Своме колеги Г-ну Т. Перовићу,
на успомену
Б. Петронијевић.
1935

Др. [illegible] ВИЛИМОВИЋ
и
Др. Б. ПЕТРОНИЈЕВИЋ

ПРИЛОГ РЕШЕЊУ ПРОБЛЕМА ТРИ ТЕЛА

Прештампано из »Гласника Југословенског професорског друштва« Књ. XV, св. 10 јуни 1935. год.

БЕОГРАД

За Штампарију „ЗОРА“ Космајска 24 — Београд — Тел. 29-9-20
Миливоје J. Трајковић, штампар — Струмичка 9.

ЕЛЕМЕНТАРНО РЕШЕЊЕ ДВА ПОЗНАТА СЛУЧАЈА ПРОБЛЕМА ТРИЈУ ТЕЛА

Претходна примедба

Као што је познато, проблем три тела да се решити у елементарно-коначном облику само у два специјална случаја: 1. кад се све три масе налазе у правој линији, и 2. кад се оне налазе на теменима равностраног троугла. Први случај нашао је *Ајлер* (1763), а други *Лагранж* (1872). У својој “Небеској механици“ (св. IV, 1805) *Лайлас* је и један и други случај извео на прост начин, али (као и претходници) помоћу аналитичке геометрије. Доцнији испитивачи (нарочито *Харгрев* 1858 и *Н. Делоне* 1905) доказали су, да се и у случају општег троугла маса правци њихових резултујућих сила секу у једној тачци; али су они доказивање изводили опет аналитичком геометријом. Прво елементарно-геометријско решење оба случаја дао је *Чорни* (1906), али је он решавао проблем под претпоставком релативног кретања двеју маса око треће. У својој недавно публикованој „Небеској механици“ *Миланковић* је, на основу својих ранијих радова (1911), оба случаја извео векторским путем.

Задатак је овог чланка да у оба позната случаја изведе елементарно-геометријским путем основне једначине које решавају проблем кретања све три масе око њиховог заједничког средишта маса. Други његов писац био је уверен да такво елементарно-геометријско решење мора постојати, и он је, да би се до решења дошло, првом писцу поставио неколико одређено формулисаних теорема, чије је елементарно-геометријске доказе овај брзо налазио. У току тог решавања теорема први писац извео је фундаменталну формулу за величину трансверзале у равностраном троуглу маса, коју је други писац применио на извођење формула за резултујућа убрзања у оба позната случаја. У чланку докази прве, друге и четврте теореме, као и друго кратко извођење у петој теореми, припадају искључиво првом писцу, док доказ треће (изузев примедбу), прво извођење у петој теореми и извођења у шестој теореми припадају искључиво другом писцу. Чланак је редиговао други писац, али га је први писац пажљиво прегледао и местимице допунио.

Теореме

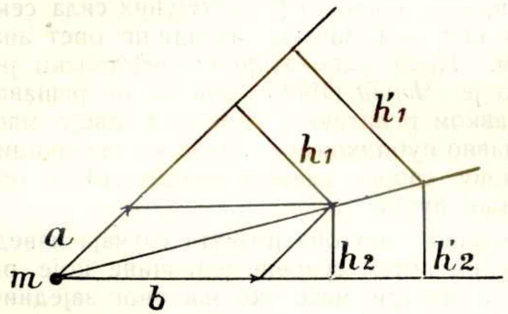
1. Ако се три масе (одн. материјалне тачке) m_1, m_2, m_3 налазе на теменима троугла и привлаче по Њутоновом закону гравитације, правци њихових резултујућих убрзања сећи ће се у једној тачци у унутрашњости троугла.

Доказ. — Да бисмо доказали теорему, потребно је претходно доказати следеће две помоћне теореме:

1. За два убрзања једне материјалне тачке производи из убрзања и управних на њихове правце спуштених из ма које тачке на правцу њиховог резултујућег убрзања морају бити једнаки; и

2. Ако су за два убрзања једне материјалне тачке производи из убрзања и управних на њихове правце једнаки, тачка пресека тих управних мора лежати на правцу њиховог резултујућег убрзања.

Доказ прве помоћне теореме гласи овако.



Сл. 1.

Ако дужи a и b својом дужином и својим правцем претстављају убрзање материјалне тачке m (в. сл. 1), биће (на основу једнакости површина одговарајућих троуглова у паралелограму убрзања):

$$ah_1 = bh_2$$

одн. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{h_2}{h_1}$.

Како из слике следује да је:

$$\frac{h_1'}{h_1} = \frac{h_2'}{h_2} \quad \text{одн.} \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_2'}{h_1'}\,,$$

то је и

$$\frac{a}{b} = \frac{h_2'}{h_1'}\,,$$

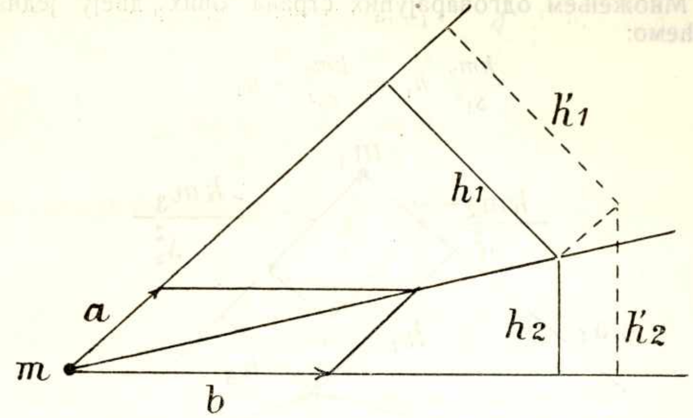
одакле следује:

$$ah_1' = bh_2',$$

чиме је теорема доказана.

Доказ друге помоћне (одн. инверзне) теореме пак гласи овако.

Претпоставимо да тачка пресека управних h_1' и h_2' на правце убрзања a и b, при постојању једначине $ah_1' = bh_2'$, не пада на правац резултујућег убрзања (в. сл. 2). Како се, повлачењем паралелне из те тачке правцу убрзања a, на



Сл. 2.

правцу резултујућег убрзања добија (у тачци пресека паралелне са овим правцем) управна $h_1 = h_1'$, биће на основу претходне теореме (пошто се спусти и управна h_2):

$$ah_1 = bh_2.$$

Како је пак по претпоставци:

$$ah_1' = bh_2',$$

биће очевидно и $h_2 = h_2'$. Али како овај последњи идентитет може постојати само ако се h_2' поклопи са h_2 (при чему ће се и h_1' поклопити са h_1), то тачка пресека управних h_1' и h_2' мора лежати на правцу резултујућег убрзања, чиме је теорема доказана.

Доказ главне теореме сада је лако извести.

Нека су у разностраном троуглу, на чијим се теменима налазе масе m_1, m_2, m_3, које се привлаче по Њутоновом закону гравитације, s_1, s_2 и s_3 стране троугла (в. сл. 3), тада ће убрзања масе m_1 бити $\dfrac{km_2}{s_1^2}$ и $\dfrac{km_3}{s_2^2}$, убрзања масе m_2 биће $\dfrac{km_1}{s_1^2}$ и $\dfrac{km_3}{s_3^2}$, а убрзања масе m_3 биће $\dfrac{km_2}{s_3^2}$ и $\dfrac{km_1}{s_2^2}$.

Ако сада из тачке пресека праваца резултујућих убрзања маса m_2 и m_3 (која се очевидно налази у унутрашњости троугла) спустимо управне h_1, h_2 и h_3 на стране s_1, s_3 и s_2, биће, на основу прве помоћне теореме, с једне стране:

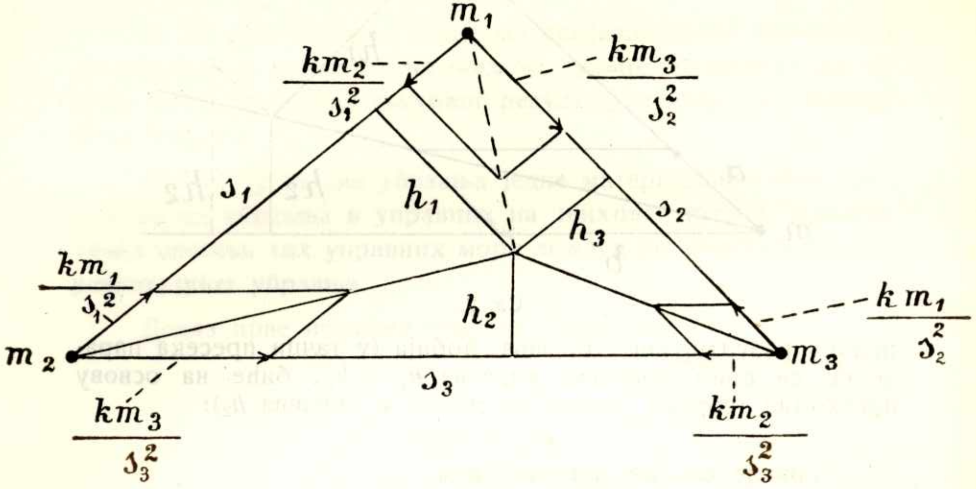
$$\frac{km_1}{s_1^2} \cdot h_1 = \frac{km_3}{s_3^2} \cdot h_2,$$

а с друге стране:

$$\frac{km_2}{s_3^2}\cdot h_2 = \frac{km_1}{s_2^2}\cdot h_3.$$

Множењем одговарајућих страна ових двеју једначина добићемо:

$$\frac{km_2}{s_1^2}\cdot h_1 = \frac{km_3}{s_2^2}\cdot h_3\,.$$



Сл. 3.

Како су $\frac{km_2}{s_1^2}$ и $\frac{km_3}{s_2^2}$ убрзања масе m_1, то из последње једначине на основу друге помоћне теореме следује, да правац резултујућег убрзања масе m_1 мора пролазити кроз тачку пресека праваца резултујућих убрзања маса m_2 и m_3, чиме је главна теорема доказана.

2. Ако у троуглу маса m_1, m_2, m_3, које се привлаче по Њутоновом закону гравитације, тачка пресека праваца њихових резултујућих убрзања пада у средиште тих маса, троугао маса мора бити равностран.

Доказ. — Повуцимо из темена масе m_1 трансверзалу d_1 тако да она пролази кроз средиште маса C (в. сл. 4). Претпоставимо најпре да правац резултујућег узбрзања масе m_1 отступа од правца трансверзале d_1 и означимо углове, које ова последња заклапа са странама s_1 и s_2, са α_1 и α_2, а углове, које правац резултујућег убрзања заклапа са тим истим странама, са β_1 и β_2. Означимо даље отстојања тачке пресека трансверзале d_1 са страном s_3 од маса m_2 и m_3 са p и q (при чему ће та тачка пресека претстављати средиште ових маса).

Гада ће из слике с једне стране следовати:

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \frac{km_3}{s_2^2} : \frac{km_2}{s_1^2} = \frac{m_3}{m_2}\,\frac{s_1^2}{s_2^2}\,,$$

а с друге стране најпре:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin A_2} = \frac{p}{d_1} \quad \text{и} \quad \frac{\sin\alpha_2}{\sin A_3} = \frac{q}{d_1}\,,$$

а затим:

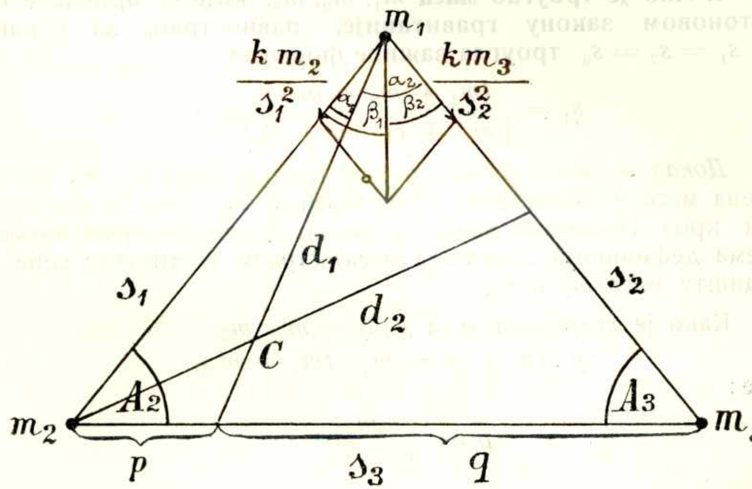
$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{p}{q}\cdot\frac{\sin A_2}{\sin A_3}\,,$$

и напослетку (пошто је $\frac{\sin A_2}{\sin A_3} = \frac{s_2}{s_1}$ и $\frac{p}{q} = \frac{m_3}{m_2}$):

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{m_3\ s_2}{m_2\cdot s_1}\,.$$

Ако сада претпоставимо (према захтеву теореме) да је $\alpha_1 = \beta_1$ (тј. ако претпоставимо да се правац резултујућег убрзања масе m_1 поклапа са правцем трансверзале d_1), биће и $\alpha_2 = \beta_2$ (пошто је $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$), па према томе биће и

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \quad \text{и} \quad \frac{m_3}{m_2}\,\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{m_3}{m_2}\,\frac{s_2}{s_1}\,.$$



Сл. 4.

Из ове последње једначине пак следује да је $\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{s_2}{s_1}$,

тј. да је $s_1^3 = s_2^3$, а одавде $s_1 = s_2$.

На сличан начин следоваће, повлачењем трансверзале d_2 из темена масе m_2, да је $s_1 = s_3$, а тиме је теорема већ доказана.

3. Ако је троугао маса m_1, m_2, m_3, које се привлаче по Њутоновом закону гравитације, равностран, правци резултујућих убрзања пролазиће кроз средиште маса.

Доказ. — Ако је $s_1 = s_2$ (в. сл. 4), биће $sin\ A_2 = sin\ A_3$ и с једне стране:

$$\frac{sin\ \alpha_1}{sin\ \alpha_2} = \frac{p}{q} = \frac{m_3}{m_2},$$

с друге:

$$\frac{sin\ \beta_1}{sin\ \beta_2} = \frac{m_3}{m_2},$$

из чега следује:

$$\frac{sin\ \alpha_1}{sin\ \alpha_2} = \frac{sin\ \beta_1}{sin\ \beta_2},$$

а одавде (пошто је $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$) $\alpha_1 = \beta_1$ и $\alpha_2 = \beta_2$.*)

Према томе, ако је $s_1 = s_2$, правац резултујућег убрзања масе m_1 поклопиће се са правцем трансверзале d_1 и пролазиће кроз средиште маса. На сличан начин следоваће из $s_2 = s_3$ и $s_1 = s_3$, да ће и правци остала два резултујућа убрзања пролазити кроз средиште, чиме је теорема доказана.

4. Ако је троугао маса m_1, m_2, m_3, које се привлаче по Њутоновом закону гравитације, равностран, за страну $s = s_1 = s_2 = s_3$ троугла важиће формула:

$$s_1 = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)\, r_1}{\sqrt{m_2^2 + m_2\, m_3 + m_3^2}}.$$

Доказ. — Ако у равностраном троуглу маса m_1, m_2, m_3 из темена масе m_1 повучемо трансверзилу d_1 тако да ова пролази кроз средиште маса C (в. сл. 5), та ће трансверзала (према дефиницији средишта маса) страну s_3 троугла сећи у средишту маса m_2 и m_3.

Како је $m_2\, p = m_3\, q$ и $p : q = m_3 : m_2$,

$$p : (p + q) = m_3 : (m_2 + m_3),$$

биће:

$$p = \frac{s_3 m_3}{m_2 + m_3}.$$

*) Да из претпоставки

$$\frac{sin\ \alpha_1}{sin\ \alpha_2} = \frac{sin\ \beta_1}{sin\ \beta_2} \text{ и } \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$$

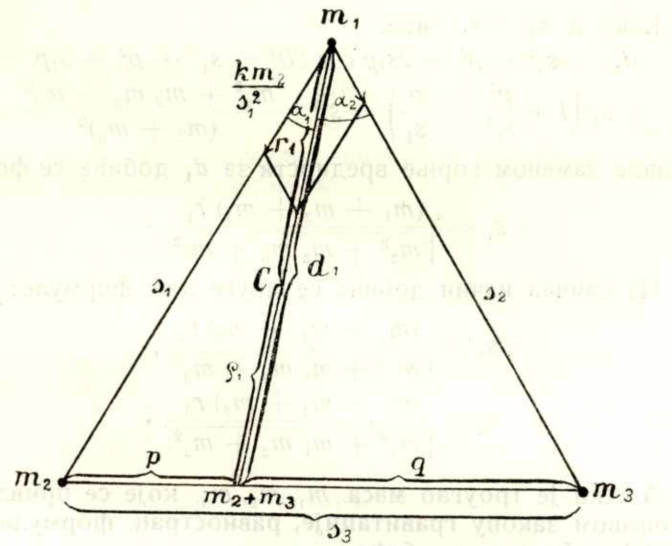
следују идентитети $\alpha_1 = \beta_1$ и $\alpha_2 = \beta_2$, дâ се доказати на следећи начин.

Из прве претпоставке следује:

$$\frac{sin\ \alpha_1 - sin\ \alpha_2}{sin\ \alpha_1 + sin\ \alpha_2} = \frac{sin\ \beta_1 - sin\ \beta_2}{sin\ \beta_1 + sin\ \beta_2},$$

На сличан начин биће:

$$q = \frac{s_3 m_2}{m_2 + m_3}.$$



Сл. 5.

Даље ће из

$$m_1\, r_1 = (m_2 + m_3)\, \rho_1,$$
$$r_1 : \rho_1 = (m_2 + m_3) : m_1$$

следовати:

$$r_1 : d_1 = (m_2 + m_3) : (m_1 + m_2 + m_3),$$

а одавде (применом формула за збир и разлику синуса):

$$\frac{2\, sin\, \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\ cos\, \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}{2\, cos\, \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\ sin\, \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}} = \frac{2\, sin\, \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\ cos\, \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}}{2\, cos\, \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\ sin\, \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}},$$

одн.

$$\frac{sin\, \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\ cos\, \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}{cos\, \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\ cos\, \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}} = \frac{sin\, \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\ sin\, \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}{cos\, \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\ sin\, \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}}$$

Како је $sin\,(\alpha_1 + \alpha_2) = sin\,(\beta_1 + \beta_2)$ и $cos\,(\alpha_1 + \alpha_3) = cos\,(\beta_1 + \beta_2)$, из последње једначине следоваће:

$$tg\, \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = tg\, \frac{\beta_1 - \beta_2}{2},$$

а одавде (пошто су углови у првом квадранту) $\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2$.

Напослетку из једначина:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$$

следоваће идентитети $\alpha_1 = \beta_1$ и $\alpha_2 = \beta_2$.

а одавде:

$$d_1 = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)\, r_1}{m_2 + m_3}\,.$$

Како је $s_3 = s_1$ биће:

$$d_1^2 = s_1^2 + p^2 - 2s_1 p \cos 60^0 = s_1^2 + p^2 - s_1 p =$$

$$= s_1^2\left(1 + \frac{p^2}{s_1^2} - \frac{p}{s_1}\right) = s_1^2 \cdot \frac{m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2}{(m_2 + m_3)^2}\,,$$

а одавде заменом горње вредности за d_1 добиће се формула:

$$s_1 = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)\, r_1}{\sqrt{m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2}}\,.$$

На сличан начин добиће се друге две формуле:

$$s_2 = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)\, r_2}{\sqrt{m_1^2 + m_1 m_3 + m_3^2}}\,,$$

$$s_3 = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)\, r_3}{\sqrt{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}}\,.$$

5. Ако је троугао маса m_1, m_2, m_3, које се привлаче по Њутоновом закону гравитације, равностран, формула за резултујуће убрзање γ_{r_1} биће:

$$\gamma_{r_1} = k \cdot \frac{(m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2)^{\frac{3}{2}}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} \cdot \frac{1}{r_1^2}\,.$$

Прво извођење. — Према општој формули за резултујуће убрзање (тј. према формули која важи за општи троугао маса) биће у правцу r_1:

$$\gamma_{r_1} = k \cdot \frac{m_2}{s_1^2} \cos(s_1, r_1) + k \cdot \frac{m_3}{s_2^2} \cos(s_2, r_1),$$

а одавде (пошто је $s_2 = s_1$)

$$\gamma_{r_1} = \frac{k}{s_1^2}\Big[\, m_2 \cos(s_1, r_1) + m_3 \cos(s_2, r_1) \,\Big]\,.$$

Кад се у овом обрасцу замене $\cos(s_1, r_1)$ и $\cos(s_2, r_1)$ њиховим вредностима:

$$\cos(s_1, r_1) = \frac{s_1^2 + d_1^2 - p^2}{2 s_1 d_1} \text{ и } \cos(s_2, r_1) = \frac{s_1^2 + d_1^2 - q^2}{2 s_1 d_1}$$

добиће се:

$$\gamma_{r_1} = \frac{k}{2 s_1^3 d_1}\Big[\, m_2 (s_1^2 + d_1^2 - p^2) + m_3 (s_1^2 + d_1^2 - q^2) \,\Big] =$$

$$= \frac{k}{2 s_1^3 d_1}\Big[\, (s_1^2 + d_1^2)(m_2 + m_3) - m_2 p^2 - m_3 q^2 \,\Big]\,.$$

Кад се у последњем обрасцу замене s_1, d_1, p и q њиховим раније нађеним вредностима и стави $m_1 + m_2 + m_3 = M$, биће:

$$\gamma_{r_1} = \frac{k}{2 s_1^3} \cdot \frac{m_2 + m_3}{M r_1} \cdot M^2 r_1^2 \left[\frac{(m_2 + m_3)^3 + (m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2)(m_2 + m_3) - m_2 m_3^2 - m_3 m_2^2}{(m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2)\,(m_2 + m_3)^2}\right],$$

а одавде:

$$\gamma_{r_1} = \frac{k M r_1}{s_1^3}\,.$$

Кад се у овој формули замени s_1 својом вредношћу, добиће се напослетку формула:

$$\gamma_{r_1} = k \cdot \frac{(m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2)^{\frac{3}{2}}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} \cdot \frac{1}{r_1^2}\,.$$

На сличан начин добиће се и друге две формуле:

$$\gamma_{r_2} = k \cdot \frac{(m_1^2 + m_1 m_3 + m_3^2)^{\frac{3}{2}}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} \cdot \frac{1}{r_2^2}\,,$$

$$\gamma_{r_3} = k \cdot \frac{(m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2)^{\frac{3}{2}}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} \cdot \frac{1}{r_3^2}\,.$$

Друго извођење. — Из слике 5 следује с једне стране:

$$\gamma_{r_1} : \frac{k m_2}{s_1^2} = \sin 60^0 : \sin \alpha_2, \text{ одн. } \gamma_{r_1} = \frac{\sin 60^0}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{k m_2}{s_1^2}\,,$$

а с друге:

$$q : d_1 = \sin \alpha_2 : \sin 60^0, \text{ одн. } q = \frac{d_1 \sin \alpha_2}{\sin 60^0}\,.$$

Множењем одговарајућих страна ових двеју једначина добиће се:

$$\gamma_{r_1} = \frac{k m_2}{s_1^2} \cdot \frac{d_1}{q}\,,$$

а одавде (кад се стави $d_1 = \dfrac{M r_1}{m_2 + m_3}$ и $q = \dfrac{s_1 m_2}{m_2 + m_3}$) формула:

$$\gamma_{r_1} = \frac{k M r_1}{s_1^3}\,,$$

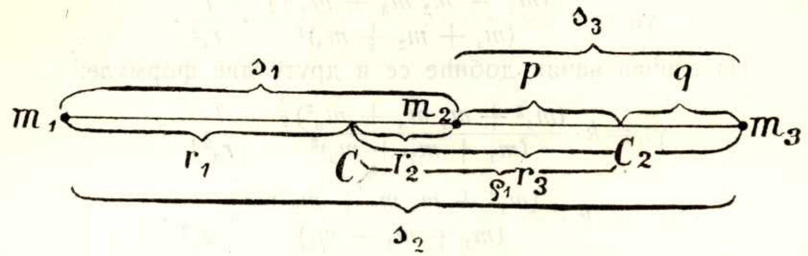
из које заменом вредности за s_1 следује горња формула за γ_{r_1}.

Напомена. — Из формула за убрзања γ_{r_1}, γ_{r_2}, γ_{r_3} следује, да ће се све три масе кретати око заједничког средишта маса у конусним пресецима. Ако је конусни пресек елипса, елипсе појединих маса биће сличне а неће бити конгруентне (пошто је фактор пропорционалности за свако убрзање други). Даље би се на познати начин дало показати, да ће троугао при кретању маса остати увек равностран, да ће се његове стране периодично и пропорционално смањивати и увећавати и да ће све три масе у исто доба у својим елипсама пролазити кроз перихеле и афеле.

6. Ако се масе m_1, m_2, m_3, које се привлаче по Њутоновом закону гравитације, налазе на правој линији, формула за убрзање масе m_1 (при претпоставци да се средиште маса налази између m_1 и m_2) биће:

$$\gamma_{r_1} = \frac{[m_2 + m_3\,(1+a)]^2\,[m_2\,(1+a)^2 + m_3]}{(m_1 + m_3 + m_3)^2\,(1+a)^2} \cdot \frac{1}{r_1^2}\,.$$

Извођење. — Нека је C средиште маса m_1, m_2, m_3 поређаних овим редом на правој линији (в. сл. 6), C_2 средиште маса m_2 и m_3, r_1 отстојање масе m_1 од C, а ρ_1 отстојање сре-



Сл. 6.

дишта C од средишта C_2. Нека су даље r_2 и r_3 отстојања маса m_2 и m_3 од средишта C, а s_1 отстојање масе m_1 од m_2, s_2 отстојање масе m_1 од m_3 и s_3 отстојање масе m_2 од m_3, p и q отстојања маса m_2 и m_3 од средишта C_2.

Тада ће бити:

$$m_2\,p = m_3\,q$$
$$p : q = m_3 : m_2,$$
$$p : s_3 = m_3 : (m_2 + m_3),$$
$$q : s_3 = m_2 : (m_2 + m_3)$$

и

$$p = \frac{s_3\;m_3}{m_2 + m_3}\;,\quad q = \frac{s_3\;m_2}{m_2 + m_3}\,.$$

Даље ће из

$$m_1\,r_1 = \rho_1\,(m_2 + m_3),$$
$$r_1 : \rho_1 = (m_2 + m_3) : m_1,$$
$$r_1 : (r_1 + \rho_1) = (m_2 + m_3) : (m_1 + m_2 + m_3),$$
$$r_1 : (s_1 + p) = (m_2 + m_3) : (m_1 + m_2 + m_3)$$

следовати (кад се стави $m_1 + m_2 + m_3 = M$):

$$r_1 : \left(s_1 + \frac{s_3\;m_3}{m_2 + m_3}\right) = (m_2 + m_3) : M,$$

а одавде (кад се стави $\dfrac{s_3}{s_1} = a$, одн. $s_3 = s_1 a$):

$$s_1\left(1 + \frac{a m_3}{m_2 + m_3}\right) = \frac{M r_1}{m_2 + m_3}$$

и

$$s_1 = \frac{M r_1}{m_2 + m_3 + a m_3}\,.$$

На сличан начин следоваће из

$$r_1 : (s_2 - q) = (m_2 + m_3) : M,$$

кад се стави $s_3 = s_2 b$,

$$s_2\left(1 - \frac{b m_2}{m_2 + m_3}\right) = \frac{M r_1}{m_2 + m_3}$$

и

$$s_2 = \frac{M r_1}{m_2 + m_3 - b m_2}\,.$$

Али како је

$$s_3 = \frac{s_2 a}{a + 1}$$

(пошто из $s_3 : s_1 = a$ следује $s_3 : (s_3 + s_1) = a : (a + 1)$, одн. $s_3 : s_2 = a : (a + 1)$),

то је

$$b = \frac{a}{a + 1}$$

и

$$s_2 = \frac{M r_1\,(a + 1)}{m_2 + m_3 + a m_3}$$

Ако се нађене вредности за s_1 и s_2 замене у формули за резултујуће убрзање масе m_1:

$$\gamma_{r_1} = k \cdot \frac{m_2}{s_1^{\,2}} + k \cdot \frac{m_3}{s_2^{\,2}}\,,$$

добиће се:

$$\gamma_{r_1} = \frac{k}{r_1^2\,M^2\,(1 + a)^2}\Big[m_2\,(m_2 + m_3 + a m_3)^2\,(1 + a)^2 + m_3\,(m_2 + m_3 + a m_3)^2\Big]$$

или:

$$\gamma_{r_1} = k \cdot \frac{[m_2\,(1 + a)^2 + m_3]\;[m_2 + m_3\,(1 + a)]^2}{M^2\,(1 + a)^2} \cdot \frac{1}{r_1^{\,2}}\,,$$

чиме је тражена формула изведена.

Из слике 6 дају се извести и формуле за резултујућа убрзања маса m_2 и m_3.

Како је $r_2 = s_1 - r_1$ и $r_1 = s_1 - r_2$, биће:

$$s_1 = \frac{M(s_1 - r_2)}{m_2 + m_3 + am_3},$$

а одавде:

$$s_1 = \frac{Mr_2}{m_1 - am_3},$$

и, како је $s_3 = s_1\, a$, биће:

$$s_3 = \frac{Mr_2\, a}{m_1 - am_3}\,.$$

Кад се ове вредности за s_1 и s_3 замене у формули:

$$\gamma_{r_2} = k \cdot \frac{m_1}{s_1^2} - \frac{km_3}{s_3^2}$$

добиће се:

$$\gamma_{r_2} = k \cdot \frac{(m_1 a^2 - m_3)(m_1 - am_3)^2}{M^2 a^2} \cdot \frac{1}{r_2^2}\,.$$

На сличан начин из

$$s_2 = \frac{Mr_3\,(1 + a)}{m_1 + am_1 + am_2} \quad \text{и} \quad s_3 = \frac{Mr_3\, a}{m_1 + am_1 + am_2}$$

изведена формула за резултујуће убрзање масе m_3 биће:

$$\gamma_{r_3} = k. \frac{[m_1 (1 + a)^2 + m_2 a^2]\,[m_1 (1 + a) + m_2 a]^2}{M^2 a^2 (1 + a)^2} \cdot \frac{1}{r_3^2}\,.$$

Из наведених формула следује, да ће се све три масе кретати око њиховог заједничког средишта у конусним пресецима и налазити се увек на правој линији само у случају ако су односи њихових отстојања од заједничког средишта константни (тј. ако је a константна количина). Ако је конусни пресек елипса, елипсе ће бити сличне (као и у случају равностраног троугла) и масе пролазити у исто доба кроз перихеле и афеле.