E. GRIMSEHL
LEHRBUCH DER PHYSIK

ZUM GEBRAUCHE BEIM UNTERRICHT, BEI AKADEMISCHEN VORLESUNGEN UND ZUM SELBSTSTUDIUM

IN ZWEI BÄNDEN

ERSTER BAND

MECHANIK, WÄRMELEHRE AKUSTIK UND OPTIK

SECHSTE, VERMEHRTE UND VERBESSERTE AUFLAGE

HERAUSGEGEBEN VON

DR. W. HILLERS
PROFESSOR, OBERLEHRER AM REALGYMNASIUM DES JOH. IN HAMBURG

UNTER MITARBEIT VON

DR. H. STARKE
O. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN AACHEN

MIT 1090 FIGUREN IM TEXT UND 10 FIGUREN AUF 2 FARBIGEN TAFELN

F. Krause
München

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER · LEIPZIG · BERLIN 1923

Aus dem Vorwort zur dritten Auflage.

Die günstige Aufnahme und der starke Absatz der zweiten Auflage haben mich ermutigt, das Buch noch mehr als früher den Bedürfnissen des fortgeschrittenen Studiums anzupassen. . . .

Ich habe einen Abschnitt mit dem Thema „Die Kraftübertragung" von den übrigen vollständig getrennt und diesen Stoff erst nach der Lehre von der Elastizität und Festigkeit behandelt. Dadurch ist eine auch den technischen Bedürfnissen entsprechende Berechnung der Spannungen in den Mechanismen, dem Fachwerk sowie eine Berücksichtigung der Reibung möglich geworden. . . .

Die Oberflächenspannung und Kapillarität habe ich neu bearbeit. Umfangreiche Änderungen und Vertiefungen hat die Wärmelehre erfahren. Besonders ist alles das, was mit den beiden Hauptsätzen der mechanischen Wärmetheorie zusammenhängt, neu bearbeitet worden. In der Lehre vom Lichte sind die die Photometrie behandelnden Kapitel erweitert und vertieft worden. Eine starke Ergänzung hat die geometrische Optik durch die Behandlung der Abbildung durch zentrierte, sphärische Flächen erfahren. In der physikalischen Optik sind die Interferenzerscheinungen und besonders die Beugungserscheinungen sehr eingehend behandelt worden.

Hamburg, im Juni 1914. **E. Grimsehl.**

Aus dem Vorwort zur vierten Auflage.

. . . Die Bearbeiter waren bestrebt, die Eigenart und die Vorzüge der Grimsehlschen Darstellungsart nach Möglichkeit zu wahren und in den hinzugetretenen oder geänderten Abschnitten diese zu erreichen. . . .

Die Abänderungen und Neubearbeitungen erstrecken sich besonders auf die Einleitung und die §§ 2, 8, 15, 22, 27, 29, 31, 34, 35, 36, 40, 41, 42, 56, 58, 59, 68, 75, 76, 96, 97, 99, 104, 109, 110, 111, 113, 115, 122, 153, 155, 156, 158, 159—163, 175, 176, 177, 185, 204, 212, 234, 257, 260, 267, 269, 278, 279, 310, 322, 326, 350, 362. Von diesen wurden die §§ 8, 41, 109, 153, 155, 156, 159—163 sowie die Darstellung der Quantenlehre in § 175 von Professor Starke umgearbeitet bzw. neugeschrieben, der auch in den übrigen Kapiteln mannigfaltige Ratschläge gegeben hat.

Hamburg, August 1919. **Wilhelm Hillers.**

Aus dem Vorwort zur fünften Auflage.

Im ganzen hat die vorliegende Auflage des I. Bandes gegenüber der vorigen nur wenige Änderungen und Vermehrungen erfahren. Letztere hatten sich zum Teile als wünschenswert erwiesen, um den Aufbau des Lehrbuches in sich geschlossener zu gestalten. Es sei auf die §§ 36, 42, 53, 59, 154, 211, 212, 268, 269, 304, 362 verwiesen. . . .

Die Zahl und Anordnung der einzelnen Paragraphen ist unverändert geblieben; ebenso ist die Anzahl der Abbildungen die gleiche wie früher; allerdings wurden einige Figuren durch neue ersetzt.

Hamburg, Januar 1921. **Wilhelm Hillers.**

Vorwort zur sechsten Auflage.

In der neuen Auflage ist Änderungs- und Erweiterungswünschen, die von Freunden des Buches und bei den Besprechungen der letzten beiden Auflagen geäußert worden sind, in größerem Maßstabe Rechnung getragen worden. Die einzige tiefergreifende Änderung besteht allerdings nur in der neuen Darstellung der neuzeitlichen Anschauungen über den Bewegungswiderstand in Flüssigkeiten und Luft, welche in den Händen von Kutta, Jonkowski und L. Prandtl endlich zu einer mit der Erfahrung gut übereinstimmenden Tragflächentheorie geführt haben. Das Bestreben, diese Anschauungen in geschlossenem Aufbau darzubieten, machte die Einführung und die Entwicklung zahlreicher neuer Begriffe notwendig, so daß dem Gegenstande acht neue Paragraphen gewidmet werden mußten. Im allgemeinen wurde bei der Neubearbeitung niemals die Richtschnur aus dem Auge verloren, einer Umfangsvermehrung des Bandes zu steuern. Die neuen experimentellen Ergebnisse, besonders der Göttinger Schule, über die Widerstands- und Auftriebsmessungen (§ 111), schienen uns aber in allgemein physikalischer Hinsicht so bedeutungsvoll, die notwendigen Auseinandersetzungen über Potentialströmung (§ 114), Drehströmung (§ 115), Stromlinien, Stromfäden und Drucke (§ 116), sowie die eigentliche Auftriebstheorie (§ 118) schienen uns in Hinblick auf die ganz entsprechenden Begriffe und Lehren des elektromagnetischen Feldes so lehrreich, daß wir demgegenüber glaubten, die unerwünschte Umfangsvermehrung mit in den Kauf nehmen zu müssen. — Sonstige Erweiterungen und Änderungen sind enthalten in: § 2, Zusammenstellbare Endmaße; § 8, Maßsysteme und Dimensionen; § 31, erweiterte Betrachtungen über den Massebegriff; § 34; § 60; § 68; § 85; § 87, Kohäsion flüssiger Körper und die innere Reibung; § 97, der Bernoullische Satz vom dynamischen Flüssigkeitsdruck; § 102, Stationsbarometer; § 105, Gaede-Kolbenpumpe und Dampfstrahlpumpe; § 120, Segelflug und Bumerang; § 130, Temperaturbegriff; § 134, Geometrische Temperaturskala; § 183, 16.; § 187—200; § 245, Richtungshören; § 259, Einheitliche Vorzeichenfestsetzung; § 260; 261, Bildwölbungen und Blenden; § 270,

Brechungsgesetz von Möbius; § 271; § 275; § 276; § 277; § 278, Berechnung der Grundpunkte von Linsen endlicher Dicke; § 282; § 283, Tangensbedingung; § 284; § 285; § 286, 4.; § 290; § 299, Vergrößerung des Mikroskopes; § 300; § 301; § 304; § 307, Bedingung der Achromasie; § 323; § 324, 4.; § 333, 6., die Sinusbedingung; § 358; § 359, Fluoreszenz; § 361; § 362; § 363, Assimilation; § 364; § 365; § 373, Farbenempfindung und Farbenblindheit. Demgegenüber ist nur an wenigen Stellen gekürzt worden (§ 89). — Dem Bestreben, auch diesen Band auf zeitgemäßer wissenschaftlicher Höhe zu erhalten und moderne Fortschritte zu berücksichtigen, entspringt daher im ganzen doch eine Umfangsvermehrung von etwa sechs Druckbogen. Wenn wir nicht allen uns zugegangenen Anregungen nachgekommen sind, dem einen oder andern Abschnitt oder die eine oder andere Tatsache eingehender zu behandeln, so mag uns die Rücksicht zugute gehalten werden daß noch weitere Umfangsvermehrungen vermieden werden sollten. — Die historischen und biographischen Anmerkungen, sowie das Tabellenwerk wurden ergänzt und erweitert.

Den zahlreichen Freunden des Buches, die uns in liebenswürdigster Weise Hinweise und Anregungen haben zukommen lassen, sei dafür der herzlichste Dank ausgesprochen; insbesondere verdanken wir Herrn Prof. O. Kassner (Berlin) und Herrn Dr. Semmelhack (Hamburg) wertvolle Winke in bezug auf die Meteorologie, Herrn Prof. H. Ahlborn in Hamburg in bezug auf die Widerstandslehre der Flüssigkeiten, Herrn Prof. R. Böger (Hamburg) in bezug auf die geom. Optik (§ 270). Herr Prof. L. Prandtl in Göttingen, hatte die Güte, die Darstellung über den Flüssigkeitswiderstand (§ 110—119), Herr Prof. H. Ahlborn denselben Abschnitt einschließlich der folgenden Paragraphen über das Fliegen (§ 110—121), Herr Dr. Semmelhack den 11. Abschnitt: Wetterkunde in der Korrektur durchzusehen; treue und wertvolle Hilfe bei der Bearbeitung der gesamten Korrektur leisteten uns Herr Dr. Erich Boehm und Herr cand. phil. Karl Kuhlmann, denen wir dabei auch manche wertvolle Anregung verdanken. Diesen Herren, die in so entgegenkommender Weise uns viele Stunden ihrer kostbaren Arbeitszeit opferten und das Werk förderten, sagen wir für ihre selbstlose Mühewaltung an dieser Stelle unseren besonderen und wärmsten Dank.

Hamburg, im Juni 1923. **Wilhelm Hillers.**

Inhalt.

IX. Abschnitt.

Molekularphysik.

X. Abschnitt.

Wärmelehre.

XI. Abschnitt.

Wetterkunde.

XII. Abschnitt.

Wellenlehre.

XIII. Abschnitt.

Akustik.

XIV. Abschnitt.
Geometrische Optik.

XV. Abschnitt.
Physikalische Optik.

XVI. Abschnitt.
Die Polarisation des Lichtes.

XVII. Abschnitt.
Optische Erscheinungen in der Atmosphäre.

XVIII. Abschnitt.
Die Strahlungsenergie und ihre Umwandlungen.

Anhang.

Tabellen über wichtige physikalische Konstanten. Zahlentabellen.

Einleitung.

Beobachtung, Versuch, Gesetz; induktive Methode, Theorie, Hypothese, Prinzip, deduktive Methode.

Aufgabe der experimentellen Physik ist die Beobachtung der sich in der Natur abspielenden Ereignisse. Wenn man eine einzelne Erscheinung aufmerksam beobachtet hat, so wird man imstande sein, die Erscheinung auch nachher wieder zu beschreiben; doch wird man im allgemeinen kein vollständiges Bild der Erscheinung aufgefaßt haben, sondern es wird dem Beobachter eine große Zahl von Teilerscheinungen entgangen sein. Wiederholt sich dieselbe Erscheinung noch einmal, so wird derselbe Beobachter das Bild der Erscheinung vollständiger auffassen, also auch vollständiger beschreiben können, da er manche Erfahrung, die er bei der ersten Beobachtung gemacht hat, nur zu befestigen braucht, daher also für andere Einzelheiten empfänglicher ist. Durch mehrfache Wiederholung der Beobachtung derselben Erscheinung wird das Bild, das sich der Beobachter von der Erscheinung macht, immer vollständiger und der Erscheinung selbst ähnlicher. Besonders werden auch Beobachtungen, die bei dem ersten Eintreten der Erscheinung nicht ganz den Tatsachen entsprechend, also nicht ganz richtig aufgefaßt worden sind, bei Wiederholung der Erscheinung verbessert werden.

In manchen Fällen ist man imstande, eine einzelne Erscheinung willkürlich eintreten zu lassen, also dann hervorzurufen, wenn man die Absicht hat, sie zu beobachten, wenn man also seine Aufmerksamkeit schon vorher auf die erwartete Erscheinung gespannt hat. Eine solche absichtlich hervorgerufene Erscheinung heißt ein **Versuch** oder ein **Experiment**.

Trotz mehrfacher Wiederholung derselben Erscheinung bleibt sie immer noch eine Einzelerscheinung, und trotz der mehrfachen Wiederholung der Beobachtung eine **Einzelbeobachtung**. Läßt man z. B. einen Stein mehrere Male aus der Höhe von 5 m auf den Erdboden fallen, so beobachtet man als Fallzeit eine Sekunde. Die Beobachtung wird bei Wiederholung des Versuches nur erneuert, die beobachteten Werte erreichen einen höheren Grad der Genauigkeit; trotzdem bleibt die Beobachtung nur eine Einzelbeobachtung.

Man kann bei Ausführung eines Versuches eine oder mehrere Bedingungen, die die zu beobachtende Erscheinung beeinflussen, abändern oder die Größe eines den Versuch bedingenden Faktors verändern. Tut man das, so kann der Fall eintreten, daß die Erscheinung selbst wieder denselben Verlauf nimmt wie vorher; im allgemeinen wird aber ein Teil der Erscheinung anders verlaufen als beim ersten Versuche (**Beobachtungsreihe**). Ändert man z. B. beim fallenden Steine das Gewicht des Steines ab, oder verwendet man beim Fallversuche statt des Steines ein Stück Metall, ändert aber die Höhe des durchlaufenen Fallraumes nicht, so bleibt die Fallzeit ungeändert. Ändert man dagegen die Fallhöhe, so ändert sich auch die Fallzeit.

Das Ergebnis einer **Beobachtungsreihe** kann in einem **Satze** zusammengefaßt werden, der in mathematischer Zeichensprache eine **Formel** genannt wird. Beispiele: „Die Fallzeit eines Körpers ist vom Gewichte und Stoffe des fallenden Körpers unabhängig." „Die Fallhöhe ist dem Quadrate der Fallzeit direkt proportional." „$s = \frac{g}{2} \cdot t^2$."

Die Gültigkeit eines Satzes ist einstweilen nur auf die tatsächlich beobachteten Erscheinungen beschränkt. Werden die Beobachtungen häufig wiederholt, und werden die in dem Satze oder in der Formel auftretenden Größen immer aufs neue planmäßig abgeändert, so kann die Gültigkeit des Satzes erweitert werden. Je größer die Anzahl der gemachten Beobachtungen ist, um so größer ist die Wahrscheinlichkeit, daß die nächsten noch zu machenden Beobachtungen dem Satze genügen. Findet die Gültigkeit des Satzes oder der Formel immer weitere Bestätigung, so spricht man ihn als allgemeingültiges **Gesetz** aus. Es ist die vornehmste Aufgabe der physikalischen Forschung, möglichst umfassende Naturgesetze aufzustellen. Je größer die Zahl verschiedener Einzelerscheinungen ist, welche von dem gefundenen Naturgesetze beherrscht werden, desto allgemeiner ist dieses und desto größer ist die Aussicht, das wahre Wesen der Erscheinungen von Grund aus zu erklären, d. h. unserem Verständnisse nahezurücken.

Die beschriebene Methode, die zur Aufstellung eines Gesetzes führt, heißt die **direkte induktive Methode.** Sie ist in erster Linie die Forschungsmethode der experimentellen Naturwissenschaften. Es gibt aber auch einen anderen Weg: Man bildet sich über eine Erscheinung oder eine Gruppe von solchen eine bestimmte Vorstellung und macht diese zu einer **Hypothese**, aus welcher man mit Hilfe rein logischer Schlußfolgerungen, insbesondere rein mathematischer Operationen ableitet, wie sich die betreffenden Erscheinungen gestalten müssen, um mit der gebildeten Vorstellung vereinbar zu sein. Die Hypothese wird alsdann richtig sein, wenn alle beobachtbaren Dinge sie bestätigen; sie fällt aber mit dem Auftreten auch nur einer einzigen Erscheinung, welche nicht mit ihr in Einklang zu bringen ist. Die Gesamtheit aller logischen Schlußfolgerungen, welche man aus bestimmten physikalischen Grundvorstellungen oder Grundannahmen machen kann, faßt man unter dem Namen **Theorie** zusammen. Auch für diese sogenannte **deduktive Methode** der Forschung bietet die Geschichte der Physik großartige Beispiele. Es seien der zweite Hauptsatz der Wärmetheorie und das Nahewirkungsprinzip der Elektrizitätslehre genannt, zwei Sätze, auf denen sich die gesamte Theorie der Thermodynamik und der modernen Elektrizitätslehre aufbauen. Eine deduktive Ableitung kleineren Umfanges ist es, wenn beispielsweise aus der Voraussetzung, daß der freie Fall eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist, die Beziehung zwischen Fallraum und Fallzeit unter Benutzung der Lehren der Mathematik hergeleitet wird.

Jede umfangreiche Induktion enthält notwendig ein deduktives Element, indem sich der Beobachter nach den ersten Beobachtungen bereits die Formulierung eines allgemeinen Gesetzes zurechtzulegen sucht, dessen Gültigkeit er durch die folgenden Versuche und Beobachtungen weiter prüfen muß. Die nachträgliche Prüfung einer vorher aufgestellten Hypothese heißt die **indirekte induktive Methode.**

Das Wesen der Induktion ist daher — logisch betrachtet — eine **Reduktion**, d. i. ein Zurückführen des logischen Schlußsatzes auf seine Prämissen.

Eine Hypothese, die zu einer planmäßigen Anordnung einer Versuchsreihe veranlaßt, durch die sowohl die Bestätigung der schon gewonnenen Wahrheiten, wie die Auffindung neuer Wahrheiten angebahnt wird, heißt eine **Arbeitshypothese.**

Wie es nun in der Mathematik einige letzte, unbeweisbare Sätze, die Axiome, gibt — z. B. in der Geometrie den Satz von den Winkeln an Parallelen —, an deren Allgemeingültigkeit niemand zweifelt und welche schließlich die Grundlagen des ganzen mathematischen Lehrgebäudes bilden, so sind auch in der Physik aus den Erfahrungen solche letzte, allgemeingültige Grundwahrheiten herausgearbeitet worden, die rein logisch nicht weiter begründet oder auf andere Gesetze zurückgeführt werden können. Man hat sich gewöhnt, diese Lehrsätze mit dem Begriffe **Prinzip** von den Hypothesen zu sondern.

Das Einordnen einer Erscheinung in ein sie umfassendes Naturgesetz bedeutet gleichzeitig ein **Erklären** der Erscheinung, d. i. Zurückführen derselben auf andere, uns bekannte oder geläufige Erscheinungen. Da mit unseren Sinnen die Bewegungserscheinungen der greifbaren Materie am leichtesten aufzufassen sind, so ist uns die Neigung, alle Naturerscheinungen durch solche Bewegungen, d. h. mechanisch, erklären zu wollen, gewissermaßen angeboren, und die mechanistische Weltanschauung die unseren Sinnen nächstliegende.

Bewegung ist eine zeitliche Ortsveränderung; der Ort wird durch relative Längenmessungen bestimmt, mithin ist eine Bewegung durch eine Zeit- und Längenmessung charakterisiert. Die Masse bildet ein Maß für die Menge der Materie (s. dazu S. 21), und so benötigen wir zu einer mechanischen Definition physikalischer Größen dreier Grundgrößen, nämlich der **Länge**, **Zeit** und **Masse.**

Erst dann, wenn einem Begriffe in der Umwelt der Erscheinungen etwas entspricht, das man durch Messungen feststellen kann, wollen wir dem Begriffe eine „**Wirklichkeit**" im Sinne der Physik, eine **physikalische Realität** zuschreiben. Die Atome haben z. B. deshalb von dem Augenblicke an eine physikalische Realität erhalten, wo man Methoden kennen lernte, ihre Anzahlen, ihre Einzelgewichte, ihre Abmessungen durch Messungen in widerspruchsloser Weise zu bestimmen; der „Lichtäther" hingegen hat bisher noch in keiner seiner Eigenschaften durch Messungen widerspruchsfrei festgelegt werden können, er ist infolgedessen nicht „wirklich" im Sinne der Physik.

Erster Abschnitt.

Meßkunde.

§ 1. Längenmessung.

Längeneinheit. Um die Messungsergebnisse, also die Maßzahlen der Längenmessung, auch dann vergleichen zu können, wenn die Messungen von verschiedenen Personen ausgeführt worden sind, ist man übereingekommen, allerorts dieselbe Längeneinheit zugrunde zu legen. Als solche dient die Länge des **Urmeters**, eines im Bureau der Maße und Gewichte im Pavillon de Breteuil auf der Höhe von St. Cloud in der Nähe von Sèvres bei Paris aufbewahrten Stabes aus einer Legierung von 90% Platin und 10% Iridium von der in Fig. 1 abgekürzt gezeichneten Form. Auf der in der Figur mit ab bezeichneten Fläche auf dem Grunde der Rinne sind zwei feine Striche eingerissen (**Strichmaßstab**), deren Abstand bei der Temperatur 0° C „ein Meter“ (1 m) ist.

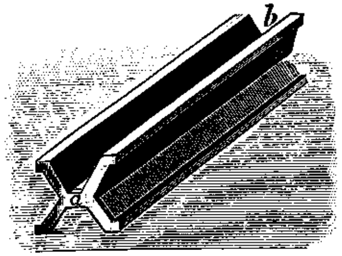

Fig. 1. Form des Normalmetermaßes.

Im März 1791 setzte die französische Nationalversammlung eine Kommission ein, der die bedeutendsten Mathematiker und Physiker Frankreichs angehörten, mit dem Auftrage, ein neues Maß- und Gewichtssystem in Vorschlag zu bringen. Diese Kommission beschloß, den vierzigmillionten Teil des durch die Pariser Sternwarte gehenden Meridians als Längeneinheit zu wählen. Zu dem Zwecke wurde eine Messung des zwischen Dünkirchen und Monjuich bei Barcelona liegenden Bogens dieses Meridians mit den damals besten Hilfsmitteln ausgeführt, und diese Messung wurde der neuen Längeneinheit zugrunde gelegt. Spätere, noch genauere Messungen, die von Bessel[1]) ausgeführt wurden, ergaben, daß die Länge des Erdquadranten, nach dem festgesetzten Meter gemessen, 10000856 m beträgt, daß also das von der französischen Kommission festgesetzte Meter um 0,0856 mm zu kurz ist, wenn man die ursprüngliche Absicht beibehalten wollte, der neuen Längeneinheit den zehnmillionten Teil des Erdquadranten zu geben. Man hat trotzdem die Länge des von der französischen Kommission angenommenen Meterstabes als Längeneinheit beibehalten, da es natürlich ganz unmöglich ist und zwecklos wäre, nach jeder genaueren Erdmessung wieder eine andere Längeneinheit einzuführen.

Alle im Gebrauche befindlichen Meterstäbe sind mittelbar mit dem Urmeter verglichen worden. Um dieses zu ermöglichen, hat man eine Anzahl von Stäben

1) Friedr. Wilh. Bessel, 1784—1846, ursprünglich Kaufmann in Bremen, dann Prof. der Astronomie in Königsberg, der durch peinlich genaue Messungen und überlegene theoretische Betrachtungsweisen führende Astronom des damaligen Deutschlands.

aus demselben Materiale und von derselben Form wie das Urmeter und von möglichst genau gleicher Länge mit den vollkommensten Hilfsmitteln hergestellt und ihre Längenabweichung durch wiederholtes, sorgfältiges Vergleichen mit dem Urmeter ausgemessen. Dann sind die Kopien an die einzelnen Kulturstaaten verteilt worden. Sie dienen in diesen Staaten als Normale der Längeneinheit. Das bei der Verteilung an Deutschland gekommene Normalmeter führt die Nummer 18 und wird in Charlottenburg aufbewahrt. Die möglichst sorgfältig hergestellten Kopien der Normalen sind an die Eichämter verteilt worden, deren Aufgabe es ist, die Länge der Gebrauchsmaßstäbe durch direktes oder indirektes Vergleichen mit den ihnen amtlich gelieferten Normalen zu prüfen.

Das Meter wird nach dem Dezimalsysteme in 10 Dezimeter (dm), 100 Zentimeter (cm), 1000 Millimeter (mm) eingeteilt. Dort, wo noch kleinere Maßeinheiten erwünscht sind, nimmt man wieder Dezimalteile des Millimeters als Maßeinheit. Der tausendste Teil eines Millimeters heißt Mikron, es wird mit μ bezeichnet, der millionte Teil eines Millimeters ist ein Millimikron ($1\ m\mu = 10^{-6}$ mm). Für größere Längen verwendet man als Maßeinheit das Kilometer (1 km = 1000 m).

Als Flächeneinheit dient das Quadratmeter, d. i. ein Quadrat, dessen Seitenlänge 1 m beträgt. Es wird amtlich mit qm, in der Physik und in der Technik mit m^2 bezeichnet; die 10^4 mal so kleine Einheit ist das Quadratzentimeter (cm^2).

Die Volumeneinheit ist das Kubikmeter (cbm $= m^3$), d. i. ein Würfel, dessen Kantenlänge 1 m beträgt, der 10^6 te Teil der Einheit ist das Kubikzentimeter (cm^3).

§ 2. Hilfsmittel zur Ausführung einer Längenmessung.

Die einfachste Art, eine Längenmessung auszuführen, besteht darin, daß man an die zu messende Länge unmittelbar einen eingeteilten Meterstab anlegt und nun vergleicht, wievielmal der Metermaßstab oder ein Teil desselben aneinandergelegt werden muß, damit eine Länge entsteht, welche der zu messenden Länge gleich ist.

Endmaßstäbe sind Stäbe von rechteckigem Querschnitte, deren Endflächen 1 m voneinander entfernt sind.

Die Endflächen der meist aus Holz gefertigten Stäbe versieht man mit metallischen Bekleidungen (Endschuhen), um sie vor Beschädigung zu schützen. Man gibt den Endschuhen der Maßstäbe die Form einer stumpfen Schneide, von denen die eine beim flachen Auflegen des Stabes vertikal, die andere horizontal liegt. Legt man den horizontalen Endschuh des einen Maßstabes mit dem vertikalen Endschuh des in der Verlängerung des ersten Stabes liegenden zweiten Stabes zusammen, so kann man die Stäbe mit großer Genauigkeit ohne Zwischenraum aneinanderlegen (Fig. 2).

Fig. 2. Endmaßstäbe.

Zusammenstellbare Endmaße. Um in einfachster Weise, zugleich aber mit einer sehr hohen Genauigkeit besonders Maschinenteile auf ihre vorgeschriebenen Maße prüfen zu können, sind in den letzten Jahren die sog. zusammenstellbaren Endmaße hergestellt worden. Sie sind eine Erfindung der Aktiengesellschaft von C. E. Johansson[1]) und haben rasch eine große Bedeutung erlangt. Die Endmaße bestehen aus einer Anzahl von Einzel-Endmaßen aus Stahl mit parallelen Endflächen, die sich zu beliebigen Maßwerten vereinigen lassen. Zu diesem

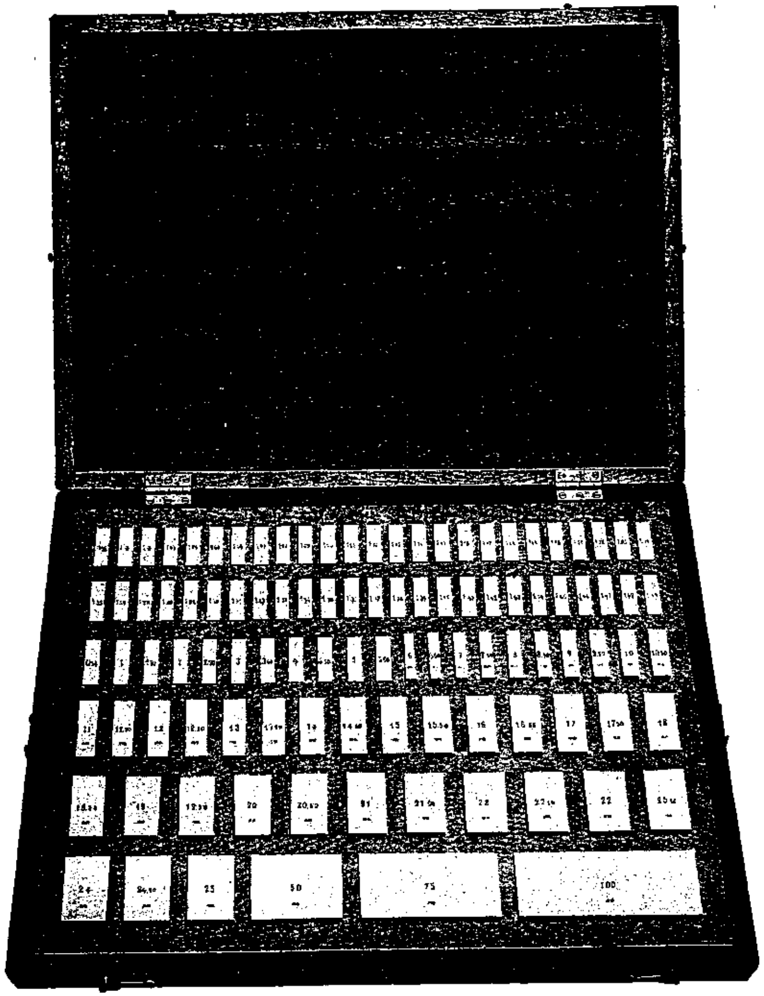

Fig. 3. Zusammenstellbare Endmaße von C. E. Johansson.

Zwecke sind die Maße in Gruppen eingeteilt, von denen jede eine Reihe von Maßgrößen bestimmter Abstufung darstellt. Die 103 Endmaße des gebräuchlichen Endmaßsatzes Nr. 2 — wir folgen den Mitteilungen der Firma Schuchardt & Schütte

1) In Eskilstuna in Schweden.

in Berlin, welche den Vertrieb der Johanssonschen Endmaße hat — sind z. B. in folgende Gruppen eingeteilt:

1. Gruppe	49	Endmaße	1,01— 1,49 mm	um	0,01 mm	abgestuft,
2. „	49	„	0,50— 24,50 „	„	0,50 „	„
3. „	4	„	25 —100 „	„	25 „	„

1 Endmaß 1,005 mm.

Fig. 3 gibt uns den Anblick des Endmaßsatzes in dem zugehörigen Kasten.

Es ist mit dem Normalsatze möglich, jeden beliebigen Maßwert innerhalb 0,01 mm, oder mit Hilfe des Endmaßes 1,005 mm innerhalb 0,005 mm durch Zusammenstellen von Endmaßen der verschiedenen Gruppen als festes Endmaß darzustellen.

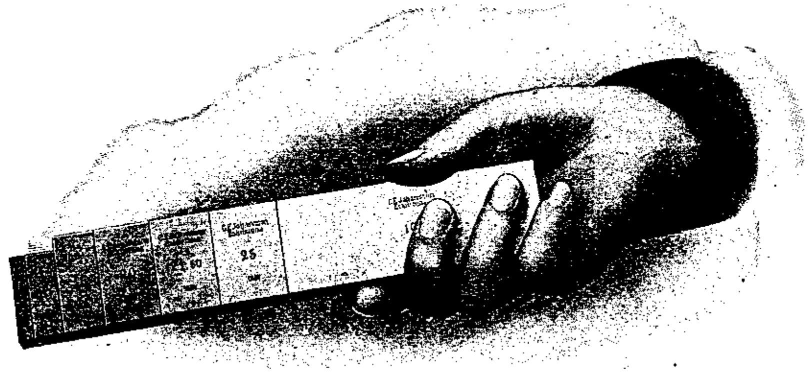

Fig. 4. Zusammenstellung aneinander haftender Endmaße.

Die Meßflächen aller Endmaße sind dabei so eben und so vollkommen parallel, daß durch bloßes Andrücken die Einzelmaße fest aneinanderhaften und sich so zu einem einzigen zusammengestellten Endmaße vereinigen. Fig. 4 zeigt eine solche Zusammenstellung. Bei Zusammenstellungen, die aus 4 bis 5 Endmaßen bis zu 100 mm Gesamtlänge gebildet werden, wird eine größte Abweichung von nicht mehr als 0,001 mm verbürgt, der wirkliche Längenfehler soll aber meist erheblich unter diesem Grenzwerte bleiben. Um das zu erreichen, müssen die Einzelendmaße selbst mit einer sehr viel höheren Genauigkeit geschliffen sein. Der Erfinder C. E. Johansson teilt mit, daß er sogar einen Endmaßsatz hergestellt habe, von dem jedes Einzelmaßstück $^1/_{1\,000\,000}$ engl. Zoll (etwa $^1/_{40\,000}$ mm) dicker sei als das unmittelbar vorangehende, und daß die Genauigkeit, mit der die Endmaße dieses Satzes ausgeführt seien, 1 bis 2 Milliontel Millimeter beträgt.

Meßketten und Stahlbandmaße. Längen von 50 m und mehr werden mit Meßketten gemessen. Das sind Ketten, deren einzelne Kettenglieder gewöhnlich 20 cm lang sind, und deren Gesamtlänge 10 m, 20 m oder auch 50 m beträgt. In neuerer Zeit werden statt der Ketten meistens lange Stahlbandmaße benutzt (Fig. 5).

Fig. 5. Meßkette mit Stock.

Schublehre. Die Schublehre (Fig. 6) dient besonders zur Messung der Dicke eines Körpers. Sie besteht aus einem Zentimetermaß M mit einem rechtwinkligen Ansatzstücke A. An dem Maßstabe ist ein Schieber N mit dem Ansatzstücke B angebracht. Wenn der Schieber so weit vorgeschoben ist, daß sich die beiden Ansätze A und B vollständig berühren, so muß eine auf dem Schieber angebrachte Marke auf Null zeigen. Bringt man zwischen den Schieber und das Ansatzstück den zu messenden Körper, so kann man seine Dicke an der Zentimeterteilung ablesen.

Spiegelmaßstäbe. Wenn man einen Maßstab nicht unmittelbar mit den Flächen des zu messenden Körpers in Berührung bringen kann, so muß

Fig. 6. Schublehre.

man an den Endflächen entlang nach dem Maßstabe visieren. Der Abstand der Endflächen des Körpers kann aber nur dann an dem Maßstabe genau abgelesen werden, wenn die Visierlinien selbst auf dem Maßstabe senkrecht stehen. Beim schrägen Visieren tritt eine scheinbare Verschiebung des Körpers gegen den Maßstab ein (Parallaxe).[1]) Um die Parallaxe zu vermeiden, legt man den Maßstab und den Körper auf einen Spiegel (Fig. 7) und visiert so an den Endflächen des Körpers vorbei, daß sich das Spiegelbild der Pupille des beobachtenden Auges mit der Endfläche des Körpers deckt. Auch bringt man wohl den Maßstab unmittelbar auf einem Spiegel an oder hinterlegt den Maßstab mit einem Spiegel.

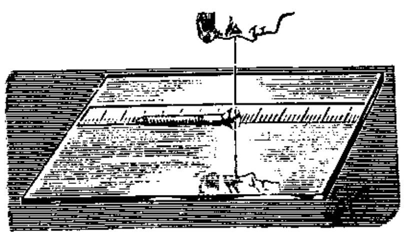
Fig. 7. Spiegelmaßstab.

Kathetometer.[2]) Das Kathetometer (Fig. 8) dient zur Messung lotrechter Längen. Es besteht aus einer lotrecht stehenden prismatischen Säule, die mit einer Zentimeterteilung versehen ist. Längs der Säule kann man ein Fernrohr mit wagerechter Achse auf- und abschieben. Man beobachtet nun durch das mit einem Fadenkreuze versehene Fernrohr erst das eine, z. B. das obere Ende der zu messenden Höhe und liest die Stellung des Fernrohres an der Säule ab. Dann verschiebt man das Fernrohr so lange, bis das andere Ende der zu messenden Höhe mit dem Fadenkreuze zur Deckung kommt, und liest an der Teilung wieder ab. Der Unterschied der Ablesungen ist die gesuchte Höhe.

Schraubenmikrometer.[3]) Das Schraubenmikrometer (Fig. 9) hat die Form einer Schraubenzwinge. Die Schraube hat meistens eine Ganghöhe von 1 mm. Dreht man die Schraube einmal herum, so bewegt sie sich um 1 mm vorwärts. Dreht man sie nur um einen Bruchteil einer Umdrehung, so bewegt sich das vordere Ende um denselben Bruchteil eines Millimeters vorwärts.

1) pará (griech.) = neben, allásso (griech.) = ich ändere.
2) katá (griech.) = herab, hetós (griech.) = gesendet.
3) mikrós (griech.) = klein.

Man bringt an der Schraubenspindel einen in 100 Teile geteilten Teilkreis an, der die Ablesung des 100. Teiles einer Umdrehung ermöglicht. Ist die Schraube ganz eingeschraubt, so steht die Teilung auf 0. Bringt man in das Schraubenmikrometer einen Körper, und bewegt man die Schraube so weit vorwärts, bis der Körper mit leichtem Drucke festgeklemmt ist, so kann man die Anzahl der ganzen Millimeter an einer an der Spindel angebrachten Längsteilung, die Bruchteile eines Millimeters am Teilkreise ablesen.

Eine Fehlerquelle bei der Dickenmessung mit dem Schraubenmikrometer einfachster Form besteht darin, daß es der Willkür überlassen bleibt, die Schraube mit geringerem oder größerem Drucke anzuziehen. Um diese Fehlerquelle zu vermeiden, ist bei besseren Ausführungen der drehbare Kopf mit der Schraubenspindel nicht starr verbunden, sondern greift durch einen Kranz flach geformter Zähne in einen entsprechenden Zahnkranz an der Spindelachse ein. Die beiden Zahnradanordnungen werden durch eine schwach gespannte Feder ineinandergedrückt. Übersteigt nun bei der Berührung des zu messenden Gegenstandes der Druck, mit dem man die Schraube anzieht, eine gegebene Größe, so hebt sich der Schraubenkopf aus der federnden Verbindung mit der Spindelachse heraus und

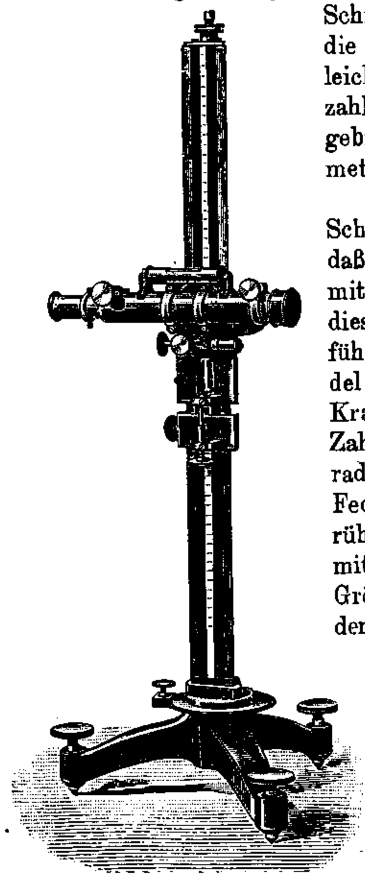
Fig. 8. Kathetometer.

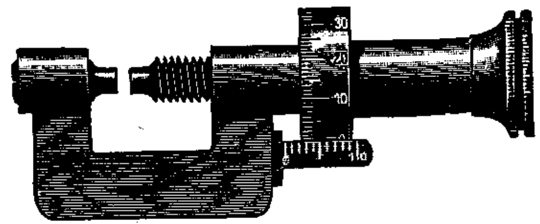
Fig. 9. Schraubenmikrometer.

dreht sich leer weiter, ohne die Spindel mitzunehmen. Man erreicht auf diese Weise, daß in jedem Einzelfalle der Körper zwischen der Schraube und dem Widerlager immer mit demselben Drucke festgeklemmt wird.

Im Wildschen Dickenmesser ist die Fehlerquelle noch vollkommener vermieden. Die Schraube ist hier (Fig. 10) lotrecht angeordnet, hat in einer Hülse H ihre Mutter und schiebt bei Rechtsdrehung einen Stift St nach oben, der seine Führung auch in der Hülse H hat. Auf dem Stifte befindet sich ein kleiner Teller T; zwischen ihn und das nach unten schneidenförmige Widerlager W wird der zu messende Gegenstand gebracht. Das Widerlager ist wie der Stift in einer Führung verschiebbar und bewegt beim Heben oder Senken eine um ihre Schwerpunktsachse A drehbare Libelle L. Zur

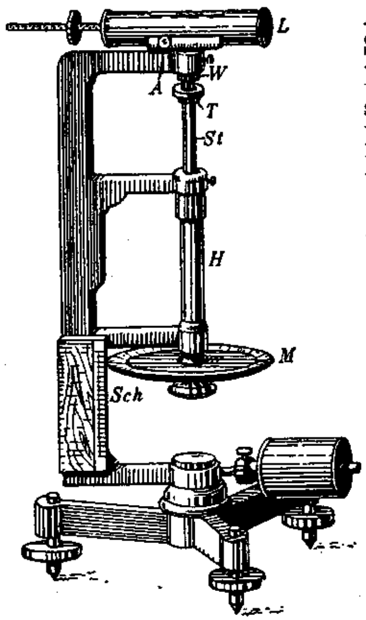

Fig. 10. Wildscher Dickenmesser.

Ausführung einer Dickenmessung zieht man die Schraube so weit an, bis die Libelle einspielt, liest die Schraubenstellung ab, entfernt den Gegenstand, schraubt die Schraube nun soweit in die Höhe, bis die Libelle noch einmal einspielt, und liest die Stellung wiederum ab. Die Zahl der vollen Umdrehungen wird an der seitlichen Skala *Sch*, die Bruchteile der Umdrehungen auf dem geteilten Umfange der mit der Schraube verbundenen Kreisscheibe M abgelesen. Die Einstellungen sind so zuverlässig, daß die Ganghöhe der Schraube zu $^1/_2$ mm hergestellt und der Umfang der Kreisscheibe in 500 Teile geteilt werden kann, so daß eine Meßgenauigkeit von 0,001 mm erreicht wird.

Sphärometer.[1]) Das Sphärometer (Fig. 11) besteht aus einem Gestelle, das auf drei Füßen $C_1 C_2 C_3$ ruht, die die Ecken eines gleichseitigen Dreieckes bilden und durch dessen obere Fläche eine Mikrometerschraube geht, die der beim Schraubenmikrometer besprochenen gleicht. Setzt man das Sphärometer mit seinen drei Füßen auf eine genau ebene Fläche, und dreht man die Schraube so weit herunter, bis ihr unteres Ende B die Fläche berührt, so stehen die Längsteilung und der Teilkreis auf 0. Legt man auf die benutzte ebene Fläche den Körper, dessen Dicke bestimmt werden soll, z. B. ein mikroskopisches Deckgläschen, nachdem man

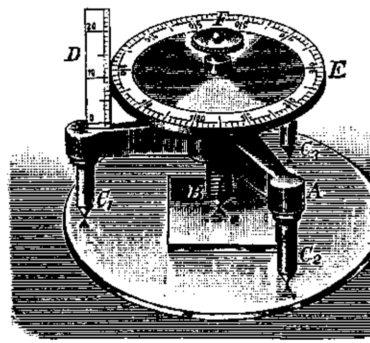

Fig. 11. Sphärometer.

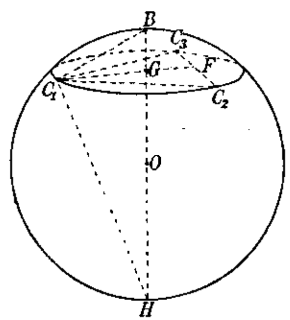

Fig. 12. Theorie des Sphärometers.

vorher die Schraube zurückgeschraubt hat, und schraubt sie nun bis zur Berührung mit dem Deckgläschen nieder, so kann man wieder an der Teilung E der Schraube die zu messende Dicke bis auf Hundertstel Millimeter genau ablesen; die ganzen Millimeter werden an der Teilung D abgelesen.

1) sphaira (griech.) = Kugel.

Mit dem Sphärometer kann man auch den Krümmungsradius einer Kugelfläche, z. B. den einer Glaslinse, bestimmen.

Es seien $C_1 C_2 C_3$ (Fig. 12) die Berührungspunkte der Kugelfläche mit den 3 Füßen des Sphärometers, die den gegenseitigen Abstand a voneinander haben mögen; B sei der Berührungspunkt der mittleren Kontaktschraube, dessen Abstand h von der Ebene $C_1 C_2 C_3$ an der Mikrometerteilung abgelesen ist; O sei der Mittelpunkt der Kugel, deren Radius r bestimmt werden soll. Zieht man den zu B gehörenden Durchmesser BH, so schneidet dieser die Fläche des Dreieckes $C_1 C_2 C_3$ im Schwerpunkte G. Nun ist $C_1 G$ gleich zwei Dritteln der Höhe $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ des gleichseitigen Dreieckes, also gleich $\frac{a}{3}\sqrt{3}$. Ferner ist $C_1 G$ die mittlere Proportionale zwischen BG und GH, also folgt:

$$BG : C_1 G = C_1 G : GH,$$

oder

$$h : \frac{a}{3}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3} : (2r - h).$$

Hieraus berechnet sich

$$r = \frac{a^2 + 3h^2}{6h}.$$

Alle Dickenmesser, die eine Schraube benutzen, leiden für Feinmessungen an Fehlern in der Gleichmäßigkeit der Ganghöhe und an dem Übelstande, daß eine Schraubenspindel bei nicht vollkommenster mechanischer Ausführung bis zu einem gewissen Grade in ihrer Mutter schlottert, sich also wegen eines geringen Spielraumes einmal mehr, ein andermal weniger fest in die Züge der Mutter eindrückt. Daher ist es auch eine Regel, bei allen Messungen mit Schraubenmikrometern die Schraube stets im selben Drehsinne zur Einstellung zu bringen, denn bei einer Einstellung durch Rechtsdrehung kann die Lage der Spindel zur Mutter eine merklich andere sein wie bei der Einstellung durch Linksdrehung. Diesen Fehler nennt man den „toten Gang" der Schraube.

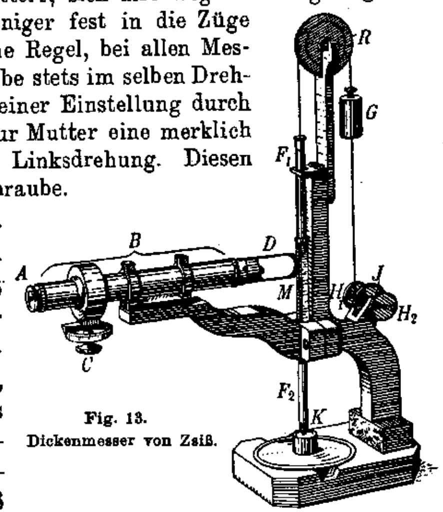

Fig. 13. Dickenmesser von Zeiß.

Dickenmesser von Zeiß. Beide Fehler einer Meßschraube vermeidet im wesentlichen der D i c k e n m e s s e r v o n Z e i ß nach A b b e (Fig. 13). Ein lotrechter Maßstab M zwischen zwei Führungsschienen F_1 und F_2 hängt hierbei an einer Schnur, die über eine Rolle R geführt wird. Das Eigengewicht des Maßstabes wird größtenteils durch ein Gegengewicht G am anderen Ende der Schnur aufgehoben, so daß der Maßstab vermittels eines Kontaktstiftes K mit sanftem Drucke eine Grundplatte bzw. den zu messenden Gegenstand berührt. Der Kontaktstift besteht aus Achat mit gewölbt geschliffener Endfläche. Bringt man nun zwischen die Grundplatte und den durch die Rolle mit Knöpfen in H_1 und H_2 angehobenen Maßstab den zu messenden Gegenstand, so kann die Verschiebung des Maßstabes gegenüber einer festen Marke durch das Mikroskop B abgelesen werden. D sind Beleuchtungsspiegel zur Beleuchtung des Maßstabes, A ist das Okular des Mikroskops. Verschiebungen um Bruchteile der Teilung lassen sich dabei vermittels eines Fadenmikrometers sehr genau bestimmen. Dieses besteht in der Einrichtung, daß durch Drehung eines kleinen mit einer Ablesetrommel versehenen Rädchens C ein feiner Faden oder zwei parallele Fäden in geringem Abstande voneinander im Gesichtsfelde des Mikroskops gehoben oder gesenkt werden können. Die Teile des Maßstabes sind $^1/_{10}$ mm. Die Trommel trägt 100 Teilstriche auf dem Umfange und ist so geregelt, daß bei einmaliger voller Umdrehung der Faden von einem beobachteten Teilstriche des Maßstabes bis zum nächsten gehoben wird. Ein Trommelteil entspricht daher dem 100. Teil von 0,1 mm, so daß die Verschiebung des Mikrometerfadens um einen Trommelteil immer 0,001 mm angibt.

Fühlhebel. Der Fühlhebel (Fig. 14) besteht aus zwei nach Art einer Zange miteinander verbundenen Hebeln, bei denen als Längenverhältnis der Hebelarme passend 1 : 10 gewählt wird. Eine zwischen den Hebeln angebrachte elastische Feder sorgt dafür, daß die kürzeren Hebelarme immer mit leichtem Drucke aneinandergedrückt werden. Das Ende des einen langen Hebelarmes ist mit einer auf einem Kreisbogen ausgeführten Teilung versehen, während das Ende des anderen langen Hebelarmes als Zeiger über dieser Kreisteilung spielt. Die Kreisteilung ist eine Millimeterteilung. Zwischen die kürzeren Hebelarme wird der Körper, dessen Dicke gemessen werden soll, gebracht. Die an der Teilung abgelesene Dicke beträgt dann das Zehnfache der wahren Dicke des Körpers.

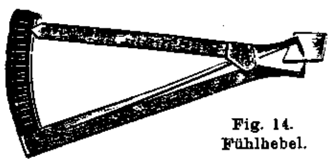

Fig. 14. Fühlhebel.

§ 3. Winkelmessung.

Einheit des Winkels. Als Einheit der Winkelmessung verwendet man in der Physik meist den Grad ($1^0 = 60'$, $1' = 60''$). Bruchteile der Sekunde werden nach dem Dezimalsysteme gemessen. Außerdem verwendet man zum Winkelmessen das Verhältnis des zwischen den Schenkeln liegenden Kreisbogens eines um den Scheitelpunkt des Winkels als Mittelpunkt gezogenen Kreises zu diesem Radius.

Wenn man als Radius 1 cm wählt, so ist die in Zentimetern gemessene Länge des Bogens zugleich ein Maß für den Winkel. Um einer Verwechslung vorzubeugen, welche Art der Winkelmessung man benutzt, setzt man entweder die Bezeichnung der Maßeinheit hinter die Maßzahl, oder man bezeichnet den Winkel dadurch, daß man schreibt $\operatorname{arc}\alpha = n$. Man sagt im letzten Falle, der Winkel ist im Bogenmaß gemessen. Praktisch führt man die Messung immer in Graden aus und rechnet, wenn man Bogenmaß einführen will, den Winkel in dieses Maß um. Es ist $\operatorname{arc} 360^0 = 2\pi$, daher ist der zu $\operatorname{arc} x = 1$ gehörige Winkel $x = \frac{360^0}{2\pi} = 57^0 17' 45''$. Es ist vorgeschlagen worden, dieser Einheit des Winkels in Bogenmaß den Namen Radian (rd) zu erteilen. Diese Bezeichnung wird in der praktischen Optik schon vielfach gebraucht. Der Vollwinkel um einen

Punkt herum enthält also 360 Grad oder 2π Radian. Da für praktische Zwecke 1 Radian oft eine zu große Einheit darstellt, hat man ihren hundertsten Teil als Zentradian (ctrd) eingeführt. Es ist 1 ctrd $= 0{,}573^0$.

§ 4. Hilfsmittel für die Winkelmessung.

Der **Transporteur** (Maßkreis) ist ein mit einer Gradeinteilung versehener Kreis (oder Halbkreis), dessen Mittelpunkt mit dem Scheitelpunkte des Winkels zur Deckung gebracht wird, während die Nullinie des Maßkreises mit einem Schenkel des zu messenden Winkels zusammenfällt. Die Zahl, bei der der andere Schenkel den Teilkreis schneidet, gibt die Größe des zu messenden Winkels in Graden an.

Das **Anlegegoniometer**[1]) (Fig. 15) besteht aus zwei um eine Achse drehbaren Schenkeln aus Metall, deren Verlängerungen durch die Achse gehen. Es dient dazu, den Winkel zu bestimmen, unter dem zwei Flächen eines Körpers, z. B. die eines Kristalles, einander schneiden.

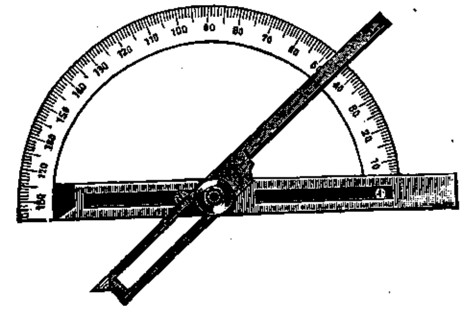

Fig. 15. Anlegegoniometer.

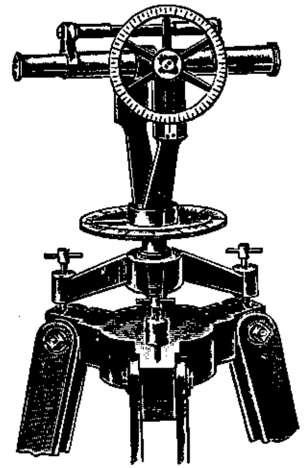

Fig. 16. Theodolit.

Der **Theodolit**[2]) (Fig. 16) ist ein Fernrohr, das um eine Vertikalachse über einem horizontalen Teilkreise drehbar ist. Die Drehung des Fernrohres kann an dem Teilkreise abgelesen werden. Er dient dazu, den horizontalen Winkel zu bestimmen, unter dem zwei entfernte Punkte von dem Auge des Beobachters aus erscheinen. Meistens ist der Theodolit (wie auch in der Figur) noch mit einem Vertikalkreise versehen; dann gestattet er auch die Bestimmung eines Höhenwinkels. Mit Hilfe einer auf dem Fernrohre sitzenden Röhrenlibelle wird die Vertikalachse in ihre richtige Stellung gebracht.

Außer den erwähnten Apparaten finden noch der **Spiegelsextant** und das **Spiegelgoniometer** Anwendung, deren Einrichtung in der Lehre vom Lichte beschrieben wird.

1) gōnia (griech.) = Winkel. 2) Herkunft des Wortes unbekannt.

§ 5. Hilfsmittel zum genauen Ablesen der Teilung (der Nonius).[1]

Um Bruchteile einer an einem Maßstabe vorhandenen Teilung bequem und sicher abzulesen, verwendet man den Nonius; das ist ein neben dem Hauptmaßstabe verschiebbar angebrachter Nebenmaßstab, bei dem 9 Teile der Hauptteilung in 10 gleiche Teile eingeteilt sind (Fig. 17); daher betragen die Abstände zweier Teilstriche der Nebenteilung nur $^9/_{10}$ der Abstände zweier Teilstriche der Hauptteilung.

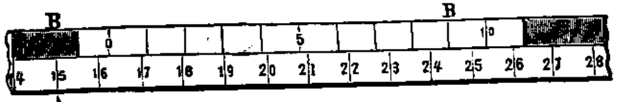

Fig. 17. Nonius-Ablesung.

Bei den Meßinstrumenten ist manchmal der Nonius beweglich und die Hauptteilung feststehend, manchmal umgekehrt. Abzulesen ist jedesmal zunächst die Einstellung des Noniusnullstriches auf der Hauptteilung. Man liest dazu an der etwa in Millimetern ausgeführten Hauptteilung die ganze Anzahl der Millimeter ab; dann beobachtet man, welcher Teilstrich des Nonius mit einem Teilstriche der Hauptteilung zusammenfällt (das ist in der vergrößerten Fig. 17 der dritte), dieser Teilstrich gibt die Anzahl der Zehntel-Millimeter an; denn da jeder Teil des Nonius um $^1/_{10}$ mm zu kurz ist, so ist der Abstand des zweiten Teilstriches des Nonius von dem benachbarten Teilstriche der Hauptteilung $^1/_{10}$ mm, der Abstand des ersten Teilstriches $^2/_{10}$ mm, der des nullten Teilstriches des Nonius $^3/_{10}$ mm von dem entsprechenden Teilstriche der Hauptteilung entfernt. In dem Beispiel der Figur ist die Ablesung 16,3 mm.

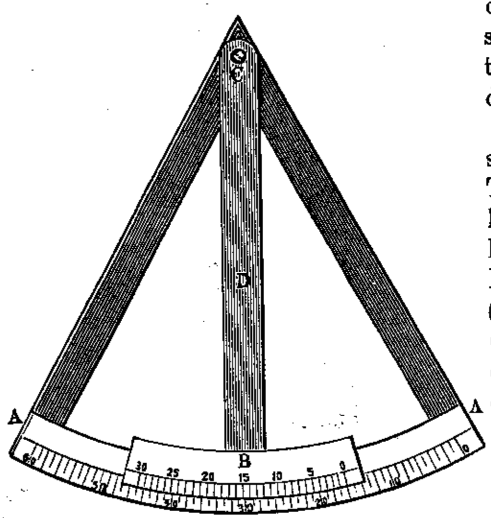

Fig. 18. Noniusablesung zwischen Alhidade und Limbus.

Der Nonius findet beim Ablesen von Kreisteilungen, z. B. eines Theodoliten, vielfache Verwendung. In Fig. 18 ist ein Modell eines Kreisnonius abgebildet. Auf dem Bogen *AA* ist eine Kreisteilung (Limbus[2])), deren Mittelpunkt in *C* liegt, in Graden ausgeführt. Um denselben Mittelpunkt *C* als Achse dreht sich der mit der Nebenteilung (Nonius) *B* versehene Arm *D* (Alhidade[3])). Hier ist der Abstand von 29 Teilen der Hauptteilung in 30 Teile des Nonius geteilt, also ist jeder Teil des Nonius um $^1/_{30}$ eines Teiles der Hauptteilung zu kurz. Steht nun die Alhidade so, daß z. B. der 28. Teilstrich des Nonius mit einem Teilstriche der Hauptteilung zusammenfällt, so ist der nullte Teilstrich des Nonius von dem letzten Teilstriche der Hauptteilung, bis zu dem der Nullstrich des Nonius fast heranreicht, um $^{28}/_{30}$ entfernt. Da aber der Limbus in Grade geteilt ist, so beträgt der Abstand des Nullstriches des Nonius vom letzten Teilstriche des Limbus $^{28}/_{30}$ Grad oder 56 Bogenminuten. Man liest an der Hauptteilung die Winkeldrehung bis auf Grade ab und fügt dann noch zweimal soviel Minuten hinzu, wie der zusammenfallende Teilstrich des Nonius angibt.

Ist der Limbus in ganze Grade geteilt, und kommen auf 11 Teile der Hauptteilung 12 Teile des Nonius, so entspricht jeder Teil des Nonius dem Abstande von $^1/_{12}$ Grad oder 5 Bogenminuten.

1) Petrus Nonius (Nuñez), ein Portugiese, geb. 1492. Die Vorrichtung ist in der jetzt gebräuchlichen Form von dem Niederländer Petrus Vernerius (Vernier) im Jahre 1631 angegeben worden.
2) limbus (lat.) = Saum, Streifen. 3) al-hadât (arab.) = Lineal.

§ 6. Das Volumen.

Die Größe des von einem Körper eingenommenen Raumes heißt sein **Rauminhalt oder sein Volumen.** Das Volumen eines Körpers von mathematisch bestimmter Form, z. B. von der Form eines Würfels, einer Kugel, eines Zylinders, kann nach den Lehren der Mathematik berechnet werden, wenn die Länge der die mathematische Form bestimmenden Strecken bekannt ist. Das Volumen eines Körpers von unregelmäßiger Form, z. B. von der Form eines beliebigen Steines oder eines Metallstückes, das nicht durch planmäßige Bearbeitung eine mathematische Form erhalten hat, kann dadurch bestimmt werden, daß ein anderer Körper von derselben Form und Größe hergestellt und dann ohne Volumenveränderung auf eine mathematisch bestimmte Form gebracht wird. Beispielsweise kann man, um das Volumen eines Steines zu bestimmen, durch Abformen einen gleich gestalteten und an Volumen gleichen Körper aus Wachs herstellen und diesen nachträglich durch Kneten in die Form eines Würfels bringen, ohne dadurch sein Volumen zu verändern. Das Volumen des Wachswürfels kann man dann durch Ausmessen seiner Kantenlänge a und durch Berechnung seines Volumens nach der Formel $V = a^3$ bestimmen. Das so bestimmte Volumen ist gleich dem Volumen des gegebenen Steines. **Es kann also sowohl** bei Körpern von mathematisch bestimmter Form wie bei unregelmäßig gestalteten Körpern **die Volumenbestimmung auf die „Ausmessung einer Länge" zurückgeführt werden.**

A. Volumenbestimmung einer Flüssigkeit.

Fig. 19. Maßzylinder oder Mensur.

Am einfachsten gestaltet sich die Bestimmung des Rauminhaltes einer Flüssigkeitsmenge, da diese leicht ohne Volumenveränderung in eine beliebige Form gebracht werden kann.

Die **Mensur** oder der **Maßzylinder** (Fig. 19) besteht aus einem meist zylindrischen Glasgefäße, an dessen Wandungen Teilstriche und Zahlen angebracht sind. Diese geben das Volumen der in dem Maßgefäße befindlichen Flüssigkeitsmenge an, wenn das Gefäß bis zur betreffenden Marke gefüllt ist.

Um die Einteilung auszuführen, kann man in das Maßgefäß 1 cm^3 Wasser füllen, das in einem würfelförmigen Gefäße von 1 cm Kantenlänge abgemessen ist, dann ein weiteres Kubikzentimeter Wasser einfüllen und so die Füllung beliebig weit ausführen. Macht man jedesmal dort, wo die Oberfläche der Füllung steht, eine das Volumen angebende Marke, so kann man später das Volumen der zu messenden Flüssigkeitsmenge sofort ablesen.

Bei größeren Maßgefäßen pflegt man nicht bei jedem einzelnen Kubikzentimeter eine Marke anzubringen, sondern erst alle 5 oder alle 10 Kubikzentimeter. Ist das Maßgefäß genau zylindrisch, so genügt es auch, wenn man gleich eine größere Wassermenge von vorher bestimmtem Volumen einfüllt und dann die Füllungshöhe in so viele gleiche Teile teilt, wie das Volumen der Füllung Volumeneinheiten enthält. Zur Kontrolle der wirklich zylindrischen Gestalt macht man dann noch einige Teilfüllungen und sieht nach, ob die Marke mit dieser Füllung in Übereinstimmung ist, oder man notiert die Abweichung.

Fig. 20. Pipetten.

Fig. 21.

Fig. 22. Bürette.

Pipetten[1]), **Vollpipetten** (Fig. 20) sind aus Glas hergestellte, meist längliche oder kugelförmige Gefäße, die an ihrem unteren Ende in eine Spitze, an ihrem oberen Ende in ein Rohr auslaufen. Eine am oberen Glasrohre angebrachte Marke gibt an, bis zu welcher Höhe die Pipette mit Flüssigkeit gefüllt werden muß, damit sie das an der Pipette angegebene Volumen hat. Man füllt die Pipette dadurch, daß man sie mit der Spitze in ein Gefäß mit Flüssigkeit eintaucht und dann am oberen Glasrohre saugt, bis die Flüssigkeit etwas über die Marke gestiegen ist, worauf man das Glasrohr oben mit dem Finger verschließt. Es bleibt die Flüssigkeit auch dann noch in der Pipette, wenn sie aus dem Gefäße herausgenommen wird. Durch geringes Lüften des Fingers kann man die Flüssigkeit so weit ablaufen lassen, daß sie gerade bis zur Marke reicht. Beim vollständigen Loslassen des Fingers fließt der abgemessene Inhalt in ein untergestelltes Gefäß ab.

Meßpipetten (Fig. 21) sind ähnlich wie eine Mensur eingeteilt. Bei der Einteilung pflegt man vorauszusetzen, daß das Gefäß genau zylindrisch ist, so daß durch eine bestimmte Einteilung der Länge des zylindrischen Teiles auch zugleich das Volumen der Meßpipette in demselben Verhältnisse eingeteilt wird. Man füllt die Meßpipette, ähnlich wie bei den Vollpipetten angegeben, durch Ansaugen und durch Verschließen des oberen Endes mit dem Finger. Dann kann man beliebig abgemessene Volumenmengen der Flüssigkeit ablaufen lassen, indem man den Finger vorsichtig lüftet und den Flüssigkeitsspiegel von einer Marke bis zu einer beliebigen anderen sinken läßt.

1) pipe (franz.) = Röhre.

Büretten[1]) (Fig. 22) sind ähnlich wie die Meßpipetten eingeteilt; sie sind aber am unteren Ende durch einen Hahn oder eine Schlauchklemme verschlossen. Man kann auch hier beliebige Volumenteile der Flüssigkeit durch Öffnen des Hahnes ausfließen lassen.

Maßflaschen, Pyknometer[2]), **Tarierfläschchen**[3]) (Fig. 23) sind Glasfläschchen mit eingeschliffenem Stöpsel von genau bestimmtem Rauminhalte. Der Stöpsel ist mit einer feinen Bohrung versehen, die es ermöglicht, daß man die Flasche erst bis zum Rande füllt und dann den Stöpsel einsetzt. Die überschüssige Flüssigkeit kann durch die Bohrung des Stöpsels austreten und durch Abwischen mit einem Tuche oder mit Fließpapier entfernt werden. Vielfach ist das Maßfläschchen mit einem Thermometer (Fig. 24) versehen, an dem man gleichzeitig die Temperatur der eingefüllten Flüssigkeit ablesen kann.

Fig. 23. Maßflasche oder Pyknometer.

Das **Überlaufgefäß**[4]) (Fig. 25) besteht aus einem zylindrischen Gefäße mit einem seitlich angebrachten Überlaufrohre. Wenn man das Gefäß bis oben mit einer Flüssigkeit füllt, so fließt die oberhalb der Mündung des Ausflußrohres befindliche Flüssigkeit bis genau zu dieser Höhe ab; daher enthält das Überlaufgefäß immer eine ganz bestimmte Menge Flüssigkeit.

B. Volumenbestimmung fester Körper.

Wenn ein Körper keine mathematisch bestimmte Form hat, die eine Berechnung seines Volumens zulassen würde, so mißt man sein Volumen, indem man den Körper in Wasser eintaucht und nun das Volumen der verdrängten Wassermenge mittels einer der angegebenen Methoden mißt.

Fig. 24. Pyknometer.

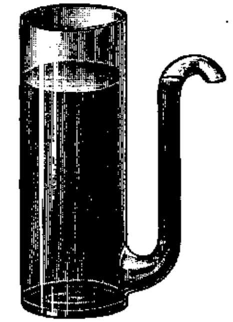

Fig. 25. Überlaufgefäß.

Man kann auch den festen Körper unmittelbar in ein teilweise mit Wasser gefülltes Maßgefäß tauchen und beobachten, um wieviel das Wasser steigt. Die scheinbare Volumenzunahme des Wassers ist gleich dem Volumen des eingetauchten Körpers.

Endlich kann man mittels eines Pyknometers das Volumen eines in das Pyknometer gebrachten Körpers (z. B. Sand, Schrot) messen, indem man bestimmt, wieviel Wasser jetzt weniger zur Füllung ausreicht, als wenn das ganze Pyknometer ohne den Körper mit Wasser gefüllt wird.

1) burette = Kännchen mit Ausgußröhre von buirs (franz.) = Kanne.
2) pyknos (griech.) = dicht.
3) tara (ital.) = Abzug.
4) Die Überlaufgefäße sind zuerst von dem Araber Al Bêrûnî (973—1038) zur Volumenmessung von Metallstücken benutzt worden.

§ 7. Die Zeit.

Der Zeitbegriff entspringt aus der Erfahrungstatsache, daß jeder Vorgang aus einer Aufeinanderfolge von Ereignissen besteht.

Wir nennen zwei Zeiten gleich, wenn in ihnen vollkommen gleiche Vorgänge stattfinden.

Wenn z. B. der Sand aus dem oberen Gefäße einer Sanduhr (Fig. 26) in das untere Gefäß abläuft, so erfordert das eine gewisse Zeit. Erfolgt dann das Ablaufen des Sandes bei umgekehrter Sanduhr aus dem oberen Gefäße in das untere unter genau gleichen Bedingungen, so schließen wir, daß zu beiden Vorgängen die gleiche Zeit erforderlich ist.

Fig. 26. Sanduhr.

Die Maßeinheit der Zeit ist die **Sekunde** (sec) mittlerer Sonnenzeit, also $^1/_{86400}$ des mittleren Sonnentages.

Während eines Jahres, also während eines einmaligen Umlaufes der Erde um die Sonne (tropisches Jahr), dreht sich die Erde 366,24224 (abgerundet $366\,^1/_4$) mal um ihre Achse. Das erkennen wir an der Stellung der Fixsterne zur Erde. Da sich während dieser Zeit die Erde einmal um die Sonne dreht, so erfolgt die scheinbare Drehung der Erde im Vergleiche zur Stellung der Sonne nur $365\,^1/_4$ mal. Wir nennen den $365\,^1/_4$ten Teil des tropischen Sonnenjahres einen mittleren Sonnentag. Der wahre Sonnentag, d. h. die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kulminationen der Sonne, hat nicht zu allen Zeiten des Jahres dieselbe Länge, ist daher nicht zur Zeitberechnung geeignet.

Zur **Zeitmessung** ist jeder Vorgang geeignet, der sich in regelmäßiger Folge in immer derselben Weise wiederholt. Vorwiegend werden die Pendelschwingungen und die elastischen Schwingungen zur Zeitmessung benutzt, da diese, wie später eingehend dargelegt werden wird, in immer gleichen Zeiten erfolgen, fast unabhängig von der Schwingungsweite, falls diese einen gewissen Wert (bei den Pendelschwingungen etwa 4°) nicht übersteigt (§ 24).

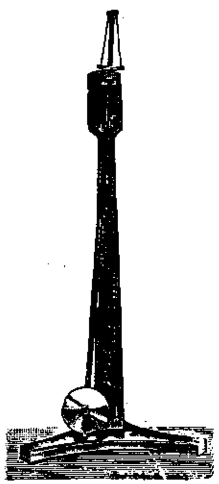

Fig. 27. Sekundenpendel.

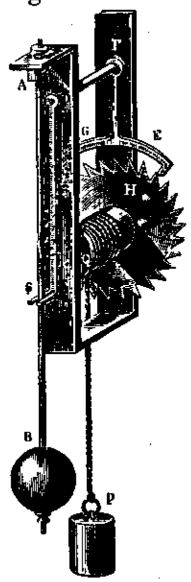

Fig. 28. Anker und Steigrad der Pendeluhr.

Das **Sekundenpendel** (Fig. 27) ist ein Pendel, das zu einer Hin- und Herschwingung (zu einer vollständigen Schwingung) zwei Sekunden braucht. Es ist gebräuchlich, an den bei Beobachtungen physikalischer Vorgänge benutzten Sekundenpendeln ein Schlagwerk anzubringen, das auch dem Ohre den Ablauf einer Sekunde wahrnehmbar macht; man kann dann gleichzeitig die Zeit mit dem Ohre und den Vorgang mit dem Auge beobachten. Das Schlagwerk bei dem in Fig. 27 abgebildeten Sekundenpendel besteht aus zwei oberhalb der Achse angebrachten kleinen Hämmern, die abwechselnd bei jeder halben Schwingung laut gegen die Pendelstange schlagen.

Bei der **Pendeluhr** greifen die beiden Enden eines mit einem Pendel verbundenen Ankers abwechselnd in die Zähne eines Zahnrades (Steigrad) ein und hemmen so die Bewegung dieses Zahnrades jedesmal nach einer halben Pendelschwingung (Fig. 28). Das Steigrad überträgt seine Drehung mittels anderer, in der Figur nicht dargestellter Zahnräder auf die beiden Uhrzeiger, die sich gleichmäßig so über dem Zifferblatte bewegen, daß der große Zeiger zu einem Umlaufe (d. h. zu einer Winkeldrehung von 360°) 60 Minuten (min.) gleich 60 · 60 Sekunden, der kleine Zeiger 12 Stunden (h) gleich 12 · 60 · 60 Sekunden (sec) braucht. Die Bewegung der beiden Zeiger ist, genau betrachtet, eine Aufeinanderfolge von ruckweisen, gleiche Zeiträume andauernden, gleich großen Bewegungen. Der Sekundenzeiger braucht zu einem Umlaufe 60 Sekunden.

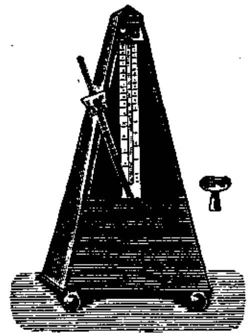

Fig. 29. Metronom.

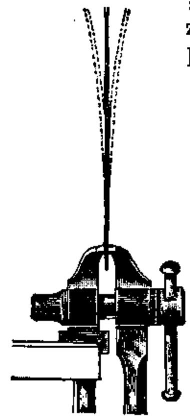

Fig. 30. Elastische Schwingungen.

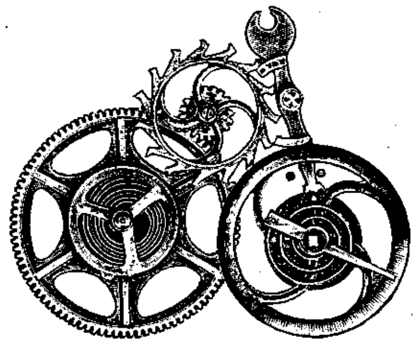

Fig. 31. Unruheregulierung.

Das **Metronom**[1] (Fig. 29) ist ein mit einem lauten Schlagwerke versehenes Pendel, dessen Schwingungszeit man innerhalb weiter Grenzen dadurch verändern kann, daß man ein auf dem oberen Teile der Pendelstange befindliches, verschiebbares kleines Laufgewicht auf und ab bewegt. Schiebt man das Laufgewicht nach oben, so geht das Pendel langsamer, bei einer tieferen Stellung geht es rascher (§ 57). Hinter dem Laufgewichte befindet sich eine Skala, an der man ablesen kann, wie viele Schläge das Metronom in einer Minute ausführt, wenn das Laufgewicht an der betreffenden Stelle der Skala steht. So bedeutet z. B. die Zahl 132, daß in einer Minute 132 Schläge erfolgen; der zwischen den einzelnen Schlägen liegende Zeitraum beträgt dann

$$\frac{60}{132} = 0{,}45 \text{ sec.}$$

Elastische Schwingungen. Klemmt man einen Stahlstab in einem Schraubstocke mit dem einen Ende fest (Fig. 30), so führt das freie Ende

1) métron (griech.) = Maß, némo (griech.) = ich teile zu.

nach einem Anstoße Schwingungen aus, die denen des Pendels ähnlich sind. Die Schwingungszeit der elastischen Schwingungen ist von der Schwingungsweite nahezu unabhängig; daher sind die elastischen Schwingungen auch zur Zeitmessung geeignet.

In unseren **Taschenuhren** dient als Zeitmesser eine mit einem kleinen Schwungrade versehene schwingende Spiralfeder, die Unruhe (Fig. 31), die mit einem in die Zähne eines Steigrades eingreifenden Anker verbunden ist. Die Unruhe der Taschenuhren braucht zu einer halben Schwingung $^1/_5$ Sekunde. In diesen Zeitabschnitten erfolgen die einzelnen Schläge der tickenden Uhr.

Das **Chronoskop**[1]) oder die **Stechuhr** (Fig. 32) besteht aus einer Taschenuhr mit einem großen Sekundenzeiger, der sich in einer Minute einmal herumdreht; außerdem dreht sich auf einem kleineren Zifferblatte ein kleiner Zeiger in 30 Minuten einmal herum. Durch einen Druck auf die Aufzugsvorrichtung wird das Uhrwerk und damit auch der Gang des Sekundenzeigers ausgelöst. Beim zweiten Drucke steht der Sekundenzeiger still, beim dritten Drucke springt er wieder auf Null zurück. Mit der Stechuhr mißt man die Zeit, die zum Ablaufe eines Naturvorganges nötig ist, indem man bei Beginn des Vorganges zum ersten Male und am Schlusse desselben zum zweiten Male auf den Knopf drückt. Man kann dann die während der Beobachtung verflossene Zeit auf Fünftel Sekunden ablesen. Ein dritter Druck auf den Knopf macht die Uhr für eine neue Beobachtung fertig.

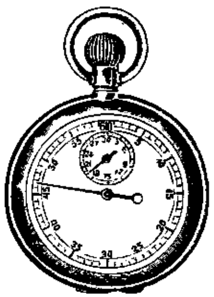

Fig. 32. Stechuhr.

Für die Messung kleiner Bruchteile einer Sekunde ist eine Stimmgabel besonders geeignet, deren Schwingungszahl (Anzahl der Schwingungen in einer Sekunde) bekannt ist. Man bestimmt die Schwingungszahl einer Stimmgabel am einfachsten dadurch, daß man die eine Zinke mit einer feinen Spitze versieht, dann die Stimmgabel durch Anschlagen zum Tönen bringt und sie nun während des Tönens eine Sekunde lang auf einer berußten Glasplatte so entlang bewegt, daß die Spitze die Glasplatte berührt (**Schreibstimmgabel** Fig. 33). Die Spitze F zeichnet auf die Glasplatte eine Wellenlinie mn, aus der man die Schwingungszahl sofort abzählen kann. Eine Stimmgabel, die den Ton a' (das eingestrichene a) hervorbringt, macht in einer Sekunde 435 Schwingungen.

Fig. 33. Schreibstimmgabel.

§ 8. Kraft. Gewicht. Masse. Maßsysteme. Dimension.

1. **Kraft.** Für die Betrachtungen des folgenden, zweiten Abschnittes sind die bisher gegebenen Definitionen der ersten beiden Fundamentaleinheiten, nämlich der Längen- und der Zeiteinheit ausreichend. Zur Gewinnung der Grundlagen des (sog. absoluten) Maßsystemes der Physik wollen wir noch in diesem Abschnitte die dritte Fundamentalgröße mit ihrer Einheit festlegen.

1) chrónos (griech.) = Zeit, skopeín (griech.) = sehen, spähen.

Aus der zum Halten von Körpern erforderlichen Muskelanspannung bemerken wir, daß jegliche Materie auf unserer Erde einer **Kraft** ausgesetzt ist, die sie nach unten, nach dem Erdmittelpunkte hin zieht. Es ist die Schwerkraft, welche der Erdball auf die Materie ausübt. Die Materie drückt deshalb auf ihre Unterlage oder zieht an einem Faden, an welchem sie aufgehängt ist; sie hat, wie man sagt, **Gewicht**. Die Größe des **Druckes** oder **Zuges** kommt uns durch das Gefühl der Muskelspannung und Muskelermüdung zum Bewußtsein, und wir können sie daraus zwar grob schätzen, zur genaueren Bestimmung bedürfen wir jedoch eines Meßinstrumentes. Ein solches bietet uns eine einfache Spiralfeder, deren Längenänderung als Maß für die Größe des Gewichtes dienen kann. Es sollen gleichen Längenänderungen gleiche Zunahmen der wirkenden Kräfte entsprechen.

2. **Masse.** Nehmen wir mehrere genau gleiche Stücke derselben Substanz, z. B. einige Würfel gleicher Größe aus fehlerfreiem Messingguß, so zeigt die **Federwage** (Fig. 34) bei Belastung mit jedem einzelnen der Würfel die gleiche Verlängerung, bei Belastung mit mehreren das entsprechende Vielfache der Verlängerung. Das Gewicht, die Kraft, mit welcher die Materie von der Erde angezogen wird, ist also der Menge Materie oder, wie man sagt, ihrer **Masse** proportional. Wir wollen festsetzen, daß auch zwei Körper verschiedener Substanz, wenn sie an der Spiralfeder gleiche Verlängerungen hervorrufen, also gleiches Gewicht besitzen, eine gleiche Menge Materie enthalten, d. h. die gleiche **Masse** haben. Die Federwage, in ihrem Wesen ein Meßinstrument zum Vergleichen von Kräften, von Gewichten, kann daher gleichzeitig zum Vergleichen von Massen dienen. — Es ist bei dieser Betrachtung noch vorausgesetzt, daß die Längenänderung der Feder nicht zu groß ist, so daß die Federgestalt wesentlich geändert wird oder gar bleibende Verlängerungen entstehen.

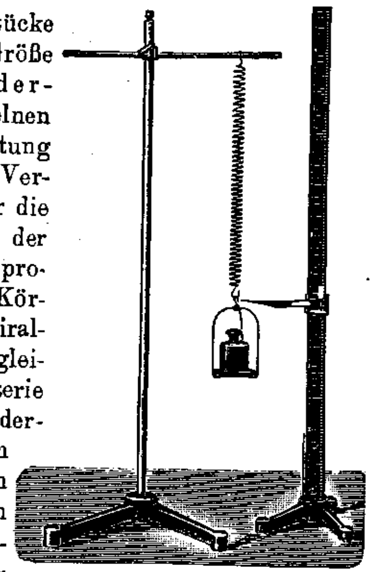

Fig. 34. Federwage.

Der Begriff **Masse**, wie wir ihn soeben erklärt haben, soll nur eine vorläufige Festsetzung des Begriffes bedeuten; wir werden später in § 31 noch einmal auf diesen Begriff zurückkommen und ihn schärfer, unabhängig von dem unsicheren Materiebegriff definieren. Die hier oben gegebene Begriffsdefinition der Masse als „Quantität der Materie" ist historisch begründet; sie stammt von J. Newton (1687) (§ 33), der damit den Massebegriff in die Wissenschaft eingeführt hat.

3. **Masseneinheit.** Mit Hilfe eines Massensatzes, den man Gewichtssatz zu nennen pflegt, d. i. einer Reihe von Stücken im Massenverhältnis ganzer Zahlen (meist 1, 2, 2, 5, 10, 20, 20, 50, 100 usw.) zu einem Einheitsstücke, kann man die Angaben verschiedener Federwagen untereinander eichen.

Als Masseneinheit hatte man ursprünglich die Masse eines Kubikdezimeters

Wasser von 4° Celsius, bei welcher Temperatur dieses sein Dichtigkeitsmaximum besitzt, gewählt und diese Masseneinheit als **1 Kilogramm** bezeichnet. International auf Vorschlag der gleichen Kommission, welche das Normalmeter festsetzte, angenommen ist alsdann das Kilogramm des Archives, ein Platin-Iridiumzylinder, dessen Masse derjenigen des Liters Wasser möglichst gleich gemacht worden ist, und der wie das Urmeter in Sèvres bei Paris im *bureau international des poids et mesures* aufbewahrt wird. Der tausendste Teil desselben, das Gramm, bildet die Masseneinheit des Systemes der Physik, das man nach seinen Einheiten auch Zentimeter-Gramm-Sekunde-System, abgekürzt C. G. S.-System, nennt (s. unten 5.).

Es war beabsichtigt (1799), als Masseneinheit die Masse eines Kubikzentimeters reinen Wassers, gemessen bei der Temperatur seiner größten Dichte, nämlich 4° C, festzusetzen. Zu dem Zwecke wurde der Auftrieb (s. dazu § 94) eines Messingzylinders von vorher genau bestimmtem Volumen in reinem Wasser möglichst genau bestimmt, und es wurde ein Platinzylinder hergestellt, der an Gewicht dem auf ein Kubikdezimeter kommenden Auftriebe gleich war. Da die Wägung nicht bei 4° C ausgeführt werden konnte, und da sie außerdem im lufterfüllten Raume gemacht werden mußte, so mußte man die hierdurch bedingten Fehler durch besondere Rechnung ermitteln und nachher berücksichtigen. Infolge dieser und anderer Fehlerquellen ist das Urkilogramm nicht genau so groß geworden, wie ursprünglich geplant war. Spätere Messungen haben ergeben, daß es um annähernd 4 Zentigramm zu groß ausgefallen ist. Man hat aber trotzdem das ursprüngliche Urkilogramm als das Tausendfache der Masseneinheit beibehalten und im Jahre 1889 ein dem alten Urmaße an Masse gleiches aus Platin-Iridium sowie 40 Kopien hergestellt, die an diejenigen Staaten verteilt worden sind, die das metrische Maß- und Gewichtssystem eingeführt haben.

4. Gewichtseinheit. In der Technik hat man als ursprüngliche Einheiten Gewichtseinheiten — statt Masseneinheiten in der Physik — definiert und zwar das Kilogramm-Gewicht oder kg*[1]), d. i. das Gewicht des Normalkilogramms auf dem 45. Breitengrade in Meereshöhe. Letztere Angabe ist erforderlich, da, auf der Erdanziehung beruhend, das Gewicht vom Breitengrade des Ortes abhängt, an dem sich die vom Orte unabhängige Massenmenge befindet. Für das Gramm-Gewicht ist der Name „Bar"[2]) vorgeschlagen worden.

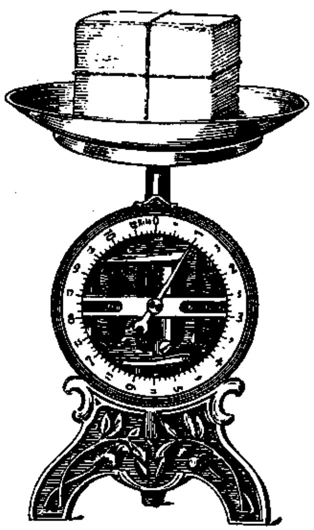

Fig. 35. Hausstandswage.

Die Federwage wird je nach den Zwecken, welchen sie dient, in mannigfachen Formen hergestellt. Die gewöhnliche Hausstandswage (Fig. 35) ist eine Federwage, in der zwei Spiralfedern durch den zu wägenden Körper auseinandergezogen werden. Die Ausdehnung der Federn wird durch eine Zahnstange und einen Trieb auf einen drehbaren Zeiger übertragen, an dessen Stellung vor einer kreisförmigen Teilung das Gewicht bzw. die Masse des Körpers abgelesen wird.

Über die genauere und mehr verwendete auf den Hebelgesetzen beruhende Wage siehe § 75.

1) Wir werden in dem Buche die Bezeichnung kg*, g* usw. gebrauchen, wenn wir damit „Gewichte" ausdrücken wollen, kg, g usw. aber, wenn wir Massen angeben.

2) barýs (griech.) = schwer.

5. Absolutes Maßsystem. Das Zentimeter-Gramm-Sekunde-System (s. oben unter 3.) wurde von Gauß und Weber (1836) in die Wissenschaft eingeführt. Im Gegensatze zu ganz willkürlichen Maßeinheiten, die zur Ausmessung physikalischer Größen dienen könnten, nannte Gauß einmal die von ihm vorgeschlagenen Einheiten „absolute" Einheiten, und daher führt das Maßsystem häufig auch den etwas unglücklichen Namen **absolutes Maßsystem.** Der Grundgedanke dieses Maßsystemes ist der, daß alle Einheiten der Physik immer mit Hilfe bestimmter physikalischer Gesetze oder aus der Begriffsbestimmung der mit ihnen gemessenen Größen auf die Grundeinheiten Zentimeter, Gramm und Sekunde[1]) zurückgeführt werden. Das bietet eine große Vereinfachung; denn Umrechnungskonstanten werden in physikalischen Gesetzen und Rechnungen dadurch weitgehend vermieden. Alle anderen Einheiten außer den drei Grundeinheiten heißen „abgeleitete Einheiten".

Ein Beispiel möge das Wesen der absoluten Einheiten erläutern. An und für sich wäre es durchaus zulässig, für die Längenmessung, die Flächenmessung und die Volumenmessung je eine willkürliche Einheit festzusetzen. Man könnte etwa sich daran gewöhnen, die Länge in Zentimetern anzugeben, die Flächen in Quadratzoll und den Rauminhalt in Kubikfuß. Dann hätte man aber bei allen Rechnungen, die von Längen auf Flächen und Rauminhaltsangaben schließen, zu berücksichtigen, wie viele Quadratzentimeter auf einen Quadratzoll und wie viele Kubikzentimeter auf einen Kubikfuß gehen. Es seien a cm und b cm die Längen eines Rechteckes. Die Größe der Rechteckfläche ist dann $f = \alpha \cdot a \cdot b$ Quadratzoll, worin α angeben soll, wie viele Quadratzoll auf einen Quadratzentimeter gehen. Das absolute Maßsystem schreibt daher vor, alle abgeleiteten Einheiten so festzulegen, daß die Umrechnungskonstanten in den zugrunde gelegten Formeln den Wert 1 annehmen. Im vorerwähnten Falle verlangt das die Begriffsbestimmung: Die Flächeneinheit ist ein Quadrat der Seitenlänge 1 cm.

Das Wesen des absoluten Maßsystemes kann also so beschrieben werden: Als Maßeinheiten sollen die physikalischen Größen festgesetzt werden, die in ihrer Abhängigkeit letzthin den drei Grundeinheiten 1 cm, 1 g, 1 sec entsprechen.

6. Dimensionen. Zur Bezeichnung der abgeleiteten Einheiten pflegt man häufig symbolisch die Rechenoperationen anzudeuten, die notwendig sind, um von den Angaben in Grundeinheiten auf die in Frage stehenden Größen zu schließen. So müssen die Maßzahlen zweier Strecken miteinander multi-

1) Gauß und Weber bedienten sich ursprünglich des Millimeters, des Milligramms und der Sekunde als Grundeinheiten; der Übergang zum Zentimeter, Gramm und der Sekunde fand unter englischem Einflusse statt (British association for the advancement of science). Der elektrische Kongreß in Paris 1881 bewirkte die allgemeine Einführung der von England aus vorgeschlagenen absoluten Einheiten.

pliziert werden, um die Maßzahl einer Fläche zu erhalten. Das wird symbolisch ausgedrückt, indem man statt des Wortes Quadratzentimeter schreibt cm^2, statt Kubikzentimeter cm^3 usw. Die Potenzexponenten dieser Symbole pflegt man in der Physik **Dimensionen** (Fourier, Maxwell) zu nennen. In der Anwendung des Wortes Dimension in bezug auf die Grundeinheiten g und sec geht die Physik über den Gebrauch des Wortes in der Mathematik hinaus. So hat die Geschwindigkeit die Dimension $\frac{cm}{sec} = cm \cdot sec^{-1}$ (S. 28), die Beschleunigung $\frac{cm}{sec^2} = cm\, sec^{-2}$ (S. 36), die Kraft die Dimension $g \cdot cm \cdot sec^{-2}$ (S. 86).

Die Physik kennt aber auch Dimensionen: $g^{-1}\, cm^3\, sec^{-2}$ (Gravitationskonstante S. 245), $g^{\frac{1}{2}}\, cm^{\frac{3}{2}}\, sec^{-1}$ (elektrostatische Ladungseinheit, B. II. S. 39); diese sind also allgemein von der Form $g^p \cdot cm^q \cdot sec^r$, worin je nach der Eigenart der Größe die Exponenten bestimmte Zahlenwerte annehmen.

Diese Dimensionen erweisen sich als recht brauchbar, als sie dazu dienen können, physikalische Rechnungen auf ihre Richtigkeit zu prüfen. Es gilt nämlich: Nur Größen gleicher Dimensionen können addiert werden. Daher müssen z. B. auch die beiden Seiten einer Gleichung dieselbe Dimension haben. Es ist aber im Auge zu behalten, daß je nach dem zur Definition der Einheiten verwandten Naturgesetze die Dimensionen verschieden ausfallen können; die Dimensionen sind nicht frei von Willkür. So schreibt man der Gravitationskonstanten (S. 245) eine bestimmte Dimension zu, macht aber durch Festsetzung entsprechender Einheiten in den dem Newtonschen Gravitationsgesetze entsprechenden Coulombschen Gesetzen (Bd. II) die entsprechende Konstante dimensionslos und zum Werte 1.

7. **Natürliches Maßsystem.** Trotz des durchgeführten absoluten Maßsystemes bleiben in der Physik einige der oben erwähnten Umrechnungskonstanten in den Größenbeziehungen zueinander übrig. Daraus geht hervor, daß sich die Naturgesetze durch Wahl anderer Einheiten in noch einfachere Form bringen lassen, als die übliche ist. Man könnte z. B. die Einheiten für die Länge, für die Masse und für die Zeit selbst wieder durch die Naturgesetze nach dem Grundgedanken des absoluten Maßsystemes so festsetzen, daß auch die Lichtgeschwindigkeit, die Gravitationskonstante und die beiden Konstanten h und k der Planckschen Strahlungsformel (s. diese) den Wert 1 annehmen. Ein darauf gegründetes Maßsystem ist von Planck das natürliche genannt worden. In dem C.-G.-S.-Systeme sind die Grundeinheiten Zentimeter, Gramm und Sekunde willkürlich festgesetzt; da sie alle Beziehungen zur Erde haben, hat man dieses Maßsystem auch wohl irdisches Maßsystem genannt. Das natürliche Maßsystem ist von Willkür völlig frei, „seine Maße würden ihre Bedeutungen für alle Zeiten und auch für alle außerirdischen und außermenschlichen Kulturen behalten" (Planck). Allerdings sind die Einheiten dieses Maßsystemes von etwas ungeschickter Größe für den menschlichen Gebrauch; sie haben nämlich die Werte $3{,}99 \cdot 10^{-33}$ cm für die Längeneinheit, $5{,}37 \cdot 10^{-5}$ g für die Masseneinheit, $1{,}33 \cdot 10^{-43}$ sec für die Zeiteinheit und $3{,}60 \cdot 10^{32}$ Grad C für die Temperatureinheit.

§ 9. Das spezifische Gewicht.

Das spezifische[1]) Gewicht (Eigengewicht) eines Körpers ist das Gewicht der Volumeneinheit des Körpers. Man pflegt hierbei als Volumeneinheit das Kubikzentimeter anzunehmen und das Gewicht in Grammen auszudrücken.

Die Bestimmung des spezifischen Gewichtes führt man in der Weise aus, daß man nach Anleitung der §§ 6 und 8 das Volumen in Kubikzentimetern und das Gewicht in Grammen bestimmt und hieraus durch Division das Gewicht von 1 cm^3 berechnet. Da das spezifische Gewicht des Wassers 1 g^*/cm^3 ist, so stimmt das spezifische Gewicht eines Körpers der Zahl nach mit dem Verhältnisse des Gewichtes des Körpers zu dem einer gleich großen Wassermenge überein. Man nennt diese Verhältniszahl das **relative Gewicht** des Körpers (bezogen auf Wasser). Bei der Bestimmung des spezifischen Gewichtes bildet man den Quotienten aus dem Gewichte und dem Volumen; der Quotient aus Masse und Volumen wird die **Dichte** des Körpers genannt. Es gilt also:

Spezifisches Gewicht = Gewicht des Körpers : Volumen des Körpers, (Dimension: $[g\, cm^{-2}\, sec^{-2}]$),
Relatives Gewicht = Gewicht des Körpers : Gewicht einer volumengleichen Wassermenge (Dimension: Null[2])),
Dichte = Masse des Körpers : Volumen des Körpers (Dimension: $[g \cdot cm^{-3}]$).

Der Zahl nach stimmen relatives Gewicht und Dichte überein, während das spez. Gewicht mit dem Erdorte entsprechend dem Gewichte seinen Wert ändert.[3])

Die Kenntnis des spezifischen Gewichtes eines Körpers gestattet eine leichte Berechnung des gesamten Gewichtes des Körpers, wenn man sein Volumen kennt. Es ist $G = V \cdot S$, worin G das Gewicht, V das Volumen und S das spezifische Gewicht des Körpers bedeutet. Legt man andere Maßeinheiten als Gramm und Kubikzentimeter zugrunde, so entsprechen einander mg^* und mm^3, g^* und cm^3, kg^* und dm^3, t^* (Tonne) und m^3.

Das spezifische Gewicht einer größeren Zahl von Körpern ist in Tabelle I zusammengestellt.

1) spezies (lat.) = Art; spezifisch = der Art (dem Stoffe) eigentümlich.

2) Die Dimensionen cm^0, sec^0, g^0 oder deren Produkte nennt man „Nullte Dimensionen", oder kurz: Dimension Null. Alle reinen Verhältniszahlen haben die Dimension Null. Wird ein Winkel in Radian gezählt (§ 3), so ist die Winkelgröße die reine Verhältniszahl aus den Längen eines Kreisbogens und des zugehörigen Kreishalbmessers. Die Winkeleinheit „Radian" hat also die Dimension Null.

3) Meist gebraucht man das Wort „spezifisches Gewicht" als gleichbedeutend mit „relatives Gewicht".

Zweiter Abschnitt.

Bewegungslehre (Phoronomie).

In diesem Abschnitte sollen die in der Natur vorkommenden Bewegungen rein analytisch und geometrisch behandelt werden ohne Rücksicht auf ihre physikalische Veranlassung und ihre Beziehungen zu den sie verursachenden Kräften.

§ 10. Relativbewegungen.

Wenn ein Körper gegen einen anderen Körper seinen Ort verändert, so sagen wir: er bewegt sich in bezug auf den zweiten Körper. Wir lassen hierbei unentschieden, ob dieser zweite Körper sich selbst etwa gegen einen dritten Körper bewegt. Wenn wir von der Bewegung eines Körpers schlechtweg reden, so pflegen wir seine Bewegung in bezug auf die Erdoberfläche zu betrachten, die wir dann als ruhend ansehen ohne Rücksicht darauf, daß sie selbst in Bewegung ist.

Die Bewegungen der Himmelskörper werden in der Astronomie in bezug auf gewisse Punkte unseres Planeten- oder des Fixsternsystemes verfolgt, und es bleibt dabei der Kenntnis entzogen, ob das gesamte Milchstraßensystem eine Bewegung im Weltall ausführt. Es sind also alle Bewegungen als **Relativbewegungen** definiert, als Bewegungen relativ zu einem als ruhend angenommenen Bezugspunkte. Eine Absolutbewegung hat so lange keinen Sinn, als man dem Raume selbst nicht eine physikalische Existenz zuschreibt und Mittel findet, Bewegungen relativ zu diesem absolut ruhenden Raume zu erkennen.

§ 11. Translation und Rotation.

Wenn die Wege, die die einzelnen Punkte eines Körpers zurücklegen, einander parallel und kongruent sind, so heißt die Bewegung eine **fortschreitende Bewegung** oder **Translation**. Wenn bei der Bewegung eines Körpers eine gerade Linie unverändert dieselbe Lage beibehält, während die anderen Punkte des Körpers konzentrische Kreise um diese Achse herum beschreiben, so heißt diese Bewegung eine **Drehbewegung** oder **Rotation**.

Wenn während der Bewegung eines Körpers die Achse selbst auf einem bestimmten Wege fortschreitet, so führt der Körper gleichzeitig eine fortschreitende

Bewegung und eine Drehbewegung aus. Beispiel: Die Bewegung eines rollenden Rades.

Es ist immer möglich, den augenblicklichen Bewegungszustand eines Körpers aus einer Translation und einer Rotation zusammenzusetzen, selbst wenn die Drehungsachse eines Körpers andauernd veränderlich ist.

§ 12. Gleichförmige und ungleichförmige Bewegung. Geschwindigkeit.

Dis Bewegung eines Körpers ist vollständig bestimmt, wenn der Ort jedes seiner Punkte in jedem Zeitpunkte bestimmt ist. Führt der Körper nur eine fortschreitende Bewegung aus, so genügt es, den Ort eines einzelnen Punktes (des ihm zugeordneten materiellen Punktes) in jedem Zeitpunkte zu bestimmen.

Der Weg eines Körpers wird seine **Bahn** genannt, wenn man nur auf die Form des Weges Rücksicht nimmt. Ist die Bahn des Körpers vorgeschrieben oder sonstwie bekannt, so ist der Ort des Körpers in der Bahn durch seine Entfernung von einem gegebenen festen Punkte, längs der Bahn gemessen, bestimmt. Man pflegt hierbei die Zeit von dem Augenblicke an zu messen, wo der Körper in dem vorher gegebenen festen Punkte, dem Nullpunkte der Bahn, war. Die längs der Bahn gemessene Wegstrecke, schlechtweg **Weg** genannt, ist eine Funktion der Zeit, die in vielen Fällen durch einen mathematischen Ausdruck bestimmt werden kann.

Die Bewegung eines Körpers heißt **gleichförmig**, wenn der Körper in gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegt; die Bewegung heißt **ungleichförmig**, wenn der Körper in gleichen Zeiten ungleiche Wege zurücklegt. Ist bei einer ungleichförmigen Bewegung der in der einen Zeiteinheit zurückgelegte Weg immer größer als der in der vorhergehenden gleichgroßen Zeiteinheit, so heißt die Bewegung **beschleunigt**, im umgekehrten Falle **verzögert**.

Die **Geschwindigkeit** ist der zahlenmäßige Ausdruck für den Bewegungszustand eines Körpers in einem bestimmten Augenblicke. Man pflegt im gewöhnlichen Leben die Geschwindigkeit eines Körpers entweder durch die Zeit anzugeben, die der Körper zum Zurücklegen eines gewissen Weges gebraucht, oder durch den Weg, den der Körper in einer bestimmten Zeit, z. B. in einer Stunde, zurücklegt. Da es aber praktisch ist, einer größeren Geschwindigkeit eine größere Zahl zuzuordnen, so ist es in der Physik gebräuchlich, letztere Begriffsbestimmung allgemein anzuwenden. Hiernach wird die Geschwindigkeit durch den Weg, den der Körper in der Zeiteinheit zurücklegt, gemessen. Legt ein Körper in t Sekunden den Weg s m zurück, so finden wir den Weg in der Zeiteinheit, d. i. die Geschwindigkeit v, indem wir die Anzahl der Wegeinheiten s durch die Anzahl der Zeiteinheiten t dividieren.

Es ist also $v = \frac{s}{t}$. Hieraus folgt, daß wir auch festsetzen können:

Die Geschwindigkeit wird durch den Quotienten aus Weg und Zeit gemessen.

Bei der Bildung dieses Quotienten muß man wohl beachten, daß man nur unbenannte Zahlwerte durcheinander dividieren kann und als Ergebnis wieder eine unbenannte Zahl erhält. Daher bedeutet der Ausdruck Weg/Zeit nur den Quotienten aus der Anzahl der Wegeinheiten und der Anzahl der Zeiteinheiten. Das Ergebnis gibt dann die Zahl der Geschwindigkeitseinheiten an.

Einheit der Geschwindigkeit. Nach § 8, 5. ergibt sich als Geschwindigkeitseinheit der Weg von 1 cm in 1 sec.

Die Bezeichnung für diese abgeleitete Einheit ist nach § 8, 6. $\left[\frac{cm}{sec}\right]$ oder [cm/sec] oder $[cm \cdot sec^{-1}]$.[1])

Aus der Definitionsgleichung $v = \frac{s}{t}$ ergehen sich die beiden anderen Gleichungen

$$s = v \cdot t \quad \text{und} \quad t = \frac{s}{v}.$$

In Tabelle II sind die Geschwindigkeiten einiger Körper zusammengestellt.

Bei der gleichförmigen Bewegung ist wegen der Proportionalität zwischen Weg und Zeit die Geschwindigkeit konstant. Man erhält daher denselben Wert für die Geschwindigkeit, einerlei ob man zur Berechnung der Geschwindigkeit den während eines längeren Zeitraumes oder den nur in einem Bruchteile einer Sekunde zurückgelegten Weg eines Körpers benutzt. Ein sehr kleiner Zeitraum heißt ein **Zeitelement**; es wird Δt geschrieben. Der in einem Zeitelemente zurückgelegte Weg ist ebenfalls sehr klein, er heißt ein **Wegelement** und wird Δs geschrieben. Die Geschwindigkeit eines Körpers ist demnach auch bestimmt durch den Quotienten $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, der bei der gleichförmigen Bewegung denselben Wert hat wie $v = \frac{s}{t}$.

Man nennt den aus den beiden sehr kleinen Größen Δs und Δt gebildeten Quotienten den **Differenzenquotienten.**

Lassen wir die beiden Größen Δs und Δt unter jedes beliebige Maß klein werden, so ändert das an dem Werte des Differenzenquotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nichts. Wir führen noch die Bezeichnung

$$v = \lim_{(\Delta t = 0,\ \Delta s = 0)} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \frac{ds}{dt}$$

ein, wobei das Zeichen lim (spr. limes[2])) bedeuten soll, daß Δs und Δt allmählich beliebig klein gemacht werden sollen, so daß sie sich vom Werte Null beliebig wenig unterscheiden. Diesen Quotienten nennt man einen **Differentialquotienten.**

1) Es ist anzustreben, für diese Einheit einen Namen allgemein anzunehmen; vorgeschlagen wurde 1 „cel", eine Bezeichnung, die manchmal gebraucht wird

2) limes (lat.) = Grenze.

Das Wesen der gleichförmigen Bewegung ist dann, in mathematischer Form ausgedrückt:

$$v = \frac{ds}{dt} = \text{konstant}.$$

Bei der ungleichförmigen Bewegung ist der von einem Körper zurückgelegte Weg nicht proportional mit der Zeit. Daher ist der Quotient $\frac{s}{t}$ keine unveränderliche Größe. Der Wert des Quotienten muß also davon abhängen, wie groß die beobachtete Zeit und der gleichzeitig beobachtete Weg sind. Würden wir daher die Geschwindigkeit, also den Bewegungszustand eines ungleichförmig bewegten Körpers in einem bestimmten Augenblicke dadurch festzustellen suchen, daß wir den während einer Sekunde, einer halben Sekunde, oder des hundertsten Teils einer Sekunde vorher oder nachher zurückgelegten Weg messen und dann diesen Weg durch die entsprechende Zeit dividieren, so würden wir jedesmal einen anderen Wert erhalten. Das kommt daher, daß wir zur Beurteilung des Bewegungszustandes in einem bestimmten Augenblicke die Vorgänge während eines Zeitraumes benutzen, die sich während dieses Zeitraumes dauernd ändern. Woller wir die Geschwindigkeit in einem bestimmten Augenblicke bestimmen, so müssen wir die Annahme machen, daß der ungleichförmig bewegte Körper während eines kleinen Zeitelementes Δt als gleichförmig bewegt angesehen werden kann. Dann gilt für diesen kleinen Zeitraum die Definition $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Die oben gemachte Annahme ist um so mehr berechtigt, je kleiner das Zeitelement ist. Daher können wir die augenblickliche Geschwindigkeit bei der ungleichförmigen Bewegung nur durch die Gleichung definieren:

$$v = \lim_{(\Delta t = 0)} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \frac{ds}{dt}.$$

Die Geschwindigkeit eines ungleichförmig bewegten Körpers wird durch den Differentialquotienten des Weges nach der Zeit gemessen.

Zur Erläuterung dieser Begriffe untersuchen wir im einzelnen die Bewegung eines frei fallenden Körpers.

§ 13. Der freie Fall. (Experimentell.)

Wir lassen einen Stein, den wir in der Hand halten, in demselben Augenblicke los, wo wir den Schlag eines neben uns stehenden, Sekunden schlagenden Metronoms hören, und verändern die Fallhöhe (z. B. im Treppenhause) so lange, bis der zweite Schlag des Metronoms mit dem Aufschlagen des Steines zusammenfällt. Die jetzt abgemessene Fallhöhe beträgt 5 m = 500 cm.

Machen wir denselben Versuch mit größeren Steinen, mit Metallstücken oder Holzstücken verschiedener Größe oder lassen wir mehrere derartige Körper von verschiedenem Gewichte gleichzeitig fallen, so kommen alle Körper gleichzeitig unten an. Ein ausgebreitetes Stück Papier, das wir gleichzeitig mit einem Steine loslassen, kommt aber bedeutend später als der Stein unten an. Während des

Fallens flattert das Papier hin und her, es wird von der Luft zurückgehalten. Ballen wir jetzt das Papier zusammen, so fällt es schneller als vorhin. Reißen wir ein Stück Papier in der Mitte durch, ballen die eine Hälfte zusammen und lassen sie gleichzeitig mit der auseinandergebreiteten Hälfte los, so kommt der Papierball früher unten an als das ausgebreitete Papierstück. Aus dem letzten Versuche schließt man, daß der langsame Fall des ausgebreiteten Papierstückes dadurch veranlaßt wird, daß es eine größere Luftmenge beim Fallen zur Seite drängen mußte, daß also der Fall des Papierstückes nicht ein freier Fall war. Eigentlich beziehen sich daher die Gesetze des freien Falles auf den luftleeren Raum.

Der von einem Körper in einer Sekunde zurückgelegte Fallraum ist beim „freien Falle" vom Gewichte und vom Material des Körpers unabhängig.

Die folgende Überlegung führt uns zu demselben Schlusse: Zwei gleiche Körper, nebeneinander gleichzeitig losgelassen, fallen gleich schnell. Verbindet man nun diese beiden gleichen Körper z. B. durch Zusammenkitten miteinander zu einem Körper, so ändert sich an dem Fallraume in einer Sekunde nichts. Ein Körper von doppeltem Gewichte fällt daher ebenso schnell wie ein solcher von einfachem Gewichte.

Bei weiterer Vergrößerung des Fallraumes finden wir, daß der Fallraum in 2 Sekunden 20 m beträgt.

Da uns eine größere Fallhöhe kaum zur Verfügung steht, so wählen wir zu weiteren Versuchen kleinere Zeiteinheiten. Wir verstellen das Metronom so lange, bis der in dem ersten Zeitraume zurückgelegte Weg gerade 1 m beträgt. Die zu wählende Zeiteinheit beträgt 0,45 Sekunde (das Laufgewicht des Metronoms steht auf 132). Der Fallraum in einer solchen Zeiteinheit beträgt 1 m, in 2 Zeiteinheiten 4 m, in 3 Zeiteinheiten 9 m, in 4 Zeiteinheiten 16 m, in 5 Zeiteinheiten 25 m. Hieraus folgt:

Die Fallhöhen sind den Quadraten der Fallzeiten proportional.

Beim freien Fall ist der Weg s eine rein quadratische Funktion der Zeit t. Der mathematische Ausdruck hierfür ist: $s = a \cdot t^2$.

Da nach unseren ersten Beobachtungen der Fallraum in der ersten Sekunde 500 cm beträgt, so ist $a = 500$ cm, also $s = 500\, t^2 \cdot$ cm.

In dieser Gleichung kommt der Fallraum in der ersten Sekunde als ein unveränderlicher Faktor vor, der für alle Körper denselben Wert hat. Daher ist eine möglichst genaue Bestimmung dieser Größe erwünscht. Bei der Ausführung der vorhin beschriebenen Versuche findet man aber, daß jede einzelne Beobachtung um einen meßbaren Betrag von jeder anderen abweicht, weil es schwierig ist, den Körper genau in dem Augenblicke loszulassen, wo man den Schlag des Metronoms oder des Pendels hört; auch entgehen dem Ohre geringe Zeitunterschiede, die zwischen dem Aufschlagen des Körpers auf dem Erdboden und einem Pendelschlage des Metronoms vergehen. Durch besonders angeordnete Geräte kann man aber den Fall des Körpers selbständig durch das Schlagwerk des Pendels auslösen, auch kann man durch selbsttätige Aufzeichnung sehr genau feststellen, in welchem Zeitpunkte der Körper seine Bewegung beendet hat. Mittels derartiger Hilfsmittel ist der Fallraum in der ersten Sekunde zu 490,5 cm bestimmt.

Man bezeichnet gewöhnlich das Doppelte des Fallraumes in der ersten Sekunde mit dem Buchstaben g. Es ist also g eine Abkürzung für den Zahlenwert 981.

Unter Benutzung dieses Wertes beträgt der Fallraum eines Körpers während t Sekunden

$$s = \frac{g}{2} t^2.$$

Um zu untersuchen, ob auch für kleinere Zeiteinheiten dasselbe Gesetz gilt, benutzen wir zur Zeitmessung eine schwingende Stimmgabel mit bekannter Schwingungszahl in folgender Weise (Fig. 36):

Auf einem Brette von etwa 2 m Länge sind parallel mit den Längskanten zwei Führungsleisten für eine etwa 60 cm lange rechteckige Glasplatte befestigt. Das Brett wird auf einer weichen Unterlage auf dem Fußboden aufgestellt und mit der Hand lotrecht gehalten. In der Nähe des oberen Endes des Brettes ist eine mit einem Einschnitte versehene Querleiste so angebracht, daß eine Schreibstimmgabel, die in dem Einschnitte der Leiste hängt, das untere Ende der Glasplatte berührt, wenn man die vorher berußte Glasplatte zwischen die Leisten einführt und am oberen Ende mit dem Daumen der das Brett haltenden Hand festhält. Läßt man die Platte los, so fällt sie, und die Schreibspitze der nichtschwingenden Stimmgabel zeichnet auf der Platte eine lotrechte gerade Linie auf. Versetzt man aber die Stimmgabel in Schwingungen, und läßt man nun die Glasplatte los, so zeichnet die Stimmgabelspitze auf der Glasplatte eine Wellenlinie, bei der die Wellen unten eng aneinander liegen, sich aber nach dem oberen Ende hin weiter voneinander entfernen, wie in Figur 37 abgebildet ist. Da die Stimmgabel zu einer Schwingung stets denselben Bruchteil einer Sekunde braucht (S. 20), so gibt der Abstand der einzelnen Wellen die in den einzelnen Zeitteilen beim Fallen der Glasplatte zurückgelegten Wegstrecken an, die man mit einem Maßstabe unmittelbar abmessen kann. Es ergibt sich auch hier, daß die Fallräume den Quadraten der Fallzeiten proportional sind.

Fig. 36. Fallende Glasplatte vor schwingender Stimmgabel.

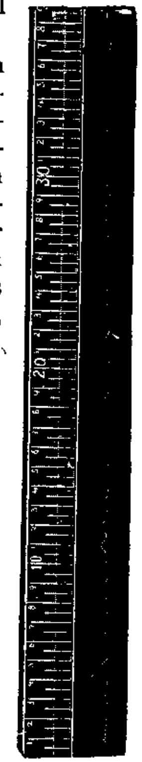

Fig. 37. Von der Stimmgabel aufgezeichnete Linie.

Beispiel eines Versuchsergebnisses.

Die Schwingungszahl der benutzten Stimmgabel betrug 128 in einer Sekunde; die Zeit, die die Stimmgabel zu einer Schwingung brauchte, war also $^1/_{128}$ Sekunde. Der Abstand eines Wellenanfanges von dem viertnächsten wurde mit einem Millimetermaßstabe gemessen. Die beobachteten Zeiteinheiten waren also zweiunddreißigstel Sekunden. Die gemessenen Werte sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, und zwar sind die Werte in der ersten senkrechten Reihe die Anzahl der Zeiteinheiten, in der zweiten Reihe die durchfallenen Gesamtwegstrecken. Die dritte Reihe enthält die in den einzelnen Zeiteinheiten zurückgelegten Wegstrecken, nämlich die Differenzen zweier aufeinanderfolgender Werte der zweiten Reihe. Die vierte senkrechte Reihe enthält dann noch die Unterschiede von je zwei aufeinanderfolgenden Werten der dritten Reihe, also die Differenzen der in je ein zweiunddreißigstel Sekunde zurückgelegten Wegstrecken.

Auch aus diesen Beobachtungen folgt, daß die gesamten Fallräume den Quadraten der Fallzeiten proportional sind; denn wenn man jeden Wert der zweiten

Reihe der Reihe nach durch die Quadratzahlen 1, 4, 9 . . . teilt, so erhält man immer dasselbe Ergebnis.

T Beobachtungszeit ($^1/_{32}$ Sekunde)	s Gesamter Fallraum Millimeter	Fallraum in einer Zeiteinheit ($^1/_{32}$ Sekunde)	Unterschied zweier aufeinanderfolgender Fallräume
I	II	III	IV
1	4,8	4,8	—
2	19,2	14,4	9,6
3	43,2	24,0	9,6
4	76,7	33,5	9,5
5	119,9	43,2	9,7
6	172,6	52,7	9,5
7	234,9	62,3	9,6
8	306,8	71,9	9,6
9	388,2	81,4	9,5
10	479,3	91,1	9,7
11	580,0	100,7	9,6
			Mittelwert 9,59

Wenn wir hier den Begriff der Geschwindigkeit als den in der Zeiteinheit zurückgelegten Weg festsetzen würden oder als den Quotienten $v = \frac{s}{t}$, so wie wir es bei der gleichförmigen Bewegung tun konnten, so würde sich bei der Fallbewegung ein Wert ergeben, der je nach der Länge der beobachteten Fallstrecke und des zum Fallen gebrauchten Zeitraumes verschieden ausfällt, wie folgende Berechnung zeigt:

Zur Berechnung der Fallgeschwindigkeit am Ende der ersten Sekunde nehmen wir an, daß das Gesetz der quadratischen Fallräume auch für die späteren Zeitabschnitte gültig ist. Wir berechnen mit Hilfe des im ersten Zweiunddreißigstel der ersten Sekunde beobachteten Fallraumes (4,8 mm) den Fallraum in der ganzen ersten Sekunde und erhalten so den Weg $32^2 \cdot 0{,}48$ cm $= 491{,}5$ cm. Dieser Wert würde die Geschwindigkeit des Falles während der ganzen ersten Sekunde sein, wenn wir die angegebene Begriffsbestimmung beibehielten; aber das ist offenbar falsch, denn der Körper fällt zuerst langsam und dann schneller. Der berechnete Wert ist die „durchschnittliche" oder die „mittlere Geschwindigkeit" während der ersten Sekunde.

Wir legen jetzt der Berechnung für die Geschwindigkeit am Ende der ersten Sekunde den in der zweiten Hälfte der ersten Sekunde zurückgelegten Weg zugrunde. Da der Körper in der ganzen ersten Sekunde 491,5 cm, in der ersten Hälfte der ersten Sekunde 122,9 cm fällt, so beträgt der Fallraum in der zweiten Hälfte der ersten Sekunde 368,6 cm. Unter Zugrundelegung dieses Fallraumes folgt für die mittlere Geschwindigkeit in der zweiten Hälfte der ersten Sekunde $v = \frac{s}{t} = \frac{368{,}6}{^1/_2} = 737{,}2$ cm/sec (cel), die natürlich größer als der zuerst berechnete Wert ist; aber auch dieser Wert entspricht dem tatsächlichen Bewegungszustande am Schlusse der ersten Sekunde nicht, wenn er ihm auch näher kommt als der erste Wert.

Jetzt berechnen wir die Geschwindigkeit unter Benutzung des Fallraumes im letzten Zweiunddreißigstel der ersten Sekunde; dieser ist $32^2 \cdot 0{,}48 - 31^2 \cdot 0{,}48 = 491{,}5 - 461{,}3 = 30{,}2$ cm. Die hieraus berechnete Geschwindigkeit ist $v = \frac{s}{t} = \frac{30{,}2}{^1/_{32}} = 966{,}4$ cm/sec (cel). Wenn wir in derselben Weise den Fallraum im nächsten Zeitabschnitte zur Berechnung benutzen, erhalten wir

$$v = \frac{s}{t} = \frac{33^2 \cdot 0{,}48 - 32^2 \cdot 0{,}48}{^1/_{32}} = \frac{522{,}7 - 491{,}5}{^1/_{32}} = 31{,}2 \cdot 32 = 998{,}4 \text{ cm/sec (cel)}.$$

Auch diese beiden Zahlen weichen noch voneinander ab, es kann daher keine von beiden die wirkliche Geschwindigkeit am Ende der ersten Sekunde angeben. Um die wirkliche Geschwindigkeit in dem Augenblicke zu bestimmen, wo die erste Sekunde abgelaufen ist, müßten wir einen noch kleineren Zeitraum, ein Zeitelement, der Berechnung zugrunde legen, also den Quotienten bilden $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, dessen Grenzwert für unendlich abnehmendes Δt der Differentialquotient $\frac{ds}{dt}$ ist.

Aus diesem Grunde sind wir gezwungen, für die ungleichförmige Bewegung zu definieren:

Die Geschwindigkeit wird durch den Differentialquotienten des Weges nach der Zeit gemessen:

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Wir können die Geschwindigkeit eines ungleichförmig bewegten Körpers auf keine Weise völlig genau durch unmittelbare Beobachtung bestimmen, weil wir dabei immer einen, wenn auch kleinen Zeitraum hindurch beobachten müssen. Wir erhalten also niemals ein Zeit-Element und ein Weg-Element, die Teile des Differenzenquotienten. Noch weniger aber ist die unmittelbare Beobachtung der Teile des Differentialquotienten möglich, da ja Zähler und Nenner dieses Quotienten unter jedes Maß hinaus klein sein sollen. Wohl aber können wir durch Rechnung zum Ziele kommen, indem wir aus dem **Weg-Zeit-Gesetze** $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$ den Differentialquotienten herleiten: Wir berechnen den in einem Zeit-Elemente zurückgelegten Weg und dividieren diesen Rechnungswert durch das Zeit-Element. Lassen wir dann das Zeit-Element unter jedes Maß klein werden, so geht der Differenzenquotient in den Differentialquotienten über.

Der in t Sekunden zurückgelegte Weg ist $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$, der in $t + \Delta t$ zurückgelegte Weg ist $s + \Delta s = \frac{g}{2} \cdot (t + \Delta t)^2$, folglich ist

$$\Delta s = \frac{g}{2} \cdot [(t + \Delta t)^2 - t^2] = \frac{g}{2} \cdot (2t\Delta t + \Delta t^2),$$

also

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g}{2} \cdot 2t + \frac{g}{2} \cdot \Delta t.$$

Machen wir das Zeit-Element Δt unter jedes angebbare Maß klein, so verschwindet der zweite Summand, und es wird

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{(\Delta t = 0)} \frac{\Delta s}{\Delta t} = g \cdot t.$$

Aus dieser Gleichung, dem **Geschwindigkeit-Zeit-Gesetze**, folgt:

Die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers ist proportional mit der Fallzeit.

Bezeichnen wir die nach einer Sekunde ($t = 1$) erlangte Geschwindigkeit mit v_1, so folgt ferner, daß $v_1 = g$ ist.

Der früher angegebene Wert $g = 981$ gibt daher die Geschwindigkeit an, die der fallende Körper nach der ersten Sekunde erlangt hat. In derselben Weise folgt $v_2 = 2g$, $v_3 = 3g$, usw. Die Geschwindigkeit des frei fallenden Körpers nimmt in jeder Sekunde um den Wert $g = 981$ zu.

Entfernen wir aus den beiden Gleichungen $v = g \cdot t$ und $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$ die Größe t, so erhalten wir die Gleichung

$$v^2 = 2gs \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{2gs}.$$

§ 14. Die Beschleunigung.

Nimmt die Geschwindigkeit bei ungleichförmiger Bewegung dauernd zu, so heißt die Bewegung **beschleunigt**, nimmt sie dauernd ab, so heißt sie **verzögert**. Der freie Fall ist eine beschleunigte Bewegung. Ein Blick auf die Tabelle S. 32 zeigt, daß der in jedem Zeitteile ($^1/_{32}$ Sekunde) zurückgelegte Fallraum stets um denselben Betrag zunimmt (im Mittel um 9,59 mm, die einzelnen Abweichungen vom Mittel rühren von ungenauen Messungen her). Eine solche Bewegung heißt **gleichmäßig beschleunigt**.

Bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung kann man festsetzen: **Die Beschleunigung wird durch die Geschwindigkeitszunahme in der Zeiteinheit gemessen.**

Da bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung die Geschwindigkeitszunahme in jeder Zeiteinheit denselben Wert hat, so folgt für die Beschleunigung b die zweite Definition durch die Gleichung $b = \frac{v}{t}$, die mit der ersten Definition dem Sinne nach vollkommen übereinstimmt.

Bei einer ungleichmäßig beschleunigten Bewegung läßt uns diese Definition im Stiche, da sich auf Grund derselben für die Beschleunigung in einem Zeitpunkte ein Wert ergibt, der je nach der Länge des der Berechnung zugrunde gelegten Zeitraumes verschieden ist. Eine Überlegung, die der im § 12 für die Geschwindigkeit bei ungleichförmiger Bewegung ausgeführten durchaus ähnlich ist, ergibt, daß wir den wirklichen Wert der Beschleunigung in einem Zeitpunkte nur berechnen können, wenn wir der Berechnung den in einem Zeitelemente erfolgenden Geschwindigkeitszuwachs zugrunde legen, und wenn wir das Zeitelement möglichst klein wählen. Nennen wir den Geschwindigkeitszuwachs Δv, das Zeitelement Δt und die Beschleunigung b, so folgt hieraus

$$b = \lim_{(\Delta t = 0)} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \frac{dv}{dt}.$$

Wir definieren daher: **Die Beschleunigung wird durch den Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach der Zeit gemessen.**

Berechnung der Fallbeschleunigung aus der Tabelle S. 32: Die dritte senkrechte Reihe enthält die Fallräume in je $^1/_{32}$ Sekunde. Wenngleich dieser Zeitraum noch kein verschwindend kleines Zeitelement ist und daher die Geschwindigkeitswerte nur Mittelwerte über diese $^1/_{32}$ Sekunde sind, so können wir dennoch die Beschleunigung berechnen.

Aus den Werten der dritten Reihe finden wir die augenblickliche Geschwindigkeit durch Bildung des Quotienten $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, und da $\Delta t = {}^1/_{32}$ sec ist, so muß man die einzelnen Werte mit 32 multiplizieren, um v zu erhalten. Die Geschwindigkeitsunterschiede in je zwei aufeinanderfolgenden Zeitabschnitten werden daher aus der vierten Reihe durch Multiplikation mit 32 gebildet; es ist in jedem Zeitpunkte Δv gleich dem 32 fachen des aus der vierten Reihe entnommenen Wertes 9,59 mm, folglich ist $\Delta v = 9{,}59 \cdot 32 = 306{,}9$ mm $= 30{,}69$ cm. Jetzt können wir auch $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ bilden, wo wieder $\Delta t = {}^1/_{32}$ sec ist, nämlich

$$b = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{30{,}69}{^1/_{32}} = 30{,}69 \cdot 32 = 982{,}1.$$

(Es ist schon erwähnt, daß der genaue Wert 981 cm/sec² beträgt; die Abweichung des berechneten Wertes ist in der ungenauen Beobachtung begründet.)

Auf rechnerischem Wege kann aus der am Schlusse von § 13 mitgeteilten Gleichung $v = g \cdot t$ die Beschleunigung des freien Falles folgendermaßen gefunden werden:

Aus der Gleichung $v = g \cdot t$ folgt die Geschwindigkeit zur Zeit $t + \Delta t$ zu $v + \Delta v = g(t + \Delta t)$, also hieraus $\Delta v = g \cdot \Delta t$, oder $\frac{\Delta v}{\Delta t} = g$. Gehen wir zu verschwindendem Zeitelementen über, so erhalten wir das **Beschleunigung-Zeit-Gesetz:**

$$b = \lim_{(\Delta t = 0)} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \frac{dv}{dt} = g.$$

In diesem Falle war es einerlei, ob wir den Quotienten $\frac{v}{t}$ oder den Quotienten $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ oder $\frac{dv}{dt}$ bildeten, da die Fallbewegung gleichmäßig beschleunigt, d. h. von der Zeit unabhängig ist.

Bei der Berechnung der Geschwindigkeit wird die Differenz zweier aufeinanderfolgender Wege durch die Zeit dividiert; dann wird zur Berechnung der Beschleunigung die Differenz zweier aufeinanderfolgender Geschwindigkeiten wieder durch die Zeit dividiert; es wird also zweimal die Differenz der Wege gebildet, und diese wird durch das Quadrat der Zeit dividiert. Deshalb schreiben wir auch $b = \frac{\Delta^2 s}{\Delta t^2}$, wobei durch das Symbol $\Delta^2 s$ die zweimalige Differenzbildung ausgedrückt werden soll. Beim Übergange zur Grenze für unendlich kleine Zeitelemente wird dann

$$b = \lim_{(\Delta t = 0)} \left(\frac{\Delta^2 s}{\Delta t^2}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Die Beschleunigung wird durch den zweiten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit gemessen.

Wegen der zweimaligen Division durch die Zeit schreibt man bei der Angabe für die Größe einer Beschleunigung die Bezeichnung cm/sec². Für die Fallbeschleunigung ist daher zu schreiben $g = 981$ cm/sec².

Daß die Bezeichnung der Beschleunigung durch das Symbol [cm/sec²] beim freien Falle berechtigt ist, ergibt sich sofort aus dem Weg-Zeit-Gesetz $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$, das wir schreiben können

$$g = \frac{2s}{t^2}.$$

Im Zähler des Quotienten steht ein in Zentimetern gemessener Weg, im Nenner das Quadrat einer in Sekunden gemessenen Zeit; daher müssen wir setzen: $g = 981$ cm/sec². Die Dimension der Beschleunigung ist nach § 8, 6. [cm · sec⁻²].

Es ist anzustreben, für die C. G. S.-Einheit 1 cm/sec² der Beschleunigung einen besonderen Namen zu gebrauchen. Vorgeschlagen und z. T. eingeführt ist die Bezeichnung 1 „gal".[1])

§ 15. Ableitung der Fallgesetze aus der beobachteten Tatsache, daß der freie Fall eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist. Bewegungsdiagramme.

Aus der als bekannt angenommenen Voraussetzung, daß der freie Fall eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung $g = 981$ cm/sec² (gal) ist, können wir die Fallgesetze durch folgende Überlegungen gewinnen.

Das *Beschleunigung-Zeit-Gesetz* $b = g$ besagt, daß die Beschleunigung von der Zeit unabhängig ist, die Geschwindigkeit also in jeder Sekunde gleichmäßig um den Wert g zunimmt. Ist zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit auch Null, so muß nach t Sekunden die Geschwindigkeit von 0 auf gt angewachsen sein. Es gilt also das *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz*

$$v = gt.$$

Um die Abhängigkeit des Weges von der Zeit zu finden, können wir zunächst folgende Betrachtung anstellen. Die Geschwindigkeit nimmt nach dem letzten Gesetze von Null bis zum Werte gt ganz gleichmäßig mit der Zeit zu. Wir dürfen daher zur Berechnung des zurückgelegten Weges die Annahme machen, daß während der Zeit t der Körper denselben Weg mit einer gleichförmigen mittleren Geschwindigkeit v_m zurückgelegt hat. Hierbei ist v_m das Mittel aus der Anfangs- und Endgeschwindigkeit, also $v_m = \frac{gt}{2}$. Daher ist $s = v_m t = \frac{gt^2}{2}$.

Auf einwandfreierem Wege finden wir dieses *Weg-Zeit-Gesetz*, wenn wir uns erinnern, daß allgemein die Geschwindigkeit der Differentialquotient vom Wege und der Zeit ist, also $\frac{ds}{dt} = v$. Mit dem Geschwindigkeit-Zeit-Gesetze $v = gt$ ergibt das $\frac{ds}{dt} = gt$. Aus dieser Gleichung findet man nach den Regeln der Integralrechnung

$$s = \int gt \cdot dt = \frac{gt^2}{2},$$

[1]) Zu Ehren von Galileo Galilei (1564—1642), welcher zuerst die Gesetze des freien Falles erkannte.

wenn wir voraussetzen, daß der Körper zur Zeit $t = 0$ den Weg $s = 0$ zurückgelegt hatte.

In den Figuren 38 bis 40 sind die den freien Fall darstellenden Schaulinien gezeichnet. In diesen Figuren ist $g = 981$ cm/sec² (gal) durch die Strecke von 4 mm und die Zeiteinheit (eine Sekunde) durch die Strecke von 5 mm dargestellt. Man kann nun aus den Figuren für jeden Wert von t unmittelbar jeden Wert von s, v oder b durch Messung entnehmen.

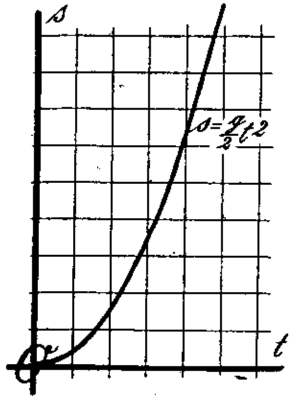

Fig. 38. Weg-Zeit-Schaulinie.

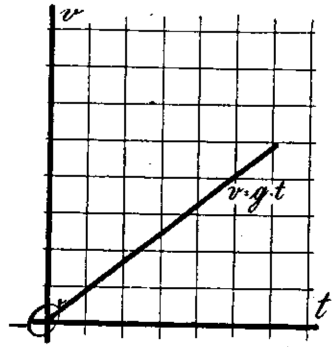

Fig. 39. Geschwindigkeit-Zeit-Schaulinie.

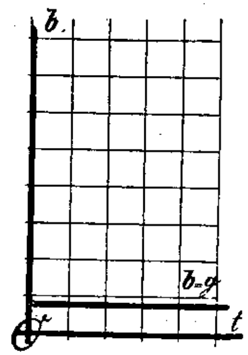

Fig. 40. Beschleunigung-Zeit-Schaulinie.

Der Hauptvorteil derartiger Diagramme oder Schaulinien liegt in der Übersichtlichkeit des Verlaufes der Funktionen. Man erkennt z. B. sofort aus Fig. 38, daß der Fallraum zuerst ganz langsam zunimmt, dann rascher und rascher größer wird, daß endlich für spätere Zeiträume die Zunahme annähernd linear, aber immer noch stärker als linear erfolgt. Aus Fig. 39 erkennt man die vollkommen gleichmäßige Zunahme der Geschwindigkeit und aus Fig. 40 die Beständigkeit der Beschleunigung, da die Beschleunigungskurve eine der Abszissenachse parallele Gerade ist.

Bei der Beschleunigung-Zeit-Schaulinie in Fig. 40 stellt der Flächeninhalt der zwischen der Kurve, den Koordinatenachsen und einer Ordinate liegenden Fläche die Größe der Geschwindigkeit dar. Im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm (Fig. 39) stellt die zwischen der Kurve, der Abszissenachse und einer Ordinate liegende Fläche die Länge des zurückgelegten Weges dar.

§ 16. Zusammensetzung der Bewegungen.

Wenn sich ein Körper in bezug auf einen andern Körper bewegt, der in bezug auf einen dritten in Bewegung ist, so wird im allgemeinen auch der erste in bezug auf den dritten in Bewegung sein (in besonderen Fällen kann er auch in bezug auf den dritten in Ruhe sein). Die Bewegung, die der erste in bezug auf den dritten ausführt, nennen wir **zusammengesetzt** aus den beiden ersten Bewegungen

Auf einem Brette, das längs der einen Kante mit einer Zentimeterteilung versehen ist, möge eine rechteckige Glasplatte verschiebbar sein, die an der der Zentimeterteilung zugekehrten Seite mit einer Marke, auf der gegenüberliegenden Seite mit einer Zentimeterteilung versehen ist (Fig. 41). Bewegt man nun die Glasplatte auf dem Brette, während eine Bleistiftspitze immer an demselben Punkte der oberen Teilung bleibt, so führt auch diese die Bewegung der Glasplatte gegen das Brett aus (Bewegung I).

Geht man mit der Glasplatte in die Anfangsstellung zurück und bewegt jetzt den Bleistift längs der auf der Glasplatte befindlichen Teilung, so führt er eine Bewegung relativ zur Glasplatte aus (Bewegung II).

Führt man dann beide Bewegungen in beliebiger Reihenfolge nacheinander oder gleichzeitig aus, so erhält man die aus den beiden **Teilbewegungen** oder **Komponenten** zusammengesetzte Bewegung, die **resultierende Bewegung**, die gleich der Summe oder Differenz der Einzelbewegungen ist.

Legt man an die geteilte Seite der Glasplatte eine zweite rechteckige Glas-

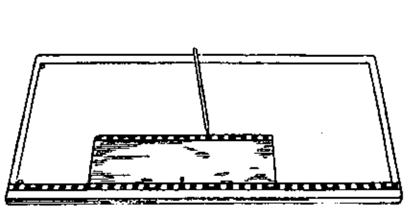

Fig. 41. Teilbewegungen derselben Richtung.

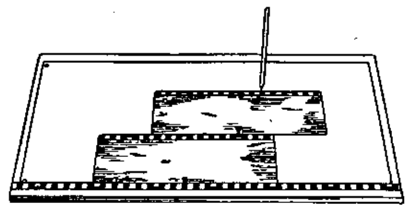

Fig. 42. Addition gleichgerichteter Teilbewegungen.

platte derselben Art (Fig. 42), so kann der Schreibstift eine Bewegung sowohl relativ zur ersten, wie relativ zur zweiten Glasplatte und relativ zum Brett ausführen. Die resultierende Bewegung ist auch hier, wo die Bewegungen parallel zueinander ausgeführt werden, gleich der algebraischen Summe der Teilbewegungen (entgegengesetzte Bewegungen werden durch entgegengesetzte Vorzeichen ausgedrückt).

Wenn die beiden Teilbewegungen einen Winkel einschließen, so erfolgt die Zusammensetzung nach Art des folgenden Versuches: Man legt auf das mit der Zentimeterteilung versehene Brett eine dreieckige Glasplatte (Fig. 43), deren eine geteilte Kante mit der Grundkante des Brettes einen Winkel einschließt. Bewegt man die Glasplatte mit dem an unveränderter Stelle gehaltenen Bleistifte um die Strecke von 20 cm, so bewegt sich der Bleistift z. B. von A bis B. Bewegt man nun den Bleistift längs der geteilten Kante der Glasplatte um 30 cm, so entsteht die Linie BD, welche die zweite Bewegung darstellt. Der durch beide Bewegungen erreichte Ort ist der Punkt D. Jetzt geht man mit der Glasplatte und dem Bleistifte in die Aufangsstellung wieder zurück und bewegt zuerst den Bleistift längs der Glasplatte um 30 cm (AC) und dann die Glasplatte bei festgehaltenem Bleistifte um 20 cm (CD). Man erreicht dann den Ort D wie bei der ersten Aufeinanderfolge der Bewegungen. Führt man die beiden Bewegungen so aus, daß zuerst der Bleistift um 3 cm, die Glasplatte um 2 cm, dann wieder der Bleistift um 3 cm und die Glasplatte um 2 cm bewegt werden, und führt man so fort, bis die ganze erste Bewegung von 30 cm und die ganze zweite Bewegung

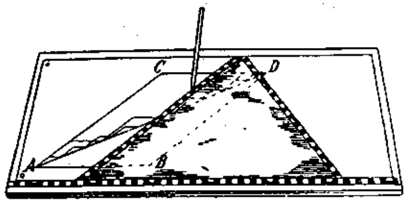

Fig 43. Addition gegeneinander geneigter Teilbewegungen.

von 20 cm vollständig ausgeführt worden sind, so ist die Bahn der Bleistiftspitze durch eine von A bis D gehende Zickzacklinie angegeben. Der erreichte Ort ist wieder der Punkt D.

Führt man die beiden Teilbewegungen in irgendeiner anderen Reihenfolge aus, aber so, daß die gesamte erste und die gesamte zweite Bewegung ausgeführt werden, so ist stets der erreichte Ort der Punkt D. Hieraus folgt:

1. Führt ein Körper gleichzeitig zwei Bewegungen aus, so ist der von dem Körper erreichte Ort unabhängig davon, ob die Bewegungen gleichzeitig oder in beliebiger Reihenfolge einzeln nacheinander ausgeführt werden. (Gesetz oder Prinzip von der ***Unabhängigkeit der Bewegungen.*** *Superposition*[1]) *der Bewegungen.)*

Wenn man die einzelnen Teilbewegungen in eine Anzahl sehr kleiner Teile teilt, so geht die in Fig. 43 dargestellte Zickzacklinie um so mehr in die Bewegung längs der Diagonale AD des Parallelogramms $ABCD$ über, je kleiner die einzelnen Teile sind. Führt der Körper die beiden Bewegungen gleichzeitig aus, sind aber die einzelnen Anteile der Teilbewegungen den Gesamtbewegungen proportional, so bewegt sich der Körper längs der Diagonale des Parallelogramms. Im besonderen:

2. Führt ein Körper gleichzeitig zwei gleichförmige, geradlinige Bewegungen aus, so bewegt er sich längs der Diagonale des aus den beiden Teilbewegungen (Seitenbewegungen) konstruierten Parallelogramms. ***(Parallelogramm der Bewegungen.)***

Der Ort, an dem sich ein Körper befindet, der gleichzeitig an mehreren Bewegungen teilnimmt, wird durch den Satz vom **Parallelogramm der Bewegungen** gefunden. Daraus folgt, daß, wenn man den Ort in jedem einzelnen Zeitpunkte durch Zeichnung aufsucht, man auch den Weg, den der Körper zurücklegt, mit Hilfe des Satzes vom Parallelogramm der Bewegungen aufsuchen kann.

Da die Geschwindigkeit durch den Quotienten $\frac{\text{Wegelement}}{\text{Zeitelement}}$ definiert ist, so folgt auch, daß die Geschwindigkeit eines Körpers, der an mehreren Bewegungen teilnimmt, in genau derselben Weise durch eine Zeichnung gefunden werden kann, wie die Wege nach dem Parallelogrammgesetze gefunden werden. In derselben Weise folgt, daß sich die Zeichnung und Berechnung der Beschleunigung durch dieselbe Zeichnung und Berechnung ausführen lassen. Man spricht daher auch von dem **Parallelogramm der Geschwindigkeiten** und dem **Parallelogramm der Beschleunigungen.**

Nur in dem Falle, daß die Bewegungen, an denen ein Körper gleichzeitig teilnimmt, dieselbe oder entgegengesetzte Richtung haben, findet man die resultierende Bewegung, Geschwindigkeit und Beschleunigung, indem man die den einzelnen Teilbewegungen zukommenden Größen addiert oder subtrahiert, wie einfache Zahlengrößen. In den Fällen aber, wo die Richtungen der Bewegungen einen Winkel miteinander einschließen, muß man diese Richtungen bei der Zeichnung und Berechnung der entsprechenden resultierenden Größe berücksichtigen.

1) super (lat.) = über; positio (lat.) = Lage, Lagerung.

Solche Größen, die einen einfachen Zahlenwert haben und die wie algebraische Zahlen behandelt werden, heißen **Skalargrößen.** Skalargrößen sind z. B. die Länge, die Masse, die Zeit. Diejenigen Größen, die zu ihrer Bestimmung die Angabe eines Zahlenwertes und einer Richtung im Raume verlangen, heißen **Vektorgrößen.** Zu ihnen gehören der Weg, die Geschwindigkeit, die Beschleunigung eines Körpers.

Es ist üblich geworden, in der physikalischen Literatur die Vektorgrößen mit deutschen (gotischen) Buchstaben zu bezeichnen, wenn man sie in ihrer Wesensart von den Skalaren unterscheiden will; lateinische Buchstaben verwendet man dann, wenn nur die Größe, nicht die Richtung des Vektors betrachtet werden soll.

Wir können mittels des Satzes vom Bewegungsparallelogramm Bewegungen jeder Art zusammensetzen, wenn wir die Bewegungen in kleine Teile zerlegen, die in den kleinen Zeitelementen Δt erfolgen; denn während eines solchen Zeitelementes kann jede Bewegung als geradlinig und gleichförmig angesehen werden.

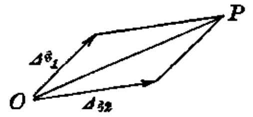

Fig. 44. Skalare Addition zweier Streckenelemente.

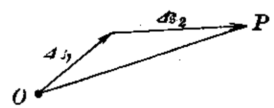

Fig. 45.

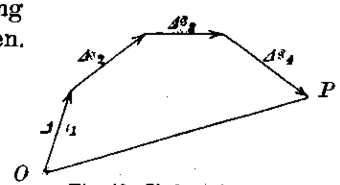

Fig. 46. Skalare Addition mehrerer Streckenelemente.

Ein Körper, der an zwei durch die Gleichungen $\mathfrak{s}_1 = f_1(t)$ und $\mathfrak{s}_2 = f_2(t)$ bestimmten Bewegungen teilnimmt, sei zu einer gewissen Zeit in O (Fig. 44). Würde er nur der ersten Bewegung folgen, so würde er während des Zeitelementes Δt nur den Weg $\Delta\mathfrak{s}_1$ zurücklegen; würde er nur der zweiten Bewegung folgen, so würde er den Weg $\Delta\mathfrak{s}_2$ zurücklegen. Nimmt er aber an beiden Bewegungen teil, so erreicht er den Ort P, den Endpunkt der Diagonalen des Parallelogramms mit den Seiten $\Delta\mathfrak{s}_1$ und $\Delta\mathfrak{s}_2$.

Wir finden den Ort P einfacher, wenn wir annehmen, daß der Körper die beiden Teilbewegungen (Komponenten) einzeln nacheinander ausführt. Wir schließen dann einfach nach der in Fig. 45 ausgeführten Zeichnung an den Endpunkt von $\Delta\mathfrak{s}_1$ den Vektor $\Delta\mathfrak{s}_2$ in seiner Größe und Richtung an.

Diese Zeichnung können wir auch für mehrere Bewegungen während des Zeitelementes Δt ausführen. So entsteht durch Zusammensetzung der Bewegungen $\Delta\mathfrak{s}_1, \Delta\mathfrak{s}_2, \Delta\mathfrak{s}_3$ und $\Delta\mathfrak{s}_4$ der in Fig. 46 abgebildete Streckenzug. Verbinden wir noch den Anfangspunkt O mit dem Endpunkte P des Streckenzuges, so ist OP die resultierende Bewegung.

In genau derselben Weise geschieht die Zusammensetzung aller vektoriellen Größen. In Fig. 46 ist OP der resultierende Vektor der Komponenten $\Delta\mathfrak{s}_1$, $\Delta\mathfrak{s}_2$, $\Delta\mathfrak{s}_3$ und $\Delta\mathfrak{s}_4$. Man nennt diese Art der Zusammensetzung eine **geometrische Addition** im Gegensatze zur **algebraischen** Addition der Skalargrößen.

Zerlegung eines Vektors. Die Aufgabe, einen gegebenen Vektor als geometrische Summe mehrerer gesuchter Vektoren darzustellen, ist nicht eindeutig bestimmt. Damit diese Aufgabe eindeutig wird, müssen noch Nebenbedingungen angegeben werden. Besondere Wichtigkeit hat die Aufgabe, einen Vektor in zwei Komponenten zu zerlegen, deren Richtungen vorgeschrieben sind. Das geschieht oft dadurch, daß die Komponenten parallel zu zwei gegebenen rechtwinkligen Achsen sein sollen. So wird nach Fig. 47 der Vektor $PQ = \Delta s$ zerlegt in die beiden Vektoren Δx und Δy, die den beiden Achsen OX und OY parallel sind. Ist der Vektor Δs gegen die X-Achse um den Winkel α geneigt, so bestehen die Beziehungen

$$\Delta x = \Delta s \cdot \cos\alpha, \qquad (\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$\Delta y = \Delta s \cdot \sin\alpha, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

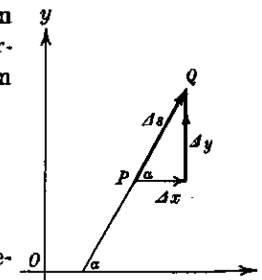

Fig. 47. Zerlegung eines Vektors Δs in die Komponenten Δx und Δy.

Als Beispiel für die Zusammensetzung zweier Bewegungen diene noch:

Zusammensetzung einer ungleichförmigen Bewegung mit einer gleichförmigen Bewegung.

Um die Zusammensetzung einer lotrechten, gleichmäßig beschleunigten Bewegung mit einer wagerechten, gleichförmigen Bewegung zu veranschaulichen, bewegen wir eine große, rechteckige Glasplatte längs der Führungsleiste des Brettes mit der Marke so, daß die Marke in jeder Sekunde den Weg von 10 cm zurücklegt (Fig. 48). Während dieser Bewegung halten wir den Bleistift dauernd an der oberen linken Ecke der Glasplatte. Der Bleistift legt dann in 5 Sekunden eine Strecke von im ganzen 50 cm zurück. Gehen wir nun in die Anfangsstellung wieder zurück und verschieben dann den Bleistift längs der lotrechten, geteilten Kante der Glasplatte, so daß er in der ersten Sekunde 1 cm, in den ersten beiden Sekunden 4 cm, in den ersten 3 Sekunden 9 cm, in den ersten 4 Sekunden 16 cm und in den ersten 5 Sekunden 25 cm zurücklegt, so beschreibt die Bleistiftspitze eine lotrechte, gerade Linie. Darauf bewegen wir in der ersten Sekunde gleichzeitig die Glasplatte um 10 cm nach rechts, den Bleistift um 1 cm nach unten, dann in der zweiten Sekunde die Glasplatte wieder um 10 cm nach rechts, den Bleistift um 3 cm nach unten und fahren so fort, bis am Schlusse der fünften Sekunde die Glasplatte um 50 cm und der Bleistift längs der vertikalen Kante um 25 cm bewegt worden ist. Die entstehende resultierende Bewegung ist eine krummlinige Bewegung vom Punkte O bis zum Punkte C. In der Figur sind die in den einzelnen Sekunden ausgeführten Teilbewegungen ebenfalls dargestellt.

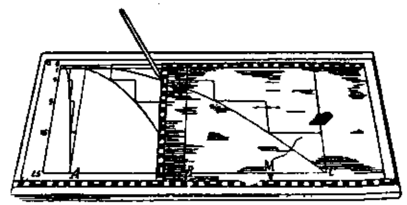
Fig. 48. Geometrische Addition einer gleichförmigen und einer ungleichförmigen Bewegung.

In der Figur sind ferner die Bahnen aufgezeichnet, die ein Punkt beschreibt, wenn er sich in horizontaler Richtung gleichförmig mit der Geschwindigkeit 5 cm/sec (sec) und in lotrechter Richtung gleichmäßig beschleunigt mit der Beschleunigung

$2\ cm/sec^2$ (gal) bewegt (Bahn OB); desgleichen, wenn die horizontale Bewegung die gleichförmige Geschwindigkeit 1 cm/sec hat, die lotrechte Bewegung aber dieselbe ist wie in den beiden anderen Fällen (Bahn OA).

In allen drei Fällen entsteht eine gekrümmte Bahn, die im ersten Falle langgestreckt, im letzten Falle besonders im Anfange sehr stark gekrümmt ist.

§ 17. Die Wurfbahn (experimentell untersucht).

Wenn ein Körper mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit geworfen wird, so legt er eine gekrümmte Bahn, die Wurfbahn, zurück. Wir untersuchen die Wurfbahn mit folgender Versuchsanordnung (Fig. 49):

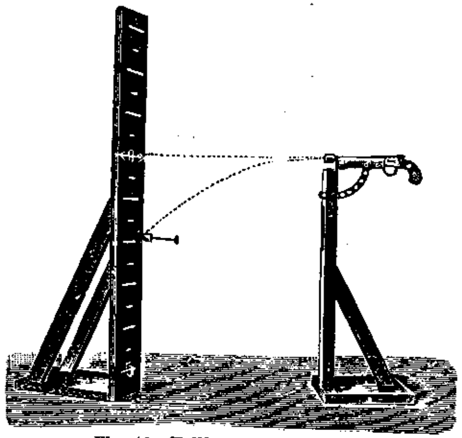

Fig. 49. Fallhöhen der Wurflinie.

Auf einer lotrechten Säule von 54,5 cm Höhe ist eine Federpistole um ein Scharnier drehbar so angebracht, daß sie mit ihrem Rohre sowohl wagerecht als auch mit verschieden nach oben gerichteter Neigung befestigt werden kann. Ferner henutzen wir eine mit einer Zentimeterteilung versehene lotrechte Scheibe, deren Nullpunkt in der Höhe der Pistolenmündung liegt. Wir laden in die Pistole ein Geschoß von 50 g* Gewicht ein und stellen die Scheibe in verschiedenen Abständen von der Pistole auf. Bei wagerecht gerichteter Pistole liegt der Treffpunkt auf der Scheibe um so tiefer, je weiter die Scheibe von der Pistole entfernt ist. Wenn wir nun die Scheibe um immer denselben Abstand von der Pistole entfernen, z. B. um 20 cm, dann um 40 cm, dann um 60 cm und so fort, so liegen die Treffpunkte nicht immer um dieselbe Strecke tiefer, sondern der gegenseitige Abstand der Treffpunkte wird um so größer, je weiter die Scheibe entfernt ist, je länger das Geschoß also schon unterwegs war. Die Abstände der einzelnen Treffpunkte voneinander stehen im Verhältnisse 1 : 3 : 5 : 7 : 9 : 11 : 13; die vom Nullpunkte der Scheibe an gerechneten lotrechten Abstände sind also den Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 proportional. Das Geschoß ist während des Fluges nach denselben Gesetzen gefallen, die es frei herabfallend befolgt. Die Bewegung des wagerechten Wurfes ist demnach aus einer wagerechten, gleichförmigen Bewegung und aus einer lotrechten, gleichmäßig beschleunigten Fallbewegung zusammengesetzt.

Die lotrechte Teilbewegung ist vollkommen unabhängig davon, wie groß die dem Körper erteilte Anfangsgeschwindigkeit ist, sie stimmt mit der Bewegung des freien Falles ohne wagerechte Anfangsgeschwindigkeit überein. Das beweist auch der folgende, von Loewy angegebene Versuch (Fig. 50):

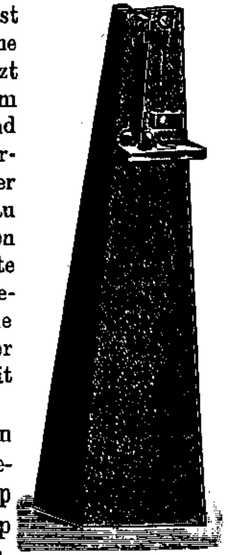

Fig. 50. Loewyscher Fallversuch.

An einem lotrechten Standbrette von etwa 70 cm Höhe ist ein Hammer um eine Achse drehbar aufgehängt, vor dem eine Blattfeder angebracht ist. Etwas unterhalb des Hammers sitzt eine wagerechte Konsole mit einem kleinen Ansatze, vor dem ein Loch in die Konsole gebohrt ist. Zwischen dem Ansatze und der Blattfeder wird eine kleine Kugel festgeklemmt und hierdurch am Herabfallen durch das Loch verhindert. Vor der Blattfeder liegt eine zweite, der ersten gleiche Kugel. Hebt man nun den Hammer und läßt ihn dann los, so schlägt er gegen die Blattfeder. Hierdurch wird gleichzeitig die festgeklemmte Kugel losgelassen und die vor der Feder liegende Kugel fortgeschleudert; beide Kugeln erreichen den Tisch gleichzeitig. Die Fallzeit ist unabhängig davon, ob die Kugel frei herabfällt, oder ob sie mit einer beliebigen wagerechten Anfangsgeschwindigkeit fortgeschleudert wird.

Die Tatsache, daß ein Körper gleichzeitig an mehreren Bewegungen teilnimmt, und daß hierbei die einzelnen Bewegungen sich gegenseitig nicht stören, heißt das **Prinzip der Superposition der Bewegungen** (S. 39). Dieses Prinzip hat unbeschränkte Gültigkeit für jede Art von Zusammensetzungen der Bewegungen.

Wenn der aus der wagerecht gerichteten Pistole (Fig. 49) abgeschossene Körper von der Höhe 54,5 cm herunterfällt, so braucht er zum Fallen gerade $^1/_3$ Sekunde; denn er fällt in einer Sekunde 490,5 cm, also in $^1/_3$ Sekunde $490{,}5 : 9 = 54{,}5$ cm. Wir können daher die Geschwindigkeit, mit welcher das Geschoß die Pistole verläßt, bestimmen, wenn wir wissen, in welcher Entfernung von der Pistolenmündung das Geschoß auf den Tisch fällt. Beträgt diese Entfernung z. B. 150 cm, so ist der in einer Sekunde zurückgelegte Weg, in wagerechter Richtung gemessen, $3 \cdot 150 = 450$ cm, die Geschwindigkeit beträgt daher 450 cm/sec (cel).

§ 18. Der Wurf

(theoretisch aus seinen Komponenten zusammengesetzt).

Im vorigen Paragraphen haben wir erfahren, daß die Bewegung eines geworfenen Körpers aufgefaßt werden kann als zusammengesetzt aus einer gleichförmigen geradlinigen Bewegung, deren Richtung mit der Wurfrichtung zusammenfällt, und einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung, die lotrecht nach abwärts gerichtet ist.

Bei der mathematischen Behandlung der Wurfbewegung müssen der Weg und die Geschwindigkeit der Komponenten einzeln berechnet und dann als Vektoren zusammengesetzt werden.

Der Wurf lotrecht abwärts. Da die Richtung des abwärts gerichteten Wurfes mit der Fallbewegung zusammenfällt, so findet man den zurückgelegten Weg s und die Geschwindigkeit v durch algebraische Addition der aus den beiden Teilbewegungen folgenden Größen. Ist die Anfangsgeschwindigkeit c, so ist

$$s = c \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2, \qquad v = c + gt.$$

Der Wurf lotrecht aufwärts. Hier ist die Wurfrichtung entgegengesetzt zur Fallrichtung; folglich sind die einzelnen Teilgrößen zu subtrahieren. Man erhält:

$$s = c \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2, \qquad v = c - gt.$$

Der Körper bewegt sich so lange aufwärts, als v positiv ist; abwärts, wenn v negativ wird. Der Körper erreicht seine größte Höhe, wenn $v = 0$ wird. Dann ist $c - g \cdot t = 0$, also $t = \frac{c}{g}$. Diese Zeit $t' = \frac{c}{g}$ heißt die „Steigzeit" des Körpers. Die dann erreichte größte Höhe beträgt

$$s' = c \cdot \frac{c}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{c^2}{g^2} = \frac{c^2}{2g}.$$

Beispiel: Ein mit der Anfangsgeschwindigkeit $c = 500 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ aufwärts geworfener Körper steigt (wenn $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ gesetzt wird) $t' = \frac{500}{10} = 50$ sec lang. Er erreicht die Höhe $s' = \frac{500^2}{2 \cdot 10} = 12\,500$ m.

Nach einer Zeit, die gleich der doppelten Steigzeit ist, $t'' = 2t'$, wird $v'' = -c$ und $s'' = 0$; der Körper kommt mit entgegengesetzter Geschwindigkeit wieder zum Ausgangspunkte seiner Bahn zurück. In zwei Zeitpunkten, die ebensolange vor als nach Erreichung des höchsten Punktes liegen, erreicht der Körper denselben Ort, aber zuerst in aufsteigender, dann in absteigender Bewegung. Die Geschwindigkeit ist in beiden Fällen gleich groß, aber entgegengesetzt. Der Nachweis wird geführt, indem man in die Formeln für v und s die Werte $t = \frac{c}{g} \pm t'''$ einsetzt.

Der wagerechte Wurf. Wird ein Körper wagerecht mit der Anfangsgeschwindigkeit c geworfen, so nimmt er gleichzeitig an der wagerechten gleichförmigen und an der lotrechten Fallbewegung mit der Beschleunigung g teil. Wir finden den Ort, in dem er sich zur Zeit t befindet, indem wir den in wagerechter Richtung zurückgelegten Weg $x = c \cdot t$ mit der lotrechten Fallstrecke $y = \frac{g}{2} \cdot t^2$ nach dem Parallelogrammsatze (die Wege sind Vektorgrößen, S. 40) zusammensetzen (Fig. 51). Dabei beziehen wir die Bewegung auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen X-Achse wagerecht, dessen Y-Achse senkrecht nach unten gerichtet ist. Der Punkt P ist der zur Zeit t erreichte Ort. Entfernen wir aus den beiden Gleichungen

$$x = c \cdot t \quad \text{und} \quad y = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

die Größe t, so folgt

$$y = \frac{g}{2c^2} \cdot x^2$$

oder

$$x^2 = 2 \cdot \frac{c^2}{g} \cdot y.$$

Das Quadrat der Abszisse ist der ersten Potenz der Ordinate proportional. Die analytische Geometrie lehrt, daß eine durch diese Gleichung dargestellte Kurve eine Parabel ist, deren Scheitelpunkt im Koordinatenursprunge liegt, deren Achse mit der Y-Achse zusammenfällt und die den Halbparameter $\frac{c^2}{g}$ hat.

Die Geschwindigkeit im Punkte P findet man, indem man die wagerechte Geschwindigkeit $v_x = c$ und die senkrecht nach abwärts gerichtete Geschwindigkeit

$v_y = g \cdot t$ als Vektorgrößen nach dem Parallelogrammsatze zusammensetzt, so wie es in Fig. 52 ausgeführt ist. Die Bahnrichtung, d. h. die Richtung der Tangente an die Bahn in diesem Punkte, ist durch den Winkel α bestimmt, den die Tangente mit der Richtung der X-Achse einschließt.

Es ist

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{g}{c} \cdot t.$$

Die tangentiale Geschwindigkeit ist

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{c^2 + (g \cdot t)^2}.$$

Aus $\operatorname{tang} \alpha = \frac{g}{c} \cdot t$ folgt, daß α mit der Zeit immer mehr wächst und sich für einen großen Wert von t immer mehr dem rechten Winkel nähert; d. h. der Wurf nähert sich dem lotrechten Falle.

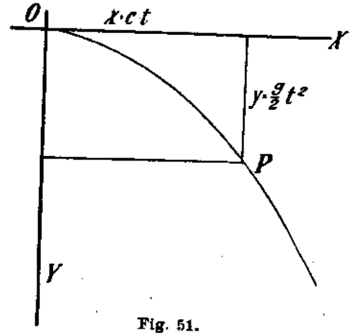

Fig. 51.
Wagerechter Wurf.

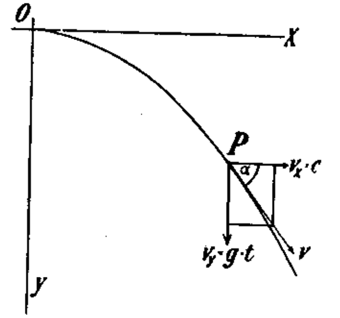

Fig. 52.
Geschwindigkeit beim wagerechten Wurfe.

Der schräge Wurf (Fig. 53). Wir benutzen ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit wagerechter X-Achse und lotrechter, nach oben gerichteter Y-Achse. Die Richtung des mit der Anfangsgeschwindigkeit c geworfenen Körpers schließt mit der wagerechten X-Achse den **Wurfwinkel** ε ein. Den Ort und die Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit t finden wir durch geometrische Addition der Komponenten. Nähme der Körper nur an der mit der Wurfrichtung zusammenfallenden gleichförmigen Bewegung teil, so befände er sich zur Zeit t im Orte Q. Es ist $OQ = c \cdot t$. Nähme er nur an der lotrechten Fallbewegung teil, so wäre er nach t Sekunden in einem Punkte R, dessen Ordinate $OR = \frac{g}{2} \cdot t^2$ ist. Den wahren Ort finden wir, indem wir OQ und OR als Vektorgrößen zusammensetzen. Zu dem Zwecke brauchen wir nur von Q aus die vertikale Strecke $QP = \frac{g}{2} \cdot t^2$ zu ziehen. Zur Bestimmung der Lage von P verlängern wir QP bis zum Durchschnitte S mit der X-Achse. Wir setzen ferner $OS = x$, $SP = y$. Es ist

$$y = c \cdot t \cdot \sin \varepsilon - \frac{g}{2} \cdot t^2, \quad x = c \cdot t \cdot \cos \varepsilon.$$

Durch Beseitigung von t aus diesen beiden Gleichungen entsteht die Gleichung

$$y = x \cdot \operatorname{tang} \varepsilon - \frac{g}{2c^2 \cos^2 \varepsilon} \cdot x^2,$$

die sich umformen läßt in

$$\left(x - \frac{c^2}{2g} \cdot \sin 2\varepsilon\right)^2 = \left(\frac{c^2}{2g} \cdot \sin^2 \varepsilon - y\right) \cdot \frac{2c^2 \cos^2 \varepsilon}{g}.$$

Diese Gleichung stellt eine Parabel dar, deren Achse senkrecht nach unten gerichtet ist und deren Scheitel die Koordinaten

$$x' = \frac{c^2}{2g} \cdot \sin 2\varepsilon, \quad y' = \frac{c^2}{2g} \cdot \sin^2 \varepsilon \text{ hat.}$$

Die Geschwindigkeit im Punkte P finden wir durch die Zusammensetzung der parallel zur Wurfrichtung und zur Lotlinie verlaufenden Teilgeschwindigkeiten (Fig. 54). Wir zerlegen die parallel zur Wurfrichtung gerichtete Teilgeschwindigkeit in die beiden Komponenten

$$v_x = c \cdot \cos\varepsilon, \quad v_y' = c \cdot \sin\varepsilon;$$

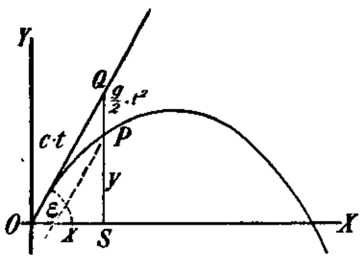

Fig. 53. Schiefer Wurf.

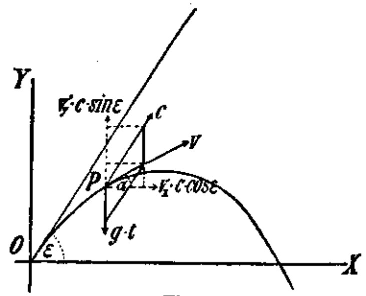

Fig. 54. Geschwindigkeitskomponenten beim schiefen Wurfe.

dann ist die wagrechte und die lotrechte Geschwindigkeit

$$v_x = c \cdot \cos\varepsilon, \quad v_y = c \cdot \sin\varepsilon - g \cdot t.$$

Die Richtung der Tangente ist durch den Winkel α, den sie mit der X-Achse bildet, bestimmt. Es ist $\operatorname{tang}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tang}\varepsilon - \frac{g \cdot t}{c \cdot \cos\varepsilon}$.

Die tangentiale Geschwindigkeit ist

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{c^2 \cdot \cos^2\varepsilon + (c \cdot \sin\varepsilon - g \cdot t)^2};$$

$\operatorname{tang}\alpha$, also auch α hat für kleine Werte von t einen positiven und für große Werte von t einen negativen Wert. Wenn $\alpha = 0$ ist, so bewegt sich der Körper wagerecht, er erreicht seinen höchsten Punkt. Das ist der Fall für

$$\operatorname{tang}\varepsilon - \frac{g \cdot t}{c \cdot \cos\varepsilon} = 0.$$

Der dieser Gleichung entsprechende Wert ist $t' = \frac{c}{g} \cdot \sin\varepsilon$. Die in diesem Augenblicke erreichte Höhe heißt die **Wurfhöhe** y'.

$$\textbf{Wurfhöhe} = y' = \frac{c^2}{g} \cdot \sin^2\varepsilon - \frac{c^2}{2g} \cdot \sin^2\varepsilon = \boldsymbol{\frac{c^2}{2g} \cdot \sin^2\varepsilon},$$

wie oben für die Ordinate des Scheitels der Wurfparabel.

Die **Wurfweite** erhalten wir, indem wir denjenigen Wert t'' für t ausrechnen, für den $y = 0$ wird. Wir setzen $y = ct'' \sin\varepsilon - \frac{g}{2} \cdot t''^2 = 0$ und erhalten zwei Werte $t'' = 0$ und $t'' = \frac{2c}{g} \cdot \sin\varepsilon$. Der erste Wert bezeichnet den Beginn des Wurfes, entspricht also unserer Frage nicht. Setzen wir den zweiten Wert von

t'' in den Ausdruck $x = ct \cos\varepsilon$ ein, so erhalten wir für die Wurfweite $x'' = \frac{c^2}{g} \cdot 2 \sin\varepsilon \cdot \cos\varepsilon$ oder

$$\textbf{Wurfweite} = x'' = \boldsymbol{\frac{c^2}{g} \cdot \sin 2\varepsilon}.$$

Hieraus folgt, daß die größte Wurfweite für $\sin 2\varepsilon = 1$, also für $\varepsilon = 45^0$ erreicht wird.

Da $\sin 2\varepsilon = \sin(180^0 - 2\varepsilon)$ ist, so folgt, daß dieselbe Wurfweite für die beiden Wurfwinkel ε und $(90^0 - \varepsilon)$ erreicht wird (Fig. 55). Die beiden Bahnen, auf denen dasselbe Ziel erreicht wird, heißen der **Bogenwurf** (I) und der **flache Wurf** (II) (s. auch Fig. 231).

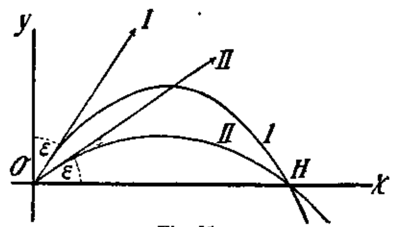

Fig. 55. Bogenwurf (I) und flacher Wurf (II).

Setzen wir den Wert $t'' = \frac{2c}{g} \cdot \sin\varepsilon$ in den Ausdruck für $\operatorname{tg}\alpha$ ein, so wird $\operatorname{tg}\alpha'' = -\operatorname{tg}\varepsilon$. Beim Auftreffen auf der Horizontalebene kommt der geworfene Körper unter demselben Winkel an, unter dem er schräg nach oben geworfen wurde.

Ebenso ergibt sich, daß in diesem Augenblicke die tangentiale Geschwindigkeit gleich der Anfangsgeschwindigkeit ist.

§ 19. Der Fall auf der geneigten Bahn.

Wir legen eine auf einem starken Brette befestigte ebene Spiegelglasplatte von ca. 2 m Länge und 25 cm Breite wagerecht auf den Tisch und setzen einen kleinen, leicht beweglichen Wagen mit leichten Rädern, der durch aufgelegte Metallplatten beliebig belastet werden kann, auf die wage-

Fig. 56. Fallversuch auf geneigter Bahn.

rechte Glasplatte. Der Wagen bleibt in Ruhe. Dann legen wir unter das eine Ende der Glasplatte einen Holzklotz, damit die Platte geneigt wird (Fig. 56); jetzt gerät der auf die Glasplatte gesetzte Wagen in Bewegung; er bewegt sich abwärts, erst langsam und dann immer schneller: die Bewegung ist beschleunigt.

Fällen wir von den einzelnen Punkten der geneigten Bahn Lote auf die wagerechte Tischplatte, so ist das Verhältnis der Länge des Lotes (**Höhe der Bahn**) zu der Entfernung des Punktes von der Schnittlinie der Bahn mit dem Tische (**Länge der Bahn**) unveränderlich. Dieses Verhältnis heißt die **Neigung der Bahn.** Der Winkel, den die Bahn mit der Horizontalebene bildet, heißt **Neigungswinkel.** Der Sinus des Neigungswinkels stimmt mit der Neigung der Bahn überein.

$$\text{Neigung} = \frac{\text{Höhe}}{\text{Länge}} = \sin\alpha.$$

Um die Neigung bequem zu messen, stellen wir neben der Bahn einen lotrechten Maßstab auf und messen längs der Bahn die Abstände derjenigen Punkte, die je 1 cm Höhendifferenz haben. Der reziproke Wert der gemessenen Länge ist zahlenmäßig gleich der Neigung der Bahn.

Machen wir die Messung an verschiedenen Stellen, so gibt das Mittel der einzelnen Messungen einen genaueren Wert als jede einzelne Messung.

Wir stellen am unteren Ende der Bahn einen festen Holzklotz auf, gegen den die Vorderkante des herabrollenden Wagens hörbar anschlägt. Ferner stellen wir unmittelbar vor den Wagen einen Holzklotz, der den Wagen vor Beginn des Versuchs am Hinunterrollen hindert.

Mit dem einen Schlage eines Sekundenpendels oder eines Metronoms nehmen wir den oberen Holzklotz fort und beobachten die Zeit, die der Wagen zum Hinunterrollen gebraucht. Wir können dem oberen Holzklotz eine solche Stellung geben, daß der Stoß des Wagens gegen den unteren Holzklotz mit einem Sekundenschlage zusammenfällt, wenn wir den oberen Holzklotz bei einem Sekundenschlage fortnehmen, daß also der Wagen zum Hinabrollen genau 1, 2, 3 usw. ganze Sekunden gebraucht.

Bei der Neigung 1 : 50 beträgt der in 1, 2, 3, 4 Sekunden zurückgelegte Weg 10, 40, 90, 160 cm.

Die Fallräume sind den Quadraten der Fallzeiten proportional.

Die beim freien Falle gemachten Überlegungen (§§ 13 u. 14), aus denen folgt, daß die Fallbewegung eine gleichmäßig beschleunigte ist, finden für die Bewegung auf der geneigten Bahn sinngemäße Anwendung. Der einzige Unterschied ist der, daß die Beschleunigung hier wesentlich geringer ist. Da der zurückgelegte Weg (bei der Neigung 1:50) in der ersten Sekunde 10 cm beträgt, die Beschleunigung bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung aber gleich dem doppelten Wege in der ersten Sekunde ist, so ist die Beschleunigung 20 cm/sec² (gal).

Wir wiederholen die Versuchsreihe mit den Neigungen 1 : 50, 1 : 40, 1 : 25, 1 : 20, 1 : 10, 1 : 5. In allen Fällen sind die zurückgelegten Wege den Quadraten der Bewegungszeiten direkt proportional, in allen Fällen ist also die Bewegung gleichmäßig beschleunigt. Die aus den Beobachtungen berechneten Beschleunigungen benutzen wir zur Aufstellung einer Tabelle:

Neigung	1 : 50	1 : 40	1 : 25	1 : 20	1 : 10	1 : 5 [1]
Beschleunigung	20	25	40	50	100	200 cm/sec²

Die Beschleunigung auf der geneigten Bahn ist der Neigung der Bahn direkt proportional, sie läßt sich also ausdrücken durch die Gleichung

$$b = f \cdot \sin\alpha,$$

wo f ein noch näher zu bestimmender Faktor ist.

1) Die angegebenen Werte sind auf ganze Zentimeter abgerundet. Bei größeren Geschwindigkeiten nehmen die Bewegungswiderstände zu, daher bleiben die aus den Beobachtungen berechneten Werte für die größeren Neigungen etwas hinter den angegebenen Werten zurück.

Wenn die Bahn bis zur lotrechten Lage gehoben wird, so geht die Bewegung auf der geneigten Bahn in den freien Fall über; wir können die lotrechte Bahn als eine Bahn mit der Neigung 1 : 1 ansehen; für sie wird, da $\alpha = 90^0$ ist, $\sin\alpha = 1$. Die obige Gleichung muß also auch für den freien Fall gelten, d. h. es muß $b_{90^\circ} = f$ sein. Da nun $b_{90^\circ} = g = 981$ cm/sec² (gal) wenn ist, so folgt $f = g$, also hieraus

$$\mathbf{b = g \cdot \sin\alpha\ (cm/sec^2).} \tag{1}$$

Die Formeln für die Endgeschwindigkeit und für den zurückgelegten Weg sind den beim freien Falle entwickelten Formeln vollkommen entsprechend, man statt g den Wert $g \cdot \sin\alpha$ setzt. Es sind

die Endgeschwindigkeit $v = g \cdot \sin\alpha \cdot t$ **(cm/sec),** (2)

der zurückgelegte Weg $s = \frac{1}{2} g \sin\alpha \cdot t^2$ **(cm).** (3)

Ersetzen wir hier $\sin\alpha$ durch den Quotienten Höhe/Länge $= \frac{h}{s}$, so wird

$$v = \frac{g \cdot h}{s} \cdot t, \quad s = \frac{g \cdot h}{2s} \cdot t^2.$$

Aus diesen beiden Gleichungen beseitigen wir t, indem wir den aus der ersten Gleichung folgenden Wert $t = \frac{vs}{gh}$ in die zweite Gleichung einsetzen, und wir erhalten $s = \frac{g \cdot h}{2s} \cdot \frac{v^2 s^2}{g^2 h^2}$, woraus weiter folgt $\mathbf{v^2 = 2gh}$.

Das ist dieselbe Gleichung wie die letzte Gleichung in § 13 beim freien Falle. Dieses wichtige Ergebnis kann man in dem Satze ausdrücken:

Die Endgeschwindigkeit eines auf einer geneigten Bahn fallenden Körpers hängt lediglich von der durchfallenen Höhe ab; sie ist also völlig unabhängig von dem Neigungswinkel der Bahn, auf der der Fall erfolgt.

Hat der Körper schon eine gewisse Anfangsgeschwindigkeit c, so treten die Gleichungen in Kraft, die für den lotrechten Wurf abgeleitet worden sind, mit dem Unterschiede, daß statt der Beschleunigung g die Beschleunigung $g \cdot \sin\alpha$ auftritt. Die Gleichungen lauten $v = c \pm g \sin\alpha \cdot t$, $s = ct \pm \frac{g}{2} \cdot \sin\alpha \cdot t^2$, wo das positive Zeichen für die Abwärtsbewegung, das negative Zeichen für die Aufwärtsbewegung gilt. Wenn wir in diesen Gleichungen $\sin\alpha = \frac{h}{s}$ setzen und dann t beseitigen, so fällt s ganz aus der Gleichung heraus, und wir erhalten

$$\mathbf{v^2 = c^2 \pm 2gh.}$$

Der Fall auf stetig gekrümmter Bahn mit wechselnder Neigung: Wenn eine geneigte Bahn an ihrem unteren Ende plötzlich in die Horizontalebene übergeht, so erleidet der Körper nach der Abwärtsbewegung an der Übergangsstelle einen Stoß, infolgedessen seine Geschwindigkeit plötzlich vermindert wird. Wenn dagegen der Übergang durch eine stetig gekrümmte Kurve vermittelt wird, so tritt keine Geschwindigkeitsänderung ein. Der Körper bewegt sich auf der Horizontalebene mit der am unteren Ende der geneigten Bahn erlangten Endgeschwindigkeit gleichförmig weiter (§ 29). Wenn mehrere geneigte Bahnen mit ihren Enden aneinanderstoßen, so wird beim plötzlichen, knickweisen Übergange von einer Bahn zur anderen die Geschwindigkeit des bewegten Körpers vermindert, während bei stetig gekrümmtem Übergange die Geschwindigkeit unverändert bleibt.

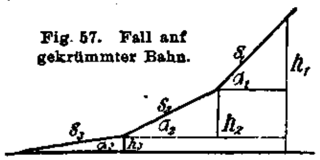

Fig. 57. Fall auf gekrümmter Bahn.

Wenn nach Fig. 57 drei oder mehr geneigte Bahnen, deren Neigungswinkel α_1, α_2, α_3 usw. sind, mit stetig gekrümmten Übergängen aneinanderstoßen, so ist die Endgeschwindigkeit auf der einen Bahn gleich der Anfangsgeschwindigkeit auf der nächsten. Die Längen der einzelnen Bahnen seien s_1, s_2, s_3 usw., die diesen Längen entsprechenden Höhen seien h_1, h_2, h_3 usw. Bezeichnen wir die Endgeschwindigkeiten an den unteren Enden der Bahnen mit v_1, v_2, v_3 usw., so ist

$$\begin{aligned} v_1^2 &= 2gh_1, \\ v_2^2 &= v_1^2 + 2gh_2, \\ v_3^2 &= v_2^2 + 2gh_3, \\ &\cdots\cdots \\ v_n^2 &= v_{n-1}^2 + 2gh_n. \end{aligned}$$

Durch Addition sämtlicher Gleichungen folgt, da sich alle v-Größen bis auf v_n^2 fortheben, $v_n^2 = 2gh_1 + 2gh_2 + \cdots + 2gh_n = 2g(h_1 + h_2 + \cdots + h_n)$. Der in Klammern stehende Ausdruck ist gleich der gesamten, in lotrechter Richtung gemessenen Fallhöhe h. Es folgt also auch für den Fall auf den Bahnen mit wechselnder Neigung

$$v_n^2 = 2gh.$$

Endlich betrachten wir eine nach Art einer Zylinderfläche mit beliebiger Leitlinie hergestellte Bahn, bei der die Erzeugenden sämtlich wagerecht sind. Diese Bahn kann angesehen werden als bestehend aus unendlich vielen, unendlich schmalen ebenen geneigten Bahnen, für die die obige Ableitung unveränderte Gültigkeit hat. Hieraus folgt:

Die Endgeschwindigkeit eines Körpers, der auf einer geneigten Bahn beliebiger Krümmung fällt, hängt lediglich von der lotrechten Fallhöhe ab.

Der Satz behält seine Gültigkeit auch dann noch, wenn einige Teile der Bahn ansteigen, denn dann tritt der entsprechende Summand $2gh$ als Subtrahend auf, ändert aber an dem Gesamtergebnisse nichts.

§ 20. Die krummlinige Bewegung. Die Zentralbewegung.

Wie in § 29 eingehend dargelegt werden wird, bewegt sich ein Körper, der auf irgendeine Weise in einen Bewegungszustand versetzt und darauf allen äußeren Einflüssen entzogen worden ist, dauernd geradlinig und gleichförmig. Soll er eine krummlinige Bewegung ausführen, so muß in jedem Augenblicke eine Bewegungskomponente hinzutreten, deren Richtung mit

der ursprünglichen Bewegungsrichtung einen Winkel einschließt. Bei der in § 18 behandelten Wurfbewegung trat in jedem Augenblicke zu der Geschwindigkeit des Körpers eine lotrecht abwärts gerichtete Beschleunigung hinzu. Im aufsteigenden Aste der Wurfbahn (Fig. 58) können wir im Punkte A die Fallbeschleunigung g in zwei zueinander senkrechte Komponenten τ und ν zerlegen, von denen die in der Richtung der Tangente wirkende **Tangentialkomponente** τ eine Verminderung der Geschwindigkeit und die in der Richtung der Normale wirkende **Normalkomponente** ν die Krümmung der Bahn bewirkt. Im absteigenden Aste der Wurfbahn können wir im Punkte B die Fallbeschleunigung g ebenfalls in die beiden Komponenten τ und ν zerlegen, von denen die Tangentialkomponente τ eine Beschleunigung in der Richtung der Bahn und die Normalkomponente ν die Krümmung der Bahn bewirkt.

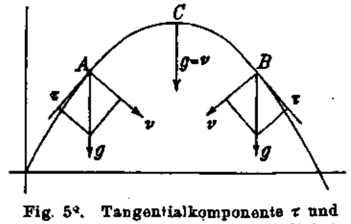

Fig. 58. Tangentialkomponente τ und Normalkomponente ν der Geschwindigkeit.

Im höchsten Punkte C der Wurfbahn steht die Fallbeschleunigung g auf der Bahntangente senkrecht, sie hat die Richtung der Normalen. Sie bewirkt hier keine Veränderung der Bahngeschwindigkeit, sondern sie bewirkt nur die Krümmung der Bahn; daher ist an dieser Stelle die Bahn am stärksten gekrümmt.

Aus diesem Beispiele sehen wir, daß eine Beschleunigung, deren Richtung mit der Bewegungsrichtung eines Körpers einen Winkel einschließt, im allgemeinen zwei verschiedene Wirkungen auf die Bewegung ausübt, die wir dadurch finden, daß wir die Beschleunigung zerlegen in eine in die Richtung der Bahntangente fallende **Tangentialbeschleunigung**, die eine Veränderung der Bahngeschwindigkeit bewirkt, und in eine in die Richtung der Normalen fallende **Normalbeschleunigung**, die eine Veränderung der Richtung, also eine Krümmung der Bahn bewirkt.

Nennen wir die Gesamtbeschleunigung b, die Tangentialbeschleunigung τ und die Normalbeschleunigung ν, so gilt die Beziehung

$$b^2 = \tau^2 + \nu^2.$$

Zur übersichtlichen Darstellung der Änderung der Richtung und Geschwindigkeit eines krummlinig und ungleichförmig bewegten Körpers führt man nach W. R. Hamilton den **Hodographen**[1]) ein: In Fig. 59 durchlaufe ein Körper eine krummlinige Bahn LL; im Punkte M sei der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$, im Punkte M_1 sei er $\mathfrak{v}_1$. Zieht man nun von dem beliebigen Punkte O aus den Vektor OM' gleich und parallel zu $\mathfrak{v}$ und den Vektor OM_1' gleich und parallel zu $\mathfrak{v}_1$, und verfährt man so bei jedem Punkte der Bahn, so durchläuft der Endpunkt M' der von O aus gezogenen Geschwindigkeitsvek-

1) hodós (griech.) = Weg, gráphein (griech.) = schreiben. Sir William Roman Hamilton (1805—1865) ist einer der fruchtbarsten theoretischen Physiker Englands.

toren eine gewisse Kurve HH', die Hodograph der Bewegung des Punktes M genannt wird.

Die Bewegung des Hilfspunktes M' auf dem Hodographen stellt geometrisch die Änderung des Geschwindigkeitsvektors des Punktes M bei der Bewegung auf seiner Bahn dar. Hieraus folgt dann: Die Geschwindigkeit des Hilfspunktes M' auf dem Hodographen stellt geometrisch den Beschleunigungsvektor des Punktes M bei der Bewegung auf seiner Bahn dar.

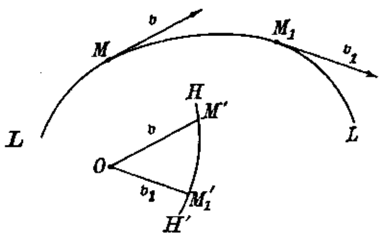

Fig. 59. Krummlinige Bewegung und ihr Hodograph.

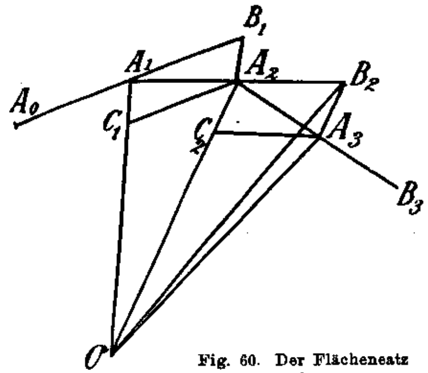

Fig. 60. Der Flächensatz der Zentralbewegung.

Tritt zu einer geradlinig gleichförmigen Bewegung in jedem Augenblicke eine neue Bewegungskomponente hinzu, die s t e t s n a c h d e m s e l b e n P u n k t e g e r i c h t e t ist, so entsteht eine **Zentralbewegung**. Der Punkt, nach dem die neue Bewegungskomponente gerichtet ist, heißt das **Bewegungszentrum**; die Verbindungsgerade eines Bahnpunktes mit dem Bewegungszentrum heißt ein **Leitstrahl (Radiusvektor)**.

Für jede Art der Zentralbewegung gilt ein Satz, der aus dem Bewegungsparallelogramm abgeleitet wird, und der zwischen der Richtungsänderung und der Geschwindigkeit des bewegten Körpers eine einfache Beziehung herstellt:

Der Flächensatz: *Bei jeder Zentralbewegung sind die Flächen, die in gleichen Zeiten vom Leitstrahle bestrichen werden, gleich groß.*

B e w e i s: Wird ein Körper, der sich in der (beliebig großen) Zeiteinheit von A_0 bis A_1 bewegt hat (Fig. 60) und der sich nun in der folgenden Zeiteinheit von A_1 bis B_1 bewegen würde, durch die in A_1 hinzutretende, nach dem Punkte O gerichtete zentrale Bewegungskomponente A_1C_1 aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt, so ist er nach Ablauf der nächsten Zeiteinheit nach A_2 gekommen (nach dem Bewegungsparallelogramm ist $C_1A_2 \parallel A_1B_1$ und $B_1A_2 \parallel A_1C_1$). Von hier aus würde er, wenn nicht eine neue zentrale Bewegungskomponente hinzutreten würde, nach Ablauf der nächsten Zeiteinheit nach B_2 kommen, und zwar würde $A_1A_2 = A_2B_2$ sein. Die neu hinzutretende Zentralkomponente A_2C_2 bringt ihn aber (wieder nach dem Bewegungsparallelogramm) nach dem Punkte A_3. Von hier aus würde er sich wieder geradlinig bewegen, wenn nicht wieder eine neue zentrale Komponente eine neue Richtungsveränderung (und evtl. Geschwindigkeitsveränderung) bewirken würde.

Aus Fig. 60 folgt, da $A_1A_2 = A_2B_2$ ist, daß $\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_2B_2$ ist. Da außerdem $\triangle OA_2B_2 = \triangle OA_2A_3$ ist (denn $B_2A_3 \parallel A_2O$), so folgt $\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_2A_3$. In derselben Weise folgt für jede weitere Zeiteinheit, daß das Dreieck, dessen eine Seite die tatsächlich zurückgelegte Strecke und dessen gegenüberliegende Spitze das Bewegungszentrum ist, einen unveränderlich bleibenden Flächeninhalt hat.

Diese Beziehung, die unter der Voraussetzung entwickelt wurde, daß die zentralen Bewegungskomponenten ohne Rücksicht auf ihre Größe jedesmal nach der gleich großen (aber beliebig großen) Zeiteinheit hinzutreten, gilt auch für den Fall, daß die zugrunde gelegten Zeiteinheiten sehr klein, also Zeitelemente sind, daß also aus der gebrochenen Bahn eine stetig gekrümmte Bahn wird; die einzelnen Teile der Bahn werden dann zu Bahnelementen, und die Dreiecke werden zu sehr schmalen Elementardreiecken.

Auch die in größeren Zeitabschnitten bestrichenen Flächen haben diesen unveränderlichen Flächeninhalt, wenn sie aus gleich vielen Elementardreiecken bestehen, d. h. wenn die Zeiträume, die beim Zurücklegen der entsprechenden Bahnlängen verfließen, gleich sind. Hiermit ist der Flächensatz für jede Zentralbewegung bewiesen.

Eine Folge des Flächensatzes ist, daß die Bahngeschwindigkeiten eines Körpers an verschiedenen Stellen derselben Zentralbewegung den Entfernungen der Bahntangenten des Körpers vom Bewegungszentrum umgekehrt proportional sind.

Flächengeschwindigkeit. Die vom Leitstrahle in der Zeiteinheit überstrichene Fläche wird häufig **Flächengeschwindigkeit** genannt. Ihre Einheit und Dimension ist $[\text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}]$.

§ 21. Die Kreisbewegung.

Es soll sich ein Körper mit gleichbleibender Geschwindigkeit v auf einer kreisförmigen Bahn mit dem Mittelpunkte O (Fig. 61) und dem Radius r bewegen.

Wir betrachten den Augenblick, wo sich der Körper in A_1 befindet, nachdem er schon einen Teil der Bahn zurückgelegt hat; das zuletzt zurückgelegte Bahnelement sei A_0A_1. Die Punkte A_0, A_1, A_2 usw. seien einander so nahe, daß wir ohne Fehler annehmen können, der Körper bewege sich statt auf den Kreisbögen $\widehat{A_0A_1}, \widehat{A_1A_2}, \widehat{A_2A_3}$ usw. auf den Sehnen $\overline{A_0A_1}, \overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}$ usw. Die Zeit, die während der Bewegung des Körpers von A_0 bis A_1, von A_1 bis A_2 usw. vergeht, sei ein verschwindend kleines, aber immer gleichbleibendes Zeitelement Δt.

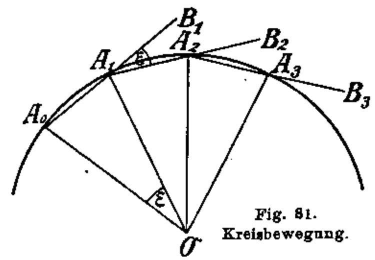

Fig. 61. Kreisbewegung.

Da die Geschwindigkeit des Körpers v ist, so ist der während des Zeitelementes Δt zurückgelegte Weg

$$A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = v \cdot \Delta t.$$

Ist der Körper von A_6 nach A_1 gekommen, so würde er sich ohne Hinzutreten einer neuen Bewegungskomponente im nächsten Zeitelemente von A_1 nach B_1 in der Verlängerung von A_0A_1 geradlinig weiter bewegen, es würde $A_1B_1 = v \cdot \Delta t$ sein; soll aber der Körper auf der Kreisbahn bleiben, so muß der Weg $A_1A_2 = v \cdot \Delta t$ auf der Kreisbahn endigen, die Bewegung muß also die Richtungsänderung $\sphericalangle B_1A_1A_2 = \varepsilon$ erfahren. Diese ist aber gleich dem Winkel, den die beiden Radien OA_0 und OA_1 miteinander bilden, es ist also auch $\sphericalangle A_0OA_1 = \varepsilon$.

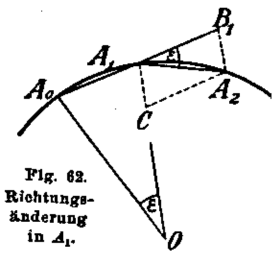

Fig. 62. Richtungsänderung in A_1.

Die Richtungsänderung wird durch die Wegkomponente B_1A_2 (Fig. 62) veranlaßt, die der Körper in dem Augenblicke erhält, wo er in A_1 angekommen ist; sie wird also dargestellt durch die Strecke A_1C, die gleich und parallel B_1A_2 ist.

Nun ist $\Delta A_1A_2B_1$ gleichschenklig, ebenso ist ΔOA_0A_1 gleichschenklig. Da nun beide gleichschenkligen Dreiecke denselben Winkel ε an der Spitze haben, so folgt, daß $\sphericalangle A_1B_1A_2 = \sphericalangle A_0A_1O$ ist. Hieraus ergibt sich, daß C auf dem Radius A_1O liegen muß, daß also die neu hinzutretende Bewegungskomponente nach dem Mittelpunkte des Kreises gerichtet sein muß.

Dieses Ergebnis ist eine Umkehrung des Flächensatzes, denn bei gleicher Bahngeschwindigkeit in A_0 und A_1 müssen auch die Entfernungen vom Bewegungszentrum, dem Punkte, nach dem die Zentralkomponente gerichtet ist, gleich sein, d. h. es muß die Richtung von A_1C durch den Kreismittelpunkt gehen.

Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke $A_1A_2B_1$ und OA_0A_1 folgt ferner die Proportion $A_1C : A_1A_2 = A_0A_1 : A_0O$. Setzen wir noch $B_1A_2 = A_1C = x$ und für die übrigen Größen die bekannten Werte, so wird $x : (v \cdot \Delta t) = (v \cdot \Delta t) : r$, woraus folgt $x = (v \cdot \Delta t)^2 : r$.

Wenn dem Körper die zentrale Geschwindigkeitskomponente nur in dem einen Punkte A_1 erteilt würde, so würde der von dem Körper infolge dieser einen Komponente in einer vollen Sekunde zurückgelegte Weg oder seine zentrale Geschwindigkeit $\left(\text{nach der Formel } c = \frac{s}{t}\right)$ den Wert $\frac{x}{\Delta t}$ haben; dann würde aber der Körper nur in A_1 um den Winkel ε abgelenkt. Damit der Körper dauernd auf der Kreisbahn bleibt, muß er nach Ablauf jedes Zeitelementes Δt von neuem abgelenkt werden, d. h. er muß in einer Sekunde $\frac{1}{\Delta t}$ mal solche zentralen Bewegungskomponenten erhalten. Die Gesamtgröße des nach dem Mittelpunkte hin gerichteten Geschwindigkeitszuwachses in einer Sekunde ist daher $\frac{x}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\Delta t}$. Da $\frac{x}{\Delta t}$ eine Geschwindigkeit ist, muß $\frac{x}{(\Delta t)^2} = b$ eine Beschleunigung darstellen. Setzen wir hierin noch den vorhin berechneten Wert für x ein, so wird $b = \frac{x}{(\Delta t)^2} = \frac{(v \cdot \Delta t)^2}{r \cdot (\Delta t)^2} = \frac{v^2}{r}$.

Die Bewegung eines Körpers längs eines Kreises mit dem Radius r ist also stets zusammengesetzt aus einer in der Richtung der Bahn (in der Richtung der Tangente) stattfindenden gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit v und einer dauernd nach dem Mittelpunkte des Kreises gerichteten gleichmäßig beschleunigten Bewegung, deren

(1) **Zentralbeschleunigung $b = \frac{v^2}{r}$** ist.

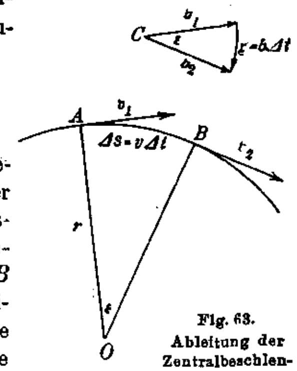

Fig. 63. Ableitung der Zentralbeschleunigung mittels des Hodographen.

Anmerkung: Die Ableitung dieser Formel geschieht noch einfacher mittels des Hodographen unter Benutzung von Fig. 63: Wenn sich der auf der Kreisbahn mit dem Mittelpunkte O und dem Radius r bewegte Körper mit der Geschwindigkeit v von A nach B und so fort bewegen soll, so muß die Zentralbeschleunigung $\mathfrak{b}$ eine Richtungsänderung der Tangente an die Kreisbahn um denselben Winkel ε hewirken, den die beiden Radien OA und OB miteinander einschließen.

Der Körper lege den Kreisbogen $\widehat{AB}$ in der Zeit Δt zurück, so daß demnach $\widehat{AB} = \Delta s = v \cdot \Delta t$ ist. In der Nebenfigur zu Fig. 63 sind von C aus zwei Strahlen parallel zu den Bahntangenten der Punkte A und B gezogen, und auf diesen sind die der Größe nach gleichen Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$, die der Körper in den beiden Punkten A und B hat, als Vektoren abgetragen. Damit nun der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}_1$ in den ihm an Größe gleichen, aber um den Winkel ε gedrehten Vektor $\mathfrak{v}_2$ übergeht, muß noch ein Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{x}$ geometrisch addiert werden. Er steht auf $\mathfrak{v}_2$ senkrecht. Da der Hodograph wegen der Unveränderlichkeit von v und damit seines eigenen Radiusvektors die Gestalt eines Kreises hat, ist der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{x}$ der Kreisbogen zum Mittelpunktswinkel ε. Die Zusatzgeschwindigkeit $\mathfrak{x}$ wächst proportional mit ε, dieses proportional mit der Zeit Δt. Daher ist $\mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{x}}{\Delta t}$ eine Beschleunigung; sie steht in jedem Punkte senkrecht zum Radius des Hodographen, daher im Bewegungskreise so, daß sie also dauernd zum Mittelpunkte O zielt. Aus der Ähnlichkeit des Sektors OAB mit dem Sektor des Hodographen folgt dann die Proportion $\mathfrak{x} : v = v \cdot \Delta t : r$, und es ergibt sich mit $\mathfrak{x} = \mathfrak{b} \cdot \Delta t$ die Gleichung

$$\mathfrak{b} = \frac{v^2}{r}.$$

Der Ausdruck für die Zentralbeschleunigung gestattet noch einige wichtige Umformungen, wenn man einige neue Begriffe einführt.

Die **Umlaufszeit** T ist die Zeit, die ein in geschlossener Bahn sich bewegender Körper gebraucht, um von einem Punkte seiner Bahn wieder bis zu demselben Punkte der Bahn zu gelangen. Da der Kreisumfang $2\pi r$ ist, den ein Körper in der Zeit T durchläuft, so folgt für seine Bahngeschwindigkeit $v = \frac{2\pi r}{T}$.

Unter Benutzung dieses Wertes wird die Zentralbeschleunigung

(2) $$b = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Die Begriffe **Winkelgeschwindigkeit** und **Winkelbeschleunigung** können durch folgende Überlegung veranschaulicht werden:

Beobachtet man von einem Punkte aus die Bewegung eines Körpers, z. B. eines fahrenden Eisenbahnzuges, der sich in einer Richtung bewegt, die nicht mit der Sehrichtung zusammenfällt, so erscheint der Körper zu verschiedenen Zeiten in verschiedenen Richtungen. Der von dem beobachtenden Auge aus gezogene Strahl (der Sehstrahl) führt eine Drehung aus. Ist der Eisenbahnzug sehr weit entfernt, so erfolgt diese Drehung langsamer, als wenn er sich in größerer Nähe befindet. Als Maß für die Drehung dient der Winkel, dessen Scheitelpunkt in unserem Auge liegt und dessen Schenkel die einzelnen Punkte der Bahn des Körpers verbinden. Erfolgt die Winkeldrehung gleichförmig, so *nennt man Winkelgeschwindigkeit* (w) *den Winkel, der in einer Sekunde zurückgelegt wird.*

Wenn sich ein Körper auf einer kreisförmigen Bahn bewegt, und wenn der vom Mittelpunkte der Bahn nach dem Körper gezogene Radius während der Zeit t den Winkel α bestreicht, so ist die Winkelgeschwindigkeit des Körpers $w = \frac{\alpha}{t}$. Hierbei wird der Winkel α gewöhnlich in Bogenmaß oder in Radian als Einheit (§ 3) gemessen. Erfolgt die Winkeldrehung nicht gleichförmig, so wird die Winkelgeschwindigkeit in einem Punkte, ähnlich wie die lineare Geschwindigkeit (§ 12), bestimmt durch den Quotienten $w = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ oder besser noch durch den Differentialquotienten $w = \frac{d\alpha}{dt}$. In derselben Weise ist Winkelbeschleunigung die Zunahme der Winkelgeschwindigkeit in einer Sekunde; sie wird gemessen durch $\omega = \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{\Delta^2\alpha}{\Delta t^2}$ oder durch den Differentialquotienten

$$\omega = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Ist (Fig. 64) der von dem Körper in der Zeit t zurückgelegte Weg $\mathfrak{s}$, der Radius der Bahn r und der zu $\mathfrak{s}$ gehörige Winkel α, so ist $\mathfrak{s} = \alpha \cdot r$. Ist die lineare Geschwindigkeit v, die Winkelgeschwindigkeit w, so ist $v = w \cdot r$. Setzen wir diesen Wert in die Gleichung $b = \frac{v^2}{r}$ ein, so folgt für die Zentralbeschleunigung

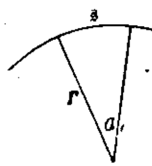

Fig. 64.

$$b = w^2 r.$$

Für den Fall, daß sich der Körper nicht auf einer Kreisbahn bewegt, sondern auf einer beliebig anders geformten Kurve, kann man ein unendlich kleines Stück der Kurve als Teil einer Kreisbahn ansehen. Der Radius dieses kleinen Kreisbogenelementes ändert sich dann im allgemeinen von Punkt zu Punkt, er wird der **Krümmungsradius** ϱ der Kurve in dem betrachteten Punkte genannt. Der ebenfalls veränderliche Mittelpunkt des das Kurvenelement ersetzenden Kreisbogenelementes heißt der **Krümmungsmittelpunkt**. Die Geschwindigkeit v des Körpers ändert sich dann ebenfalls von Punkt zu Punkt, sie kann nur durch den Differentialquotienten definiert werden. Natürlich ändert sich dann auch die Zentralbeschleunigung von Punkt zu Punkt. Statt des Wortes

Zentralbeschleunigung benutzt man besser das Wort **Normalbeschleunigung**. Für jeden einzelnen Punkt der Bahn gilt die Formel $b = \frac{v^2}{\varrho}$. Hieraus folgt:

Die Normalbeschleunigung eines Körpers, der sich mit unveränderlicher linearer Geschwindigkeit auf einer Bahn mit wechselnder Krümmung bewegt, ist dem Krümmungsradius umgekehrt proportional.

Die Mondbahn als Beispiel der Zentralbewegung. Die Mondbahn ist annähernd kreisförmig. Der mittlere Radius der Bahn (Entfernung des Mondes vom Mittelpunkt der Erde) ist $r = 384415{,}5$ km $= 3{,}8442 \cdot 10^{10}$ cm, die Umlaufszeit des Mondes um die Erde ist $T = 27^d 7^h 43^m 12^s = 2{,}3606 \cdot 10^6$ sec. Folglich ist seine Zentralbeschleunigung

$$b = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 3{,}8442 \cdot 10^{10}}{2{,}3606^2 \cdot 10^{12}} \text{ (cm/sec}^2\text{, gal)} = 0{,}27\,236 \text{ (cm/sec}^2\text{, gal)}.$$

Das Verhältnis dieser nach dem Erdmittelpunkte gerichteten Fallbeschleunigung b des Mondes zu der Fallbeschleunigung g auf der Erdoberfläche ist

$$\frac{b}{g} = \frac{0{,}27236}{981} = \text{rund } \frac{1}{60^2}.$$

Nun ist der Mond fast genau 60mal so weit vom Erdmittelpunkte entfernt wie ein Punkt der Erdoberfläche. Es folgt also das bemerkenswerte Ergebnis, daß das Verhältnis der Fallbeschleunigung des Mondes in Richtung nach der Erde zur Fallbeschleunigung eines Körpers auf der Erdoberfläche gleich dem Quadrate des umgekehrten Verhältnisses der Entfernungen vom Bewegungszentrum ist.

§ 22. Die Bewegung auf erzwungener Bahn. Projektion der Bewegung.

Die Bahn, d. i. die Form des Weges eines freibeweglichen Körpers ist durch seine Geschwindigkeit und die in jedem Punkte hinzutretende Beschleunigung vollständig bestimmt; die Bahn kann einem Körper auch durch einen äußeren **Zwang**, etwa durch ein Geleise vorgeschrieben werden. Wenn die Richtung der resultierenden Geschwindigkeit mit der Richtung der **erzwungenen Bahn** zusammenfällt, so bewegt sich der Körper so, als ob er frei wäre, und wenn keine Beschleunigung hinzutritt, so ist die Bahngeschwindigkeit beständig. Das bleibt sie auch dann, wenn die Bahn stetig gekrümmt ist. Wenn die in jedem Bahnpunkte hinzutretende Beschleunigung stets mit der Bahnrichtung zusammenfällt, so vermehrt sie die Geschwindigkeit so, als ob der Körper frei wäre. So wirkt z. B. die von einer Lokomotive hervorgerufene Beschleunigung eines Eisenbahnzuges ebenso, einerlei ob die Bahn gerade oder gekrümmt ist, weil die Beschleunigung immer in der Bahnrichtung erfolgt.

Wenn aber die resultierende Geschwindigkeit oder die auf den Körper wirkende Beschleunigung mit der Bahnrichtung einen Winkel einschließt, so müssen wir sie nach § 16 und § 20 als Vektoren in zwei Komponenten: die Tangentialkomponente und die Normalkomponente oder Zwangskomponente zerlegen, von denen die letztere durch den Bahnzwang aufgehoben wird, so daß demnach nur die erstere wirkt. Die Tangentialbeschleunigung τ der Beschleunigung γ, die mit der Bahn den Winkel α einschließt, beträgt nach § 16

$$\tau = \gamma \cdot \cos \alpha.$$

Wir können sie nach Fig. 65 dadurch finden, daß wir den Vektor der Beschleunigung auf die Bahntangente projizieren. Hieraus folgt:

Die Beschleunigung, die auf einen auf erzwungener Bahn beweglichen Körper wirkt, ist gleichwertig mit ihrer in der Bahnrichtung wirkenden Projektion auf die Bahn (bzw. auf die Bahntangente).

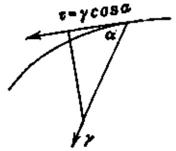

Fig. 65. Tangentialbeschleunigung auf erzwungener Bahn.

Bei der geneigten Bahn (Fig. 66) projizieren wir die lotrechte Fallbeschleunigung g auf die geneigte Bahn BB, deren Neigungswinkel ε ist. Aus der Figur ergibt sich dann sofort, daß die Fallbeschleunigung längs der geneigten Bahn $\tau = \gamma \cdot \sin \varepsilon$ ist. Das stimmt mit dem Versuchsergebnis von § 19 überein.

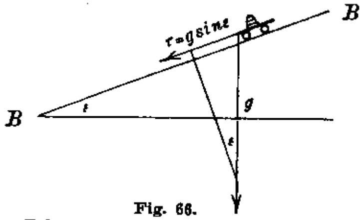

Fig. 66. Fallbeschleunigung auf erzwungener Bahn.

§ 23. Das konische Pendel.

Ein Körper, der sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf einer kreisförmigen Bahn mit dem Radius r bewegen soll, muß eine nach dem Mittelpunkte der Bahn gerichtete zentrale Beschleunigungskomponente $\gamma = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$ erfahren. Um eine Bewegung auf einer kreisförmigen Bahn zu erzeugen, stellen wir uns ein trichterförmiges Gefäß von der in Fig. 67 dargestellten Form her, das mit der Spitze O nach unten steht, und dessen Seitenwandungen nach der Spitze hin den Neigungswinkel α gegen die wagerechte Richtung haben. Jede Seitenlinie ϱ des flachen Kegels, aus dem das trichterförmige Gefäß besteht, hat die Neigung $\sin \alpha$ (S. 47).

Eine in der Nähe des oberen Randes in das Gefäß gelegte Kugel K bewegt sich auf einer Seitenlinie wie auf einer geneigten Bahn mit der Beschleunigung $\gamma' = g \cdot \sin \alpha$. Wenn man aber der Kugel einen wagerechten Stoß gibt, der zur Seitenlinie senkrecht ist, so kann man ihr eine solche Geschwindigkeit erteilen, daß sie sich auf der Trichterfläche in einem horizontalen Kreise bewegt. Ist die dem Körper erteilte Geschwindigkeit zu groß, so fliegt die Kugel aus dem Trichter heraus; ist sie zu klein, so bewegt sie sich in das Innere des Trichters hinein.

Bleibt die Kugel auf der wagerechten Kreisbahn, deren Radius r sein möge, und legt sie die Kreisbahn in der Zeit T einmal zurück, so ist die nach dem Mittelpunkte M der Kreisbahn gerichtete Zentralbeschleunigung $\gamma = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$. Nun kann sich die Kugel aber nur auf der Trichterwandung bewegen; diese ist also für die Kugel eine erzwungene Bahn (Fig. 68). Wollen

wir daher die Zentralbeschleunigung durch die lotrecht abwärts gerichtete Fallbeschleunigung g erzeugen, so müssen die Projektionen dieser beiden Beschleunigungen auf die Trichterwandung einander gleich sein. Folglich muß die Gleichung bestehen $g \cdot \sin \alpha = \gamma \cdot \cos \alpha$, woraus folgt $\gamma = g \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Setzen wir die beiden Werte für γ einander gleich, so wird

$$g \cdot \operatorname{tang} \alpha = \frac{4\pi^2 r}{T^2}, \quad \text{woraus folgt} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g \cdot \operatorname{tang} \alpha}}.$$

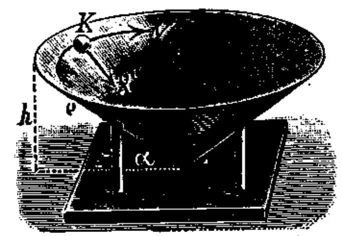

Fig. 67. Kugel, auf einem Kegelmantel umlaufend.

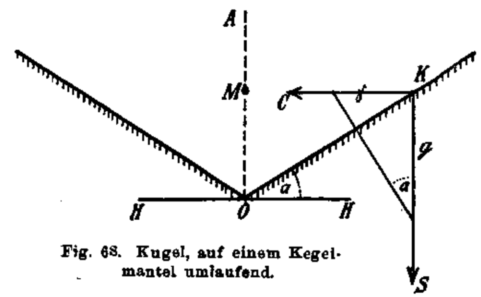

Fig. 68. Kugel, auf einem Kegelmantel umlaufend.

Für die praktische Ausführung des Versuches genügt es, den Winkel α so zu wählen, daß $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{arc} \alpha = 0{,}2$ ist; das entspricht dem Neigungswinkel $\alpha = 11^0 25'$. Es ist $\operatorname{arc} 11^0 25' = 0{,}199$, $\sin 11^0 25' = 0{,}199$, $\operatorname{tg} 11^0 25' = 0{,}202$. Die Abweichung von 0,2 ist so klein, daß sie für unsere Zwecke vernachlässigt werden kann. Deshalb wählen wir als Abmessungen des Trichters $h = 5$ cm, $\varrho = 25$ cm. Den Radius r des Horizontalkreises, längs dessen sich die Kugel bewegen soll, wählen wir zu $r = 20$ cm. Es ist dann

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{20}{981 \cdot 0{,}2}} = 2 \text{ sec.}$$

Bei einem Trichter von den angegebenen Abmessungen durchläuft die Kugel eine wagerechte Kreisbahn mit dem Radius $r = 20$ cm, wenn ihre Umlaufszeit zwei Sekunden beträgt. Soll sich die Kugel an einer tieferen Stelle ebenfalls in einer wagerechten Kreisbahn bewegen, so muß ihre Umlaufszeit kleiner sein, denn die Umlaufszeit ist der Quadratwurzel aus dem Kreisradius proportional. Bei einem Kreise vom Radius $r = 5$ cm beträgt die Umlaufszeit nur eine Sekunde.

Unveränderliche Umlaufszeit. Soll die Kugel an einer tieferen Stelle ebenfalls die Umlaufszeit von zwei Sekunden haben, so muß die Zentralbeschleunigung an dieser Stelle geringer sein. Das kann man dadurch erreichen, daß man die Neigung an einer tieferen Stelle geringer als an einer höheren Stelle des Trichters macht.

Soll $T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g \cdot \operatorname{tang} \alpha}}$ mit der Höhe unveränderlich bleiben, so muß $\frac{r}{\operatorname{tang} \alpha}$ denselben beständigen Wert haben. Der Trichter darf also nicht die Gestalt eines Kegels, sondern er muß die eines anderen Rotationskörpers haben.

Wir nehmen an, in Fig. 69 sei die gezeichnete Kurve der Achsenschnitt des gesuchten Rotationskörpers, K sei ein beliebiger Punkt der Rotationsfläche, an welche die im Achsenschnitts liegende Tangente KT gezogen ist, die mit der

Wagerechten den Neigungswinkel α einschließt. Wir errichten auf KT in K das Lot bis zum Durchschnitt mit der Achse in A, dann fällen wir von K auf die Achse das Lot $KB = r$. Es ist $\sphericalangle KAB = \alpha$. Ferner setzen wir $AB = t$; dann soll sein $t = \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha} =$ konstant. Nun ist KA die Normale, $AB = t$ die Subnormale, bezogen auf die Achse. Der Achsenschnitt des

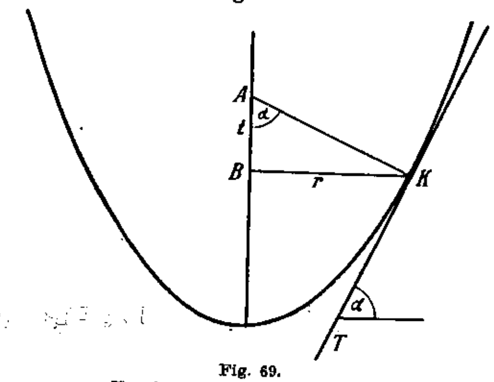

Fig. 69.
Kugel, im Paraboloid umlaufend.

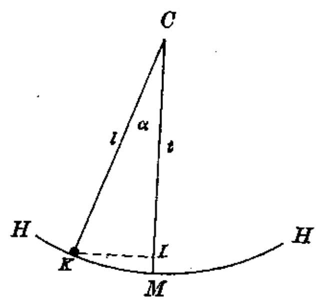

Fig. 70.
Kugel in einer Kugelschale.

Rotationskörpers muß also eine konstante Subnormale haben. Daraus folgt, daß die Kurve eine Parabel, die gesuchte Fläche also ein Rotationsparaboloid ist.

In einem Rotationsparaboloide mit lotrechter Achse ist die Umlaufszeit eines im horizontalen Kreise umlaufenden Körpers in allen Höhen dieselbe; sie ist $T = 2\pi\sqrt{\frac{t}{g}}$, *wo t die Subnormale der erzeugenden Parabel ist.*

Unter der Voraussetzung, daß sich die Kugel nur in dem unteren, dem Scheitel nahen Gebiete des Rotationsparaboloides bewegen soll, können wir dieses Gebiet durch eine Kugelschale ersetzen, deren Halbmesser gleich dem Krümmungsradius der erzeugenden Parabel am Scheitel ist. Wir können die Kugel zu einer Bewegung auf einer Kugelschale am einfachsten dadurch zwingen, daß wir sie an einem Faden aufhängen. So sei in Fig. 70 der Körper K an einem Faden von der Länge l aufgehängt, der im Punkte C befestigt ist. Dadurch ist die Bewegung des Körpers auf der durch HH angegebenen Kugelschale erzwungen. Im Ruhezustande nimmt der Körper die tiefste Stelle M der Kugelschale ein, und CM ist lotrecht. Wir fällen noch von K auf CM die Senkrechte, so daß $CL = t = l \cdot \cos\alpha$ die Projektion von CK auf die lotrechte Ruhelage ist. Da der Faden die Normale in jedem Punkte der Kugelschale ist, so ist CL die Subnormale; daher beträgt die Umlaufszeit des Körpers in der wagerechten Kreisbahn $T = 2\pi\sqrt{\frac{t}{g}}$.

Ein an einem Faden aufgehängter Körper, der sich unter Spannung des Fadens allseitig bewegen kann, wird ein Pendel genannt. Die Länge des Fadens heißt die **Pendellänge.**

Wenn sich der Pendelkörper auf einer wagerechten Kreisbahn bewegt, so beschreibt der Pendelfaden den Mantel eines Kreiskegels: daher heißt ein

so bewegtes Pendel ein **Kegelpendel** oder ein **konisches Pendel.** Der Winkel α, den die Seitenlinie des Kegelmantels mit der Achse des Kegels einschließt, heißt die **Amplitude** oder **Schwingungsweite** des Pendels.

Aus der obigen Ableitung folgt: *Die Umlaufszeit T eines Kegelpendels von der Länge l, dessen Schwingungsweite α ist, beträgt* $T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}$.

Wird die Schwingungsweite α so klein gewählt, daß man $\cos\alpha = 1$ setzen darf, so vereinfacht sich die Formel zu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Diese Annahme besagt, daß die Projektion CL (Fig. 70) des Pendels auf seine Gleichgewichtslage gleich der Pendellänge gesetzt werden darf. Das gilt offenbar nur für kleine Schwingungsweiten. Die Größe des hierbei gemachten Fehlers kann auf folgende Weise berechnet werden:

Der genaue Ausdruck für T läßt sich schreiben $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \sqrt{\cos\alpha}$. Der letzte Faktor kann folgendermaßen umgeformt werden $\sqrt{\cos\alpha} = \sqrt{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^{1/2}$. Entwickelt man den Ausdruck nach dem binomischen Lehrsatze, so heißen die ersten Glieder $\left(1 - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin^6\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ldots\right)$. Läßt man nur kleine Werte von α zu, so kann man die Entwicklung auf die ersten beiden Glieder beschränken; daher gilt annähernd die Formel für die Umlaufszeit des konischen Pendels

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left[1 - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

Beschränkt man sich nur auf das erste Glied der Entwicklung, so vereinfacht sich die Formel zu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Der durch Vernachlässigung des zweiten Gliedes gemachte Fehler beträgt $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Er ist für

$\alpha =$	1	2	3	4	5
$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) =$	0,00007	0,00030	0,00068	0,00122	0,00190
	6	7	8	9	10°
	0,00274	0,00373	0,00487	0,00616	0,00760

Bei Schwingungsweiten, die kleiner als 4° sind, beträgt der Fehler demnach weniger als $^1/_8$ %.

§ 24. Das ebene Pendel.

Ein an einem Faden aufgehängter Körper (ein einfaches Pendel) nimmt eine solche Lage an, daß der Faden in der Ruhelage lotrecht ist. Bringt man das Pendel aus dieser Ruhelage und läßt es dann los, so führt es

Schwingungen in einer Ebene aus, die sich auf die Bewegung des Kegelpendels durch folgenden Versuch zurückführen lassen (Fig. 71).

Man hängt unter der Decke des Zimmers vor einer lotrechten weißen Wand ein einfaches Fadenpendel auf und bringt es durch einen passenden Stoß so in Bewegung, daß sich der Pendelkörper auf wagerechter Kreisbahn bewegt, also als Kegelpendel schwingt. Beleuchtet man nun das Kegelpendel durch eine punktförmige Lichtquelle, z. B. durch den Lichtkrater einer elektrischen Bogenlampe, so entsteht auf der weißen Wand ein bewegtes Schattenbild, das mit der Bewegung eines in einer Ebene schwingenden Pendels übereinstimmt. Wenn die punktförmige Lichtquelle genügend weit vom Pendel und von der Wand entfernt ist, können wir das Schattenbild als rechtwinklige Parallelprojektion der Schwingungen des Kegelpendels ansehen.

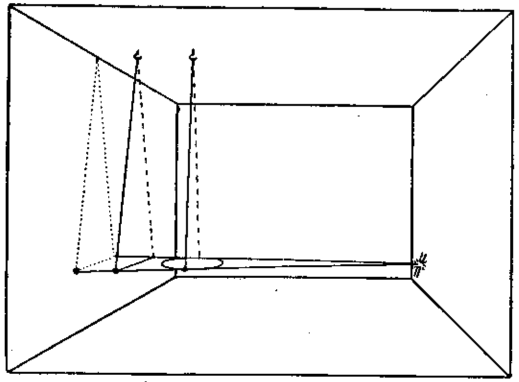

Fig. 71. Die Projektion einer Kreisbewegung.

Wir hängen in einem Abstande von etwa $^1/_2$ m hinter dem konisch schwingenden Pendel vor der weißen Wand ein zweites Pendel von derselben Länge auf, das ebene Schwingungen ausführt, deren Schwingungsebene zur weißen Wand parallel ist. Bei weit entfernter Lichtquelle ist das Schattenbild der Schwingungen des ebenen Pendels mit den Schwingungen des ebenen Pendels selbst übereinstimmend. Versetzen wir nun nach Fig. 71 gleichzeitig das konische und das ebene Pendel in Schwingungen von derselben Schwingungsweite, und zwar so, daß das ebene Pendel in demselben Augenblicke durch die Ruhelage geht wie das Kegelpendel, so decken sich bei kleiner Schwingungsweite die Schattenbilder der beiden Pendel in jedem Punkte ihrer Bewegung; die Schwingungen eines ebenen Pendels fallen bei kleiner Schwingungsweite mit der Projektion der Schwingungen eines gleich langen Kegelpendels zusammen.

Beide Pendel haben dieselbe Pendellänge l. Der Versuch zeigt, daß beide Pendel auch dieselbe Schwingungszeit T haben, folglich gilt auch für das ebene Pendel die schon für das Kegelpendel abgeleitete Formel:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

In Worten: *Bei kleinen Schwingungsweiten ist die Schwingungszeit eines ebenen Pendels der Quadratwurzel aus der Pendellänge gerade und der Quadratwurzel aus der Beschleunigung des freien Falles verkehrt proportional.*

Wenn wir die beiden Schattenbilder auf der weißen Wand genau vergleichen, so beobachten wir, daß das Schattenbild des ebenen Pendels, besonders bei größerer Schwingungsweite, in seiner mittleren Lage nicht genau

mit dem Schattenbilde des konischen Pendels übereinstimmt. Bei der Projektion der wagerechten Kreisbewegung des Körpers beim Kegelpendel entsteht auf dem weißen Schirme eine genau wagerechte gerade Linie, während das Schattenbild des ebenen Pendels so wie das ebene Pendel selbst einen Kreisbogen beschreibt. Beschränkt man sich auf kleine Schwingungsweiten, so kann man die Bewegungen praktisch als zusammenfallend ansehen. Bei größeren Schwingungsweiten dagegen ist das nicht mehr möglich. Wir erkennen aus unserem Versuche, daß die Beschränkung für die Gültigkeit der vereinfachten Pendelformel übereinstimmt mit der aus den theoretischen Ableitungen für das konische Pendel folgenden Annahme, daß die Projektion des Pendels auf seine Gleichgewichtslage gleich der Pendellänge gesetzt werden kann. Man kann der beschränkenden Bedingung noch eine andere Form geben, wenn man beachtet, daß sich das ebene Pendel längs des Kreisbogens, die Projektion des konischen Pendels aber längs der Sehne bewegt: Die vereinfachte Pendelform gilt nur insoweit, als man arc $\alpha = \sin\alpha$ setzen darf.

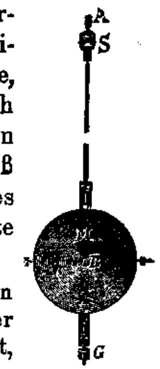

Fig. 72 Pendel mit drehbarer Pendelscheibe.

Die Ableitung der Formel für die Schwingungszeit eines ebenen Pendels war unter der Voraussetzung gemacht worden, daß sich der an dem Faden hängende Körper wie ein materieller Punkt verhält, d. h. also, daß sich alle Punkte des Körpers in kongruenten, parallelen Bahnen bewegen. Diese Voraussetzung ist bei einem an einem Faden hängenden, größeren Körper nicht erfüllt, da sich die einzelnen Teile des Körpers auf Kreisbögen bewegen, deren Mittelpunkt der Aufhängepunkt des Fadens ist. Aus dem Grunde ist die Messung der Pendellänge auch nicht unmittelbar ausführbar, wenn man nicht einen Körper von verschwindend kleinen Abmessungen verwendet.

Es gelingt nun aber durch folgende Einrichtung eines Pendels (Fig. 72) die gemachte Voraussetzung zu erfüllen. An einer Pendelstange, deren Länge sich mit Hilfe zweier am oberen Ende befindlichen Stellschrauben S innerhalb kleiner Grenzen verändern läßt, sind zwei einander zugekehrte Schneiden A und B, die etwa 1 m Abstand voneinander haben, angebracht. Mittels der oberen Schneide A wird das Pendel leicht drehbar aufgehängt. Auf der unteren Schneide B ruht, ebenfalls leicht drehbar, eine schwere Metallscheibe M. Die Aufhängung geht durch den Mittelpunkt, genauer den Massenmittelpunkt (§ 46) der Scheibe. Wenn das Pendel in Schwingungen versetzt wird, so bewegt sich die schwere Pendelscheibe M, ohne sich zu drehen, so daß alle einzelnen Punkte parallele und kongruente Bahnen beschreiben. Wenn man nun durch ein am unteren Ende der Pendelstange angebrachtes Reguliergewicht G erreicht, daß die Pendelstange ohne die Scheibe dieselbe Schwingungszeit hat wie mit derselben, so kann man den Mittelpunkt der Scheibe als materiellen Punkt auffassen. Der Abstand AB der beiden Schneiden ist dann gleich der Pendellänge l.

Wenn man die Pendellänge l eines Pendels genau messen kann, so gestattet die Formel

$$T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$$

die Fallbeschleunigung g genau zu bestimmen, also auch die Verschiedenheit der Fallbeschleunigung an verschiedenen Orten auf der Erdoberfläche nachzuweisen.

Ein Pendel, das zu einer vollständigen Schwingung zwei Sekunden, also zu einer halben Schwingung eine Sekunde braucht, heißt ein **Sekundenpendel**. Die Länge L des Sekundenpendels kann man aus der abgeleiteten Formel für die Schwingungszeit berechnen, wenn man $T = 2\,\text{sec}$ und $g = 981\ \text{cm/sec}^2$ setzt. Es ist dann $2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{981}}$, also hieraus

$$L = \frac{981}{\pi^2}\ \text{cm} = 98{,}3\ \text{cm}.$$

§ 25. Die harmonische Bewegung.

Die Pendelbewegung ist ein besonderer Fall einer oft in der Natur vorkommenden Art von Bewegungen, der **harmonischen** Bewegungen. Eine harmonische Bewegung findet stets dann statt, wenn ein Körper um eine Gleichgewichtslage Schwingungen ausführt, bei denen die nach dem Gleichgewichtspunkte gerichtete Beschleunigung dem längs der Bahn gemessenen Abstande des Körpers von der Gleichgewichtslage proportional ist.

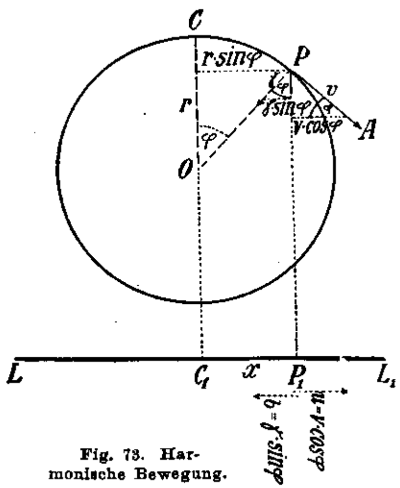

Fig. 73. Harmonische Bewegung.

Alle harmonischen Bewegungen lassen sich durch die Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung auf eine in der Ebene der Kreisbahn liegende Gerade zurückführen.

Der Punkt P (Fig. 73) bewege sich mit der beharrlichen Geschwindigkeit v längs des Kreises mit dem Mittelpunkte O und dem Radius r rechts herum. Wir betrachten die Bewegung von dem Augenblicke an, wo sich P in C befindet. Wir ziehen den Radius OP und nennen $\sphericalangle COP = \varphi$ die Phase[1]) des Punktes P. Die Umlaufszeit T (S. 55) des Punktes P ist durch die Gleichung $v = \frac{2\pi r}{T}$ bestimmt.

Die Zeit t, die P zum Durchlaufen des Bogens $\widehat{CP}$ gebraucht hat, ist durch die Proportion $t : T = \varphi : 2\pi$ bestimmt, woraus folgt

$$t = \frac{T}{2\pi}\cdot\varphi \qquad \text{oder} \qquad \varphi = \frac{2\pi}{T}\cdot t.$$

Die Bewegung des Punktes P soll auf die Gerade LL_1 projiziert werden, wobei LL_1 so gelegt wird, daß die Verlängerung von CO auf LL_1 senkrecht steht. Die Projektion von C sei C_1, diejenige von P sei P_1. Es ist

$$C_1P_1 = x = r\cdot\sin\varphi.$$

Die Geschwindigkeit, mit der sich P_1 längs LL_1 bewegt, ist durch die Projektion von v auf LL_1 bestimmt. Sie ist $u = v\cdot\cos\varphi$.

1) phásis (griech.) = Das Erscheinen.

Wir wissen (§ 21), daß, wenn sich P auf einer Kreisbahn bewegen soll, eine nach dem Bewegungszentrum O gerichtete zentrale Beschleunigung $\gamma = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$ auf den Punkt P einwirken muß. Die Beschleunigung, die P_1 längs LL_1 in der Richtung nach C_1 hin erfährt, ist durch die Projektion von γ auf LL_1 bestimmt. Sie ist $b = \gamma\cdot\sin\varphi$. Hierbei ist zu beachten, daß die Beschleunigung b nach dem Punkte C_1 gerichtet, also entgegengesetzt gerichtet ist zur Richtung der Strecke x und auch entgegengesetzt gerichtet zur Richtung der Geschwindigkeit u; daher ist ihr bei der Berechnung das negative Vorzeichen zu geben.

Während sich der Punkt P längs der Kreisbahn mit der unveränderlichen Geschwindigkeit v und der unveränderlichen Beschleunigung γ bewegt, bewegt sich seine Projektion P_1 längs LL_1 mit veränderlicher Geschwindigkeit und veränderlicher Beschleunigung.

Der Abstand x des Punktes P von seinem Gleichgewichtspunkte heißt die **Elongation**[1]) oder **Verrückung** des Punktes.

Für die Verrückung x, die Geschwindigkeit u und die Beschleunigung b gelten die drei Gleichungen

$$1.\ x = r\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \qquad 2.\ u = v\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \qquad 3.\ b = -\gamma\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

Aus den Gleichungen 1. und 3. folgt $b = -\frac{\gamma}{r}\cdot x$.

Die Beschleunigung b, die der Punkt P_1 erfährt, ist stets seiner Verrückung proportional und entgegengesetzt gerichtet wie sie. Dieses ist ein wesentliches Merkmal der harmonischen Bewegung.

Nach den Regeln der Differentialrechnung gewinnt man aus $x = r\sin\varphi = r\sin\frac{2\pi}{T}t$ sehr schnell

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi r}{T}\cos\frac{2\pi t}{T} = v\cos\frac{2\pi t}{T}$$

und

$$b = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} = -\frac{4\pi^2 r}{T^2}\sin\frac{2\pi t}{T} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot x.$$

Während der Punkt P den Kreisumfang einmal durchläuft, bewegt sich P_1 längs LL_1 einmal hin und her. Die größte Entfernung, die P_1 von dem mittleren Punkte C_1 seiner Bahn hat, ist $x_{\max} = r$, daher ist r die *Amplitude* oder *Schwingungsweite* der von P_1 ausgeführten Schwingung. Die zentrale Beschleunigung des Punktes P ist $\gamma = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$, (S. 56 (2)) woraus folgt $T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{\gamma}}$.

Da nach Gleichung 1. und 3. $\frac{r}{\gamma} = -\frac{x}{b}$ ist, so folgt $T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{-x}{b}}$.

Bezeichnen wir noch die Beschleunigung, die P_1 dann erfährt, wenn er von C_1 den Abstand -1 cm hat, mit Γ, so ist

$$-\frac{x}{b} = \frac{1}{\Gamma}, \qquad \text{also} \qquad \boldsymbol{T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{1}{\Gamma}}}.$$

Bei der Zeichnung der Schaulinien der harmonischen Bewegung tragen

1) elongatio (lat.) = Ausweichung.

wir die Zeit t oder die ihr proportionale Phase φ als Abszissen auf. In Fig. 74 sind die Schaulinien für die Verrückung, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung der harmonischen Bewegung abgebildet.

Wegen der Eigenschaft, daß die Verrückung, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung dem Sinus (bzw. Kosinus) proportional sind, nennt man die harmonischen Schwingungen **Sinusschwingungen.**

Die Schwingungsbewegung eines ebenen Pendels ist *bei kleiner Schwingungsweite* eine harmonische Bewegung, weil die nach dem Mittelpunkte der

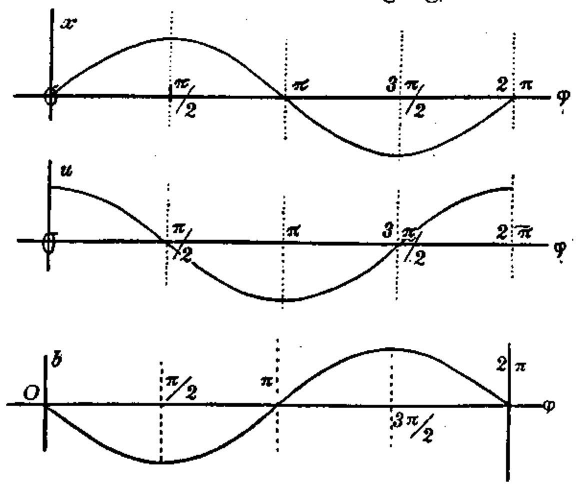

Fig. 74. Verrückung, Geschwindigkeit und Beschleunigung einer harmonischen Bewegung in ihrer Abhängigkeit von der Zeit.

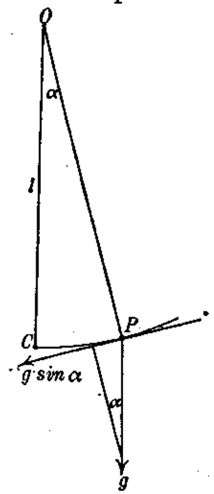

Fig. 75. Zerlegung der Beschleunigung einer Pendelschwingung.

Bewegung (der Gleichgewichtslage) gerichtete Beschleunigung mit der Entfernung des Pendels von der Gleichgewichtslage proportional ist:

Es stelle OC (Fig. 75) die Gleichgewichtslage eines Pendels mit der Länge l dar, das sich nur auf einem Kreisbogen mit dem Mittelpunkte O bewegen kann. Wenn das Pendel in einem beliebigen Punkte P seiner Bahn ist, möge es den in Bogenmaß gemessenen Winkelabstand α von der Gleichgewichtslage haben; dann ist $CP = x = l \cdot \alpha$. Das Pendel erfährt in P die lotrecht nach abwärts gerichtete Beschleunigung g. Da es sich aber nur auf dem Kreisbogen bewegen kann, so wirkt nur die Projektion von g auf die in P gezogene Bahntangente; daher ist $b = -g \cdot \sin \alpha$, wobei das Minuszeichen angeben soll, daß α und b entgegengesetzten Richtungssinn haben.

Ist die Schwingungsweite des Pendels nur klein, so nimmt auch α nur kleine Werte an, für die $\sin \alpha = \alpha$ gesetzt werden darf. Demnach kann man setzen $b = -g \cdot \alpha$. Verbindet man mit dieser Gleichung die obige $x = l \cdot \alpha$, so folgt

$$b = -\frac{g}{l} \cdot x.$$

Danach ist b proportional zu $-x$, das ist aber das wesentliche Merkmal der harmonischen Bewegung.

Für den Wert $x = -1$ (cm) (S. 65) **geht die letzte Gleichung über in** $\Gamma = \frac{g}{l}$. **Setzt man diesen Wert in die oben allgemein abgeleitete Gleichung für die Schwingungszeit einer harmonischen Bewegung ein, so wird**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Diese rein theoretische Gleichung stimmt mit der in § 24 teilweise induktiv gewonnenen Gleichung überein.

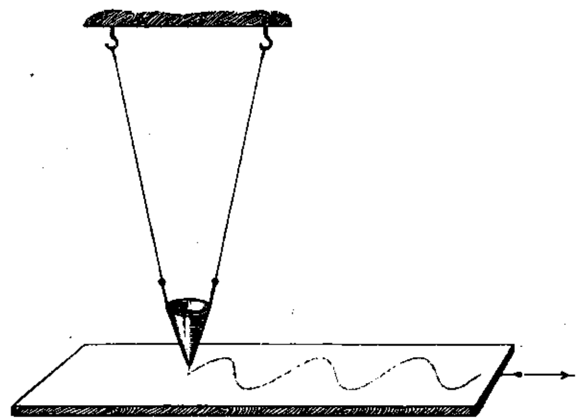

Fig. 76. Aufzeichnung einer Pendelschwingung.

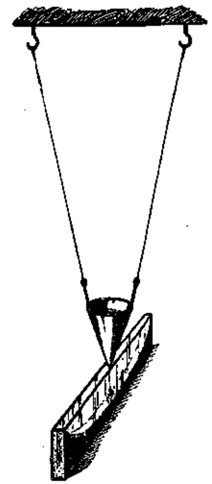

Fig 77. Schwingendes Gefäß mit auslaufendem Sand.

Der experimentelle Nachweis dafür, daß die Pendelschwingungen (bei kleinen Schwingungsweiten) Sinusschwingungen sind, kann in folgender Weise geführt werden:

Wir hängen nach Fig. 76 als Pendel an zwei langen Fäden unter der Decke des Zimmers ein schweres trichterförmiges Gefäß mit einer Öffnung auf und versetzen dieses Pendel in Schwingungen. Füllen wir dann das Gefäß mit feinem Sande, und ziehen wir mit gleichförmiger Geschwindigkeit senkrecht zur Schwingungsebene ein ebenes Brett unter dem Trichter entlang, so zeichnet der ausfließende Sand auf dem Brette eine Sinuskurve als Schaulinie des Weg-Zeit-Gesetzes auf.

Lassen wir während einiger Schwingungen den Sand in ein schmales Glasgefäß laufen (Fig. 77), so häuft sich der Sand an denjenigen Stellen am meisten, wo das Pendel die geringste Geschwindigkeit hat; die Füllhöhe ist an jeder Stelle umgekehrt proportional zur Geschwindigkeit. So bildet sich in dem Glasgefäße eine Sandoberfläche, deren Höhe dem Kosinus der Phase umgekehrt proportional ist.

§ 26. Zusammensetzung von Sinusschwingungen.

Lissajoussche Figuren. Führt ein Körper gleichzeitig zwei Schwingungen aus, so wird die resultierende Bewegung nach dem Parallelogrammsatze gefunden. Die Zusammensetzung zweier Sinusschwingungen, deren Richtungen senkrecht aufeinander stehen, soll zuerst für den Fall behandelt werden, daß die beiden Sinusschwingungen dieselbe Schwingungszeit und dieselbe Schwingungsweite haben.

Der Körper führe die eine Schwingung um die Gleichgewichtslage O (Fig. 78) längs der Geraden AB, die andere um denselben Punkt O längs der Geraden CD aus. Um die Lage des schwingenden Körpers für einige Punkte zu zeichnen, ziehen wir durch die äußersten Grenzlagen A und C die zu den Schwingungsrichtungen parallelen Geraden, die sich in E schneiden; dann schlagen wir um A und C als Mittelpunkte mit AE und CE als Halbmesser Kreise. Die geradlinigen Schwingungen sind die Projektionen der Bewegungen, die der Punkt E ausführen würde, wenn er sich auf den beiden gezeichneten Kreisen mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen würde (S. 64). Es sind auf den Kreisen vier um je $45^0 = \frac{\pi}{4}$ Radian voneinander abstehende Punkte 1, 2, 3, 4 und I, II, III, IV angegeben. Die Punkte 1, 2, 3, 4 projizieren wir auf die Gerade AB, die Punkte I, II, III, IV auf die Gerade CD. Die Projektionen sind dann die Punkte, in denen sich der Körper nach je einer Achtelschwingung befinden würde, wenn er nur die eine Schwingung ausführte.

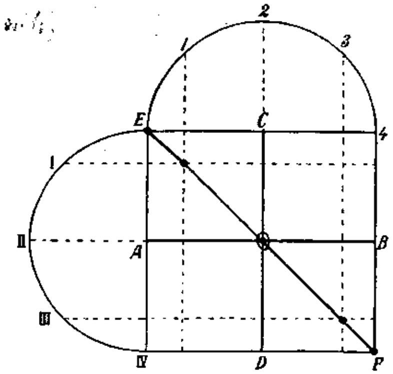

Fig. 78. Zusammensetzung zweier senkrechter Schwingungen gleicher Phase, Schwingungsweite und Schwingungsdauer.

Wenn der Körper gleichzeitig an beiden Schwingungen teilnimmt, und wenn beide Schwingungen gleichzeitig mit ihrer äußersten Grenzlage, **mit gleicher Phase**, anfangen, so liegt der Beginn der resultierenden Schwingung in E. Ebenso finden wir die übrigen Punkte der resultierenden Schwingung als Schnittpunkte der in der Figur gestrichelt gezeichneten Linien. Da die Schwingungszeiten und Schwingungsweiten beider Einzelschwingungen gleich sind, so liegt der Endpunkt der resultierenden Schwingung auf dem vierten Eckpunkte F des gezeichneten Quadrates. Die resultierende Schwingung erfolgt längs der Diagonalen EF um den Mittelpunkt O; sie ist ebenfalls **eine einfache geradlinige Sinusschwingung.**

Erfolgen die beiden Schwingungen mit einer solchen Phasendifferenz, daß in dem Augenblicke, wo der Körper infolge der ersten Schwingung in O ist und sich nach B bewegt, er infolge der zweiten Schwingung in C ist und anfängt, sich nach D zu bewegen, so sind die beiden Teilschwingungen **um die Phase einer Viertelschwingung gegeneinander verschoben.** Um die resultierende Schwingung zu finden, setzen wir die beiden Einzelschwingungen nach dem Parallelogrammsatze zusammen. Zur Zeichnung sind dann genau dieselben Linien zu ziehen wie in Fig. 78. Für die Bestimmung der resultierenden Schwingung brauchen wir aber nur die Schnittpunkte der mit den Seiten des Quadrates parallelen Geraden. Deshalb sind in Fig. 79 nur diese Schnittpunkte angegeben. Durch Zusammensetzung entsteht die kreisförmige Schwingung von Fig. 79. Die Orte, an denen sich der Körper befinden würde, wenn er jede Schwingung einzeln ausführen würde, sind durch fortlaufende Zahlen angegeben. Der resultierende Punkt ist derjenige Punkt, dessen Abszisse und Ordinate die Verrückungen der einzelnen Schwingungen sind. Der Sinn der Bewegung ist durch den doppelten Pfeil bezeichnet. Durch Zusammensetzung zweier linearer Sinusschwingungen, deren Phasendifferenz eine Viertel-Periode $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ist, entsteht eine **kreisförmige (zirkulare) Schwingung.**

Beträgt die **Phasendifferenz eine Achtel-Periode,** so entsteht die durch Fig. 80 dargestellte **elliptische Schwingung.** Auch bei jeder anderen Phasendifferenz mit Ausnahme eines Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ entsteht eine elliptische Schwingung, deren Form sich um so mehr der geradlinigen Schwingung nähert, je mehr sich die Phasendifferenz einem geraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$

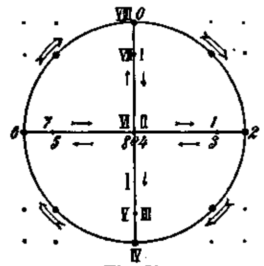
Fig. 79.

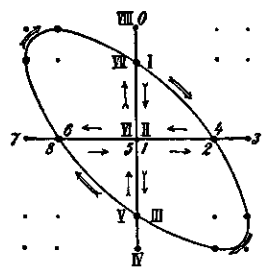
Fig. 80.

Zusammensetzung bei ungleicher Phase.

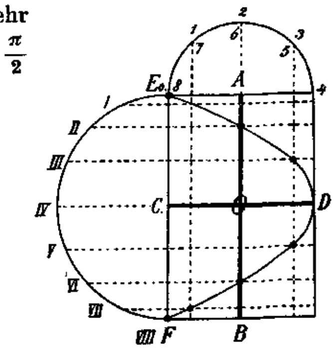

Fig. 81. Schwingungsweiten im Verhältnis $^2/_3$ und Schwingungsdauer im Verhältnis $^1/_2$.

nähert. Die elliptische Schwingung wird einer Kreisschwingung um so ähnlicher, je mehr sich die Phasendifferenz einem ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ nähert.

Die durch Zusammensetzung zweier Sinusschwingungen erzeugte Figur heißt **Lissajoussche**[1]) **Figur.**

Auch dann, wenn die Schwingungsweiten und Schwingungszeiten der beiden Schwingungen nicht übereinstimmen, entstehen zusammengesetzte Schwingungsfiguren. In Fig. 81 sind durch Zeichnung zwei Schwingungen zusammengesetzt, deren Schwingungsweiten sich wie 2 : 3 verhalten, deren Schwingungszeiten sich wie 1 : 2 verhalten, und die ohne Phasendifferenz[2]) (bei E_0) ihre Schwingungen beginnen. In Fig. 82 ist eine Reihe von Lissajousschen Figuren zusammengestellt. In der ersten lotrechten Reihe sind die Schwingungszeiten der Komponenten einander gleich, in der zweiten beträgt das Verhältnis

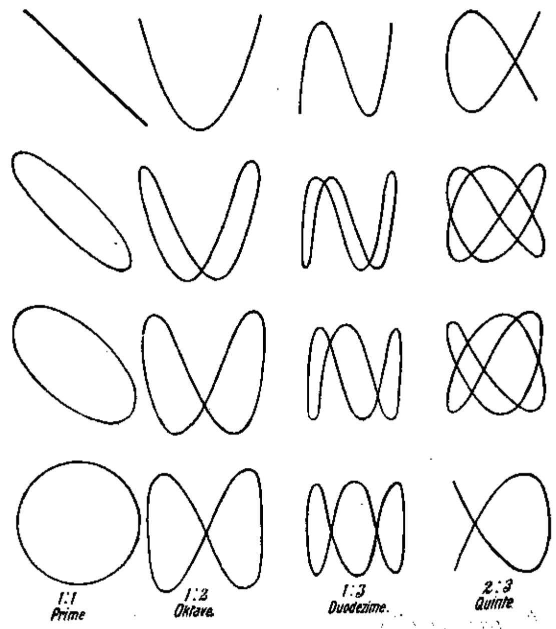

Fig. 82. Lissajonssche Figuren.

1) Lissajous, Jules Antoine, 1822—1880, franz. Physiker.

2) Zwei schwingende Bewegungen ungleicher Schwingungsdauer haben nur in einem bestimmten Zeitpunkte eine bestimmte Phasendifferenz.

1 : 2, in der dritten 1 : 3, in der vierten 2 : 3. In der ersten wagerechten Reihe beträgt die Phasendifferenz beim Beginne der Schwingungen 0, in der zweiten $\frac{\pi}{6}$, in der dritten $\frac{2\pi}{6}$, in der vierten $\frac{3\pi}{6}$.

Zusammensetzung von Pendelschwingungen. Fig. 83. An der Zimmerdecke werden vier Haken A, B, C, D als Ecken eines Quadrates von 1 m Seitenlänge eingeschraubt, und hieran hängen Schnüre von 3 m Länge. Auf etwa halber Länge sind die von A und C, desgl. die von B und D herabhängenden Schnüre durch Ringe zusammengefaßt, die an den Enden eines 1 m langen Stabes EF befestigt sind. Von hier aus gehen die Fäden paarweise vereinigt nach unten zusammen, und hier ist ein schweres trichterförmiges Gefäß G aufgehängt, das an der unteren Spitze eine feine Öffnung hat.

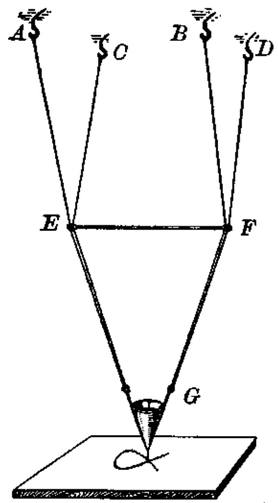

Fig. 83. Zusammensetzung von Pendelschwingungen (Abendroth).

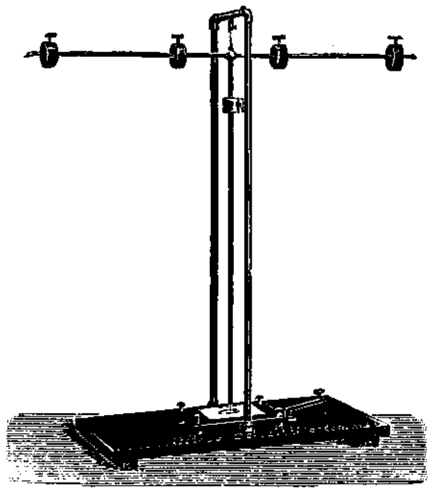

Fig. 84. Zusammensetzung von Pendelschwingungen (Grimsehl).

Wenn das Gefäß in einer Ebene, die senkrecht zu EF liegt, aus der Gleichgewichtslage gebracht wird, so führt es Pendelschwingungen aus um EF als Achse. Die oberen Enden der Fäden bleiben hierbei vollständig in Ruhe.

Wenn das Gefäß in einer Ebene parallel EF aus der Gleichgewichtslage gebracht wird, so entstehen die Pendelschwingungen in dieser Ebene. Als Pendellänge kommt dann nur der Abstand von EF bis zur Zimmerdecke in Betracht, da das Dreieck EFG in dieser Ebene nicht schwingungsfähig ist. Zur Festlegung der Schwingungsfiguren schüttet man in das trichterförmige Gefäß gesiebten trockenen Sand und stellt unter das Gefäß ein wagerechtes Brett, z. B. den Tisch. Der ausfließende Sand zeichnet dann die Schwingungen ohne Störung selbständig auf. Wenn man die Stange EF nach oben oder unten verschiebt, so werden die Schwingungszeiten beider Pendel im entgegengesetzten Sinne geändert, also wird hierdurch auch das Verhältnis der Schwingungszeiten zueinander geändert. Man kann somit jede der abgebildeten Figuren und noch viele andere erzeugen.

Bringt man das Gefäß in einer Ebene aus der Gleichgewichtslage, deren Richtung mit der Diagonalen des Quadrates $ABCD$ zusammenfällt, so führt es gleichzeitig beide Schwingungen aus. Es bewegt sich, wenn die Schwingungsweiten und Schwingungszeiten beider Teilschwingungen gleich sind, in einer Sinusschwingung parallel zu den Diagonalen des oberen Quadrates, beschreibt also die durch Fig. 78 dargestellte geradlinige Schwingung EF. Bringt man G in der Ebene von EF aus der Gleichgewichtslage, läßt das Gefäß nun los und gibt ihm gleichzeitig einen seitlichen Stoß von der Stärke, daß wieder die Schwingungsweiten beider Schwingungen gleich sind, so entsteht die kreisförmige Schwingung von Fig. 79. Erteilt man den seitlichen Stoß in dem Augenblicke, wo G schon die eine Schwingung begonnen hat, so entsteht die elliptische Schwingung von Fig. 80.

In bequemer Weise kann man die durch die Zusammensetzung zweier aufeinander senkrecht stehender Pendelschwingungen erzeugte Schwingungsfigur mittels des in Fig. 84 abgebildeten Apparates aufzeichnen. Der Apparat besteht aus einer Pendelstange, die am oberen Querbalken eines Ständers mittels eines kurzen Stahldrahtes aufgehängt ist, und auf der ein Laufgewicht verschiebbar ist. Am oberen Ende der Pendelstange ist eine Querstange befestigt, auf der vier Laufgewichte verschoben werden können. Das andere Ende der Pendelstange trägt eine einfache Schreibvorrichtung, nämlich die Spitze eines dünnen Glasstabes, der sich in der Achse der Pendelstange ein wenig auf und ab bewegen kann. Die Glasspitze schreibt die Bewegung des unteren Endes der Pendelstange auf einer bestäubten Glasplatte auf, wenn diese durch einen Druck auf den unten rechts befindlichen Hebel gehoben worden ist.

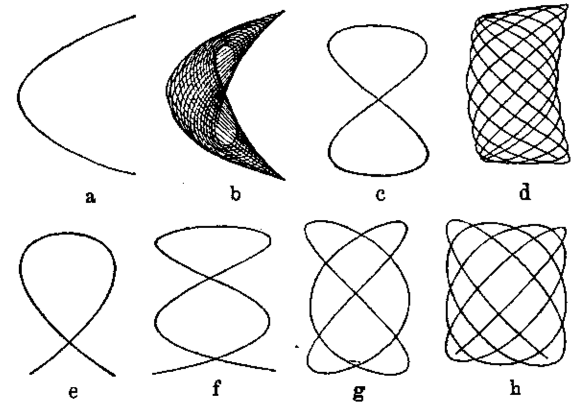

Fig. 85. Lissajoussche Figuren bei der Zusammensetzung von Pendelschwingungen.

Wenn das Pendel Schwingungen in der Ebene ausführt, die mit der Ebene des Ständers zusammenfällt, so schwingt es wie ein einfaches Pendel. Wenn es dagegen Schwingungen in einer hierzu senkrechten Ebene ausführt, so muß es die Laufgewichte auf der Querstange mit bewegen; hierdurch werden diese Schwingungen verlangsamt, und zwar um so mehr, je weiter nach dem Ende zu die Laufgewichte verschoben werden. Die Pendelstange kann also in zwei aufeinander senkrechten Ebenen Schwingungen mit verschiedenen Schwingungszeiten ausführen. Setzt man das Pendel so in Bewegung, daß es gleichzeitig beide Schwingungen macht, so zeichnet die Schreibspitze die aus diesen beiden Komponenten zusammengesetzte Lissajoussche Figur auf der bestäubten Glasplatte auf. Die in Fig. 85 abgebildeten Kurven sind von dem beschriebenen Apparate selbständig aufgezeichnet worden.

Die ausführliche Erklärung dafür, daß die Schwingungszeit des Pendels in den beiden zueinander senkrechten Ebenen verschieden ist, kann erst in § 57 gegeben werden.

Zusammensetzung elastischer Schwingungen. Die Schwingungen, die ein an einem Ende eingeklemmter elastischer Stab ausführt, sind ebenfalls Sinusschwingungen. Wir befestigen (Fig. 86) an den entgegengesetzten Enden der

Längsseiten eines länglichen Holzklotzes zwei Stahlstäbe von rechteckigem Querschnitt (z. B. aus Uhrfederstahl), deren Richtungen mit der Längserstreckung des Klotzes einen Winkel von 45° einschließen, die also zueinander unter einem rechten Winkel geneigt sind. Die oberen Enden der Stäbe liegen in einer wagerechten Geraden, die zu den Längsseiten des Holzklotzes rechtwinklig ist. Die einander zugekehrten Seiten der oberen Enden sind mit kleinen Spiegeln versehen. Ein Lichtstrahlenbündel wird auf den einen Spiegel geleitet, von hier auf den zweiten reflektiert und von hier wieder reflektiert und auf eine weiße Wand geworfen. Führt nun einer der Stäbe Schwingungen aus, so wird auch der Spiegel nach dem Sinusgesetze gedreht, und der Lichtstrahl zeichnet auf dem weißen Schirme einen hellen Fleck ab, der Sinusschwingungen ausführt. Dasselbe zeigt sich, wenn der zweite Stahlstab in Schwingungen gebracht wird. Doch steht im zweiten Falle die Ebene der zweiten Sinusschwingung senkrecht zur ersten. Versetzt man gleichzeitig beide Stäbe in Schwingungen, so führt der Lichtfleck gleichzeitig beide Schwingungen aus, deren Schwingungszeit man durch Aufsetzen von kleinen Laufgewichten auf die Federn verändern kann. Die resultierende Schwingung ist dann eine Lissajoussche Figur.

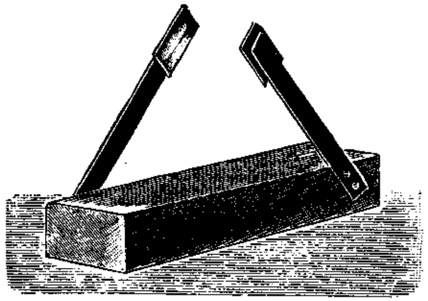

Fig. 86. Zusammensetzung von Schwingungen, optisch.

Die Lissajousschen Figuren werden um so verwickelter, durch je größere Zahlen das Verhältnis der Schwingungszeiten der beiden Teilschwingungen ausgedrückt werden muß. Einfache Zahlenverhältnisse ergeben verhältnismäßig einfache Figuren. Wenn das Verhältnis annähernd einem einfachen Zahlenverhältnis gleichkommt, z. B. annähernd 1 : 1 ist, so geht die diesem Verhältnis entsprechende Lissajoussche Figur ganz allmählich von der einen Form in die andere über. Die beiden Kurven a und b von Fig. 85 entsprechen dem Verhältnisse 1 : 2 der Schwingungszeiten der beiden Komponenten. Bei a fangen beide Schwingungen rechts oben mit gleicher Phase an; demgegenüber ist bei c die Phase der Schwingung mit kleinerer Schwingungszeit um $\frac{\pi}{2}$ verschoben. Bei b ist das Verhältnis 1 : 2 ein wenig verstimmt; daher geht die Figur, die zuerst mit a übereinstimmt, allmählich in b über. Die Schwingungsweite nimmt gleichzeitig ab, daher ist die zuletzt gezeichnete 8-förmige Kurve wesentlich kleiner als die entsprechende Kurve c.

In der Optik (s. Abschnitt XVI) ist besonders die Zusammensetzung zweier Schwingungen von gleicher Schwingungszeit von Bedeutung. Deshalb wiederholen wir noch einmal:

Zwei lineare Schwingungen von gleicher Schwingungsweite und gleicher Schwingungszeit setzen sich zu einer zirkularen Schwingung von gleicher Schwingungsweite und gleicher Schwingungszeit zusammen, wenn die Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$ *beträgt.*

Zusammensetzung zweier entgegengesetzt gerichteter Kreisschwingungen. Führt ein Körper gleichzeitig zwei kongruente Kreisschwingungen aus, deren Bewegungsrichtungen einander entgegengesetzt sind, so finden wir die resultierende Bewegung wieder nach dem Parallelogrammsatze. In Fig. 87 ist die Zusammensetzung ausgeführt. Die beiden um den Mittelpunkt A gezogenen Kreise,

die man sich in Wirklichkeit zusammenfallend denken muß, sind die Schwingungsbahnen. Durch römische und deutsche Ziffern sind die Punkte angegeben, die der Körper gleichzeitig infolge jeder einzelnen Schwingung einnehmen würde. Für die beiden Orte I und 1 ist die Zusammensetzung nach dem Parallelogrammsatze durch Zeichnung ausgeführt. Der resultierende Ort ist B. Die Entfernung des Punktes C vom Mittelpunkte ist doppelt so groß wie der Halbmesser der Kreisbahn.

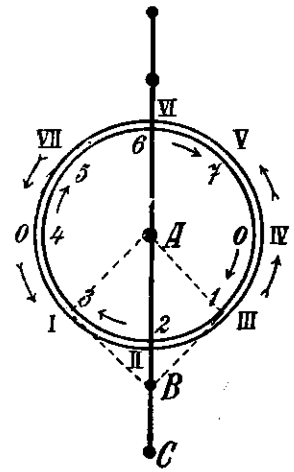

Fig. 87. Zusammensetzung entgegengesetzter Kreisschwingungen.

Durch Zusammensetzung zweier entgegengesetzt gerichteter zirkularer Schwingungen gleicher Schwingungsweite und gleicher Schwingungszeit entsteht eine lineare Schwingung mit doppelter Schwingungsweite und gleicher Schwingungszeit; das Azimut (die Richtung) der linearen Schwingung ist durch Punkte bestimmt, die der schwingende Körper, wenn er an den Einzelschwingungen teilnimmt, gleichzeitig erreicht. Die letzten Ergebnisse können wir noch einmal dahin zusammenfassen:

Eine Kreisschwingung kann angesehen werden als zusammengesetzt aus 2 linearen Schwingungen gleicher Schwingungsweite und gleicher Schwingungszeit, deren Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$ *beträgt. Eine lineare Schwingung kann angesehen werden als zusammengesetzt aus zwei entgegengesetzt gerichteten Kreisschwingungen mit halber Schwingungsweite und gleicher Schwingungszeit.*

§ 27. Die Keplerschen Gesetze.

Die Keplerschen Gesetze behandeln die Bewegung der Planeten um die Sonne. Sie lauten:

1. *Jeder Planet bewegt sich auf einer elliptischen Bahn, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht.*
2. *Der von der Sonne zum Planeten gezogene Leitstrahl bestreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.*
3. *Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen ihrer Bahnen.*

Die drei Gesetze behandeln die Bewegung der Planeten rein phoronomisch, d. h. ohne Rücksicht auf irgendwelche, die Bewegung regelnden Ursachen.

1. Das erste Gesetz bezieht sich auf die Form der Bahn eines einzelnen Planeten. Kepler[1]) stellte (1604) das Gesetz, ebenso später die beiden anderen, auf Grund von Berechnungen auf, denen er die Beobachtungen, die Tycho de Brahe am Mars ausgeführt hatte, zugrunde legte.

Die Form einer Ellipse wird durch ihre Exzentrizität bestimmt, d. i. das Verhältnis des Abstandes der beiden Brennpunkte zur großen Achse der Ellipse. Die numerische Exzentrizität beträgt beim Mars etwa 0,09. Sie ist beim Merkur, der aber nur selten dem bloßen Auge sichtbar ist, noch größer.

1) Johannes Kepler, 1571—1620.

Bei allen übrigen Planeten ist sie wesentlich kleiner. Die innere Begrenzung von Fig. 88 gibt ein Bild von der Form der elliptischen Bahn des Mars, woraus man erkennt, daß die Ellipse nur äußerst wenig von einem Kreise ver-

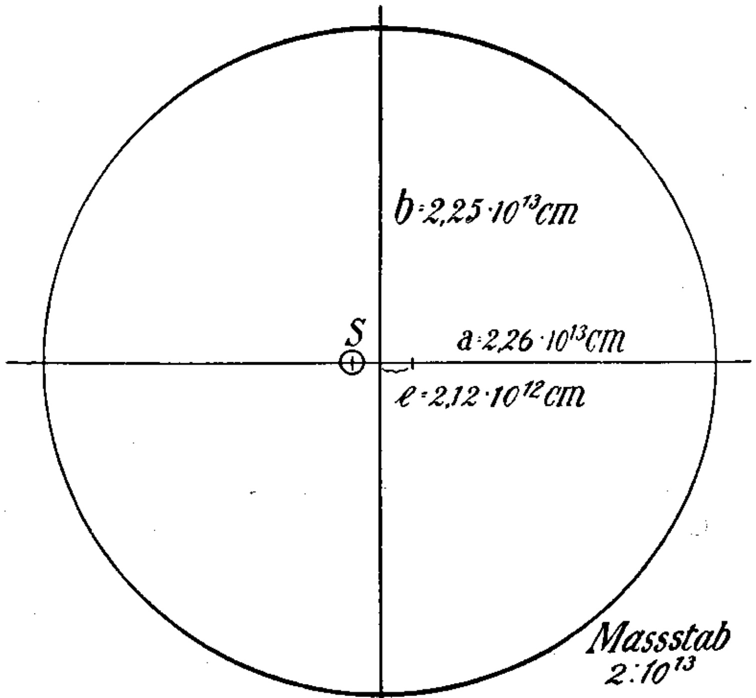

Fig. 88. Die elliptische Gestalt der Marsbahn.

schieden ist. Die äußere Begrenzung derselben Figur ist ein der Ellipse umschriebener Kreis. Man erkennt die Verschiedenheit der beiden Kurven nur an dem Dickenunterschiede der gezeichneten Linie.

Ein Planet hat in der Sonnennähe oder dem Perihel seinen kleinsten Abstand, in der Sonnenferne oder dem Aphel seinen größten Abstand von der Sonne.

Aus dem ersten und zweiten Keplerschen Gesetze läßt sich auf mathematischem Wege der Nachweis herleiten, daß die Zentralbeschleunigung dem Quadrate der Entfernung eines Planeten von der Sonne umgekehrt proportional ist.

Es sei (Fig. 89) S die Sonne, um welche sich ein Planet in elliptischer Bahn, die in der Figur übertrieben stark exzentrisch gezeichnet ist, bewegt. Die halben Achsen der Ellipse seien a und b, die lineare Exzentrizität e. Befindet sich der Planet in einem gegebenen Zeitpunkte in A und eine Sekunde später in A', so ist $AA' = v$ die lineare Geschwindigkeit des Planeten in dem betrachteten Augenblicke. Wir verbinden beide Brennpunkte S und S' der elliptischen Bahn mit A und A'. Dann ist $ASA' = \omega$ die Winkelgeschwindigkeit des Planeten, bezogen auf S, und $AS'A' = \omega'$ die Winkelgeschwindigkeit in bezug auf S'. Wir können AA' als einen kleinen

Kreisbogen betrachten, dessen Mittelpunkt in O liegt. O ist der Schnittpunkt der in A und A' zur Ellipse gezogenen Normalen. $OA = \varrho$ heißt der Krümmungsradius der Ellipse im Punkte A. Ist $\sphericalangle SAO = \varphi$, so ist auch $\sphericalangle S'AO = \varphi$, da bei einer Ellipse die Normale den von den beiden Brennstrahlen $AS = r$ und $AS' = r'$ gebildeten Winkel halbiert. Erfährt der Planet in A die nach S gerichtete zentrale Beschleunigung γ, so erfährt er in der Richtung AO nur die durch die Projektion von γ auf AO bestimmte Beschleunigung $\gamma' = \gamma \cdot \cos\varphi$. Zwischen der Zentralbeschleunigung eines sich auf einer Kreisbahn bewegenden Körpers, seinem Radius und seiner linearen Geschwindigkeit besteht nach § 21 die Gleichung $\gamma' = \frac{v^2}{\varrho}$, folglich ist $\gamma = \frac{v^2}{\varrho \cos\varphi}$. Wir zeichnen um S mit SA als Radius den Bogen $AB = \varepsilon$, der SA' in B schneidet. Wegen der Kleinheit von AA' im Vergleiche zu AS ist auch $\sphericalangle\,\omega$ außerordentlich klein. Der Flächeninhalt des schmalen Dreiecks SAA' kann daher gleich $\varepsilon \cdot \frac{r}{2}$ gesetzt werden. Nennen wir den Flächeninhalt dieses

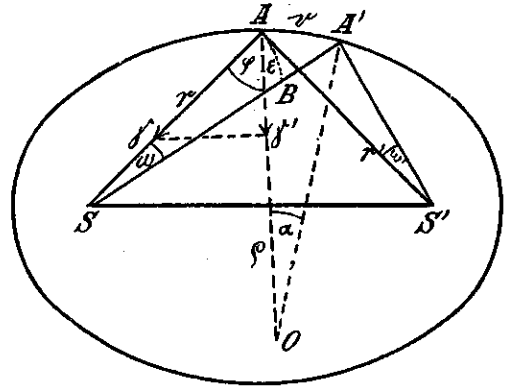

Fig. 89.

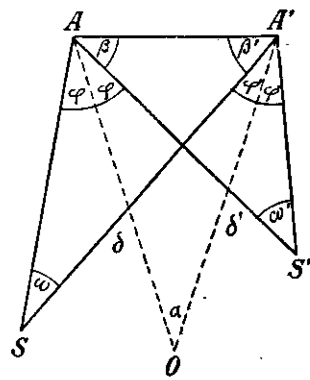

Fig. 90.

kleinen Dreieckes die *Flächengeschwindigkeit* k (S. 53), so ist diese nach dem zweiten Keplerschen Gesetze (dem Flächensatze) beständig, also $\varepsilon \cdot \frac{r}{2} = k$. Ferner ist $\varepsilon = v \cdot \cos\varphi$, da $\sphericalangle BAA' = \varphi$, weil die Schenkel des letzteren auf den ersteren senkrecht stehen, folglich

$$v\,r \cos\varphi = 2k, \quad v^2 = \frac{4k^2}{r^2 \cos^2\varphi}.$$

Unter Benutzung dieses Wertes folgt für die Zentralbeschleunigung der Wert $\gamma = \frac{4k^2}{r^2 \varrho \cdot \cos^3\varphi}$. Die beiden Normalen bilden miteinander den Winkel $AOA' = \alpha$. Zwischen den Winkeln α, ω und ω' besteht die Gleichung $2\alpha = \omega + \omega'$.[1])

Aus der Fig. 89 folgt

$$\varrho\alpha = v, \quad r\omega = v \cdot \cos\varphi, \quad \text{entsprechend} \quad r'\omega' = v \cdot \cos\varphi.$$

Folglich ist
$$\alpha = \frac{v}{\varrho}, \quad \omega = \frac{v\cos\varphi}{r}, \quad \omega' = \frac{v\cos\varphi}{r'}.$$

1) Beweis für obige Gleichung. Es ist (Fig. 90): $\omega + \varphi = \delta = \alpha + \varphi'$ als Außenwinkel; ebenso ist $\omega' + \varphi' = \delta' = \alpha + \varphi$. Durch Addition der beiden Gleichungen folgt $\omega + \omega' = 2\alpha$.

Wenn diese Werte in die Gleichung $2\alpha = \omega + \omega'$ eingesetzt werden, so folgt $2\frac{v}{\varrho} = \frac{v}{r}\cos\varphi + \frac{v}{r'}\cos\varphi$ und hieraus $\varrho \cdot \cos\varphi = \frac{2rr'}{r+r'}$. In einer Ellipse ist die Summe $r + r'$ der Brennstrahlen gleich der großen Achse $2a$, daher ist $\varrho \cdot \cos\varphi = \frac{rr'}{a}$. Aus $\triangle ASS'$ läßt sich $\sphericalangle SAS'$ nach dem Kosinussatze berechnen. Es ist $\overline{SS'}^2 = 4e^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos 2\varphi$ und daraus mit $r + r' = 2a$

$$\cos^2\varphi = \frac{a^2 - e^2}{rr'} = \frac{b^2}{rr'}.$$

Durch Multiplikation der Werte für $\varrho \cdot \cos\varphi$ und für $\cos^2\varphi$ folgt $\varrho \cdot \cos^3\varphi = \frac{b^2}{a}$. Diesen Wert setzen wir in den für γ berechneten Wert ein und erhalten so $\gamma = \frac{4k^2 a}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2}$. Der Faktor $\frac{4k^2 \cdot a}{b^2}$ enthält nur beharrliche Größen, folglich ist γ proportional $\frac{1}{r^2}$. In Worten:

Die Zentralbeschleunigung, die ein Planet in den einzelnen Punkten seiner Bahn erfährt, ist dem Quadrate der Entfernung von der Sonne umgekehrt proportional.

Beträgt die Umlaufszeit eines Planeten T, so ist das Produkt aus seiner Umlaufszeit T und seiner Flächengeschwindigkeit k gleich dem Flächeninhalt $ab\pi$ der ganzen Ellipse. Folglich ist $k = \frac{ab\pi}{T}$. Der Wert für γ läßt sich daher umformen in

$$\gamma = \frac{4a^3\pi}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Geht die Ellipse in eine Kreisbahn über, so ist an allen Punkten $a = r$, und es vereinfacht sich der Wert für γ zu dem in § 21 abgeleiteten

$$\gamma = \frac{4r\pi^2}{T^2}.$$

2. Das **zweite Keplersche Gesetz** ist mit dem in § 20 abgeleiteten Flächensatze identisch. Hieraus folgt, daß jeder Planet eine stets nach der Sonne gerichtete zentrale Beschleunigung erfährt. Ferner geht daraus hervor, daß er im Perihel seine größte, im Aphel seine kleinste Geschwindigkeit hat. Die Erde befindet sich im Perihel zur Winterszeit, im Aphel zur Sommerszeit. Die Erde bewegt sich also im Winter rascher als im Sommer. Hierin und in der kleineren Länge der dem Winterhalbjahre zukommenden Erdbahn ist es begründet, daß das Winterhalbjahr (vom 23. September bis 21. März) nur 179 Tage, das Sommerhalbjahr dagegen (vom 21. März bis 23. September) 186 Tage hat.

3. Das **dritte Keplersche Gesetz** (1618) lautet in seiner ursprünglichen Fassung: *Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne.* Unter „mittlerer Entfernung" ist hierbei das Mittel aus kleinster und größter Entfernung zu verstehen, das ist aber die große Halbachse der Ellipse. Sind die mittleren Abstände zweier Planeten von der Sonne R_1 und R_2, die Umlaufszeiten T_1 und T_2, so soll $T_1^2 : T_2^2 = R_1^3 : R_2^3$ oder $\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2}$ gelten. Der Quotient aus der dritten Potenz der mittleren Entfernung und dem Quadrate der Umlaufszeit soll für alle Planeten denselben Wert haben. Das stimmt in der Tat für Erde und Mars recht genau.

Beispiel: Mars: $R_1 = 226{,}5$ Mill. km $= 2{,}265 \cdot 10^{13}$ cm,

$T_1 = 686{,}98$ Tage $= 5{,}9357 \cdot 10^7$ sec,

$\frac{R_1^3}{T_1^2} = 3{,}2982 \cdot 10^{24}$ (cm³/sec²),

Erde: $R_2 = 148{,}65$ Mill. km $= 1{,}4865 \cdot 10^{13}$ cm,

$T_2 = 365{,}25$ Tage $= 3{,}1558 \cdot 10^7$ sec,

$\frac{R_2^3}{T_2^2} = 3{,}2982 \cdot 10^{24}$ (cm³/sec²).

Die drei Keplerschen Gesetze wurden von ihrem Entdecker als reine Erfahrungstatsachen aufgestellt. Sie konnten zu ihrer Zeit logisch nicht weiter miteinander verknüpft werden. Durch ihre mathematisch bestimmte Form reizten die Gesetze die Mathematiker des darauf folgenden Jahrhunderts vielfach, zu versuchen, ihnen einen mathematischen Beweis zu gehen. Doch gelang es erst dem genialen Scharfsinne von I. Newton[1]), alle drei Gesetze auf ein einziges zurückzuführen. Es ist dieses das von Newton aufgestellte sogenannte **Gravitationsgesetz** (VI. Abschnitt).

Der glückliche und fruchtbare Gedanke, welcher Newton leitete, war der, die Bewegung der Himmelskörper um ihren Zentralkörper mit der seit den Zeiten Galileis wohlbekannten Bewegung des freien Falles und des schiefen Wurfes auf der Erde zu vergleichen. Wie wir erfahren haben (§ 18), kommt die Wurfparabel dadurch zustande, daß in jedem Augenblicke zu der gerade vorhandenen Geschwindigkeit des geworfenen Körpers noch die von der Beschleunigung des freien Falles herrührende Geschwindigkeit geometrisch zu addieren ist; diese Beschleunigung ist von der Größe des geworfenen Körpers und seinem Bewegungszustande selbst unabhängig. An dem Beispiele der Mondbewegung (§ 21) hatte Newton kennengelernt, daß dieser Trabant in jedem Augenblicke ähnlich nach der Erde hin fällt wie ein geworfener Körper auf seiner parabolischen Wurfbahn; die Beschleunigung steht dabei in einer bestimmten Beziehung zur Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche. In ganz entsprechender Weise durfte er annehmen, daß die Planetenbahnen eine Art Wurfbahnen sind, bei denen eine der Sonne zu gerichtete Beschleunigung die Ursache der Bahnkrümmung ist. Die Identität des 2. Keplerschen Gesetzes mit dem Flächensatze (s. vor. Seite) bestätigte diese Überlegung. Daher dürfen wir versuchsweise die irdischen Erfahrungen, daß die Beschleunigung von der Art des geworfenen Körpers und seinem Bewegungszustande unabhängig ist, auch auf die Planetenbewegung übertragen. Dann kann man aber das dritte Keplersche Gesetz auf die beiden anderen zurückführen. Wir wollen das durch folgendes Gedankenexperiment erreichen.

Es mögen zunächst zwei Planeten die Sonne umkreisen. Der eine habe im

1) Isaac Newton, 1643—1727.

Punkte A (Fig. 91) seiner Bahn die Entfernung r_1 von der Sonne, ferner die große Halbachse a_1 und die Umlaufszeit T_1; für den anderen Planeten im Punkte B seien die entsprechenden Größen r_2, a_2, T_2. Dann gilt nach den Entwicklungen der vorigen Seiten für jeden Punkt A der Bahn des ersten Planeten

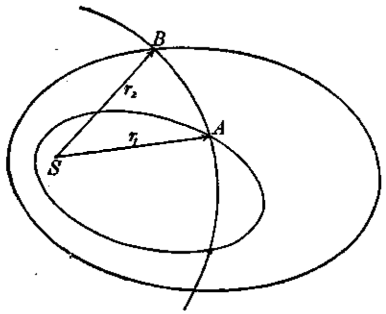

Fig. 91.

$$\gamma_1 = \frac{4 a_1^3 \pi^2}{T_1^2} \cdot \frac{1}{r_1^2}$$

und ebenso für jeden Punkt B der Bahn des zweiten Planeten

$$\gamma_2 = \frac{4 a_2^3 \pi^2}{T_2^2} \cdot \frac{1}{r_2^2}.$$

Wenn das erste Keplersche Gesetz nun besagt, daß sich jeder Planet auf einer elliptischen Bahn bewegt, so muß das auch für einen bloß vorgestellten Planeten gelten, den wir uns irgendwie die Sonne umlaufend denken können. Nehmen wir daher einen dritten Planeten an, dessen Bahn durch die eben betrachteten Punkte A und B der ersten Planetenbahnen gehen möge, so sei seine große Halbachse a, seine Umlaufszeit T. Dann gilt für die Beschleunigung dieses Planeten im Punkte A $\gamma_A = \frac{4a^3\pi^2}{T^2} \cdot \frac{1}{r_1^2}$ und im Punkte B $\gamma_B = \frac{4a^3\pi^2}{T^2} \cdot \frac{1}{r_2^2}$. Multiplizieren wir die erste Gleichung mit r_1^2, die zweite mit r_2^2, so erhalten wir zunächst

$$\gamma_A r_1^2 = \gamma_B r_2^2 = \frac{4a^3\pi^2}{T^2}.$$

Nach der versuchsweisen Annahme soll die Beschleunigung aber von der Art und dem Bewegungszustande des Planeten unabhängig sein. Dann ist γ_A dasselbe wie γ_1, γ_B dasselbe wie γ_2. Daher gilt auch $\gamma_1 r_1^2 = \gamma_2 r_2^2$ oder

$$\gamma_1 : \gamma_2 = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2},$$ d. h. in Worten:

Die Zentralbeschleunigungen zweier Planeten verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate ihrer Abstände von der Sonne. (Vgl. § 21: Die Mondbewegung.)

Formen wir nun die oben hingeschriebenen Ausdrücke für γ_1 und γ_2 nach $\gamma_1 r_1^2$ und $\gamma_2 r_2^2$ um und setzen gleich, so bekommen wir

$$\frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2} = \frac{4\pi^2 a_2^3}{T_2^2}$$

oder

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} \quad \text{und} \quad T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3.$$

Das ist das dritte Keplersche Gesetz. Nach der gegebenen Ableitung erscheint es als eine Folgerung aus dem ersten und zweiten Gesetze sowie der mehrfach erwähnten Annahme, daß die nach der Sonne hin gerichtete Beschleunigung allein von dem Orte des Planeten abhängt. Das dritte Keplersche Gesetz bestätigt somit rückwärts diese Annahme. Einen Raum, dessen Punkten je ein bestimmter Vektor zugeordnet ist, nennt man ein *Vektorfeld.* Ein solcher Vektor ist hier die der Sonne zu gerichtete Beschleunigung. Das dritte Keplersche Gesetz lehrt also die Unabhängigkeit der den Planeten erteilten Beschleunigungen von allen individuellen Eigenschaften der Planeten, d. h. es lehrt das Vorhandensein eines *Beschleunigungsfeldes* um die Sonne. Das ist sein physikalisch wesentlicher Inhalt.

Dritter Abschnitt.

Die Lehre von den Kräften.

A. Dynamik des punktförmigen Körpers.

§ 28. Der punktförmige Körper.

Da bei einer fortschreitenden Bewegung alle Punkte eines Körpers kongruente und parallele Bahnen durchlaufen, so genügt es, hierbei nur die Bewegung eines beliebigen einzelnen Punktes des Körpers zu untersuchen und zu beschreiben. Man kann sich dann den ganzen Körper gewissermaßen an den betrachteten Punkt angeheftet denken; der betrachtete Punkt ist der Vertreter des ganzen Körpers, er wird ein **materieller Punkt** (auch wohl punktförmiger Körper) genannt. Der Name „materieller Punkt“ wird auch in dem Sinne gebraucht, daß man von der räumlichen Ausdehnung des Körpers absieht und sich den ganzen Körper gewissermaßen in diesem Punkte verdichtet denkt. Der materielle Punkt und der punktförmige Körper sind Abstraktionen, denen kein Körper der Wirklichkeit entspricht.

Die Dynamik des punktförmigen Körpers befaßt sich mit den Wechselbeziehungen zwischen den Bewegungen des Massenpunktes und den ins Spiel tretenden Kräften.

§ 29. Die Trägheit.

Die tägliche Erfahrung lehrt uns, daß ein ruhender Körper nicht von selbst in Bewegung kommt. Andererseits beobachten wir, daß jeder in Bewegung befindliche Körper scheinbar von selbst wieder zur Ruhe kommt. Wir erkennen aber, daß äußere Umstände die Zeit, die der Körper braucht, um aus der Bewegung in den Ruhezustand zu kommen, in hohem Maße beeinflussen. So kommt eine Kugel, die auf losem Sande wagerecht geworfen wird, schon nach kurzer Zeit zur Ruhe, dagegen bleibt dieselbe Kugel, wenn sie auf festgetretenem Boden oder auf dem Asphaltpflaster oder gar auf einer spiegelglatten Eisfläche geworfen wird, sehr lange in Bewegung. Die Kugel, die in dem losen Sand eine tiefe Spur zurückläßt, indem sie bei ihrer Bewegung die Sandkörner niederdrückt oder zur Seite bewegt hat, zeichnet ihre Spur auf den anderen Unterlagen um so weniger ab, je glatter sie sind, d. h. je geringer die Bewegungswiderstände sind.

Wir schließen hieraus, daß wir die Dauer der Bewegung der Kugel noch weiter verlängern können, wenn wir die Bewegungswiderstände weiter verkleinern. Wenn wir gar alle Bewegungswiderstände beseitigen würden, so würde sich die Kugel dauernd geradlinig und mit gleichbleibender Geschwindigkeit weiter bewegen. Da wir aber nicht alle Bewegungswiderstände forträumen können, so kann der letzte Teil des Schlusses nicht unmittelbar durch die Erfahrung bestätigt werden; er ist eine über die Erfahrung hinausgehende Annahme, die aber in ihren Folgerungen mit der Erfahrung nirgends im Widerspruche steht. Der Satz, daß ein gänzlich unbehinderter Körper sich dauernd geradlinig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, ist daher ein physikalisches Prinzip (S. 3).

Schon Galilei hat bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über die Fallbewegung eines Körpers auf der geneigten Bahn den Satz ausgesprochen, daß ein bewegter Körper seine Geschwindigkeit (in wagerechter Ebene) unverändert beibehalten würde, wenn keine Bewegungshindernisse vorhanden wären. Aber erst die Schüler Galileis, Giuseppe Baelo (1635), Cavalieri[1]) und Baliani[2]) (1646), erkannten[3]), daß ohne jede Beschränkung die Bahn eines frei beweglichen Körpers eine gerade Linie sein muß, wenn alle übrigen äußeren Einflüsse fehlen, daß also auch die Richtung eines frei beweglichen Körpers unverändert bleibt. Newton hat 1687 diesem Prinzip eine berühmte Fassung gegeben und es als erstes seiner Bewegungsgesetze folgendermaßen ausgesprochen:

Jeder Körper verharrt in seinem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, sofern er nicht durch aufgeprägte Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu verändern.

Ein unmittelbarer Nachweis der Richtigkeit dieses Satzes ist unmöglich, da wir keinen Körper äußeren Einflüssen völlig entziehen können. Es muß als hinreichende Begründung gelten, daß alle aus diesem Satze gezogenen Schlußfolgerungen durch die Erfahrung bestätigt werden. Er bietet den Vorteil, alle Bewegungsvorgänge in möglichst einfacher Weise erklären zu können. Daher ist er eine der Grundlagen unserer heutigen Naturbetrachtung geworden. Würden wir die Bewegungsvorgänge in der Natur nach einem anders geformten Prinzipe betrachten, — was an und für sich denkbar ist —, so müßten alle mit ihm zusammenhängenden Gesetze und Begriffe, insbesondere der Kraftbegriff geändert werden, um mit den Naturvorgängen in Übereinstimmung zu bleiben.

Das erste Newtonsche Bewegungsgesetz wird das **Trägheitsgesetz** genannt. Die allen Körpern innewohnende merkwürdige Eigenschaft, vermöge deren sie das Trägheitsgesetz befolgen, heißt die **Trägheit** oder das **Beharrungsvermögen** der Körper.

1) Bonaventura Cavalieri, 1598—1647, Prof. der Math. in Bologna.

2) Giovanni Battista Baliani, 1582—1666, in Genua.

3) Der Holländer Isaac Beeckmann (geb. 1588) hat die allgemeine Form des Beharrungsgesetzes schon vor 1620 ausgesprochen. Darauf bezieht sich eine Mitteilung von Descartes 1620. In dem aufgefundenen Tagebuche des Beeckmann wird der Satz: Mota semel nunquam quiescunt, nisi impediantur (Bewegtes kommt nicht zur Ruhe, wenn es nicht gehindert wird) erst 1643 aufgeführt.

§ 30. Die Kraft.

In der reinen Mechanik lassen wir alle Naturkräfte unberücksichtigt, welche andere als rein mechanische Wirkungen ausüben, z. B. den Wärmezustand, das elektrische oder das chemische Verhalten eines Körpers beeinflussen. Die mechanischen Kräfte, auf deren Betrachtung wir uns hier allein vorläufig beschränken, können zweierlei Wirkungen verursachen:

1. Eine Kraft kann den **Bewegungszustand** eines Körpers verändern.

2. Eine Kraft kann eine **Formveränderung** (Deformation) eines Körpers bewirken und damit zugleich **Spannungen** in ihm hervorrufen (z. B. Spannung einer Feder). *Wir verstehen dabei unter der in einem Körper geweckten Spannung das Bestreben des Körpers, seine ursprüngliche Form wiederherzustellen.*

Im ersten Falle sprechen wir von der **dynamischen**, im zweiten von der **statischen Wirkung einer Kraft.**

Um eine Kraft vollständig zu bestimmen, muß man 1. den **Angriffspunkt**, 2. die **Richtung**, 3. die **Größe** der Kraft kennen. Bei vollkommen starren Körpern kann der Angriffspunkt einer Kraft in der Kraftrichtung verschoben werden. Den Angriffspunkt und die Richtung faßt man daher unter dem Begriff der **Angriffslinie** zusammen.

Wir können die Kräfte nur durch ihre Wirkungen beurteilen; daher erkennen wir zwei Kräfte als gleich, wenn sie dieselben oder gleiche Wirkungen hervorbringen, wenn sie also entweder gleiche Bewegungsveränderungen bei einem oder bei gleichen Körpern erzeugen, oder wenn sie gleiche Spannungen in einem Körper hervorrufen.

Wenn zwei entgegengesetzte aber gleich große Kräfte auf einen Körper so wirken, daß sich ihre Angriffslinien gegenseitig verlängern, so heben sich ihre dynamischen Wirkungen auf, aber die Kräfte rufen Spannungen in dem Körper hervor, die von der Größe der wirkenden Kräfte abhängen, und durch die wir die Kräfte messen können. Wenn wir z. B. einen schweren Stein auf unsere Hand legen, so übt sein Gewicht einen Druck auf die Hand aus. Die von uns ausgeübte Muskelkraft kann dann den Stein am Fallen hindern, während zugleich das Gewicht des Steines Spannungen im Steine, in der Hand und in den Muskeln hervorruft.

§ 31. Statisches und dynamisches Maß einer Kraft. Die Masse.

1. **Die Krafteinheit.** Als statische Krafteinheit benutzen wir (vorläufig) die Kraft, mit der ein Gramm vermöge seiner Schwere wirkt; sie wird eine **Grammkraft** genannt und durch g* (S. 22) abgekürzt bezeichnet. Auch das Tausendfache dieser Kraft, 1 Kilogrammkraft (kg*), wird besonders in der Technik vielfach gebraucht. Da eine Verwechselung der Grammkraft mit der Grammmasse leicht möglich ist, hat der deutsche „Ausschuß für Einheiten und Formelgrößen" neuerdings statt der durch die Schwere unter 45° Breite ver-

ursachten Grammkraft die Bezeichnung **Bar**[1]) vorgeschlagen und diese Krafteinheit durch b abgekürzt bezeichnet. Demzufolge wird die Kilogrammkraft mit dem Namen **Kilobar** bezeichnet und durch kb abgekürzt.

2. **Die statische Vergleichung** zweier Kräfte beruht auf der Vergleichung der durch die Kräfte an einem ruhenden Körper hervorgebrachten Spannungen. Das kann mittels der in Fig. 35 abgebildeten Federwage ausgeführt werden. Wenn eine Kraft die Schraubenfeder geradeso stark ausdehnt, wie das auf der Wagschale stehende Kilogrammstück, so hat diese Kraft die Größe von 1 Kilogrammkraft oder von 1 Kilobar. Eine Kraft hat die Größe von P Bar, wenn sie die Feder ebenso stark ausdehnt, wie es das Gewicht von P Gramm unter 45° Breite tut.

Vorrichtungen, mit denen Kräfte statisch verglichen werden, heißen Dynamometer.[2]) Als Dynamometer kann jede Federwage benutzt werden, die vorher durch Gewichte geeicht worden ist.

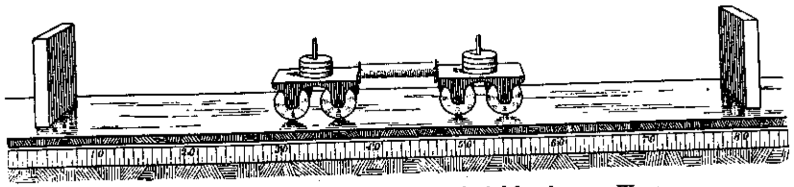

Fig. 92. Gespannte Feder zwischen zwei gleich schweren Wagen.

Auch mit der gemeinen Wage werden Gewichte, also Kräfte, statisch verglichen; denn durch die Gewichte treten Durchbiegungen der Wagebalken ein, somit auch Spannungen, welche den Balken wieder gerade zu machen streben. Wenn der Wagebalken in Ruhe bleibt, wenn also die durch zwei Gewichte erzeugten Spannungen des Wagebalkens an beiden Seiten gleich sind, so sind die beiden Kräfte gleich.

3. **Die dynamische Vergleichung und Messung** der Kräfte setzt die Gültigkeit des Trägheitsprinzipes voraus. Wenn wir vorläufig von einer durch eine Kraft verursachten Richtungsänderung absehen, also nur die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers in Betracht ziehen, so nennen wir zwei Kräfte gleich, wenn sie bei gleichen Körpern gleiche Geschwindigkeitsänderungen erzeugen. Umgekehrt können wir schließen, daß gleiche Kräfte bei gleichen Körpern gleiche Geschwindigkeitsänderungen hervorbringen müssen. Um dieses experimentell zu bestätigen, führen wir folgenden Versuch aus:

Wir setzen nach Fig. 92 auf eine wagerechte, ebene Glasplatte zwei gleiche, leichtbewegliche Wägelchen mit leichten Rädern, die wir mit gleichen

1) In der Ozeanographie, Meteorologie und der Luftschiffahrt ist nach einem Vorschlage von Bjerknes der Name 1 Bar allerdings auch für eine andere Größe, nämlich für den Druck von 10^6 Dyn auf die Fläche von 1 cm² seit einigen Jahren üblich geworden (s. auch S. 22).

2) dýnamis (griech.) = Kraft.

Körpern belasten. Dann setzen wir zwischen die beiden Wagen eine zusammengedrückte Spiralfeder, deren Entspannung wir durch einen über der Feder ausgespannten Faden verhindern. Wir beobachten keinerlei Bewegungen der Wagen, woraus folgt, daß die auf sie wirkenden Kräfte entgegengesetzt gleich sind. Brennen wir nun den Faden durch, so entspannt sich die Feder und treibt beide Wagen mit gleicher Kraft auseinander. Die Wagen stoßen dann gleichzeitig gegen zwei in gleichen Abständen aufgestellte Holzklötze. Hieraus folgt, daß die gleichen Kräfte bei den beiden gleichen Körpern gleiche Geschwindigkeitsänderungen erzeugt haben.

4. **Beschleunigte Bewegung.** Wirkt eine Kraft **dauernd** auf einen frei beweglichen Körper ein, so vermehrt sie dauernd seine Geschwindigkeit. Eine unveränderliche Kraft bewirkt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung des Körpers.

Bei dem vorigen Versuche wirkte die Feder nur eine kurze Zeit. Würden

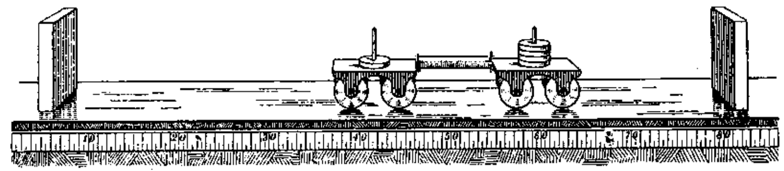

Fig. 93. Gespannte Feder zwischen zwei Wagen ungleicher Masse.

den wir den Versuch so einrichten, daß die Kraft der Feder ungeändert bleibt, und daß sie genau eine Sekunde lang wirkt, so würde die Geschwindigkeit, mit der die beiden Wagen auseinanderschnellen, zugleich die durch die Spannkraft der Feder verursachte Beschleunigung sein. Eine stärkere Feder, die wiederum genau eine Sekunde lang wirkt, würde eine größere Beschleunigung bewirken. Die Kraft der Feder können wir statisch messen; die Geschwindigkeit, mit der die Wagen nach einer Sekunde fortrollen, also die den Wsgen erteilten Beschleunigungen, können wir aus den von den Wagen während einer gemessenen Zeit zurückgelegten Wegen berechnen.

Messende Versuche ergeben dann:

Die Beschleunigungen, die verschiedene Kräfte bei gleichen Körpern erzeugen, sind den Größen der wirkenden Kräfte proportional.

5. **Verschiedene Körper.** Wir erweitern den Versuch, indem wir jetzt auf die Fahrzeuge verschiedene Gewichte legen.

Belasten wir die beiden Wagen verschieden, spannen die Feder und verhindern die Entspannung durch einen Faden, der die Wagen verbindet, so erfolgt, solange die Federn gespannt sind, keine Bewegung der Wagen (Fig. 93). Hieraus folgt, daß die auf die beiden ungleichen Wagen wirkenden Kräfte entgegengesetzt gleich sind. Brennen wir nun den Faden durch, so setzt die Feder die beiden Wagen in verschieden starke Bewegung, sie erteilt ihnen verschieden große Beschleunigungen. Das erkennen wir daran, daß sich infolge der nach der Entspannung der Feder erlangten Endgeschwindigkeit der stärker belastete Wagen langsamer bewegt als der andere. Stellen wir die beiden Holzklötze so auf, daß sie von beiden Wagen gleichzeitig erreicht werden, so können wir aus den durchlaufenen Wegstrecken das Verhältnis der Endgeschwindigkeiten berechnen. Da beide Kräfte auf beide Wagen gleich lange Zeit gewirkt haben, so sind die Endgeschwindigkeiten auch mit den den Wagen erteilten Beschleunigungen proportional, also sind auch die durchlaufenen Wegstrecken den Beschleunigungen proportional.

Die Messung der durchlaufenen Wegstrecken ergibt nun, daß sie den Belastungen (einschließlich Wagen) umgekehrt proportional sind. Also sind auch die den Wagen erteilten Beschleunigungen den Belastungen umgekehrt proportional. Dieses Ergebnis kann in anderer Form folgendermaßen ausgesprochen werden: Zwei gleiche Kräfte haben den ungleichen Wagen Beschleunigungen von solcher Größe erteilt, daß die Produkte aus den Belastungen und den ihnen erteilten Beschleunigungen gleich sind. Daher können wir die gleichen Kräfte durch die gleichen Produkte aus den Belastungen und den Beschleunigungen messen.

6. **Trägheit und Masse.** Die Belastung der Wagen, ihr „Gewicht", erweist sich nun für verschiedene Erdorte nicht vom selben Zahlenwerte, wenn im Sinne von § 8 die Gewichte mit einer Federwage gemessen werden. Die Erfahrung hat nämlich gelehrt, daß an den Erdpolen die Gewichte um etwa $1/2\%$ größer sind als auf dem Äquator. Ebenfalls auf Grund aller Erfahrungen kann nun aber als vollkommen sicher behauptet werden, daß die soeben beschriebenen Beschleunigungsversuche der Wagen durch gespannte Federn unter sonst gleichen Umständen an den Polen und auf dem Äquator zahlenmäßig ganz genau gleich verlaufen; dieselbe Feder erteilt demselben Körper bei der Entspannung überall dieselbe Beschleunigung.

Daraus geht hervor, daß die Beschleunigung der Körper nicht unmittelbar von ihren „Gewichten" abhängen kann. Denn dann müßte an den Erdpolen die beobachtbare Beschleunigung durch einen solchen Entspannungsversuch unter sonst gleichen Umständen einen kleineren Zahlenwert ergeben als auf dem Äquator. Das widerspricht aller Erfahrung. Das Verhalten der Körper gegenüber der Beschleunigung läßt also erkennen, daß einem jeden Körper eine ganz bestimmte physikalische Größe zukommt, welche seine Beschleunigung unter sonst gleichen Umständen bestimmt. Man nennt sie seine **Trägheit.** Die Trägheit eines Körpers ist ihm also unabhängig von äußeren Umständen eigen; sie würde ihm auch auf der Sonne und dem Monde unverändert zukommen, wenn wir den Körper dorthin bringen könnten, wo im ersten Falle sein Gewicht das 28fache, im zweiten Fall nur den fünften Teil des irdischen Gewichtes betragen muß. Trägheit und Gewicht sind also ganz verschiedene Eigenschaften eines Körpers.

Um zahlenmäßig die Trägheit verschiedener Körper mit einander vergleichen zu können, hat man festgesetzt, daß darunter eine Zahlenangabe zu verstehen ist, die den jeweils unter sonst gleichen Umständen erteilten Beschleunigungen der Körper umgekehrt proportional ist.

Nun ist, am selben Erdorte untersucht, die Beschleunigung auch dem Gewichte der Körper mit voller Strenge umgekehrt proportional. Daraus ergibt sich der wichtige Satz: *Die Trägheit eines Körpers ist seinem Gewichte proportional.*

Um die Unabhängigkeit der Trägheit vom Orte, hingegen die Abhängigkeit des Gewichtes vom Orte zu verstehen, muß man daher die letztere noch einem besonderen Ortseinflusse zuschreiben. Man nennt diesen das *Schwerefeld* (Vektorfeld der Beschleunigungen s. S. 78).

Wir hätten also folgende Beziehungen:

1. Die *Trägheit* eines Körpers ist eine Zahlengröße, die von äußeren Umständen unabhängig ist, eine die Eigenheit des Körpers gegenüber Beschleunigungen beschreibende „Invariante";
2. Das *Gewicht* des Körpers ist seiner Trägheit proportional;
3. Das *Gewicht* des Körpers ist andrerseits der Schwerkraft des Schwerefeldes proportional, in dem der Körper sich befindet.

Soll die Trägheit irgendeines Körpers zahlenmäßig angegeben werden, so genügt jetzt, daß das Verhältnis seines Gewichtes zu dem eines Kubikzentimeters Wasser an einem Normalorte der Erde bekannt ist. Seine Trägheit ist dann ebensoviele Male so groß wie die Trägheit eines Kubikzentimeters Wasser, also wie das Gewicht des Körpers in Gramm. Bequemerweise kann man daher die Trägheit selbst in Gramm angeben. Diese Zahlenangabe pflegt man aber als **Masse** des Körpers zu bezeichnen. Damit kommen wir zu einer anderen Definition der Masse als der Newtonschen in § 8, die deren Unklarheiten vermeidet. Wir wiederholen sie noch einmal ausführlich: *Die Masse eines Körpers ist diejenige Zahl, welche angibt, den wievielten Teil der Beschleunigung der Körper unter sonst gleichen Umständen als Wirkung derselben Kraft erfährt wie 1 cm³ Wasser.* Die Masseneinheit ist danach ein Gramm.

7. **Die Kraft.** Als Erfahrung in (5.) hatten wir gefunden, daß dieselbe Kraft ungleichen Massen Beschleunigungen erteilt, die den Massen umgekehrt proportional sind. Die Produkte aus Beschleunigungen und Massen ergeben daher Zahlenwerte, die für die Kräfte kennzeichnend sind. Daher können wir die Zahlenwerte der Kräfte dynamisch definieren: *Die Kräfte sind Zahlengrößen, welche den Produkten aus den beschleunigten Massen und den ihnen erteilten Beschleunigungen proportional sind.*

Ist m die Masse eines Körpers in Gramm, die ihm erteilte Beschleunigung b [cm sec^{-2}] oder b gal, so muß die Kraft p der Gleichung genügen

$$\mathfrak{P} = c \cdot m \cdot b.$$

Hierin ist c ein Proportionalitätsfaktor. Sein Wert gibt die Größe der Kraft an, welche zu einer Beschleunigung von 1 cm $\cdot$ sec^{-2} und 1 g Masse gehört.

Wir wollen die vorstehende Gleichung auf den freien Fall anwenden und 1 g Masse fallen lassen. Dann ist die in Frage kommende Kraft diejenige, mit welcher das Schwerefeld der Erde 1 g herabzieht. Diese Kraft hatten wir 1 Bar genannt. Da die Beschleunigung $g = 981$ cm $\cdot$ sec^{-2}, $m = 1$ ist, folgt

$$1 = c \cdot 1 \cdot 981 \quad \text{oder} \quad c = \frac{1}{981}.$$

In dem Maßsysteme mit den Einheiten Bar als Kraft und Gramm als Masse wäre also $c = \frac{1}{981}$ zu setzen.

Nach dem Grundgedanken des absoluten Maßsystemes (S. 20) ist nun die Einheit, in der eine Größe gemessen werden soll, so festzusetzen, daß die Umrechnungsfaktoren in den mathematisch formulierten Gesetzen den Wert 1 annehmen.

Das Maßsystem mit dem *Gravitationsmaße* Bar als Einheit der Kraft erfüllt diese Festsetzung nicht. Da im C.-G.-S.-System schon über das Gramm als Masseneinheit verfügt ist, ebenso früher über die Einheit für die Beschleunigung, so bleibt nichts anderes übrig, als eine neue Einheit für die Kraft festzusetzen. Das ergibt ein neues Maß, das *Trägheitsmaß* für die Kraft. Zu diesem Zwecke setzt man in der Gleichung $c = 1$. Dann geht das Gesetz über in

$$\mathfrak{P} = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{b} \cdot (\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm} \cdot \mathrm{sec}^{-2})$$

oder in Worten

Kraft = Masse $\times$ Beschleunigung.

Es nimmt $\mathfrak{P}$ den Wert 1 an für $m = 1$ g und $b = 1$ cm $\cdot$ sec^{-2} oder $b = 1$ gal. d. h.

Die Krafteinheit in Trägheitsmaß ist diejenige Kraft, welche der Masse von 1 g die Beschleunigung von 1 gal erteilt.

Diese Krafteinheit heißt **1 Dyne**[1]) **= 1 g $\cdot$ cm sec^{-2}.**

Eine Kraft wird in (Dyn) durch das Produkt aus der in Bewegung gesetzten Masse (in Gramm) und der ihr erteilten Beschleunigung (in cm $\cdot$ sec^{-2} oder gal) gemessen.

8. **Grundgesetz der Mechanik.** Die Gleichung $\mathfrak{P} = m \cdot b$ wird auch vielfach in der Form gebraucht

$$b = \frac{\mathfrak{P}}{m}, \text{ d. h.}$$

Die Beschleunigung einer Masse durch eine Kraft ist der Quotient aus Kraft und Masse, wenn die Beschleunigung in $\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}^2}$ (gal), *die Kraft in Dyn und die Masse in Gramm gemessen wird.* ***(Grundgesetz der Mechanik.)***

Als größere Krafteinheiten werden noch benutzt 1 Megadyn = 10^6 Dyn und (neuerdings nach den Vorschlägen des deutschen Ausschusses für Einheiten und Formelgrößen) 1 Vis[2]) (v) = 10^8 Dyn.

9. **Trägheitswiderstand und Trägheitskraft.** In der Gleichung $\mathfrak{P} = m \cdot b$ oder in der Form $\mathfrak{P} - mb = 0$ kann man zwei Kräfte unterscheiden, einmal die wirkende Kraft $\mathfrak{P}$, die von außen an dem Körper der Masse m angreift und ihm die Beschleunigung b erteilt und ein zweites Mal eine Kraft mb, die der ersten zahlenmäßig gleich ist, aber eine zu dieser entgegengesetzte Richtung hat. Man nennt diese zweite Kraft den **Trägheitswiderstand** oder die **Trägheitskraft.**

1) Es ist die Wortform „das Dyn" und „die Dyne" gebräuchlich; die Mehrzahl ist die Dyn oder die Dynen.

2) vis (lat.) = Kraft.

Die Trägheitskraft ist eine Kraft wie jede andere Kraft auch; sie kann also auch mit einer Federwage gemessen werden. Eine Masse m hänge z. B. an einer Federwage, die sich in einem zum Aufstiege fertigen Luftballon befindet. In dem Augenblicke, wo der Ballon anfängt, beschleunigt in die Luft zu steigen, macht dann die Federwage einen Ausschlag nach unten, als ob das Gewicht der Masse m vermehrt worden wäre. Die Ursache davon liegt in der Trägheit der Masse m. Die Masse nimmt zunächst nicht an dem Aufstiege des Ballons teil, sondern ist bestrebt, in ihrer relativen Ruhe zur Erde zu verharren. Durch die Spannung der gehobenen Federwage wird nun der Masse eine Beschleunigung erteilt. Ist mit fortschreitender Dehnung der Feder diese Beschleunigung gleich der Beschleunigung des Anstieges vom Luftballon mitsamt der Federwage geworden, so kann keine weitere Verlängerung der Feder mehr eintreten. Diese bleibt in der erreichten ausgedehnten Stellung so lange stehen, als der Ballon mit gleicher Beschleunigung weiter steigt (dynamisches Gleichgewicht, § 41). Die durch die Verlängerung gemessene Kraft ist also das Produkt aus der Masse und der Beschleunigung des Körpers, mithin seine Trägheitskraft. — Ebenso können die Trägheitskräfte an Körpern beobachtet werden, die nicht starr mit einem Eisenbahnwagen verbunden sind, wenn der Eisenbahnzug beschleunigt anfährt oder bremst. Überhaupt müssen sich die Trägheitskräfte auch in jedem ausgedehnten materiellen Körper geltend machen, wenn eine Kraft an einem Punkte des Körpers angreift und zunächst diesen Punkt beschleunigt. Die anderen Punkte des Körpers bleiben dann gegenüber dem beschleunigten Punkte vorerst nur ein wenig zurück, dehnen dadurch den Körper, rufen in dem Körper Spannungen hervor, und diese erst übermitteln die dem ersten betrachteten Punkte erteilte Beschleunigung auch auf die übrigen. Bei einem aus der Ruhe anfahrenden Eisenbahnzuge kann man das gut beobachten. Von der Lokomotive her straffen sich die Verbindungsketten und die an den Befestigungshaken liegenden starken Federn spannen sich von Wagen zu Wagen fortschreitend. Umgekehrt schieben beim Anhalten des Eisenbahnzuges die Trägheitskräfte der verzögerten Wagen die starken Pufferfedern zusammen. — Wie gewaltig die Trägheitskraft mit der Masse wächst, kann man manchmal an großen Schiffen beobachten, die beim Anfahren nicht rechtzeitig von ihren Haltetauen gelöst werden. Sie sprengen dann, auch bei abgestellter Antriebsmaschine und ganz langsamer Fahrt, die besten und dicksten Taue.

Bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung sind die Trägheitskraft und die wirkende Kraft einander entgegengesetzt gleich.

Zwei recht verschiedenartig sich äußernde Kräfte, die Gravitationskraft und die Kraft der Trägheit, zeigen darin eine auffallende Gemeinsamkeit, daß sie beide der Masse proportional sind. Es läßt dies auf eine innere Verwandtschaft der beiden Kräfte schließen, der man indessen erst in neuester Zeit durch eine scharfsinnige Revision des logischen Inhaltes unserer Fundamentalbegriffe des Raumes und der Zeit auf die Spur gekommen ist (Einsteins Gravitationstheorie und allgemeine Relativitätstheorie, Bd. II).

§ 32. Das Gewicht als Kraftmaß.

Das Gewicht G eines Körpers ist die Druckkraft, die der Körper vermöge seiner Schwere auf eine wagerechte Unterlage ausübt, oder der Zug, mit dem ein an einem Faden aufgehängter Körper diesen spannt. Das Gewicht ist also eine Kraft, die statisch durch den Spannungszustand der Unterlage oder des Fadens gemessen werden kann. Nimmt man die Unterlage fort, oder schneidet man den Faden durch, so fällt der Körper mit der Beschleunigung $g = 981$ [cm · sec^{-2}]. Hat der Körper die Masse m, so wird die Kraft P, welche ihn treibt, dynamisch gemessen durch das Produkt

$$P = m \cdot g \text{ Dyn}.$$

Sollen die zahlenmäßigen Ausdrücke für das statische und das dynamische Maß der Kraft gleich sein, so muß $G = P$ sein, d. h. es muß die Gleichung bestehen:

$$G\,[\text{Grammkräfte}] = m \cdot g\,[\text{Grammasse} \times \text{cm} \cdot \text{sec}^{-2}].$$

Hieraus folgt im besonderen:

$$1 \text{ Grammgewicht (oder 1 Bar)} = 1 \text{ Grammasse} \times 981\,[\text{cm} \cdot \text{sec}^{-2}] = 981 \text{ Dyn}.$$

Ebenso folgt

$$1 \text{ Dyn} = 1/981 \text{ Gramm-Gewicht} = 1000/981 = 1{,}0194 \text{ Milligramm-Gewicht},$$

oder angenähert

$$\mathbf{1\ Dyn} \approx \boldsymbol{mg^*}.$$

Hieraus geht hervor, daß 1 Dyn eine sehr kleine Kraft ist, weshalb man oft das Millionenfache dieser Einheit als neue Einheit (Megadyn) einführt. Es ist 1 Megadyn = 10^6 Dyn = 1,0194 kg*, abgerundet 1 Megadyn $\approx$ 1 kg*. Ferner ist neuerdings eingeführt 1 Vis = 10^8 Dyn $\approx$ 1 Doppelzentner.

Fig. 94. Fallmaschine von Atwood.

Die Atwoodsche[1]) Fallmaschine (Fig. 94). Die Beziehungen zwischen Gewicht (als bewegende Kraft), Masse und Beschleunigung kann man gut mit der sog. Fallmaschine experimentell herleiten. Die Fallmaschine ist folgendermaßen eingerichtet: Über ein leicht drehbares Rad, das gewöhnlich am oberen Rande einer mit einem Maßstabe versehenen Holzsäule angebracht ist, ist ein dünner Faden oder Draht gelegt, an dessen beiden Enden zwei gleiche Massen n und m hängen. Da das Gewicht der beiden Massen gleich ist, also die beiden auf den Faden wirkenden Kräfte gleich und entgegengesetzt gerichtet sind, so bleiben die Massen in Ruhe. Legt man auf die eine Masse n ein kleines Übergewicht, dessen Masse M und dessen Gewicht Mg ist, so wird die Gesamtmasse $n + m + M$ durch die Kraft Mg in gleichmäßig beschleunigte Bewegung gesetzt.

Zur Gesamtmasse ist noch ein Betrag hinzuzurechnen, der der

1) George Atwood, 1745—1807, Fallmaschine 1784. Einen ähnlichen Apparat hatte schon vor ihm C. G. Schober gebaut und 1746 im Salzbergwerke von Wieliczka bei Krakau in einem Schachte von 70 m Tiefe damit Versuche angestellt.

Trägheit des gedrehten Rades entspricht. Man kann nun, wie in § 56 entwickelt werden wird, jede sich drehende Masse durch eine ihr gleichwertige Masse im gegebenen Abstande von der Achse ersetzen. Es ist also auch möglich, statt des sich drehenden Rades eine ihm gleichwertige am Umfange angebrachte Masse zu setzen. Tut man dieses, so wird diese gleichwertige Masse ebenso bewegt, als ob sie mit dem Faden in fester Verbindung wäre, sie bewegt sich mit derselben Geschwindigkeit wie der Faden. Verwendet man als Rad eine Kreisscheibe von gleichmäßiger Dicke und der Masse μ, so kann sie durch eine am Umfange angebrachte Masse $\frac{\mu}{2}$ ersetzt werden (§ 56). Die ganze in Bewegung gesetzte Masse beträgt daher

$$\mathsf{M} = n + m + M + \frac{\mu}{2}.$$

Der von den Massen in einer oder mehreren Sekunden zurückgelegte Weg wird in folgender Weise gemessen: Die mit dem Übergewichte belastete Masse ruht zu Beginn der Beobachtung auf einer kleinen, zum Herunterklappen eingerichteten Konsole s. Man löst eine Haltevorrichtung für die Konsole bei einem Schlage eines Sekundenpendels aus, die Konsole klappt herunter, und die Massen beginnen ihre Bewegung. Eine zweite Konsole (in der Figur bei Teilstrich 110 befestigt) ist an der Holzsäule verschiebbar angebracht. Sie wird so eingestellt, daß die abwärts bewegte Masse bei einem späteren Schlage des Sekundenpendels hörbar auf die Konsole aufstößt. Die abgelesene Entfernung der beiden Konsolen ist der von den Massen zurückgelegte Weg.

Mit Hilfe der Atwoodschen Fallmaschine können die Gesetze über die gleichmäßig beschleunigte Bewegung experimentell abgeleitet werden. Die in verschiedenen Zeiten durchlaufenen Wegstrecken sind den Quadraten der Zeiten proportional. Aus der durchlaufenen Wegstrecke h und der beobachteten Zeit t kann nach der Gleichung $h = \frac{b}{2} \cdot t^2$ die Beschleunigung b berechnet werden.

Man kann ferner nachweisen, daß die Endgeschwindigkeit v nach t Sekunden durch das Produkt $v = bt$ bestimmt ist. Zu dem Zwecke ist noch eine dritte, mit einem Loche versehene Konsole (in der Figur bei Teilstrich 52) an der Holzsäule verschiebbar. Durch das Loch kann die Masse n bequem hindurchgehen; aber das kleine Übergewicht M, das man stabförmig gestaltet, wird durch die Ränder der Konsole abgehoben. Man stellt nun die beiden verschiebbaren Konsolen so ein, daß das Übergewicht bei einem, z. B. dem dritten, Sekundenschlage nach Auslösung der oberen Konsole s hörbar abgehoben wird, und daß dann beim nächsten Sekundenschlage, also nach vier Sekunden, die Masse n auf die untere Konsole aufstößt. Da nach Abheben des Übergewichtes M die bewegende Kraft Mg zu wirken aufhört, so bewegt sich während der letzten Sekunde die Gesamtmasse gleichförmig; der in der letzten Sekunde zurückgelegte Weg ist daher die Endgeschwindigkeit, die die Masse beim Abheben des Übergewichtes erlangt hatte.

Bei den Versuchen mit der Atwoodschen Fallmaschine wird die Gesamtmasse $\mathsf{M} = n + m + M + \frac{\mu}{2}$ durch die Kraft Mg bewegt; folglich ist die Beschleunigung b durch die Gleichung $Mg = \mathsf{M}b$ bestimmt, es ist $b = \frac{Mg}{\mathsf{M}}$. Die Übereinstimmung des so berechneten Wertes von b mit dem aus der durchfallenen Wegstrecke h bestimmten ist eine experimentelle Bestätigung der Definitionsgleichung für die Kraft:

$$\textbf{Kraft} = \textbf{Masse} \cdot \textbf{Beschleunigung}.$$

§ 33. Die Newtonschen Bewegungsgesetze. Kraftvektor. Aktion und Reaktion.

Newton hat in seinen „Prinzipien"[1]) drei Bewegungsgesetze aufgestellt, die zwar zum Teil schon vor ihm von Galilei und Huygens erkannt worden sind, denen aber Newton zuerst eine solche scharfe Fassung gegeben hat, daß sie noch heute als Grundlage der Dynamik angesehen werden. Sie lauten:

1. Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch aufgeprägte Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

2. Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der aufgeprägten bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft aufgeprägt wird.

3. Zu einer Wirkung besteht immer eine entgegengesetzt gerichtete und gleiche Gegenwirkung oder: Die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

Das erste Gesetz ist das uns schon bekannte **Trägheitsprinzip** (§ 29).

Das zweite Gesetz enthält die Definition der Kraft; es enthält aber in sich noch ein zweites Prinzip, das **Unabhängigkeitsprinzip**, welches aussagt, daß *die Beschleunigung, die ein Körper durch eine Kraft erfährt, nach Größe und Richtung von dem schon vorhandenen Bewegungszustande des Körpers unabhängig ist.*

Dieser Satz enthält die Grundlagen für den später eingehend zu behandelnden Satz vom **Parallelogramm der Kräfte**. Man kann ihn noch kürzer mit den Worten ausdrücken:

Kräfte sind Vektorgrößen.

Das dritte Newtonsche Gesetz drückt das sogenannte **Gegenwirkungsprinzip** aus. Einen besonderen Fall haben wir schon in § 31 behandelt, wo die Kraft einer Feder die Entfernung zweier Massen voneinander vergrößerte und hierbei beiden Massen entgegengesetzte Beschleunigungen erteilte.

Das Prinzip gilt allgemein. Niemals wirkt eine Kraft auf einen Körper allein, sondern sie wirkt stets auf zwei Massen in entgegengesetzten Richtungen. Die Wirkung auf den einen Körper wird **Aktion**, die auf den anderen **Reaktion** (Rückwirkung) genannt. Welche der beiden Wirkungen wir Aktion, welche Reaktion nennen, bleibt unserer Wahl und Willkür überlassen.

Beispiele: Ziehen wir mit der Hand einen Körper zu uns heran, so empfinden wir in der Hand einen Zug in entgegengesetzter Richtung. Schlagen wir mit der Hand auf den Tisch, so empfinden wir den Schlag des Tisches gegen die Hand.

1) Isaac Newton (1643—1727), Prof. der Univ. Cambridge, Philosophiae naturalis principia mathematica. 1686.

Heben wir einen schweren Körper in die Höhe, so werden wir, solange der Körper nach oben beschleunigt wird, nach unten gedrückt und erscheinen dadurch schwerer, um allerdings gleich darauf, wenn der gehobene Körper die nach oben gerichtete Bewegung mit negativer Beschleunigung verliert, leichter zu erscheinen. Solange der Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit gehoben wird, drücken wir mit unserem normalen Gewichte auf die Unterlage, auf der wir stehen. Wir können diese dynamischen Kräfte nachweisen, wenn wir auf einer Dezimalwage stehend einen Körper, den wir in der Hand halten, plötzlich um eine Strecke heben. Die Wage schlägt erst im Sinne einer Gewichtsvermehrung, dann einer -verminderung aus. In umgekehrter Folge erscheinen erst Verminderung, dann Vermehrung des Gewichtes, wenn wir den Körper um eine Strecke senken.

Aus der Definitionsgleichung der Kraft und aus den drei Newtonschen Prinzipien folgt, daß das Produkt aus Masse und Bewegungsänderung bei beiden Körpern gleich groß ist, daß also, wenn die beiden Massen m_1 und m_2 und die beiden Bewegungsveränderungen (Beschleunigung oder Verzögerung) b_1 und b_2 sind, die Gleichung besteht $m_1 b_1 = m_2 b_2$. In dem Falle, wo eine der beiden Massen, z. B. m_2, unendlich groß wird, wird die ihr erteilte Beschleunigung unendlich klein. Wir brauchen daher in diesem Falle nur die Bewegung des einen der beiden Körper zu untersuchen.

Praktisch braucht man nicht einmal die eine der beiden Massen unendlich groß vorauszusetzen; sie muß nur im Vergleiche zur anderen so groß sein, daß ihre Beschleunigung vernachlässigt werden kann.

Wir brauchen z. B. beim fallenden Steine nur die Bewegung des Steines gegen die Erde, aber nicht die doch auch stattfindende Bewegung der Erde gegen den Stein zu behandeln. Auch bei einem einen Wagen ziehenden Pferde denken wir nur an die Bewegung des Wagens, indem nämlich in jedem Augenblicke, während dessen das Pferd zieht, das Pferd mit der Erde fest verbunden, also mit der Erde einen Körper, eine Masse bildend angesehen werden muß. Es ist dabei unwesentlich, daß die Verbindung zwischen Pferd und Erde bei jedem Fußtritt vorübergehend gelöst und wiederhergestellt wird, wodurch eine Fortbewegung des Pferdes in der Richtung der Vorwärtsbewegung des Wagens ermöglicht wird; denn während das Pferd zieht, muß es mit der Erde fest verbunden sein. Daß dieses der Fall ist, erkennt man daran, daß das Pferd den Wagen nicht fortziehen kann, wenn es keinen festen Halt am Erdboden, z. B. bei Glatteis, hat.

Ein weiteres Beispiel ist der Sprung eines Menschen über einen Graben. Während der Mensch von dem einen Grabenufer abspringt, entfernt er sich von diesem Ufer in beschleunigter Bewegung. Die ebenfalls tatsächlich stattfindende Bewegung des Grabenrandes, also auch der Erde in entgegengesetzter Richtung wird vernachlässigt, da die Masse der Erde im Vergleich zu der des springenden Menschen zu groß ist. Es ist bekannt, daß der Mensch nur dann über den Graben springen kann, wenn er einen guten Absprung hat, wenn also der Teil des Ufers, von dem er abspringt, nicht nachgibt, d. h., wenn die Masse, von der er sich beim Sprunge entfernt, mit der großen Erdmasse in fester Verbindung ist.

Springt ein Mensch von einem Boote ans Ufer, so wird gleichzeitig das Boot vom Ufer fortgestoßen, und zwar um so mehr, je geringer die Masse des Bootes einschließlich seiner Insassen ist.

Wenn eine Lokomotive abfährt, so bewegt sie sich in ihrer Fahrtrichtung. Sie bewegt aber gleichzeitig die Erde in entgegengesetzter Richtung. Da nun die Masse der Erde im Vergleich zu der der Lokomotive so sehr viel größer ist, so ist die Bewegung der Erde unmeßbar klein.

Durch folgenden Versuch (Fig. 95) läßt sich die Rückwärtsbewegung der Unterlage bei einem fahrenden Eisenbahnzuge vorführen. Das Hinterrad eines Fahrrades ist mit dem zum Aufsteigen auf das Rad dienenden Ansatze in einen festen Fuß so eingesetzt, daß es sich leicht in wagerechter Ebene um seine Achse drehen läßt. Auf den Speichen des wagerecht liegenden Rades ist eine kreisförmige Schienenbahn für eine kleine Uhrwerklokomotive festgemacht. Setzt man nun die aufgezogene Lokomotive mit einigen darangehängten Wagen auf die Schienenbahn und läßt die Lokomotive laufen, so bewegt sich der kleine Eisenbahnzug vorwärts, während sich das Fahrrad gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung rückwärts dreht, und zwar ist die Geschwindigkeit der Drehung um so größer, je schwerer der Eisenbahnzug ist. In dem Augenblicke aber, wo das Uhrwerk abgelaufen ist, oder wo durch ein auf der Schienenbahn befindliches Hindernis der Eisenbahnzug angehalten wird, kommt mit dem Zuge gleichzeitig das als Unterlage dienende Fahrrad zur Ruhe. Solange der Zug sich in beschleunigter oder verzögerter Bewegung befindet, erleidet das Rad eine Beschleunigung im entgegengesetzten Sinne.

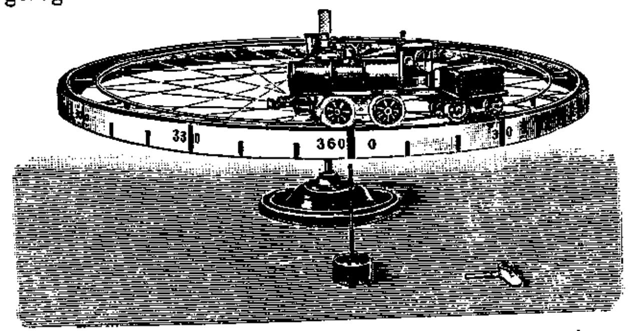

Fig. 95. Bei anfahrender Lokomotive erfahren die Schienen eine Kraft nach rückwärts.

§ 34. Impuls. Bewegungsgröße.

Eine Kraft $\mathfrak{P}$ erteilt der frei beweglichen Masse m eine Beschleunigung b, die durch die Bestimmungsgleichung der Kraft $\mathfrak{P} = m \cdot b$ bestimmt ist. Ist die Kraft $\mathfrak{P}$ beständig, so ist auch die Beschleunigung unveränderlich; die Bewegung ist also gleichmäßig beschleunigt. Wirkt die beständige Kraft $\mathfrak{P}$ während der Zeit t auf die Masse m, so erteilt sie ihr die Geschwindigkeit $\mathfrak{v} = b \cdot t$. Wir können die Zeitwirkung einer Kraft durch Multiplikation der Kraftgleichung $\mathfrak{P} = m \cdot b$ mit der Zeit t ausdrücken und erhalten so die Gleichung $\mathbf{\mathfrak{P} \cdot t = m \cdot \mathfrak{v}}$.

Das Produkt $\mathfrak{P} \cdot t$ wird der **Impuls** der Kraft $\mathfrak{P}$ während der Zeit t oder ihr **Kraftantrieb** genannt; das Produkt $m \cdot \mathfrak{v}$ heißt die **Bewegungsgröße** der mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegten Masse m. Unter Benutzung dieser Bezeichnungen können wir die obige Gleichung in Worten ausdrücken: *Der Impuls einer Kraft ist gleich der Bewegungsgröße der durch die Kraft bewegten Masse.*[1]) Dimension: [gemsec^{-1}].

1) Der Begriff „Bewegungsgröße" wird wegen der Gleichheit des Zahlenwertes häufig auch vollkommen gleichbedeutend mit „Impuls" gebraucht.

Bei einer veränderlichen Kraft gilt, genau genommen, dieser Satz nur für ein Zeitelement Δt, während dessen die Kraft als unveränderlich angesehen werden darf. Dann lautet die Gleichung $\mathfrak{P} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \mathfrak{v}$. In allen praktisch vorkommenden Fällen, bei denen der Impulsbegriff gebraucht wird, kommt auch nur die Zeitwirkung der Kraft oder der Impuls während eines sehr kurzen Zeitraumes in Frage.

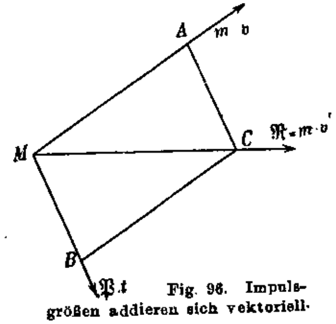

Fig. 96. Impulsgrößen addieren sich vektoriell.

Beide Größen sind Vektorgrößen. Wenn daher eine Masse zwei gleichzeitigen oder zwei aufeinanderfolgenden Impulsen ausgesetzt wird, so wird der resultierende Impuls durch das Vektorparallelogramm gefunden (§ 16).

Wenn auf eine mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegte Masse m eine Kraft $\mathfrak{P}$ während der Zeit t wirkt, so findet man die resultierende Bewegungsgröße, indem man das Vektorparallelogramm $MACB$ (Fig. 96) entwirft, dessen beide Seiten die Vektoren der Bewegungsgröße $m\mathfrak{v}$ und des Impulses $\mathfrak{P}t$ sind. Die Diagonale MC ist dann der Vektor der resultierenden Bewegungsgröße $m\mathfrak{v}'$.

Die Zeichnung kann man zu Fig. 97 vereinfachen, indem man im Endpunkte A des Vektors MA der Bewegungsgröße $m\mathfrak{v}$ den Vektor AC des Impulses $\mathfrak{P}t$ anträgt und M mit C verbindet; dann ist MC der Vektor der resultierenden Bewegungsgröße $m\mathfrak{v}'$.

Der Kraftantrieb $\mathfrak{P} \cdot t$ kann graphisch durch ein Rechteck mit den Seiten $\mathfrak{P}$ und t dargestellt werden. Ändert die Kraft während der Zeit ihres Wirkens ihre Größe, so kann man sie als Funktion der Zeit in der Form $\mathfrak{P} = f(t)$ schreiben, deren Kurve in Fig. 98 auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit der Abszisse t und der Ordinate $\mathfrak{P}$ bezogen ist. Man kann dann den während des Zeitelementes Δt wirkenden Kraftantrieb durch das schmale rechtwinklige (in der Figur wagerecht gestrichelte) Flächenstück über Δt als Grundlinie darstellen. Der Kraftantrieb während der Zeit von $t = t_1$ bis $t = t_2$ ist $\mathfrak{J} = \sum \mathfrak{P} \cdot \Delta t$, gleich dem Flächeninhalte des (senkrecht gestrichelten) Flächenstückes zwischen der Abszissenachse, der Kurve und den beiden zu t_1 und t_2 gehörigen Ordinaten. Bei verschwindendem Δt geht die Summe in ein Integral über. Dann erhalten wir $\mathfrak{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{P} \cdot dt$, d. h. in Worten: *Der Impuls ist das Zeitintegral der Kraft zwischen zwei Zeitpunkten.* Denkt man sich über derselben Grundlinie von t_1 bis t_2 ein Rechteck gezeichnet, das dem vorigen Flächenstücke inhaltsgleich ist, und hat dieses Rechteck

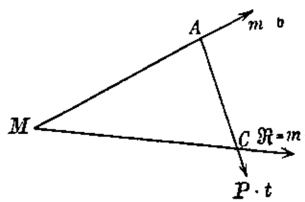

Fig. 97. Impulse sind Vektoren.

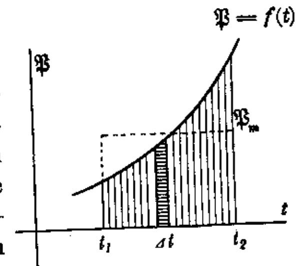

Fig. 98. Impuls ist das Zeitintegral der Kraft.

die Höhe $\mathfrak{P}_m$, so nennt man $\mathfrak{P}_m$ den Mittelwert der Kraft, der unveränderlich wirkend während derselben Zeit dieselbe Bewegungsgröße $m\mathfrak{v}$ einer Masse m erzeugen würde wie die gegebene Kraft $\mathfrak{P}$.

Bei den in § 31 beschriebenen Versuchen mit den zwei durch eine Feder auseinander getriebenen Wagen wirkte die sich entspannende Feder nach beiden Seiten gleich lange Zeit. Daher waren auch die nach beiden Seiten wirkenden Impulse und die den beiden Massen m_1 und m_2 erteilten Bewegungsgrößen $m_1\mathfrak{v}_1$ und $m_2\mathfrak{v}_2$ einander gleich.

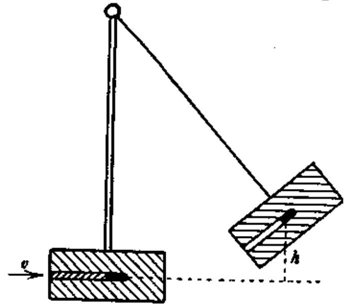

Fig. 99. Ballistisches Pendel.

Die Begriffe Impuls und Bewegungsgröße werden stets dort angewandt, wo eine Kraft auf zwei Massen durch **Aktion** und **Reaktion** wirkt, weil hierbei die Wirkungsdauer der Kraft nach beiden Seiten gleich groß ist.

Als Beispiel diene das **ballistische**[1] **Pendel.** Dieses wird zur Messung der Geschwindigkeit eines Geschosses benutzt. Es besteht aus einer großen weichen Masse m_1, z. B. einer Kiste mit Sand, die an einer Stange drehbar aufgehängt ist (Fig. 99). Schießt man das Geschoß mit der Masse m wagerecht so in die Mitte des Pendelkörpers hinein, daß es darin stecken bleibt, so erteilt das Geschoß der Gesamtmasse $m + m_1$ eine gewisse Geschwindigkeit. Daher erfährt das Pendel einen Ausschlag, dessen Steighöhe h gemessen werden kann. Aus der Steighöhe berechnet sich die Anfangsgeschwindigkeit des Pendels zu $v_1 = \sqrt{2gh}$ (S. 50). Die Aktion an dem Pendel ist $m_1 v_1$, die Reaktion am Geschosse, die Vernichtung seiner Geschwindigkeit bis auf den Rest der Scheibengeschwindigkeit $m(v - v_1)$. Also gilt:

$$m_1 v_1 = m(v - v_1) \quad \text{oder} \quad mv = (m_1 + m)v_1,$$

woraus v zu berechnen ist.

Die letzte Gleichung enthält links die Bewegungsgröße des Systemes Pendel und Geschoß vor, rechts nach dem Stoße. Es bleibt dem Systeme also die Bewegungsgröße erhalten, sobald man in das „System" alle wirkenden Körper einbezieht. Ein solches System heißt ein abgeschlossenes. Es ist ein System, in dem sich nur innere Vorgänge abspielen, auf welches von außen her keinerlei Einwirkungen ausgeübt werden. Für ein solches System bleibt also, welche Vorgänge sich innerhalb desselben auch abspielen mögen, die Summe aller Bewegungsgrößen unveränderlich. Man nennt diesen Satz: **Das Prinzip von der Erhaltung der Bewegungsgröße.**

Das Doppelgeschütz. Ein weiteres Beispiel gibt das in Fig. 100 abgebildete Doppelgeschütz. Auf einem Stativ von 54,5 cm Höhe ruht wagerecht ein kleines Messingrohr, an das ein massiver Metallzylinder angeschraubt ist. Ein dem ersten gleicher Metallzylinder ist mit einem zylindrischen Stiele versehen, der genau in das Messingrohr paßt. Beide Metallzylinder, jeder zuzüglich des mit ihm verbundenen Ansatzes, mögen gleiche Massen haben. Das Messingrohr (das Geschützrohr) ist mit

1) βάλλειν (griech.) = werfen, schießen.

einem mit einer Pulverpfanne versehenen Zündloche ausgestattet. Man schüttet etwas Schießpulver in das Geschützrohr, setzt das Geschoß ein, bringt etwas Pulver auf die Pfanne und legt das Doppelgeschütz wagerecht oben auf den Ständer. Dann entzündet man das Pulver auf der Pfanne durch einen glühenden Draht. Dadurch kommt auch das Pulver im Rohre zur Aufflammung. Die beiden Messingzylinder mit ihren Ansätzen werden auseinandergeschleudert und fallen beide in gleicher Entfernung von der Holzsäule auf dem Tische nieder. Das aufflammende Pulver hat auf beide Körper in gleicher Weise gewirkt und ihnen beiden dieselbe Geschwindigkeit erteilt.

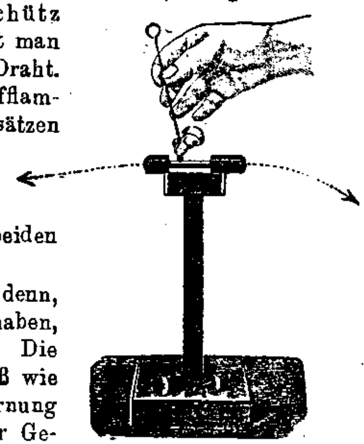
Fig. 100. Doppelgeschütz.

Die Geschwindigkeit der Geschosse ist meßbar; denn, da die Geschosse die Höhe von 54,5 cm durchfallen haben, so sind sie $1/3$ Sekunde unterwegs gewesen (§ 17). Die Geschwindigkeit in der Sekunde ist dreimal so groß wie die auf dem Tische wagerecht zu messende Entfernung von der Anfangslage bis zum Aufschlagspunkt der Geschosse.

Man macht darauf denselben Versuch mit dem Unterschiede, daß die beiden Körper nicht gleiche Masse haben. Es möge vielmehr das mit dem Rohre fest verbundene Geschoß 50 g, das im Rohre mit dem Stiele steckende Geschoß 100 g wiegen. Nach dem Schusse ist das 50 g wiegende Geschoß doppelt so weit geflogen wie das 100 g wiegende. Die Geschwindigkeit des ersten ist also doppelt so groß wie die des zweiten, trotzdem der Druck der Pulvergase auf beide Geschosse gleich groß war.

Wiederholt man denselben Versuch mit Geschossen, deren Massen in einem anderen Verhältnisse zueinander stehen, so verhalten sich stets die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Massen der in Bewegung gesetzten Geschosse; es ist das Produkt aus der Geschwindigkeit und der Masse der Geschosse bei jedem einzelnen Versuch für beide Geschosse dasselbe. Die Bewegung der Geschosse ist so, daß, wenn das Doppelgeschütz vor dem Abfeuern in bezug auf eine Drehungsachse am Geschütze im Gleichgewichte war, es auch nach dem Abfeuern bleiben würde, wenn man sich die beiden Teile dauernd starr verbunden denkt. Die Horizontalabstände der beiden Teile von der erwähnten Achse werden in jedem Augenblicke der Bewegung im umgekehrten Verhältnisse ihrer Massen stehen. Dies ist die Bedingung des Hebelgleichgewichtes. Die gedachte Achse geht also dauernd durch den Schwerpunkt (§ 46) der beiden Geschützteile, der Schwerpunkt bleibt unverändert (Prinzip von der Erhaltung des Schwerpunktes).

Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes. Dieser Satz bleibt aber auch bestehen, wenn das Doppelgeschütz ursprünglich nicht in Ruhe war, sondern sich mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit durch den Raum bewegte, bevor die Detonation eintrat. Es bewegen sich in diesem Falle nach der Aufflammung die beiden Teile so, daß ihr Schwerpunkt sich mit der ursprünglichen Geschwindigkeit gleichförmig weiter bewegt. Dasselbe gilt natürlich bei einer Zertrümmerung in mehr als zwei Teile, z. B. für den Splitterhaufen einer explodierenden Granate oder zertrümmerter kosmischer Massen. Die Entfernung aller Bruchstücke von dem Schwerpunkte des Systemes geschieht in genau der gleichen Weise, als ob dasselbe ruhte. Ein mit dem Systeme mitbewegter Beobachter kann auf keinerlei Weise einen Unterschied der Erscheinung bemerken, aus ihrer Beobachtung also nicht feststellen, ob das abgeschlossene System, in dem er sich befindet, ruht oder sich gleichförmig bewegt.

Wir sprechen das Naturgesetz in folgender Form aus: *Durch die Wirkung innerer Kräfte eines Systemes kann die Ruhe oder der Bewegungszustand des Schwerpunktes des Systemes niemals geändert werden.*

Ein weiteres Beispiel für den Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße gibt die Lehre vom Stoß (§ 65).

Impuls und Wurfbewegung. Manchmal kann es Schwierigkeiten haben, bei physikalischen Vorgängen den Satz von der Erhaltung des Impulses zu verfolgen. Wir werfen z. B. einen Stein in die Luft. Dann hat dieser sicherlich Bewegungsgröße. Er fällt zur Erde, schlägt auf die Erde auf und kommt zur Ruhe. Dann hat er keine Bewegungsgröße mehr. Wie ist das mit dem angeführten Satze verträglich? Die Antwort darauf kann nur heißen: Als abgeschlossenes System, für welches der Erhaltungssatz in diesem Falle gilt, müssen wir das System Stein-Erde betrachten. Während der Stein abgeschleudert wurde, erhielt der Erdboden, also die Erde, durch den Reaktionsdruck der Füße des Schleudernden auch einen Impuls. Der Stein bewegt sich also nach oben und die Erde — vorausgesetzt, sie sei absolut starr — nach unten. Die Geschwindigkeiten sind den Massen umgekehrt proportional, die Geschwindigkeit der zurückgestoßenen Erde ist also unmerkbar klein. Während der Stein nun in der Luft seine Bahn beschreibt, findet zwischen Stein und Erde eine Kraftwirkung, die der Schwere, statt. Der Stein erhält einen Bewegungsantrieb nach unten; nach dem Reaktionsprinzipe von Newton die Erde einen solchen nach oben. Im Augenblicke, wo sich die Bewegung des nach oben steigenden Steines umkehrt, geschieht das auch mit der Bewegung der nach unten zurückgestoßenen Erde. Beide bewegen sich nun einander entgegen und vernichten bei ihrer Berührung die entgegengesetzt gleichen Bewegungsgrößen. Der Gesamtimpuls des Systemes Erde-Stein ist während der ganzen Dauer der Bewegung immer Null gewesen. — Will man die Erde nicht als absolut starr betrachten, so ändert das am Ergebnisse nichts. Der Impuls beim Schleudern des Steines durch den Reaktionsdruck der Füße wandert dann in Form einer „Welle" (§ 66) ins Innere der Erde hinein, ein entgegengesetzter Impuls ebenso beim Aufschlagen des Steines. Beide Impulse vernichten sich gegenseitig dann irgendwann später.

Drehimpuls. Feuert ein (mit der Erde starr verbundenes Geschütz) wagerecht, so erfährt der Erdkörper einen „Drehimpuls"; die zugehörige Bewegungsgröße muß sich in einer Drehbewegung um den Erdmittelpunkt äußern. Wenn dann später das abgeschleuderte Geschoß in den Erdkörper einschlägt, so vernichtet der dadurch erhaltene neue Drehimpuls die Bewegungsgröße dieser Erddrehung wieder vollständig (§ 53).

Bei jedem Schritte oder Sprunge eines Mannes vorwärts, bei jedem Kolbenhube der Lokomotive eines Zuges erfährt die Erde Drehimpulse (S. 92, Fig. 95).

Impuls und Druck. Schlägt ein Vogel mit den Flügeln nach unten, so erfahren Vogelkörper und die getroffenen Luftmassen gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Impulse. Die Bewegungsgröße der getroffenen Luftmassen teilt sich durch Stoß immer weiter den nach unten zu liegenden Luftmassen mit.

Da die Bewegungsgröße ihrem Betrage und ihrer Richtung nach unverändert bleibt, so erfährt schließlich wieder der nach unten das Luftmeer begrenzende Erdkörper von den Luftmassen einen Impuls, der demjenigen gleich ist, welchen der Vogelkörper erhielt. Der in die Höhe steigende Vogel stützt sich also in gewissem Sinne genau so gegen den festen Erdkörper durch Vermittelung der beweglichen Luft, wie ein die Treppe hinaufsteigender Mann durch unmittelbare Berührung mit Hilfe der Beine. — Das Gewicht eines fliegenden Vogels, eines Flugzeuges usw. „lastet" also auf der Erde durch Vermittlung der Luft. Unterhalb eines solchen fliegenden Körpers muß daher die Luft zusammengedrückt erscheinen, d. h. es muß ein nach unten gerichteter Luftdruck vorhanden sein, der ohne den fliegenden Körper fehlt.

Bedeutung des Impulssatzes. Der Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße ist also für die Beobachtung des täglichen Lebens deshalb nicht so in die Augen fallend, weil bei den allermeisten Vorgängen der Erdkörper mit seiner großen Masse mit zu dem abgeschlossenen Systeme des Vorganges gehört. Es mag das der Grund sein, weshalb er häufig nicht genügend ins Bewußtsein tritt; für die Erkenntnis der Zusammenhänge des physikalischen Geschehens ist er von nicht hoch genug einzuschätzender Bedeutung und ist dem Satze von der Erhaltung der Energie völlig gleichwertig (§ 36, S. 111).

Das Grundgesetz der Mechanik. Da die Beschleunigung die Änderung der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit ist, kann das **Grundgesetz der Mechanik** in der Form: **Kraft = Masse · Beschleunigung** (S. 86) mit Hilfe des Begriffes „Bewegungsgröße" auch in der Form ausgesprochen werden: *die Kraft ist stets gleich der Änderung der Bewegungsgröße in der Zeiteinheit.* Solange die Masse unveränderlich bleibt, fällt diese Formulierung des Grundgesetzes mit der auf S. 86 angeführten zusammen. Sie geht aber über diese hinaus und ist allgemeiner, falls durch die Bewegung eine Veränderung der Masse anzunehmen ist. Solche Fälle kennt die heutige Physik (Bd. II: Änderung der Elektronenmasse). Es ist bemerkenswert, daß schon Newton in seinen drei Bewegungsgesetzen diese allgemeinere Fassung im Auge gehabt zu haben scheint. Er definiert nämlich: Die Menge der Bewegung (quantitas motus) wird durch das Produkt aus Geschwindigkeit und Masse (quantitas materiae) (§ 8) gemessen. In dem zweiten Bewegungsgesetze (S. 90) ist also wahrscheinlich unter den ersten Worten „die Änderung der Bewegung" (mutatio motus) nicht die Beschleunigung schlechthin, sondern die Änderung der Bewegungsgröße zu verstehen. Die hier angeführte Fassung des Grundgesetzes der Mechanik ist deshalb wichtig, weil sie auch noch in der neueren „Relativitätstheorie" gültig ist (Bd. II), in welcher die früher angeführte „klassische" Form der Fassung versagt.

§ 35. Die Bewegung eines Körpers auf krummliniger Bahn. Normaldruck. Zentrifugalkraft.

Ein auf krummliniger Bahn sich mit veränderlicher Geschwindigkeit bewegender Massenpunkt erfährt nach den Beobachtungen des § 21 außer der tangentialen Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ noch eine normale, nach dem Mittelpunkte des Krümmungskreises gerichtete sogenannte Zentripetalbeschleunigung $\frac{v^2}{\varrho}$. Bei den Beschleunigungen setzt er seinen Trägheitswiderstand oder seine Trägheitskraft (§ 31, 9.) entgegen, den tangentialen, längs der Bahn gerichteten, also longitudinalen Trägheitswiderstand (longitudinale Trägheitskraft) $m\frac{dv}{dt}$ und den normalen, quer zur Bahn gerichteten, also transversalen Trägheitswiderstand (transversale Trägheitskraft) $m\cdot\frac{v^2}{\varrho}$. Der erstere fällt fort, wenn die gekrümmte Bahn mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen wird. Außer einer tangential gerichteten beschleunigenden Kraft muß zur Überwindung der Trägheitswiderstände also auch eine Zentripetalkraft wirken, eben jene Kraft, welche die Zentripetalbeschleunigung entgegen der Trägheitskraft, welche zentrifugal wirkt, aufkommen läßt.

Bewegt sich ein Massenpunkt mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit w auf einem Kreise vom Radius r, also mit der Geschwindigkeit $v = rw$, so ist die zentrifugale Kraft der Trägheit (S. 56):

$$\mathfrak{P} = m\cdot\frac{v^2}{r} = m\cdot\frac{4\pi^2 r}{T^2} = m\cdot w^2 r.$$

In Worten: *Die Zentrifugalkraft (Fliehkraft) ist der bewegten Masse proportional. Sie ist dem Quadrate der linearen und dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit proportional. Sie ist bei unveränderlicher linearer Geschwindigkeit dem Krümmungsradius umgekehrt und bei unveränderlicher Winkelgeschwindigkeit oder bei unveränderlicher Umlaufszeit dem Krümmungsradius direkt proportional; sie ist ferner dem Quadrate der Umlaufszeit umgekehrt proportional.*

Die Schienen eines gekrümmten Eisenbahngeleises müssen um so fester sein (um den Zentraldruck ausüben zu können oder, was dasselbe sagt, um den Zentrifugaldruck aushalten zu können), je größer die Masse des fahrenden Eisenbahnzuges ist.

Wenn ein Eisenbahnzug mit derselben Geschwindigkeit zuerst eine Kurve mit großem Krümmungsradius und dann eine solche mit kleinem Krümmungsradius durchfährt, so ist die Gefahr des Entgleisens im letzten Falle größer als im ersten.

Von zwei Menschen, die auf verschiedenen Punkten eines Karussells stehen, ist die Gefahr, abgeschleudert zu werden, für denjenigen am größten, der am weitesten von der Drehungsachse entfernt ist, denn beide Menschen haben dieselbe Winkelgeschwindigkeit (aber verschiedene lineare Geschwindigkeiten).

Bahn bei transversaler Kraft. Wirkt eine durch die Gleichung $\mathfrak{P} = \frac{mv^2}{r}$ der Größe nach bestimmte Kraft dauernd und mit unveränderlicher Größe stets senkrecht zur augenblicklichen Bewegungsrichtung eines im übrigen nur der Trägheit unterworfenen Körpers, so behält der Körper seine Geschwindigkeit v bei, und infolgedessen bleibt auch sein Krümmungsradius r beständig, d. h. der Körper bewegt sich gleichförmig auf einer Kreisbahn, und die Kraftrichtung ist stets nach dem Mittelpunkte der Kreisbahn gerichtet. Es hält in diesem Falle die aus der Trägheit entspringende Fliehkraft (der transversale

Trägheitswiderstand) der nach dem Krümmungsmittelpunkte hin gerichteten Kraft, der Zentripetalkraft, das Gleichgewicht.

Schwungmaschine. Die Gesetze über die Fliehkraft werden mittels der Schwungmaschine experimentell untersucht und bestätigt. Sie besteht aus zwei durch eine Schnur miteinander verbundenen Schnurscheiben von verschieden großen Radien. Setzt man die große Schnurscheibe in Drehung, so dreht sich die kleine Schnurscheibe mit großer Winkelgeschwindigkeit. Auf die rasch sich drehende Achse werden die zur Untersuchung dienenden Hilfsapparate gesetzt.

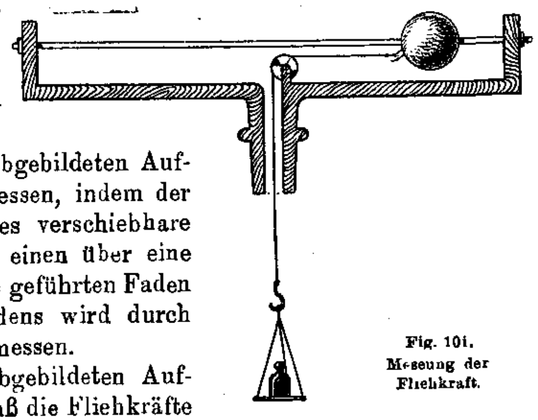

Fig. 101. Messung der Fliehkraft.

Mittels des in Fig. 101 abgebildeten Aufsatzes wird die Fliehkraft gemessen, indem der längs eines wagerechten Stabes verschiebbare Körper bei seiner Umdrehung einen über eine Rolle und dann durch die Achse geführten Faden spannt; die Spannung des Fadens wird durch angehängte Gewichtsstücke gemessen.

Mittels des in Fig. 102 abgebildeten Aufsatzes kann man nachweisen, daß die Fliehkräfte zweier mit gleicher Winkelgeschwindigkeit umlaufender Massen gleich sind, wenn ihre Entfernungen von der Achse sich umgekehrt wie die Massen verhalten.

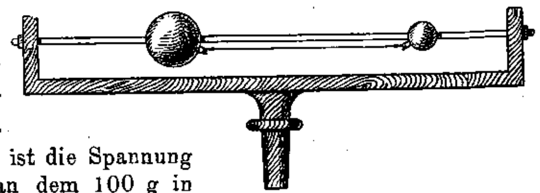

Fig. 102. Zwei Fliehkräfte sind gleich, wenn die Produkte aus den Massen und Drehradien gleich sind.

Anwendungen: Wie groß ist die Spannung eines Fadens von 1 m Länge, an dem 100 g in 1 sec herumgeschleudert werden? Antwort: $\frac{m\cdot 4\pi^2 r}{T^2} = \frac{100\cdot 40\cdot 100}{1} = 400\,000\,\text{Dyn} = \frac{400000}{981}\,g^* = 408\,g^*$.

Das **Zentrifugalpendel** besteht aus einer lotrechten Stange, an der zwei um ein Gelenk drehbare Pendel mit schweren Kugeln befestigt sind. Versetzt man die Stange in rasche Umdrehung, so entfernen sich die Pendel von ihr um so mehr, je größer die Winkelgeschwindigkeit ist. Die seitliche Bewegung der Pendel kann durch ein Gestänge weiter übertragen werden. Ein solches Zentrifugalpendel benutzt man dazu, um den Gang der Dampfmaschinen zu regeln. Beim Zentrifugalregulator wird durch das Gestänge ein Ventil betätigt, das den Dampfzutritt aus dem Dampfkessel zu dem Dampfzylinder um so mehr absperrt, je rascher sich das Zentrifugalpendel dreht. Eine weitere Anwendung des Zentrifugalpendels findet statt beim **Tourenzähler** (Umdrehungszähler) oder Tachymeter[1]), bei dem die seitliche Bewegung der Pendel auf einen Zeiger übertragen wird, an dem man die Winkelgeschwindigkeit oder die Tourenzahl (d. i. die Anzahl der Umdrehungen in einer Minute) ablesen kann.

---

1) tachýs (griech.) = schnell.

Die **Zentrifugaltrockenmaschine** besteht aus einem zylindrischen Kessel mit durchlöcherten Wandungen. Feuchte Gegenstände, z. B. feuchtes Zeug, werden in den Kessel gelegt, und dieser wird dann in rasche Umdrehung versetzt. Infolge der Zentrifugalkraft wird das Wasser durch die Löcher der Zylinderwandungen getrieben, und dadurch wird das Zeug getrocknet.

Die **Zentrifugalpumpe** besteht aus einem trommelartigen Gehäuse, in dem ein Flügelrad in rasche Umdrehung versetzt wird. Ist das Gehäuse mit Wasser gefüllt, so wird das Wasser durch das Flügelrad ebenfalls in schnelle Drehung versetzt und übt daher infolge der Fliehkraft einen hohen Druck gegen die äußere Wand des Gefäßes aus. Hat das Gehäuse an einer Stelle seines äußeren Umfanges eine Ausflußöffnung, so wird das Wasser aus dieser Öffnung herausgeschleudert. Durch eine Öffnung in der Nähe der Trommelachse kann dann frisches Wasser einströmen. Ist die Öffnung durch ein Rohr mit einem Wasserbehälter verbunden, so saugt die Pumpe das Wasser an und schleudert es dann in der angegebenen Weise aus der am äußeren Trommelumfang angebrachten und mit einem Steigrohre verbundenen Öffnung heraus (§ 106, Fig. 403).

Bei der **Milchzentrifuge** benutzt man die Zentrifugalkraft, um die in der Milch enthaltenen Stoffe verschiedener Dichte voneinander zu trennen. Die Milch wird in einem zylindrischen Kessel in rasche Umdrehung versetzt; dann wird sie durch die Zentrifugalkraft gegen die Außenwandungen des Zylinders gepreßt. Hier scheiden sich die einzelnen Bestandteile der Milch so, daß sich die schwerere Magermilch am weitesten von der Rotationsachse entfernt, während der Rahm sich in einer der Achse am nächsten liegenden zylindrischen Schicht absondert und hier abgezogen werden kann.

§ 36. Die Arbeit. Die Energie.

Widerstand. Wirkt einer bewegten Masse m ein Widerstand W entgegen, so kann der Fall eintreten, daß die Masse unter gleichzeitiger Einwirkung des Bewegungswiderstandes W und einer bewegenden Kraft $\mathfrak{P}$ keine Beschleunigung erfährt. In diesem Falle wird der Widerstand W durch die bewegende, aber nicht beschleunigende Kraft $\mathfrak{P}$ gemessen.

Kann z. B. ein Wagen auf einer wagerechten Straße durch die Kraft $\mathfrak{P} = 100$ kg* mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt werden, so wird der Bewegungswiderstand W des Wagens durch die Kraft $W = \mathfrak{P} = 100$ kg* gemessen. Würde $\mathfrak{P} > W$ sein, so würde die Bewegung beschleunigt werden; würde $\mathfrak{P} < W$ sein, so würde der Wagen eine Verzögerung erfahren.

Um eine Last von $L = 5$ kg* Gewicht mit gleichförmiger Geschwindigkeit senkrecht in die Höhe zu heben, ist die Kraft $\mathfrak{P} = 5$ kg* erforderlich. Hier ist der gegen die Kraft wirkende Widerstand ihr Gewicht L. Betrüge die hebende Kraft 6 kg*, so würde der Kraftüberschuß von 1 kg* der Last von der Masse 5 kg die Beschleunigung $b = \frac{1000 \cdot 981 \text{ dyn}}{5000 \text{ gramm}} \approx 200 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$ (gal) erteilen. Betrüge die Kraft nur 4 kg*, so würde der Gewichtsüberschuß von 1 kg* der Last von der Masse 5 kg die Verzögerung von annähernd

$\approx 200 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$ (gal) erteilen. Nur wenn $\mathfrak{P} = L$ ist, erfolgt die Hebung ohne Beschleunigung oder Verzögerung.

Arbeit. Für die Überwindung eines Widerstandes gebraucht man schon im gewöhnlichen Leben den Ausdruck „Arbeit“. Um einen Wagen auf der Straße fortzuziehen, ist Arbeit erforderlich. Die Arbeit wird verdoppelt, wenn der Widerstand des Wagens verdoppelt wird; es ist ferner die doppelte Arbeit erforderlich, wenn der Wagen um die doppelte Wegstrecke fortgezogen werden soll. Wir setzen schon im gewöhnlichen Leben die Arbeit proportional mit dem überwundenen Widerstande und mit der Wegstrecke, längs der der Widerstand überwunden wird. Aus diesem Sprachgebrauche leiten wir den physikalischen Arbeitsbegriff ab und setzen fest:

Die Arbeit, die zur Überwindung eines Widerstandes längs einer Wegstrecke (ohne Beschleunigung) geleistet wird, wird gemessen durch das Produkt aus dem Widerstande und der Wegstrecke.

Da die (nicht beschleunigende) bewegende Kraft gleich dem Widerstande ist, der überwunden wird, so ergibt sich die gleichwertige Begriffsbestimmung:

Die Arbeit A, die eine Kraft $\mathfrak{P}$ leistet, wenn sie einen Widerstand ohne Beschleunigung längs einer Wegstrecke $\mathfrak{s}$ überwindet, wird gemessen durch das Produkt aus der Kraft $\mathfrak{P}$ und der Wegstrecke $\mathfrak{s}$.[1] Dimension: $[\text{gcm}^2\text{sec}^{-2}]$.

Als Definitionsgleichung folgt hieraus

$$A = \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{s}.$$

Arbeitseinheiten. Legt man als Krafteinheit das Dyn und als Wegeinheit das Zentimeter zugrunde, so erhält man als Arbeitseinheit das **Erg.**[2]) Es ist

$$1 \textbf{ Erg} = 1 \textbf{ Dyn} \times 1 \textbf{ Zentimeter.}$$

Als größere Einheit verwendet man daneben

$$10^7 \text{ Erg} = 1 \text{ Joule (J)}^{3)}, \quad 10^{10} \text{ Erg} = 1 \text{ Kilojoule (1 kJ)} = 1 \text{ Vismeter (vm)}$$

$$\text{und} \quad 36.10^{12} \text{ Erg} = 1 \text{ Kilowattstunde (1 kWh).}$$

Im technischen Maßsysteme legt man als Krafteinheit das Kilogramm (1 kg*) und als Wegeinheit das Meter (m) zugrunde. Daher heißt die Arbeitseinheit im technischen Maßsysteme 1 Meterkilogramm; es ist

$$1 \textbf{ Meterkilogramm (mkg*)} = 1 \textbf{ Meter} \times 1 \textbf{ Kilogramm*}.$$

Zur Umrechnung ist zu beachten, daß 1 kg* = 981000 Dyn und 1 m = 100 cm sind, also ist

$$1 \text{ mkg*} = 98100000 \text{ Erg} = 9{,}81 \cdot 10^7 \text{ Erg} = 9{,}81 \text{ Joule} = 9{,}81 \text{ J}, \qquad \text{oder}$$

$$1 \text{ mkg*} = 0{,}00981 \cdot 10^{10} \text{ Erg} = 0{,}00981 \text{ kJ} = 0{,}00981 \text{ Vismeter (vm)}$$

---

1) Dieser Begriff „Arbeit“ als das Produkt aus Kraft und Weg wurde von dem franz. Mathematiker J. V. Poncelet (1788—1867), durch G. G. Coriolis (1792—1843) ermuntert, um 1826 in die Physik eingeführt.
2) érgon (griechisch) = Werk, Tat.
3) spr. „dschaul“, s. dazu Fußnote § 152.

und hieraus

$$1\ \mathrm{J} = 1/9{,}81\ \mathrm{mkg}^* = 0{,}102\ \mathrm{mkg}^*,\ 1\ \mathrm{vm} = 1/0{,}00981\ \mathrm{mkg}^* = 102\ \mathrm{mkg}^*.$$

Kinetische Energie. Wirkt eine Kraft $\mathfrak{P}$ auf eine frei bewegliche Masse m, so erteilt sie ihr die Beschleunigung $b = \frac{\mathfrak{P}}{m}$. Infolge der Beschleunigung erlangt die Masse während der Zeit t die Geschwindigkeit $\mathfrak{v} = bt$, und sie legt hierbei den Weg $\mathfrak{s} = \frac{b}{2} \cdot t^2$ zurück. Entfernt man aus den drei Gleichungen $b = \frac{\mathfrak{P}}{m}$, $\mathfrak{v} = bt$, $\mathfrak{s} = \frac{b}{2} \cdot t^2$ die beiden Größen b und t, so entsteht die Gleichung

$$\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{s} = \frac{m}{2} \cdot \mathfrak{v}^2.$$

Dehnt man den Begriff der Arbeit als das Produkt aus Kraft und Weg auch auf diesen Fall aus, wo die Kraft die Trägheitskraft (§ 31. 9.) der Masse überwindet und eine Beschleunigung der Masse bewirkt, so steht auf der linken Seite der Gleichung die Arbeit $A = \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{s}$ und auf der rechten Seite der Ausdruck $\frac{m}{2} \cdot \mathfrak{v}^2$. Dieser ist als der Arbeit $\mathfrak{P}\mathfrak{s}$ gleichwertig anzusehen. Der Ausdruck $\frac{m}{2} \cdot \mathfrak{v}^2$ wird die **Wucht** oder die **Bewegungsenergie** (auch **kinetische Energie**[1]) der bewegten Masse genannt. Unter Benutzung dieser Wörter kann man die obige Gleichung in die Worte fassen:

Wenn eine Kraft $\mathfrak{P}$ längs des Weges $\mathfrak{s}$ auf die frei bewegliche Masse m einwirkt, so erlangt die Masse eine Endgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$, und die der Masse infolge ihrer Geschwindigkeit innewohnende Wucht $E = \frac{1}{2} m\mathfrak{v}^2$ ist gleichwertig mit der von der Kraft aufgewandten Arbeit $A = \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{s}$.

Infolge ihrer Wucht vermag die bewegte Masse wieder die Arbeit $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{s}$ zu leisten; die kinetische Energie oder Wucht stellt also einen Arbeitsvorrat dar.

Beispiel:

Ein Körper vom Gewichte $G = 1\ \mathrm{kg}^* = 981000\ \mathrm{Dyn} \approx 10^6\ \mathrm{Dyn}$ falle die Höhe $h = 20\ \mathrm{m} = 2000\ \mathrm{cm}$ lotrecht herunter; er erlangt am Ende des Falles die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 2000} \approx 2000$ cm/sec. Also ist seine Bewegungsenergie $E = 1/2 \cdot 1000 \cdot 4000000\ [\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^2/\mathrm{sec}^2] = 2 \cdot 10^9\ [\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^2/\mathrm{sec}^2] = 2 \cdot 10^9$ Erg $= 200$ Joule oder 0,2 Vismeter. Beim Fallen ist die vom Körper aufgewandte Arbeit $Gh \approx 10^6\ \mathrm{Dyn} \cdot 2000\ \mathrm{cm} = 200$ Joule in die Bewegungsenergie der Masse umgewandelt, die durch denselben Wert von 200 Joule gemessen wird.

1) Nach dem griechischen Worte en-érgeia = Wirksamkeit. Der Gebrauch des Wortes Energie als Arbeitsvermögen (Arbeitsvorrat) ist (1855) von dem schottischen Ingenieur W. J. M. Rankine (1820—1872) eingebürgert worden; für $\frac{mv^2}{2}$ wird das Wort zum ersten Male von J. Kepler 1618 angewendet. Nach Leibniz (1646—1716) nannte man bis in die neueste Zeit die kinetische Energie „lebendige Kraft".

Infolge der Endgeschwindigkeit $v \approx 2000$ cm/sec hat der Körper eine bestimmte Bewegungsenergie, und infolge der Geschwindigkeit kann er sich der Fallbeschleunigung entgegen wieder auf die Höhe $h = \frac{v^2}{2g} = 4000000/2000$ cm $= 2000$ cm erheben. Der Körper hat also infolge seiner Bewegungsenergie die Fähigkeit erhalten, wieder die Höhe zu erreichen, von der er herabgefallen war.

Durch die Wucht des geschwungenen Hammers wird der Nagel ins Brett, durch die Wucht des fallenden Rammbären wird der Pfahl in die Erde getrieben; die Wucht eines aufschlagenden Geschosses zerreißt den Zusammenhang des Zieles.

Die Wucht des fliegenden Geschosses und des geschwungenen Hammers wächst proportional mit der Masse und dem Quadrate der Geschwindigkeit. Um die Geschwindigkeit eines fahrenden Eisenbahnzuges, eines fahrenden Dampfschiffes, eines Geschosses zu verdoppeln, muß man die vierfache Arbeit aufwenden, wenn nicht sonst durch die Vergrößerung der Geschwindigkeit die Widerstände in erhöhtem Maße wachsen.

Potentielle Energie. Eine Kraft leistet Arbeit, wenn sie eine Masse bewegt. Die Arbeitsleistung besteht entweder darin, daß sie eine Masse einem äußeren Widerstande entgegen längs einer Wegstrecke ohne Beschleunigung verschiebt, oder darin, daß sie dem Trägheitswiderstande entgegen einer frei beweglichen Masse eine Geschwindigkeit erteilt. Im letzteren Falle erlangt die Masse Bewegungsenergie, die dem Betrage nach der von der Kraft geleisteten Arbeit entspricht.

Hat eine Kraft einen Körper verschoben und dabei durch Überwindung einer Gegenkraft Arbeit geleistet, so hat der Körper, ohne Bewegungsenergie erlangt zu haben, doch dadurch in vielen Fällen die Fähigkeit gewonnen, die aufgewandte Arbeit wieder herauszugeben. Es werde z. B. ein schwerer Körper gehoben, also die Schwerkraft längs eines Weges überwunden. Dann kann der Körper beim Zurückfallen aus der erlangten Höhe in seine Ausgangslage seinerseits Arbeit leisten. Bei einer Pendeluhr, die durch aufgezogene Gewichte angetrieben wird, macht man davon Gebrauch. Auch wenn von außen Arbeit aufgewendet wird, um eine Schraubenfeder auszudehnen, muß gegen die geweckten Spannungen Arbeit geleistet werden. Diese Arbeit kann von der Feder wieder gewonnen werden, wenn man die Feder sich zusammenziehen läßt. In Federuhren, Spannschlössern usw. macht man von einer solchen Art Arbeitsrückgewinnung Gebrauch.

Die Fähigkeit eines Körpers, unter dem Einflusse einer Kraft Arbeit zu leisten, heißt seine potentielle Energie.[1] Die potentielle Energie (auch Energie der Lage genannt) wird dem Werte nach gemessen durch das Produkt aus der wirkenden Kraft $\mathfrak{P}$ und der Wegstrecke $\mathfrak{s}$, die der bewegliche Körper in der Richtung der Kraft zurücklegen kann; die potentielle Energie ist also $E = \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{s}$.

1) poténtia (lat.) = Können, Fähigkeit, Macht.

Arbeit auf zwangsläufiger Bahn. Ist ein Körper, auf den die Kraft P wirkt, nur auf einer zwangsläufigen Bahn beweglich, die mit der Kraftrichtung den Winkel α einschließt (Fig. 103), so wirkt auf den Körper in der Richtung der Bahn nur die Komponente $P\cos\alpha$ (§ 39); also ist die Arbeit, die von der Kraft geleistet wird oder geleistet werden kann, wenn der Körper in der Bahnrichtung um die Wegstrecke s bewegt wird oder beweglich ist, gleich dem Produkt $(P\cos\alpha)\cdot s$. Schreiben wir diesen Ausdruck in der Form $P\cdot(s\cos\alpha)$, so stellt der zweite Faktor des Produkts die Projektion der möglichen Wegstrecke auf die Kraftrichtung dar.

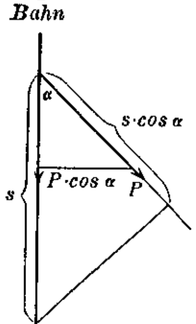

Fig 103. Arbeit auf zwangsläufiger Bahn.

Zwangskräfte. Damit ein Körper auf einer gekrümmten zwangsläufigen Bahn sich bewegen kann, müssen in jedem Augenblicke von der zwangsläufigen Führung her seine transversalen Trägheitskräfte, die Zentrifugalkräfte, im Gleichgewicht gehalten werden (§ 35, S. 98). Das tun die **Zwangskräfte** (§ 40), welche die Normalbeschleunigung des Körpers (§ 21, S. 57) hervorrufen. Sie stehen auf der Bewegungsrichtung des Körpers immer senkrecht. Es ist also $\cos\alpha = 0$. *Zwangskräfte leisten keine Arbeit.*

Die Arbeit der potentiellen Energie. Es gilt also auch: *Die potentielle Energie eines Körpers, der auf der zwangläufigen Bahn von der Länge s beweglich ist, und auf den während der möglichen Verschiebung die Kraft P unter dem Winkel α zur Bahn wirkt, wird entweder bestimmt durch das Produkt aus dem längs der Bahn gemessenen Wege s und der Projektion der Kraft auf die Bahn $P\cdot\cos\alpha$, oder durch das Produkt aus der Kraft P und der Projektion $s\cdot\cos\alpha$ des Weges auf die Kraftrichtung.*

Wenn daher ein Körper frei oder längs einer zwangläufigen Bahn von einem Punkte zu einem andern beweglich ist, und wenn die Verbindungsgerade der beiden Punkte mit der Richtung der Kraft oder der Richtung einer Kraftkomponente zusammenfällt, so ist die Arbeit, die die Kraft leistet, wenn sie den Körper von dem einen Punkte zu dem anderen bewegt, unabhängig von der Bahn, längs der der Körper bewegt wird; denn wir können jeden Teil der Bahn auf die Kraftrichtung projizieren und als Maß der Arbeit das Produkt dieser Projektion mit der Kraft ansehen. Welcher Art die Bahn nun auch sei: die Summe aller Projektionen ist in allen Fällen dieselbe, wenn der Anfangspunkt und der Endpunkt aller Bahnen derselbe ist. Kürzer ausgedrückt:

Die von einer der Richtung nach gegebenen Kraft geleistete Arbeit ist unabhängig von der Bahn, längs der sie geleistet wird; sie ist nur abhängig von der Anfangs- und Endlage des Körpers.

Die Arbeit ein Skalar. Aus diesem Satze folgt, daß die Arbeit und die Energie keine Vektorgrößen sind, da ihr Wert nicht von der Richtung abhängt. Das steht in Übereinstimmung mit dem Ausdrucke $\frac{1}{2}mv^2$ für die Wucht. Bei Umkehr der Geschwindigkeit ist v negativ zu nehmen, $\frac{1}{2}mv^2$ bleibt davon unberührt.

Energie. Der Begriff Energie spielt heute in der Physik eine beherrschende Rolle. In den beiden angeführten Fällen seines Gebrauches als kinetischer und potentieller Energie wird darunter gleicherweise die Fähigkeit eines Körpers verstanden, aus sich heraus Arbeit zu leisten. Außer durch die betrachteten mechanischen Bedingungen dieser Fähigkeit, nämlich entweder seines Bewegungszustandes oder seiner Lage unter dem Einflusse einer Kraft, kann ein Körper oder ein Körpersystem noch durch andere physikalische Bedingungen die Fähigkeit erlangt haben, Arbeit zu leisten. Der Wärmezustand des Körpers, eine elektrische Ladung, eine magnetische Kraft usw. können z. B. für eine solche Fähigkeit die Grundbedingung sein. In allen diesen Fällen sagt man, der Körper enthalte Energie, und zwar entsprechend Wärmeenergie, elektrische Energie, magnetische Energie usw. Immer aber ist das Maß dieser Energie der Betrag an möglicher mechanischer Arbeit $E = P\cdot s$, welche man dem Körper oder dem Körpersysteme auf Grund seines Zustandes entnehmen kann. In der Physik kennt man eine ganze Reihe von *Energiearten*, von denen nur die beiden: kinetische Energie und potentielle Energie der Mechanik zugehören.

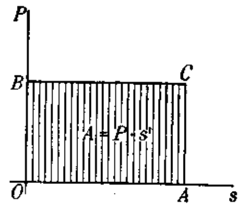

Fig. 104. Arbeit als Wegintegral der Kraft.

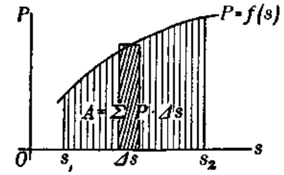

Fig. 105. Arbeit als Wegintegral der Kraft.

Die Arbeit bei veränderlicher Kraft. Die Arbeit $A = P\cdot s$ kann man durch die Fläche eines Rechtecks darstellen, dessen beide Seiten die Kraft P und der Weg s sind (Fig. 104).

Wenn die Kraft veränderlich ist, so kann man sie als Funktion des Weges ausdrücken in der Form $P = f(s)$. Eine solche Funktion ist in Fig. 105 als Kurve dargestellt, bei der der Weg als Abszisse und die an jeder Stelle des Weges wirkende Kraft als Ordinate eines Punktes aufgetragen sind. Zur Berechnung der von der Kraft geleisteten Arbeit denken wir uns die Kraft während sehr kleiner Wegstrecken unveränderlich und immer nach je einer sehr kleinen Wegstrecke sprunghaft (mit sehr kleinen Sprüngen) geändert. Dann wird die Arbeit, die die Kraft P längs des Wegelementes Δs leistet, dargestellt durch das in der Fig. 105 stark gestrichelt gezeichnete Flächenstück, das über dem Wegelemente Δs gezeichnet worden ist und bis zum Kraftdiagramm reicht. Addieren wir alle diese schmalen Flächenelemente von s_1 an bis s_2, so erhalten wir das Flächenstück, das zwischen der Abszissenachse und dem Kraftdiagramm und zwischen den zu s_1 und s_2 gehörigen Ordinaten liegt. Dieses Flächenstück stellt die Arbeit dar, die die veränderliche Kraft P leistet, wenn sie längs der Wegstrecke $(s_2 - s_1)$ wirkt.

Es gilt also $A = \sum P\cdot\Delta s$. Diese Summe geht für verschwindende Δs über in $A = \int_{s_1}^{s_2} P\cdot ds$, d. h. in Worten: *Die Arbeit ist das Wegintegral der Kraft zwischen zwei Raumpunkten* (s. dazu S. 93).

Harmonische Kraft. Beispiel: Als Beispiel diene die Arbeitsleistung gegen eine harmonische Kraft. Nach S. 65 ist ein wesentliches Merkmal der harmonischen Bewegung das, daß die Beschleunigung der Verrückung des bewegten Punktes proportional ist. Mit der Beschleunigung ist aber nach dem Grundgesetz der Mechanik stets eine Kraft verknüpft. Eine harmonische Kraft ist somit eine solche, welche der Verrückung des Angriffspunktes proportional ist. Erfahrungsmäßig sind alle Kräfte, welche durch elastische Spannungen hervorgerufen werden, innerhalb eines gewissen Bewegungsbereiches von dieser Art. Davon kann man sich am leichtesten durch Versuche mit einer Schraubenfeder überzeugen. Hängt man eine solche auf und belastet sie am unteren Ende, oder drückt man sie nach Fig. 106 von oben durch Gewichte zusammen, so ist die Längenänderung der Schraubenfeder, die durch die angreifenden Kräfte hervorgerufen wird, diesen proportional. Die in der Feder durch die Formänderung hervorgerufene Spannung äußert sich durch eine Spannkraft, die im Ruhezustande immer gerade der jeweils wirkenden verzerrenden Kraft das Gleichgewicht hält. Die Spannkraft ist somit eine harmonische Kraft. Nehmen wir auf den verschiedenen Richtungssinn der Verrückung s und der erregten Spannkraft P durch das Vorzeichen Rücksicht, so können wir die Abhängigkeit der Kraft P von s durch die Gleichung darstellen

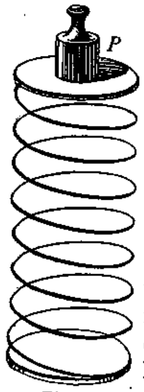

Fig. 106. Gespannte Schraubenfeder.

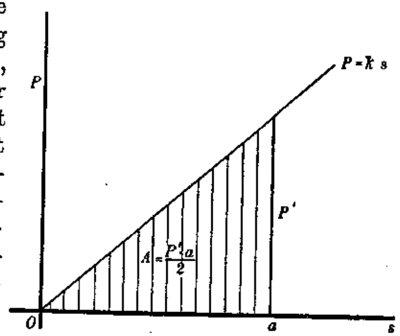

Fig. 107. Die Spannarbeit.

$$P = -k \cdot s.$$

Hierin bedeutet k die in der Feder geweckte Spannkraft bei einer Längenänderung um 1 cm. Die Größe k heißt Federkonstante.[1]) Alle Kräfte, welche harmonische Bewegungen hervorrufen, müssen einem entsprechenden Kraftgesetze gehorchen. Die hingeschriebene Gleichung stellt daher das Gesetz der harmonischen Kraft dar. — Trägt man die veränderliche Verschiebung s als Abszisse, die dadurch bestimmte Spannkraft P als zugehörige Ordinate in ein Koordinatensystem ein, so erhält man durch die so bestimmten Punkte eine Gerade als graphische Darstellung des Kraftgesetzes in Fig. 107.

Drückt man die Feder in Fig. 106 allmählich um die Strecke a zusammen, so steigert sich die Spannkraft der Feder von $P = 0$ bis $P' = -k \cdot a$. Die hierbei gegen die Spannkräfte geleistete Arbeit ist nach den Betrachtungen des vorhergehenden Abschnitts an Fig. 105 dem Zahlenwerte nach gleich der Größe des Flächenstückes in Fig. 107 zwischen der Geraden, der Abszisse a und der Ordinate P'. Damit ist

$$A = \tfrac{1}{2} P' \cdot a = \tfrac{1}{2} k \cdot a^2,$$

wenn wir vom Vorzeichen absehen.

Diese Arbeit kann jederzeit durch Entlastung der Feder wiedergewonnen werden. Sie ist also in der Feder als potentielle Energie enthalten. Wir erhalten somit allgemein den Satz: *Gilt für eine harmonische Kraft das Kraftgesetz $P = -k \cdot s$,*

1) Bei gegebener Kraft P ist die Verrückung desto kleiner, je größer k ist. Deshalb ist neuerdings für die Größe k der Name „die Starre" vorgeschlagen worden.

worin s die Verrückung, k die Kraftkonstante ist, so besitzt das System, welches die harmonische Kraft ausübt, bei der Verrückung s die zugehörige potentielle Energie

$$E = \frac{1}{2} k \cdot s^2.$$

In dieser Energiegleichung ist $\frac{1}{2} k$ ein unveränderlicher Faktor. Er hat die Bedeutung der potentiellen Energie für die Verrückung von $s = 1$ cm. Er wird als Extensitätsfaktor der potentiellen Energie oder besser als Energiekapazität des Systems für potentielle Energie bezeichnet. — Die potentielle Energie, welche in einem gespannten Systeme enthalten ist, die also von der Form des Körpers abhängt, wie in diesem Falle, führt auch den Namen **Formenergie.**

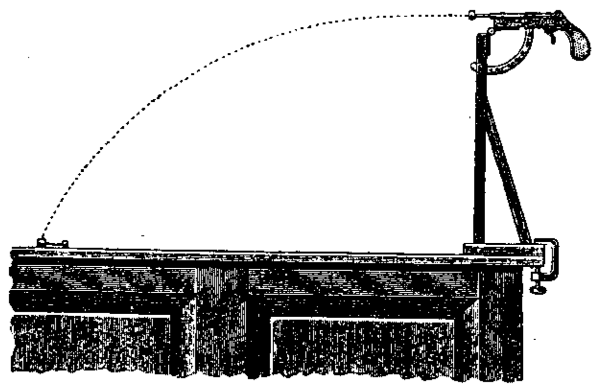

Fig. 108. Messung der Bewegungsenergie des Geschosses.

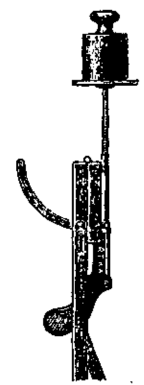

Fig. 109. Spannarbeit der Federpistole.

Man nennt sie manchmal auch kurzweg **Spannungsenergie.** Schließlich benennt man sogar diese Energie in gewissen Fällen als Maß des Spannungszustandes kurzweg **Spannung,** wenngleich man meist als Maß der Spannung die erregte Spannkraft angibt. — Es möge noch darauf hingewiesen werden, daß nicht alle Arbeit, welche ein auf die ungespannte Feder in Fig. 106 gesetztes Gewicht P leistet, sich als potentielle Energie in der Feder wiederfindet. Denn das Gewicht sinkt um die Strecke s beim Zusammendrücken der Feder; das Gewicht leistet hierbei nicht nur gegen die Spannkräfte Arbeit, sondern auch gegen die Trägheitskräfte seiner eigenen Masse und der Teile der Feder, welche in Bewegung geraten. Die Gesamtarbeit, die das Gewicht leistet, ist $P \cdot s$. Hiervon findet sich gerade die Hälfte als potentielle Energie in der Feder wieder. Die andere Hälfte wurde zunächst verbraucht, um die kinetische Energie der Masse des Gewichtes und der bewegten Federteile zu erzeugen, die später nach Eintritt der Ruhe verschwunden ist.

Energieumwandlung. In der in Fig. 108 abgebildeten Federpistole ist eine Spiralfeder enthalten, die beim Laden der Pistole, d. h. beim Einschieben des Geschoßstieles, zusammengedrückt wird. Wird die Pistole in wagerechter Richtung abgeschossen, so erteilt die sich entspannende Feder dem Geschosse im Pistolenlaufe eine gewisse Bewegungsenergie, die aus der in Bewegung gesetzten Masse m des Geschosses und der Geschwindigkeit v berechnet werden kann, mit der das Geschoß den Pistolenlauf verläßt. Die Pistole ist in der Höhe von 54,5 cm aufgestellt. Da ein Körper von dieser Höhe in $^1/_3$ Sekunde herunterfällt (§ 17), so ist die Geschwindigkeit v des wagerecht abgeschossenen Geschosses dreimal so groß, wie die in wagerechter Richtung gemessene Wurfweite. Eine ausgeführte Versuchsreihe ergab:

$m =$	25	50	100	150	200	225	400	450	g
$v =$	534	376.5	267	217,5	189	180	135	126	$(cm \cdot sec^{-1})$
$\frac{1}{2}mv^2 =$	$356 \cdot 10^4$	$355 \cdot 10^4$	$356 \cdot 10^4$	$355 \cdot 10^4$	$357 \cdot 10^4$	$365 \cdot 10^4$	$365 \cdot 10^4$	$357 \cdot 10^4$	$(g \cdot cm^2 \cdot sec^{-2})$.

Das arithmetische Mittel aus den acht Beobachtungen ist $\frac{1}{2}\, mv^2 = 358 \cdot 10^4$ erg.

Die potentielle Energie der Federpistole bestimmen wir, indem wir sie lotrecht aufstellen (Fig. 109) und die Feder durch Gewichtsstücke belasten. Hierbei ergibt sich, daß die Verkürzung der Feder mit der Belastung proportional ist. Zum vollständigen Zusammendrücken, das mit einer Verkürzung der Feder um $a = 5$ cm verbunden war, war eine Belastung mit $P' = 1500$ Gramm* erforderlich; also ist die potentielle Energie der zusammengedrückten Feder $A = \frac{1}{2}(P' \cdot a) = \frac{1}{2} \cdot 1500 \cdot 981$ Dyn $\cdot$ 5 cm $= 368 \cdot 10^4$ erg. Wenn man berücksichtigt, daß ein Teil der potentiellen Energie durch die Bewegungswiderstände vernichtet wird, so stimmt dieser Wert hinreichend genau mit dem oben berechneten Werte $\frac{1}{2}\, mv^2 = 358 \cdot 10^4$ erg überein.

In dem in Fig. 110 abgebildeten Apparate wird einer fallenden Masse eine Wucht erteilt, die das am unteren Ende des Apparates zwischen zwei Federn mit Reibung eingeklemmte Rohr um eine meßbare Strecke verschiebt. Die Verschiebungsstrecke längs des Reibungswiderstandes der Feder ist der Wucht der fallenden Masse proportional.

Die Umwandlung der potentiellen Energie in Bewegungsenergie kann auch mit dem in Fig. 111 abgebildeten Apparate bequem untersucht werden: An dem oberen Querbalken eines Gestelles hängt bifilar ein Messingring, in dem eine Eisenkugel lose sitzt, die also einen Pendelkörper bildet. Die Eisenkugel wird durch einen kleinen Elektromagneten festgehalten, wenn durch seine Windungen ein elektrischer Strom fließt, der mittels eines auf dem Grundbrette angebrachten Ausschalters ein- und ausgeschaltet werden

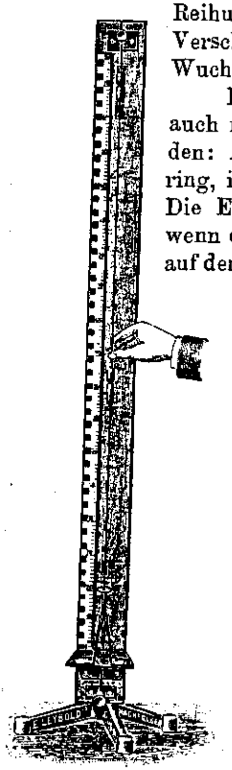

Fig. 110. Wucht einer fallenden Masse.

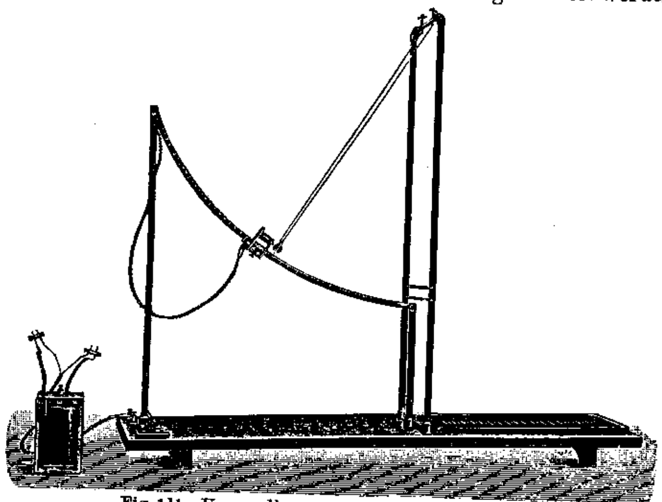

Fig. 111. Umwandlung von potentieller Energie in kinetische.

kann. Der Elektromagnet ist längs eines Metallbügels verschiebbar und kann an jeder Stelle des Bügels festgeschraubt werden. Die in dem Ringe hängende Pendelkugel kann also in beliebiger Höhe festgehalten und willkürlich durch Ausschalten des elektrischen Stromes losgelassen werden. Wird die Kugel losgelassen, so bewegt sie sich auf dem durch ihre Aufhängung bestimmten Kreisbogen abwärts. Hat sie die tiefste Stelle ihrer Bahn erreicht, so schlägt der Messingring gegen zwei am Gestell angebrachte wagerechte Stangen und wird dadurch an der Weiterbewegung verhindert; die Eisenkugel fliegt aber wagerecht heraus und beschreibt nun eine Wurfbahn; sie fällt dann auf ein mit einer Teilung versehenes Brett, auf welches die Kugel ihre Wurfweite selbständig aufzeichnet, wenn das Brett vorher mit Mehl eingestäubt ist. Nun ist die Höhe des tiefsten Punktes der Bahn so bemessen, daß die Kugel genau eine viertel Sekunde braucht, um senkrecht abwärts auf das Brett zu fallen. Als wagerechte Geschwindigkeit der Kugel in dem Augenblicke, wo sie aus dem Ringe fliegt, ergibt sich daraus der vierfache Betrag der auf der unteren Teilung abgelesenen Strecke. Auf dem Bügel, auf welchem der haltende Elektromagnet sitzt, ist angegeben, von welcher Höhe, gemessen vom tiefsten Punkte der Kreisbahn, die Kugel losgelassen wird. Diese Höhe kann auch mit einem Vertikalmaßstabe gemessen werden. Die Höhe bestimmt den einen Faktor der potentiellen Energie der Eisenkugel, deren anderer Faktor das Gewicht der Kugel ist. Die beim Falle erlangte kinetische Energie ist durch die Masse der Kugel und durch die gemessene Geschwindigkeit bestimmt. Der Versuch bestätigt die Gleichheit beider Energien.

Ist die Masse der Eisenkugel m, so ist ihr Gewicht $m \cdot g$, also ihre potentielle Energie mgh, wenn sie in der Höhe h losgelassen wird. Ist die durch ihre vierfache Wurfweite bestimmte Geschwindigkeit der Kugel im Augenblicke, wo sie den tiefsten Punkt der Kreisbahn erreicht, v, so ist ihre kinetische Energie $\frac{1}{2}mv^2$. Sind die beiden Energien einander gleich, so folgt $mgh = \frac{1}{2}mv^2$, und hieraus folgt

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Der Versuch bestätigt die Richtigkeit dieser Gleichung.

Energieumwandlung beim Pendel. Wir können jeden beschleunigten Bewegungsvorgang einer Masse als eine Umwandlung der potentiellen Energie der Masse in kinetische Energie, dagegen jeden verzögerten Bewegungsvorgang als eine Umwandlung von kinetischer Energie in potentielle Energie auffassen. Die Bewegung eines Pendels bietet ein Beispiel für einen Bewegungsvorgang, bei dem diese Umwandlung in regelmäßigem Wechsel erfolgt.

Das Pendel (Fig. 112) hat die Masse m und die Länge l. Seine Ruhelage ist AC. Um das Pendel in Schwingungen zu versetzen, heben wir es bis zur Lage AB. Der Punkt B liegt um die Strecke h höher als C. Da sich die Pendelmasse unter dem Einflusse der Schwere längs ihrer Bahn bewegen und um die Strecke h fallen kann, so besitzt das Pendel in B die potentielle Energie mgh; denn die in lotrechter Richtung wirkende Kraft ist $P = mg$. Es bewegt sich beschleunigt bis zum tiefsten Punkte C und kommt hier mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ an. Die kinetische Energie beträgt im tiefsten Punkte

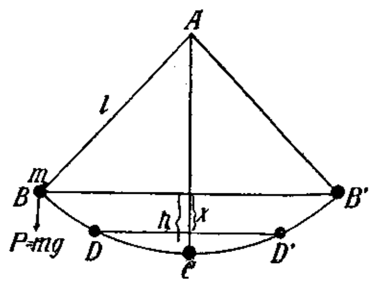

Fig. 112. Energieumwandlung am Pendel.

$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{m}{2} \cdot 2gh = mgh$. Dagegen besitzt es hier keine potentielle Energie mehr. Bei seiner weiteren Bewegung von C nach B' nimmt seine Bewegungsenergie allmählich ab. Sie wird in B' zu 0, dagegen besitzt hier das Pendel wieder seine ursprüngliche potentielle Energie mgh.

In einem Punkte D seiner Bahn, der um die Strecke x tiefer liegt als der höchste Punkt der Bahn, besitzt das Pendel die potentielle Energie $mg \cdot (h - x)$ und die kinetische Energie $\frac{1}{2} mv'^2 = \frac{m}{2} \cdot 2gx = mgx$. Im Punkte D ist demnach die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie wieder gerade so groß wie in B (denn hier war die potentielle Energie mgh und die kinetische Energie 0) oder wie in C (denn hier war die potentielle Energie 0 und die kinetische Energie mgh). In allen Punkten der Bahn ist die Summe aus der potentiellen und der kinetischen Energie konstant.

Energieumwandlung in abgeschlossenen Systemen.

Dieser letzte Satz ist für jede harmonische Bewegung wichtig.

Es sei das weiter ausgeführt.

Hängt z. B. an einer masselos gedachten Schraubenfeder die Masse m, so gilt zunächst nach S. 106 das Kraftgesetz $P = -k \cdot x$, wenn wir die Verrückung jetzt durch x bezeichnen, und es ist nach dem Grundgesetze der Mechanik die Beschleunigung $b_1 = \frac{P}{m} = -\frac{k}{m} \cdot x$. Hierin ist $\frac{k}{m} = \Gamma$ die Beschleunigung bei der Verrückung $x = 1$ cm. Damit wird nach S. 65 die Schwingungsdauer der harmonischen Bewegung, welche die Masse m erfährt, wenn man die gespannte Feder losläßt,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Die Bewegungsgleichungen der harmonischen Bewegung sind nach S. 65, wenn r die Schwingungsweite und v die Geschwindigkeit in der Ruhelage bedeutet,

$$(1) \quad x = r \sin \frac{2\pi t}{T}, \qquad (2) \quad u_1 = v \cos \frac{2\pi t}{T}, \qquad (3) \quad v = \frac{2\pi r}{T}.$$

Nach S. 106 ist die potentielle Energie der Feder

$$E_p = \frac{k \cdot x^2}{2} = \frac{kr^2}{2} \sin^2 \frac{2\pi t}{T}$$

und die kinetische Energie des bewegten Massenpunktes nach S. 102

$$E_k = \frac{mu^2}{2} = \frac{kv^2}{2} \cos^2 \frac{2\pi t}{T}.$$

Die Gesamtenergie der Feder ist daher

$$E_p + E_k = \frac{kr^2}{2} \cdot \sin^2 \frac{2\pi t}{T} + \frac{mv^2}{2} \cdot \cos^2 \frac{2\pi t}{T}.$$

Ersetzen wir hierin v nach der oben angeführten Gleichung (3) und darin wieder T nach der oben hingeschriebenen Gleichung für T, so folgt

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m \cdot 4\pi^2 r^2}{2 \cdot T^2} = \frac{kr^2}{2}.$$

Damit wird die Gesamtenergie

$$E_p + E_k = \frac{kr^2}{2} \left(\sin^2 \frac{2\pi t}{T} + \cos^2 \frac{2\pi t}{T} \right) = \frac{kr^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$$

unabhängig von der Zeit t. Die Gesamtenergie ist also in jeder Phase der Schwingung vom selben Betrage; der ganze Schwingungsvorgang spielt sich nur in einer fortwährenden Verwandlung von potentieller Energie in kinetische und umgekehrt ab. Beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage, also für $x = 0$, ist $u = v$, d. h. der schwingende Massenpunkt hat keine potentielle Energie; ebensowenig besitzt er in den Umkehrpunkten kinetische Energie. Somit muß die kinetische Energie im Anfangspunkte der Bewegung gleich der potentiellen Energie im Umkehrpunkte sein, oder, wie schon oben gefunden wurde,

$$\frac{kr^2}{2} = \frac{mv^2}{2}.$$

Daraus folgt noch — wie ebenso aus (3) in Verbindung mit der Schwingungsgleichung —

$$\frac{r}{v} = \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \text{d. h.:}$$

Bei einer harmonischen Bewegung ist die Schwingungsweite proportional der Geschwindigkeit im Anfangspunkte der Bewegung.

Dieser Satz ist wichtig für die Auswertung der Messung mit einem ballistischen Pendel (S. 94).

Auch für die Bewegung des Wurfes gilt der Satz, daß die Summe von kinetischer und potentieller Energie unveränderlich ist. Es ist nämlich nach S. 45 die potentielle Energie des geworfenen Massenpunktes m in der Höhe y über dem Erdboden

$$E_p = mgy = mg\left(c \cdot t \cdot \sin\varepsilon - \frac{g}{2} t^2\right)$$

und nach S. 46 die kinetische Energie

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} [c^2 \cos^2\varepsilon + (c \sin\varepsilon - gt)^2].$$

Die Summe ergibt

$$E_p + E_k = m \cdot g \cdot c \cdot t \cdot \sin\varepsilon - \frac{mg^2}{2} t^2 + \frac{mc^2}{2} - m \cdot g \cdot c \cdot t \cdot \sin\varepsilon + \frac{mg^2t^2}{2} = \frac{mc^2}{2}$$

unabhängig von der Zeit und gleich der kinetischen Energie im Anfangspunkte der Bewegung.

Immer gilt:

Alle mechanischen Bewegungsvorgänge sind nur Umwandlungen einer Energieform in eine andere, ohne daß Energie verloren geht. Dieser Satz heißt das **Prinzip von der Erhaltung der mechanischen Energie** (s. dazu § 34 S. 97)[1]. Die beiden Sätze von der Erhaltung des Impulses (§ 34) und der Erhaltung der Energie sind die bedeutungsvollsten allgemeinen Sätze der Mechanik.

1) Der Satz wurde schon von Huygens, später von Leibniz gelehrt.

§ 37. Leistung.

Die Arbeit zweier Kräfte ist gleich, wenn das Produkt aus Kraft und Weg gleich ist. Daraus folgt, daß dieselbe Arbeit, die eine Kraft längs eines Weges leistet, von einer halb so großen Kraft geleistet werden kann, wenn sie über den doppelten Weg wirkt, oder daß die n-fache Kraft nur über $\frac{1}{n}$ des Weges zu wirken braucht, um dieselbe Arbeit hervorzubringen. Wenn aber eine große Kraft auf eine Masse wirkt, so ist die Beschleunigung der Masse größer, als wenn eine kleine Kraft auf dieselbe Masse wirkt. Folglich ist auch die Zeit, die vergeht, während der die größere Kraft längs eines vorgeschriebenen Weges wirkt, kleiner. Eine große Kraft leistet daher 1., weil sie nur einen kürzeren Weg hindurch zu wirken braucht und 2., weil die Masse längs dieses Weges eine größere Beschleunigung hat, dieselbe Arbeit in kürzerer Zeit als eine kleinere Kraft.

Für die meisten Zwecke der Technik ist es von Wichtigkeit, daß eine vorgeschriebene Arbeit in einer vorgeschriebenen Zeit geleistet werden soll. Man hat daher einen neuen Begriff geschaffen. **Die in 1 Sek. von einer Kraft geleistete Arbeit heißt die Leistung der Kraft oder der Effekt.** Die Leistung einer Kraft wird bestimmt, indem die während einer gewissen Zeit geleistete Arbeit durch die in Sekunden gemessene Zeit dividiert wird. **Leistung = Arbeit : Zeit.**

Die Einheit der Leistung ist das Sekundenerg.

$$1 \text{ Sekundenerg.} = 1 \text{ [Erg : Sekunden]} = 1 \text{ [Dyn. Zentimeter : Sekunden]} = 1 \, [\text{g} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-2} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}] = 1 \, [\text{g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-3}].$$

Da die Einheit Sekundenerg eine sehr kleine Größe ist, so wählt man ihr 10^7-faches als praktische Einheit. Sie wird 1 Joule-Sekunde oder 1 Watt (abgekürzt W) genannt. **1 Watt = 10^7 Sekundenerg. 1 Kilowatt** = 1000 Watt wird wohl auch **Neupferd** genannt (1 kW = 1 NP = 1 vm/sec). Das Kilowatt findet in der Technik vielfach Anwendung. Daneben ist aber noch gebräuchlich **1 Pferdestärke** (PS) = **75 Meterkilogramm/Sekunde.** Zur Umrechnung merke man 1 PS = 75 mkg*/sec = $75 \cdot 10^2 \cdot 10^3 \cdot 981$ erg/sec = 736 Watt, also **1 PS = 0,736 Kilowatt** (NP).

B. Statik des punktförmigen Körpers.

Die Statik behandelt den Ruhezustand eines Körpers, also die Frage nach dem Gleichgewichte desselben unter dem Einflusse auf ihn wirkender Kräfte.

§ 38. Der Kraftvektor. Das Kräfteparallelogramm.

Die Bestimmungsgrößen einer Kraft sind nach § 30 die Angriffslinie und die Kraftgröße. Daher kann man geometrisch eine Kraft durch einen Vektor (eine gerichtete Strecke nach § 16) darstellen, der den Angriffspunkt

der Kraft zum Ursprung hat, dessen Richtung mit der Kraftrichtung zusammenfällt und dessen Länge so viele Längeneinheiten hat, wie die Kraft Krafteinheiten hat. Einen solchen Vektor nennt man einen **Kraftvektor.**

Wirken auf denselben Massenpunkt gleichzeitig zwei Kräfte, so stört erfahrungsgemäß die eine nicht die Wirkung der anderen. Jede Kraft drückt unabhängig von der anderen dem Massenpunkte die ihr entsprechende Beschleunigung auf, so daß unter der Wirkung beider der Massenpunkt eine Beschleunigung erfährt, die durch die Diagonale des aus den beiden Beschleunigungsvektoren gezeichneten Parallelogrammes gegeben ist. Man erhält die Resultierende zweier Kräfte also durch eine geometrische Addition der beiden Kraftvektoren, d. h. man hat aus den beiden Strecken, die am Massenpunkte ansetzen und an Größe und Richtung die beiden Kraftvektoren darstellen, das Parallelogramm zu zeichnen, dessen Diagonale alsdann den resultierenden Kraftvektor darstellt. Diesen kann man mit weiteren Kraftvektoren

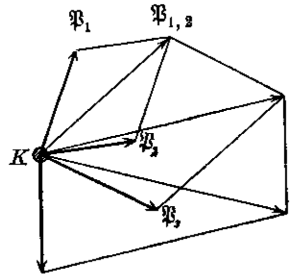

Fig. 113.
Addition von Kraftvektoren.

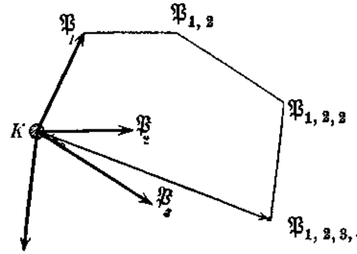

Fig. 114.
Addition von Kraftvektoren.

zusammensetzen, so daß man auf diese Weise beliebig viele an einem Massenpunkte angreifende Kräfte vektoriell zu einer resultierenden Gesamtkraft vereinigen kann. Der Satz vom Parallelogramm der Kräfte gründet sich also auf den Erfahrungssatz, daß einzelne Kräfte sich nicht gegenseitig stören (Prinzip der ungestörten Superposition der Kräfte).

Die Zusammensetzung von vier Kräften $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$ ist in Fig. 113 in der Weise ausgeführt, daß zuerst das Parallelogramm für die beiden Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ gezeichnet wurde. Dann ist die Resultierende $\mathfrak{P}_{1,2}$ dieser beiden Kräfte mit $\mathfrak{P}_3$ durch Zeichnung eines Parallelogrammes zusammengesetzt, und endlich ist die so gefundene Resultierende mit der vierten Kraft $\mathfrak{P}_4$ zusammengesetzt. So entsteht die Resultierende $\mathfrak{P}_{1,2,3,4}$ aller vier Kräfte durch sogenannte vektorielle Addition.

Man sieht leicht, daß in der Figur 113 einige Linien überflüssig sind. Zeichnet man nur, wie in Figur 114, die notwendigen Linien, so erhält man das Vektorpolygon $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_{1,2} \mathfrak{P}_{1,2,3} \mathfrak{P}_{1,2,3,4}$, indem man die einzelnen Vektoren der Kräfte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ und $\mathfrak{P}_4$ der Reihe nach in ihrer Größe und Richtung aneinanderfügt. So entsteht der Satz:

Eine Seite eines Vektorpolygones ist der resultierende Vektor aller übrigen Polygonseiten.

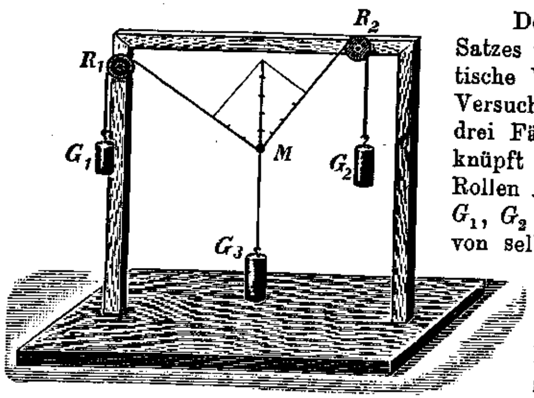

Fig. 115.
Kräfteparallelogramm.

Der Nachweis von der Gültigkeit des Satzes vom Kräfteparallelogramm für die statische Wirkung der Kräfte wird durch den Versuch nach Fig. 115 so geführt, daß man drei Fäden in einem Punkte M zusammenknüpft und diese (unter Benutzung zweier Rollen R_1 und R_2) mit den drei Gewichten G_1, G_2 und G_3 belastet. Es stellt sich dann von selbst eine Gleichgewichtslage her, bei der die Kraft G_3 gleich und entgegengesetzt der Resultierenden von G_1 und G_2 ist. Trägt man von M aus auf die Kraftrichtungen die Kraftvektoren ab, so ist der Vektor G_3 gleich und entgegengesetzt der Diagonale des aus G_1 und G_2 gezeichneten Vektorparallelogramms.

§ 39. Zerlegung einer Kraft.

Zwei auf einen Massenpunkt wirkende Kräfte P_1 und P_2 können mit Hilfe des Kräfteparallelogramms zu einer Resultierenden R zusammengesetzt werden. Man kann nun umgekehrt die Aufgabe stellen, die Kraft R in zwei Komponenten P_1 und P_2 zu zerlegen. Zu dem Zwecke muß ein Kräfteparallelogramm gezeichnet werden, dessen Diagonale der Vektor der gegebenen Kraft ist. Wenn keine weiteren Angaben gemacht werden, so ist die Aufgabe unendlich vieldeutig, da es unendlich viele Parallelogramme mit

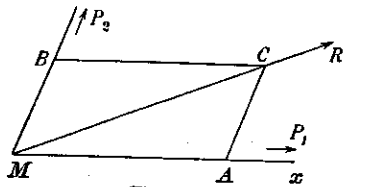

Fig. 116.

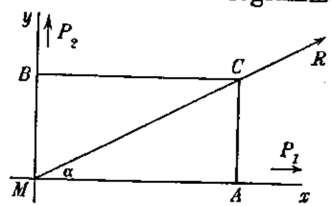

Fig. 117.

Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften.

derselben Diagonale gibt. Damit die Lösung der Aufgabe eindeutig wird, müssen noch zwei weitere Angaben gemacht werden; diese können sich entweder auf die Richtung oder auf die Größe der Komponenten beziehen. Der am häufigsten vorkommende Fall ist der, daß außer der Größe und Richtung der Resultierenden R noch die Richtungen MX und MY der Komponenten gegeben sind. In diesem Falle muß man durch den Endpunkt C des Vektors MC der Kraft R nach Figur 116 die Parallelen zu den Richtungen MX und MY der gesuchten Komponenten ziehen und so die Figur zu dem Vektorparallelogramm $MACB$ ergänzen. Dann sind die Seiten MA und MB die Kraftvektoren der gesuchten Komponenten P_1 und P_2.

Im besonderen soll der Fall behandelt werden, daß die Richtungen der gesuchten Komponenten senkrecht zueinander stehen. Dann macht man diese

Richtungen nach Figur 117 zu Achsen MX und MY eines rechtwinkligen Koordinatensystemes. Die Komponenten der Kraft R findet man, indem man den dazugehörigen Kraftvektor MC auf die beiden Achsen, die Abszissenachse MX und die Ordinatenachse MY, projiziert. Schließt die Kraft R, also auch der Kraftvektor MC mit der Abszissenachse den Winkel α ein, so haben die Komponenten die Größen

$$\boldsymbol{P_x = R \cdot \cos\alpha} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{P_y = R \cdot \sin\alpha}.$$

P_x wird die Projektion von R auf die X-Achse, P_y die Projektion von R auf die Y-Achse genannt.

In ähnlicher Weise kann man die Zerlegung der Kraft R auf drei im Raume senkrecht zueinander stehende Achsen nach Fig. 118 vornehmen. Schließt die Kraft R mit den drei Achsen die Winkel α, β und γ ein, so sind die drei Komponenten:

$$X = R \cdot \cos\alpha, \quad Y = R \cdot \cos\beta, \quad Z = R \cdot \cos\gamma.$$

Von der Zerlegung der Kräfte in Komponenten, die mit der Richtung der Koordinatenachsen zusammenfallen, macht man mit Vorteil Gebrauch, wenn man mehrere Kräfte zu einer Einzelkraft zusammensetzen will. Für die Ebene ist diese Art der Zusammensetzung in den beiden Figuren 119 und 120 ausgeführt:

Die Kräfte P_1, P_2, P_3 usw., die mit der X-Achse die Winkel α_1, α_2, α_3 usw. bilden, sollen zu einer

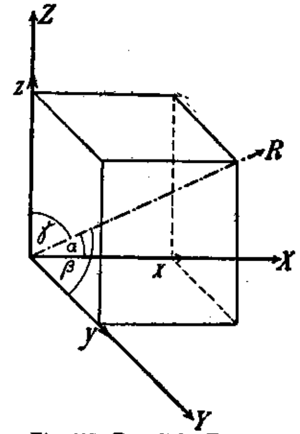

Fig. 118. Räumliche Komponente einer Kraft.

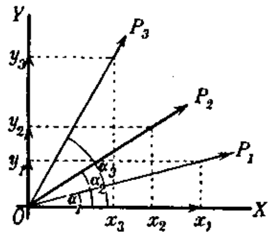

Fig. 119.

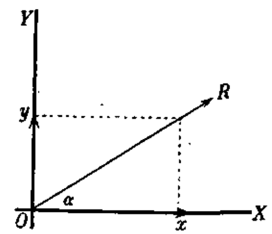

Fig. 120.

Zusammenfassung mehrerer Kräfte einer Ebene.

Resultierenden zusammengesetzt werden. Zu dem Zwecke zerlegt man jede der Einzelkräfte in ihre beiden Komponenten:

$$\begin{aligned} X_1 &= P_1 \cdot \cos\alpha_1 & \qquad Y_1 &= P_1 \cdot \sin\alpha_1 \\ X_2 &= P_2 \cdot \cos\alpha_2 & Y_2 &= P_2 \cdot \sin\alpha_2 \\ X_3 &= P_3 \cdot \cos\alpha_3 & Y_3 &= P_3 \cdot \sin\alpha_3. \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Dann addiert man alle X-Komponenten zu einer Einzelkraft:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots = \Sigma P \cos\alpha$$

und ebenso alle Y-Komponenten zu der Einzelkraft:

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \cdots = \Sigma P \sin\alpha.$$

Endlich werden diese beiden Einzelkräfte X und Y zu der Resultierenden R mit Hilfe eines Vektorreckteckes nach Fig. 120 zusammengesetzt. Die Größe R der Resultierenden und der Winkel α, den sie mit der X-Achse einschließt, sind dann bestimmt durch die Gleichungen

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{X}.$$

In durchaus ähnlicher Weise werden mehrere Kräfte, die nach verschiedenen Richtungen des Raumes wirken, zusammengesetzt. Wenn die Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ mit den drei rechtwinkligen Achsen eines räumlichen Koordinatensystemes die Winkel $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $\alpha_3\beta_3\gamma_3 \ldots$ einschließen, so sind die mit den Achsen parallelen Komponenten der Resultanten

$$X = \Sigma P \cos \alpha, \qquad Y = \Sigma P \cos \beta, \qquad Z = \Sigma P \cos \gamma.$$

Die Resultierende ist $\quad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$

sie bildet mit den drei Achsen die Winkel α, β, γ, die durch die Gleichungen

$$\cos \alpha = \frac{X}{R}, \qquad \cos \beta = \frac{Y}{R}, \qquad \cos \gamma = \frac{Z}{R}$$

bestimmt sind.

§ 40. Die erzwungene Bahn. Der Projektionssatz. Der Momentensatz.

Kann sich ein Massenpunkt M nur auf einer erzwungenen Bahn bewegen und wirkt auf ihn eine Kraft P ein, die mit der Bahn einen Winkel einschließt, so hat diese Kraft zwei Wirkungen auf den Körper, die man erkennt, wenn man die Kraft in zwei Komponenten zerlegt, von denen die eine mit der Bahnrichtung bzw. mit der Richtung ihrer Tangente zusammenfällt und die Geschwindigkeit des Körpers in der Richtung der Bahn verändert, während die zweite senkrecht zur Bahn wirkt und einen Druck des Körpers gegen die Bahn ausübt.

An dem in Fig. 121 abgebildeten Apparate kann man diese beiden Wirkungen nachweisen:

Schräg nach oben wirkt unter Vermittlung einer Rolle die Kraft P auf einen Körper M, der sich nur längs einer als Bahn wirkenden lotrechten Schiene bewegen kann. Wir zerlegen die Kraft P nach Anleitung von Fig. 122 in die beiden Komponenten W in der Richtung der Bahn und D senkrecht zur Bahn mit Hilfe des Vektorrechteckes $MACB$. Die in der Richtung der Bahn wirkende Bewegungskomponente W hebt den Körper M in die Höhe; ihr wirkt das Gewicht G des Körpers entgegen, und wenn Gleichgewicht vorhanden ist, so ist W gleich und entgegengesetzt G. Die senkrecht zur Bahn gerichtete Druckkomponente D drückt den Körper gegen die Bahn. Diese Druckkomponente kann durch das Gewicht L, das an einem über eine Rolle geführten Faden senkrecht zur Bahn und entgegengesetzt zu D wirkt, aufgehoben und dadurch gemessen werden. Sind D und L gleich und entgegengesetzt gerichtet, so kann man die Schiene entfernen, ohne an der Stellung des Körpers M etwas zu ändern. Mit Hilfe dieses Apparates kann man die Richtigkeit der aus Fig. 120 ersichtlichen Beziehungen

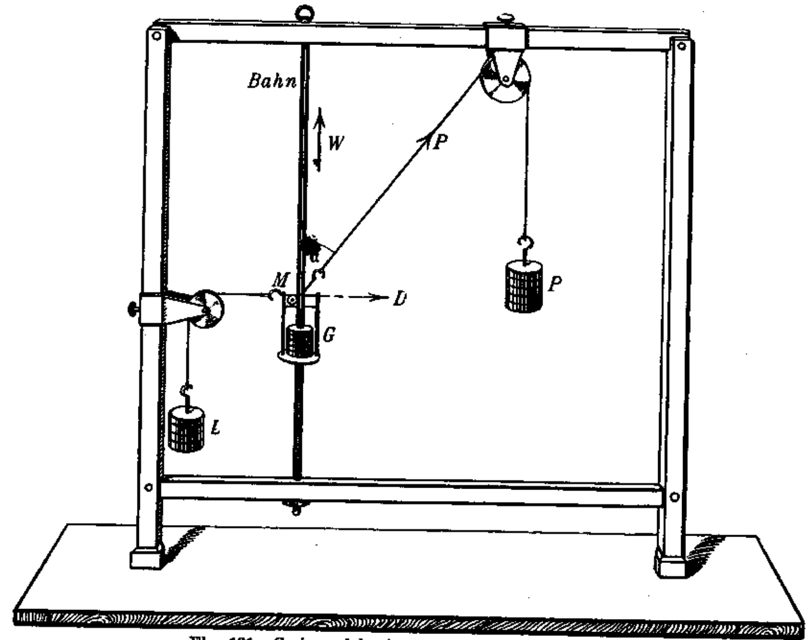

Fig. 121. Grimsehls Apparat zum Projektionssatz.

Bewegungskomponente $W = P \cdot \cos \alpha$,

Druckkomponente $D = P \cdot \sin \alpha$

durch den Versuch nachweisen.

Läßt man, während der Körper M längs der Schiene zwangläufig geführt wird, die Kraft L weg, so wird die Druckkomponente D durch den Widerstand der Schiene aufgehoben. Wenn man auf den Druck keine Rücksicht nimmt, so wirkt auf den Körper M die Kraft P, die mit der Bahn den Winkel α einschließt, gerade so, als ob die Kraft W allein in der Richtung der Bahn wirken würde. In bezug auf die Bewegung des Körpers sind die beiden Kräfte P und W gleichwertig oder äquivalent. Die Bewegungskomponente W ist die Projektion der Kraft P auf die Bahn. Daher gilt der

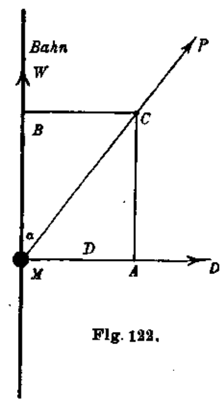

Fig. 122.

Projektionssatz: *Eine Kraft P, die auf einen längs einer zwangsläufigen, reibungslosen Bahn beweglichen Körper unter einem Winkel α wirkt, ist in bezug auf die Bewegung des Körpers gleichwertig mit der Projektion $W = P \cdot \cos \alpha$ der Kraft auf die Richtung der Bahn.*

Dieser Satz wird auch **Kosinussatz** genannt.

Eine Folge des Projektionssatzes ist ferner:

Zwei Kräfte, die auf einen zwangsläufig beweglichen Körper unter verschiedenen Winkeln wirken, sind in bezug auf die Bewegung des Körpers gleichwertig, wenn ihre Projektionen auf die Bahn gleich sind.

Der Momentensatz:

Man kann dem Projektionssatze eine besondere Form geben, wenn sich der bewegliche Massenpunkt M zwangsläufig längs einer kreisförmigen Bahn K (Fig. 123) bewegt, deren Mittelpunkt O und deren Radius $OM = q$ ist. Wirkt auf den Punkt M die Kraft P unter dem Winkel α zur Bahntangente, so erhält man die Bewegungskomponente Q, indem man den Vektor MA der Kraft P auf die Tangente projiziert; es sei MB der Vektor der Bewegungskomponente Q. Dann ergibt sich aus dem Projektionssatze, daß $Q = P \cdot \cos\alpha$ ist. Fällt man nun noch auf die Richtung der Kraft P das Lot $OL = p$, so entsteht das rechtwinklige Dreieck OLM, in dem $\sphericalangle LOM = \alpha$ ist, also ist $\cos\alpha = \frac{p}{q}$. Setzt man diesen Wert in die Gleichung $Q = P \cdot \cos\alpha$ ein, so wird $Q = P \cdot \frac{p}{q}$, und hieraus folgt

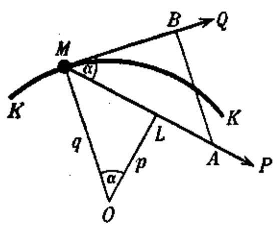

Fig. 123. Momentensatz.

$$P \cdot p = Q \cdot q.$$

Auf beiden Seiten der Gleichung steht das Produkt einer Kraft mit dem vom Kreismittelpunkte auf die Kraftrichtung gefällten Lot. Dieses Lot heißt der **Arm** der Kraft in bezug auf den Punkt O, und das Produkt der Kraft mit seinem Arm heißt das **Moment**[1]) der Kraft in bezug auf den Punkt O. Daher läßt sich die obige Gleichung in die Worte fassen:

Zwei Kräfte sind in bezug auf die zwangsläufige Bewegung eines Punktes längs einer kreisförmigen Bahn gleichwertig, wenn ihre Momente in bezug auf den Mittelpunkt der Kreisbahn einander gleich sind.

Dieser Satz wird **Momentensatz** genannt.

Im Gleichgewichte befindet sich ein vollkommen frei beweglicher **Massenpunkt** dann, wenn die Summe aller auf ihn wirkenden Kräfte gleich Null ist. Die Gleichgewichtsbedingung lautet:

$$\Sigma\,\text{Kraft} = 0,$$

wobei in der Summe die Addition vektoriell zu erfolgen hat.

Im Fall der Fig. 121 und 122 ist die Gleichgewichtsbedingung:

$$P + G + L = W + D + G + L = 0.$$

Die Vektorsumme aus den genannten vier Kräften muß Null ergeben durch folgeweises Anlegen eines Kraftvektors an den anderen. Gemäß Fig. 114 muß man an den Ausgangspunkt der Zeichnung, den Nullpunkt, zurückkommen.

1) moméntum (lat.) entstanden aus movimentum = das Bewegende. Ein zweites im täglichen Leben vielgebrauchtes Fremdwort „Moment" ist franz. Ursprungs und bedeutet „Augenblick".

Fällt die Kraft L fort, so kann der Körper durch den von der (elastischen) Spannung der Schiene ausgeübten Zwang in der Ruhelage gehalten werden. Für L tritt dann die der Druckkomponente D entgegengesetzt gleiche **Zwangskraft** Π der Schiene ein. Die obige Gleichgewichtsbedingung lautet in diesem Falle für den als vollkommen frei angesehenen Massenpunkt:

$$W + D + G + \Pi = 0.$$

Es muß allgemein die Summe aller wirkenden Kräfte und aller Zwangskräfte $= 0$ sein, $\Sigma(\Pi + P) = 0$.

Statt dieser Art der Darstellung kann man aber ebensogut auch die andere wählen, bei der man alle Druck- und Zwangskräfte als für die Bewegung unwesentlich ausschaltet. Die Gleichgewichtsbedingung lautet dann einfach:

$$W + G = 0.$$

Die vektorielle Summe enthält dann nur die Projektionen aller Kräfte auf die der Bewegung zwangsläufig vorgeschriebene Bahn, d. h. man hat nur unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens alle den wirkenden Kräften in bezug auf die Bewegung des Massenpunktes äquivalenten Kräfte algebraisch zu addieren. Ergibt diese Summenbildung den Wert Null, so ist der Körper in der ihm vorgeschriebenen Bahn im Gleichgewicht.

§ 41. Das dynamische Gleichgewicht.

Man kann die Gesetze der Dynamik auf statische Gleichgewichtsbetrachtungen zurückführen durch folgende Überlegung: Jeder Massenpunkt bewegt sich unter dem Einflusse einer bewegenden Kraft $\mathfrak{P}$ so, daß in jedem Augenblicke die Komponente w derselben in der Richtung der Bewegungs gleich der Reaktionskraft der Trägheit, also gleich dem Produkte aus Masse $\times$ Beschleunigung ist:

$$w = mb.$$

Diese Gleichung können wir in der Form schreiben:

$$w - mb = 0,$$

welche aussagt, daß die Summe der wirkenden Kräfte Null sein muß, wenn man die der Beschleunigung entgegengesetzt gerichtete dynamische Kraft der Trägheit mit unter die Kräfte einbezieht (S. 87). Es muß, so kann man dies auch aussprechen, in jedem Augenblicke die bewegende Kraft und die dynamische Trägheitskraft im Gleichgewichte sein. Man nennt das letztere zum Unterschied des statischen, im Falle der Ruhe geltenden Gleichgewichtes das dynamische Gleichgewicht.

Gleitet z. B. ein Massenpunkt eine schiefe Ebene herab, so ist die Bewegungskomponente der Kraft gleich $mg \sin\alpha$; es muß also die Trägheitskraft in jedem Augenblicke mit dieser zusammen die algebraische Summe Null ergeben, d. h.

$$mb - mg \sin\alpha = 0 \quad \text{oder} \quad b = g \sin\alpha$$

sein. Beim freien Fall hält die gesamte zur Wirkung gelangende bewegende

Kraft mg der Trägheitskraft mb in jedem Moment das Gleichgewicht, es ist $b = g$.

Entsprechend dem vorigen Paragraphen können wir auch die Zwangskräfte in die Zahl der sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte einbeziehen, welche alsdann in ihrem vollen Betrage anzusetzen sind. In demselben Beispiele der schiefen Ebene halten die treibende Kraft mg, die Trägheitskraft mb und die von der Unterlage ausgeübte zu ihr senkrechte Zwangskraft Π sich im dynamischen Gleichgewichte, die Vektorsumme aller drei Kräfte ist gleich Null (Fig. 124).

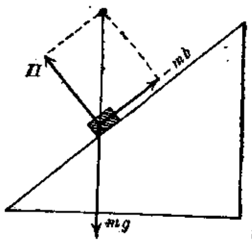

Fig. 124. Schiefe Ebene.

Diese Art der Behandlung zwangsläufiger Bewegungen ist von d'Alembert eingeführt worden (d'Alembertsches Prinzip). Soll statisches Gleichgewicht herrschen, der Massenpunkt auf der schiefen Ebene in Ruhe sein, so muß an die Stelle der Trägheitskraft eine an Richtung und Größe gleiche Zugkraft treten.

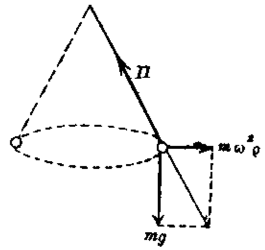

Fig. 125. Dynamisches Gleichgewicht.

Als ein weiteres Beispiel nehmen wir das konische Pendel (Fig. 125), das mit unveränderlicher Winkelgeschwindigkeit w in einer horizontalen Kreisbahn vom Radius ϱ rotieren möge. Das Pendel ist im dynamischen Gleichgewichte, wenn die vektorielle Summe vom Gewichte mg des Pendelkörpers, der zentrifugalen Trägheitskraft $m\omega^2\varrho$ und der Zwangskraft Π, d. i. der Spannung des Aufhängefadens, Null ist:

$$mg + mw^2\varrho + \Pi = 0.$$

Die Resultierende aus Schwerkraft und Zentrifugalkraft muß der Fadenspannung das Gleichgewicht halten.

Bewegt sich das Pendel mit ungleichförmiger Geschwindigkeit in gegen die Horizontalebene geneigter Bahn, so tritt zu obigen drei Kräften noch die longitudinale Trägheitskraft mb hinzu; dieselben vier Kräfte treten auch beim ebenen Pendel ins Spiel.

§ 42. Die Fliehkräfte der Erdumdrehung und das Gleichgewicht auf der Erdoberfläche.

Infolge der Fliehkraft erleidet die **Fallbeschleunigung**, die ein Körper auf der Erdoberfläche erfährt, eine Veränderung.

Unter der vorläufigen Annahme, daß die Erde kugelförmig wäre, würde die gesamte, ruhend gedachte Erdmasse jedem auf der Erdoberfläche befindlichen Körper K eine nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtete Schwerebeschleunigung g erteilen (Fig 126). Da aber die Erde sich dreht, so erfährt derselbe Körper in der geographischen Breite φ eine Zentrifugalbeschleunigung $\gamma_\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r$, wo T die Umdrehungszeit der Erde und r der Abstand des

Körpers von der Rotationsachse ist. Ist R der Radius der Erde, so ist

$$r = R \cdot \cos\varphi, \qquad \text{also ist} \qquad \gamma_\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot R \cdot \cos\varphi.$$

Diese Zentrifugalbeschleunigung setzt sich mit der Schwerebeschleunigung g nach dem Parallelogrammsatze zu einer Resultierenden g_φ zusammen, die kleiner als g ist, und die nicht mehr nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtet ist.

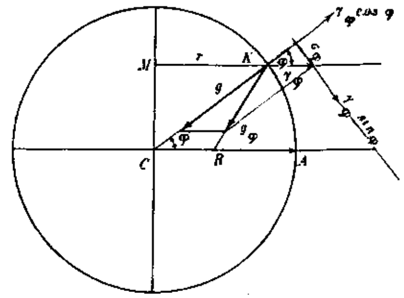

Fig. 126. Meridianschnitt durch die Erde. Die Zusammensetzung der Fliehkraft und Schwere.

Den größten Wert erhält γ_φ für $\varphi = 0$ am Äquator. Hier ist

$$\gamma_0 = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot R.$$

Setzen wir in diesen Ausdruck die Werte für die Umdrehungszeit der Erde und den Erdradius ein, so ergibt sich

$$\gamma_0 = 3{,}39 \text{ cm/sec}^2 \text{ (gal)},$$

d. i. fast genau $\frac{1}{289} \cdot 981$ cm/sec², also der 289te Teil der Schwerebeschleunigung. Hieraus folgt, daß das in der Figur dargestellte Parallelogramm stark verzeichnet ist, daß also die Richtung von g_φ nur sehr wenig von der Richtung des Radius abweicht. Vernachlässigen wir diese Abweichung vollständig, so können wir die Größe von g_φ berechnen, indem wir γ_φ auf die Verlängerung des Erdradius projizieren und die Projektion $\gamma_\varphi \cdot \cos\varphi$ von g abziehen. Hieraus folgt als angenäherter Wert:

$$g_\varphi = g - \gamma_\varphi \cdot \cos\varphi \text{ [1]} \quad \text{und, da} \quad \gamma_\varphi = \gamma_0 \cos\varphi \quad \text{ist,}$$

$$g_\varphi = g - \gamma_0 \cdot \cos^2\varphi = g\left(1 - \frac{\gamma_0}{g}\cos^2\varphi\right).$$

Da $\frac{\gamma_0}{g} = \frac{1}{289}$ ist, so müßte die Abhängigkeit der Fallbeschleunigung von der geographischen Breite durch die Formel dargestellt werden:

$$g_\varphi = g\left(1 - \frac{1}{289}\cos^2\varphi\right).$$

Diese Gleichung stimmt nun mit der Erfahrung *nicht* überein. Durch zahlreiche Messungen mit Hilfe von Pendelbeobachtungen ist vielmehr festgestellt worden, daß die Fallbeschleunigung von der geographischen Breite nach dem Gesetze

$$\mathbf{g_\varphi = g_{90}\left(1 - \frac{1}{191}\cos^2\varphi\right)}$$

abhängt, wobei $g_{90} = 983{,}09 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ (gal) die Fallbeschleunigung am Nordpole ist.

1) Genau gilt $g_\varphi = \sqrt{g^2 + \gamma^2_\varphi - 2g\gamma_\varphi\cos\varphi}$. Da $\gamma_\varphi = \gamma_0 \cos\varphi$ ist, folgt daraus $g_\varphi = g\sqrt{1 + (\gamma - 2g)\frac{\gamma_0}{g^2}\cos^2\varphi}$. Die Entwicklung der Wurzel nach dem binomischen Lehrsatze auf zwei Glieder ergibt dann die obige Gleichung.

Es gibt mehrere Gründe, diese Unstimmigkeit zwischen unserer einfachen Überlegung und dem tatsächlichen Befunde zu erklären. Im wesentlichen beruht die Abweichung darin, daß die Erde keine Kugelgestalt hat, die Erdoberfläche daher in verschiedenen geographischen Breiten verschiedene Abstände vom Erdmittelpunkte hat. Wie wir in § 79 aber kennen lernen werden, hängt die Fallbeschleunigung außer von der Zentrifugalbeschleunigung vom Abstande des Beobachtungsortes vom Erdmittelpunkte ab. Einen zweiten Grund glaubt man darin finden zu müssen, daß die Erde nicht homogen[1]) ist, sondern offenbar in verschiedenen Tiefen aus verschiedenem Materiale aufgebaut ist (§ 79). — Die Abweichung der Erde von der Kugelgestalt hat in folgendem ihren Grund.

Berücksichtigen wir die *Richtungsveränderung der Schwerebeschleunigung* durch die Zentrifugalbeschleunigung, so ergibt sich, daß die Oberfläche der als kugelförmig angenommenen Erde nicht auf der durch die Zentrifugalbeschleunigung veränderten Schwerebeschleunigung senkrecht stehen würde; daher würde ein auf einer solchen Kugel befindlicher Körper eine Bewegungskomponente nach dem Äquator zu erfahren. Infolge dieser Bewegungskomponente muß am Äquator eine Anhäufung der beweglichen Körper stattfinden. Diese hat nun tatsächlich auch stattgefunden. Die Erde hat eine Gestalt angenommen derart, daß ihre Oberfläche an allen Stellen auf der Richtung von g_φ senkrecht steht, sie hat annähernd die Form eines an den Polen abgeplatteten Umdrehungsellipsoids (§ 88).

Nach den neuesten Messungen hat der äquatoriale Radius die Länge $R_a = 6378{,}3$ km, der polare die Länge $R_p = 6356{,}5$ km. Der mittlere Erdradius ist $R = \frac{R_a + R_p}{2} = 6367{,}4$ km. Unter „Abplattung" der Erde versteht man den Bruch $\frac{R_a - R_p}{R_p} = \frac{1}{292}$.

Die Ablenkung eines auf der Erde sich bewegenden Körpers aus seiner Bewegungsrichtung durch die Erddrehung.

Mit der von der Umdrehung der Erde herrührenden Zentrifugalbeschleunigung der Körper steht die Ablenkung eines bewegten Körpers aus seiner Bahn in engem Zusammenhange. Die Erde werde wieder zunächst als kugelförmig angenommen. Dann ist die Horizontalkomponente der Zentrifugalbeschleunigung $\gamma_\varphi \cdot \sin\varphi$ (Fig. 126), wenn wir uns wieder vor Augen halten, daß der Winkel zwischen g und g_φ vernachlässigt werden darf. Sie ist auf der nördlichen Halbkugel dem Äquator zu nach Süden gerichtet. Die nachgiebige Oberfläche der Erde ist nun, wie schon erwähnt, tatsächlich diesem südlich gerichteten Zuge gefolgt und hat sich nach Norden geneigt. Das Ergebnis ist die sogenannte Abplattung der Erde. Ein jeder auf dieser gegen die reine Schwererichtung „schiefen Ebene" ruhende Körper ist nun wieder im Gleichgewichte, denn die nach Norden gerichtete Schwerekomponente des

1) Siehe S. 133.

Körpers auf dieser schiefen Ebene ist entgegengesetzt gleich der nach Süden gerichteten Komponente der Zentrifugalkraft. Dieses Gleichgewicht muß aber gestört werden, sowie der Körper sich auf der Erde in der Richtung von Westen nach Osten oder entgegengesetzt bewegt. Im ersteren Falle nämlich wird er sich so verhalten, als ob er auf einer sich rascher drehenden, im anderen Falle, als ob er sich auf einer langsamer umlaufenden Erde befände. Bei ostwärts gerichteter Bewegung wird also die nordsüdliche horizontale Beschleunigungskomponente der Zentrifugalkraft vermehrt, im anderen Falle vermindert werden. Hat der Körper die west-östlich gerichtete Geschwindigkeit c relativ zur Erde und addieren wir hierzu die von der Umdrehung der Erde herrührende Geschwindigkeit $\frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi R\cos\varphi}{T}$, so erhalten wir für einen außerirdischen Beobachter, der an der Erdumdrehung nicht teilnimmt, die Gesamtgeschwindigkeit $\frac{2\pi R\cos\varphi}{T} + c$, mit welcher der Körper die Erdachse umkreist. Er hat daher die Winkelgeschwindigkeit

$$\left(\frac{2\pi R\cos\varphi}{T} + c\right) : R\cos\varphi = \frac{2\pi}{T} + \frac{c}{R\cos\varphi}.$$

Seine Zentrifugalbeschleunigung ist somit

$$\gamma'_\varphi = \left(\frac{2\pi}{T} + \frac{c}{R\cos\varphi}\right)^2 \cdot R\cos\varphi.$$

Die südlich gerichtete Horizontalkomponente hiervon ist

$$\gamma'_\varphi \cdot \sin\varphi = \left(\frac{2\pi}{T} + \frac{c}{R\cos\varphi}\right)^2 R\cos\varphi \cdot \sin\varphi.$$

Ein an der Erdumdrehung teilnehmender Beobachter wird von dieser Beschleunigung nur den Überschuß gegenüber der Beschleunigung von relativ gegen die Erde ruhenden Körpern beobachten können, für welche $c = 0$ wird. Denn da die Erdoberfläche nicht zur Schwerkraft senkrecht steht, sondern wegen der Abplattung nach Norden hin sich senkt, so verschwindet für einen Beobachter auf der Erde scheinbar dieser zweite Anteil. Es ist also von dem berechneten Werte der oben für einen ruhenden Körper berechnete Anteil $\gamma_\varphi \cdot \sin\varphi$ abzuziehen. Das ergibt eine nach Süden gerichtete Beschleunigungskomponente im Betrage von

$$\left(\frac{2\pi}{T} + \frac{c}{R\cos\varphi}\right)^2 R\cos\varphi \cdot \sin\varphi - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi = c\sin\varphi\left(\frac{4\pi}{T} + \frac{c}{R\cos\varphi}\right).$$

Wir wollen nun unsere Betrachtung auf Geschwindigkeiten c beschränken, deren Wert einige hundert $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ nicht überschreitet. Dann darf man wegen der Größe von $R = 6367$ km, außer in großer Nähe des Nordpoles, den Wert $\frac{c}{R\cos\varphi}$ gegen $\frac{4\pi}{T} = \frac{4\pi}{86\,164}$ vernachlässigen. Es bleibt so für den Körper eine südlich gerichtete horizontale Beschleunigungskomponente vom Betrage

$$\beta = \frac{4\pi c}{T} \cdot \sin\varphi \quad \text{übrig.}$$

Ein jeder in der Richtung von West nach Ost sich auf der Erde bewegende Körper muß diese Beschleunigung β erfahren. Bewegt er sich ostwestlich, so ist die gleiche Beschleunigung nach Norden gerichtet. In beiden Fällen muß eine Ablenkung des Körpers von seiner Bewegungsrichtung, und zwar im Sinne seiner Bewegungsrichtung nach rechts erfolgen.

In naher Übereinstimmung, wenn auch mit anderer Begründung, mit dieser Rechtsablenkung eines west-östlich sich bewegenden Körpers steht eine solche für einen sich von Süden nach Norden bewegenden. Ein jeder Körper hat unter der Breite φ die von der Erdumdrehung herrührende Geschwindigkeit $\frac{2\pi R\cos\varphi}{T}$. Ist er nun auf der Erde beweglich und gelangt er in der kleinen Zeit Δt mit der Geschwindigkeit c von der Breite φ ausgehend nach Norden bis zur Breite $\varphi + \Delta\varphi$, so besitzt der Ort, den er erreicht, nicht mehr die

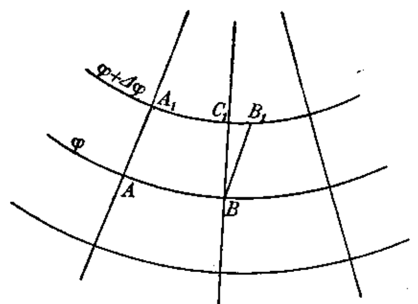

Fig. 127. Ein Teil des Gradnetzes auf der Erde.

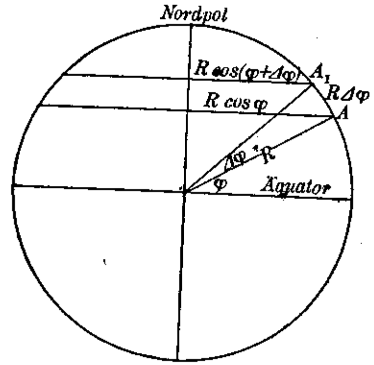

Fig. 128. Meridianschnitt durch die Erde.

frühere Umdrehungsgeschwindigkeit des Körpers. Vielmehr ist diese nun $\frac{2\pi R\cos(\varphi+\Delta\varphi)}{T}$. Nach dem Trägheitsprinzipe hat aber der Körper seine ursprüngliche west-östliche Umdrehungsgeschwindigkeit beibehalten müssen. Daher muß er auf seinem Wege eine Ablenkung nach Osten erfahren haben. Wir wollen ihren Betrag nach dem Satz vom Parallelogramm der Wege berechnen. In obenstehender Figur 127 sei ein Teil des Gradnetzes der Erdoberfläche in der Umgebung des Körpers dargestellt, und zwar seien die Breitenkreise zu den geographischen Breiten φ und $\varphi + \Delta\varphi$, sowie einige zu ihnen senkrechte Meridiane gezeichnet. Auf ruhender Erde wäre der Körper in rein nördlicher Richtung auf ein und demselben Meridiane von A nach A_1 gelangt. Während dieser Bewegung ist aber der Ausgangspunkt A durch die Erddrehung östlich nach B verschoben. Daher muß der Körper sich bei drehender Erde in dem Punkte B_1 befinden, der die vierte Ecke des Parallelogrammes aus AB und AA_1 ist. Wäre der Körper auch während der Drehung genau nach Norden gewandert, so müßte er sich in C_1 befinden, das mit B auf demselben Meridiane liegt. Die Abweichung nach Osten wird dargestellt durch die Strecke $C_1B_1 = A_1B_1 - A_1C_1$. Nun ist $AA_1 = c\cdot\Delta t$.

AA_1 ist ein Bogen auf einem größten Kreise der Erde, dessen zugehöriger Mittelpunktswinkel $\Delta\varphi$ ist (Fig. 128).

Somit gilt $R\Delta\varphi = c\Delta t$. Weiter ist

$$AB = \frac{2\pi R\cos\varphi\Delta t}{T} \quad\text{und}\quad A_1C_1 = \frac{2\pi R\cos(\varphi+\Delta\varphi)\Delta t}{T}.$$

Daraus folgt $C_1B_1 = AB - A_1C_1 = \frac{2\pi R\Delta t}{T}[\cos\varphi - \cos(\varphi+\Delta\varphi)]$

und mit einfacher Umformung

$$C_1B_1 = -\frac{2\pi R\cdot\Delta t\cdot\Delta\varphi}{T}\cdot\frac{\cos(\varphi+\Delta\varphi)-\cos\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Ersetzen wir hierin noch nach obiger Darlegung

$$\Delta\varphi = \frac{c\cdot\Delta t}{R},$$

so folgt

$$C_1B_1 = -\frac{2\pi(\Delta t)^2\cdot c}{T}\cdot\frac{\cos(\varphi+\Delta\varphi)-\cos\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Die Strecke C_1B_1 erweist sich als proportional dem Quadrate der Zeit Δt. Die Ablenkung geht daher nach einem Weg-Zeit-Gesetze vor sich, als erfolge sie mit gleichmäßig beschleunigter Bewegung. Nennen wir die Beschleunigung der Ablenkung gegen die Meridianrichtung wieder β, dann ist

$$C_1B_1 = \tfrac{1}{2}\beta(\Delta t)^2 = -\frac{2\pi(\Delta t)^2c}{T}\cdot\frac{\cos(\varphi+\Delta\varphi)-\cos\varphi}{\Delta\varphi}$$

und

$$\beta = -\frac{4\pi c}{T}\,\frac{\cos(\varphi+\Delta\varphi)-\cos\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Für unendlich abnehmende $\Delta\varphi$ geht hierin der Faktor $\frac{\cos(\varphi+\Delta\varphi)-\cos\varphi}{\Delta\varphi}$ in den Differentialquotienten von $\cos\varphi$ über. Es ist

$$\frac{d\cos\varphi}{d\varphi} = \lim_{\Delta\varphi=0}\frac{\cos(\varphi+\Delta\varphi)-\cos\varphi}{\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi=0}\frac{-2\sin\frac{2\varphi+\Delta\varphi}{2}\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi},$$

wenn wir die trigonometrische Umformungsregel

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

anwenden. Für unendlich abnehmendes $\Delta\varphi$ dürfen wir setzen

$$\lim_{\Delta\varphi=0}\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi=0}\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{2\cdot\frac{\Delta\varphi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Damit wird

$$\frac{d\cos\varphi}{d\varphi} = -\sin\varphi.$$

Somit gelangen wir für die Beschleunigung der von der Erddrehung herrührenden östlichen Ablenkung eines mit der Geschwindigkeit c bewegten Körpers zu

$$\beta = \frac{4\pi c}{T}\sin\varphi.$$

Bewegt sich der Körper in der Richtung von Norden nach Süden, so findet die Ablenkung nach Westen statt, also auch hier immer nach der rechten Seite der Bewegungsrichtung. Der Betrag der Beschleunigung der Ablenkung ist bei der gemachten Beschränkung auf kleine c bei nordsüdlicher und bei ostwestlicher Bewegung gleich groß.

Hat nun schließlich ein frei beweglicher Körper auf der nördlichen Halbkugel der Erde eine beliebig gerichtete Geschwindigkeit c, so dürfen wir diese stets in eine westöstliche Komponente $u = c \cdot \cos\alpha$ (Fig. 129) und in eine nördliche Komponente $v = c \cdot \sin\alpha$ zerlegen. Auf den Körper wirken daher zwei ablenkende Beschleunigungen ein, und zwar dem Betrage nach

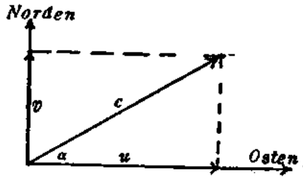

Fig. 128.

$$\beta_1 = \frac{4\pi u}{T} \sin\varphi = \beta \cdot \cos\alpha$$

nach Süden gemäß der ersten Betrachtung und

$$\beta_2 = \frac{4\pi v}{T} \sin\varphi = \beta \sin\alpha$$

nach Osten gemäß der letzten Betrachtung.

Beide setzen sich zu einer Resultante

$$\beta = \frac{4\pi c \sin\varphi}{T}$$

zusammen, die senkrecht zu c steht und den Körper nach rechts abzulenken sucht. Das Ergebnis können wir im folgenden Satze zusammenfassen:

Ein frei beweglicher Körper erfährt bei Bewegungen auf der Erde durch die Erddrehung eine Ablenkung von seiner Bewegungsrichtung relativ zur Erde, und zwar nach rechts auf der nördlichen, nach links auf der südlichen Halbkugel. Ist die Geschwindigkeit der Bewegung c, so ist (bei nicht zu großem c) die zur Bewegungsrichtung senkrecht stehende Beschleunigungskomponente $\beta = \frac{4\pi c \sin\varphi}{T}$, *worin* φ *die geographische Breite, T die Umdrehungszeit der Erde bedeutet.*

Wenn auf einen Körper eine sich gleich bleibende Beschleunigung ausgeübt wird, welche immer senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung steht, so muß der Körper relativ gegen die Erde einen Kreis beschreiben, den er mit unveränderlicher Geschwindigkeit durchläuft (S. 98, § 35). Die „ablenkende Kraft der Erddrehung" auf einen bewegten Körper würde also diesen zwingen, in einem Kreise zu laufen, solange wir die ablenkende Beschleunigung als unveränderlich betrachten dürfen, d. h. solange die Bewegung sich in so engen Grenzen hält, daß wir φ als unverändert ansehen dürfen. Diese Kreise hat man Trägheitskreise genannt. Bewegte Luftmassen in Form von Winden, bewegte Wassermassen in den Weltmeeren als Meeresströmungen werden diesen Ablenkungen unterworfen sein, und zwar nach rechts auf der nördlichen Halbkugel, nach links auf der südlichen. Wären

die Massen frei beweglich, so müßten die Ablenkungen sich zu geschlossenen Kreisen zusammenschließen; immer vorhandene Störungen und Beschränkungen der freien Beweglichkeit lassen kreisförmige Bahnen dieser Art allerdings nie zustandekommen. Schließlich spielt die ablenkende Kraft der Erddrehung bei dem Pendelversuch von Foucault (§ 59) die wesentliche Rolle; sie kommt hier aber nicht in vollem Betrage zur Wirkung, da wegen der Aufhängung das Pendelgewicht nicht frei beweglich ist.

Nach den Newtonschen Bewegungsgesetzen können wir eine jede Beschleunigung, die wir an einem Körper beobachten, als die Folge einer wirksamen Kraft deuten. In diesem Sinne benutzten wir schon im vorhergehenden Absatze die Ausdrucksweise „ablenkende Kraft der Erddrehung" für die Kraft, welcher wir die ablenkende Beschleunigung β in der vorangehenden Betrachtung zuschreiben. Vergessen wir nicht, daß diese Kraft nur dann auftritt, wenn wir die Bewegung eines Körpers relativ gegen die sich drehende Erde beobachten, daß sie aber für einen Beobachter, der selbst an der Drehung der Erde nicht teilnimmt, und der die Bewegung unabhängig von der Erde beobachten würde, nicht vorhanden sein würde, so erkennt man, daß diese Kraft nur einen *relativen* Charakter zum Standpunkte des Beobachters hat. Man hat solche Kräfte früher nicht als wirkliche Kräfte angesprochen, sondern sie als „fiktive"[1]) Kräfte von anderen Kräften unterschieden. Stellen wir uns aber auf den Standpunkt, daß „wirklich" in der Physik alles das ist, was man messen und zahlenmäßig angeben kann (S. 3), so ist die besprochene Kraft eine reelle Kraft wie jede andere auch. Denn sie ist offenbar für einen Erdbewohner, der an der Erddrehung teilnimmt, beobachtbar und meßbar (§ 59). So gewöhnt man sich neuerdings daran, die Unterscheidung zwischen fiktiven und reellen Kräften ganz aufzugeben und als Kriterium auf eine vorhandene Kraft nur die beobachtbare Beschleunigung eines Körpers gelten zu lassen. Auf unsere ablenkende Kraft der Erddrehung ist zuerst von dem französischen Ingenieur und Physiker G. G. Coriolis (s. Fußnote S. 101) aufmerksam gemacht worden; man nennt sie daher wohl auch die **Coriolissche Kraft**. Ihr Wert ist der bewegten Masse proportional. Da sie stets senkrecht auf der Bewegungsrichtung steht, kann sie (S. 104) keine Arbeit leisten; ihre Wirkung besteht nur darin, dem bewegten Körper sine bestimmte Bahn vorzuschreiben. Deshalb gehört die Coriolissche Kraft zu den *Zwangskräften*; da sie der Trägheit des Körpers entspringt, gehört sie zu den *„Trägheitskräften"* (§ 31. 9. § 35). — Die relative Coriolissche Kraft muß auch innerhalb einer sich drehenden Ebene auftreten. Dabei gibt es aber noch die innerhalb der Ebene liegenden, von der Drehachse fortstrebenden Zentrifugalkräfte, welche eine reine Wirkung der Coriolisschen Kraft stören würden. Die Coriolissche Kraft wirkt nur auf bewegte Körper, während die besagten Zentrifugalkräfte auch auf relativ in der Ebene ruhende Körper wirken müssen. Entsprechende Zentrifugalkräfte treten innerhalb der Erdoberfläche nicht auf, da die Erdoberfläche sich, wie wir wissen, so verzerrt hat, daß ruhende Körper im Gleichgewichte sind. Dadurch werden diese Zentrifugalkräfte (die instantanen[2]) Zentrifugalkräfte oder die Führungskraft), etwa in der Nähe des Poles, unterdrückt, und es bleibt nur die reine Wirkung der Coriolisschen Kraft übrig.

1) fingere (lat.) = sich einbilden, annehmen.
2) instans (lat.) = augenblicklich.

C. Statik des starren Körpers.

§ 43. Fortschreitende Bewegung eines starren Körpers.

Der starre Körper. Das starre Punktsystem. Wenn wir mittels einer Stange einen schweren Stein heben, so wird hierbei die Stange gebogen. Gleichzeitig treten in der Stange (elastische) Spannungen (S. 81) auf, die bestrebt sind, die ursprüngliche Form der Stange wiederherzustellen. Die Formveränderung, die die Stange durch die wirkende Kraft erleidet, ist um so größer, je größer diese Kraft ist. Wenden wir nur so kleine Kräfte an, daß die Formveränderung der Stange unberücksichtigt bleiben darf, so nennen wir die Stange starr. Diese Bezeichnung bedeutet einen Begriff, dem in Wirklichkeit keine Stange entspricht. In derselben Weise reden wir von einem starren Körper oder einem starren Punktsystem, wenn wir die Veränderung der gegenseitigen Lage seiner Punkte unberücksichtigt lassen. Wir setzen fest: **Ein starrer Körper ist ein Punktsystem, das wohl als Ganzes bewegt werden kann, dessen einzelne Punkte aber unverrückbar gegeneinander bleiben.**

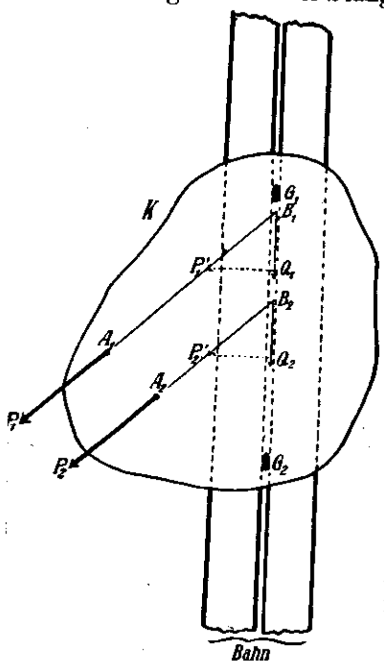

Fig. 130. Körper auf zwangeläufiger Bahn.

Ein solcher Körper kommt in der Natur nicht vor, er ist nur in der Vorstellung, der Idee vorhanden. Daher nennt man wohl den so festgesetzten Begriff des starren Körpers auch einen idealen starren Körper.

Bewegung. Wirken auf einen starren Körper eine oder mehrere Kräfte, so können diese entweder eine rein fortschreitende Bewegung oder eine reine Drehung oder eine aus einer fortschreitenden Bewegung und einer Drehung zusammengesetzte Bewegung des Körpers verursachen.

Wir nehmen zuerst an, daß der Körper eine rein fortschreitende Bewegung ausführt, ohne uns um die Bedingungen dafür zu kümmern, daß keine Drehung erfolgen kann. In diesem Falle können wir, ohne der Bewegung irgendeine Beschränkung aufzuerlegen, für den Körper auch eine in der Richtung der Bewegung liegende zwangläufige Bahn annehmen. Das denken wir etwa so ausgeführt, daß, wie in Fig. 130, an dem Körper K zwei Vorsprünge oder Nasen G_1 und G_2 angebracht sind, die zwangsläufig zwischen zwei widerstandsfähigen Geleisstücken geführt werden. Für einen solchen Körper gilt der Satz:

Zwei gleiche, parallele Kräfte P_1 und P_2, die an zwei verschiedenen Punkten A_1 und A_2 eines auf einer geradlinigen Bahn zwangsläufig geführten starren Körpers angreifen, sind einander gleichwertig.

Beweis: Jede der Kräfte darf in ihrer eigenen Richtung verschoben werden (§ 30), daher kann die in A_1 angreifende Kraft P_1 durch eine ihr gleiche Kraft P_1' ersetzt werden, deren Angriffspunkt auf dem Geleise in B_1 liegt. Ebenso kann die in A_2 angreifende Kraft P_2 durch die ihr gleiche, in B_2 angreifende Kraft P_2' ersetzt werden. P_1' kann durch ihre Projektion Q_1, P_2' durch ihre Projektion Q_2 auf die Bahn ersetzt werden. Da nun die Angriffspunkte der beiden gleichen Kräfte Q_1 und Q_2 in ihrer gemeinsamen Angriffslinie liegen, so sind die beiden Kräfte Q_1 und Q_2, also demnach auch die ursprünglichen beiden Kräfte P_1 und P_2 einander gleichwertig.

Man kann den gewonnenen Satz auch in der Form aussprechen:

Wenn ein starrer Körper nur eine fortschreitende Bewegung ausführen kann, so darf der Angriffspunkt einer an dem Körper angreifenden Kraft an einen beliebigen Punkt des Körpers verlegt werden, wenn die Kraftrichtung dabei unverändert bleibt.

Die Zusammensetzung der Kräfte, die an beliebigen Punkten eines Körpers angreifen, der nur eine fortschreitende Bewegung ausführt, geschieht in der Weise, daß man alle Kräfte parallel zu sich selbst so verschiebt, daß sie alle in einem Punkte des Körpers angreifen, und daß man dann die Kräfte wie Vektoren nach § 38 zusammensetzt. Für den am häufigsten vorkommenden Fall, daß alle Kräfte in einer Ebene wirken, gelten dann die in § 39 abgeleiteten Gleichungen

$$X = \sum P\cos\alpha, \quad Y = \sum P\sin\alpha; \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{Y}{X}.$$

In dem besonderen Falle, daß $X = 0$ und $Y = 0$ ist, findet überhaupt keine Bewegung statt, es herrscht Gleichgewicht. Hieraus folgt: *Ein Körper, an dem die in einer Ebene wirkenden Kräfte P_1, P_2 ... in beliebigen Punkten so angreifen, daß die Kraftrichtungen mit einer beliebigen, in der Ebene liegenden Geraden die Winkel α_1, α_2 ... einschließen, kann keine fortschreitende Bewegung ausführen, wenn*

$$\sum P\cos\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \sum P\sin\alpha = 0 \quad \textit{ist.}$$

Anmerkung: Wenn die Kraftrichtungen nicht in eine Ebene fallen, so wählt man im Raume drei zueinander senkrechte Achsen eines rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystemes. Sind die Winkel, die die Kraftrichtungen mit den drei Achsen des Koordinatensystemes bilden, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ ..., so lauten die Bedingungen für die Unmöglichkeit einer fortschreitenden Bewegung:

$$\sum P\cos\alpha = 0, \quad \sum P\cos\beta = 0, \quad \sum P\cos\gamma = 0.$$

§ 44. Die Drehbewegung eines starren Körpers.

Gleichwertige Kräfte. Wenn die am Schlusse des vorigen Paragraphen aufgestellten Gleichungen erfüllt sind, so führt ein unter dem Einflusse von Kräften stehender Körper keine fortschreitende Bewegung aus. Wir nehmen jetzt an, daß eine fortschreitende Bewegung ausgeschlossen ist; dann kann der Körper aber wohl noch eine Drehbewegung um eine Achse ausführen.

Wir wollen ihm diese Achse vorschreiben und untersuchen, unter welchen Bedingungen zwei drehende Kräfte einander gleichwertig sind.

Der Körper K (Fig. 131) sei um die feste Achse A drehbar, welche wir uns senkrecht zur Zeichenebene denken. Es wirken auf ihn die beiden Kräfte P_1 und P_2 in der zur Achse senkrechten Ebene. Wir verlängern die Angriffslinien der beiden Kräfte bis zu ihrem Schnittpunkte B und betrachten B als gemeinsamen Angriffspunkt beider Kräfte (§ 30). Der Punkt B des Körpers bewegt sich, da der Körper nur um die Achse A drehbar ist, auf dem in der Figur dargestellten Kreise, der demnach die Bahn des Punktes B ist. Die augenblickliche Bahnrichtung ist durch die Tangente BT angegeben. Die beiden Kräfte P_1 und P_2, deren Größe und Richtung durch BC_1 und BC_2 dargestellt werden, sind in bezug auf die Drehung des Körpers, also in bezug auf die zwangläufige Bewegung des Punktes B längs der Tangente BT dann einander gleichwertig, wenn sie dieselbe Projektion BD auf die Bahntangente BT haben. Dieser Fall sei hier angenommen.

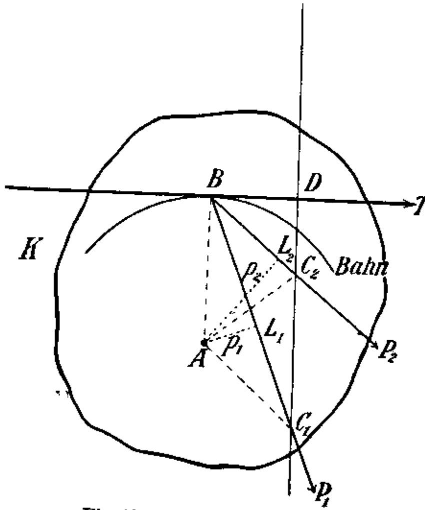

Fig. 131. Um A drehbarer Körper.

Ziehen wir den zu B gehörenden Radius AB, so ist $AB \parallel C_1D$. Wir ziehen noch die Hilfslinien AC_1 und AC_2, ferner $AL_1 \perp BC_1$ und $AL_2 \perp BC_2$ und setzen $AL_1 = p_1$ und $AL_2 = p_2$. Es ist, da $AB \parallel C_1D$ ist, $\triangle BC_1A = \triangle BC_2A$, folglich auch $BC_1 \cdot p_1 = BC_2 \cdot p_2$. Da nun $P_1 = BC_1$ und $P_2 = BC_2$ ist, so ergibt sich

$$\boldsymbol{P_1 \cdot p_1 = P_2 \cdot p_2}.$$

p_1 und p_2 sind die von der Umdrehungsachse A auf die Angriffslinien der Kräfte gefällten Lote. Diese Lote werden die **Arme der Kräfte** genannt (S. 118). Das Produkt einer Kraft mit ihrem Arme heißt das **Moment** der **Kraft**. Es ist $P_1 \cdot p_1$ das Moment der Kraft P_1 und $P_2 \cdot p_2$ das Moment der Kraft P_2. Das Ergebnis unserer Ableitung lautet:

Zwei Kräfte, die auf einen um eine Achse drehbaren Körper wirken, sind dann einander gleichwertig, wenn ihre Momente gleich sind.

Dieser Satz heißt der **Momentensatz**.

Der Satz stimmt natürlich mit dem in § 40 abgeleiteten Momentensatze überein. Der Unterschied besteht nur darin, daß früher die Bewegung eines Massenpunktes auf einer zwangläufigen, kreisförmigen Bahn vorausgesetzt war, während jetzt einem starren ausgedehnten Körper eine Drehungsachse vorgeschrieben wird.

Der Momentensatz wird auch in Form einer Proportion geschrieben

$$\boldsymbol{P_1 : P_2 = p_2 : p_1},$$

d. h. in Worten:

Bei einem um eine Achse drehbaren Körper sind zwei Kräfte gleichwertig, wenn sie sich umgekehrt verhalten wie ihre Arme.

Parallele Kräfte. Der Satz hat auch dann noch Gültigkeit, wenn die Angriffslinien der zu vergleichenden Kräfte parallel sind, wenn also ihre Angriffslinien nicht bis zum Durchschnittspunkte verlängert werden können. Denn wenn (Fig. 132) in den beiden Punkten B_1 und B_2 die beiden parallelen Kräfte P_1 und P_2 angreifen, so kann jede der beiden Kräfte durch eine Kraft Q mit dem Arme q ersetzt werden, wenn $P_1p_1 = Qq$ und $P_2p_2 = Qq$ ist, woraus dann wieder folgt $P_1p_1 = P_2p_2$.

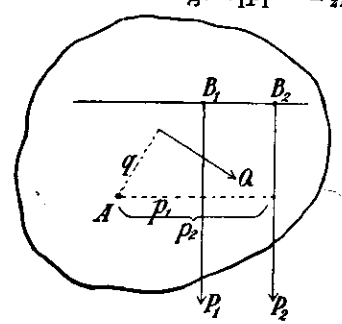

Fig. 132. Gleichwertigkeit paralleler Kräfte.

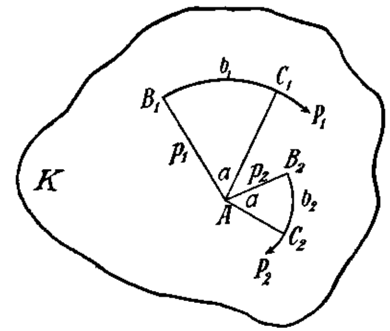

Fig. 133. Arbeit gleichwertiger Kräfte.

Hebel. Ein um eine Achse drehbarer Körper, auf den Drehkräfte wirken, wird vielfach ein **Hebel** genannt. Daher wird der Momentensatz auch vielfach als **Hebelsatz** bezeichnet. Der Hebel hat meistens die Form einer geraden, gebogenen oder winkligen Stange, die um eine Achse oder einen Stützpunkt drehbar ist. Er findet Anwendung als Hebebaum, Brecheisen, beim Türdrücker, Nußknacker, bei der Zange, Schere usw. Eine von der Stange abweichende Form hat er beim Göpelwerk, bei der Schiffswinde (Spill), beim Steuerrade, beim Rade an der Welle u. a.

Arbeit gleichwertiger Kräfte. Um die Arbeit zu vergleichen, die zwei gleichwertige Kräfte P_1 und P_2 mit den Armen p_1 und p_2 (Fig. 133) bei der Drehung eines Körpers um eine Achse leisten, lassen wir den um die Achse A drehbaren Körper K eine Winkeldrehung α ausführen. Dabei legt der Angriffspunkt der Kraft P_1 den Bogen $\widehat{B_1C_1} = b_1$ zurück, der Angriffspunkt der Kraft P_2 den Bogen $\widehat{B_2C_2} = b_2$. Die von den beiden Kräften geleisteten Arbeiten sind daher $P_1 \cdot b_1$ und $P_2 \cdot b_2$.

Nun ist $b_1 = p_1\alpha$, $b_2 = p_2\alpha$, folglich sind die beiden geleisteten Arbeiten $P_1p_1\alpha$ bzw. $P_2p_2\alpha$. Da nach dem Momentensatze $P_1p_1 = P_2p_2$ ist, so sind auch die beiden Arbeiten P_1b_1 und P_2b_2 einander gleich. Hieraus folgt:

Gleichwertige Drehkräfte leisten bei gleichem Drehwinkel gleiche Arbeit.

Experimenteller Nachweis. Zum experimentellen Nachweise des Momentensatzes eignet sich der in Fig. 134 abgebildete Apparat: Ein um eine Achse drehbares Brett C, auf das ein Blatt Papier aufgespannt werden kann, bildet den drehbaren Körper. Auf der Rückseite des Brettes ist eine Rolle befestigt, über die ein Faden geschlungen ist. An das untere Ende H dieses Fadens greift eine in I befestigte Spiralfeder an, die durch ihre Spannung das Brett rechts herum zu drehen strebt. Setzt man nun an irgendeiner Stelle des Brettes den Stift G ein, an dem ein an einem Faden befestigtes Gewicht E hängt, so wirkt dieses der Spannung der Feder entgegen. Es gelingt nun, den Stift an einer solchen Stelle des Brettes einzustecken, daß der am Brette befestigte Zeiger lotrecht nach oben, gerade vor der Stativstange steht. Das Gewicht hält dann der Federspannung gerade das Gleichgewicht. Vertauscht man das Gewicht E mit einem andern, so muß man auch den Punkt G anders wählen, damit das Brett wieder dieselbe Lage annimmt, wie beim ersten Versuche. Nun kann man für jedes Gewicht den Angriffspunkt, die Angriffslinie und die Kraftgröße auf dem Papier aufzeichnen. Dann zeichnet man für jedes Gewicht den dazu gehörigen Arm und mißt seine Länge. Multipliziert man endlich jedes Gewicht mit dem dazu gehörigen Arme, so erhält man jedesmal dasselbe Produkt. Hieraus folgt, daß für alle diejenigen Kräfte, die alle dieselbe Wirkung ausüben, die also einander gleichwertig sind, die Produkte aus Kraft und Arm, also die Kraftmomente gleich sind. Hiermit ist der Momentensatz experimentell bewiesen.

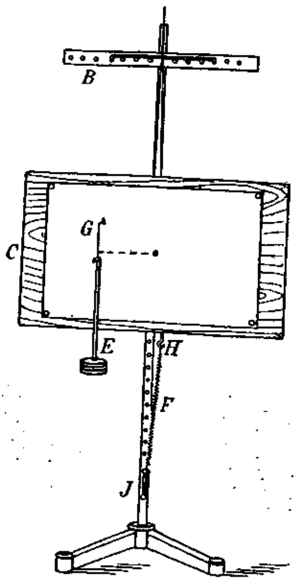

Fig. 134. Zum Nachweise des Momentensatzes.

§ 45. Zusammensetzung mehrerer Drehkräfte.

Wirken an einem um eine Achse A drehbaren Körper K (Fig. 135) in den beliebigen Punkten $B_1, B_2, \ldots B_n$ die Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ in beliebigen Richtungen, so kann man jede einzelne dieser Kräfte durch eine Kraft Q ersetzen, deren Arm gleich der Längeneinheit ist, die aber jedesmal in demselben Punkte C angreift. Sind die Arme der einzelnen Kräfte $p_1, p_2, \ldots p_n$, so muß nach dem Momentensatze $P_1 p_1 = Q_1 \cdot 1$, $P_2 p_2 = Q_2 \cdot 1$, $\ldots$, $P_n p_n = Q_n \cdot 1$ sein.

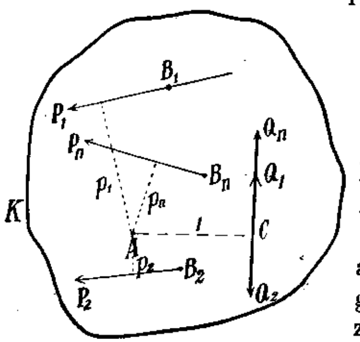

Fig. 135.

Da die Kräfte Q alle in demselben Punkte C, an demselben Arme 1 und in derselben oder entgegengesetzten Richtung wirken, so können sie zur Bildung der Resultierenden algebraisch addiert werden; also ist die Resultierende $R = Q_1 + Q_2 \cdots + Q_n$, wobei entgegengesetzt gerichtete Kräfte mit entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen sind. Unter Berücksichtigung der vorigen Gleichung folgt dann

$$R = P_1 p_1 + P_2 p_2 \cdots + P_n p_n$$

oder einfacher

$$\boldsymbol{R = \sum Pp.}$$

Man findet das resultierende Moment mehrerer Drehkräfte, indem man die Momente der einzelnen Kräfte addiert.

Man pflegt die Momente der rechts herum (im Uhrzeigersinne) drehenden Kräfte positiv, die der links drehenden Kräfte negativ zu rechnen. Sind Kräfte vorhanden, die in Ebenen wirken, die nicht zur Drehungsachse senkrecht sind, so kommen für die Berechnung ihrer Drehungsmomente nur die Projektionen der Kräfte auf die Drehungsebene in Frage.

Die Einheit des Drehmomentes ist Dyn · cm oder $[g \cdot cm^2 \cdot sec^{-2}]$.[1]) Die Drehmomente sind Vektoren. Die Richtung dieser Vektoren wird durch die Richtung der Drehachse angegeben. Dabei rechnet man den Sinn der Achse in der Richtung positiv, daß für einen Beschauer in dieser Richtung der Drehsinn des Drehmomentes um die Achse im Uhrzeigersinn erfolgt.

Die Drehkräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ bewirken keine Drehung, lassen also den Körper in Ruhe, wenn das resultierende Moment Null ist.

Die Gleichgewichtsbedingung lautet $\boldsymbol{\sum Pp = 0}$.

§ 46. Der Schwerpunkt, Massenmittelpunkt.

Der homogene[2]) (in allen seinen Teilen gleichmäßige) Körper K (Fig. 136) sei um eine senkrecht durch die Ebene der Zeichnung gehende Achse A drehbar. Er sei der Einwirkung der Schwere ausgesetzt. Wir zerlegen den Körper in eine große Anzahl gleich großer Masseteile, von denen ein einzelner in der Figur die Größe dm habe. Wäre der Körper K frei beweglich, wäre also die Achse A nicht vorhanden, so würde das Massenelement dm in gleichmäßig beschleunigter Bewegung mit der Beschleunigung $g = 981$ cm · sec^{-2} (gal) lotrecht abwärts fallen. Da die Kraft durch das Produkt aus Masse und Beschleunigung gemessen wird, so ist die auf das Massenelement wirkende Kraft bestimmt durch den Ausdruck $dG = g \cdot dm$. Um die Wirkung dieser Kraft auf den um die Achse A drehbaren Körper zu bestimmen, fällen wir von A auf die Kraftrichtung das Lot $AD = p$. So ist $dG \cdot p = g \cdot p \cdot dm$ das Moment der auf das Massenelement wirkenden Schwerkraft. In derselben Weise wirkt auf jedes andere Massenelement ein ihm zugehöriges Moment ein. In allen diesen Momenten ist der Faktor g derselbe, da die Fallbeschleunigung für alle Körper dieselbe ist. Wir ersetzen die Gesamtheit der wirkenden Kräfte nach Anweisung des

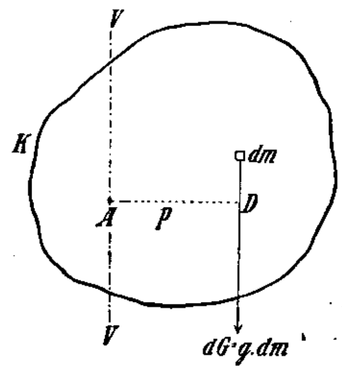

Fig. 136.

1) Die Dimension des Drehmomentes ist die einer Arbeit; die Gleichheit der Dimension für die skalare Arbeitsgröße und die Größe des vektoriellen Drehmomentes lehrt, daß die Dimensionen nicht eindeutig die Eigenart einer physikalischen Größe charakterisieren.

2) homos (griech.) = gleich, génes (griech.) = erzeugt.

vorigen Paragraphen durch das resultierende Moment R aller dieser Kräfte, indem wir die einzelnen Momente addieren. Es ist also $R = \sum g \cdot p \cdot dm$. Ist diese Resultierende gleich Null, ist also $\sum \cdot g \cdot p \cdot dm = 0$, so findet keine Drehung des Körpers statt, und der Körper bleibt in Ruhe. In der letzten Gleichung können wir den konstanten Faktor g vor das Summenzeichen setzen und dann die ganze Gleichung durch g dividieren, so daß wir die Gleichung auch schreiben können

$$\sum p \cdot dm = 0 \quad \text{oder besser} \quad \int p \cdot dm = 0.$$

Denken wir uns den Körper durch eine durch die Achse A gelegte lotrechte Ebene VV in zwei links und rechts von dieser Ebene liegende Teile geteilt, so kann der Ruhezustand nur dadurch zustande kommen, daß alle die Massenelemente, die links von der Ebene liegen, zusammen ein Moment erzeugen, welches dem Werte nach dem Momente gleich ist, das die rechts von der lotrechten Ebene liegenden Massenelemente unter dem Einflusse der Schwerkraft hervorbringen. Aus diesem Grunde nennen wir die vertikale Ebene VV eine **Mittelebene der Masse.** Die Momente $p \cdot dm$ können wir auch auffassen als die Produkte von dm mit ihren Abständen von der Ebene VV. Daher heißen die Momente auch Momente in bezug auf die Ebene VV. Denken wir uns den um A drehbaren Körper flächenhaft, so tritt an Stelle der Mittelebene der Masse eine Gerade, die man als Mittellinie der Masse (Schwerpunktsachse) bezeichnet.

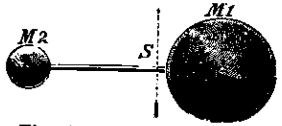

Fig. 137. Zusammengesetzter Körper mit Massenmittelebene.

Eine Mittelebene braucht nicht etwa so zu liegen, daß hierdurch der Körper in zwei massengleiche Hälften geteilt wird, da bei der Bildung des Momentes jedes Massenelement noch mit dem ihm zugeordneten Arm p multipliziert wird. So kann z. B. bei dem durch Fig. 137 dargestellten Körper, der aus einer Stange bestehen mag, an deren beiden Enden zwei ungleich große Kugeln befestigt sind, die Massenmittelebene sehr wohl noch auf der Stange selbst liegen, da die bei der Bildung der Momente der Massenelemente für die linke Kugel in Frage kommenden Arme alle größer sind als für die rechte Kugel, so daß die Momentensummen links und rechts gleich sein können, ohne daß die Massen selbst gleich sind.

Liegt der Punkt A in Fig. 136 so, daß auch bei einer veränderten Lage des Körpers die Massenmittelebene VV durch A geht, daß also für jede beliebige Lage des Körpers $\sum p \cdot dm = 0$ ist, so heißt A **der Massenmittelpunkt.**

Wir haben die Gleichung für die Lage des Massenmittelpunktes unter der Voraussetzung abgeleitet, daß der Körper nur dem Einflusse der Schwere ausgesetzt ist. Aus diesem Grunde wird A der **Schwerpunkt**[1]) des Körpers genannt. Die Ableitung hat aber auch Gültigkeit, wenn die einzelnen Massenelemente durch Kräfte beeinflußt werden, die alle einander parallel und den Massenelementen selbst proportional sind, die also alle dieselbe Beschleunigung der Massenelemente erzeugen. Es tritt dann in der Ableitung statt des Kraftelementes $dG = g \cdot dm$ das Kraftelement $dP = \gamma \cdot dm$ auf. Da die Beschleunigung γ für alle Elemente übereinstimmen soll, so fällt der konstante Faktor γ aus der Gleichung $R = 0$ in genau derselben Weise heraus, wie vorhin der Faktor g. Hieraus folgt, daß der Massenmittelpunkt und der Schwerpunkt zusammenfallen. Die Bezeichnung **Massenmittelpunkt** ist deshalb vorzuziehen, weil sie auch dann Sinn und Bedeutung hat, wenn der Körper dem Einflusse der Schwere nicht ausgesetzt ist.

1) Der Begriff des Schwerpunktes wurde von Archimedes (S. 280) eingeführt; damit dürfen wir den Beginn einer theoretischen Physik datieren.

Zum experimentellen Nachweise der zuletzt abgeleiteten Gleichung kann die in Fig. 138 abgebildete Versuchsanordnung dienen. Diese besteht aus einem rechteckigen Bleche von etwa 30 cm Kantenlänge, das mit einem in der Mitte eingesetzten Glashütchen auf einer Spitze freischwebend horizontal ruht. Auf das Brett wird ein Stück karierten Papiers (sog. Koordinatenpapier) gelegt, auf dem die beiden Achsen XX' und YY' aufgezeichnet sind.

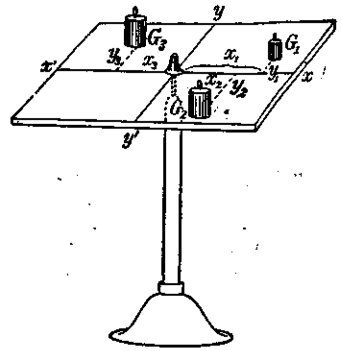

Fig. 138. Experimenteller Nachweis des Schwerpunktes.

Man stellt drei oder mehrere Gewichtstücke auf das Blech und verschiebt sie so lange darauf, bis das Blech wieder in horizontaler Lage schwebt. Hierauf bezeichnet man die Stellung der Gewichtstücke und liest auf dem Koordinatenpapier die Abszissen und Ordinaten für die Stellung jedes Gewichtstückes ab. Bildet man darauf die Produkte aus der Größe der Gewichtsstücke und den entsprechenden Koordinaten, so wird die Richtigkeit der beiden Gleichungen $\sum G \cdot x = 0$ und $\sum G \cdot y = 0$ durch den Versuch nachgewiesen. Bei der Ausführung der Summation sind die Koordinaten mit ihren richtigen Vorzeichen zu nehmen. Aus der Gleichung $\sum G \cdot x = 0$ folgt, daß die Achse YY' eine Schwerpunktsachse, aus der Gleichung $\sum G \cdot y = 0$ folgt, daß die Achse XX' eine Schwerpunktsachse ist. Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt der beiden Achsen, bei dessen Unterstützung die ganze Ebene im Gleichgewicht ist.

Der Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) solcher Körper, bei denen die Masse zentralsymmetrisch um einen Punkt angeordnet ist, ist das Symmetriezentrum selbst. Denn wenn wir für je zwei Massenelemente, die mit dem Symmetriezentrum auf einer Geraden liegen und vom Symmetriezentrum gleichen Abstand haben, die Momente bilden, so sind sie entgegengesetzt gleich, also ist ihre Summe gleich Null. Bilden wir in dieser Weise die Momentensumme aller Massenelemente des ganzen Körpers, so muß auch die ganze Momentensumme gleich Null sein.

Schwerpunkt verschiedener Körper. Der Schwerpunkt eines geradlinigen (eindimensional gedachten) Stabes liegt in der Mitte des Stabes. Der Schwerpunkt eines Brettes (zweidimensional gedachten) von der Form eines Parallelogrammes liegt im Schnittpunkte der Diagonalen, denn jede Diagonale ist eine Massenmittellinie. Der Schwerpunkt eines kreisförmigen Brettes ist der Mittelpunkt des Kreises. Der Schwerpunkt eines Brettes von der Form eines regelmäßigen Vieleckes ist der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises. Bei einer Kugel liegt der Schwerpunkt im Mittelpunkte, bei einem Ellipsoide im Schnittpunkte der Achsen, bei einem Zylinder in der Mitte der Zylinderachse.

Der Schwerpunkt eines dreieckigen Brettes liegt im Schnittpunkte der Mittellinien; denn wenn wir die Momente der Massenelemente in bezug auf eine Mittellinie als Achse bilden, so können wir nach Anweisung von Fig. 139 die Momente von solchen zwei Massenelementen paarweise zusammenfassen, die auf verschiedenen Seiten der Achse gleichweit von der Achse entfernt liegen und gleich groß sind; für ein solches Paar ist die Momentensumme gleich Null, d. h. die Mittellinie ist eine Schwerpunktsachse. Dasselbe läßt sich von jeder der drei Mittellinien nachweisen, also ist der Schwerpunkt der Schnittpunkt der Mittellinien, er liegt auf $^1/_3$ jeder Höhe des dreieckigen Brettes.

Der Schwerpunkt von Brettern vieleckiger Gestalt wird gefunden, indem man das Vieleck in einzelne Dreiecke zerlegt, für jedes Dreieck den Massenmittelpunkt aufsucht, die Masse jedes Dreieckes bestimmt und dann diejenigen Achsen aufsucht, für die die Momentensumme gleich Null ist.

Bei einer Pyramide ist die Verbindungslinie der Spitze mit dem Schwerpunkte der Grundfläche eine Schwerpunktsachse; denn wenn man nach Anweisung von Fig. 140 die Pyramide durch Schnitte parallel der Grundfläche in lauter dünne Schichten zerlegt, so liegt der Schwerpunkt jeder einzelnen Schicht auf der angegebenen Verbindungslinie. Folglich ist die Momentensumme aller Massenelemente jeder einzelnen Schicht in bezug auf diese Achse gleich Null; es muß also auch die Momentensumme aller Massenelemente der ganzen Pyramide gleich Null sein, folglich ist die Achse eine Schwerpunktsachse. Kann man wie bei einer dreiseitigen Pyramide mehrere Schwerpunktsachsen ziehen, so ist der Schwerpunkt der Schnittpunkt der Schwerpunktsachsen, er liegt in $^1/_4$ der Höhe von jeder Seitenfläche. Für eine Pyramide beliebiger Form liegt er auch in $^1/_4$ der Höhe; denn wenn man die mehrseitige Pyramide in lauter dreiseitige Pyramiden von derselben Höhe zerlegt, so liegt der Schwerpunkt jeder dreiseitigen Pyramide in $^1/_4$ der Höhe, folglich auch der Schwerpunkt der ganzen Pyramide.

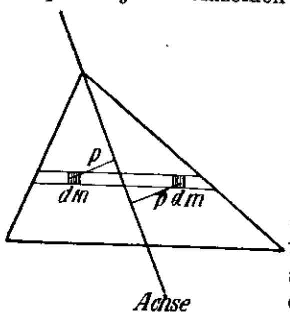

Fig. 139. Schwerpunkt eines Dreiecks.

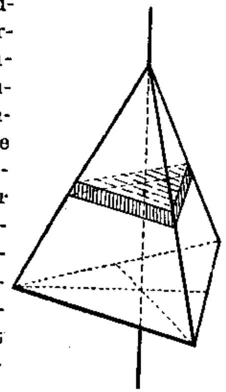
Fig. 140. Schwerpunkt einer Pyramide.

Bei einem Kegel liegt der Schwerpunkt auf der Achse des Kegels in $^1/_4$ der Höhe von der Grundfläche.

§ 47. Die Berechnung des Schwerpunktes durch das bestimmte Integral.

In § 45 wurde die Gleichung $R = \Sigma Pp$ als mathematischer Ausdruck für die Resultierende mehrerer Drehkräfte abgeleitet. In § 46 wurde die Gleichung $\Sigma p \cdot dm = 0$ als mathematischer Ausdruck für die Bestimmung einer Schwerpunktsachse abgeleitet. Die rechnerische Auswertung der Ausdrücke ΣPp und $\Sigma p \cdot dm$ ist mit elementaren Mitteln möglich, solange jeder einzelne Summand eine meßbare Größe und die Anzahl der Summanden endlich ist. Werden dagegen die einzelnen Summanden unendlich klein, und wird die Anzahl der Summanden unendlich groß, so muß man die Differential- und Integralrechnung zu Hilfe nehmen. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn man zur Berechnung des Massenmittelpunktes eines Körpers diesen wirklich in seine Körperelemente zerlegen muß, so wie es die Ableitung in § 46 verlangt.

Es mögen einige Beispiele zur Berechnung des Schwerpunktes mit Hilfe der Integralrechnung folgen:

Aufgabe: Es soll der Schwerpunkt eines geraden Kreiskegels berechnet werden.

Wir betrachten nach Fig. 141 den Kreiskegel entstanden durch die Umdrehung einer Geraden, deren Gleichung, bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem $y = A \cdot x$ ist, und zwar soll die Umdrehungsachse die X-Achse sein. Die Höhe des Kegels sei h. Der Schwerpunkt S des Kegels liegt sicher auf der X-Achse; ξ sei sein gesuchter Abstand von der Spitze des Kegels.

Zerlegen wir den Kegel durch Schnitte, die senkrecht zur X-Achse gelegt werden, in dünne zylindrische Scheiben von der Dicke Δx, so habe eine dieser Scheiben den Abstand x vom Scheitel, und die hierzu gehörige Ordinate sei y. Der Rauminhalt dieser Elementarscheibe beträgt $\pi y^2 \cdot \Delta x$. Wir bilden nach Anleitung die in § 46 abgeleitete Bedingungsgleichung für den Schwerpunkt $\Sigma p dm$, wo dm ein Masseuelement, also hier das Produkt aus dem eben angegebenen Ausdruck für den Elementarzylinder und der Dichte s, p der Abstand des Zylinders vom Schwerpunkt ist. Hier ist $p = \xi - x$. Setzen wir diesen Wert ein und ersetzen wir die Summe durch ein bestimmtes Integral, so lautet die Bedingungsgleichung

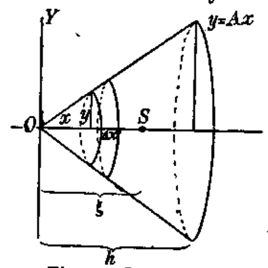

Fig. 141. Schwerpunkt eines Kegels.

$$\int_0^h s \cdot (\xi - x)\pi y^2 dx = 0,$$

woraus folgt, da wir π und s fortlassen können,

$$\int_0^h \xi y^2 dx - \int_0^h x y^2 dx = 0 .$$

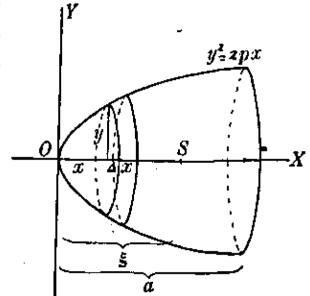

Fig. 142. Schwerpunkt eines Paraboloids.

Wir ersetzen y durch den Wert Ax und erhalten:

$$A^2 \xi \int_0^h x^2 dx = A^2 \int_0^h x^3 dx .$$

Nach Ausführung der Integration wird hieraus, nachdem der Faktor A^2 fortgelassen ist, und nachdem die Grenzen der Integration eingesetzt worden sind,

$$\xi \frac{h^3}{3} = \frac{h^4}{4}, \quad \text{also} \quad \xi = \frac{3}{4} h .$$

Aufgabe: Es soll der Schwerpunkt eines Umdrehungsparaboloides berechnet werden, das durch Umdrehung der Parabel $y^2 = 2px$ um ihre Achse entstanden ist.

Es sei S (Fig. 142) der Schwerpunkt des gesuchten Körpers, der sicherlich auf der Umdrehungsachse des Körpers liegt. Der Abstand des Schwerpunktes vom Scheitel sei ξ. Wir zerlegen das Paraboloid durch Schnitte, die senkrecht zur Achse gelegt sind, in dünne zylindrische Scheiben von der Dicke Δx. Der Rauminhalt eines der kleinen Elementarzylinder ist $\pi y^2 \cdot \Delta x$. Der Abstand dieses Zylinders vom Schwerpunkte ist $\xi - x$. Bilden wir demnach das der Formel $p \cdot dm$ aus § 46 entsprechende Produkt, so heißt dieses $s \cdot (\xi - x)\pi y^2 \cdot \Delta x$. Wir summieren die für alle Elementarzylinder gebildeten Ausdrücke und gehen gleich zur

Grenze über, indem wir statt der Summe das Integral schreiben. Dann heißt die Gleichung für die Berechnung des Schwerpunktes

$$\int_0^a s\cdot(\xi - x)\pi y^2 dx = 0.$$

In dieser Gleichung können wir π und s fortlassen. So heißt die Gleichung umgeformt

$$\xi\int_0^a y^2 dx - \int_0^a xy^2 dx = 0.$$

Ersetzen wir y^2 durch den Wert $2px$, so wird

$$\xi\int_0^a 2pxdx = \int_0^a 2px^2 dx.$$

Führen wir die Integration aus und setzen dann die Grenzen ein, so erhalten wir

$$\xi\cdot\frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{3}$$

und hiernach

$$\xi = \tfrac{2}{3}\,a.$$

§ 48. Zusammensetzung paralleler Kräfte.

An dem freibeweglichen Körper K (Fig. 143) greifen an zwei verschiedenen Punkten die beiden verschiedenen parallelen und gleichgerichteten Kräfte P_1 und P_2 an. Es soll untersucht werden, wie groß die Resultierende der beiden Kräfte ist und wo die Angriffslinie der Resultierenden liegt.

Da der Angriffspunkt einer Kraft in der Richtung ihrer Angriffslinie beliebig verschoben werden kann, so können wir die Angriffspunkte A und B so wählen, daß AB auf der Richtung der Kräfte senkrecht steht. Es sei $AB = a$. Eine im vorläufig noch unbestimmten Punkte C angreifende Kraft R, welche P_1 und P_2 parallel wirkt, möge den beiden Kräften P_1 und P_2 zusammen gleichwertig sein. Es sei $AC = x$, $BC = y$. Da R die beiden Kräfte P_1 und P_2 vollständig ersetzen soll, so muß sie es auch dann noch tun, wenn wir der Bewegung des Körpers K einen beliebigen Zwang auferlegen. Wählen wir nun A als Achse, so müssen die Momente von R und P_2, bezogen auf die Achse A, gleich sein. In derselben Weise müssen die Momente von R und P_1 in bezug auf die Achse B gleich sein, wenn wir B als Achse des Körpers vorschreiben. Es folgen also die beiden Gleichungen:

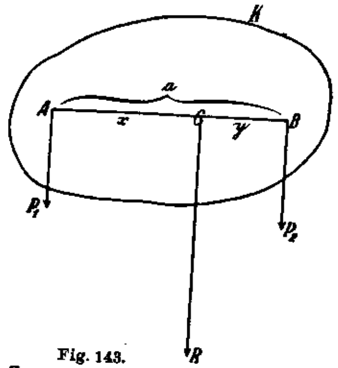

Fig. 143.
Zusammensetzung paralleler Kräfte.

$$x\cdot R = P_2\cdot a \quad\text{und}\quad y\cdot R = P_1\cdot a.$$

Hieraus folgt durch Division

$$\boldsymbol{x : y = P_2 : P_1.}$$

Durch Addition der beiden Gleichungen

folgt $(x+y)\cdot R = (P_1 + P_2)a$, und da $x + y = a$ ist, so ist

$$\boldsymbol{R = P_1 + P_2,}$$

in Worten:

Zwei parallele Kräfte können durch eine einzige, den ursprünglichen Kräften parallele Kraft ersetzt werden, deren Größe gleich der Summe der Einzelkräfte ist und deren Angriffspunkt die Verbindungsstrecke der Angriffspunkte der Seitenkräfte im umgekehrten Verhältnisse dieser Kräfte teilt.

Die abgeleitete Proportion $x : y = P_2 : P_1$ können wir auch schreiben $x\,.\,P_1 = y\cdot P_2$. Das heißt: Die beiden Momente der beiden Kräfte P_1 und P_2, bezogen auf den Angriffspunkt der Resultierenden als Achse, müssen einander gleich sein. Wir sehen, daß diese Bedingung übereinstimmt mit der in § 46 abgeleiteten Bedingung für die Lage des Massenmittelpunktes. Diese Übereinstimmung ist nicht zufällig, denn wenn wir in Fig. 141 C als feste Achse vorschreiben, so kann unter dem Einflusse der beiden Kräfte P_1 und P_2 keine Drehung stattfinden, weil ihre Momente entgegengesetzt gleich sind. Die Resultierende bringt keine Drehung um C hervor, weil in diesem Falle der Arm der Kraft Null ist.

Die Resultierende mehrerer paralleler Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_n$ ist gleich der Summe der Einzelkräfte $R = \Sigma P$. In dieser Summe können einzelne der Kräfte P entgegengesetzt gerichtet sein; dann sind sie mit negativen Vorzeichen bei der Summenbildung in Rechnung zu bringen. Die Angriffslinie oder den Angriffspunkt, d. h. einen beliebigen Punkt der Angriffslinie, findet man, indem man eine willkürliche Achse des Körpers festlegt und die Momentensumme für diese Achse bildet. Es seien die Arme der Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_n$, bezogen auf eine willkürliche Achse $p_1, p_2 \ldots p_n$, der Arm von R sei σ, dann ist

$$\boldsymbol{R\cdot\varrho = \Sigma Pp.}$$

Man wählt hierbei passend als Achse der Reihe nach jede der Achsen eines räumlichen Koordinatensystems und findet so die Beziehungen

$$\boldsymbol{R\xi = \Sigma Px,\quad R\eta = \Sigma Py,\quad R\zeta = \Sigma Pz.}$$

Dieselben Gleichungen gelten auch für die Bestimmung des Massenmittelpunktes eines Körpers, bei dem dann die einzelnen P-Werte die auf die einzelnen Massenelemente wirkenden Schwerekräfte sind.

Ist das Gesamtgewicht des Körpers $G = M\cdot g$, so gehen die Formeln, wenn der Körper nicht aus einzelnen Massenpunkten besteht, sondern ein stetig mit Masse ausgefüllter Raum ist, in die Gleichungen über

$$M\cdot g = \int g\cdot dm,$$

$$Mg\cdot\xi = \int g\cdot xdm,\qquad Mg\cdot\eta = \int g\cdot ydm,\qquad Mg\cdot\zeta = \int g\cdot zdm.$$

Da g für alle Massen gleich ist, so fällt es auch in den obigen Gleichungen fort, so daß sie sich vereinfachen zu

$$\boldsymbol{M\cdot\xi = \int x\cdot dm,\quad M\cdot\eta = \int y\cdot dm,\quad M\cdot\zeta = \int z\cdot dm.}$$

Durch diese Gleichungen sind die Koordinaten ξ, η, ζ des Massenmittelpunktes eines beliebigen Körpers bestimmt.

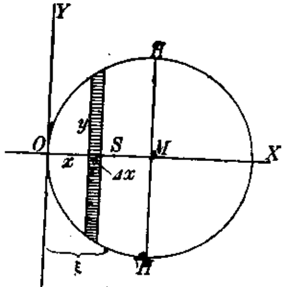

Fig. 144. Schwerpunkt einer Halbkugel.

Aufgabe: Es soll der Schwerpunkt einer Halbkugel bestimmt werden.

In Fig. 144 sei der Schnitt der Halbkugel mit der Bildebene durch den Halbkreis OHH dargestellt. Diese Schnittfigur beziehen wir auf das aus der Figur ersichtliche rechtwinklige Koordinatensystem. Die Gleichung des Kreises ist demnach die Scheitelgleichung

$$y^2 = x\,(2r - x).$$

Wir zerlegen die Halbkugel in dünne Schichten, indem wir Schnitte parallel zum größten Kreise der Halbkugel legen. Eine solche Schicht ist in der Figur durch das gestrichelte Rechteck angedeutet. Diese Elementarschicht von der Dicke Δx hat den Rauminhalt $\pi y^2\,\Delta x$. Bedenken wir, daß der Inhalt der ganzen Halbkugel $\frac{2}{3}\pi r^3$ ist, und ist s die Dichte der Halbkugel, so können wir setzen $M = \frac{2}{3}\pi r^3 \cdot s$, $\pi y^2 dx \cdot s = dm$. Damit ergibt sich

$$\tfrac{2}{3}\pi r^3 \cdot \xi = \int_0^r x \cdot \pi y^2\,dx,$$

da s sich auf beiden Seiten heraushebt.

Hier setzen wir $y^2 = x\,(2r - x)$ ein und erhalten

$$\tfrac{2}{3}\pi r^3 \xi = \pi \int_0^r x^2\,(2r - x)\,dx,$$

oder

$$\tfrac{2}{3} r^3 \xi = \int_0^r 2 r x^2 dx - \int_0^r x^3 dx.$$

Durch Integration folgt $\quad \frac{2}{3} r^3 \cdot \xi = \frac{2}{3} r^4 - \frac{1}{4} r^4 = \frac{5}{12} r^4$

und hieraus

$$\xi = \tfrac{5}{8} r.$$

§ 49. Das Kräftepaar.

Wenn man für den Fall, daß an einem Körper zwei gleiche, entgegengesetzt parallele Kräfte an zwei verschiedenen Punkten angreifen, die Formeln des vorigen Paragraphen ohne weiteres anwenden wollte, um die Resultierende zu bilden, so würde sich ergeben, daß die Resultierende gleich Null ist, daß aber der Angriffspunkt der Resultierenden in unendlicher Ferne liegt. Es würde also das Moment der Resultierenden die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ annehmen. Der Ausdruck beweist uns nur, daß wir keine Resultierende in dem vorher angegebenen Sinne haben. Tatsächlich ergibt der Versuch, daß zwei gleiche, entgegengesetzt parallele Kräfte nicht durch eine Einzelkraft ersetzt werden können, da die Kräfte eine reine Drehbewegung zur Folge haben, die nicht durch eine Einzelkraft hervorgebracht werden kann. Zwei in der

angegebenen Weise wirkende Kräfte, die diese besondere Wirkung haben, bilden ein **Kräftepaar.**

Moment des Kräftepaares. Es sei (Fig. 145) K ein Körper, an dem die beiden Kräfte P_1 und P_2 in den beiden Punkten A und B angreifen, wobei $P_1 = -P_2$ ist. Da wir den Angriffspunkt einer Kraft längs der Angriffslinie beliebig verschieben können, ohne die Wirkung der Kräfte zu verändern, so wählen wir die Punkte A und B gleich so, daß die Strecke AB auf der Richtung der Kräfte senkrecht steht. Wir nennen $AB = l$ den **Arm** des Kräftepaares.

Um die Wirkung des Kräftepaares zu untersuchen, nehmen wir eine senkrecht auf der Ebene des Papieres stehende Achse an, die durch den in der Verlängerung von AB willkürlich angenommenen Punkt O geht. Es sei

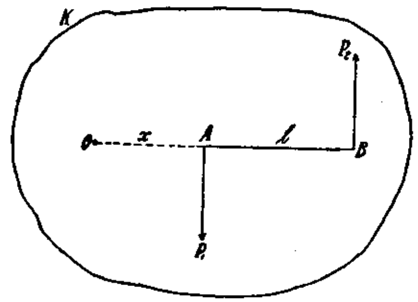

Fig. 145. Kräftepaar.

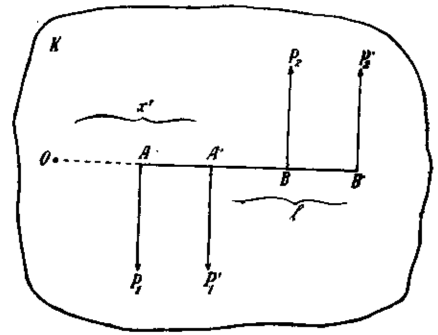

Fig. 146. Kräftepaar.

$AO = x$. Dann ist das Moment von P_1 in bezug auf die Achse O gleich $P_1 x$, das Moment von P_2 in bezug auf dieselbe Achse gleich $P_2\,(x + l)$. Das Gesamtmoment der beiden Kräfte ist daher $P_2\,(x + l) + P_1 x$. Da P_1 entgegengesetzt und gleich P_2 ist, so setzen wir $P_2 = P$, $P_1 = -P$. Dann wird das Moment

$$\mathfrak{M} = P\,(x + l) - Px = Pl.$$

Damit stellt sich das merkwürdige Ergebnis heraus, daß bei der Bildung des Momentes die willkürliche Größe x ganz fortfällt. Es ist also ganz einerlei, wo die Achse O liegt.

Das Drehmoment eines Kräftepaares hängt nur von der Größe der Kraft und von dem Arme des Kräftepaares ab.

Unabhängigkeit des Momentes von der Lage der Achse. Daraus folgt: **Man kann die Angriffspunkte der Kräfte in beliebiger Weise verschieben, wenn nur das Moment (Kraft $\times$ Arm) des Kräftepaares ungeändert bleibt.**

Formell kann man das beweisen, indem man zunächst das Moment des parallel verschobenen Kräftepaares mit den Kräften $P_1' = P_1$ und $P_2' = P_2$, die in den Punkten A' und B' angreifen (Fig. 146), in bezug auf die willkürlich liegende Achse O ausrechnet. Ist wieder

$$A'B' = l, \quad OA' = x',$$

es folgt für das Moment des Kräftepaares der Wert $P_2'(x'+l)+P_1'x'$; nach unserer Voraussetzung ist $P_2'=P$ und $P_1'=-P$. Damit wird wieder das Moment $\mathfrak{M}=Pl$. Die Lage der Achse O ist auch hier bei der jetzigen Lage des Kräftepaares auf den Wert für das Moment ohne Einfluß.

Zeichnet man (Fig. 147) um die willkürliche Achse O mit den Radien OA und OB Kreise und zieht einen anderen willkürlichen Radius von O aus, der die Kreise in A'' und B'' schneidet, macht man dann A'' und B'' zu Angriffspunkten eines neuen Kräftepaares mit den Kräften P_1'' und P_2'', die der Größe nach den Kräften P_1 und P_2 gleich sind, so ist das neue Kräftepaar deshalb dem alten in bezug auf die

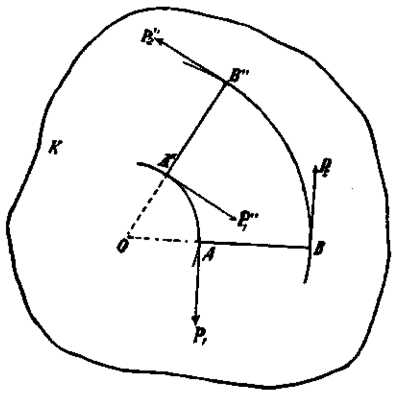

Fig. 147.

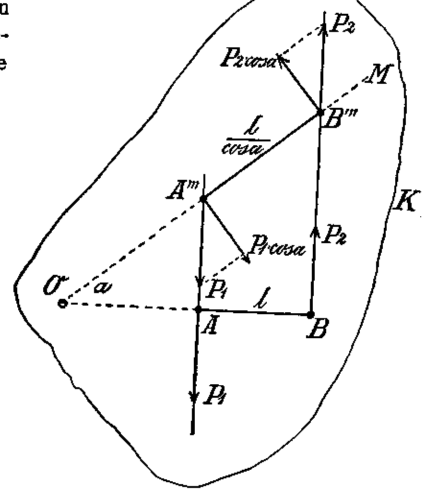

Fig. 148.

Achse O gleichwertig, weil jede einzelne Kraft des neuen Kräftepaares jeder einzelnen des alten gleichwertig ist und die Größe des Armes für die Achse O sich nicht geändert hat. In Verbindung mit dem letzten Ergebnis folgt also:

Man kann ein Kräftepaar in seiner Ebene zu sich selbst parallel verschieben oder drehen, ohne daß seine Wirkung verändert wird.

Gleichwertigkeit zweier Kräftepaare. Wir ziehen (Fig. 148) von der willkürlichen Achse O aus, deren Durchschnittspunkt mit der Ebene des Papieres auf der Verlängerung von AB über A hinaus liegt, den willkürlichen Strahl OM, der mit OA den Winkel α einschließt. Die Angriffslinien der in A und B angreifenden Kräfte P_1 und P_2 mögen den Strahl OM in A''' und B''' schneiden. Wir verlegen den Angriffspunkt von P_1 nach A''', den von P_2 nach B'''. Bei der um O ausgeführten Drehung des Körpers bewegt sich A''' auf einer Bahn, die im Augenblicke der Drehung senkrecht auf OM, und ebenfalls B''' auf einer Bahn, die senkrecht auf OM steht. Für diese Drehung können wir die Kraft P_1 ersetzen durch ihre Projektion $P_1\cos\alpha$ auf die Richtung der Bahn, in derselben Weise P_2 durch die in der Bahnrichtung wirkende Kraft $P_2\cos\alpha$ (Projektion von P_2 auf die Bahn [siehe § 40]). Es ist $A'''B''' = \frac{l}{\cos\alpha}$. Das Kräftepaar mit den Kräften P_1 und P_2 und dem Arm l kann demnach ersetzt werden durch das Kräftepaar mit den Kräften $P_1\cos\alpha$ und $P_2\cos\alpha$ und mit dem Arme $\frac{l}{\cos\alpha}$.

Das Moment des neuen Kräftepaares, bei dem also sowohl die Kraft wie der Arm einen anderen Wert angenommen haben, ist $\mathfrak{M} = P\cos\alpha\cdot\frac{l}{\cos\alpha} = P\cdot l$. Hieraus folgt:

Zwei Kräftepaare, bei denen die Kraftgrößen und die Größen der Arme verschieden sind, sind einander gleichwertig, wenn ihre Momente gleich sind.

Allgemein:

Zwei Kräftepaare sind einander gleichwertig, wenn ihre Momente gleich sind.

Hierbei kann die Lage der Angriffspunkte beliebig verschoben werden; auch die Kraftgrößen und die Armgrößen können beliebig verändert werden.

Drehachse eines frei beweglichen Körpers. Da die Achse, um die sich der durch ein Kräftepaar gedrehte Körper bewegt, und die Lage des Kräftepaares voneinander unabhängig sind, so kann für einen völlig frei beweglichen Körper die Lage der Achse nur durch die Massenverteilung des Körpers bedingt sein.

Für den Fall, daß der Körper aus zwei einzelnen, aber fest miteinander verbundenen Massen besteht, deren Ausdehnung vernachlässigt werden darf, geschieht die Bestimmung der Achse durch folgende Überlegung:

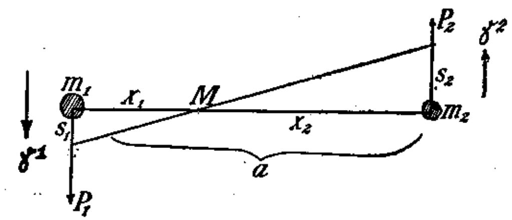

Fig. 149. Drehachse eines frei beweglichen Körpers.

Es seien (Fig. 149) m_1 und m_2 zwei Massen, die durch eine widerstandsfähige (d. h. elastische) Stange von der Länge a miteinander verbunden sind. Da für die durch ein Kräftepaar erzeugte Wirkung lediglich das Moment des Kräftepaares in Rechnung zu bringen ist, so können wir das Kräftepaar auf die Form $P\cdot a$ bringen, d. h. durch eine Kräftepaar ersetzen, das den Arm a hat, bei dem also die beiden Kräfte P_1 und P_2 unmittelbar an den beiden Massen m_1 und m_2 senkrecht zur Stange a angreifen. Die beiden Kräfte P_1 und P_2 erteilen den beiden Massen m_1 und m_2 die Beschleunigungen γ_1 und γ_2. Zwischen den Größen P, m und γ bestehen die Gleichungen $P_1=m_1\gamma_1$ und $P_2=m_2\gamma_2$. Die beiden Kräfte P_1 und P_2 gehören zu einem Kräftepaare, sind also gleich groß. Folglich ist auch $m_1\gamma_1=m_2\gamma_2$. Die beiden Massen bewegen sich infolge der ihnen erteilten Beschleunigungen in entgegengesetzten, parallelen Richtungen senkrecht zu a während des Zeitelementes Δt um die Strecken

$$s_1=\tfrac{1}{2}\gamma_1(\Delta t)^2,\quad s_2=\tfrac{1}{2}\gamma_2(\Delta t)^2.$$

Hierdurch erfahren die einzelnen Teile der festen (elastischen) Verbindung (der Stange) eine Ortsveränderung teils in der Richtung von s_1, teils in der Richtung von s_2. Die Stange erfährt eine Drehung um einen Punkt M, der selbst keine Ortsveränderung erfährt. Die Lage des Punktes M kann aus der Ähnlichkeit der beiden links und rechts von M liegenden Dreiecke berechnet werden. Nennt man die beiden durch M auf a gebildeten Abschnitte x_1 und x_2, so folgt

$$x_1 : x_2 = s_1 : s_2$$

oder nach Einsetzen der Werte von s_1 und s_2

$$x_1 : x_2 = \tfrac{1}{2}\gamma_1 (\Delta t)^2 : \tfrac{1}{2}\gamma_2 (\Delta t)^2$$

oder $x_1 : x_2 = \gamma_1 : \gamma_2$. Multipliziert man noch die beiden Vorderglieder der Proportion mit m_1, die beiden Hinterglieder mit m_2, so folgt weiter

$$m_1 x_1 : m_2 x_2 = m_1 \gamma_1 : m_2 \gamma_2 .$$

Da $m_1\gamma_1 = m_2\gamma_2$ ist, so folgt hieraus $m_1 x_1 = m_2 x_2$. Diese Gleichung, aus der sich die Lage des Punktes M ergibt, stimmt überein mit der Bestimmungsgleichung für den Massenmittelpunkt. Hieraus folgt:

Bei der Einwirkung eines Kräftepaares auf zwei miteinander fest verbundene Massen während des Zeitelementes Δt bleibt nur der Massenmittelpunkt in Ruhe.

Die durch die Einwirkung der Kräfte während des Zeitelementes Δt hervorgerufene Verlängerung der elastischen Stange wird durch die in der Stange hervorgerufenen elastischen Kräfte, die in der Richtung der Stange wirken, wieder beseitigt. Infolge des Prinzipes der Gleichheit von Aktion und Reaktion sind diese Kräfte nach beiden Seiten gleich. Die Massen erfahren also in der Richtung der Stange gegeneinander durch die elastischen Kräfte die Beschleunigungen γ_1' und γ_2', die auch der Gleichung $m_1\gamma_1' = m_2\gamma_2'$ genügen. Diese Gleichung bestimmt ebenfalls den Massenmittelpunkt der beiden bewegten Massen. Bei der durch die elastischen Kräfte hervorgerufenen Verkürzung der Stange auf die ursprüngliche Länge bleibt also der Massenmittelpunkt auch an seiner Stelle. Wählen wir das Zeitelement Δt unendlich klein, so kann die im vorigen beschriebene Bewegung der Massen in der Richtung s_1 und s_2 und die darauf folgende Annäherung auf die ursprüngliche Entfernung a als gleichzeitig angenommen werden, so daß sich eine reine Drehung der Massen um den Massenmittelpunkt ergibt.

Die für zwei miteinander verbundene Massen von kleiner Ausdehnung ausgeführte Berechnung läßt sich auf mehrere Massen, auf ein Massensystem, d. h. auf einen vollständigen Körper, ausdehnen; doch erfordert der elementare Nachweis größere rechnerische Schwierigkeiten.

Wirkt auf einen frei beweglichen Körper ein Kräftepaar, so geht die Drehungsachse durch den Massenmittelpunkt des Körpers, ist also unabhängig von der Lage des Kräftepaares.

Aus dem letzten Satze folgt, daß an der Bewegungswirkung eines Kräftepaares nichts geändert wird, wenn durch den Massenmittelpunkt eine feste Achse gelegt wird, da der Massenmittelpunkt sowieso eine unveränderte Lage hat. Wenn wir das Kräftepaar so verschieben, daß die Angriffslinie der einen Kraft durch den Massenmittelpunkt, also auch durch die angenommene feste Achse hindurchgeht, so können wir diese Kraft ganz fortlassen, denn sie trägt zur Bewegung des Körpers nicht bei: sie wird ersetzt durch den elastischen Spannungsdruck, den die Achse auf den Körper ausübt. Hieraus folgt:

Ein auf einen frei beweglichen Körper wirkendes Kräftepaar kann durch eine Einzelkraft ersetzt werden, wenn der Körper um eine durch den Massenmittelpunkt gehende feste Achse drehbar gemacht wird, und wenn das Moment der Einzelkraft gleich ist dem Momente des Kräftepaares.

§ 50. Wirkung einer einzelnen Kraft auf einen frei beweglichen Körper.

Greift eine Einzelkraft P in einem Punkte A eines frei beweglichen Körpers K an, so bewegt sich der Körper, falls A mit dem Massenmittelpunkte zusammenfällt, rein fortschreitend, d. h. alle einzelnen Punkte des Körpers bewegen sich in parallelen geradlinigen Bahnen mit gleichmäßig beschleunigter Bewegung.

Fällt dagegen A nicht mit dem Massenmittelpunkte M zusammen (Fig. 150), so fällen wir von M auf die Angriffslinie der Kraft P das Lot $ML = a$ und denken uns außer der wirkenden Kraft P noch zwei Kräfte P_1 und P_2 in M angreifend, welche einander entgegengesetzt gerichtet sind, dieselbe Größe wie P haben und deren Angriffslinien mit P parallel sind. Die beiden Kräfte P_1 und P_2 heben sich auf, tragen also zur Bewegung des Körpers K nichts bei. Wir können nun P und P_2 zu einem Kräftepaare von dem Momente $P \cdot a$ zusammenfassen, das, wenn es allein wirkte, eine Drehung des Körpers K um den Massenmittelpunkt M hervorrufen würde. Die Kraft P_1 bewirkt außerdem eine fortschreitende Bewegung des Körpers. So erfolgt gleichzeitig eine geradlinie Vorwärtsbewegung von M in der Richtung der wirkenden Kraft und eine Drehung des Körpers um den Massenmittelpunkt. Durch Zusammensetzung dieser beiden Bewegungen entsteht eine Bewegung, bei der jeder einzelne Punkt des Körpers eine Zykloide beschreibt.

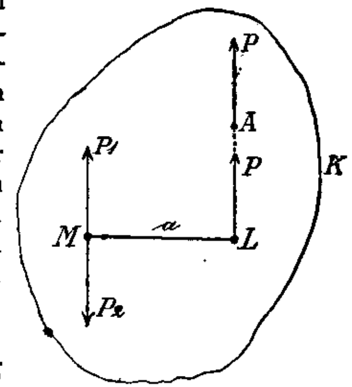

Fig. 150. Eine Kraft greift an einem Körper in einem beliebigen Punkte an.

Um diese Bewegung zu beobachten, streue man eine größere Anzahl von Fahrradlagerkugeln auf eine ebene Unterlage und lege hierauf ein ebenes Brett. Führt man nun gegen das Brett einen wagerechten Stoß, dessen Richtung durch den Massenmittelpunkt geht, so erfolgt eine rein fortschreitende Bewegung. Geht hingegen die Angriffslinie nicht durch den Massenmittelpunkt, so erhält man die beschriebene Drehbewegung und Vorwärtsbewegung. Auch an einem auf einer größeren Wasserfläche schwimmenden Gegenstande, an einem kleinen Boote, der an einem Seil gezogen wird, können die Bewegungen beobachtet werden. Geht die Verlängerung des Seiles durch den Massenmittelpunkt, so bewegt sich das Boot geradlinig vorwärts, während er im andern Falle gleichzeitig eine Drehung ausführt.

§ 51. Das Gleichgewicht.

Zwei Kräfte halten sich das Gleichgewicht, oder ein Körper ist unter dem Einflusse zweier Kräfte im Gleichgewichte, wenn die Kräfte gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind, und wenn die Angriffslinien der beiden Kräfte in eine Gerade fallen. Greift an einem um eine Achse drehbaren Körper eine Kraft an, so ist der Körper im Gleichgewichte, wenn die Angriffslinie durch die Drehungsachse geht. Hierbei sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Der Angriffspunkt der Kraft P fällt mit der Drehungsachse O zusammen: dann bleibt der Körper auch im Gleichgewichte, wenn er um einen beliebigen Winkel gedreht wird (Fig. 151), weil auch in der neuen Lage die

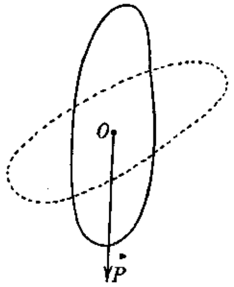

Fig. 151. Stetiges Gleichgewicht.

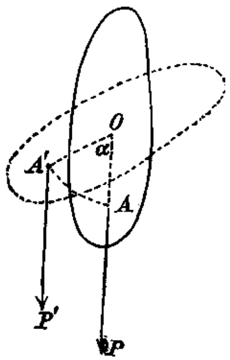

Fig. 152. Sicheres Gleichgewicht.

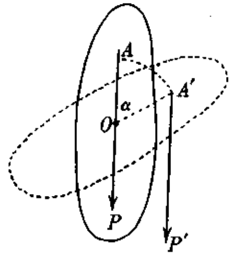

Fig. 153. Unsicheres Gleichgewicht.

Angriffslinie der Kraft durch die Drehungsachse geht. Diese Gleichgewichtslage heißt **stetig** oder **indifferent**.

2. Der Angriffspunkt A der Kraft P liegt (wie in Fig. 152) so, daß die Kraftrichtung mit der Richtung OA von der Drehungsachse zum Angriffspunkte zusammenfällt; dann verschiebt sich bei einer Drehung des Körpers um den Winkel α der Angriffspunkt so (nach A'), daß die jetzt in der Lage P' wirkende Kraft ein Drehungsmoment erzeugt, das den Drehungswinkel α zu verkleinern strebt, das also den Körper zur ursprünglichen Gleichgewichtslage zurückzudrehen strebt. In diesem Falle heißt das Gleichgewicht **sicher** oder **stabil**.

3. Der Angriffspunkt A der Kraft P liegt (wie in Fig. 153) so, daß die Kraftrichtung mit der Richtung AO, die vom Angriffspunkte zur Drehungsachse geht, zusammenfällt; dann verschiebt sich bei einer Drehung des Körpers um den Winkel α der Angriffspunkt so (nach A'), daß die jetzt in der Lage P' wirkende Kraft ein Drehungsmoment erzeugt, das den Winkel α zu vergrößern strebt, das also den Körper weiter aus seiner alten Gleichgewichtslage herauszudrehen strebt. In diesem Falle heißt das Gleichgewicht **unsicher** oder **labil**. Der Körper dreht sich dann so lange, bis er eine neue sichere Gleichgewichtslage erreicht hat.

Befindet sich der Körper im stetigen (indifferenten) Gleichgewichte, so ist keine Arbeit erforderlich, um den Körper um einen kleinen Winkel aus dieser Lage zu bringen. Bei der Drehung aus der sicheren (stabilen) Gleichgewichtslage wird die potentielle Energie des Körpers vergrößert, indem eine äußere Kraft Arbeit an dem Körper leistet. Bei der Drehung aus der unsicheren (labilen) Gleichgewichtslage wird die potentielle Energie des Körpers verkleinert, indem der Körper (bzw. die auf ihn wirkende Kraft) Arbeit leistet und nach außen abgibt.

In der stetigen (indifferenten) Gleichgewichtslage ist in bezug auf die Drehung die potentielle Energie des Körpers gleich Null; in der sicheren (stabilen) Gleichgewichtslage hat der Körper einen kleinsten Wert an potentieller Energie; in der unsicheren (labilen) Gleichgewichtslage hat er einen größten Wert an potentieller Energie.

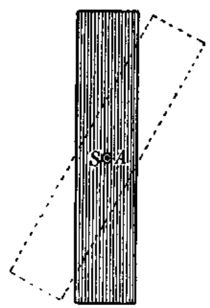

Fig. 154. Stetiges Gleichgewicht.

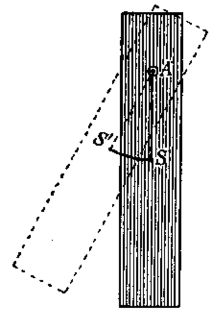

Fig. 155. Sicheres Gleichgewicht.

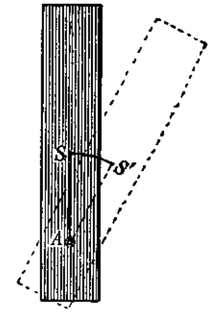

Fig. 156. Unsicheres Gleichgewicht.

Im besonderen spricht man von diesen drei Gleichgewichtslagen, wenn ein nur der S c h w e r k r a f t unterworfener Körper um eine Achse drehbar ist. Geht die Achse d u r c h den Schwerpunkt, so ist das Gleichgewicht stetig (indifferent) (Fig. 154); geht die Achse durch einen o h e r h a l b des Schwerpunktes liegenden Punkt, so herrscht sicheres (stabiles) Gleichgewicht (Fig. 155); liegt die Achse t i e f e r als der Schwerpunkt, so ist unsicheres (labiles) Gleichgewicht vorhanden (Fig. 156). Daß aber auch bei der Unterstützung eines Körpers in einem u n t e r h a l b des Schwerpunktes liegenden Punkte alle drei Gleichgewichtslagen möglich sind, geht aus Fig. 157, 158 und 159 hervor, wo eine Kugel auf einer wagerechten Ebene oder innerhalb einer kugeligen Schale oder auf der erhabenen Seite einer solchen Schale ruht. Es spielen in diesen Fällen die Kugelmitten eben nicht die Rolle der ruhenden Drehachsen.

Auch bei der Schwerkraft wird die Frage nach der Art des Gleichgewichtes dadurch entschieden, daß festgestellt wird, ob die potentielle Energie des Körpers bei einer Entfernung aus der Gleichgewichtslage unverändert bleibt, ob sie größer wird oder ob sie kleiner wird.

Jeder Körper, der auf einer flächenartigen Unterlage so ruht, daß eine durch den Schwerpunkt gezogene

Fig. 157. Fig. 158. Fig. 159.
Die drei Arten des Gleichgewichtes.

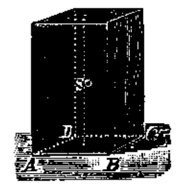

Fig. 160. Holzklotz in sicherem Gleichgewichte.

Lotrechte in das Innere der Fläche fällt, ist im sicheren (stabilen) Gleichgewichte. Der Holzklotz in Fig. 160 z. B. ist im sicheren Gleichgewichte, weil sein Schwerpunkt S senkrecht über der Unterstützungsfläche $ABCD$

liegt; denn zum Umkippen des Klotzes müßte der Schwerpunkt gehoben, also Arbeit geleistet werden.

Zur Unterstützung genügen drei Punkte, wobei das Dreieck, dessen Eckpunkte die drei Unterstützungspunkte sind, als Unterstützungsfläche dient. Wird ein auf einer flächenartigen Unterlage stehender Körper durch eine Kraft um eine seiner Unterstützungskanten gekippt, so wird dadurch der Schwerpunkt gehoben. Der Körper verbraucht also Arbeit, bis der Schwerpunkt lotrecht über der Kippkante liegt. In dieser Lage besitzt der Körper einen höchsten Betrag an potentieller Energie. Von dieser Stellung an senkt sich der Schwerpunkt wieder. Daher besteht in diesem Augenblicke ein Zustand des unsicheren (labilen) Gleichgewichtes. Der Schwerpunkt senkt sich so lange, bis der Körper wieder auf einer Unterstützungsfläche aufliegt, bis er also die alte oder eine neue sichere Gleichgewichtslage angenommen hat.

§ 52. Standfestigkeit (Stabilität).

Als Maß der Standfestigkeit oder Stabilität verwendet man drei verschiedene Rechengrößen:

1. Das **geometrische Maß** der Standfestigkeit ist der **Winkel**, um den der Körper gekippt werden muß, damit er aus seiner sicheren (stabilen) Lage

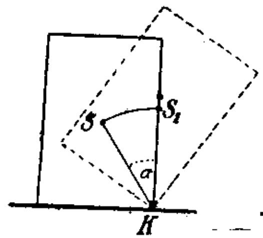

Fig. 161. Geometrisches Maß der Standfestigkeit.

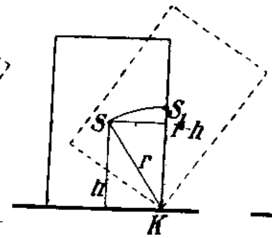

Fig. 162. Energetisches Maß der Standfestigkeit.

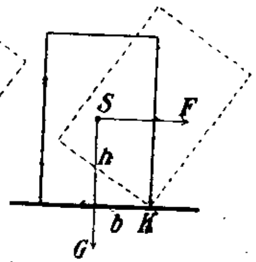

Fig. 163. Dynamisches Maß der Standfestigkeit.

in die unsichere (labile) Gleichgewichtslage kommt. Bei dem in Fig. 161 dargestellten Holzklotze, der um die Kante K gekippt werden soll, ist Winkel $SKS_1 = \alpha$ das geometrische Maß seiner Standfestigkeit.

2. Das **energetische Maß** der Standfestigkeit ist die **Arbeit**, die geleistet werden muß, damit der Körper aus der sicheren in die unsichere Gleichgewichtslage kommt. Der Schwerpunkt S des in Fig. 162 abgebildeten Holzklotzes habe von der Unterstützungsfläche den Abstand h und von der Kippkante den Abstand r. Der Schwerpunkt S hat in der unsicheren Gleichgewichtslage die Lage S_1. Es ist $KS_1 = r$. Der Schwerpunkt ist also um die Strecke $r - h$ gehoben. Die zum Heben aufgewandte Arbeit ist $G \cdot (r - h)$, wo G das Gewicht des Körpers ist.

3. Das **dynamische Maß** der Standfestigkeit ist die **Kraft**, die, im Schwerpunkte wagerecht und senkrecht zur Kippkante angreifend, imstande ist, den

Körper umzukippen. Hat in Fig. 163 der Schwerpunkt von der Unterstützungsfläche den Abstand h, und ist der Fußpunkt des vom Schwerpunkte auf die Unterstützungsfläche gefällten Lotes von der Kippkante um die Strecke b entfernt, so kann die Kraft F den Körper umkippen, wenn ihr Moment gleich dem vom Gewichte G des Körpers herrührenden Momente ist, beide bezogen auf die Kippkante als Achse. Es ist

$$F \cdot h = G \cdot b, \quad \text{also} \quad F = \frac{b}{h} \cdot G.$$

Alle drei Festsetzungen als Maß der Standfestigkeit sind gebräuchlich. Aus ihnen folgt, daß die Standfestigkeit um so größer ist, je tiefer der Schwerpunkt des Körpers liegt und je weiter er, in wagerechter Richtung gemessen, von der Kippkante entfernt ist. Nach den beiden letzten Festsetzungen ist die Staudfestigkeit dem Gewichte des Körpers proportional, wärend sie nach der ersten vom Gewichte unabhängig ist.

D. Dynamik des starren Körpers.

§ 53. Gleichwertigkeit der Massen.

1. Fortschreitende Bewegung.

Wirkt auf einen Körper K eine Kraft $\mathfrak{P}$ so, daß ihre Angriffslinie durch den Massenmittelpunkt M geht, so erfolgt eine rein fortschreitende Bewegung (§ 50). Alle Massenelemente erfahren gleiche parallele Beschleunigungen. Daher können wir uns die Kraft $\mathfrak{P}$ ersetzt denken durch eine Reihe von parallelen Einzelkräften $\Delta\mathfrak{P}$ (von Kraftelementen), von denen jede einzelne auf das Massenelement Δm einwirkt, und ihm dieselbe Beschleunigung erteilt, die die Gesamtkraft $\mathfrak{P}$ bei dem Gesamtkörper K mit der Masse m hervorbringt. Daraus folgt, wenn $\mathfrak{b}$ die Beschleunigung ist, daß sowohl $\mathfrak{P} = \mathfrak{b} \cdot m$, wie auch $\Delta\mathfrak{P} = \mathfrak{b} \cdot \Delta m$ sein muß. Es verhält sich also $\mathfrak{P} : m = \Delta\mathfrak{P} : \Delta m$. Man kann daher die Wirkung der Kraft $\mathfrak{P}$ auf den Gesamtkörper so auffassen, als ob auf jedes Massenelement eine Kraft einwirken würde, die dem Massenelemente proportional ist. Da nach Früherem die Summe der parallelen Einzelkräfte $\Delta\mathfrak{P}$ die Gesamtkraft $\mathfrak{P}$ sein muß, so muß auch nach dieser Überlegung die Gesamtmasse eines Körpers gleich der Summe seiner Massenelemente sein. Bei fortschreitender Bewegung kann man also den ganzen Körper durch eine punktförmige Masse ersetzen, die mit dem Massenmittelpunkte zusammenfällt.

Für den Fall, daß sich der Körper K unter dem Einflusse der Kraft $\mathfrak{P}$ auf einer zwangsläufigen Bahn ähnlich bewegt wie der Körper in Fig. 130 (S. 128), ist die Massenverteilung des Körpers, also auch die Lage des Massenmittelpunktes, ohne Einfluß auf die Bewegung, da der Angriffspunkt der Kraft $\mathfrak{P}$ an eine beliebige Stelle des Körpers verschoben werden kann, wenn nur die Kraftgröße und die Kraftrichtung beibehalten werden.

2. Drehende Bewegung.

Zwei Massen sollen in bezug auf die Drehung um eine Achse gleichwertig genannt werden, wenn ihnen gleichwertige Drehkräfte dieselbe Winkelbeschleunigung erteilen.

Wir denken uns an einer um die Achse A drehbaren Stange (Fig. 164), deren Masse vernachlässigt werden soll, die beiden Massen m_1 und m_2 in den Abständen r_1 und r_2 von der Achse angebracht und durch die beiden gleichwertigen Kräfte P_1 und P_2 in Bewegung gesetzt, die unmittelbar an den Massen, senkrecht zur Stange gerichtet, angreifen. Die Masse m_1 erhält dann die lineare Beschleunigung b_1 und die Masse m_2 die lineare Beschleunigung b_2. Es ist

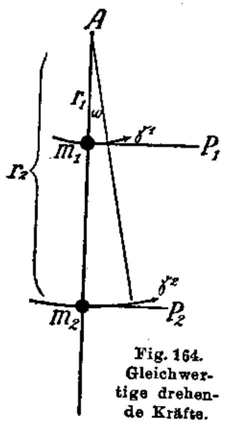

Fig. 164. Gleichwertige drehende Kräfte.

$$P_1 = m_1 b_1 \quad \text{und} \quad P_2 = m_2 b_2.$$

Da nun beide Massen dieselbe Winkelbeschleunigung ω erfahren sollen, und da ferner $b_1 = r_1 \cdot \omega$ und $b_2 = r_2 \cdot \omega$ ist, so sind die Kräfte bestimmt durch

$$P_1 = m_1 r_1 \omega \quad \text{und} \quad P_2 = m_2 r_2 \omega.$$

Ferner sollen die beiden Kräfte P_1 und P_2 gleichwertige Drehkräfte sein, d. h. sie sollen gleiche Momente haben (S. 130); es muß also die Gleichung bestehen

$$P_1 r_1 = P_2 r_2.$$

Setzen wir in diese Gleichung die Werte für die Kräfte ein, so wird $m_1 r_1^2 \omega = m_2 r_2^2 \omega$. Die Winkelbeschleunigung ω ist auf beiden Seiten gleich. Sie kann durch Division entfernt werden. So entsteht die Gleichung

$$m_1 r_1^2 = m_2 r_2^2.$$

Diese Gleichung ist die Gleichwertigkeitsbedingung für zwei um dieselbe Achse sich drehende Massen.

Trägheitsmoment. Das Produkt mr^2 hat für die drehenden Massen ähnliche Bedeutung wie das Produkt $P \cdot r$ für die Drehkräfte. Wir nennen mr^2 das **Trägheitsmoment der Masse m.** Wollen wir eine um eine Achse sich drehende Masse durch eine andere in einem anderen Abstande von der Achse angebrachte Masse ersetzen, so können wir das tun, wenn ihre Trägheitsmomente gleich sind.

So können wir z. B. die Masse m mit dem Arme r auch durch eine Masse μ mit der Längeneinheit 1 cm als Arm ersetzen, wenn $\mu \cdot 1^2 = mr^2$ ist. Aus diesem Grunde darf man auch sagen:

Das Trägheitsmoment einer Masse m im Abstande r von der Drehachse kann betrachtet werden als die im Abstande „eins" (1 cm) angebrachte in bezug auf eine Drehbewegung gleichwertige Masse $\mu = mr^2$.

Die Einheit des Trägheitsmomentes ist $[g \cdot cm^2]$.

Wenn mehrere fest miteinander verbundene Massen $m_1, m_2 \ldots m_n$ um dieselbe Achse drehend bewegt werden sollen, so ist durch die feste Verbindung dafür gesorgt, daß sie alle dieselbe Winkelbeschleunigung bekommen. Um die Wirkung einer Kraft oder mehrerer Kräfte auf ein solches Massensystem zu berechnen, müssen wir jede einzelne Masse durch eine ihr gleichwertige Masse mit demselben Arme ersetzen; dann können wir die gleichwertigen Massen addieren. Ebenso müssen wir alle Drehkräfte durch gleichwertige Drehkräfte mit demselben Arme ersetzen und dann diese auch addieren. Wenn das geschehen ist, läßt sich mit Hilfe des Grundgesetzes der Mechanik (S. 86 u. 89) die Beschleunigung berechnen, da ja nun die Kraft unmittelbar an der Masse angreift.

Am einfachsten ist es, die Massen und die Kräfte durch gleichwertige Größen zu ersetzen, die alle den Arm „eins" (1 cm) haben. Ist dann

$$\mu_1 = m_1 r_1^2, \quad \mu_2 = m_2 r_2^2, \quad \mu_3 = m_3 r_3^2 \ldots \mu_n = m_n r_n^2,$$

so folgt $\quad \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2.$

Wir setzen nun noch die Summe der gleichwertigen Massen

$$\Theta = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$$

und ersetzen die rechte Seite durch das Summenzeichen, so ist

$$\Theta = \sum_1^n mr^2.$$

Dieser Ausdruck stellt diejenige Masse im Abstande „eins" (1 cm) von der Drehachse dar, die der Gesamtheit der einzelnen Massen in bezug auf eine Drehbewegung gleichwertig ist. Θ ist das „Trägheitsmoment" des Massensystemes.

Das Trägheitsmoment eines Massensystemes ist kein Vektor. Denn kehrt man die Richtung der Drehachse (den Sinn der Drehung, S. 133) um, so bleibt das Trägheitsmoment ungeändert (ein Drehmoment ändert mit Umkehr der Achsenrichtung sein Vorzeichen). Doch ändert sich mit der Richtung der Drehachse eines Körpers im allgemeinen auch das Trägheitsmoment. Das Trägheitsmoment ist also auch kein Skalar. Man nennt in der Physik Größen, deren gesetzmäßige Abhängigkeit von der Richtung so beschaffen ist wie die Trägheitsmomente, **Tensoren.**

Wenn statt der einzelnen Massen $m_1, m_2 \ldots m_n$, die wir als punktförmig vorausgesetzt haben, ein ausgedehnter Körper in Drehbewegung versetzt werden soll, so zerlegen wir den ganzen Körper in lauter kleine Massenelemente dm. Die Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern geht dann in eine Summe von unendlich vielen Gliedern über; statt der Summe schreiben wir das Integral und erhalten das Trägheitsmoment

$$\Theta = \int r^2 dm.$$

Grundgesetz der Mechanik für drehende Bewegung. Nach § 45 können wir die Gesamtheit aller einzelnen Drehkräfte $P_1, P_2 \ldots P_n$, die an den Armen $p_1, p_2 \ldots p_n$ wirken, durch die gleichwertige Kraft $\mathfrak{R}$ an dem Arme „eins" ersetzen, wenn $\mathfrak{R} = \Sigma Pp$ ist. Ist das geschehen, so wirkt statt aller Kräfte nur die eine ($\mathfrak{R}$) auf die eine Masse (Θ) und erzeugt die lineare Beschleunigung $\mathfrak{b}$, die in unserem Falle, wo der Radius der Bahn gleich „eins" (1 cm) ist, auch gleich der Winkelbeschleunigung ω ist. Es ist $\mathfrak{R} = \Theta\mathfrak{b} = \Theta\omega$ oder, wenn wir die gefundenen Werte einsetzen,

$$\sum Pp = \omega \sum mr^2.$$

Dieses *Grundgesetz der drehenden Bewegung* kann noch auf die Form

$$\omega = \frac{\sum P \cdot p}{\sum mr^2} = \frac{\mathfrak{R}}{\Theta}$$

gebracht und folgendermaßen ausgesprochen werden:

Bei jeder drehenden Bewegung ist die Winkelbeschleunigung der Quotient aus dem Gesamtdrehmomente und dem Trägheitsmomente. (**Grundgesetz der Mechanik für drehende Bewegung.**)

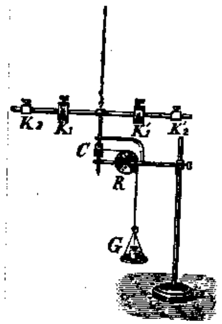

Fig. 165. Versuch zur Gleichwertigkeit zweier Massen.

Experimente. Die Gleichwertigkeitsbedingung für sich drehende Massen kann durch folgenden Versuch abgeleitet werden:

Ein leichtes Aluminiumrohr von etwa 60 cm Länge (Fig. 165), dessen Masse vernachlässigt werden möge, ist in der Mitte mit einem Haken versehen, mit dem es an einem langen, dünnen, aber starken (torsionsfreien) Faden hängt, der an der Decke des Zimmers befestigt ist. Dem Haken gegenüber ist an der unteren Seite eine lotrechte, stählerne, dünne Achse angebracht, die in einem gabelförmigen Lager leicht drehbar ist. An der Achse sitzt ein Zylinder C von 1 cm Radius, um den sich ein dünner Faden schlingt, der über eine leicht drehbare Rolle R geht, und an dessen freiem Ende eine Wagschale zur Aufnahme von Gewichtstücken angebracht ist. Auf dem Aluminiumrohre können zwei Körper K_1 und K_1', die zusammen die Masse m_1 haben, durch Schrauben befestigt werden.

Bringt man in die Wagschale ein Gewichtstück, das mit der Wagschale zusammen die Masse G hat, so übt dieses auf die Aluminiumstange mit den darauf sitzenden Körpern ein Drehungsmoment mit dem Arme 1 cm aus. Unter dem Einflusse dieses Drehungsmomentes kommt die Stange in eine gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung, wie man an der Abwärtsbewegung der Wagschale sehen kann.

Man beobachtet die Zeit, die vergeht, bis die Wagschale um eine gemessene Höhe herabsinkt. Hieraus kann man die Beschleunigung des sinkenden Gewichtes, also auch die Winkelbeschleunigung des Aluminiumrohres (im Bogenmaß gemessen) unmittelbar bestimmen.

Befestigt man die Körper K_1 und K_1', die zusammen die Masse von 1000 g haben mögen, in dem Abstande von 10 cm von der Drehungsachse, so beobachtet man, daß die Wagschale bei einer bestimmten Belastung eine bestimmte Strecke in 1 Minute durchläuft. Verschiebt man nun die Körper K_1 und K_1' nach außen, so daß der Abstand von der Mitte der Stange größer wird, so braucht die Wagschale zum Heruntersinken derselben Strecke eine längere Zeit. Verschiebt man die Körper nach der Mitte der Achse hin, so sinkt die Wagschale rascher herunter. Es verhält sich also dieselbe Masse gegenüber der wirkenden Kraft anders, wenn der Abstand der Masse von der Achse verändert wird.

Ersetzt man die Körper K_1 und K_1' durch die Körper K_2 und K_2', die zusammen die Masse $m_2 = 250$ g haben, ebenfalls in dem Abstande von 10 cm, so sinkt die Wagschale rascher herunter als beim ersten Versuche (Wievielmal so rasch?) Nun verschiebt man die Körper K_2 und K_2' weiter nach außen und beobachtet wieder eine Vergrößerung der Fallzeit der Wagschale. Die Fallzeit beträgt wieder 1 Minute, wenn die Massen m_2 von der Achse den Abstand 20 cm haben. Auf diese Masse m_2 im Abstande von 20 cm wirkt die die Massen drehende Kraft, nämlich die belastete Wagschale, gerade so ein, wie auf die Massen m_1 im Abstande von 10 cm.

Untersucht man, wie groß die Massen sein müssen, die im Abstande 30 cm ein ebenso rasches Heruntersinken bewirken, wie die Massen m_1 im Abstande 10 cm oder m_2 im Abstande 20 cm, so beobachtet man, daß $m_3 = \frac{1}{9} m_1$ sein muß, daß also m_3 die Masse 111 g haben muß. An der gleichen Fallzeit der belasteten Wagschale erkennt man, daß die mit den Massen belastete Stange in allen Fällen dieselbe Winkelbeschleunigung erfährt. In den drei beobachteten Fällen ist das Produkt mr^2 immer dasselbe.

Hieraus folgt: Der Trägheitswiderstand, den verschiedene Massen bei einer Drehung verursachen, ist immer dann derselbe, wenn das Produkt mr^2 dasselbe ist, wobei r den Abstand der Masse von der Achse bedeutet. Bei den gemachten Versuchen war $mr^2 = 100000$ [$g \cdot cm^2$]. Eine Bestätigung dieser Gleichung kann auch mit anderen Massen als den angegebenen ausgeführt werden. Die Berechnung von mr^2 ergibt jedesmal denselben Wert. Wollte man eine gleichwertige Masse in der Entfernung von 1 cm von der Achse anbringen, so müßte diese Masse 100 kg betragen. Die lineare Beschleunigung, die diese Masse erfährt, stimmt dann mit der Beschleunigung, mit der die Wagschale sich abwärts bewegt, überein (wobei die Masse der Wagschale und des Gewichtstückes sowie auch die Masse des Aluminiumrohres vernachlässigt sind). Die so berechnete Masse, die im Abstande von 1 cm angebracht, die anderen Massen in bezug auf die Drehbewegung ersetzt, ist das „Trägheitsmoment der Massen".

Berücksichtigt man die Masse des fallenden Gewichtstückes einschließlich Wagschale (zusammen gleich G), so wirkt auf die Gesamtmasse $(mr^2 + G)$ Gramm die Kraft $G \cdot 981$ Dyn, daher wird die lineare Beschleunigung b des fallenden Gewichtes, also auch die Winkelbeschleunigung der sich drehenden Stange (da der Radius $r = 1$ cm ist), bestimmt durch die Gleichung

$$G \cdot 981 = b(mr^2 + G).$$

Das Impulsmoment. Wir wollen das Grundgesetz der Mechanik für drehende Bewegung auf S. 152 in der Form schreiben

$$\omega \cdot \Theta = \mathfrak{R}.$$

Nehmen wir an, wir hätten eine gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung vor uns, bei der die Winkelgeschwindigkeit in der Zeit t vom Werte Null bis zum Werte w gewachsen ist, so gilt $\omega \cdot t = w$. Setzen wir daraus den Wert von ω in die vorangehende Gleichung ein, so erhalten wir sie in der Form

$$\frac{w}{t} \cdot \Theta = \mathfrak{R} \quad \text{oder} \quad w \cdot \Theta = \mathfrak{R} \cdot t.$$

In Gegenüberstellung zu den Betrachtungen des § 34 können wir die Zeitwirkung des Drehmomentes $\mathfrak{R}$ durch das Produkt aus dem Drehmomente $\mathfrak{R}$ und der Zeit t

messen. In dem erwähnten Paragraphen wurde das Produkt aus der Kraft und der Zeit, durch welche hindurch die Kraft hatte wirken können, als der Begriff **Kraftantrieb** gefaßt. Wir können einen entsprechenden Begriff für die Drehbewegung durch das Produkt aus dem Drehmomente und der Zeit bilden und wollen daher festsetzen:

Das Produkt aus dem Drehmomente ($\mathfrak{R}$) *und der Zeit* (t), *durch welche hindurch das Drehmoment auf den drehbaren Körper beschleunigend gewirkt hat, heißt* **Impulsmoment, Drehantrieb** oder **Drehstoß.**

Die linke Seite der letzten Gleichung ist das Produkt aus dem Trägheitsmomente Θ und der erzeugten Winkelgeschwindigkeit w. Wir setzen entsprechend fest:

Das Produkt aus Trägheitsmoment (Θ) *und der dem drehbaren Körper erteilten Winkelgeschwindigkeit* (w) *wird* **Drehmoment der Bewegungsgröße,** *auch* **Drehimpuls** *genannt* (S. 96).

Dieser Begriff ist das Gegenstück zu dem Begriffe Bewegungsgröße für die fortschreitende Bewegung. Nach der obenstehenden Gleichung ist nun immer die Größe des Drehstoßes $\mathfrak{R} \cdot t$ zahlenmäßig gleich der Größe des Drehimpulses $w \cdot \Theta$. Daher werden häufig die angeführten Bezeichnungen auch miteinander vertauscht; das Wort Impulsmoment wird z. B. auch für den Drehimpuls angewendet.

Ist die Bewegung nicht, wie bisher angenommen wurde, eine gleichmäßig beschleunigte, so gilt die letzte Gleichung wenigstens noch für ein Zeitelement dt, also

$$\Theta \cdot dw = \mathfrak{R} \cdot dt$$

und integriert

$$\Theta (w_2 - w_1) = \mathfrak{R} (t_2 - t_1),$$

so daß die Zunahme des Drehimpulses gleich der Zunahme des Impulsmomentes ist.

Bis hierher haben wir angenommen, daß das Trägheitsmoment Θ und das Drehmoment $\mathfrak{R}$ von der Zeit unabhängig sind. Nun kann bei der Drehbewegung nicht starr verbundener Körpersysteme durch Verlagerung der Massenanordnung während der Drehung leicht der Fall eintreten, daß das Trägheitsmoment sich mit der Zeit ändert. In diesem Falle wollen wir als Drehimpuls das Produkt der Winkelgeschwindigkeit mit dem jeweiligen zugehörigen Trägheitsmomente betrachten. Dann müssen wir die vorletzte Gleichung in der Form schreiben

$$d(w \cdot \Theta) = \mathfrak{R} \cdot dt,$$

und es gilt

$$\frac{d(w \cdot \Theta)}{dt} = \mathfrak{R}.$$

Wir erhalten eine allgemeinere Form der Fassung für das Grundgesetz der drehenden Bewegung, die wir so aussprechen können:

Das Drehmoment eines Körpers (oder eines Körpersystemes) ist gleich der Änderung des Drehimpulses (Impulsmomentes) in der Zeiteinheit. Diese Fassung bildet das Gegenstück zu der auf S. 97 gegebenen Form des Grundgesetzes für die fortschreitende Bewegung.

Ein Beispiel für eine Drehbewegung, bei der sich während der Drehung der Wert des Trägheitsmomentes ändert, ist etwa eine Stange, welche sich um eine zu ihr senkrechte Achse dreht, während sich auf ihr gleichzeitig eine Masse verschiebt. Der Fall kommt praktisch in verschiedenen Formen vor. Knüpfen wir z. B. das Ende eines Fadenpendels fest um einen runden Stab und schwingen dann das Pendelgewicht bei gestrafftem Faden um den Stab herum, so daß der Faden sich auf dem Stabe aufwickelt, so haben wir eine besondere Art des vorgestellten allgemeinen Falles vor uns. Ein an einem Turnreck sich schwingender Turner, der während der Umdrehung um die Reckstange die Beine anzieht, ist ein anderer Fall. Auch ein Planet, der auf elliptischer Bahn den Zentralkörper umläuft und dabei wechselnde Abstände von diesem annimmt, gehört als Beispiel hierher.

Betrachten wir in den erwähnten Beispielen die Systeme: Erde—Sonne, Turner—Reckstange, Fadenpendel—Stab und schließen, nachdem sie die entsprechenden Bewegungen angenommen haben, alle einwirkenden Kräfte von außerhalb auf sie aus, so sind innerhalb dieser Systeme nur noch Kräfte wirksam, deren Richtung in die Verbindungslinie der Körper und der Drehachse fällt. Das sind in den Beispielen: Die Anziehung der Erde nach der Sonne hin durch die Gravitation, die Muskelkraft des Turners, die elastische Fadenspannung. Solche Kräfte heißen **Zentralkräfte**. Derartige innere Zentralkräfte irgendwelcher sich drehenden körperlichen Systeme haben aber keine Drehmomente. In der letzten obigen Gleichung wird also $\mathfrak{R}$ gleich Null. Damit geht diese über in

$$\frac{d(w \cdot \Theta)}{dt} = 0, \quad \text{oder} \quad w \cdot \Theta = \text{constans, d. h.}$$

In sich selbst überlassenen „freien" Körpersystemen ist die Gesamtgröße des Drehimpulses unveränderlich. **(Gesetz von der Erhaltung des Drehimpulses oder Impulsmomentes.)**

In vielen Fällen ist dieses Gesetz zusammenfallend mit dem Flächensatze (2. Keplerschen Gesetze). Denn ist die Masse der Erde m, der Abstand von der Sonne r, die Winkelgeschwindigkeit w, so ist $\Theta = m \cdot r^2$, und es muß nach der letzten Gleichung das Produkt $m \cdot r^2 \cdot w$, damit auch das Produkt $\frac{r^2 \cdot w}{2}$ beständig sein. Nun ist $\frac{r^2 \cdot w \cdot dt}{2} = \frac{r \cdot (r \cdot w \cdot dt)}{2} = \frac{r (r \cdot d\varphi)}{2}$ bis auf kleine Größen zweiter Ordnung das von zwei um den Winkel $d\varphi$ gegeneinander geneigten Drehradien eingeschlossene Dreieck, d. i. die in der Zeit dt vom Leitstrahle überstrichene Fläche. Die Größe $\frac{r^2 \cdot w}{2}$ ist also die in der Zeiteinheit überstrichene Fläche, die „**Flächengeschwindigkeit**" (S. 53). Der Inhalt des 2. Keplerschen Gesetzes sagt aber aus, daß die Flächengeschwindigkeit unveränderlich ist.

Schlingt sich das oben vorgestellte Fadenpendel um den Stab, so verkürzt sich der Drehradius r. Sind in zwei betrachteten Zeitpunkten die gerade vorhandenen Trägheitsmomente des Pendels Θ_1 und Θ_2, die zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten w_1 und w_2, so muß nach dem Gesetze der Erhaltung des Drehimpulses gelten $\Theta_1 \cdot w_1 = \Theta_2 \cdot w_2$, oder $m r_1^2 w_1 = m r_2^2 w_2$, d. h. $w_1 : w_2 = r_2^2 : r_1^2$, d. h. die Winkelgeschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Drehradien. Führt man noch die fortschreitenden Geschwindigkeiten $v_1 = r_1 w_1$ und $v_2 = r_2 w_2$ ein, so gilt: $r_1 v_1 = r_2 v_2$ oder $v_1 : v_2 = r_2 : r_1$, d. h. die fortschreitenden Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Drehradien. Mit kleiner werdendem Drehradius wird also v immer größer, damit auch die kinetische Energie $\frac{mv^2}{2}$ des Pendelgewichtes. Dieser Energiezuwachs muß aus Vorräten an potentieller Energie des sich drehenden Systemes bestritten werden.

§ 54. Die kinetische Energie sich drehender Massen.

Das Trägheitsmoment ist von großer Wichtigkeit für die Bestimmung der kinetischen Energie eines sich drehenden Körpers. Es drehe sich der Körper K (Fig. 166) um die angegebene Achse mit der beständigen Winkelgeschwindigkeit w. Die kinetische Energie einer fortschreitend bewegten Masse M ist durch das Produkt $E = \frac{1}{2} M v^2$ bestimmt (§ 36), wenn v die lineare Geschwindigkeit der Masse ist. Bei einem sich drehenden Körper kann dieses Produkt nicht ohne weiteres zur Energieberechnung benutzt werden, da die einzelnen Massenelemente verschiedene Geschwindigkeiten haben. Wir betrachten das Massenelement Δm, das von der Achse den Abstand r hat. Die lineare Geschwindigkeit des Massenelementes ist $v = rw$, folglich ist seine kinetische Energie

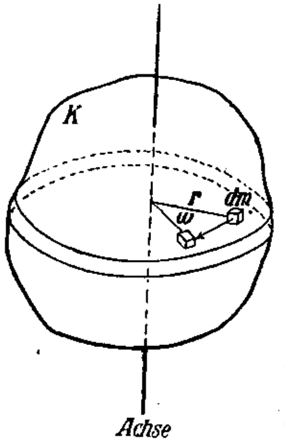

Fig. 166. Sich drehender Körper.

$$\Delta E = \tfrac{1}{2} \Delta m \cdot v^2 = \tfrac{1}{2} \Delta m \cdot r^2 w^2.$$

In derselben Weise kann die kinetische Energie jedes anderen Massenelementes bestimmt werden. Nun ist die kinetische Energie eine Skalargröße (§ 36). Folglich findet man die gesamte kinetische Energie des Körpers durch Summation der Energien aller Massenelemente; es ist $E = \Sigma \frac{1}{2} \Delta m \cdot r^2 w^2$. Für alle Elemente ist $\frac{1}{2}$ und w^2 unveränderlich, daher können wir diese Faktoren vor das Summenzeichen setzen und erhalten

$$E = \tfrac{1}{2} w^2 \Sigma r^2 \Delta m.$$

$\Sigma r^2 \Delta m$ und im Grenzübergang für verschwindende Δm das Integral $\int r^2 dm$ ist das Trägheitsmoment Θ des Körpers (S. 151); die kinetische Energie eines rotierenden Körpers ist daher

$$E = \tfrac{1}{2} \Theta w^2.$$

Das Ergebnis erscheint selbstverständlich, wenn wir bedenken, daß das Trägheitsmoment eines Körpers diejenige Masse ist, die am Arme „eins" (1 cm) angebracht der Gesamtmasse des Körpers gleichwertig ist, und wenn wir uns ferner dessen erinnern, daß für den Arm „eins" die lineare Geschwindigkeit dem Werte nach mit der Winkelgeschwindigkeit übereinstimmt.

Von der kinetischen Energie sich drehender Massen macht man bei den Schwungrädern der Maschinen Gebrauch, um einen gleichmäßigen Gang auch bei ungleicher Belastung zu erzielen. Wenn beispielsweise eine Dampfmaschine mit einem Schwungrade von großem Trägheitsmomente verbunden ist, so muß die Dampfmaschine erst einen großen Arbeitsbetrag aufwenden, um das Schwungrad in genügend rasche Drehung zu versetzen. Die nun im umlaufenden Schwungrade aufgespeicherte kinetische Energie bewirkt, daß beim plötzlichen Einschalten einer Arbeitsmaschine, z. B. einer großen Blechschere, die zum Durchschneiden dicker Bleche eine große Leistung auf kurze Zeit zu verrichten hat, kein Stillstand der Maschine eintritt, da ein Teil der aufgespeicherten kinetischen Energie des Schwungrades verbraucht wird, um die geforderte Arbeit zu verrichten.

Das Trägheitsmoment eines Schwungrades ist um so größer, je größer sein Radius ist und je mehr Masse an dem Umfange des Rades angehäuft ist. Die kinetische Energie ist dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit proportional. Wird daher die Winkelgeschwindigkeit verdoppelt, so wird die kinetische Energie vervierfacht.

§ 55. Abhängigkeit des Trägheitsmomentes eines Körpers von der Lage der Achse.

Das Trägheitsmoment eines Körpers hängt, außer von seiner Gesamtmasse und der Massenverteilung, von der Lage der Drehachse ab; es verändert sich, wenn die Drehachse parallel verschoben wird.

Zwischen dem Trägheitsmoment Θ_s eines Körpers von der Gesamtmasse M in bezug auf eine durch den Schwerpunkt (Massenmittelpunkt) S gehende Achse und dem Trägheitsmoment Θ_a in bezug auf eine der Schwerpunktsachse parallele Achse, die von der Schwerpunktsachse den Abstand a hat, besteht die einfache Gleichung

$$\Theta_a = \Theta_s + M a^2.$$

Dies kann durch folgende Überlegung abgeleitet werden:

Ein freibeweglicher Körper bewegt sich (nach § 49) unter dem Einflusse eines Kräftepaares so, daß seine Drehungsachse durch den Schwerpunkt geht.

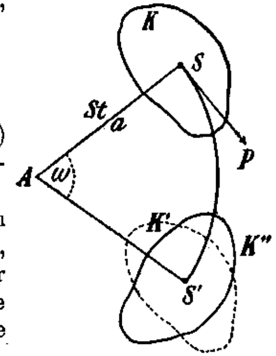

Fig. 167.

Wir lassen nun auf den Körper K (Fig. 167), der um eine durch den Schwerpunkt S gehende Achse drehbar ist, ein Kräftepaar vom Momente $\mathfrak{R}'$ wirken. Hat der Körper in bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Achse das Trägheitsmoment Θ_s, so berechnet sich die erzeugte Winkelbeschleunigung ω' aus der Gleichung (S. 152)

$$\mathfrak{R}' = \omega' \cdot \Theta_s.$$

Die Schwerpunktsachse möge durch das eine Ende einer als masselos angesehenen Stange St gehen, deren anderes Ende außerdem um die feste Achse A drehbar ist. Die Länge der Stange sei a. Wenn wir nun die Kraft P senkrecht zur Stange in S angreifen lassen, so bewegt diese Kraft allein den Körper K im Kreise um A herum, wobei der Körper aber keine Drehung ausführt; vielmehr bewegt er sich rein forschreitend, so daß er nach einiger Zeit die punktiert gezeichnete Stellung K' erlangt. Alle Teile des Körpers bewegen sich hierbei auf parallelen kongruenten Bahnen. Die erteilte lineare Beschleunigung b berechnet sich aus der Gleichung $P = Mb$. Da sich hierbei die Stange St kreisförmig bewegt hat, können wir auch die Winkelbeschleunigung ω der Stange um die Achse mit Hilfe der Gleichung $b = a\omega$ einführen; folglich ist auch $P = M \cdot a \cdot \omega$.

Statt der Kraft P, die an dem Arme a angreift, können wir am Arme „eins" die Kraft $\mathfrak{R}$ angreifen lassen, wenn sie dasselbe Moment wie P hat, wenn also $\mathfrak{R} = Pa$ ist. Setzen wir hier den Wert für P ein, so wird $\mathfrak{R} = M \cdot a^2 \omega$. Das Moment $\mathfrak{R}'$ erzeugt eine drehende Bewegung des Körpers K um seine Schwerpunktsachse mit der Winkelbeschleunigung ω', das Moment $\mathfrak{R}$ erzeugt eine Drehbewegung der Stange St um die Achse A mit der Winkelbeschleunigung ω, wobei sich der Körper K rein fortschreitend bewegt.

Lassen wir beide Momente gleichzeitig einwirken, so erfolgen auch beide Bewegungen gleichzeitig. Es kann nun der Fall eintreten, daß die beiden Winkelbeschleunigungen ω und ω' gleich sind; dann dreht sich der Körper um denselben Betrag, um den sich die Stange um A dreht; die Folge davon ist, daß dann der Körper K in bezug auf die Stange St eine unveränderte Lage beibehält, so daß also an der Bewegung nichts geändert wird, wenn der Körper K mit der Stange fest verbunden wird, wenn also die Drehbarkeit des Körpers um seine durch das Ende der Stange gehende Schwerpunktsachse durch Festklemmen beseitigt wird. In diesem Falle wird

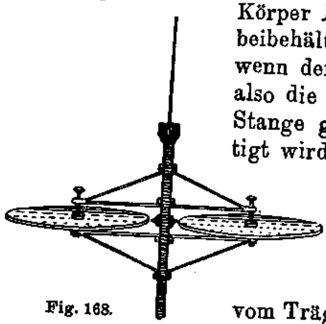

Fig. 168.

$$\mathfrak{R} + \mathfrak{R}' = Ma^2\omega + \Theta_s \cdot \omega = \omega\,(\Theta_s + Ma^2).$$

Das Moment $\mathfrak{R} + \mathfrak{R}'$ erzeugt bei dem um die Achse A drehbaren Körper die Winkelbeschleunigung ω; der Körper kann ersetzt werden durch eine Masse vom Trägheitsmomente Θ_a, folglich ist $\mathfrak{R} + \mathfrak{R}' = \omega \cdot \Theta_a$. Der Vergleich der letzten beiden Gleichungen ergibt $\Theta_a = \Theta_s + Ma^2$.

Das Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf eine beliebige Achse wird gefunden, indem man zu dem Trägheitsmomente in bezug auf eine parallele Schwerpunktsachse das Trägheitsmoment der im Schwerpunkte vereinigt gedachten Gesamtmasse in bezug auf die wirkliche Drehungsachse addiert.

Der experimentelle Nachweis kann mit Hilfe des Apparates Fig. 168 erbracht werden. Der abgebildete Apparat, der an einem Faden torsionsfrei an der Decke des Zimmers aufgehängt wird, kann in ähnlicher Weise wie der in Fig. 165 abgebildete Apparat durch eine unten angebrachte Schnur in Drehung versetzt werden. Der Drehungsantrieb ist in Fig. 168 nicht mit abgebildet. Das mittlere Gestell ist aus leichten Stäben hergestellt, deren Masse vernachlässigt werden kann. Links und rechts in gleichen Abständen ist, zwischen Spitzen leicht drehbar gelagert, je eine kreisförmige Metallscheibe von großer Masse befestigt. Wenn man durch die in Fig. 165 abgebildete Drehvorrichtung den Apparat in Drehung versetzt, so bewegt er sich mit gleichmäßiger Winkelbeschleunigung, wobei aber die

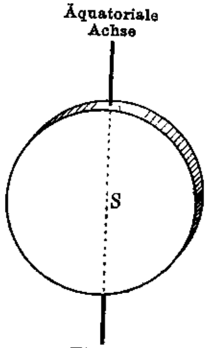

Fig. 169.

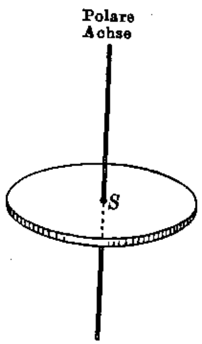

Fig. 170.

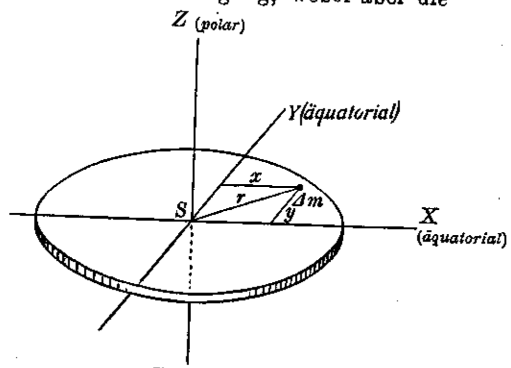

Fig. 171.

Metallscheiben rein fortschreitend bewegt werden. Ist die Gesamtmasse der beiden Scheiben M, der Abstand ihrer Mittelpunkte von der mittleren Drehachse a, so kommt für diese Drehung das Trägheitsmoment Ma^2 in Frage. Schraubt man nun

durch zwei in der Mitte der Achse befindliche kleine Schrauben die beiden Scheiben fest, so müssen sie sich mit derselben Winkelbeschleunigung mitdrehen, mit der sich das ganze Gestell dreht. Es tritt zu dem vorigen Trägheitsmomente noch das Trägheitsmoment Θ_s der beiden Massen in bezug auf ihre Schwerpunktsachse hinzu. Das Gesamtträgheitsmoment Θ_a ist gleich der Summe der beiden Summanden $\Theta_a = \Theta_s + Ma^2$.

Das äquatoriale und das polare Trägheitsmoment. Liegt bei flächenartigen Körpern, also z. B. bei Blechen, Platten, Brettern, die durch den Massenmittelpunkt gehende Drehungsachse in der Ebene des Körpers selbst, so heißt das hierauf bezogene Trägheitsmoment äquatorial (Fig. 169); liegt dagegen die Achse senkrecht zur Ebene des Körpers, so heißt das Trägheitsmoment polar (Fig. 170).

Ist der in Fig. 171 abgebildete flächenhafte Körper um die äquatoriale Achse SX drehbar, so ist sein äquatoriales Trägheitsmoment $\Theta_x = \sum \Delta m \cdot y^2$. In bezug auf die äquatoriale Achse SY beträgt das Trägheitsmoment $\Theta_y = \sum \Delta m \cdot x^2$. Das polare Trägheitsmoment ist $\Theta_z = \sum \Delta m \cdot r^2$. Da nun für jedes Massenelement Δm die Gleichung besteht $r^2 = x^2 + y^2$, so folgt

$$\sum \Delta m \cdot r^2 = \sum \Delta m \cdot x^2 + \sum \Delta m \cdot y^2, \text{ also } \Theta_z = \Theta_x + \Theta_y.$$

Das polare Trägheitsmoment eines flächenhaften Körpers ist gleich der Summe zweier äquatorialer Trägheitsmomente, deren Achsen senkrecht aufeinander stehen.

§ 56. Berechnung einiger Trägheitsmomente.

Die Berechnung der Trägheitsmomente der Körper auf elementarem Wege, d. h. ohne Benutzung der Differential- und Integralrechnung, bietet keine geringen Schwierigkeiten, da bei der Auswertung der Summe $\Theta = \sum mr^2$ der Körper in seine Massenelemente zerlegt werden und dann die Summation unendlich vieler Glieder von verschwindender Größe ausgeführt werden muß. Dagegen ist die Berechnung mit Hilfe der Differential- und Integralrechnung meist sehr einfach.

1. Trägheitsmoment eines geradlinigen, zylindrischen Stabes von der Länge l, dem im Verhältnis zur Länge kleinen Querschnitte q und der Dichte s in bezug auf eine durch den einen Endpunkt des Stabes gehende, zum Stabe senkrechte Achse.

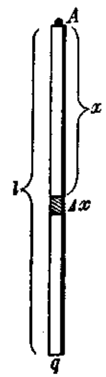

Fig. 172.

Wir zerlegen den Stab (Fig. 172) durch Schnitte, die senkrecht zum Stabe gelegt werden, in kleine zylindrische Abschnitte. Ein solcher Abschnitt, der die Entfernung x von der Achse hat, möge die Länge Δx besitzen; dann hat er die Masse

$$\Delta m = q \cdot \Delta x \cdot s.$$

Da sein Abstand von der Achse x ist, so ist sein Trägheitsmoment

$$\Delta \Theta = \Delta m \cdot x^2 = q \cdot \Delta x \cdot s \cdot x^2.$$

Hieraus folgt $\dfrac{\Delta \Theta}{\Delta x} = q \cdot s \cdot x^2$. Wenn wir zur Grenze übergehen, indem wir Δx verschwindend klein annehmen, so wird aus dem Differenzenquotienten der Differentialquotient

$$\frac{d\Theta}{dx} = q \cdot s \cdot x^2.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$\Theta = \int q \cdot s \cdot x^2 dx = qs \cdot \int x^2 dx.$$

Da der Stab die Länge l hat, da also alle Massenelemente zu berücksichtigen sind, für die x die Werte von $x = 0$ bis $x = l$ hat, so sind die Integrationsgrenzen 0 und l. Folglich ist

$$\Theta = qs \cdot \int_0^l x^2 dx = qs \cdot \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^l;$$

also

$$\Theta = \tfrac{1}{3} q s l^3.$$

Nun ist qsl die Masse des ganzen Stabes, folglich wird

$$\underline{\Theta = \tfrac{1}{3} m l^2.}$$

In Worten: Wenn ein gradliniger zylindricher Stab mit kleinem Querschnitte um seinen einen Endpunkt als Achse gedreht wird, so können wir ihn in bezug auf diese Drehung ersetzen durch

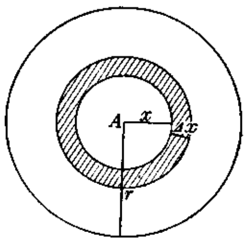

Fig. 173. Berechnung des Drehmomentes einer Kreisscheibe.

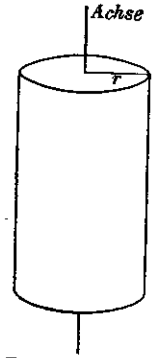

Fig. 174. Kreiszylinder.

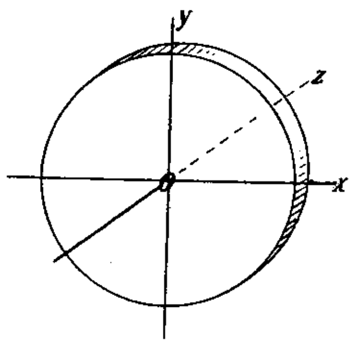

Fig. 175. Kreisscheibe mit äquatorieler Achse.

eine am andern Ende angebrachte Masse, deren Größe gleich einem Drittel der Masse des ganzen Stabes ist.

2. Polares Trägheitsmoment einer Kreisscheibe von der Dicke h, dem Radius r und der Dichte s.

Wir zerlegen die Kreisscheibe (Fig. 173) durch konzentrische zylindrische Schnitte in kleine ringförmige Elementarkörper. Das Ringelement, das von der Achse den Abstand x hat, habe die Breite Δx; so ist seine Masse

$$\Delta m = 2\pi x \,.\, \Delta x \cdot h \cdot s,$$

also sein Trägheitsmoment

$$\Delta \Theta = 2\pi x \cdot \Delta x \cdot h \cdot s \cdot x^2 = 2\pi h s \cdot x^3 \Delta x.$$

Hieraus folgt, wenn wir zur Grenze übergehen und dann integrieren, wobei zu beachten ist, daß x alle Werte von $x = 0$ bis $x = r$ annimmt,

$$\Theta = \int_0^r 2\pi h s x^3 dx = 2\pi h s \int_0^r x^3 dx = 2\pi h s \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^r$$

$$= 2\pi h s \cdot \frac{r^4}{4} = \frac{1}{2}\pi r^2 h s \cdot r^2.$$

Der Ausdruck $\pi r^2 h s$ ist die Masse m der ganzen Scheibe, folglich wird

$$\underline{\Theta = \tfrac{1}{2} m r^2.}$$

Da die Höhe der Scheibe beliebig groß sein kann, so gilt dieselbe Formel auch für einen Kreiszylinder, dessen Zylinderachse seine Drehungsachse ist (Fig. 174).

Ein Kreiszylinder oder eine Kreisscheibe kann in bezug auf eine Drehung um seine Achse ersetzt werden durch seine halbe Masse, die am Umfange des Zylinders angebracht ist.

Von dieser Beziehung wird in der Physik oft Gebrauch gemacht (§ 32).

3. Äquatoriales Trägheitsmoment einer dünnen Kreisscheibe in bezug auf einen Durchmesser als Drehungsachse.

Zwischen dem polaren Trägheitsmomente Θ_p eines flächenartigen Körpers und zwei aufeinander senkrecht stehenden äquatorialen Trägheitsmomenten Θ_1 und Θ_2 besteht nach der am Schlusse von § 55 abgeleiteten Beziehung die Gleichung

$$\Theta_1 + \Theta_2 = \Theta_p.$$

Wählen wir nach Fig. 175 als Achsen für die äquatorialen Trägheitsmomente zwei beliebige zueinander senkrechte Durchmesser OX und OY der Kreisscheibe, so sind diese beiden Trägheitsmomente einander gleich. Es sei eines der Trägheitsmomente Θ_s, so ist $2\,\Theta_s = \Theta_p$, oder $\Theta_s = \frac{1}{2}\Theta_p$. Nun ist oben abgeleitet $\Theta_p = \frac{1}{2} m r^2$, folglich ist

$$\underline{\Theta_s = \tfrac{1}{4} m r^2.}$$

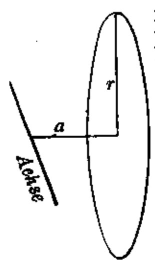

Fig. 176.

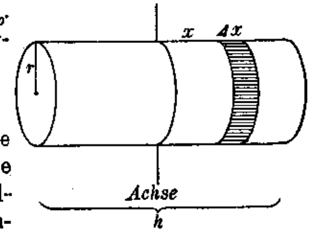

Fig. 177. Berechnung des Trägheitsmomentes eines Zylinders in bezug auf eine äquatoriale Achse.

Eine um ihren Durchmesser als Achse gedrehte Kreisscheibe kann in bezug auf diese Drehung ersetzt werden durch eine am Endpunkte des zur Achse senkrechten Durchmessers angebrachte Masse, die gleich dem vierten Teile der Masse der Kreisscheibe ist.

4. Trägheitsmoment einer dünnen Kreisscheibe in bezug auf eine zu ihr parallele Achse, die durch einen Punkt geht, der vom Kreismittelpunkte den zur Scheibe senkrechten Abstand a hat (Fig. 176).

Wir wenden die am Anfange von § 55 abgeleitete Beziehung

$$\Theta_a = \Theta_s + m a^2$$

an und ersetzen die Größe Θ_s durch den eben abgeleiteten Wert des äquatorialen Trägheitsmomentes

$$\Theta_s = \tfrac{1}{4} m r^2,$$

so wird

$$\Theta_a = \tfrac{1}{4} m r^2 + m a^2 = \underline{m\left(\tfrac{1}{4} r^2 + a^2\right)}.$$

5. Trägheitsmoment eines Zylinders von der Höhe h, dem Radius r des Grundkreises und der Dichte s in bezug auf eine durch die Mitte der Zylinderachse gehende und auf dieser senkrecht stehende Drehungsachse.

Wir zerlegen den Zylinder (Fig. 177) durch Schnitte, die zur Zylinderachse senkrecht stehen, in dünne Kreisscheiben.

Die in der Entfernung x von der Drehungsachse liegende Kreisscheibe habe die Dicke Δx, so hat die sie Masse

$$\Delta m = \pi r^2 \Delta x \cdot s,$$

also ist ihr Trägheitsmoment

$$\Delta \Theta = \pi r^2 \Delta x \cdot s \cdot (\tfrac{1}{4} r^2 + x^2).$$

Beachten wir, daß zur Berechnung des Trägheitsmomentes alle Zylinderelemente zu berücksichtigen sind, die den Werten von $x = -\frac{h}{2}$ bis $x = +\frac{h}{2}$ entsprechen, so folgt durch Übergang zur Grenze für verschwindende Werte von Δx und durch Integration

$$\Theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \pi r^2 s (\tfrac{1}{4} r^2 + x^2)\, dx = \tfrac{1}{4}\pi r^4 s \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dx + \pi r^2 s \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} x^2 dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\pi r^4 s [x]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} + \pi r^2 s [\tfrac{1}{3} x^3]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \tfrac{1}{4}\pi r^4 s h + \pi r^2 s \cdot \tfrac{1}{12} h^3$$

$$= \pi r^2 h s (\tfrac{1}{4} r^2 + \tfrac{1}{12} h^2).$$

Der Faktor vor der Klammer ist die Masse m des ganzen Zylinders, folglich ist

$$\Theta = m \left(\frac{1}{4} r^2 + \frac{1}{12} h^2\right).$$

6. Trägheitsmoment einer Kugel in bezug auf einen Durchmesser als Drehungsachse.

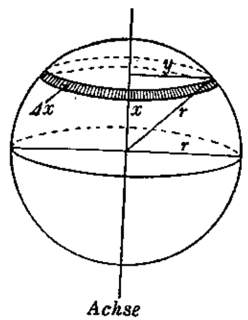

Fig. 178. Berechnung des Trägheitsmomentes einer Kugel.

Wir zerlegen die Kugel (Fig. 178) durch Schnitte, die senkrecht zur Drehungsachse gelegt werden, in dünne zylindrische Scheiben. Diejenige Scheibe, die den Abstand x vom Mittelpunkte der Kugel hat, habe den Radius y und die Dicke Δx. Ihre Masse ist $\Delta m = \pi y^2 \cdot \Delta x \cdot s$.

Um ihr Trägheitsmoment zu berechnen, beachten wir, daß das polare Trägheitsmoment einer Kreisscheibe von der Masse Δm und dem Radius y beträgt $\Delta \Theta = \frac{1}{2} \Delta m \cdot y^2$. Setzen wir hier den Wert für Δm ein, so wird

$$\Delta \Theta = \tfrac{1}{2} \pi y^4 \Delta x \cdot s.$$

Nun können wir y^2 ersetzen durch den gleichen Wert $y^2 = r^2 - x^2$. Tun wir dieses, so wird

$$\Delta \Theta = \tfrac{1}{2} \pi (r^2 - x^2)^2 \Delta x \cdot s.$$

Beachten wir nun, daß x alle Werte von $x = -r$ bis $x = +r$ annimmt, so folgt durch Übergang zur Grenze für verschwindende Werte von Δx und durch Integration

$$\Theta = \int_{-r}^{+r} \tfrac{1}{2}\pi (r^2 - x^2)^2 dx \cdot s = \tfrac{1}{2}\pi s \int_{-r}^{+r} (r^4 - 2 r^2 x^2 + x^4) dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi s [r^4 x - \tfrac{2}{3} r^2 x^3 + \tfrac{1}{5} x^5]_{-r}^{+r} = \tfrac{1}{2}\pi s (r^4 \cdot 2r - \tfrac{2}{3} r^2 \cdot 2 r^3 + \tfrac{1}{5} \cdot 2 r^5)$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi s \cdot \tfrac{16}{15} r^5 = \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{4}{3} \pi r^3 \cdot s \cdot r^2.$$

Der Ausdruck $\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot s$ ist die Masse m der ganzen Kugel, folglich wird

$$\Theta = \tfrac{2}{5} m r^2.$$

§ 57. Schwingungen.

Die Gesetze der harmonischen Schwingungen sind in § 25 phoronomisch untersucht worden. Eine harmonische Bewegung findet dann statt, wenn die Beschleunigung, die ein aus der Gleichgewichtslage gebrachter Körper erfährt, der Verrückung von der Gleichgewichtslage (der Elongation) direkt proportional ist.

In der Formel für die Schwingungszeit $T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\Gamma}}$ (§ 25) tritt die Beschleunigung Γ auf, die die Masse dann erfährt, wenn sie 1 cm von der Gleichgewichtslage entfernt ist. Wenn sich eine schwingende Masse m rein fortschreitend bewegt, so erteilt ihr eine Kraft P die Beschleunigung $b = \frac{P}{m}$. Nennt man die Kraft, die in der Entfernung 1 cm von der Gleichgewichtslage auf einen Körper wirkt, k, so ist $\Gamma = \frac{k}{m}$. Daher kann die Formel für die Schwingungszeit auch geschrieben werden (S. 110)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Wenn sich bei der Schwingung der Körper drehend bewegt, so haben wir die Masse durch eine ihr gleichwertige Masse mit dem Arme 1, also durch das Trägheitsmoment Θ, die Kraft durch eine am Arme 1 wirkende Kraft, also durch das Kraftmoment $\mathfrak{M}$, zu ersetzen. Dasjenige Kraftmoment, das dem Drehungswinkel arc $\alpha = 1$ entspricht, soll $\mathfrak{M}_1$ genannt werden. Es wird dann $\frac{1}{\Gamma} = \frac{\Theta}{\mathfrak{M}_1}$. Für Drehschwingungen beträgt daher die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{\mathfrak{M}_1}}.$$

Das physische Pendel. Bei Herleitung der Pendelgesetze (§ 24) haben wir vorausgesetzt, daß sich ein Pendelkörper wie ein materieller Punkt verhält, daß er also entweder von so kleinen Abmessungen ist, daß man seine Drehung um seine eigene Achse vernachlässigen kann, oder daß man eine Masse an dem unteren Ende einer Pendelstange im Massenmittelpunkte drehbar aufhängt, wodurch er ebenfalls zu rein fortschreitenden Bewegungen (Fig. 72) veranlaßt wird.

In der Anwendung besteht das Pendel meistens aus einem ausgedehnten Körper, der selbst Drehungen ausführt. In diesem Falle muß die Schwingungszeit nach der letzten Formel $T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{\mathfrak{M}_1}}$ berechnet werden.

Hat der Schwerpunkt eines Pendels mit der Masse m den Abstand s von der Drehungsachse, so wirkt auf diese Masse (S. 66) das Drehungsmoment

$$\mathfrak{M} = m \cdot g \sin\alpha \cdot s,$$

wo α die Verrückung des Pendels bedeutet. Für kleine Schwingungsweiten darf man $\sin\alpha = \operatorname{arc}\alpha = \alpha$ setzen, kann man also schreiben $\mathfrak{M} = mg\alpha s$. In der obigen Formel für T bedeutet $\mathfrak{M}_1$ das dem Winkel $\operatorname{arc}\alpha = 1$ entsprechende Drehmoment, daher wird $\mathfrak{M}_1 = mgs$. Damit ergibt sich

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{mgs}}.$$

Setzt man noch willkürlich $l = \frac{\Theta}{ms}$, so nimmt die Formel dieselbe Form

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

an wie im § 24. Man nennt $l = \frac{\Theta}{ms}$ die **reduzierte Pendellänge**, d. i. die Länge eines mathematischen Pendels, das dieselbe Schwingungsdauer wie das physische Pendel besitzt.

Der Punkt, welcher von der Achse die Entfernung l hat, heißt der **Schwingungsmittelpunkt** des Pendels. Er schwingt so, wie er auch schwingen würde, wenn er ganz allein vorhanden wäre.

Verwenden wir als physisches Pendel einen Stab von der Länge a, durch dessen eines Ende die Achse des Pendels geht, dann ist nach § 56 für diese Achse $\Theta = \frac{1}{3}ma^2$. Der Schwerpunkt liegt in der Mitte des Stabes. Es ist also $s = \frac{a}{2}$. Folglich beträgt die reduzierte Pendellänge eines geraden Stabes

$$l = \frac{\frac{1}{3}ma^2}{\frac{1}{2}ma} = \frac{2}{3}a.$$

Beim **Mälzelschen**[1] **Metronom** (Fig. 179, siehe auch Fig. 29) benutzt man ein physisches Pendel, dessen Pendelstange am unteren Ende durch ein schweres Bleigewicht belastet wird. Die Achse des Pendels liegt etwas oberhalb des Bleigewichtes. Auf dem oberhalb der Achse befindlichen Ende der Pendelstange ist ein kleines Laufgewicht verschiebbar befestigt. Wenn man dieses Laufgewicht noch oben schiebt, so wird dadurch der Schwerpunkt des ganzen Pendels in die Höhe gerückt, also die in der Formel für die reduzierte Pendellänge vorkommende Größe s verkleinert. Andererseits wird hierdurch das Trägheitsmoment vergrößert. Hieraus folgt, daß die ganze reduzierte Pendellänge vergrößert wird, daß also die Schwingungen langsamer werden; während beim Herunterschieben des Laufgewichtes die Schwingungen rascher werden. Die an dem Metronom angebrachten Zahlen geben die Anzahl der halben Schwingungen in der Minute an (§ 7).

Reversionspendel. Bei dem in Fig. 180 abgebildeten physischen Pendel von beliebiger Form sei A die Schwingungsachse, O der Schwerpunkt und S der Schwingungsmittelpunkt; dann ist $AS = l$ die reduzierte Pendellänge und $AO = s$ der Abstand der Achse vom Schwerpunkte; ferner ist $OS = l - s$. Die Masse des Pendels sei m, und das Trägheitsmoment in bezug auf die Achse A sei Θ_A. Dann ist $l = \frac{\Theta_A}{ms}$, also $ml = \frac{\Theta_A}{s}$. Nennen wir noch das auf die Schwerpunktsachse O bezogene Trägheitsmoment Θ_O und das Trägheitsmoment in bezug auf eine durch den Schwingungsmittelpunkt S gehende Achse Θ_S, so ist nach § 55

$$\Theta_A = \Theta_O + ms^2 \quad \text{und} \quad \Theta_S = \Theta_O + m(l-s)^2,$$

woraus folgt
$$\Theta_S = \Theta_A + ml(l - 2s).$$

Mit Berücksichtigung des Wertes für $ml = \frac{\Theta_A}{s}$ wird dann

$$\Theta_S = \Theta_A + \frac{\Theta_A}{s}(l - 2s).$$

Umgeformt ergibt das
$$\Theta_S = \Theta_A \cdot \frac{l-s}{s}.$$

Wir wollen nun die Achse A mit dem Schwingungsmittelpunkte S vertauschen, also das Pendel um S als Achse schwingen lassen. Die reduzierte Pendellänge ist dann

$$l' = \frac{\Theta_S}{m(l-s)}.$$

Setzen wir hier den oben berechneten Wert von $\mathfrak{T}_S$ ein, so wird

$$l' = \frac{\Theta_A(l-s)}{s \cdot m(l-s)} = \frac{\Theta_A}{ms}.$$

Das ist aber derselbe Wert, wie der für l, es ist $l' = l$, d. h.:

Wenn man bei einem Pendel die Achse und den Schwingungsmittelpunkt vertauscht, so bleibt die reduzierte Pendellänge unverändert.

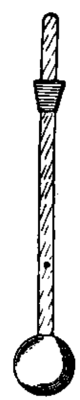

Fig. 179.

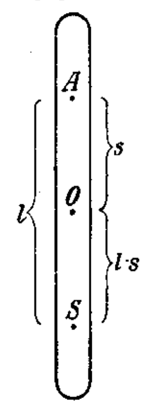

Fig. 180. Reversionspendel

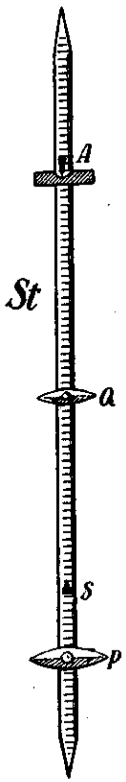

Fig. 181. Reversionspendel.

Dieser Satz hat zur Konstruktion des Katerschen **Reversionspendels**[1] (Fig. 181) geführt. An einer Pendelstange St sind die beiden einander zugegekehrten Schneiden A und S angebracht, deren Abstand voneinander genau gemessen wird. Auf der Pendelstange sind die beiden schweren Metallgewichte P und Q verschiebbar. Man verschiebt nun die beiden Massen P und Q so lange, bis die Schwingungszeit des Pendels unverändert bleibt, wenn man das Pendel einmal an der Schneide A, dann an der Schneide S aufhängt. Das ist ein Zeichen dafür, daß die Entfernung AS die reduzierte Pendellänge l ist, mit Hilfe deren die Schwingungszeit aus der Formel $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ berechnet werden kann.

Das Reversionspendel wird dazu benutzt, die wichtige Konstante g, die Beschleunigung der Schwere, an einem bestimmten Orte der Erde mit großer Genauigkeit zu bestimmen; denn da man den Abstand der Schneiden, also die reduzierte Pendellänge l, sehr genau messen und bei hinreichend langer Beobachtungszeit

1) Johann Nepomuk Mälzel, Mechaniker (1772—1838).

1) H. Kater (1777—1835), engl. Kapitän, benutzt als erster (1818) das von Bohnenberger (1811) (S. 169) beschriebene Reversionspendel.

auch die Schwingungsdauer T mit einem hohen Grade der Genauigkeit bestimmen kann, so ist die einzige Unbekannte g aus der Formel leicht zu berechnen.[1])

Im Anschlusse werden hier gleich noch die elastischen Schwingungen und die Schwingungen einer Flüssigkeit in einem U-Rohre erwähnt, wenn auch die bei den elastischen Schwingungen wirkenden Kräfte erst später (§ 60—62) behandelt werden können.

Elastische Längsschwingungen (Fig. 182). Wenn ein dünner (langer) Metalldraht mit seinem oberen Ende an der Decke festgeklemmt und das untere Ende mit einer Masse m belastet wird, so wird der Draht gedehnt, und die Masse wird infolge der elastischen Kräfte zur Ausführung elastischer Schwingungen befähigt. Um die Schwingungszeit zu berechnen, belastet man den Draht außer mit der schon daran hängenden Masse mit einem solchen Gewichte, daß er um 1 cm verlängert wird, bzw. man mißt die Verlängerung, die eine bestimmte Belastung erzeugt, und berechnet dann, wie groß diejenige Kraft sein müßte, die die Verlängerung von 1 cm hervorbringen würde. Diese Kraft, in Dyn ausgedrückt, ist die in unserer Formel (S. 163) vorkommende Größe k. Man hat nun die schwingende Masse m in Gramm zu bestimmen und die Gleichung (S. 110)

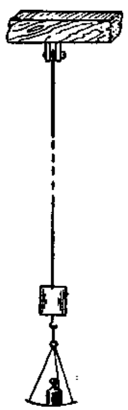

Fig. 182. Elastische Längsschwingungen.

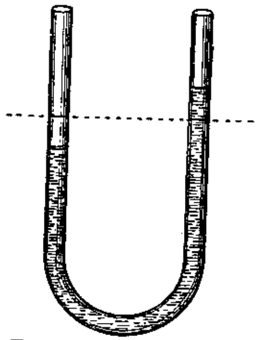

Fig. 183. Schwingungen der Flüssigkeit in einem U-Rohre.

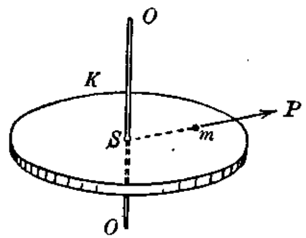

Fig. 184. Torsionsschwingungen.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

zur Berechnung der Schwingungsdauer zu benutzen. Umgekehrt kann man aus der beobachteten Schwingungszeit und der durch Wägung bestimmten Masse die Kraft k berechnen und den berechneten Wert zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls (§ 60) des Drahtes verwenden.

Die Versuche lassen sich bequem auch mit einer aufgehängten Schraubenfeder ausführen; die Längsausdehnung der Schraubenfeder wird hierbei nicht durch Dehnung der Drähte, sondern durch Biegung und Verdrehung der einzelnen Drahtwindungen veranlaßt.

Elastische Torsionsschwingungen.[2]) Wenn eine Masse an dem unteren Ende eines Metalldrahtes hängt und dann in Torsionsschwingungen versetzt wird,

1) Die klassischen Untersuchungen zur Bestimmung von g wurden von Friedr. Wilh. Bessel (1784—1848) um 1826 ausgeführt (S. 4).

2) Von lat. torquēre = drehen, verdrehen. Aus zugehörigem tortus = gedreht ist das Fremdwort „tordieren" abgeleitet. Es wird hier in dem Sinne „Zusammendrehen, Verdrehen" eines Drahtes oder Fadens gebraucht; dafür ist auch das deutsche Wort „Drillen", für Torsion das entsprechende „Drillung" in Gebrauch.

so läßt sich die Schwingungszeit nach der Formel $T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{\mathfrak{M}_1}}$ (S. 163) berechnen. Diese Formel hat bei Torsionsschwingungen innerhalb weiter Grenzen Gültigkeit, da die Elastizitätsgrenze eines gedrillten Metalldrahtes sehr hoch ist, da also innerhalb weiter Grenzen zwischen dem Drehungsmomente und dem Torsionswinkel Proportionalität besteht.

Mit Hilfe der Torsionsschwingungen kann man das Torsionsmoment (§ 62) eines Drahtes mit großer Genauigkeit bestimmen, wenn man das Trägheitsmoment des angehängten Körpers kennt. Am bequemsten verwendet man als angehängten Körper einen Zylinder von bekannter Masse m und dem Querschnittradius 1 cm, da für diesen das Trägheitsmoment $\Theta = \frac{m}{2}$ ist (§ 56). Umgekehrt kann man, wenn man das Torsionsmoment des Drahtes kennt, das unbekannte Trägheitsmoment eines Körpers genau bestimmen; auch können die Gesetze über das Trägheitsmoment (§ 53—56) mittels der Torsionsschwingungen bequem bestätigt werden.

Schwingungen einer Flüssigkeit in einem U-Rohre. Wenn ein (genügend weites) Glasrohr mit überall gleichem Querschnitte U-förmig gebogen und so aufgestellt wird, daß die geraden Schenkel lotrecht stehen, so kann eine das U-Rohr teilweise anfüllende Flüssigkeit ebenfalls Schwingungen ausführen (Fig. 183). Beträgt der Querschnitt des U-Rohres q, die Dichte der Flüssigkeit s und die gesamte Länge der Flüssigkeitssäule l, so ist die Masse der in dem Rohre enthaltenen Flüssigkeit $m = l \cdot q \cdot s$. Wenn man nun (z. B. durch Saugen an dem einen Ende) die Flüssigkeit in dem einen Schenkel um 1 cm hebt, so senkt sie sich in dem anderen ebenfalls um 1 cm. Sie steht also im ersten Schenkel um 2 cm höher als im zweiten. Das Gewicht der überstehenden Flüssigkeitssäule, in Dyn ausgedrückt, ist die Kraft k. Sie beträgt $k = 2qsg$. Folglich wird die Schwingungszeit

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{lqs}{2qsg}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

Die Schwingungszeit ist unabhängig vom Querschnitte und von der Dichte der Flüssigkeit. Sie stimmt mit der Schwingungszeit eines Pendels überein, dessen Länge gleich der halben Länge der Wassersäule ist.

§ 58. Freie Achsen.

Wenn ein freibeweglicher ebenflächiger Körper K (Fig. 184) durch ein in der Ebene wirkendes Kräftepaar in Drehung versetzt wird, so dreht er sich nach § 49 um eine Achse, die durch den Massenmittelpunkt des Körpers geht. Legt man nun durch den Massenmittelpunkt S des Körpers die feste Achse OO, so hat diese keinen Einfluß auf die Drehung. Also können auch die von den einzelnen Massenpunkten m ausgeübten Fliehkräfte P keine Kraftwirkung auf die Achse ausüben: die Resultierende aller dieser Kräfte ist gleich Null.

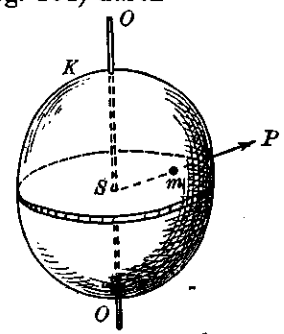

Fig. 185. Sich drehender Umdrehungskörper.

Dreht sich der räumliche Körper K (Fig. 185) um eine durch seinen Massenmittelpunkt gehende Achse, so können alle Fliehkräfte, die in derselben Drehungsebene liegen, die Resultierende Null haben. Das ist z. B. der Fall, wenn ein Umdrehungskörper sich um seine geometrische Achse dreht; es kann auch bei anders gestalteten Körpern eintreten. Versetzt man aber einen Körper von der in Fig. 186 gezeichneten Form in eine Drehung um eine im Raume festgehaltene Achse OO, erfolgt die Drehung also etwa vermittels eines in der Figur angedeuteten Rahmengestelles, so kann sehr wohl in einer Ebene, z. B. in der Ebene E, die Resultierende der Fliehkräfte Null sein, während die Resultierende der Fliehkräfte in anderen Ebenen einen von

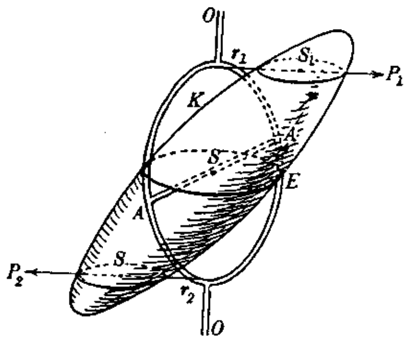

Fig. 186. Drehung um die Achse OO.

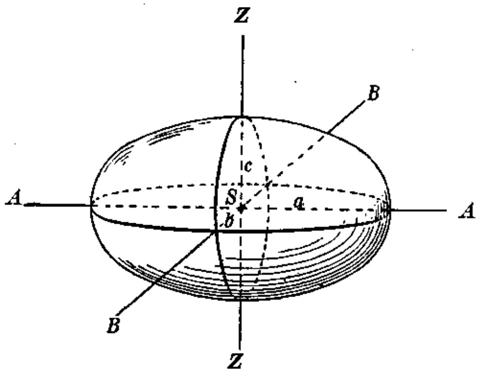

Fig 187. Freie Achsen. Sicheres Gleichgewicht.

Null verschiedenen Wert haben kann. Bei der in Fig. 186 angenommenen Lage verursachen die Fliehkräfte P_1 und P_2 ein Kippen des Körpers rechts herum; und zwar kippt der Körper so lange um die wagerechte Achse AA, bis wiederum die gesamte Resultierende aller Drehkräfte den Wert Null erreicht. Ist das erreicht, so wird auf die Achse OO keinerlei Kraft ausgeübt.

Eine Achse eines Körpers, auf die der rotierende Körper infolge der Fliehkräfte keinerlei Kraftwirkung ausübt, heißt eine **freie Achse** des Körpers. OO ist in den Figuren 184 und 185 eine freie Achse, in Fig. 186 nicht eine freie Achse.

Bei jedem Körper bestehen drei aufeinander senkrecht stehende natürliche freie Achsen (wie hier aber nicht bewiesen werden kann). Bei der Drehung um jede dieser Achsen herrscht Gleichgewicht, d. h., wird nur der Schwerpunkt des Körpers unterstützt, dreht sich der Körper aber sonst kräftefrei, so behält er dauernd eine dieser drei Achsen als Drehachse bei, wenn die Umdrehung um die Achse einmal stattfindet. Aber dieses Gleichgewicht ist bei zwei Achsen unsicher (labil) und nur bei einer sicher (stabil). Die sichere Gleichgewichtslage der Rotation besteht für diejenige Achse, für die das Trägheitsmoment einen größten Wert hat; in bezug auf die unsicheren freien Achsen hat das Trägheitsmoment des Körpers kleinste Werte. Für ein dreiachsiges Ellipsoid ist jede der geometrischen Achsen auch eine natürliche freie Drehungsachse (Fig. 187), aber nur für die kürzeste Achse c ist das Gleichgewicht sicher (stabil).

Bei einem Zylinder ist das Trägheitsmoment in bezug auf seine geometrische Achse $\frac{1}{2}mr^2$, in bezug auf eine Drehungsachse, die senkrecht zur geometrischen Achse durch den Schwerpunkt geht, $m(\frac{1}{12}l^2 + \frac{1}{4}r^2)$. Je nachdem das eine oder andere dieser Trägheitsmomente größer ist, ist die erste oder die zweite die stabile Achse. Wenn beide Trägheitsmomente einander gleich sind, wenn also $\frac{1}{12}l^2 + \frac{1}{4}r^2 = \frac{1}{2}r^2$ ist, d. h. wenn $l = r\sqrt{3}$ ist, so ist die Gleichgewichtslage der Umdrehung sowohl für diese beiden Achsen, wie auch für alle übrigen stetig (indifferent). Ein längerer zylindrischer Stab stellt sich bei der Drehung um eine vorgeschriebene feste Achse von selbst so ein, daß die Drehungsachse senkrecht zur geometrischen Achse liegt; bei einer kürzeren Kreisscheibe ist die geometrische Achse die sichere freie Drehungsachse. Man kann die sichere (stabile) freie Achse experimentell finden, indem man die Körper an einem Faden aufhängt und den Faden zwischen den Fingern oder mittels einer Schwungmaschine drillt. Es stellt sich dann bei der Drehung schließlich eine Gleichgewichtslage so ein, daß die durch den Faden vorgeschriebene lotrechte Drehachse zur sicheren freien Umdrehungsachse des gedrehten Körpers wird. Eine geschlossene Kette breitet sich bei diesem Versuche von selbst in einer wagerechten Ebene zu einem Kreise aus, da die Kette hierbei das größtmögliche Trägheitsmoment erlangt.

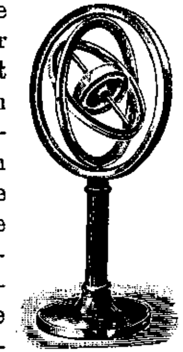

Fig. 188. Bohnenbergerscher Kreisel.

Die Erhaltung der Drehungsachse. Ein um eine freie Achse sich drehender Körper sucht die Lage der Drehungsachse beizubehalten. Das kann man experimentell mit dem **Bohnenbergerschen**[1]) **Kreisel** (Fig. 188) nachweisen. Die Achse des Kreisels ist in zwei Ringen gelagert, die in zwei zueinander senkrechten und durch den Massenmittelpunkt des rotierenden Kreisels gehenden Achsen leicht drehbar ist (Cardanische Aufhängung). Versetzt man den Kreisel in rasche Drehung, so behält seine Drehungsachse unveränderlich ihre Richtung bei, unabhängig davon, ob man den ganzen Apparat verschiebt oder dreht.

Auf dem Satze von der Erhaltung der freien Drehungsachse beruht die Tatsache, daß die rotierenden Gestirne, auch die Erde, ihre Drehungsachse bei ihrer Bewegung durch den Weltenraum der Richtung nach unveränderlich beibehalten, wodurch bei der Erde der Wechsel der Jahreszeiten bedingt wird.

Dreht sich ein Körper nur um den natürlichen Massenmittelpunkt (S), aber sonst kräftefrei, so hat er in jedem Augenblicke eine bestimmte Umdrehungsachse. Wird diese Achse also nicht von außen im Raume festgehalten und ist sie keine freie Achse, so wird der Körper dem Zuge der Resultanten der Fliehkräfte folgen und seine Achse verlagert. Im nächsten Augenblicke hat er daher eine andere Umdrehungsachse. Das Gesetz von der Erhaltung der Umdrehungsachse gilt also für nicht freie Achsen nicht mehr. Nach einem Satze von Poinsot, der hier aber nicht bewiesen werden kann, geht die Umdrehung dann so vor sich, als ob ein im Körper fester Kegelmantel (Polhodiekegel) auf einem im Raume festen

1) F. Bohnenberger (1765—1831), Prof. in Tübingen 1817 (S. 165).

Kegel (Herpolhodiekegel) abrollte (Fig. 189). Die gemeinsame Berührungsgerade der Kegel ist dann die augenblickliche Umdrehungsachse. Wäre die Umdrehungsachse OO der Fig. 186 eine solche Achse, so würde also kein „Kippen" des Körpers eintreten, sondern ein eigentümliches Hin- und Herschwanken des Körpers und eine Verschiebung der Umdrehungsachse, wie es im nächsten Abschnitt als Präzession beschrieben ist. Die durch den Rahmen festgehaltene Achse AA verhindert diese Präzessionsbewegung und ermöglicht das „Kippen" in die sichere Gleichgewichtslage.

Präzession. Wirkt auf einen rotierenden Körper eine Kraft, die die Drehungsachse zu kippen sucht, so folgt sie dieser Kraft nur in unmerklicher Weise, statt dessen bewegt sich aber die Achse viel stärker senkrecht zur ablenkenden Kraft. Das kann man am einfachsten an dem in Fig. 190 abgebildeten Kreisel beobachten; dieser fällt infolge der Wirkung der Schwere nur ganz allmählich um, gleichzeitig bewegt sich die Drehungsachse lebhaft

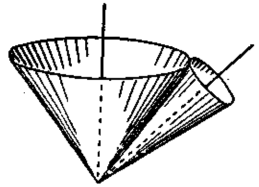

Fig. 189. Polhodie- und Herpolhodiekegel.

Fig. 190. Präzession.

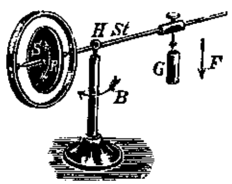

Fig. 191. Fesselsches Gyroskop.

auf einer Kegelfläche; das obere Ende der Kreiselachse bewegt sich auf einem Kreise, dessen Richtung in der Figur angegeben ist.

Die experimentelle Untersuchung der Wirkung einer Kraft auf den rotierenden Körper geschieht mit dem in Fig. 191 abgebildeten Fesselschen[1]) **Gyroskop.**[2]) Dieser Apparat besteht aus einer schweren Metallscheibe S, die um eine in der Verlängerung der Stange St angebrachte Achse drehbar ist. Die Stange St ist in H so gelagert, daß sie sowohl in wagerechter wie in lotrechter Ebene drehbar ist. Ferner ist an dieser Stange ein Gewicht G verschiebbar. Befindet sich das Gewicht G mit der Scheibe S im Gleichgewicht, und dreht die Metallscheibe sich im Sinne des Pfeiles R, so behält der Körper dauernd seine Lage bei. Wenn dagegen das Gewicht G als Übergewicht den Körper mit der Kraft F in lotrechter Ebene zu drehen sucht, so erfolgt diese Drehung kaum merklich — die Achse macht in lotrechter Richtung kleine auf- und abschwankende Bewegungen —, dafür dreht sich aber der ganze Apparat im Sinne des Pfeiles B in wagerechter Ebene herum.

Wenn auf einen um eine freie Achse sich drehenden Körper ein Kräftepaar wirkt, das die freie Achse zu drehen versucht, so führt die Achse in der Drehrichtung des Kräftepaares nur kleine pendelnde Bewegungen aus, aber sie dreht sich lebhaft senkrecht zur Ebene des Kräftepaares.

Zum Verständnis dieser Erscheinung denken wir uns eine kleine schwere Kugel m in einer kreisförmigen Rinne laufend, also z. B. in einem kreisför-

1) Von dem Mechaniker Friedr. Fessel 1753 zuerst hergestellt.
2) gýros (griech.) = Rundung, Kreis; skopéin (griech.) = beobachten.

migen gebogenen Rohre (Fig. 192). Die Ebene der Kreisbahn soll auf der durch „Achse" bezeichneten Geraden senkrecht stehen. Wir wollen nun in dem Augenblicke, wo die Masse m im Punkte A ist, uns eine plötzliche Winkeldrehung der Achse um den Winkel φ nach unten denken. Hierdurch wird die Bewegungsrichtung von m auf der kreisförmigen Bahn im Punkte A ebenfalls um den Winkel φ gedreht. Sie nimmt an dieser Stelle die punktiert gezeichnete Lage an. Man erkennt nun, daß die Masse infolge ihrer kinetischen Energie nach der Drehung einen Stoß oder Druck auf die linksseitigen Rohrwandungen ausübt, der den betrachteten Teil der Bahn links herum zu drehen bestrebt ist.

Befindet sich die Masse m im Punkte B, während die Achse plötzlich um den Winkel φ gedreht wird, so hat das zur Folge, daß die Masse von B

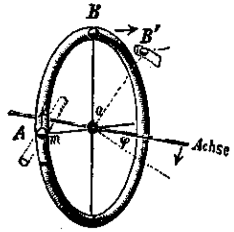

Fig. 192.

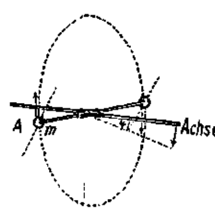

Fig. 193.

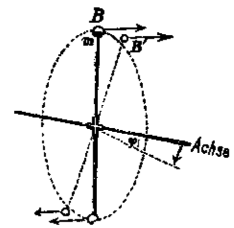

Fig. 194.

nach B' gelangt. Da die neue Bahnrichtung mit der alten parallel geblieben ist, so übt die bewegte Masse in diesem Punkte keinen Druck auf die Bahn aus, solange wir wenigstens annehmen dürfen, daß die kinetische Energie von m in B und B' dieselbe ist. Streng wird das ja in Wirklichkeit nicht gelten können. Denn durch die Bewegung von B nach B' erhält die Masse m zu ihrer ursprünglichen Geschwindigkeit noch eine Zusatzgeschwindigkeit. Die dadurch bewirkte Energievermehrung kann nur von einer Arbeitsleistung auf dem Wege BB' herrühren, d. h. es muß während der Bewegung die Kugel von der Röhre einen Druck erfahren. Jedenfalls ist dieser Druck in B, der nicht von der ursprünglichen Geschwindigkeit von m abhängt, wie der oben durch die Drehung in A erzeugte Druck auf die linke Röhrenwand, anderer Art und gegenüber diesem zu vernachlässigen, wenn die kinetische Energie von m in der Röhre nicht zu klein ist.

Man kann diese Tatsache mit Hilfe zweier kugelförmigen Massen von etwa 500 g, die an den Enden einer Stange angebracht sind, experimentell nachweisen, wenn diese Stange in ihrem Mittelpunkte um eine senkrecht zu ihr gehende Stange als Achse in schnelle Umdrehung versetzt wird, wobei sich die beiden schweren Kugeln in einem Kreise um die Achse bewegen. Wenn man in dem Augenblicke, wo die Kugeln die in Fig. 193 dargestellte Lage haben, mit der Hand einen plötzlichen Stoß auf die Achse ausübt und sie also in lotrechter Ebene verdrehen will, so empfindet man, daß die Hand einen plötzlichen Stoß nach links erfährt, als ob die Stange nach links hin dem Drucke ausweichen wollte. Wenn man aber den Stoß auf die Achse dann ausführt, wenn die beiden Massen die durch Fig. 194 dargestellte Lage haben, so ist von einem solchen Ausweichen nichts zu spüren; vielmehr folgt die Achse der beabsichtigten Drehung.

Die Kraftverhältnisse und die dadurch veranlaßten Bewegungsverhältnisse werden durch die Fig. 195—197 dargestellt. Wir beschränken uns dabei nur auf

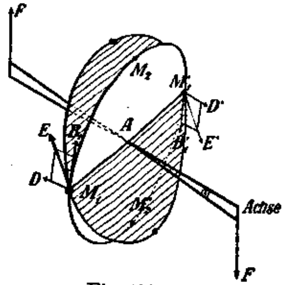

Fig. 195.

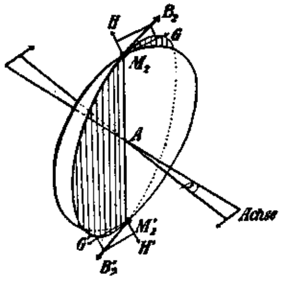

Fig. 196.

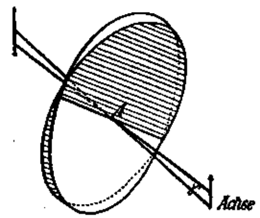

Fig. 197.

die Wirkung der Massen in der Lage, wo sie die eben beschriebenen Druckverhältnisse hervorrufen. Die Masse M_1 (Fig. 195) bewege sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf der durch Strichelung kenntlich gemachten Kreisbahn in der Richtung $M_1 E$, deren Ebene in dem durch die Figur dargestellten Augenblicke durch ein auf die Achse wirkendes Kräftepaar FF um den Winkel α gedreht wird. Es findet eine Zerlegung der der kinetischen Energie der bewegten Massen entsprechenden Kraft E in die Druckkomponente D auf die Bahn und in die Bewegungskomponente B_1 statt. Die der Masse M_1 diametral gegenüberliegende Masse M_1' verhält sich ebenso. Sie verursacht den Druck D' auf die in ihrer Richtung veränderte Bahn. D und D' bilden ein Kräftepaar, das die ganze Kreisbahn um eine in der Ebene des Papiers liegende Achse dreht. Die in Fig. 195 nicht gestrichelt gezeichnete Kreisbahn ist in Fig. 196 gestrichelt gezeichnet. Das Kräftepaar DD' der Fig. 195 bringt die Kreisbahn in die in Fig. 196 nicht gestrichelt gezeichnete Lage. Die Achse hat eine wagerechte Winkeldrehung um den Winkel β erfahren.

Ist die Masse M_1 allein vorhanden, so ist damit der Vorgang beendet. Wir wollen aber annehmen, daß außer der Masse M_1 noch die Masse M_2, deren Lage um einen rechten Winkel gegen die Masse M_1 verschoben ist, um dieselbe Achse drehbar und fest mit M_1 verbunden ist. Infolge der durch die Masse M_1 hervorgerufenen Drehung um die lotrechte Achse wirkt nun die Masse M_2 ebenso drückend auf die in ihrer Lage veränderte Kreisbahn. Die ihrer kinetischen Energie entsprechende Kraft B_2 wird in die Bewegungskomponente G und in die senkrecht zur Bahnrichtung wirkende Druckkomponente H zerlegt. Ebenso verhält sich die Masse M_2'. Sie erzeugt die Druckkomponente H'; H und H' bilden ein Kräftepaar, das eine Drehung der Kreisbahn, also auch der Bahnachse um einen bestimmten Winkel γ veranlaßt. Diese Drehung ist in Fig. 197 dargestellt.

Die durch die drei Figuren dargestellten Kraft- und Bewegungsverhältnisse treten in Wirklichkeit nicht nacheinander, sondern gleichzeitig ein. In dem Falle, daß die Massen M_1 und M_2 gleich sind, sind die drei Drehungswinkel α, β und γ gleich. Wir erkennen, daß die beiden Winkel α und γ entgegengesetzte Richtungen haben, sich also gegenseitig aufheben, während die Drehung um den Winkel β be-

stehen bleibt. Das Ergebnis unserer Betrachtungen ist, daß ein auf die Achse des Körpers in lotrechter Ebene wirkendes Kräftepaar eine Drehung der Achse in wagerechter Ebene zur Folge hat. Das ist die Bewegung, die wir an dem Fesselschen Gyroskope wirklich beobachtet haben. Auch die schon oben betrachtete Bewegung des Kreisels ist nach dem Vorstehenden erklärbar.

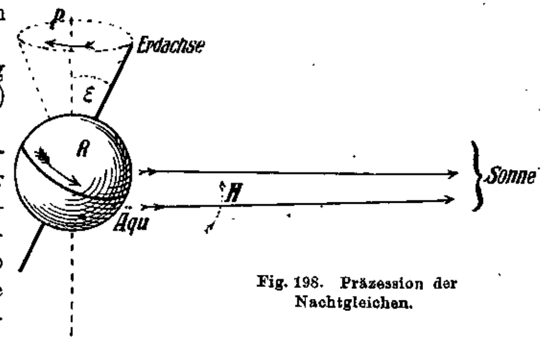

Fig. 198. Präzession der Nachtgleichen.

Diese eigentümliche Bewegung der Rotationsachse wird **Präzession**[1]) genannt.

Die Erde wirkt bei ihrer Umdrehung um die Erdachse wie ein großer Kreisel. Da die Erde nicht Kugelgestalt, sondern die Form eines abgeplatteten Umdrehungsellipsoides hat, so wirkt die Anziehungskraft der Sonne nicht auf alle Teile der Erde gleichmäßig, so daß die resultierende Anziehungskraft nicht im Schwerpunkte angreift und ein die Erde aufrichtendes Kräftepaar entsteht (Fig. 198). Die Erdachse folgt aber diesem Kräftepaar nicht; sondern sie bewegt sich auf einer Kegelfläche entgegengesetzt dem Drehungssinn des fallenden Kreisels von Fig. 198. Die Erdachse beschreibt diese Kegelfläche einmal während der Zeit von 25800 Jahren. Infolge dieser Drehung ist die Erdachse nicht dauernd nach dem Polarstern gerichtet, und die Schnittpunkte des Äquators mit der Ekliptik: der Frühlings- und der Herbstpunkt behalten ihre Lage nicht unverändert bei, sondern sie eilen auf der Ebene der Ekliptik im Sinne der Bewegung der Erde voraus. Daher bezeichnet man diese Erscheinung mit dem Namen **Präzession der Nachtgleichen.** In etwa 12000 Jahren wird die Wega der Polarstern sein.

Die aufrichtende Kraft der Sonne wirkt am stärksten im Juni und Dezember, wenn sie von der Äquatorialebene der Erde den größten Abstand hat. Sie wirkt am geringsten zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen. Aus diesem Grunde ist auch die Präzession im Sommer und im Winter größer als im Frühling und Herbst.

Der Mond, der zwar an Masse bedeutend kleiner ist als die Sonne, der aber der Erde sehr viel näher steht, verursacht eine ähnliche Präzessionsbewegung. Durch die Zusammenwirkung von Sonne und Mond und infolge der wechselnden Geschwindigkeit der Präzession ist diese Bewegung außerordentlich verwickelt. Dazu kommen noch Schwankungen der Präzession: Der Himmelspol als Endpunkt der Erdachse bewegt sich also nicht genau auf einem Kreise, der den Pol der Ekliptik als Mittelpunkt hat, sondern der Kreis zeigt gewisse Ausbuchtungen nach innen und außen. Die Periode dieser Ausbuchtungen beträgt annähernd 19 Jahre, sie wird die **Nutation**[2]) genannt.

Die oben angegebenen Schwankungen der Präzession kann man mit dem Fesselschen Gyroskope beobachten, wenn man während der Präzessionsbewegung einen kurzen Schlag auf die Stange ausübt. Man beobachtet dann, wie das Gyroskop um seine Gleichgewichtslage schwankt, indem die Stange während ihrer Umdrehung um die lotrechte Achse lotrechte Schwingungen ausführt.

1) praecedĕre (lat.) = vorrücken.
2) nutāre (lat.) = schwanken, nicken.

In neuerer Zeit ist der Grundgedanke der Erhaltung der freien Umdrehungsachse vielfach angewandt worden, um die Stabilisierung irgendeiner Bewegung hervorzubringen. Am bekanntesten ist der Schlicksche[1]) **Schiffskreisel** geworden. Das ist ein Kreisel, der im Innern des Schiffes und am Schiffsrumpfe geeignet eingebaut ist und in rasche Umdrehung versetzt werden kann. Während seiner Umdrehung hat er das Bestreben, die Richtung seiner Achse beizubehalten; infolge seiner Befestigung am Schiffsrumpfe verhindert oder vermindert er die Schwankungen des Schiffes.

Ein Kreisel kann nur dann als Stabilisator wirken, wenn er die Bewegung tatsächlich ausführen kann, die senkrecht zur Richtung der ablenkenden Kraft ist. Wenn also der Schiffskreisel die tatsächlichen Schwankungen des Schiffes verhindern soll, so muß er im Schiffskörper so gelagert sein, daß sich seine Achse senkrecht zur Richtung der Schwankungen neigen kann.

In den letzten Jahren sind Versuche gemacht worden, einen nur auf einer einzelnen Schiene laufenden Wagen dadurch am Umkippen zu verhindern, daß man mit dem Wagen schnell sich drehende Kreisel verbunden hat. Die Versuche haben aber bisher kein brauchbares Ergebnis gehabt.

Von großer Wichtigkeit ist der **Kreiselkompaß**[2]) geworden, bei dem von der Tatsache Gebrauch gemacht wird, daß in der ursprünglichen Anordnung ein sich äußerst schnell drehender Kreisel, der in einem Gehäuse so auf Quecksilber schwimmt, daß seine Achse wagerecht bleiben muß und sich außerdem nur wenig gegen den Pol heben kann, sich in die Meridianebene einzustellen bestrebt ist, da ihm zu seiner Eigenrotation durch die Erdbewegung noch eine Drehung um die Erdachse aufgezwungen wird. Auf Einzelheiten kann hier nicht eingegangen werden.

Die allgemeine Regel für die Auffindung des Drehungswinkels der Präzession eines Kreisels, dessen Drehungsachse aus seiner Lage herausgebracht werden soll, ist folgende:

Ein Kreisel sucht seine Drehungsachse so zu stellen, daß sie mit der Achse der ihm aufgezwungenen Drehung den kleinstmöglichen Winkel bildet und beide Drehungen gleichsinnig werden.

§ 59. Der Foucaultsche Pendelversuch.

Ein frei aufgehängtes, vor Luftströmungen sehr gut geschütztes Pendel schwingt scheinbar nicht immer in derselben Richtung, sondern seine Schwingungsebene dreht sich gegenüber dem Erdboden in unseren Breiten in einer Stunde um einen Winkel von ungefähr 12° entgegengesetzt der Drehung der Erde. Als Ursache hierfür können wir das Bestreben der Schwingungsebene betrachten, ihre Lage im Raume möglichst unverändert beizubehalten.

Zur Veranschaulichung der scheinbaren Drehung der Schwingungsebene dient die in Fig. 199 angegebene Versuchsanordnung. Diese besteht aus einem einfachen Tischstative, über dessen Mitte ein Fadenpendel an einem Gestelle aufgehängt ist. Versetzt man das Pendel in Schwingungen und dreht dann den Tisch um seine Stativachse herum, so dreht sich scheinbar die Schwingungsebene des Pendels über dem Tische hinweg.

1) Nach dem Ingenieur Otto Schlick genannt, der den Vorschlag 1903 machte.
2) Beste Form durch Anschütz & Co., Neumühlen-Dietrichsdorf bei Kiel. 1911.

Denken wir uns die ganze Vorrichtung auf dem Nordpole der Erde aufgestellt, so erfolgt für einen außerirdischen ruhenden Beobachter hier die Drehung der Tischplatte ohne unser Zutun infolge der Erddrehung. Eine Linksdrehung der Erde würde uns durch eine scheinbare Rechtsdrehung der Pendelebene zum Bewußtsein kommen, und zwar würde am Pole in 24 Stunden eine Drehung um 360°, also in einer Stunde um 15° erfolgen.

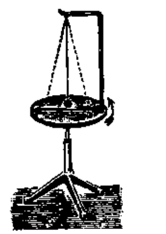

Fig. 199. Erhaltung der Schwingungsebene.

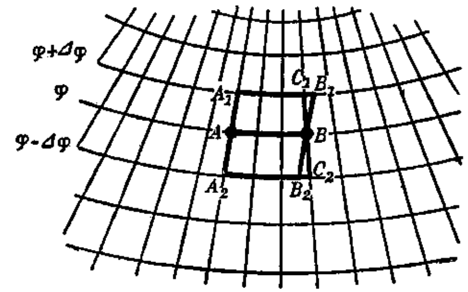

Fig. 200. Teil des Gradnetzes der Erde.

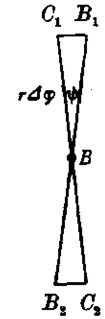

Fig. 201.

An anderen Orten der nördlichen Halbkugel der Erde kann die Schwingungsebene, vom Standpunkte eines außerirdischen ruhenden Beobachters aus beurteilt, während der Erddrehung nicht zu sich selbst parallel bleiben. Denn der Aufhängepunkt und der Punkt der Ruhelage des Pendels bestimmen in dieser Schwingungsebene eine Gerade, die Lotrichtung zur Erde, die fest mit der sich drehenden Erde verbunden ist. Dieses Lot durch den Aufhängepunkt nimmt an der Erddrehung teil und bleibt sich keineswegs selbst parallel (s. die Lote in F und F' auf der Erdoberfläche in Fig. 203); es beschreibt vielmehr einen Kegelmantel mit dem Erdmittelpunkte als Kegelspitze (O in Fig. 203). Die Schwingungsebenen für die verschiedenen Stellungen der Erde müssen sich also auch im Erdmittelpunkte schneiden.

Die Schwingungsebene muß daher eine Drehung ausführen. Diese hat für einen außerirdischen Beobachter einen anderen Wert wie für einen irdischen Beobachter, der sie relativ zur Erde beurteilt. Sie ist für diesen vom Betrage $\psi = 15^0 \sin\varphi$ stündlich, wenn φ die geographische Breite des Beobachters ist.

Beweis: In Fig. 200 ist ein kartographisches Netz für die Umgebung des Beobachtungsortes A mit der geographischen Breite φ gezeichnet. In einem gegebenen Zeitpunkte schwinge das Pendel genau in der Nord-Süd-Richtung $A_1 A A_2$. Nach der Zeit t ist der Punkt A für einen außerirdischen Beobachter infolge der Erddrehung nach B gekommen.

Die Tangentialebenen in A und B an die Erdkugel sind die Horizontalebenen. Um die Horizontalebene von A in die von B überzuführen, sind außer der Verschiebung des Berührungspunktes von A nach B noch zwei Drehungen der Horizontalebene notwendig. Wir wollen die Überführung der Ebenen verfolgen, indem wir erst in A die notwendigen Drehungen und dann die Verschiebung ausführen. Die Ebene muß zunächst um die Nord-Süd-Richtung als Achse gedreht werden, bis sie eine senkrechte Stellung zur Meridianebene in B hat. Dann muß sie ein zweites Mal um die Ost-West-Richtung gedreht werden, bis ihr Lot mit dem Erdradius in B parallel ist.

Die Schwingungsebene steht stets senkrecht zur Horizontalebene. Deshalb muß die Schwingungsebene des Pendels an diesen beiden Drehungen teilnehmen. Die zweite Drehung um die Ost-West-Richtung als Achse ändert die Lage der Schwingungsebene im Raume nicht. Die erste Drehung um die Nord-Süd-Richtung ändert ihre Lage im Raume. Doch bleibt durch diese Drehung die Schnittgerade mit der Horizontalebene in A ungeändert. Wird daher schließlich nach den vorgenommenen Drehungen durch eine Parallelverschiebung von A nach B die Horizontalebene von A in die von B übergeführt, so bleibt die Spur der Schwingungsebene in der Horizontalebene sich trotz aller dieser Drehungen parallel.

Diese Spur der Schwingungsebene am neuen Orte B sei B_2BB_1. Während der Drehung hat sich aber für den außerirdischen Beschauer die Lage der Meridianebene im Raume geändert. Sie hat sich um das Lot in A um einen gewissen Winkel gedreht und hat die Lage C_1BC_2 angenommen. An dieser Drehung hätte die Schwingungsebene nur teilnehmen können, wenn sie mit der Erde außer dem Lote durch den Aufhängepunkt noch einen weiteren festen Punkt gemeinsam gehabt hätte.

Der Winkel ψ, den die beiden Richtungen B_1BB_2 und C_1BC_2 miteinander bilden, ist der scheinbare Drehungswinkel ψ der Richtung der Pendelschwingungen.

Zur Berechnung beachten wir das kleine Dreieck BC_1B_1, das in Fig. 201 noch einmal besonders gezeichnet worden ist. Der Punkt B_1 (und C_1) liegt auf einem Breitenkreise, der nur wenig von dem des Ortes B abweicht. Wir nennen seine Breite $\varphi + \Delta\varphi$. Drücken wir alle Winkel in Bogenmaß aus, so folgt aus Fig. 128 S. 124, daß $AA_1 = BB_1 = BC_1 = r \cdot \Delta\varphi$ ist. Die Strecke $C_1B_1 = x$ ist nach Fig. 201 der Betrag, um den der auf der Erdoberfläche feste Punkt A_1 zurückbleibt gegen den Punkt B_1, der sich mit derselben Geschwindigkeit von A_1 aus bewegt hat, wie A. Daher ist $C_1B_1 = AB - A_1C_1$. Nun ist AB der Weg, den der Punkt A mit der geographischen Breite φ während der Zeit t zurücklegt, also ist der Weg $AB = 2\pi r \cdot \cos\varphi \cdot \frac{t}{T}$, wo T die Umdrehungszeit der Erde ist. In derselben Weise folgt, daß

$$A_1C_1 = 2\pi r \cos(\varphi + \Delta\varphi) \cdot \frac{t}{T}$$

ist. Also ist

$$x = 2\pi r \cdot \frac{t}{T} (\cos\varphi - \cos(\varphi + \Delta\varphi)).$$

Aus Dreieck BC_1B_1 (Fig. 201) folgt dann

$$\operatorname{arc}\psi = \frac{x}{r \cdot \Delta\varphi} = 2\pi \cdot \frac{t}{T} \cdot \frac{\cos\varphi - \cos(\varphi + \Delta\varphi)}{\Delta\varphi}.$$

Für unendlich abnehmendes $\Delta\varphi$ geht der letzte Quotient nach den Betrachtungen auf S. 125 in den negativen Differentialquotienten von $\cos\varphi$ über.

Setzen wir diesen Wert in den Ausdruck für ψ ein, so wird

$$\operatorname{arc}\psi = 2\pi \cdot \frac{t}{T} \cdot \sin\varphi.$$

Der Quotient $\frac{t}{T}$ ist der Teil der gesamten Umdrehungszeit der Erde, der zwischen den beiden Beobachtungszeiten verläuft; für eine Stunde wird er gleich $^1/_{24}$. 2π ist der Bogen, der dem Winkel von 360° entspricht. Gehen wir daher jetzt wieder zur Messung der Winkel in Gradmaß über, so ergibt sich für die stündliche Drehung $2\pi \cdot \frac{t}{T} = 15^0$, also wird

$$\psi = 15^0 \cdot \sin\varphi.$$

In vorstehendem ist gezeigt worden, daß die Pendelebene eine Drehung in dem Drehsinne Süden—Westen erfahren muß, wenn das Pendel zunächst nord-südlich schwingt. Es steht aber noch der Beweis aus, daß diese Drehung den gleichen Betrag für jede beliebige Schwingungsrichtung hat. Wir können uns davon durch folgende Betrachtung überzeugen. Die Ablenkung des Pendels ist nur ein besonderer Fall der allgemeinen Rechtsablenkung eines auf der Erdoberfläche sich bewegenden Körpers, die wir früher (§ 42, S. 122) behandelt haben. Schwingt ein Pendel in beliebiger Richtung auf ruhend gedachter Erde zwischen den Umkehrpunkten A und A_1 (Fig. 202), so kann bei bewegter Erde das von A fortschwingende Pendelgewicht nicht den früheren Umkehrpunkt A_1 erreichen, erfährt vielmehr während der Halbschwingung eine Rechtsabweichung nach B_1. Der Weg des Pendels verläuft also gar nicht mehr in einer Ebene, sondern in einer gekrümmten Fläche. Der Schwingungsmittelpunkt O muß links außerhalb der Schwingungsfläche liegen bleiben. In einem beliebigen Punkte P der Bahn des Pendels, ist die Pendelmasse zwei ablenkenden Beschleunigungen unterworfen. Die eine, welche das Pendel dauernd rechts abzulenken sucht, ist die früher (S. 126) berechnete Beschleunigung β, die von der Erdumdrehung herrührt. Der Pendelkörper kann nun dieser Beschleunigung nicht in vollem Betrage folgen. Er erfährt ja vor allem stets eine nach O hin gerichtete Beschleunigung, welche die Ursache der harmonischen Pendelbewegung ist. Diese Beschleunigung b muß nun eine Komponente γ haben, die senkrecht auf der Bewegungsrichtung steht und gerade zu β entgegengesetzt gerichtet ist. Somit ist der Beschleunigungsbetrag, der die Rechtsablenkung des Pendels hervorruft, nicht β, sondern $\beta - \gamma$. β ist aber von der Himmelsrichtung der Bewegung unabhängig, wie früher (S. 126) gefunden wurde; ebenfalls ist γ von der Schwingungsrichtung unabhängig. Somit muß auch das Pendel während jeder Halbschwingung unabhängig von der Schwingungsrichtung immer eine Rechtsablenkung im Betrage von A_1B_1 erfahren. Wie die eingehendere Durchrechnung der vorgeführten Überlegung ergibt, ist die bewirkte Drehung der Pendelebene gerade halb so groß, wie die Drehung oder die Winkelgeschwindigkeit auf dem Trägheitskreise sein würde, wenn das Pendelgewicht sich vollkommen frei bewegen könnte, d. h. wenn es der zurückziehenden Beschleunigung b nicht unterworfen wäre.

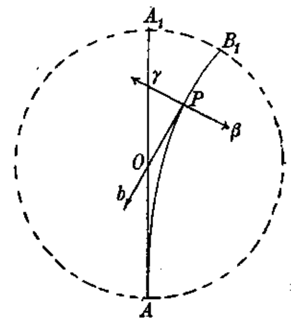

Fig. 202. Spur einer Pendelschwingung.

Durch den Foucaultschen Pendelversuch, den Foucault[1]) zuerst 1850 in der Pariser Sternwarte ausgeführt hat, ist der experimentelle Nachweis für die Umdrehung der Erde erbracht worden. In der großartigen Wiederholung des Versuches 1851 im Panthéon mit einer 28 kg schweren Kupferkugel als Pendelkörper an einer 67 m langen Aufhängung konnte das sin-Gesetz bestätigt werden.

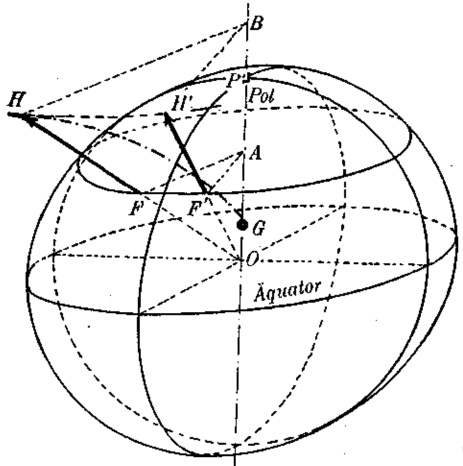

Fig. 203. Fallversuch von Benzenberg.

Auf einem wesentlich anderen Wege ist es durch sorgfältige Versuche Benzenberg[2]) schon im Jahre 1802 gelungen, den Nachweis für die Achsendrehung der Erde zu bringen. Er ließ im Innern des Michaeliskirchturmes in Hamburg Kugeln herunterfallen und beobachtete, daß die Kugeln unten im Turme nicht auf dem Punkte aufschlugen, der senkrecht unter dem Punkte lag, von dem sie losgelassen worden waren. Der Aufschlagspunkt wich um $9,0 \pm 3,6$ mm nach Osten ab (Fig. 203). Die Fallhöhe betrug 76,34 m.

Die Ursache für diese Abweichung liegt darin, daß der Punkt H oben im Turme einen größeren Abstand HO vom Mittelpunkte der Erde hat als der Fuß F des Turmes. Bei einer Erdumdrehung beschreibt die Spitze H einen Kreis mit dem Mittelpunkte B auf der Erdachse OP, der Fußpunkt F einen Parallelkreis mit dem Mittelpunkte A auf der Erdachse. Die Winkelgeschwindigkeit von H bei seiner Drehung um B ist ebenso groß, wie die Winkelgeschwindigkeit von F bei seiner Drehung um A, die lineare Geschwindigkeit von H ist deshalb im selben Verhältnisse größer als die von F wie der Kreishalbmesser BH zu dem Halbmesser AF, nämlich $(R + h) : R$, wenn R der Erdradius und h die Höhe des Turmes ist. Wenn also die Kugel oben losgelassen wird, so bewegt sie sich vollkommen frei gegenüber der Erde, als wenn sie ein Trabant dieses Planeten wäre. Nach dem Trägheitsprinzipe hat sie im Anfange die Bewegungsrichtung und die Geschwindigkeit, die H im Augenblicke des Fallbeginnes gerade besaß. Sie sucht ihren Weg also auf der Tangente in H an den Kreis um B fortzusetzen. Dann aber fällt sie unter dem Einflusse der Schwerkraft auf den Erdmittelpunkt zu. Gegen eine ruhend gedachte Erde wird die Kugel also eine Ellipse, bezüglich Parabel beschreiben und zwar in einer Ebene, welche durch die Tangente in H an den Kreis um B und den Erdmittelpunkt O bestimmt ist. Ist der Aufschlagspunkt der Kugel auf der Erde G, so ist die Kugel auf der Erdoberfläche, also in horizontaler Erstreckung, um das Stück FG vorwärts gewandert in derselben Zeit, wo der Anfangspunkt der Bewegung von H nach H', der Fußpunkt des Turmes von F nach F' gelangte. Die Strecke FG muß (bei kleinem h gegen R) im wesentlichen gleich der Strecke HH' sein, welche größer als FF' ist. Die Kugel wird daher um $FG - FF'$ nach Osten vorausgeeilt sein. Da ferner die Bewegungsebene der fallenden Kugel die Ebene eines im Raume ruhenden größten Kugelkreises ist, welche den Kreis um B in H und auch den Breitenkreis um A in F berührt, so entfernt sich die Bahn der fallenden Kugel zugleich während des Falles von dem Breitenkreise des Turmes in südlicher Richtung. Die Kugel erfährt also neben der östlichen Abweichung eine südliche. Eine solche wurde in der Tat von Benzenberg auch gemessen, aber mit sehr viel weniger großer Sicherheit, da die Abweichungen der Messungen unter sich fast den Betrag der gesuchten Messung erreichten. Benzenberg fand $3,4 \pm 2,5$ mm.

Die Versuche wurden 1804 von Benzenberg in einem Bergwerke am Schleebusch in der Grafschaft Mark wiederholt. Er erhielt bei einer Fallhöhe von 85,1 m eine östliche Abweichung von $11,5 \pm 2,9$ mm, während sie sich zu 10,4 mm aus der bekannten Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde berechnet. Der Betrag der nur sehr unsicher bestimmten südlichen Abweichung stimmt hingegen mit der Berechnung nicht gut überein. Später wurden die Versuche in noch größerem Maßstabe und noch genauerer Übereinstimmung öfter von verschiedener Seite nachgeprüft.

Eine höchst wertvolle Abänderung der Fallversuche ist neuerdings (1912) durch den Direktor J. G. Hagen der Vatikanischen Sternwarte in Rom mitgeteilt worden. Offenbar ist die Größe der östlichen Abweichung proportional der Zeit, die der fallende Körper zum Fallen gebraucht. Daher kam Hagen auf den Gedanken, den Fall eines Körpers zu untersuchen, dessen Fallgeschwindigkeit nach dem Grundgedanken der Atwoodschen Fallmaschine durch ein Gegengewicht verlangsamt ist. Er beobachtete mit einem Fernrohre den dünnen Aufhängefaden des Fallgewichtes, wenn nach einem Falle durch 23 m Fallraum der Fall völlig erschütterungsfrei abgebremst wurde. Seinen Standpunkt nahm er dabei nördlich vom Faden. Er stellte dann fest, daß der Faden beim Falle eine östliche Abweichung von der Lotrichtung hatte. Diese Lotrichtung wurde als Mittellage von Pendelschwingungen des Fadens scharf bestimmt, die sich an den Fall und den ersten östlichen Ausschlag des Fadens unmittelbar anschlossen. Die Messung der Ostabweichung konnte so mit einer Genauigkeit durchgeführt werden, die diejenige aller anderen Fallversuche übertrifft. Berechnete man aus der beobachteten Ostabweichung die Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde, so stimmte diese bis auf 3 Stellen mit dem astronomisch ermittelten Werte überein.

Die Umdrehung der Erde ist also durch diese Versuche erwiesen. Man könnte aus ihnen die Umdrehungsgeschwindigkeit berechnen, wenn wir sie nicht durch astronomische Beobachtungen kennen würden, z. B. unter einer stetig undurchdringlichen Wolkenschicht lebten.

1) Leon Foucault (1819—1868) von Haus aus Mediziner, dann Mitglied der Akademie in Paris. Der Pendelversuch ist übrigens schon vor Foucault 1661 von V. Viviani in Florenz und 1833 von Bartolini in Rimini mit qualitativ befriedigendem Ergebnisse angestellt worden, ohne daß Foucault hiervon wußte.

2) J. F. Benzenberg (1777—1846), Gymnasialprofessor in Hamburg.

Vierter Abschnitt.

Elastizität und Festigkeit.

§ 60. Elastizität.

Wenn eine Kraft auf einen Körper einwirkt, wenn wir z. B. mit der Hand gegen einen auf dem Tische liegenden Körper drücken, so tritt an der Stelle, wo der Druck ausgeübt wird, eine Formveränderung (Deformation) des Körpers ein, die in vielen Fällen so gering ist, daß sie der oberflächlichen Beobachtung entgeht. Hört die den Körper deformierende Kraft auf zu wirken, so kann der Körper nachher entweder seine ursprüngliche Gestalt wieder vollständig annehmen, oder er kann die veränderte Gestalt beibehalten. Im ersten Falle nennen wir den Körper elastisch, im zweiten unelastisch.[1])

Elastizität der Dehnung. Um die Formveränderung, die ein Körper unter dem Einflusse einer Kraft erfährt, zu messen, hängen wir einen Draht an einem festen Stative oder an einem festen Haken an der Decke des Zimmers auf (wie in Fig. 182) und belasten ihn am unteren Ende mit Gewichtstücken. Unter der Wirkung der durch die Gewichtstücke ausgeübten Kraft wird er verlängert und nimmt (wenn die Verlängerung eine gewisse, noch näher zu bestimmende Größe nicht überschreitet) nach Aufhören der Belastung seine ursprüngliche Länge wieder an. Bei zwei Drähten derselben Art, von denen der erste doppelt so lang ist wie der zweite, beträgt die Verlängerung durch dieselbe Kraft beim ersten doppelt so viel wie beim zweiten. Allgemein gilt:

Die Verlängerung ist bei gleicher Belastung der ursprünglichen Länge proportional.

Hängen wir zwei Drähte derselben Art von gleicher Länge nebeneinander auf und belasten sie beide zusammen durch ein Gewichtstück, so ist die Verlängerung, welche beide Drähte gleichzeitig erfahren, halb so groß wie die Verlängerung eines einzelnen Drahtes durch dieselbe Belastung. Statt zweier gleichartiger Drähte können wir auch einen Draht verwenden, dessen Querschnitt doppelt so groß ist wie der des ursprünglich benutzten Drahtes. Allgemein ergibt sich:

Die Verlängerung ist dem Querschnitte des Drahtes bei gleicher Belastung umgekehrt proportional.

Um die Verlängerung zweier Drähte von verschiedenem Materiale miteinander zu vergleichen, wählen wir die Drähte von gleicher Länge (1 m) und

1) elauno (griech.) = ich treibe.

gleichem Querschnitte (1 mm²). Die Verlängerung, die ein Draht von 1 m Länge und 1 mm² Querschnitt durch die Belastung mit 1 kg* erfährt, heißt der **Elastizitätskoeffizient** des Körpers.

Ein Draht von der Länge l Meter und dem Querschnitte q Quadratmillimeter erfährt, wenn der Elastizitätskoeffizient des Stoffes a ist, bei der Belastung mit P Kilogramm* die Verlängerung

$$b = a \cdot \frac{l \cdot P}{q}. \qquad \text{(Hookesches Gesetz).}^{1)}$$

Elastizitätsgrenze. Wenn man die Belastung des Drahtes allmählich vergrößert, so bleibt von einer bestimmten Belastung an die Verlängerung des Drahtes nicht mehr der Belastung proportional. Entfernt man jetzt die Belastung, so nimmt der Draht seine ursprüngliche Länge nicht wieder an. Man sagt: Die Elastizitätsgrenze des Drahtes ist überschritten. Die Elastizitätsgrenze ist für die verschiedenen Körper sehr verschieden. Eine hohe Elastizitätsgrenze besitzt der Stahl, eine niedrige das Blei. Die Elastizitätsgrenze wird bestimmt durch die in kg* ausgedrückte Belastung, bei welcher der Draht seine ursprüngliche Form nach Aufhören der Belastung nicht wieder annimmt. In Tabelle III ist die Elastizitätsgrenze für die wichtigsten Körper verzeichnet.

Macht man die der Wirklichkeit meist nicht entsprechende Annahme, daß man einen Körper durch Belastung auf seine doppelte Länge ausdehnen könnte, daß also die Verlängerung gleich der ursprünglichen Länge wäre, ohne daß seine Elastizitätsgrenze überschritten würde, so könnte man auf Grund der Gleichung $b = \frac{alP}{q}$ berechnen, wie groß die hierzu nötige Belastung sein müßte, indem man b gleich l setzt. Es wird dann $\frac{alP}{q} = l$, woraus folgt $P = \frac{q}{a}$. Wenn der Draht einen Querschnitt von 1 mm² hat, wird $q = 1$, also wird dann $P = \frac{1}{a}$.

Die so festgesetzte Belastung, die nötig ist, um einen Draht von 1 mm² Querschnitt um seine eigene Länge zu verlängern, wird der **Elastizitätsmodul**[2]) (ε) des Körpers genannt.

Der Elastizitätsmodul ist gleich dem reziproken Werte des Elastizitätskoeffizienten. (Elastizitätsmoduln verschiedener Körper siehe Tabelle III).

Unter Verwendung des Elastizitätsmoduls ε nimmt das Hookesche Gesetz, wenn man nach der belastenden Kraft P oder, was dasselbe besagt, nach der elastischen Kraft P entwickelt, die Form an

$$P = \varepsilon \cdot \frac{b \cdot q}{l}.$$

Ähnlich wie ein aufgehängter Draht sich gegen Zugkräfte verhält, verhält sich ein Stab gegen Druckkräfte. Zur Ausführung der hierher gehörenden Versuche muß man kurze Stäbe von großem Querschnitte verwenden,

1) Robert Hooke, 1645—1703. 2) modulus (lat.) = Maß.

damit die Stäbe nicht knicken; die Verkürzung wird dann erst meßbar, wenn man sehr große Kräfte anwendet.

Auch unter dem Einfluß der Druckkräfte ist die Verkürzung direkt proportional mit der Länge, umgekehrt proportional mit dem Querschnitte und direkt proportional mit der Belastung.

Die Elastizitätsmoduln in C. G. S.-Einheiten. Für die Angabe der Elastizitätsmoduln hat sich bis heute das absolute Maßsystem noch nicht durchgesetzt, denn dann müßte man die Kraft P in Dyn, die Querschnittfläche q in cm² und die Länge l, sowie die Verlängerung b in cm rechnen. Da $\varepsilon = \frac{P \cdot l}{b \cdot q}$ ist, so ist die Einheit des Elastizitätsmoduls im C. G. S.-System (S. 23) $\left[\frac{\mathrm{Dyn \cdot cm}}{\mathrm{cm \cdot cm^2}}\right] = [\mathrm{Dyn\ cm^{-2}}]$. Die Dimension ist danach die eines Verhältnisses von Kraft zu Fläche; eine solche Einheit ist eine absolute *Druckeinheit.* Es erscheint bemerkenswert, daß man statt dessen auch schreiben kann $[\mathrm{Erg \cdot cm^{-3}}]$, also die Dimension des Verhältnisses einer Energie zur Raumeinheit; eine solche Einheit ist die absolute Einheit der *Energiedichte.* — Es sei ε ein Elastizitätsmodul nach den obigen Festsetzungen, sein Wert in absoluten C. G. S.-Einheiten e. Dann gilt

$$\varepsilon\left[\frac{\mathrm{kg^* \cdot m}}{\mathrm{m \cdot mm^2}}\right] = \varepsilon\left[\frac{981 \cdot 10^3\ \mathrm{Dyn} \cdot 10^2\ \mathrm{cm}}{10^2\ \mathrm{cm} \cdot 10^{-2}\ \mathrm{cm^2}}\right] = \varepsilon\,[981 \cdot 10^5\,\mathrm{Dyn \cdot cm^{-2}}]$$

$$= 981 \cdot 10^5\,\varepsilon\,[\mathrm{Dyn\ cm^{-2}}] = e \cdot [\mathrm{Dyn \cdot cm^{-2}}],$$

also $981 \cdot 10^5\,\varepsilon = e$. Man gewinnt demnach aus den Wertangaben der Elastizitätsmoduln in den üblichen (technischen) Einheiten diejenigen in absoluten Einheiten durch Multiplikation mit $981 \cdot 10^5$.

Elastische Spannung. Ein Draht oder Faden, etwa aus Gummi, der Länge l werde durch die Kraft P um b auf die Länge (Fig. 204) $AB = l + b$ gedehnt. Seine beiden Enden A und B mögen festgehalten werden. Wir denken uns nun an irgendeiner Stelle C den Faden durchschnitten. Dann werden sich die beiden bei C entstandenen Enden der Teilstücke in den Richtungen nach A und B bis C_1 und C_2 zurückziehen, bis die Teilstücke keine elastische Dehnung mehr aufweisen. Es ist dann $AC_1 + C_2B$ gleich der Länge l des ungedehnten Fadens, somit $C_1C + CC_2 = b$, und es verhält sich erfahrungsgemäß $CC_1 : CC_2 = CA : CB = C_1A : C_2B$. An den Teilstücken AC und AB greifen in den bei C entstandenen Schnittflächen daher in entgegengesetzten Richtungen elastische Kräfte P_1 und P_2 an, die einander entgegengesetzt gleich sind. Denn nach dem Hookeschen Gesetze müssen die Gleichungen gelten

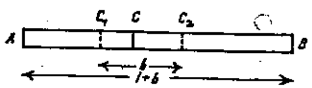

Fig. 204.

$$\varepsilon \cdot q \cdot CC_1 = AC_1 \cdot P_1$$
$$\varepsilon \cdot q \cdot CC_2 = BC_2 \cdot P_2.$$

Die Division ergibt $\frac{CC_1}{CC_2} = \frac{AC_1}{BC_2} \cdot \frac{P_1}{P_2}$
und daraus

$$P_1 = P_2, \quad \text{da erfahrungsgemäß} \quad CC_1 : CC_2 = AC_1 : BC_2 \quad \text{ist.}$$

Addiert man die beiden aus dem Hookeschen Gesetze folgende Gleichungen, so ergibt sich

$$\varepsilon \cdot q(CC_1 + CC_2) = P_1(AC_1 + BC_2)$$

oder

$$\varepsilon \cdot q \cdot b = P_1 \cdot l.$$

Daraus folgt aber, daß die Kraft $P_1 = P_2$ gleich der Kraft P sein muß, die den ganzen Faden dehnte. Die Kräfte P_1 und P_2 sind nun offenbar nicht erst dadurch neu entstanden, daß bei C der Schnitt geführt wurde, sondern sind schon vorher vorhanden gewesen. Sie traten nur nicht in die Erscheinung, da sie einander entgegengesetzt gleich waren, sich also aufhoben. Wir lernen daraus: *In jedem elastisch gedehnten Körper lasten innerhalb des Körpers senkrecht zu allen Querschnittflächen entgegengesetzt gerichtete Kräfte, die im Beharrungszustande einander gleich sind und sich daher aufheben. Das sind die* **Spannungen** *des elastisch gedehnten Körpers* (S. 81, 107). Im Beispiele des elastisch gedehnten Fadens spricht man von einer *Zugspannung;* wäre statt des Fadens ein Stab zusammengedrückt worden, so hätte man entsprechend eine *Druckspannung.*

Die potentielle Energie eines gedehnten Fadens. Ein gedehnter Faden äußert eine elastische Kraft, die im Beharrungszustande der dehnenden Kraft gleich und entgegengesetzt ist. Sie sei $\mathfrak{P}$. Dann ist also $\mathfrak{P} = -P$. Schreiben wir für die elastische Verlängerung b des Fadens noch s, so erhalten wir die Gleichung $P = -\frac{e \cdot q}{l} \cdot s$, wobei wir den Elastizitätsmodul in C. G. S.-Einheiten rechnen wollen. Das ist aber nach S. 106 die Gleichung für eine *harmonische Kraft.* Die Federkonstante (die Starre) k ist dann $k = \frac{e \cdot q}{l}$ zu setzen. Nach S. 106 ist die in einer gedehnten Feder enthaltene potentielle Energie $E = \frac{1}{2} k \cdot s^2$. In unserem Falle wird daraus $E = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot q \cdot s^2}{l}$. — Wir können nun fragen, wo diese Energie im gedehnten Faden angeordnet zu denken ist. Die Antwort kann nur lauten, daß offenbar die Energie gleichmäßig durch den ganzen Faden verteilt ist. Denn ein jeder abgeschnittene Teil des Fadens enthält einen entsprechenden Anteil von dieser Energie. Wir wollen daher als *Energiedichte* die in der Volumeneinheit des Fadens enthaltene potentielle Energie bezeichnen. Das Volumen des gedehnten Fadens ist $q \cdot (l + s)$. Daher ist die Energiedichte $\eta = E : [q \cdot (l + s)]$, oder $\eta = \frac{1}{2} \cdot e \cdot \frac{s^2}{l(l+s)}$. — Für den Fall $s = l$ wird daraus $e = 4\eta$ oder in Worten: *Der Elastizitätsmodul ist gleich der vierfachen Energiedichte der potentiellen elastischen Energie, wenn die Verlängerung des Fadens gleich seiner ursprünglichen Länge wäre.*

Anmerkung. Wird ein homogener Zylinder einem Längszuge unterworfen, so tritt im allgemeinen neben der elastischen Verlängerung auch eine *Querkontraktion* auf; der Querschnitt q eines elastisch gedehnten Stabes ist also genau genommen nicht unveränderlich.

§ 61. Elastizität der Biegung.

Wird ein gerader elastischer Stab AB (Fig. 205) von der Länge l mit dem einen Ende A in eine feste Wand unverrückbar fest eingeklemmt, und wird das freie Ende B mit einem Gewichte P belastet, so senkt sich dieses Ende: der Stab wird in die Lage AC gebogen. Ein solcher, an dem einen Ende eingespannter Stab oder Balken wird ein **Freiträger** genannt. Die Senkung s, die das freie Ende erfährt, heißt der **Biegungspfeil**. Der Biegungspfeil ist um so größer, je größer die Belastung ist; er ist innerhalb der für uns in Betracht kommenden Grenzen mit der Belastung proportional. Er hängt außerdem von den Abmessungen des Freiträgers und von seinem Elastizitätsmodul ab.

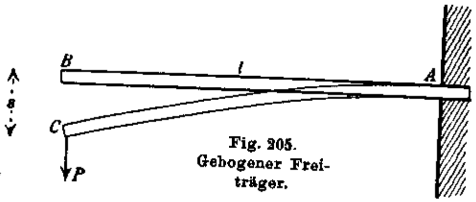

Fig. 205. Gebogener Freiträger.

Hat der Stab rechteckigen Querschnitt, so ergibt sich durch Versuche und Berechnung (S. 188), daß zwischen der Belastung P, dem Biegungspfeile s, der Länge l, der Höhe h, der Breite b und dem Elastizitätsmodul ε die Gleichung besteht:

$$s = \frac{4P}{\varepsilon} \cdot \frac{l^3}{b h^3}.$$

Mißt man die Länge des gebogenen Freiträgers an der oberen erhabenen und der unteren hohlen Fläche, so findet man, daß die an der oberen Seite liegenden Teile auseinandergezogen, die an der unteren Seite liegenden Teile zusammengedrückt worden sind. Die Verlängerung und Verkürzung geschieht aber nicht nur an den äußersten oberen und unteren Grenzflächen, sondern sie tritt auch im Innern des Stabes auf. Es gibt daher im Innern des Stabes eine Faser, die ihre ursprüngliche Länge beibehält, die also nur gebogen wird. Diese Faser heißt die **Neutrale Faser** oder die **Neutrale Schicht**.

In der Fig. 206 ist ein Freiträger abgebildet, bei dem die Höhe übertrieben groß gezeichnet ist, damit die einzelnen Fasern gut voneinander getrennt dargestellt werden. In dieser Figur ist die neutrale Faser durch eine stark ausgezogene Linie OO angedeutet. Alle Fasern oberhalb OO erfahren eine Verlängerung, am meisten die oberste Schicht AB. Alle Fasern unterhalb der neutralen Faser OO erfahren eine Verkürzung, am meisten die unterste Schicht $A'B'$.

Vermöge ihrer elastischen Spannung haben die oberen Schichten das Bestreben, sich wieder zusammenzuziehen, die unteren das Bestreben, sich wieder auszudehnen.

Legen wir durch den Freiträger an irgendeiner Stelle, die vom freien Ende den Abstand x haben möge, einen Querschnitt QQ', so wirkt die elastische Spannung an den oberen Fasern des Querschnittes als eine nach dem festen Ende des Freiträgers gerichtete Kraft K, an den unteren Fasern des Querschnittes als eine nach dem freien Ende des Freiträgers gerichtete Kraft K'.

Die Kräfte K und K' sind um so größer, je weiter die Fasern von der neutralen Faser entfernt sind. Alle Kräfte K und K' erzeugen Kräftepaare, deren Momentensumme demjenigen Drehmomente entgegengesetzt gleich sein muß, das durch die am freien Ende wirkende Belastung erzeugt wird, wenn der Freiträger im Gleichgewichte ist. Durch die Gleichsetzung der Momentensumme der Kräfte K und K' mit dem Momente dsr Kraft P erhalten wir eine Gleichung, die alle die Biegung des Freiträgers bewirkenden Umstände enthält.

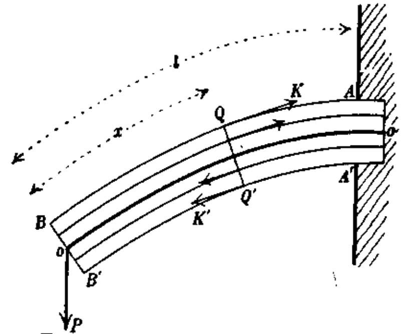

Fig. 206. Gebogener Freiträger mit neutraler Schicht.

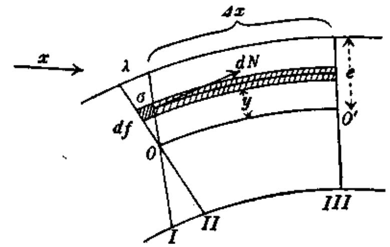

Fig. 207. Ausgeschnittenes Stück des Freiträgers.

Um die Größe der im Querschnitt QQ' wirkenden Spannkräfte zu berechnen, bedenken wir, daß die unmittelbar rechts an QQ' grenzenden Stabteile diese Spannung bewirken. Wir brauchen daher nur ein kleines Stück des Freiträgers herauszuschneiden, das rechts von QQ' liegt, und die in diesem Stücke wirkenden Kräfte zu untersuchen.

Es sei in Fig. 207 das unmittelbar an den betrachteten Querschnitt angrenzende Stück des Stabes herausgezeichnet. Die Länge dieses Stückes sei Δx. I bezeichnet den zu untersuchenden Querschnitt vor der Biegung des Freiträgers, II bedeutet denselben Querschnitt nach der Biegung im Vergleiche zu dem benachbarten Querschnitte, der durch III angedeutet ist. Vor der Biegung ist I parallel zu III; nach der Biegung ist I in die Lage II dadurch gekommen, daß der Querschnitt eine Drehung um eine durch die neutrale Faser OO' gehende Achse ausgeführt hat, die dadurch ermöglicht ist, daß sich die oberhalb der neutralen Faser liegenden Abschnitte Δx verlängert, die darunterliegenden verkürzt haben. Wir berechnen die Verlängerungen und Verkürzungen alle, indem wir sie auf die Längenänderung λ zurückführen, die eine beliebig herausgegriffene, aber bestimmte Faser erfährt. Als solche wollen wir die oberste Faser annehmen, die von der neutralen Faser den Abstand e haben möge; es sei jedoch bemerkt, daß irgendeine beliebige andere, aber bestimmte Faser auch hätte gewählt werden können. Wir betrachten nun die Längenveränderung σ, die die in dem Abstande y von der neutralen Faser liegende Faser von der Länge Δx erfährt.

Aus geometrischen Gründen folgt die Proportion

$$\sigma : \lambda = y : e.$$

Nehmen wir an, daß ein schmaler Streifen der betrachteten Faser den

Querschnitt df hat (vgl. die Ansicht des ganzen Querdurchschnittes in Fig. 208), so können wir diesen Streifen als einen Draht von der Länge Δx und vom Querschnitte df auffassen, der um die Strecke σ verlängert worden ist. Die Kraft, die zu dieser elastischen Verlängerung nötig ist, oder, was dasselbe sagt, die elastische Spannung, die in dem Drahte durch diese Verlängerung σ hervorgerufen wird, sei mit dN bezeichnet. Dann besteht zwischen der Spannung dN, dem Querschnitte df und der Länge Δx des Drahtes sowie dem Elastizitätsmodul ε nach dem Hookeschen Gesetz die Gleichung

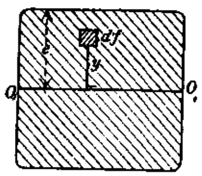

Fig. 208.

$$dN = \frac{\varepsilon \cdot \sigma \cdot df}{\Delta x}.$$

Setzen wir in diese Gleichung den aus der obigen Proportion folgenden Wert für σ ein, so wird

$$dN = \frac{\varepsilon \cdot \lambda \cdot y \cdot df}{e \cdot \Delta x} = \frac{\varepsilon \lambda}{e \Delta x} \cdot y\, df.$$

Der Elastizitätsmodul ist die Kraft, die einen Draht vom Querschnitte 1 mm² um seine eigene Länge verlängert. Multiplizieren wir diese Kraft mit dem Quotienten $\frac{\lambda}{\Delta x}$, so erhalten wir die Kraft, die erforderlich ist, um einen Draht vom Einheitsquerschnitte und von der Länge Δx um die Strecke λ zu verlängern. Das ist aber gerade die Verlängerung, die die im Abstande e von der neutralen Faser befindliche Faser erfährt. Folglich gibt der Ausdruck $\frac{\varepsilon \cdot \lambda}{\Delta x}$ die Kraft an, mit der die im Abstande e von der neutralen Faser befindliche Faser gespannt wird. Wir wollen diese Kraft Spannung nennen und weiterhin mit dem Buchstaben $\varkappa$ bezeichnen. Es ist also $\varkappa = \frac{\varepsilon \lambda}{\Delta x}$. Benutzen wir diese Bezeichnung, so wird

$$dN = \frac{\varkappa}{e} \cdot y\, df.$$

Um die Kraft auf dem ganzen Querschnitte zu berechnen, müssen wir diese Größen für den ganzen Querschnitt summieren; wir müssen also bilden

$$N = \int \frac{\varkappa}{e} \cdot y\, df.$$

Den unveränderlichen Quotienten $\frac{\varkappa}{e}$ können wir vor das Integralzeichen setzen, also wird

$$N = \frac{\varkappa}{e} \cdot \int y\, df.$$

1. Unter der Voraussetzung, daß die am Freiträger angreifenden Kräfte nur eine Biegung, aber keine Längenveränderung der neutralen Schicht bewirken, muß diese Summe den Wert Null haben. Es folgt also:

$$\frac{\varkappa}{e} \int y\, df = 0 \quad \text{oder} \quad \int y\, df = 0.$$

Diese Gleichung fordert also, daß die Summe aus den Produkten der an den Flächenelementen df angreifenden Kräfte $\frac{\varkappa \cdot y}{e}$ und der Flächenelemente df selbst verschwindet. Sie stimmt mit der in § 46 (S. 133) abgeleiteten Gleichung $\Sigma p dm = 0$ dem Sinne nach überein, in welcher die Kräfte p an den Massenelementen angreifen. Folglich können wir aus der Gleichung

$$\int y\, df = 0$$

schließen, daß der Punkt O in der Fig. 207 der Schwerpunkt des Stabquerschnittes ist.

Das heißt: *Die neutrale Faser eines gebogenen Stabes geht in jedem Querschnitte des Stabes durch den Schwerpunkt des Querschnittes.*

2. Um die Drehung zu berechnen, die der Stabquerschnitt erfährt, müssen wir die Momente der Kräfte dN berechnen und diese Momente addieren. Ein einzelnes Drehmoment ist

$$d\mathfrak{M} = y\, dN = \frac{\varkappa}{e}\, y^2 df,$$

also ist das in jedem Querschnitte durch die elastischen Kräfte hervorgerufene Drehmoment

$$\mathfrak{M} = \frac{\varkappa}{e} \cdot \int y^2 df.$$

Das Integral $\int y^2 df$ stimmt mit dem in § 55 abgeleiteten äquatorialen Trägheitsmomente überein, wenn wir den dort für einen Körper gewonnenen Begriff auch auf eine Fläche anwenden. Wir bezeichnen in Übereinstimmung mit § 55 das Trägheitsmoment einer Fläche mit Θ. So erhalten wir für das durch die elastischen Kräfte in einem Querschnitte verursachte Drehmoment den Ausdruck

$$\mathfrak{M} = \frac{\varkappa}{e} \cdot \Theta.$$

Dieser Ausdruck heißt das Biegungsmoment.

Hieraus folgt als Ausdruck für die elastische Spannung in einer Faser, die von der neutralen Faser den Abstand e hat,

$$\varkappa = \frac{\mathfrak{M} \cdot e}{\Theta}.$$

3. In dem besonderen Falle, daß die Biegung des Freiträgers (wie in Fig. 205) durch eine am freien Ende angebrachte Belastung P erzeugt wird, ist das Drehmoment dieser Kraft

$$\mathfrak{M} = P \cdot x.$$

Setzen wir diesen Wert in den Ausdruck für $\varkappa$ ein, so wird

$$\varkappa = \frac{Px \cdot e}{\Theta}.$$

Berechnung des Biegungspfeiles am freien Ende des Freiträgers. Die im untersuchten Querschnitte erzeugte Biegung ist der Winkel $d\vartheta$, den der Querschnitt in den beiden Lagen I und II in Fig. 209 bildet.

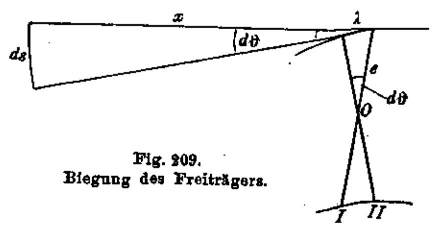

Fig. 209.
Biegung des Freiträgers.

Es ist $d\vartheta = \frac{\lambda}{e}$. Wir ziehen an den Stab (nach Fig. 209) zwei Tangenten, die den Stab in den beiden Lagen des Querschnittes berühren, und verlängern sie bis zum freien Stabende, machen sie also gleich x. Diese beiden Tangenten bilden ebenfalls den Winkel $d\vartheta$ miteinander. Der Abstand ds der Endpunkte der beiden Tangenten ist das Element des Biegungspfeiles, das durch die im untersuchten Querschnitte eintretende Biegung hervorgerufen wird. Es ist

$$ds = x \cdot d\vartheta = x \cdot \frac{\lambda}{e}.$$

Wir ersetzen λ durch den aus

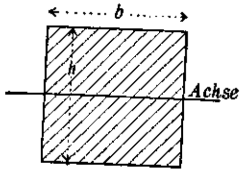

Fig. 210.

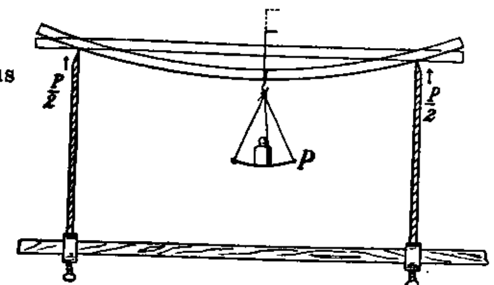

Fig. 211. Durchbiegung eines in der Mitte belasteten Stabes.

der Definitionsgleichung $\varkappa = \frac{\varepsilon \lambda}{\Delta x}$ folgenden Wert

$$\lambda = \varkappa \cdot \frac{\Delta x}{\varepsilon}$$

und erhalten, wenn wir weiterhin das Stabelement mit dx bezeichnen,

$$ds = x \cdot \frac{\varkappa \cdot dx}{e \cdot \varepsilon}.$$

Den gesamten Biegungspfeil erhalten wir hieraus durch Integration zu

$$s = \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{\varkappa}{e} \cdot x\,dx.$$

Nun ist $\frac{\varkappa}{e} = \frac{\mathfrak{M}}{\Theta}$, also wird

$$\boldsymbol{s = \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{\mathfrak{M}}{\Theta} \cdot x\,dx.}$$

Bemerkung: Bei der Ausführung der Berechnung muß man beachten, daß sich der Elastizitätsmodul ε auf den Querschnitt von 1 mm² bezieht; daher muß man alle Längen in Millimetern ausdrücken, und man erhält dann den Biegungspfeil auch in Millimetern.

Beispiel: Wie groß ist der Biegungspfeil eines am freien Ende mit der Belastung P versehenen Freiträgers von der Länge l, dessen Querschnitt ein Rechteck mit der Höhe h und der Breite b ist?

1. Das Moment der Belastung ist $\mathfrak{M} = P \cdot x$. Das äquatoriale Trägheitsmoment des Rechteckes in bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt gehende Achse ist (nach Fig. 210) $\Theta = \frac{b}{12} \cdot h^3$, folglich wird

$$s = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^l \frac{P x^2\,dx}{\frac{1}{12} b h^3} = \frac{12 P}{\varepsilon b h^3} \int_0^l x^2\,dx = \frac{4P}{\varepsilon} \cdot \frac{l^3}{b h^3}.$$

Dieses Ergebnis stimmt mit der im Eingange des Paragraphen angegebenen Formel überein.

2. Legt man (nach Fig. 211) einen Stab von der Länge l und mit einem rechteckigen Querschnitte von der Höhe h und der Breite b mit seinen beiden Enden auf zwei feste Schneiden, und belastet man ihn in der Mitte mit dem Gewichte P, so ist der Biegungspfeil in der Mitte

$$s = \frac{1}{4} \cdot \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{l^3}{b h^3}.$$

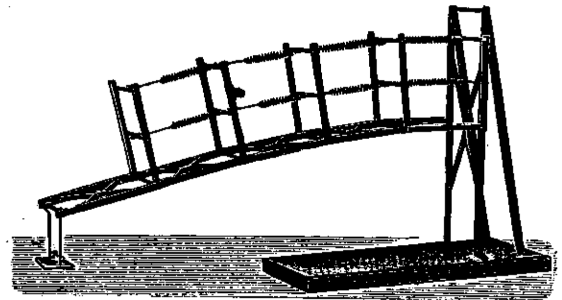

Fig. 212. Modell eines Freiträgers.

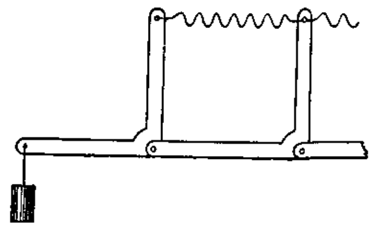

Fig. 213. Elastisches Element zum Modell des Freiträgers.

Wenn man beachtet, daß bei der zweiten Art der Biegung jede der beiden Stützen einen Gegendruck gegen den Stab ausübt, der gleich $\frac{P}{2}$ ist, und daß der mittlere Teil wagerecht bleibt, so kann man die beiden Biegungen aufeinander zurückführen. Es verhält sich der Stab beim Aufliegen auf beiden Enden genau so, als ob er in der Mitte festgeklemmt wäre und an jedem der beiden Enden mit der Kraft $\frac{P}{2}$ nach oben gezogen würde. Die Länge ist dann als halbe wirkliche Länge in Rechnung zu bringen. Ersetzt man in der ersten Formel P durch $\frac{P}{2}$ und l durch $\frac{l}{2}$, so wird der Ausdruck $\frac{1}{16}$ des ersten und geht dadurch in die zweite Formel über.

Anschauungsversuch. Zur Veranschaulichung der bei der Biegung eines Freiträgers auftretenden Verhältnisse dient der in Fig. 212 abgebildete Apparat. Er besteht aus einer Reihe von Gelenkstücken mit einem wagerechten und einem lotrechten Arme, die so miteinander drehbar verbunden sind, wie es die schematische Fig. 213 andeutet. Die lotrechten Arme werden durch Spiralfedern von gleicher Stärke miteinander verbunden. In der schematischen Fig. 213 befinden sich immer je eine, in der Abbildung von Fig. 212 immer je zwei Spiralfedern zwischen den lotrechten Armen. Die Spannungen dieser Spiralfedern sollen die zwischen zwei benachbarten Querschnitten eines Freiträgers geweckten elastischen Spannungen darstellen. Der aus den wagerechten Armen der Gelenkstücke zusammengesetzte Teil veranschaulicht die neutrale Faser des Freiträgers. Der Apparat stellt nur die Verhältnisse oberhalb der neutralen Faser dar. Sollten auch die Verhältnisse in den unteren Fasern dargestellt werden, so müßten die lotrechten Arme nach unten verlängert werden, und hier müßten Spiralfedern angebracht werden, die den oberen Spiralfedern gleich sind, aber auf Druck beansprucht werden. Da nun die Verhältnisse oberhalb und unterhalb der neutralen Faser einander entgegengesetzt gleich sind, so genügt die Untersuchung der in den oberen Fasern auftretenden Verhältnisse.

Es geht ohne weiteres aus dem Apparate hervor, daß eine am freien Ende des Freiträgers angebrachte Belastung eine Ausdehnung der Federn bewirkt. Einer **Verbreiterung** des Freiträgers würde eine Vermehrung der an den einzelnen Stellen angebrachten Federn oder ein Ersatz der vorhandenen Federn durch stärkere entsprechen. Die elastische Spannung ist daher der Breite des Freiträgers direkt proportional oder, was dasselbe sagt: es müßte die eine Biegung erzeugende Kraft in demselben Maße wachsen wie die Breite, wenn der Biegungspfeil derselbe bleiben sollte, oder endlich: der Biegungspfeil ist der Breite des Trägers umgekehrt proportional.

Die Proportionalität des Biegungspfeiles mit der dritten Potenz der **Länge** ergibt sich aus folgender Überlegung: 1. Wenn die Länge des Trägers vergrößert wird, so nimmt in demselben Maße das Moment der biegenden Kraft zu. 2. Bei Vergrößerung der Länge wächst in demselben Verhältnisse die Gesamtlänge der gespannten Felder, also auch ihre Verlängerung, und damit die Senkung des freien Endes. 3. Der Freiträger wirkt wie ein großer Zeiger, durch dessen Verlängerung in demselben Maße die Größe seines Ausschlages wirkt. Es ist demnach die dritte Potenz der Länge auf drei verschiedene Gründe zurückzuführen: 1. Arm der Kraft, 2. elastische Dehnung, 3. Zeigervergrößerung.

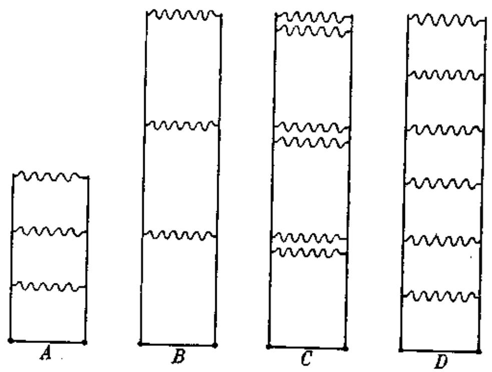

Fig. 214.

Um anschaulich zu verstehen, woher die dritte Potenz der Höhe kommt, betrachten wir den Apparat und die schematischen Bilder von Fig. 214. Bei A sind drei gleiche Federn als spannende Kraft zwischen zwei henachbarten Querschnitten angedeutet. Bei B sind dieselben Federn in einem gegen A auf das Doppelte vergrößerten Abstande angenommen. Soll der Querschnittsabstand bei B um denselben Winkel geändert werden wie bei A, so ist dazu das vierfache Kraftmoment erforderlich; denn die Federn müssen bei B um den doppelten Betrag wie bei A verlängert werden; ferner ist das Moment jeder Feder bei B doppelt so groß wie bei A. Denken wir uns nun jede Feder bei B durch zwei gleiche Federn ersetzt, so daß die Anordnung von C entsteht, so muß wieder eine Verdoppelung des Biegungsmomentes eintreten, wenn die Drehung um denselben Betrag bewirkt werden soll. Endlich bedenken wir, daß wir die Anordnung von C ohne weiteres in die Anordnung von D übergehen lassen können; denn bei einem wirklichen Freiträger liegen die einzelnen „Federn" so dicht beieinander, daß eine Verschiebung der Federn in dem Sinne von Figur C nach D ohne Einfluß auf das Gesamtergebnis bleibt. Die Anordnung von D stellt nun eine Verdoppelung der Höhe der Anordnung von A vor, d. h. sie veranschaulicht eine Verdoppelung der Höhe des Freiträgers. Aus unserer Überlegung folgt, daß die dritte Potenz der Höhe auf drei verschiedene Gründe zurückzuführen ist: 1. Vergrößerung des Armes der elastischen Kräfte, 2. Vergrößerung der erforderlichen Verlängerung, 3. Vermehrung der elastischen Kräfte.

§ 62. Elastizität der Drillung.

Klemmen wir das obere Ende eines Drahtes an einem festen Ständer oder unter der Decke des Zimmers fest und lassen auf das untere Ende in wagerechter Ebene ein Kräftepaar wirken, so wird dieses Ende gedrillt. Die Anordnung geht aus Fig. 215 hervor. An dem unteren Ende des Drahtes ist ein Querarm von der Länge a cm befestigt, an dessen beiden Enden zwei Fäden festgeknüpft sind, die über Rollen geführt werden und deren lotrecht herabhängende Enden durch Wagschalen mit Gewichtstücken belastet werden. Der Versuch ist so einzurichten, daß die Richtung der Fäden zur Richtung des Querarmes senkrecht ist. Wirkt an jedem Ende die Kraft G, so ist das Moment des Kräftepaares $G \cdot a$. Um den Querarm um den Winkel arc $180^0 = \pi$ (Radian) zu drehen, muß man die Belastung vergrößern. Die Vergrößerung des Drehmomentes betrage $P \cdot a$. Um den Draht wieder um den Winkel π weiter zu drehen, muß man das Moment wieder um denselben Betrag $P \cdot a$ vergrößern. Es stellt sich also heraus, daß *die Drillung (Torsion) dem Drehungsmomente direkt proportional ist.* Stahl- und Messingdrähte von 2—3 m Länge und 0,5 mm² Querschnitt vertragen eine mehrmalige vollständige Verdrehung, ohne daß die Elastizitätsgrenze überschritten wird. Das Drehmoment, das den Torsionswinkel arc $\varphi = 1$ (Radian) erzeugt, heißt das **Torsionsmoment** des Drahtes oder die **Direktionskraft**. Zwischen dem Drehungsmomente Δ, der Länge l, dem Querschnittsradius r des gedrillten Drahtes und dem Torsionswinkel φ besteht die Gleichung:

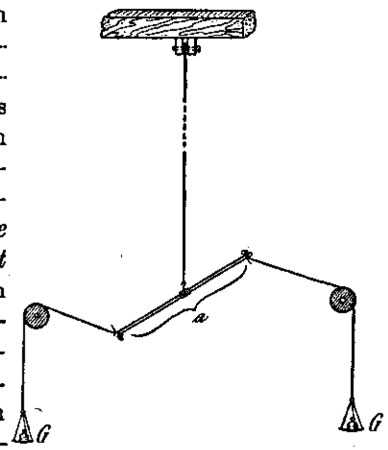

Fig. 215. Drillung durch ein Kräftepaar.

$$\Delta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{T \cdot r^4}{l} \cdot \varphi.$$

Hierin entspricht der Faktor $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{T \cdot r^4}{l}$, den wir in § 57 mit $\mathfrak{M}_1$ bezeichnet haben, der Federkonstante (die Starre) k im harmonischen Kraftgesetze auf S. 106. Die Größe T bedeutet eine vom Stoffe des Drahtes abhängige Konstante, die **Torsionsmodul** (Drillungsmodul) genannt wird. Der Drillungsmodul wird wie der Elastizitätsmodul gewöhnlich auf den in mm² ausgedrückten Querschnitt und auf Kilogrammkräfte bezogen; er beträgt annähernd für Stahl 8000 kg*/mm², für Messing 3000 kg*/mm².

Die potentielle Energie eines um den Winkel φ gedrillten Drahtes ist das halbe Produkt aus dem erzeugten Drehmomente und dem Drehwinkel, also $E = \frac{\Delta \cdot \varphi}{2} = \frac{1}{2} \mathfrak{M}_1 \cdot \varphi^2$ (S. 106).

§ 63. Festigkeit.

Wenn man einen lotrecht hängenden Draht eines Stoffes von ausgesprochener Elastizität, wie z. B. Flußeisen, an seinem unteren Ende belastet, so erfolgt die Verlängerung zunächst proportional mit der Belastung, während gleichzeitig der Draht in einen elastischen Spannungszustand versetzt wird. Dieser macht die eingetretene Längenänderung wieder rückgängig, wenn die Belastung entfernt wird. Die Spannung des Drahtes ist hierbei gleich der verlängernden Kraft, also gleich der Belastung. Von einer bestimmten Belastung an ist die Verlängerung stärker, als der Proportionalität entsprechen würde. Dann ist die **Proportionalitätsgrenze** erreicht. Wenn die Belastung fortgenommen wird, so soll der Draht seine ursprüngliche Länge vollkommen wieder annehmen. Von einer gewissen Belastung ab bleibt aber auch nach der Entlastung ein feststellbarer Restbetrag der Verlängerung übrig, der sich nicht zurückbildet. Dann ist der Draht über seine **Elastizitätsgrenze** (S. 181) hinaus gedehnt worden. Zur Bestimmung der Proportionalitätsgrenze und Elastizitätsgrenze sind in der Technik nach Übereinkunft ganz bestimmte Vorschriften festgesetzt worden, da an und für sich die Begriffe ziemlich unbestimmter Natur sind. Denn je nach der Feinheit, mit welcher die Verlängerungen und der Dehnungsrest gemessen werden, erhält man verschiedene Werte für Belastungen, durch welche jene Grenzen zahlenmäßig angegeben werden. Erfahrungsmäßig liegen beide Grenzen einander immer sehr nahe. Bei weiterer Belastung tritt fast plötzlich eine so bedeutende Verlängerung ein, daß es scheint, als ob die inneren elastischen Spannungskräfte überwunden seien. In diesem Augenblicke beobachtet man auf der Oberfläche des Drahtes eigentümliche Figuren, die auf innere Umlagerungen der einzelnen Teile hindeuten.

Fig 216. Zerrissener Eisenstab.

Fig. 216 zeigt die Figuren auf der Oberfläche eines zylindrischen Eisenstabes von 2 cm Durchmesser, der einer steigenden Belastung bis zu 12 200 kg* ausgesetzt wurde. Bei 12 200 kg* zerriß der Stab. Die beschriebene starke Dehnung trat bei 7 900 kg* Belastung ein.

Man nennt diese Belastung die **Fließgrenze** oder **Streckgrenze**. Nachdem die Dehnung ihren größten Wert erreicht hat, kann die Belastung wieder um einen verhältnismäßig geringen Betrag vergrößert werden (beim beschriebenen Eisenstabe bis 12 200 kg*), dann erfolgt an irgendeiner Stelle eine starke Einschnürung des Drahtes, und der Draht zerreißt. Die Belastung im Augenblicke des Zerreißens heißt die **Bruchbelastung** des Körpers.

Die Bruchbelastung eines Körpers ist dem Querschnitte proportional. Wenn man die Belastung eines Körpers im Augenblicke des Zerreißens durch seinen ursprünglichen Querschnitt dividiert, so erhält man die auf die Querschnittseinheit bezogene **Zerreißfestigkeit** oder **Zugfestigkeit**. Sie beträgt beim beschriebenen Eisenstabe

$$\frac{12\,200}{\pi} = 3\,880 \text{ kg}^*/\text{cm}^2 = 39 \text{ kg}^*/\text{mm}^2.$$

Man übersieht die beschriebenen Verhältnisse am besten durch Zeichnung einer **Spannungsschaulinie**, bei der auf der Abszissenachse die Verlängerung eines Eisenstabes, auf der Ordinatenachse die entsprechende Belastung aufgetragen wird. Eine solche Schaulinie hat die in Fig. 217 dargestellte Form. Bis A besteht Proportionalität zwischen Belastung P und Verlängerung Δl, es ist also die zu A gehörige Belastung die **Proportionalitätsgrenze**. In ihrer Nähe liegt die Elastizitätsgrenze. In B ist die **Fließgrenze** erreicht, der Stab verlängert sich dann bis C ohne Vergrößerung der Spannung. Von C aus nimmt die Spannung wieder zu, bis D, wo eine Querschnittsverminderung des Stabes und kurz darauf Bruch erfolgt; die Ordinate von D gibt die **Bruchbelastung** des Stabes an, oder die **Zugfestigkeit**, wenn der Stab die Flächeneinheit als Querschnitt hat.

Die Zerreißfestigkeit der wichtigsten in Betracht kommenden Körper ist in Tabelle III zusammengestellt.

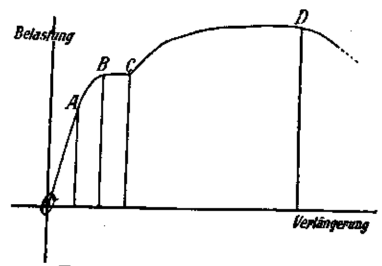

Fig. 217. Spannungsschaulinie.

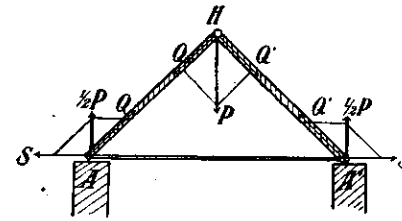

Fig. 218. Spannungen in Dachträgern.

Ähnlich wie gegen das Zerreißen verhalten sich die Körper gegen das Zerdrücken. Die Bruchbelastung ist dem Querschnitte proportional.

Die Lehre von der Festigkeit ist von besonderer Wichtigkeit bei dem Bau von Brücken, Dächern usw. aus Eisenstäben. Die Stäbe werden so zusammengesetzt, daß sie alle nur auf Druck und Zug beansprucht werden, da man so die sicherste Gewähr hat, daß die berechneten Verhältnisse den tatsächlichen Verhältnissen entsprechen.

Wir beschränken uns auf die Besprechung eines einzelnen Beispiels: Es soll der Zwischenraum zwischen zwei Mauern A und A' durch ein Dach von der in Fig. 218 dargestellten Form überspannt werden, das im Querschnitte aus zwei Stangen AH und $A'H$ besteht, die an ihren unteren Enden durch die Querstange AA' verbunden werden. In H soll eine Kraft P wirken (also z. B. eine Last hängen), der die Festigkeit des Daches widersteht.

Die Kraft P erzeugt in A und A' je einen Auflagerdruck $\frac{P}{2}$, denen die Festigkeit der Mauern Widerstand leistet, indem sie gegen das Dach von unten nach oben drücken. Wir zerlegen die in H wirkende Kraft P in zwei in der Richtung der Stangen HA und HA' wirkende Komponenten Q und Q' nach dem Kräfteparallelogramm. Ebenso zerlegen wir die beiden in A und A' wirkenden Kräfte $\frac{P}{2}$ in die beiden Komponenten S und Q bzw. S' und Q' nach dem Kräfteparallelogramm. Q wirkt in der Richtung AH und muß der Komponente Q der Kraft P gleich sein. S und S' bewirken einen Zug auf die Stange AA'. Man muß nun Q und S bzw. Q' und S' berechnen und kann dann unter Berücksichtigung der bekannten Zahlenwerte für Druck und Zugfestigkeit den Querschnitt der Stangen AH, $A'H$ und $A'A$ berechnen, der diese Druck- und Zugkräfte auszuhalten vermag. Die Querschnitte werden stets so gewählt, daß ein gewisses Vielfaches der Kraft P durch die Querschnitte aufgenommen werden kann; dieses Vielfache heißt der **Sicherheitsfaktor.**

Zur Veranschaulichung der Spannungsverhältnisse, die in einfachen Dachkonstruktionen auftreten, dient der in Fig. 219 abgebildete einfache Apparat, dessen Anordnung aus der Figur genügend deutlich hervorgeht. Das am oberen Querbalken angebrachte Gewicht zieht die zwischen den beiden unteren Querbalken angebrachte Spiralfeder auseinander. Aus der Verlängerung der Feder kann man die erzeugte Spannung berechnen. Die Auflagerdrucke kann man bestimmen, in-

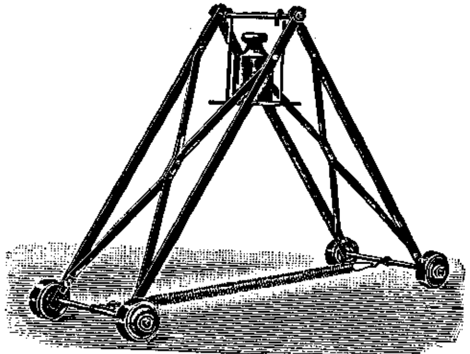

Fig. 219.

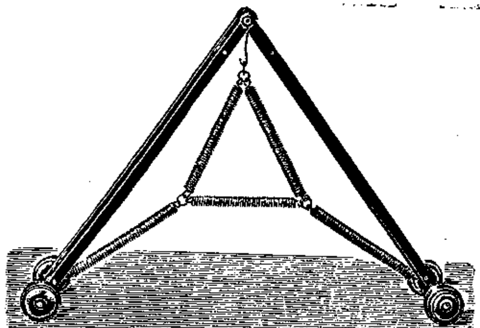

Fig. 220.

Zur Veranschaulichung der Auflagerdrucke.

dem man das Dach mit dem einen Auflager auf eine Wagschale einer Wage setzt. In Fig. 220 ist angegeben, wie man denselben Apparat benutzen kann, um die Spannung in verwickelteren Dachkonstruktionen zu veranschaulichen und zu messen.

§ 64. Die Biegungsfestigkeit.

Dort, wo man nicht durch passende Stangenverbindung die ganze auf einen Körper wirkende Kraft in Zug- und Druckkräfte auflösen kann, muß man die durch die Biegung erzeugten Spannkräfte an den einzelnen Stellen des gebogenen Körpers nach der Anleitung von § 61 berechnen und zur weiteren Auswertung zugrunde legen.

Wir beschränken uns auch hier auf die Berechnung der Biegungsfestigkeit eines **Freiträgers.**

In einer Faser, die von der neutralen Faser den Abstand e hat, beträgt die Spannung $\varkappa$ nach § 61

$$\varkappa = \frac{\mathfrak{M} \cdot e}{\Theta}.$$

Hierin bedeutet $\mathfrak{M}$ das die Biegung erzeugende Kraftmoment und Θ das Trägheitsmoment des Trägerquerschnitts an der untersuchten Stelle.

Ein Bruch des Trägers muß offenbar dort eintreten, wo die Spannung $\varkappa$ ihren größten Wert erreicht.

Unter der Voraussetzung, daß der Balken an allen Stellen denselben Querschnitt hat, ist das Trägheitsmoment Θ des Querschnittes an allen Stellen dasselbe. Die Spannung $\varkappa$ nimmt also dort ihren größten Wert an, wo das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$ und der Abstand e die größten Werte annehmen. Das Biegungsmoment ist das Produkt aus der Belastung am freien Ende und der Entfernung des freien Endes vom

untersuchten Querschnitte. Daraus folgt, daß das Biegungsmoment am eingespannten Ende seinen größten Wert, nämlich $\mathfrak{M} = P \cdot l$, annimmt. Ferner ist die äußerste Faser am weitesten von der neutralen Faser entfernt, also nimmt e für diese Faser seinen größten Wert an. Hieraus folgt, daß ein Bruch des Balkens an der äußersten Faser des eingespannten Endes erfolgen muß.

Der Bruch tritt ein, wenn an dieser Stelle, die der **gefährliche Querschnitt** heißt, die Spannung größer wird als die Bruchbelastung des Körpers.

Beispiel: Welche Belastung kann ein Freiträger von der Länge l mit rechteckigem Querschnitte von der Höhe h und der Breite b tragen?

Im gefährlichen Querschnitte wird $\mathfrak{M} = P \cdot l$. Ferner wird $e = \frac{h}{2}$, und das Trägheitsmoment des rechteckigen Querschnittes wird nach S. 188

$$\Theta = \tfrac{1}{12} b h^3.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung $\varkappa = \frac{\mathfrak{M} \cdot e}{\Theta}$ ein, so wird

$$\varkappa = \frac{Pl \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{12} b h^3} = \frac{6 Pl}{b h^2}.$$

Hieraus berechnet sich

$$\boldsymbol{P = \frac{\varkappa}{6} \cdot \frac{b h^2}{l}}.$$

Die größtmögliche Belastung eines Balkens von rechteckigem Querschnitte ist der Breite und dem Quadrat der Höhe direkt, aber der Länge umgekehrt proportional.

Für einen Balken mit kreisförmigem Querschnitte wird

$$\Theta = \tfrac{1}{4} \pi r^4, \quad e = r,$$

folglich

$$\boldsymbol{P = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\varkappa r^3}{l}}.$$

Die Bruchbelastung eines Balkens mit kreisförmigem Querschnittee ist der dritten Potenz des Querschnitthalbmessers proportional.

§ 65. Der Stoß.

Wenn ein bewegter Körper auf einen andern stößt, so tritt eine Geschwindigkeitsveränderung, vielfach auch eine Richtungsveränderung der Bewegung beider Körper ein. Wir behandeln nur den Fall, daß die beim Stoße zusammentreffenden Körper kugelförmig sind, und daß die Stoßrichtung mit der Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte zusammenfällt. In diesem Falle heißt der Stoß ein gerader, zentraler Stoß. Beim schiefen Stoße schließt die Bewegungsrichtung des stoßenden Körpers mit der Zentralen einen Winkel ein.

Der Körper m_1, der sich mit der gleichförmigen Geschwindigkeit c_1 bewegt, stoße den Körper m_2, der sich in derselben Richtung mit der Geschwindigkeit c_2 bewegt (Fig. 221). Es muß natürlich c_1 größer als c_2 sein. Während die Körper beim Stoße miteinander in Berührung sind, tritt eine Kraft zwischen ihnen auf, die eine Veränderung der beiden Geschwindigkeiten bewirkt. Für beide Körper wirkt diese Kraft

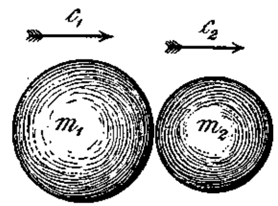

Fig. 221. Zentraler Stoß.

gleich lange Zeit, folglich ist ihr Impuls für beide Massen gleich groß. Nach § 34 ist der Impuls gleich der Bewegungsgröße. Folglich erfahren beide Massen dieselbe Veränderung der Bewegungsgrößen. Da aber die zwischen beiden Massen auftretenden Kräfte in entgegengesetzter Richtung wirken, so ist die Veränderung der einen Bewegungsgröße positiv, die der anderen negativ zu rechnen. Daraus folgt:

Beim Stoße bleibt die Summe der Bewegungsgrößen beider stoßenden Massen unverändert. Dieser Satz gilt für jede Art des Stoßes, einerlei, ob die stoßenden Körper elastisch oder unelastisch sind.

Stoß unelastischer Körper. Stoßen zwei unelastische Körper aufeinander, so treten zwischen beiden keine elastischen Spannungen auf. Beide Körper gehen nach dem Stoße mit gleicher Geschwindigkeit weiter.

Diese Geschwindigkeit sei v. Vor dem Stoße war die Summe der Bewegungsgrößen $m_1 c_1 + m_2 c_2$. Nach dem Stoße ist sie $(m_1 + m_2)v$.

Wegen der Unveränderlichkeit der Bewegungsgrößen ist

$$(m_1 + m_2)v = m_1 c_1 + m_2 c_2 .$$

Hieraus folgt

$$v = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} .$$

Die Geschwindigkeitsverminderung der stoßenden Masse ist

$$c_1 - v = c_1 - \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (c_1 - c_2)}{m_1 + m_2} .$$

Die Geschwindigkeitsvermehrung der gestoßenen Masse ist

$$v - c_2 = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} - c_2 = \frac{m_1 (c_1 - c_2)}{m_1 + m_2} .$$

In dem besonderen Falle, wo die Masse m_1 gegen eine feste Wand stößt, deren Masse $m_2 = \infty$ und deren Geschwindigkeit $c_2 = 0$ ist, wird, wie aus der Formel und auch aus der einfachen Überlegung hervorgeht, die Geschwindigkeit $v = 0$, d. h. die Masse bleibt an der festen Wand liegen.

Beim Stoße unelastischer Körper findet ein Verlust an kinetischer Energie statt, denn vor dem Stoße war die gesamte kinetsche Energie

$$E_1 = \frac{m_1 c_1^2}{2} + \frac{m_2 c_2^2}{2} ,$$

nach dem Stoße ist sie

$$E_2 = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)(m_1 c_1 + m_2 c_2)^2}{2(m_1 + m_2)^2} = \frac{(m_1 c_1 + m_2 c_2)^2}{2(m_1 + m_2)} ,$$

der Energieverlust ist

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{m_1 c_1^2}{2} + \frac{m_2 c_2^2}{2} - \frac{(m_1 c_1 + m_2 c_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 m_2 (c_1 - c_2)^2}{2(m_1 + m_2)} .$$

Stoß elastischer Körper. Stoßen zwei elastische Körper aufeinander, so stimmt der Vorgang mit dem Stoße unelastischer Körper bis zu dem Augenblicke genau überein, wo die Geschwindigkeit beider Körper gleich groß geworden ist. Dann aber wird die beim Stoße verursachte Formänderung infolge der elastischen Spannung zwischen den beiden Körpern wieder rückgängig gemacht. Daraus folgt, daß die Geschwindigkeitsveränderung, die die Körper beim Zusammenstoßen erfahren, beim Auseinandergehen noch einmal eintritt. Folglich ist die gesamte Geschwindigkeitsveränderung doppelt so groß wie die für den unelastischen Stoß berechnete.

Die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der beiden Körper nach dem Stoße berechnen sich daher zu

$$v_1 = c_1 - 2(c_1 - v) = c_1 - 2\frac{m_2 (c_1 - c_2)}{m_1 + m_2} ,$$

$$v_2 = c_2 + 2(v - c_2) = c_2 + 2\frac{m_1 (c_1 - c_2)}{m_1 + m_2} .$$

Der Unterschied der Geschwindigkeiten der beiden Körper ist vor dem Stoße $c_1 - c_2$, nach dem Stoße $v_1 - v_2$. Durch Subtraktion der letzten beiden Gleichungen erhält man: $v_1 - v_2 = -(c_1 - c_2)$. Die Geschwindigkeitsdifferenz ist also vor und nach dem Stoße dieselbe, hat aber nach dem Stoße das entgegengesetzte Vorzeichen wie vor dem Stoße.

Die kinetische Energie der beiden Körper zusammen betrug vor dem Stoße

$$E_1 = \frac{m_1 c_1^2}{2} + \frac{m_2 c_2^2}{2} ,$$

sie ist nach dem Stoße

$$E_2 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{1}{2}\left[m_1\left(c_1 - 2\frac{m_2 (c_1 - c_2)}{m_1 + m_2}\right)^2 + m_2\left(c_2 + 2\frac{m_1 (c_1 - c_2)}{m_1 + m_2}\right)^2\right].$$

Wenn man die rechte Seite der Gleichung ausrechnet, folgt

$$E_2 = \frac{m_1 c_1^2}{2} + \frac{m_2 c_2^2}{2} .$$

Die kinetische Energie ist nach dem Stoße ebenso groß wie vor dem Stoße.

Besondere Fälle. 1. War der gestoßene Körper vor dem Stoße in Ruhe, war also $c_2 = 0$, so vereinfachen sich die Formeln zu

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2) c_1}{m_1 + m_2} , \qquad v_2 = \frac{2 m_1 c_1}{m_1 + m_2} .$$

Die Endgeschwindigkeit des stoßenden Körpers ist also positiv, null oder negativ, je nachdem $m_1 \gtreqless m_2$ ist; folglich behält der stoßende Körper seine ursprüngliche Bewegungsrichtung mit verminderter Geschwindigkeit bei, wenn seine Masse größer als die gestoßene Masse ist; er kommt zur Ruhe, wenn die beiden Massen gleich sind; er bewegt sich nach dem Stoße in entgegengesetzter Richtung, wenn seine Masse kleiner ist als die gestoßene; die Bewegungsrichtung des gestoßenen Körpers stimmt stets mit der Bewegungsrichtung des Stoßes überein.

2. Sind die beiden Massen m_1 und m_2 gleich, so wird

$$v_1 = c_1 - \frac{2 m_1 (c_1 - c_2)}{2 m_1} = c_2 ; \qquad v_2 = c_1 ;$$

die beiden Körper bewegen sich nach dem Stoße mit vertauschten Geschwindigkeiten.

Zur Vorführung der Stoßvorgänge kann man eine schmale Messingrinne von dreieckigem Querschnitte benutzen, in die man einige Stahlkugeln, wie

wie sie in den Lagern der Fahrräder Verwendung finden, hineinlegt (Fig. 222). Die Rinne R ruht wagerecht auf dem Tische, doch ist das eine Ende ein wenig in die Höhe gebogen, so daß eine hier eingelegte Kugel K beim Loslassen herunterrollt und mit einer von der Fallhöhe abhängigen Geschwindigkeit gegen die in der Rinne liegenden Kugeln S stößt. Man erkennt, daß beim Stoße einer Kugel gegen eine gleich große die stoßende Kugel zur Ruhe kommt, während sich die gestoßene mit der Geschwindigkeit der stoßenden weiter bewegt. Liegen in dem wagerechten Teile der Rinne mehrere Kugeln bei einander (in der Figur vier gleiche Kugeln), so stößt die erste gestoßene sofort gegen die zweite, diese gegen die dritte usw. Jede Kugel ist nur einen Augenblick in Bewegung, gibt dann aber gemäß der letzten vorhergehenden Betrachtung sowohl ihre gesamte kinetische Energie sofort als auch die empfangene Bewegungsgröße an die nächste ab, so daß nur die letzte freie Kugel mit der Geschwindigkeit der stoßenden Kugel sich fortbewegt. Der Stoß wird durch die ganze Kugelreihe bis zur letzten Kugel fortgepflanzt.

Fig. 222. Stoß von Stahlkugeln.

Wenn man bei K gleichzeitig zwei Kugeln losläßt, so entfernen sich auch bei S zwei Kugeln. Würde in der Kugelreihe nur die kinetische Energie von Kugel zu Kugel mitgeteilt, und wäre diese allein für die Stoßvorgänge maßgebend, so könnte auch die letzte Kugel der Reihe für sich allein aber mit einer Geschwindigkeit, welche im Verhältnis $\sqrt{2}$ vergrößert wäre, sich entfernen. Der Versuch lehrt also, daß nicht nur die kinetische Energie sondern auch der Impuls von Kugel zu Kugel unverändert übertragen wird. Die Masse der am Ende abgeschleuderten Kugeln ist gleich der Masse der stoßenden Kugeln, also bei gleich großen Kugeln ist auch die Anzahl der stoßenden und der fortgeschleuderten Kugeln gleich. Eine Reihe sich berührender, vollkommen elastischer Punkte hat also die Eigenschaft, sowohl Energie wie auch Bewegungsgröße durch sich hindurch ungeändert fortzuleiten. Man könnte von einer *Energieströmung* und einer Strömung von Bewegungsgröße, *Impulsströmung*, durch die Reihe hindurch sprechen.

Man kann die beim elastischen Stoße auftretenden Vorgänge auch gut mit dem in § 201 abgebildeten Apparate vorführen.

Die abgeleiteten Formeln gelten nur für die beiden idealen Fälle, daß die Kugeln entweder vollkommen unelastisch oder vollkommen elastisch sind. Sie sind also nur Näherungsformeln an die Wirklichkeit, da es in der Natur weder vollkommen elastische noch vollkommen unelastische Körper gibt. Im besonderen wurde vorausgesetzt, daß die Elastizität die eingetretene Formänderung sofort nach Aufhören der deformierenden Ursache beseitigt. In Wirklichkeit vergeht ein gewisser Zeitraum, bis ein elastischer, deformierter Körper, auch innerhalb seiner Elastizitätsgrenze, seine alte Gestalt wieder vollständig annimmt.

Es wird ferner nicht berücksichtigt, daß die Kugeln bei dem in Fig. 222 abgebildeten Versuche ins Rollen geraten, daß also ein Teil ihrer Bewegungsenergie durch die Winkelgeschwindigkeit der Kugeln bedingt ist. Die Energieübertragung

verläuft daher nicht völlig nach den abgeleiteten Formeln. Der Versuch von Fig. 222 gewährt also keine reinen Verhältnisse im Vergleiche mit den bei der vorhergehenden Betrachtung gemachten Voraussetzungen.

§ 66. Fortpflanzung eines Impulses in einem elastischen Stabe.

Wenn man daher auf das eine Ende eines geradlinigen, elastischen Stabes einen kurzen Schlag ausübt, so pflanzt sich dieser in ähnlicher Weise fort wie der Stoß in der Kugelreihe von Fig. 222 oder dem in § 201 abgebildeten Stoßapparate. Es soll die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Impulses in dem Stabe berechnet werden.

Legt man eine ziemlich lange (2 m), locker gewundene Schraubenfeder aus Stahldraht auf einen glatten Tisch und erteilt dem einen Ende der Feder mit der Hand einen kurzen Ruck in der Längsrichtung, so kann man bequem mit dem Auge verfolgen, wie sich der Ruck in der Schraubenfeder fortpflanzt. Das verschobene Ende der Feder bleibt dabei in der verschobenen Stellung liegen, und es folgen nacheinander alle Windungen bis zur letzten. Man sieht dann aber weiter, wie die Verrückung vom anderen Ende durch die Feder hindurch im selben Verrückungssinne zurückkehrt. Ist die Reibung gegen die Unterlage gering genug, so kann man beobachten, wie das zuerst gezogene Ende durch den zurückkehrenden Impuls eine Verrückung im gleichen Sinne mit der durch die Hand ursprünglich ausgeübten erfährt. Würde man die Reibung ganz verhindern können, so müßte daher die Schraubenfeder bei jeder Rückkehr des Impulses zum ersten Ende sich immer weiter im selben Sinne um das gleiche Stück verschieben.

Klemmt man bei dem Versuche das zweite Ende fest ein, so verläuft die Erscheinung anders. Der zurückkehrende Impuls hat am unbeweglich festgeklemmten Ende eine Umkehr der Impulsrichtung erfahren. Der zurückkehrende Impuls ruft also am freien Ende eine Verrückung im umgekehrten Sinne zu der ursprünglichen Verrückung hervor.

Störungsfreier verläuft der zweite Versuch, wenn man die Schraubenfeder an die Decke des Zimmers hängt und dann das untere, freihängende Ende durch einen kurzen Ruck mit der Hand nach oben bewegt oder nach abwärts zieht. Die hierdurch erzeugte Verdichtung oder Verdünnung der Drahtwindungen pflanzt sich leicht beobachtbar nach oben fort und wird am Ende der Aufhängung zurückgeworfen. Solange der Impuls noch nicht zurückgekehrt ist, bleibt das freihängende Ende ruhig in der Höhe stehen, die ihm die ruckende Hand gegeben hat. Bei der Rückkehr des Impulses schnellt es dann um ebenso viel über seine ursprüngliche Ruhelage nach der anderen Seite hinaus, als es vorhin verschoben wurde. Man kann viele Hin- und Hergänge des Impulses verfolgen und demnach eine auf- und abruckende Bewegung des freihängenden Endes beobachten.

Man kann auch die Fortpflanzung des Impulses an einem langen, stehenden Eisenbahnzuge (bei dem aber die Bremsen gelöst sein müssen) leicht beobachten, wenn beim Zusammenstellen des Zuges ein Wagen etwas unsanft gegen das eine

Ende gestoßen wird. Auch die Zurückwerfung des Impulses am anderen Ende mit gleicher Impulsrichtung ist dabei leicht festzustellen.

Die Erklärung der Vorgänge schließt sich an die Versuche im vorigen Paragraphen mit einer Reihe sich berührender elastischer Kugeln an. Wie dort von einer Kugel zur anderen der Impuls und die Energie im vollen Betrage weitergegeben wird, so hier von einem Längenelemente des elastischen Körpers zum nächsten. An einer festen Wand kehrt sich der Impuls um, genau wie bei einer elastischen Kugel, die auf eine feste Wand prallt.

Wir nehmen an, der in Fig. 223 abgebildete Stab sei so lang, daß der auf dem einen Ende durch den ausgeübten Schlag erregte Impuls von der mittleren Kraftwirkung F nach genau einer Sekunds am anderen Ende ankommt; dann ist die Länge c dieses Stabes gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Impulses (§ 65. S. 198).

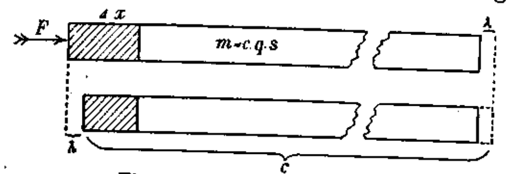

Fig. 223. Fortpflanzung eines Impulses.

Hat der Stab den Querschnitt q und die Dichte s, so ist seine Masse $m = c \cdot q \cdot s$. Die während des Zeitelementes Δt wirkende Kraft F verkürzt ein gewisses Längenelement Δx des Stabes, das in der Figur gestrichelt ist, um die kleine Länge λ. Nach Beendigung des Schlages hat dann das Längenelement die im unteren Teile der Figur gestrichelte dargestellte Länge.

Die elastische Entspannung, die dieser Teil erleidet, bewirkt eine Zusammendrückung des nächstfolgenden Längenelementes, das sich dann wieder entspannt und das sich hier anschließende Längenelement zusammendrückt. So schreitet die Verdichtung immer weiter und kommt nach einer Sekunde (wegen der entsprechend angenommenen Länge c des Stabes) am Ende des Stabes an. Der ganze Stab wird demnach während einer Sekunde um die Strecke λ verschoben; mit anderen Worten: der Stab bewegt sich in einer Sekunde infolge der während des Zeitraumes Δt wirkenden Kraft F um die Strecke λ vorwärts, d. h. er erlangt die Geschwindigkeit λ. Wenden wir nun auf den so besprochenen Vorgang die in § 34 abgeleitete Beziehung, daß ein Impuls gleich der Bewegungsgröße der in Bewegung gesetzten Masse ist, auf die ganze Masse des Stabes an, so folgt die Gleichung

$$F \cdot \Delta t = m \cdot \lambda .$$

Die Kraft F ist diejenige Kraft, die am Längenelemente Δx des Stabes die Längenveränderung λ erzeugt. Wir können nun diese Kraft in eine einfache Beziehung zum Elastizitätsmodul e des Stabes setzen: Der Elastizitätsmodul ist diejenige Kraft, die die Länge eines Stabes von der Einheit des Querschnittes um seine eigene Länge verändert (S. 181). Die Kraft, die bei dem Stabelemente von der Länge Δx und dem Querschnitte q die Längenveränderung λ erzeugt, muß demnach die Größe haben $\frac{q \cdot e \cdot \lambda}{\Delta x}$ (S. 181). Diese Kraft ist aber gleich der Kraftgröße F unseres Impulses, folglich ist

$$F = \frac{q \cdot e \cdot \lambda}{\Delta x} .$$

Setzen wir nun in die Gleichung

$$F \cdot \Delta t = m \cdot \lambda$$

den Wert $m = cqs$ und den eben abgeleiteten Wert für F ein, so erhalten wir

$$\frac{q \cdot e \cdot \lambda \Delta t}{\Delta x} = c \cdot q \cdot s \cdot \lambda .$$

In dieser Gleichung heben sich auf beiden Seiten die Größen q und λ fort, und wir können die Gleichung in der Form schreiben

$$\frac{e}{s} = c \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} .$$

Der Quotient $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ist die Geschwindigkeit, mit der sich der Impuls in dem Längenelement Δx fortpflanzt, denn in der Zeit Δt hat der Impuls bis zur Länge Δx des Stabes gewirkt. Diese Geschwindigkeit muß aber mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c des Impulses im ganzen Stabe übereinstimmen; es ist also $\frac{\Delta x}{\Delta t} = c$.

Setzen wir diesen Wert in die zuletzt abgeleitete Gleichung ein, so wird $\frac{e}{s} = c^2$, und hieraus folgt

$$c = \sqrt{\frac{e}{s}} .$$

In dieser Gleichung sind alle Größen im absoluten Maßsysteme auszudrücken. Man erhält dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Zentimetern. Gewöhnlich wird der Elastizitätsmodul in Kilogrammkräften, die auf einen Stab vom Querschnitte eines Quadratmillimeters wirken, angegeben. Diese Größe findet sich in Tabelle III. Man bezeichnet sie, wie in § 60, mit ε. Wenn man den Elastizitätsmodul ε unmittelbar aus der Tabelle III entnehmen und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c in Metern haben will, so muß man setzen

$$e = 981 \cdot 10^5 \varepsilon \quad \text{(S. 182)}$$

und muß das Ergebnis für c durch 100 dividieren. Es wird also

$$c = \frac{1}{100} \cdot \sqrt{\frac{98\,100\,000\,\varepsilon}{s}} \text{ Meter/Sekunde.}$$

Bei der verhältnismäßigen Unsicherheit in den Angaben der Werte für den Elastizitätsmodul einer Substanz dürfen wir $\sqrt{98\,100\,000} = 10000$ setzen. Tun wir das, so entsteht die einfache Formel

$$\mathbf{c = 100 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{s}}} \textbf{ Meter/Sekunde.}$$

Beispiel: Nach Tabelle III ist der Elastizitätsmodul des Stahles $\varepsilon = 21\,000$ kg*/mm², seine Dichte beträgt $s = 8{,}0$ g/cm³; folglich ist

$$c = 100 \sqrt{\frac{21\,000}{8{,}0}} = 5100 \text{ m/sec.}$$

Die berechnete Geschwindigkeit c ist also die Geschwindigkeit, mit der in dem elastischen Mittel der Impuls wandert, zugleich aber auch die Energie sich ausbreitet.

§ 67. Die Bewegungshindernisse. Reibung.

Als Bewegungshindernisse wirken besonders die Reibung und der Widerstand des Mittels. Die Reibung tritt dann ein, wenn sich ein fester Körper in Berührung mit einem anderen bewegt. Je nachdem die Körper aufeinander gleiten, oder der eine auf dem andern rollt, spricht man von **gleitender** und **wälzender Reibung**. Der Reibungswiderstand eines Zapfens in seinem Lager, die **Zapfenreibung**, ist vorwiegend gleitende Reibung. Die wälzende Reibung ist geringer als die gleitende Reibung; darum legt man zum Fortbewegen eines schweren Körpers auf dem Erdboden Walzen unter. Aus demselben Grunde verwendet man zur Lagerung leichtbeweglicher Achsen Kugellager.

Die Oberfläche der Körper ist stets mehr oder weniger rauh. Es gibt an der Berührungsfläche zweier Körper Unebenheiten, mit denen die Körper ineinandergreifen. Die Reibung kann daher zu einem Teile darauf zurückgeführt werden, daß bei der gegenseitigen Verschiebung der Körper diese Unebenheiten teilweise verbogen, teilweise sogar losgerissen werden und daß bei wagerechter Aufeinanderlage der obere Körper über die Unebenheiten hinweggehoben werden muß. Hierzu ist eine Arbeit erforderlich, die eine Verzögerung der Bewegung des einen Körpers gegen den zweiten, als ruhend angenommenen, bewirkt. Eine Verzögerung, also eine Geschwindigkeitsveränderung, wird durch eine Kraft verursacht. Daher müssen wir die Reibung als eine Kraft auffassen, die der Bewegung stets entgegengesetzt gerichtet ist.

Ein treffliches Beispiel, in welchem Maße durch solche Unebenheiten die Reibung zweier Flächen vergrößert wird, bieten zwei Holzbretter, auf die man, mit der rauhen Seite nach außen, Samt geleimt hat. Legt man die Bretter mit den Samtflächen aufeinander, so daß die Härchen ineinandergreifen, so haften die beiden Bretter mit bedeutender Kraft aneinander und bieten einer gegenseitigen Verschiebung außerordentlichen Widerstand.

Auch bei höchstmöglicher Glättung der Körperflächen, Ausschluß allen Staubes, der Feuchtigkeit und auch der Luft, bleibt aber immer ein wesentlicher Betrag an Reibung übrig. Reinigt man zwei gut eben geschliffene Glasplatten auf das bestmögliche, so zeigt sich die Reibung bei der Bewegung gegeneinander gewaltig erhöht. Es ist daher nicht angängig, die Reibung der Körper allein durch den Einfluß von Unebenheiten zu erklären; ein Teil von ihr hat seine Ursache auch in jener Kraft, mit der die beiden Körper aneinanderhaften, die man Adhäsion[1]) zu nennen pflegt. Die Größe der Reibung erweist sich aus diesem Grunde nicht allein als sehr abhängig von der mehr oder minderen Vollkommenheit der sich berührenden Flächen, sondern auch von Verunreinigungen.

Der **Reibungswiderstand** wird durch diejenige Kraft gemessen, die erforderlich ist, um einen in Bewegung befindlichen Körper in gleichförmiger Bewegung zu erhalten.

1) adhaerēre (lat.) = aneinanderhaften.

Die Beschleunigung, die die bewegende Kraft allein hervorrufen würde, ist dann gleich der Verzögerung, die der Reibungswiderstand hervorruft.

Man bestimmt den Reibungswiderstand eines Körpers auf einer ebenen, wagerechten Unterlage, indem man an dem Körper nach der Anordnung von Fig. 224 einen Faden befestigt, der zuerst wagerecht geführt ist, dann über eine Rolle geht und an dem Ende eine Wagschale trägt, die mit Gewichtsstücken belastet wird. Die Belastung wird so groß gemacht, daß sich der Körper gleichförmig auf der Unterlage weiter bewegt. Es stellt sich heraus, daß eine etwas größere Kraft erforderlich ist, wenn man den Körper aus der Ruhe heraus in Bewegung setzen will, als wenn die Bewegung nur gerade aufrechterhalten werden soll. Man bestimmt gewöhnlich nur die „Reibung der Bewegung", indem man bei vorgenommener Belastung der Wagschale

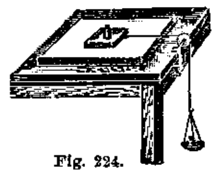
Fig. 224.

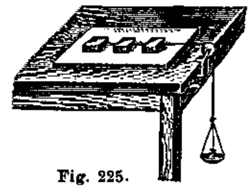
Fig. 225.

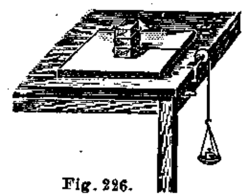
Fig. 226.

Die Reibung ist unabhängig von der Berührungsfläche und proportional dem Gewichte.

dem Körper einen kleinen Stoß erteilt und nun die Belastung so wählt, daß er dann seine Bewegung gleichförmig fortsetzt.

Wenn man den gleitenden Körper durch aufgesetzte Gewichtstücke belastet, so wird der Reibungswiderstand größer. Versuche, die zuerst Coulomb[1]) ausführte, ergeben das Gesetz, *daß der Reibungswiderstand R direkt proportional dem gesamten Gewichte des gleitenden Körpers (einschließlich der darauf gesetzten Belastung) ist.*

Nennt man den vom Körper senkrecht auf die Unterlage wirkenden Druck den **Normaldruck** N, die Reibungskraft R, so ist $\varrho = \frac{R}{N}$ eine beständige Größe. Der Quotient $\frac{R}{N}$ wird der **Reibungskoeffizient** ϱ genannt. Der Reibungskoeffizient ist von der Art der einander berührenden Flächen abhängig. Er beträgt für Metalle 0,15 bis 0,5.

Coulomb fand ferner: *Der Reibungswiderstand ist von der Größe der einander berührenden Flächen unabhängig.* Wenn man z. B. mehrere gleichartige Körper gleichförmig bewegen will, die nach der Anordnung von Fig. 225 hintereinander durch Fäden verbunden sind, so ist hierzu dieselbe Kraft erforderlich, als wenn man die Körper aufeinander stellt, wie Fig. 226 zeigt, obgleich die Berührungsfläche im ersten Falle dreimal so groß ist wie im zweiten Falle.

Der Reibungskoeffizient wird wesentlich herabgesetzt, wenn man zwischen die berührenden Flächen Fett, grüne Seife, Talk, Graphit usw. bringt.

1) A. Coulomb (1736—1806), franz. Militäringenieur, zul. Inspektor d. Unterr.wesens.

Solche Substanzen werden Schmiermittel genannt. Bei **Anwendung eines Schmiermittels ist der Reibungswiderstand nicht mehr von der Größe der berührenden Fläche unabhängig**; denn, wenn der Körper bei demselben Normaldrucke mit einer kleinen Fläche auf der Unterlage ruht, so werden die Schmiermittel leichter zwischen den berührenden Flächen weggedrückt, als wenn die Berührungsfläche größer ist.

Ruht ein Körper auf einer geneigten Bahn, z. B. ein Stein auf einem Brette (Fig. 227), dessen Neigung verändert werden kann, so kommt bei einem bestimmten Neigungswinkel α der Körper von selbst in Bewegung und bewegt sich gleichförmig abwärts. Das Gewicht G des Körpers wird nach § 39 in die Druckkomponente $N = G \cdot \cos\alpha$ und die Bewegungskomponente $W = G \cdot \sin\alpha$ zerlegt. Wird das Brett so geneigt, daß sich der Körper gleichförmig abwärts bewegt, so ist die Bewegungskomponente gleich dem Reibungswiderstande $R = N \cdot \varrho = G \cdot \varrho \cdot \cos\alpha$. Es ist also $W = R$, folglich ist

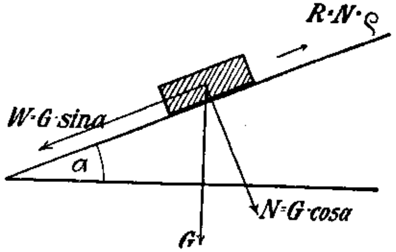

Fig. 227. Auf schiefer Ebene gleitender Stein.

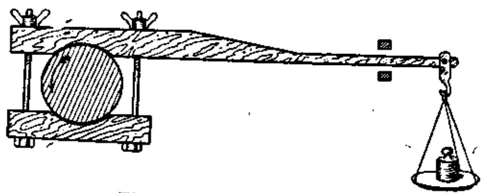
Fig. 228. Pronyscher Zaum.

$$G \cdot \sin\alpha = G \cdot \varrho \cos\alpha.$$

Hieraus folgt

$$\varrho = \operatorname{tang} \alpha.$$

Der Winkel, bei dem die gleichförmige Bewegung erfolgt, heißt der **Reibungswinkel**.

Die Reibungskoeffizient ist gleich der Tangente des Reibungswinkels.

Diese Beziehung bietet ein bequemes Mittel zur Bestimmung des Reibungskoeffizienten.

Der Pronysche Zaum.[1]) Mit Hilfe des Pronyschen Zaumes (Bremsdynamometers) (Fig. 228) wird die **Leistung** einer Maschine gemessen. Er besteht aus zwei Holzbacken, die mittels einiger Schrauben mit leicht zu regelnder Reibung auf die Welle einer Maschine, deren Leistung gemessen werden soll, festgeklemmt werden. An der einen Holzbacke ist eine Stange von etwa $^1/_2$ bis 1 m Länge angebracht, an deren Ende eine Wagschale zur Aufnahme von Gewichten hängt. Dreht sich die Welle der Maschine z. B. links herum, so wird der Zaum, wenn er nicht belastet ist, infolge der Reibung mit herumbewegt. Belastet man ihn, während die Maschine sich nicht dreht, am äußersten Ende, so dreht er sich bei genügend großer Belastung rechts herum, indem das von der Belastung ausgeübte Drehmoment die Reibung der Holzbacken an der Welle

1) Baron G. C. F. Prony (1755—1839), franz. Mathematiker.

überwindet. Man kann nun, wenn die Maschine die Welle dreht, die Belastung des äußersten Endes so einrichten, daß die Stange genau wagerecht in der Mitte zwischen zwei in geringem Abstande voneinander befindlichen Anschlägen einspielt. Dann ist der Reibungswiderstand gleich der an dem Umfang der Welle wirkenden, von der Maschine ausgeübten Kraft. Der Reibungswiderstand wird durch die Belastung P überwunden, die an dem Ende der Stange von der Länge l hängt.

Die Kraft P (Fig. 229) ist der an dem Umfange der Welle wirkenden Kraft W gleichwertig, wenn sie dasselbe Moment hat, wenn also $P \cdot l = W \cdot r$ ist, woraus $W = P \cdot \frac{l}{r}$.

Bei gleichförmigem Umlaufe der Welle ist die an dem Umfange der Welle wirkende Kraft K gleich dem Reibungswiderstande W, also ist auch $K = P \cdot \frac{l}{r}$.

Die Leistung finden wir, indem wir das Produkt aus Kraft und Weg (die Arbeit) durch die Zeit dividieren. Es ist also die Leistung

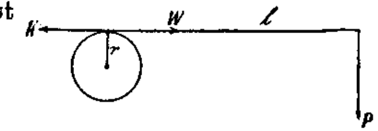

Fig. 229.

$$L = \frac{K \cdot s}{t} = \frac{P \cdot l}{r} \cdot \frac{s}{t}.$$

Dreht sich die Welle in der Zeit T einmal herum, so können wir für $t = T$ den Weg $s = 2\pi r$ setzen, und wir erhalten

$$L = \frac{2\pi}{T} \cdot P \cdot l.$$

Die Leistung der Maschine ist dem Momente der Belastung des Zaumes direkt proportional.

Die Formel gibt die Leistung in Sekundenerg, wenn die Belastung P in Dyn, die Länge l in Zentimetern und die Umdrehungszeit T in Sekunden angegeben ist.

§ 68. Der Widerstand des Mittels.

Bei der Bewegung eines Körpers in der Luft oder im Wasser drängt der Körper einen Teil des Mittels zur Seite, einen Teil nimmt er mit sich fort oder schiebt ihn vor sich her. Hierzu ist Arbeit nötig, die eine Verminderung der kinetischen Energie des Körpers, also eine Verminderung der Geschwindigkeit, bewirkt. Der Widerstand des Mittels hängt von der Form und Größe des Körpers ab. Maßgebend sind dafür sowohl seine vordere Fläche, die **Stirnfläche**, also auch seine hintere Fläche. Je schlanker und spitzer der Körper nach vorn ist, desto kleiner ist im allgemeinen sein Widerstand. Dieser kann aber auch dadurch verkleinert werden, daß der Querschnitt nach hinten allmählich und stetig abnimmt. Man erhält dann die sogenannte **Fischform** oder **Tropfenform** (da ein fallender Flüssigkeitstropfen durch die Luftreibung zu einer solchen Form verzerrt wird).

Bei einer quer zur Bewegungsrichtung stehenden Platte bildet sich auf der Vorderseite ein Raum erhöhten Druckes (der **Stau**), hinten ein Raum verminderten Druckes (der **Sog**) aus. In diesen letzteren strömt das flüssige

Mittel, Wasser oder Luft, von den Seiten her ein und gibt dadurch Anlaß zu einer *Wirbelbewegung* (§ 110, Fig. 414). Die Strömungslinien kann man sichtbar machen, auf der Oberfläche des Wassers z. B. durch aufgestreute Lycopodium-Samen (Bärlapp-Sporen), im Innern des Wassers durch feines Holzmehl eines spezifisch schweren Holzes. Man bemerkt mit diesem Hilfsmittel noch, daß die Flüssigkeit in der Bahn des bewegten Körpers in lebhaft durcheinanderwirbelnde, turbulente, Bewegung geraten ist. Häufig kann man beobachten, daß sich von der Rückseite der Platte ganz regelmäßig rechts oder links Wirbel ablösen, die noch eine Zeitlang im Wasser unabhängig von der Platte ihre regelmäßige Wirbelbewegung fortsetzen, bis diese in der allgemeinen turbulenten Bewegung verschwindet. Fahrten im Ruderboot geben leicht Gelegenheit, solche Wirbel im Raume hinter dem Ruderblatte unmittelbar zu erkennen; die kinetische Energie dieser regelmäßigen und turbulenten Wirbelbewegung verzehrt einen großen Teil der zur Bewegung der Platte notwendigen Arbeit. Die Wirbelbewegung im widerstehenden Mittel ist daher eine wesentliche Quelle des Widerstandes. Wirbelbewegungen auf der Rückseite des bewegten Körpers werden desto mehr vermieden, je allmählicher der Querschnitt des Körpers nach hinten abnimmt. Denn dann können Druckwirkungen, die senkrecht zur Bewegungsrichtung das Mittel in den Raum hinter dem Körper hineindrücken und dadurch Anlaß zur Wirbelbildung geben, nicht entstehen. Der erfahrungsmäßig geringe Widerstand eines „fischförmigen" Körpers verglichen mit einer Platte von der Gestalt seines größten Querschnittes senkrecht zur Bewegungsrichtung, beruht darauf, daß Wirbel weitgehend vermieden werden. Die Technik hat deshalb den Körpern der Flugzeuge, Torpedos und Geschosse nach Möglichkeit solche „Fischform" gegeben.

Der Widerstand des Mittels ist in hohem Maße von der Geschwindigkeit des Körpers abhängig. *Bei mittleren Geschwindigkeiten* (in Luft z. B. von wenigen m/sec bis nahe Schallgeschwindigkeit) *ist der Widerstand des Mittels dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional.* (Widerstandsgesetz von Newton 1687.)

Ist ϱ die Dichte des flüssigen widerstehenden Mittels, F die Flächengröße einer durch das Mittel bewegten Platte, v ihre Geschwindigkeit, so ist der Widerstand W

$$W = k \cdot \varrho \cdot F \cdot v^2.$$

Hierin ist k noch eine Konstante, die ihren Wert mit der Gestalt der Platte ändert. Für eine vollständig in Wasser untergetauchte quadratische Fläche hat k etwa den Wert 0,575, wenn v im Bereiche von 0,2 m/sec bis 4 m/sec liegt und alle Größen in absoluten C.G.S.-Einheiten gerechnet werden.[1])

Es ist $\frac{\varrho \cdot v^2}{2}$ die kinetische Energie der Volumeneinheit des Mittels in seiner relativen Bewegung gegen die Querschnittfläche F. Daher schreibt man das Gesetz häufig in der Form

$$W = c \cdot \frac{\varrho \cdot v^2}{2} \cdot F.$$

Der Koeffizient $c = 2k$ wird darin neuerdings die *Widerstandszahl* oder *spezifischer Widerstand* genannt. Diese ist also in dem angeführten Geschwindigkeitsbereiche vom Werte $c = 1,1$. Auch für kreisförmige Scheiben gilt diese Zahl. Für eine lange Platte nimmt der Wert aber mit wachsender Länge zu und erreicht für eine unendlich lange Platte den Wert 2. Für Körper, die keine Plattenform besitzen (Kugel, Zylinder usw.), ändert sich der Wert von c stark mit der Geschwindigkeit; F bedeutet in diesem Falle die Projektionsfläche des Körpers auf eine Ebene senkrecht zur Bewegungsrichtung.

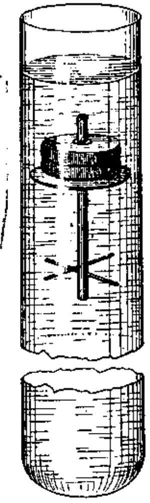

Fig. 230. Abhängigkeit des Widerstandes von der Geschwindigkeit.

Für äußerst kleine Geschwindigkeiten (schleichende Bewegung) ist der Widerstand der Geschwindigkeit selbst proportional, für große Geschwindigkeiten wächst er stärker als die zweite Potenz der Geschwindigkeit, doch wird er für die größten erreichbaren Geschwindigkeiten (für Luft über 600 m/sec) wieder einer niedrigeren Potenz (der zweiten bei Luft) proportional.

Zur Vorführung des Gesetzes über die Abhängigkeit des Widerstandes von der Geschwindigkeit dient der in Fig. 230 abgebildete Apparat. Dieser besteht aus einem unten geschlossenen, lotrecht aufgestellten und bis oben mit Wasser gefüllten Glasrohre von etwa 150 cm Länge und 4 cm Weite, in das der abgebildete Senkkörper hineingesetzt wird. Der Senkkörper besteht aus einem Messingstabe, durch dessen unteres Ende zwei bis fast an die Glaswandungen des Rohres reichende Querarme gehen, und an den nahe dem oberen Ende ein Messingblech von etwa 3 cm Durchmesser gelötet ist. Der ganze Senkkörper wiegt 10 g*. Auf das Messingblech können kreisförmige Messingscheiben von 10 g* Gewicht gelegt werden, die durch das über das Messingblech herausragende Ende der Messingstange am seitlichen Verschieben verhindert werden.

Setzt man diesen Senkkörper in das mit Wasser gefüllte Glasrohr, so bewegt er sich unmittelbar nach dem Loslassen mit gleichförmiger Geschwindigkeit abwärts. Man beobachtet nun die Zeit, die der Senkkörper braucht, um die Wassersäule zu durchlaufen, und zwar einmal ohne besondere Belastung, dann mit der Belastung von einer und dann von zwei Metallplatten. Bei einem ausgeführten Versuche ergab sich, daß der Senkkörper allein 13,6 Sekunden, mit einer Metallplatte belastet 9,6 Sekunden und mit zwei Platten belastet 7,8 Sekunden brauchte, um unten anzukommen. Setzen wir die Rohrlänge gleich Eins, so ist die Geschwindigkeit bei den drei Versuchen 1/13,6, 1/9,6 und 1/7,8. Die Quadrate dieser Geschwindigkeiten verhalten sich wie 1/185 : 1/92,1 : 1/61, d. i. wie 1 : 2 : 3. Da die Bewegung in allen Versuchen gleichförmig ist, so ist die durch das Gewicht des unbelasteten und des belasteten Senkkörpers verursachte Beschleunigung durch den Widerstand des Wassers gerade aufgehoben; das Gewicht (unter Abzug des Auftriebes, der aber bei allen drei Versuchen denselben Bruchteil des Gewichtes ausmacht) ist also ein Maß für den Wasserwiderstand. Da nun der unbelastete Senkkörper sowie jede Belastungsplatte 10 g* wiegt, so folgt für die Wasserwiderstände in den drei Versuchen das Verhältnis 1 : 2 : 3. Dieses Verhältnis stimmt mit dem Verhältnisse der Quadrate der Geschwindigkeiten überein (Newtonsches Widerstandsgesetz).

1) Nach Newton müßte nach dem Impulsprinzip k den Wert 2 haben, wenn man das Mittel als nicht kontinuierlich aus elastischen Teilchen bestehend betrachten darf, hingegen den Wert 1, wenn die Teilchen unelastisch wären. Für ein kontinuierliches Mittel gelangt hingegen Newton zu dem Ergebnis, daß k den Wert $1/4$ haben muß. Aus energetischen Betrachtungen kann man auf den Wert $1/2$ für k schließen; für sehr lange Flächenstreifen leiten Helmholtz und Kirchhoff den Wert 0,44 ab.

Infolge des Luftwiderstandes nimmt die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers nicht unbegrenzt zu, sondern sie erreicht einen größten Wert, der dann beibehalten wird. Diese Endgeschwindigkeit, bei der der Widerstand und die bewegende Kraft sich das Gleichgewicht halten, ist um so größer, je schwerer der Körper im Vergleiche zu seiner Widerstand bietenden Fläche ist. Eine Bleikugel, ein Stück Holz, ein Stück Papier fallen aus größeren Höhen nicht gleich schnell herab. Die Bleikugel kommt früher an als die übrigen Körper. Infolge des Luftwiderstandes fallen Regentropfen trotz der großen Höhen mit einer kleinen gleichförmigen Fallgeschwindigkeit. Ebenso ist bei kleinen Staubteilchen wegen ihres geringen Gewichtes die Fallgeschwindigkeit außerordentlich klein. Man kann beobachten, daß der Tabaksrauch, der aus einer ungeheuren Zahl kleinster Staubteilchen besteht, in einem mit ruhiger Luft gefüllten Zimmer stundenlang in annähernd derselben Höhe als wagerechte Schicht schwebt. Erst ganz allmählich sinkt die Schicht. Die kleinen Staubteilchen, die bei vulkanischen Ausbrüchen bis in die höchsten Luftschichten geschleudert werden, fallen erst nach Monaten und Jahren langsam wieder zur Erde herab. Sie werden durch die in den oberen Luftschichten stattfindenden Luftströmungen weit fortgejagt und bisweilen um die ganze Erde herumgeführt.

Wie die fallenden Körper, so nehmen auch die durch gewaltige Kraftmaschinen bewegten Schiffe, Eisenbahnen, Kraftwagen nach einer kurzen Zeit beschleunigten Anlaufes eine gleichförmige Endgeschwindigkeit an. Der Kraftaufwand der Maschinen wird dann durch die Bewegungswiderstände im Gleichgewichte gehalten. Die Bewegung geht bei dieser Endgeschwindigkeit gleichförmig, also nach dem Trägheitsprinzipe, vor sich, da die auf den Körper einwirkenden Kräfte sich aufheben. Die Aufgabe der Antriebsmaschinen ist also im Sinne dieser physikalischen Auffassung nur die, jene Widerstände aufzuheben. Da wir bei keiner in der Natur vorkommenden Bewegung — etwa die Bewegung der Weltenkörper ausgenommen — von einer vollkommen widerstandsfreien Bewegung sprechen können, so muß schließlich jede dauernd wirkende Kraft eine gleichförmige Endgeschwindigkeit im Gefolge haben. Es erforderte eine große Umwälzung des Denkens, sich an die Vorstellung zu gewöhnen, daß die Kraft hierbei nur die Widerstände aufhebt und die Bewegung selbst somit als kräftefrei zu betrachten ist, da die nächstliegende Auffassung des täglichen Lebens ebenso wie die wissenschaftliche Betrachtung des Altertums die Geschwindigkeit der Körper als unmittelbar von bewegenden Kräften verursacht anspricht und sich daher für jeden Fall zum Schlusse berechtigt glaubte: Je größer die Kraft, desto größer ist auch die Geschwindigkeit des durch die Kraft bewegten Körpers. Da man auch an der Gültigkeit der Umkehrung des Satzes nicht zweifelte, so mußte man bei jeder beobachteten Geschwindigkeit nach der ursächlichen Kraft suchen. Erst die folgerichtige Durchführung des Trägheitsprinzips nach Galilei machte notwendig, den bedeutenden Einfluß der Bewegungswiderstände auf die Bewegung eingehend klarzustellen.

Die Kenntnis des Widerstandes des Mittels ist von großer Bedeutung für die Ballistik (Lehre von der Geschoßbahn), da der Luftwiderstand die aus den Gesetzen des § 18 berechnete Wurfhöhe und Wurfweite bei großen Ausgangsgeschwindigkeiten wesentlich verändert. Die Wurfbahn bleibt keine Parabel, sondern ihr absteigender Ast ist wesentlich steiler als der aufsteigende (ballistische Kurve), die Wurfweite ist bedeutend verkürzt. Je größer die Masse des geschleuderten Geschosses, je größer also bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit die kinetische Energie der Bewegung ist, desto weniger wird die Geschwindigkeit durch Luftwiderstände aufgebraucht werden, desto weiter wird also unter sonst gleichen Umständen die Schußweite sein. In Figur 231 sind (nach H. Lorenz) für den Erhöhungswinkel (Schußwinkel) von 20° und 70° die Wurfparabeln gestrichelt gezeichnet, die einer Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses von 550 m/sec entsprechen. Die Wurfweite würde 19,5 km, die Scheitelhöhen würden 13,4 km und 1,8 km betragen. In ausgezogenen Linien sind weiter die unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes berechneten Geschoßbahnen eingezeichnet, die bei derselben Anfangsgeschwindigkeit und denselben Erhöhungswinkeln tatsächlich zu Geschossen von 6,9 kg und 82 kg Schwere gehören. Die Schußweite beim Flachschuß (20°) des 6,9 kg-Geschosses ist 6,9 km, seine Schußweite beim Bogenschuß (70°) nur 5,2 km, also wegen des auf längerer Bahn wirkenden Widerstandes erheblich verkürzt. Das 82 kg-Geschoß hat beim Flachschuß unter 20° Erhöhung des Geschützes eine Schußweite von 8,1 km, sie erscheint wegen der größeren Geschoßmasse gegenüber der des 6,9-km-Geschosses vergrößert. Alle drei Schußweiten stehen aber weit gegen die Wurfweiten zurück, die im widerstandsfreien Raume auf den Wurfparabeln erreicht werden würden.

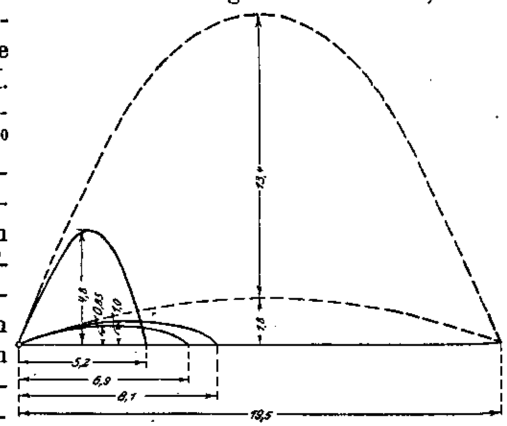

Fig. 231. Wurfbahnen für 550 m Anfangsgeschwindigkeit im luftleeren Raume und in Luft bei zwei verschieden schweren Geschossen.

Den Widerstand des Mittels benutzt man vielfach dazu, um eine Bewegung gleichförmig zu machen: In den Schlagwerken der Uhren sind Windflügel angebracht, die sich schnell drehen und dadurch einen großen Luftwiderstand erfahren. Hierdurch wird bewirkt, daß die Schläge der Uhr in annähernd gleichen Zwischenräumen ertönen.

Bei manchen physikalischen Apparaten werden an die bewegten Teile Flügel angesetzt, die in eine Flüssigkeit tauchen. Hierdurch werden die auftretenden Schwingungen rasch gedämpft.

Siehe auch § 110ff.