УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

ВИША МАТЕМАТИКА

ЗА ФИЗИЧАРЕ, ХЕМИЧАРЕ, БИОЛОГЕ И СТАТИСТИЧАРЕ

АНТОН БИЛИМОВИЋ
проф. Универзитета

Научна књига
ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
БЕОГРАД, 1948

Штампарија „Давидовић“, Београд, Таковска бр. 32 — Телефон 21-211

ПРЕДГОВОР

Савремена универзитетска настава читавог низа и нематематичких предмета захтева употребу Више математике. На Филозофском факултету тај се захтев проширује на Физику, Хемију, Биолошке науке, Логику и Филозофију. Потреба за Вишом математиком прелази и на друге факултете, на којима раније о математичким појмовима и методама није било ни речи. Тако је, на пример, на Правном факултету настава Статистике, која би одговарала савременом стању науке немогућа без примене Више математике.

Потребу за Вишом математиком код слушалаца нематематичара на Универзитету у некој мери подмирио је данашњи програм средњошколске математике. Пре 50 година појам функције био је познат само математичарима и оним стручњацима чије су струке, на пример техника, тесно везане за математику. Данас је међутим појам функције органски ушао у сазнање доброг матуранта.

Но чак и тако проширен програм средњошколске математике није довољан за поменуте гране универзитетске наставе. Зато на Универзитетима и другим вишим школама постоје специјални курсеви Више математике за нематематичаре. У вези са тим појавио се у литератури читав низ уџбеника Више математике намењених онима чија струка није математика. У српској научној литератури таквог уџбеника нема. Циљ ове књиге је да попуни ту празнину.

Сем опште стручне литературе из области чисте и примењене математике служио сам се и специјалном литературом посвећеном нематематичарима. Из те литературе могу се нарочито истаћи ова дела:

W. Nernst und A. Schoenflies — Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Прво издање 1895 г., једанаесто 1931.

J. W. Mellor — Higher mathematics for students of chemistry and physics. Прво издање 1902, четврто 1913.

R. Fueter — Das mathematische Werkzeug. Прво издање 1925 г., друго 1930.

H. Geiger und *K. Scheel* — Handbuch der Physik. Band III. Mathematische Hilfsmittel in der Physik. 1928.

Што се тиче излагања Више математике за нематематичаре у овој, као и у сличним књигама, оно не може и не треба да буде строго. Понеки се ставови износе чак и сасвим без доказа. У методици математике таква је пракса уведена одавно. Непознавање строгог извођења не смета искоришћавању одговарајућег математичког апарата. Тако, на пример, један средњошколац може са великим успехом искоришћавати логаритамске таблице не знајући како су израчунати бројеви који стоје у тим таблицама.

Примене Више математике, које наводимо у овој књизи, из области Физике, Хемије и других дисциплина не сачињавају излагање математичког дела тих дисциплина. То су само примери такве примене.

Ма да је књига написана за нематематичаре њоме се могу користити и стручњаци математичари, а такође и лица која студирају Вишу математику у већем обиму и примењују је у другим струкама. Примене математичких теориских појмова у различитим областима разјашњују и продубљују саме те појмове и оживљују апстрактне математичке методе.

Професори Dr Ing Иван Арновљевић и Ing Јаков Хлитчијев били су толико добри те су прегледали текст ове књиге и учинили ми низ својих примедаба. Дубоко цењеним колегама изражавам најтоплију благодарност.

При изради текста ове књиге много ми је помогао мој син Dr Арсен Билимовић за што сам му нежно захвалан.

23 марта 1944
у Београду

Антон Билимовић

P. S.

Од завршетка прве редакције рукописа ове књиге па до тренутка кад се указала могућност за њено штампање прошло је доста времена, више од три године. У вези са тим, прва њена редакција претрпела је извесне измене. Садашњи материјал књиге састављен је од два дела. Један део везан је за курс Више математике, који држим ове школске године студентима Природно-математичког факултета нематематичарима, други део стоји у вези са курсом „Увод у математичку физику“ који сам држао у летњем семестру 1946—47 школске године. Но без обзира на везу са мојим универзитетским предавањима, ова књига углавном је задржала основну своју особину — књиге намењене нематематичарима свих оних струка које са математиком имају додира. Читаоци књиге, према својој струци, треба, како при првом читању тако и при дубљем студирању књиге, према материјалу књиге различито да се понашају.

Физичари, на пример, треба тај материјал да сматрају као, тако рећи, Математику I, с тим да у другој години својих студија продубе и прошире овај материјал још и Математиком II, нарочито у области диференцијалних једначина. Обрнуто, природњаци или статистичари могу се задовољити, нарочито при првом читању, само једним делом књиге, а касније могу своја знања проширити и у оним областима, које су им нарочито потребне, у области статистике и корелације. У књизи се понегде говори и о стварима које и за стручњаке математичаре могу изгледати као необичне, на пример, о појму кватерниона. Међутим, Историја науке сведочи да је баш Теорија кватерниона одиграла видну улогу пре свега у области Физике. Познато је, наиме, да је генијални математичар Хамилтон чисто математичким путем предвидео, помоћу кватерниона, врло важну физичку појаву — конусну рефракцију. Поред тога, без увођења појма кватерниона Теорија вектора, научна дисциплина чију важност, нарочито у Физици, нико данас више не пориче, остаје принципски недовршена, јер остаје отворено питање о дељењу два вектора.

У вези са садржајем књиге навешћу још неколико примедаба. Књига садржи два дела: Вишу математику, — главе I—IX, и Увод у математичку физику — остале главе X—XIV. У првој, уводној глави, сем уопштавања појма броја и навођења облика, који стоје у вези са бројевима, дат је популарни преглед оних грана математике, од којих су неке нарочито важне у Модерној физици, али чије је излагање немогуће у кратком курсу. У другој глави је при развијању појма функције обраћена главна пажња не на формалну страну, већ на природу функционалне везе и одговарајућег процеса. Алгоритмима диференцирања и интеграције посвећене су углавном трећа, четврта и шеста глава. Сваки ко жели да се бави, чак и у најскромнијој форми, Вишом математиком и њеним применама мора да савлада технику диференцирања и интеграције бар оних функција, које улазе у његову област. За олакшавање тог техничког савлађивања диференцирања односно интеграције наведене су и таблице за један и други алгоритам како у тексту тако и на крају књиге. У петој глави, где су наведене примене извода и диференцијала, излагање се углавном оснива на непосредној геометриској методи; строгост је жртвована за што очигледнију претставу. Седма глава, где су наведени калкулативни процеси, врло је важна за вршење конкретних израчунавања. Разуме се ни овде није могуће излагати методе чак ни са оном строгошћу, која је усвојена сада у обичним специјалним курсевима. Он, који би желео ући дубље у одговарајуће алгоритме, мора се послужити, према потреби, опширнијим курсевима и на основу њих доћи до строжијих, а у приближним рачунима и тачнијих резултата (са оценом грешке). Без обзира на то што при проучавању природних појава Виша математика показује свој главни значај баш у састављању и интегрисању диференцијалних једначина, у овом курсу тим једначинама могла је бити посвећена релативно кратка осма глава. Девету главу сачињавају примене инфинитезималног рачуна на проблеме из разних наука. Мишљења сам да је само помоћу примена могуће схватити унутрашњи, природни, не формални смисао појмова инфинитезималног рачуна.

Садржај осталих глава, где су наведени елементи Варијационог рачуна, Теорије вероватноће, Теорије грешака, Математичке статистике и Теорије корелације, треба сматрати, с једне стране, као материјал за проширену и развијену примену инфинитезималног рачуна, с друге стране, као прве кораке у формирању оних специјалних математичких дисциплина, које су потребне одговарајућим стручњацима.

Проф. Dr В. В. Мишковић, као редактор универзитетских уџбеника, пажљиво је прегледао другу редакцију ове књиге. Dr Т. Анђелић исто тако је прочитао рукопис и помогао ми у читању коректура. Њима најсрдачније захваљујем на труду који су за то уложили.

Штампање књиге је ишло са великим тешкоћама и са прекидом од три и по месеца. Најсавеснији у послу били су слагачи, нарочито Мирко Вулетић, коме изјављујем особиту захвалност.

25. маја 1948
у Београду

А. Б.

САДРЖАЈ

ГЛАВА III

Извод и диференцијал

ГЛАВА IV

Функције више променљивих. Имплицитна функција

ГЛАВА V

Примене извода и диференцијала

ГЛАВА VI

Интеграли

ГЛАВА VII

Калкулативни процеси

ГЛАВА VIII

Диференцијалне једначине

ГЛАВА IX

Примене на проблеме Геометрије, Механике, Физике, Хемије, Биологије и Статистике

ГЛАВА X

Екстремални принципи. Варијациони рачун

ГЛАВА XI

Теорија вероватноће

ГЛАВА XII

Теорија грешака

ГЛАВА XIII

Математичка обрада статистичких података

ГЛАВА XIV

Теорија корелације

Прилози

ГЛАВА I

БРОЈ И ОБЛИК

§ 1. Низ природних бројева

Да ли знате порекло речи „број"? Ево одговора једног филолога. Реч „број" је старословенска реч; сачувана је у српском језику; она је у етимолошкој вези са глаголом — „бри-ја-ти" (руско „брить") — сећи. Реч „број" значила би, према томе, засек или зарез.

Па која је веза између појма „број" и појма „сећи"? Биће нам јасно, ако претставимо себи ову слику из живота старих Словена. Пастир жели да преброји своје стадо; узима дрвени штапић и, прелазећи погледом са једне овце на другу, прави зарезе на штапићу: колико зареза, толико и оваца. Зарез на штапићу то је број.

Из потребе за бројањем настао је низ природних бројева:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$$

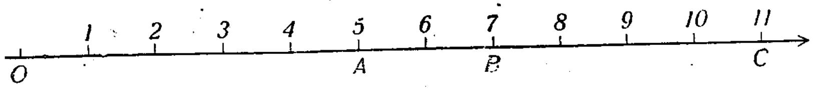
Како је најједноставнији начин бројања — бројање на прстима, систем назива у низу природних бројева везан је за број десет, колико прстију имамо на рукама. Тако је постао декадни (од десет) бројни систем.

Код појединих народа има у систему бројева трагова и од броја прстију само на једној руци, на пр. римска цифра V.

Французи број 80 називају quatrevingt (четири пута двадесет), што се исто тако може довести у везу са прстима — само сада са прстима на ногама и рукама.

Да ли се може продужити низ природних бројева бескрајно? Данас нам то питање изгледа наивно. Толико је јасно да низ бројева нема краја и да је увек могуће наћи број који би одговарао произвољно замишљеној колико год великој множини предмета. Но ово није увек било тако јасно. Раније је требало то доказивати. Славни Сиракужанин, велики грчки математичар, Архимед (287—212 пре наше ере) написао је о томе читаву расправу: Псамитис. Он тврди у њој да је у декадном систему могуће начинити број већи од броја зрна песка (песак — ψάμμος — псамос) који би стао у лопту толико велику да би ова могла обухватити све звезде.

Нацртајмо праву (слика 1) и на њој стрелицом означимо смер. Права са обележеним смером зове се о с а или о с о в и н а. На тој оси означимо одређену тачку са О (прво слово латинске речи origo — почетак). У изабраном смеру одмеримо од ове тачке више пута исту дужину.



Сл. 1. Бројна скала

Ову ћемо дужину — на пр., један центиметар узети за јединицу. Крајеве одмерених дужина означимо са 1, 2, 3 итд. Тако ћемо добити на слици оно што се зове б р о ј н а с к а л а. Праву можемо у означеном смеру продужити колико год желимо. Имамо, дакле, и геометриски доказ да се низ природних бројева може продужити у бескрајност.

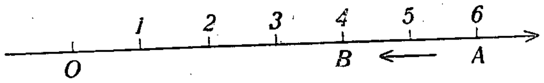
§ 2. Основне операције. Уопштавање појма „број"

Знамо како се врши с а б и р а њ е два природна броја. З б и р таквих бројева биће увек опет природни број.

За сабирање два броја, рецимо 5 и 2, можемо на бројној скали надовезати отсечак AB = 2 на отсечак OA = 5 (сл. 1). Отсечак OB = 7 одговара збиру наших бројева. Ако имамо и трећи сабирак, рецимо BC = 4, треба на крај B другог отсечка надовезати тај нови, трећи. Отсечак OC = 11, који спаја почетак O са крајем последњег отсечка, одговара на бројној скали збиру свих датих бројева.

Знамо и за о д у з и м а њ е, радњу обрнуту сабирању.

За одузимање на бројној скали, рецимо, два од шест (сл. 2) потребно је од тачке O одмерити надесно шест јединица (OA), па затим у с у п р о т н о м смеру, улево, две јединице (AB). Разлику даје дуж OB = 4.

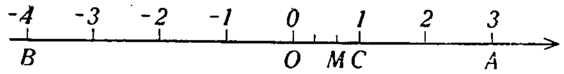


Сл. 2 Одузимање

Одузимање може довести до нових бројева. То ћемо лако увидети из ове конструкције. Ако вршимо одузимање, рецимо, 4—4, конструкција ће показати да се поново враћамо у тачку O. Ако разлику два једнака

броја желимо да сматрамо као број, треба увести нови број — нулу; његова ознака је 0. Према томе, почетку бројне скале, тачки O, одговара број нула.

Желимо ли одузети већи природни број од мањег, на пр. 7 од 3 (сл. 3), применићемо на геометриској скали исти поступак. Од краја A



Сл. 3. Одузимање већег броја од мањег. Негативни број. Разломљени број

дужине OA = 3 одмерићемо улево AB = 7. Тачка B лежи са супротне стране од тачке O и према томе не одговара ниједном од нама досада познатих природних бројева. Ако желимо разлику између мањег и већег броја да сматрамо као број, треба увести нове бројеве. Познато је да су то н е г а т и в н и б р о ј е в и. Сваки негативни број има своју а п с о л у т н у в р е д н о с т и знак м и н у с.

Низ природних бројева допунили смо нулом и негативним бројевима. Добили смо, дакле, низ

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

који може бити бескрајно продужен не само надесно, него и налево. Нула одваја п о з и т и в н е од негативних бројева.

Сви бројеви који спадају у горенаведени низ су ц е л и бројеви.

Наредна, нама позната радња, м н о ж е њ е, било позитивних, било негативних целих бројева, доводи до резултата који се увек изражава целим бројем.

Знамо да се резултат дељења два цела броја не може увек изразити целим бројем. Тако се, на пр., количник 2 : 3 не изражава ни позитивним ни негативним целим бројем. На бројној скали треба дужину јединице OC (сл. 3) поделити на три једнака дела и узети два таква дела. Тачки M одговара број нове природе, који се одређује са два цела броја. То је р а з л о м а к или р а з л о м љ е н и број.

Цели и разломљени бројеви, било позитивни, негативни или нула, сачињавају заједно класу р а ц и о н а л н и х бројева.

Наредне радње са бројевима су с т е п е н о в а њ е и к о р е н о в а њ е. Као што знамо, степеновање је директна операција, при чему узимамо у обзир случај целог изложиоца. Кореновање је операција обрнута степеновању. Ова операција нас опет доводи до бројева нове природе. Узмимо, на пр., квадратни корен из два, тј. $\sqrt{2}$. Лако је показати да нема ни целог ни разломљеног броја, који подигнут на квадрат даје тачно 2. Ако желимо и резултате ових операција да уведемо у Математику, треба увести нове бројеве — **ирационалне**. Као што је познато, сваки ирационални број може бити изражен бесконачним децималним бројем, али он не може бити периодичан, јер се бесконачан периодичан децимални број увек изражава рационалним разломљеним бројем.

Ако $\sqrt{2}$ означимо са x, можемо написати $x^2 = 2$ или $x^2 - 2 = 0$. Видимо да x задовољава **алгебарску** једначину са целим коефицијентима. Из тог је разлога $\sqrt{2}$ **алгебарски** ирационални број.

Има, међутим, и таквих ирационалних бројева, који нису решења ни једне алгебарске једначине са целим коефицијентима. Такви се ирационални бројеви зову **трансцендентни** бројеви. Као пример трансцендентног броја можемо навести познати број π, који изражава однос обима круга према пречнику. За тај је број доказано да не постоји никаква алгебарска једначина са целим коефицијентима чије би решење било тај број — то је, дакле, трансцендентни број.

Прегледали смо различите бројеве: рационалне (целе и разломљене) и ирационалне (алгебарске и трансцендентне).

Знамо да се у Математици, кад се не говори о бројевима одређене вредности, употребљавају слова као ознаке бројева: $a, b, c, \ldots, m, n, \ldots, x, y, z$. Број означен словом зове се **општи број**. Правила операција са таквим бројевима даје **алгебра**. Општи бројеви се употребљују за изражавање особина које припадају не само неким појединим бројевима него свима бројевима уопште. Ево примера. Наведене једнакости изражавају:

$(a+b)+c = a+(b+c)$	асоцијативни закон сабирања,
$a+b = b+a$	комутативни закон сабирања,
$(ab)c = a(bc)$	асоцијативни закон множења,
$ab = ba$	комутативни закон множења,
$(a+b)c = ac+bc$	дистрибутивни закон множења и сабирања[1]).

Општи се бројеви употребљују такође и за **математичке**

[1]) Асоцијативни закон сабирања тврди да, место сабирања a са b и додавања c, можемо прво сабрати b и c (начинити асоцијацију) па тај збир додати броју a. Слично показује и асоцијативни закон множења у односу на стварање производа.

Комутативни закони сабирања и множења показују да резултати тих радња не зависе од реда којим се оне врше.

Дистрибутивни закон показује да у случају множења збира можемо множилац распоредити на сваки поједини сабирак, израчунати делимичне производе и сабрати добијене резултате.

обрасце. Сваки такав образац изражава поступак, који се примењује не само на поједине вредности бројева, него на више вредности, а понекад и на све бројеве уопште. Тај образац одређује операције које треба да извршимо са бројевима да бисмо добили тражени резултат.

Низ операција који доводи до решења једног проблема зове се у Математици **алгоритам** тог проблема; алгоритам се обично изражава помоћу општих бројева. Као пример навешћемо алгоритам за одређивање највећег заједничког делиоца два броја, класични тзв. **Еуклидов алгоритам**.

Нека су a и b два цела броја и нека је $a > b$. Делимо a са b. Ако се дељење сврши без остатка, тј. $a = bq$, где је q цео број, број b је највећи заједнички делилац бројева a и b. У овом се дакле случају алгоритам одређивања тог делиоца своди само на једно дељење. Ако се дељење врши са остатком r, где је $r < b$, имамо $a = bq + r$. Из ове једнакости следује да је највећи заједнички делилац бројева a и b у исто време и највећи заједнички делилац бројева b и r. Поделимо сад b са r; тада се добија $b = rq_1 + r_1$ и тако даље. Према томе имамо једнакости

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= bq + r,\\ b &= rq_1 + r_1,\\ r &= r_1q_2 + r_2,\\ &\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n. \end{aligned}\right.$$

Узастопни остаци

$$r,\ r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n$$

увек претстављају низ целих све мањих бројева. Морамо из тог разлога доћи до остатка једнаког нули. Ако је $r_n = 0$, тада је претходни остатак r_{n-1} највећи заједнички делилац пара бројева: r_{n-1} и r_{n-2}, затим r_{n-2} и r_{n-3} итд. и најзад бројева a и b.

Исти Еуклидов алгоритам служи за одређивање **највеће заједничке мере** две дужи. Ако се процес завршава, дужи имају заједничку меру, оне су **самерљиве**; ако је процес бескрајан, оне су **несамерљиве** величине.

Из једнакости (1) следују једнакости

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} = q + \frac{1}{\dfrac{b}{r}},$$

$$\frac{b}{r} = q_1 + \frac{r_1}{r} = q_1 + \cfrac{1}{\cfrac{r}{r_1}}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_n + \frac{r_n}{r_{n-1}} = q_n,$$

где је $r_n = 0$, ако су величине самерљиве, као што је то случај за два цела броја. На основу претходних једнакости можемо написати

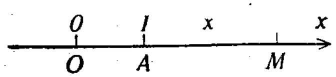
$$\frac{a}{b} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots + \cfrac{1}{q_n}}}.$$

Израз који стоји на десној страни је **верижни разломак**; зато се Еуклидов алгоритам зове и **алгоритам верижних разломака**. Кратко се горњи верижни разломак означује и овако

$$\frac{a}{b} = (q;\ q_1,\ q_2, \cdots, q_n).$$

У вези са бројном скалом навешћемо још неколико важних појмова.

Свакој тачки M (сл. 4) на оси одговора један број, мерни број дужине OM (OA = 1) са одговарајућим знаком: позитивним, ако се тачка M налази у позитивном смеру од O, негативним у супротном случају. Тај број је **координата** тачке M на датој оси. Ову ћемо координату означити са x.



Сл. 4. Координата тачке

Према томе свакој тачки на оси одговара одређени број, и обрнуто, сваком броју одговара одређена тачка.

Број који стоји у вези са тачком на бројној скали зове се **реални, стварни** или **скаларни број**, кратко, **скалар**. Свака величина коју можемо изразити реалним бројем зове се **скаларна величина**. Примери скаларних величина су: дужина, површина, запремина, маса,

густина, температура, количина топлоте, количина електрицитета и много, много других. Неке од тих величина могу, по својој суштини бити само позитивне, друге и позитивне и негативне.

Вежбања. 1. У једначини $2x + m = 0$ изабрати за m такав цео број да x буде: *a)* цео позитиван број; *b)* цео негативан број; *c)* разломљен позитиван и *d)* разломљен негативан број. То исто урадити за једначину $3x + m = 0$.

2. У једначини $ax + b = 0$ изабрати за a и b таква два цела броја, да x има особине назначене у претходном задатку под *a)*, *b)*, *c)* и *d)*.

3. Написати алгебарску једначину са целим коефицијентима, чије је решење овај ирационални број: $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. То исто урадити за $x = \frac{1}{3}(\sqrt{3} - 1)$.

4. За коју вредност n број π^n више није трансцендентан?

5. На основу којих закона изводимо обрасце: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$?

6. Објаснити алгоритам који изражавају обрасци:

$$x_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2),\quad x_3 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3),\ x_4 = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

и извести услове да је: *a)* $x_2 < x_3 < x_4$; *b)* $x_2 > x_3 > x_4$; *c)* $x_2 = x_3 = x_4$.

7. Објаснити алгоритам који изражавају обрасци:

$$y_2 = \sqrt{a_1 a_2},\quad y_3 = \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3},\quad y_4 = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4},$$

где су a_1, a_2, a_3, a_4 позитивни бројеви, и извести услове да је: *a)* $y_2 < y_3 < y_4$; *b)* $y_2 > y_3 > y_4$; *c)* $y_2 = y_3 = y_4$.

8. Протумачити Еуклидов алгоритам помоћу одређивања највећег заједничког делиоца бројева 5460 и 213. Изразити разломак $\frac{5460}{213}$ у облику верижног разломка.

9. Показати да **периодичан верижни разломак** $x = (1;2,2,2, \ldots)$ има вредност $\sqrt{2}$. $\left[\text{Напомена: ставити } x - 1 = \frac{1}{2 + (x-1)}\right]$. Помоћу тог верижног разломка израчунати четири узастопне приближне вредности броја $\sqrt{2}$.

10. Навести примере скаларних величина које по својој природи могу бити: *a)* само позитивне, *b)* позитивне и негативне.

§ 3. Комплексни број. Декартове координате тачке у равни. Вектори у равни

У претходним излагањима упознали смо се са реалним бројевима. Сад ћемо прећи на проучавања још једне, нове врсте бројева.

Претпоставимо да се тражи број z, који треба да задовољи услов

$$z^2 = -4.$$

Међутим, познато је да не постоји ниједан такав реални број који би, после квадрирања, дао негативни број. Према томе за решавање таквих једначина морамо увести бројеве нове природе, такозване **имагинарне бројеве**.

За јединицу имагинарних бројева узима се број i, који има вредност

$$i = +\sqrt{-1}.$$

Помоћу такве јединице два могућа имагинарна решења наведене једначине можемо изразити са

$$z_1 = +2\,i, \qquad z_2 = -2\,i.$$

Ако једначина за одређивање z има, рецимо, облик

$$z^2 - 4\,z + 13 = 0,$$

њена решења су

$$z_1 = 2 + 3\,i, \qquad z_2 = 2 - 3\,i.$$

Добили смо збир реалног и имагинарног броја. Такав збир је **комплексни број** (кратко — **комплекс**) или имагинарни број у ширем смислу ове речи.

У општем облику комплексни број изгледа овако

$$z = x + y\,i,$$

где су x и y два реална броја, а i, као увек, имагинарна јединица.

Нацртајмо сад у равни две управне праве (сл. 5, a) и сваку од њих претворимо у осу. Пресек O узмимо за почетак на једној и на другој оси. На једној од ових одмеримо дужину OM_1, која одговара знаком и величином реалном броју x, на другој дужину OM_2 са вредношћу броја y. Кроз тачку M_1 повуцимо праву паралелну са OM_2, а кроз тачку M_2 — праву паралелну са OM_1. Тачка M пресека ових паралела одговара комплексном броју $x + yi$. Ову геометриску претставу први пут је дао Арган (1806 г.).

Две осе Ox и Oy са заједничким почетком чине **Декартов координатни систем у равни**. Величине x и y су Декартове координате тачке M у равни: x — **апсциса**, y — **ордината**. Саме осе зову се: једна — апсцисна оса или x-оса или, најзад, Ox оса; друга — ординатна оса, y-оса или Oy оса. Координате тачке пишу се иза ознаке тачке у загради: $M(x, y)$. На пр., $P(2, 3)$, $Q(-0{,}4;\ 5{,}2)$.

Сваком пару реалних бројева x, y одговара одређена тачка равни и, обрнуто, свакој тачки M равни одговара пар одређених реалних бројева.

Почетак координата, тачка O, има за координате 0 и 0, тј. $O(0, 0)$. Тачке на Ox оси имају за координате: $M_1(x, 0)$, на Oy оси $M_2(0, y)$.

Спојимо почетак координата O са тачком M. На добијеној дужи утврдимо смер од O према M и означимо га стрелицом (сл. 5, a). Тако ћемо добити један нарочити геометриски облик — дуж одређеног смера.

Тај облик — дуж одређеног смера — зове се **вектор** (латинска реч vector значи: оно што носи или вуче). Тачка O је **почетак**, а M — **крај** вектора.

Видимо да сваком комплексном броју одговара вектор.

Решимо сад помоћу Декартових координата два задатка.

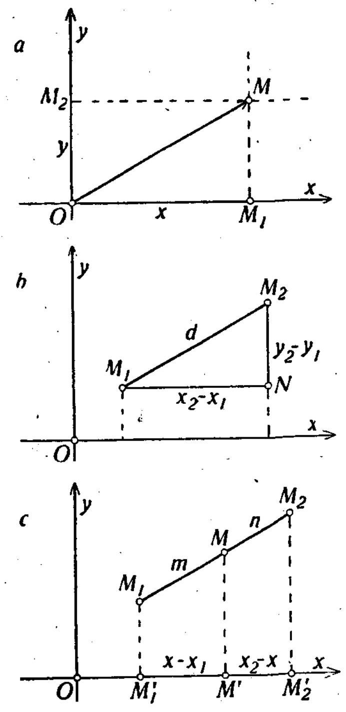
1. Дате су две тачке, $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Одредити њихово растојање $M_1M_2 = d$.

Ако из тачке M_1 спустимо нормалу на ординату тачке M_2 (сл. 5, b), из правоуглог троугла M_1M_2N, са катетама $M_1N = x_2 - x_1$ и $NM_2 = y_2 - y_1$, имамо непосредно, на основу Питагорине теореме,

$$d = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

У специјалном случају, када се одређује растојање d ма које тачке $M(x, y)$ од почетка координата, имамо образац

$$d = +\sqrt{x^2 + y^2}.$$



Сл. 5. a. Декартов систем координата у равни. b. Растојање између две тачке. c. Подела дужи у датој размери

2. Дате су две тачке, $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Одредити координате тачке $M(x, y)$ која дели дату дуж M_1M_2 у датој размери $m{:}n = \lambda$.

Ако означимо са M_1', M', M_2'' (сл. 5, c) подножја ордината одговарајућих тачака, на основу теореме о пропорционалности отсечака правих можемо написати

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{m}{n} = \lambda = \frac{M_1'M'}{M'M_2'} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}.$$

Из ове једначине и сличне за y-осу изводимо за тражене обрасце

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Кад λ узима све могуће позитивне вредности од 0 до $+\infty$, тачка M заузима положаје на дужи M_1M_2 од тачке M_1 до тачке M_2, при чему, за $\lambda=1$ $(m=n)$, тачка M постаје средина дужи M_1M_2 и има за координате

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Кад је λ негативно и узима вредности од 0 до -1, тачка M се налази ван дужи M_1M_2 и то са стране тачке M_1 и, за $\lambda=-1$, она одлази у бесконачност; кад се λ мења од -1 до $-\infty$, тачка M се појављује ван дужи M_1M_2 са стране тачке M_2 и приближује се из бесконачности тачки M_2, за коју, према томе, имамо $\lambda=\pm\infty$.

§ 4. Операције са комплексним бројевима. Поларне координате

Два комплексна броја, $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$, једнака су, $z_1=z_2$, ако су једнаки и реални и имагинарни делови комплекса, тј. ако је $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. Комплекс $x+yi$ једнак је нули, ако је $x=0$, $y=0$.

Основне операције са комплексним бројевима врше се по овим правилима —

за сабирање: $z_1+z_2=(x_1+y_1i)+(x_2+y_2i)=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i;$

за одузимање: $z_1-z_2=(x_1+y_1i)-(x_2+y_2i)=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i;$

за множење: $z_1z_2=(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i;$

за дељење:

$$z_1:z_2=\frac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i}=\frac{(x_1+y_1i)(x_2-y_2i)}{x_2^2+y_2^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i.$$

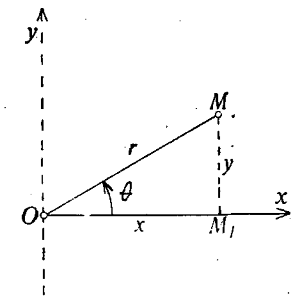
Два комплекса, $x+yi$ и $x-yi$, зову се к о н ј у г о в а н а, ако се разликују само знаком имагинарних делова. Збир конјугованих комплекса једнак је двострукој вредности реалних делова, тј. $(x+yi)+(x-yi)=2x$; њихов је производ једнак збиру квадрата реалног дела и коефицијента имагинарног дела, тј. $(x+yi)(x-yi)=x^2-(yi)^2=x^2+y^2$.

Сада ћемо увести тзв. п о л а р н е к о о р д и н а т е тачке у равни.

Нека је O (сл. 6) стална тачка, а Ox полуправа са смером од тачке O у бескрајност. Положај произвољне тачке M у равни може се одредити растојањем r тачке M од тачке O и углом θ који ово растојање образује са осом Ox. Величине r и θ зову се п о л а р н е к о о р д и н а т е тачке у равни; r је п о т е г, θ — п о л а р н и у г а о. Тачка O зове се п о л координатног система, а Ox — његова п о л а р н а о с а.

Ако упоредо са поларним координатама конструишемо Декартове координате тачке M (сл. 6), из правоуглог троугла OMM_1 имамо

(1) $\qquad x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta.$



Сл. 6. Поларне координате

Једначине (1) дају вредности Декартових координата тачке, ако су познате поларне координате. Обрнуто, једначине

(2) $\qquad r=+\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \operatorname{tg}\theta=y:x$

омогућују да се одреде поларне координате, ако су познате Декартове координате. Једначине (1) и (2) зову се ј е д н а ч и н е т р а н с ф о р м а ц и ј е к о о р д и н а т а, Декартових у поларне и обрнуто.

Видели смо да сваком комплексном броју $z=x+yi$ одговара једна тачка у равни са Декартовим координатама x и y. Ако x и y трансформишемо у поларне координате, комплексни број добија нови, п о л а р н и облик

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

Величина потега r зове се м о д у л или а п с о л у т н а в р е д н о с т комплексног броја. Угао θ је а р г у м е н т тог броја. Апсолутна вредност комплексног броја z означава се са $|z|$; према томе је

$$r=|z|=|x+yi|=+\sqrt{x^2+y^2}$$

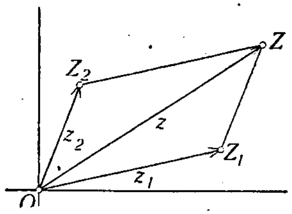
и на тај начин можемо, на пр., овако рачунати

$$|5|=5, \quad |-3|=3, \quad |-4i|=4,$$

$$|3+4i|=+\sqrt{3^2+4^2}=5, \quad |3-4i|=+\sqrt{3^2+(-4)^2}=5.$$

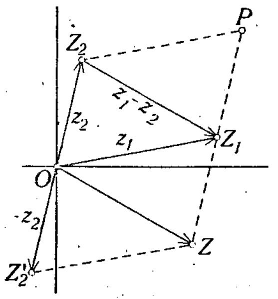
Навели смо обрасце за извођење основних операција, сабирања, одузимања, множења и дељења, са комплексним бројевима. Покажимо сад геометриске конструкције које тим операцијама одговарају, ако су комплекси претстављени векторима у равни.

За сабирање два комплекса z_1 и z_2, који су на Аргановом графику претстављени векторима OZ_1 и OZ_2 (сл. 7), врши се в е к т о р с к о с а б и р а њ е одговарајућих вектора OZ_1 и OZ_2, тј. на крај Z_1 првог вектора надовезује се други вектор $Z_1Z=OZ_2$; вектор OZ, који спаја почетак првог вектора, тачку O, са крајем другог, тачком Z, претставља вектор збира $z = z_1 + z_2$. Он у исто време претставља и дијагоналу паралелограма конструисана на векторима-сабирцима као странама тог паралелограма.



Сл. 7. Векторско сабирање два комплекса

Одузимању комплекса одговара векторско одузимање, које се своди на векторско сабирање. Заиста, пошто је $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, за конструисање вектора разлике можемо сабрати вектор OZ_1 (сл. 8) првог комплекса са вектором OZ_2', који има исти правац и дужину са вектором OZ_2 другог комплекса, али је супротног смера. Вектор OZ може бити конструисан и као дијагонала паралелограма OZ_1PZ_2, са странама OZ_1 и OZ_2, која спаја крај другог вектора разлике са крајем првог. Вектор $Z_2Z_1 = OZ$ је трећа страна троугла OZ_1Z_2 са смером од Z_2 према Z_1.



Сл. 8. Векторско одузимање два комплекса

За извођење геометриске конструкције производа два комплекса узмимо их у поларном облику,

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$$

После извршеног множења имамо

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)].$$

Како је, међутим,

$$\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2),$$
$$\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2),$$

имамо коначно

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

Овај образац каже да је модул r производа два комплекса једнак производу модула r_1 и r_2 тих комплекса, а аргумент θ једнак збиру њихових аргумената θ_1, θ_2, тј.

$$r = r_1 r_2, \qquad \theta = \theta_1 + \theta_2.$$

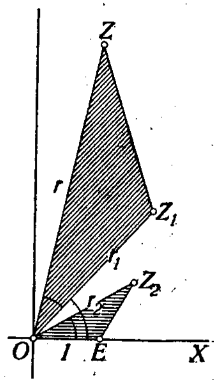
Слична особина важи и за количник комплекса,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)],$$

наиме, модул количника једнак је количнику модула, а аргумент — разлици аргумената.

Ове особине производа и количника два комплекса омогућују конструкцију комплекса производа, односно количника.

Наиме, ако је OZ_1 вектор комплекса z_1, OZ_2 — исто за комплекс z_2 и OE јединична дужина (сл. 9), конструишимо троугао OZ_1Z сличан троуглу OEZ_2; вектор OZ тада претставља производ два дата комплекса, јер, прво, из сличности троуглова имамо $r : r_1 = r_2 : 1$, тј. $r = r_1 r_2$ и, друго, аргумент $XOZ = \theta$ има вредност збира $\theta_1 + \theta_2$.



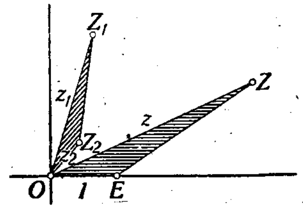
Сл. 9. Множење два комплекса

Са слике видимо да је множење вектора OZ_1 вектором OZ_2 еквивалентно, прво, промени дужине првог вектора у односу $r_2 : 1$ и, друго, његовом обртању за угао аргумента другог вектора. Ако је множилац комплекс јединичног модула, тј. ако има облик, рецимо, $\cos\alpha + i\sin\alpha$, множење тим јединичним комплексом одговара само обртању за угао α.

На сличан начин се конструише вектор који изражава количник два дата комплекса (сл. 10): на страни OE јединичне дужине треба конструисати троугао OEZ сличан троуглу OZ_2Z_1. Тада вектор OZ, што се лако доказује, претставља вектор количника $z_1 : z_2$.

Изведимо још правило за степеновање комплекса. Ако је n цео позитивни број, непосредно из правила за множење следује ово правило за степеновање

$$z^n = (x + yi)^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n =$$
$$= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$



Сл. 10. Дељење два комплекса

За $r = 1$ имамо тзв. Моавров образац

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Ако ставимо $n = 2$, из Моавровог обрасца имамо

$$\cos 2\theta + i \sin 2\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta =$$
$$= \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta,$$

одакле, после изједначења реалног и имагинарног дела, изводимо поново познате тригонометриске обрасце,

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \qquad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta.$$

На исти начин за $n = 3$, из једначине

$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta + 3i^2\cos\theta\sin^2\theta + i^3\sin^3\theta$$

добијамо обрасце за троструки угао

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta, \qquad \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta.$$

На сличан начин могли бисмо добити обрасце за тригонометриске функције аргумента и компликованије вишеструкости.

Вежбања. 1. Одредити у односу иа Декартов систем координата положај тачака којима одговарају комплексии бројеви: $3 + 2i$, $3 - 2i$, $-3 + 2i$, $-3 - 2i$; $2 \pm 5i$.

2. Одредити комплексни број који одговара тачки симетричној тачки комплекса $a + bi$ у одиосу иа Ox осу (одиосио иа Oy осу).

Израчуиати: 3. $(a + bi) + (a_1 + b_1 i)$, $(a + bi) - (a_1 + b_1 i)$, $(2 + 3i) + (4 + 2i)$ $5 - 2i + 3 + 3i$. 4. $(5 - 2i)(1 + i)$. 5. $(-4 - 3i)(2 - 4i)$. 6. $(2 + 3i)(2 - 3i)$. 7. $(x + yi)(x - yi)$. 8. $(-x + yi)(x + yi)$. 9. $(x + yi)^2$. 10. $(3 - 2i)^2$. 11. $(1 - i)^3$.

12. $(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha)(\cos 3\alpha - i\sin 3\alpha)$.

13. $\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. 14. $\left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}\right)^7$.

15. Написати општи израз за m и n, ако је $i^m = -1$, $i^n = 1$.

16. Раставити $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ иа два комплексна чиииоца.

Израчуиати: 17. $\frac{1}{2 + i}$. 18. $\frac{1}{i}$. 19. $\frac{5 - 3i}{5 + 3i}$. 20. $\frac{2 + 3i}{i - 1}$.

21. $\frac{7 + i}{25} + \frac{2 - 3i}{3 - 4i}$. 22. $\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^2$. 23. $\frac{2i}{(1 + i)^2}$.

24. Написати услове под којима се количиик $\frac{a + bi}{m + ni}$ своди: 1. иа реални број и 2. на чисто имагииарии број.

Написати у поларном облику (рачуиајући модул са две децимале и угао са тачиошћу до мииуте, ако се резултати не изражавају тачно) комплексе: 25. $1 + i$. 26. -2. 27. $3i$. 28. $-5i$. 29. $12 + 7i$. 30. $\frac{1}{2}(1, - i\sqrt{3}$. 31. $-15 + 19i$. 32. $-7 - 3i$.

Извршити аиалитички и графички означене операције и упоредити резултате. 33. $(5 + 2i) + (-2 + 3i)$. 34. $(-2 - 9i) + (7 + 4i)$. 35. $(2i) + (4)$. 36. $(-2) + (3i)$. 37. $(5 + 2i) - (-2 + 3i)$. 38. $(2i) - (5 - 2i)$ 39. $(2 + 3i)(1 + i)$. 40. $(i)\cdot(i)$. 41. $(-1)(-i)$: 42. $\frac{2 + 3i}{1 + i}$. 43. $\frac{3 - 4i}{i - 1}$.

44. Помоћу Моаврова обрасца изразити $\cos 4\alpha$ и $\sin 4\alpha$ у зависности од $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.

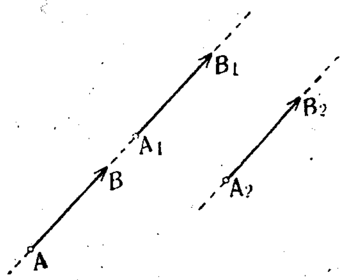
§ 5. Вектори у простору. Декартове координате у простору. Векторски број. Сабирање и одузимање вектора

Досада смо анализирали векторе у равни; са њима смо повезали комплексне бројеве. Могли бисмо, међутим, бирати почетак и крај вектора, тачке O и M, не само у равни координатног система, него ма где у простору. Ако спојимо ове тачке и на добијеној дужи назначимо смер, поново ћемо добити дуж одређеног смера, а то је опет вектор.

Да се зауставимо мало на појму вектора у простору. Узмимо, ма где у простору две тачке, A и B (сл. 11), за почетак и крај вектора AB и кроз ове тачке повуцимо праву; она се зове *основа вектора*, а са смером вектора — *оса вектора*.

Вектор везан за праву зове се вектор који може мењати положај свог почетка на основи не мењајући при томе ни своју дужину, ни смер, ни основу.

Вектор чији почетак не може мењати свој положај у простору зове се *вектор везан за тачку*. AB и A_1B_1 (сл. 11) једнаки су, као вектори везани за праву, али су различити као вектори везани за тачку.



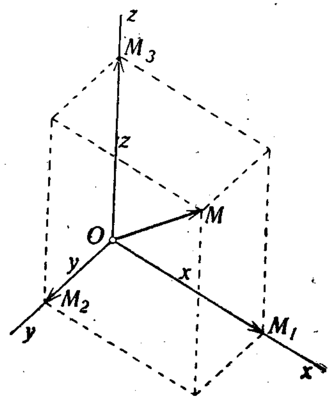
Сл. 11. Вектори

Ако сматрамо за једнаке не само векторе на једној истој правој, него и на паралелним правама са произвољним положајем почетка у простору, али под условом да вектори имају исти смер и исту дужину, онда се такви вектори зову *слободни вектори* или једноставно *вектори*. Појам слободног вектора је најглавнији и зато је и сам назив вектора везан углавном за тај појам.

Три вектора AB, A_1B_1, A_2B_2 (сл. 11), као слободни вектори, једнаки су.

Три елемента карактеришу сваки слободни вектор: 1) правац основе, одређен до паралелизма, 2) смер на тој основи и 3) дужина, која се зове и *интензитет вектора*. Интензитет се изражава мерним бројем, позитивним скаларом.

Видели смо да вектор у равни можемо довести у везу са комплексним бројем. Природно је да се постави питање: на који се начин могу довести у везу број и вектор у простору. За вектор у равни узели смо координатни систем у равни састављен из две управне осе Ox и Oy. За вектор у простору конструисаћемо три управне осе и то на овај начин. Замислимо да стојимо у соби и гледамо у један угао на поду. Од њега полазе две управне дужи у равни пода. Начинимо од њих осе (сл. 12) и означимо једну са Ox, другу са Oy. Трећа дуж стоји управно на равни пода; и њу претворимо у осу и означимо је са Oz. Овом конструкцијом добили смо три узајамно управне (ортогоналне) осе: оне чине тзв. о р т о г о н а л н и к о о р д и н а т н и т р и ј е д а р.



Сл. 12. Ортогонални координатни триједар

Ставимо сада почетак слободног вектора у тачку O — пресек ових оса. Нека крај, тачка M, заузме произвољни положај у простору. Вектор OM одређује положај тачке M и зато се зове в е к т о р п о л о ж а ј а т а ч к е M у односу на тачку O. Кроз тачку M повуцимо раван паралелну равни Oyz. Нека она сече осу Ox у тачци M_1. Координата тачке M_1 на оси Ox је једна од к о о р д и н а т а т а ч к е M у п р о с т о р у. Ову координату означимо са x; она се и овде зове а п с ц и с а тачке M. Другу координату ћемо добити ако кроз тачку M повучемо раван паралелну равни Ozx. Пресек (M_2) ове равни са осом Oy одређује другу координату тачке M, координату y, која се зове о р д и н а т а. Најзад, трећу координату ћемо добити помоћу пресека (M_3) осе Oz и равни паралелне равни Oxy која пролази кроз тачку M. Ову ћемо координату означити са z; она се, понекад, зове а п л и к а т а тачке M. Три реална броја x, y, z су координате тачке M у простору. Вредности ових координата стављају се у заграду иза ознаке тачке: M (x, y, z).

Ако желимо да упоредимо са вектором OM само један број, видимо да тај број мора бити сложен и да се његова вредност одређује са три реална или скаларна броја x, y, z. Сваки од ових бројева има своју нарочиту геометриску природу. Повезаћемо са сваком координатном осом вектор јединичне дужине са смером одговарајуће осе. Нове бројеве, који претстављају ове јединичне векторе, означићемо са e_1, e_2, e_3. Ти су бројеви различити по самој својој природи и ниједан од њих се

не може изразити помоћу остала два. Тада ће вектору OM одговарати број, који можемо изразити збиром

$$u = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

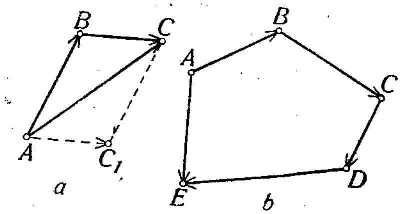
Тај нови број сложене природе крстићемо именом: в е к т о р с к и б р о ј. Он се одређује са три скаларна броја x, y, z, који се зову Д е к а р т о в е к о о р д и н а т е в е к т о р а.

Јасно је да су два векторска броја једнака, ако су њихови скалари једнаки.

Величина коју можемо претставити вектором зове се в е к т о р с к а в е л и ч и н а. Примери векторских величина: померање, брзина, убрзање, сила, притисак, момент силе и др.

Ако треба сабрати два или више вектора, примениһемо овај поступак. Ма где у простору конструисаћемо први сабирак, вектор AB (сл. 13, a); на његов крај надовезаћемо други сабирак, вектор BC. Вектор AC је збир два дата вектора. Као и у случају вектора који одговарају комплексним бројевима, и овде можемо за сабирање два вектора применити п р а в и л о п а р а л е л о г р а м а. То је паралелограм две силе, две брзине итд.

У случају сабирања више вектора (сл. 13, b) можемо сваки наредни сабирак надовезивати поступно на крај претходног; тада ћемо добити, на пр., изломљену линију ABCDE. Вектор AE претстављаће збир четири вектора AB, BC, CD, DE. Видимо, дакле, да је збир вектора последња, завршна страна полигона конструисана са векторима као странама и има смер од почетка првог сабирка ка крају последњег. Ако крај последњег сабирка падне у почетак првог, збир вектора биће једнак нули. Јасно је да векторски збир не зависи од тога који ћемо вектор узети за први сабирак и којим ћемо редом надовезивати на њ остале векторе-сабирке.



Сл. 13. Сабирање вектора

Одузимање вектора у простору врши се по истом геометриском поступку као и одузимање вектора у равни, које претстављају комплексни бројеви (сл. 8).

Ако векторима A_1B_1 и A_2B_2 одговарају два векторска броја

$$u_1 = x_1 e_1 + y_1 e_2 + z_1 e_3, \qquad u_2 = x_2 e_1 + y_2 e_2 + z_2 e_3,$$

збиру ових вектора одговараће број

$$u = u_1 + u_2 = (x_1 + x_2)\, e_1 + (y_1 + y_2)\, e_2 + (z_1 + z_2)\, e_3,$$

а њиховој разлици број

$$v = u_1 - u_2 = (x_1 - x_2)\, e_1 + (y_1 - y_2)\, e_2 + (z_1 - z_2)\, e_3.$$

Лако је показати да се векторско сабирање и у случају вектора у простору покорава асоцијативном и комутативном закону; помоћу векторских бројева ово се изражава једнакостима

$$(u_1 + u_2) + u_3 = u_1 + (u_2 + u_3), \qquad u_1 + u_2 = u_2 + u_1.$$

Вежбања. 1. Нацртати Декартов ортогонални триједар и показати у том триједру положај тачака $M_1(2, 3, 1)$, $M_2(-2, 3, 1)$, $M_3(-2, -3, 1)$, $M_4(2, -3, 1)$, $M_5(2, 3, -1)$, $M_6(-2, 3, -1)$, $M_7(-2, -3, -1)$, $M_8(2, -3, -1)$.

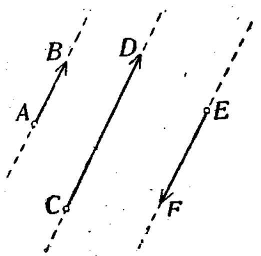
2. Урадити исто за тачке: $M_1(5, 3, 2)$ и $M_1'(-5, -3, -2)$; $M_2(5, 3, -2)$ и $M_2'(-5, -3, 2)$. Какав је релативан положај сваког пара тачака?

3. То исто урадити за тачке чији су вектори положаја одређени изразима: $2e_1 + e_2 - e_3$, $e_1 + e_2 + e_3$, $e_3 - e_2 + e_1$, $4e_2 + 2e_1 - 3e_3$, где су e_1, e_2, e_3 јединични вектори координатних оса.

4. Показати да се векторско сабирање покорава асоцијативном и комутативном закону.

§ 6. Множење вектора

Под производом вектора AB (сл. 14) и скалара k треба разумети нов вектор који има: 1) основу исту или паралелну са основом вектора AB, 2) смер исти са смером вектора AB ако је k позитивно, а супротан ако је k негативно, 3) дужину једнаку производу дужине вектора AB и апсолутне вредности броја k. На слици имамо два производа: $CD = 2{,}5\,AB$, $EF = -1{,}5\,AB$. Ако вектору AB одговара векторски број $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$, производу k AB одговараће број:



Сл. 14. Множење вектора скаларом

$$ku = kxe_1 + kye_2 + kze_3.$$

Шта је то производ двају вектора?

Када смо досад говорили о производу два боја, увек смо имали потпуно одређену операцију, која доводи до одређеног и уз то јединственог резултата. Међутим такво ограничење појма производа није обавезно. На пр., за два вектора може бити дефинисано и више производа. Коју заједничку особину имају сви ти производи?

Сваки производ вектора мора се покоравати дистрибутивном закону за множење и сабирање. Ако са V_1, V_2, V_3 означимо три произвољна

вектора, са V_1V_2 ма који производ вектора V_1 и V_2, дистрибутивни закон можемо изразити помоћу једнакости

$$V_1(V_2 + V_3) = V_1V_2 + V_1V_3.$$

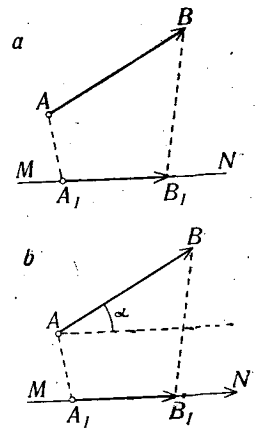
Најчешће се употребљавају два производа: скаларни и векторски, има их међутим и других.

У вези са скаларним производом дефинисаћемо пре свега пројекције вектора на праву и на осу.

Нека су дати вектор AB и права MN (сл. 15, *a*). Из тачака A и B спустићемо нормале на праву MN. Подножја тих нормала означићемо са A_1 и B_1. Вектор A_1B_1 је пројекција вектора AB на праву MN.

Ако праву MN претворимо у осу (сл. 15, *b*), вектор A_1B_1 може имати или исти смер са смером осе или њему супротан. Под пројекцијом вектора AB на осу MN разумећемо скалар и то интензитет вектора A_1B_1 са позитивним знаком, ако овај вектор има смер осе, а са негативним знаком у супротном случају.

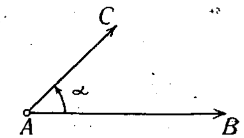
Ако са α означимо угао између вектора AB и осе MN, пројекција вектора на осу има вредност производа дужине вектора AB и косинуса угла α, тј. $\overline{AB}\cos\alpha$, где смо цртом означили интензитет вектора AB.



Сл. 15. Пројекције вектора на праву и на осу

Нека су дата два вектора, AB и AC (сл. 16); њихове почетке увек можемо довести у исту тачку простора. Скаларни производ ових вектора са ознаком (AB, AC) биће скалар једнак производу интензитета ових вектора и косинуса угла између њих, тј.

$$(AB, AC) = \overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos\alpha,$$



Сл. 16. Скаларно множење вектора

где је α угао између вектора. Скаларни производ може и овако бити протумачен: он је једнак производу интензитета једног вектора и пројекције другог на осу првог. Из дефиниције скаларног производа непосредно следује да он не зависи од реда чинилаца, тј. $(AB, AC) = (AC, AB)$. Ако је угао између вектора оштар, скаларни производ је позитиван; он је негативан, ако је угао туп. Када су вектори управни, њихов је скаларни производ једнак нули. Једнакост нули скаларног производа два вектора може се сматрати као критеријум ортогоналности два вектора. Није тешко показати да за скаларно множење важи дистрибутивни закон, тј. (AB, AC + AD) = (AB, AC) + (AB, AD).

На основу дефиниције скаларног производа за производе јединичних вектора e_1, e_2, e_3 добијамо таблицу

$$
\begin{array}{lll}
(e_1e_1)=1, & (e_1e_2)=0, & (e_1e_3)=0,\\
(e_2e_1)=0, & (e_2e_2)=1, & (e_2e_3)=0,\\
(e_3e_1)=0, & (e_3e_2)=0, & (e_3e_3)=1.
\end{array}
$$

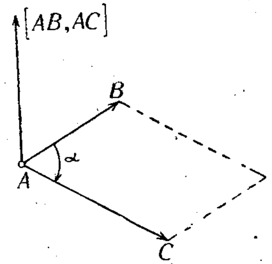
Из ове таблице следује, после примене дистрибутивног закона, да вредност скаларног производа два вектора са векторским бројевима

$$u_1 = x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3, \qquad u_2 = x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3 \tag{1}$$

износи

$$(u_1u_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Други од поменутих производа је **векторски производ**. Њега ћемо означавати са [AB, AC]. Под векторским производом разумећемо вектор ових особина: 1) Основа тог вектора (сл. 17) стоји управно на равни датих вектора; 2) Смер је уперен у део простора одакле би посматрач видео да други вектор, надовезан на крај првог, обрће први вектор у смислу кретања казаљке на часовнику 3) Интезитет је једнак величини површине паралелограма конструисана на датим векторима као на странама. Ако угао између вектора поново означимо са α, тај интензитет, као површина паралелограма, има вредност



Сл. 17. Векторско множење вектора

$$\overline{AB}\cdot \overline{AC}\cdot \sin\alpha.$$

Из наведене дефиниције векторског производа следује непосредно да за њега не важи комутативни закон, јер је

$$[AC, AB] = -[AB, AC].$$

Ако су вектори паралелни или колинеарни (имају исту основу), њихов векторски производ има вредност нула.

Непосредно из геометриског посматрања векторских производа јединичних вектора e_1, e_2, e_3 добијамо таблицу

$$
\begin{array}{lll}
[e_1e_1]= 0, & [e_1e_2]= e_3, & [e_1e_3]=-e_2,\\
[e_2e_1]=-e_3, & [e_2e_2]= 0, & [e_2e_3]= e_1,\\
[e_3e_1]= e_2, & [e_3e_2]=-e_1, & [e_3e_3]= 0.
\end{array}
$$

На основу те таблице и дистрибутивног закона за векторски производ два вектора (1) добија се вектор са векторским бројем

$$[u_1u_2] = u = (y_1z_2 - z_1y_2)e_1 + (z_1x_2 - x_1z_2)e_2 + (x_1y_2 - y_1x_2)e_3.$$

Према томе за два вектора, V_1 и V_2, са координатама

$$V_1(x_1, y_1, z_1), \qquad V_2(x_2, y_2, z_2)$$

векторски производ $[V_1, V_2]$, вектор V, има координате

$$V(y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2).$$

Вежбања. 1. Нацртати два вектора: AM и $\frac{2}{3}$AM; BN и — 3BN. 2. Два вектора под углом од 60° имају интензитете 5 и 10. Израчунати њихов скаларни производ. 3. Два ортогонална вектора имају интензитете 3 и 4. Израчунати интензитет њиховог векторског производа. Нацртати та два вектора и показати њихов векторски производ. То исто урадити када је угао између тих вектора 30°. 4. Израчунати скаларни производ два вектора одређена бројевима $u_1 = 3e_1 + 2e_2 - 3e_3$, $u_2 = 2e_1 + 5e_2 + 5e_3$. 5. Одредити векторски број векторског производа $[V_1V_2]$, ако су вектори V_1 и V_2 дати координатама: V_1 (1, 2, 3), V_2 (3, 2, 1). Показати на том примеру да је $[V_1V_2] + [V_2V_1] = 0$.

§ 7. Теорија вектора

Појмови померања, брзине, убрзање, силе и других векторских величина одавно су познати; они су проучени и свестрано анализирани. Међутим њихова анализа вршена је углавном помоћу скаларних рачуна; то значи да се свако проучавање тих векторских величина сводило на посматрање везе између скалара који одређују те величине. Сам векторски облик није се посматрао у својој целини, са свим својим геометриским и другим особинама. У основи свих расуђивања са векторима помоћу те **скаларне методе** увек лежи неопходност да све претворимо у скаларе и да оперишемо само са скаларима. Та, у главном аналитичка, метода претставља моћно оруђе Математике; она је дала сјајне резултате како у теорији тако и у пракси. Али она има и један крупан принципски недостатак: место да оперише са самим геометриским обликом, она уводи скаларе и то доста произвољно; тако можемо на произвољан начин бирати она три главна, координатна правца, према којима одређујемо три скалара за исту векторску величину. Та метода, оперишући са скаларима, доводи у општем случају до нових скалара и на основу њих конструише поново векторе, који дају одговор на постављена питања. Видимо да уведени скалари играју помоћну улогу, а при томе скривају саму конкретну природу анализираних величина и природне везе између њих.

Насупрот томе, векторска метода има за циљ непосредно оперисање са самим геометриским облицима; она даје правила која омогућују да се дође до резултата чисто геометриском методом: „geometrica geometrice", тј. оно што је геометриско треба геометриски и тумачити.

Док су научне конструкције биле релативно једноставне, горе наведени недостатак скаларне методе није био толико упадљив. Ипак је и раније, нарочито код великих умова, постојала тенденција да се резултат добије непосредно геометриским путем. Тако, Њутн у својим Principia-ма сву теорију планетског кретања изводи геометриски, ма да добро познаје Декартову методу Аналитичке геометрије. Широки развитак Анализе у XVIII и XIX веку, када је она у рукама читаве плеіаде чувених математичара, од Ајлера до Анри Поенкареа, дала сјајне резултате укочио је напредак непосредне геометриске методе; она је ступила на друго место; узимала је мешовиту, скаларно-векторску форму, претварајући се понекад у сувише формалну дисциплину. Чекало се на време када ће скаларна метода постати исувише компликована и када ће бити приморана да уступи место непосредној геометриској методи. Теорија вектора почела је да заузима све важније место онде, где доминира векторска природа величина, онде где истовремено учествују више вектора и то у компликованим комбинацијама — такве су дисциплине Теориска и Математичка физика; на пр., Теорија електрицитета изгледа неизмерно једноставнија, ако законе и једначине те теорије напишемо у векторском облику.

Векторски рачун се најраније одомаћио у Физици; ту је добио погодну форму за широке математичке кругове. Данас је то инструмент без чијег је познавања немогуће пратити и најелементарнију литературу не само Теориске физике, него и Физике уопште, као и Механике са свим њеним теориским и практичним гранама. И многе друге дисциплине, које имају већи или мањи додир са овим наукама, оперишу са векторским величинама.

§ 8. Дељење вектора. Кватернион

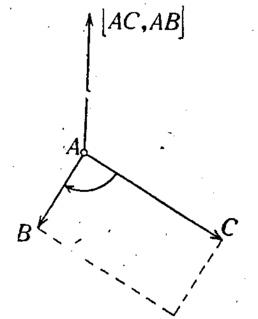
Опет ћемо узети два вектора AB и AC (сл. 18) са векто бројевима

$$u_1 = x_1 e_1 + y_1 e_2 + z_1 e_3,$$
$$u_2 = x_2 e_1 + y_2 e_2 + z_2 e_3.$$

Резултат дељења два броја, два скалара $a:b$ је број k за који је производ bk једнак броју a.

Слично томе, у случају дељења два вектора AB : AC, који у општем случају нису колинеарни, количник треба да је број, рецимо q, за који важи једнакост

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} \cdot q.$$



Сл. 18. Множење вектора кватернионом

При томе број q и само множење могу бити сасвим нове природе; ипак множење мора задовољити дистрибутивни закон. Са геометриског гледишта множење вектора AC (сл. 18) бројем q одговара обртању тог вектора за одређени угао до поклапања његова правца са правцем вектора AB и промени његова интензитета до изједначења са интензитетом вектора AB. Проучавајући могућност конструкције таквог броја q, математичар Хамилтон дошао је до нових величина у облику збира скаларног и векторског броја. Имамо дакле

$$q = a + xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

Пошто за одређивање таквог броја треба да знамо четири скалара (a, x, y, z), Хамилтон је назвао такву величину кватернион.

Када је $x = y = z = 0$, кватернион се претвара у скаларни број. С друге стране, кад је $a = 0$, кватернион се јавља као вектор. Према томе и сваки скалар и сваки вектор могу се сматрати као кватерниони, само специјалног облика.

Кватернион зависи од четири различите јединице: од обичне, стварне јединице 1, помоћу које се изражава скаларни део кватерниона, и од три векторске јединице e_1, e_2, e_3.

За вршење множења два кватерниона Хамилтон је дао ову таблицу производа сваког пара јединица.

	1	e_1	e_2	e_3
1	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	-1	e_3	e_2
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1

Према тој таблици за производ два кватерниона

$$q_1 = a_1 + V_1 = a_1 + x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3,$$
$$q_2 = a_2 + V_2 = a_2 + x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3$$

имамо поново кватернион, и то

$$q_1 \cdot q_2 = a_1a_2 + a_1V_2 + a_2V_1 - (V_1V_2) + [V_1V_2],$$

где су искоришћени скаларни и векторски производи

$$(V_1V_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$
$$[V_1V_2] = (y_1z_2 - z_1y_2)e_1 + (z_1x_2 - x_1z_2)\,e_2 + (x_1y_2 - y_1x_2)e_3.$$

За други производ истих кватерниона, који се од првог разликује редом чинилаца, имамо

$$q_2 \cdot q_1 = a_1a_2 + a_1V_2 + a_2V_1 - (V_1V_2) - [V_1V_2].$$

Кватернионски производ се не покорава комутативном закону: са променом реда чинилаца производи се разликују знаком код дела тог производа, који је изражен векторским производом.

Ако се кватерниони своде само на векторе, њихов кватернионски производ је

$$V_1 \cdot V_2 = -(V_1V_2) + [V_1V_2].$$

Нека сад треба одредити количник два вектора у облику кватерниона q,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3}{x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3} = q = a + V = a + xe_1 + ye_2 + ze_3,$$

где су a и V непознати скалар и вектор кватерниона-количника; x, y, z су непознати скалари тог вектора.

Ако вектор именилац множимо кватернионом здесна, за одређивање непознатог кватерниона добијамо једначину

$$V_1 = V_2 \cdot (a + V),$$

где, као и раније, тачка означава кватернионско множење. Ако извршимо то множење добићемо једначину

$$V_1 = aV_2 - (VV_2) + [V_2V].$$

Сад ћемо изједначити посебно скаларни и векторски део у овој једначини; добићемо једну скаларну и једну векторску једначину

$$(1) \qquad (VV_2) = 0,$$
$$(2) \qquad V_1 = aV_2 + [V_2V].$$

Ако чланове векторске једначине множимо скаларно са V_2, а при томе узмемо у обзир да је

$$(V_2[V_2V]) = 0$$

због управности чинилаца скаларног производа, тада за a имамо ову вредност

$$a = \frac{1}{V_2^2}(V_1V_2).$$

Векторско множење те исте једначине (2) вектором V_2 здесна даје

$$(3) \qquad [V_1V_2] = [[V_2V]V_2].$$

Теорија вектора учи*) да се производ на десној страни може трансформисати према обрасцу

*) Означено са A, B, C три вектора. У Теорији вектора изводи се образац

$$(4) \qquad [A[BC]] = B(CA) - C(AB).$$

О истинитости ове једначине можемо се убедити утврђивањем идентичности координата леве и десне стране. Збиља, на пр., за осу x имамо, за леву страну

$$[A\,[BC]]_x = A_y\,[BC]_z - A_z\,[BC]_y = A_y\,(B_x C_y - B_y C_x) - A_z\,(B_z C_x - B_x C_z),$$

а за десну

$$B_x\,(CA) - C_x\,(AB) = B_x\,(C_x A_x + C_y A_y + C_z A_z) - C_x\,(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) = A_y\,(B_x C_y - B_y C_x) - A_z\,(B_z C_x - B_x C_z).$$

Из једначине (4) се лако изводи једначина

$$[[BC]A] = C\,(AB) - B(CA),$$

која се примењује у тексту.

$$[[V_2V]V_2] = V_2^2V - (V_2V)V_2,$$

одакле, на основу (1), изводимо резултат

$$[[V_2V]V_2[= V_2^2V.$$

После овога из (3) добијамо

$$V = \frac{1}{V_2^2}[V_1V_2].$$

На тај начин за количник два вектора у случају десног множења имамо кватернион:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{V_2^2}\Big\{(V_1 V_2) + [V_1 V_2]\Big\}.$$

У случају левог множења добићемо кватернион

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{V_2^2}\Big\{(V_1 V_2) - [V_1 V_2]\Big\}.$$

У развијеној форми први кватернион има облик

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}\Big\{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + (y_1z_2 - z_1y_2)e_1 + (z_1x_2 - x_1z_2)e_2 + (x_1y_2 - y_1x_2)e_3\Big\}.$$

На овом ћемо завршити анализу дељења два вектора: она је изведена помоћу величине нове природе Хамилтонова кватерниона.

Вежбања. 1. Изразити кватернионом количник $e_1 : e_2$, где су e_1 и e_2 јединични вектори.

2. Израчунати кватернион за количник вектора: $V_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $V_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

3. То исто урадити и за векторе: $V_1(1, 0, 1)$, $V_2(-2, 0, 2)$.

§ 9. Тензор

Полазећи од природних бројева показали смо како се уопштава појам броја. Видели смо да са реалним бројевима стоје у вези скаларне величине, а операције са њима чине рачун који можемо звати скаларним. Даље смо увели појам вектора; изнели смо улогу коју сад у Математици игра Векторски рачун.

Узећемо неколико примера из обичног живота. Кад полазимо у варош можемо записати шта би све требало да купимо: $^1/_2$ *kg* кафе, 5 *kg* шећера 10 литара вина итд. Прибележили смо скаларе.

Кад бих хтео да упутим свога пријатеља на терасу Калемегдана, како бих му објаснио, где је Земун, где Бежаниски аеродром, где Ада Циганлија? Могу на комаду хартије означити неко одређено место на тераси, па повући векторе у правцу Земуна, Бежаније и Аде. Овде смо дакле употребили векторску методу.

Узећемо неколико примера где се јављају облици сасвим друге, нове природе. Ако желимо да поручимо код кројача одело, бирамо прво одређени модел, облик, који нам се највише допада и који одговара нашој потреби. Затим кројач узима меру и бележи у књигу низ бројева који иду одређеним редом, имају дакле одређену структуру. Шта сад стварно постоји независно од тога да ли је одело заиста и сашивено или не? постоји један геометриски модел одређених димензија.

Један скуп, једна група обичних, скаларних бројева који имају неку нарочиту, унапред утврђену структуру, претставља оно, шта се у широком смислу те речи зове тензор.

Разуме се да је пример кројача забавног карактера, али и у најозбиљнијој теорији тензора суштина остаје иста: имамо посла са групама, са неколико обичних, скаларних бројева, посматраних у вези са геометриским или ма каквим другим, на пр. механичким обликом.

Математичар када проучава тензоре има за задатак да створи теорију, нарочити рачун, тензорски рачун; тај рачун даје правила за непосредно оперисање са самим облицима у целини.

Казаћемо неколико речи о тензору као математичком облику, на пр., у нашем тродимензионалном простору. Написаћемо таблицу са девет скаларних бројева

$$\left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right\}.$$

Под извесним условима можемо ову таблицу сматрати као таблицу координата тензора. Овај тензор има дакле девет координата.

Под којим условима таблица написаних бројева заиста одговара неком тензору? За одговор на ово важно питање треба узети у обзир да сваком тензору одговара извесан геометриски облик, који претставља његову суштину. Јасно је да се ова суштина не сме мењати, ако се мења координатни систем или начин на који је одређен наш тензор горњом таблицом. Независност суштине тензора од положаја координатног триједра у простору и начина одређивања — то је услов који треба да задовољавају координате тензора. Тако, на пр., ако са тензором у специјалном случају стоји у вези одређена површина и бројеви таблице одређују ту површину, са променом координатног система бројеви могу да се промене али облик површине мора остати исти.

Навешћемо неколико правих, научних примера тензора, као скупа бројева одређене структуре изражене таблицом.

Узећемо чврсто тело и проучићемо његово кретање. Механика учи да при проучавању тог кретања немају значаја ни боја, ни хемиски састав, ни друге неке особине тога тела, него је важан распоред масâ тела у простору и то не у свима детаљима, већ у једној општој форми.

Свако кретање чврстог тела можемо рашчланити у два кретања: у кретање тежишта тела и у обртање тела око тежишта.

За проучавање првог кретања довољно је да знамо масу тела и положај тежишта у телу.

За проучавање другог кретања — обртања, важан је распоред масâ у погледу оса што пролазе кроз тежиште, јер за ротацију тела није свеједно, да ли се масе налазе у близини осе ротације или су удаљене од ње. Проучавање распореда маса доводи до овог закључка. У сваком чврстом телу можемо назначити три узајамно управна правца са једном карактеристичном особином. Наиме, ако почнемо обртати тело око једног од тих праваца и, затим, оставимо тело само себи, оно ће продужити ротацију око осе истог правца. Тако, на пр., ротира добро потерана чигра око своје осе. У општем случају ни један други правац нема ту особину: тело ће почети да се колеба, а тиме ће бити изгубљена и непомичност осе ротације. Таква три правца зову се главне осе инерције тела. Као што за кретање тела у одређеном правцу игра улогу његова маса, тако за обртање тела око главне осе инерције игра улогу једна величина, која се зове момент инерције. Триједар од три главне осе инерције са моментима инерције око тих оса сачињавају један облик, који се зове тензор инерције. Јасно је да је тензор инерције од огромне важности за проучавање кретања чврстог тела.

Као други пример, узећемо распоред деформација и напона у еластичном телу. У таквом телу изабраћемо неку тачку и из тела издвојићемо делић у коме се ова тачка налази. Прво ћемо претпоставити да се тај делић налази у слободном, недеформисаном стању; да видимо сад како можемо схватити тоталну деформацију тог делића. Повезаћемо и са њим три управна правца. У сваком од тих праваца може се делић истегнути, односно скратити; тако добијамо три деформације истезања. Исти делић може бити деформисан још и на други начин; наиме, не мењајући запремину делића, можемо извршити смицање материјала тог делића и то у три ортогонална правца. Ове две деформације, сматране као један облик, претстављају тензор деформације.

Јасно је да ако један делић еластичног тела оставимо самом себи, он ће се вратити у своје првобитно стање. За одржавање деформисаног стања треба да на тај делић дејствују силе, које га или истежу, односно притискују, или га смичу. Те силе, које дејствују на сваки еластични делић, зову се напони. Распоред тих сила одређује такође један тензор, тензор напона.

Пошто свака сила која дејствује на еластично тело изазива одговарајућу деформацију, између тензора деформације и тензора напона мора постојати најприснија веза. Теорија еластичности у ствари претставља развијање те везе и извођење одговарајућих закључака.

Сад је Тензорски рачун постао дисциплина, коју у математичкој литератури сусрећемо на сваком кораку. Ова дисциплина постала је врло популарна не само међу математичарима-стручњацима, већ и међу онима који Математику искоришћују за практичне циљеве; на пр., и у добро познатом немачком техничком приручнику „Hütte", који служи инжењерима свих струка, наведене су основе Тензорског рачуна. Пред нашим очима израсла је једна нова математичка дисциплина. Са својим старијим братом Векторским рачуном, постала је она неопходан рачунски инструмент широких кругова, који искоришћују математичке методе.

Шта је узрок томе?

Експериментална физика је крајем прошлог и почетком овог столећа обогаћена низом сјајних проналазака. Од њих су неки унели не само у теорију, него и у практични живот готово фантастичне промене. Нагли развитак Експерименталне физике поставио је Теориској физици задатак да конструише схеме, помоћу којих бисмо могли објаснити све што је већ познато, и предвидети оно што тек има да се пронађе. Тај задатак Теориска физика је схватила широко и озбиљно. Да би га успешно решила, она искоришћава средства која јој Математика ставља на расположење. Међу тим средствима Тензорски рачун заузима данас врло важно место; његовом применом постају излагања Теориске физике знатно једноставнија и конкретнија.

§ 10. Теорија множина

Математичари, као што смо видели, ширећи област својих истраживања, давали су појму броја све већи обим. Међутим и то је постало недовољно. Требало је проучавањем обухватити и скупове објеката кад нисмо у стању да их пребројимо. Тако се дошло до појма множине.

Множина је скуп одређених предмета који се зову елементи множине. Да множина буде потпуно позната треба: 1) да знамо све-елементе те множине и 2) да за сваки предмет можемо казати да ли припада тој множини или не. Множине ћемо означавати, углавном, великим латинским словом. Две множине су еквивалентне, ако сваком елементу једне одговара елеменат друге и обратно. Множина D је део множине M, ако сви елементи множине D припадају множини M; ако постоји ма и један елемент множине M који не припада множини D, такав део претставља прави део множине M. Ако је број елемената множине коначан, она се зове коначна.

Две еквивалентне коначне множине имају заједничку особину, која се изражава истим бројем елемената тих множина. Заједничку особину имају и све друге еквивалентне множине; овој заједничкој особини одговара појам моћност множине. Ако множина није коначна, тј. има бескрајно много чланова, она се зове бесконачна или трансфинитна. Коначну и трансфинитну множину можемо и овако дефинисати. Множина се зове коначна ако ниједан њен прави део није еквивалентан целој множини. Множина је трансфинитна ако постоји такав њен прави део који је еквивалентан целој множини. То је чудна ствар! Може ли део бити еквивалентан целоме? Може. Ево примера. Узећемо две множине: множину свих парних позитивних бројева

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$

и множину свих природних бројева

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

Јасно је да је прва множина прави део друге можине, јер 1) сваки елемент прве множине припада другој множини и 2) у другој множини има елемената, који не припадају првој — то су непарни бројеви. Међутим, те две множине су еквивалентне, јер елементе прве множине можемо нумерисати ако их претставимо у облику

$$2\cdot 1,\ 2\cdot 2,\ 2\cdot 3,\ 2\cdot 4,\ 2\cdot 5,\ \ldots$$

на овај начин сваком елементу ове множине одговара елемент низа природних бројева и обрнуто. Ове множине су еквивалентне.

Коначна множина од n елемената еквивалентна је множини низа природних бројева од 1 до n. Број n потпуно одређује моћност коначне множине.

Претпоставимо да и моћност сваке бесконачне множине одређује један број. Овај се број зове кардинални број множине. За коначну множину кардинални број је неки од природних бројева,

број те множине. За бесконачну множину је кардинални број бесконачан или трансфинитан. Ако је бесконачна множина еквивалентна бесконачном низу природних бројева, она се зове избројива. Трансфинитни број избројиве множине је, тако рећи, најпростији трансфинитни број, јер је лако доказати да свака бесконачна множина мора имати део који претставља избројиву множину.

Трансфинитни број избројиве множине означаваћемо са $\mathfrak{a}$ (готско) или са првим словом „алеф" јеврејске азбуке са индексом нула. Примери избројивих множина: множина свих позитивних и негативних бројева, множина свих рационалних бројева, множина свих алгебарских бројева, множина дужи које леже на једном отсечку али га не покривају у потпуности.

Да ли постоје и множине које нису избројиве? Постоје. Све тачке на једној дужи коначне дужине не можемо довести у везу за низом природних бројева. Множина ових тачака има моћност множине свих реалних бројева. Ова је моћност већа од моћности избројиве множине. Таква се множина зове континуум, а њена моћност — моћност континуума. Трансфинитни кардинални број континуума означимо са $\mathfrak{c}$ (готско) или са „алеф" са индексом један. Према томе је $\mathfrak{c} > \mathfrak{a}$. Трансфитни број $\mathfrak{c}$ који одговара броју свих реалних бројева, претставља једно уопштавање појма броја. Он одговара множини чије све елементе не можемо пребројати у обичном смислу те речи помоћу низа природних бројева.

Појам трансфинитног броја може бити и даље проширен: могу бити конструисани бројеви већи од $\mathfrak{c}$.

Свим овим питањима бави се нарочита грана Више математике — Теорија множина или Теорија скупова. Овом теоријом бавило се крајем прошлог века и у нашем веку врло много математичара. У неким земљама поникле су и нарочите научне школе које су се бавиле искључиво том теоријом.

Главна је заслуга ове теорије у томе што она омогућава тачније образложење основних појмова и процеса у Вишој математици. Има екстремних мишљења по којима без Теорије множина нема математике. Оваква мишљења не можемо признати за тачна, нарочито кад узмемо у обзир да и сама Теорија множина није расправила сва питања која стоје у вези са основима Математике. Постоји неколико противречности, тзв. парадокса или антиномија, које није успела да отстрани ни аксиоматизација Теорије множина, тј. изграђивање ове дисциплине на основи полазних истина-аксиома са свом могућом логичном строгошћу.

§ 11. Рачун са облицима. Топологија. Теорија група

Нарочита особина математичке методе истраживања природних појава састоји се у оној улози коју у њој игра број. Са сваким обликом, објектом проучавања, може се довести у везу један или више бројева, и то тако да се, према датом облику, могу одредити бројеви и обрнуто — према датим бројевима одређује се облик.

Свака грана Математике бави се специјалним врстама, одређеним категоријама облика. Анализа оперише са величинама; она даје правила по којима се величине упоређују са бројевима. Геометрија проучава просторне облике, било тродимензионалног било вишедимензионалног простора. Она решава питања упоређења геометриских облика са бројевима који те облике одређују у потпуности, тј. по њиховој форми, положају и величини. Даље, у Механици основни облик претставља кретање система, геометриских у Кинематици и материјалних у Динамици. Проучавање мировања материјалних маса спада исто тако у Механику, у њен део, у Статику. У Математичкој физици облици су још сложенији и разноврснији. У Физичкој хемији још су компликованији. У биолошким и социолошким наукама је сложеност објеката таква да засада још нисмо у стању ни претставити на који би начин и ове науке постале предмет егзактног математичког проучавања.

При оперисању са облицима може се поступити на два начина.

Прва метода састоји се у овоме. Сваки облик, као што смо рекли, стоји у вези са бројевима: ови га у датом смислу потпуно одређују. Зато сва расуђивања са облицима могу бити замењена расуђивањем са бројевима. Ова метода, примењена ма на коју категорију облика, зове се м е т о д а с к а л а р н о г р а ч у н а. Скаларна метода може бити развијена у Геометрији, у Механици, у Математичкој физици итд. У оквиру те методе имамо посла само са обичним бројевима и законима којима се ови бројеви покоравају.

Скаларни рачун игра у Математици доминантну улогу. Његова је снага огромна. Он има међутим и крупан недостатак. Место облика овај рачун оперише са бројевима. После прелаза на језик бројева и само бројева губи се веза са обликом. Ишчезавају јасноћа, прегледност и конкретност. Сем тога, ако су облици компликовани, они се одређују низом бројева, зато је при оперисању са облицима потребно извршити читав низ операција; ако се облик мења у свим својим деловима, потребно је пазити на примену многобројних комплекса бројева, а то повлачи за собом, већ и у једноставним случајевима, велику сложеност расуђивања. На крају је потребно поново обухватити све особине бројева, који одређују облик, и створити претставу о резултантном облику.

При примени на компликованије математичке дисциплине горњи недостатак скаларног рачуна постаје све већи. Зато се по принципу економије мишљења, прво полако, а затим све интензивније, појавила једна друга тенденција. Она се претворила у нову методу, методу Рачуна са облицима. Суштина методе састоји се у овоме.

У свакој математичкој дисциплини, која обрађује одређену групу појава, издваја се један облик помоћу којег могу појаве ове групе бити формулисане најједноставније. Тај облик, разуме се, треба да буде математички облик, тј. њему треба да одговарају одређени бројеви и обрнуто. Пошто се дефинише облик треба дефинисати операције са њиме, операције — сабирања, одузимања, множења итд. Ове могу бити аналогне операцијама скаларног рачуна, но могу имати нарочиту природу у вези са индивидуалношћу датог облика. Систем правила помоћу којих се морају изводити операције са облицима одређене категорије претставља рачун тог облика. Он је индивидуалан у вези са природом облика, али обухвата све разноврсне облике исте природе.

Скаларни рачун такође може се сматрати као рачун са најпростијим обликом — са скаларном величином. Као релативно једноставан, али доста развијен пример Рачуна са облицима може послужити Векторски рачун, о којем смо већ говорили. Као други пример можемо навести Тензорски рачун; о њему је такође било говора у једном од претходних параграфа.

Постоје и други рачуни са специјалним облицима. Тако је опширно разрађен рачун са завртњима или њиховим модификацијама — моторима. З а в р т а њ, односно м о т о р, је математички облик који може бити одређен помоћу два вектора. Једна од најпростијих интерпретација завртња је елементарно кретање чврстог тела када се ово помера у одређеном правцу и, при том, обрће око тог правца као око осе обртања.

Теорија множина такође може се сматрати као Рачун са облицима општег карактера.

Проучавање облика у његовим различитим формама не претпоставља увек потпуно конкретне облике, облике, тако рећи, са свима својим индивидуалним особинама. Не. Облик може да мења своје индивидуалне особине, али да задржава карактеристична општа својства. На пр., површина сфере може, после једне или друге трансформације, да се претвори у површину елипсоида или у какву другу површину, али да при томе остане увек, рецимо, у свакој тачци испупчена, конвексна, и да је права сече само у две тачке. Проучавање општих особина како геометриских тако и других облика, везаних са њима, сачињава сада нарочиту дисциплину — Т о п о л о г и ј у.

Проучавање облика и уопште ма којих објеката — елемената — стоји у блиској вези са проучавањем различитих операција-композиција. У теорији композиција нарочито важну улогу игра појам групе, тј. таквог скупа елемената, за који композиција од два елемента доводи поново до елемента истог скупа. Теорија група преставља једну врло важну математичку дисциплину, чија је примена веома разграната како у Анализи и Геометрији, тако и у Математичкој физици, а нарочито у Механици кванта и Теорији атома.

ГЛАВА II

ФУНКЦИЈА

§ 12. Величине константне и промењиве

Математика оперише само са оним величинама које се могу мерити, а измерити величину значи упоредити је са бројем[1]. У тачном мерењу тај је број потпуно одређен, у приближном мерењу, које се најчешће примењује у практичном животу, за тај се број постављају одређене границе између којих се он налази.

Мерење може бити непосредно или посредно. Оно је непосредно, када се дата величина непосредно мери изабраном јединицом, на пр. дужина помоћу метра. Мерење је посредно када се мери нека друга величина, на пр. дужина или угао па се затим, помоћу рачуна, на основу математичког обрасца, добија вредност тражене величине. На пр., после мерења угла на галванометру можемо рачуном одредити јачину струје.

Ако се као резултат мерења величине добије увек исти број, величина се зове *стална, константна, непромењива* или, једноставно, *константа*.

Константне величине деле се на *релативне* и *апсолутне*.

Релативна константа задржава своју вредност само под извесним условима. Тако, на пр., димензије прозора на одређеној згради обично имају исте величине, за ту зграду оне су константне; али пошто на другим зградама прозори могу бити сасвим других димензија, те су константе релативне. Растојање између астрономских тачака Београда и Беча је константно: и овде та константност има релативни карактер, јер се све димензије на Земљиној површини мењају у току геолошких периода.

[1]) Данас се у Психологији, Политичкој економији и социјалним наукама оперише и са величинама које на можемо повезати са бројем, него их разликујемо само према односу „већи или мањи". Теорије таквих величина треба да допуни савремену Математику.

А п с о л у т н е к о н с т а н т е су величине које имају сталну вредност у свим приликама, у сваком процесу расуђивања. Однос обима круга према пречнику, који се мери бројем π, има исту вредност у свим приликама. Тај однос је пример апсолутне константе.

Величина која се мења зове се п р о м е н љ и в а или в а р и ј а б и л н а.

Треба ли наводити примере променљивих величина?

Све се мења око нас! Πάντα ῥεῖ (панта реи — све тече) каже Хераклит (грчки филозоф, 548 — 480 пре наше ере). У свакој промени можемо наћи једну или више величина које карактеришу ову промену. Пре свега се мења — и то неминовно — време, ова вечно променљива величина. Сваки дан Сунце излази, мења своју висину над хоризонтом и залази. Његова је висина променљива величина. То исто видимо код звезда, Месеца, планета. Ваздух мења своју температуру, влажност, притисак — све су то променљиве величине. Све физиолошке појаве нашег живота везане су са променљивим величинама; температура тела, крвни притисак, тежина и друге величине мењају се не само од детињства до старости него и у току једног дана. Још више променљивих величина можемо набројати посматрајући наш социјални живот. Постоје специјални институти и посебне науке које проучавају променљиве величине везане за друштво. Што већу област појава узимамо у обзир, то више имамо променљивих величина, то је шаренија њихова природа.

Вежбања. 1. Навести примере сталних и променљивих величина. 2. Навести обрасце из Геометрије за одређивање запремине тела, који могу садржати константе, релативне и апсолутне, и променљиве величине. 3. Навести примере природних процеса, где учествују једна, две и више променљивих.

§ 13. Гранична вредност

Константне вредности које узима променљива зову се п о с е б н е в р е д н о с т и те променљиве. Ако за променљиву x напишемо $x = a$ или $x = x_1$, константе a и x_1 су посебне вредности x'а.

Има случајева где посебне вредности променљиве x чине низ константних вредности

(1) $$x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots,$$

који можемо продужити колико год желимо. На пр., за приближне вредности разломка $\frac{1}{3}$, у облику децималних разломака, имамо низ

(2) $$0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333;\ \ldots;\ \underbrace{0{,}33\ldots3}_{n};\ \ldots$$

који можемо продужити колико год желимо.

Претпоставимо да су чланови низа (1) нумерисани и да за било која два члана можемо казати који од њих претходи другом.

Означимо са x_n и x_N две вредности променљиве x под условом да је

$$N > n,$$

тј. да вредност x_N следује за вредношћу x_n.

Означимо са ε (читај епсилон) неки мали, позитивни број.

Сад ћемо навести у Вишој математици врло важну дефиницију појма граничне вредности променљиве.

Ако за сваки, колико год желимо мали позитивни број ε, можемо увек наћи такву посебну вредност x_n променљиве x да за сваку вредност x_N $(N \geqslant n)$ постоји неједнакост

(3) $$|x_N - a| < \varepsilon,$$

где је a константа, каже се да је константа a г р а н и ч н а в р е д н о с т *променљиве x.*

Протумачимо ову дефиницију. Величине x_n и x_N су посебне вредности променљиве x. За сваки број ε довољно је да наведемо један број x_n. Али неједнакост (3) треба да важи не само за једну вредност x'а, него за све вредности x_N низа

$$x_n,\ x_{n+1},\ x_{n+2},\ \ldots$$

Црте код разлике $x_N - a$ означавају, као увек, апсолутну вредност.

П р и м е р. Ако је x променљива са вредностима низа (2), можемо тврдити да x има граничну вредност $\frac{1}{3}$. Заиста, нека је $\varepsilon = 0{,}01$, тада узимамо $x_n = 0{,}33$ и састављамо за x_N низ

(4) $$0{,}33;\ 0{,}333;\ 0{,}3333;\ \ldots$$

Пошто је већ

$$\left|0{,}33 - \frac{1}{3}\right| = |0{,}33 - 0{,}333\ldots| < |-0{,}00333\ldots| < 0{,}004 < 0{,}01,$$

неједнакост важи и за сваки наредни број написаног низа (4). На исти начин могли бисмо показати да одговарајуће неједнакости важе и за сваку другу вредност ε, тј. за $\varepsilon = 0{,}001$; $\varepsilon = 0{,}0001$ итд. Тиме смо утврдили да је $\frac{1}{3}$ гранична вредност променљиве x са посебним вредностима низа (2).

Ако је гранична вредност променљиве једнака нули, променљива се зове бескрајно мала.

Променљива која у низу својих посебних вредности постане и остане већа ма од којег унапред изабраног позитивног броја зове се бескрајно велика.

Ако број n расте и може при томе узимати колико год желимо велике вредности, у Математици се то кратко бележи овако: $n \to \infty$ и чита се: n тежи бесконачности.

Ако је променљива x дата низом (1) и има границу a, употребљује се ознака

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Ознака *lim* је скраћеница од латинске речи *limes* — граница. Претходна једначина се чита: limes (или гранична вредност) од x_n, кад n тежи бесконачности, једнак је a.

Ако није потребно наводити под којим се условима проучава гранична вредност променљиве x, скраћено се пише

$$\lim x = a.$$

За бескрајно малу величину имамо ову једначину

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$$

или скраћено

$$\lim x = 0.$$

Пример:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

За бескрајно велику величину имамо једначину

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \infty,$$

на пр.,

$$\lim_{n \to \infty} n^2 = \infty.$$

Неједнакост

$$| x_N - a | < \varepsilon$$

која је наведена у дефиницији граничне вредноста, садржи саму ту

вредност и, према томе, не може служити ни за одређивање те вредности, ни за испитивање да ли низ (4) има граничну вредност или не.

Сад ћемо показати на чему се оснива ово испитивање.

Ако променљива x, одређена низом (1), има граничну вредност a, можемо написати два услова

$$| x_n - a | < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad | x_N - a | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из ових услова следује

$$| (x_n - a) - (x_N - a) | < \varepsilon,$$

или

$$| x_n - x_N | < \varepsilon.$$

Према томе можемо навести ову теорему:

Ако променљива x, одређена низом

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,\ x_N,\ \ldots,$$

има граничну вредност, за сваки, колико год желимо мали, позитивни број ε можемо наћи такву посебну вредност x_n да за свако $x_N\,(N > n)$ постоји неједнакост

$$| x_n - x_N | < \varepsilon.$$

Важи и врло значајна обрнута Коши-ева теорема (Коши, 1789—1857):

Ако променљивој x одговара низ посебних вредности у коме ма за који позитивни број ε можемо увек наћи посебну вредност x_n, да за свако x_N $(N > n)$ важи неједнакост

$$| x_n - x_N | < \varepsilon,$$

тада постоји константан број a, који је граница променљиве x, тј.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Нећемо улазити у доказ ове теореме. Она омогућава проучавање низа и без познавања саме граничне вредности.

Навешћемо још неколико теорема о граничним вредностима.

Гранична вредност збира или разлике једнака је збиру или разлици граничних вредности.

На пример,

$$\lim (x+y+z) = \lim x + \lim y + \lim z.$$

Гранична вредност производа једнака је производу граничних вредности, тј.

$$\lim (xy) = \lim x \cdot \lim y.$$

Гранична вредност количника једнака је количнику граничних вредности, тј.

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y},$$

под условом да је

$$\lim y \neq 0.$$

Сличне теореме важе и за друге операције. На пр.:

$$\lim \log x = \log \lim x,$$

тј. гранична вредност логаритма једнака је логаритму граничне вредности.

Вежбања: 1. Показати да чланови низа бројева

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots$$

имају граничну вредност једнаку јединици.

2. Узети за јединицу дужине 5 cm и на дужини $AB = 10$ cm одмерити од тачке A дужине једнаке члановима претходног низа. Какав је гранични положај другог краја тих дужина?

3. Доказати помоћу неједнакости

$$|x_n - a + y_n - b| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b|$$

теорему

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n .$$

4. Показати на основу обрасца

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$$

да је

$$\lim_{n\to\infty} [\sqrt{n} - \sqrt{n-1}] = 0 .$$

5. Показати на основу особине $\sin n\alpha \leqslant 1$ да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} = 0.$$

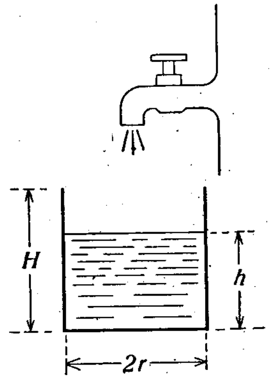
§ 14. Појам функције

Почнимо једним примером.

Из славине тече вода у суд који има облик ваљка (сл. 19). Полупречник основе ваљка означимо са r, а његову висину са H. Овај ваљак напунићемо водом до висине h. Израчунајмо запремину V воде у суду до те висине. Јасно је да је потребно искористити образац за запремину ваљка. Геометрија учи да тај образац гласи

$$V = \pi r^2 h.$$

Које величине улазе у ову једнакост? Сталне и промењиве. Број π је сталан; као што смо навели, то је апсолутна константа. За наш суд је величина полупречника r стална, али је она релативног карактера, јер у другом суду она може имати другу вредност.



Сл. 19
Пуњење суда водом

Величина h је промењива — тој величини, можемо по нашој жељи, дати произвољну вредност. Разуме се та вредност не сме бити мања од нуле ни већа од H, висине суда, али у наведеним границама она је посве произвољна.

Промењиву величину која може имати произвољне вредности зовемо **независно промењива**. Према томе величину h, у нашем примеру, можемо сматрати као независно промењиву.

Остаје још величина V. И она је промењива. Али чим напунимо суд до одређене висине h, количина воде, запремина V, добија потпуно одређену вредност. Промењива V зависи, дакле, од промењиве h.

Промењива величина чије вредности зависе од вредности друге, независно промењиве, зове се **зависно промењива** или **функција те независно промењиве**.

За ознаку промењивих величина у Математици се обично употребљују последња слова латинске азбуке; ако промењиву висину h означимо са x, а запремину воде V са y, наш образац добија облик:

$$y = \pi r^2 x.$$

Овај образац доводи у везу независно промењљиву x, и зависно промењљиву y: за сваку вредност x'а можемо, на основу овог обрасца, израчунати односну вредност y'а. То је пример **функционалне везе** између две величине.

Ако нећемо или не можемо написати образац који би показао у детаљима све операције које треба извршити да на основу вредности x'а добијемо вредност y'а, а желимо само да изразимо да између тих величина постоји функционална веза, употребљује се ова математичка реченица:

$$y = funct. (x).$$

Она се чита: y је функција x'а. Често се пута од скраћене речи *funct.* задржава само прво слово f, или се замењује другим неким словом. Тада се иста реченица бележи овако:

$$y = f(x).$$

У овој једначини су: x — независно промењљива или **аргумент функције**, y — зависно промењљива или функција, а f — **симбол** или **ознака функције**.

Симбол функције означава операције које треба извршити са x да бисмо добили одговарајућу вредност y. Функција је дата кад су ове операције познате.

Помоћу једног једноставног примера, пуњења суда водом, дошли смо до појма функције, који је основа Више математике.

Вежбања. 1. Поставити функционалну везу на примерима сипања воде у суд облика а) правоуглог паралелепипеда, b) купе обрнуте врхом доле и c) зарубљене купе.

§ 15. Графичка претстава функције

Знамо да температура ваздуха у току сваког дана не остаје иста него се мења. Имамо, дакле, две промењљиве величине: време, које ћемо означити са t (прво слово латинске речи tempus-време) и температуру — број степена по Целзију који ћемо означити са Т. Пошто сваком моменту времена t одговара одређена температура ваздуха Т, можемо сматрати да је температура функција времена. Математички се ово изражава, као што смо видели, овако

$$T = f(t).$$

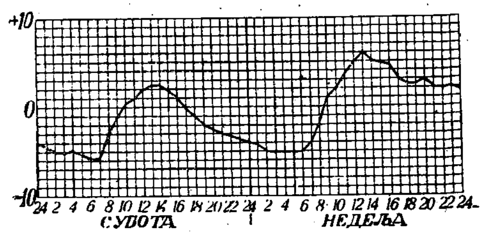
Ево таблице вредности температуре ваздуха 4. и 5. фебруара 1939 године у Београду.

Сати		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
фебруар	4	−4	−4,5	−5	−5	−4,8	−5,4	−5,7	−5,5	−3	−1	+0,5	+1,2	+2	+2,5	+2,5	+1,8	+0,9	−0,3	−1,4	−2	−2,5	−3	−3,1	−3,7	−4
	5	−4	−4,2	−5	−5	−5	−5	−5	−4	−2	+1	+2	+3,6	+5	+6	+5	+4,9	+4,5	+3	+2,3	+2,3	+3	+2	+2	+2	+1,7

Из ове таблице може се прочитати температура забележена сваког часа у Београду 4. и 5. фебруара.

Да ли се може из ове таблице добити општа слика промене температуре тих дана? Не.

Узећемо сада Декартов систем координата. На оси коју смо раније означавали са x одмерићемо, у часовима, време t; за ординату узећемо температуру Т (Сл. 20). Наша таблица омогућује да се конструише 48 тачака. Ако добијене тачке спојимо линијом, добићемо јасну геометриску слику о промени температуре у току тих дана. Ова линија зове се **график**, **графикон**, **дијаграм** дате функције. У нашем примеру имамо график температуре ваздуха одређених дана.



Сл. 20. График температуре ваздуха 4. и 5. фебруара 1939 г. у Београду

Нацртати график функције значи претставити је сликом.

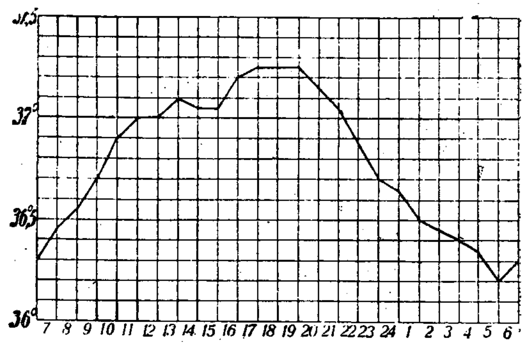
У нашем случају употребили смо један нарочити начин цртања графика. Тај начин зове се **цртање графика по тачкама**: прво смо нацртали тачке, а затим смо их спојили линијом.

График може бити нацртан и друкчије — **непрекидним цртањем**. За температуру ваздуха, на пр. постоје апарати — **термографи**, који непрекидном линијом цртају **термограм**. Обрнуто, са непрекидног графика можемо прочитати вредност функције за посебне вредности аргумента. На пр., са термограма можемо прочитати температуру сваког часа и израдити таблицу.

У вези са цртањем графика направићемо ову примедбу.

Поставимо себи задатак, на пр., да нацртамо график температуре здравог човека. Познато је да се ова мења око температуре 37° С. Има ли смисла цртати и онај део координатног система који садржи температуру од 0^0 C? Наравно да нема. На слици 21 дајемо тај график. Он обухвата област температуре од 36^0 C до $37^0,5$ C.

Постоје, дакле, случајеви кад график не садржи почетак координатног система, него само део било једне, било друге осе, који је важан за проучавање дате појаве.



Сл. 21. График температуре здравог човека

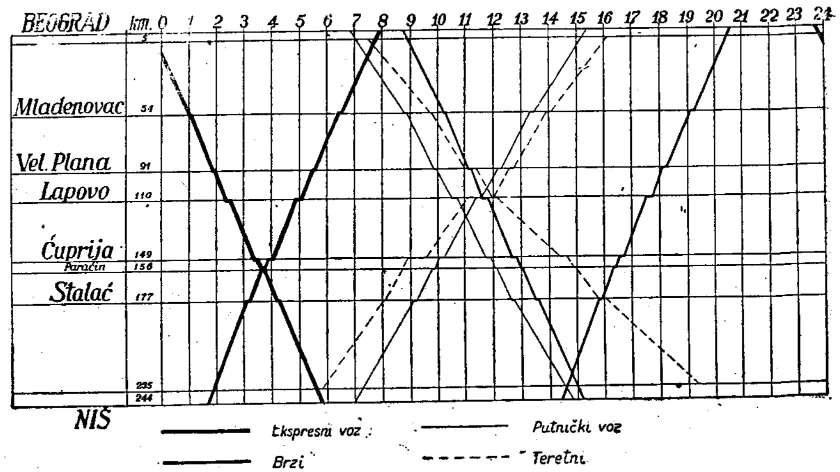
Навешћемо још један пример графика. Возови из Београда до Ниша путују по одређеном „реду вожње". Шта садржи ред вожње? Списак станица, растојање у километрима и време када возови полазе са станица. Ови подаци непосредно не дају јасну слику кретања возова на прузи између Београда и Ниша. Када се саставља ред вожње, употребљује се графичка метода. При цртању „железничког графикона" поступа се овако. На једној оси (сл. 22) мери се време t у часовима и минутима, на другој d — растојање воза од Београда у километрима. За сваки воз је растојање d функција времена t, тј.

$$d = f(t).$$

За возове који полазе из Београда, када време t расте, расте и растојање d; за возове који стижу у Београд, када t расте, d се смањује. Делови графикона паралелни са осом t одговарају задржавању воза на станицама. Видимо да железнички графикон омогућује не само да се пропрати кретање сваког појединог воза него и да се упореде кретања свих возова на датом делу пруге. Ово је нарочито важно за што боље искоришћавање пруге и возног парка.

У претходним примерима и саме функције и њихове графичке претставе служе за описивање појаве: промене температуре ваздуха и

кретање возова, и то у појединим случајевима — температуре одређених дана и кретања возова на одређеном делу пруге у одређеном периоду времена.



Сл. 22. Железнички графикон

За функцију која је поникла из потребе описа поједине конкретне појаве каже се да има **описни или идиографски карактер**. У претходним примерима имали смо функције идиографског карактера.

Сада ћемо узети пример друге врсте.

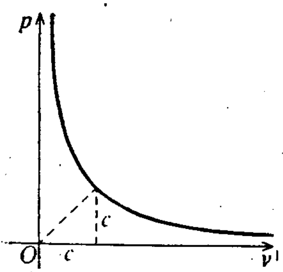
Знамо да су запремина v и притисак p исте количине гаса под истом температуром по Бојл-Мариотову закону везани једначином

$$pv = const. = c^2,$$

где смо са c^2 означили константу. Према томе притисак тога гаса можемо сматрати као функцију запремине и то

$$p = \frac{c^2}{v}.$$

Ако нацртамо график те функције, добићемо криву облика показана на слици 23. Детаљније ћемо ову криву проучити доцније. Ова функционална веза показује и промену притиска са променом запремине и закон те промене. Тај закон важи не само за одређени дан или одређено место, већ има општи карактер, под условом да гас задржава своју температуру.



Сл. 23. График Бојл-Маритова закона

Ако функција тумачи било какав закон, каже се да има **з а к о н с к и** или **н о р м о г р а ф с к и к а р а к т е р**. Јасно је да су функције нормографског карактера много важније од функција идиографског карактера. И зато ћеме се у овој књизи углавном зауставити на примерима функција које одговарају законима најважнијих процеса.

Вежбања. 1. Број становника Југославије према „Статистичком годишњаку 1923 године може се претставити овом таблицом:

Године	1918	1919	1920	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928	1929	1930	1931	1832	1933
Бр. станов. у милионима	11,6	11,8	12,0	12,1	12,3	12,5	12,7	12,9	13,1	13,3	13,5	13,7	13,9	14,1	14,3	14,5

Нацртати одговарајући график.

2. Нацртати на истој слици два графика функције s одређене једначином $s = at^2$; један за $a = 1$ и други за $a = 0{,}1$.

4. Навести примере функционалних веза идиографског и нормографског карактера.

§ 16. Равномерни процес

Означимо са a цену једног килограма брашна, са x број килограма на стоваришту и са y укупну вредност тог брашна. Јасно је да за израчунавање ове вредности треба цену једног килограма помножити бројем килограма; то даје

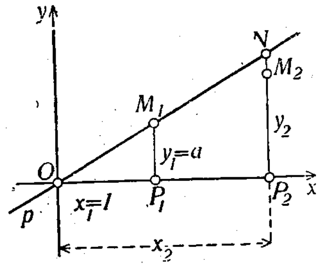
$$(1) \qquad y = ax;$$

другим речима, вредност брашна исте цене утолико је већа уколико је већи број килограма на стоваришту.

Две величине које су везане таквим односом, као што знамо, зову се **д и р е к т н о п р о п о р ц и о н а л н е** или, једноставно, **п р о п о р ц и о н а л н е**. Величина y је функција величине x. У случају пропорционалности ова је функција изражена једначином (1).

Нацртајмо график ове функције. Ставимо прво $x = 0$; из (1)

видимо да је тада и $y = 0$. Наш график пролази кроз почетак координата, тачку О (0,0). Даље, ставимо $x = 1 = x_1$; тада је, из (1), $y = a = y_1$ (на слици 24 узето је $a = \frac{1}{2}$). Конструишимо тачку $M_1(x_1, y_1)$. Сада докажимо да наш график претставља праву p која пролази кроз тачке О и M_1. Узмимо за x произвољну вредност x_2; тада, према (1), y има вредност $y_2 = a x_2$. Покажимо да тачка $M_2(x_2, y_2)$ припада нашој правој p. Претпоставимо да не припада правој p; тада постоји друга тачка, N, на правој p са апсцисом x_2. Њену ординату означимо са y. Из сличности троуглова OP_1M_1 и OP_2N имамо $y : x_2 = a : 1$. Одатле је $y = ax_2$, што значи $y = y_2$. Тачке N и M_2 се поклапају. Произвољна тачка са координатама које задовољавају једначину (1) лежи на правој p; према томе ова је права график наше функције.

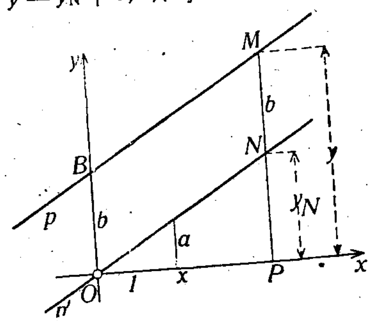


Сл. 24. График пропорционалности

Претпоставимо сад да права p не пролази кроз координатни почетак и решимо питање која функција одговара њој као графику.

Кроз почетак координата (сл. 25) повуцимо праву p' паралелну правој p. Тада ћемо за сваку апсцису x имату две тачке: тачку M на правој p и тачку N на правој p'. Ординату тачке M означимо са y, а ординату тачке N са y_N. Јасно је да је $y = y_N + b$, где је $b = NM = OB$ ордината тачке B пресека праве p са осом y. С друге стране, за тачку N, као за тачку на правој која пролази кроз почетак координата, имамо $y_N = ax$, према томе за тачку M имамо

$$(2) \qquad y = ax + b.$$

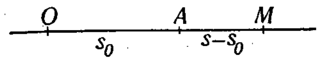


Сл. 25. График равномерног процеса

Добијена **ф у н к ц и ј а** је **п р в о г с т е п е н а** по x, али са чланом b, који не зависи од x. Пошто ова функција има за график праву линију, она се зове и **л и н е а р н а ф у н к ц и ј а**.

Једначина (2) се зове **ј е д н а ч и н а п р а в е у р е ш е н о м о б л и к у**.

Замислимо сад воз који је пошао са станице А (сл. 26) на растојању s_0 од почетне станице О. Нека се тај воз креће **р а в н о м е р н о**, тј. тако да је пут који он пролази пропорционалан времену. Број километара који он пређе за час показује величину његове *брзине*; њу ћемо означити са v (прво слово латинске речи velocitas — брзина). Ако са s (прво слово латинске речи spatium — простор, растојање) означимо растојање воза од станице O, а са t време од почетка кретања, имамо



Сл. 26 Кретање воза

$$s - s_0 = vt,$$

одакле је

$$s = s_0 + vt.$$

Видимо да равномерном кретању такође одговара линеарна функција, у датом случају функција времена.

Из наведеног разлога се сваки процес који је карактерисан линеарном функцијом зове *равномерни процес*. График равномерног процеса је права линија.

Проучимо детаљније тај важни процес.

Положај праве са једначином

$$y = ax + b$$

одређују две, за дату праву сталне величине a и b. Оне се зову *параметри праве*. Ако се параметри мењају, права мења свој положај у равни, са тим у вези мења се и карактер равномерног процеса.

Нека, прво, параметар b има сталну вредност, а параметар a нека се мења.

Ако је $a = 0$, једначина праве постаје

$$y = b = \text{const}.$$

Ова права је паралелна оси x (сл. 27, a). Видимо да, као специјалан случај, у равномерни процес спада и дегенеративни случај функције кад она има константну вредност.

Претпоставимо сад да a има позитивну вредност (сл. 27, b). Ако у правоуглом троуглу ABC угао ABC означимо са α (читај алфа), можемо из тог троугла написати

$$tg\,\alpha = AC : BA = a : 1 = a.$$

Угао α је угао нагиба праве према осовини x. Он се рачуна од

осе x до првог сусрета са правом. Његов смер је одређен прелазом кроз прави угао од позитивног правца осе x до позитивног правца осе y. Тангенс тог угла, број a, зове се *угаони коефицијент* или *коефицијент правца* дате праве.

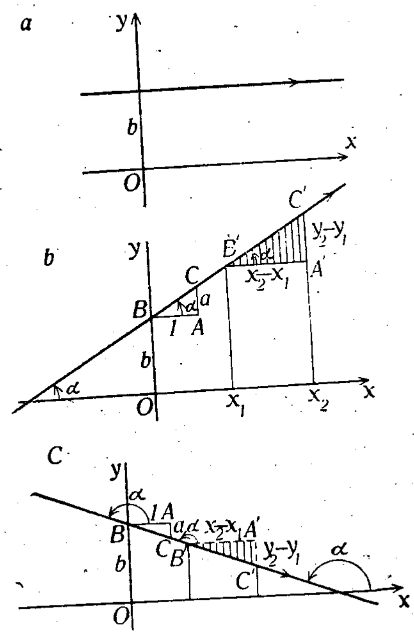
Узмимо две вредности апсциса, x_1 и x_2 ($x_2 > x_1$) и упоредимо односне вредности ордината y_1 и y_2. Непосредно из троугла A'B'C' имамо

$$(3)\qquad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tg\,\alpha = a,$$

одакле је

$$(4)\qquad y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1).$$

Пошто је $x_2 - x_1 > 0$ и $\alpha > 0$, закључујемо да је $y_2 > y_1$; другим речима, ако аргумент x функције расте, у овом случају функција y такође расте. Такав равномерни процес зове се *прогресивни*. Однос (3) је *мера промене*, у датом случаје *мера пораста функције*. Јасно је да је мера промене функције једнака коефицијенту правца графика линеарне функције.



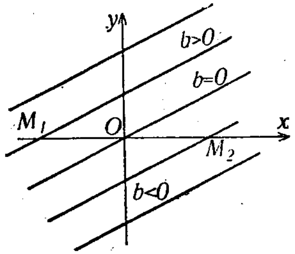
Сл. 27. Графици различитих равномерних процеса: a. сталност функције; b. прогресиван равномеран процес; c. регресиван равномеран процес

Ако је a негативно, график функције има положај праве на слици 27, c. Ако следимо правилу које смо поставили за рачунање угла α, у овом случају је угао α туп. Његов тангенс је негативан и опет има вредност a. Из троугла A'B'C' следује једнакост (3) и закључак (4). Пошто је сад $x_2 - x_1 > 0$, а $a < 0$, имамо као резултат $y_2 < y_1$; овде, према томе, ако аргумент x функције расте, функција опада. Овакав равномерни процес зове се *регресивни*. Однос (3), који поново служи као мера промене функције, овде је *мера опадања функције*. И у овом случају он је угаони коефицијент наше праве.

Сада ћемо претпоставити да параметар a има сталну вредност, а да се мења параметар b, који се зове *почетна ордината праве*, јер је то ордината за $x = 0$.

Ако је $b=0$, права са једначином $y=ax$ пролази кроз почетак координатног система (сл. 28) и претставља закон директне пропорционалности, као специјалан случај равномерног процеса.

Ако је $b>0$, права сече осу y изнад почетка координата; апсциса тачке пресека M_1 праве са осом x је негативна. За случај $b<0$ права сече осу y испод почетка координата, а осу x са позитивне стране од тог почетка.

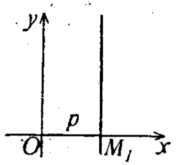


Сл. 28. Промена положаја праве са променом почетне ординате

Претходна анализа разних положаја праве линије не обухвата један положај само, када је права паралелна са осом y (сл. 29). Уовом случају једначину праве треба написати овако

$$x=p=\text{const.},$$

где смо са p означили апсцису тачке пресека M_1 праве са осом x. Претходна једначина не може се добити из једначине праве у облику (2), јер угаони коефицијент a за такву праву има бесконачну вредност.



Сл. 29 Права паралелна оси y

Навешћемо још неколико једначина правих у нарочитим положајима.

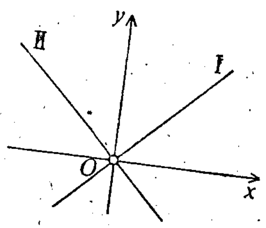
Оса x има своју једначину $y=0$; оса y једначину $x=0$.

Симетрала I (сл. 30) координатних углова има једначину

$$y=x \text{ или } y-x=0.$$

Симетрали II на нашој слици одговара једначина

$$y=-x \text{ или } y+x=0.$$



Сл. 30. Симетрале координатних углова

Прва симетрала гради угао од 45° са осом x и има угаони коефицијент $+1$; друга симетрала гради са x-осом угао 135° и њен је угаони коефицијент једнак -1.

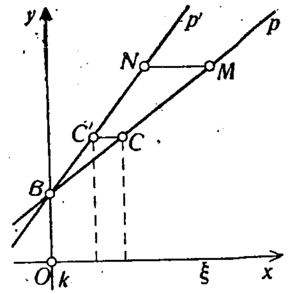
У вези са цртањем праве као графика равномерног процеса навешћемо неколико примедаба.

Ако се дужина коју смо изабрали за величину јединице промењљиве x покаже као незгодна, на пр. сувише велика, можемо узети мању величину, као

што се каже, променити с р а з м е р у графика. Како ће се тада променити график?

На правој p графика узећемо две тачке (сл. 31): тачку B са $x=0$ и тачку C са $x=1$. Пошто вредности нових апсциса ξ (читај: кси) одређујемо из унапред постављеног услова

$$\xi=kx,$$



Сл. 31. Промена положаја праве са променом сразмере апсциса

где је k дати одређени број (коефицијент с м а њ е њ а, односно п о в е ћ а њ а а п с ц и с а), нове апсцисе тачака B и C имају вредности $\xi_B=0$, $\xi_C=k$. Према томе тачка B задржава свој положај, а тачка C добија положај C', са апсцисом k и ординатом тачке C. Праву што спаја тачке B и C' означићемо са p'. Није тешко показати да ће свака тачка M праве p после ове промене сразмере апсциса заузети положај тачке N пресека праве p' са правом MN паралелном осовини x. Права p' је график у новом положају.

Сличну конструкцију можемо извести, ако мењамо сразмеру ордината по услову

$$\eta=l\,y,$$

где је η (читај: ета) нова ордината и l дати број, коефицијент смањења, односно повећања ордината.

На датој правој p (сл. 32) узмимо две тачке: тачку A са $y=0$ и тачку D са $y=1$. Овим тачкама ће одговарати: иста тачка A и тачка D' са ординатом l и апсцисом једнаком апсциси тачке D. На правој p'' која спаја тачке A и D' лежи свака нова тачка (T) добијена од тачке (S) праве p. Права p'' је график у новом положају.

Решићемо још неколико задатака у вези са проучавањем праве.

1. Написати једначину праве која пролази кроз две дате тачке $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Видели смо да једначину праве можемо написати

$$y=ax+b, \qquad (5)$$

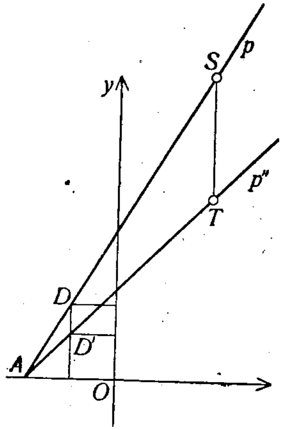
где су a и b параметри праве. Ове ћемо параметре одредити из услова да права пролази кроз две дате тачке. Пошто координате датих тачака морају задовољавати једначину праве, имамо прво

$$y_1=ax_1+b. \qquad (6)$$

Ако ову једначину, одузмемо од (5) добићемо једначину

$$y - y_1 = a(x - x_1), \tag{7}$$

која садржи само један параметар a. Ова једначина претставља праву која пролази кроз једну дату тачку.



Сл. 32. Промена положаја праве са променом сразмере ордината

Пошто друга тачка такође припада овој правој, упоредо са (7) добијамо једначину

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1),$$

одакле је

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{8}$$

После замене ове вредности a у (7) коначно добијамо

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Тако изгледа једначина праве која пролази кроз две дате тачке. За даља расуђивања је важно да се обрати пажња на образац (8) који одређује коефицијент правца дате праве

$$tg\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{9}$$

ако са α поново означимо угао који гради права са осом x.

2. Доказати да једначина

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0, \tag{10}$$

где су A, B, C стални бројеви, одређује праву (општи облик једначине праве).

Ако је $\mathrm{B} \neq 0$, претходну једначину можемо решити по y и написати

$$y = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}x - \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}},$$

а ова једначина са ознакама

$$-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = a, \qquad -\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}} = b$$

има облик једначине $y = ax + b$ и, према томе, одређује праву.

Ако је $\mathrm{B} = 0$, једначину у облику

$$\mathrm{A}x + \mathrm{C} = 0$$

за $\mathrm{A} \neq 0$. можемо решити по x и, у облику

$$x = -\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}},$$

она одређује праву паралелну са осом Oy.

Ако су $\mathrm{B} = 0$ и $\mathrm{A} = 0$, из једначине (10) следује да је и $\mathrm{C} = 0$; под овим условима једначина више не постоји. Ако коефицијенти A, B, C теже нули, права која одговара једначини удаљује се у бесконачност.

3. Одредити отсечке које права (10) чини на координатним осама.

Ако са p и q означимо тражене отсечке, координате тачака пресека праве са x, односно y осом морају бити

$$(p, 0), \qquad (0, q).$$

Пошто ове координате морају задовољавати једначину праве (10), за одређивање отсечака p и q имамо услове

$$\mathrm{A}p + \mathrm{C} = 0, \qquad \mathrm{B}q + \mathrm{C} = 0.$$

Њихово решење даје

$$p = -\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}, \qquad q = -\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}.$$

Обрнуто, ако из написаних једначина одредимо A и B,

$$\mathrm{A} = -\frac{\mathrm{C}}{p}, \qquad \mathrm{B} = -\frac{\mathrm{C}}{q},$$

и ове вредности ставимо у једначину праве (10), добићемо једначину

$$-\frac{\mathrm{C}}{p}x - \frac{\mathrm{C}}{q}y + \mathrm{C} = 0.$$

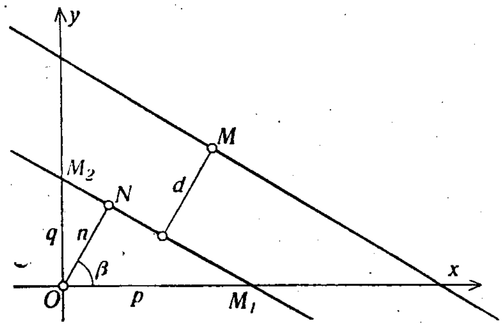
После дељења са — C (ако је $C \neq 0$) добијамо једначину

(11) $$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1,$$

која се зове једначина праве са отсецима или сегментска једначина праве.

4. Одредити растојање тачке од праве.

Прво ћемо показати како се може написати једначина праве помоћу дужине нормале n, спуштене из почетка координатног система на праву, и угла β (читај: бета) ове нормале са осом x.



Сл. 33. Параметри нормалног облика једначине праве. Растојање тачке од праве

Пошто из троуглова ONM_1 и ONM_2 (сл. 33) непосредно имамо

$$\frac{n}{p}=\cos\beta, \qquad \frac{n}{q}=\sin\beta,$$

после множења једначине (11) са n долазимо до тражене једначине.

(12) $$x\cos\beta+y\sin\beta-n=0.$$

Та се једначина зове нормални облик једначине праве.

Ако је права дата једначином у нормалном облику (12) и тачка M, чије растојање d од праве одређујемо, има координате x_1, y_1, можемо замислити праву која пролази кроз тачку M и иде паралелно са датом правом. Она има нормалну једначину

$$x\cos\beta+y\sin\beta-(n+d)=0.$$

Како ова права мора пролазити кроз тачку M (x_1, y_1), координате ове тачке морају задовољавати претходну једначину. Из тог услова одређујемо d помоћу обрасца

$$d=x_1\cos\beta+y_1\sin\beta-n.$$

Другим речима, за одређивање растојања тачке од праве треба написати једначину праве у нормалном облику и координате променљиве тачке праве заменити координатама тачке чије растојање одређујемо. Ако добијемо позитивни резултат, тачка M и почетак координатног система леже на различитим странама од дате праве. Ако је резултат негативан, ове тачке се налазе на истој страни од дате праве.

5. Трансформисати једначину праве у општем облику

(13) $$Ax+By+C=0$$

на нормални облик (12). Ако две једначине (13) и (12) одговарају истој правој, оне могу да се разликују само сталним множиоцем. Помножимо једначину (13) сталним множиоцем λ (читај: ламбда) и изједначимо коефицијенте добијене једначине са коефицијентима једначине (12):

$$\cos\beta=\lambda A, \quad \sin\beta=\lambda B, \quad -n=\lambda C.$$

Из прва два услова, на основу једначине $\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$, добијемо за λ вредност

$$\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Трећи услов решава питање избора знака код корена. Пошто је $n>0$, λ треба да буде супротан знаку члана C. Множилац λ се зове нормирајући множилац опште једначине праве. После нормирања једначина (13) добија облик

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0.$$

Како сваку једначину праве линије можемо написати у општем облику, нормирање тог облика решава питање о нормирању свих осталих облика једначине праве.

6. Одредити угао између две праве.

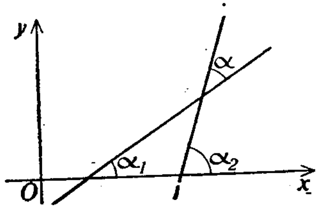
Нека су праве дате једначинама

$$y = a_1 x + b_1, \qquad y = a_2 x + b_2.$$

Знамо да су

$$a_1 = tg\alpha_1, \qquad a_2 = tg\alpha_2,$$

где су α_1 и α_2 углови правих са осом x. Пошто непосредно са слике (сл. 34) видимо да је угао α између правих једнак разлици $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, можемо написати за тангенс траженог угла овај израз



Сл. 34. Угао између две праве

$$tg\alpha = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2},$$

одакле изводимо дефинитивно образац

$$tg\alpha = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_1 a_2}. \tag{14}$$

Из овог обрасца непосредно следују у с л о в и п а р а л е л н о с т и и н о р м а л н о с т и п р а в и х. Пошто је за паралелне праве $\alpha = 0$, услов паралелности изгледа овако

$$a_2 = a_1,$$

тј. угаони коефицијенти морају бити једнаки.

У случају нормалности угао између правих износи 90^0; према томе је $tg\alpha = \pm\infty$, а то може да буде, као што се види из (14), само под условом

$$1 + a_1 a_2 = 0,$$

који можемо написати и овако

$$a_2 = -\frac{1}{a_1},$$

тј. угаони коефицијенти нормалних правих треба да буду реципрочни и супротних знакова.

Вежбања. **1.** Навести примере директно пропорционалних величина и протумачити њихову пропорционалност на графику. **2.** Навести примере равномерног процеса. **3.** Конструисати праве чије су једначине: a. $y = \frac{1}{2}x$; b. $y = \frac{1}{2}x + 2$; c. $y = -\frac{1}{2}x - 3$; d. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$; e. $5x + 3y - 15 = 0$; f. $x \sin 45^0 + y \cos 45^0 - 2 = 0$;

g. $x \cos 30^0 + y \sin 30^0 - 3 = 0$; h. $x = \frac{1}{2}y + 2$. **4.** Дате су координате темена троугла: $M_1(4, 3)$, $M_2(-1, 2)$, $M_3(2, -5)$; написати једначине страна тог троугла. **5.** Дате су две тачке $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Написати једначину симетрале дужи M_1M_2. **6.** Написати услове паралелности и управности правих са једначинама: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. **7.** Наћи растојање тачака $M_1(10, 15)$, $M_2(1, \frac{1}{2})$, $M_3(-20, 10)$ од праве са једначином: $3x + 4y - 5 = 0$. **8.** Наћи тачку пресека правих са једначинама: $5x - 3y - 2 = 0$, $9x + 2y - 11 = 0$. **9.** Зашто права са једначином

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

за сваку вредност броја λ пролази кроз тачку пресека правих са једначинама: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$? **10.** Наћи углове троугла са теменима: $M_1(-7, 6)$, $M_2(2, -2)$, $M_3(-3, -4)$. **11.** Потврдити да три тачке са координатама: $M_1(4, 2)$, $M_2(16, 10)$, $M_3(-6, 8)$ могу бити темена правоугаоника и одредити координате његовог четвртог темена.

§ 17. Процес обрнуте пропорционалности

Видели смо да је график процеса директне пропорционалности са једначином

$$y = ax$$

права која пролази кроз почетак координата.

Сад ћемо проучити случај обрнуте пропорционалности. Ако су величине x и y обрнуто пропорционалне, тада можемо, сматрајући y као функцију x, написати

$$y = \frac{c^2}{x}, \tag{1}$$

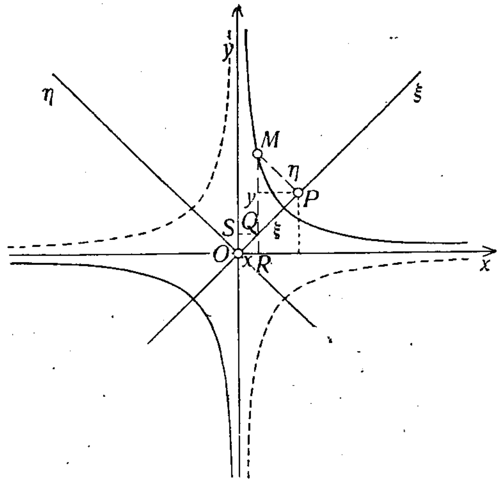
где је c^2 позитивна константа. Заиста, овај образац показује да за колико пута се x повећава за толико исто пута се смањи y, и обрнуто.

Имали смо пример ове пропорционалности у Бојл-Мариотову закону.

Како се црта график функције (1) ? По тачкама. Дајемо апсциси x низ вредности и за сваку рачунамо према обрасцу (1) вредност y; на тај начин добијамо одговарајући низ тачака. На пр., за $c = 1$ имамо таблицу.

x	$-\infty$	-10.000	-1.000	-100	-10	-5	-4	-3	-2	-1	0
y	0	$-0,0004$	$-0,004$	$-0,04$	$-0,4$	$-0,8$	-1	$-\frac{4}{3}$	-2	-4	∞
x	0	1	2	3	4	5	10	100	1000	$10\,000$	$+\infty$
y	∞	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$0,8$	$0,4$	$0,04$	$0,004$	$0,0004$	0

Ако према овој таблици нацртамо низ тачака и спојимо их линијом, добићемо криву (сл. 35), која се састоји од две гране; за једну грану x и y су позитивни, за другу су ове координате негативне. Ова крива зове се равнострана хипербола. Видимо на слици, а то нам потврђује и таблица вредности x и y, да ова хипербола има четири бесконачне гране — у једном и другом правцу оса x и y. Како



Сл. 35. График обрнуте пропорционалности. Две равностране конјуговане хиперболе

се понаша хипербола, на пр. према осовини x? Једна грана се налази са једне стране те осе, а друга са друге. Када се удаљујемо дуж осе x, растојање се између тачке хиперболе и осе све више и више смањује. Због ових особина, осе x и y зову се асимптоте хиперболе. Асимптота је грчка реч и означава оно што се не поклапа. Према томе сам назив указује на то, да без обзира на то што се асимптоте све више и више приближују кривој, оне се са овом никад не поклапају.

Ако упоредо са једначином (1) узмемо једначину

$$y = -\frac{c^2}{x}, \qquad (2)$$

која се разликује од претходне само знаком десне стране, овој једначини такође одговара равнострана хипербола али са положајем у другим угловима координатног система (на слици 35 она је нацртана испрекиданом линијом). Те две хиперболе зову се конјуговане.

Сада ћемо увести нов систем координата $O\xi\eta$ (читај: о кси ета); оса $O\xi$ гради угао од 45^0 са осом x, а оса $O\eta$ стоји управно на оси $O\xi$. Нове координате тачке M (сл. 35) означимо са ξ и η. Непосредно са слике имамо

$$\xi = OP = PQ + QO = \eta + x\sqrt{2},$$
$$y = MR = QR + MQ = x + \eta\sqrt{2}.$$

После тога из прве једначине одређујемо

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\xi - \eta),$$

а затим из друге изводимо

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\xi + \eta).$$

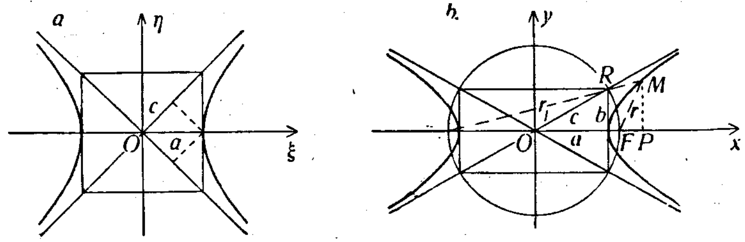
Ако сад добијене вредности за старе координате x и y ставимо у једначину (1), која се може написати

$$xy = c^2,$$

добићемо једначину

$$\xi^2 - \eta^2 = 2c^2 = a^2, \qquad (3)$$

где је a константна дужина. Ова једначина такође одговара равностраној хиперболи само у другом положају према координатним осама (сл. 36,a).



Сл. 36. Хиперболе: a. равнострана, b. разнострана

Замислимо сад да су све ординате η у равни $O\xi\eta$ смањене у истом односу тако да нове ординате y имају вредности

$$y = \frac{b}{a}\eta,$$

где је b ($b < a$) нова дужина.

Ако у једначини (3) ставимо

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{a}{b} y,$$

добићемо

$$x^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2 = a^2$$

или у дефинитивној форми

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

Крива која одговара овој једначини показана је на слици 36,*b*. Она се зове х и п е р б о л а; ако се жели нагласити да она није равнострана, употребљује се назив р а з н о с т р а н а х и п е р б о л а. Дужине a и b су п о л у о с е х и п е р б о л е. Правоугаоник конструисан на a и b, као што се то види на слици, својим дијагоналама даје асимптоте, јер оне одговарају дијагоналама квадрата на слици 36,*a*, које служе као асимптоте равностране хиперболе.

Доказаћемо једну врло важну особину хиперболе.

Са полупречником $OR = c$ (сл. 36,*b*), једнаким половини дијагонале конструисаног правоугаоника, нацртаћемо круг са центром у почетку координатног система. Тачке пресека тог круга са x осом означићемо са F и F_1. Ове тачке зову се ж и ж е или ф о к у с и хиперболе. Докажимо сад да разлика растојања сваке тачке хиперболе од жижа има сталну вредност, тј. даје

$$MF_1 - MF = r_1 - r = const.$$

Непосредно са слике имамо

$$r_1^2 = y^2 + (x + c)^2,$$
$$r^2 = y^2 + (x - c)^2.$$

Прво, после одузимања долазимо до резултата

$$r_1^2 - r^2 = 4 c x. \tag{5}$$

Затим ћемо израчунати r_1

$$r_1 = \sqrt{y^2 + (x + c)^2} = z + a,$$

где је z нова непозната, коју можемо одредити из једначине (4) хиперболе. Заиста, ако обе стране претходне једначине дигнемо на квадрат, добићемо

$$y^2 + x^2 + 2 c x + c^2 = z^2 + 2 a z + a^2. \tag{6}$$

Из једначине (4) изводимо

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2.$$

Ако ову вредност ставимо у претходну једначину и узмемо у обзир да је

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

из (6) имамо

$$\frac{c^2}{a^2} x^2 + 2 cx = z^2 + 2 az.$$

Из ове једначине следује непосредно (а могли бисмо до тога доћи и после решавања претходне једначине као квадратне у односу на z), да се може ставити

$$z = \frac{c}{a} x$$

и према томе прво имамо

$$r_1 = \frac{c}{a} x + a,$$

а затим из (5) изводимо

$$r = \frac{c}{a} x - a.$$

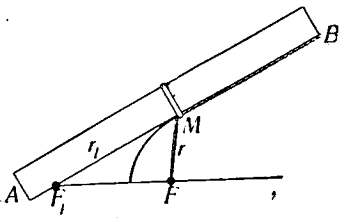
Из ове две једначине следује резултат

$$r_1 - r = 2 a = const.,$$

који можемо формулисати теоремом:

Хипербола је геометриско место тачака у равни за које разлика растојања од две сталне тачке (жиже) има сталну вредност.

Ова особина хиперболе омогућава њено цртање у облику непрекидне линије. Лењир AB (сл. 37) учврстимо за хартију чиодом у тачки F_1 тако да се он око ове тачке може слободно окретати. За крај B лењира везан је нерастегљив конац; другим својим крајем он се учвршћује на хартији у тачки F. По лењиру се може слободно кретати кука M, кроз коју пролази конац. Оловку, којом ћемо повлачити хиперболу, држаћемо тако да се њен врх налази стално приљубљен уз куку. Према томе конац треба да има положај FMB и његов део MB треба стално да лежи на лењиру. Ако лењир окрећемо око тачке F_1, а конац при томе држимо затегнут, врх оловке M црта хиперболу. Заиста, разлика



Сл. 37. Цртање хиперболе у облику непрекидне линије

$$F_1M - MF = r_1 - r$$

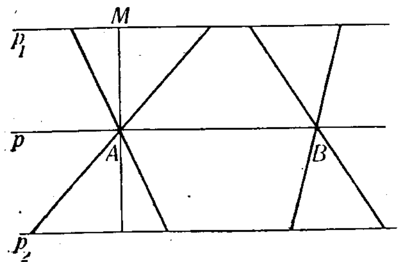
остаје стална, јер при промени положаја куке M свакој дужини r_1 и r или се додаје или се одузима иста величина; у првом случају део конца MB се скраћује, у другом повећава.

Хипербола има *ц е н т а р*. То је на слици 36 тачка O.

Шта је центар криве линије? Да ли је то исти појам као и појам центра кружне линије, тачке, од које су све тачке криве подједнако удаљене? Јасно је да није!

Ц е н т а р   к р и в е линије је средина свих тетива те криве што пролазе кроз ту тачку.

Да бисмо показали да је појам центра криве или, уопште, геометриске фигуре шири од појма центра кружне линије или многоугла, навешћемо, као пример, геометриску фигуру која има бескрајно много центара. То су две паралелне праве (сл. 38). Свака тачка праве p паралелне правама p_1 и p_2, која пролази кроз средину A растојања између тих правих, центар је наше слике, јер су све тетиве, које пролазе кроз било коју тачку A, B итд. праве p, преполовљене том тачком.



Сл. 38. Слика са бескрајно великим бројем центара

Хипербола има две *о с е   с и м е т р и ј е*. Свака од координатних оса на слици 36 је оса симетрије хиперболе. Једна од њих која сече хиперболу, зове се *с т в а р н а   о с а*, друга — *и м а г и н а р н а*. Тачке пресека хиперболе са стварном осом су њена *т е м е н а*.

Шта је то оса симетрије слике у равни?

За две тачке, A и A_1, каже се да су *с и м е т р и ч н е* у односу на праву p, ако леже: 1) на истој нормали на правој p, 2) са различитих страна праве p и 3) на истим растојањима од те праве.

Ако свакој тачки слике одговара друга тачка исте слике симетрична првој у односу на неку праву, *с л и к а   ј е   с и м е т р и ч н а   у   о д н о с у   н а   т у   п р а в у*.

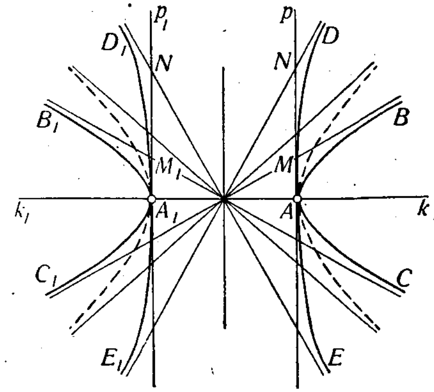
Права, у односу на коју је нека слика симетрична, зове се *о с а   с и м е т р и ј е* или *с и м е т р а л а*. Оваква симетрија слика зове се *о с н а* или *а к с и ј а л н а   с и м е т р и ј а*.

Хипербола је слика са двоструком аксијалном симетријом.

Две осе хиперболине, стварна a и имагинарна b, одређују њен облик. Величина

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

како смо видели одређује положаје жижа хиперболе. Однос $\frac{c}{a} = e$ зове се *е к с ц е н т р и ц и т е т   х и п е р б о л е*. Пошто је $c > a$, ексцентрицитет хиперболе је већи од јединице. За равнострану хиперболу ($a = b$) ексцентрицитет хиперболе једнак је $\sqrt{2}$. Ако је $e < \sqrt{2}$, хипербола је сужена (сл. 39, B A C и $B_1 A_1 C_1$) у односу на равнострану; ако је $e > \sqrt{2}$, она је развучена (сл. 39, D A E и $D_1 A_1 E_1$). Ако e тежи јединици, хипербола тежи да се претвори у две полуправе Ak и $A_1 k_1$. Ако e тежи бесконачности, хипорбола тежи да се претвори у две паралелне праве p и p_1 (сл. 39).



Сл. 39. Промена облика хиперболе у вези са промеиом њеног ексцентрицитета

Ако је равнострана хипербола дата једначином

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

њене асимптоте, као симетрале координатних углова, имају за једначине

$$y - x = 0, \qquad y + x = 0.$$

Ако је хипербола дата једначином

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

из претходне слике непосредно следује да су асимптоте дате једначинама

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,$$

јер свака пролази кроз почетак координатног система и прва још и кроз тачку M (a, b), а друга и кроз тачку M_1 $(-a, b)$.

Вежбања. 1. Навести пример обрнуто пропорционалних величина и протумачити такву пропорционалност на слици. **2.** Из услова $r_1 - r = const.$ извести једначину хиперболе у облику $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. **3.** Трансформисати једначину хиперболе $x\,y + 16 = 0$ на облик $x^2 - y^2 = a^2$. **4.** Нацртати тачку по тачку хиперболу чија је једначина $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$. **5.** Нацртати криву чија је једначина $y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(x-5)\,(x+1)}$ и показати да је то хипербола. **6.** Показати да, ако је нека хипербола сужена, њој конјугована хипербола је развучена и обрнуто. **7.** За хиперболе са једначинама $4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$ и $5x^2 - 16y^2 = 64$ одредити њихова темена, жиже, полуосе, ексцентрицитет и написати једначине асимптота.

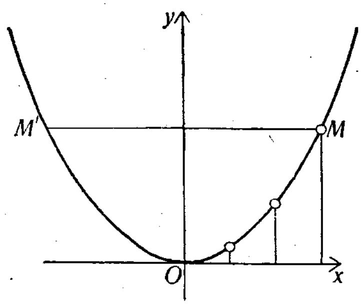
§ 18. Квадратна функција

Најједноставнија квадратна функција изгледа овако

$$(1) \qquad y = ax^2,$$

где је a константа. Та једначина изражава да је вредност y пропорционална квадрату вредности x.

Проучићемо график који одговара једначини (1). Претпоставимо, прво, да је a позитивно (на слици 40 је $a = 0{,}5$) и започнимо цртање тачака ове криве. Видимо да крива пролази кроз почетак координата, јер $x = 0$, $y = 0$ задовољавају једначину (1). Даље, из те једначине непосредно следује да како за позитивне тако и за негативне вредности x' а y има увек позитивну вредност; према томе све тачке криве налазе се само са једне стране осе x. Из исте једначине видимо да свакој тачки $M(x, y)$ одговара друга тачка $M'(-x, y)$ са истом ординатом, а са апсцисом супротног знака и исте апсолутне вредности. Ово показује да наша крива има осу y за симетралу. Према томе за проучавање криве довољно је проучити њене тачке само у једном квадранту. Саставићемо таблицу



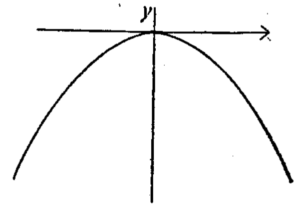
Сл. 40. Парабола која пролази кроз почетак координата са осом y као симетралом и са отвором у позитивном смеру те осе

x	0	1	2	3	4	5	6	...	...	∞
y	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18	...	...	∞

Помоћу ове таблице можемо конструисати низ тачака наше криве. Добијена крива се зове **парабола**. Тачка O је **теме параболе**, права Oy је **оса параболе**.

Пошто y, кад x бескрајно расте, расте такође бескрајно, парабола има две бесконачне гране.

Када је a негативно, једначина (1) изражава параболу симетричну претходној у односу на осу x (сл. 41).



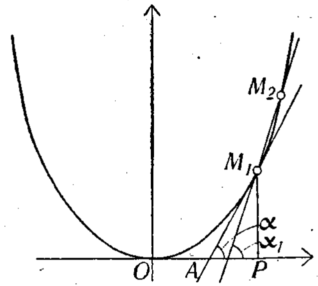
Сл. 41. Парабола која пролази кроз почетак координата са осом y као симетралом и са отвором у негативном смеру те осе

Узмимо сад на параболи (сл. 42) две тачке, $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, и уочимо сечицу што пролази кроз ове тачке. Видели смо у § 16 стр. 61 да угаони коефицијент праве кроз две тачке има вредност

$$(2) \qquad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tg\,\alpha_1,$$

где је α_1 угао између ове праве и осе x. Пошто обе тачке, и M_1 и M_2, припадају параболи са једначином (1), координате тих тачака морају задовољавати ту једначину, према томе је

$$y_1 = ax_1^2, \qquad y_2 = ax_2^2.$$



Сл. 42. Сечица и тангента параболе

Ако сад израчунамо однос (2), добићемо

$$(3) \qquad tg\,\alpha_1 = a\,\frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = a\,\frac{(x_2 + x_1)\,(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1).$$

Ако тачка M_2 мења свој положај и приближава се све више тачки M_1, сечица параболе исто тако мења свој положај; мења своју вредност и угао α_1. Нека се најзад тачка M_2 поклопи са тачком M_1. Да ли ће тада угао α_1 изгубити своју вредност? Неће, јер за $x_2 = x_1$ имамо из (3)

$$(4) \qquad tg\,\alpha = 2\,ax_1,$$

где смо са α означили нову вредност угла.

Права што пролази кроз тачку M_1, а има α као угао нагиба према оси x не претставља ништа друго до тангенту параболе у тачки M_1.

Дошли смо тако до новог појма — појма тангенте параболе. Тај појам можемо проширити на сваку криву овом дефиницијом.

Тангента криве линије у датој тачки је гранични положај, ако он постоји, сечице, која пролази кроз дату и њој блиску тачку кад ова тежи датој тачки.

За сваку криву прелаз од сечице ка тангенти треба вршити према специјалној природи криве.

Тако, у случају параболе, за израчунавање угаоног коефицијента из односа

$$tg\,\alpha_1 = a\,\frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1}$$

нисмо могли ставити непосредно у тај израз $x_2 = x_1$, јер бисмо добили израз $\frac{0}{0}$, који не даје тражену вредност. Претходно смо скратили бројилац и именилац са $x_2 - x_1$ и тако смо добили израз $a(x_2 + x_1)$ за угаони коефицијент сечице. Затим смо ставили $x_2 = x_1$ и дошли до резултата $2ax_1$ за угаони коефицијент тангенте. Код других кривих израчунавање граничне вредности угаоног коефицијента секанте није тако једноставно.

Овај конкретни случај параболе јасно показује, прво, шта треба разумети под појмом граничног процеса прелаза од сечице ка тангенти и, друго, да гранични резултат не претставља неки приближни него потпуно одређени, тачни резултат.

Резултат (4) омогућује да се тангента параболе конструише за сваку њену тачку.

За теме, када је $x_1 = 0$, имамо

$$tg\,\alpha = 0,$$

а то значи тангента има правац осе x, која према томе додирује параболу у темену.

За сваку другу тачку параболе са координатама x_1, y_1 имамо за једначину тангенте

$$y - y_1 = 2\,ax_1(x - x_1)$$

или, пошто је $y_1 = ax_1^2$, имамо

$$y = ax_1(2\,x - x_1).$$

Из ове једначине следује да тангента сече осу x ($y = 0$) у тачки А (сл. 42) са апсцисом x_A, која задовољава једначину

$$2\,x_A - x_1 = 0$$

и према томе има вредност

$$x_A = \frac{1}{2}\,x_1.$$

Дакле за конструисање тангенте на нашу параболу у датој тачки M_1 довољно је средину апсцисе тачке M_1, тачку А, спојити са тачком M_1.

Ако желимо угаони коефицијент $tg\,\alpha$ тангенте параболе да сматрамо као функцију u апсцисе x тачке на параболи, онда се из (4) може написати

$$u = u(x) = 2\,ax.$$

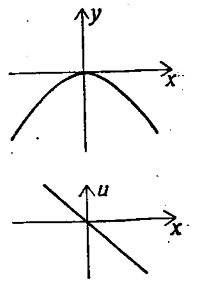
График функције u у координатном систему са координатама x, u је права која пролази кроз почетак координата. На слици 43 је поновљена парабола са отвором надоле и наведен график угаоног коефицијента тангенте на ту параболу.

Сада ћемо узети квадратну функцију општег облика

(5) $$y = ax^2 + bx + c,$$

где су a, b, c три константе.

Нађимо и овде пре свега угаони коефицијент тангенте криве линије у тачки $M_1\,(x_1,\ y_1)$ а помоћу сечице која пролази и кроз другу тачку $M_2(x_2,\ y_2)$. За тај коефицијент имамо



Сл. 43. Парабола и график угаоног коефицијента њене тангенте

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2^2 + bx_2 + c - (ax_1^2 + bx_1 + c)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{[a(x_2 + x_1) + b]\,(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1) + b.$$

Ако пређемо на гранични положај и ставимо $x_2 = x_1$, долазимо до резултата

(6) $$tg\,\alpha = 2\,ax_1 + b.$$

Сад ћемо потражити тачку на кривој за коју је тангента паралелна оси x, тј. $tg\,\alpha = 0$; тада је

(7) $$2\,ax_1 + b = 0$$

и према томе је

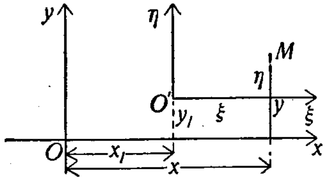
(8) $$x_1 = -\frac{b}{2\,a}.$$

Ако ову вредност ставимо у израз за функцију y, добићемо

$$(9) \quad y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c = \frac{1}{4a}(4ac - b^2) = -\frac{1}{4a}(b^2 - 4ac).$$

За проучавање положаја графика, који одговара једначини (5), поступићемо на овај начин.

Упоредо са координатним системом Oxy замислимо систем координата $O'\xi\eta$, чији се почетак налази у тачки $O'(x_1, y_1)$, а осе су паралелне старим осама (сл. 44). Свака тачка M равни има тада две врсте координата: x, y у односу на Oxy и ξ, η у односу на $O'\xi\eta$. Између тих координата постоје везе



Сл. 44. Трансформација координата у случају промене положаја само почетка

$$x = \xi + x_1, \qquad y = \eta + y_1,$$

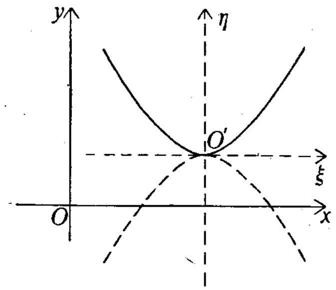
као што је то лако видети непосредно са слике.

Уврстимо сад ове вредности у једначину (5) и ставимо

$$\eta + y_1 = a(\xi + x_1)^2 + b(\xi + x_1) + c,$$

или

$$\eta + y_1 = a\xi^2 + (2ax_1 + b)\,\xi + (ax_1^2 + bx_1 + c).$$



Сл. 45. Параболе као графици квадратне функције

Пошто је

$$2ax_1 + b = 0,$$
$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c,$$

претходна једначина добија облик

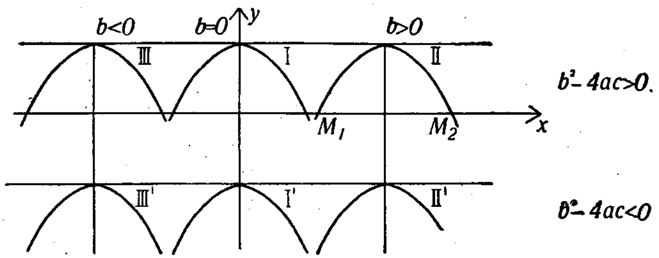
$$\eta = a\xi^2.$$

Ова једначина не претставља ништа друго него параболу са осом η као симетралом и теменом у тачки $O'(x_1, y_1)$, чије су координате одређене једначинама (8) и (9). Ако је $a > 0$, отвор параболе је нагоре, ако је $a < 0$, надоле. Слика 45 даје две одговарајуће параболе.

Константе a, b, c су параметри квадратне функције. Проучимо везу положаја параболе са вредностима ових параметара.

Случај I. $a < 0$. Парабола има отвор надоле.

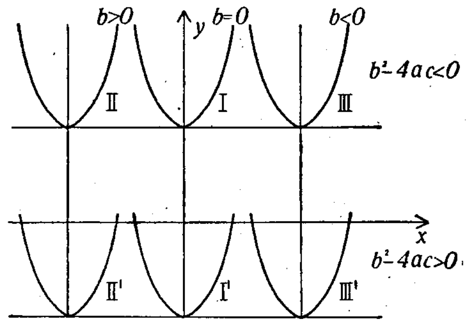
Према знаку b теме параболе лежи, како то следује из (8): 1) на оси y за $b = 0$ (сл. 46, I и I'), 2) десно од те осе за $b > 0$ (сл. 46, II и II'),



Сл. 46. Различити положаји параболе са отвором надоле

3) лево од те осе за $b < 0$ (сл. 46, III и III'). Ако је уз то $b^2 - 4ac$ позитивно, y_1 је према (9) позитивно и парабола има један од положаја (I, II, III) на сл. 46. Ако је $b^2 - 4ac < 0$, $y_1 < 0$ и парабола лежи испод осе x (сл. I', II', III').

Случај II. $a > 0$. Парабола је са отвором нагоре. На слици 47 су приказани случајеви: $b = 0$: I и I', $b > 0$: II и II', $b < 0$: III и III'; $b^2 - 4ac > 0$: I', II', III', $b^2 - 4ac < 0$: I, II, III.



Сл. 47. Различити положаји параболе са отвором нагоре

Обратимо пажњу на пресеке параболе са осом x. Пошто је за ове тачке $y = 0$, апсцисе пресека морају задовољавати услов

$$y = ax^2 + bx + c = 0.$$

Оне су, према томе, корени ове једначине, тј.:

$$x_{1,2}=\frac{1}{2a}(-b\pm\sqrt{b^2-4ac}).$$

Ако је $b^2-4ac>0$, имамо два различита реална корена и, према томе, две тачке пресека (на слици 46 имају тачке пресека параболе I, II, III; на слици 47 имају тачке пресека параболе I′, II′, III′). За $b^2-4ac<0$ немамо тачака пресека. Најзад за $b^2-4ac=0$ парабола додирује осу x, што одговара случају једнаких корена са вредношћу $\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

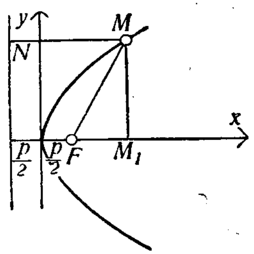
Анализовали смо једначину параболе у најпростијем облику,

$$y=ax^2,$$

и видели смо да је оса симетрије те параболе оса y. Ако узмеме једначину

$$x=ky^2,$$

где је k сталан број, и упоредимо је са претходном једначином, можемо закључити да последња једначина такође одговара једначини параболе само је њена оса симетрије оса x (сл. 48).



Сл. 48. Парабола са жижом и директрисом

Претходну једначину можемо решити по y^2 и написати у облику

$$y^2=2px,$$

где је p стална дужина, при чему је $2pk=1$. Дужина p се зове **параметар** параболе.

Докажимо сад једну врло важну особину параболе.

Уочимо на оси x тачку F са апсцисом $\frac{1}{2}p$ (сл. 48). Ова тачка зове се **жижа** или **фокус** параболе. На растојању $\frac{1}{2}p$ са друге стране осе y конструисаћемо праву паралелну оси y. Ова права зове се **директриса** параболе.

Докажимо теорему:

Геометриско место тачака у равни подједнако удаљених од сталне тачке (жиже) и сталне праве (директрисе) је парабола.

Заиста, узмимо ма коју тачку M параболе. Из троугла MFM_1 непосредно следује

$$MM_1^2=MF^2-FM_1^2.$$

Како је

$$MM_1=y,\qquad MF=MN=x+\frac{p}{2},\qquad FM_1=x-\frac{p}{2},$$

имамо

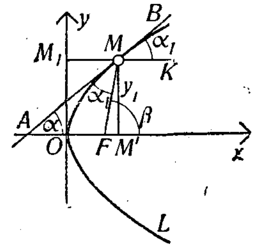
$$y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2,$$

или

$$y^2=2px,$$

а то је једначина параболе.

Проучићемо још једну особину параболе. Ову особину можемо нарочито јасно изразити на такозваном параболичном огледалу. Претпоставимо да се парабола L обрће око своје осе симетрије (сл. 49). Добићемо површину која се зове **обртни параболоид**. Ако унутрашњу страну ове површине углачамо, добићемо параболично огледало. Доказаћемо да се зраци који полазе из жиже параболе одбијају од површине параболичног огледала паралелно оси.



Сл. 49. Особина параболичног огледала

Узећемо зрак FM и доказаћемо да је после одбијања његов правац паралелан оси x. Према закону одбијања зракова угао упадног зрака FM са тангентом AB једнак је углу одбијеног зрака MK са том тангентом. Ако вредност тих углова означимо са α_1, имамо

$$\angle FMA=\angle KMB=\alpha_1.$$

Докажимо да је тај угао једнак углу α тангенте са осом x; из из тога следује да је зрак MK паралелан са осом Ox, а то важи и за све остале зраке.

Узмимо у расматрање угао $MFx=\beta$. За њега имамо

$$tg\,\beta=\frac{MM'}{FM'}=\frac{y_1}{x_1-\frac{p}{2}}.$$

С друге стране је

$$tg\,\alpha=\frac{MM'}{AM'}=\frac{y_1}{2x_1},$$

јер смо доказали да тангента MA полови дуж OM_1, те је према томе,

$$AO = M_1M = OM' = x_1 \qquad \text{и} \qquad AM' = AO + OM' = 2x_1.$$

Тангенс угла 2α израчунаћемо овако

$$tg\,2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2\,\dfrac{y_1}{2x_1}}{1 - \dfrac{y_1^2}{4x_1^2}} = \frac{y_1}{x_1 - \dfrac{2px_1}{4x_1}} = \frac{y_1}{x_1 - \dfrac{p}{2}}.$$

На овај начин долазимо до резултата

$$tg\,\beta = tg\,2\alpha,$$

одакле је у нашем случају

$$\beta = 2\alpha,$$

а пошто је са друге стране (као спољашњи угао троугла)

$$\beta = \alpha + \alpha_1,$$

то, после упоређења, изводимо

$$\alpha = \alpha_1,$$

а то је тражени разултат.

Најзад узмимо у обзир још једну форму параболичне везе између промењљивих.

Једначини

$$y = ax^2 + bx + c$$

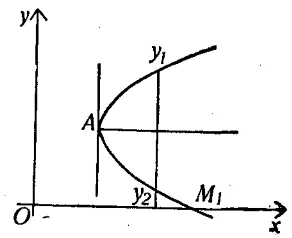
одговара, као што смо видели, парабола у једном од положаја показаних на сликама 46 и 47. Ако променимо називе промењљивих, место горње добићемо једначину

$$(10) \qquad x = ay^2 + by + c$$

Решавањем ове једначине по y долазимо до функције

$$y = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{x}{a} + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}},$$

којој такође одговара парабола, на пр., у положају на слици 50. Овде имамо пример такозване двозначне функције; израз са знаком плус одређује вредност функције y_1, са знаком минус — вредност y_2. Јасно је да параметар c у једначини (10) има вредност апсцисе тачке M_1 пресека параболе са осом x. Апсциса x_A темена параболе одређује се из услова једнаких корена. Из поткорене величине тада имамо



Сл. 50. Парабола са осом симетрије паралелном оси x

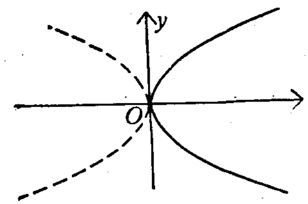
$$x_A = -\frac{1}{4a}(b^2 - 4ac),$$

а сем тога је

$$y_A = -\frac{b}{2a}.$$

Ако је $x_A = y_A = 0$, теме параболе се налази у почетку координата. Једначина (10) тада има облик $x = ay^2$. За $a > 0$ можемо поново увести $2p = \frac{1}{a}$ и једначина $y^2 = 2px$ одређује тада параболу, коју смо већ раније проучили. За $a < 0$ можемо ставити $2p = -\frac{1}{a}$ и добићимо једначину $y^2 = -2px$, која одговара параболи са негативне стране осе y (сл. 51). Она је нацртана на слици тачкасто.

Параболи као графику, одговара параболички процес. Он претставља први корак у прелазу од равномерног процеса ка процесу компликованије природе. Параболичка, односно квадратна функција се често употребљује као идиографска и као номографска функција.



Сл. 51. Парабола са осом x као симетралом

Вежбања. 1. За параболу са једначином $y^2 = 2px$ одредити дужину тетиве која пролази кроз жижу и стоји управно на оси параболе (latus rectum).

2. Помоћу лењира учвршћена на директриси параболе, правоуглог троугла ABC, чија катета AB клизи по том лењиру, и конца дужине друге катете BC, чији је један крај учвршћен у жижи F, а други везан за тачку C троугла, показати како се без прекида извлачи парабола оловком чији се врх увек налази на катети BC и затеже конац.

3. Показати да су код сваке параболе квадрати тетива управних на оси пропорционални растојању тетива од темена параболе.

4. П а р а б о л и ч к и о т с е ч а к је слика омеђена параболом и тетивом, рецимо, управном на оси симетрије. Тетива је о с н о в а п а р а б о л и ч н о г о т с е ч к а, растојање темена параболе од основе је стрелица отсечка. Дате су дужине: $2a$ основе и h стрелице параболичког отсечка. Одредити растојање y тачке параболе од основе у функцији од растојања x те тачке од осе параболе.

5. Одредити једначину параболе са осом у правцу y осе, ако она пролази кроз три тачке $(-1, 5)$, $(1, -3)$, $(4, 0)$.

6. Одредити једначину параболе са осом у правцу x осе, ако она пролази кроз три тачке $(0, 2)$, $(5, 3)$, $(-3, 1)$.

7. Помоћу трансформације координата довести до најпростијег облика једначине параболе

$$y = 2x^2 - 5x - 3, \qquad x = 5y^2 + 8y - 12$$

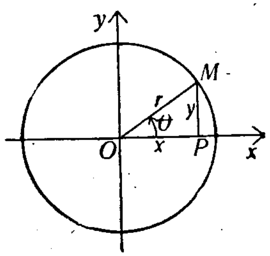
8. Навести примере параболичких графика идиографског и номографског карактера.

§ 19. Кружна линија и елипса

Узмимо кружну линију са центром у почетку координата и са полупречником r (сл. 52). За сваку тачку M ове кружне линије, са координатама x, y, из правоуглог троугла OPM добија се:

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = r^2.$$

То је једначина кружне линије. Она одређује функцију



Сл. 52. Кружна линија са центром у почетку координата

$$(2) \qquad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Ова функција одговара кружном процесу.

Ако са θ (читај: тета) означимо угао између полупречника тачке M и осе x, из истог правоуглог троугла OPM добијамо

$$(3) \qquad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Ако се угао θ мења, тачка са координатама x, y описује кружну линију. Према томе ове две једначине такође претстављају кружну линију. Угао θ се зове променљиви параметар, а саме једначине зову се параметарске једначине кружне линије.

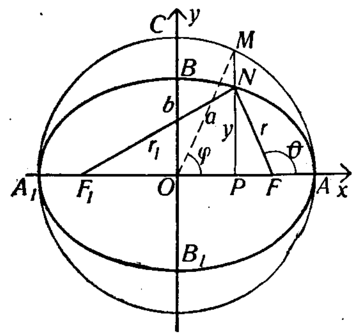
Замислимо сад да ординате свих тачака кружне линије смањимо у истој размери (сл. 53). За сваку тачку кружне линије добићемо тачку нове криве линије, која се зове елипса.

Означимо овде полупречник круга са a, а растојање OB тачке B, коју смо добили из тачке C кружне линије, са b. Стална размера у којој смо променили све ординате има у том случају вредност $b:a$. Ако ординате одговарајућих тачака кружне линије и елипсе привремено означимо са $y_к$ и $y_е$, имаћемо

$$y_е : y_к = b : a$$

и према томе је

$$y_к = \frac{a}{b} y_е.$$



Сл. 53. Елипса

Ако ставимо ову вредност у (1) и r заменимо са a, добијамо

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2} y_е^{\,2} = a^2.$$

Деобом са a^2 и упрошћавањем ознаке заменом $y_е$ са y долазимо до једначине

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ова једначина одговара елипси.

Ако решимо ту једначину по y, имамо функцију

$$(5) \qquad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

која одређује елиптички процес. Кружни и елиптички процеси играју врло важну улогу у проучавању разних појава.

Једначина (5) још једном потврђује сталност односа ординате тачке елипсе према ординати тачке кружне линије одређене једначином (2).

Величине a и b зову се велика и мала полуоса елипсе. Тачка O је центар елипсе. Елипса има две осе симетрије. Кружна линија има их бескрајно много.

Узмимо сад тачку B (сл. 53) за центар и са полупречником a, велике полуосе, нацртајмо кружну линију. Означимо са F и F_1 пресеке ове кружне линије са великом осом елипсе. То су жиже или фокуси елипсе. Растојање $OF = OF_1$ означимо са c.

Доказаћемо једну важну особину елипсе:

Елипса је геометриско место тачака у равни за које збир растојања од две сталне тачке, жиже, има сталну вредност.

Ако је N тачка на елипси и $NF = r$, $NF_1 = r_1$, треба доказати да је

$$(6) \qquad r_1 + r = const. = 2a.$$

Непосредно из слике имамо

$$r = \sqrt{y^2 + (c - x)^2},$$
$$r_1 = \sqrt{y^2 + (c + x)^2}$$

и према томе

$$(7) \qquad r_1^2 - r^2 = 4cx.$$

Као што смо поступили у случају хиперболе, ставићемо и овде

$$r_1 = \sqrt{y^2 + (c + x)^2} = z + a$$

и одредићемо нову непознату z у функцији апсцисе x, а на основу једначине елипсе (4).

Ако претходну једначину подигнемо на квадрат, добићемо

$$y^2 + c^2 + 2cx + x^2 = z^2 + 2az + a^2;$$

заменићемо затим y^2 из (4) са

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

и узећемо у обзир да је

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

и добићемо

$$\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx = z^2 + 2az.$$

Одавде непосредно следује решење ове квадратне једначине

$$z = \frac{c}{a}x,$$

које нас интересује.

На тај начин имамо

$$r_1 = a + \frac{c}{a}x,$$

а затим, из (7),

$$r = a - \frac{c}{a}x,$$

одакле после сабирања долазимо до тражене једначине (6).

Однос $\frac{c}{a}$ зове ее **ексцентрицитет елипсе** и означава се са e. Претходне једначине за r и r_1 можемо и овако изразити

$$r = a - ex, \qquad r_1 = a + ex.$$

Ове једначине изражавају сваки **фокални потег** тачке елипсе као линеарну функцију апсцисе тачке.

Ако са φ (читај: фи) означимо угао између полупречника OM помоћне тачке M на кружној линији и осе x, за тачку N елипсе имаћемо

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi,$$

пошто је

$$y_e = \frac{b}{a}y_k = \frac{b}{a}.\, a\sin\varphi = b\sin\varphi.$$

То су **параметарске једначине елипсе**.

Увешћемо још поларне координате тачке N елипсе са потегом r из жиже F и углом θ између тог потега и осе x.

Пошто је

$$x = c + r\cos\theta,$$

имамо из једначине

$$r = a - \frac{c}{a}x$$

једначину

$$r = a - \frac{c}{a}(c + r\cos\theta),$$

која, решена, даје

$$r = \frac{\frac{a^2 - c^2}{a}}{1 + e\cos\theta}.$$

Ако са p означимо величину $\frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a} = a - ce$, која се зове **параметар елипсе**, долазимо дефинитивно до једначине елипсе у поларним координатама,

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}.$$

Како је за $\theta = 90^0$ $r = p$, параметар елипсе p има дужину половине фокалне тетиве управне на великој оси елипсе.

Израчунајмо вредност угаоног коефицијента тангенте у датој тачки M_1 $(x_1\ y_1)$ на елипси. Ако узмемо другу тачку, са координатама M_2 (x_2, y_2), угаони коефицијент сечице M_1M_2 има вредност

$$tg\,\alpha_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

где је α_1, угао сечице са осом x.

Пошто је

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1\,, \qquad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1\,,$$

после одузимања имамо

$$\frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{a^2} + \frac{(y_2 - y_1)(y_2 + y_1)}{b^2} = 0.$$

Одавде је

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2}{a^2}\ \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}.$$

Ако сад од сечице пређемо на тангенту и ставимо $x_2 = x_1$ и $y_2 = y_1$, имамо дефинитивно

$$tg\,\alpha = -\frac{b^2}{a^2}\ \frac{x_1}{y_1},$$

где је α угао тангенте са осом x.

Са овим угаоним коефицијентом једначину саме тангенте кроз тачку M_1 (x_1, y_1) треба овако написати:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{b^2}{a^2}\ \frac{x_1}{y_1}.$$

Ако извршимо множење и узмемо у обзир да је

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

можемо једначину тангенте елипсе дефинитивно написати

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Користећи се овом једначином могли бисмо лако доказати ову особину елипсе. Почнимо обртати елипсу око велике осе. Добићемо површину, која се зове обртни елипсоид. Ако сада у једној жижи тог елипсоида сместимо извор светлости, зраци ће се, после одбијања од површине елипсоида, скупити у другој жижи.

Вежбања. 1. Извести једначину кружне линије за центом у тачки C (a, b) и полупречником r.

2. Написати параметарске једначине кружне линије полупречника r са центром у почетку координатног система, узимајући за параметар дужину лука те линије.

3. Месечева путања око Земље, сматрана као елипса, има велику осу $a = 406080$ км. и малу $b = 356558$ км. Одредити ексцентрицитет те елипсе.

4. Полупречник a Земљина екватора износи 6377397 m а полуоса b Земљине осе једнака је 6356079 m. Израчунати ексцентрицитет Земљина меридијана.

5. Пропратити промену положаја жижа елипсе када је $a = const.$, а ексцентрицитет e се мења од нуле до јединице.

6. Дата је једначина $Ax^2 + By^2 + C = 0$. Шта претставља ова једначина за различите вредности A, B, C?

7. Где су жиже елипсе за коју је $b > a$?

8. Ако на растојању $2c$ учврстимо на хартији две чиоде, обухватимо их кончаном петљом дужине $2\ (a + c)$ и врхом оловке затегнемо конац, врх ће описивати елипсу. Зашто?

9. Искоришћавајући показану методу за извођење једначине тангенте у датој тачки на елипси, извести сличну једначину за тангенту на хиперболи.

10. Крајеви A и B сталне дужи AB клизе по координатним осама. Показати да тачка M те дужи описује елипсу са полуосама $AM = a$ и $BM = b$.

11. Одредити распон и висину елиптичког свода под условима да на растојању 2 m од центра он има висину 4 m, а на растојању 4 m од центра има висину 3 m.

§ 20. Полиноми, рационалне, алгебарске и трансцендентне функције

При проучавању функционалних веза између две величине задатак Математике је да формулише те везе у математичком облику, тј. тако да буду одређене оне операције које треба извршити са једном величином, независно промењивом, да би одређена била друга величина, зависна промењива.

Савремена Математика је толико проширила област разних функција да је немогуће дати у елементарном облику класификацију функција и навести њихове особине. У нашем излагању област функција ће се постепено проширивати на нове типове функционалних веза.

У овом параграфу ћемо говорити о функцијама израженим полиномима, затим о рационалним, алгебарским и трансцендентним функцијама.

Имали смо функцију првог степена или линеарну

$$y = ax + b,$$

затим смо имали квадратну или параболичку функцију

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Јасно је да функција може бити и вишег степена. Тако, функција трећег степена, у општем облику, изгледа

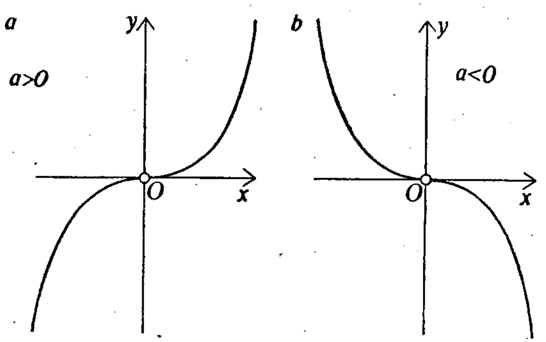
$$y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

где су a_3, a_2, a_1, a_0 стални коефицијенти. Овој једначини одговара п а р а б о л а т р е ћ е г р е д а.

Ако се зауставимо само на првом члану, једначина к у б н е п а р а б о л е има облик

$$y = ax^3;$$

њој одговарају криве линије, претстављене, према знаку коефицијента a, на слици 54 кривим линијама a и b. Обе криве пролазе кроз почетак координата, који је центар кривих, јер ова тачка полови све тетиве које



Сл. 54. Кубна парабола

пролазе кроз ту тачку, и имају x осу за тангенту. Криве немају оса симетрије.

Написаћемо сад полином произвољног степена

$$(1) \qquad y = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

где је n цео позитиван број и $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ стални коефицијенти. Овој једначини, као график, одговара п а р а б о л а n' т о г р е д а.

Функција одређена једначином (1) зове се ц е л а р а ц и о н а л н а ф у н к ц и ј а или п о л и н о м. При изражавању ове функције искори-

шћују се само операције сабирања, одузимања, множења и степеновања целим позитивним изложиоцем. Означимо кратко полином n' тог степена по x са $P_n(x)$; према томе за целу рационалну функцију можемо написати општи образац

$$y = P_n(x).$$

Ако слично разломку, као количнику два цела броја, начинимо количник од два полинома произвољних степена n и m

$$y = \frac{P_n(x)}{P_m(x)},$$

добићемо функцију која се зове р а з л о м љ е н а р а ц и о н а л н а ф у н к ц и ј а. Као најпростији пример разломљене функције имали смо функцију

$$y = \frac{c^2}{x},$$

која одговара обрнутој пропорционалности и има за график равнострану хиперболу. Хипербола одговара такође разломљеној функцији одређеној једначином

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

где су a, b, c, d константе. Ова функција има ту важну особину, да решена по x доводи до једначине

$$x = \frac{-dy + b}{cy - a},$$

истог облика као и полазна једначина.

Целе и разломљене функције чине класу р а ц и о н а л н и х ф у н к ц и ј а.

Ако сад узмемо једначину кружне линије, рецимо, у облику

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = r^2,$$

ова једначина исто тако одређује y као функцију x, али та функција не претставља више количник два полинома него има облик

$$(3) \qquad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2},$$

у који улази операција кореновања. Ово је пример **ирационалне функције**. Једначина (2) је алгебарска једначина другог степена по y а са коефицијентима полиномима по x. У општем облику алгебарску једначину можемо написати овако

$$(4) \qquad Py^n + Qy^{n-1} + \ldots + Ry + S = 0,$$

где су P, Q, ..., R, S полиноми произвољних степена по x.

Ако се функција y може сматрати као решење једначине (4), она се зове **алгебарска**. Јасно је да су целе и разломљене рационалне функције у исто време и алгебарске. Не треба ипак мислити да су алгебарске функције само оне, које можемо изразити помоћу корена било каквог степена. Има алгебарских функција, које не можемо у коначном облику изразити помоћу корена. Тако, на пр., функцију y одређену једначином $y^5 + y - x = 0$ не можемо изразити коначним бројем ни кореновања, ни других познатих операција.

Најзад, ако за функцију не можемо поставити једначину облика (4), фукција се зове **трансцендентна**. Трансцендентна функција у исто време је и ирационална.

Наведимо неколико примера трансцендентних функција.

1. Функција $y = x^p$, где је p ирационалан број, на пр., $y = x^{\sqrt{3}}$, $y = x^\pi$ су трансцендентне функције.

2. Функције $y = 2^x$, $y = a^x$, $y = x^x$ исто тако су трансцендентне функције.

3. Логаритамска функција $y = \log x$ је трансцендентна функција.

4. Тригонометриске функције, рецимо, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$ итд. такође су трансцендентне функције.

Проучавању неких од набројених трансцендентних функција посвећени су наредни параграфи.

Вежбања. 1. Нацртати на истој слици графике ових функција

$$y = x, \quad y = x^2, \quad y = x^3, \quad y = x^4, \quad y = x^5$$

за x у интервалу од -1 до $+1$.

2. За које вредности констаната a, b, c, d, e функција

$$y = \frac{ax + b\sqrt{1+x} + e \sin x}{cx + d}$$

претставља полином; за које разломљену рационалну функцију; за које ирационалну алгебарску, а за које ирационалну трансцендентну функцију?

3. Нацртати хиперболу као график функције

$$y = \frac{x+1}{x-1},$$

решити ову једначину по x и објаснити зашто се добија исти облик. Одредити асимптоте те хиперболе.

4. Нацртати тачку по тачку график функције

$$y^2 = ax^3,$$

који претставља полукубну параболу. За конкретан случај ставити, рецимо, $a = 1$.

5. Показати да је график y'а, као функције x одређене једначином

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},$$

парабола; потврдити да она додирује координатне осе у тачкама $(a, 0)$, $(0, a)$ и да је симетрала координатног угла — оса те параболе.

6. Да ли је функција

$$y = ax^n + bx^m + c$$

увек полином?

7. За које вредности k функција

$$y = \frac{ax + b}{x^k}$$

претставља полином; за које разломљену рационалну функцију; за које ирационалну алгебарску, а за које трансцендентну функцију?

8. Навести пример функције, сличне функцији наведеној у претходном задатку, чија природа зависи само од карактера једне константе.

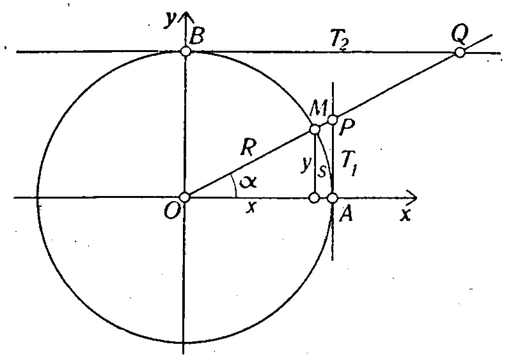
§ 21. Тригонометриске функције. Осцилаторни процес

Тригонометриске функције познате су из Елементарне математике. Ми смо их у некој мери већ искоришћавали. Ипак ћемо их овде поновити, сад са функционалног гледишта.

Нацртајмо круг произвољна полупречника R. Са њим ћемо везати координатни систем са почетком у центру (сл. 55). Помоћу тод круга мерићемо пре свега угао α и то од осе x у смеру супротном кретању казаљке на часовнику.

Као што знамо угао се може мерити на два принципски различита начина.

Један је начин мерење **степенима, минутама, секундама** и њиховим деловима. Прав угао у том систему износи 90^0, сваки степен 60 минута, а сваки минут 60 секунада. Раније се сваки секунд делио на 60 **терција**, сад се делови секунда изражавају децималним разломцима, У том начину мерења има и друга варијанта. Наиме, прав се угао дели на сто делова, сто **г р а д и**, сваки град на сто **м и н у т а** (**ц е н т е з и м а л н и х**), сваки минут на сто **с е к у н д и** (**ц е н т е з и м а л н и х**). То је **ц е н т е з и м а л н и** систем мерења углова.



Сл. 55. Тригонометриски круг

У другом начину за меру угла узима се однос лука s према полупречнику R; за дати угао тај однос је сталан; означимо га са α, тј. ставимо

$$\frac{s}{R} = \alpha .$$

Према томе, при овом начину мерења угла, угао се мери апстрактним бројем, неименованим бројем. Јединица угла у овом систему је угао за који је $\alpha = 1$, а то значи за који је $s = R$, тј. чији је лук једнак полупречнику, радијусу; отуда и назив тог јединичног угла — **р а д и ј а н**. Мерење угла радијанима игра велику улогу у Вишој математици.

Кад имамо два начина за мерење углова — степенима и радијанима — треба знати како се може прећи од једног ка другом начину.

Нека угао има n^0 степени. Одредимо број α, који мери тај исти угао у радијанима. Пошто је лук s од n^0 једнак

$$s = \frac{2\pi R}{360^0} \cdot n^0 = \frac{\pi n^0}{180^0} R ,$$

број α износи

$$\alpha = \frac{\pi}{180^0} \cdot n^0 .$$

Обрнуто, за одређивање броја степени угла дата помоћу радијана имамо

$$n^0 = \frac{180^0}{\pi} \cdot \alpha .$$

Помоћу овог обрасца можемо израчунати вредност радијана у степенима и њиховим деловима. Наиме, за $\alpha = 1$ имамо

$$n^0 = \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0\, 17'\, 45'' ,$$

где знак $\approx$, као и увек, изражава приближну једнакост.

Узмимо сад произвољни угао α, коме одговара тачка M (сл. 55) на кругу са координатама x, y и дефинишемо синус и косинус угла α помоћу обрасца

$$(1) \qquad \sin\alpha = \frac{y}{R} , \qquad \cos\alpha = \frac{x}{R} .$$

Затим конструишемо тангенту на круг у тачки A (прву тангенту) и тангенту у тачки B (другу тангенту). Дужине ових тангената од тачке додира до пресека са продуженим полупречником OM са одговарајућим знацима означимо са $T_1 = AP$ и $T_2 = BQ$. Тангенс и котангенс угла дефинишемо помоћу израза

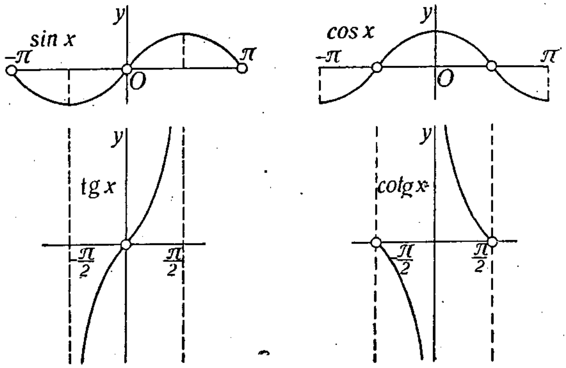
$$(2) \qquad tg\,\alpha = \frac{T_1}{R} , \qquad cotg\,\alpha = \frac{T_2}{R} .$$

Поред тога можемо увести секанс и косеканс

$$(3) \qquad sec\,\alpha = \frac{R}{x} = \frac{1}{\cos\alpha} , \qquad cosec\,\alpha = \frac{R}{y} = \frac{1}{\sin\alpha} .$$

Претпоставимо сад да се угао α мења; $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\,\alpha$, $cotg\,\alpha$, $sec\,\alpha$, $cosec\,\alpha$ су функције тог угла; оне се зову **т р и г о н о м е т р и с к е ф у н к ц и ј е**. За сваку од њих можемо нацртати график који у потпуности показује промену тих функција у вези са променом аргумента — угла (сл. 55 bis).

Нећемо износити теорију тригонометриских функција, јер оне у довољној мери већ треба да буду познате из Елементарне математике, из Тригонометрије. Од тригонометриских образаца навешћемо овде само два који се врло често употребљавају у Вишој математици. То су



Сл. 55 bis. Графици тригонометриских функција

изрази синуса и косинуса помоћу тангенса, наиме

$$\sin\alpha = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}.$$

Ове везе можемо непосредно прочитати са слике 55; ако ставимо $R = 1$ и узмемо у обзир да је тада

$$OP = \sqrt{1+T_1^2} = \sqrt{1+tg^2\alpha};$$

за синус, на пр., имаћемо

$$\sin\alpha = \frac{y}{R} = \frac{AP}{OP} = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}.$$

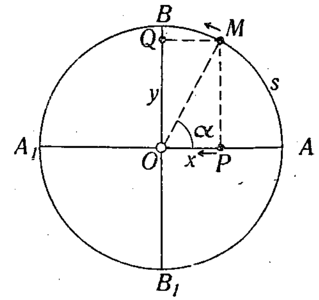
Тригонометриске фунције су врло важне како у Теориској тако и у Примењеној математици, и то не само због тога што служе, нарочито при мерењима, као основа за постављање функционалне везе између дужина и углова, него и зато што се на њима оснивâ проучавање сваког осцилаторног процеса.

Најпростији претставник осцилаторног процеса је тзв. хармониска осцилација. Замислимо тачку M (сл. 56) која се креће равномерно по кружној линији; тада се угао α мења пропорционално времену t. Означимо коефицијент пропорционалности са ω (читај омега), тада је

$$\alpha = \omega t.$$

Уочимо у исто време, поред тачке M и њену пројекцију P на сталан пречник AA_1 круга. За време равномерног кретања тачке M по кругу пројекција P врши праволиниско кретање између крајева пречника A и A_1; ово кретање зове се хармониска осцилација. У том кретању се положај тачке P одређује помоћу једначине

$$(4) \qquad x = R\cos\omega t,$$



Сл. 56. Хармониска осцилација

где је R полупречник круга. Ова једначина зове се једначина хармониске осцилације.

Пројекција Q тачке M на други пречник, нормални на првом, врши такође хармониску осцилацију, према једначини

$$(5) \qquad y = R\sin\omega t.$$

Јасно је да кретања тачака P и Q имају исти карактер; разлика је само у томе што, кад тачка P пролази кроз средину O своје путање, тачка Q налази се у једном од крајњих својих положаја и обрнуто.

Дужина R зове се амплитуда осцилације. Време T, за које тачка M изврши цео обилазак круга, је период осцилације. Пошто је

$$\omega T = 2\pi,$$

коефицијент је

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Ако са n означимо број осцилација у секунди, имамо

$$nT = 1$$

и према томе је

$$\omega = 2\pi n.$$

Број ω, пропорционалан броју осцилација у секунди, зове се учестаност или фреквенција осцилације.

Угао $\alpha = \omega t$ зове се фаза осцилације. Ако имамо две осцилације: једну са фазом α и другу са фазом α_1, разлика $\alpha_1 - \alpha$ је фазна разлика. Хармониске осцилације одређене једначинама (4) и (5) разликују се фазом. Заиста, ако се од фазе осцилације (4) одузме $\frac{1}{2}\pi$, добићемо осцилацију (5), јер је

$$\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \omega t.$$

Доцније ћемо видети да сваки осцилаторни процес може бити растављен у збир хармониских осцилација различитих амплитуда и фреквенција.

Важност осцилаторног процеса се нарочито показује при проучавању звука, светлости, електро-магнетских и других појава, чија је основа осцилација.

Тригонометриске функције, на пр. $y = \sin x$, спадају — као што већ рекосмо — у трансценденте функције, јер не постоји алгебарска једначина са коефицијентима у облику полинома по x, чије решење даје вредност $\sin x$ за произвољну вредност x.

Трансцендентност функције $\sin x$ може се још и на други начин показати.

Ако је функција $f(x)$ алгебарска, једначину

$$f(x) = 0$$

можемо довести до облика

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

где је n цео позитиван број. Ова једначина, како се то доказује у Вишој алгебри, не може имати више од n различитих решења.

Међутим једначина

(6) $$\sin x = 0$$

има бесконачно много решења у облику

$$x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$$

Из тога закључујемо да једначина (6) није алгебарска него трансцендентна, што значи да је функција $\sin x$ трансцендентна.

Као што је познато, тригонометриске функције су периодичне. Функција $f(x)$ је **периодична са периодом** K, ако задовољава једначину

$$f(x + K) = f(x)$$

за сваку вредност аргумента x. Период функција $\sin x$, $\cos x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ износи 2π, а период $tg\, x$ и $cotg\, x$ износи π, јер је, на пр.,

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \text{ а } tg(x + \pi) = tg\, x.$$

У вези са проучавањем тригонометриских функција поменимо још једну особину функција, коју имају неке специјалне функције.

Функција $f(x)$ је **парна функција**, ако она задовољава једначину

$$f(-x) = f(x)$$

за сваку вредност аргумента x, тј. ако са променом знака аргумента не мења своју вредност. Као што је познато, $\cos(-x) = \cos x$ и $\sec(-x) = \sec x$, те су према томе функције $\cos x$ и $\sec x$ — парне функције. Функција $y = x^n$ је парна, ако је n паран број.

Функција $f(x)$ је **непарна функција**, ако за њу важи једначина

$$f(-x) = -f(x),$$

исто тако за сваку вредност аргумента, тј. ако са променом знака и она мења свој знак, али има исту апсолутну вредност. Функција $y = x^n$ је непарна, ако је n непаран број. Пошто су: $\sin(-x) = -\sin x$, $\operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x$, $tg(-x) = -tg\, x$, $cotg(-x) = -cotg\, x$, ове функције су непарне.

Одржавање своје апсолутне вредности са променом знака аргумента је неопходан услов како за парне, тако и за непарне функције. Ако функција са променом знака аргумента остаје рецимо, позитивна, то још не значи да је она парна. Функција, рецимо, $2 - \sin x$ увек је позитивна, али она не спада ни у парне ни у непарне функције.

Вежбања. 1. Који угао одговара броју: π, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, 2π?

2. Који број одговара 30^0, 45^0, 60^0, 150^0, 225^0, 330^0?

3. Наћи у степенима, минутнма и секундима углове којима одговарају бројеви: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{11}{21}$, $1\frac{1}{3}\pi$?

4. Који број одговара углу π^0 (читај: пи степени)?

5. Наћи у градима, центезималним минутима и секундима углове којима одговарају бројеви: $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$, $1\frac{1}{2}\pi$, $1\frac{2}{3}\pi$.

6. Зашто је дефиниција тригонометриских функција из првоуглог троугла недовољна?

7. $tg\,\alpha = \frac{3}{4}$. Одреднти све остале тригонометриске функције. Да ли је то одређивање једнозначно?

8. Нацртати помоћу тачака графике функција: $y = 2 - \sin x$, $y = \cos 2x$, $y = \sec x$.

9. За које се вредности броја k период функције $y = \sin kx$ повећава, а за које се смањује?

10. Навести примере појава осцилаторног карактера.

11. Да ли функција $y = \sin \omega t$, где је $\omega = f(t)$ дата функција времена t, рецимо $\omega = at + b$, периодична функција или није?

12. Шта можемо казати о производу и количнику две парне функције, парне и непарне функције и две непарне функције?

§ 22. Природно рашћење. Број e

Ако уложимо новац у банку, а банка плаћа p од сто годишње, сваки динар донесе годишње $\frac{p}{100}$ динара интереса. Узмимо тај новац из банке и оставимо код себе. Тако радимо сваке године. После Т година у нашем орману биће свега $\frac{pT}{100}$ динара. Ако хоћемо да знамо, кроз колико ће се година у орману накупити од сваког динара у банци још један динар, тако да се укупан наш иметак удвостручи, треба ставити $\frac{pT}{100} = 1$, одакле имамо $T = \frac{100}{p}$. Тако, на пр., ако банка плаћа 5%, наш ће се капитал удвостручити кроз 20 година, под условом да сваке године интерес не остављамо у банци, него га носимо кући и скупљамо.

Претпоставимо сад да тај приход не подижемо стално из банке. Време Т поделимо на два једнака дела. На крају првог дела сваки динар ће донети прихода $\frac{1}{2}$ динара, и наш ће иметак износити $\left(1 + \frac{1}{2}\right)$ динара. Овај нови иметак поново ћемо уложити у банку. На крају друге половине времена Т сваки ће се динар тог иметка претворити у $\left(1 + \frac{1}{2}\right)$ динара, и наш капитал ће износити

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25 \text{ динара.}$$

Према томе после таквог располагања новцем наш капитал ће се не само удвостручити, него још и повећати — за једну четвртину.

Ако време Т поделимо, рецимо на пет једнаких делова, и каматни новац редовно остављамо у банци, наш ће се динар на крају времена Т претворити у

$$\left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 = 2{,}48832 \approx 2{,}488,$$

где смо знаком $\approx$ поново означили приближну једнакост.

Ако време Т поделимо још на већи број делова, можемо навести ову таблицу бројева, која показују у шта ће се претворити сваки динар капитала, ако претпоставимо да се интерес додаје после сваког одговарајућег дела времена

$$\begin{aligned}
&1 + 1 && = 2\\
&\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 && = 2{,}25\\
&\left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 && \approx 2{,}488\\
&\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} && \approx 2{,}594\\
&\left(1 + \frac{1}{20}\right)^{20} && \approx 2{,}653\\
&\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} && \approx 2{,}704\\
&\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} && \approx 2{,}717\\
&\left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000} && \approx 2{,}718.
\end{aligned}$$

Видимо да рачун треба вршити помоћу обрасца

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Ако сад претпоставимо да број n све више и више расте, интервали после којих додајемо капиталу каматни новац све се више смањују. Ако n тежи бесконачно великом броју, сваки интервал тежи нули, постаје бесконачно мали.

Рашћење величине, сличне нашем капиталу, под претпоставком да $n \to \infty$ (читај: n тежи бесконачности) зове се природно рашћење.

Видимо да са тим рашћењем стоји у вези број

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n_{n\to\infty}=e$$

обележен словом e. Ова ознака, коју је увео Ајлер, исто толико је стандардна колико и ознака за број π. Место доње ознаке $n\to\infty$, која значи: „под условом да n тежи бесконачности", употребљује се, као што смо видели, и други начин писања, наиме помоћу појма граничне вредности. Тада пишемо овако

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Показаћемо прво како се друкчије може израчунати број e, а затим ћемо објаснити зашто се процес, који проучавамо, зове природно рашћење.

Из Елементарне математике познати су нам ови резултати:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}a^3b^2+\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}a^2b^3+5ab^4+b^4,$$

. . . .

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3+$$
$$+\cdots+nab^{n-1}+b^n.$$

Применићемо сада овај биномни образац на израчунавање e. Прво, за свако коначно n имамо

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{n(n-1)}{n^2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{n^{n-2}}+\frac{1}{n^n},$$

или

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}\,1\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\,1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{n^{n-2}}+\frac{1}{n^n},$$

где смо са 2!, 3!, уопште $k!$ (читај: k факторијела) означили производ низа природних бројева од 1 до k, тј.

$$k!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(k-1)\cdot k.$$

Ако ставимо $n=\infty$, за сваки количник са имениоцем n имамо нулу и према томе може се коначно написати

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots$$

Доцније ћемо видети да помоћу тог збира са бескрајно великим бројем чланова заиста можемо израчунати број e. Узастопни чланови овог збира имају вредности:

$$1=1{,}000\,000$$
$$(1!)^{-1}=1{,}000\,000$$
$$(2!)^{-1}=0{,}500\,000$$
$$(3!)^{-1}\approx 0{,}166\,667$$
$$(4!)^{-1}\approx 0{,}041\,667$$
$$(5!)^{-1}\approx 0{,}008\,333$$
$$(6!)^{-1}\approx 0{,}001\,389$$
$$(7!)^{-1}\approx 0{,}000\,198$$
$$(8!)^{-1}\approx 0{,}000\,025$$
$$(9!)^{-1}\approx 0{,}000\,003$$

према томе, после сабирања, имамо $e\approx 2{,}718\,282$. Израчунат са већом тачношћу, тај број износи

$$e\approx 2{,}718\,281\,828\,459\ldots$$

Број e је трансцендентан број, јер је доказано да не постоји алгебарска једначина са целим коефицијентима, чији корен има вредност броја e (Ермит, 1873 г.).

Процес рашћења је у природи непрекидан процес. Природа не дели време, као што то банка ради, на коначне интервале, она не додаје прираштаје у скоковима, само на крају интервала, него чим једна величина добије и најмањи прираштај, у процес одмах улази цела повећана величина. Тако, на пр., дрво, под извесним условима, расте пропорционално својој запремини; чим се та запремина повећа, нов прираштај постаје пропорционалан повећаној запремини. Видимо да поступак, који смо употребили у извођењу броја e, заиста има везу са природним процесом рашћења.

Вежбања. 1. Потврдити тачност неједначина

$$2\frac{2}{3} < e < 2\frac{3}{4}, \qquad 2\frac{5}{7} < e < 2\frac{23}{32}$$

и израчунати приближно разлику између сваке од наведених граница и броја e.

2. Показати да је

$$e = \lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}.$$

3. Навести примере природног рашћења из области природних наука.

§ 23. Експоненцијални процес. Хиперболичке функције

У изразу a^n може бити променљива основа; тад имамо функцију $y = x^n$, коју смо анализирали раније. Али у том изразу може основа бити стална, а изложилац променљив; тада ћемо добити функцију

$$(1) \qquad y = a^x,$$

која се зове експоненцијална.

Узмимо конкретно функцију за $a = 2$

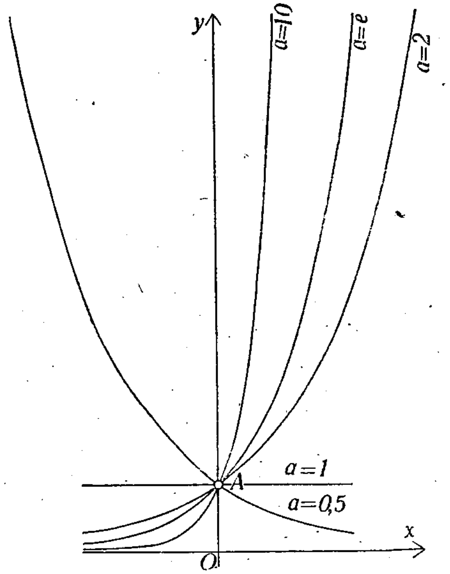
$$y = 2^x$$

и нацртајмо график ове функције (сл. 57). У ту сврху начинићемо таблицу вредности те функције:

x	$-\infty$	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$	$+\infty$
y	0	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	$\cdots$	$+\infty$

На основу добијених вредности конструисаћемо график наше функције.

Ако се мења основа функције (1), и график, пролазећи стално кроз тачку А, са координатама (0,1), мења свој положај, како је то показано на слици, где имамо графике за вредности основе a: $10, e, 2, 1, \frac{1}{2}$.



Сл. 57. Графици експоненцијалне функције

Експоненцијална функција

$$(2) \qquad y = e^x$$

са основом e игра врло важну улогу у Вишој математици. Доцније ћемо за ту функцију доказати теорему:

Угаони коефицијент тангенте на график функције e^x једнак је вредности саме те функције.

Ову особину има само експоненцијална функција (2) и према томе се она издваја из свих постојећих функција.

Друга особина, која карактерише ову функцију по њеној функционалној природи, састоји се у томе да она расте брже од сваке функције облика x^n, где је n ма који позитивни број. Касније ћемо потврдити и ову особину.

Сваку функцију облика (1) лако можемо трансформисати на експоненцијалну функцију облика (2). Заиста, ставимо

$$(3) \qquad a^x = e^{\alpha x},$$

где је α број који овако одређујемо. Логаритмујмо леву и десну страну ове једначине; тада имамо

$$x \log a = \alpha x \log e,$$

при чему можемо употребити обичне декадне логаритме за које је

$$\log e \approx 0{,}4342945.$$

Претходна једначина биће задовољена за сваку вредност x, ако ставимо

$$\alpha = \frac{\log a}{\log e} = 2{,}3025851 \log a.$$

Ако затим ставимо $\alpha x = \xi$, имамо из (3) једначину

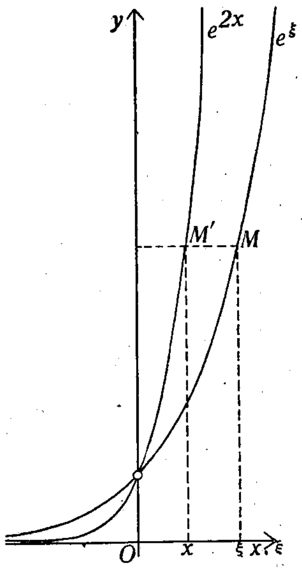
$$a^x = e^{\alpha x} = e^{\xi},$$

и тиме смо извршили тражену трансформацију.

Место фунције e^x, често пута треба непосредно проучити функције

$$y = e^{k^2 x}, \qquad y = e^{-k^2 x},$$

где је κ^2 стална позитивна величина. Кад x расте (опада), и прва функција расте (опада), док друга функција, напротив, опада (расте). Јасно је да ћемо графике ових функција добити из графика функције e^x,односно e^{-x}, ако променимо размеру цртања апсцисе и ставимо, као и раније, $k^2 x = \xi$. На слици 58 конструисан је график функције $y = e^{2x}$ из графика функције e^{ξ}.



Сл. 58. График функције e^{2x}

Свака од наведених функција може садржати још и сталан коефицијент, тако да имамо функције

$$y = A e^{k^2 x}, \qquad y = B e^{-k^2 x},$$

где су A, B, k^2 константне величине.

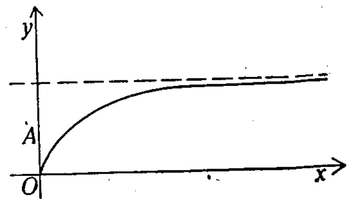
Обратимо пажњу још на један специјалан израз који зависи од експоненцијалне функције. Протумачимо тај израз на једном конкретном примеру.

Ставимо у суд са водом количину шећера A потребну да раствор буде засићен. Процес растварања шећера постепено се успорава. Са y означићемо количину шећера, која је већ растворена у тренутку времена $t = x$.

Из Физичке хемије је познато да се y у зависности од x изражава једначином

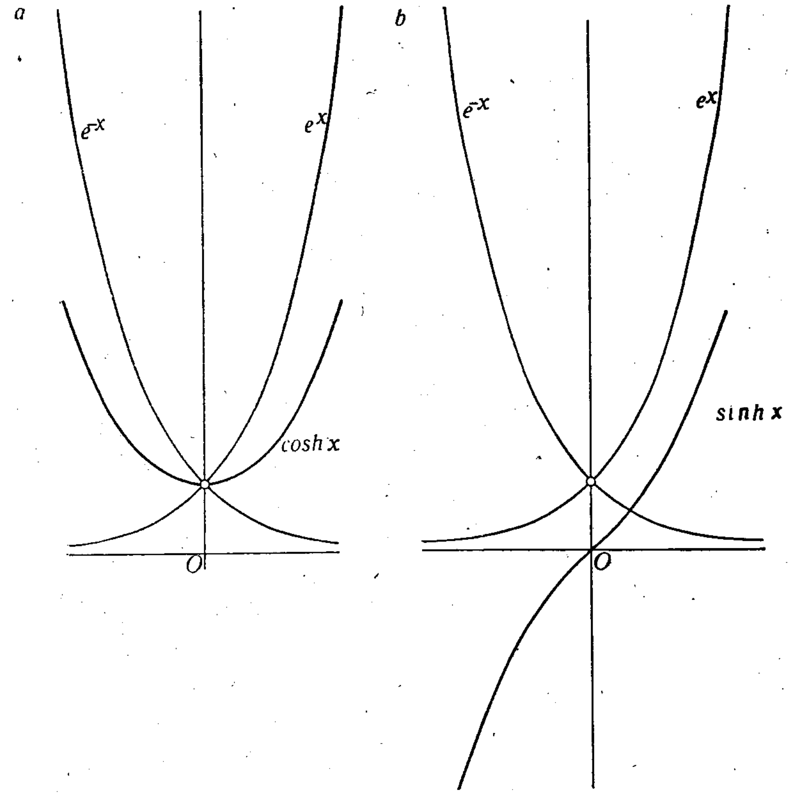
$$y = A\,(1 - e^{-k^2 x}).$$

Слика 59 даје график ове функције. Као што видимо, крива се асимтотски приближује правој паралелној са осом x на растојању A. Овој асимптоти одговара стање засићености (сатурације) нашег раствора. У природи и у практичном животу има много појава, које стоје у вези са појавом засићености; криве линије, које графички приказују такве појаве, зову се криве са сатурацијом.



Сл. 59. График растварања шећера у води

У разним питањима Теориске и Примењене математике често пута се употребљују полузбир и полуразлика функција e^x и e^{-x}. Полузбир је хиперболички косинус, са ознаком



Сл. 60. Графици функција $\cosh x$ и $\sinh x$

cosh (читај: косинус хиперболикус), скраћено *ch*. Полуразлика је хиперболички синус, са ознаком *sinh*, или *sh* (читај: синус хиперболикус). На тај начин имамо ова два обрасца:

$$cosh\, x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

$$sinh\, x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Из ових образаца непосредно следује

$$e^x = cosh\, x + sinh\, x,$$

$$e^{-x} = cosh\, x - sinh\, x.$$

Графици *a* и *b* слике 60 дају функције $y = cosh\, x$ и $y = sinh\, x$.

Хиперболичке функције имају неке особине сличне особинама тригонометриских функција. Тако, на пр., особинама

$$cos\,(-x) = cos\, x$$

$$sin\,(-x) = -sin\, x$$

одговарају исте особине хиперболичких функција

$$cosh\,(-x) = cosh\, x. \qquad sinh\,(-x) = -sinh\, x,$$

јер, на пр., имамо

$$cosh\,(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = cosh\, x$$

Особини тригонометриских функција

$$cos^2 x + sin^2 x = 1$$

одговара овде особина

$$cosh^2 x - sinh^2 x = 1, \tag{4}$$

јер је

$$cosh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}),$$

$$sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}).$$

Хиперболички тангенс и хиперболички котангенс се дефинишу једначинама

$$tgh\, x = \frac{sinh\, x}{cosh\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad cotgh\, x = \frac{cosh\, x}{sinh\, x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Ако ставимо

$$\begin{aligned} x &= a\, cosh\, \varphi, \\ y &= b\, sinh\, \varphi, \end{aligned} \tag{5}$$

где су *a* и *b* сталне величине, а φ промењљиви параметар, после елиминисања тог параметра из претходних једначина добићемо на основу (4) једначину

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

која одговара хиперболи. Једначине (5) су, према томе, параметарске једначине хиперболе. На другом месту ћемо показати још дубљу везу хиперболичких функција са хиперболом.

За израчунавање експоненцијалних функција e^x, e^{-x}, e^{x^2}, e^{-x^2} и хиперболичких функција постоји низ специјалних таблица. Нарочито су добре за практичне циљеве таблице F. Emde са енглеским и немачким текстом: Tables of elementary functions. — Tafeln elementarer Funktionen у издању 1940 године. За функцију $y = e^x$ могу послужити логаритамске таблице, нарочито када су у таблицама дати и логаритми за основу *e*.

Вежбања. 1. Нацртати графике функција: $y = 2^{-x}$, $y = e^{-x^2}$, $y = xe^x$, $y = e^x\, sin\, x$, $y = x^2 e^{-x}$, $y = xe^{1-x}$. За решавање ових задатака треба употребити таблице.

2. Нацртати ланчаницу чија је једначина $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ за $a = 1$.

3. Крива чија је једначина

$$y = a\, e^{-k^2 x}\, sin\, \omega x,$$

где су a, k, ω константе, претставља график амортизоване осцилације; нацртати тај график за одређене вредности констаната a, k, ω, на пр., $a = k = \omega = 1$.

4. Нацртати график функција: $y = e^{-x^2} sin\, x$, $y = e^{-x} - 2\, sin\, x$.

5. Изразити $sinh\, x$ и $cosh\, x$ помоћу $tgh\, x$.

6. Израчунати $sinh\,(a + b)$ и $cosh\,(a + b)$ помоћу хиперболичких функција аргумената *a* и *b* (Теорема сабирања).

7. Изразити $tgh\,(a + b)$ помоћу хиперболичких тангенса аргумената *a* и *b*.

8. Која крива линија има једначину $y = a\, cosh \frac{x}{a}$?

§ 24. Логаритамски процес

Низ бројева

$$\cdots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$$

чини аритметичку прогресију са разликом једнаком јединици, јер се сваки наредни члан низа добија из претходног додавањем сталне величине — јединице.

Упоредимо са овим низом други низ

$$\cdots 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, \cdots$$

који чини геометриску прогресију са количником једнаким десетици, јер се сваки наредни члан овог низа добија из претходногм ножењем са десет. Ако ма који број првог низа означимо са x, а одговарајући број другог означимо са y, између њих имамо везу

$$y = 10^x, \tag{1}$$

која, проширена не само на целе, него на све вредности x, претставља експоненцијалну функцију.

Са истим правом можемо број y из другог низа узети за независно променљиву, а број x првог низа за функцију; другим речима изложилац x у једначини (1) сматрати као функцију степена y. Знамо да је то логаритам броја y за основу 10, тј.

$$x = log_{10} y.$$

Ако поново за функцију употребимо ознаку y, а за независно променљиву x, место претходне једначине можемо написати

$$y = log_{10} x = log\, x. \tag{2}$$

То је тзв. декадни или Бригов логаритам. Основа му је десет.

У науци, а нарочито у Вишој математици, употребљавају се, сем декадних логаритама, и логаритми са основом e. Тај се логаритам зове Неперов или природни логаритам (logarithmus naturalis). Број e је према томе основа природних логаритама. За ознаку природног логаритма ћемо употребљавати lg или ln, тако да је

$$y = log_e x = lg\, x = ln\, x, \tag{3}$$

а тамо, где нема сумње, можемо ставити и log.

Свакој логаритамској једначини одговара једна експоненцијална једначина; према томе упоредо са једначином (2) имамо једначину $x = 10^y$, а упоредо са једначином (3) једначину $x = e^y$.

Потражимо везу између декадног и природног логаритма истог броја, рецимо броја N. Означимо

$$\begin{aligned} p &= log_e N, \\ d &= log_{10} N, \end{aligned} \tag{4}$$

тада имамо

$$N = e^p, \qquad N = 10^d,$$

те према томе можемо написати једначину

$$e^p = 10^d.$$

Ако ову једначину логаритмујемо са основом десет, добијамо једначину

$$p\, log_{10} e = d.$$

Уведимо сад број M — декадни логаритам броја e, тј. ставимо

$$M = log_{10} e, \tag{5}$$

тада из претходне једначине на основу (4) изводимо једначину

$$log_{10} N = M\, log_e N,$$

а такође једначину

$$log_e N = \frac{1}{M} log_{10} N.$$

Број M зове се декадни модул природних логаритама. Обрнуто, број $\frac{1}{M}$ је природни модул декадних логаритама. Он има вредност $log_e 10$, како то следује после природног логаритмовања једначине $e = 10^M$, закључка из једначине (5).

Та два модула, како смо већ наводили, имају ове приближне вредности:

$$M = log_{10} e \approx 0{,}4342945$$

$$1 : M = log_e 10 \approx 2{,}3025851.$$

Проучимо сад график функције природног логаритма

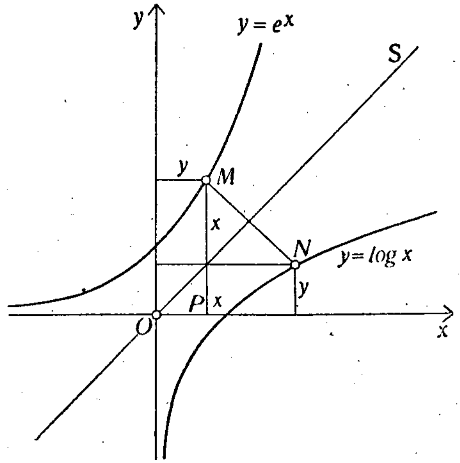
$$y = log_e\, x .$$

У ту сврху ћемо прво узети већ познати график експоненцијалне функције

$$y = e^x$$

и друкчије означити координате: апсцису означимо са y, а ординату са x (сл. 60 bis). Нацртана крива са новим ознакама има једначину

$$(6) \qquad x = e^y .$$



60 bis. График логаритамске функције

За сваку тачку M (y, x) конструишимо тачку N са координатама (x, y). Јасно је да ће ова тачка N бити симетрична тачки M у односу на симетралу S координатног угла. Целој овој експоненцијалној кривој ће одговарати симетрична крива са једначином

$$y = log_e\, x ,$$

која следи из једначине (6). Ова симетрична крива је г р а ф и к л о г а р и т а м с к е ф у н к ц и ј е.

Из Елементарне математике су добро познати основни обрасци за логаритме, тзв. правила за логаритмовање, која важе за логаритме са сваком основом. Навешћемо кратко те обрасце:

$$lg\, ab = lg\, a + lg\, b,\ lg \frac{a}{b} = lg\, a - lg\, b,\ \ lg\, a^n = n\, lg\, a,\ \ lg \sqrt[n]{a^m} = \frac{m}{n} lg\, a .$$

Исто тако је у Елементарној математици показана и примена логаритамских таблица на израчунавање различитих израза.

Напомињемо овде да ћемо у § 58, где третирамо нумеричке рачуне, приказати нарочиту справу — л о г а р и т а м с к и л е њ и р и л и л о г а р и т м а р, — чији се принцип састоји у искоришћавању битне особине логаритамске функције на основу које операције множења и дељења можемо заменити операцијама сабирања и одузимања.

Вежбања. 1. Нацртати графике функција: $log_2 x$, $ln(x+2)$, $ln\cos 2x$, $ln(20-x^2)$.

2. Дат је декадни модул природних логаритама $M = log_{10} e = 0{,}43429$ и природни логаритми бројева 2 и 5: $ln\, 2 = 0{,}69315$, $ln\, 5 = 1{,}60944$; одредити без таблица декадне логаритме тих бројева и проверити их једначином $log_{10} 2 + log_{10} 5 = 1$.

3. Дат је природни модул декадних логаритама $\frac{1}{M} = log_e\, 10 = 2{,}30259$ и декадни логаритам броја

$$log_{10} 0{,}25 = \bar{1}{,}39794 ;$$

одредити без таблица природни логаритам тог истог броја.

ГЛАВА III

ИЗВОД И ДИФЕРЕНЦИЈАЛ

§ 25. Појам изводне функције

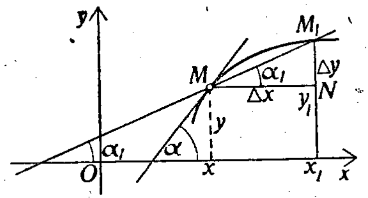
Као што смо видели, при проучавању различитих функција важну улогу игра угаони коефицијент тангенте на графику те функције.

Узмимо функцију

(I) $$\boxed{y = f(x)}$$

са графиком на слици 61. Нека апсциси x одговара тачки M на графику. На истом графику узећемо тачку M_1 са апсцисом x_1. Разлику

$$x_1 - x$$



Сл. 61. Секанта и тангента криве

означићемо са Δx (читај: делта x). Δx претставља **п р и р а ш т а ј н е з а в и с н о п р о м е н љ и в е.** Ординату тачке M_1 означићемо са y_1. Разлику

$$y_1 - y = \Delta y$$

треба сматрати као **п р и р а ш т а ј ф у н к ц и ј е.**

Непосредно са слике је очигледно да угаони коефицијент секанте MM_1, која се осом x образује угао α_1, има вредност

$$tg\,\alpha_1 = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Видели смо на више примера да тај количник може имати граничну вредност када се тачка M_1, остајући при процесу прелаза на граничну вредност на датој кривој, поклопи са тачком M. Ако са α означимо угао тангенте са осом x, имамо

$$tg\,\alpha = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Ако се x мења, тачка M мења свој положај на кривој, мења своју вредност и угаони коефицијент тангенте и на тај начин можемо га сматрати као функцију x. Ова функција, са ознаком y' (читај: ипсилон први или прим), коју смо извели из функције y помоћу одређеног поступка, зове се **и з в о д н а ф у н к ц и ј а**, или једноставно **и з в о д д а т е ф у н к ц и ј е.**

Према томе може се поставити ова основна дефиниција:

Извод или изводна функција дате функције је гранична вредност, у случају кад она постоји, односа прираштаја функције према прираштају независно променљиве када тај прираштај независно променљиве тежи нули.

Основном обрасцу за израчунавање извода можемо дати један од ових облика:

(II) $$\boxed{\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) = tg\,\alpha, \end{aligned}}$$

где смо са h кратко означили прираштај независно променљиве.

Овај образац показује, с једне стране, начин како се израчунава извод, с друге стране његово геометриско тумачење као угаоног коефицијента тангенте на графику.

Покажимо, пре свега, на једном конкретном примеру како се израчунава извод. Нека је

$$y = f(x) = x^2,$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

и на тај начин имамо образац

$$(x^2)' = 2x,$$

који се чита: извод од x^2 је $2x$

За функцију $y = x^3$ поступамо слично и долазимо до резултата

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Вежбања. 1. Потврдити на основу обрасца (II) резултате:

$$(x)'=1,\quad (x^2)'=2x,\quad (x^3)'=3x^2,\quad (x^4)'=4x^3,\quad (x^5)'=5x^4.$$

(**Ове резултате запамти!**)

2. Израчунати на основу обрасца (II) извод функције $y=\frac{1}{x}$.

3. Потврдити на основу обрасца (II) једначину

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' x^3+2=0.$$

§ 26. Извод константе, збира и разлике

Ако функција дегенерише у константу

$$y=C,$$

график постаје права паралелна са осом x, тангента се поклапа са том правом, њен угаони коефицијент једнак је нули и према томе је

$$\text{(III)}\qquad \boxed{(C)'=0,}$$

другим речима: извод константе је нула. Ово следује из обрасца (II), јер је

$$(C)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} 0=0.$$

Ако се функција састоји из збира или разлике, тј.

$$y=u(x)\pm v(x)=u\pm v,$$

где су u и v функције x'а, за извод имамо

$$y'=(u\pm v)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)-[u(x)\pm v(x)]}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}=$$

$$=u'\pm v';$$

или

$$\text{(IV)}\qquad \boxed{(u\pm v)'=u'\pm v'.}$$

Речима овај резултат гласи:
Извод збира или разлике једнак је збиру или разлици извода.

Вежбања. 1. Наћи извод функције $y=x^2+x^4+x^8$.

2. Потврдити једначину

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)'-\frac{1}{x^2}=1.$$

3. Потврдити једначину $(x^2+\sqrt{x})'+(x^2-\sqrt{x})'=4x$ без израчунавања извода корена.

§ 27. Сложена функција и њен извод

Узмимо функцију

$$y=e^{x^3}.$$

За израчунавање ове функције треба да се изврше две узастопне операције: прво израчунати $x^3=u$, а затим $y=e^u$.

Функција, за чије је израчунавање потребно извршити низ узастопних операција, зове се **сложена функција**. У општем облику можемо за сложену функцију написати ове услове

$$(\text{V}_1)\qquad \boxed{y=f(u),\qquad u=\varphi(x).}$$

Функција u претставља **сложени аргумент** дате функције. Јасно је да аргумент сложеног аргумента може опет бити сложена функција итд., на пр.,

$$(1)\qquad y=f(u),\qquad u=\varphi(v),\qquad v=\psi(x).$$

Изведимо сад правило за одређивање извода сложене функције. Ако x порасте за Δx, функција u у (V_1) порашће за Δu, где је

$$(2)\qquad \Delta u=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x).$$

После тога ће функција y порасти за Δy са вредношћу

$$(3)\qquad \Delta y=f(u+\Delta u)-f(u).$$

Кад Δx тежи нули, на основу (2) Δu такође тежи нули, а према (3) и Δy **тежи нули**.

Према дефиницији, извод y' рачунамо овако:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u',$$

где смо са y'_u означили извод функције y по сложеном аргументу u који сматрамо као независно променљиву.

Коначно имамо

$$(V_2) \qquad \boxed{y' = y'_u \cdot u'}$$

или речима:

Извод сложене функције једнак је изводу функције по сложеном аргументу пута извод тог сложеног аргумента по независно променљивој.

Ово ћемо правило кратко звати правило надовезивања.

Ако имамо случај (1), тј. кад је сложени аргумент и сâм сложена функција, правило надовезивања даје овај резултат

$$y = y'_u \cdot u'_v \cdot v'.$$

Као што смо раније навели без доказа, угаони коефицијент тангенте на графику експоненцијалне функције $y = e^x$ једнак је самој функцији. Сада то можемо написати овако

$$(e^x)' = e^x.$$

Према томе за извод функције горе наведеног примера,

$$y = e^u, \qquad u = x^3,$$

добија се

$$y' = (e^u)'_u \cdot u' = e^u \cdot (x^3)' = e^{x^3} \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}.$$

Вежбања. 1. Наћи извод функције $y = e^{x^2}$.

2. Потврдити једначииу $\frac{u'e^u + v'e^v}{(e^u + e^v)'} = 1$.

3. Наћи изводе функција

$$y = e^{(e^{x^2})}, \qquad y = e^{e^x + x^2}, \qquad y = e^{e^{e^{x^2}}}.$$

§ 28. Инверзна функција и њен извод

Ако имамо функцију

$$(1) \qquad y = f(x),$$

на пр.,

$$y = e^x,$$

онда можемо, и обрнуто, променљиву x сматрати као функцију y а, тј. ставити

$$(2) \qquad x = \varphi(y),$$

што у горњем примеру значи

$$x = lg\, y.$$

Две овакве функције зову се **инверзне** или **обрнуте функције**. Операције овде означене симболом f су инверзне операцијама означеним симболом φ.

На примеру функција $y = e^x$ и $y = lg\, x$ у § 24 видели смо да су графици тих функција симетрични у односу на симетралу првог и трећег координатног квадранта. Та особина припада графицима свих инверзних функција. Заиста, свакој тачки M са координатама (x, y), које задовољавају једначину (1), одговара на основу (2) тачка M' са координатама (y, x) на графику инверзне функције написане у облику

$$y = \varphi(x).$$

Пошто су тачке $M(x, y)$ и $M'(y, x)$ симетричне у односу на означену симетралу, симетрични су у односу на исту симетралу и цели графици две инверзне функције.

Јасно је да, ако су за полазну функцију Δx и Δy прираштаји независно променљиве и функције, за обрнуту функцију одговарајућу улогу играју величине Δy и Δx.

Ако извод прве функције означимо са y'_x, тада је

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x};$$

за обрнуту функцију извод треба означити са x'_y и онда имамо

$$x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

Пошто је

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1,$$

после прелаза на граничне вредности добијамо

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)=\left(\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\cdot\left(\lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)=y'_x\,.\,x'_y=1.$$

Према томе може се дефинитивно казати:

Ако је

$$y=f(x) \quad \text{и} \quad x=\varphi(y),$$

онда је

$$y'_x\cdot x'_y=1$$

или

$$\text{(VI)} \qquad \boxed{x'_y=\frac{1}{y'_x}}$$

Речима овај резултат гласи:

Извод инверзне функције једнак је реципрочној вредности извода дате функције.

Тако у нашем примеру функција $y=e^x$ и $x=lg\,y$ можемо искористити резултат

$$(e^x)'=e^x$$

за одређивање извода природног логаритма. Заиста, пошто је $y'_x=e^x=y$ из (VI) следује

$$x'_y=\frac{1}{y},$$

или

$$(lg\,y)'_y=\frac{1}{y}.$$

Ако сада напишемо функцију природног логаритма у обичном облику

$$y=lg\,x,$$

претходни образац даје

$$(lg\,x)'=\frac{1}{x}.$$

Вежбања. 1. Извести резултат $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ на основу (VI) обрасца.

2. Наћи извод функције $y=\sqrt[3]{x}$ на основу теореме о изводима инверзних функција и резултата $(x^3)'=3x^2$.

3. Потврдити теорему о изводима инверзних функција на примеру: $y=\dfrac{1}{x}$ и $x=\dfrac{1}{y}$.

§ 29. Извод логаритамске и експоненцијалне функције

Узмимо логаритамску функцију са произвољном основом a:

$$y=log_a x.$$

За добијање извода те функције применимо непосредно поступак (II):

$$y'=(log_a x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{log_a(x+\Delta x)-log_a x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\,log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\,log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Сад ставимо

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{1}{n},$$

помоћу ове једначине елиминишимо из нашег израза Δx и узмимо у обзир да, под условом $\Delta x\to 0$, величина n тежи бесконачности, ако је $x\neq 0$. Трансформацију израза вршимо овако:

$$y'=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x}\,log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}\,log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{x}\,log_a\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right].$$

Како је (§ 22)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

дефинитивно, имамо

$$(\text{VII}^{\text{bis}}) \qquad \boxed{(log_a x)'=\frac{1}{x}\,log_a e=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{lga}.}$$

Ако је логаритам природни и према томе је $a = e$, из претходног обрасца непосредно следује образац

$$\text{(VII)} \qquad \boxed{(lg\,x)' = \frac{1}{x}}$$

За декадни логаритам образац (VII) даје

$$\text{(VII}^{\text{ter}}\text{)} \qquad \boxed{(log_{10}\,x)' = \frac{1}{x}\,log_{10}\,e = \frac{M}{x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{lg\,10},}$$

где је M декадни модул природних логаритама.

Узмимо сад природни логаритам

$$y = lg\,x,$$

са изводом $y_x' = \frac{1}{x}$, и његову инверзну функцију

$$x = e^y.$$

Према теореми о изводима инверзних функција имамо

$$(e^y)'_y = x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{x^{-1}} = x = e^y.$$

На тај начин смо извели доказ обрасца за извод експоненцијалне функције, који после промене ознаке дефинитивно добија облик

$$\text{(VIII)} \qquad \boxed{(e^x)' = e^x,}$$

који смо досада употребљавали без доказа.

На сличан начин из обрасца (VII$^{\text{bis}}$) може се извести образац за извод експоненцијалне функције са произвољном основом:

$$\text{(VIII}^{\text{bis}}\text{)} \qquad \boxed{(a^x)' = a^x\,\frac{1}{log_a\,e} = a^x lg\,a.}$$

За декадну основу тај образац даје

$$\text{(VIII}^{\text{ter}}\text{)} \qquad \boxed{(10^x)' = 10^x\,\frac{1}{M} = 10^x lg\,10.}$$

Вежбања. 1. Извести образац (VIII$^{\text{bis}}$).

2. Наћи изводе функција: $y = 2^x$, $y = 10^{x^2+1}$, $y = a^{e^x}$, $y = lg(x^2+1)$, $y = log_{10}(x^3 - 3)$.

3. Потврдити једначину $log_{10}e \cdot lg\,10 = 1$.

4. Наћи извод функције $x = e^{t^2 - t + 1}$, где је t независно промењива, а x — функција.

5. Доказати симетричност тангената на графике инверзних функција у одговарајућим тачкама на примеру функција $y = e^x$ и $y = lg\,x$.

§ 30. Извод производа и количника

За израчунавање извода производа

$$y = uv,$$

где су u и v функције од x, узмимо природни логаритам леве и десне стране

$$lg\,y = lg\,u + lg\,v$$

и израчунајмо извод сваког члана као сложене функције. Тада ћемо на основу (IV), (V) и (VII) имати

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}.$$

Ако помножимо леву и десну страну са $y = uv$, добијамо

$$y' = u'v + uv'$$

или дефинитивно

$$\text{(IX)} \qquad \boxed{(uv)' = uv' + uv'.}$$

Речима ово правило гласи:

Извод производа од два чиниоца једнак је изводу првог чиниоца пута други више извод другог чиниоца пута први.

За производ више чинилаца,

$$y = u_1\,u_2\,u_3 \cdots u_n,$$

после логаритмовања добићемо овај резултат

$$\text{(IX}^{\text{ter}}\text{)} \qquad \boxed{\frac{y'}{y} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \frac{u_3'}{u_3} + \cdots + \frac{u_n'}{u_n}}$$

Ако уведемо нов појам **логаритамског извода** као количника извода и саме функције, претходну једначину можемо формулисати теоремом:

Логаритамски извод производа једнак је збиру логаритамских извода свих чинилаца.

Тада се сам извод одређује помоћу једнакости

$$(\mathrm{IX^{bis}}) \qquad \boxed{(u_1 u_2 \cdots u_n)' = u_1' u_2 \cdots u_n + u_1 u_2' \cdots u_n + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_n'.}$$

Узмимо сад количник

$$y = \frac{u}{v}$$

и логаритмујмо га за природну основу:

$$lg\, y = lg\, u - lg\, v.$$

После израчуновања извода добијамо

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v},$$

одакле долазимо до дефинитивног резултата

$$(\mathrm{X}) \qquad \boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2},}$$

или речима:

Извод количника једнак је изводу бројиоца пута именилац мање извод имениоца пута бројилац, све то подељено квадратом имениоца.

У специјалном случају, кад имамо производ константе и функције

$$y = Cu,$$

где је $C = const.$, $u = u(x)$, после примене обрасца за извод производа, а због једнакости $C' = 0$, имамо образац

$$(\mathrm{XI}) \qquad \boxed{(Cu)' = Cu',}$$

који показује да, при израчунавању извода производа константе и функције, константа остаје поново непроменљиви чинилац.

Вежбања. Нађи извод функција:

1. $y = 3x^2$; 2. $y = ax + b$; 3. $y = \frac{1}{x}$; 4. $y = 5xe^x$; 5. $y = \frac{e^x}{5x}$; 6. $y = \frac{x}{5e^x}$;
7. $y = \frac{2x+1}{x-1}$; 8. $y = \frac{x+1}{x-1}$; 9. $y = \frac{x-1}{x+1}$; 10. $y = ax^2 + bx + c$;
11. $y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$; 12. $y = \frac{m - x^2}{m + x^2}$; 13. $y = (1 + 2e^x)(2 - e^x)$;
14. $y = x^2(1 + m\, e^{ax})$; 15. $y = log_{10}(x + lg\, x) - e^{-x^2}$; 16. $y = e^{1-x^2} 2^{1-x^2}$;
17. $x = \frac{kt^2}{pt + q}$; 18. $z = 10^{y e^y}$; 19. $w = v^2(1 - v)$; 20. $s = a + bt + ct^2 + dt^3$.

§ 31. Извод степена

Нека је дата функција

$$y = x^m,$$

где је m произвољан број. Нађимо извод ове функције.

И овде ћемо применити логаритмовање

$$lg\, y = m\, lg\, x,$$

после чега се добија

$$\frac{y'}{y} = m \cdot \frac{1}{x},$$

одакле је

$$y' = m \cdot \frac{y}{x}$$

или дефинитивно

$$(\mathrm{XII}) \qquad \boxed{(x^m)' = mx^{m-1}.}$$

Речима овај резултат гласи:

Извод степена једнак је производу изложиоца и степена са изложиоцем умањеним за јединицу.

Раније смо имали неколико примера извода степена израчунатих непосредно на основу дефиниције извода, наиме

$$(x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2, \quad (x^4)' = 4x^3, \quad (x^5)' = 5x^4.$$

Сад видимо да сви ови резултати следују из обрасца (XII). Тај образац важи не само за целе и позитивне вредности m, него и за све могуће вредности тог броја; тако, на пр., за $m = -1$ имамо

$$(x^{-1})' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

У случају корена имамо

$$y = \sqrt[p]{x^q} = x^{\frac{q}{p}} = x^m\,,$$

где је $m = \dfrac{q}{p}$. На основу (XII) за извод добијамо

$$y' = m x^{m-1} = \frac{q}{p}\, x^{\frac{q}{p}-1}$$

или дефинитивно

$$\left(\sqrt[p]{x^q}\right)' = \frac{q}{p}\sqrt[p]{x^{q-p}}\,.$$

Специјално за квадратни корен важи овај резултат

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

Вежбања. Наћи извод функција:

1. $y = x^{10}$; **2.** $y = 10^x$; **3.** $y = x^e$; **4.** $y = e^x$; **5.** $y = x^{-4}$; **6.** $y = \dfrac{1}{x^3}$;
7. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; **8.** $y = \sqrt[3]{x}$; **9.** $y = x^{\sqrt{2}+1}$; **10.** $y = x^{\lg a}$; **11.** $y = \dfrac{x^p}{1+x^q}$; **12.** $y = \sqrt{1+x^2}$;
13. $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x + \dfrac{1}{x}}$; **14.** $y = (1-\sqrt{x})x$; **15.** $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$;
16. $y = \sqrt{x(x-1)}$; **17.** $y = \lg\dfrac{1-x^2}{1+x^3}$; **18.** $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x^2}}$; **19.** $y = \lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

§ 32. Извод тригонометриских функција

Узмимо тригонометриску функцију

$$y = \sin x$$

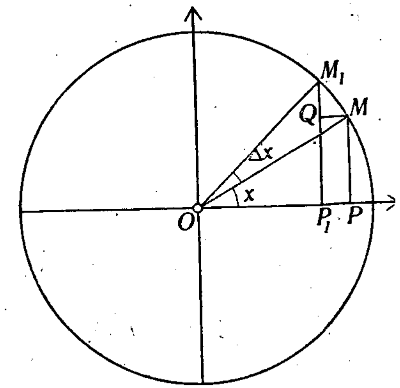
и за одређивање извода те функције употребимо г е о м е т р и с к у м е т о д у.

На тригонометриском кругу (сл. 62) полупречника $R = 1$ узмимо тачку M која одговара углу x. Ако x порасте за Δx, добићемо нову тачку M_1 при чему је лук $\smile MM_1 = \Delta x$.

Конструишимо

$$y = \sin x = MP\,,$$

$$y_1 = \sin(x + \Delta x) = M_1P_1\,.$$



Сл. 62. Одређивање извода функције $\sin x$ геометриском методом

Према дефиницији извода ставимо

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{y_1 - y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{M_1P_1 - MP}{\Delta x}\,.$$

Ако узмемо у обзир да Δx тежи нули, лук $\Delta x = \smile MM_1$ можемо заменити тетивом MM_1; ова замена може се образложити потпуно строго, али то би знатно отежало излагање. Ставимо даље

$$M_1P_1 - MP = M_1Q\,,$$

где је Q пресек праве кроз M, паралелне оси x, са ординатом M_1P_1 тачке M_1. Пошто у граничном положају правац тетиве MM_1 прелази у правац тангенте, ова последња стоји управно на полупречнику OM, троугао M_1QM сличан је троуглу OPM, јер $\sphericalangle MM_1Q = \sphericalangle MOP$. Из сличности тих троуглова имамо

$$M_1Q : MM_1 = OP : OM$$

и према томе за извод добијамо

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{M_1 \to M}\frac{M_1Q}{MM_1} = \frac{OP}{OM} = \cos x\,,$$

или дефинитивно

$$\text{(XIII)} \qquad \boxed{(\sin x)' = \cos x.}$$

Речима овај резултат гласи:

Извод синуса једнак је косинусу.

На основу сличних геометриских расуђивања можемо добити извод функције $\cos x$, но корисно ће бити да се упознамо и са другом методом.

Нека је

$$y = \cos x.$$

Пошто је

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

можемо, сматрајући $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ као сложену функцију, рачунати овако:

$$y' = (\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot(-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

Кратко, једнакост

(XIII^bis) $$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

се речима изражава

Извод косинуса једнак је негативном синусу.

Примена обрасца за извод количника омогућује да се израчунају изводи $tg\, x$ и $cotg\, x$:

$$(tg\, x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(cotg\, x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Дакле

(XIV) $$\boxed{(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (cotg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.}$$

Као вежбу можемо извести изводе $\sec x$ и $cosec\, x$:

$$(\sec x)' = \sec x \,.\, tg\, x,$$

$$(cosec\, x)' = -cosec\, x \,.\, cotg\, x.$$

Вежбања: Наћи извод функција:

1. $y = \sin 2x$; 2. $y = \cos mx$; 3. $y = a\cos px + b\sin qx$; 4. $y = 2\sin(5x - 1)$; 5. $y = a\, e^{-k^2 x}\sin \omega x$; 6. $s = 2e^{-2t}\cos 2t$; 7. $y = e^{\sin x}\cos x$; 8. $y = \left[lg\frac{1}{x}\right]\sin \pi x$; 9. $y = \log \sin x$; 10. $y = \sqrt{m\sin^2 x + n\cos^2 x}$.

11. Показати да функције $\sin x$ и $\cos x$ задовољавају једначину $y'^2 + y^2 = 1$.

12. Потврдити тачност једначине

$$\frac{1}{(tg\, x)'} - \frac{1}{(cotg\, x)'} = 1.$$

13. Показати да се логаритамски изводи тангенса и котангенса разликују само знаком.

14. Показати да је производ логаритамских извода синуса и косинуса једнак негативној јединици.

§ 33. Инверзне тригонометриске функције и њихови изводи

У једначини

$$x = \sin y$$

x је функција y'а, синус угла y; ако сад сматрамо y као функцију x'а, ова је функција инверзна функција синуса. Како се означује ова функција? Претходна једначина читана здесна налево гласи:

y је угао чији је синус једнак x.

Сада ћемо исту реченицу написати математичким знацима, при чему ћемо, место речи угао, употребити реч лук (латински — arcus) којим се угао мери. Тада реченица изгледа овако:

$$y = arcus\ sinus = x$$

Раније се тако и писало са малим знаком једнакости испред x. Сада се то скраћује и добија облик

(1) $$y = \arcsin x.$$

Тако се пише функција инверзна функцији синуса (читај: арксинус x). За остале инверзне функције постоје ознаке:

$$\arccos x, \qquad arctg\, x, \qquad arccotg\, x.$$

Свакој тригонометриској функцији, на пр. синусу, чију вредност означавамо са x, одговара више углова који имају исти синус; стога уз сваку ознаку инверзне тригонометриске функције треба навести примедбу о вредности угла. Без те нарочите примедбе сматра се да је угао, који одговара датој тригонометриској функцији најмањи, то је тзв. **главна вредност** инверзне тригонометриске функције.

За израчунавање извода функције (1) искористимо теорему за изводе инверзних функција:

$$y'_x = (arcsin\,x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(sin\,y)'_y} = \frac{1}{cos\,y} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

дефинитивно добијамо

$$\text{(XV)} \qquad \boxed{(arcsin\,x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

После сличних расуђивања можемо извести ове резултате:

$$\text{(XV}^{bis}\text{)} \qquad (arccos\,x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\text{(XVI)} \qquad (arctg\,x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\text{(XVI}^{bis}\text{)} \qquad (arccotg\,x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Обратимо пажњу да се изводи, на пр., $arcsin\,x$ и $arccos\,x$ разликују само знаком и то из тог разлога што између тих функција, рецимо, главних вредности, постоји веза

$$arcsin\,x + arccos\,x = \frac{1}{2}\pi,$$

одакле се после израчунавања извода добија

$$(arcsin\,x)' + (arccos\,x)' = 0,$$

а то и потврђује супротност знакова тих извода.

Вежбања. 1. Извести обрасце (XV^{bis}), (XVI) и (XVI^{bis}).
Наћи извод функција:

2. $y = arctg\,3x$; 3. $y = arcsin\sqrt{x}$; 4. $y = arccos\,\frac{1}{x}$; 5. $y = arctg\sqrt{x^2 - x}$;

6. $y = sec\,e^x + log\,cos^2 x - arcsin\,e^{-x}$.

§ 34. Извод степена променљиве основе и изложиоца

Претходна правила за одређивање извода не омогућују да се одреди извод функције

$$\text{(XVII)} \qquad \boxed{y = u^v},$$

где се u и v функције независно променљиве x. За израчунавање траженог извода најједноставније је да се искористи логаритамски извод. Зато ћемо логаритмовати за природну основу обе стране наше једначине (XVII):

$$lg\,y = v\,lg\,u.$$

После тога извод леве и десне стране даје

$$\frac{y'}{y} = v'lg\,u + v\frac{1}{u}u',$$

одакле дефинитивно следује

$$(u^v)' = u^v\left(v'lg\,u + v\,\frac{u'}{u}\right).$$

Овај резултат није потребно памтити, него треба знати да у случају када су основа и изложилац променљиви, функцију треба логаритмовати.

За $y = x^x$, на пр., имамо

$$lg\,y = x\,lg\,x$$

и према томе је

$$(x^x)' = x^x(lg\,x + 1).$$

Вежбања: Наћи извод функција:

1. $y = (sin\,x)^{cos\,x}$; 2. $y = (x-1)^x$; 3. $y = (ax^2 + bx + c)^x$;
4. $y = (e^x)^{sin\,x}$; 5. $y = (arctg\,x)^{x^2}$.

§ 35. Појам диференцијала

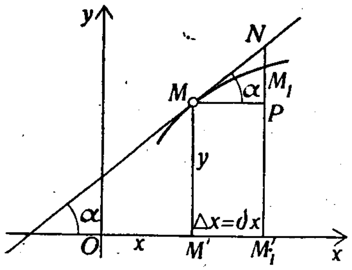
На графику функције $y = f(x)$ узећемо тачку M са апсцисом x (сл. 63). Ако независно променљива x добије прираштај Δx, новој вредности аргумента $x + \Delta x$ одговара нова вредност функције

$$y_1 = f(x + \Delta x).$$

Функција је добила прираштај

$$\Delta y = y_1 - y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Знамо да је однос $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ угаони коефицијент секанте, која пролази кроз тачке M и M_1, а гранична вредност тог односа је извод



Сл. 63. Диференцијали аргумента и фукције

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\alpha.$$

Дефинишимо сад нове појмове: диференцијал независно промењиве x са ознаком dx и диференцијал функције y са ознаком dy.

Диференцијал независно промењиве је прираштај ове промењиве. Дакле

$$dx = \Delta x.$$

На слици је $dx = M'M_1' = MP$.

Ако узмемо тангенту на графику у тачки M и конструишемо тачку N ове тангенте за апсцису $OM_1' = x + dx$, разлика

$$M_1'N - M_1'P = PN$$

је прираштај ординате y, под условом да смо прешли од тачке M криве на тачку N тангенте; кратко можемо казати да је то прираштај ординате дуж тангенте. Величина PN је диференцијал функције. Дакле можемо поставити ову дефиницију:

Диференцијал функције је прираштај ординате дуж тангенте.

Из троугла PMN непосредно следује да је

$$PN = MP \cdot tg\,\alpha,$$

или

$$\text{(XVIII)} \qquad \boxed{dy = y'dx}$$

Изведена особина диференцијала функције може послужити као аналитичка дефиниција диференцијала, може се, наиме, казати:

Диференцијал функције је производ извода и диференцијала независно промењиве.

Из (XVIII) обрасца непосредно следује да је

$$\text{(XVIII}^{\text{bis}}\text{)} \qquad \boxed{y' = \frac{dy}{dx}}$$

Другим речима, *извод је количник диференцијала функције и диференцијала независно промењиве.*

Пошто је за одређивање диференцијала функције потребно само помножити извод диференцијалом независно промењиве, операције одређивања извода и одређивања диференцијала функције, а ова се последња зове диференцирање, еквивалентне су. Често се пута реч „диференцирати" употребљује у смислу одређивања извода. Сав рачун, у чијој основи леже операције са изводима и диференцијалима, зове се диференцијални рачун.

Дефиниција диференцијала независно промењиве не ставља никакво принципско ограничење за вредности тог диференцијала: он, као и прираштај независно промењиве, може бити потпуно произвољан, разуме се у области промене независно промењиве за дату функцију.

Али у већини случајева згодно је узимати dx као врло малу величину. Она може бити и бескрајно мала. Као што знамо, у Математици се под том величином разуме промењива величина, чију вредност увек можемо изабрати или начинити мањом од било које унапред дате величине.

Диференцијал dx можемо сматрати промењивом величином, но она не зависи од x.

За две бескрајно мале величине, ε и η, каже се да су истог реда, ако њихов однос $\eta : \varepsilon$ има коначну вредност.

Ако је dx бескрајно мала величина, dy је бескрајно мала истог реда, под условом да је y' коначно, јер је $dy : dx = y'$.

Без обзира на то што dx може бити и коначна величина, о диференцијалима dx и dy математичари обично мисле као о бескрајно малим величинама. У овом се смислу те величине зову диференцијални елементи.

Знамо још из Елементарне математике да кружна линија може бити сматрана као гранични облик изломљене линије која се састоји из низа бескрајно малих тетива (уписани многоугао) или бескрајно малих тангената (описани многоугао). Исто тако и са сваком другом кривом можемо довести у везу уписану односну описану изломљену линију. У таквом посматрању свака бескрајно мала тетива, односно тангента замењује један део, један диференцијални елемент криве.

За тачке диференцијалног елемента тетива, крива и тангента имају исти правац; на путу тог елемента dy претставља не само диференцијал него и прираштај функције. Према томе dy показује закон понашања функције на бескрајно малом елементу. У томе је главна улога диференцијала.

Вежбања. Одредити диференцијал функције:

1. $y = x^{10}$; 2. $y = lg\, x$; 3. $y = e^{\sin x}$; 4. $u = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}$; 5. $y = (tg\, x)^{e^x}$; 6. $s = at^2 + bt + c$; 7. $z = \varphi(u)$; 8. $w = 2^{z+z^2}$; 9. $\omega(k) = e^{-k^2}$; 10. $x = a \cos \omega t + b \sin \omega t$.

§ 36. Таблица за диференцирање

Сад ћемо у облику таблице навести раније изведене обрасце за диференцирање.

(I) $y = f(x)$

(II) $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) = tg\,\alpha$$

(III) $(C)' = 0$

(IV) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(V) $y = f(u),\ u = \varphi(x);\ y' = y'_u \cdot u'$

(VI) $$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

(VII) $$(lg\,x)' = \frac{1}{x};\ (\mathrm{VII^{bis}})\ (log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{lg\,a} = \frac{1}{x} log_a e;$$

$$(\mathrm{VII^{ter}})\ (log_{10} x)' = \frac{1}{x} \frac{1}{lg\,10} = \frac{1}{x} log_{10} e$$

(VIII) $$(e^x)' = e^x;\ (\mathrm{VIII^{bis}})\ (a^x)' = a^x\, lg\,a = a^x \frac{1}{log_a e};$$

$$(\mathrm{VIII^{ter}})\ (10^x)' = 10^x\, lg\,10 = 10^x \frac{1}{log_{10} e}$$

(IX) $(uv)' = u'v + uv'$

(IX^{bis}) $(u_1 u_2 \cdots u_n)' = u'_1 u_2 \cdots u_n + u_1 u'_2 \cdots u_n + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_n'$

$$(\mathrm{IX^{ter}})\ \frac{(u_1 u_2 \cdots u_n)'}{u_1 u_2 \cdots u_n} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \cdots + \frac{u_n'}{u_n}.$$

(X) $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

(XI) $(Cu)' = Cu'$

(XII) $(x^m)' = mx^{m-1}$

(XIII) $(\sin x)' = \cos x$; (XIII^{bis}) $(\cos x)' = -\sin x$

(XIV) $$(tg\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ (\mathrm{XIV^{bis}})\ (cotg\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

(XV) $$(arcsin\,x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\mathrm{XV^{bis}})\ (arccos\,x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(XVI) $$(arctg\,x)' = \frac{1}{1+x^2},\ (\mathrm{XVI^{bis}})\ (arccotg\,x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

(XVII) $y = u^v$ логаритмовати

(XVIII) $$dy = y'dx,\quad y' = \frac{dy}{dx}.$$

Помоћу ових образаца можемо израчунати извод или диференцијал свих досад нама познатих функција.

Вежбања. 1. Помоћу слике потврдити тачност неједнакости

$$1 > \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \cos \alpha$$

2. На основу резултата претходног задатка доказати једначину

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1. \qquad (1)$$

3. Извести аналитички, на основу (1), образац $(\sin x)' = \cos x$.

4. Применити геометриску методу за извођење резултата $(tg\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

5. После прегледа таблице за диференцирање показати да се она добија на основу општих теорема о граничним вредностима и два специјална обрасца за граничне вредности, наиме (1) и $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

6. Показати тачвост једначине

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1.$$

7. На основу претходног обрасца извести $(e^x)' = e^x$.

8. Извести образац (VI) таблице за диференцирање помоћу графика дате и инверзне функције.

Наћи извод функција:

9. $y = 3(x-1)(x-2)$; 10. $y = \dfrac{x-4}{x+1}$; 11. $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$; 12. $y = \sqrt{x^2-3x+1}$;

13. $y = lg\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; 14. $y = \dfrac{lg\, x}{x}$; 15. $y = lg\,(x - \sqrt{1+x^2})$; 16. $y = \dfrac{\cos x}{1+x}$;

17. $y = tg\, x^3$; 18. $y = \sin^3 x \cos^5 x$; 19. $y = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ 20. $y = lg\, tg \dfrac{x}{3}$; 21. $y = \cos lg\, x$;

22. $y = lg\,(lg\, x)$; 23. $y = lg\cos^2 2x$; 24. $y = (ax+b)^{mx+n}$; 25. $y = m\cos^n x + n\sin^m x$.

26. Потврдити ове обрасце за изводе хиперболичких функција:

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad (tgh\, x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad (cotgh\, x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

27. Ако је $x = \sinh y$, $y = arsinh\, x$ је инверзна функција хиперболичког синуса (читај: ар — од латинске речи area, површина — синус хиперболикус). Треба доказати: 1) да је

$$arsinh\, x = lg\,(x + \sqrt{x^2+1})$$

и 2) извести образац

$$(arsinh\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

28. Извести обрасце

$$arcosh\, x = lg\,(x + \sqrt{x^2-1}), \quad artgh\, x = \frac{1}{2}\, lg \frac{1+x}{1-x}, \quad arcotgh\, x = \frac{1}{2}\, lg \frac{x+1}{x-1}$$

и одредити изводе тих функција.

29. Доказати да је $artgh\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right) = lg\, x$.

30. Наћи извод функција: $\sinh \dfrac{x}{m}$, $lg \cosh x$, $\cosh^3 x$.]

31. Наћи вредности извода функције $y = 2\cos \dfrac{x}{2}$ за

$$x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi, \ \pi \text{ и } 2\pi.$$

Одредити вредности извода функције за наведену вредност аргумента:

32. $y = 3\cos x$ за $x = \dfrac{\pi}{2}$, 33. $y = xe^x$ за $x = 2$; 34. $y = 2\cos 5t + 4\sin 3t$ за $t = \dfrac{1}{15}$;

35. $x = at^2 + bt + c$ са $t = 2$, $a = 0{,}25$; $b = 0{,}75$; 36. $z = \sqrt{x^2+1}$ за $x = 0{,}75$.

37. Доказати да је $y' + y = 1$, ако је $y = 1 + Ce^{-x}$, где је C константа.

38. Доказати да је $y' + my = n$, ако је $y = \dfrac{n}{m} + Ce^{-mx}$.

39. Доказати да је $\sin x \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}$, ако је $y = f(x)$ и $x = 2\, arctg\, e^t$.

40. Доказати да је $\dfrac{1+x^2}{x}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}$, ако је $y = f(x)$ и $x = \sqrt{e^{2t}-1}$.

41. Потврдити да $y = \sin x - 1$ задовољава једначину $\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

§ 37. Изводи и диференцијали вишега реда

Од извода

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \varphi(x) = \varphi$$

дате функције

$$y = f(x)$$

можемо поново образовати извод

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx} = \psi(x) = \psi.$$

За функцију y тај је извод другог реда. Можемо га обележити са y'' (читај: ипсилон други или секундум).

Ако за диференцијал dy функције y опет образујемо диференцијал, добићемо други диференцијал функције y. Означимо га са d^2y. Тада према дефиницији диференцијала имамо

$$d^2y = d\,(dy) = d\,(y'dx) = (y'dx)'\,dx = y''dx \cdot dx = y''dx^2.$$

Из овог резултата следује и оваква ознака другог извода

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Ако је dx бескрајно мала величина првога реда, а y'' је коначно, онда је диференцијал d^2y бескрајно мала величина другога реда.

Други извод поново можемо диференцирати; тада ћемо добити трећи извод. За њега имамо

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3},$$

где је d^3y диференцијал трећега реда.

Уопште узев, може бити говора о n'том изводу као изводу од претходног, $n-1$'ог извода. n—ти извод функције y обележава се са

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n},$$

где је $d^n y$ n—ти диференцијал.

Треба ли наводити нарочита правила за одређивање извода вишега реда? Не. Потребно је углавном узастопно диференцирати дату функцију довољан број пута.

Има, међутим, случајева када се види правило по коме се састављају изводи; на основу тог правила могуће је написати извод траженог реда а да се не морају рачунати сви претходни изводи. Навешћемо примере таквих функција.

Знамо да функција e^x даје, после диференцирања, ту исту функцију. Према томе можемо написати

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

За функцију a^x слични образац изгледа

$$(a^x)^{(n)} = a^x (lg\, a)^n.$$

Узмимо сад функцију

$$y = x^m.$$

Први извод има облик

$$y' = mx^{m-1}.$$

Други извод изгледа

$$y'' = m(m-1)x^{m-2}.$$

Трећи

$$y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}.$$

Према очевидном правилу можемо написати n—ти извод

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)]\, x^{m-n}.$$

Ако је m цео и позитивни број, m—ти извод има сталну вредност

$$(x^m)^{(m)} = m(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = m!$$

$m+1$'и и сви остали изводи једнаки су нули.

Ако број m не задовољава услове да је цео и позитиван, ниједан извод нема константну вредност; према томе ниједан извод није једнак нули. Тада је низ извода бесконачан.

Узећемо још функције $sin\, x$ и $cos\, x$. За први извод имамо

$$(sin\, x)' = cos\, x;$$

када $cos\, x$ заменимо са $sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, добијамо

$$(sin\, x)' = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

На основу овог обрасца пишемо n—ти извод синуса

$$(sin\, x)^{(n)} = sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Исто тако за косинус, када је $(cos\, x)' = -sin\, x = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, имамо

$$(cos\, x)^{(n)} = cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Вежбања: Наћи други извод функција:

1. $y = 5x^2 + 3x + 4$; 2. $y = ax^2 + bx + c$; 3. $y = \frac{1}{x}$; 4. $y = \sqrt{x}$;
5. $y = xe^x$; 6. $y = x\,cos\, x$; 7. $y = \frac{1}{x-a}$. 8. $y = e^x sin\, x$; 9. $y = sin\, 2x + e^x cos\, 2x$.

10. Наћи трећи извод функције $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, написане у облику $y = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cx+d}$ и према њему написати n—ти извод.

11. Показати да функција $x = a\,cos\, kt$ задовољава једначину $x'' + k^2 x = 0$.

12. Показати да функција $z = Ae^{-k^2 t} sin\, \omega^2 t$, где су A, k, ω константе, задовољава једначину

$$z'' + 2k^2 z' + (\omega^4 + k^4) z = 0.$$

13. Потврдити једначину $(1 + cos\, x)\, y'' = y$ за $y = tg\frac{1}{2}x$.

14. Потврдити да $y = e^{-x}(ax^2 + bx + c)$ задовољава једначину:

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

ГЛАВА IV

ФУНКЦИЈА ВИШЕ ПРОМЕНЉИВИХ. ИМПЛИЦИТНА ФУНКЦИЈА

§ 38. Функција две променљиве. Једначина површине

Површина Q правоугаоника са димензијама x и y износи

$$Q = xy .$$

Свака од димензија може се мењати на произвољан начин, према томе овде се и x и y могу сматрати као независно променљиве, а Q као функција. То је пример функције која зависи од две независно променљиве, од два аргумента.

Узмимо други пример. Нека су

$$(1) \qquad p, \ v, \ t$$

притисак, запремина и температура одређене количине гаса. На основу познатог Бојл-Мариот-Гејлисакова закона

$$\frac{pv}{1+\alpha t} = const. = \mathrm{R},$$

где је R константа и $\alpha = \dfrac{1}{273}$ (коефицијент ширења гаса), свaку од величина (1) можемо сматрати као функцију остале две. Тако ћемо, на пр., за притисак добити

$$p = \mathrm{R}\,\frac{1+\alpha t}{v}.$$

Сад ћемо у овом резултату означити променљиве величине последњим словима латинске азбуке; нека буде $t = x$, $v = y$, $p = z$, тада имамо

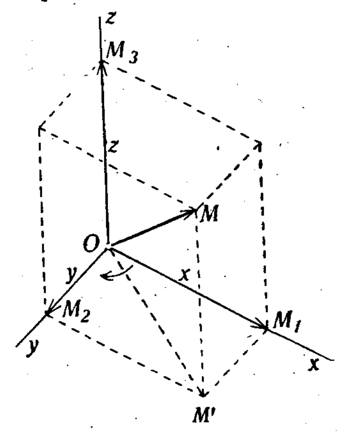
$$z = \mathrm{R}\,\frac{1+\alpha x}{y}.$$

Ако температуру x и запремину y сматрамо као независно променљиве, z је функција тих променљивих. Десна страна претходне једначине показује операције које треба извршити са x и y да бисмо добили вредност функције z.

Ако хоћемо да напишемо у општем облику да је z функција променљивих x и y, треба ставити

$$(2) \qquad z = f(x, y) .$$

Искористићемо за геометриско тумачење ове једначине координатни систем у простору (§ 5). Као и раније, на равни оса Ox, Oy (сл. 64) подигнимо у тачки O нормалу и на њој означимо смер у онај (позитивни) део простора из кога гледано обртање за 90^0 у смислу кретања казаљке на часовнику доводи осу Ox до поклапања са осом Oy. Добијену осу означимо са Oz.



Сл. 64. Координатни систем у простору

Нека је M произвољна тачка у простору. Спустимо из ове тачке нормалу MM′ на раван Oxy; растојање MM′ сматрамо позитивним, ако тачка M лежи у позитивном делу простора, и негативним у супротном случају. Ово растојање, са одговарајућим знаком, означимо са z. Координате тачке M′, подножја нормале, означимо са x и y. Три величине x, y, z су, као што знамо, координате тачке у простору.

За сваку тачку M простора можемо конструисати правоугли паралелепипед са ивицама x, y, z (сл. 64). Растојање d тачке M од почетка координата је дијагонала тог паралелепипеда и према томе је

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

Осе Ox, Oy, Oz су координатне осе. Равни Oyz, Ozx, Oxy су координатне равни. Ове координатне равни деле читав простор на осам делова, осам октаната: четири изнад Oxy равни и четири испод те равни. У првима је z позитивно, а остале координате имају знаке према таблици

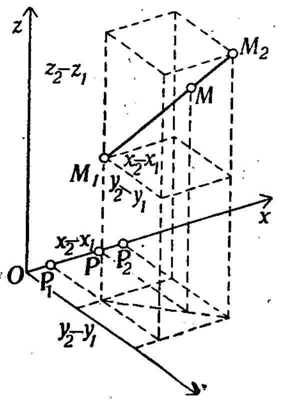
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

у другима је z негативно, а x и y мењају знаке према истој таблици.

Сад ћемо узети две тачке у простору:

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \quad \text{и} \quad M_2(x_2, y_2, z_2);$$

одредићемо растојање између тих тачака. У ту сврху можемо конструисати правоугли паралелепипед са дијагоналом M_1M_2 и са ивицама паралелним координатним осама (сл. 65). Пошто су ивице тог паралелепипеда



Сл. 65. Растојање између две тачке. Тачка на правој кроз две тачке

$$x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1, \quad z_2 - z_1,$$

тражено растојање има вредност

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Решимо и други задатак. Одредимо координате тачке M која дели дуж M_1M_2 у датој размери $m : n = \lambda$.

Зато ћемо кроз тачке M_1, M, M_2 повући равни паралелне са равни Oyz. Нека те равни секу осу Ox у тачкама P_1, P, P_2 (сл. 65). Апсцисе ових тачака имају вредности x_1, x, x_2, где је x тражена апсциса тачке M. На основу познате теореме из Стереометрије, тачка P дели дуж P_1P_2 у истој размери $m : n$ као што и тачка M дели дуж M_1M_2. Према томе имамо

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{x_2 - x}{n},$$

одакле је (упореди § 3)

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Слично ћемо добити и за друге координате

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Потражимо сад тачке чије координате x, y, z задовољавају једначину

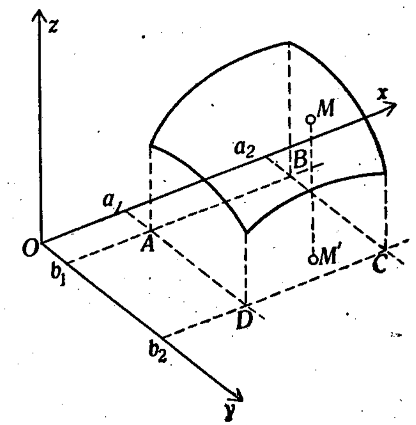
$$(2) \qquad z = f(x, y).$$

За сваки пар координата x, y ова једначина даје одређену вредност координате z; према томе за сваки положај тачке $M'(x, y, 0)$ у одређеној области, која одговара природи функције $f(x, y)$, у равни Oxy, рецимо, са границама

$$a_1 \leqslant x \leqslant a_2, \qquad b_1 \leqslant y \leqslant b_2,$$

добијамо одређену тачку $M(x, y, z)$ у простору (сл. 66). Ако тачка M' мења непрекидно свој положај у тој области, тачка M описује у простору површину. Приметимо да област промене x и y може бити не само правоугаоник, рецимо ABCD, него и површина омеђена криволиниском контуром, па чак и цела раван Oxy.

Према томе једначина (2) има геометриско тумачење у облику површине.



Сл. 66. Површина

Као први пример, узећемо једначину, где је z функција првог степена по x и y,

$$(3) \qquad z = ax + by + c,$$

и показаћемо да тој једначини одговара у простору раван. На површини са једначином (3) узмимо две тачке: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Координате ових тачака морају задовољавати једначину (3); према томе морамо имати два идентитета:

$$(4) \qquad z_1 \equiv ax_1 + by_1 + c, \qquad z_2 \equiv ax_2 + by_2 + c.$$

На правој која спаја тачке M_1 и M_2 узмимо произвољну тачку M. Нека она дели дуж M_1M_2 у односу $m : n = \lambda$. Тада координате тачке M имају вредности

$$(5) \qquad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Са променом односа λ тачка M прелази све могуће положаје на правој M_1M_2. Покажимо да све ове тачке M леже на површини (3). Зато ћемо уврстити координате (5) у једначину (3); после множења са $1 + \lambda$ имамо

$$z_1 + \lambda z_2 = a(x_1 + \lambda x_2) + b(y_1 + \lambda y_2) + c(1 + \lambda),$$

одакле изводимо

$$z_1 - (ax_1 + by_1 + c) + \lambda[z_2 - (ax_2 + by_2 + c)] = 0,$$

а ова се једнакост на основу идентитета (4) и сама претвара у идентитет. Тиме смо доказали да све тачке праве, која пролази кроз две произвољне тачке M_1 и M_2 површине (3), припадају тој површини. Такву особину има само раван. Функцији z првог степена по x и y одговара према томе раван.

Са $c = 0$ једначина

$$z = ax + by$$

претставља раван која пролази кроз координатни почетак.

Са $a = 0$ једначини

$$z = by + c$$

одговара раван паралелна са осом x, која сече Oyz раван дуж праве $z = by + c$. Свака тачка са координатама y, z, које задовољавају претходну једначину, а има произвољну апсцису припада тој равни.

Ако су заједно $a = 0$, $c = 0$, раван чија је једначина

$$z = by$$

пролази кроз осу Ox.

Ако су заједно $a = 0$, $b = 0$, раван чија је једначина

$$z = c$$

стоји паралелно са Oxy равни.

Најзад, ако су $a = b = c = 0$, једначини

$$z = 0$$

одговара сама раван Oxy.

Као други пример узећемо једначину

(6) $$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

где је R константна величина. Из ове једначине имамо овакву функцију z:

(7) $$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Пошто лева страна једначине (6) има вредност квадрата растојања тачке са координатама x, y, z од почетка координата, видимо да према тој једначини ово растојање има сталну вредност R. Такву особину има површина лопте (сферна површина) полупречника R са центром у почетку координата (сл. 67). На тај начин можемо тврдити да функцији (7) одговара површина сфере полупречника R. Јасно је да је област промене независно променљивих x и y круг у равни Oxy исто тако полупречника R. Само за тачке ове области функција z има реалне вредности.

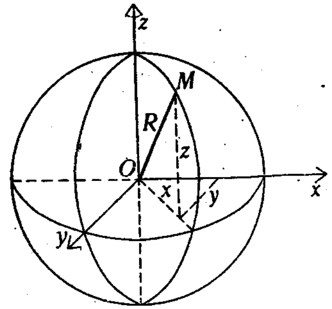
Двоструки знак код корена показује да тачки са координатама x, y у равни Oxy одговарају две вредности z и према томе две тачке површине: једна изнад равни Oxy, друга испод ње.

На основу обрасца за растојање између две тачке можемо казати да једначини

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = R^2$$

одговара сферна површина полупречника R са центром у тачки $C(x_c, y_c, z_c)$. За ову површину функција z има вредност

$$z = z_c \pm \sqrt{R^2 - (x - x_c)^2 - (y - y_c)^2}.$$



Сл. 67. Сферна површина

Како би практички на слици претставили неку површину?

За то постоји више начина. Навешћемо онај који се употребљује у картографији за опис дела Земљине површине.

Ако површину са једначином

(2) $$z = f(x, y)$$

пресечемо низом равни паралелних са Oxy равни, на растојању h једне од друге, онда у (2) треба ставити

$$z = 0, \quad z = h, \quad z = 2h, \quad z = 3h \text{ итд.}$$

Тада ћемо добити низ једначина

$$f(x, y) = 0, \quad f(x, y) = h, \quad f(x, y) = 2h, \quad f(x, y) = 3h, \ \ldots$$

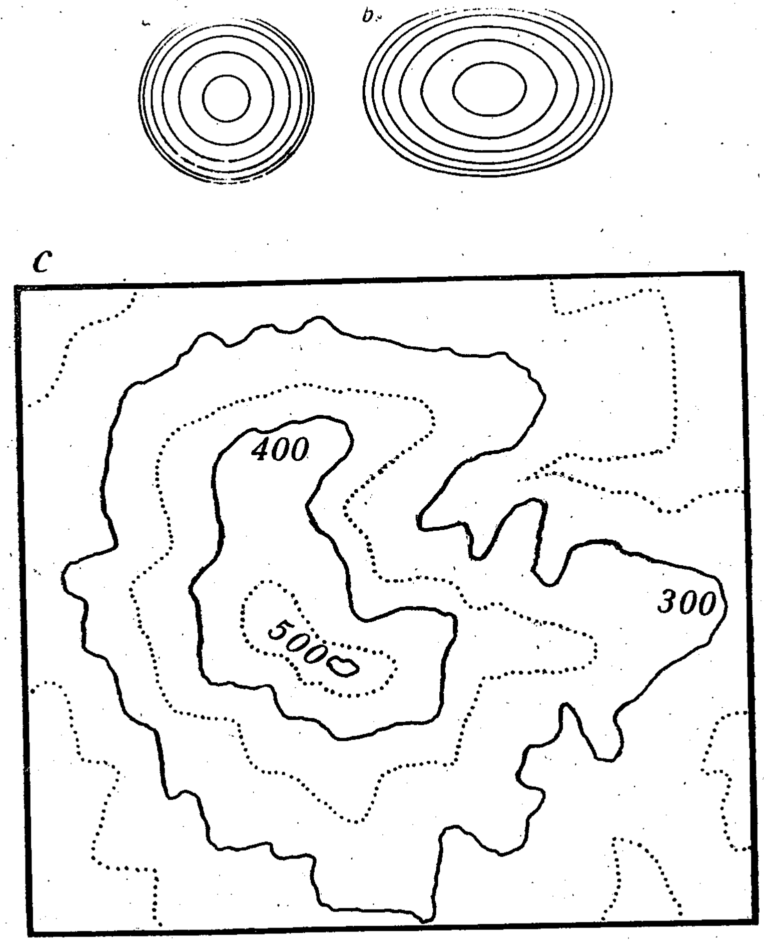
Сваку од ових једначина облика

$$f(x, y) = const. = c$$

замислићемо решеном по y,

$$y = \varphi(x, c).$$

За сваку вредност c добијамо криву линију; облик те криве зависи од вредности параметра c и природе површине. Ове се криве зову х о р и з о н т а л е. Ако h није сувише велико према величини површине, хоризонтале дају у довољној мери јасну претставу површине. На слици 68 имамо хоризонтале: *a)* сферне површине, *b)* површине тела, које се зову е л и п с о и д и *c)* А в а л е.

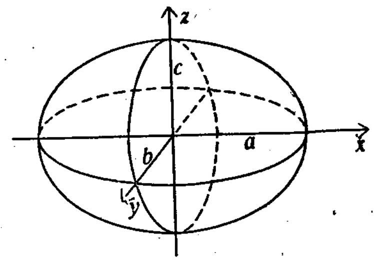


Сл. 68. Хоризонтале површина: *a.* сфере, *b.* елипсоида, *c.* Авале

Површина елипсоида има једначину

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Из ове се једначине ($a \geqslant b \geqslant c$) види да координатне равни секу ову површину (сл. 69) по елипсама са полуосама: b и c у равни Oyz ($x=0$), c и a у равни Ozx ($y=0$) и a, b у равни Oxy ($z=0$). Три величине a, b, c зову се п о л у о с е е л и п с о и д а. Ако су ове величине различите, у називу се подвлачи да је е л и п с о и д - т р о о с н и. Ако су две полуосе једнаке, елипсоид се претвара у о б р т н и е л и п с о и д око треће осе. Он може бити с п љ о ш т е н са $a=b$, $c<a$ или и з д у ж е н са $b=c$, $a>b$. Ако су све полуосе једнаке ($a=b=c$), површина елипсоида се претвара у сферну површину.



Сл. 69. Троосни елипсоид

Вежбања. 1. Од које две независно променљиве зависи површина троугла? **2.** Изразити запремину z ваљка као функцију полупречника основе x и висине y. **3.** Написати једначину површине троосног елипсоида у облику $z=f(x,y)$. **4.** Како изгледају хоризонтале равни косе према Oxy равни? **5.** Одредити положај равни са једначином: a. $z=x+y+1$; b. $z=x-y$; c. $z=2x$; d. $z=5$; e. $z=-x$. **6.** Проучити површину са једначином: $x^2+y^2-z^2=1$ помоћу пресека са координатним равнима и помоћу хоризонтала чије су равни паралелне равни Oxy. **7.** То исто урадити за површину са једначином : $x^2-y^2-z^2=1$.

§ 39. Функција више променљивих. Функција тачке

Претпоставимо да функција u зависи од три променљиве x, y, z, тј.

$$y=f(x,y,z). \tag{1}$$

Примера и таквих функција имамо врло много.

Запремина V правоуглог паралелепипеда са димензијама x, y, z је

$$V=x\,y\,z$$

и према томе је функција те три димензије. Исто тако је површина S тога тела, са вредношћу

$$S=2\,(yz+zx+xy),$$

функција ових димензија.

Као што смо видели три величине x, y, z могу бити сматране као координате тачке M у простору или координате вектора положаја ове тачке у односу на почетак координата. Ако тај вектор OM означимо са $\vec{r}$, можемо место (1) написати

$$u = f(\vec{r}),$$

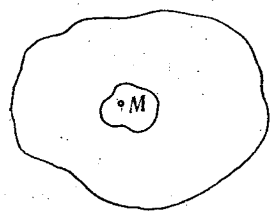
или

$$u = f(\mathrm{M}).$$

Последњи израз замењује појам функције трију променљивих са појмом ф у н к ц и ј е   т а ч к е: свакој тачки одређене области простора одговара вредност скалара u. Природа даје много примера таквих функција.

Ако имамо неку материјалну средину, која испуњује одређену област, можемо у тој области узети тачку M (сл. 70) и одређеном површином исећи из тог тела елемент запремине ΔV. Нека се у тој запремини налази маса (количина материје) Δm, тада се однос

$$\frac{\Delta m}{\Delta V}$$



Сл. 70. Елемент материјалног тела

зове с р е д њ а   г у с т и н а   т е л а   у   з а п р е м и н и ΔV. Сада ћемо смањивати запремину ΔV, задржавајући стално у њој тачку M. Може се десити да претходни однос тежи одређеној граничној вредности

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

када запремина ΔV тежи нули. Ова гранична вредност зове се г у с т и н а   т е л а   и л и   с р е д и н е   у   д а т о ј   т а ч к и M. Означимо ову густину са σ (читај: сигма). Може се десити да густина тела има исту вредност за све тачке тела, тада је тело х о м о г е н о. Али у општем случају у разним тачкама тела густина је различита, она зависи од положаја тачке M у телу, она је функција тачке, тј.

$$\sigma = f(\mathrm{M}) = f(\vec{r}) = f(x, y, z).$$

Такво је тело х е т е р о г е н о или н е х о м о г е н о.

Узећемо и други пример.

У свакој тачки наше атмосфере притисак ваздуха (барометарски притисак) има одређену вредност, коју ћемо означити са p. Тај притисак у општем случају има различите вредности у различитим тачкама простора, тј.

$$p = f(x, y, z).$$

Он се може мењати такође и са временом t, стога је

$$p = f(x, y, z, t)$$

и у том случају имамо пример функције која зависи од четири независно променљиве.

Вежбања. 1. Навести из Геометрије примере функција више променљивих. 2. Од којих аргумената може зависити влажност ваздуха у датој тачки атмосфере? 3. Навести примере функције тачке. 4. Ако густина течности зависи од положаја тачке и од времена, шта можемо казати о течности?

§ 40. Делимични изводи и диференцијали. Тотални диференцијал

Нека је дата функција

$$z = 5x^3 y^2$$

од две независно променљиве x и y. Претпоставићемо, прво, да је y константна величина, тада се z јавља као функција само једне променљиве x. Под тим условом може бити говора о изводу функције z по x; тај извод има вредност

$$z'_x = 5y^2 \cdot (x^3)'_x = 5y^2 \cdot 3x^2 = 15x^2 y^2,$$

где смо са z'_x означили извод функције z по променљивој x сматрајући y као константу.

Ако сад x рачунамо као константно, а y као променљиву величину, имаћемо извод

$$z'_y = 5x^3 \cdot (y^2)'_y = 5x^3 \cdot 2y = 10x^3 y.$$

Извод функције више променљивих по једној променљивој са претпоставком да су све остале променљиве константне зове се д е л и м и ч н и или п а р ц и ј а л н и извод по тој променљивој. z'_x и z'_y су два делимична извода један по x, други по y.

За делимичне изводе функције

$$z = f(x, y)$$

употребљују се ознаке

$$z'_x = f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad z'_y = f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Важно је обратити пажњу да у ознакама $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ немамо ознаке количника са посебним бројиоцем ∂f и имениоцем ∂x, односно ∂y

него један симбол, у коме, супротно случају $\dfrac{dy}{dx}$, не можемо горњи део одвојити од доњег. За конкретне функције ова се ознака употребљује овако:

$$\frac{\partial}{\partial x}(5x^3 y^2) = 15x^2 y^2, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(5x^3 y^2) = 10\, x^3 y.$$

Данас се готово свуда у литератури одомаћила употреба округлог ∂ за ознаку делимичног извода и правог d за ознаку обичног извода и диференцијала.

Означићемо прираштаје независно променљивих x и y са $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$ и дефинисаћемо dx и dy као диференцијале независно променљивих x и y. Они не зависе ни један од другог ни од одговарајућих променљивих.

Производ

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx, \quad \text{односно} \quad \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

делимичног извода и диференцијала одговарајуће независно променљиве зове се делимични или парцијални диференцијал.

Јасно је да функција има онолико делимичних диференцијала, од колико независно променљивих зависи. Тако функција

$$u = f(x, y, z)$$

има три делимична диференцијала

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} dy, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Збир свих делимичних диференцијала зове се тотални диференцијал. Тотални диференцијал означује се са dz, du итд., као и у случају једне независно променљиве.

Према томе за функције z и u имамо

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Површина Q правоугаоника са димензијама x и y има вредност

$$Q = xy;$$

ова је површина функција две независно променљиве x и y. Делимични изводи имају вредности

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = x,$$

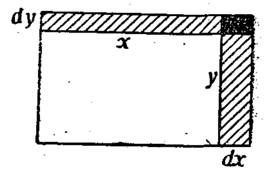
а делимични диференцијали

$$\frac{\partial Q}{\partial x} dx = y dx, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} dy = x dy.$$

Тотални диференцијал изгледа

$$dQ = y dx + x dy.$$

На слици 71 видимо конкретно тумачење делимичних и тоталног диференцијала. Сваки делимични диференцијал даје прираштај површине под претпоставком да је порасла само једна страна правоугаоника. Тотални диференцијал је збир тих делимичних прираштаја. Он није једнак тоталном прираштају површине правоугаоника, кад једна страна порасте за dx, а друга за dy, јер прираштај садржи још и површину правоугаоника $dx\,dy$. Ако dx и dy сматрамо као бескрајно мале величине првога реда, разлика између тоталног прираштаја наше функције Q и њеног тоталног диференцијала претставља бескрајно малу величину другога реда, јер се изражава производом бескрајно малих величина првога реда.



Сл. 71. Делимични и тотални диференцијал површине правоугаоника

Слично је и за запремину

$$V = xyz$$

правоуглог паралелепипеда. Сваки делимични диференцијал

$$yz dx, \qquad zx dy, \qquad xy dz$$

претставља запремину правоуглог паралелепипеда конструисана на правоугаонику стране са прираштајем треће ивице као трећом димензијом.

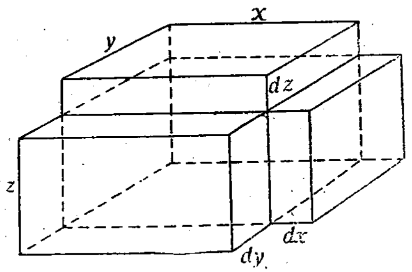
(сл. 72). Тотални диференцијал, као збир

$$dV = yzdx + zxdy + xydz\,,$$

разликује се и овде од тоталног прираштаја запремине тог тела, јер ова износи

$$\Delta V = (x + dx)(y + dy)(z + dz) - xyz =$$
$$= yzdx + zxdy + xydz + xdydz + ydzdx + zdxdy + dxdydz =$$
$$= dV + xdydz + ydzdx + zdxdy + dxdydz\,.$$

Видимо да разлика $\Delta V - dV$ прво садржи три запремине другога реда у облику шипчица, чија је само једна димензија коначна, а затим запремину трећега реда $dx\,dy\,dz$. Дакле и у овом случају главни део прираштаја функције је тотални диференцијал. У томе се састоји важна улога тоталног диференцијала у проучавању функција више променљивих.



Сл. 72. Делимични и тотални диференцијал запремине правоуглог паралелепипеда

Сваки од делимичних извода функције $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}$$

може и сам бити сматран као функција променљивих x и y; ове функције поново можемо делимично диференцирати. На тај начин добијамо изводе са лако разумљивим ознакама

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Изводи

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

разликују се редом диференцирања. У овим разматрањима ћемо се задржати само на проучавању функција за које ред диференцирања не утиче на резултат, тј. где је

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}.$$

Према томе за функцију z имамо само три делимична извода другога реда и то

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

У нашем примеру за функцију $z = 5x^3y^2$ имамо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 30xy^2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 30x^2y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 10x^3.$$

Сваки од делимичних диференцијала

$$\frac{\partial z}{\partial x}\, dx, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\, dy$$

може послужити за формирање нових делимичних диференцијала; тада имамо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, dx^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}\, dy\, dx, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\, dy^2.$$

Збир свих ових диференцијала даје поново тотални диференцијал и то другог реда са ознаком

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\, dy^2.$$

Нећемо се упуштати у анализу делимичних извода и диференцијала реда вишег од другог.

Вежбања: 1. Дата је функција $z = \pi x^2 y$ (запремина ваљка); наћи: делимичне изводе, делимичне диференцијале и тотални диференцијал. Свим овим величинама дати геометриско тумачење. Саставити прираштај функције и упоредити га са тоталним диференцијалом. 2. Дата је функција $S = 2\,(yz + zx + xy)$. Одговорити на питања постављена у претходном задатку.

3. Наћи делимичне изводе и тотални диференцијал функције:

a. $z = \frac{1}{3} x^2 y$; b. $z = \sqrt{xy}$; c. $z = x^y$; d. $z = ax^2 + 2bxy + cy^2$; e. $z = \dfrac{ax + b}{my + n}$.

f. $z=\sin\frac{x}{y}$; g. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; h. $z=Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$; i. $z=e^x\sin y$;

j. $z=e^{x+y}$; k. $z=(x+y)^{x+y}$.

4. Наћи делимичне изводе и тотални диференцијал функције:

a. $u=2x^3y^2z$; b. $u=Ax^p+By^q+Cz^r$; c. $u=\frac{1}{x+y+z}$;

d. $u=(y-z)(z-x)(x-y)$; e. $u=x^{y^z}$.

5. Наћи делимичне изводе и тотални диференцијал другог реда функције:

a. $z=x^m y^n$; b. $z=\sin xy+\cos\frac{x}{y}$; c. $z=(x+y)^m$; d. $z=a^x b^y$;

e. $z=e^r\sin\Theta$ (r и Θ су независно променљиве).

6. Потврдити једначину

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=4z,$$

ако је $z=2x^2y^2-3xy^3+x^4-y^4$.

7. Потврдити једначину

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1,$$

ако је $z=\log(e^x+e^y)$.

8. Потврдити једначину

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

ако је

$$z=A\sin(ky)\sin(ckx).$$

9. Потврдити једначину

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{m^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+n\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

ако су

$$z=Ae^{-\frac{1}{2}nx}\sin ax\cos by,$$

$$a^2=m^2b^2-\frac{1}{4}n^2.$$

10. Потврдити једначину

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ако је

$$u=f(x-ct),$$

при чему f може бити произвољна функција.

11. Потврдити једначину

$$\sin 2x\frac{\partial w}{\partial x}+\sin 2y\frac{\partial w}{\partial y}+\sin 2z\frac{\partial w}{\partial z}+\sin 2u\frac{\partial w}{\partial u}=2,$$

ако је

$$w=\log(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z+\operatorname{tg}u).$$

§ 41. Имплицитна функција

Имали смо једначину кружне линије

$$(1)\qquad x^2+y^2-R^2=0,$$

из које смо одредили ординату као функцију апсцисе

$$y=\pm\sqrt{R^2-x^2}.$$

Према томе једначина (1) одређује функцију y, али за стварно познавање оних операција, које треба извршити са x да би се добила одговарајућа вредност y, потребно је било решити једначину (1) по y.

У општем случају једначина

$$(2)\qquad f(x,y)=0$$

одређује једну променљиву у функцији друге, на пр.,

$$(3)\qquad y=\varphi(x)$$

али једначина (2) сама по себи не показује операције потребне за израчунавање ове функције.

Функција y одређена једначином (2) зове се **имплицитна функција**.

Често је тешко, а понекад и немогућно решити једначину (2) по y, тј. изразити функцију y у **експлицитном облику** (3). Зато треба показати како се могу проучити особине имплицитне функције без решавања једначине (2).

Као пример, поставимо себи задатак да нађемо извод y' без решавања једначине (2).

У том циљу узећемо функцију

$$z=f(x,y),$$

сматрајући x и y као независно променљиве. Тада се може написати тотални диференцијал ове функције

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Вратимо се сад услову да је $f(x, y)=0$, тада је $z=0$ и $dz=0$. Из претходне једначине имамо

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0.$$

Поделимо ли ову једначину са dx и при томе узмемо у обзир ознаку

$$\frac{dy}{dx}=y',$$

добићемо једначину

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0, \tag{4}$$

из које можемо, ако треба, одредити y' у облику

$$y'=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

Помоћу ове једначине можемо за сваку тачку $M(x, y)$ криве линије (2) одредити угаони коефицијент правца тангенте.

Тако, на пр., из једначине (1) кружне линије имамо

$$2x+2y\,y'=0,$$

одакле је

$$y'=-\frac{x}{y}.$$

Ако са ξ и η означимо координате произвољне тачке тангенте на кругу, њену једначину можемо написати

$$\eta-y=y'(\xi-x),$$

или

$$\eta-y=-\frac{x}{y}(\xi-x),$$

одакле је

$$x\xi+y\eta=x^2+y^2.$$

А како је

$$x^2+y^2=R^2,$$

једначина тангенте добија дефинитивно облик

$$x\xi+y\eta=R^2.$$

Слично можемо израчунати за елипсу и хиперболу,

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}-1=0;$$

$$\frac{2x}{a^2}\pm\frac{2y}{b^2}y'=0, \qquad y'=\mp\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y};$$

$$\eta-y=\mp\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}(\xi-x);$$

$$\frac{x\xi}{a^2}\pm\frac{y\eta}{b^2}=1.$$

За параболу

$$y^2-2px=0;$$

$$-2p+2yy'=0, \qquad y'=\frac{p}{y};$$

$$\eta-y=\frac{p}{y}(\xi-x);$$

$$\eta y=p(\xi+x).$$

За одређивање другог извода y'' имплицитне функције искористићемо једначину (4)

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0; \tag{4}$$

ову једначину можемо тумачити као резултат диференцирања функције $f(x, y)$ по x на два начина: прво непосредно по x, које улази у ту функцију непосредно, — то диференцирање даје $\frac{\partial f}{\partial x}$; па затим, друго посредно по x уколико x улази у $f(x, y)$ помоћу y и то по правилу диференцирања сложене функције. То друго диференцирање даје члан $\frac{\partial f}{\partial y}y'$. Потпуни резултат диференцирања, састављени из наведена два дела, мора бити једнак нули, јер функција $f(x, y)$ има сталну вредност, наиме нулу.

Диференцирајмо сад сваки члан једначине (4) по x, уколико тај члан зависи од x непосредно и посредно помоћу y и y'. Тада имамо

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0,$$

одакле изводимо

$$y'' = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 \right) : \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Нећемо улазити у одређивање извода вишега реда, јер се оно врши по истом поступку.

Функција више променљивих исто тако може бити одређена у имплицитном облику. Тако једначина

$$F(x, y, z) = 0$$

одређује z у функцији x и y

$$z = \varphi(x, y).$$

За одређивање делимичних извода $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ може се применити исти поступак, само место тоталног диференцирања по x треба диференцирати делимично по x, односно по y. Та диференцирања доводе до једначина

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

из којих можемо одредити изводе $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Примена истог поступка омогућује да се одреде и делимични изводи вишег реда.

Вежбања. Наћи извод y' функције y одређене једначином:

1. $5x^2 + 3xy + 4y^2 - 12x + 16y - 20 = 0$; 2. $xy = a^2$; 3. $(ax + b)(my + n) = k^2$; 4. $\sin(xy) + xy - 3 = 0$. 5. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$; 6. $x^3 + y^3 - 3a\,xy = 0$; 7. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. 8. $(a + x)x^2 - (a - x)\, y^2 = 0$. 9. $f(x + y) = 0$ (искористити закључак: $x + y = const.$). 10. $e^{xy} - x + y = 0$.

11. Написати једначину тангенте на кружној линији $(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0$ за дату тачку M (x, y) на тој кружној линији.

12. Написати једначину тангенте на елипси са једначином $x^2 + 4y^2 - 25 = 0$ у тачки M (3, 2),

13. Написати једначину тангенте на хиперболи са једначином $xy - 6 = 0$ у тачки M (2, 3).

14. Наћи први и други извод функције y одређене једначином:

a. $x^2 + y^2 - R^2 = 0$; b. $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$; c. $xy = a^2$; d. $\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{a}$; e. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$; f. $y^2 - 2px = 0$; g. $a \sin(x + y) + b \cos(x - y) + ce^{x^2 + y^2} = 0$. h. $\log(\sin x + \cos y^2) + e^{xy} = const.$

15. Из једначине

$$\frac{pv}{1 + \alpha t} = const.$$

одредити: $\frac{\partial p}{\partial v}, \frac{\partial p}{\partial t}$, ако је $p = p(v, t)$; $\frac{\partial v}{\partial p}, \frac{\partial v}{\partial t}$, ако је $v = v(p, t)$ и најзад, $\frac{\partial t}{\partial p}, \frac{\partial t}{\partial v}$, ако је $t = t(p, v)$.

16. Одредити $\frac{\partial z}{\partial x}$, и $\frac{\partial z}{\partial y}$ из једначине

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

17. Одредити $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ из једначине

$$ae^{y + z + u} + be^{z + u + x} + ce^{u + x + y} + de^{x + y + z} = A.$$

§ 42. Хомогена функција. Ајлерова једначина

Математичке формуле и једнакости добијене из проучавања стварних односа међу конкретним величинама (у Геометрији, Механици, Физици, Хемији и другим дисциплинама) изражене помоћу бројева морају имати нарочиту особину, која се зове **х о м о г е н о с т**. Прво ћемо ову особину објаснити на примерима.

Ако са x, y, z означимо дужине ивица правоуглог паралелепипеда, збир l (linea) дужина свих ивица износи

$$l = 4(x + y + z);$$

површина S (superficies) тог паралелепипеда има вредност

$$S = 2(yz + zx + xy),$$

а запремина V (volumen)

$$V = xyz.$$

Сваки члан првог збира је дужина, величина са једном димензијом; другог збира — површина, величина са две димензије; трећи израз — запремина, има три димензије. Видимо да су сви чланови у једном изразу исте димензије, они су, дакле, хомогени.

Како би смо могли испитати неку функцију, на пр. функцију од две промењљиве

$$f(x, y),$$

да ли је она хомогена или не, и, у случају ако је хомогена, како ћемо одредити број димензија?

Ако ивице са мерним бројевима $x\,m$, $y\,m$, $z\,m$ у метрима измеримо другом јединицом, на пр., центиметрима, сваки ће се број повећати истим фактором k (у овом примеру $k = 100$). Нови број l' раније дужине l треба да буде такође k-пута већи, тј. да износи kl. Ако је наш израз хомоген, онда и са десне стране, која сад постаје

$$4(kx + ky + kz),$$

треба да добијемо k-пута већу величину. Заиста,

$$4(kx + ky + kz) = k \cdot 4(x + y + z).$$

Имамо, према томе, израз

$$l' = k \cdot 4(x + y + z) = kl.$$

Са десне се стране фактор k јавља у првом степену. Величина l је величина прве димензије.

За израз површине имали бисмо

$$S' = k^2 S,$$

при чему је фактор k на другом степену.

Видимо да функцију $f(x, y)$ треба звати хомогеном, ако задовољава услов

$$(1) \qquad f(kx, ky) = k^n f(x, y),$$

где је n број димензија, кратко д и м е н з и ј а х о м о г е н е ф у н к ц и ј е.

Нагласићемо да претходна једначина мора важити за сваку вредност броја k.

Слична једначина треба да важи и за случај хомогене функције од више промењљивих, наиме

$$f(kx, ky, kz, ku, \cdots) = k^n f(x, y, z, u, \cdots).$$

Пошто једначина (1) важи за сваку вредност k, као резултат диференцирања те једначине по k треба да се добије једначина која такође важи за сваку вредност k.

Како је лева страна једначине (1) сложена функција од k, диференцирање по k треба извршити овако. Привремено ћемо ставити $kx = u$, $ky = v$; тада са леве стране имамо функцију $f(u, v)$. Извод ове функције по k изгледа[1])

$$\frac{\partial f}{\partial k} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial k} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial k},$$

а како је

$$\frac{\partial u}{\partial k} = x, \qquad \frac{\partial v}{\partial k} = y,$$

имамо

$$\frac{\partial f}{\partial k} = \frac{\partial f}{\partial u}x + \frac{\partial f}{\partial v}y.$$

Резултат диференцирања десне стране непосредно се може написати у облику

$$nk^{n-1} f(x, y).$$

На овај начин имамо једначину

$$\frac{\partial f}{\partial u}x + \frac{\partial f}{\partial v}y = nk^{n-1} f(x, y),$$

---

[1]) Ако је $f = f(u, v)$, а $u = u(x)$, $v = v(x)$, извод ове сложене функције по x према обрасцу

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv,$$

има облик

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{du}{dx}.$$

Слични обрасци важе за случај сложене функције више промењљивих. Ако је $f = f(u, v)$, а $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, за делимичне изводе имамо

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

која треба да важи за сваку вредност k. Ако ставимо $k=1$ и заменимо $u=kx$ са x и $v=ky$ са y, дефинитивно се може написати

$$\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y=nf(x,y).$$

Та се једначина зове **Ајлерова једначина** за хомогену функцију. У случају више промèнљивих она има облик

$$\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y+\frac{\partial f}{\partial z}z+\cdots=nf(x,y,z,\cdots)$$

и каже да је за хомогену функцију збир свих производа делимичног извода и одговарајуће променљиве једнак производу броја димензија и саме функције.

На пр., за функцију

$$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$$

имамо

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2(ax+by),\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2(bx+cy)$$

и према томе је

$$\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y=2[x(ax+by)+y(bx+cy)]=2(ax^2+2bxy+cy^2)=$$
$$=2f(x,y).$$

Вежбања. 1. Које услове треба да задовољавају бројеви m, n, p, q да бином

$$z=3x^m y^n-2x^p y^q$$

буде хомогена функција k-те димензије?

2. За хомогене функције

$$z=\frac{x^2+y^2}{x-y},\quad u=\frac{\sqrt{x}}{yz}+\frac{\sqrt{y}}{zx}+\frac{\sqrt{z}}{xy},\ w=\frac{x+y+z+u}{xyzu}$$

потврдити Ајлерову теорему.

3. Једначину

$$\frac{\partial f}{\partial u}x+\frac{\partial f}{\partial v}y=nk^{n-1}f(x,y)$$

још једанпут диференцирати по k, затим ставити $k=1$. Написати резултат, који претставља **Ајлерову јадначину другог реда за хомогену функцију**.

4. Ако је у правоуглом паралелепипеду једна од димензија x, y, z, на пр. z, узела јединичну вредност, његова површина има вредност

$$S=2(y+x+xy).$$

Зашто је тај израз изгубио своју хомогеност и како је можемо поново успоставити?

5. Навести примере хомогених функција једне и нулте димензије и потврдити на њима Ајлерову теорему за хомогену функцију.

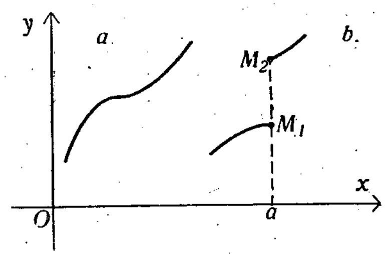
ГЛАВА V

ПРИМЕНЕ ИЗВОДА И ДИФЕРЕНЦИЈАЛА

§ 43. Непрекидност функције

У овој књизи занимаће нас само оне функције којима одговара график. Тај график може бити или стварно претстављен на слици или га ми можемо тако замислити.

Ако је график претстављен непрекидном линијом (сл. 73, *a*), функција која му одговара непрекидна је.



Сл. 73. Функције: *a*. непрекидна, *b*. прекидна

Може се десити да се ордината y мења непрекидно до једне одређене тачке M_1 са апсцисом x и ординатом y_1 (сл. 73, *b*), а затим продужује да се мења не од тачке M_1 него од тачке M_2 са ординатом y_2. Тада се каже да за вредност $x = a$ функција $y = f(x)$ чини скок или има прекид са вредношћу $y_2 - y_1$; функција је за ту вредност аргумента прекидна.

Има ли таквих функција у природи? Natura non facit saltus! — Природа не чини скокове! — тврди Лајбниц. Углавном је Лајбниц у праву — све се у природи мења непрекидно.

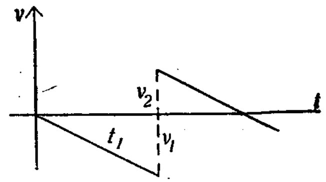
Кад се тело креће, оно мења свој положај непрекидно; у истом тренутку оно не може да прескочи из једног положаја у други.

Ако се тело деформише, рецимо, мења своју запремину, оно не може истовремено имати две запремине; запремина се мења непрекидно, чак и ако се та промена врло брзо врши, на пр., експлозијом.

Понекад се непрекидна промена врши нагло, у току кратког времена, и у врло компликованој форми. Тада је згодније за проучавање такве појаве претпоставити да је извршен скок и тиме се ослободити од анализе појаве у свима њеним детаљима. Навешћемо пример који би то илустровао.

Еластична тешка лопта после вертикалног пада на хоризонталну еластичну подлогу отскаче вертикално навише. Јасно је да се положај лопте мења непрекидно. Како се при томе мења брзина?

До судара брзина v по апсолутној величини расте (сл. 74); ако позитивни смер изаберемо навише, знак брзине је негативан. Нека ова брзина у тренутку судара t_1 има апсолутну вредност v_1. При судару брзина мења знак, постаје позитивна; ову ћемо позитивну вредност означити са v_2. После еластичног судара брзина v_2 има вредност



Сл. 74. График брзине при судару

$$v = \mu v_1,$$

где је $\mu \leqslant 1$ (читај ми) коефицијент успостављања брзине. Тај коефицијент зависи од еластичних особина лопте и подлоге. Видимо да је у овом кретању вредност брзине направила скок једнак $v_1 + v_2$; ову величину треба додати полазној брзини $(-v_1)$ да бисмо добили коначну брзину v_2 за време судара. Занемарујући оно што се дешава за врло кратко време самог судара, кад се лопта и подлога непрекидно деформишу, можемо тврдити да је брзина лопте у овој појави прекидна функција времена.

Како ћемо се рачуном уверити да ли је функција $f(x)$ за $x = a$ непрекидна или има прекид?

Означимо са h позитивну величину и узмимо две вредности функције

$$f(a+h) \quad \text{и} \quad f(a-h).$$

Ако ове две вредности, под условом да h тежи нули, теже истој величини $f(a)$, наша је функција за $x = a$ непрекидна[1]).

Ако је

$$\lim_{h \to 0} f(a-h) = \mathrm{A},$$

а

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = \mathrm{B},$$

---

[1]) Тачније, услов непрекидности функције $f(x)$ у датој тачки, рецимо, за $x = a$, можемо овако формулисати: функција $f(x)$ за $x = a$ зове се непрекидна, ако за сваки произвољно изабрани позитивни број ε увек можемо наћи такав број η да из неједнакости $|x - a| < \eta$ следује неједнакост $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

После тога можемо тврдити да је функција $f(x)$ непрекидна у интервалу $p \leqslant x \leqslant q$, ако је непрекидна у свакој тачки тог интервала.

и $A \neq B$ функција је прекидна са скоком $B - A$. Исто тако, ако је $A = B$, али $f(a) \neq A$, функција је прекидна.

Ако за $x = a$ функција $f(x)$ тежи бесконачности, сматра се да је она за ову вредност аргумента прекидна. На пр., функција

$$y = \frac{1}{x}$$

за $x = 0$ је прекидна[2]), јер $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \to +\infty$; а $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{-h} \to -\infty$.

Вежбања. 1. Навести примере непрекидних функција на основу облика њихових графика. 2. За коју вредност аргумента функција $y = \frac{2}{x-1}$ има скок?

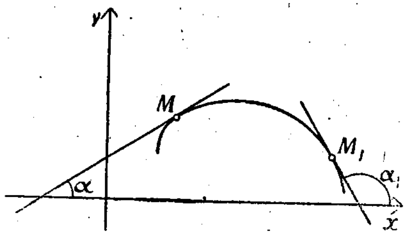
3. За које су вредности аргумента функција $tg\,x$ и $cotg\,x$ прекидне?

4. За које је вредности аргумента функција $y = \frac{tgx}{1-x}$ прекидна?

§ 44. Рашћење и опадање функције

Ако за одређену вредност аргумента x функција $y = f(x)$ расте, тангента на график гради оштар угао са осом x (угао α на слици 75). Пошто је тангенс оштрог угла позитиван, а тај је тангенс једнак изводу y', можемо тврдити да је у случају када функција расте,

$$y' > 0.$$



Сл. 75. Рашћење и опадање функције

Обрнуто, када је $y' > 0$, функција y расте.

Ако тангента гради са осом Ox туп угао (угао α_1 на слици 75),

$$y' < 0;$$

ова неједнакост је услов опадања функције.

---

[2]) Према наведеној примедби о дефиницији непрекидне функције непрекидност и прекидност ове функције се могу овако проучити. Пошто је

$$|f(x+h) - f(x)| = \left|\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{-h}{x(x+h)}\right|,$$

потребно је за доказ непрекидности функције наћи за свако x такву позитивну вредност h, да за, рецимо, позитивно x буде $\left|\frac{h}{x(x+h)}\right| < \varepsilon$ или $h < \varepsilon x(x+h)$, одакле следује да је $h < \frac{\varepsilon x^2}{1+\varepsilon x}$. Из тог обрасца видимо да је ово увек могуће изузев случаја, када је $x = 0$. Сличан резултат важи и за негативне вредности x.

Према томе је знак првог извода довољан за одређивање понашања функције у смислу рашћења и опадања.

За функцију, која у датом интервалу или само расте или само опада, каже се да је у том интервалу **монотона**.

Узмимо неколико примера.

Функција равномерног процеса $y = ax + b$ има за извод $y' = a$; према томе **процес прогресира**, напредује, ако је $a > 0$ и **регресира**, назадује, за $a < 0$.

Код квадратне функције

$$y = ax^2 + bx + c$$

са

$$y' = 2ax + b$$

рашћењу одговара услов

$$2ax + b > 0,$$

одакле је

$$2ax > -b.$$

Ако је $a > 0$ за вредност аргумента

$$x > -\frac{b}{2a}$$

функција y расте. Ако је $a < 0$, функција y расте за аргументе

$$x < -\frac{b}{2a}.$$

Функција $y = e^x$ има извод $y' = e^x$, који је позитиван за све вредности x. Према томе ова функција стално расте.

Функција $y = sin\,x$ има извод $y' = cos\,x$, који је у области од 0 до 2π позитиван за x у границама

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2};$$

у овим границама функција $sin\,x$ расте и то, као што знамо, од -1 до $+1$.

Извод $tg\,x$ има вредност

$$y' = \frac{1}{cos^2 x};$$

он је увек позитиван, према томе функција $tg\,x$ увек расте и то у границама од $-\infty$ до $+\infty$. Прелаз од негативне на позитивну бесконачност претставља скок ове функције; функција $tg\,x$ за $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, где је k цео број, има прекиде.

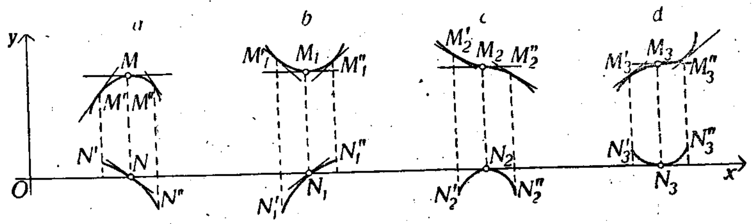
Вежбања. Проучити рашћење и опадање функција:

1. $y=2x+1$; 2. $y=2x^2-4x+1$; 3. $y=2-3x-4x^2$; 4. $y=\frac{4}{x}$;
5. $y=\frac{2x-1}{x+1}$; 6. $y=e^{-x}$. 7. $y=\frac{1}{e^{x^2}}$; 8. $y=cos\,x$; 9. $y=cotg\,x$; 10. $y=log\,x$;
11. $y=arctg\,x$; 12. $y=\frac{1}{ax^2+bx+c}$.

§ 45. Екстремум функције

У претходном параграфу проучили смо понашање графика, када је $y'\neq 0$.

Да видимо како се понаша график, када је $y'=0$. Јасно је да је у овом случају тангента паралелна оси Ox.



Сл. 76. Максимум, минимум и превојна тачка

Ако се крива и са једне и са друге стране од тачке додира налази испод тангенте (сл. 76,a), каже се да функција има **максимум** (**maximum**, кратко, max). Обратно, ако се крива налази изнад тангенте (сл. 76,b), функција има **минимум** (**minimum**, кратко, min.). Најзад, ако се крива до тачке додира налази изнад (сл. 76,c,) односно испод (сл. 76,d) тангенте, а после ове тачке испод, односно изнад тангенте, за функцију се каже да она пролази кроз **превојну тачку**. Тачке, за које је $f'(x)=0$, зову се **стационарне тачке**, а вредности функције за те тачке — **стационарне вредности**.

Заједнички појам максимума и минимума има назив **екстремума** (**extremum**) функције.

Према томе услову

$$y'=0$$

одговара или екстремум или превојна тачка.

Изведимо сад услове за сваки од екстремума и за превојну тачку. Нацртаћемо у томе циљу испод графика функције график извода y'.

У случају максимума за тачку M', испред тачке M, угаони коефицијент тангенте је позитиван; одговарајућа тачка N' графика извода мора се налазити изнад осе Ox. За саму тачку M је $y'=0$; тачка N графика извода лежи на осовини Ox. Најзад, за тачку M'' иза тачке M, имамо $y'<0$; одговарајућа тачка N'' графика извода лежи испод осовине Ox. График функције y' прелази из области изнад у област испод осе Ox, функција y' опада. Извод ове функције у нашем случају, а то је други извод y'', негативан је. Према томе можемо тврдити да условима

$$y'=0, \qquad y''<0$$

одговара максимум.

Слична анализа (сл. 76,b) показује да условима

$$y'=0, \qquad y''>0$$

одговара минимум.

Ако су

$$y'=0, \qquad y''=0$$

не можемо само на основу ових извода ништа казати о карактеру функције. Дубља анализа показује да тај карактер зависи од вредности наредних виших извода. Наиме, ако је $y'''\neq 0$, крива линија има превојну тачку; за $y'''<0$ имамо тачку показану на слици 76,c, а за $y'''>0$ на слици 66,d. Ако је и $y'''=0$, треба рачунати наредни извод.

Можемо навести ову теорему без доказа:

Да би функција једне независно променљиве имала екстремум за одређену вредност аргумента, потребно је и довољно да за ту вредност узастопни изводи буду једнаки нули и да извод најнижег реда који није једнак нули буде парног реда; ако је он позитиван, биће минимум, ако негативан — максимум.

Према томе за одређивање екстремума дате функције $f(x)$ треба применити овај поступак:

1. узети први извод $f'(x)$,
2. изједначити га са нулом и решити добијену једначину

$$f'(x)=0.$$

Нека она има стварне корене $a_1, a_2, \cdots, a_k$, где је k коначан или (у случају трансцендентне једначине) бесконачан број. Ове вредности аргумента, у случају екстремума, понекад се зову и **к р и т и ч к е в р е д н о с т и**.

3. израчунати други извод $f''(x)$ и ставити у његов израз вредности корена; тада ћемо добити вредности

$$f''(a_1), \quad f''(a_2), \quad \cdots, \quad f''(a_k).$$

Ако су све ове вредности различите од нуле, функција има k екстремума и њихову природу одређује знак вредности другог извода. За позитивне вредности имамо минимум, за негативне — максимум.

4. Саме екстремалне вредности рачунају се овако:

$$f(a_1), \; f(a_2), \; \cdots, \; f(a_k).$$

А к о је ма за који корен, рецимо, за a_1,

$$f''(a_1) = 0,$$

потребно је извршити наредну операцију:

5. израчунати трећи извод $f'''(x)$. Ако је

$$f'''(a_1) \neq 0,$$

апсциси a_1 одговара превојна тачка. Ако је

$$f'''(a_1) = 0,$$

6. треба израчунати наредни, четврти извод $f^{(IV)}(x)$ и ставити у њега $x = a_1$. Ако је

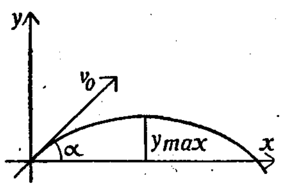
$$f^{(IV)}(a_1) \neq 0$$

имамо екстремум, максимум или минимум, према знаку тог израза.

Из претходног се јасно види на који бисмо начин могли продужити ову анализу.

Решимо сада неколико задатака.

I. Кретање (сл 77) косог хитца (тешка тачка бачена косо према хоризонту) врши се по путањи чија је једначина



Сл 77. Путања косог хитца

$$y = bx - \frac{1}{2}ax^2,$$

где су

$$a = \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha}, \qquad b = tg\,\alpha,$$

са ознакама: g — убрзање Земљине теже, v_0 — почетна брзина тачке, α угао нагиба ове брзине према хоризонту. Потребно је одредити екстремум висине.

1. Рачунамо извод

$$y' = b + ax.$$

2. Решавамо једначину

$$y' = b - ax = 0$$

и добијамо корен

$$x = \frac{b}{a} = \frac{v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha$$

3. Рачунамо други извод

$$y'' = -a = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Пошто је он негативан, имамо максимум, као што то следује и из саме природе проблема.

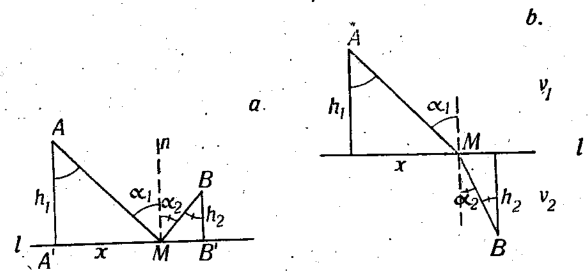
4. Одређујемо вредност тог максимума

$$y_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha.$$

II. Дат је положај тачака A и B ван праве l, са исте стране од те праве. Наћи на правој l тачку M тако да збир растојања

(1) $$AM + MB$$

буде најмањи (сл. 78, а).



Сл. 78. Закони одбијања и преламања светлости

Означимо са h_1 и h_2 растојање тачака A и B од праве l и са a растојање између подножја A′ и B′ нормала спуштених из тачака A и B на праву l.

Нека растојање од тачке M до тачке A′ буде x, а збир (1) нека је y. Непосредно из слике имамо

$$y=\sqrt{x^2+h_1^2}+\sqrt{(a-x)^2+h_2^2}\,.$$

За извођење услова екстремума изједначимо са нулом први извод

$$y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+h_1^2}}-\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+h_2^2}}=0\,.$$

Ако са α_1 означимо угао нормале n и праве AM, а са α_2 угао исте нормале са правом BM, претходну једначину можемо заменити овом

$$\sin\alpha_1=\sin\alpha_2\,,$$

одакле дефинитивно долазимо у нашем случају до услова

$$\alpha_1=\alpha_2\,,$$

који изражава добро познати закон одбијања светлости. Светлост излази из тачке A, одбија се од равни и пролази кроз тачку B, при чему је упадни угао једнак одбојном углу.

Јасно је из природе самог задатка да наш услов одговара минимуму (зашто?).

III. Нека су дате две тачке A и B са различитих страна од праве l. Светлост се у средини тачке A простире брзином v_1, а у средини тачке B брзином v_2. Наћи на правој l тачку M под условом да време T за које светлост пређе из тачке A у тачку B буде најкраће (Ферматов принцип).

Са ознакама сличним претходнима (сл. 78, b) време T изражава се

$$T=\frac{\sqrt{x^2+h_1^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(a-x)^2+h_2^2}}{v_2}\,,$$

одакле за екстремум имамо

$$\frac{dT}{dx}=\frac{1}{v_1}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+h_1^2}}-\frac{1}{v_2}\,\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+h_2^2}}=0\,,$$

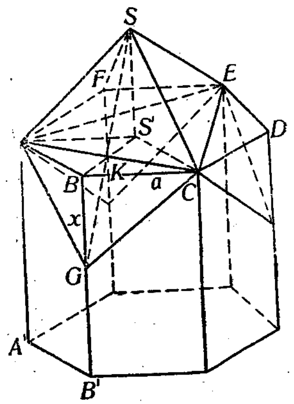
или

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1}=\frac{\sin\alpha_2}{v_2}\,.$$

Овај услов одговара закону преламања светлости, јер тврди да однос синуса упадног и преломног угла има за две дате средине сталну вредност,

IV. Решимо још такозвани „задатак пчела".

Наћи на основици шестостране правилне призме (сл. 79) такву тачку S да равни постављене кроз ову тачку и три мање дијагонале шестоугла, основе призме, стварају заједно са остатком бочне површине призме најмању површину тела дате запремине. Страна a основице шестоугла дата је.



Сл. 79. Пчелина ћелија

Приметићемо пре свега да за сваки положај тачке S на основици запремина тела остаје иста, једнака запремини призме. Заиста, запремина сваког од тетраедара, на пр. ABCG, који је одузет од запремине призме једнака је запремини одговарајућег тетраедра ACS′S додатог призми. Према томе, задржавајући исту запремину, можемо бирати положај тачке S само под условом да површина тела буде најмања.

Површина, која треба да има минималну вредност, састављена је од шест трапеза облика AA′B′G и три ромба, једнаких ромбу ASCG.

Ако означимо AA′ са h и BG са x, површина свих трапеза биће

$$(2)\qquad 6\left(ah-\frac{1}{2}ax\right)=6ah-3ax.$$

Површину ромба израчунаћемо помоћу дијагонала AC и SG. Пошто је

$$AC=a\sqrt{3}$$

$$SG=2GK=2\sqrt{\overline{BG}^2+\overline{BK}^2}=2\sqrt{x^2+\frac{1}{4}a^2},$$

за површину три ромба се добија

$$(3)\qquad 3.\frac{1}{2}.AC.SG=3a\sqrt{3}\sqrt{x^2+\frac{1}{4}a^2}.$$

Збир површина (2) и (3) даће за тражену површину

$$Q=6ah-3ax+3a\sqrt{3}\sqrt{x^2+\frac{1}{4}a^2}.$$

Услов за екстремум ове функције даје

$$\frac{dQ}{dx} = -3a + 3a\sqrt{3}\frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}a^2}} = 0,$$

одакле је

$$x = \frac{1}{4}a\sqrt{2}.$$

Ако хоћемо да одредимо угао ASC $= \alpha$ код врха S, имаћемо

$$sin\frac{\alpha}{2} = \mathrm{AK}:\mathrm{AG} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{3a\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

и према тој вредности синуса половине угла добија се

$$\alpha = 109^0 28' 16''.$$

Тај угао на пчелиној ћелији измерио је, још 1712 године, Маралди и нашао је вредност $109^0 28'$. Реомир и Кениг нашли су исту вредност угла рачунским путем под условом да површина ћелије буде најмања, тј. да пчела потроши најмање воска за изградњу те површине. Резултати мерења и рачуна поклопили су се; пчела се показала као добар математичар, који је без диференцијалног рачуна и логаритамских таблица, само на основу свог инстинкта, решио компликован математички задатак.

У вези са екстремумом функције једне независно променљиве навешћемо неколико примедаба.

1. Ако у једном интервалу функција има више максимума, односно минимума, највећи од максимума зове се **м а к с и м у м м а к с и м о р у м** (*maximum maximorum*, кратко, max.—max.), а најмањи од минимума **м и н и м у м м и н и м о р у м** (*minimum minimorum*, кратко, min —min.). Избор max.—max. између свих максимума врши се помоћу непосредног упоређивања вредности тих максимума. Слично се ради за min.—min.

2. Не треба мешати два у суштини различита појма; с једне стране, појам **н а ј в е ћ е (н а ј м а њ е) в р е д н о с т и ф у н к ц и ј е**, која се понекад зове **а п с о л у т н и м а к с и м у м (м и н и м у м)** и, с друге стране, појам **м а к с и м у м а (м и н и м у м а)**, који се зове и **р е л а т и в н и м а к с и м у м (м и н и м у м)**.

Објаснимо то на примерима.

Функција

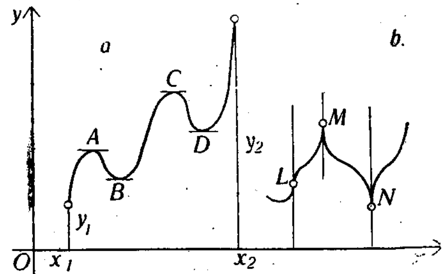
$$y = e^x$$

у интервалу, рецимо, од 0 до 1 има вредности од 1 до e и при томе стално расте. Ова функција у том интервалу нема екстремума, нема релативних ни максимума ни минимума. Али ова функција има најмању вредност 1, тј. апсолутни минимум и највећу вредност e а то је апсолутни максимум.

Као други пример, узмимо функцију са графиком показаним на слици 80,*a*. Функција у интервалу од x_1 до x_2 има два релативна максимума, у тачкама A и C, и два релативна минимума (B и D), апсолутни минимум са вредношћу y_1 и апсолутни максимум са вредношћу y_2.

Обратимо пажњу да минимум (D) може бити већи од максимума (A). Функција има max.—max. у тачки C и min.—min. у тачки B.

Као што смо видели, проучавање релативног екстремума своди се на проучавање извода вишег реда за вредности корена првог извода. За одређивање и проучавање апсолутног екстремума не постоји сличан поступак, већ треба проучити непосредно промену вредности функције у датом интервалу.



Сл. 80. *a.* Примери апсолутних и релативних екстремума; *b.* копљасте тачке и превојна тачка са тангентом паралелном *y* оси

3. При проучавању понашања непрекидне функције у датом интервалу може наступити и тај случај да тангента на кривој у датој тачки заузме вертикалан положај, тј. положај праве паралелне y оси. Тада је

$$f'(x) \to \infty. \tag{4}$$

Овај случај треба исто тако рашчланити на три случаја (сл. 80,*b*). Случај тачке M, када график функције претставља **к о п љ а с т у т а ч к у** са оштрицом навише. Тај случај одговара највећој вредности функције. Затим случај копљасте тачке N са оштрицом наниже — то је најмања вредност. Најзад случај, кад се тачка L јавља као превојна тачка криве.

Пошто за све ове тачке важи услов (4), апсцисе копљастих тачака са вертикалном тангентом треба да задовољавају једначину

$$\frac{1}{f'(x)} = 0 .$$

Одређивање корена те једначине и непосредно проучавање понашање криве око одговарајућих тачака решава питање о карактеру вредности функције у тим тачкама.

Пређимо на проучавање екстремума функције две независно променљиве

$$z = f(x, y),$$

којој, како смо видели, одговара површина.

Ако за $x = a$, $y = b$ функција има максималну вредност c, потребно је да се око тачке на површини са координатама (a, b, c) може показати област где су вредности функције z мање од вредности $c = f(a, b)$.

Ако нашу површину пресечемо са равни $y = b$, добићемо у тој равни криву са једначином

$$z = f(x, b) .$$

За тачку $x = a$ функција $f(x, b)$ мора имати екстремум, а то значи први извод те функције по x треба да буде једнак нули. Пошто је тај извод делимичан, услов треба написати

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 .$$

Слично расуђивање доводи и до другог услова

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 .$$

Према томе за екстремум функције две независно променљиве имамо услове

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 .$$

Ови су услови неопходни за екстремум, али нису довољни. За проучавање довољних услова треба узети у обзир други диференцијал

функције z, који претставља главни део прираштаја функције. Тај други диференцијал изгледа

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 =$$
$$= A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2,$$

где смо, ради краткоће, увели ознаке

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = C;$$

$$dx = \xi, \qquad dy = \eta.$$

За дату тачку са координатама (a, b, c) величине A, B, C су константне. Ако тај други диференцијал има, за све вредности ξ и η, у области око дате тачке, негативну вредност, тј. ако је $d^2z < 0$, функција у тој тачки има максимум. За $d^2z > 0$ она има минимум. За $d^2z = 0$, питање остаје нерешено; у томе случају треба се обратити на диференцијале вишега реда, на чему се нећемо овде задржавати.

За проучавање знака квадратне функције

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$$

можемо овако поступити. Трансформишимо ову функцију на овај начин

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 = \frac{1}{A}(A^2\xi^2 + 2A\xi B\eta + B^2\eta^2) - \frac{B^2}{A}\eta^2 + C\eta^2 =$$
$$= \frac{1}{A}\left[(A\xi + B\eta)^2 - (B^2 - AC)\eta^2 \right].$$

Из овог облика функције закључујемо да, у случају

$$B^2 - AC < 0 ,$$

функција има сталан знак и то знак величине A. Када је

$$B^2 - AC > 0 ,$$

знак функције може бити позитиван и негативан. Најзад, ако је

$$B^2 - AC = 0 ,$$

постоји правац одређен једначином

$$A\xi + B\eta = 0,$$

дуж којег је $d^2z = 0$; у овом случају, као што смо казали, питање остаје отворено.

Према претходном за одређивање екстремума функције две независно променљиве треба применити поступак:

1. Израчунати прве делимичне изводе и за једначине

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

одредити корене.

2. Израчунати друге изводе и за сваки пар корена одредити вредност израза

$$\Delta = B^2 - AC = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

После тога се руководимо таблицом

$$\Delta < 0 \quad \text{постоји екстремум и то} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0 & \text{минимум} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0 & \text{максимум} \end{cases}$$

$\Delta > 0$ нема екстремума

$\Delta = 0$ питање остаје нерешено.

Примећујемо да у овој таблици нема случаја $\Delta < 0$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, јер је такав случај немогућ (зашто?).

Слична је теорија екстремума функције више променљивих. Ако је дата функција n независно променљивих $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

неопходни услови екстремума су

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0.$$

У анализу природе екстремума овог случаја нећемо овде улазити. Често пута сама природа проблема одређује карактер екстремума.

Решимо неколико примера.

I. Наћи екстремум функције

$$z = x^3 + y^3 - 3axy.$$

Решавамо једначине

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3ay = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3ax = 0,$$

одакле имамо

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = 0;$$

$$x_2 = a, \qquad y_2 = a.$$

Даље рачунамо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \qquad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_1 = A_1 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_2 = A_2 = 6a,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3a, \qquad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_1 = B_1 = -3a, \qquad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_2 = B_2 = -3a.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y, \qquad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_1 = C_1 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_2 = C_2 = 6a.$$

$$\Delta_1 = B_1^2 - A_1C_1 = (-3a)^2 - 0\cdot 0 > 0.$$

$$\Delta_2 = B_2^2 - A_2C_2 = (-3a)^2 - 36a^2 < 0.$$

За $x_2 = a$, $y_2 = a$ функција има екстремум и пошто је

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_2 = 6a > 0,$$

тај екстремум је минимум.

За почетак координата $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ функција нема екстремума.

III. Наћи кутију у облику правоуглог паралелепипеда највеће запремине, под условом да њена дужина заједно са периметром попречног пресека износи 120 см.

Ако дужину кутије означимо са x, а остале димензије са y и z, постављени се услов изражава једначином

$$x + 2(y + z) = 120.$$

одакле је

$$x = 120 - 2(y + z).$$

Пошто је запремина кутије

$$V = xyz,$$

треба да одредимо екстремум функције

$$V = yz(120 - 2y - 2z) = 2yz(60 - y - z).$$

Услови за екстремум постају

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 2(60z - 2yz - z^2) = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2(60y - y^2 - 2yz) = 0,$$

Ове једначине дају потребно решење

$$y = z = 20, \quad x = 40,$$

$$V = 16000 \text{ cm}^3.$$

Претходни задатак може се решити и на други начин. Казаћемо неколико речи о теорији тога начина.

Узмимо да треба наћи екстремум функције

$$(5) \qquad z = f(x, y),$$

а под условом да између x и y постоји веза

$$(6) \qquad \varphi(x, y) = 0.$$

Ако замислимо да смо из (6) одредили y као функцију од x и ставили у (5), онда ће z бити функција само једне независно променљиве x и услов екстремума ће бити

$$(7) \qquad \frac{dz}{dx} = 0.$$

Пошто је

$$dz = \frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

и из (6)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0,$$

можемо из последње једначине одредити

$$dy = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} dx,$$

после чега се за dz добија

$$dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \right) dx.$$

Ако ову вредност ставимо у (7), добијамо услов

$$(8) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

или, у облику детерминанте,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix} = 0,$$

који заједно са једначином (6) даје две једначине за одређивање оних редности x и y за које функција z може имати екстремум.

Показаћемо како се исто решење формално може и друкчије добити.

Помножимо леву страну једначине (6) произвољном константом λ и додајмо функцији z; добићемо нову функцију

$$Z = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y).$$

У тој функцији x и y сматрамо као независно променљиве, те ћемо имати два услова за екстремум

$$
(9) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \end{aligned}
$$

Једначине (9) са једначином (6) довољне су са одређивање три непознате величине: x, y, λ.

Покажимо да је једначина за одређивање x и y, која следује из (9), идентична са условом (8). Заиста, ако елиминишемо множилац λ из једначина (9), добићемо једначину (8).

Проблем одређивања екстремума функције са допунским условом зове се проблем *условног екстремума*. За решавање таквих проблема имамо ово Ајлерово правило:

Ако су променљиве функције, чији екстремум тражимо, везане једном или више једначина, треба леву страну сваке везе помножити неодређеним множиоцем и додати датој функцији. После тога се одређивање екстремума ове функције врши по правилу екстремума за функцију више независно променљивих.

Ова метода решавања проблема условног екстремума зове се *метода неодређених множилаца.*

Решимо овом методом проблем о највећој кутији.

Зато саставимо функцију

$$u = xyz + \lambda[x + 2(y + z) - 120]$$

и применимо правило обичног екстремума. Имаћемо три услова

$$(10) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = yz + \lambda = 0,$$

$$(11) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = xz + 2\lambda = 0,$$

$$(12) \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = xy + 2\lambda = 0,$$

који, заједно са условом

$$13) \qquad x + 2(y + z) - 120 = 0,$$

дешавају преблем и то у простијој форми него раније. Заиста, из (11) и (12) непосредно имамо

$$y = z$$

а затим из (10) и (11) добијамо

$$x = 2y.$$

После тога из (13) непосредно одређујемо

$$2y + 2y + 2y = 120, \text{ или } y = 20,$$

а затим дефинитивно изводимо

$$x = 40, \; y = z = 20.$$

Вежбања.

Проучити екстремуме, превојне тачке и копљасте тачке датих функција и према добијеним резултатима, по могућности, нацртати графике; искористити још и поједине тачке, нарочито пресеке криве са координатним осама.

1. $x^2 - 2x - 3$. 2. $3 + 2x - x^2$. 3. $x^3 - 3x^2 - 9x - 3$. 4. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$.

5. $x^4 - 2x^2$. 6. $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10x^2 - 20x + 5$. 7. $(x-1)^{1/3}(x-3)^{2/3}$. 8. $2 - (x-1)^{2/3}$.
9. e^{-x^2}. 10. $2e^{2x} + 3e^{-2x}$. 11. x^2e^{kx}. 12. $\frac{\log x}{x}$. 13. $\frac{(2-x)^3}{1-x}$.

14. $(2x-1)^{1/2}(3x+2)^{1/3}$.

15. У троугао са основом a и висином h уписати правоугаоник највеће површине тако да му једна страна лежи на основи a, а остала два темена на бочним странама троугла.

16. Прозор има облик правоугаоника са горњим додатком у облику равнокраког правоуглог троугла. Које величине треба да буду стране тог прозора са заједничком дужином p да прозор пропушта највише светлости.

17. У лопту уписати цилиндар највеће запремине.

18. У купу уписати цилиндар највеће запремине.

19. Око лопте описати купу најмање запремине.

20. Основа правоугаоника лежи на оси x; два остала његова темена налазе се на кривој са једначином $y = e^{-x^2}$. Доказати да се та два темена налазе баш у превојним тачкама криве, ако правоугаоник има највећу површину.

21. Једна страна правоугаоника се налази на оси x, друга на правој $x = \frac{1}{2}$. Одредити положај четвртог темена на кривој са једначином $y = e^{-x^2}$, ако правоугаоник има највећу површину.

22. Доказати да од свих правоугаоника уписаних у круг највећу површину има квадрат.

23. Доказати да стране правоугаоника највеће површине, уписане у елипсу, стоје у односу $b : a$, где су a и b полуосе елипсе.

24. Доказати да права екстремног растојања тачке (a, b) равни од тачке криве са једначином $y = f(x)$ мора стојати управно на тангенти у тој тачки на кривој.

25. Електричну централу на обали неке реке, ширине a m, треба спојити са фабриком на другој обали, која се налази на отстојању b m, мереном у правцу реке, од централе. Пројектовати најјефтинији кабл, ако је цена ваздушног кабла p динара по метру, а подводног q динара $(q > p)$.

26. Жица дужине l пресечена је на два дела l_1 и l_2. Од l_1 је израђен круг, а од l_2 квадрат. Наћи однос $l_1 : l_2$ под условом да збир површина круга и квадрата буде најмањи.

27. Из круга треба исећи кружни сектор тако да од остатка направљени конус има највећу запремину.

Наћи екстремуме функција:

28. $z = 5x^2 + 2xy + 9y^2 - 12x - 20y + 17$.

29. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 40$.

30. $z = x^3y^2(1 - x - y)$.

31. Који од правоуглих паралелепипеда има највећу површину, ако му је збир свих ивица сталан.

32. Који од правоуглих паралелепипеда има највећу запремину, ако му је површина стална.

33. Наћи екстремум функције $z = x^2 + y^2$ под условом $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

34. Наћи екстремум функције $u = x^2 + y^2 + z^2$ под условом $Ax + By + Cz + D = 0$.

35. Наћи екстремум функције $w = x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ под условом

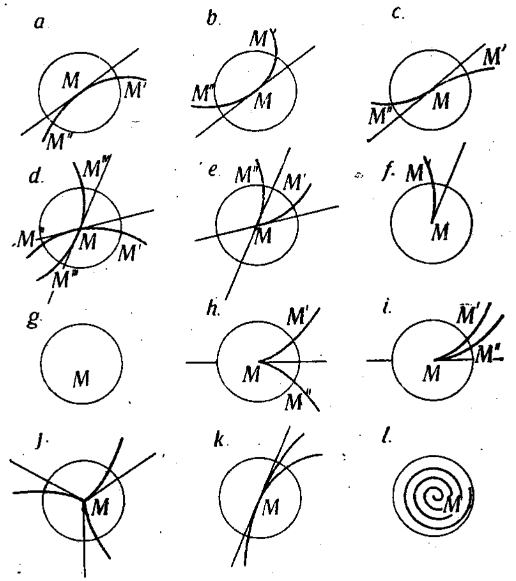
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \frac{u}{d} = 1.$$

§ 46. Обичне и сингуларне тачке

Ак: имамо једначину

$$f(x, y) = 0,$$

о ... ра крива линија, и узмемо на тој кривој тачку $M(x, y)$, тада



Сл. 81. Обичне и сингуларне тачке криве

за проучавање карактера криве око те тачке можемо поступити овако. Узмимо тачку M за центар и са доста малим полупречником ρ (читај

ро) опишемо круг. На слици 81,a имамо тачку M и тангенту на кривој у овој тачки. Наша кружна линија сече криву у тучкама M' и M''; оне су доста блиске тангенти и налазе се са супротних страна тачке M. Исто то имамо и на сликама 81,b и c. Овакве се тачке зову обичне тачке криве. У случајевима a и b крива лежи са једне стране тангенте, а у случају c један део лежи са једне, а други са друге стране. Ова обична тачка зове се, као што знамо, превојна тачка.

Свака тачка криве, која нема особину обичне тачке, зове се сингуларна тачка. Да видимо из неколико примера какве могу бити сингуларне тачке.

На слици 81,d имамо пресек две гране криве линије; свака од њих има своју тангенту. Таквих грана може бити и више. Оваква сингуларна тачка зове се вишеструка тачка. На слици је двострука тачка.

На слици 81,e имамо такозвану угаону тачку: крива има две тангенте, али за сваку тангенту, постоји само једна тачка кружне линије која је блиска тангенти.

Слика f приказује крајњу тачку криве: крива има тангенту у тачки M али не постоји продужење криве после ове тачке.

Ако се може наћи таква вредност полупречника ρ да свака кружна линија мањег полупречника нема заједничких тачака са кривом, тачка се зове изолована тачка (сл. 81,g).

Ако крива линија има у тачки M тангенту и кружна линија сече криву у двема тачкама M' и M'', које су блиске тангенти, и налазе се са исте стране тачке M, тачка се зове повратна или шиљаста тачка. Ако се крива налази са разних страна тангенте, имамо копљасту тачку (сл. 81,h), повратну тачку прве врсте. Ако је крива са исте стране тангенте, имамо кљунасту тачку, повратну тачку друге врсте (сл. 81,i)

Ако се у тачки M (сл.81,j) крива грана у две или више грана, она се зове тачка бифуркације или грањања.

У проучавању природних појава често пута имамо нарочити случај бифуркације, када све гране имају исту тангенту (сл, 81,k), али се после тачке M крива грана у две гране.

Сингуларитет тачке може имати и сасвим други карактер. Тако се, на пр., крива може приближавати тачки M спиралним завојима, који само у граничном посматрању, када број завоја тежи бесконачности, долазе у тачку M. Тачка ове природе зове се асимптотска тачка криве.

Аналитичко проучавање природе обичних и сингуларних тачака углавном се оснива на проучавању извода функције у датој тачки. У детаљну анализу тог проучавања овде не можемо улазити. Показаћемо само два примера.

I. Проучити криву чија је једначина

$$y^2 = a^2x^2 - x^4$$

и одредити природу тачке $x = 0$, $y = 0$, која очигледно припада нашој кривој.

Ако диференцирамо једанпут, имаћемо

$$yy' = a^2x - 2x^3.$$

Из ове једначине не можемо одредити y' за нашу тачку, јер је коефицијент код y' за ову тачку једнак нули. Диференцирајмо још једанпут

$$y'^2 + yy'' = a^2 - 6x^2.$$

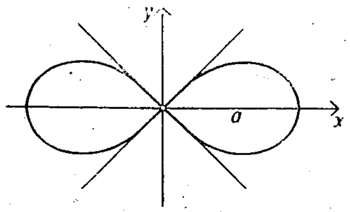
За нашу тачку имамо

$$y'^2 = a^2,$$

одакле имамо две вредности угаоног коефицијента

$$y'_1 = + a, \qquad y'_2 = - a,$$

које одређују две тангенте. Почетак координата је двострука тачка наше криве. Крива се зове лемниската (λημνίσκος — пантљика) и има облик показан на слици 82.



Сл. 82. Лемниската

II. Проучити криву чија је једначина

$$y^2 = x^2 (x - 2).$$

Почетак координата лежи на кривој, јер $x = 0$, $y = 0$ задовољавају једначину криве. За одређивање тангенте диференцирајмо једанпут,

$$2yy' = x(3x - 4).$$

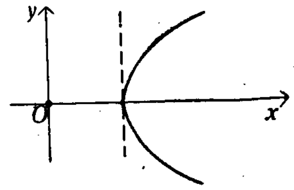
Видимо да за тачку (0,0) из ове једначине не можемо одредити y'. Диференцирајмо још једанпут

$$2y'^2 + 2yy'' = 6x - 4,$$

одакле за нашу тачку имамо

$$y'^2 = -2;$$

Ова једначина показује да крива у тој тачки нема стварних тангената. Из овог резултата можемо закључити да је ово изолована тачка (сл. 83). Остали део криве лежи десно од праве $x = 2$, при чему тачка (2,0) припада нашој кривој. Крива је симетрична у односу на осу x.



Сл. 83. Крива са изолованом тачком

Вежбања

1. Показати да полукубна парабола са једначином $y^2 = ax^3$ има копљасту тачку у почетку координата.

2. Показати да криве са једначинама: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ и $(ay)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$ имају по четири копљасте тачке.

3. Показати да је почетак координата за криву (Декартов лист) са једначином $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ двострука тачка.

4. Показати да строфоида са једначином $y^2 = x^2 \dfrac{a + x}{a - x}$ има у почетку координата двоструку тачку.

5. Показати да је почетак координата крајња тачка криве са једначином $y = x\, lg x$.

6. Показати да је почетак координата кљунаста тачка криве са једначином $(y - x^2)^2 = x^5$.

§ 47. Превојне тачке. Конкавност и конвексност кривих

Нека је дата крива једначином

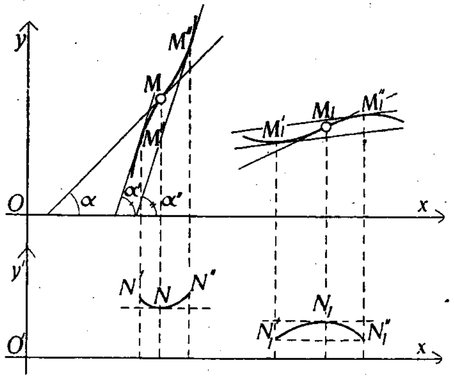
$$y = f(x);$$

треба проучити услове за превојну тачку на тој кривој.

Нека тангента у тачки M (сл. 84) чини угао α са осом x. Узмимо на кривој тачке M′ и M′ са једне и друге стране тачке M. Означимо са α' и α'' углове које граде тангенте у тим тачкама са осом x. Непосредно са слике видимо да је за превојну тачку M

$$\alpha' > \alpha, \quad \alpha'' > \alpha.$$

Ако сад испод графика функције y нацртамо график функције y' видимо да крива $y' = \varphi(x)$ у тачки N, која одговара превојној тачки M, има екстремум и то у овом случају минимум. Према томе за ову тачку имамо услов



Сл. 84. Превојна тачка

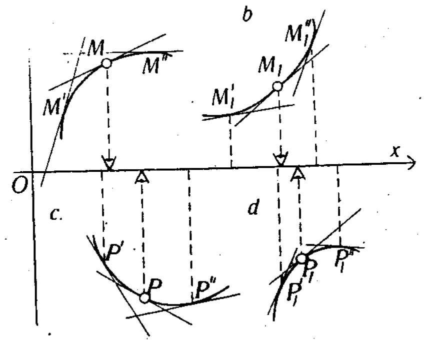
$$y'' = 0 .$$

Исти резултат можемо добити и за превојну тачку M_1, за коју у тачки N_1 имамо максимум. Први извод y' може при томе узимати произвољну вредност.

Из тога закључујемо да је неопходан услов за превојну тачку $y'' = 0$, тј. други извод мора бити једнак нули. Тај је услов недовољан, као што се то може видети из дубљег проучавања.

Проучимо сада удубљеност и испупченост криве линије.

Замислимо посматрача, који из подножја ординате тачке М на кривој посматра околину ове тачке (сл. 85).



Сл. 85. Конкавност и конвексност криве

Ако се две суседне тачке M' и M'' налазе испред тангенте на кривој у тачки М, за криву се каже да је, за тог посматрача конкавна или удубљена у овој тачки (сл. 85, *a* и *c*).

Ако се две суседне тачке M_1 и M_1'' налазе иза тангенте на кривој у тачки M_1 (сл. 85, *b* и *d*), крива је у тој тачки за посматрача на оси *x* конвексна или испупчена.

Ако пропратимо положај тангенте у случају *a*., видимо да се угао α, који гради тангента са осом *x*, смањује; према томе се смањује и вредност функције y'. Како је за функцију, која се смањује, извод негативан, можемо тврдити да је

$$y'' < 0 .$$

Како је у овом случају $y > 0$, тај исти услов за конкавност можемо написати и овако

$$(1) \qquad yy'' < 0 .$$

За случај конкавности, показан на слици 85, *c* угао α тангенте са осом *x* расте, према томе је

$$y'' > 0 .$$

али је у овом случају $y < 0$, те тако и у овом случају остаје на снази услов конкавности у облику (1).

Аналогна анализа конвексности криве у случајевима *b*. и *d*. на слици 85 доводи до услова

$$(2) \qquad yy'' > 0 .$$

Примери

1. Крива $y = \sin x$, за коју је $y'' = -\sin x$ и $yy'' = -\sin^2 x$ за посматрача на оси *x* увек је конкавна.

2. Крива $y = e^x$, за коју је $yy'' = e^{2x} > 0$, увек је конвексна.

3. Крива $y = ax^2 + bx + c$, за коју је $y'' = 2a$ и $yy'' - 2ay$, за $a > 0$ је конкавна испод осе *x* и конвексна над том осом; за $a < 0$ је обрнуто.

4. Елипса са једначином

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

после првог диференцирања даје

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} y' = 0,$$

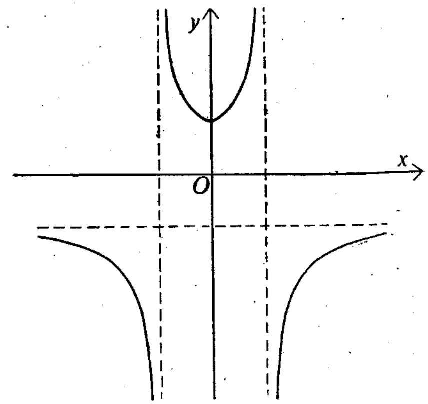
а после другог

$$\frac{1}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} yy'' = 0,$$

одакле је

$$yy'' = -b^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}\right) < 0$$

и према томе потврђујемо да је она, за подножје ординате, увек конкавна.



Сл. 86. Једна крива трећег реда

5. Крива са једначином

$$y = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$$

даје

$$yy'' = 4\,\frac{(1 + x^2)(1 + 3x^2)}{(1 - x^2)^4} > 0;$$

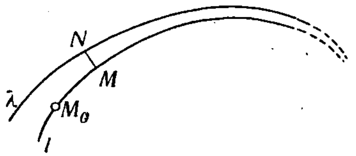
према томе је она, као што показује и слика 86, увек конвексна за посматрача на оси *x*.

§ 48. Асимптотски процес

Посматрајући хиперболу видели смо да она има бескрајне гране и две асимптоте. То су две праве којима се тачке хиперболе све више и више приближују, а при томе свака грана остаје само са једне стране од ових правих.

Поставимо саде општи појам асимптотског процеса.

Нека је дата крива l (сл. 87), која има бескрајну грану. Приметимо да таква грана не мора обавезно ићи у бесконачност него се могу, како ће-мо то видети на примерима, све њене тачке налазити и у коначној области равни.



Сл. 87. Крива и њена асимптота

Упоредо са кривом l замислимо другу криву λ; она може имати бесконачну грану или бити коначна; најзад она може дегенерисати и у тачку.

На кривој l (сл. 87) узмимо тачку M и из ове тачке повуцимо најкраће растојање MN до криве λ. Ако се почев од одређене тачке M_0 све тачке криве l налазе са једне стране криве λ и ако растојање MN стално опада и тежи нули, када се тачка M све више удаљује од тачке M_0, тада се за криву λ каже да је а с и м п т о т а криве l.

Ако замислимо да су наше криве графици одређених процеса, процес, који одговара асимптоти је а с и м п т о т с к и п р о ц е с.

Главни значај проучавања асимптота лежи у томе што он омогућује да се, при довољној удаљености, дати компликовани процес замени асимптотским који је махом једноставнији.

Ако је асимптота права линија, она се зове праволиниска асимптота. Тако, на пр., хипербола има две праволиниске асимптоте. За асимптоте се у већини случајева мисли да су праволиниске. Али асимптоте могу бити и другог облика. Тако, на пр., ако упоредимо гране двеју хипербола, дате и конјуговане, онда свака хипербола може бити сматрана као асимптота конјуговане и обрнуто.

Покажимо примере неправолиниских асимптота.

Крива линија чија је једначина

$$r = a\left(1 - e^{-\theta}\right),$$

где су r и θ поларне координате, а a стална дужина, нема за позитивне вредности θ грану, која иде у бесконачност, јер кад $\theta \to \infty$, тачка врши бескрајно

много обртања око пола. Она се увек налази у кругу полупречника a, а, растојање тачке од кружне линије, које износи

$$a e^{-\theta},$$

смањује се стално и, кад $\theta \to \infty$, оно тежи нули. Овај асимптотски процес је кружни процес.

Најзад, може асимптота дегенерисати и у тачку. Тако, крива линија са једначином

$$r = a e^{-\theta},$$

има за асимптоту тачку — пол система, јер растојање тачке криве од пола стално опада и тежи нули кад $\theta \to \infty$. Ако за доста велику вредност угла θ процес, одређен нашом кривом, замењујемо асимптотским процесом, треба просто ставити $r = 0$.

Покажимо сада како се одређују праволиниске асимптоте криве линије одређене алгебарском једначином.

Треба при том одређивању разликовати два случаја:

I. Асимптоте паралелне координатним осама

Решимо једначину криве

$$F(x, y) = 0$$

по y,

$$y = f(x).$$

Ако за $x = \infty$ y има одређену вредност b, једначина

$$y = b$$

одређује праволиниску асимптоту паралелну оси x.

Тако, код криве (слика 86) са једначином

$$y = \frac{1 + x^2}{1 - x^2},$$

за $x = \infty$, имамо

$$y = \left(\frac{\frac{1}{x^2} + 1}{\frac{1}{x^2} - 1}\right)_{x = \infty} = -1.$$

Према томе имамо асимптоту паралелну оси x на растојању један испод те осе.

За одређивање асимптота паралелних оси y треба једначину криве решити по x,

$$x = \varphi(y)$$

и потражити вредност x за $y = \infty$. Ако таква вредност x'а постоји, рецимо a, једначина асимптоте изгледа

$$x = a\,.$$

У истом примеру, ако решимо једначину по x, имамо

$$x^2 = \frac{y-1}{y+1}\,,$$

одакле за $y = \infty$ имамо

$$x^2 = 1\,,$$

што значи да наша крива (сл. 86) има две асимптоте паралелне са осом y:

$$x = +1\,, \qquad x = -1\,.$$

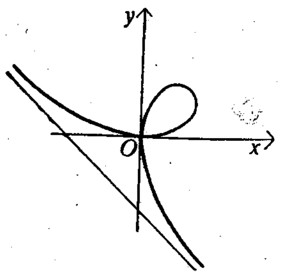
II. Асимптоте које нису паралелне координатним осама

Ако једначину асимптоте напишемо у облику

$$y = a\,x + b\,,$$

тачке ове праве, кад $x \to \infty$, морају припадати нашој кривој са једначином

$$\mathrm{F}(x, y) = 0\,.$$



Сл. 88. Декартов лист

Према томе у ову једначину треба ставити, место y, израз $a\,x + b$,

$$\mathrm{F}(x, a\,x + b) = 0\,,$$

и претпоставити да је $x = \infty$. Ако се после тога добију одређене вредности за a и b, наша права има праволиниску асимптоту.

Као пример, искористићемо једначину тзв. *Декартова листа* (сл. 88) са једначином

$$x^3 + y^3 - 3\,q\,x\,y = 0\,.$$

Ставимо ли

$$y = a\,x + b\,,$$

добијамо

(1) $$(1 + a^3)\,x^3 + 3\,a\,(a\,b - q)\,x^2 + 3\,b\,(a\,b - q)\,x + b^3 = 0\,.$$

Ако поделимо ову једначину са x^3, због услова $x \to \infty$ сви чланови, сем првог, морају бити једнаки нули; према томе имаћемо за први услов

$$1 + a^3 = 0\,,$$

одакле налазимо вредност угаоног коефицијента праве

$$a = -1\,.$$

Но под тим условом једначину (1) можемо написати

$$3\,a\,(a\,b - q)\,x^2 + 3\,b\,(a\,b - q)\,x + b^3 = 0\,.$$

Ако поделимо ову једначину са x^2, поново због услова $x \to \infty$ два последња члана морају бити једнака нули, те закључујемо да је коефицијент

$$3\,a\,(a\,b - q) = 0\,,$$

а одавде одређујемо

$$b = \frac{q}{a} = -q\,.$$

На тај начин Декартов лист има асимптоту чија је једначина

$$y = -x - q\,.$$

Обратимо пажњу да формални поступак који води до једначине за одређивање a и b путем изједначења са нулом коефицијената уз два највиша степена по x може бити примењен уопште на алгебарске криве. Ако је други коефицијент идентички једнак нули, треба изједначити са нулом трећи коефицијент. Ако добивене једначине имају решења, крива има једну или више асимптота.

Вежбања.

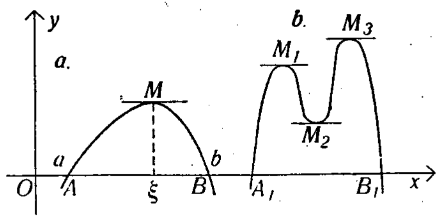
Одредити асимптоте криве са једначином:

1. $y = e^{-x^2}$; 2. $y = log\,x$; 3. $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ (цисоида); 4. $x^2\,y^2 = a^2\,(x^2 + y^2)$;

5. $(x-2)^2\,(y-1) = 1$; 6. $x^2\,y = 4\,a^2\,(2\,a - y)$; 7. $x^3 + 2\,x^2\,y - x\,y^2 - 2\,y^3 + 4\,y^2 + 2\,x\,y + y = 1$.

§ 49. Ролова и Лагранжева теорема

Дата је крива (сл. 89, *a* и *b*), која у двема тачкама A и B, односно A_1 и B_1 сече осу x. Нека за сваку тачку ове криве постоји одређена тангента, но нема тачака са тангентом паралелном оси y. Тада се непосредно са слике за криву, која не одлази у бесконачност, може видети тачност ове, Ролове, теореме:



Сл. 89. Ролова теорема

Ако непрекидна функција једне променљиве на границама одређеног интервала има вредности једнаке нули (или друге неке, али једнаке вредности) и свуда у овом интервалу има одређени коначни извод, тада бар једанпут у овом интервалу извод те функције има вредност нула.

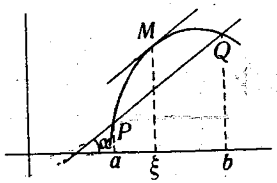
Заиста, између тачака A и B криве постоји бар једна тачка M за коју је тангента паралелна оси x, што значи да је извод функције једнак нули. Како показује и слика 89, *b* таквих тачака може бити и више.

Ако је крива дата једначином

$$y = f(x)$$

и $f(a) = 0$, $f(b) = 0$, онда постоји таква апсциса ξ између a и b, да је

$$f'(\xi) = 0.$$



Сл. 90. Лагранжева теорема

Узмемо ли тачке пресека P и Q криве не са осом x, већ са сечицом PQ (сл. 90), која стоји косо према оси x, можемо формулисати теорему сличну Роловој; ова се зове Лагранжева теорема.

Ако непрекидна функција има за све вредности једног интервала (a, b) одређени коначни извод, постоји у том интервалу бар једна таква вредност ξ да је

$$(1) \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) = \operatorname{tg} \alpha .$$

Геометриски то значи (сл. 90) да на сваком делу непрекидне криве са одређеном тангентом постоји увек бар једна таква тачка за коју је тангента паралелна тетиви што спаја крајње тачке тога дела.

Јасно је да из Лагранжеве теореме непосредно следује Ролова теорема: ставимо ли у (1) $f(a) = f(b) = 0$, имамо $f'(\xi) = 0$.

Из (1) имамо

$$(2) \qquad \boxed{f(b) = f(a) + (b - a) f'(\xi)}$$

У овоме облику се теорема зове и теорема о средњој вредности функције. Она показује да је нова вредност функције једнака полазној вредности увећаној за прираштај аргумента помножени вредношћу извода за неку средњу вредност аргумента.

Важни образац (2) налази се у основи многих математичких рачуна.

Обратимо пажњу да за вредност ξ, која лежи између a и b, можемо написати

$$\xi = a + (b - a)\vartheta ,$$

где је ϑ (читај тета) број у границама

$$0 < \vartheta < 1 .$$

Ако разлику $b - a$ означимо са h, једначину (2) можемо и овако изразити

$$(3) \qquad f(a + h) = f(a) + h f'(a + \vartheta h) .$$

Вежбања.

1. Потврдити тачност Ролове теореме на функцијама: *a.* $y = (x - 1)(x - 2)$; *b.* $y = x^3 - x$; *c.* $y = \sin x$.

2. Потврдити тачност Лагранжеве теореме за функцију $y = \sin x$ у интервалу од $x = \frac{\pi}{6}$ до $x = \frac{\pi}{4}$.

§ 50. Неодређени изрази

Претпоставимо да треба израчунати вредност израза

$$(1) \qquad y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

за $x = 2$. Ставимо ли непосредно у тај израз $x = 2$, имамо у бројиоцу и у имениоцу нулу те, према томе, израз добија облик $\frac{0}{0}$. Тај израз нема одређену вредност. Заиста, из (1) имамо, ако је $x - 2 \neq 0$,

$$(x - 2)\, y = x^2 - 4,$$

али за $x=2$ и ова једнакост добија облик $0\cdot y=0$ и претставља идентитет за сваку произвољну вредност y.

Када пажљивије погледамо на израз (1), видимо да је он незгодно написан, јер је

$$y=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2.$$

Ако сад ставимо $x=2$, наш израз добија потпуно одређену величину, једнаку 4.

У овом случају неодређеност стоји у вези са чиниоцем $x-2$ у бројиоцу и у имениоцу. Тај чинилац, који је једнак нули за $x=2$, сметао је одређивању праве вредности нашег количника.

Дешава се да се не може једноставно наћи у бројиоцу и у имениоцу чинилац, којим бисмо могли скратити и доћи до праве вредности разломка. На који начин ћемо тада одредити праву вредност количника?

Ево правила које омогућава одређивање праве вредности количника а да се не мора тражити заједнички чинилац у бројиоцу и имениоцу.

Узмимо да треба наћи праву вредност количника

(2) $$y=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

за $x=a$ под условима да је

(3) $$f(a)=0, \qquad \varphi(a)=0.$$

Ставимо прво

$$x=a+h,$$

па ћемо из (2) имати

(4) $$y=\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}.$$

Према теореми о средњој вредности функције можемо ставити

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\vartheta_1 h),$$
$$\varphi(a+h)=\varphi(a)+h\varphi'(a+\vartheta_2 h),$$

где су ϑ_1 и ϑ_2 два броја у границама од 0 до 1.

Ако ове вредности ставимо у (4) и искористимо услове (3), после скраћивања са h имаћемо

$$y=\frac{f'(a+\vartheta_1 h)}{\varphi'(a+\vartheta_2 h)}.$$

Пошто овај количник треба израчунати за $x=a$, ставићемо $h=0$ и добићемо

$$y=\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Према томе резултат можемо дефинитивно изразити

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\frac{0}{0}=\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}$$

Он приказује тзв. Лопиталово (L'Hospital) правило[1], које гласи:

За одређивање праве вредности количника

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

за $x=a$, кад је $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$, треба диференцирати посебно бројилац и именилац и у нови количник ставити $x=a$. Ако нови количник има одређену вредност, она даје праву вредност и полазног количника; ако опет добијемо неодређеност, Лопиталов поступак треба поновити.

Решимо неколико задатака.

1. $$\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)_{x=2}=\frac{0}{0}=\left(\frac{2x}{1}\right)_{x=2}=4.$$

2. $$\left(\frac{\sin x}{x}\right)_{x=0}=\frac{0}{0}=\left(\frac{\cos x}{1}\right)_{x=0}=1.$$

3. $$\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)_{x=0}=\frac{0}{0}=\left(\frac{\sin x}{2x}\right)_{x=0}=\frac{0}{0}=$$
$$=\left(\frac{\cos x}{2}\right)_{x=0}=\frac{1}{2}.$$

4. $$\left(\frac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{x^3}\right)_{x=0}=\frac{0}{0}=\left(\frac{e^x-1-x}{3x^2}\right)_{x=0}=\frac{0}{0}=$$
$$=\left(\frac{e^x-1}{2.3x}\right)_{x=0}=\frac{0}{0}=\left(\frac{e^x}{1.2.3}\right)_{x=0}=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}.$$

[1]) Ово би правило требало звати Бернулијево правило, јер га је Јохан Бернули (Joh. Bernoulli), 1694 године, саопштио Лопиталу у једном писму.

Има и других неодређености које могу бити доведене на облик $\frac{0}{0}$. Ако имамо количник

$$y=\frac{f(x)}{\varphi(x)}, \tag{5}$$

који треба израчунати за $x=a$, при чему је

$$f(a)=\infty, \qquad \varphi(a)=\infty, \tag{6}$$

лако је показати да за тај количник исто тако важи Лопиталово правило, наиме

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\frac{\infty}{\infty}=\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}.$$

Заиста, количник (5) можемо написати у облику

$$y=\frac{\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)};$$

за $x=a$ он добија према (6) облик $\frac{0}{0}$ и према томе на њега можемо применити Лопиталово правило:

$$y_{x=a}=\left[\frac{\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)}\right]_{x=a}=\frac{0}{0}=\left[\frac{\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'}\right]_{x=a}=\left[\frac{-\frac{\varphi'}{\varphi^2}}{-\frac{f'}{f^2}}\right]_{x=a}=$$

$$=\left[\frac{f^2}{\varphi^2}\,\frac{\varphi'}{f'}\right]_{x=a}=\left\{y^2\left[\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\right]\right\}_{x=a}$$

Одатле дефинитивно добијамо резултат

$$y_{x=a}=\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\frac{\infty}{\infty}=\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}.$$

Примери:

1. $$y=\left(\frac{1-2x-x^2}{5x^2+1}\right)_{x=\infty}=\frac{\infty}{\infty}=\left(\frac{-2-2x}{10x}\right)_{x=\infty}$$

$$=\frac{\infty}{\infty}=\frac{-2}{10}=-0{,}2.$$

2. $$y=\left(\frac{x+\log x}{x\log x}\right)_{x=\infty}=\frac{\infty}{\infty}=\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{\log x+1}\right)_{x=\infty}=\frac{1}{\infty}=0.$$

3. $$y=\left(\frac{\log tg\, x}{\log tg\, 2x}\right)_{x=0}=\frac{\infty}{\infty}=\left(\frac{\frac{1}{tg\, x\cos^2 x}}{\frac{2}{tg\, 2x\cos^2 2x}}\right)_{x=0}=$$

$$=\left(\frac{\sin 4x}{2\sin 2x}\right)_{x=0}=\frac{0}{0}=\left(\frac{4\cos 4x}{4\cos 2x}\right)_{x=0}=1.$$

У те исте задатке спада израчунавање правих вредности израза које симболички можемо означити овако:

$$0\,.\,\infty;\quad 0^0;\quad \infty^0;\quad 1^\infty;\quad \infty-\infty.$$

Сваки се од њих може трансформисати у израз $\frac{0}{0}$. Покажимо то исто тако симболички.

$$0\,.\,\infty=\frac{0}{\left(\frac{1}{\infty}\right)}=\frac{0}{0},$$

$$\infty_1-\infty_2=\infty_1\left(1-\frac{\infty_2}{\infty_1}\right)=\infty_1\,.\,0=\frac{0}{0}.$$

и тиме се своде на претходни случај.

За све случајеве који стоје у вези са функцијом облика

$$y=u^v$$

треба прво ову једначину логаритмовати, и то за природну основу,

$$\log y=v\log u\,.$$

Десна страна прешла је сад у неодређеност $0\,.\,\infty$. Ако нађемо њену праву вредност A, из $\log y=A$ добићемо вредност $y=e^A$.

Примери:

1. $$y=(x\log x)_{x=0}=0\,.\,\infty=\left(\frac{\log x}{\left(\frac{1}{x}\right)}\right)_{x=0}=\frac{0}{0}=\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right)_{x=0}=$$

$$=(-x)_{x=0}=0.$$

2. $$y=\left[(1-x)\,tg\,\frac{\pi}{2}\,x\right]_{x=1}=0\,.\,\infty=\left(\frac{1-x}{cotg\,\frac{\pi}{2}\,x}\right)_{x=1}=\frac{0}{0}=$$

$$=\left(\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{sin^2\,\frac{\pi}{2}\,x}}\right)_{x=1}=\frac{2}{\pi}.$$

3. $$y=(x^x)_{x=0}=0^0\,;\quad log\,y=(x\,log\,x)_{x=0}=0 \text{ (види задатак 1)};$$

$$y=e^0=1\,.$$

4. $$y=\left[(1+x)^{\frac{1}{log\,x}}\right]_{x=\infty}=\infty^0\,;\ log\,y=\left[\frac{1}{log\,x}\,.\,log\,(1+x)\right]_{x=\infty}=$$

$$=\frac{\infty}{\infty}=\left(\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x}}\right)_{x=\infty}=\left(\frac{x}{1+x}\right)_{x=\infty}=\frac{\infty}{\infty}=\left(\frac{1}{1}\right)_{x=\infty}=1\,;$$

$$y=e^1=e\,.$$

5. $$y=\left(x^{\frac{1}{1-x}}\right)_{x=1}=1^\infty;\ log\,y=\left(\frac{1}{1-x}\,.\,log\,x\right)_{x=1}=\frac{0}{0}=$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{x}}{-1}\right)_{x=1}=-1;\ y=e^{-1}=\frac{1}{e}\,.$$

6. $$y=\left(\frac{1}{log\,x}-\frac{x}{x-1}\right)_{x=1}=\infty-\infty=\left[\frac{x-1-x\,log\,x}{(x-1)\,log\,x}\right]_{x=1}=\frac{0}{0}=$$

$$=\left[\frac{1-1-log\,x}{log\,x+\frac{x-1}{x}}\right]_{x=1}=-\left[\frac{x\,log\,x}{x\,log x+x-1}\right]_{x=1}=$$

$$=-\left[\frac{log\,x+1}{log\,x+1+1}\right]_{x=1}=-\frac{1}{2}\,.$$

7. Показати да разлика ордината тачке хиперболе

$$y_h=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

и тачке њене асимптоте

$$y_a=\frac{b}{a}\,x$$

тежи нули када $x\to\infty$.

Дакле:

$$[y_a-y_h]_{x\to\infty}=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})_{x\to\infty}=\infty-\infty=$$

$$=\frac{b}{a}\left[\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})\,(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right]_{x\to\infty}=$$

$$=\left[\frac{a\,b}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right]_{x\to\infty}=0\,.$$

Тај пример још једанпут показује да неодређеност може наступити услед тога што је израз написан у незгодном облику.

Вежбања.

1. $\left(\frac{x^2-4x+3}{x-3}\right)_{x=3}$. 2. $\left(\frac{x-1}{x^n-1}\right)_{x=1}$. 3. $\left(\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}\right)_{x=a}$ 4. $\left(\frac{a^x-b^x}{x}\right)_{x=0}$.

5. $\left(\frac{x-sin\,x}{x^3}\right)_{x=0}$. 6. $\left(\frac{tg\,x-sin\,x}{sin^3\,x}\right)_{x=0}$. 7. $\left(\frac{5x^{15}+2}{10x^{15}+1}\right)_{x=\infty}$. 8. $\left(\frac{x^{10}}{e^x}\right)_{x=\infty}$.

9. $\left(\frac{tg\,x}{tg\,3x}\right)_{x=\frac{\pi}{2}}$. 10. $(x\,log\,sin\,x)_{x=0}$. 11. $\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{log\,x}\right)_{x=1}$. 12. $\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]_{x=0}$.

13. $\left[(1+nx)^{\frac{1}{x}}\right]_{x=0}$. 14. $\left[(cotg\ x)^x\right]_{x=0}$.

ГЛАВА VI

ИНТЕГРАЛИ

§ 51. Неодређени интеграл

У операцији диференцирања за дату функцију $F(x)$ одређујемо извод, који ћемо означити са $f(x)$. Према томе је

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x),$$

или

$$dF(x)=f(x)\,dx,$$

где је за диференцирање: дата тражена функција.

У Математици свакој директној операцији одговара и обрнута, инверзна операција. За операцију инверзну диференцирању треба у једначини

$$dF(x)=f(x)\,dx$$

да буде: тражена дата функција.

Одређивање првобитне функције $F(x)$, чији је извод дата функција $f(x)$, претставља за нас нову математичку операцију, која се зове интеграција, а вршење те операције је интегрирање.

На пр., нека је $f(x)=x^2$. Треба одредити функцију $F(x)$ са изводом једнаким x^2. Јасно је да у тражену функцију треба да уђе x^3, јер ћемо од диференцирања трећег степена добити други степен; али диференцирањем x^3 добијамо још и коефицијент 3. Тог коефицијента нема у датој функцији x^2, према томе функцију x^3 треба поделити са 3. На тај начин за $f(x)=x^2$ имамо $F(x)=\frac{1}{3}x^3$. Тај је одговор тачан, јер је

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\right)=x^2.$$

Но исти резултат даје и функција $\frac{1}{3}x^3+1$, јер је

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3+1\right)=x^2;$$

исто тако имамо

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3+7\right)=x^2,$$

или уопште

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3+C\right)=x^2,$$

где је са C означен потпуно произвољан, али сталан број.

На овај начин видимо да после интеграције функције x^2 немамо потпуно одређен резултат, него функцију са додатком у облику произвољне константе. Са тог се разлога резултат интеграције зове неодређени интеграл. За тај се интеграл може поставити дефиниција:

Функција са адитивном произвољном константом, чији је извод дата функције, зове се неодређени интеграл те функције.

У Математици свака операција, која се често пута понавља, а интеграција спада у такву врсту операција, има своју нарочиту ознаку. Из разлога који ћемо видети доцније, за неодређени интеграл уведена је ознака

$$F(x)=\int f(x)\,dx.$$

Она садржи знак интеграла, који је постао из развученог слова S (прво слово речи Summa), подинтегралну функцију или интегранд — то је дати извод и диференцијал dx који показује променљиву по којој се врши интеграција.

Са уведеним ознакама резултат претходног примера се може написати

$$\int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3+C.$$

Непосредно из дефиниције неодређеног интеграла следује:

Извод неодређеног интеграла једнак је подинтегралној функцији, тј.

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x)$$

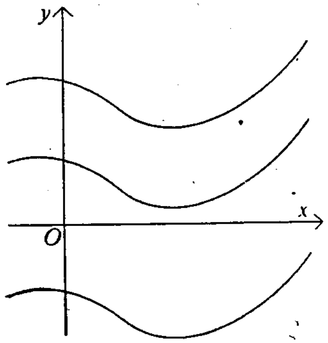
и

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

Ако хоћемо да присуство произвољне константе у неодређеном интегралу протумачимо геометрисќи, приметићемо да једначини

$$y = F(x) + C$$

одговара за сваку посебну вредност константе C одређена крива линија (сл. 91). Са променом ове константе крива се помера у правцу осе y, не мењајући при томе свој облик.



Сл. 91. Криве линије неодређеног интеграла

Као и свака обрнута операција интеграција је много тежа од диференцирања.

Има врло много правила и метода за такозвану тачну интеграцију, када неодређени интеграл можемо изразити помоћу нама познатих, углавном елементарних функција. Ми ћемо навести неке од тих метода.

§ 52. Таблица за интеграцију

Сваки образац диференцирања може се обрнути и тада он даје образац за интеграцију. Тако из обрасца

$$(x^5)' = 5x^4$$

следује образац

$$\int x^4\,dx = \frac{1}{5}x^5 + C,$$

а из обрасца

$$(\sin x)' = \cos x$$

образац

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

где је C, у једном и другом случају, **произвољна константа интеграције**.

Непосредним искоришћавањам образаца диференцијалног рачуна можемо написата ове обрасце за неодређене интеграле.

$$\text{(I)} \qquad \frac{d}{dx}F(x) = f(x), \qquad \int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

$$\text{(II)} \qquad \int A f(x)\,dx = A\int f(x)\,dx, \quad A = const.$$

$$\text{(III)} \qquad \int (u \pm v)\,dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx.$$

$$\text{(IV)} \qquad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$$

$$\text{(IV}^{\text{bis}}\text{)} \qquad \int \frac{dx}{x} = \log x + C.$$

$$\text{(V)} \qquad \int e^x\,dx = e^x + C.$$

$$\text{(V}^{\text{bis}}\text{)} \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C.$$

$$\text{(VI)} \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

$$\text{(VI}^{\text{bis}}\text{)} \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

$$\text{(VII)} \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C.$$

$$\text{(VII}^{\text{bis}}\text{)} \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot g\,x + C.$$

$$\text{(VIII)} \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\,x + C = -arccotg\,x + C_1.$$

$$\text{(IX)} \qquad \int \frac{dx}{1-x^2} = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

$$\text{(X)} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1.$$

$$\text{(XI)} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C.$$

Приметимо да за два обрасца (IX) и (XI) нема одговарајућих образаца у таблици са диференцирање. Они су унети у таблицу интеграције, јер су везани за образац (VIII), односно (X). Сваки од њих можемо проверити непосредним диференцирањем.

За (IX) образац имамо

$$\left(\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1\,(1-x) + 1\,(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Образац (XI) проверавамо овако:

$$\left[\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Образац (XI) остаје на снази и онда када под кореном стоји место јединице ма који позитивни или негативни број, чак и нула. Заиста је

$$\left[\log\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)\right]'=\frac{1}{x+\sqrt{a+x^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{a+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}.$$

Специјално за $a=0$ имамо

$$\left[\int\frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}\right]_{a=0}=\int\frac{dx}{x}=\log x+C,$$

при чему тај одговор следује и из резултата за општи случај, јер је

$$\left[\log(x+\sqrt{a+x^2})+C\right]_{a=0}=\log 2x+C=\log x+\log 2+C=\log x+C_1.$$

Према томе таблицу за интеграцију можемо допунити обрасцем

$$(\mathrm{XI^{bis}})\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}=\log(x+\sqrt{a+x^2})+C.$$

§ 53. Методе интеграције

Има неколико елементарних метода помоћу којих можемо поједине интеграле довести на табличне интеграле. Ове ћемо методе приказати у већини случајева на примерима.

I. Узмимо интеграл

$$(1)\qquad \int\frac{dx}{x-2}.$$

Таквог интеграла нема у таблици, али је наведен у њој сличан интеграл

$$(\mathrm{IV^{bis}})\qquad \int\frac{dx}{x}=\log x+C.$$

За довођење интеграла (1) на претходни облик ставимо

$$x-2=z,$$

где је z нова променљива. А после диференцирања добићемо везу и између диференцијала ових променљивих

$$dx=dz.$$

Према томе интеграл (1) добија облик

$$\int\frac{dx}{x-2}=\int\frac{dz}{z}$$

и постаје таблични интеграл за који имамо

$$\int\frac{dz}{z}=\log z+C;$$

ако се вратимо на стару променљиву имаћемо дефинитивно

$$\int\frac{dx}{x-2}=\log(x-2)+C.$$

За израчунавање овог интеграла употребили смо методу која се зове **метода замене**.

Узмимо још неколико примера

1. $$\int(5x-3)^4\,dx.$$

Ставимо

$$5x-3=z$$

и тада је

$$5dx=dz,$$

одакле је

$$dx=\frac{1}{5}dz.$$

Наш интеграл после трансформације даје

$$\int(5x-3)^4\,dx=\int z^4\cdot\frac{1}{5}dz=\frac{1}{5}\int z^4\ \ z=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}z^5+C=$$

$$= \frac{1}{25} z^5 + C = \frac{1}{25} (5x-3)^5 + C.$$

2. $$\int e^{\sin x} \cos x \, dx.$$

Ставимо

$$\sin x = z,$$

тада je

$$\cos x \, dx = dz$$

и према томе изводимо

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^z \, dz = e^z + C = e^{\sin x} + C.$$

3. $$\int \frac{dx}{5+x^2}.$$

Пошто овај интеграл личи на интеграл

$$\int \frac{dx}{1+x^2},$$

замена треба да буде таква да се у имениоцу појави 1 место 5. Зато ставимо

$$x^2 = 5z^2,$$

или

$$x = z\sqrt{5},$$

одакле се после диференцирања добија

$$dx = \sqrt{5} \, dz.$$

После замене добијамо

$$\int \frac{dx}{5+x^2} = \int \frac{\sqrt{5}\, dz}{5(1+z^2)} = \frac{\sqrt{5}}{5} \int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{arctg} z + C =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Поставимо општи образац за вршење замене променљиве код неодређеног интеграла.

Ако имамо интеграл

$$\int f(x) \, dx$$

и ставимо

$$x = \varphi(z),$$

одакле je

$$dx = \varphi'(z) \, dz$$

и

$$z = \psi(x),$$

онда се интеграл трансформише

$$\text{(XII)} \quad \int f(x) \, dx = \int f[\varphi(z)] \, \varphi'(z) \, dz = F(z) + C = F[\psi(x)] + C.$$

Навешћемо још неколико примера.

1. Израчунати интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}.$$

За довођење овог интеграла на таблични интеграл морамо пре свега уклонити први степен x'а у имениоцу. У томе циљу издвојимо у имениоцу потпуни квадрат, тj. трансформишимо га

$$x^2+2x+5 = x^2+2x+1+4 = (x+1)^2+4.$$

Ставимо затим

$$x+1 = 2z,$$

одакле je

$$dx = 2\, dz$$

и

$$z = \frac{1}{2}(x+1).$$

Наш интеграл ће дати

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{2\, dz}{4(z^2+1)} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z + C =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.$$

2. Израчунати интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 1}}.$$

Прво ћемо га трансформисати са циљем да издвојимо квадрат

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \frac{9}{4} - 1}} =$$

$$= \int \frac{2\,dx}{\sqrt{5 - (2x-3)^2}}.$$

Затим можемо ставити

$$2x - 3 = \sqrt{5}\,z,$$

одакле имамо

$$2\,dx = \sqrt{5}\,dz$$

и

$$z = \frac{2x-3}{\sqrt{5}}.$$

Интеграл тада изгледа

$$\int \frac{2\,dx}{\sqrt{5-(2x-3)^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = arcsin\, z + C = arcsin \frac{2x-3}{\sqrt{5}} + C.$$

II. Друга метода одређивања интеграла оснива се на обрасцу диференцијалног рачуна

$$d(uv) = udv + vdu,$$

одакле изводимо овај образац интегралног рачуна

$$\text{(XIII)} \qquad \int udv = uv - \int vdu.$$

Покажимо примену овог обрасца прво на једном примеру. Израчунати интеграл

$$\text{(2)} \qquad \int xe^x\,dx.$$

Узмимо прво један део подинтегралне функције и ставимо

$$e^x\,dx = dv,$$

одакле је

$$\text{(3)} \qquad v = \int e^x dx = e^x.$$

Овде нисмо унели произвољну константу, јер је довољно да је ставимо у крајњем резултату.

После овог претходног, делимичног интегрирања интеграл постаје

$$\int xe^x dx = \int xde^x.$$

Ако на њега применимо образац (XIII) биће

$$\int xde^x = xe^x - \int e^x dx,$$

одакле дефинитивно изводимо

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

Пошто смо за израчунавање овог интеграла претходно извршили интеграцију (3), где у подинтегралној функцији учествује само један део функције интеграла (2), ова се метода зове **метода делимичне или парцијалне интеграције**. Образац (XIII) такође се зове **образац делимичне интеграције**.

Решимо још неколико примера методом делимичне интеграције.

1. Израчунати интеграл

$$I = \int x^2 \sin x\, dx.$$

Прво узмимо интеграл дела подинтегралне функције

$$v = \int \sin x\, dx = -\cos x,$$

затим израчунамо

$$I = \int x^2 \sin x\, dx = -\int x^2 d\cos x = -x^2\cos x + \int \cos x\, dx^2 =$$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx;$$

на последњи интеграл поново примењујемо методу делимичне интеграције, па продужујемо

$$I=-x^2\cos x+2\int x\,d\sin x=-x^2\cos x+2x\sin x-2\int \sin x\,dx=$$

$$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C,$$

према томе смо употребили и другу делимичну интеграцију.

2. Израчунати интеграл

$$I=\int \sin^2 x\,dx.$$

Издвојимо овако

$$v=\int \sin x\,dx=-\cos x,$$

тада рачунамо

$$I=\int \sin^2 x\,dx=-\int \sin x\,d\cos x=-\sin x\cos x+\int \cos x\,d\sin x=$$

$$=-\sin x\cos x+\int \cos^2 x\,dx=-\sin x\cos x+\int (1-\sin^2 x)dx=$$

$$=-\sin x\cos x+x-I.$$

Видимо да смо поново добили исти интеграл. Ако овај интеграл пребацимо на леву страну, имаћемо

$$2I=x-\sin x\cos x,$$

одакле добијамо дефинитивни резултат

$$I=\int \sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)+C.$$

Ако потражимо у исто време интеграл

$$I_1=\int \cos^2 x\,dx,$$

који можемо трансформисати у

$$I_1=\int (1-\sin^2 x)\,dx=\int dx-\int \sin^2 x\,dx=x-I,$$

долазимо до одговора

$$I_1=\int \cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)+C.$$

III. Са методом делимичне интеграције стоји у вези **м е т о д а р е д у к ц и ј е**.

Њу ћемо објаснити на конкретном примеру.

Израчунати интеграл

$$I_n=\int \sin^n x\,dx.$$

Применимо прво делимичну интеграцију

$$I_n=\int \sin^n x\,dx=-\int \sin^{n-1} x\,d\cos x=-\sin^{n-1}x\cos x+\int \cos x\,d\sin^{n-1} x=$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx=$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\left[\int \sin^{n-2}x\,dx-\int \sin^n x\,dx\right]=$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n.$$

Ако пребацимо члан са I_n са десне на леву страну, добићемо образац

$$nI_n=(n-1)I_{n-2}-\sin^{n-1}x\cos x,$$

који се зове **р е д у к ц и о н и о б р а з а ц**. Он омогућује да се израчуна интеграл са подинтегралном функцијом синусом на n-ти степен помоћу интеграла где синус улази на степен $n-2$. Узастопном применом овог обрасца можемо лако израчунати сваки такав интеграл, ако је n цео позитивни број.

Заиста, ако је n паран број, после низа редукција долазимо до интеграла

$$I_0=\int dx=x+C.$$

У случају непарног броја n интеграл I_n се редуцира на таблични интеграл

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C.$$

Овде ћемо казати неколико речи и о **графичкој интеграцији**.

IV. Ако је $f(x)$ подинтегрална функција интеграла

$$\int f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C},$$

једначину

$$y = f(x),$$

можемо претставити на слици помоћу криве, графика подинтегралне функције. Сам интеграл одређује се тада кривом чија је једначина

$$\mathrm{Y} = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}.$$

Она се зове **интегрална крива**. Та крива има потпуно одређени положај за сваку одређену вредност C. Ова константа се може такође одредити из услова да интегрална крива пролази кроз дату тачку $\mathrm{M}_0(x_0, \mathrm{Y}_0)$.

Како се црта интегрална крива, кад је дат график подинтегралне функције?

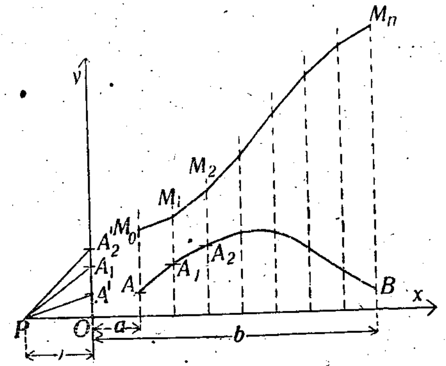
Нека је на слици 92 дата крива линија AB са једначином

$$(4) \qquad y = f(x),$$

где је $f(x)$ подинтегрална функција интеграла $\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$. Пошто је

$$\frac{d\,\mathrm{F}(x)}{dx} = f(x),$$

ордината $y = f(x)$ има геометриско тумачење тангенса угла, који тангента на интегралну криву $\mathrm{Y} = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$ гради са осом x.



Сл. 92. Интегрална крива за дату подинтегралну функцију

Ако на осовини x узмемо тачку P на растојању један лево од почетка координата, а на осовини y одмеримо вредност функције $y = f(x)$, на пр., $\mathrm{OA}' = f(a)$ за тачку A, права PA′ одређује правац тангенте на интегралној кривој за $x = a$, јер је за тај правац

$$tg\,\alpha = \frac{\mathrm{OA}'}{\mathrm{OP}} = f(a) : 1 = f(a).$$

Поделимо сад дужину $b - a$, растојање између ордината тачака A и B, на n једнаких делова; сваки од њих означимо са Δx. Кроз деоне тачке повуцимо ординате које секу криву (4) у тачкама $\mathrm{A}, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n\,(\mathrm{B})$. Из било које, или из дате тачке M_0 на ординати тачке A повуцимо правац паралелан правцу PA′ до пресека у тачки M_1 са ординатом тачке A_1. Из тачке M_1 конструишимо правац паралелан правцу PA'_1 за који је $\mathrm{OA}'_1 = f(a + \Delta x)$ итд. Тако ћемо добити низ тачака $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \cdots, \mathrm{M}_n$, које одређују изломљену линију. Што је изабрана величина Δx мања, то нацртана изломљена линија тачније претставља интеграл дате функције са одређеном произвољном константом интеграције. Углове те изломљене линије можемо угладити цртајући блиску криву линију.

Вежбања.

Израчунати интеграле функција:

1. $5x - 3$. 2. $x^2 - 4x - 1$. 3. $x^{-1} + 2x^{-2} + x^{-5}$. 4. $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$. 5. $\sqrt{x-1}$. 6. e^{x+1}.
7. $\sin(x+1)$. 8. a^{3x}. 9. $a \sin t + b \cos t$. 10. $pz^{1/2} + qz^{1/2}$. 11. $ax^2 + bx + c$ 12. $(a - bx)^{1/3}$
13. $\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x^2}$. 14. $x\sqrt{x^2 - 1}$. 15. $\sin^3 x$. 16. $\dfrac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi}$. 17. $\sin 2x$. 18. $\cos 4x$.
19. $\sinh x$. 20. $\cosh x$. 21. $\dfrac{\sin x}{a + b\cos x}$. 22. 11^{3x}. 23. $xe^{-1/2\,x^2}$. 24. $\sin^2(2x + 1)$.
25. $(1 + \sin e^x)e^x$. 26. xe^{3x}. 27. $x^2 e^{\frac{x}{3}}$. 28. $e^x \sin x$. 29. $e^{-x}\cos x$. 30. $e^{2x}\sin x$.

31. Нацртати кроз тачку (1, 2) интегралну криву за подинтегралну функцију $y = \frac{1}{2}(x - 2)$ и проверити резултат после израчунавања интеграла.

§ 54. Интеграција рационалних функција

У рационалне функције, као што знамо, спадају пре свега полиноми. Интеграција полинома се врши без тешкоће. Заиста, можемо непосредно написати

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n)dx =$$

$$= a_{-1} + a_0 x + \frac{1}{2}a_1 x^2 + \frac{1}{3}a_2 x^3 + \cdots + \frac{1}{n}a_{n-1}x^n + \frac{1}{n+1}a_n x^{n+1},$$

где смо са a_{-1} означили произвољну константу интеграције.

Теорију интеграције разломљених функција приказаћемо на низу примера.

После издвајања целог дела у облику полинома из рационалне функције

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$$

где су $P_m(x)$ и $P_n(x)$ полиноми, можемо сматрати број m мањим од n.

Како смо видели, интеграл

$$\int \frac{dx}{x-a}$$

може се лако израчунати. Он има вредност $log(x-a)+C$.

По својој сложености наредни интеграл разломљене функције има облик

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx,$$

гди су a, b, c; p, q константни бројеви. Објаснимо интеграцију такве разломљене функције на неколико конкретних примера.

1. Једначина

$$ax^2+bx+c=0$$

има два стварна различита корена ($b^2-4ac>0$). Овај случај објаснићемо на конкретном задатку.

Израчунати интеграл

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x-3)}\,dx.$$

Корени имениоца су 1 и 3. Ставимо

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3},$$

где су A и B два константна неодређена коефицијента; те коефицијенте треба одредити тако да претходна једначина важи за сваку вредност x'а. Ако се ослободимо имениоца, добија се

$$x+1=A(x-3)+B(x-1),$$

а како овај идентитет треба да важи за све вредности променљиве x,

то треба изједначити чланове леве и десне стране који не зависе од x и коефицијенте уз x. Добићемо две једначине,

$$1=-3A-B,$$
$$1=A+B,$$

за одређивање A и B. Те једначине дају

$$A=-1, \quad B=2.$$

Наш интеграл се, према томе, може овако трансформисати

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x-3)}\,dx=\int\left[\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x-3}\right]dx=-\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x-3}=$$
$$=-log(x-1)+2\,log(x-3)+const=$$
$$=log\frac{(x-3)^2}{(x-1)}+const=log\,C\,\frac{(x-3)^2}{x-1},$$

при чему смо интегралну константу написали у облику $log\,C$.

Трансформација, коју смо применили на подинтегралну функцију, зове се **разлагање дате разломљене функције на просте разломке** и то помоћу **методе неодређених коефицијената**. Улогу таквих коефицијената играли су у нашем примеру бројеви A и B.

2. Једначина

$$ax^2+bx+c=0$$

има два једнака корена ($b^2-4ac=0$). Узећемо опет конкретан пример.

Израчунати интеграл

$$\int \frac{2x-5}{(x-3)^2}\,dx.$$

Ако ставимо

$$x-3=z$$

и израчунамо

$$dx=dz, \qquad x=z+3,$$

наш интеграл се мора изразити

$$\int \frac{2x-5}{(x-3)^2}\,dx=\int\frac{2z+1}{z^2}\,dz=2\int\frac{dz}{z}+\int\frac{dz}{z^2}=2\,log\,z-\frac{1}{z}+C=$$
$$=2\,log\,(x-3)-\frac{1}{x-3}+C.$$

3. Једначина

$$ax^2 + bx + c = 0$$

има два имагинарна корена ($b^2 - 4ac < 0$). И овај случај ћемо објаснити на једном примеру.

Израчунати интеграл

$$\int \frac{3x-1}{4x^2+8x+7}\,dx\,.$$

Издвојимо у имениоцу тотални квадрат

$$4x^2 + 8x + 7 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 2 + 2^2 + 3 = (2x+2)^2 + 3$$

и ставимо

$$2x + 2 = \sqrt{3}\cdot z\,,$$

одакле је

$$2\,dx = \sqrt{3}\,dz$$

и

$$x = \frac{\sqrt{3}\,z - 2}{2}\,.$$

Интеграл се према томе, овако трансформише

$$\int \frac{3x-1}{4x^2+8x+7}\,dx = \int \left[\frac{3}{2}(\sqrt{3}\,z-2) - 1\right]\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{dz}{3(z^2+1)} =$$

$$= \frac{3}{4}\int \frac{z\,dz}{z^2+1} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{dz}{1+z^2} =$$

$$= \frac{3}{8}\int \frac{d(z^2+1)}{z^2+1} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{dz}{1+z^2} =$$

$$= \frac{3}{8}\log(z^2+1) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\operatorname{arctg} z + C =$$

$$= \frac{3}{8}\log\frac{4x^2+8x+7}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\operatorname{arctg}\frac{2(x+1)}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{8}\log(4x^2+8x+7) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\operatorname{arctg}\frac{2(x+2)}{\sqrt{3}} + C_1.$$

Уопште, ако је именилац разломка подинтегралне функције трећег или вишег степена, углавном се ради помоћу методе разлагања разломљене функције на просте разломке са неодређеним коефицијентима.

Узмимо пример. Израчунати интеграл

$$\int \frac{6x^2+2x-3}{(x^2+1)(x-2)}\,dx.$$

Ставимо

$$\frac{6x^2+2x-3}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{Px+Q}{x^2+1} + \frac{A}{x-2}\,.$$

Одатле имамо идентитет

$$6x^2 + 2x - 3 = (Px+Q)(x-2) + A(x^2+1)\,.$$

Изједначимо коефицијенте и слободне чланове,

$$6 = P + A, \qquad 2 = Q - 2P, \qquad -3 = -2Q + A\,.$$

Решавање ових једначина даје

$$P = 1, \qquad Q = 4, \qquad A = 5\,.$$

Наш интеграл се после тога израчунава овако

$$\int \frac{6x^2+2x-3}{(x^2+1)(x-2)}\,dx = \int \frac{x\,dx}{x^2+1} + 4\int\frac{dx}{x^2+1} + 5\int\frac{dx}{x-2} =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+1) + 4\,\operatorname{arctg} x + 5\log(x-2) + C =$$

$$= \log(x-2)^5\sqrt{x^2+1} + 4\,\operatorname{arctg} x + C\,.$$

На овом примеру смо видели да при разлагању разломљене функције на просте разломке треба разликовати два случаја: када је чинилац имениоца првог и када другог степена. У првом случају у бројиоцу имамо само један неодређени коефицијент, а у другом линеарну функцију са два неодређена коефицијента. Да видимо још како треба поступити у случају када у имениоцу имамо линеарни чинилац вишег од првог степена. Тако, на пр., за израчунавање интеграла

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$$

треба ставити

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}\,.$$

Одатле имамо

$$1 = A(x+1) + B(x^2-1) + C(x^2-2x+1)$$

и после тога једначине

$$0 = B + C, \qquad 0 = A - 2C, \qquad 1 = A - B + C$$

дају решење

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{4}, \quad C = \frac{1}{4}.$$

После израчунавања интеграл добија облик

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\log\frac{x+1}{x-1} + \log C =$$

$$= \log C\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} - \frac{1}{2(x-1)}.$$

Вежбања.

Израчунати интеграле са подинтегралном функцијом:

1. $x^{2m} + ax^{m+n} + bx^n + x^{2n}$. 2. $x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$. 3. $\frac{1}{2-x}$. 4. $\frac{x+4}{x^2+6x+8}$.

5. $\frac{7x+3}{2x^2-x-3}$. 6. $\frac{1}{15+6x-9x^2}$. 7. $\frac{1}{x^2+4x-2}$. 8. $\frac{12x-5}{x(1+x-2x^2}$. 9. $\frac{2}{(x-3)^2(x-2)}$.

10. $\frac{2x-3}{x^3-4x^2+4x}$. 11. $\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}$. 12. $\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}$ (корени имениоца су: -1 и -2).

§ 55. Интеграција функција које зависе од квадратног корена из полинома првог и другог степена

Ако подинтегрална функција зависи од квадратног корена из полинома првог степена, као, на пр., у интегралу

$$\int \frac{dx}{5+\sqrt{x-2}},$$

можемо тај корен узети за нову променљиву; тада подинтегрална функ-

ција, после трансформације, постаје рационална. Тако ћемо у овом примеру ставити

$$\sqrt{x-2} = z,$$

одакле је

$$x = z^2 + 2, \qquad dx = 2z\,dz.$$

После ове замене интеграл добија облик

$$\int \frac{dx}{5+\sqrt{x-2}} = \int \frac{2z\,dz}{5+z} = 2\int\left(1 - \frac{5}{z+5}\right)dz = 2\left[\int dz - 5\int\frac{dz}{z+5}\right] =$$

$$= 2\left[z - 5\log(z+5)\right] + C =$$

$$= 2\left[\sqrt{x-2} - 5\log(5+\sqrt{x-2})\right] + C.$$

Ако подинтегрална функција зависи од квадратног корена из полинома другог степена, имајући у виду да се у основној таблици за интеграцију налазе ова два интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}},$$

први задатак ће бити да се тражени интеграл трансформише по могућству на таблични интеграл. Како се то ради објаснићемо на примерима.

1. Израчунати интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{5+4x+x^2}}.$$

У имениоцу треба издвојити тотални квадрат

$$5 + 4x + x^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 4 + 1 = 1 + (x+2)^2$$

и извршити замену

$$x + 2 = z; \quad dx = dz; \quad x = z - 2.$$

Интеграл се израчунава овако

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{5+4x+x^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \log(z + \sqrt{1+z^2}) + \log C =$$

$$= \log C\left[x + 2 + \sqrt{5+4x+x^2}\right].$$

2. Израчунати интеграл

$$I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x(4-x)}}.$$

Издвојимо и овде тотални квадрат

$$x(4-x) = -(x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 4) + 4 = 4 - (x-2)^2$$

и извршимо замену

$$x - 2 = 2z; \quad dx = 2\,dz,$$

па имамо

$$I = \int \frac{2(z+1)\,2\,dz}{\sqrt{4(1-z^2)}} = 2\int \frac{z+1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = 2\left[-\frac{1}{2}\int \frac{d(1-z^2)}{\sqrt{1-z^2}} + \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\right] =$$

$$= 2\left[-\sqrt{1-z^2} + \arcsin z\right] + C = -\sqrt{x(4-x)} + 2\arcsin\frac{x-2}{2} + C.$$

3. Израчунати интеграл

$$I = \int \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Пошто у табличним интегралима корен стоји у имениоцу, треба интеграл трансформисати тако да корен буде у имениоцу; у томе циљу подинтегралну функцију множимо и делимо кореном. Поступа се овако:

$$I = \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \frac{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Први интеграл је таблични, а други израчунавамо овако

$$I_1 = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int x\,dv,$$

где се v одређује после делимичне интеграције

$$v = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(1-x^2) = -\sqrt{1-x^2}$$

те према томе за I_1 имамо

$$I_1 = \int x\,dv = -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}\,dx = -x\sqrt{1-x^2} + I.$$

Ако ову вредност ставимо у израз за I, добићемо

$$I = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} - I,$$

одакле имамо дефинитивно

$$I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) + C.$$

Слично се израчунава интеграл

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} + \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right] + C.$$

4. Израчунати интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

Пошто у табличном интегралу не стоји испред корена у имениоцу никакав променљив чинилац, а овде стоји, треба тај чинилац уклонити. То се ради заменом

$$x = \frac{1}{z}, \quad dx = -\frac{1}{z^2}\,dz, \quad z = \frac{1}{x},$$

помоћу које се наш интеграл овако трансформише

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dz}{-z^2\cdot\frac{1}{z}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} =$$

$$= -\log\left(z + \sqrt{1+z^2}\right) + \log C =$$

$$= \log\frac{Cx}{1+\sqrt{1+x^2}}.$$

Вежбања.

Израчунати интеграле са подинтегралном функцијом:

1. $\sqrt{x+1}$. 2. $\sqrt{2-x}$. 3. $\frac{\sqrt{x-1}}{x}$. 4. $\frac{x}{\sqrt{x-1}}$. 5. $\frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$. 6. $(\sqrt{x+1} -$ $- \sqrt{x-1})\, x$. 7. $\sqrt{ax+b}$. 8. $x\sqrt{ax+b}$. 9. $\frac{1}{\sqrt{3x^2-2}}$. 10. $\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}$. 11. $\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}}$
12. $\frac{1}{\sqrt{9x^2+6x-15}}$. 13. $\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$. 14. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$. 15. $\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

§ 56. Интеграција неких трансцендентних функција

У таблици за интеграцију има неколико интеграла са подинтегралном трансцендентном функцијом. То су интеграли (V), (V^{bis}), (VI), (VI^{bis}), (VII), (VII^{bis}).

Покажимо још неколико важних интеграла трансцендентних функција.

1. За интеграл

$$I_n = \int x^n e^x \, dx,$$

где је n цео позитиван број, можемо лако помоћу делимичне интеграције извести редукциони образац,

$$I_n = x^n e^x - n\, I_{n-1};$$

а за n цео негативан број слично се изводи овај редукциони образац

$$I_n = \frac{1}{n+1}\left[x^{n+1} e^x - I_{n+1}\right].$$

2. Интеграл

$$\int f(e^x)\, dx$$

помоћу смене

$$e^x = z, \quad e^x\, dx = dz,$$

одакле је

$$dx = \frac{dz}{z}$$

доводи до интеграла

$$\int \frac{f(z)}{z}\, dz.$$

Ако функција $f(z)$ не садржи више трансцендентних операција, можемо на наш интеграл применити операције интеграције, које смо изложили у претходним параграфима.

3. $$\int tg x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\log\cos x + C,$$

$$\int cotg\, x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \log\sin x + C.$$

4. За интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

као и за многе друге интеграле тригонометриских функција згодно је употребити замену

$$tg\,\frac{x}{2} = z,$$

одакле је

$$\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = dz.$$

Помоћу ове замене интеграл се трансформише

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dz}{z} = \log z + C = \log tg\,\frac{x}{2} + C.$$

Интеграл

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

можемо трансформисати на претходни интеграл, ако ставимо $x = \frac{\pi}{2} - z$. Тада је $\cos x = \sin z$ и $dx = -dz$. После овога се добија

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\int \frac{dz}{\sin z} = -\log tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C = \log tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

5. За неке интеграле трансцендентних функција примена делимичне интеграције даје одмах резултат.

На пр.,

$$\int \arcsin x\,dx = x \arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

6. Најзад покажимо још једну методу за трансформисање подинтегралне функције.

Израчунати интеграл

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x},$$

где су a и b сталне величине. Ако ставимо

$$a = r \cos \varphi, \qquad b = r \sin \varphi,$$

одакле је

$$r = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad tg\,\varphi = \frac{b}{a},$$

где су r и φ помоћне сталне величине, именилац се трансформише у

$$a \sin x + b \cos x = r\,(\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi) = r \sin (x + \varphi),$$

а после замене $x + \varphi = z$ добија се (пример 4)

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \int \frac{dz}{r \sin z} = \frac{1}{r} \log tg \frac{z}{2} + C = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \log tg \frac{1}{2}\left(x + arctg \frac{b}{a}\right) + C.$$

Вежбања.

Израчунати интеграле са подинтегралном функцијом:

1. $x^3 e^x$. 2. $x^2 e^{2x}$. 3. $xe^{-k^2x^2}$. 4. $tgh\,x$. 5. $cotgh\,x$. 6. $tg\,kx$. 7. $cotg\,k^2 x$. 8. $\frac{1}{\sin mx}$. 9. $\frac{1}{\cos nx}$. 10. $\frac{1}{3 \sin x + 4 \cos x}$. 11. $\arccos x$. 12. $arccotg\,x$ 13. $\log x$ 14. $e^{kx} \sin mx$. 15. $e^{kx} \cos nx$. 16. $x^n \log x$. 17. $x^2 \sin x$. 18. $x^2 \cos x$. 19. $\frac{1}{a + b \sin x}$. 20. $\frac{1}{a + b \cos x}$.

§ 57. Одређени интеграл

Површину омеђену кривом линијом

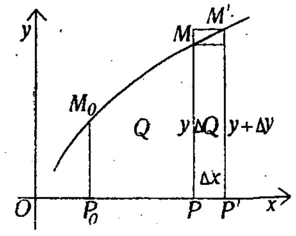
(1) $$y = f(x),$$

двема ординатама M_0P_0 и MP и делом P_0P осе x означимо са „Q" (сл. 93). Тако конструисана површина зове се *површина у Декартову координатном систему*.

Апсцисе тачака P_0 и P означимо са a и x. Јасно је да ова површина функција x'a, тј.

$$Q = F(x).$$

Поставимо себи задатак да израчунамо извод површине Q по апсциси x. У томе циљу дајемо x'у прираштај $\Delta x = PP'$ и конструишемо ординату $P'M'$. Површина ΔQ омеђена је бескрајно малим луком MM', двема ординатама MP и $M'P'$ и отсечком PP' осе x. Ако кроз тачку M, односно M' повучемо праву паралелну са осом x до пресека са другом граничном ординатом, добићемо два правоугаоника са површинама



Сл. 93. Површина у Декартову систему координата

$$y\,\Delta x \qquad \text{и} \qquad (y + \Delta y)\,\Delta x.$$

Као што се види на слици, површина ΔQ задовољава услове

$$y\,\Delta x < \Delta Q < (y + \Delta y)\,\Delta x.$$

Поделимо наше неједнакости позитивном величином Δx, и имаћемо

(2) $$y < \frac{\Delta Q}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

Почнимо сада смањивати дужину Δx; нека она тежи нули. У граничној вредности $\Delta x = 0$ и $\Delta y = 0$.

Однос $\frac{\Delta Q}{\Delta x}$ у граничној вредности тежи изводу, тј.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x} = \frac{dQ}{dx};$$

десна страна $y + \Delta y$ неједнакости (2) узима вредност y, тј. поклапа се са левом страном тих неједнакости. Пошто се $\frac{\Delta Q}{\Delta x}$ увек наилази између ових граница, а границе су се поклопиле, гранична вредност количника једнака је свакој од ових једнаких граница, тј.

$$\frac{dQ}{dx} = y$$

или

$$\frac{d\,F(x)}{dx} = f(x). \tag{3}$$

Према томе имамо теорему:

Извод површине у Декартову координатном систему по апсциси једнак је ординати.

Када је површина Q дата као функција апсцисе, једначина криве (1) одређује се помоћу операције диференцирања.

Обрнуто, када је дата крива (1), за одређивање Q, како то следује из једначине (3), треба извршити интеграцију. Као резултат те интеграције добићемо неодређени интеграл

$$Q(x) = F(x) + C,$$

међутим у величини површине Q не може бити никакве неодређености.

Неодређеност је наступила због тога што нисмо узели у обзир услов да је површина омеђена слева ординатом M_0P_0 и према томе треба да буде

$$Q(a) = 0$$

или

$$F(a) + C = 0,$$

где је a апсциса тачке M_0.

Ова једначина одређује произвољну константу интеграције

$$C = -F(a)$$

и према томе за површину Q имамо израз

$$Q(x) = F(x) - F(a).$$

Са десне стране стоји разлика вредности неодређеног интеграла за две вредности аргумента.

Разлика вредности неодређеног интеграла за две вредности аргумента зове се о д р е ђ е н и и н т е г р а л.

Ако операцију одређеног интеграла хоћемо да означимо пре израчунавања неодређеног интеграла, употребићемо ознаку

$$\boxed{Q(x) = \int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a)\,;}$$

број испод знака интеграла означава д о њ у, а изнад знака г о р њ у г р а н и ц у о д р е ђ е н о г и н т е г р а л а.

Горња граница такође може бити стална. Означимо је са b. Тада имамо

$$\boxed{Q = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \Big/_a^b F(x) = F(b) - F(a).} \tag{XIV}$$

Црта са ознакама граница зове се з н а к з а м е н е; он се ставља испред или иза израчунате вредности неодређеног интеграла и показује да треба узети разлику вредности функције за горњу и доњу границу.

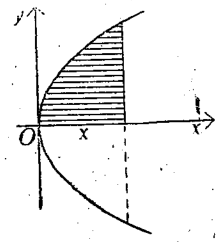
Покажимо на конкретном примеру како се израчунава одређени интеграл.

Нека је дата парабола (сл. 94) са једначином

$$y^2 = 2px,$$

и треба одредити површину која је на слици осенчена.

Користећи познати образац биће



Сл. 94. Површина параболе

$$Q = \int_0^x y\,dx = \int_0^x \sqrt{2px}\,dx = \int_0^x \sqrt{2p}\,x^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \sqrt{2p}\,\frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{2px}\,.\,x = \frac{2}{3}\,xy.$$

Из добијеног резултата непосредно следује Архимедова теорема да је површина параболичког отсека (2Q) једнака двема трећинама правоугаоника са димензијама тетиве (2y) и висине (x) отсечка.

Треба ли наводити нарочита правила за израчунавање одређених интеграла? Очевидно не, јер вредност тих интеграла добијамо непосредно помоћу неодређених интеграла. Нарочити део теорије одређених интеграла односи се само на оне интеграле, за које не можемо израчунати одговарајући неодређени интеграл.

Наведимо неколико особина одређеног интеграла, које следују непосредно из дефиниције.

Са променом реда граница, одређени интеграл мења свој знак, тј.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Ако се границе поклопе, одређени интеграл има вредност нулу

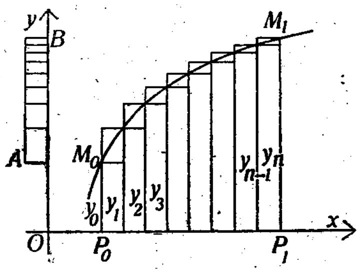
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Извод одређеног интеграла по променљивој горњој граници једнак је подинтегралној функцији за вредност те границе, а по променљивој доњој граници подинтегралној функцији са минусом за вредност те доње границе, тј.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)\,dx = f(x), \qquad \frac{d}{dx}\int_x^a f(x)\,dx = -f(x).$$

Ако се интервал између граница дели на два или више делова, одређени интеграл је једнак збиру одговарајућих интеграла за поједине делове, на пр.,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$



Сл. 95. Одређени интеграл као збир

Покажимо сада друго тумачење одређеног интеграла, које се може поставити и као дефиниција овог интеграла.

Површину Q можемо претставити овако. Поделимо растојање $P_0 P_1$ (сл. 95) на n једнаких делова и сваки део означимо са Δx. Конструишимо ординате за деоне тачке и означимо их редом са

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_{n-1},\ y_n.$$

Затим конструишимо две степенасте линије, као што је то показано на слици, једну унутрашњу и другу спољашњу. Површина омеђена унутрашњом линијом износи

$$q_n = (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})\,\Delta x,$$

а површина омеђена спољашњом степенастом линијом има вредност

$$Q_n = (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_n)\,\Delta x.$$

Наша површина Q задовољава неједнакости

$$q_n < Q < Q_n,$$

а разлика између граница ових неједнакости износи

$$Q_n - q_n = (y_n - y_0)\,\Delta x$$

и може се претставити правоугаоником висине $y_n - y_0$ и основице Δx (AB на слици 95).

Претпоставимо сада да број n бескрајно расте, тада ће Δx тежити нули, ако је $y_n - y_0$, тј. разлика крајњих ордината, коначна, претходна разлика $Q_n - q_n$ тежи нули, тј. q_n и Q_n теже заједничкој величини. Заједничка гранична вредност, која даје површину Q, претставља одређени интеграл. Можемо, дакле, написати

$$Q = \int_a^b y\,dx = \lim_{n\to\infty}(y_1 + y_2 + \dots + y_n)\,\Delta x$$

или речима:

Одређени интеграл претставља граничну вредност збира бескрајно малих производа вредности функције и прираштаја независно променљиве, када број сабирака бескрајно расте.

Пошто се збир n производа може означити кратко

$$(y_1 + y_2 + \dots y_n)\,\Delta x = S\,y\,\Delta x,$$

где S означава почетно слово речи Summa, видимо да је одавде дошла ознака интеграла

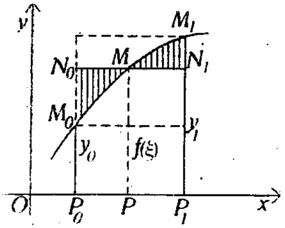
$$\int y\,dx,$$

где производ ydx има јасно геометриско тумачење и зове се **елемент одређеног интеграла**. За интеграл који претставља површину Q тај елемент је био бескрајно узани правоугаоник висине y и основе dx.

Претстава одређеног интеграла као збира бескрајно малих елемената у бескрајно великом броју је врло важна и служи као основа многих теориских расуђивања и практичних примера који стоје у вези са одређеним интегралом.

У наредној глави показаћемо како се приближно израчунава одређени интеграл. Овде ћемо навести само једну теорему која може послужити као основа за такво израчунавање.

Ако узмемо исту површину Q у Декартову систему координата и претпоставимо да ордината криве између тачака M_0 и M_1 има своју најмању и највећу границу, увек можемо повући такву праву $N_0 N_1$, паралелну оси x, да наша површина буде једнака производу



Сл. 96. Теорема о средњој вредности интеграла.

$$P_0N_0 \cdot P_0P_1 \ldots$$

Овом резултату можемо дати и аналитички облик,

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a),$$

где је ξ (читај: кси) апсциса тачке P између тачака P_0 и P_1.

Резултат изражен претходном једначином зове се **теорема средње вредности у примени на одређени интеграл.**

Јасно је да је тачка M са ординатом $f(\xi)$ таква да површине $M_0 N_0 M$ и $N_1 M_1 M$ морају бити једнаке.

Вршили смо анализу одређеног интеграла у претпоставци да је подинтегрална функција непрекидна, да је она коначна и да су границе интеграла коначне. Под извесним условима одређени интеграл задржава свој смисао и има одређену вредност и у случајевима који отступају од постављених услова, али проучавање таквих питања не улази у оквир ове књиге. Наведимо само шта треба разумети под одређеним интегралом: 1) када граница тежи бесконачности и 2) када подинтегрална функција показује скок.

1. Ако у одређеном интегралу $\int_a^b f(x)\,dx$, рецимо, граница b тежи бесконачности, интеграл треба рачунати као ову граничну вредност

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

тј. претходно израчунати интеграл за коначну вредност b, а затим прећи на граничну вредност.

2. Ако између граница a и b постоји таква вредност c за коју подинтегрална функција $f(x)$ прави скок, одређени интеграл треба рачунати према обрасцу

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon'\to 0} \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx,$$

овде су ε и ε' два позитивна броја.

На завршетку овог параграфа навешћемо неколико примера за израчунавање одређеног интеграла у случајевима када не употребљујемо неодређени интеграл са подинтегралном функцијом датог одређеног интеграла.

1. Израчунати интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{\log x}\,dx$$

за $a > 0$, $b > 0$.

Тај интеграл зависи од a и b, који играју улогу параметара. Начинимо извод интеграла по параметру a. По правилу, у чије се доказивање овде не упуштамо, у случају сталних граница и непрекидности подинтегралне функције, за диференцирање интеграла по параметру довољно је диференцирати подинтегралну функцију по том параметру. Тада имамо

$$\frac{dI}{da} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{\log x}\right)dx = -\int_0^1 \frac{x^{a-1}\log x}{\log x}\,dx =$$

$$= -\int_0^1 x^{a-1}\,dx = -\left|\frac{x^a}{a}\right|_0^1 = -\frac{1}{a}$$

За добијање вредности самог интеграла интегрисаћемо сада добијени резултат по a

$$I = -\int \frac{da}{a} = -\log a + C.$$

Пошто је за $a=b$ подинтегрална функција интеграла једнака нули, и сам интеграл једнак је нули; према томе упоредо ретходном једначином имамо једначину

$$0=-\log b+C,$$

одакле је $C=\log b$. Дефинитивно добијамо

$$I=\int_0^1\frac{x^{b-1}-x^{a-1}}{\log x}\,dx=-\log a+\log b=\log\frac{b}{a}.$$

Наш смо интеграл израчунали **методом диференцирања по параметру** и то без обзира на то што нисмо могли израчунати одговарајући неодређени интеграл.

2. Израчунати интеграл

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

Ставимо ли овде

$$x=\alpha t,\quad(\alpha>0),$$

где је t нова променљива, а α параметар, имамо

$$I=\int_0^\infty e^{-\alpha^2t^2}\,\alpha dt.$$

Интеграл претстављен у овој форми је функција параметра α. Помножимо ту функцију са $e^{-\alpha^2}$ и интегришимо по α у границама од 0 до ∞, па ћемо добити

$$\text{(4)}\qquad H=\int_0^\infty I\,e^{-\alpha^2}d\alpha=\int_0^\infty\left[\int_0^\infty e^{-\alpha^2t^2}\,\alpha\,dt\right]e^{-\alpha^2}d\alpha.$$

Пошто је при интеграцији по t чинилац $e^{-\alpha^2}$ сталан, можемо га унети под знак интеграла и написати

$$H=\int_0^\infty\left[\int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+t^2)}\,\alpha\,dt\right]d\alpha.$$

Сада променимо ред интеграције; не улазимо при томе у потврду тога да је таква операција, без обзира на бесконачне границе интеграла, у овом случају законита. Прво интегришимо по α

$$H=\int_0^\infty\left[\int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+t^2)}\,\alpha\,d\alpha\right]dt.$$

Како неодређени интеграл има вредност

$$\int e^{-\alpha^2(1+t^2)}\,\alpha\,d\alpha=-\frac{1}{2}\,\frac{e^{-\alpha^2(1+t^2)}}{1+t^2},$$

то се после замене добија

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\Big|_0^\infty arc\,tg\,t=\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}.$$

Са друге стране, пошто је I константа, из (4) следује

$$H=I\int_0^\infty e^{-\alpha^2}d\alpha=I^2$$

и према томе добијамо једначину

$$I^2=\frac{1}{4}\pi,$$

одакле долазимо дефинитивно до резултата

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Из овог интеграла мажемо лако извести вредност интеграла

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx=\frac{1}{2a}\sqrt{\pi}.$$

а тај резултат можемо написати

$$\int_0^\infty e^{-kx^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,k^{-\frac{1}{2}}.$$

Диференцирањем овог интеграла n пута по k изводимо образац

$$\int_0^\infty e^{-kx^2} x^{2n}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2^n}\,k^{-(n+\frac{1}{2})},$$

из којег, за $k=1$, имамо

$$\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2^n}.$$

Метода, коју смо употребили за израчунавање интеграла I, зове се **метода интеграције по параметру**. Видимо да и ова метода може бити од користи за израчунавање оних интеграла чије одговарајуће неодређене интеграле не можемо израчунати.

У наредној глави показаћемо и друге методе за израчунавање одређених интеграла.

Вежбања.

1. Да ли је тачна једначина $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy$?

2. Потврдити овај образац за делимичну интеграцију одређеног интеграла: $\int_a^b u(x)\,dv =$

$$= \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x).$$

3. Потврдити тачност једначине $\int_a^x f(z)\,dz + \int_x^a f(y)\,dy = 0$.

4. Показати да ако место промењиве x у интегралу

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

уведимо нову промењиву t, везану са претходном промењивом x једначином

$$x = \varphi(t),$$

нова вредност одређеног интеграла има облик

$$\int_{t_1}^{t_2} f\Big[\varphi(t)\Big]\,\varphi'(t)\,dt,$$

при чему t_1 и t_2 задовољавају једначине

$$a = \varphi(t_1),\ b = \varphi(t_2).$$

5. Потврдити тачност обрасца

$$\int_a^b A f(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx.$$

Израчунати одређене интеграле:

6. $\int_0^1 (1 + x^2 + \frac{1}{2}x^3)\,dx$. 7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$. 8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x\,dx$. 9. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

10. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$. 11. $\int_a^b \sqrt{x-1}\,dx$. 12. $\int_0^3 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$. 13. $\int_0^{\frac{3}{5}} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

14. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+c}}$. 15. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. 16. $\int_1^{10} x\sqrt{1+x^2}\,dx$. 17. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 3x\,dx$.

18. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{dx}{1+\cos 4x}$ 19. $\int_0^1 x^2 e^{\alpha x}\,dx$. 20. $\int_1^e \log x\,dx$.

ГЛАВА VII

КАЛКУЛАТИВНИ ПРОЦЕСИ

§ 58. Нумерички рачуни

Да би податак добијен као резултат мерења, опажања или процене постао предмет математичког проучавања потребно је да се он изрази бројем. Тачним бројем могу се изразити не сви већ само поједини од тих резултата. То су углавном резултати пребројавања; они се изражавају целим бројем.

Већина резултата одређује се приближно, тј. дају се границе између којих се налази њихова величина. Постоје и случајеви, где се резултат може израчунати потпуно тачно али ова тачност нема практичне вредности и због упропашћавања рачуна тачне се предности замењују приближним.

а. *Апсолутна и релативна грешка*

Проучићемо пре свега неколико појмова у вези са оцењивањем тачности резултата.

Ако је A тачна, а a приближна вредност неке величине, разлика

$$a - A = \varepsilon$$

зове се апсолутна грешка приблишне вредности a. Ова грешка се може оценити и разликом

$$A - a = p = -\varepsilon,$$

која се зове поправка величине a. Пошто је

$$a + p = A$$

можемо нагласити да је тачна вредност једнака збиру приближне вредности и поправке.

Приближна вредност a може бити већа од тачне A, ако је $\varepsilon < 0$ или мања, ако је $\varepsilon < 0$.

За изражавање приближне вредности са децималним бројевима условно је примљен овај начин:

У децималном броју све децимале, сем последње, морају бити тачне, а последња се сме од тачне вредности разликовати највише за јединицу, а понекад и само за пола јединице.

За два тачна броја $A_1 = 1{,}23527$ и $A_2 = 5{,}575831$ приближне вредности са четири децимале треба написати: $a_1 = 1{,}235$ и $a_2 = 5{,}576$.

Обрнуто, ако је дата приближна вредност $a = 3{,}72$ са два тачна децимала и трећим заокругљеним децималом, можемо тврдити да се тачна вредност A налази у границама

$$3{,}715 \leqslant A \leqslant 3{,}725\,.$$

Разлика ових граница износи 0,01, тј. јединицу заокругљеног децимала. Апсолутна грешка ε броја a у овом случају задовољава неједнакост

$$|\varepsilon| \leqslant 0{,}005\,,$$

где смо, као и увек, цртама означили апсолутну вредност.

За што лакшу оцену тачности приближног броја често пута се употребљује у приближним рачунима нарочити начин писања великих и малих приближних бројева. Број се пише у облику производа два броја: децималног разломка написана према горе наведеном правилу, са запетом после прве важеће цифре, и степена броја 10.

Тако, на пр., број 593 420 000 са четири децимала треба написати: $5{,}934 \,.\, 10^8$, а број 0,000 379 21 са три делимала: $3{,}79 \,.\, 10^{-4}$. Апсолутне грешке ових бројева задовољавају неједнакости

$$|\varepsilon_1| \leqslant 0{,}0005 \,.\, 10^8\,,$$

$$|\varepsilon_2| \leqslant 0{,}005 \,.\, 10^{-4}\,.$$

Обратимо пажњу још на једну особину писања приближних бројева. Ако 21 m претставља дужину са тачношћу до једног центиметра, ову приближну вредност треба написати: $2{,}100 \,.\, 10$ m, тј. ставити нуле са десне стране од запете да би се истакла тачност велнчине.

Покажимо сад на примеру да апсолутна грешка не може служити као мерило за тачност резултата. Претпоставимо да апсолутна грешка износи 1 mm. На основу само тог податка још ништа не можемо рећи о тачности мерења. Ако се ова грешка односи на мерену дужину од 10 km, казали бисмо да је мерење извршено са необичном тачношћу, чак још недостигнутом тачношћу. Ако је, међутим, иста грешка учињена при мерењу жице дебљине од 2 mm, јасно је да такво мерење ништа не вреди.

За процењивање тачности резултата уводи се појам **релативне грешке**, односа апсолутне грешке према тачној вредности саме величине.

Ако релативну грешку означимо са ρ, имамо

$$\rho = \frac{\varepsilon}{A}. \tag{1}$$

Релативна грешка је апстрактан број.

У горњим примерима за прво мерење имали бисмо

$$\rho = \frac{1}{10\,000\,000} = 1.10^{-7}, \text{ а за друго } \rho = \frac{1}{2} = 5.10^{-1}.$$

Ако тачна вредност није позната, за израчунавање релативне грешке можемо употребити израз

$$\rho' = \frac{\delta}{a}, \tag{2}$$

где у бројиоцу стоји δ разлика граница, између којих се налази наша величина, а у имениоцу приближна вредност саме величине. Није тешко показати да се у случају мале релативне грешке ова два израза само незнатно разликују један од другог; при томе ће, ако употребимо мању приближну вредност a, израчуната релативна грешка (2) бити већа од од правог израза (1).

Ако релативну грешку помножимо са 100, добићемо израз грешке у процентима или **процентуалну грешку**.

Дакле, на пр., ако смо после мерења неке дужине од 5 cm добили две приближне вредности 5,03 cm и 4,98 cm, апсолутне грешке ових величина износе; $\varepsilon_1 = 0{,}03$ cm и $\varepsilon_2 = -0{,}02$ cm, а поправке $p_1 = -0{,}03$ cm и $p_2 = +0{,}02$ cm. Релативне грешке су: $\rho_1 = \frac{0{,}03}{5} = 0{,}006$ и $\rho_2 = \frac{-0{,}02}{5} = -0{,}004$ и процентуалне: $0{,}6\%$ и $0{,}4\%$.

Ако грешку рачунамо помоћу добијених приближних вредности, у (2) треба ставити $\delta = 5{,}03 - 4{,}98 = 0{,}05$ и $a = 4{,}98$; приближна вредност релативне грешке износи

$$\rho' = \frac{0{,}05}{4{,}98} \approx 0{,}01,$$

или процентуално 1%.

Ако је приближан број написан у облику производа децималног броја и степена броја 10, лако је одмах казати приближну вредност релативне грешке. Објаснимо ово на примеру.

За број $5{,}934 \cdot 10^8$ имали смо вредност апсолутне грешке

$$|\varepsilon_1| \leqslant 0{,}0005 \cdot 10^8,$$

а према томе и

$$|\varepsilon_1| \leqslant 0{,}001 \cdot 10^8,$$

ако полазну грешку не рачунамо за пола цифре.

За релативну грешку тада имамо

$$\rho = \frac{|\varepsilon_1|}{A} \leqslant \frac{0{,}0005 \cdot 10^8}{5{,}934 \cdot 10^8} \leqslant \frac{0{,}0005}{1} \leqslant 0{,}0005 \leqslant 0{,}001.$$

Овај резултат показује да је релативна грешка правилно написаног приближног броја мања од децималног броја са јединицом на месту нетачне цифре или чак са петицом на месту наредном после нетачне цифре.

Ова особина непосредног одређивања релативне грешке приближног броја само по облику баш служи као објашњење зашто је уведен показани начин писања приближних бројева.

b. *Грешке при основним операцијама*

Показаћемо како грешка у резултату добијеном после извршења основних рачунских операција зависи од познатих грешака бројева са којима оперишемо.

α. *Сабирање*

Ако место тачних бројева $A_1, A_2, \ldots, A_n$ сабирамо њихове приближне вредности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са апсолутним грешкама $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, апсолутна грешка ε збира

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

износи

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n,$$

тј. једнака је збиру грешака свих сабирака.

Релативна грешка ρ збира има вредност

$$\rho = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}.$$

Лако је показати да је ова грешка мања од највеће и већа од најмање од релативних грешака сабирака.

Заиста, нека је $\frac{\varepsilon_1}{A_1}$ највећа грешка, тада имамо за сваку другу релативну грешку неједнакост

$$\frac{\varepsilon_1}{A_1} \geqslant \frac{\varepsilon_i}{A_i}, \qquad i = 2, 3, \ldots, n,$$

одакле је

$$\varepsilon_i \leqslant \varepsilon_1 \frac{A_i}{A_1}.$$

Ако искористимо ове неједнакости, можемо написати

$$\rho \leqslant \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_1 \frac{A_2}{A_1} + \varepsilon_1 \frac{A_3}{A_1} + \ldots + \varepsilon_1 \frac{A_n}{A_1}}{A_1 + A_2 + \ldots + A_n},$$

одакле непосредно следује да је

$$\rho \leqslant \frac{\varepsilon_1}{A_1}.$$

Исто тако можемо показати да је

$$\rho \geqslant \frac{\varepsilon_n}{A_n},$$

ако смо са ε_n означили најмању грешку.

При сабирању приближних бројева треба две чињенице узимати у обзир.

Прво. Ако су бројеви изражени са тачношћу различитих јединица, треба сабирати само оне делове бројева, које одговарају цифрама највећег броја.

На пр., при сабирању

$$\begin{array}{r|l}
73,25 & \\
9,72 & 1 \\
0,05 & 32 \\
0,00 & 0131 \\
\hline
83,02\,, &
\end{array}$$

које је боље вршити овако

$$\begin{array}{r|l}
7,325 & \cdot 10 \\
0,972 & \cdot 10 \\
0,005 & \cdot 10 \\
0,000 & \cdot 10 \\
\hline
8,302 \cdot 10\,, &
\end{array}$$

треба сабрати само бројеве са леве стране црте.

Друго. Ако сабирамо више бројева, на пр., четрдесет, а у сваком имамо апсолутну грешку једнаку половини јединице нетачне цифре, у збиру може бити грешка једнака $0,5 \times 40 = 20$ тих јединица, тј. две тачне јединице. Према томе у збиру треба изоставити не само нетачну већ и једну тачну цифру.

Ова примедба се односи на случај, кад је свака од четрдесет грешака највећа и све грешке истог смисла, тј. све су позитивне или негативне. Ако за такву особину грешака нема нарочитих индикација, тако да грешке могу бити и позитивне и негативне, и то различите апсолутне вредности, на основу теорије вероватноће може се закључити да је у случају великог броја сабирака довољно узимати у обзир отприлике само 10% од горе израчунате максималне грешке.

β. *Одузимање*

Одузимање можемо сматрати као алгебарско сабирање два броја. Према томе оно што смо навели о сабирању важи и за одузимање.

Треба, међутим, напоменути да при одузимању два броја исте тачности можемо добити резултат са мањом тачношћу, а понекад и сасвим неодређен.

На пр., при одузимању два броја од по пет цифара, на пр.,

$$2,7593 - 2,7541 = 0,0052$$

добили смо резултат са две цифре, једном тачном а другом нетачном а при одузимању

$$5,3294 - 5,3293 = 0,0001$$

резултат садржи само нетачну цифру.

У вези са израчунавањем разлике два броја учинићемо и ову примедбу.

Често пута, нарочито у поновним мерењима исте величине, треба израчунати разлику два броја блиских трећем броју. На пр., треба наћи разлику бројева

$$A + r_1 \text{ и } A + r_2.$$

Јасно је да је за израчунавање таквих бројева довољно израчунати само разлику

$$r_1 - r_2$$

без искоришћавања главног дела A датих бројева.

На пр., место израчунавања разлике

$$53\,792\,531 - 53\,792\,517$$

рачунамо само разлику

$$31 - 17 = 14.$$

Ово је нарочито важно, када имамо низ таквих разлика.

γ. *Множење*

Доказаћемо теорему:

Релативна грешка производа два приближна броја једнака је алгебарском збиру релативних грешака чинилаца.

Нека су $a_1 = A_1 + \varepsilon_1$ и $a_2 = A_2 + \varepsilon_2$, тада релативна грешка ρ производа приближних бројева a_1 и a_2 има вредност

$$\rho = \frac{a_1 a_2 - A_1 A_2}{A_1 A_2}.$$

Пошто је

$$a_1 a_2 = (A_1 + \varepsilon_1)(A_2 + \varepsilon_2) = A_1 A_2 + \varepsilon_1 A_2 + \varepsilon_2 A_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \approx$$
$$\approx A_1 A_2 + \varepsilon_1 A_2 + \varepsilon_2 A_1,$$

јер члан $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ можемо занемарити због његове релативно мале величине према другим члановима, за ρ имамо

$$\rho = \frac{\varepsilon_1 A_2 + \varepsilon_2 A_1}{A_1 A_2} = \frac{\varepsilon_1}{A_1} + \frac{\varepsilon_2}{A_2} = \rho_1 + \rho_2,$$

а ово и доказује тачност наше теореме. Теорема је тачна и за више чинилаца.

Наведена теорема претпоставља да су познате апсолутне вредности и знаци релативних грешака чинилаца. Ако знаци нису познати, а грешке могу бити позитивне и негативне, место горње теореме треба се руководити теоремом:

Апсолутна вредност релативне грешке производа није већа од збира апсолутних вредности релативних грешака чинилаца; на пр., за два чиниоца имамо услов

$$|\rho| \leqslant |\rho_1| + |\rho_2|.$$

При множењу приближних бројева треба се овога придржавати.

1. Множење треба почињати не последњом него првом цифром множиоца.

2. Први делимични производ треба написати у потпуности. Од осталих делимичних производа треба писати онолико само цифара да најнижа одговара најнижој цифри првог делимичног производа.

Покажимо на примеру како се практички врши такво скраћено множење.

Место да множимо	Множићемо
5.324	5,324
1.732	1,732
5324	5324
3726 8	3727
159 72	160
10 648	11
9,221|168	9,222

Први делимични производ написали смо у потпуности

$$5324 \times 1 = 5324$$

Други делимични производ добили смо множењем множеника без последње цифре

$$\begin{array}{r} 532\cdot \\ \cdot 7 \cdot\cdot \\ \hline 3724 \end{array}$$

па смо затим последњу цифру поправили узимајући у обзир производ $4 \times 7 = 28$ изостављене последње цифре 4 и додали смо 3; према томе ставили смо свега 3727.

Трећи делимични производ, добили смо овако

$$\begin{array}{r} 53\ .\ . \\ .\ .\ 3\ . \\ \hline 159 \end{array}$$

али и овде смо додали јединицу узимајући у обзир производ $2 \times 3 = 6$, који је већи од 5, па смо ставили 160.

Најзад последњи делимични производ има вредност

$$\begin{array}{r} 5\ .\ .\ . \\ .\ .\ .\ 2 \\ \hline 10 \end{array}$$

са додатком јединице од претходног производа $3 \times 2 = 6$, ставили смо 11.

Видимо да у нашем скраћеном производу можемо задржати све цифре, јер се само последња цифра разликује за јединицу од тачног производа.

Уопште, број тачних цифара у производу може бити највише једнак броју цифара чиниоца са најмањом тачношћу.

b. Дељење

Ако хоћемо да израчунамо релативиу грешку ρ количника два приближна броја a_1 и a_2, са релативним грешкама

$$\rho = \frac{\varepsilon_1}{A_1} \quad и \quad \rho_2 = \frac{\varepsilon_2}{A_2},$$

где су, као и раније, A_1 и A_2 тачие вредности, а ε_1 и ε_2 апсолутне грешке, треба израчунати

$$\rho = \frac{\dfrac{a_1}{a_2} - \dfrac{A_1}{A_2}}{\dfrac{A_1}{A_2}}.$$

Пошто су

$$a_1 = A_1 + \varepsilon_1, \qquad a_2 = A_2 + \varepsilon_2,$$

имамо

$$\rho = \frac{\dfrac{A_1+\varepsilon_1}{A_2+\varepsilon_2} - \dfrac{A_1}{A_2}}{\dfrac{A_1}{A_2}} = \frac{\varepsilon_1 A_2 - \varepsilon_2 A_1}{A_1 (A_2 + \varepsilon_2)}.$$

Како сад величину ε_2 можемо занемарити у поређењу са A_2, дефинитивно се може написати

$$\rho = \frac{\varepsilon_1 A_2 - \varepsilon_2 A_1}{A_1 A_2} = \frac{\varepsilon_1}{A_1} - \frac{\varepsilon_2}{A_2} = \rho_1 - \rho_2.$$

Овом резултату одговара теорема:

Релативна грешка количника једнака је разлици релативних грешака бројиоца и имениоца.

У овом облику теорема претпоставља алгебарске вредности грешака. Ако знаци грешака нису позиати, претходну теорему треба заменити теоремом:

Апсолутна вредност релативие грешке количника иије већа од збира апсолутних вредиости релативиих грешака бројиоца и имениоца.

Покажимо на примеру како се врши скраћено делење, у коме треба избегавати операције са сувишним цифрама.

Узмимо да треба извршити делење два приближиа броја

$$5{,}927 : 2{,}135$$

место обичног делења

$$\begin{array}{r|l}
5{,}927 & 2{,}135 \\
\underline{4270} & \overline{2{,}7761} \\
1657 & 0 \\
\underline{1494} & \underline{5} \\
162 & 50 \\
\underline{149} & \underline{45} \\
13 & 050 \\
\underline{12} & \underline{810} \\
 & 240,
\end{array}$$

треба овако делити

$$\begin{array}{r|l}
5{,}927 & 2{,}135 \\
\underline{4270} & \overline{2{,}776} \\
1657 & \\
\underline{1495} & \\
162 & \\
\underline{149} & \\
13 & \\
\underline{13} & \\
0. &
\end{array}$$

У другом дељењу:

1. Не треба узимати цифре којих нема код датих бројева.
2. У формирању сваког наредног делимичног производа треба од делиоца узимати једну цифру мање, при томе поправљати последњу цифру с обзиром на производ са првом изостављеном цифром.

На пример, делимичии производ 1495 састављен је од производа $213 \times 7 = 1491$ и додатка 4 од резултата усменог множења изостављене цифре 5 са 7, тј. $5 \times 7 = 35$.

Исто тако за иаредни производ имамо $21 \times 7 = 147$ са поправком за производ прве изостављене цифре $3 \times 7 = 21$, тј. $147 + 2 = 149$ итд.

Образложење елементарних приближних рачуиа и поступак са њима врло лепо су објашњени у књизи проф. Ј. Хлитчијева и Д. Лазаревића: „Основи технике рачунања“, 1946.

c. Грешка функције

Када за одређивање величине y треба прво измерити величину x, а затим извршити операције означеие одређеном фуикцијом

$$y = f(x),$$

грешка учињеиа у вредиости аргумеита x повлачи за собом грешку у вредности функције.

Означимо ли грешку у аргументу x са Δx, а грешку у функцији y са Δy, имамо ову везу између грешака

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

како то следује из дефиниције апсолутне грешке: $f(x)$ је тачна вредност функције, а $f(x + \Delta x)$ приближна.

Ако грешку Δx сматрамо малом и означимо је са dx, десна страна претходне једначине може се заменити приближним изразом

$$f'(x)\,dx,$$

где је као и обично, $f'(x)$ извод функције $f(x)$ по x. Написани израз претставља главни члан у изразу прираштаја функције Δy, њен диференцијал dy. Како је

$$dy = f'(x)\,dx,$$

можемо тврдити да је грешка функције једнака диференцијалу те функције, при чему је диференцијал независно променљиве јаднак грешци аргумента.

Јасно је да релативна грешка функције има вредност

$$\frac{dy}{y} = \frac{y'}{y}\,dx,$$

тј. једнака је производу логаритамског извода и грешке независно променљиве.

Пример.

Одредити грешку коју ћемо учинити у запремини лопте полупречника $r = 10$ cm, ако за полупречник узмемо 10,1 cm.

Пошто је запремина лопте једнака

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

за апсолутну грешку треба написати

$$\varepsilon = dV = \frac{d}{dr}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) dr = 4\pi r^2 dr,$$

а релативну

$$\rho = \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\frac{dr}{r}.$$

У нашем нумеричком примеру добијамо за апсолутну грешку

$$dV = 4\cdot\pi\cdot 10^2\cdot 0{,}1\ \text{cm}^3 \approx 1{,}257\cdot 10^2\,\text{cm}^3,$$

а за релативну

$$\rho = 3\cdot\frac{0{,}1}{10} = 0{,}03.$$

Ако функција z зависи од више променљивих, рецимо од x и y, на основи обрасца за тотални диференцијал, који претставља апсолутну грешку, имамо

$$\varepsilon = dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Релативна грешка има вредност

$$\rho = \frac{dz}{z} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{z} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{z}.$$

Пример.

Одредити релативну грешку у запремини V конуса висине $h = 12$ cm и полупречника основе $r = 5$ cm, ако грешка у висини износи 0,02 cm, а у полупречнику основе 0,01 cm.

Пошто је

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

после логаритмовања имамо

$$\log V = \log\frac{1}{3}\pi + 2\log r + \log h,$$

одакле, после диференцирања, изводимо

$$\rho = \frac{dV}{V} = 2\frac{dr}{r} + \frac{dh}{h}.$$

За наше нумеричке вредности добијамо

$$\rho = 2\cdot\frac{0{,}01}{5} + \frac{0{,}02}{12} \approx 0{,}004 + 0{,}0017 \approx 0{,}006$$

или процентуално 0,6%.

d. *Грешка логаритма*

Нека је y декадни логаритам броја x, тј.

$$y = log_{10} x .$$

Тој логаритамској једначини одговара експоненцијална једначина

$$10^{y} = x .$$

Логаритмовање ове једначине по природној основи даје

$$y \, log \, 10 = log \, x ,$$

одакле је

$$y = \frac{1}{log \, 10} \, log \, x = \mathrm{M} \, log \, x,$$

где је M декадни модуо природних логаритама са вредношћу (§ 24):

$$\mathrm{M} = \frac{1}{log \; 10} = log_{10} \, e \approx 0{,}434\,294\,5.$$

Из предходне једначине непосредно следује

$$dy = \mathrm{M} \, \frac{dx}{x},$$

или, приближно,

$$dy \approx 0{,}434 \frac{dx}{x} .$$

Према томе можемо формулисати ову теорему:

Апсолутна грешка декадног логаритма једнака је производу модула M ($\approx$ 0,434) и релативне грешке броја.

Ова теорема омогућује да се реши проблем о броју цифара, које треба задржати у логаритму неког броја, чија је релативна грешка позната.

На пр.. ако релативна грешка неког броја износи пола процента, тј. 0,005, у његов декадни логаритам тиме се већ уноси грешка

$$dy \approx 0{,}434 \, . \, 0{,}005 \approx 0{,}002.$$

те према томе, у логаритму нема смисла задржавати после запете више од три цифре.

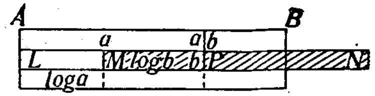
e. *Логаритмар*

За израчунавања помоћу логаритама употребљују се било логаритамске таблице са одређеним бројем цифара, према степену тачности који се тражи, било нарочита справа која се зове **логаритамски лењир** или **логаритмар**.

Употреба логаритамских таблица је добро позната из Елеметарне математике.

Логаритмар се сада много примењује, нарочито у релативно грубим практичним рачунима. Ова справа омогућује да се бројеви множе и деле само померањем једног дела лењира и читањем резултата. Објаснићемо само принцип справе, а са детаљима о употреби може се читалац упознати из упутства које се обично прилаже лењиру.

Справа (сл. 97) се састоји од два лењира — једног непокретног (AB) и другог покретног (MN). На сваком лењиру се мере логаритми, али означене црте поделе не показују вредности тих логаритама него вредности бројева који тим логаритмима одговарају. Кад сабирамо дужине једног и другог лењира, између одређених црта, сабирамо логаритме, али написани бројеви показују вредност једног броја, вредност другог броја и на крају збира — вредност производа тих бројева, — јер збиру логаритама одговара логаритам производа. Према томе, за израчунавање производа ab можемо узети дужину $\mathrm{LM} = log \, a$ на првом лењиру, на крај M те дужине надовезати дужину $\mathrm{MP} = log \, b$ другог лењира; дужина LP на првом лењиру одговара $log \, ab$ и на тој црти скале AB можемо прочитати број једнак производу ab.



Сл. 97. Логаритамски лењир

Слично се поступа, путем одузимања дужина, при израчунавању количника два броја.

Вежбања.

1. Мерења дужине од 10 cm дала су две приближне вредности: 10,05 cm и 9,97 cm. Одредити: апсолутне грешке, поправке, релативне грешке и процентуалне грешке.

2. Израчунати релативну грешку броја 27153 m, ако је његова апсолутна грешка 1,5 m.

3. Поставити и решити неколико задатака за приближно сабирање, одузимање, множење и дељење. Израчунати при томе релативну грешку резултата.

4. Одредити релативну грешку запремине $\mathrm{V} = xyz$, ако ту запремину рачунамо по обрасцу $\mathrm{V}_1 = x_1 \, y_1 \, z_1$, где су $\mathrm{V}_1, x_1, y_1, z_1$ погрешне вредности одговарајућих величина.

5. Релативна грешка броја износи 0,0075. Одредити апсолутну грешку природног логаритма тог броја.

6. Мајстору је наручена коцка са ивицом од 12 cm. Израчунати релативну грешку запремине те коцке, ако израђено тело претставља правоугли паралелепипед са димензијама 12,1 cm, 12,3 cm, 11,98 cm.

7. Каква тачност треба да буде у логаритму броја 7,4321, ако релативна грешка самог тог броја износи око 0,25%?

8. Израчунати помоћу логаритмара $\frac{4{,}73\times 9{,}15\times 2{,}425\times 5{,}56}{3{,}21\times 2{,}325\times 1{,}915\times 5{,}51}$.

§ 59. Редови

Ако треба претворити обичан разломак $\frac{1}{3}$ у децималан број, треба бројилац делити имениоцем; у резултату тог дељења добићемо децималан периодичан разломак

$$\frac{1}{3}=0{,}333...=0{,}(3).$$

Тај периодични разломак можемо написати у облику збира

$$\frac{1}{3}=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+...=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+...+\frac{3}{10^n}+...,$$

који садржи бескрајно много сабирака. Сабирак $\frac{3}{10^n}$ показује општу формулу према којој су састављени сви чланови тог бесконачног збира; он је по реду n'ти члан.

Као што знамо, чланови претходног збира иду по одређеном правилу. То су чланови геометриске прогресије: сваки наредни члан добија се из претходног множењем истим бројем, у нашем случају бројем $\frac{1}{10}$.

Бројеви, изрази или функције

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ ...,\ u_n ...,$$

састављени по одређеном правилу и поређани у одређеном реду образују **математички низ**. Ма који његов члан u_n зове се **општи члан низа**.

Збир узастопних чланова низа сачињава **ред**.

Ако је број чланова реда коначан, **ред** је **коначан**. Ако је тај број бесконачан и **ред** је **бесконачан**.

Од коначних редова познати су нам из Елементарне математике збирови коначног броја чланова **аритметичке и геометриске прогресије**.

Чланови аритметичке прогресије добивају се по овом правилу:

$$u_i=u_{i-1}+d=u_1+(i-1)d,\qquad i=1,\ 2,\ ...,\ n$$

где је d стална разлика два узастопна члана. Са n смо означили број свих чланова прогресије.

Збир S_n свих n чланова, као што знамо, има вредност

$$S_n=\frac{u_1+u_n}{2}\cdot n=\frac{1}{2}\,n\left[2\,u_1+(n-1)d\right].$$

Правило по коме се пишу чланови геометриске прогресије изгледа

$$u_i=u_{i-1}q=u_1\,q^{i-1},\qquad i=1,2,...,\ n$$

где је q сталан однос између два узастопна члана.

Збир S_n чланова овога реда изгледа

$$S_n=\frac{u_nq-u_1}{q-1}=\frac{u_1(q^n-1)}{q-1}.$$

У даљим излагањима говорићемо само о бесконачним редовима; зато и нећемо увек понављати реч бесконачан.

Ако збир n чланова реда

$$S_n=u_1+u_2+...+u_n$$

тежи одређеној коначној граничној вредности, када n тежи бесконачности **ред** се зове **конвергентан**. У случају конвергентности, дакле, имамо

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S.$$

Гранична вредност S зове се **збир** бесконачног реда.

Ако је

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\pm\infty,$$

или збир уопште нема граничне вредности, ред је **дивергентан**.

Навешћемо пример дивергентног реда чији збир не тежи бесконачности.

Ред

$$S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n\pm1}$$

је дивергентан, јер његов збир не тежи одређеној граничној вредности него осцилује, узимајући наизменично вредности $+1$ и 0.

Јасно је да је ред бесконачне аритметичке прогресије увек дивергентан, јер је

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[n u_1 + \frac{1}{2} n(n-1)d\right] = \infty .$$

Што се тиче бесконачне геометриске прогресије, чији збир зависи од вредности реда

$$1 + q + q^2 + \dots ,$$

она је конвергентна, када је $|q| < 1$, и дивергентна, када је $|q| \geqslant 1$, где $|q|$ означава апсолутну вредност те величине. За $|q| < 1$ збир геометриске прогресије са првим чланом a има вредност

$$S = \frac{a}{1-q} .$$

Ред, којим смо претставили $\frac{1}{3}$, је бесконачна прогресија са првим чланом $\frac{3}{10}$ и количником $q = \frac{1}{10} < 1$. Према томе збир тог реда заиста има одређену вредност.

Само у случају конвергентности реда једначина

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

има смисла. Ако у конвергентном реду издвојимо збир првих n чланова и означимо га са S_n, збир осталих чланова претставља **остатак реда**, који означавамо са R_n. Дакле, можемо написати

$$S = S_n + R_n ,$$

где су

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots .$$

Као што за приближну вредност бесконачног децималног разломка узимамо одређени број децимала, тако исто, место укупне вредности

конвергентног реда, можемо узети одређени број чланова, који ће приближно изражавати његову вредност. Ако место тачне вредности S узимамо приближну вредност S_n, чинимо грешку, једнаку R_n. Но ово важи само за конвергентне редове.

Зато је у теорији редова основно питање да ли је ред конвергентан или дивергентан.

Поставићемо пре свега неопходан услов за конвергентност реда.

Ако је ред конвергентан, његов општи члан тежи нули.

Другим речима, ако је

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

треба да буде

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 . \tag{1}$$

Заиста, општи члан u_n можемо претставити као разлику

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Потражимо сад граничну вредност леве и десне стране ове једначине кад $n \to \infty$. Тада имамо

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

а то је и требало доказати.

Услов (1) је неопходан али није и довољан. Докажимо то. Зато ћемо узети ред

$$H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

који се зове *хармониски ред*[1]). Општи члан овог реда има вредност

---

[1]) Назив овог реда стоји у вези са музичким хармониским интервалима. Односи два узастопна члана тог реда једнаки су односима бројева осцилација тонова тих интервала, наиме: $1 : \frac{1}{2} = 2$ одговара октави, $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$ — квинти, $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$ — кварти, $\frac{5}{4}$ великој терци, $\frac{6}{5}$ — малој терци, $\frac{7}{6}$ и $\frac{8}{7}$ у музици се не употребљују (број 7 је немузикалан!), па даље следују $\frac{9}{8}$ — велика секунда, $\frac{10}{9}$ — мала секунда; односи $\frac{16}{15}$ и $\frac{25}{24}$ су велики и мали полутон.

$u_n = \dfrac{1}{n}$ и према томе је

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Међутим, лако је доказати теорему:

Хармониски ред је дивергентан.

Заиста, ако смањимо неке чланове овога реда и напишемо збир

$$H_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots,$$

који можемо заменити збиром

$$H_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots,$$

видимо да је овај, мањи, збир једнак бесконачности,

$$H_1 = \infty;$$

према томе је збир хармониског реда,

$$H > H_1,$$

такође бесконачан; хармониски ред је, дакле, дивергентан.

Наведимо сада један довољан услов (Даламберов критеријум) конвергентности реда са позитивним члановима.

Узмимо низ позитивних чланова

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots \tag{2}$$

и упоредимо га са бескрајном геометриском прогресијом

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots$$

за коју количник

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = k$$

има сталну вредност, независну од n.

Начинимо и за низ (2) исти количник

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Узећемо случај да тај количник има граничну вредност кад n тежи бесконачности, тј.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q.$$

Под таквим условима ред

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots.$$

личи на бескрајну геометриску прогресију. Упоређивање са геометриском прогресијом доводи до ове теореме:

Ако код реда са позитивним члановима однос наредног члана према претходном има одређену граничну вредност и ова је вредност мања од јединице, ред је конвергентан. Ако је она већа од јединице, ред је дивергентан. Ако је тај количник једнак јединици, ред може бити или конвергентан или дивергентан[1]*).*

Као пример за примену Даламберова критеријума узмимо ред

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \cdots, \tag{4}$$

---

[1]) Доказ ове теореме може се извести на овај начин. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$ има вредност мању од 1, можемо увек између q и 1 наћи такав број k да почев од неког члана u_p буде

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} < k, \quad \frac{u_{p+2}}{u_{p+1}} < k, \ldots$$

и према томе је

$$u_{p+1} < k u_p, \quad u_{p+2} < k^2 u_p, \quad u_{p+3} < k^3 u_p, \ldots$$

Тада чланове реда

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{p-1} + u_p + u_{p+1} + \ldots \tag{3}$$

почев од p-тог члана можемо заменити уведеним већим величинама и добити збир

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{p-1} + u_p\,(1 + k + k^2 + \ldots),$$

а овај збир има за $k < 1$ коначну вредност

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{p-1} + u_p \cdot \frac{1}{1-k}.$$

Пошто је збир нашег реда (3) мањи од ове коначне величине, конвергентност тог реда је доказана.

На сличан начин се доказује дивергентност реда за случај $q > 1$.

Случај $q = 1$ захтева дубљу анализу за сваки специјалан ред.

где је, као и увек, $n!$ факторијела са вредношћу

$$n! = 1.2.3.4\ldots(n-1)n.$$

За тај ред према Даламберову критеријуму добијамо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 < 1$$

и одавде закључујемо да је наш ред конвергентан.

Навешћемо из теорије редова неколико важних појмова и теорема но нећемо улазити у доказе тих теорема.

Ред се зове **позитиван**, ако су сви његови чланови позитивни.

Теорема. Позитиван ред је конвергентан, ако за сваку вредност n збир n чланова S_n задовољава услов

$$S_n < A,$$

где је A коначан број.

На пр., ред

$$(5)\qquad 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

конвергентан је, јер је

$$S_n = 1+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{3.3}+\cdots+\frac{1}{n.n} < 1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n} =$$

$$1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}<2.$$

Ова теорема је дала могућност да се испита конвергентност нашег реда без обзира на то што у овом случају имамо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 = 1$$

и, према томе, Даламберов критеријум не даје могућности да се испита конвергентност тог реда.

Ред се зове **наизменични**, ако му узастопни чланови мењају знаке. За такав ред важи Лајбницова теорема:

Ако општи члан неизменичног реда тежи нули, ред је конвергентан.

Према томе је за наизменични ред услов $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ не само неопходан него и довољан. На пр., ред

$$(6)\qquad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots$$

је конвергентан, јер му општи члан тежи нули.

Ред се зове **апсолутно конвергентан**, ако је конвергентан и ред састављен од апсолутних вредности његових чланова.

Тако је ред

$$1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots$$

апсолутно конвергентан, јер је ред (4) од модула чланова тог реда конвергентан.

Теорема. Апсолутно конвергентан ред увек је конвергентан, тј., ако је ред

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots$$

конвергентан, конвергентан је и ред

$$u_1+u_2+u_3+\cdots$$

без обзира на то што знаци чланова последњег реда могу бити потпуно произвољни.

Тако, на пр.. пошто је ред (4) конвергентан, конвергентан је и ред

$$1+\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}-\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}+\cdots$$

Апсолутно конвергентни редови имају особине сума састављених од коначног броја чланова. Тако, на пр., у апсолутно конвергентном реду може се ред сабирања мењати; међутим код неапсолутно конвергентног реда промена реда може довести до погрешног резултата.

Апсолутно конвергентни редови могу се сабирати, одузимати и множити.

Ако су чланови реда функције, на пр., аргумента x, ред се зове **функционални ред**. Ако су чланови функционалног реда степени x, ред се развија по степенима x.

Све вредности аргумената, за које је ред конвергентан, сачињавају **област конвергенције** тог реда.

За функционалне редове врло важну улогу игра појам **равномерне конвергентности реда**, када су услови конвергентности реда исти за све вредности аргумента у области конвергентности.

Равномерно конвергентни редови су нарочито важни због тога што са таквим редовима можемо вршити, под извесним условама, операције диференцирања и интегрисања (види § 62).

Вежбања.

1. Упоређивањем са геометриском прогресијом показати да је ред

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{1}{n^n}+\cdots$$

конвергентан.

2. Упоређивањем са хармониским редом показати да је ред

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$$

дивергентан.

3. Да ли је ред

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$$

апсолутно ковергентан или није? Написати му општи члан.

4. Зашто су функционални редови

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

конвергентни? Написати им опште чланове и утврдити области конвергенције.

5. Доказати помоћу Даламберова критеријума конвергентност ових редова:

$$\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}+\cdots$$

$$\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{n+2}{n+1}\,\frac{1}{3^{n-1}}+\cdots$$

6. Испитати конвергентност редова

$$\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\cdots$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{2^2}+\frac{1}{5^2}\cdot\frac{3^2}{3^2}+\frac{1}{5^3}\,\frac{3^3}{4^2}+\cdots$$

$$4-\frac{4}{3^2}+\frac{4}{5^2}-\cdots$$

$$1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}}+\cdots$$

$$\frac{3}{2}-\frac{4}{3\cdot 2}+\frac{5}{4\cdot 3}-\frac{6}{5\cdot 4}+\cdots$$

§ 60. Тајлоров образац

Узмимо

$$f(x)=x$$

и образујмо вредност

$$f(x+h)=x+h.$$

Десну страну овог израза можемо претставити

$$x+h=f(x)+hf'(x),$$

јер извод $(x)'$ има вредност јединице.

Према томе за нашу функцију имамо образац

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x).$$

Узмимо сад

$$f(x)=x^2$$

и образујмо

$$f(x+h)=(x+h)^2=x^2+2hx+h^2.$$

Десну страну можемо изразити

$$x^2+2hx+h^2=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2!}h^2f''(x),$$

јер су

$$f'(x)=2x, \qquad f''(x)=2$$

и тада имамо

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2!}h^2f''(x).$$

На сличан начин за куб можемо написати

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x).$$

Не би тешко било показати да за сваки полином важи исти образац, тј. ако је

$$f(x)=P_n(x),$$

где је $P_n(x)$ полином n'тог степена, имамо

$$(1) \qquad f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x).$$

На десној страни имамо коначан ред од $n+1$ члана. Чланови су уређени по степенима прираштаја h аргумента x. Први члан реда је вредност функције за полазну вредност аргумента; коефицијенти осталих чланова зависе од узастопних извода. У имениоцу свакога члана стоји одговарајућа факторијела.

Ако се функција $f(x)$ не јавља у облику полинома, на израз $f(x+h)$ можемо применити исти образац (1), само се не можемо зауставити на коначном броју чланова да тачно изразимо вредност $f(x+h)$, него треба продужити исти поступак у бесконачност и према томе написати један бесконачан ред. Јасно је да таква претстава вредности $f(x+h)$ бесконачним редом има смисла само у оном случају када је одговарајући ред конвергентан.

Ако нећемо да узмемо сав бесконачан ред него само n његових чланова, тада треба написати

$$\boxed{f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+R_n,}$$

где је R_n остатак реда, разлика између $f(x+h)$ и свих претходних чланова реда.

Претходни образац зове се Тајлоров образац или Тајлоров ред.

Остатак R_n може се на више начина изразити помоћу функције $f(x)$. Навешћемо без доказа тзв. Лангранжеву форму тог остатка

$$R_n=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h),$$

где је θ прави разломак, тј.

$$0<\theta<1.$$

Како се може израчунати вредност $f(x+h)$, помоћу Тајлоровог обрасца, када је у њему непозната величина θ? Често пута независно

од вредности аргумента $x+\theta h$ вредност функције $f^{(n)}(x+\theta h)$ може бити ограничена, тј. њена апсолутна вредност не може бити већа од одређене позитивне величине M. Тада можемо ставити

$$|R_n|\leqslant\frac{h^n}{n!}M.$$

Тиме се поставља граница од које не може бити већи остатак. Ако је h довољно мало, а n довољно велико, тј. ако је узет довољно велики број чланова у Тајлорову реду, разлика између праве вредности $f(x+h)$ и оне која следује из Тајлоровог обрасца може бити мања од унапред постављене величине.

§ 61. Маклоренов образац

Ако у Тајлорову обрасцу ставимо $x=0$, а затим $h=x$, можемо написати образац

$$\boxed{f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+R_n,}$$

где је према Лагранжевој форми остатка

$$R_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x),$$

са $0<\theta<1$.

Написани образац зове се Маклоренов образац или Маклоренов ред, а R_n је остатак тог реда.

Важан је случај бесконачног Маклоренова реда са остатком R_n који тежи нули када n тежи бесконачности. Ако је тај рад конвергентан, помоћу њега се може израчунати вредност функције за произвољну вредност аргумента у области конвергентности. У том случају можемо написати

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\cdots+$$
$$+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\cdots$$

Применимо овај образац на неколико важних функција.

1. e^x

Пошто за функцију

$$f(x)=e^x$$

имамо

$$f^{(k)}(x)=e^x, \qquad f^{(k)}(0)=1, \qquad k=1,2,3,\cdots\infty$$

Маклоренов ред даје

$$(1) \qquad e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

За испитивање конвергентности овога реда по Даламберову критеријуму добија се

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n(n-1)!}{n!\,x^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}=0,$$

одакле закључујемо да је ред конвергентан, и то апсолутно конвергентан, за сваку вредност x; област конвергентности тог реда је

$$-\infty<x<+\infty,$$

при чему за $x=-\infty$ функција e^x тежи нули, а за $x=+\infty$ и она тежи бесконачности.

Ако се зауставимо на збиру S_n првих n чланова, чинимо грешку

$$R_n=\frac{x^n}{n!}e^{\theta x},$$

за коју можемо написати ове границе

$$0<R_n<\frac{x^n}{n!}3^x \text{ за } x>0,$$

јер је $0<\theta<1$ и $e<3$, и

$$0<|R_n|<\frac{|x|^n}{n!} \text{ за } x<0,$$

јер је $e^x<1$, ако је x негативно.

За $x=1$ имамо ред за израчунавање основе природних логоритама

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}+\cdots$$

Из тог реда, раније друкчије изведеног, израчунали смо приближну вредност тог трансцендентног броја,

$$e\approx 2{,}718281828459.$$

2. $\sin x$

Пошто је

$$f(x)=\sin x, \quad f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right),$$

имамо

$$f(0)=0, \quad f'(0)=1, \quad f''(0)=0, \quad f'''(0)=-1$$

и даље вредности извода се понављају.

За ову функцију Маклоренов ред даје

$$(2) \qquad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^{n+2}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

За испитивање његове конвергентности можемо применити Даламберов критеријум

$$q=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{2n(2n+1)}=0,$$

одакле закључујемо о апсолутној конвергентности реда за сваку вредност аргумента x. До закључка о конвергентности реда (2) можемо доћи и из непосредног упоређивања реда (2) са редом (1). Заиста, апсолутне вредности чланова реда (2) сачињавају само један део чланова реда (1) састављених по истом закону.

Ред за $\sin x$ даје ове приближне вредности те функције:

$$\sin x\approx x,$$

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{6},$$

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}.$$

3. *cos x*

Поступком сличним претходном можемо написати овај ред за косинус

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + (-1)^{n+2} \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots$$

Тај је ред исто тако конвергентан за сваку вредност x и даје ове приближне вредности за косинус:

$$\cos x \approx 1,$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2},$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Редови e^x, $\sin x$, $\cos x$ могу послужити за израчунавање тих функција не само за реалне него и за имагинарне вредности аргумента.

Применимо те редове за извођење веза између тригонометриских и експоненцијалних функција.

Ставимо у ред за e^x, место x, имагинарни аргумент xi, где је, као и увек, $i = \sqrt{-1}$; тада ћемо, после одвајања реалних чланова од имагинарних, добити

$$e^{xi} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right).$$

Ако сада погледамо на ред реалних чланова и на ред који је коефицијент уз i, и упоредимо их са редовима за $\cos x$ и $\sin x$, добићемо

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x.$$

То је тзв. **Ајлеров образац**. Ако упоредо са њим напишемо образац

$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x,$$

који се добија из претходног заменом x са $-x$, из та два обрасца можемо извести

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{xi} + e^{xi}),$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{xi} - e^{-xi}).$$

То су такође Ајлерови обрасци за изражавање тригонометриских функција реалног аргумента помоћу експоненцијалне функције имагинарног аргумента.

4. Биномни ред

Узмимо функцију

$$f(x) = (1+x)^m,$$

где је m реалан број, и саставимо ове таблице:

$f(x) = (1+x)^m$	$f(0) = 1,$
$f'(x) = m(1+x)^{m-1}$	$f'(0) = m$
$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$	$f''(0) = m(m-1)$
. . . .	. . . .
$f^{(n)}(x) = m(m-1)\cdots[m-(n-1)](1+x)^{m-n}$	$f^{(n)}(0) = m(m-1)\cdots[m-(n-1)].$

После тога примена Маклоренова обрасца даје

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \dots + \binom{m}{n}x^n + \binom{m}{n+1}x^{n+1}\dots,$$

где смо за такозване **биномне коефицијенте** употребили ознаке

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}.$$

Ако је m цео и позитиван број, претходни ред је коначан; у свим другим случајевима он је бесконачан.

За проучавање конвергентности бесконачног биномног реда имамо

$$q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(m-n)}{n+1}\right| = |x|.$$

На основу Даламберова критеријума тврдимо:

Ако је $|x| < 1$, ред је конвергентан за сваку вредност m. Ако је $|x| > 1$, ред је дивергентан.

За $|x| = 1$ Даламберов критеријум не даје одговор о конвергентности реда. Дубља анализа доводи до овог резултата: ако је $m > -1$, ред је конвергентан, за $m \leqslant -1$ он је дивергентан.

Навешћемо неколико нарочито важних случајева:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8+\cdots$$

5. $log\,(1+x)$

Ставимо

$$f(x)=log\,(1+x)$$

и начинимо таблице

$f(x)=log\,(1+x),$	$f(0)=0,$
$f'(x)=(1+x)^{-1},$	$f'(0)=1,$
$f''(x)=-(1+x)^{-2},$	$f''(0)=-1,$
$f'''(x)=1\cdot 2\,(1+x)^{-3},$	$f'''(0)=2!$
$f^{IV}(x)=-1\cdot 2\cdot 3\,(1+x)^{-4},$	$f^{IV}(0)=-3!$
. . . .	. . . .
$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}$	$f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!$

После тога помоћу Маклоренова обрасца, изводимо

$$log\,(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

Упоредо са овим логаритамским редом можемо формирати и други логаритамски ред

$$log\,(1-x)=-\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\right).$$

Оба су реда за $|x|<1$ конвергентни. Сем тога, први је ред конвергентан и за $x=+1$, а други за $x=-1$.

Ако од првога реда одузмемо други, добићемо ред

$$log\,\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right),$$

који је конвергентан за $|x|<1$.

Последњи ред омогућује израчунавање природних логаритама ма којег позитивног броја N. Заиста, ставимо

$$N=\frac{1+x}{1-x},$$

тада ћемо за x добити вредност

$$x=\frac{N-1}{N+1};$$

та је вредност мања од 1; за њу је, према томе, наш ред конвергентан.

Вежбања.

1. Који је то ред са општим чланом $u_n=\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$?

2. Израчунати помоћу Тајлорова обрасца $sin\ 31^0$.

3. Израчунати помоћу редова ове вредности

$$e^{0,1},\ e^{1,1},\ sin\ 15^0,\ cos\ 47^0$$

и упоредити две последње вредности са табличним вредностима.

4. Зашто образац

$$sin\ 1^0=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\cdots$$

није тачан? Заменити га тачним и извршити приближно израчунавање; резултат упоредити са табличним резултатом.

5. Потврдити приближни образац

$$sin\,(a+x)\approx sin\,a+x\,cos\,a.$$

6. Израчунати $cos\ 76^0$ са 4 децимала.

7. Израчунати log 10 са 4 децимала.

8. Помоћу биномног реда израчунати: $\sqrt{26}$, $\sqrt[3]{30}$, $\sqrt[4]{630}$

9. Израчунати три члана Маклоренова реда за функције:

$$e^{\sin x}, \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

10. Написати ред за $\sqrt{e}$ и израчунати резултат са три децимале.

11. Развити у ред функцију $\frac{e^x}{1+x}$.

§ 62. Интеграција помоћу редова

Видили смо да се за израчунавање одређеног интеграла, чији се неодређени интеграл не може наћи, понекад употребљавају методе диференцирања односно интегрисања по параметру. Покажимо сада још једну методу која омогућава израчунавање одређеног интеграла без познавања неодређеног интеграла.

Нека је дат конвергентан ред, чији чланови зависе од x, било у облику бесконачног реда

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

било у облику коначног обрасца

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + R_n,$$

где је R_n остатак реда, тј.

$$R_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

Ако је ред конвергентан за вредност x, која се налази у датом интервалу (a, b), увек можемо за сваку произвољну величину ε наћи такво N, да за $n > N$ остатак R_n по апсолутној вредности буде мањи од ε, тј.

$$|R_n| < \varepsilon.$$

Број N, који улази у тај услов, може зависити не само од ε, него и од x. Ако је N исто за све вредности x у интервалу (a, b) и зависи само од ε, за ред се каже да *конвергира равномерно*.

Приметимо да ред може бити конвергентан а да ипак не буде равномерно конвергентан.

За равномерно конвергентан ред важи ова теорема.

Ако је

$$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

равномерно конвергентан ред у датом интервалу (a, b), интеграл дате

функције може бити израчунат интеграцијом тога реда; добијени ред биће такође конвергентан.

За овај ред важи образац

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_0\,dx + \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \ldots$$

Не можемо се зауставити на доказивању ове теореме, него ћемо решити један важан задатак.

Израчунати интеграл

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \qquad k^2 < 1.$$

У томе циљу, стављајући $k^2 \sin^2 \varphi = x^2$, развићемо

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

у ред према Маклоренову обрасцу.

Као што смо навели у претходном параграфу, тај ред изгледа овако:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8 + \ldots$$

Применимо сада на израчунавање нашег интеграла образац (1).

То можемо урадити пошто је написани ред равномерно конвергентан[1]).

---

[1]) Равномерна конвергентност нашег реда следује из теореме:

Ако су за све вредности x у датом интервалу апсолутне вредности чланова једнога реда мање од вредности чланова конвергентног реда са позитивним константним члановима, први је ред равномерно конвергентан.

У нашем случају је

$$x^2 = k^2 \sin^2 \varphi \leqslant k^2$$

и према томе су чланови нашег реда мањи од чланова реда

$$1 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1.3}{2.4}k^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6 + \ldots$$

Тај ред је конвергентан, јер је

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{2n}k^2\right) = k^2 < 1.$$

Из те конвергентности следује равномерна конвергентност нашега реда.

Видимо да наш интеграл зависи од интеграла[1]):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ 2n}\ \frac{\pi}{2}.$$

Ако искористимо добијени резултат, лако ћемо добити овај образац:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \right.$$

$$\left. + \ldots + \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\ 2n}\right)^2 k^{2n} + \ldots\right].$$

Видећемо да тај интеграл стоји у вези са израчунавањем периода осцилације математичког клатна; теорија таквих интеграла спада у теорију *елиптичких функција*.

Вежбања.

Израчунати помоћу редова интеграле:

1. $\int_0^1 cos\sqrt{x}\,dx$. **2.** $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$. **3.** $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$. **4.** $\int_0^1 \frac{cos\,x\,dx}{\sqrt{4-x}}$. **5.** $\int_{0,1}^1 \frac{cos\,x}{x}\,dx$.

6. $\int_{0,1}^1 \frac{log(1+x)}{x}\,dx$. **7.** $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. **8.** $\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{dx}{\sqrt{cos\,x}}$.

---

[1]) Написани интеграл рачуна се по овом поступку

$$I_n = \int sin^{2n}\varphi\, d\varphi = -\int sin^{2n-1}\varphi\, d\,cos\,\varphi = -sin^{2n-1}\varphi\,cos\,\varphi +$$

$$+(2n-1)\int cos^2\varphi\, sin^{2n-2}\varphi\, d\varphi = -sin^{2n-1}\varphi\,cos\,\varphi + (2n-1)\,I_{n-1} - (2n-1)\,I_n$$

одакле за одређивање интеграла $I_n^* = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n}\varphi\, d\varphi$ имамо овај редукциони образац

$$2n\, I_n^* = (2n-1)\, I_{n-1}^*.$$

§ 63. Тригонометриски редови. Хармониска анализа

У разним питањима Механике, Физике и других наука врло важну улогу играју *периодичне функције*, које, као што смо видели (§ 21), задовољавају услов

$$f(x+K) = f(x)$$

за сваку вредност x. Број K је сталан; он се зове *период* периодичне функције.

Имали смо примере периодичних функција. Тригонометриске функције су периодичне. Функције $sin\,x$ и $cos\,x$ имају период 2π; функције $tg\,x$ и $cotg\,x$ периодичне су са периодом π. Према томе, на пр., једначине

$$sin(x+2\pi) = sin\,x, \qquad tg(x+\pi) = tg\,x$$

важе за сваку вредност x'а.

Лако је показати да за сваку периодичну функцију, која зависи од променљиве x и има период K, увек можемо наћи такву нову променљиву z да она има период 2π, период основних тригонометриских функција $sin\,x$ и $cos\,x$.

Заиста, ставимо

$$z = px$$

и одредимо p из услова да z порасте за 2π, кад x порасте за K. Ова услов доводи до једначине

$$2\pi = pK,$$

одакле је

$$p = \frac{2\pi}{K}.$$

Нова променљива је, дакле, везана са старом једначином

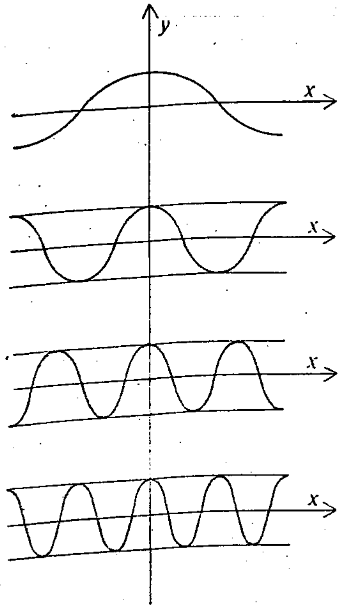
$$z = \frac{2\pi}{K}\,x.$$

У каснијим излагањима ћемо, у интересу једноставности, претпостављати да периодична функција $f(x)$ има период 2π.

Пошто је периодичну функцију $f(x)$ довољно проучити само у интервалу једног периода, изабраћемо за тај интервал размак од $-\pi$ до $+\pi$.

Најглавнија примена периодичних функција је у проучавању осцилаторних процеса. Најпростији од тих осцилаторних процеса је хармониско кретање које смо раније проучили у § 21.

Хармониској осцилацији периода 2π одговара једна од једначина



$$(1)\qquad y = a_1 \cos x, \qquad y = b_1 \sin x,$$

или једначина

$$y = a \sin(x + \alpha),$$

односно

$$y = a \cos(x + \alpha),$$

где су a_1, b_1, a и α константе.

Ако употребимо терминологију Акустике, једначинама (1) одговара **главни тон** звука. Период главног тона зове се **примитивни период**.

Ако узмемо једначине

$$y = a_k \cos k x,$$

$$y = b_k \sin k x,$$

где су a_k и b_k константе и k природни број, свакој од тих једначина одговара такође хармониска осцилација. Период тих осцилација за $k = 2, 3, 4, \dots$ редом има вредност

Сл. 98. Графици основног тона и три узастопна виша тона

$$\frac{2\pi}{2}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{4}, \dots, \quad \frac{2\pi}{n}, \dots$$

Свака од тих осцилација одговара **вишем тону**. На слици 98 претстављени су графици основног тона и виших тонова за функцију косинуса.

Саставимо сада збир

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + $$
$$+ \dots + a_n \cos n x + b_n \sin n x,$$

или, кратко,

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k x + b_k \sin k x),$$

где Σ (читај сигма) означава збир. У тим обрасцима су a_0, a , b_k ($k = 1, 2, \dots, n$) константе.

Ако имамо случај да функција $\Phi_n(x)$, кад n тежи бесконачности, претставља бесконачан конвергентан ред који конвергира у интервалу од $-\pi$ до $+\pi$ одређеној функцији $f(x)$, тада можемо написати

$$(2)\qquad f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k x + b_k \sin k x).$$

Такав тригонометриски ред зове се **Фуријеов ред** за функцију $f(x)$.

Коефицијенти a_0, a_k, b_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) морају се налазити у одређеним везама са функцијом $f(x)$. Они се зову **Фуријеове константе** или **коефицијенти** за функцију $f(x)$.

Покажимо да ти коефицијенти имају вредности

$$(3)\qquad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos k x\, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin k x\, dx$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots).$$

Први образац изводи се на тај начин, што се ред помножи са dx и интеграли од $-\pi$ до $+\pi$, при чему се узима у обзир да су

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos k x\, dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin k x\, dx = 0.$$

За одређивање коефицијента a_k треба једначину (2) помножити са $\cos k x\, dx$ и интегралити у истом интервалу. Ако при томе искористимо обрасце

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos k x \cos k' x\, dx = \begin{cases} 0 \text{ за } k' \neq k \\ \pi \text{ за } k' = k \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos k x \sin k' x\, dx = 0,$$

лако ћемо добити вредности a_k. Слично се ради зе одређивање коефицијента b_k.

Јасно је да у случају парне функције, тј. под условом

$$f(-x) = f(x)$$

Фуријеов ред може садржати чланове само са константама $a_0, a_1, a_2, \ldots$, а у случају непарне фукрције тај ред садржи само чланове са $b_1, b_1, \ldots$

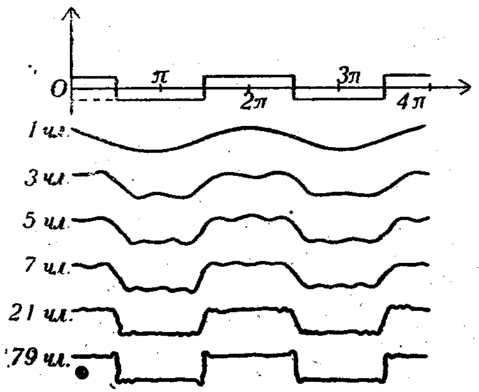
Полазећи од тригонометриског реда дошли смо до Фуријеова реда, са Фуријеовим коефицијентима помоћу којих смо одредили функцију $f(x)$.

Важан је обрнути задатак: претставити дату функцију $f(x)$ помоћу Фуријеова реда, тј. одредити Фуријеове коефицијенте и утврдити конвергентност тог реда.

Одређивање Фуријеових коефицијената се врши на основу обрасца (3), а решавање проблема о конвергентности се оснива на овој важној теореми:

Ако је функција $f(x)$ на дужини 2π претстављена коначним бројем непрекидних лукова, који имају у свакој тачки одређену тангенту, Фуријеов ред конвергира у свакој тачки непрекидности ка функцији $f(x)$, а у свакај тачки ξ прекида има вредност

$$\frac{f(\xi+0)+f(\xi-0)}{2}.$$



Сл. 99 а. Апроксимативне криве једног Фуријеовог реда. Први пример

Фуријеов ред има огроман значај за проучавање периодичних функција. Он омогућује да се издвоје из периодичних процеса прво главне осцилације, а затим постепено и осцилације мањих периода. Такво разлагање периодичних процеса помоћу Фуријеова реда зове се хармониска анализа.

Помоћу Фуријеова реда могу се претставити не само непрекидне функције него и прекидне. На слици 99 а и b приказани су примери прекидних функција и њихова претстава помоћу збирова чланова Фуријеова реда. Сл. 99 а,

даје криве које је нацртао физичар Мајкелсон помоћу нарочитог апарата — хармониског анализатора. Фуријеов ред за овај случај има облик

$$y = \frac{1}{2}\Big[\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \\ + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\cos(2n+1)x + \ldots\Big].$$

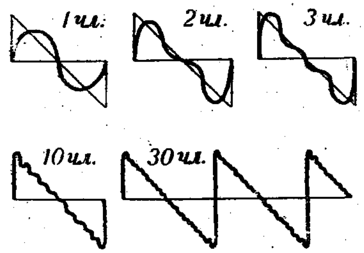
Функција y, претстављена у координатном систему, има вредност

$$+\frac{\pi}{8} \text{ у интервалу од } -\frac{\pi}{2} \text{ до } +\frac{\pi}{2} \text{ и } -\frac{\pi}{8} \text{ у интервалу од } \frac{\pi}{2} \text{ до } \frac{3\pi}{2}.$$

У другом примеру (сл. 99,b) имамо ред

$$y = 2\Big[\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx + \ldots\Big].$$

Овај ред одређује криву, која се приближује зупцима тестере.



Сл. 99, b. Апроксимативне криве једног Фуријеовог реда. Други пример

Досад смо излагали теорију хармониске анализе са претпоставком да је функција $f(x)$ дата у аналитичком облику и да израчунавање одговарајућих интеграла за одређивање Фуријеових констаната не претставља тешкоће. Међутим у проучавању процеса, који се одређују из опажања и експеримената, у већини случајева су познате само вредности функција за одређене вредности аргумента. Покажимо сада како се врши хармониска анализа у случају када је функција дата помоћу низа својих вредности у интервалу једног периода.

Претставимо да је период од 360^0 подељен на 12 једнаких делова, како се то најчешће узима, и да су вредности функције одређене схемом

x	0^0	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0	210^0	240^0	270^0	300^0	330^0
y	$y_0 (y_{12})$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}

Помоћу тих 12 вредности можемо одредити 12 Фуријеових константа у приближном обрасцу, који узимамо у овом облику:

$$(4)\quad f(x) \approx \Phi(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + a_4 \cos 4x + a_5 \cos 5x + a_6 \cos 6x + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + b_4 \sin 4x + b_5 \sin 5x\,.$$

За такво одређивање треба уврстити вредности x у једначину (4) и написати 12 једначина. Коефицијенти тих 12 једначина претстављени су схемом на стр. 281.

Добијених 12 једначина треба решити у односу на коефицијенте $a_0, a_1, \ldots, a_6, b_1, b_2, \ldots, b_5$. У суштини решење тог система линеарних једначина не претставља тешкоће, али, пошто оно може да буде гломазно, показаћемо схему једног поступка, који је предложио Рунге, и који даје решење помоћу једноставних операција, углавном сабирања и одузимања.

Испишимо ординате показаним редом и саставимо суме и разлике, па од њих поново саставимо суме и разлике

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
	y_{12}	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	
Суме	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
Разлике		d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	

	s_0	s_1	s_2	s_3
	s_6	s_5	s_4	
Суме	S_0	S_1	S_2	S_3
Разлике	D_0	D_1	D_2	

d_1	d_2	d_3
d_5	d_4	
σ_1	σ_2	σ_3
δ_1	δ_2	

После тога за одређивање коефицијената $a_0, a_1, a_2, \ldots a_6$ служи схема према којој треба овако поступити. Сваки показани члан те схеме треба претходно помножити оним бројем који стоји са леве стране схеме, тј. или са $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, или са $\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 0{,}1340$ (множити том разликом је згодније) или са $\sin 90^0 = 1$, тј. оставити без промене. Слични поступак треба применити и за одређивање коефицијената код синуса. Те схеме изгледају овако.

	y	a_0	$a_1 \cos x$	$a_2 \cos 2x$	$a_3 \cos 3x$	$a_4 \cos 4x$	$a_5 \cos 5x$	$a_6 \cos 6x$	$b_1 \sin x$	$b_2 \sin 2x$	$b_3 \sin 3x$	$b_4 \sin 4x$	$b_5 \sin 5x$
0^0	y_0	a_0	$+a_1$	$+a_2$	$+a_3$	$+a_4$	$+a_5$	$+a_6$					
30^0	y_1	a_0	$+\frac{\sqrt{3}}{2}a_1$	$+\frac{1}{2}a_2$		$-\frac{1}{2}a_4$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}a_5$	$-a_6$	$+\frac{1}{2}b_1$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}b_2$	$+b_3$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}b_4$	$+\frac{1}{2}b_5$
60^0	y_2	a_0	$+\frac{1}{2}a_1$	$-\frac{1}{2}a_2$	$-a_3$	$-\frac{1}{2}a_4$	$+\frac{1}{2}a_5$	$+a_6$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}b_1$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}b_2$		$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_4$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_5$
90^0	y_3	a_0		$-a_2$		$+a_4$		$-a_6$	$+b_1$		$-b_3$		$+b_5$
120^0	y_4	a_0	$-\frac{1}{2}a_1$	$-\frac{1}{2}a_2$	$+a_3$	$-\frac{1}{2}a_4$	$-\frac{1}{2}a_5$	$+a_6$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}b_1$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_2$		$+\frac{\sqrt{3}}{2}b_4$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_5$
150^0	y_5	a_0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}a_1$	$+\frac{1}{2}a_2$		$-\frac{1}{2}a_4$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}a_5$	$-a_6$	$+\frac{1}{2}b_1$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_2$	$+b_3$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_4$	$-\frac{1}{2}b_5$
180^0	y_6	a_0	$-a_1$	$+a_2$	$-a_3$	$+a_4$	$-a_5$	$+a_6$					
210^0	y_7	a_0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}a_1$	$+\frac{1}{2}a_2$		$-\frac{1}{2}a_4$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}a_5$	$-a_6$	$-\frac{1}{2}b_1$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}b_2$	$-b_3$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}b_4$	$-\frac{1}{2}b_5$
240^0	y_8	a_0	$-\frac{1}{2}a_1$	$-\frac{1}{2}a_2$	$+a_3$	$-\frac{1}{2}a_4$	$-\frac{1}{2}a_5$	$+a_6$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_1$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}b_2$		$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_4$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_5$
270^0	y_9	a_0		$-a_2$		$+a_4$		$-a_6$	$-b_1$		$+b_3$		$-b_5$
300^0	y_{10}	a_0	$+\frac{1}{2}a_1$	$-\frac{1}{2}a_2$	$-a_3$	$-\frac{1}{2}a_4$	$+\frac{1}{2}a_5$	$+a_6$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}q_1$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_2$		$+\frac{\sqrt{3}}{2}b_4$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}b_5$
330^0	y_{11}	a_0	$+\frac{\sqrt{3}}{2}a_1$	$+\frac{1}{2}a_2$		$-\frac{1}{2}a_4$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}a_5$	$-a_6$	$-\frac{1}{2}b_1$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_2$	$-b_3$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_4$	$-\frac{1}{2}b_5$

Схема једначина хармониске анализе помоћу дванаест интервала

Чланови са косинусима

	I	II	I	II	I	II	I	II
$\sin 30^0 = \frac{1}{2}$			D_2		$-S_2$	S_1		
$\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 0,1340$				D_1				
$\sin 90^0 = 1$	$\left\{\begin{matrix} S_0 & S_1 \\ S_2 & S_3 \end{matrix}\right\}$		D_0		S_0	$-S_3$	D_0	D_2
суме	I	II	I	II	I	II	I	II
суме I + II	$12a_0$		$6a_1$		$6a_2$			
разлике I − II	$12a_6$		$6a_5$		$6a_4$		$6a_3$	

Чланови са синусима

	I	II	I	II	I	II
$\sin 30^0 = \frac{1}{2}$	σ_1					
$\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 0,1340$		σ_2	δ_1	δ_2		
$\sin 90^0 = 1$	σ_3				σ_1	σ_3
суме	I	II	I	II	I	II
суме I + II	$6b_1$		$6b_2$			
разлике I − II	$6b_3$		$6b_4$		$6b_3$	

Као пример решимо задатак:

Одредити Фуријеове коефицијенте на основу ових вредности периодичне функције:

x	0^0	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0	210^0	240^0	270^0	300^0	330^0
y	9,3	15,0	17,4	23,0	37,0	31,0	15,3	4,0	−8,0	−13,2	−14,2	−6,0

Према наведеном формулару израчунавање се врши овако:

	15,0	17,4	23,0	37,0	31,0	15,3
9,3	−6,0	−14,2	−13,2	−8,0	4,0	
9,3	9,0	3,2	9,8	29,0	35,0	15,3
	21,0	31,6	36,2	45,0	27,0	

9,3	9,0	3,2	9,8
15,3	35,0	29,0	
24,6	44,0	32,2	9,8
−6,0	−26,0	−25,8	

21,0	31,6	36,2
27,0	45,0	
48,0	76,6	36,2
−6,0	−13,4	

$\sin 30^0 = \frac{1}{2}$			−12,9		−16,1	22,0		
$\sin 60^0 = 1 - 0,1340$				−22,52				
$\sin 90^0 = 1$	24,6	44,0	−6,0		24,6	−9,8	−6,0	−25,8
	32,2	9,8						
суме	56,8	53,8	−18,9	−22,5	8,5	12,2	−6,0	−25,8
I + II	110,6 $a_0 = 9,22$		−41,4 $a_1 = -6,90$		20,7 $a_2 = 3,45$			
I − II	3,0 $a_6 = 0,25$		3,6 $a_5 = 0,60$		−3,7 $a_4 = -0,62$		19,8 $a_3 = 3,30$.	

$\sin 30^0 = \frac{1}{2}$	24,0					
$\sin 60^0 = 1 - 0,1340$		66,34	−5,20	−11,62		
$\sin 90^0 = 1$	36,2				48,0	36,2
суме	60,2	66,34	−5,20	−11,62	48,0	36,2
I + II	126,54 $b_1 = 21,09$		−16,82 $b_2 = -2,80$			
I − II	−6,14 $b_5 = -1,02$		6,42 $b_4 = 1,07$		11,8 $b_3 = 1,97$.	

Резултат хармониске анализе функције одређене датом таблицом вредности ордината довео је до овог обрасца

$$y = 9{,}22 - 6{,}90\cos x + 3{,}45\cos 2x + 3{,}30\cos 3x - 0{,}62\cos 4x +$$
$$+ 0{,}60\cos 5x + 0{,}25\cos 6x + 21{,}09\sin x - 2{,}80\sin 2x +$$
$$+ 1{,}97\sin 3x + 1{,}07\sin 4x - 1{,}02\sin 5x\,.$$

Вежбања.

1. Нацртати графике функција: $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$; $y = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x$; $y = \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x$; $y = \sin x - \frac{1}{2}\cos 2x$.

2. Извести обрасце за Фуријеове константе из услова да интеграл

$$I = \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x) - \Phi_n(x)]^2\, dx$$

има екстремалну вредност, ако је

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

3. Одредити Фуријеове коефицијенте, ако је познато 12 вредности функције за аргументе 0°, 30°, 60° итд., наиме: 38,2; 12,2; 4,4; 14,4; 4,1; —18,6; —23,3; —27,1; —24,2; 8,1; 32,3; 33,4. По овим вредностима нацртати график функције.

§ 64. Решавање једначина

а. Решавање система линеарних једначина. Примена детерминаната.

Једначину првог степена са непознатом x, као што је познато, у општем облику можемо написати

$$a x = b\,,$$

одакле изводимо решење

$$x = \frac{b}{a}\,.$$

Систем од две једначине првог степена са две непознате x и y има облик

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= m_1\,, \\ a_2 x + b_2 y &= m_2\,. \end{aligned}$$

Решење ових једначина лако можемо извести и написати

$$(2)\qquad x = \frac{m_1 b_2 - m_1 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}\,, \qquad y = \frac{a_1 m_2 - a_2 m_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}\,.$$

Разгледајмо добро ово решење. Пре свега видимо да је именилац код x и y исти; он је састављен само од коефицијената уз x и y у систему једначина; ти коефицијенти у систему (1) стоје овако

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}$$

Ако из такве таблице, која има два ступца и две врсте, образујемо два производа унакрсних чланова, a_1 са b_2 и a_2 са b_1; при чему други производ узмемо са знаком минус, добијамо израз

$$a_1 b_2 - a_2 b_1\,,$$

који даје наш именилац. Ако нећемо да извршимо израчунавање те разлике производа но само да назначимо да од чланова таблице треба образовати ову разлику, можемо употребити за нас нов математички израз у облику

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Тај израз зове се **детерминанта**. Пошто она има две врсте и два ступца, она претставља **детерминанту другога реда**. Бројеви a_1, a_2, b_1, b_2 су **елементи детерминанте**.

Наведимо још једно правило по коме можемо нашу ознаку детерминанте заменити обичним алгебарским ознакама. Узмимо, на пр., први стубац и редом сваки елеменат тог ступца, прво a_1, а затим a_2; помножимо сваки тај члан оним чланом детерминанте, који остаје када избришемо врсту и стубац елемента a_1, односно a_2. Поступимо, дакле, овако[1])

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_1} & \boxed{b_1} \\ \boxed{a_2} & b_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \boxed{a_1} & b_1 \\ \boxed{a_2} & \boxed{b_2} \end{vmatrix},$$

[1]) Пошто је у штампи за означавање прецртавања врсте односно ступца потребно израдити нарочити клише, заменили смо то означавање стављањем ове врсте односно ступца у оквир.

тада ћемо за први члан добити производ $a_1 b_2$, а за други $a_2 b_1$. При томе треба водити рачуна да, при прелазу од једног елемента на суседни, треба код производа мењати знак, — поступити, дакле, слично као што при ходу мењамо ногу. На тај начин за други производ имамо $-a_2 b_1$.

Овај поступак зове се *развијање детерминанте*. Развијање детерминанте можемо вршити не само по елементима првог ступца него и по елементима ма којег ступца или по елементима ма које врсте, само при томе треба пазити на знак и узимати у обзир да сваком елементу детерминанте припада одређени знак. Тај знак ћемо добити ако од првог елемента a_1 (са плусом) дођемо до нашег елемента кретањем само по врсти или по ступцу (не косо), мењајући знак са сваким прелазом од једног елемента на други. Развимо, на пр., нашу детерминанту по елементима друге врсте; имаћемо

$$\begin{vmatrix} \boxed{\overset{+}{a_1}} & b_1 \\ \boxed{\overset{-}{a_2}} & \boxed{b_2} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & \boxed{b_1} \\ \boxed{a_2} & \boxed{b_2} \end{vmatrix}.$$

Пошто елементу a_2 одговара минус, имамо $-a_2 b_1 + b_2 a_1$, а то је иста величина $a_1 b_2 - a_2 b_1$, само са другим редом чланова.

На тај начин можемо нагласити да је именилац решења (2) детерминанта образована од коефицијената једначина. Ова детерминанта зове се *главна детерминанта система линеарних једначина*.

Сваки бројилац у том решењу је такође детерминанта, и то

$$\begin{vmatrix} m_1 & b_1 \\ m_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & m_1 \\ a_2 & m_2 \end{vmatrix}.$$

Ове су детерминанте формиране из главне детерминанте

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

заменом коефицијената код оне променљиве, коју одређујемо, независним члановима. За одређивање x треба стубац са елементима a_1, a_2 заменити ступцем од елемената m_1 и m_2; за одређивање y'а стубац са b_1 и b_2 замењујемо истим ступцем независних чланова m_1 и m_2.

Према томе помоћу детерминаната решење система (1) може се написати

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m_1 & b_1 \\ m_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & m_1 \\ a_2 & m_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Навешћемо једну примедбу, која је практички важна, јер спречава евентуално могућу грешку. У детерминанте бројилаца ставили смо слободне чланове m_1 и m_2 узимајући их са оне стране једначина, где нема непознатих. Ако су једначине написане у облику

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0;$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0;$$

за одређивање, на пр. x, у главној детерминанти,

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

треба A_1 и A_2 заменити са $-C_1$ и $-C_2$.

Нека је сад дат систем од три линеарне једначине

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = m_1,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = m_2,$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = m_3.$$

Није тешко показати да се решење тог система може исто тако претставити помоћу детерминаната, али *детерминаната трећега реда*.

Пре свега напишимо главну детерминанту система

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

образовану од коефицијената система. Објаснићемо на тој детерминанти шта ова ознака значи. Применимо раније показани поступак развијања детерминанте по елементима једне врсте или једног ступца. Узмимо, на пр., прву врсту: a_1, b_1, c_1. Сваки од тих елемената треба помножити оном детерминантом другога реда која преостаје пошто прецртамо врсту и стубац узетог елемента. Уз то се и овде придржавамо правила о знацима.

На тај начин имамо

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Ако сад сваку од детерминаната другога реда даље развијемо према већ објашњеном правилу, дефинитивно ћемо добити збир

$$a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1,$$

који даје вредност наше главне детерминанте.

Главна детерминанта је именилац решења за све три непознате. Сваки се бројилац добија у облику детерминанте из главне детерминанте када стубац одговарајућих коефицијената заменимо слободним члановима m_1, m_2, m_3.

Тако за x добијамо решење

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}.$$

Слична решења имамо за y и z: $y = \frac{D_2}{D}$, $z = \frac{D_3}{D}$, где су ознаке очигледне.

Тачност оваква решења, у облику детерминаната, може се непосредно проверити, ако нађене вредности уврстимо у систем једначина.

Изложено правило за решавање система линеарних једначина важи не само за случај три непознате него, уопште и за случај произвољног броја непознатих.

Помоћу детерминаната лако можемо формулисати и резултате дискусије решења једног система линеарних једначина, но у ту дискусију нећемо овде улазити.

b. О коренима алгебарске једначине

У даљим излагањима говорићемо само о алгебарским једначинама са бројним коефицијентима.

Ако су коефицијенти једначине рационални можемо их увек довести до целих бројева; заиста ако су у једначини

$$(3) \qquad f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

коефицијенти разломљени, множећи једначину заједничким имениоцем тих разломака можемо их се ослободити.

Сваки број α који, када га ставимо у једначину место x, претвара једначину у идентитет, зове се **корен једначине**. Корен једначине

$$f(x) = 0$$

зове се и **нула функције** $f(x)$, у нашем случају нула полинома.

Навешћемо без доказа неколико врло важних ставова о коренима алгебарских једначина.

Ако је α корен једначине (3), полином $f(x)$ је дељив са $x - \alpha$.

Ако полином $f(x)$ садржи само један чинилац $x - \alpha$, корен α зове се **прост корен**. Ако је тај полином дељив са $(x - \alpha)^k$, где је k цео позитивни број, корен α се зове **вишеструки корен** једначине; број његове вишеструкости је k.

Ако једначина са реалним коефицијентима има комплексни корен

$$\alpha + \beta i,$$

она мора имати и корен у облику конјугованог комплекса

$$\alpha - \beta i.$$

Пошто је полином $f(x)$ дељив са $x - (\alpha + \beta i)$ и са $x - (\alpha - \beta i)$, он мора бити дељив и са производом ових израза, тј. са

$$[(x - \alpha) - \beta i]\,[(x - \alpha) + \beta i] = (x - \alpha)^2 + \beta^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2.$$

Ако функција има чист имагинарни корен $\beta i\,(\alpha = 0)$, она има такође и корен $-\beta i$ и дељива је са $x^2 + \beta^2$.

Свака алгебарска једначина n'тог степена има n корена. При томе се сваки k-струки корен рачуна за k корена. Дакле, ако једначина (3) има само просте корене $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, функцију $f(x)$ можемо претставити у облику

$$f(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) = 0 .$$

Ако су α_1 и α_2 вишеструки корени степена k_1 и k_2, једначина изгледа

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} f_1(x) = 0 ,$$

где је $f_1(x)$ полином степена $n - k_1 - k_2$.

с. Издвајање једнаких корена

Ако једначина

$$f(x) = 0$$

има вишеструки корен α степена k, функцију $f(x)$ можемо претставити

$$f(x) = (x - \alpha)^k \varphi(x) ,$$

при чему једначина

$$\varphi(x) = 0$$

више нема корен α.

Израчунајмо сад извод функције $f(x)$;

$$f'(x) = k(x - \alpha)^{k-1} \varphi(x) + (x - \alpha)^k \varphi'(x) =$$

$$= (x - \alpha)^{k-1} \Psi(x) ,$$

где је

$$\Psi(x) = k\varphi(x) + (x - \alpha)\varphi'(x) .$$

Из написаног облика извода следује да функција $f'(x)$ има број α као вишеструку нулу, и то степена $k - 1$.

Према томе функције

$$f(x) \quad \text{и} \quad f'(x) \tag{4}$$

морају имати заједнички делилац

$$(x - \alpha)^{k-1}.$$

Оно што смо казали за један од вишеструких корена важи и за све остале.

На основу овог закључујемо: ако нађемо највећи заједнички делилац $P(x)$ функција (4) и њиме поделимо функцију $f(x)$, количник

$$\Phi(x) = \frac{f(x)}{P(x)}$$

неће имати ниједан вишеструки корен.

Обрнуто, једначина

$$P(x) = 0$$

садржаће само оне корене који су за једначину $f(x) = 0$ били вишеструки.

Примери.

1. Нека је дата једначина

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 = 0 .$$

Израчунајмо извод

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) .$$

Узастопним дељењем (Еуклидов алгоритам) одређујемо највећи заједнички делилац

$$\begin{array}{l|l|l} x^3 - 3x + 2 & \overset{x}{} x^2 - 1 & \overset{x+1}{} x - 1 . \\ \underline{x^3 \quad - x} & & \\ \quad -2x + 2 & & \end{array}$$

Видимо да је тај делилац

$$P(x) = x - 1 .$$

Према томе корен једначине $x - 1 = 0$, тј. $x = 1$, мора бити двоструки корен полазне једначине. Ако ову полазну једначину поделимо са $x - 1$, добићемо једначину

$$x^2 + x - 2 = 0 ,$$

која има само просте корене. Како је један корен $x = 1$, дељењем са $x - 1$ добијамо

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2) = 0 ,$$

одакле налазимо други корен $x = -2$.

2. Дата је једначина

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0 .$$

Израчунајмо извод:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 8 = 4(x^3 - 3x + 2) .$$

Еуклидовим алгоритмом одређујемо највећи заједнички делилац

$$\begin{array}{c|c|c|c}
x^4 - 6x^2 + 8x - 3 & x^3 - 3x + 2 & x^2 - 2x + 1 & x^2 - 2x + 1 \\
\underline{x^4 - 3x^2 + 2x} & \underline{x^3 - 2x^2 + x} & & \\
-3x^2 + 6x - 3 & 2x^2 - 4x + 2 & &
\end{array}$$

који има облик

$$P(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 .$$

Према томе се $x = 1$ јавља као троструки корен наше једначине. Ако поделимо $f(x)$ са $P(x)$, количник даје једначину

$$x^2 + 2x - 3 = 0 ,$$

која има само просте корене. Пошто је један од њих $x = 1$, вредност другога је $x = -3$.

Наша полазна једначина има троструки корен $x = 1$ и прости корен $x = -3$. Функцију $f(x)$ можемо раставити на чиниоце:

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = (x-1)^3 (x+3) .$$

d. Приближно одређивање реалних корена

Показаћемо пре свега графичко одређивање реалних корена једначине

$$f(x) = 0 .$$

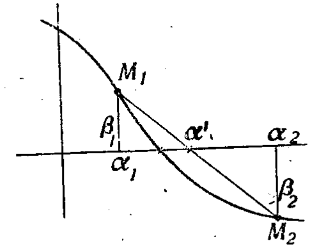
Ако нацртамо криву линију са једначином

$$y = f(x) ,$$

тачке пресека ове криве (сл. 100) са осом x, пошто је за њих $y = f(x) = 0$, имају апсцисе једнаке коренима дате једначине.

Ако крива додирује осу x, тачки додира ($f'(x) = 0$) одговара најмање двоструки корен, а може да буде и вишеструки корен већег степена.

Претпоставимо да график функције $f(x)$ не можемо детаљно нацртати око траженог корена, али да је могуће одредити координате α_1 и $\beta_1 = f(\alpha_1)$ тачке M_1 и координате α_2 и $\beta_2 = f(\alpha_2)$ тачке M_2 са различитих страна осе x у близини траженог корена α. Величине α_1 и α_2 можемо сматрати као погрешне вредности корена. Правило, на основу којега се из две погрешне вредности може наћи боља приближна вредност корена, зове се regula falsi.



Сл. 100 Графичко одређивање реалних корена. Regula falsi

Образујмо једначину праве, која пролази кроз тачке M_1 и M_2,

$$\frac{y - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} = \frac{x - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

и ставимо за одређивање боље приближне вредности $x = \alpha'$ вредност $y = 0$; тада ћемо добити

$$\alpha' = \frac{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} = \frac{\alpha_1 f(\alpha_2) - \alpha_2 f(\alpha_1)}{f(\alpha_2) - f(\alpha_1)} .$$

Овај образац изражава regula falsi.

Ако је линија између тачака M_1 и M_2 права, претходно правило даје тачну вредност корена.

У противном случају оно, уопште не даје тачну, већ само приближнију вредност корена. Ако добијена вредност α' не даје вредност корена са довољном тачношћу, можемо изведено правило применити још једанпут. Зато ћемо $f(\alpha')$ означити са β'. Узмимо затим тачку (α', β') и ону од тачака (α_1, β_1) и (α_2, β_2), која се налази са супротне стране осе x од тачке (α', β'). Ако и нов резултат не буде довољан, треба исти поступак поновити итд.

Метода понављања израчунавања, при којој свако даље израчунавање искоришћава резултат претходног, зове се у Математици метода узастопних апроксимација или метода итерације у случају понављања истог поступка. За тачно образложење сваког итерационог процеса треба показати: 1. Да узастопне приближне вредности заиста имају за своју граничну вредност тражену величину, у нашем случају корен једначине, и 2. Ако ова гранична вредност постоји, оценити грешку, коју чинимо, ако се зауставимо на одређеној приближној вредности.

У применама често пута непосредно из графичког посматрања следује да се између тачака, од којих једна лежи са једне, а друга са друге стране осе x, налазе тражени корени једначине. Ако не можемо искористити цртеж, треба испитивати функцију $f(x)$ давањем аргументу x различитих вредности, почев од негативне па до позитивне бесконачности. Затим можемо све више сужавати интервал промене x и тиме одвајати један корен од другог.

За одређивање броја реалних корена дате једначине са бројним коефицијентима, за издвајање тих корена, тј. одређивање интервала у коме се налази само један корен и за дефинитивно приближно израчунавање корена постоји у Алгебри више врло добрих метода. Читалац их може по потреби наћи у курсевима Алгебарске анализе. Овде ћемо показати на конкретном примеру, сем regula falsi, још једну методу, која припада Њутну.

Узмимо да треба решити једначину

$$y = f(x) = x^3 - 5x + 3 = 0.$$

Дајемо аргументу x низ вредности и израчунавамо вредности y'а:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-41	-9	$+5$	$+7$	3	-1	$+1$	15

Пошто y мења знак у интервалима за x:

$$-3,\ -2$$
$$0,\ \ 1$$
$$1,\ \ 2$$

може се тврдити да наша једначина има три реална корена. Корени су издвојени, пошто се у сваком од написаних интервала налази само по један корен.

Израчунајмо тачније корен који се налази између 1 и 2. Тај интервал можемо поделити на мање делове и израчунати вредности $f(x)$.

У нашем случају имамо

$$f(1{,}8) = -0{,}168$$

$$f(1{,}9) = +0{,}359\,.$$

Одавде закључујемо да је корен једнак 1,8 са додатком неколико стотих. За израчунавање тих стотих употребимо Њутнову методу.

Ставимо у нашу једначину

$$x = 1{,}8 + h\,,$$

тада треба да буде

$$f(1{,}8 + h) = 0\,.$$

Развимо леву страну ове једначине у Тајлоров ред и зауставимо се на два члана; тада ћемо имати

$$f(1{,}8 + h) = f(1{,}8) + h f'(1{,}8) = 0\,.$$

Одавде је

$$h = -\frac{f(1{,}8)}{f'(1{,}8)}\,.$$

Како је извод од $f(x)$

$$f'(x) = 3x^2 - 5 \qquad \text{и} \qquad f'(1{,}8) = 4{,}72\,,$$

имамо за

$$h = -\frac{-0{,}168}{4{,}72} \approx 0{,}0356\,.$$

Према томе за корен треба узети или 1,83 или 1,84. Да се између та два броја налази наш корен видимо из ових резултата

$$f(1{,}83) \approx -0{,}0215\,,$$

$$f(1{,}84) \approx +0{,}0295\,.$$

Понављање исте методе доводи до тога да се корен налази између бројева

$$1{,}8342 \qquad \text{и} \qquad 1{,}8343\,,$$

јер је

$$f(1{,}8342) \approx -0{,}00022\,,$$

$$f(1{,}8343) \approx +0{,}00029\,.$$

На исти начин бисмо могли поступити и за израчунавање два друга корена наше једначине.

е. Одређивање имагинарних корена

Претпоставимо да једначина

$$f(x)=0$$

нема више реалних корена и да су сви њени корени имагинарни. Ставимо

$$x=\xi+\eta i,$$

где су ξ и η два реална броја. Ако ову вредност уврстимо у нашу једначину и одвојимо реални део од имагинарног, добићемо

$$f(x)=f(\xi+\eta i)=f_1(\xi,\eta)+i f_2(\xi,\eta)=0,$$

где се функције f_1 и f_2 израчунавају на основу дате функције $f(x)$. Из претходне једначине непосредно следују две једначине

$$(5)\qquad \begin{aligned} f_1(\xi,\eta)&=0,\\ f_2(\xi,\eta)&=0 \end{aligned}$$

које треба да задовољавају ξ и η. Ако ξ и η сматрамо као Декартове координате тачке у равни, свакој од претходних једначина одговара линија у равни $\xi\eta$. Координате пресека тих линија дају реални и имагинарни део корена наше полазне једначине.

Поступак решавања објаснићемо на једном конкретном примеру.

Наћи корен једначине

$$x^4+1=0,$$

која очевидно нема стварних корена, јер четврти степен ниједног реалног броја не може бити једнак негативној јединици.

Лако се израчунава да је у нашем случају

$$f_1(\xi,\eta)=(\xi^2-\eta^2)^2-4\xi^2\eta^2+1=0,$$

$$f_2(\xi,\eta)=4\xi\eta(\xi^2-\eta^2)=0.$$

Друга једначина даје решења:

$$\xi=0,\qquad \eta=0,\qquad \xi^2=\eta^2.$$

Из прве једначине имамо за $\xi=0$,

$$\eta^2+1=0,$$

а ово је немогуће, јер ξ и η морају бити реалне величине. Отпада такође и решење $\eta=0$.

Треће решење

$$\xi^2=\eta^2.$$

из прве једначине даје:

$$-4\xi^4+1=0,$$

одакле је $\xi^4=\frac{1}{4}$, $\xi^2=\pm\frac{1}{2}$ и $\xi=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, јер треба да се зауставимо само на реалним коренима. Пошто за η имамо исте вредности $\eta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, дефинитивно можемо написати ове вредности корена наше полазне једначине:

$$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\quad x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i),\quad x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),\quad x_4=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$$

У датом, конкретном случају исти резултат добија се разлагањем на два квадратна чиниоца:

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=$$
$$=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

и решавањем одговарајућих квадратних једначина.

Ако нисмо у стању да решимо систем (5), као што смо то урадили у нашем примеру, можемо употребити графичку методу. Треба нацртати у равни $\xi\eta$ сваку од кривих са једначинама $f_1=0$, $f_2=0$ и одредити пресеке.

f. Графичко решавање једначине помоћу две криве

Узмимо да треба решити кубну једначину

$$z^3+az^2+bz+c=0.$$

Увођењем нове непознате x увек се може дата једначина трансформисати у облик без квадратног члана, тј.

$$(6)\qquad x^3+Ax+B=0.$$

Заиста, ако ставимо

$$z = x - \frac{1}{3}a$$

имамо

$$z^3 + az^2 + bz + c = \left(x - \frac{1}{3}a\right)^3 + a\left(x - \frac{1}{3}a\right)^2 + b\left(x - \frac{1}{3}a\right) + c +$$

$$= x^3 + \left(a - \frac{1}{3}\cdot 3a\right)x^2 + \left(\frac{1}{3}a^2 - \frac{2}{3}a^2 + b\right)x + \left(-\frac{1}{27}a^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{9}a^3 - \frac{1}{3}ab + c\right) =$$

$$= x^3 + \mathrm{A}x + \mathrm{B},$$

где је

$$\mathrm{A} = b - \frac{1}{3}a^2,$$

$$\mathrm{B} = c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3.$$

Ставимо сад у једначини (6)

$$y_1 = x^3, \qquad y_2 = -(\mathrm{A}x + \mathrm{B}),$$

она ће се претворити у једначину

$$y_1 = y_2.$$

Према томе решавање једначине (6) своди се на одређивање пресека две криве: прве са једначином

$$y_1 = x^3,$$

која је стална и може се нацртати једанпут за све кубне једначине, — то је такозвана основна кубна парабола, и друге са једначином

$$y_2 = -\mathrm{A}x - \mathrm{B},$$

која претставља праву линију. Тачке пресека дају, својим апсцисама, реалне корене кубне једначине.

На слици 101 приказано је решење једначине

$$x^3 - 19x + 30 = 0,$$

чији су корени: $x_1 = -5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Корени су одређени пресеком

основне кубне параболе и праве са једначином $y_2 = 19x - 30$. Размера на осовини y је десет пута мања од размере на осовини x.

Ова метода може послужити и за приближно решавање трансцендентних једначина.

Узмимо, као пример, тзв. Кеплерову једначину

$$u - e \sin u = w,$$

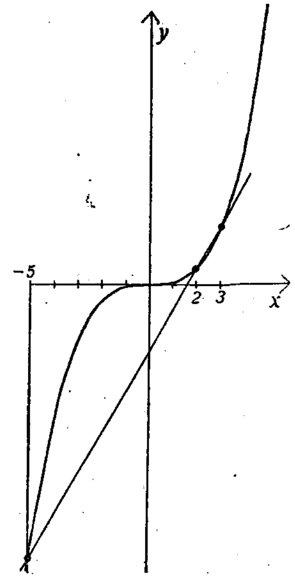
где су: w — позната средња аномалија планете, пропорционална времену, e — ексцентрицитет путање планетине и u непозната ексцентрична аномалија, помоћу које се одређује положај планете на елипси путање.

Кеплерову једначину можемо рашчланити у

$$e \sin u = u - w$$

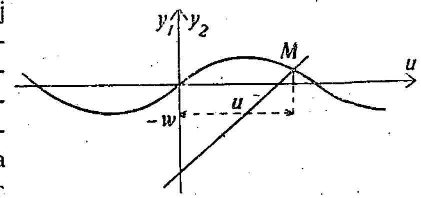
и ставити

$$y_1 = e \sin u, \qquad y_2 = u - w.$$



Сл. 101. Графичко решавање кубне једначине

Прва једначина претставља синусоиду (сл. 102) са амплитудом e; ова је крива стална за сваки положај дате планете. Друга једначина одређује правац са сталним угаоним коефицијентом једнаким јединици; њена је почетна ордината $(-w)$ пропорционална времену. Тачка пресека M синусоиде и праве даје вредност ексцентричне аномалије.



Сл. 102. Графичко решавање Кеплерове једначине

Вежбања.

1. Израчунати детерминанте:

$$\begin{vmatrix} 3, & 2 \\ 6, & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4{,}3; & -2 \\ 9, & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sin\alpha, & -\cos\alpha \\ \cos\alpha, & \sin\alpha \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\alpha} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1+x, & x \\ -x, & 1-x \end{vmatrix},$$

2. Израчунати детерминанте:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0,1; & 0,5; & 1 \\ 20; & 10; & 15 \\ 0; & 2; & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1, & k, & k^2 \\ 1, & l, & l^2 \\ 1, & m, & m \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{vmatrix},$$

3. Решити системе једначина помоћу детерминаната:

$$5x - 2y = 30, \quad 7x + 3y = 100.$$

$$x + y - z = 3, \quad 2x + 3y - 7z = 7; \quad x - y + 5z = 1.$$

$$-x + y + z + u = 8; \quad x - y + z + u = 6; \quad x + y - z + u = 4; \quad x + y + z - u = 2.$$

4. Доказати да је детерминанта

$$\begin{vmatrix} ma, & mb, & mc \\ na, & nb, & nc \\ p, & q, & r \end{vmatrix}$$

увек једнака нули.

5. Написати једначину са двоструким кореном $+1$ и троструким кореном $-$

6. Издвојити вишеструке корене једначина:

$$x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = 0.$$

$$x^6 - x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 5x^2 - x - 2 = 0.$$

7. Израчунати тачне или приближне вредности корена једначина:

$$2x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0.$$

$$x^3 + 3x^2 - 11x - 5 = 0.$$

8. Одредити имагинарне корене једначина:

$$x^3 + x^2 + 4x + 4 = 0,$$

$$x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 30x + 25 = 0.$$

9. Решити графички кубне једначине

$$x^3 - 6x^2 - 13x + 12 = 0.$$

$$x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = 0.$$

10. Доказати да коефицијенти a, b, c, d једначине

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

имају вредности

$$a = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$

$$b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4,$$

$$c = -(x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 + x_1x_2x_3),$$

$$d = x_1x_2x_3x_4.$$

где су x_1, x_2, x_3, x_4, кореии те једначине.

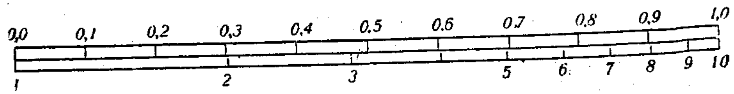
§ 65. Номографија

У последње време јако су се развиле графичке методе решавања разних проблема Математике, нарочито оних у којима играју улогу функционалне везе. Све те методе сачињавају данас специјалну дисциплину која се зове Номографија. Слика са које можемо прочитати одговор на постављено питање зове се номограм.

Ако је функција $y = f(x)$ претстављена графиком у Декартову систему, и тај график је, у суштини, такође номограм. Заиста, са те слике можемо прочитати вредности функције $f(x)$, ако су дате вредности аргумента x и обрнуто.

Наведимо неколико примера номограма.

Изнад једне дужи (сл. 103) ставимо бројеве: 0,0; 0,1; 0,2; . . . 0,9; 1,0 и сматрајмо их као вредности декадних логаритама бројева,



Сл. 103. Номограм декадних логаритама

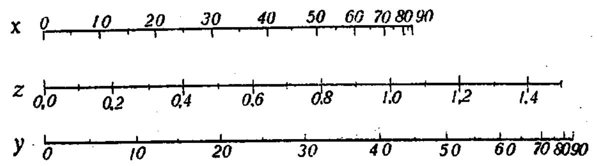
означених испод те дужи. Та дуж са означеним бројевима је номограм декадних логаритама, јер са тог цртежа можемо прочитати вредности логаритама за бројеве, и обрнуто. Овај номограм има две скале: једну равномерно подељену (горња) и другу — неравномерно подељену (доња).

Наведимо пример номограма са једном помоћном равномерно подељеном скалом и са две неравномерно подељене.

Закону преламања светлости за стакло, са индексом преламања $n = 1,5$, одговара једначина

$$\sin x = 1{,}5 \sin y = z\,,$$

где су x и y углови између зрака и нормале, први у ваздуху, а други у стаклу. Са z смо означили помоћну променљиву. На слици 104 променљивој z одговара равномерно подељена скала, а променљивима x и y



Сл. 104. Номограм преламања светлости у стаклу

неравномерно подељене скале. За сваку вредност z горња скала даје вредност x'a, а доња y. Нормала на скале спаја одговарајуће вредности x и y. Скала за x је краћа од скале за y, јер y не може имати вредност већу од $41^0{,}8$; тај угао одговара појави т о т а л н о г о д б и ј а њ а.

Методе Номографије дају нарочито добре резултате, ако се примењују логаритамске или друге функционалне мреже.

Тако, на пр., график експоненцијалне функције

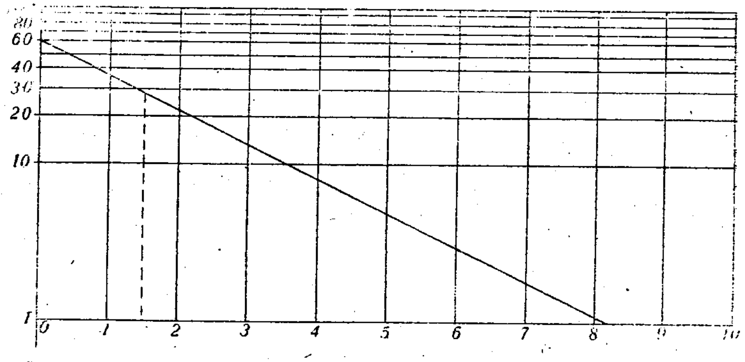
$$y = \alpha\, e^{\beta x}$$

можемо заменити правом линијом, ако уведемо нову променљиву

$$y_1 = \log y\,,$$

јер је

$$y_1 = \log \alpha + \beta x\,.$$

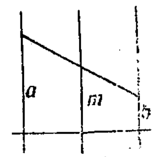


Сл. 105. График експоненцијалне функције на полулогаритамској мрежи

На слици 105 наведена је логаритамска мрежа са променљивом y, наиме, дужине су пропорционалне променљивој y_1, а бројеви означавају вредност y. Нацртана права је график функције

$$y = 60\, e^{-\frac{1}{2}x}\,.$$

За $x = 1{,}5$ график непосредно даје 28, а израчуната вредност износи 28,34.



Сл. 106. Основица и средња линија трапеза

Пошто је ова скала логаритамска само за променљиву y, а за променљиву x равномерно подељена, с к а л а се зове п о л у л о г а р и т а м с к а.

За што јасније приказивање улоге логаритамске скале у номографији навешћемо још један пример.

Искористимо геометриску везу између основица a и b и средње линије m трапеза (сл. 106),

$$a + b = 2m\,.$$

Претпоставимо сад да је

$$a = \log \mathrm{A},\ b = \log \mathrm{B},\ 2m = \log \mathrm{P},$$

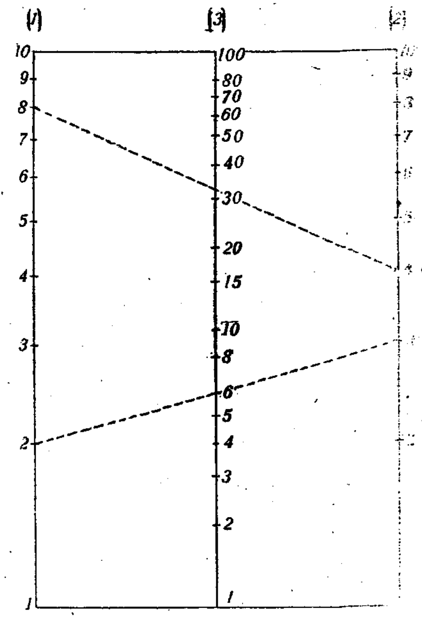
где су A, B, P одговарајући бројеви. Тада из једначине

$$\log \mathrm{A} + \log \mathrm{B} = \log \mathrm{P}$$

имамо

$$\mathrm{AB} = \mathrm{P}\,.$$

Нацртајмо на правима (1), (2), (3) логаритамске скале (сл. 107). Скале правих (1) и (2) показују логаритме, а скала праве (3) половину логаритма. Деоне тачке нећемо означити вредностима тих логаритама, односно половине логаритма него вредностима одговарајућих бројева A, B, P.



Сл. 107. Номограм за производ и количник

Ако сад на правој (1) узмемо тачку означену бројем A, на правој (2) тачку означену бројем B и спојимо ове две тачке правом, та ће права сећи праву (3) у тачки са ознаком P. На тако добијеном номограму можемо једноставно, помоћу лењира, прочитати производ два дата броја. Обрнуто, исти номограм пружа могућност да се прочита количник два дата броја.

Показаћемо још номографску методу за решавање квадратне и кубне једначине.

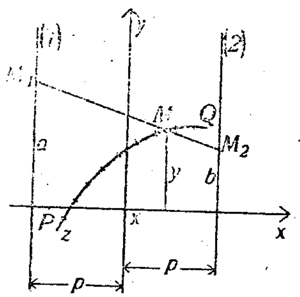
Узмимо да треба решити једначину

$$z^n + az + b = 0\,,$$

где су a, b, n стални бројеви. За квадратну једначину $n = 2$, за кубну $n = 3$.

За конструкцију номограма узимамо две праве (1) и (2) паралелне осовини y на растојању p од те осе (сл. 108). На правој (1) узмимо тачку M_1 са ординатом a, а на правој (2) тачку M_2 са ординатом b.

Потражимо сада такву криву PQ, са на њој означеном скалом параметра z — криволиниску скалу — да пресек M криве и праве $M_1 M_2$ одређује вредност параметра z једнаку корену наше квадратне, односно кубне једначине.



Сл. 108. Номограм са криволиниском скалом

У ту сврху образујмо, пре свега, једначину праве која пролази кроз тачке M_1 и M_2.

Познато правило даје

$$\frac{y-a}{b-a} = \frac{x+p}{p+p}\,,$$

одакле је

$$2py - (p-x)\,a - (p+x)\,b = 0\,,$$

или

$$(1) \qquad \left(-\frac{2py}{p+x}\right) + \left(\frac{p-x}{p+x}\right)a + b = 0.$$

Сматрајући сада x и y као функције z, одредимо те функције тако да се претходна једначина трансформише у нашу једначину

$$(2) \qquad z^n + az + b = 0\,,$$

за све вредности a и b. Зато треба изједначити коефицијенте једначина (1) и (2). После тога добијамо

$$z^n = -\frac{2py}{p+x}\,, \qquad z = \frac{p-x}{p+x}.$$

Решавање ових једначина по x и y даје

$$(3) \qquad x = \frac{p(1-z)}{1+z}\,, \qquad y = -\frac{z^n}{1+z}.$$

Добили смо параметарске једначине криве, која у пресеку са правом $M_1 M_2$ даје тачку M; вредност параметра z за ту тачку одређује корен наше једначине.

Узмимо $p = 4$. За квадратну једначину једначине (3) дају

$$(4) \qquad x = \frac{4(1-z)}{1+z}\,, \qquad y = -\frac{z^2}{1+z}\,,$$

То су параметарске једначине хиперболе, јер после елиминисања параметра z добијамо једначину

$$x^2 + 8xy - 8x + 32y + 16 = 0.$$

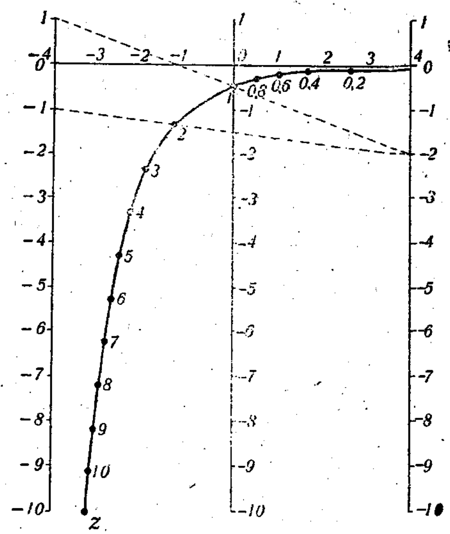
На слици 109 нацртана је та хипербола и на њој су показане вредности параметра z.

Пример

Тачке праве дају решења квадратне једначине

$$(5) \qquad z^2 - z - 2 = 0.$$

Један корен, $z = 2$, добили смо, када смо повукли праву са $a = -1$ и $b = -2$.

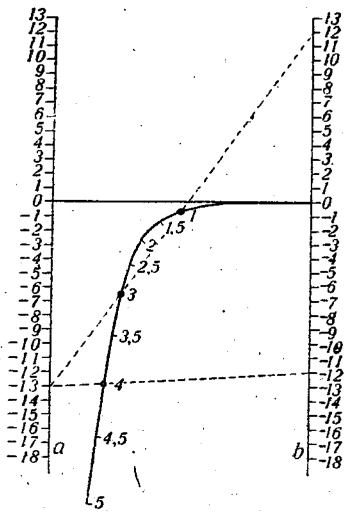


Сл. 109. Номограм за решавање квадратне једначине

За друго решење прво смо у једначини (5) извршили замену z са $-z$ и добили смо једначину

$$z^2 + z - 2 = 0.$$

Узмемо ли затим $a=+1$, $b=-2$, права даје у пресеку са хиперболом тачку са вредношћу параметра $+1$, одакле закључујемо да је други корен једначине (5) -1.



Сл. 110. Номограм за решавање кубне једначине

За кубну једначину

$$z^3 + az + b = 0$$

имамо, место хиперболе, криву трећег степена чије су параметарске једначине (за $p=4$):

$$x = \frac{4(1-z)}{1+z}, \qquad y = -\frac{z^3}{1+z}.$$

Ову криволиниску скалу можемо нацртати по тачкама са означеним вредностима параметра z око њих.

На слици 110 показан је номограм за решавање кубне једначине.

Пример.

Тачкасте линије дају решење једначине

$$z^3 - 13z - 12 = 0,$$

при чему смо прво ставили $a=-13$, $b=-12$ и добили позитивно решење $z_1=4$. Затим смо извршили замену z са $-z$ и добили једначину

$$z^3 - 13z + 12 = 0;$$

искористили смо праву са $a=-13$, $b=+12$. Пресеци ове праве са кривом дају два решења: 3 и 1; овим решењима дефинитивно одговарају два решења: $z_2=-3$, $z_3=-1$ наше полазне кубне једначине.

Вежбања.

1. Да ли логаритмар има номограме?
2. Прецртати на добру хартију номограме за решавање квадратне и кубне једначине и вежбати се у решавању таквих једначина.

§ 66. Интерполација

Ако је дат низ података о функцији $f(x)$ у интервалу $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, но није познат математички израз саме функције у том интервалу, поступак којим се одређују, тј. израчунавају вредности ове функције за произвољну вредност аргумента x у том интервалу зове се интерполација.

Ако вредност аргумента x излази из назначеног интервала, поступак се зове екстраполација.

Обрасци Тајлоров и Маклоренов

$$f(a+x) = f(a) + x f'(a) + \frac{x^2}{2!} f''(a) + \cdots$$

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots,$$

у случају конвергентности редова, служе као примери интерполационог поступка. Они омогућавају одређивање вредности функције за произвољну вредност аргумента x у области конвергентности, ако су познате вредности функције и њених извода за једну одређену вредност аргумента.

Међутим често нису познате вредности функције и њених извода за једну одређену вредност аргумента; дате су само вредности функције $f(x)$ али за више вредности аргумената, на пр., помоћу таблице

x	x_0	x_1	x_2	......	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	......	y_n

Помоћу ове таблице треба одредити вредност функције $f(x)$ за вредност аргумента x, која се налази у датом интервалу но не поклапа се ни са једном од вредности таблице.

Нарочито је важан случај кад вредности

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

чине аритметичку прогресију, тј. кад је разлика h између две суседне вредности x иста. То је случај таблице једнаких интервала. Ми ћемо проучавати само такав случај.

У случају низа датих тачака

$$M_0(x_0, y_0),\ M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2),\ \cdots,\ M_n(x_n, y_n),$$

које претстављају податке таблице, основна метода интерполације састоји се у одређивању криве линије са једначином

$$y = \varphi(x),$$

која мора пролазити кроз све дате тачке. Пошто је у таквом облику задатак неодређен, јер таквих кривих може бити више, треба да буду дати још и допунски услови.

Најпростији је случај кад је функција $\varphi(x)$ полином

$$\varphi(x) = \mathrm{P}(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_{n-1} x^{n-1} + u_n x^n \tag{1}$$

са $n+1$ неодређених коефицијената $u_0, u_1, u_2 \cdots, u_{n-1}, u_n$; ове коефицијенте треба одредити из услова да крива са једначином

$$y = \varphi(x)$$

мора проћи кроз све дате тачке, а да при томе буде најнижег степена. Ова крива зове се генералисана парабола; за $n=2$ она се претвара у обичну параболу. Интерполација помоћу такве криве зове се параболичка. За полином првог степена интерполација је линеарна.

За одређивање коефицијената $u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}, u_n$, код полинома (1) можемо се послужити са n линеарних једначина

$$y_0 = u_0 + u_1 x_0 + u_2 x_0^2 + \cdots + u_{n-1} x_0^{n-1} + u_n x_0^n,$$

$$y_1 = u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_1^2 + \cdots + u_{n-1} x_1^{n-1} + u_n x_1^n,$$

$$y_2 = u_0 + u_1 x_2 + u_2 x_2^2 + \cdots + u_{n-1} x_2^{n-1} + u_n x_2^n,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = u_0 + u_1 x_n + u_2 x_n^2 + \cdots + u_{n-1} x_n^{n-1} + u_n x_n^n.$$

Такав пут израчунавања коефицијената има два недостатка. Он је дуг. Сем тога, он не пружа могућности да се оцени грешка и да се заустави само на потребном броју тачака, ако се тражи приближно израчунавање.

Постоји други начин интерполације, обрасцима израженим не помоћу самих функција него помоћу такозваних разлика.

Означимо са $\Delta f(a)$ разлику

$$f(a+h) - f(a) = \Delta f(a),$$

где је h прираштај, увек исти, аргумента функције $f(x)$, и назовимо је прва разлика. Ако унапред знамо на коју се функцију она односи, можемо кратко писати Δ. Ако је $f(a) = y_0$, $f(a+h) = y_1$, за разлику имамо $y_1 - y_0 = \Delta y_0$. Из ове једначине следује

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0.$$

Ако сад образујемо разлику $y_2 - y_1$ између наредних вредности функције, можемо ставити

$$y_2 - y_1 = \Delta y_1.$$

Разлика $\Delta y_1 - \Delta y_0$ између две узастопне прве разлике чини другу разлику и означава се са $\Delta^2 y_0$, тј.

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0.$$

Ако ставимо у ову једначину вредности првих разлика, добићемо једначину

$$\Delta^2 y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0.$$

Ако затим уведемо трећу разлику

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0,$$

она се помоћу ордината овако изражава

$$\Delta^3 y_0 = (y_3 - 2y_2 + y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0.$$

За четврту разлику без тешкоће бисмо добили образац

$$\Delta^4 y_0 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0.$$

Видимо да свака разлика може бити изражена помоћу основних ордината и да су коефицијенти једнаки коефицијентима Њутнова биномног обрасца.

Практички се узастопне разлике израчунавају по схеми

$$\begin{array}{llllllll}
x_0 & y_0 & & & & & & \\
 & & \Delta y_0 & & & & & \\
x_1 & y_1 & & \Delta^2 y_0 & & & & \\
 & & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_0 & & & \\
x_2 & y_2 & & \Delta^2 y_1 & & \Delta^4 y_0 & & \\
 & & \Delta y_2 & & \Delta^3 y_1 & & \Delta^5 y_0 & \\
x_3 & y_3 & & \Delta^2 y_2 & & \Delta^4 y_1 & & \Delta^6 y_0. \\
 & & \Delta y_3 & & \Delta^3 y_2 & & \Delta^5 y_1 & \\
x_4 & y_4 & & \Delta^2 y_3 & & \Delta^4 y_2 & & \\
 & & \Delta y_4 & & \Delta^3 y_3 & & & \\
x_5 & y_5 & & \Delta^2 y_4 & & & & \\
 & & \Delta y_5 & & & & & \\
x_6 & y_6 & & & & & &
\end{array}$$

Њутн је предложио интерполисање функције помоћу полинома ове форме

$$(2)\qquad \begin{aligned} y(x) \approx \varphi(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\ + \cdots + c_{n-1}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-2}), \end{aligned}$$

где су $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}$ стални коефицијенти које треба одредити из услова да крива $y = \varphi(x)$ пролази кроз $n + 1$ дату тачку.

Ако у једначину (2) ставимо једно за другим $x = x_0$, $x = x_1$, $x = x_2$ итд., добићемо систем једначина

$$y_0 = c_0,$$
$$y_1 = c_0 + c_1(x_1 - x_0),$$
$$y_2 = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$
$$y_2 = c_0 + c_1(x_3 - x_0) + c_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) + c_3(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Из датих једначина изводимо

$$c_0 = y_0,$$
$$c_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h},$$
$$c_2 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2},$$
$$c_3 = \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{3!\,h^3} = \frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Са израчунатим коефицијентима полином $\varphi(x)$ можемо написати

$$y(x) \approx \varphi(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + $$
$$+ \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Тако изгледа Њутнов полином, чија крива пролази кроз $n + 1$ дату тачку.

Написани **Њутнов интерполациони образац** понекад се изражава и у другом облику.

Место вредности x уведимо број m помоћу обрасца

$$\frac{x - x_0}{h} = m,$$

одакле је

$$x - x_0 = m\,h,$$

те тако можемо све остале разлике изразити овако

$$x - x_1 = x - x_0 - (x_1 - x_0) = m\,h - h = (m - 1)\,h,$$
$$x - x_2 = (m - 2)\,h, \cdots\ x - x_{n-2} = [m - (n - 2)]\,h.$$

Са овим вредностима разлика Њутнов интерполациони образац постаје

$$(3)\qquad y(x) \approx \varphi(x) = y_0 + m\,\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + $$
$$+ \cdots + \frac{m(m-1)\cdots[m-(n-1)]}{n!}\Delta^n y_0.$$

Пример

Узмимо да треба израчунати $\log 24{,}5$ на основу логаритама бројева 24, 25, 26 и 27, које узимамо из логаритамских таблица.

Образујмо таблицу

x	$\log x$	Δ	Δ^2	Δ^3
24	1,38021			
		0,01773		
25	1,39794		— 0,00070	
		0,01703		0,00006
26	1,41497		— 0,00064	
		0,01639		
27	1,43136			

У нашем случају је $h=1$ те, према томе, за 24,5 имамо $m=\frac{1}{2}$.

Према обрасцу (3) биће

$$f(a)=y_0=\log 24=1{,}38021$$

$$m\,\Delta y_0=\frac{1}{2}\cdot \quad 0{,}01773=0{,}008865$$

$$\frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0=-\frac{1}{8}\cdot -0{,}00070=0{,}000087$$

$$\frac{m(m-1)(m-1)}{3!}\Delta^3 y_0=\frac{1}{16}\cdot \quad 0{,}00006=0{,}000004$$

$$\log 24{,}5 \qquad =1{,}389166\approx 1{,}38917$$

Тај број ћемо наћи у логаритамским петоцифреним таблицама.

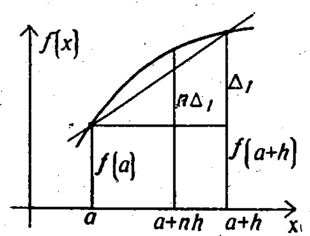
У Њутнову обрасцу искоришћене разлике састављене су од узастопних наредних вредности функције. Међутим могу се израчунати вредност функције и помоћу узастопних претходних вредности функције, а и помоћу симетричних вредности, тј. једне наредне и одговарајуће претходне. Према томе које се разлике узимају, добивају се и одговарајући интерполациони обрасци (Gauss'ов, Stirling'ов, Bessel'ов, и др.). Нећемо улазити у разматрање тих образаца.

Зауставимо ли се само на првој разлици, Њутнов образац даје ($x_0=a$):

$$f(a+m\,h)=f(a)+m\,\Delta f(a)$$

или

$$y=y_0+m\,\Delta y_0.$$



Сл. 111. Линеарна интерполација

То је образац за линеарну интерполацију; он се обично примењује у добрим логаритамским и другим таблицама, где су дате, обично са стране, и помоћне таблице са ознаком P. P. (partes proportionales) са израчунатим вредностима производа $m\,\Delta y_0$. Графичко тумачење ове формуле приказано је на слици 111, где је m означено са n.

Ако узмемо у обзир и другу разлику имамо образац параболичке или квадратне интерполације

$$f(a+m\,h)=f(a)+m\,\Delta f(a)+\frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 f(a),$$

или

$$y=y_0+m\,\Delta y_0+\frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0.$$

Крива интерполације пролази кроз три тачке

$$a,\ y_0=f(a),$$

$$a+h,\ y_1=f(a+h),$$

$$a+2h,\ y_2=f(a+2h).$$

Разлике имају вредности

$$\Delta y_0=f(a+h)-f(a)=y_1-y_0,$$

$$\Delta^2 y_0=\Delta y_1-\Delta y_0=y_2-2y_1+y_0.$$

Према томе једначина параболе интерполације изгледа

$$y=y_0+\frac{x-a}{h}(y_1-y_0)+\frac{(x-a)(x-a-h)}{2!\,h^2}(y_2-2y_1+y_0).$$

Лако је проверити да она заиста пролази кроз означене три тачке.

Ако почетак координатног система поставимо у тачку a, y_0 и координате тачке у односу на нови систем координата означимо са ξ, η, при чему за јединицу дужине узимамо h, парабола интерполације добија облик

$$\eta=\xi\,\Delta y_0+\frac{1}{2}\xi(\xi-1)\Delta^2 y_0. \tag{4}$$

Корисно је знати положај ове параболе за различите вредности $\Delta^2 y_0$ по знаку, јер се тада може приближно оценити правилност изведених рачуна.

Ако са $\Delta\eta$ означимо разлику између резултата параболичке и линеарне интерполације, тј. ставимо

$$\Delta\eta=\eta-\xi\,\Delta y_0,$$

из једначине (4) имамо

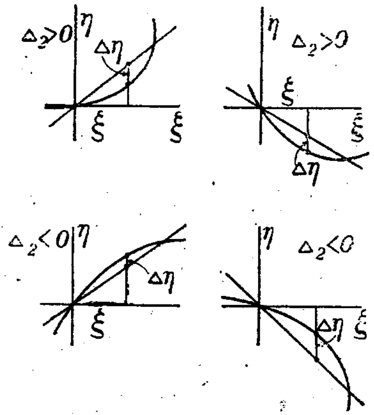
$$\Delta\eta=-k^2\,\Delta^2 y_0, \tag{5}$$

где смо са k^2 означили величину

$$k^2 = \frac{1}{2}\xi(1-\xi),$$

која је позитивна у интервалу

$$0 < \xi < 1.$$



Сл. 112. Утицај параболичке интерполације на резултат линеарне интерполације

Једначина (5) показује да $\Delta\eta$ и $\Delta^2 y_0$ имају супротне знаке. Слика 112 $(\Delta_2 = \Delta^2 y_0)$ показује карактер параболе интерполације за $\Delta^2 y_0 > 0$ и $\Delta^2 y_0 < 0$.

За интерполацију са неједнаким интервалима примењује се **Лагранжев интерполациони образац**, који изгледа овако

$$f(x) = y = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} +$$
$$+ y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} +$$
$$+ \cdots + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}.$$

Ако уврстимо $x = x_0$, добићемо $y = y_0$ и слично за друге вредности аргумента; према томе видимо да Лагранжева функција заиста одговара кривој која пролази кроз све $(n+1)$ дате тачке и претставља полином n'тог степена.

Вежбања.

1. Помоћу линеарне интерполације наћи вредност $log_{10} 6{,}9443$, ако су: $log_{10} 6{,}9\,4 = 0{,}84161$ и $log_{10} 6{,}945 = 0{,}84167$ и објаснити поступак графички.

2. Једно тело се раствара у води. Наведена таблица показује колико процената тог тела остаје после извесног времена израженог у минутима. Одредити колико је процената тог тела остало после 20 минута.

t	7	12	17	22	27	32	37
%	83,7	72,9	63,2	54,7	47,5	41,4	36,3

3. Дате су вредности функције e^{-x^2} за ове аргументе:

x	0,25	0,26	0,27	0,28
e^{-x^2}	0,9394	0,9346	0,9297	0,9246

Одредити вредност функције за $x = 0{,}256$ и проучити на том примеру линеарну, квадратну и кубну интерполацију.

4. Трансформисана Планкова једначина, која поставља везу између енергије зрачења и таласне дужине, има облик

$$\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) x^5 y = 1.$$

Помоћу таблице

x	0,080	0,081	0,082
y	1,1373	1,2471	1,3635

одредити вредност y за $x = 0{,}0805$ помоћу квадратне интерполације.

5. Елиптички интеграл

$$y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - sin^2\alpha\, sin^2 x}}$$

има вредности према таблици

α	75°	76°	77°	78°	79°	80°
y	2,76806	2,83267	2,90256	2,97857	3,06173	3,15339

Одредити y за 76°30′ са истом тачношћу.

§ 67. Приближно диференцирање и интегрисање

Из основне дефиниције извода y' функције $y = f(x)$,

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x_1 \to x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x},$$

непосредно следује да, приближно, за извод можемо узети однос

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x},$$

који одговара тангенсу угла секанте са осом x.

Ако је функција дата графички, стављањем лењира у правцу тангенте може се добити доста тачна вредност извода.

Најзад, ако је функција дата помоћу својих вредности за низ аргумената, можемо употребити интерполациону формулу.

Ако у Њутновој формули (3) § 66 ставимо $m = \frac{x}{h}$ можемо написати

$$y(x) \approx \varphi(x) = y_0 + \frac{x}{h}\,\Delta y_0 + \frac{x(x-h)}{2!\,h^2}\,\Delta^2 y_0 + \frac{x(x-h)(x-2h)}{3!\,h^3}\,\Delta^3 y_0 + \\ + \frac{x(x-h)(x-2h)(x-3h)}{4!\,h^4}\,\Delta^4 y_0 + \dots$$

Диференцирањем леве и десне стране по x добијамо за вредност извода

$$y'(x) \approx \varphi'(x) = \frac{1}{h}\Big[\Delta y_0 + \Big(x - \frac{1}{2}\,h\Big)\frac{\Delta^2 y_0}{h} + \Big(\frac{1}{2}\,x^2 - x h + \frac{1}{3}\,h^2\Big)\frac{\Delta^3 y_0}{h^2} + \\ + \Big(\frac{1}{6}\,x^3 - \frac{3}{4}\,x^2 h + \frac{11}{12}\,x h^2 - \frac{1}{4}\,h^3\Big)\frac{\Delta^4 y_0}{h^3} + \dots\Big].$$

За $x = 0$ имамо

$$y'(0) \approx \varphi'(0) = \frac{1}{h}\Big(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\,\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\,\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\,\Delta^4 y_0 + \dots\Big).$$

Решимо један пример.

Наћи за $a = 5{,}0$ извод функције дате таблицом

a	x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
5,0	0,0	148,413					
			15,609				
5,1	0,1	164,022		1,641			
			17,250		0,174		
5,2	0,2	181,272		1,815		0,015	
			19,065		0,189		0,009
5,3	0,3	200,337		2,004		0,024	
			21,069		0,213		
5,4	0,4	221,406		2,217			
			23,286				
5,5	0,5	244,692					

Према горњем обрасцу треба израчунати

$$f'(a) \approx \varphi'(0) = \frac{1}{0{,}1}\Big(15{,}609 - \frac{1}{2}\cdot 1{,}641 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}174 - \frac{1}{4}\cdot 0{,}015 + \frac{1}{5}\cdot 0{,}009\Big) =$$

$$= 10\,(15{,}609 - 0{,}8205 + 0{,}058 - 0{,}00375 + 0{,}0018) \approx$$

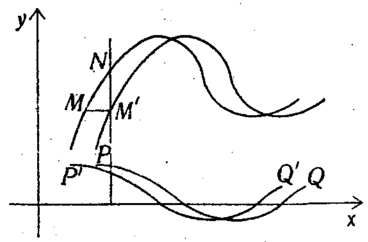
$$\approx 10\cdot 14{,}84 \approx 148{,}4\,.$$

Сад можемо дати одговор на загонетку: зашто је добијена вредност извода приближно једнака вредности функције, тј.

$$f(a) = 148{,}413 \approx 148{,}4 \approx f'(a)\ ?$$

Наша таблица даје вредности функције e^x, почев од $e^{5,0}$, и према томе вредности извода треба да буду једнаке вредностима саме функције.

Навешћемо још једну врло оштроумну графичку методу за одређивање извода дате функције. Ту је методу дао Слаби (Slaby).



Сл. 113. Слабијева метода графичког одређивања извода

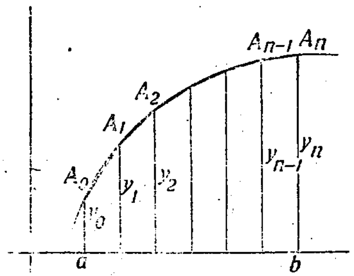
На милиметарској хартији нацртамо график дате функције (сл. 113). Слику покривамо прозирном хартијом. На тој хартији копирамо дату криву. Затим помакнемо прозирну хартију у правцу осе x за одређену дужину h. Са прозирне хартије преносимо криву поново на милиметарску хартију. Добићемо две криве: леву и десну. Ако повучемо ординату, која сече ове криве у тачкама M′ и N, однос M′N : h даје вредност извода y' за тачку M од које смо добили тачку M′. Ако је $h = 1$, дужина M′N претставља бројно извод. Ако дужине M′N узмемо за ординате, добићемо криву линију P Q која даје извод. Нацртану криву P Q можемо помакнути улево за h тако да се испод сваке тачке, која одређује y, налази вредност y' на графику P′ Q′.

Пређимо сад на приближно израчунавање одређеног интеграла

$$I = \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

за који знамо да му одговара површина омеђена кривом линијом, чија је једначина

$$y = f(x),$$



Сл. 114. Правило трапеза

двема ординатама и отсечком осе x (сл. 114).

Ако разлику $b-a$ поделимо на n једнаких делова и за сваку деону тачку повучемо ординату и тачке на кривој спојимо тетивама добићемо низ трапеза. Збир површина тих трапеза приближно одговара траженој површини.

Површине трапеза имају редом вредности

$$\frac{1}{2}(y_0+y_1)h, \quad \frac{1}{2}(y_1+y_2)h, \ldots, \quad \frac{1}{2}(y_{n-2}+y_{n-1})h, \quad \frac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)h,$$

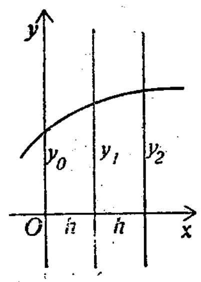
где је

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Сабирањем ових површина изводимо образац

$$\int_a^b y\,dx \approx \frac{1}{2n}(b-a)\,[y_0+y_n+2(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})].$$

Он изражава правило трапеза за израчунавање одређеног интеграла.



Сл. 115. Површина омеђена параболом

Замена криве линије правом, ма и на малом интервалу, је прво, најгрубље претстављање криве линије. При дубљој анализи криве треба кроз три узастопне тачке повући параболу (сл. 115) са једначином

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

За одређивање коефицијената параболе кроз прве три тачке имамо ове једначине

$$(1) \qquad \begin{cases} y_0 = a_0, \\ y_1 = a_0 + a_1 h + a_2 h^2, \\ y_2 = a_0 + 2a_1 h + 4a_2 h^2. \end{cases}$$

Површина омеђена том параболом израчунава се тачно,

$$q_1 = \int_0^{2h} y\,dx = \int_0^{2h} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\,dx = \Big/_0^{2h} \Big(a_0 x + \frac{1}{2}a_1 x^2 + \frac{1}{3}a_2 x^3\Big) =$$

$$= 2h\Big(a_0 + a_1 h + \frac{4}{3}a_2 h^2\Big).$$

Добијени израз можемо претставити овако

$$q_1 = \frac{1}{3}h(6a_0 + 6a_1 h + 8a_2 h^2).$$

Лако је видети из (1) да израз у загради има вредност збира

$$y_0 + 4y_1 + y_2;$$

према томе можемо написати

$$q_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Ако интервал $b-a$ поделимо на парни број $2n$ делова, кроз три узастопне тачке можемо конструисати параболу и израчунати површину омеђену том параболом. Претходни образац можемо употребити за сваку од тих парабола. Ако саберемо све те површине, добићемо приближну вредност нашег интеграла

$$\int_a^b y\,dx \approx \frac{b-a}{6n}[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}) +$$

$$+ 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1})].$$

Написани образац изражава Симпсоново правило за приближно израчунавање одређеног интеграла.

Покажимо још графичку методу којом можемо конструисати интегралну криву

$$Y = Y(x) = \int_a^x f(x)\,dx,$$

ако је дата подинтегрална крива

$$(2) \qquad y = f(x).$$

Ова графичка метода стоји у вези са графичком методом, коју смо изложили у § 53.

За објашњење поступка приметићемо, прво, да у случају

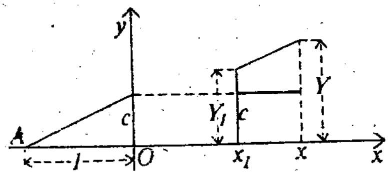
$$y = const. = c$$

у интервалу од x_1 до x наш интеграл можемо израчунати

$$Y = \int_a^x y\,dx = \int_a^{x_1} y\,dx + \int_{x_1}^x c\,dx = Y_1 + c(x - x_1),$$

где смо са Y_1 означили вредност интеграла у интервалу од a до x_1. Према томе део интегралне криве у интервалу од x_1 до x претставља праву

$$Y = cx + (Y_1 - cx_1)$$

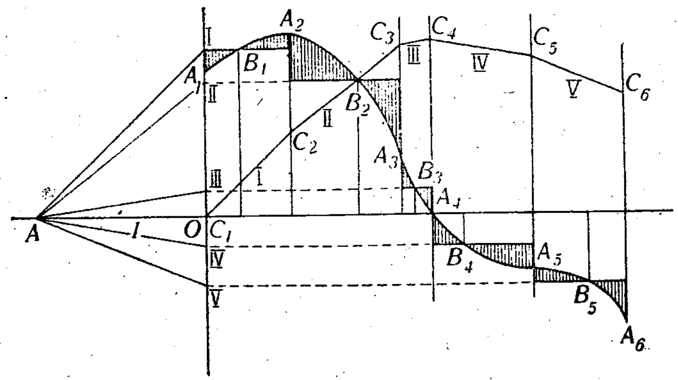


Сл. 116. Интегрална права за $y = c$

са угаоним коефицијентом c; ова права пролази кроз тачку са координатама x_1, Y_1.

На слици 116 дата је одговарајућа конструкција при чему је угаони коефицијент праве конструисан с леве стране осе y помоћу катета: c и $OA = 1$.

Пређимо сад на произвољну подинтегралну функцију (2) са графиком у Декартову систему координата (сл. 117).



Сл. 117. Графичка интеграција

Поделимо нашу криву на делове са монотоним понашањем подинтегралне функције. Сем тога ставимо деоне тачке у превојне тачке,

у екстремалне тачке и у тачке пресека са осом x, јер овим тачкама одговарају екстремуми интегралне криве. Нека то буду тачке $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Изаберимо на сваком делу наше тачке $B_1, B_2, \ldots, B_6$ тако да по могућству ординате сваке тачке дају висину правоугаоника једнака одговарајућем делу наше површине. Права, која пролази кроз сваку од тачака B и паралелна је са осом x, изједначује нашу површину са површином правоугаоника; на слици су шрафиране оне површине које додајемо и одузимамо за ово изједначење. Ординате тачака B дају вредности угаоних коефицијената оних правих које на сваком делу дају одговарајућу површину. Конструкција праваца врши се слева помоћу дужине $AO = 1$. Добијену изломљену линију можемо изравнати и заменити кривом имајући у виду ове особине тачака: тачка C_1 лежи на осовини x, јер је за тачку A_1 површина једнака нули; тачка C_2 је превојна тачка наше криве $Y = Y(x)$, јер је у овој тачки $Y'' = y' = 0$. У тачки C_4 функција Y има екстремум, јер је за ову тачку $Y' = y = 0$.

Вежбања.

1. Из табличних вредности функције

x	31	32	33	34	35
$f(x)$	3,43399	3,46574	3,49651	3,52636	3,55535

наћи вредност извода $f'(x)$ за $x = 31$ и потврдити једначину $[f'(x) \cdot x]_{x=31} = 1$.

2. Методом цртања графика и његовим померањем (Slaby) потврдити једначину $(\sin x)' = \cos x$.

3. Израчунати приближно помоћу правила трапеза и Симпсоновог правила површину четвртине круга полупречника 10 cm. Ординате израчунати помоћу вредности синуса. Ту исту површину израчунати графички.

4. Израчунати интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx$$

на основу таблице синуса:

x	0	$\frac{1}{12}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin x$	0	0,25882	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,96593	1

са четири децимале.

5. Помоћу израчунавања интеграла $\int_1^5 \frac{dx}{x}$ применом Симпсонова правила потврдита једначину $\ln 5 = 1{,}609$.

§ 68. Метода најмањих квадрата

У Математици један проблем сматрамо за одређен, ако је број једначина за одређивање непознатих једнак броју самих непознатих и ако докажемо да заиста ове једначине дају одређено решење тог проблема (теорема егзистенције).

Ако је број једначина мањи од броја непознатих, проблем је, у општем случају, неодређен, он може имати више решења. Да ли ова решења одговарају проблему или не и, ако одговарају, која решења треба искористити, — то су питања, на која можемо одговорити само ако имамо нове допунске услове. Понекад се тражи одређивање свих могућих решења у потпуности.

Најзад, број једначина може бити већи од броја непознатих. Ако неке једначине нису закључци из других и ако дати систем једначина у-опште не можемо заменити еквивалентним системом истог броја једначина и непознатих, проблем је преодређен (превише одређен).

Примена Математике на разна практична питања често доводи баш до случаја преодређених проблема.

Узмимо најпростији пример.

Претпоставимо да су мерења непознате дужине x дала три резултата

$$l_1,\ l_2,\ l_3.$$

Тада непозната x треба да задовољава три једначине

$$l_1 - x = 0, \quad l_2 - x = 0, \quad l_3 - x = 0.$$

За једну непознату имамо три једначине. Проблем је превише одређен. Са математичког гледишта ово је немогуће. Једначине су противречне. Откуд долази ова противречност? Јасно је да она потиче од несавршености наших мерења; у сваком мерењу можемо учинити грешку. За меру грешке, као што смо видели, узимамо разлику између резултата мерења и непознате праве дужине. Ако са $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ означимо грешке наших мерења, имамо

$$(1) \qquad - l_1 - x = \varepsilon_1, \quad l_2 - x = \varepsilon_2, \quad l_3 - x = \varepsilon_3.$$

То су три једначине са четири непознате; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ и x. Преодређени проблем је постао неодређен. Формулисан као неодређен он више одговара стварности, јер заиста у сваком мерењу можемо учинити грешку, а ова грешка остаје непозната док не одредимо праву вредност дужине x.

За претварање нашег проблема у одређени потребна је још једна једначина; она би изразила допунски услов, наиме на који начин у израчунавању x'а треба узети у обзир допуштене грешке $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. То се може учинити на више начина. Ми ћемо се зауставити на правилу или, како се то каже, принципу најмањих квадрата; тај принцип је формулисао Гаус (Gauss). Принцип поставља као услов да збир квадрата грешака буде најмањи. У нашем случају треба да буде

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = Min.$$

Ако ставимо вредности грешака из (1), добићемо

$$(l_1 - x)^2 + (l_2 - x)^2 + (l_3 - x)^2 = Min.$$

За одређивање екстремума наше функције треба узети извод по x и изједначити га са нулом. Како извод има вредност

$$-2(l_1 - x) - 2(l_2 - x) - 2(l_3 - x),$$

за одређивање x'а имамо једначину

$$l_1 - x + l_2 - x + l_3 - x = 0,$$

одакле је

$$x = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{3},$$

тј. према принципу најмањих квадрата за праву вредност дужине треба узети аритметичку средину свих мерењима добијених вредности за ту дужину.

Добијени резултат је толико важан да се метода најмањих квадрата често зове метода аритметичких средина.

Основни проблем Математике, који се решава помоћу методе најмањих квадрата, састоји се у овом.

Дато је n једначина

$$f_i(x, y, z, \ldots) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

са m непознатих, при томе је $n > m$.

Наћи вредности непознатих $x, y, z, \ldots$ тако да вредности функција

$$f_i(x, y, z, \ldots) = \varepsilon_i \qquad i = 1, 3, \ldots, n$$

најмање отступају од нуле, тј. према принципу најмањих квадрата да је

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2 = Min.$$

Рашчланимо наш проблем у два случаја.

I. *Случај линеарних једначина*

За што краће излагање зауставимо се на случају линеарних једначина са две непознате.

Нека је дат низ једначина

$$
\begin{aligned}
a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0, \\
a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0, \\
&\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots \\
a_n x + b_n y + c_n &= 0.
\end{aligned}
$$

Знамо да не можемо наћи такво решење које задовољава све ове једначине, него потражимо све оне вредности x и y које за једначине

$$
(2) \qquad \begin{cases}
a_1 x + b_1 y + c_1 = \varepsilon_1 \\
a_2 x + b_2 y + c_2 = \varepsilon_2 \\
\cdots\cdots \\
\cdots\cdots \\
\cdots\cdots \\
a_n x + b_n y + c_n = \varepsilon_n
\end{cases}
$$

дају

$$
(3) \qquad \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2 = Min.
$$

Ако уврстимо вредности (2) у збир (3) добићемо функцију

$$
F(x, y) = (a_1 x + b_1 y + c_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2)^2 + \ldots + (a_n x + b_n y + c_n)^2,
$$

која треба да има минималну вредност. Као што нам је познато (§ 45), услови за екстремум функције $F(x, y)$ изгледају

$$
\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.
$$

У нашем случају они дају (скратили смо са 2):

$$
(4) \qquad \begin{cases}
a_1(a_1x + b_1y + c_1) + a_2(a_2x + b_2y + c_2) + \ldots + a_n(a_nx + b_ny + c_n) = 0, \\
b_1(a_1x + b_1y + c_1) + b_2(a_2x + b_2y + c_2) + \ldots + b_n(a_nx + b_ny + c_n) = 0.
\end{cases}
$$

Упознаћемо се сад са нарочитим ознакама, које се употребљују у методи најмањих квадрата:

$$
\begin{aligned}
[a\,a] &= a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2, \\
[a\,b] &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n, \\
[a\,c] &= a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_n c_n,
\end{aligned}
$$

итд.

Са тим ознакама једначине (4) добијају облик

$$
\begin{aligned}
[a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c] &= 0, \\
[b\,a]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c] &= 0.
\end{aligned}
$$

Добијене једначине зову се **нормалне једначине** проблема. Решења ових једначина дају тражене вредности x и y.

II. *Општи случај*

Ако дате једначине нису линеарне него су изражене произвољним функцијама

$$
(5) \qquad f_i(x, y) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n
$$

проблем се своди на претходни случај и то оваквим поступком.

1. Тражимо прво приближно решење које ћемо означити са x_0, y_0. То решење понекад може бити очигледно. Када то није случај, можемо га добити решавајући, по избору, само две једначине.

После тога тачније решење претстављамо у облику

$$
x = x_0 + h, \qquad y = y_0 + k.
$$

Уврстимо такво решење у наше једначине (5), па ћемо добити

$$f_i(x_0+h, y_0+k)=0 \qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

Применимо Тајлорову теорему и зауставимо се само на члановима првог степена. Тада ћемо добити једначине линеарне у одиосу на h и k

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_0 h+\left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)_0 k+f_i(x_0, y_0)=0, \qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

где су

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)_0$$

вредности делимичних извода функције $f_i(x, y)$ за $x=x_0$, $y=y_0$.

2. Из написаних једначина можемо према претходном случају образовати нормалне једначине у облику

$$[a\,a]\,h+[a\,b]\,k+[a\,c]=0,$$

$$[b\,a]\,h+[b\,b]\,k+[b\,c]=0,$$

где су

$$[a\,a]=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_0^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_0^2+\cdots+\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}\right)_0^2,$$

$$[a\,b]=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)_0+\cdots+\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial f_n}{\partial y}\right)_0$$

итд.

Решења нормалних једначина дају приближне вредиости непознатих h и k. Ако је тачност добијеног решења недовољна, треба истим поступком потражити ново решење, полазећи од решења

$$x_1=x_0+h; \quad y_1=y_0+k.$$

Ако ново решење узмемо у облику

$$x_1+h_1, \qquad y_1+k_1,$$

за величине h_1 и k_1 образујемо поново нормалне једначине са новим коефицијентима, где је, на пр.,

$$[a\,a]=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_1^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_1^2+\cdots+\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}\right)_1^2,$$

при чему су

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_1 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)_1$$

вредности делимичних извода функције $f_i(x, y)$ за $x=x_1$, $y=y_1$.

Вежбања.

Наћи помоћу методе најмањих квадрата решења ових једначина:

1. $500\,x-721=0$, $501\,x-720=0$, $502\,x-722=0$.
2. $15{,}0\,x+12{,}2\,y=30$; $18{,}2\,x-6{,}4\,y=13$; $5{,}0\,x+9{,}0\,y=15{,}4$.
3. $12\sin x-10\sin y=1{,}02$; $\sin x\,.\,\cos y=0{,}45$; $tg^2 x+\cos^2 y=1{,}09$.

ГЛАВА VIII

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

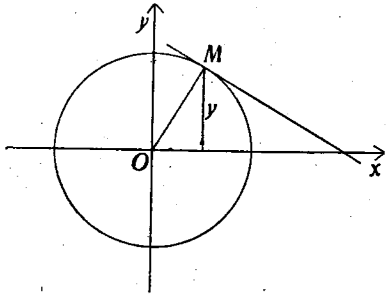
§ 69. Постанак диференцијалне једначине

Напишимо једначину круга са центром у почетку координата

$$x^2 + y^2 = R^2, \tag{1}$$

где је R полупречник тога круга. Ако се R мења, ова једначина изражава различите кругове. Коју заједничку особину имају сви ти кругови? Јасно је да у изражавању те особине не сме учествовати R. Према томе за одређивање тражене особине потребно је из једначине (1) елиминисати величину R^2, константну за сваки појединачни круг. У томе циљу диференцирајмо једначину (1) по x,

$$2x + 2y y' = 0,$$



Сл. 118. Тумачење диференцијалне једначине круга

одакле изводимо

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Написана једначина садржи, поред x и y, још и $y' = \frac{dy}{dx}$, тј. диференцијале промењљивих dx и dy. Она се из тог разлога зове **диференцијална једначина**. Пошто написана једначина садржи само први извод, она је **диференцијална једначина првога реда**.

Шта изражава наша једначина? Узмимо у обзир (сл. 118) да је $\frac{y}{x} = m$ угаони коефицијент потега произвољне тачке M наше криве и према томе је

$$-\frac{x}{y} = -\frac{1}{m} = m_1$$

угаони коефицијент m_1 нормале за тај потег. С друге стране, y' је угаони коефицијент тангенте на кривој. Наша диференцијална једначина, коју сада можемо написати у облику

$$y' = m_1,$$

тврди да тангента у свакој тачки криве стоји управно на потегу. Пошто се ова особина изражава помоћу диференцијала, она претставља **диференцијалну особину** свих кругова са центром у почетку координата.

Поставимо сад обрнути проблем. За криву линију дата је наведена особина, која се изражава диференцијалном једначином

$$y' = -\frac{x}{y}, \tag{2}$$

или

$$y y' + x = 0.$$

Треба наћи све криве линије које имају исту особину, изражену у Декартовим координатама. Зато ћемо нашој једначини дати редом ове облике

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 0,$$

$$x\,dx + y\,dy = 0,$$

$$2x\,dx + 2y\,dy = 0,$$

$$d(x^2 + y^2) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = 0.$$

Важно је да констатујемо да су једначина

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = 0 \tag{3}$$

и дата једначина (2) у ствари једна те иста једначина само у другом облику. Међутим, из једначине (3) непосредно следује да је

(4) $$x^2 + y^2 = C,$$

где је C произвољна константа. У једначини (4) нема више извода, али се јавља произвољна константа C. Једначина (4) је решење наше диференцијалне једначине. Она се зове **интеграл дате диференцијалне једначине**. Ако решење садржи произвољну константу, оно се зове **општи интеграл** наше диференцијалне једначине првога реда.

Ако, уместо C, ставимо, на пр., 4, добијамо једначину

$$x^2 + y^2 = 4,$$

која је исто тако решење наше диференцијалне једначине, али у њему више нема произвољне константе. Такво се решење зове **партикуларни интеграл** исте диференцијалне једначине. Јасно је да из општег интеграла можемо добити бескрајно много партикуларних интеграла.

У општем облику диференцијалну једначину првога реда можемо написати

$$\varphi\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0.$$

Важан је случај кад ову једначину можемо решити по изводу и претставити у облику

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Општи интеграл те једначине је функција независно променљиве x и произвољне константе интеграције C

(5) $$y = F(x, C),$$

која даје идентитет

$$\frac{dF(x, C)}{dx} \equiv f(x, F(x, C))$$

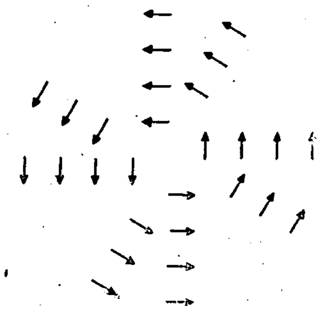
не само за сваку вредност x него и за сваку вредност C.

У једначини (5) произвољну константу C можемо одредити из допунског услова, на пр., из услова да наша крива треба да прође кроз дату тачку x_0, y_0 у равни криве. Тад имамо и једначину

$$y_0 = F(x_0, C),$$

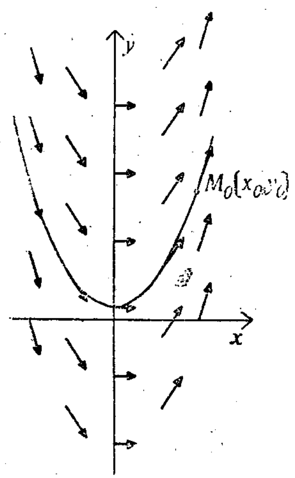
одакле се одређује константа C. Јасно је да свака крива, чија је једначина добијена из општег интеграла, а која пролази кроз дату одређену тачку у равни, одговара партикуларном решењу наше диференцијалне једначине.

Ако у једначини (5) константи C не дајемо одређену специјалну вредност, него остављамо ту величину произвољну, онда њој више не одговара једна одређена крива линија него низ кривих линија. Тај се низ зове **породица кривих линија**.



Сл. 119. Поље праваца тангената

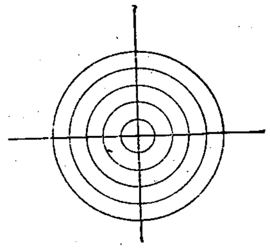
Са геометриског гледишта диференцијална једначина $y' = f(x, y)$ одређује помоћу угаоног коефицијента y' правац тангенте на интегралну криву за сваку тачку равни у датој области функције $f(x, y)$. Скуп свих тих праваца, које можемо на слици показати векторима јединичне дужине, одређује поље таквих вектора — **векторско поље**. На слици 119 показано је поље тангената за диференцијалну једначину (2).



Сл. 120. Пример партикуларног интеграла у пољу тангената

У сваком пољу тангената крива линија партикуларног интеграла, која пролази кроз тачку $M_0(x_0, y_0)$, црта се на тај начин што се прелази од једне тачке ка другој, блиској тачки, дуж вектора поља тангената (сл. 120).

Општи интеграл диференцијалне једначине првога реда одговара породици кривих линија. У нашем примеру интеграла (4) имамо породицу концентричних кругова са центром у почетку координата (сл. 121).



Сл. 121. Породица концентричних кругова као општи интеграл

Учинимо још једну важну примедбу о природи решења диференцијалне једначине. Узмимо диференцијалну једначину

(6) $$y = x\frac{dy}{dx} + a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Општи интеграл ове једначине има облик

$$y = Cx + a\sqrt{1 + C^2}, \tag{7}$$

где је C произвољна константа. Заиста, ово решење садржи произвољну константу C и задовољава нашу диференцијалну једначину (6), јер после диференцирања (7) по x имамо

$$y' = C. \tag{8}$$

Ако сада у (6) ставимо вредност (7) и (8) добијамо идентитет

$$Cx + a\sqrt{1 + C^2} = xC + a\sqrt{1 + C^2}.$$

Приметимо да интегралу (7) одговара породица правих линија са угаоним коефицијентом C и са почетном ординатом $a\sqrt{1 + C^2}$.

Али диференцијална једначина (6) има и решење у облику

$$x^2 + y^2 = a^2; \tag{9}$$

ово решење не садржи произвољну константу. Како из (9) имамо

$$x + yy' = 0$$

и

$$y' = -\frac{x}{y},$$

ова вредност извода доводи једначину (6) до резултата

$$y = -\frac{x^2}{y} + a\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}},$$

из којег следује

$$x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 + y^2}$$

или

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

а то је идентитет на основу једначине (9).

Једначини (9) одговара кружна линија. Како је свако партикуларно решење права, решење у облику кружне линије не може се сматрати као партикуларно, оно се не може добити из општег решења. Решење диференцијалне једначине, које не садржи произвољну константу, а не може се добити из општег интеграла као партикуларно решење, зове се сингуларно решење или сингуларни интеграл дате диференцијалне једначине. Решење (9) је сингуларни интеграл диференцијалне једначине (6). Није тешко показати да у овом случају породицу партикуларних решења сачињавају праве које све додирују круг (9), јер растојање сваке праве линије (7) од почетка координата има сталну вредност a. Заиста, ако једначину (7) напишемо у општем облику

$$Cx - y + a\sqrt{1 + C^2} = 0$$

и одредимо нормирајући множилац λ у облику

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{C^2 + 1}},$$

видимо да тражено отстојање d износи

$$d = \frac{a\sqrt{1 + C^2}}{\sqrt{C^2 + 1}} = a.$$

Вежбања.

1. Елиминисати константу a из једначине $y = ax$; обрнуто, интегралити добијену диференцијалну једначину; протумачити на том примеру општи и партикуларни интеграл; нацртати поље праваца тангената.

2. Елиминисати константу a из једначине $y = x^2 + a$ и одговорити на сва остала питања претходног задатка.

3. Слично претходним задацима поступити са једначином $y = ax^2$.

4. Показати да су за диференцијалну једначину $y'^2 - xy' + y = 0$ једначине $y = C(x - C)$, $y = x - 1$, $y = \frac{1}{4}x^2$ општи, партикуларни и сингуларни интеграл.

§ 70. Методе интеграције

Проблем интеграције диференцијалних једначина врло је тежак. Диференцијалну једначину

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

за ма коју функцију $f(x, y)$ не можемо увек интегрисати помоћу функција које смо досад проучавали. Интеграцију можемо извршити само за неке специјалне функције $f(x, y)$. Проучимо неколико од тих специјалних функција и покажимо како се у тим случајевима интеграли диференцијална једначина помоћу познатих операција.

1. Ако функција $f(x, y)$ зависи само од једне промењиве, интеграција се своди на израчунавање обичног неодређеног интеграла.

Заиста, ако је

$$\frac{dy}{dx}=f(x),$$

интеграл имамо у облику

$$y=\int f(x)\,dx+C=F(x)+C.$$

Ако је

$$\frac{dy}{dx}=f(y).$$

једначину можемо написати

$$dx=\frac{dy}{f(y)},$$

и тада је

$$x=\int\frac{dy}{f(y)}+C=\Phi(y)+C.$$

2. Претпоставимо сад да функција $f(x, y)$ претставља производ две функције од којих једна зависи само од x, а друга само од y, тј.

$$f(x, y)=f_1(x)\,.\,f_2(y)\,.$$

Тада једначину

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)=f_1(x)\,.\,f_2(y)$$

можемо написати и овако

(1) $$\frac{dy}{dx}=\frac{f_1(x)}{\varphi(y)},$$

где смо ставили

$$\varphi(y)=\frac{1}{f_2(y)}.$$

Једначину (1) помножимо са $\varphi(y)\,dx$ и добијамо

$$\varphi(y)\,dy=f_1(x)\,dx.$$

У овој једначини имамо са једне стране само промењиву y, а са друге само промењиву x. Кад је диференцијална једначина написана у таквом облику, каже се да је извршено раздвајање промењивих.

Ако израчунамо сваки од неодређених интеграла

(2) $$\begin{cases}\int\varphi(y)\,dy=\Phi(y),\\[2ex]\int f_1(x)\,dx=F(x),\end{cases}$$

интеграл наше диференцијалне једначине можемо написати

$$\int\varphi(y)\,dy=\int f_1(x)\,dx+C,$$

или

(3) $$\Phi(y)=F(x)+C.$$

Заиста, после диференцирања претходне једначине по x имамо

$$\frac{d\Phi}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dF(x)}{dx}.$$

Али на основу (2) имамо

$$\frac{d\Phi}{dy}=\varphi(y),\qquad \frac{dF}{dx}=f_1(x),$$

према томе из претходне једначине долазимо до резултата

$$\varphi(y)\cdot\frac{dy}{dx}=f_1(x),$$

одакле је

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f_1(x)}{\varphi(y)}=f_1(x)\,.\,f_2(y)=f(x, y),$$

то је наша диференцијална једначина (1), коју, дакле, задовољава решење (3).

Једначина (3) је општи интеграл наше диференцијалне једначине добијен методом раздвајања или сепарације промењивих.

По потреби можемо једначину (3) решити по y и написати општи интеграл у решеном облику

$$y = \theta(x, C).$$

Пример

Интегралити једначину

$$\frac{dy}{dx} = xy.$$

После сепарације променљивих добијамо

$$\frac{dy}{y} = x\,dx.$$

Ако интегралимо леву и десну страну

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx,$$

интеграл се добија у облику

$$\log y = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Тај интеграл можемо изразити и овако

$$y = A e^{\frac{1}{2}x_2},$$

ако константу C претставимо у облику $C = \log A$, а $\frac{1}{2}x^2$ заменимо са $\log e^{\frac{1}{2}x^2}$. После прелаза од логаритама на степене добијамо нашу форму интеграла.

3. Постоје случајеви кад на диференцијалну једначину не можемо непосредно применити методу раздвајања променљивих, али се после увођења нових променљивих таква могућност јавља. Покажимо то на примеру.

Нека је дата једначина

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{mx + ny},$$

где су a, b, m, n константе.

У овој једначини нисмо у стању да непосредно раздвојимо променљиве.

Извршимо замену

$$\frac{y}{x} = t \qquad \text{или} \qquad y = xt,$$

где је t нова променљива. Пошто је

$$dy = x\,dt + t\,dx,$$

наша једначина после трансформације даје

$$x\frac{dt}{dx} + t = \frac{a + bt}{m + nt}$$

или

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{a + bt}{m + nt} - t = \varphi(t).$$

У добијеној једначини променљиве се лако раздвајају

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{\varphi(t)},$$

после чега долазимо до интеграла

$$\log x = \int \frac{dt}{\varphi(t)} = \Psi(t) + C.$$

Ако се вратимо на првобитне променљиве, интеграл ће изгледати

$$\log x = \Psi\left(\frac{y}{x}\right) + C,$$

на основу чега y можемо сматрати за одређену функцију x'а, тј.

$$y = F(x, C).$$

На дату једначину применили смо методе замене и раздвајања променљивих.

Вежбања.

1. За диференцијалну једначину $\frac{dy}{dx} - x = 0$ наћи интегралну криву под условом да она пролази кроз тачку $M_0(2, 3)$.

2. Одредити интегралну линију једначине $\frac{dy}{dx} = y$ под условом да она пролази кроз тачку $M_0(0, 1)$.

3. Интегрисати једначину $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$ и одредити произвољну константу из услова да је $y=2$ за $x=1$.

4. Интегрисати једначине:

$a.\ (1-y)\,dx-(1+x)\,dx=0;\quad b.\ \sqrt{1+y^2}\,dx=\sqrt{1+x^2}\,dy;\quad c.\ (1+y^2)\,dy+$
$+(1+2y)\,x\,dx=0.$

5. Интегрисати једначине:

$a.\ (x+y)\,dx+(y-x)\,dy=0;\quad b.\ x\,dy-y\,dx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx;\quad c.\ (x^2+y^2)\,dx=2xy\,dy.$

6. Показати да диференцијална једначина $\sqrt{1-y^2}\,dx+\sqrt{1-x^2}\,dy=0$, сем трансцендентног интеграла $arc\sin x+arc\sin y=Const$, има и алгебарски интеграл $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=Const$. Извести последњи из првог.

7. Извести трансцендентни и алгебарски интеграл једначине $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$.

8. Раздвојити променљиве у једначини $f_1(x)\,f_2(y)\,dx+\varphi_1(x)\,\varphi_2(y)\,dy=0$.

9. Интегрисати једначину $\frac{dy}{dx}=e^{mx}\,e^{ny}$ и одредити партикуларно решење под условом да је $y=0$ за $x=0$ (m и n су константе различите од нуле).

10. Наћи општи интеграл једначине $y'\,.\,tg\,y=2x$ и одредити константу интеграције из услова да је $y=0$ за $x=0$.

§ 71. Линеарна диференцијална једначина првога реда

Диференцијална једначина облика

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{P}y+\mathrm{Q}. \tag{1}$$

где су P и Q функције само од x, зове се **линеарна диференцијална једначина првога реда**. Применимо на интеграцију ове једначине **Бернулијеву методу**.

Ставимо

$$y=uv, \tag{2}$$

где су u и v нове непознате функције од x. Тада је

$$\frac{dy}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}.$$

Наша једначина добија облик

$$v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}=\mathrm{P}uv+\mathrm{Q}$$

или

$$v\frac{du}{dx}+u\left(\frac{dv}{dx}-\mathrm{P}v\right)=\mathrm{Q}.$$

Одредимо функцију v тако да она задовољава једначину

$$\frac{dv}{dx}-\mathrm{P}v=0$$

или

$$\frac{dv}{dx}=\mathrm{P}v. \tag{3}$$

Од наше једначине преостаје дакле само једначина

$$v\frac{du}{dx}=\mathrm{Q}. \tag{4}$$

Према томе смо заменом (2) једначину (1) свели на једначине (3) и (4).

Из једначине (3), после раздвајања променљивих, лако изводимо из

$$\frac{dv}{v}=\mathrm{P}\,dx$$

интеграл

$$\log v=\int \mathrm{P}\,dx,$$

који можемо написати у облику

$$v=e^{\int \mathrm{P}\,dx}=v(x).$$

После тога из једначине (4) имамо

$$\frac{du}{dx}=\mathrm{Q}\,v^{-1}=\mathrm{Q}\,e^{-\int \mathrm{P}dx}.$$

Из ове једначине изводимо интеграл у облику

$$u=\int \mathrm{Q}\,e^{-\int \mathrm{P}dx}\,dx+\mathrm{C}.$$

Дефинитивно интеграл $y = uv$ има вредност

$$y = e^{\int P\,dx}\left[\int Q(x)\, e^{-\int P\,dx}\,dx + C\right].$$

Узмимо пример:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} + x^3.$$

Пошто је

$$P(x) = -\frac{1}{x}, \qquad Q(x) = x^3,$$

имамо

$$v = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\log x} = \frac{1}{x},$$

после чега налазимо

$$u = \int x^3 \,.\, x\,dx = \frac{1}{5}x^5 + C,$$

$$y = \frac{1}{5}x^4 + \frac{C}{x}.$$

Лако можемо потврдити да је написани интеграл заиста решење наше диференцијалне једначине. Доиста, имамо идентитет

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{5}x^3 - \frac{C}{x^2} = -\frac{1}{x}\left(\frac{1}{5}x^4 + \frac{C}{x}\right) + x^3$$

у односу на x и на C.

Вежбања.

1. Показати да увођење константе интеграције при одређивању функције v не мења дефинитивни резултат.

2. Показати да елиминисање константе C из једначине

$$y = f(x) + C\varphi(x)$$

доводи до линеарне диференцијалне једначине првога реда.

3. Интегрисати једначине

$a.$ $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{-x}$. $b.$ $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = x^{10}$ $c.$ $\dfrac{dy}{dx} + y\,cotg\,x = sin\,x$. $d.$ $(x-1)(x-2)\dfrac{dy}{dx} + y = x^2$. $e.$ $\dfrac{dy}{dx} + (y - x^2)\,x = 0$. $f.$ $dy + xy(1 - x^2y^2)\,.\,dx = 0$ (замена $z = \dfrac{1}{y^2}$).

$g.$ $x\dfrac{dy}{dx} + y = y^2\,ln\,x$ (замена $z = \dfrac{1}{y}$).

4. Да ли се једначина

$$\frac{dx}{dy} = M(y)\,.\,x + N(y)$$

може сматрати као линеарна једначина?

5. За диференцијалну једначину

$$x\frac{dy}{dx} + y = 3$$

одредити интегралну криву кроз тачку $M_0(1,0)$.

6. Показати да се једначина (Бернулијева)

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n,$$

где су P и Q функције од x а n — константа, заменом $z = y^{1-n}$ своди на линеарну једначину.

7. Интегрисати једначине:

$a.$ $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = y^2$; $\qquad b.$ $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{3} = \dfrac{x}{\sqrt{y}}$.

§ 72. Диференцијална једначина другога реда

Равномерни процес изражава се, као што знамо, једначином

$$y = a + bx. \tag{1}$$

Поставимо сад питање: какву заједничку особину имају сви равномерни процеси, који се разликују један од другог вредностима константната a и b?

У ту сврху диференцирамо y по x,

$$\frac{dy}{dx} = b. \tag{2}$$

Ова диференцијална једначина не изражава особину свих равномерних процеса, јер садржи константу b, која се мења од једног до другог.

Диференцирајмо још једанпут

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{d}{dx}(b) = 0.$$

У овој једначини више нема констаната и према томе се може сматрати као једначина свих равномерних процеса.

Једначина

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = y'' = 0 \tag{3}$$

је пример диференцијалне једначине другога реда, јер садржи други извод.

Обрнуто, ако хоћемо да нађемо коначни израз равномерног процеса из диференцијалне једначине (3), треба, ту једначину интегрисати.

Из услова (3) следује да је

$$\frac{d y}{d x} = C_1 , \tag{4}$$

где је C_1 константа. Ова једначина, у којој више нема другог извода, али постоји, с једне стране, још први извод, а с друге произвољна константа интеграције C_1, зове се први општи интеграл наше диференцијалне једначине (3).

Из једначине (4) у нашем случају следује

$$y = C_1 x + C_2 , \tag{5}$$

где је C_2 нова произвољна константа. Ова једначина изражава други општи интеграл диференцијалне једначине (3). Његовим одређивањем завршава се интеграција диференцијалне једначине другога реда.

Ако константи C_1 у једначини (4) дамо ма коју специјалну вредност, добићемо први партикуларни интеграл. За специјалне вредности C_1 и C_2 из (5) следује други партикуларни интеграл.

Општу диференцијалну једначину другога реда можемо написати у једном од ових облика:

$$F\left(x, y, \frac{d y}{d x}, \frac{d^2 y}{d x^2}\right) = 0 ,$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = f\left(\frac{d y}{d x}, y, x\right).$$

Зауставићемо се на интеграцији само трију типова диференцијалних једначина другога реда.

I. $$\frac{d^2 y}{d x^2} = X ,$$

где је $X = X(x)$ функција само промењиве x.

Узимање двапут неодређеног интеграла леве и десне стране непосредно даје решење

$$y = \int \left(\int X\, d x \right) d x + C_1 x + C_2 .$$

Пример: $y'' = 2x + \sin x$.

$$y = \int \left(\int (2x + \sin x)\, d x \right) d x + C_1 x + C_2 = \int (x^2 - \cos x)\, d x + C_1 x + C_2 =$$

$$= \frac{1}{3} x^3 - \sin x + C_1 x + C_2 .$$

II. $$\frac{d^2 y}{d x^2} = Y ,$$

где је $Y = Y(y)$ функција само промењиве y.

Дату једначину можемо написати у облику

$$d y' = Y\, d x ;$$

после множења леве и десне стране са y' она даје

$$y'\, d y' = Y\, d y .$$

Интеграција ове једначине са раздвојеним промењивим даје

$$\frac{1}{2} y'^2 = \int Y\, d y + C_1 = \Phi(y) + C_1 ,$$

одакле је

$$y' = \pm \sqrt{2\,[\Phi(y) + C_1]} = \varphi(y, C_1) .$$

У овој једначини поново можемо извршити раздвајање промењивих,

$$d x = \frac{d y}{\varphi(y, C_1)} .$$

Интеграција ове једначине у облику

$$x + C_2 = \int \frac{d y}{\varphi(y, C_1)}$$

даје дефинитивни интеграл.

Пример: $y'' = a^2 y$,

где је a позитивна константа. Из дате једначине добијамо прво једначину

$$y' \, d y' = a^2 y \, d y,$$

одакле имамо

$$y'^2 = a^2 y^2 + a^2 C_1,$$

где је C_1 произвољна константа. Добијена једначина, рецимо, са позитивним знаком код корена даје

$$\frac{d y}{\sqrt{C_1 + y^2}} = a \, d x.$$

Интеграција ове једначине доводи до једначине

$$log(y + \sqrt{C_1 + y^2}) = a x + a C_2,$$

која претставља интеграл наше једначине. Исти можемо написати и у другој форми. Ставимо у претходној једначини

$$C_1 = A^2 \quad \text{и} \quad a C_2 = -a \alpha + log A,$$

где су A и α нове произвољне константе, које су замениле старе, и пређимо од логаритама на бројеве

(6) $$y + \sqrt{A^2 + y^2} = A e^{a(x-\alpha)}.$$

Ако сад упоредно са овим збиром израчунамо разлику, добићемо

(7) $$y - \sqrt{A^2 + y^2} = -A e^{-a(x-\alpha)}.$$

Сабирање (6) и (7) доводи дефинитивно до интеграла наше једначине у облику

$$y = \frac{A}{2}\left[e^{a(x-\alpha)} - e^{-a(x-\alpha)}\right],$$

где су A и α две произвољне константе интеграције.

III. Узмимо једначину

(8) $$\frac{d^2 y}{d x^2} + a \frac{d y}{d x} + b y = 0,$$

где су a и b константе. Ова једначина зове се хомогена линеарна диференцијална једначина другога реда са константним коефицијентима. Ако са десне стране, место нуле, имамо константу или функцију од x, једначина је нехомогена.

У наредној глави ћемо дати неколико задатака за чије је решавање потребно интегрисати једначину (8). Овде ћемо показати једну методу интеграције таквих једначина.

Потражимо решење једначине (8) у облику

(9) $$y = e^{\alpha x},$$

где је α константни број.

Пошто је

$$y' = \alpha e^{\alpha x} = \alpha y,$$

$$y'' = \alpha^2 e^{\alpha x} = \alpha^2 y,$$

функција (9) је решење једначине (8), ако број α задовољава услов

$$\alpha^2 + a \alpha + b = 0,$$

тј. ако је α корен овакве квадратне једначине са непознатом z

$$z^2 + a z + b = 0.$$

Ова једначина зове се карактеристична једначина горње диференцијалне једначине. Она се аутоматски добија заменом извода одговарајућим степеном непознате.

Ако карактеристичну једначину решимо и корене означимо са α_1 и α_2, добићемо два партикуларна решења наше диференцијалне једначине

$$y_1 = e^{\alpha_1 x}, \qquad y_2 = e^{\alpha_2 x}.$$

Помножимо ли свако од тих решења произвољном константом и саберемо их, добићемо функцију

(10) $$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x},$$

која је општи интеграл наше једначине (8). Заиста, на основу два услова

$$y_1'' + a y_1' + b y_1 \equiv 0,$$

$$y_2'' + a y_2' + b y_2 \equiv 0,$$

једначина

$$y'' + a y' + b y = 0,$$

која према (10) изгледа овако

$$C_1 (y_1'' + a y_1' + b y_1) + C_2 (y_2'' + a y_2' + b y_2) = 0,$$

доводи до идентитета.

Учинимо две примедбе у вези са интегралом (10).

1. Ако су корени карактеристичне једначине α_1 и α_2 имагинарни облика

$$\alpha_1 = m + n i, \qquad \alpha_2 = m - n i,$$

где је $i = \sqrt{-1}$, решење добија облик

(11) $$y = e^{mx} (C_1 e^{nxi} + C_2 e^{-nxi}).$$

За трансформацију e^{nxi} и e^{-nxi} употребимо Ајлерове обрасце по којима имамо

$$e^{nxi} = \cos n x + i \sin n x,$$

$$e^{-nxi} = \cos n x - i \sin n x.$$

Ако ове вредности ставимо у (11) и скупимо реалне и имагинарне чланове, долазимо до интеграла у облику

$$y = e^{mx} (A_1 \cos n x + A_2 \sin n x),$$

где смо са A_1 и A_2 означили нове произвољне константе. Ове константе везане су са претходнима једначинама

$$A_1 = C_1 + C_2, \qquad A_2 = i (C_1 - C_2).$$

2. Друга примедба односи се на случај кад карактеристична једначина има једнаке корене $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Тада нисмо у стању да, према горе наведеном поступку, напишемо два независна партикуларна решења једначине (8).

Показаћемо да у овом случају решење није само

$$y_1 = e^{\alpha x},$$

него и

(12) $$y_2 = x e^{\alpha x}.$$

Пре свега обратимо пажњу да једнаки корен задовољава не само једначину

(13) $$\alpha^2 + a \alpha + b = 0,$$

него и једначину

(14) $$2 \alpha + a = 0,$$

јер му је вредност

$$\alpha = -\frac{1}{2} a.$$

Уврстимо сад функцију (12) у нашу диференцијалну једначину (8) и погледајмо је ли она решење ове једначине.

Пошто је

$$y_2' = x \alpha e^{\alpha x} + e^{\alpha x},$$

$$y_2'' = x \alpha^2 e^{\alpha x} + 2 \alpha e^{\alpha x},$$

из једначине (8) имамо

$$x e^{\alpha x} (\alpha^2 + a \alpha + b) + e^{\alpha x} (2\alpha + a) = 0.$$

Видимо да на основу (13) и (14) ова једначина заиста постаје идентитет.

Ако сад свако од решења y_1 и y_2 помножимо произвољном константом и саберемо их, добићемо општи интеграл наше једначине (8) у облику

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{\alpha x}.$$

Тако изгледа општи интеграл у случају једнаких корена карактеристичне једначине.

Рећи ћемо неколико речи о интеграцији нехомогене једначине

(15) $$\frac{d^2 y}{d x^2} + a \frac{d y}{d x} + b y = f(x).$$

где су a и b константе, $f(x)$ дата функција.

Ова једначина има врло важну особину, која много олакшава њену интеграцију. Ту особину изражава теорема:

Ако је $Y(x)$ партикуларно решење једначине (15) и $y^*(x)$ општи интеграл хомогене једначине

$$\frac{d^2 y^*}{d x^2} + a \frac{d y^*}{d x} + b y^* = 0 ,$$

општи интеграл једначине (15) је збир

$$y = Y(x) + y^*(x)$$

За доказ је довољно да тај збир уврстимо у једначину (15). Видећемо да он идентично задовољава ту једначину, а пошто функција y^* мора садржати две произвољне константе, означени збир заиста даје општи интеграл наше једначине.

На пр., нека је дата једначина

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - 3 \frac{d y}{d x} + 2 y = 2 x + 1 . \tag{16}$$

Потражимо прво партикуларно решење у облику линеарне функције

$$Y(x) = A x + B ,$$

где су A и B неодређени коефицијенти које треба одредити. Пошто је

$$Y' = A , \qquad Y'' = 0 ,$$

једначина (16) даје

$$-3 A + 2 (A x + B) = 2 x + 1 ,$$

одакле, изједначењем коефицијената, изводимо две једначине

$$2 A = 2 , \qquad -3 A + 2 B = 1 ,$$

које дају решење

$$A = 1 , \qquad B = 2 .$$

Према томе партикуларно решење изгледа

$$Y(x) = x + 2 .$$

Како карактеристична једначина

$$z^2 - 3 z + 2 = 0$$

хомогене једначине има корене

$$z_1 = 1 , \quad z_2 = 2 ,$$

општи интеграл хомогене једначине има облик

$$y^*(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x},$$

и општи интеграл нехомогене једначине се дефинитивно изражава

$$y = x + 2 + C_1 e^x + C_2 e^{2x} .$$

Видимо да је за интеграцију нехомогене једначине врло важно питање одређивања партикуларног решења за дати облик десне стране ове једначине. За такво одређивање постоји читав низ правила, но у излагање тих правила овде не можемо улазити.

Вежбања.

1. Показати да су: a. $y = -2t + 1 - \sin 2t$; b. $y = -\sin 2t$ c. $y = -\sin 2t + a t + b$; d. $y = -\sin 2t + a t - 1$ решења диференцијалне једначине $y'' = 4 \sin 2t$ где је t независно променљива, и одредити карактер сваког од тих решења.

2. Интегрисати једначине:

a. $\frac{d^2y}{dx^2} = x^2$; b. $\frac{d^2y}{dx^2} = e^{kx}$ ($k = const$); c. $\frac{d^2y}{dx^2} = a \sin m x$ (a и m конст.).

3. Интегрисати једначине:

a. $\frac{d^2y}{dx^2} = k y$, где је $k < 0$. b. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{y^2} = 0$. c. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{m}{y^3}$ (m — конст.)

4. Интегрисати једначине:

a. $\frac{d^2y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 4 y = 0$. b. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 30 y = 0$. c. $\frac{d^2y}{dx^2} + 16 y = 0$.

d. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} = 0$. e. $\frac{d^2y}{dx^2} + 16 y = 0$. f. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 13 y = 0$.

g. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$. h. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 4 y = 0$.

5. Интегрисати једначине:

a. $\frac{d^2y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 4 y = x$. b. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 30 y = 60$. c. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 12 y = e^x$.

§ 73. Парцијална диференцијална једначина

Видели смо да се после елиминисања константе R^2 из једначине кружне линије са центром у почетку координата

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

добија диференцијална једначина таквих кругова

$$x + yy' = 0.$$

На тај смо начин протумачили постанак диференцијалне једначине.

Нека је сад дата, на пр., једначина

$$z = f(x + y), \tag{1}$$

која одређује z као функцију независно промењљивих x и y; ова функција је нарочите природе, она, наиме, зависи само од збира

$$u = x + y. \tag{2}$$

Поставимо сад себи питање: како да математички изразимо заједничку особину, коју све такве функције имају?

Да дођемо до одговора, диференцирајмо функцију z прво по x, а затим по y

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = f'(u) \cdot 1 = f'(u),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = f'(u) \cdot 1 = f'(u).$$

Из ових резултата можемо елиминисати извод $f'(u)$ и добићемо једначину

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Ово је такође диференцијална једначина, јер зависи од извода. Но она не садржи обичне него делимичне, парцијалне изводе и зато се зове **д е л и м и ч н а** или **п а р ц и ј а л н а д и ф е р е н ц и ј а л н а ј е д н а ч и н а**, у нашем случају **п р в о г а р е д а**, јер у њу улазе изводи само првога реда. Ако се жели да нагласи, што раније нисмо чинили, да диференцијална једначина садржи само обичне изводе, кажемо да је она **о б и ч н а д и ф е р е н ц и ј а л н а ј е д н а ч и н а**.

Да видимо сад како можемо наћи решење једначине (3) и у чему се оно састоји.

Треба наћи функцију

$$z = f(x, y),$$

која задовољава једначину (3). Место x и y уведимо две нове промењљиве

$$u = x + y,$$

$$v = x - y;$$

тада ћемо имати

$$z = \varphi(u, v).$$

Диференцирајмо сад ову функцију по x и y, сматрајући u и v као функције од x и y.

Као резултат диференцирања имамо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Ови изводи морају идентично задовољавати једначину (3). Ако их уврстимо у (3), добићемо

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 2\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0,$$

а то доводи до једначине

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0,$$

која показује да функција φ не сме зависити од разлике него зависи само од збира u, тј.

$$z = \varphi(u, v) = f(u) = f(x + y), \tag{4}$$

где је f ознака произвољне функције.

Свако решење парцијалне диференцијалне једначине са произвољном функцијом, чијим се елиминисањем добија само та диференцијална једначина зове се ***о п ш т и и н т е г р а л т е ј е д н а ч и н е.***

Једначина (4) је општи интеграл једначине (3).

Узмимо сад функцију

$$z = C_1(x+y) + C_2 e^{x+y}, \tag{5}$$

где су C_1 и C_2 произвољне константе, и елиминишимо те константе из написане једначине. Диференцирајмо функцију z прво по x, па затим по y

$$\frac{\partial z}{\partial x} = C_1 + C_2 e^{x+y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = C_1 + C_2 e^{x+y}.$$

Видимо да су резултати исти, према томе следује да је

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Добили смо дакле нашу диференцијалну једначину (3) са парцијалним изводима и то као резултат елиминисања из дате једначине (5) произвољних констаната C_1 и C_2. Закључујемо да се парцијална диференцијална једначина, као и обична једначина, може добити не само после елиминисања произвољне функције него и после елиминисања произвољних констаната.

Према томе једначина (5) исто тако одређује решење једначине (3), али се то решење разликује од општег интеграла те једначине, јер не садржи произвољну функцију него садржи произвољне константе.

Свако решење парцијалне диференцијалне једначине са произвољним константама, чијим се елиминисањем добија само та диференцијална једначина, зове се ***потпуни интеграл*** *те једначине.*

Једначина (5) је потпуни интеграл једначине (3).

Како из општег, тако и из потпуног интеграла може се добити бескрајно много партикуларних интеграла парцијалне диференцијалне једначине, ако у општем интегралу место произвољне функције ставимо било коју специјалну функцију, а у потпуном интегралу место произвољних констаната ставимо специјалне вредности тих констаната.

Решити у потпуности парцијалну диференцијалну једначину значи наћи сва могућа решења те једначине, којих понекад може бити и таквих, да се у суштини разликују и од општег и од потпуног интеграла (тзв. сингуларни интеграл). Класификација ових решења парцијалне диференцијалне једначине и постављање веза између тих решења излази из оквира ове књиге.

За решавање конкретних проблема, који траже интеграцију парцијалне диференцијалне једначине, произвољна функција општег интеграла или произвољне константе потпуног интеграла треба да буду одређене из допунских услова слично ономе како се у случају обичне диференцијалне једначине произвољне константе одређују из услова да интегрална крива треба да прође, рецимо, кроз дату тачку.

Показаћемо без доказа једну методу интеграције **линеарне парцијалне једначине** облика

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R, \tag{6}$$

где су P, Q, R функције од x и y.

Напоредо са нашом парцијалном једначином (6) напишимо систем обичних диференцијалних једначина и то у облику

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Претпоставимо да смо у стању да решимо овај систем и да добијемо два интеграла

$$\varphi_1(x, y, z) = C_1,$$

$$\varphi_2(x, y, z) = C_2,$$

где су C_1 и C_2 произвољне константе.

Тада општи интеграл једначине (6) изгледа

$$F(\varphi_1, \varphi_2) = 0,$$

где је F произвољна функција написаних аргумената.

Применимо овај поступак на једначину (3)

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Пошто је овде

$$P = 1, \quad Q = -1, \quad R = 0,$$

имамо систем обичних диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{0},$$

који можемо заменити овим

$$dz = 0,$$

$$dx + dy = d(x + y) = 0.$$

Тај систем има два очевидна интеграла

$$\varphi_1 = z = C_1,$$

$$\varphi_2 = x + y = C_2.$$

Општи интеграл парцијалне једначине треба написати овако

$$F(z, x + y) = 0,$$

где је F ознака произвољне функције. Исту једначину можемо претставити и у облику

$$z = f(x + y),$$

где је f такође произвољна функција.

Споменућемо још једну класу проблема, који се односе на парцијалне једначине, а које нарочито често поставља Математичка физика. Један од тих проблема објаснићемо на конкретном примеру.

Замислимо да је за сваку тачку једне линије везано неко физичко стање одређено величином y. Ово стање зависи од положаја на линији, на пр., од координате x. Пошто се оно може у току времена мењати, променљива y зависи и од времен t. Према томе је

$$y = f(x, t).$$

Величина y има два прва извода: $\frac{\partial y}{\partial t}$ — то је, могло би се рећи, брзина промене стања у датој тачки и $\frac{\partial y}{\partial x}$ — то је промена стања у вези са променом положаја тачке за исти тренутак t; ова промена одговара тзв. градијенту величине y.

У анализи многих физичких појава игра улогу не сам извод $\frac{\partial y}{\partial x}$ него његова промена, опет у вези са променом положаја тачке, тј. други

извод $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Између извода $\frac{\partial y}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ често сама природа појаве поставља везу

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{7}$$

где је a^2 увек позитивни фактор пропорционалности. Написана једначина појављује се у Теорији топлоте (једначина провођења топлоте у танком штапу), у Физичкој хемији (једначина дифузије раствора, једначина поларизације електрода) и у другим дисциплинама.

Једначина (7) је парцијална једначина другог реда. За решавање проблема помоћу ове једначине треба да буду дати и допунски услови у облику почетних и граничних услова.

Почетни услови одређују за почетни тренутак t_0 вредности функције y за сву област променљиве x, тј.

$$y(x, t_0) = \Phi(x),$$

где је Φ дата функција у области

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Гранични услови дају

$$y(a, t) = f_1(t),$$

$$y(b, t) = f_2(t),$$

где су f_1 и f_2 функције времена дате за све време трајања појаве.

Како се врши интеграција једначине (7) при датим почетним и граничним условима, показаћемо на једном конкретном једноставном примеру у наредној глави.

Вежбања.

1. Елиминисати константе C_1 и C_2 из једначине

$$z = C_1 x + C_2 y.$$

2. Елиминисати произвољну функцију f из једначине

$$z = x f\left(\frac{y}{x}\right)$$

и упоредити резултат са резултатом претходног задатка.

3. Наћи општи интеграл једначине

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z\,.$$

4. Наћи општи интеграл једначине

$$\frac{\partial z}{\partial x}-a\frac{\partial z}{\partial y}=0\,. \qquad (a=const.)\,.$$

5. Наћи општи интеграл једначина

a. $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=c\,;$ **b.** $(ax+a_1)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(by+b_1)\dfrac{\partial z}{\partial y}=cz+c_1\,.$

ГЛАВА IX

ПРИМЕНЕ НА ПРОБЛЕМЕ ГЕОМЕТРИЈЕ, МЕХАНИКЕ, ФИЗИКЕ, ХЕМИЈЕ, БИОЛОГИЈЕ И СТАТИСТИКЕ

§ 74. Проблеми Геометрије

a. Крива линија у равни

Као што знамо, једначину криве линије у равни за Декартове координате можемо написати

$$y=f(x)\,.$$

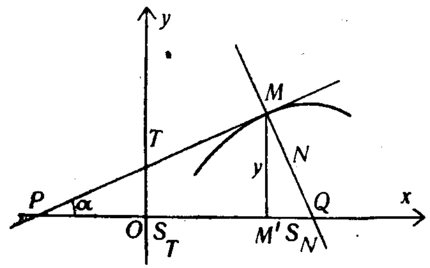
Исто тако знамо да је угаони коефицијент тангенте на овој кривој у тачки са апсцисом x једнак изводу, тј.

$$y'(x)\,;$$

према томе једначина тангенте изгледа овако

$$\eta-y=y'(x)(\xi-x)\,,$$

где су за тангенту x и y сталне координате тачке додира, а ξ и η променљиве координате тачке тангенте (сл. 122).



Сл. 122. Диференцијални елементи првога реда криве линије у равни

Нормала на тангенту у тачки додира је нормала криве линије у тој тачки. Према томе једначина нормале је

$$\eta-y=-\frac{1}{y'(x)}(\xi-x)\,,$$

или

$$\xi-x+y'(x)(\eta-y)=0\,.$$

У Декартову систему координата са тангентом и нормалом везане су дужине:

$T = MP$ . . . . . . дужина тангенте,

$N = MQ$ . . . . . . дужина нормале,

$S_T = M'P$ . . . . . . субтангента,

$S_N = M'Q$ . . . . . . субнормала.

Из нацртаних троуглова, узимајући у обзир да је $MM' = y$ и да се угао α одређује из једначине

$$tg\,\alpha = y'$$

и да је

$$sin\,\alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \qquad cos\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},$$

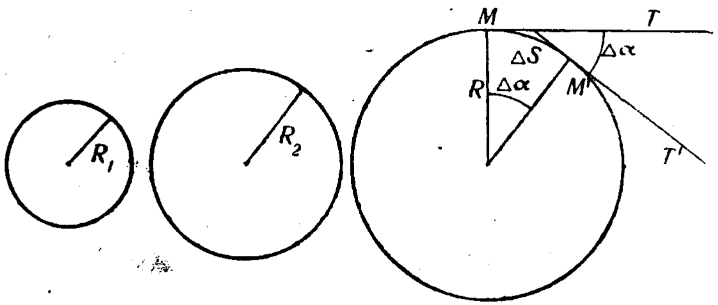
лако можемо извести ове резултате:

$$T = \frac{y}{sin\,\alpha} = \frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}, \qquad S_T = y\,cotg\,\alpha = \frac{y}{y'},$$

$$N = T\,tg\,\alpha = y\sqrt{1+y'^2}, \qquad S_N = y\,tg\,\alpha = y\,y'.$$

Пошто је за одређивање ових величина потребан само први извод, оне спадају у елементе првога реда.

У вези са проучавањем криве линије у равни стоји читав низ питања, које смо већ проучили (обичне и сингуларне тачке, екстремуми, асимптоте итд.); нећемо то овде понављати, него ћемо прећи на проучавање кривине криве линије у датој тачки, која стоји у вези за елементима другога реда.



Сл. 123. Кривина круга

Ако имамо више кругова (сл. 123) различитих полупречника, јасно је да је њихова кривина различита: што је полупречник већи, то је кривина мања. Природно је према томе узети за меру кривине K круга реципрочну вредност полупречника, тј. ставити

$$K = \frac{1}{R}.$$

Међутим до појма кривине круга можемо доћи на други начин. Замислимо путника M (сл. 123) који се креће по кругу полупречника R. У положају M он гледа у правцу MT тангенте на круг у тачки M. У новом положају M', на растојању Δs од првог положаја на кругу, путник гледа у правцу $M'T'$. Он је, дакле, скренуо са првог правца за угао који смо означили са $\Delta\alpha$. Што је тај угао већи то је веће отступање путника од праволиниског кретања, то је већа кривина његовог пута, кружне линије. Но сам угао $\Delta\alpha$ није мера кривине, јер кривина зависи још и од тога на којој је дужини путник променио свој правац за $\Delta\alpha$. Ако је пут Δs дужи, кривина је мања. Према томе за кривину круга треба узети количник

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}.$$

Показаћемо да је вредност овог количника

$$\frac{1}{R}.$$

Заиста, из Елементарне геометрије познато је да се угао мери односом лука кружне линије према полупречнику. Пошто је угао скретања тангенте $\Delta\alpha$ једнак централном углу MOM' (углови са нормалним крацима), за тај угао имамо

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta s}{R}.$$

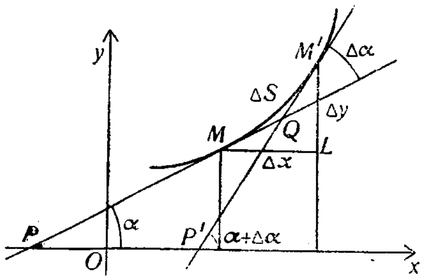
Према томе непосредно долазимо до резултата

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{1}{R}.$$

Одређивање кривине круга помоћу количника $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ погодно је због тога што се може проширити на сваку криву линију.

Нека је крива линија дата једначином

$$y = f(x)$$



Сл. 124. Кривина криве линије

и на њој тачка $M(x, y)$. Угао који гради тангента у овој тачки са осом x означимо са α (сл. 124), тада је

$$(1) \qquad tg\,\alpha = y'.$$

Узмимо на кривој другу тачку M' блиску тачки M. Координате ове тачке биће $x + \Delta x$, $y + \Delta y$. Тангента у овој тачки гради са осом x угао $\alpha + \Delta\alpha$. Пошто је угао $QP'x = \alpha + \Delta\alpha$ спољашњи за троугао QPP', угао скретања PQP' је

$$\sphericalangle PQP' = \sphericalangle QP'x - \sphericalangle QPx = \alpha + \Delta\alpha - \alpha = \Delta\alpha.$$

Ако образујемо количник

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s},$$

где је Δs лук MM' наше криве, можемо му дати назив средња кривина криве на датом луку MM'.

Почнемо ли приближавати тачку M' тачки M, ова ће се кривина мењати (она ће остати стална само за кружну линију); она може тежити граничној вредности када тачка M' тежи тачки M. Та гранична вредност, ако постоји, зове се кривина дате криве линије у датој тачки.

Ако овако дефинисану кривину означимо са K, имамо

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds},$$

где су $d\alpha$ и ds диференцијали означених променљивих.

Израчунајмо ове диференцијале. Из (1) имамо

$$\alpha = arctg\, y'$$

и зато је

$$d\alpha = \frac{1}{1+y'^2}\, dy' = \frac{1}{1+y'^2} \cdot y''\, dx.$$

За израчунавање ds узмимо троугао $MM'L$ са катетама Δx и Δy. Његова хипотенуза, растојање MM', има вредност

$$MM' = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Ако ову једначину поделимо са Δx и пређемо на граничне вредности, имамо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2},$$

а одавде је

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\, dx.$$

Ставимо ли добијене вредности у израз за кривину, дефинитивно добијамо

$$K = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Као што кривини круга одговара израз $\frac{1}{R}$, тако и кривину сваке криве линије можемо изједначити са $\frac{1}{R}$. R је полупречник круга, који има исту кривину са кривом у датој тачки. Он се зове полупречник кривине. Круг тог полупречника са центром на нормали зове се круг кривине, а његов центар — центар кривине.

За полупречник кривине имамо израз

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Као пример узмимо елипсу са једначином

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Ако диференцирамо двапут, добијамо

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}\, y' = 0,$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{y}{b^2}\, y'' = 0,$$

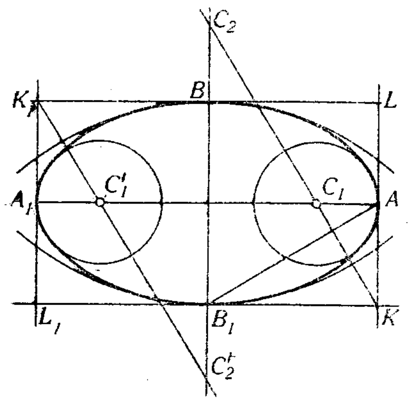
одакле, после одређивања y' и y'', следује

$$y' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y},$$

$$y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}.$$

На основу ових вредности израчунавамо полупречник кривине елипсе

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = -\frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{3/2}}{a^4 b^4}.$$



Сл. 125. Конструкција центара кривине елипсе

За дужину овог полупречника треба узети апсолутну вредност написаног израза. Знак минус код тог израза показује нешто више од оног што смо тражили; наиме, он показује да је смер полупречника кривине супротан смеру спољашње нормале на елипси.

За темена елипсе A и B (сл. 125) имамо ове вредности полупречника кривине:

$$R_A = -\frac{b^2}{a}, \qquad R_B = -\frac{a^2}{b}.$$

Покажимо на основу ових израза једну врло интересантну особину положаја центара кривине елипсе за темена; ова особина омогућава врло згодан начин за конструисање центара кривине.

Конструишимо за елипсу ABA_1B_1 правоугаоник KLK_1L_1 са димензијама $2a$ и $2b$. Спојимо темена A и B_1 елипсе тетивом AB_1; из тачке K спустимо нормалу на ову тетиву и продужимо је до пресека у тачкама C_1 и C_2 са осама елипсе. Може се доказати да су тачке C_1 и C_2 центри кривине елипсе за тачке A и B_1; исто тако права паралелна тој нормали из тачке K_1 даје у пресеку са истим осама центре кривине за тачке A_1 и B.

За доказ овога довољно је да покажемо да је, на пр., $AC_1 = \frac{b^2}{a}$.

Пошто су троуглови AC_1K и KAB_1 слични, пропорционалност катета даје

$$AC_1 : AK = AK : B_1K,$$

или

$$AC_1 : b = b : a,$$

одакле је

$$AC_1 = \frac{b^2}{a}.$$

На сличан начин се потврђује да је тачка C_2 центар кривине за теме B_1 елипсе. Централна симетричност елипсе потврђује тачност теореме за тачке C'_1 и C'_2.

Конструкција показаних кругова кривине омогућава да се лако криволиниским лењиром нацртају остали делови елипсе (сл. 125).

Вежбања.

1. За елипсу, хиперболу и параболу написати једначине тангенте и нормале у датој тачки и израчунати дужине тангенте, нормале, субтангенту и субнормалу, и полупречник кривине.

2. Одговорити на питања постављена у првом задатку за криве линије:

a. кубну параболу са једначином $y = ax^3$,

b. полукубну параболу са једначином $y^2 = ax^3$,

c. ланчаницу са једначином $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$,

d. синусоиду са једначином $y = \sin x$,

e. криву са једначином $y = e^{-x^2}$.

b. Права и крива линија у простору

α. Права у простору

Видели смо (§ 38) да једначину равни можемо написати

$$z = a_1x + b_1y + c_1.$$

Ако узмемо и другу раван, са једначином

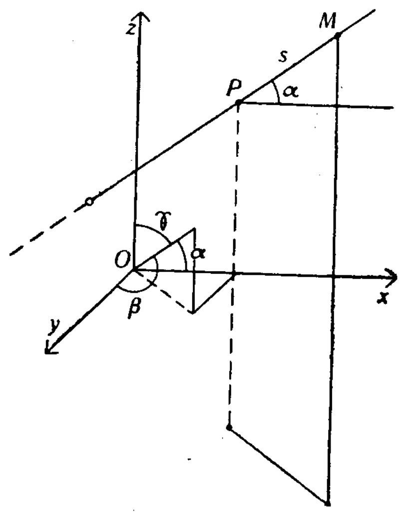
$$z = a_2x + b_2y + c_2,$$

можемо тврдити да ове једначине заједно одређују праву пресека ових равни.

Према томе права у простору одређује се са две једначине првог степена по x, y, z.

Две једначине, које одређују праву у простору, можемо написати и у другом облику.

Узмимо на правој (сл. 126) једну сталну тачку P, са координатама p, q, r, и другу — промењиву M (x, y, z).



Сл. 126. Права у простору

Пројекција дужи $PM = s$ на осу x има, с једне стране, вредност $x - p$, а, с друге, $s \cos \alpha$, где је α угао наше праве са осом x. Према томе се може написати

$$x - p = s \cos \alpha ,$$

или

$$\frac{x - p}{s \cos \alpha} = 1 .$$

Сличне једначине имамо и за две друге пројекције. На тај начин једначину праве у простору можемо написати и у облику

$$\frac{x-p}{l} = \frac{y-q}{m} = \frac{z-r}{n} ,$$

где су p, q, r координате одређене тачке те праве, а l, m, n су величине пропорционалне косинусима углова α, β, γ које гради ова права са координатним осама.

β. Крива линија у простору

Ако један део савијене жице положимо у раван стола, а други уздигнемо изнад те равни, тада целокупна жица неће претстављати криву линију у равни, него ће претстављати криву линију у простору, просторну криву. Просторну криву не можемо, дакле, у целини сместити у једну раван.

γ. Завојница

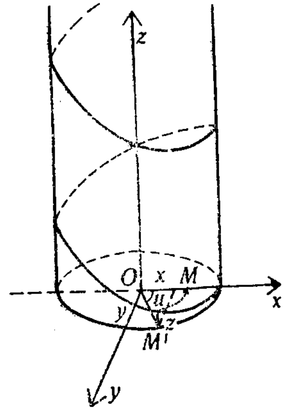
Као пример просторне криве проучимо једну у теорији и пракси важну линију, која се зове **завојница**. Она се конструише овако.

Узмимо у равни Oxy (сл. 127) координатног триједра круг полупречника r са центром у почетку координата. Ако са u означимо угао

потега тачке тог круга са осом x, координате x и y тачке M' круга можемо изразити

$$x = r \cos u ,$$

$$y = r \sin u .$$



Сл. 127. Завојница

Као што знамо (§ 19), написане једначине су параметарске једначине круга.

Замислимо сад да је тачка M' пројекција тачке M на раван Oxy и да је растојање $MM' = z$ пропорционално углу u, тј.

$$z = ku ,$$

где је k стални коефицијент пропорционалности.

Три једначине

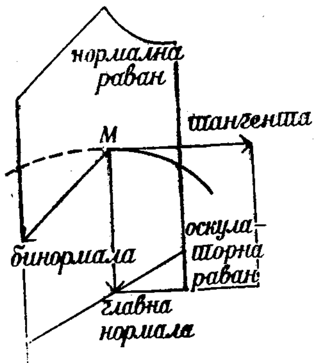
$$x = r \cos u ,$$

$$y = r \sin u , \qquad (1)$$

$$z = k u$$

одређују за сваку вредност параметра u координате x, y, z тачке M. Када се u мења, тачка M описује у простору завојницу. Из начина конструкције ове линије види се да она лежи на површини ваљка и да је растојање тачке завојнице од одређеног попречног пресека тог ваљка пропорционално углу обртања. Сваки цилиндрични завртањ претставља пример завојнице. Једначине (1) су параметарске једначине завојнице.

δ. Тангента и нормална раван просторне криве (елементи првога реда)



Сл. 128. Природни триједар просторне криве

Наведимо неколико геометриских облика који стоје у вези са проучавањем просторне криве.

Гранични положај секанте кроз две тачке криве и овде даје тангенту на просторну криву (сл. 128). Раван управна на тангенту у тачки додира је нормална раван криве. У тој равни лежи бескрајно много нормала криве.

ε. Оскулаторна раван. Главна нормала и бинормала. Прва и друга кривина (елементи другога реда).

Три тачке M, M′, M″ просторне криве, у општем случају, одређују једну раван. Гранични положај равни, која пролази кроз три бескрајно блиске тачке криве, даје оскулаторну раван просторне криве у датој тачки.

Пресек оскулаторне равни са нормалном равни даје нарочиту нормалу, која се зове главна нормала. Нормала управна на тангенти и главној нормали зове се бинормала.

Три узајамно управне праве — тангента, главна нормала и бинормала — чине такозвани природни тријеДар просторне криве за дату тачку. За сваку тачку криве конструише се њен природни триједар.

Две суседне тангенте припадају равни која у граничном положају даје оскулаторну раван. Њихов угао скретања $\Delta\alpha$ подељен елементом лука Δs у граничној вредности, као и за случај криве у равни, даје овде прву кривину криве или флексију. Дакле је

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s}.$$

Оскулаторна раван, као што смо рекли, пре граничног положаја пролази кроз три бескрајно блиске тачке криве. У општем случају она не пролази кроз четврту тачку M‴ криве. Кроз три тачке M′, M″, M‴ пролази друга оскулаторна раван. Угао између равни $M M' M''$ и равни $M' M'' M'''$ означимо са $\Delta\beta$ и образујмо количник $\Delta\beta : \Delta s$. Тај количник у граничној вредности, даје

$$K_1 = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta s},$$

где је K_1 такозвана друга кривина или торзија просторне криве.

Прва кривина је мера отступања криве у датој тачки од праве, а друга кривина је мера отступања криве у датој тачки од равне криве, коју замишљамо у оскулаторној равни.

Могло би се доказати да завојница има сталну прву и другу кривину, али у та израчунавања овде нећемо улазити.

c. Површина

Видели смо (§ 38) да једначини површине можемо дати облик

(2) $$z = f(x, y).$$

Узмимо на тој површини тачку M са координатама x, y, z и суседну тачку M′ са координатама $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$. Пошто ове координате морају задовољавати претходну једначину, имамо

$$z + \Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y).$$

Ако десну страну развијемо према Тајлорову правилу, које важи и за случај функције више промењљивих, и зауставимо се на члановима првог степена по Δx и Δy, добићемо једначину

$$z + \Delta z = f(x, y) + \Delta x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ако искористимо полазну једначину (2) налазимо

(3) $$\Delta z = \Delta x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.$$

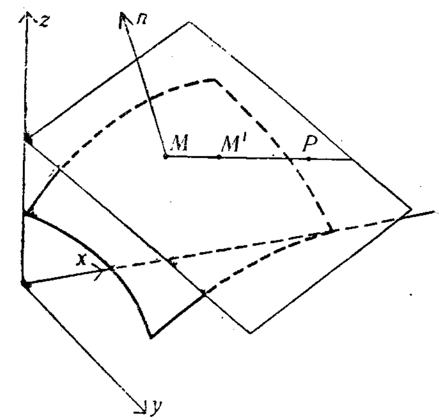
Узмимо сад на правој MM′ произвољну тачку P (сл. 129) и координате ове тачке означимо са ξ, η, ζ. Пошто пројекције дужине MM′ на осе координата имају вредности

$$\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z,$$

а пројекције дужине MP на исте осе су

$$\xi - x,\ \eta - y,\ \zeta - x,$$

на основу познате теореме из Стереометрије, да су отсечци правих између паралелних равни пропорционални, следује



Сл. 129. Тангентна раван површине

$$\frac{\Delta x}{\xi - x} = \frac{\Delta y}{\eta - y} = \frac{\Delta z}{\zeta - z} = \frac{M M'}{M P} = k.$$

Из ових пропорција се може извести

$$\Delta x = k(\xi - x)\,,\ \Delta y = k(\eta - y)\,,\ \Delta z = k(\zeta - z)\,.$$

Ако сад ставимо ове вредности у (3) и скратимо са k, добијамо

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) = \zeta - z\,.$$

Пошто је ова једначина првог степена по ξ, η, ζ, она претставља раван. У овој су једначини ξ, η, ζ променљиве, а x, y, z сталне величине. Величине $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ такође су сталне, јер су функције x, y.

Ова раван је т а н г е н т н а р а в а н површине. Она претставља геометриско место правих које пролазе кроз дату сталну тачку M на површини и бескрајно блиску променљиву тачку M′ на истој површини.

Нормала на тангентну раван у тачки додира је н о р м а л а н а п о в р ш и н у у тој тачки.

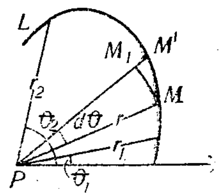
d. Интегрални обрасци

α. Површина у Декартовим координатама

У § 57, где смо тумачили појам одређеног интеграла, извели смо образац

(XIV) $$Q = \int_a^b y\,dx$$

за одређивање површине омеђене кривом линијом $y = f(x)$, двема ординатама и отсечком $b - a$ осе x. Израз $y\,dx$ претставља елемент те површине у облику правоугаоника са основом dx и висином y.



Сл. 130. Површина у поларним координатама

β. Површина у поларним координатама

Нека је дата крива линија L (сл. 130) у поларним координатама r и θ једначином

$$r = r(\theta)\,.$$

Површина која је омеђена овом кривом линијом и потезима

$$r_1 = r(\theta_1) \quad \text{и} \quad r_2 = r(\theta_2)\,,$$

зове се п о в р ш и н а у п о л а р н и м к о о р д и н а т а м а. За одређивање ове површине узмимо њен елемент у облику сектора омеђена са два суседна потега и луком MM'. Полупречником $PM = r$ опишимо из центра P кружни лук MM_1; он ће нашу површину поделити у два дела: у бескрајно мали кружни сектор са површином

(4) $$\frac{1}{2} r^2 d\theta\,,$$

где је $d\theta$ централни угао тог сектора, и у површину MM_1M' коју можемо сматрати за бескрајно мали правоугли троугао са катетама $MM_1 = r\,d\theta$ и $M_1M' = dr$, где је dr диференцијал дужине потега. Пошто површина тог троугла износи

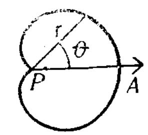
$$\frac{1}{2} r\,dr\,d\theta$$

и садржи производ две бескрајно мале величине dr и $d\theta$, ову величину треба занемарити у поређењу са величином (4) која садржи само један диференцијал $d\theta$. Израз (4) је елемент наше површине. Сама се површина изражава одређеним интегралом

(XV) $$Q = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta\,.$$

Као пример израчунајмо површину к а р д и о и д е (сл. 131) са једначином

$$r = a(1 + \cos\theta)\,.$$



Сл. 131. Кардиоида

Пошто поларна оса PA дели кардиоиду на два симетрична дела, а у првом се делу угао θ мења у границама од 0 до π, целокупна површина је

$$Q = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2 d\theta = \int_0^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta = a^2\int_0^{\pi}(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta =$$

$$= a^2\Big|_0^{\pi}\left(\theta + 2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\pi a^2\,.$$

Израчунавање површине, и то у смислу одређивања квадрата једнака датој површини зове се к в а д р а т у р а. Пошто ово одређивање стоји у вези са одређивањем интеграла, често се и само одређивање интеграла зове квадратура. На пример, за довођење решавања диференцијалне једначине на израчунавање неодређених интеграла каже се да је решавање сведено на квадратуре.

γ. Дужина лука криве у Декартовим координатама

При извођењу израза кривине одредили смо елемент ds криве линије у облику

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx .$$

На основу овог резултата за дужину L криве линије имамо образац

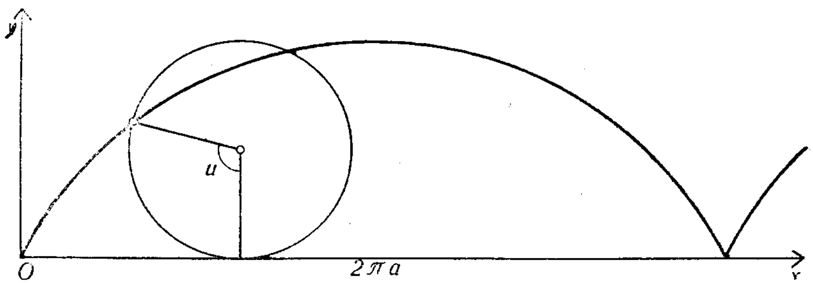
$$\text{(XVI)} \qquad L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx .$$

Ако је крива дата једначинама у параметарском облику

$$x = x(u), \qquad y = y(u),$$

где је u параметар, за израчунавање дужине треба искористити образац

$$L = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2}\, du =$$



Сл. 132. Циклоида

Узмимо пример ц и к л о и д е (сл. 132) чије су једначине у параметарском облику

$$x = a(u - \sin u),$$

$$y = a(1 - \cos u).$$

Циклоида је геометриско место положаја тачке периферије круга који се котрља без клизања по правој линији. У нашим је једначинама, a полупречник тог круга (к р у г а г е н е р а т о р а).

Пошто је

$$dx = a(1 - \cos u)\, du,$$

$$dy = a \sin u\, du,$$

за ds^2 изводимо

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2(2 - 2\cos u)\, du^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{u}{2}\, du^2,$$

одакле је

$$ds = 2a \sin \frac{u}{2}\, du .$$

Пошто сваки циклоидни талас можемо поделити на два једнака дела, при чему се у првом делу параметар u мења од 0 до π, за дужину једног таласа имамо израз

$$L = 2\int_0^\pi ds = 4a \int_0^\pi \sin \frac{u}{2}\, du = 8a \Big/_0^\pi \left(-\cos \frac{u}{2}\right) = 8a .$$

Дошли смо до занимљивог резултата да је дужина циклоиде једнака четворострукој вредности пречника круга генератора.

δ. Дужина лука криве у поларним координатама

Из слике 130 непосредно следује да растојање MM', које претставља елемент ds лука криве у поларним координатама, као хипотенуза бескрајно малог правоуглог троугла MM_1M' са већ одређеним катетама $r\,d\theta$ и dr има вредност

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} .$$

Према томе за тражену дужину имамо интеграл

$$\text{(XVII)} \qquad L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta .$$

Као пример израчунајмо дужину лука кардиоиде. Пошто је

$$r = a(1 + \cos\theta)$$

и

$$r' = -a \sin\theta \, d\theta$$

дужину целокупне кардиоиде израчунавамо овако

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2 \sin^2\theta}\, d\theta =$$

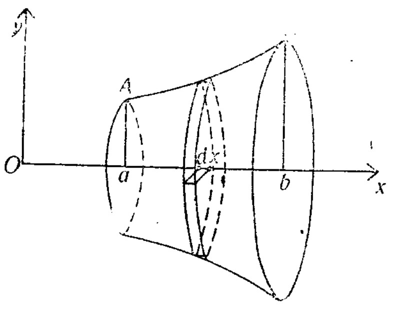
$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta = 2a \,.\, 2\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta =$$

$$= 8a \left. \sin\frac{\theta}{2} \right|_0^{\pi} = 8a \,.$$

ε. Запремина обртних тела

Када се површина омеђена кривом (сл. 133)

$$y = f(x)$$



Сл. 133. Запремина обртног тела

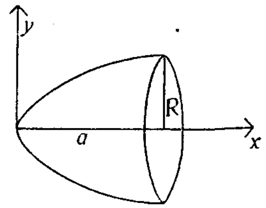
између тачака A и B, ординатама ових тачака и отсечком осе x од a до b, где су a и b апсцисе тачака A и B, обрће око осе x, она описује у простору запремину чији је елемент плоча дебљине dx између две равни нормалне на осу x. Ову плочу можемо сматрати као ваљак висине dx и полупречника основе y. Према томе елемент запремине овог тела dV изгледа

$$dV = \pi y^2 dx,$$

а сама запремина израчунава се интегралом

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx \,. \qquad \text{(XVIII)}$$

Као пример одредимо запремину обртног параболоида (сл. 134), тј. тела чија се површина добија обртањем параболе око осе симетрије.



Сл. 134. Запремина обртног параболоида

Пошто једначина параболе изгледа

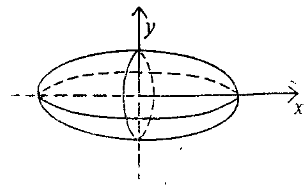
$$y^2 = 2px,$$

за запремину нашег параболоида имамо интеграл

$$V = \pi \int_0^a 2px\, dx = \pi p \left. x^2 \right|_0^a = \pi p a^2 .$$

Означимо ли са R полупречник круга пресека нашег параболоида на растојању a од темена, тада ће се он одредити из једначине

$$R^2 = 2pa \,.$$



Сл. 135 . Запремина обртног елипсоида

Помоћу овог израза израчунату запремину параболоида можемо претставити

$$V = \frac{1}{2}\pi R^2 a \,;$$

из тога можемо закључити да је она једнака половини запремине ваљка полупречника R и висине a.

Одредимо још запремину обртног елипсоида (сл. 135). Ако једначину елипсе претставимо у облику

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

за запремину обртног елипсоида имамо

$$V = 2\pi \int_0^a y^2 dx =$$

$$= 2\pi \int_0^a b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx =$$

$$= 2\pi b^2 \left. \left(x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{a^2}\right) \right|_0^a = 2\pi b^2\left(a - \frac{1}{3}a\right) = \frac{4}{3}\pi a b^2 .$$

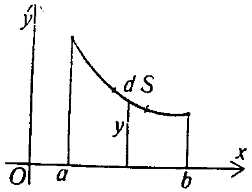
Ако је $a=b$, обртни елипсоид се претвара у лопту и претходни образац даје

$$V=\frac{4}{3}\pi a^3,$$

а то је познати образац за запремину лопте.

ζ. Површина обртних тела.

За израчунавање површине обртних тела узмимо у обзир да је елемент те површине површина коју описује дужина ds, елемент лука, око осе x (сл. 136). Елементарна геометрија учи да је површина, коју описује дуж при обртању око осе, једнака производу те дужи и обима круга који описује средина дужи. При томе се дуж и оса налазе у истој равни.



Сл. 136. Површина обртних тела

У нашем ће случају елемент површине dS обртног тела имати вредност

$$dS=2\pi y\,ds=\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

а сама површина одређена је интегралом

$$\text{(XIX)}\qquad S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Као пример израчунајмо површину обртног елипсоида коју производи елипса

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

за коју је

$$y'=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Пошто је

$$y\sqrt{1+y'^2}=b\sqrt{1-k^2x^2},$$

где је

$$k=\frac{e}{a},$$

и e ексцентрицитет елипсе са вредношћу

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},$$

за тражену површину добијамо

$$S=4\pi b\int_0^a\sqrt{1-k^2x^2}\,dx.$$

Неодређени интеграл има вредност

$$\int\sqrt{1-k^2x^2}\,dx=\frac{1}{2k}(\arcsin kx+kx\sqrt{1-k^2x^2})+C;$$

на основу те вредности добијамо за површину

$$S=4\pi b\Big/_0^a\frac{1}{2k}(\arcsin kx+kx\sqrt{1-k^2x^2})=$$

$$=4\pi b\cdot\frac{1}{2k}(\arcsin ka+ka\sqrt{1-k^2a^2})=$$

$$=2\pi ab\left(\sqrt{1-e^2}+\frac{\arcsin e}{e}\right).$$

То је израз за површину обртног елипсоида.

Ако ставимо $a=b$, те је, према томе $e=0$, елипса се претвара у круг и наш образац треба да дâ површину лопте. Видимо, међутим, да израз

$$\frac{\arcsin e}{e}$$

за $e=0$ добија неодређен облик $\frac{0}{0}$. Треба применити Лопиталово правило (§ 50) и диференцирати посебно бројилац и именилац, па налазимо

$$\left(\frac{\arcsin e}{e}\right)_{e\to 0}=\frac{0}{0}=\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}}{1}\right)_{e\to 0}=1.$$

Ако искористимо овај резултат за површину лопте дефинитивно добијамо

$$S=4\pi a^2,$$

као што нас учи и Елементарна геометрија.

η. Дужина лука просторне линије

Ако узмемо просторну линију која је дата помоћу параметарских једначина

$$x = x(u),$$
$$y = y(u),$$
$$z = z(u),$$

растојање $ds = MM'$ између две бескрајно блиске тачке са координатама

$$M(x, y, z),$$
$$M'(x + dx, y + dy, z + dz),$$

је према § 38

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

одавде изводимо за одређивање дужине просторне линије образац

$$\text{(XX)} \qquad L = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, du,$$

где, као и увек, цртица означава извод у датом случају по параметру u.

Одредимо, као пример, дужину једног завоја завојнице. Из једначина

$$x = r\cos u, \qquad y = r\sin u, \qquad z = ku$$

имамо

$$x' = -r\sin u, \quad y' = r\cos u, \quad z' = k$$

и зато наш интеграл даје

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + k^2}\, du = \sqrt{r^2 + k^2} \Big/_{0}^{2\pi} u = 2\pi\sqrt{r^2 + k^2}.$$

Израчуната величина одговара хипотенузи правоуглог троугла, чија је једна катета једнака обиму $(2\pi r)$ круга цилиндричног пресека, а друга је катета једнака растојању $(2\pi k)$ између два завоја завојнице.

Вежбања.

1. Израчунати површину омеђену параболом $y^2 = 6x$, осом x и правама $x = 1$, $x = 10$.
2. Израчунати површину омеђену параболом $y^2 = 6x$, осом y и правама $y = 4$, $y = 10$.
3. Израчунати површину између параболе $y^2 = 6x$ и праве $y = 6x$.

4. Израчунати површину омеђену параболом $y^2 = 6x$, осом x и правом $y = 6x - 1$.
5. Израчунати површину између параболе $y^2 = 6x$ и праве $y = 6x = 12$.
6. Израчунати површину елипсе са једначином $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 1$.
7. Израчунати површину омеђену ланчаницом са једначином $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, осама x и y и правом $x = a$.
8. Израчунати површину омеђену кривом $y = \ln x$, осом x и ординатама правих $x = 1$ и $x = a$.
9. Израчунати површину између цисоиде са једначином $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ и њене асимптоте $x = 2a$.
10. Израчунати површину омеђену Архимедовом спиралом са једначином $r = a\theta$ у границама од $\theta = 0$ до $\theta = 2\pi$.
11. Показати да је површина између два потега хиперболичке спирале са једначином $r\theta = a$ пропорционална разлици тих потега.
12. Израчунати дужину лука ланчанице са једначином $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ од тачке $(0, a)$ до тачке (x, y).
13. Израчунати дужину криве са једначином $9x^2 = 4(1 + y^2)^3$ од тачке $(2/3, 0)$ до тачке $\left(\frac{10\sqrt{5}}{3}, 2\right)$. (Напомена: за независно променљиву узети y).
14. Наћи дужину криве чија је једначина $r = a(1 - \sin\theta)$.
15. Израчунати дужину криве са једначином $r = e^{a\theta}$ од $\theta = 0$ до $\theta = \frac{1}{2}\pi$.
16. Помоћу интеграције наћи запремине: купе, зарубљене купе, лопте.
17. Дата је кубна парабола са једначином $2y = x^3$ и две тачке на њој A $(0, 0)$ и B $(2, 4)$. Узмимо у обзир површину омеђену луком AB, осом x и ординатом тачке B. Одредити запремине добијене обртањем те површине: 1) око осе x и 2) око осе y.
18. Наћи запремину добијену обртањем површине омеђене синусоидом $y = \sin x$ од тачке $(0, 0)$ до тачке $(\pi, 0)$ и осом x око осе x.
19. Израчунати запремину добијену обртањем површине омеђене ланчаницом са једначином $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, осом x и ординатама правих $x = 0$ и $x = b$ око осе x.
20. Помоћу интегралног рачуна израчунати површину лопте.
21. Израчунати површину добијену обртањем дела ланчанице са једначином $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ од тачке $(0, a)$ до тачке са апсцисом a око осе x.
22. Наћи површину прстена (торуса) добијеног обртањем круга $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ око осе x $(b > a)$.

§ 75. Проблеми Механике

a. Трајекторија и закон пута

У Механици се учи како се проучавање кретања тела своди на проучавање кретања геометриске тачке.

За време кретања тачка мења свој положај у простору и описује трајекторију или путању. Према облику трајекторије кретање може бити праволиниско и криволиниско. Означимо са s дужину пута коју тачка прође по трајекторији; са t — време за које она тај пут пређе. Ако је кретање тачке по трајекторији познато, у сваком тренутку t можемо одредити s; према томе је s функција t, тј.

$$s = \varphi(t).$$

Та једначина зове се у Механици закон пута. Закон пута може бити одређен или аналитички, обрасцем, или таблицом, или графички, кад је дат график пута.

За потпуно одређивање кретања тачке треба, да знамо облик трајекторије и закон пута.

Ако Декартове координате тачке означимо са x, y, z, кретање тачке се одређује једначинама

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t),$$

које се зову коначне једначине кретања тачке. Ове једначине могу бити сматране као параметарске једначине трајекторије; улогу параметра игра време t.

Пошто је

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

за одређивање закона пута на основу коначних једначина кретања треба извршити квадратуру

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt,$$

где цртица означава извод по времену, а t_0 и t су почетни и коначни тренуци.

Најпростији случај кретања по некој трајекторији имамо кад је s линеарна функција времена, тј.

$$s = at + b,$$

где су a и b сталне величине. Такво кретање зовемо равномерно. Равномерно кретање је равномерни процес у Механици.

Ако је s квадратна функција времена, тј.

$$s = at^2 + bt + c,$$

кретање се зове једнако промењливо.

b. Брзина тачке

Зауставимо се прво на праволиниском кретању чији је закон пута

$$s = s(t).$$

Ако тачка за време Δt пређе пут Δs, количник

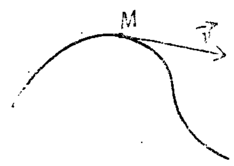
$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

се зове средња брзина тачке на том путу. Ако Δt тежи нули, гранична вредност

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = s'$$

даје брзину тачке у датом тренутку. Из овог резултата видимо да се брзина у случају праволиниског кретања мери изводом пута по времену. Обратно, извод сваке функције времена по времену може се протумачити као брзина промене те функције.

У случају криволиниског кретања брзину више не карактерише скалар, него вектор $\vec{v}$ (сл. 137), који има: 1) правац тангенте на трајекторију, 2) смер у оном смислу, куда се тачка креће и 3) величину (интензитет) једнаку s'. Ако нас не интересује правац и смер брзине, него само њен интензитет, као у случају, на пример, путовања по унапред утврђеној трајекторији, рецимо, железницом, тада је за проучавање брзине довољно зауставити се на изводу s', тачније на апсолутној вредности $|s'|$ тог извода.



Сл. 137. Брзина тачке

У равномерном кретању са $s = at + b$, брзина има сталан интензитет $s' = a$; за једнако промењливо кретање са законом пута

$$s = at^2 + bt + c$$

интензитет брзине (тачније т. зв. алгебарска вредност брзине) је линеарна функција времена, тј.

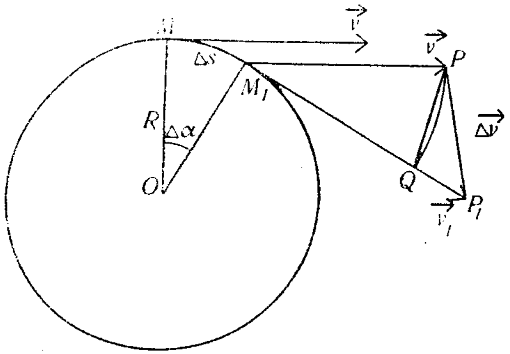
$$\frac{ds}{dt} = 2at + b.$$

Ако је тај израз негативан, интензитет брзине је једнак његовој апсолутној вредности.

c. *Убрзање тачке*

Ако се, опет, зауставимо прво на праволиниском кретању, „брзина промене брзине" даје **убрзање тачке**. Убрзање, за праволиниско кретање мери се, дакле, другим изводом пута по времену, тј. величином

$$\frac{d^2 s}{d t^2} = s'' .$$



Сл. 138. Убрзање кружног кретања

Од криволиниских кретања изаберимо кружно кретање (сл. 138) и, упоредо са положајем M, уочимо суседни положај покретне тачке M_1, у који је тачка прешла после времена Δt. Означимо брзине у положајима M и M_1 са $\vec{v}$ и $\vec{v}_1$. Промена брзине из положаја M у положај M_1 изражава се вектором

$$\overrightarrow{\Delta v} = \vec{v}_1 - \vec{v} .$$

Опишимо са полупречником $M_1 P$ кружни лук до пресека са брзином $\vec{v}_1$ у тачки Q. Из троугла $P Q P_1$ имамо

$$\overrightarrow{\Delta v} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP_1} .$$

Поделимо сваки члан ове једначине са Δt и пређимо на граничне вредности

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{PQ}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{QP_1}}{\Delta t} .$$

Леву страну ове једначине сматрамо као убрзање покретне тачке. То је вектор. Означимо га са $\vec{w}$.

Први члан десне стране је вектор, чији је правац гранични правац тетиве кружне линије полупречника v, тј. правац нормале на $\vec{v}$ или, најзад, правац полупречника R тачке M са смером према центру. За израчунавање величине тог вектора обратимо пажњу на то да су кружни

сектори $O M M_1$ и $M_1 P Q$ слични, јер имају једнаке централне углове; из ове сличности, а за бескрајно мале троуглове имамо

$$\frac{PQ}{v} = \frac{\Delta s}{R} ,$$

одакле се добија

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{PQ}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{R} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} .$$

Ту компоненту, са правцем нормале на круг, са смером према центру и са интензитетом $\frac{v^2}{R}$, зовемо **нормално** или **центрипетално убрзање тачке**.

Друга компонента

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{QP_1}}{\Delta t}$$

је вектор: 1) са правцем тангенте на кругу, јер у граничном положају вектор $\vec{v}_1$ има правац тангенте, 2) са смером у смислу промене интензитета брзине и 3) са величином $\frac{dv}{dt}$ извода интензитета брзине по времену, јер је QP_1 прираштај тог интензитета.

Ова компонента зове се **тангенцијално убрзање**. Према томе, код кружног кретања тачке, убрзање можемо раставити у две компоненте: тангенцијалну и нормалну.

Ово што смо рекли за кружно кретање може се проширити на свако кретање, јер се свака трајекторија, приближно посматрана, на бескрајно малом делу пута може схватити као кружна трајекторија. Улогу полупречника R круга игра тада полупречник кривине трајекторије у датој тачки.

На тај начин и за свако друго криволиниско кретање важи векторска једначина

$$\vec{w} = \left(\frac{\overrightarrow{dv}}{dt}\right)_T + \left(\frac{\overrightarrow{v^2}}{R}\right)_N .$$

T означава тангенту, а N нормалу, а за просторну криву главну нормалу.

Из добијеног резултата очигледно је да *свако* криволиниско кретање има убрзање. Криволиниско кретање може бити равномерно, тј.

са константним интензитетом брзине и, према томе, без тангенцијалног убрзања, али оно мора имати нормално убрзање $\frac{v^2}{R}$. Без убрзања може бити само праволиниско равномерно кретање, кад је $\frac{1}{R}=0$ и кад је $v=const$.

d. Диференцијалне једначине кретања материјалне тачке

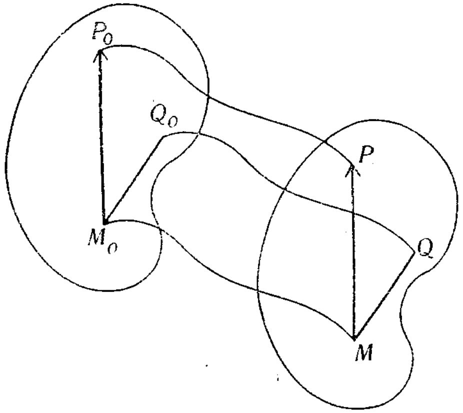
Објаснимо прво шта је то материјална тачка.

Замислимо чврсто тело (сл. 139) и у њему тачку M_0. За време кретања од тренутка t_0 до тренутка t ова тачка описује одређену трајекторију и доспева, рецимо, у положај M. Узмимо сад другу, потпуно произвољну тачку тела P_0 и конструишимо вектор $\overrightarrow{M_0P_0}$. Ако вектор $\overrightarrow{M_0P_0}$ остаје за све време кретања тела паралелан сам себи, тј.

$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{M_0P_0},$$

кретање тела зове се транслаторно.

Тачка, која заступа транслаторно покретно чврсто тело одређене масе, зове се материјална тачка. То је геометриска тачка са којом је везана целокупна маса транслаторно покретног чврстог тела. Маса такве тачке може бити коначна, кад чврсто тело има коначну масу, и бесконачно мала, када је тело бесконачно мало. Материјалне тачке бесконачно малих маса, делићи, честице, нарочито су важне стога што на такве тачке можемо поделити сваки материјални систем при ма каквом кретању.



Сл. 139. Транслаторно кретање чврстог тела

Но важност појма материјалне тачке не ограничава се само на проучавање транслаторно покретних тела. У Механици се доказује да се тежиште сваког материјалног система, било непромењивог било

промењљивог, креће исто онако као што би се кретала материјална тачка, која би имала масу система и на коју би дејствовала резултанта свих сила које дејствују на систем. У том смислу се може и цела наша Земља сматрати као материјална тачка, наиме ако проучавамо кретање само њеног тежишта, без обзира на остала њена кретања.

Према Њутновим законима кретање сваке материјалне тачке врши се тако да је производ масе m тачке и убрзања $\overrightarrow{w}$ једнак сили $\overrightarrow{F}$ која дејствује на ову тачку. Векторска једначина

$$m\overrightarrow{w}=\overrightarrow{F}$$

претставља основну једначину Динамике тачке. Она се зове диференцијална једначина кретања материјалне тачке у векторском облику.

Зауставимо се прво на праволиниском кретању. Пошто је убрзање праволиниског кретања $\frac{d^2s}{dt^2}$, диференцијалну једначину тог кретања можемо написати

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=F\left(s,\frac{ds}{dt},t\right),$$

где сила у општем случају може зависити од положаја тачке масе m, што значи од дужине пута s, од брзине $\frac{ds}{dt}$ и од времена t.

Као пример проблема, који се решава помоћу написане једначине, решићемо проблем вертикалног хитца.

e. Вертикални хитац

Проблем о кретању материјалне тачке под дејством константне силе са почетном брзином у правцу те силе зове се проблем вертикалног хитца, јер је најважнији пример таквог кретања кретање тешке тачке у правцу вертикале (сл. 140).

Диференцијална једначина кретања вертикалног хитца је

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=F=mg,$$

при чему смо осу s усмерили вертикално надоле; са g смо означили стално убрзање силе теже. Ако скратимо са m, написана диференцијална једначина даје

Сл. 140. Вертикални хитац

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g.$$

Интеграција ове једначине је једноставна; први интеграл има облик

$$\frac{ds}{dt} = gt + C,$$

где је C произвољна константа. Ако за почетни тренутак, кад је $t = t_0 = 0$, почетну брзину означимо са v_0, из претходне једначине имамо

$$v_0 = C$$

и према томе интеграл изгледа

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + gt.$$

Ако је $v_0 > 0$, почетна брзина је усмерена надоле; за $v_0 < 0$ тачка је бачена нагоре. За $v_0 = 0$ имамо т. зв. *слободни пад*, кад је

$$\frac{ds}{dt} = v = gt.$$

Друга интеграција даје

$$s = C_1 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2.$$

Ако време рачунамо од тренутка, кад је тачка била у почетку координате s $(s_0 = 0)$, претходна једначина добија облик

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2.$$

То је закон пута вертикалног хитца. Анализујмо три случаја:

1. $v_0 = 0$. Слободан пад. Закон пута даје

$$s = \frac{1}{2} g t^2.$$

Кретање је једнако убрзано без почетне брзине надоле. График пута је парабола (сл. 141, a). Теме је у почетку координата.

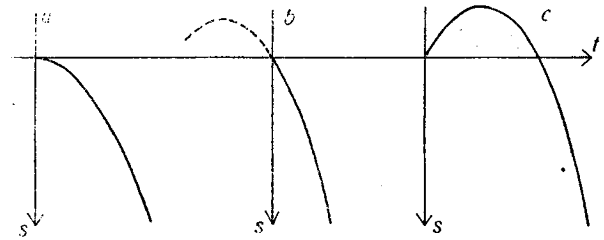
2. $v_0 > 0$. Кретање је надоле са брзином која стално расте. График пута је парабола (сл. 141, b). График не пролази кроз теме параболе.

3. $v_0 < 0$. Кретање је нагоре са брзином која се смањује и у тре-

нутку $t = -\frac{v_0}{g}$ тачка се зауставља, после чега слободно пада. Висина до које достиже тачка има вредност

$$h = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}.$$

График је парабола (сл. 141, c); теме параболе припада графику кретања.

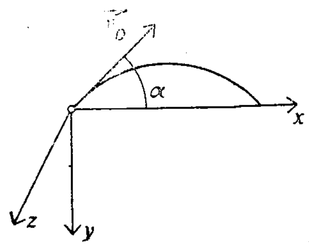


Сл. 141. Графици вертикалног хитца

ƒ. *Кос хитац*

Проблем кретања материјалне тачке под дејством сталне силе са почетном брзином под нагибом према сталном правцу силе зове се *проблем косог хитца*. Тако се креће у безваздушном простору тешка тачка, кад почетна брзина има произвољан правац према хоризонту.

Да решење проблема буде што једноставније узећемо овај положај координатног триједра: почетак O сместићемо у почетни положај M_0 покретне тачке, осу Oy наперимо вертикално надоле, а осу Ox узмимо у оној вертикалној равни у којој је почетна брзина $\vec{v_0}$ (сл. 142). За такве осе почетни услови за тренутак t_0 су



Сл. 142. Кос хитац

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$

$$x_0' = v_0 \cos\alpha, \quad y_0' = -v_0 \sin\alpha, \quad z_0' = 0,$$

где је α угао који брзина гради за хоризонтом.

Пошто на тачку масе m дејствује само сила теже величине mg у правцу и смеру осе Oy, где је g стално убрзање теже, диференцијалне једначине кретања имају облик

$$m x'' = 0,$$
$$m y'' = m g,$$
$$m z'' = 0,$$

а њихови интеграли изгледају

$$x = x_0 + x_0'(t - t_0),$$
$$y = y_0 + y_0'(t - t_0) + \frac{1}{2} g (t - t_0)^2,$$
$$z = z_0 + z_0'(t - t_0).$$

Ако време рачунамо од тренутка кретања ($t_0 = 0$) и искористимо почетне услове, интеграли добијају облик

$$x = v_0 t \cos\alpha,$$
$$y = -v_0 t \sin\alpha + \frac{1}{2} g t^2,$$
$$z = 0.$$

Трећа једначина показује да се кретање врши у сталној вертикалној равни у којој је почетна брзина.

Прва једначина изражава да се пројекција тачке на хоризонталну раван креће равномерно.

Најзад, другој једначини одговара: прво, једнако успорено кретање до тренутка $t_1 = \frac{v_0}{g} \sin\alpha$, а затим једнако убрзано кретање.

За одређивање облика трајекторије треба елиминисати време из прве и друге једначине. Пошто из прве једначине имамо

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha},$$

друга једначина даје

$$y = -x \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Овој једначини одговара парабола са осом симетрије паралелном оси Oy и са теменом S у тачки са координатама

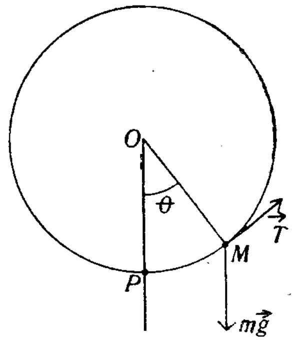
$$x_S = \frac{v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha,$$
$$y_S = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \sin^2\alpha.$$

g. Математичко клатно

Тешка тачка, која је приморана да се креће по вертикалној кружној линији, претставља математичко клатно.

Положај покретне тачке на кружној линији одређујемо углом θ између покретног полупречника $OM = R$ и вертикалног правца усмерена надоле (сл. 143). За одређивање кретања тачке узмимо у обзир тангенцијално убрзање $\frac{d^2 s}{dt^2}$, где је s лук кружне линије од најниже тачке P, множимо га масом тачке и изједначавамо тај производ са компонентом силе теже која дејствује у правцу тангенте. Тако долазимо до једначине

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -m g \sin\theta.$$



Сл. 143. Математичко клатно

Пошто је $s = R\theta$, претходна једначина даје

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + n^2 \sin\theta = 0,$$

где је

$$n^2 = \frac{g}{R}.$$

Интеграција претходне једначине врши се помоћу т.зв. елиптичких функција; проучавање тих трансцендентних функција не улази у обим ове књиге. Ми ћемо се стога зауставити само на случају т.зв. малих осцилација математичког клатна. Потражимо решење претходне једначине под претпоставком да је угао θ мали. У том случају можемо, као прву приближну вредност, узети, место $\sin\theta$, сам угао θ. Наша једначина тада изгледа

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + n^2\theta = 0.$$

То је хомогена линеарна диференцијална једначина другога реда са константним коефицијентима, коју смо проучили у § 72. Решење ове једначине можемо написати

$$\theta = A \cos nt + B \sin nt,$$

где су A и B произвољне константе интеграције. За одређивање тих констаната узмимо ма који специјалан случај; претпоставимо, на пр., да је у почетном тренутку ($t = t_0 = 0$) тачка била у најнижем положају и имала почетну брзину

$$v_0 = R\,\theta_0'.$$

Пошто је

$$\theta' = -A n \sin nt + B n \cos nt,$$

за почетни тренутак имамо две услова

$$\theta_0 = 0 = A,$$

$$\theta_0' = \frac{v_0}{R} = B n,$$

одакле одређујемо

$$A = 0, \qquad B = \frac{v_0}{R n}.$$

Са овим вредностима наш интеграл изгледа

$$\theta = \theta^* \sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\, t\right),$$

где је

$$\theta^* = \frac{v_0}{\sqrt{gR}}.$$

Ова једначина показује да кретање математичког клатна под нашим претпоставкама заиста има карактер осцилаторног процеса (§ 21). Угао θ се мења по закону хармониске осцилације са периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Величина θ^* игра улогу амплитуде осцилације.

h. Праволиниске осцилације тачке

Врло је чест случај, кад сила, која дејствује на тачку, линеарно зависи од брзине $s' = \dfrac{ds}{dt}$ и од растојања s тачке од једне сталне тачке, рецимо, центра привлачења или одбијања. Тада диференцијална једначина кретања тачке доводи до једначине

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2a \frac{ds}{dt} + bs = 0.$$

Интеграција ове једначине наведена је у § 72. Овде додајемо механичко објашњење коефицијената a и b и протумачићемо раније добивена решења.

Сила, која дејствује на тачку, према диференцијалној једначини треба да има облик

$$-mbs - 2mas'.$$

Први члан ($-mbs$) изражава силу пропорционалну првом степену растојања s тачке од одређене тачке на правој. Она може бити или сила привлачења, кад је $b > 0$ и тада можемо ставити $b = p^2$, или сила одбијања, кад је $b < 0$ и тада се ставља $b = -q^2$.

Други члан ($-mas'$) обично претставља отпорну силу. За такву силу је коефицијент a увек позитиван и према томе сила је увек супротна брзини кретања.

Најважнији је случај силе привлачења ($b > 0$) са отпорном силом ($a > 0$). Једначина таквог кретања има облик

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2a \frac{ds}{dt} + p^2 s = 0.$$

Природа кретања зависи од корена

$$z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - p^2}$$

карактеристичне једначине

$$z^2 + 2az + p^2 = 0.$$

I. $a^2 - p^2 < 0$. Корени су имагинарни. Решење изгледа

$$s = e^{-at}(A \sin nt + B \cos nt),$$

где је

$$n = \sqrt{p^2 - a^2}.$$

Ово решење показује да је учестаност осцилације са отпорном силом мања од учестаности одговарајуће осцилације без отпора. Период осцилације T има вредност

$$T = \frac{2\pi}{n}.$$

Амплитуда осцилације зависи од чиниоца e^{-at} и, пошто је a позитивно, ова амплитуда у току времена опада; отпорна сила врши амортизацију осцилације. Логаритамски декремент (природни логаритам количника две узастопне амплитуде) износи

$$\frac{1}{2}a\mathrm{T} = \frac{a\pi}{n}.$$

II. $a^2 - p^2 > 0$. Корени су реални. Решење има облик

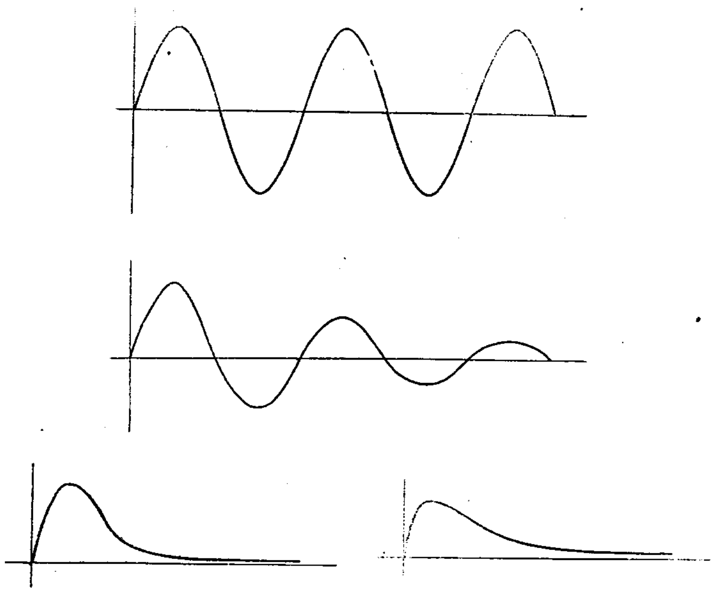
$$s = \mathrm{C}_1 e^{z_1 t} + \mathrm{C}_2 e^{z_2 t},$$

где су C_1 и C_2 интеграционе константе. Пошто су оба корена негативна, кретање има апериодичан карактер.

III. $a^2 - p^2 = 0$. Корени су једнаки. Решење има облик

$$s = (\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 t)\, e^{-at},$$

где су C_1 и C_2 произвољне константе. Кретање је опет апериодично.



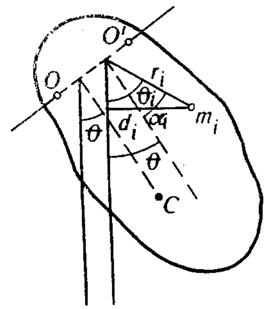
Сл. 144. Графици хармониске осцилације и осцилација са дејством отпорне силе

На слици (сл. 144) имамо график хармониске осцилације без отпора и затим три графика са отпорном силом.

i. Обртање чврстог тела око сталне осе. Физичко клатно.

Замислимо чврсто тело које се може обртати око непокретне осовине OO′ (сл. 145). Означимо тежиште тог тела тачком C. Кроз осу обртања конструишимо две равни: једну непокретну у простору и другу покретну, која пролази кроз тачку C. Угао између тих равни означимо са θ.

Поделимо тело на бескрајно мале масе; једну од таквих маса означимо са m_i; растојање ове масе од осе означимо са r_i, угао који гради ово растојање са непокретном равни са θ_i, а угао са равни, која пролази кроз тачку C са α_i, тада је $\theta_i = \theta + \alpha_i$. Јасно је да свака тачка са масом m_i за време кретања описује кружну линију. Од сила које дејствују на ову тачку узмимо у обзир само компоненту у правцу тангенте на кружну линију њене трајекторије и означимо ту компоненту са F_i. Диференцијалну једначину кретања ове тачке са тангенцијалним убрзањем можемо написати овако



Сл. 145. Обртање чврстог тела око сталне осе

$$m_i \frac{d^2 s_i}{dt^2} = \mathrm{F}_i.$$

Пошто је

$$s_i = r_i \theta_i$$

и

$$\frac{d^2\theta_i}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2\alpha_i}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{dt^2},$$

јер је α_i константно у току времена, наша једначина изгледа

$$m_i r_i \frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathrm{F}_i.$$

Помножимо сад ову једначину са r_i (леву и десну страну) и саберимо једначине, које се односе на све масе нашега тела, тада ћемо добити

$$\mathrm{I}\frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathrm{L},$$

где је

$$\mathrm{I} = \Sigma\, m_i r_i^2,$$

$$\mathrm{L} = \Sigma\, r_i \mathrm{F}_i.$$

Знак Σ (читај сигма) означава збир. Први збир, збир производа масе и квадрата растојања ове масе од осе, зове се момент инерције тела око осе. То је увек позитивна величина и у проучавању обртања тела око осе игра исту улогу коју у обичном кретању материјалне тачке игра маса тачке. То је, тако рећи, инерциони коефицијент обртања тела око осе.

Други збир, збир производа растојања r_i тачке и компоненте силе F_i у правцу тангенте на круг трајекторије те тачке, зове се момент сила око дате осе.

Сама диференцијална једначина кретања је моментна једначина обртања тела око осе.

Применимо ову једначину на проучавање кретања физичког клатна. То је тешко чврсто тело које се може обртати око хоризонталне осовине.

Израчунајмо момент L око дате осе за силе теже. Пошто је

$$F_i = -m_i g \sin\theta_i,$$

за L имамо израз

$$L = -g \Sigma m_i r_i \sin\theta_i,$$

при чему је збир проширен на све масе тела.

Проучимо збир

$$\Sigma m_i r_i \sin\theta_i .$$

Производ $r_i \sin\theta_i$ једнак је растојању d_i масе m_i од вертикалне равни; према томе наш збир можемо заменити са

$$\Sigma m_i d_i .$$

Збир производа маса и растојања свих тачака тела од равни зове се линеарни момент тела у односу на раван.

Упоредо са нашим телом замислимо материјалну тачку масе M тела са положајем у тежишту тог тела. Линеарни момент такве тачке у односу на исту вертикалну раван има вредност

$$M d = M r \sin\theta,$$

где је d растојање тежишта од равни.

Механика учи[1]) да је линеарни момент маса свих тачака тела у односу на раван једнак линеарном моменту једне материјалне тачке, тежишта, са целокупном масом тела, у односу на исту раван.

На основу ове особине линеарни момент $\Sigma m_i d_i$ можемо изједначити са линеарним моментом $M d$, а из тога извести једначину

$$\Sigma m_i r_i \sin\theta_i = \Sigma m_i d_i = M d = M r \sin\theta .$$

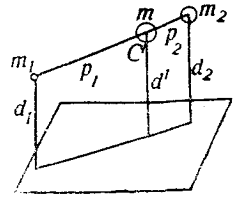
---

[1]) За доказ ове особине линеарног момента узмимо прво две тачке m_1 и m_2 (сл. 146) са растојањима d_1 и d_2 од неке равни. Збир линеарних момената тих тачака има вредност

$$m_1 d_1 + m_2 d_2 .$$

Познато је да тачка C′, тежиште тачака m_1 и m_2, дели њихово растојање у односу који је обрнут размери маса тачака, тј.

$$p_1 : p_2 = m_2 : m_1 :$$



Сл. 146. Линеарни момент маса у односу на раван

Означимо растојање тачке C′ од поменуте равни са d'. На основу познате теореме из Елементарне геометрије можемо написати пропорцију

$$p_1 : p_2 = (d' - d_1) : (d_2 - d') ;$$

после замене односа $p_1 : p_2$ са $m_2 : m_1$ имамо

$$(d' - d_1) : (d_2 - d') = m_2 : m_1 .$$

Из ове пропорције непосредно следује

$$m_1 d_1 + m_2 d_2 = (m_1 + m_2) d' = m d',$$

где је $m = m_1 + m_2$. Ова једначина потврђује наведену теорему за две материјалне тачке.

Замењујући сада две тачке m_1 и m_2 једном тачком масе m у тачки C′, можемо додати трећу тачку m_3 са растојањем d_3, тада према претходном случају имамо

$$m d' + m_3 d_3 = (m + m_3) d'',$$

одакле следује тачност теореме и за три тачке;

$$m_1 d_1 + m_2 d_2 + m_3 d_3 = (m_1 + m_2 + m_3) d''.$$

Ако проширимо овај поступак на све тачке тела, добићемо

$$\Sigma m_i d_i = M d ,$$

где је

$$M = \Sigma m_i$$

и d је растојање тежишта целог тела од равни.

Са написаном вредношћу линеарног момента диференцијална једначина кретања физичког клатна изгледа

$$I \frac{d^2 \theta}{d t^2} = -M g r \sin \theta .$$

Ставимо ли

$$n^2 = \frac{M g r}{I},$$

ова се једначина трансформише у

$$\frac{d^2 \theta}{d t^2} + n^2 \sin \theta = 0 .$$

Она је, дакле, постала идентична са једначином математичког клатна. Пошто смо за математичко клатно имали

$$n^2 = \frac{g}{R},$$

видимо да дужина R математичког клатна, које одговара физичком клатну, има вредност

$$R = \frac{I}{M r} .$$

Проучавање кретања физичког клатна своди се, дакле, на проучавање кретања математичког клатна, а пошто смо раније анализовали мале осцилације тог клатна, можемо сматрати решеним и проблем таквих осцилација физичког клатна.

§ 76. Проблеми Физике

Физика се на првим својим корацима бавила само описом природних појава одређене врсте. То је било, тако рећи, квалитативно проучавање. Касније је у Физику почео све више да продире број. Израчунавања, која су се примењивала у Физици, постала су компликованија. Затим је у Физику ушао и појам функције ојачан целокупним апаратом инфинитезималног рачуна са свим његовим гранама. Физика је тако постала тачнија и продуктивнија наука. Она је дошла у могућност не само да у свима детаљима описује физичке појаве него и да, на основу изведених рачуна, предвиђа нове појаве, које по своме дубоком значају врше преокрет у целокупном културном животу човечанства (телеграф, телефон, микроскоп, радио, телевизија, ваздухопловство итд. итд.).

У свакој књизи посвећеној Модерној физици наилазимо на таблице посматраних резултата, на формуле које следују из тих таблица и на графике који очито показују функционалне везе између физичких величина.

Навешћемо неколико примера функционалних веза и графика, који се третирају у Физици.

a. Бојл-Мариот-Геј-Лисаков закон

Бојл-Мариот-Геј-Лисаков закон тврди да између запремине v одређене количине гаса, његова притиска p и апсолутне температуре T за такозвани идеални гас постоји веза

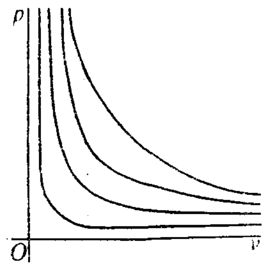
$$(1) \qquad p v = R T,$$

где је R гасна константа[1]), која зависи од количине гаса. За грам-молекул (грам-молекул или мол дате супстанце садржи онолико грама колико јединица износи атомска, односно молекуларна тежина те материје) свих гасова ова константа има исту вредност

$$R = 8{,}313 . 10^7 \frac{erg}{grad} .$$

Написана веза (1) изражава једначину стања (карактеристичну једначину) идеалног гаса. Она се зове и Клапејронова једначина.

Ако анализујемо везу између запремине и притиска гаса под условом сталне температуре ($T = const.$), график (изотерма) је равнострана хипербола у односу на асимптоте (сл. 147) као координатне осе. Са променом температуре мења се положај и облик хиперболе у координатном систему; имамо, дакле, поље равностраних хипербола.



Сл. 147. Изотерме идеалног гаса

b. Ван-дер-Валсова једначина

За неидеални гас постоји више облика за једначину стања. Један од облика изражава се Ван-дер-Валсовом једначином

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT,$$

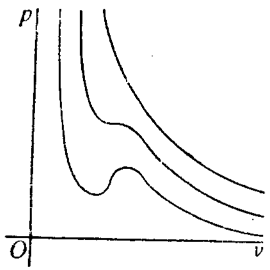
где су a и b константе, које зависе од природе гаса.

[1]) Приметимо да је на стр. 142 уведена константа R веће 273 пута од гасне константе, коју уводимо овде са истом ознаком.

Горњу једначину можемо написати и овако

(2) $$p v^3 - (b p + \mathrm{R\,T}) v^2 + a v - a b = 0\,.$$

За $a = b = 0$ једначина даје поново Бојл-Мариот-Геј-Лисаков закон. Графике једначине (2) даје слика 148.



Сл. 148. Изотерме неидеалног гаса

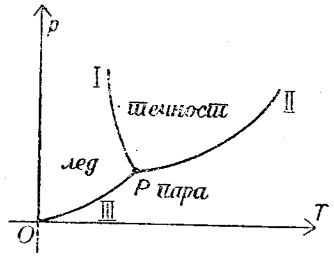
c. Агрегатна стања воде

Вода се може налазити у течном, чврстом (лед) и гасовитом стању. То су т. зв. агрегатна стања (фазе) тела. Ова стања зависе од температуре и притиска. Температуру ћемо мерити апсолутном температуром $\mathrm{T} = 273^0 + t^0$, где је t^0 мерено по Целзију.

Ако конструишемо координатни систем са температуром T на једној осовини и притиском p на другој, у општем случају свакој тачки првог квадранта (сл. 149) одговараће једно агрегатно стање. Међутим тачки P са координатама

$$\mathrm{T} = 273 + 0{,}0077$$
$$p = 4{,}6\,mm$$

одговарају сва три стања; из ове тачке, дакле, излазе све три гране које раздвајају област фаза. Прва грана припада оним тачкама, за које вода може да се налази било у стању течности било у стању леда. Друга грана је граница воде и паре и, најзад, трећа грана је граница леда и паре над њим. Тачно проучавање тих кривих може се наћи у уџбеницима физике.

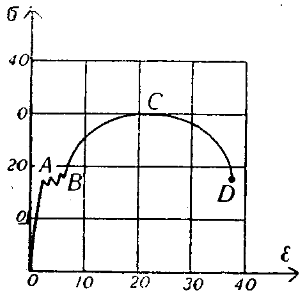


Сл. 149. График агрегатних стања воде

d. Истезање гвожђа

Покажимо још и пример истезања гвожђа. На осовини x одмерићемо истезање шипке у процентима, тј. величину ε, која је једнака

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \cdot 100,$$



Сл. 150. График истезања гвожђа

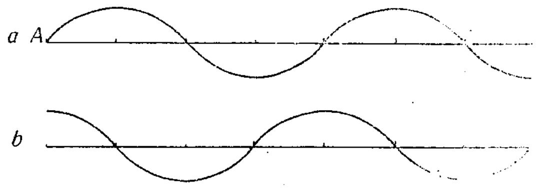
при чему су: l — дужина шипке, Δl = прираштај ове дужине при истезању. На осовини y мерићемо напрезање σ у килограмима на квадратни милиметар. У почетку, при напрезању мањем од 20 kg/mm^2 гвожђе следује Хукову закону, тј. истезање је пропорционално напрезању (*ut tensio, sic vis*). После одређене границе (тачка A) гвожђе се развлачи и под утицајем мало мањег, колебљивог напрезања. Затим треба поново повећати напрезање, али гвожђе више не следује Хукову закону. Тачка C одговара максималном напрезању које гвожђе може поднети. Ако исто напрезање делује и даље, гвожђе се шири; оно продужује да се истеже и под утицајем мањег напрезања. Тачка D одговара напрезању под чијим утицајем наступа на једном месту прекид шипке. Нацртани график (сл. 150) очито показује целокупну појаву истезања гвоздене шипке.

e. Таласно кретање

Објаснимо како се може графички претставити ширење осцилације у одређеном правцу или т. зв. таласно кретање.

Означимо са λ дужину таласа, тј. дужину на коју се простире таласно кретање за време T, периода осцилације сваке тачке. Ордината y тачке на растојању x од тачке A, која за $t = 0$ има $y = 0$, има вредност

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\mathrm{T}} - \frac{x}{\lambda}\right).$$



Сл. 151. Графици таласног кретања

Десна страна ове једначине, која се зове једначина зрака, зависи од две променљиве: од x и t. Ако ставимо $x = const.$, можемо посматрати хармониско кретање амплитуде a одређене тачке зрака. Ако ставимо $t = const.$, можемо уочити положаје свих тачака, који припадају датом зраку. На слици 151 наведена су два графика; они показују положај тачака зрака: 1) када се тачка A налази на оси зрака и 2) када она има највеће удаљење од те осе.

f. Примене извода

Појам извода фигурише у Физици врло често. Нарочито га можемо наћи у различитим дефиницијама и законима. Наведимо неколико примера.

α. Сви тзв. температурски коефицијенти изражавају се помоћу извода и то нарочито помоћу логаритамског извода, тј. количника извода и саме функције.

Ако са z означимо величину која се мења у вези са променом температуре t, онда се величина

$$\alpha = \frac{1}{z}\frac{dz}{dt}$$

зове температурски коефицијент величине z за дату температуру t. Понекад се температурски коефицијент дефинише помоћу израза

$$\frac{1}{z_0}\frac{dz}{dt},$$

где је z_0 вредност величине z за температуру од нула степени.

Ако је z дужина l, температурски коефицијент има вредност

$$\alpha = \frac{1}{l}\frac{dl}{dt}$$

а зове се и линеарни коефицијент ширења.

Сличан коефицијент за запремину изгледа

$$\alpha = \frac{1}{V}\frac{dV}{dt}.$$

За гас имамо ове температурске коефицијенте:

$$\alpha_v = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{p = const.}$$

$$\alpha_p = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{v = const.}$$

Један одговара промени запремине при константном притиску, други, обратно, промењивом притиску при константној запремини.

Лако је доказати да за гас, који се покорава Бојл-Мариот-Геј-Лисаковом закону важи једначина

$$\alpha_v = \alpha_p.$$

Заиста, из Клапејронове једначине

$$pv = RT = R(273 + t),$$

после диференцирања, добијамо

$$p\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{p = const.} = R,$$

$$v\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{v = const.} = R,$$

Из ових једначина следује

$$p\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{p = const.} = v\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{v = const.},$$

или

$$\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{p = const.} = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{v = const.},$$

а то потврђује поменуту једнакост $\alpha_v = \alpha_p$.

β. Такозвана специфичка топлота тела дефинише се такође помоћу извода

$$c = \frac{dQ}{dt},$$

где је dQ количина топлоте потребна да јединица масе датог тела повећа своју температуру за dt.

γ. Брзина V хлађења тела дефинише се помоћу извода

$$V = -\frac{dT}{d\tau},$$

где смо са T означили температуру, а са τ време.

Топлота Q, коју тело губи, изражава се обрасцем

$$Q = -\eta S \tau,$$

где су: S — површина тела, τ — време и η коефицијент који по Њутнову закону хлађења зависи од температуре тела T и температуре θ средине у којој се тело налази; тај се коефицијент η изражава обрасцем

$$\eta = h(T - \theta),$$

при чему је h константни коефицијент спољашње проводљивости. Помоћу те величине за Q имамо вредност

$$Q = -h(T - \theta)S\tau.$$

Ако диференцирамо ову једначину по времену

$$\frac{dQ}{d\tau} = -h(T-\theta)S,$$

и узмемо у обзир да је

$$\frac{dQ}{dT} = c,$$

дељењем долазимо до резултата

$$\frac{dT}{d\tau} = -\frac{hS}{c}(T-\theta).$$

То је тзв. *диференцијална једначина хлађења тела* δ. У теорији електрицитета количник

$$I = \frac{de}{dt},$$

где је e количина електрицитета и t време, претставља *јачину струје*.

Количник

$$i = \frac{dI}{df},$$

где је df површина проводника кроз коју пролази струја јачине I, зове се *густине струје*.

g. *Хипсометрички образац*

Изведимо као пример интеграције такозвани *хипсометрички образац* (ὕψος — висина, μετρέω — мерим). При извођењу овог обрасца нећемо узимати у обзир све поправке (због температуре и влажности ваздуха, географске ширине, односа висине према Земљину полупречнику), него ћемо узети у обзир само два основна фактора — смањивање стуба ваздуха са пењањем и смањивање густине ваздуха у том стубу.

Према Бојлову закону за исту количину ваздуха важи једначина

$$pv = p_0 v_0,$$

где су p_0 и p притисци ваздуха, а v_0 и v запремине на доњем и горњем нивоу ваздушног стуба висине x (сл. 152). Како су притисци пропорционални висинама B_0 и B барометарског стуба, а запремине су обрнуто пропорционалне густинама σ_0 и σ, из Бојлова закона следује

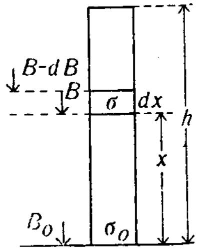
$$\frac{B}{\sigma} = \frac{B_0}{\sigma_0},$$

одакле се добија

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{B_0} B.$$

Замислимо сад да се пењемо од висине x на висину $x+dx$. Смањивање барометарске висине означимо са dB. Ако густину живе означимо са δ, притисак стуба висине dB биће пропорционалан $\delta \cdot dB$; исти ће притисак израчунат помоћу тежине ваздуха, густине σ и висине dx, бити пропорционалан σdx са истим коефицијентом пропорционалности. Пошто је dB негативно, када је dx позитивно, имамо једначину

$$\delta \cdot dB = -\sigma \cdot dx.$$



Сл. 152. Стуб ваздуха

Уврстимо ли вредност густине и решимо једначину по dx, добићемо

$$dx = -k\frac{dB}{B},$$

где је k константа.

У претходној диференцијалној једначини променљиве x и B одвојене су, те можемо интегрисати

$$x + C = -k \log B,$$

где је C произвољна константа интеграције. За одређивање ове константе, узмимо у обзир услове да је за $x=0$, $B=B_0$; према томе имамо

$$C = -k \log B_0.$$

Сад можемо написати

$$x = k \log \frac{B_0}{B}.$$

Ако барометарску висину за $x=h$ означимо са B_h, можемо хипсометрички образац дефинитивно написати у облику

$$h = \frac{B_0 \cdot \delta}{\sigma_0} \log \frac{B_0}{B_h}.$$

h. *Коначна једначина хлађења тела*

Раније смо извели диференцијалну једначину хлађења тела у облику

$$\frac{dT}{d\tau} = -\frac{hS}{c}(T-\theta),$$

где су: T — температура тела, θ — стална температура средине, τ — време, h, S, c — константе.

Написану једначину можемо изразити

$$-\lambda\, d\tau = \frac{d\,T}{T-\theta},$$

где константа λ има вредност

$$\lambda = \frac{hS}{c}.$$

После интеграције имамо

$$-\lambda\tau + C = log\,(T-\theta).$$

За почетне услове узимамо: за $\tau = 0$, $T = T_0$ и тада за C добијамо услов

$$C = log\,(T_0 - \theta);$$

на основу тога имамо једначину

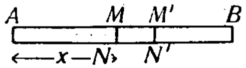
$$-\lambda\,\tau = log\,\frac{T-\theta}{T_0-\theta}.$$

Дефинитивно из ове једначине изводимо коначну једначину хлађења тела

$$T = \theta + (T_0 - \theta)\, e^{-\frac{hS}{c}\tau}.$$

i. Провођење топлоте у танком штапу

У § 73 говорили смо о парцијалним диференцијалним једначинама које често фигуришу у Математичкој физици. Сад ћемо на једном конкретном примеру показати како се решава проблем помоћу таквих једначина.



Сл. 153. Провођење топлоте у танком штапу

Нека је AB (сл. 153) неки танки штап. Означимо са x растојање произвољне тачке тог штапа од тачке A. Температуру у тој тачки означимо са T; ова температура је у општем случају функција положаја тачке и времена t, тј.

$$T = T(x, t).$$

Изразимо математички да је топлота, коју за време dt добија елемент штапа MM', као тело специфичке топлоте γ, једнака са топлотом, која преостаје у том елементу после примања топлоте кроз пресек MN и давања пресеку M'N'.

Прва топлота, као топлота тела коме се температура попела за $d\,T$, има вредност

$$d\,Q = m\,\gamma\,(d\,T)_{x=const.} = m\gamma\,\frac{\partial T}{\partial t}\,dt,$$

где је m маса елемента.

За израчунавање другог облика исте топлоте можемо пре свега написати да је

$$d\,Q = (d\,q)_x - (d\,q)_{x+dx},$$

где је $(d\,q)_x$ количина топлоте, која пролази кроз пресек MN, а $(d\,q)_{x+dx}$ кроз пресек M'N'.

Количина топлоте $(d\,q)_x$ изражава се овако

$$(d\,q)_x = -\varkappa\cdot s\cdot dt\cdot\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x,$$

где су: $\varkappa$ — коефицијент проводљивости датог материјала, s — површина пресека, dt — време трајања провођења и $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x$ температурна промена штапа израчуната на јединицу дужине на пресеку MN. Претходна једначина изражава, тако рећи, закон тока топлоте кроз један пресек у диференцијалном облику.

Слично добијамо за други пресек

$$(d\,q)_{x+dx} = -\varkappa\cdot s\cdot dt\cdot\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx}.$$

На основу добијених израза израчунавамо за $d\,Q$

$$d\,Q = \varkappa\, s\, dt\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x\right],$$

а пошто је

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,dx,$$

имамо за $d\,Q$

$$d\,Q = \varkappa\, s\, dt\cdot dx\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Ако овај израз изједначимо са раније изведеним изразом за $d\,Q$, дефинитивно имамо

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{3}$$

где је

$$a^2 = \frac{\varkappa\, s\, dx\,.\, dt}{m\gamma\,.\, dt} - \frac{\varkappa}{\sigma\gamma},$$

пошто је

$$m = \sigma s\, dx,$$

при чему је σ густина штапа и $s\,dx$ запремина елемента.

Видимо да једначина (3) спада баш у оне једначине које смо навели у § 73.

Како сад изгледа задатак о провођењу топлоте у танком штапу?

Написана диференцијална једначина одређује промену температуре у елементарном процесу. Међутим за решавање проблема у потпуности то није довољно.

Треба да имамо још два податка:

1. Почетни распоред температуре у штапу, тј. функцију

(4) $$\mathrm{T} = \mathrm{T}(x, t_0)$$

за почетни тренутак t_0, и

2. Граничне услове температуре за све време процеса, тј.

(5) $$\mathrm{T} = \mathrm{T}(0, t), \qquad \mathrm{T} = \mathrm{T}(l, t),$$

где је $l = \mathrm{AB}$ дужина штапа.

Јасно је да наведени подаци треба да буду у сагласности, тј. за $x = 0$ и за $x = l$ функција (4) треба да дâ вредности (5) за $t = t_0$.

Гранични услови могу бити дати и у другом облику. На пр., на граници штап може бити изолован, тако рећи, одвојен од термичког утицаја. Такви се услови изражавају једначинама

(6) $$\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}\right)_{x=l} = 0.$$

Покажимо сада пут којим се решава постављени задатак.

Пре свега потражимо решење једначине (3) у облику

(7) $$\mathrm{T} = e^{nt}\,(\mathrm{A}\cos kx + \mathrm{B}\sin kx),$$

где су n, k, A и B константе.

Пошто је

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} = n\mathrm{T}, \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial x^2} = -k^2\mathrm{T},$$

функција (7) биће решење једначине (3) за све вредности k, A, B, ако је

$$n = -a^2 k^2.$$

Како је једначина (3) линеарна, и збир функција (7) је такође решење ове једначине. Према томе можемо решење једначине (3) у општем облику написати

(8) $$\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{\nu} e^{-a^2 k_i^2 t}\,(\mathrm{A}_i \cos k_i x + \mathrm{B}_i \sin k_i x),$$

где је A_i, B_i, k_i низ констаната, а ν је произвољан цео позитиван број.

Покушајмо сад да задовољимо граничне услове, на пр., у облику (6).

Пошто је

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} = \sum_{i=1}^{\nu} k_i e^{-a^2 k_i^2 t}\,(-\mathrm{A}_i \sin k_i x + \mathrm{B}_i \cos k_i x),$$

први гранични услов даје

$$\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}\right)_{x=0} = \sum_{i=1}^{\nu} \mathrm{B}_i k_i^2 e^{-a^2 k_i t} \equiv 0.$$

Како овај идентитет мора да постоји за сваку вредност t, сви коефицијенти B_i морају бити једнаки нули, другим речима чланови са $\sin k_i x$ не улазе у израз (8).

Стога решење може имати само облик

$$\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{\nu} \mathrm{A}_i e^{-a^2 k_i^2 t} \cos k_i x.$$

Други гранични услов за $x = l$ за сваки члан збира даје

$$\left(-\mathrm{A}_i k_i e^{-a^2 k_i^2 t} \sin k_i x\right)_{x=l} = 0.$$

Из ове једначине следује да бројеви k_i морају задовољавати једначине

$$\sin k_i l = 0$$

и могу, дакле, имати вредности

$$k_i = \frac{i\pi}{l} \qquad i = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Решење, које задовољава оба гранична услова, изгледа

$$\text{(9)} \qquad T = \sum_{i=1}^{\nu} A_i e^{-\frac{a^2 i^2 \pi^2}{l^2} t} \cos \frac{i\pi}{l} x .$$

У овом решењу коефицијенти A_i могу имати још произвољне вредности. Произвољност ових коефицијената можемо искористити да задовољимо дати почетни распоред температуре у штапу, који је дат једначином (4).

Ако ставимо $t_0 = 0$ у (9), наше решење изгледа

$$T = \sum_{i=1}^{\nu} A_i \cos \frac{i\pi}{l} x .$$

С друге стране, функцију почетног распореда $T(x, 0)$ можемо развити у Фуријеов ред

$$T = T(x, 0) = \sum_{i=1}^{\nu} M_i \cos \frac{i\pi}{l} x ,$$

где коефицијенте M_i треба сматрати као дате величине. Упоређивање нашег решења и датог почетног распореда доводи до једначина

$$A_i = M_i \qquad i = 1, \ldots, \nu .$$

Према томе дефинитивно решење нашег проблема у свим његовим деловима изгледа

$$T = \sum_{i=1}^{\nu} M_i e^{-\frac{a^2 i^2 \pi^2}{l^2} t} \cos \frac{i\pi}{l} x .$$

Према траженој тачности решења у том развијању можемо узети два, три, четири или више чланова. У многим практичним питањима сличних задатака већ су и два члана довољна да добијемо потребну претставу о појави.

§ 77. Проблеми Хемије

Хемија је у почетку свога развоја искоришћавала само једноставна израчунавања из области Аритметике и Алгебре.

У прошлом веку, нарочито после успостављања везе између Хемије и Термодинамике, у Хемији је нашао широку примену Инфинитезимални рачун са процесима диференцијације и интеграције.

У овом веку проучавање атомског модела унело је у Хемију, тачније у Физичку хемију, готово исти математички материјал, који искоришћава савремена Небеска механика.

Данас можемо тврдити да је изучавање Хемије у целокупности немогуће без обимног математичког знања.

Овде ћемо навести неколико једноставних примера примене диференцијалног и интегралног рачуна на проучавање хемиских појава.

a. Брзина реакције

Ако је количина dx неке супстанце ступила у реакцију за време dt, тада се количник

$$\frac{dx}{dt}$$

зове брзина реакције.

b. Гулдберг-Вагеов закон

Када смо говорили о Бојл-Мариот-Геј-Лисакову закону објаснили смо појам мола или грам-молекула. Увешћемо још један хемиски појам.

У смислу Гулдберг-Вагеова закона концентрација дате активне супстанце је број мола у једном литру.

Замислимо да имамо две супстанце A_1 и A_1' која узајамно ступају у хемиску реакцију. Нека су a_1 и a_1' концентрације ових супстанца у почетку реакције. Са x означимо количину супстанце A_1 после времена t трајања хемиске реакције. После идућег интервала времена Δt ступа у реакцију у смеру од A_1 ка A_1' величина

$$\Delta_1 x = k_1 (a_1 - x) \Delta t ,$$

где је k_1 коефицијент пропорционалности, коефицијент брзине реакције у наведеном смеру.

За исто време у реакцији супротног смера од A_1' ка A_1 учествује количина

$$\Delta_2 x = k_1' (a_1' + x) \Delta t ,$$

где је k_1' коефицијент брзине реакције у том другом смеру.

Према томе дефинитивну величину, која се трансформише за време реакције, треба изразити разликом

$$\Delta x = \Delta_1 x - \Delta_2 x ,$$

тј. ставити

$$\Delta x = k_1 (a_1 - x) \Delta t - k_1' (a_1' - x) \Delta t .$$

Ако сад пређемо на граничне вредности, добићемо једначину

$$\frac{dx}{dt} = k_1(a_1 - x) - k_1'(a_1' + x).$$

Ако се реакција врши само у једном правцу, претходна једначина даје

$$\frac{dx}{dt} = k_1(a_1 - x).$$

За реакцију са n молекула једначину треба написати у облику

$$\frac{dx}{dt} = k_1(a_1 - x)^n.$$

У случају две супстанце једначину треба изразити овако

$$\frac{dx}{dt} = k_1(a_1 - x)(a_2 - x) - k_1'(a_1' + x)(a_2' + x),$$

где су ознаке очигледне.

Написане диференцијалне једначине изражавају Гулдберг-Вагеов закон. Кад је $\frac{dx}{dt} = 0$, имамо Гулдберг-Вагеову једначину равнотеже. За једну супстанцу она изгледа

$$k_1(a_1 - x) - k_1'(a_1' + x) = 0.$$

c. Унимолекуларна реакција

Унимолекуларној реакцији одговара једначина

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x).$$

За интеграцију ове једначине одвојимо променљиве

$$\frac{dx}{a - x} = k\,dt$$

и интегришимо

$$\int \frac{dx}{a - x} = kt + C.$$

Пошто је

$$\int \frac{dx}{a - x} = -\int \frac{d(a - x)}{a - x} = -\log(a - x),$$

интеграл наше једначине изгледа овако

$$-\log(a - x) = kt + C.$$

Како је у почетни тренутак $t = 0$ и $x = 0$, имамо

$$-\log a = C,$$

те, после елиминисања произвољне константе, долазимо до интеграла у облику

$$\log \frac{a}{a - x} = kt.$$

Обично се ова једначина искоришћава за одређивање константе k

$$k = \frac{1}{t} \log \frac{a}{a - x},$$

јер све величине са десне стране могу бити одређене из експеримента.

d. Бимолекуларна реакција

Бимолекуларној реакцији одговара једначина

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x).$$

За интеграцију ове једначине раздвојимо прво променљиве

$$\frac{dx}{(a - x)(b - x)} = k\,dt,$$

а затим трансформишимо леву страну

$$\frac{1}{a - b}\left(\frac{1}{b - x} - \frac{1}{a - x}\right) dx = k\,dt.$$

После ове трансформације интеграција даје

$$-\frac{1}{a - b}\Big[\log(b - x) - \log(a - x)\Big] = kt + C.$$

За елиминисање константе C искоришћујемо почетне услове за које имамо

$$-\frac{1}{a-b}[\log b - \log a] = C.$$

После тога једначину за k можемо написати

$$k = \frac{1}{(a-b)t}\log\frac{b(a-x)}{a(b-x)}.$$

И овде имамо са десне стране величине које можемо одредити из експеримената.

§ 78. Проблеми Биологије

Наука о животу, Биологија, третира питања живота биљака, животиња и човека. Према томе она обухвата Ботанику, Зоологију и Антропологију у најширем смислу тих речи.

У свима тим наукама, Математика се примењивала одавно. Примена математичких метода показала се нарочито захвална у проучавању Динамаке биолошких процеса. Довољно је само споменути Х. Хелмхолца, анатома, лекара, физиолога, физичара и сјајног математичара, који је искористио методе математике и тиме постигао изванредне успехе у чисто физиолошким доменима.

Кад већ говоримо о примени Математике у Биологији навешћемо и ову, спомена вредну, „ситницу". Методу Аналитичке геометрије, цртање графика, можда је највише популаризовала практична грана Биологије, Медицина: заиста, коме није познат график температуре на болесничкој листи болесника?

Питања примене Математике на Биологију сад су издвојена у нарочиту дисциплину — Биоматематику, којој су посвећени чак и специјални часописи.

Овде ћемо се зауставити само на два примера примене Математике у Биологији: на једначини Мичерлиха и на једначини Ферхилста.

а. Једначина Мичерлиха за принос жетве

Означимо са A максимални могући принос жетве са дате површине при најповољнијим (оптималним) условима културе.

Са y означимо принос, ако услови нису у свему оптимални. Према томе добивени принос са исте површине фактички бисмо могли повећати за $A-y$, ако би услови културе постали оптимални.

Претпоставимо сада да повећање приноса зависи од неког фактора (на пр., од количине гнојива), чије је дејство везано за величину x.

Јасно је да прираштај dx фактора x изазива одређену промену у фактичком приносу y; означимо ову промену са dy.

Једначина Мичерлиха (E. Mitscherlich) тврди да веза између dx и dy има облик

$$dy = k(A-y)\,dx,$$

где је k коефицијент пропорционалности који одговара фактору x. Та једначина показује да је прираштај фактичког приноса пропорционалан прираштају фактора, од којег зависи принос жетве, и целокупном могућном повећању тог приноса.

За интеграцију претходне једначине раздвојмо променљиве

$$\frac{dy}{A-y} = k\,dx.$$

После интеграције ова једначина даје

$$\int\frac{dy}{A-y} = -\int\frac{d(A-y)}{A-y} = -\log(A-y) = kx + C.$$

Ако претпоставимо да без фактора $x\,(x=0)$ фактичког приноса од жетве уопште нема $(y=0)$, онда константу интеграције можемо одредити из услова

$$-\log A = C.$$

После тога нашу једначину пишемо

$$-\log(A-y) = kx - \log A,$$

или

$$\log\frac{A-x}{A} = -kx.$$

Ако хоћемо да изразимо резултат помоћу декадних логаритама, треба написити

$$Log_{10}\frac{A-y}{A} = -cx.$$

где је

$$c = k\,Log_{10}\,e = 0{,}43429\,k.$$

Из претходне једначине следује за y

$$y = A(1-10^{-cx}).$$

Ако сем једног фактора желимо проучити утицај више фактора

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

можемо написати одговарајућу једначину у случају заједничког дејства свих ових фактора. Ако максималне приносе изразимо величинама

$$A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n,$$

а коефицијенте пропорционалности означимо са

$$c_1, c_2, \ldots, c_n,$$

једначина приноса жетве добија облик

$$y = A\alpha_1 (1 - 10^{-c_1 x_1})\, \alpha_2 (1 - 10^{-c_2 x_2}) \ldots \alpha_n (1 - 10^{-c_n x_n}).$$

То је теориска једначина Мичерлиха за израчунавање приноса жетве под утицајем различитих фактора у првом приближном посматрању ове појаве.

За проучавање друге апроксимације поново се враћамо на случај само једног фактора. Диференцијалну једначину можемо за овај случај написати

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = k\,\frac{A - y}{y}.$$

Ако са десне стране ставимо добијено решење, добићемо диференцијалну једначину истог садржаја али друкчије изражену

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = k\,\frac{10^{-ck}}{1 - 10^{-cx}},$$

при чему је

$$c = k \log_{10} e,$$

или

$$k = c \log 10.$$

За прелаз на другу апроксимацију ову једначину треба допунити. Са том допуном она изгледа

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = k\,\frac{10^{-cx}}{1 - 10^{-cx}} - 2\lambda x,$$

где је λ нови коефицијент, такозвани коефицијент депресије.

После интеграције ове једначине добићемо

$$\log y = \frac{k}{c \log 10} \log (1 - 10^{-cx}) - \lambda x^2 + C,$$

или

$$\log y = \log (1 - 10^{-cx}) - \lambda x^2 + C.$$

Ако од природних логаритама пређемо на декадне, добићемо једначину

$$Log_{10}\, y = Log_{10} (1 - 10^{-ck}) - \lambda \log 10 \,.\, x^2 + C,$$

одакле долазимо до резултата

$$y = A(1 - 10^{-cx}) \,.\, 10^{-\lambda_1 x^2},$$

где је $\lambda_1 = \lambda \log 10$ коефицијент, који се разликује само чиниоцем $\log 10 = 2{,}302585$ од коефицијента депресије. Произвољна константа интеграције одређена је из услова да за $\lambda = 0$ једначина одговара претходном случају.

Помоћу изведених једначина могуће је, као што тврди агрономска литература, врло добро оценити промену приноса жетве у вези са променом различитих фактора који утичу на ту жетву.

b. Једначина Ферхилста за прираштај популације

Као што смо већ поменули, у последње време развила се једна нарочита научна дисциплина Математичка биологија или Биоматематика. Ова дисциплина се бави углавном биолошком Кинетиком, тј. питањима кретања броја становништва, променама тако-зване популације.

Она проучава сем тога и питања „Борбе за опстанак" уопште, тј. понашање јединке у једној биолошкој групи или узајамне односе више група. Такав је, на пр., случај, који је третирао математичар Волтера (V. Volterra) борбе између животиња-домаћина и паразита.

Означимо са p број становника неке територије. У току интервала времена dt овај ће се број променити за dp. Од чега зависи та промена? Она је у првом, приближном посматрању пропорционална времену dt и броју становника p, тј.

$$dp = n\,p\,dt, \tag{1}$$

где је n коефицијент пропорционалности, који се зове коефицијент прираштаја становништва. Тај коефицијент можемо сматрати као разлику два коефицијента: n_1 — коефицијента наталитета — рађања и n_2 — коефицијента морталитета — смртности, тј.

$$n = n_1 - n_2.$$

Према томе би једначина прираштаја становништва изгледала

$$dp = (n_1 - n_2)\, p\, dt.$$

Ако је $n_1 > n_2$ број становништва расте; ако је $n_1 < n_2$ он опада; при $n_1 = n_2$ тај број остаје исти.

Интеграл једначине (1), коју пишемо у облику

$$\frac{dp}{p} = n\,dt$$

изгледа

$$\log p = nt + C,$$

одакле је

$$p = e^{nt + C},$$

или

$$p = p_0 e^{nt}, \tag{2}$$

где је p_0 број становника за епоху $t = 0$.

Према том интегралу за $n > 0$ број становника непрекидно расте и може постати бескрајно велики.

Међутим посматрање стварног броја становника показује да се тај број не покорава експоненцијалном закону израженом једначином (2). Отуда закључујемо да диференцијална једначина (1) није довољна за стварну оцену промене становништва. Заиста коефицијенте наталитета и морталитета не можемо сматрати сталнима.

Ако претпоставимо ограниченост територије и изолованост становништва, које се снабдева храном и другим неопходним економским благом само са те ограничене територије, број становника не може расти бескрајно, него се рашћење тог броја успорава у вези са његовим повећавањем.

Ферхилст (Ferhülst) у другом, приближном посматрању претпоставља да успоравање повећавања броја p зависи од повећавања коефицијента смртности n_2. Он даје том коефицијенту линеарну форму

$$n_2 + mp,$$

где је m константан позитивни број. Укупни коефицијент прираштаја становништва тада изгледа

$$n^* = n_1 - (n_2 + mp) = n_1 - n_2 - mp = n - mp.$$

Са таквом претпоставком имаћемо, уместо (1), једначину

$$dp = n^* p\,dt = (n - mp)\,p\,dt,$$

коју можемо написати

$$\frac{dp}{dt} = p(n - mp). \tag{3}$$

Коефицијент m зове се **гранични коефицијент популације**, јер његово присуство у претходној једначини показује да, под условом

$$n - mp = 0,$$

тј. за

$$p = \frac{n}{m},$$

број становништва достиже максималну вредност и престаје да се мења $\left(\frac{dp}{dt} = 0\right)$.

Написана једначина (3) зове се **Ферхилстова логистичка једначина**.

Извршимо интеграцију те једначине. После раздвајања променљивих добијамо

$$\frac{k\,dp}{p(k - p)} = n\,dt,$$

где смо искористили ознаку

$$k = \frac{n}{m}.$$

Како леву страну претходне једначине можемо написати

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{k - p}\right) dp,$$

једначина после интеграције даје

$$\log \frac{p}{k - p} = nt + C.$$

Константу интеграције одређујемо из услова да за $t = 0$ број становника износи p_0. Према томе имамо

$$\log \frac{p}{k - p} - \log \frac{p_0}{k - p_0} = nt = \log e^{nt}.$$

Решење ове једначине по p даје

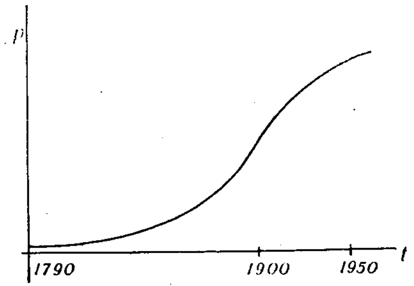
$$p = \frac{k p_0}{p_0 + (k - p_0)\,e^{-nt}} = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{p_0} - 1\right) e^{-nt}}.$$

У овој једначини имамо три константе: p_0, k, n. За одређивање ових констаната треба имати резултате три пописа становништва, тј. вредности p_1, p_2, p_3 за времена t_1, t_2, t_3. После одређивања констаната можемо израчунати број становника у будућности.

Израчунати логистички образац за Америку има облик

$$p = \frac{197\,273\,000}{1 + e^{-0{,}03134\,(t-1913{,}25)}}\,.$$

Тој једначини одговара график који је претстављен на слици 154.



Сл. 154. График популације Америке

§ 79. Проблеми Статистике

Математичкој обради статистичких података посветићемо нарочиту главу. Овде ћемо се зауставити само на једном специјалном проблему: на тумачењу и одређивању такозваног тренда. Тај појам има примену у многим научним дисциплинама и даје важан пример искоришћавања методе најмањих квадрата.

a. Тренд

Претпоставимо да се једна појава, која је одређена величином w, налази у вези са другом величином, коју ћемо означити са x. Нека је та веза дата таблицом

x_1	x_2	x_3	. .	. .	x_i	. .	. .	x_n
w_1	w_2	w_3	. .	. .	w_i	. .	. .	w_n

где низу вредности x'а одговара низ вредности величине w.

Ако у координатном систему, са осама x и w, конструишемо низ тачака (x_i, w_i), те тачке можемо спојити изломљеном линијом. Ова ће линија у свима детаљима показати све оне особине везе између w и x, које даје таблица.

Често при томе треба или детаље, незнатна колебања и отступања изоставити, да би се оценио општи карактер, основна тенденција дате изломљене линије или главни ток појаве одвојити од различитих колебања.

Прво се поставља питање: можда наша изломљена линија у ствари претставља неки равномерни процес? Зато треба одредити праву, која најмање отступа од наше изломљене линије. Права, која најмање отступа од тачака датих таблицом вредности w и x зове се праволиниски тренд дате везе између тих променљивих (trend значи правац, нагиб, тежња).

У случају праволиниског тренда поставља се веза између w и x у облику линеарне функције

$$w = a + b\,x\,, \tag{1}$$

где су a и b две константе које тек треба одредити.

Веза између w и x може бити такве природе да је права линија недовољна да претстави главну тенденцију наше изломљене линије. Тада можемо потражити линију са једначином

$$w = a + b\,x + c\,x^2 \tag{2}$$

и одредити коефицијенте a, b, c, тако да ова крива најмање отступа од наше изломљене линије. Пошто једначини (2) одговара парабола, она претставља параболички тренд, тачније параболички тренд другог реда, јер и крива са једначином

$$w = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_n x^n \tag{3}$$

такође претставља параболички тренд у општем случају n'ога реда.

Статистичари се обично у својој пракси задовољавају трендом првог или другог реда, тј. праволиниским или параболичким.

Показаћемо како се одређују та два тренда.

b. Праволински тренд

Нека је дат низ тачака

$$(x_i,\ w_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Треба повући праву са једначином

$$w = a + b\,x$$

тако да она најмање отступа од датих тачака.

За сваку поједину тачку отступање има вредност

$$w_i - a - b\,x_i\,.$$

Према принципу најмањих квадрата збир квадрата тих отступања треба да буде најмањи, тј.

$$\sum_{i=1}^{n}(w_i - a - b\,x_i)^2 = f(a, b) = Min\,.$$

Познати услови екстремума дају

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}(w_i - a - b\,x_i) = 0\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}x_i\,(w_i - a - b\,x_i) = 0;$$

одавде изводимо за одређивање a и b ове једначине

$$(4)\qquad \begin{aligned} &n\,a + b\sum_{i=1}^{n}x_i - \sum_{i=1}^{n}w_i = 0\,,\\ &a\sum_{i=1}^{n}x_i + b\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}w_i\,x_i = 0\,. \end{aligned}$$

Уведимо такозвану средњу тачку, чије координате x_m, w_m задовољавају услове

$$n\,x_m = \sum_{i=1}^{n}x_i\,,$$

$$n\,w_m = \sum_{i=1}^{n}w_i\,,$$

тј. имају за координате средње аритметичке вредности координата таблице.

Узимајући ову тачку за почетак координата, уведимо нове координате X_i, W_i једначинама

$$x_i = x_m + X_i\,,$$

$$w_i = w_m + W_i\,.$$

Јасно је да нове координате задовољавају услове

$$\sum_{i=1}^{n}X_i = 0\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n}W_i = 0\,.$$

За нове координате услови екстремума (4) добијају облик

$$(5)\qquad a + b\,x_m - w_m = 0\,,$$

$$(6)\qquad b\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \sum_{i=1}^{n}W_i\,X_i = 0\,.$$

Из једначине (5) следује да права тренда пролази кроз средњу тачку. Друга једначина одређује угаони коефицијент тренда у облику

$$b = \frac{\Sigma\,W_i\,X_i}{\Sigma\,X_i^2}\,.$$

Помоћу координата средње тачке и вредности угаоног коефицијента једначину праволиниског тренда у старим координатама можемо написати у облику

$$(7)\qquad w = w_m + b\,(x - x_m)\,.$$

Као пример узмимо одређивање тренда југословенског извоза у 1921—1930.

Објаснимо таблицу на којој је наведен поступак одређивања праволиниског тренда. Редом објашњавамо садржај сваког ступца таблице.

I. Нумерисани су подаци и утврђен је њихов број: $n = 10$.

II. Наведене су вредности промењиве x_i. То је време означено годинама.

III. Наведене су вредности промењиве w_i. То је извоз Југославије рачунат у хиљадама тона. Ступци II и III, и само они, одговарају датим подацима. Из података II утврђујемо средњу аритметичку вредност

$$x_m = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\,.$$

Приметимо да у неким случајевима није потребно израчунавање самог збира $\sum_{i=1}^{n} x_i$ за израчунавање x_m. Пошто је, на пр., у нашем случају довољно израчунати отступање, рецимо, од 1920 године, потребно је одредити средњу аритметичку вредност бројева од 1 до 10. По правилу аритметичке прогресије имамо

$$\frac{1+10}{2} = 5{,}5 .$$

Према томе средњем тренутку времена одговара

$$x_m = 1925{,}5 .$$

IV. У овом ступцу израчунавамо вредност променљиве X_i, величину отступања сваког тренутка од средње вредности, тј.

$$X_1 = x_1 - x_m = 1921 - 1925{,}5 = -4{,}5 \text{ итд.}$$

Израчунате вредности можемо проверити условом

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 ,$$

који оне треба да задовољавају.

Из таблице III израчунавамо средњу вредност w_m. У томе циљу израчунавамо прво збир

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 38940 ,$$

а затим средњу аритметичку вредност

$$w_m = a = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{n} = \frac{38940}{10} = 3894 .$$

Са добивеном вредношћу w_m одређујемо вредности разлика

$$W_i = w_i - w_m = w_i - a .$$

Резултате можемо проверити поново на основу услова

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = 0 .$$

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
i	x_i	w_i	X_i	$W_i = w_i - a$	$X_i W_i$	X_i^2	$\bar{w}_i$	$w_i - \bar{w}_i$	$w_i : \bar{w}_i$	$(w_i - \bar{w}_i) : \bar{w}_i$
1	1921	1660	−4,5	−2234	+10.053	20,25	2299,7	−639,7	0,72	−0,28
2	1922	2214	−3,5	−1680	+5.880	12,25	2654,0	−440,0	0,91	−0,09
3	1923	3026	−2,5	−868	+2.170	6,25	3008,3	+17,7	1,01	+0,01
4	1924	3916	−1,5	+22	−33	2,25	3362,6	+553,4	1,16	+0,16
5	1925	4398	−0,5	+504	−252	0,25	3716,9	+681,1	1,18	+0,18
6	1926	4885	+0,5	+991	+495,5	0,25	4071,1	+813,9	1,20	+0,20
7	1927	4251	+1,5	+357	+535,5	2,25	4425,4	−174,4	0,96	−0,04
8	1928	4527	+2,5	+633	+1.582,5	6,25	4779,7	−252,7	0,95	−0,05
9	1929	5330	+3,5	+1436	+5.026	12,25	5134,0	+196,0	1,04	+0,04
10	1930	4733	+4,5	+839	+3.775,5	20,25	5488,3	−755,3	0,86	−0,14
$n =$ 10	$x_m =$ 1925,5	$\Sigma w_i =$ 38.940	$\Sigma X_i =$ 0	$\Sigma W_i =$ 0	$\Sigma X_i W_i =$ 29.233	$\Sigma X_i^2 =$ 82,5		$\Sigma (w_i - \bar{w}_i) =$ 0	$\Sigma (w_i : \bar{w}_i) =$ 9,99	$\Sigma [(w_i - \bar{w}_i) : \bar{w}_i] =$ −0,01

$$w_m = a = \frac{\Sigma w_i}{n} = \frac{38940}{10} = 3894 . \qquad b = \frac{\sum X_i W_i}{\sum X_i^2} = \frac{29233}{82{,}5} \approx 354{,}3$$

$$\bar{w} = 3894 + 354{,}3\, X = 3894 + 354{,}3\,(x - 1925{,}5)$$

VI. Затим се израчунавају величине производа $X_i W_i$, које се зову **линеарни моменти** величине W_i у односу на праву паралелну осовини w кроз средњу тачку, и збир свих тих момената

$$\sum_{i=1}^{n} W_i X_i = 29233,$$

који је потребан за израчунавање коефицијента b.

Приметимо да ту исту вредност линеарног момента можемо добити и непосредно из вредности w_i. Заиста, имамо

$$\sum_{i=1}^{n} w_i X_i = \sum_{i=1}^{n} (w_m + W_i) X_i = w_m \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} W_i X_i = \sum_{i=1}^{n} W_i X_i,$$

при чему смо искористили услов

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0.$$

Од природе бројева w_i зависи који је начин згодније искористити за израчунавања тог линеарног момента. Обично је искоришћавање бројева W_i згодније, јер су они мањи од бројева w_i.

VII. Дизање на квадрат сваког броја X_i и сабирање свих тих квадрата може бити знатно олакшано у случају када су сви бројеви пропорционални било парним било непарним бројевима, другим речима, када је разлика између две суседне вредности X_i стална.

У случају непарног броја података ($n = 2k + 1$) вредности X_i пропорционалне су бројевима

$$-k, -(k-1), \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, k-1, k.$$

Ако фактор пропорционалности означимо са λ, имамо

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 2\lambda^2 (1^2 + 2^2 + \ldots, + k^2).$$

Како збир низа квадрата природних бројева од 1 до k има вредност[1])

$$\frac{k}{6}(k+1)(2k+1),$$

[1]) Израчунавање збира

$$S_m(k) = 1^m + 2^m + 3^m + \ldots + k^m,$$

где су m и k природни бројеви, врши се на основу једног од рекурзивних образаца

можемо ставити

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \frac{1}{3} k \lambda^2 (k+1)(2k+1) = \frac{1}{12} \lambda^2 n (n^2 - 1).$$

У случају парног броја, као што је у нашем примеру са $n = 10$ имамо два низа бројева

$$\pm 0{,}5; \quad \pm 1{,}5; \quad \pm 2{,}5; \ldots$$

који су пропорционални бројевима

$$\pm 1, \quad \pm 3, \quad \pm 5, \ldots$$

са фактором пропорционалности $\mu = \frac{1}{2}$.

(*) $(k+1)^{m+1} = 1 + \binom{m+1}{1} S_m(k) + \binom{m+1}{2} S_{m-1}(k) + \ldots + \binom{m+1}{m} S_1(k) + S_0(k).$

(**) $0 = k^{m+1} - \binom{m+1}{1} S_m(k) + \binom{m+1}{2} S_{m-1}(k) - \ldots + (-1)^k \binom{m+1}{m} S_1(k) + (-1)^{k+1} S_0(k),$

где су уведене ознаке биномних коефицијената

$$\binom{m}{p} = \frac{m(m-1)\ldots[m-(p-1)]}{1.2.3\ldots p}.$$

Докажимо тачност првог обрасца методом индукције, тј. прелазом од k на $k+1$.

1. Образац (*) важи за $k = 1$, јер у том случају имамо једнакост

$$2^{m+1} = 1 + \binom{m+1}{1} + \binom{m+1}{2} + \ldots + \binom{m+1}{m} + 1,$$

која изражава познату особину биномних коефицијената.

2. Докажимо сада тачност обрасца (*) за $k+1$, ако он важи за k. У томе циљу развимо израз $[(k+1)+1]^{m+1}$ према биномном обрасцу

$$[(k+1)+1]^{m+1} = (k+1)^{m+1} + \binom{m+1}{1}(k+1)^m + \binom{m+1}{2}(k+1)^{m-1} + \ldots + \binom{m+1}{m}(k+1) + 1.$$

Први члан у том изразу заменимо на основу обрасца (*) и саберимо са осталим члановима

$$[(k+1)+1]^m = 1 + \binom{m+1}{1} S_m(k) + \binom{m+1}{2} S_{m-1}(k) \ldots + \binom{m+1}{m} S_1(k) + S_0(k) + \binom{m+1}{1}(k+1)^m + \binom{m+1}{2}(k+1)^{m-1} + \ldots + \binom{m+1}{m}(k+1) + 1.$$

Пошто је

$$S_m(k) + (k+1)^m = S_m(k+1),$$

$$S_{m-1}(k) + (k+1)^{m-1} = S_{m-1}(k+1) \text{ итд.}$$

долазимо до резултата

$$[(k+1)+1]^{m+1} = 1 + \binom{m+1}{1} S_m(k+1) + \binom{m+1}{2} S_{m-1}(k+1) + \ldots + \binom{m+1}{m} S_1(k+1) + S_0(k+1)$$

који потврђује тачност обрасца (*) за $k+1$.

Како збир низа квадрата непарних бројева од 1 до $2p-1$ има вредност

$$\frac{1}{3}\,p\,(4p^2-1)\,,$$

у нашем случају имамо

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \, 2\, . \,(1^2+3^2+5^2+7^2+9^2) =$$

$$= \frac{1}{4}\,.\,2\,.\,\frac{1}{3}\,.\,5\,(4\,.\,5^2-1) = \frac{5}{6}\,.\,99 = 82{,}5\,.$$

Вредности $\sum_{i=1}^{n} W_i X_i$ и $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ омогућују израчунавање угаоног коефицијента праволиниског тренда

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} W_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} = \frac{29233}{82{,}5} \approx 354{,}3\,.$$

После овога можемо једначину тренда написати према (7) у облику

$$\overline{w} = 3894 + 354{,}3\,X\,,$$

где смо са $\overline{w}$ означили вредност југословенског извоза која одговара праволиниском тренду.

На сличан начин можемо доказати и образац (**).

Из (*) узастопно изводимо

$m=0$ $\quad (k+1)^1 = 1 + S_0(k)$, одакле је $S_0(k) = k$.

$m=1$ $\quad (k+1)^2 = 1 + 2\,S_1(k) + S_0(k)$, одакле је $S_1(k) = \frac{1}{2}\,k\,(k+1)$.

$m=2$ $\quad (k+1)^3 = 1 + 3\,S_2(k) + 3\,S_1(k) + S_0(k)$, одакле је $S_2(k) = \frac{1}{6}\,k\,(k+1)\,(2k+1)$

итд.

Израчунавање истих степена само парних бројева врши се према обрасцу

$$2^m + 4^m + \ldots + (2p)^m = 2^m\, S_m(p)\,.$$

За збир степена непарних бројева имамо

$$1^m + 3^m + 5^m + \ldots + (2p-1)^m = S_m(2p) - 2^m\, S_m(p)\,,$$

одакле, на пр., изводимо

$$1^2 + 3^2 + \ldots + (2p-1)^2 = \frac{1}{3}\,p\,(4p^2-1)\,.$$

VIII. Ова таблица даје трендске вредности извоза израчунате за све дате тренутке.

IX. У овом ступцу наведена су отступања датих вредности извоза од трендских вредности. Збир тих отступања мора бити једнак нули. Ова особина служи за проверавање добијених бројева.

X и XI. За оцену тренда обично се рачунају или односи $w_i : \overline{w}_i$, који се зову **т р е н д с к и о д н о с и**, или изрази $\dfrac{w_i - \overline{w}_i}{\overline{w}_i}$, који се зову **р е л а т и в н а о т с т у п а њ а**. Множењем тих отступања са сто добијамо релативна отступања изражена у процентима.

c. П а р а б о л и ч к и т р е н д

Ако праволиниски тренд није довољан за претставу главне тежње дате линије, може се конструисати **п а р а б о л и ч к и т р е н д**.

За одређивање тог тренда узимамо једначину

$$w = a + b\,X + c\,X^2,$$

при чему координату X рачунамо од средње тачке, тако да је

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0\,, \tag{8}$$

а према томе је и

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^3 = 0\,, \tag{9}$$

ако свакоме позитивном X_i одговара негативна вредност $-X_i$ исте апсолутне вредности.

Израчунавамо збир квадрата отступања трендских вредности од датих вредности w_i. Тако добивамо ову функцију од три непознате вредности a, b, c

$$f(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} (w_i - a - b\,X_i - c\,X_i^2)^2.$$

Из познатих правила за екстремум функције више променљивих следују услови

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{n} (w_i - a - b\,X_i - c\,X_i^2) = 0\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{n} X_i\,(w_i - a - b\,X_i - c\,X_i^2) = 0\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = -2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2\,(w_i - a - b\,X_i - c\,X_i^2) = 0\,.$$

Ако узмемо у обзир једначине (8) и (9), долазимо до једначина за одређивање a, b, c

$$\sum_{i=1}^{n} w_i - n\,a - c \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i X_i - b \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0\,.$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i X_i^2 - a \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - c \sum_{i=1}^{n} X_i^4 = 0\,.$$

Решење ових линеарних једначина изгледа

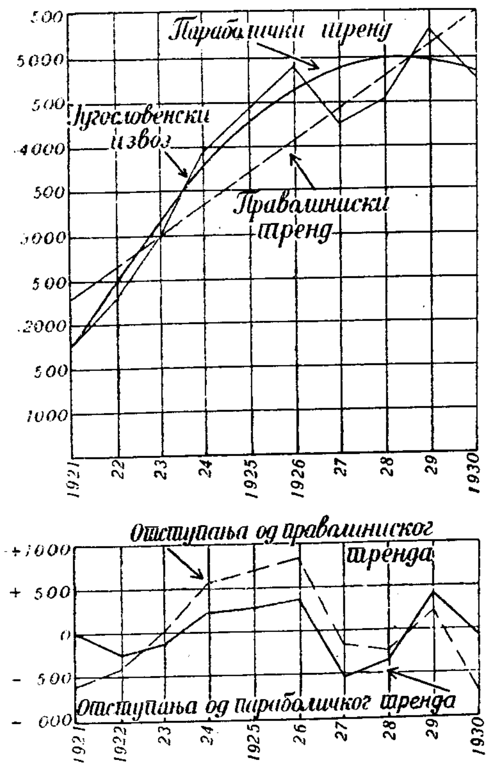
$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{i=1}^{n} X_i^4 - \sum_{i=1}^{n} w_i X_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n \sum_{i=1}^{n} X_i^4 - \left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right]^2}\,,$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}\,,$$

$$c = \frac{n \sum_{i=1}^{n} w_i X_i^2 - \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n \sum_{i=1}^{n} X_i^4 - \left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right]^2}\,.$$

Не заустављајући се на детаљима израчунавања, даћемо за наш конкретни пример само резултат

$$\overline{w} = 4385{,}9 + 354{,}3\,X - 55{,}9\,X^2.$$



Сл. 155. Праволиниски и параболички тренд југословенског извоза. Отступања извоза од тих трендова

На слици 155 наведен је график југословенског извоза 1921—1930 г. и два његова тренда — праволиниски и параболички. Испод тих графика показана су отступања датих података од праволиниског и параболичког тренда.

Вежбање.

Допунити таблицу југословенског извоза подацима још за три године

1931,	1932,	1933,
3323,	2398,	2930,

и извршити сва израчунавања наведена у тексту за цео период 1920—1933 г.

ГЛАВА X

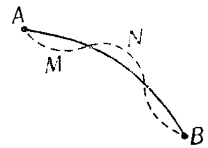
ЕКСТРЕМАЛНИ ПРИНЦИПИ. ВАРИЈАЦИОНИ РАЧУН

§ 80. Екстремални принципи

Решавајући задатке (§ 45) о одбијању и преламању светлости, видели смо да пут светлости стоји у вези са минимумом времена за које светлост прелази из једне тачке у другу. Ферма (1608—1665) је ову екстремалну особину светлости узео за основу теорије светлости. Тако је поникао нарочити екстремални принцип — Ферматов принцип.

Теорију кретања материјалне тачке или читавог система материјалних тачака можемо такође обухватити општим принципом формулисаним помоћу екстремума једне функције. То је такозвани принцип најмањег дејства. Садржај тог принципа објаснићемо на једном једноставном примеру.

Замислимо материјалну тачку која је из положаја A (сл. 156), под утицајем датих сила, прешла у положај B. Назовимо тај њен стварни пут директним путем тачке између A и B. Са t_0 и t_1 означимо тренутке времена када се тачка налазила у A и B.



Сл. 156. Директни и заобилазни пут тачке

Упоредо са овим директним путем замислимо други пут тачке који задовољава услове:

1. Време кретања је исто: од t_0 до t_1.
2. Крајеви трајекторије су исти: тачке A и B.
3. Ако тачка није била слободна, на пр., ако је била принуђена да се креће по некој површини, њено је кретање и на том новом путу ограничено на исти начин.

Пут тачке, који задовољава претходне услове, но није директни пут, зове се заобилазни пут.

Уведимо сад једну функцију у облику интеграла

$$W = \int_{t_0}^{t_1} (T - \Pi)\, dt,$$

где је T тзв. жива сила тачке или њена кинетичка енергија, а П је потенцијална енергија тачке. Жива сила Т једнака је половини производа масе тачке и квадрата брзине, тј.

$$T = \frac{m v^2}{2},$$

где је m маса тачке и v њена брзина. Потенцијална енергија, или енергија положаја тачке има особину да њен диференцијални елемент $d\Pi$, са супротним знаком, изражава рад сила које дејствују на тачку на елементарном померању.

Функција W, изражена написаним интегралом, зове се дејство.

Упоредимо вредност дејства по заобилазним путевима са вредношћу по директном путу. Принцип најмањег дејства тврди да вредност дејства по директном путу има, у поређењу са вредностима по заобилазним путевима, екстремалну вредност, наиме под извесним условима, најмању. Према реченом принцип најмањег дејства спада у екстремалне принципе.

Принцип најмањег дејства игра не само у Механици него и у другим наукама огромну улогу. Филозофи су склони да доказују да овај принцип има универзални значај и да сва збивања у васиони иду у сагласности са овим принципом.

Принцип најмањег дејства формулисан је како у Механици, тако и у другим наукама на више различитих начина. У широком практичном смислу тај се принцип изражава као принцип најмањих утрошака са највећим резултатима. У овој форми он се јавља као основа свеколике наше материјалне културе.

Као што смо видели, принцип најмањег дејства изражен је помоћу екстремума једног одређеног интеграла. Ако овај принцип поставимо као основу Механике материјалне тачке, треба из услова екстремалности интеграла извести диференцијалне једначине кретања тачке.

Проблеми одређивања непознатих функција, које дају одређеним интегралима екстремалне вредности, спадају у нарочиту грану Математике која се зове Варијациони рачун.

Проучимо најпростији пример овог рачуна.

§ 81. Варијација интеграла

Пре свега формулишимо најједноставнији задатак Варијационог рачуна.

Написан је одређени интеграл

$$(1) \qquad I = \int_a^b f(x, y, y')\, dx,$$

где су a и b константне границе интеграла, f је дата функција независно промењљиве x, функције y и извода y' функције y по x. Треба одредити непознату функцију y тако да интеграл I добије екстремалну вредност.

Крива линија са једначином

$$(2) \qquad y = y(x),$$

којој одговара екстремална вредност интеграла I, зове се његова екстремала.

При решавању овог задатка зауставићемо се само на потребним условима за екстремум интеграла. Проучавање довољних услова излази далеко ван оквира ове књиге.

Ако упоредо за функцијом (2), која вредност нашег интеграла доводи до екстремалне вредности, узмемо другу функцију

$$(3) \qquad \bar{y} = y(x)$$

и ставимо је у наш интеграл, вредност интеграла биће нова. Ову нову вредност означићемо са $\bar{I}$. Према томе наш интеграл добија прираштај са вредношћу

$$\bar{I} - I.$$

Ова разлика зове се варијација интеграла; она се добија када од функције (2) пређемо ма на коју функцију (3).

Варијација интеграла се разликује од обичног прираштаја функције тиме што зависи не од прираштаја једне или више промењљивих него од промене функције y, од које зависи интеграл, у целокупном интервалу од a до b.

Варијација интеграла означује се са δI (читај делта I). Дакле

$$\delta I = \bar{I} - I.$$

Разлика $\bar{y}(x) - y(x)$ зове се варијација функције y и обележава се са δy, тј.

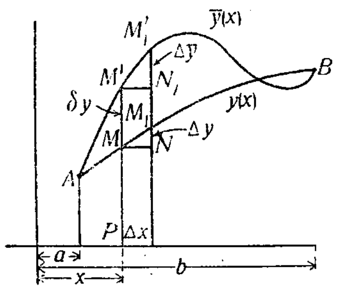
$$\delta y = \bar{y}(x) - y(x).$$

Покажимо на слици разлику између прираштаја функције и њене варијације. Замислимо између две тачке A и B (сл. 157) две криве: $y = y(x)$ и $y = \bar{y}(x)$. Са M означимо тачку на првој кривој, са M′ на на другој. Обе тачке имају исту апсцису x.

Дужина M M′ даје вредност варијације функције, јер је

$$\mathrm{M\,M'} = \mathrm{P\,M'} - \mathrm{P\,M} = \bar{y}(x) - y(x) = \delta y\,.$$

Ако сад x добије прираштај Δx, y ће добити прираштај Δy коме одговара дуж $\mathrm{N\,M_1}$, а $\bar{y}$ има прираштај $\Delta \bar{y} = \mathrm{N_1\,M_1'}$.



Сл. 157. Варијација и прираштај функције

Обратимо пажњу да крива $y = \bar{y}(x)$ обично задовољава услов да бескрајно мало отступа од криве $y = y(x)$, тј. да је δy бескрајно мала величина.

Ако узмемо да упоредимо вредност интеграла I за екстремалу $y(x)$ са вредношћу $\bar{\mathrm{I}}$ за бескрајно блиску криву $\bar{y}(x)$, тј. да проучимо варијацију $\delta\mathrm{I} = \bar{\mathrm{I}} - \mathrm{I}$, треба поступити слично као у случају обичног екстремума функције. Тамо смо први диференцијал, односно извод, изједначавали са нулом, овде ћемо прву варијацију, тј. главни део варијације, коју ћемо опет означити са $\delta\mathrm{I}$, ставити да је једнака нули, тј.

$$\delta\mathrm{I} = 0.$$

Ово је потребан услов за екстремум одређеног интеграла.

Да видимо сад како се из овог услова може извести диференцијална једначина за одређивање непознате функције y.

§ 82. Ајлерова једначина

За прву варијацију нашег интеграла треба израчунати

$$\delta\mathrm{I} = \delta\int_a^b f(x, y, y')\,dx\,.$$

Пошто су границе овог интеграла сталне, интеграл се мења само утолико уколико се мења само његова подинтегрална функција; према томе варијација интеграла биће једнака интегралу варијације, тј.

$$\delta\mathrm{I} = \int_a^b \delta f(x, y, y')\,dx\,.$$

Диференцијал dx не зависи од промењиве функције y и зато не подлеже варирању.

Варијација $\delta f(x, y, y')$, као бескрајно мала величина, која зависи само од промене y'а, значи и од y', има вредност

$$\delta f(x, y, y') = \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'.$$

Ставимо ли ову вредност у варијацију интеграла, добићемо

$$\delta\mathrm{I} = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right) dx =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\delta y\,dx + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\,dx\,.$$

Како ова два процеса, диференцирање и варирање, не зависе један од другог, можемо написати

$$\delta y' = \delta\frac{dy}{dx} = \frac{\delta\,dy}{dx} = \frac{d\,\delta y}{dx} = \frac{d}{dx}\delta y;$$

тада ће други интеграл изгледати

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d}{dx}\delta y\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'}\,d\,\delta y\,.$$

Делимична интеграција овог израза даје

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'}\,d\,\delta y = \Big/_a^b \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y - \int_a^b \delta y\,d\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right),$$

где је употребљен познати знак замене.

Пошто крива $y = \bar{y}(x)$ такође пролази кроз сталне тачке A и B, варијација δy за ове тачке има вредност нулу, те је стога и први члан претходне разлике једнак нули.

Искористимо сад добијене резултате и напишимо нашу варијацију у облику

$$\delta\mathrm{I} = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\,dx\,.$$

Као што смо видели, услов екстремума захтева да δI буде једнако нули за сваку блиску криву $\overline{y}(x)$, тј. за произвољну вредност варијације δy. То може бити само под условом, ако је коефицијент код δy нула. Тако долазимо до једначине

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Написана једначина зове се *Ајлерова једначина Варијационог рачуна*. Интеграција ове једначине даје тражену екстремалу.

Пошто функција f садржи y', а први члан једначине тражи још једно диференцирање по x, Ајлерова једначина је другога реда у односу на непознату функцију y.

§ 83. Примери

Решимо неколико примера.

a. Најкраће растојање између две тачке у равни

Нека су дате у равни две тачке A и B са координатама x_0, y_0 и x_1, y_1. Треба доказати да је права најкраће растојање између ових тачака.

Узмимо образац (§ 74, d, γ) за дужину лука криве у Декартовим координатама

$$I=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Како је овде

$$f=\sqrt{1+y'^2},$$

Ајлерова једначина изгледа

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0.$$

Из ове једначине одмах следује

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=const.$$

или

$$y'=const.=\alpha.$$

Ако интегришемо још једанпут, добијамо

$$y=\alpha x+\beta, \tag{1}$$

где су α и β две произвољне константе интеграције. Ове константе лако се одређују из услова да права (1) пролази кроз тачке A и B.

На тај начин смо показали да је доиста права најкраће растојање између две тачке у равни.

b. Најмања обртна површина

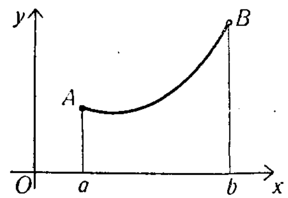
У равни су дате две тачке A и B и оса Ox (сл. 158). Треба спојити ове тачке кривом у тој равни тако да се обртањем те криве око осе Ox добије најмања површина.

Како се обртна површина изражава (§ 74, d) обрасцем

$$I=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

функција f има вредност

$$f=y\sqrt{1+y'^2}.$$



Сл. 158. Минимална обртна површина

Према томе Ајлерова једначина изгледа

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}(y\sqrt{1+y'^2})-\sqrt{1+y'^2}=0.$$

Пошто функција f у овом случају не зависи од променљиве x, наша једначина има интеграл

$$y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f=const.=\alpha';$$

што се непосредним диференцирањем може и проверити.

У нашем примеру тај интеграл изгледа

$$y'\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}-y\sqrt{1+y'^2}=\alpha'.$$

После трансформације тог интеграла долазимо до једначине

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}=\alpha,$$

где је $\alpha=-\alpha'$. Решење ове једначине по y' даје

$$y' = \frac{1}{\alpha}\sqrt{y^2 - \alpha^2},$$

одакле после раздвајања промењљивих долазимо до квадратуре

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - \alpha^2}} = \frac{dx}{\alpha};$$

интеграција ове једначине доводи до резултата

$$\log(y + \sqrt{y^2 - \alpha^2}) = \frac{x + \beta'}{\alpha},$$

где је β' нова произвољна константа. Претходну једначину трансформишемо овако. Прво од једнакости логаритама прелазимо на једнакост бројева

$$y + \sqrt{y^2 - \alpha^2} = \alpha e^{\frac{x+\beta}{\alpha}},$$

где је

$$\beta = \beta' - \alpha \log \alpha,$$

а затим израчунавамо разлику

$$y - \sqrt{y^2 - \alpha^2} = \alpha e^{-\frac{x+\beta}{\alpha}}.$$

Из ове две једначине одређујемо y

$$y = \frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{x+\beta}{\alpha}} + e^{-\frac{x+\beta}{\alpha}}\right).$$

Изведена једначина одређује криву линију која се зове л а н ч а н и ц а. Облик ланчанице има, на пр., тежак ланац, учвршћен у тачкама A и B, под утицајем силе теже са правцем нормале на осу обртања Ox.

c. Диференцијална једначина кретања материјалне тачке

Најзад, изведимо из принципа најмањег дејства диференцијалну једначину кретања материјалне тачке. Зауставимо се на случају само једне промењљиве координате x, тј. на праволиниском кретању. Пошто је вредност брзине $\frac{dx}{dt} = x'$, жива сила тачке масе m израчунава се овако

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m x'^2.$$

Ако претпоставимо да потенцијална енергија Π тачке зависи само од положаја те тачке, тј.

$$\Pi = \Pi(x),$$

за дејство ћемо имати интеграл

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} m x'^2 - \Pi\right) dt.$$

Напишимо сада Ајлерову једначину стављајући

$$f(t, x, x') = \frac{1}{2} m x'^2 - \Pi(x).$$

Пошто је

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = m x', \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{d\Pi}{dx},$$

Ајлерова једначина даје

$$\frac{d}{dt} m x' + \frac{d\Pi}{dx} = 0,$$

или

(2) $$m x'' = -\frac{d\Pi}{dx}.$$

Израз $-\frac{d\Pi}{dx}$ не претставља ништа друго до силу X, која дејствује на тачку. Заиста, из услова

(3) $$-\frac{d\Pi}{dx} = X$$

имамо

$$-d\Pi = X\,dx,$$

а тиме се потврђује да диференцијал $d\Pi$, са промењеним знаком, има вредност рада силе X на датом елементарном померању dx.

Из (2) на основу (3) долазимо до једначине

$$m x'' = X,$$

а ова једначина претставља диференцијалну једначину промењљивог кретања материјалне тачке.

Вежбање.

Показати помоћу Варијационог рачуна да је б р а х и с т о х р о н а у пољу силе теже циклоида. Брахистохрона је крива којом материјална тачка из почетног положаја без почетне брзине доспева у други положај за најкраће време.

§ 84. Директна метода

Као што смо већ видели, решење проблема Варијационог рачуна стоји у вези са интеграцијом диференцијалне, а у општем случају диференцијалних једначина. Постоје међутим методе, које омогућују да се тај проблем реши и директним путем, без примене диференцијалних једначина. Те се методе зову **директне методе Варијационог рачуна**. Прву такву методу предложио је математичар **Валтер Риц** (Walther Ritz). Показаћемо у чему се састоји **Рицова метода**. Суштина ове методе је врло једноставна.

Узмимо да треба одредити функцију y, за коју интеграл

$$\text{(1)} \qquad I = \int_a^b f(x, y, y')\, dx$$

има екстремалну вредност. Функција f је дата, a и b су константне величине.

Потражимо приближну вредност y_m функције y у облику

$$\text{(2)} \qquad y_m = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + \ldots + c_m \psi_m,$$

где су $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ дате функције x'а, а $c_1, c_2, \ldots, c_m$ константе, које треба одредити. Те функције могу бити или степени x'а, или неки полиноми по x, или ма какве друге функције, на пр., тригонометриске, и тада решење y_m стоји у вези са Фуријеовим редом.

Уврстимо функцију y_m у наш интеграл (1) и извршимо интеграцију. Добићемо наш интеграл као функцију констаната $c_1, c_2, \ldots, c_m$, тј.

$$I = F(c_1, c_2, \ldots, c_m).$$

Изаберимо сад константе $c_1, c_2, \ldots, c_m$ тако да интеграл I добије екстремалну вредност. Као што знамо те константе морају задовољавати услове

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial F}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial c_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial c_m} = 0.$$

Функција y_m из (2) са константама одређеним из једначина (3) даје приближно решење нашег проблема. Кад m тежи бесконачности, функција y_m тежи тачном решењу тог проблема. Конвергентност Рицова поступка, под извесним условима, први је доказао академик Н. М. Крылов.

Узмимо што једноставнији конкретни пример.

Између тачака A(0, 0) и B$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ треба повући криву која је екстремала интеграла

$$\text{(4)} \qquad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} y'^2 - \frac{1}{2} y^2 + x y'\right) dx.$$

Непознату функцију y претставимо тригонометриским редом од само три члана

$$\text{(5)} \qquad y = c + c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Из услова да наша крива мора да пролази кроз тачке A и B имамо

$$y(0) = 0 = c + c_1,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = c + c_2,$$

одакле су

$$\text{(6)} \qquad c_1 = -c, \quad c_2 = -c.$$

Према томе функција y мора имати вредност

$$y = c(1 - \cos x - \sin x)$$

и зависи само од једног неодређеног коефицијента c.

Ставимо сад ту вредност у наш интеграл (4); после свођења чланова добићемо

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} c^2 (-1 + 2\cos x + 2\sin x - 4\sin x \cos x) + c x (\sin x - \cos x)\right] dx.$$

После израчунавања свих одређених интеграла, а међу њима су и ова два интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\, dx = (\sin x - x \cos x) \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx = (\cos x + x \sin x) \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} = -1 + \frac{\pi}{2},$$

можемо вредност тог интеграла написати у облику

$$I=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{2}c^2+c\right).$$

За одређивање константе c, треба изједначити са нулом извод нашег интеграла по тој константи

$$\frac{dI}{dc}=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)(c+1)=0,$$

одакле добијамо $c=-1$. На основу овог резултата и једначина (6), једначина екстремале (5) добија дефинитивни облик

$$y=-1+\cos x+\sin x. \tag{7}$$

Према томе без интеграције диференцијалне једначине добили смо решење нашег проблема Варијационог рачуна. У овом случају добијено решење није више само приближно, него је тачно. Заиста, Ајлерова једначина

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

у нашем случају, пошто је

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=y'+x,\quad \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=y''+1,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-y,$$

изгледа овако

$$y''+y+1=0.$$

Општи интеграл ове линеарне диференцијалне једначине са константним коефицијентима, без тешкоће одређујемо

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-1,$$

јер је $y=-1$ њено партикуларно решење. Из услова да за $x=0$, $y=0$ и за $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$, одређујемо произвољне константе: $C_1=1$, $C_2=1$, после чега се враћамо на интеграл у облику (7), а то и потврђује став да је наше решење (7) не само приближно већ и тачно.

ГЛАВА XI

ТЕОРИЈА ВЕРОВАТНОЋЕ

§ 85. Теорија вероватноће

Интересантан је постанак Теорије вероватноће. Теорија вероватноће је поникла из жеље да се резултати хазардних игара оцене, а евентуално и прорекну помоћу бројева. Први научници, који су се бавили овим питањима, били су Ферма (Fermat, 1608—1665) и Паскал (Pascal, 1623—1662). Класичну форму Теорији вероватноће дали су Јакоб Бернули (Jacob Bernoulli, 1654—1705) и чувени француски математичар Лаплас (Laplace, 1749—1827).

Савремена Теорија вероватноће развила се у велику научну дисциплину; она се примењује у Математици, Механици, Експерименталној и Теориској физици, Астрономији, Геодезији, а сем тога и у Биологији, Психологији, Статистици и у разним областима економских наука. Теорија вероватноће има и своју чисто практичну примену, на пр., у осигурању, којим се баве нарочити стручњаци — актуари, у пољопривреди при оцењивању резултата селекције семена или животиња итд.

У двадесетом је веку Теорија вероватноће знатно напредовала како у смислу дубљег проучавања и аксиоматизације својих основа, тако и у смислу проширења свог материјала. Неке њене гране чак су добиле самосталан карактер, на пр., Математичка статистика, Теорија корелације и др.

На чему се оснива врло важан теориски и практични значај Теорије вероватноће? При анализи различитих факата, везаних за опажања или експерименте увек се тражи узрочна веза, на основу које бисмо могли одредити према датом комплексу услова α наступање одређеног факта А и евентуално установити оне мерне бројеве који су везани са тим фактом; другим речима, тражи се постављање закона, и то у математичком облику, којем се покорава тај факт. У идеалном случају узрочна веза се изражава функционалном везом. Али у природи, у већини случајева не можемо поставити сигурну везу између комплекса услова α и факта А. Има још увек и таквих услова β, које ми и не знамо а од којих такође зависи наступање факта А. Тако, на пр., кад пуцамо у дати циљ, комплекс услова α — положај топа, тежина и форма ђулета, количина експлозива и др. — може бити тачно испуњен, према нашим могућностима, па да ипак факт А — погодак не наступи и то због тога, што су утицали услови непознатог комплекса β. Ђуле није погодило тачно циљ, но оно је пало у близини циља, а друга су на одређени начин распоређена око циља. Факта слична топовском погодку, кад постоји комплекс β непознатих узрока, сачињавају у природи и у људској делатности много већу класу факата него факта са тачном узрочном везом. Теорија вероватноће пружа апарат за проучавање појава са непознатим комплексом узрока. Такве појаве се зову стохастичке појаве. Овај назив је постао од наведеног класичног примера такве појаве — погодка датог циља, јер грчка реч στόχος значи циљ, а στοχαστικός — онај који зна погодити. Готово у све појаве је умешан стохастички елемент и тиме се објашњава принципска важност Теорије вероватноће, теорије проучавања стохастичких појава.

§ 86. Математичка вероватноћа

Појам вероватноће протумачићемо пре свега на конкретном примеру. Нека се у некој кутији налазе пет куглица: три беле и две црне. Из те кутије, не гледајући, вадимо куглицу. Вероватноћу са којом ћемо извадити баш белу куглицу треба изразити бројем. Претпостављамо да је вађење сваке куглице подједнако могуће, да не можемо у исто време извадити две куглице и да једна куглица не може у исто време бити и бела и црна. Сматрамо вађење беле куглице као „повољан" догађај. Свега имамо пет куглица, које можемо извадити, дакле пет могућих догађаја; од њих је повољних само три. Природно је да се за меру вероватноће повољног догађаја, вађења баш беле куглице, узме количник

$$\frac{3}{5}=\frac{\text{број повољних случајева}}{\text{број свих могућих случајева}}\,.$$

Ако, уопште са p означимо број повољних случајева неког догађаја, а са s број свих могућих случајева, вероватноћу w догађаја можемо дефинисати количником

$$w=\frac{p}{s}\,.$$

Тако дефинисана вероватноћа зове се математичка вероватноћа. Она се зове још и вероватноћа a priori, тј. вероватноћа коју можемо израчунати пре ма ког испитивања и пре него што се догађај стварно деси. Кад се уз реч вероватноћа не каже ништа више, мисли се на математичку вероватноћу, на вероватноћу a priori.

Ако са n означимо број неповољних случајева догађаја, количник $n:s$ са ознаком $\bar{w}$, тј.

$$\bar{w}=\frac{n}{s}$$

изражава вероватноћу са којом се догађај неће десити. Пошто је $p+n=s$, имамо једначину

$$\bar{w}+w=1\,,$$

тј. збир вероватноћа по којима ће се догађај десити, односно неће десити једнак је јединици.

Ако је догађај немогућ $(p=0)$, његова је вероватноћа једнака нули, тј. $w=0$. Ако је број p повољних случајева једнак броју s свих могућих случајева, догађај ће се десити сигурно. Како је у овом случају $w=\frac{s}{s}=1$, можемо тврдити да је јединица мера вероватноће сигурности.

Вероватноћа w сваког догађаја мора, према томе, задовољавати услов

$$0\leqslant w\leqslant 1\,.$$

Приметимо да вероватноћа w може бити не само рационалан, него и ирационалан број како то следује из неких, нарочито геометриских, теориских расуђивања.

Вежбања.

1. Колика је вероватноћа да при бацању једне коцке добијемо на њеној горњој страни три окца?
2. Колика је вероватноћа да при бацању једне коцке добијемо на горњој страни парни број окаца?
3. Колика је вероватноћа да при бацању на двема коцкама испадне: a) исти број окаца? b) збир окаца једнак десет? c) разлика окаца једнака два?
4. Два играча А и В бацају две коцке. А добија игру када је збир окаца на коцкама 7, а В када је тај збир једнак 8. Да ли је игра правична?
5. У кутији је 30 куглица: 10 белих и 20 обојених — 5 зелених и 15 жутих. Колика је вероватноћа да се извуче једна обојена куглица? А колика да се извуче зелена куглица?
6. Колика је вероватноћа да са три бачене коцке бар на једној буде једно окце?
7. У кутији је 4 беле и 6 црних куглица. Одредити вероватноћу за извлачење беле куглице после једног вађења кад је била извађена: a) бела куглица и b) црна куглица.

§ 87. Теорема сабирања

Нека се у кутији налазе две врсте светлих куглица — две беле и четири жуте, а сем тога још и три тамне, на пр., црне куглице. Каква је вероватноћа да извадимо светлу куглицу? Пошто светлих куглица имамо 6, а куглица је свега 9, можемо тврдити да тражена вероватноћа износи

$$w = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Исту вероватноћу можемо израчунати и друкчије. Израчунајмо вероватноћу w_1, која одговара вађењу беле куглице. Јасно је да она има вредност

$$w_1 = \frac{2}{9}.$$

Исто тако вероватноћа да извадимо жуту куглицу износи

$$w_2 = \frac{4}{9}.$$

Видимо да вероватноћа да извадимо светлу, белу или жуту, куглицу износи

$$w = w_1 + w_2 .$$

Уопште, ако имамо два догађаја са вероватноћама w_1 и w_2, вероватноћа w да ће се догодити било један било други догађај једнака је збиру вероватноћа посебних догађаја. Ако су

$$w_1 = \frac{p_1}{s}, \qquad w_2 = \frac{p_2}{s};$$

где су бројеви p_1 и p_2 бројеви повољних појединачних догађаја, број повољних догађаја да се деси било један било други догађај износи $p_1 + p_2$; према томе имамо

$$w = \frac{p_1 + p_2}{s},$$

одакле следује једначина

$$w = w_1 + w_2 ,$$

која изражава теорему сабирања вероватноћа. Теорему можемо формулисати овако:

Вероватноћа да од два догађаја, који један другог искључују, наступи било један било други једнака је збиру вероватноћа да наступи сваки од њих посебно.

Јасно је да је вероватноћа два повољна догађаја који се искључују узајамно увек већа од вероватноће једног од тих догађаја.

Теорема сабирања може бити проширена на више независних догађаја, који се узајамно искључују. Ако су вероватноће k посебних догађаја означене са $w_1, w_2, \ldots, w_k$, вероватноћа w да се деси један, било који од тих догађаја, износи

$$w = w_1 + w_2 + \ldots + w_k .$$

Тај се збир понекад зове тотална вероватноћа датих догађаја. Ако вероватноће $w_1, w_2, \ldots, w_k$ исцрпљују све могуће догађаје једног комплекса догађаја, те вероватноће су везане једначином

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_k = 1 .$$

Услов да један догађај искључује друге истог комплекса је врло важан у теореми сабирања. Ако тај услов није испуњен, теорема губи своју истинитост. Тако, на пр., ако вероватноћа догађаја да новчић А падне са грбом нагоре износи $\frac{1}{2}$, а ово важи и за новчић В, не можемо тврдити, да према теореми сабирања, вероватноћа да било први било други новчић падне са грбом нагоре износи $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, тј. да је то сигурно. Теорема не може бити примењена на овај случај, јер су догађаји компатибилни, тј. они се узајамно не искључују.

Вежбања.

1. Из шпила од 32 карте отстрањене су: један херц, две каре, три пика и четири трефа. Какве две боје треба да изабере сваки од играча А и В да вероватноћа вађења карте њихових боја буде за сваког играча иста?

2. Од 50 клипова домаће врсте кукуруза 13 клипова су имали дужину мању од 19 cm, 30 клипова — дужину између 19 и 20 cm и 7 клипова дужину већу од 20 cm. Са коликом вероватноћом можемо рачунати да ће ова врста имати клипове 1. мање од 19 cm, 2. од 19 cm и веће?

§ 88. Теорема множења

Анализујмо прво овај задатак: У једној кутији налазе се две беле и три црне куглице; у другој су кутији три беле и четири црне куглице Колика је вероватноћа да ћемо из прве и из друге кутије извадити по белу куглицу?

Вероватноћа да ћемо из прве кутије извадити белу куглицу има вредност

$$w_1 = \frac{p_1}{s_1} = \frac{2}{5}.$$

Слично томе имамо посебно за другу кутију

$$w_2 = \frac{p_2}{s_2} = \frac{3}{7}\,.$$

Израчунајмо сад вероватноћу w да ћемо извлачећи и из прве и из друге кутије извући по белу куглицу. Израчунаћемо, прво, број повољних случајева p. Свакој од белих куглица прве кутије можемо додати једну од три беле куглице друге кутије, а пошто је белих куглица у првој кутији две, свега повољних догађаја имамо $p = 2\,.\,3 = p_1\,p_2$. С друге стране, свих могућих догађаја имамо $s = 5\,.\,7 = s_1\,s_2$, јер свакој од куглица (5) прве кутије можемо додати сваку од куглица (7) друге кутије. На основу израчунатих бројева случајева имамо за вероватноћу w израз

$$w = \frac{2\,.\,3}{5\,.\,7} = \frac{p_1\,p_2}{s_1\,s_2} = w_1\,w_2\,.$$

Јасно је да резултат

$$w = w_1\,w_2\,,$$

добијен у овом конкретном примеру, важи и за општи случај и претставља т е о р е м у м н о ж е њ а в е р о в а т н о ћ а. Она гласи

В е р о в а т н о ћ а д а д в а н е з а в и с н а д о г а ђ а ј а н а с т у п е з а ј е д н о ј е д н а к а ј е п р о и з в о д у в е р о в а т н о ћ а с в а к о г а о д о в а д в а д о г а ђ а ј а п о с е б н о.

Догађај, кад наступају заједно два или више посебних догађаја, зове се с л о ж е н и д о г а ђ а ј. Према томе вероватноћа сложеног догађаја једнака је производу вероватноћа простих догађаја. За више догађаја имамо образац

$$w = w_1\,w_2\,w_3\ldots w_k\,,$$

где је k број простих догађаја. Како брзо опада вероватноћа сложеног догађаја види се из овог примера. Вероватноћа да ће новчић бачен у вис пасти први пут са грбом горе једнака је $\frac{1}{2}$; да ће пасти са грбом горе и други пут износи $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, а да исто тако падне десет пута узастопно износи свега $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$, двадесет пута $\left(\frac{1}{2}\right)^{20} = \frac{1}{1048576}$; практички ову вероватноћу треба сматрати као једнаку нули, тј. као немогућност.

Вежбања.

1. Колика је вероватноћа да у игри са коцком двапут узастопно испадне шестица?

2. Колика је вероватноћа да у игри са коцком први пут добијемо паран број, а други пут непаран?

3. Имамо две кутије. У првој кутији се налазе 2 беле, 3 зелене, 5 жутих; у другој — 3 беле, 6 зелених, 7 жутих. Колика је вероватноћа да у два узастопна вучења извадимо куглице исте боје?

4. Колика је вероватноћа да у два вучења из кутија претходног задатка не извадимо белу куглицу?

§ 89. Вероватноћа при понављању покушаја

Видели смо да ако наступање неког догађаја има вероватноћу w, вероватноћа ненаступања истог догађаја износи $\overline{w} = 1 - w$.

Замислимо да се врши пет испитивања односно покушаја са догађајем који има вероватноћу w. Ако желимо израчунати вероватноћу тога да се у пет покушаја догађај деси три пута, ма у ком, али у одређеном реду, онда вероватноћа тог сложеног догађаја износи w^3, а ако при томе поставимо услов да искључујемо случајеве кад се догађај може десити и код два остала покушаја, тј. у исто време одређујемо вероватноћу да код тих осталих покушаја мора наступити догађај са вероватноћом $\overline{w}$, онда вероватноћа таквих пет догађаја има вредност

$$w^3\,\overline{w}^2\,. \tag{1}$$

Ако дешавање догађаја означимо са +, а недешавање са —, горњи израз претставља вероватноћу да се деси, на пример, догађај

$$-\;+\;+\;-\;+$$

То је пример испитивања, где су догађаји распоређени у једном одређеном реду, тј. да се догађај деси при другом, трећем и петом покушају, а да се не деси код два остала покушаја. Ако сада поставимо себи задатак израчунати вероватноћу да од пет покушаја увек буде 3 догађаја са вероватноћом w и 2 догађаја са вероватноћом $\overline{w}$, али ред тих догађаја може бити произвољан, само да их има 3 односно 2, онда вероватноћу (1) сваког посебног распореда треба помножити (према теореми сабирања) бројем свих могућих распореда са 3 и 2. Број таквих распореда, показаних схемом на слици 159,

$$\begin{array}{cccccccccc}
+ & + & + & - & + & + & - & + & - & - \\
+ & + & - & + & + & - & + & - & + & - \\
+ & - & + & + & - & + & + & - & - & + \\
- & + & + & + & - & - & - & + & + & + \\
- & - & - & - & + & + & + & + & + & +
\end{array}$$

Сл. 159. Распореди 5 елемената по 3 и 2

као што је познато из Комбинаторике, једнак је броју комбинација од 5 елемената треће класе тј.

$$C_5^3 = \binom{5}{3} = \frac{5.4.3}{1.2.3} = 10.$$

После тога можемо тврдити да вероватноћа да од пет покушаја увек буде 3 догађаја са вероватноћом w и 2 догађаја са вероватноћом $\bar{w}$ износи

$$W = C_5^3 w^3 \bar{w}^2 = 10 w^3 \bar{w}^2.$$

У општем случају: ако се врши n покушаја и догађај треба да се деси m пута, вероватноћа тог дешавања према теореми множења износи w^m; ако у $n - m$ осталих покушаја догађај несме да се деси, према истој теореми вероватноћа да се не деси износи $\bar{w}^{n-m}$. Према томе вероватноћа да се догађај деси m пута, а у $n - m$ осталих покушаја да се не деси износи према теореми множења

$$w^m \bar{w}^{n-m}. \tag{2}$$

То је вредност вероватноће за наступање неке од могућих комбинација повољних и неповољних догађаја. Како број свих таквих комбинација из n покушаја са m повољних догађаја износи

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1.2\dots m} = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

према теореми сабирања вероватноћа W да у n испитивања може наступити m повољних догађаја, на основу израза (2), има вредност

$$W = C_n^m w^m \bar{w}^{n-m} \tag{3}$$

Према томе важи теорема:

Вероватноћа да се при n покушаја догађај вероватноће w деси *само* m пута износи W са вредношћу (3).

Приметимо да величина (3) не претставља ништа друго него одговарајући члан у развијеном биному

$$(w + \bar{w})^n = w^n + C_n^1 w^{n-1} \bar{w} + \dots + C_n^m w^m \bar{w}^{n-m} + \dots + \bar{w}^n = 1$$

Ако сад задатак нешто проширимо и потражимо вероватноћу да при n покушаја наступи догађај вероватноће w *бар* m пута, онда према

теореми сабирања треба сабрати вероватноће да се догађај деси m, $m+1$, ..., n пута. Тада ћемо тражену вероватноћу добити у облику:

$$W = \sum_{i=m}^{n} C_n^i w^i \bar{w}^{n-i}. \tag{4}$$

Овом изразу одговара теорема:

Вероватноћа да се при n покушаја догађај вероватноће w деси *бар* m пута износи W са вредношћу (4).

Узмимо још пример. Нека се у кутији налазе 2 беле и 1 црна куглица. Вадимо једну куглицу и поново је враћамо у кутију. Вероватноћа да извадимо белу куглицу једнака је $w = \frac{2}{3}$, а црну $\bar{w} = \frac{1}{3}$. Претпоставимо да смо извршили 6 вађења. Који случајеви могу наступити и колика је вероватноћа тих случајева?

Могу наступити ови случајеви:

		белих	црних
I	случај	6	0
II	„	5	1
III	„	4	2
IV	„	3	3
V	„	2	4
VI	„	1	5
VII	„	0	6

Вероватноћа првог случаја износи према теореми множења $\left(\frac{2}{3}\right)^6$ и то са коефицијентом 1, јер комбинација од шест белих куглица може бити свега једна када узастопце извучемо шест белих куглица.

Вероватноћа другог случаја износи према теореми множења $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \frac{1}{3}$. Таквих случајева може бити свега 6, јер црна куглица може да се појави пре прве куглице и после прве и свих осталих куглица. Тај број следује и из обрасца $C_6^5 = C_6^1 = 6$. Према томе по теореми сабирања вероватноћа тог случаја износи $6 . \left(\frac{2}{3}\right)^5 . \frac{1}{3}$.

Вероватноћа трећег случаја износи $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^2$. Таквих случајева свега може бити 15, јер, с једне стране, $C_6^4 = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$, а, с друге стране можемо и непосредно израчунати број ових случајева. Рачунамо, рецимо, овако. Колико може бити случајева са првом црном куглицом? Пошто друга црна куглица може да стане пре прве од остале четири беле и после сваке од тих белих куглица — свега случајева са првом црном куглицом имамо 5. Случајева са првом црном куглицом после једне беле куглице имамо 4, јер друга црна куглица може да се налази пре прве од три остале беле куглице и после сваке од тих трију куглица. Случајева, када се прва црна куглица налази после друге беле куглице, имамо 3, па после треће куглице 2 и после четврте беле куглице — 1. Према томе у овој комбинацији имамо свега $5+4+3+2+1=15$ случајева. На тај начин вероватноћа овог пута износи $15 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$.

Да избројимо још непосредно и број случајева са вероватноћом $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3$, када имамо три беле и три црне куглице. Вредност коефицијента према обрасцу износи $C_6^3 = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.1.2.3} = 20$. Број ових случајева можемо избројити и непосредно помоћу схеме, на којој тачка означава белу куглицу, а црта — црну.

Прва црна куглица на I месту |||··· |·||·· |··||· |···|| 4 случаја
||·|·· |·|·|· |··|·| 3 „
||··|· |·|··| 2 „
||···| 1 случај

Прва црна куглица на II месту   ·|||··   ·|·||·   ·|··|| 3 случаја
·||·|·   ·|·|·| 2 „
·||··| 1 случај

Прва црна куглица на III месту   ··|||·   ··|·|| 2 случаја
··||·| 1 случај

Прва црна куглица на IV месту   ···||| 1 „

Свега   20 случајева.

Осталим случајевима одговарају вероватноће

$$15\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4, \qquad 6\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^5, \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^6.$$

Израчунате вероватноће показују да оне заиста претстављају вредности чланова развијања:

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6 + 6\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right) + 15\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 20\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^3 +$$
$$+ 15\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4 + 6\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \left(\frac{1}{3}\right)^6.$$

Десна страна састоји се из чланова са заједничким имениоцем 729 и са овим бројиоцима:

64, 192, 240, 160, 60, 12, 1.

Из овог реда закључујемо да највећу вероватноћу $\frac{240}{729}$ има комбинација 4 беле и 2 црне куглице. У тој комбинацији однос броја белих према броју црних $4:2=2:1$ има исту вредност као и однос вероватноћа $w:\overline{w} = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2:1$.

Ако бисмо понављали наш експеримент вађења не 6 него, рецимо, 12 пута, рачун би показао да највећу вероватноћу $\frac{126720}{531441}$ има поново комбинација са односом 8 белих куглица према 4 црне, тј. поново са односом $w:\overline{w}$.

Вежбања.

1. Одредити вероватноће да после 10 вађења из кутије са једном белом и једном црном куглицом испадне само 1, 2, 3 итд. беле куглице. Изабрати највероватнију комбинацију и упоредити је са вероватноћама вађења беле и црне куглице.

2. Потврдити вредност $\frac{126720}{531441}$ вероватноће споменуте у тексту.

§ 90. Математичко очекивање

Ако је w вероватноћа добити у игри d динара, производ wd је **математичко очекивање** или **математичка нада** те игре.

Шире се тај појам дефинише овако: Математичко очекивање $O(x)$ случајне променљиве величине x је збир производа поједине вредности x_i ове величине и одговарајуће њој вероватноће w_i, тј.

$$O(x) = \sum_{i=1}^{k} w_i x_i,$$

где је k број вредности x'а.

Ако су вредности x непрекидне у интервалу од a до b и свакој од њих одговара вероватноћа w као функција x, тј. $w = w(x)$, математичко се очекивање изражава интегралом:

$$O(x) = \int_a^b w(x)\, dx .$$

Узмимо неколико примера.

Ако играч добија толико динара колико је окаца на горњој страни коцке, његова математичка нада у тој игри износи

$$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{(1+6) \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3{,}5 \text{ дин.}$$

Губитак је негативни добитак. Математичка нада добитка може бити већа, мања или једнака математичкој нади губитка. Према томе игра може бити корисна, штетна и без добитка и губитка.

О математичкој нади може се доказати низ једноставних теорема. Тако, на пр., за математичку наду важи теорема сабирања: математичка нада збира две величине једнака је збиру математичких нада сваке од тих величина, тј.

$$O(x + y) = O(x) + O(y) .$$

Математичка нада може служити за израчунавање вероватноће. Као пример, решимо задатак:

Два играча A и B са капиталима a и b играју игру без губитка и добитка до момента, док један не изгуби сав свој капитал. Колика је вероватноћа да A изгуби сав свој новац.

Означимо тражену вероватноћу са w, тада вероватноћа да A добије сав новац играча B има вредност $\bar{w}$, при чему је $w + \bar{w} = 1$. Математичка нада играча A, према томе, износи: за добитак $\bar{w} b$ и за губитак $w a$. Како игра треба да буде без добитка и губитка, те две величине треба да буду једнаке, тј.

$$\bar{w} b = w a ,$$

одакле под условом $w + \bar{w} = 1$ имамо:

$$w = \frac{b}{a+b}, \qquad \bar{w} = \frac{a}{a+b} .$$

Према томе у игри без добитка и губитка, ако игра може да се продужује до бесконачности, губи, и то сав свој новац, са већом вероватноћом онај играч, који има мање новца.

Вежбања.

1. Одредити математичку наду оног играча, који игра само на парне бројеве окаца на коцки, а под условом да на свако окце на горњој страни коцке добије по динар.

2. Навести пример игре карата без добитка и губитка и проучити на том примеру могућност да један од играча изгуби сав свој новац.

§ 91. Вероватноћа a posteriori. Бајесова теорема

За израчунавање вероватноће a priori треба знати два броја: број повољних случајева p и број свих могућих случајева s. Међутим за сваки случајни догађај није могуће унапред одредити та два броја. Како, на пр., одредити та два броја за одговор на питање: колика је вероватноћа да ће човек од 50 година умрети у својој педесетпрвој години? Унапред о томе не можемо ништа рећи. Можемо погледати статистичке податке неке државе и из тих података сазнати да од 10 000 особа старих 50 година у педесетпрвој години умире њих 156. Количник

$$\frac{156}{10\,000} = 0{,}0156$$

одређује в е р о в а т н о ћ у a p o s t e r i o r i, тј. после свршеног факта.

Из овог примера следује да је вероватноћа a posteriori једног догађаја једнака количнику

$$\frac{P}{S}$$

броја P повољних случајева, који су се стварно десили, и броја S свих могућих случајева, који су постојали.

Има догађаја за које је могуће одредити и вероватноћу a priori и вероватноћу a posteriori. На пр. запитајмо се колика је вероватноћа да бачена коцка падне са шестицом навише? Можемо одредити вероватноћу a priori — она је једнака $\frac{1}{6}$. А можемо одредити и вероватноћу a posteriori; ако је, рецимо, после 1200 бацања коцке шестица пала 202 пута, као вероватноћа a posteriori, после овог испитивања, следује

$$\frac{P}{S} = \frac{202}{1200} \approx \frac{1}{6} .$$

Примена вероватноће a posteriori може послужити за одређивање вероватноће узрока, који утичу на датн догађај.

Узмимо овакав задатак.

Имамо на расположењу:

k_1 кутија са p_1 белих куглица од свих s куглица у тој кутији[1])
k_2 „ „ p_2 „ „ „ „ „ „ „ „ „
.
.
.
k_i „ „ p_i „ „ „ „ „ „ „ „ „
.
.
.
k_n „ „ p_n „ „ „ „ „ „ „ „ „

Из неке кутије била је извађена бела куглица. Колике су вероватноће да је та бела куглица била извађена из кутија сваке од n категорнја?

Пре свега протумачимо тај задатак мало друкчије. Пре свршеног догађаја, тј. извлачења беле куглице, белој куглици у свакој кутији одговара њена вероватноћа a priori, наиме

$$w_i = \frac{p_i}{s} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

Исто тако свака врста кутија између свих кутија на броју

$$k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$$

има своју априорну вероватноћу

$$v_i = \frac{k_i}{k} \qquad (i = 1, 5, \ldots, n). \tag{2}$$

Дакле вероватноће w_i и v_i су априорне, пре извлачења беле куглице. У датом случају оне су одређене помоћу непосредног израчунавања односа броја повољних случајева према броју свих могућих случајева.

[1]) Пошто су у задатку важне само вероватноће белих куглица у свакој кутији, увек можемо довести бројеве $s_1, s_2, \ldots s_n$ свих куглица у свакој кутији до истог броја s — најмањег заједничког садржаоца бројева $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

Из неке, непознате кутије извадили смо белу куглицу. После овог догађаја (post factum) поставимо питање: колика је вероватноћа да је бела куглица извађена баш из те и те категорије? Означимо вероватноће a posteriori са $u_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Пошто постојање одговарајуће кутије може бити сматрано као један од узрока тога да је била извучена бела куглица, вероватноће u_i се зову и **вероватноће узрока датог догађаја.**

Пошто се догађај састоји у вађењу баш беле куглице, за одређивање вероватноће u_i можемо израчунати однос броја белих куглица, које можемо извући из i'те групе кутија, према броју свих белих куглица. Како је у свакој кутији i'те групе p_i белих куглица, а свих кутија те групе k_i, то је свега белих куглица у тој групи $k_i p_i$. После овог рачуна можемо написати и општи број свих белих куглица, — он износи

$$k_1 p_1 + k_2 p_2 + \ldots + k_i p_i + \ldots + k_n p_n .$$

На основу добијених бројева можемо написати вредност тражене вероватноће

$$u_i = \frac{k_i p_i}{k_1 p_1 + k_2 p_2 + \ldots + k_i p_i + \ldots + k_n p_n} . \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Ако поделимо бројилац н именилац тог разломка са производом ks н узмемо у обзир једначине (1) и (2), можемо дефинитивно написати

$$u_i = \frac{v_i w_i}{v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_i w_i + \ldots + v_n w_n} . \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) .$$

Написани обрасци изражавају вероватноћу сваког од појединих узрока датог догађаја и претстављају тзв. Бајесову (Thomas Bayes) теорему.

Ако се свака група кутија састоји од истог броја кутија, на пр., од једне кутије, све вероватноће v_i имају исту вредност и Бајесов образац за тај случај изгледа

$$u_i = \frac{w_i}{w_1 + w_2 + \ldots + w_i + \ldots + w_n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) .$$

У примени нарочиту тешкоћу претставља одређивање вероватноћа $v_1, v_2, \ldots, v_n$ сваког појединог узрока, тако рећи априорне вероватне јачине тих узрока. Ако су оне непознате, онда се чине претпоставке о њиховој јачини, па се експериментално ове или потврђују или одбацују и чине нове.

Вежбања.

1. Из таблице смртности одредити у току које године старости мушкарца и жене је вероватноћа смрти мушкарца одиосио жеие најмања?

2. У којим годинама старости до и после 50 година вероватноћа смрти је највећа?

3. Из сто бацања новчића одредити апостериорну вероватноћу да буде грб на горњој страни и упоредити ту вероватноћу са априорном вероватноћом тог догађаја.

4. 120 пута бацити коцку и сваки пут забележити број окаца на горњој страии. Из тих података одредити апостериорну вероватноћу сваког броја окаца и упоредити ту вероватноћу са априорном вероватноћом.

5. Постоје две групе кутија: у првој групи пет кутија са по 2 беле и 1 црном куглицом; у другој групи 4 кутије са 3 беле и 2 црне куглице. Извађена је бела куглица. Колика је вероватиоћа да је она извађена из кутије прве групе?

6. Имамо исте кутије истог садржаја као и у претходном задатку. Дознало се да је неко извадио белу куглицу баш из кутије прве групе и вратио је поново у ту исту кутију. После тог експеримента била је поново извађена бела куглица из непознате кутије. Колика је вероватноћа да је нова бела куглица била извађена из кутије прве категорије?

§ 92. Бернулијев став. Закон великих бројева

Везу између вероватноће a priori и вероватноће a posteriori први је поставио Јакоб Бернули у облику тзв. „закона великих бројева", према коме при довољно великом броју испитивања вероватноћа a posteriori тежи вероватноћи a priori.

Видели смо проучавајући вероватноћу при понављању испитивања да та вероватноћа стоји у вези са развијањем израза $(w+\overline{w})^n$ по Њутнову обрасцу. Знамо да у развијеном обрасцу увек постоји члан са највећом вредношћу. Замислимо да је то члан са m понављања и са вредношћу вероватноће

$$(1) \qquad C_n^m w^m \overline{w}^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} w^m \overline{w}^{n-m} .$$

Ако упоредимо тај члан са претходним чланом

$$(2) \qquad C_n^{m+1} w^{m+1} \overline{w}^{n-m-1} = \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} w^{m+1} \overline{w}^{n-m-1},$$

онда из услова да је он мањи од члана (1) добијамо неједнакост

$$(3) \qquad \frac{\overline{w}}{w} \frac{m+1}{n-m} > 1$$

Слично томе упоређивање члана (1) и наредног члана, са вредношћу

$$C_n^{m-1} w^{m-1} \overline{w}^{n-m+1} = \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} w^{m-1} \overline{w}^{n-m+1},$$

доводи до неједнакости

$$(4) \qquad \frac{w}{\overline{w}} \frac{n-m+1}{m} > 1 .$$

Како неједнакости (3) и (4) можемо написати у облику

$$m(w+\overline{w}) > wn - \overline{w},$$

$$m(w+\overline{w}) < wn + w,$$

онда због једнакости $w+\overline{w}=1$ дефинитивно имамо,

$$(5) \qquad wn - \overline{w} < m < wn + w .$$

Пошто разлика између граница ових неједнакости износи јединицу, јер је

$$wn + w - (wn - \overline{w}) = w + \overline{w} = 1 .$$

можемо тврдити да је број m најближи цео број броју wn.

Ако неједнакости (5) поделимо са n, добићемо неједнакости

$$w - \frac{\overline{w}}{n} < \frac{m}{n} < w + \frac{w}{n} .$$

Ове неједнакости показују да са повећавањем броја n свих испитивања апостериорна вероватноћа $\frac{m}{n}$ тежи априорној вероватноћи w, јер разлика између тих вероватноћа, која је мања од $\frac{1}{n}$, тежи нули када $n \to \infty$. Тако изгледа први део Бернулијеве теореме, која изражава „закон великих бројева".

Други део Бернулијеве теореме, чији доказ не може, због своје компликованости, ући у оквир ове књиге третира питање вероватноће W_ε истинитости неједнакости

$$w - \varepsilon < \frac{m}{n} < w + \varepsilon ,$$

тј. услова да се апостериорна вероватноћа не разликује од априорне вероватноће за више од унапред дате величине ε, тј. услова да је

$$\left|\frac{m}{n} - w\right| < \varepsilon . \tag{6}$$

За ту вероватноћу W_ε други део Бернулијеве теореме тврди да она задовољава неједнакост

$$W_\varepsilon > 1 - \frac{w\,\bar{w}}{\varepsilon^2\, n},$$

тј. утолико је ближа сигурности уколико величина

$$\eta = \frac{w\,\bar{w}}{\varepsilon^2\, n}$$

тежи нули.

Лаплас је дао у својој теореми још тачнији израз за вероватноћу W_ε неједнакости (6). Према Лапласу имамо

$$W_\varepsilon = \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt , \tag{7}$$

где је

$$x = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{2\,w\,\bar{w}}} . \tag{8}$$

Вредност интеграла $\Phi(x)$, који се зове Л а п л а с о в и н т е г р а л, дају нарочите таблице. Из тих таблица можемо израчунати вредност интеграла за вредност x'а и то на сличан начин као што рачунамо вредност логаритма из логаритамских таблица.

Још тачније може вредност W_ε бити изражена збиром

$$W_\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt + \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi n w \bar{w}}},$$

где x има исту вредност (8). За доста велике вредности n други члан у претходном обрасцу тежи нули и према томе поново се враћамо за такве вредности на образац (7).

Узмимо пример. За појаву са $w = \bar{w} = \frac{1}{2}$, вероватноћа W_ε за $\varepsilon = \frac{1}{20}$ по Бернулијевој теореми задовољава услов

$$W_\varepsilon > 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (20)^2 \cdot \frac{1}{n} > 1 - \frac{100}{n} ;$$

за $n = 1000$ то даје

$$W_\varepsilon > 1 - \frac{1}{10} > 0{,}9 ;$$

за $n = 10\,000$ имамо

$$W_\varepsilon > 0{,}99 .$$

Према Лапласовој теореми, пошто је

$$x = \frac{1}{20} \sqrt{\frac{n}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{n}{2}}$$

тј. за $n = 1000$, $x = \sqrt{5} = 2{,}2361$ и за $n = 10.000$, $x = 5\sqrt{2} = 7{,}0710$, за први случај добијамо

$$W_\varepsilon = \Phi(2{,}2361) = 0{,}998435,$$

а за други

$$W_\varepsilon = \Phi(7{,}0710) = 0{,}9999999,$$

тј. готово сигурност.

Вежбања.

1. Протумачити закон великих бројева помоћу Бернулијеве теореме на конкретном примеру.

2. Одредити вероватноћу истинитости неједнакости $\left|\frac{n}{m} - w\right| < \varepsilon$, ако је $w = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $n = 1000$, односно $n = 10\,000$.

ГЛАВА XII

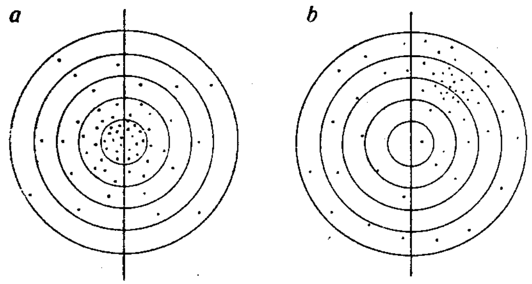
ТЕОРИЈА ГРЕШАКА

§ 93. Појам грешке

Ако неко мерење понављамо више пута, нећемо добити, нарочито при прецизном мерењу, увек исти резултат. Тако, на пр., при упоређивању, под истим условима, неке дужине блиске метру са једним еталон метром можемо добити ове резултате:

1,0005; 0,9994; 1,0006; 1,0003; 0,9997; 1,0001; 1,0004; 0,9998.

Шта се може рећи о правој вредности наше дужине? Знамо да она има потпуно одређену дужину, јер један предмет под истим условима, не може имати две или више дужина. Откуд долази то да и при најтачнијем мерењу добијамо за исту дужину више вредности? Јасно је да при сваком мерењу можемо учинити, и поред највеће пажње и свих предострожности, извесну, већу или мању **грешку**. Грешке могу бити двојаке природе: **случајне и систематске**. Случајне грешке немају стални узрок, оне показују отступања од праве вредности било на једну било на другу страну. Грешке добијају систематски карактер, кад се пронађе један или више узрока који утичу на резултате мерења увек у једном одређеном смислу. Издвајање систематских грешака претставља посебан проблем. Овде ћемо се бавити само случајним грешкама на које се примењују правила Теорије вероватноће.



Сл. 160. Нишан са случајним (a) и систематским (b) грешкама погодака

Такозваним рачунским грешкама посветили смо нарочити параграф (§ 58); из њега се видело у чему се састоји теорија проучавања таквих грешака.

Појам грешке стоји у вези не само са мерењем него и са другим процесима, када се проучавају отступања уопште. Тако, на пр., при гађању у нишан метци се гомилају око његовог средишта (сл. 160 a); при томе, наравно, има и мањих или већих отступања од средишта — та отступања су грешке погодака. Друга слика (сл. 160 b) одговара случају систематских грешака, за које може бити пронађен и узрок у неправилности направе за нишањење или у нечему другом.

§ 94. Гаусов закон грешака

Претпоставимо да се иста величина, на пр., нека дужина мери више пута и да у тим мерењима могу бити случајне грешке различитих величина. Поставимо себи за задатак да одговоримо на питање: Какав ће бити распоред резултата мерења те дужине, па према томе и распоред грешака?

Пре свега протумачимо помоћу конкретних бројева и графички начин математичког оцењивања тог распореда.

Узмимо да је извршено 50 мерења једне одређене дужине. Поделимо резултате мерења у 10 различитих група. Претпоставимо да су границе дужине у првој групи 9,975 m — 9,980 m, у другој 9,980 m — 9,985 m итд. У свакој наредној групи границе су за 5 mm веће. Претпоставимо, даље, да је после 50 наведених мерења број резултата, тј. број понављања, или **фреквенције** у свакој групи, био

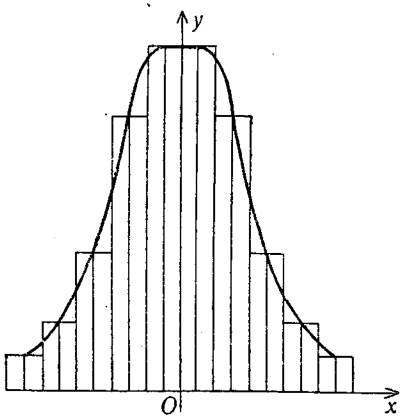
9,975	9,980	9,985	9,990	9,995	10,000	10,005	10,010	10,015	10,020	10,025
1	2	4	8	10	10	8	4	2	1	

Ако претпоставимо да је дужина од 10,000 m, која се налази у области са највећим бројем мерења, права величина наше дужине, отступања од те дужине су грешке мерења. Видимо из таблице да са најмањом грешком од $\pm 0{,}005$ има највише мерења (20), а са највећом од $\pm 0{,}025$ има најмање (2).

Пошто у проучавању распореда резултата мерења апсолутни бројеви не играју улоге, поделимо сваки број претходне таблице са целокупним бројем (50) свих мерења. Добићемо ову таблицу бројева по групама грешака

—5	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4	5
0,02	0,04	0,08	0,16	0,20	0,20	0,16	0,08	0,04	0,02	

Пошто је сваки такав број однос броја мерења повољних групи према броју свих мерења, ова таблица је у ствари **таблица вероватноћа** за поједине области грешака. Она дакле поставља везу између величине грешке и вероватноће те грешке, тј. односа броја мерења која су дала грешку према броју свих мерења.



Сл. 161. График вероватноће једног низа мерења

Исту везу можемо претставити и графички. Ако на осовини Ox (сл. 161) одмеримо вредности грешака r, $2r, \ldots$ и $-r$, $-2r, \ldots$ и из средине сваког интервала подигнемо ординату, изражену у одређеној размери, једнаку вероватноћи, добићемо низ тачака. Ова слика даје график вероватноће $w = p:s$, где је p број мерења са одговарајућом грешком и s број свих мерења.

Јасно је да у сваком случају вероватноћа w зависи од величине r, ширине области. Ако хоћемо да уведемо величину, која би показала однос вероватноће w према ширини r, можемо увести количник $w:r$ са ознаком y, тј. ставити

$$y = \frac{w}{r}. \tag{1}$$

Величина y више није сама вероватноћа него је вероватноћа израчуната на јединицу ширине области, на графику на јединицу дужине на осовини x. Јасно је да при $r = 1$ ордината y даје саму вредност вероватноће или њој пропорционалну величину, ако је за цртање изабрана одговарајућа размера.

Ако цртане тачке на слици 161 спојимо линијом, добићемо **график вероватноће грешака**. Непосредно са слике видимо да график вероватноће нашег случаја има: осу симетрије — осу Oy; 2) област максимума; 3) превојне тачке, тачније, у случају изломљене линије, превојне елементе, према чијим правама се суседни елементи налазе са различитих страна.

Узмимо образац за развијање бинома на неки степен — Њутнов биномни образац

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \\ + \ldots + nab^{n-1} + b^n$$

и саставимо таблицу (**Паскалов троугао**) коефицијената за различите вредности изложиоца n:

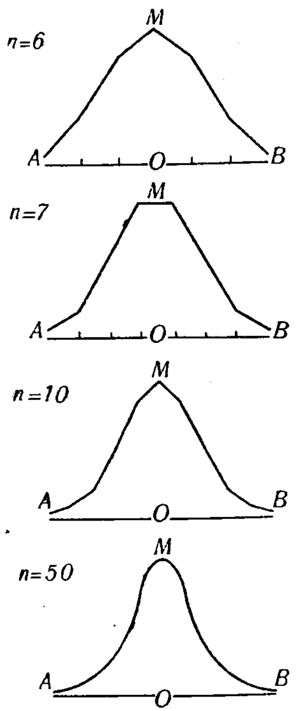
n	
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

итд.

За сваки од тих редова можемо извршити ову конструкцију. Поделимо увек исту дужину AB (на слици 162 имамо конструкције за $n = 6, 7, 10, 50$) на n једнаких делова, при чему n одговара изложиоцу бинома. Из деоних тачака подигнимо нормале и на њима одмеримо дужине пропорционалне коефицијентима бинома подигнута на степен n и то тако да највећем коефицијенту увек одговара иста дужина OM; означићемо је са k. Ако крајње тачке подигнутих дужина спојимо линијом, добићемо за свако n изломљену линију, која се у случају, кад $n \to \infty$, претвара у криву линију. Ова крива се зове **биномна линија** или **линија биномног распореда**. Јасно је да биномна линија постаје растегнутија или збијенија у вези са величином дужине AB према величини OM. Она пролази кроз тачке A и B. Нарочити, гранични случај, претставља она биномна линија, за коју, сем услова $n \to \infty$, узимамо још и $AB \to \infty$. Дужину OM при томе остављамо непромењивом. Такву биномну линију (сл. 165) можемо назвати **основном биномном линијом**, јер све остале биномне криве могу бити добијене из основне после скраћивања основне.

Чувени математичар **Гаус** (Gauss, 1777—1855) на основу посматрања распореда грешака у конкретним мерењима, а у вези са Лаплас-овим радовима, предложио је за приказивање распореда грешака криву линију са једначином

$$(2) \qquad y = k\, e^{-h^2 x^2}, \quad k > 0, \; h \geqslant 0,$$



Сл. 162. — Линије биномног распореда за $n = 6, 7, 10$ и 50

где је k највећа ордината, а h сталан параметар. Гаусова крива зове се и крива нормалног распореда. Гаусова крива даје врло добру апроксимацију биномних линија. Ова је крива симетрична у односу на осу y, јер се y не мења код x промени знак: $y(x) = y(-x)$. Она има максимум, јер извод

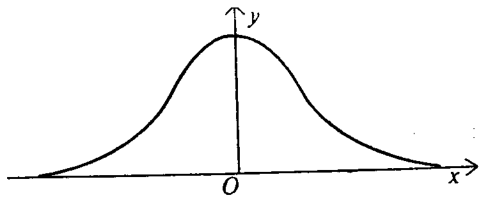
$$\frac{dy}{dx} = -2\, k\, h^2\, x\, e^{-h^2 x^2}$$

има вредност нуле за $x = 0$, а при томе други извод

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -2\, k\, h^2\, e^{-h^2 x^2} (1 - 2\, h^2 x^2),$$

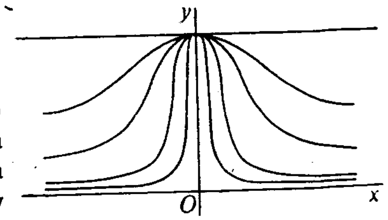
за $x = 0$ има негативну вридност $-2\, k\, h^2$. Она има две симетричне превојне тачке, јер из услова $\dfrac{d^2 y}{d x^2} = 0$ у облику $1 - 2 h^2 x^2 = 0$ имамо две апсцисе: $x = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2h}$. Са претпоставком $k > 0$, цела линија лежи над Ox осом; ова оса служи као асимптота криве са леве и десне стране, јер за $x \to \pm\infty$, $y \to 0$.

Једначина (2) зависи од две константе: k и h. Пошто је за $x = 0$, $y = k$, константа k има, као што је речено, значење највеће ординате. Са променом размере слике мења се константа k; према томе она није битна за опис карактера распореда грешака. Константа h стоји у вези са положајем превојних тачака криве. Што је вредност h већа, превојна тачка ближа је осовини Oy (сл. 164), а тиме је и крива стрмија. Код стрме криве, већ и за мало удаљење од осе Oy, а то је мера грешке, имамо врло мало резултата са том грешком.



Сл. 163. — Основна биномна линија

Из тога разлога константа h може бити сматрана као мера тачности нормалног распореда.



Сл. 164. — Промена криве нормалног распореда у вези са променом параметра h

Према дефиницији (1) ординате графика вероватноће, сама вероватноћа има вредност $w = y r$, где је r, као што смо видели, ширина интервала. За криву нормалног распореда вероватноћа да грешка лежи у границама између x и $x + dx$ ширина траке износи dx и према томе вероватноћа има вредност

$$w = y\, dx = k\, e^{-h^2 x^2}\, dx.$$

Ова једначина изражава Гаусов закон грешака.

Ако запитамо, колика је вероватноћа да ће се грешка налазити у границама између x_1 и x_2, према теореми сабирања, одговор је да је ова вероватноћа збир, који има облик интеграла

$$w = k \int_{x_1}^{x_2} e^{-h^2 x^2}\, dx.$$

Пошто збир свих вероватноћа за све могуће грешке у границама од $-\infty$ до $+\infty$ одговара сигурности, тј. вероватноћи чија је вредност 1, имамо једначину

$$1 = k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2}\, dx.$$

За израчунавање интеграла с десне стране приметимо пре свега да је

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} dx = 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} dx = \frac{2}{h} \int_{0}^{+\infty} e^{-u^2} du,$$

где је u нова променљива. Како смо раније (§ 56) израчунали да је

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

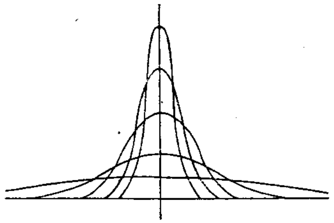
можемо нашу једначину написати у облику

$$1 = k \cdot \frac{2}{h} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}\,,$$

одакле је

$$k = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,.$$

Ова веза између k и h показује да једну константу из једначине нормалног распореда треба елиминисати и оставити само, рецимо, h. Под условом да цела површина између криве линије и осе x износи јединицу, крива нормалног распореда зове се **нормирана линија нормалног распореда**. У даљем излагању служићемо се само таквом кривом. Једначина такве криве је



Сл. 165. — Промена криве нормираног нормалног распореда у вези са променом само једног параметра

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}\,,\; h > 0\,.$$

Облик њен зависи само од једног параметра. На слици 165 показане су ове криве за различите вредности параметра h.

§ 95. Средња квадратна грешка

Показаћемо сад како се одређује параметар h Гаусове криве помоћу грешака

$$(1) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n\,,$$

Према Гаусову закону грешака, за вероватноћу сваке грешке x_i имамо

$$w_i = y_i\, dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x_i^2}\, dx\,.$$

Вероватноћа да смо у n мерења учинили све грешке (1), као вероватноћа сложеног догађаја, по теореми множења треба да има вредност

$$W = w_1 w_2 \ldots w_n = \frac{h^n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2 [x^2]} (dx)^n\,,$$

где смо, као и у методи најмањих квадрата, употребили ознаку

$$[x^2] = [x x] = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\,.$$

Константу h Гаусове криве одредити треба сад тако да вероватноћа W има највећу вредност; за то треба да буде

$$(2) \qquad \frac{dW}{dh} = 0\,.$$

Ако извршимо диференцирање

$$\frac{dW}{dh} = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n}\left\{n h^{n-1} e^{-h^2[x^2]} - 2h[x^2] h^n e^{-h^2[x^2]}\right\}(dx)^n\,,$$

добићемо из услова (2) једначину

$$n - 2h^2[x^2] = 0\,,$$

одакле имамо

$$h^2 = \frac{n}{2[x^2]}\,.$$

Величина h обично се изражава помоћу тзв. **средње квадратне грешке**, која се зове и **стандардна грешка** и **дисперзија**; означава се са σ и има вредност

$$\sigma = \sqrt{\frac{[x^2]}{n}}\,.$$

За h тада имамо вредност

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\,.$$

Помоћу средње квадратне грешке једначину Гаусове криве можемо написати

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Ако искористимо овај израз за y, вредност вероватноће да грешке леже у границама између x_1 и x_2 има облик

$$w = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx\,.$$

§ 96. Могућност искоришћавања Гаусова закона

Помоћу обрасца

$$w=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

можемо одговорити на питање: Ако стандардна грешка износи σ, колико од свих грешака треба да буде грешака по апсолутној вредности мањих од σ?

Ако тражени број означимо са p, а грешака може свега бити s, онда количник $\frac{p}{s}$ даје вероватноћу грешака по апсолутној вредности у границама између 0 и σ. Према томе тражени број треба одредити из једначине

$$\frac{p}{s}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{+\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\,.$$

Десну страну ћемо овако трансформисати

$$\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}d\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right).$$

и добијамо једначину

$$\frac{p}{s}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-u^2}du\,,$$

при чему смо ставили

$$u=\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\,.$$

Као што смо већ навели, интеграл с десне стране је интеграл чије вредности дају нарочите таблице. За приближну вредност нашег интеграла имамо

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-u^2}du\approx 0{,}6826\approx\frac{2}{3}$$

и на основу тога имамо закључак

$$\frac{p}{s}\approx\frac{2}{3}\,.$$

То је врло важан резултат у Теорији грешака. Он гласи:

Најмање две трећине свих грешака треба да имају апсолутну вредност мању од стандардне грешке.

Ако низ грешака у извесном процесу не испуњава овај услов, резултати Теорије грешака, засновани на закону нормалног распореда, не могу бити примењени на овај процес.

§ 97. Вероватна грешка

Место средње квадратне, стандардне грешке или дисперзије σ, често се уводи тзв. вероватна грешка; означимо је са r.

Ако је број грешака већих од r једнак броју грешака мањих од r, другим речима, ако вероватноћа за грешке, које нису веће по апсолутној вредности од r, износи $\frac{1}{2}$, r се зове **вероватна грешка**. На основу ове дефиниције имамо

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-r}^{+r}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\,.$$

Интеграл израчунавамо овако

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-r}^{+r}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}}\int_{0}^{r}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{r}{\sigma\sqrt{2}}}e^{-u^2}du\,,$$

где је опет

$$u=\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\,.$$

Као што знамо, нарочите таблице дају вредности интеграла

$$\Phi(\xi)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\xi}e^{-u^2}du\,.$$

Сад треба из тих таблица наћи такву вредност ξ да буде

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2}.$$

Без тешкоће налазимо за приближну вредност ξ

$$\xi \approx 0{,}477,$$

а затим из једначине

$$\xi = \frac{r}{\sigma\sqrt{2}} = 0{,}477$$

добијамо везу

$$r = 0{,}6745\,\sigma$$

између вероватне грешке r и стандардне грешке σ. Округло, вероватна грешка износи две трећине од стандардне грешке.

§ 98. Просечна грешка

Најзад се уводи и појам тзв. просечне или средње апсолутне грешке; ову грешку означићемо са ε. Она се дефинише као аритметичка средина апсолутних вредности грешака, тј.

$$\varepsilon = \frac{|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|}{n}.$$

где црте, као и раније, означавају апсолутне вредности заграђених величина.

Изведимо сада везу између просечне ε и стандардне грешке σ.

У изразу за просечну грешку, који можемо написати

$$\varepsilon = \frac{\sum |x_i|}{n},$$

где је збир проширен на све грешке, треба сваку грешку x_i поновити, у општем случају, онолико пута, колико пута она учествује према понављању, према фреквенцији те грешке. Ако са p_i означимо број грешака вредности x_i, за просечну грешку, у ствари, треба написати

$$\varepsilon = \frac{\sum p_i |x_i|}{n}.$$

Како је количник $p_i : n$ вероватноћа w_i грешке x_i, исту величину можемо изразити

$$\varepsilon = \sum w_i |x_i|.$$

На основу Гаусова закона грешака, место w_i, стављамо израз

$$w_i = y_i\,dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x_i^2}\,dx,$$

а сем тога збир изражавамо интегралом и проширујемо га на област свих могућних грешака, тј. од $-\infty$ до $+\infty$. На тај начин добијамо

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} y\,|x|\,dx.$$

Како су у Гаусову распореду грешака позитивне грешке симетричне са негативним, интеграл се трансформише

$$\varepsilon = 2\int_0^{+\infty} y\,x\,dx.$$

Ако ставимо вредност y, за интеграл ћемо добити ову вредност

$$\int_0^{+\infty} y\,x\,dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-h^2x^2}\,x\,dx = \Big/_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,h} e^{-h^2x^2}\right) = \frac{1}{2h\sqrt{\pi}}.$$

На тај начин имамо за величину просечне грешке

$$\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{\pi}},$$

а пошто је

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}},$$

дефинитивно имамо тражену везу између просечне и стандардне грешке

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma \doteq 0{,}798\,\sigma.$$

§ 99. Права и привидна грешка

Ако је неко израчунавање довело до резултата да тражена дужина треба да износи, рецимо, 125,324 cm, а нама у пракси није згодно да узмемо толико мале делове центиметра, ми узимамо „заокругљен“ број са вредношћу 125,3 cm. Узимајући такву дужину, учинили смо према израчунатој величини грешку са вредношћу 0,024 cm. Ако величину 125,324 cm узмемо за потпуно тачну, отступање 0,024 cm треба сматрати као праву грешку. Према томе је права грешка разлика између приближне и тачне величине.

Ако мерењем одређујемо низ вредности тражене величине, а незнамо њену праву вредност, јасно је да никад не можемо сазнати ту праву вредност. Из резултата мерења можемо само доћи једним или другим методом израчунавања, методом изједначења, до једног резултата, који сматрамо као најбољи, на пр., можемо од добивених величина узети средњу аритметичку вредност. Ову најбољу вредност зваћемо изједначена вредност.

Где не знамо праву вредност величине, не можемо говорити ни о правим грешкама. Можемо говорити само о разликама између резултата појединих мерења и изједначене вредности. Оваква разлика зове се привидна грешка.

На пр., за дужине наведене као резултате мерења на стр. 458

1,0005; 0,9994; 1,0006; 1,0003; 0,9997; 1,0001; 1,0004; 0,9998

имамо овај ред привидних грешака

+0,0004; —0,0007; +0,0005; +0,0002; —0,0004; 0,0000; +0,0003; —0,0003,

ако за изједначену вредност узмемо средњу аритметичку дужину са вредношћу 1,0001.

У досадашњем излагању претпостављали смо да су грешке x_1, x_2, ..., x_n праве грешке и да је стандардна грешка σ израчуната помоћу ових грешака на основу обрасца

$$\sigma=\sqrt{\frac{[x^2]}{n}}.$$

Можемо ли исти образац применити, ако знамо само привидне грешке, које ћемо означити са z_1, z_2, ..., z_n?

Ако је n велики број, изједначена вредност, према Бернулијеву ставу, мало се разликује од праве вредности и тада је

$$[x^2]=[z^2].$$

Ако је број мерења n релативно мали број, стварни рачун показује да је

$$[x^2]>[z^2]$$

и према томе за израчунавање треба ставати

$$[x^2]=[z^2]+v^2.$$

О величини v^2 познато нам је само 1) да она расте, кад број n опада, 2) да она расте, кад $[x^2]$ расте и 3) да је она пропорционална броју ν величина од којих зависи резултат мерења. Према томе за v^2 можемо ставити ову приближну вредност

$$v^2=\frac{\nu[x^2]}{n}.$$

Са том вредношћу v^2, из претходне једначине, добијамо

$$\frac{[x^2]}{n}=\frac{[z^2]}{n-\nu}.$$

Помоћу овог израза за стандардну грешку σ изводимо образац

$$\sigma=\sqrt{\frac{[z^2]}{n-\nu}}.$$

За $\nu=1$, кад у мерењу учествује само једна величина, имамо

$$\sigma=\sqrt{\frac{[z^2]}{n-1}}.$$

За вероватну грешку можемо написати, према резултату § 97, ова два Беселова обрасца

$$r=0{,}6745\sqrt{\frac{[z^2]}{n-\nu}}$$

и

$$r=0{,}6745\sqrt{\frac{[z^2]}{n-1}},$$

ако је у питању само једна величина.

За просечну грешку имамо сличне обрасце са коефицијентом пропорционалности једнаким 0,798.

§ 100. Грешке аритметичке средине

Нека је извршено n мерења величине a и при томе учињене грешке

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n.$$

Стандардна грешка, дисперзија σ, тих резултата одређује се из једначине

$$\sigma^2=\frac{[x^2]}{n}.$$

Помоћу σ можемо изразити грешке — вероватну r и просечну ε

$$r = 0{,}675\,\sigma, \qquad \varepsilon = 0{,}798\,\sigma.$$

Замислимо сад да смо извршили k серија мерења, у свакој серији по n мерења са резултатима

$$a_1^{(\lambda)},\ a_2^{(\lambda)},\ \ldots,\ a_n^{(\lambda)}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, k,$$

при чему се грешке сваке серије налазе у границама датих грешака. свака таква замишљена серија има своју аритметичку средину $m^{(\lambda)}$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, k$) са вредношћу

$$m^{(\lambda)} = \frac{[a^{(\lambda)}]}{n} \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, k.$$

Од тих аритметичких средина можемо начинити нову аритметичку средину; означимо је са m, тада је

$$m = \frac{m^{(1)} + m^{(2)} + m^{(3)} + \ldots + m^{(\lambda)} + \ldots + m^{(k)}}{k} = \frac{[m]}{k}.$$

Како тачна вредност те аритметичке средине треба да буде сама величина a, можемо узети у обзир стандардну грешку σ_1 величина $m^{(\lambda)}$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, k$) према величини a. Ова стандардна грешка се одређује из једначине

$$(1) \qquad \sigma_1^2 = \frac{[(m-a)^2]}{k}.$$

Пошто за сваку поједину аритметичку средину, на пр., за $m^{(\lambda)}$ имамо

$$m^{(\lambda)} - a = \frac{[a^{(\lambda)}]}{n} - a = \frac{[a^{(\lambda)} - a]}{n} = \frac{[x^{(\lambda)}]}{n} = \frac{x_1^{(\lambda)} + x_2^{(\lambda)} + \ldots + x_n^{(\lambda)}}{n},$$

квадрат те величине износи

$$(m^{(\lambda)} - a)^2 = \frac{[x^{(\lambda)2}]}{n^2} + \frac{2}{n^2} \sum_j \sum_i x_i^{(\lambda)} x_j^{(\lambda)},$$

где је збир проширен на све вредности индекса i и j сем случајева $i = j$.

Ако добијену вредност ставимо у (1), долазимо до резултата

$$\sigma_1^2 = \frac{[(m-a)^2]}{k} = \frac{[x^2]}{n^2} + \frac{2}{k\,n^2} \sum_\lambda \sum_i \sum_j x_i^{(\lambda)} x_j^{(\lambda)}.$$

Пошто претпостављамо да су грешке распоређене према Гаусову закону и на тај начин свакој позитивној одговара исте апсолутне вредности негативна грешка, други члан десне стране претходне једначине је нула. После тога та једначина даје

$$\sigma_1^2 = \frac{[x^2]}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n},$$

или дефинитивно

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Вероватна и просечна грешке средине имају вредности

$$r_1 = 0{,}675\,\sigma_1,$$

и

$$\varepsilon_1 = 0{,}798\,\sigma_1.$$

Ако стандардну грешку σ рачунамо не на основу правих грешака $x_1, x_2, \ldots, x_n$, него на основу привидних грешака $z_1, z_2, \ldots, z_n$, треба, како смо видели, за стандардну грешку σ искористити образац

$$\sigma = \sqrt{\frac{[z^2]}{n-1}}.$$

За грешке аритметичке средине тада имамо вредности:

за стандардну грешку аритметичке средине

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{[z^2]}{n(n-1)}},$$

за вероватну грешку аритметичке средине

$$r_1 = 0{,}675\,\sigma_1,$$

за просечну грешку аритметичке средине

$$\varepsilon_1 = 0{,}798\,\sigma_1.$$

§ 101. Израчунавање грешака

Показаћемо на примеру како се одређују грешке. Пример, који наводимо, фигурише у низу књига (Mellor, Fueter).

При мерењу отпора галванометром добивени су ови бројеви:

37,0 ; 36,8 ; 36,8 ; 36,9 ; 37,1 .

Наћи аритметичку средину и оценити грешке.

Саставимо таблицу

Редни број мерења	Посматрана величина	Привидна грешка (z)	z^2
1	37,0	$+0,08$	0,0064
2	36,8	$-0,12$	0,0144
3	36,8	$-0,12$	0,0144
4	36,9	$-0,02$	0,0004
5	37,1	$+0,18$	0,0324

Збир 184,6 Контрола $[z]=0$; $[z^2]=0{,}0680$

$$m=\frac{184{,}6}{5}=36{,}92$$

Стандардна грешка $\sigma=\sqrt{\frac{[z^2]}{n-1}}=\sqrt{\frac{0{,}068}{4}}\approx 0{,}13$. Пошто је између пет код четири мерења апсолутна вредност грешке $|z|$ мања од σ, а $4>\frac{2}{3}\cdot 5$, треба сматрати да резултати мерења задовољавају теорију у чијој основи лежи закон нормалног распореда. После тога можемо рачунати даље.

Вероватна грешка $r=0{,}675\,\sigma=0{,}088$,

Просечна грешка $\varepsilon=0{,}798\,\sigma=0{,}1037$,

или непосредно

$$\varepsilon=\frac{\Sigma|z|}{5}=\frac{0{,}52}{5}=0{,}104.$$

Претходне грешке односе се на поједине резултате. За одређивање грешака, које се односе на аритметичку средину, треба израчунати стандардну грешку помоћу обрасца

$$\sigma_1=\sqrt{\frac{[z^2]}{n(n-1)}}.$$

На основу овог обрасца налазимо:

Стандардна грешка аритметичке средине $\sigma_1=\sqrt{\frac{0{,}068}{5.4}}=0{,}058.$

Вероватна „ „ „ $r_1=0{,}675\,\sigma_1=0{,}030$.

Просечна „ „ „ $\varepsilon_1=0{,}798\,\sigma_1=0{,}039$.

Гаусова крива има једначину

$$y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{0{,}13\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\cdot 0{,}017}}=3{,}069\,e^{-29{,}41\,x^2}.$$

Вежбања.

1. Показати да за четири броја: 0,437; 0,441; 0,432; 0,434, као резултате мерења, не можемо искористити методу нормалног распореда.

2. Одредити дужину из шест мерења са резултатима: 12,765; 12,760; 12,760; 12,768; 12,765; 12,762 mm. и израчунати грешке.

3. Једна величина је измерена 10 пута са резултатима, приказаним овом таблицом

5,30 — 5,35	— 5,40	— 5,45	— 5,50 cm.
1	4	4	1

Одредити средњу вредност те дужине и одговарајуће грешке.

ГЛАВА XIII

МАТЕМАТИЧКА ОБРАДА СТАТИСТИЧКИХ ПОДАТАКА

§ 102. Математичка статистика

Статистика се бави проучавањем масовних појава. У процесу тог проучавања можемо разликовати три стадијума: 1. Прикупљање материјала (попис, анкета, запис резултата мерења, експеримената, пословања итд.) са претходном израдом плана тог прикупљања. 2. Обрада прикупљених података и 3. Тумачење и примена резултата на решавање постављених теориских и практичних проблема.

Математика се углавном примењује само у стадијуму обраде статистичких података. Ова обрада данас сачињава једну нарочиту дисциплину, која се зове Математичка статистика. Међутим Математичка статистика утиче знатно и на први стадијум статистичког проучавања, на прикупљање материјала, јер поучава у коме облику треба сакупљати тај материјал; она утиче и на трећи стадијум, на тумачење и примену резултата, јер омогућава њихово правилно разумевање.

Математичка статистика има широку практичну примену, нарочито у данашње доба, када форме људског живота све више прелазе из индивидуалистичких на друштвене. У савременом људском животу постоји читав низ домена у којим пословање није могуће без широке примене Математичке статистике, на пр., у свима врстама осигурања.

Математичка статистика стоји у најближој вези са Теоријом вероватноће и Теоријом грешака; при томе улогу грешке игра отступање појединих података од изједначених вредности, на пр., од аритметичких средина.

Овде ћемо изнети неколико основних појмова из Елементарне математичке статистике. У излагању користићемо се резултатима које смо извели у Теорији вероватноће и Теорији грешака.

§ 103. Средње величине

Ако имамо низ величина

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

од којих се свака понавља одређени број пута, наиме

$$n_1, n_2, \ldots, n_n,$$

величина

$$M = \frac{n_1 a_1 + n_2 a_2 + \ldots + n_n a_n}{s} = \frac{\sum n_i a_i}{s},$$

где је

$$s = n_1 + n_2 + \ldots + n_n = \sum n_i,$$

зове се аритметичка средина датих величина. Ако се не мисли нешто друго, аритметичка средина се зове једноставно средња величина, кратко средина. Сваки број n_i претставља фреквенцију одговарајуће величине a_i; он се зове понекад и тежина те величине.

Сем аритметичке средине постоје и друге средине. Тако смо имали већ појам средње квадратне величине, која би за дати низ величина изгледала овако

$$\sqrt{\frac{n_1 a_1^2 + n_2 a_2^2 + \ldots + n_n a_n^2}{n}}.$$

У обичној Математичкој статистици играју улогу средња аритметичка и средња квадратна величина. Остале средње величине у Статистици се мало употребљују. Наведимо изразе, за две величине a_1 и a_2 свих оних средина о којим може бити говора у Статистици:

Аритметичка средина . . . . . $\frac{1}{2}(a_1 + a_2)$,

Геометриска средина . . . . . $\sqrt{a_1 a_2}$,

Квадратна средина . . . . . . $\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}}$,

Хармониска средина . . . . . $\dfrac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)} = \dfrac{2 a_1 a_2}{a_1 + a_2}$,

Контрахармониска средина . . . $\dfrac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 + a_2}$.

Аритметичкој средини можемо дати и друге облике. Пошто можемо написати

$$M = \frac{n_1}{s} a_1 + \frac{n_2}{s} a_3 + \ldots + \frac{n_n}{s} a_n ,$$

а сваки количник $n_i : s$ можемо сматрати као вероватноћу w_i одговарајуће величине a_i, имамо за аритметичку средину израз

$$M = w_1 a_1 + w_2 a_2 + \ldots + w_n a_n = \sum w_i a_i .$$

Како је производ $w_i a_i$ математичко очекивање величине a_i, може се рећи да је аритметичка средина једнака збиру свих математичких очекивања датих величина.

Ради избегавања операција са великим бројевима израчунавање аритметичке средине можемо обавити на овај начин. Из величина $a_1, a_2, \ldots, a_n$ изаберемо провизорну средину; означимо је са A. Нека су разлике

(1) $$a_1 - A, \; a_2 - A, \; \ldots, \; a_n - A$$

отступања наших величина од A. Како је идентички

$$a_i = A + (a_i - A),$$

за аритметичку средину имамо

$$M = \frac{n_1 a_1 + n_2 a_2 + \ldots + n_n a_n}{s} =$$

$$= \frac{n_1 [A + (a_1 - A)] + n_2 [A + (a_2 - A)] + \ldots + n_n [A + (a_n - A)]}{s} =$$

$$= A \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_n}{s} + \frac{n_1 (a_1 - A) + n_2 (a_2 - A) + \ldots + n_n (a_n - A)}{s} =$$

$$= A + m ,$$

где је m аритметичка средина разлика (1), тј.

$$m = \frac{n_1 (a_1 - A) + n_2 (a_2 - A) + \ldots + n_n (a_n - A)}{s} .$$

Пошто су разлике (1) обично мали бројеви, израчунавање величине m је много једноставније од непосредног израчунавања величине M. Тако, на пр., за непосредно израчунавање аритметичке средине четири броја

$$50{,}732; \quad 50{,}726; \quad 50{,}725; \quad 50{,}729$$

треба израчунати збир ових бројева са вредношћу 202,912 и поделити га са 4; добићемо $M = 50{,}728$. Међутим, ако узмемо за провизорну средину, рецимо 50,730, разлике ће изгледати

$$+2, \quad -4, \quad -5, \quad -1,$$

све у хиљадитим. Ако их саберемо и збир (-8) поделимо са 4, добићемо средину ових разлика са вредношћу -2, откуд непосредно следује да наша средина има вредност $50{,}730 - 0{,}002 = 50{,}728$.

Ако је провизорна средина A тачно једнака аритметичкој средини M, збир разлика

$$\sum (a_i - M) = 0$$

једнак је нули.

Често се за израчунавање аритметичке средине узима тзв. медијана, тј. средњи члан. Ако је n непаран број, то ће бити $\frac{1}{2}(n+1)$'и члан; ако је n паран број, то ће бити аритметичка средина два средња члана $\frac{1}{2} n$'ог и $\frac{1}{2} n + 1$'ог, под условом да су они прости чланови. Ако та два средња члана, које означавамо са a' и a'', нису прости чланови, него чланови са тежинама n' и n'', за медијану се узима аритметичка средина чланова са тежинама, тј. величина

$$\frac{n' a' + n'' a''}{n' + n''} .$$

Покажимо још како се израчунава квадратна средина отступања датих величина од њихове аритметичке средине, тј. дисперзија. Ако и овде ту величину означимо са σ, према дефиницији имамо

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1 (a_1 - M)^2 + n_2 (a_2 - M)^2 + \ldots + n_n (a_n - M)^2}{s}} ,$$

где је, као и раније,

$$s = n_1 + n_2 + \ldots + n_n .$$

Ако је израчунавање аритметичке средине M извршено помоћу разлика (1) са провизорном средином A, за добијање σ није потребно рачунати нове разлике $a_i - M$, него можемо искористити исте разлике и то на овај начин. Сваку од њих можемо наиме заменити разликом

$$a_i - M = (a_i - A) - (M - A) = (a_i - A) - m .$$

Са овим изразом рачунамо овако

$$\sum n_i (a_i - M)^2 = \sum n_i (a_i - A)^2 - 2m \sum n_i (a_i - A) + m^2 \sum n_i =$$
$$= \sum n_i (a_i - A)^2 - 2m (s M - s A) + m^2 s =$$
$$= \sum n_i (a_i - A)^2 - m^2 s$$

и на основу тога за σ имамо образац

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1 (a_1 - A)^2 + n_2 (a_2 - A)^2 + \ldots + n_n (a_n - A)^2}{s} - m^2}. \tag{3}$$

§ 104. Улога дисперзије у Статистици

Како у Теорији грешака тако и у Статистици вредност дисперзије омогућује да се установи могу ли статистички подаци бити окарактерисани помоћу аритметичких средина или не. Критеријум за то можемо изразити, као што смо то урадили у § 96, овако:

Ако су M и σ аритметичка средина и дисперзија, онда за нормалну статистику најмање $\frac{2}{3}$ свих података мора лежати у границама

$$M - \sigma \quad \text{и} \quad M + \sigma$$

Пошто је израчунавање σ помоћу образаца (2) и (3) претходног параграфа доста сложено, нарочито у случају великог броја података, постоји за дисперзију више других образаца. Наведимо неке од њих без доказа.

Бернулијев образац гласи

$$\sigma_B^2 = s\, w\, \overline{w},$$

где су: s — број свих могућих испитивања (података), w — вероватноћа да ће се догађај стварно десити (податак је у позитивном смислу) и $\overline{w} = 1 - w$ вероватноћа да се догађај неће десити (податак је у негативном смислу). При томе се претпоставља да је вероватноћа сваког појединог испитивања иста; ако су вероватноће различите, узима се средња аритметичка вероватноћа.

Ако сваки догађај (податак) има своју посебну вероватноћу, можемо применити Поасонов образац:

$$\sigma_P^2 = s\, w\, \overline{w} - \sum_{i=1}^{s} (w_i - w)^2,$$

где: s има значење као и у претходном случају, w_i је вероватноћа сваког појединог испитивања (податка), а

$$w = \frac{1}{s}(w_1 + w_2 + \ldots + w_s)$$

и $\overline{w}$ је, као увек, везано са w једначином $\overline{w} = 1 - w$.

За $w_i = w\ (i = 1, 2, \ldots, s)$ Поасонов образац се претвара у Бернулијев. Величина σ_P је мања од σ_B, но разлика, практички, није велика.

Најзад, наведимо Лексисов образац за одређивање дисперзије

$$\sigma_L^2 = s\, w\, \overline{w} + \frac{1}{n}(s^2 - s) \sum_{j=1}^{n} (w_j - w)^2,$$

где је: s — број свих могућих мерења (података), n — број група са различитим вероватноћама w_j појединих догађаја (података) у свакој групи, $w = \frac{1}{n}(w_1 + w_2 + \ldots + w_n)$ и $\overline{w} = 1 - w$.

§ 105. Примери

a. У шест области на 500 рођене деце било је дечака

1	2	3	4	5	6
244	243	231	275	264	256

Израчунати аритметичку средину и оценити помоћу дисперзије уколико ова средина претставља дате статистичке податке.

За провизорну средину узимамо $A = 250$. Отступања од ове величине имају вредности:

$$\begin{aligned} 244 - 250 &= -6, \\ 243 - 250 &= -7, \\ 231 - 250 &= -19, \\ 275 - 250 &= +25, \\ 264 - 250 &= +14, \\ 256 - 250 &= +6 \\ \hline \text{Збир} &= +13, \quad m = \frac{13}{6} \approx 2{,}17 \end{aligned}$$

Аритметичка средина $M = A + m \approx 252{,}17 \approx 252{,}2$.

Дисперзију прво израчунавамо помоћу израчунатих разлика из једначине

$$\sigma^2 = \frac{1}{6}[(-6)^2 + (-7)^2 + (-19)^2 + (25)^2 + (14)^2 + (6)^2] - (2{,}17)^2,$$

одакле је

$$\sigma = 14{,}4.$$

Како отступања од аритметичке средине имају вредности:

$$-8{,}2; \quad -9{,}2; \quad -21{,}2; \quad +22{,}8; \quad +11{,}8; \quad +3{,}8,$$

видимо да су четири отступања по апсолутној величини мања од σ. Пошто је $4 = \frac{2}{3} \cdot 6$, познато правило не даје основа за оспоравање вредности статистичких података, али пошто подаци немају јаку (већу од $\frac{2}{3}$) концентрацију око аритметичке средине, не можемо казати да вредност те средине у пуној мери карактерише претежност дечака у свакој од тих шест области, како то показују и претходне вредности разлика.

Израчунајмо још Бернулијеву дисперзију

$$\sigma_B = \sqrt{s w \overline{w}}.$$

Вероватноће појединих група имају вредности

$$w_1 = \frac{244}{500} = 0{,}488; \quad w_2 = \frac{243}{500} = 0{,}486; \quad w_3 = \frac{231}{500} = 0{,}462;$$

$$w_4 = \frac{275}{500} = 0{,}550; \quad w_5 = \frac{264}{500} = 0{,}528; \quad w_6 = \frac{256}{500} = 0{,}512.$$

Видимо да су ове вероватноће различите, према томе треба узети средњу вероватноћу, коју можемо и непосредно израчунати

$$w = \frac{M}{500} = \frac{252{,}2}{500} = 0{,}504.$$

Вероватноћа $\overline{w}$ тада има вредност $\overline{w} = 1 - w = 0{,}496$.

Како је $s = 500$, имамо

$$\sigma_B = \sqrt{s w \overline{w}} = \sqrt{500 \cdot 0{,}504 \cdot 0{,}496} \approx 11{,}18.$$

Ова вредност дисперзије показује да статистички подаци само релативно доводе до јединственог, општег резултата за све области,

јер само половина области има отступање мање по апсолутној вредности од σ_B.

Израчунајмо још и Лексисову дисперзију

$$\sigma_L^2 = 500 \cdot 0{,}504 \cdot 0{,}496 + \frac{1}{6}(500^2 - 500)\,[(0{,}016)^2 + (0{,}018)^2 + (0{,}042)^2 + (0{,}046)^2 + (0{,}024)^2 + (0{,}008)^2] \approx 337{,}07.$$

Према томе је

$$\sigma_L \approx 18{,}3.$$

Ако упоредимо Бернулијеву дисперзију са Лексисовом, видимо да се оне знатно разликују. Откуд потиче и шта ова разлика значи? Она потиче отуда што за израчунавање σ_L узимамо у обзир различите вредности вероватноће сваког броја. Према томе можемо тврдити да наши статистички подаци нису у довољној мери изразити и да се средња аритметичка вредност јавља као величина, која, како смо то и раније видели, не карактерише у пуној мери слику распореда бројева рађања дечака у тим областима.

На основу овог примера може се тврдити да за примену Теорије вероватноће (у облику Гаусова закона) на статистичке податке није довољно искористити критеријум о $\frac{2}{3}$ резултата, него треба да буду испуњени још и други услови, на пр. услов да σ_L буде по својој вредности блиско вредности σ_B.

b. Узмимо сад десет области са распоредом бројева дечака који су се родили на 1000 рођене деце

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
440	422	453	465	430	448	407	449	420	448

и израчунајмо аритметичку средину и дисперзију.

Узимамо за провизорну средину $A = 440$ и израчунавамо отступања

$$0, \quad -18, \quad 13, \quad 25, \quad -10, \quad 8, \quad -33, \quad 9, \quad -20, \quad 8.$$

Пошто њихов збир чини -18, средње отступање износи $m = \frac{-18}{10} = -1{,}8$. Према томе за аритметичку средину имамо

$$M = A + m = 440 - 1{,}8 = 438{,}2.$$

За израчунавање σ дигнимо горња отступања на квадрат

$$0, \quad 324, \quad 169, \quad 625, \quad 100, \quad 64, \quad 1089, \quad 81, \quad 400, \quad 64,$$

начинимо њихов збир 2916 и поделимо га са 10 па добијамо 291,6; од овог броја одузимамо $m^2 = 3{,}24$ и израчунамо разлику

$$\sigma^2 = 291{,}6 - 3{,}24 = 288{,}36\,,$$

одакле је

$$\sigma = 16{,}98\,.$$

Пошто отступања наших података од аритметичке средине износе

1,8; —16,2; 14,8; 26,8; —8,2; 9,8; —31,2; 10,8; —18,2; 9,8,

видимо да су за седам података та отступања мања од σ. Пошто је $7 > \frac{2}{3} \cdot 10$, закључујемо да аритметичка средина у довољној мери одговара нашим статистичким подацима.

Како средња вероватноћа има вредност

$$w = \frac{M}{1000} = 0{,}4382\,,$$

за Бернулијеву дисперзију вршимо ово израчунавање

$$\sigma_B = \sqrt{1000 \cdot 0{,}4382 \cdot 0{,}5618} = \sqrt{246,\,18076} \approx 15{,}69\,.$$

У вези са одређивањем σ и σ_B учинићемо једну теориску примедбу.

За оцењивање значаја вредности дисперзије често се уводи тзв. дивергенциони коефицијент у облику Лексисова коефицијента са вредношћу

$$Q = \frac{\sigma}{\sigma_B}\,.$$

Према вредности тог коефицијента дисперзије распореда се деле на

нормалну дисперзију за $Q = 1$,

субнормалну дисперзију за $Q < 1$ и

хипернормалну дисперзију за $Q > 1$.

У првом примеру је овај коефицијент имао вредност

$$Q = \frac{14{,}4}{11{,}18} = 1{,}288\,,$$

у другом

$$Q = \frac{16{,}98}{15{,}69} = 1{,}082\,.$$

Вежбања.

Проучити ове таблице статистичких података:

1. Према подацима Петерсена 703 комада једне врсте рибе — пљоснатице по броју зракасто распоређених линија у репу могу бити подељена у ове групе:

Број линија	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
Број комада (фреквенција)	5	2	13	23	58	96	134	127	111	74	37	16	4	2	1

2. Исти писац наводи ове податке о броју примерака цвета (Ranunculus repens) који имају од 3 до 7 листића

Број листића	3	4	5	6	7
Број примерака (фреквенција)	1	2	959	18	2

3. Набавити неке таблице статистичких података о ФНРЈ и проучити их.

ГЛАВА XIV

ТЕОРИЈА КОРЕЛАЦИЈЕ

§ 106. Појам корелационе везе

Ако имамо, на пр., образац

$$Y = X^2,$$

можемо X сматрати за независно променљиву, а Y за зависно променљиву или функцију. Као што је добро познато, написана једначина поставља функционалну везу између променљивих X и Y.

И једначина

$$Y = \pm\sqrt{X},$$

помоћу које се одређују две вредности Y'а за сваку вредност X'а, одређује такође функционалну везу, у овом случају двозначну. Важно је подвући да и овде, без обзира на то што имамо две вредности, свака од њих одређује у потпуности одговарајућу вредност Y'а.

Постоје и такве функционалне везе код којих се X и Y не мењају непрекидно него само за одређене вредности $X_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ имамо одређене вредности $Y_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. И овим је одређена функционална веза између променљивих.

Међутим могу између величина постојати везе и друге природе. Позната је чињеница да особе већег раста имају просечно и већу тежину. Према томе раст и тежина стоје у извесној вези. Из којих података и како можемо формулисати ту везу?

Као пример наведимо таблицу тежине 648 регрута различите висине.

Из ове таблице види се да се од лица малога раста (под цифром 1) њих највише налазе у групама мање тежине (I и II), са већим растом у групама II и III, са још већим растом (под 3.) у групи III, са растом категорије 4. највише у III и IV, под 5. у IV, а под 6. у групама IV и V.

	Тежина тела у kg / Раст у cm	I 51,5–56,5	II 56,5–61,5	III 61,5–66,5	IV 66,5–71,5	V 71,5–76,5	VI 76,5–81,5	VII 81,5–86,5	Збир
1	155,5—163,5	32	41	15	3	2			93
2	163,5—167,5	13	51	51	17	4			136
3	167,5—171,5	4	40	72	42	10	1		169
4	171,5—175,5	1	7	44	55	21	8	3	139
5	175,5—179,5		1	9	37	18	5	1	71
6	179,5—187,5			3	14	13	5	5	40
	Збир . .	50	140	194	168	68	19	9	648

Види се да се са повећањем раста повећава и тежина, но не можемо казати да човек одређеног раста има и одређену тежину. Можемо казати само то да одређеном расту одговарају различите тежине са различитом вероватноћом: за лица малога раста има већу вероватноћу мања тежина, а за лица већег раста има већу вероватноћу већа тежина.

Таква се веза између величина зове **корелациона веза** или **корелација**. Из наведене таблице следује да између раста и тежине постоји извесна корелација.

Проучавање корелације данас претставља нарочиту дисциплину, која се зове **Теорија корелације** и која има велику примену у наукама теориског и практичког значаја, нарочито у Биологији, у тзв. **Биометрици**. У вези са последњом поникла је, како смо већ навели, и нова грана Математике — **Биоматематика**.

У овој глави дајемо елементарну анализу само два питања, која се односе на корелацију: питања корелације два зависна догађаја, од којих је сваки везан са одговарајућом вероватноћом и питања корелационе везе између два низа догађаја чији су подаци изражени таблицом.

§ 107. Вероватноћа зависних догађаја

У анализи вероватноће сложеног догађаја (§ 88), који се састоји у заједничком дешавању, рецимо, два догађаја са посебним вероватноћама w_1 и w_2, видели смо да је вероватноћа таквог сложеног догађаја једнака производу w_1 и w_2, но под претпоставком да су ови догађаји потпуно независни, тј. такви да дешавање, одн. недешавање једног не зависи од тога да ли се десио или није други догађај.

Претпоставимо сад да су два догађаја једног сложеног догађаја зависни.

За што јасније излагање пропратићемо теориска расуђивања објашњењем на једном конкретном примеру. Као први догађај узмимо клијање, рецимо, пшеничног семена, а као други — дрљање њиве пре ницања.

Сматрамо да се први догађај десио кад је семе проклијало; он се није десио кад због ма којих узрока биљка није никла.

Са друге стране, други догађај се састоји у дрљању: ако је дрљача прошла тако да је разбила на ситне делове бусење над семеном — сматрамо да је дрљање било успешно, да се десио други догађај; тај догађај није се десио, ако је дрљање било неуспешно, јер није растресло земљиште.

У случају сложеног догађаја, који зависи, као у нашем примеру, од два зависна фактора можемо проучавати ове вероватноће:

w_{12} за случај да су се десила оба зависна догађаја (семе је проклијало, дрљање је било успешно),

$w_{1\bar{2}}$ за случај да се први догађај десио, а други не (семе је проклијало, дрљање је било неуспешно);

$w_{\bar{1}2}$ за случај да се први догађај није десио, а други јесте (семе није проклијало, дрљање је било успешно),

$w_{\bar{1}\bar{2}}$ за случај да се оба догађаја нису десила (семе није проклијало, дрљање је било неуспешно).

Збир вероватноћа ова четири сложена догађаја, који исцрпљују све могуће случајеве у једном комплексу догађаја, мора бити једнак јединици, тј.

(1) $$w_{12} + w_{1\bar{2}} + w_{\bar{1}2} + w_{\bar{1}\bar{2}} = 1 .$$

Сем тога уведимо апостериорне вероватноће са ознакама:

$w_{1(2)}$ првог догађаја под условом да се други већ десио,

$w_{1(\bar{2})}$ опет првог догађаја под условом да је већ констатовано да се други није десио.

Сличне вероватноће можемо увести и за други догађај са ознакама

$$w_{2(1)} \quad \text{и} \quad w_{2(\bar{1})} .$$

Из саме дефиниције уведених величина непосредно следују, рецимо, једначине

(2) $$w_{12} = w_1 w_{2(1)} = w_2 w_{1(2)} ,$$

јер се вероватноћа сложеног догађаја зависних догађаја може сматрати као вероватноћа сложеног догађаја два независна догађаја, рецимо, првог и другог, но под претпоставком за тај други, да се већ десио први. Сличне једначине важе и за остале вероватноће из овог низа

(3) $$w_{12}, \quad w_{1\bar{2}}, \quad w_{\bar{1}2}, \quad w_{\bar{1}\bar{2}},$$

тако, на пр.,

(4) $$w_{1\bar{2}} = w_1 \overline{w}_{2(1)} = \overline{w}_2 w_{1(\bar{2})} .$$

Сем тога можемо узети у обзир да је

$$w_{1(2)} + w_{1(\bar{2})} = w_1 ,$$

јер број повољних случајева за први догађај обухвата повољне случајеве тог догађаја како под условом да се други догађај десио, тако и под условом да се он није десио. Исто тако важе и друге једначине, на пр.,

$$w_{\bar{1}(2)} + w_{\bar{1}(\bar{2})} = \overline{w}_1 .$$

Приметимо да, рецимо, из једначине (2) следује

$$\frac{w_{1(2)}}{w_1} = \frac{w_{2(1)}}{w_2} = \lambda ,$$

где је λ бројни коефицијент који се зове **коефицијент компатибилности**, заједничког постојања, два догађаја. Ако је $\lambda = 1$, догађаји су независни: вероватноћа $w_{1(2)} = w_1$ и $w_{2(1)} = w_2$, тј. вероватноћа сваког догађаја не зависи од тога да ли се десио други или не. Ако је $\lambda > 1$, вероватноћа сваког догађаја се повећава, ако се деси други, а при $\lambda < 1$, она се смањује.

За оцењивање величине везе између два зависна догађаја уводе се више величина, и то:

а. **Замеру зависности** δ између два зависна догађаја узима се величина са вредношћу

(5) $$\delta = w_{12} - w_1 w_2 ,$$

тј. разлика вероватноће тих догађаја сматраних као зависних и вероватноће тих догађаја као независних.

Ако искористимо обрасце (2) можемо за δ написати

(5′) $$\delta = w_2 (w_{1(2)} - w_1)$$

и одавде извести једначину

$$w_{1(2)} = w_1 + \frac{\delta}{w_2} .$$

Ова једначина показује улогу мере зависности δ. Вероватноћа $w_{1(2)}$ првог догађаја, под условом да се десио други, остаје иста ($w_{1(2)} = w_1$), другим речима на њу не утиче други догађај, ако је $\delta = 0$. Разлика између тих вероватноћа утолико је већа уколико је δ веће и уколико је вероватноћа самог по себи другог догађаја мања.

Лако је показати да величина δ, сем једначине (5), може бити одређена и из једначина

$$(6)\qquad -\delta = w_{1\bar{2}} - w_1 \bar{w}_2,$$

$$(6')\qquad -\delta = w_{\bar{1}2} - \bar{w}_1 w_2,$$

$$(6'')\qquad \delta = w_{\bar{1}\bar{2}} - \bar{w}_1 \bar{w}_2,$$

тј. по истом правилу као из једначине (5) само са променом знака вероватноће, само се сваки пут тада мења и знак δ. Тако, на пр., једначина (6) може се извести из једначине (5) на овај начин. Како је

$$w_{12} + w_{1\bar{2}} = w_1$$

и

$$w_1(w_2 + \bar{w}_2) \equiv w_1 w_2 + w_1 \bar{w}_2 \equiv w_1,$$

после одузимања долазимо до резултата

$$w_{12} - w_1 w_2 = \delta = w_1 \bar{w}_2 - w_{1\bar{2}} = -(w_{1\bar{2}} - w_1 \bar{w}_2),$$

а то и потврђује једначину (6).

Једначине (5) и (6), (6'), (6'') показују да је 1) ако су догађаји независни, $\delta = 0$ и 2) обрнуто, ако је $\delta = 0$, догађаји су независни.

b. Коефицијент регресије првог догађаја у односу на други са вредношћу

$$(7)\qquad \rho_1 = w_{1(2)} - w_{1(\bar{2})},$$

тј. разлика две вероватноће првог догађаја, с једне стране, под условом да се други догађај десио и, с друге стране, да се други догађај није десио.

Коефицијент регресије има велики практичан значај за оцењивање утицаја једног факта на други. Тако, на пр., у нашем примеру клијања пшеничног семена, ако је, рецимо, $\rho_1 = \frac{1}{10}$, значи да је вероватноћа клијања после дрљања за $\frac{1}{10}$ већа од вероватноће клијања без дрљања.

Као разлика два позитивна броја, од којих ниједан није већи од јединице, апсолутна вредност коефицијента регресије не може бити већа од јединице.

Нађимо сада везу између коефицијента регресије ρ_1 и мере зависности δ.

Пошто из (2) и (4) имамо

$$w_{1(2)} = \frac{w_{12}}{w_2} \qquad \text{и} \qquad w_{1(\bar{2})} = \frac{w_{1\bar{2}}}{\bar{w}_2},$$

добијамо из (7) за ρ_1 израз

$$\rho_1 = \frac{w_{12}}{w_2} - \frac{w_{1\bar{2}}}{\bar{w}_2} = \frac{w_{12}\bar{w}_2 - w_{1\bar{2}} w_2}{w_2 \bar{w}_2}.$$

Како је, даље, из (5) и (6)

$$w_{12} = \delta + w_1 w_2;$$

$$w_{1\bar{2}} = -\delta + w_1 \bar{w}_2,$$

после множења прве једначне са $\bar{w}_2$ и друге са $-w_2$ и сабирања, долазимо до резултата

$$w_{12}\bar{w}_2 - w_{1\bar{2}} w_2 = \delta(\bar{w}_2 + w_2) = \delta,$$

који даје за везу између ρ_1 и δ

$$(8)\qquad \rho_1 = \frac{\delta}{w_2 \bar{w}_2}.$$

Из ове једначине следује да су коефицијент регресије и мера зависности пропорционални, истог знака и да је $|\rho_1| \geqslant 4\,|\delta|$.

На сличан начин можемо увести други коефицијент регресије

$$(9)\qquad \rho_2 = w_{2(1)} - w_{2(\bar{1})} = \frac{\delta}{w_1 \bar{w}_1},$$

другог догађаја у односу на први.

Између два регресиона коефицијента лако је на основу (8) и (9) поставити везу

$$(10)\qquad \frac{\rho_1}{w_1 \bar{w}_1} = \frac{\rho_2}{w_2 \bar{w}_2}.$$

c. *Коефицијент корелације* R између два зависна догађаја је геометриска средина коефицијената регресије са одговарајућим знаком, тј.

$$R = \pm\sqrt{\rho_1 \rho_2}\,. \tag{11}$$

Знак пред кореном треба узети онај који имају коефицијенти ρ_1 и ρ_2, а они имају знак мере δ.

На основу (10) можемо коефицијенту R дати један од ових облика

$$R = \rho_1 \sqrt{\frac{w_2 \overline{w}_2}{w_1 \overline{w}_1}} = \rho_2 \sqrt{\frac{w_1 \overline{w}_1}{w_2 \overline{w}_2}}\,. \tag{12}$$

Коефицијенти регресије су најважнији за карактерисање зависности догађаја; коефицијент корелације добија нарочиту важност у случају када су оба коефицијента регресије једнака, јер је тада

$$R = \rho_1 = \rho_2\,.$$

Из (12) на основу (8) можемо написати образац

$$R = \frac{\delta}{\sqrt{w_1 \overline{w}_1 w_2 \overline{w}_2}}\,,$$

који опет показује пропорционалност коефицијента корелације и мере зависности. Из овог обрасца следује врло важна особина коефицијента корелације: он је једнак нули онда и само онда када су догађаји независни ($\delta = 0$).

Како сваки коефицијент регресије по апсолутној вредности не може бити већи од јединице, апсолутна вредност коефицијента корелације не може такође бити већа од јединице. Није тешко показати да је $R = 1$ онда и само онда, кад се два догађаја поклапају ($w_1 = w_2$) и да је $R = -1$, кад је један догађај супротан другом ($w_1 = \overline{w}_2$ или, што следује из претходног, $\overline{w}_1 = w_2$).

d. Најзад за оцењивање карактера зависности једног догађаја од другог уводи се *коефицијент зависности* између два догађаја у облику

$$Q = \frac{\delta}{w_{12} w_{\bar{1}\bar{2}} + w_{1\bar{2}} w_{\bar{1}2}} = \frac{w_{12} w_{\bar{1}\bar{2}} - w_{1\bar{2}} w_{\bar{1}2}}{w_{12} w_{\bar{1}\bar{2}} + w_{1\bar{2}} w_{\bar{1}2}}\,. \tag{13}$$

Из овог обрасца следује да коефицијент Q има исти знак као и δ, а према томе и као ρ_1 и ρ_2.

Детаљнија анализа тог коефицијента показује да је

$$|Q| \geqslant |\rho_1|, \qquad |Q| \geqslant |\rho_2|;$$

$$|Q| > |R|,$$

тј. да је његова величина већа од величине других коефицијената; то значи да је он најосетљивији од свих коефицијената за оцењивање зависности између два догађаја.

Покажимо сад на нашем примеру клијања зрна и дрљања улогу мере зависности и свих коефицијената за оцењивање зависности два догађаја.

Нека вероватноћа клијања после дрљања буде $w_{1(2)} = 0{,}85$; до тог броја можемо доћи, рецимо, на основу статистичких података: од 3 000 000 зрна после дрљања је никло 2 550 000 зрна.

Одатле закључујемо да је

$$w_{\bar{1}(2)} = 1 - w_{1(2)} = 0{,}15\,.$$

Са друге стране, исто тако статистички подаци показују да је од 3 000 000 зрна без дрљања никло свега округло 2 250 000 зрна; то значи

$$w_{1(\bar{2})} = 0{,}75 \quad \text{и} \quad w_{\bar{1}(\bar{2})} = 0{,}25\,.$$

Претпоставимо, сем тога, да дрљање утиче само на $\frac{4}{5}$ површине преко које је прошла дрљача, а да на осталу $\frac{1}{5}$ површине она није утицала, тј.

$$w_2 = \frac{4}{5}\,, \qquad \overline{w}_2 = \frac{1}{5}\,.$$

Тада можемо израчунати вероватноћу клијања једног зрна уопште. Као вероватноћа сложеног догађаја, на основу теореме сабирања и множења, она ће бити

$$w_1 = w_2 w_{1(2)} + \overline{w}_2 w_{1(\bar{2})} = \frac{4}{5}\cdot 0{,}85 + \frac{1}{5}\cdot 0{,}75 = 0{,}83\,,$$

па према томе

$$\overline{w}_1 = 1 - w_1 = 0{,}17\,.$$

За меру зависности δ из (5') имамо

$$\delta = w_2 (w_{1(2)} - w_1) = \frac{4}{5}(0{,}85 - 0{,}83) = 0{,}016\,.$$

За ρ_1 и ρ_2, на основу (8) и (9), добијамо

$$\rho_1 = \frac{\delta}{w_2 \overline{w}_2} = 0{,}016 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{1} = 0{,}1\,,$$

$$\rho_2 = \frac{\delta}{w_1 \overline{w}_1} = 0{,}016 \cdot \frac{1}{0{,}83} \cdot \frac{1}{0{,}17} = \frac{160}{83 \cdot 17} \approx 0{,}113\,;$$

затим добијамо за вредност коефицијента корелације R

$$R = \sqrt{\rho_1 \rho_2} = \sqrt{0{,}1 \cdot 0{,}113} = \sqrt{0{,}0113} \approx 0{,}106\,.$$

Најзад за израчунавање коефицијента Q можемо или из (13) извести нов образац за ту величину у облику

$$Q = \frac{w_{1\,(2)}\, w_{\overline{1}\,(\overline{2})} - w_{\overline{1}\,(2)}\, w_{1\,(\overline{2})}}{w_{1\,(2)}\, w_{\overline{1}\,(\overline{2})} + w_{\overline{1}\,(2)}\, w_{1\,(\overline{2})}}\,,$$

на основу којега имамо

$$Q = \frac{0{,}85 \cdot 0{,}25 - 0{,}15 \cdot 0{,}75}{0{,}85 \cdot 0{,}25 + 0{,}15 \cdot 0{,}75} = \frac{4}{13} \approx 0{,}308\,,$$

или непосредно искористити образац (13), при чему треба из једначина (5), (6), (6') и (6'') претходно одредити вредности вероватноћа $w_{1\,2}$, $w_{\overline{1}\,2}$, $w_{1\,\overline{2}}$, $w_{\overline{1}\,\overline{2}}$.

Наведени пример у довољној мери показује смисао и значај свих оних величина, које карактеришу зависност једног догађаја од другог.

Вежбања.

1. Навести примере два догађаја за које је коефицијент компатибилности једнак јединици, већи и мањи од јединице.

2. Извести обрасце

$$w_{1\,(2)} = w_1 + R \sqrt{\frac{\overline{w}_2\, w_1\, \overline{w}_1}{w_2}}\,, \qquad w_{1\,(\overline{2})} = w_1 - R \sqrt{\frac{w_2\, w_1\, \overline{w}_1}{\overline{w}_2}}\,.$$

3. Извести образац

$$Q = \frac{\rho_1}{1 - (w_{1\,(2)}\, w_{1\,(\overline{2})} + w_{\overline{1}\,(2)}\, w_{\overline{1}\,(\overline{2})})}\,.$$

4. Доказати на основу претходног обрасца да је увек $|Q| \geq |\rho_1|$.

5. Редовно заливање посејаног семена утиче на његово клијање. Које величине треба увести при анализи ове појаве да помоћу одговарајућих коефицијената из Теорије корелације зависних догађаја бројно проценимо зависност клијања од заливања?

§ 108. Зависни низови; њихов коефицијент корелације

Претпоставимо да низу величина

$$X_1\,,\ X_2\,,\ \ldots\,,\ X_n$$

које ћемо кратко означавати са $X_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$, или непрекидној промењивој X, која се мења у интервалу од a до b, одговарају два низа величина. Један ћемо од њих означити са A, други са B. Сваки од ових низова може се састојати или из посебних вредности, рецимо,

$$A_1\,,\ A_2\,,\ \ldots\,,\ A_n\,,$$

$$B_1\,,\ B_2\,,\ \ldots\,,\ B_n\,,$$

кратко A_i, $B_i\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, или може бити претстављен функцијама $A(X)$, односно $B(X)$. Најзад први низ може се састојати из посебних вредности, а други може бити претстављен функцијом. Обрнути случај нећемо узимати у разматрање.

Упоредимо сада помоћу разлика

$$A_i - B_i$$

вредности низа A са односним вредностима низа B према аргументу X.

Природно је да узмемо квадрате разлика како би и позитивна и негативна отступања била узета у подједнакој мери. Збир добијених квадрата, проширен на све вредности A, који ћемо означити са

$$\sum (A_i - B_i)^2,$$

претставља т о т а л н о о т с т у п а њ е н и з а A о д н и з а B, и обрнуто.

За упоређивање величине овог отступања са величином самих вредности низа A треба израчунати меру отступања на јединицу збира $\Sigma\, A_i^2$. Ово релативно отступање има вредност

$$\frac{\sum (A_i - B_i)^2}{\sum A_i^2}\,. \tag{1}$$

Јасно је да је тај однос бројна мера отступања низа A од низа B; он показује у којој се мери низ A може заменити низом B.

Можемо претпоставити да је низ B изабран, тако рећи, згодно, тј. да задовољава услов

$$|A_i - B_i| \leqslant |A_i|\,,$$

или бар шири услов

$$\sum (A_i - B_i)^2 \leqslant \sum A_i^2\,.$$

Са овом претпоставком количник (1) може се претставити

$$\frac{\sum (A_i - B_i)^2}{\sum A_i^2} = 1 - R^2,$$

где је R апстрактни број једнак правом разломку, нули или јединици. Број R можемо назвати **коефицијент упоређивања** низа А са низом В.

Ако се зауставимо само на позитивним вредностима коефицијента, за $R = +1$ низ В може потпуно заменити низ А. Ако је $R = 0$, низ В не претставља низ А, пошто су $B_i = 0$ (случај када су и сви $A_i = 0$ искључујемо).

Ако при формирању низа В располажемо могућношћу да тај низ у извесној мери мењамо, што се са математичког гледишта огледа у томе што низ В сем независно променљиве X зависи и од других променљивих α, β, $\gamma, \ldots$ (оне се зову **параметри**), онда се вредности ових параметара могу изабрати тако да тотално отступање низа А од низа В буде најмање (метода најмањих квадрата). Означимо са B′ вредности низа В, који одговара овом минимуму; те се вредности зову **оптималне**.

Коефицијент R за оптимални низ B′ има специјалну вредност, коју ћемо означити са r; она се дефинише једначином

$$\frac{\sum (A_i - B_i')^2}{\sum A_i^2} = 1 - r^2. \tag{2}$$

Коефицијент r за низ B′, типа В, који најбоље одговара низу А, зове се **коефицијент корелације низа В за низ А**.

Може се показати да је овај коефицијент корелације једног низа у односу на други низ који ћемо у наредним параграфима протумачити и развити, тесно везан са оним који смо увели у претходном параграфу као коефицијент корелације два зависна догађаја; при томе нови појам може бити сматран као уопштавање претходног.

§ 109. Линеарна корелација

Ако је низ В, а према томе и низ B′, линеарни низ, тј. низ одређен једначином

$$B' = \alpha + \beta X, \tag{1}$$

где је X независно променљива, која има одређену вредност за сваку вредност низа А, а α и β оптималне вредности, коефицијент корелације

r зове се **коефицијент линеарне корелације**. Пошто се за корелацију низова углавном употребљује линеарна корелација, реч „линеарна" се изоставља и под корелацијом се подразумева линеарна корелација, тј. претстава низа А линеарним низом (1).

Права са једначином (1), где X и B′ играју улогу Декартових координата тачке у равни зове се **корелациона права** (**прогресиона** или **регресиона** према знаку угаоног коефицијента).

Обратимо пажњу да је одређивање корелационе праве слично са одређивањем линеарног тренда (§ 79).

Ако са Y_i означимо вредности низа А, за одређивање оптималних вредности параметара α и β треба узети екстремум функције[1])

$$F(\alpha, \beta) = \sum (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2.$$

Познати услови за екстремум дају

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -2 \sum (Y_i - \alpha - \beta X_i) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = -2 \sum [X_i (Y_i - \alpha - \beta X_i)] = 0. \tag{3}$$

Означимо ли поново са n број свих вредности низа А, а са X_m и Y_m средње вредности X_i и Y_i, добићемо два услова

$$\sum X_i = n X_m, \qquad \sum Y_i = n Y_m.$$

Ако узмемо у обзир још и да је

$$\sum \alpha = \alpha \sum 1 = \alpha n,$$

једначина (2) доводи до резултата

---

[1]) Ако је низ А непрекидан, тј. одређен функцијом

$$A = f(X)$$

функција $F(\alpha, \beta)$ изражава се интегралом

$$F(\alpha, \beta) = \int_a^b [f(X) - \alpha - \beta X]^2 \, dx$$

са границама које су постављене проблемом. После замене збира интегралом у даљем излагању треба извршити односне промене.

$$\text{(4)} \qquad Y_m = \alpha + \beta X_m ,$$

који тврди да корелациона права пролази кроз средњу тачку са координатама (X_m, Y_m).

Узмимо сад средњу тачку за почетак нових координата са осама паралелним старим осама; обрасци трансформације координата изгледају тада

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} X_i &= x_i + X_m , \\ Y_i &= y_i + Y_m , \end{aligned}$$

где су x_i и y_i нове координате.

Једначина (1) корелационе праве у новим координатама изгледа

$$\text{(6)} \qquad y = \beta x .$$

Пошто нове вредности x_i, y_i задовољавају једначине

$$\sum x_i = 0 , \qquad \sum y_i = 0 ,$$

једначину (3) после трансформације можемо написати

$$\sum [x_i (y_i - \beta x_i)] = 0 ,$$

одакле следује ова вредност угаоног коефицијента корелационе праве

$$\beta = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} .$$

Сам екстремум функције $F(\alpha, \beta)$ израчунава се овако

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta) &= \sum (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2 = \\ &= \sum (y_i + Y_m - \alpha - \beta x_i - \beta X_m)^2 = \\ &= \sum (y_i - \beta x_i)^2 = \\ &= \sum y_i^2 - 2\beta \sum x_i y_i + \beta^2 \sum x_i^2 = \\ &= \sum y_i^2 - 2 \frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^2} + \frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^2} \end{aligned}$$

и има према томе вредност

$$F(\alpha, \beta) = F_{ext.} = \sum y_i^2 - \frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^2} .$$

Ако сад узмемо у обзир једначину (2) претходног параграфа, која дефинише коефицијент линеарне корелације коју можемо написати у облику [1])

$$\frac{F_{ext.}}{\sum y_i^2} = 1 - r^2 ,$$

добијамо за r^2

$$\text{(7)} \qquad r^2 = \frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i^2} .$$

Ако уведемо познате ознаке за дисперзије, наиме ставимо

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 , \qquad \sigma_2^2 = \frac{1}{n} \sum y_i^2 ,$$

коефицијент корелације r добиће облик

$$\text{(8)} \qquad r = \frac{\sum x_i y_i}{n \sigma_1 \sigma_2} .$$

Написани обрасци (7) и 8) омогућују да се израчуна коефицијент линеарне корелације за дати низ $A_i = Y_i$ трансформисан у y_i. Питање знака код r решава се знаком угаоног коефицијента β корелационе праве, јер је

$$\beta = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = r \frac{\sigma_2}{\sigma_1} .$$

Најзад можемо увести тзв. **нормалне координате**, које ћемо означити са ξ и η и које се одређују једначинама

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\sum x_i^2}} , \qquad \eta = \frac{y}{\sqrt{\sum y_i^2}} .$$

Помоћу нормалних координата коефицијент линеарне корелације изражава се овако

$$r = \sum \xi_i \eta_i .$$

Нормалне координате имају то преимућство што се оне увек изражавају апстрактним бројевима независно од природе величина X и Y.

---

[1]) У овом обрасцу релативно отступање рачунамо *не* на јединицу збира првобитних величина A, тј. збира $\sum A_i^2 = \sum (y_i + Y_m)^2 = \sum y_i^2 + n Y_m^2$, него на јединицу збира $\sum y_i^2$ за величине y_i, које претстављају низ A сведен на ниво Y_m.

Није тешко видети да је коефицијент корелације, израчунат помоћу збира величина Y_i, увек већи од коефицнјента израчуната помоћу величина y_i.

Ако је низ величина A претстављен непрекидном линијом

$$y = f(x),$$

коефицијент корелације одређује се из једначине

$$r = \frac{\int_a^b x\, y\, dx}{\left[\int_a^b x^2\, dx \cdot \int_a^b y^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}}},$$

где су a и b границе анализованог интервала. Угаони коефицијент корелационе праве одређен је изразом

$$\beta = r\left[\frac{\int_a^b y^2\, dx}{\int_a^b x^2\, dx}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Из графичког посматрања тачака одређених координатама X, Y непосредно следује да, место независно променљиве X, можемо са истим правом узети за независну променљиву Y; другим речима, тачке можемо цртати и систематизовати по вредностима Y'a. Понављајући сва претходна расуђивања за ово ново посматрање, долазимо до закључка да коефицијент корелације r има исту вредност, јер је његов израз симетричан у односу на x и y. И тако једначина корелационе праве добија облик

$$x = \gamma y,$$

при чему је угаони коефицијент γ

$$\gamma = r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

Ако упоредимо једначине корелационих правих

$$y = r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}x, \qquad y = \frac{1}{r}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}x,$$

видимо да се оне поклапају само под условом

$$r = \pm 1.$$

Према томе близина корелационих правих показује у којој се мери низ A може заменити овим правама.

Покажимо сад на једноставном примеру како се рачуна коефицијент линеарне корелације.

Решимо овај задатак: Д-р Чарлс је израчунао број становника Енглеске за 50 наредних година са претпоставком да ће тај број и даље показивати данашњу тенденцију падања. Резултате показује таблица:

Година	Број становника у милионима
1935	40,5
1945	40,4
1955	38,8
1965	35,8
1985	26,0

Треба одредити коефицијент корелације и корелационе праве[1]).

	X_i	Y_i	$x_i = X_i - X_m$	$y_i = Y_i - Y_m$	$x_i\, y_i$	x_i^2	y_i^2
1	35	40,5	-22	$+4,2$	$-92,4$	484	17,64
2	45	40,4	-12	$+4,1$	$-49,2$	144	16,81
3	55	38,8	-2	$+2,5$	$-5,0$	4	6,25
4	65	35,8	$+8$	$-0,5$	$-4,0$	64	0,25
5	85	26,0	$+28$	$-10,3$	$-10,3$	784	106,09
$n=5$	$\frac{1}{n}\Sigma X_i = X_m = 57$	$\frac{1}{n}\Sigma Y_i = Y_m = 36,3$	$\Sigma X_i = 0$[2])	$\Sigma y_i = 0$[2])	$\Sigma x_i y_i = -459$	$\Sigma x_i^2 = 1480$	$\Sigma y_i^2 = 147,04$

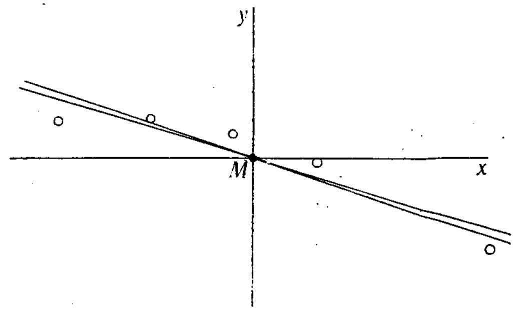
$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1480}{5}} = 17,2;$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{147,04}{5}} = 5,42.$$

$$r = \frac{-459}{5\times 17,2\times 5,42} = -0,985.$$

$$\beta_1 = -0,985 \cdot \frac{5,42}{17,2} = -0,31;$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{0,985}\cdot\frac{5,42}{17,2} = -0,32.$$



Сл. 166. Корелационе праве броја становника Енглеске

[1]) Услед малог броја података тај пример није у стању да издржи критику са гледишта теорије корелације; ми га наводимо само из дидактичких разлога. Циљ нам је при томе био да се излагање што мање отежа рачунским операцијама.

[2]) Ови рачуни се врше само за проверавање бројева у одговарајућем ступцу.

Једначине корелације правих имају облик:

$$y = -0{,}31\,x,$$

$$y = -0{,}32\,x.$$

Саме праве показане су на слици 166.

§ 110. Случај низа отежаних величина

У претходној теорији био је анализован случај, када свакој вредности X'а одговара само једна вредност Y'а. Тај случај можемо сматрати као случај корелационе везе, који је већ доведен на случај функционалне везе, само што она нема линеарни карактер. И резултати проучавања корелације одговарају на питање у којој мери дата функционална веза може бити замењена линеарном функционалном везом.

Анализујмо сад случај, када свакој вредности X'а, рецимо X_i, одговара читав низ вредности Y'а, на пр.,

$$Y_1,\ Y_2, \ldots,\ Y_j, \ldots,\ Y_k$$

и при томе се свака величина рачуна одређени број пута, тј. о т е ж а н а је тим бројем. Такву везу између величина X и Y можемо претставити помоћу таблице

	X_1	X_2	. .	X_i	. .	X_n	Збирови
Y_1	n_{11}	n_{21}	. .	n_{i1}	. .	n_{n1}	$\sum n_{i1} = \nu_1$
Y_2	n_{12}	n_{22}	. .	n_{i2}	. .	n_{n2}	$\sum n_{i2} = \nu_2$
.	.	.	. .	.	. .	.	.
.	.	.	. .	.	. .	.	.
Y_j	n_{1j}	n_{2j}	. .	n_{ij}	. .	n_{nj}	$\sum n_{ij} = \nu_j$
.	.	.	. .	.	. .	.	.
.	.	.	. .	.	. .	.	.
Y_k	n_{1k}	n_{2k}	. .	n_{ik}	. .	n_{nk}	$\sum n_{ik} = \nu_k$
Збирови	$\sum n_{1j} = n_1$	$\sum n_{2j} = n_2$	. .	$\sum n_{ij} = n_i$	. .	$\sum n_{nj} = n_n$	$\sum n_i = \sum \nu_j = N$

И овај случај треба обрадити слично претходном са том разликом што се на слици тачка (X_i, Y_j) не узима једанпут, него се понавља n_{ij} — пута.

За одређивање средњих величина треба искористити обрасце.

$$N X_m = \sum n_i X_i,$$

$$N Y_m = \sum \nu_j Y_j.$$

После овог одређивања можемо увести нове координате x и y помоћу једначина (5) претходног параграфа.

Према обрасцу (7) истог параграфа коефицијент корелације има вредност

$$r = \frac{\sum\sum n_{ij}\, x_i\, y_j}{\left[\sum n_i x_i^2 \cdot \sum \nu_j y_j^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

где је двоструко сабирање проширено на све вредности индекса i и j.

Ако уведемо ознаке

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum n_i x_i^2}{N}}, \qquad \sigma_2 = \sqrt{\frac{\sum \nu_j y_j^2}{N}},$$

претходни образац можемо написати

$$r = \frac{\sum\sum n_{ij}\, x_i\, y_j}{N\sigma_1\,\sigma_2}. \tag{1}$$

Ако се поново вратимо на полазне променљиве X_i, Y_j, стављајући

$$x_i = X_i - X_m,$$

$$y_j = Y_j - Y_m,$$

коефицијент корелације постаје

$$r = \frac{1}{N\sigma_1\,\sigma_2}\left\{\sum\sum n_{ij}\,(X_i - X_m)\,(Y_j - Y_m)\right\} =$$

$$= \frac{1}{N\sigma_1\,\sigma_2}\left\{S n_{ij} X_i Y_j - X_m S n_{ij} Y_j - Y_m S n_{ij} X_i + X_m Y_m S n_{ij}\right\},$$

где S кратко означава двоструко сумирање, после чега изводимо дефинитивно

$$r = \frac{\sum\sum n_{ij}\, X_i\, Y_j}{N\sigma_1\,\sigma_2} - \frac{X_m\, Y_m}{\sigma_1\,\sigma_2}. \tag{2}$$

Примера ради одредићемо коефицијент линеарне корелације и поставићемо једначине корелационих правих за везу између дебљине стабла и дужине највећег листа биљке Trientalis europaea. Овај пример обрађује више писаца.

Подаци су наведени у овој таблици.

X / Y	0,425	0,525	0,625	0,725	0,825	0,925	1,025	1,125	1,225	1,325	1,425	ν_j	$\nu_j Y_j$	y_j	y_j^2	$\nu_j y_j^2$
10,5	1											1	10,5	—25,7	660,49	660,49
16,5	1	4	1	1								7	115,5	—19,7	388,09	2716,63
22,5	1	9	16	3	1							30	675,0	—13,7	187,69	5630,70
28,5		2	9	22	9	2	1					45	1282,5	— 7,7	59,29	2668,05
34,5			8	19	20	4	1					52	1794,0	— 1,7	2,89	150,28
40,5	1			7	18	12	6	4				48	1944,0	4,3	18,49	887,52
46,5				1	8	9	3	2	1			24	1116,0	10,3	106,09	2546,16
52,5						3	6	4	1			14	735,0	16,3	265,69	3719,66
58,5							2	2	1	2		7	409,0	22,3	497,29	3481,03
64,5									1	3		4	258,0	28,3	800,89	3203,56
70,5									1		1	2	141,0	34,3	1176,49	2352,98
n_i	4	15	34	53	56	30	19	12	5	5	1	234	8481,0			28017,06
$n_i X_i$	1,700	7,875	21,250	38,425	46,200	27,750	19,475	13,500	6,125	6,625	1,425	190,350				
x_i	—0,388	—0,288	—0,188	—0,088	0,012	0,112	0,212	0,312	0,412	0,512	0,612					
x_i^2	0,150544	0,082944	0,035344	0,007744	0,000144	0,012544	0,044944	0,097344	0,169744	0,262144	0,374544					
$n_i x_i^2$	0,602176	1,244160	1,201696	0,410432	0,008064	0,376320	0,853936	1,168128	0,848720	1,310720	0,374544	8,398896				

За одређивање X_m под бројевима вертикалних стубаца пишемо вредности производа $n_i X_i$: $4 \times 0{,}425 = 1{,}700$; $15 \times 0{,}525 = 7{,}875$ итд. Затим се ови производи сабирају: $\sum n_i X_i = 190{,}350$; резултат се дели бројем свих биљака 234:

$$X_m = 190{,}350 : 234 = 0{,}813 \text{ mm}.$$

За одређивање средње вредности Y_m поступамо на исти начин са хоризонталним редовима, добијамо: $Y_m = (\sum \nu_j Y_j) : N = 8481{,}0 : 234 = 36{,}2$.

Затим израчунавамо x_i и y_j као разлике $X_i - X_m$ и $Y_j - Y_m$.

Даље дижемо x_i на квадрат, множимо одговарајућим бројем биљака, тј. рачунамо $n_i x_i^2$, сабирамо све производе, делимо општим бројем биљака и, после извлачења квадратног корена, добијамо величину σ_1. У случају релативно малих бројева можемо за израчунавање r искористити непосредно образац

$$r = \frac{\sum\sum n_{ij}\, x_i\, y_j}{\left[\sum n_i\, x_i^2 \cdot \sum \nu_j\, y_j^2\right]^{\frac{1}{2}}}\,;$$

овај образац не тражи дељење означених збирова бројем N. У нашем случају имамо

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum n_i\, x_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{8{,}398896}{234}} = 0{,}189$$

и аналогно

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{\sum \nu_j\, y_j^2}{N}} = \sqrt{\frac{28017{,}06}{234}} = 10{,}94.$$

После тога за одређивање коефицијента корелације треба израчунати [или збир $\sum\sum n_{ij}\, x_i\, y_j$, ако искоришћавамо образац (1), или збир $\sum\sum n_{ij}\, X_i\, Y_j$, ако узимамо образац (2).

Приметимо да је, без обзира на то што је образац (2) компликованији, израчунавање последњег збира често много једноставније од израчунавања првог збира јер се бројеви X_i и Y_j обично дају у једноставнијем облику.

У нашем случају први збир има приближну вредност

$$\sum\sum n_{ij}\, x_i\, y_j \approx 403,$$

а други

$$\sum\sum n_{ij}\, X_i\, Y_j \approx 7292.$$

Искористимо ли први збир добијемо за коефицијент корелације

$$r = \frac{403}{234 \cdot 0{,}189 \cdot 10{,}94} \approx 0{,}83.$$

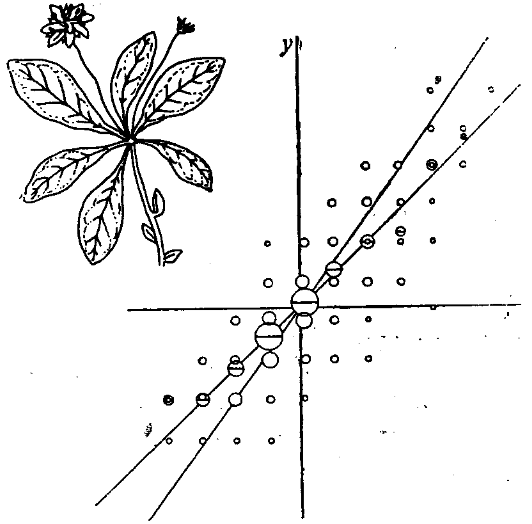
Ако узмемо други збир, рачун даје исти резултат

$$r = \frac{7292}{234 \cdot 0{,}189 \cdot 10{,}94} - \frac{0{,}813 \cdot 36{,}2}{0{,}189 \cdot 10{,}94} \approx 0{,}83.$$

Угаони коефицијенти корелационих правих имају вредности

$$\beta_1 = r\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \approx 48, \qquad \beta_2 = \frac{1}{r}\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \approx 69.$$

Резултат је у одговарајућој размери графички претстављен на слици 167.



Површина сваког кружића је пропорционална броју одговарајућих примерака. Кружић са цртом претставља све примерке истог вертикалног реда. Са стране цртежа показана је сама биљка.

Сл. 167. Пример корелације за биљку Trientalis europaea

Вежбања.

1. Проучити корелациону везу одређену таблицом тежине 648 регрута (стр. 487).

2. Проучити корелацију између висине бора и дужине његове вршне младице, која је одређена овом таблицом (Шарлије):

	Дужина вршне младице								
	cm	1—4	5—8	9—12	13—16	17—20	21—24	25—28	
Висина бора	1—10	5	3	—	—	—	—	—	8
	11—20	7	15	1	2	—	—	—	25
	21—30	2	21	17	2	—	—	—	42
	31—40	—	15	37	20	3	—	—	75
	41—50	—	1	31	26	4	—	—	62
	51—60	—	2	8	27	12	1	—	50
	61—70	—	—	2	9	24	4	2	41
	71—80	—	—	1	4	7	6	2	20
	81—90	—	—	—	1	—	3	—	4
	91—100	—	—	—	—	—	1	2	3
		14	57	97	91	50	15	6	330

Одредити коефицијент корелације и наћртати корелационе праве.

ПРИЛОЗИ

I Комбинаторика

1. Слогови

Претставимо да у неком посматрању, расуђивању или машти имамо посла са неким предметима, појмовима, симболима, знацима, словима, реченицама итд. Без обзира на њихову природу нека то буду *елементи*. Елементом, према томе, може бити све оно, на чему може да се заустави наше сазнање и што може бити одвојено у том сазнању од другог садржаја сазнања.

Елементе можемо нумерисати 1, 2, 3,... или означити ма како друкчије, на пр., како се то обично ради, словима $a, b, c, \dots$ Број елемената у датом посматрању или расуђивању може бити коначан или бесконачан. Зауставимо се овде на расуђивањима само са коначним бројем елемената.

Издвојимо из свих датих елемената једну одређену групу елемената и саставимо их у један одређени *слог*, слог елемената. Један слог од другог може да се разликује како елементима, тако и редом у ком елементи образују слог.

Овде се заустављамо на анализи само оних слогова, за чији се формирање један исти елемент не узима два или више пута. То су тзв. *слогови без понављања елемената*.

Према карактеру оног чиме се разликује један слог од другог може бити три врсте слогова: *варијације, пермутације* и *комбинације*.

2. Варијације

Нека су дата, на пр., четири елемента; означимо их са

$$a,\ b,\ c,\ d.$$

Од тих елемената можемо саставити ове слогове: по један елемент у сваком слогу

$$(1)\qquad a,\ b,\ c,\ d;$$

по два елемента у сваком слогу

(2) $ab,\ ba,\ ca,\ da;$ $ac,\ bc,\ cb,\ db;$ $ad,\ bd,\ cd,\ dc;$

по три елемента

(3)

$abc,\ abd;$	$bac,\ bad;$	$cab,\ cad;$	$dab,\ dac;$
$acb,\ acd;$	$bca,\ bcd;$	$cba,\ cbd;$	$dba,\ dbc;$
$adb,\ adc;$	$bda,\ bdc;$	$cda,\ cdb;$	$dca,\ dcb;$

и најзад по четири

(4)

$abcd,\ abdc;$	$bacd,\ badc;$	$cabd,\ cadb;$	$dabc,\ dacb;$
$acbd,\ acdb;$	$bcad,\ bcda;$	$cbad,\ cbda;$	$dbac,\ dbca;$
$adbc,\ adcb;$	$bdac,\ bdca;$	$cdab,\ cdba;$	$dcab,\ dcba.$

У свакој групи (1), (2), (3), (4) тих слогова учествују сва четири елемента, али у сваком појединoм слогу различитих група број елемената је различит. Према томе сваку групу можемо карактерисати као скуп слогова састављених од 4 елемента са одговарајућим бројем елемената у сваком слогу те групе. Тако, на пр., слогови треће групе састављени су од 4 елемента по 3 елемента у сваком слогу, кратко од 4 по 3.

Слогови сваке групе могу да се разликују или *саставом* елемената, на пр. *abc* и *abd*, или *редом* елемената у слогу, на пр. *abc* и *cab*.

Слогови од n елемената по k елемената у сваком слогу, који се разликују један од другог елементима или редом елемената, зову се *варијације* (руски — размещения, француски — arrangements). Број свих могућих варијација од n елемената по k елемената у свакој обележићемо са V_n^k.

За одређивање тог броја можемо на овај начин објаснити формирање свих варијација од n по k.

На прво место можемо ставити сваки од n елемената. Група, које се разликују првим елементом, очевидно, може бити толико, колико има свега елемената, тј. n. Затим свакоме од изабраних елемената додајемо још један елемент од осталих $n-1$ елемената. Очевидно је да на друго место можемо ставити сваки од тих $n-1$ елемената; према томе свих слогова, код којих два елемента већ стоје на своме месту може бити толико колико износи производ

$$n(n-1).$$

Даље, од осталих $n-2$ елемената бирамо један елемент и ставимо га на треће место у свакоме слогу од два елемента. Ако искористимо сваки од тих $n-2$ елемената, сваки слог од два елемента може дати $n-2$ слогова са три елемента. Према томе број свих слогова са три елемента износи

$$n(n-1)(n-2).$$

У општем случају можемо тврдити да број свих слогова од n елемената по k елемената у сваком, који имају особине варијација, јер се разликују било елементима било њиховим редом, износи

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)].$$

То је образац за израчунавање *броја варијација*. Он гласи: број свих могућих варијација од n елемената по k елемената у свакој једнак је производу k узастопних природних бројева од којих је највећи n.

3. *Пермутације*

Ако свака варијација од n елемената садржи у себи свих n елемената и према томе се сваки такав слог разликује од другог само редом елемената, јер у сваком слогу учествују сви елементи, онда се такви слогови зову *пермутације* (руски — перестановки, француски — permutations). Према томе можемо казати да су пермутације од n елемената варијације од n елемената по n елемената у сваком слогу. Свака пермутација се добије из друге пермутације истог броја елемената само променом реда *(пермутовањем)* елемената.

Ако број пермутација из n елемената означимо са P_n, можемо тврдити да је

$$P_n = V_n^n$$

и према томе имамо

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1 = n!$$

То је образац за *број пермутација*, који речима гласи: број свих могућих пермутација од n елемената једнак је производу природних бројева од јединице до n или, кратко, једнак је факторијели $n!$

4. *Комбинације*

Ако од свих варијација од n елемената по k елемената узмемо у обзир само оне које се разликују само саставом елемената, тј. макар једним елементом, добићемо оне слогове, који се разликују само својим елементима, а не и редом тих елемената. Такви слогови се зову *комбинацијама* (руски — сочетания, француски — combinaisons).

Број комбинација од n елемената по k елемената у свакој комбинацији означимо са C_n^k.

Јасно је да, ако у свакој комбинацији од n елемената, по k елемената у свакој, извршимо све могуће пермутације са k елемената те комбинације, треба да добијемо све могуће варијације. Према томе између три броја V_n^k, C_n^k и P_k постоји веза

$$V_n^k = C_n^k \cdot P_k .$$

Како је

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]$$

и

$$P_k = k(k-1)(k-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = k!$$

за *број комбинација* C_n^k можемо написати образац

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)\,n-2)\ldots[n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}, \tag{5}$$

који гласи да је број комбинација код n елемената по k једнак количнику броја варијација од n по k и броја пермутација од k елемената.

За број комбинација се употребљује и друга ознака у облику

$$C_n^k = \binom{n}{k},$$

која се чита: над k n; дакле имамо

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!}$$

Броју C_n^k се даје и друга форма, различита од (5). Ако производ

$$n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]$$

помножимо производом

$$(n-k)(n-k-1)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = (n-k)!$$

добићемо производ

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Према томе после множења бројиоца и имениоца израза за C_n^k факторијелом $(n-k)!$ можемо написати

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

или, што је исто,

$$C_n^k = \frac{P_n}{P_k \cdot P_{n-k}} .$$

Из написаног обрасца непосредно следује закључак

$$C_n^k = C_n^{n-k} .$$

Овај образац даје могућност свести изречунавање броја C_n^k на случај кад је $k \leqslant \frac{1}{2} n$. Тако, на пр.,

$$C_{10}^7 = C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120 .$$

Исти образац даје образложење формалног увођења израза C_n^0 са вредношћу

$$C_n^0 = 1 ,$$

јер је

$$C_n^0 = C_n^{n-0} = C_n^n = 1 .$$

Докажимо још једну особину броја комбинација, која се изражава једначином

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k \tag{6}$$

и коју ћемо искористити у наредном прилогу, при извођењу биномног обрасца.

Заиста, пошто је

$$C_n^{k-1} = \frac{P_n}{P_{k-1} \cdot P_{n-k+1}} \quad \text{и} \quad C_n^k = \frac{P_n}{P_k \cdot P_{n-k}}$$

и

$$P_k = k\,P_{k-1} \quad \text{и} \quad P_{n-k+1} = (n-k+1)\,P_{n-k} ,$$

леву страну једначине (6) можемо трансформисати овако:

$$C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{P_n}{P_{k-1} \cdot P_{k-n+1}} + \frac{P_n}{P_k \cdot P_{n-k}} =$$

$$= \frac{P_n}{P_{k-1} \cdot P_{n-k}} \left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \frac{(n+1)\,P_n}{k\,P_{k-1} \cdot (n-k+1)\,P_{n-k}} = \frac{P_{n+1}}{P_k \cdot P_{n+1-k}} = C_{n+1}^k ,$$

а ово и потврђује наведену особину (6).

II. Њутнов биномни образац

Посматрајући резултате

$$(1)\quad \begin{aligned}(x+a)^2 &= x^2+2ax+a^2\\ (x+a)^3 &= x^3+3ax^2+3a^2x+a^3\\ (x+a)^4 &= x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4\\ (x+a)^5 &= x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5\\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

поставимо себи задатак написати сличан општи образац за

$$(x+a)^n,$$

где је n произвољан цео и позитиван број.

Пре свега горњи обрасци показују да резултат треба да има облик полинома уређеног, рецимо, по опадајућим степенима x и по растућим степенима a и да збир изложиоца код x и код a у сваком члану даје увек број једнак изложиоцу бинома. Према томе без извршења множења увек можемо написати алгебарски део сваког члана траженог полинома.

Члан $k+1$ (читај: k плус први) тог полинома са ознаком T_{k+1} има алгебарски део у облику

$$x^{n-k}a^k;$$

остаје, према томе, само поставити правило на основу кога се пишу коефицијенти код тих алгебарских делова.

Ако узмемо полином још и за шести степен

$$(x+a)^6 = x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3+15a^4x^2+6a^5x+a^6$$

који се добије множењем $(x+a)^5$ са $x+a$, видимо да коефицијенти тог полинома са вредностима

$$1,\ 6,\ 15,\ 20,\ 15,\ 6,\ 1$$

не претстављају ништа друго него бројеве комбинација

$$C_6^0,\ C_6^1,\ C_6^2,\ C_6^3,\ C_6^4,\ C_6^5,\ C_6^6.$$

Заиста, рецимо, за средњи члан имамо

$$C_6^3=\frac{6.5.4}{1.2.3}=20,$$

а за претходни и наредни

$$C_6^2=C_6^4=\frac{6.5}{1.2}=15.$$

Коефицијенти и свих мањих степена бинома из (1) могу се изразити помоћу броја комбинација.

Докажимо сада да наведено правило за формирање алгебарских делова чланова полинома и закон формирања коефицијената важи за сваки цео и позитивни број n и да се према томе општи образац изражава овако:

$$(2)\quad (x+a)^n = x^n+C_n^1x^{n-1}a+C_n^2x^{n-2}a^2+\dots+C_n^kx^{n-k}a^k+ \\ +\dots+C_n^{n-1}xa^{n-1}+a^n.$$

За доказ овог обрасца употребимо методу, која се зове *„математичка или потпуна индукција“* или метода прелаза од $n-1$ на n или, што је исто, од n на $n+1$.

Претпоставимо, према тој методи, да образац (2) важи за $n-1$, тј. да је тачна једнакост

$$(3)\quad (x+a)^{n-1} = x^{n-1}+C_{n-1}^1x^{n-2}a+\dots+C_{n-1}^{k-1}x^{n-k}a^{k-1}+ \\ +C_{n-1}^kx^{n-k-1}a^k+\dots+C_{n-1}^{n-2}xa^{n-2}+a^{n-1}$$

и докажимо да он важи и за n.

Помножимо леву и десну страну једначине (3) са $x+a$. На левој страни ћемо тада добити тражени степен бинома $(x+a)^n$, а на десној збир два полинома — резултата множења са x и са a. Потпишимо један полином испод другог

$$\begin{aligned} &x^n+C_{n-1}^1x^{n-1}a+\dots+C_{n-1}^{k-1}x^{n-k+1}a^{k-1}+C_{n-1}^kx^{n-k}a^k+\\ &\qquad x^{n-1}a+\dots \qquad\qquad\qquad +C_{n-1}^{k-1}x^{n-k}a^k+\dots\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad +\dots C_{n-1}^{n-2}x^2a^{n-2}+xa^{n-1}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +C_{n-1}^{n-2}xa^{n-1}+a^n \end{aligned}$$

па резултате саберимо. Прво се непосредно види да резултат сабирања претставља полином n'ог степена по x и n'ог степена по a са алгебарским делом чланова, који у општем облику можемо написати овако

$$x^{n-k}a^k.$$

Коефицијент код тог члана после сабирања има вредност

$$C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^{k},$$

али на основу доказане особине броја комбинација тај збир има вредност

$$C_n^k$$

и према томе смо доказали да општи члан нашег полинома можемо заиста написати у облику

$$C_n^k x^{n-k} a^k$$

како то и тражи образац, који доказујемо.

Доказали смо према томе став да образац (2) важи за n, ако важи за $n-1$. Како смо, са друге стране, видели да тај образац важи за 2, 3, 4, 5, 6, можемо закључити да он важи за 7, 8, 9 итд. — за сваки цео позитивни број n.

Образац (2) се зове *Њутнов биномни образац*. Њега можемо написати и овако

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}a + \binom{n}{2} x^{n-2}a^2 + \ldots + \binom{n}{k} x^{n-k}a^k + $$
$$+ \ldots + \binom{n}{n-1} x a^{n-1} + a^n .$$

Члан

$$T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} a^k = \binom{n}{k} x^{n-k} a^k$$

зове се *општи члан биномног обрасца*.

Наведимо још неке особине биномног обрасца, које се непосредно не виде из самог обрасца.

За бином n'ог степена број свих чланова полинома једнак је $n+1$.

Коефицијенти чланова подједнако удаљених од крајева имају исте бројне вредности; те вредности се прво повећавају, а после средњег (за случај n парног) или средњих (за случај n непарног) чланова коефицијенти опадају.

Одредимо још однос два узастопна члана полинома

$$T_{k+2} = C_n^{k+1} x^{n-k-1} a^{k+1},$$

$$T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} a^k ;$$

тај однос има вредност

$$\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} = \frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} \frac{a}{x} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{a}{x}$$

и према томе можемо написати

$$T_{k+2} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{a}{x} T_{k+1} .$$

Овај образац показује како се формира сваки наредни члан полинома на основу претходног. Ово правило речима можемо изразити овако: сваки наредни члан полинома биномног обрасца се добија из претходног кад тај претходни помножимо са a и поделимо са x, и коефицијенат претходног помножимо са изложиоцем $(n-k)$ код x у том претходном члану и поделимо бројем $(k+1)$ који је једнак реду претходног члана.

Најзад, докажимо особину збира свих биномних коефицијената што одговарају степену n. Ако у образац (2) ставимо $x=a=1$, имамо

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^{n-1} + 1 = 2^n .$$

На пример, за $n=6$ имамо

$$1+6+15+20+15+6+1=64=2^6 .$$

Са друге стране, ако у исти образац ставимо $x=1$, $a=-1$, добићемо

$$0 = 1 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n .$$

Из ове једнакости непосредно следује да је збир биномних коефицијената на непарним местима једнак збиру биномних коефицијената на парним местима.

III. Обрасци Елементарне математике

Аритметика

При претварању обичног разломка у децимални разломак треба бројилац поделити имениоцем.

При претварању коначног децималног разломка у обичан у бројилац се стави број после запете, а у именилац јединица са толико нула колико цифара стоји после запете.

При претварању чистог периодичног разломка у обичан разломак у бројилац се стави период, а у именилац толико деветака колико је цифара у периоду. У случају мешовитог периодичног разломка у бројилац се стави разлика између броја до другог периода и броја до првог периода, а у именилац толико деветака колико је цифара у периоду са толико нула колико је цифара између запете и првог периода.

$p\%$ броја a износи $s=\frac{a}{100}\times p$.

Ако $p\%$ броја a износи s, тада је $a=s\times\frac{100}{p}$.

$\frac{m}{n}$ део броја a сачињава $\frac{m}{n}\times 100\%$ тог броја.

a сачињава $\frac{a}{b}\times 100\%$ броја b.

Број a сачињава $\frac{100\,a}{a+b}\%$ збира $a+b$.

Из пропорције $a:b=c:d$ следује једнакост: $ad=bc$ и пропорције $a:c=b:d$, $d:b=c:a$, $d:c=b:a$;

$$\frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c},\quad \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d},\quad \frac{a\pm c}{a}=\frac{b\pm d}{b},\quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

Из једнакости односа

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=k$$

следује

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}=k.$$

Алгебра

Из $a>b\geqslant 0$, $c>d\geqslant 0$ следује $ac>bd$.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d};\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}.$$

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$; $a^m:a^n=a^{m-n}$; $(ab)^n=a^n b^n$;

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n};\quad (a^m)^n=a^{mn}.$$

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b};\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};\quad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}};\quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

$$a^0=1,\quad a^{-n}=\frac{1}{a^n},\quad a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a},\quad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m};\quad a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

За $a>0$ и n цео и позитивни број: $(+a)^n=+a^n$,
$(-a)^{2n}=+a^{2n}$, $(-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}$.

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$; $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$;
$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$:

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

$i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$; $i^0=1$, $i^{-1}=\frac{1}{i}=-i$;
$i^{4m+n}=i^n$.

Ако је $a^m=\mathrm{N}$, $m=\log_a \mathrm{N}$.

$\log ab=\log a+\log b$; $\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$; $\log a^n=n\log a$;

$$\log\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\log a;\quad \log_a a=1.$$

$\log 1=0$, $\log 0=-\infty$, $\log+\infty=+\infty$.

Аритметичка прогресија: $a_n=a_{n-1}+d=a_1+(n-1)d$;

$$s_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}n.$$

Геометриска прогресија: $a_n=a_{n-1}q=a_1q^{n-1}$;

$$s_n=\frac{a_nq-a_1}{q-1}=a_1\frac{q^n-1}{q-1};\quad (s_n)_{n\to\infty}=\frac{a_1}{1-q}\ \text{за}\ q<1.$$

За једначину $ax^2+bx+c=0$ корени су

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

За једначину $x^2+px+q=0$ корени су

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q};$$

$$x_1+x_2=-p,\ x_1x_2=q.$$

Биномни образац

$$(a\pm b)^n=a^n\pm\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2\pm\ldots+$$
$$+(-1)^k\frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{1.2\ldots k}a^{n-k}b^k+\ldots+(-1)^n b^n.$$

Геометрија

Питагорина теорема: $c^2=a^2+b^2$.

Страна уписаног многоугла: $a_3=r\sqrt{3}$, $a_4=r\sqrt{2}$, $a_6=r$, $a_{10}=\frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)$.

Површина троугла: $Q=\frac{1}{2}ah_a=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $a+b+c=2p$.

Обим круга $2\pi r$; површина круга $\pi r^2=\frac{1}{4}\pi d^2$, $d=2r$.

Дужина кружног лука са углом α: $s=r\alpha$; површина кружног сектора $\frac{1}{2}sr=\frac{1}{2}r^2\alpha$.

Запремине: призме $=Sh$ (S свуда означава површину основе, h — висину); пирамиде $=\frac{1}{3}Sh$; цилиндра $=\pi r^2h$; конуса $=\frac{1}{3}\pi r^2h$; лопте $=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{1}{6}\pi d^3$.

Површине: цилиндра $=2\pi rh$ (бочна); конуса $=\pi rl$ (бочна; l — производиља); сферне зоне $=2\pi rh$ (h — њена висина); сфере $=4\pi r^2$.

Тригонометрија

Угао: $\alpha=\frac{s}{r}$, где је s кружни лук полупречника r, α мера угла апстрактним бројем.

За угао од n^0 имамо $\alpha=\frac{\pi}{180^0}\cdot n^0$; обрнуто $n^0=\frac{180^0}{\pi}\cdot\alpha$.

Тригонометриске функције дефинисане помоћу координата x, y тачке на кругу полупречника R:

$$\sin\alpha=\frac{y}{R},\ \cos\alpha=\frac{x}{R},\ tg\,\alpha=\frac{y}{x}=\frac{T_1}{R},\ cotg\,\alpha=\frac{x}{y}=\frac{T_2}{R},\ sec\,\alpha=\frac{R}{x},$$
$$cosec\,\alpha=\frac{R}{y}.$$

T_1 и T_2 дужине прве и друге тангенте.

	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$
cotg	$\mp\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\ tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ cotg\,\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\ tg\,\alpha\cdot cotg\,\alpha=1;$$

$$sec\,\alpha=\frac{1}{\cos\alpha};\ cosec\,\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

$$\sin\alpha=\frac{tg\,\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}};\ \cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}.$$

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, $tg(-\alpha)=-tg\,\alpha$, $cotg(-\alpha)=-cotg\,\alpha$.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ итд.

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$, $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$, $tg(\pi-\alpha)=-tg\,\alpha$, $cotg(\pi-\alpha)=-cotg\,\alpha$.

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$;
$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$.

$$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\,\alpha\pm tg\,\beta}{1\mp tg\,\alpha\,.\,tg\,\beta}.$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha .$$

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad 1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}; \quad cotg\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}; \quad tg\,\alpha \pm tg\,\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \quad cotg\,\alpha \pm cotg\,\beta = \pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\ \sin\beta}.$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Правоугли троугао: c — хипотенуза, a и b — катете; S — површина.

$$a = c\sin\alpha = c\cos\beta; \quad a = b\,tg\,\alpha. \quad S = \frac{1}{2}ab.$$

Косоугли троугао:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2\,R \text{ (пречник описаног круга)};$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha;$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{tg\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}; \quad \frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}};$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \frac{r}{p-a}.$$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \text{ (}r\text{ — полупречник уписаног круга).}$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

IV. Таблица за диференцирање

(I) $y = f(x)$

(II) $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x_1\to x}\frac{y_1-y}{x_1-x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} =$
$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = tg\,\alpha.$

(III) $(c)' = 0.$

(IV) $(u \pm v)' = u' \pm v'.$

(V) $y = f(u), \quad u = \varphi(x); \quad y' = y_u' \cdot u'.$

(VI) $x_y' = \frac{1}{y_x'}.$

(VII) $(lg\,x)' = \frac{1}{x}$; (VII^{bis}) $(log_a x)' = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{lg\,a} = \frac{1}{x}\,log_a e$;

(VII^{ter}) $(log_{10} x)' = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{lg\,10} = \frac{1}{x}\,log_{10} e.$

(VIII) $(e^x)' = e^x$; (VIII^{bis}) $(a^x)' = a^x\,lg\,a = a^x\frac{1}{log_a e}$;

(VIII^{ter}) $(10^x)' = 10^x\,lg\,10 = 10^x\frac{1}{log_{10} e}.$

(IX) $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'.$

(IX^{bis}) $(u_1 u_2 \ldots u_n)' = u_1' u_2 \ldots u_n + u_1 u_2' \ldots u_n + \ldots + u_1 u_2 \ldots u_n'.$

(IX^{ter}) $\dfrac{(u_1 u_2 \dots u_n)'}{u_1 u_2 \dots u_n} = \dfrac{u_1'}{u_1} + \dfrac{u_2'}{u_2} + \dots + \dfrac{u_n'}{u_n}$

(X) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

(XI) $(C\,u)' = C\,u'$.

(XII) $(x^m)' = m\,x^{m-1}$.

(XIII) $(\sin x)' = \cos x$; (XIII^{bis}) $(\cos x)' = -\sin x$

(XIV) $(tg\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; (XIV^{bis}) $(cotg\,x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

(XV) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; (XV^{bis}) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(XVI) $(arctg\,x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; (XVI^{bis}) $(arccotg\,x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

(XVII) $y = u^v$ логаритмовати.

(XVIII) $d\,y = y'\,d\,x$, $\quad y' = \dfrac{d\,y}{d\,x}$.

(XIX) $z = f(x, y)$; $\quad z_x' = f_x' = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\quad z_y' = f_y' = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

(XIX^{bis}) $u = f(x, y, z)$; $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

(XX) $d\,z = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,d\,x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,d\,y$.

(XX^{bis}) $d\,u = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,d\,x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,d\,y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,d\,z$.

(XXI) $d^2 z = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,d\,x^2 + 2\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,d\,x\,d\,y + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,d\,y^2$.

(XXII) $f(x, y) = 0$; $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,y' = 0$, $\quad y' = -\dfrac{\partial f}{\partial x} : \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

(XXIII) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,y' + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,y'^2 + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,y'' = 0$,

$$y'' = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,y'^2\right) : \frac{\partial f}{\partial y}.$$

(XXIV) $F(x, y, z) = 0$, $\quad \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\,\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\quad \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\,\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

V. Таблица за интеграцију

(I) $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$, $\quad \int f(x)\,dx = F(x) + C$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big/_a^b\, F(x).$$

(II) $\int A\,f(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$, $\quad A = const.$

(III) $\int (u \pm v)\,dx = \int u dx \pm \int v dx$.

(IV) $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $\quad n \neq -1$. $\qquad$ (IV^{bis}) $\int \dfrac{dx}{x} = lg\,x + C$.

(V) $\int e^x\,dx = e^x + C$. $\qquad$ (V^{bis}) $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{lg\,a} + C$.

(VI) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$. $\qquad$ (VI^{bis}) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

(VII) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C$. $\qquad$ (VII^{bis}) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -cotg\,x + C$.

(VIII) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctg\,x + C = -arccotg\,x + C_1$.

(IX) $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = lg\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} + C$.

(X) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1 .$$

(XI) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \lg (x + \sqrt{1+x^2}) + C .$$

(XII) $$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz = F(z) + C = F[\psi(x)] + C,$$
$$x = \varphi(z),\quad z = \psi(x) .$$

(XIII) $$\int u\,dv = uv - \int v\,du ,$$

(XIV) $$Q = \int_a^b y\,dx ,$$

(XV) $$Q = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\,d\theta ,$$

(XVI) $$L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx ,$$

(XVII) $$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta ,$$

(XVIII) $$V = \pi \int_a^b y^2\,dx ,$$

(XIX) $$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx ,$$

(XX) $$L = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\;du .$$

VI. Вредности неких неодређених интеграла

(Ради упрошћавања слога произвољна константа је изостављена)

1. $$\int (a+bx)^n\,dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)\,b} .$$

2. $$\int \frac{1}{a+bx}\,dx = \frac{1}{b}\lg(a+bx) .$$

3. $$\int \frac{1}{a+bx^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{ab}}\,\mathrm{arctg}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right), \quad (a>0,\quad b>0),$$

4. $$\int \frac{1}{a-bx^2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\lg\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}, \quad (a>0,\quad b>0) .$$

5. $$\int \frac{1}{ax^2+2bx+c}\,dx = \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\,\mathrm{arctg}\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}, \qquad (b^2-ac<0).$$
$$= -\frac{1}{ax+b}, \qquad (b^2-ac=0).$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}}\lg\frac{ax+b-\sqrt{b^2-ac}}{ax+b+\sqrt{b^2-ac}}, \quad (b^2-ac>0).$$

6. $$\int \frac{A+Bx}{ax^2+2bx+c}\,dx = \frac{B}{2a}\lg(ax^2+2bx+c) + \frac{aA-bB}{a}\int\frac{1}{ax^2+2bx+c}\,dx .$$

7. $$\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3} .$$

8. $$\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{5b^2}\sqrt{(a+bx)^3}\left(bx-\frac{2a}{3}\right).$$

9. $$\int \frac{1}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx} .$$

10. $$\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\,lg\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}} \quad (a>0),$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-a}}\,arctg\frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{-a}} \quad (a<0).$$

11. $$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\,lg\,(b+ax+\sqrt{a}\sqrt{ax^2+2bx+c}), \quad (a>0)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-a}}\,arc\,sin\left(\frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}\right), \qquad (a<0).$$

12. $$\int \frac{A+Bx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\,dx = \frac{B}{a}\sqrt{ax^2+2bx+c} + $$

$$+\frac{Aa-Bb}{a}\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\,dx.$$

13. $$\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2+2bx+c}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\,lg\frac{c+bx+\sqrt{c}\,\sqrt{ax^2+2bx+c}}{x}, \quad (c>0),$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}}\,arcsin\,\frac{c+bx}{x\sqrt{b^2-ac}}, \qquad (c<0).$$

14. $$\int \sqrt{ax^2+2bx+c}\,dx = \frac{ax+b}{2a}\sqrt{ax^2+2bx+c} +$$

$$+\frac{ac-b}{2a}\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\,dx.$$

15. $$\int x\,e^x\,dx = e^x(x-1).$$

16. $$\int e^{ax}\,sin\,bx\,dx = e^{ax}\,\frac{a\,sin\,bx - b\,cos\,bx}{a^2+b^2}.$$

17. $$\int e^{ax}\,cos\,bx\,dx = e^{ax}\,\frac{a\,cos\,bx + b\,sin\,bx}{a^2+b^2}.$$

18. $$\int lg\,x\,dx = x\,lg\,x - x.$$

19. $$\int tg\,x\,dx = -\,lg\,cos\,x.$$

20. $$\int cotg\,x\,dx = lg\,sin\,x.$$

21. $$\int sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - sin\,x\,cos\,x).$$

22. $$\int cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x + sin\,x\,cos\,x).$$

23. $$\int tg^2 x\,dx = tg\,x - x.$$

24. $$\int cotg^2 x\,dx = -(cotg\,x + x).$$

25. $$\int \frac{1}{sin\,x}\,dx = lg\,tg\,\frac{x}{2}.$$

26. $$\int \frac{1}{cos\,x}\,dx = lg\,tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

27. $$\int arcsin\,x\,dx = x\,arcsin\,x + \sqrt{1-x^2}.$$

28. $$\int arccos\,x\,dx = x\,arccos\,x - \sqrt{1-x^2}.$$

29. $$\int arctg\,x\,dx = x\,arctg\,x - \frac{1}{2}\,lg\,(1+x^2).$$

30. $$\int arccotg\,x\,dx = x\,arccotg\,x + \frac{1}{2}\,log\,(1+x^2).$$

VII. Грчка азбука

Α, α	алфа	Ι, ι	јота	Ρ, ρ	ро
Β, β	бета	Κ, κ	капа	Σ, σ, ς	сигма
Γ, γ	гама	Λ, λ	ламбда	Τ, τ	тау
Δ, δ	делта	Μ, μ	ми	Υ, υ	ипсилон
Ε, ε	епсилон	Ν, ν	ни	Φ, φ	фи
Ζ, ζ	дзета	Ξ, ξ	кси	Χ, χ	хи
Η, η	ета	Ο, ο	омикрон	Ψ, ψ	пси
Θ, ϑ, θ	тета	Π, π	пи	Ω, ω	омега

ИСПРАВКЕ

Овде су наведене само оне грешке које би отежавале разумевање текста. Први број (масан слог) означава страну, други врсту (+ одозго, — одоздо). Затим је наведено како стоји у књизи, и најзад, после ознаке ‖ како треба да буде.

7, —3. Он, ‖ Онај, **36,** +3. e_2 ‖ $-e_2$ **58,** +6, +7, +21. нормо... ‖ номо... **69, 70, 71** (сем слике 36, *b*) ознаку *c* треба заменити са C. **91,** +6. за центом ‖ са центром. **107,** — 6. e^{α^x} ‖ $e^{\alpha x}$. **137.** Ознака стране: 13 ‖ 137. **137,** — 10. На крају задатка је изостављено: под условом $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. **163,** — 5. $\frac{\partial f}{\partial v}\frac{d\dot{u}}{dx}$ ‖ $\frac{\partial f}{dv}\frac{dv}{dx}$. **167,** — 3. $x-a|\ldots\ldots f(x)-f(a)|$ ‖ $|x-a|\ldots\ldots|f(x)-f(a)|$. **171,** — 12. 66 ‖ 76. **172,** + 12. Ако који ‖ Ако је ма за који. **173,** + 5. $b+ax$ ‖ $b-ax$. **175.** Ознака стране: 1 ‖ 175. **183,** + 9. Изостављено је: (в. стр. 285). **184,** — 5. дешавају ‖ решавају. **189,** — 6. M' и M' ‖ M' и M''. **201,** — 2. $0 \cdot \infty \ldots\ldots \frac{0}{0}$ ‖ $0 \cdot -\infty \ldots\ldots \frac{-\infty}{\infty}$. **209,** — 1. $z^4\ z$ ‖ $z^4\,dz$. **232,** + 9. $\int\limits_x$ ‖ $\int\limits_x^a$. **232,** + 13. $\int\limits_c$ ‖ $\int\limits_c^b$. **234.** +1. примера ‖ примена. **240,** + 12. предности ‖ вредности. **240,** — 3. $\varepsilon < 0$ ‖ $\varepsilon > 0$. **300,** — 13. На крају врсте испало је: 1. **336,** — 12. $e^{\frac{1}{2}x_2}$ ‖ $e^{\frac{1}{2}x^2}$. **404,** + 2. — ‖ =. **414.** Ознака стране: 114 ‖ 414. **415.** Иста: 115 ‖ 415.

РЕГИСТАР