF / Ø)

T

73 H 16 (74 H 23) — 5-18-9

W(3)
ABEFG(2) ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB (AEFG / ∅)

73 H 17 (74 L 21) — 5-1

ABCDEF(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB (ACE / ∅

T

73 H 18 (74 S 4) — 5-17-4

W(3)
ABCD(2) EFG(2)
∅

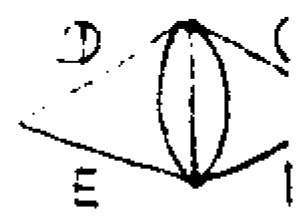
NB (ABCD / ∅)

T(ABEFG, CD, EFG)

T

73 H 19 (74 H 24) — 6-16

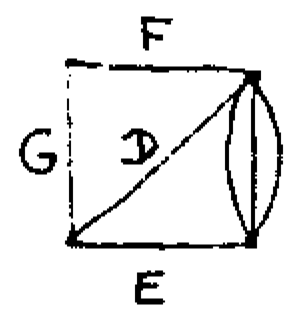
W(3)
ABCDE(2) ABCFG(2)
AB(1)
∅



T(ABCDEFG, DE, FG)

73 H 20 (74 H 25) — 6-18-10

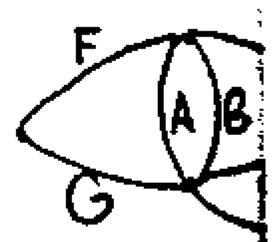
W(3)
ABCDE(2) DFG(2)
ABC(1)
∅



T(DEFG, ABCE, FG)

73 H 21 (74 H 26) — 6-19

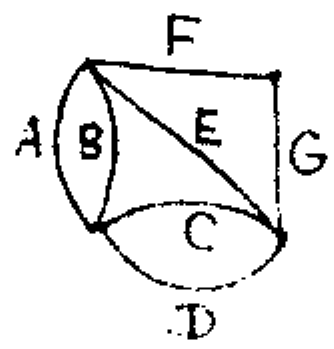
W(3)
ABFG(2) ABCDE(2)
AB(1) CD(1)
∅



T(ABEGF, CDE, FG)

73 H 22 (74 H 29) — 6-20-11

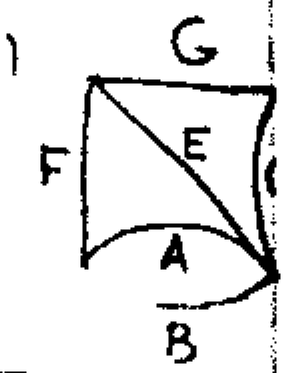
W(3)
ABCDE(2) EFG(2)
AB(1) CD(1)
∅



NT

73 H 23 (74 S 6) — 6-21

W(3)
ABEF(2) ABCD(2) CDEG(2)
AB(1) CD(1)
∅



T(ABF, CDG, EFG)

73 H 24 (74 H 27) — 8-19-13

W(3)
ABCDE(2)
ABC(1)
∅

NB (ADEFG / F(1))

T

73 H 25 (74 S 9) — 8-21

W(3)
ABC(2) DEF(1)
∅

NB (ABCFG / F(1)

T

73 H 26 (74 H 32) — 8-21-14

W(3)
ABCDE(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB (ACEFG / F(1))

T(ABEFG, CDEFG, FG)

73 H 27 (74 S 16) — 8-23-

W(3)
ABEF(2) ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB (ACE / G(1

T(ABEFG, CDEFG)

73 H 28 (74 S 20) — 8-24-15

W(3)
ABCD(2) EFG(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB (ACEFG / A(1))

NT

73 H 29 (74 S 10) — 10-22-

W(3)
ABC(1)
∅

NB (W(3) / ABC

T

73H30 (74S2?) — 10-25-18

W(3)
ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB(ACEFG / E(1))

T(CDEFG, ABEFG, EFG)

73H31 (74S2?) — 6-14-17

AB... CEF(2)
AB(1)
∅

NB(CDEF / ∅)

73H32 (74H31) — 6-20-11

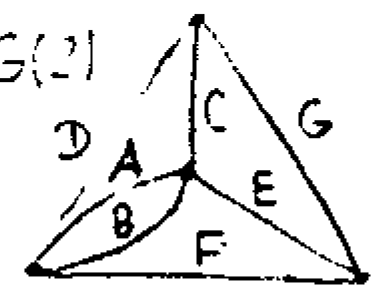
W(3)
ABCDE(2) FG(1)
∅

NB(ABCD / ∅)

T

73H33 (74S1?) — 7-24-12

W(3)
ABCD(2) ABEF(2) CEG(2) DFG(2)
AB(1)
∅



NT

73H34 (74H28) — 8-21-13

W(3)
ABCDE(2) ABFG(2)
AB(1)
∅

NB(ACDE / ∅)

T(ABCDEFG, CDE, FG)

73H35 (74H33) — 8-22-14

W(3)
ABCDE(2) CFG(2)
AB(1)
∅

NB(ACDE / ∅)

T(CDEFG, ABDE, FG)

73H36 (74S12) — 8-24-13

W(3)
ABCD(2) CEFG(2)
AB(1)
∅

NB(CEFG / ∅)

T(CDEFG, ABDEFG)

73H37 (74S1?) — 9-25-15

W(3)
ABCD(2) ABEF(2) CEG(2)
AB(1)
∅

NB(ACDFG / G(1))

T(ABDF, CDG, EFG)

73H38 (74S2?) — 9-26-16

W(3)
ABCD(2) CEFG(2) DEG(2)
AB(1)
∅

NB(ACDFG / F(1))

NT

73H39 (74H34) — 10-23-17

W(3)
ABCDE(2)
AB(1)
∅

NB(ACDE / ∅)

T

73H40 (74S2?) — 10-26-17

W(3)
ABCD(2) EF(1)
∅

NB(ABCD / ∅)

T

73H41 (74S26) — 11-27-19

W(3)
ABCD(2) EFG(2)
AB(1)
∅

NB(ACDEF / E(1))

T(CDEFG, ABCD, EFG)

73H42 (74S?) — 11-28-18

W(3)
ABCD(2) ABEF(2)
AB(1)
∅

NB(ACDEF / ?(1))

T(ABDEFG, CDG, EFG)

73H43 (74S?) — 11-27-19

W(3)
ABCD(2) CEF(2)
AB(1)
∅

NB(ACDEG / G(1))

T(CDEFG, ABD, EFG)

73 H 44 (74 S 35) — 11-28-20

W(3)

ABC(2) ADE(2) FG(1)

∅

NB(BCDEF | F(1))

NT

73 H 45 (74 S 28) — 13-28-

W(3)

ABCD(2)

AB(1)

∅

NB(ACDE | EF(1)

T

73 H 46 (74 S 39) — 13-29-13

W(3)

ABC(2) DE(1)

∅

NB(ABCFG | F(1))

T

73 H 47 (74 S 4?) — 15-30-

W(3)

AB(1)

∅

NB(ABCDEF | AB(1)

T

73 S 1 (74 L 23) — 7-20-20

ABCDEF(2)

∅

NB(ABCD | ∅)

T

73 S 2 (74 S 32) — 7-28-

W(3)

ABC(2) ADE(2) AFG(2) BDG(2) BEF(2) CDF(2) CEG

∅

NT — BIN, NON RE

73 S 3 (74 S 34) — 9-29-17

W(3)

ABC(2) ADE(2) AFG(2) BDG(2) BEF(2) CDF(2)

∅

NB(ACDEG | C(1))

NT

73 S 4 (74 H 35) — 10-24-

W(3)

ABCDE(2) AFG(2)

∅

NB(ABCD | ∅)

T

73 S 5 (74 S 2?) — 10-28-17

W(3)

ABCD(2) AFG(2) BEG(2) CEF(2)

∅

NB(ABCD | ∅)

NT

73 S 6 (74 S 36) — 11-30-2

W(3)

ABC(2) ADE(2) AFG(2) BDF(2) BEG(2)

∅

NB(ACDEF | C(1))

NT

73 S 7 (74 S 13) — 11-27-17

W(3)

ABCD(2) AEFG(2)

∅

NB(ABCD | ∅)

T

73 S 8 (74 S 34) — 11-30-2

W(3)

ABC(2) ADE(2) BEG(2) CEF(2) DFG(2)

∅

NB(ACDEG | C(1))

NT

73 S 9 (74 H 36) — 12-25-20

W(3)

ABCDE(2)

∅

NB(ABCD | ∅)

T

73 S 10 (74 S 27) — 12-29-20

W(3)

ABCD(2) AEF(2) DFG(2)

∅

NB(ABCD | ∅)

T(ABCE, BCDG, EFG)

73 S 11 (74 S 44) — 13 - 31 - 23

W(3)

ABC(2) ADE(2) BEF(2) CDF(2)

∅

NB(AB[illegible] / [illegible])

NT

73 S 12 (74 S [illegible]) — 13 - 31 - 23

W(3)

[illegible] ADE(2) [illegible] DFG(2)

∅

NB(ABCEG / G(1))

NT

73 S 13 (74 S 32) — 13 - 31 - 23

W(3)

ABC(2) ADE(2) AFG(2) CEF(2)

∅

NB(E[illegible] / G(1))

NT

73 S 14 (74 S 2[illegible]) — 14 - 30 - 23

W(3)

AB[illegible](2) AEF(2)

∅

NB(ABCD / ∅)

T

73 S 15 (74 S 30) — 14 - 30 - 23

W(3)

ABCD(2) EFG(2)

∅

NB(ABCD / ∅)

T

73 S 16 (74 S 45) — 15 - 32 - 26

W(3)

ABC(2) ADE(2) CEF(2)

∅

NB(ABCDG / G(1))

T(ABDG, BCFG, DEFG)

73 S 17 (74 S 44) — 15 - 32 - 26

W(3)

ABC(2) ADE(2) DFG(2)

∅

NB(ABCEG / G(1))

T(ABCE, BCFG, DEFG)

73 S 18 (74 S 4[illegible]) — 15 - 32 - 26

W(3)

ABC(2) ADE(2) AFG(2)

∅

NB(BCDEG / G(1))

NT

73 S 19 (74 S [illegible]) — 16 - 31 - 26

W(3)

ABCD(2)

∅

NB(AB[illegible] / [illegible])

T

73 S 20 (74 S 40) — 17 - 33 - 29

W(3)

ABC(2) DEF(2)

∅

NB(ABDEF / A(1))

T

73 S 21 (74 S 47) — 17 - 33 - 29

W(3)

ABC(2) ADE(2)

∅

NB(ABCDF / F(1))

T

73 S 22 (74 S 4[illegible]) — 19 - 34 - 32

W(3)

AB[illegible](2)

∅

NB(ADEFG / D(1))

T

73 S 23 (74 S [illegible]) — 21 - 35 - 35

W(3)

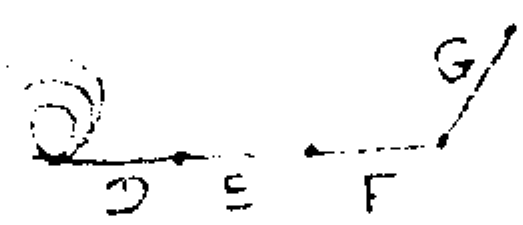
∅

NB(ABCDE / A(1))

T

74 L 1 (73 L 1) — 4 - 1 - 3

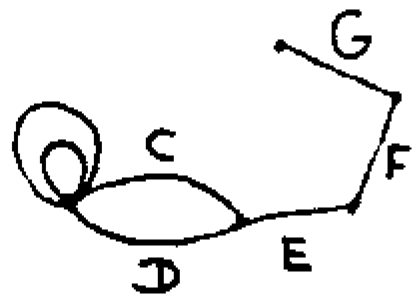
ABC



T

74L2
(73L2)
4-2-3

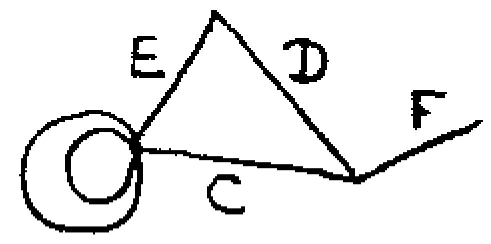
ABCD(1)
|
AB



T

74L3
(73L5)
5-3

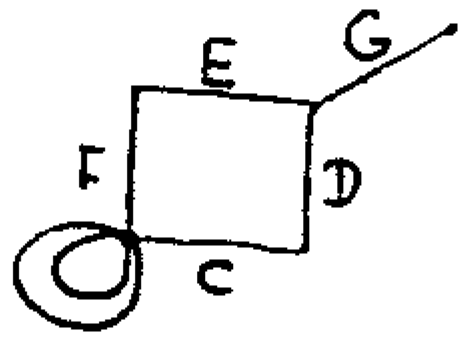
ABCDE(2)
|
AB



T

74L4
(73L14)
7-4-3

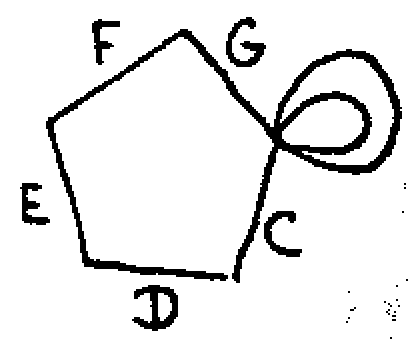
ABCDEF(3)
|
AB



T

74L5
(73H1)
10-5

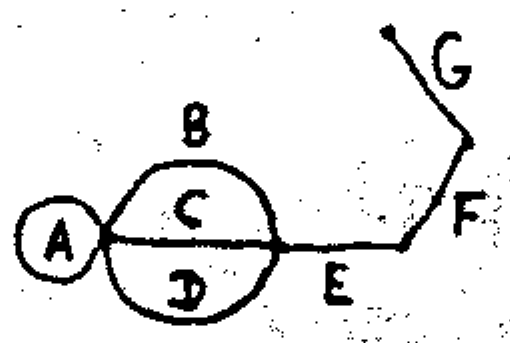
W(4)
|
AB



T

74L6
(73L3)
4-3-4

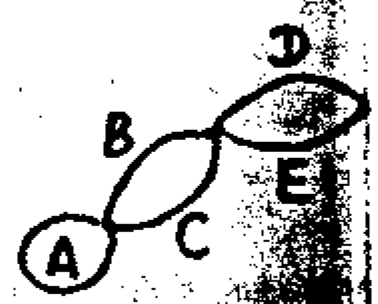
ABCD(1)
|
A



T

74L7
(73L6)
4-4-

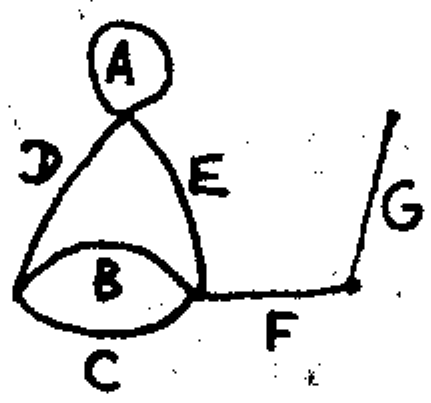
ABCDE(2)
ABC(1) ADE(1)
A



T

74L8
(73L7)
5-5-4

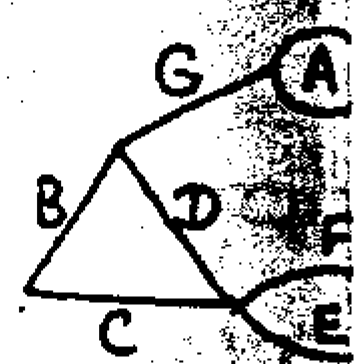
ABCDE(2)
|
ABC(1)
|
A



T

74L9
(73L15)
5-6-

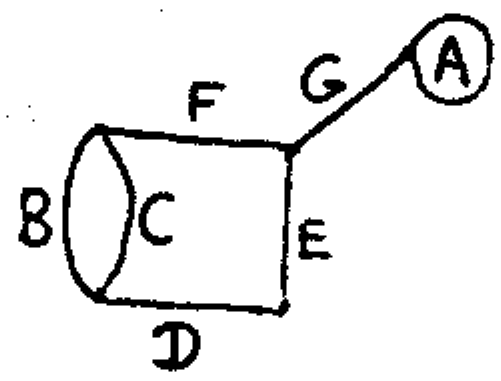
ABCDEF(3)
ABCD(2) AEF(1)
A



T

74L10
(73L17)
7-7-4

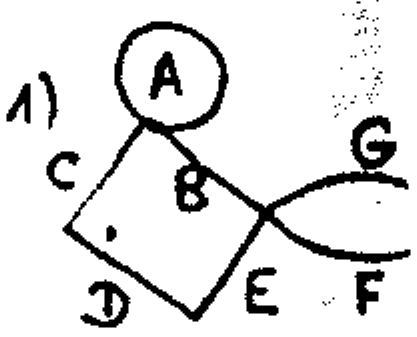
ABCDEF(3)
|
ABC(1)
|
A



T

74L11
(73H2)
7-8-

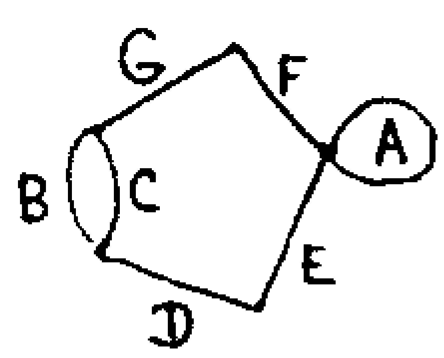
W(4)
ABCDE(3) AFG(1)
A



T

74L12
(73H5)
10-9-4

W(4)
|
ABC(1)
|
A



T

74L13
(73L10)
6-6-5

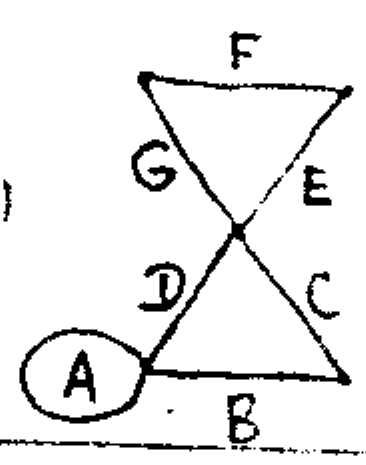
ABCDE(2)
|
A

NB (BCDE | ∅)

T

74L14
(73H3)
6-9-3

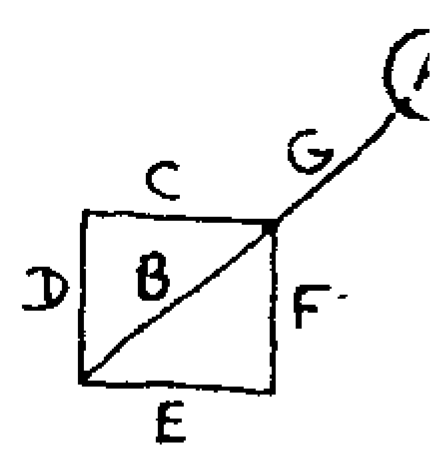
W(4)
ABCD(2) AEFG(2)
A



T

74L15
(73L19)
7-8-

ABCDEF
ABCD(2) ABEF(2)
A



T

74L16 (73L23) — 9-9-5

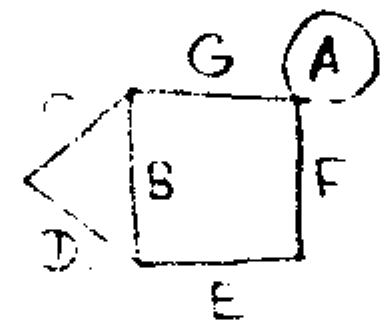
ABCDEF(3)
|
ABCD(2)
|
A

NB(ABCDEF | AE(1))

T

74L17 (73H7) — 10-11-4

W(4)
ABCD(2)   ABEF(3)
A



T

74L18 (73H6) — 13-12-5

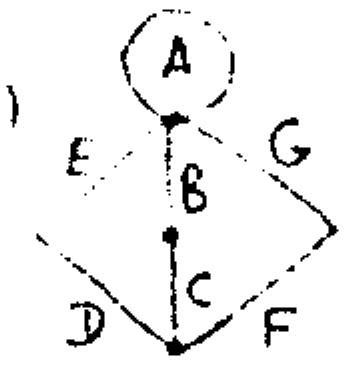
W(4)
|
ABCD(2)
|
A

NB(W | AEF(2))

T

74L19 — 11-12-4

W(4)
AB...   ABCFG(3)   ADEFG(3)
A



T(BCDEFG, BC, DE, FG)

74L20 (73L30) — 11-10-6

ABCDEF(3)
|
A

NB(ABCDEF | AB(1))

T

74L21 (73H17) — 14-13-5

W(4)
ABCDE(3)   ABCFG(3)
A

NB(W | ADF(2))

T

74L22 (73H31) — 17-14-6

W(4)
|
ABCDE(3)
|
A

NB(W(4) | AFG)

T

74L23 (73S1) — 20-15-7

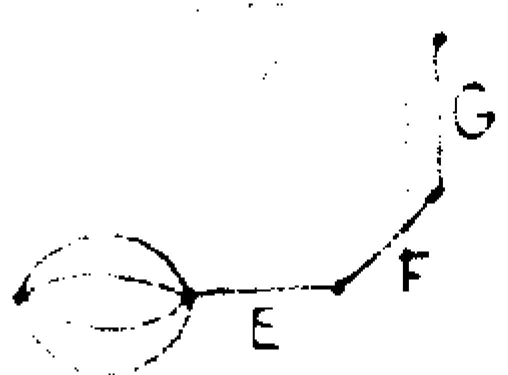
W(4)
|
A

NB(W(4) | ABC)

T

74H1 (73L4) — 4-4-6

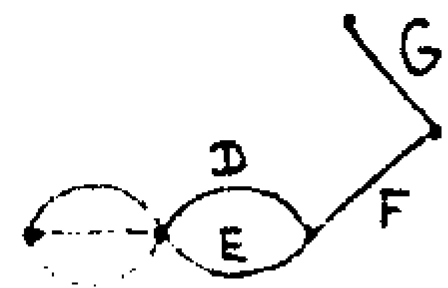
ABCD(1)
|
$\emptyset$



T

74H2 (73L8) — 4-6-4

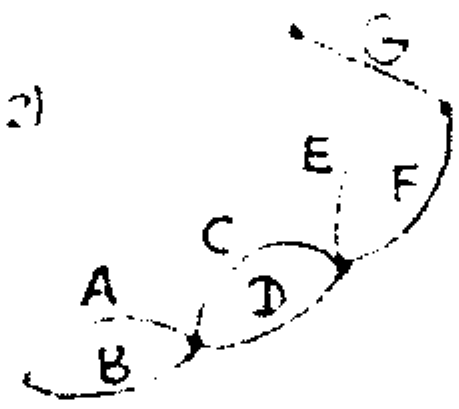
ABCDE(2)
ABC(1)   DE(1)
$\emptyset$



T

74H3 (73L16) — 4-8-3

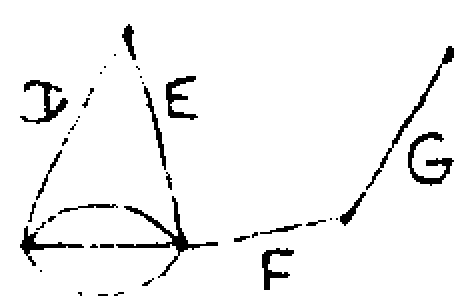
ABCDEF(3)
ABCD(2)   ABEF(2)   CDEF(2)
AB(1)   CD(1)   EF(1)
$\emptyset$



T(AB, CD, EF, G)

74H4 (73L9) — 5-7-6

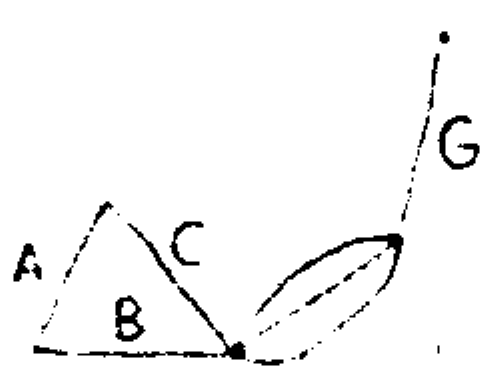
ABCDE(2)
|
ABC(1)
|
$\emptyset$



T

74H5 (73L18) — 5-9-4

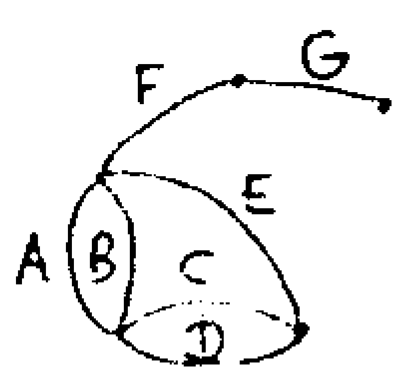
ABCDEF(3)
ABC(2)   DEF(1)
$\emptyset$



T

74H6 (73L11) — 5-8-6

ABCDE(2)
AB(1)   CD(1)
$\emptyset$

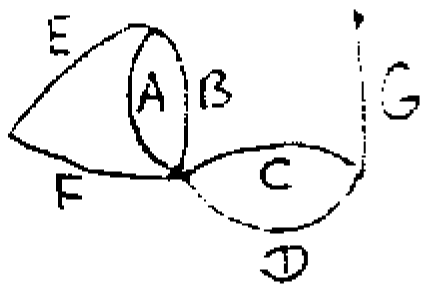


T

74 H 7
(73 L 20)

5-10-4

ABCDEF(3)
ABEF(2) ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅

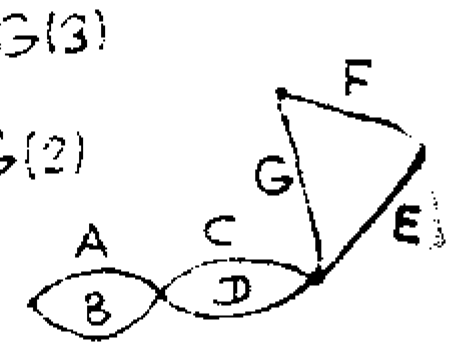


T(ABEF, CD, EF, G)

74 H 8
(73 H 4)

5-12-3

W(4)
ABCD(2) ABEFG(3) CDEFG(3)
AB(1) CD(1) EFG(2)
∅

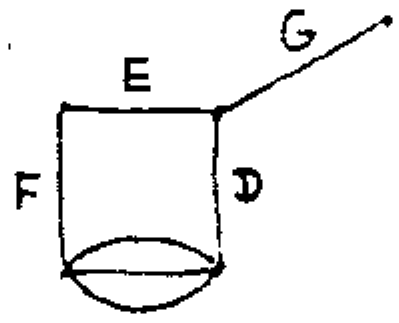


T(EFG, EFG, AB, CD)

74 H 9
(73 L 21)

7-10-6

ABCDEF(3)
ABC(1)
∅

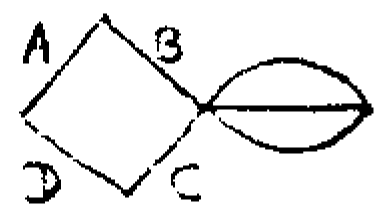


T

74 H 10
(73 H 6)

7-12-4

W(4)
ABCD(3) EFG(1)
∅

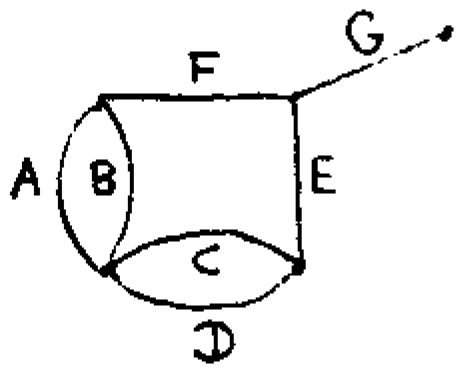


T

74 H 11
(73 L 25)

7-12-6

ABCDEF(3)
ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅

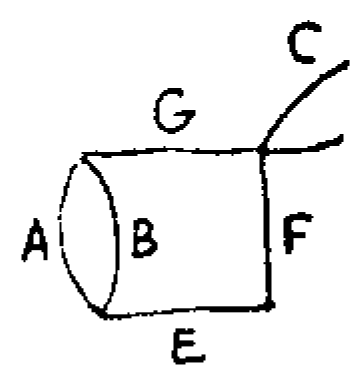


T(ABEF, CDEF, EF, G)

74 H 12
(73 H 8)

7-14-4

W(4)
ABEFG(3) ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅

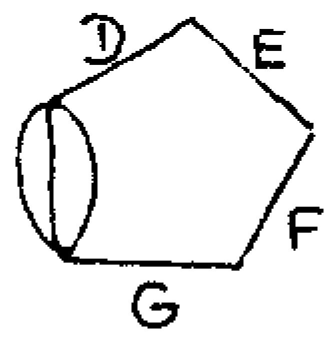


T(ABEFG, CD, EFG, EFG)

74 H 13
(73 H 12)

10-13-6

W(4)
ABC(1)
∅

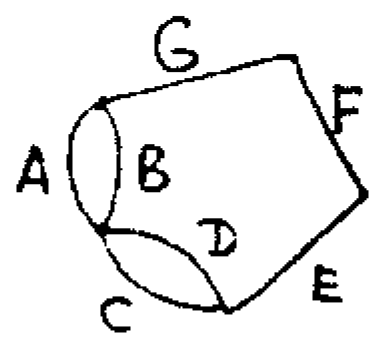


T

74 H 14
(73 H 19)

10-16-

W(4)
ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅



T(ABEFG, CDEFG, EFG, EFG)

74 H 15
(73 L 12)

6-9-8

ABCDE(2)
AB(1)
∅

NB(ACDE / ∅)

T

74 H 16
(73 L 24)

6-12-5

ABCDEF(3)
ABCD(2) EF(1)
∅

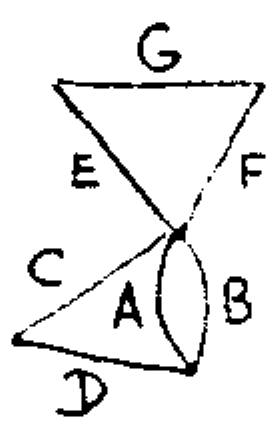
NB(ABCD / ∅

T

74 H 17
(73 H 9)

6-15-4

W(4)
ABCD(2) ABEFG(3)
AB(1) EFG(2)
∅

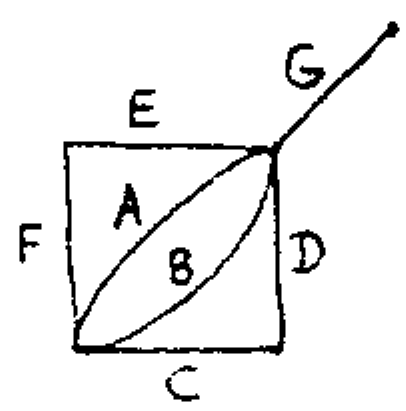


T(ABCD, CD, EFG, EFG)

74H18
(73L22)

7-12-6

ABCDEF(3)
ABCD(2) ABEF(2)
AB(1)
∅

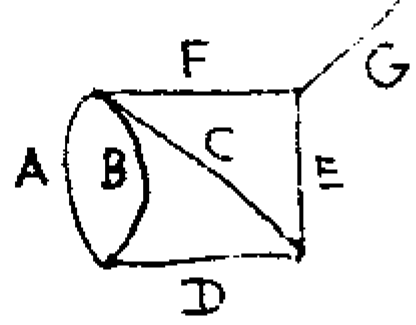


T(ABCDEF, CD, EF, G)

74 H 19
(73 L 26)

7-13-6

ABCDEF(3)
ABCD(2) CEF(2)
AB(1)
∅

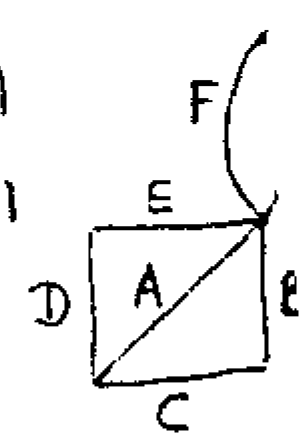


T(CDEF, ABD, EF, G)

74 H 20
(73 H 11)

7-16-

W(4)
ABCFG(3) ABCDE(3) ADEFG(3)
ABC(2) FG(1) ADE(2)
∅



T(ABCDE, BC, DE, FG)

74H21 ABCDEF(3) 9-15-8

ABCD(2)

AB(4)

Ø

NB (ABCDEF / F(4))

74H23 (73H2?) W(4) 9-16-5 74H24 W(4) 10-17-6

ABCFG(3) ABCDE(3)

AB(2) DE(?)

Ø

NB (W / DEFG)

T (ABCFG, ABC, DE, FG)

T (ABCDEFG, EFG, FG, CD)

74H25 (73H29) W(4) 10-18-6 74H26 W(4) 10-19-6

ABCD(2) CEFG(3)

AB(4)

Ø

T (CDEF, ABCD, EFG, EFG)

T (CDEF, ...)

74H27 (73H24) W(4) 13-19-7 74H28 (73H34) W(4) 13-21-8

ABCD(2) ABCDE(3)

AB(4) ABC(2) DE(?)

Ø Ø

NB (ACDEF / EF(2))

NB (ABCDEFG / FG(2))

T

T (ABCFG, ABCFG, DEFG, FG)

74H29 (73H22) W(4) 11-20-6 74H30 (73H34) ABCDEF(3) 1?-16-

ABCDE(3) ABCFG(3) DEFG(3)

AB(4) AB(4)

Ø

NB (ACDEF / C(4))

T (CDEFG, ABCDE, FG)

74H31 (73H3?) W(4) 11-20-6 74H32 (73H2?) W(4) 14-21-8

ABCDE(?) FG(?) ABCDE(?) ABCFG(?)

AB(?)

Ø Ø

NB (AB... / ...)

NB (ACDEFG / DEF(2))

T (ABC...)

74H33 (73H3?) W(4) 14-23-9 74H34 (73H39) W(4) 17-23-1?

ABCDE(3) CDEFG(?) AB...(?)

AB(?) AB(?)

Ø Ø

NB (ACDEFG / DEF(?))

NB (ACDEF... / FG...)

T (CDEF..., CDEFG, ABE, FG)

74H35 (73S4) — 17-24-10

W(4)
ABCD(3) EF(1)
Ø

NB(ABCDEG | AE(2))

T

74H36 (73S9) — 20-25

W(4)
AB(1)
Ø

NB(ACDEF | CD(

T

74S1 (73L13) — 7-10-10

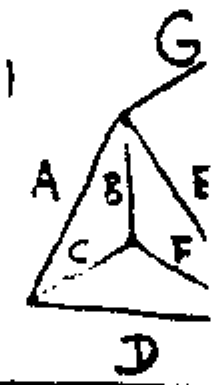
ABCDE(2)
Ø

NB(ABCD | Ø)

T

74S2 (73L31) — 8-16

ABCDEF(3)
ABC(2) ADE(2) BEF(2) CDF(2)
Ø



NT

74S3 (73L28) — 9-15-8

ABCDEF(3)
ABCD(2) AEF(2)
Ø

NB(ABCD | Ø)

T

74S4 (73H18) — 7-17-

W(4)
ABCD(2) EFG(2)
Ø

NB(ABCD | Ø

T

74S5 (73L33) — 10-17-9

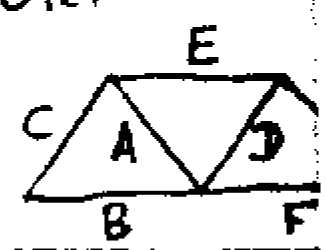
ABCDEF(3)
ABC(2) ADE(2) CEF(2)
Ø

NB(BCDEF | B(1))

T(ABD, BCF, DEF, G)

74S6 (73H23) — 10-21

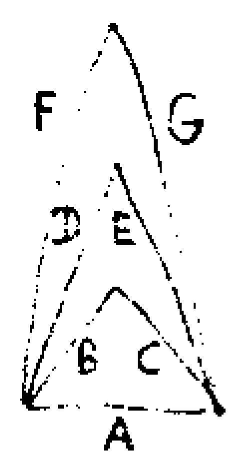
W(4)
ABCDE(3) ADEFG(3)
ABC(2) ADE(2) DFG(2)
Ø



T(ABCE, DEFG, BC, FG)

74S7 (73H14) — 11-20-6

W(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) ADEFG(3)
ABC(2) ADE(2) AFG(2)
Ø



T(ABCDEFG, BC, DE, FG)

74S8 (73L29) — 11-16-

ABCDEF(3)
ABCD(2)
Ø

NB(ABC | Ø

T

74S9 (73H25) — 13-21-8

W(4)
ABCD(2) AEFG(3)
Ø

NB(ABCD | Ø)

T

74S10 (73H29) — 16-22-

W(4)
ABCD(2)
Ø

NB(ABC | Ø

T

74S11 (73L35) — 12-18-11

ABCDEF(3)
ABC(2) DEF(2)
Ø

NB(ABDEF | A(1))

T

74S12 (73H36) — 13-24-

W(4)
ADEFG(3)
DEF(2) ABC(2)
Ø

NB(ADE | A(

T(ABCG, DEFG, DEFG, BC)

74 S 13 — 11-2[illegible]-11
(73 S [illegible])

W(4)
ABC(2) DEF(2)
∅

NB(ABDEF[illegible] | AB(2))

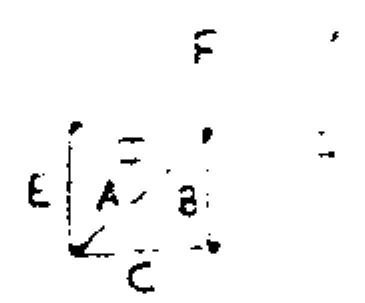
74 S 14 — 12-18-11
([illegible])

ABCDEF(3)
AB[illegible] ADE[illegible]
∅

NB(BCDEF | F(1))

74 S 15 — 12-2[illegible]-7
(73 H 33)

W(4)
ABCDE(3) BCFG(3) [illegible]
AB[illegible] ADE(2)
∅



NT

74 S 16 — 14-23-8
(73 H 2[illegible])

W(4)
AB[illegible](3) ABCDE(3)
AB[illegible] ADE[illegible]
∅

NB(ABCDEF | DF(2))

T(ABCDE, BCFG, DE, FG)

74 S 17 — 15-2[illegible]-9
(73 H 37)

W(4)
ABCDE(3) CEFG(3)
ABC(2) ADE(2)
∅

NB(ABCDEG | FG(2))

T(BCFG, DEFG, ABD, FG)

74 S 18 — 18-26-11
(73 H 42)

W(4)
ABCDE(3)
ABC(2) ADE(2)
∅

NB(BCDEFG | FG(2))

T(ABCDEFG, BCFG, DEFG, FG)

74 S 19 — 14-19-13
(73 L 27)

ABCDEF(3)
ABC(2)
∅

NB(ABCDE | D(1))

T

74 S 20 — 15-24-8
(73 H 28)

W(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) DEFG(3)
ABC(2)
∅

NB(ABCDEF | DF(2))

T(ABCDEFG, ABC, DE, FG)

74 S 21 — 16-26-9
(73 H 38)

W(4)
ABCDE(3) ADFG(3) CEFG(3)
ABC(2)
∅

NB(ABCDEF | AF(2))

T(DEFG, ABD, BCE, FG)

74 S 22 — 17-28-12
(73 S 5)

W(4)
ABC(2) ADEF(3) BDEG(3) CDFG(3)
∅

NB(ABCEFG | EF(2))

NT

74 S 23 — 17-2[illegible]-10
(73 H 40)

W(4)
ABC(2) ADEF(3)
∅

NB([illegible] | A[illegible])

74 S 24 — 18-25-10
(73 H 30)

W(4)
ABCDE(3) ABCFG(3)
ABC(2)
∅

NB(ABCDEF | DF(2))

T

74 S 25 — 1[illegible]-2[illegible]-11
(73 H 43)

W(4)
ABCDE(3) ADF[illegible](3)
ABC(2)
∅

NB(ABC[illegible] | [illegible]F(2))

T(ABCDEFG, BCE, DEFG, FG)

T(ABC[illegible], ABC[illegible], ADE, FG)

74 S 26 — 19-27-11
(73 H 41)

W(4)
ABCDE(3) DEFG(3)
ABC(2)
∅

NB(ABCDE | D(1))

T(ABCDEFG, DEFG, ABC, FG)

74 S 27 (73 S 10) — 20-29-12

W(4)
ABC(2) ADEF(3) BDEG(3)
∅

NB(ABCDEFG / FG(2))

T(ACF, BCG, DEFG, DEFG)

74 S 28 (73 H 45) — 22-28-1

W(4)
ABCDE(3)
ABC(2)
∅

NB(ABCDE / D(1))

T

74 S 29 (73 S 14) — 23-30-14

W(4)
ABC(2) ADEF(3)
∅

NB(ABCEFG / EG(2))

T

74 S 30 (73 S 15) — 23-30-1

W(4)
ABC(2) DEFG(3)
∅

NB(ABCDEF / DE(2))

T

74 S 31 (73 S 11) — 26-31-15

W(4)
ABC(2)
∅

NB(W(4) / ABC)

T

74 S 32 (73 S 2) — 14-28-[illegible]

W(4)
ABCD(3) ABEF(3) ACFG(3) ADEG(3) BCEG(3) BDFG(3) CDE[illegible]
∅

BIN, NON REG

NT

74 S 33 (73 L 38) — 16-20-15

ABCDEF(3)
∅

NB(ABCDE / A(1))

T

74 S 34 (73 S 3) — 17-29-9

W(4)
ABCD(3) ABEF(3) ADEG(3) BCEG(3) BDFG(3) CDEF
∅

NB(ABCEFG / AC(2))

NT

74 S 35 (73 H 44) — 20-28-11

W(4)
CDEFG(3) ABCD(3) ABEF(3)
∅

NB(CDEFG / C(1))

T(ABCDEFG, CDG, EFG, AE)

74 S 36 (73 S 6) — 20-30-1[illegible]

W(4)
ABCD(3) ABEF(3) BCEG(3) BDFG(3) CDEF(3)
∅

NB(ABDEFG / EG(2))

NT

74 S 37 (73 S [illegible]) — 20-30-11

W(4)
ABCD(3) ABEF(3) ACEG(3) BDFG(3) CDEF(3)
∅

NB(ABC[illegible] / FG[illegible])

NT

74 S 38 (73 S 13) — 23-31-13

W(4)
ABCD(3) ABEF(3) BDFG(3) CDEF(3)
∅

NB(ABCDEG / EG(2))

T(ABG, ACE, CDG, EFG)

74 S 39 (73 H 4[illegible]) — 23-29-13

W(4)
ABCDE(3) DEFG(3)
∅

NB(ABCDE / A(1))

T

74 S 40 (73 S 12) — 23-31-13

W(4)
ABCD(3) ADFG(3) BEFG(3) CDEF(3)
∅

NB(ABCDEG / EG(2))

T(ABG, ACD, BCE, EFG)

74S41 (73S11) 23-31-13

W(4)
ABCD(3) ADEG(3) BDFG(3) CDEF(3)
∅

NB(ABCEFG | EF(2))

NT

74S42 (73S18) 26-32-15

W(4)
ABCD(3) ABEF(3) CDEF(3)
∅

NB(ABCEFG | AC(2))

T(ABCDEFG, ABG, CDG, EFG)

74S43 (73H47) 26-30-15

W(4)
ABCDE(3)
∅

NB(ABCDE | A(4))

T

74S44 (73S17) 26-32-15

W(4)
ABCD(3) BEFG(3) CDEF(3)
∅

NB(ABCEFG | EF(2))

T(ABCDEFG, ABG, ACD, EFG)

74S45 (73S16) 26-32-15

W(4)
ABCD(3) BDFG(3) CDEF(3)
∅

NB(ABCDEG | EG(2))

T(ABCDEFG, ABG, ACE, EFG)

74S46 (73S20) 29-33-1

W(4)
ABCD(3) AEFG(3)
∅

NB(ABCDEF | BE(2))

T

74S47 (73S21) 29-33-17

W(4)
ABCD(3) CDEF(3)
∅

NB(ABCEFG | AE(2))

T

74S48 (73S22) 32-34-19

W(4)
ABCD(3)
∅

NB(ABCDEF | EF(2))

T

74S49 (73S23) 35-35-21

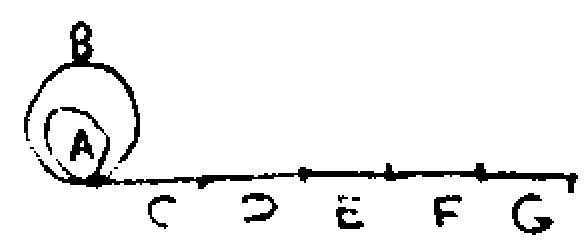
W(4)
∅

NB(W(4) | AB(2))

T

75L1 (72L1) 5-1-2

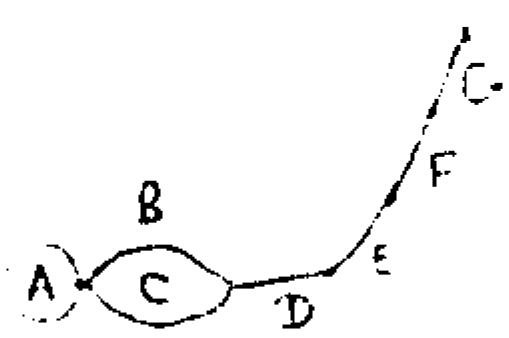
AB
•



T

75L2 (72L2) 5-2-2

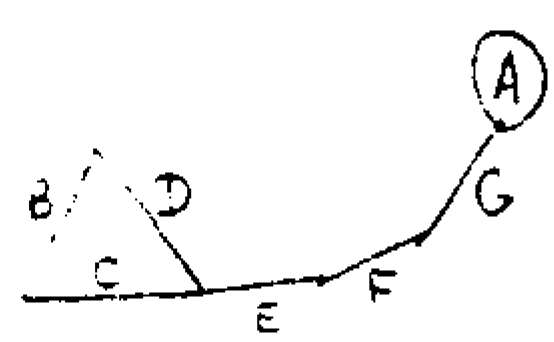
ABC(1)
A



T

75L3 (72L4) 6-3-2

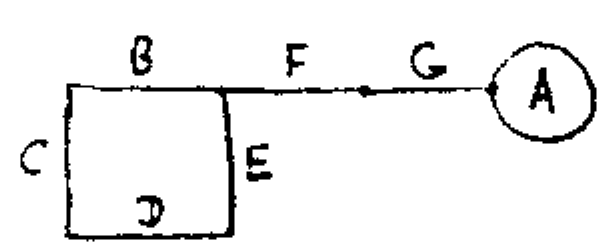
ABCD(2)
A



T

75L4 (72L8) 8-4-2

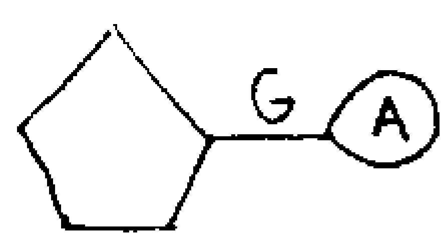
ABCDE(3)
A



T

75L5 (72L14) 11-5-2

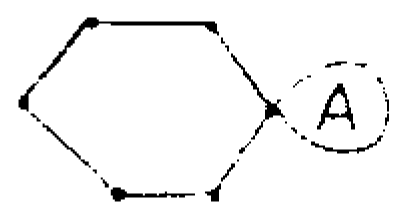
ABCDEF(4)
A



T

75L6 (72H1) 15-6-2

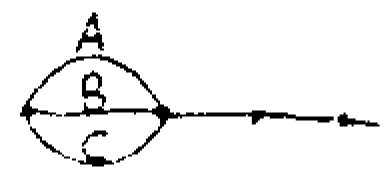
W(5)
|
A



T

75H1 (72L3) 5-3

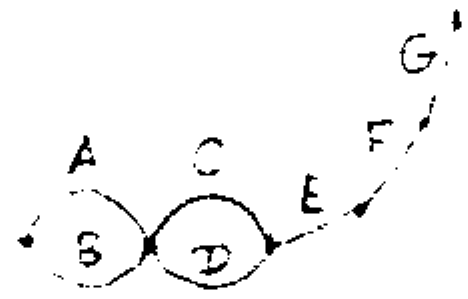
ABC(1)
|
∅



T

75H2 (72L5) 5-4-2

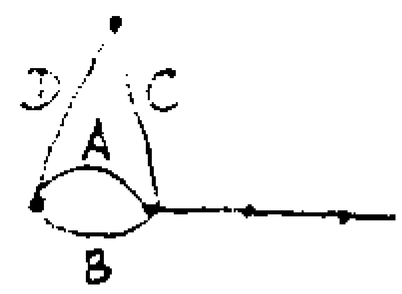
ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅



T

75H3 (72L6) 6-5-

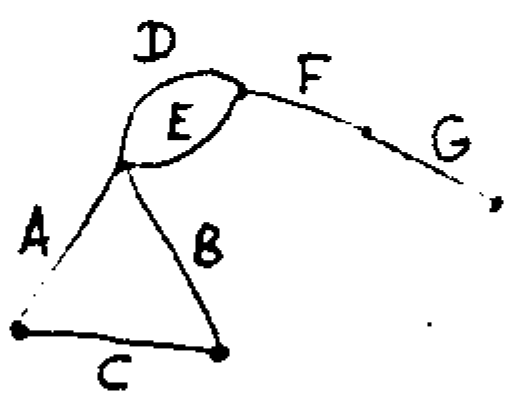
ABCD(2)
|
AB(1)
|
∅



T

75H4 (72L9) 6-6-2

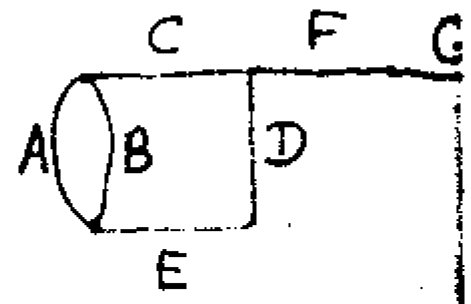
ABCDE(3)
ABC(2) DE(1)
∅



T

75H5 (72L10) 8-7-

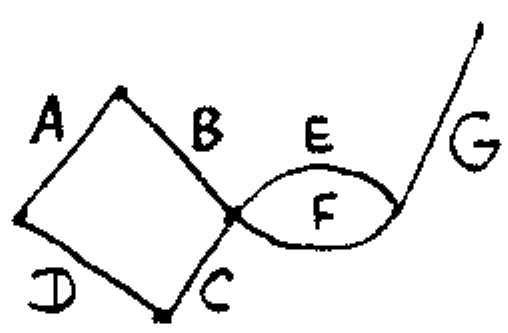
ABCDE(3)
|
AB(1)
|
∅



T

75H6 (72L15) 8-8-2

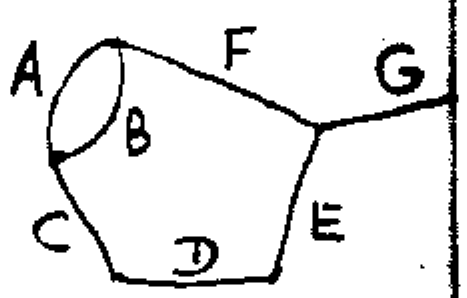
ABCDEF(4)
ABCD(3) EF(1)
∅



T

75H7 (72L17) 11-9-

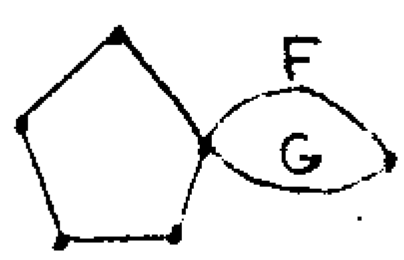
ABCDEF(4)
|
AB(1)
|
∅



T

75H8 (72H2) 11-10-2

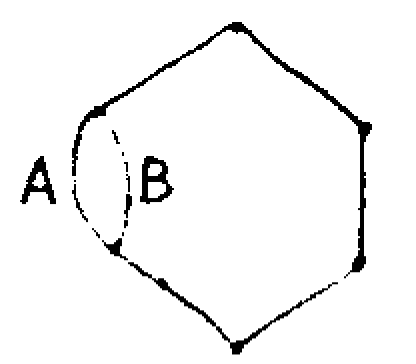
W(5)
ABCDE(4) FG(1)
∅



T

75H9 (72H4) 15-11-

W(5)
|
AB(1)
|
∅



T

75S1 (72L7) 7-6-4

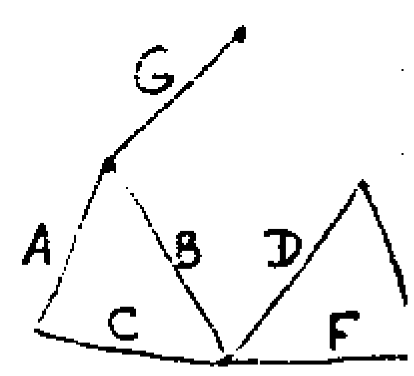
ABCD(2)
|
∅

NB(ABCD | ∅)

T

75S2 (72L16) 7-9-

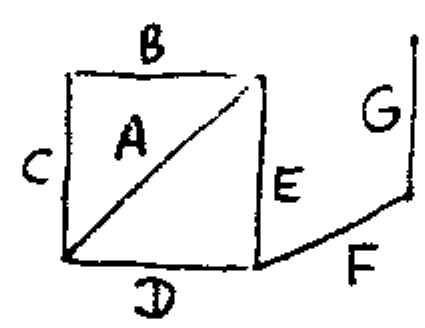
ABCDEF(4)
ABC(2) DEF(2)
∅



T

75S3 (72L11) 8-8-3

ABCDE(3)
ABC(2) ADE(2)
∅



T

75S4 (72L12) 10-9-

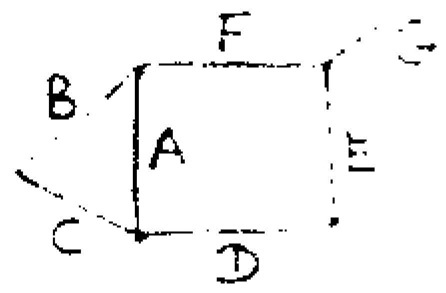
ABCDE(3)
|
ABC(2)
|
∅

NB(ABCDE | D(1))

T

75S5 (72L18) — 11-11-3

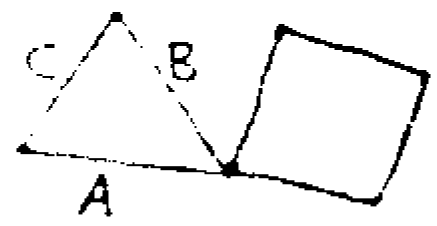
ABCDEF(4)
ABC(2) ADEF(3)
∅



T

75S6 (72H3) — 9-12-2

W(5)
ABC(2) DEFG(3)
∅



T

75S7 (72L20) — 14-12-4

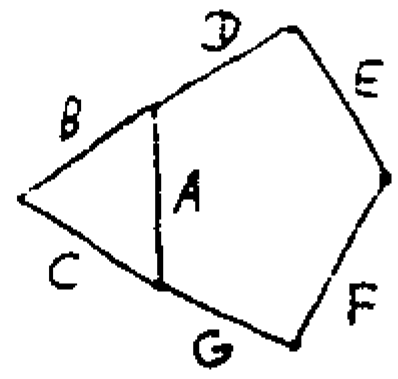
ABCDEF(4)
|
ABC(2)
|
∅

NB(ABCDEF | DE(2))

T

75S8 (72H5) — 15-14-3

W(5)
ABC(2) ADEFG(4)
∅



T

75S9 (72H8) — 19-15-4

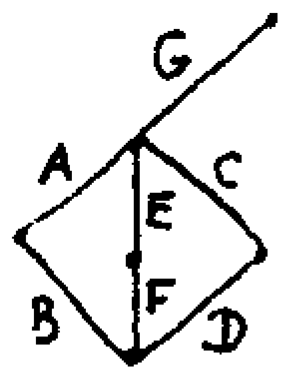
W(5)
|
ABC(2)
|
∅

NB(W | DEF(3))

T

75S10 (72L19) — 12-12-3

ABCDEF(4)
ABCD(3) ABEF(3) CDEF(3)
∅



T(ABCDEF, AB, CD, EF, G)

75S11 (72L13) — 12-10-5

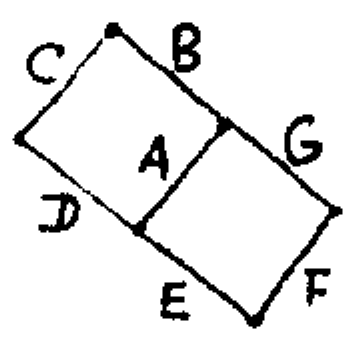
ABCDE(3)
|
∅

NB(ABCDE | A(1))

T

75S12 (72H6) — 15-15-3

W(5)
ABCD(3) AEFG(3)
∅



T

75S13 (72L21) — 15-13-4

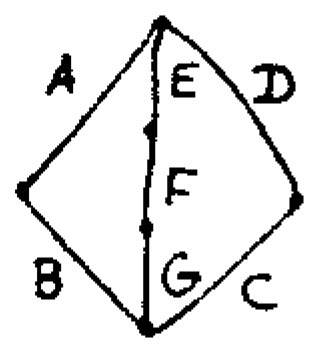
ABCDEF(4)
ABCD(3) CDEF(3)
∅

NB(ABCDEF | AE(2))

T

75S14 (72H7) — 17-16-3

W(5)
ABCD(3) ABEFG(4) CDEFG(4)
∅



T(ABCDEFG, EFG, EFG, AB, CD)

75S15 (72L22) — 18-14-5

ABCDEF(4)
|
ABCD(3)
|
∅

NB(ABCDEF | EF(2))

T

75S16 (72H9) — 21-17-4

W(5)
ABCD(3) CDEFG(4)
∅

NB(W | ABE(3))

T

75S17 (72H11) — 25-18-5

W(5)
|
ABCD(3)
|
∅

NB(W | EFG(3))

T

75S18 (72L23) — 21-15-6

ABCDEF(4)
|
∅

NB(ABCDEF | AB(2))

T

75S19 (72H10) 23-18-4

W(5)
ABCDE(4) ABCFG(4) ADEFG(4)
∅

NB(W(5) | BDF)

T(ABCDEFG, ABCDEFG, BC, DE, FG)

75S20 (72H12) 27-19-5

W(5)
ABCDE(4) ABCFG(4)
∅

NB(W | ADF(3))

T

75S21 (72H13) 31-20-6

W(5)
|
ABCDE(4)
|
∅

NB(W | EFG(3))

T

75S22 (72S1) 35-21-7

W(5)
|
∅

NB(W | ABC(3))

T

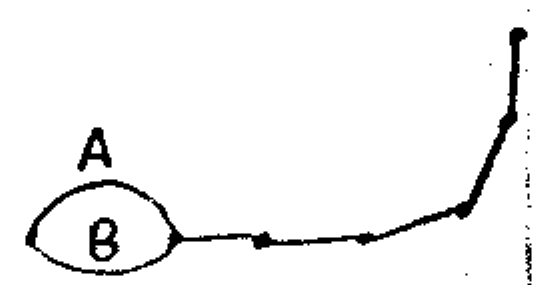
76L1 (71L1) 6-1-1

A

T

76H1 (71L2) 6-2-1

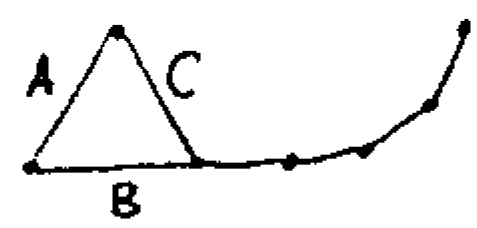
AB(1)
|
∅



T

76S1 (71L3) 7-3-1

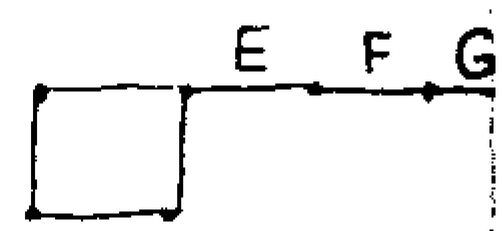
ABC(2)
|
∅



T

76S2 (71L4) 9-4-1

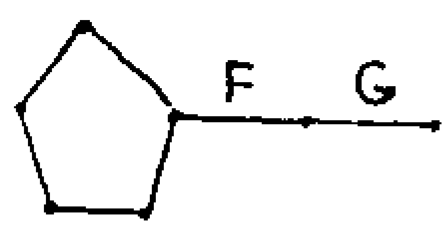
ABCD(3)
|
∅



T

76S3 (71L5) 12-5-1

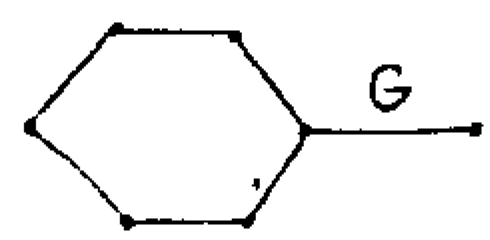
ABCDE(4)
|
∅



T

76S4 (71L6) 16-6-

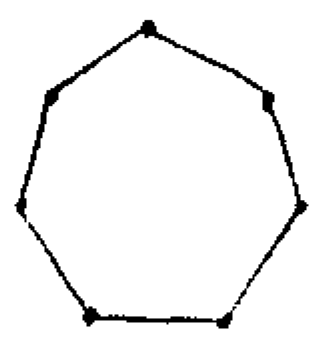
ABCDEF(5)
|
∅



T

76S5 (71H1) 21-7-1

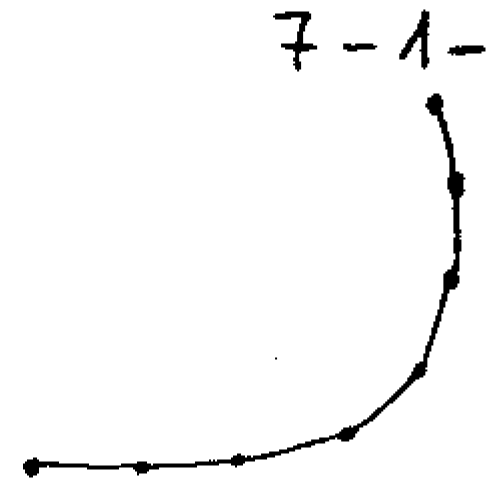
W(6)
|
∅



T

77S1 (70L1) 7-1-

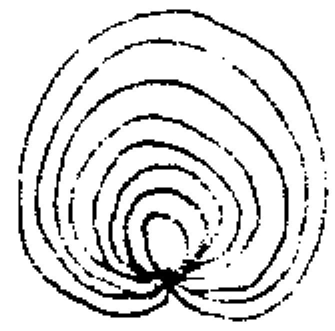
∅



T

80L1 (88S1) 0-0-8

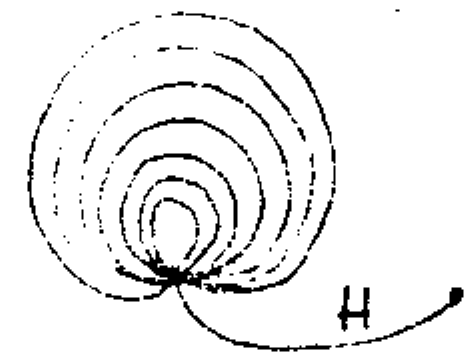
ABCDEFGH (= S)



T

81L1 (87L1) 1-1-7

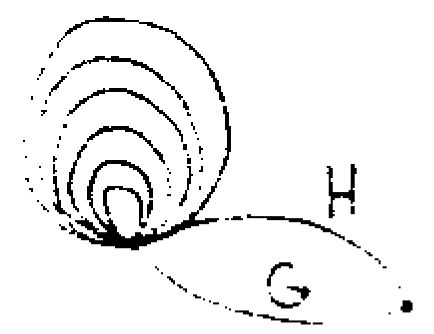
ABCDEFG



T

81L2 (87H1) 1-2-7

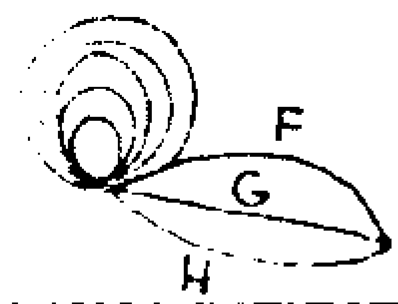
S(1)
|
ABCDEF



T

81L3 (87S1) 1-3-8

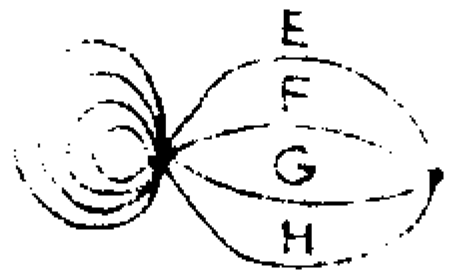
S(1)
|
ABCDE



T

81L4 (87S2) 1-4-10

S(1)
|
ABCD



T

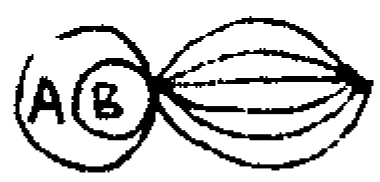
81L5 (87S3) 1-5-13

S(1)
|
ABC

T

81L6 (87S4) 1-6-17

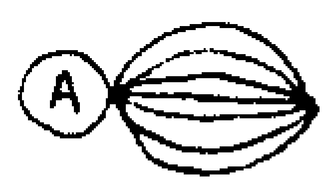
S(1)
|
AB



T

81L7 (87S5) 1-7-22

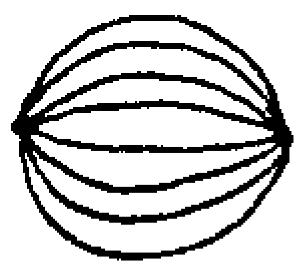
S(1)
|
A



T

81H1 (87S6) 1-8-28

S(1)
|
∅



T

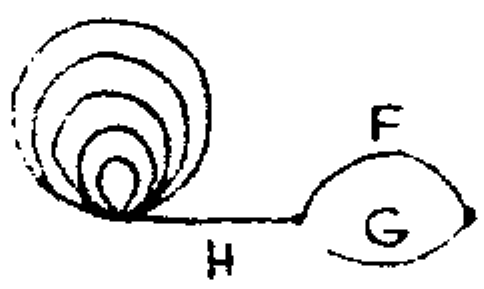
82L1 (86L1) 2-1-6

ABCDEF
•

T

82L2 (86L2) 2-2-6

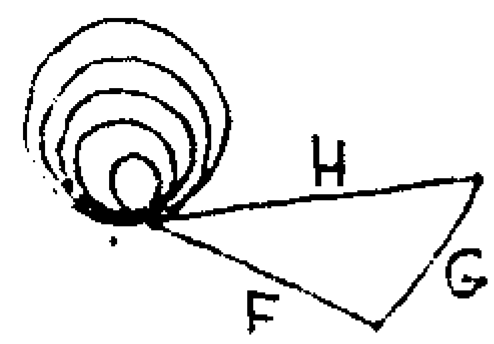
ABCDEFG(1)
|
ABCDE



T

82L3 (86H1) 3-3-6

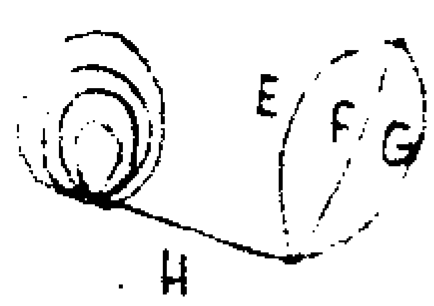
S(2)
|
ABCDE



T

82L4 (86L3) 2-3-7

ABCDEFG(1)
|
ABCD



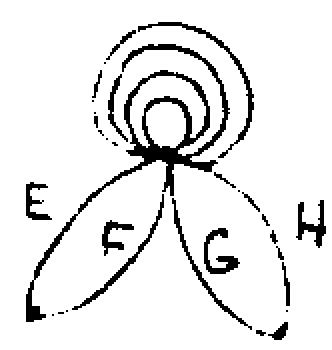
T

82L5 (86H2) 2-4-6

S(2)

ABCDEF(1) ABCDGH(1)

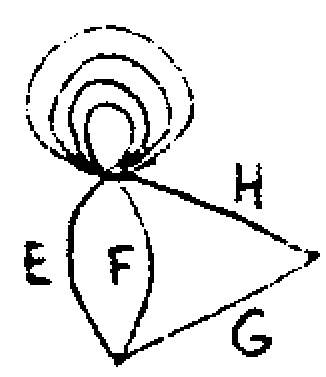
ABCD



T

82L6 (86H3) 3-5-7

S(2)
|
ABCDEF(1)
|
ABCD



T

82L7 (86S40) 4-6-8

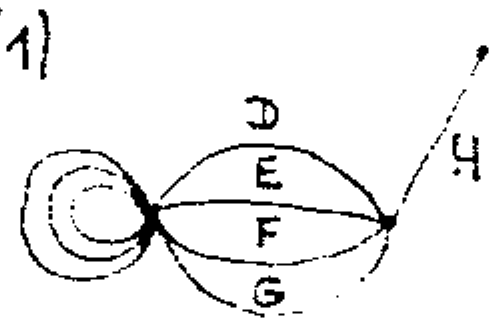
S(2)
|
ABCD

NB (S | ABCD)

T

82L8 (86L4) — 2-4-9

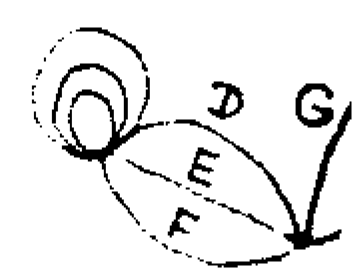
ABCDEFG(1)
|
ABC



T

82L9 (86H4) — 2-6-

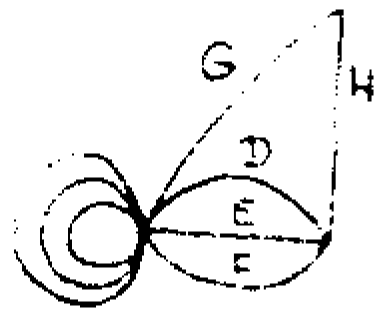
S(2)
ABCDEF(1) ABCGH(1)
ABC



T

82L10 (86H5) — 3-7-9

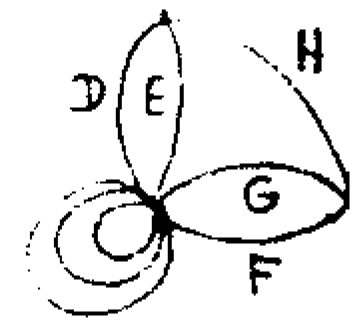
S(2)
|
ABCDEF(1)
|
ABC



T

82L11 (86S35) — 3-8-

S(2)
ABCDE(1) ABCFG(1)
ABC



T

82L12 (86S30) — 4-9-11

S(2)
|
ABCDE(1)
|
ABC

$NB\left(\begin{array}{c}EFGH\\ \mid \\ \varnothing\end{array}\right)$

T

82L13 (86S28) — 5-10-

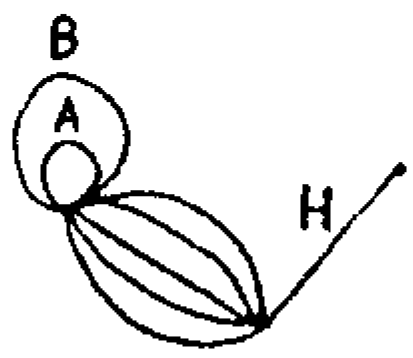
S(2)
|
ABC

$NB\left(\begin{array}{c}DEFG\\ \mid \\ \varnothing\end{array}\right)$

T

82L14 (86L5) — 2-5-12

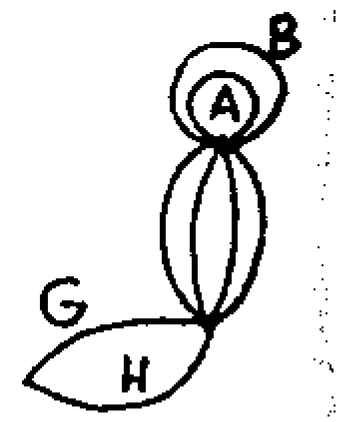
ABCDEFG(1)
|
AB



T

82L15 (86H6) — 2-8-

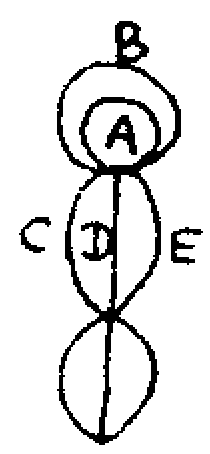
S(2)
ABCDEF(1) ABGH(1)
AB



T

82L16 (86S34) — 2-9-8

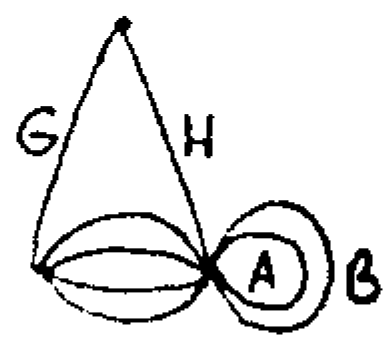
S(2)
ABCDE(1) ABFGH(1)
AB



T

82L17 (86H7) — 3-9-1

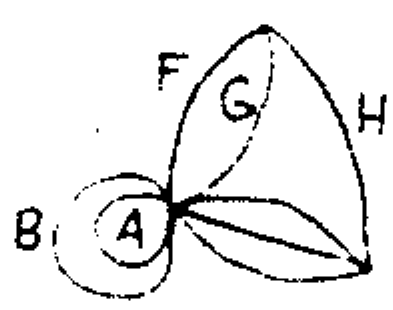
S(2)
|
ABCDEF(1)
|
AB



T

82L18 (86S37) — 3-11-12

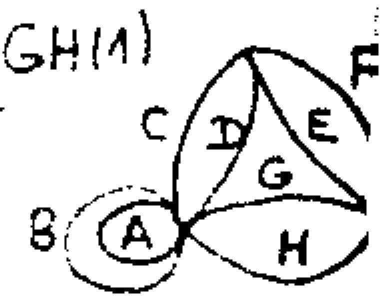
S(2)
ABCDE(1) ABFG(1)
AB



T

82L19 (86S20) — 3-12-1

S(2)
ABCD(1) ABEF(1) ABGH(1)
AB



NT

82L20 (86S31) — 4-12-15

S(2)
|
ABCDE(1)
|
AB

$NB\left(\begin{array}{c}CFGH\\ \mid \\ \varnothing\end{array}\right)$

T

82L21 (86S17) — 4-13-16

S(2)
ABCD(1) ABEF(1)
AB

$NB\left(\begin{array}{c}CEGH\\ \mid \\ \varnothing\end{array}\right)$

T

82L22 (86S24) 5-14-19

S(2)
|
ABCD(1)
|
AB

NB(EFGH | ∅)

T

82L23 (86S15) 6-15-22

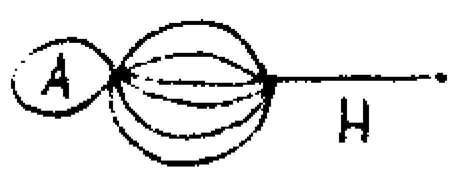
S(2)
|
AB

NB(CDEF | ∅)

T

82L24 (86L6) 2-6-16

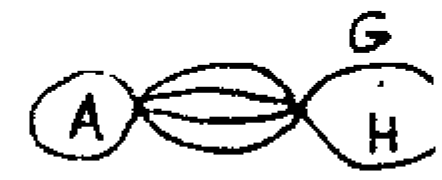
ABCDEFG(1)
|
A



T

82L25 (86H8) 2-10-12

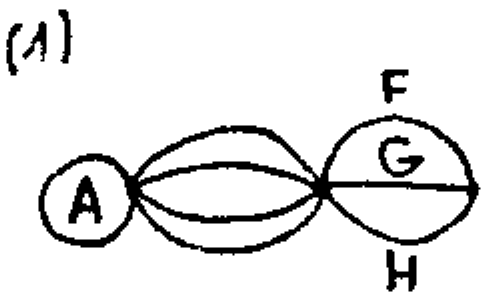
S(2)
ABCDEF(1) AGH(1)
A



T

82L26 (86S36) 2-12-10

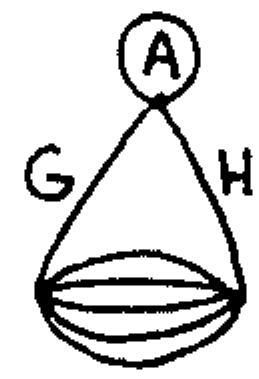
S(2)
ABCDE(1) AFGH(1)
A



T

82L27 (86H9) 3-11-1

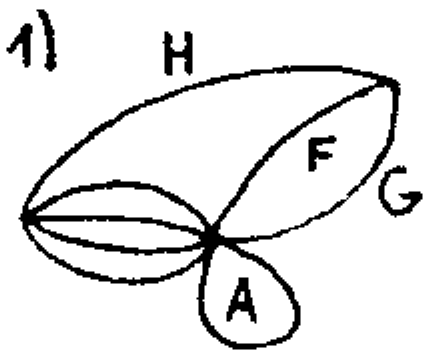
S(2)
|
ABCDEF(1)
|
A



T

82L28 (86S39) 3-14-16

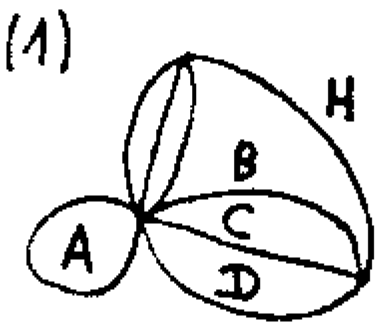
S(2)
ABCDE(1) AFG(1)
A



T

82L29 (86S18) 3-15-1

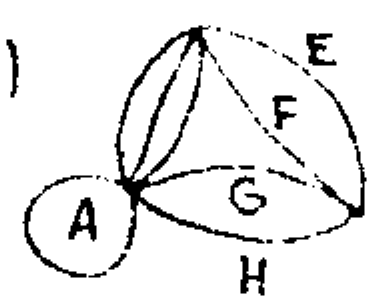
S(2)
ABCD(1) AEFG(1)
A



T

82L30 (86S23) 3-16-18

S(2)
ABCD(1) AEF(1) AGH(1)
A



NT

82L31 (86S32) 4-15-20

S(2)
|
ABCDE(1)
|
A

NB(BFGH | ∅)

T

82L32 (86S21) 4-17-22

S(2)
ABCD(1) AEF(1)
A

NB(BEGH | ∅)

T

82L33 (86S14) 4-18-2

S(2)
ABC(1) ADE(1) AFG(1)
∅

NB(BDFH | ∅)

NT

82L34 (86S27) 5-18-26

S(2)
|
ABCD(1)
|
A

NB(EFGH | ∅)

T

82L35 (86S11) 5-19-28

S(2)
ABC(1) ADE(1)
A

NB(BDFG | ∅)

T

82L36
(86S8)
6-20-32

S(2)
|
ABC(1)
|
A

NB(DEFG | Ø)

T

82L37
(86S2)
7-21-

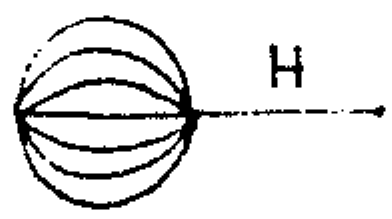
S(2)
|
A

NB(BCD | Ø)

T

82H1
(86L7)
2-7-21

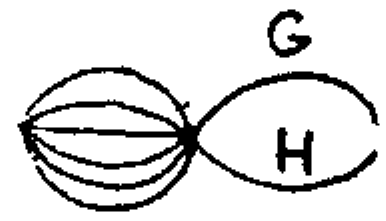
ABCDEFG(1)
|
Ø



T

82H2
(86H10)
2-12-

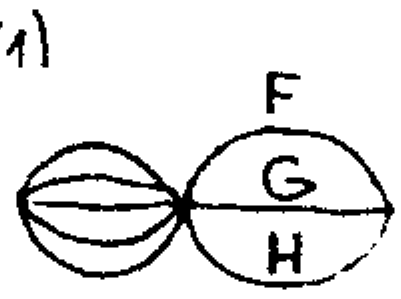
S(2)
ABCDEF(1) GH(1)
Ø



T

82H3
(86S38)
2-15-13

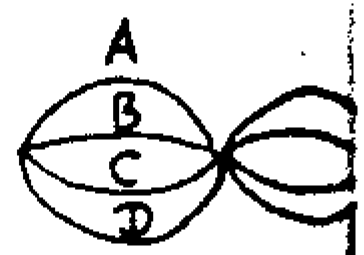
S(2)
ABCDE(1) FGH(1)
Ø



T

82H4
(86S19)
2-16-

S(2)
ABCD(1) EFGH(1)
Ø



T

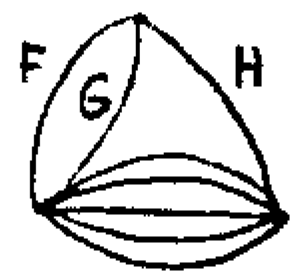
82H5
(86H11)
3-13-21

S(2)
|
ABCDEF(1)
|
Ø

T

82H6
(86S33)
3-17-

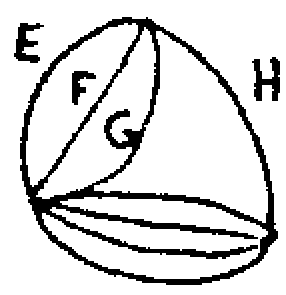
S(2)
ABCDE(1) FG(1)
Ø



T

82H7
(86S22)
3-19-21

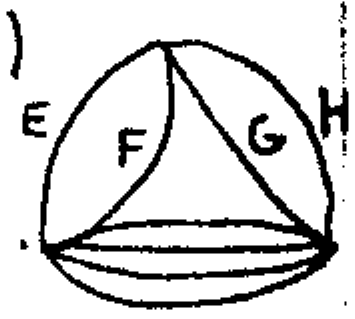
S(2)
ABCD(1) EFG(1)
Ø



T

82H8
(86S26)
3-20-

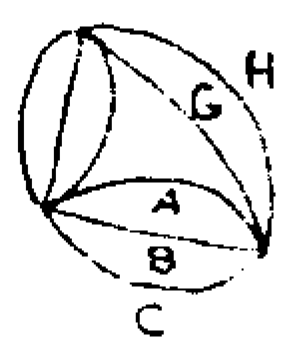
S(2)
ABCD(1) EF(1) GH(1)
Ø



NT

82H9
(86S13)
3-21-25

S(2)
ABC(1) DEF(1) GH(1)
Ø



NT

82H10
(86S29)
4-18-2

S(2)
|
ABCDE(1)
|
Ø

NB(AFGH | Ø)

T

82H11
(86S25)
4-21-29

S(2)
ABCD(1) EF(1)
Ø

NB(AEGH | Ø)

T

82H12
(86S12)
4-22-3

S(2)
ABC(1) DEF(1)
Ø

NB(ADGH | Ø)

T

82H13
(86S10)
4-23-33

S(2)
ABC(1) DE(1) FG(1)
∅

NB(ADFH | ∅)

NT

82H14
(86S6)
4-24-36

S(4)
AB(1) CD(1) EF(1) GH(1)
∅

NB(ACEG | ∅)

NT

82H15
(86S16)
5-22-34

S(2)
|
ABCD(1)
|
∅

NB(EFGH | ∅)

T

82H16
(86S9)
5-24-38

S(2)
ABC(1) DE(1)
∅

NB(ADFG | ∅)

T

82H17
(86S5)
5-25-41

S(2)
AB(1) CD(1) EF(1)
∅

NB(ACEG | ∅)

NT

82H18
(86S7)
6-25-43

S(2)
|
ABC(1)
|
∅

NB(ADEF | ∅)

T

82H19
(86S4)
6-26-46

S(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB(ACEF | ∅)

T

82H20
(86S3)
7-27-51

S(2)
|
AB(1)
|
∅

NB(ACDE | ∅)

T

82S1
(86S1)
8-28-56

S(2)
|
∅

NB(ABCD | ∅)

T

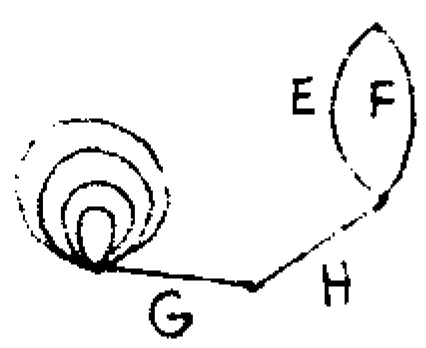
83L1
(85L1)
3-1-5

ABCDE
•

T

83L2
(85L2)
3-2-5

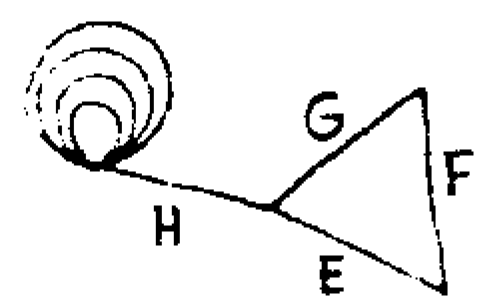
ABCDEF(1)
|
ABCD



T

83L3
(85L7)
4-3-5

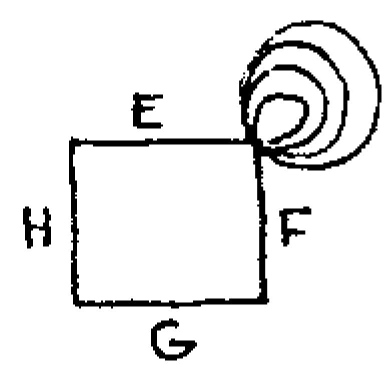
ABCDEFG(2)
|
ABCD



T

83L4
(85H1)
6-4-5

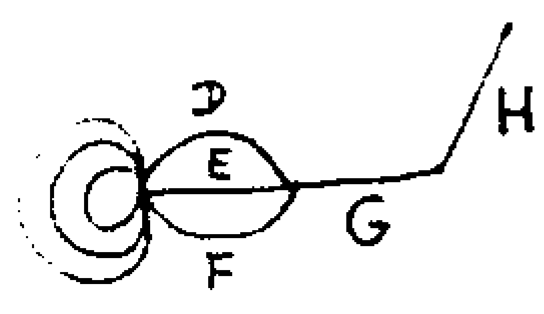
S(3)
|
ABCD



T

83L5
(85L3)
3-3-6

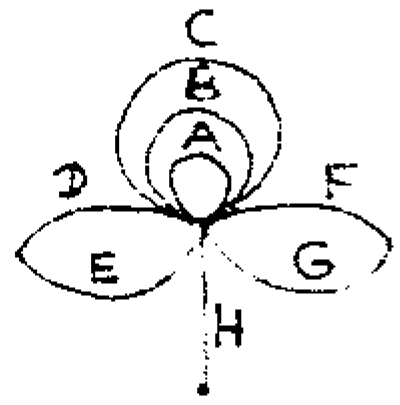
ABCDEF(1)
|
ABC



T

83L6
(85L8)
3-4-5

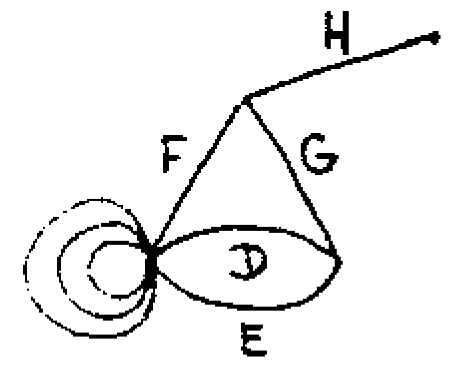
ABCDEFG(2)
ABCDE(1) ABCFG(1)
ABC



T

83L7
(85L9)
4-5-6

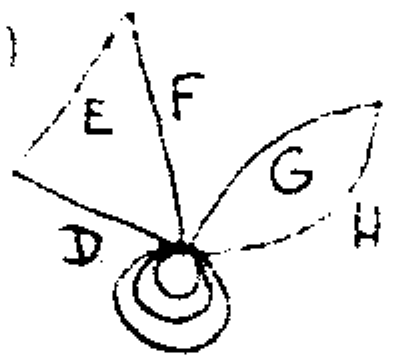
ABCDEFG(2)
ABCDE(1)
ABC



T

83L8
(85H2)
4-6-5

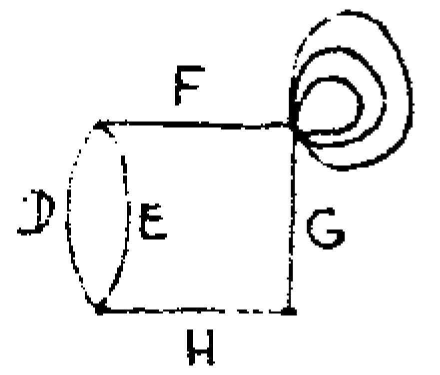
S(3)
ABCDEF(2) ABCGH(1)
ABC



T

83L9
(85H4)
6-7-

S(3)
ABCDE(1)
ABC



T

83L10
(85L16)
5-6-7

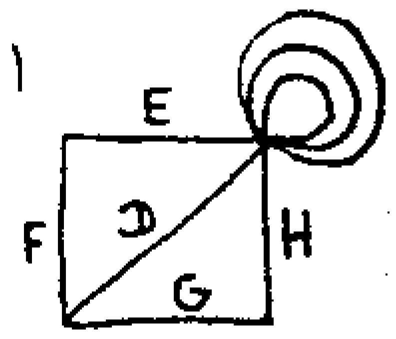
ABCDEFG(2)
ABC

NB(DEFG | Ø)

T

83L11
(85H6)
6-8-

S(3)
ABCDEF(2) ABCDGH(2)
ABC



T

83L12
(185S216)
10-10-8

S(3)
ABC

NB(S(3) | ABCD(1))

T

83L13
(85H20)
8-9-7

S(3)
ABCDEF(2)
ABC

NB(S(3) | ABCG)

T

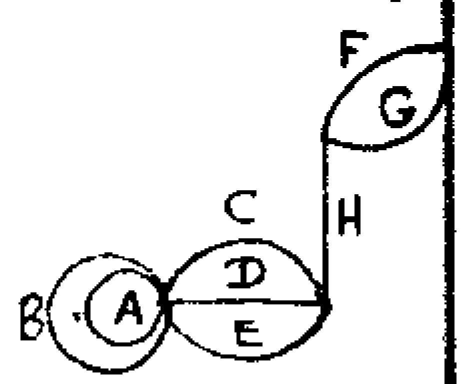
83L14
(85L4)
3-4-8

ABCDEF(1)
AB

T

83L15
(85L10)
3-6-6

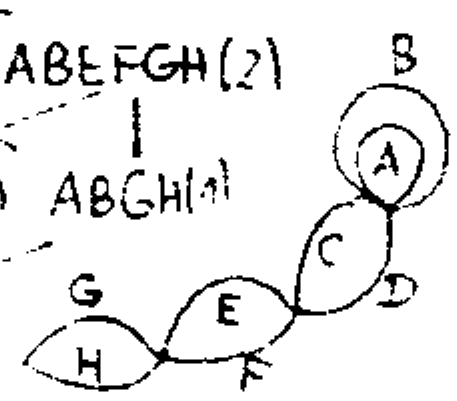
ABCDEFG(2)
ABCDE(1) ABFG(1)
AB



T

83L16
(85H3)
3-8-5

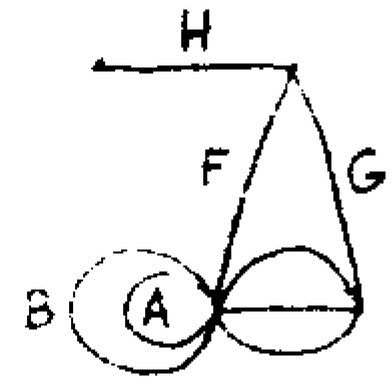
S(3)
ABCDEF(2) ABCDGH(2) ABEFGH(2)
ABCD(1) ABEF(1) ABGH(1)
AB



T(CD, EF, GH)

83L17
(85L11)
4-7-8

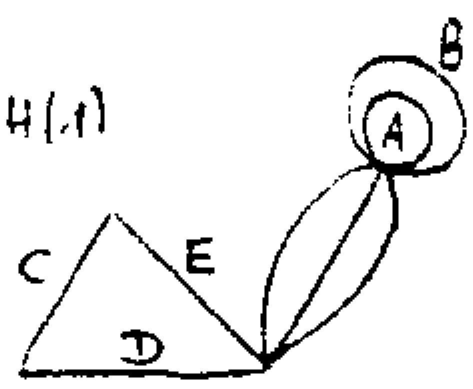
ABCDEFG(2)
ABCDE(1)
AB



T

83L18
(85H5)
4-9-6

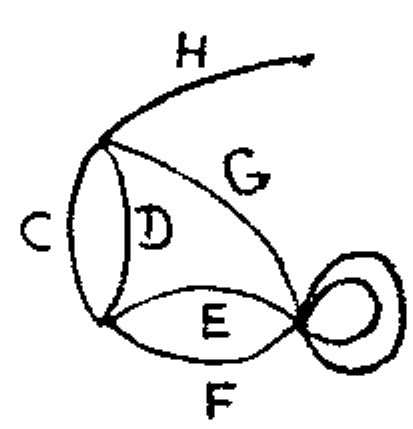
S(3)
ABCDE(2) ABFGH(1)
AB



T

83L19
(85L18)
4-8-8

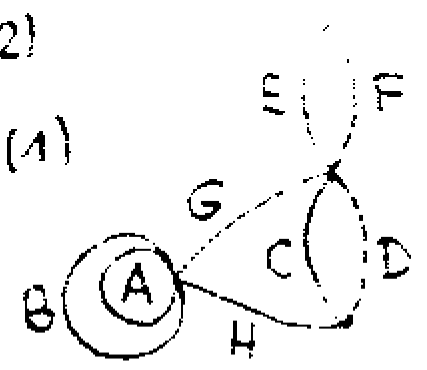
ABCDEFG(2)
ABCD(1) ABEF(1)
AB



T

83L20 (85H7) — 4-10-6

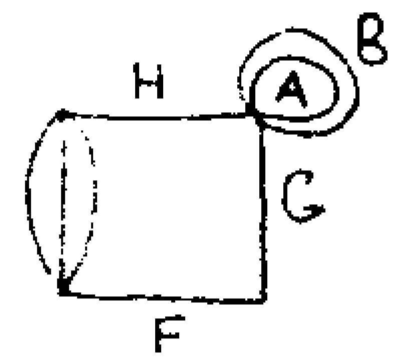
S(3) — ABCDGH(2), ABCDEF(2) — ABCD(1), ABEF(1) — AB



T(CDGH, EF, GH)

83L21 (85H9) — 6-10-8

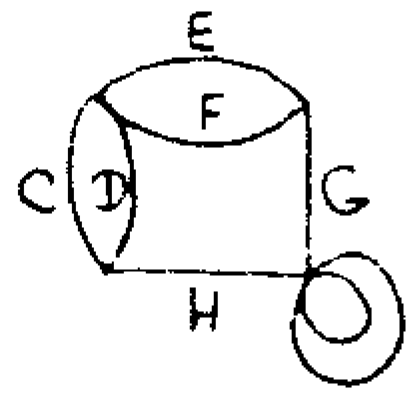
S(3) — ABCDE(1) — AB



T

83L22 (85H24) — 6-12-8

S(3) — ABCDEF(2) — ABCD(1), ABEF(1) — AB



T(CDGH, EFGH, GH)

83L23 (85L19) — 5-9-10

ABCDEFG(2) — ABCD(1) — AB

NB(CEFG — Ø)

T

83L24 (85H21) — 5-12-7

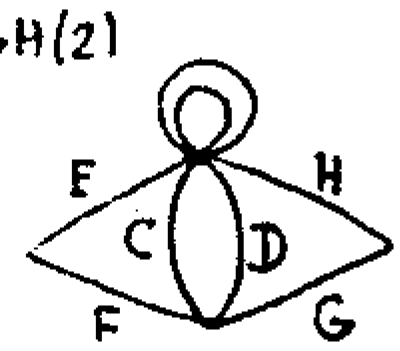
S(3) — ABCDEF(2), ABGH(1) — AB

NB(CDEF — Ø)

T

83L25 (85H11) — 6-12-8

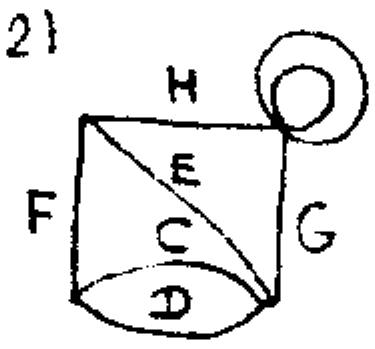
S(3) — ABCDEF(2), ABCDGH(2) — ABCD(1) — AB



T(CDEFGH, EF, GH)

83L26 (85H25) — 6-13-8

S(3) — ABCDEF(2), ABEGH(2) — ABCD(1) — AB



T(EFGH, CDF, GH)

83L27 (85H27) — 8-14-10

S(3) — ABCDEF(2) — ABCD(1) — AB

NB(ABCEFGH — ABG(1))

T

83L28 (85S215) — 8-15-10

S(3) — ABCDE(2), ABFG(1) — AB

NB(ABCDEFH — ABH(1))

T

83L29 (85S213) — 10-16-12

S(3) — ABCD(1) — AB

NB(ABCEFGH — ABE(1))

T

83L30 (85L26) — 6-10-12

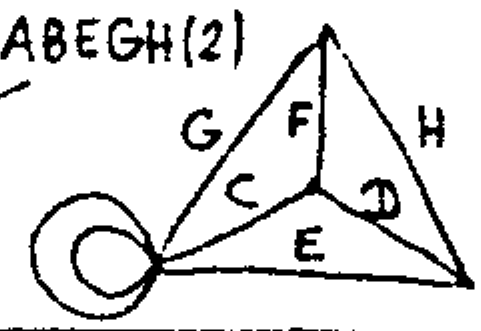
ABCDEFG(2) — AB

NB(ABCDEF — AB)

T

83L31 (85S207) — 7-16-9

S(3) — ABCDE(2), ABCFG(2), ABDFH(2), ABEGH(2) — AB



NT

83L32 (85H28) — 8-15-10

S(3) — ABCDEF(2), ABCGH(2) — AB

NB(ABCDEF — AB)

T

83L33 (85S206) — 9-17-11

S(3) — ABCDE(2), ABCFG(2), ABDFH(2) — AB

NB(ABCDFGH — ABD(1))

T(CEG, DEH, FGH)

83L34 (85H46) — 10-16-12

S(3)
|
ABCDEF(2)
|
AB

NB(CDEF | ∅)

T

83L35 (85S203) — 11-18-

S(3)
ABCDE(2) ABFGH(2)
AB

NB(ABCD | ABC

T

83L36 (85S202) — 11-18-13

S(3)
ABCDE(2) ABCFG(2)
AB

NB(ABDEFGH | ABH(1))

T

83L37 (85S183) — 13-19-

S(3)
|
ABCDE(2)
|
AB

NB(ABCDF | ABC

T

83L38 (85S134) — 15-20-17

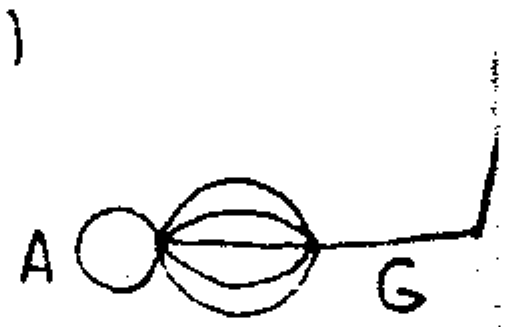
S(3)
|
AB

NB(ABCDEFG | ABC(1))

T

83L39 (85L5) — 3-5-1

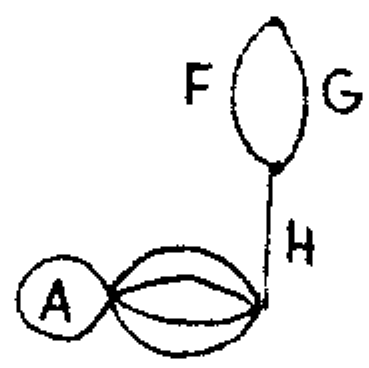
ABCDEF(1)
|
A



T

83L40 (85L12) — 3-8-8

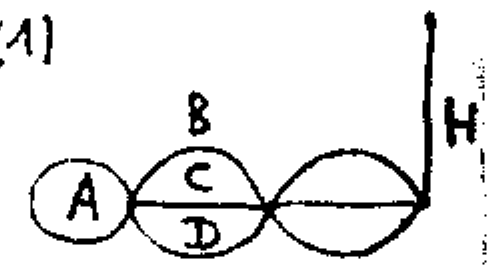
ABCDEFG(2)
ABCDE(1) AFG(1)
A



T

83L41 (85L17) — 3-9-7

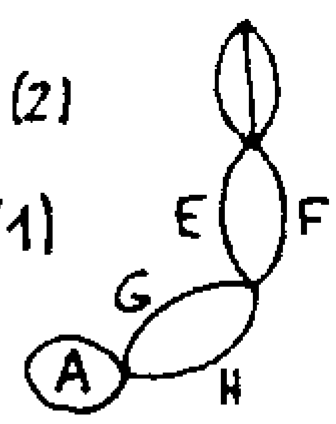
ABCDEFG(2)
ABCD(1) AEFG(1)
A



T

83L42 (85H8) — 3-12-6

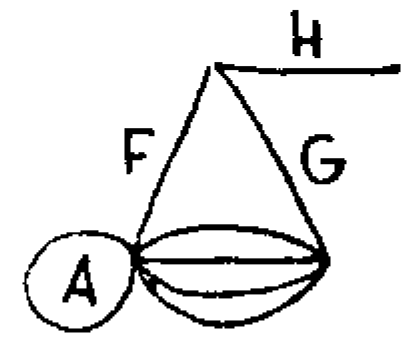
S(3)
ABCDEF(2) ABCDGH(2) AEFGH(2)
ABCD(1) AEF(1) AGH(1)
A



T(BCD, EF, GH)

83L43 (85L13) — 4-9-1

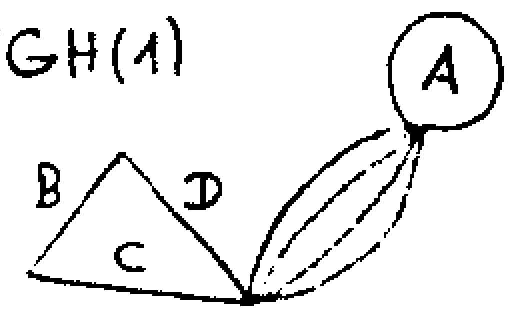
ABCDEFG(2)
|
ABCDE(1)
|
A



T

83L44 (85H10) — 4-12-8

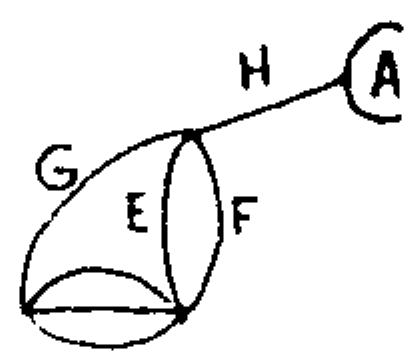
S(3)
ABCD(2) AEFGH(1)
A



T

83L45 (85L20) — 4-11-11

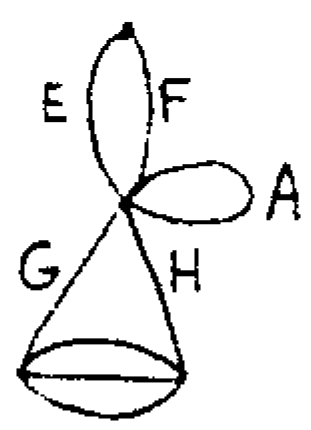
ABCDEFG(2)
ABCD(1) AEF(1)
A



T

83L46 (85H12) — 4-14-8

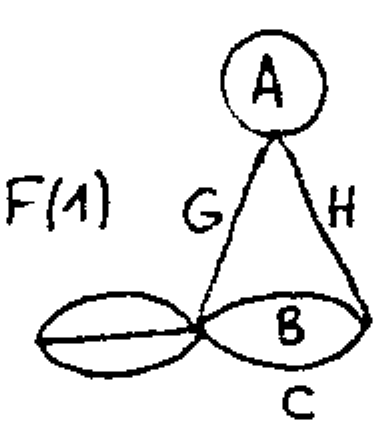
S(3)
ABCDGH(2) ABCDEF(2)
ABCD(1) AEF(1)
A



T(BCDGH, EF, GH)

83L47 (85H22) — 4-15-7

S(3)
ABCGH(2) ABCDEF(2)
ABC(1) ADEF(1)
A



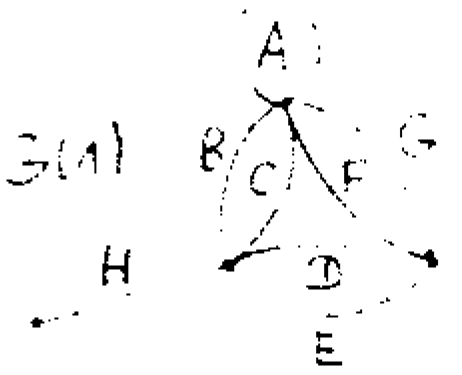
T(BCGH, DEF, GH)

83L48 (85L25) 4-12-12

ABCDEFG(2)

ABC(1) ADE(1) AFG(1)

A



NT

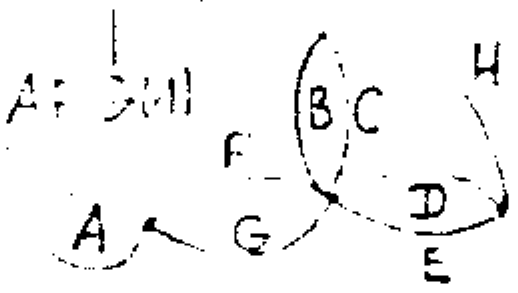
83L49 (85H26) 4-16-8

S(3)

ABCDEH(2) ABCFG(2) ADEFG(2)

ABC(1) ADE(1) AFG(1)

A



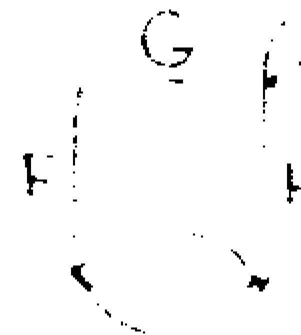
T(BCH, DEH, FG)

83L50 (85H14) 6-13-11

S(3)

ABCDE(1)

A



T

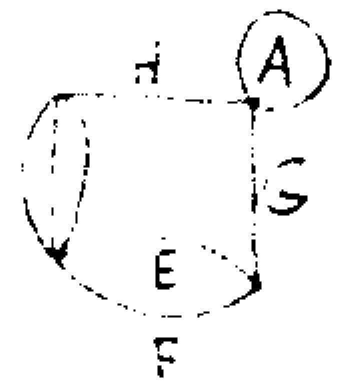
83L51 (85H30) 6-17-11

S(3)

ABCDEF(2)

ABCD(1) AEF(1)

A



T(BCDGH, EFGH, GH)

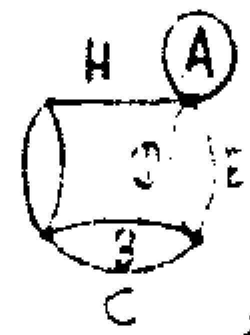
83L52 (85S205) 6-20-12

S(3)

ABCDE(2) ABCFG(2) ADEFG(2)

ABC(1) ADE(1) AFG(1)

A



T(BCH, DEH, FGH)

83L53 (85L22) 5-12-14

ABCDEFG(2)

ABCD(1)

A

NB(BEFG / ∅)

T

83L54 (85H29) 5-18-10

S(3)

ABCFGH(2) ABCDE(2)

ABC(1) ADE(1)

A

NB(BFGH / ∅)

T(BCFGH, DE, FGH)

83L55 (85L28) 5-13-15

ABCDEFG(2)

ABC(1) ADE(1)

A

NB(BDFG / ∅)

T

83L56 (85S214) 5-17-8

S(3)

ABCDE(2) AFGH(1)

A

NB(ABCDE / A)

T

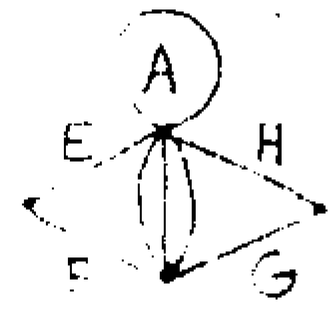
83L57 (85H16) 6-16-11

S(3)

ABCDEF(2) ABCDGH(2)

ABCD(1)

A



T(BCDEFGH, EF, GH)

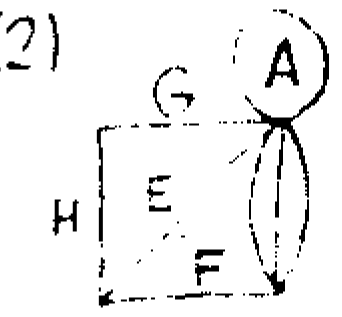
83L58 (85H31) 6-18-11

S(3)

ABCDEF(2) AEGH(2)

ABCD(1)

A



T(BCDF, EFGH, GH)

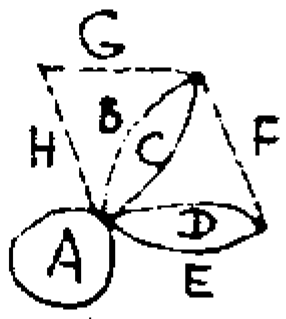
83L59 (85H32) 6-19-11

S(3)

ABCGH(2) ABCDEF(2)

ABC(1) ADE(1)

A



T(BCfGH, DEFGH)

83L60 (85H43) 6-20-12

S(3)

ABCDEF(2) AFGH(2)

ABC(1) ADE(1)

A

NT

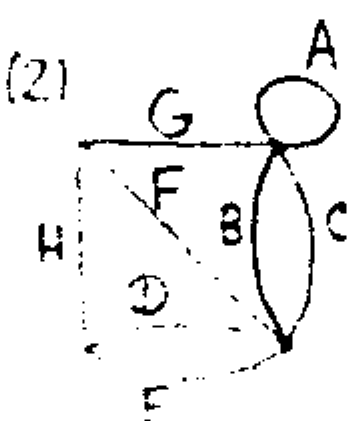
83L61 (85S201) 6-21-11

S(3)

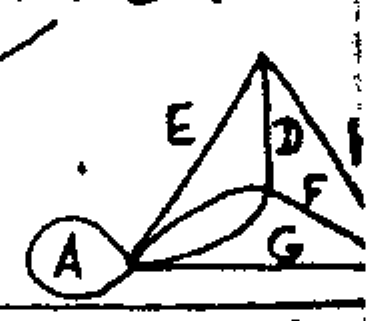
ABCFG(2) ABCDE(2) ADEFH(2)

ABC(1) ADE(1)

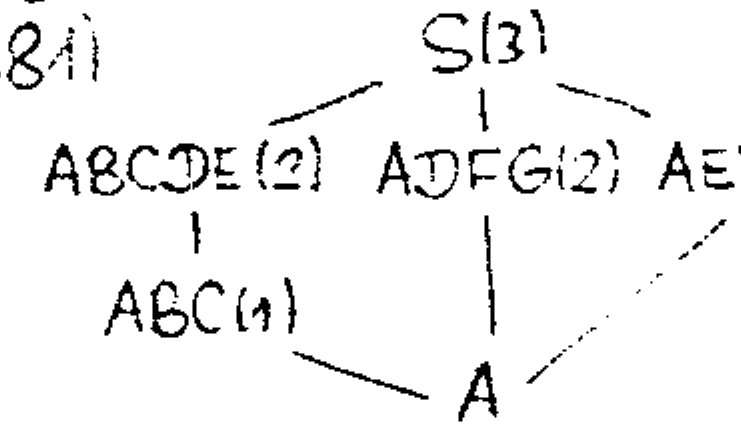
A



T(BCG, DEH, FGH)

83L62 (85H36) 8-19-14 S(3) — ABCDEF(2) — ABCD(1) — A NB(ABEFGH / AE(1)) T	83L63 (85S211) 8-21- S(3); ABCD(2) AEFG(1); A NB(ABCD / AG(1 T
83L64 (85H50) 8-21-15 S(3) — ABCDEF(2); ABC(1) ADE(1); A NB(ABDFGH / AG(1)) T(BCFGH, DEFGH, GH)	83L65 (85S198) 8-23- S(3); ABCFG(2) ABCDE(2); ABC(1) ADE(1); A NB(T(BCFGH, DEH, FGH)
83L66 (85S182) 8-24-16 S(3); ABCDE(2) AFGH(2); ABC(1) ADE(1); A NB(ABDFGH / AB(1)) NT	83L67 (85S210) 10-22- S(3) — ABCD(1) — A NB(S(3) / ABCD T
83L68 (85S199) 10-25-19 S(3) — ABCDE(2); ABC(1) ADE(1); A NB(ABDFGH / AF(1)) T(BCFGH, DEFGH, FGH)	83L69 (85L30) 6-14- ABCDEFG — ABC(1) — A NB(DEFG / Ø T
83L70 (85H47) 6-20-12 S(3); ABCDEF(2) AGH(1); A NB(BCDE / Ø) T	83L71 (85S196) 7-24- S(3); ABCDE(2) ABCFG(2) ADFH(2) AEGH(2); ABC(1); A  NT
83L72 (85H37) 8-21-14 S(3); ABCDEF(2) ABCGH(2); ABC(1) — A NB(ABDEF / A) T(ABCDEFGH, DEF, GH)	83L73 (85H64) 8-22- S(3); ABCDEF(2) ADGH(2); ABC(1); A NB(ABDE / A T(DEFGH, BCEF, GH)
83L74 (85S200) 8-24-14 S(3); ABCDE(2) ADFGH(2); ABC(1); A NB(DFGH / Ø) T(DEFGH, BCE, FGH)	83L75 (85S195) 9-25- S(3); ABCDE(2) ABCFG(2) ADFH(2); ABC(1); A NB(ABDEF / AE(1)) T(BCEG, DEH, FGH)

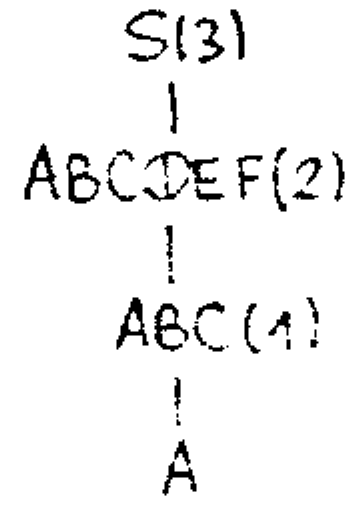
83L76 (85S181) 9-26-17



$\mathrm{NB}\binom{ABDEGH}{AD(1)}$

NT

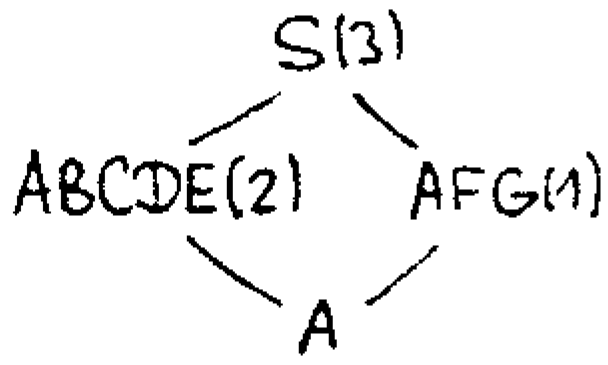
83L77 (85H54) 10-23-18



$\mathrm{NB}\binom{BDEF}{\varnothing}$

T

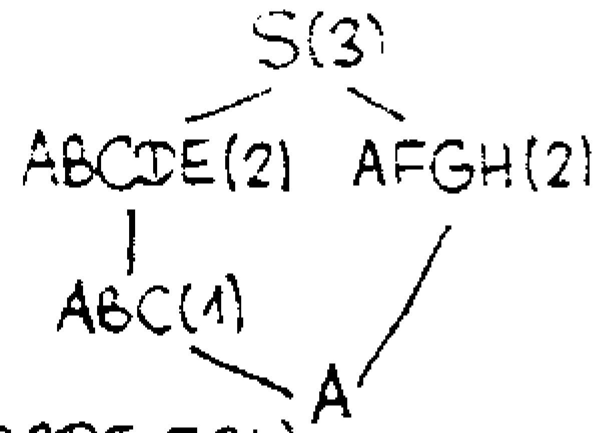
83L78 (85S176) 10-26-18



$\mathrm{NB}\binom{BCDE}{\varnothing}$

T

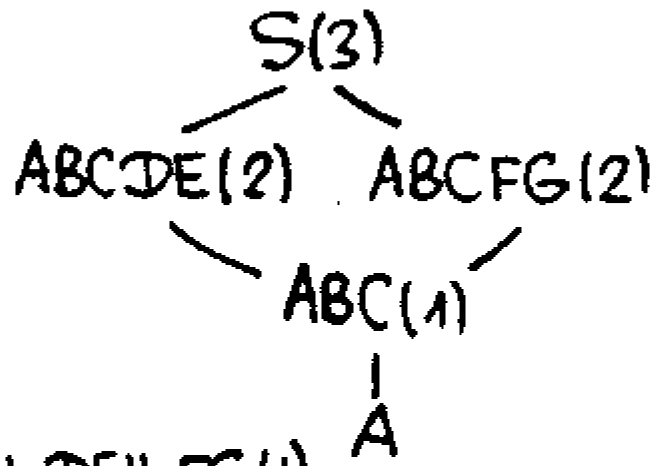
83L79 (85S180) 11-27-20



$\mathrm{NB}\binom{ABDEFG}{AF(1)}$

T(DEFGH, BCDE, FGH)

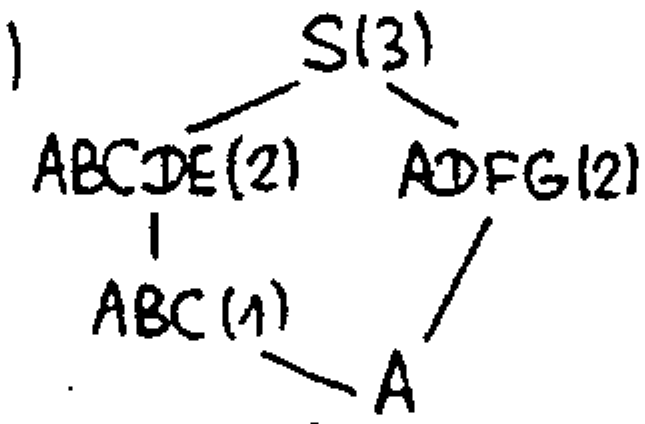
83L80 (85S190) 11-26-19



$\mathrm{NB}\binom{ABDEFH}{AH(1)}$

T(BCDEFGH, DEH, FGH)

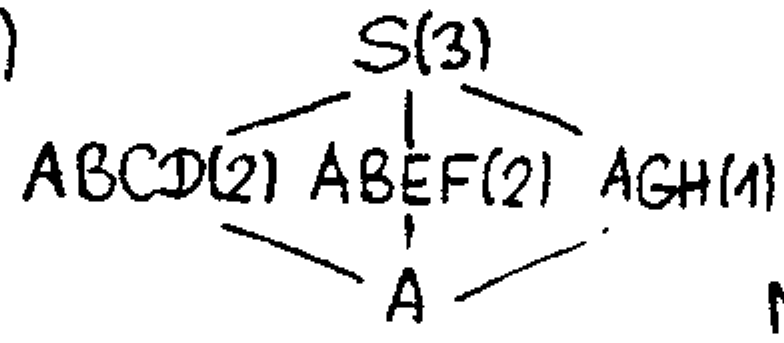
83L81 (85S179) 11-27-20



$\mathrm{NB}\binom{ABDEFH}{AH(1)}$

T(DEFGH, BCEH, FGH)

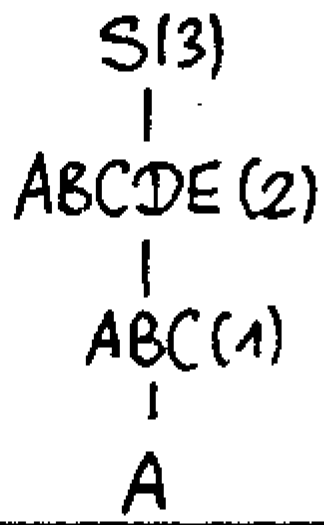
83L82 (85S133) 11-28-21



$\mathrm{NB}\binom{ABCDEGH}{AGH(1)}$

NT

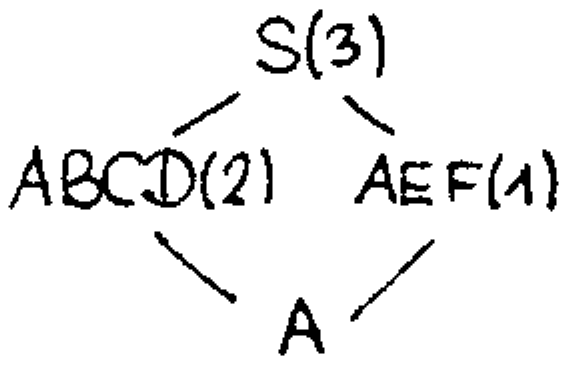
83L83 (85S175) 13-28-23



$\mathrm{NB}\binom{ABDEFG}{AF(1)}$

T

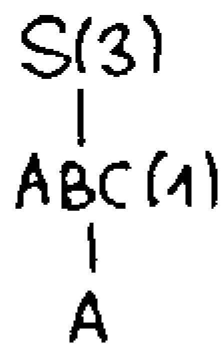
83L84 (85S132) 13-29-24



$\mathrm{NB}\binom{ABCDGH}{AG(1)}$

T

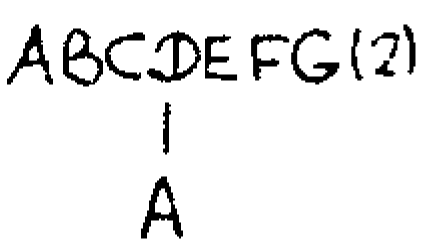
83L85 (85S130) 15-30-27



$\mathrm{NB}\binom{ABCDEFG}{ABC(1)}$

T

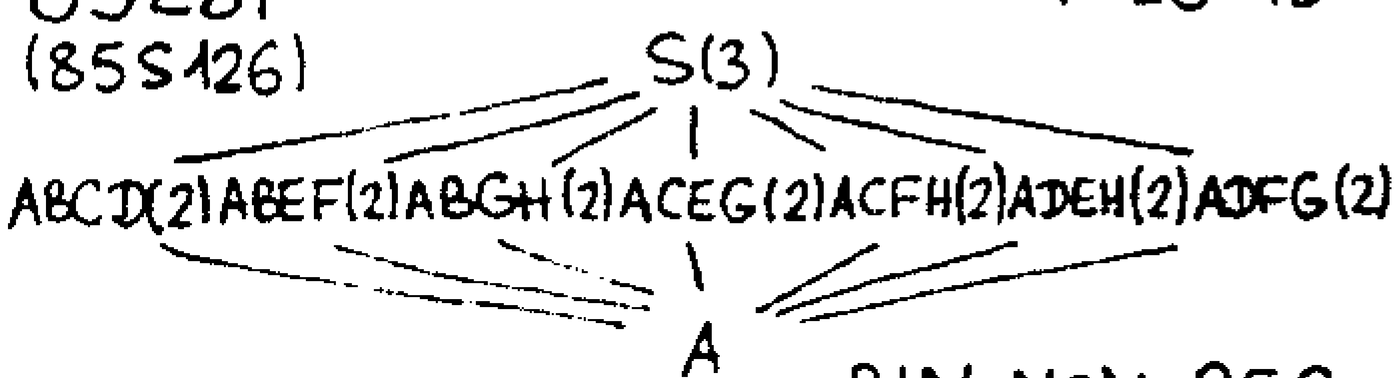
83L86 (85L33) 7-20-21



$\mathrm{NB}\binom{ABCDE}{A}$

T

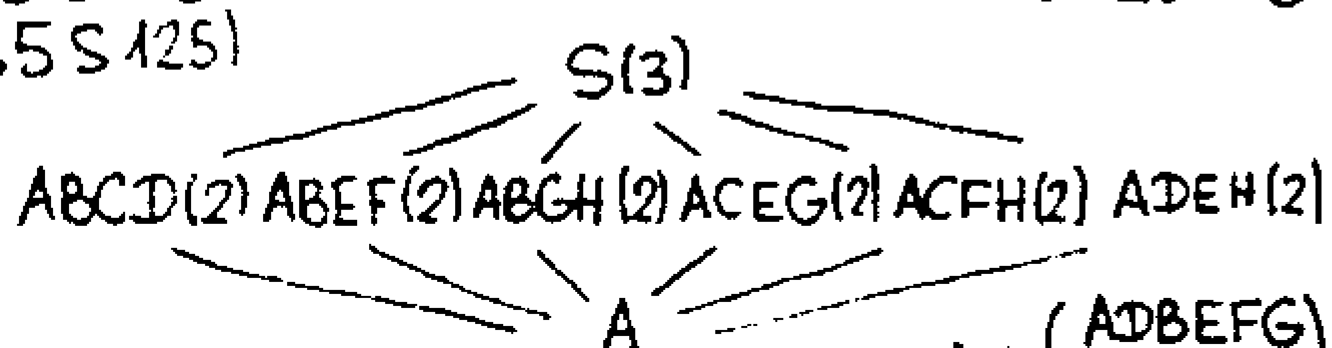
83L87 (85S126) 7-28-15



BIN, NON REG

NT

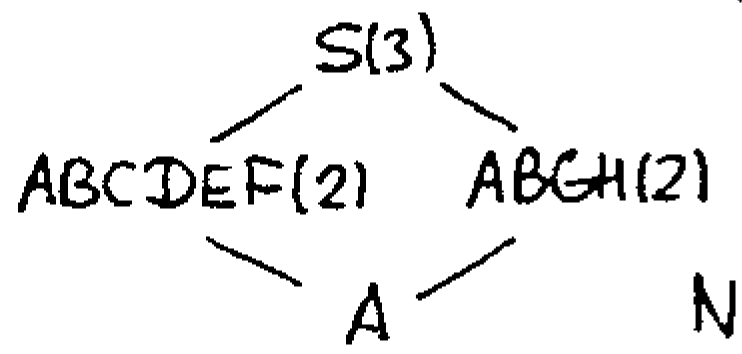
83L88 (85S125) 9-29-18



$\mathrm{NB}\binom{ADBEFG}{AD}$

NT

83L89 (85H55) 10-24-18



$\mathrm{NB}\binom{BCDE}{\varnothing}$

T

83 L 90 (85 S 167) — 10-28-18
S(3)
ABCDE(2) ABGH(2) ACFH(2) ADFG(2)
A
NB (ABCDEF / AF(1))
NT

83 L 91 (85 S 122) — 11-30-2
S(3)
ABCD(2) ABEF(2) ABGH(2) ACEG(2) ACFH(
A
NB (ABCDFG / AF(1))
NT

83 L 92 (85 S 191) — 11-27-18
S(3)
ABCDE(2) ABFGH(2)
A
NB (ABCDE / A)
T

83 L 93 (85 S 123) — 11-30-2
S(3)
ABCD(2) ABEF(2) ACFH(2) ADFG(2) AEGH(2
A
NB (ABCDEG / AG(1))
NT

83 L 94 (85 H 62) — 12-25-21
S(3)
ABCDEF(2)
A
NB (ABCDE / A)
T

83 L 95 (85 S 161) — 12-29-2
S(3)
ABCDE(2) ABFG(2) AEGH(2)
A
NB (ABCD / A)
T(BCDF, CDEH, FGH)

83 L 96 (85 S 119) — 13-31-24
S(3)
ABCD(2) ABEF(2) ACFG(2) ADEG(2)
A
NB (ABCDEH / AH(1))
NT

83 L 97 (85 S 121) — 13-31-2
S(3)
ABCD(2) ABEF(2) ADFG(2) AEGH(2)
A
NB (ABCDF / AH(1))
NT

83 L 98 (85 S 120) — 13-31-24
S(3)
ABCD(2) ABEF(2) ABGH(2) ADFG(2)
A
NB (ACDEFH / AH(1))
NT

83 L 99 (85 S 159) — 14-30-2
S(3)
ABCDE(2) ABFG(2)
A
NB (ABCD / A)
T

83 L 100 (85 S 160) — 14-30-24
S(3)
ABCDE(2) AFGH(2)
A
NB (ABCDE / A)
T

83 L 101 (85 S 116) — 15-32-2
S(3)
ABCD(2) ABEF(2) ADFG(2)
A
NB (ABCDEH / AH(1))
T(BCEH, CDGH, EFGH)

83 L 102 (85 S 117) — 15-32-27
S(3)
ABCD(2) ABEF(2) AEGH(2)
A
NB (ABCDFH / AH(1))
T(BCDF, CDGH, EFGH)

83 L 103 (85 S 112) — 15-32-2
S(3)
ABCD(2) ABEF(2) ABGH(2)
A
NB (ACDEFH / AH(1))
NT

83L104 16-31-27
(85S148)

S(3)
|
ABCDE(2)
|
A

NB (ABCDE / A)

T

83L105 17-33-30
(85S102)

S(3)
ABCD(2) AEFG(2)
A

NB (ABCEFH / AH)

T

83L106 17-33-30
(85S93)

S(3)
ABCD(2) ABEF(2)
A

NB (ABCDEG / AG(1))

T

83L107 19-34-33
(85S81)

S(3)
|
ABCD(2)
|
A

NB (ABCDEF / AE(1))

T

83L108 21-35-36
(85S42)

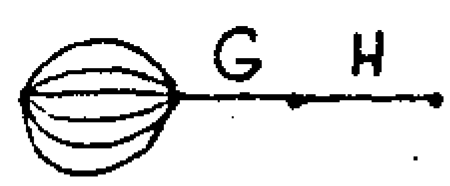
S(3)
|
A

NB (ABCDEF / AB(1))

T

83H1 3-6-15
(85L6)

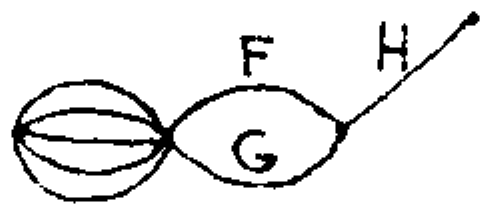
ABCDEF(1)
|
Ø



T

83H2 3-10-11
(85L14)

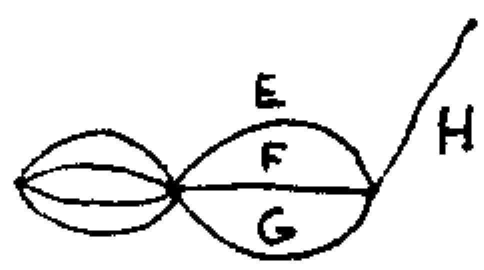
ABCDEFG(2)
ABCDE(1) FG(1)
Ø



T

83H3 3-12-9
(85L21)

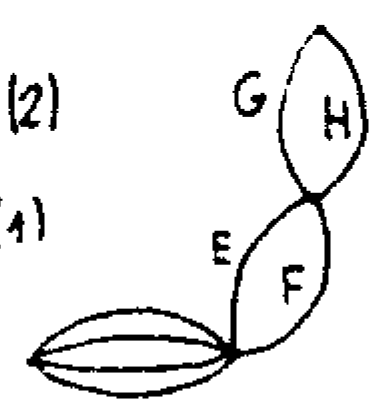
ABCDEFG(2)
ABCD(1) EFG(1)
Ø



T

83H4 3-16-8
(85H13)

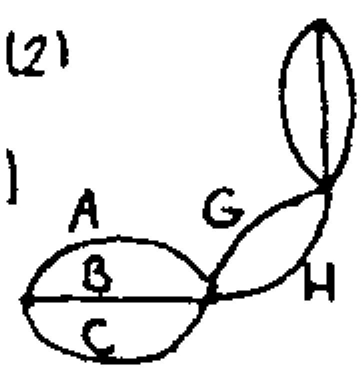
S(3)
ABCDEF(2) ABCDGH(2) EFGH(2)
ABCD(1) EF(1) GH(1)
Ø



T(ABCD, EF, GH)

83H5 3-18-7
(85H23)

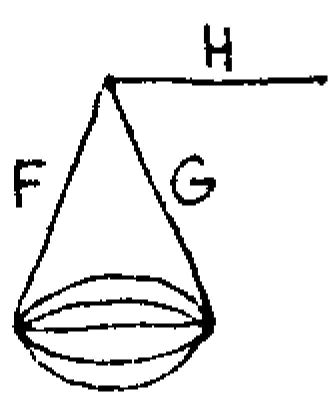
S(3)
ABCDEF(2) ABCGH(2) DEFGH(2)
ABC(1) DEF(1) GH(1)
Ø



T(ABC, DEF, GH)

83H6 4-11-15
(85L15)

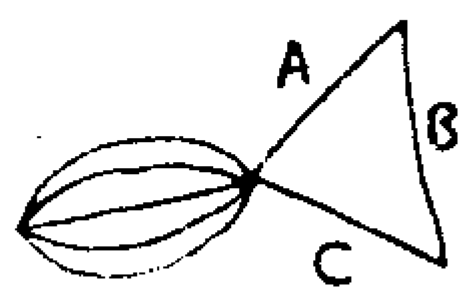
ABCDEFG(2)
|
ABCDE(1)
|
Ø



T

83H7 4-15-11
(85H15)

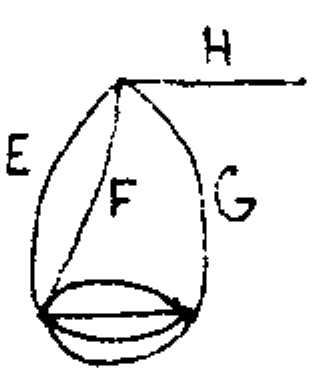
S(3)
ABC(2) DEFGH(1)
Ø



T

83H8 4-14-15
(85L23)

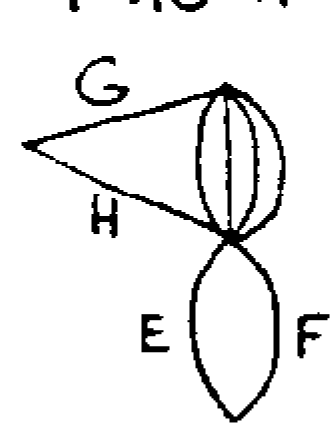
ABCDEFG(2)
ABCD(1) EF(1)
Ø



T

83H9 4-18-11
(85H17)

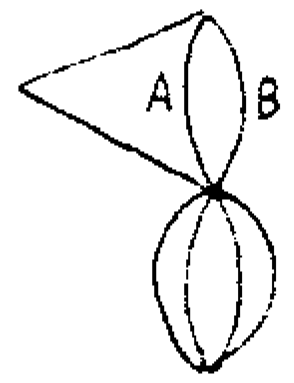
S(3)
ABCDGH(2) ABCDEF(2)
ABCD(1) EF(1)
Ø



T(ABCDGH, EF, GH)

83H10
(85H34)
4-20-9

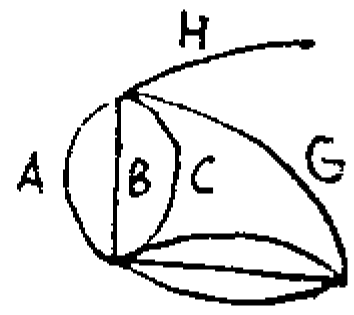
S(3)
ABGH(2) ABCDEF(2)
AB(1) CDEF(1)
∅



T(ABGH, CDEF, GH)

83H11
(85L27)
4-15-

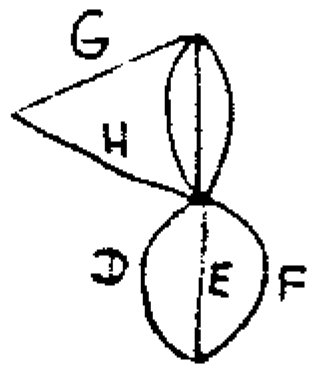
ABCDEFG(2)
ABC(1) DEF(1)
∅



T

83H12
(85H35)
4-21-9

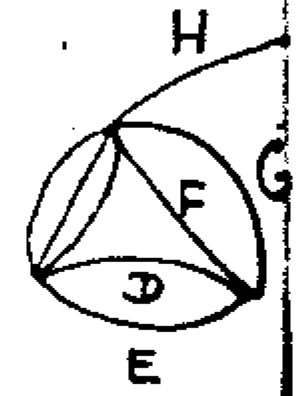
S(3)
ABCGH(2) ABCDEF(2)
ABC(1) DEF(1)
∅



T(ABCGH, DEF, GH)

83H13
(85L29)
4-16-

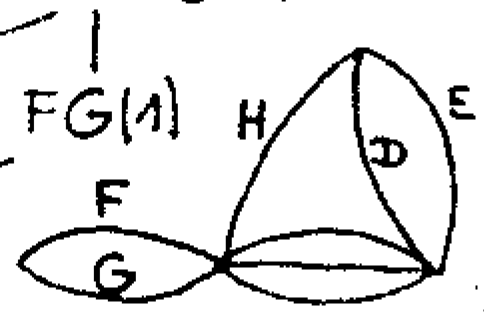
ABCDEFG(2)
ABC(1) DE(1) FG(1)
∅



NT

83H14
(85H33)
4-22-11

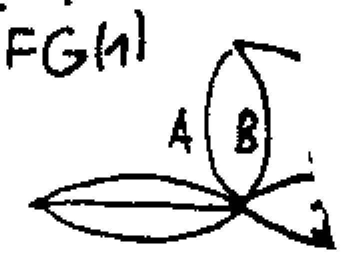
S(3)
ABCDEH(2) ABCFG(2) DEFG(2)
ABC(1) DE(1) FG(1)
∅



T(ABCH, DEH, FG)

83H15
(85S204)
4-24-

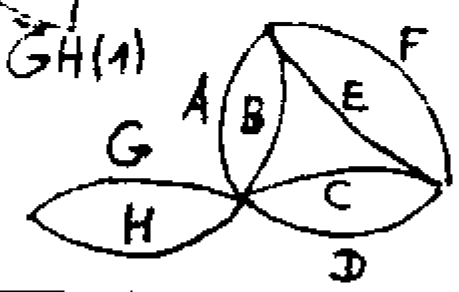
S(3)
ABCDH(2) ABEFG(2) CDEFG(2)
AB(1) CD(1) EFG(1)
∅



T(ABH, CDH, EFG)

83H16
(85H45)
4-24-12

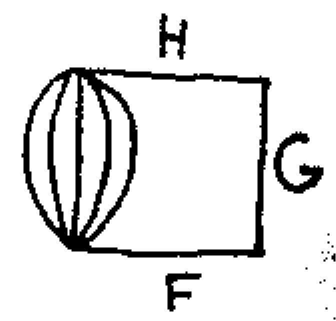
S(3)
ABCDEF(2) ABGH(2) CDGH(2) EFGH(2)
AB(1) CD(1) EF(1) GH(1)
∅



NT

83H17
(85H18)
6-16-

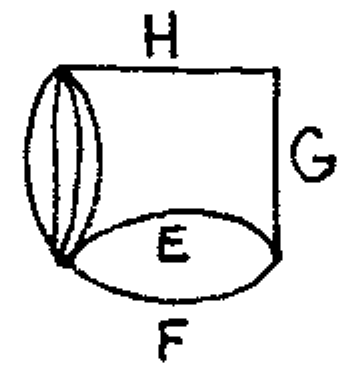
S(3)
ABCDE(1)
∅



T

83H18
(85H39)
6-22-15

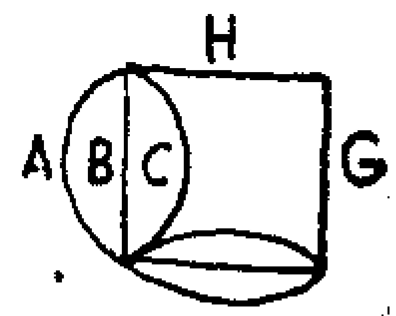
S(3)
ABCDEF(2)
ABCD(1) EF(1)
∅



T(ABCDGH, EFGH, GH)

83H19
(85H48)
6-24-

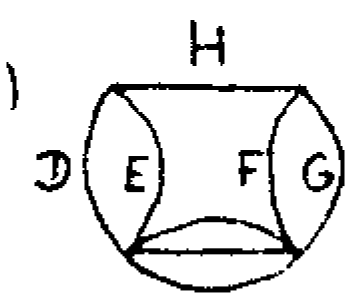
S(3)
ABCDEF(2)
ABC(1) DEF(1)
∅



T

83H20
(85S194)
6-29-17

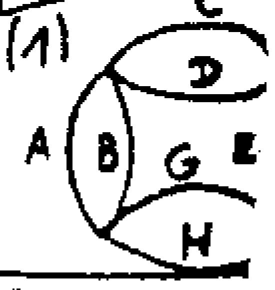
S(3)
ABCDE(2) ABCFG(2) DEFG(2)
ABC(1) DE(1) FG(1)
∅



T(ABCH, DEH, FGH)

83H21
(85S124)
6-32-

S(3)
ABCD(2) ABEF(2) ABGH(2) CDEF(2) CDGH(2) EFGH
AB(1) CD(1) EF(1) GH(1)
∅



NT

83H22
(85L24)
5-15-19

ABCDEFG(2)
ABCD(1)
∅

NB(AEFG / ∅)

T

83H23
(85S212)
5-24-1

S(3)
ABCD(2) EFGH(1)
∅

NB(ABCD / ∅)

T

83H24 (85L31) 5-17-21

ABCDEFG(2)
ABC(1) DE(1)
∅

NB(ADFG / ∅)

T

83H25 (85H38) 5-24-14

S(3)
ABCFGH(2) ABCDE(2)
ABC(1) DE(1)
∅

NB(AFGH / ∅)

T(ABCFGH, DE, FGH)

83H26 (85S197) 5-27-11

S(3)
ABFGH(2) ABCDE(2)
AB(1) CDE(1)
∅

NB(AFGH / ∅)

T(ABFGH, CDE, FGH)

83H27 (85L34) 5-18-23

ABCDEFG(2)
AB(1) CD(1) EF(1)
∅

NB(ACEG / ∅)

NT

83H28 (85H51) 5-26-15

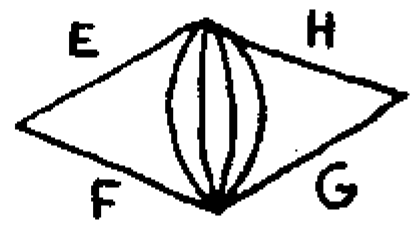
S(3)
ABCDGH(2) ABEF(2) CDEF(2)
AB(1) CD(1) EF(1)
∅

NB(ACGH / ∅)

T(ABGH, CDGH, EF)

83H29 (85H19) 6-20-15

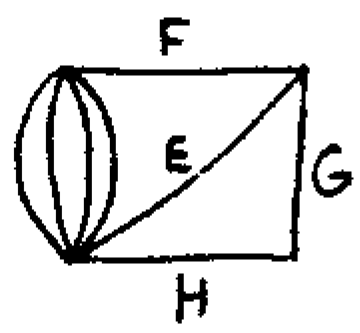
S(3)
ABCDEF(2) ABCDGH(2)
ABCD(1)
∅



T(ABCDEFGH, EF, GH)

83H30 (85H40) 6-23-15

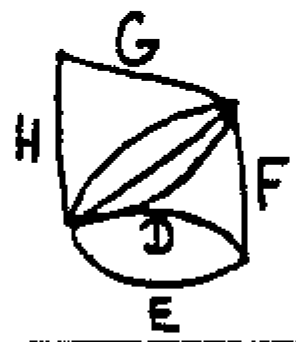
S(3)
ABCDEF(2) EGH(2)
ABCD(1)
∅



T(ABCDF, EFGH, GH)

83H31 (85H41) 6-25-15

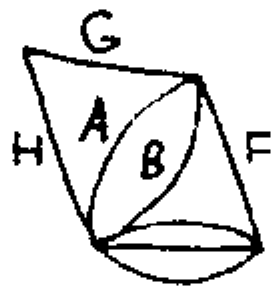
S(3)
ABCGH(2) ABCDEF(2)
ABC(1) DE(1)
∅



T(ABCGH, DEFGH)

83H32 (85H49) 6-26-15

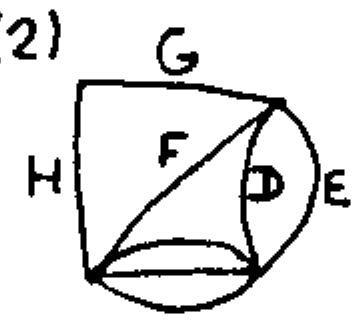
S(3)
ABGH(2) ABCDEF(2)
AB(1) CDE(1)
∅



T(ABFGH, CDEFGH)

83H33 (85H52) 6-27-17

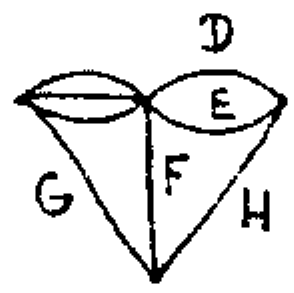
S(3)
ABCDEF(2) FGH(2)
ABC(1) DE(1)
∅



NT

83H34 (85S193) 6-29-15

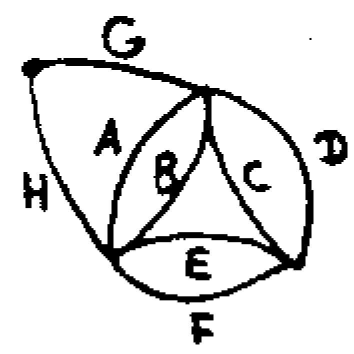
S(3)
ABCFG(2) ABCDE(2) DEFH(2)
ABC(1) DE(1)
∅



T(ABCG, DEH, FGH)

83H35 (85H53) 6-28-17

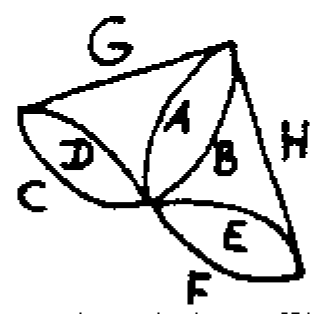
S(3)
ABGH(2) ABCDEF(2)
AB(1) CD(1) EF(1)
∅



NT

83H36 (85S192) 6-30-15

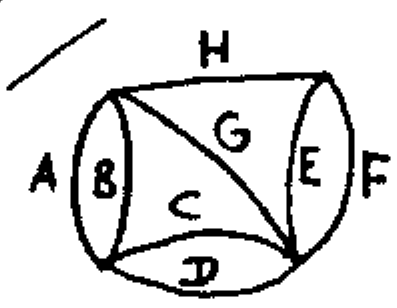
S(3)
ABCDG(2) ABEFH(2) CDEF(2)
AB(1) CD(1) EF(1)
∅



T(ABGH, CDG, EFH)

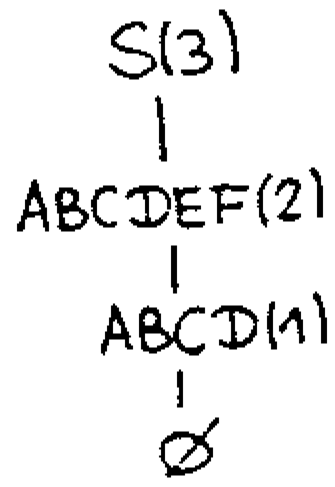
83H37 (85S166) 6-32-17

S(3)
ABCDG(2) ABEF(2) CDEF(2) EFGH(2)
AB(1) CD(1) EF(1)
∅



NT

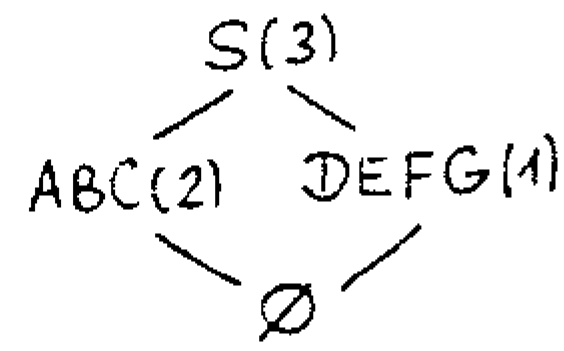
83H38
(85H42)
8-24-19



NB(ABCDG | G(1))

T

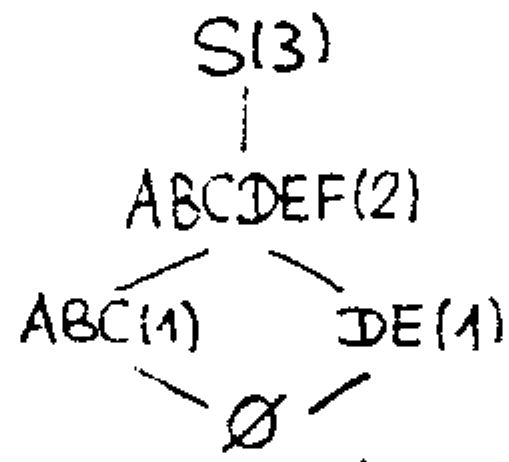
83H39
(85S209)
8-27-1



NB(S(3) | DEFG

T

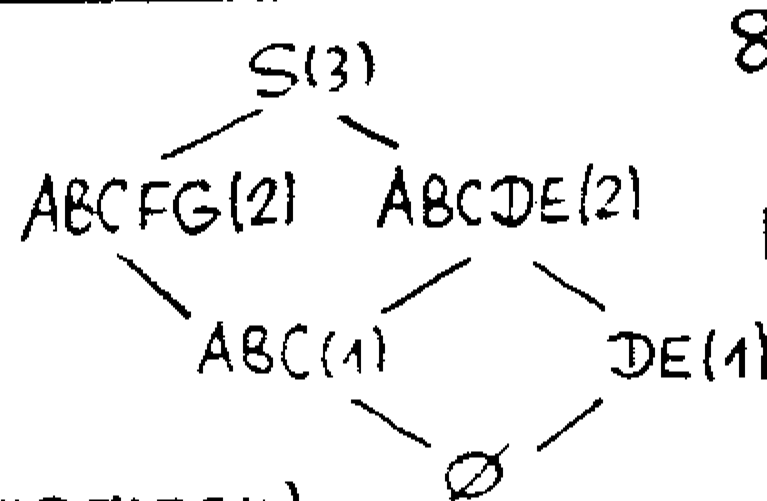
83H40
(85H58)
8-28-21



NB(ADFGH | G(1))

T(ABCFGH, DEFGH, GH)

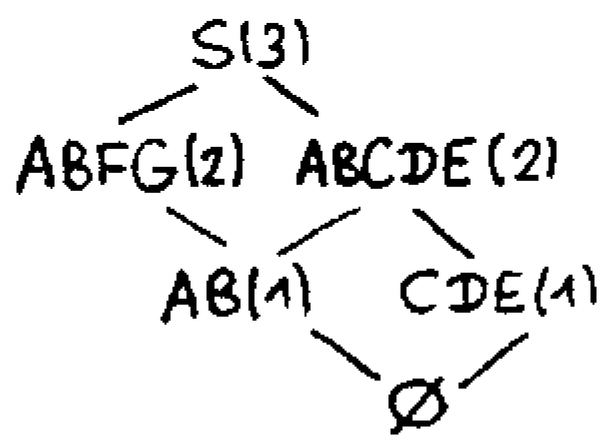
83H41
(85S188)
8-31-2



NB(ADFG | H(1

T(ABCFGH, DEH, FGH)

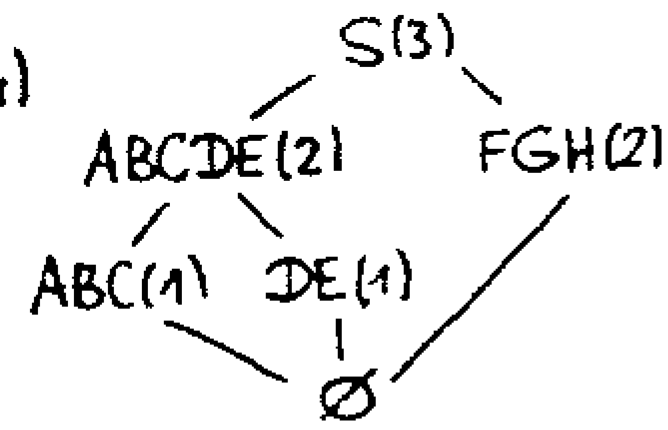
83H42
(85S178)
8-32-21



NB(ACFGH | H(1))

T(ABFGH, CDEH, FGH)

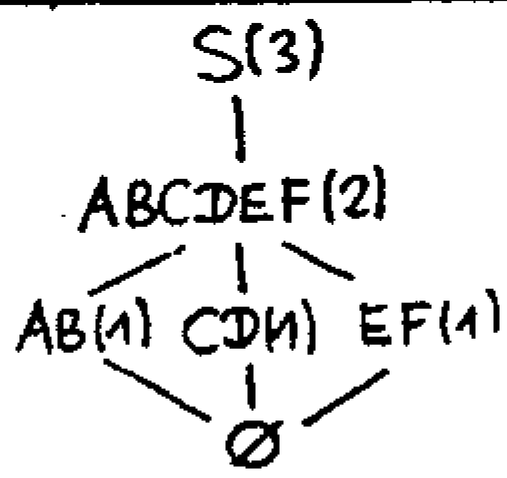
83H43
(85S174)
8-33-2



NB(ABCDFGH | ABC(1))

NT

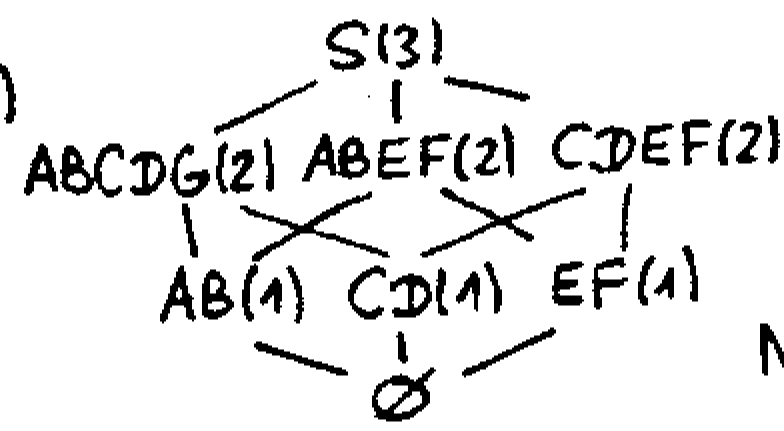
83H44
(85H65)
8-30-23



NB(ACEGH | H(1))

NT

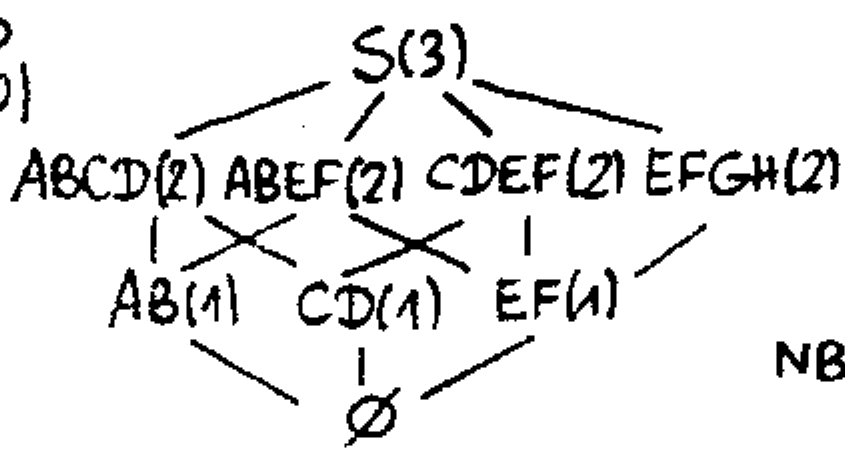
83H45
(85S164)
8-34-



NB(ACEG | H(1

T(ABGH, CDGH, EFH)

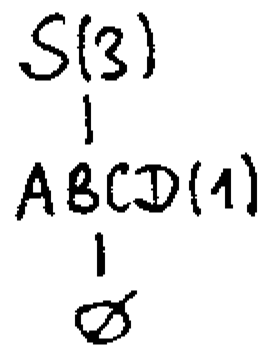
83H46
(85S80)
8-36-25



NB(ABCEGH | AB(1))

NT

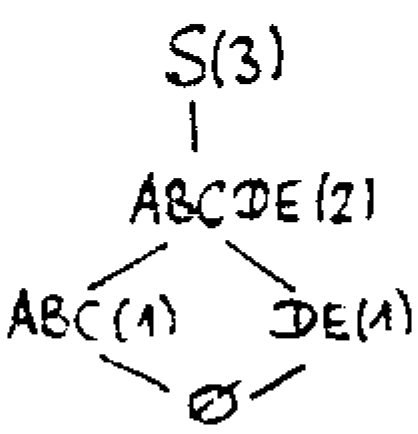
83H47
(85S208)
10-28-



NB(S(3) | ABCD)

T

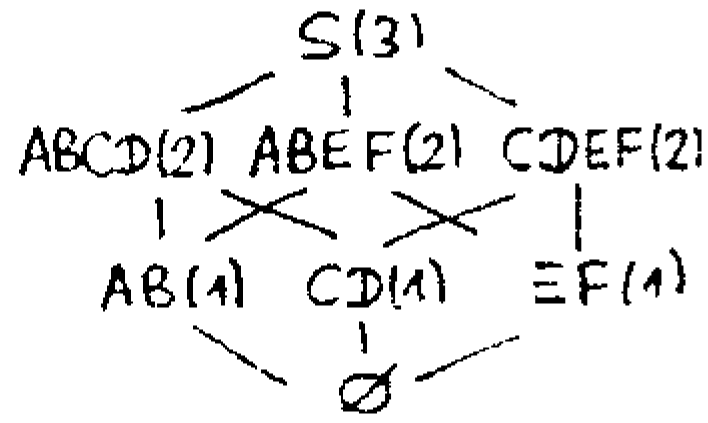
83H48
(85S173)
10-34-27



NB(ADEFGH | DE(1))

T(ABCFGH, DEFGH, FGH)

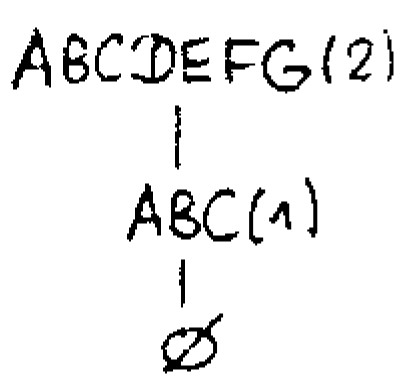
83H49
(85S41)
10-38-



NB(ABCDG | G(1)

T(ABGH, CDGH, EFGH)

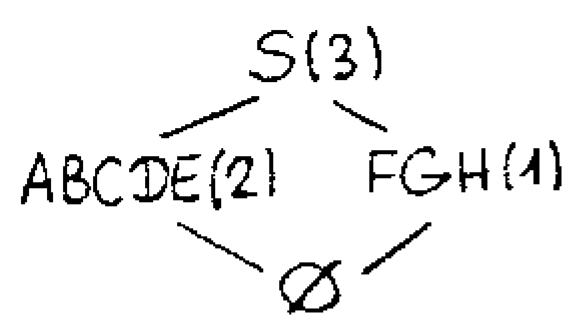
83H50
(85L32)
6-18-25



NB(ADEF | ∅)

T

83H51
(85S169)
6-30-1



NB(ABCDFGH | FGH(1)

T

83H52 (85L35) — 6-19-27

ABCDEFG(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB(ABCDEF | AB(1))

T

83H53 (85H56) — 6-28-18

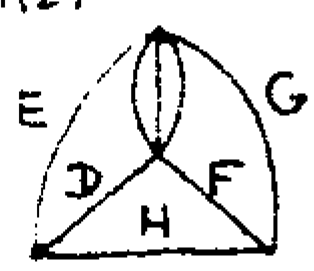
S(3)
ABEFGH(2) ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB(AEFG | ∅)

T(ABEFGH, CD, EFGH)

83H54 (85S186) — 7-32-18

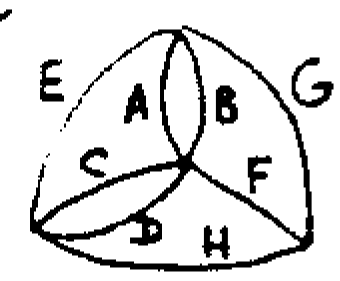
S(3)
ABCDE(2) ABCFG(2) DFH(2) EGH(2)
ABC(1)
∅



NT

83H55 (85S163) — 7-35-19

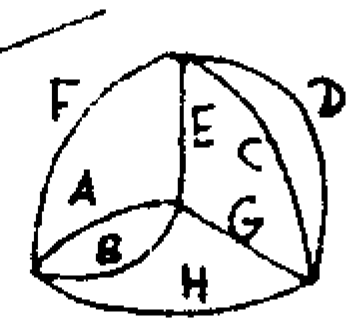
S(3)
ABFG(2) ABCDE(2) CDFH(2) EGH(2)
AB(1) CD(1)
∅



NT

83H56 (85S118) — 7-36-19

S(3)
ABEF(2) ABGH(2) ABCD(2) CDEG(2) CDFH(2)
AB(1) CD(1)
∅



NT

83H57 (85H43) — 8-37-19

S(3)
ABCDEF(2) ABCGH(2)
ABC(1)
∅

NB(ADEF | ∅)

T(ABCDEFGH, DEF, GH)

83H58 (85H57) — 8-29-21

S(3)
ABCDEF(2) DGH(2)
ABC(1)
∅

NB(ADEF | ∅)

T(ABCEF, DEFGH, GH)

83H59 (85S177) — 8-33-19

S(3)
ABCDE(2) DFGH(2)
ABC(1)
∅

NB(DFGH | ∅)

T(DEFGH, ABCE, FGH)

83H60 (85H59) — 8-30-21

S(3)
ABGH(2) ABCDEF(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB(ACEF | ∅)

T(AB~~EFGH~~, C~~DE~~FGH)

83H61 (85S189) — 8-33-19

S(3)
ABFGH(2) ABCDE(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB(AFGH | ∅)

T(AB~~E~~FGH, C~~DE~~FGH)

83H62 (85H66) — 8-31-23

S(3)
ABCDEF(2) EGH(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB(ACEF | ∅)

NT

83H63 (85S165) — 8-35-21

S(3)
ABEFG(2) ABCD(2) CDEH(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB(AEFG | ∅)

T(ABFG, EFGH, CDH)

83H64 (85S156) — 8-36-22

S(3)
ABCDE(2) EFGH(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB(EFGH | ∅)

NT

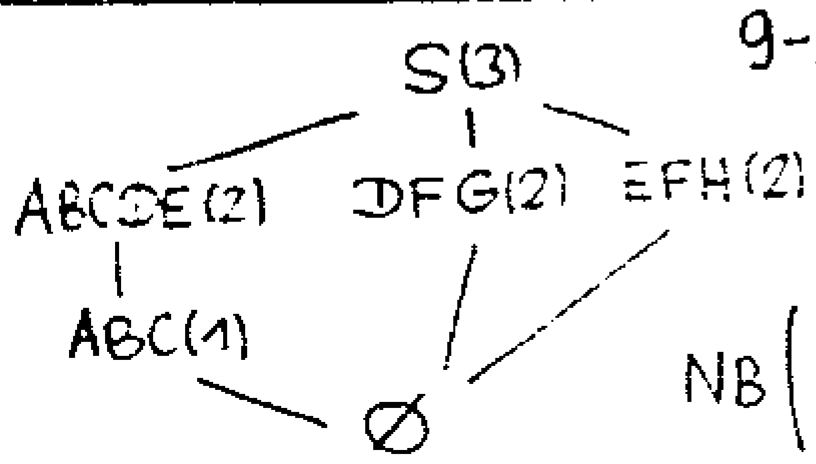
83H65 (85S185) — 9-33-22

S(3)
ABCDE(2) ABCFG(2) DFH(2)
ABC(1)
∅

NB(AEFGH | E(1))

T(ABCEG, DEH, FGH)

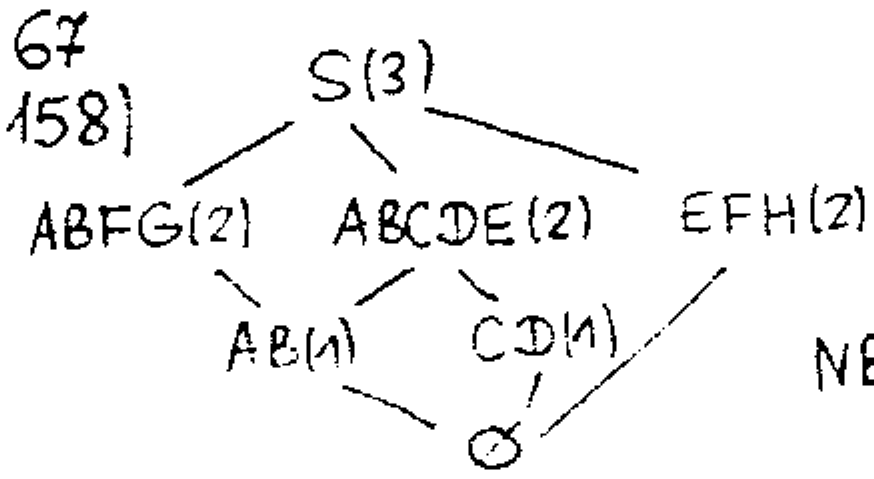
83H66
(85S172)
9-35-24



$NB\binom{ADEGH}{G(1)}$

NT

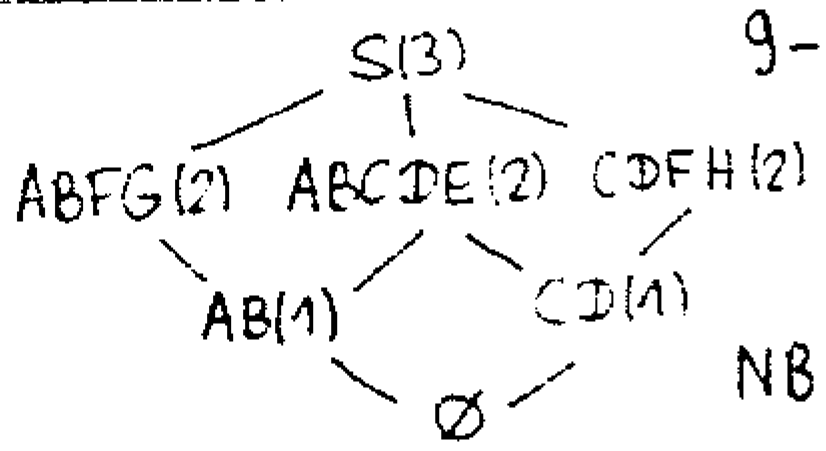
83H67
(85S158)
9-37-



$NB\binom{ACDF}{CD(}$

NT

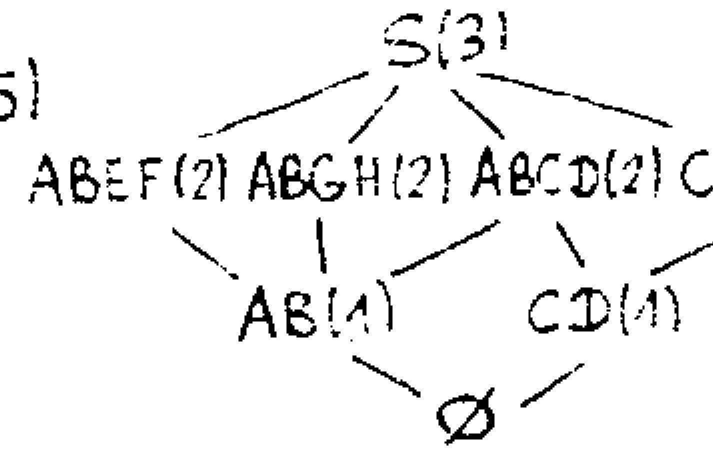
83H68
(85S162)
9-36-23



$NB\binom{AEFGH}{E(1)}$

T(ABEG, CDEH, FGH)

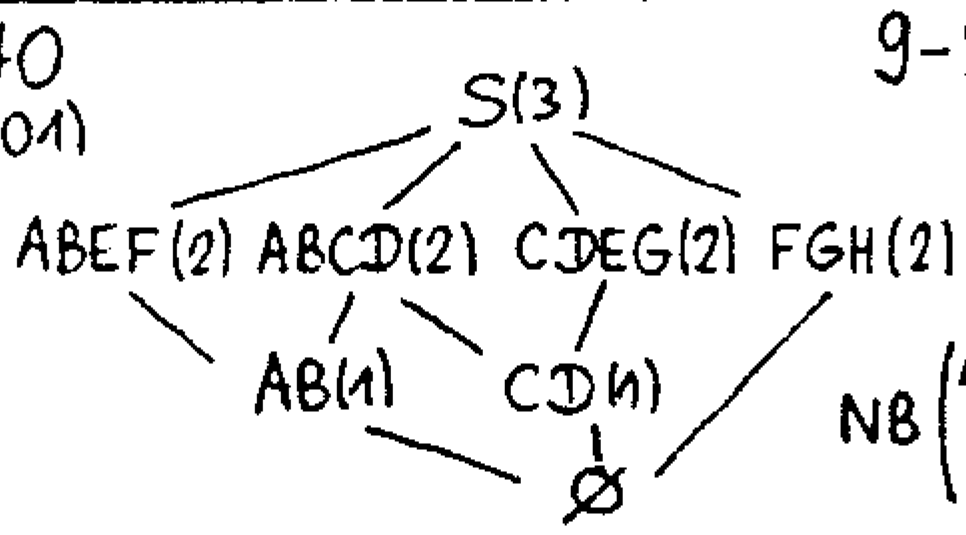
83H69
(85S115)
9-38-



$NB\binom{ACDE}{CD}$

NT

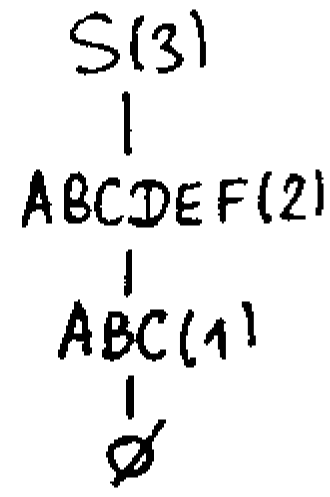
83H70
(85S101)
9-39-27



$NB\binom{ABCEGH}{AB(1)}$

NT

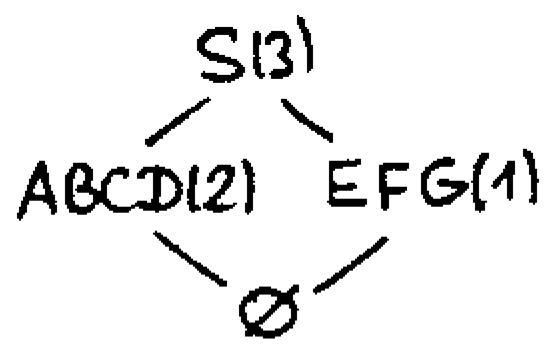
83H71
(85H60)
10-30-



$NB\binom{ADEF}{\varnothing}$

T

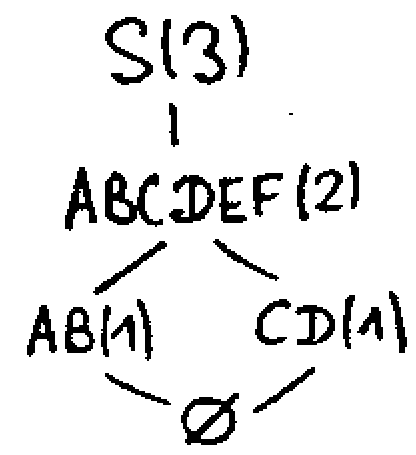
83H72
(85S131)
10-36-25



$NB\binom{ABCD}{\varnothing}$

T

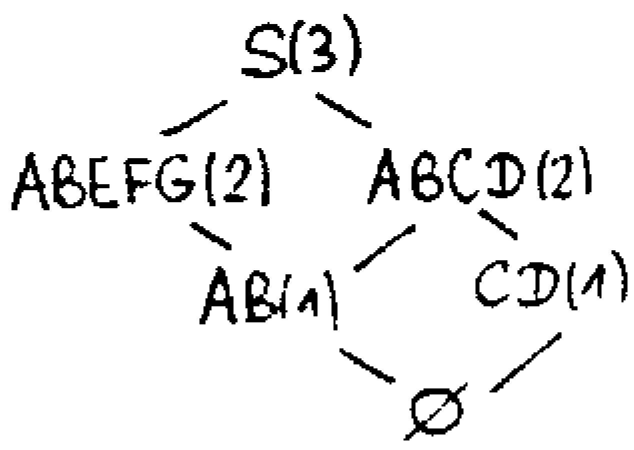
83H73
(85H67)
10-32-



$NB\binom{ACEF}{\varnothing}$

T(ABEFGH, CDEFGH, GH)

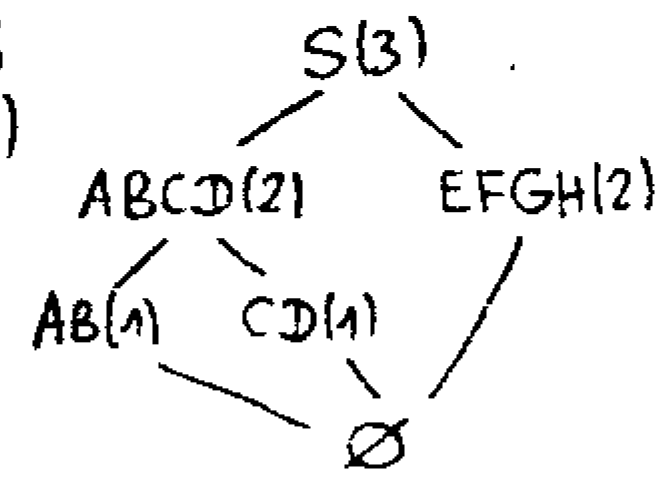
83H74
(85S157)
10-37-27



$NB\binom{ACEFH}{H(1)}$

T(ABEFGH, CDH, EFGH)

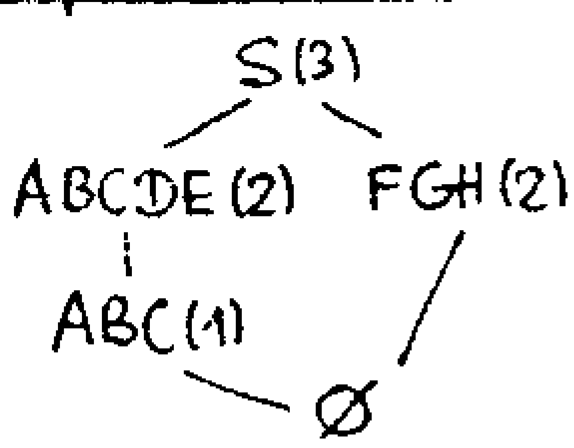
83H75
(85S78)
10-40



$NB\binom{EFGH}{\varnothing}$

NT

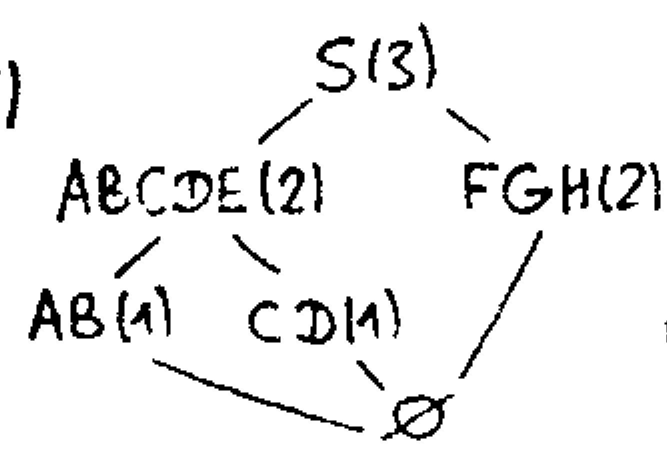
83H76
(85S170)
11-36-28



$NB\binom{ABCDFGH}{ABC(1)}$

T(ABCDE, DEFGH, FGH)

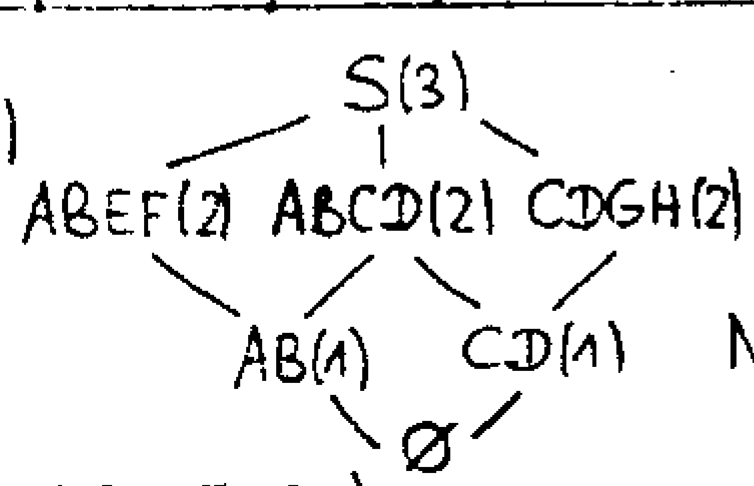
83H77
(85S147)
11-39-



$NB\binom{ABCFG}{AB(1)}$

NT

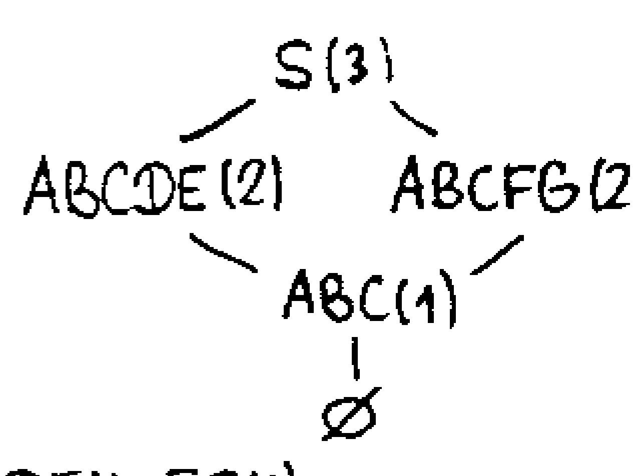
83H78
(85S105)
11-40-31



$NB\binom{ABCEGH}{AB(1)}$

T(ABEF, CDGH, EFGH)

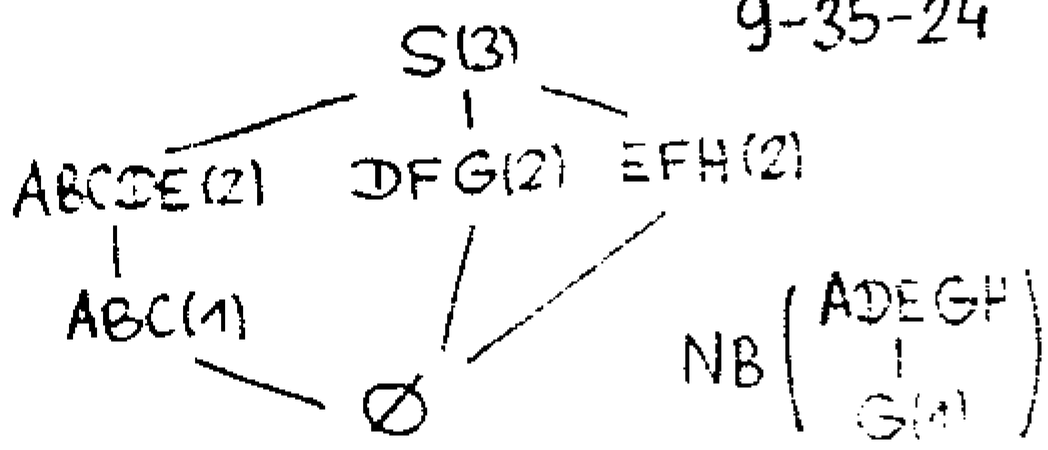
83H79
(85S184)
11-34-



$NB\binom{ADFG}{D(1)}$

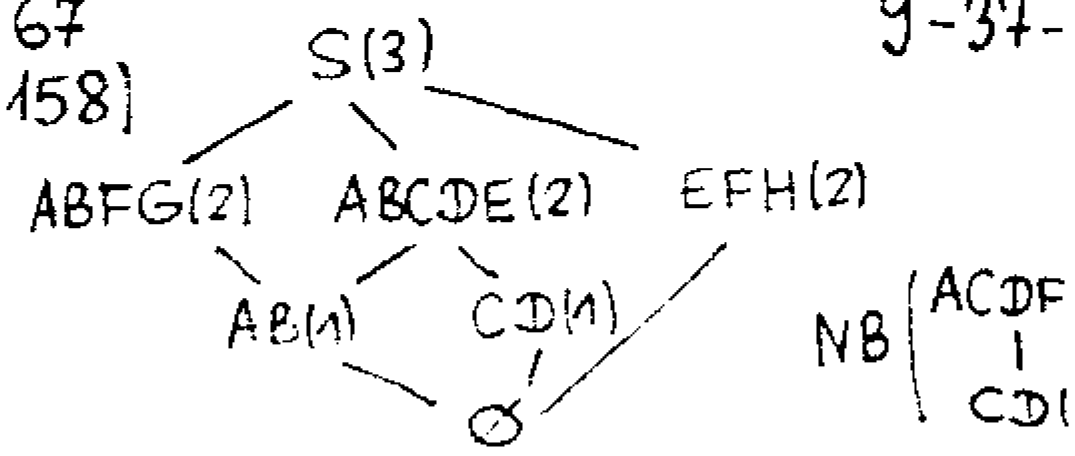
T(DEFGH, DEH, FGH)

83H66 (85S172) 9-35-24



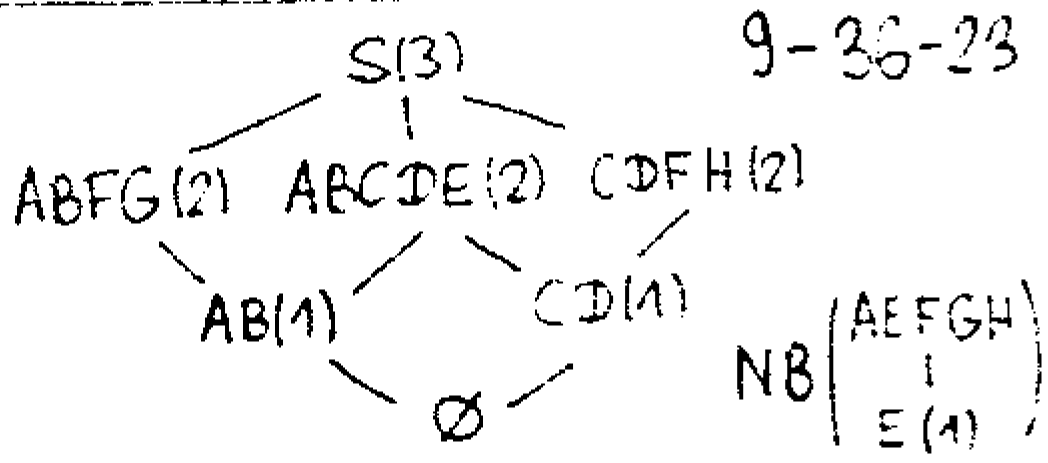
NT

83H67 (85S158) 9-37-



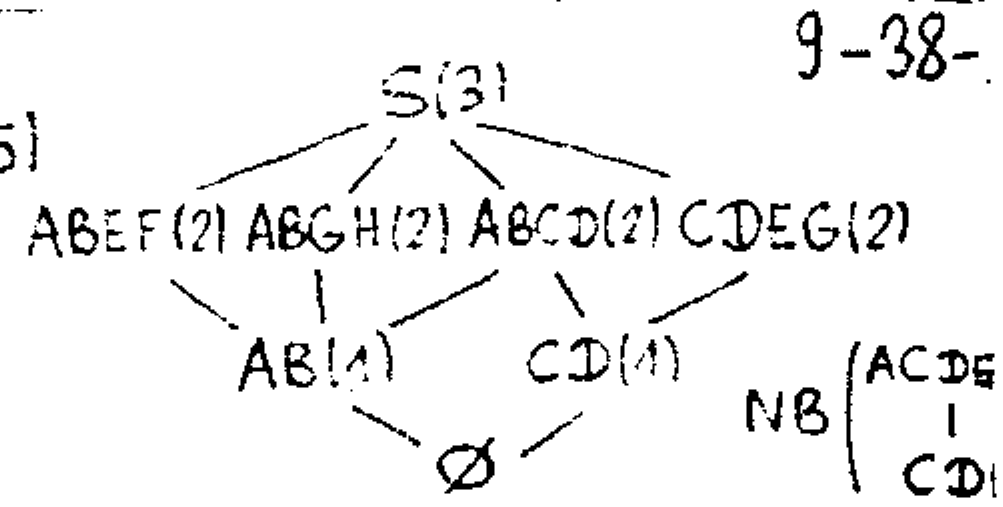
NT

83H68 (85S162) 9-36-23



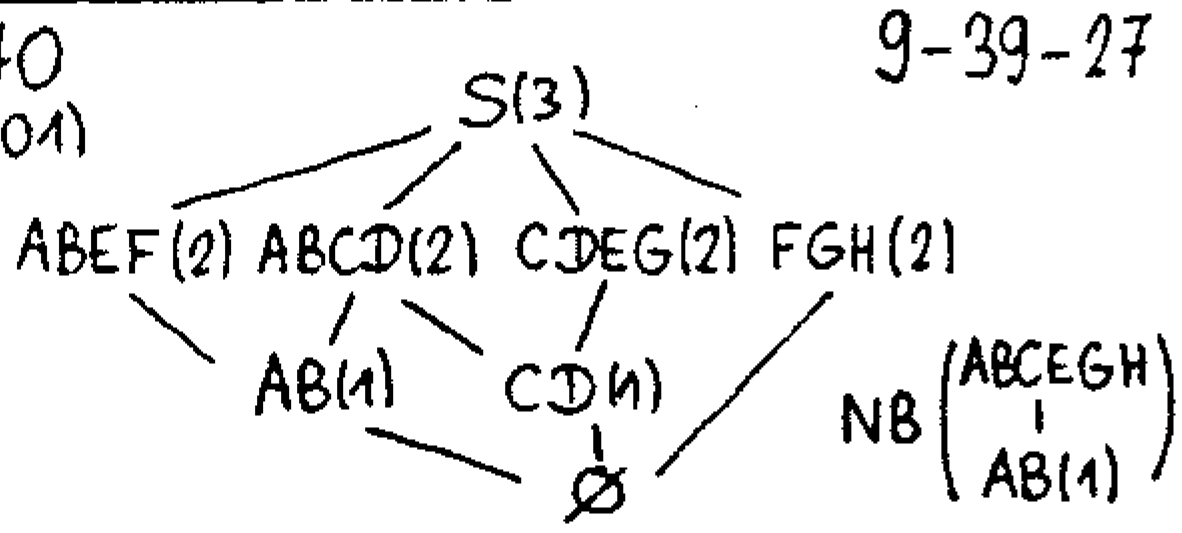
T(ABEG, CDEH, FGH)

83H69 (85S115) 9-38-



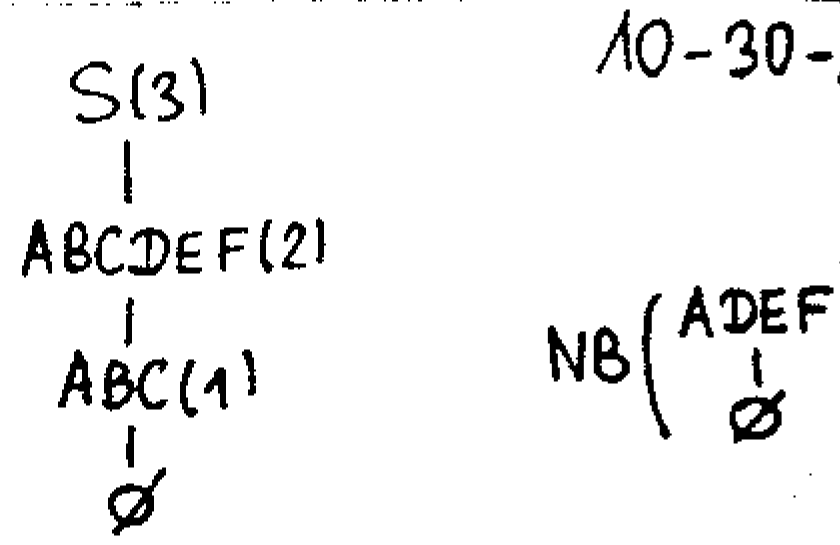
NT

83H70 (85S101) 9-39-27



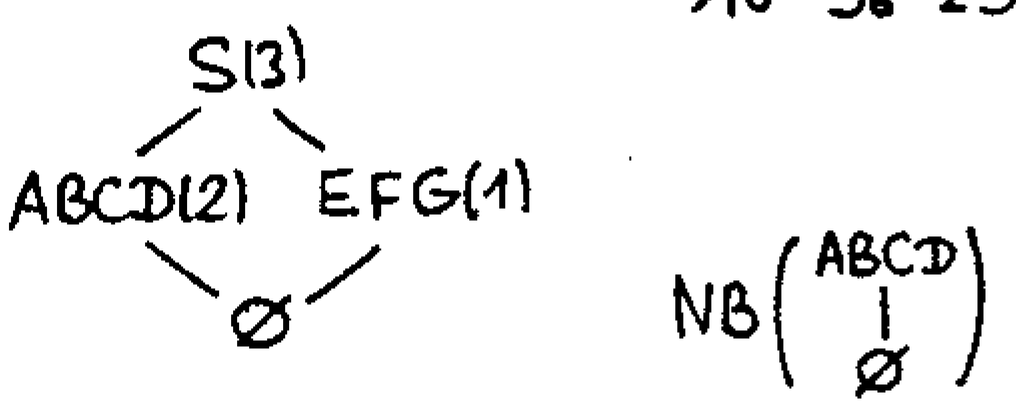
NT

83H71 (85H60) 10-30-



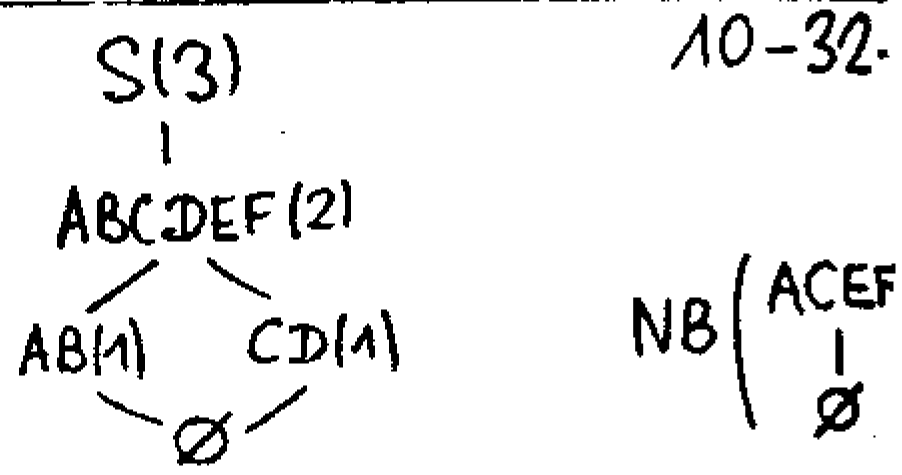
T

83H72 (85S131) 10-36-25



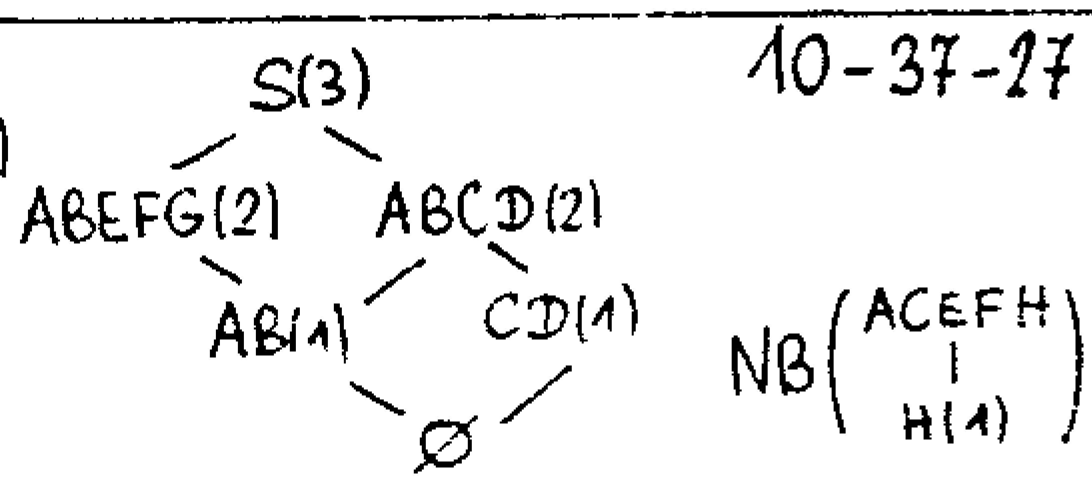
T

83H73 (85H67) 10-32-



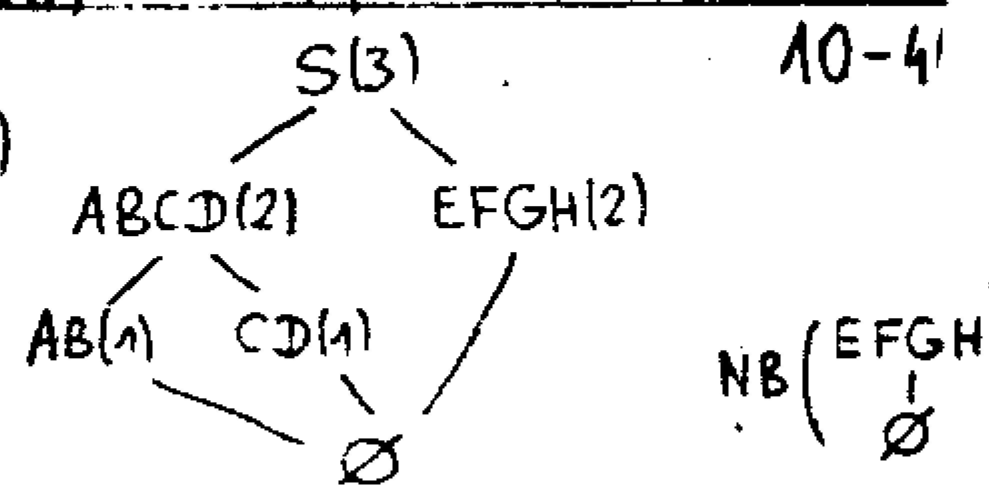
T(ABEFGH, CDEFGH, GH)

83H74 (85S157) 10-37-27



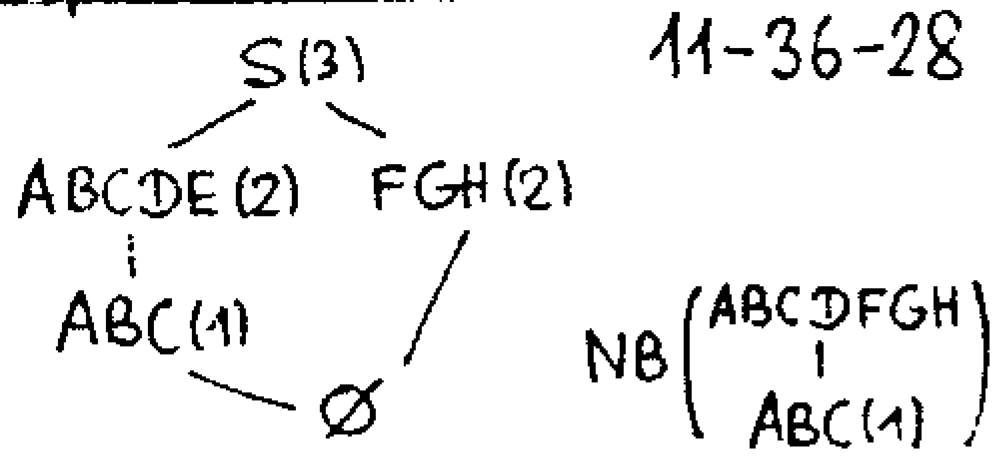
T(ABEFG~~H~~, CD~~H~~EFGH)

83H75 (85S78) 10-4



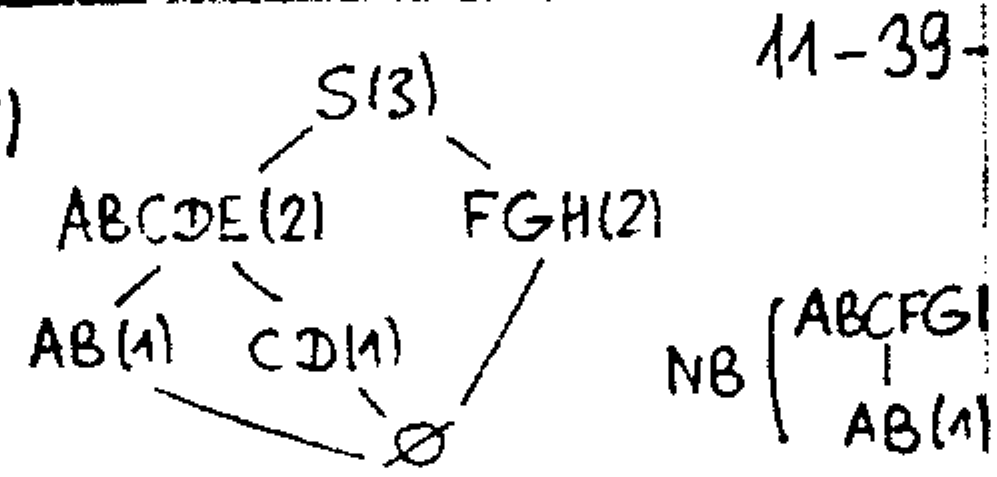
NT

83H76 (85S170) 11-36-28



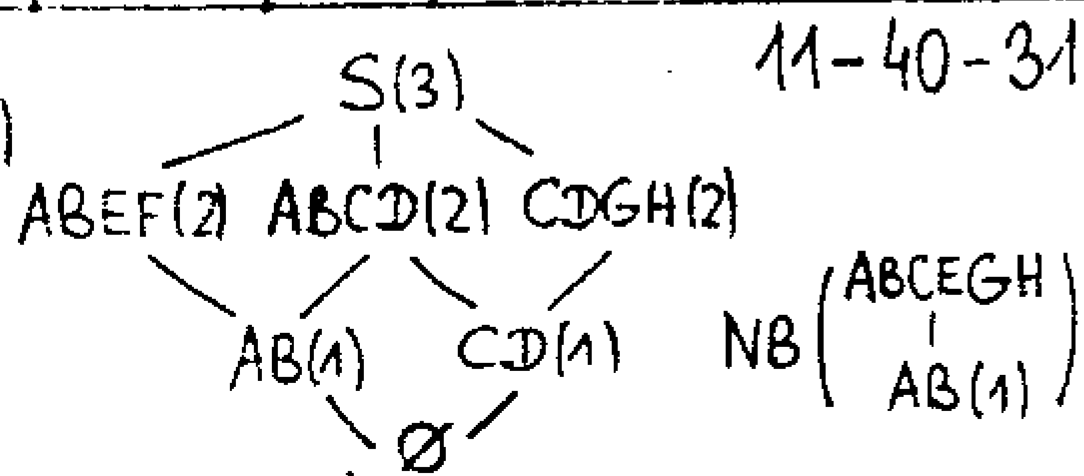
T(ABCDE, DEFGH, FGH)

83H77 (85S147) 11-39-



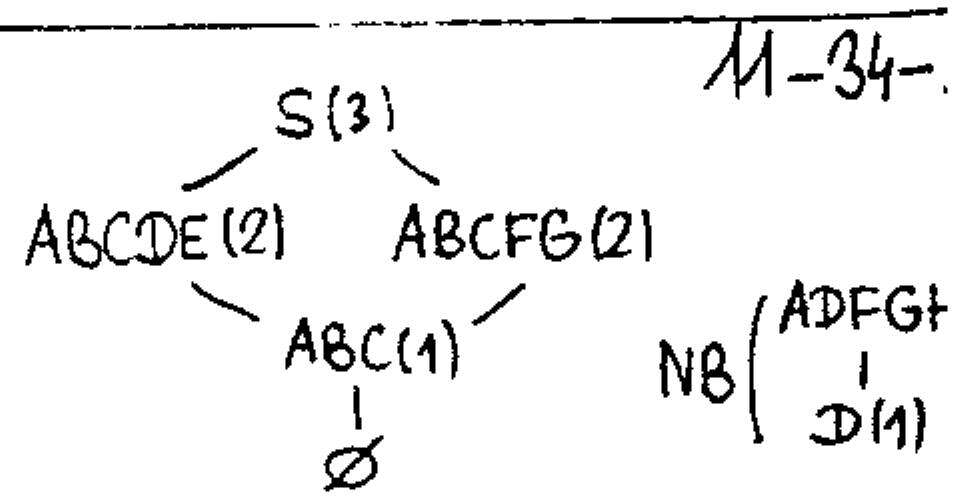
NT

83H78 (85S105) 11-40-31



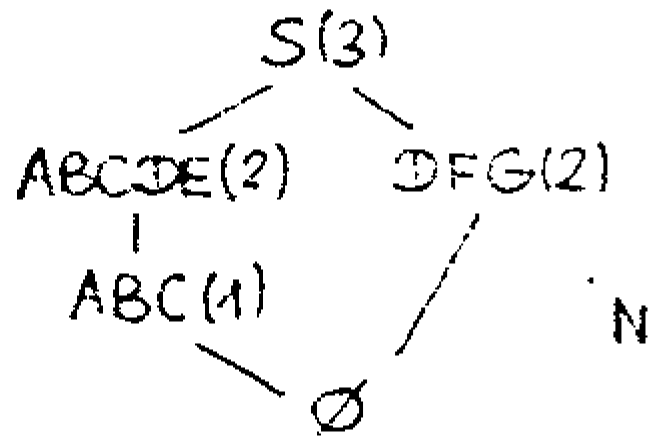
T(ABEF, CDGH, EFGH)

83H79 (85S184) 11-34-



T(DEFGH, DEH, FGH)

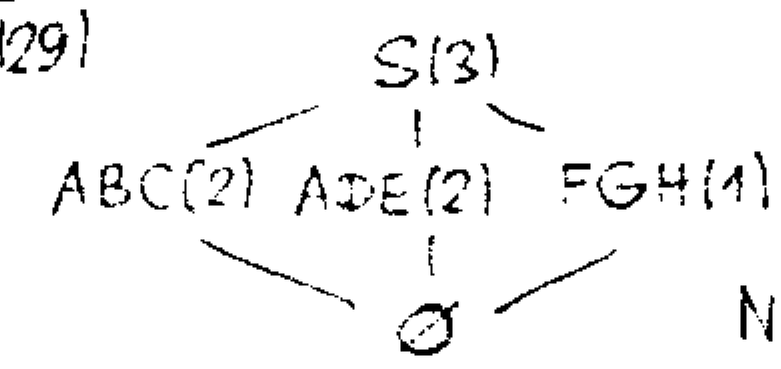
83H80 (85S171) 11-36-28



$NB\left(\begin{smallmatrix}AEFGH\\ \mid \\ E(1)\end{smallmatrix}\right)$

T(ABCEH, DEFGH, FGH)

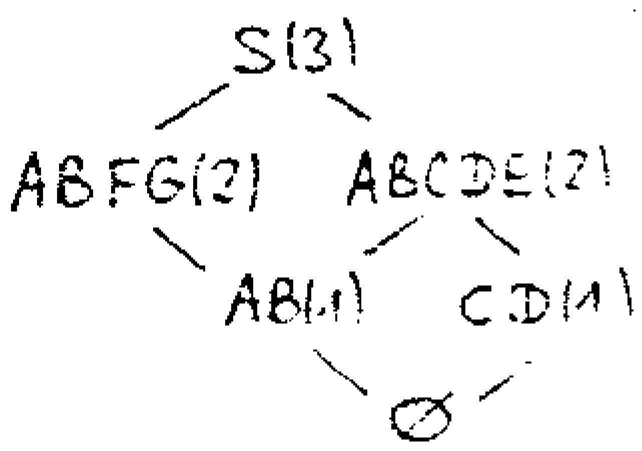
83H81 (85S129) 11-38-30



$NB\left(\begin{smallmatrix}ABCDFGH\\ \mid \\ FGH(1)\end{smallmatrix}\right)$

NT

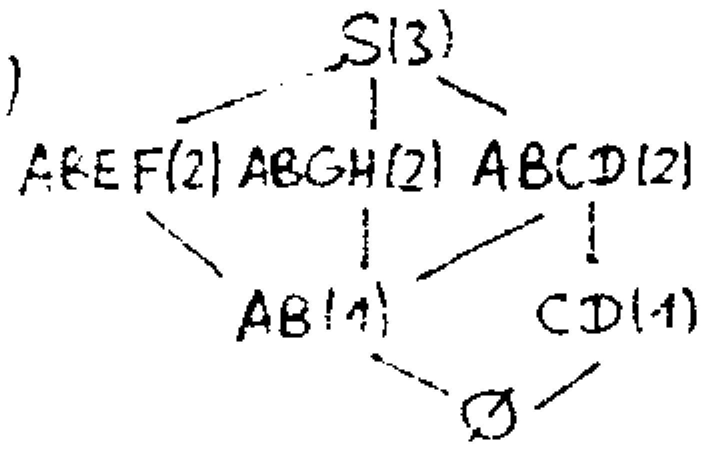
83H82 (85S155) 11-38-29



$NB\left(\begin{smallmatrix}ACDFGH\\ \mid \\ CD(1)\end{smallmatrix}\right)$

T(ABEFGH, CDEFGH, FGH)

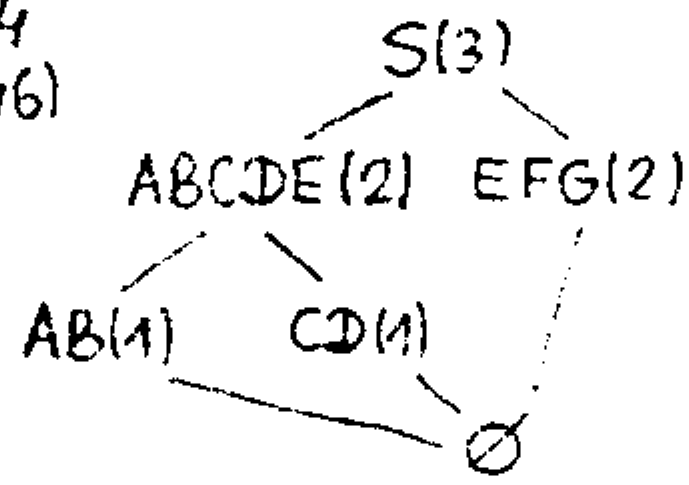
83H83 (85S92) 11-40-31



$NB\left(\begin{smallmatrix}ACDEFG\\ \mid \\ CD(1)\end{smallmatrix}\right)$

NT

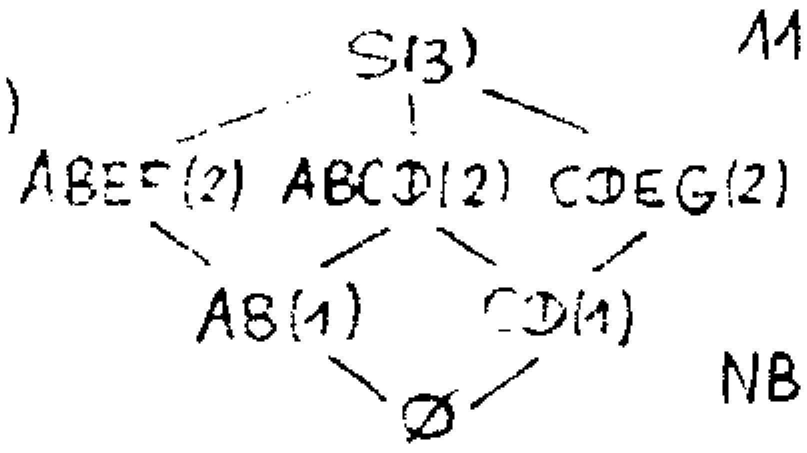
83H84 (85S146) 11-39-31



$NB\left(\begin{smallmatrix}ACEFH\\ \mid \\ H(1)\end{smallmatrix}\right)$

NT

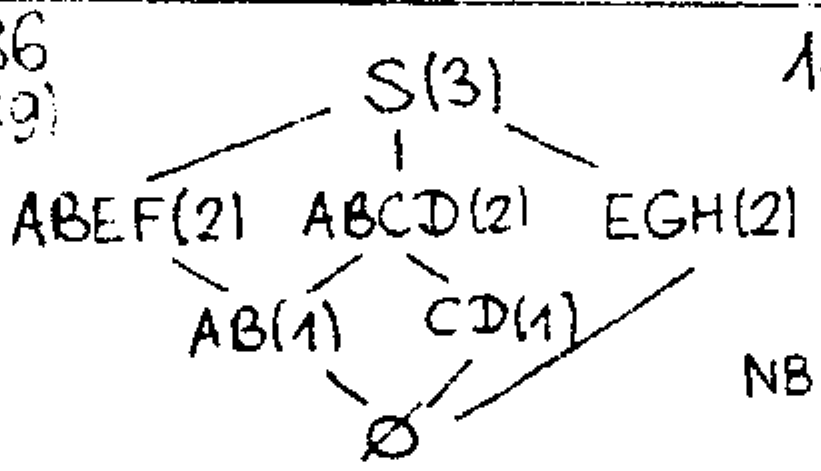
83H85 (85S100) 11-40-31



$NB\left(\begin{smallmatrix}ACEFH\\ \mid \\ H(1)\end{smallmatrix}\right)$

T(ABFH, CDGH, EFGH)

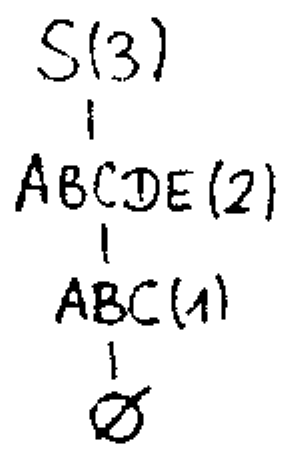
83H86 (85S79) 11-41-33



$NB\left(\begin{smallmatrix}ABCEGH\\ \mid \\ AB(1)\end{smallmatrix}\right)$

NT

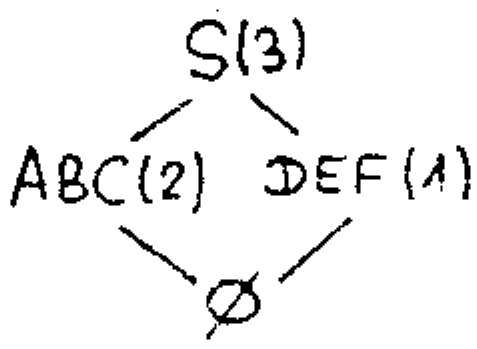
83H87 (85S168) 13-37-32



$NB\left(\begin{smallmatrix}ABCDFGH\\ \mid \\ ABC(1)\end{smallmatrix}\right)$

T

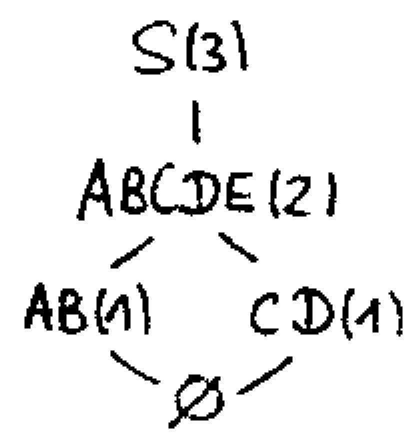
83H88 (85S128) 13-39-34



$NB\left(\begin{smallmatrix}ABCDEFG\\ \mid \\ DEF(1)\end{smallmatrix}\right)$

T

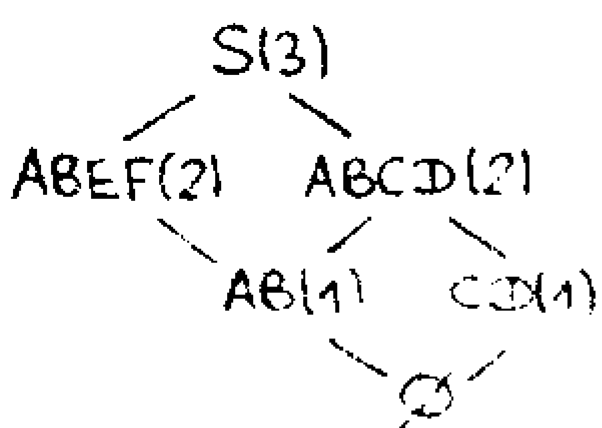
83H89 (85S145) 13-40-35



$NB\left(\begin{smallmatrix}ABCFGH\\ \mid \\ AB(1)\end{smallmatrix}\right)$

T(ABEFGH, CDEFGH, FGH)

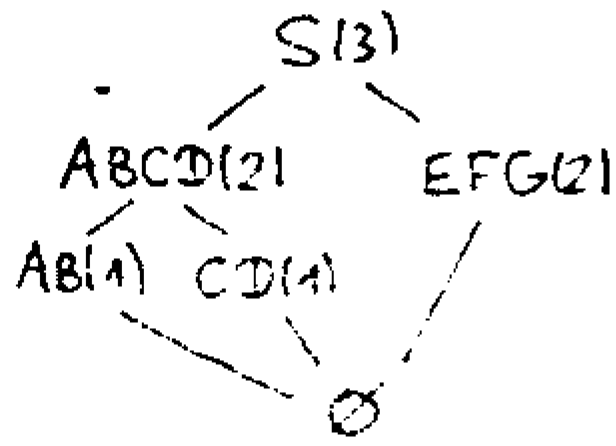
83H90 (85S77) 13-37-37



$NB\left(\begin{smallmatrix}AEFG\\ \mid \\ \varnothing\end{smallmatrix}\right)$

T(ABEFGH, EFGH, CDGH)

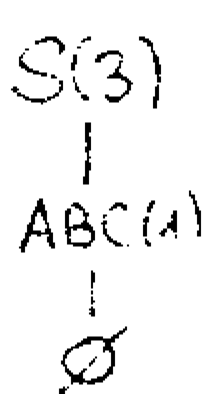
83H91 (85S40) 13-43-39



$NB\left(\begin{smallmatrix}ABCEFG\\ \mid \\ AB(1)\end{smallmatrix}\right)$

NT

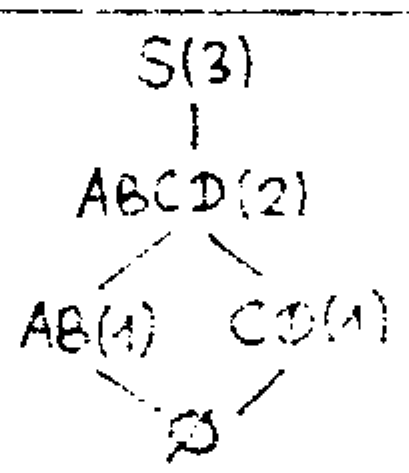
83H92 (85S127) 15-40-32



$NB\left(\begin{smallmatrix}ABCDEFG\\ \mid \\ ABC(1)\end{smallmatrix}\right)$

T

83H93 (85S39) 15-44-43



$NB\left(\begin{smallmatrix}ABCEFG\\ \mid \\ AB(1)\end{smallmatrix}\right)$

T(ABEFGH, CDEFGH, EFGH)

83 H 108 (85 S 187) — 11-36-24

S(3)
ABCDE(2) ABFGH(2)
AB(1)
∅

NB(ACDE / ∅)

T(ABCDEFGH, CDE, FGH)

83 H 109 (85 S 152) — 11-39-27

S(3)
ABCDE(2) CFGH(2)
AB(1)
∅

NB(ACDE / ∅)

T(CDEFGH, ABDE, FGH)

83 H 110 (85 S 90) — 11-43-32

S(3)
ABCD(2) ABEF(2) CFH(2) DFG(2) EGH(2)
AB(1)
∅

NB(ACEG(2) / ∅)

NT

83 H 111 (85 S 109) — 11-42-30

S(3)
ABCD(2) ABEF(2) ABGH(2) CEG(2) DFH(2)
AB(1)
∅

NB(ACEFH / C(1))

NT

83 H 112 (85 H 69) — 12-34-31

S(3)
ABCDEF(2)
AB(1)
∅

NB(CDEF / ∅)

T

83 H 113 (85 S 217) — 12-40-31

S(3)
ABCDE(2) FG(1)
∅

NB(ABCD / ∅)

T

83 H 114 (85 S 153) — 12-40-30

S(3)
ABCDE(2) ABFG(2) CFH(2)
AB(1)
∅

NB(ACDE / ∅)

T(ABDEG, CDEH, FGH)

83 H 115 (85 S 142) — 12-41-32

S(3)
ABCDE(2) CFG(2) DFH(2)
AB(1)
∅

NB(ACDE / ∅)

NT

83 H 116 (85 S 99) — 12-43-33

S(3)
ABCD(2) CEFG(2) DEH(2)
AB(1)
∅

NB(CEFG / ∅)

NT

83 H 117 (85 S 113) — 12-42-31

S(3)
ABCD(2) ABEF(2) CEGH(2)
AB(1)
∅

NB(CEGH / ∅)

T(ABDE, CDGH, EFGH)

83 H 118 (85 S 85) — 13-44-36

S(3)
ABCD(2) ABEF(2) CEG(2) DFG(2)
AB(1)
∅

NB(ABCEGH / AB(1))

NT

83 H 119 (85 S 38) — 13-46-40

S(3)
ABC(2) ADE(2) BEF(2) CDF(2) GH(1)
∅

NB(ABCDGH / GH(1))

NT

83 H 120 (85 S 88) — 13-44-36

S(3)
ABCD(2) ABEF(2) CEG(2) DGH(2)
AB(1)
∅

NB(ABCEGH / AB(1))

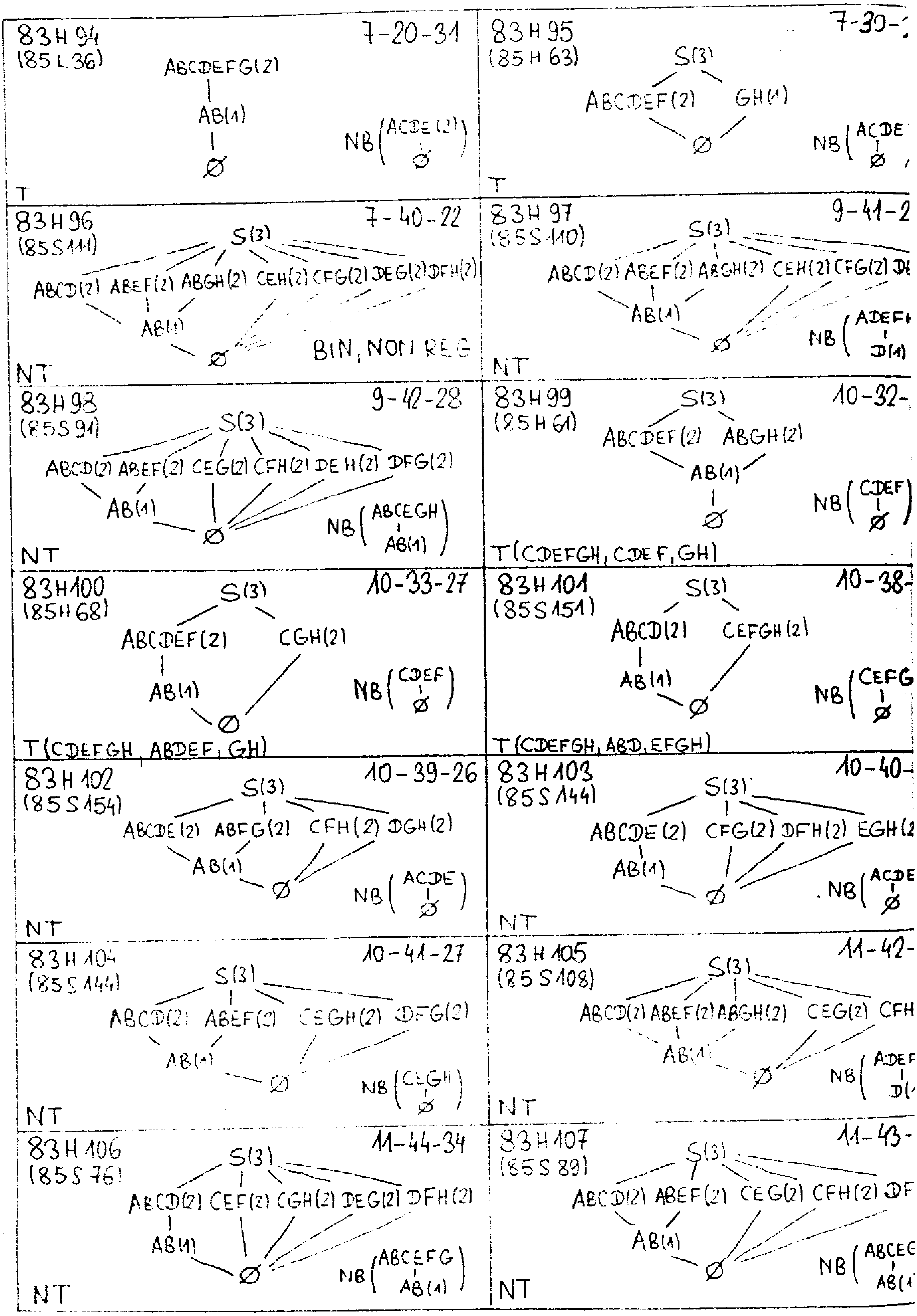
NT

83 H 121 (85 S 75) — 13-45-38

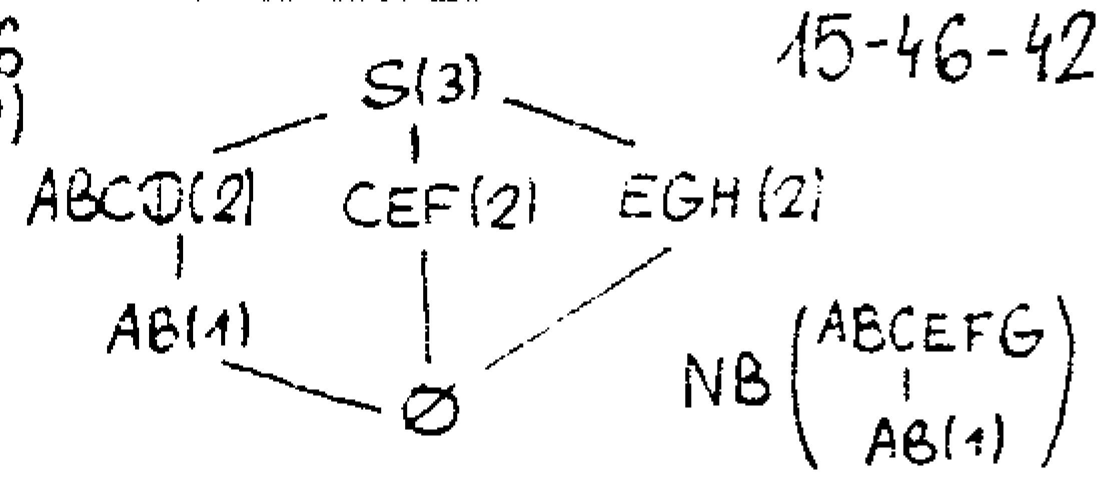
S(3)
ABCD(2) CEF(2) DFG(2) EGH(2)
AB(1)
∅

NB(ABCEF / AB(1))

NT

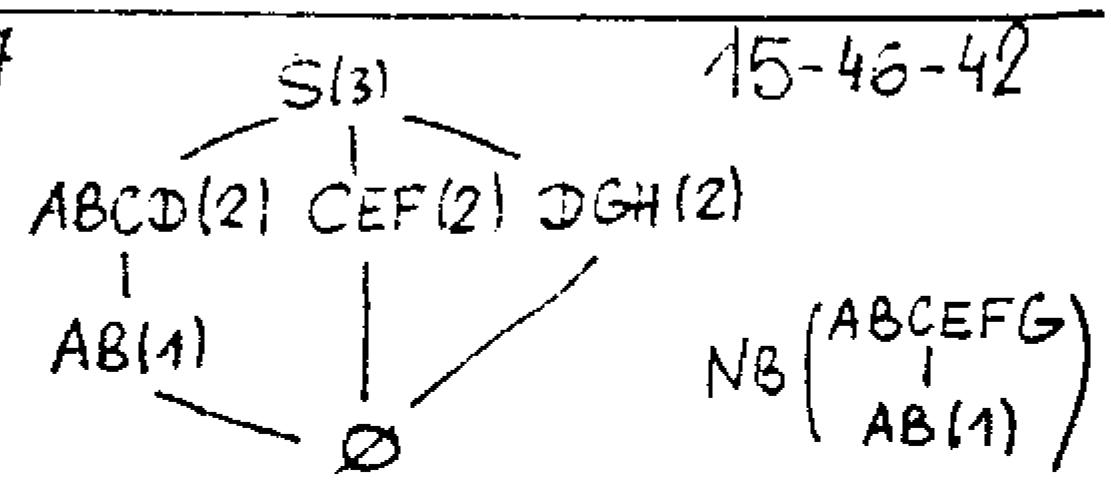

83 H 94
(85 L 36)
7-20-31
ABCDEFG(2)
AB(1)
∅
NB (ACDE(2) ∅)
T
83 H 95
(85 H 63)
7-30-
S(3)
ABCDEF(2)
GH(1)
∅
NB (ACDE ∅)
T
83 H 96
(85 S 111)
7-40-22
S(3)
ABCD(2) ABEF(2) ABGH(2) CEH(2) CFG(2) DEG(2) DFH(2)
AB(1)
∅
BIN, NON REG
NT
83 H 97
(85 S 110)
9-41-2
S(3)
ABCD(2) ABEF(2) ABGH(2) CEH(2) CFG(2)
AB(1)
∅
NB (ADEF D(1))
NT
83 H 98
(85 S 91)
9-42-28
S(3)
ABCD(2) ABEF(2) CEG(2) CFH(2) DEH(2) DFG(2)
AB(1)
∅
NB (ABCEGH AB(1))
NT
83 H 99
(85 H 61)
10-32-
S(3)
ABCDEF(2) ABGH(2)
AB(1)
∅
NB (CDEF ∅)
T(CDEFGH, CDEF, GH)
83 H 100
(85 H 68)
10-33-27
S(3)
ABCDEF(2)
CGH(2)
AB(1)
∅
NB (CDEF ∅)
T(CDEFGH, ABDEF, GH)
83 H 101
(85 S 151)
10-38-
S(3)
ABCD(2) CEFGH(2)
AB(1)
∅
NB (CEFG ∅)
T(CDEFGH, ABD, EFGH)
83 H 102
(85 S 154)
10-39-26
S(3)
ABCDE(2) ABFG(2) CFH(2) DGH(2)
AB(1)
∅
NB (ACDE ∅)
NT
83 H 103
(85 S 144)
10-40-
S(3)
ABCDE(2) CFG(2) DFH(2) EGH(2
AB(1)
∅
NB (ACDE ∅)
NT
83 H 104
(85 S 144)
10-41-27
S(3)
ABCD(2) ABEF(2) CEGH(2) DFG(2)
AB(1)
∅
NB (CEGH ∅)
NT
83 H 105
(85 S 108)
11-42-
S(3)
ABCD(2) ABEF(2) ABGH(2) CEG(2) CFH
AB(1)
∅
NB (ADEF D(
NT
83 H 106
(85 S 76)
11-44-34
S(3)
ABCD(2) CEF(2) CGH(2) DEG(2) DFH(2)
AB(1)
∅
NB (ABCEFG AB(1))
NT
83 H 107
(85 S 89)
11-43-
S(3)
ABCD(2) ABEF(2) CEG(2) CFH(2) DF
AB(1)
∅
NB (ABCEG AB(1
NT

83 H 136
(85 S 72)
15-46-42



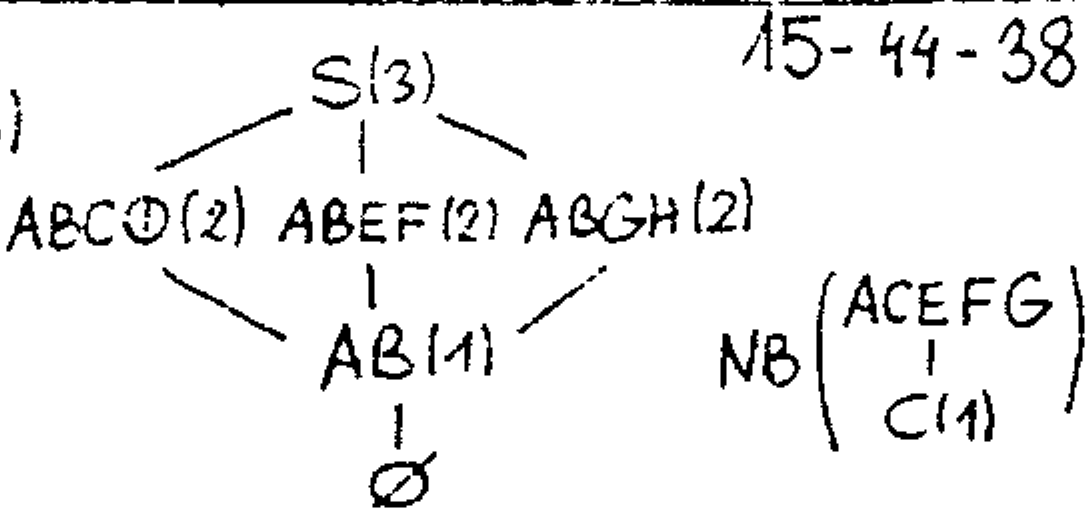
NT

83 H 137
(85 S 73)
15-46-42



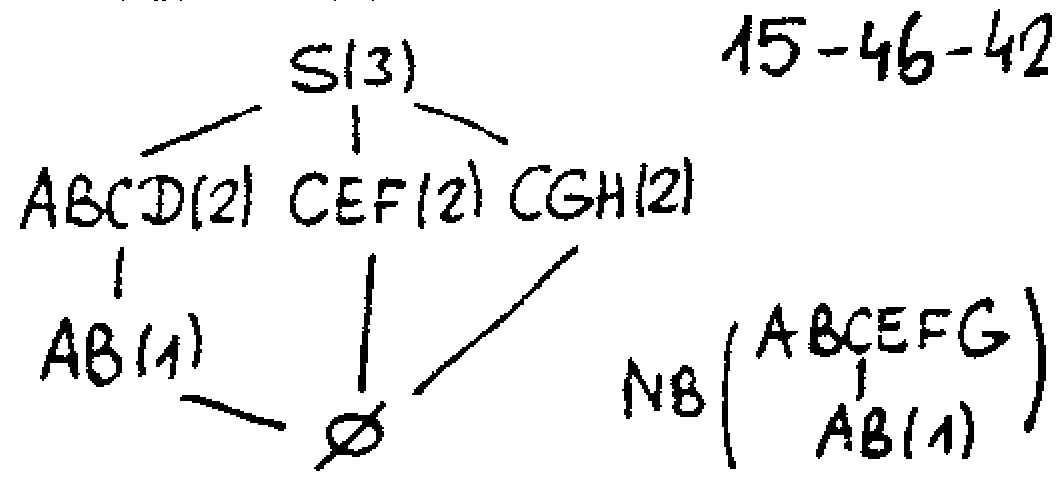
NT

83 H 138
(85 S 106)
15-44-38



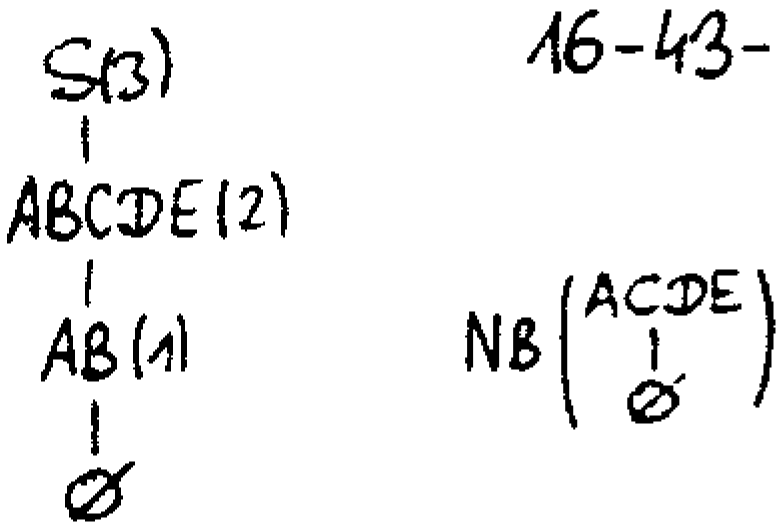
NT

83 H 139
(85 S 71)
15-46-42



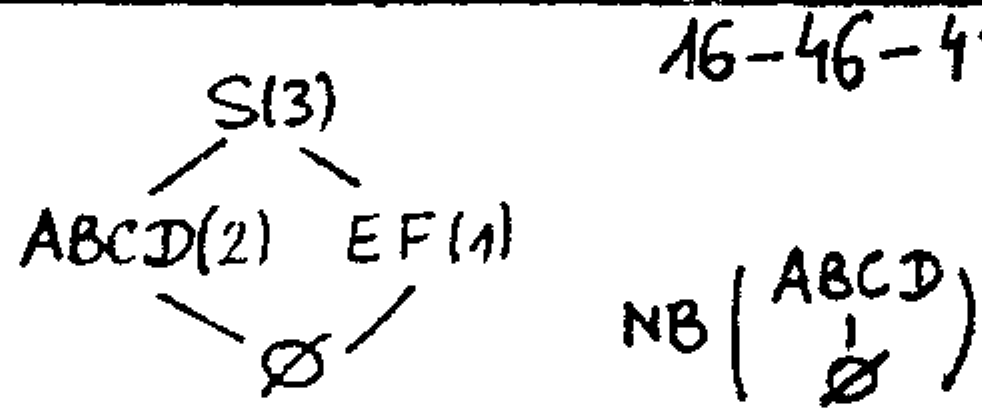
NT

83 H 140
(85 S 139)
16-43-40



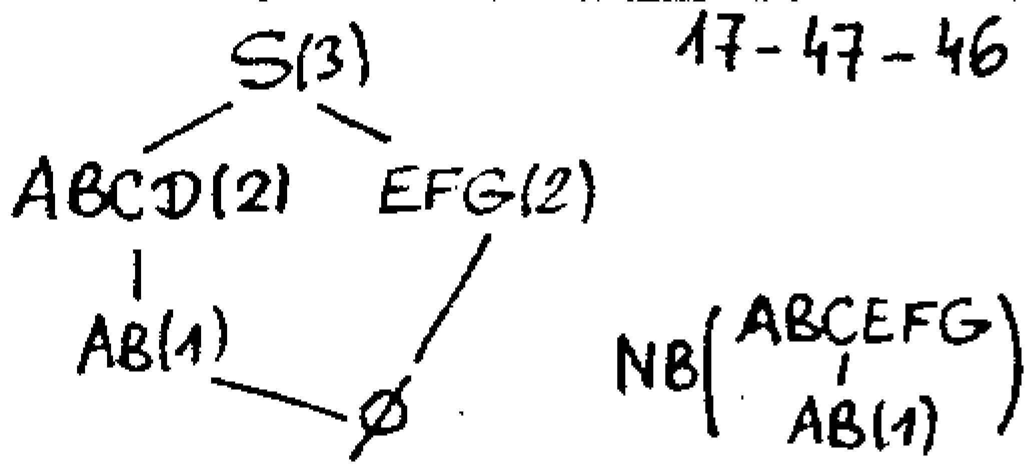
T

83 H 141
(85 S 66)
16-46-43



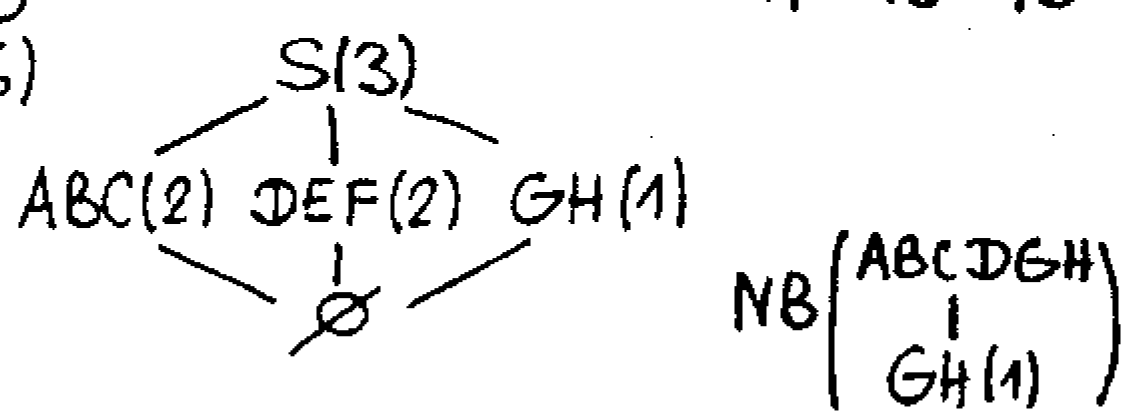
T

83 H 142
(85 S 68)
17-47-46



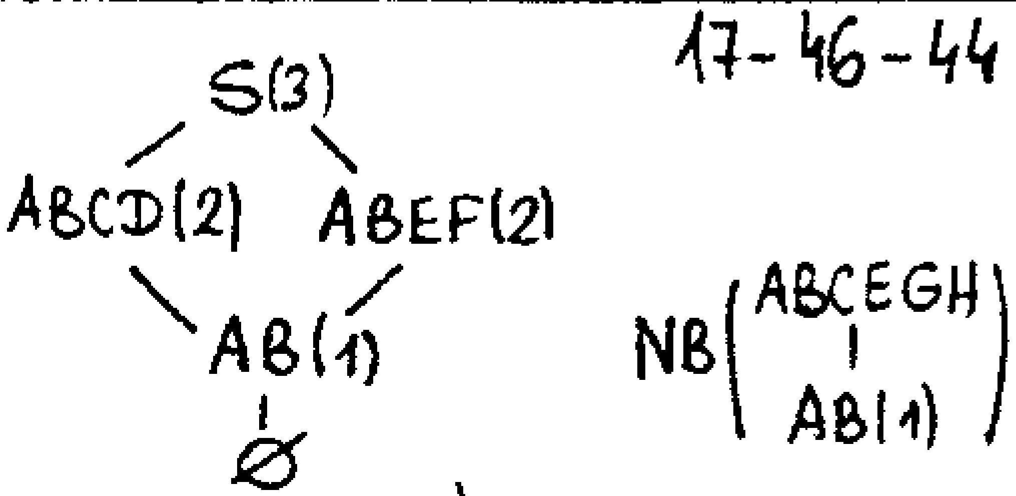
T(CDEFGH, ABCDH, EFGH)

83 H 143
(85 S 36)
17-48-48



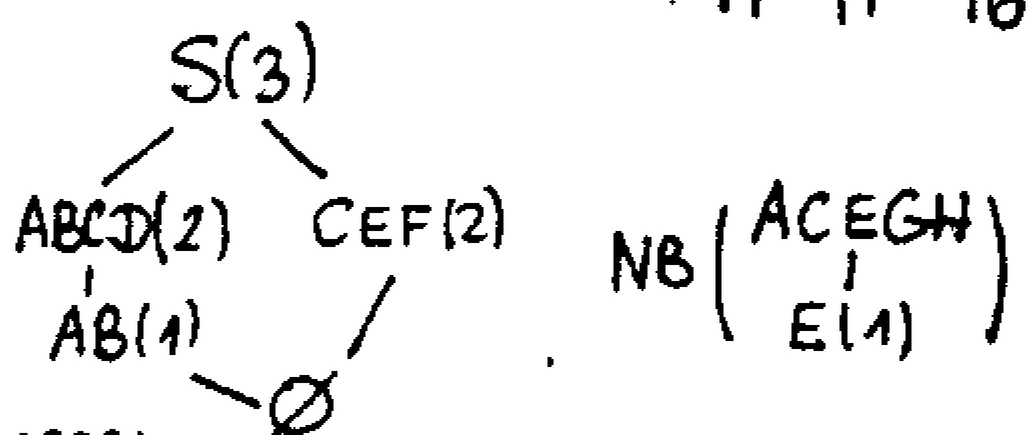
NT

83 H 144
(85 S 82)
17-46-44



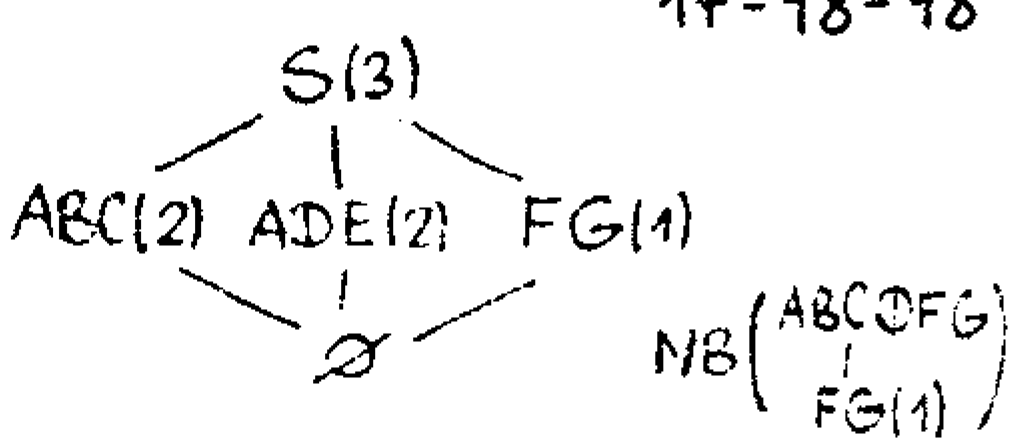
T(ABCDEFGH, CDGH, EFGH)

83 H 145
(85 S 67)
17-47-46



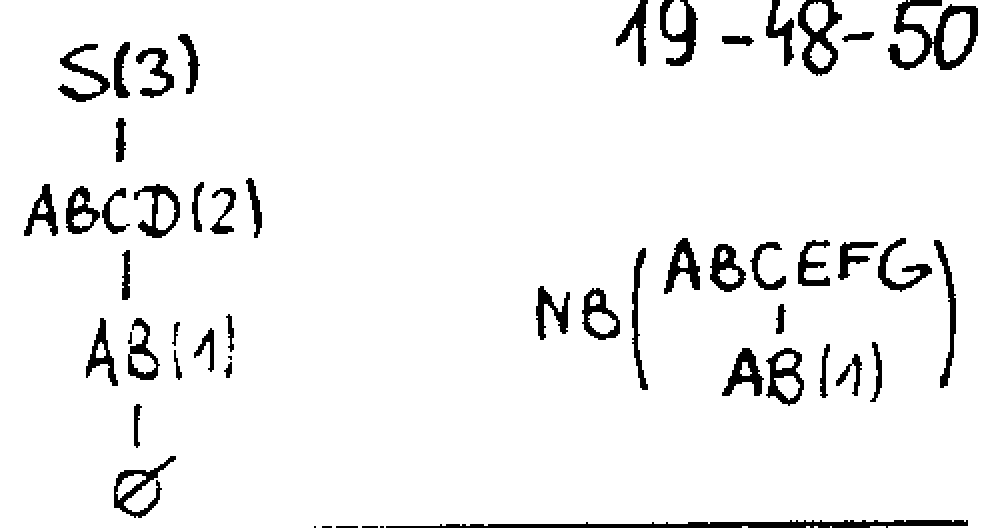
T(CDEFGH, ~~ABDGH~~ EFGH)

83 H 146
(85 S 35)
17-48-48



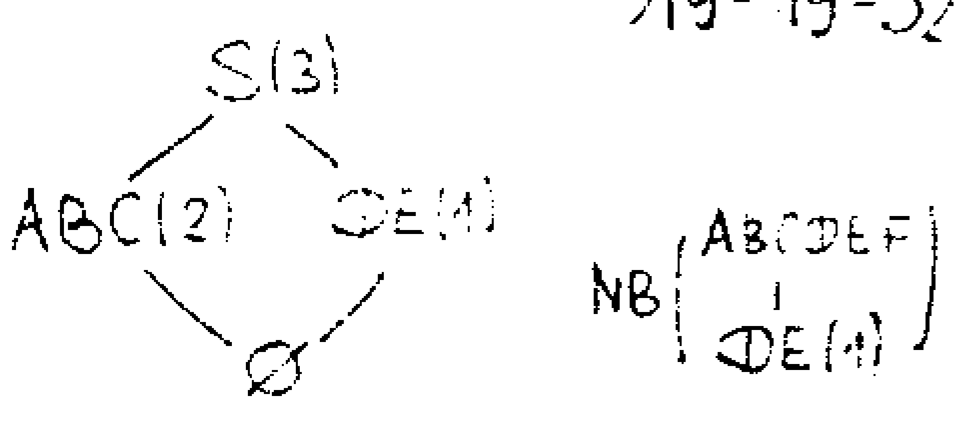
NT

83 H 147
(85 S 65)
19-48-50



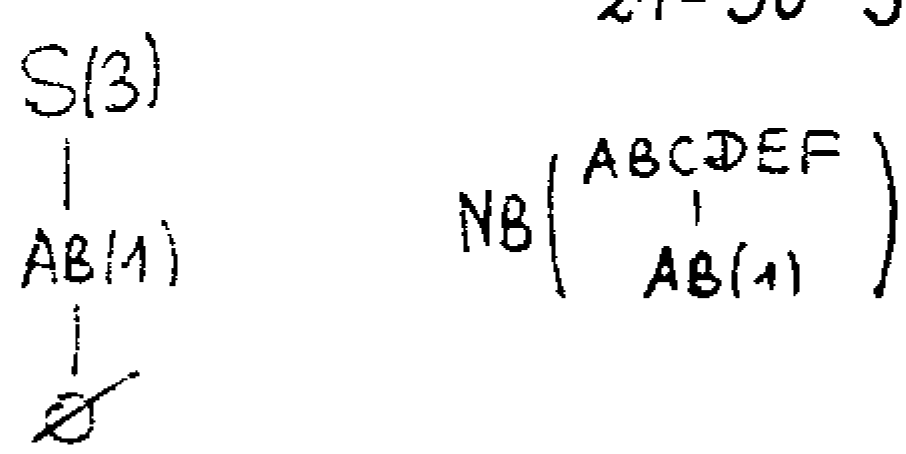
T

83 H 148
(85 S 34)
19-49-52



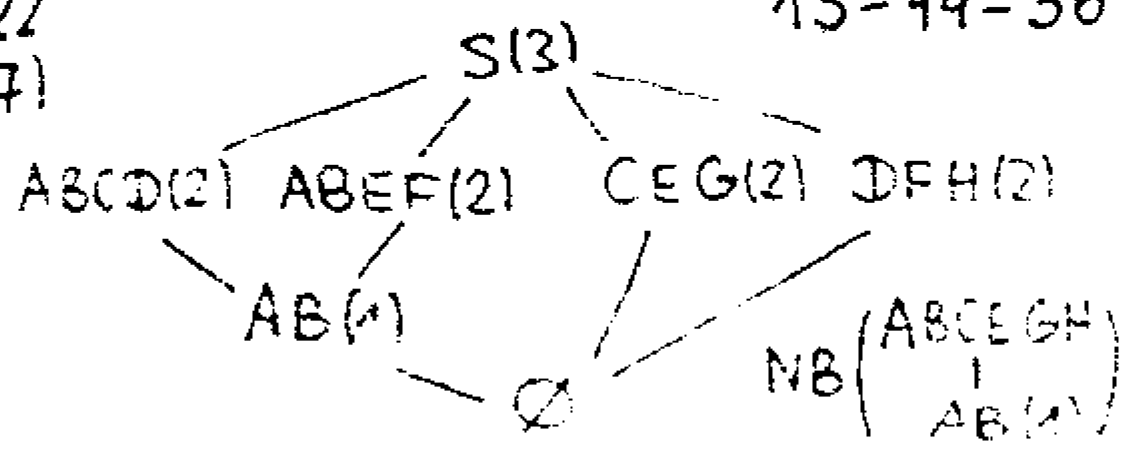
T

83 H 149
(85 S 33)
21-50-51



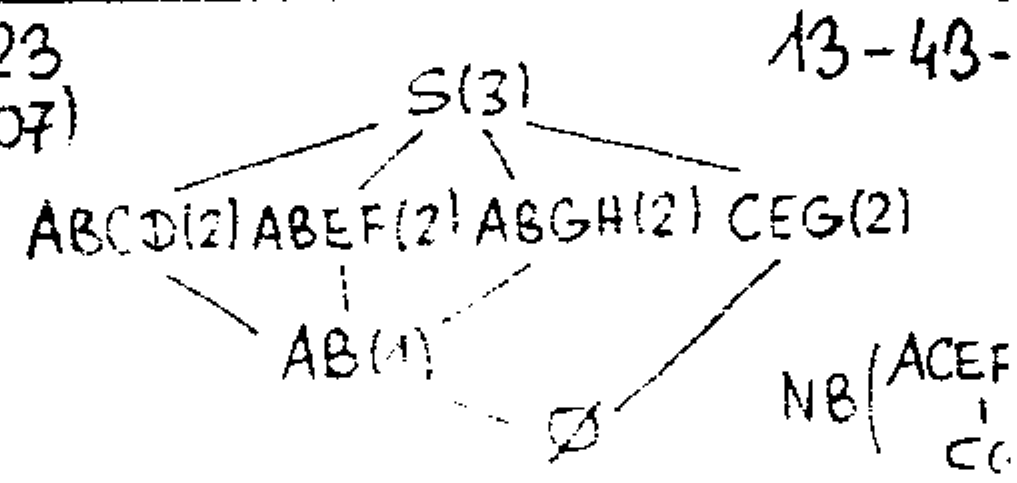
T

83H122 (85S 87) 13-44-36



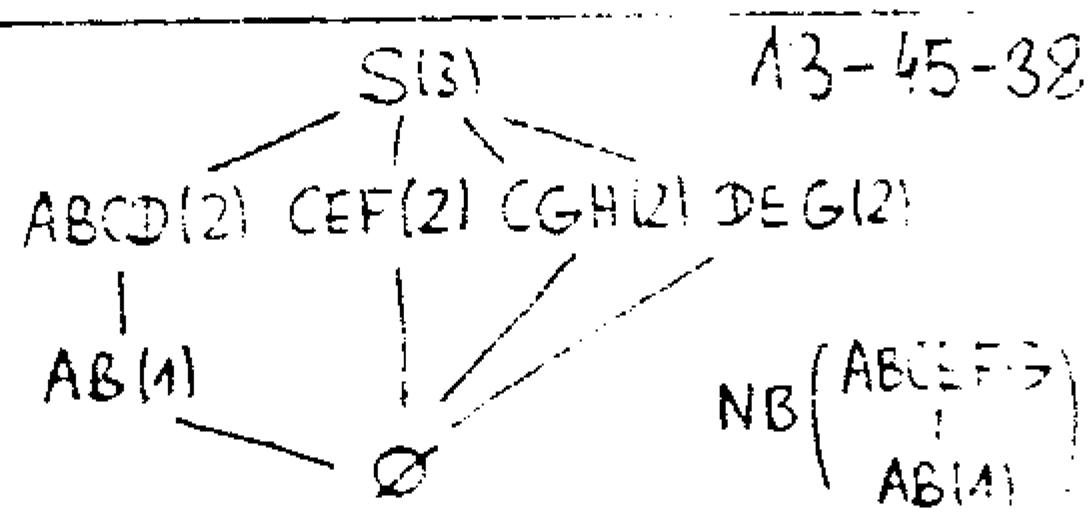
NT

83H123 (85S 107) 13-43-



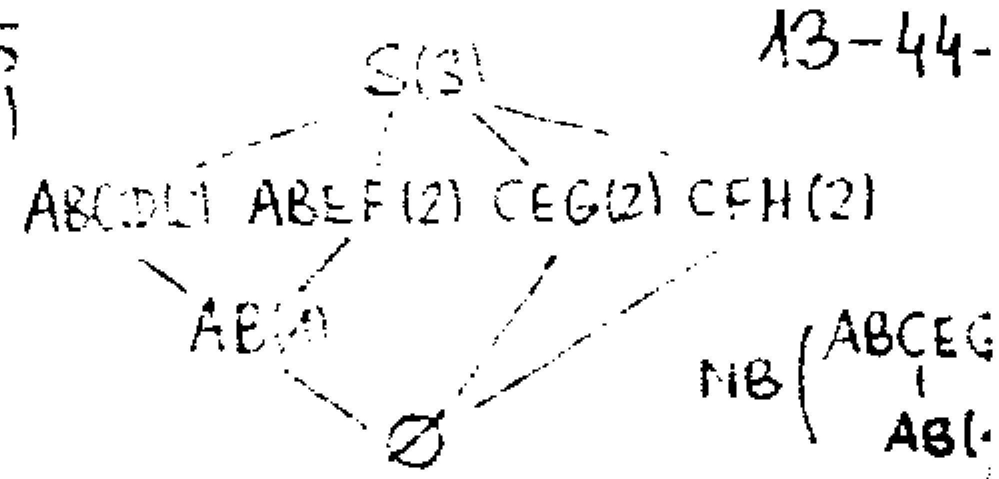
NT

83H124 (85S 74) 13-45-38



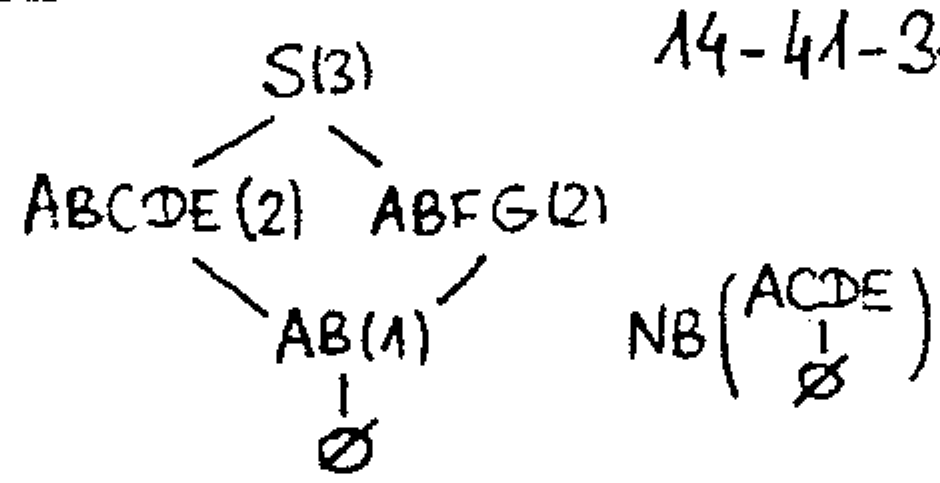
NT

83H125 (85S 86) 13-44-



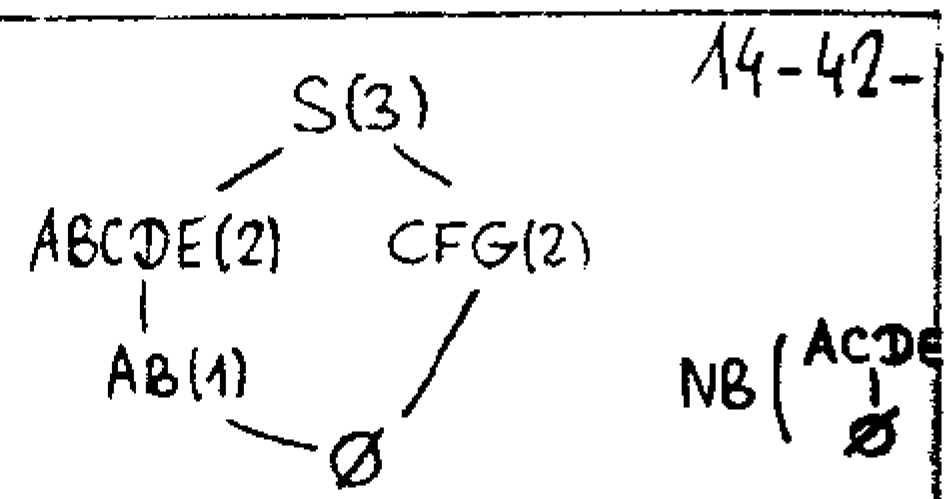
NT

83H126 (85S150) 14-41-34



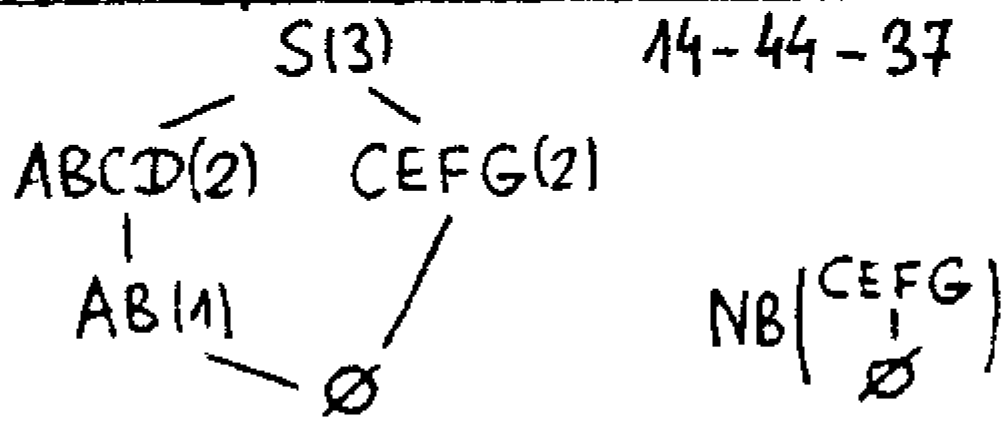
T(ABCDEFGH, CDEH, FGH)

83H127 (85S140) 14-42-



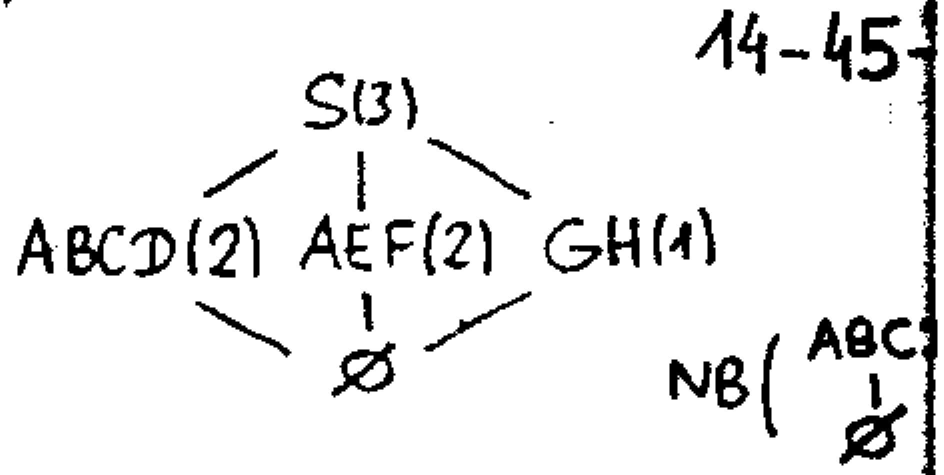
T(CDEFGH, ABDEH, FGH)

83H128 (85S 98) 14-44-37



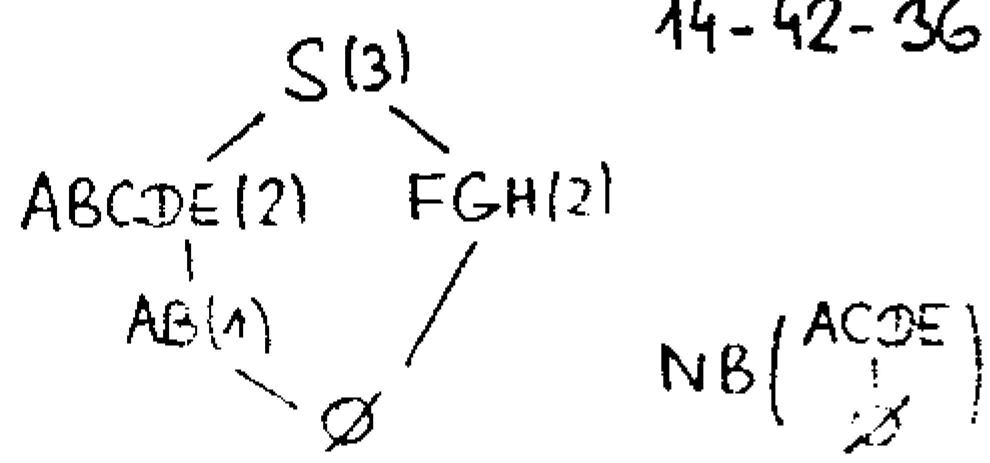
T(CDEFGH, ABDH, EFGH)

83H129 (85S 69) 14-45-



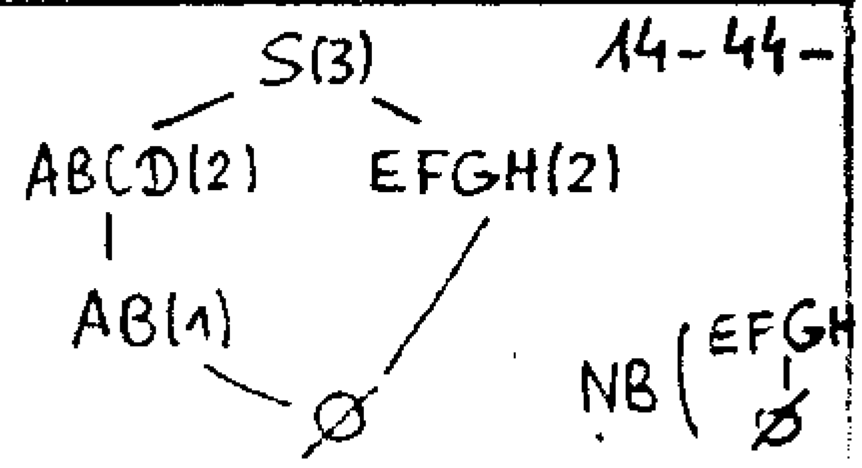
NT

83H130 (85S141) 14-42-36



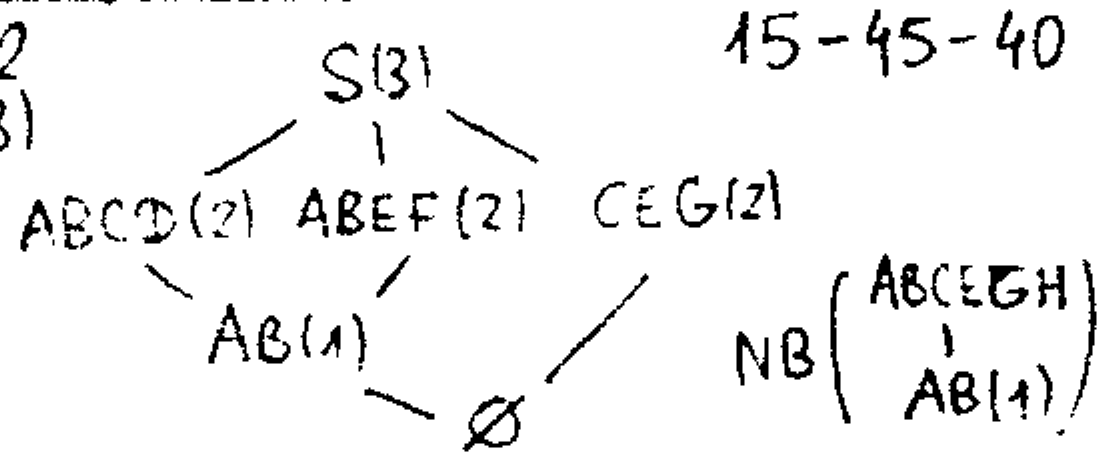
T(CDEFGH, ABCDE, FGH)

83H131 (85S104) 14-44-



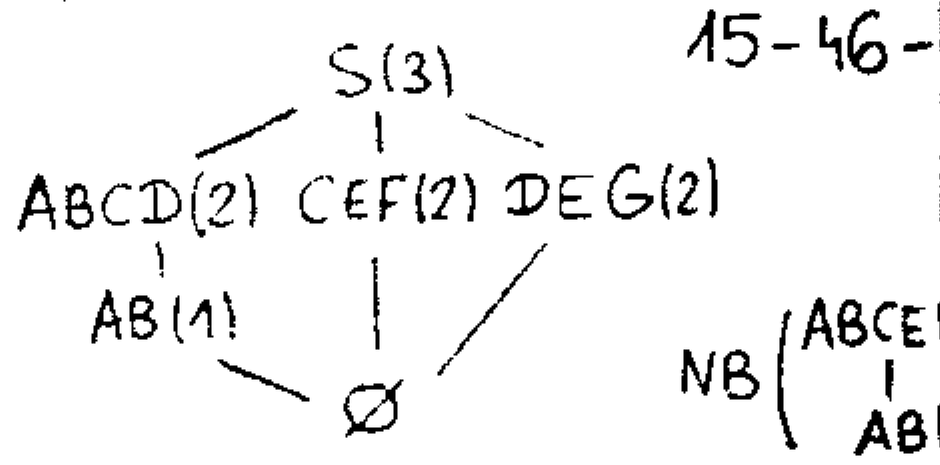
T(CDEFGH, ABCD, EFGH)

83H132 (85S 83) 15-45-40



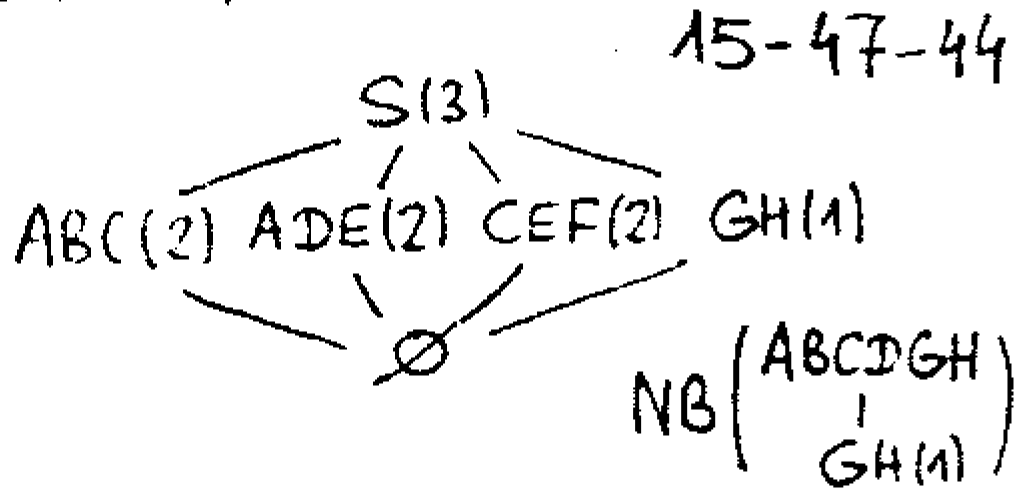
T(ABDFH, CDGH, EFGH)

83H133 (85S 70) 15-46-



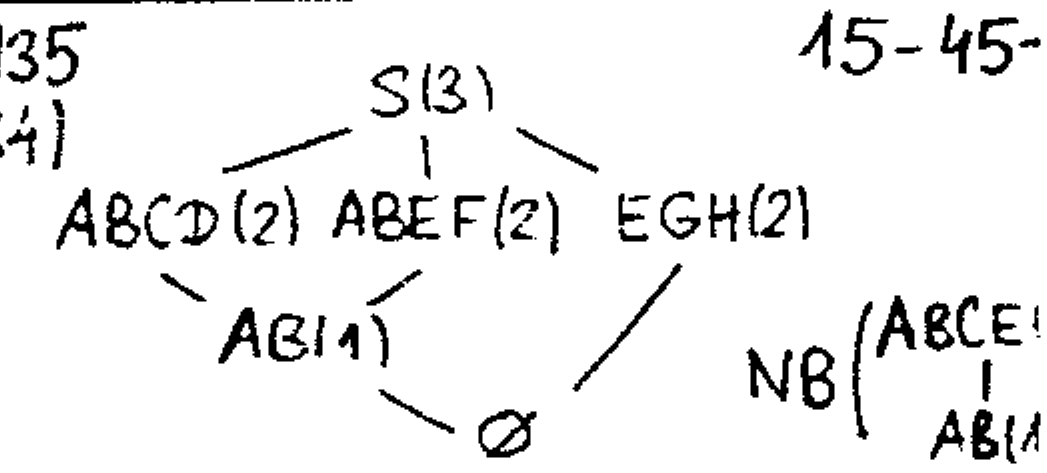
NT

83H134 (85S 37) 15-47-44



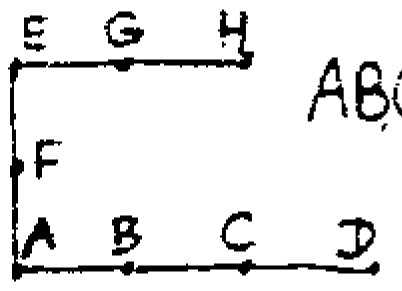
NT

83H135 (85S 84) 15-45-



T(ABCDF, CDGH, EFGH)

83S15 (85S47) 19-50-49

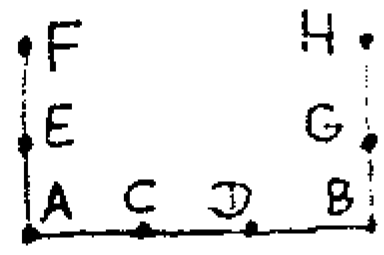


S(3)
ABCD(2) AEF(2) EGH(2)
∅

NB

T(ABCDF, BCDGH, EFGH)

83S16 (85S49) 19-50-49

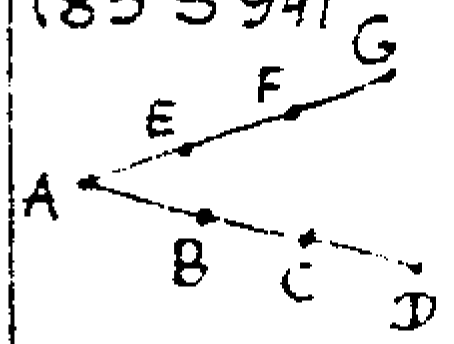


S(3)
ABCD(2) AEF(2) BGH(2)
∅

NB

T(ACDEF, BCDGH, EFGH)

83S17 (85S94) 18-48-44

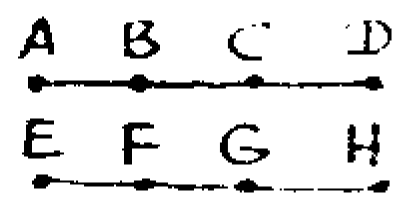


S(3)
ABCD(2) AEFG(2)
∅

NB

T

83S18 (85S103) 18-48-44

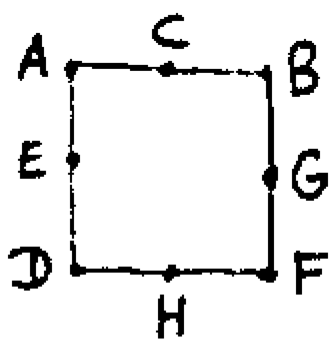


S(3)
ABCD(2) EFGH(2)
∅

NB

T

83S19 (85S12) 20-52-54

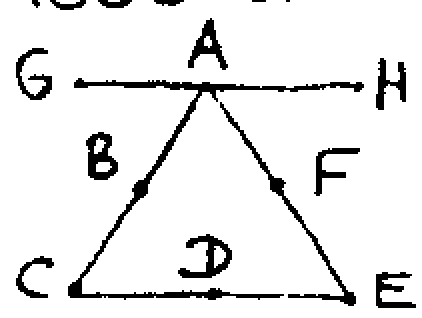


S(3)
ABC(2) ADE(2) BFG(2) DFH(2)
∅

NB

NT

83S20 (85S13) 20-52-54

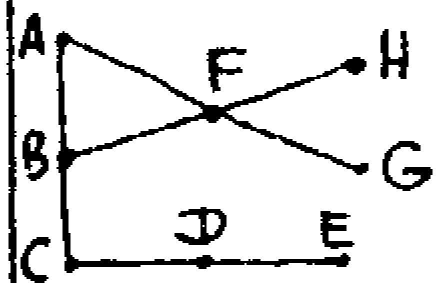


S(3)
ABC(2) CDE(2) AEF(2) AGH(2)
∅

NB

NT

83S21 (85S14) 20-52-54

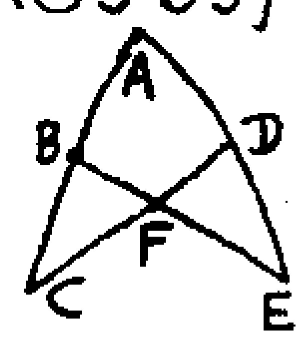


S(3)
ABC(2) CDE(2) AFG(2) BFH(2)
∅

NB

NT

83S22 (85S9) 20-52-54

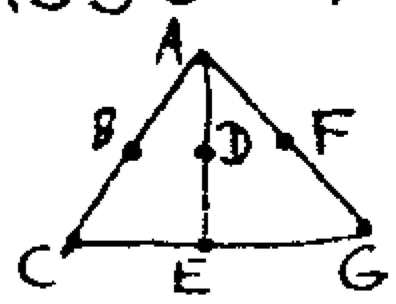


S(3)
ABC(2) ADE(2) BEF(2) CDF(2)
∅

NB

NT

83S23 (85S10) 20-52-54

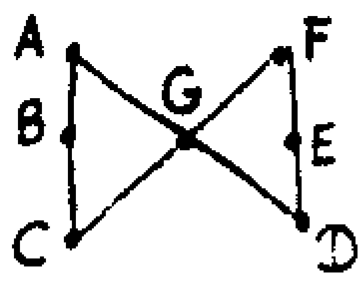


S(3)
ABC(2) ADE(2) AFG(2) CEG(2)
∅

NB

NT

83S24 (85S11) 20-52-54

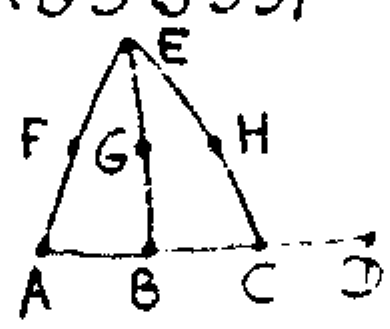


S(3)
ABC(2) DEF(2) ADG(2) CFG(2)
∅

NB

NT

83S25 (85S53) 17-49-45

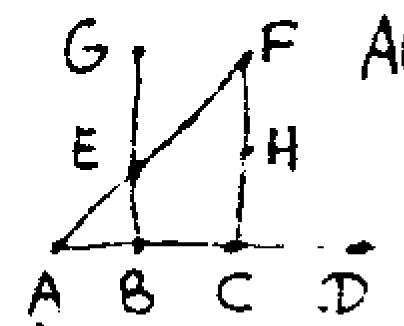


S(3)
ABCD(2) AEF(2) BEG(2) CEH(2)
∅

NB

NT

83S26 (85S54) 17-49-45

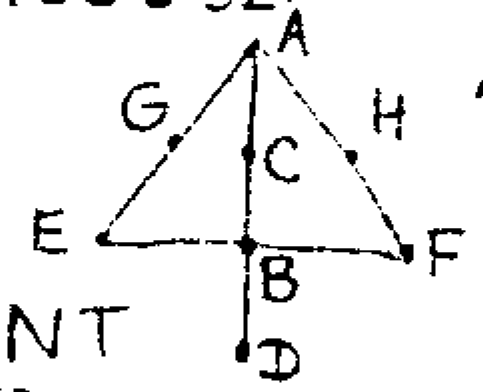


S(3)
ABCD(2) AEF(2) BEG(2) CFH(2)
∅

NB

NT

83S27 (85S52) 17-49-45

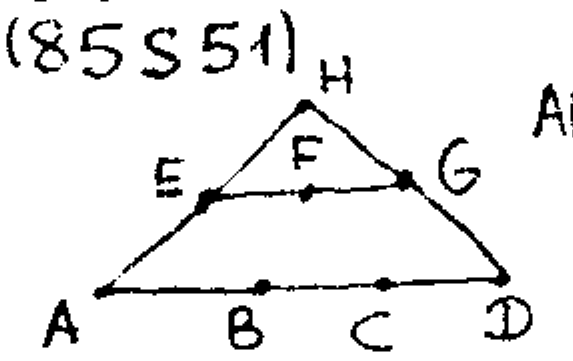


S(3)
ABCD(2) AEG(2) AFH(2) BEF(2)
∅

NB

NT

83S28 (85S51) 17-49-45

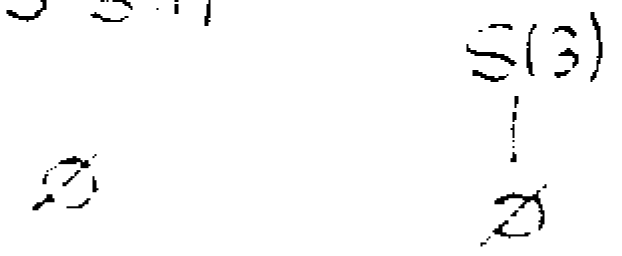


S(3)
ABCD(2) AEH(2) DGH(2) EFG(2)
∅

NB

NT

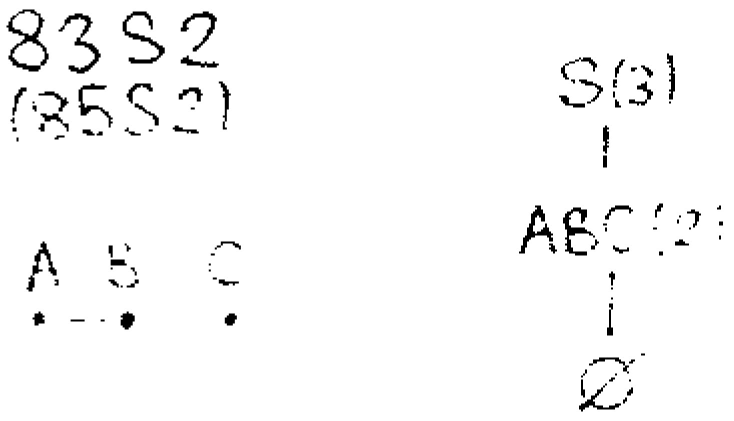
83S1 (85S1) 28-56-70



NB

T

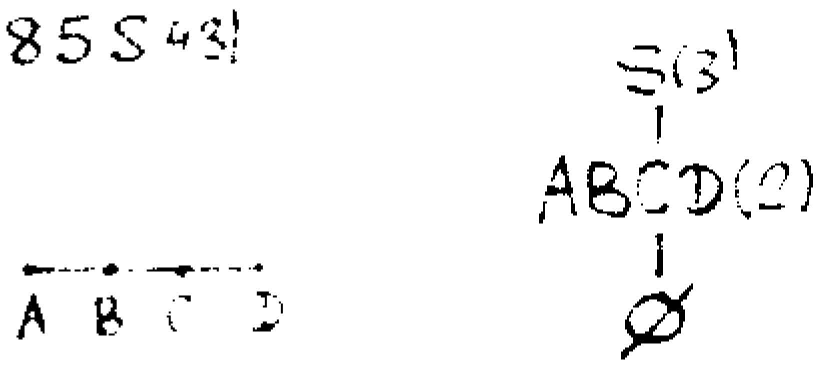
83S2 (85S2) 26-55-



NB

T

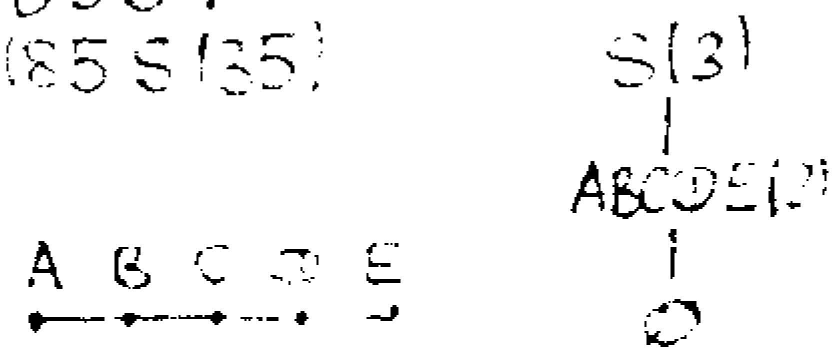
83S3 (85S43) 23-52-57



NB

T

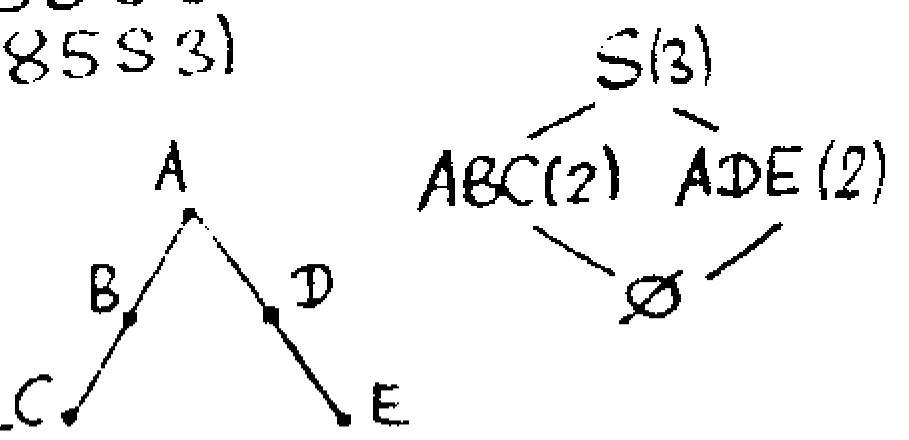
83S4 (85S35) 19-46-45



NB

T

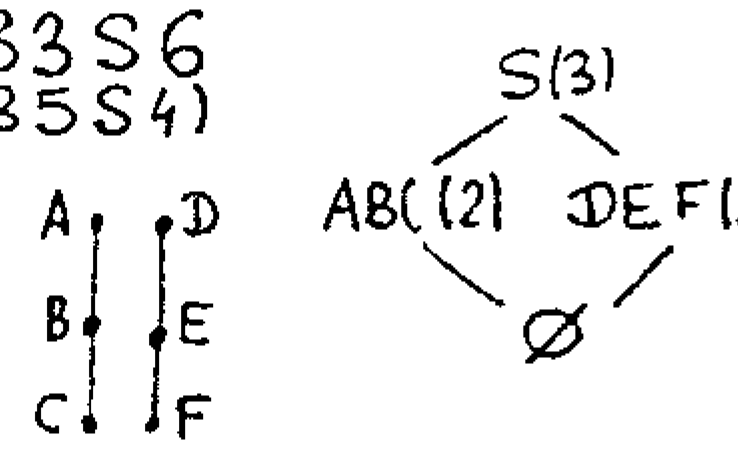
83S5 (85S3) 24-54-62



NB

T

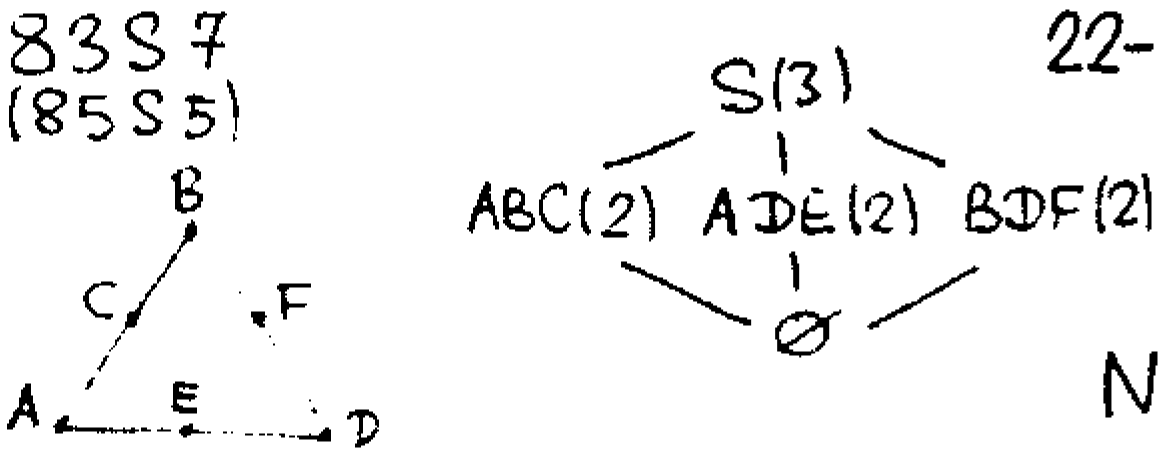
83S6 (85S4) 24-54-6



NB

T

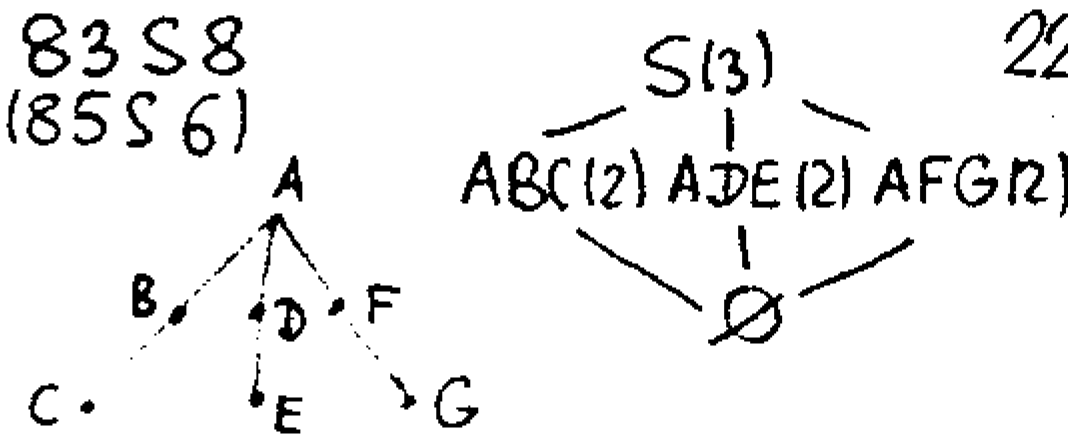
83S7 (85S5) 22-53-58



NB

T(ACEGH, BCFGH, DEFGH)

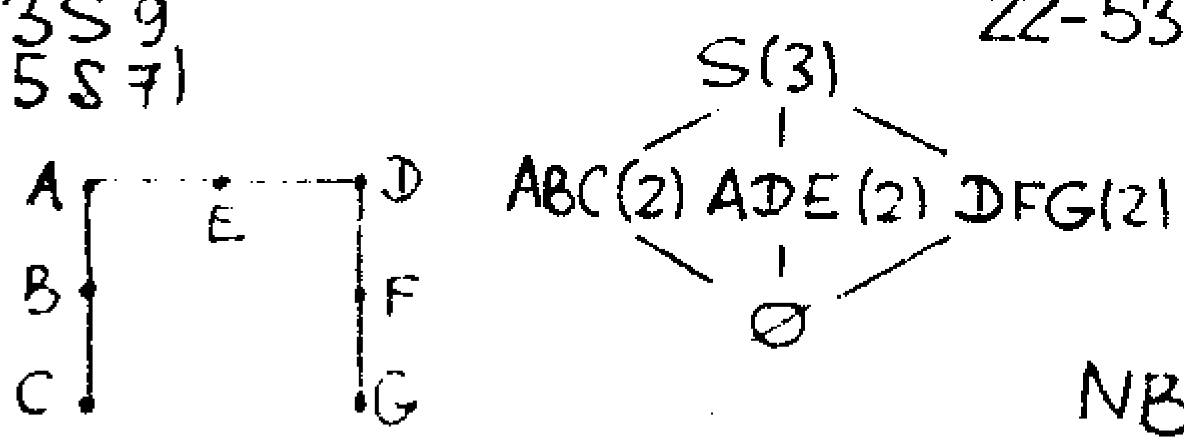
83S8 (85S6) 22-53-5



NB

NT

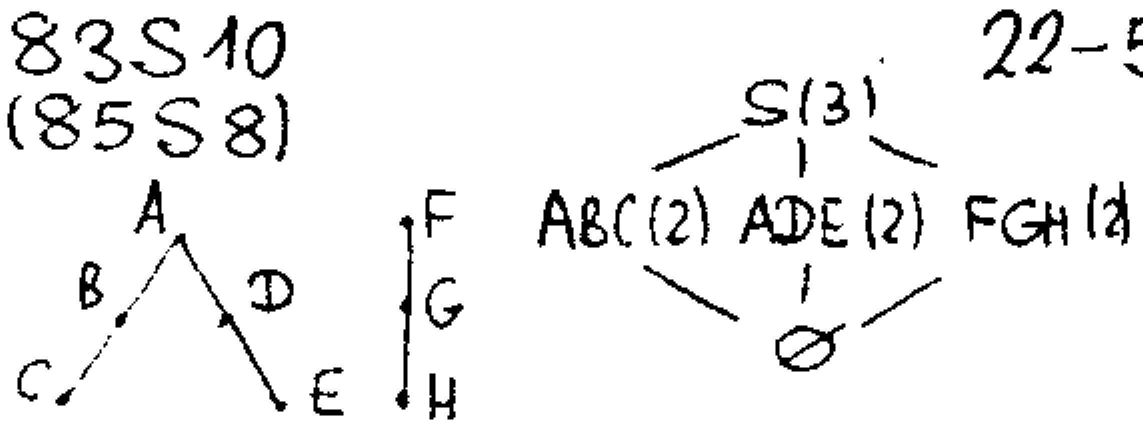
83S9 (85S7) 22-53-58



NB

T(ABCEH, BCFGH, DEFGH)

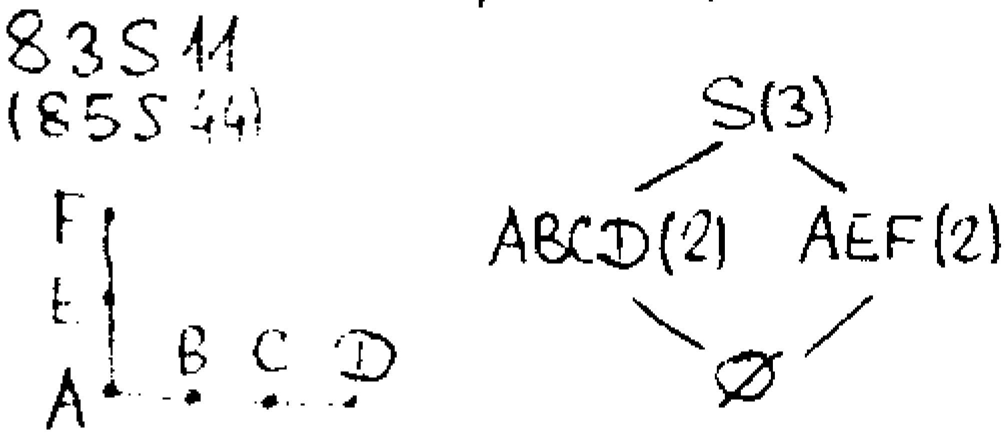
83S10 (85S8) 22-53-5



NB

T(ABCDE, BCFGH, DEFGH)

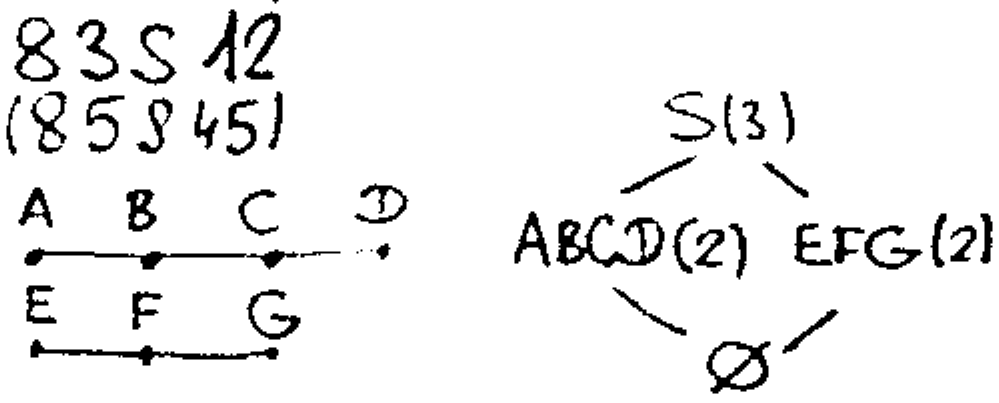
83S11 (85S44) 21-51-53



NB

T

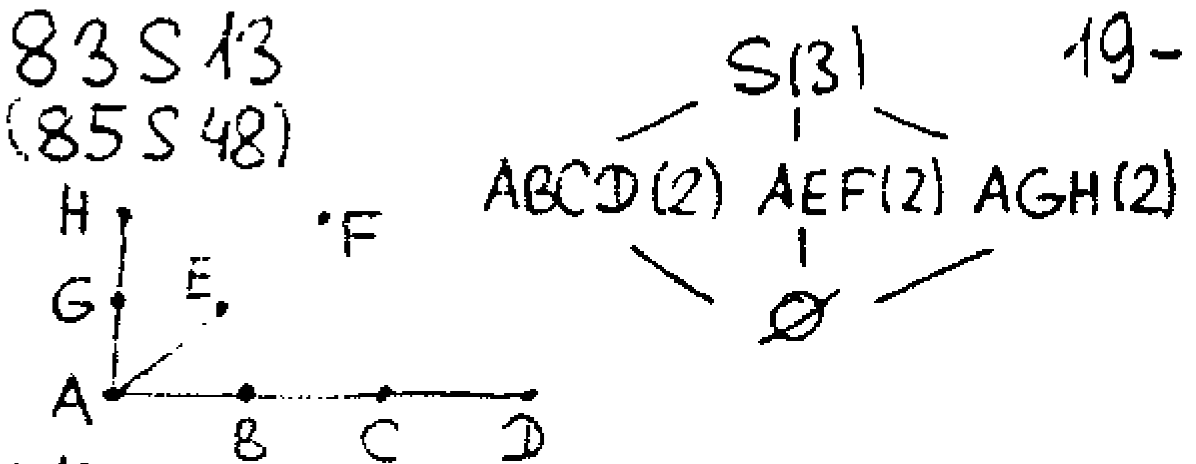
83S12 (85S45) 21-51-



NB

T

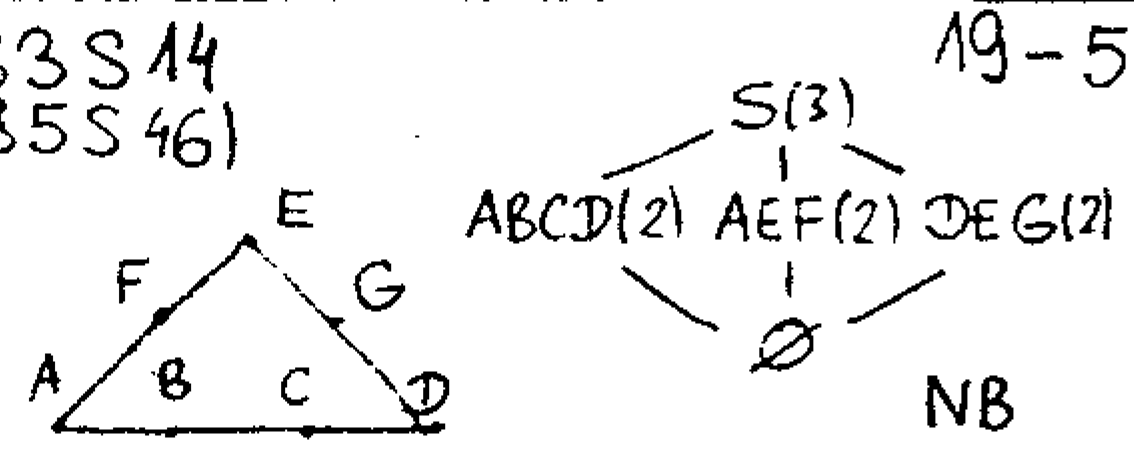
83S13 (85S48) 19-50-49



NB

NT

83S14 (85S46) 19-50-



NB

T(ABCFH, BCDGH, EFGH)

83S43
(85S25)

16-50-46

S(3)
ABC(2) CDE(2) EFG(2) AEH(2) BFH(2) CGH(2)
∅

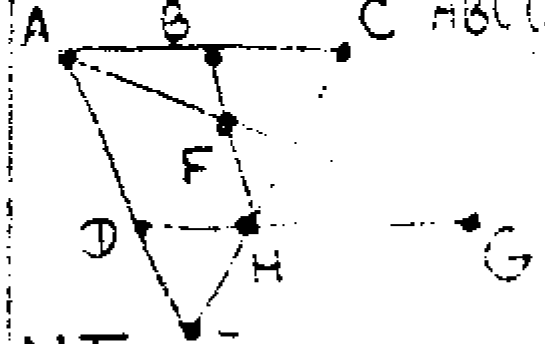
NB

NT

83S44
(85S26)

16-50-4

S(3)
ABC(2) ADE(2) AFG(2) BFH(2) CEH(2) DGH(2
∅



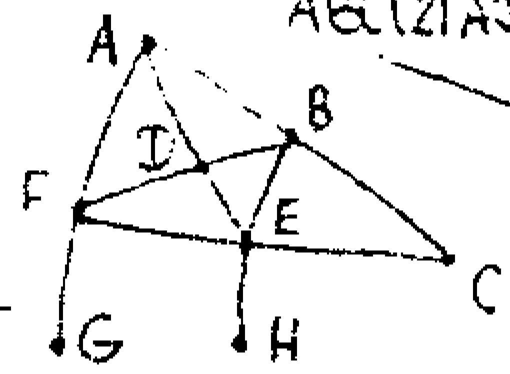
NB

NT

83S45
(85S27)

16-50-46

S(3)
ABC(2) ADE(2) AFG(2) BDF(2) BEH(2) CEF(2)
∅



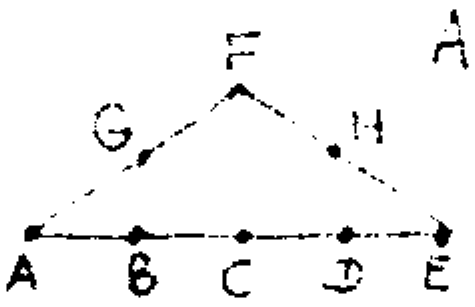
NB

NT

83S46
(85S138)

15-44-3

S(3)
ABCDE(2) AFG(2) EFH(2)
∅



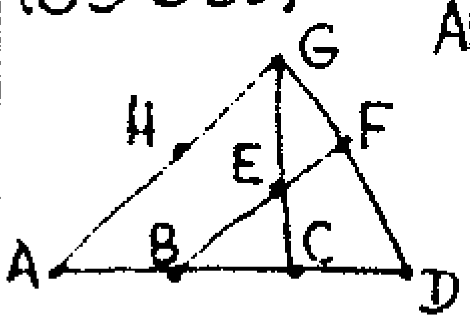
NB

T (ABCDG, BCDEH, FGH)

83S47
(85S59)

15-48-41

S(3)
ABCD(2) AGH(2) BEF(2) CEG(2) DFG(2)
∅



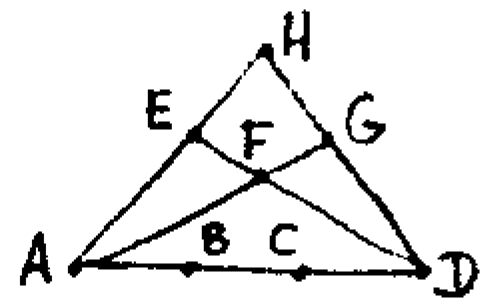
NB

NT

83S48
(85S58)

15-48-4

S(3)
ABCD(2) AEH(2) AFG(2) DEF(2) DG
∅



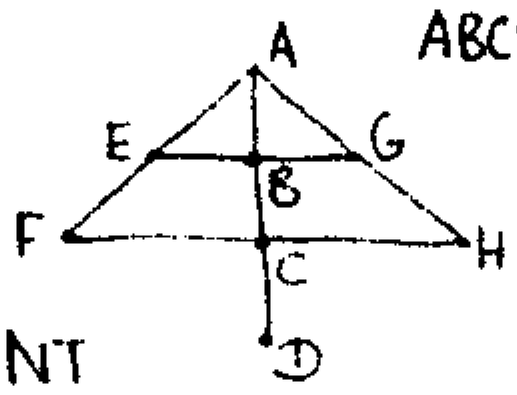
NB

NT

83S49
(85S56)

15-48-41

S(3)
ABCD(2) AEF(2) AGH(2) BEG(2) CFH(2)
∅



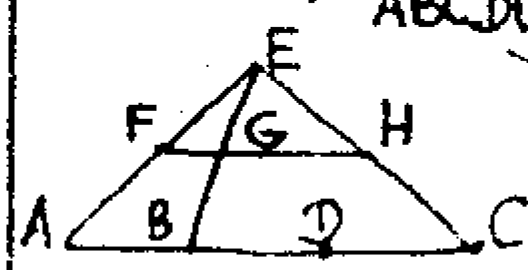
NB

NT

83S50
(85S55)

15-48-4

S(3)
ABCD(2) AEF(2) BEG(2) CEH(2) FGH(2)
∅



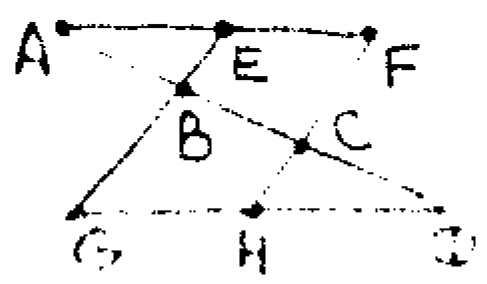
NB

NT

83S51
(85S60)

15-48-41

S(3)
ABCD(2) AEF(2) BEG(2) CFH(2) DGH(2)
∅



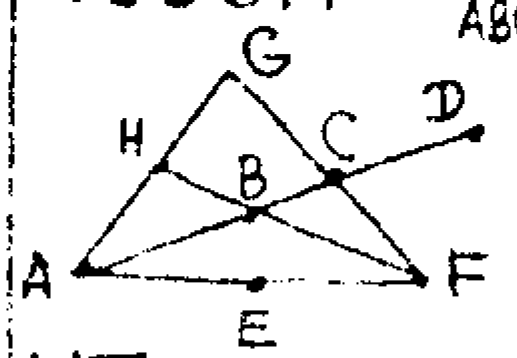
NB

NT

83S52
(85S57)

15-48-4

S(3)
ABCD(2) AEF(2) AGH(2) BFH(2) CFG(2)
∅



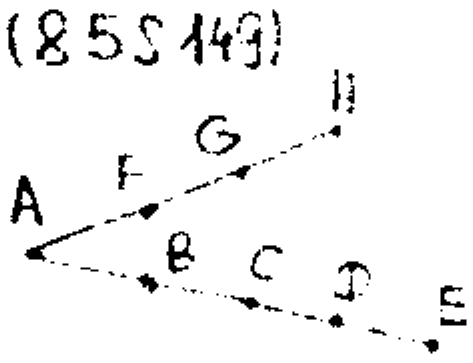
NB

NT

83S53
(85S149)

14-42-32

S(3)
ABCDE(2) AFGH(2)
∅



NB

T

83S54
(85H71)

14-36-3

S(3)
ABCDEF(2)
∅

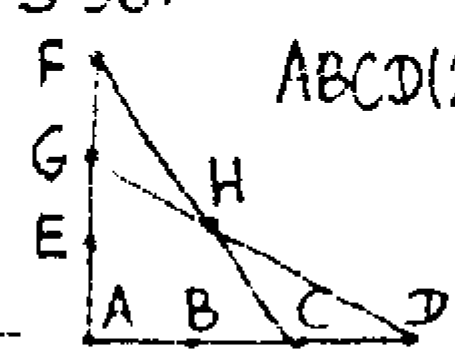
NB

T

83S55
(85S96)

14-46-36

S(3)
ABCD(2) AEFG(2) CFH(2) DGH(2)
∅



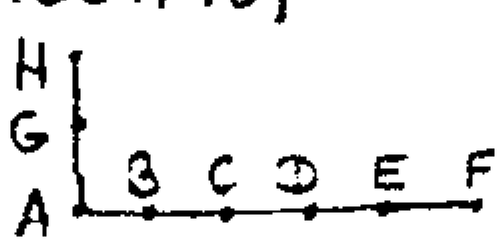
NB

NT

83S56
(85H70)

12-35-31

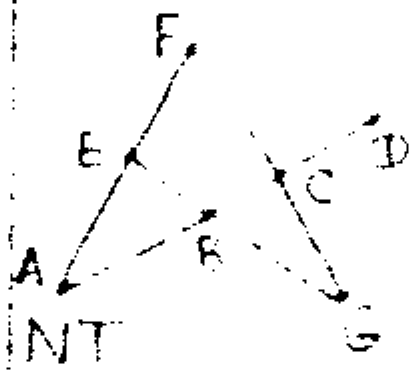
S(3)
ABCDEF(2) AGH(2)
∅



NB

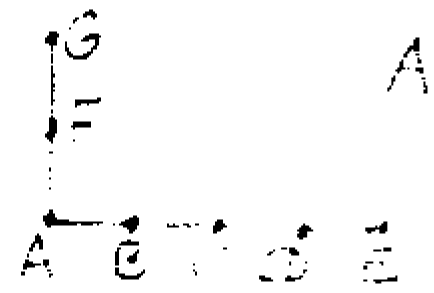
T

83S29 (85S50) — 17-49-45



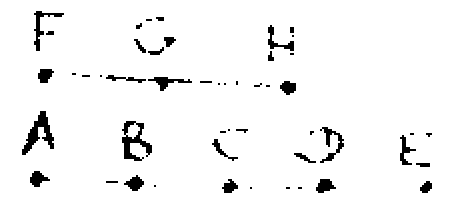
S(3)
ABCD(2) AEF(2) BEG(2) CFG(2)
∅
NB
NT

83S30 (85S136) — 17-45-4



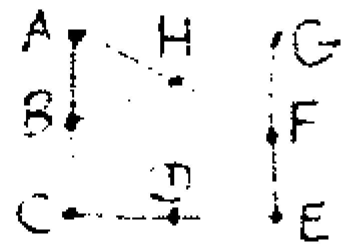
S(3)
ABCDE(2) AFG(2)
∅
NB
T

83S31 (85S137) — 17-45-41



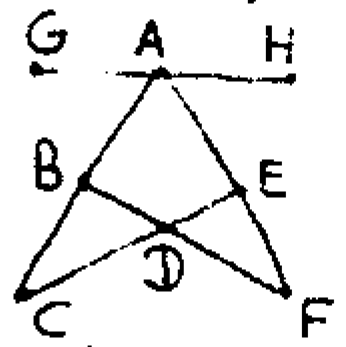
S(3)
ABCDE(2) FGH(2)
∅
NB
T

83S32 (85S18) — 18-51-5



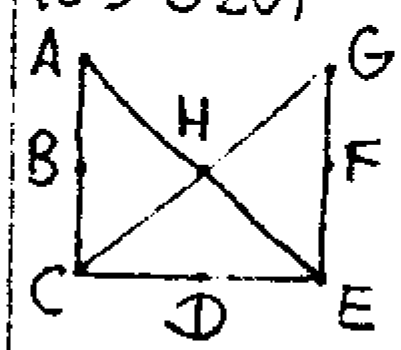
S(3)
ABC(2) CDE(2) EFG(2) AFH(2) BGH(2)
∅
NB
NT

83S33 (85S19) — 18-51-50



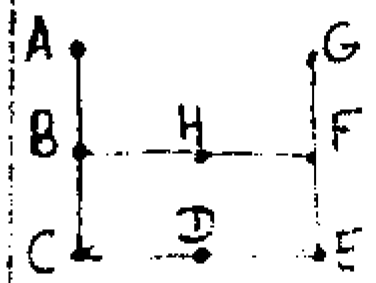
S(3)
ABC(2) AEF(2) BDF(2) CDE(2) AGH(2)
∅
NB
NT

83S34 (85S20) — 18-51-



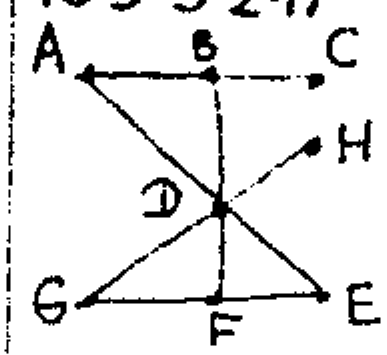
S(3)
ABC(2) CDE(2) EFG(2) AEH(2) CG
∅
NB
NT

83S35 (85S22) — 18-51-50



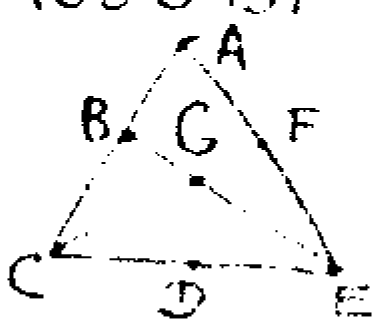
S(3)
ABC(2) CDE(2) EFG(2) CGH(2) BFH(2)
∅
NB
NT

83S36 (85S21) — 18-51-



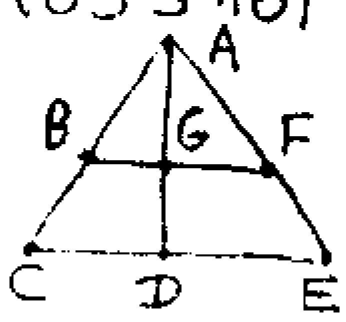
S(3)
ABC(2) ADE(2) BDF(2) DGH(2) EFG
∅
NB
NT

83S37 (85S15) — 18-51-50



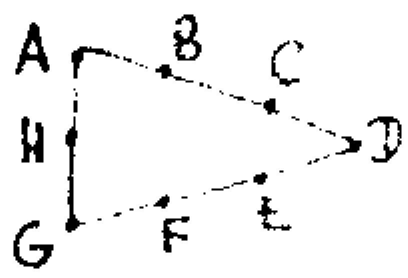
S(3)
ABC(2) CDE(2) AEF(2) BEG(2) CFG(2)
∅
NB
NT

83S38 (85S16) — 18-51-5



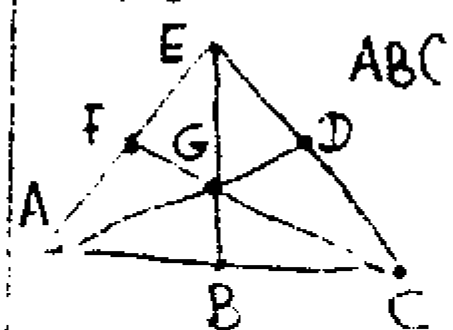
S(3)
ABC(2) CDE(2) AEF(2) ADG(2) BFG
∅
NB
NT

83S39 (85S95) — 16-47-40



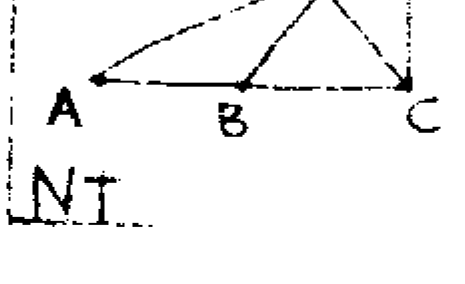
S(3)
ABCD(2) DEFG(2) AGH(2)
∅
NB
T(BCDEF, ABCH, EFGH)

83S40 (85S17) — 16-50-46



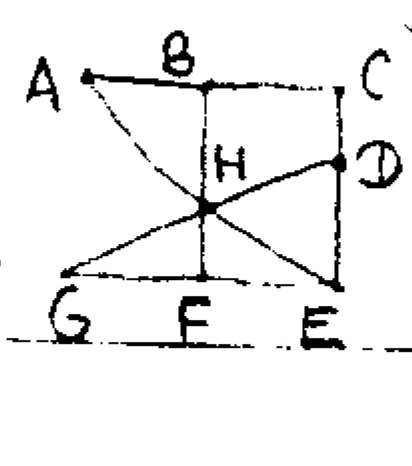
S(3)
ABC(2) AEF(2) CDE(2) CFG(2) BEG(2) ADG(
∅
NB
NT

83S41 (85S23) — 16-50-46



S(3)
ABC(2) ADE(2) BDF(2) CEF(2) CDG(2) FGH(2)
∅
NB
NT

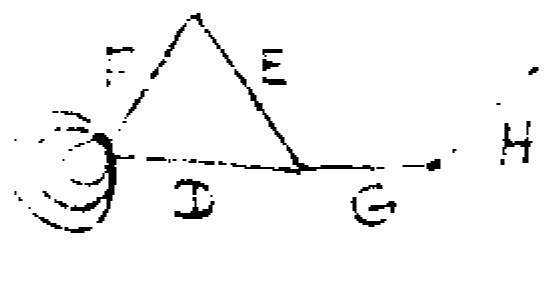
83S42 (85S24) — 16-50-4



S(3)
ABC(2) CDE(2) EFG(2) AEH(2) DGH(2) BFH(2)
∅
NB
NT

84L3 (84L6) — 5-3-4

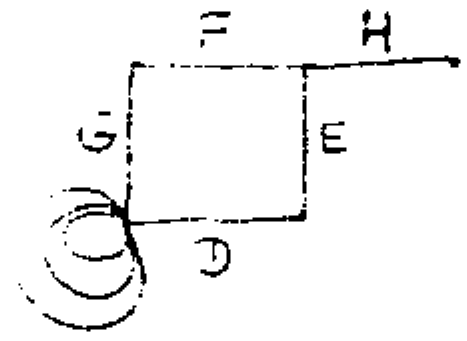
ABCDEF(2)
|
ABC



T

84L4 (84L24) — 7-4-4

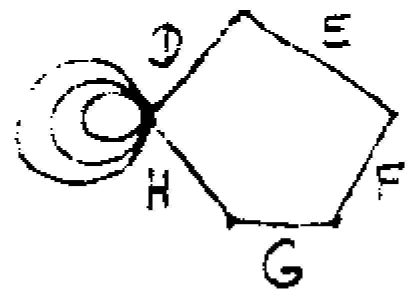
ABCDEFG(3)
|
ABC



T

84L5 (84H1) — 10-5-4

S(4)
|
ABC



T

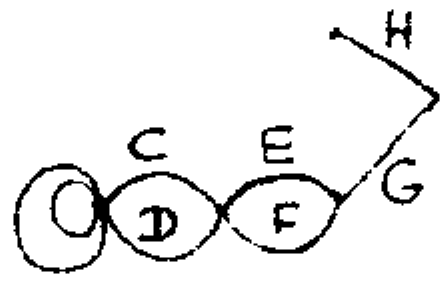
84L6 (84L3) — 4-3-5

ABCDE(1)
|
AB

T

84L7 SD — 4-4-4

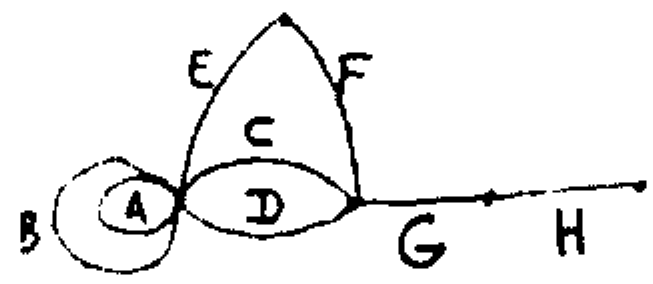
ABCDEF(2)
ABCD(1) ABEF(1)
AB



T

84L8 SD — 5-5-5

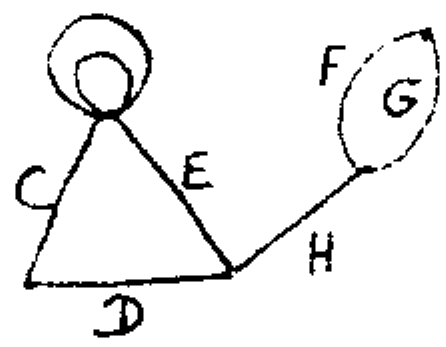
ABCDEF(2)
|
ABCD(1)
|
AB



T

84L9 (84L25) — 5-6-4

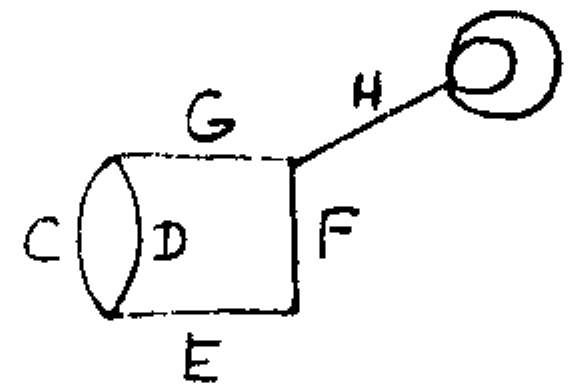
ABCDEFG(3)
ABCDE(2) ABFG(1)
AB



T

84L10 (84L27) — 7-7-5

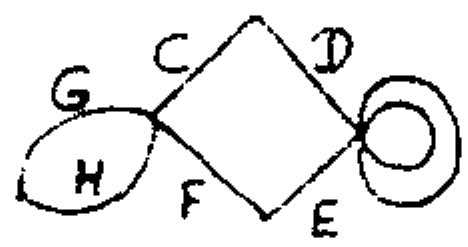
ABCDEFG(3)
|
ABCD(1)
|
AB



T

84L11 (84H2) — 7-8-4

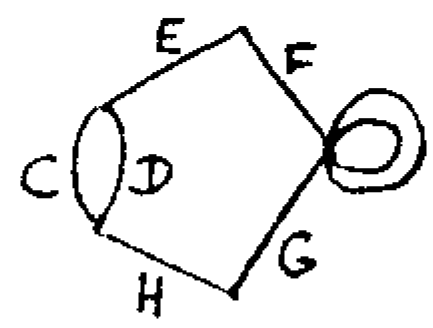
S(4)
ABCDEF(3) ABGH(1)
AB



T

84L12 (84H6) — 10-9-5

S(4)
|
ABCD(1)
|
AB



T

84L13 SD — 6-6-6

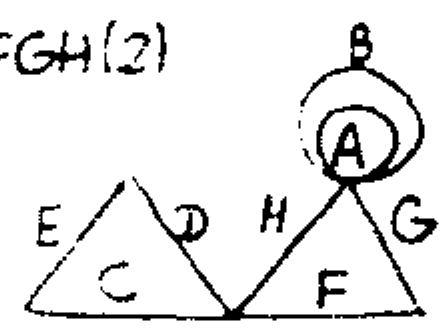
ABCDEF(2)
|
AB

NB(CDEF | ∅)

T

84L14 (84H3) — 6-9-4

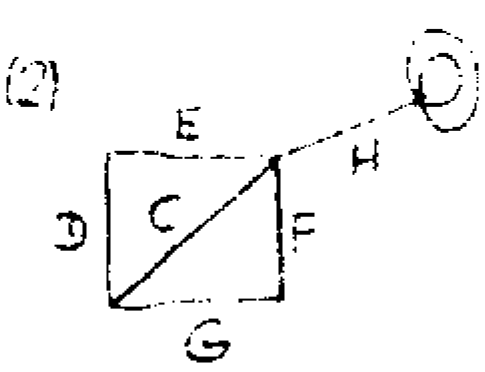
S(4)
ABCDE(2) ABFGH(2)
AB



T

84L15 (84L29) — 7-8-5

ABCDEFG(3)
ABCDE(2) ABCFG(2)
AB



T

84L16 (84L38) — 9-9-6

ABCDEFG(3)
|
ABCDE(2)
|
AB

NB(ABCDEFG | ABF(1))

T

83S57 (85L37) 8-21-35

ABCDEFG(2)

Ø

NB

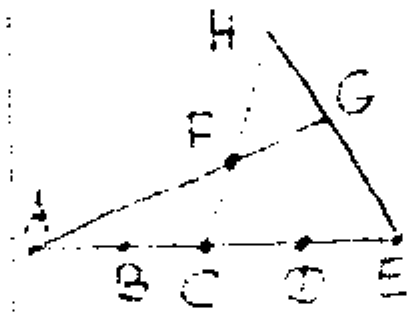
T

83S58 (85S143) 13-43-

S(3)

ABCDE(2) AFG(2) CFH(2) EGH(2)

Ø



NB

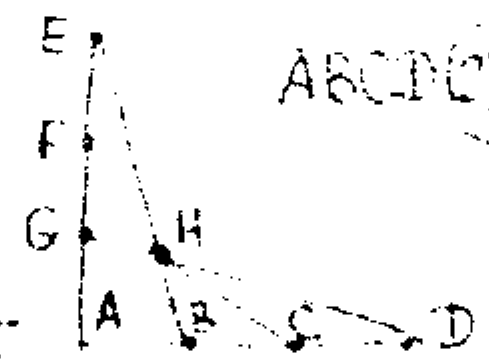
NT

83S59 (85S37) 12-45-32

S(3)

ABCD(2) AEFG(2) BEH(2) CFH(2) DGH(2)

Ø



NB

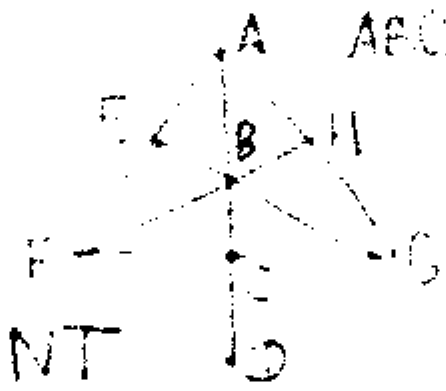
NT

83S60 (85S62) 13-47-

S(3)

ABCD(2) AEF(2) AGH(2) BEG(2) BFH(2) C

Ø



N

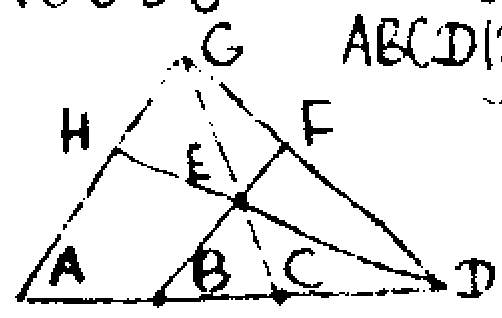
NT

83S61 (85S61) 13-47-37

S(3)

ABCD(2) AGH(2) BEF(2) CEG(2) DFG(2) DEH(2)

Ø



NB

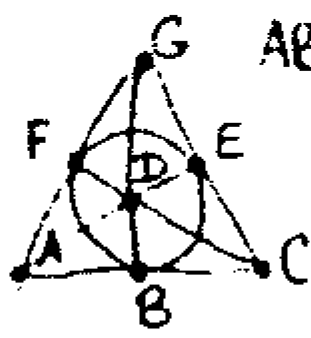
NT

83S62 (85S28) 14-49-

S(3)

ABC(2) ADE(2) AFG(2) BEF(2) BDG(2) CDF(2) CE

Ø



NB

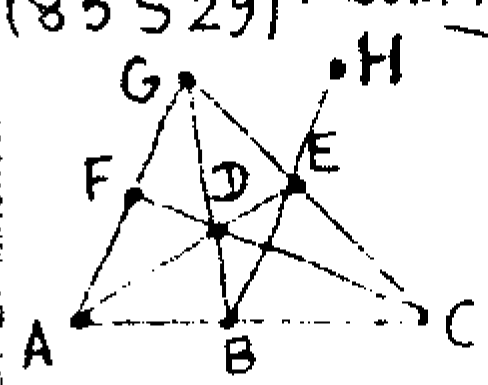
NT

83S63 (85S29) 14-49-42

S(3)

ABC(2) ADE(2) AFG(2) BDG(2) BEH(2) CDF(2) CEG(2)

Ø



NB

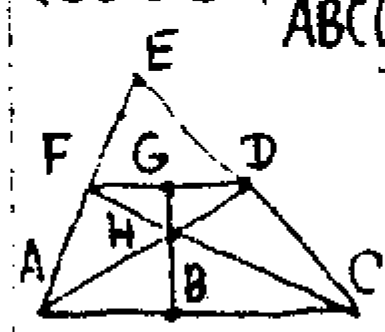
NT

83S64 (85S30) 14-49-

S(3)

ABC(2) ADH(2) AEF(2) BGH(2) CDE(2) CFH(2) D

Ø



NB

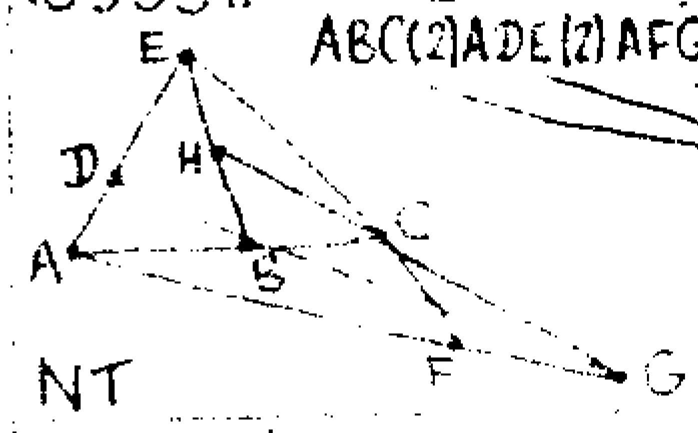
NT

83S65 (85S31) 14-49-42

S(3)

ABC(2) ADE(2) AFG(2) BDG(2) BEH(2) CEF(2) CGH(2)

Ø



NB

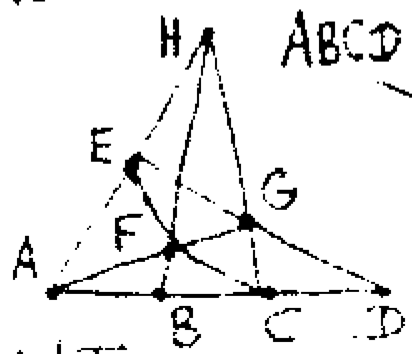
NT

83S66 (85S63) 11-46-

S(3)

ABCD(2) AEH(2) AFG(2) BFH(2) CEF(2) CGH(2)

Ø



NB

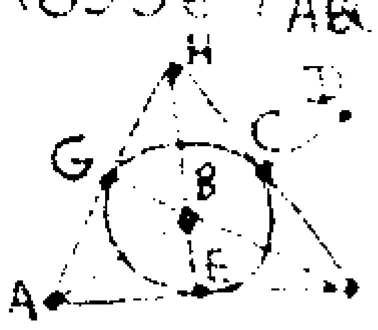
NT

83S67 (85S6) 11-46-33

S(3)

ABCD(2) AEF(2) AGH(2) BEH(2) BFG(2) CEG(2) CFH(2)

Ø



NB

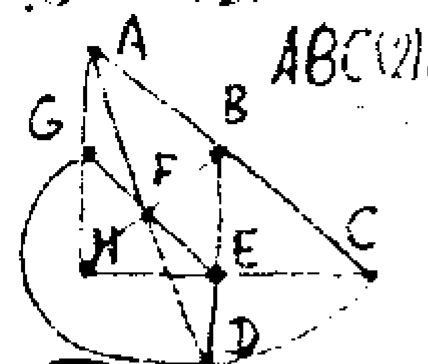
NT

83S68 (85S32) 12-48

S(3)

ABC(2) ADF(2) AGH(2) BED(2) BFH(2) CDG(2) CEH

Ø

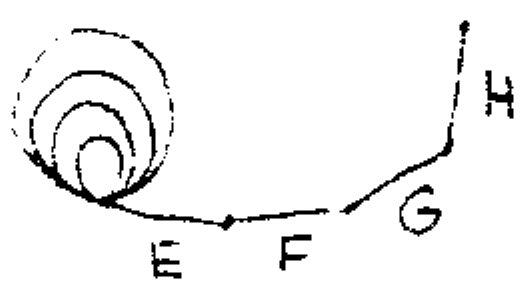


N

NT

84L1 SD 4-1-4

ABCD

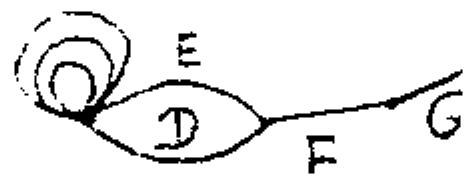


T

84L2 SD 4-2-

ABCDE(1)

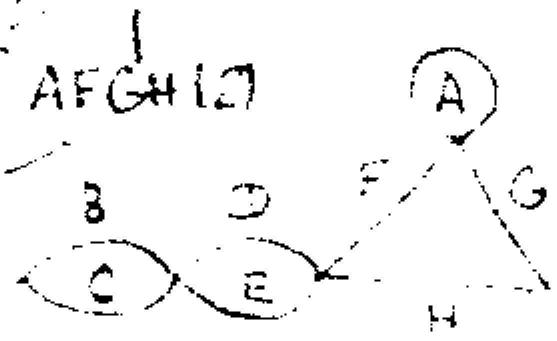
ABC



T

84L31 (84H4) 5-12-4

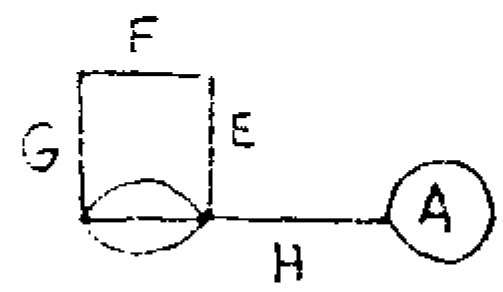
S(4)
ABCDF(2) ABCFGH(3) ADEFGH(3)
ABC(1) ADE(1) AFGH(2)
A



T(FGH, FGH, BC, DE)

84L32 SD 7-10-7

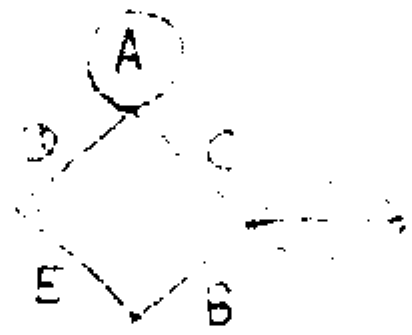
ABCDEFG(3)
ABCD(1)
A



T

84L33 (84H7) 7-12-5

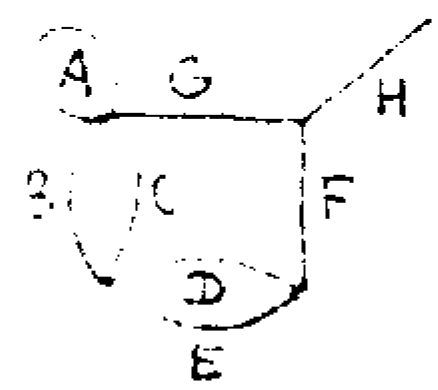
S(4)
ABCDE(3) AFGH(1)
A



T

84L34 (84L41) 7-12-7

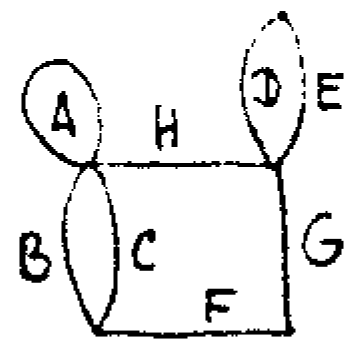
ABCDEFG(3)
ABCDE(2)
ABC(1) ADE(1)
A



T(BCFG, DEFG, FG, H)

84L35 (84H9) 7-14-5

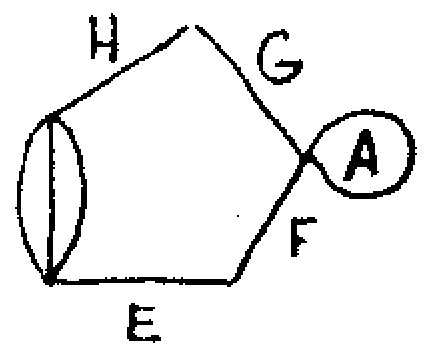
S(4)
ABCFGH(3) ABCDE(2)
ABC(1) ADE(1)
A



T(BCFGH, DE, FGH, FGH)

84L36 (84H15) 10-13-7

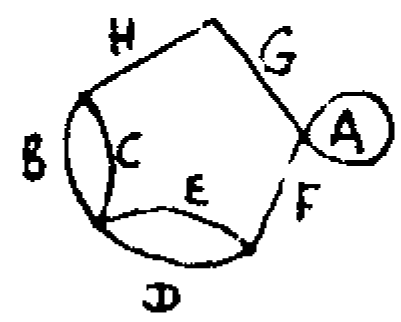
S(4)
ABCD(1)
A



T

84L37 (84H33) 10-16-7

S(4)
ABCDE(2)
ABC(1) ADE(1)
A



T(BCFGH, DEFGH, FGH, FGH)

84L38 (84L16) 6-9-9

ABCDEF(2)
ABC(1)
A

NB $\begin{pmatrix} BDEF \\ | \\ \varnothing \end{pmatrix}$

T

84L39 SD 6-12-6

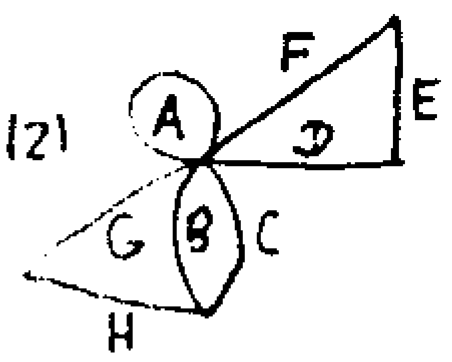
ABCDEFG(3)
ABCDE(2) AFG(1)
A

NB $\begin{pmatrix} BCDE \\ | \\ \varnothing \end{pmatrix}$

T

84L40 (84H10) 6-15-5

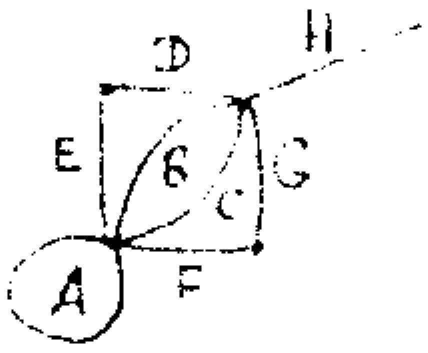
S(4)
ABCGH(2) ABCDEF(3)
ABC(1) ADEF(2)
A



T(BCGH, GH, DEF, DEF)

84L41 (84L34) 7-12-7

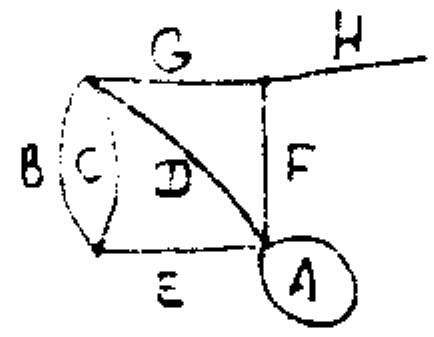
ABCDEFG(3)
ABCDE(2) ABCFG(2)
ABC(1)
A



T(BCDEFG, DE, FG, H)

84L42 SD 7-13-7

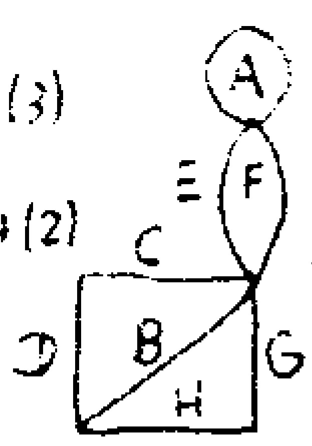
ABCDEFG(3)
ABCDE(2) ADFG(2)
ABC(1)
A



T(DEFG, BCE, FG, H)

84L43 (84H13) 7-16-5

S(4)
ABCDEF(3) ABCDGH(3) ABEFGH(3)
ABCD(2) AEF(1) ABGH(2)
A



T(BCDGH, CD, EF, GH)

84L44 SD 9-14-9

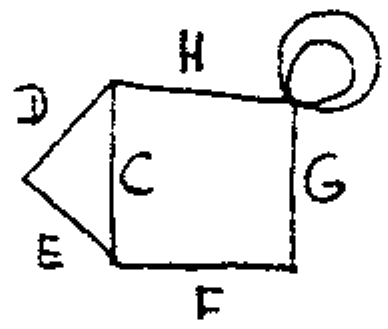
ABCDEFG(3)
ABCDE(2)
ABC(1)
A

NB $\begin{pmatrix} ABDFGH \\ | \\ AF(1) \end{pmatrix}$

T

84L17 (84H8) 10-11-5

S(4)
ABCDE(2) ABCFGH(3)
AB



T

84L18 (84H25) 13-12

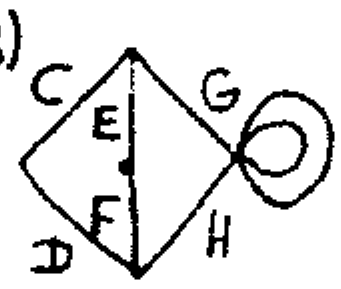
S(4)
ABCDE(2)
AB

NB(S(4) / ABGH)

T

84L19 (84H12) 11-12-5

S(4)
ABCDEF(3) ABCDGH(3) ABEFGH(3)
AB



T(CD, EF, GH, CDEFGH)

84L20 (84L60) 11-10

ABCDEFG(3)
AB

NB(ABCDEF / ABC

T

84L21 (84H27) 14-13-6

S(4)
ABCDEF(3) ABCDGH(3)
AB

NB(S(4) / ABEG)

T

84L22 (84H82) 17-14

S(4)
ABCDEF(3)
AB

NB(S(4) / ABGH

T

84L23 (84S2) 20-15-8

S(4)
AB

NB(S(4) / ABCD)

T

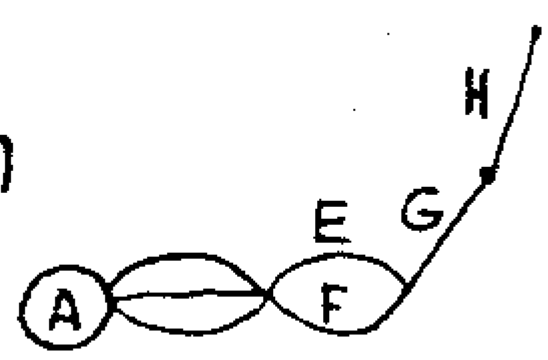
84L24 (84L4) 4-4-

ABCDE(1)
A

T

84L25 (84L9) 4-6-5

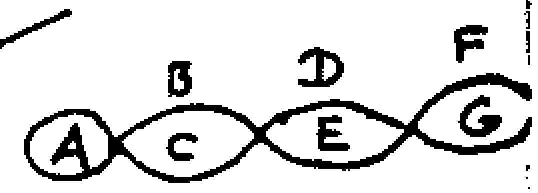
ABCDEF(2)
ABCD(1) AEF(1)
A



T

84L26 SD 4-8-

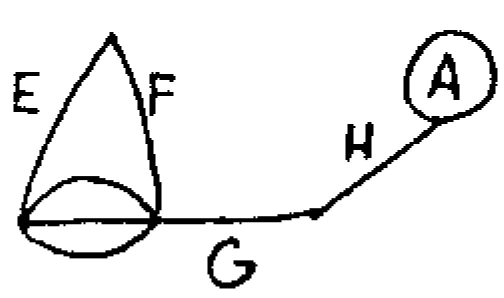
ABCDEFG(3)
ABCDE(2) ABCFG(2) ADEFG(2)
ABC(1) ADE(1) AFG(1)
A



T(BC, DE, FG, H)

84L27 (84L10) 5-7-7

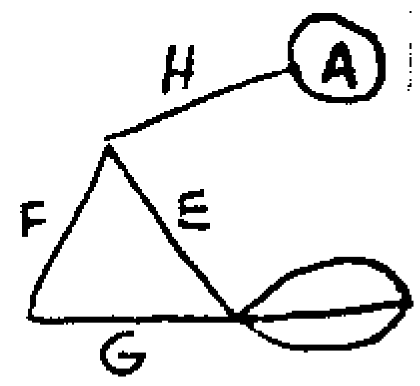
ABCDEF(2)
ABCD(1)
A



T

84L28 SD 5-9-

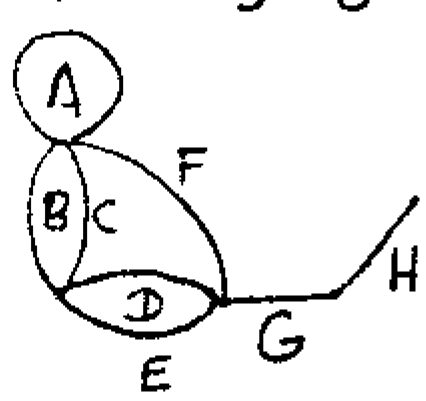
ABCDEFG(3)
ABCD(1) AEFG(2)
A



T

84L29 (84L15) 5-8-7

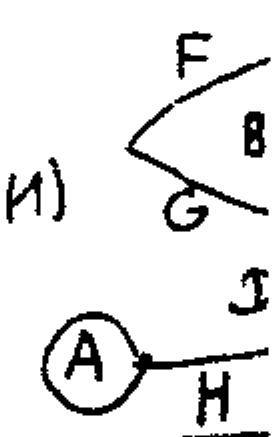
ABCDEF(2)
ABC(1) ADE(1)
A



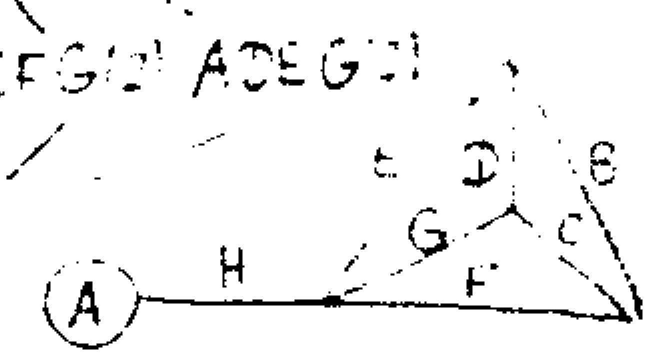
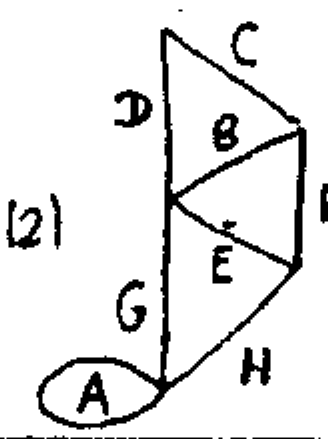
T

84L30 SD 5-10-

ABCDEFG(3)
ABCFG(2) ABCDE(2)
ABC(1) ADE(1)
A



T(BCFG, DE, FG, H)

84L59 (84S18) 20-25-13 S(4) ABC(1) A NB (ABCDEFGH / ADE(2)) T	84L60 (84L20) 7-10-11 ABCDEF(2) A NB (ABCDE / A) T
84L61 SD 2-16-8 ABCDEFG(3) ABCD(2) ABEF(2) ACFG(2) ADEG(2) A  NT	84L62 (84L45) 9-15-9 ABCDEFG(3) ABCDE(2) ABFG(2) A NB (ABCDE / A) T
84L63 (84H26) 7-18-6 S(4) ABCDE(2) AFGH(2) A NB (ABCDE / A) T	84L64 SD 10-17-10 ABCDEFG(3) ABCD(2) ABEF(2) ADFG(2) A NB (ACDEFG / AC(1)) T(BCE, CDG, EFG, H)
84L65 (84H39) 10-21-7 S(4) ABCDEF(3) ABEFGH(3) ABCD(2) ABEF(2) AEGH(2) A  T(BCDF, EFGH, CD, GH)	84L66 (84H20) 11-20-7 S(4) ABCDEF(3) ABCDGH(3) ABEFGH(3) ABCD(2) ABEF(2) ABGH(2) A  T(BCDEFGH, CD, EF, GH)
84L67 (84L53) 11-16-11 ABCDEFG(3) ABCDE(2) A NB (ABCDE / A) T	84L68 (84H42) 13-21-9 S(4) ABCDE(2) ABFGH(3) A NB (ABCDE / A) T
84L69 (84H65) 16-22-11 S(4) ABCDE(2) A NB (ABCDE / A) T	84L70 SD 12-18-12 ABCDEFG(3) ABCD(2) AEFG(2) A NB (ABCEFG / AB(1)) T
84L71 (84H88) 13-24-9 S(4) ABCDEH(3) ABCD(2) AEFG(2) A NB (S(4) / AEFG(2)) T(EFGH, BCDH, BCDH, FG)	84L72 (84S11) 17-27-12 S(4) ABCD(2) AEFG(2) A NB (S(4) / ABCD(2)) T

84L45 (84L62) 9-15-9

ABCDEFG(3)
ABCD(2) AEF(1)
A

NB (ABCDEG / AG(1))

T

84L46 (84H28) 9-18-6

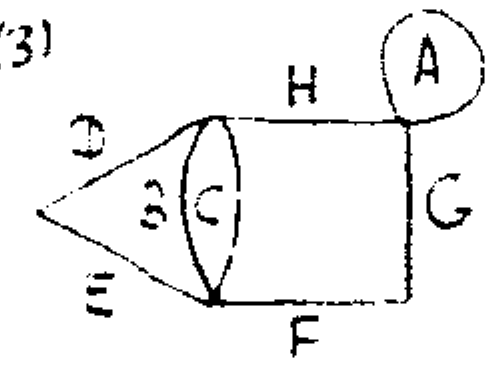
S(4)
ABCDGH(3) ABCDEF(3)
ABCD(2) AEF(1)
A

NB (S(4) / AEFG)

T(BCDGH, BCD, EF, GH)

84L47 (84H17) 10-17-7

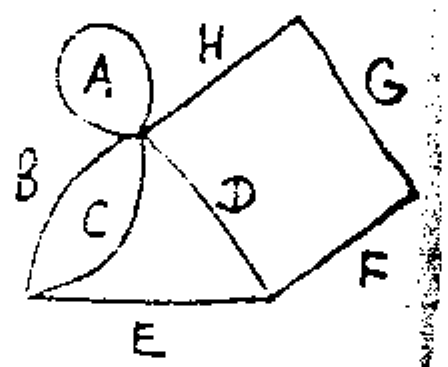
S(4)
ABCDE(2) ABCFGH(3)
ABC(1)
A



T(BCDEFGH, FGH, FGH, DE)

84L48 (84H34) 10-18-7

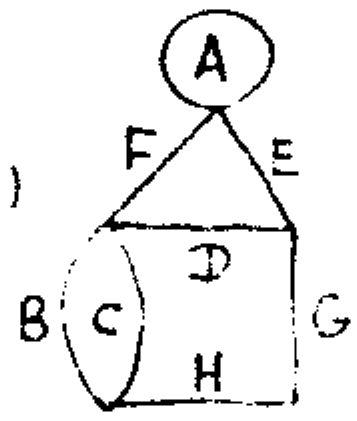
S(4)
ABCDE(2) ADFGH(3)
ABC(1)
A



T(DEFGH, BCE, FGH, FGH)

84L49 (84H36) 10-19-7

S(4)
ABCDGH(3) ABCDEF(3)
ABC(1) ADEF(2)
A



T(DEFGH, BCGH, EF, GH)

84L50 (84H41) 13-19-9

S(4)
ABCDE(2)
ABC(1)
A

NB (ABDEFGH / AFG(2))

T

84L51 (84H86) 13-21-9

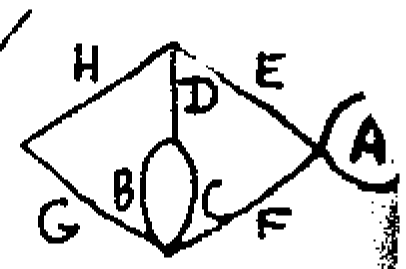
S(4)
ABCDEF(3)
ABCD(2) AEF(1)
A

NB (ABCDEGH / AGH(2))

T(BCDGH, BCDGH, EFGH, GH)

84L52 (84H38) 11-20-7

S(4)
ABCDEF(3) ABCDGH(3) AEFGH(3)
ABC(1)
A



T(DEFGH, BCD, EF, GH)

84L53 (84L67) 11-16-11

ABCDEFG(3)
ABC(1)
A

NB (ABDEFG / AD(1))

T

84L54 (84H83) 11-20-7

S(4)
ABCDEF(3) AGH(1)
A

NB (ABCDEF / AB(1))

T

84L55 (84H44) 14-21-9

S(4)
ABCDEF(3) ABCDGH(3)
ABC(1)
A

NB (ABDEFGH / AEG(2))

T(BCDEFGH, DEFGH, EF, GH)

84L56 (84H87) 14-22-9

S(4)
ABCDEF(3) ADEGH(3)
ABC(1)
A

NB (ABDEFGH / AFG(2))

T(DEFGH, DEFGH, BCF, GH)

84L57 (84H103) 17-23-11

S(4)
ABCDEF(3)
ABC(1)
A

NB (ABDEFGH / AGH(2))

84L58 (84S5) 17-24-11

S(4)
ABCDE(3) AFG(1)
A

NB (ABCDEFH / ABF(2))

84L87 (84H134) 22-28-14 S(4) — ABCDEF(3) — ABCD(2) — A NB(ABCDEF / AB(1)) T	84L88 (84S36) 23-30-15 S(4) — ABCD(2) ABEFG(3) — A NB(S(4) / ABCD) T
84L89 (84S38) 23-30-15 S(4) — ABCD(2) AEFGH(3) — A NB(S(4) / ABCD) T	84L90 (84S83) 26-31-17 S(4) — ABCD(2) — A NB(S(4) / ABCD) T
84L91 (84S1) 14-28-8 S(4) — ABCDE(3) ABCFG(3) ABDGH(3) ABEFH(3) ACDFH(3) ACEGH(3) ADEFG(3) — A BIN, NON REG NT	84L92 SD 16-20-16 ABCDEFG(3) — A NB(ABCDEF / AB(1)) T
84L93 (84S3) 17-29-10 S(4) — ABCDE(3) ABCFG(3) ABEFH(3) ACDFH(3) ACEGH(3) ADEFG(3) — A NB(ABCDFHG / ABD(2)) NT	84L94 (84H118) 20-28-12 S(4) — ABCDEF(3) ABCGH(3) ADEGH(3) — A NB(ABCDEF / AB(1)) T(BCDEFGH, BCF, DEF, GH)
84L95 (84S7) 20-30-12 S(4) — ABCDE(3) ABCFG(3) ACDFH(3) ACEGH(3) ADEFG(3) — A NB(ABCDFGH / ABD(2)) NT	84L96 (84S8) 20-30-12 S(4) — ABCDE(3) ABCFG(3) ABDFH(3) ACEGH(3) ADEFG(3) — A NB(ABCEFGH / ABE(2)) NT
84L97 (84S23) 23-31-14 S(4) — ABCDE(3) ABCFG(3) ACEGH(3) ADEFG(3) — A NB(ABDEFGH / ABD(2)) T(BCH, BDF, DEH, FGH)	84L98 (84H135) 23-29-14 S(4) — ABCDEF(3) AEFGH(3) — A NB(ABCDEF / AB(1)) T
84L99 (84S24) 23-31-14 S(4) — ABCDE(3) ABEGH(3) ACFGH(3) ADEFG(3) — A NB(ABCDFGH / ABD(2)) T(BCH, BDE, CDF, FGH)	84L100 (84S30) 23-31-14 S(4) — ABCDE(3) ABEFH(3) ACEGH(3) ADEFG(3) — A NB(ABCDFGH / ABD(2)) NT

84L73 SD — 12-18-12

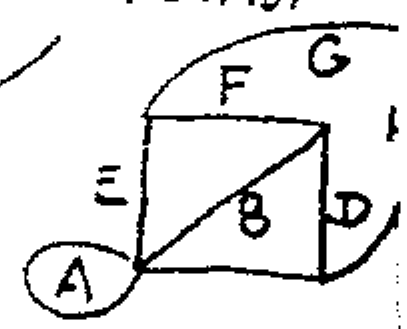
ABCDEFG(3)
ABCD(2) ABEF(2)
A

NB (ACDEFG / AG(1))

T

84L74 (84H84) — 12-24-

S(4)
ABCDEF(3) ACEGH(3) ADFGH(3)
ABCD(2) ABEF(2)
A



NT

84L75 (84H45) — 14-23-9

S(4)
ABCDGH(3) ABCDEF(3)
ABCD(2) ABEF(2)
A

NB (ABCDEFG / AEG(2))

T(BCDEF, CDGH, EF, GH)

84L76 (84H92) — 15-25-

S(4)
ABCDEF(3) ADFGH(3)
ABCD(2) ABEF(2)
A

NB (ABCDE / AGH

T(CDGH, EFGH, BCE, GH)

84L77 (84H116) — 18-26-12

ABCDEF(3)
ABCD(2) ABEF(2)
A

NB (ACDEFGH / AGH(2))

T(BCDEFGH, CDGH, EFGH, GH)

84L78 SD — 14-19-

ABCDEFG(3)
ABCD(2)
A

NB (ABCDEF / AE(1)

T

84L79 (84H47) — 15-24-9

S(4)
ABCDEF(3) ABCDGH(3) AEFGH(3)
ABCD(2)
A

NB (ABCDEFG / AEG(2))

T(BCDEFGH, BCD, EF, GH)

84L80 (84H93) — 16-26-10

S(4)
ABCDEF(3) ABEGH(3) ADFGH(3)
ABCD(2)
A

NB (ABCDEF / AEG(2

T(EFGH, BCE, CDF, GH)

84L81 (84S4) — 17-28-11

S(4)
ABCD(2) ABEFG(3) ACEFH(3) ADEGH(3)
A

NB (S(4) / ABCD)

NT

84L82 (84H104) — 17-26-11

S(4)
ABCD(2) ABEFGH(3)
A

NB (ABEFGH / AB(1)

T

84L83 (84H67) — 18-25-11

S(4)
ABCDEF(3) ABCDGH(3)
ABCD(2)
A

NB (ABCDEFG / AEG(2))

T(BCDEFGH, BCDEFGH, EF, GH)

84L84 (84H117) — 19-27-12

S(4)
ABCDEF(3) ABEGH(3)
ABCD(2)
A

NB (ABCDEF / AFG(2

T(BCDEFGH, CDF, EFGH, GH)

84L85 (84H108) — 19-27-12

S(4)
ABCDEF(3) AEFGH(3)
ABCD(2)
A

NB (ABCDEF / AE(1))

T(BCDEFGH, EFGH, BCD, GH)

84L86 (84S13) — 20-29-1

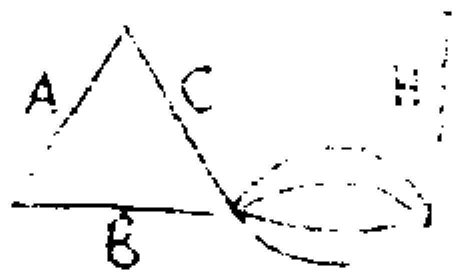
S(4)
ABCD(2) ABEFG(3) ACEFH(3)
A

NB (S(4) / ABCD)

T(EFGH, EFGH, BDG, CDH)

84H7
(84L33)
5-12-7

ABCDEFG(3)
ABC(2) DEFG(1)
∅



T

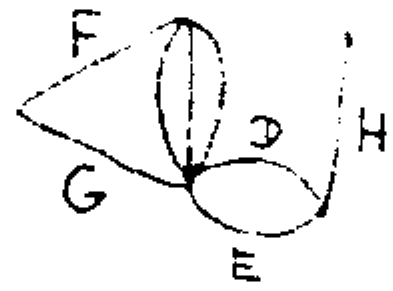
84H8
(84L17)
5-11-10

ABCDEF(2)
ABC(1) DE(1)
∅

T

84H9
(84L35)
5-14-7

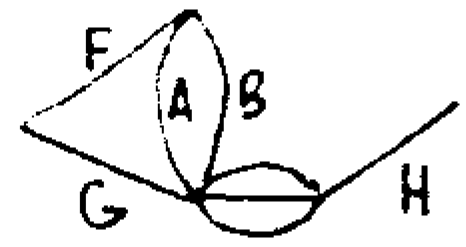
ABCDEFG(3)
ABCFG(2) ABCDE(2)
ABC(1) DE(1)
∅



T(ABCFG, DE, FG, H)

84H10
(84L40)
5-15-6

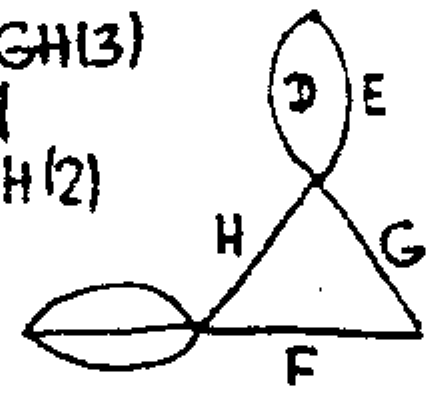
ABCDEFG(3)
ABFG(2) ABCDE(2)
AB(1) CDE(1)
∅



T(ABFG, CDE, FG, H)

84H11
SD
5-18-5

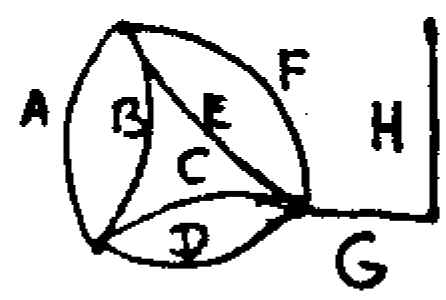
S(4)
ABCDE(2) ABCFGH(3) DEFGH(3)
ABC(1) DE(1) FGH(2)
∅



T(ABC, DE, FGH, FGH)

84H12
(84L19)
5-12-11

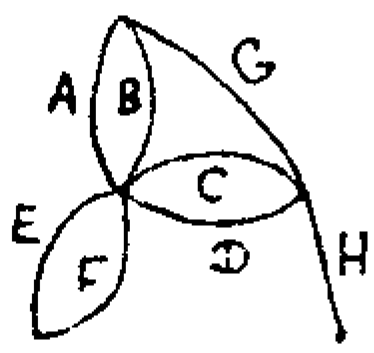
ABCDEF(2)
AB(1) CD(1) EF(1)
∅



NT

84H13
(84L43)
5-16-7

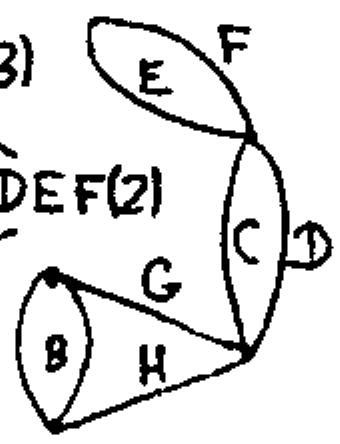
ABCDEFG(3)
ABCDG(2) ABEF(2) CDEF(2)
AB(1) CD(1) EF(1)
∅



T(ABG, CDG, EF, H)

84H14
SD
5-20-5

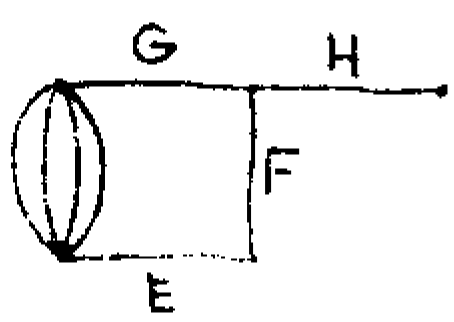
S(4)
ABCDGH(3) ABEFGH(3) ABCDEF(3)
ABGH(2) ABCD(2) ABEF(2) CDEF(2)
AB(1) CD(1) EF(1)
∅



T(ABGH, CD, EF, GH)

84H15
(84L36)
7-13-10

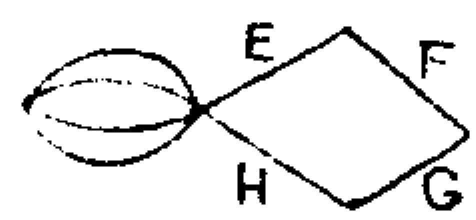
ABCDEFG(3)
ABCD(1)
∅



T

84H16
SD
7-16-7

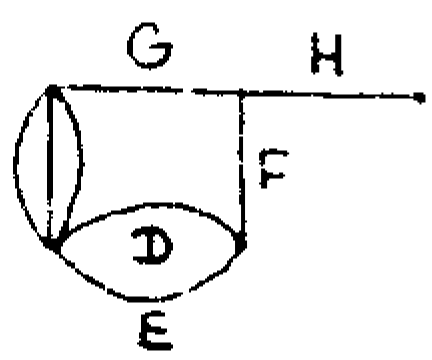
S(4)
ABCD(1) EFGH(3)
∅



T

84H17
(84L47)
7-17-10

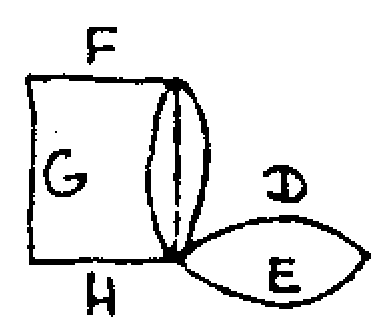
ABCDEFG(3)
ABCDE(2)
ABC(1) DE(1)
∅



T(ABCFG, DEFG, FG, H)

84H18
SD
7-20-7

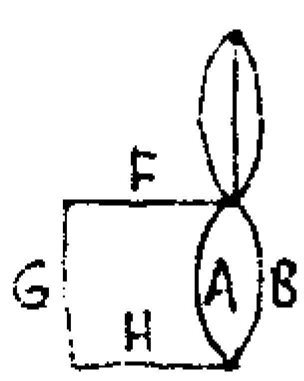
S(4)
ABCFGH(3) ABCDE(2)
ABC(1) DE(1)
∅



T(ABCFGH, DE, FGH, FGH)

84H19
(84H30)
7-21-6

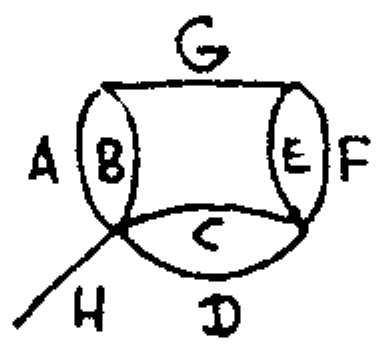
S(4)
ABFGH(3) ABCDE(2)
AB(1) CDE(1)
∅



T(ABFGH, CDE, FGH, FGH)

84H20
(84L66)
7-20-11

ABCDEFG(3)
ABCD(2) ABEF(2) CDEF(2)
AB(1) CD(1) EF(1)
∅



T(ABG, CDG, EFG, H)

84 L 101 (84 S 53) 26-32-16

S(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) ADEFG(3)
A

NB(ABCDFGH / ABD(2))

T(BCDEFGH, BCH, DEH, FGH)

84 L 102 (84 H 175) 26-30-1

S(4)
ABCDEF(3)
A

NB(ABCDEF / AB(1))

T

84 L 103 (84 S 59) 26-32-16

S(4)
ABCDE(3) ABCFGH(3) ADEFG(3)
A

NB(ABCDFGH / ABD(2))

T(BCDEFGH, BCH, BDE, FGH)

84 L 104 (84 S 69) 26-32-1

S(4)
ABCDE(3) ACEGH(3) ADEFG(3)
A

NB(ABCDFG / ABD(2))

T(BCDEFGH, BCH, BDF, FGH)

84 L 105 (84 S 107) 29-33-18

S(4)
ABCDE(3) ABFGH(3)
A

NB(ACDEFGH / ACF(2))

T

84 L 106 (84 S 156) 29-33-1

S(4)
ABCDE(3) ABCFG(3)
A

NB(ACDEFG / ADF(2))

T

84 L 107 (84 S 295) 32-34-20

S(4)
ABCDE(3)
A

NB(S(4) / AFG)

T

84 L 108 (84 S 296) 35-35-2

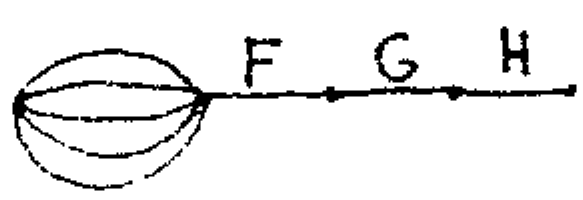
S(4)
A

NB(S(4) / ABC)

T

84 H 1 (84 L 5) 4-5-10

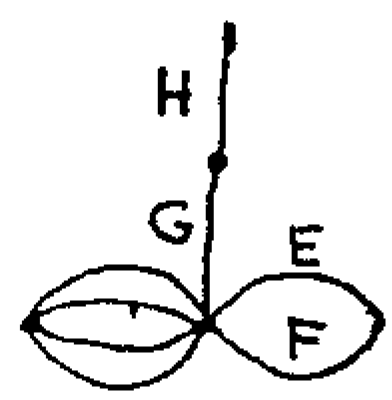
ABCDE(1)
∅



T

84 H 2 (84 L 11) 4-8-7

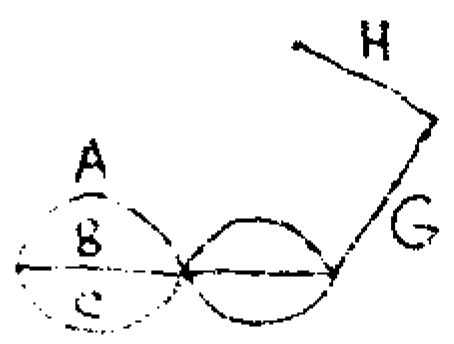
ABCDEF(2)
ABCD(1) EF(1)
∅



T

84 H 3 (84 L 14) 4-9-6

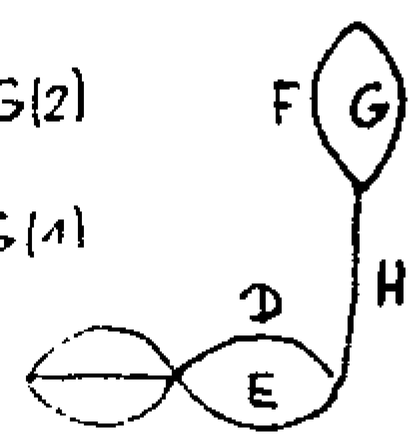
ABCDEF(2)
ABC(1) DEF(1)
∅



T

84 H 4 (84 L 31) 4-12-5

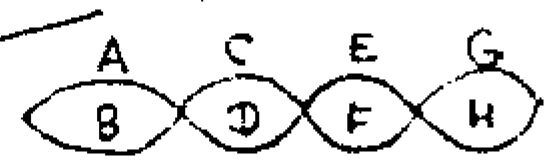
ABCDEFG(3)
ABCDE(2) ABCFG(2) DEFG(2)
ABC(1) DE(1) FG(1)
∅



T(ABC, DE, FG, H)

84 H 5 ISD 4-16-4

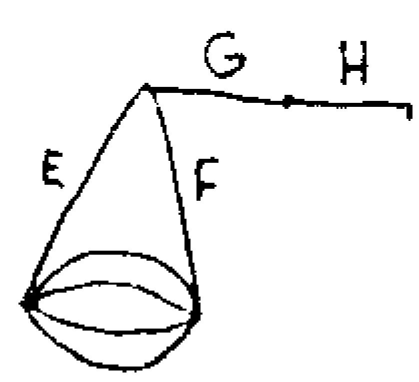
S(4)
ABCDEF(3) ABCDGH(3) ABEFGH(3) CDEFGH(3)
ABCD(2) ABEF(2) ABGH(2) CDEF(2) CDGH(2) EFGH(2)
AB(1) CD(1) EF(1) GH(1)
∅



T(AB, CD, EF, GH)

84 H 6 (84 L 12) 5-9-1

ABCDEF(2)
ABCD(1)
∅



T

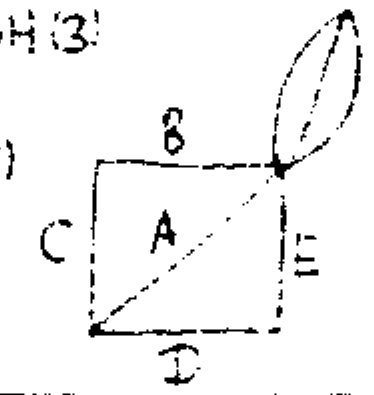
84H35 (84H31) 7-24-6

S(4)

ABCDE(3) ABCFGH(3) ADEFGH(3)

ABC(2) ADE(2) FGH(1)

Ø



T(ABCDE, FGH, BC, DE)

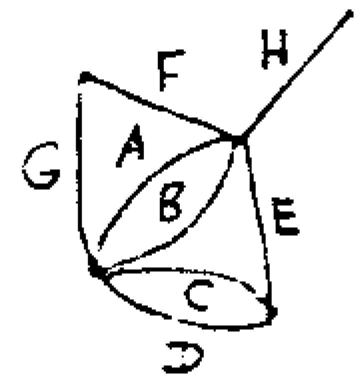
84H36 (84L49) 7-19-10

ABCDEFG(3)

ABFG(2) ABCDE(2)

AB(1) CD(1)

Ø



T(ABEFG, CDEFG, H)

84H37 (84H21) 7-24-7

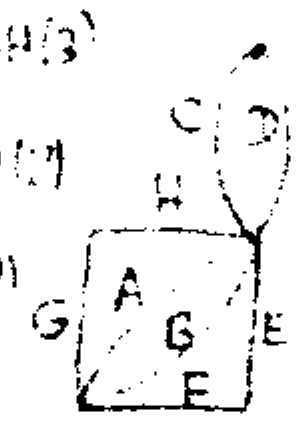
S(4)

ABEFGH(3) ABCDEF(3) ABCDGH(3)

ABEF(2) ABGH(2) ABCD(2)

AB(1) CD(1)

Ø



T(ABEFGH, CD, EF, GH)

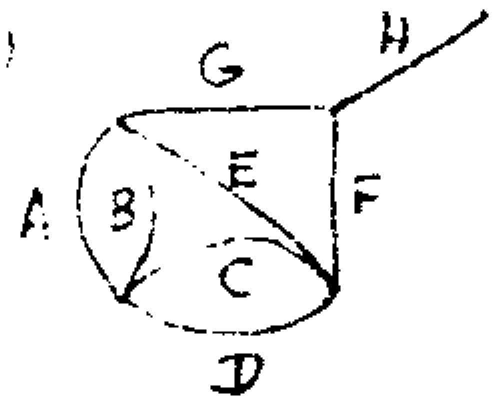
84H38 (84L52) 7-20-11

ABCDEFG(3)

ABCDE(2) EFG(2)

AB(1) CD(1)

Ø



NT

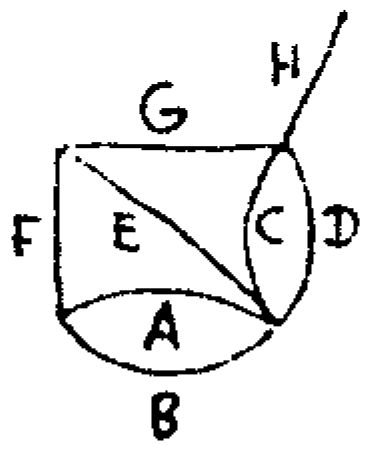
84H39 (84L65) 7-21-10

ABCDEFG(3)

ABEF(2) ABCD(2) CDEG(2)

AB(1) CD(1)

Ø



T(ABF, CDG, EFG, H)

84H40 SD 7-26-7

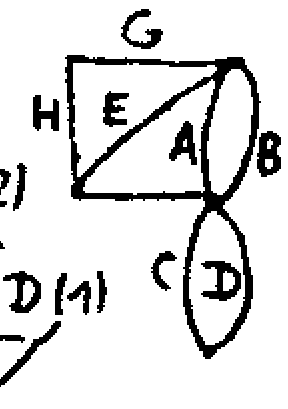
S(4)

CDEGH(3) ABEFGH(3) ABCDEF(3)

EGH(2) ABEF(2) ABCD(2)

AB(1) CD(1)

Ø



T(EFGH, ABF, CD, GH)

84H41 (84L50) 9-19-13

ABCDEFG(3)

ABCDE(2)

ABC(1)

Ø

$NB\begin{pmatrix} ADEFG \\ | \\ F(1) \end{pmatrix}$

T

84H42 (84L68) 9-21-13

ABCDEFG(3)

ABC(2) DEF(1)

Ø

$NB\begin{pmatrix} ABCFG \\ | \\ F(1) \end{pmatrix}$

T

84H43 (84H90) 9-27-7

S(4)

ABCGH(3) ABCDEF(3)

ABC(2) DEF(1)

Ø

$NB\begin{pmatrix} S(4) \\ | \\ DEFG \end{pmatrix}$

T(ABCGH, ABCGH, DEF, GH)

84H44 (84L55) 9-21-14

ABCDEFG(3)

ABCDE(2)

AB(1) CD(1)

Ø

$NB\begin{pmatrix} ACEFG \\ | \\ F(1) \end{pmatrix}$

T(ABEFG, CDEFG, FG, H)

84H45 (84L75) 9-23-14

ABCDEFG(3)

ABEF(2) ABCD(2)

AB(1) CD(1)

Ø

$NB\begin{pmatrix} ACEFG \\ | \\ G(1) \end{pmatrix}$

T(ABEFG, CDG, EFG, H)

84H46 SD 9-28-9

S(4)

ABEFGH(3) ABCDEF(3)

ABEF(2) ABCD(2)

AB(1) CD(1)

Ø

$NB\begin{pmatrix} ACDEFGH \\ | \\ CDG(2) \end{pmatrix}$

T(ABEFGH, EFGH, CD, GH)

84H47 (84L79) 9-24-15

ABCDEFG(3)

ABCD(2) EFG(2)

AB(1) CD(1)

Ø

$NB\begin{pmatrix} ACEFG \\ | \\ A(1) \end{pmatrix}$

NT

84H48 (84H89) 9-30-9

S(4)

ABEFGH(3) CDEFG(3) ABCD(2)

EFG(2) AB(1) CD(1)

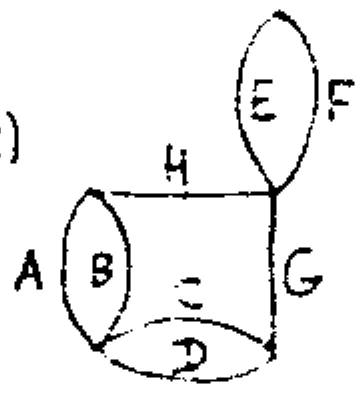
Ø

$NB\begin{pmatrix} ABEFGH \\ | \\ AB(1) \end{pmatrix}$

T(EFGH, EFGH, ABH, CD)

84H21
(84H37)
7-24-7

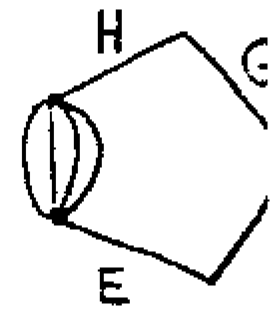
S(4)
ABCDGH(3) ABCDEF(3)
ABCD(2) ABEF(2) CDEF(2)
AB(1) CD(1) EF(1)
∅



T(ABGH, CDGH, EF, GH

84H22
SD
10-2

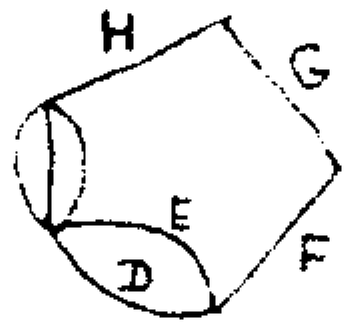
S(4)
ABCD(1)
∅



T

84H23
(84H49)
10-23-10

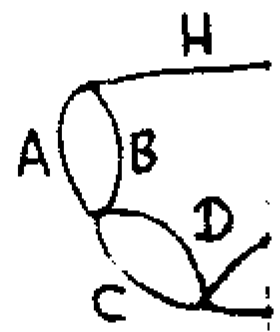
S(4)
ABCDE(2)
ABC(1) DE(1)
∅



T(ABCFGH, DEFGH, FGH, FGH)

84H24
(84H98)
10-28

S(4)
ABCDEF(3)
ABCD(2) ABEF(2) CDEF(2)
AB(1) CD(1) EF(1)
∅



T(ABGH, CDGH, EFGH, GH)

84H25
(84L18)
6-12-13

ABCDEF(2)
ABC(1)
∅

NB(ADEF / ∅)

T

84H26
(84L63)
6-18

ABCDEFG(3)
ABCD(2) EFG(1)
∅

NB(ABC…

T

84H27
(84L21)
6-13-14

ABCDEF(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB(ACEF / ∅)

T

84H28
(84L46)
6-18

ABCDEFG(3)
ABEFG(2) ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB(AE…

T(ABEFG, EFG, CD, H)

84H29
ISD
6-24-6

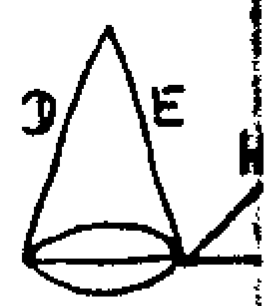
S(4)
ABCD(2) ABEFGH(3) CDEFGH(3)
AB(1) CD(1) EFGH(2)
∅

NB(EFGH / ∅)

T(AB, CD, EFGH, EFGH)

84H30
(84H19)
6-21

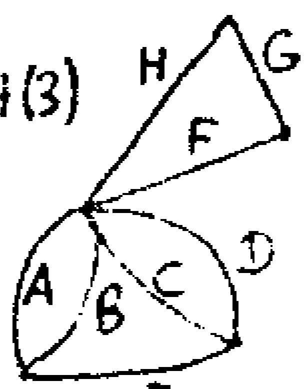
S(4)
ABCDE(2) ABCFGH(3)
ABC(1) FGH(2)
∅



T(ABCDE, FGH, FGH, DE)

84H31
(84H35)
6-24-7

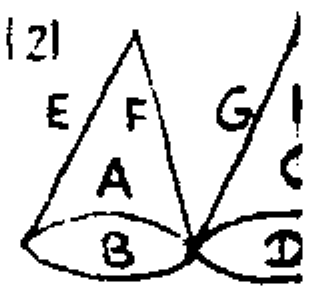
S(4)
ABCDE(2) ABFGH(3) CDFGH(3)
AB(1) CD(1) FGH(2)
∅



T(ABE, CDE, FGH, FGH)

84H32
SD
6-25

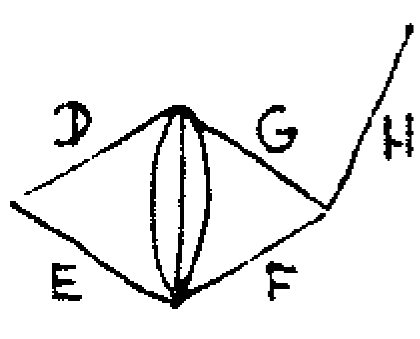
S(4)
ABCDEF(3) ABCDGH(3)
ABEF(2) ABCD(2) CDGH(2)
AB(1) CD(1)
∅



T(ABEF, CDGH, EF, GH)

84H33
(84L37)
7-16-10

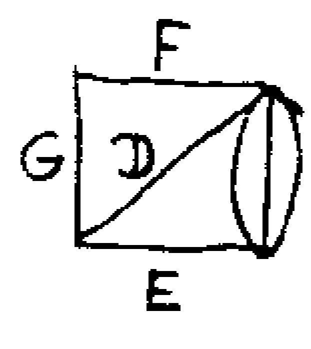
ABCDEFG(3)
ABCDE(2) ABCFG(2)
ABC(1)
∅



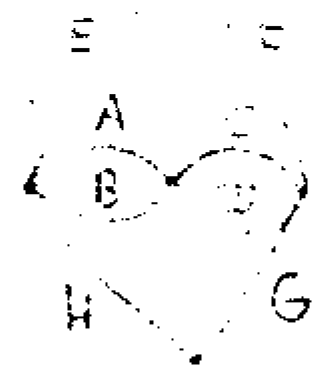
T(DEFG, DE, FG, H)

84H34
(84L48)
7-18

ABCDEFG(3)
ABCDE(2) DFG(2)
ABC(1)
∅



T(DEFG, ABDE, FG, H)

84H63 11-32-11
SD
S(4)
ABCDEF(3) ABCDGH(3) EFGH(3)
ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅


NT

84H65 11-22-16
(84L69)
ABCDEFG(3)
ABC(1)
∅
NB(ABCDEF / AB(1))
T

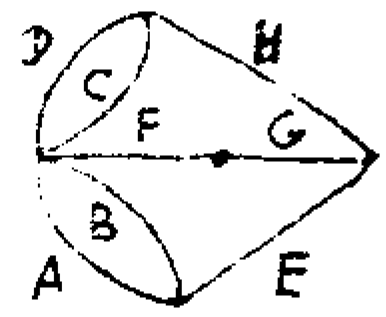
84H67 11-25-18
(84L83)
ABCDEFG(3)
ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅
NB(ACEFG / E(1))
T(ABEFG, CDEFG, EFG, H)

84H69 14-29-13
(84H59)
S(4)
ABCDEF(3) ABCDGH(3)
ABC(1)
∅
NB(ADEFGH / EG(2))
T(ABCDEFGH, DEFGH, EF, GH)

84H71 14-33-14
SD
S(4)
ABCDEF(3) ABCDGH(3)
ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅
NB(ACEFGH / EG(2))
T(ABEFGH, CDEFGH, EF, GH)

84H73 14-36-15
(84H137)
S(4)
ABCDEF(3) EFGH(3)
ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅
NB(ACDEFGH / CDG(2))
NT

84H75 17-32-16
(84H106)
S(4)
ABCDEF(3)
ABC(1)
∅
NB(ADEFGH / GH(2))
T

84H64 11-33-10
(84H97)
S(4)
ABEFG(3) ABCDEH(3) CDFGH(3)
ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅


T(EFGH, ABE, CDH, FG)

84H66 11-30-8
(84S6)
S(4)
ABCDE(3) FGH(1)
∅
NB(ABCDE(3) / A(1))
T

84H68 11-32-11
(84H105)
S(4)
ABEFGH(3) ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅
NB(ABEFGH / AB(1))
T(ABEFGH, EFGH, EFGH, CD)

84H70 14-31-13
(84H101)
S(4)
ABCDEF(3) EFGH(3)
ABC(1)
∅
NB(ADEFGH / DG(2))
T(DEFGH, DEFGH, ABCD, GH)

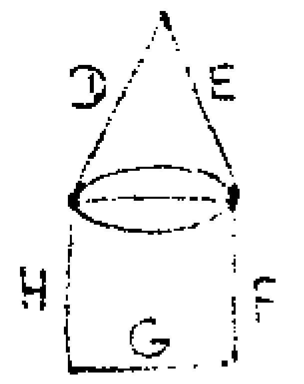
84H72 14-35-14
(84H124)
S(4)
ABEGH(3) ABCDEF(3)
ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅
NB(ACEFGH / FG(2))
T(ABEFGH, EFGH, CDF, GH)

84H74 14-37-14
(84S15)
S(4)
ABEFG(3) CDEFH(3)
ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅
NB(S(4) / ABCD)
T(EFGH, EFGH, ABG, CDH)

84H76 17-34-16
(84S17)
S(4)
ABCD(3) EFG(1)
∅
NB(S(4) / EFGH)
T

84 H 49
(84 H 23)
10-23-10

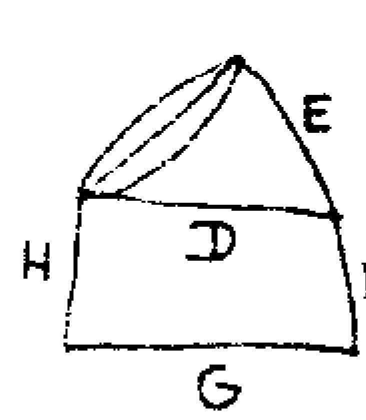
S(4)
ABCDE(2) ABCFGH(3)
ABC(1)
∅



T(ABCDEFGH, FGH, FGH, DE)

84 H 50
SD
10-25-1

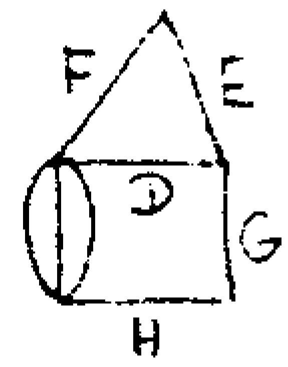
S(4)
ABCDE(2) DEFGH(3)
ABC(1)
∅



T(DEFGH, ABCE, FGH, FGH)

84 H 51
(84 H 52)
10-27-10

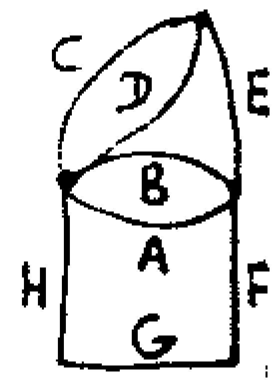
S(4)
ABCDGH(3) ABCDEF(3)
ABC(1) DEF(2)
∅



T(ABCGH, DEFGH, EF, GH)

84 H 52
(84 H 51)
10-27-1

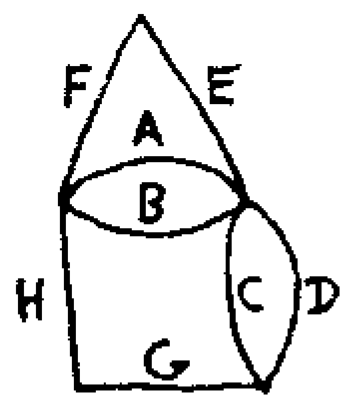
S(4)
ABFGH(3) ABCDE(2)
AB(1) CD(1)
∅



T(ABEFGH, CDE, FGH, FGH)

84 H 53
SD
10-29-10

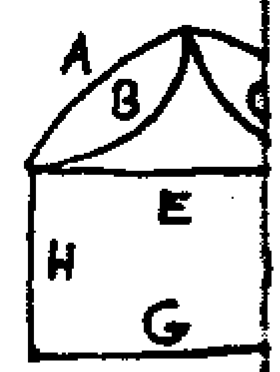
S(4)
ABCDEF(3) ABCDGH(3)
ABEF(2) ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅



T(ABEFGH, CDGH, EF, GH)

84 H 54
(84 H 62)
10-28-1

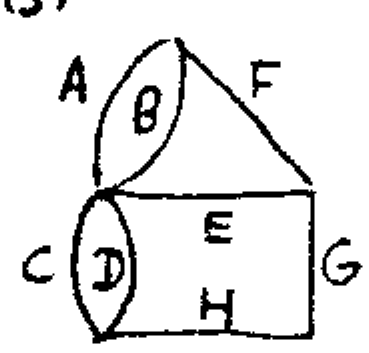
S(4)
ABCDE(2) EFGH(3)
AB(1) CD(1)
∅



NT

84 H 55
(84 H 95)
10-31-10

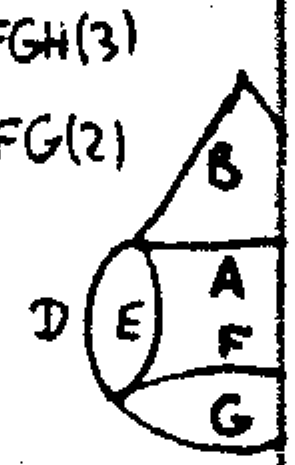
S(4)
ABCDEF(3) CDEGH(3)
ABEF(2) ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅



T(CDGH, EFGH, ABF, GH)

84 H 56
(84 H 99)
10-32-

S(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) ADEFGH(3)
DEFG(2)
ABC(2) DE(1) FG(1)
∅



T(ABCH, DEH, FGH, BC)

84 H 57
SD
13-26-13

S(4)
ABCDE(2)
ABC(1)
∅

NB(ADEFGH / FG(2))

T

84 H 58
(84 H 100)
13-30-

S(4)
ABCDEF(3)
ABC(2) DEF(1)
∅

NB(ABCDG / GH(2))

T(ABCGH, ABCGH, DEFGH, GH)

84 H 59
(84 H 69)
13-29-14

S(4)
ABCDE(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB(ACEFGH / GH(2))

T(ABEFGH, CDEFGH, FGH, FGH)

84 H 60
(84 H 123)
13-33-14

S(4)
ABCDEF(3)
ABEF(2) ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB(ACEFG / GH(2

T(ABEFGH, CDGH, EFGH, GH)

84 H 61
(84 S 14)
13-36-15

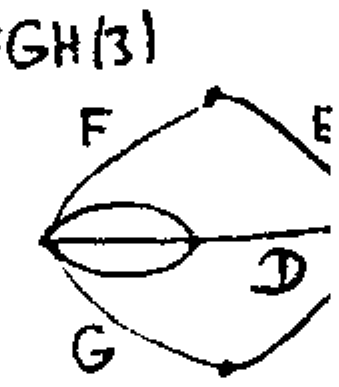
S(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) DEFG(2)
ABC(2) DE(1) FG(1)
∅

NB(ABCDFGH / FGH(2))

T(ABCH, ABCH, DEH, FGH)

84 H 62
(84 H 54)
11-28-10

S(4)
ABCDEF(3) ABCDGH(3) EFGH(3)
ABC(1)
∅



T(DEFGH, ABCD, EF, GH)

84H91 SD — 7-30-7

S(4)
ABGH(2) ABCDEF(3)
AB(1) CDEF(2)
∅

NB(CDEF / ∅)

T(ABGH, CDEF, CDEF, GH)

84H92 (84L76) — 10-25-15

ABCDEFG(3)
ABCD(2) ABEF(2) CEG(2)
AB(1)
∅

NB(ACDFG / G(1))

T(ABDF, CDG, EFG, H)

84H93 (84L80) — 10-26-16

ABCDEFG(3)
ABCD(2) CEF(2) DEG(2)
AB(1)
∅

NB(ACDFG / F(1))

NT

84H94 SD — 10-34-10

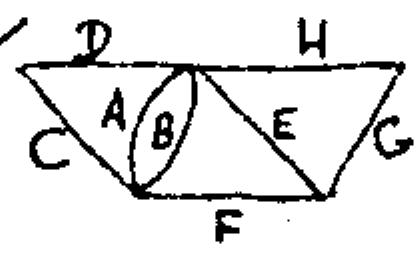
S(4)
ABCDEF(3) ABCGH(3) ADEGH(3) BDFGH(3)
ABC(2) ADE(2) BDF(2) GH(1)
∅

NB(ACDEF / C(1))

T(ACE, BCF, DEF, GH)

84H95 (84H55) — 10-31-10

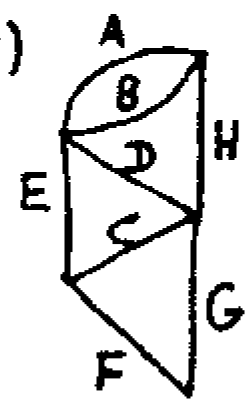
S(4)
ABCDEF(3) ABEFGH(3)
ABCD(2) ABEF(2) EGH(2)
AB(1)
∅



T(ABCDF, EFGH, CD, GH)

84H96 SD — 10-34-10

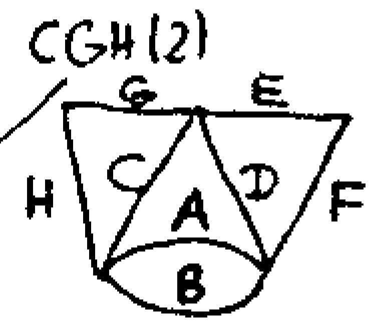
S(4)
ABCDEH(3) ABCFG(3) CDEFG(3)
ABDH(2)
AB(1) CDE(2) CFG(2)
∅



T(CEFG, ABH, DEH, FG)

84H97 (84H64) — 10-33-11

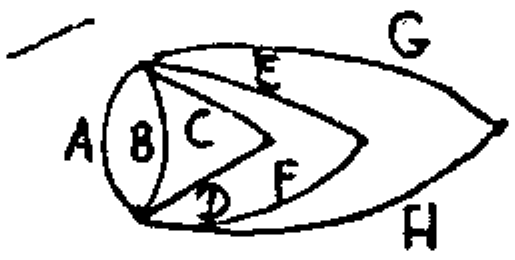
S(4)
ABCDEF(3) ABCDGH(3)
DEF(2) ABCD(2) CGH(2)
AB(1)
∅



NT

84H98 (84H24) — 11-28-10

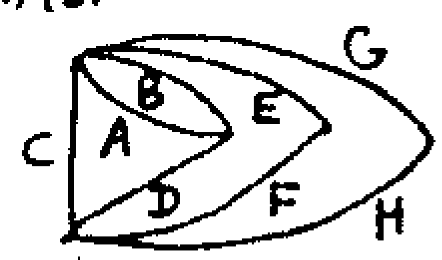
S(4)
ABCDEF(3) ABCDGH(3) ABEFGH(3)
ABCD(2) ABEF(2) ABGH(2)
AB(1)
∅



T(ABCDEFGH, CD, EF, GH)

84H99 (84H56) — 11-32-10

S(4)
ABCDEF(3) ABCDGH(3) CEFGH(3)
ABCD(2) CEF(2) CGH(2)
AB(1)
∅



T(CDEFGH, ABD, EF, GH)

84H100 (84H58) — 13-30-13

S(4)
ABCDE(2) ABFGH(3)
AB(1)
∅

NB(ACDE / ∅)

T(ABCDEFGH, CDE, FGH, FGH)

84H101 (84H70) — 13-31-14

S(4)
ABCDE(2) CFGH(3)
AB(1)
∅

NB(ACDE / ∅)

T(CDEFGH, ABDE, FGH, FGH)

84H102 (84H110) — 13-36-13

S(4)
ABCGH(3) ABCDEF(3)
AB(1) CDEF(2)
∅

NB(CDEF / ∅)

T(CDEFGH, ABGH, DEF, GH)

84H103 (84L57) — 11-23-17

ABCDEFG(3)
ABCDE(2)
AB(1)
∅

NB(ACDE / ∅)

T

84H104 (84L82) — 11-26-17

ABCDEFG(3)
ABCD(2) EF(1)
∅

NB(ABCD / ∅)

T

84 H 77
(84 H 149)
17 - 37 - 18

S(4)
ABCDEF(3)
ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB(ACEFGH / GH(2))

T(ABEFGH, CDEFGH, EFGH, GH)

T 84 H 78
(84 S 34)
17 - 39 - 18

S(4)
ABEFGH(2) ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB(ACEFGH / EH(2))

T(ABEFGH, EFGH, EFGH, CDH)

84 H 79
(84 S 82)
17 - 40 - 19

S(4)
ABCD(2) EFGH(3)
AB(1) CD(1)
∅

NB(S(4) / ABCD)

NT

84 H 80
(84 S 16)
20 - 35 - 19

S(4)
ABC(1)
∅

NB(S(4) / ABCD)

T

84 H 81
(84 S 81)
20 - 41 - 22

S(4)
ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅

NB(S(4) / ABCD)

T(ABEFGH, CDEFGH, EFGH, EFGH)

84 H 82
(84 L 22)
7 - 14 - 17

ABCDEF(2)
AB(1)
∅

NB(CDEF / ∅)

T

84 H 83
(84 L 54)
7 - 20 - 11

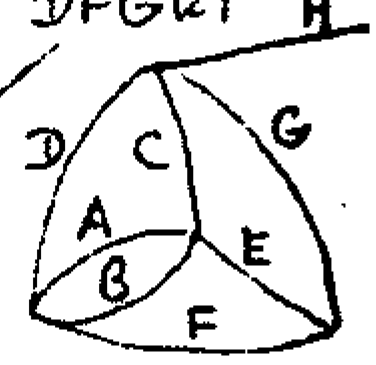
ABCDEFG(3)
ABCDE(2) FG(1)
∅

NB(ABCD / ∅)

T

84 H 84
(84 L 74)
8 - 24 - 12

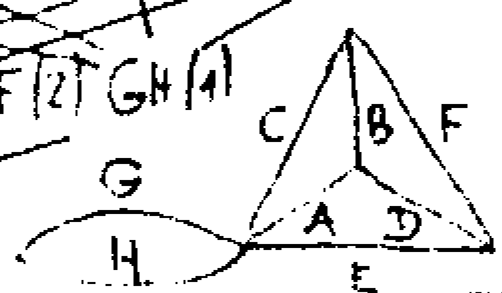
ABCDEFG(3)
ABCD(2) ABEF(2) CEG(2) DFG(2) H
AB(1)
∅



NT

84 H 85
SD
8 - 32 - 8

S(4)
ABCDEF(3) ABCGH(3) ADEGH(3) BDFGH(3) CEFGH(3)
ABC(2) ADE(2) BDF(2) CEF(2) GH(1)
∅



NT

84 H 86
(84 L 51)
9 - 21 - 13

ABCDEFG(3)
ABCDE(2) ABFG(2)
AB(1)
∅

NB(ACDE / ∅)

T(ABCDEFG, CDE, FG, H)

84 H 87
(84 L 56)
9 - 22 - 14

ABCDEFG(3)
ABCDE(2) CFG(2)
AB(1)
∅

NB(ACDE / ∅)

T(CDEFG, ABDE, FG, H)

84 H 88
(84 L 71)
9 - 24 - 1?

ABCDEFG(3)
ABCD(2) CEFG(2)
AB(1)
∅

NB(CEFG / ∅)

T(CDEFG, ABD, EFG, H)

84 H 89
(84 H 48)
9 - 30 - 9

S(4)
ABCDEF(3) ABCDGH(3) AEFGH(3)
ABCD(2) AEF(2) GH(1)
∅

NB(ABCD / ∅)

T(ABCDEF, BCD, EF, GH)

84 H 90
(84 H 43)
7 - 27 - 9

S(4)
ABFGH(2) ABCDE(3)
AB(1) CDE(2)
∅

NB(AFGH / ∅)

T(ABFGH, CDE, CDE, FGH)

84H105 (84H68) 11-32-11 S(4) ABCDGH(3) ABCDEF(3) ABCD(2) EF(1) ∅ NB(ABCD / ∅) T(ABCDGH, ABCDGH, EF, GH)	84H106 (84H75) 16-32-17 S(4) ABCDE(2) AB(1) ∅ NB(ACDE / ∅) T
84H107 (84H146) 16-38-17 S(4) ABCDEF(3) ABCD(2) EF(1) ∅ NB(ABCD / ∅) T(ABCDGH, ABCDGH, EFGH, GH)	84H108 (84L85) 12-27-19 ABCDEFG(3) ABCD(2) EFG(2) AB(1) ∅ NB(ABCDEF / F(1)) T(CDEFG, ABCD, EFG, H)
84H109 ISD 12-36-12 S(4) ABCDEF(3) ABCGH(3) DEFGH(3) ABC(2) DEF(2) GH(1) ∅ NB(ABDEF / A(1)) T(ABCDEF, ABC, DEF, GH)	84H110 (84H102) 13-36-13 S(4) ABGH(2) ABCDEF(3) AB(1) CDE(2) ∅ NB(ACDEF / F(1)) T(ABGHF, CDEF, CDEF, GH)
84H111 (84S12) 13-39-13 S(4) ABFG(2) ABCDE(3) CDEFH(3) AB(1) CDE(2) ∅ NB(ACDEGH / GH(2)) T(CDEH, ABG, CDE, FGH)	84H112 (84H125) 13-37-14 S(4) ABCDEF(3) ABCD(2) ABEGH(3) AB(1) EGH(2) ∅ NB(ACDEF / E(1)) T(ABCDF, EFGH, CDF, GH)
84H113 (84H138) 13-39-15 S(4) ABCDGH(3) DEFGH(3) ABC(2) GH(1) DEF(2) ∅ NB(ABCDG / D(1)) NT	84H114 (84S35) 17-42-19 S(4) ABFG(2) ABCDE(3) AB(1) CDE(2) ∅ NB(ACDEGH / GH(2)) T(ABFGH, CDEH, CDEH, FGH)
84H115 (84S105) 17-45-21 S(4) ABCGH(3) DEFGH(3) ABC(2) GH(1) DEF(2) ∅ NB(ABDEFGH / AGH(2)) NT	84H116 (84L77) 12-26-18 ABCDEFG(3) ABCD(2) ABEF(2) AB(1) ∅ NB(ACDEG / G(1)) T(ABCDEFG, CDG, EFG, H)
84H117 (84L84) 12-27-19 ABCDEFG(3) ABCD(2) CEF(2) AB(1) ∅ NB(ACDEG / G(1)) T(CDEFG, ABDG, EFG, H)	84H118 (84L94) 12-28-20 ABCDEFG(3) ABC(2) ADE(2) FG(1) ∅ NB(ABCDFG / FG(1)) NT

84 H 91
SD
7-30-7

S(4)
ABGH(2) ABCDEF(3)
AB(1) CDEF(2)
∅

NB(CDEF / ∅)

T(ABGH, CDEF, CDEF, GH)

84 H 92
(84 L 76)
10-25-15

ABCDEFG(3)
ABCD(2) ABEF(2) CEG(2)
AB(1)
∅

NB(ACDFG / G(1))

T(ABDF, CDG, EFG, H)

84 H 93
(84 L 80)
10-26-16

ABCDEFG(3)
ABCD(2) CEF(2) DEG(2)
AB(1)
∅

NB(ACDFG / F(1))

NT

84 H 94
SD
10-34-10

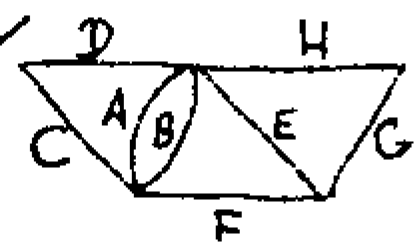
S(4)
ABCDEF(3) ABCGH(3) ADEGH(3) BDFGH(3)
ABC(2) ADE(2) BDF(2) GH(1)
∅

NB(ACDEF / C(1))

T(ACE, BCF, DEF, GH)

84 H 95
(84 H 55)
10-31-10

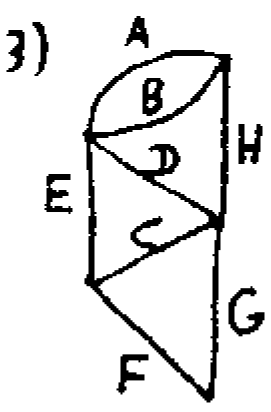
S(4)
ABCDEF(3) ABEFGH(3)
ABCD(2) ABEF(2) EGH(2)
AB(1)
∅



T(ABCDF, EFGH, CD, GH)

84 H 96
SD
10-34-10

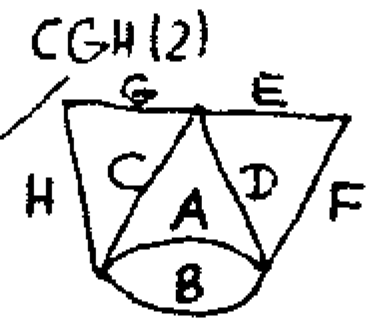
S(4)
ABCDEH(3) ABCFG(3) CDEFG(3)
ABDH(2)
AB(1) CDE(2) CFG(2)
∅



T(CEFG, ABH, DEH, FG)

84 H 97
(84 H 64)
10-33-11

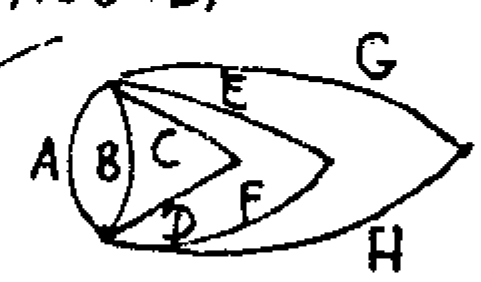
S(4)
ABCDEF(3) ABCDGH(3)
DEF(2) ABCD(2) CGH(2)
AB(1)
∅



NT

84 H 98
(84 H 24)
11-28-10

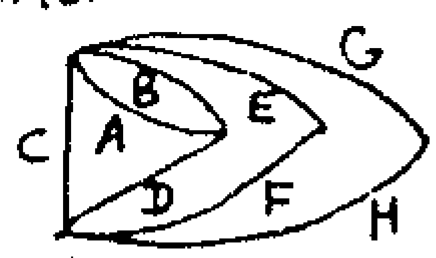
S(4)
ABCDEF(3) ABCDGH(3) ABEFGH(3)
ABCD(2) ABEF(2) ABGH(2)
AB(1)
∅



T(ABCDEFGH, CD, EF, GH)

84 H 99
(84 H 56)
11-32-10

S(4)
ABCDEF(3) ABCDGH(3) CEFGH(3)
ABCD(2) CEF(2) CGH(2)
AB(1)
∅



T(CDEFGH, ABD, EF, GH)

84 H 100
(84 H 58)
13-30-13

S(4)
ABCDE(2) ABFGH(3)
AB(1)
∅

NB(ACDE / ∅)

T(ABCDEFGH, CDE, FGH, FGH)

84 H 101
(84 H 70)
13-31-14

S(4)
ABCDE(2) CFGH(3)
AB(1)
∅

NB(ACDE / ∅)

T(CDEFGH, ABDE, FGH, FGH)

84 H 102
(84 H 110)
13-36-13

S(4)
ABCGH(3) ABCDEF(3)
AB(1) CDEF(2)
∅

NB(CDEF / ∅)

T(CDEFGH, ABGH, DEF, GH)

84 H 103
(84 L 57)
11-23-17

ABCDEFG(3)
ABCDE(2)
AB(1)
∅

NB(ACDE / ∅)

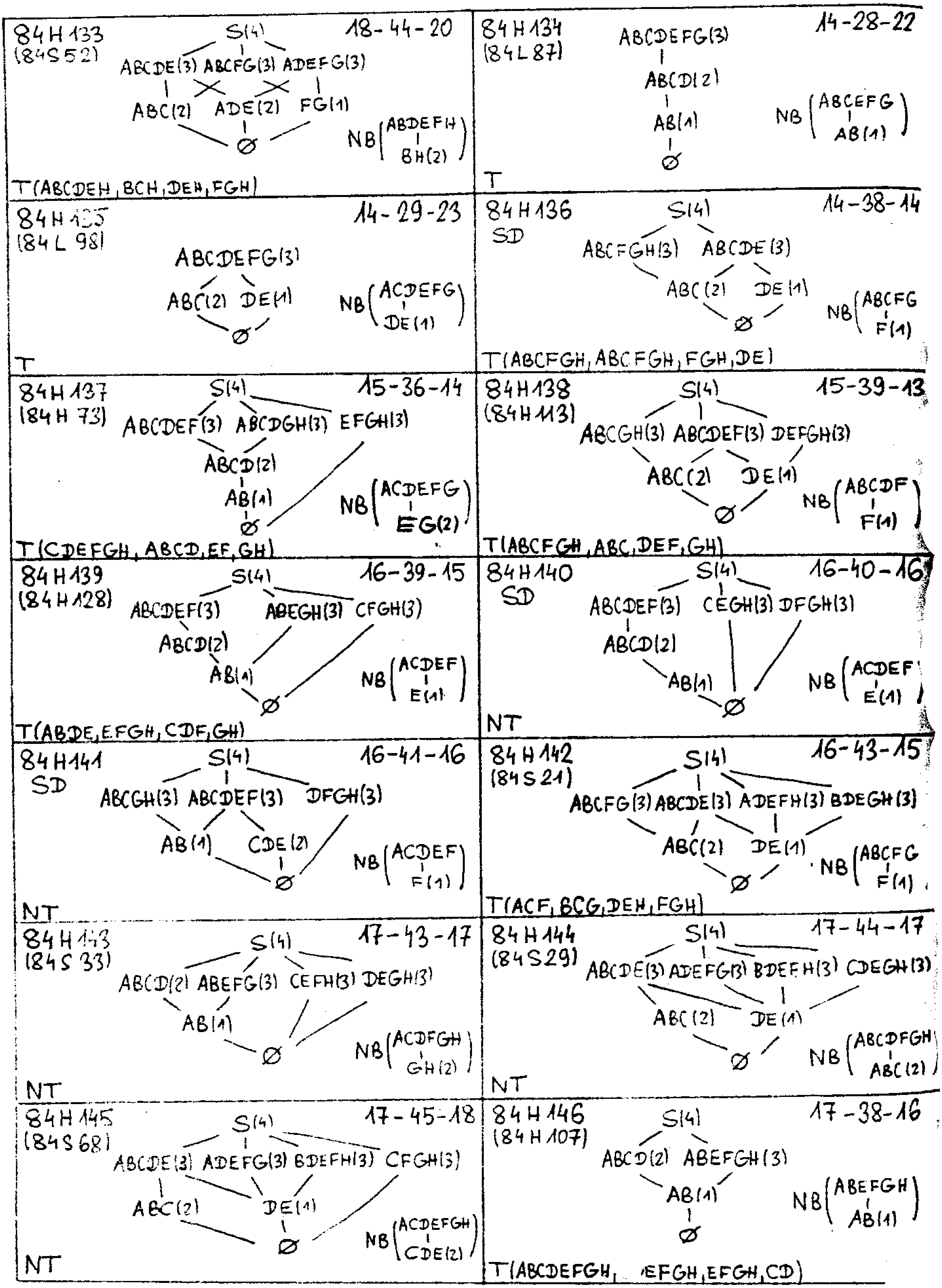
T

84 H 104
(84 L 82)
11-26-17

ABCDEFG(3)
ABCD(2) EF(1)
∅

NB(ABCD / ∅)

T


84H133
(84S52)
18-44-20
S(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) ADEFG(3)
ABC(2) ADE(2) FG(1)
∅
NB(ABDEFH / BH(2))
T(ABCDEH, BCH, DEH, FGH)
84H134
(84L87)
14-28-22
ABCDEFG(3)
ABCD(2)
AB(1)
∅
NB(ABCEFG / AB(1))
T
84H135
(84L98)
14-29-23
ABCDEFG(3)
ABC(2) DE(1)
∅
NB(ACDEFG / DE(1))
T
84H136
SD
14-38-14
S(4)
ABCFGH(3) ABCDE(3)
ABC(2) DE(1)
∅
NB(ABCFG / F(1))
T(ABCFGH, ABCFGH, FGH, DE)
84H137
(84H73)
15-36-14
S(4)
ABCDEF(3) ABCDGH(3) EFGH(3)
ABCD(2)
AB(1)
∅
NB(ACDEFG / EG(2))
T(CDEFGH, ABCD, EF, GH)
84H138
(84H113)
15-39-13
S(4)
ABCGH(3) ABCDEF(3) DEFGH(3)
ABC(2) DE(1)
∅
NB(ABCDF / F(1))
T(ABCFGH, ABC, DEF, GH)
84H139
(84H128)
16-39-15
S(4)
ABCDEF(3) ABEGH(3) CFGH(3)
ABCD(2)
AB(1)
∅
NB(ACDEF / E(1))
T(ABDE, EFGH, CDF, GH)
84H140
SD
16-40-16
S(4)
ABCDEF(3) CEGH(3) DFGH(3)
ABCD(2)
AB(1)
∅
NB(ACDEF / E(1))
NT
84H141
SD
16-41-16
S(4)
ABCGH(3) ABCDEF(3) DFGH(3)
AB(1) CDE(2)
∅
NB(ACDEF / F(1))
NT
84H142
(84S21)
16-43-15
S(4)
ABCFG(3) ABCDE(3) ADEFH(3) BDEGH(3)
ABC(2) DE(1)
∅
NB(ABCFG / F(1))
T(ACF, BCG, DEH, FGH)
84H143
(84S33)
17-43-17
S(4)
ABCD(2) ABEFG(3) CEFH(3) DEGH(3)
AB(1)
∅
NB(ACDFGH / GH(2))
NT
84H144
(84S29)
17-44-17
S(4)
ABCDE(3) ADEFG(3) BDEFH(3) CDEGH(3)
ABC(2) DE(1)
∅
NB(ABCDFGH / ABC(2))
NT
84H145
(84S68)
17-45-18
S(4)
ABCDE(3) ADEFG(3) BDEFH(3) CFGH(3)
ABC(2) DE(1)
∅
NB(ACDEFGH / CDE(2))
NT
84H146
(84H107)
17-38-16
S(4)
ABCD(2) ABEFGH(3)
AB(1)
∅
NB(ABEFGH / AB(1))
T(ABCDEFGH, EFGH, EFGH, CD)

84H119 SD 12-36-12

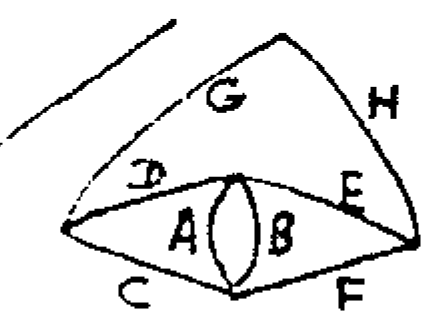
S(4)
ABCDEH(3) ABCFG(3) ADEFG(3)
ABC(2) ADE(2) FG(1)
∅

NB(BCDEH / H(1))

T(ABCDEH, BCH, DEH, FG)

84H120 SD 12-36-12

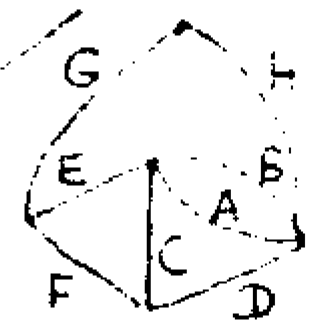
S(4)
ABCDEF(3) CEGH(3) DFGH(3)
ABCD(2) ABEF(2)
AB(1)
∅



NT

84H121 SD 12-37-12

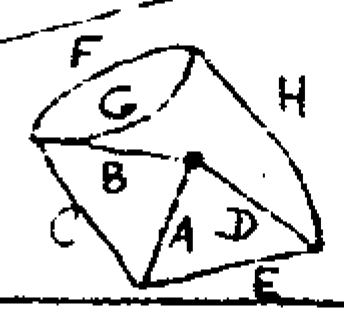
S(4)
ABCDEF(3) ABEGH(3) DFGH(3)
CEF(2) ABCD(2)
AB(1)
∅



NT

84H122 (84S9) 12-40-12

S(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) ADEFG(3) BDFGH(3) CEFGH(3)
ABC(2) ADE(2) FG(1)
∅



NT

84H123 (84H60) 14-33-13

S(4)
ABCDGH(3) ABCDEF(3)
ABCD(2) ABEF(2)
AB(1)
∅

NB(ACDGH / G(1))

T(ABCDEFGH, CDGH, EF, GH)

84H124 (84H72) 14-35-14

S(4)
ABCDGH(3) ABCDEF(3)
ABCD(2) CEF(2)
AB(1)
∅

NB(ACDEFH / EH(2))

T(CDEFGH, ABDGH, EF, GH)

84H125 (84H112) 14-37-13

S(4)
ABCGH(3) ABCDEF(3)
ABC(2) ADEF(2)
DE(1)
∅

NB(ABCGH / G(1))

T(ABCFGH, BCGH, DEF, GH)

84H126 SD 14-38-14

S(4)
ABCDEH(3) ABCFG(3) CDEFG(3)
AB(1) CDE(2) CFG(2)
∅

NB(ACDEH / H(1))

T(CDEFGH, ABH, DEH, FG)

84H127 SD 15-37-15

S(4)
ABCDEF(3) CEGH(3)
ABCD(2) ABEF(2)
AB(1)
∅

NB(ACDEFG / DG(2))

T(ABDF, CDGH, EFGH, GH)

84H128 (84H139) 15-39-16

S(4)
ABCDEF(3) DEGH(3)
ABCD(2) CEF(2)
AB(1)
∅

NB(ACDFGH / FG(2))

NT

84H129 SD 15-38-15

S(4)
ABCDEF(3) BDEGH(3)
ADEF(2)
ABC(2) DE(1)
∅

NB(ABCFGH / GH(2))

T(DEFGH, BCGH, ACF, GH)

84H130 (84S22) 15-42-16

S(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) ADEFG(3) BDFGH(3)
ABC(2) ADE(2) FG(1)
∅

NB(ABCEFGH / FGH(2))

T(ACE, BCH, DEH, FGH)

84H131 SD 18-38-18

S(4)
ABCDEF(3)
ABCD(2) ABEF(2)
AB(1)
∅

NB(ACDEGH / GH(2))

T(ABCDEFGH, CDGH, EFGH, GH)

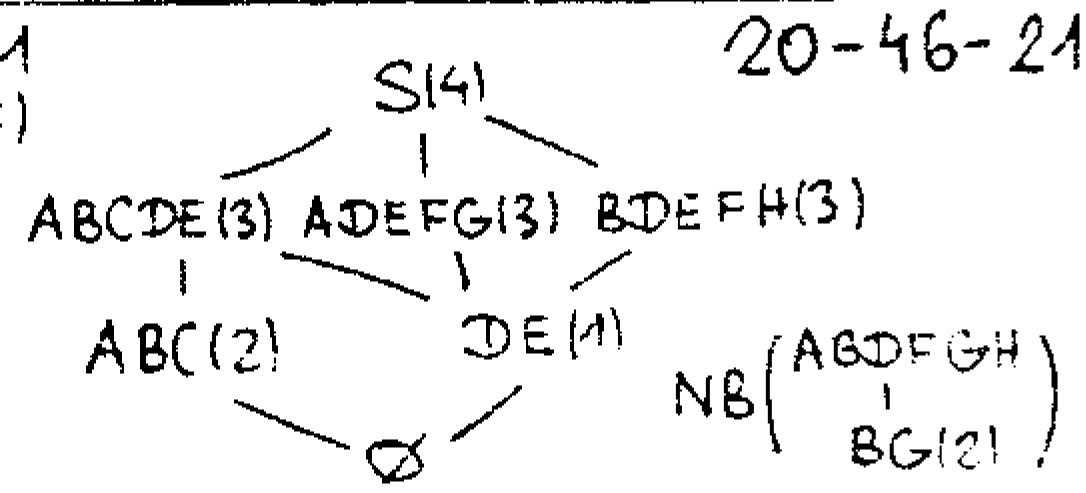
84H132 (84H151) 18-40-19

S(4)
ABCDEF(3)
ABCD(2) CEF(2)
AB(1)
∅

NB(ACDEGH / GH(2))

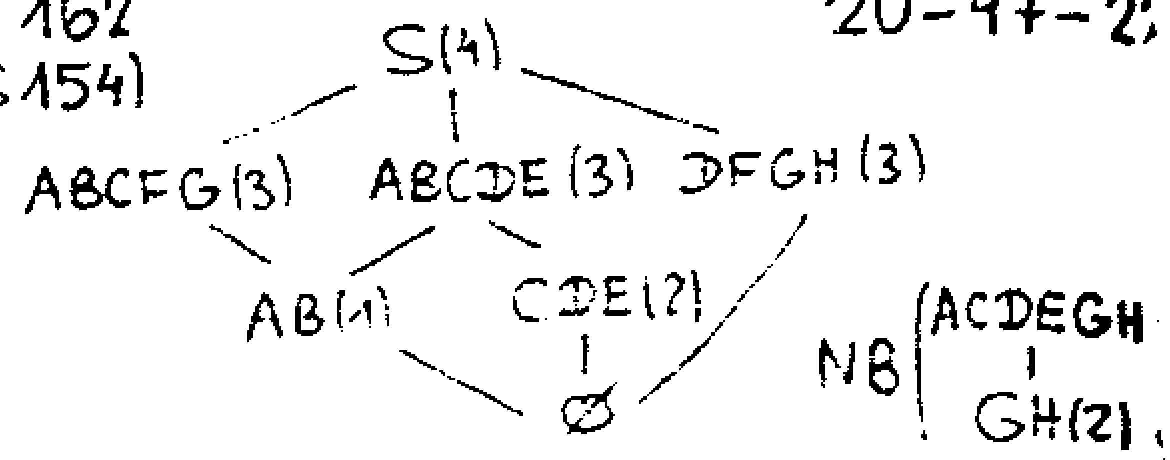
T(CDEFGH, ABDGH, EFGH, GH)

84H161
(84S67)
20-46-21



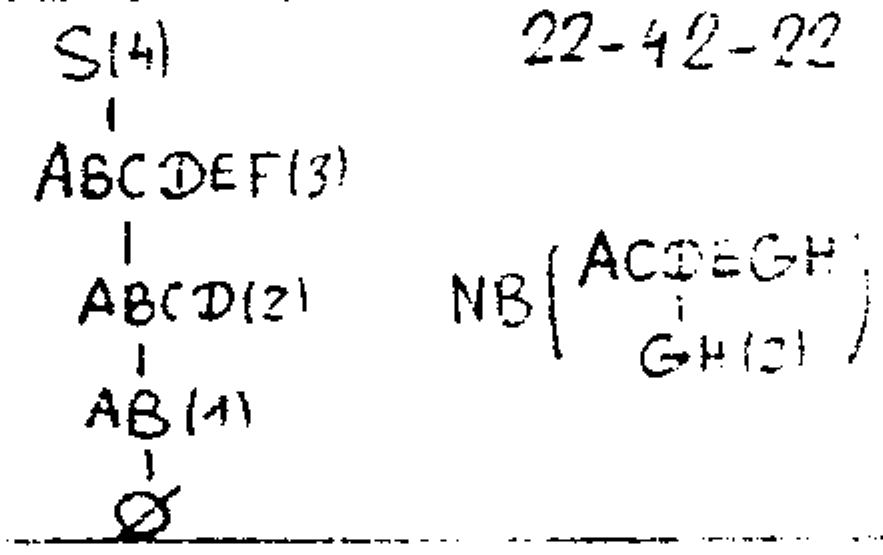
T(DEFGH, BCH, ACG, FGH)

84H162
(84S154)
20-47-2



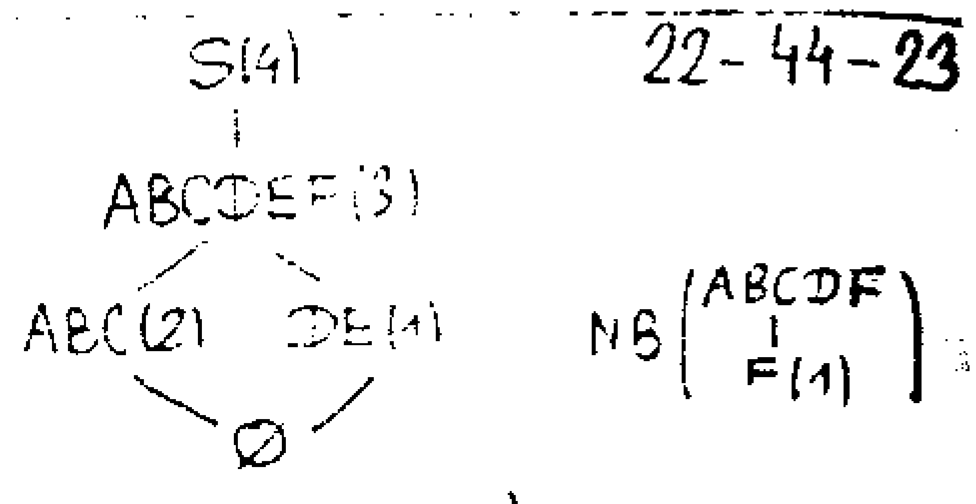
NT

84H163
SD
22-42-22



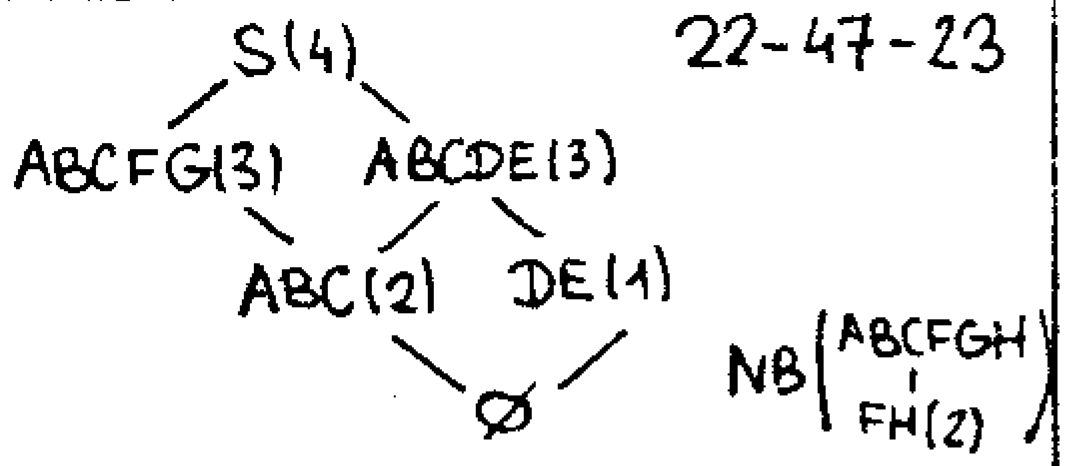
T

84H164
(84H191)
22-44-23



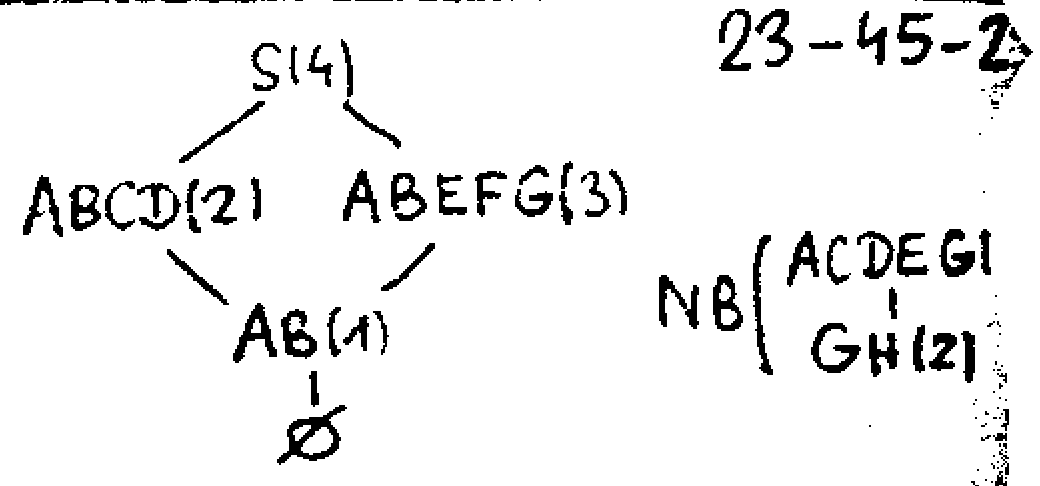
T(ABCFGH, ABCFGH, DEFGH, GH)

84H165
(84S155)
22-47-23



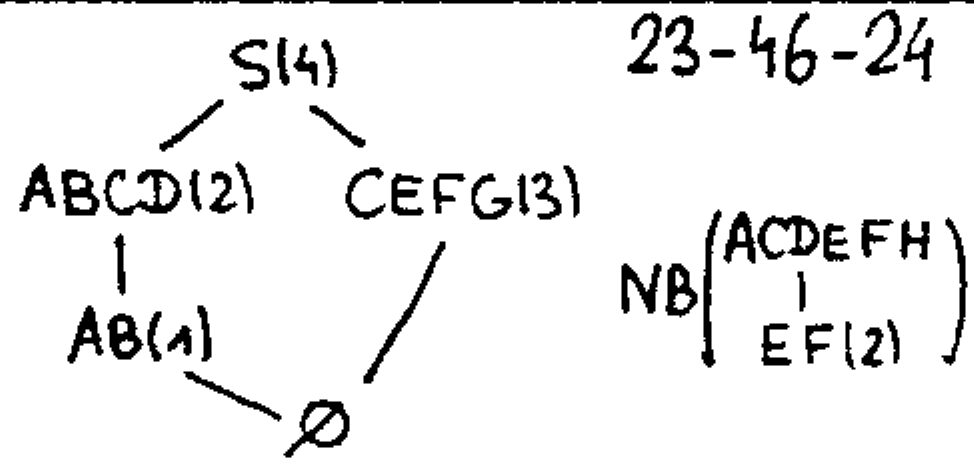
T(ABCFGH, ABCFGH, DEH, FGH)

84H166
(84S31)
23-45-2



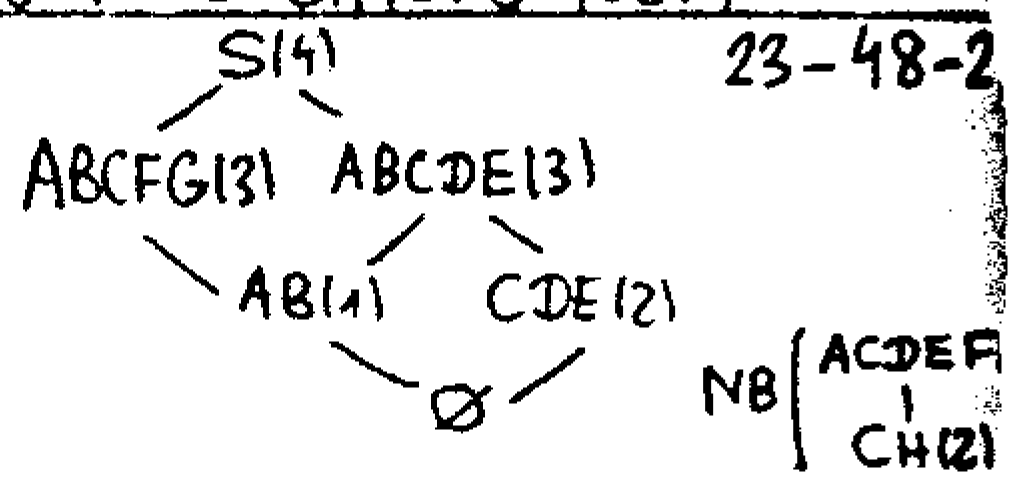
T(ABCDEFGH, EFGH, EFGH, CDH)

84H167
(84S78)
23-46-24



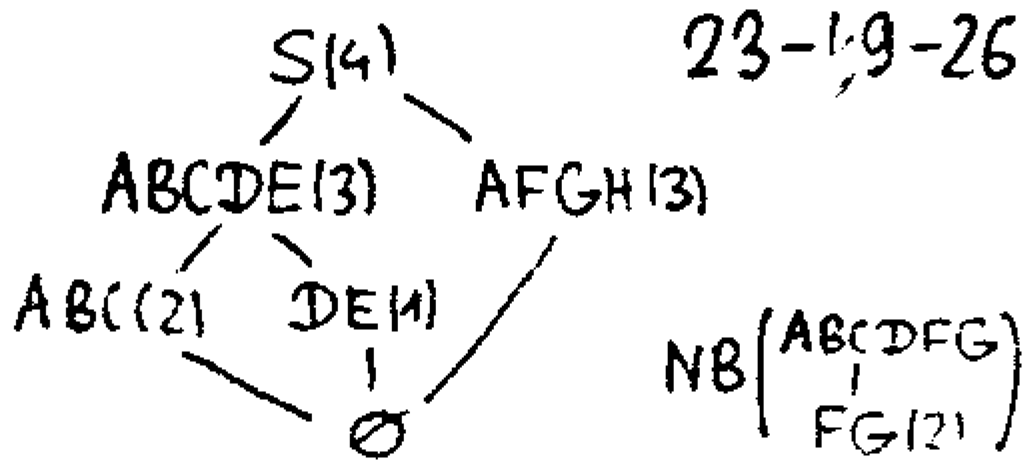
T(CDEFGH, ABDH, EFGH, EFGH)

84H168
(84S153)
23-48-2



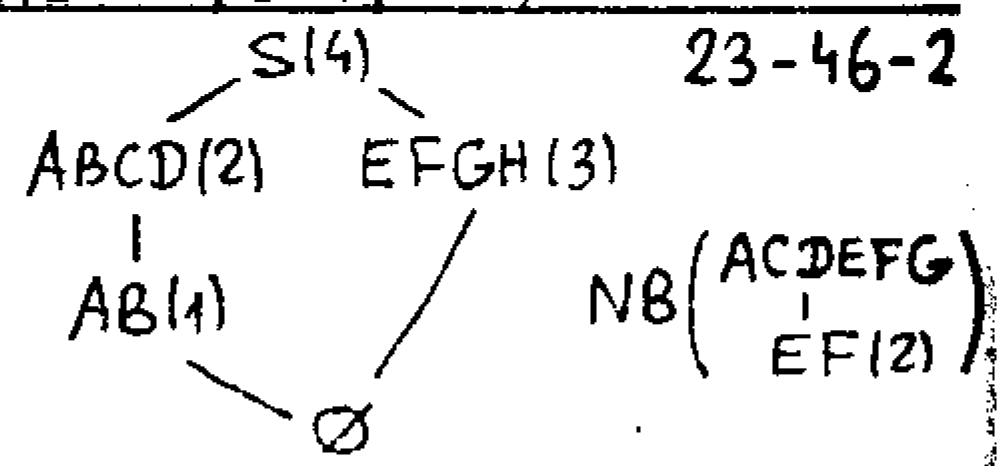
T(CDEFGH, ABFGH, DEH, FGH)

84H169
(84S293)
23-49-26



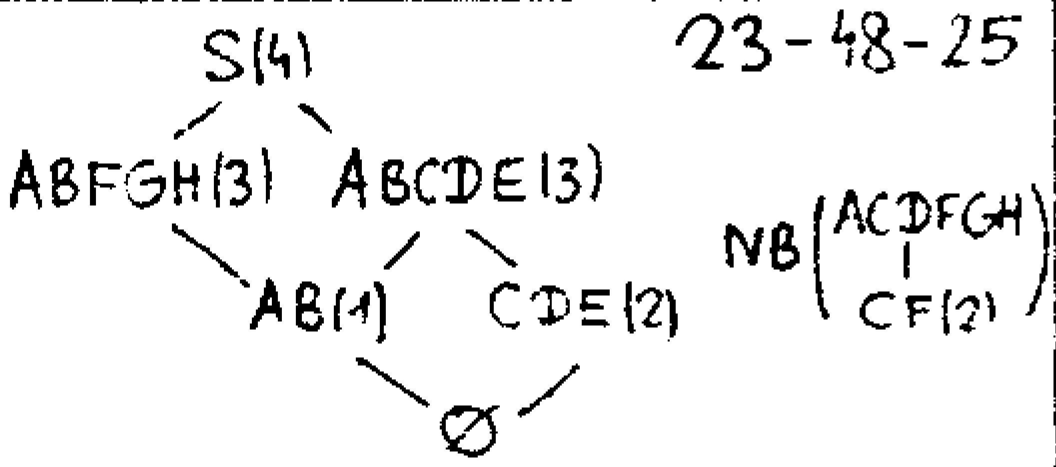
NT

84H170
(84S79)
23-46-2



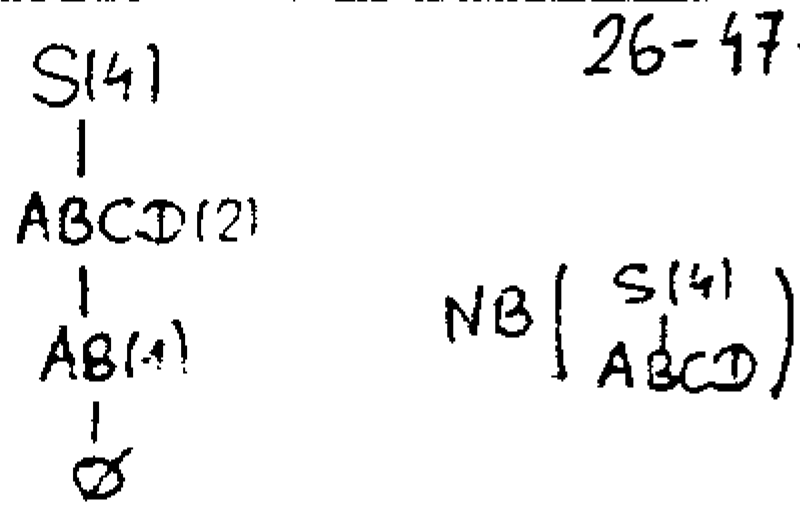
T(CDEFGH, ABCD, EFGH, EFGH)

84H171
(84S104)
23-48-25



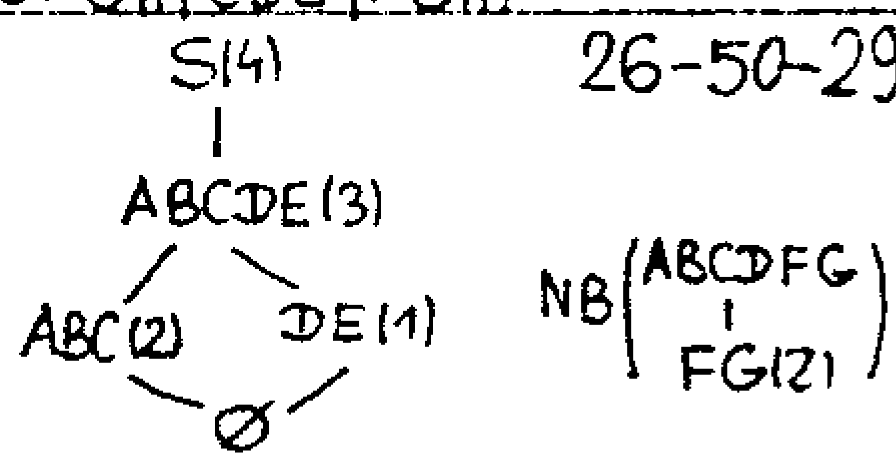
T(CDEFGH, ABFGH, CDE, FGH)

84H172
(84S77)
26-47-2



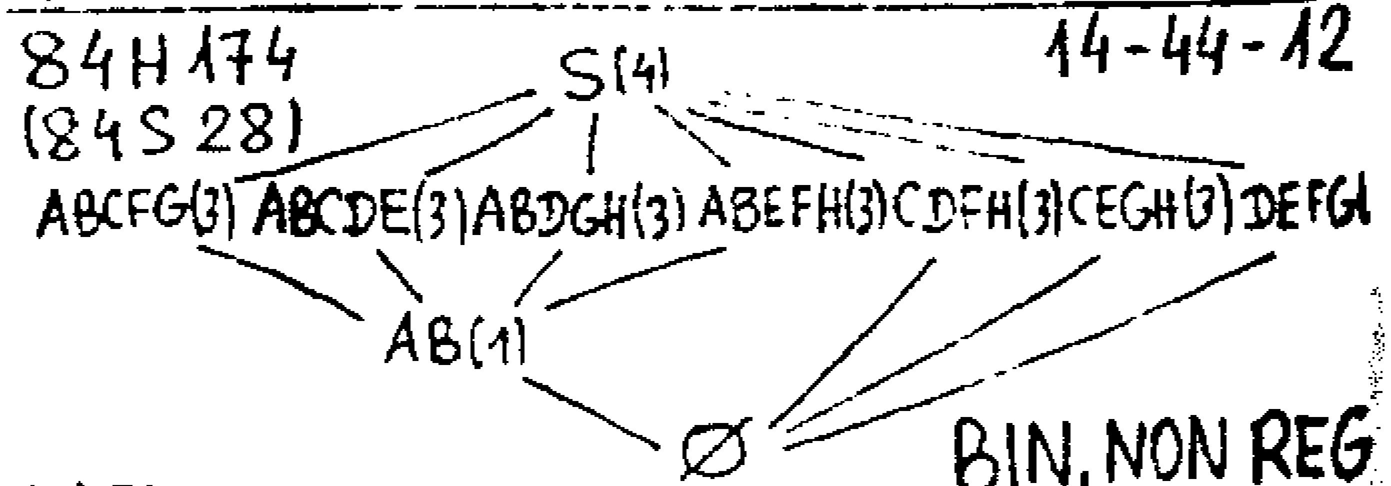
T

84H173
(84S292)
26-50-29



T(ABCFGH, ABCFGH, DEFGH, FGH)

84H174
(84S28)
14-44-12



BIN, NON REG

NT

84 H 147 (84 S 39) — 17-42-16

S(4); ABCD(2), CEFGH(3); AB(1); ∅

NB (CEFGH / C(1))

T(CDEFGH, EFGH, EFGH, ABD)

84 H 148 (84 H 150) — 17-41-18

S(4); ABCFGH(3), ABCDE(3); AB(1), CDE(2); ∅

NB (ABCFGH / AB(1))

T(CDEFGH, ABFGH, FGH, DE)

84 H 149 (84 H 77) — 18-37-17

S(4); ABCDEF(3), ABCDGH(3); ABCD(2); AB(1); ∅

NB (ACDEF / E(1))

T(ABCDEFGH, CDEFGH, EF, GH)

84 H 150 (84 H 148) — 18-41-17

S(4); ABCGH(3), ABCDEF(3); ABC(2), DE(1); ∅

NB (ABCDEF / DE(1))

T(ABCFGH, ABCFGH, DEF, GH)

84 H 151 (84 H 132) — 19-40-18

S(4); ABCDEF(3), ABEGH(3); ABCD(2); AB(1); ∅

NB (ACDEF / E(1))

T(ABCDEFGH, EFGH, CDF, GH)

84 H 152 SD — 19-41-19

S(4); ABCDEF(3), CEGH(3); ABCD(2); AB(1); ∅

NB (ACDEF / E(1))

T(CDEFGH, ABDF, EFGH, GH)

84 H 153 SD — 19-42-19

S(4); ABCGH(3), ABCDEF(3); AB(1), CDE(2); ∅

NB (ACDEF / F(1))

T(CDEFGH, ABFGH, DEF, GH)

84 H 154 (84 H 180) — 19-43-20

S(4); ABCDEF(3), AFGH(3); ABC(2), DE(1); ∅

NB (ABCDF / F(1))

NT

84 H 155 (84 S 60) — 19-45-19

S(4); ABCFG(3), ABCDE(3), ADEFH(3); ABC(2), DE(1); ∅

NB (ABCFG / F(1))

T(ABCFGH, BCG, DEH, FGH)

84 H 156 SD — 19-41-19

S(4); ABCDEF(3), EFGH(3); ABCD(2); AB(1); ∅

NB (ACDEF / E(1))

T(CDEFGH, ABCD, EFGH, GH)

84 H 157 NESD — 19-42-19

S(4); ABFGH(3), ABCDEF(3); AB(1), CDE(2); ∅

NB (ACDEF / F(1))

T(CDEFGH, ABFGH, CDE, GH)

84 H 158 (84 S 45) — 19-45-19

S(4); ABCFG(3), ABCDE(3), DEFGH(3); ABC(2), DE(1); ∅

NB (ABCFG / F(1))

T(ABCFGH, ABC, DEH, FGH)

84 H 159 (84 S 32) — 20-44-20

S(4); ABCD(2), ABEFG(3), CEFH(3); AB(1); ∅

NB (S(4) / ABCD)

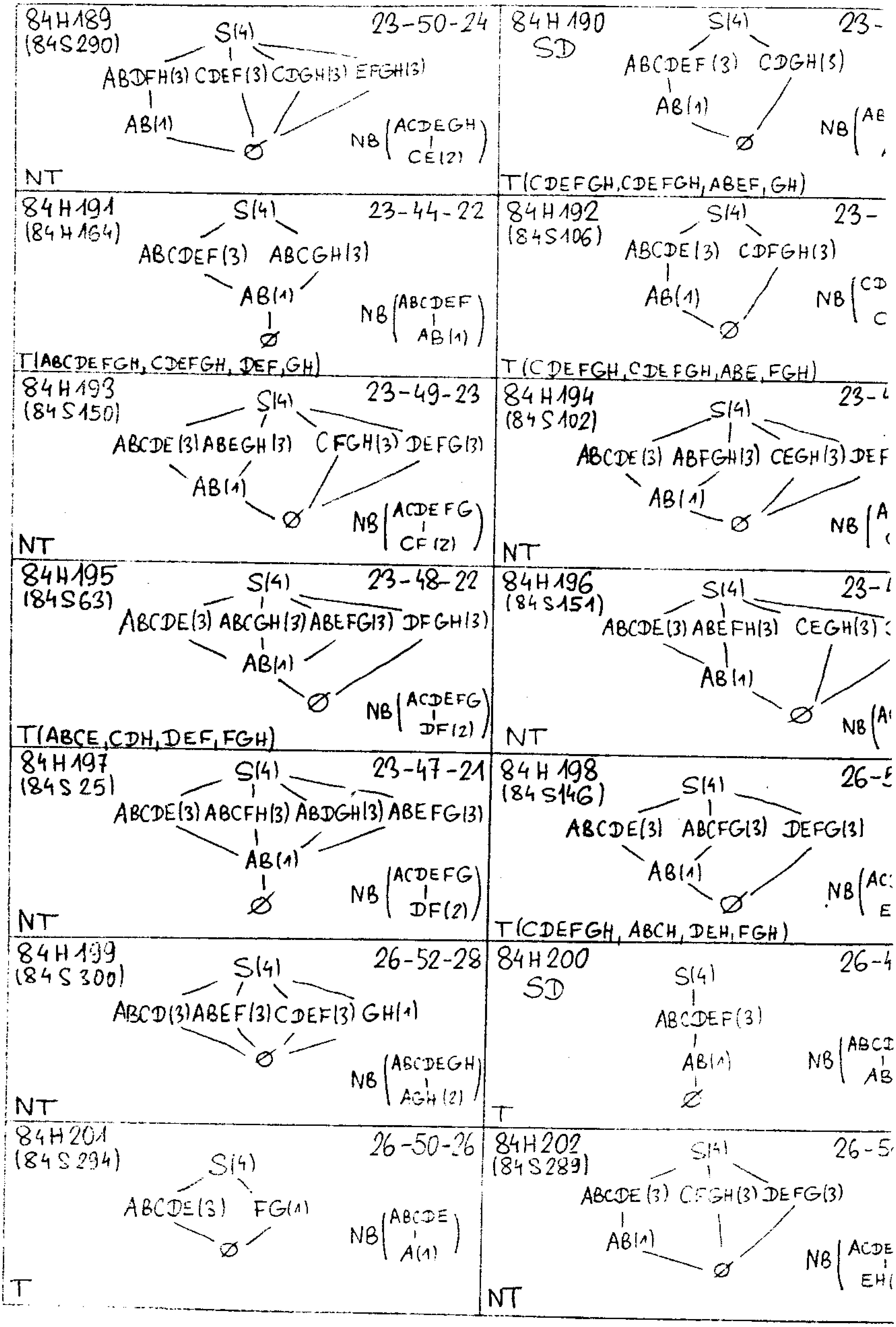
T(ABDG, EFGH, EFGH, CDH)

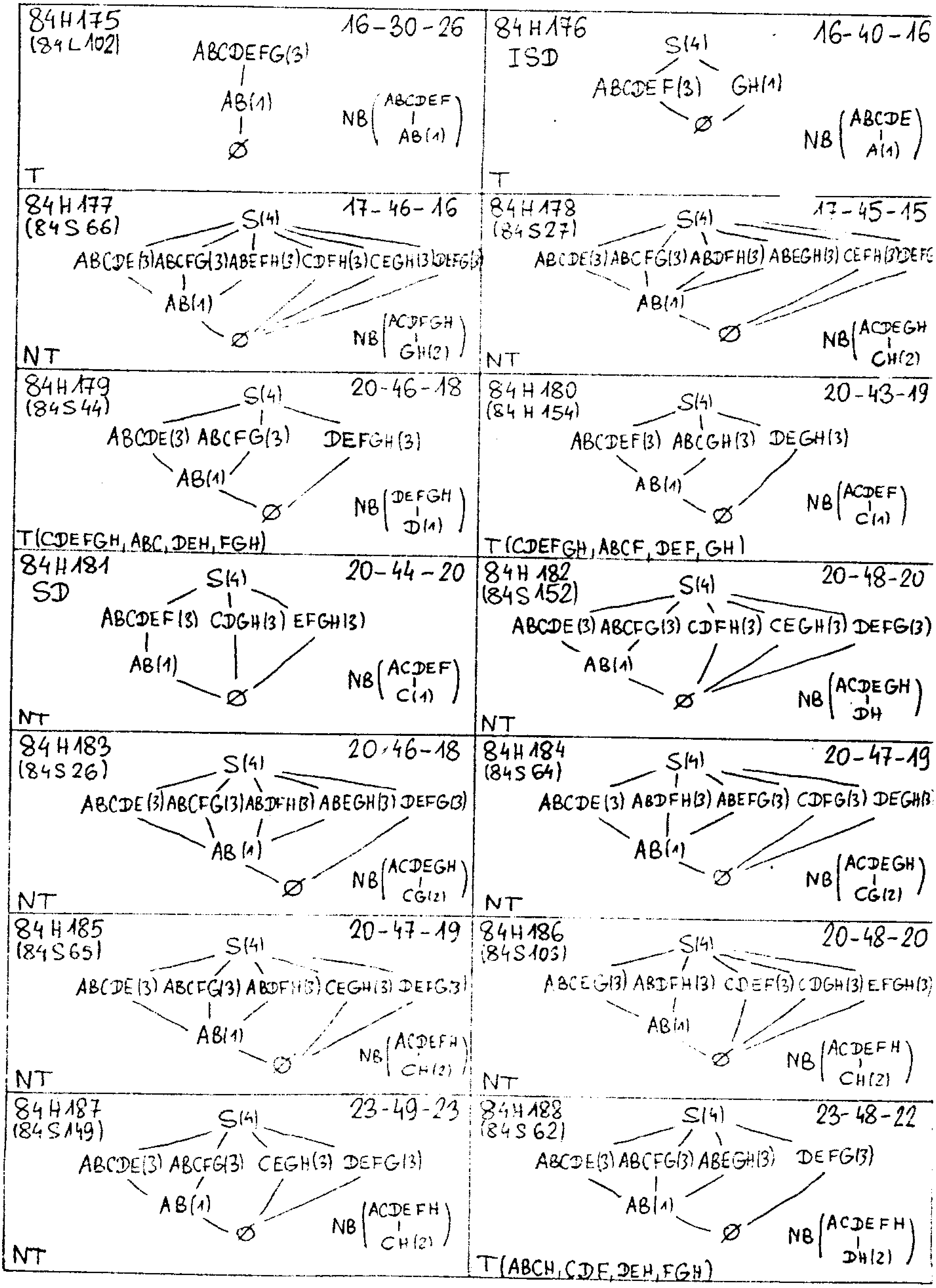
84 H 160 (84 S 80) — 20-45-21

S(4); ABCD(2), CEFG(3), DEFH(3); AB(1); ∅

NB (S(4) / ABCD)

NT


84H189
(84S290)
23-50-24
S(4)
ABDFH(3) CDEF(3) CDGH(3) EFGH(3)
AB(1)
Ø
NB (ACDEGH / CE(2))
NT
84H190
SD
23-
S(4)
ABCDEF(3) CDGH(3)
AB(1)
Ø
NB (AB
T(CDEFGH,CDEFGH,ABEF,GH)
84H191
(84H164)
23-44-22
S(4)
ABCDEF(3) ABCGH(3)
AB(1)
Ø
NB (ABCDEF / AB(1))
T(ABCDEFGH, CDEFGH, DEF, GH)
84H192
(84S106)
23-
S(4)
ABCDE(3) CDFGH(3)
AB(1)
Ø
NB (CD / C
T(CDEFGH,CDEFGH,ABE,FGH)
84H193
(84S150)
23-49-23
S(4)
ABCDE(3) ABEGH(3) CFGH(3) DEFG(3)
AB(1)
Ø
NB (ACDEFG / CF(2))
NT
84H194
(84S102)
23-
S(4)
ABCDE(3) ABFGH(3) CEGH(3) DEF
AB(1)
Ø
NB (A
NT
84H195
(84S63)
23-48-22
S(4)
ABCDE(3) ABCGH(3) ABEFG(3) DFGH(3)
AB(1)
Ø
NB (ACDEFG / DF(2))
T(ABCE,CDH,DEF,FGH)
84H196
(84S151)
23-
S(4)
ABCDE(3) ABEFH(3) CEGH(3)
AB(1)
Ø
NB
NT
84H197
(84S25)
23-47-21
S(4)
ABCDE(3) ABCFH(3) ABDGH(3) ABEFG(3)
AB(1)
Ø
NB (ACDEFG / DF(2))
NT
84H198
(84S146)
26-
S(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) DEFG(3)
AB(1)
Ø
NB (AC / E
T(CDEFGH, ABCH, DEH, FGH)
84H199
(84S300)
26-52-28
S(4)
ABCD(3) ABEF(3) CDEF(3) GH(1)
Ø
NB (ABCDEGH / AGH(2))
NT
84H200
SD
26-
S(4)
ABCDEF(3)
AB(1)
Ø
NB (ABC / AB
T
84H201
(84S294)
26-50-26
S(4)
ABCDE(3) FG(1)
Ø
NB (ABCDE / A(1))
T
84H202
(84S289)
26-5
S(4)
ABCDE(3) CFGH(3) DEFG(3)
AB(1)
Ø
NB (ACDE / EH
NT


84H175
(84L102)
16-30-26
ABCDEFG(3)
AB(1)
∅
NB(ABCDEF / AB(1))
T
84H176
ISD
16-40-16
S(4)
ABCDEF(3)
GH(1)
∅
NB(ABCDE / A(1))
T
84H177
(84S66)
17-46-16
S(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) ABEFH(3) CDFH(3) CEGH(3) DEFG(3)
AB(1)
∅
NB(ACDFGH / GH(2))
NT
84H178
(84S27)
17-45-15
S(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) ABDFH(3) ABEGH(3) CEFH(3) DEFG
AB(1)
∅
NB(ACDEGH / CH(2))
NT
84H179
(84S44)
20-46-18
S(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) DEFGH(3)
AB(1)
∅
NB(DEFGH / D(1))
T(CDEFGH, ABC, DEH, FGH)
84H180
(84H154)
20-43-19
S(4)
ABCDEF(3) ABCGH(3) DEGH(3)
AB(1)
∅
NB(ACDEF / C(1))
T(CDEFGH, ABCF, DEF, GH)
84H181
SD
20-44-20
S(4)
ABCDEF(3) CDGH(3) EFGH(3)
AB(1)
∅
NB(ACDEF / C(1))
NT
84H182
(84S152)
20-48-20
S(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) CDFH(3) CEGH(3) DEFG(3)
AB(1)
∅
NB(ACDEGH / DH)
NT
84H183
(84S26)
20-46-18
S(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) ABDFH(3) ABEGH(3) DEFG(3)
AB(1)
∅
NB(ACDEGH / CG(2))
NT
84H184
(84S64)
20-47-19
S(4)
ABCDE(3) ABDFH(3) ABEFG(3) CDFG(3) DEGH(3)
AB(1)
∅
NB(ACDEGH / CG(2))
NT
84H185
(84S65)
20-47-19
S(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) ABDFH(3) CEGH(3) DEFG(3)
AB(1)
∅
NB(ACDEFH / CH(2))
NT
84H186
(84S103)
20-48-20
S(4)
ABCEG(3) ABDFH(3) CDEF(3) CDGH(3) EFGH(3)
AB(1)
∅
NB(ACDEFH / CH(2))
NT
84H187
(84S149)
23-49-23
S(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) CEGH(3) DEFG(3)
AB(1)
∅
NB(ACDEFH / CH(2))
NT
84H188
(84S62)
23-48-22
S(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) ABEGH(3) DEFG(3)
AB(1)
∅
NB(ACDEFH / DH(2))
T(ABCH, CDE, DEH, FGH)

84H203
(84S101)
26-50-26
S(4)
ABCDE(3) ABFGH(3) DEFG(3)
AB(1)
∅
NB(ACDEFH / EH(2))
T(CDEFGH; ABCH, CDE, FGH)

84H204
(84S147)
26-50-26
S(4)
ABCDE(3) ABEFG(3) DFGH(3)
AB(1)
∅
NB(ACDEFH / EH(2))
T(CDEFGH, ABCE, CDH, FGH)

84H205
(84S288)
26-51-27
S(4)
ABCDE(3) CEGH(3) DEFG(3)
AB(1)
∅
NB(ACDEFH / FH(2))
NT

84H206
(84S148)
26-50-26
S(4)
ABCDE(3) ABEGH(3) DEFG(3)
AB(1)
∅
NB(ACDEFH / FH(2))
T(CDEFGH, ABCH, CDF, FGH)

84H207
(84S61)
26-49-25
S(4)
ABCDE(3) ABDGH(3) ABEFG(3)
AB(1)
∅
NB(ACDEFH / FH(2))
T(ABCDEFGH, CDH, CEF, FGH)

84H208
(84S100)
29-51-29
S(4)
ABCDE(3) ABFGH(3)
AB(1)
∅
NB(ACDEFG / CF(2))
T(ABCDEFGH, CDEFGH, CDE, FGH)

84H209
(84S291)
29-52-30
S(4)
ABCDE(3) CFGH(3)
AB(1)
∅
NB(ACDEFG / DF(2))
T(ABDE, CDEFGH, CDEFGH, FGH)

84H210
(84S287)
29-52-30
S(4)
ABCDE(3) CDFG(3)
AB(1)
∅
NB(ACDEFG / EF(2))
T(ABEH, CDEFGH, CDEFGH, FGH)

84H211
(84S145)
29-51-29
S(4)
ABCDE(3) ABCFG(3)
AB(1)
∅
NB(ACDEFG / DF(2))
T(ABCDEFGH, CDEFGH, DEH, FGH)

84H212
(84S299)
29-53-31
S(4)
ABCD(3) CDEF(3) GH(1)
∅
NB(ABCDEGH / AGH(2))
NT

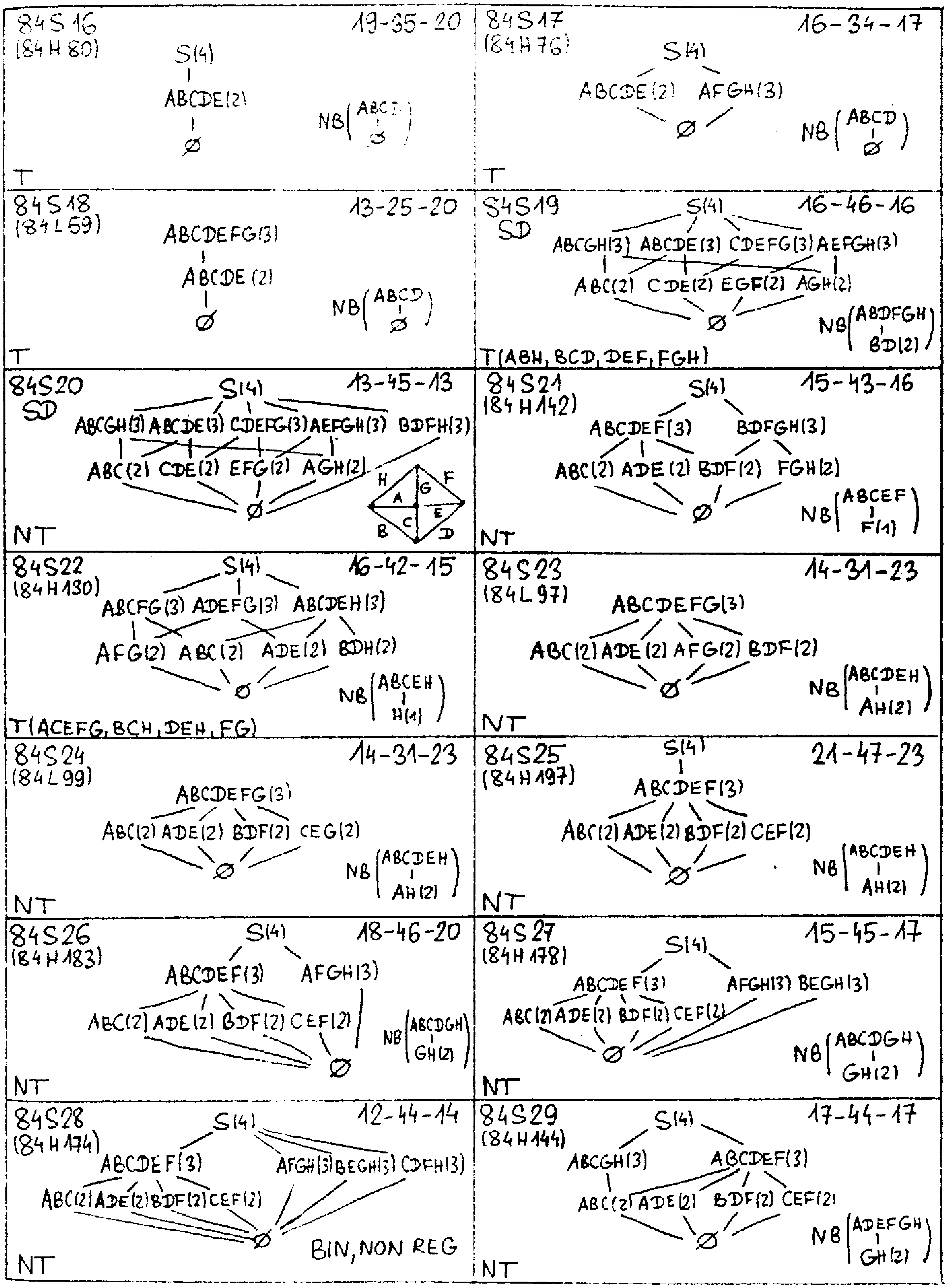
84H213
(84S286)
32-53-33
S(4)
ABCDE(3)
AB(1)
∅
NB(ACDEFG / FG(2))
T

84H214
(84S298)
32-54-34
S(4)
ABCD(3) EF(1)
∅
NB(ABCDEFG / AEF(2))
T

84H215
(84S297)
35-55-37
S(4)
AB(1)
∅
NB(ABCDEFG / ABC(2))
T

84S1
(84L31)
8-28-14
ABCDEFG(3)
ABC(2) ADE(2) AFG(2) BDF(2) CEF(2) BEG(2) CDG(2)
∅
BIN, NON REG
NT

84H203 (84S101) 26-50-26 S(4) ABCDE(3) ABFGH(3) DEFG(3) AB(1) ∅ NB(ACDEFH / EH(2)) T(CDEFGH, ABCH, CDE, FGH)	84H204 (84S147) 26-50-26 S(4) ABCDE(3) ABEFG(3) DFGH(3) AB(1) ∅ NB(ACDEFH / EH(2)) T(CDEFGH, ABCE, CDH, FGH)
84H205 (84S288) 26-51-27 S(4) ABCDE(3) CEGH(3) DEFG(3) AB(1) ∅ NB(ACDEFH / FH(2)) NT	84H206 (84S148) 26-50-26 S(4) ABCDE(3) ABEGH(3) DEFG(3) AB(1) ∅ NB(ACDEFH / FH(2)) T(CDEFGH, ABCH, CDF, FGH)
84H207 (84S61) 26-49-25 S(4) ABCDE(3) ABDGH(3) ABEFG(3) AB(1) ∅ NB(ACDEFH / FH(2)) T(ABCDEFGH, CDH, CEF, FGH)	84H208 (84S100) 29-51-29 S(4) ABCDE(3) ABFGH(3) AB(1) ∅ NB(ACDEFG / CF(2)) T(ABCDEFGH, CDEFGH, CDE, FGH)
84H209 (84S291) 29-52-30 S(4) ABCDE(3) CFGH(3) AB(1) ∅ NB(ACDEFG / DF(2)) T(ABDE, CDEFGH, CDEFGH, FGH)	84H210 (84S287) 29-52-30 S(4) ABCDE(3) CDFG(3) AB(1) ∅ NB(ACDEFG / EF(2)) T(ABEH, CDEFGH, CDEFGH, FGH)
84H211 (84S145) 29-51-29 S(4) ABCDE(3) ABCFG(3) AB(1) ∅ NB(ACDEFG / DF(2)) T(ABCDEFGH, CDEFGH, DEH, FGH)	84H212 (84S299) 29-53-31 S(4) ABCD(3) CDEF(3) GH(1) ∅ NB(ABCDEGH / AGH(2)) NT
84H213 (84S286) 32-53-33 S(4) ABCDE(3) AB(1) ∅ NB(ACDEFG / FG(2)) T	84H214 (84S298) 32-54-34 S(4) ABCD(3) EF(1) ∅ NB(ABCDEFG / AEF(2)) T
84H215 (84S297) 35-55-37 S(4) AB(1) ∅ NB(ABCDEFG / ABC(2)) T	84S1 (84L91) 8-28-14 ABCDEFG(3) ABC(2) ADE(2) AFG(2) BDF(2) CEF(2) BEG(2) CDG(2) ∅ NT BIN, NON REG


84S16
(84H80)
19-35-20
S(4)
ABCDE(2)
∅
NB(ABCD / ∅)
T
84S17
(84H76)
16-34-17
S(4)
ABCDE(2) AFGH(3)
∅
NB(ABCD / ∅)
T
84S18
(84L59)
13-25-20
ABCDEFG(3)
ABCDE(2)
∅
NB(ABCD / ∅)
T
84S19
SD
16-46-16
S(4)
ABCGH(3) ABCDE(3) CDEFG(3) AEFGH(3)
ABC(2) CDE(2) EGF(2) AGH(2)
∅
NB(ABDFGH / BD(2))
T(ABH, BCD, DEF, FGH)
84S20
SD
13-45-13
S(4)
ABCGH(3) ABCDE(3) CDEFG(3) AEFGH(3) BDFH(3)
ABC(2) CDE(2) EFG(2) AGH(2)
∅
H G F A C E B D
NT
84S21
(84H142)
15-43-16
S(4)
ABCDEF(3) BDFGH(3)
ABC(2) ADE(2) BDF(2) FGH(2)
∅
NB(ABCEF / F(1))
NT
84S22
(84H130)
16-42-15
S(4)
ABCFG(3) ADEFG(3) ABCDEH(3)
AFG(2) ABC(2) ADE(2) BDH(2)
∅
NB(ABCEH / H(1))
T(ACEFG, BCH, DEH, FG)
84S23
(84L97)
14-31-23
ABCDEFG(3)
ABC(2) ADE(2) AFG(2) BDF(2)
∅
NB(ABCDEH / AH(2))
NT
84S24
(84L99)
14-31-23
ABCDEFG(3)
ABC(2) ADE(2) BDF(2) CEG(2)
∅
NB(ABCDEH / AH(2))
NT
84S25
(84H197)
21-47-23
S(4)
ABCDEF(3)
ABC(2) ADE(2) BDF(2) CEF(2)
∅
NB(ABCDEH / AH(2))
NT
84S26
(84H183)
18-46-20
S(4)
ABCDEF(3) AFGH(3)
ABC(2) ADE(2) BDF(2) CEF(2)
∅
NB(ABCDGH / GH(2))
NT
84S27
(84H178)
15-45-17
S(4)
ABCDEF(3) AFGH(3) BEGH(3)
ABC(2) ADE(2) BDF(2) CEF(2)
∅
NB(ABCDGH / GH(2))
NT
84S28
(84H174)
12-44-14
S(4)
ABCDEF(3) AFGH(3) BEGH(3) CDFH(3)
ABC(2) ADE(2) BDF(2) CEF(2)
∅
BIN, NON REG
NT
84S29
(84H144)
17-44-17
S(4)
ABCGH(3) ABCDEF(3)
ABC(2) ADE(2) BDF(2) CEF(2)
∅
NB(ADEFGH / GH(2))
NT

84S2 (84L23) 8-15-20

ABCDEF(2)

∅

NB(ABCD | ∅)

T

84S3 (84L93) 10-29-1…

ABCDEFG(3)

ABC(2) ADE(2) AFG(2) BDF(2) CEF(2) BEG

∅

NB(ABCDEH | AH(2))

NT

84S4 (84L81) 11-28-17

ABCDEFG(3)

ABCD(2) AEF(2) BEG(2) CFG(2)

∅

NB(ABCD | ∅)

NT

84S5 (84L58) 11-24-1…

ABCDEFG(3)

ABCDE(2) AFG(2)

∅

NB(ABCD | ∅)

T

84S6 (84H66) 8-30-11

S(4)

ABCDE(2) FGH(2)

∅

NB(ABCD | ∅)

T

84S7 (84L95) 12-30-20

ABCDEFG(3)

ABC(2) ADE(2) AFG(2) BDF(2) BEG(2)

∅

NB(ABCDEH | AH(2))

NT

84S8 (84L96) 12-30-20

ABCDEFG(3)

ABC(2) ADE(2) AFG(2) BDF(2) CEG(2)

∅

NB(ABCDEH | AH(1))

NT

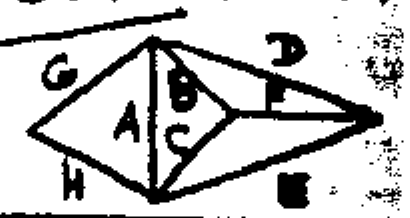
84S9 (84H122) 12-40-12

S(4)

ABCGH(3) ADEGH(3) ABCDEF(3)

AGH(2) ABC(2) ADE(2) BDF(2) CEF(2)

∅



NT

84S10 ISD 8-36-8

S(4)

ABCD(2) EFGH(2)

∅

NB(ABCD | ∅)

T

84S11 (84L72) 12-27-17

ABCDEFG(3)

ABCD(2) AEFG(2)

∅

NB(ABCD | ∅)

T

84S12 (84H111) 13-39-13

S(4)

ABCDEF(3) AEFGH(3)

ABCD(2) AEF(2) EGH(2)

∅

NB(ABCD | ∅)

T(ABCDF, EFGH, BCD, GH)

84S13 (84L86) 13-29-20

ABCDEFG(3)

ABCD(2) AEF(2) BEG(2)

∅

NB(ABCD | ∅)

T(ACDF, BCDG, EFG, H)

84S14 (84H61) 15-36-13

S(4)

ABCDEF(3) ABCDGH(3) AEFGH(3)

ABCD(2) AEF(2) AGH(2)

∅

NB(ABCD | ∅)

T(ABCDEFGH, BCD, EF, GH)

84S15 (84H74) 14-37-14

S(4)

ABCDEF(3) ABCDGH(3)

AEF(2) ABCD(2) BGH(2)

∅

NB(ABCD | ∅)

T(ACDEF, BCDGH, EF, GH)

84S44 (84H179) 18-46-20
S(4)
ABCDEF(3)
ABC(2) ADE(2) FGH(2)
Ø
NB(ABCDFGH / FGH(2))
NT

84S45 (84H158) 19-45-19
S(4)
ABCDE(3) ABCFGH(3)
ADE(2) ABC(2) FGH(2)
Ø
NB(ABCFG / F(1))
T(ABCDE, BCFGH, FGH, DE)

84S46 SD 26-52-26
S(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) ADEFG(3)
ABC(2) ADE(2) AFG(2)
Ø
NB(ABCDEH / BH(2))
T(ABCDEFGH, BCH, DEH, FGH)

84S47 SD 23-51-23
S(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) ADEFG(3) BDFH(3)
ABC(2) ADE(2) AFG(2)
Ø
NB(ACDEFH / CH(2))
T(ACEG, BCH, DEH, FGH)

84S48 SD 20-50-20
S(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) ADEFG(3) BDFH(3) BEGH(3)
ABC(2) ADE(2) AFG(2)
Ø
NB(ACDEFH / CH(2))
NT

84S49 SD 20-50-20
S(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) ADEFG(3) BDFH(3) CEGH(3)
ABC(2) ADE(2) AFG(2)
Ø
NB(ACDEFH / CH(2))
NT

84S50 SD 17-49-17
S(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) ADEFG(3) BDFH(3) BEGH(3) CDGH(3)
ABC(2) ADE(2) AFG(2)
Ø
NB(ACDEFH / CH(2))
NT

84S51 SD 14-48-14
S(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) ADEFG(3) BDFH(3) BEGH(3) CDGH(3) CEFH(3)
ABC(2) ADE(2) AFG(2)
Ø
BIN, NON REG
NT

84S52 (84H133) 20-44-18
S(4)
ABCDEH(3) ABCFG(3) ADEFG(3)
ABC(2) ADE(2) AFG(2)
Ø
NB(ABCDFH / FH(2))
T(ABCDEFGH, BCH, DEH, FG)

84S53 (84L101) 16-32-26
ABCDEFG(3)
ABC(2) ADE(2) AFG(2)
Ø
NB(BCDEG / G(1))
NT

84S54 (84S140) 25-53-27
S(4)
ABCDG(3) ADEFG(3)
ABC(2) ADG(2) DEF(2)
Ø
NB(ABDEFH / AH(2))
T(ABCGH, DEFGH, BCH, EFH)

84S55 (84S141) 22-52-24
S(4)
ABCDG(3) ADEFG(3) BEGH(3)
ABC(2) ADG(2) DEF(2)
Ø
NB(ABDEFH / AH(2))
NT

84S56 (84S142) 19-51-21
S(4)
ABCDG(3) ADEFG(3) BEGH(3) CFGH(3)
ABC(2) ADG(2) DEF(2)
Ø
NB(ABCDEFH / ABC(2))
NT

84S57 SD 21-50-21
S(4)
ABCEH(3) ABCDG(3) ADEFG(3)
ABC(2) ADG(2) DEF(2)
Ø
NB(ABCEH / E(1))
T(ABCGH, BCH, DFG, EFH)

84S30 (84L100) 14-31-23

ABCDEFG(3)

ABC(2) ADE(2) BDF(2) CEF(2)

∅

NB(ABDFGH | AH(2))

NT

84S31 (84H166) 23-45-2

S(4)

ABCDEF(3)

ABCD(2) AEF(2)

∅

NB(ABCDGH | GH(2))

T(ABCDEFGH, BCDGH, EFGH, GH)

84S32 (84H159) 20-44-20

S(4)

ABCDEF(3) BEGH(3)

ABCD(2) AEF(2)

∅

NB(ABCD | ∅)

T(BCDGH, ACDF, EFGH, GH)

84S33 (84H143) 17-43-

S(4)

ABCDEF(3) BEGH(3) CFGH(3)

ABCD(2) AEF(2)

∅

NB(ABCD | ∅)

NT

84S34 (84H78) 18-39-17

S(4)

ABCDGH(3) ABCDEF(3)

ABCD(2) AEF(2)

∅

NB(ABCD | ∅)

T(ABCDEFGH, BCDGH, EF, GH)

84S35 (84H114) 19-42-1

S(4)

AEFGH(3) ABCDEF(3)

AEF(2) ABCD(2)

∅

NB(ABC | ∅)

T(ABCDEFGH, EFGH, BCD, GH)

84S36 (84L88) 15-30-23

ABCDEFG(3)

ABCD(2) AEF(2)

∅

NB(ABCD | ∅)

T

84S37 (84S71) 21-48-2

S(4)

ABCD(2) EFG(2)

∅

NB(ABCD | ∅)

T

84S38 (84L89) 15-30-23

ABCDEFG(3)

ABCD(2) EFG(2)

∅

NB(ABCD | ∅)

T

84S39 (84H147) 16-42-

S(4)

ABCDEH(3)

ABCD(2) EFG(2)

∅

NB(ABC | ∅)

T(ABCDH, ABCDH, EFGH, FG)

84S40 SD 17-45-17

S(4)

AEFGH(3)

EFG(2) ABCD(2)

∅

NB(ABCD | ∅)

T(ABCDH, EFGH, EFGH, BCD)

84S41 (84S285) 24-54-

S(4)

ABCDE(3)

ABC(2) ADE(2) FGH(2)

∅

NB(ABCDFG | FGH(

NT

84S42 (84S91) 20-51-22

S(4)

ABCDE(3) BDFGH(3)

ABC(2) ADE(2) FGH(2)

∅

NB(ABCEFGH | FGH(2))

NT

84S43 NESD 16-48-16

S(4)

ABCDE(3) BDFGH(3) CEFGH(3)

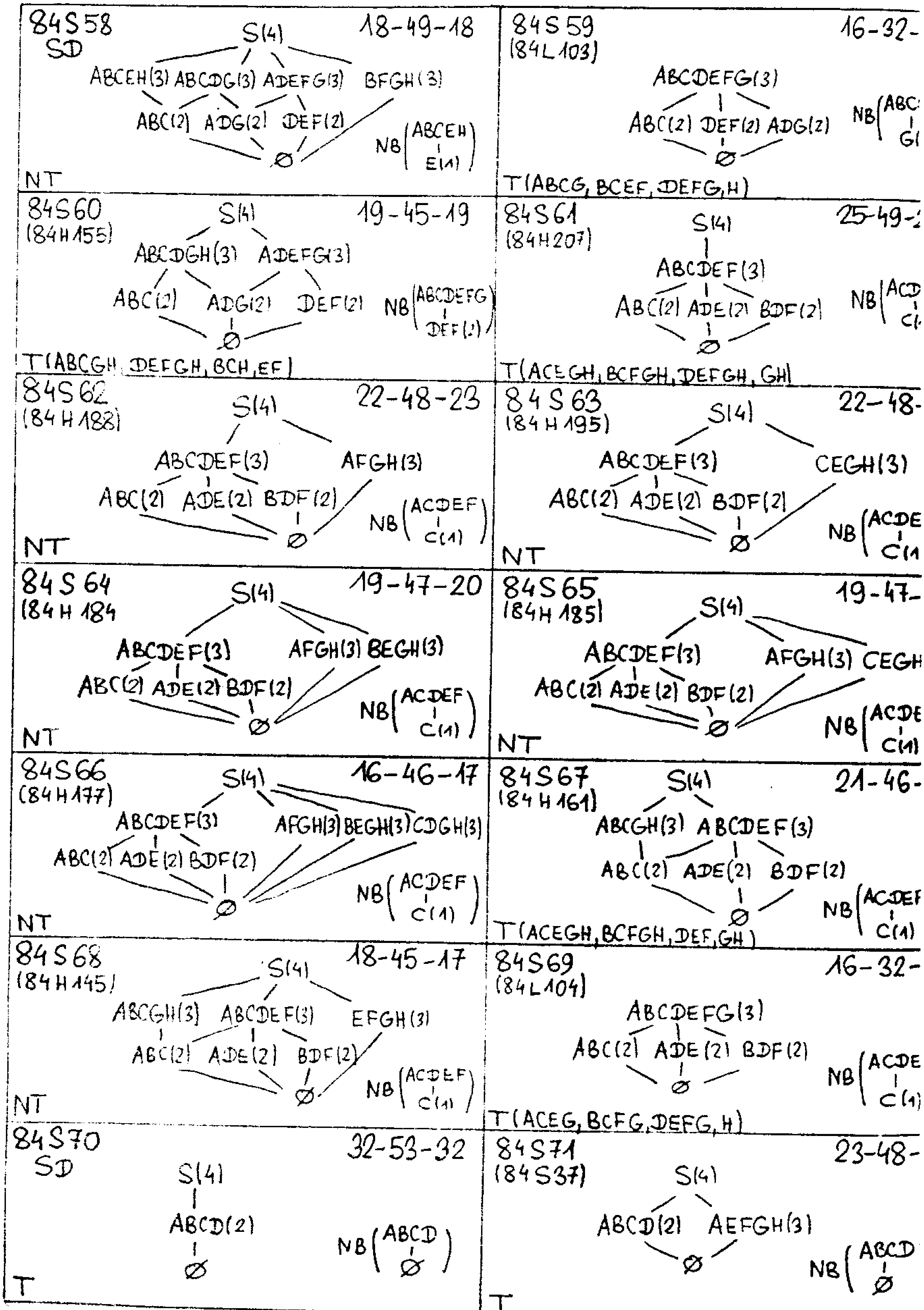
ABC(2) ADE(2) FGH(2)

∅

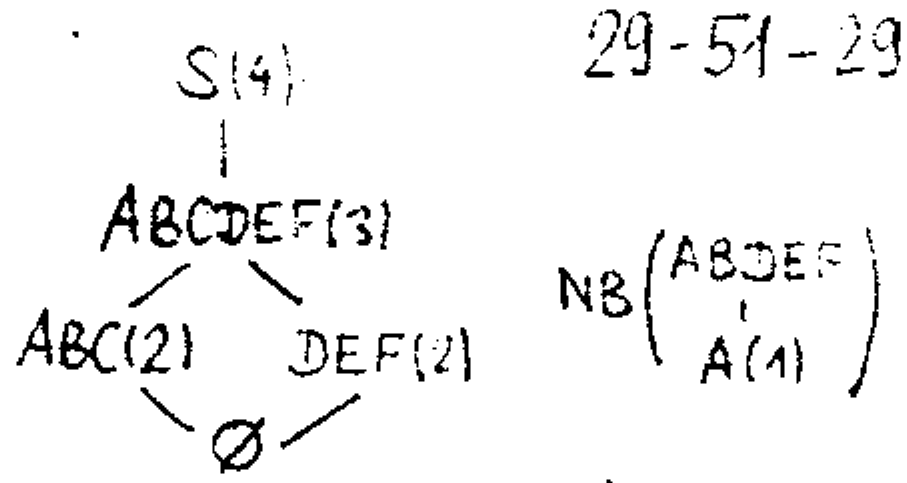
NB(CEFGH | C(1))

NT

84 S 72 29-52-23 SD S(4) ABCD(2) AEFG(3) ∅ $\mathrm{NB}\begin{pmatrix} ABCD \\ \varnothing \end{pmatrix}$ T	84 S 73 29-52-29 SD S(4) ABCD(2) EFGH(3) ∅ $\mathrm{NB}\begin{pmatrix} ABCD \\ \varnothing \end{pmatrix}$ T
84 S 74 26-51-26 SD S(4) ABCD(2) AEFG(3) BEFH(3) ∅ $\mathrm{NB}\begin{pmatrix} ABCD \\ \varnothing \end{pmatrix}$ T(ACDG, BCDH, EFGH, EFGH)	84 S 75 23-50-23 SD S(4) ABCD(2) AEFG(3) BEFH(3) CEGH(3) ∅ $\mathrm{NB}\begin{pmatrix} ABCD \\ \varnothing \end{pmatrix}$ NT
84S76 20-49-20 SD S(4) ABCD(2) AEFG(3) BEFH(3) CEGH(3) DFGH(3) ∅ $\mathrm{NB}\begin{pmatrix} ABCD \\ \varnothing \end{pmatrix}$ NT	84 S 77 27-47-26 (84 H 172) S(4) ABCDEF(3) ABCD(2) ∅ $\mathrm{NB}\begin{pmatrix} ABCD \\ \varnothing \end{pmatrix}$ T
84S78 24-46-23 (84H167) S(4) ABCDEF(3) AEGH(3) ABCD(2) ∅ $\mathrm{NB}\begin{pmatrix} ABCD \\ \varnothing \end{pmatrix}$ T(ABCDEFGH, BCDF, EFGH, GH)	84S79 24-46-23 (84H170) S(4) ABCDEF(3) EFGH(3) ABCD(2) ∅ $\mathrm{NB}\begin{pmatrix} ABCD \\ \varnothing \end{pmatrix}$ T(ABCDEFGH, ABCD, EFGH, GH)
84S80 21-45-20 (84H160) S(4) ABCDEF(3) AEGH(3) BEFH(3) ABCD(2) ∅ $\mathrm{NB}\begin{pmatrix} ABCD \\ \varnothing \end{pmatrix}$ T(ACDG, BCDF, EFGH, GH)	84S81 22-41-20 (84H81) S(4) ABCDEF(3) ABCDGH(3) ABCD(2) ∅ $\mathrm{NB}\begin{pmatrix} ABCD \\ \varnothing \end{pmatrix}$ T(ABCDEFGH, ABCDEFGH, EF, GH)
84S82 19-40-17 (84H79) S(4) ABCDEF(3) ABCDGH(3) EFGH(3) ABCD(2) ∅ $\mathrm{NB}\begin{pmatrix} ABCD \\ \varnothing \end{pmatrix}$ T(ABCDEFGH, ABCD, EF, GH)	84S83 17-31-26 (84L90) ABCDEFG(3) ABCD(2) ∅ $\mathrm{NB}\begin{pmatrix} ABCD \\ \varnothing \end{pmatrix}$ T
84 S 84 34-60-38 (84 S 301) S(4) ABC(2) DEF(2) ∅ $\mathrm{NB}\begin{pmatrix} ABCDEFG \\ ABC(2) \end{pmatrix}$ T	84 S 85 31-59-35 (84 S 302) S(4) ABC(2) DEF(2) ADGH(3) ∅ $\mathrm{NB}\begin{pmatrix} ABCDEFG \\ ABC(2) \end{pmatrix}$ NT

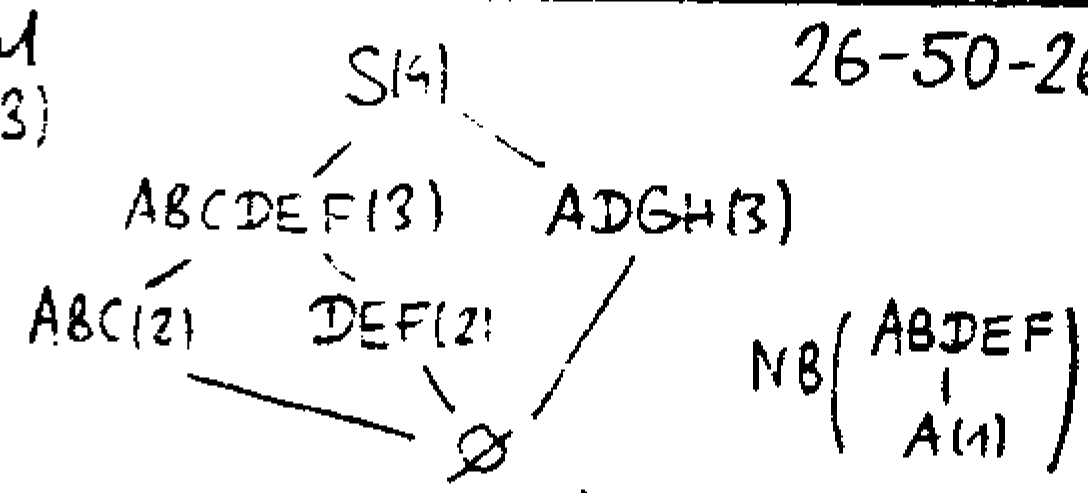

84S58
SD
18-49-18
S(4)
ABCEH(3) ABCDG(3) ADEFG(3) BFGH(3)
ABC(2) ADG(2) DEF(2)
∅
NB(ABCEH / E(1))
NT
84S59
(84L103)
16-32-
ABCDEFG(3)
ABC(2) DEF(2) ADG(2)
∅
NB(ABC / G(
T(ABCG, BCEF, DEFG, H)
84S60
(84H155)
19-45-19
S(4)
ABCDGH(3) ADEFG(3)
ABC(2) ADG(2) DEF(2)
∅
NB(ABCDEFG / DEF(2))
T(ABCGH, DEFGH, BCH, EF)
84S61
(84H207)
25-49-
S(4)
ABCDEF(3)
ABC(2) ADE(2) BDF(2)
∅
NB(ACD / C(
T(ACEGH, BCFGH, DEFGH, GH)
84S62
(84H188)
22-48-23
S(4)
ABCDEF(3) AFGH(3)
ABC(2) ADE(2) BDF(2)
∅
NB(ACDEF / C(1))
NT
84S63
(84H195)
22-48-
S(4)
ABCDEF(3) CEGH(3)
ABC(2) ADE(2) BDF(2)
∅
NB(ACDE / C(1
NT
84S64
(84H184
19-47-20
S(4)
ABCDEF(3) AFGH(3) BEGH(3)
ABC(2) ADE(2) BDF(2)
∅
NB(ACDEF / C(1))
NT
84S65
(84H185)
19-47-
S(4)
ABCDEF(3) AFGH(3) CEGH
ABC(2) ADE(2) BDF(2)
∅
NB(ACDE / C(1)
NT
84S66
(84H177)
16-46-17
S(4)
ABCDEF(3) AFGH(3) BEGH(3) CDGH(3)
ABC(2) ADE(2) BDF(2)
∅
NB(ACDEF / C(1))
NT
84S67
(84H161)
21-46-
S(4)
ABCGH(3) ABCDEF(3)
ABC(2) ADE(2) BDF(2)
∅
NB(ACDEF / C(1)
T(ACEGH, BCFGH, DEF, GH)
84S68
(84H145)
18-45-17
S(4)
ABCGH(3) ABCDEF(3) EFGH(3)
ABC(2) ADE(2) BDF(2)
∅
NB(ACDEF / C(1))
NT
84S69
(84L104)
16-32-
ABCDEFG(3)
ABC(2) ADE(2) BDF(2)
∅
NB(ACDE / C(1)
T(ACEG, BCFG, DEFG, H)
84S70
SD
32-53-32
S(4)
ABCD(2)
∅
NB(ABCD / ∅)
T
84S71
(84S37)
23-48-
S(4)
ABCD(2) AEFGH(3)
∅
NB(ABCD / ∅
T

84S100 (84H208) 29-51-29



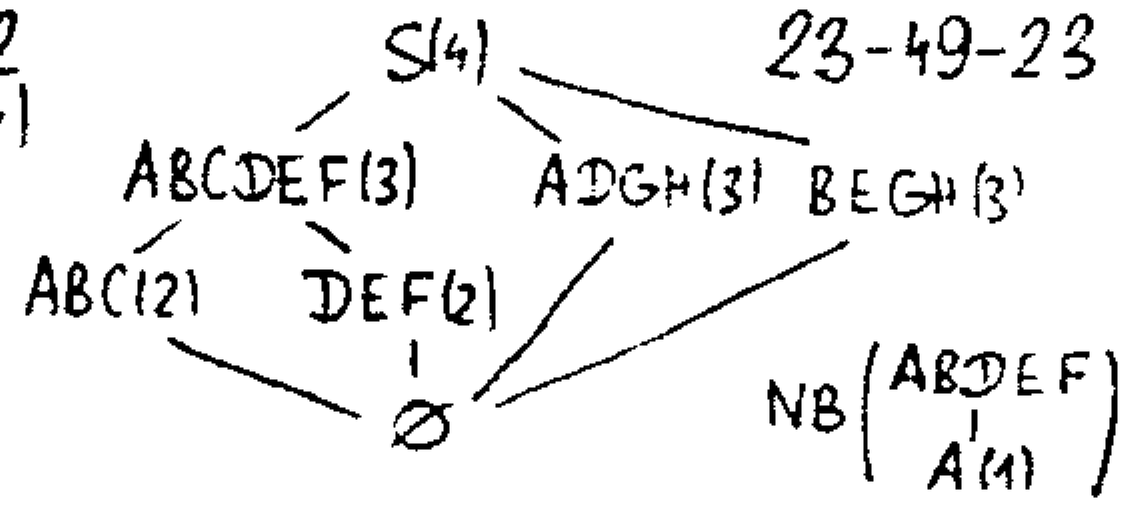
T(ABCDEFGH, ABCGH, DEFGH, GH)

84S101 (84H203) 26-50-26



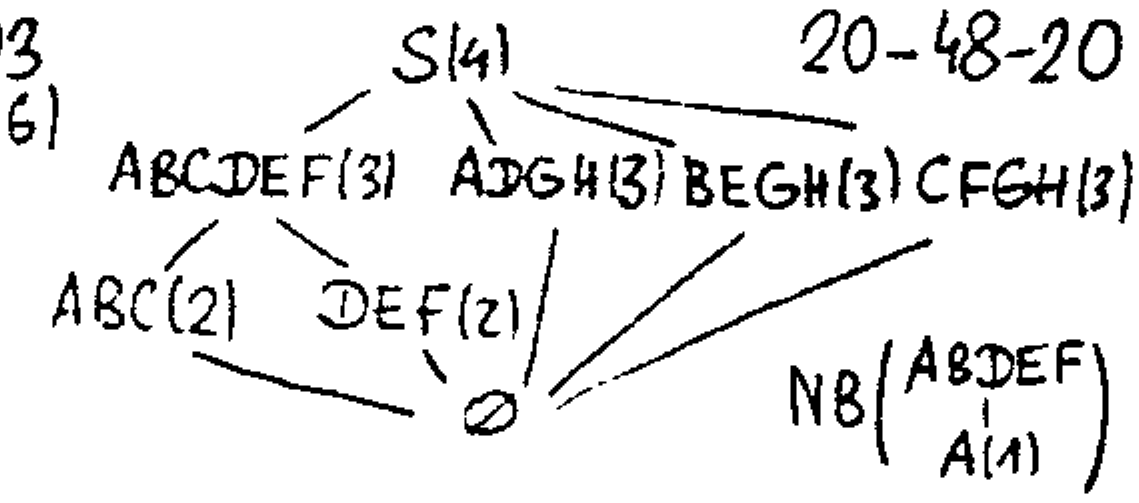
T(ABCGH, DEFGH, BCEF, GH)

84S102 (84H194) 23-49-23



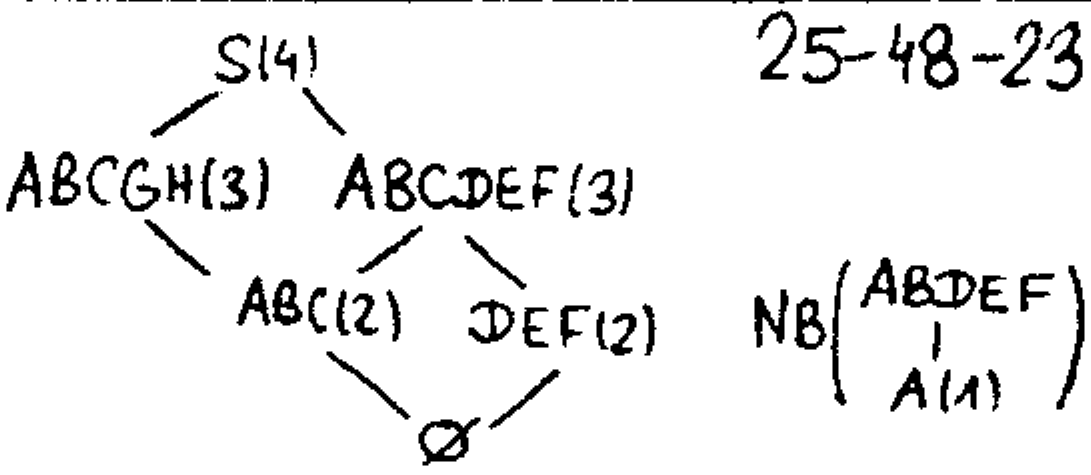
NT

84S103 (84H186) 20-48-20



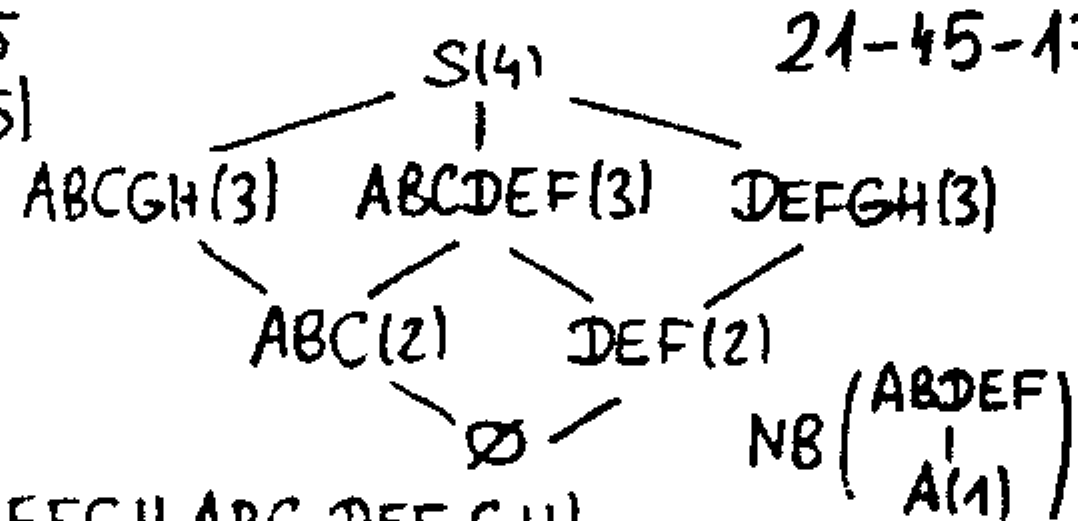
NT

84S104 (84H171) 25-48-23



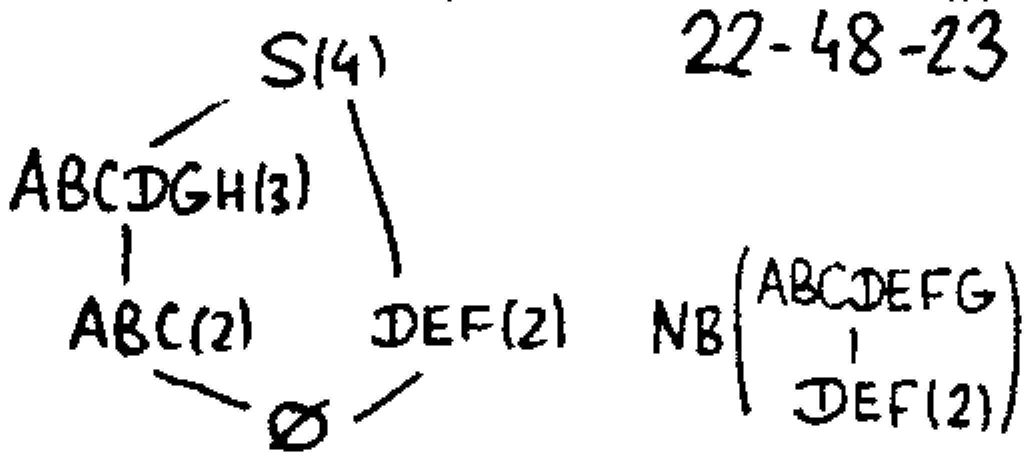
T(ABCDEFGH, ABCGH, DEF, GH)

84S105 (84H115) 21-45-17



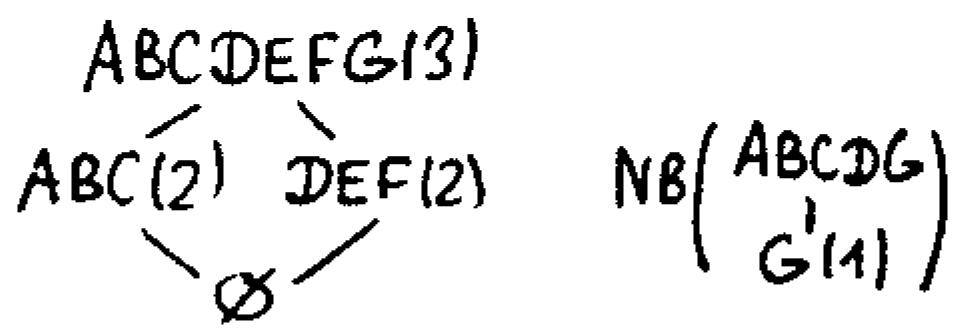
T(ABCDEFGH, ABC, DEF, GH)

84S106 (84H192) 22-48-23



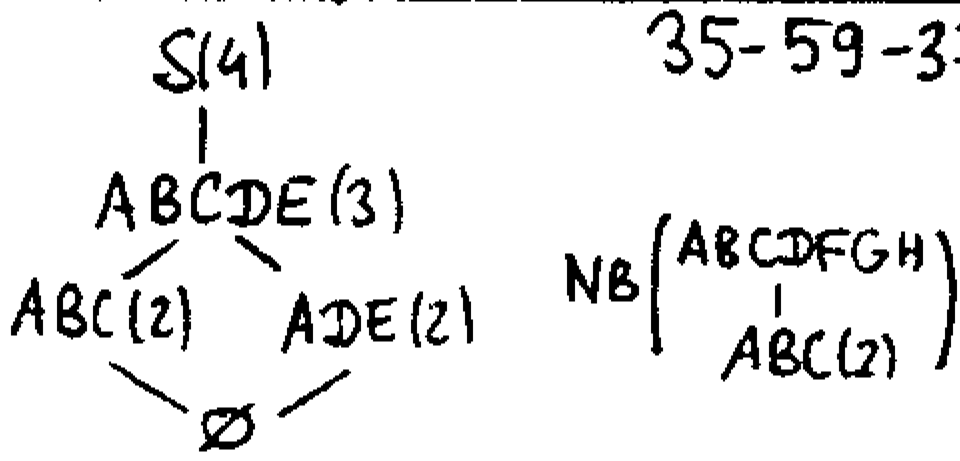
T(ABCGH, ABCGH, DEFGH, EF)

84S107 (84L105) 18-33-29



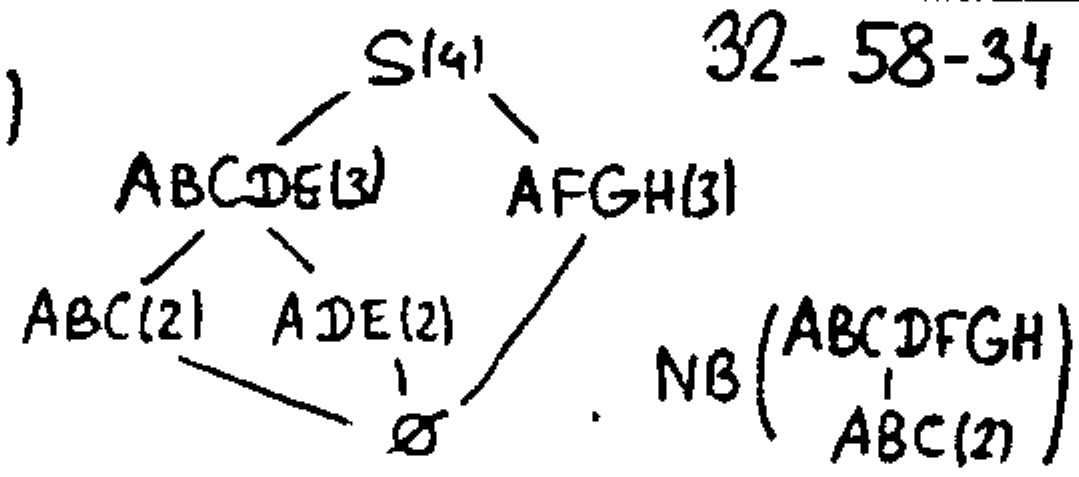
T

84S108 (84S260) 35-59-37



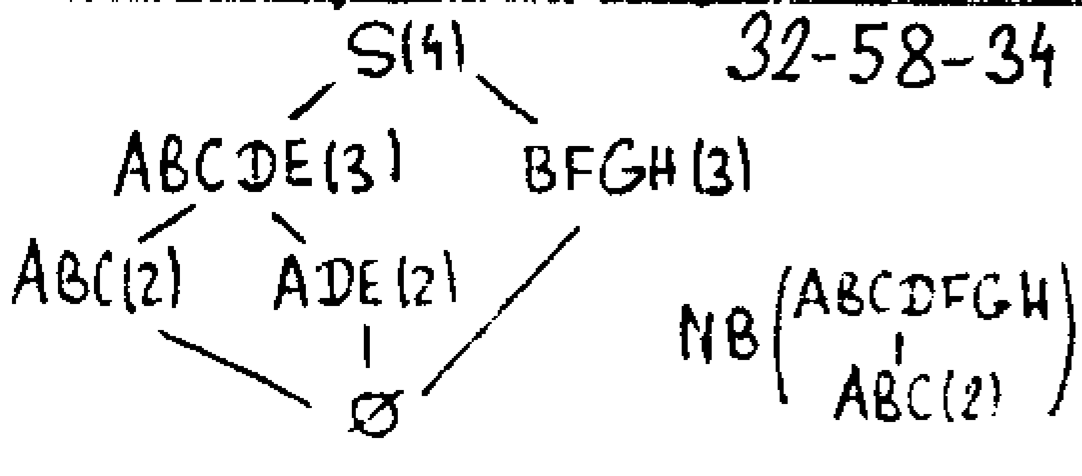
T(ABCDEFGH, BCFGH, DEFGH, FGH)

84S109 (84S269) 32-58-34



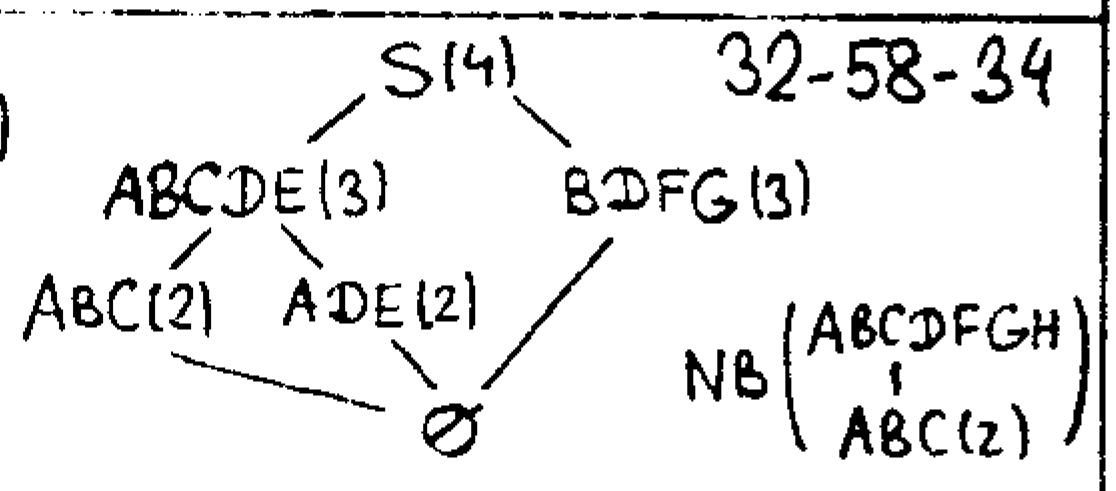
NT

84S110 (84S278) 32-58-34



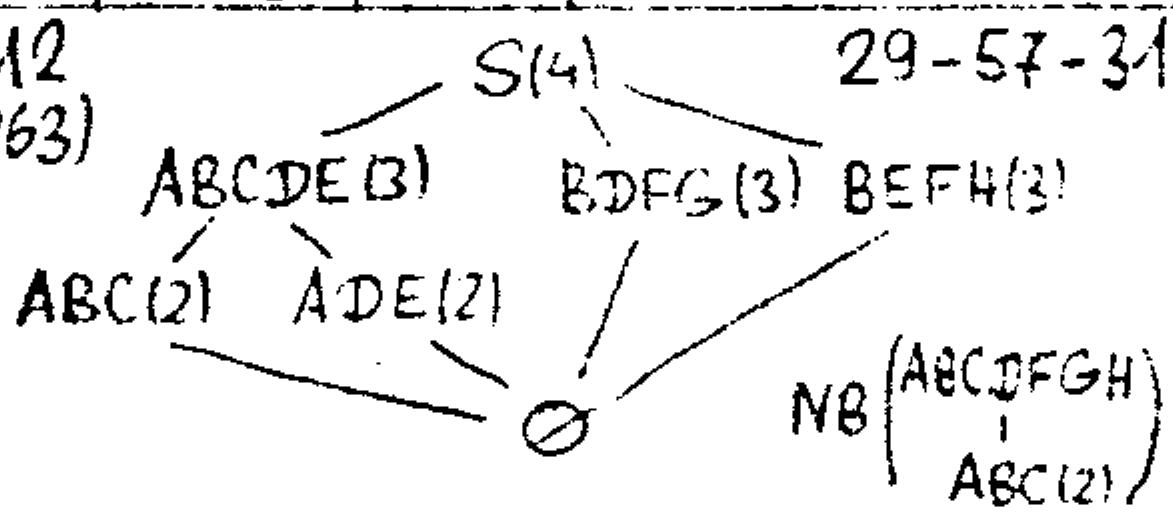
T(BCFGH, DEFGH, ACDE, FGH)

84S111 (84S261) 32-58-34



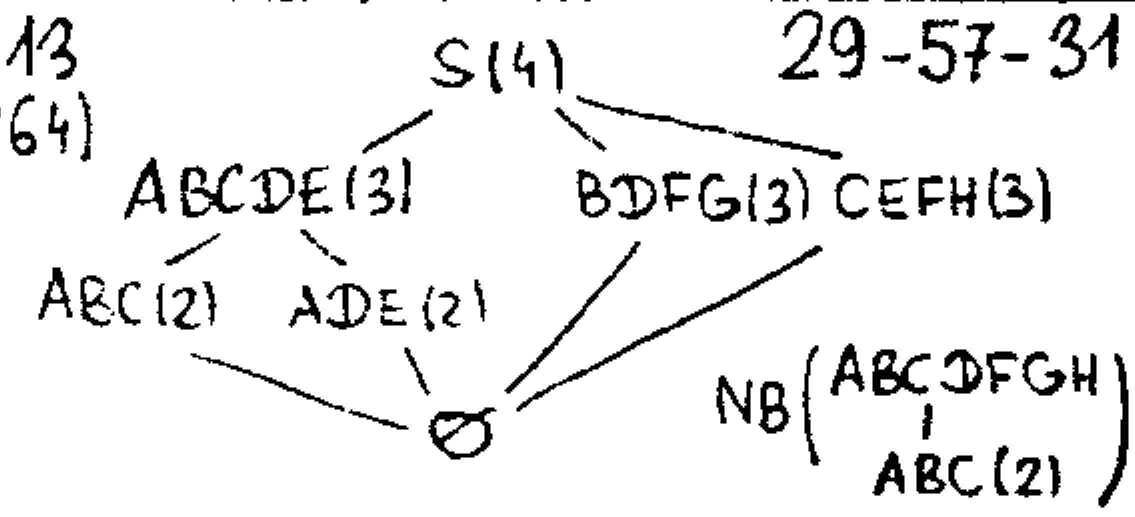
T(BCFGH, DEFGH, ACEH, FGH)

84S112 (84S263) 29-57-31

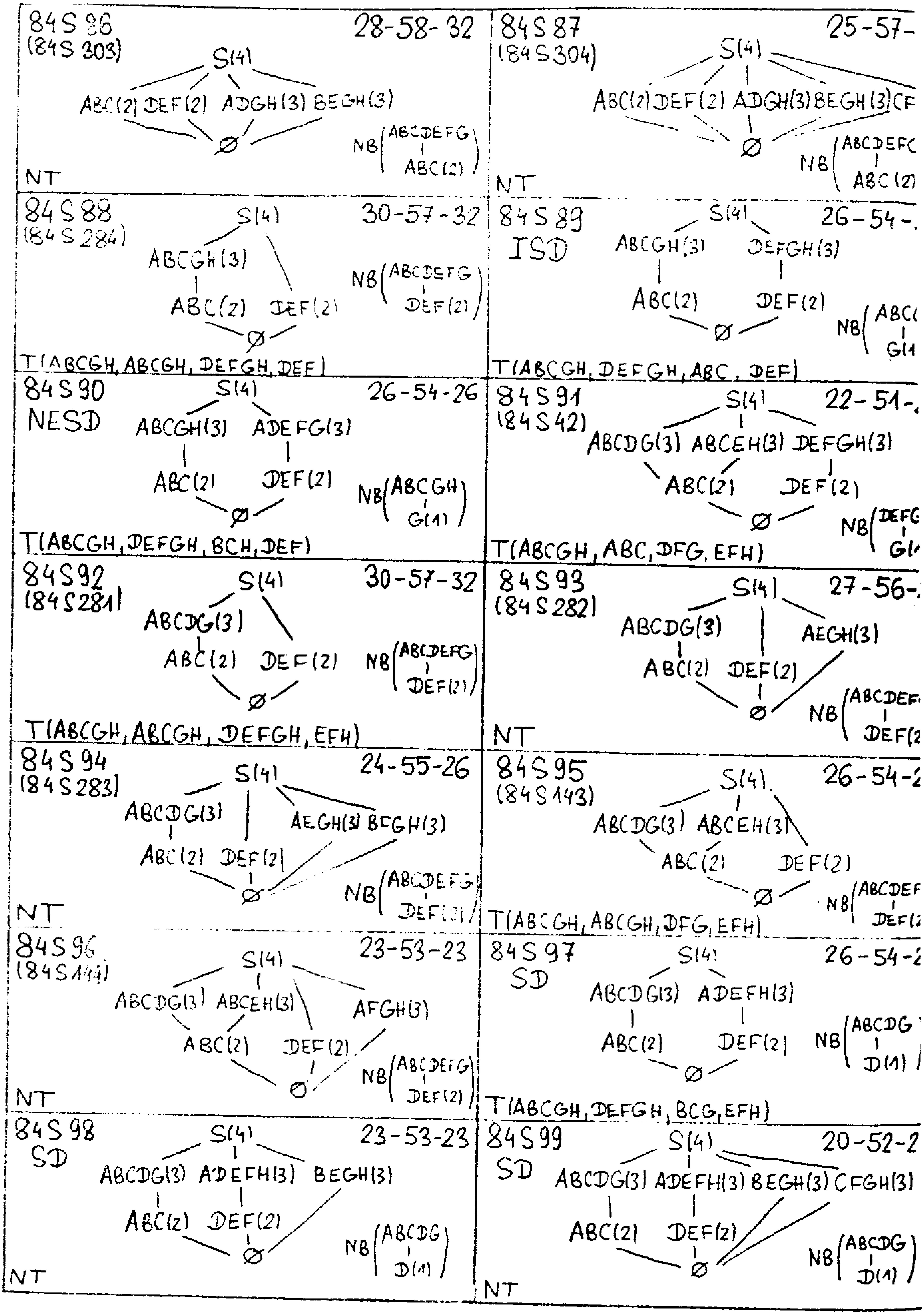


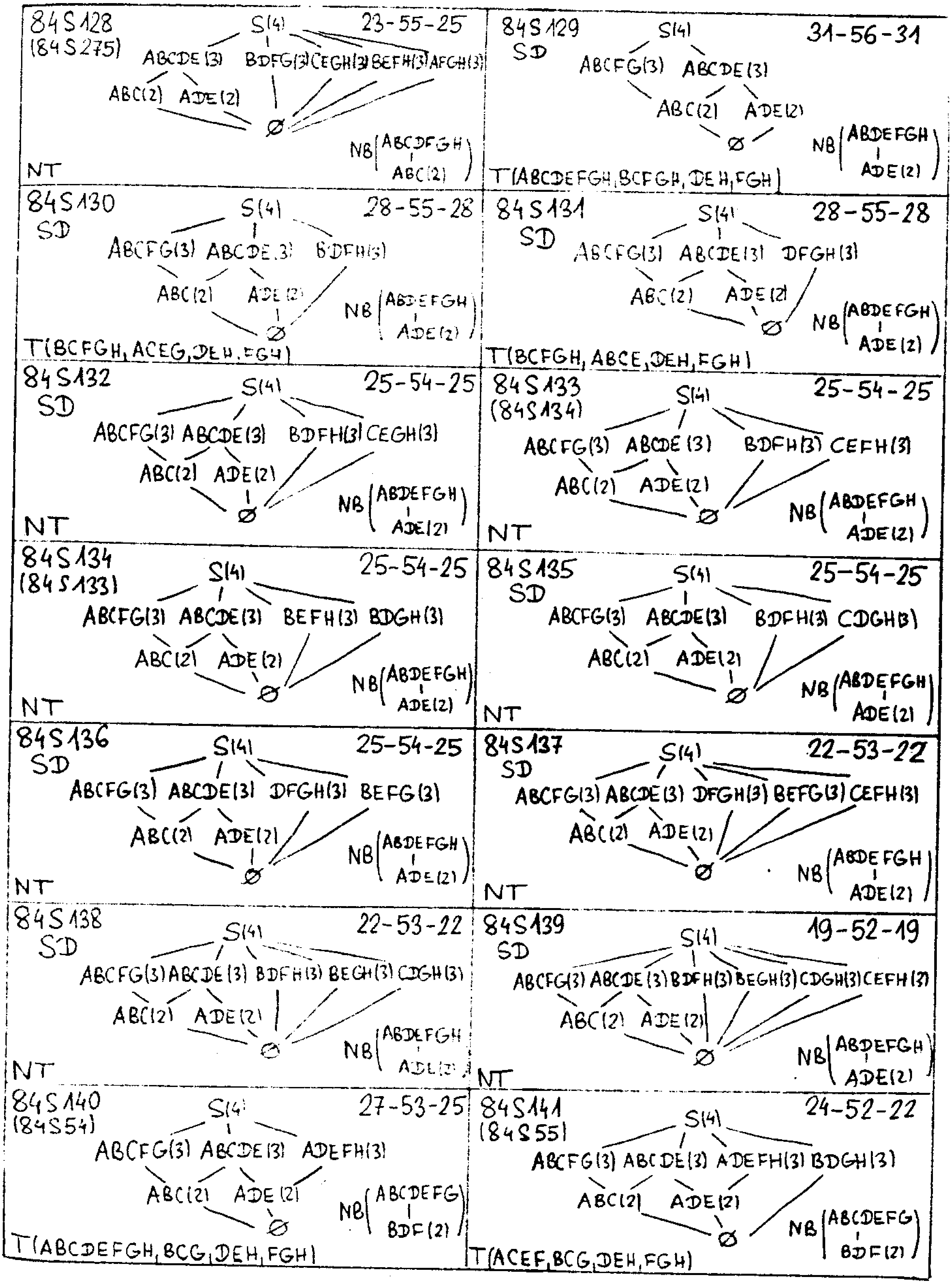
NT

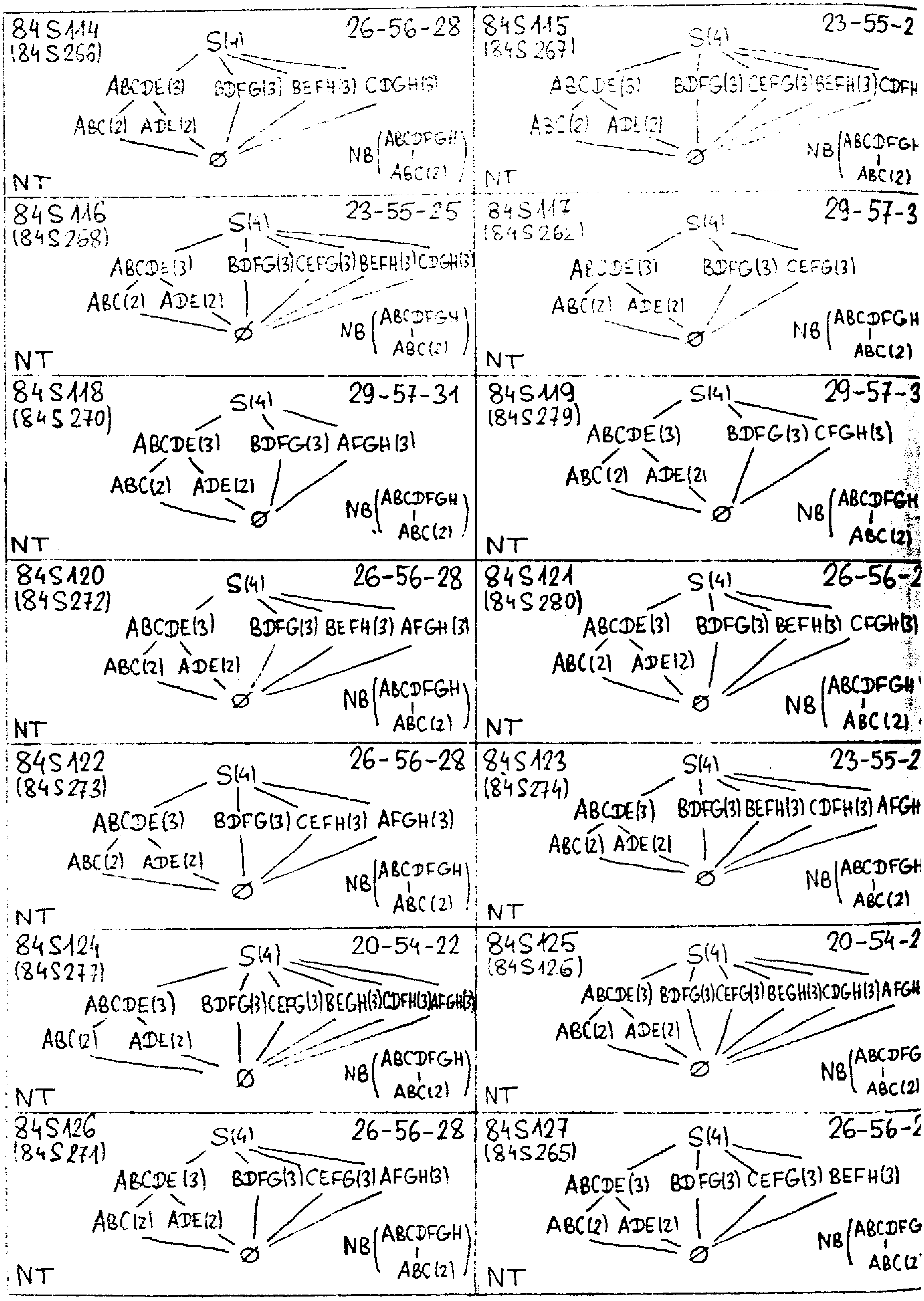
84S113 (84S264) 29-57-31



NT


84S86 (84S303) 28-58-32
S(4)
ABC(2) DEF(2) ADGH(3) BEGH(3)
∅
NB(ABCDEFG / ABC(2))
NT
84S87 (84S304) 25-57-
S(4)
ABC(2) DEF(2) ADGH(3) BEGH(3) CF
∅
NB(ABCDEFC / ABC(2))
NT
84S88 (84S284) 30-57-32
S(4)
ABCGH(3)
ABC(2) DEF(2)
∅
NB(ABCDEFG / DEF(2))
T(ABCGH, ABCGH, DEFGH, DEF)
84S89 ISD 26-54-
S(4)
ABCGH(3) DEFGH(3)
ABC(2) DEF(2)
∅
NB(ABC / G(1))
T(ABCGH, DEFGH, ABC, DEF)
84S90 NESD 26-54-26
S(4)
ABCGH(3) ADEFG(3)
ABC(2) DEF(2)
∅
NB(ABCGH / G(1))
T(ABCGH, DEFGH, BCH, DEF)
84S91 (84S42) 22-51-
S(4)
ABCDG(3) ABCEH(3) DEFGH(3)
ABC(2) DEF(2)
∅
NB(DEFG / G(1))
T(ABCGH, ABC, DFG, EFH)
84S92 (84S281) 30-57-32
S(4)
ABCDG(3)
ABC(2) DEF(2)
∅
NB(ABCDEFG / DEF(2))
T(ABCGH, ABCGH, DEFGH, EFH)
84S93 (84S282) 27-56-
S(4)
ABCDG(3) AEGH(3)
ABC(2) DEF(2)
∅
NB(ABCDEF / DEF(2))
NT
84S94 (84S283) 24-55-26
S(4)
ABCDG(3) AEGH(3) BEGH(3)
ABC(2) DEF(2)
∅
NB(ABCDEFG / DEF(2))
NT
84S95 (84S143) 26-54-2
S(4)
ABCDG(3) ABCEH(3)
ABC(2) DEF(2)
∅
NB(ABCDEF / DEF(2))
T(ABCGH, ABCGH, DFG, EFH)
84S96 (84S144) 23-53-23
S(4)
ABCDG(3) ABCEH(3) AFGH(3)
ABC(2) DEF(2)
∅
NB(ABCDEFG / DEF(2))
NT
84S97 SD 26-54-2
S(4)
ABCDG(3) ADEFH(3)
ABC(2) DEF(2)
∅
NB(ABCDG / D(1))
T(ABCGH, DEFGH, BCG, EFH)
84S98 SD 23-53-23
S(4)
ABCDG(3) ADEFH(3) BEGH(3)
ABC(2) DEF(2)
∅
NB(ABCDG / D(1))
NT
84S99 SD 20-52-2
S(4)
ABCDG(3) ADEFH(3) BEGH(3) CFGH(3)
ABC(2) DEF(2)
∅
NB(ABCDG / D(1))
NT


84S128
(84S275)
S(4)
23-55-25
ABCDE(3) BDFG(3) CEGH(3) BEFH(3) AFGH(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB(ABCDFGH / ABC(2))
NT
84S129
SD
S(4)
31-56-31
ABCFG(3) ABCDE(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB(ABDEFGH / ADE(2))
T(ABCDEFGH, BCFGH, DEH, FGH)
84S130
SD
S(4)
28-55-28
ABCFG(3) ABCDE(3) BDFH(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB(ABDEFGH / ADE(2))
T(BCFGH, ACEG, DEH, FGH)
84S131
SD
S(4)
28-55-28
ABCFG(3) ABCDE(3) DFGH(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB(ABDEFGH / ADE(2))
T(BCFGH, ABCE, DEH, FGH)
84S132
SD
S(4)
25-54-25
ABCFG(3) ABCDE(3) BDFH(3) CEGH(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB(ABDEFGH / ADE(2))
NT
84S133
(84S134)
S(4)
25-54-25
ABCFG(3) ABCDE(3) BDFH(3) CEFH(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB(ABDEFGH / ADE(2))
NT
84S134
(84S133)
S(4)
25-54-25
ABCFG(3) ABCDE(3) BEFH(3) BDGH(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB(ABDEFGH / ADE(2))
NT
84S135
SD
S(4)
25-54-25
ABCFG(3) ABCDE(3) BDFH(3) CDGH(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB(ABDEFGH / ADE(2))
NT
84S136
SD
S(4)
25-54-25
ABCFG(3) ABCDE(3) DFGH(3) BEFG(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB(ABDEFGH / ADE(2))
NT
84S137
SD
S(4)
22-53-22
ABCFG(3) ABCDE(3) DFGH(3) BEFG(3) CEFH(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB(ABDEFGH / ADE(2))
NT
84S138
SD
S(4)
22-53-22
ABCFG(3) ABCDE(3) BDFH(3) BEGH(3) CDGH(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB(ABDEFGH / ADE(2))
NT
84S139
SD
S(4)
19-52-19
ABCFG(3) ABCDE(3) BDFH(3) BEGH(3) CDGH(3) CEFH(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB(ABDEFGH / ADE(2))
NT
84S140
(84S54)
S(4)
27-53-25
ABCFG(3) ABCDE(3) ADEFH(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB(ABCDEFG / BDF(2))
T(ABCDEFGH, BCG, DEH, FGH)
84S141
(84S55)
S(4)
24-52-22
ABCFG(3) ABCDE(3) ADEFH(3) BDGH(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB(ABCDEFG / BDF(2))
T(ACEF, BCG, DEH, FGH)


84S114
(84S266)
26-56-28
S(4)
ABCDE(3) BDFG(3) BEFH(3) CDGH(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB (ABCDFGH / ABC(2))
NT
84S115
(84S267)
23-55-2
S(4)
ABCDE(3) BDFG(3) CEFG(3) BEFH(3) CDFH
ABC(2) ADE(2)
∅
NB (ABCDFGH / ABC(2))
NT
84S116
(84S268)
23-55-25
S(4)
ABCDE(3) BDFG(3) CEFG(3) BEFH(3) CDGH(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB (ABCDFGH / ABC(2))
NT
84S117
(84S262)
29-57-3
S(4)
ABCDE(3) BDFG(3) CEFG(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB (ABCDFGH / ABC(2))
NT
84S118
(84S270)
29-57-31
S(4)
ABCDE(3) BDFG(3) AFGH(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB (ABCDFGH / ABC(2))
NT
84S119
(84S279)
29-57-3
S(4)
ABCDE(3) BDFG(3) CFGH(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB (ABCDFGH / ABC(2))
NT
84S120
(84S272)
26-56-28
S(4)
ABCDE(3) BDFG(3) BEFH(3) AFGH(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB (ABCDFGH / ABC(2))
NT
84S121
(84S280)
26-56-2
S(4)
ABCDE(3) BDFG(3) BEFH(3) CFGH(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB (ABCDFGH / ABC(2))
NT
84S122
(84S273)
26-56-28
S(4)
ABCDE(3) BDFG(3) CEFH(3) AFGH(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB (ABCDFGH / ABC(2))
NT
84S123
(84S274)
23-55-2
S(4)
ABCDE(3) BDFG(3) BEFH(3) CDFH(3) AFGH
ABC(2) ADE(2)
∅
NB (ABCDFGH / ABC(2))
NT
84S124
(84S277)
20-54-22
S(4)
ABCDE(3) BDFG(3) CEFG(3) BEGH(3) CDFH(3) AFGH(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB (ABCDFGH / ABC(2))
NT
84S125
(84S126)
20-54-2
S(4)
ABCDE(3) BDFG(3) CEFG(3) BEGH(3) CDGH(3) AFGH
ABC(2) ADE(2)
∅
NB (ABCDFG / ABC(2))
NT
84S126
(84S271)
26-56-28
S(4)
ABCDE(3) BDFG(3) CEFG(3) AFGH(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB (ABCDFGH / ABC(2))
NT
84S127
(84S265)
26-56-2
S(4)
ABCDE(3) BDFG(3) CEFG(3) BEFH(3)
ABC(2) ADE(2)
∅
NB (ABCDFG / ABC(2))
NT

84S156
(84L106)
18-33-29

ABCDEFG(3)
ABC(2) ADE(2)
∅

NB (BCDEF | F(1))

T

84S157
(84S305)
45-65-47

S(4)
ABC(2)
∅

NB (S(4) | ABC)

T

84S158
(84S306)
42-64-44

S(4)
ABC(2) EFGH
∅

NB (S(4) | ABC)

T

84S159
(84S307)
42-64-44

S(4)
ABC(2) ADEF
∅

NB (S | ABC)

T

84S160
(84S308)
39-63-41

S(4)
ABC(2) ADEF EFGH
∅

NB (S(4) | ABC)

T(ABCD, BCGH, DEFGH, DEFGH)

84S161
(84S313)
39-63-41

S(4)
ABC(2) ADEF ADGH
∅

NB (S(4) | ABC)

NT

84S162
(84S309)
39-63-41

S(4)
ABC(2) ADEF BDEG
∅

NB (S(4) | ABC)

T(ACFH, BCGH, DEFGH, DEFGH)

84S163
(84S311)
39-63-41

S(4)
ABC(2) ADEF BDGH
∅

NB (S(4) | ABC)

T(ACEF, BCGH, DEFGH, DEFGH)

84S164
(84S314)
36-62-38

S(4)
ABC(2) ADEF ADGH EFGH
∅

NB (S(4) | ABC)

NT

84S165
(84S310)
36-62-38

S(4)
ABC(2) ADEF BDEG EFGH
∅

NB (S(4) | ABC)

NT

84S166
(84S312)
36-62-38

S(4)
ABC(2) ADEF BDGH EFGH
∅

NB (S(4) | ABC)

NT

84S167
(84S321)
36-62-38

S(4)
ABC(2) ADEF ADGH BDEG
∅

NB (S(4) | ABC)

NT

84S168
(84S324)
36-62-38

S(4)
ABC(2) ADEF ADGH BEFG
∅

NB (S(4) | ABC)

NT

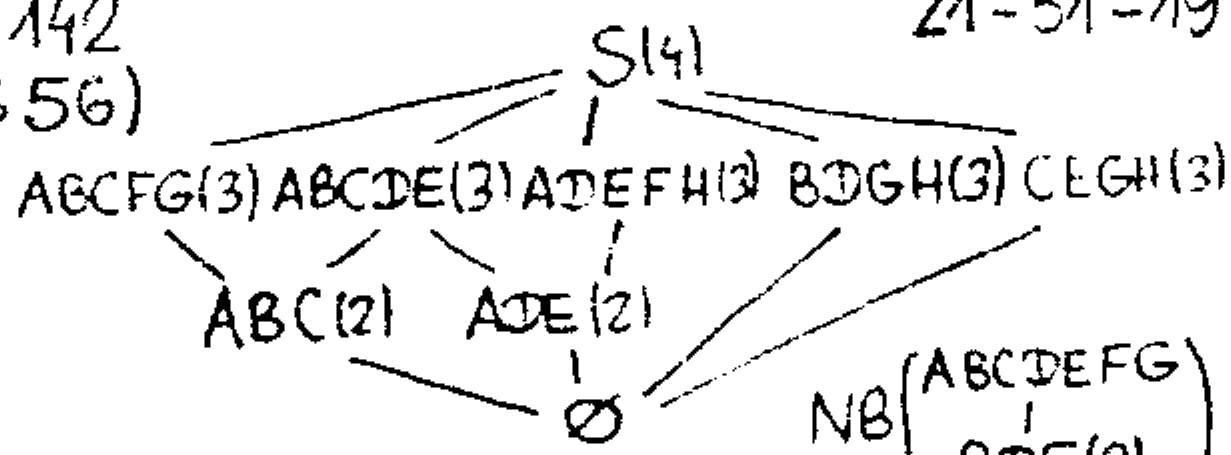
84S169
(84S315)
36-62-38

S(4)
ABC(2) ADEF BDEG CDFG
∅

NB (S(4) | ABC)

NT

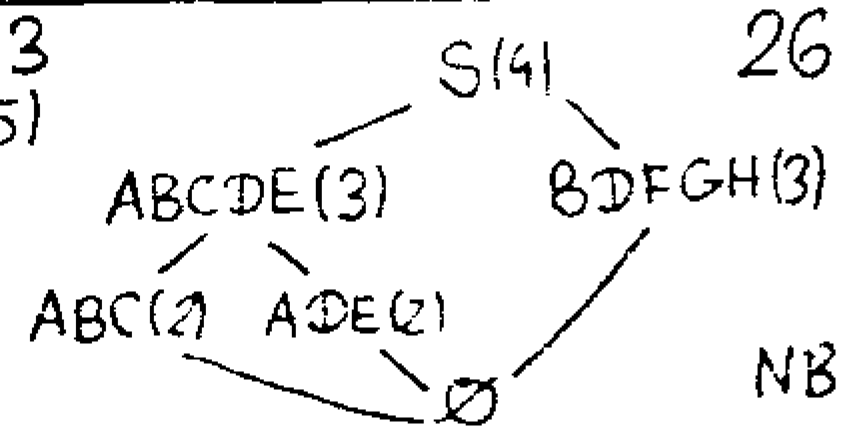
84S142 21-51-19
(84S56)



NB (ABCDEFG / BDF(2))

NT

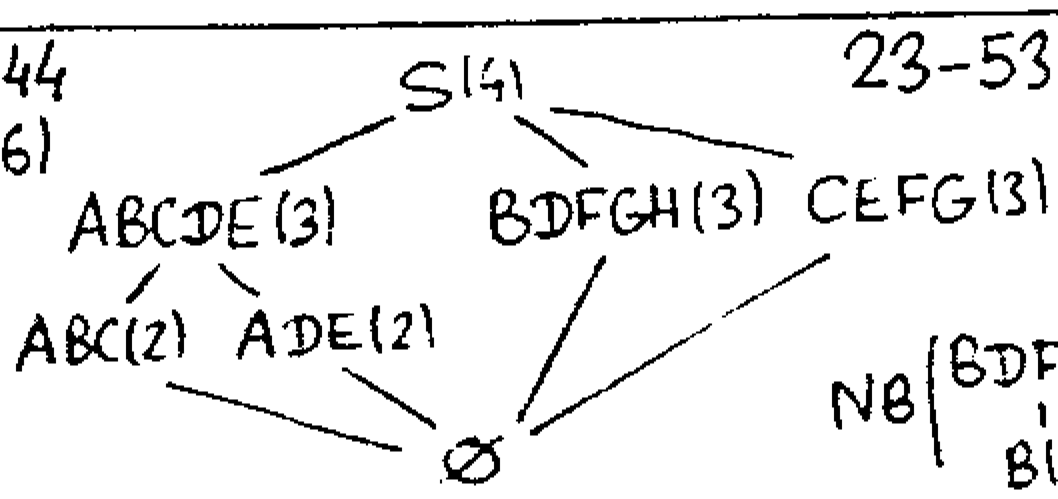
84S143 26-54-
(84S95)



NB (BDFC / B(

T(BCFGH, DEFGH, ACE, FGH)

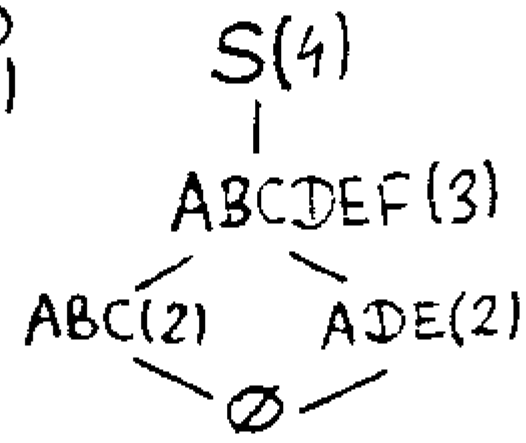
84S144 23-53-23
(84S96)



NB (BDFGH / B(1))

NT

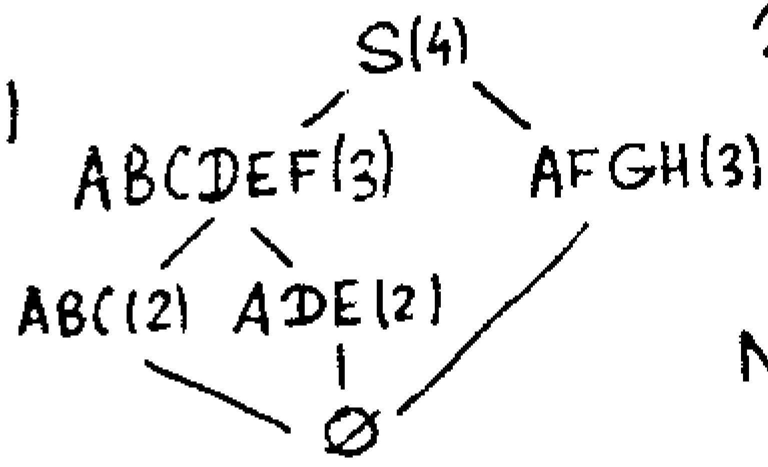
84S145 29-54-
(84H211)



NB (BCDE / F(1

T(ABCDEFGH, BCFGH, DEFGH, GH)

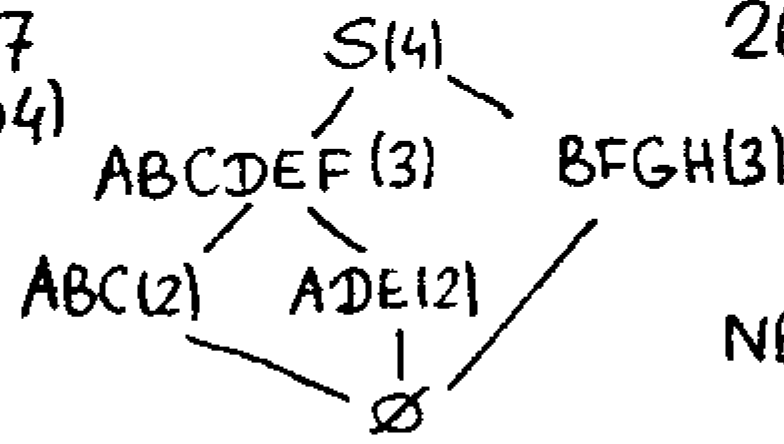
84S146 26-50-26
(84H198)



NB (BCDEF / F(1))

NT

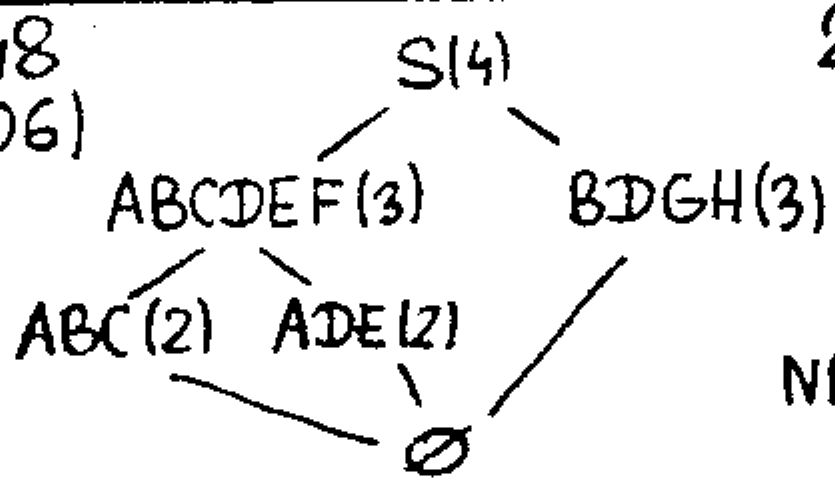
84S147 26-50-
(84H204)



NB (BCD / F(

T(BCFGH, DEFGH, ACDE, GH)

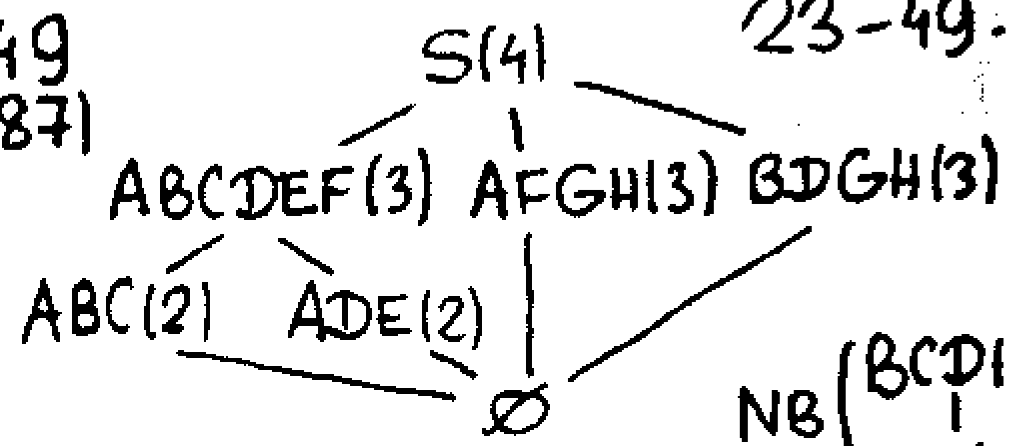
84S148 26-50-26
(84H206)



NB (BCDEF / F(1))

T(BCFGH, DEFGH, ACEF, GH)

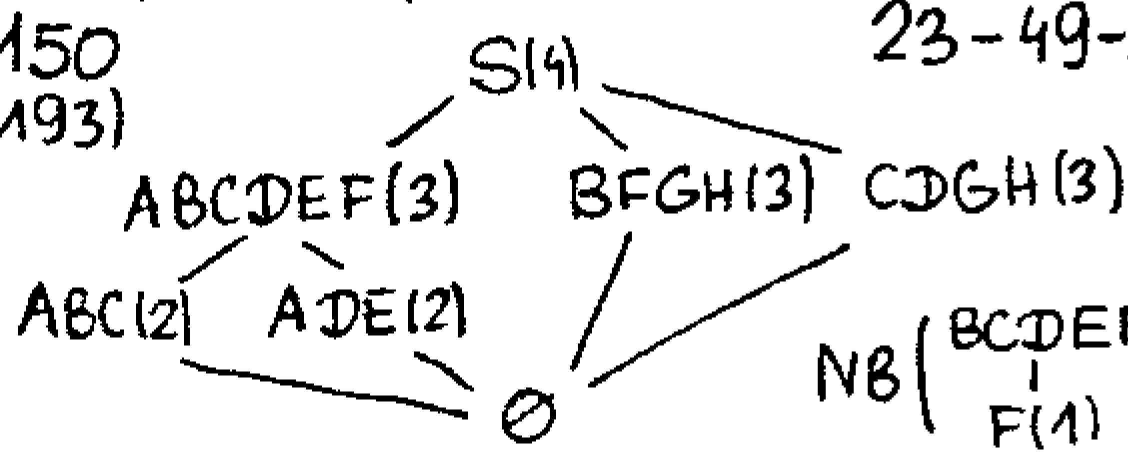
84S149 23-49-
(84H187)



NB (BCD / F(

NT

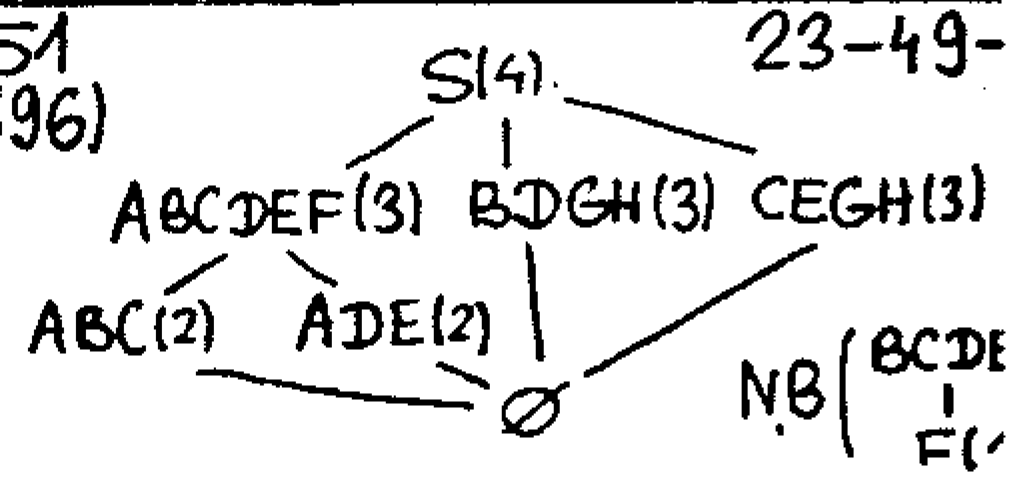
84S150 23-49-23
(84H193)



NB (BCDEF / F(1))

NT

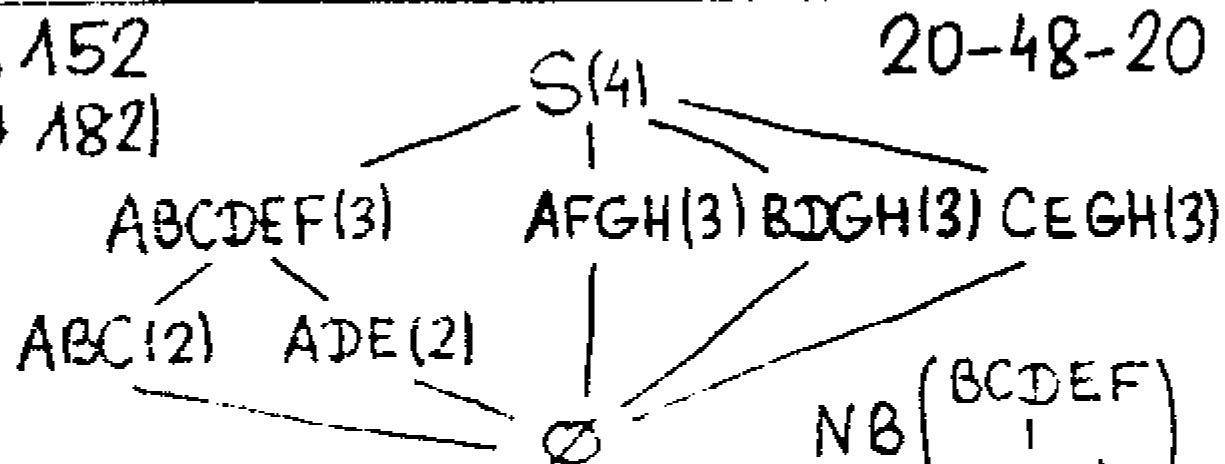
84S151 23-49-
(84H196)



NB (BCDE / F(

NT

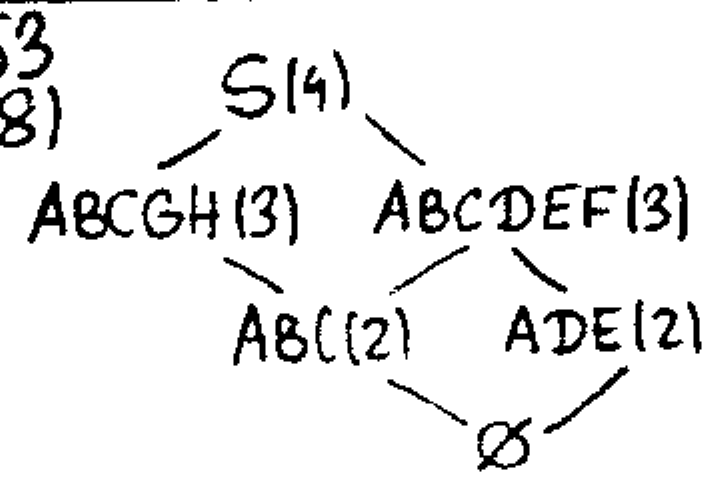
84S152 20-48-20
(84H182)



NB (BCDEF / F(1))

NT

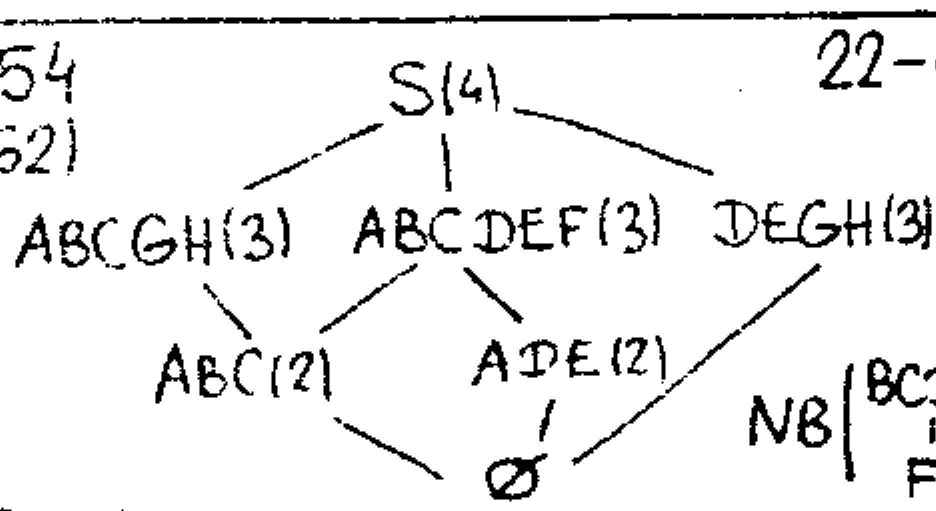
84S153 25-48-
(84H168)



NB (BCD / F

T(ABCDEFGH, BCFGH, DEF, GH)

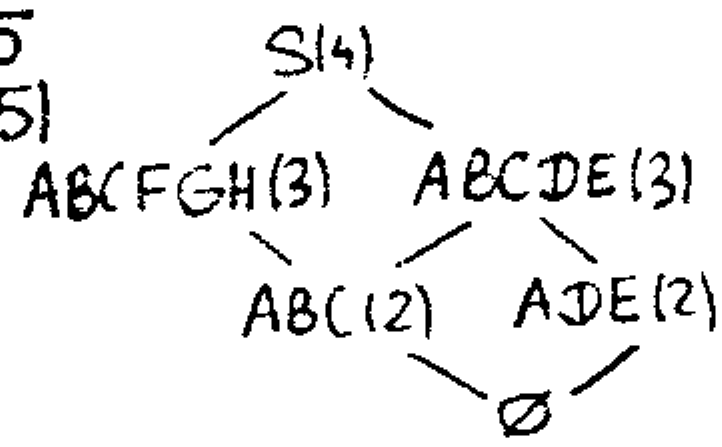
84S154 22-47-20
(84H162)



NB (BCDEF / F(1))

T(BCFGH, ABCF, DEF, GH)

84S155 23-47-
(84H165)



NB (BC / F

T(ABCDEFGH, BCFGH, FGH, DE)

84S184 33-61-35 (84S334) S(4) ABC(2) ADEF ADGH BEFG CEFH $\emptyset$ NB $\begin{pmatrix} S(4) \\ \mid \\ ABC \end{pmatrix}$ NT	84S185 30-60-32 (84S328) S(4) ABC(2) ADEF ADGH BDEG BDFH EFGH $\emptyset$ NB $\begin{pmatrix} S(4) \\ \mid \\ ABC \end{pmatrix}$ NT
84S186 30-60-32 (84S326) S(4) ABC(2) ADEF ADGH BDEG CDFH EFGH $\emptyset$ NB $\begin{pmatrix} S(4) \\ \mid \\ ABC \end{pmatrix}$ NT	84S187 30-60-32 (84S330) S(4) ABC(2) ADEF ADGH BDEG CDFG EFGH $\emptyset$ NB $\begin{pmatrix} S(4) \\ \mid \\ ABC \end{pmatrix}$ NT
84S188 30-60-32 (84S336) S(4) ABC(2) ADEF ADGH BDEG BDFH CDFG $\emptyset$ NB $\begin{pmatrix} S(4) \\ \mid \\ ABC \end{pmatrix}$ NT	84S189 30-60-32 (84S339) S(4) ABC(2) ADEF ADGH BDEH BEFG CEFH $\emptyset$ NB $\begin{pmatrix} S(4) \\ \mid \\ ABC \end{pmatrix}$ NT
84S190 30-60-32 (84S340) S(4) ABC(2) ADEF ADGH BDEH BEFG CDEG $\emptyset$ NB $\begin{pmatrix} S(4) \\ \mid \\ ABC \end{pmatrix}$ NT	84S191 30-60-32 (84S338) S(4) ABC(2) ADEF ADGH BDEH BFGH CEFG $\emptyset$ NB $\begin{pmatrix} S(4) \\ \mid \\ ABC \end{pmatrix}$ NT
84S192 30-60-32 (84S342) S(4) ABC(2) ADEF ADGH BDFH BEFG CDEG $\emptyset$ NB $\begin{pmatrix} S(4) \\ \mid \\ ABC \end{pmatrix}$ NT	84S193 30-60-32 (84S341) S(4) ABC(2) ADEF ADGH BDEG BDFH CEFG $\emptyset$ NB $\begin{pmatrix} S(4) \\ \mid \\ ABC \end{pmatrix}$ NT
84S194 27-59-29 (84S337) S(4) ABC(2) ADEF ADGH BDEG BDFH CDFG EFGH $\emptyset$ NB $\begin{pmatrix} S(4) \\ \mid \\ ABC \end{pmatrix}$ NT	84S195 27-59-29 (84S343) S(4) ABC(2) ADEF ADGH BDEG BDFH CDFG CDEH $\emptyset$ NB $\begin{pmatrix} S(4) \\ \mid \\ ABC \end{pmatrix}$ NT
84S196 27-59-29 (84S346) S(4) ABC(2) ADEF ADGH BDEG BDFH CDFG CEFH $\emptyset$ NB $\begin{pmatrix} S(4) \\ \mid \\ ABC \end{pmatrix}$ NT	84S197 27-59-29 (84S347) S(4) ABC(2) ADEF BDGH AEGH CDFG BEFG CDEH $\emptyset$ NB $\begin{pmatrix} S(4) \\ \mid \\ ABC \end{pmatrix}$ NT

84S170 (84S317) 36-62-38

S(4)

ABC(2) ADEF BDEG CDEH

∅

NB (S(4) / ABC)

NT

84S171 (84S319) 36-62-

S(4)

ABC(2) ADEF BDEG CDFH

∅

NB (S(4 / AB

NT

84S172 (84S323) 36-62-38

S(4)

ABC(2) ADEF BDEG CFGH

∅

NB (S(4) / ABC)

NT

84S173 (84S322) 33-61-

S(4)

ABC(2) ADEF ADGH BDEG EFGH

∅

NB (S(4 / ABC

NT

84S174 (84S316) 33-61-35

S(4)

ABC(2) ADEF BDEG CDFG EFGH

∅

NB (S(4) / ABC)

NT

84S175 (84S318) 33-61-

S(4)

ABC(2) ADEF BDEG CDEH EFGH

∅

NB (S(4) / ABC

NT

84S176 (84S320) 33-61-35

S(4)

ABC(2) ADEF BDEG CDFH EFGH

∅

NB (S(4) / ABC)

NT

84S177 (84S327) 33-61-

S(4)

ABC(2) ADEF ADGH BDEG BDFH

∅

NB (S(4 / ABC

NT

84S178 (84S333) 33-61-35

S(4)

ABC(2) ADEF ADGH BEFG BDEH

∅

NB (S(4) / ABC)

NT

84S179 (84S325) 33-61.

S(4)

ABC(2) ADEF ADGH BDEG CDFH

∅

NB (S(4 / ABC

NT

84S180 (84S329) 33-61-35

S(4)

ABC(2) ADEF ADGH BDEG CDFG

∅

NB (S(4) / ABC)

NT

84S181 (84S331) 33-61-

S(4)

ABC(2) ADEF ADGH BEFG CEGH

∅

NB (S(4) / ABC

NT

84S182 (84S335) 33-61-35

S(4)

ABC(2) ADEF ADGH BDEG CEFG

∅

NB (S(4) / ABC)

NT

84S183 (84S332) 33-61

S(4)

ABC(2) ADEF ADGH BEFG CDEH

∅

NB (S(4 / AB

NT

84S212 SD 32-59-32 S(4) ABCDE ADFG BDFH CDGH ABC(2) ∅ NB(ABCDFGH / ABC(2)) NT	84S213 SD 32-59-32 S(4) ABCDE ADFG BDFH CEGH ABC(2) ∅ NB(ABCDFGH / ABC(2)) NT
84S214 (84S210) 32-59-32 S(4) ABCDE ADFG BDFH CEFG ABC(2) ∅ NB(ABCDFGH / ABC(2)) NT	84S215 (84S237) 32-59-32 S(4) ABCDE ADFG BDFH CFGH ABC(2) ∅ NB(ABCDFGH / ABC(2)) NT
84S216 (84S240) 32-59-32 S(4) ABCDE ADFG BEFG CFGH ABC(2) ∅ NB(ABCDFGH / ABC(2)) NT	84S217 (84S239) 32-59-32 S(4) ABCDE ADFG BEFH CFGH ABC(2) ∅ NB(ABCDFGH / ABC(2)) NT
84S218 SD 32-59-32 S(4) ABCDE ADFG BDFH EFGH ABC(2) ∅ NB(ABCDFGH / ABC(2)) NT	84S219 SD 38-61-38 S(4) ABCDE ADFG ABC(2) ∅ NB(ABCDFGH / ABC(2)) T(ABCDEFGH, DEFGH, BCEH, FGH)
84S220 SD 29-58-29 S(4) ABCDE ADFG AEFH BDFH BEFG ABC(2) ∅ NB(ABCDFGH / ABC(2)) NT	84S221 (84S222) 29-58-29 S(4) ABCDE ADFG AEFH BDGH BEFG ABC(2) ∅ NB(ABCDFGH / ABC(2)) NT
84S222 (84S221) 29-58-29 S(4) ABCDE ADFG AEFH BDFH CEFG ABC(2) ∅ NB(ABCDFGH / ABC(2)) NT	84S223 SD 29-58-29 S(4) ABCDE ADFG AEFH BDFH CEGH ABC(2) ∅ NB(ABCDFGH / ABC(2)) NT
84S224 SD 29-58-29 S(4) ABCDE ADFG AEFH BEGH CDGH ABC(2) ∅ NB(ABCDFGH / ABC(2)) NT	84S225 (84S242) 29-58-29 S(4) ABCDE ADFG AEFH BDFH CFGH ABC(2) ∅ NB(ABCDFGH / ABC(2)) NT

84S198 27-59-29
(84S345)
S(4)
ABC(2) ADEF AEGH BDFG BDEH CDEG CFGH
∅
NB(S(4) / ABC)
NT

84S199 24-58-2
(84S344)
S(4)
ABC(2) ADEF ADGH BDEG BDFH CDEH CDFG E
∅
NB(S(4) / ABC
NT

84S200 41-62-41
SD
S(4)
ABCDE
ABC(2)
∅
NB(ABCDFGH / ABC(2))
T

84S201 38-61-
(84S234)
S(4)
ABCDE AFGH
ABC(2)
∅
NB(ABCDFG / ABC(2)
T(ABCDEFGH, DEFGH, BCDE, FGH)

84S202 38-61-38
SD
S(4)
ABCDE DFGH
ABC(2)
∅
NB(ABCDFGH / ABC(2))
T(ABCDEFGH, DEFGH, ABCE, FGH)

84S203 35-60-3
(84S206)
S(4)
ABCDE ADFG AEFH
ABC(2)
∅
NB(ABCDFG / ABC(2)
NT

84S204 35-60-35
SD
S(4)
ABCDE ADFG BDFH
ABC(2)
∅
NB(ABCDFGH / ABC(2))
T(DEFGH, ACEG, BCEH, FGH)

84S205 35-60-3.
SD
S(4)
ABCDE ADFG BEFH
ABC(2)
∅
NB(ABCDFGH / ABC(2)
T(DEFGH, ACDG, BCEH, FGH)

84S206 35-60-35
(84S203)
S(4)
ABCDE ADFG BEFG
ABC(2)
∅
NB(ABCDFGH / ABC(2))
T(DEFGH, ACDH, BCEH, FGH)

84S207 35-60-3
(84S236)
S(4)
ABCDE ADFG BFGH
ABC(2)
∅
NB(ABCDFG / ABC(2
T(DEFGH, ACDE, BCEH, FGH)

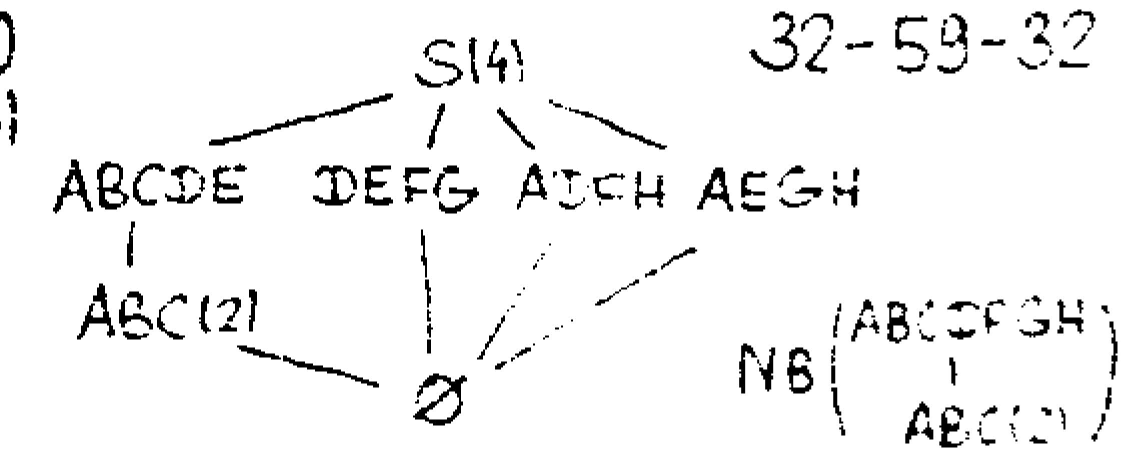
84S208 35-60-35
SD
S(4)
ABCDE ADFG EFGH
ABC(2)
∅
NB(ABCDFGH / ABC(2))
T(DEFGH, ABCD, BCEH, FGH)

84S209 32-59-3
SD
S(4)
ABCDE ADFG AEFH BDFH
ABC(2)
∅
NB(ABCDFG / ABC(2)
NT

84S210 32-59-32
(84S214)
S(4)
ABCDE ADFG AEFH BDGH
ABC(2)
∅
NB(ABCDFGH / ABC(2))
NT

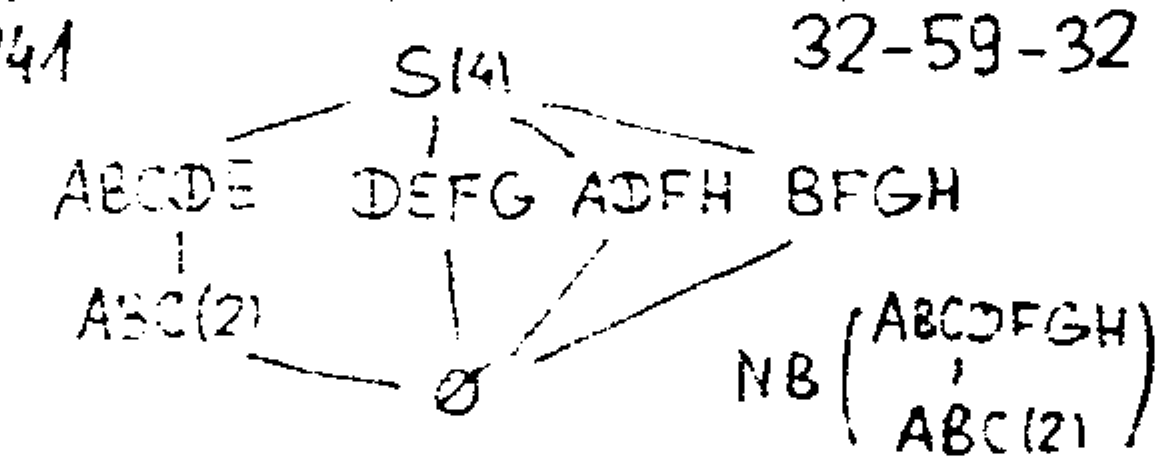
84S211 32-59-3
(84S238)
S(4)
ABCDE ADFG AEFH BFGH
ABC(2)
∅
NB(ABCDFG / ABC(2)
NT

84S240 (84S216) 32-59-32



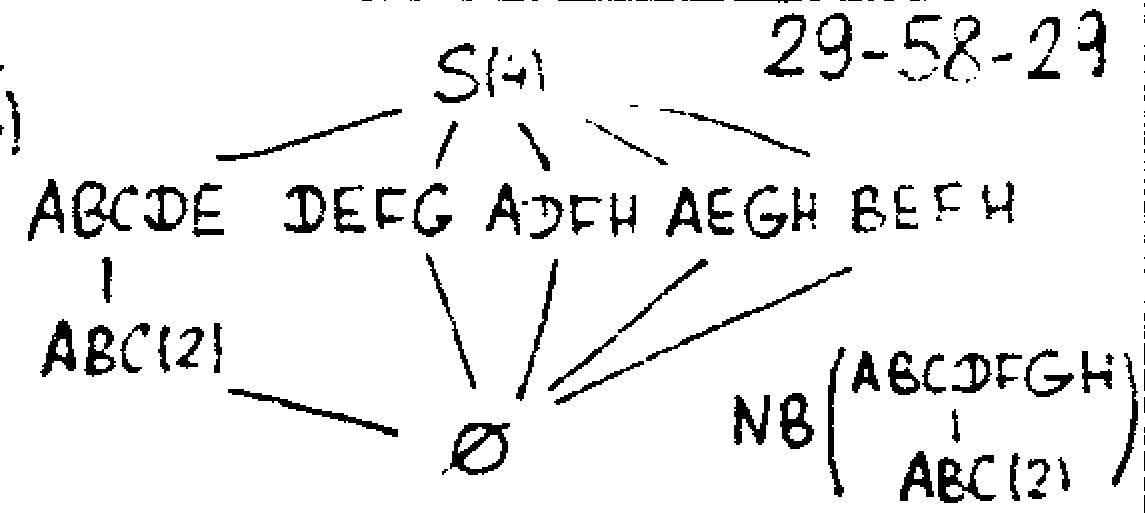
NT

84S241 SD 32-59-32



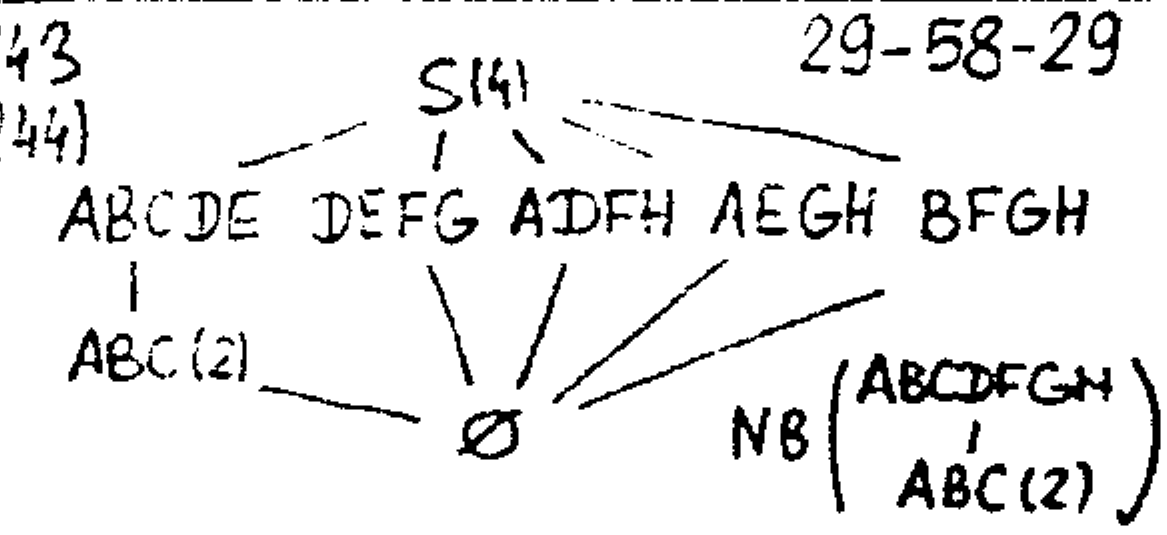
NT

84S242 (84S225) 29-58-29



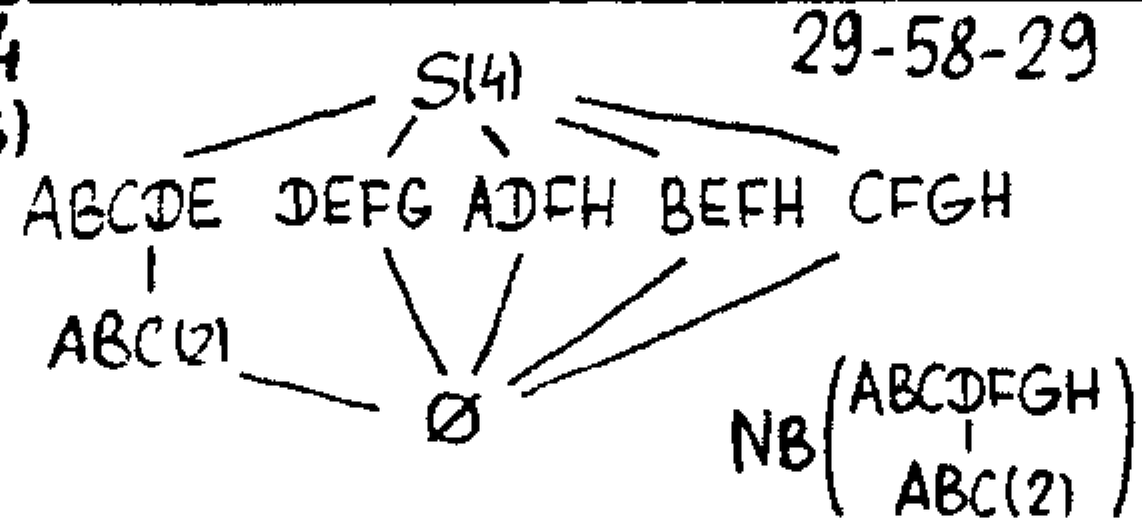
NT

84S243 (84S244) 29-58-29



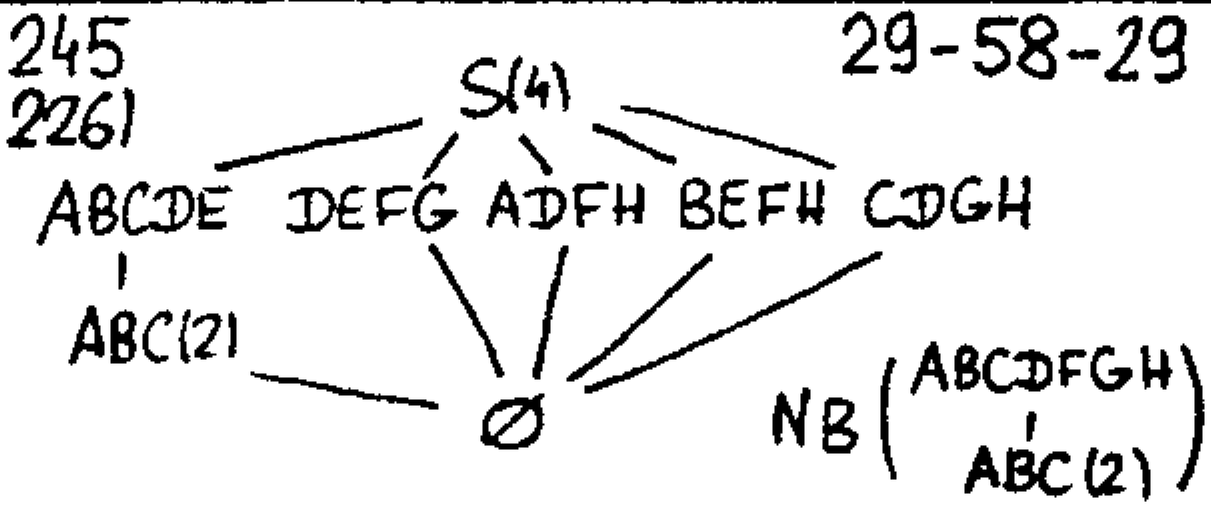
NT

84S244 (84S243) 29-58-29



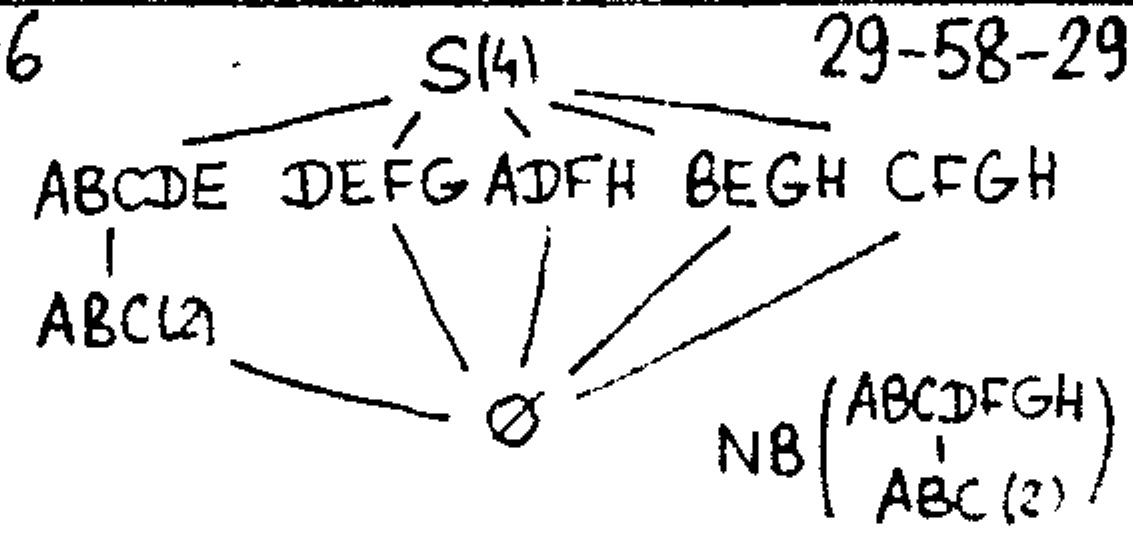
NT

84S245 (84S226) 29-58-29



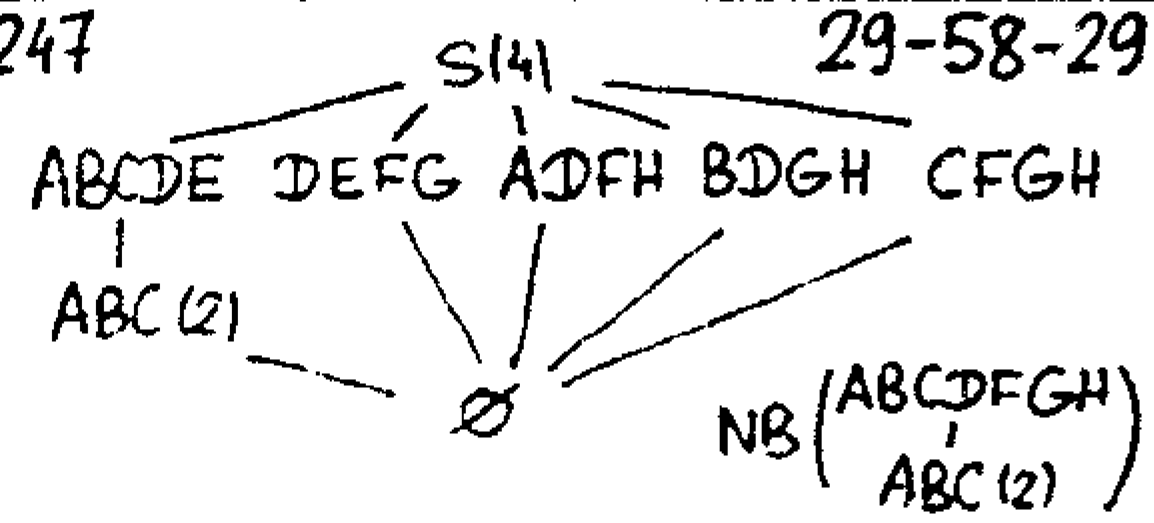
NT

84S246 SD 29-58-29



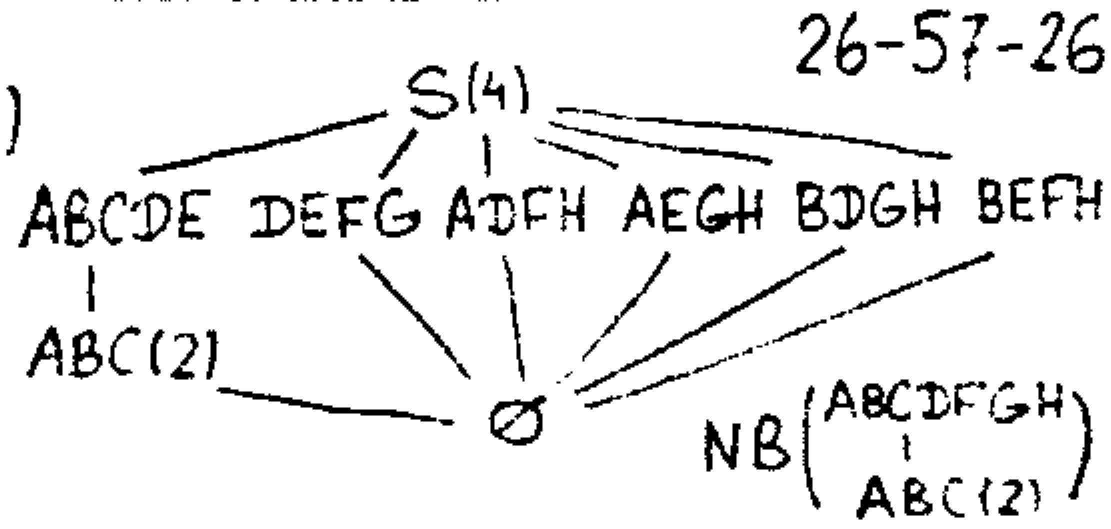
NT

84S247 SD 29-58-29



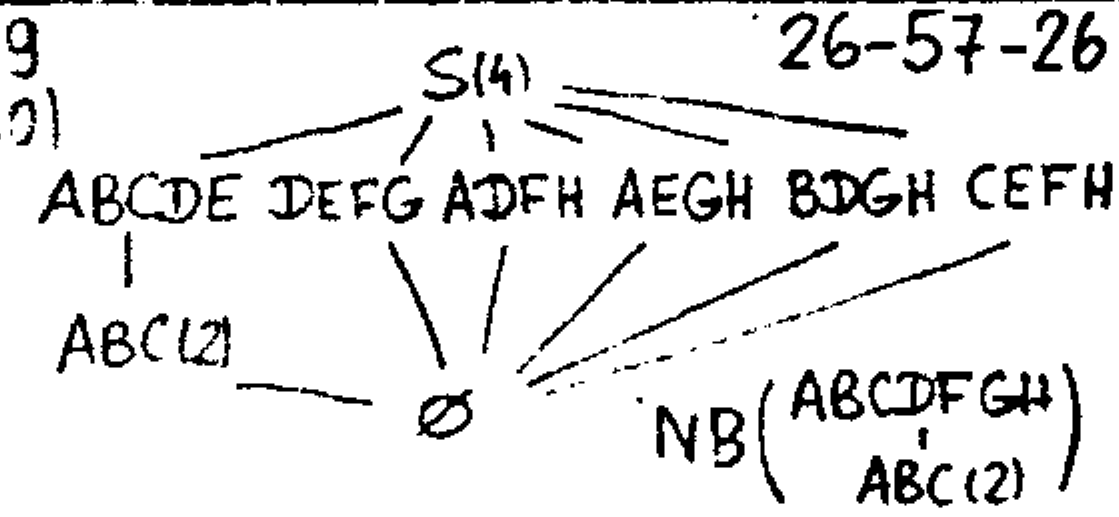
NT

84S248 (84S229) 26-57-26



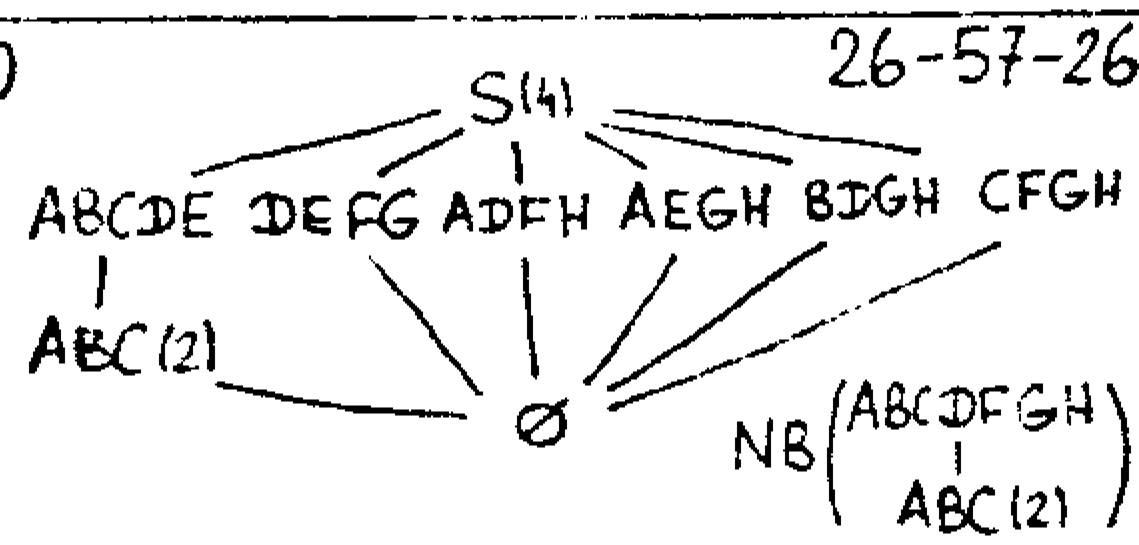
NT

84S249 (84S230) 26-57-26



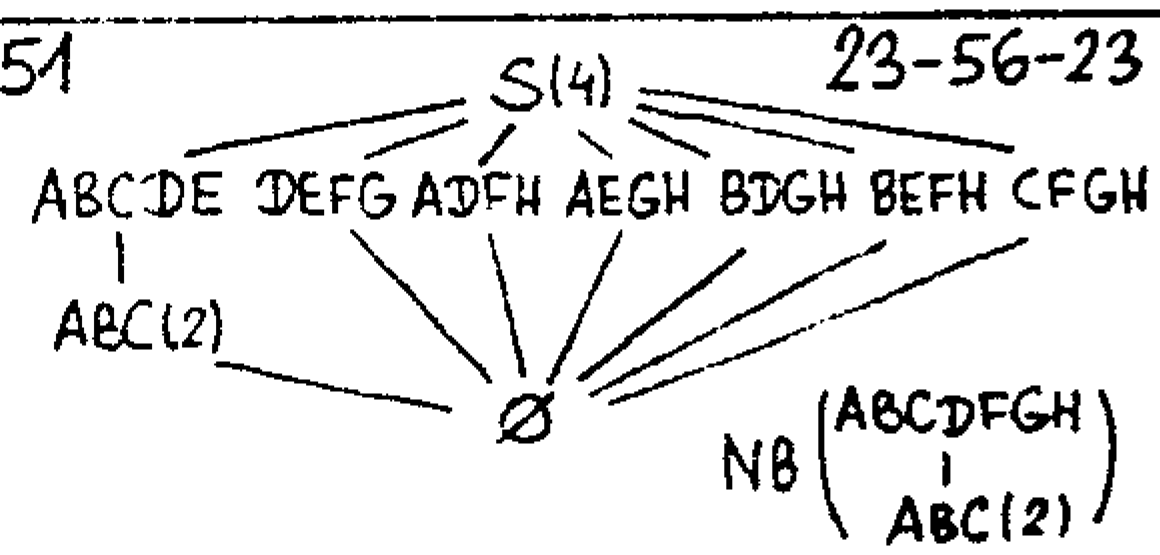
NT

84S250 SD 26-57-26



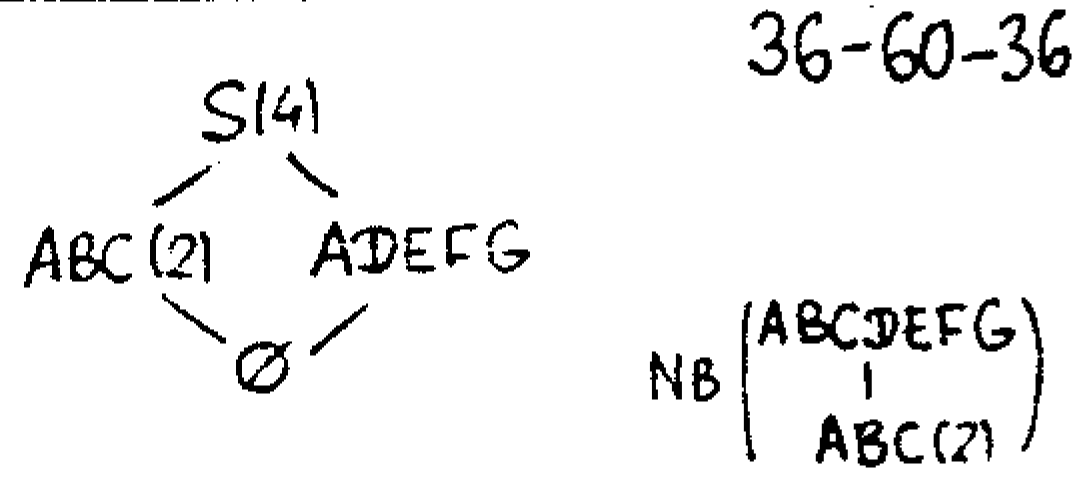
NT

84S251 SD 23-56-23



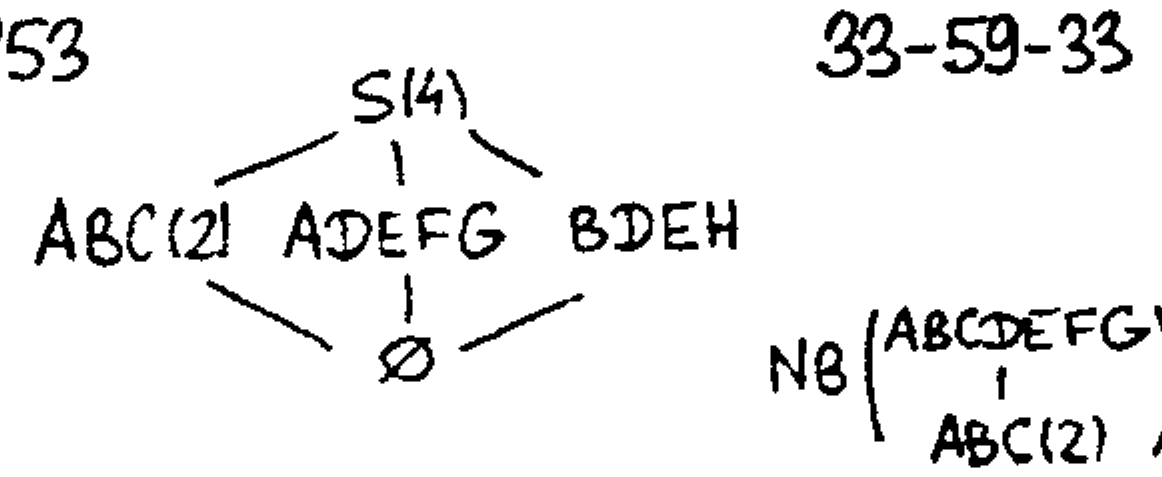
NT

84S252 SD 36-60-36

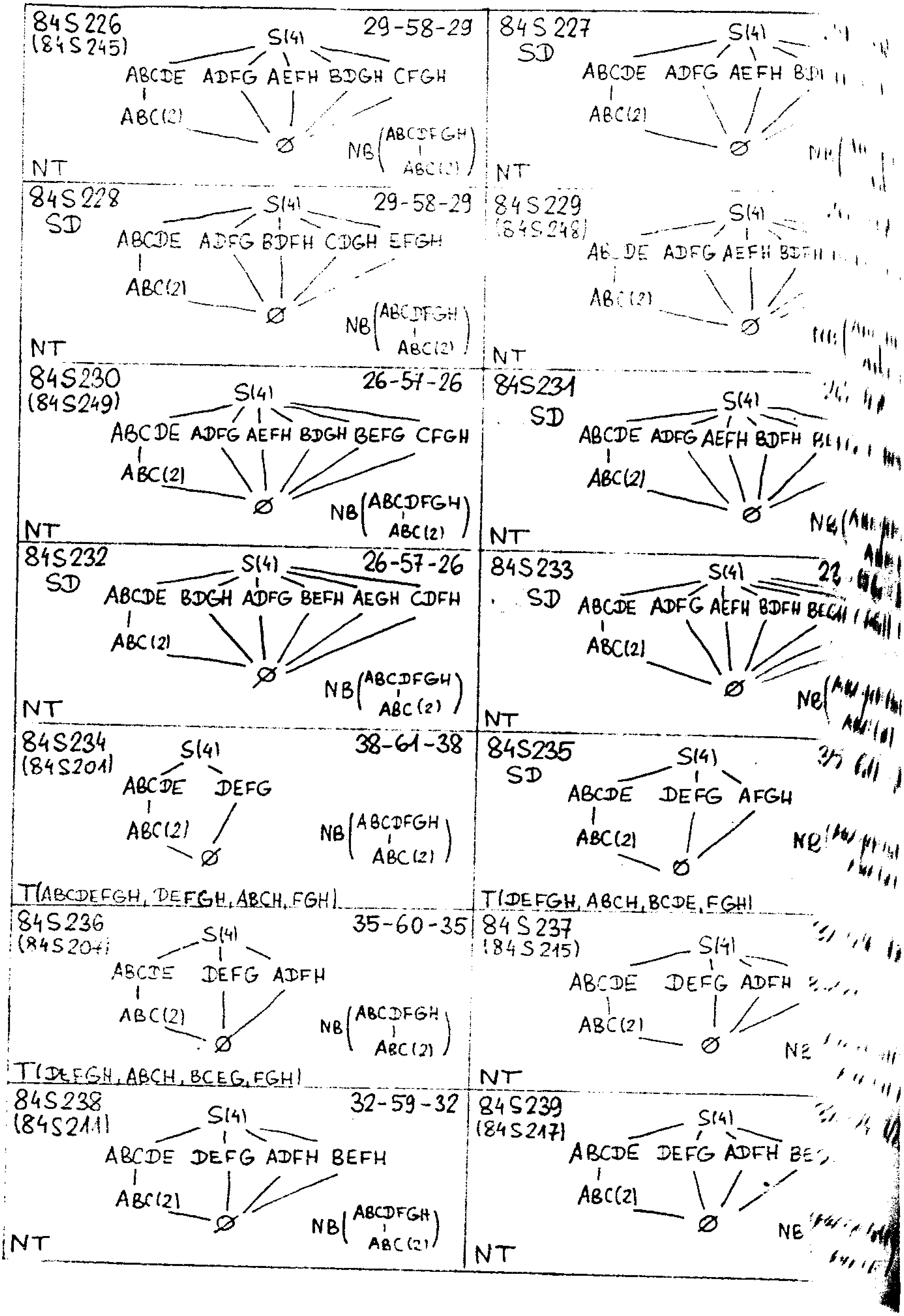


T

84S253 SD 33-59-33



T(DEFGH, DEFGH, BCH, ACFG)



84S226
(84S245)
29-58-29
S(4)
ABCDE ADFG AEFH BDGH CFGH
ABC(2)
∅
NB(ABCDFGH / ABC(2))
NT
84S227
SD
S(4)
ABCDE ADFG AEFH
ABC(2)
∅
NT
84S228
SD
29-58-29
S(4)
ABCDE ADFG BDFH CDGH EFGH
ABC(2)
∅
NB(ABCDFGH / ABC(2))
NT
84S229
(84S248)
S(4)
ADFG AEFH
ABC(2)
∅
NT
84S230
(84S249)
26-57-26
S(4)
ABCDE ADFG AEFH BDGH BEFG CFGH
ABC(2)
∅
NB(ABCDFGH / ABC(2))
NT
84S231
SD
S(4)
ABCDE ADFG AEFH BDFH
ABC(2)
∅
NT
84S232
SD
26-57-26
S(4)
ABCDE BDGH ADFG BEFH AEGH CDFH
ABC(2)
∅
NB(ABCDFGH / ABC(2))
NT
84S233
SD
S(4)
ABCDE ADFG AEFH BDFH
ABC(2)
∅
NT
84S234
(84S201)
38-61-38
S(4)
ABCDE DEFG
ABC(2)
∅
NB(ABCDFGH / ABC(2))
T(ABCDEFGH, DEFGH, ABCH, FGH)
84S235
SD
S(4)
ABCDE DEFG AFGH
ABC(2)
∅
T(DEFGH, ABCH, BCDE, FGH)
84S236
(84S204)
35-60-35
S(4)
ABCDE DEFG ADFH
ABC(2)
∅
NB(ABCDFGH / ABC(2))
T(DEFGH, ABCH, BCEG, FGH)
84S237
(84S215)
S(4)
ABCDE DEFG ADFH
ABC(2)
∅
NT
84S238
(84S211)
32-59-32
S(4)
ABCDE DEFG ADFH BEFH
ABC(2)
∅
NB(ABCDFGH / ABC(2))
NT
84S239
(84S217)
S(4)
ABCDE DEFG ADFH
ABC(2)
∅
NT

84S268
(84S116)
25-55-23
S(4)
ABCDE ABCFG ADFH AEGH BDGH CEFH
ABC(2)
∅
NB(ABCDEF / DF(2))
NT

84S269
(84S109)
34-58-32
S(4)
ABCDE ABCFG DEFG
ABC(2)
∅
NB(ABCDEF / DF(2))
T(ABCDEFG, ABCH, DEH, FGH)

84S270
(84S118)
31-57-29
S(4)
ABCDE ABCFG DEFG ADFH
ABC(2)
∅
NB(ABCDEF / EF(2))
T(ABCH, BCEG, DEH, FGH)

84S271
(84S126)
28-56-26
S(4)
ABCDE ABCFG DEFG ADFH AEGH
ABC(2)
∅
NB(ABCDEF / EF(2))
NT

84S272
(84S120)
28-56-26
S(4)
ABCDE ABCFG DEFG ADFH BDGH
ABC(2)
∅
NB(ABCDEF / EF(2))
NT

84S273
(84S122)
28-56-26
S(4)
ABCDE ABCFG DEFG ADFH BEGH
ABC(2)
∅
NB(ABCDEF / EF(2))
NT

84S274
(84S123)
25-55-23
S(4)
ABCDE ABCFG DEFG ADFH AEGH BDGH
ABC(2)
∅
NB(ABCDEF / EF(2))
NT

84S275
(84S128)
25-55-23
S(4)
ABCDE ABCFG DEFG ADFH BDGH CEFH
ABC(2)
∅
NB(ABCDEF / EF(2))
NT

84S276
(84S125)
22-54-20
S(4)
ABCDE ABCFG DEFG ADFH AEGH BDGH BEFH
ABC(2)
∅
NB(ABCDEH / EH(2))
NT

84S277
(84S124)
22-54-20
S(4)
ABCDE ABCFG DEFG ADFH AEGH BDGH CEFH
ABC(2)
∅
NB(ABCDEH / EH(2))
NT

84S278
(84S110)
34-58-32
S(4)
ABCDE ABCFG DEFH
ABC(2)
∅
NB(ABCDEF / DF(2))
T(ABCDEFGH, ABCG, DEH, FGH)

84S279
(84S119)
31-57-29
S(4)
ABCDE ABCFG DEFH ADGH
ABC(2)
∅
NB(ABCDEF / DF(2))
T(ABCG, BCEF, DEH, FGH)

84S280
(84S121)
28-56-26
S(4)
ABCDE ABCFG DEFH BEGH ADGH
ABC(2)
∅
NB(ABCDEF / DF(2))
NT

84S281
(84S92)
32-57-30
S(4)
ABCDE ADFGH
ABC(2)
∅
NB(ADFGH / A(1))
T(ABCDEFGH, DEFGH, BCE, FGH)

84S254 30-58-30
SD
S(4)
ABC(2) ADEFG BDEH BFGH
∅
NB(ABCDEFG / ABC(2))
NT

84S255 30-58-3
SD
S(4)
ABC(2) ADEFG BDEH CFGH
∅
NB(ABCDEF / ABC(
NT

84S256 30-58-30
SD
S(4)
ABC(2) ADEFG BDEH CDFH
∅
NB(ABCDEFG / ABC(2))
NT

84S257 27-57-2
SD
S(4)
ABC(2) ADEFG BDEH BFGH CDFH
∅
NB(ABCDEF / ABC(2
NT

84S258 24-56-24
SD
S(4)
ABC(2) ADEFG BDEH BFGH CDFH CEGH
∅
NB(ABCDEFG / ABC(2))
NT

84S259 36-60-3
ISD
NESD
S(4)
ABC(2) DEFGH
∅
NB(DEFGH / D(4))
T

84S260 37-59-35
(84S108)
S(4)
ABCDE ABCFG
ABC(2)
∅
NB(ABCDEF / DF(2))
T(ABCDEFGH, ABCDEFGH, DEH, FGH)

84S261 34-58-3
(84S111)
S(4)
ABCDE ABCFG ADFH
ABC(2)
∅
NB(ABCDE / DF(2)
T(ABCDEFGH, BCEG, DEH, FGH)

84S262 31-57-29
(84S117)
S(4)
ABCDE ABCFG ADFH AEGH
ABC(2)
∅
NB(ABCDEF / DF(2))
NT

84S263 31-57-2
(84S112)
S(4)
ABCDE ABCFG ADFH BDGH
ABC(2)
∅
NB(ABCDEF / DF(2))
T(ACEF, BCEG, DEH, FGH)

84S264 31-57-29
(84S113)
S(4)
ABCDE ABCFG ADFH BEGH
ABC(2)
∅
NB(ABCDEF / DF(2))
T(ACDF, BCEG, DEH, FGH)

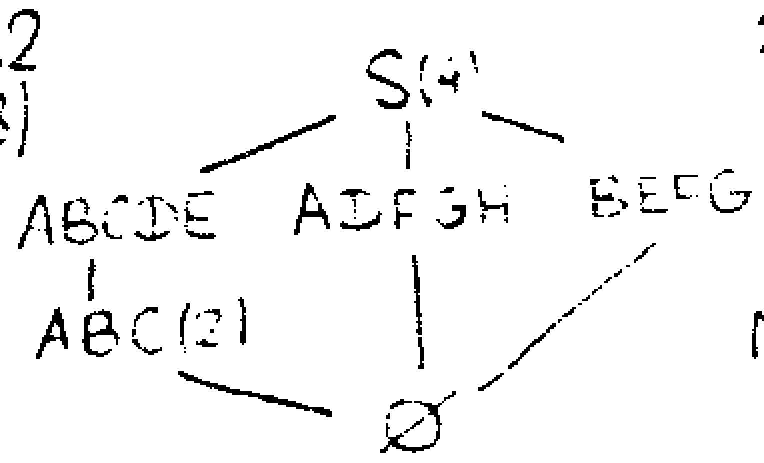
84S265 28-56-2
(84S127)
S(4)
ABCDE ABCFG ADFH AEGH BDGH
ABC(2)
∅
NB(ABCDE / DF(2)
NT

84S266 28-56-26
(84S114)
S(4)
ABCDE ABCFG ADFH BDGH CEFH
ABC(2)
∅
NB(ABCDEF / DF(2))
NT

84S267 25-55-2
(84S115)
S(4)
ABCDE ABCFG ADFH AEGH BDGH BEF
ABC(2)
∅
NB(ABCDE / DF(2
NT

84S296 (84L108) 22-35-35 ABCDEFG(3) | $\emptyset$ NB(ABCDE | A(1)) T	84S297 (84H215) 37-55-35 S(4) | ABCDEF | $\emptyset$ NB(ABCDE | A(1)) T
84S298 (84H214) 34-54-32 S(4) ABCDEF ABGH $\emptyset$ NB(ABCDE | A(1)) T	84S299 (84H212) 31-53-29 S(4) ABCDEF ABGH CDGH $\emptyset$ NB(ABCDE | A(1)) T(ABCDEFGH, ABEF, CDEF, GH)
84S300 (84H199) 28-52-26 S(4) ABCDEF ABGH CDGH EFGH $\emptyset$ NB(ABCDE | A(1)) NT	84S301 (84S84) 38-60-34 S(4) ABCDE ABFGH $\emptyset$ NB(ABCDE | A(1)) T
84S302 (84S85) 35-59-31 S(4) ABCDE ABFGH CDFG $\emptyset$ NB(ABCDE | A(1)) T(ABCDEFGH, ABEH, CDE, FGH)	84S303 (84S86) 32-58-28 S(4) ABCDE ABFGH CDFG CEFH $\emptyset$ NB(ABCDE | A(1)) T(ABDG, ABEH, CDE, FGH)
84S304 (84S87) 29-57-25 S(4) ABCDE ABFGH CDFG CEFH DEGH $\emptyset$ NB(ABCDE | A(1)) NT	84S305 (84S157) 47-65-45 $\emptyset$ S(4) | ABCDE | $\emptyset$ NB(ABCDE | A(1)) T
84S306 (84S158) 44-64-42 + $\emptyset$ S(4) ABCDE AFGH $\emptyset$ NB(ABCDE | A(1)) T	84S307 (84S159) 44-64-42 A | B S(4) ABCDE ABFG $\emptyset$ NB(ABCDE | A(1)) T
84S308 (84S160) 41-63-39 + A | B S(4) ABCDE ABFG CFGH $\emptyset$ NB(ABCDE | A(1)) T(ABCDEFGH, ABDE, CDEH, FGH)	84S309 (84S162) 41-63-39 A B C S(4) ABCDE ABFG ACFH $\emptyset$ NB(ABCDE | A(1)) T(ABCDEFGH, BDEG, CDEH, FGH)

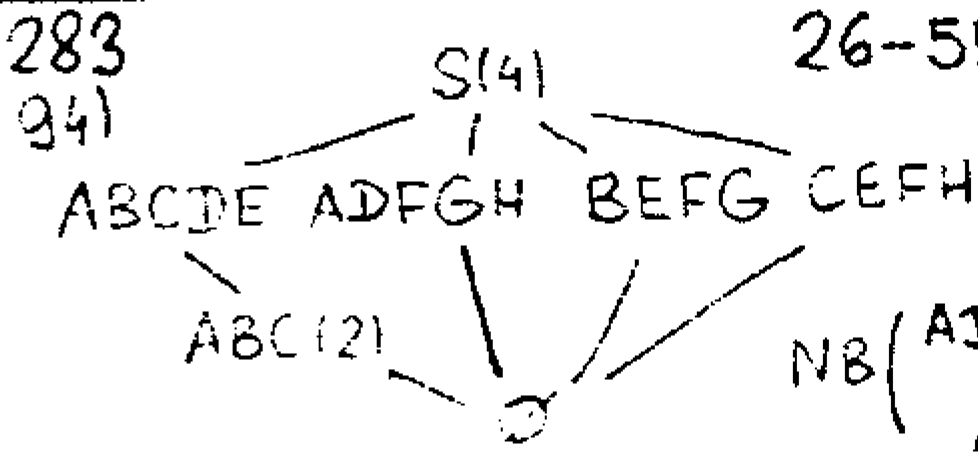
84 S 282 (84 S 93) 29-56-27



$NB\binom{ADFGH}{A(4)}$

T(DEFGH, ACDH, BCE, FGH)

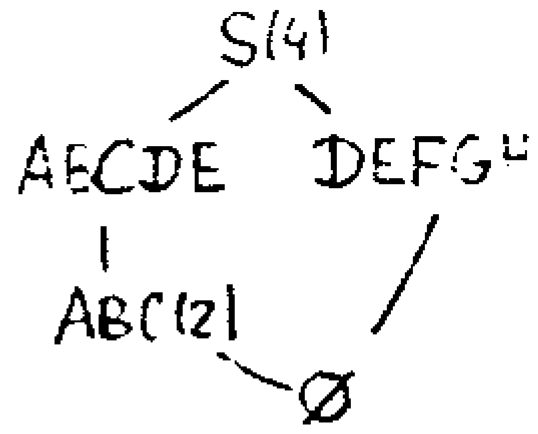
84 S 283 (84 S 94) 26-55-24



$NB\binom{ADFGH}{A(4)}$

NT

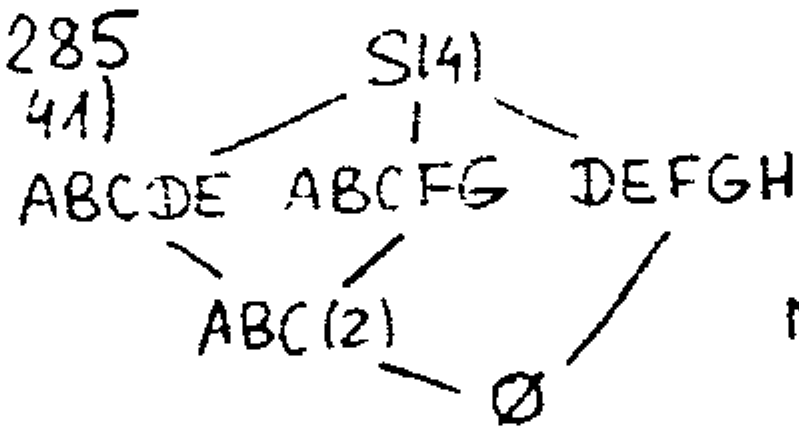
84 S 284 (84 S 88) 32-57-30



$NB\binom{DEFGH}{D(4)}$

T(ABCDEFGH, DEFGH, ABC, FGH)

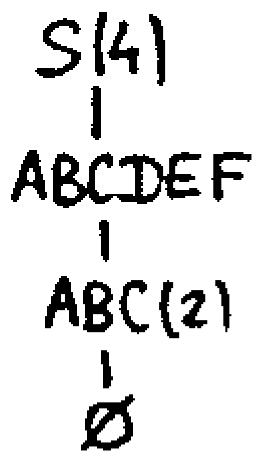
84 S 285 (84 S 41) 28-54-2?



$NB\binom{DEFGH}{D(4)}$

T(ABCDEFGH, ABC, DEH, FGH)

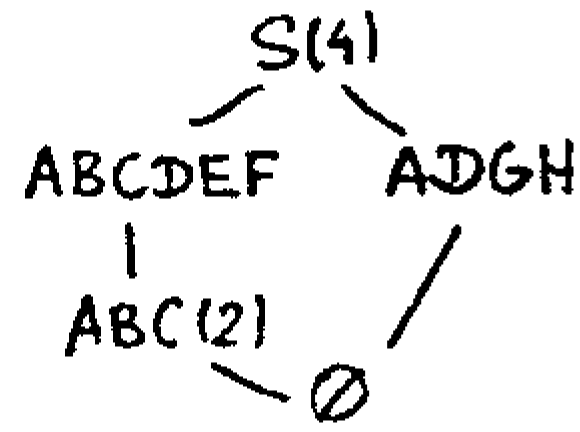
84 S 286 (84 H 213) 33-53-32



$NB\binom{ABCDGH}{GH(2)}$

T

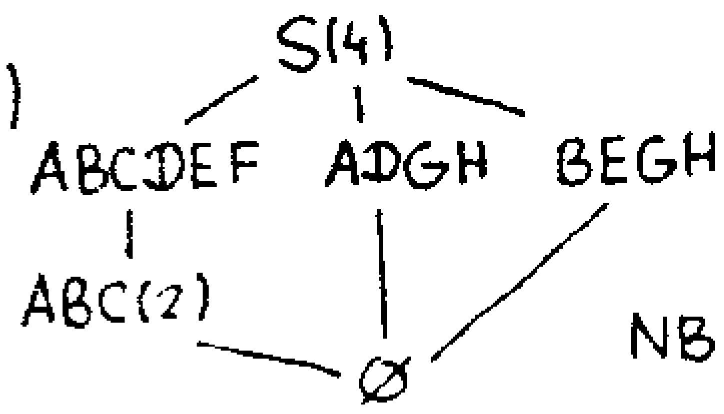
84 S 287 (84 H 210) 30-52-2?



$NB\binom{ABCDFG}{FG(2)}$

T(ABCDEFGH, DEFGH, BCEF, GH)

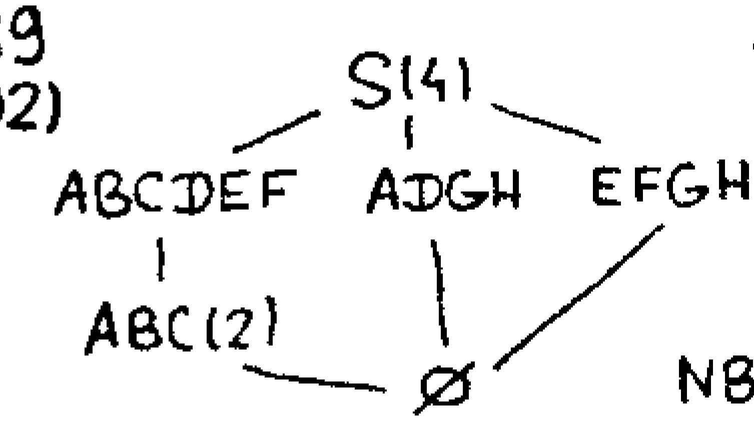
84 S 288 (84 H 205) 27-51-26



$NB\binom{ABCDEG}{DG(2)}$

T(DEFGH, ACDF, BCEF, GH)

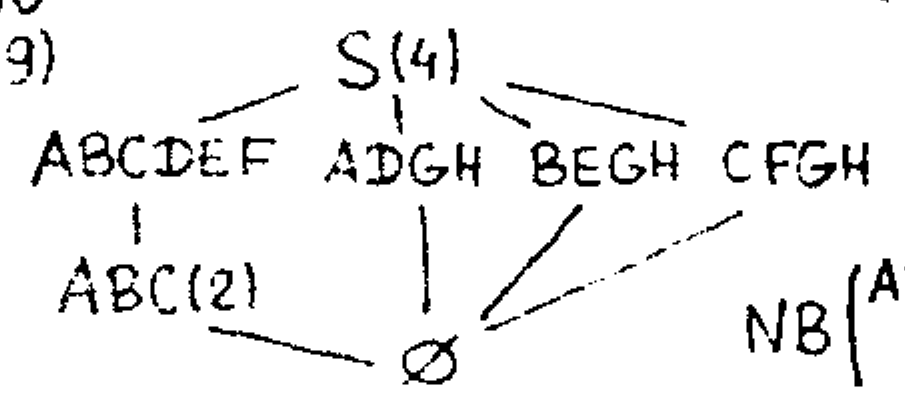
84 S 289 (84 H 202) 27-51-26



$NB\binom{ABCDEG}{DG(2)}$

T(DEFGH, ABCD, BCEF, GH)

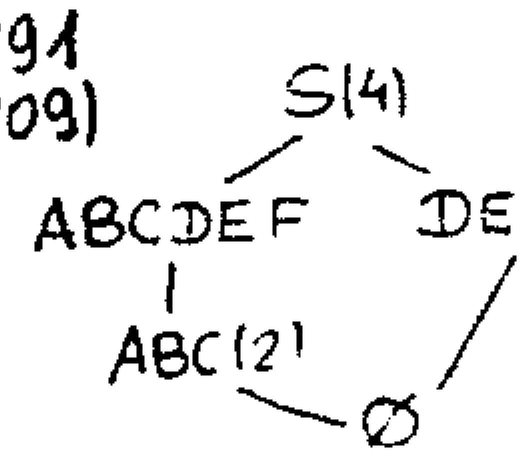
84 S 290 (84 H 189) 24-50-23



$NB\binom{ABCDFG}{FG(2)}$

NT

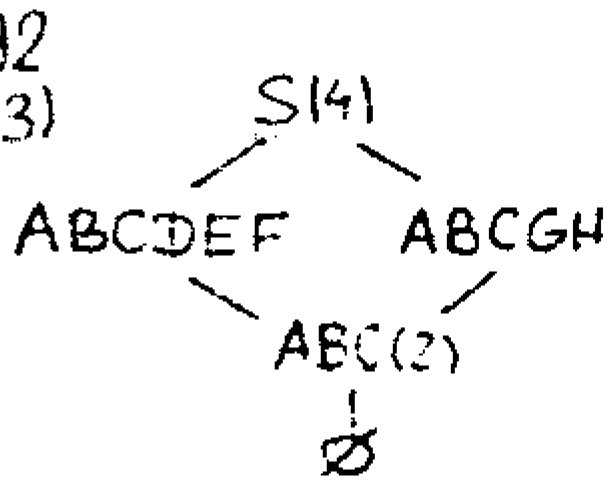
84 S 291 (84 H 209) 30-52-2?



$NB\binom{ABCDFG}{FG(2)}$

T(ABCDEFGH, DEFGH, ABCF, GH)

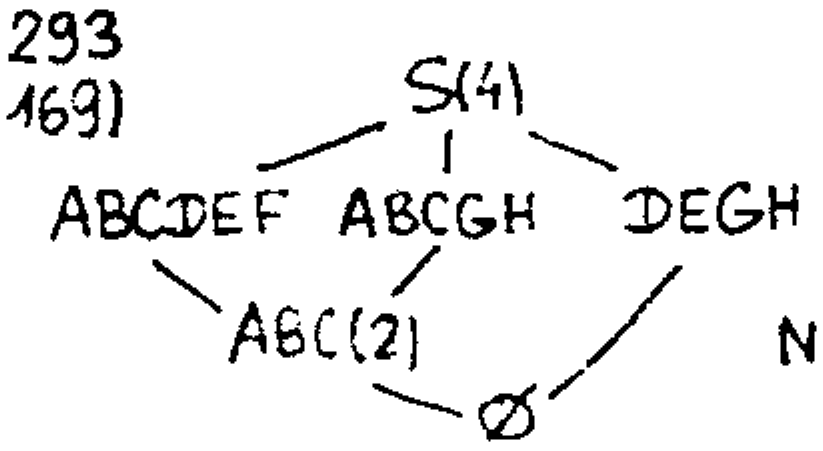
84 S 292 (84 S 173) 29-50-26



$NB\binom{ABCDEG}{DG(2)}$

T(ABCDEFGH, ~~ABCDEFGH~~, DEF, GH)

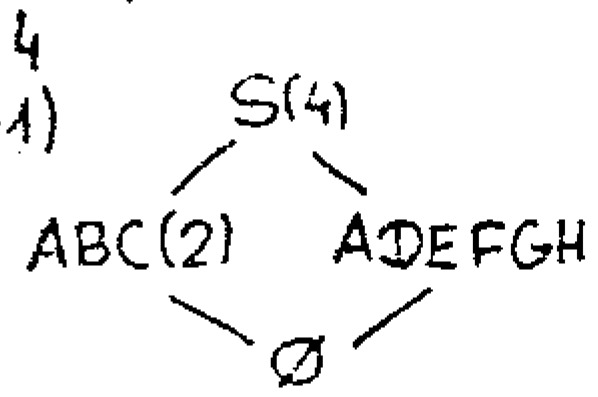
84 S 293 (84 H 169) 26-49-2?



$NB\binom{ABCDEG}{DG(2)}$

T(ABCDEFGH, ABCF, DEF, GH)

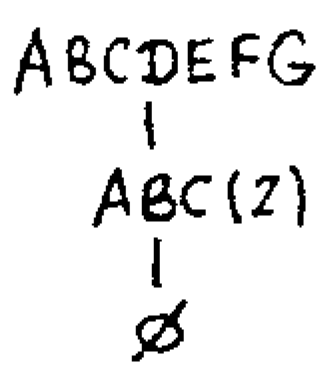
84 S 294 (84 H 201) 26-50-26



$NB\binom{ADEFG}{A(4)}$

T

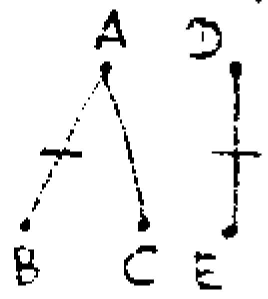
84 S 295 (84 L 107) 20-34-3?



$NB\binom{ADEFG}{A(4)}$

T

84S324 (84S168) 38-62-36

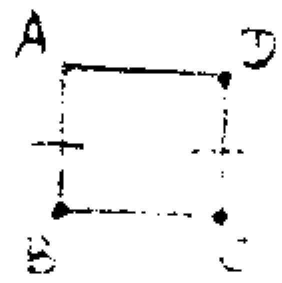


S(4)
ABCDE ABFG ACFH DEFG
∅

NB(ABCDE / A(1))

T(ABCH, BDEG, CDEH, FGH)

84S325 (84S179) 35-61-33



S(4)
ABCDE ABFG BCFH CDFG ADGH
∅

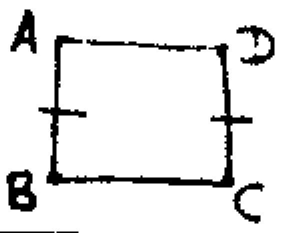
NB(ABCDE / A(1))

NT

84S326 (84S186) 32-60-30

S(4)
ABCDE ABFG BCFH CDFG ADGH EFGH
∅

+

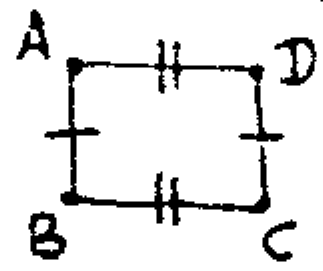


NB(ABCDE / A(1))

NT

84S327 (84S177) 35-61-33

S(4)
ABCDE ABFG BCFH CDFG ADGH
∅



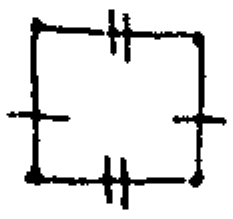
NB(ABCDE / A(1))

NT

84S328 (84S185) 32-60-30

S(4)
ABCDE ABFG BCFH CDFG ADFH EFGH
∅

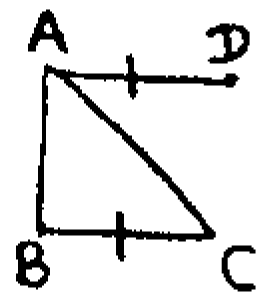
+



NB(ABCDE / A(1))

NT

84S329 (84S180) 35-61-33



S(4)
ABCDE ABFG BCFH ACGH ADFH
∅

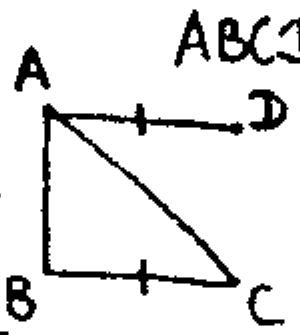
NB(ABCDE / A(1))

NT

84S330 (84S187) 32-60-30

S(4)
ABCDE ABFG BCFH ACGH ADFH EFGH
∅

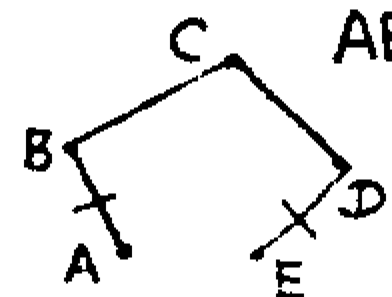
+



NB(ABCDE / A(1))

NT

84S331 (84S181) 35-61-33



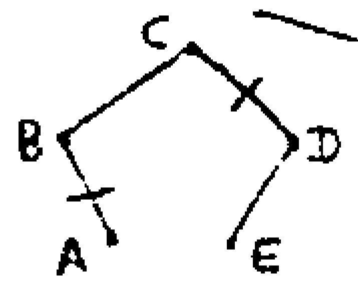
S(4)
ABCDE ABFG BCFH CDGH DEFG
∅

NB(ABCDE / A(1))

NT

84S332 (84S183) 35-61-33

S(4)
ABCDE ABFG BCFH CDFG DEFH
∅

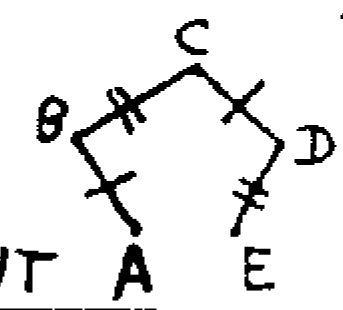


NB(ABCDE / A(1))

NT

84S333 (84S178) 35-61-33

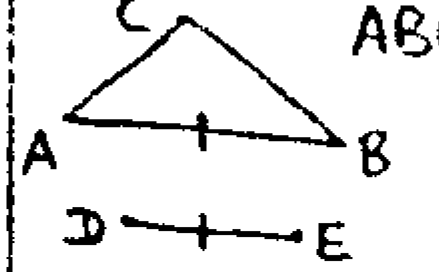
S(4)
ABCDE ABFG BCFH CDFG DEFH
∅



NB(ABCDE / A(1))

NT

84S334 (84S184) 35-61-33

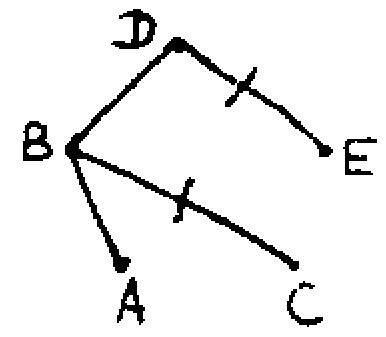


S(4)
ABCDE ABFG BCFH ACGH DEFG
∅

NB(ABCDE / A(1))

NT

84S335 (84S182) 35-61-33



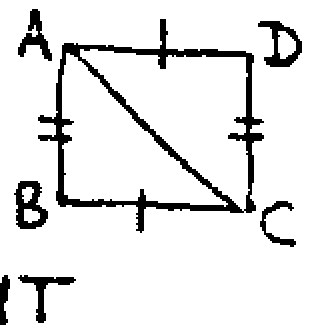
S(4)
ABCDE ABFG BCFH BDGH DEFH
∅

NB(ABCDE / A(1))

NT

84S336 (84S188) 32-60-30

S(4)
ABCDE ABFG BCFH CDFG ADFH ACGH
∅



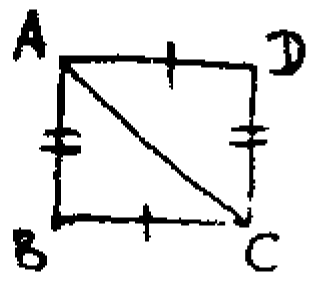
NB(ABCDE / A(1))

NT

84S337 (84S194) 29-59-27

S(4)
ABCDE ABFG BCFH CDFG ADFH ACGH EFGH
∅

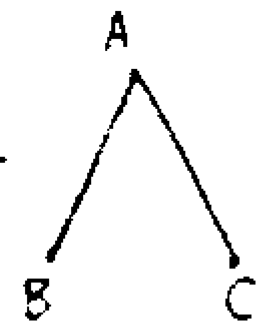
+



NB(ABCDE / A(1))

NT

84S310 (84S165) — 38-62-36

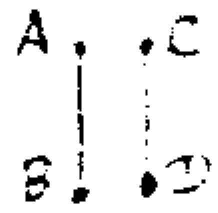
+ 

S(4)
ABCDE ABFG ACFH DFGH
∅

NB(ABCDE | A(1))

T(ABCE,BDEG,CDEH,FGH)

84S311 (84S163) — 41-63-39

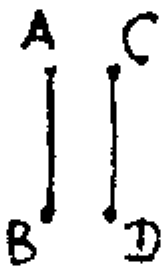


S(4)
ABCDE ABFG CDFH
∅

NB(ABCDE | A(1))

T(ABCDEFGH,ABEG,CDEH,FGH)

84S312 (84S166) — 38-62-36

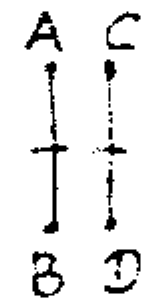
+ 

S(4)
ABCDE ABFG CDFH EFGH
∅

NB(ABCDE | A(1))

T(ABCD,ABEG,CDEH,FGH)

84S313 (84S161) — 41-63-39

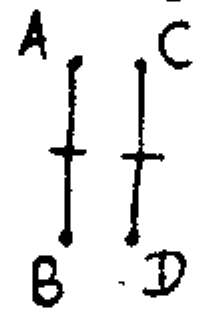


S(4)
ABCDE ABFG CDFG
∅

NB(ABCDE | A(1))

T(ABCDEFGH,ABEH,CDEH,FGH)

84S314 (84S164) — 38-62-36

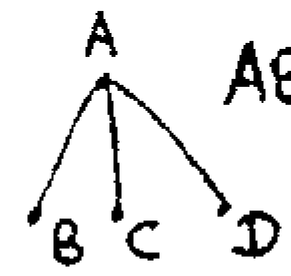
+ 

S(4)
ABCDE ABFG CDFG EFGH
∅

NB(ABCDE | A(1))

NT

84S315 (84S169) — 38-62-36

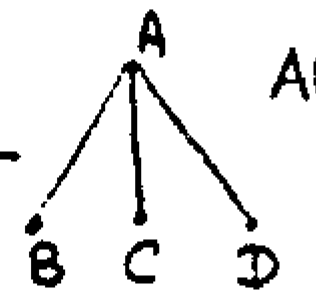


S(4)
ABCDE ABFG ACFH ADGH
∅

NB(ABCDE | A(1))

NT

84S316 (84S174) — 35-61-33

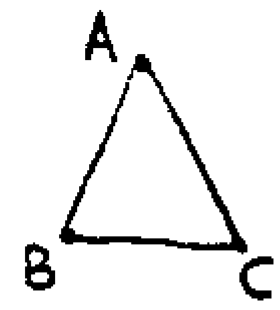
+ 

S(4)
ABCDE ABFG ACFH ADGH EFGH
∅

NB(ABCDE | A(1))

NT

84S317 (84S170) — 38-62-36

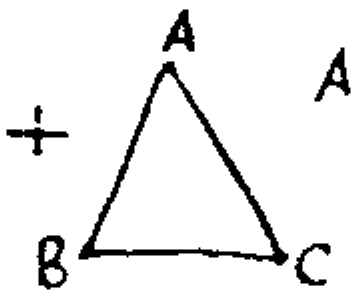


S(4)
ABCDE ABFG ACFH BCGH
∅

NB(ABCDE | A(1))

T(ADEF,BDEG,CDEH,FGH)

84S318 (84S175) — 35-61-33

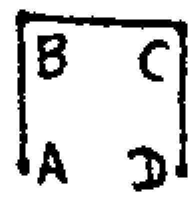
+ 

S(4)
ABCDE ABFG ACFH BCGH EFGH
∅

NB(ABCDE | A(1))

NT

84S319 (84S171) — 38-62-36

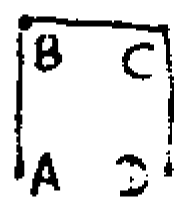


S(4)
ABCDE ABFG BCFH CDGH
∅

NB(ABCDE | A(1))

T(ABEF,ADEG,CDEH,FGH)

84S320 (84S176) — 35-61-33

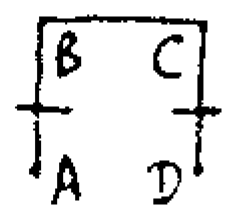
+ 

S(4)
ABCDE ABFG BCFH CDGH EFGH
∅

NB(ABCDE | A(1))

NT

84S321 (84S167) — 38-62-36

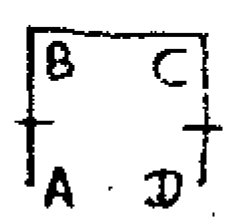


S(4)
ABCDE ABFG BCFH CDFG
∅

NB(ABCDE | A(1))

T(ABEH,ADEG,CDEH,FGH)

84S322 (84S173) — 35-61-33

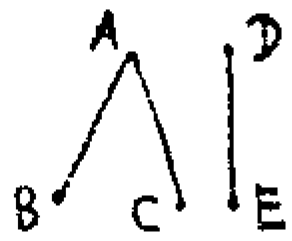
+ 

S(4)
ABCDE ABFG BCFH CDFG EFGH
∅

NB(ABCDE | A(1))

NT

84S323 (84S172) — 38-62-36



S(4)
ABCDE ABFG ACFH DEGH
∅

NB(ABCDE | A(1))

T(ABCF,BDEG,CDEH,FGH)

84S352 (84S354) 47-67-47

S(4)
ABCD ABEF ABGH
∅

NB

NT

84S353 SD 47-67-47

S(4)
ABCD ABEF ACEG
∅

NB

T(ABCDEFGH, BDFH, CDGH, EFGH)

84S354 (84S352) 47-67-47

S(4)
ABCD ABEF CDEF
∅

NB

T(ABCDEFGH, ABGH, CDGH, EFGH)

84S355 SD 47-67-47

S(4)
ABCD ABEF CDGH
∅

NB

T(ABCDEFGH, ABEF, CDGH, EFGH)

84S356 SD 44-66-44

S(4)
ABCD ABEF ACEG ADFG
∅

NB

NT

84S357 (84S360) 44-66-44

S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG
∅

NB

NT

84S358 SD 44-66-44

S(4)
ABCD ABEF ABGH CDEF
∅

NB

NT

84S359 SD 44-66-44

S(4)
ABCD ABEF ACEG BCEH
∅

NB

T(ADFG, BDFH, CDGH, EFGH)

84S360 (84S357) 44-66-44

S(4)
ABCD ABEF ACEG BCFG
∅

NB

T(ADEH, BDFH, CDGH, EFGH)

84S361 SD 44-66-44

S(4)
ABCD ABEF ACEG BDFH
∅

NB

T(ACEG, BDFH, CDGH, EFGH)

84S362 ISD 44-66-44

S(4)
ABCD ABEF CDGH EFGH
∅

NB

T(ABCD, ABEF, CDGH, EFGH)

84S363 (84S365) 41-65-41

S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG ACFH
∅

NB

NT

84S364 SD 41-65-41

S(4)
ABCD ABEF ACEG ADFG BCEH
∅

NB

NT

84S365 (84S363) 41-65-41

S(4)
ABCD ABEF ACEG ADFG BCFG
∅

NB

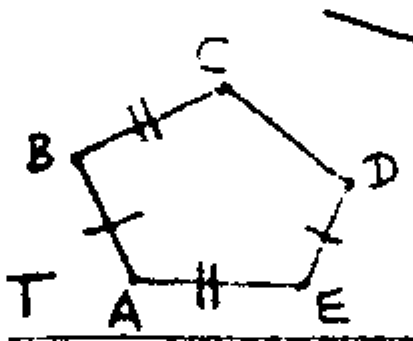
NT

84S338 (84S191) 32-60-30

S(4)

ABCDE ABFG BCFH CDGH DEFG AEFH

∅



NB(ABCDE | A(1))

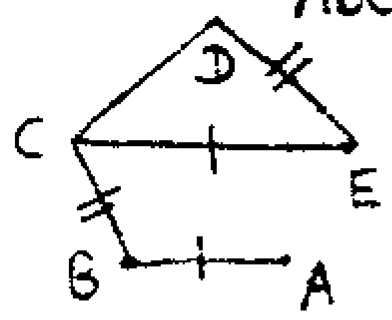
NT

84S339 (84S189) 32-60-30

S(4)

ABCDE ABFG BCFH CEFG CDGH DEFH

∅



NB(ABCDE | A(1))

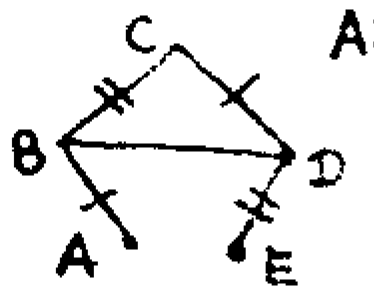
NT

84S340 (84S190) 32-60-30

S(4)

ABCDE ABFG BCFH CDFG DEFH BDGH

∅



NB(ABCDE | A(1))

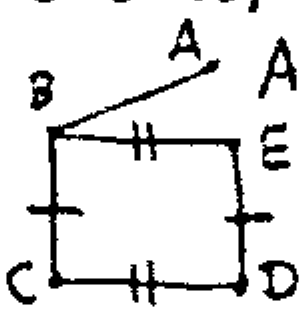
NT

84S341 (84S193) 32-60-30

S(4)

ABCDE ABFG BCFH CDGH DEFH BEGH

∅



NB(ABCDE | A(1))

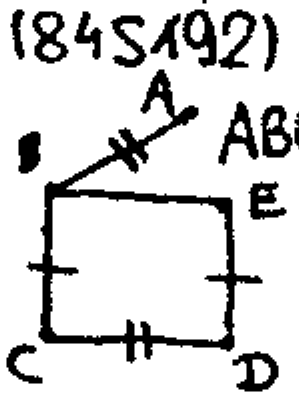
NT

84S342 (84S192) 32-60-30

S(4)

ABCDE ABFG BCFH CDFG DEFH BEGH

∅



NB(ABCDE | A(1))

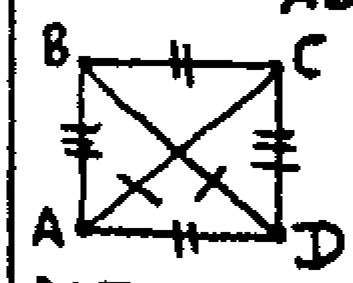
NT

84S343 (84S195) 29-59-27

S(4)

ABCDE ABFG CDFG ACFH BDFH ADGH BCGH

∅



NB(ABCDE | A(1))

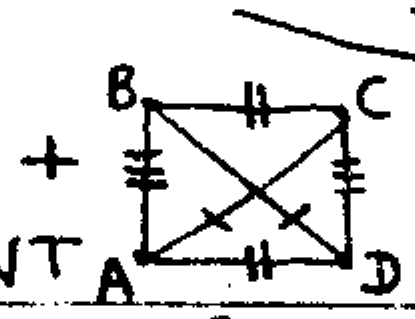
NT

84S344 (84S199) 26-58-24

S(4)

ABCDE ABFG CDFG ACFH BDFH ADGH BCGH EFGH

∅



NB(ABCDE | A(1))

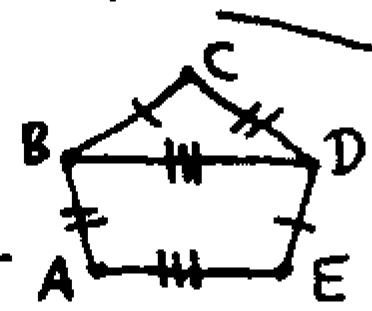
NT

84S345 (84S198) 29-59-27

S(4)

ABCDE ABFG CDFG BCFH DEFH AEGH BDGH

∅



NB(ABCDE | A(1))

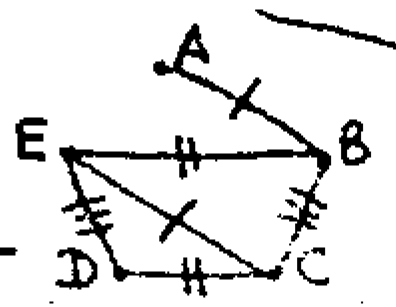
NT

84S346 (84S196) 29-59-27

S(4)

ABCDE ABFG CEFG BEFH CDFH BCGH DEGH

∅



NB(ABCDE | A(1))

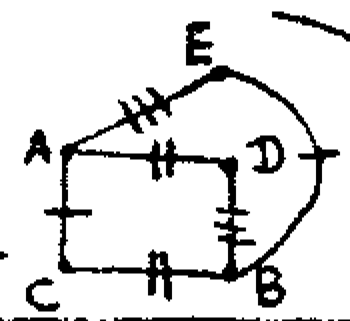
NT

84S347 (84S197) 29-59-27

S(4)

ABCDE ACFG BEFG ADFH BCFH AEGH BDGH

∅



NB(ABCDE | A(1))

NT

84S348 56-70-56

ISD

S(4)

|

∅

NB

T

84S349 53-69-53

SD

S(4)

|

ABCD

|

∅

NB

T

84S350 50-68-50

SD

S(4)

ABCD ABEF

∅

NB

T

84S351 50-68-50

ISD

S(4)

ABCD EFGH

∅

NB

T

84S380 38-64-38
SD
S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG BDFH CDEF
∅
NB
NT

84S381 38-64-38
SD
S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG CDEF CDGH
∅
NB
NT

84S382 38-64-38
ISD
S(4)
ABCD ABEF ABGH CDEF CDGH EFGH
∅
NB
NT

84S383 38-64-38
ISD
S(4)
ABCD ABEF ACEG BDFH CDGH EFGH
∅
NB
NT

84S384 35-63-35
(84S393)
S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG ACFH ADEH ADFG
∅
NB
NT

84S385 35-63-35
(84S387)
S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG ACFH ADEH BCEH
∅
NB
NT

84S386 35-63-35
(84S389)
S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG ACFH ADEH BCFG
∅
NB
NT

84S387 35-63-35
(84S385)
S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG ACFH BCEH BCFG
∅
NB
NT

84S388 35-63-35
SD
S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG ACFH BCEH BDEG
∅
NB
NT

84S389 35-63-35
(84S386)
S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG ACFH BCEH EFGH
∅
NB
NT

84S390 35-63-35
(84S397)
S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG ACFH BDEG BDFH
∅
NB
NT

84S391 35-63-35
SD
S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG ACFH BDEG CDEF
∅
NB
NT

84S392 35-63-35
SD
S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG ACFH BDEG EFGH
∅
NB
NT

84S393 35-63-35
(84S384)
S(4)
ABCD ABEF ACEG ADFG BCFG BDEG CDEF
∅
NB
NT

84S366 41-65-41
SD
S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG BCEH
∅
NB
NT

84S367 41-65-4
(84S370)
S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG BDFH
∅
NB
NT

84S368 41-65-41
SD
S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG CDEF
∅
NB
NT

84S369 41-65-4
SD
S(4)
ABCD ABEF ABGH CDEF CDGH
∅
NB
NT

84S370 41-65-41
(84S367)
S(4)
ABCD ABEF ACEG BDFH CDEF
∅
NB
NT

84S371 41-65-4
SD
S(4)
ABCD ABEF ACEG BDFH CDGH
∅
NB
NT

84S372 38-64-38
(84S376)
S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG ACFH ADEH
∅
NB
NT

84S373 38-64-3
SD
S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG ACFH BCEH
∅
NB
NT

84S374 38-64-38
(84S379)
S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG ACFH BDEG
∅
NB
NT

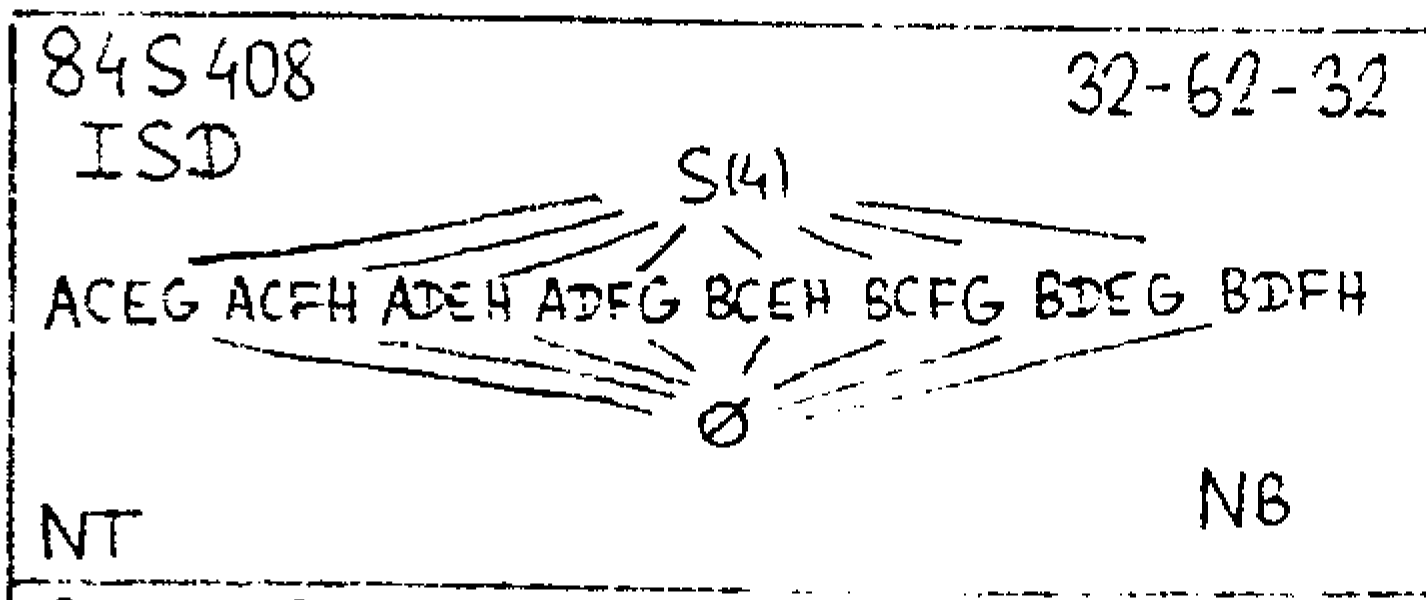
84S375 38-64-38
SD
S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG ACFH EFGH
∅
NB
NT

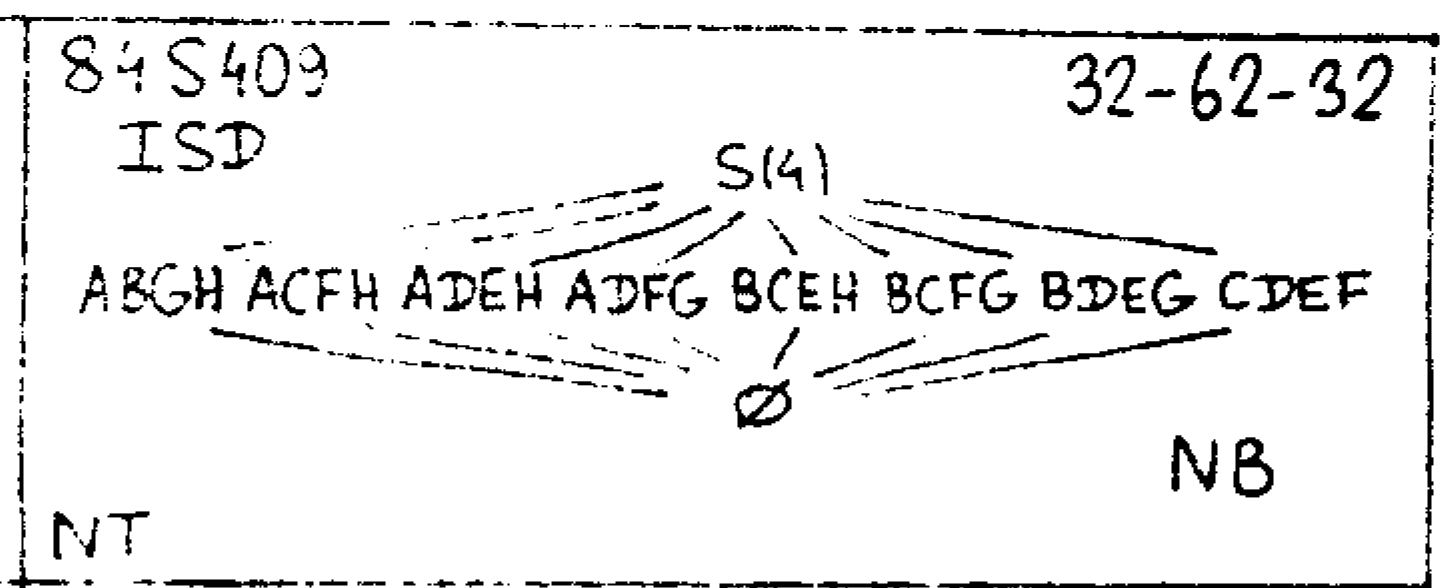
84S376 38-64-38
(84S372)
S(4)
ABCD ABEF ACEG ADFG BCFG BDEG
∅
NB
NT

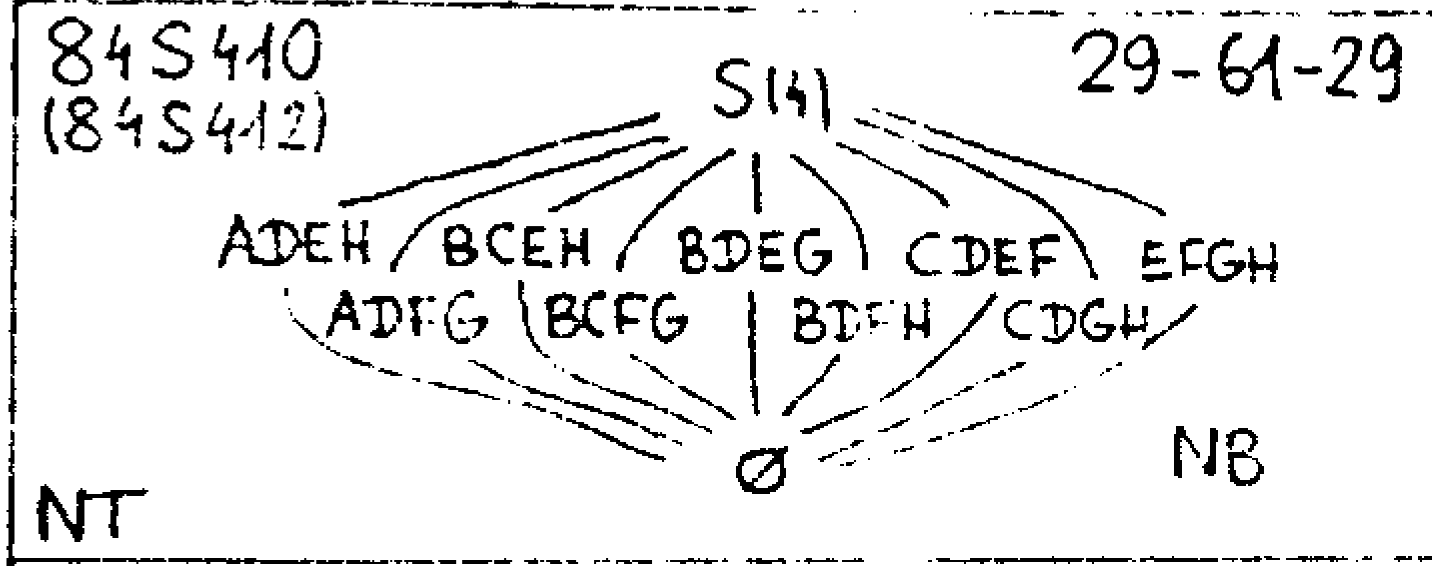
84S377 38-64-38
SD
S(4)
ABCD ABEF ACEG ADFG BCEH BDFH
∅
NB
NT

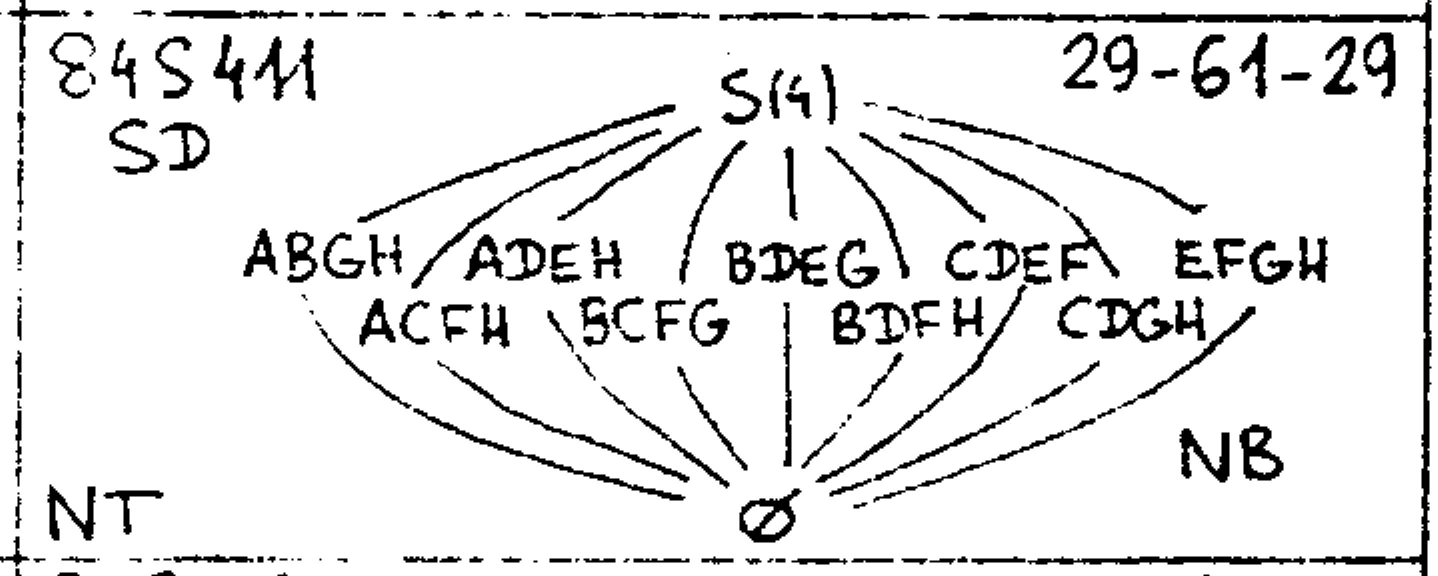
84S378 38-64-38
SD
S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG BCEH CDEF
∅
NB
NT

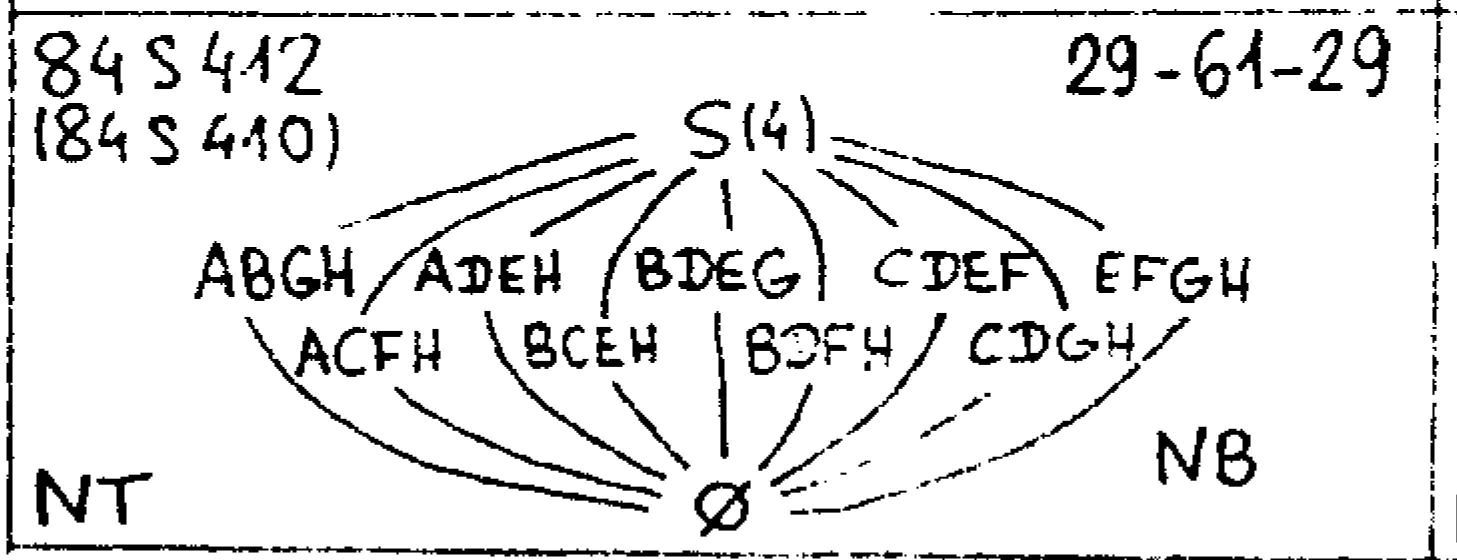
84S379 38-64-38
(84S374)
S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG BCFG CDEF
∅
NB
NT

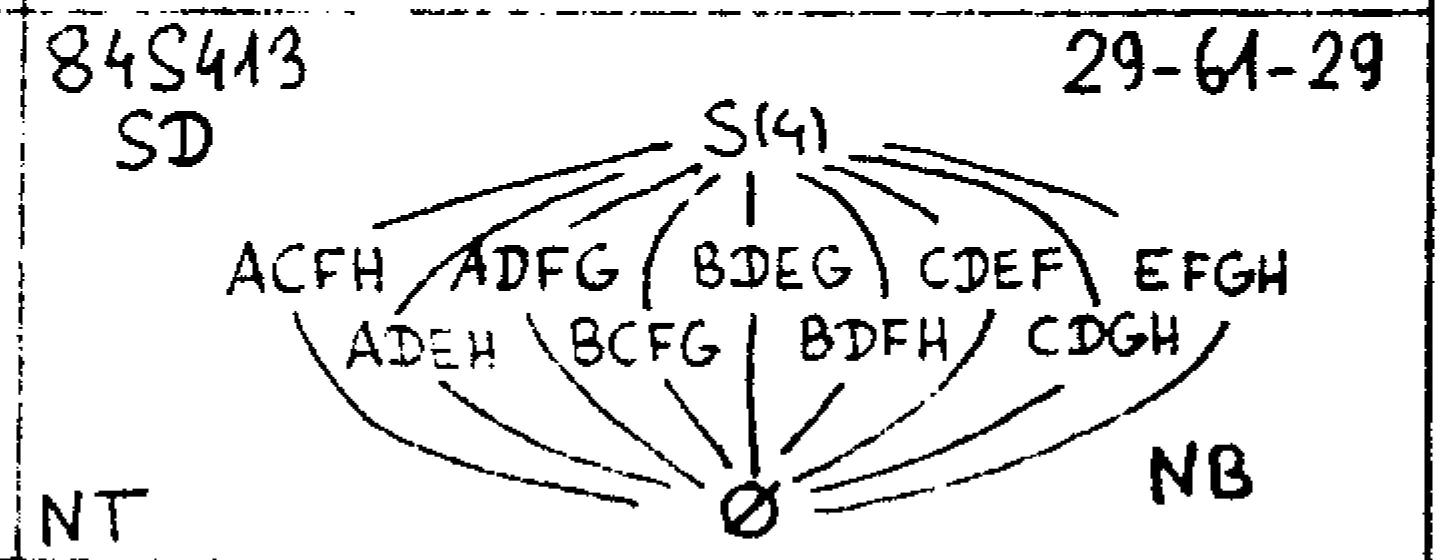

84S408
ISD
32-62-32
S(4)
ACEG ACFH ADEH ADFG BCEH BCFG BDEG BDFH
∅
NT
NB

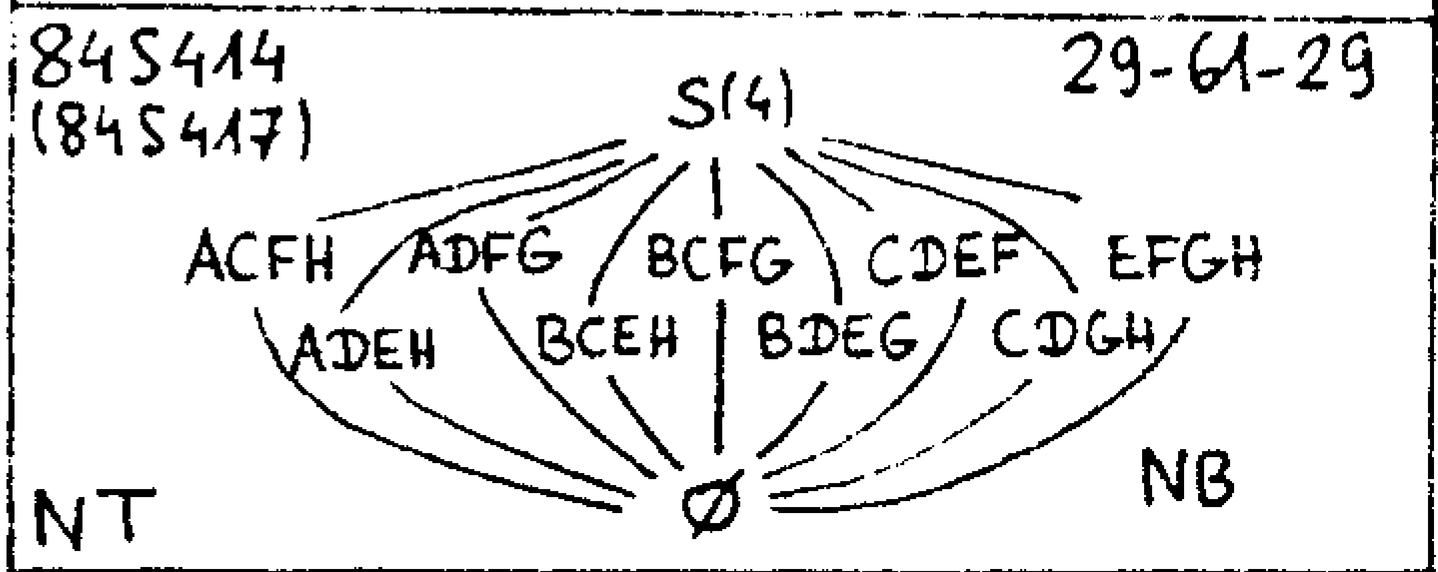

84S409
ISD
32-62-32
S(4)
ABGH ACFH ADEH ADFG BCEH BCFG BDEG CDEF
∅
NT
NB

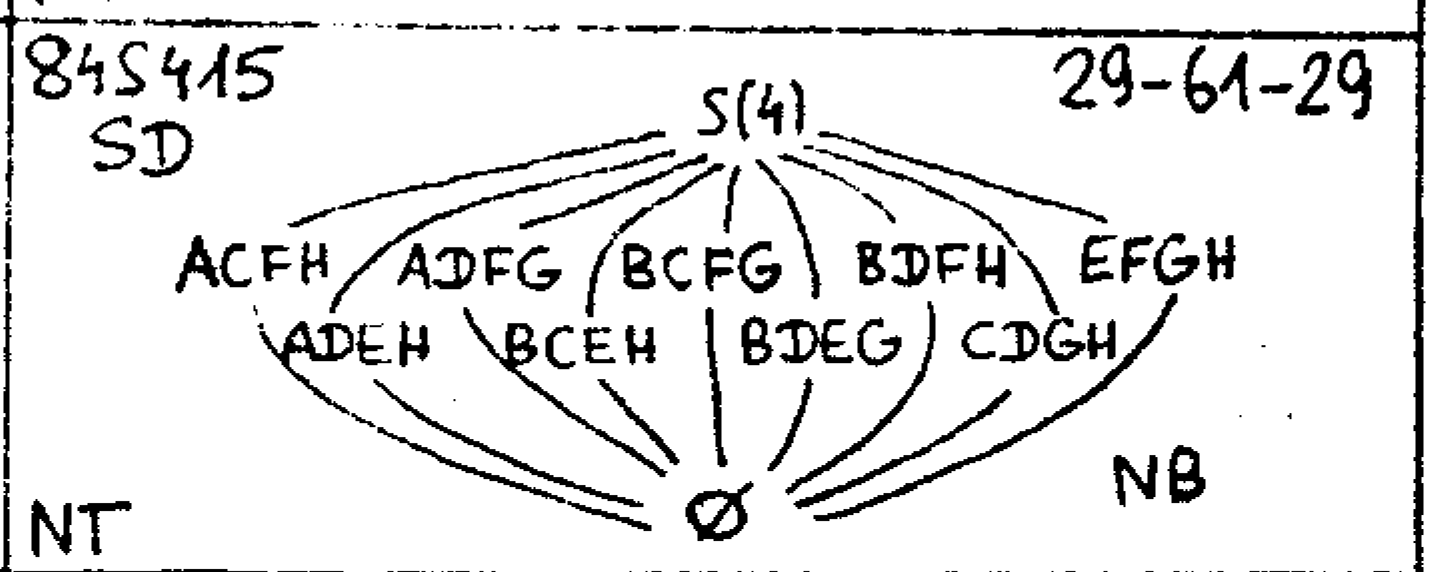

84S410
(84S412)
29-61-29
S(4)
ADEH BCEH BDEG CDEF EFGH
ADFG BCFG BDFH CDGH
∅
NT
NB

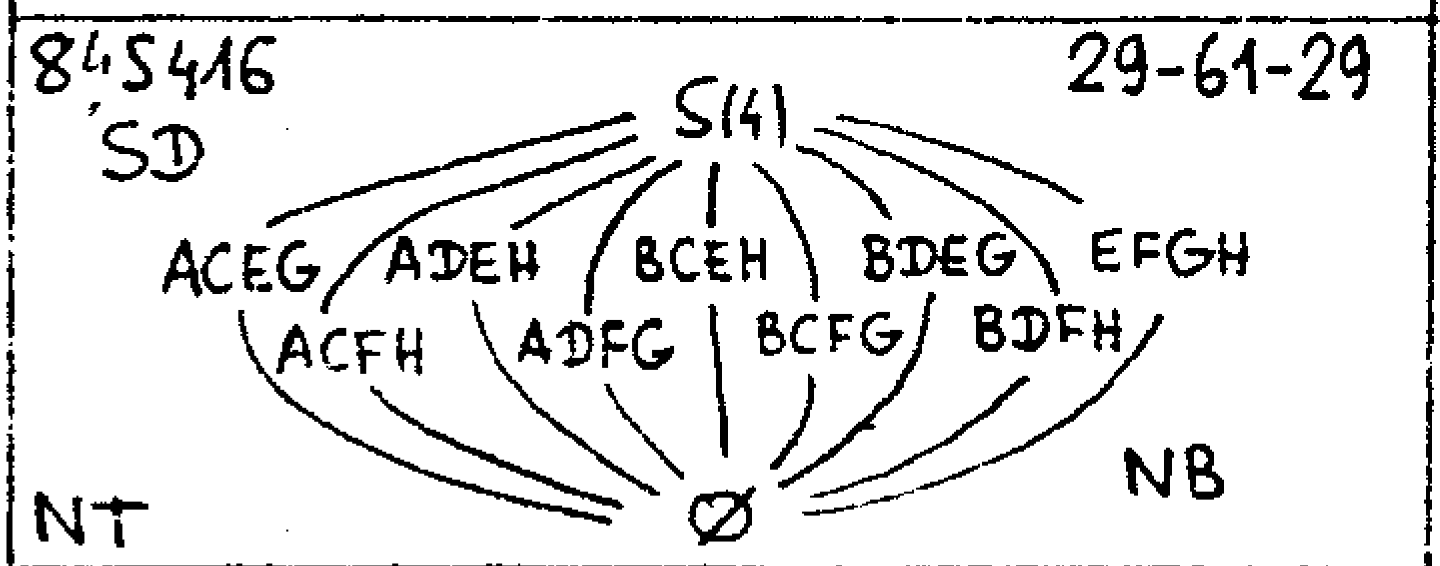

84S411
SD
29-61-29
S(4)
ABGH ADEH BDEG CDEF EFGH
ACFH BCFG BDFH CDGH
∅
NT
NB

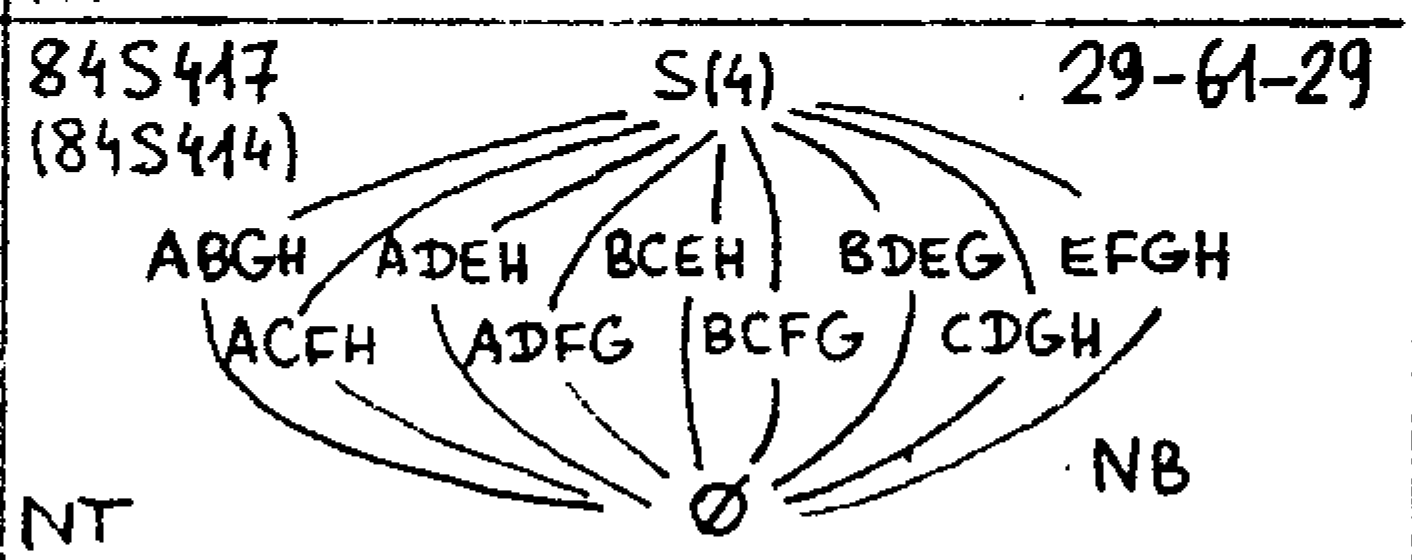

84S412
(84S410)
29-61-29
S(4)
ABGH ADEH BDEG CDEF EFGH
ACFH BCEH BDFH CDGH
∅
NT
NB

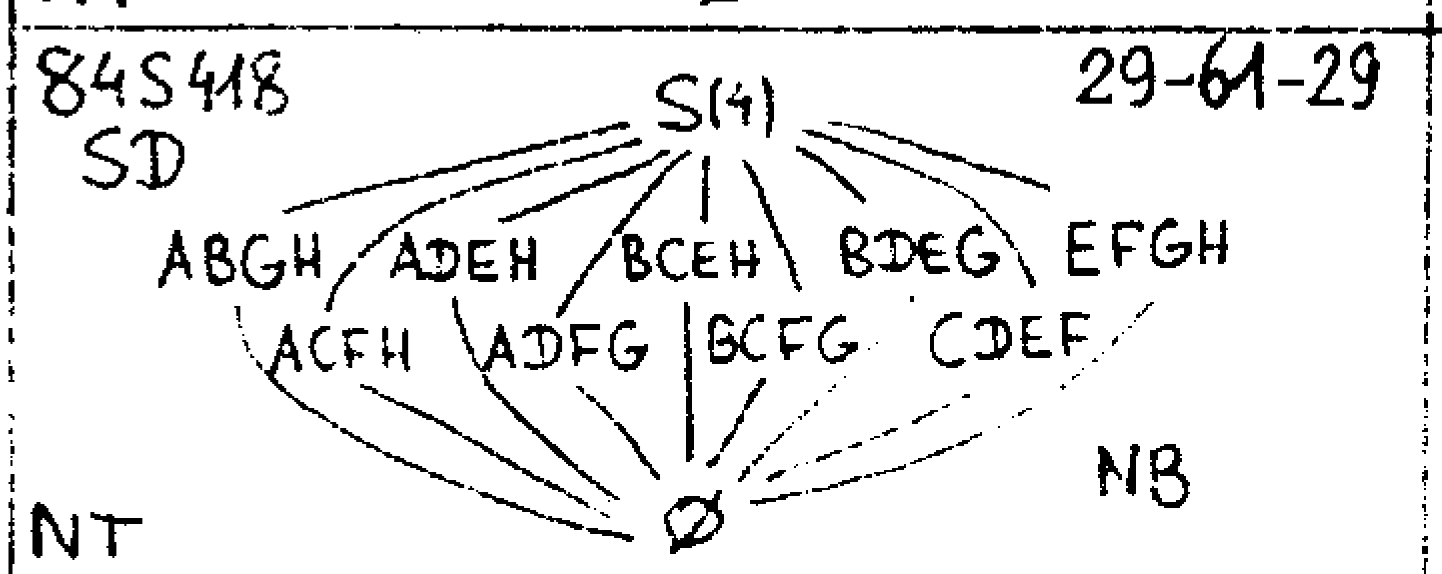

84S413
SD
29-61-29
S(4)
ACFH ADFG BDEG CDEF EFGH
ADEH BCFG BDFH CDGH
∅
NT
NB

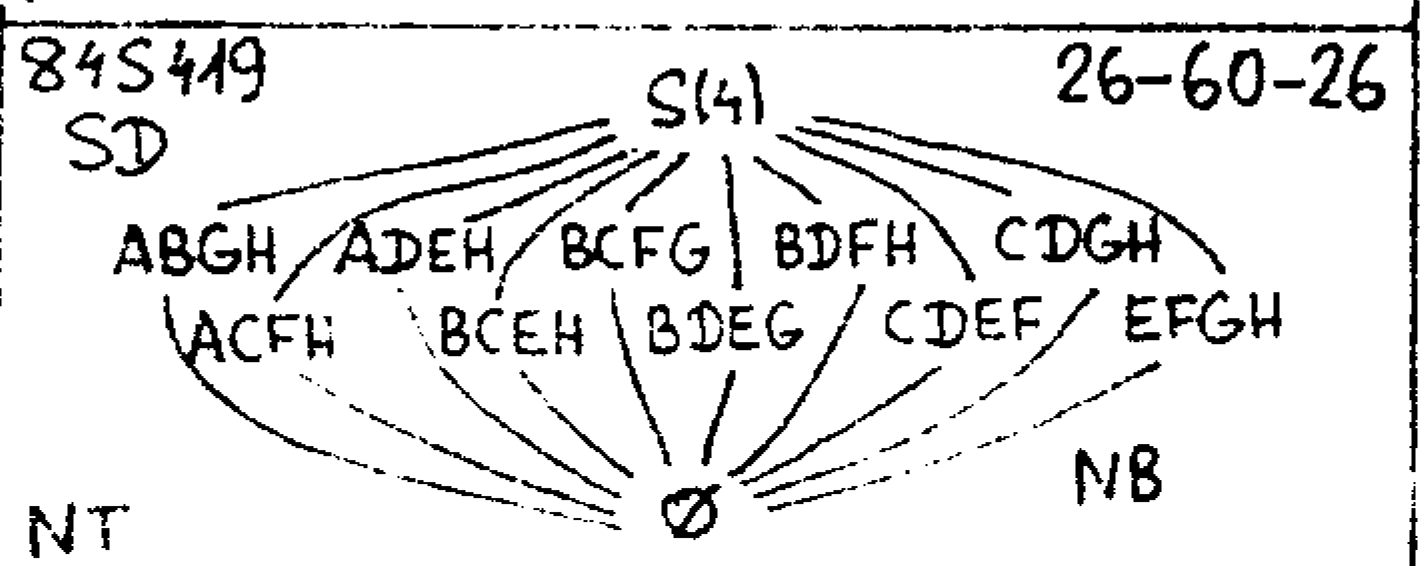

84S414
(84S417)
29-61-29
S(4)
ACFH ADFG BCFG CDEF EFGH
ADEH BCEH BDEG CDGH
∅
NT
NB

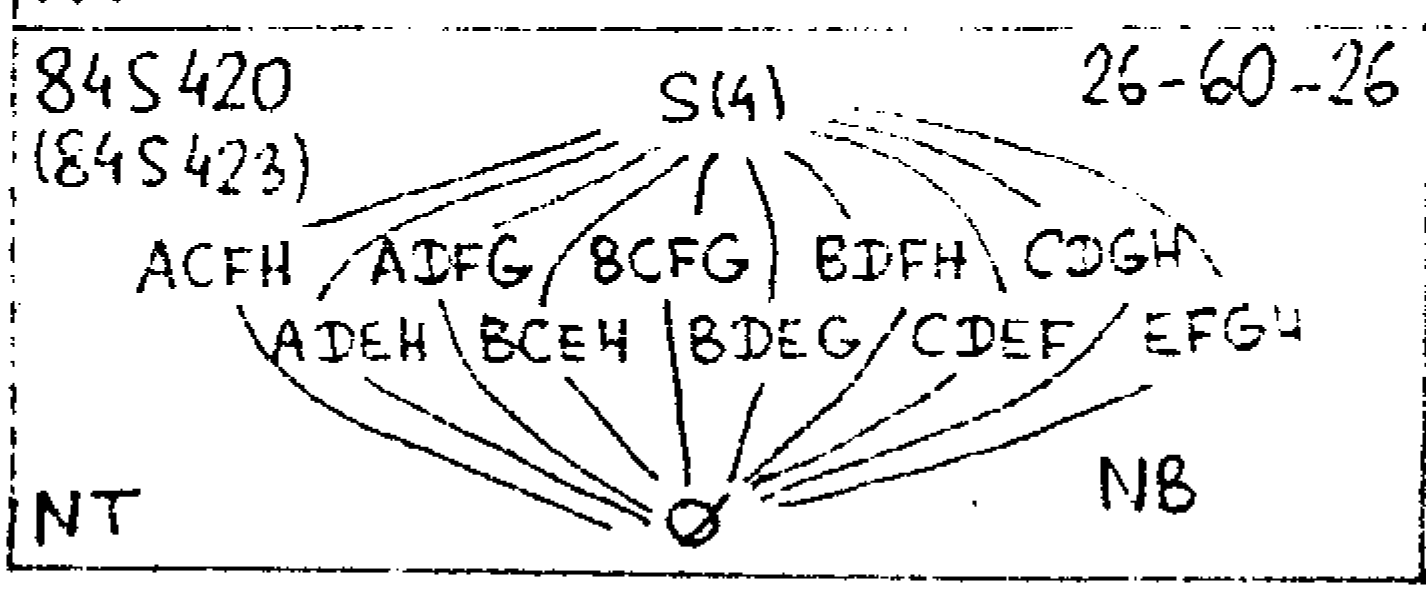

84S415
SD
29-61-29
S(4)
ACFH ADFG BCFG BDFH EFGH
ADEH BCEH BDEG CDGH
∅
NT
NB

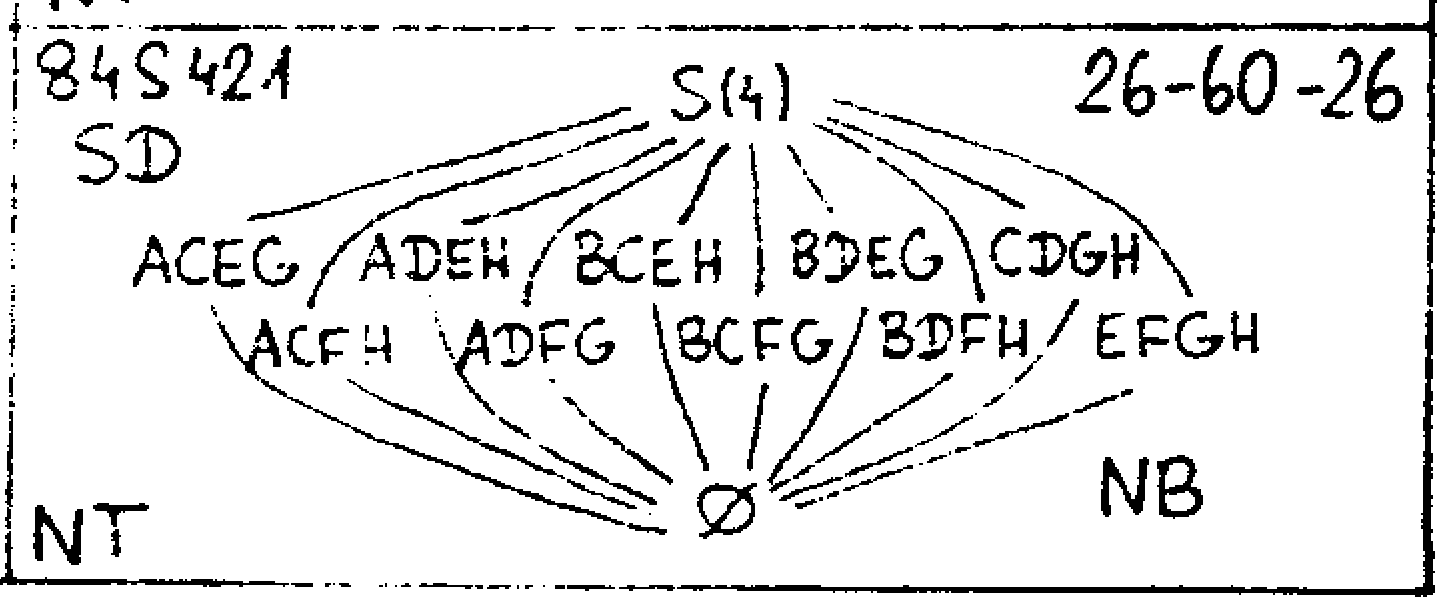

84S416
SD
29-61-29
S(4)
ACEG ADEH BCEH BDEG EFGH
ACFH ADFG BCFG BDFH
∅
NT
NB


84S417
(84S414)
29-61-29
S(4)
ABGH ADEH BCEH BDEG EFGH
ACFH ADFG BCFG CDGH
∅
NT
NB


84S418
SD
29-61-29
S(4)
ABGH ADEH BCEH BDEG EFGH
ACFH ADFG BCFG CDEF
∅
NT
NB


84S419
SD
26-60-26
S(4)
ABGH ADEH BCFG BDFH CDGH
ACFH BCEH BDEG CDEF EFGH
∅
NT
NB


84S420
(84S423)
26-60-26
S(4)
ACFH ADFG BCFG BDFH CDGH
ADEH BCEH BDEG CDEF EFGH
∅
NT
NB


84S421
SD
26-60-26
S(4)
ACEG ADEH BCEH BDEG CDGH
ACFH ADFG BCFG BDFH EFGH
∅
NT
NB

84S394 35-63-35
SD
S(4)
ABCD ABEF ACEG ADFG BCEH BDFH CDGH
Ø
NB
NT

84S395 35-63
SD
S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG BDFH CDEF C
Ø
NB
NT

84S396 35-63-35
SD
S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG CDEF CDGH EFGH
Ø
NB
NT

84S397 35-63-
(84S390)
S(4)
ABCD ABEF ABGH ACEG BCEH CDGH E
Ø
NB
NT

84S398 32-62-32
(84S402)
S(4)
ADFG BCEH BCFG BDEG BDFH CDEF CDGH EFGH
Ø
NB
NT

84S399 32-62-
SD
S(4)
ADEH ADFG BCFG BDEG BDFH CDEF CDGH E
Ø
NB
NT

84S400 32-62-32
(84S405)
S(4)
ADEH ADFG BCEH BCFG BDFH CDEF CDGH EFGH
Ø
NB
NT

84S401 32-62-3
SD
S(4)
ADEH ADFG BCEH BCFG BDEG BDFH CDEF C
Ø
NB
NT

84S402 32-62-32
(84S398)
S(4)
ABGH ACFH ADEH BCEH BDFH CDEF CDGH EFGH
Ø
NB
NT

84S403 32-62-3
SD
S(4)
ABGH ACFH ADEH BCFG BDEG CDEF CDGH E
Ø
NB
NT

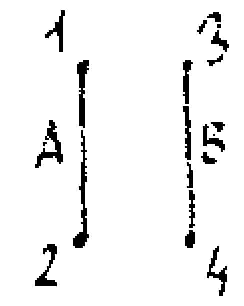
84S404 32-62-32
SD
S(4)
ACFH ADEH ADFG BCFG BDEG BDFH CDGH EFGH
Ø
NB
NT

84S405 32-62-3
(84S400)
S(4)
ACFH ADEH ADFG BCEH BDEG BDFH CDGH E
Ø
NB
NT

84S406 32-62-32
SD
S(4)
ACFH ADEH ADFG BCEH BCFG BDEG CDGH EFGH
Ø
NB
NT

84S407 32-62-32
SD
S(4)
ACFH ADEH ADFG BCEH BCFG BDEG BDFH E
Ø
NB
NT

84S436 — SD — 44-66-44

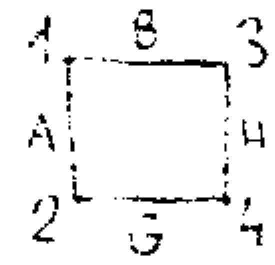


S(4)
ABCD AEFG ABEH BCFG
∅

NB

T(ADEH, BCDH, CDFG, EFGH)

84S437 — SD — 44-66-44

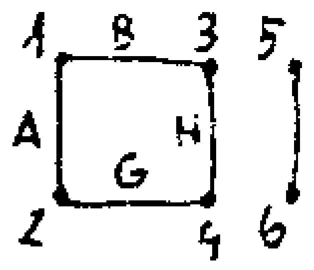


S(4)
ABCD AEFG BEFH CDGH
∅

NB

T(ABEF, ACDG, BCDH, EFGH)

84S438 — NESD — 38-64-38

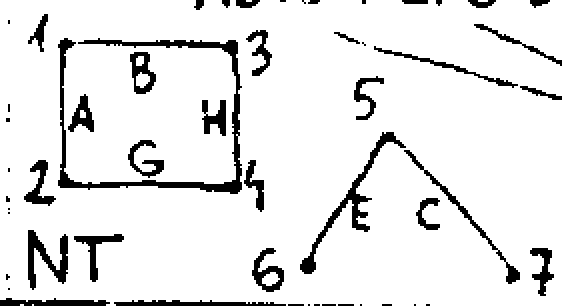


S(4)
ABCD AEFG BEFH CDGH ACEH BDEG
∅

NB

NT

84S439 — SD — 35-63-35

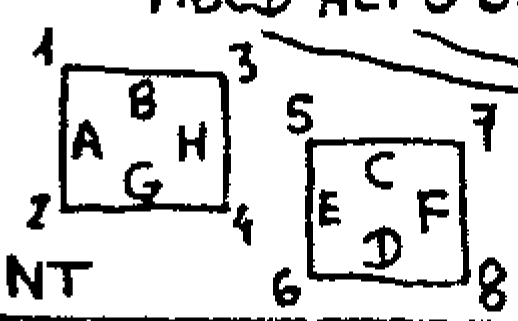


S(4)
ABCD AEFG BEFH CDGH ACEH BDEG BCFG
∅

NB

NT

84S440 — SD — 32-62-32

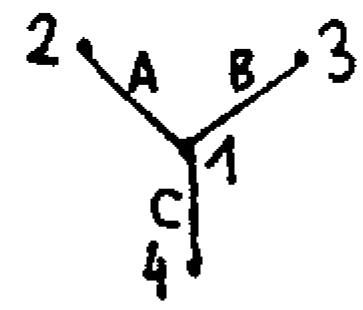


S(4)
ABCD AEFG BEFH CDGH ACEH BDEG BCFG ADFH
∅

NB

NT

84S441 — SD — 44-66-44

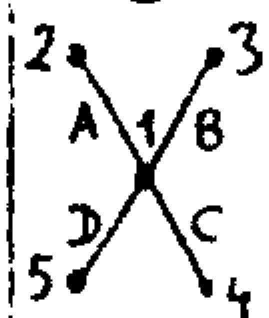


S(4)
ABCD AEFG BEFH CEGH
∅

NB

T(ABDF, ACDG, BCDH, EFGH)

84S442 — SD — 41-65-41

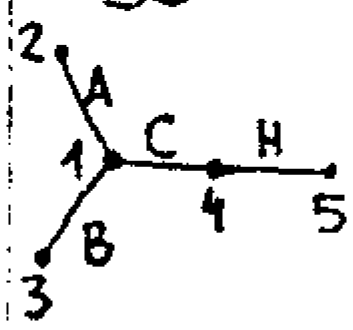


S(4)
ABCD AEFG BEFH CEGH DFGH
∅

NB

NT

84S443 — SD — 41-65-41

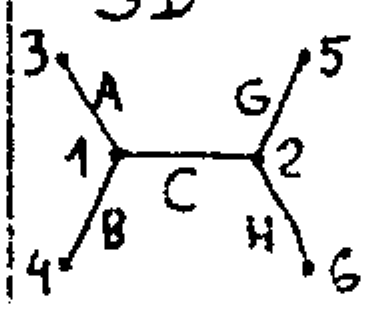


S(4)
ABCD AEFG BEFH CEGH ADFH
∅

NB

NT

84S444 — SD — 38-64-38

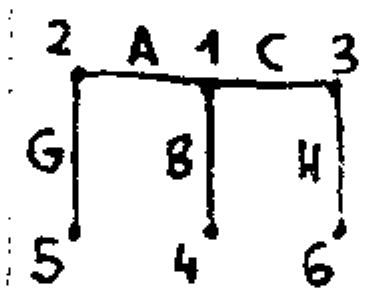


S(4)
ABCD CEGH AEFG BEFH BDFG ADFH
∅

NB

NT

84S445 — SD — 38-64-38

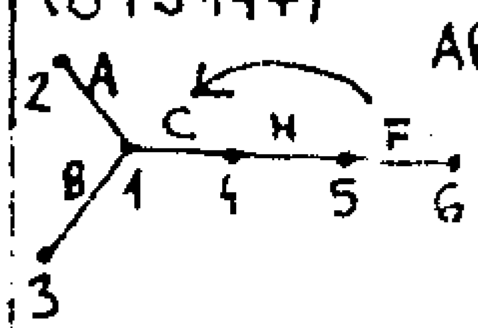


S(4)
ABCD AEFG CEGH BEFH BDGH ADFH
∅

NB

NT

84S446 (84S447) — 38-64-38

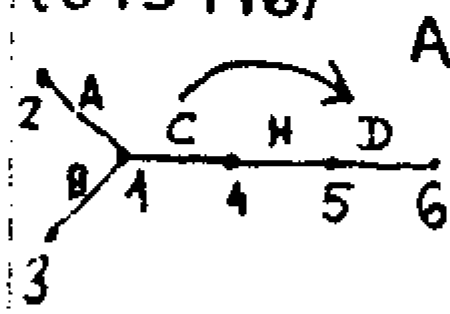


S(4)
ABCD AEFG BEFH CEGH ADFH BCFG
∅

NB

NT

84S447 (84S446) — 38-64-38

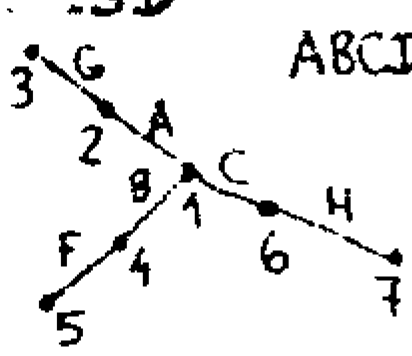


S(4)
ABCD AEFG BEFH CEGH ADFH BDEG
∅

NB

NT

84S448 — SD — 35-63-35

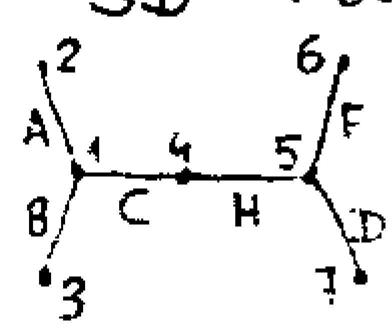


S(4)
ABCD AEFG BDGH BEFH CDFG CEGH ADFH
∅

NB

NT

84S449 — SD — 35-63-35

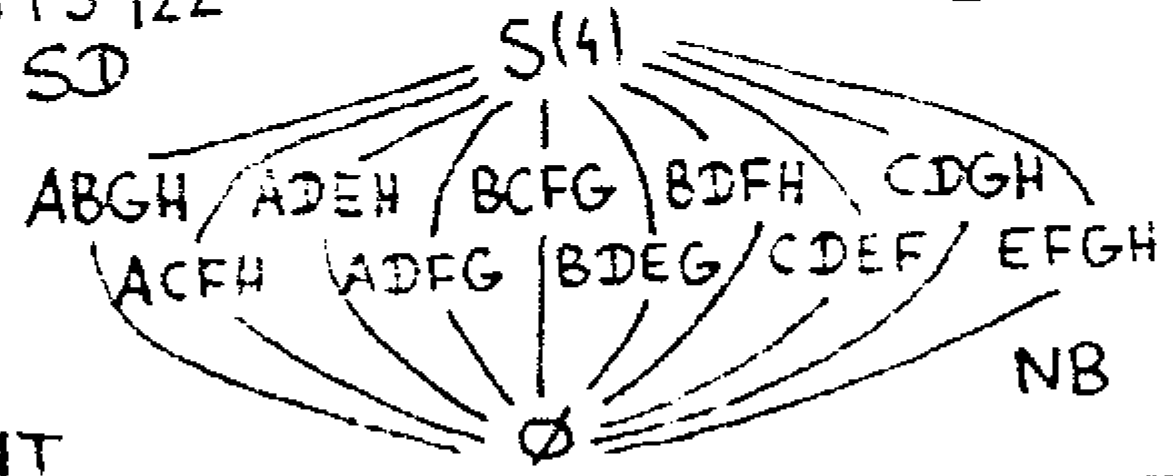


S(4)
ABCD AEFG BEFH CEGH ADFH BCFG BDEG
∅

NB

NT

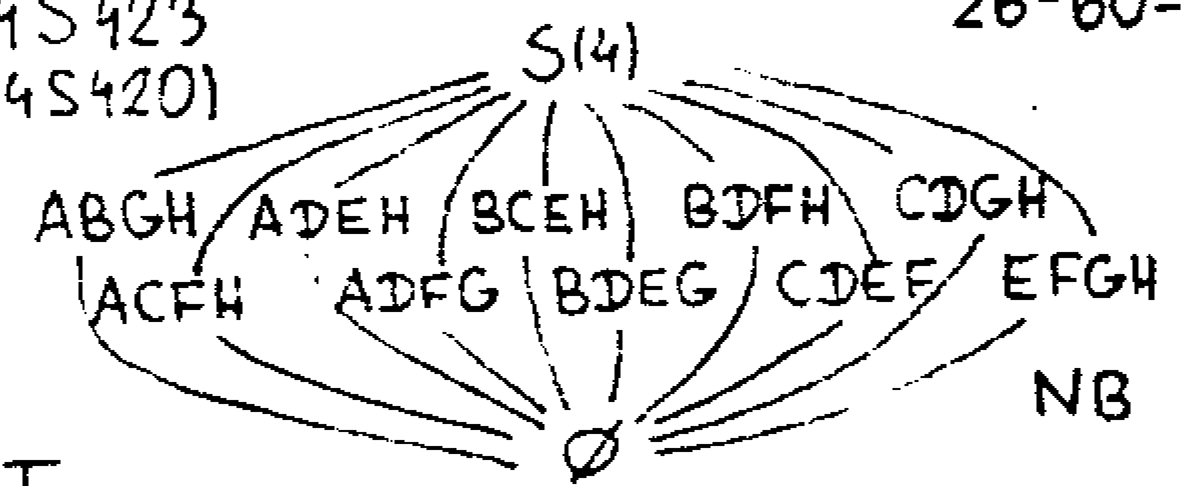
84S422 SD 26-60-26



NB

NT

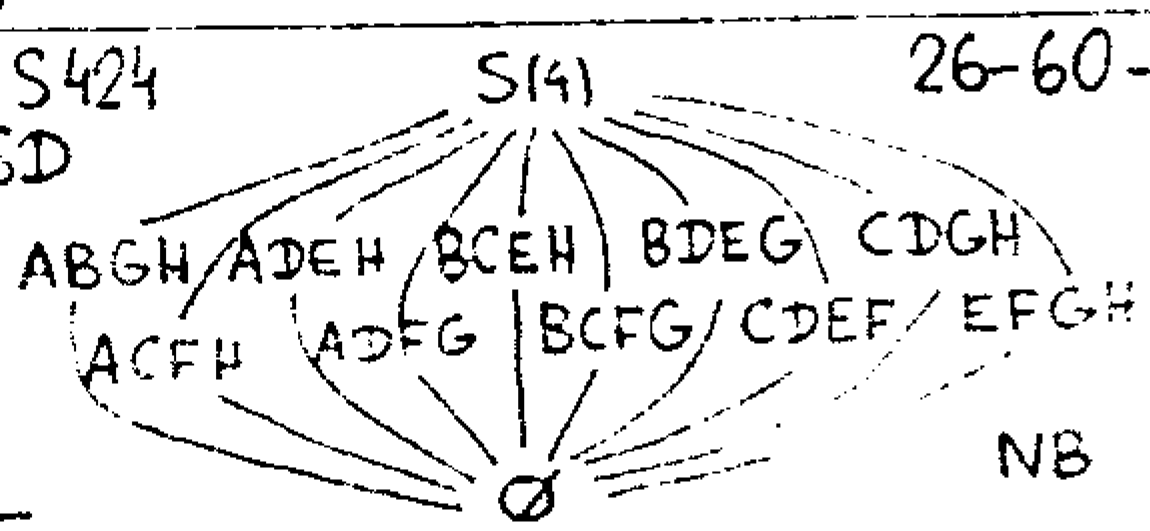
84S423 (84S420) 26-60-



NB

NT

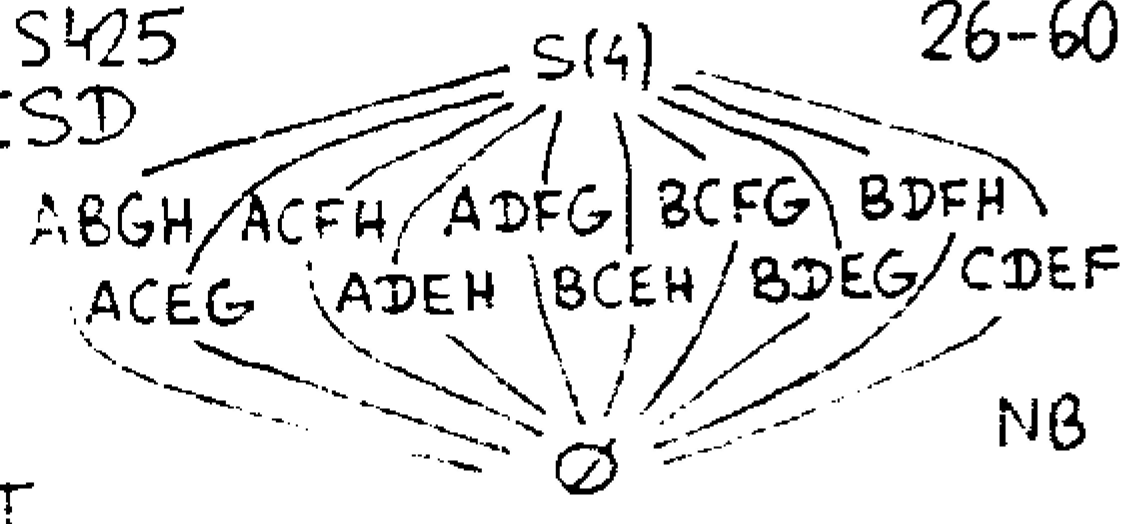
84S424 SD 26-60-26



NB

NT

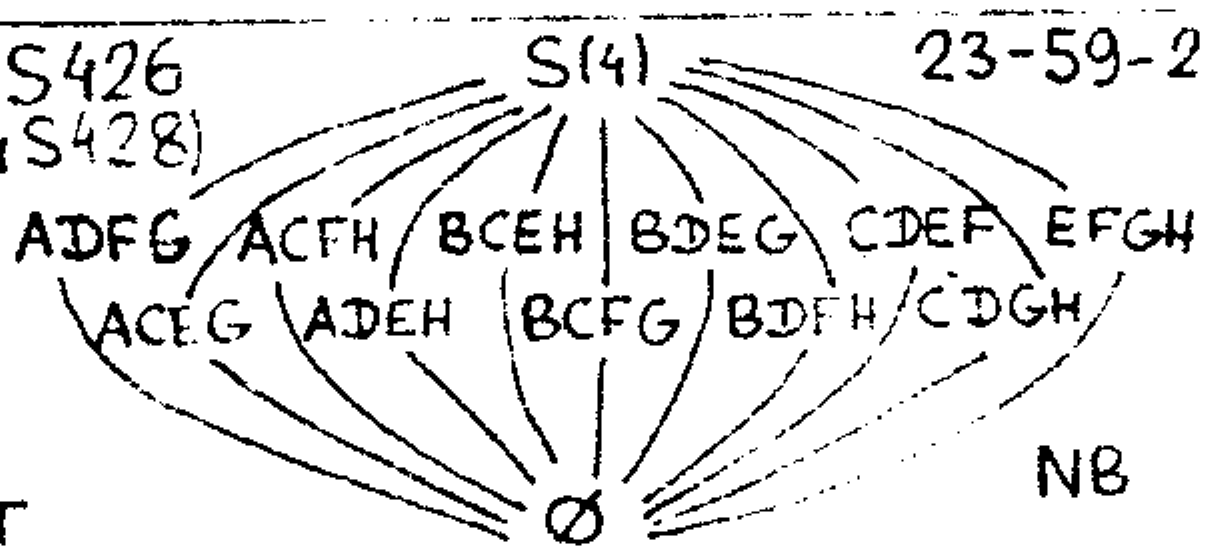
84S425 ISD 26-60-



NB

NT

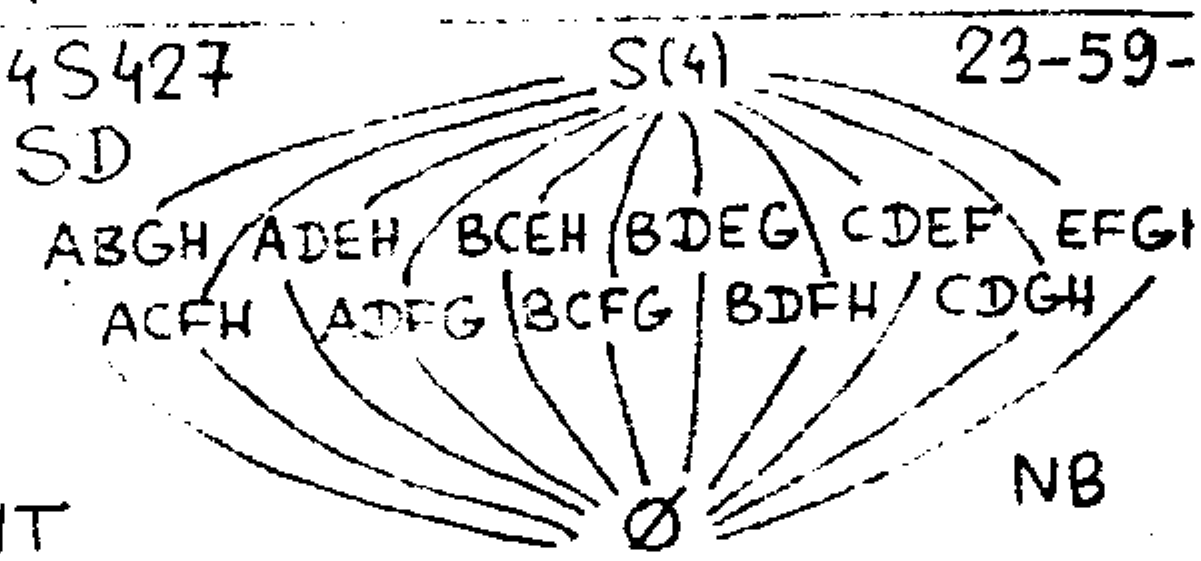
84S426 (84S428) 23-59-23



NB

NT

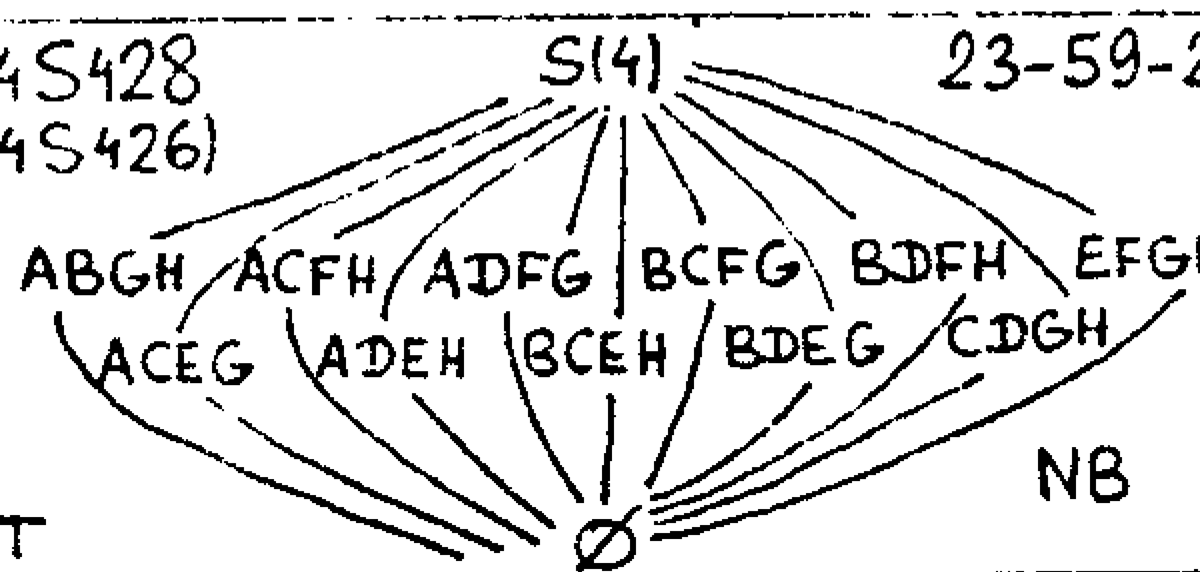
84S427 SD 23-59-



NB

NT

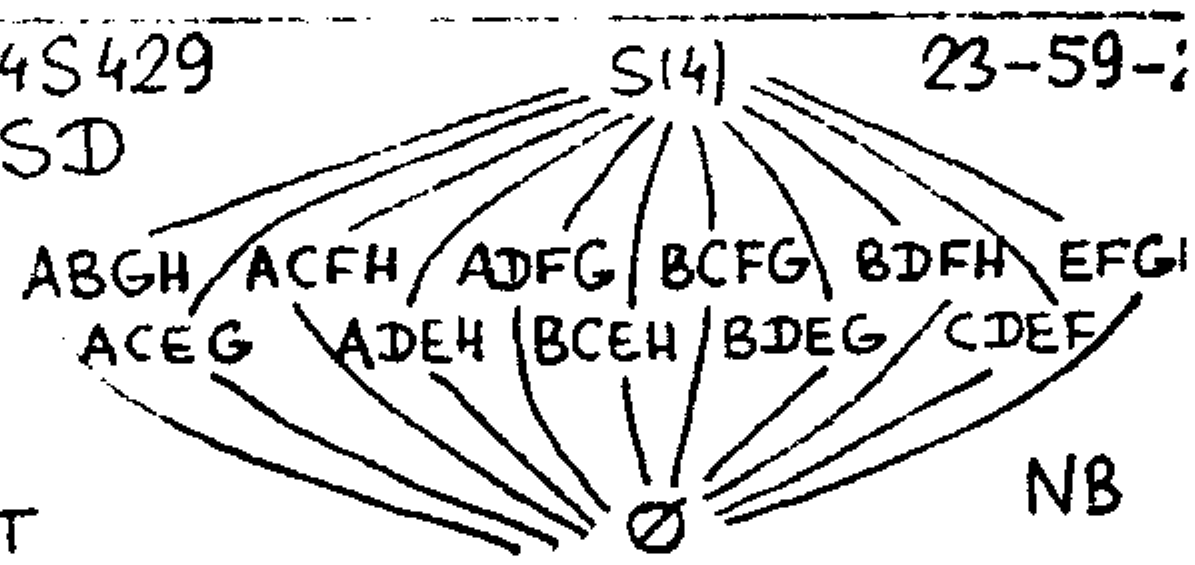
84S428 (84S426) 23-59-23



NB

NT

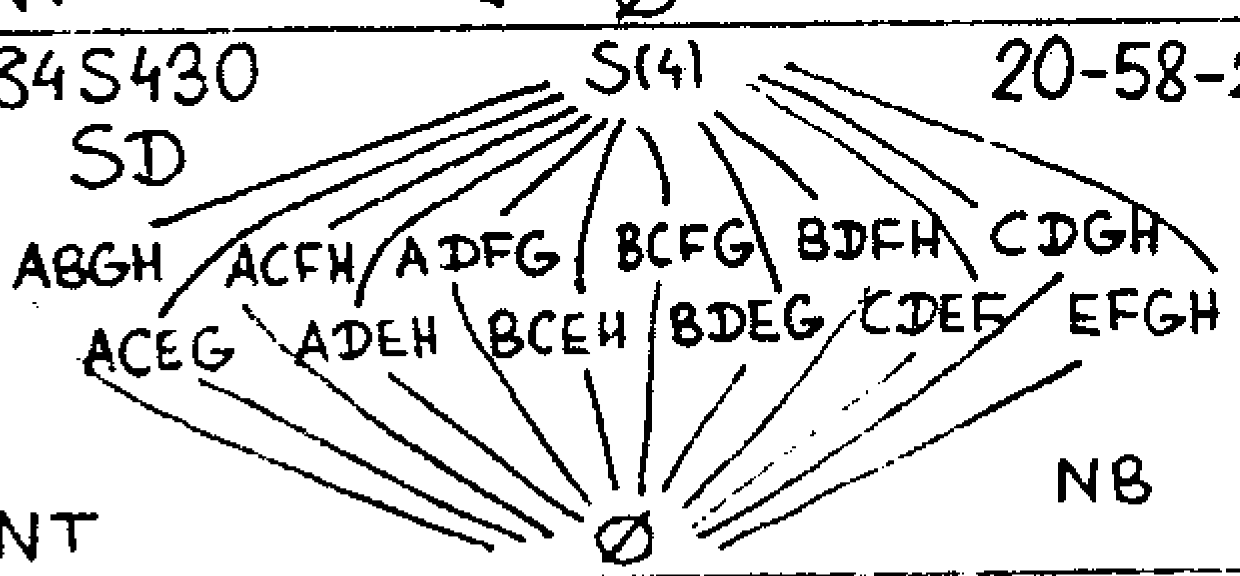
84S429 SD 23-59-



NB

NT

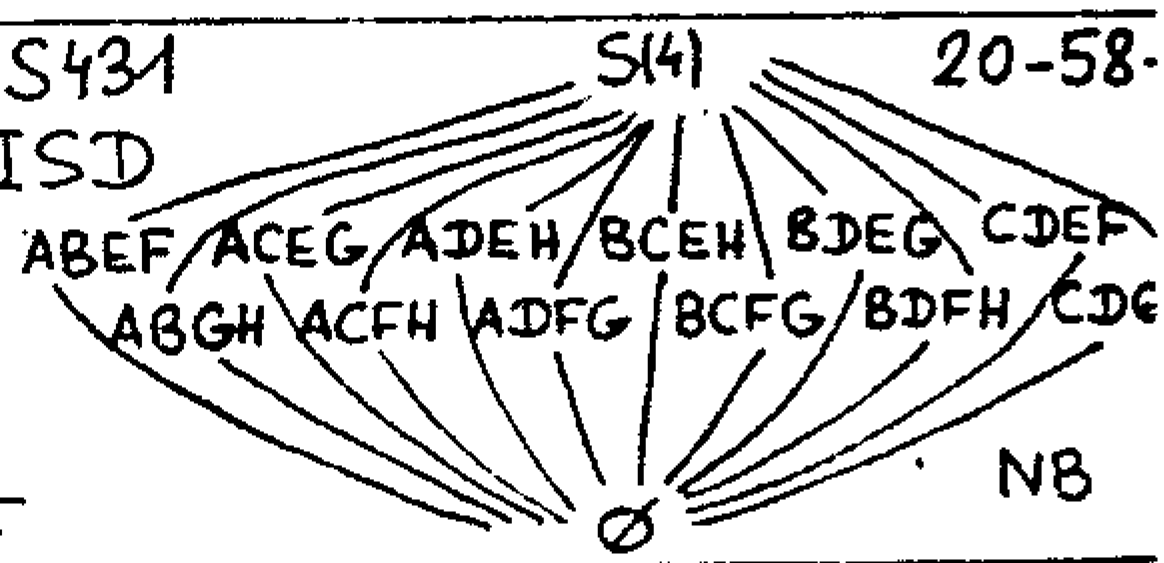
84S430 SD 20-58-20



NB

NT

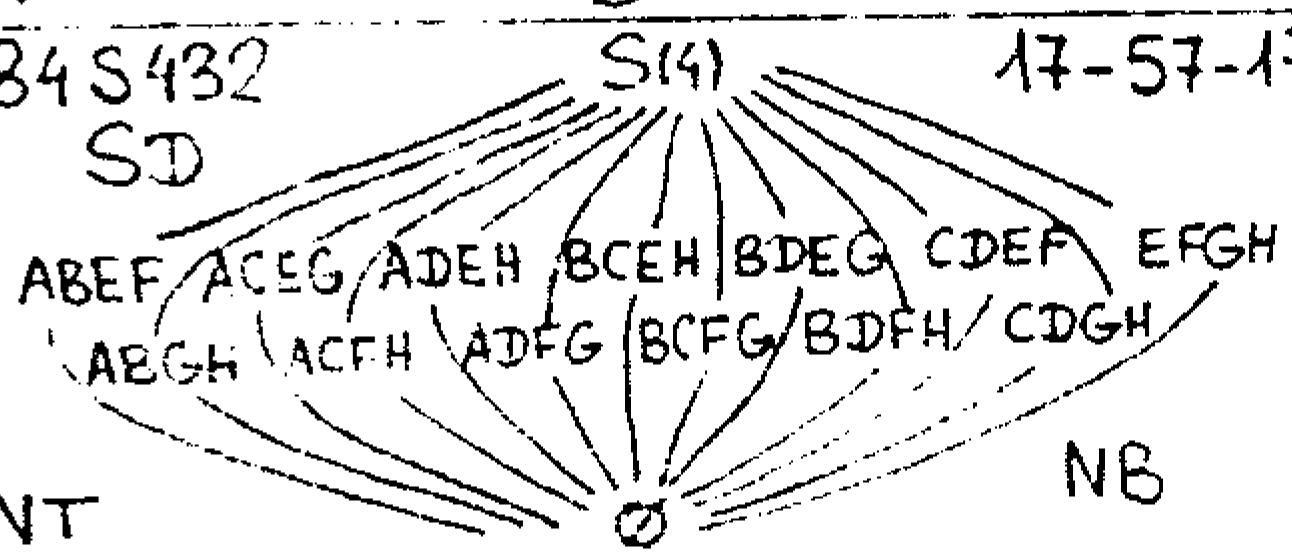
84S431 ISD 20-58-



NB

NT

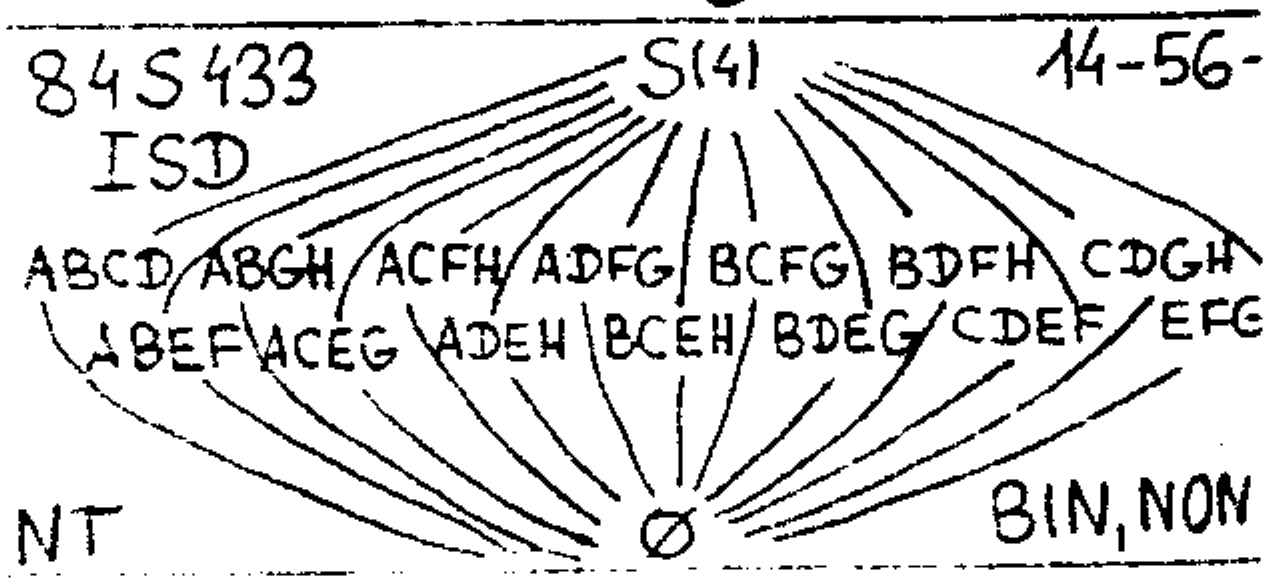
84S432 SD 17-57-17



NB

NT

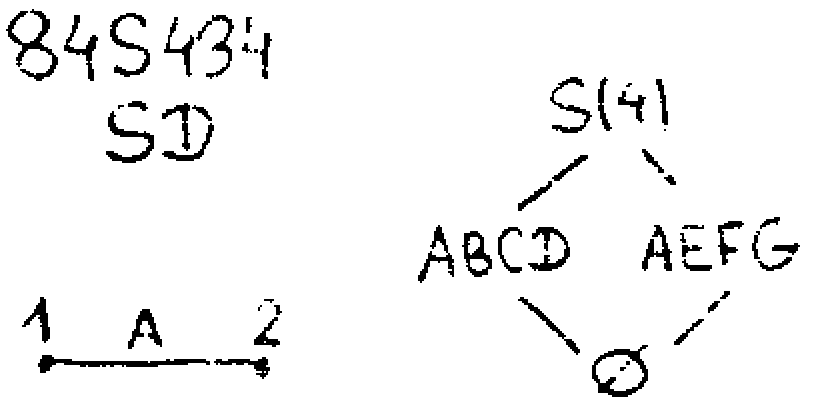
84S433 ISD 14-56-



BIN, NON

NT

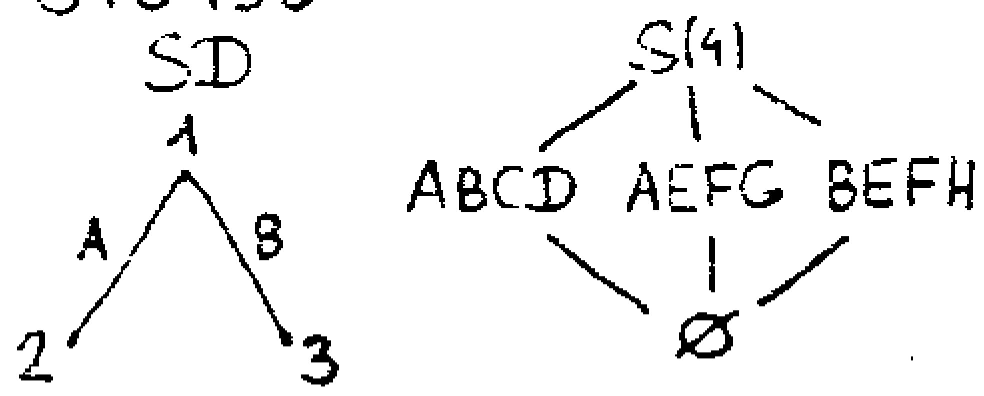
84S434 SD 50-68-50



NB

T

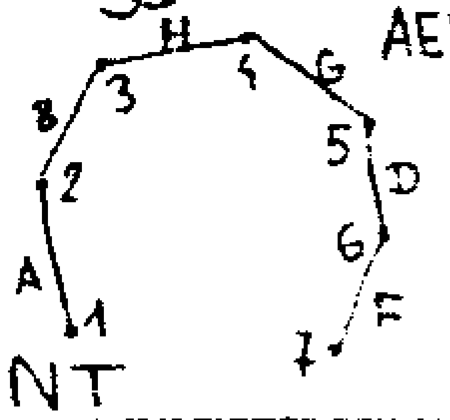
84S435 SD 47-67



NB

T(ABCDEFGH, ACDG, BCDH, EFGH)

84S464 SD — 35-63-35

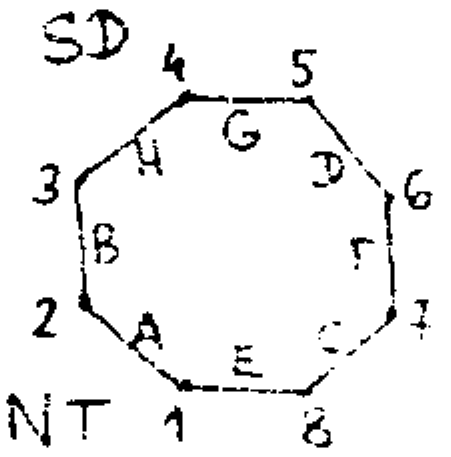


S(4)
AEFG ABCD BEFH ACGH BDEG ADFH BCFG
∅

NB

NT

84S465 SD — 32-62-32

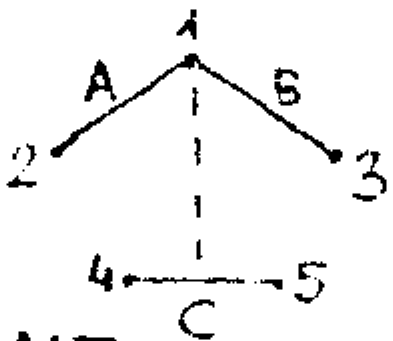


S(4)
AEFG BEFH BDEG BCFG ABCD ACGH ADFH CDEH
∅

NB

NT

84S466 (84S467) — 41-65-41

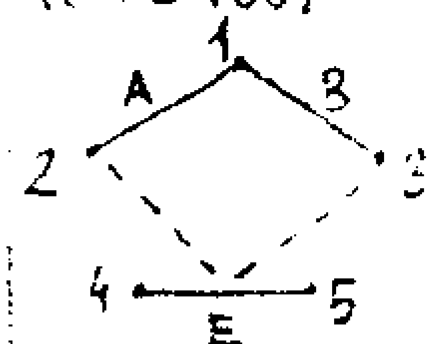


S(4)
ABCD AEFG BEFH ACEH BCFG
∅

NB

NT

84S467 (84S466) — 41-65-41

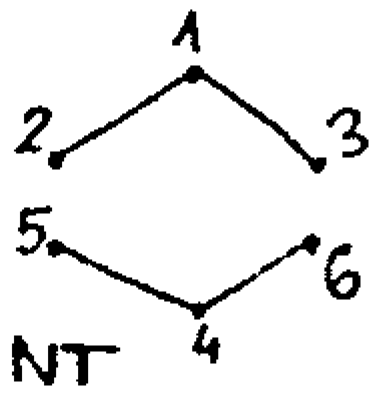


S(4)
ABCD AEFG BEFH ACEH BDEG
∅

NB

NT

84S468 SD — 38-64-38

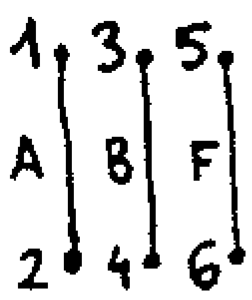


S(4)
ABCD AEFG BEFH BCFG ACEH ADFH
∅

NB

NT

84S469 SD — 38-64-38

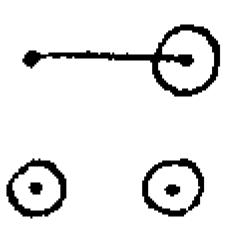


S(4)
ABCD AEFG ABEH BCFG ACFH BDEI
∅

NB

NT

84S470 (84S471) — 47-67-47

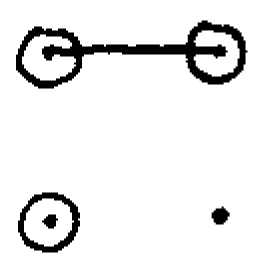


S(4)
ABCD AEFG ABGH
∅

NB

T(ABCDEFGH, BCDH, CDEF, EFGH)

84S471 (84S470) — 47-67-47

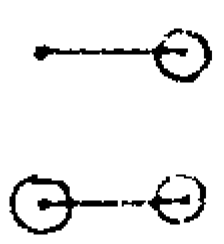


S(4)
ABCD CEGH ABGH
∅

NB

T(ABCDEFGH, ABDF, CDEF, EFGH)

84S472 SD — 44-66-44

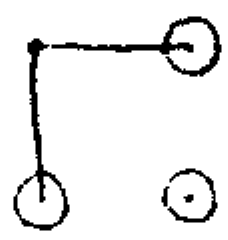


S(4)
ABCD AEFG ABGH CDEF
∅

NB

T(ABGH, BCDH, CDEF, EFGH)

84S473 (84S475) — 44-66-44

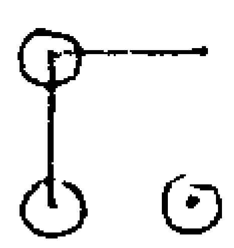


S(4)
ABCD AEFG ABGH ADEH
∅

NB

NT

84S474 SD — 44-66-44

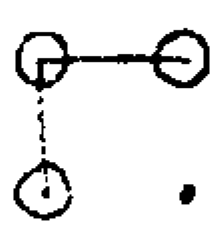


S(4)
ABCD BEFH ABGH ADEH
∅

NB

T(ACDG, BCFG, CDEF, EFGH)

84S475 (84S473) — 44-66-44

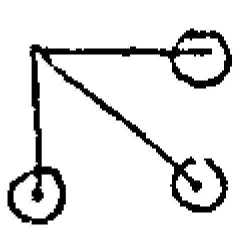


S(4)
ABCD CEGH ABGH ADEH
∅

NB

T(ABDF, BCFG, CDEF, EFGH)

84S476 (84S479) — 41-65-41

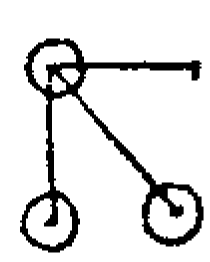


S(4)
ABCD AEFG ABGH ACFH ADEH
∅

NB

NT

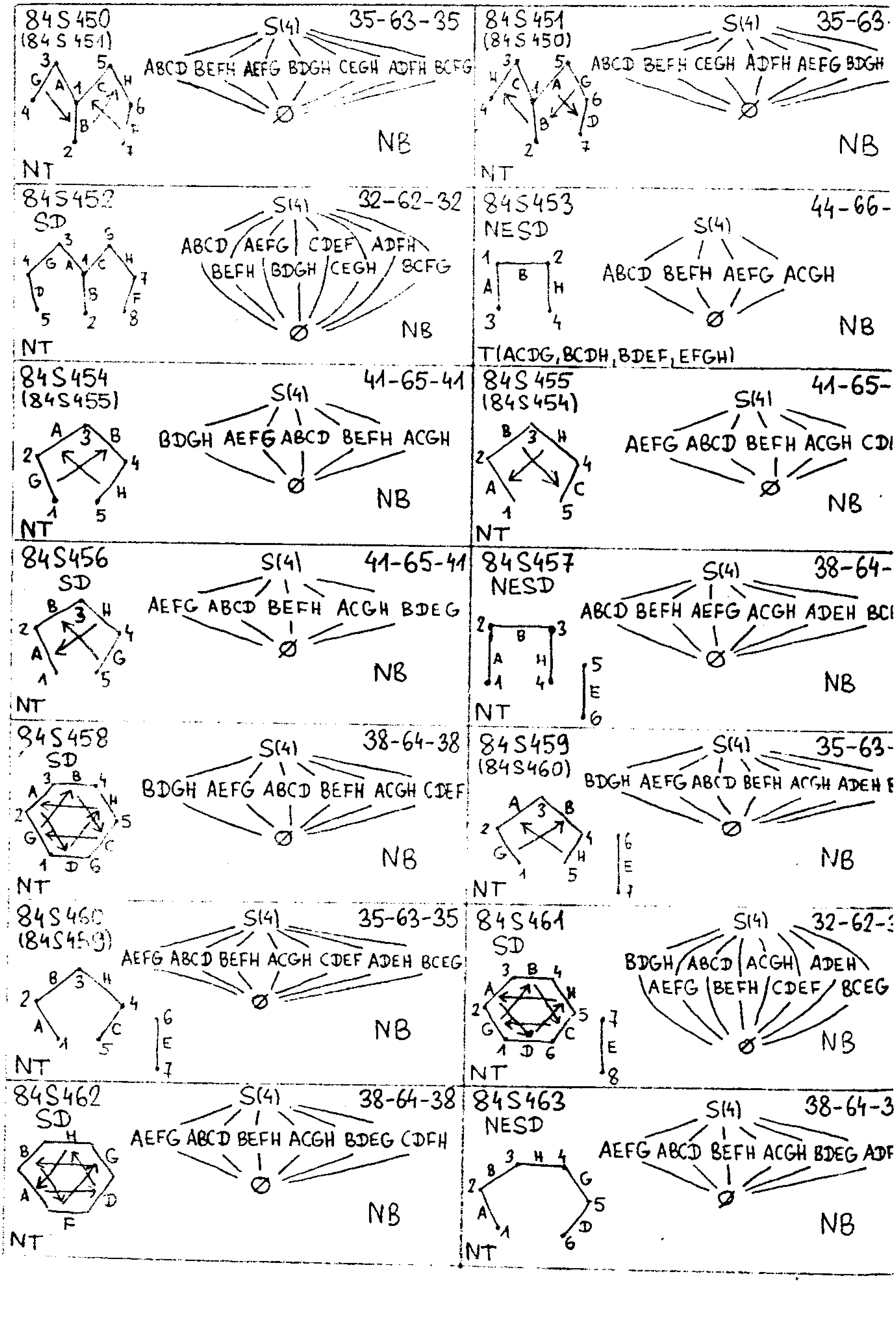
84S477 (84S478) — 41-65-41



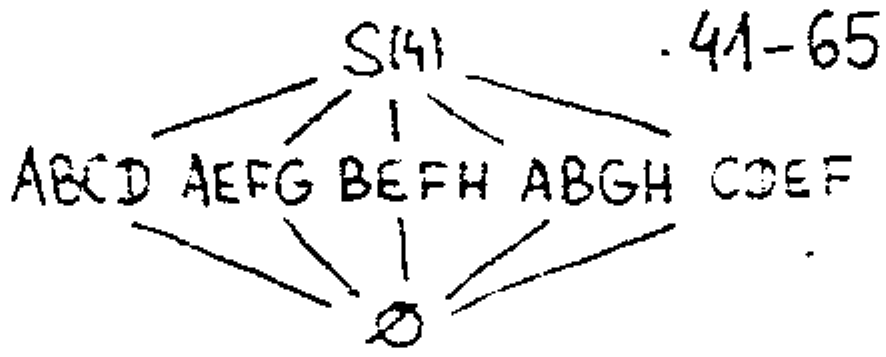
S(4)
ABCD BEFH ABGH ACFH ADEH
∅

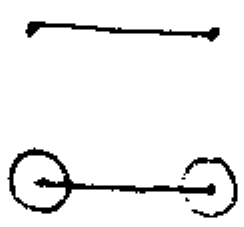
NB

NT


84S450
(84S451)
35-63-35
S(4)
ABCD BEFH AEFG BDGH CEGH ADFH BCFG
Ø
NB
NT
84S451
(84S450)
35-63-
S(4)
ABCD BEFH CEGH ADFH AEFG BDGH
Ø
NB
NT
84S452
SD
32-62-32
S(4)
ABCD AEFG CDEF ADFH
BEFH BDGH CEGH BCFG
Ø
NB
NT
84S453
NESD
44-66-
S(4)
ABCD BEFH AEFG ACGH
Ø
NB
T(ACDG, BCDH, BDEF, EFGH)
84S454
(84S455)
41-65-41
S(4)
BDGH AEFG ABCD BEFH ACGH
Ø
NB
NT
84S455
(84S454)
41-65-
S(4)
AEFG ABCD BEFH ACGH CD
Ø
NB
NT
84S456
SD
41-65-41
S(4)
AEFG ABCD BEFH ACGH BDEG
Ø
NB
NT
84S457
NESD
38-64-
S(4)
ABCD BEFH AEFG ACGH ADEH BC
Ø
NB
NT
84S458
SD
38-64-38
S(4)
BDGH AEFG ABCD BEFH ACGH CDEF
Ø
NB
NT
84S459
(84S460)
35-63-
S(4)
BDGH AEFG ABCD BEFH ACGH ADEH
Ø
NB
NT
84S460
(84S459)
35-63-35
S(4)
AEFG ABCD BEFH ACGH CDEF ADEH BCEG
Ø
NB
NT
84S461
SD
32-62-
S(4)
BDGH ABCD ACGH ADEH
AEFG BEFH CDEF BCEG
Ø
NB
NT
84S462
SD
38-64-38
S(4)
AEFG ABCD BEFH ACGH BDEG CDFH
Ø
NB
NT
84S463
NESD
38-64-3
S(4)
AEFG ABCD BEFH ACGH BDEG ADF
Ø
NB
NT

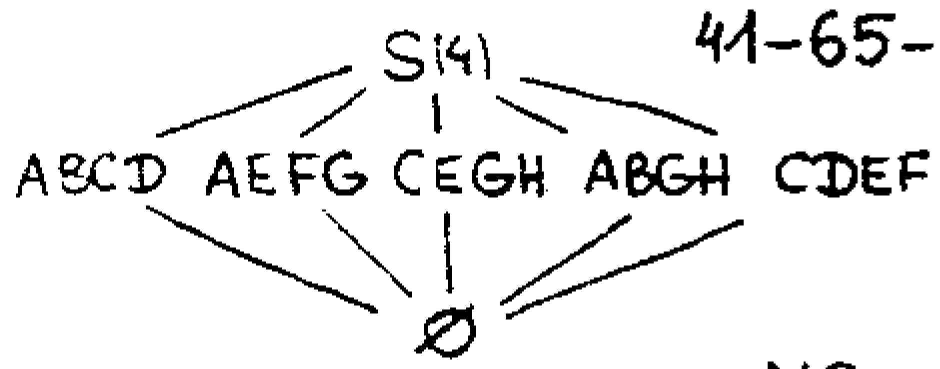
84S492
SD
41-65-41

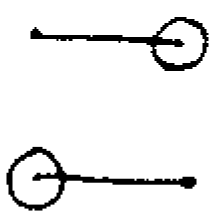




NB
NT

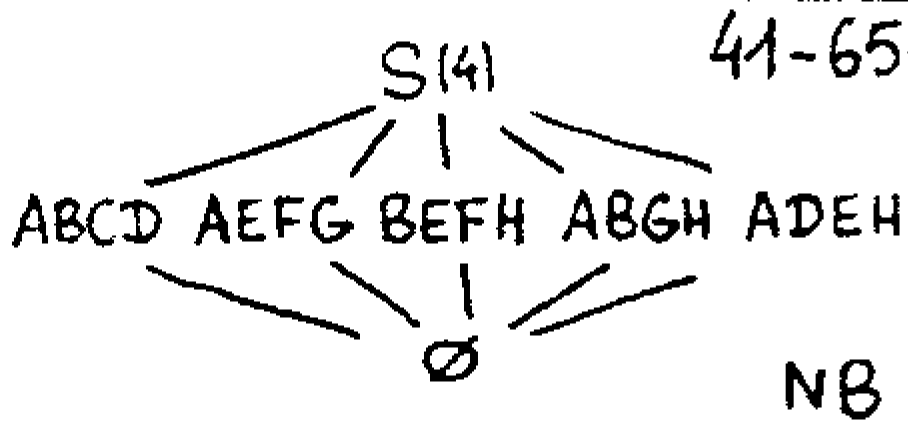
84S493
SD
41-65-41

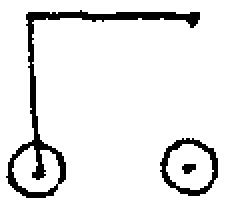




NB
NT

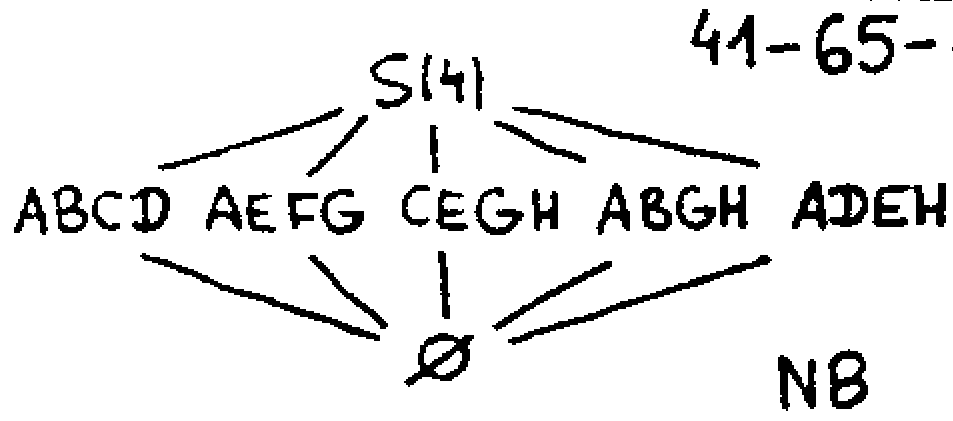
84S494
(84S496)
41-65-41

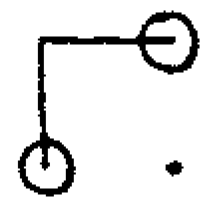




NB
NT

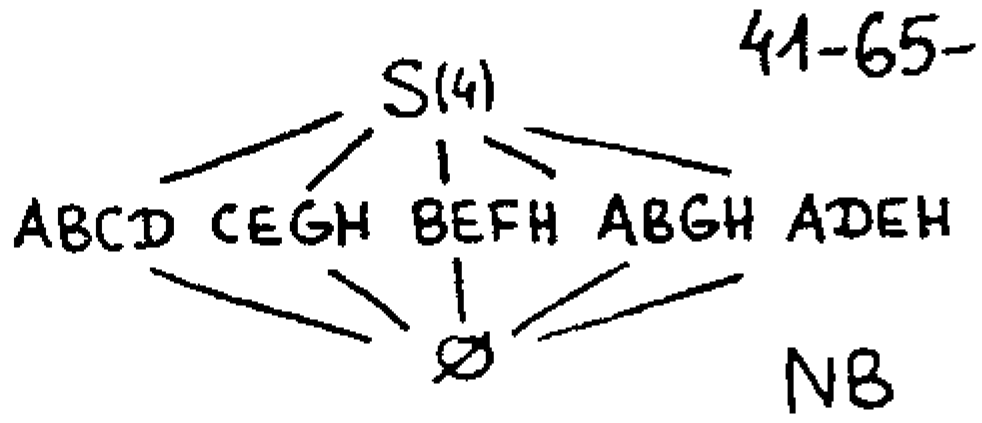
84S495
SD
41-65-41

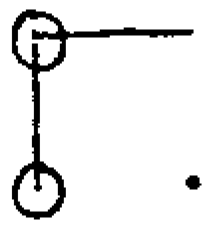




NB
NT

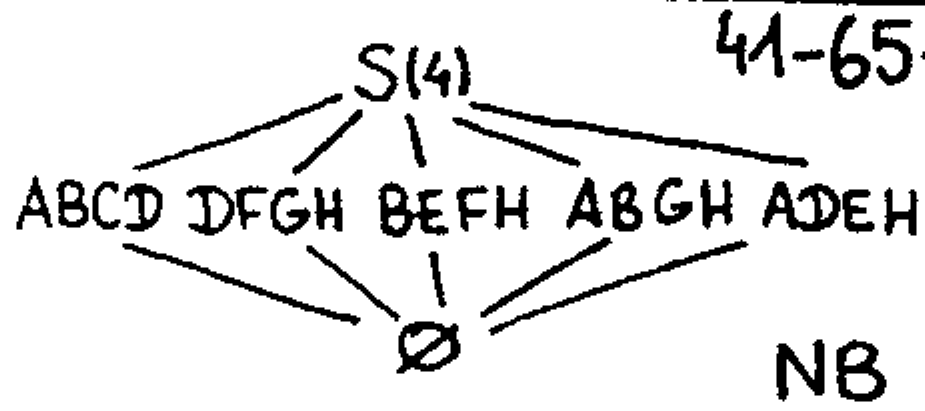
84S496
(84S494)
41-65-41

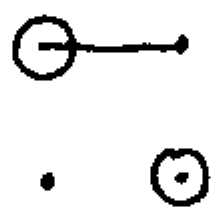




NB
NT

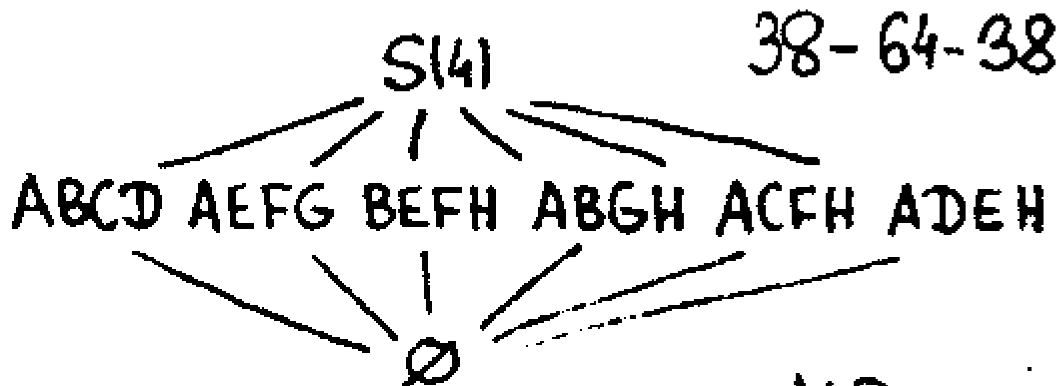
84S497
SD
41-65-41

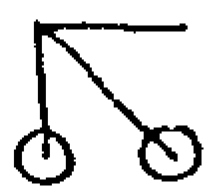




NB
NT

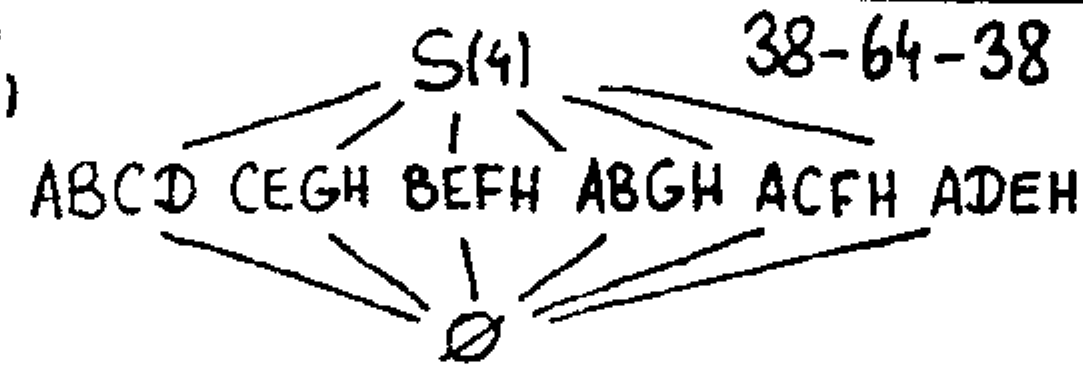
84S498
(84S501)
38-64-38

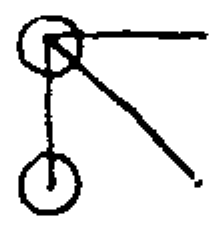




NB
NT

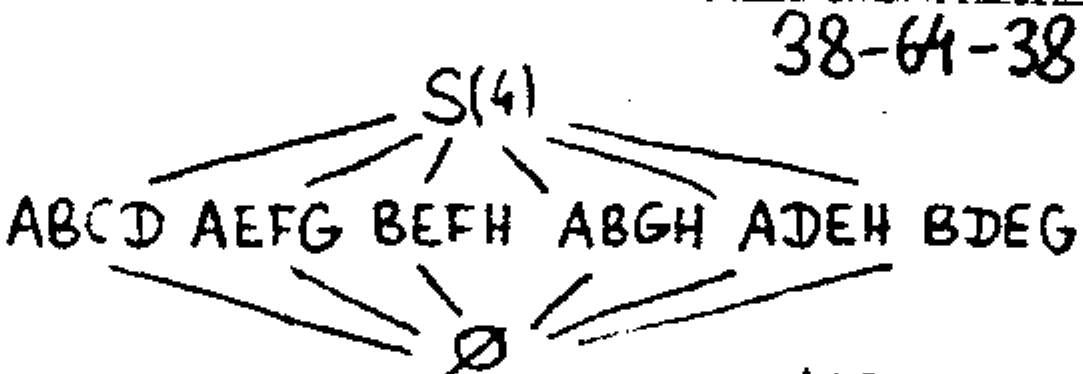
84S499
(84S500)
38-64-38

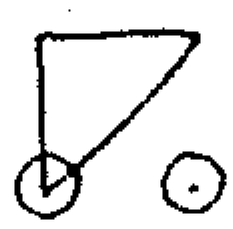




NB
NT

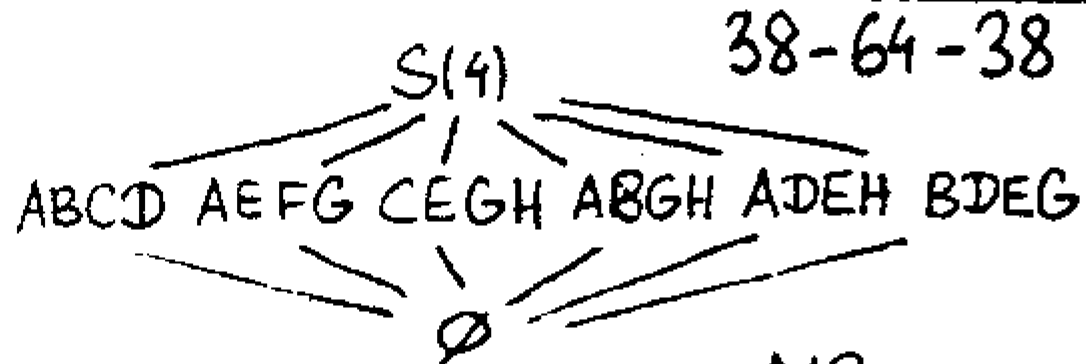
84S500
(84S499)
38-64-38

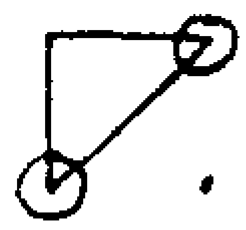




NB
NT

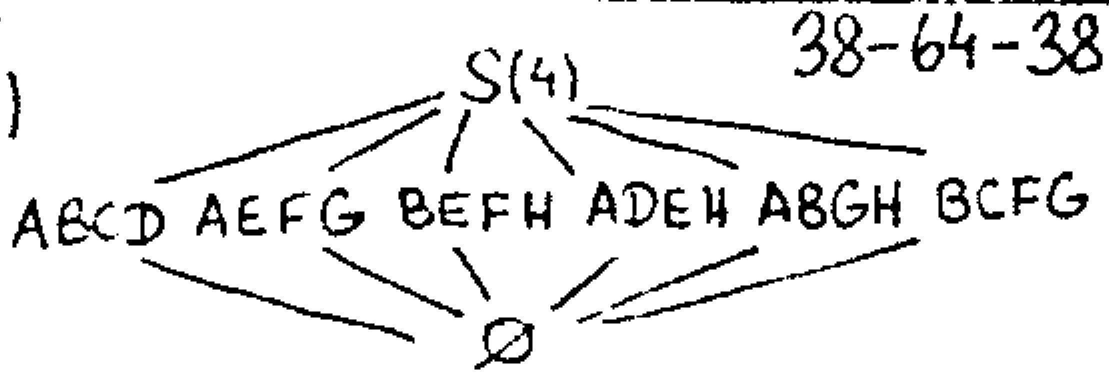
84S501
(84S498)
38-64-38

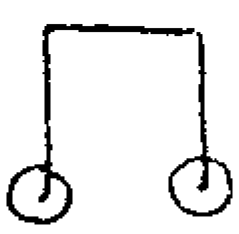




NB
NT

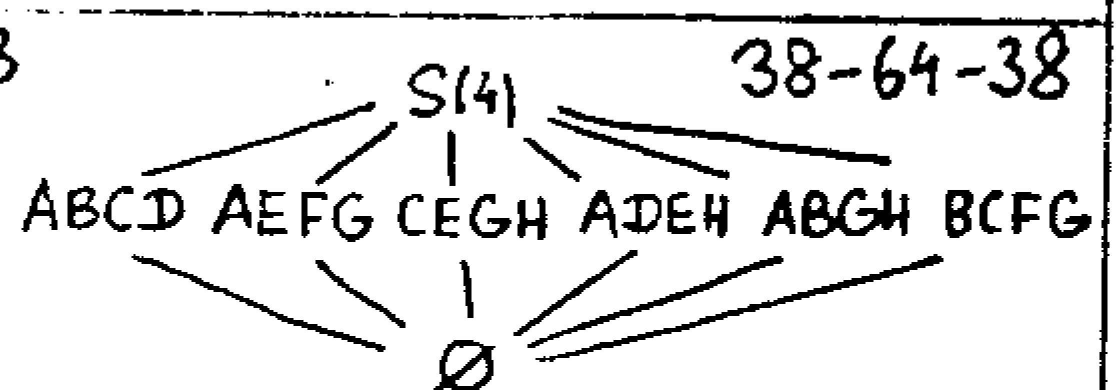
84S502
(84S505)
38-64-38

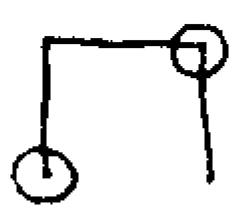




NB
NT

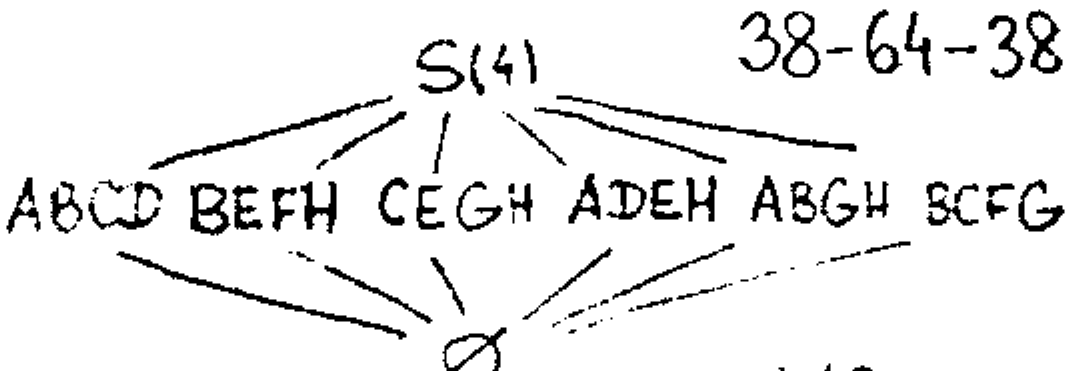
84S503
SD
38-64-38

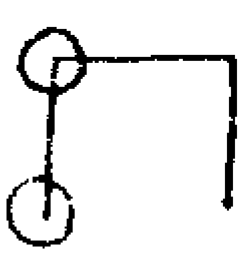




NB
NT

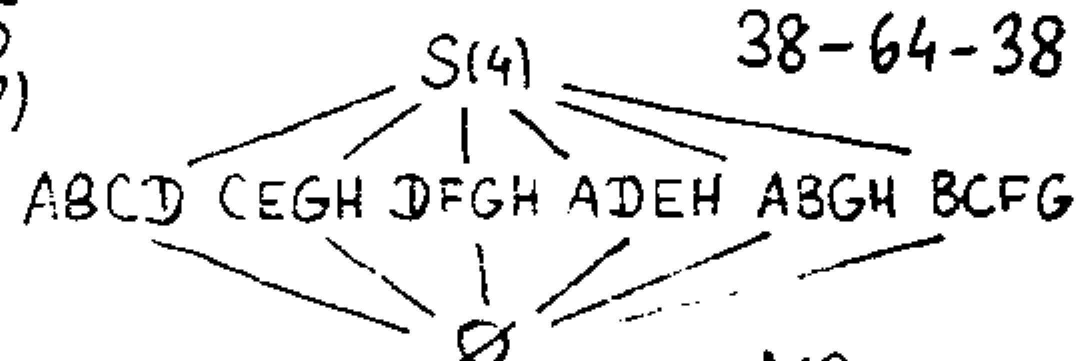
84S504
SD
38-64-38

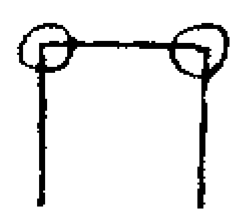




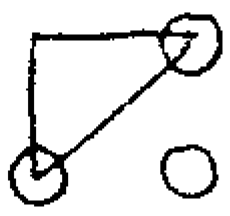
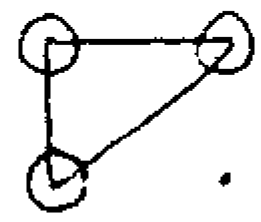
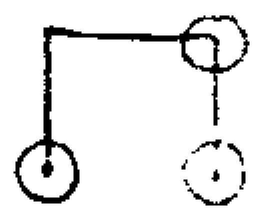
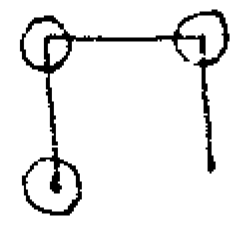
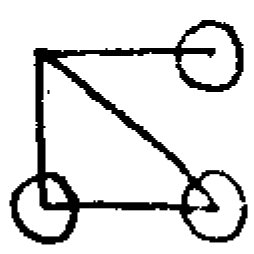
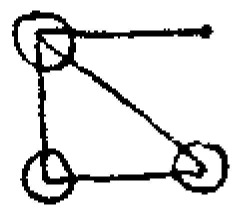
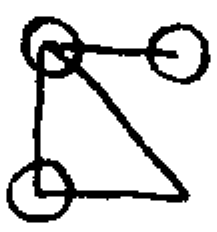
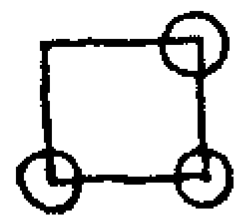
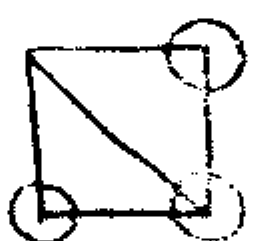
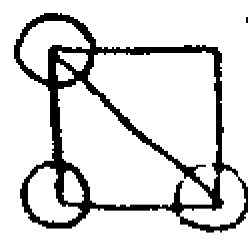
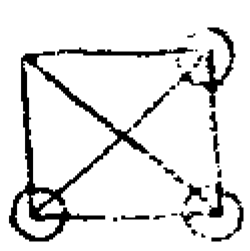
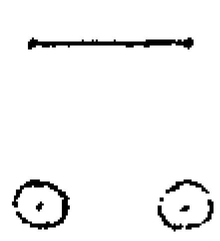
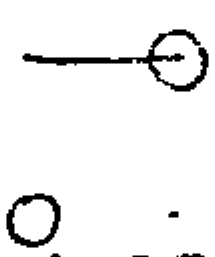
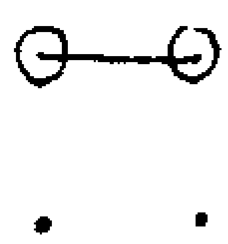
NB
NT

84S505
(84S502)
38-64-38





NB
NT

84S478 (84S477) 41-65-41 S(4) ABCD AEFG ABGH ADEH BDEG ∅  NB NT	84S479 (84S476) 41-65-41 S(4) ABCD CEGH ABGH ADEH BDEG ∅  NB NT
84S480 (84S481) 41-65-41 S(4) ABCD AEFG ABGH ADEH BCFG ∅  NB NT	84S481 (84S480) 41-65-41 S(4) ABCD CEGH ABGH ADEH BCFG ∅  NB NT
84S482 (84S483) 38-64-38 S(4) ABCD AEFG ABGH ACFH ADEH CDEF ∅  NB NT	84S483 (84S482) 38-64-38 S(4) ABCD BEFH ABGH ACFH ADEH CDEF ∅  NB NT
84S484 SD 38-64-38 S(4) ABCD CEGH ABGH ACFH ADEH CDEF ∅  NB NT	84S485 SD 38-64-38 S(4) ABCD AEFG ABGH ADEH BCFG CDEF ∅  NB NT
84S486 (84S487) 35-63-35 S(4) ABCD AEFG ABGH ACFH ADEH BCFG CDEF ∅  NB NT	84S487 (84S486) 35-63-35 S(4) ABCD BEFH ABGH ACFH ADEH BCFG CDE ∅  NB NT
84S488 SD 32-62-32 S(4) ABCD ABGH ADEH BDEG AEFG ACFH BCFG CDEF ∅  NB NT	84S489 (84S491) 44-66-44 S(4) ABCD AEFG BEFH ABGH ∅  NB T(ACDG, BCDH, CDEF, EFGH)
84S490 SD 44-66-44 S(4) ABCD AEFG CEGH ABGH ∅  NB T(ABDF, BCDH, CDEF, EFGH)	84S491 (84S489) 44-66-44 S(4) ABCD CEGH DFGH ABGH ∅  NB NT

84S520 41-65-41
(84S518)
S(4)
ABCD CEGH DFGH ABEF ABGH
∅
NB
NT

84S521 38-64-38
SD
S(4)
ABCD AEFG BEFH CDGH ABGH CDEF
∅
NB
NT

84S522 38-64-38
SD
S(4)
ABCD AEFG CEGH BDFH ABGH CDEF
∅
NB
NT

84S523 38-64-38
(84S525)
S(4)
ABCD AEFG BEFH CDGH ABGH ADEH
∅
NB
NT

84S524 38-64-38
SD
S(4)
ABCD AEFG CEGH BDFH ABGH ADEH
∅
NB
NT

84S525 38-64-38
(84S523)
S(4)
ABCD ADFG BEFH CEGH ABGH ADEH
∅
NB
NT

84S526 38-64-38
SD
S(4)
ABCD ACEG BEFH DFGH ABGH ADEH
∅
NB
NT

84S527 35-63-35
(84S530)
S(4)
ABCD AEFG BEFH CDGH ACFH ADEH ABGH
∅
NB
NT

84S528 35-63-35
(84S529)
S(4)
ABCD ADFG BEFH CEGH ACFH ADEH ABGH
∅
NB
NT

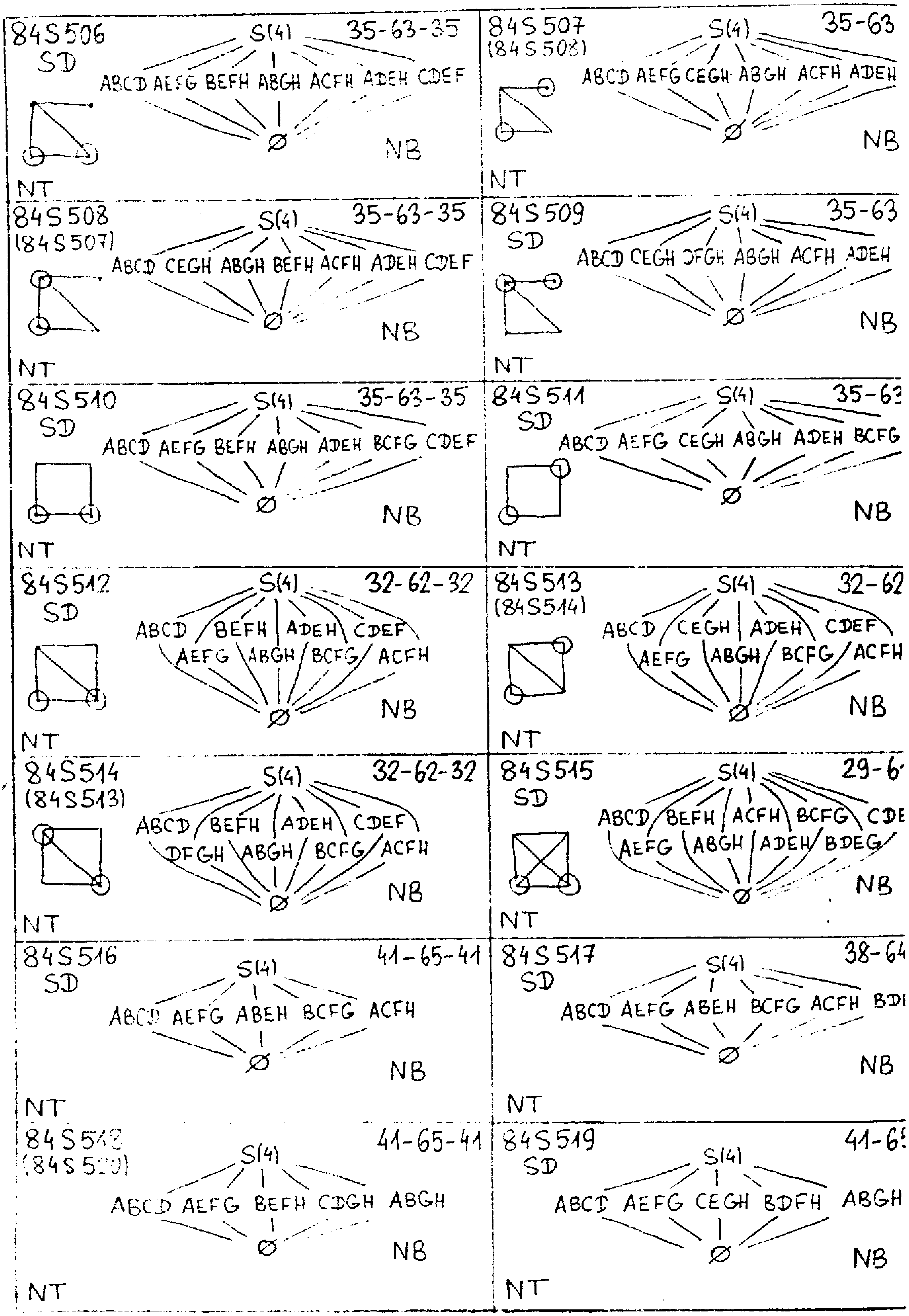
84S529 35-63-35
(84S528)
S(4)
ABCD AEFG BEFH CDGH ADEH BDEG ABGH
∅
NB
NT

84S530 35-63-35
(84S527)
S(4)
ABCD AEFG BDFH CEGH ADEH BDEG ABGH
∅
NB
NT

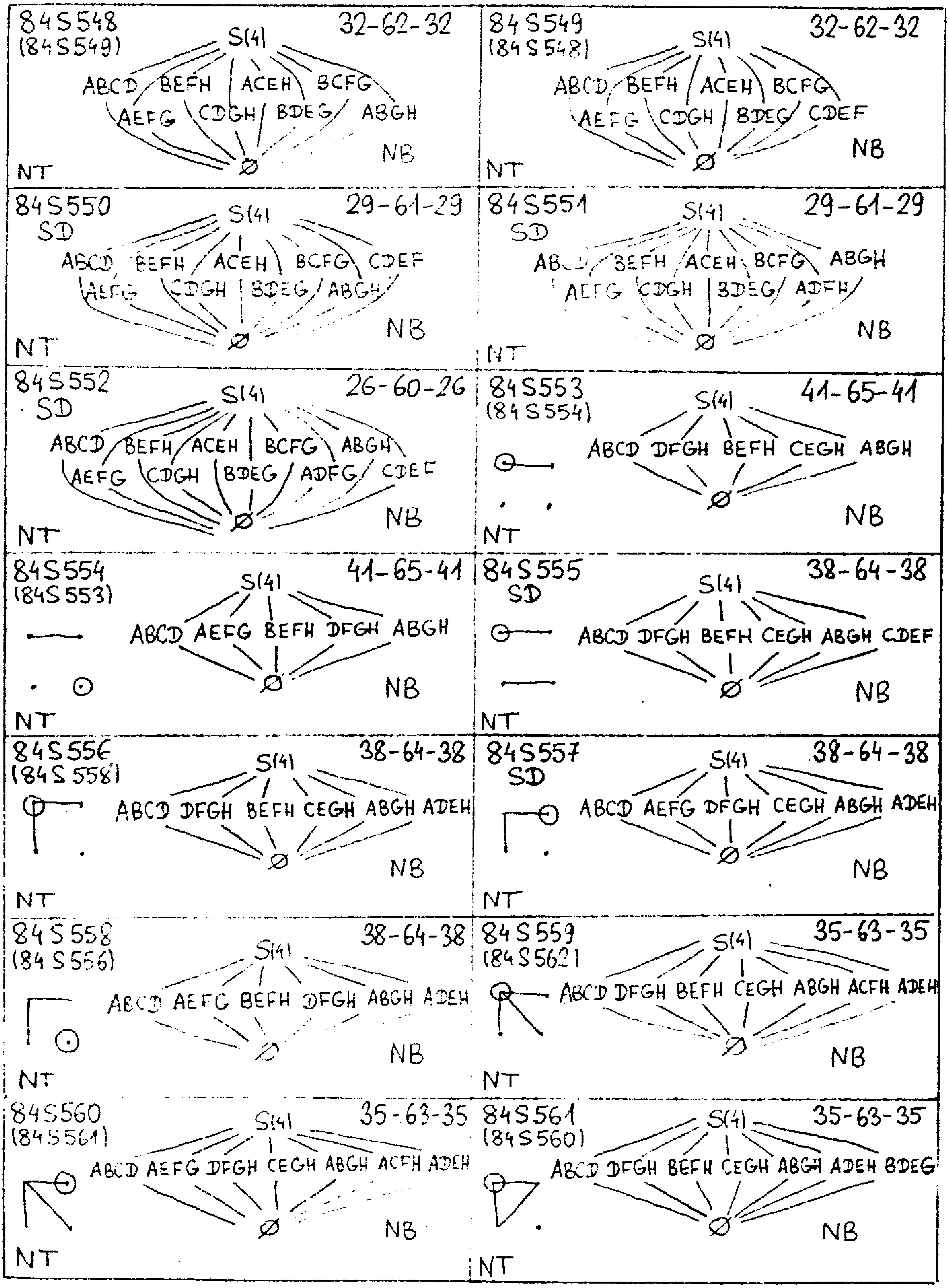
84S531 35-63-35
(84S534)
S(4)
ABCD AEFG BEFH CDGH ABGH BCFG ADEH
∅
NB
NT

84S532 35-63-35
SD
S(4)
ABCD AEFG BDFH CEGH ABGH BCFG ADEH
∅
NB
NT

84S533 35-63-35
SD
S(4)
ABCD ADFG BEFH CEGH ABGH BCFG ADEH
∅
NB
NT

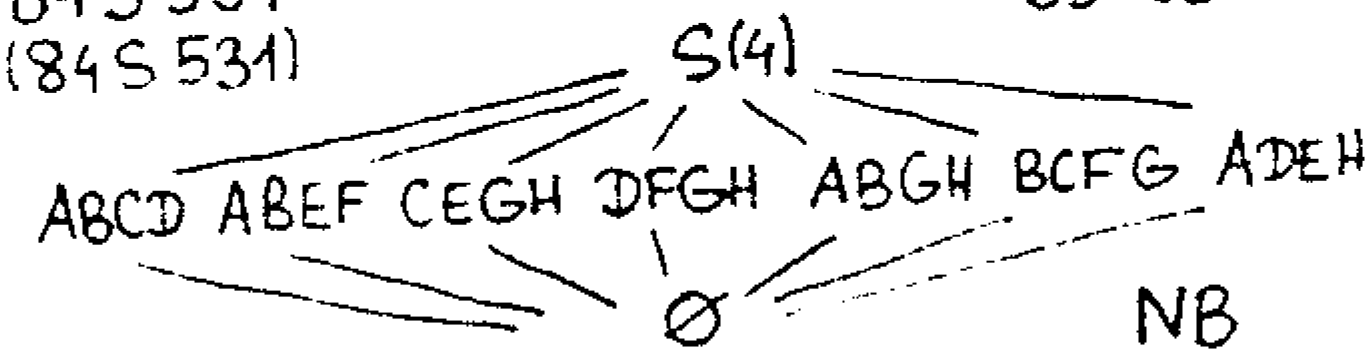


84S506
SD
S(4)
35-63-35
ABCD AEFG BEFH ABGH ACFH ADEH CDEF
∅
NB
NT
84S507
(84S508)
S(4)
35-63
ABCD AEFG CEGH ABGH ACFH ADEH
∅
NB
NT
84S508
(84S507)
S(4)
35-63-35
ABCD CEGH ABGH BEFH ACFH ADEH CDEF
∅
NB
NT
84S509
SD
S(4)
35-63
ABCD CEGH DFGH ABGH ACFH ADEH
∅
NB
NT
84S510
SD
S(4)
35-63-35
ABCD AEFG BEFH ABGH ADEH BCFG CDEF
∅
NB
NT
84S511
SD
S(4)
ABCD AEFG CEGH ABGH ADEH BCFG
∅
NB
NT
84S512
SD
S(4)
32-62-32
ABCD BEFH ADEH CDEF
AEFG ABGH BCFG ACFH
∅
NB
NT
84S513
(84S514)
S(4)
32-62
ABCD CEGH ADEH CDEF
AEFG ABGH BCFG ACFH
∅
NB
NT
84S514
(84S513)
S(4)
32-62-32
ABCD BEFH ADEH CDEF
DFGH ABGH BCFG ACFH
∅
NB
NT
84S515
SD
S(4)
ABCD BEFH ACFH BCFG
AEFG ABGH ADEH BDEG
∅
NB
NT
84S516
SD
S(4)
41-65-41
ABCD AEFG ABEH BCFG ACFH
∅
NB
NT
84S517
SD
S(4)
ABCD AEFG ABEH BCFG ACFH
∅
NB
NT
(84S520)
S(4)
41-65-41
ABCD AEFG BEFH CDGH ABGH
∅
NB
NT
84S519
SD
S(4)
ABCD AEFG CEGH BDFH ABGH
∅
NB
NT



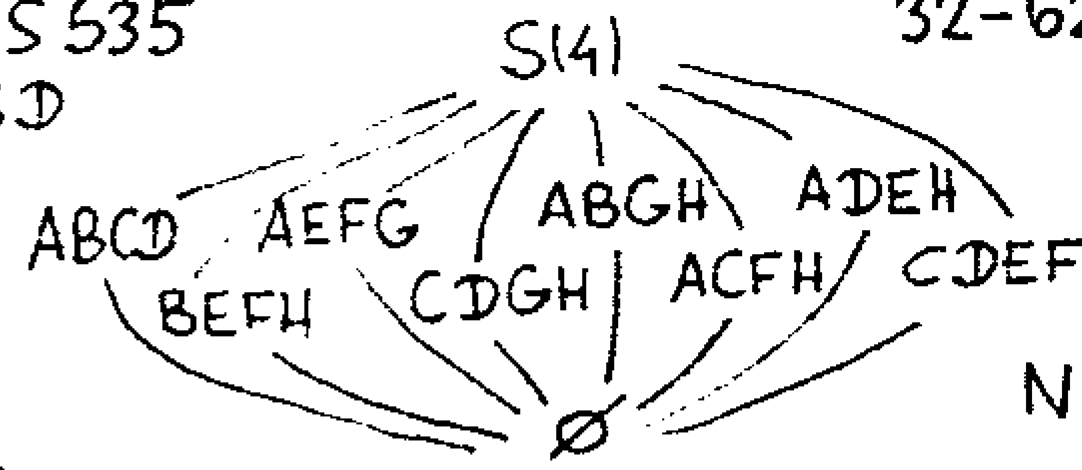
84S548
(84S549)
32-62-32
S(4)
ABCD BEFH ACEH BCFG
AEFG CDGH BDEG ABGH
∅
NB
NT
84S549
(84S548)
32-62-32
S(4)
ABCD BEFH ACEH BCFG
AEFG CDGH BDEG CDEF
∅
NB
NT
84S550
SD
29-61-29
S(4)
ABCD BEFH ACEH BCFG CDEF
AEFG CDGH BDEG ABGH
∅
NB
NT
84S551
SD
29-61-29
S(4)
ABCD BEFH ACEH BCFG ABGH
AEFG CDGH BDEG ADFH
∅
NB
NT
84S552
SD
26-60-26
S(4)
ABCD BEFH ACEH BCFG ABGH
AEFG CDGH BDEG ADFG CDEF
∅
NB
NT
84S553
(84S554)
41-65-41
S(4)
ABCD DFGH BEFH CEGH ABGH
∅
NB
NT
84S554
(84S553)
41-65-41
S(4)
ABCD AEFG BEFH DFGH ABGH
∅
NB
NT
84S555
SD
38-64-38
S(4)
ABCD DFGH BEFH CEGH ABGH CDEF
∅
NB
NT
84S556
(84S558)
38-64-38
S(4)
ABCD DFGH BEFH CEGH ABGH ADEH
∅
NB
NT
84S557
SD
38-64-38
S(4)
ABCD AEFG DFGH CEGH ABGH ADEH
∅
NB
NT
84S558
(84S556)
38-64-38
S(4)
ABCD AEFG BEFH DFGH ABGH ADEH
∅
NB
NT
84S559
(84S562)
35-63-35
S(4)
ABCD DFGH BEFH CEGH ABGH ACFH ADEH
∅
NB
NT
84S560
(84S561)
35-63-35
S(4)
ABCD AEFG DFGH CEGH ABGH ACFH ADEH
∅
NB
NT
84S561
(84S560)
35-63-35
S(4)
ABCD DFGH BEFH CEGH ABGH ADEH BDEG
∅
NB
NT

84S534
(84S531)
35-63-35



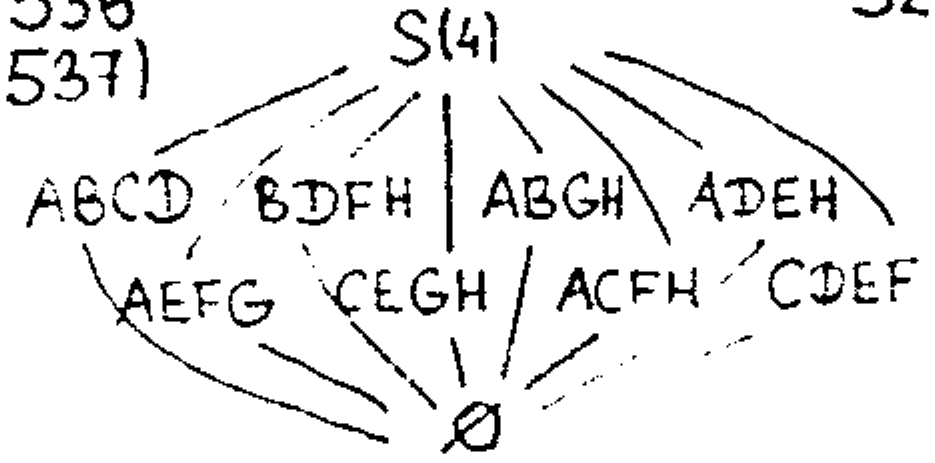
NB
NT

84S535
SD
32-62-32



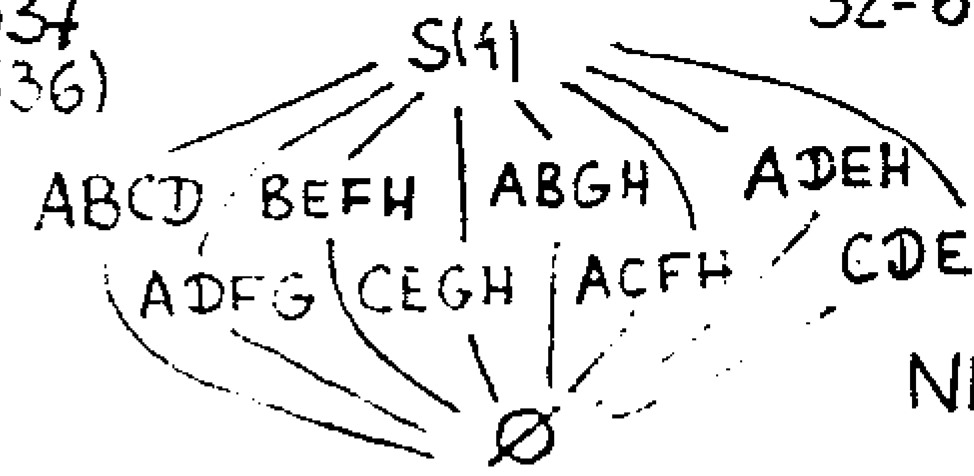
NB
NT

84S536
(84S537)
32-62-32



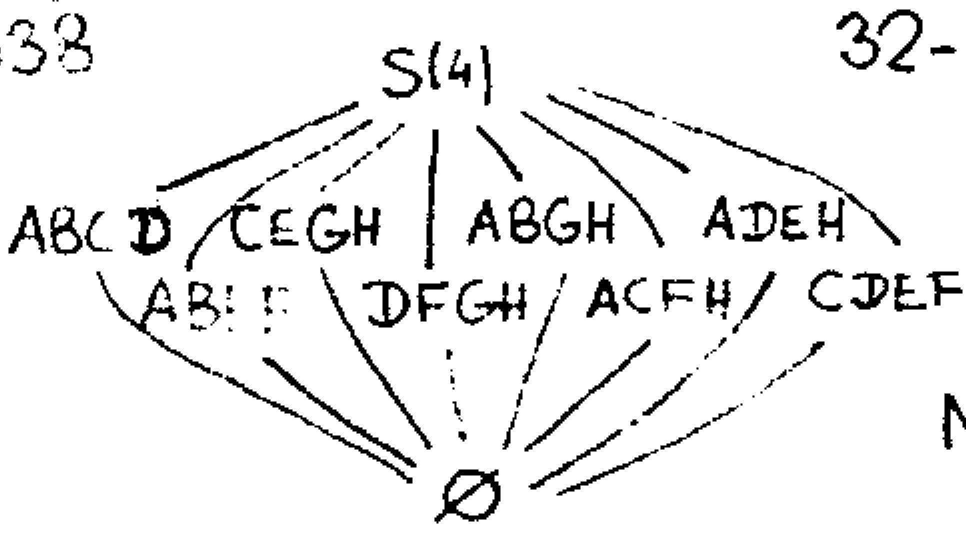
NB
NT

84S537
(84S536)
32-62-32



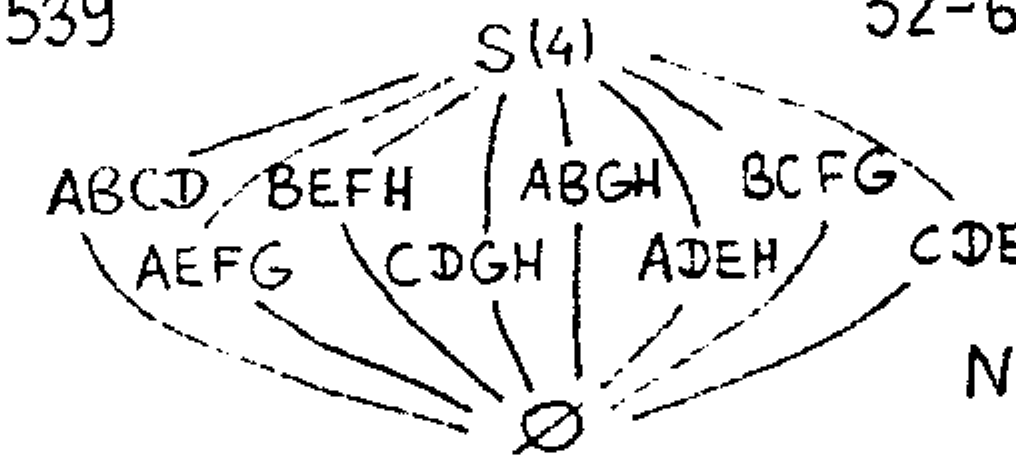
NB
NT

84S538
SD
32-62-32



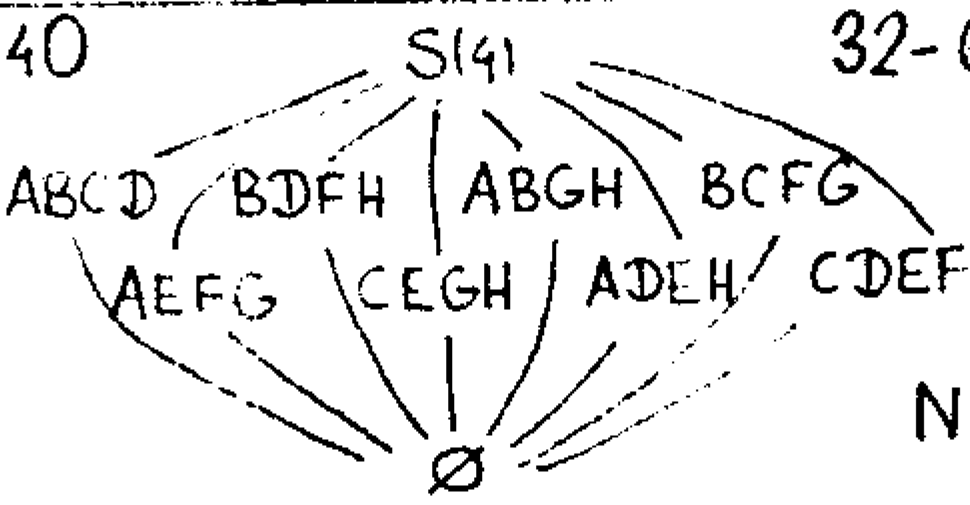
NB
NT

84S539
SD
32-62-32



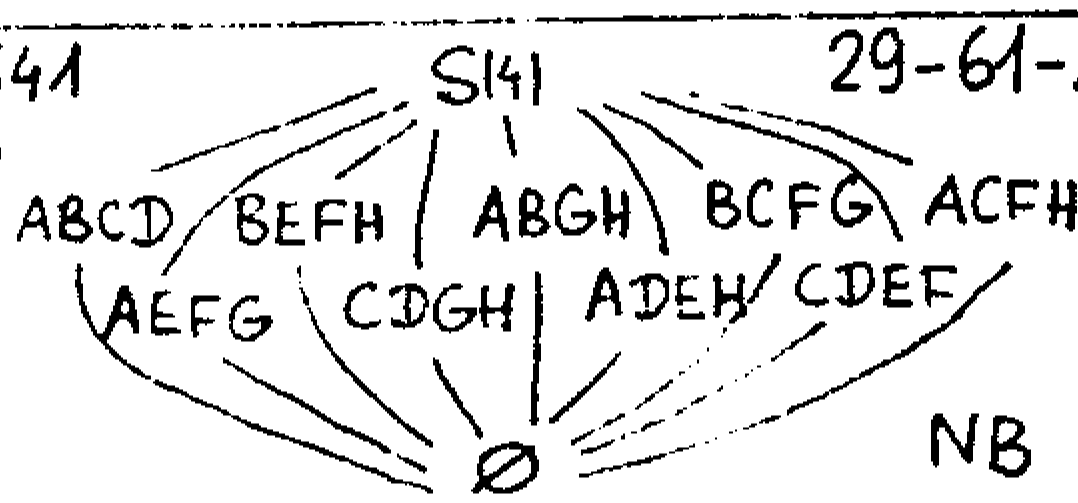
NB
NT

84S540
SD
32-62-32



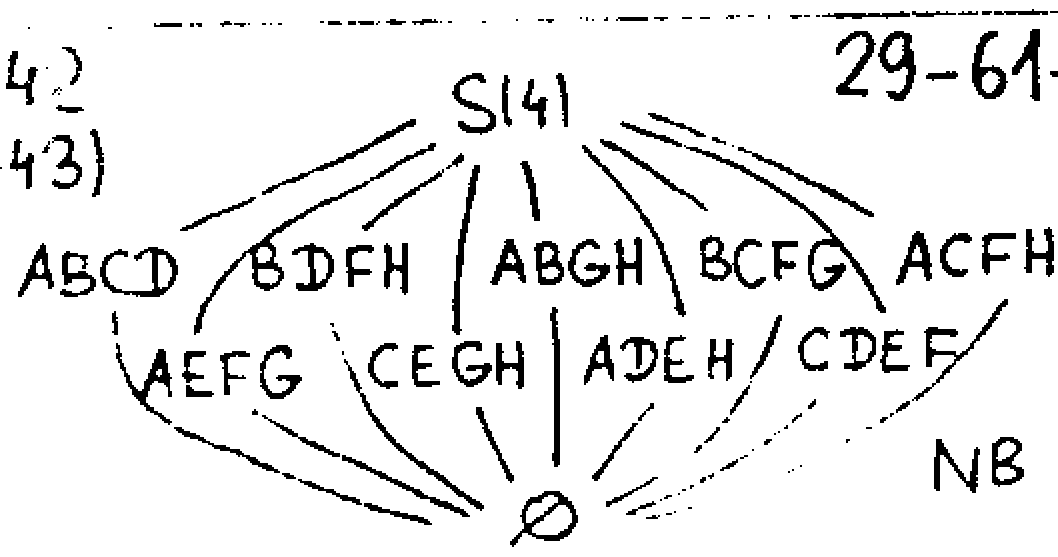
NB
NT

84S541
SD
29-61-29



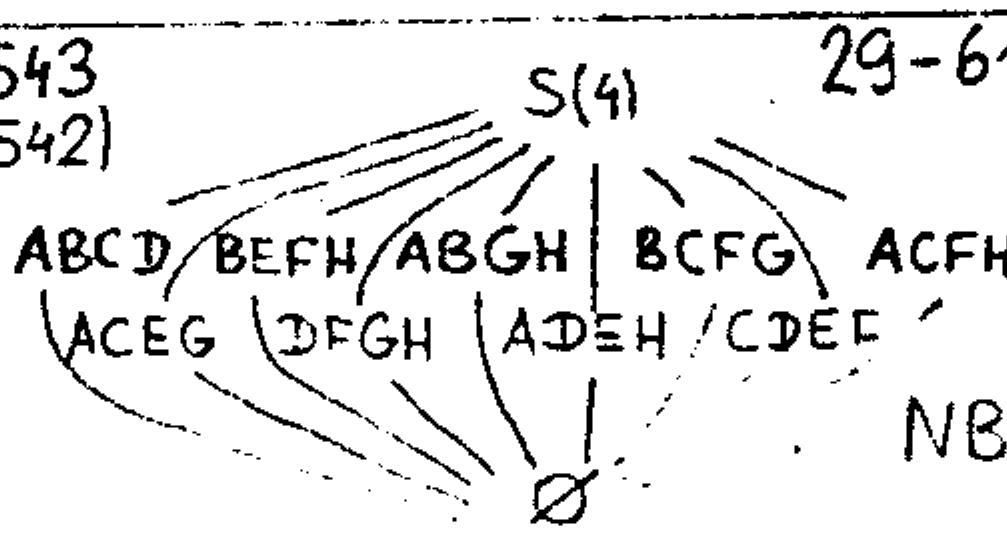
NB
NT

84S542
(84S543)
29-61-29



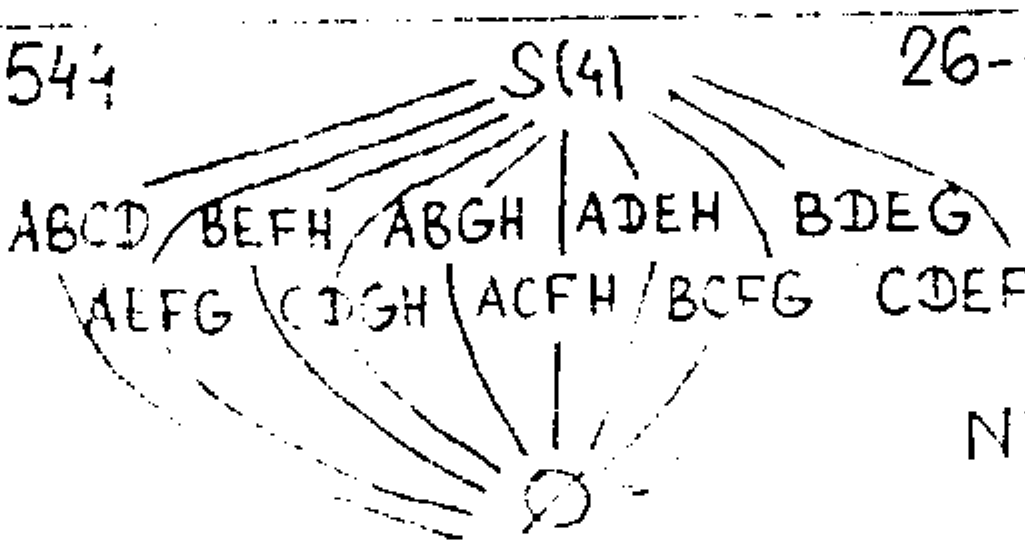
NB
NT

84S543
(84S542)
29-61-29



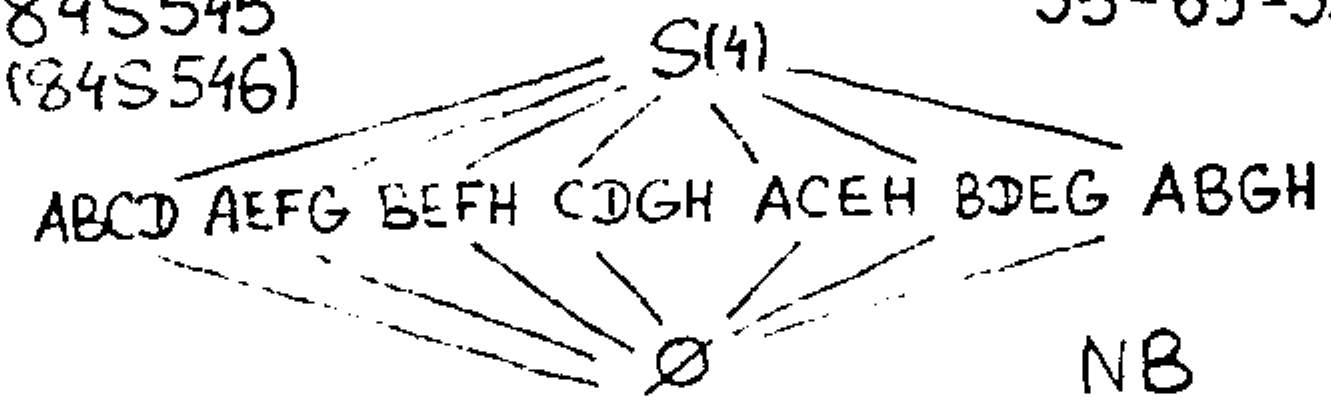
NB
NT

84S544
SD
26-60-26



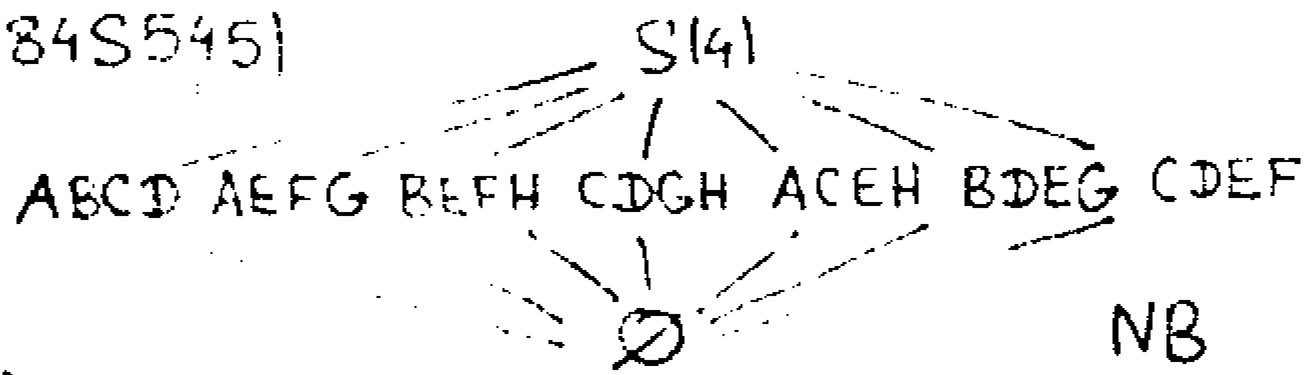
NB
NT

84S545
(84S546)
35-63-35



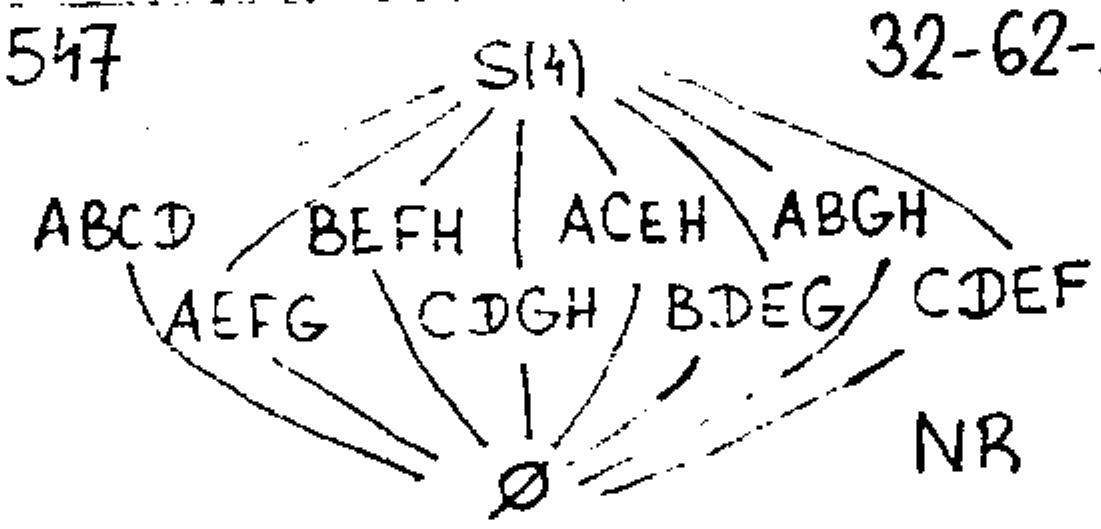
NB
NT

84S546
(84S545)
35-63-35



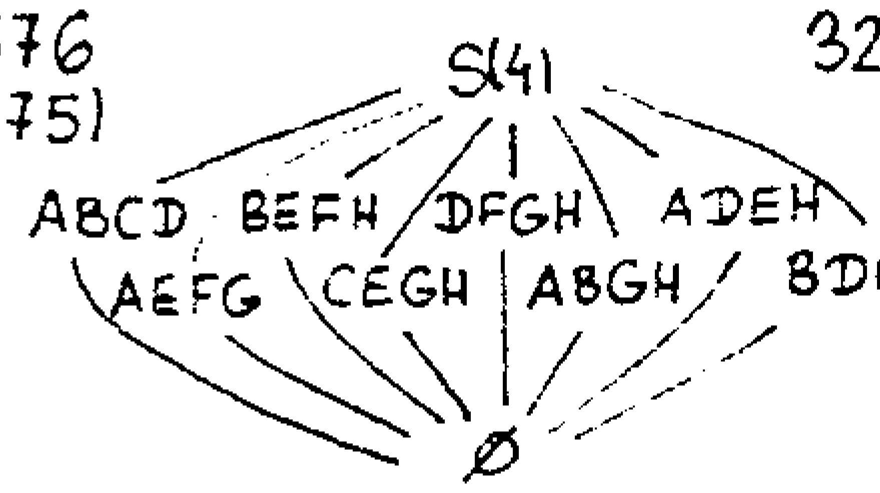
NB
NT

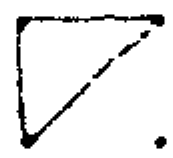
84S547
SD
32-62-32



NB
NT

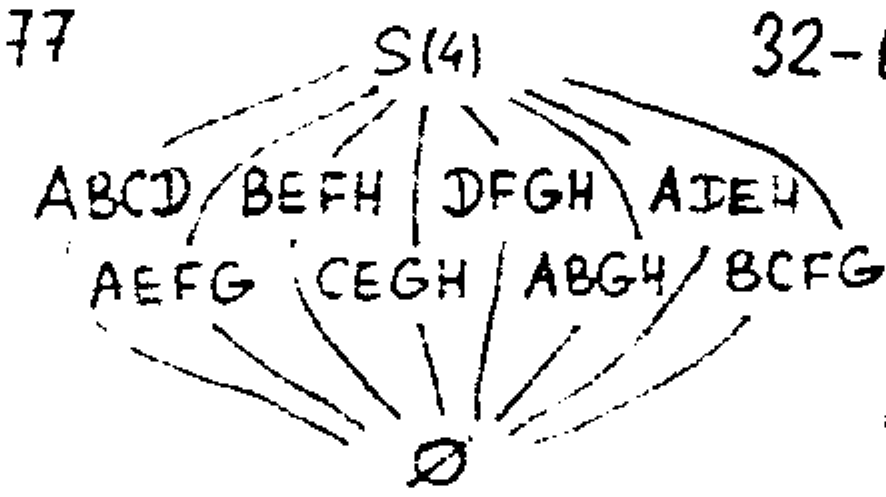
84S576
(84S575)
32-62-32

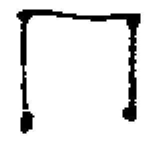




NB
NT

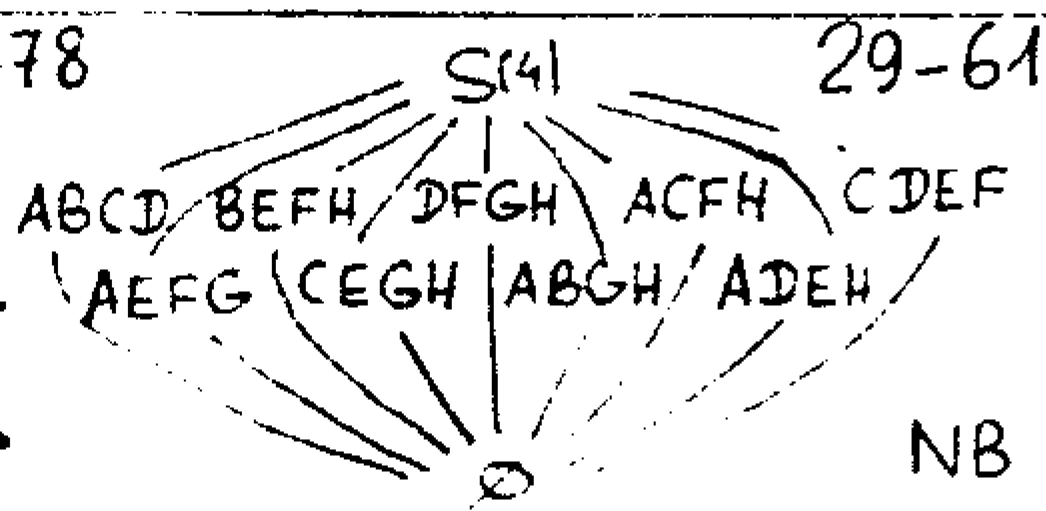
84S577
SD
32-62-32

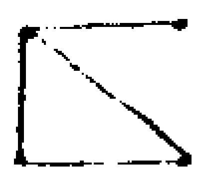




NB
NT

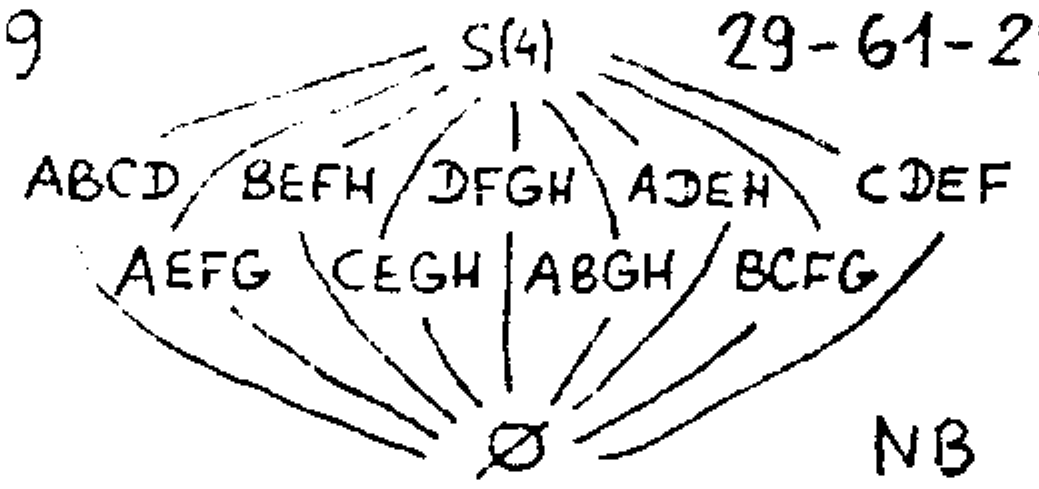
84S578
SD
29-61-29

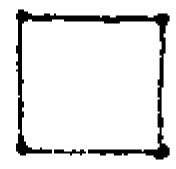




NB
NT

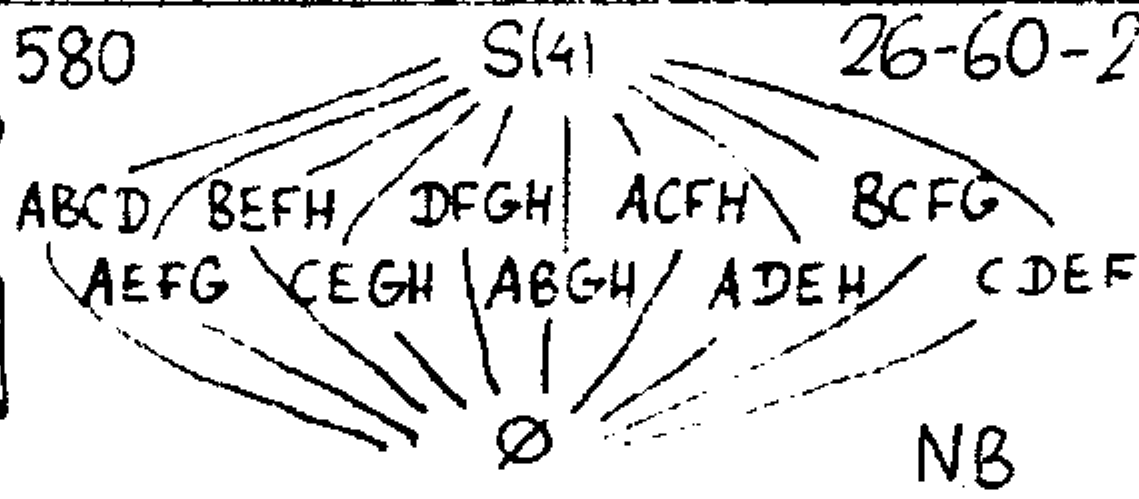
84S579
SD
29-61-29

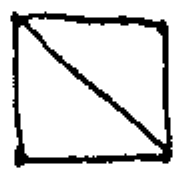




NB
NT

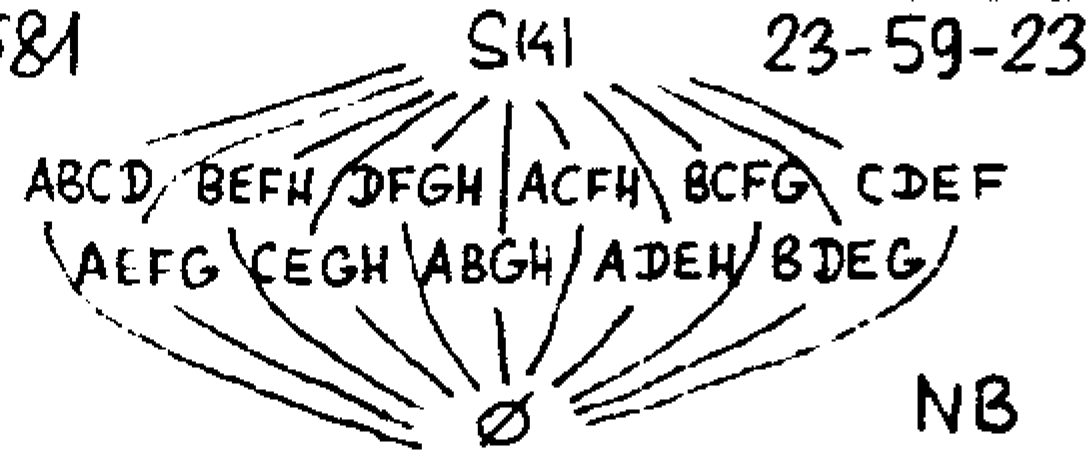
84S580
SD
26-60-26

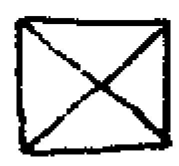




NB
NT

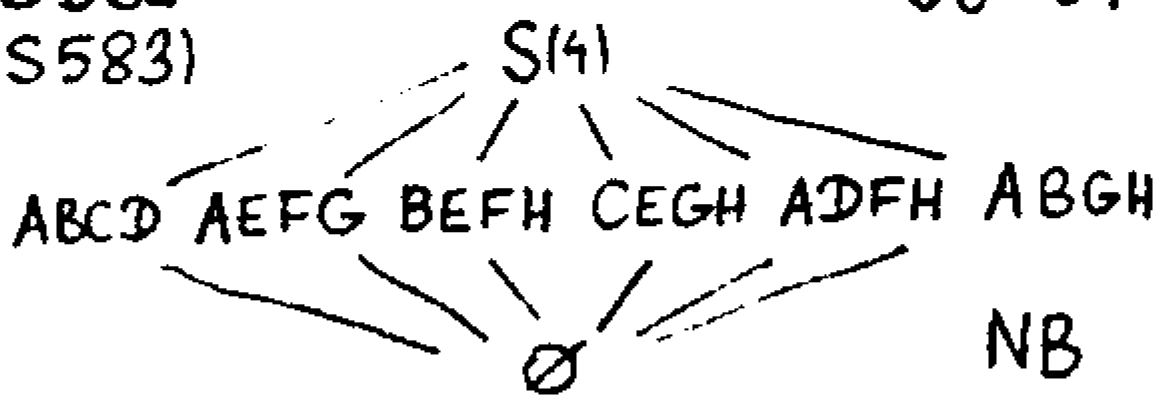
84S581
SD
23-59-23





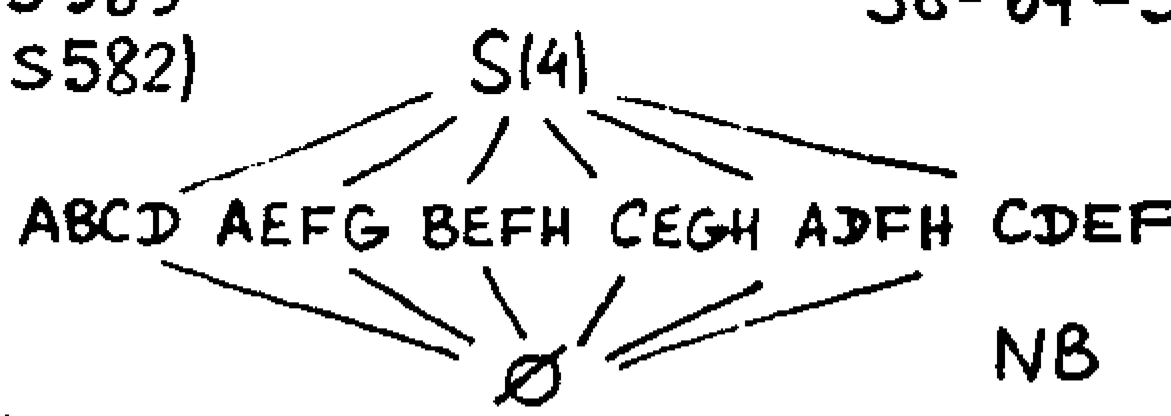
NB
NT

84S582
(84S583)
38-64-38



NB
NT

84S583
(84S582)
38-64-38

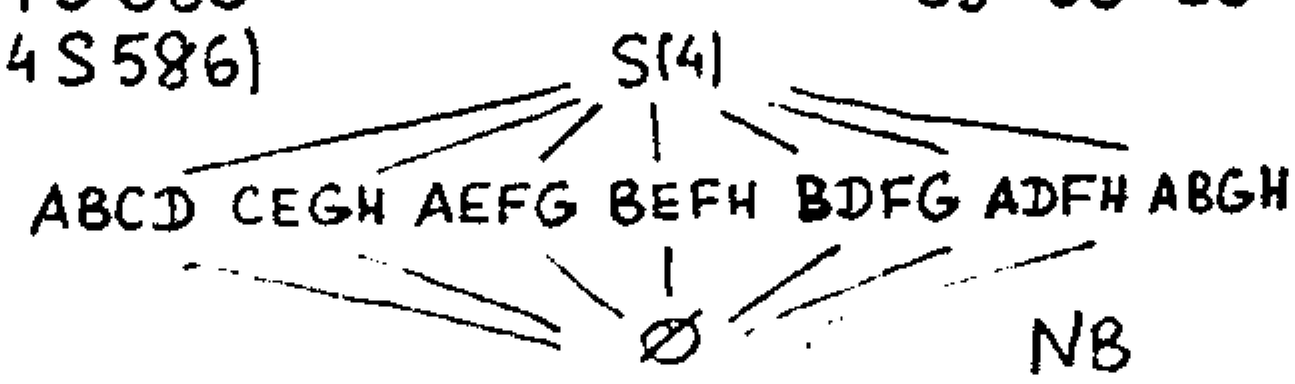


NB
NT

84S584
SD
35-63-35

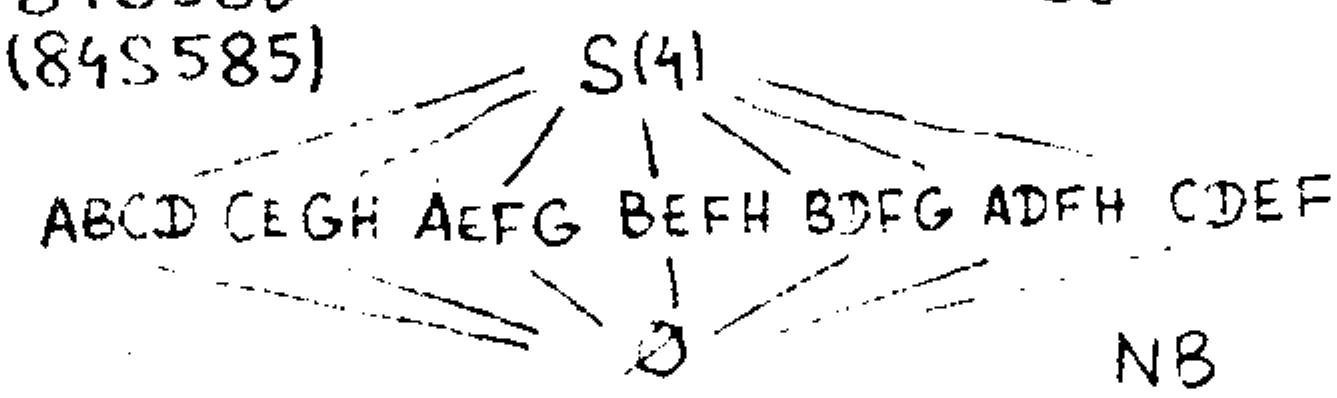
NB
NT

84S585
(84S586)
35-63-35



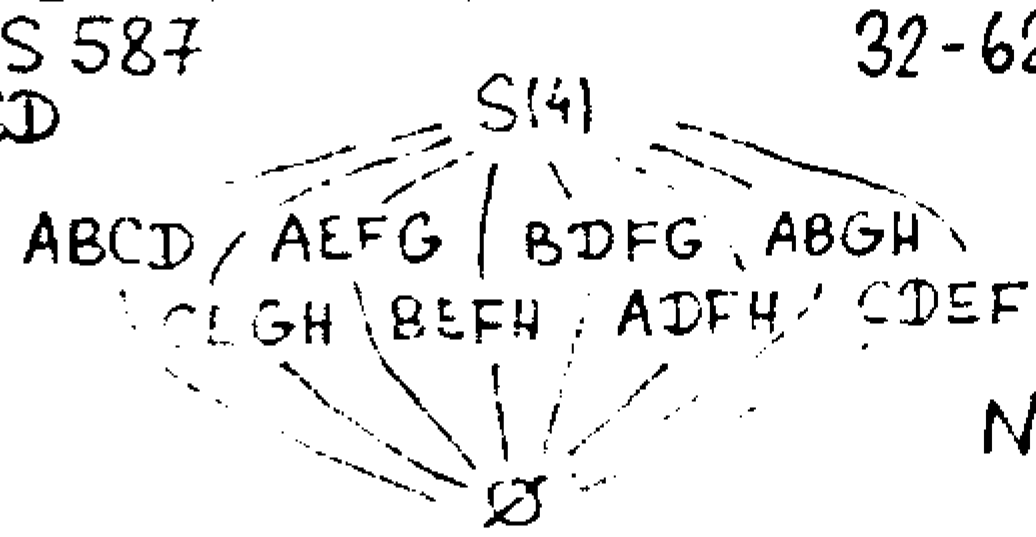
NB
NT

84S586
(84S585)
35-63-35



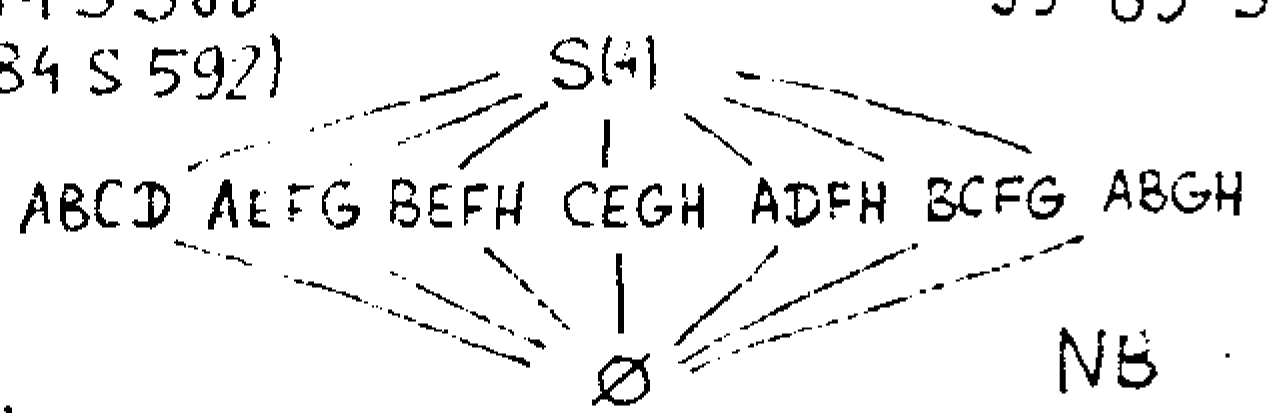
NB
NT

84S587
SD
32-62-32



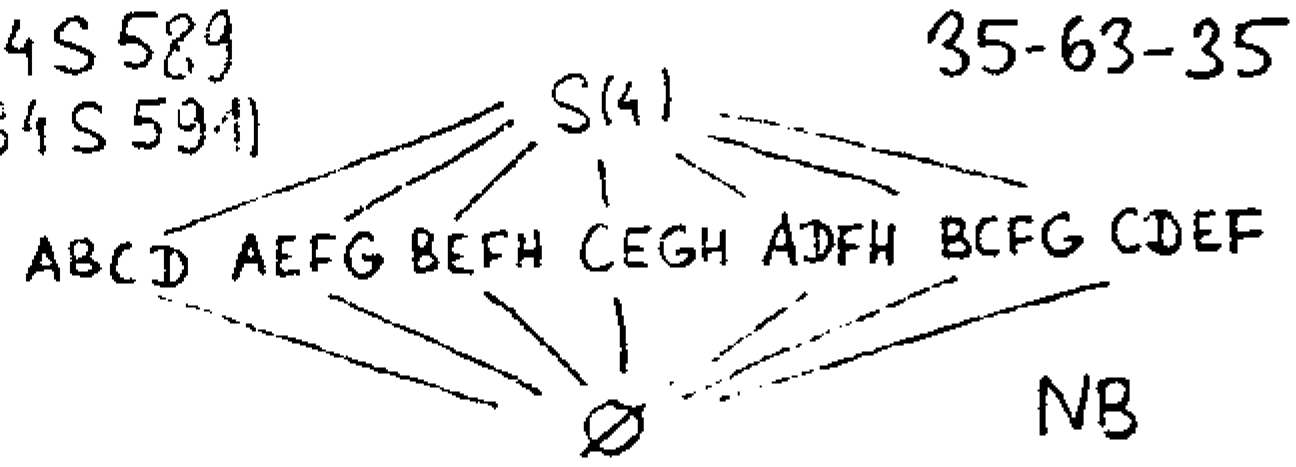
NB
NT

84S588
(84S592)
35-63-35

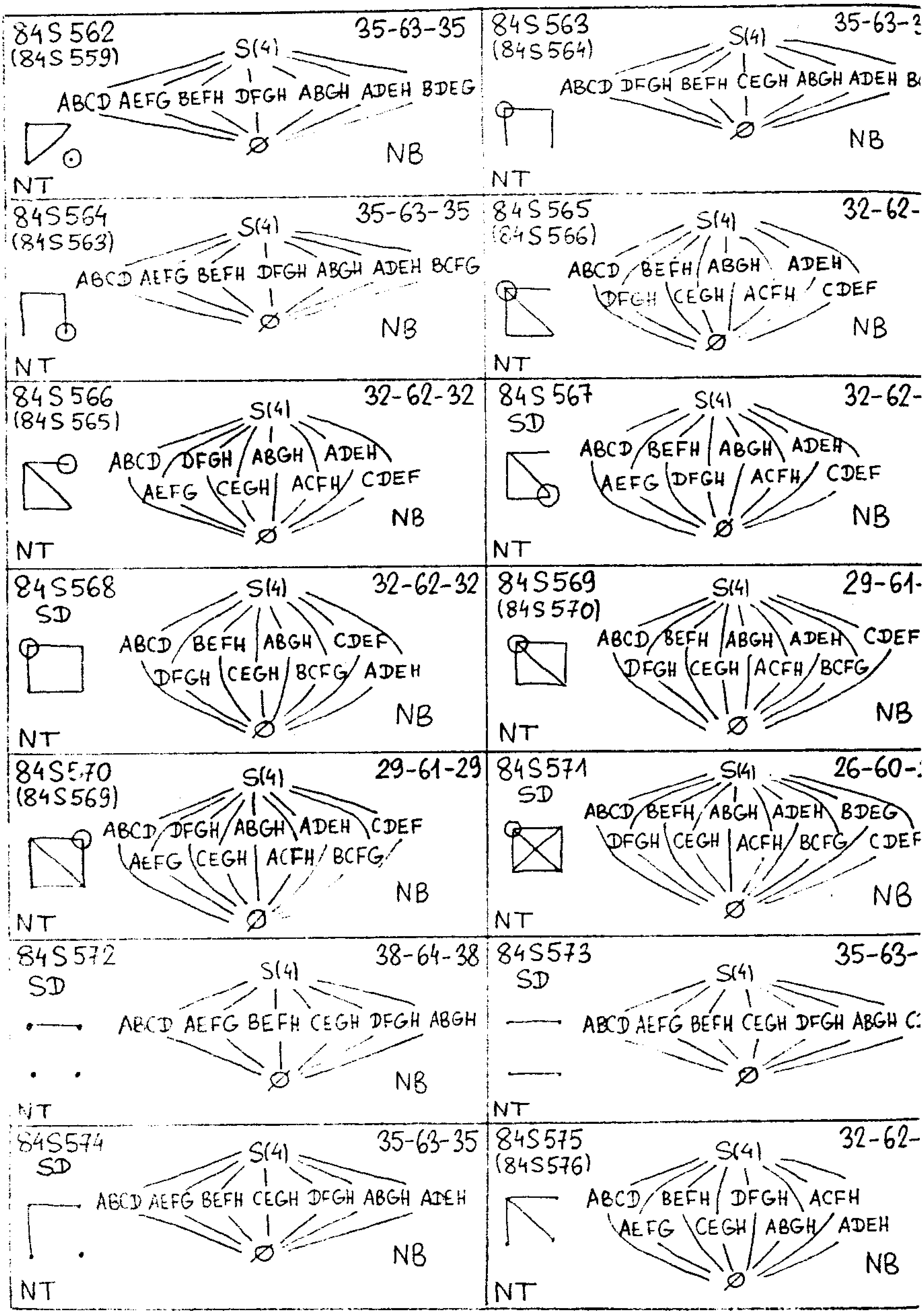


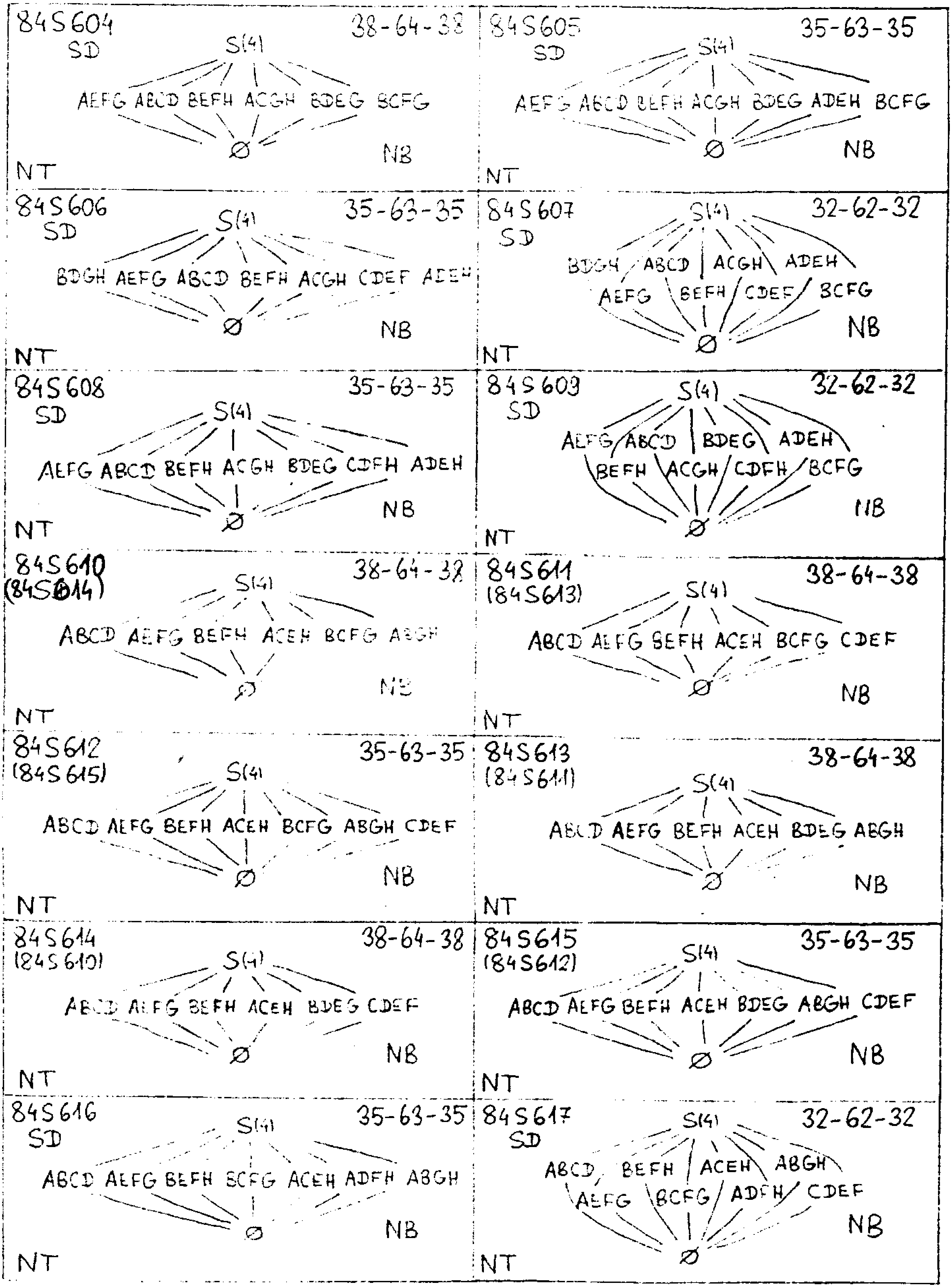
NB
NT

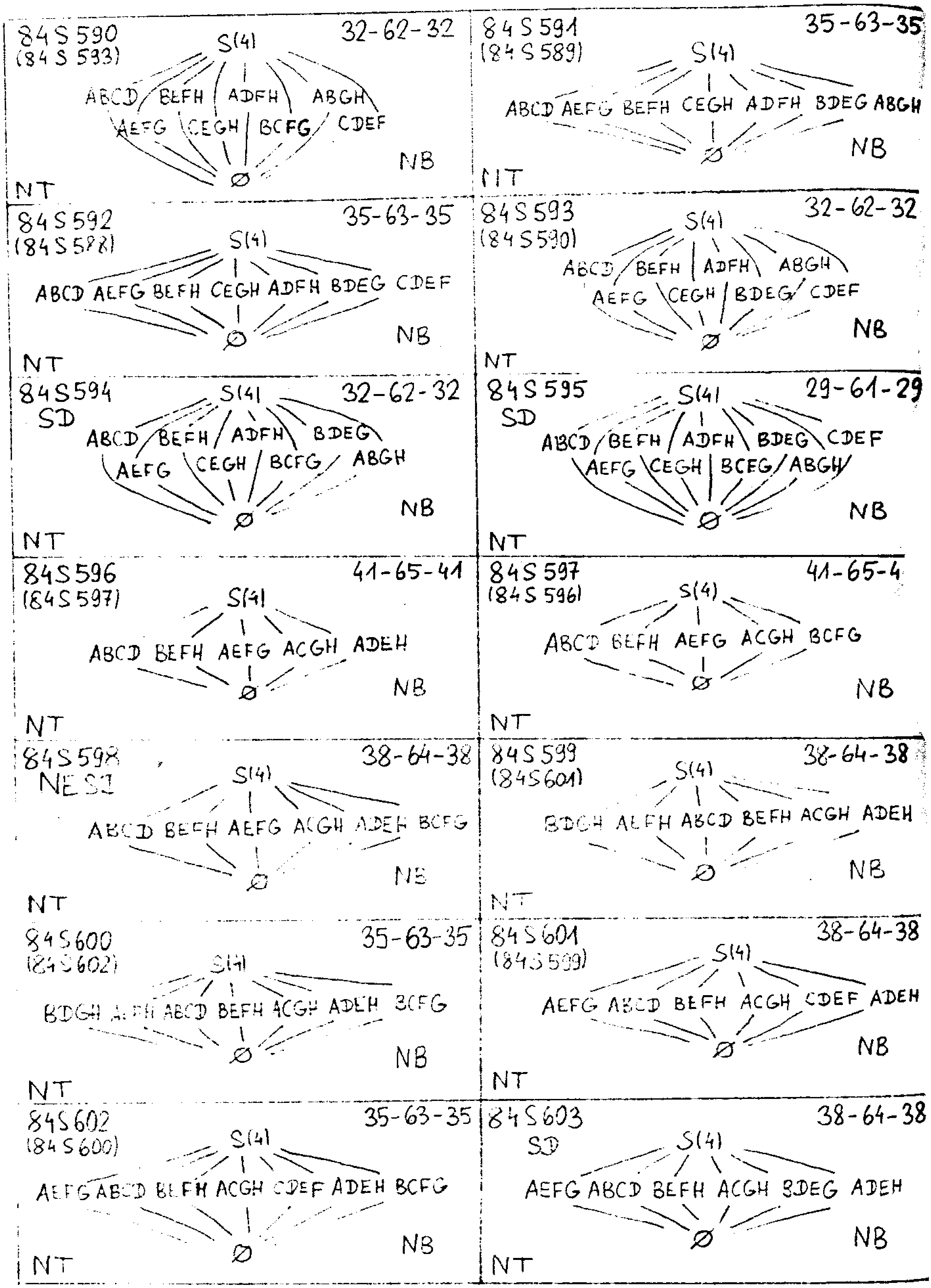
84S589
(84S591)
35-63-35



NB
NT

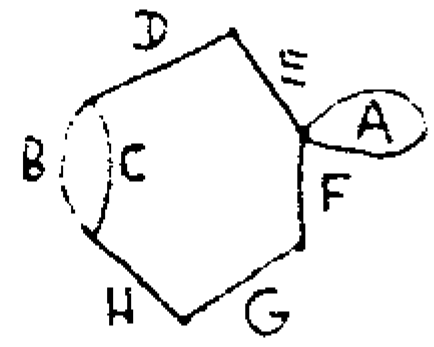

84S562
(84S559)
35-63-35
S(4)
ABCD AEFG BEFH DFGH ABGH ADEH BDEG
Ø
NB
NT
84S563
(84S564)
35-63-3
S(4)
ABCD DFGH BEFH CEGH ABGH ADEH B
Ø
NB
NT
84S564
(84S563)
35-63-35
S(4)
ABCD AEFG BEFH DFGH ABGH ADEH BCFG
Ø
NB
NT
84S565
(84S566)
32-62-
S(4)
ABCD BEFH ABGH ADEH
DFGH CEGH ACFH CDEF
Ø
NB
NT
84S566
(84S565)
32-62-32
S(4)
ABCD DFGH ABGH ADEH
AEFG CEGH ACFH CDEF
Ø
NB
NT
84S567
SD
32-62-
S(4)
ABCD BEFH ABGH ADEH
AEFG DFGH ACFH CDEF
Ø
NB
NT
84S568
SD
32-62-32
S(4)
ABCD BEFH ABGH CDEF
DFGH CEGH BCFG ADEH
Ø
NB
NT
84S569
(84S570)
29-61-
S(4)
ABCD BEFH ABGH ADEH CDEF
DFGH CEGH ACFH BCFG
Ø
NB
NT
84S570
(84S569)
29-61-29
S(4)
ABCD DFGH ABGH ADEH CDEF
AEFG CEGH ACFH BCFG
Ø
NB
NT
84S571
SD
26-60-
S(4)
ABCD BEFH ABGH ADEH BDEG
DFGH CEGH ACFH BCFG CDEF
Ø
NB
NT
84S572
SD
38-64-38
S(4)
ABCD AEFG BEFH CEGH DFGH ABGH
Ø
NB
NT
84S573
SD
35-63-
S(4)
ABCD AEFG BEFH CEGH DFGH ABGH C
Ø
NB
NT
84S574
SD
35-63-35
S(4)
ABCD AEFG BEFH CEGH DFGH ABGH ADEH
Ø
NB
NT
84S575
(84S576)
32-62-
S(4)
ABCD BEFH DFGH ACFH
AEFG CEGH ABGH ADEH
Ø
NB
NT


84S604
SD
38-64-38
S(4)
AEFG ABCD BEFH ACGH BDEG BCFG
∅
NB
NT
84S605
SD
35-63-35
S(4)
AEFG ABCD BEFH ACGH BDEG ADEH BCFG
∅
NB
NT
84S606
SD
35-63-35
S(4)
BDGH AEFG ABCD BEFH ACGH CDEF ADEH
∅
NB
NT
84S607
SD
32-62-32
S(4)
BDGH ABCD ACGH ADEH
AEFG BEFH CDEF BCFG
∅
NB
NT
84S608
SD
35-63-35
S(4)
AEFG ABCD BEFH ACGH BDEG CDFH ADEH
∅
NB
NT
84S609
SD
32-62-32
S(4)
AEFG ABCD BDEG ADEH
BEFH ACGH CDFH BCFG
∅
NB
NT
84S610
(84S614)
38-64-38
S(4)
ABCD AEFG BEFH ACEH BCFG ABGH
∅
NB
NT
84S611
(84S613)
38-64-38
S(4)
ABCD AEFG BEFH ACEH BCFG CDEF
∅
NB
NT
84S612
(84S615)
35-63-35
S(4)
ABCD AEFG BEFH ACEH BCFG ABGH CDEF
∅
NB
NT
84S613
(84S611)
38-64-38
S(4)
ABCD AEFG BEFH ACEH BDEG ABGH
∅
NB
NT
84S614
(84S610)
38-64-38
S(4)
ABCD AEFG BEFH ACEH BDEG CDEF
∅
NB
NT
84S615
(84S612)
35-63-35
S(4)
ABCD AEFG BEFH ACEH BDEG ABGH CDEF
∅
NB
NT
84S616
SD
35-63-35
S(4)
ABCD AEFG BEFH BCFG ACEH ADFH ABGH
∅
NB
NT
84S617
SD
32-62-32
S(4)
ABCD BEFH ACEH ABGH
AEFG BCFG ADFH CDEF
∅
NB
NT


84S590
(84S593)
32-62-32
S(4)
ABCD BEFH ADFH ABGH
AEFG CEGH BCFG CDEF
Ø
NB
NT
84S591
(84S589)
35-63-35
S(4)
ABCD AEFG BEFH CEGH ADFH BDEG ABGH
Ø
NB
NT
84S592
(84S588)
35-63-35
S(4)
ABCD AEFG BEFH CEGH ADFH BDEG CDEF
Ø
NB
NT
84S593
(84S590)
32-62-32
S(4)
ABCD BEFH ADFH ABGH
AEFG CEGH BDEG CDEF
Ø
NB
NT
84S594
SD
32-62-32
S(4)
ABCD BEFH ADFH BDEG
AEFG CEGH BCFG ABGH
Ø
NB
NT
84S595
SD
29-61-29
S(4)
ABCD BEFH ADFH BDEG CDEF
AEFG CEGH BCFG ABGH
Ø
NB
NT
84S596
(84S597)
41-65-41
S(4)
ABCD BEFH AEFG ACGH ADEH
Ø
NB
NT
84S597
(84S596)
41-65-4
S(4)
ABCD BEFH AEFG ACGH BCFG
Ø
NB
NT
84S598
NESI
38-64-38
S(4)
ABCD BEFH AEFG ACGH ADEH BCFG
Ø
NB
NT
84S599
(84S601)
38-64-38
S(4)
BDGH AEFH ABCD BEFH ACGH ADEH
Ø
NB
NT
84S600
(84S602)
35-63-35
S(4)
BDGH AEFH ABCD BEFH ACGH ADEH BCFG
Ø
NB
NT
84S601
(84S599)
38-64-38
S(4)
AEFG ABCD BEFH ACGH CDEF ADEH
Ø
NB
NT
84S602
(84S600)
35-63-35
S(4)
AEFG ABCD BEFH ACGH CDEF ADEH BCFG
Ø
NB
NT
84S603
SD
38-64-38
S(4)
AEFG ABCD BEFH ACGH BDEG ADEH
Ø
NB
NT

85L15 (83H6) 15-11-4

S(5)
|
ABC(1)
|
A



T

85L16 (83L10) 7-6-5

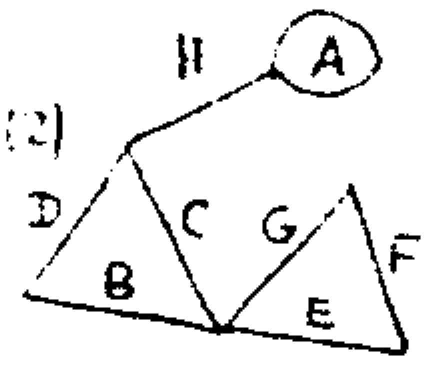
ABCDE(2)
|
A

NB(BCDE | ∅)

T

85L17 (83L41) 7-9-3

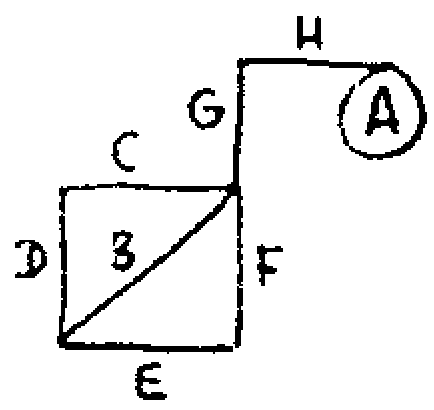
ABCDEFG(4)
ABCD(2) AEFG(2)
A



T

85L18 (83L19) 8-8-4

ABCDEF(3)
ABCD(2) ABEF(2)
A



T

85L19 (83L23) 10-9-5

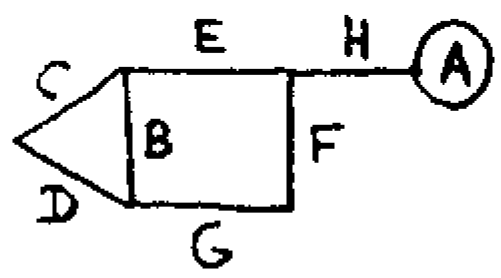
ABCDEF(3)
|
ABCD(2)
|
A

NB(ABCDEF | AE(1))

T

85L20 (83L45) 11-11-4

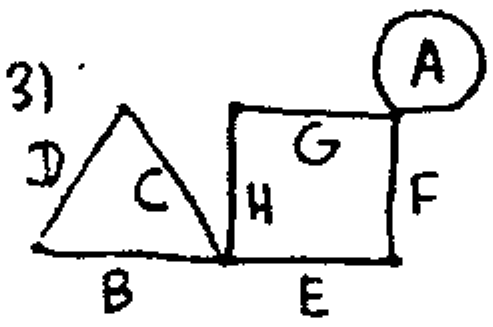
ABCDEFG(4)
ABCD(2) ABEFG(3)
A



T

85L21 (83H3) 9-12-3

S(5)
ABCD(2) AEFGH(3)
A



T

85L22 (83L53) 14-12-5

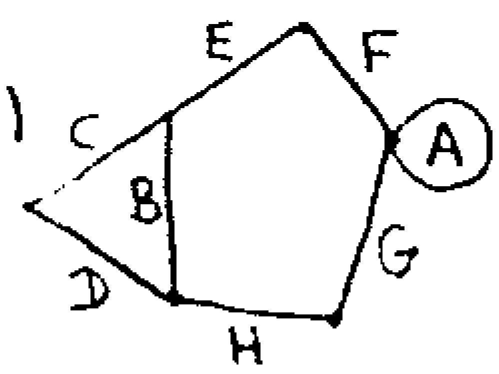
ABCDEFG(4)
|
ABCD(2)
|
A

NB(ABCDEFG | AEF(2))

T

85L23 (83H8) 15-14-4

S(5)
ABCD(2) ABEFGH(4)
A



T

85L24 (83H22) 19-15-5

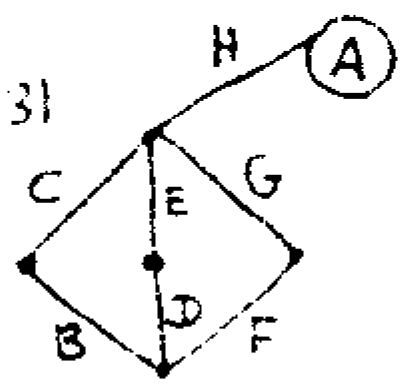
S(5)
|
ABCD(2)
|
A

NB(S(5) | AEFG)

T

85L25 (83L48) 12-12-4

ABCDEFG(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) ADEFG(3)
∅



T(BCDEFG, BC, DE, FG, H)

85L26 (83L30) 12-10-6

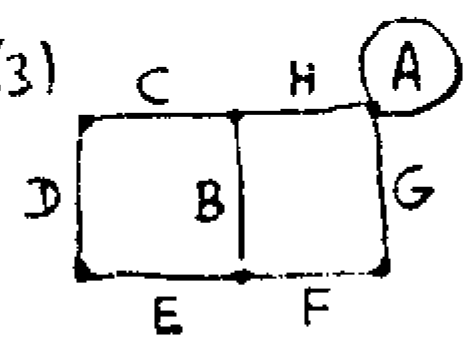
ABCDEF(3)
|
A

NB(ABCDEF | AB(1))

T

85L27 (83H11) 15-15-4

S(5)
ABCDE(3) ABFGH(3)
A



T

85L28 (83L55) 15-13-5

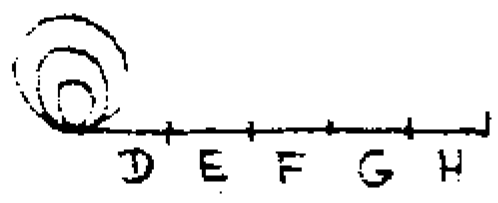
ABCDEFG(4)
ABCDE(3) ABCFG(3)
A

NB(ABCDEFG | ADF(2))

T

85L1 (83L1) — 5-1-3

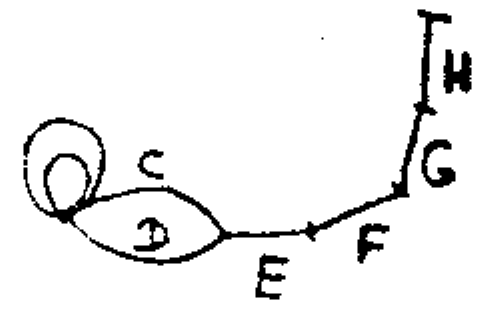
ABC



T

85L2 (83L2) — 5-2-3

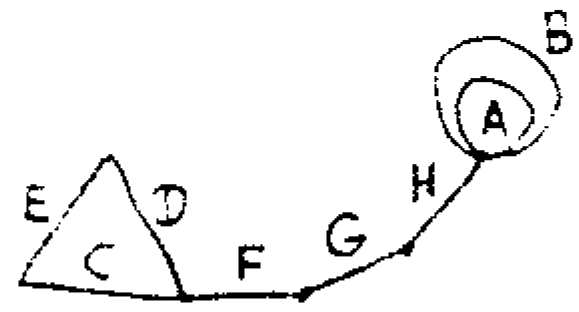
ABCD(1)
|
AB



T

85L3 (83L5) — 6-3-3

ABCDE(2)
|
AB



T

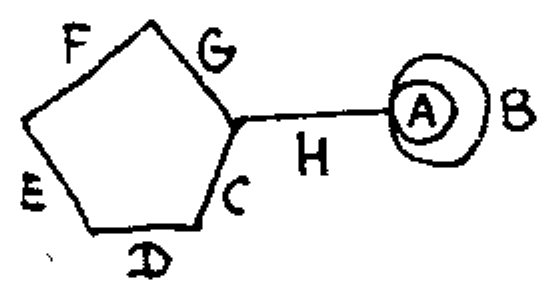
85L4 (83L14) — 8-4-3

ABCDEF(3)
|
AB

T

85L5 (83L39) — 11-5-3

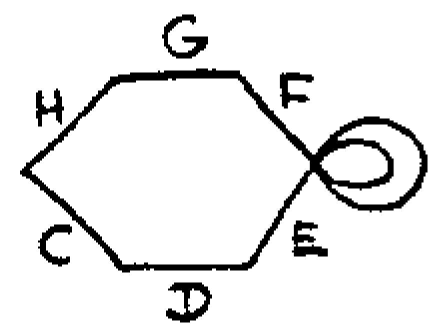
ABCDEFG(3)
|
AB



T

85L6 (83H1) — 15-6-3

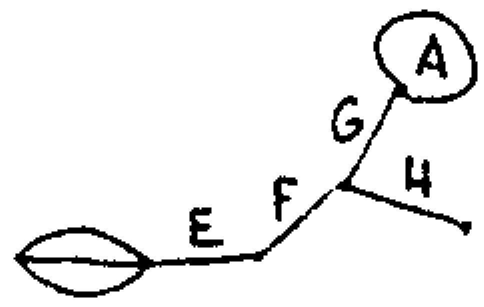
S(5)
|
AB



T

85L7 (83L3) — 5-3-4

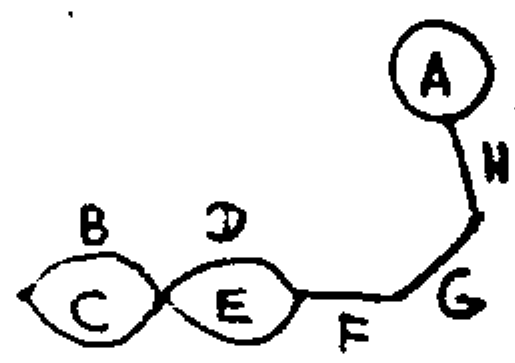
ABCD(1)
|
A



T

85L8 (83L6) — 5-4-3

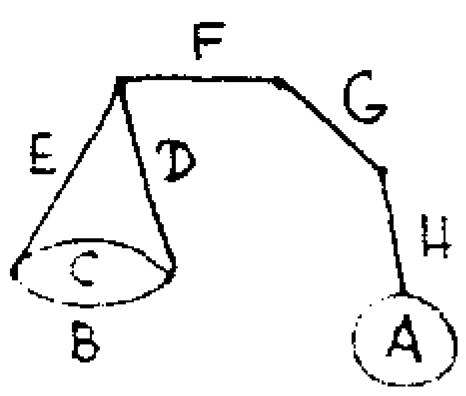
ABCDE(2)
ABC(1) ADE(1)
A



T

85L9 (83L7) — 6-5-4

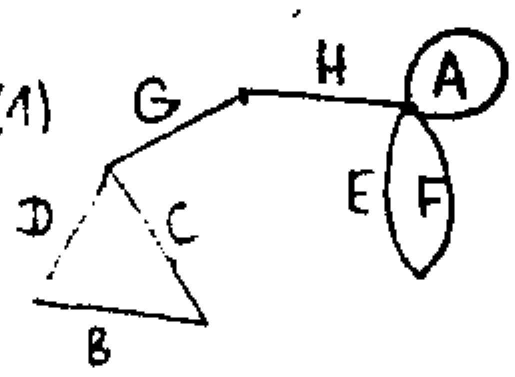
ABCDE(2)
|
ABC(1)
|
A



T

85L10 (83L15) — 6-6-3

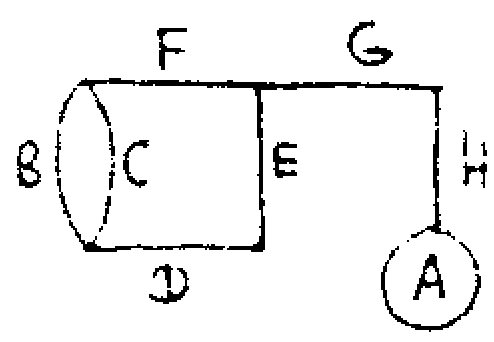
ABCDEF(3)
ABCD(2) AEF(1)
A



T

85L11 (83L17) — 8-7-4

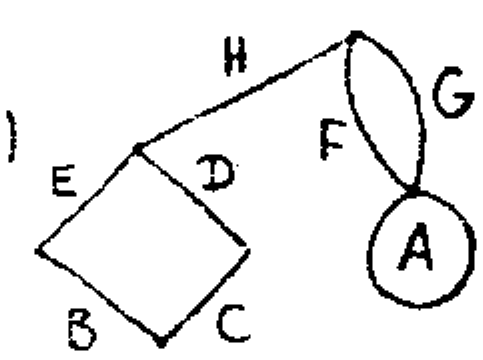
ABCDEF(3)
|
ABC(1)
|
A



T

85L12 (83L40) — 8-8-3

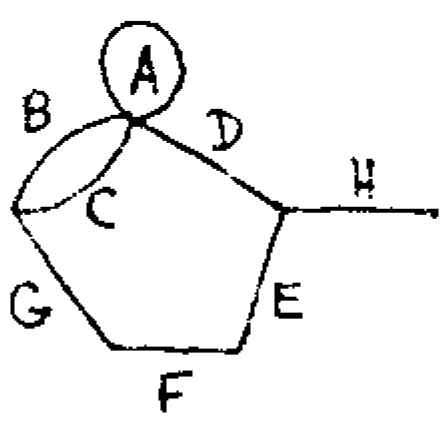
ABCDEFG(4)
ABCDE(3) AFG(1)
A



T

85L13 (83L43) — 11-9-4

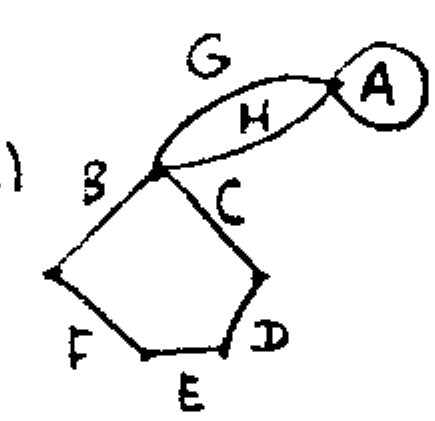
ABCDEFG(4)
|
ABC(1)
|
A



T

85L14 (83H2) — 11-10-3

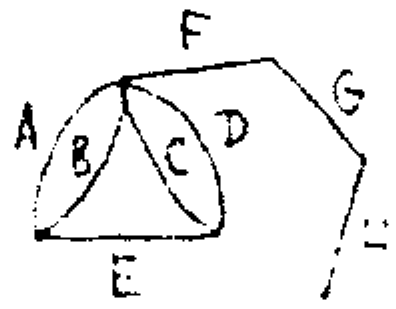
S(5)
ABCDEF(4) AGH(1)
A



T

85H6
(83L11)
6-8-6

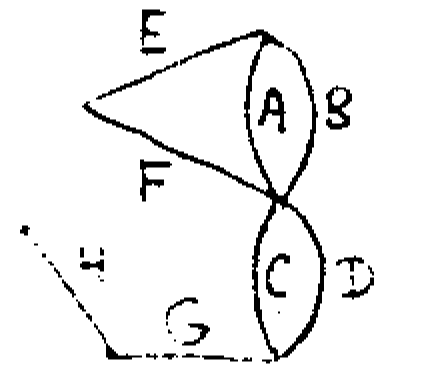
ABCDE(2)
AB(1) CD(1)
∅



T

85H7
(83L20)
6-10-4

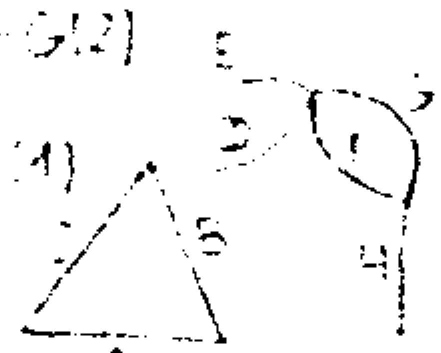
ABCDEF(3)
ABEF(2) ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅



T(ABEF, CD, EF, G, H)

85H8
(83L42)
6-12-3

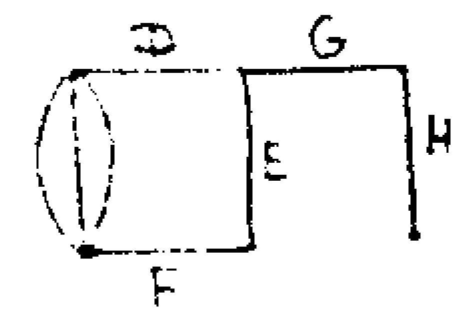
ABCDEFG(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) DEFG(2)
ABC(2) DE(1) FG(1)
∅



T(ABC, ABC, DE, FG, H)

85H9
(83L21)
8-10-6

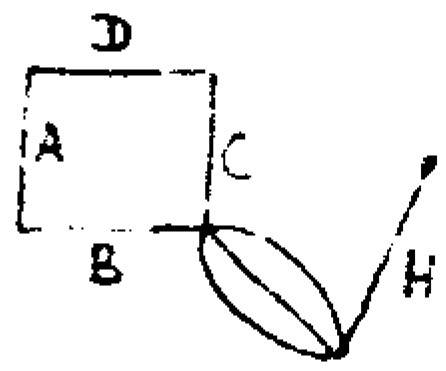
ABCDEF(2)
AB(1)
∅



T

85H10
(83L44)
8-12-4

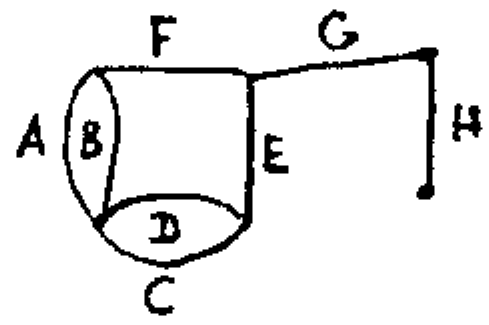
ABCDEFG(4)
ABCD(3) EFG(1)
∅



T

85H11
(83L25)
8-12-6

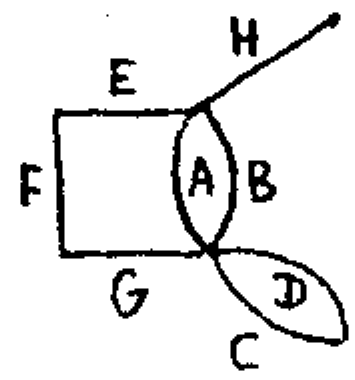
ABCDEF(3)
ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅



T(ABEF, CDEF, EF, G, H)

85H12
(83L46)
8-14-4

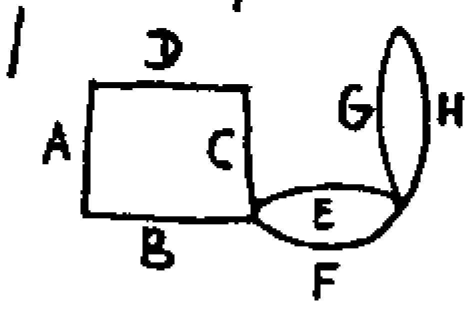
ABCDEFG(4)
ABEFG(3) ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅



T(ABEFG, EFG, EFG, CD, H)

85H13
(83H4)
8-16-3

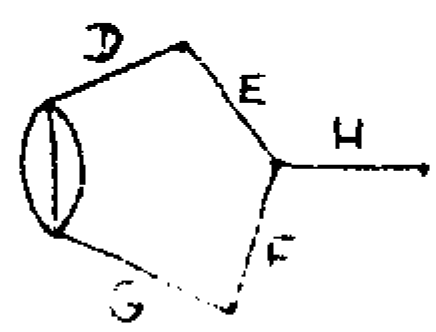
S(5)
ABCDEF(4) ABCDGH(4) EFGH(2)
ABCD(3) EF(1) GH(1)
∅



T(ABCD, ABCD, ABCD, EF, GH)

85H14
(83L50)
11-13-16

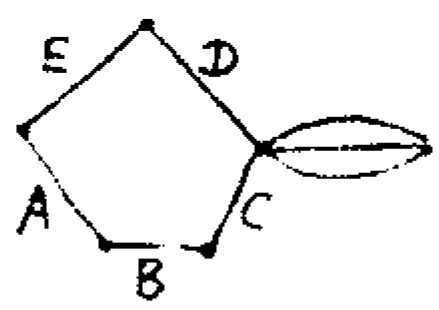
ABCDEFG(4)
ABC(1)
∅



T

85H15
(83H7)
11-15-4

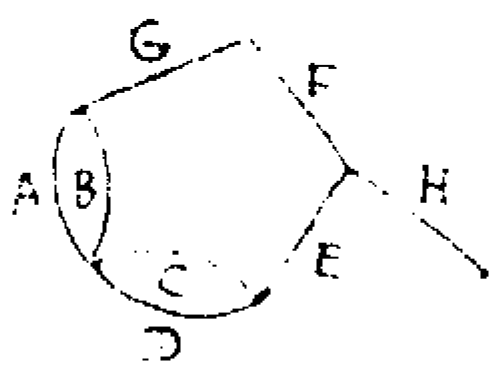
S(5)
ABCDE(4) FGH(1)
∅



T

85H16
(83L57)
11-16-6

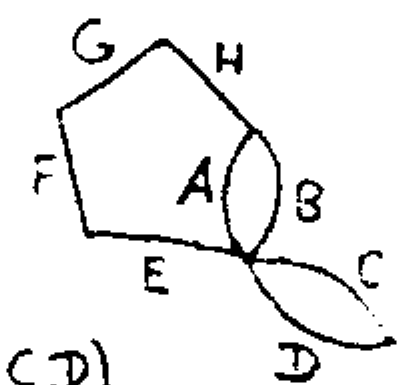
ABCDEFG(4)
ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅



T(ABEFG, CDEFG, EFG, EFG, H)

85H17
(83H9)
11-18-4

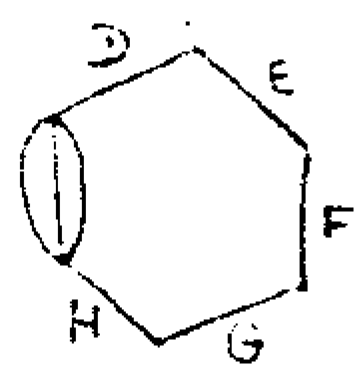
S(5)
ABEFGH(4) ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅



T(ABEFGH, EFGH, EFGH, EFGH, CD)

85H18
(83H17)
15-16-6

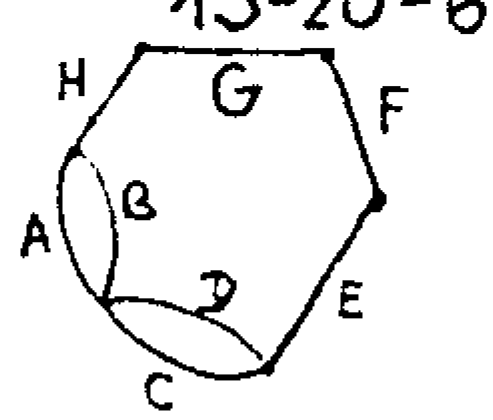
S(5)
ABC(1)
∅



T

85H19
(83H29)
15-20-6

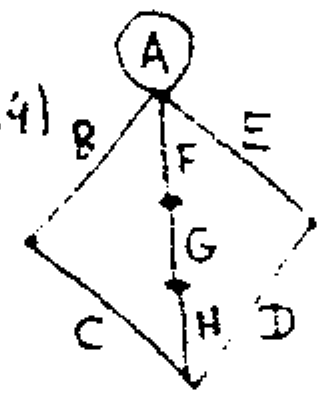
S(5)
ABCD(2)
AB(1) CD(1)
∅



T(ABEFGH, CDEFGH, EFGH, EFGH, EFGH)

85L29 (83H13) 17-16-4

S(5)
ABCDE(3) ABCFGH(4) ADEFGH(4)
A



T(BCDEFGH, FGH, FGH, BC, DE)

85L30 (83L69) 18-14-6

ABCDEFG(4)
ABCDE(3)
A

NB(ABCDEFG / AFG(2))

T

85L31 (83H24) 21-17-5

S(5)
ABCDE(3) ADEFGH(4)
A

NB(S(5) / ABCF)

T

85L32 (83H50) 25-18-1

S(5)
ABCDE(3)
A

NB(S(5) / AFGH)

T

85L33 (83L86) 21-15-7

ABCDEFG(4)
A

NB(ABCDEFG / ABC(2))

T

85L34 (83H27) 23-18-5

S(5)
ABCDEF(4) ABCDGH(4) ABEFGH(4)
A

NB(S(5) / ACEG)

T(BCDEFGH, BCDEFGH, CD, EF, GH)

85L35 (83H52) 27-19-6

S(5)
ABCDEF(4) ABCDGH(4)
A

NB(S(5) / ABEG)

T

85L36 (83H94) 31-20-7

S(5)
ABCDEF(4)
A

NB(S(5) / AFGH)

T

85L37 (83S57) 35-21-8

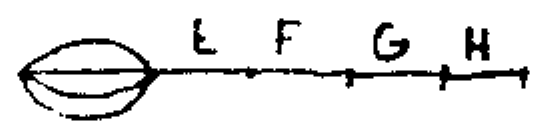
S(5)
A

NB(S(5) / ABCD)

T

85H1 (83L4) 5-4-6

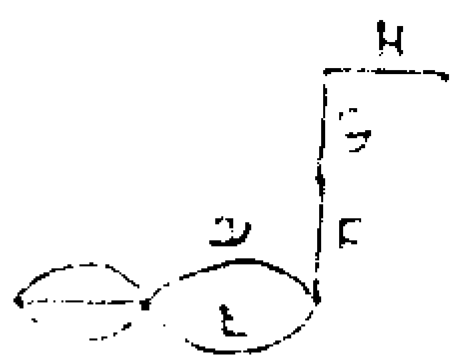
ABCD(1)
∅



T

85H2 (83L7) 5-6-4

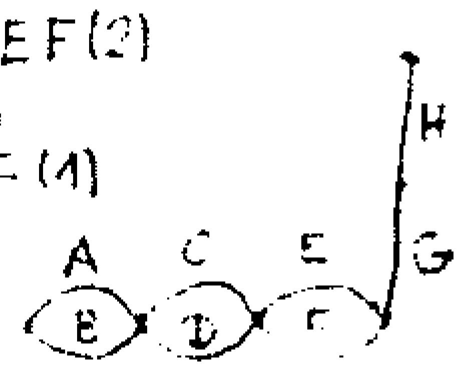
ABCDE(2)
ABC(1) DE(1)
∅



T

85H3 (83L16) 5-8-3

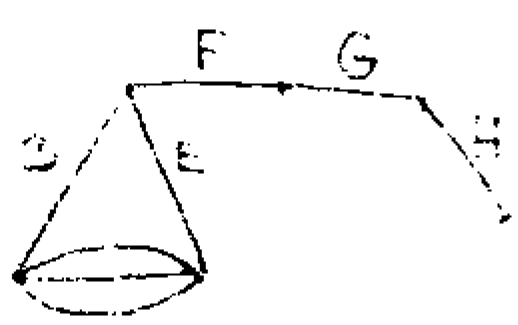
ABCDEF(3)
ABCD(2) ABEF(2) CDEF(2)
AB(1) CD(1) EF(1)
∅



T(AB, CD, EF, G, H)

85H4 (83L9) 6-7-6

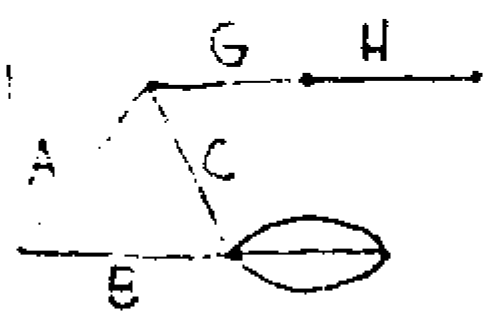
ABCDE(2)
ABC(1)
∅



T

85H5 (83L12) 6-9-4

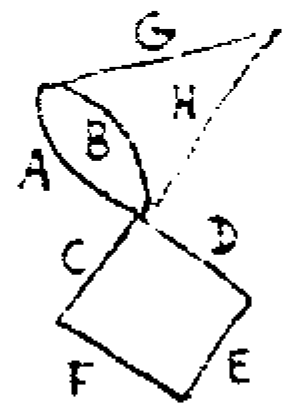
ABCDEF(3)
ABC(2) DEF(1)
∅



T

85H34 (83H10) 9-20-4

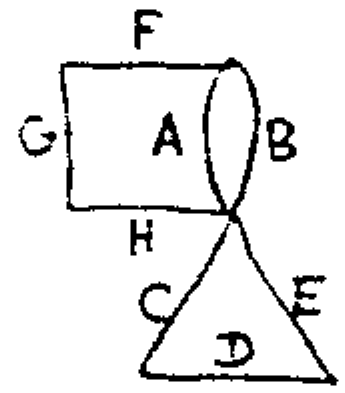
S(5)
ABGH(2) ABCDEF(4)
AB(1) CDEF(3)
$\emptyset$



T(ABGH, CDEF, CDEF, CDEF, GH)

85H35 (83H12) 9-21-4

S(5)
ABFGH(3) ABCDE(3)
AB(1) CDE(2)
$\emptyset$



T(ABFGH, CDE, CDE, FGH, FGH)

85H36 (83L62) 14-19-8

ABCDEFG(4)
ABCD(2)
AB(1)
$\emptyset$

NB(ACDEFG / EF(2))

T

85H37 (83L72) 14-21-8

ABCDEFG(4)
ABCDE(3)
ABC(2) DE(1)
$\emptyset$

NB(ABCDFG / FG(2))

T(ABCFG, ABCFG, DEFG, FG, H)

85H38 (83H25) 14-24-5

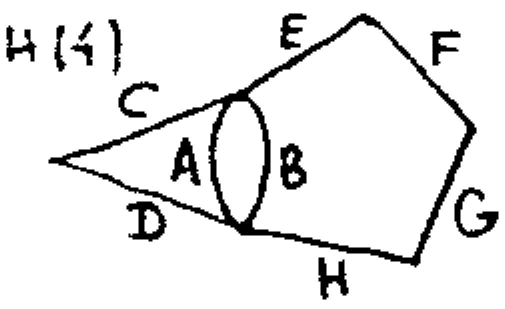
S(5)
ABCFGH(4) ABCDE(3)
ABC(2) DE(1)
$\emptyset$

NB(ABCFGH / FG(2))

T(ABCFGH, ABCFGH, FGH, FGH, DE)

85H39 (83H18) 15-22-6

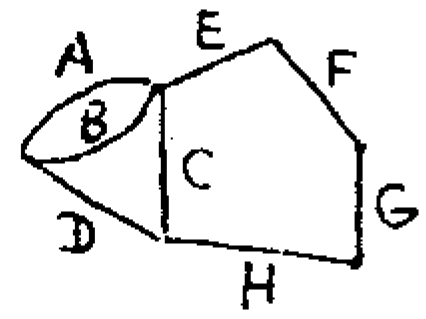
S(5)
ABCD(2) ABEFGH(4)
AB(1)
$\emptyset$



T(ABCDEFGH, EFGH, EFGH, EFGH, CD)

85H40 (83H30) 15-23-6

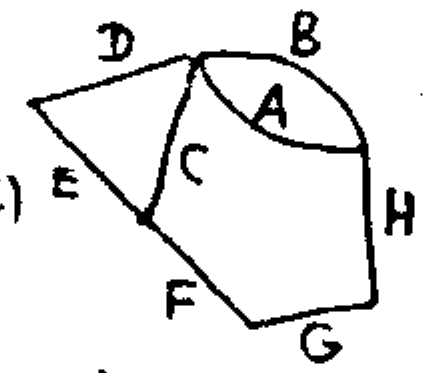
S(5)
ABCD(2) CEFGH(4)
AB(1)
$\emptyset$



T(CDEFGH, EFGH, EFGH, EFGH, ABD)

85H41 (83H31) 15-25-6

S(5)
ABCFGH(4) ABCDE(3)
AB(1) CDE(2)
$\emptyset$



T(CDEFGH, ABFGH, FGH, FGH, DE)

85H42 (83H38) 19-24-8

S(5)
ABCD(2)
AB(1)
$\emptyset$

NB(ACDEFGH / EFG(3))

T

85H43 (83H57) 19-27-8

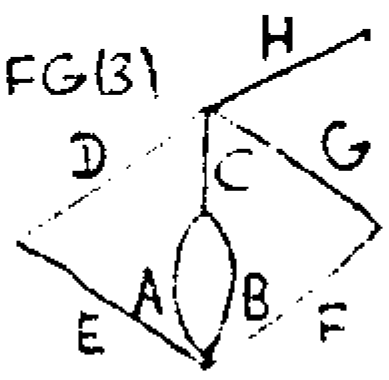
S(5)
ABCDE(3)
ABC(2) DE(1)
$\emptyset$

NB(ABCDFGH / FGH(3))

T(ABCFGH, ABCFGH, DEFGH, FGH, FGH)

85H44 (83L60) 12-20-6

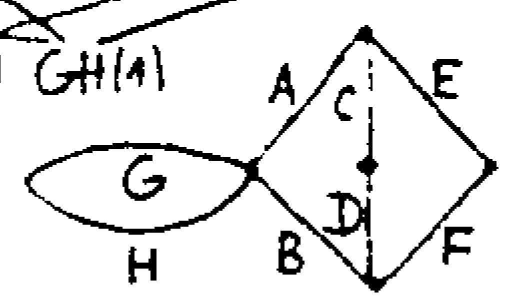
ABCDEFG(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) DEFG(3)
AB(1)
$\emptyset$



T(CDEFG, ABC, DE, FG, H)

85H45 (83H16) 12-24-4

S(5)
ABCDEF(4) ABCDGH(4) ABEFGH(4) CDEFGH(4)
ABCD(3) ABEF(3) CDEF(3) GH(1)
$\emptyset$



T(ABCDEF, AB, CD, EF, GH)

85H46 (83L34) 12-16-10

ABCDEF(3)
AB(1)
$\emptyset$

NB(ABCDEF / AB(1))

T

85H47 (83L70) 12-20-6

ABCDEFG(4)
ABCDE(3) FG(1)
$\emptyset$

NB(ABCDE / A(1))

T

85H20 (83L13) 7-9-8

ABCDE(2)
AB(1)
∅

NB(ACDE / ∅)

T

85H21 (83L24) 7-12-5

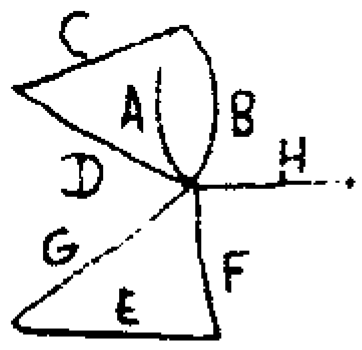
ABCDEF(3)
ABCD(2) EF(1)
∅

NB(ABCD / ∅)

T

85H22 (83L47) 7-15-4

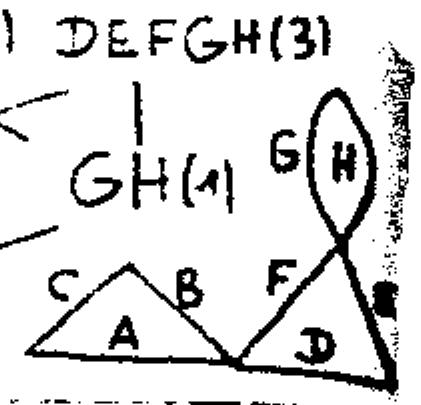
ABCDEFG(4)
ABCD(2) ABEFG(3)
AB(1) EFG(2)
∅



T(ABCD, EFG, EFG, CD, H)

85H23 (83H5) 7-18-3

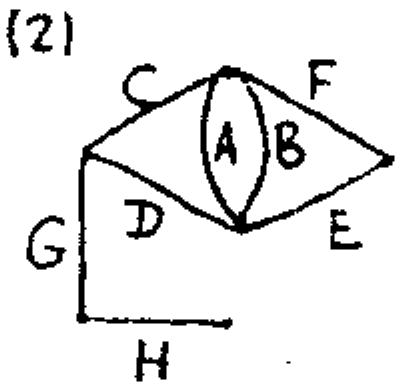
S(5)
ABCDEF(4) ABCGH(3) DEFGH(3)
ABC(2) DEF(2) GH(1)
∅



T(ABC, ABC, DEF, DEF, GH)

85H24 (83L22) 8-12-6

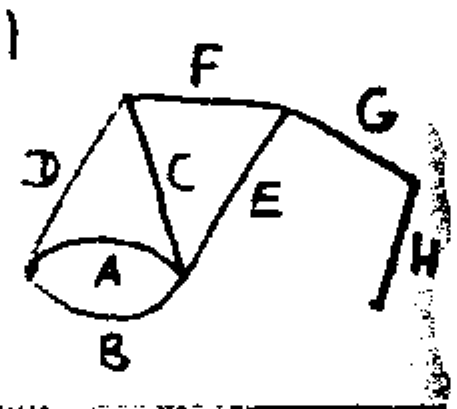
ABCDEF(3)
ABCD(2) ABEF(2)
AB(1)
∅



T(ABCDEF, CD, EF, G, H)

85H25 (83L26) 8-13-6

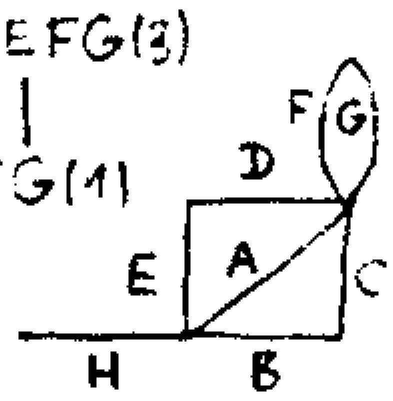
ABCDEF(3)
ABCD(2) CEF(2)
AB(1)
∅



T(CDEF, ABD, EF, G, H)

85H26 (83L49) 8-16-4

ABCDEFG(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) ADEFG(3)
ABC(2) ADE(2) FG(1)
∅



T(ABCDE, BC, DE, FG, H)

85H27 (83L27) 10-14-8

ABCDEF(3)
ABCD(2)
AB(1)
∅

NB(ABCDEF / E(1))

T

85H28 (83L32) 10-15-8

ABCDEF(3)
ABC(2) DE(1)
∅

NB(ABCDF / F(1))

T

85H29 (83L54) 10-18-5

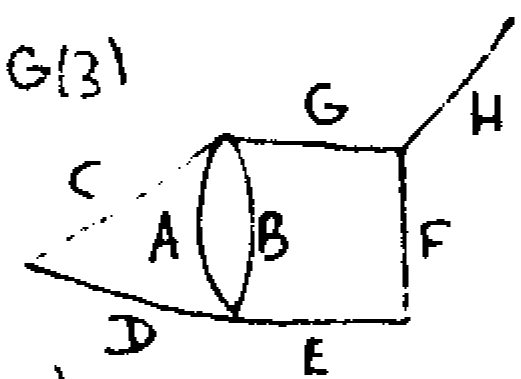
ABCDEFG(4)
ABCFG(3) ABCDE(3)
ABC(2) DE(1)
∅

NB(ABCDEFG / DEF(2))

T(ABCFG, ABC, DE, FG, H)

85H30 (83L51) 11-17-6

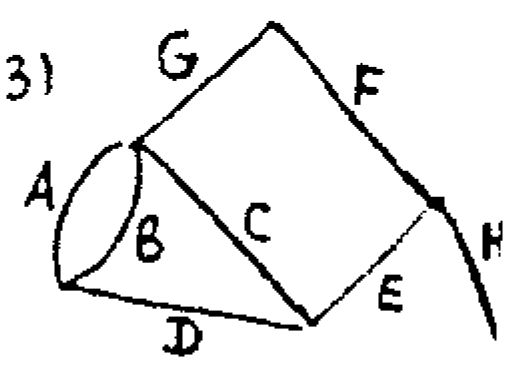
ABCDEFG(4)
ABCD(2) ABEFG(3)
AB(1)
∅



T(ABCDEFG, EFG, EFG, CD, H)

85H31 (83L58) 11-18-6

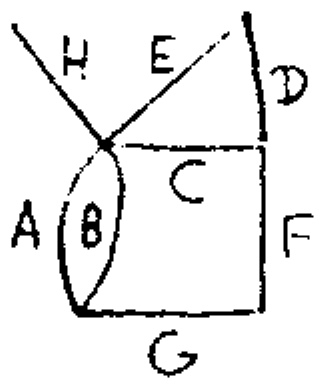
ABCDEFG(4)
ABCD(2) CEFG(3)
AB(1)
∅



T(CDEFG, ABD, EFG, EFG, H)

85H32 (83L59) 11-19-6

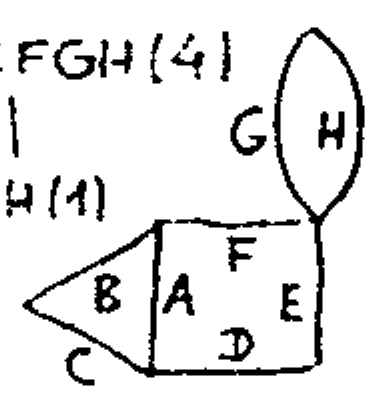
ABCDEFG(4)
ABCFG(3) ABCDE(3)
AB(1) CDE(2)
∅



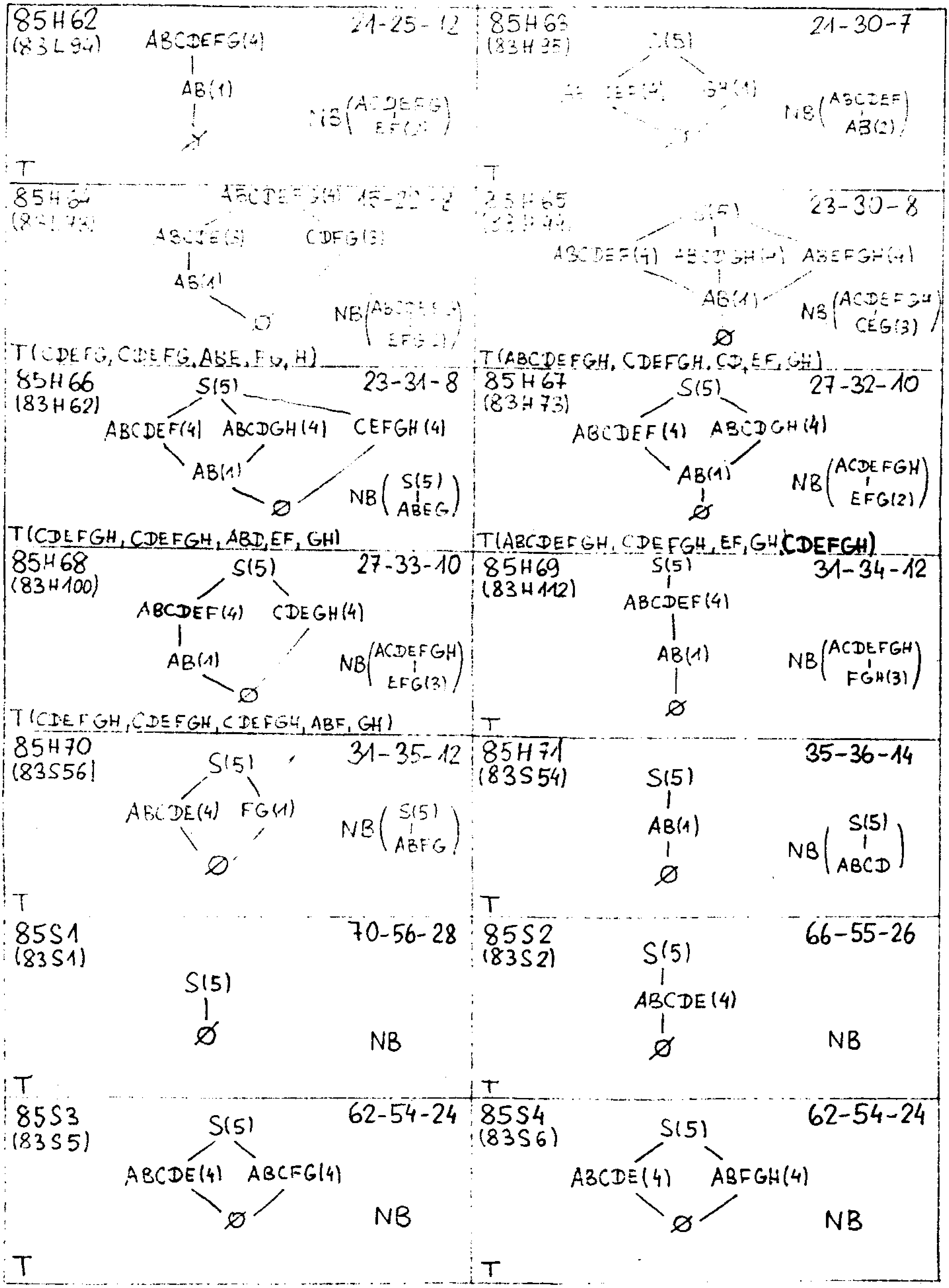
T(CDEFG, ABFG, DE, FG, H)

85H33 (83H14) 11-22-4

S(5)
ABCDEF(4) ABCGH(3) ADEFGH(4)
ABC(2) ADEF(3) GH(1)
∅

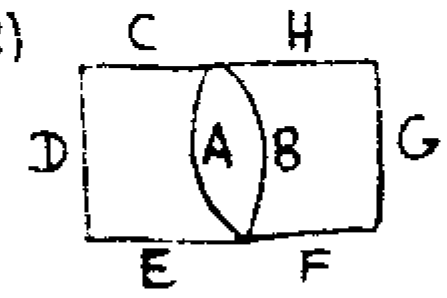


T(ABCDEF, DEF, DEF, BC, GH)


85H62
(83L94)
21-25-12
ABCDEFG(4)
AB(1)
T
85H63
(83H35)
21-30-7
NB(ABCDEF / AB(2))
T
85H64
23-30-8
ABCDEFGH
CDFG(3)
AB(1)
NB
T(CDEFG, CDEFG, ABE, FG, H)
85H65
23-30-8
S(5)
ABCDEF(4)
ABEFGH(4)
AB(1)
NB(ACDEFGH / CEG(3))
∅
T(ABCDEFGH, CDEFGH, CD, EF, GH)
85H66
(83H62)
23-31-8
S(5)
ABCDEF(4)
ABCDGH(4)
CEFGH(4)
AB(1)
∅
NB(S(5) / ABEG)
T(CDEFGH, CDEFGH, ABD, EF, GH)
85H67
(83H73)
27-32-10
S(5)
ABCDEF(4)
ABCDGH(4)
AB(1)
∅
NB(ACDEFGH / EFG(2))
T(ABCDEFGH, CDEFGH, EF, GH, CDEFGH)
85H68
(83H100)
27-33-10
S(5)
ABCDEF(4)
CDEGH(4)
AB(1)
∅
NB(ACDEFGH / EFG(3))
T(CDEFGH, CDEFGH, CDEFGH, ABF, GH)
85H69
(83H112)
31-34-12
S(5)
ABCDEF(4)
AB(1)
∅
NB(ACDEFGH / FGH(3))
T
85H70
(83S56)
31-35-12
S(5)
ABCDE(4)
FG(1)
∅
NB(S(5) / ABFG)
T
85H71
(83S54)
35-36-14
S(5)
AB(1)
∅
NB(S(5) / ABCD)
T
85S1
(83S1)
70-56-28
S(5)
∅
NB
T
85S2
(83S2)
66-55-26
S(5)
ABCDE(4)
∅
NB
T
85S3
(83S5)
62-54-24
S(5)
ABCDE(4)
ABCFG(4)
∅
NB
T
85S4
(83S6)
62-54-24
S(5)
ABCDE(4)
ABFGH(4)
∅
NB
T

85H48 (83H19) 15-24-6

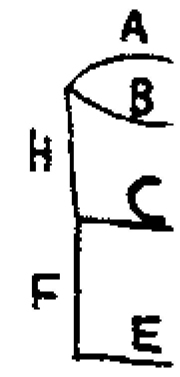
S(5)
ABCDE(3) ABFGH(3)
AB(1)
∅



T(ABCDEFGH, CDE, CDE, FGH, FGH)

85H49 (23H32) 15-26-

S(5)
ABCGH(3) ABCDEF(4)
AB(1) CDEF(3)
∅



T(CDEFGH, ABFGH, DEF, DEF, GH)

85H50 (83L64) 15-21-8

ABCDEFG(4)
ABCDE(3) ABCFG(3)
AB(1)
∅

NB(ACDEFG | DF(2))

T(ABCDEFG, CDEFG, DE, FG, H)

85H51 (83H28) 15-26-

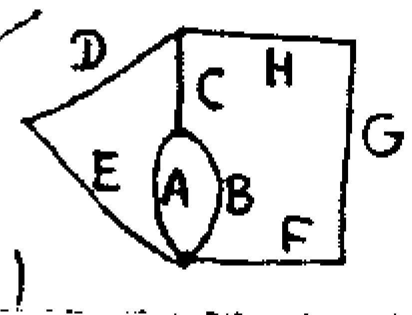
S(5)
ABCDGH(4) ABCDEF(4) CDEFGH(4)
ABCD(3) GH(1) CDEF(3)
∅

NB(ABC | AE

T(ABCDEF, ABCDEF, AB, EE, GH)

85H52 (83H33) 17-27-6

S(5)
ABCDE(3) ABCFGH(4) DEFGH(4)
AB(1)
∅



T(CDEFGH, ABC, FGH, FGH, DE)

85H53 (83H35) 17-28-

S(5)
ABCDGH(4) ABEFGH(4) ABCDEF(4)
AB(1) CDEF(3)
∅

T(CDEFGH, ABGH, CD, EF, GH)

85H54 (83L77) 18-23-10

ABCDEFG(4)
ABCDE(3)
AB(1)
∅

NB(ACDEFG | FG(2))

T

85H55 (83L89) 18-24-

ABCDEFG(4)
ABCD(3) EF(1)
∅

NB(ABCDEG | AE(2)

T

85H56 (83H53) 18-28-6

S(5)
ABCDGH(4) ABCDEF(4)
ABCD(3) EF(1)
∅

NB(ABCDGH | GH(2))

T(ABCDGH, ABCDGH, ABCDGH, EF, GH)

85H57 (83H58) 21-29-

S(5)
ABCDE(3) DEFGH(4)
AB(1)
∅

NB(ACDEFG | CFG(

T(CDEFGH, CDEFGH, ABC, FGH, FGH)

85H58 (83H40) 21-28-8

S(5)
ABCDE(3) ABCFGH(4)
AB(1)
∅

NB(ACDEFGH | DFG(3))

T(ABCDEFGH, CDEFGH, FGH, FGH, DE)

85H59 (83H60) 21-30-

S(5)
ABCDGH(4) ABCDEF(4)
AB(1) CDEF(3)
∅

NB(ACDE | EGH

T(CDEFGH, CDEFGH, ABGH, EF, GH)

85H60 (83H71) 25-30-10

S(5)
ABCDE(3)
AB(1)
∅

NB(ACDEFGH | FGH(3))

T

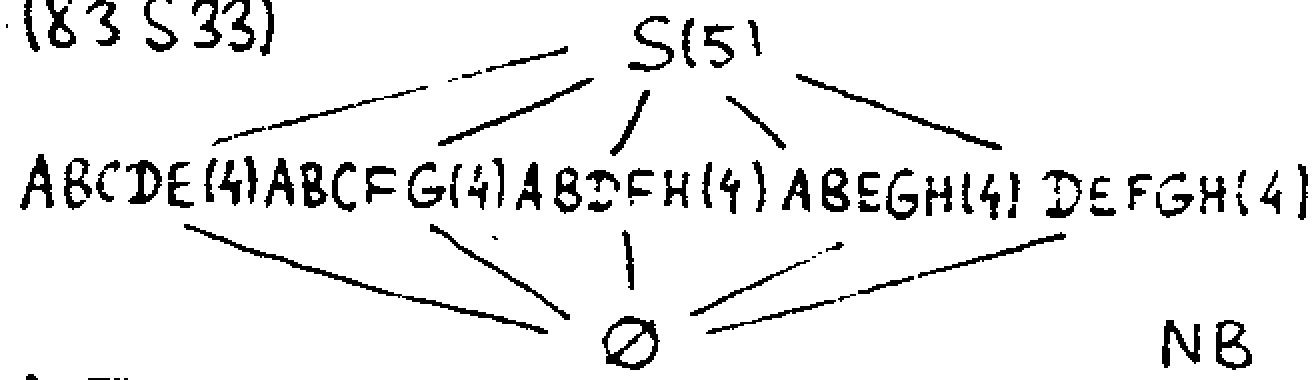
85H61 (83H99) 25-32-

S(5)
ABCDEF(4)
ABCD(3) EF(1)
∅

NB(ABCDE | AGH(

T(ABCDGH, ABCDGH, ABCDGH, EFGH, GH)

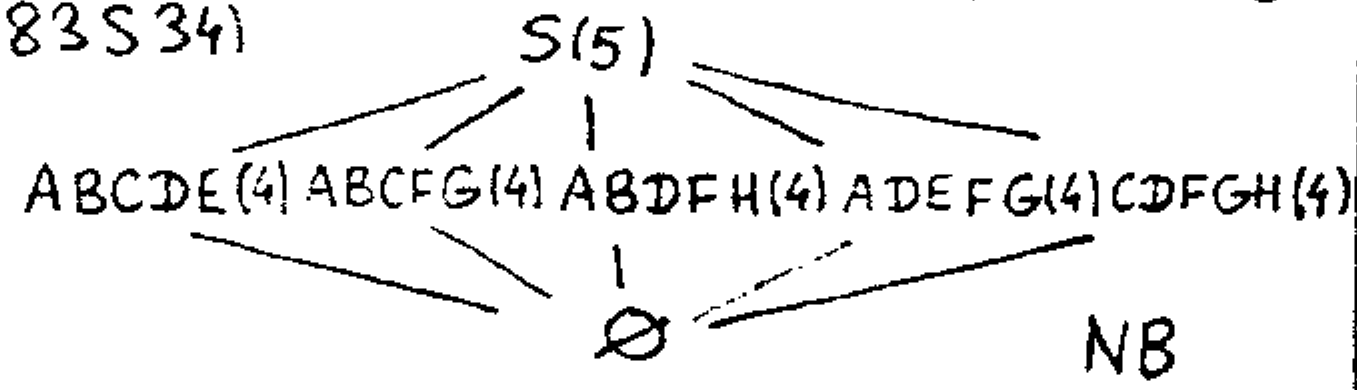
85S19
(83S33)
50-51-18



NB

NT

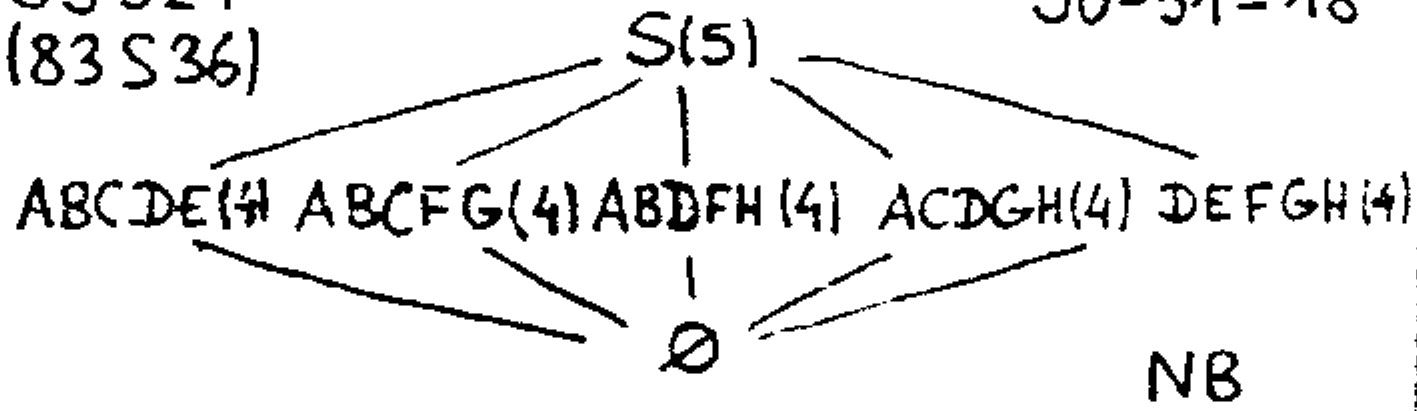
85S20
(83S34)
50-51-18



NB

T(ABE,BCH,CEG,DEH,FGH)

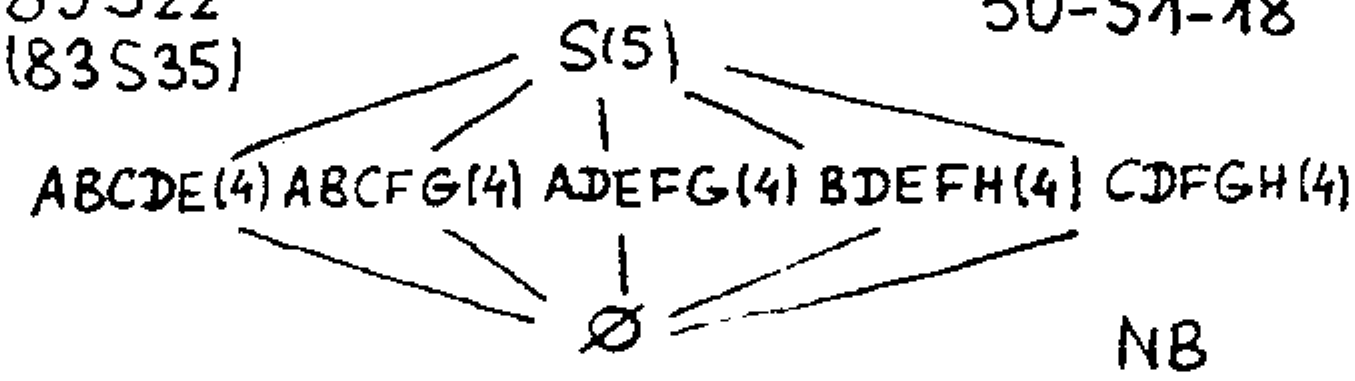
85S21
(83S36)
50-51-18



NB

T(ABC,BEF,CEG,DEH,FGH)

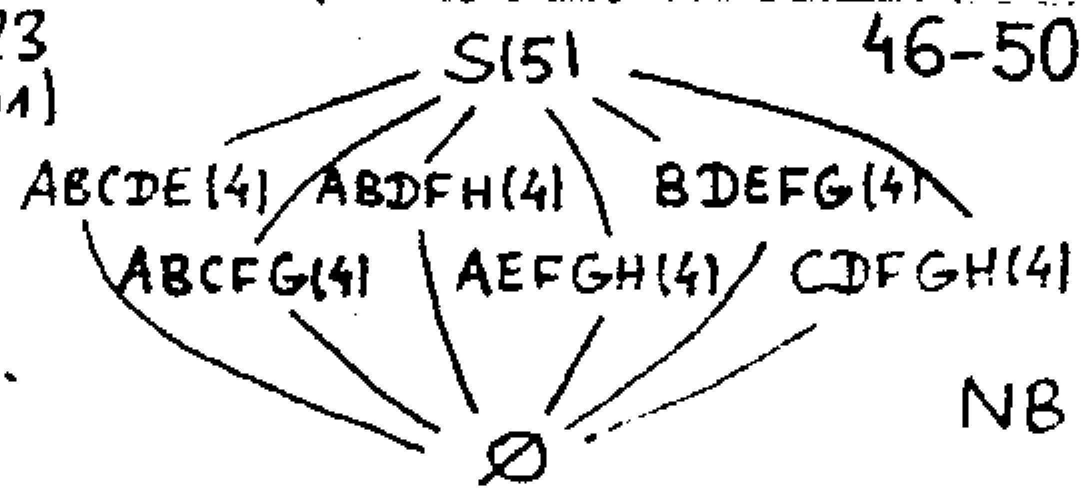
85S22
(83S35)
50-51-18



NB

T(ABE,ACG,BCH,DEH,FGH)

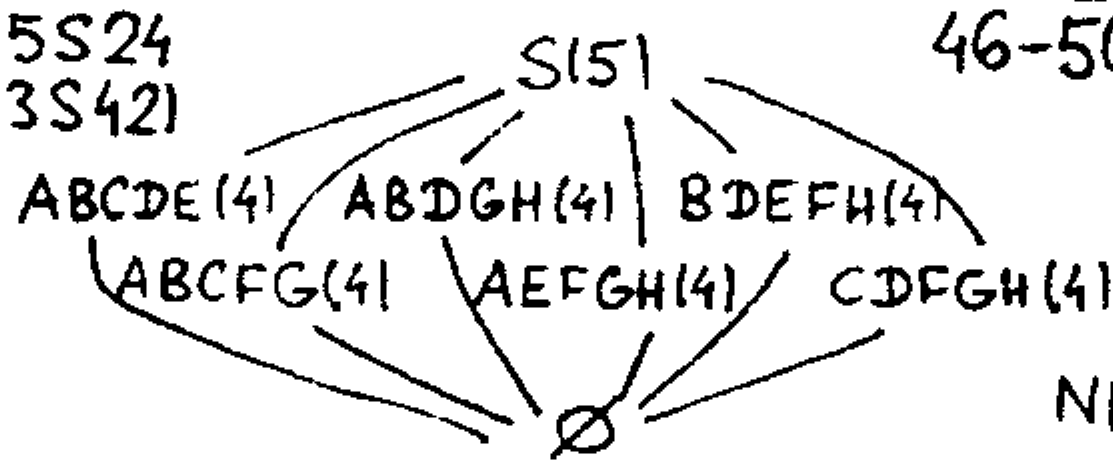
85S23
(83S41)
46-50-16



NB

NT

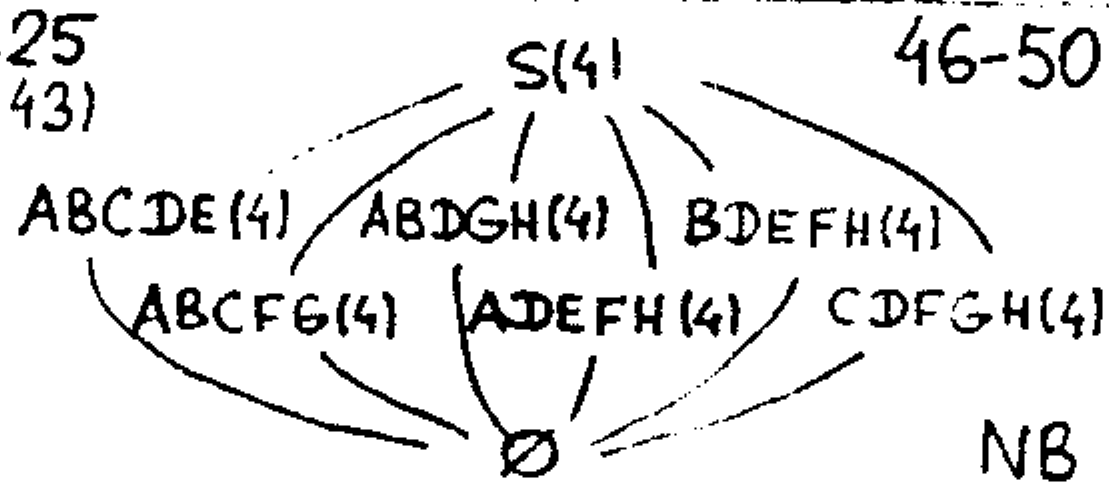
85S24
(83S42)
46-50-16



NB

NT

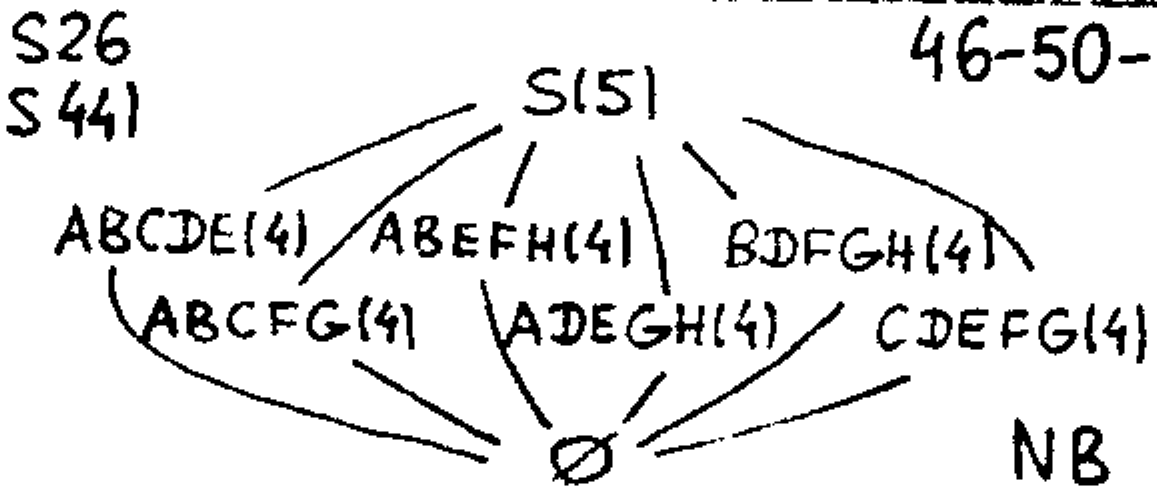
85S25
(83S43)
46-50-16



NB

NT

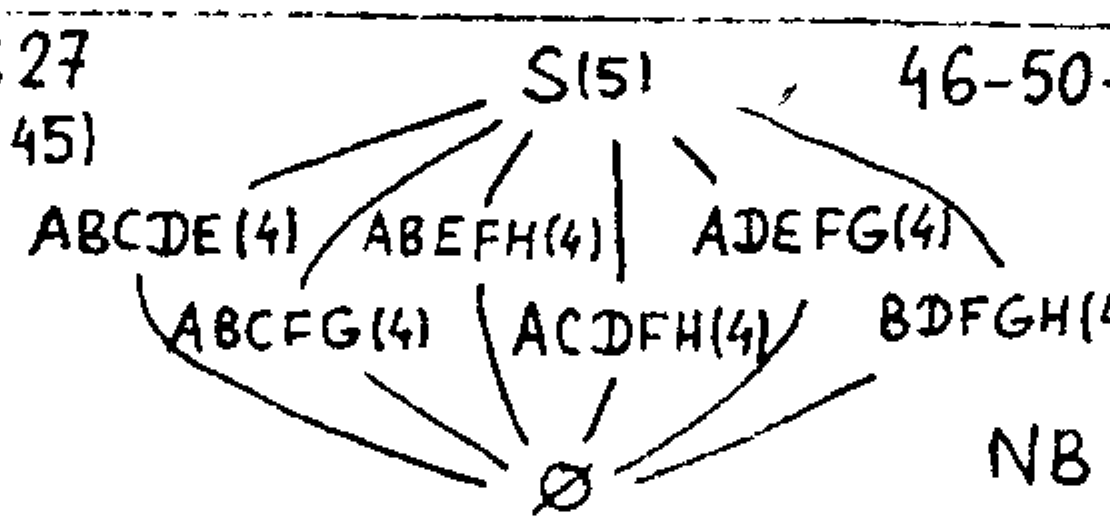
85S26
(83S44)
46-50-16



NB

NT

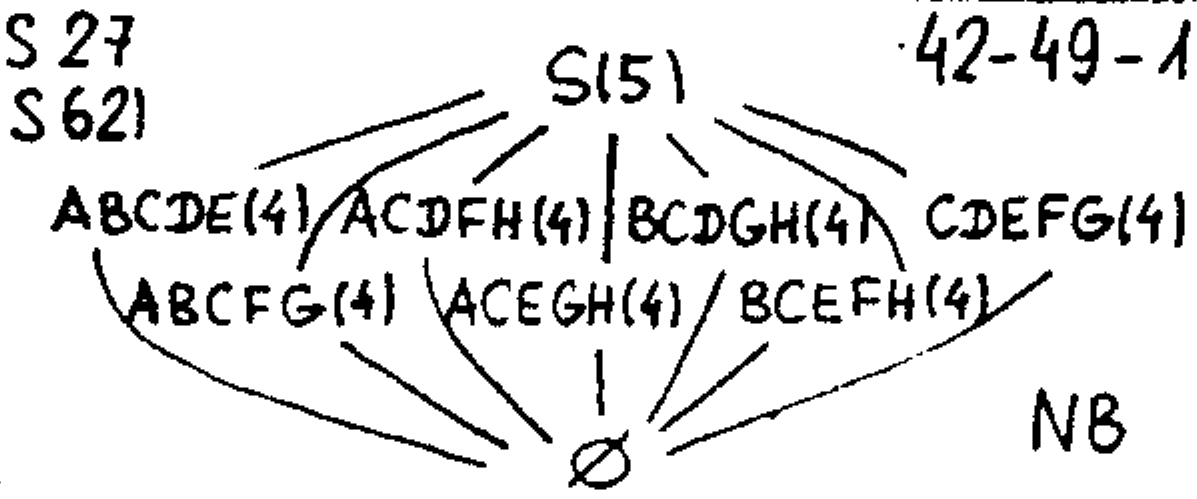
85S27
(83S45)
46-50-16



NB

NT

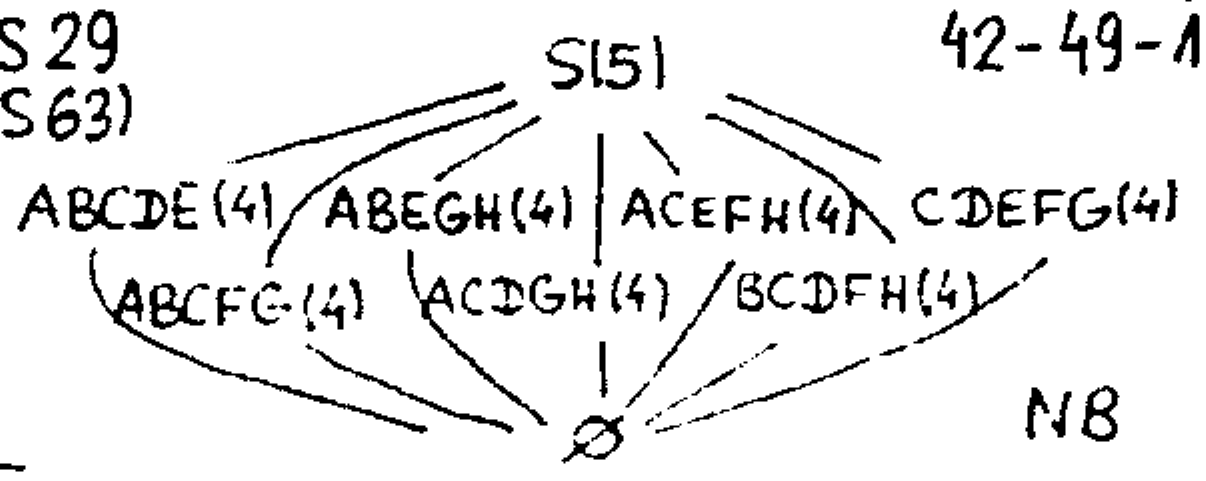
85S27
(83S62)
42-49-14



NB

NT

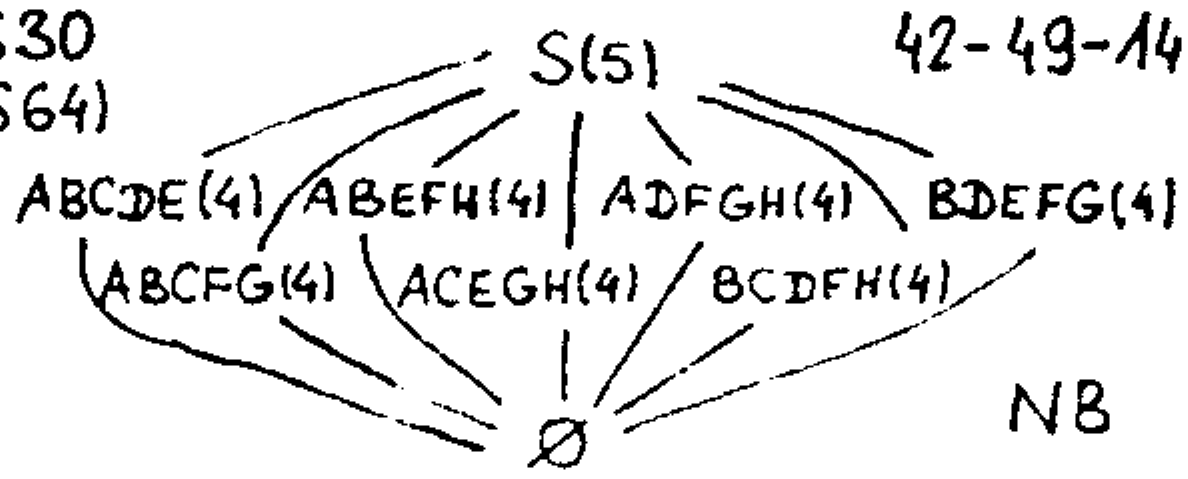
85S29
(83S63)
42-49-14



NB

NT

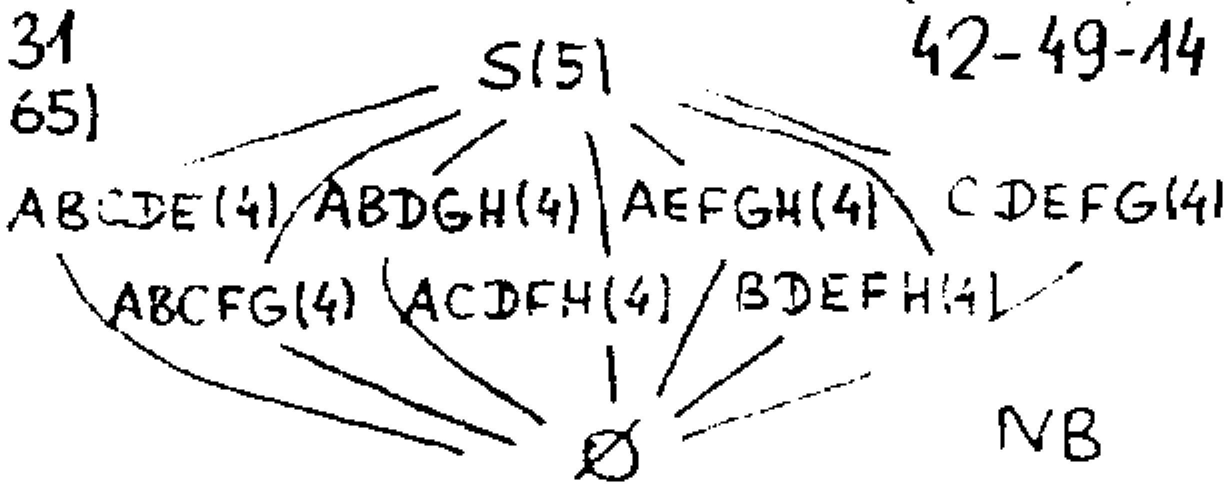
85S30
(83S64)
42-49-14



NB

NT

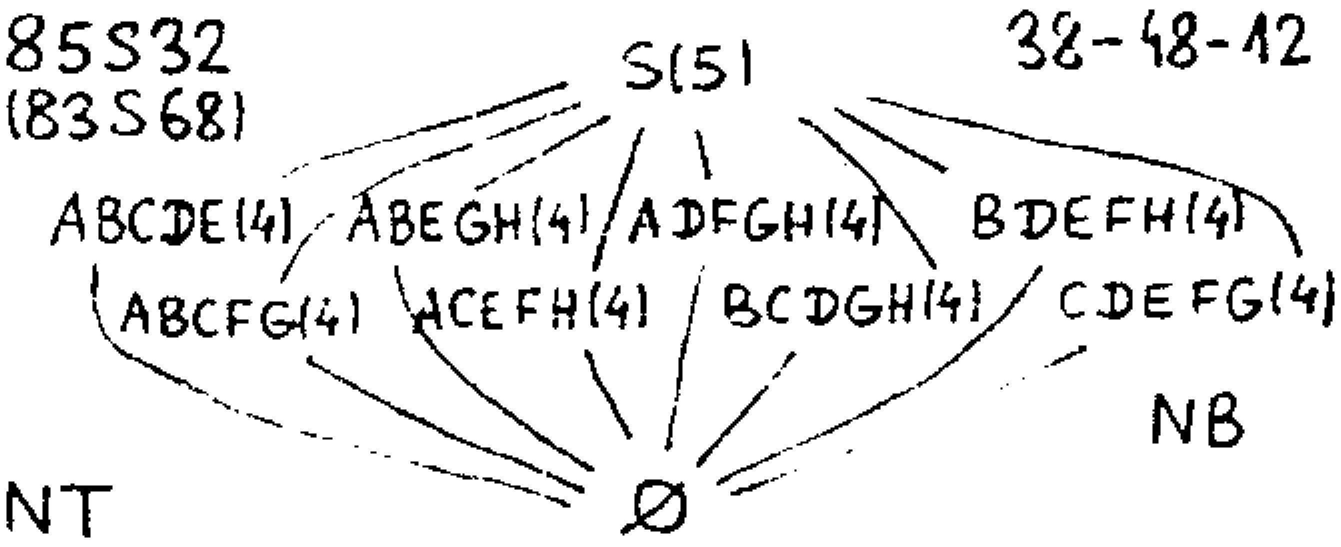
85S31
(83S65)
42-49-14



NB

NT

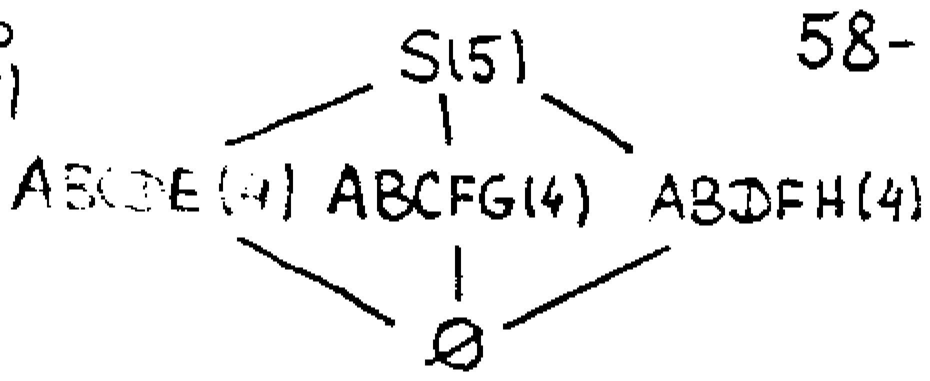
85S32
(83S68)
38-48-12



NB

NT

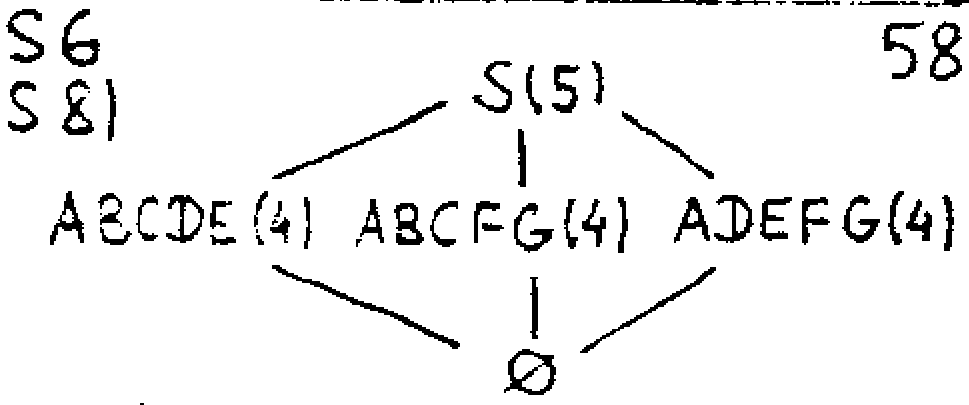
85S5 (83S7) 58-53-22



NB

T(ABCDEFGH, ABCDEFGH, CEG, DEH, FGH)

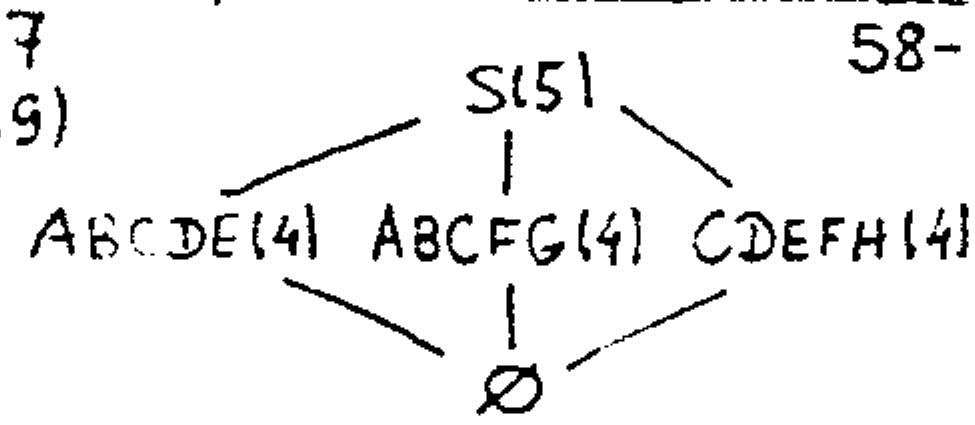
85S6 (83S8) 58-53-22



NB

T(ABCDEFGH, ABCDEFGH, BCH, DEH, FGH)

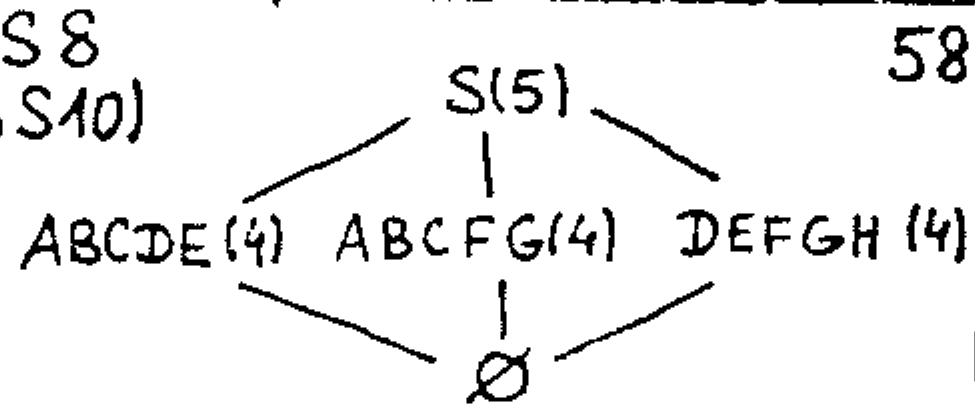
85S7 (83S9) 58-53-22



NB

T(ABCDEFGH, ABCDEFGH, ABG, DEH, FGH)

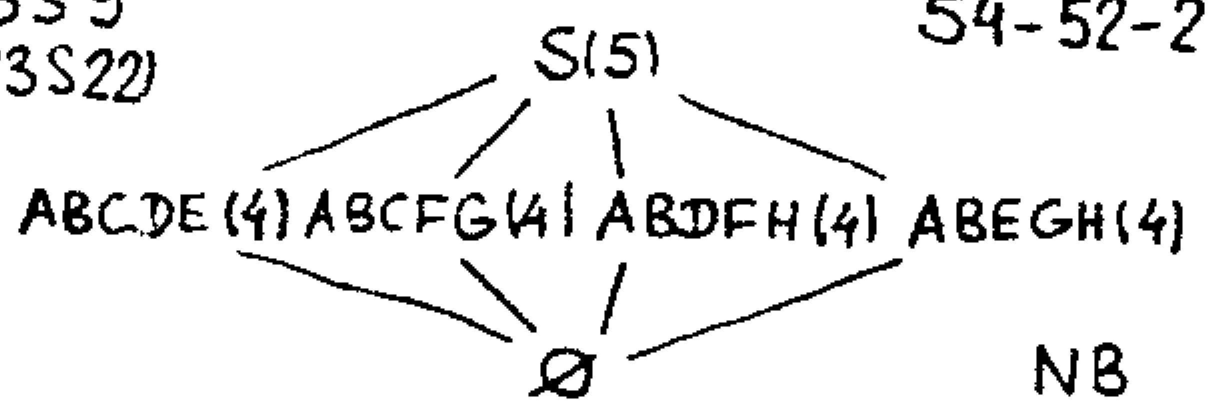
85S8 (83S10) 58-53-22



NB

T(ABCDEFGH, ABCDEFGH, ABC, DEH, FGH)

85S9 (83S22) 54-52-20



NB

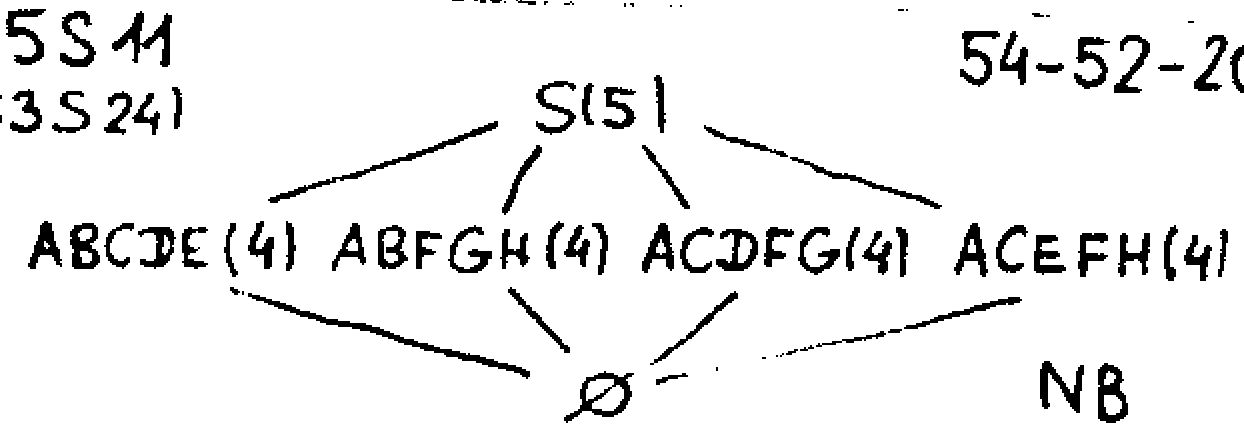
NT

85S10 (83S23) 54-52-20

NB

T(ABCDEFGH, ABH, BDG, CDH, FGH)

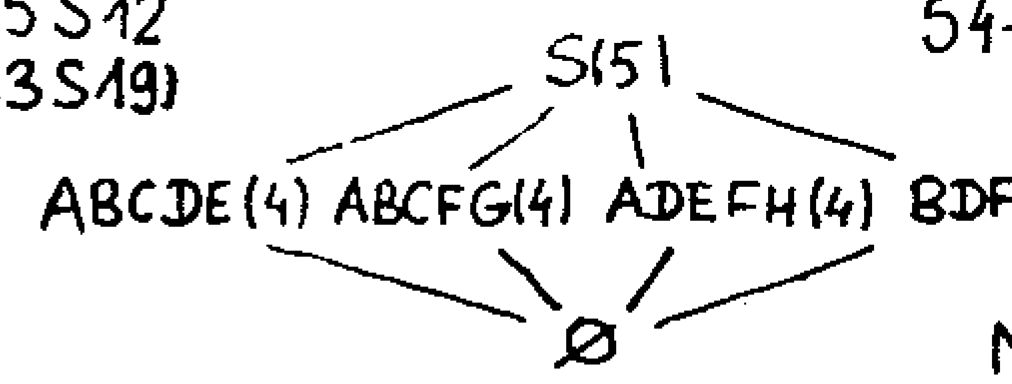
85S11 (83S24) 54-52-20



NB

T(ABCDEFGH, BDG, BEH, CDE, FGH)

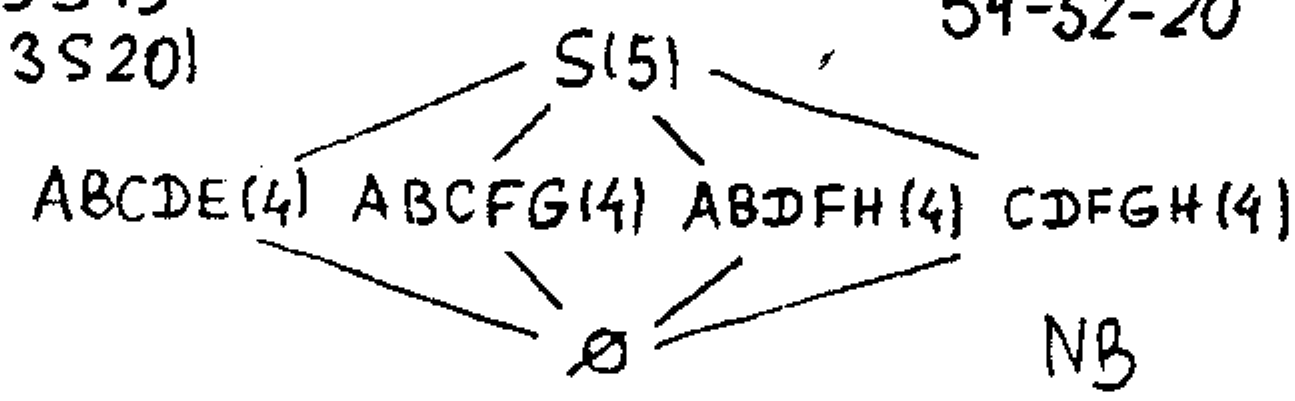
85S12 (83S19) 54-52-20



NB

T(ABCDEFGH, ACE, BCG, DEH, FGH)

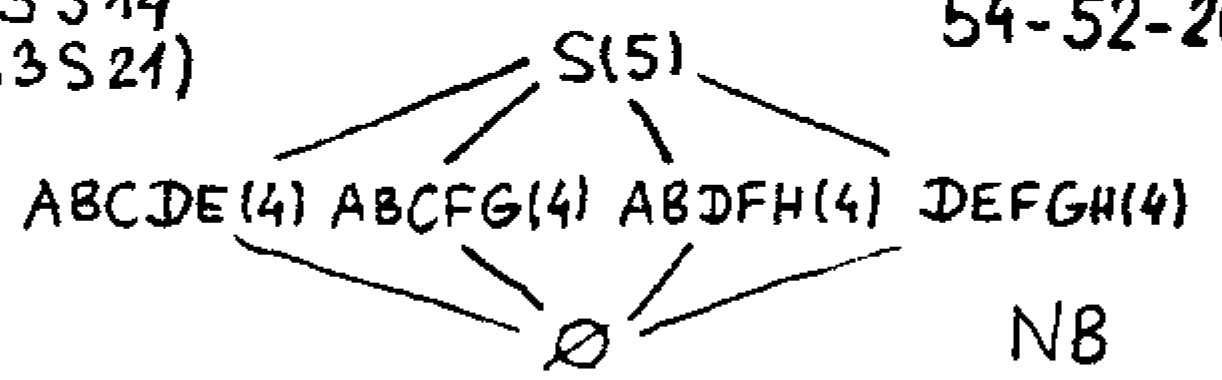
85S13 (83S20) 54-52-20



NB

T(ABCDEFGH, ABE, CEG, DEH, FGH)

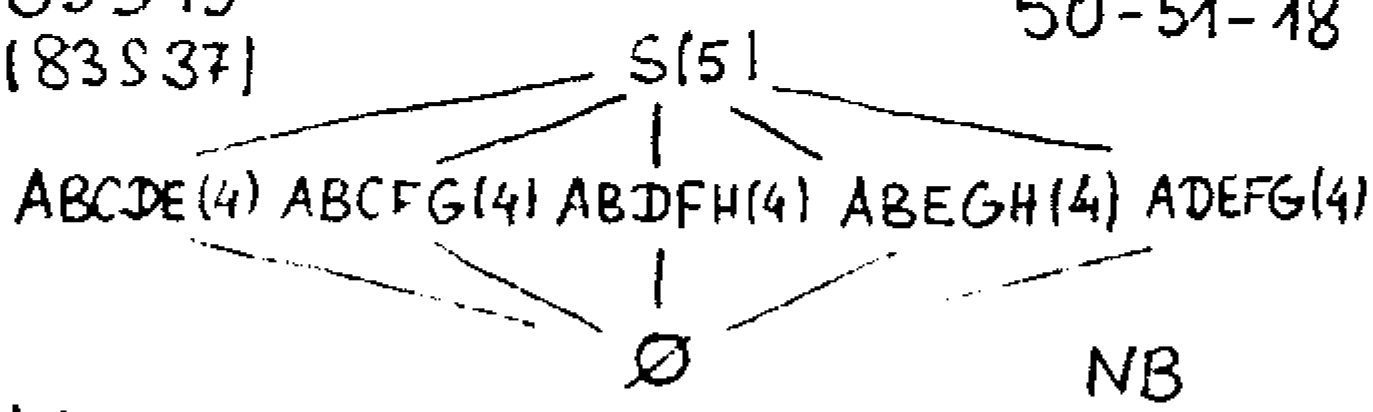
85S14 (83S21) 54-52-20



NB

T(ABCDEFGH, ABC, CEG, DEH, FGH)

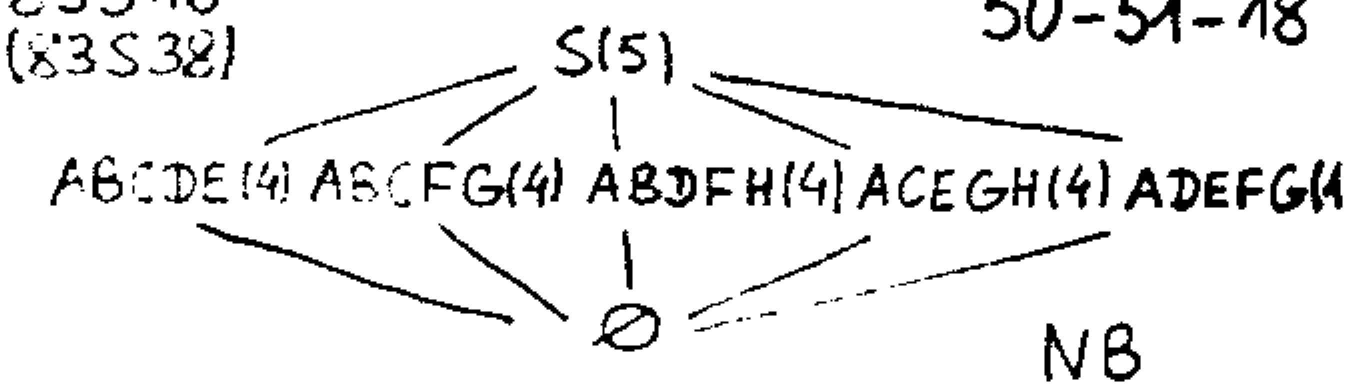
85S15 (83S37) 50-51-18



NB

NT

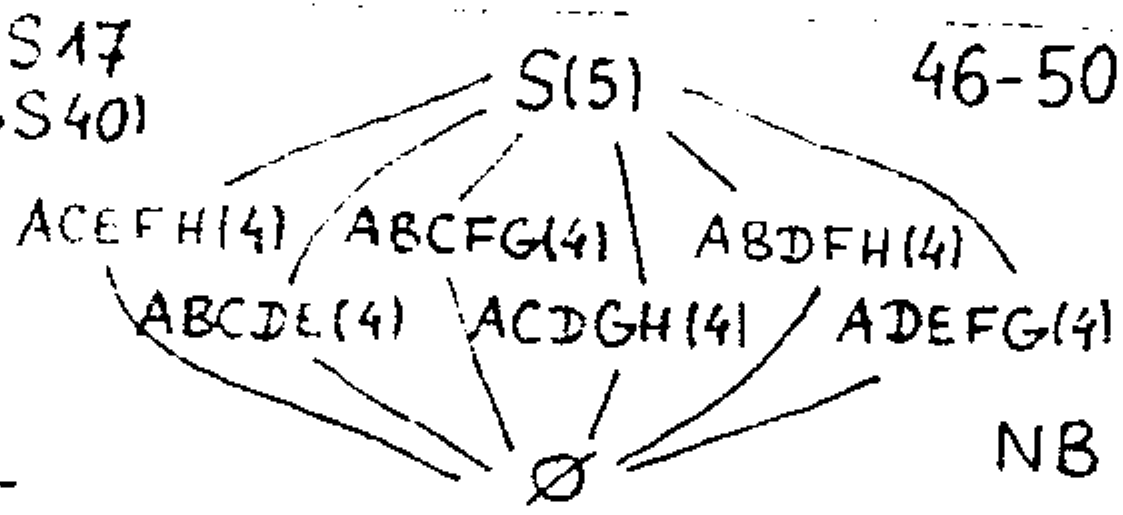
85S16 (83S38) 50-51-18



NB

NT

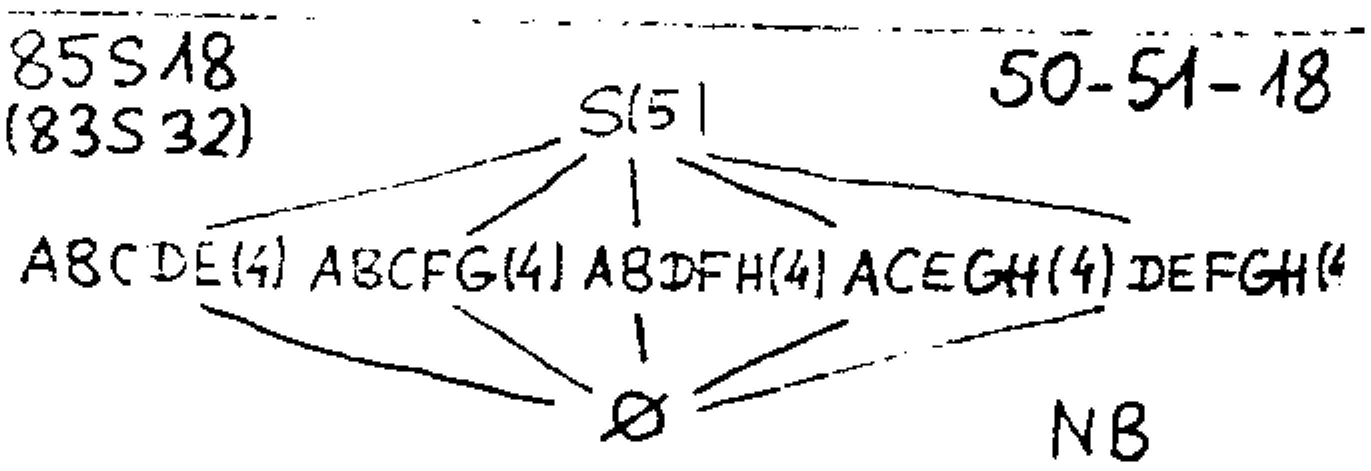
85S17 (83S40) 46-50-16



NB

NT

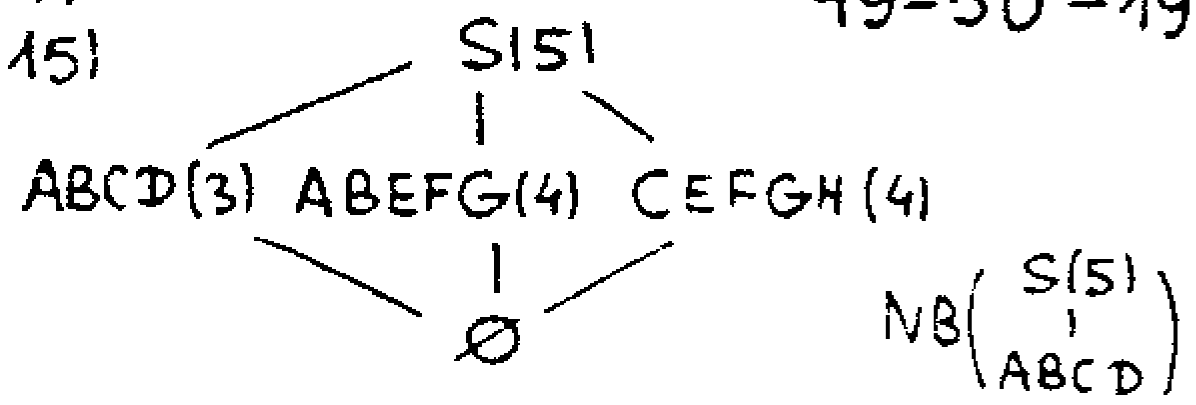
85S18 (83S32) 50-51-18



NB

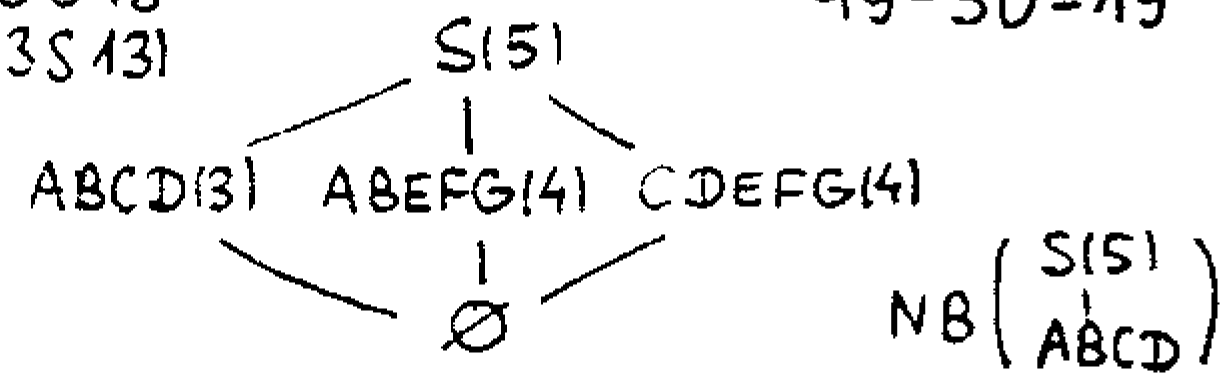
T(ABC, BDF, CEG, DEH, FGH)

85S47 (83S15) 49-50-19



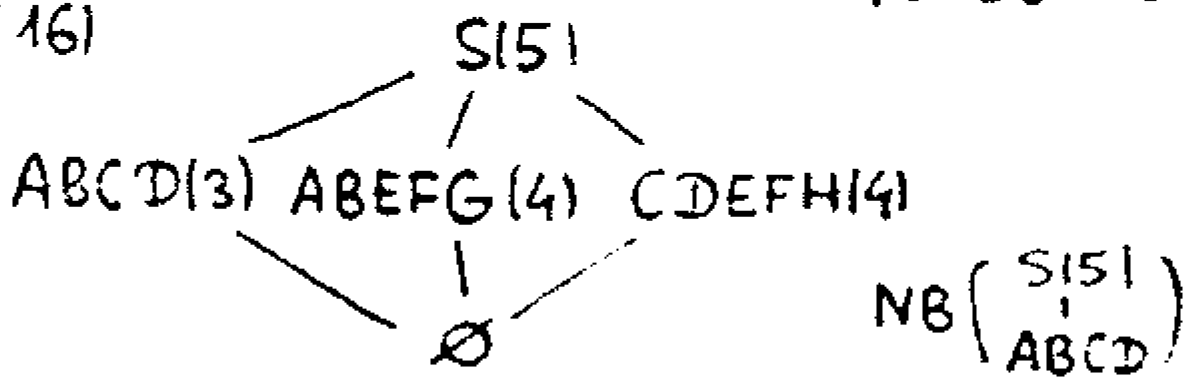
T(ABCDEFGH, EFGH, EFGH, ABD, CDH)

85S48 (83S13) 49-50-19



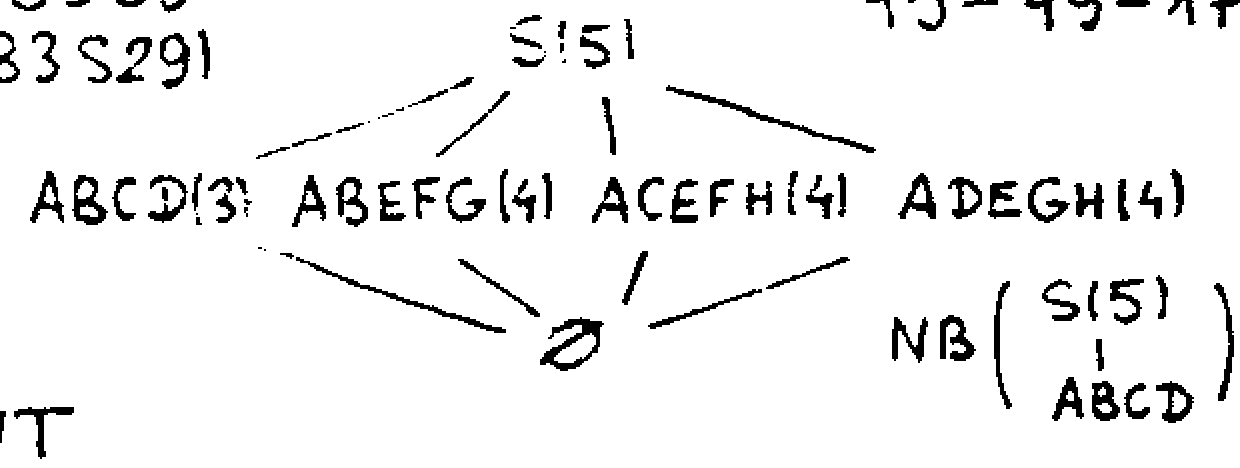
T(ABCDEFGH, EFGH, EFGH, ABH, CDH)

85S49 (83S16) 49-50-19



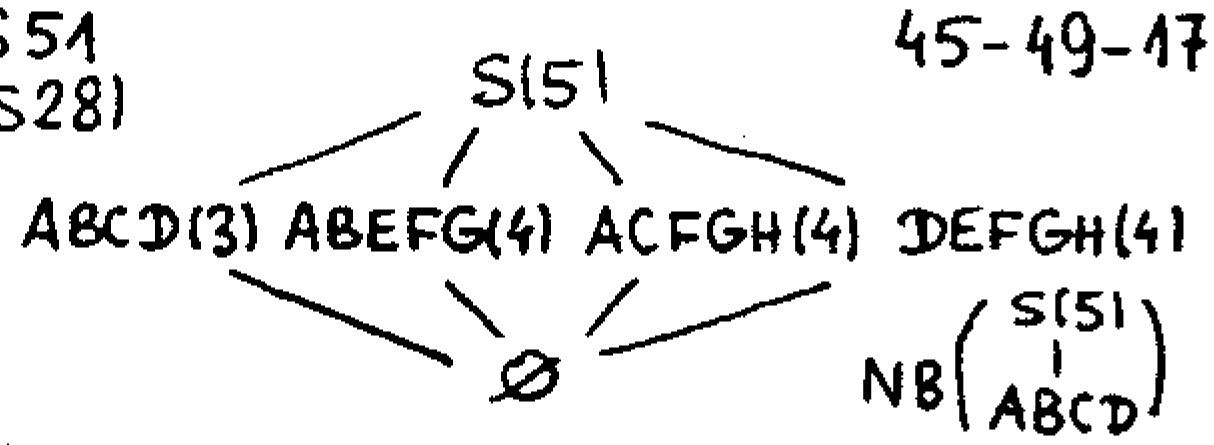
T(ABCDEFGH, EFGH, EFGH, ABG, CDH)

85S50 (83S29) 45-49-17



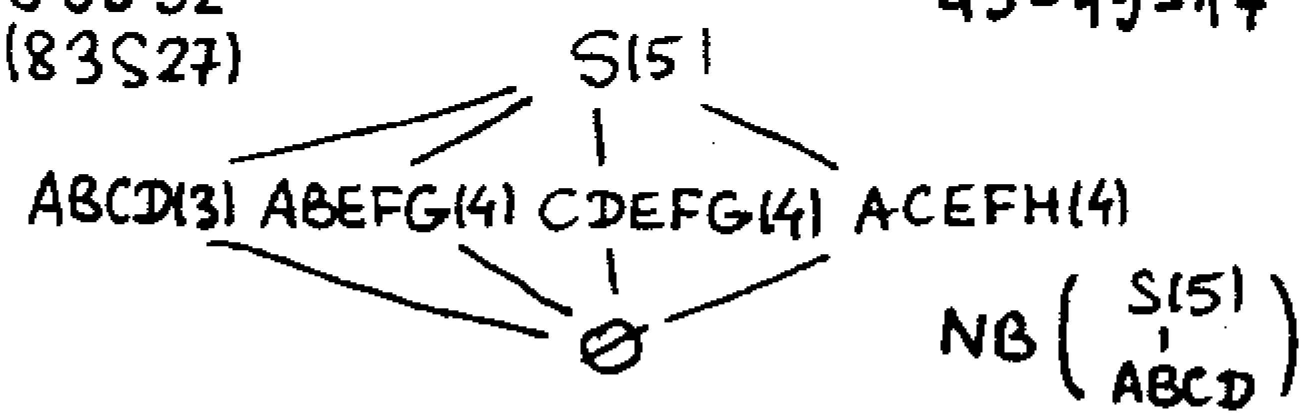
NT

85S51 (83S28) 45-49-17



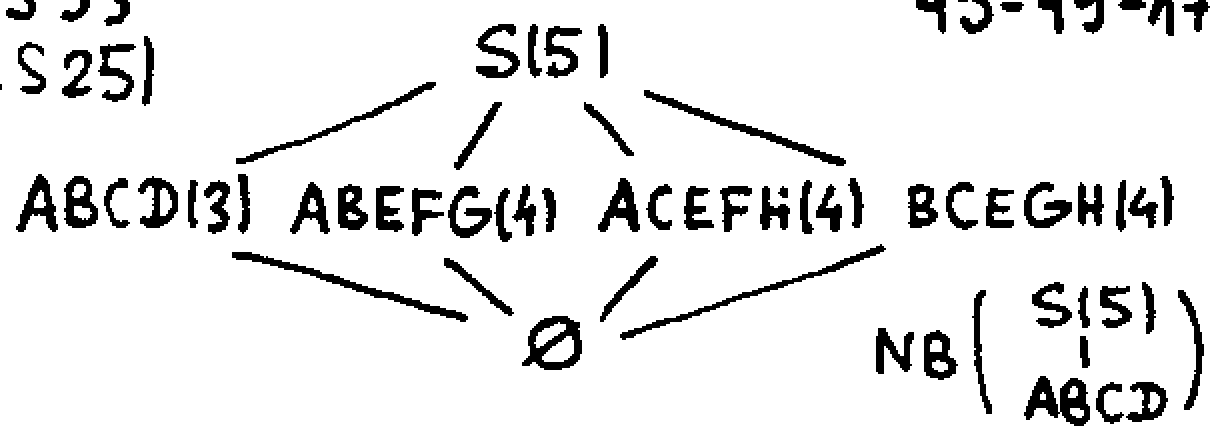
T(EFGH, EFGH, ABC, BDE, CDH)

85S52 (83S27) 45-49-17



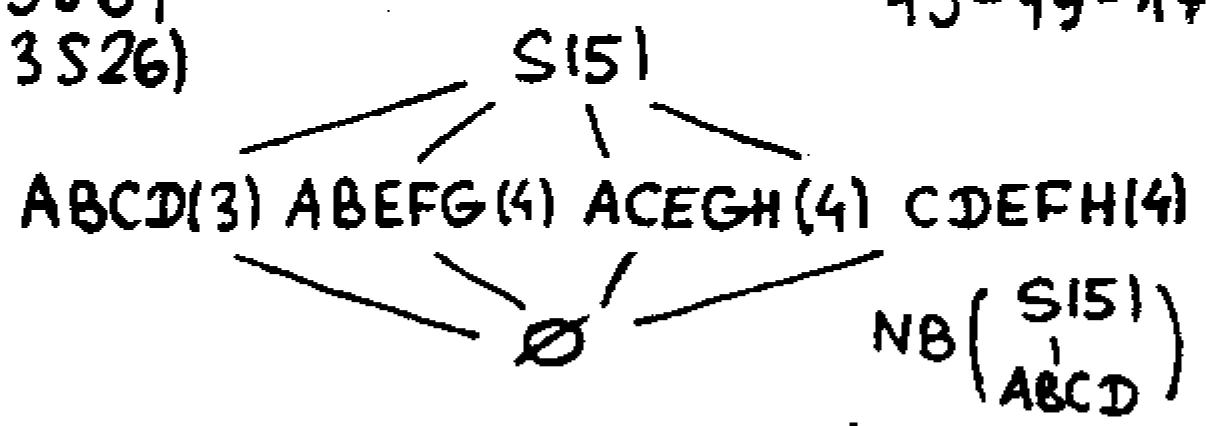
T(EFGH, EFGH, ABH, BDG, CDH)

85S53 (83S25) 45-49-17



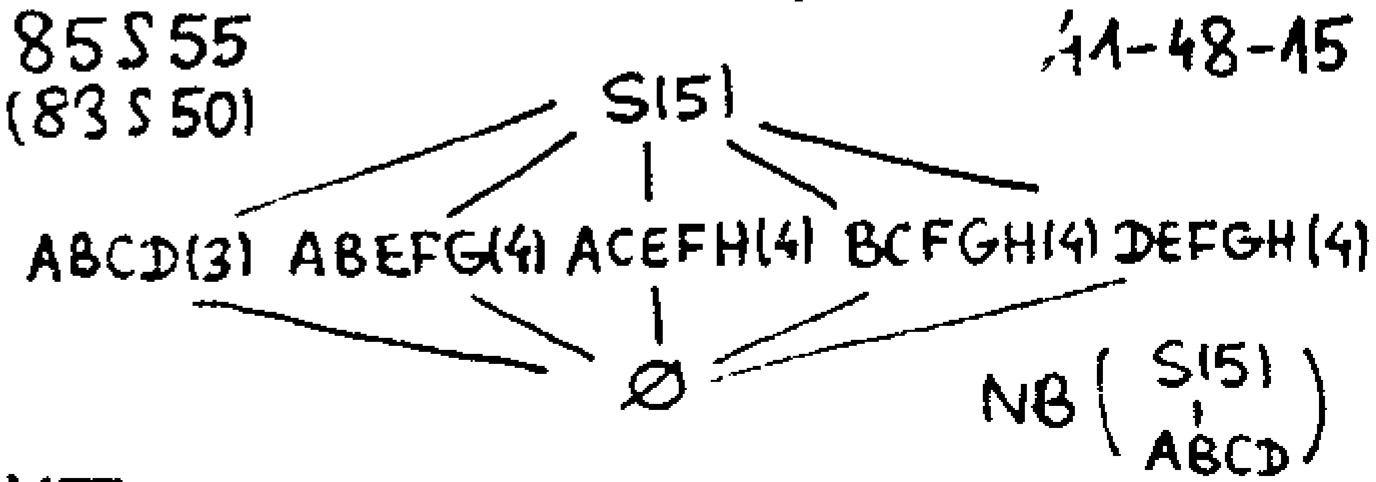
T(EFGH, EFGH, ADF, BDG, CDH)

85S54 (83S26) 45-49-17



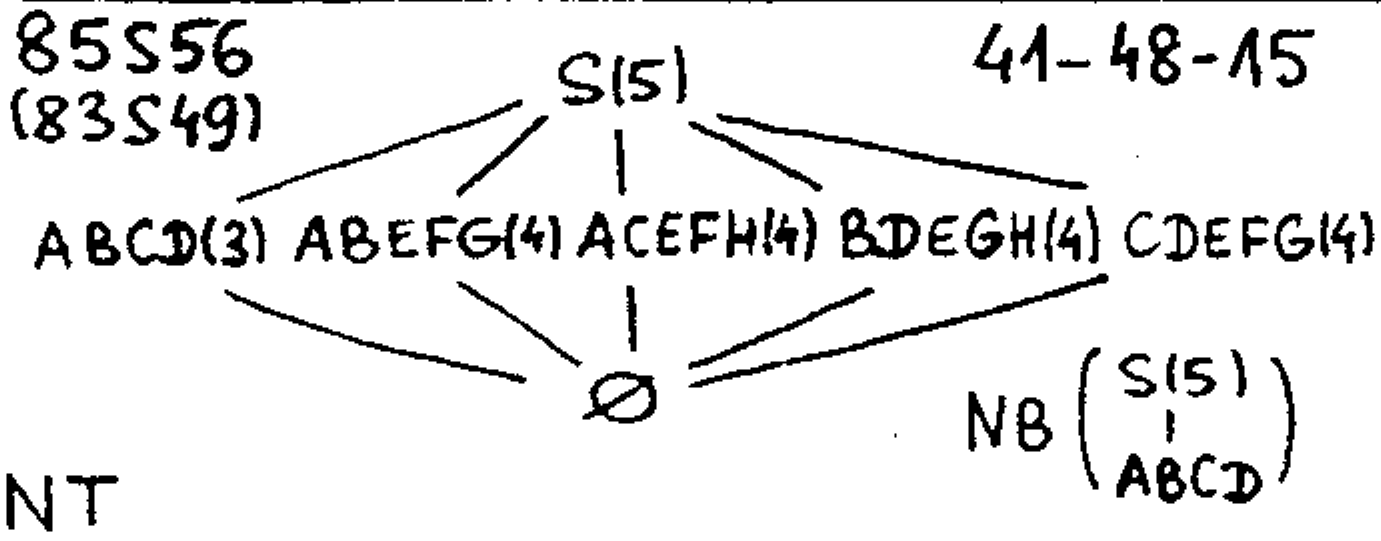
T(EFGH, EFGH, ABG, BDF, CDH)

85S55 (83S50) 41-48-15



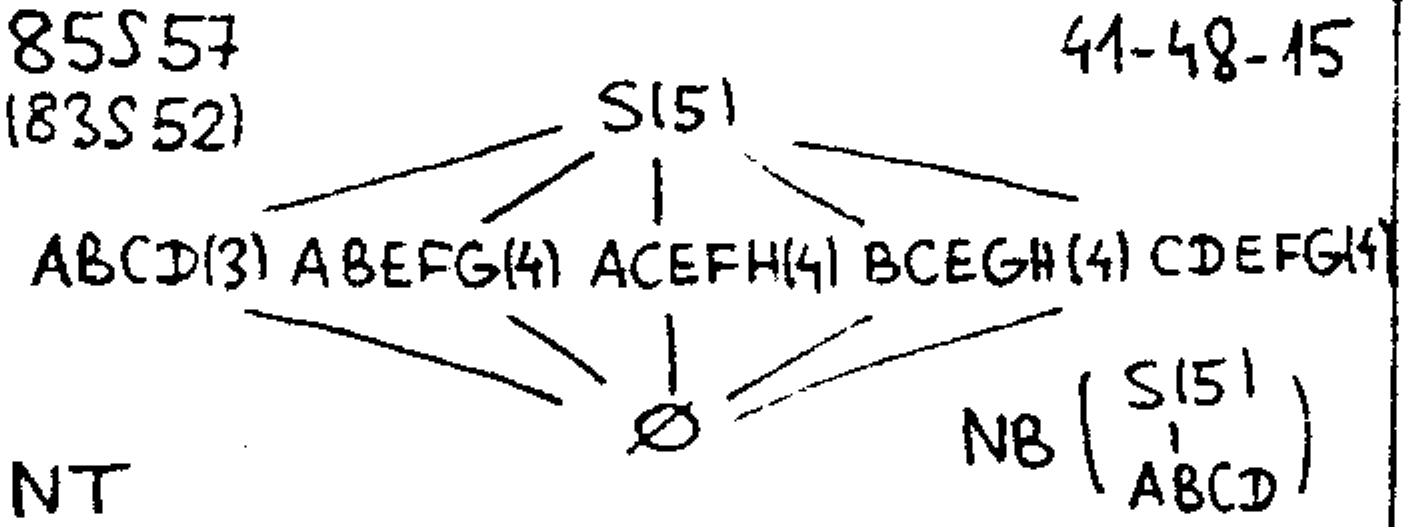
NT

85S56 (83S49) 41-48-15



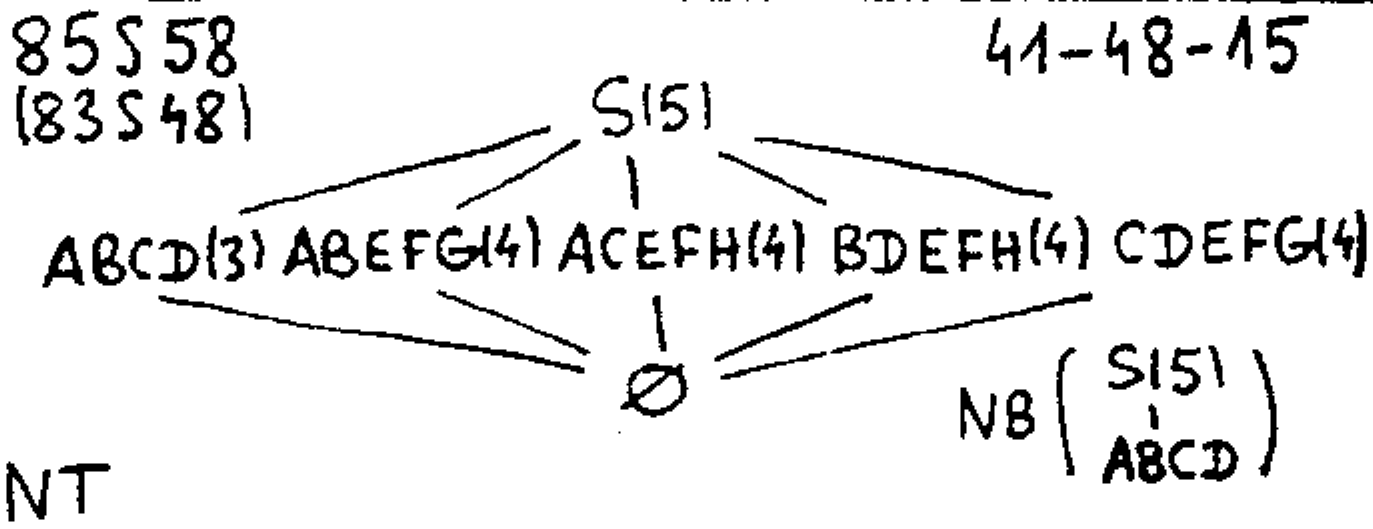
NT

85S57 (83S52) 41-48-15



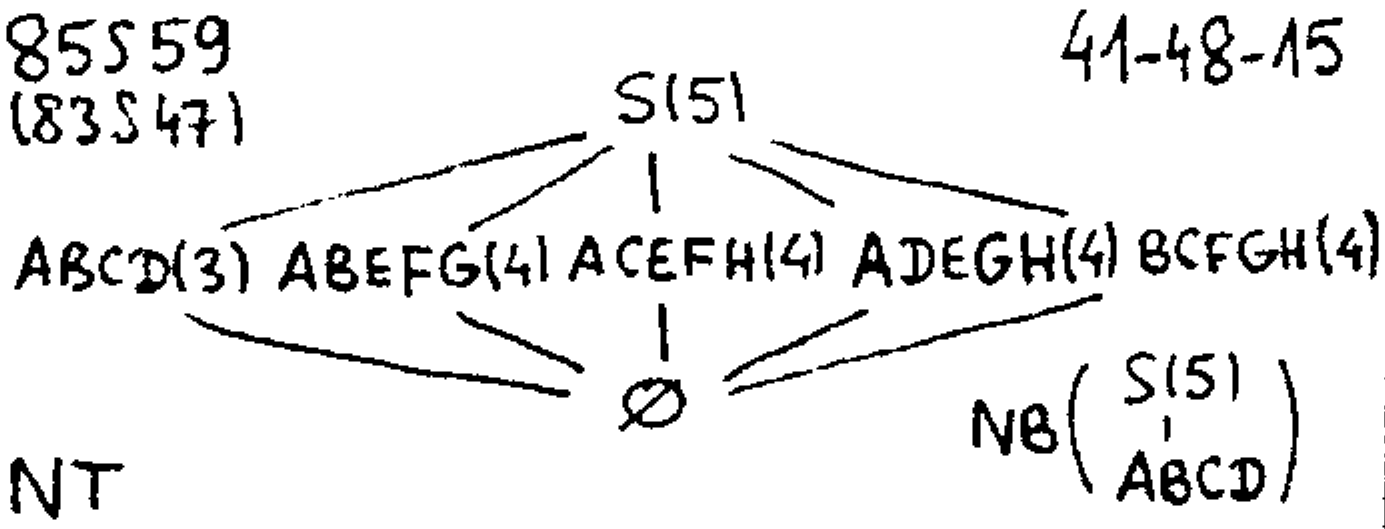
NT

85S58 (83S48) 41-48-15



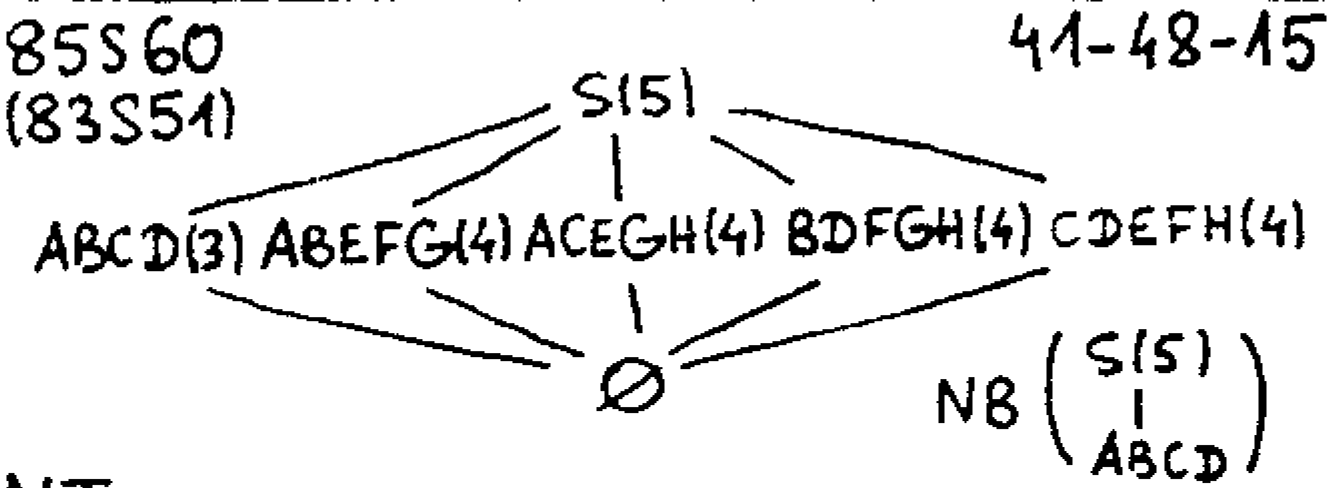
NT

85S59 (83S47) 41-48-15



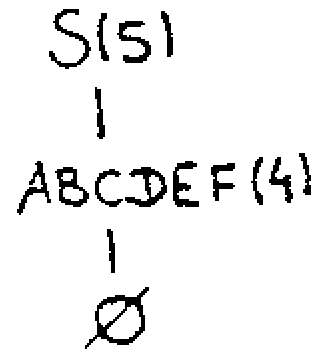
NT

85S60 (83S51) 41-48-15



NT

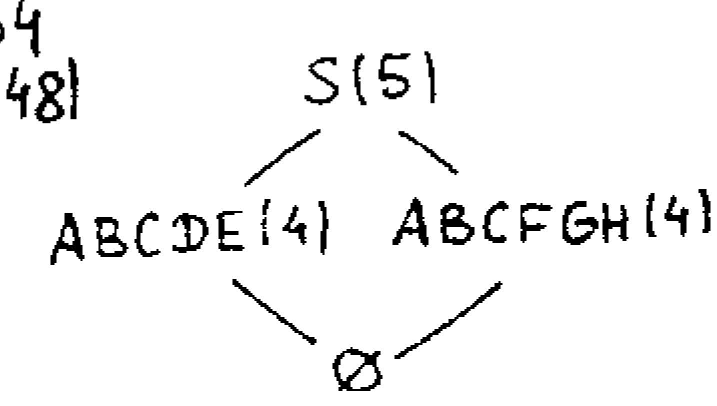
85S33 (83H149) 56-50-21



NB(ABCDEF / AB(2))

T

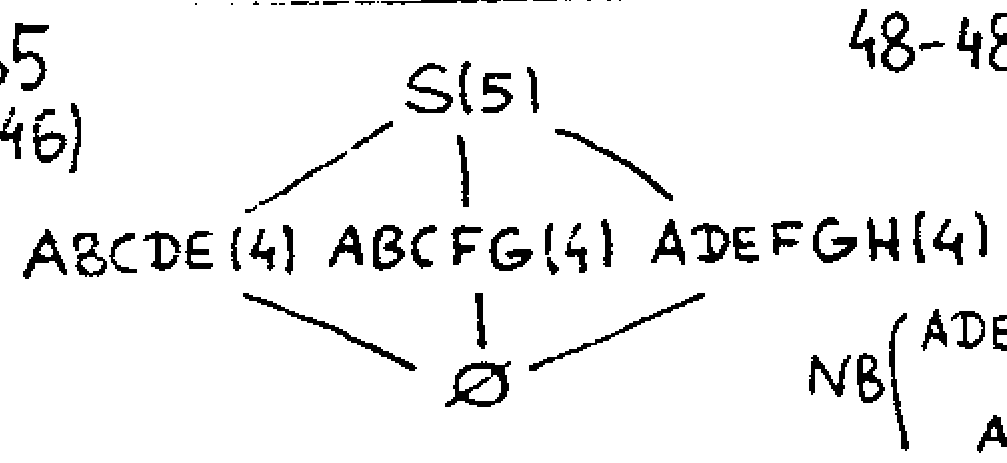
85S34 (83H148) 52-49-19



NB(ABCFGH / AB(2))

T

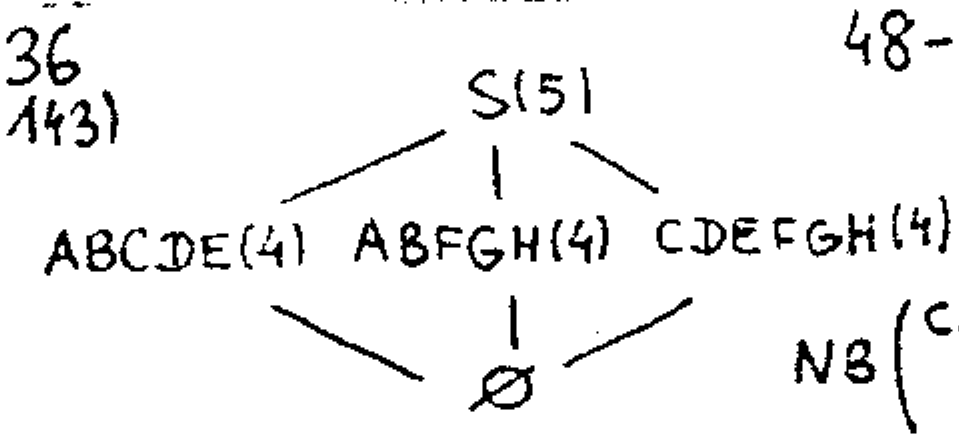
85S35 (83H146) 48-48-17



NB(ADEFGH / AD(2))

T(ABCDEFGH, ABCDEFGH, BC, DEH, FGH)

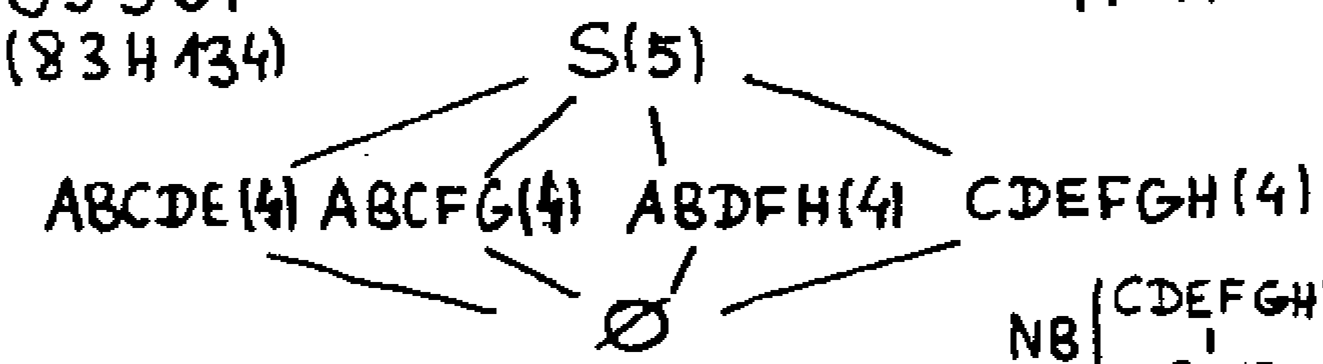
85S36 (83H143) 48-48-17



NB(CDEFGH / CD(2))

T(ABCDEFGH, ABCDEFGH, AB, CDE, FGH)

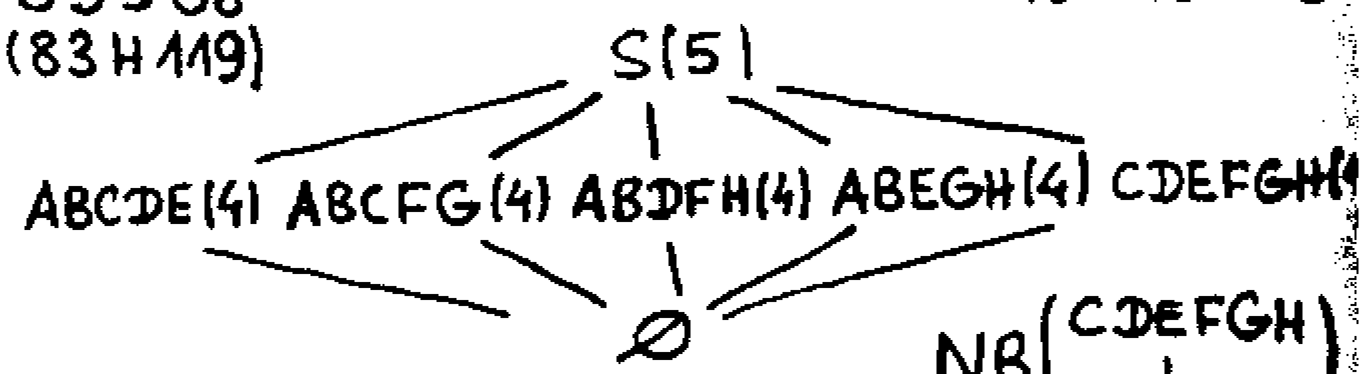
85S37 (83H134) 44-47-15



NB(CDEFGH / CD(2))

T(ABCDEFGH, AB, CEG, DEH, FGH)

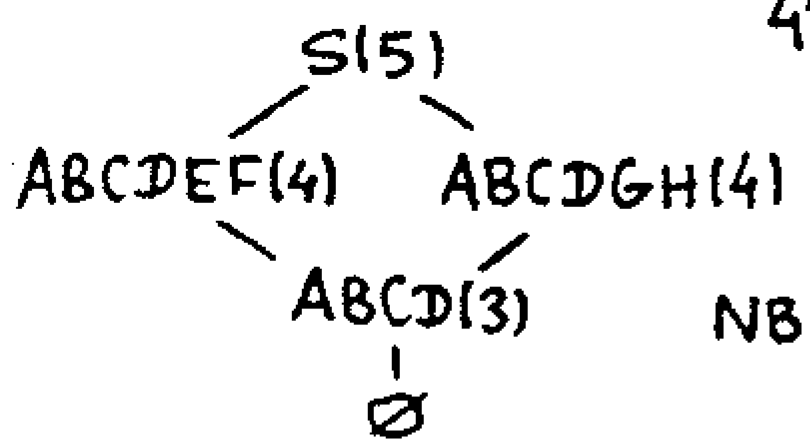
85S38 (83H119) 40-46-13



NB(CDEFGH / CD(2))

NT

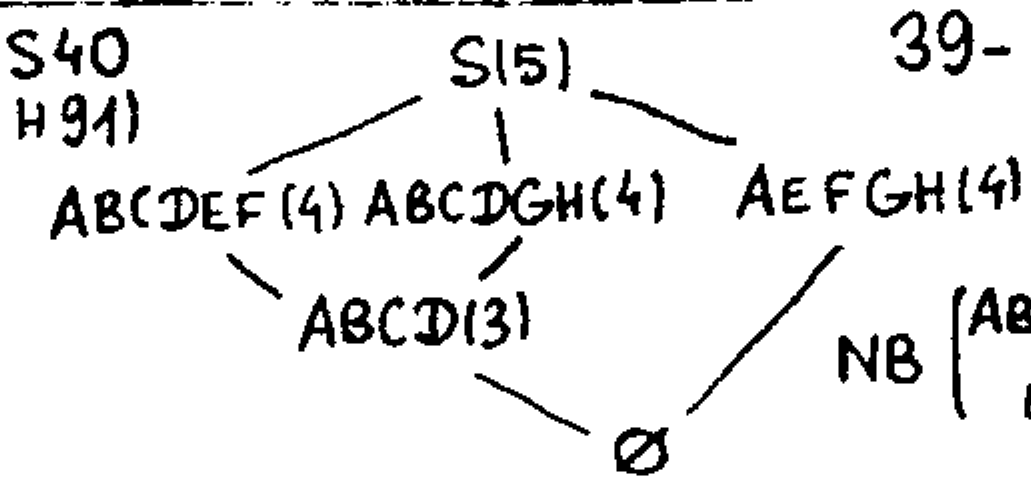
85S39 (83H93) 43-44-15



NB(ABCDEFG / EFG(3))

T(ABCDEFGH, ABCDEFGH, ABCDEFGH, EF, GH)

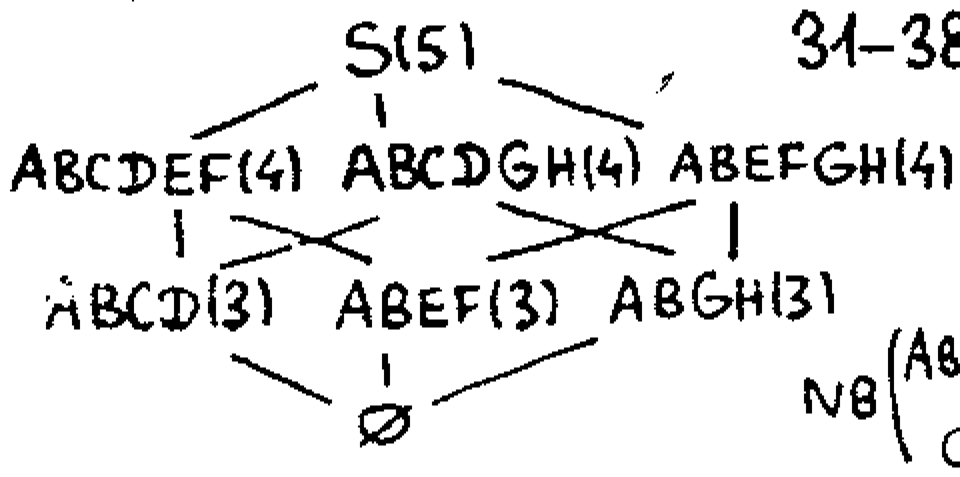
85S40 (83H91) 39-43-13



NB(ABCDEFG / EFG(3))

T(ABCDEFGH, ABCDEFGH, BCD, EF, GH)

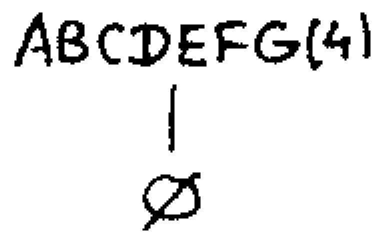
85S41 (83H49) 31-38-10



NB(ABCDEFG / CEG(3))

T(ABCDEFGH, ABCDEFGH, CD, EF, GH)

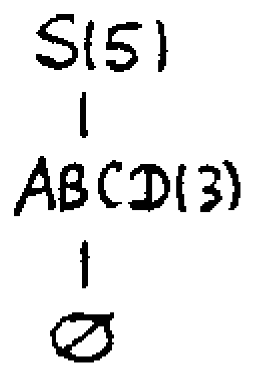
85S42 (83L108) 36-35-21



NB(ABCDEF / AB(2))

T

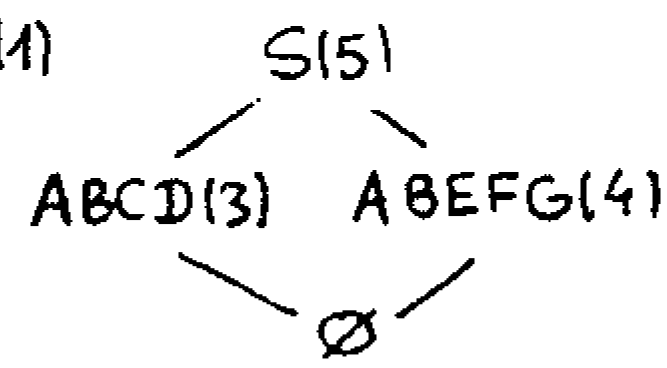
85S43 (83S3) 57-52-23



NB(S(5) / ABCD)

T

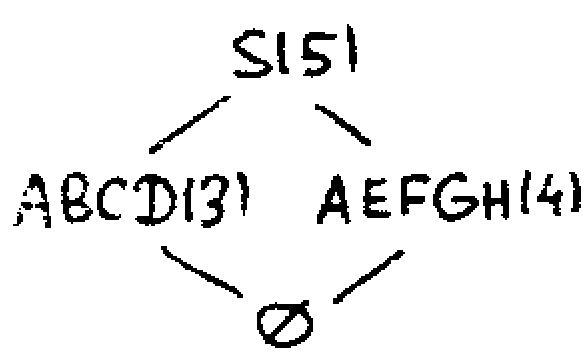
85S44 (83S11) 53-51-21



NB(S(5) / ABCD)

T

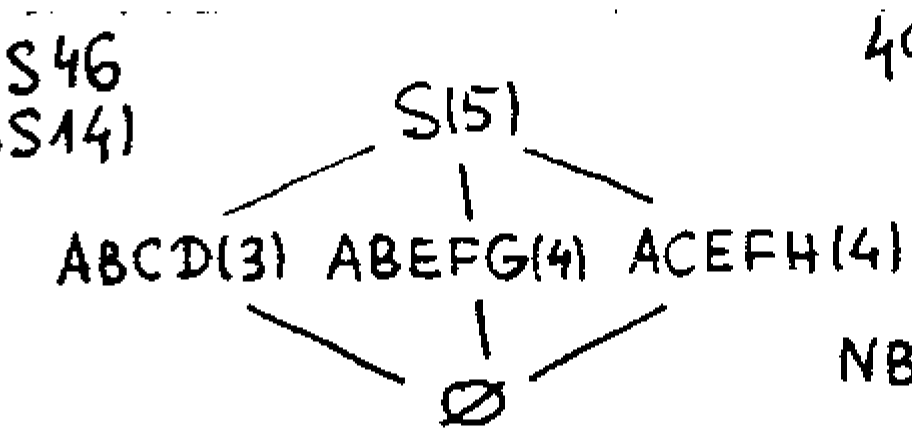
85S45 (83S12) 53-51-21



NB(S(5) / ABCD)

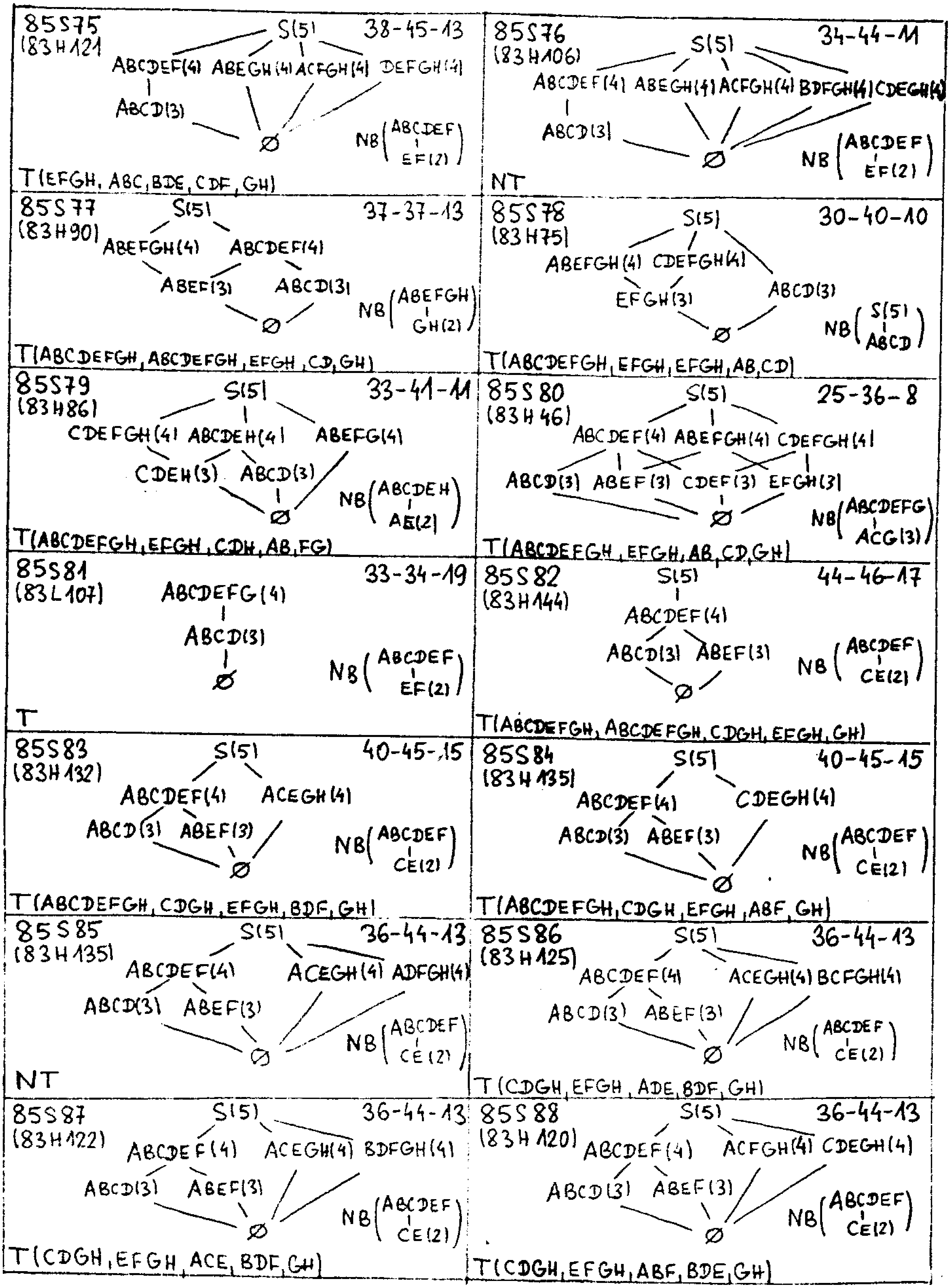
T

85S46 (83S14) 49-50-19

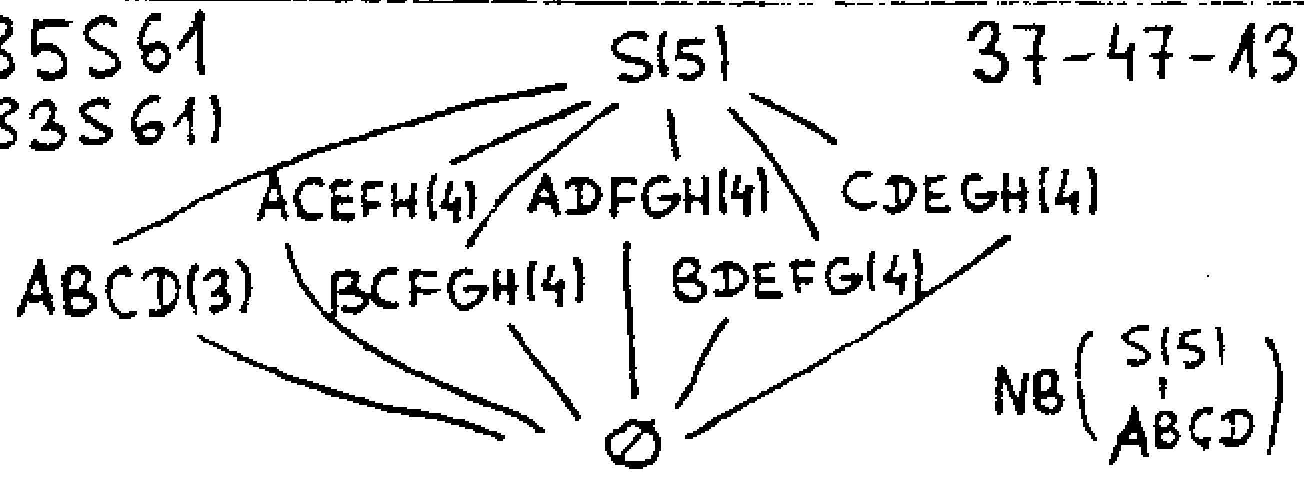


NB(S(5) / ABCD)

T(ABCDEFGH, EFGH, EFGH, BDG, CDH)

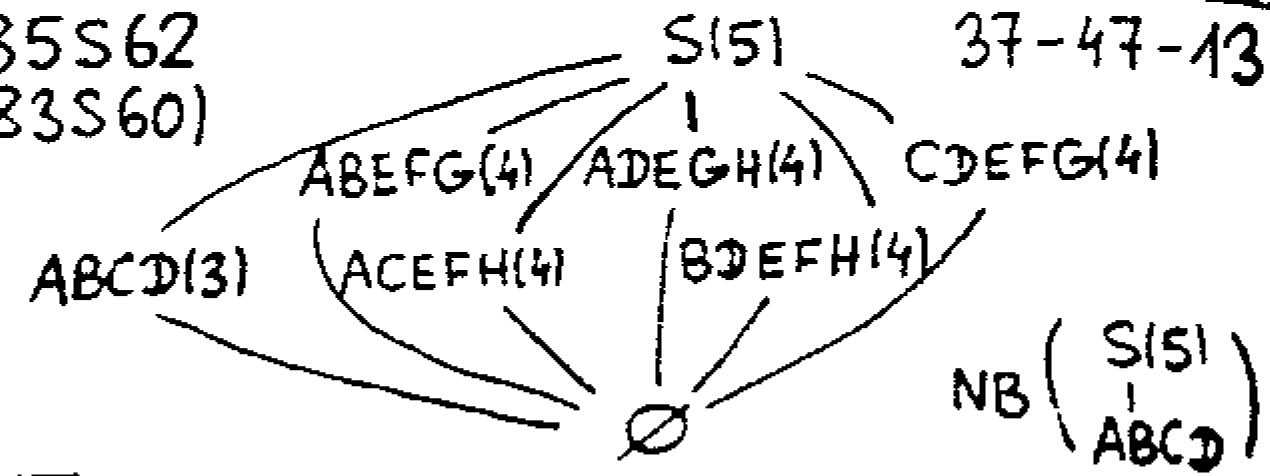

85S75
(83H121)
38-45-13
S(5)
ABCDEF(4) ABEGH(4) ACFGH(4) DEFGH(4)
ABCD(3)
∅
NB(ABCDEF / EF(2))
T(EFGH, ABC, BDE, CDF, GH)
85S76
(83H106)
34-44-11
S(5)
ABCDEF(4) ABEGH(4) ACFGH(4) BDFGH(4) CDEGH(4)
ABCD(3)
∅
NB(ABCDEF / EF(2))
NT
85S77
(83H90)
37-37-13
S(5)
ABEFGH(4) ABCDEF(4)
ABEF(3) ABCD(3)
∅
NB(ABEFGH / GH(2))
T(ABCDEFGH, ABCDEFGH, EFGH, CD, GH)
85S78
(83H75)
30-40-10
S(5)
ABEFGH(4) CDEFGH(4)
EFGH(3) ABCD(3)
∅
NB(S(5) / ABCD)
T(ABCDEFGH, EFGH, EFGH, AB, CD)
85S79
(83H86)
33-41-11
S(5)
CDEFGH(4) ABCDEH(4) ABEFG(4)
CDEH(3) ABCD(3)
∅
NB(ABCDEH / AE(2))
T(ABCDEFGH, EFGH, CDH, AB, FG)
85S80
(83H46)
25-36-8
S(5)
ABCDEF(4) ABEFGH(4) CDEFGH(4)
ABCD(3) ABEF(3) CDEF(3) EFGH(3)
∅
NB(ABCDEFG / ACG(3))
T(ABCDEFGH, EFGH, AB, CD, GH)
85S81
(83L107)
33-34-19
ABCDEFG(4)
ABCD(3)
∅
NB(ABCDEF / EF(2))
T
85S82
(83H144)
44-46-17
S(5)
ABCDEF(4)
ABCD(3) ABEF(3)
∅
NB(ABCDEF / CE(2))
T(ABCDEFGH, ABCDEFGH, CDGH, EFGH, GH)
85S83
(83H132)
40-45-15
S(5)
ABCDEF(4) ACEGH(4)
ABCD(3) ABEF(3)
∅
NB(ABCDEF / CE(2))
T(ABCDEFGH, CDGH, EFGH, BDF, GH)
85S84
(83H135)
40-45-15
S(5)
ABCDEF(4) CDEGH(4)
ABCD(3) ABEF(3)
∅
NB(ABCDEF / CE(2))
T(ABCDEFGH, CDGH, EFGH, ABF, GH)
85S85
(83H135)
36-44-13
S(5)
ABCDEF(4) ACEGH(4) ADFGH(4)
ABCD(3) ABEF(3)
∅
NB(ABCDEF / CE(2))
NT
85S86
(83H125)
36-44-13
S(5)
ABCDEF(4) ACEGH(4) BCFGH(4)
ABCD(3) ABEF(3)
∅
NB(ABCDEF / CE(2))
T(CDGH, EFGH, ADE, BDF, GH)
85S87
(83H122)
36-44-13
S(5)
ABCDEF(4) ACEGH(4) BDFGH(4)
ABCD(3) ABEF(3)
∅
NB(ABCDEF / CE(2))
T(CDGH, EFGH, ACE, BDF, GH)
85S88
(83H120)
36-44-13
S(5)
ABCDEF(4) ACFGH(4) CDEGH(4)
ABCD(3) ABEF(3)
∅
NB(ABCDEF / CE(2))
T(CDGH, EFGH, ABF, BDE, GH)

85S61 (83S61) 37-47-13



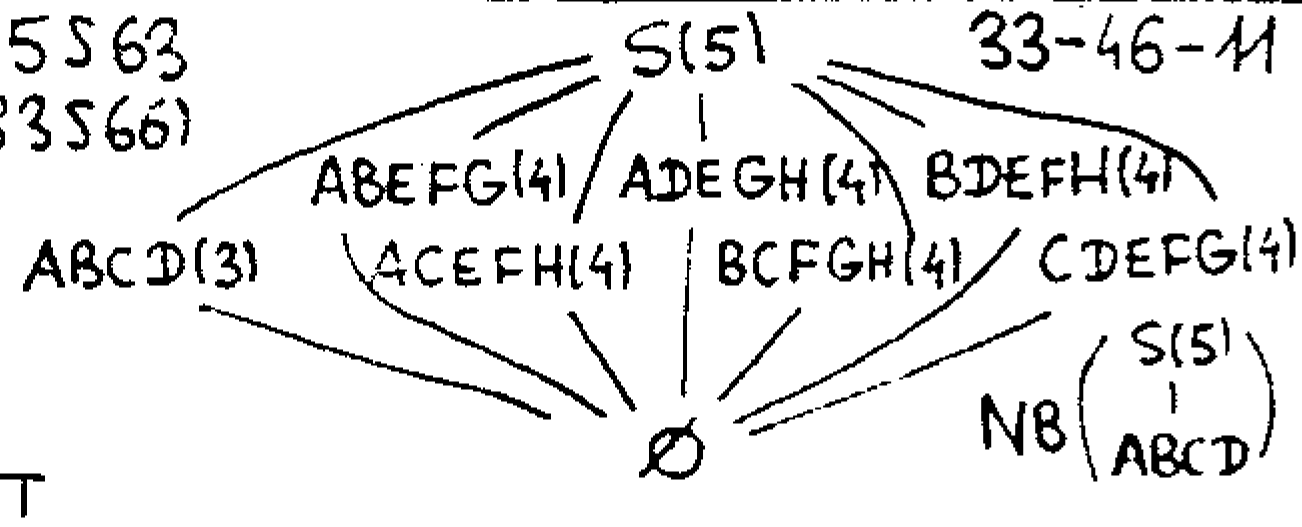
NT

85S62 (83S60) 37-47-13



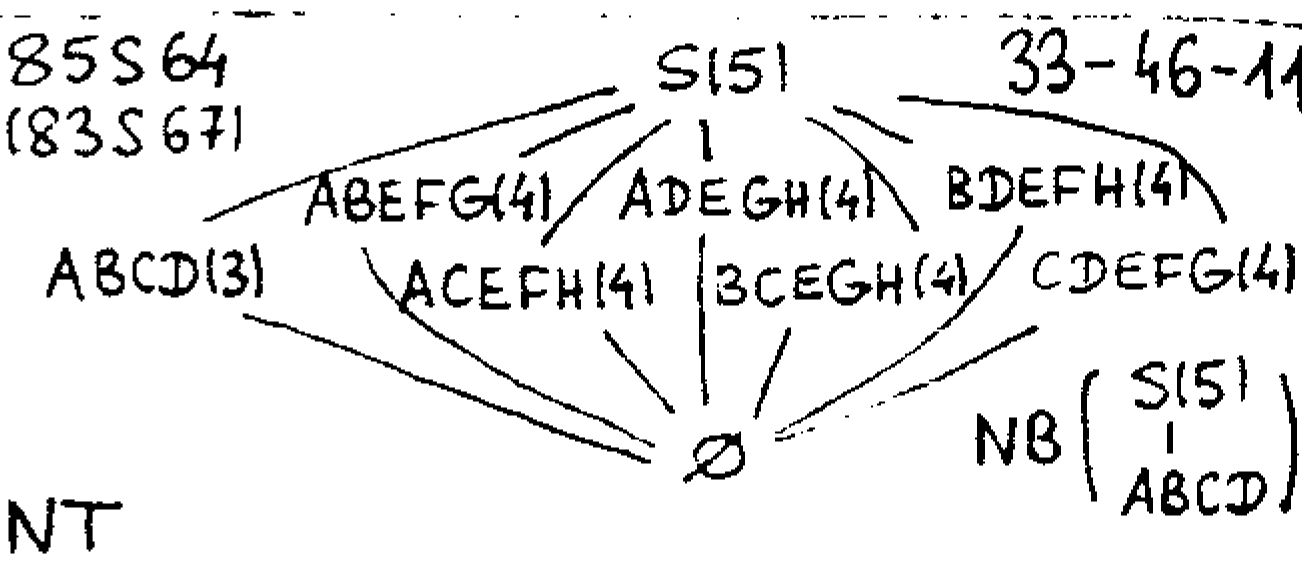
NT

85S63 (83S66) 33-46-11



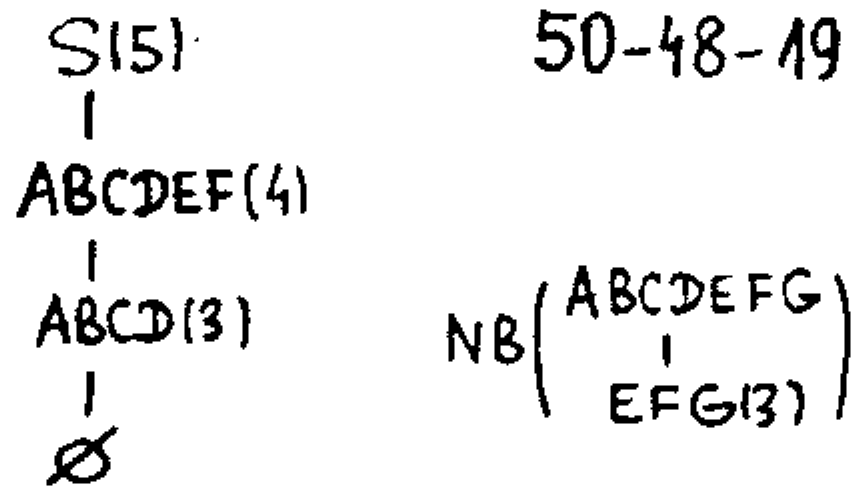
NT

85S64 (83S67) 33-46-11



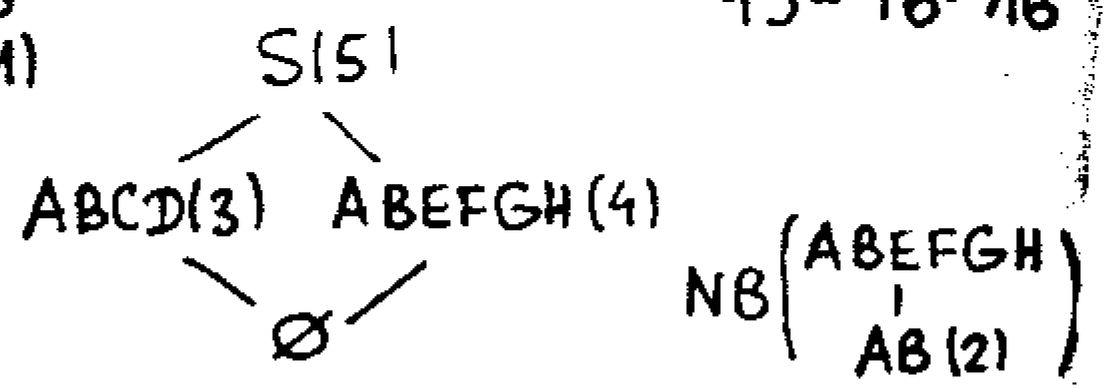
NT

85S65 (83H147) 50-48-19



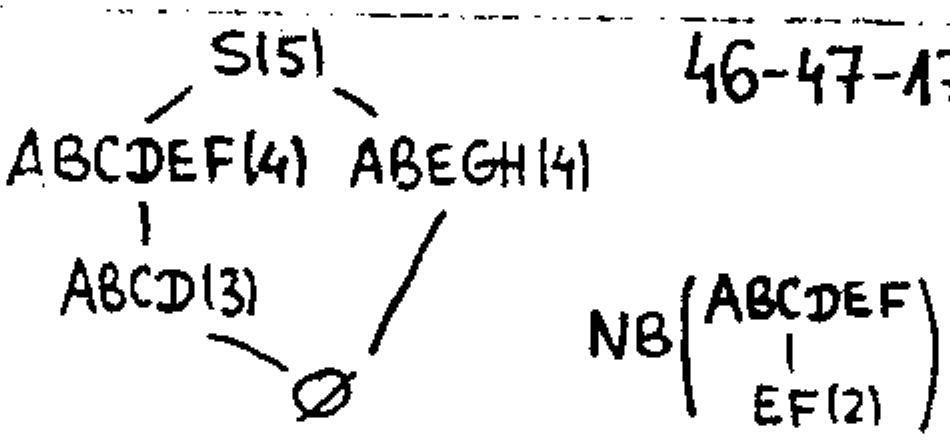
T

85S66 (83H141) 43-46-16



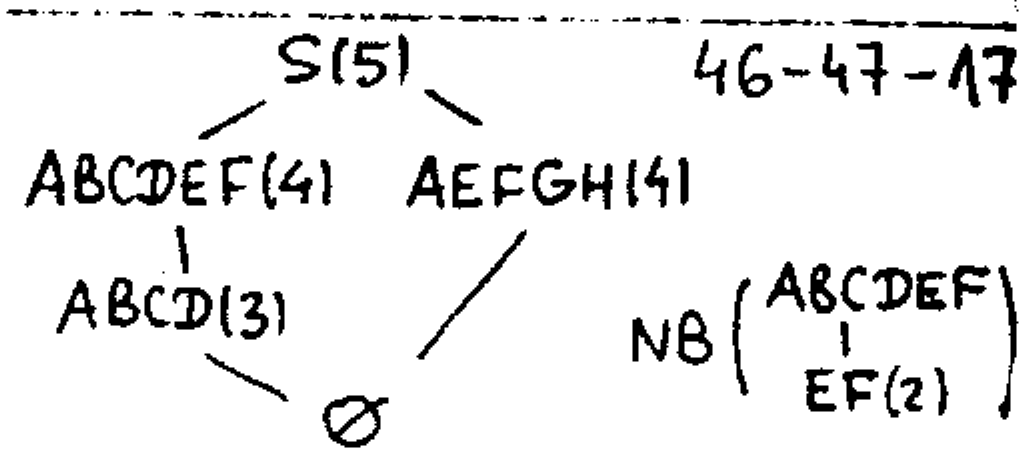
T

85S67 (83H145) 46-47-17



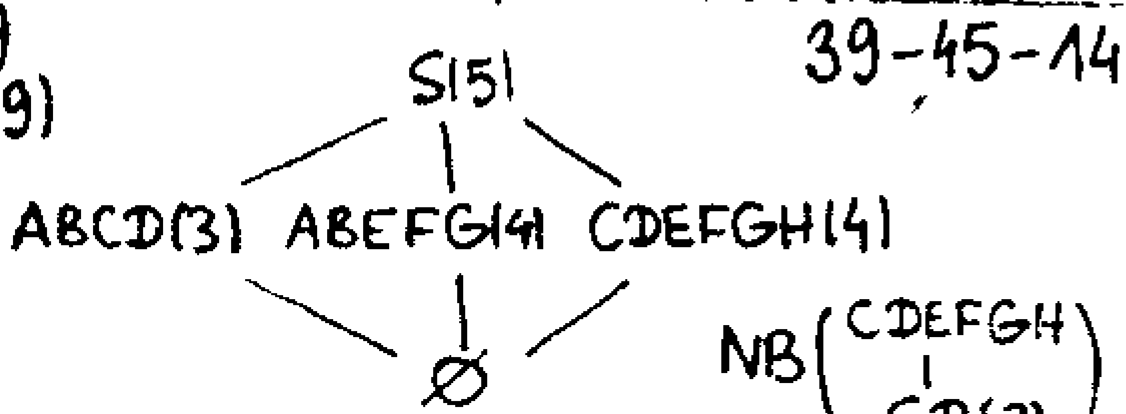
T(ABCDEFGH, ABCDEFGH, EFGH, CDF, GH)

85S68 (83H142) 46-47-17



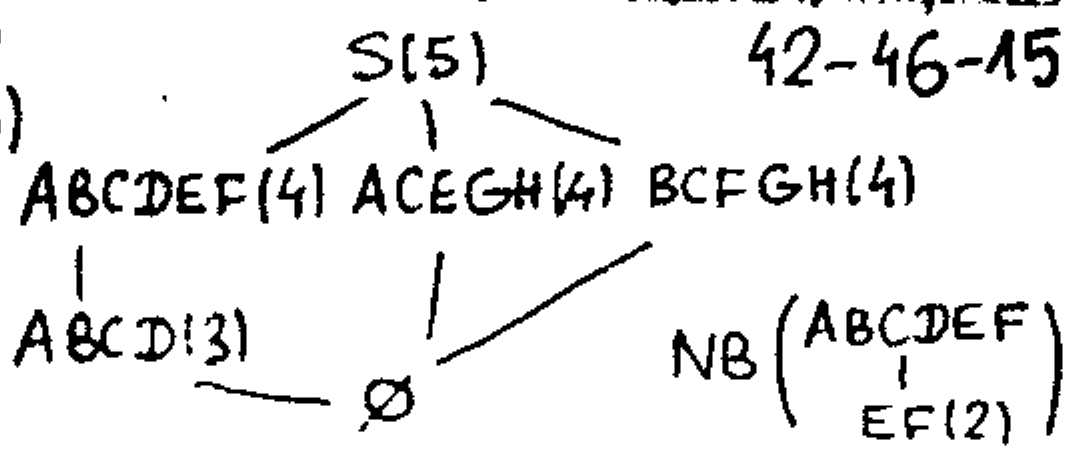
T(ABCDEFGH, ABCDEFGH, EFGH, CDB, GH)

85S69 (83H129) 39-45-14



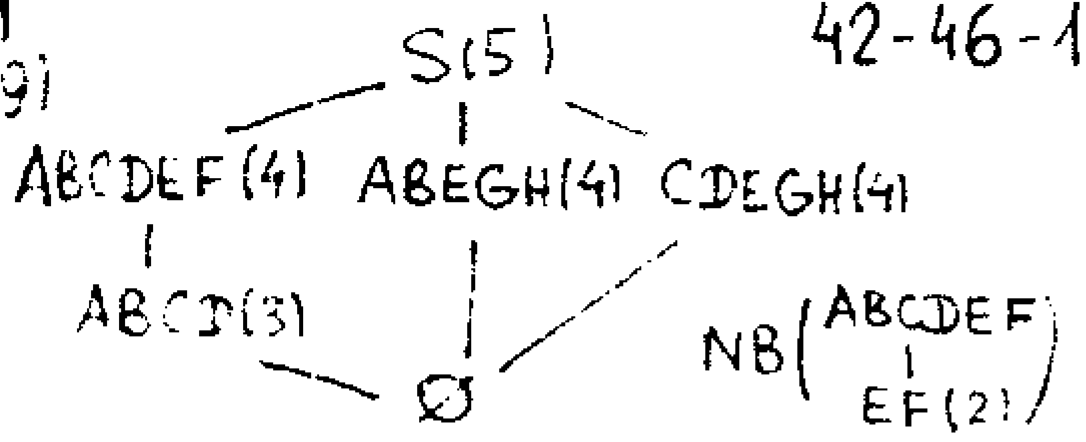
T(ABCDEFGH, EFGH, EFGH, CDH, AB)

85S70 (83H133) 42-46-15



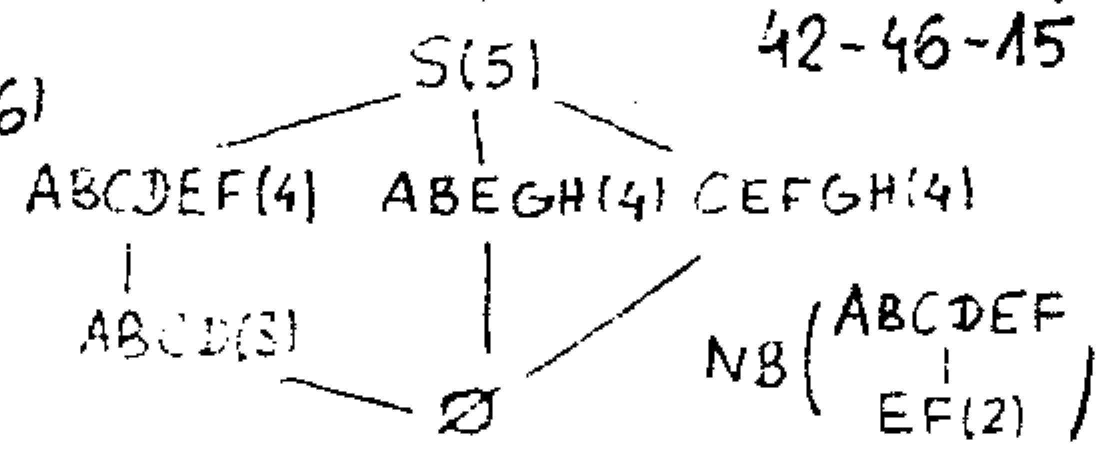
T(ABCDEFGH, EFGH, ADE, BDF, GH)

85S71 (83H139) 42-46-15



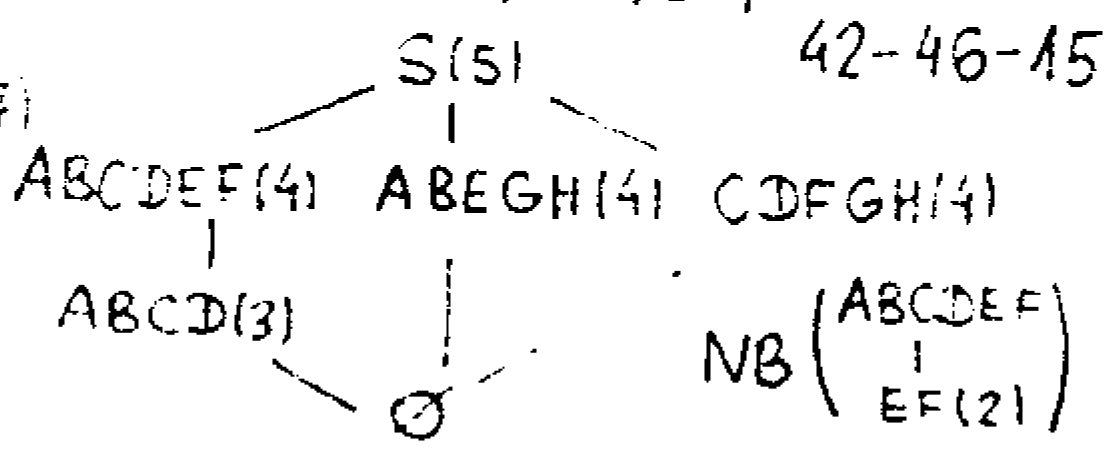
T(ABCDEFGH, EFGH, ABF, CDF, GH)

85S72 (83H136) 42-46-15



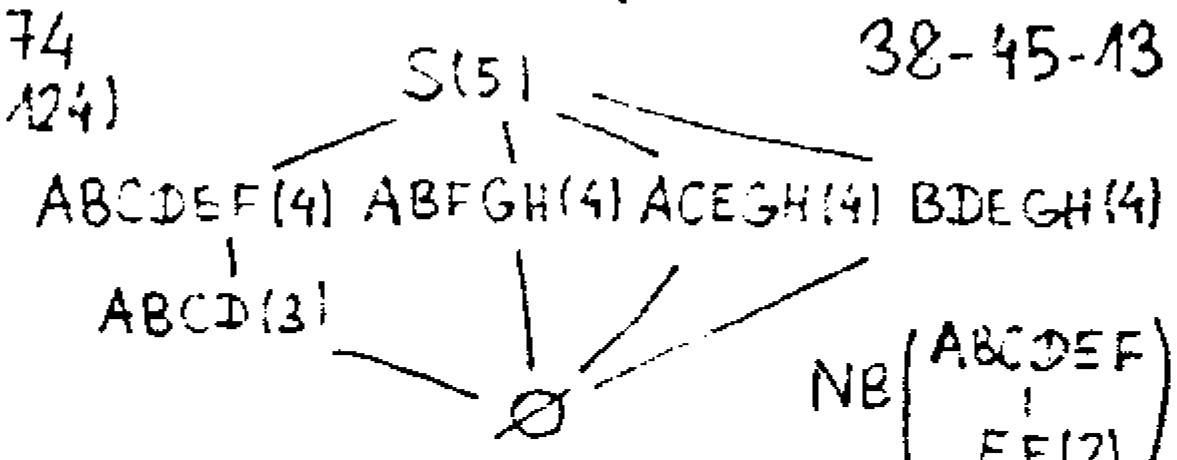
T(ABCDEFGH, EFGH, ABD, CDF, GH)

85S73 (83H137) 42-46-15



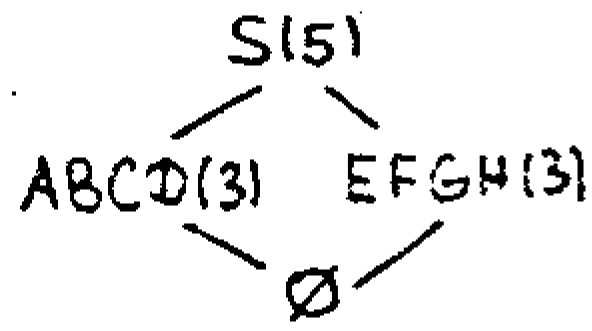
T(ABCDEFGH, EFGH, ABE, CDF, GH)

85S74 (83H124) 38-45-13



T(EFGH, ACF, BDF, CDE, GH)

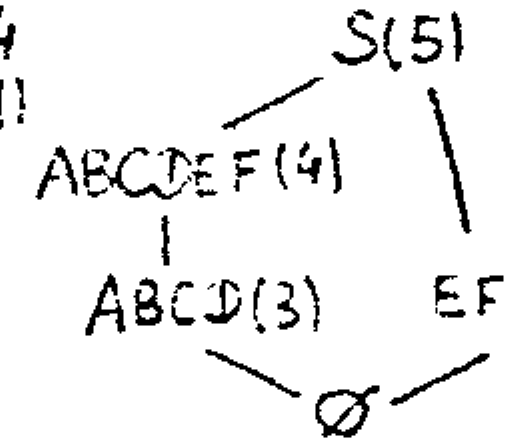
85S103 (83S18) 44-48-18



NB(S(5) / ABCD)

T

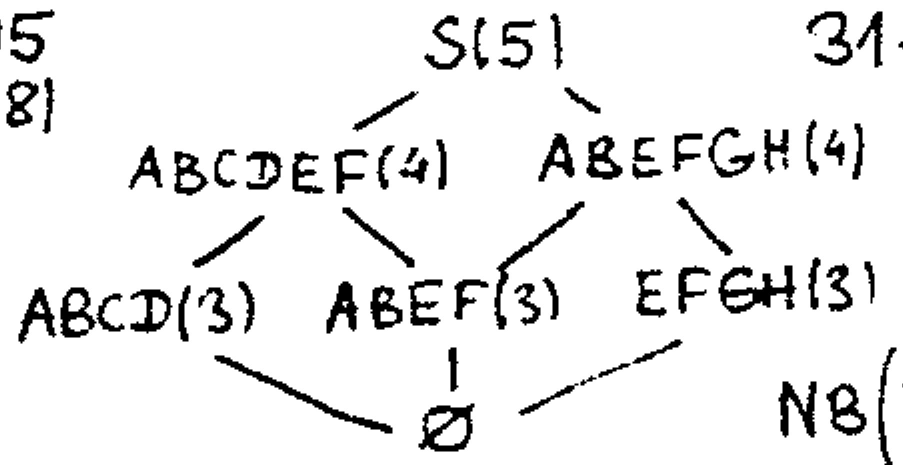
85S104 (83H131) 37-44-14



NB(S(5) / EFGH)

T(ABCDEFGH, ABCD, ABCD, EFGH, GH)

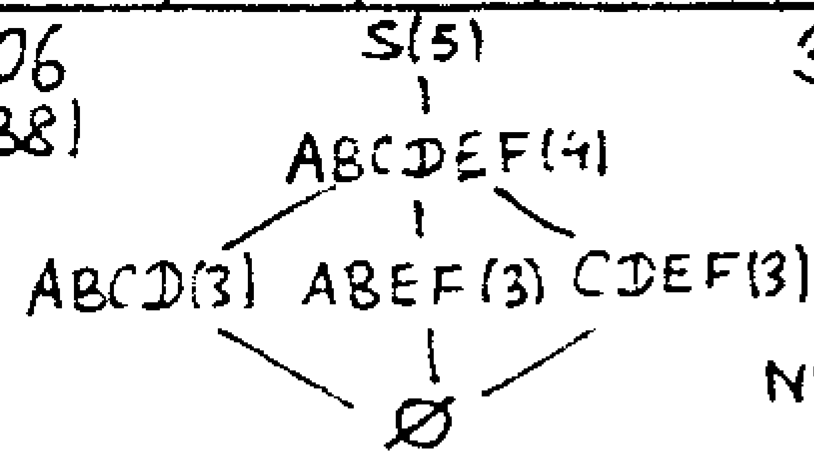
85S105 (83H78) 31-40-11



NB(ABCDEF / CE(2))

T(ABCDEFGH, ABCD, EFGH, CD, GH)

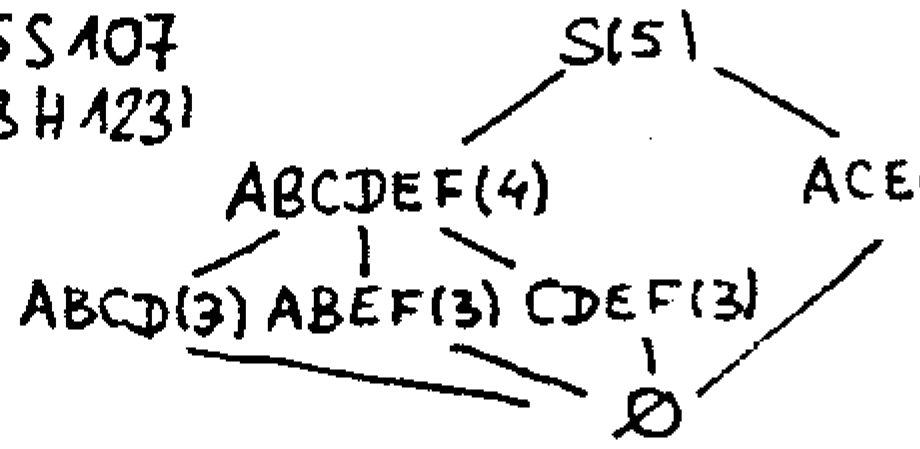
85S106 (83H138) 38-44-15



NB(ABCDEGH / AGH(3))

T(ABCDEF, ABGH, CDGH, EFGH, GH)

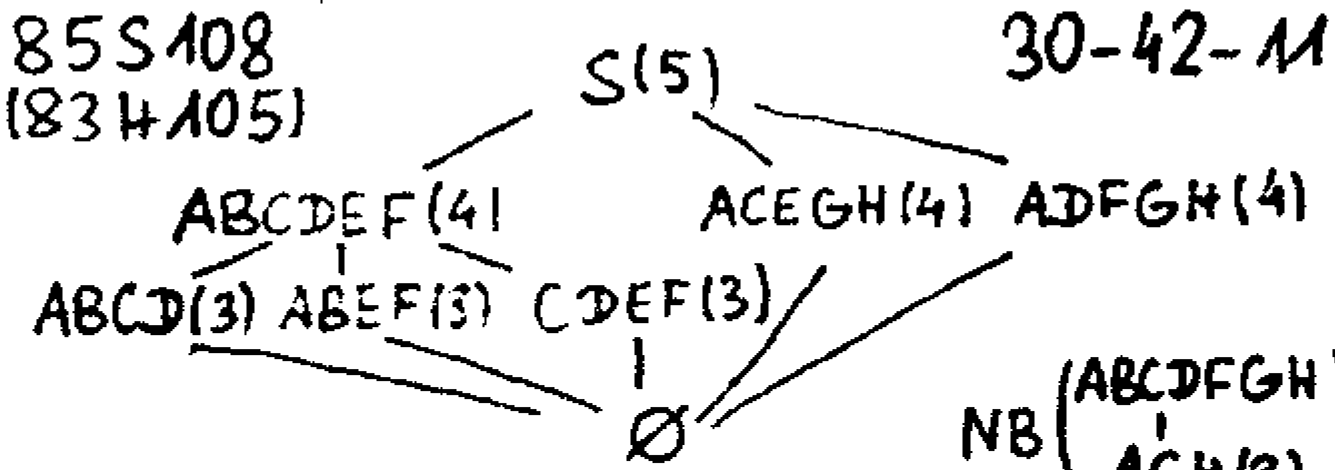
85S107 (83H123) 34-43-13



NB(ABCDEGH / BGH(3))

T(ABGH, CDGH, EFGH, BDF, GH)

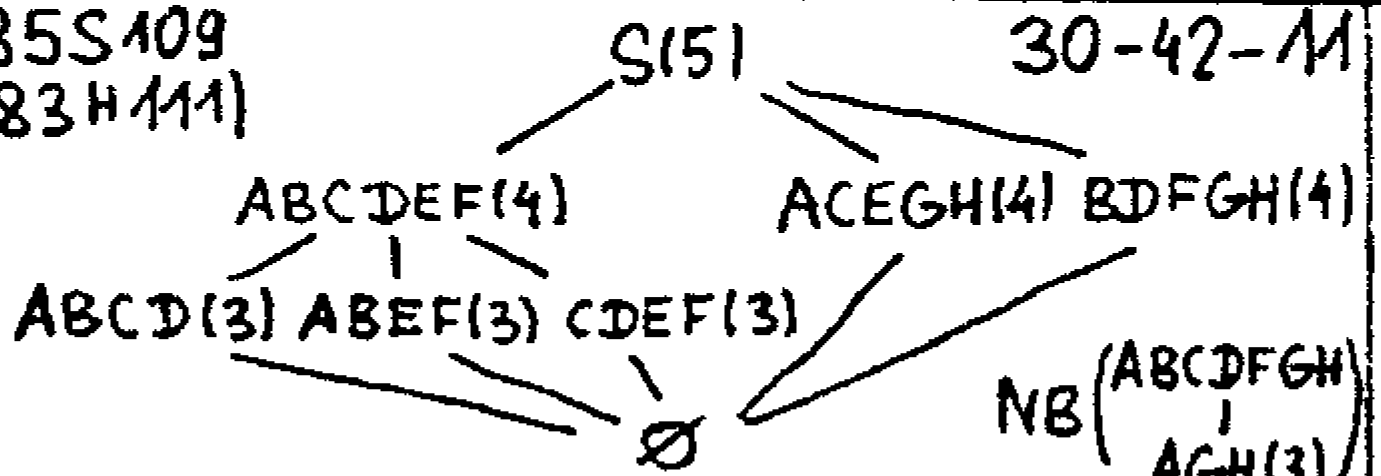
85S108 (83H105) 30-42-11



NB(ABCDFGH / AGH(3))

NT

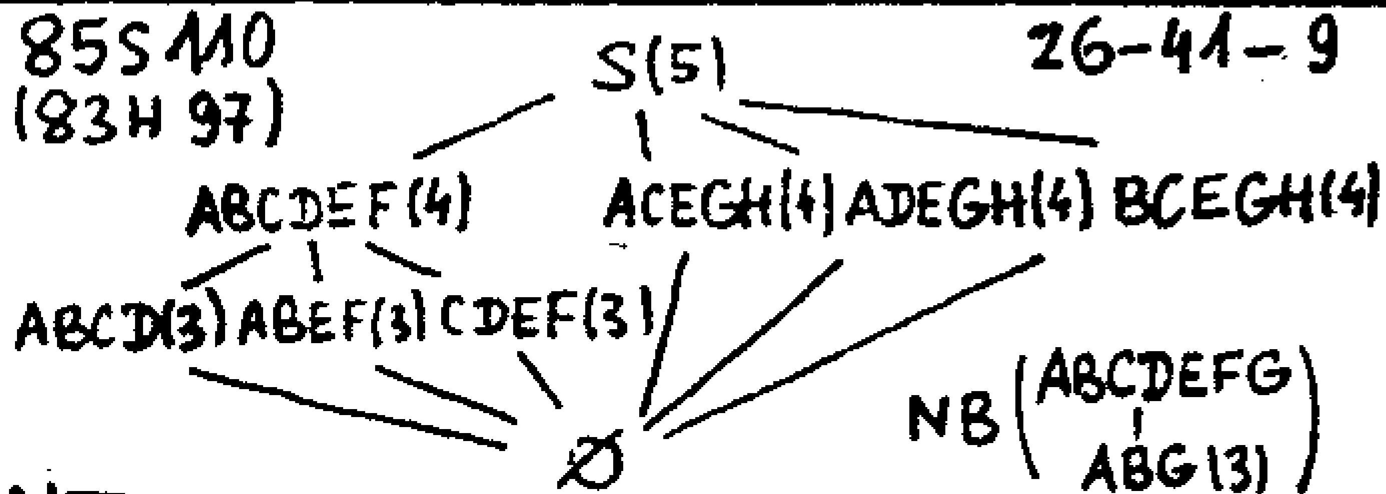
85S109 (83H111) 30-42-11



NB(ABCDFGH / AGH(3))

NT

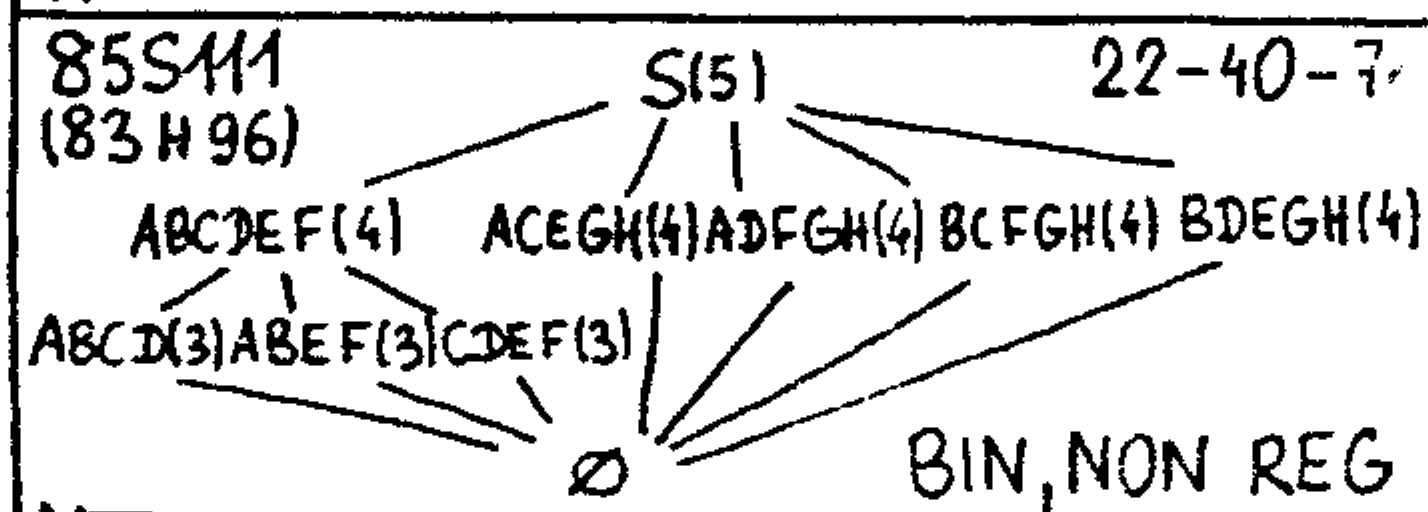
85S110 (83H97) 26-41-9



NB(ABCDEFG / ABG(3))

NT

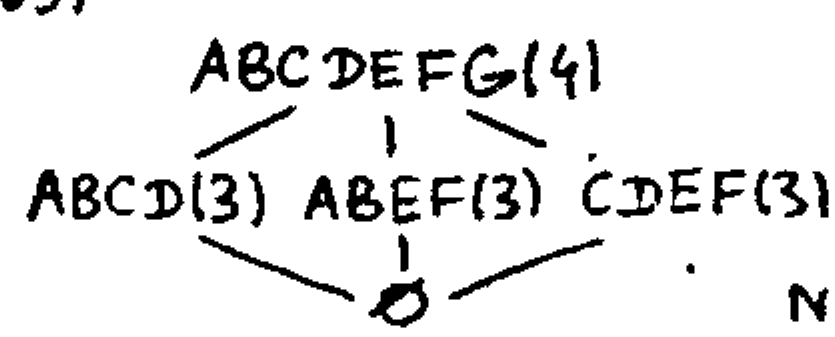
85S111 (83H96) 22-40-7



BIN, NON REG

NT

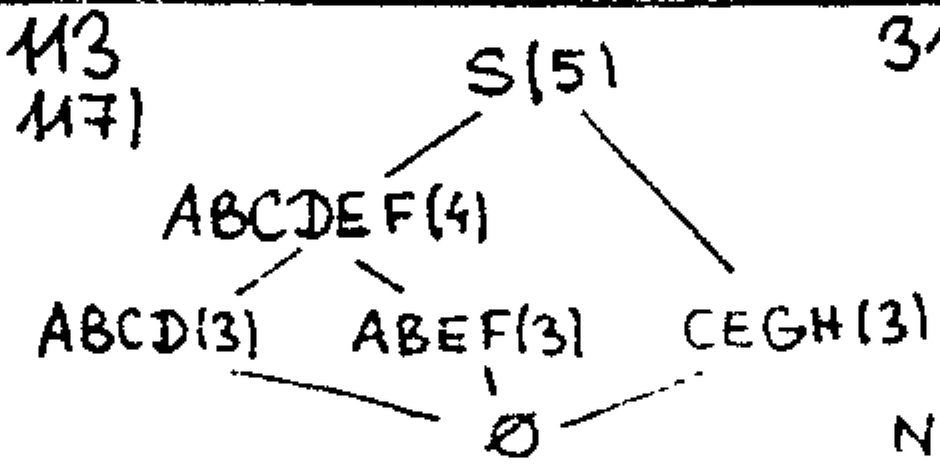
85S112 (83L103) 27-32-15



NB(ABCEFG / AC(2))

T(ABCDEFG, ABG, CDG, EFG, H)

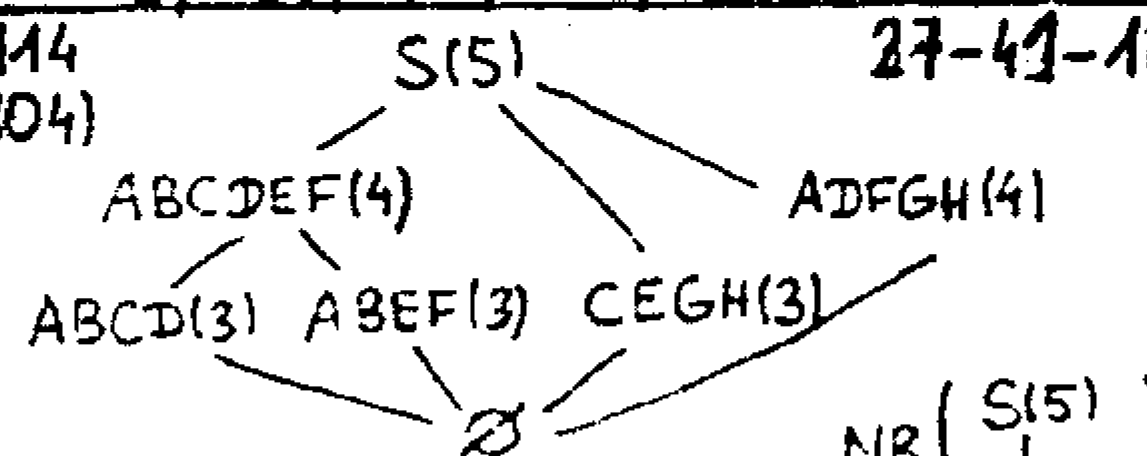
85S113 (83H117) 31-42-12



NB(S(5) / CEGH)

T(ABDF, ABDF, CDGH, EFGH, GH)

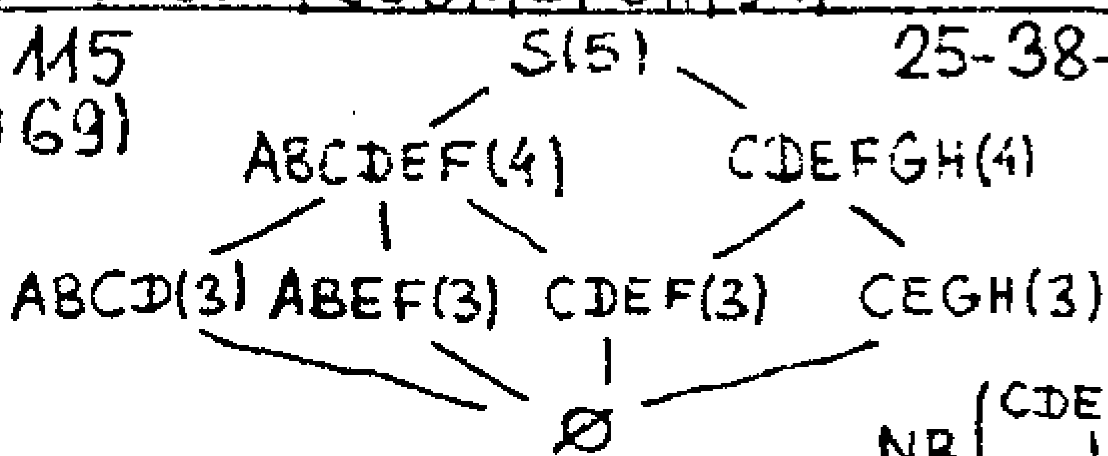
85S114 (83H104) 27-41-10



NB(S(5) / CEGH)

NT

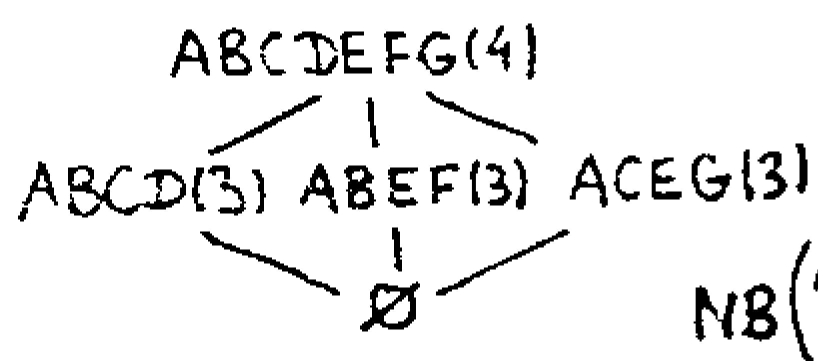
85S115 (83H69) 25-38-9



NB(CDEFGH / DG(2))

T(ABDF, CDGH, EFGH, AB, GH)

85S116 (83L101) 27-32-15



NB(ABCDEF / CE(2))

T(ABCDEFG, BDF, CDG, EFG, H)

85S89 32-43-11
(83H107)
S(5)
ABCDEF(4) ACFGH(4) ADEGH(4) BCEGH(4)
ABCD(3) ABEF(3)
∅
NB(ABCDEF / CE(2))
NT

85S90 32-43-11
(83H110)
S(5)
ABCDEF(4) ACEGH(4) BDEGH(4) CDFGH(4)
ABCD(3) ABEF(3)
∅
NB(ABCDEF / CE(2))
NT

85S91 28-42-9
(83H98)
S(5)
ABCDEF(4) ACEGH(4) ADFGH(4) BCFGH(4) BDEGH(4)
ABCD(3) ABEF(3)
∅
NB(ABCDEF / CE(2))
NT

85S92 31-40-11
(83H83)
S(5)
ABCDEF(4) CDEFGH(4)
ABCD(3) ABEF(3) CDEF(3)
∅
NB(ABCDEGH / AGH(3))
T(ABCDEFGH, CDGH, EFGH, AB, GH)

85S93 30-33-17
(83L106)
ABCDEFG(4)
ABCD(3) ABEF(3)
∅
NB(ABCDEF / CE(2))
T

85S94 44-48-18
(83S47)
S(5)
ABCD(3) AEFG(3)
∅
NB(S(5) / ABCD)
T

85S95 40-47-16
(83S39)
S(5)
ABCD(3) AEFG(3) BCEFH(4)
∅
NB(S(5) / ABCD)
T(BCDH, BCDH, EFGH, EFGH, ADG)

85S96 36-46-14
(83S55)
S(5)
ABCD(3) AEFG(3) BCEFH(4) BDEGH(4)
∅
NB(S(5) / ABCD)
NT

85S97 32-45-12
(83S59)
S(5)
ABCD(3) AEFG(3) BCEFH(4) BDEGH(4) CDFGH(4)
∅
NB(S(5) / ABCD)
NT

85S98 37-44-14
(83H128)
S(5)
ABCDEH(4)
ABCD(3) AEFG(3)
∅
NB(S(5) / AEFG)
T(ABCDEFGH, BCDH, BCDH, EFGH, FG)

85S99 33-43-12
(83H116)
S(5)
ABCDEH(4) BCFGH(4)
ABCD(3) AEFG(3)
∅
NB(S(5) / AEFG)
T(BCDH, BCDH, ADE, EFGH, FG)

85S100 31-40-11
(83H85)
S(5)
ABCDEH(4) ABEFGH(4)
ABCD(3) ABEH(3) AEFG(3)
∅
NB(ABCDEH / CE(2))
T(ABCDEFGH, BCDH, EFGH, CD, FG)

85S101 27-39-9
(83H70)
S(5)
ABCDEH(4) ABEFGH(4) CDFGH(4)
ABCD(3) ABEH(3) AEFG(3)
∅
NB(ABCDEH / CE(2))
T(BCDH, EFGH, ABE, CD, FG)

85S102 30-33-17
(83L105)
ABCDEFG(4)
ABCD(3) AEFG(3)
∅
NB(ABCDEF / BE(2))
T

85S131 (83H72) — 25-36-10

S(5)
ABCD(3) AEFGH(3)
∅

NB $\begin{pmatrix} AEFGH \\ \mid \\ A(1) \end{pmatrix}$

T

85S132 (83L84) — 24-29-13

ABCDEFG(4)
ABCD(3) ABEFG(3)
∅

NB $\begin{pmatrix} ABEFG \\ \mid \\ A(1) \end{pmatrix}$

T

85S133 (83L82) — 21-28-11

ABCDEFG(4)
ABCD(3) ABEF(3) CDEFG(3)
∅

NB $\begin{pmatrix} CDEFG \\ \mid \\ C(1) \end{pmatrix}$

T(ABCDEFG, CDG, EFG, AB, H)

85S134 (83L38) — 17-20-15

ABCDEF(3)
∅

NB $\begin{pmatrix} ABCDE \\ \mid \\ A(1) \end{pmatrix}$

T

85S135 (83S4) — 45-46-19

S(5)
ABC(2)
∅

NB $\begin{pmatrix} S(5) \\ \mid \\ ABCD \end{pmatrix}$

T

85S136 (83S30) — 41-45-17

S(5)
ABC(2) ADEFG(4)
∅

NB $\begin{pmatrix} S(5) \\ \mid \\ ABCD \end{pmatrix}$

T

85S137 (83S31) — 41-45-17

S(5)
ABC(2) DEFGH(4)
∅

NB $\begin{pmatrix} S(5) \\ \mid \\ ABCD \end{pmatrix}$

T

85S138 (83S46) — 37-44-15

S(5)
ABC(2) ADEFG(4) BEFGH(4)
∅

NB $\begin{pmatrix} S(5) \\ \mid \\ ABCD \end{pmatrix}$

T(DEFGH, DEFGH, DEFGH, ACD, BCH)

85S139 (83H140) — 40-43-13

S(5)
ABCDEF(4)
ABC(2)
∅

NB $\begin{pmatrix} ABCDEF \\ \mid \\ DE(2) \end{pmatrix}$

T

85S140 (83H127) — 36-42-14

S(5)
ABCDEH(4) ADEFG(4)
ABC(2)
∅

NB $\begin{pmatrix} ABCDEH \\ \mid \\ DE(2) \end{pmatrix}$

T(ABCDEFGH, DEFGH, DEFGH, BCH, FG)

85S141 (83H130) — 36-42-14

S(5)
ABCDEF(4) DEFGH(4)
ABC(2)
∅

NB $\begin{pmatrix} ABCDEF \\ \mid \\ DE(2) \end{pmatrix}$

T(ABCDEFGH, DEFGH, DEFGH, ABC, GH)

85S142 (83H115) — 32-41-12

S(5)
ABCDGH(4) ADEFG(4) BDEFH(4)
ABC(2)
∅

NB $\begin{pmatrix} ABCDGH \\ \mid \\ DG(2) \end{pmatrix}$

T(DEFGH, DEFGH, ACG, BCH, EF)

85S143 (83S58) — 33-43-13

S(5)
ABC(2) ADEFG(4) BDEFH(4) CDEGH(4)
∅

NB $\begin{pmatrix} ABCDEF \\ \mid \\ DE(2) \end{pmatrix}$

NT

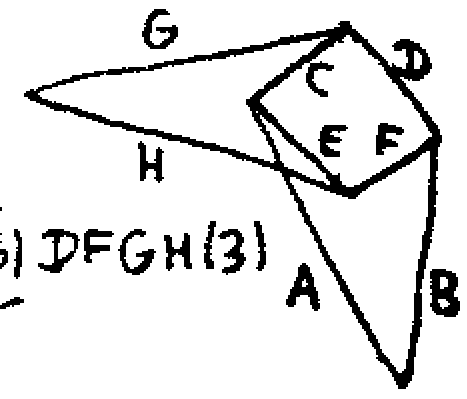
85S144 (83H103) — 28-40-10

S(5)
ABCDEF(4) ADEGH(4) BDFGH(4) CEFGH(4)
ABC(2)
∅

NB $\begin{pmatrix} ABCDEF \\ \mid \\ DE(2) \end{pmatrix}$

NT

85S117 27-32-15
(83L102)
ABCDEFG(4)
ABCD(3) ABEF(3) CDEG(3)
∅
NB(ABCDEF / CE(2))
T(ABCDEFG, ABF, CDG, EFG, H)

85S118 19-36-7
(83H56)
S(5)
ABCDEF(4) CDEFGH(4)
ABCD(3) ABEF(3) CDEF(3) CEGH(3) DFGH(3)
∅


NT

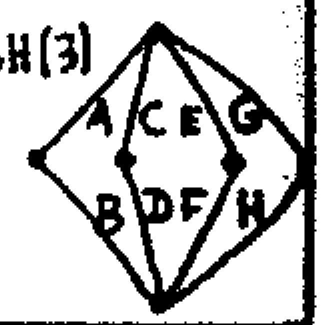
85S119 24-31-13
(83L96)
ABCDEFG(4)
ABCD(3) ABEF(3) ACEG(3) ADFG(3)
∅
NB(ABCDEF / CE(2))
NT

85S120 24-31-13
(83L98)
ABCDEFG(4)
ABCD(3) ABEF(3) ACEG(3) BCFG(3)
∅
NB(ABCDEF / CE(2))
T(ADE, BDF, CDG, EFG, H)

85S121 24-31-13
(83L97)
ABCDEFG(4)
ABCD(3) ABEF(3) BDFG(3) CEFG(3)
∅
NB(ABCDEF / CE(2))
T(ABD, ACE, CDG, EFG, H)

85S122 21-30-11
(83L91)
ABCDEFG(4)
ABCD(3) ABEF(3) BCEG(3) BDFG(3) CDEF(3)
∅
NB(ABCEFG / AC(2))
NT

85S123 21-30-11
(83L93)
ABCDEFG(4)
ABCD(3) ABEF(3) ACEG(3) BCFG(3) DEFG(3)
∅
NB(ABCDEF / CE(2))
NT

85S124 20-32-6
(83H21)
S(5)
ABCDEF(4) ABCDGH(4) ABEFGH(4) CDEFGH(4)
ABCD(3) ABEF(3) ABGH(3) CDEF(3) CDGH(3) EFGH(3)
∅


T(ABCDEFGH, AB, CD, EF, GH)

85S125 18-29-9
(83L88)
ABCDEFG(4)
ABCD(3) ABEF(3) ADEG(3) BCEG(3) BDFG(3) CDEF(3)
∅
NB(ABCEFG / AC(2))
NT

85S126 15-28-7
(83L87)
ABCDEFG(4)
ABCD(3) ABEF(3) ACEG(3) ADFG(3) BCFG(3) BDEG(3) CDEF(3)
∅
BIN, NON REG
NT

85S127 38-40-15
(83H92)
S(5)
ABCDE(3)
∅
NB(ABCDE / A(1))
T

85S128 34-39-13
(83H88)
S(5)
ABCDE(3) ABFGH(4)
∅
NB(ABCDE / A(1))
T

85S129 30-38-11
(83H81)
S(5)
ABCDE(3) ABFGH(4) CDFGH(4)
∅
NB(ABCDEFG / DEF(3))
T(ABCDEFGH, ABE, CDE, FGH, FGH)

85S130 27-30-15
(83L85)
ABCDEFG(4)
ABCDE(3)
∅
NB(ABCDE / A(1))
T

85S159 (83L99) 24-30-14

ABCDEFG(4)

ABC(2) ADEF(3)

∅

NB(ABCDEFG / ABC(2))

T

85S160 (83L100) 24-30-14

ABCDEFG(4)

ABC(2) DEFG(3)

∅

NB(ABCDEFG / ABC(2))

T

85S161 (83L95) 21-29-12

ABCDEFG(4)

ABC(2) ADEF(3) BDEG(3)

∅

NB(ABCDEFG / ABC(2))

T(DEFG, DEFG, ACF, BCG, H)

85S162 (83H68) 23-36-9

S(5)

ABCDEF(4) ABCDGH(4)

ADEF(3) ABC(2) BCDGH(3)

∅

NB(ABCEFGH / EFG(3))

T(DEFGH, ACEF, BCGH, EF, GH)

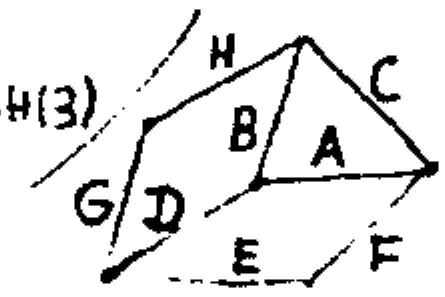
85S163 (83H55) 19-35-7

S(5)

ABCDEF(4) ABCDGH(4) CEFGH(4)

ADEF(3) ABC(2) BDGH(3)

∅



NT

85S164 (83H45) 23-34-8

S(5)

ABCDEF(4) ABCDGH(4) ADEFGH(4)

ABC(2) ADEF(3) ADGH(3)

∅

NB(ADEFGH / EG(2))

T(ABCDEFGH, DEFGH, BC, EF, GH)

85S165 (83H63) 21-35-8

S(5)

ABCDEH(4) ADEFGH(4)

ABC(2) ADEH(3) DEFG(3)

∅

NB(ADEFGH / AF(2))

T(DEFGH, DEFGH, ABCH, BC, FG)

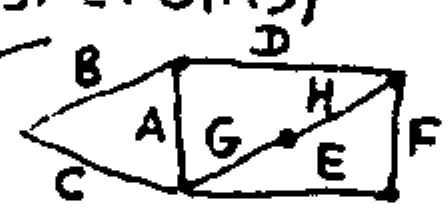
85S166 (83H37) 17-32-6

S(5)

ABCDEF(4) ABCDGH(4) ADEFGH(4)

ABC(2) ADEF(3) ADGH(3) EFGH(3)

∅



T(DEFGH, ABCD, BC, EF, GH)

85S167 (83L90) 18-28-10

ABCDEFG(4)

ABC(2) ADEF(3) BDEG(3) CDFG(3)

∅

NB(ABCDEFG / ABC(2))

NT

85S168 (83H87) 32-37-13

S(5)

ABCDE(3)

ABC(2)

∅

NB(ABCDE / D(1))

T

85S169 (83H51) 13-30-6

S(5)

ABC(2) DEFGH(3)

∅

NB(DEFGH / D(1))

T

85S170 (83H76) 28-36-11

S(5)

ABCDE(3) DEFGH(4)

ABC(2)

∅

NB(ABCDE / D(1))

T(ABCDEFGH, DEFGH, ABC, FGH, FGH)

85S171 (83H80) 28-36-11

S(5)

ABCDE(3) ADFGH(4)

ABC(2)

∅

NB(ABCDE / D(1))

T(ABCDEFGH, DEFGH, BCE, FGH, FGH)

85S172 (83H66) 24-35-9

S(5)

ABCDE(3) ADFGH(4) BEFGH(4)

ABC(2)

∅

NB(ABCDE / D(1))

T(DEFGH, ACD, BCE, FGH, FGH)

85S145 (83H89) 35-40-13 S(5) ABCDEF(4) ABCDGH(4) ABC(2) ∅ NB(ABCDEFG / EFG(3)) T(ABCDEFGH, ABCDEFGH, DEFGH, EF, GH)	85S146 (83H84) 31-39-11 S(5) ABCDEF(4) ABCDGH(4) AEFGH(4) ABC(2) ∅ NB(ABCDEFG / EFG(3)) T(ABCDEFGH, DEFGH, BCD, EF, GH)
85S147 (83H77) 31-39-11 S(5) ABCDEF(4) ABCDGH(4) DEFGH(4) ABC(2) ∅ NB(ABCDEFG / EFG(3)) T(ABCDEFGH, DEFGH, ABC, EF, GH)	85S148 (83L104) 27-31-16 ABCDEFG(4) ABC(2) ∅ NB(ABCDEFG / ABC(2)) T
85S149 (83S53) 32-42-14 S(5) ABC(2) DEFG(3) ∅ NB(S(5) / DEFG) T	85S150 (83H126) 34-41-14 S(5) ABCDEF(4) ABC(2) ADEF(3) ∅ NB(S(5) / ABCG) T(ABCDEFGH, DEFGH, DEFGH, BCGH, GH)
85S151 (83H101) 25-38-10 S(5) ADEFGH(4) DEFG(3) ABC(2) ∅ NB(S(5) / ABCD) T(DEFGH, DEFGH, DEFGH, ABCH, BC)	85S152 (83H109) 27-39-11 S(5) ABCDEH(4) DEFG(3) ABC(2) ∅ NB(S(5) / DEFG) T(DEFGH, DEFGH, ABCH, ABCH, FG)
85S153 (83H114) 30-40-12 S(5) ABCDEF(4) BDEGH(4) ABC(2) ADEF(3) ∅ NB(S(5) / ABCG) T(DEFGH, DEFGH, BCGH, ACF, GH)	85S154 (83H102) 26-39-10 S(5) ABCDEF(4) BDFGH(4) CDEGH(4) ABC(2) ADEF(3) ∅ NB(ABCEFGH / EGH(3)) NT
85S155 (83H82) 29-38-11 S(5) ABCDGH(4) ABCDEF(4) ABC(2) ADEF(3) ∅ NB(ABCDGH / DG(2)) T(ABCDEFGH, DEFGH, BCGH, EF, GH)	85S156 (83H64) 22-36-8 S(5) ABCDEF(4) ABCDGH(4) EFGH(3) ABC(2) ∅ NB(S(5) / EFGH) T(DEFGH, ABCD, ABCD, EF, GH)
85S157 (83H74) 27-37-10 S(5) ADEFGH(4) ABCDEF(4) ADEF(3) ABC(2) ∅ NB(ADEFGH / GH(2)) T(ABCDEFGH, DEFGH, DEFGH, BC, GH)	85S158 (83H67) 25-37-9 S(5) ABCDGH(4) ABCDEF(4) BEFGH(4) ABC(2) ADEF(3) ∅ NB(ABCDEGH / DEG(2)) T(DEFGH, BCGH, ACD, EF, GH)

85S187 (83H108) 24-36-11

S(5)
ABCDEF(4)
ABC(2) DEF(2)
∅

NB(ABCDGH / AGH(3))

T(ABCGH, ABCGH, DEFGH, DEFGH, GH)

85S188 (83H41) 21-31-8

S(5)
ADEFGH(4) ABCDE(3)
ADE(2) ABC(2)
∅

NB(ADEFGH / FG(2))

T(ABCDEFGH, DEFGH, FGH, FGH, BC)

85S189 (83H61) 19-33-8

S(5)
ABCDGH(4) ABCDEF(4)
ABC(2) DEF(2)
∅

NB(ABCDGH / DG(2))

T(ABCGH, ABCGH, DEFGH, EF, GH)

85S190 (83L80) 19-26-11

ABCDEFG(4)
ABCDE(3)
ABC(2) ADE(2)
∅

NB(ABCDFG / FG(2))

T(ABCDEFG, BCFG, DEFG, FG, H)

85S191 (83L92) 18-27-11

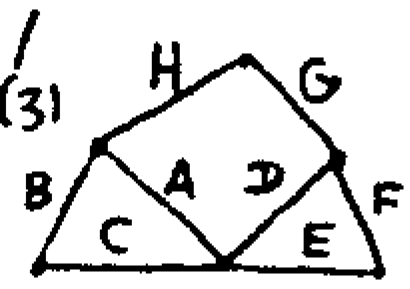
ABCDEFG(3)
ABC(2) DEF(2)
∅

NB(ABCDG / G(1))

T

85S192 (83H36) 15-30-6

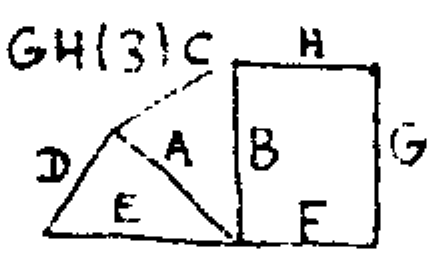
S(5)
ABCDEF(4) ABCDGH(4) ADEFGH(4)
ABC(2) DEF(2) ADGH(3)
∅



T(ABCGH, DEFGH, BC, EF, GH)

85S193 (83H34) 15-29-6

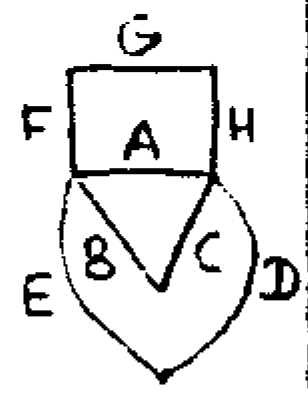
S(5)
ABCDE(3) ABCFGH(4)
ADE(2) ABC(2) BFGH(3)
∅



T(BCFGH, ACDE, FGH, FGH, DE)

85S194 (83H20) 17-29-6

S(5)
ABCDE(3) ABCFGH(4) ADEFGH(4)
ABC(2) ADE(2) AFGH(3)
∅



T(ABCDEFGH, FGH, FGH, BC, DE)

85S195 (83L75) 16-25-9

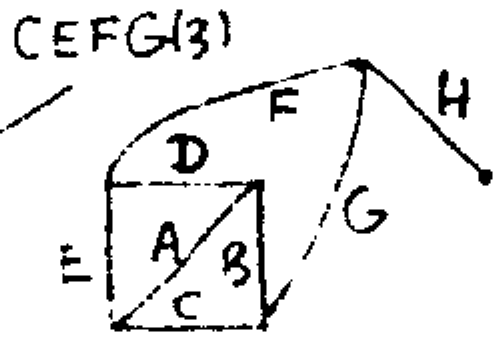
ABCDEFG(4)
ABCDE(3) BDFG(3)
ABC(2) ADE(2)
∅

NB(ABCEFG / FG(2))

T(BCFG, DEFG, ACE, FG, H)

85S196 (83L71) 13-24-7

ABCDEFG(4)
ABCDE(3) BDFG(3) CEFG(3)
ABC(2) ADE(2)
∅



NT

85S197 (83H26) 11-27-5

S(5)
DEFGH(3) ABCDEF(4)
DEF(2) ABC(2)
∅

NB(DEFGH / G(1))

T(DEFGH, DEFGH, ABC, ABC, GH)

85S198 (83L65) 15-23-8

ABCDEFG(4)
ABCFG(3) ABCDE(3)
ABC(2) ADE(2)
∅

NB(ABCDEF / DF(2))

T(ABCDE, BCFG, DE, FG, H)

85S199 (83L68) 19-25-10

ABCDEFG(4)
ABCDE(3) ABCFG(3)
ABC(2)
∅

NB(ABCDEF / DF(2))

T(ABCDEFG, ABCDEFG, DE, FG, H)

85S200 (83L74) 14-24-8

ABCDEFG(4)
ABCDG(3)
ABC(2) DEF(2)
∅

NB(ABCDEFG / DEF(2))

T(ABCG, ABCG, DEFG, EF, H)

85S173
(83H48)
27-34-10

S(5)
ABCDE(3) ABCFGH(4)
ABC(2)
∅

NB(ABCDEFG / DFG(3))

T(ABCDEFGH, ABCDEFGH, FGH, FGH, DE)

85S174
(83H43)
23-33-8

S(5)
ABCDE(3) ABCFGH(4) DEFGH(4)
ABC(2)
∅

NB(ABCDEF / DFG(

T(ABCDEFGH, ABC, FGH, FGH, DE)

85S175
(83L83)
23-28-13

ABCDEFG(4)
ABCDE(3)
ABC(2)
∅

NB(ABCDE / D(1))

T

85S176
(83L78)
18-26-1

ABCDEFG(4)
ABC(2) ADEFG(3)
∅

NB(ADEFG / A(1))

T

85S177
(83H59)
19-33-8

S(5)
ABCDE(3) DFGH(3)
ABC(2)
∅

NB(ABCDE / D(1))

T(DEFGH, ABCE, ABCE, FGH, FGH)

85S178
(83H42)
21-32-

S(5)
ABCGH(3) ABCDEF(4)
ABC(2) ADEF(3)
∅

NB(ABCGH / G(1))

T(ABCDEFGH, BCGH, DEF, DEF, GH)

85S179
(83L81)
20-27-11

ABCDEFG(4)
ABCDG(3) ADEF(3)
ABC(2)
∅

NB(ABCDEG / EG(2))

T(ABCDEFG, BCG, DEFG, EF, H)

85S180
(83L79)
20-27-1

ABCDEFG(4)
ABCDE(3) DEFG(3)
ABC(2)
∅

NB(ABCDE / D(1))

T(ABCDEFG, DEFG, ABC, FG, H)

85S181
(83L76)
17-26-9

ABCDEFG(4)
ABCDE(3) ADFG(3) BEFG(3)
ABC(2)
∅

NB(ABCDE / D(1))

T(DEFG, ACD, BCE, FG, H)

85S182
(83L66)
16-24-8

ABCDEFG(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) DEFG(3)
ABC(2)
∅

NB(ABCDEF / DF(2))

T(ABCDEFG, ABC, DE, FG, H)

85S183
(83L37)
15-19-13

ABCDEF(3)
ABC(2)
∅

NB(ABDEF / D(1))

T

85S184
(83H79)
26-34-11

S(5)
ABCDE(3)
ABC(2) ADE(2)
∅

NB(ABCDFGH / FGH(3))

T(ABCDEFGH, BCFGH, DEFGH, FGH, FGH)

85S185
(83H65)
22-33-9

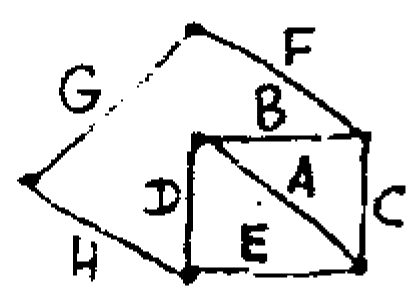
S(5)
ABCDE(3) BDFGH(4)
ABC(2) ADE(2)
∅

NB(ABCEFGH / FGH(3))

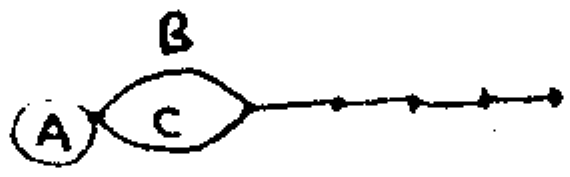
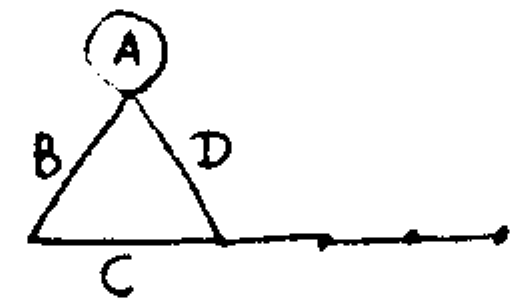
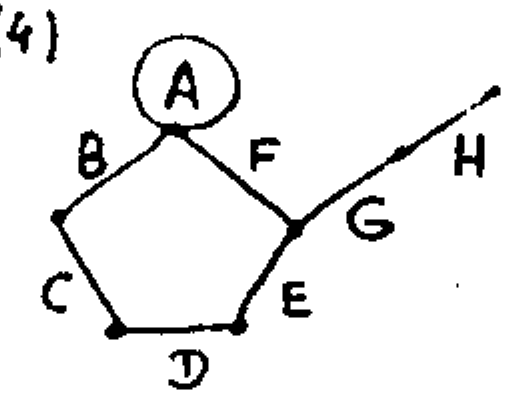
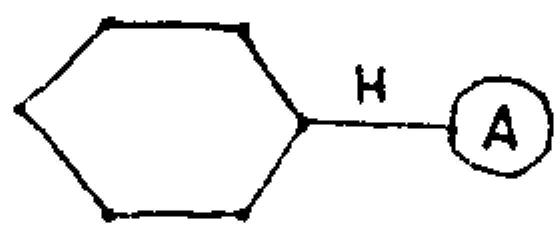
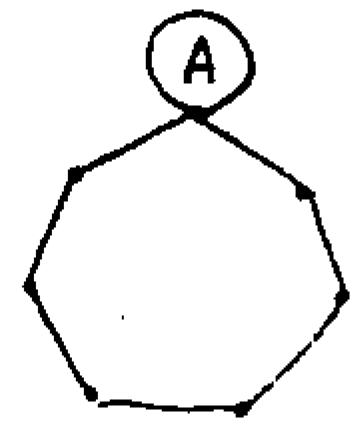
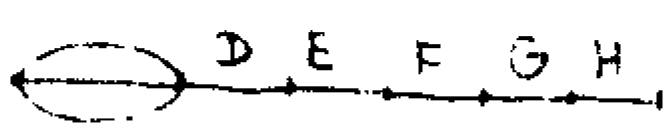
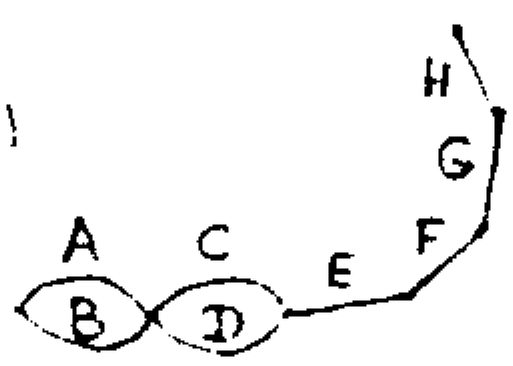
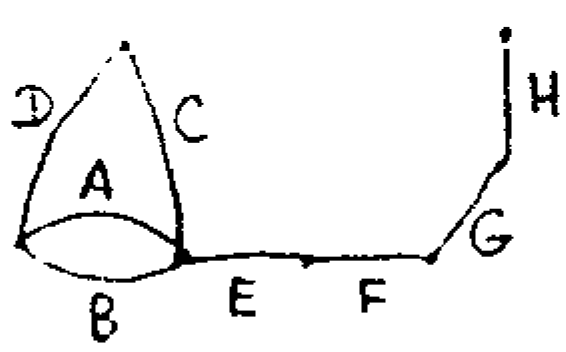
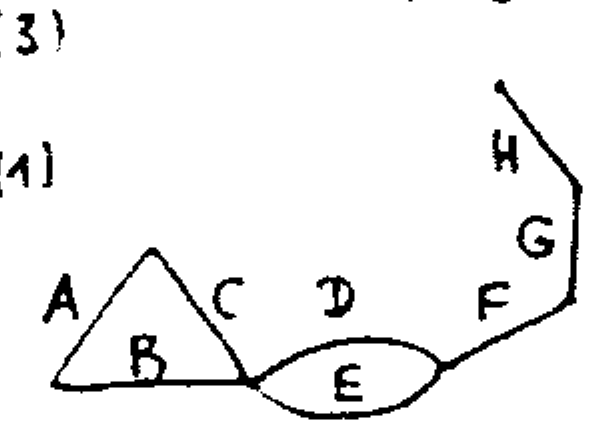
T(BCFGH, DEFGH, ACE, FGH, FGH)

85S186
(83H54)
18-32-7

S(5)
ABCDE(3) BDFGH(4) CEFGH(4)
ABC(2) ADE(2)
∅

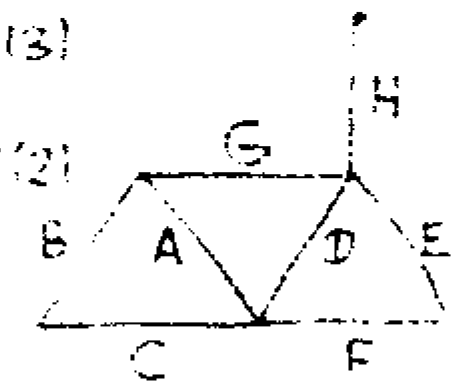


NT

85S215 (83L28) 10-15-8 ABCDEF(3) ABC(2) ADEF(2) ∅ NB(ADEF / ∅) T	85S216 (83L12) 8-10-10 ABCDE(2) ∅ NB(ABCD / ∅)
85S217 (83H113) 31-40-12 S(5) ABC(2) ADEFGH(4) ∅ NB(S(5) / ABCD) T	86L1 (82L1) 6-1-2 AB  T
86L2 (82L2) 6-2-2 ABC(1) A  T	86L3 (82L4) 7-3-2 ABCD(2) A  T
86L4 (82L8) 9-4-2 ABCDE(3) A  T	86L5 (82L14) 12-5-2 ABCDEF(4) A  T
86L6 (82L24) 16-6-2 ABCDEFG(5) A  T	86L7 (82H1) 21-7-2 S(6) A  T
86H1 (82L3) 6-3-3 ABC(1) ∅  T	86H2 (82L5) 6-4-2 ABCD(2) AB(1) CD(1) ∅  T
86H3 (82L6) 7-5-3 ABCD(2) AB(1) ∅  T	86H4 (82L9) 7-6-2 ABCDE(3) ABC(2) DE(1) ∅  T

85S201 (83L61) 11-21-6

ABCDEFG(4)
ABCDG(3) ADEFG(3)
ABC(2) ADG(2) DEF(2)
∅



T(ABCG, DEFG, BC, EF, H)

85S202 (83L36) 13-18-11

ABCDEF(3)
ABC(2) ADE(2)
∅

$NB\begin{pmatrix}ABCDF\\ F(1)\end{pmatrix}$

T

85S203 (83L35) 13-18-11

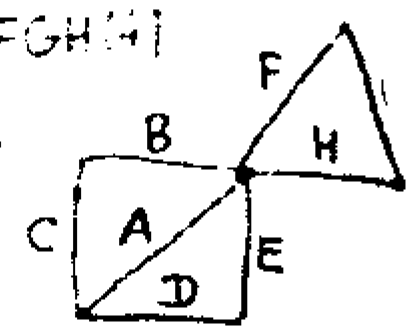
ABCDEF(3)
ABC(2) DEF(2)
∅

$NB\begin{pmatrix}ABDEFGH\\ AGH(3)\end{pmatrix}$

T

85S204 (83H45) 9-24-4

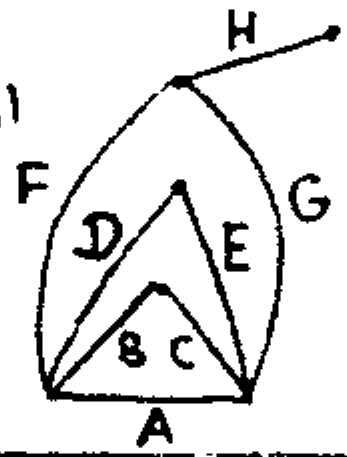
S(5)
ABCDE(3) ABCFGH(4) ADEFGH(4)
ABC(2) ADE(2) FGH(2)
∅



T(ABCDE, FGH, FGH, BC, DE)

85S205 (83L52) 12-20-6

ABCDEFG(4)
ABCDE(3) ABCFG(3) ADEFG(3)
ABC(2) ADE(2) AFG(2)
∅



T(ABCDEFG, BC, DE, FG, H)

85S206 (83L33) 11-17-9

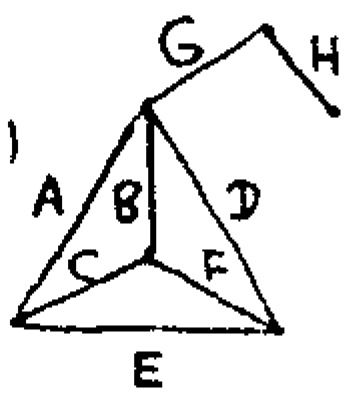
ABCDEF(3)
ABC(2) ADE(2) BDF(2)
∅

$NB\begin{pmatrix}ABCDEGH\\ AGH(1)\end{pmatrix}$

T(ACE, BCF, DEF, G, H)

85S207 (83L31) 9-16-7

ABCDEF(3)
ABC(2) ADE(2) BDF(2) CEF(2)
∅



NT

85S208 (83H47) 23-28-10

S(5)
ABCD(2)
∅

$NB\begin{pmatrix}ABCD\\ \emptyset\end{pmatrix}$

T

85S209 (83H39) 19-27-8

S(5)
ABCD(2) AEFGH(4)
∅

$NB\begin{pmatrix}ABCD\\ \emptyset\end{pmatrix}$

T

85S210 (83L67) 17-22-10

ABCDEFG(4)
ABCD(2)
∅

$NB\begin{pmatrix}ABCD\\ \emptyset\end{pmatrix}$

T

85S211 (83L63) 14-21-8

ABCDEFG(4)
ABCD(2) AEFG(3)
∅

$NB\begin{pmatrix}ABCD\\ \emptyset\end{pmatrix}$

T

85S212 (83H23) 10-24-5

S(5)
ABCD(2) EFGH(3)
∅

$NB\begin{pmatrix}ABCD\\ \emptyset\end{pmatrix}$

T

85S213 (83L29) 12-16-10

ABCDEF(3)
ABCD(2)
∅

$NB\begin{pmatrix}ABCD\\ \emptyset\end{pmatrix}$

85S214 (83L56) 8-17-5

ABCDEFG(4)
ABC(2) DEFG(2)
∅

$NB\begin{pmatrix}DEFG\\ \emptyset\end{pmatrix}$

86S8 (82L36) 32-20-6

ABCDEFG(5)
ABCDE(4)
∅

$NB\begin{pmatrix} ABCDEFG \\ AFG(3) \end{pmatrix}$

T

86S9 (82H16) 38-24-5

S(6)
ABCDE(4) ABCFGH(5)
∅

$NB\begin{pmatrix} S(6) \\ DEFG \end{pmatrix}$

T

86S10 (82H13) 33-23-4

S(6)
ABCDE(4) ABCFGH(5) ADEFGH(5)
∅

$NB\begin{pmatrix} S(6) \\ ABDG \end{pmatrix}$

T(ABCDEFGH, ABCDEFGH, FGH, FGH, BC, DE)

86S11 (82L35) 28-19-5

ABCDEFG(5)
ABCDE(4) ABCFG(4)
∅

$NB\begin{pmatrix} ABCDEFG \\ DEF(3) \end{pmatrix}$

T

86S12 (82H12) 30-22-4

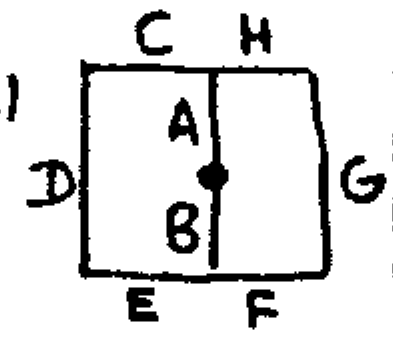
S(6)
ABCDE(4) ABFGH(4)
∅

$NB\begin{pmatrix} S(6) \\ CDFG \end{pmatrix}$

T

86S13 (82H9) 25-21-3

S(6)
ABCDE(4) ABFGH(4) CDEFGH(5)
∅



T(ABCDEFGH, CDE, CDE, FGH, FGH, AB)

86S14 (82L33) 24-18-4

ABCDEFG(5)
ABCDE(4) ABCFG(4) ADEFG(4)
∅

$NB\begin{pmatrix} ABCDEFG \\ BDF(3) \end{pmatrix}$

T(ABCDEFG, ABCDEFG, BC, DE, FG, H)

86S15 (82L23) 22-15-6

ABCDEF(4)
∅

$NB\begin{pmatrix} ABCDEF \\ AB(2) \end{pmatrix}$

T

86S16 (82H15) 34-22-5

S(6)
ABCD(3)
∅

$NB\begin{pmatrix} S(6) \\ EFGH \end{pmatrix}$

T

86S17 (82L21) 16-13-4

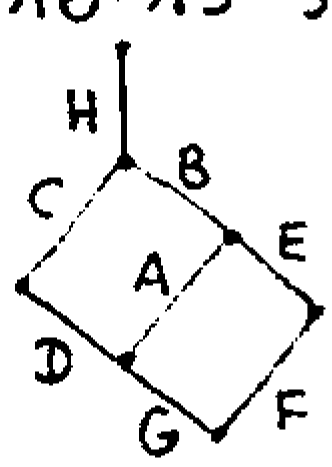
ABCDEF(4)
ABCD(3) ABEF(3)
∅

$NB\begin{pmatrix} ABCDEF \\ CE(2) \end{pmatrix}$

T

86S18 (82L29) 16-15-3

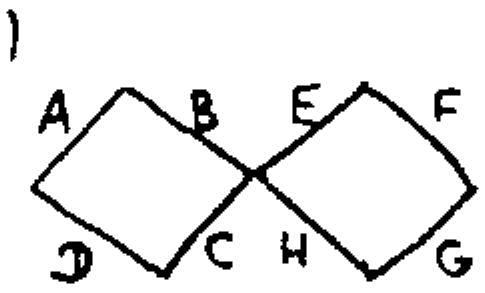
ABCDEFG(5)
ABCD(3) AEFG(3)
∅



T

86S19 (82H4) 12-16-2

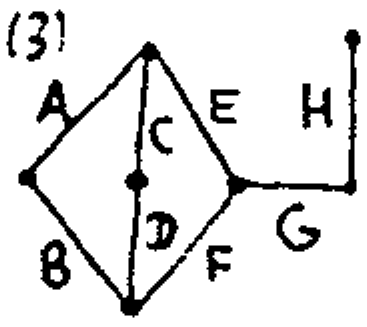
S(6)
ABCD(3) EFGH(3)
∅



T

86S20 (82L19) 13-12-3

ABCDEF(4)
ABCD(3) ABEF(3) CDEF(3)
∅



T(ABCDEF, AB, CD, EF, G, H)

86S21 (82L32) 22-17-4

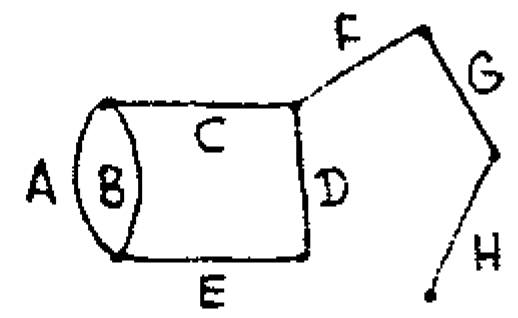
ABCDEFG(5)
ABCD(3) ABEFG(4)
∅

$NB\begin{pmatrix} ABCDEFG \\ CEF(3) \end{pmatrix}$

T

86H5 (82L10) — 9-7-3

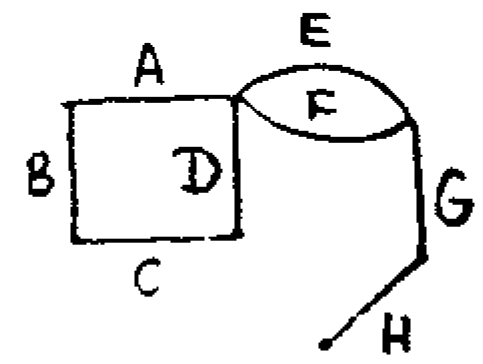
ABCDE(3)
|
AB(1)
|
Ø



T

86H6 (82L15) — 9-8-2

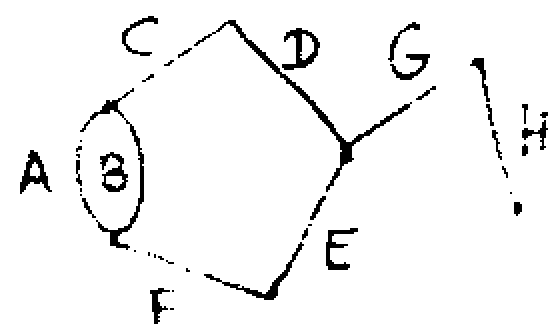
ABCDEF(4)
ABCD(3) EF(1)
Ø



T

86H7 (82L17) — 12-9-3

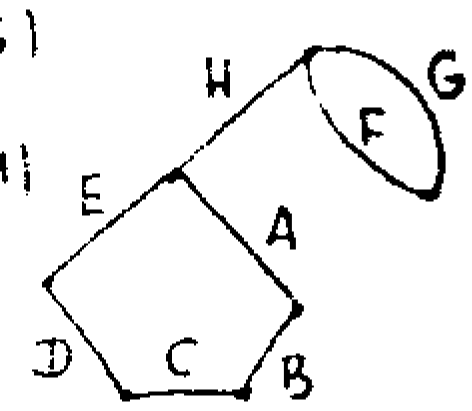
ABCDEF(4)
|
AB(1)
|
Ø



T

86H8 (82L25) — 12-10-2

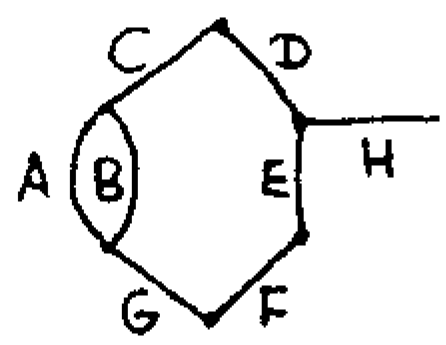
ABCDEFG(5)
ABCDE(4) FG(1)
Ø



T

86H9 (82L27) — 16-11-3

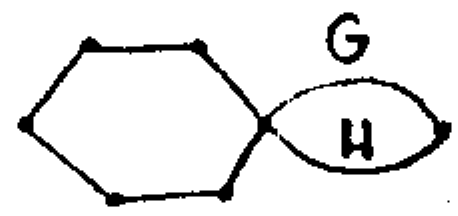
ABCDEFG(5)
|
AB(1)
|
Ø



T

86H10 (82H2) — 16-12-2

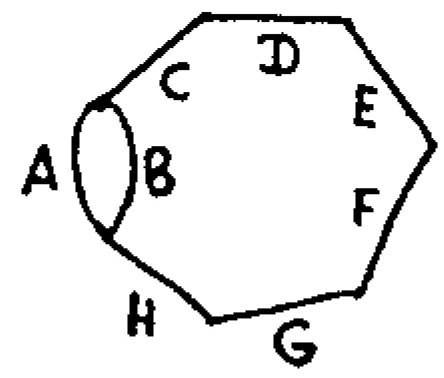
S(6)
ABCDEF(5) GH(1)
Ø



T

86H11 (82H5) — 21-13-3

S(6)
|
AB(1)
|
Ø



T

86S1 (82S1) — 56-28-8

S(6)
|
Ø

NB(S(6) – ABCD)

T

86S2 (82L37) — 36-21-7

ABCDEFG(5)
|
Ø

NB(ABCDEFG – ABC(3))

T

86S3 (82H20) — 51-27-7

S(6)
|
ABCDEF(5)
|
Ø

NB(S(6) – ABGH)

T

86S4 (82H19) — 46-26-6

S(6)
ABCDEF(5) ABCDGH(5)
Ø

NB(S(6) – EFGH)

T

86S5 (82H17) — 41-25-5

S(6)
ABCDEF(5) ABCDGH(5) ABEFGH(5)
Ø

NB(S(6) – ACEG)

T(ABCDEFGH, ABCDEFGH, ABCDEFGH, CD, EF, GH)

86S6 (82H14) — 36-24-4

S(6)
ABCDEF(5) ABCDGH(5) ABEFGH(5) CDEFGH(5)
Ø

NB(S(6) – ACEG)

T(ABCDEFGH, ABCDEFGH, AB, CD, EF, GH)

86S7 (82H18) — 43-25-6

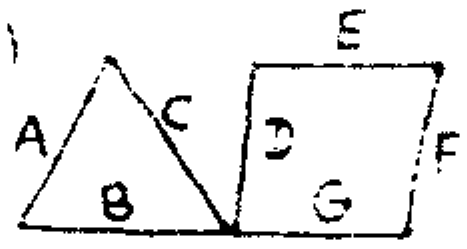
S(6)
|
ABCDE(4)
|
Ø

NB(S(6) – AFGH)

T

86S36 (82L26) 10-12-2

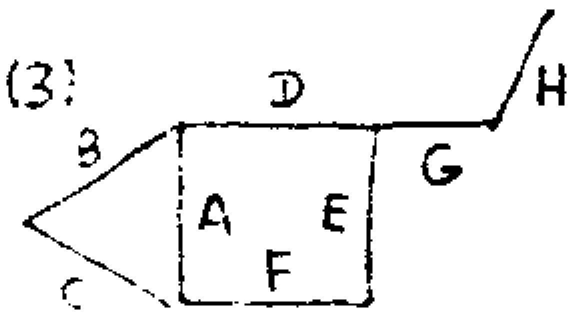
ABCDEFG(5)
ABC(2) DEFG(3)
Ø



T

86S37 (82L18) 12-11-3

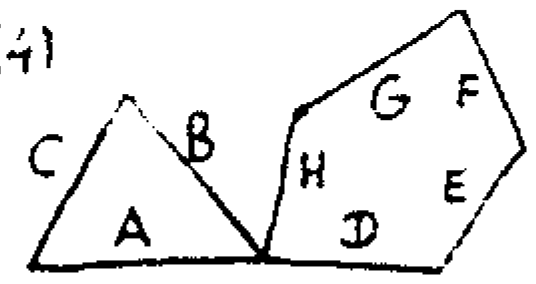
ABCDEF(4)
ABC(2) ADEF(3)
Ø



T

86S38 (82H3) 13-15-2

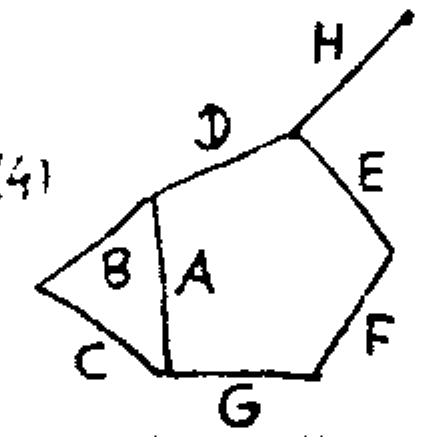
S(6)
ABC(2) DEFGH(4)
Ø



T

86S39 (82L28) 16-14-3

ABCDEFG(5)
ABC(2) ADEFG(4)
Ø



T

86S40 (82L7) 8-6-4

ABCD(2)
|
Ø

NB(ABCD / Ø)

T

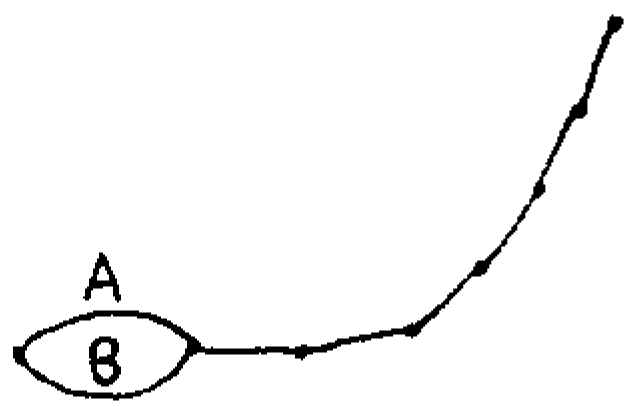
87L1 (81L1) 7-1-1

A
•

T

87H1 (81L2) 7-2-1

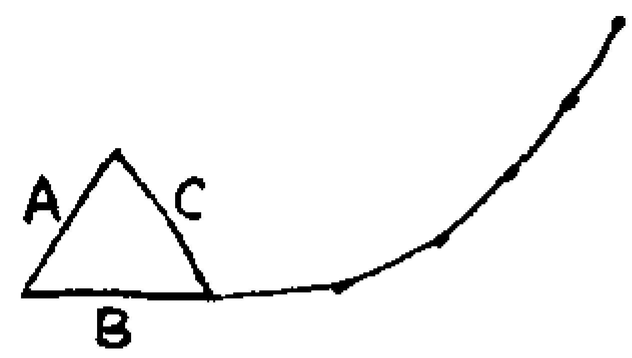
AB(1)
|
Ø



T

87S1 (81L3) 8-3-1

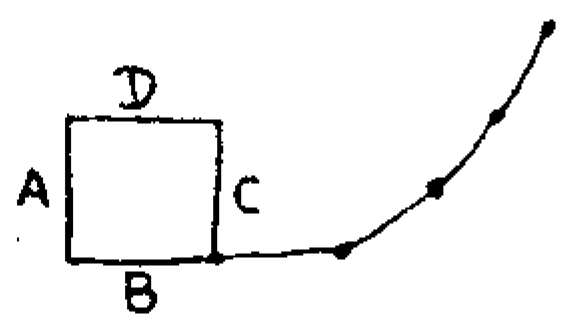
ABC(2)
|
Ø



T

87S2 (81L4) 10-4-1

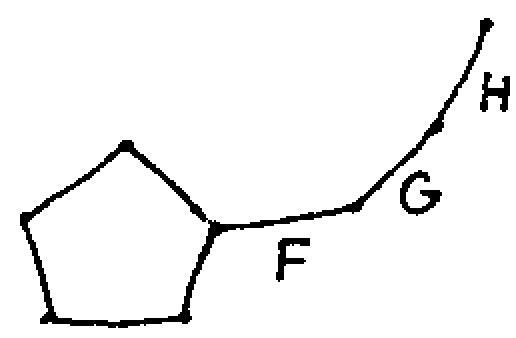
ABCD(3)
|
Ø



T

87S3 (81L5) 13-5-1

ABCDE(4)
|
Ø



T

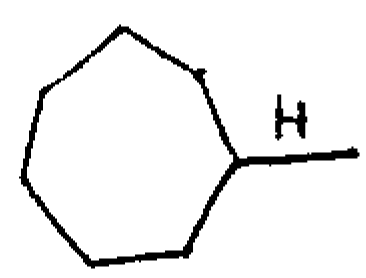
87S4 (81L6) 17-6-1

ABCDEF(5)
|
Ø

T

87S5 (81L7) 22-7-1

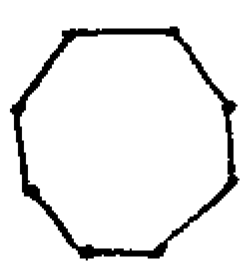
ABCDEFG(6)
|
Ø



T

87S6 (81H1) 28-8-1

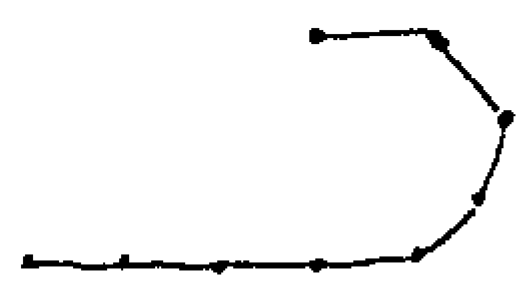
S(6)
|
Ø



T

88S1 (80L1) 8-0-0

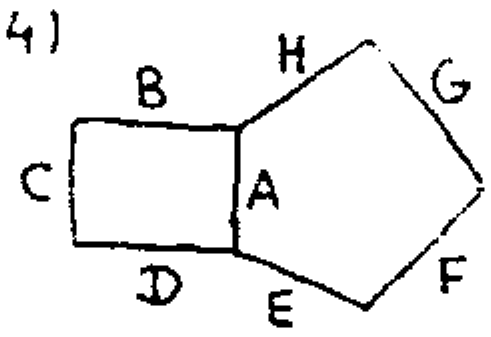
Ø
•



T

86S22 (82H7) — 21-19-3

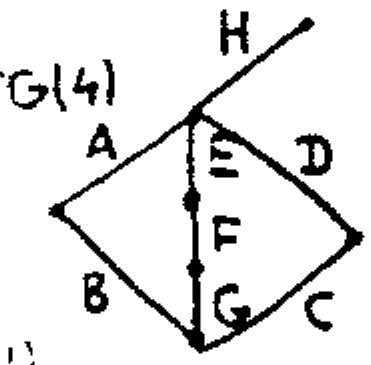
S(6)
ABCD(3)   AEFGH(4)
∅



T

86S23 (82L30) — 18-16-3

ABCDEFG(5)
ABCD(3)   ABEFG(4)   CDEFG(4)
∅



T(ABCDEFG, EFG, EFG, AB, CD, H)

86S24 (82L22) — 19-14-5

ABCDEF(4)
ABCD(3)
∅

NB(ABCDEF | EF(2))

T

86S25 (82H11) — 29-21-4

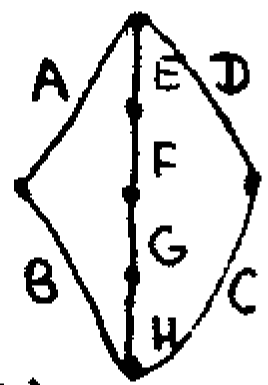
S(6)
ABCD(3)   ABEFGH(5)
∅

NB(S(6) | CEFG)

T

86S26 (82H8) — 24-20-3

S(6)
ABCD(3)   ABEFGH(5)   CDEFGH(5)
∅



T(ABCDEFGH, EFGH, EFGH, EFGH, AB, CD)

86S27 (82L34) — 26-18-5

ABCDEFG(5)
ABCD(3)
∅

NB(ABCDEFG | EFG(3))

T

86S28 (82L13) — 13-10-5

ABCDE(3)
∅

NB(ABCDE | A(1))

T

86S29 (82H10) — 26-18-4

S(6)
ABC(2)
∅

NB(S(6) | DEFG)

T

86S30 (82L12) — 11-9-4

ABCDE(3)
ABC(2)
∅

NB(ABCDE | D(1))

T

86S31 (82L20) — 15-12-4

ABCDEF(4)
ABC(2)
∅

NB(ABCDEF | DE(2))

T

86S32 (82L31) — 20-15-4

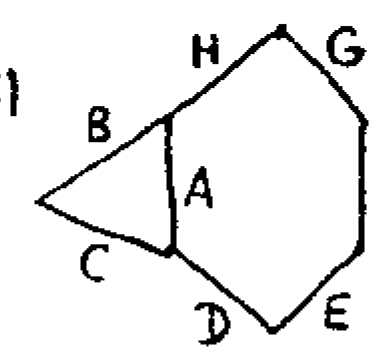
ABCDEFG(5)
ABC(2)
∅

NB(ABCDEFG | DEF(3))

T

86S33 (82H6) — 21-17-3

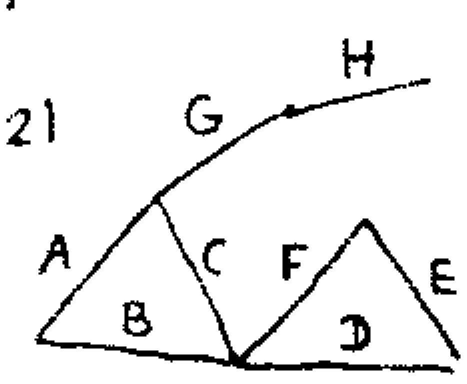
S(6)
ABC(2)   ADEFGH(5)
∅



T

86S34 (82L16) — 8-9-2

ABCDEF(4)
ABC(2)   DEF(2)
∅



86S35 (82L11) — 9-8-3

ABCDE(3)
ABC(2)   ADE(2)
∅