УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ

мр Игор Димовски

УТИЦАЈ ИНФОРМАЦИОНЕ ТЕХНОЛОГИЈЕ НА КВАЛИТЕТ ЗНАЊА ВЕЗАНИХ ЗА ФУНКЦИЈЕ

– докторска дисертација –

Нови Сад, 2011

Садржај

Предговор

У овој дисертацији је елаборирано свеобухватно педагошко истраживање које се односи на наставу математике на терцијарном, универзитетском нивоу. Ово се истраживање темељи на класичну методику математике и на савременим трендовима у дидактици, психологији, когнитивној науци и информатици.

Израђени едукативни материјали у електронском формату, користећи програмског пакета Matlab, интегрисани су у настави. Статистички је истраживан утицај примене ИКТ на есенцијална знања која се односе на функције више променљивих, векторске функције и тродимензионалну аналитичку геометрију, интензивним коришћењем 3D статичке и динамичке визуелизациске алатке. Део студената укључене у истраживању су самостално израђивали Matlab програме. Један део истраживања је фокусиран на могуће утицаје вештине програмирања на учење математичких концепата.

Кључне речи:

- Функције;
- Информационе технологије;
- 3D визуелизација;
- Есенцијално математичко знање;
- Математичко мишљење;
- Утицај;
- Мерење утицаја.

Изради ове докторске дисертације претходило је темељито проучивање савремене литературе.

Полазне тачке (шта је већ познато у овој области):

- постоје бројне идеје како да се одређени софтвер употреби за олакшање учења математике - најчешће преко примерима;
- генерално, теоријски сматра се да је утицај ИКТ на наставу математике позитиван;
- истраживања која се односе на утицаја ИКТ на наставу математике су углавном фокусиране на доживљаје студената, промене код учитеља, организације наставног процеса и само делимично на утицаја на знање студената.

Овом дисертацијом се иде даље од оног што је познато у овој области, највише због:

- свеобухватности истраживања које обухвата:
    - израда едукативних материјала (у Matlab-у);
    - 3D визуелизације;
    - интеграција у настави;
    - мерење утицаја на **квалитет есенцијалних знања** које се односе на функције;
- фокусираности на функције више променљивих, векторске функције и тродимензионалну аналитичку геометрију;

- емпириског доказивања на које конкретне подобласти одређени облик примене информационе технологије има најзначајнији утицај.

Импликације за наставну праксу и могућности примене:

- примењивање адекватних алатки у настави математичке анализе која се односи на садржаје на које одговарајућа примена ИКТ-а има доказано позитиван утицај.

****

Захвалности

Највећу и најискренију захвалност мом ментору проф. др. Ђурђици Такачи, која ме је цело време пажљиво водила кроз рад, потицала и снажно мотивирала.

Захваљујем се Департману за математику и информатику на Природно-математичком факултету у Новом Саду.

Захваљујем се Универзитету за информационе науке и технологије у Охриду, нарочито ректору проф. др. Благоја Самакоски.

Посебну захвалност дугујем студентима који су учествовали у истраживању.

Захваљујем се подршци професору др. Арпад Такачи.

Захваљујем се на сарадњу професору др. Mattew Ager.

За све сугестије и корекције српског језика, велику захвалност колегиници мр. Татијани Иваноској.

Најискреније ХВАЛА!

Нови Сад, 2011 мр Игор Димовски

Уместо посвете...

"... да заедно излеземе од времето,
кое е само дел од вечноста која касни..."

1.Глава
Уводни део

1.1. Увод

Савремена математика готово у свим својим дисциплинама користи функције. Сви математички модели базирају се на постављању веза између елемената неких скупова, односно темеље се на функцијама. Због тога је изучавање функција на свим образовним нивоима један од најважнијих сегмената у настави математике.

Од велике је важности да се при изучавању функција избегну такозвана "формална знања". Студенти су често у стању да напишу гомилу формула које се односе на испитивање својстава функција, а да у суштини не разумеју шта све то у ствари значи. Зато, један од основних циљева савремене наставе математике је унапређивање квалитета знања студената која се односе на изучавање функција.

У класичној настави математике, преовладава став да је при изучавању функција потребно коришћење визуелних средстава и да је графичко приказивање процеса и појава алатка која је довољна да успостави везу између реалног и идеалног света. Коришћењем великог броја примера са графичким приказом функција од студената се очекује да схвате суштину веза између „input“ и “output“ величине.

На високообразовном нивоу, наставне садржине курсева математике, намењених како студентима математике, тако и студентима којима математика није основни предмет али је веома значајна за струку (студенти технике, информатике, физике, технологије, економије...), базирани су на функцијама. Најчешће због недостатка наставног времена (малог броја наставних часова), настава математике на универзитетима претежно је фокусирана на апстрактном и теоретском разрађивању наставних садржаја. Вежбе и лабораторијске вежбе најчешће су фокусиране на практичној примени, али опет због недостатка наставног времена, студенти су често доведени у ситуацију да решавају што више и што теже проблеме, механички и *формално* савлађујући алгоритме, не схватајући суштински шта сви ти графички прикази функција значе и како су функције моћне алатке којима се могу моделирати велики број реалних проблема у реалном свету и њиховим ужим областима. Овај проблем најчешће се јавља код функција више променљивих, због тежег начина њиховог визуелизирања.

Задњих неколико година је почела масовна употреба рачунара, али и генералније, информационо-комуникацијске технологије. Евидентан је продор интернета и доступност широкопојасног (брзог) интернета у домовима, школама и универзитетима. Може се чак и рећи да смо у социолошком смислу прешли на сасвим нови начин живота у друштву. Независно од географских и социјалних фактора, савремено, информацијско друштво постаје све доминантније. Ово друштво је базирано на знању. Знање у најширем смислу сада је доступно много широј популацији. Али и економије у информацијском друштву су сад базиране на знању. Већина послова захтева доживотно, перманентно учење и усавршавање. Ово је довело до велике продукције едукативних садржаја у електронском формату. Могу се наћи мултимедијски организоване садржине за учење у којима је визуелизација сама по себи подразумевајући квалитет. Задњих година намеће се проблем интегрисања електронског учења у образовном процесу на свим образовним нивоима. Системи управљања електронског учења су идеалан начин да се интегришу и успешно менаџирају сви аспекти колаборативног учења.

Ове друштвене промене имале су значајан утицај на продукцију едукативних производа (књиге, софтверски пакети, CD-а, аплети, интернет-портали) намењених за учење математике. Штавише, може се рећи да је математика најпогоднија за учење помоћу рачунара. Визуелизацијске методе нарочито су атрактивно уграђене у све форме рачунаром потпомогнутим учењем математике.

Оваква продукција нових дидактичких средстава одвија се брже него што се развија и сама наука дидактика математике. Због тога се јавља и известан јаз између дидактичке теорије и наставне праксе. Значајан део оваквих нових дидактичких материјала нема јасно постављену базу у дидактици као науци; аутори оваквих материјала најчешће се воде сопственом интуицијом и експериментирају у настави.

1.2. Циљ рада

Консултирајући савремену дидактичку литературу, можемо установити да је актуелно и важно поставити следећа два значајна питања која траже дубљи прилаз:

- Како да се нове методе, базиране на информатичко-комуникацијским технологијама *интегришу* у настави математике на свим образовним нивоима, нарочито у високом образовању?
- Како да се *оцени* (*измери*) **утицај** примене визуализационих метода помоћу информатичко-комуникацијске технологије на квалитет стечених знања студената?

Ова докторска дисертација се бави тражењем одговора на ова два питања, са јасним циљем да се да значајан научни допринос савременој дидактици математике.

Главни циљ истраживања, као експериментални део ове дисертације је:

- Утврђивање степена утицаја примене визуелизационих метода, базираних на теоријским основама дидактике математике и интегрираном приступу примене информацијско-комуникацијске технологије у настави мататматике на квалитет знања студената који се односе на наставне садржаје који обухватају функције, нарочито векторске функције једне реалне променљиве и функције више реалних променљивих и њихове особине како и тродимензионалне аналитичке геометрије - криве и површине.

Извођењем истраживања биће постигнути и следећи циљеви:

- Израђивање едукативних материјала у електронској форми чиме се студентима омогућује изучавање функција и њихове особине интерактивним алаткама помоћу рачунара, интегрираних у систем за управљање е-учењем;
- Израђивање инструмената којима се може измерити утицај примене визуелизацијских метода на квалитет есенцијалних знања;

1.3. Организација рада

У другом поглављу дисертације дате су теориске основе истраживања - дидактичке принципе и психолошко-педагошка основа визуелизационих метода. Направљена је анализа и критичко-компаративан преглед савремених радова из области дидактике математике (математичког образовања) који се односе на проблем интегрисања информатичко-коминикацијске технологије у настави математике, фокусирајући се на наставу математике у високом образовању која се односи на наставне садржаје које обухватају функције и њихова својства. Тиме је постављен теоријски фундамент даљег истраживања и саме дисертације, која има интердисциплинарну природу - обухвата подручје математике, информатике, педагогије, психологије, методике, когнитивну науку итд. Дефинисање појмова, резултати савремених истраживача који се баве методиком математике, историски преглед примене информационих технологија у наставу математике, као и отворена питања везана за савременим трендовима примене информационе технологије, мултимедију и компјутерског програмирања су разрађени у поглављу 2.

Треће поглавље дисертације је опис и документација израђених едукативних материјала. Као део истраживања - експериментални део ове дисертације, израђени су едукативни материјали у електронској форми који се базирају на теоријским основама дидактике математике: презентације, интерактивни фајлови, аплете, динамички и графички прикази, анимације и интерактивни програми за визуелизацију конкретних математичких проблема. Сви ови едукативни материјали се односе на наставне садржине везане за функције једне или више променљивих и имају наглашену *визуелну* компоненту.

Основни циљ оваквих едукативних материјала је визуелно и интерактивно стицање есенцијалних знања о функцијама: графичко приказивање функција, "читање" својстава функција из њихових графика, значење граничне вредности функције у тачки, непрекидност функција, извод функције у тачки, диференцијабилност, примене и тумачење теореме о средњој вредности, риманове суме, одређени интеграл, тродимензионална аналитичка геометрија – праве, равни и квадратне површине, графичко приказивање функција две променљивих, векторске функције, тангенте криве, тангентне равни, геометриско тумачење парцијалних извода, двојни интеграли... Разрађене су и методе на који начин овакви едукативни материјали да се интегришу у редовној настави математике, јер оне саме по себи не могу обухватити целокупан комплексни наставни процес, као што и рачунар не може заменити наставника. Израда оваквих електронских едукативних материјала обухвата два аспекта примене софтвера:

- примена слободног и/или бесплатног софтвера као што је **GeoGebra** (Dynamic Mathematics for Everyone) ...
- примена комерцијалног софтвера као што је **Matlab**, и софтвер за обраду видео фајлова;

Слободан софтвер је примењен и као платформа система за управљање е-учењем (Dokeos). На тај начин је организована форма колаборативног учења у виртуелној наставној средини, користећи едукативне материјале, пре свега графике, html и видео фајлове.

У четвртом поглављу дисертације приказан је опис тока експерименталног дела истраживања. Израђени систем едукативних материјала за визуелно изучавање функција је експериментално примењен у наставној пракси. Интегрисањем едукативних материјала у редовној наставној практици, изведена је иновирана настава која се доста разликује од наставе која је организована са студентима пре истраживања (такозвана класична настава).

Главни циљ експерименталног дела истраживања је мерење утицаја визуелних метода на квалитет есенцијалних знања студената о функцијама. У ту сврху изабрана је група студената чије су активности детаљно праћене како пре почетка истраживања, тако и у току извођења иновиране наставе и по завршетку самог истраживања. Њихова иницијална знања су тестирана пре почетка истраживања. Сама настава је фокусирана на обрађивање аналогних концепата, тако да је након завршетка истраживања опет спроведено тестирање, овог пута аналогним питањима које се односе на наставне садржаје разрађиване у току истраживања. На тај начин су сакупљени подаци чијом анализом је измерен утицај информационе технологије на квалитет знања студената.

Осим анализе утицаја иновиране наставе на квалитет есенцијалних знања, организована је и такозвана пројектна настава. У ту сврху формиране су две групе студената са сличним саставом у смислу предзнања, што је утврђено дијагностичким тестирањем пре почетка истраживања. Са једном (експерименталном) групом је изведена пројектна настава, чији је циљ био да студенти самостално израде визуелизацијске алатке које се односе на конкретан математички проблем. Ефекти оваквог рада су упоређени са другом (контролном) групом, у којој су студенти за исте наставне садржаје радили пројекат класичном израдом семинарског рада, без примене информационе технологије. Статистичком обрадом података је утврђена повезаност између примене визуелизационих информатичко-комуникацијских метода и квалитета знања студената.

У петом поглављу дисертације дате су опис и обрада статистичких података који су произашли из експерименталног дела и постављене су и тестиране статистичке хипотезе.

У шестом делу су експлицтно наведени резултати истраживања, односно закључне тезе и смернице за даља истраживања.

Очекивани резултати истраживања су потврђивање претпоставке да визуелизационе методе базиране на теоретском фундаменту дидактике математике и интегрисаном приступу примене информатичко-комуникацијске технологије у настави метаматике, **имају значајан утицај** на квалитет есенцијалних знања студената и да **изразито повољно делују на позитивне психолошке доживљаје** студената у процесу учења математике.

У већини књига и радова [(ВМБ), (ПИ), (EN), (CJID), (РМ), (НЦ)] из области дидактике математике, акцентирана је важност принципа визуелизације у настави математике са теоријског аспекта, што је у тесној вези са визуелизацијом и наставним методама који произлазе из овог дидактичког принципа.

Аутори који се баве специјалном дидактиком математике [(ССБ), (РМ), (НЦ)] такође наводе велико значење визуелних метода и очигледности у учењу алгебре, нарочито део садржине који се односи на функције.

У савременој литератури, постоји велики број различитих прилаза проблему коришћења информатичко-комуникацијске технологије у настави математике, на различитим образовним нивоима и са различитог ступња интерактивности [(СА), (SJWDP), (РМРМ), (ММ), (ИМЗА), (КС), (МС1), (МС2), (ГТДД), (MKHGWB), (НСНКР1), (НСНКР2)]. Аутори се углавном баве парцијалним предлозима како одређени софтверски пакети да се употребе у настави. Може се закључити да недостају радови који би дали опсежан осврт на питање интегрисања визуелизационих метода у настави математике, нарочито код садржине које се односе на функције више промењливих и тродимензионалну математику.

Недостаје емпиријски утврђена веза између примене визуелизационих метода и уопште примене информацијско-комуникацијске технологије у учењу математике и квалитета знања што би овакве методе проузроковале код ученика или студената.

Савремени аутори углавном се баве развијањем одређене специфичне технике примене ИКТ-а за постизање одређених, конкретних наставних циљева. Радови се најчешће односе на **примерима** и без јасног концепта како ефикасно интегрисати софтверска решења у наставном процесу. Али, како Lagrange (2003) каже: "Пружити учитељима примере иновације није довољно, њима је потребно дидактичко знање о коришћењу технологије."[1] Постоји велики број радова која се односе на питање **како** искористити одређени програм или софтверски пакет приликом изучавања функција [(AGGHRV), (MKKS), (AKMHSH), (SNBWYW), (TJW), [32]]. Највећи део њих бави се функцијама једне промењливе и развијањем визуелизацијских техника које се геометријски односе на *дводимензионалну* математику.

Недостаје свеобухватан прилаз питањима: како искористити ИКТ за развијање визуелизацијских алатки које се односе на тродимензионалну математику, како интегрисати визуелизацијске методе у настави изучавања функција више реалних промењливих и нарочито **какав је утицај примене оваквих метода на квалитет знања студената**. Ово је био **мотив** да се дизајнира истраживање које ће дати егзактне одговоре на ова питања.

Ова докторска дисертација ће дати значајан допринос дидактици математике, попуњавајући празнине које постоје у релевантној литератури око питања интегрисања визуелних информатичких метода у настави математике, конкретно у изучавању функција, а нарочито ће дати значајан допринос својим експерименталним делом којим ће се измерити утицај оваквих метода на квалитет есенцијалних студентских знања о функцијама. Оригинални део се пре свега односи на израду едукативних материјала, мултимедијским презентацијама, слика и анимације користећи програмски код у Matlab-у, иновацији у наставу математике на високообразовном нивоу, и истраживачком прилазу питању мерења утицаја примене информационо-комуникацијске технологије у настави математике, везане за функције више промењливих, векторске функције и тродимензионалну аналитичку геометрију.

---

[1] [31]

2.Глава

Теоријске основе истраживања-дидактички принципи и психолошко-педагошка основа визуелизационих метода учења математике

2.1. Дидактички принцип визуелизације у настави математике

Дидактички принципи су општи захтеви којих настава треба удовољити за успешно постизање њених циљева.[2] Различити аутори различито постављају дидактичке принципе. По Коменском (XVII век), то су **очигледност** наставе, систематичност у обради градива, одмереност према природи ученика, активност ученика и принцип вежбања, понављања и утврђивања. Песталоци (XIX век) је формулисао: **очигледност**, систематичност, логичност, поступност и трајност знања. По Бакићу (XIX) то су 3 принципа: природност, истинитост и интересантност наставе.

У савременој методици математике, и поред различитих гледишта, може се рећи да је прихфатљиво постављање дидактичких принципа које Целакоски, дефинира као[3]:

- Принцип визуелизације;
- Принцип научности;
- Принцип сазнајности;
- Принцип активности;
- Принцип трајности знања;
- Принцип индивидуалног прилаза;
- Принцип васпитавања кроз наставу.

Т.Петровић принцип визуелизације у настави[4] назива принципом очигледности и апстрактности.[5] Очигледност су као први принцип узимали и Коменски и Песталоци. Дакле, један од фундамената дидактике је наћи начин како да студент (онај који учи) има утисак да види, дакле перцепира, оно што учитељ (онај који подучава) има постављено као циљ да студент схвати (садржај, оно што се треба научити), при чему је употребљен широк спектар наставних метода (наставна технологија). Ово је од велике важности у настави математике где је степен апстрактности најчешће веома висок.

2.1.1. Принцип визуелизације у настави

Принцип визуелизације је основни принцип у настави математике и помаже у реализацији осталих дидактичких принципа, јер је визуелизација спољни ослонац менталних делатности.[6]

Дидактички принцип визуелизације у настави математике је тражење примене визуелних средстава у настави са циљем постизања високог степена апстрактности током формирања математичких појмова.

У класичној методици наставе математике, разматрају се два типа визуелизације:

- Симболичка визуелизација;
- Предметна визуелизација;

Симболичка визуелизација постиже се: цртежима, таблицама, графицима, шемама, дијаграмима, графовима бинарних релација...

---

[2] (НЦ) стр. 52

[3] (НЦ) стр. 52-60

[4] Целакоски наиме овај принцип на македонском језику назива се "принцип на нагледност"

[5] [3]

[6] (РМ) стр. 47-51

Када се говори о класичној настави дидактичка средства која се односе на овај принцип обично су унапред израђена и намењена за употребу у наставном процесу, како и додаци текста у књигама и уџбеницима. Управо се и зато класична методика бави критеријумима за израђивање оваквих дидактичких средстава и њиховом применом у наставном процесу. Наглашава се веза коју оваква дидактичка средства морају успоставити са начином размишљања студента, како би он био у стању да тачно разуме шта одређени цртежи, слике или шеме значе. Када се рецимо приказује график реалне функције, пре него што се пређе на изучавање својстава функција преко графичког приказа, учитељ мора бити сасвим сигуран да студент уме да "чита" та својства из графика функција.

Користећи цртеже и графичке приказе у настави, значајан проблем је приказивање тродимензионалних, просторних ситуација. То што се тродимензионална ситуација представља на дводимензионалној слици - на папиру или на табли, подразумева да се користи пројекција која за многе студенте није сасвим интуитивна и јасна. Бар у почетку док се не успостави тражена веза и док студент није у стању да и сам израђује стереометриске приказе на цртежу препоручује се комбинација овакве претставе са просторним моделима.[7]

Предметна визуелизација постиже се коришћењем: модела рамнинских фигура, просторних ситуација, модела геометриских тела...

Опет се модел подразумева као физичка интерпретација одређене просторне ситуације, од било каквог материјала. Код неких модела могуће је видети интеракције неколико објеката, на пример пресеци геометриског тела са равним.

Продором информационе технологије у савременој настави, дидакатички принцип визуелизације вишеструко је добио на моћи. Израда прецизних и веома сликовитих приказа тиме је постало лакше и брже. Сами учитељи могу израђивати визуелизацијске алатке повезане са сваким задатком и сваком теоремом. Такође, велики број оваквих визуелизација лако је доступан, нарочито преко интернета и може се имплементирати у настави. Користећи мреже учитеља може се постићи колаборативно учење чиме би учитељи размењивали своје дидактичке материјале и учинити их доступним за своје студенте, чиме сама настава се преноси из реалне учионице у одређеном времену, у асинхрону виртуелну учионицу.

У контексту симболичке и предметне визуелизације, информационе технологије могу се употребити за израду графика и симулације. Цртежи, таблице, графици..., све то се може знатно брже произвести, чак и у току самог наставног процеса. Док је класичном наставом било могуће приказати једва неколико графика функција у току једног наставног часа, коришћењем информационе технологије може се знатно више и знатно квалитетније. Симулације је теже израдити, али се препоручује да се користе управо за ону сврху за коју се користе физички модели.

Настава математике у својој природи подразумева изучавање појмова, особина, тврђења и проблема који су суштински повезани са одређеним динамичким процесом или ситуацијом. Почевши од увођења симболике у настави алгебре, ученик треба почети да размишља динамички - шта се догађа за ову, шта са ону вредност променљиве. Сваки геометријски задатак од ученика тражи да постави питање шта би се догодило када би се неки од геометриских објеката променио. Изучавање функција студента нарочито доводи до сталног проучавања промена. У самој суштини изучавања функција налази се појам **промена**, посебно када се ради о појмовима као што су непрекидност, гранична вредност, извод и осталим суштинским појмовима математичке анализе.

Управо ова тежња у настави математике да се долови динамичност, чини примену информационе технологије моћном. Насупрот статичних мултимедијских алатки (цртежа, графика), у ту сврху се требају користити динамичне мултимедијске алатке (анимације, филмови, симулације). Овакве мултимедијске алатке се могу саме по себи користити и интегрисати у самој настави. Системи за мултимедијско учење чине комплетно дидактичко средство које се може употребити у сврху остваривања дидактичког принципа визуелизације. У новије време, мултимедијске алатке и сви

---

[7] (РМ) стр. 48-49

остали едукативни материјали у електронском формату, усаглашени одговарајућим стандардима, користе се као део глобалнијих система за управљање електронског учења.

Овим се и сам принцип визуелизације подиже на виши и значајнији ниво, јер сада визуелизација се не односи само на то како "видети" већ ангажује **целокупни перцептивни апарат** фактора наставног процеса.

2.1.2. Шта је визуелизација?

Да би се говорило о дефинисању појма визуелизације, најпре се мора установити да се у стручној литератури могу срести неколико синонима - различитих термина који се односе на овај појам или су му веома блиски. То су пре свега: "визуелна репрезентација", "визуелни медијум", "медијска писменост", "визуелна комуникацијска вештина", "визуелна писменост", "илустрација" и "медијска илустрација".[8]

Philips, Noris, Macnab су истраживали широки спектар релевантне литературе и објавили табелирани преглед дефиниција визуелизације[9]. Цитираћемо неке од ових дефиниција.

Најједноставнију, али тиме и веома теснију дефиниција поставио је Habre (1995): "Визуелизација је процес у којем се користи геометрија да би се илустрирали математички концепти."

Визуелну писменост је Hortin (1982) дефинисао као "способност разумети и користити слике и мислити и учити преко слике, односно, мислити визуелно."

Sharma (1985), визуелизацију разуме као "менталну сликовитост која служи као неки вид 'менталне табле' на којој се могу развити идеје и истраживати њихове импликације." Учитељ математике, у наставној практици, стално се суочава са проблемом да прикаже студентима оно што он "види на свом невидљивом монитору", и да доведе студента да и он види исти приказ на "свом невидљивом монитору", или како Sharma то назива - на менталној табли.

Према Arnheim-а (1991), "визуелизација упућује на когнитивне функције у визуелној перцепцији. У визуелизацији, слике комбинују аспекте природног претстављања са формалније облике да би повећали когнитивно разумевање".

"Просторна визуелизација је способност за манипулисање са објектом у замишљеном 3D простору и креирање репрезентацију тог објекта са друге тачке гледишта" (Strong, Smith 2001).

Са аспекта методике математике, најрелевантнијим се чине следеће три дефиниције. "Просторна визуелизација је способност прецизно разумети тродимензионалне објекте од њихове дводимензионалне репрезентације" (Korakakis, Pavlatou, Palyvos, Spyrellis, 2009). "Специјално, у контексту решавања математичких проблема, визуелизација упућује на разумевање проблема израдом и/или коришћењем дијаграма или слике у сврху добивања решења тог проблема" (Deliyianni, Monoyiou, Elia, Georgiou, Zannettou, 2009). "Визуелизација је дефинирана у смислу разумевања трансформације неке структуре и њихово повезивање функцијом" (Maihai, Ramadas, 2009).

С обзиром на то да је један од најважнијих циљева у настави математике стварање апстрактних појмова, дидактички принцип визуелизације и његов значај се могу јасније уочити имајући у виду да је "визуелизација централна компонента многих процеса у којима се прави прелаз са конкретног на апстрактни модел мишљења. То је алатка за представљање математичких идеја и информација." (BenChaim, Lappan, Houang, 1989).

Генерално, сматрам да је следећа дефиниција (Gilbert, Reiner, Nakhlen, 2008) најобухватнија и најприхватљивија: "Визуелизација се брине о спољашњој репрезентацији - систематичног и фокусираног дисплеја информација у облику слика, дијаграма, таблица.... такође, брине се о унутрашњој репрезентацији - менталног продуцирања, складирања и коришћења слике која је често

---

[8] (LPSNJM) стр. 19

[9] (LPSNJM) стр. 23-26, Табела 3.2.

(али не увек) резултат спољашне репрезентације. Визуелизација се може сматрати менталним исходом визуелног приказа који насликава неки објекат или догађај."

Ако се резимира све оно што су различити аутори обухватали дефинирајући визуелизацију, може се говорити о композитном појму који је сачињен од:

- Физичка визуелизација - слике, 3D репрезентације, шематске репрезентације... можда чак обогаћене и звуком или другим сензорним ефектима и које се могу појавити на различитом медију: папиру, компјутерском екрану, слајду... ;
- Интроспективна визуелизација - ментални објекти које личност ствара верујући да су слични или исти са физичким објектима моделираних неког облика физичке визуелизације;
- Интерпретативна визуелизација - претварање физичког објекта или интроспективне визуелизације у неки облик знања - когнитивни смештај у постојеће мреже веровања, ставова, искустава, разумевања, факата и генерализација.

2.1.3. Учење потпомогнуто визуелизацијом

Примена визуелизацијских метода је ефективна само ако ове методе испуњавају функције релевантне за постизање наставних циљева. Scheiter, Wiebe и Holsanova[10] постављају 2 овакве функције:

1. Инструкцијске функције визуелизације као поруке које оне саме садрже;
2. Инструкцијске функције визуелизације као додатак вербалној поруци;

Без обзира на то да ли су визуелизације коришћене са или без вербалних образложења оне могу поседовати следеће функције:

- Мотивацијски утицај;
- Замена или допуна искуству из реалног живота;
- Визуо-просторно расуђивање;

Задња функција веома је важна јер визуелизација није ограничена само на подршку меморисања, него омогућује достизање виших когнитивних нивоа. Спољашне репрезентације омогућују когнитивне операције које без тога траже већи когнитивни напор.

Визуелизацијске методе требају бити подршка дедуктивном размишљању и процесу расуђивања заснованим на перцепцији, дозвољавајући да се перцептивна расуђивања замене са значајнијим, дедуктивним логичким мишљењем.

Друга функција визуелизације је чешће коришћена, јер се ове методе готово сваки пут користе у комбинацији са неким од вербалних метода. Следеће функције се односе на визуелизацију као додатку вербалних порука:

- Декоративна функција (често има и негативан утицај);
- Репрезентациска функција;
- Организацијска функција;
- Интерпретацијска функција;
- Трансформацијска функција;

Репрезентацијском функцијом, визуелизација чини садржај конкретнијим. Дијаграми, таблице, шеме омогућују организацијску функцију визуелизације. У настави математике нарочито од велике је важности прелаз са конкретног према апстрактном. Квалитетна визуелизација може омогућити овакав прелаз због њене интерпретацијске функције.

Најјачи позитиван ефекат на остваривање наставних циљева имају визуелизације са трансформацијском функцијом. То значи да сама визуелизација вешто таргетира одређену информацију коју је важно усвојити, при томе омогућујући лако меморисање у конкретној форми,

---

[10] (KSEWJH) стр. 67-88

повезивање са осталим садржајем система знања и најзад лако преузимање ове информације из меморије и њена употреба и примена.

Учење визуелизациским методама не зависи само од функција самих метода. Индивидуалне карактеристике студента имају битан утицај на ефективност учења преко визуелизације. Scheiter, Wiebe и Holsanova класифицирају ове студентске индивидуалне карактеристике на следећи начин:

1. Когнитивне способности
    - Сликовне компетенције: перципирање, интерпретирање, разумевање и коришћење слике;
    - Визуелна писменост: способност декодирања слика, разумевање и повезивање визуелних одлика репрезентације са интерпретацијом објекта или садржаја;
    - Предзнања о специфичном домену: студент са већим предзнањем боље фокусира пажњу на релевантне информације;
    - Визуо-просторне способности: способност ментално трансформирати објекте у дво или тродимензионалном свету и способност замислити промене које настају код објеката након оваквих трансформација;
2. Когнитивни стил
3. Преферирање визуелног наспрам вербалног

Психолошка димензија која претставља конзистентност у начину на које индивидуа стиће и обрађује информације је когнитивни стил.

Углавном, индивидуалне разлике у стиловима се односе на то на који начин индивидуа преферира да добије информацију: визуелно или вербално. Од ових преференција, могу се издвојити два типа студената:

- Визуелизатори;
- Вербализатори;

Код индивидуа које преферирају визуелне репрезентације, може се направити допунска дистинкција између онима који се радије фокусирају на шематске интерпретације, локација објеката и просторне везе између њих (просторни визуелизатори) и они који се фокусирају на форму, величину, боју, светлост (иконички визуелизатори).

2.1.4. Негативности примене визуелизационих метода

Примена визуелизације никако не би требала бити сама по себи циљ. Када се визуелизација примењује само ради њене декоративне функције, без повезивања са садржајем и само да би учинила текст, презентацију или наставни процес интересантнијим, она може довести до повећања интереса и мотивације, али најчешће само дефокусира студента од суштинског дела процеса учења. У многим истраживањима се расправља о употреби боје или динамике и како све то утиче на доживљај студента у току процеса учења. Може се закључити да употреба боје, динамике, као и генерално примене било које форме визуелизације, треба да буде у складу са наставним циљем и у функцији остваривања наставних циљева. Генерално, сувишне и ирелевантне информације било које форме имају негативан утицај у процесу учења. Ипак, визуелна репрезентација може садржити и информације које се преклапају са вербалном репрезентацијом. Ако се ово преклапање вешто употреби и на тај начин се обе репрезентације учине комплементарним, онда није реч о сувишној информацији било које од ове две репрезентације.

Не треба претеривати са коришћењем визуелизације – тиме се може успорити и негативно деловати на способности студента да развије апстрактно мишљење. Визуелизационе методе су веома моћна и често незамењива алатка за постизање циља развијања апстрактног мишљења. Ипак, након извесног времена, студент треба стићи до нивоа где ће бити у могућности да разуме неке апстрактне концепте без помоћи визуелизације.

Тако се може закључити да се у настави математике перцепција треба обогатити свим могућим средствима и визуелизационим методима, све до нивоа где се спољашна репрезентација може заменити унутрашњом. Тиме се може сматрати да је студент са нивоа перцепције прешао на ниво представе, након чега се требају применити методе које ће код студента довести до стварања појма и форме апстрактног мишљења.

2.2. Изучавање функција. Математичко мишљење. Математичка когниција

При организовању наставе математике на висикообразовном нивоу треба се имати у обзир да се током наставног процеса студент мора довести до највишљих когнитивних нивоа, нарочито ако се ради о студентима за чије звање математика није главни предмет али је суштински фундамент највећег дела предмета из њихове главне области. Садржај високообразовног курса математике у овом случају обично се односи на математичку анализу и изабране делове алгебре, линеарне алгебре, вероватноће. У сваком случају, изучавање функција је један од основних циљева оваквог курса математике.

Да би изучавање функција било успешно, важно је затражити одговор на питање кроз какве мисловне процесе студент треба да прође да би могао стећи квалитетна и суштинска знања о функцијама. Ово води ка питању математичког мишљења.

У **општој методици математике**, базираној на савременим педагошко-психолошким теоријама, постоје покушаји да се дају одговори на питање: које мишљење је математичко и шта су његове основне карактеристике.[11] Сама фраза *математичко мишљење* не значи да је то изолирани феномен специфичан само за одређену мисловну делатност. То би довело до постојања свакаквих видова мишљења: биолошког, хемијског, географског мишљења... У расуђивању и структурирању знања у различитим научним областима користе се различити методи. Према карактеру објекта истраживања у наукама неки приступи намећу се као доминантни или као готово једино допустљиви. Математичко мишљење треба разумети управо тако. Неки елементи приступа и метода карактеристичних за математичко мишљење могу се срести и у другим научним областима, али у математици се намећу као једино допустљиви.[12]

На сваком нивоу учења математике део наставних циљева се односи на извођење конкретних операција и спровођење поступака и алгоритама. Када се настава постави на тај начин да се наглашено инсистира на остваривању оваквих циљева самих по себи, постоји опасност стицања лажне претставе о успешности наставног процеса, јер неки студенти могу стећи вештину извођења овакве операције али да притом не схфатају суштински генералније логичке везе, т.ј. да стекну само такозвано формално знање. [13]

Прави развитак математичког мишљења, значи развијање способности за усвајање апстрактних појмова, усвајање дедуктивног логичког система, откривање веза и релација између објеката у динамичким условима, управљање променама које настају у зависности од промена неких других параметара, све до стваралачког нивоа где онај који математички размишља открива нове релације и решава проблеме чија решења отварају нова питања и пружају смернице за њихово решавање.

Делатност, умствена активност онога који математички размишља треба бити заснована на научним методама математичког истраживања. Због тога је у методици математике наглашено проучавање научних метода. Током извођења наставе учитељ свесно треба водити студенте примењујући методе опсервације и експеримента, индукције, дедукције, традукције, моделирања. Могућност стицања способности за математичко мишљење детерминирано је субјективним особинама карактера личности. Неке од њих, нарочито мотивација, могу се перманентно развијати током извођења наставног процеса. Важнији стилови мишљења су: еластичност, активност, памћење, ширина, дубина, критичност, самокритичност, јасноћа, концизност и оригиналност. Форма математичког мишљења зависи од квалитета мишљења који одређују стил мишљења.

Према садржају се могу издвојити следећи типови математичког мишљења:

---

[11] (НЦ) стр. 223-230

[12] (РМ) стр. 39-44

[13] (ВМБ) стр. 106-121

- Конкретно мишљење;
- Апстрактно мишљење;
    - Аналитичко мишљење;
    - Логичко мишљење;
    - Просторно-шематско мишљење;
- Интуитивно мишљење;
- Функционално мишљење;
- Стваралачко мишљење;

За изучавање функција од велике је важности развијати све типове математичког мишљења. Свако усвајање апстрактног појма почиње конкретним мишљењем: перцепцијом, стварањем представе, након чега се ствара апстрактни појам и може се говорити о достизању виших когнитивних нивоа. Да би се постигла умствена активност индукције, дедукције, као и анализе и синтезе, треба развити апстрактно мишљење и способност за генерално постматрање објеката и њихових особина. Тек након тога може се говорити о аналитичком или логичком мишљењу – нарочито усвојавању дедуктивних система и самосталног извођења закључака.

Просторно-шематско мишљење је мисловно стварање просторних претстава или шематско приказивање логичких структура. Пошто је конкретно мишљење предуслов апстрактном, како и због важности просторно-шематског мишљења, намеће се закључак да је визуелизација опет један од најважнијих предуслова који није довољан сам по себи, али мора претходити постизању виших нивоа мишљења. Због тога се треба посветити велика пажња коришћењу визуелизационих метода, али не као посебан циљ, већ интегрираним приступом помоћу других техника и метода којим класична методика математика изобилује. На тај начин студенту ће се омогућити стицање суштинских знања и лакше и ефикасније достизање виших когнитивних нивоа.

Ако је фокус наставе математике изучавање функција, свакако један од најважнијих типова математичког мишљења је **функционално мишљење**. Разлог за издвајање посебног типа мишљења, такозваног функционалног мишљења, је тај што су функције један од најважнијих појмова у математици, основа скоро свих природних процеса и један од најмоћнијих инструмената за спознавање реалног света.

“Основна одлика функционалног мишљења је способност спознавања општих и посебних веза и релација између математичких објеката или између њихових особина, и вештина да се они употребе у практици.” [14]

Да би студент могао развијати развијао функционално мишљење, требао би бити у стању да схфати промене, зависност input и output величина, имајући у виду динамичку природу реалног света, а тиме и математичких модела којима се феномени реалног света описују и проучавају. Наравно, ово је дуготрајни процес и да би се остварили наставни циљеви који се односе на развијање функционалног мишљења требају се перманентно примењивати технике и методе које студента стављају у ситуацију да решава проблеме динамичке природе.

Хинчин о значењу појма функција каже:[15] “Ни један други појам не представља активност, покретност и динамичност реалног света и узајамну зависност реалних величина са таквом непосредношћу и таквом конкретношћу као појам функција.”

Специјална дидактика математике, која се односи на изучавање функција, углавном се бави питањем како и када увести тај појам. Што се тиче нивоа наставе математике која се односи на више разреде средње школе и уобичајене садржаје високообразовних курсева математике на техничким факултетима, специјална дидактика математике даје одговоре на питања како обрађивати појмове као што су гранична вредност и непрекидност функције, диференцијални и интегрални рачун, како и функције више промењивих, парцијалне изводе и вишеструке интеграле. Иванов даје детаљан

---

[14] (НЦ) стр. 226

[15] (ПИ) стр. 360-361

преглед методологије за сваки од ових садржаја. [16] Брадис има сличан приступ и указује на начин систематизирања наставних садржаја који се односе на изучавање функција [17], што је веома важно када се у обзир требају имати иницијална знања студената пре почетка напреднијег курса математичке анализе. Методологија специјалне дидактитке математике, усмерена је ка *садржајима* и изобилује примерима који су нарочито важни јер помажу у уклањању опасности формалних знања и помажу да студент стекне суштинска познавања из ове области. То би значило да се упутства пре свега односе на редослед увођење садржаја. Посебно је важно доловити логичку структуру ових садржаја – дати одговоре на питања колико обратити пажњу на доказивање теорема и у којој мери је генерални приступ неопходан за суштинско разумевање наставних садржаја.

И поред свега, класична методика (и општа и специјалне методике) математике, не даје decидне одговоре на сва питања везаних за математичко мишљење. Област према којој сама методика би се требала усмерити је савремена когнитивна наука и специфичније – **математичка когниција**.

Подручје које проучава **математичка когниција** односи се на когнитивне и неуролошке процесе који су у основи нумеричких и математичких способности. Домен математичке когниције може се описати преко следећих питања:

На који начин човеков ум представља бројеве и изводи математичке операције? Шта је у основи когнитивног развоја нумеричких и математичких способности? Који фактори утичу на учење нумеричких концепата и процедура? Које су биолошке основе математичког знања? Дали људи и животиње деле сличне нумеричке репрезентације и процесе? Шта је у основи нумеричких и математичких потешкоћа и како их превазићи?[18]

Мноштво истраживања из области математичке когниције има у основи ова питања. Али учење математике захтева достизање виших когнитивних нивоа. Nunez и Lakoff [19] постављају другачија питања на која базирају своје истраживање у области математичке когниције. Они иду знатно много даље од домена аритметике, респектирајући специфичност науке математике. Дакле, учење математике мора имати у виду дедуктивну организацију саме математике. Ово гледиште математичке когниције је ново, није довољно истражено и упућује на смер у коме би се требало развијати когнитивна наука, јер је суштински важно истражити како човеков ум ствара и организује дедуктивне логичке структуре, како се справља са формалним системима, аксиомама, извођењем закључака, доказивањем теорема и све оно што подразумевају више форме математике.

Nunez и Lakoff постављају следећа питања: "Који когнитивни механизми се користе за структурирање математичких идеја? Специфичније, који когнитивни механизми могу карактеризирати дедуктивну организацију самих математичких идеја?"[20] Да би определили појам дедуктивне организације, ови аутори уводе такозвану "концептуалну метафору".

Нарочито је важно проучити примену концептуалне метафоре са аспекта изучавања функција. Ово је есенцијално за спровођење успешне наставе математичке анализе, јер је тада најизраженији конфликт између интуитивног разумевања математичких ситуација и формалног логичког система саме математике. Nunez и Lakoff полазе од такозване основне метафоре бесконачности и описују низ концептуалних метафора кроз које мора да се прође да би се постигло суштинско разумевање концепта граничне вредности, крива и осталих појмова везаних за функције. Они траже корене у историјском преокрету који настаје у математичкој анализи у XIX веку након Коших, Дедекинда и Вајерштраса, након чега је савремена математичка анализа реконцептуализована на фундаментално различит начин. Пре тога, непрекидност се односила на холистичке и динамичке објекте који се крећу у простору. Кеплер, Ојлер, Њутн и Лајбниц су изградили своје теорије на бази оваквог схватања непрекидности. И ово је идеја коју студенти природно, интуитивно доносе на часовима математике

---

[16] (ПИ) стр. 371-397

[17] (ВМБ) стр. 259-269

[18] (JIDC) стр. xiii

[19] (RNGL)

[20] (RNGL) стр. 110

пре него што изучавају математичку анализу и она се треба драматично променити преко нових концептуалних метафора у којима замишљамо да је простор сачињен од скупова дискретних елемената зване тачке. Кретање у метафоричком простору нестаје и замењено је стриктним тврђењима који садрже статичке егзистенцијалне и универзалне квантификаторе који оперирају са дискретним скуповима тачака.[21]

Дакле, математичка когниција је област која ће у будућности дати одговоре на питања која могу бити основа нових праваца у методици математике. Наведени пример са идејом концептуалне метафоре је само један од могућих прилаза који помаже квалитетније да се припреми и организује наставни процес математике кои се односи на функције.

2.3. Историјски преглед примене информационе технологије у настави математике

2.3.1. Калкулатори

Прве револуционарне промене у настави математике су настале појављивањем калкулатора. Почетком 70-тих година XX века, најпре обични калкулатори са основним аритметичким операцијама, а затим и "научни" калкулатори са неколико додатних функција, постали су доступни широј популацији. Након тога, сасвим природно су се поставила питања: да ли, како и колико употребити калкулаторе у настави математике.

Први графички калкулатори су се појавили 1985 године (Casio fx-7000). Већ следеће године на University of Cambridge реализован је први пројекат базиран на школској примени графичких калкулатора. [22]

Sutherland описује истраживање у којем примена графичких калкулатора изузетно позитивно утиче на ефекте наставе током изучавања функција. Он показује да примена графичких калкулатора у реалној учиноци позитивно делује на ученике са слабијим претходним резултатима, јер помоћу ове алатке ученик је у стању да истражује и нестандардне идеје.[23]

По питању употребе калкулатора у настави све до данас у стручној јавности постоје супротстављене стране. Неки методичари сматрају да је примена калкулатора у раном узрасту штетна јер негативно утиче на развијање аритметичке вештине најмлађих ученика. Извођење аритметичких операција са разломцима методички је изузетно важно, јер претходи усвајању симболичких операција у прелазу са аритметике на алгебру, тако да употреба калкулатора радије води ка примени децималних бројева него операције са разломцима. Чак и у средњим школама и високом образовању, они не препоручују претерану употребу калкулатора. Није редак пример да је употреба калкулатора чак и забрањена на писменим задацима или испитима.

Са друге стране, неки методичари сматрају да је употреба калкулатора у настави корисна ако се пажљиво примене методе које укључују рад са калкулатором. У средњој школи пожељно је део наставе да се организује као обука за рад са калкулатором са више функција, јер на тај начин ученици се и уводе у примену информационе технологије. Проблем са применом децималних бројева уместо разломака може се употребити за увођење ученика у проблематику нумеричке математике, али и што је још важније у фундаментални проблем апстрактног увођења реалних бројева помоћу децималних записа уместо рецимо Дедекиндових пресека. [24]

Графички калкулатори такође се могу веома успешно употребити у настави математике. Они могу бити моћна алатка приликом изучавање функција.

---

[21] (RNGL) стр. 110

[22] (SJWDP) стр 5

[23] (RS) стр. 60-64

[24] (НШИД2)

2.3.2. Компјутери и едукативни софтвер. Компјутерски базирано учење

Метода програмиране наставе развијена је у 50-тим годинама XX века у САД, много пре масовног коришћења персоналних компјутера. Углавном се овај метод сводио на употребу дидактичких материјала у штампаној форми – програмираних уџбеника, програмираних материјала, наставних листића и сличног, чиме се ученик водио кроз процес учења помоћу индивидуализираних форми, пратећи путању учења прилагођену његовим индивидуалним захтевима и способностима. Основа ове методе је алгоритамски начин мишљења и у тесној је вези са алгоритмизацијом наставног процеса.[25]

Савремене теорије учења, нарочито изворне *конструктивистичке теорије о учењу*, као теорија Bruner-a, претпостављају да је учење активан процес, у коме студент конструише нове идеје или концепте, базиране на његовим садашњим или претходним знањима. То значи да је знање једног конкретног студента индивидуална когнитивна структура.[26] У процесу подучавања, учитељ и наставна технологија требају бити у функцији подстицања студента да самостално открива своја нова знања и конструише свој сопствен комплекс знања као когнитивну структуру. Примењујући методу програмиране наставе помоћу штампаних материјала, нарочито кад се примењује разграната путања учења, немогуће је постићи довољно ниво интерактивности.

У 50-тим годинама XX века, почињу први покушаји примене компјутерски помогнутог учења (CAI - *Computer Assisted Instruction*; CAL - Computer Assisted Learning) и то је покушај да се машине укључе у имплементацију методе програмиране наставе. У току наставног процеса ученик је изводио вежбе помоћу електронских уређаја. Ипак, преношење знања на што ефикаснији начин, уместо активног учешћа ученика, још увек је био основни циљ.[27]

Појава CAI и CAL-а као и појава одређених форми учења на даљину, масовним коришћењем радија и телевизије, може се сматрати почетком ере електронског учења.

Најшира дефиниција електронског учења (е-учење - electronic learning, e-learning) је метода учења која укључује помоћ електронског уреда.

Електронски уред може биди радио, телевизија, сателитски пренос и слично, али у савременом смислу, углавном се подразумева метода учења која укључује учење помоћу компјутерске мреже и других електроснких уређаја за дистрибуцију и интеракцију. [28]

80-тих година XX века развијен је SMILE пројекат (Secondary Mathematics Individualized Learning Experiment) у Лондону. У оквиру овог пројекта израђен је математички едукативни софтвер којим се изводила настава коришћењем микрокомпјутера. У периоду 1985-1987 David Tall (University of Warwick) развио је потпуни графички приступ за математичку анализу (Graphic Calculus), базиран на визуелизацији, зумирању у тачки и представи да је график локално раван. Сви програми су написани у BASIC-у и ово је утицало на генерирање следеће генерације софтвера за графичко приказивање функција. [29]

Појава "геометрије корњаче" – LOGO-а, такође у истом временском раздобљу (LOGO је развијен нешто раније) може се сматрати основом математичког едукативног софтвера.

Масовном употребом персоналних компјутера, нарочито у деведесетим годинама XX века, јавља се тенденција укључивања персоналних компјутера у настави. Компјутерски помогнуто учење кроз различите форме постаје све чешће примењивано. То се у почетку углавном сводило на издавање такозваних електронских књига, што углавном значи да је промењена само форма – од штампане у електронску форму. Појава едукативног софтвера најчешће подразумева израду компјутерских програма намењених да помогну у наставном процесу. Овакав едукативни софтвер најпре се сводио

---

[25] (НЦ) стр. 65-67

[26] (СА) стр. 10

[27] (СГШ) стр. 238

[28] (СГШ) стр. 236

[29] (SJWDP) стр. 6-8

на електронској организацији инструкција и електронском тестирању. Овакав приступ нема неких предности јер у предњи план ставља наставне садржаје и само пружа нове могућности за преношење готових знања.

Развојем персоналних компјутера, повећава се могућност имплементације **мултимедијских система за учење** (МСУ). Ови системи подижу перцептивну моћ едукативних софтвера. Педагогија је уочила улогу информационе технологије у настави математике и њен огроман потенцијал за иновирање постојећих наставних метода. Ипак, у задњих неколико декада технологија се увек брже развијала него педагогија, која чак и не успева укорак да прати техологију. Многи аутори дају допринос у лоцирању главних проблема који су се појавили у раном развоју ових програма – период **компјутерски базираног учења и обуке** (CBT - Computer Based Training; CBL - Computer Based Learning). Програми намењени за CBT и CBL углавном су у форми десктоп апликације или електронских енциклопедија и намењени су за индивидуални рад студента на персоналном компјутеру. Најчешће тада коришћени медиј је била дискета, компакт диск (CD), а у последње време DVD.

Компјутерски базирано учење подразумева комплекс метода и прилаза у процесу креирања едукативног софтвера или коришћење софтвера који није намењен првенствено као едукативни софтвер, али се може искористити у дидактичке сврхе. Према образовном концепту који се примењује, могу се класифицирати 3 категорије:

- софтвер са инструкцијама;
- софтвер са откривањем;
- софтвер са закључивањем.

Софтвер са инструкцијама је фокусиран на презентирању наставних садржаја – садржаји су подељени на секвенце, које компјутер презентира студенту. Корисник може да изабере опције које преко одређених линкова воде до других локација. Он такође може позвати и додатну информацију о одређеној тематици. Пример за ово су различите електронске књиге, енциклопедије, туторијали, како и опције за помоћ који су део сложенијих апликација.

Суштина софтвера са откривањем, је охрабривање студента у истраживању одређеног модела или симулацији неког догађаја, феномена или искуства, док унутрашња структура модела или симулације остаје сакривена. Модел или симулација прогресивно се открива, док је студент инволвиран у процесу откривања, или у суштинском учењу. Најчешћи примери оваквог софтвера су имагинарне симулације (историјске или авантуре), или модели реалних феномена (вулкани, нуклеарне експлозије...).

Софтвер са *закључивањем* је пример примене конструктивистичких и осталих когнитивних погледа на развој софтвера и његовог коришћења. Овакав софтвер даје студентима контролу над њиховим студенском искуству, као и могућности да изразе и тестирају своје хипотезе и идеје. [30]

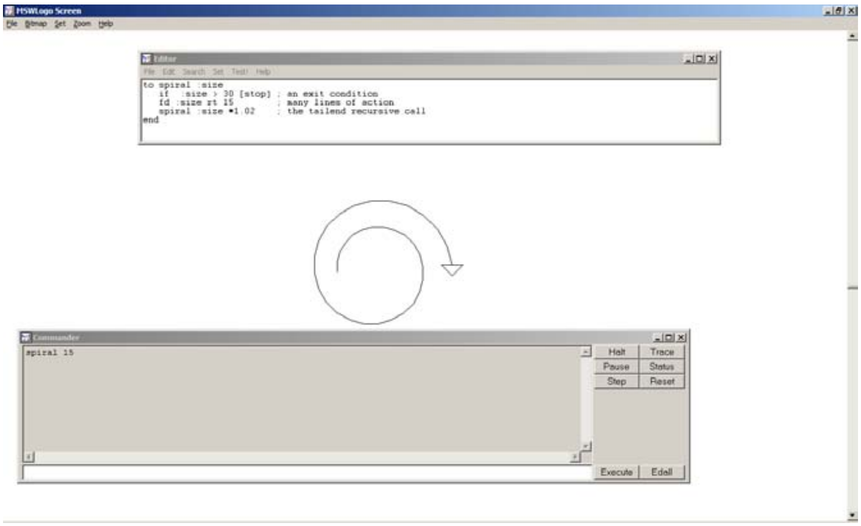
Први револуционарни софтверски пакет овог типа, базиран на развојној психологији Пијаже-а (Piaget), је програмски јазик LOGO, који су развили В.Форцајг (W. Feurzeig) и С.Пајперт (S. Papert), 1967 године. LOGO је замишљен како алатка која побољшава начин на који деца мисле и решавају проблеме.[31] Читав концепт LOGO-а је веома интуитиван и сликовит. Користећи једноставне програмске редове, корисник управља кретањем корњаче. Ово на почетку изгледа веома забавно и може деловати мотивацијски, да ученици све то схвате како игру. Међутим, LOGO има све карактеристике једног ***програмског језика*** и може се употребити као алатка коју ће ученици користити за цртање, као геометријска лабораторија, за истраживање и постављање хипотеза, а осим тога што на тај начин уче геометрију, фундаментално требају приступити математичкој логици и на веома ефикасан начин прифатити алгоритамскиот начин мишљења и основе програмирања. Ово је нарочито значајно не само у настави математике већ и у настави информатике, за чију је методику једно је од најважнијих питања узраст када би ученик могао почети да се бави изучавањем

---

[30] (СА) стр. 17, 18

[31] (КС) стр. 61, 62

програмирања. На Сл. 2.1 је приказана графичка околина LOGO-а и осим главног прозора, приказани су и командни и уређујући прозор, са којих се може видети како се коришћењем једноставних команди корњача може натерати да опише спиралу. Зато се и ова геометријска лабораторија назива “геометрија корњаче”.

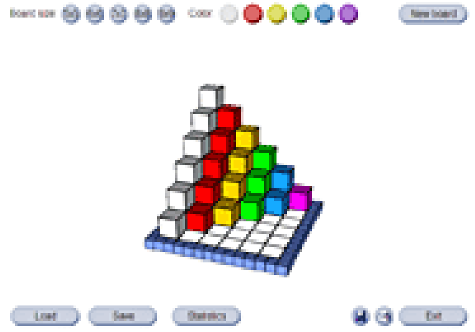


```
to spiral :size
   if  :size > 30 [stop] ; an exit condition
   fd :size rt 15        ; many lines of action
   spiral :size *1.02    ; the tailend recursive call
end
```

```
spiral 15
```

Сл. 2.1. Спирала креирана у програмском језику LOGO

Команде LOGO-а преведене су на језику програмера, тако да и млађи ученици могу програмирати на њиховом језику, што повећава интуитивност овог пакета. Даље су се развијали многи слични графички софтвери и едукативни софтверски пакети. Софтвер отвореним кодом, KTurtle је едукативна програмска околина, која користи LOGO програмски језик. Софтверски пакет Elica је 3D варијанта LOGO-а.



Сл. 2.2 Апликација Cubix Editor софтверског пакета Elica

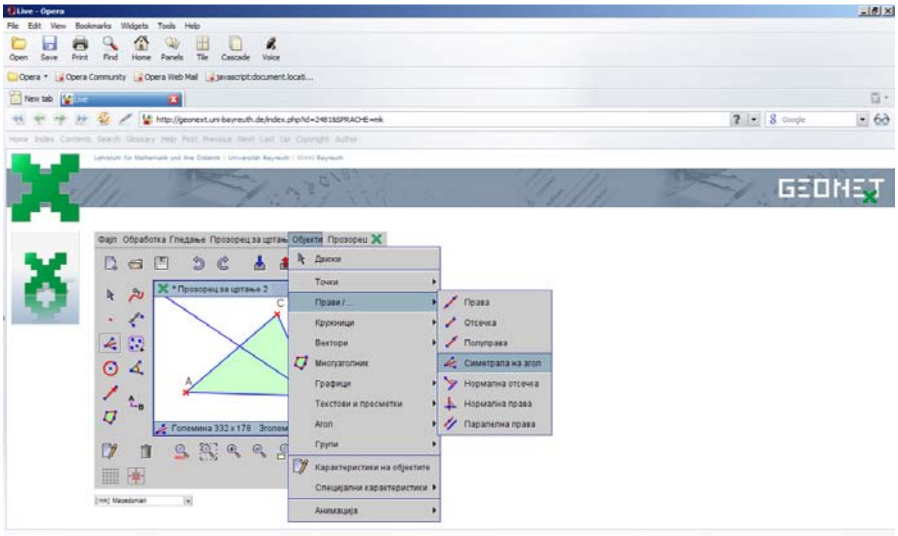
Примена оваквог софтвера у широј употреби у настави практично је немогућа јер су програмски језици веома компликовани и зато се не може се очекивати да ће велики део ученика успети да савлада технике програмирања.

Због тога, едукативни софтвер треба бити кориснички оријентисан (user friendly) и врло једноставан са коришћење. Образовни циљеви софтвера требају бити остварљиви, а да се притом не тражи од корисника да има специфична знања из области која суштински нису везана за предмет изучавања.

Када се ради о геометрији, слично LOGO-у, али са наглашеном корисничком оријентацијом, развијен је велики број софтверских пакета као Cabri, The Geometer's Sketchpad, Geonext, GeoGebra ...

Cabri Geometry - Interactive Geometry Notebook је заправо виртуелна геометријска лабораторија. Може се користити за цртање и конструисање, али ова интерактивна геометријска свеска је много више. У настави математике је нарочито важно решавање проблема и учење базирано на решавању проблемских ситуација – **проблемска настава**. Приликом решавања проблема, једна од најважнијих етапа је истраживање и потрага по идејом за решење. Када се решава неки геометријски проблем методом оловка-хартија обично се уради скица, а различите ситуације треба апстрактно представити, чиме је врло тешко доловити **динамику** различитих ситуација у којима геометријске фигуре могу бити постављене. Због тога, виртуелна компјутерска лабораторија пружа изванредну могућност истраживања, **функционалног** повезивања геометријских објеката, при чему се променом неких од параметара, визуелно може посматрати какве промене ће настати код других објеката као последица примене независних параметара. Премда се овај истраживачки приступ не може сматрати математичким решењем проблема (закључке је потребно доказати), геометријска лабораторија има изузетну моћ да помогне у постављању хипотеза и могућим решењима актуелног проблема.

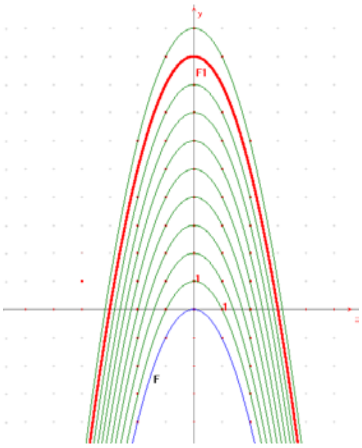
Сличан софтверски пакет је Geonext. Његова највећа предност је у томе што је софтвер са отвореним кодом и бесплатан. Такође, предност Geonext-a je, у томе што се може користити и као самостални софтвер и као део од HTML-оријентиране средине[32]. Ово је важно, јер се тиме, Geonext пројекти могу интегрисати у WBL (веб базираном учењу). На веб страни Geonext-a [10], програм, како аплет, је доступан за рад у живо (Сл. 2.3).



Сл. 2.3 Употрба аплета Geonext у живо на веб локацији [10]

Класификација едукативног софтвера, према образовном концепту који се примењује, не зависи само од самог софтвера. Исти програм у зависности од начина на који се употребљава може се наћи у више категорија. Програм Cabri рецимо, може се употребити као софтвер са инструкцијама у настави математичке анализе, да би демонстрирали геометријску интерпретацију скупа примитивних функција функције f(x) = –2x (Сл. 2.4.)

$$\{F_1(x) \mid F_1(x) = -x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}\}$$

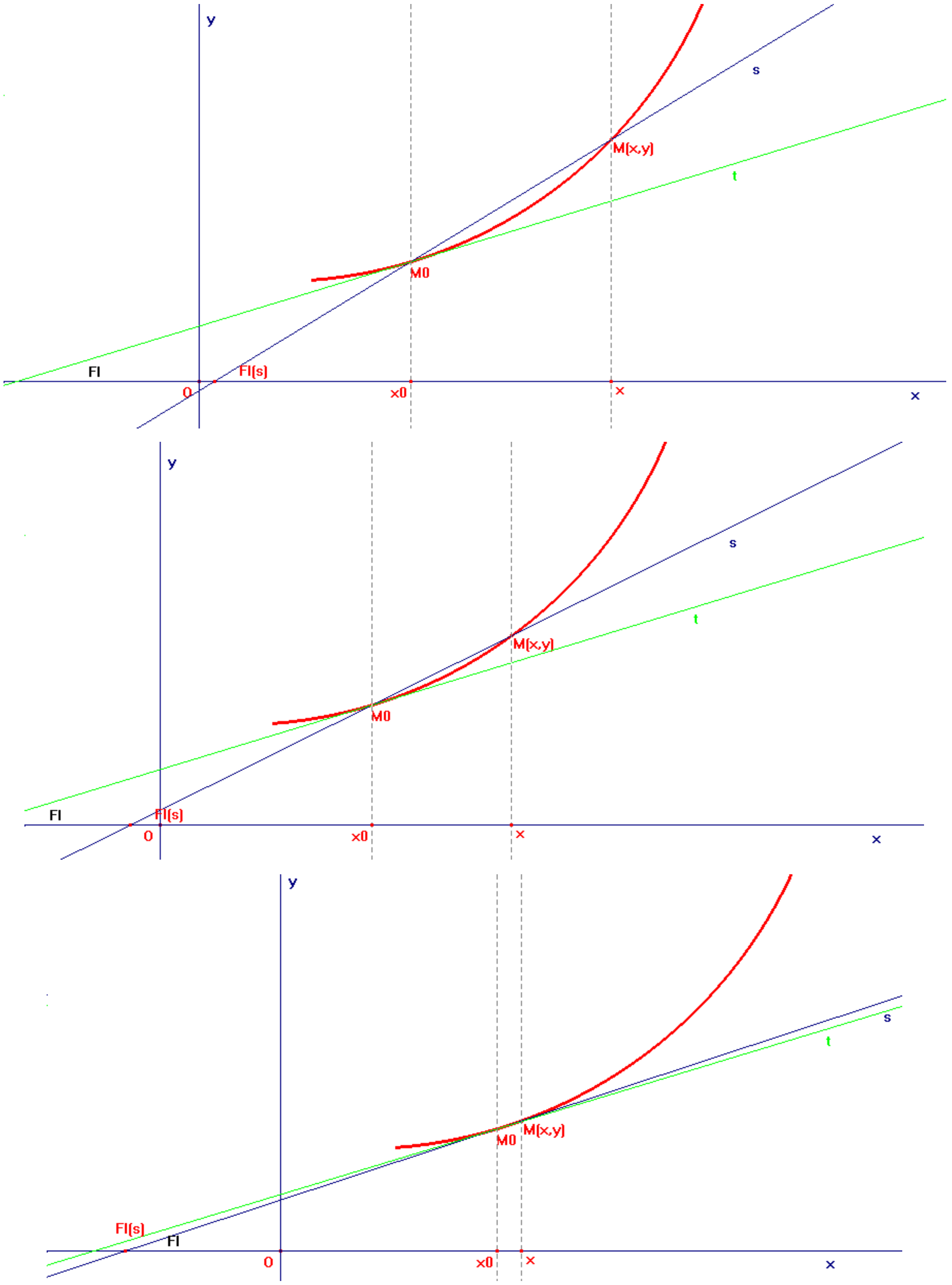


Сл. 2.4. Cabri као софтвер са инструкцијама

---

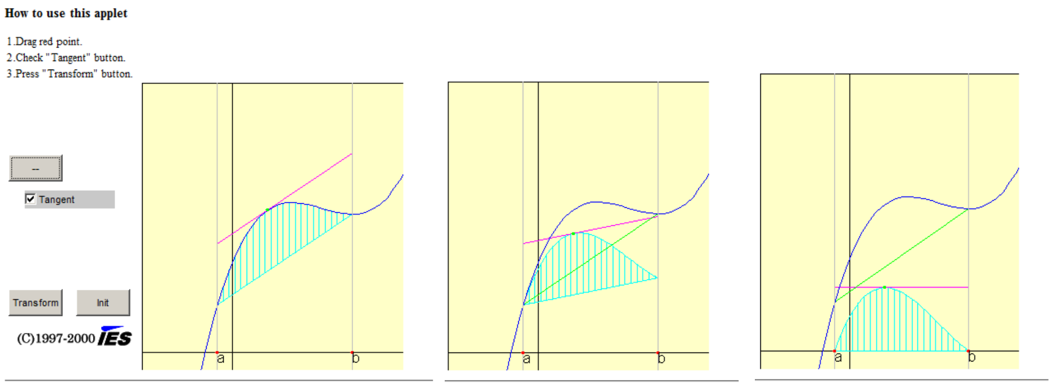
[32] [10]

Исти програм, се може употребити у настави математичке анализе, као софтвер са закључивањем, приликом изучавања геометријске интерпретације извода реалне функцију у тачки. Када се уводи појам тангента криве у тачки, неопходно је доловити динамику кретања те тачке по криви, до поклопања са тачком криве, у коју се повлачи тангента те криве. На Сл. 2.5 приказано је како се Cabri-јем може истраживати и динамички приказати, како се низ правих (секаната) стреми према тангенти и како низ коефицијената нагиба секаната, као тангенс углова које те секанте граде са позитивним делом x-осе, стреми ка вредности извода функције f(x), која је диференцијабилна у тачци x_0, где посматрана крива је график функције f и посматра се тангента графика функције *f* у тачку (x_0, f(x_0)).



Сл. 2.5. Cabri као софтвер са закључивањем

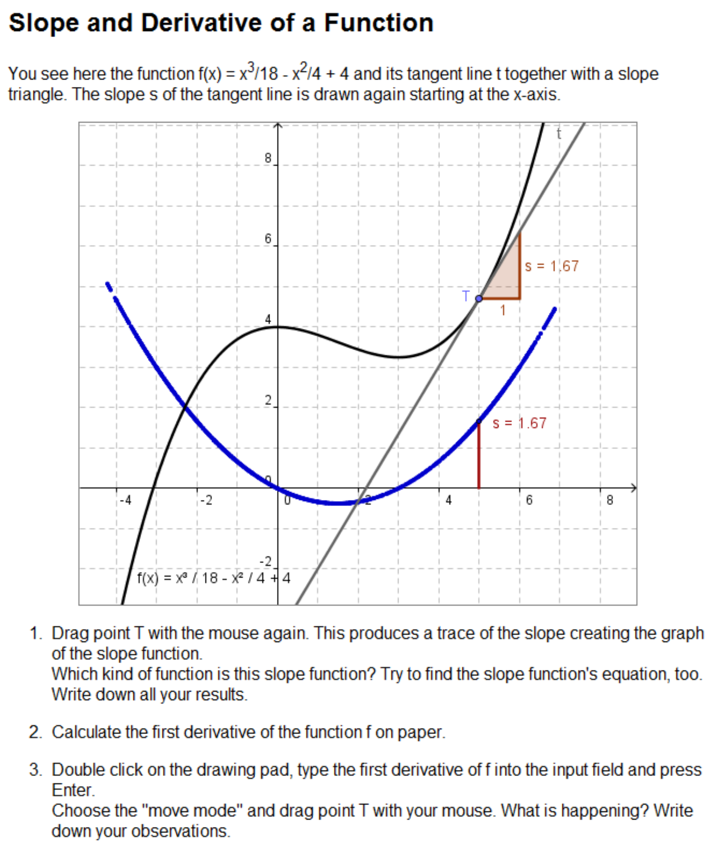
Постоје веома интересантне апликације, намењене за различите узрасте, од компујтерских игара, до веома софистицираних апликација, који интерактивно приказују одређене математичке садржаје. Аплети или компјутерски програми намењени за одређени конкретнији проблем могу се наћи и употребити у сврху реализовања одређеног наставног циља. На интернету се могу наћи доста таквих аплета. Неки од њих се могу спустити и користити на персоналном компјутеру, а неки се користе online. Они омогућују интеракцију и веома су једноставни и интиуитивни за коришћење. Ученик на едноставан начин може истраживати и доћи до потребних закључака. Примера ради, на веб локацији [11] могу се наћи преко 270 корисних аплета за конкретну намену, од којих су преко 60 намењени управо за наставу математичке анализе и изучавању реалних функција. На Сл. 2.6. приказан је аплет за интерпретацију теореме о средњој вредности која има веома важну улогу у настави математичке анализе.



How to use this applet

1.Drag red point.
2.Check "Tangent" button.
3.Press "Transform" button.

Сл. 2.6. Аплет који се односи на теорему средње вредности



Slope and Derivative of a Function

You see here the function $f(x) = x^3/18 - x^2/4 + 4$ and its tangent line t together with a slope triangle. The slope s of the tangent line is drawn again starting at the x-axis.

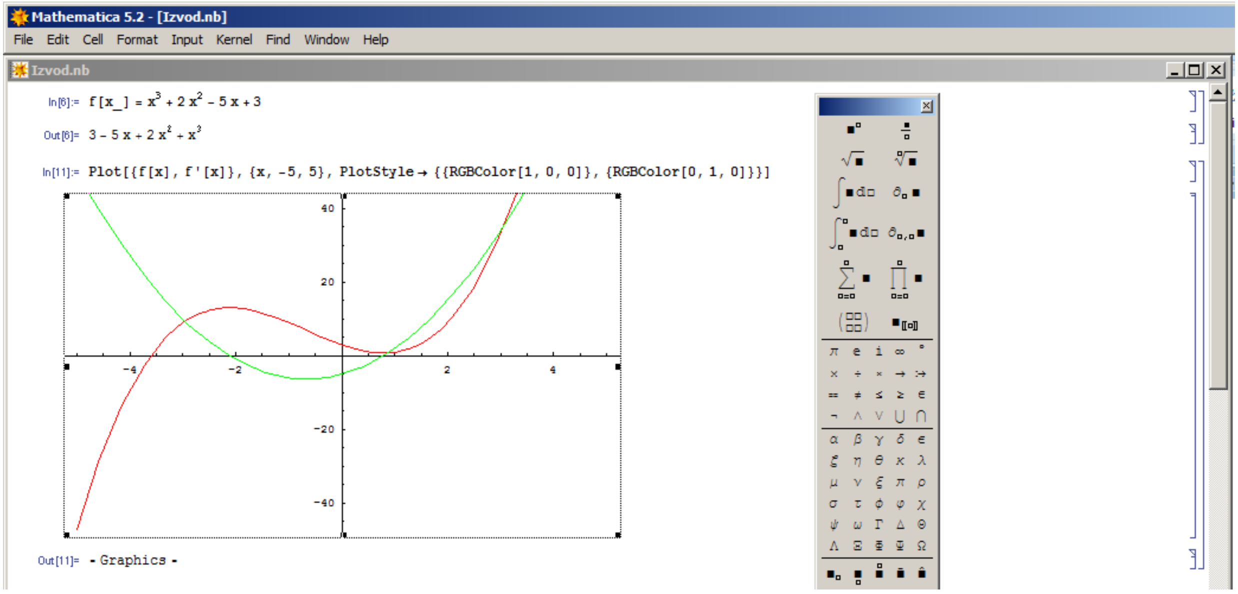
1. Drag point T with the mouse again. This produces a trace of the slope creating the graph of the slope function.
   Which kind of function is this slope function? Try to find the slope function's equation, too. Write down all your results.
2. Calculate the first derivative of the function f on paper.
3. Double click on the drawing pad, type the first derivative of f into the input field and press Enter.
   Choose the "move mode" and drag point T with your mouse. What is happening? Write down your observations.

Сл. 2.7. Аплет израђен са GeoGebra-ом

Поставља се питање како, уместо да траже готова решења, учитељи математике сами да израде једноставне копјутерске програме или аплете. Једно од могућих ефикасних решења је употреба GeoGebre-Dynamic Mathematics for Everyone, развијеног од Маркуса Хохенвартера (M.Hohenwarter) у 2001 години. Geogebra је бесплатни софтвер са отвореним кодом, који представља динамички математички софтвер који спаја геометрију, алгебру, статистику и математичку анализу[33]. Пројекти израђени у GeoGebra-и на изванредно једноставан начин се могу експортирати као анимације, html датотеке и као аплети које се могу интегрирати на вебу. Велики број едукативних материјала о GeoGebra-и се могу наћи на веб локацији GeoGebraWiki[34]. GeoGebra је прерасла у социолошки феномен, тако да уједињује огроман број едукатора и студената у једну социјалну мрежу којој је главни циљ развијање колаборативног учења. На Сл. 2.7. приказан је демо аплет израђен у GeoGebra-и. Њиме се веома интуитивно на динамичан начин приказује да је извод кубне фунције - квадратна функција.

Примена програмских језика за самостално израђивање едукативног софтвера, као и дидактичка питања везана за проблем изучавања технике програмирања као заједнички проблем методике математике и методике информатике, детаљније је разрађен у одељку 2.6.

Осим софтверских пакета који су искључиво намењени за учење (едукативни софтвер) у настави математике, у дидактичке сврхе се могу употребити моћни програмски пакети намењени за математику: Matematica, MathCad, Matlab.... Они имају развијене ефикасне алгоритме за извршавање сложенијих математичких прорачуна, извођења, решења, трансформације, графике, анимације... који се могу једноставно користити, може се писати код - као код програмских јазика и да се експортирају у различите формате. На Сл. 2.8 је приказано како се Matematica-ом, могу приказати графици функција f(x) и f'(x). Студент може интерактивно да експериментише мењањем облика функције f(x) и много више од тога.



```
In[6]:=  f[x_] = x^3 + 2 x^2 - 5 x + 3

Out[6]=  3 - 5 x + 2 x^2 + x^3

In[11]:= Plot[{f[x], f'[x]}, {x, -5, 5}, PlotStyle→{{RGBColor[1, 0, 0]}, {RGBColor[0, 1, 0]}}]

Out[11]= -Graphics-
```

Сл. 2.8. Могућности примене Matematica-е у настави

Могућности Matlab-а су много детаљније описане у поглављу 3 јер је практични део ове дисертације углавном базиран на примени овог програмског пакета у дидактичке сврхе.

Овај преглед ће бити заокружен прелазом на савремене трендове примене информационе технологије у настави математике, што је детаљније разрађено у одељку 2.4.

У деведесетим годинама XX века глобална компјутерска мрежа - интернет намеће се својим револуционарним могућностима у сваком сегменту савременог живота, нарочито у сектору

---

[33] [5]

[34] [12]

образовања. Огромна количина информација постала је доступна екстремно широј популацији и то је учинило да знање буде доступно дословце свакоме.

Прва декада XXI века је у знаку веб базираног и колаборативног учења, све до филозофије е-учења 2.0.

2.3.3. Информационе технологије

Од краја прошлог века не може се више говорити само о информационој технологији (ИТ), одвојеној од комуникацијске технологије, већ се намеће термин информационо-комуникацијске технологије (ИКТ), а у савременој дидактици се намеће проблем **имплементације и интеграције** ИКТ- а у образовању, а нарочито у наставном процесу - најорганизованијем облику образовања.

Термин информациона технологија (information technology) у 1988 години први пут се појавио као назив националног наставног програма, за у 1990 години такође да буде употребљен у контексту учења математике у АТМ часопису Micromath. Две године касније, у документу Математичке Асоцијације, заједно са дефиницијом информационе технологије употребљен је сложен назив ‘компјутери/информациона технологија’ (computers/information technology): “Информациона технологија (ИТ): Складирање, манипулација и пренос података у електронској форми. Употреба укључује коришћење компјутерског софтвера као базе података, табеле, процесоре текста, графичке пакете, али има и ширу имплементацију у телевизији, радију, телекомуникацијама, сателитском преносу и т.д.”[35]

Термин информациона технологија је након тога, крајем деведесетих прешао у фразу информациона и комуникацијска технологија – ИКТ (information and communication techologie - ICT). Коментар Oldknow-а и Taylor-а: “Термин ИТ (информациона технологија) све више се замењује акронимом ИКТ (информациона и комуникациска технологија). У сваком случају, потребно је нагласити да су персонални и остали компјутери само један, премда веома значајан, елеменат у опсегу електронских уређаја који несумњиво революционарно мењају наше друштво”[36]

2.4. Савремени трендови примене информационих технологија у настави математике

2.4.1. Веб базирано учење

Следеће ниво компјутерски базираног учења је **мрежно учење**. Едукативни софтвер, апликације намењене за учење, као и мултимедијски системи за учење, добијају нови квалитет њиховим коришћењем у мрежи. Када су садржаји доступни преко мреже студент може да их користи без обзира на локацију на којој се налази: у учионици, на факултету, у библиотеци, у интернет-клубу или кући. Ово омогућава да се е-учење организује као учење на даљину, али и у оквиру самог наставног процеса. Дакле, то је **online учење**, у коме ученик део садржаја може скинути или га добити на неком медију спољашње меморије за да га користи и кад није конектиран на мрежи. Е-учење се може организовати као online, али и као offline учење.

Неке активности у е-учењу су повезане са тачно одређеним временом догађања. За спровођење ове активности сви полазници курса морају истовремено бити у мрежи (виртуелна или реална учионица). У овом случају то је **синхроно е-учење**. Студент најчешће самостално бира време и начин учења и редослед садржаја, тако да е-учење омогућује и **асинхроно учење** и уопште - омогућује максималну **диференцијацију** и **индивидуализацију** наставног процеса.

Глобална мрежа - интернет омогућује такво повезивање да се компјутерски базирано учење преко мрежног учења развија у **веб базирано учење (WBL - Web Based Learning)**. И поред тога што е-учење није исто што и веб базирано учење највећи део е-учења се одвија преко интернета, па у задњој декади оно углавном укључује **WBL**.

---

[35] (SJWDP) стр 13

[36] исто, (SJWDP) стр 13

2.4.2. Интернет као извор знања

Не постоји богатији извор информација од глобалне мреже - интернета. На њему је постављен огроман број веб страна са огромном количином информација. Практично нема области о којој се не могу наћи специјализоване веб стране које на неки начин сасвим покривају ту област. Као ни у једној библиотеци на свету на њему се могу наћи огроман број веб локација доступних за прегледивање, претраживање и истраживање. Преко бројних линкова могуће је стићи до жељене информације.

У информацијском друштву ово доводи до потребе да педагогија преиспита дефиницију знања. Сада се знање више не може свести на количину факата и генерализација које индивидуа има у својој меморији. Знање је сада способност да се пронађе одређена информација, да се о одређеном проблему селектира квалитетна информација, да се оцени њена релевантност и да се та информација обради, након чега индивидуа изводи своје закључке, доноси одлуке или користи информацију за решавање неког проблема.

У вези коришћења интернета као извора знања постављају се следећа кључна питања:

- Како пронаћи одређену информацију?
- Како пронаћи одређену информацију на одређеном језику (македонски, српски...)?
- Како проценити релевантност пронађене информације?

Највећи део веб страна се односи на комерцијалне сајтове, а присутни су и сајтови који припадају некој организацији, док је број чисто едукативних страна најмањи. Едукативне стране који садрже ауторизоване радове најчешће дају само лимитирани приступ до одређене информације или само преглед образовних услуга одговарајуће образовне институције.

Проблем процењивања релевантности садржаја објављеног на интернету је једен од највећих проблема везаних за веб базирано учење. Као и при употреби штампаних књига, коришћење интернет-информација, процена релевантности садржаја почиње анализом бекграунда аутора и издавача. Књиге које се односе на неки образовни или научни циљ обично су рецензиране од неких релевантних експерата, што даје сигурност релевантности њихових информација. Ове карактеристике једне књиге су основни предуслови како би се одређени текст или књига могао користити као референца неког образовног или научног рада или презентације. Аналогно се може приступити и приликом процењивања релевантности садржаја објављеног на интернету. Ипак, на самом почетку наилази се на први проблем - текстови на интернету најчешће нису ауторизовани. Чак и сајтови образовних институција садрже неке едукативне материјале чији аутор није прецизиран, а у ауторизованим текстовима се не може пронаћи податак о рецензији. Тиме коришћење интернета као извор знања је веома проблематично нарочито када је потребно референцирати извор у сврху неког образовног или научног рада.

2.4.3. Веб енциклопедије. Волфрамов Математички свет

Проблем претраживања информација које су корисне за одређени образовни циљ довео је до концентрисања великог броја оваквих информација на једном месту, на такозваним веб енциклопедијама које најчешће су општо-информативне и општообразовне природе. Постоје и специјализоване веб енциклопедије о конкретнијим областима.

Веб-енциклопедије су моћније због мултимедијског приступа, али и због умрежености хиперлинкова. Неке од њих, као на пример Educypedia[37], садрже само систематизиране линкове према изабраним веб локацијама и представљају филтер којим се на задату фразу из одређене области (математика, електроника, информацијска технологија...) добија списак хиперлинкова већ селектираних страна, релевантних према одређеном критеријуму. Оваква веб енциклопедија се може користити као замена за веб претраживаче чији филтери не задовољавају образовне потребе.

---

[37] [13]

Веома популарне веб-енциклопедије су Encarta[38] и Britanica[39]. Док су текстови Encarta-е неауторизовани, Britanica даје садржаје који су ауторизовани са целокупним подацима о аутору. Њени артикли садрже референце које омогућавају даље проучавање, референцирајући релевантне ауторе који се баве конкретном проблематиком, као и списак спољашњих линкова ка другим веб локацијама где се могу наћи исто тако релевантне информације у вези конкретне теме.

Философија web 2.0 је усмерена ка креирању динамичких веб сајтова који су сасвим оријентисани према корисницима, а њени садржаји су креирани од самих корисника.

Овај је приступ карактеристичан и за енциклопедију Wikipedia, која је "слободна енциклопедија коју свако може уређивати".[40] Њена отвореност је резултирала огромним бројем релевантних чланака, у свим областима, који су доступни на више језика. Енцикопедија Wikipedia је постала феномен савременог живота - од веб сајта је прерасла у неку врсту мегапројекта. Произашли су и други, слични пројекти - сестре Wikipedia-е: Wiktionary - речник, Wikibooks - слободне књиге и приручници, Wikiversity - слободни образовни материјали, Wikinews - слободне вести, Wikisource - библиотека слободних садржаја, Wikiquote - колекција изрека и цитата...

И поред широке распрострањености и употребе, Wikipedia, управо због своје постављености, најдрастично поставља питање релевантности одређене информације. У научној и образовној јавности се води дебата око тога може ли се Wikipedia сматрати релевантним извором знања и може ли се користити као референца. Противници употребе Wikipedia-е као релевантног извора знања као аргумент користе анонимност информација, т.ј. неауторизованост њених чланака. Заправо, највећа предност Wikipedia-е, енциклопедије коју свако може уређивати и објавити шта хоће, постаје њен највећи аргумент против, т.ј. да се она не може сматрати релевантним извором знања.

Као одговор ових критика Wikipedia-е, 2006 године је развијена веб енциклопедија Scholarpedia[41]. Она је по свом изгледу и организацији скоро иста као Wikipedia, а кључна разлика је у томе што Scholarpedia гарантује да је сваки изложен чланак написан од експерта, рецензиран и са провереном релевантности садржаја - сваки чланак има уредника који је одговоран за релевантност садржаја и то је обично сам аутор, а свака промена направљена од корисника, мора бити одобрена од уредника пре него што се појави у одговарајућем чланку. Иако је сасвим релевантна и може се користити као референца, ових неколико правила смањују отвореност Scholarpedia-е, а њена је популарност неупоредиво мања него популарност Wikipedia-е.

У свим наведеним веб енциклопедијама има садржаја из области математике. Ипак, у настави математике потребно је користити веб локације специјализиране за математичке садржаје. На веб локацијама [18] и [19] може се наћи како листа линкова релевантних за математичко образовање, тако и као и велики број видео материјала који се могу употребити у настави математике. Највећи део њих су ауторизовани, а аутори потичу са угледних универзитета.

Најбогатији извор математичких знања објављених на вебу је математичка база ресурса изграђена технологијом Matematica-е, а то је Волфрамов Математички свет, веб сајт mathworld.wolfram.com [20] компаније Wolfram Research која развија и софтвер Matematica.

На овом сајту се налази велики број ауторизованих написа који дају квалитетне информације о математичким појмовима и тврђењима, систематизираних по категоријама – специфичне математичке дисциплине. Чланци су мултимедијски организовани и сем текста садрже слике, цртеже и анимације. Најважније је то је што се они могу спустити у формату Matematica свеске, што омогућује интерактивност и могућност за даље истраживање. Највећи део од њих (око 13000 чланака) је креирао енциклопедист и математичар Е.В.Вејштајн (E.W. Weisstein).[42]

---

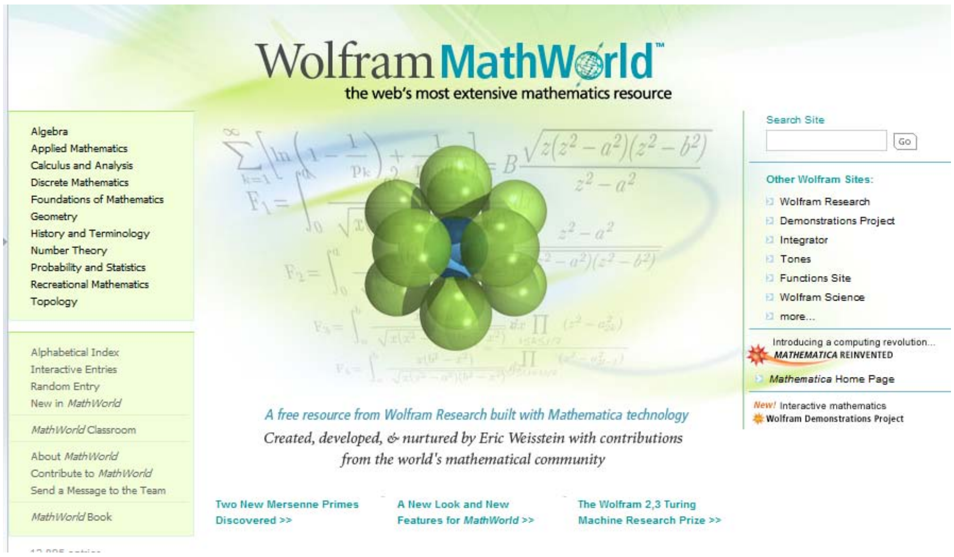
[38] [14]

[39] [15]

[40] [16]

[41] [17]

[42] [21]



Wolfram MathWorld™
the web's most extensive mathematics resource

- Algebra
- Applied Mathematics
- Calculus and Analysis
- Discrete Mathematics
- Foundations of Mathematics
- Geometry
- History and Terminology
- Number Theory
- Probability and Statistics
- Recreational Mathematics
- Topology

- Alphabetical Index
- Interactive Entries
- Random Entry
- New in *MathWorld*
- *MathWorld* Classroom
- About *MathWorld*
- Contribute to *MathWorld*
- Send a Message to the Team
- *MathWorld* Book

Search Site

Other Wolfram Sites:

- Wolfram Research
- Demonstrations Project
- Integrator
- Tones
- Functions Site
- Wolfram Science
- more...

Introducing a computing revolution... *MATHEMATICA* REINVENTED

Mathematica Home Page

New! Interactive mathematics Wolfram Demonstrations Project

A free resource from Wolfram Research built with Mathematica technology

Created, developed, & nurtured by Eric Weisstein with contributions from the world's mathematical community

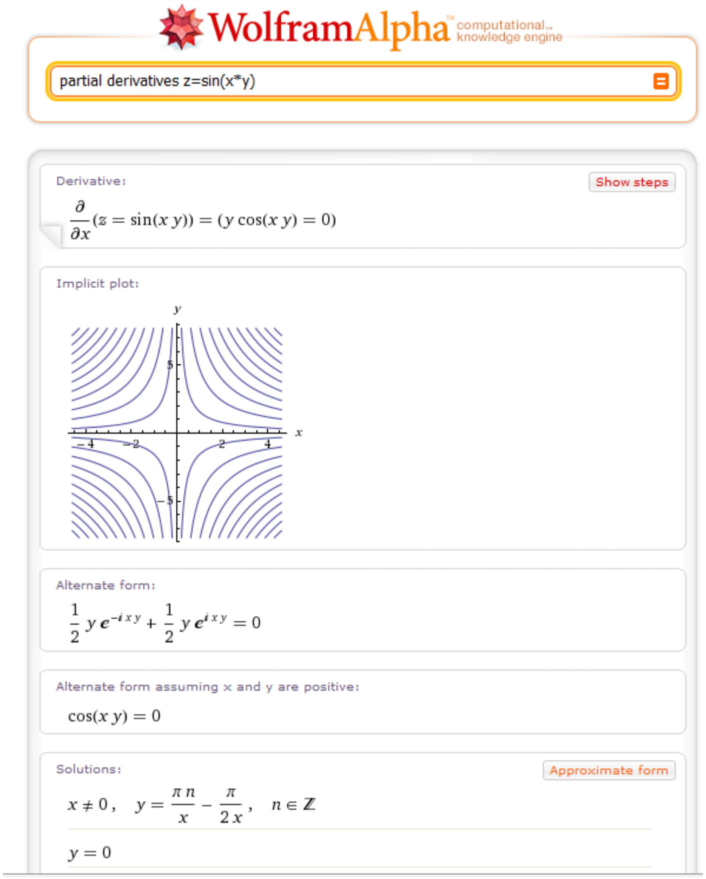
Two New Mersenne Primes Discovered >>

A New Look and New Features for *MathWorld* >>

The Wolfram 2,3 Turing Machine Research Prize >>

Сл. 2.9. Волфрамов математички свет

Иста компанија је развила и такозвану базу знања, “Wolfram|Alpha’s knowledge base covers an immense range of areas”. [43] Тиме је моћ Волфрамовог математичког света проширена у свим научним областима. Математички артикли флексибилније су организовани и имају већи степен интерактивности. Теоријске основе одређеног претраживаног питања из области математике опет воде према веб локацији [20]. У примерима је понуђена опција приказивања решења корак по корак, што је од велике користи у настави математике.



WolframAlpha™ computational knowledge engine

partial derivatives z=sin(x*y)

Derivative:

$$\frac{\partial}{\partial x}(z = \sin(x\,y)) = (y\cos(x\,y) = 0)$$

Implicit plot:

Alternate form:

$$\frac{1}{2}\,y\,e^{-i\,x\,y} + \frac{1}{2}\,y\,e^{i\,x\,y} = 0$$

Alternate form assuming x and y are positive:

$$\cos(x\,y) = 0$$

Solutions:

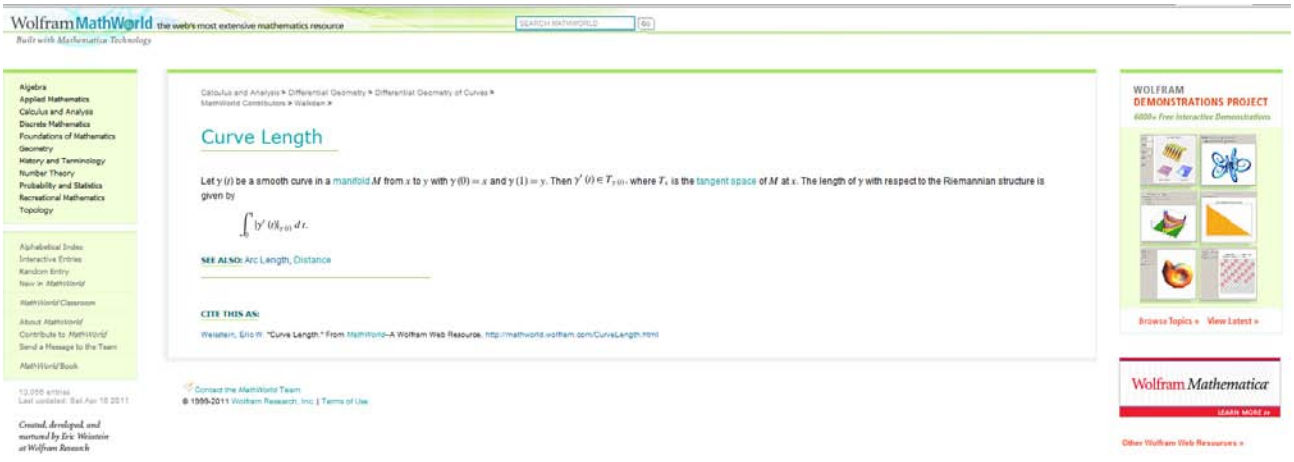
$$x \neq 0\,, \quad y = \frac{\pi\,n}{x} - \frac{\pi}{2\,x}\,, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$y = 0$$

Сл. 2.10 База знања Wolfram Aplha

---

[43] [22]



Curve Length

Let $\gamma(t)$ be a smooth curve in a manifold M from x to y with $\gamma(0) = x$ and $\gamma(1) = y$. Then $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}$, where T_x is the tangent space of M at x. The length of γ with respect to the Riemannian structure is given by

$$\int_0^1 \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}\,dt.$$

SEE ALSO: Arc Length, Distance

CITE THIS AS:

Weisstein, Eric W. "Curve Length." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/CurveLength.html

Contact the MathWorld Team
© 1999-2011 Wolfram Research, Inc. | Terms of Use

13,056 entries
Last updated: Sat Apr 16 2011

Created, developed, and nurtured by Eric Weisstein at Wolfram Research

Сл. 2.11 Ауторизирани артикл на сајту WolframMathworld

2.4.4. Интернет алатке

Веб базирано учење не може се свести само на претраживању корисних информација, њиховом селектирању, обрађивању и меморисању. Интерактивност, колаборативно учење, евалуација и оценивање важне су компоненте које WBL треба инкорпорирати. У ту сврху треба користити различите интернет алатке које требају бити повезане у једној виртуелној околини учења[44], т.ј. у једном систему за управљање е-учењем. Стандард за презентације и инструкције је SCORM. Постоје много начина како да се одређени наставни садржај презентује и да се интерактивним методама организује инструкција коју треба дати студенту да би он радећи низ активности прошао кроз процес учења.

Алатке за презентацију/инструкцију

- Хипертекст, HTML;
- Веб припремљени формати;
- Специјални формати фајлова - pdf фајлови, текстуални фајлови или документи;
- Анимације - алатка којом се надограђује вербално учење визуелним;
- Аудио и видео фајлови;
- Стримовани медији;
- Путања учења;
- Спољашњи линкови;
- Референце
- Речник, индекс појмова, претраживачка машина;
- Алатке за превод;

Комуникацијске алатке

Комуникација је искључиво важна компонента у процесу учења. Да би се постигли образовни циљеви, да би учитељ могао предводити студента у процесу грађења когнитивног система, али и да би студент могао да поставља питања, тражи помоћ или додатне инструкције, учитељ и студент морају имати добру комуникацију. И комуникација између студената такође је важна за развијање колаборативног учења, али и она између учитеља је неоходна, да би се међусобном сарадњом усагласили садржаји и термини догађаја везаних за курсеве.

Важније интернет алатке за комуникацију су:

- Електронска пошта (e-mail);
- Аутоматски e-mail;
- Собе за разговор (chat rooms);

---

[44] (MC1) стр. 3-7

- Форуми;
- Огласна табла;
- Календар догађаја;
- Алатка за постављање задатака;
- Алатка за управљање документима;
- Матичне стране студената;
- Матичне стране учитеља и образовних институција;

Алатке за олакшивање учења

- Алатке за претраживање;
- Мапа сајта;
- Систем за навигацију;
- Алатке за приказивање прогреса и означавање (bookmark);
- Помоћ;
- Календар - агенда догађаја;
- Интерактивне игрице;
- Статистике;
- Практични тестови, вежбе, пробни квизови и само-тестирање;
- Анкете;

Алатке за оцењивање

Задња сукцесивна етапа у наставном процесу је проверавање знања и напредовања студента. Систем за управљање е-учењем може обезбедити изванредно снажне алатке за реализовање ове етапе.

- Банка питања (questions pool);
- Питања вишеструког избора;
- Питања са више тачних одговора;
- Питања са допуњивањем;
- Питања са повезивањем;
- Отворена питања.
- Алатка за креирање пробних тестова, вежби, квизова и тестова за оцењивање;
- Алатка за креирање анкете;
- Алатка за управљање тестовима;
- Креирање извештаја са тестирања;
- Алатка за праћење активности студената;

2.4.5. Е-учење. Системи за управљање е-учењем

У педагошкој и информатичкој литератури најчешће се користе термини Web-Based E-Learning System (WBELS), Learning Management System (LMS), Course Management System (CMS) или Virtual Learning Environment (VLE). Сматрам да је најпогодније користити термин **Систем за Управљање Е-Учењем** (СУЕУ).

СУЕУ је веб базирано софтверско решење које **интегрише све интернет алатке за е-учење** у једној функционалној целини која чиниоце у процесу учења доживљава као виртуелну околину за учење.

Основна дидактичка питања се односе на то да ли су нове технологије у настави уведене само да би се користио нови медиј за преношење готових знања студентима или се могу развити методе којима према конструктивистичкој теорији о учењу, уместо наставне садржине, студент је тај који се поставља у фокусу интереса у процесу учења. ИКТ пружа огромну могућност за остваривање интеракције између студента - главног чиниоца у наставном процесу са једне стране и учитеља као чиниоца и са ИКТ-ом и образовног софтвера као медијума који помаже у процесу учења, као креативан спознајни процес специфичан за сваку индивидуу.

Анализа креирања објеката за учење (**Learning objects, LO**) који коришћењем разнородне интернет алатке СУЕУ интегрише у функционалну целину, добра је основа за тражење одговора на ова дидактичка питања. Технологија HTML (HyperText Markup Language) је језик у кодираном формату, којим се креирају хипертекстуални документи на World Wide Web-у (www). Постоје корисничке апликације (html едитори) којима се на једноставан начин могу креирати веб-сајтови, најчешће статичке веб-стране на којима се могу презентирати едукативни садржаји и којима се на једноставан начин без материјалних трошкова могу објавити на www тако да биду доступни свуда и свакоме[45]. Овакав развој www-а, довео је до револуционарних промена у образовању. Отворили су се могућности **веб базираног учења** (WBL). WBL се већ може сматрати надограђивањем CBL-а, јер је компјутерски базирано учење у стању да користи свог моћног партнера - **компјутерску мрежу**, чиме се образовни софтвер мора убрзано приспособити веб технологијама, као html. Електронске књиге, електронске енциклопедије, чак и мултимедијални системи за учење се морају трансформирати у формат који је доступан преко www-а, или се може користити у компјутеризованим учионицама у којима су компјутери повезани у компјутерској мрежи. На тај начин се може говорити о варијантама веб базираног учења, као што је **мрежно учење** које може користити локалну мрежу (интранет) или глобалну мрежу (интернет). Дакле, не само као форма самосталног учења коју перманентно практикују не само студенти већ и свака индивидуа у процесу доживотног учења, мрежно учење, нарочито WBL, полако је продрло и у редован образовни систем.

Основни недостатак веб базираног учења је тај што што www сам по себи као комплекс повезаних веб локација статичних веб страна још увек се своди само на медијум којим је обогаћен спектар метода којима студентима се преносе готова знања.

Под утицајем конструктивистичких теорија о учењу јавља се појам **колаборативног учења**[46]. Полазећи од схватања да је процес учења важнији од самог знања, увећава се интеракција између фактора наставе. У основи, колаборативно, или кооперативно учење, као стратегија се може применити и у традиционалној настави. То значи учење базирано на сарадњи студената међусобно и сарадњи између студента и учитеља. Студенти раде на неком пројекту најчешће радећи у групи-истражују, сакупљају информације, експериментшу и размењују мишљења и искуства. При томе, учитељ је само медијатор и помаже у овим активностима преко којих студент гради свој систем знања на бази својих потреба, афинитета и могућности. Колаборативно учење као варијанта WBL-а развија се као **колаборативно мрежно учење** (CNL - Colaborative Networked Learning), или као **компјутерски подржано колаборативно учење** (CSCL - Computer-Supported Colaborative Learning). Код CNL-а и CSCL-а и уопште у савременим формама веб базираног учења, акценат је стављен на *комуникације*, при чему се праве напори да се савремене интернет алатке као што су електронска пошта (e-mail), собе за разговор (chat rooms), форуми, беле табле, календари, шеринг сервери, блогови, видеоконференција, видеострим итд, могу користити у самом процесу учења. У ту сврху развијају се интернет портали у којима су све ове интернет алатке уједињене и представљају колаборативне центре у којима учитељи и студенти *комуницирају*, размењују мишљења, датотеке, интрукцијске фајлове, презентацијске материјале, дебатирају и помажу у **учењу базираном на проекту** (PBL - Project Based Learning).

С**истеми за управљање е-учењем** (СУЕУ, E-Learning Management System - ELMS), појављају се у више различитих форми и под различитим именима. Концепти електронског учења могу се поделити на WBT, CBT, VAC (**Виртуелна асинхрона учионица** - Virtual Asynchronous Classroom), VSC (**Виртуелна синхрона учионица** - Virtual Synchronous Classroom) и EPSS (**Електронски подржан систем** - Electronic Performance Support System).[47]

Концепти VAC и VSC су одраз начина како је управо е-учење организовано. Студенти имају приступ наставним садржајима преко компјутерске мреже. У зависности од тога да ли сви истовремено морају бити присутни у виртуелној учионици или не, добија се подела на синхроне и асинхроне. У

---

[45] (ИМЗА) стр. 142-143

[46] [23]

[47] (СГШ)

сваком случају, наставне садржине организује тренер, учитељ, администратор или управник система који су доступни у компјутерској мрежи која може бити интранет или интернет. У случају да се треба организовати директна презентација преко видеоконференцијске везе, онда је е-учење синхроно, јер студенти морају у тачно прецизираном времену бити у мрежи и **online** пратити или учествовати у видео конференцији. Уколико је иста та видео презентација постављена на серверу, онда се сваки студент може најавити у систему у било ком времену и преко видеостриминга може проследити едукативни видео садржај. У овом случају е-учење је асинхроно. У било ком случају, цео систем је аутоматски управљан и постављен на тај начин што се стално прате све активности сваког студента: ко и кад од студената се најавио у систему, колико је времена провео online, које је фајлове спустио или прикачио. Систем може аутоматски послати e-mail или SMS поруку до учесника у оваквим online курсевима и слати обавештења о новим догађајима, подсетник-поруке о online састанцима група, о роковима за достављање домаћих задатака, о терминима online тестирања...

На овај начин, EPSS или VAC су системи који омогућују флексибилност у настави, могућности за самостално учење базирано на принципима индивидуализације и диференцијације у настави, колаборативног учења и конструктивистичких теорија о учењу.

Овакви системи се могу назвати **Апликације/системи за управљање интернет садржајима** (ICMA/S - Internet Content Management Applications/Systems) [48], чиме се посебно акцентирају могућности креирања оваквих ICMA/S решења за е-учење којима би образовне институције максималним редуцирањем трошкова максимизирали ефективност.

Пошто је е-учење релативно нови појам у педагогији, постоје више *терминолошких недоследности*. У контексту веб базираног учења, као и система за управљање е-учењем, могу се срести још неколико кључних термина везаних са е-учењем. Веб базирано учење, као и мрежно учење, неки аутори једноставно зову **online учење**. Један од првих аутора компјутерски пропраћених лекција, туторијала и пројектних задатака користећи електронику, В.Д.Грациади (W.D.Graziadi) увео је појам **VICES-Virtual Instructional Classroom Environment in Science**.[49] Он је користио мултимедијски едукативни софтвер са којим развија мултимедијске алатке на редовним часовима са својим студентима организирајући колаборативно учење биологије. Према Бернард Ласкину (Bernard Luskin), једном од пионира е-учења [24], "е" би требало симболизовати нешто шире како би е-учење било ефикасније. Он каже да би "е" требало бити интерпретирано тако да осим "електронско" додатно значи још и енергично, ентузијастичко, емотивно, едукативно, екстензивно, узбудљиво (exciting), изванредно (excellent).

У контексту СУЕУ-а често се могу срести и следећи термини. **ВСУ** - **Виртуелне околине учења** (VLE - Virtual Learning Environment) је скуп алатки за учење и предавања, дизајнираних на начин којим се шири искуство студената укључивањем компјутера и интернета у процесу учења. Главне компоненте ВСУ пакета укључују раздељивање наставних програма на делове, праћење студента, online подршка за учитеље и студенте, електронска комуникација (e-mail, дискусије, форум, чат, веб-издања) и интернет везе (линкови) ка спољашњим изворима знања које се односе на одговарајуће садржаје наставног програма.[50] Они могу да садрже чланке са веб екциклопедија, блогове, RSS (Really Simple Syndication) и 3D виртуелне околине учења. Као тесно повезан појам са ВСУ (VLE), помиње се појам **MLE - Managed Learning Environment.**[51] Компонента управљања са системом учења је у ствари најважнија одлика савремених СУЕУ. Разлика између VLE и MLE је управо у томе што MLE је VLE који је комбинован са **Management Information System** (MIS). Слични појмови који се могу срести у овом контексту су: систем за управљање учењем (LMS - **Learning Management System**) и систем за управљање са садржајима учења (LMCS - **Learning Content Management System**). Кључна разлика је у начину оперирања са објектима за учење (LO - **Learning Objects**). LCMS је на неки начин надградња

---

[48] (ИМЗА) стр. 144-145

[49] (1993, [24], [25])

[50] (МС1) стр. 9

[51] [26]

LMS-а јер омогућује један LO истовремено да буде коришћен у више курсева и на тај начин LMCS је усмерен управо ка управљању садржајима. [52]

Може се извести закључак да је и поред свих терминолошких недоследности, у првим годинама XXI века, е-учење најчешће примењивано у облику веб базираног online учења, које је организовано и управљано од СУЕУ-а. Генерално, електронско учење покрива шири спектар апликација и процеса, као што су веб и компјутерски базирано учење, виртуелне учионице и дигитална сарадња. Укључује испоруке садржаја преко интернета, интранет/екстранет (LAN/WAN), аудио и видео материјала, сателитског преноса, интерактивне телевизије и CD-ROM-ова. [53]

2.4.6. е-учење 2.0

Фраза **е-учење 2.0** према Кереру (Karrer)[54] користи се у смислу новог начина размишљања о е-учењу, инспирисано појавом **Web 2.0**. Фразу **е-учење 2.0** је увео канадски истраживач С.Даунс (S. Downes). Конвенционални системи е-учења су били базирани на инструкцијским пакетима који се студентима испоручују коришћењем интернет технологија. Улога студента се сводила на учење преко читања и решавања задатака. Решења ових задатака је оцењивао учитељ или сам СУЕУ аутоматски.

У новом приступу према е-учењу, повећава се улога колаборативног учења у заједници и коришћење софтвера као што су блогови, wiki-ја, RSS, аудио и видео стриминг, и виртуелних светова [24].

Првих 10 година могу се назвати е-учење 1.0. Садржаји оваквог е-учења дизајнирани су тако да се студент води кроз садржаје учења омогућавајући све шири распон интеракција, искустава, задатака и симулација. Е-учење 2.0, градиће се око колаборативности. Оно полази од претпоставке да је знање социјално конструисано. Учење се стиче преко конверзације о содржајима и темељи се на интеракцији о проблемима и активностима. Присталице социјалног учења тврде да је један од најбољих начина нешто да се научи - "подучавати" друге о томе.[55]

2.5. Мултимедија и визуелизационе ИТ алатке

Мултимедијске околине су сачињене од вербалне и визуелне репрезентације које, ако се процесирају на одговарајући начин, омогућују интегрирани ментални модел садржаја.[56]

Мултимедијално учење је изучавање наставних садржаја преко уједињења вербалног и визуелног учења. Садржаји се при томе презентирају коришћењем **речи** - преко текста, хипертекста, звука и говора и **слика** - преко графика, фотографија, анимација и видеа.

Према Р.Мејеру (R. Mayer) и Р.Морену (R.Moreno), могу се издвојити следећи принципи мултимедијских презентација:[57]

- **Принцип вишекратне репрезентације**: Боље је користити представљање речима и сликама него само речима. Мултимедијски ефекат је конзистентан са когнитивном теоријом о мултимедијском учењу, јер када се студентима презентира мултимедијско образложење они су у стању градити две менталне репрезентације - вербални модел и визуелни модел, као и градити везе између њих.
- **Принцип блискости**: Приликом мултимедијског излагања, боље је заједно дати одговарајући текст и слику него одвојено. Постоје истраживања којима је показано да, ако студент има могућност у исто време да гледа слику одговарајућег текста који чита, постиже 50-75% већи ефекат, него ако прво чита текст, а затим анализира слику.
- **Принцип подељене пажње**: Речи које се односе на слике или анимације, приликом мултимедијског излагања, било би боље користећи говор да буду наративне, него да буду

---

[52] [27]
[53] (MC1) стр. 8
[54] [28], [29]
[55] [30]
[56] (KSEWJH) стр. 67
[57] (PMPM) стр. 2-5

приказане као текст на екрану. Постоје истраживања према којима се постиже знатно већи ефекат када се визуелизација фокусира на слике и анимације док текст иде кроз звук, јер када и текст треба перцепирати употребом чула вида долази до поделе пажње.

- **Принцип индивидуалне диференцијације**: Претходни принципи више се односе (имају већи значај и ефекат) на студенте слабијих него на студенте већих знања, као и на оне студенте са већим просторним него оне са мањим просторним способностима.
- **Принцип кохерентности**: Приликом мултимедијалног излагања што мање се требају користити споредне, ирелевантне речи и слике. Презентација треба бити оптималне дужине и треба се фокусирати на најважније детаље. Исувише дугачке презентације одвлаче пажњу ка мање важнијим фактима и смањују ефикасност учења студента.

2.5.1. Статички типови података у мултимедијалским системима

Текст

Текст је најчешће коришћена форма коју учитељ или дидактичко средство - књига или мултимедијски систем, користи за вербално учење. Као што учитељ користи штампане текстове и говор за вербално учење, тако мултимедијски систем за вербално учење користи текст и звук (звучну нарацију).

У мултимедијским системима одређени делови текстова се могу потенцирати употребом боја. Боја повећава визуелни ефекат и помаже кориснику да се боље фокусира на делове које аутор жели потенцирати. И поред тога што складност боја приликом њиховог комбиновања треба бити у складу са нормама ликовне уметности, њихова примена треба имати и дидактичку, а не само естетску улогу. Дидактичка улога боја може се илустрирати, рецимо, приликом анализирања дела текста, када специјални, изабрани делови могу бити у различитим бојама. Шема боја треба бити доследно поштована.

Текст не треба бити доминантан елеменат у мултимедијској презентацији. Код једног потпуног мултимедијског система он има комплементарну улогу са осталим мултимедијским компонентама на сцени.

Хипертекст

Хипертекст је текст са везама (линковима) који води ка неком другом тексту. Документи који су креирани као хипертекст садрже текст који корисника најчешће кликом води према неком другом документу.

Штампане књиге такође садрже референце у којима читалац може затражити додатне информације или детаље о другим књигама. Али, често је то веома тешко урадити, а понекада једноставно и немогуће. Зато, због лаког организовања као хипертекст, електронске књиге и уопште текстови у мултимедијским презентацијама имају огромну предност у односу на штампане књиге. Ако хипертекст садржи и спољашне линкове према садржајима које такође имају спољашне линкове, он доприноси да један садржај буде практично неограничен.

Садржаји који се изучавају преко мултимедијског система учења уобичајено имају почетно постављену хијерархију којом су садржаји организовани у једној постављеној (default) путањи учења. Мултимедијски систем учења садржи унутрашње линкове којима је кориснику омогућено да се слободније креће кроз садржаје. Овакав систем навигације кроз мултимедијски систем омогућује флексибилност путања учења.

Графика

Да би се постигао подстицај визуелног учења, а као подршка вербалном учењу и у класичној настави се користе слике, цртежи, дијаграми, фотографије. У мултимедијском учењу слике су најједноставнији и најчешћи комплемент текста којим се одрђени садржај презентира. У настави математике визуелизација је од посебне важности. У мултимедијске системе учења математике, интензивно коришћење слика је изузетно моћна алатка, која омогућује визуелизацију.

Основни типови графике су битмап графика и векторска графика. Битмап слике се меморишу у компјутеру тако да се свака тачка на екрану, сваки пиксел меморише у матрици свим своим атрибутима (2 координате које одређују позицију тачке на цртежу и подаци о боји, светлу...). Због тога битмап датотеке троше већу количину меморије и нису флексибилне приликом промена на димензија слике.

Векторска графика значи да се уместо све тачке појединачно меморишу, у меморији се складира само минимална количина информација које генерирају објекат који треба бити представљен том сликом, најчешће тип објекта и неке математичке формуле.

За мултимедијско учење математике, важно је на који ће начин бити израђено мноштво слика које помажу у визуелизацији наставних садржаја из математике. Статичке слике се могу израдити апликацијама за цртање и бити експортиране у неком формату који је погодан за уметање у мултимедијске презентације. Графике које су израђене апликацијама намењене за геометрију (Cabri, GeoNext, GeoGebra...) такође могу да се експортирају у погодном формату и да се умећу у мултимедијским презентацијама. Тродимензионалне слике су нарочито важне у многим областима математике. Мноштво оваквих графика је израђено у Matlab-у као део ове дисертације.

Приликом коришћења графике употреба боја је једно од важнијих питања. Шема боја која је коришћена приликом компоновања графика, али и осталих елемената мултимедијске презентације - позадине, дугмади, табеле... треба бити у складу са уметничким правилима усклађивања боја. Ово сем естетске има и дидактичку улогу. Доследно коришћење боја може помоћи студенту да још при првом погледу уочи који је циљ сваке компоненте слике. Рецимо, приликом изучувања технике цртања графика реалних функција употребом трансформација графика елементарних функција доследно се може применити одређена шема боја - једну боју користити за основног графика, другу боју графику хоризонталног померања итд. Након неколико оваквих слика у којима се користи иста шема боја студент ће стећи навику да тражи криве одговарајуће боје, како би видео неку конкретну трансформацију.

Фотографија

Приликом посматрања природних феномена, извођења експеримената, мерења и сличног, фотографије добијене дигиталним фотоапаратом или камером, мобилним телефоном, могу се употребити у мултимедијској презентацији. Људи, нарочито они млади, желе сами себе да виде на екрану или платну, па фотографије на којима су приказане етапе рада студената, рецимо приликом учења базираног на пројектима, се могу употребити за њихову мотивацију.

2.5.2. Динамички типови података у мултимедијским системима

Временски зависни медији представљају динамичке типове података. Њихова примена знатно повећава моћ мултимедијског система.

Анимација

Најједноставнија дефиниција анимације је – покретне слике. У суштини, управо то и представља овај тип података. То је више слика које се мењају једна за другом и кроз време остављају утисак да се објекти крећу. Анимације не треба користити само да би презентација била забавнија. Њихово коришћење се може ефектно употребити за остваривање дидактичких циљева.

У настави математике свака употреба променљивих значи динамичност и потребу да се развија функционално мишљење. Приликом трансформација алгебарских израза мења се облик алгебарског израза. Неке детаље треба нагласити и то се може учинити бојом, величином или помоћу неког другог типа форматирања делова текста. Ипак, динамичност која се догађа променом облика израза, може се представити управо преклапањем слика, што ствара ефекат кретања и у суштини је ефекат анимације.

Најбоље примене анимација у мултимедијским системима за учење су оне у којима корисник може остварити утицај на начин на који се објекти крећу. Тиме се остварује интеракција између студента и система учења, што пружа највећу могућност за квалитетно учење. У настави математике, анимације су изванредно значајне. У секцији о компјутерски базираном учењу, елабориране су технике којима се може постићи овај ефекат (Cabri, GeoNext, GeoGebra…). Аплети који се могу једноставно креирати GeoGebra-ом, могу се интегрисати у мултимедијски систем учења, чиме осим инструкцијске и презентацијске намене у исто време имају и интерактивну намену, омогућујући студенту да преко кретања неких тачака он сам контролише кретање објеката и самостално истражује како су кретања функционално повезана.

У експерименталном делу ове дисертације, израђено је мноштво 3D анимација, креираних у Matlab-у.

Звук

Аудио ефекти обогаћују мултимедијске презентације. Звук као медиј обухвата музику и говор. Кратки звучни ефекти могу се користити да би се разбила монотонија у току праћења садржаја учења, али и да би се потенцирала важност појављивања неког објекта. Звучни ефекти делују комплементарно са осталим медијима.

Пажљиво одабрана музика може пријатно деловати на психичко стање корисника док прати инструкције мултимедијалне презентације. Ипак, не треба претеривати са звучним ефекти и музиком и обавезно треба поставити опцију да корисник искључи звучне ефекте и да има могућност да контролише звук преко стандардних опција: пауза, стоп, напред и назад.

Говор

Вербално учење, осим преко текста, преноси се и говорном нарацијом. У класичној настави, учитељ у свакој наставној методи би требао вешто примењивати своје говорне вештине, нарочито у дијалошкој методи, која се јавља као посредник између свих осталих наставних метода.

Мултимедијски системи за учење у звучним датотекама имају моћну алатку којом се вербално учење може балансирано организовати, осим преко текста и употребом говора. У сагласности са принципима дизајнирања мултимедијских презентација, звучни фајлови којима се инструкције преносе говором, требају бити комплементарни и треба их користити у ситуацијама када би текст постигао мањи ефекат. Приликом објашњавања неке анимације, када се инструкције дају текстом, долази до поделе пажње. Зато се у оваквим ситуацијама треба избегавати текст и инструкције треба дати преко звучних фајлова.

У настави математике доминира виши апстрактни ниво наставних садржаја и због тога говор преко звучног фајла није практично користити.

Видео

Укључене у мултимедијској презентацији, видео секвенце могу бити моћне алатке које ће обогатити спектар перцепције корисника. Одређени садржаји које се односе на практичне ситуације које постоје у природи, или под одређеним експерименталним условима, а не могу се доловити сликом или речима, веома се ефектно могу приказати коришћењем филма, документарног снимка или видео клипова.

Највећи проблем са видео фајловима је њихова меморијска величина. Неопходно је њихово компресирање, нарочито да би било могуће интегрисати овакве фајлове у online учењу. Велики број веб сајтова омогућују преузимање њихових ауторизованих видео материјала преко такозваног уграђивања (embeding), тако да сваки аутор веб стране може уградити кратак html код на својој страни и да тиме својим корисницима омогући да гледају видео материјал који је у принципу на сасвим другом серверу и стримује се са оригиналне локације.

Анимације је често корисно експортирати у видео формату, како би могли да се користе независно од апликације којом су креиране. У сврху ове дисертације, израђене су Matlab 3D анимације које су трансформисане у видео формат, компресиране и интегрисане у СУЕУ-а.

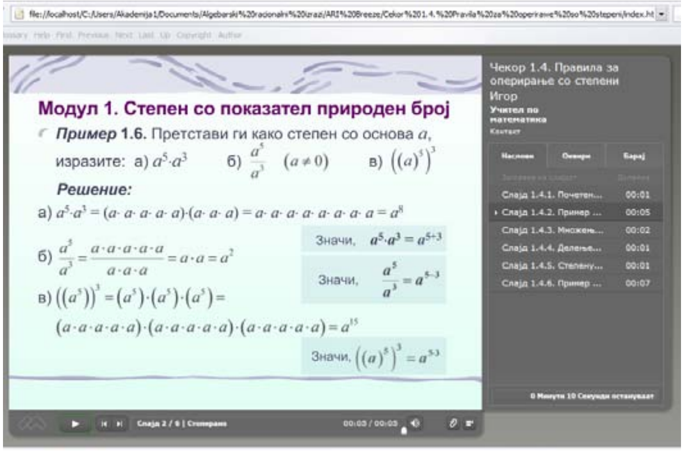
2.5.3. Алатке за креирање мултимедијских презентација. Креирање комплетних МСУ

Сукцесивни структурни макроделови (етапе) наставног процеса су: припрема студента за наставу, обрада нових наставних садржаја, вежбе, понављање и проверавање. Мултимедијске презентације углавном се користе за инструкције. То значи да презентације углавном могу одговорити само на прве две етапе наставног процеса. Због тога, потребно је израдити мултимедијску презентацију која осим инструкција, има и интерактивне одлике, омогућујући студенту да ради вежбе и развија своје вештине везане за инструкцијске компоненте презентације. Такође, да би укључили етапе понављање и проверавање, презентације требају бити комплетиране интерактивним алаткама, као на пример квизовима, клик тестовима и слично.

Постоје бројна програмска решења која омогућују једноставно креирање оваквих мултимедијских презентација базираних на SCORM (Sharable Content Object Reference Model) стандарду. SCORM, осим што представља стандард за креирање мултимедијских презентација, обухвата и експортирање SCORM садржаја у неки архивски (zip) формат, који се може инкорпорирати у системима за управљање е-учењем, омогућујући генерирање педагошких извештаја.

Једноставне презентације намењене веб базираном учењу могу се израђивати и апликацијама за креирање веб сајтова. Њиме се могу израдити html документи у којима су укључени хипертекст, графика, анимације, видео и звук. Овакви докумети се могу инкорпорирати у системима за управљање е-учењем.

На Сл.2.12 приказан је SCORM базиран објекат за учење, креиран помоћу Macromedia Breeze Presentation, експортиран у html формату у интересантном облику плејера.



Модул 1. Степен со показател природен број

Пример 1.6. Претстави ги како степен со основа a, изразите: а) $a^5 \cdot a^3$ б) $\frac{a^5}{a^3}$ $(a \neq 0)$ в) $((a)^5)^3$

Решение:

а) $a^5 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^8$

Значи, $a^5 \cdot a^3 = a^{5+3}$

б) $\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a = a^2$

Значи, $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3}$

в) $((a^5))^3 = (a^5) \cdot (a^5) \cdot (a^5) =$

$(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^{15}$

Значи, $((a)^5)^3 = a^{5 \cdot 3}$

Сл. 2.12 Player Macromedia Breeze Presentation

Остаје питање, како да се мултимедијске компоненте повежу у једном комплетном мултимедијском систему учења према одређеном сценарију. За реализацију сценарија потребно је организовати навигацију кроз систем, графичку околину којом ће бити омогућена доступност алатки и систем за помоћ који ће кориснику омогућити да се лакше сналази у току коришћења система. За повезивање мултимедијских компонената неопходно је креирати базу података и њоме управљати.

Најбољи начин реализације комплетног мултимедијског система за учење је израђивање специјалне апликације за ту сврху. То значи да употребом неког програмског језика, сценарио конкретног МСУ-а треба трансформисати у алгоритам, а њега у софтвер који ће управљати мултимедијским компонентама, организовати систем за навигацију и оперирати са базом података.

Једноставније решење у сврху креирања комплетног МСУ-а је коришћење неке апликације намењене управо за то - за повезивање мултимедијских компонената у један систем. Најпознатије такве апликације су Macromedia Director и Masromedia Flash. Недостатак овог приступа је у томе што се јављају велика ограничења у креирању сценарија. Аутори оваквог система немају великих могућности уношења веће инвентивности и нових решења која нису предвиђена постојећим шаблонима.

2.5.4. Мултимедијски системи учења математике

Може се наћи велики број мултимедијских система за учење математике. Почевши од софтверских пакета намењених за децу којима се учење математичких садржаја изводи преко игре, све до најсофистицираније МСУ-а намењене за наставу математике. Учење кроз интеракцију и игру даје већи ефекат јер одржава пажњу, интересантно је за ученике, а учење долази као пропратни ефекат.

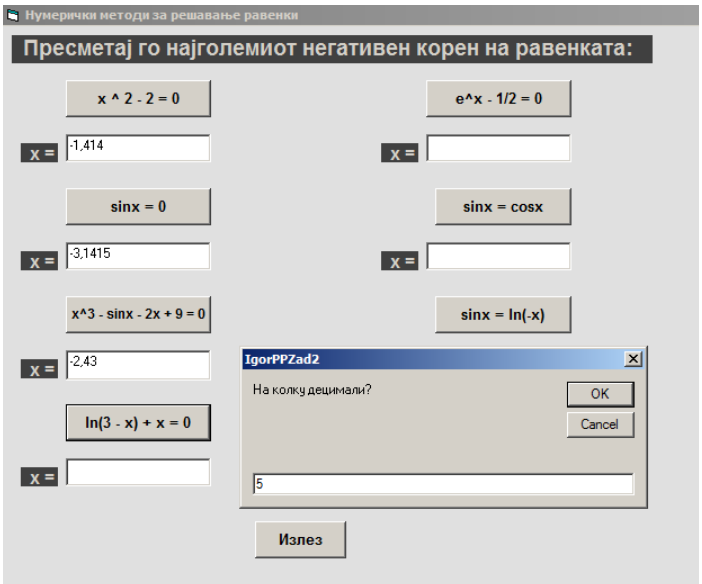
Мултимедијски системи учења обично се могу наћи у комерцијалној продаји, најчешће на CD или DVD ROM-овима. Већина њих је намењена за индивидуалну употребу, због чега их није практично користити у редовној настави. Неке од познатијих мултимедијских енциклопедија, као што је Encarta, укључују садржаје из математике.

Квалитетни мултимедијски системи учења адаптирани за математичке садржаје, па чак и за специфичније математичке дисциплине, најчешће се могу наћи на енглеском језику. Основни недостатак оваквих система, поред језичниог проблема, је у томе што они нису базирани на одређеном наставном програму, па када би се учитељ математике трудио да уклопи овакав систем у редовној настави, требао би учинити значајне промене или адаптације, уколико би то уопште било могуће.

2.6. Математика и компјутерско програмирање

Учитељи математике који поседују вештине програмирања и умеју користити неки програмски језик, могу самостално израђивати своје компјутерске програме које би користили у настави. У сагласности са филозофијом LOGO-а, од самог почетка CBL-а, то омогућује ефикасно коришћење ИКТ-а, базирано на учењу развојне психологије. Једноставни компјутерски програми се могу израдити за различите садржаје из алгебре и математичке анализе - од аритметичких операција, програми намењени ученицима мањег узраста, све до програма намењених сложенијим наставним садржајима у којима су визуелизација и динамика веома битни у процесу учења.

На Сл. 2.13 приказан је једноставни програм израђен у Visal Basic-у којим преко једноставне контроле дугмади се приказује највећи негативни корен једначине. Кликом на дугмад, изабира се једначина и одређује се тачност којом се треба израчунати решење. Да би се овај концепт применио на неку другу једначину треба интервенисати у коду програма. Ако је могуће и студент самостално да мења код програма, онда се може постићи да он и самостално истражује и долази до закључка, у овом случају до закључка на који се начин тражи нумерички корен одређене једначине.


Нумерички методи за решавање равенки

Пресметај го најголемиот негативен корен на равенката:

x = -1,414

x = -3,1415

x = -2,43

IgorPPZad2

На колку децимали?

5

Сл. 2.13 Visual Basic програм за нумеричко решавање јадначине

Сматра се да је логика програмирања изузетно блиска математичкој логици. Зато је и филозофија LOGO-а била да ученик учи математику помоћу исписивања компјутерских команди. Показало се да се ученици у раном узрасту веома тешко справљају са овладавањем алгоритамског начина мишљења. Поставља се питање да ли се можда касније, у средњој школи, може комбиновати учење неког програмског језика и алгоритама са учењем математике.

Осамдесетих година XX века у средњим школама су уведени предмети чији циљ је био да се ученици уведу у програмирање. Због недостатка одговарајућег персонала наставу су углавном изводили учитељи математике. Претпоставка да ће се математичари најбоље снаћи у тој улози показала се као делимично тачна. Овај трансфер знања није ишао аутоматски. Многи учитељи математике нису се баш најбоље снашли у тој улози. Поставља се и питање одговарајућих наставних метода, које методика наставе математике не може покрити због специфичности наставе информатике, тако да се јавља потреба издвајање посебне дисциплине – методика настава информатике.

Многи теоретичари још увек сматрају да се због очигледне повезаности математике, логике и програмирања може искористити компјутерско програмирање за остваривање дидактичких циљева наставе математике. Студенти информатичких наука, техничких студија и уопште студенти који имају вештине програмирања због својих базичних интереса, могу бити доведени у ситуацију да своје вештине употребе да би креирали програме које су у директној вези са садржајима из математике.

У ту сврху, треба се пажљиво саставити дидактички систем математичких задатака. Решавањем ових задатака студент ће израдити компјутерски програм у неком програмском језику. Да би креирао овакав програм студент мора дубље проучити математичке садржаје, самостално да истражује и експериментише. Тиме би се индиректно постигли циљеви наставе математике. Кроз практичне активности, студент ће креирати свој когнитивни систем математичких знања, развијајући своја знања везана за конкретну математичку област на коју се односи одговарајући дидактички систем задатака. Ова теоретска хипотеза је тестирана у експерименталном делу ове дисертације.

3.Глава
Опис и документација едукативних материјала

У сврху остваривања главног циља истраживања, израђени су едукативни материјали у електронској форми који се базирају на теоретским основама дидактике математике:

- мултимедијске алатке интегриране у настави;
- софтвер: функције и програми израђени у Matlab;
- online курс: дидактички базиран систем едукативних материјала организовани преко система за управљање е-учења;
- дидактички систем математичких задатака намењени студентима: израда интерактивних Matlab програма.

Сви ови едукативни материјали односе се на наставне садржаје везане за векторске функције једне реалне променљиве, или за функције више реалних променљивих.

Сви израђени едукативни материјали имају наглашену **визуелну** компоненту. Кључни фајлови су **видео** материјали којим је доловљена динамичка природа проблема учења функције.

Основни циљ оваквих едукативних материјала је визуелно и интерактивно стицање есенцијалних знања о функцијама: графичко приказивање функција, "читање" својстава функција из њихових графика, 3D аналитичка геометрија - криве и површине, векторске функције, значење граничних вредности функције више реалних променљивих у тачки, концепт непрекидности функција више реалних променљивих, парцијални изводи, двоструки интеграли...

3.1. Наставни садржаји на којима се односе едукативни материјали

Формулисањем основног циља израде едукативних материјала начелно је већ наведено на које наставне садржаје се односе израђени едукативни материјали.

Будући да је само истраживање спроведено са студентима Универзитета информационих наука и технологија у Охриду током пролећног семестра академске 2009-2010 године, изабрани су наставни садржаји који су саставни део предмета Математика 2, који је језгрени предмет - обавезан за све студенте другог семестра прве године студија.

3.1.1. Наставни програм предмета[58] Математика 2

Курс Математика 2 намењен је студентима који већ имају добро разумевање есенцијалних идеја калкулуса, специјално функције једне реалне променљиве. Овај курс студентима треба дати темељну експозицију диференцијалног и интегралног калкулуса вишег реда, разрађивањем функција са више променљивих. Штавише, ово је курс базиран на аналитичкој геометрији и концепту вектора. Кроз курс Математика 2, студенти требају схфатити идеју моделирања реалне тродимензионалне ситуације у математици.

Циљеви

На крају курса, студент ће стећи:

- дубоко схватање математике у 2 и 3 димензији;
- способност да користи концепт вектора за моделирање ситуације из реалног живота;
- способност да манипулише формулама у којима су инволвиране више од једне реалне променљиве;

---

[58] Коришћен званични документ "Mathematics 2 Syllabus" са UIST - Ohrid

- способност да користи аналогију за проширавање диференцијалне теорије са курса Математика 1 на концепте са више променљивих;
- способност да решава вишеструке интеграле и да се справља са тродимензионалним ситуацијама.

Садржај курса

1. Вектори и геометрија простора

- Тродимензионални координатни систем;
- Вектори;
- Скаларни производ;
- Векторски производ;
- Праве и равни у простору;

2. Векторске функције и кретање у простору

- Векторске функције;
- Моделирање кретања пројектила;

3. Парцијални изводи

- Функције више променљивих;
- Лимеси и непрекидност у вишим димензијама;
- Парцијални изводи;
- Правило вериге;

4. Вишеструки интеграли

- Двојни интеграли;
- Запремина;

3.1.2. Изабрани садржаји

Респектирајући јасно постављени циљ истраживања да едукативни материјали имају наглашену **визуелну** компоненту, изабрао сам садржаје који су погодни за овакав начин дидактичке обраде и групирао сам их у три теме:

- Површине;
- Криве;
- Парцијални изводи и двојни интеграли.

На ове изабране садржине нарочито сам се фокусирао током извођења наставе са свим студентима (и експерименталне и контролне групе). Са експерименталном групом сам извео пројектну наставу[59]. У ту сврху су виртуозно израђени едукативни материјали, нарочито видео материјали који се односе на наведене 3 теме (опширнији опис ових едукативних материјала је дат у одељцима 3.3. и 3.4).

Такође је и сам дидактички систем математичких задатака (опширније описани у одељку 3.4.) тако постављен да сваки студент експерименталне групе треба израдити програм у Matlab-у који се односи на једну од наведених изабраних тема наставних садржаја.

3.1.3. Есенцијална знања који се односе на функције

Математичке функције описују зависност између променљивих величина. Самим тим, оне имају динамичку природу. Промене input-променљиве проузрокује промене output-променљиве. Овај концепт је значајан јер се њиме моделирају велики број проблема у реалном животу, техници и готово у свим природним наукама.

---

[59] обавезних 25% сваког курса на UIS&T-у је такозвана пројектна настава

Ово је најважнији разлог због којег изучавање математичких функција има централно место у сваком универзитетском курсу математике. Очекује се да ако студенти науче да истражују особине функција, ако умеју графички да прикажу функције, ако су вешти у диференцијалном и интегралном рачуну, да они онда разумеју функције као концепт и да могу да користе математичке функције за моделирање ситуације из реалног живота.

Ипак, из наставне практике произлази да је веома велика опасност да студенти стекну само "формално знање" о функцијама, а да суштински не разумеју сам концепт функција. Пролазећи кроз класични универзитетски курс математике студент може стећи вештине, рецимо, да рачуна изводе и интеграле неких функција дефинисане преко веома компликованог алгебарског израза, а да му при томе уопште није јасно шта значи извод функције, да не уме да објасни везу између извода и лимеса, или да му није јасно како се сам одређени интеграл дефинише.

На пример, највећи број студената уме да израчуна лимес:

$$\lim_{x\to -4}\frac{x^2-16}{x+4}$$

али на питање има ли функција

$$f\left(x\right)=\frac{x^2-16}{x+4}$$

вертикалне асимптоте, сматраће да функција има вертикалну асимптоту $x = -4$. Ово је пример формалног знања, јер применом формалних правила студент ће израчунати лимес, али суштински не разуме шта тај резултат значи и није у стању да тај резултат визуелизира.

Због тога сам се у овом истраживању фокусирао на избор есенцијалних, суштинских знања која се односе на функције. На ова есенцијална знања сам обратио велику пажњу и током извођења наставе, а нарочито приликом израде едукативног софтвера, видео материјала и уопште у току рада са експерименталном групом.

Истраживање је фокусирано управо ка унапређивању наставе преко коришћења информационо-комуникационе технологије у том смислу да је бенефит студената од оваквог унапређивања наставе да се повећа квалитет студентових знања која се односе на есенцијална знања о функцијама. Промена квалитета студентових знања је мерена компарацијом есенцијалних знања о функцијама једне реалне променљиве којим су они почели курс Математика 2 и њихова есенцијална знања о функцијама више реалних променљивих која су стекли на два различита начина - класичним прилазом унапређен интегрисањем мултимедијских алатки (контролна група) и интензивном применом информацијско-комуникационе технологије (експериментална група).

Важно је да овде буде дефинисано која су та есенцијална знања која се односе на функције.

Предзнања - есенцијална знања о функцијама једне променљиве које "подразумева" да студент који посећује курс Математика 2 поседује:

- Суштинско разумевање дефиниције граничне вредности функције једне променљиве у тачки;
- Суштинско разумевање концепта непрекидности функције једне реалне променљиве у тачки;
- Суштинско разумевање домена и ранга функције једне реалне променљиве;
- Суштинско разумевање графика функције једне реалне променљиве, нарочито "читање" својстава функције из графика, интерпретирање промене output-а проузроковане променама input-а, интерпретирања граничне вредности, непрекидности нарочито у критичним ситуацијама кад се у околини датој тачки функција дефинише на различит начин (условно), или није дефинисана у тој тачки, затим визуелно интерпретирање извода функције и резултата теореме о средњој вредности итд;
- Суштинско разумевање извода функције једне реалне променљиве у датој тачки и његова геометријска интерпретација;
- Суштинско разумевање појма одређени интеграл, разумевање Риманове суме и њихово геометријско интерпретирање;

- Препознавање квадратне криве и суштинско повезивање квадратне једначине две реалне променљиве са типом и обликом квадратне криве.

Есенцијална знања које студент треба поседовати након завршетка курса Математика 2.

- Суштинско разумевање домена и ранга функције две реалних променљивих $f:D\to\mathbb{R}$, где $D\subseteq\mathbb{R}^2$;
- Суштинско разумевање графика функције две променљивих и могућност интерпретације у 3D координатном систему;
- Интерпретација вектора у 3D простору и суштинско разумевање тродимензионалног векторског простора;
- Суштинско разумевање концепта праве и равни - интерпретација линеарне једначине;
- Рутинско препознавање квадратне површине у 3D простору: цилиндар, елипсоид, параболоиди, хиперболоиди, конус;
- Суштинско разумевање домена и ранга векторских функција једне реалне променљиве као пресликавање са једнодимензионалног у дво или тродимензиналном скупу;
- Могућност интерпретације криве у 3D простору као график векторске функције и физички као временски детерминирано кретање честице;
- Суштинско разумевање концепта граничне врендости функције две реалних променљивих и граничне вредности векторских функција једне реалне променљиве;
- Разумевање концепта непрекидности функција две реалних променљивих и векторских функција;
- Суштинско разумевање извода векторске функције и интепретација вектора брзине и убрзања у дату тачку 3D криве;
- Суштинско разумевање дефиниције парцијалног извода функције две реалних променљивих и геометријска интерпретација парцијалних извода;
- Суштинско разумевање дефиниција двојног интеграла, генерализација Риманове суме, геометријско значење области интеграције код двојног интеграла и његова геометријска интерпретација запремином тела;

Очигледна је веза између прве и друге групе наставних циљева које се односе на есенцијална знања студената везаних за функције. Могућност да се знања друге групе стекну ***аналогијом*** наглашено је и коришћено током извођења наставе код мерења квалитета знања пре и после истраживања.

3.2. Мултимедијске алатке и њихово интегрисање у настави

3.2.1. Вербално и визуелно учење

Према когнитивној теорији Р.Мајера постоје квалитативно два различита метода учења: **вербално учење** и **визуелно учење**. Ова два метода су комплементарна и узајамно се не искључују.[60] У наставној практици најприсутније је вербално учење. Речи су основа сваке комуникације, а у основи сваког наставног метода у класичној методици то је начин на који се организује игра речима. Често, умеће учитеља доводи се у контекст са његовом обдареношћу жонглирања речима или са његовим ораторским способностима. Књиге, уџбеници, збирке и уопште дидактичка помагала, изобилују речима. Уопште, речи се користе за објашњавање факата и генерализација, независно да ли се ради о једноставнијем или сложенијем наставним садржајем. Али не случајно стално се наглашава потреба да се користи визуелизација. По Т.Петровићу, један од дидактичких принципа је принцип очигледности и апстрактности.[61] Каже се да хиљаду речи могу бити замењене једном сликом. Визуелно учење допуњује вербално и то омогућује да перцепција буде комплетна. Ма колико да су наставни садржаји једноставни или компликовани, конкретни или апстрактни, визуелизација је важна да би студент могао да активира свој комплетни перцептивни апарат, што је нужно да би могао покренути процес мишљења. Грађење појмова почиње перцепцијом конкретних објеката, па тек након тога преко процеса мишљења креира се апстрактни појам.

---

[60] (ММ)

[61] [3]

Визуализација је нарочито важна у настави математике. Према В.Цимерману и С.Канингему, визуелизација је процес презентације садржаја преко геометријског или графичког представљања математичких принципа, теорема или проблема, или помоћу компјутерске **графике** и **анимација**. [62]

У настави математике нарочито је важно **функционално мишљење**. Веома често се јавља потреба представљања **динамичких процеса**. Сваки покушај да се овакви динамички процеси прикажу вербално, речима или чак и да се визуелишу статичким сликама или геометријским интерпретацијама, најчешће је мање или више неуспешан. Динамичке процесе нужно је објаснити динамичким средствима, презентацијама у којим су представљена кретања - анимације.[63]

3.2.2. Статичке мултимедијске алатке. Графика израђена у Matlab-у

У извођењу наставе чији су циљеви да студент дубоко схвати математику у 2 и 3 димензије и да се справља са тродимензионалним ситуацијама, један од највећих проблема је постићи визуелизацију. Без обзира на то да ли ради се о класичној настави где учитељ покушава визуелизирати ствари таблом и кредом или о савременој настави, доловљавање тродимензионалне ситуације на дводимензионалној површини (табли, папиру, компјутерском екрану) представља проблем.

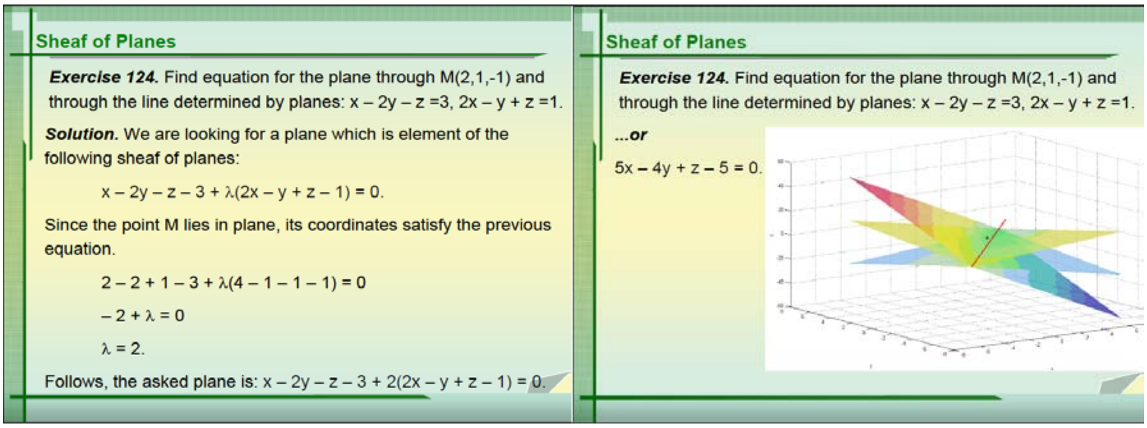
Информацијско-комуникационе технологије могу у великој мери олакшати изучавање функција једне реалне променљиве. Постоји огроман број софтверских решења намењених визуелизацији 2D математичких проблема. Већину од њих је врло једноставно користити и пружају могућности да се долови динамичка природа математичких проблема везаних за функцију. Аутори који се баве методиком математике, нарочито могућностима да се ИКТ примени код изучавања функција, углавном се баве техникама подучавања о знањима које се односе на дводимензионалну математику. Управо због тога је и ова дисертација фокусирана на подучавању о знањима везаних за функције које се односе на тродимензионалну математику.

Коришћење Matlab-а[64] пружа могућности да се на релативно једноставан начин долове 3D ситуације. Кодом који је једноставан за учитеље и који под одређеним околностима може бити разумљив и студентима, може се креирати графика којом се визуелизирају 3D ситуације које произлазе током изучавања функција. Графика која је продуцирана оваквим Matlab кодом лако се може експортирати у формат погодним за коришћење у мултимедијским презентацијама. У сврху овог истраживања интензивно су коришћени битмап фајлови генерирани на овакав начин. Мултимедијска презентација која изобилује оваквим 3D сликама које визуелишу готово сваку ситуацију везану за сваки задатак има неколико предности. Пре свега даје могућност да се рационално користи наставно време. Дословце се за сваки задатак или сваку ситуацију може израдити конкретна и веома прецизна представа о објектима који су математички описани и обрађивани. На тај се начин избегава уопштени прилаз који се користи у традиционалној настави у којој се геометријске интерпретације таблом и кредом могу само грубо приказати и студент се може дубље посветити проучавању веза између математичких формула и оног што се реално догађа у 3D свету. Наравно, у традиционалној настави се не могу у току наставних часова приказати већи број геометриских интерпретација, а нарочито је тешко или чак и немогуће доловити промене које настају променом одређених параметара. Овакве мултимедијске презентације могу бити доступне студентима што им омогућава да самостално проуче све те графике уместо да се током наставе труде да што верније у својим свескама прецртају уопштене геометријске интерпретације, тако да им цело наставно време остане на располагању да би могли да раде на стицању есенцијалних знања, перцепирајући графике директно везане за актуелан математички проблем који се обрађује.

На пример, у сврху остваривања циља "Суштинско разумевање концепта праве и равни ", израђен је систем задатака намењен за изучавање права и равни. Комплетно решење једног тих задатака, који је мултимедијски обрађен и укључује овакву статичку битмап слику израђену у Matlab-у, је приказано на следећој слици (3.1.).

---

[62] (ММ)
[63] (ИД2)
[64] [2]



Sheaf of Planes

Exercise 124. Find equation for the plane through M(2,1,-1) and through the line determined by planes: $x - 2y - z = 3$, $2x - y + z = 1$.

Solution. We are looking for a plane which is element of the following sheaf of planes:

$$x - 2y - z - 3 + \lambda(2x - y + z - 1) = 0.$$

Since the point M lies in plane, its coordinates satisfy the previous equation.

$$2 - 2 + 1 - 3 + \lambda(4 - 1 - 1 - 1) = 0$$

$$-2 + \lambda = 0$$

$$\lambda = 2.$$

Follows, the asked plane is: $x - 2y - z - 3 + 2(2x - y + z - 1) = 0.$

Sheaf of Planes

Exercise 124. Find equation for the plane through M(2,1,-1) and through the line determined by planes: $x - 2y - z = 3$, $2x - y + z = 1$.

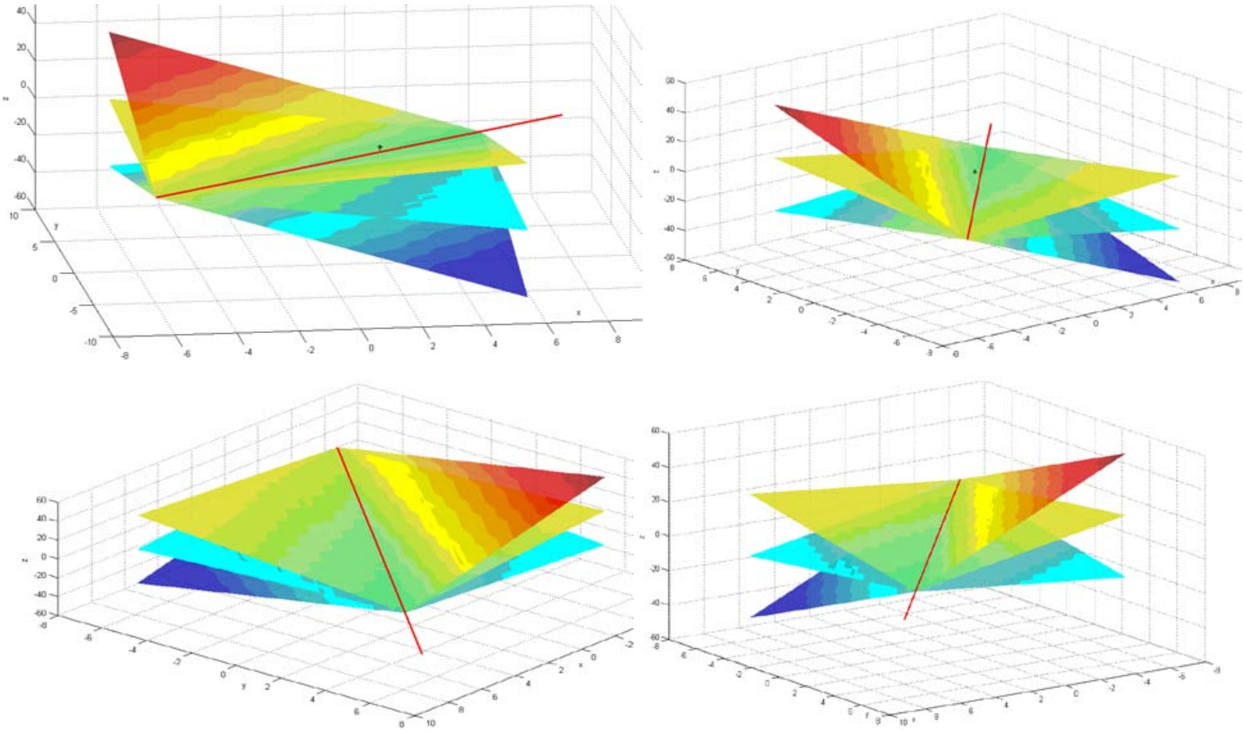
...or

$5x - 4y + z - 5 = 0.$

Сл. 3.1. Мултимедиска презентација са битмапом израђена у Matlab-у

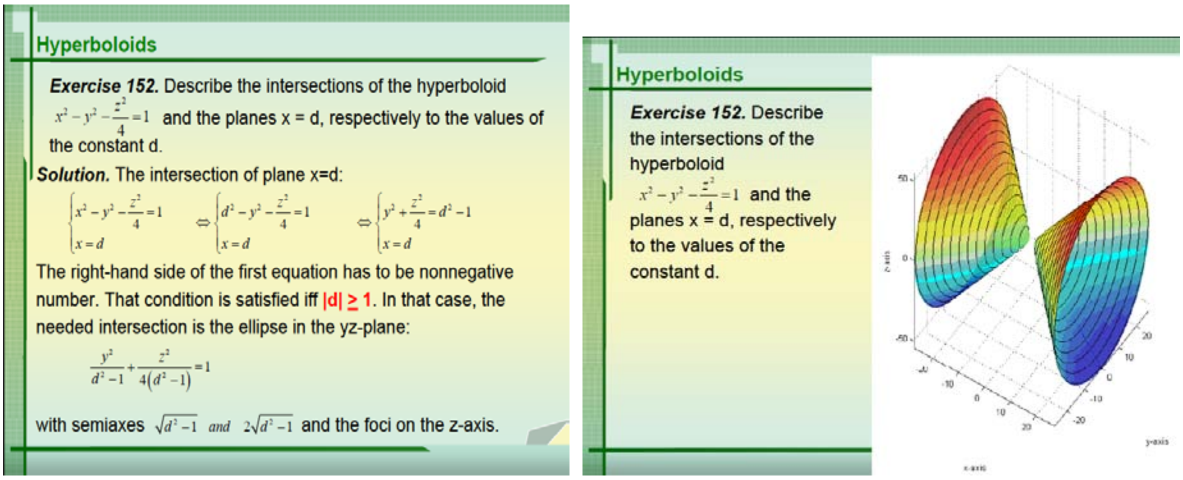
Matlab-ов **графички едитор** пружа могућности да се продуцирана слика обрађује. Могу се додавати ознаке координатним осама, заглавље, легенда, како и мењати боје актуалних објеката. Као и у сваком графичком едитору може се уметнути текст и неки облици - линије, стрелице, кутије, криве и слично. На тај се начин могу продуцирати обогаћени графици који се могу укључити у мултимедијским презентацијама.

У дидактичку сврху, најважније су могућности да се график зумира и помакне, а посебно када је у питању 3D интерпретација важна је могућност ротације објеката и промена азимута и елевације погледа на објекте. Овим се само извођење наставе може учинити интересантнијим и **моћнијим**, јер осим класичне презентације статичне слике може да се прикаже Matlab код, или само да се покрене графички едитор Matlab-а и да се њиме на лицу места прикаже 3D интерпретација актуалне математичке ситуације фокусирајући се на различите делове слике или да се прикажу ти исти објекти из различитих углова.



Сл. 3.2. Приказивање 3D објеката за различите вредности азимута и елевације

Приказивање Matlab кодова и могућност да се на лицу места промене неки улазни параметри, даје могућности да се и са статичким сликама долови извесна динамика одређених типова математичких проблема. У следећем примеру демонстрирано је на који начин се може постићи приказивање динамичности математичке ситуације помоћу статичких мултимедијских алатки.



Hyperboloids

Exercise 152. Describe the intersections of the hyperboloid $x^2-y^2-\frac{z^2}{4}=1$ and the planes x = d, respectively to the values of the constant d.

Solution. The intersection of plane x=d:

$$\begin{cases} x^2-y^2-\frac{z^2}{4}=1 \\ x=d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d^2-y^2-\frac{z^2}{4}=1 \\ x=d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+\frac{z^2}{4}=d^2-1 \\ x=d \end{cases}$$

The right-hand side of the first equation has to be nonnegative number. That condition is satisfied iff |d| $\geq$ 1. In that case, the needed intersection is the ellipse in the yz-plane:

$$\frac{y^2}{d^2-1}+\frac{z^2}{4\left(d^2-1\right)}=1$$

with semiaxes $\sqrt{d^2-1}$ *and* $2\sqrt{d^2-1}$ and the foci on the z-axis.

Hyperboloids

Exercise 152. Describe the intersections of the hyperboloid $x^2-y^2-\frac{z^2}{4}=1$ and the planes x = d, respectively to the values of the constant d.

Сл. 3.3. Статичком сликом визуализирана динамичка математичка ситуација

Имајући Matlab код за генерирање овог графика, уопште није тешко експериментирати различитим вредностима параметра *d* у приказаном задатку. При том се могу применити наставни методи који подстиче функционално мишљење студената и истовремено постићи неколико различитих ситуација које наводе студенте да траже везе између формула и добијених резултата који би они и сами лако извели и оно што се реално догађа у 3D окружењу.

На пример, након решавања система једначина:

$$\begin{cases} x^2-y^2-\frac{z^2}{4}=1 \\ x=d \end{cases}$$

суштински је важно да се постави питање шта геометријски значи решење овог система, израженог једначином

$$\frac{y^2}{d^2-1}+\frac{z^2}{4\left(d^2-1\right)}=1.$$

Описивање облика и местоположаја добијене елипсе у зависности од вредности параметара *d* не може се добити само формалним знањем. Графика приказана на слици 3.3. у великој мери може помоћи студентима да *виде* облик и местоположај елипсе и речима да описују каква елипса се добија рецимо за следеће вредности

$d = 10$ и $d = -10$

чак и да скицирају овакву елипсу на 2D координатном систему чије су осе *y* и *z* и да затим тумаче на којем ће растојању од yz-координатне равни ова елипса бити постављена, заједно са равним *x* = *d*, паралелна yz-координатној равни.

Услов да пресек између хиперболида од два дела и равни постоји:

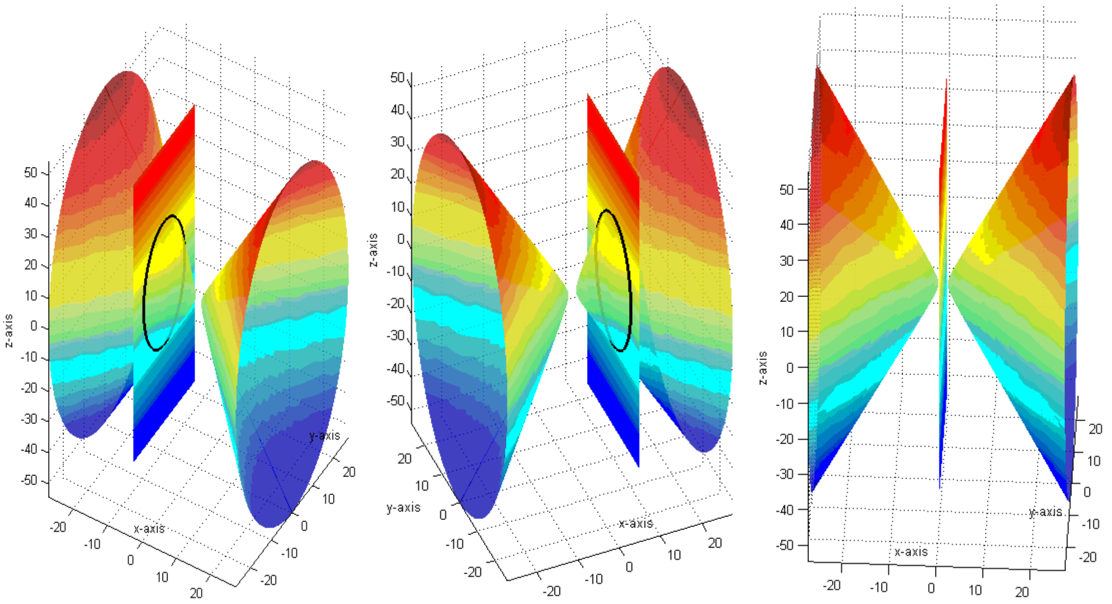
|d| $\geq$ 1,

студенти требају суштински разумети. У ту сврху су добра питања типа "шта се догађа ако је *d* = 0 или *d* = 1/2?". Оваквим питањима студент се може довести у ситуацију да проблеме које има интерпретирајући једначину добијену за *d* = 0,

$4y^2 + z^2 = -4$

и коју не задовољава ниједан уређени пар реалних бројева, доведе у контекст са непостојањем пресека датог хиперболида и yz-координатне равни и релативно лако да визуелизира овај закључак.

Да би ова очигледна веза била брзо и прецизно визуелизирана, може се искористити исти Matlab код, мењањем вредности параметра *d* и ротацијом погледа. Ово је приказано на следећој слици 3.4.:

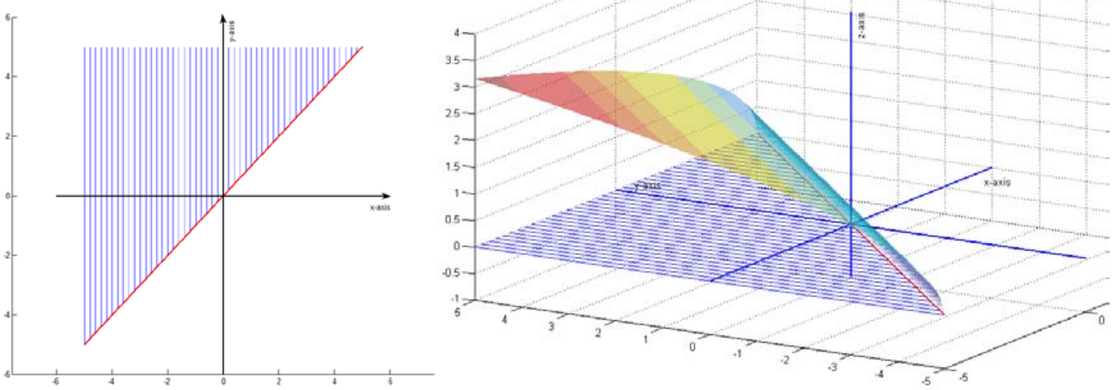


Сл. 3.4. Визуелизација резултата пресека за $d = -10$; $d = 10$ и $d = 0$

Статичким сликама израђеним у Matlab-у се може доловити веза између дводимензионалног и тродимензионалног приказа - делова (различитих аспеката) једног истог проблема. На пример, у сврху остваривања следећа два циља:

- Суштинско разумевање домена и ранга функције две променљивих $f:D\to\mathbb{R}$, где $D\subseteq\mathbb{R}^2$;
- Суштинско разумевање графика функције две реалних променљивих и могућност интерпретације у 3D координатном систему;

израђен је дидактички систем задатака којим се студент ставља у различите ситуације и од њега се тражи да интерпретира домен и ранг дате функције две променљивих (дводимензионално) и график исте те функције (тродимензионално). За сваки од ових задатака израђене су по две графике, а током извођења наставе примењене су сличне наставне методе описане у претходна два примера.



Сл. 3.5. Визуелизација веза између 2D и 3D приказа различитих аспеката једног проблема

На слици 3.5. приказана је једна конкретна математичка ситуација која се односи на функцију

$$f\left(x,y\right)=\sqrt{y-x}$$

Део слике са леве стране односи се на домен дате функције, а на десном делу приказан је график те функције тако што је 2D приказ домена смештен у 3D приказу графика функције. И овде се може развити дискусија шта би се догодило кад би узели уређени пар (x, y) изван домена, односно пар за који не важи ограничење $y \geq x$. Закључак није тешко визуелизирати помоћу приказаних графика, а грешка ће се појавити и у Matlab-овом командном прозору.

3.2.3. Динамичке мултимедијске алатке. Анимације израђене у Matlab-у

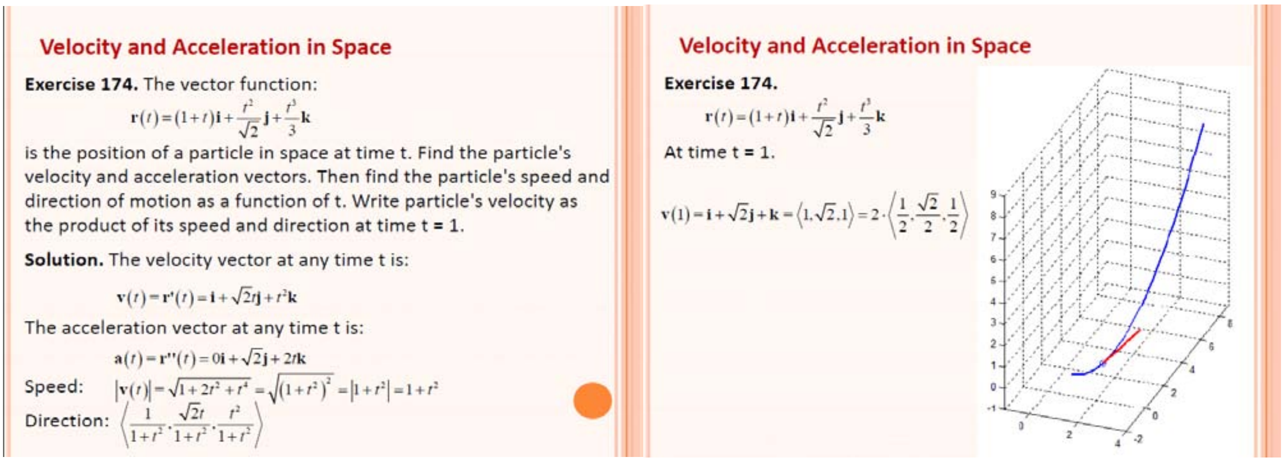
Приликом извођења наставе чији циљеви се односе на знања везаних за функције, један од најважнијих задатака је развијање функционалног мишљења. За то се морају развијати наставни методи којим се може доловити динамичка природа математичких проблема везаних за функције. Да би студент стекао есенцијална знања о функцијама и њиховим особинама, нужно је да развије осет како се промена input величине одражава на output величину, али и на геометријске интерпретације, и све оно што функција или њена гранична вредност, извод, интеграл и слично значи у математичком моделу у којем се нека реална ситуација описује том математичком функцијом.

У претходном одељку су описане неки "трикови" како да се статичким мултимедијским алаткама долови нека динамичка математичка ситуација. Али, како је већ образложено, овакве пробе су мање или више неуспешне. На пример, интерпретирање векторске 3D функције као модел кретање честице, а њеног извода као тангентни вектор криве која је трајекторија те честице која њу описује током кретања и вектора брзине тог кретања, затим другог извода те функције као акцелерацију честице итд, врло је тешко објаснити користећи статичке графике и готово немогуће користећи традиционалне методе.

Matlab пружа веома лак и интересантан начин креирања анимације којима се могу описати динамичка својства функција. Суштина креирање оваквих анимација је у генерирању великог броја статичких слика у којима је већина објеката непромењена, док се само се неки објекти мењају. Свака оваква слика представља један фрејм. Низ оваквих фрејмова складира се у такозваној матрици филма, која је специфична структура података коју Matlab аутоматски креира. Оваква матрица филма се може сачувати као посебан фајл. Затим, једноставним Matlab кодом може се приказати анимација учитавањем матрице филма, постављањем статичког дела графике и позивањем команде за приказивање филма. Недостатак овог приступа је у томе што матрица филма заузима велику меморију. Креирана анимација се може и буквално експортирати као филм, или као видео фајл у .avi формату.

Овакав начин креирања анимације се може искористити у дидактичку сврху. Поставља се координатни систем, подешава се приказ (азимут и елевација), цртају се статичке геометријски објекти, а динамика се доловљује променом облика и/или положаја покретних објеката. Свака промена складира се као фрејм, а затим се креира анимација учитавањем тако већ креиране матрице.

Да би се постигли наставни циљеви везани за, рецимо наведени пример интерпретације векторске 3D функције као кретање честице, креиран је систем задатака сличан следећем задатку:



Velocity and Acceleration in Space

Exercise 174. The vector function:

$$\mathbf{r}(t)=(1+t)\mathbf{i}+\frac{t^2}{\sqrt{2}}\mathbf{j}+\frac{t^3}{3}\mathbf{k}$$

is the position of a particle in space at time t. Find the particle's velocity and acceleration vectors. Then find the particle's speed and direction of motion as a function of t. Write particle's velocity as the product of its speed and direction at time t = 1.

Solution. The velocity vector at any time t is:

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{r}'(t)=\mathbf{i}+\sqrt{2}t\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}$$

The acceleration vector at any time t is:

$$\mathbf{a}(t)=\mathbf{r}''(t)=0\mathbf{i}+\sqrt{2}\mathbf{j}+2t\mathbf{k}$$

Speed: $|\mathbf{v}(t)|=\sqrt{1+2t^2+t^4}=\sqrt{(1+t^2)^2}=|1+t^2|=1+t^2$

Direction: $\left\langle\frac{1}{1+t^2},\frac{\sqrt{2}t}{1+t^2},\frac{t^2}{1+t^2}\right\rangle$

Velocity and Acceleration in Space

Exercise 174.

$$\mathbf{r}(t)=(1+t)\mathbf{i}+\frac{t^2}{\sqrt{2}}\mathbf{j}+\frac{t^3}{3}\mathbf{k}$$

At time t = 1.

$$\mathbf{v}(1)=\mathbf{i}+\sqrt{2}\mathbf{j}+\mathbf{k}=\langle 1,\sqrt{2},1\rangle=2\cdot\left\langle\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$$

Сл. 3.6. Проучавање кретања у простору у фиксираној тачки

Међутим, да би се постигла динамичност, пожељно је поставити питање како би изгледао исти проблем уколико се уместо t = 1, узме нека друга временска координата, или на који начин ће се вектор брзине променити уколико се време мења непрекидно од 0 до 2.5? Ово је класична математичка ситуација у којој је динамичност у самој природи проблема.

Да би се приказало кретање честице које је описано векторском 3D функцијом:

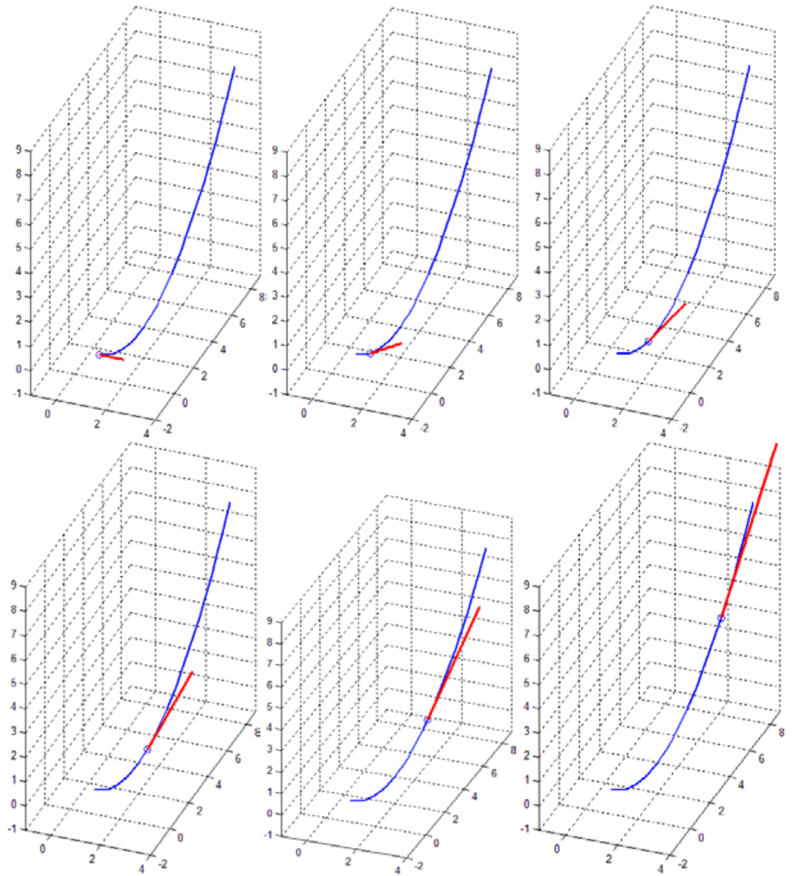
$$\mathbf{r}(t)=(1+t)\mathbf{i}+\frac{t^2}{\sqrt{2}}\mathbf{j}+\frac{t^3}{3}\mathbf{k}$$

и промене вектора брзине:

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{i}+\sqrt{2}t\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}$$

које се догоде променом времена *t* у интервалу [0,2.5], може се једном нацртати крива - трајекторија кретања, а местоположај честице и вектор брзине може се прерачунати за различите вредности улазног параметра *t*. Да би се приказало кретање довољно је да се конструише подела интервала [0,2] на 25 подинтервала са кораком 0.1. На тај начин се могу генерисати 25 фрејмова које ћемо складирати у матрици филма, а затим креирати анимацију коју приказујемо након дискусије по питању шта се догађа променом улазног параметра *t*. Ово је један од начина да се оваква динамичка мултимедијска алатка интегрише у самој настави.

Од велике је важности уочити да се оваквом вежбом може постићи избегавање формалних знања, зато што осим што од студената тражимо да примене формална правила за диференцирање векторске функције и "напамет да рецитују" да је то вектор брзине кретање честице, они оваквом вежбом могу стећи перцепцију реалног догађаја и на који начин је диференцирање у директној вези са реалним догађајима.



Сл. 3.7. Фрејмови од којих се добија анимација

На слици 3.7. приказана су 6 фрејмова који се могу генерисати као 6 статичких слика добијених за следеће вредности:

t = 0, *t* = 0.5, *t* = 1, *t* = 1.5, *t* = 2 и *t* = 2.5.

Наравно, користећи финију поделу интервала добијају се ближи фрејмови, чиме би се и могла добити боља анимација.

3.2.4. Интегрисање мултимедијске алатке у настави. Интерактивност. Доступност

У претходна два одељка било је речи о томе како се Matlab може искористити да би се креирали графике и анимације. Наравно, књиге и уџбеници који покривају те садржине изобилују илустрацијама, а одређене визуелизације лако је наћи и на интернету.

Дидактичка сврха израде мноштво графика и анимација у Matlab-у је у могућности **интегрисања** оваквих графика и анимација у наставном процесу са акцентом на следећа два циља:

- успостављање веза између актуелног математичког проблема који се разрађује и визуелизацијске алатке, веома често и у свакој ситуацији где је визуелизација важна за суштинско разумевање тог математичког проблема;
- могућност постизања извесног степена интерактивности: да се у одређеној наставној ситуацији на лицу места могу добијати визуелизације динамичких процеса, или визуелизације промена који настају променом одређених параметара.

Дакле, креиране визуелизацијске алатке – графике и анимације интрегрисани су у настави која је извођена са свим студентима на које се ово истраживање односи. Графици укључени у мултимедијске презентације које су коришћене током наставе и које су **доступне** свим студентима и целокупној јавности, објављене су на интернету у форми labs - дидактичких система математичких задатака преко којих је извођен део наставе курса Математика 2, груписане у следећим насловима:

Lines and Planes in Space

Cylinders and Quadratic Surfaces

Vector Functions

Functions of Several Variables

Tangent Planes

Double Integrals

Овако доступне мултимедијске презентације нуде могућности сличне књигама и уџбеницима, али допунски квалитет је у томе што иако су мултимедијске алатке у њима статичке природе, има их у знатно већем броју и адаптиране су за велики број конкретних ситуација.

Могућности успостављања интеракције и динамичких алатки - анимације не произилазе из саме мултимедијске презентације и ове предности израђених едукативних материјала употребљене су у самом наставном процесу. У ту сврху, коришћено је презентирање израђених анимација, као и приказивање Matlab кода и његово мењање на лицу места како би се доловиле промене које настају код неких објеката променом улазних параметара.

Разумљивост оваквог прилаза је лимитиран на студенте који су ближи програмирању. Наиме, ова техника се може применити са студентима информатичких наука, или сличном саставу студената који познаје бар основе неког програмског језика и алгоритама. Ова техника је нарочито снажна уколико су студенти упознати са основама програмирања у Matlab-у.

Израђени Matlab кодови (неки од њих) приказивани су свим студентима и експерименталне и контролне групе. Они су доступни само студентима експерименталне групе преко система за управљање е-учењем и то непосредно пре истека рокова за израђивање њихових задатака који се односе на самосталну израду интерактивних Matlab програма.

3.3. Matlab функције и програми

Једна од најважнијих поенти овог истраживања је избор језика MATLAB® - The Language of Technical Computing за израду едукативних материјала намењених за учење математике помоћу визуелизације. Иако је Matlab изузетно моћан и користи се у веома широком спектру техничке области, он је овде коришћен на веома базичном нивоу и искључиво у дидактичке сврхе.

Базични ниво значи да је коришћен веома ограничен број команди које се лако могу научити након савладавања основних правила Matlab-ове синтаксе и радне околине Matlab-a. То је искључиво важно зато што и други аутори, истраживачи и едукатори у будућности могу користити овај начин креирања едукативних материјала у различите сврхе.

Исто тако је од велике важности да израђене функције и програме могу разумети и сами студенти, нарочито ако су претходно стекли познавање програмирања и ако су имали могућност да добију основне инструкције о коришћењу Matlab-a.

3.3.1. Креирање графике у Matlab-у

Једноставност овог приступа може се илустрирати следећим програмом који се може употребити за приказивање било које 3D векторске функције:

```
clear all
a=0;b=3;
t=linspace(a,b,100);
x=f1(t);
y=f2(t);
z=f3(t);
plot3(x,y,z,'b','LineWidth',1.5)
axis equal
grid on
axis([-1, 4, -2, 9,-1,9]);
view(21,30)
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z')
rotate3d
```

Код 1. Генерирање графике помоћу наредбе plot3

Конкретно, да би се приказала крива која је трајекторија кретања честице описана следећом векторском 3D функцијом:

$$\mathbf{r}(t)=(1+t)\mathbf{i}+\frac{t^2}{\sqrt{2}}\mathbf{j}+\frac{t^3}{3}\mathbf{k}$$

довољно је да у радном директоријуму у коме је смештен .m фајл Кода 1, буду сачувана три посебна фајла у којима су постављене функције f1, f2 и f3:

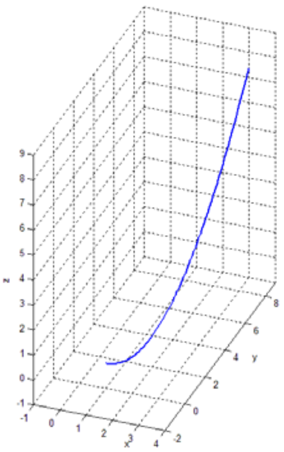
```
function y=f1(x)
y=x+1;
```

```
function y=f2(x)
y=x.^2/sqrt(2);
```

```
function y=f3(x)
y=x.^3/3;
```

Код 2. Постављање функције у Matlab-у

Покретањем Кода 1, сада ће се аутоматски покренути Matlab-ов графички едитор у коме ће бити приказана следећа слика:



Сл. 3.8. Графика добијена Кодом 1.

За приказивање било које друге 3D криве сада није потребно писати други, већ се може искористити потпуно исти код, тако што би се промене функције f1, f2 и f3. Рецимо, следећим променама у функцијама:

```
function y=f1(x)
y=cos(x);
```

```
function y=f2(x)
y=sin(x);
```

```
function y=f3(x)
y=sin(2*x);
```

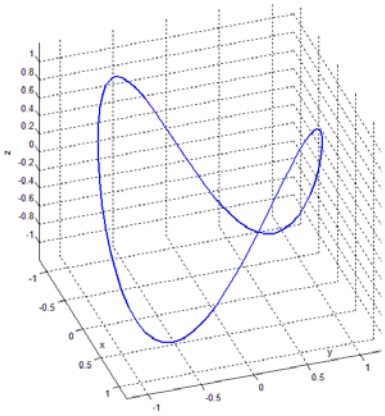
Код 3. Промена функције- компоненте 3D криве

и након тога покретањем Кода 1, и малим променама у графичким параметрима

```
axis([-1.2, 1.2, -1.2, 1.2, -1.2, 1.2]);
view(71,34)
```

и интервала промене параметара ($a = 0$, $b = 3$*pi), исти код ће сада продуцирати другу 3D криву:

$$\mathbf{r}(t)=\cos t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}+\sin(2t)\mathbf{k}$$



Сл. 3.9. Графика добијена Кодом 1. након промене функција f1, f2 и f3

На овај начин, може се повезати функционално мишљење као дидактички циљ наставе математике са информатичким значењем функција у програмирању. Наиме, позивањем функција које су сачуване као посебни .m фајлови у Matlab-у подиже се степен апстрактности у мишљењу који је неопходан за студенте који требају креирати модуле, процедуре и функције у било ком програмском језику. У сврху овог истраживања ово значи да овакав прилаз учењу математике може да искористи претходна познавања и искуства студената о функцијама у информатичком смислу, да би се постигао, рецимо циљ, да они суштински схвате да се 3D крива може параметризирати користећи 3 реалне функције какве су они изучавали у претходном курсу. Ово практично значи да се са неколико оваквих задатака може постићи већи ниво апстрактности и да се суштински схвати концепт векторске 3D функције:

$$\mathbf{r}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$$

где су $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $f_3(t)$ реалне функције једне реалне променљиве t, параметра којим се параметризира нека крива у тродимензионалном простору. Визуелизација помаже да се овај концепт схвати суштински, јер за разлику од формалног учења да 3 реалне функције параметризирају криву - трајекторију кретања честице у простору, визуелизација даје могућности да се то конкретно перцепира и осети како се то догађа у реалном 3D свету.

Да би се постигла интерактивност оваквог програма, може се програмски ред

```
a=0;b=3;
```

заменити командама

```
a=input('Molim Vas unesite pocetnu vrednost parametra ')

b=input('Molim Vas unesite krajnju vrednost parametra ')
```

Код 4. Интерактивност

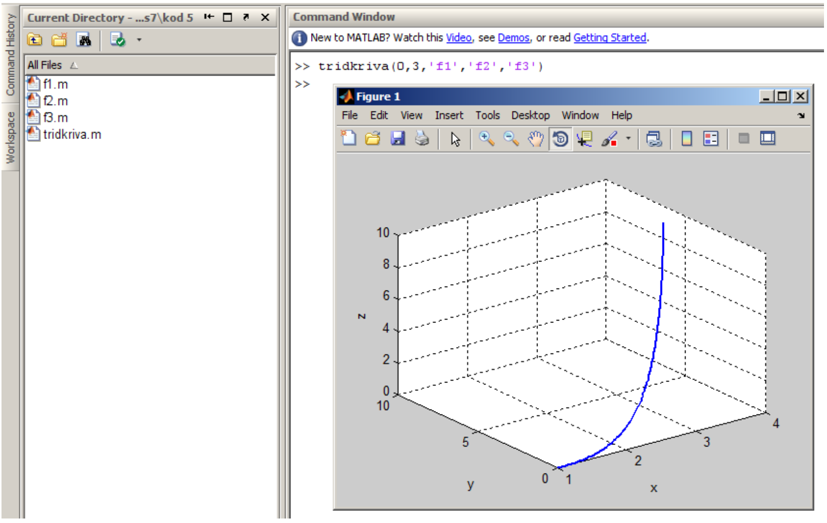
На овај начин, покретањем кода се могу задавати различити интервали у којим се мења параметар криве. Ова се идеја може разрадити тако што ће корисник моћи да зада вредност параметру у којем ће се приказивати и местоположај честице, као и вектор брзине, тангентни вектор криве у датом временском моменту.

Интерактивност оваквог једноставног едукативног програма може се повећати користећи опет идеју да се користе програмске функције. Наиме, Код 1 се може прерадити тако да сада он буде функција чији су инпути вредности *a* и *b* - крајње тачке интервала параметра *t*, као и стрингови *f*, *g* и *h* који се могу заменити именима различитих функција под којима су различите функције сачуване, на пример са стринговима 'f1', 'f2' и 'f3'.

```
function tridkriva(a,b,f,g,h)
t=linspace(a,b,100);
x=feval(f,t);
y=feval(g,t);
z=feval(h,t);
plot3(x,y,z,'b','LineWidth',1.5)
grid on
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z')
rotate3d
```

Код 5. Функција - генералније решење истог проблема

Графика приказана на слици 3.8. на овај начин се може добити једноставним позивањем функције tridkriva са Matlab-овог командног промпта, на следећи начин:



New to MATLAB? Watch this Video, see Demos, or read Getting Started.

```
>> tridkriva(0,3,'f1','f2','f3')
>>
```

Сл. 3.10. Позивање функције tridkriva.m једним програмским редом у командном промпту

На овај начин иста се функција приказана у Коду 5 може искористити за све задатке пажљиво састављеног дидактичког система математичких задатака за проучавање векторске 3D функције.

Команда linspace се такође може искористити у дидактичке сврхе. Њоме се прави подела интервала [a, b] и на тај начин се генеришу тачке чијим спајањем се добија приказ криве. Сами приказ је отворена полигонална линија - линеарна сплајн апроксимација дате криве, али ако је подела довољно фина, добија се утисак да је нацртана крива сасвим непрекинута и глатка. Развијањем дискусије по овом питању може се постићи да студенти суштински схвате разлику између дискретних и непрекидних процеса, како и то да коришћење ИКТ неминовно значи дискретизовати процес који у реалности подразумева да има непрекидну природу.

Најважнија команда кодова 1 и 5, свакако је команда plot3. Њоме се практично добија визуелизација криве и због тога је веома важно да студенти разумеју како ова команда функционише. Њени аргументи су x, y и z при чему x, y и z су вектори (низови) добијени као функције параметра t. На овај начин практично се добија низ уређених тројки:

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2),....,(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$$

где је n број подинтервала на које је подељен интервал [a, b]:

$$a = t_1 < t_2 < ... < t_n < t_{n+1} = b.$$

Ово је опет у директној вези са проблемом дискретизације непрекидног процеса, али је овај концепт изузетно важан зато што се често користи у калкулусу. Риманове суме, концепт поделе криве на n делова, концепт одређеног интеграла, интерпретација двојног интеграла као запремнину итд... све су то апстрактни концепти у којима је важно да се визуелизује шта се догађа за различите вредности броја n, пре него што се изведе закључак о конвергенцији самог процеса кад се допусти да n тежи ка бесконачности. Визуелни ефекат да се крива перцепира као непрекидна и глатка крива за довољно велике вредности броја n - броја тачака поделе, може помоћи генералније да се схвате ови апстрактни математички концепти, што није једноставно, нарочито када се ради о концептима који се односе на 3D математику.

Даље, истим програмским алаткама може се постићи усвајање веза између извода векторске 3D функције једне реалне променљиве и геометриске интерпретације диференцирања. Ако у традиционалној настави студенти једноставно примењују формална знања и механички диференцирају функције f, g и h, сада уопште није тешко израчунати изводи ових функција да се поново зачувају као посебни Matlab фајлови и да се на сличан начин њиховим позивањем визуелизује вектор брзине честице која се креће покоравајући се датој векторској 3D функцији, у датој временској тачки. Ова идеја је илустрирана Кодом 6. и Сликом 3.11.

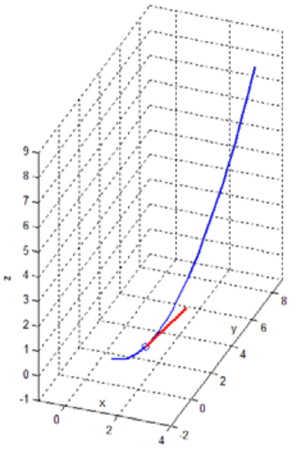
```
clear all
% Odredzivanje vektora x, y i z u zavisnosti od parametara t
t=0:0.1:3;
x=f1(t);
y=f2(t);
z=f3(t);

% Postavljanje grafickih parametara
hold on
set(1,'Position',[100,50,800,600])
grid on
axis equal
axis([-1, 4, -2, 9,-1,9]);
view(21,30)
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z')
rotate3d

%Crtanje krive
    plot3(x,y,z,'LineWidth',1.5)

% Izbor vrednosti vremenskog parametra
    t1=1

% Crtanje mestopolozaja cestice u izabranom vremenu
    r=[f1(t1),f2(t1),f3(t1)];
    plot3(r(1),r(2),r(3),'bo')

% Primena diferenciranja i prikazivanje vektora brzine
    T=[d1f1(t1),d1f2(t1),d1f3(t1)];
    T1=r+T;
    plot3([r(1),T1(1)],[r(2),T1(2)],[r(3),T1(3)],'r','LineWidth',2.5)
```

```
function y=d1f1(x)
y=0*x+1;
```

```
function y=d1f2(x)
y=sqrt(2)*x;
```

```
function y=d1f3(x)
y=x.^2;
```

Код 6. Приказивање вектора брзине



Сл. 3.11. Диференцирање векторске 3D функције и визуелизација вектора брзине

3.3.2. Креирање анимације у Matlab-у

Значење и важност креирања и интегрисања динамичких алатки већ је образложено у делу 3.2. У овом одељку биће илустрирано креирање фрејмова у Matlab-у, затим креирање и приказивање анимација, како и креирање видео фајла помоћу једноставних Matlab команди.

За ову илустрацију биће размотрен конкретан математички задатак у коме треба приказати тангентну раван површине задате као график функције две реалних промењљивих:

$$z = 5 - \frac{x^2}{2} - y^2$$

у произвољној тачки $P_0(x_0, y_0, z_0)$ која припада пресеку дате површине и равни

$$y = \frac{1}{2}.$$

Формалном применом рутинске вештине диференцијалног рачуна, парцијалних извода функција више промењљивих и знања о геометријском значењу парцијалних извода функције две и три промењљивих, задатак се своди на тражење пресека датог параболида и дате равни као решење следећег система:

$$\begin{cases} z = 5 - \dfrac{x^2}{2} - y^2 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

након чега се добија да тачка P_0 мора бити тачка која припада криви

$z = \frac{19}{4} - \frac{x^2}{2}$ у равни $y = \frac{1}{2}$ паралелној xz-координатне равни.

Дати параболид сада се може посматрати као ниво-површина

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + y^2 + z = 5$$

тако да је сада тражена тангентна раван нормална гардиент-вектора функције *f* трију промењљивих:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{dx}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{dy}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{dz}\mathbf{k}$$

У тачки P_0, ово значи да је тангентна раван датог параболида нормална градиент-вектора:

$$\nabla f = x_0\mathbf{i} + 2y_0\mathbf{j} + \mathbf{k} = x_0\mathbf{i} + 2\cdot\frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k} = \langle x_0, 1, 1\rangle$$

након чега није тешко добити једначину тангентне равни у тачки P_0:

$$x_0(x - x_0) + \left(y - \frac{1}{2}\right) + \left(z - \frac{19}{4} + \frac{x_0{}^2}{2}\right) = 0$$

изражене једном степену слободе, односно параметризирану параметром x_0. То значи да се променом параметра $x_0 = k$ могу приказати и кретање тачке дуж дате криве и промена тангентне равни током тог кретања.

Чини се да овај пример уједињује значајан део наведених наставних циљева који се односе на есенцијална знања о функцијама како и динамичка природа математичке ситуације која може бити визуелизирана анимацијом израђеном у Matlab-у.

Осим већ образложене команде plot3, у следећем коду користи се и команда surf, која се заједно са функцијом meshgrid користи за приказивање површине у 3D.

```
    clear all
    % Inicijalizacija povrsine
    x=0:0.1:2;
    y=-1:0.05:1;
    [X,Y]=meshgrid(x,y);
    Z=5-0.5*X.^2-Y.^2;

    % Inicijalizacija krive
    z=2:0.1:5;
    z1=19/4-x.^2/2;

    b=0;
    for k=0.1:0.02:1.9
        b=b+1;
        figure(1)
        % Postavljanje grafickih parametara
        hold on; grid on
        axis([0,3,-1,1,2,5]);axis equal
        set(1,'Position',[100,50,920,690])
        view(59,24)
        xlabel('x-axis');ylabel('y-axis');zlabel('z-axis')
        alpha(0.7);shading interp

        % Crtanje povrsine
            surf(X,Y,Z)
        % Crtanje krive
            plot3(x,0*x+1/2,z1,'k','LineWidth',2.5)

   % Prikazivanje tacke koja se krece duz krive
   p0=[k,1/2,19/4-0.5*k^2];
   plot3(p0(1),p0(2),p0(3),'bo','MarkerFaceColor',[0,0.9,0.2],'MarkerSize',6)

        % Prikazivanje tanentne ramnine u tekuceg polozaja tacke
    n=[Fx(k,1/2,19/4-0.5*k^2),Fy(k,1/2,19/4-0.5*k^2),Fz(k,1/2,19/4-0.5*k^2)];
    d=Fx(k,1/2,19/4-0.5*k^2)*p0(1)+Fy(k,1/2,19/4-
    0.5*k^2)*p0(2)+Fz(k,1/2,19/4-0.5*k^2)*p0(3);
            crtajramnina(n,-d,p0,0.6)

        % Kreiranje frejmova i njihovo skladiranje u matrici
            MTP(b) = getframe;
        close(1)
    end
    save MTP
```

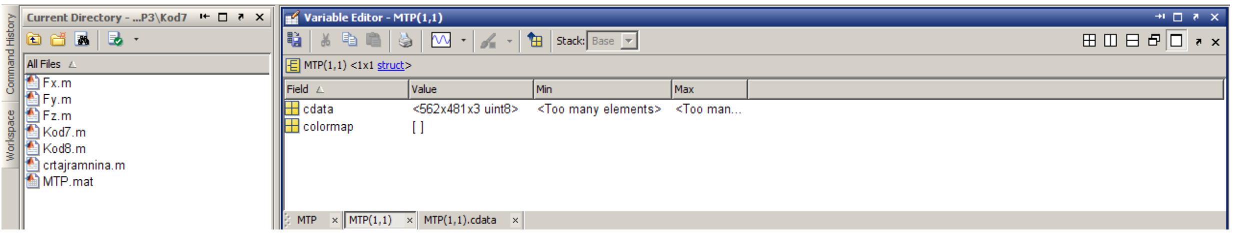
```
    function w=Fx(x,y,z)
    w=x;
```

```
    function w=Fy(x,y,z)
    w=2*y;
```

```
    function w=Fz(x,y,z)
    w=1;
```

Код 7. Креирање фрејмова у Matlab-у

Кодом 7 креирана је матрица филма коју Matlab чува као структуру података .mat формату, што се може видети са следеће слике.



Fx.m
Fy.m
Fz.m
Kod7.m
Kod8.m
crtajramnina.m
MTP.mat

MTP(1,1) <1x1 struct>

Field	Value	Min	Max
cdata	<562x481x3 uint8>	<Too many elements>	<Too man...
colormap	[ ]		

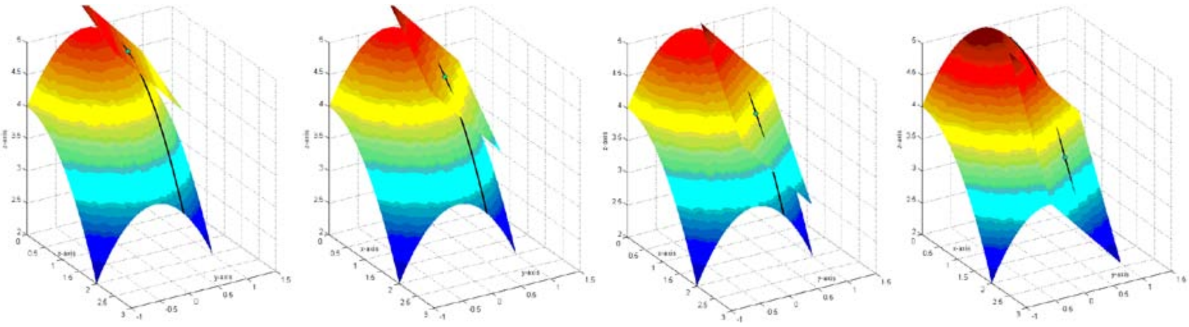
Сл. 3.12. Workspace Matlab-a у коме је приказана структура MTP

Да би се сада могло видети свих 91 креираних фрејмова добијених кроз for петљу, за k = 0.1:0.02:1.9, треба прво учитати матрицу MTP, тачније фајл MTP.mat. Након тога командом movie добија се анимација. Подешавањем да анимација приказује 2 фрејма у секунди, добија се анимација која траје 45.5 секунди.

```
% Ucitavanje matrice filma
load MTP.mat MTP

% Postavljanje grafickih parametara
figure(1)
axis([0,3,-1,1,2,5]);axis equal
hold on; grid on
set(1,'Position',[100,50,920,690])
view(59,24)
xlabel('x-axis');ylabel('y-axis');zlabel('z-axis')

% PRIKAZIVANJE ANIMACIJE
movie(MTP,1,2);

% Kreiranje avi-ja: zacuvati animaciju kao video fajla
movie2avi(MTP,'TangentPlane','fps',2)
```

Код 8. Приказивање анимације и генерисање видео фајла

Ефекат анимације овде ће бити доловљен приказивањем 4 фрејма добијених за различите вредности параметра *k*.



Сл. 3.13. Кретање тангетне равни дате површине дуж криве - примена парцијалних извода

Командом movie2avi анимација се може сачувати у .avi формату или као видео фајл. Овакви видео фајлови коришћени су са експерименталном групом. Студентима ове групе ови видео фајлови су доступни системом за управљање е-учењем, што је образложено у делу 3.4.

Математички задатак коришћен овде ради илустрације је репрезентативни пример задатака који су коришћени у пројектној настави. Сваки студент експерименталне групе требао је решити 3 оваквих задатка креирајући Matlab програме и функције. Ово је детаљније образложено у делу 3.5.

3.4. Систем за управљање е-учењем

Да би се измерио утицај визуелизације на квалитет знања везаних за функције, било је нужно да се експериментална група студената издвоји у неки сегмент наставе и да се са њом примене одређене посебне наставне методе. Пројектна настава је искоришћена у ту сврху. Осим што је то и физички раздвојило ову групу студената од контролне групе, радећи у различитим терминима на својим пројектним задацима, омогућило је и да се е-учењем организује целокупни рад ове групе током рада у оквиру пројектне наставе.

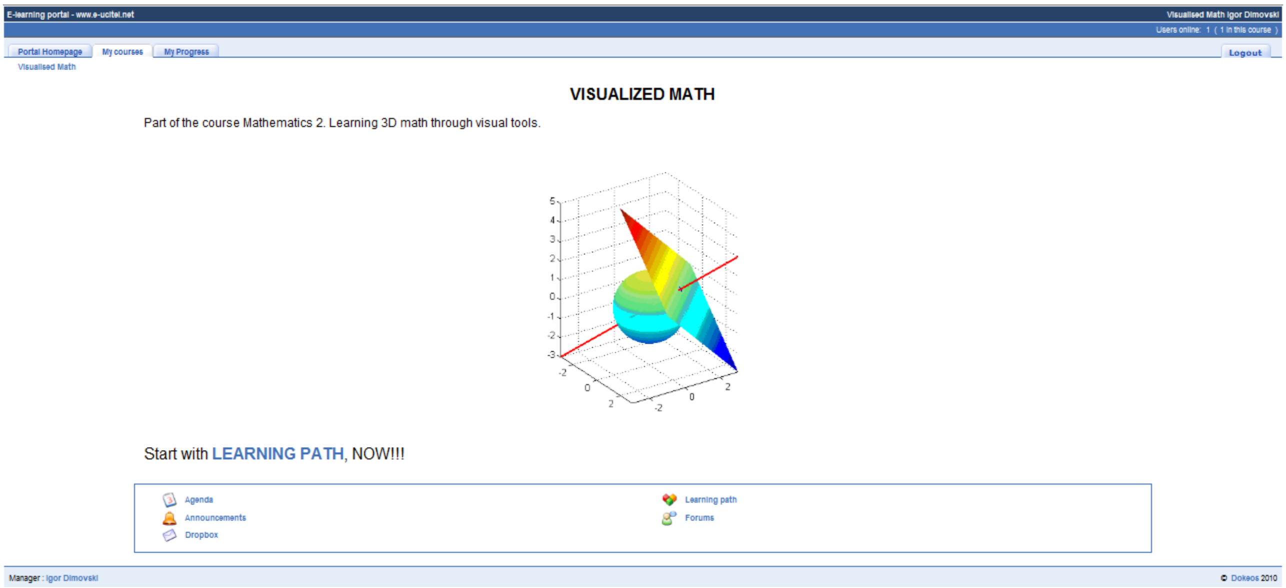
3.4.1. О систему за управљање е-учењем

Систем за управљање е-учењем је веб-базирано софтверско решење које интегрише све интернет алатке е-учења у једну функционалну целину коју фактори процеса учења доживљавају као виртуелну средину за учење.

Према М. Сигалу, постоје 4 категорије интернет алатки које требају бити инкорпориране у систем управљања е-учењем:[65]

- Алатке за презентације-инструкције;
- Алатке за комуникацију;
- Алатке за олакшавање учења;
- Алатке за евалуацију;

За потребе овог истраживања коришћен је систем управљања е-учењем базиран на платформи Dokeos - бесплатног софтвера отвореног кода. Платформа је постављена на интернет локацији www.e-ucitel.net. Креиран је курс Visualized Math на коме су имали приступ само студенти експерименталне групе.



VISUALIZED MATH

Part of the course Mathematics 2. Learning 3D math through visual tools.

Start with LEARNING PATH, NOW!!!

Manager : Igor Dimovski

© Dokeos 2010

Сл. 3.14. Насловна страна курса Visualized Math

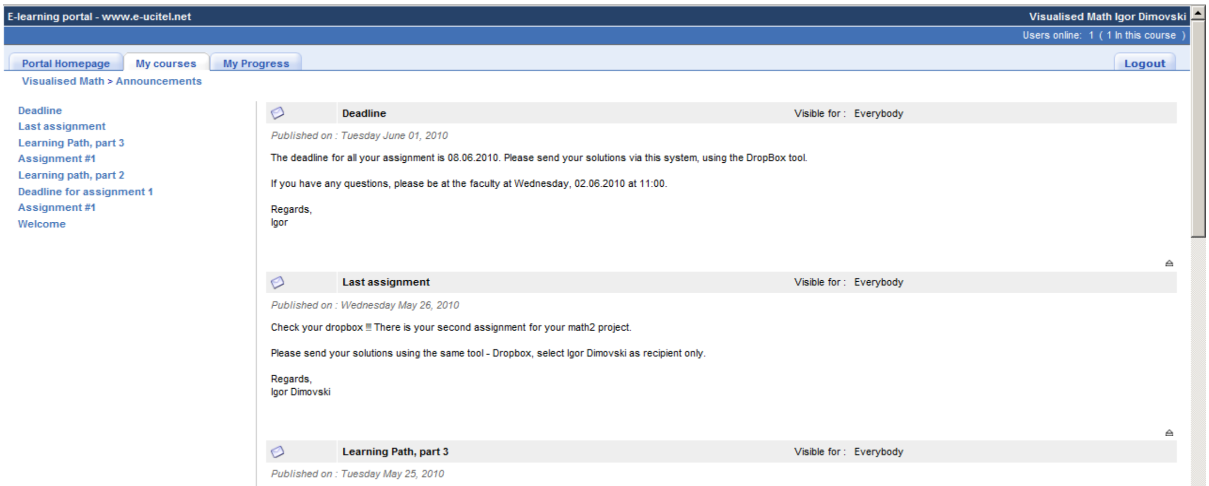
Платформа Dokeos садржи све интернет алатке једног система управљања е-учењем. За потребе пројектне наставе, креирани курс Visualized Math садржи кључну алатку **Путања учења**, која ће детаљније бити образложена у следећем одељку и још 4 алатке:

Календар - Алатка за олакшавање учења. Овом алатком су управљани временски темпиране обавезе студената и рокови за израду задатака.

---

[65] (МС1)

Огласна табла, обавештења - алатка за комуникацију one-to-many. Објављивана обавештења су се односила на извешћивање о доступности неких нових едукативних материјала, задатака или на рокове за решавање задатака, договоре о терминима за консултације и слично. Ову алатку систем аутоматски комбинује са још једном алатком за комуникацију - аутоматски e-mail. Наиме, свако обавештење, осим што се може видети логирањем у систем, аутоматски је послато e-mail-ом до свих регистрованих корисника уписаних на тај курс.



Deadline Visible for : Everybody

Published on : Tuesday June 01, 2010

The deadline for all your assignment is 08.06.2010. Please send your solutions via this system, using the DropBox tool.

If you have any questions, please be at the faculty at Wednesday, 02.06.2010 at 11:00.

Regards,
Igor

Last assignment Visible for : Everybody

Published on : Wednesday May 26, 2010

Check your dropbox !!! There is your second assignment for your math2 project.

Please send your solutions using the same tool - Dropbox, select Igor Dimovski as recipient only.

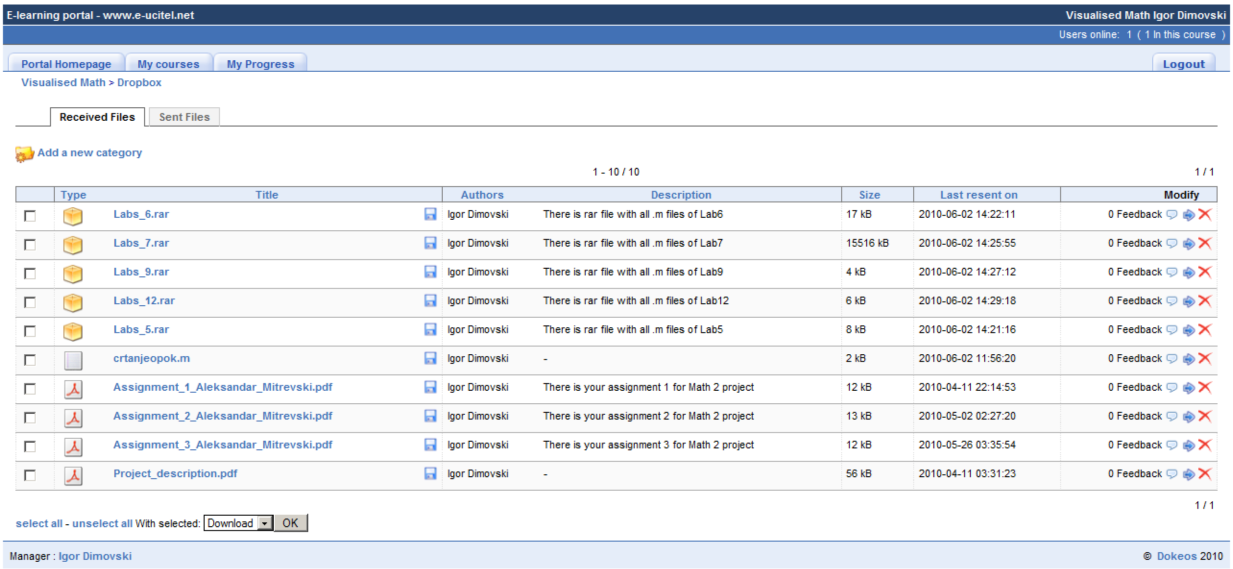
Regards,
Igor Dimovski

Learning Path, part 3 Visible for : Everybody

Published on : Tuesday May 25, 2010

Сл. 3.15. Алатка Огласна табла, обавештења

Dropbox - алатка за комуникацију one-to-one или one-to-many, намењена је за размену фајлова интерно на самом порталу. Овом алатком су дистрибуирани задаци о самосталној изради Matlab интерактивних програма и њоме су сакупљена и решења студената. Сама алатка функционише као интерна електронска пошта али је пре свега намењена за размену прикачених фајлова.



1 - 10 / 10 1 / 1

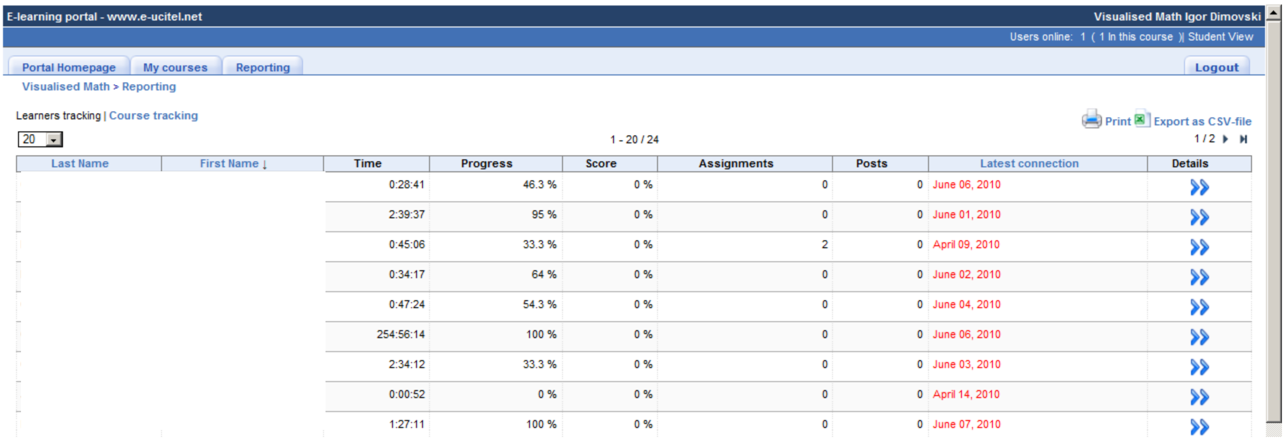
	Type	Title	Authors	Description	Size	Last resent on	Modify
☐		Labs_6.rar	Igor Dimovski	There is rar file with all .m files of Lab6	17 kB	2010-06-02 14:22:11	0 Feedback
☐		Labs_7.rar	Igor Dimovski	There is rar file with all .m files of Lab7	15516 kB	2010-06-02 14:25:55	0 Feedback
☐		Labs_9.rar	Igor Dimovski	There is rar file with all .m files of Lab9	4 kB	2010-06-02 14:27:12	0 Feedback
☐		Labs_12.rar	Igor Dimovski	There is rar file with all .m files of Lab12	6 kB	2010-06-02 14:29:18	0 Feedback
☐		Labs_5.rar	Igor Dimovski	There is rar file with all .m files of Lab5	8 kB	2010-06-02 14:21:16	0 Feedback
☐		crtanjeopok.m	Igor Dimovski	-	2 kB	2010-06-02 11:56:20	0 Feedback
☐		Assignment_1_Aleksandar_Mitrevski.pdf	Igor Dimovski	There is your assignment 1 for Math 2 project	12 kB	2010-04-11 22:14:53	0 Feedback
☐		Assignment_2_Aleksandar_Mitrevski.pdf	Igor Dimovski	There is your assignment 2 for Math 2 project	13 kB	2010-05-02 02:27:20	0 Feedback
☐		Assignment_3_Aleksandar_Mitrevski.pdf	Igor Dimovski	There is your assignment 3 for Math 2 project	12 kB	2010-05-26 03:35:54	0 Feedback
☐		Project_description.pdf	Igor Dimovski	-	56 kB	2010-04-11 03:31:23	0 Feedback

1 / 1

Сл. 3.16. Алатка Dropbox

У систему је била доступна и алатка **Форуми**, намењена за асинхрону комуникацију пре свега између студената, али је они нису користили. И поред тога, може се рећи да је систем био добро постављен у сврху колаборативног учења и да је одговорио циљу за који је намењен. Комуникација између самих студената није се одвијала преко форума да би се могла пратити, због чега се не може закључити колико и како су они међусобно комуницирали током рада на пројектној активности, али се зато комуникација администратор-учитељ-студенти одвијала одлично, пре свега користећи алатке огласна табла и dropbox.

На администраторском нивоу систем омогућава учитељ да има статистички и детаљни преглед учешћа сваког од студената на порталу. Ови подаци укључују информације о времену који је сваки студент провео логиран на платформи, које је едукативне материјале и колико дуго проучавао, како је напредовао итд. Ове податке је важно искористити као улазне параметре у току одређивања утицаја визуелизације на квалитет студентових знања.

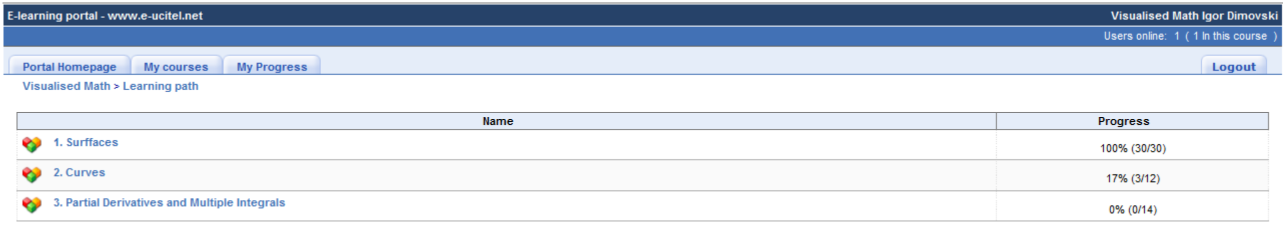


Last Name	First Name ↓	Time	Progress	Score	Assignments	Posts	Latest connection	Details
		0:28:41	46.3 %	0 %	0	0	June 06, 2010	»
		2:39:37	95 %	0 %	0	0	June 01, 2010	»
		0:45:06	33.3 %	0 %	2	0	April 09, 2010	»
		0:34:17	64 %	0 %	0	0	June 02, 2010	»
		0:47:24	54.3 %	0 %	0	0	June 04, 2010	»
		254:56:14	100 %	0 %	0	0	June 06, 2010	»
		2:34:12	33.3 %	0 %	0	0	June 03, 2010	»
		0:00:52	0 %	0 %	0	0	April 14, 2010	»
		1:27:11	100 %	0 %	0	0	June 07, 2010	»

Сл. 3.17. Алатка Reporting доступна на администраторском нивоу

3.4.2. Путања учења. Организација едукативних метеријала

Кључна алатка овог е-курса је путања учења. То је алатка за презентације-инструкције.



Name	Progress
1. Surffaces	100% (30/30)
2. Curves	17% (3/12)
3. Partial Derivatives and Multiple Integrals	0% (0/14)

Сл. 3.18. Путања учења е-курса Visualized Math

Циљ путања учења је да студент буде вођен кроз едукативне материјале одређеним редоследом, уз могућност да систем прати који од садржаја је сваки регистровани курсист проучавао и колико је времена за то уложио. Едукативни материјали објављени на порталу доступни преко ове алатке односе се на изабране садржаје курса Математика 2 који су већ обрађени у редовној настави, али се односе на математичке ситуације које имају наглашену динамичку природу. Ови одабрани садржаји директно су повезани за задацима које су студенти требали решити као део пројектне наставе и који су образложени у делу 3.5.

Е-курс Visualized Math је сачињен од три путање учења:

1. Површине
2. Криве
3. Парцијални изводи и двоструки интеграли

На исти начин су групирани и задаци које су студенти требали самостално решити у оквиру пројектне наставе. Свака путања садржи више корака, групираних у неколико поглавља. Прва путања учења насловљена као "Површине" састављена је од следећих поглавља:

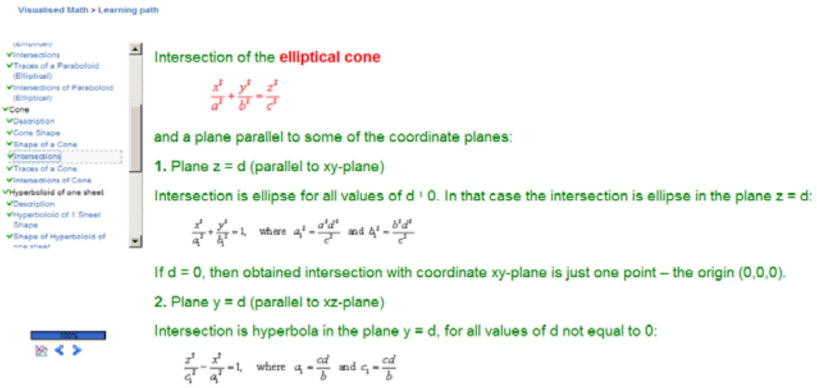
1. Елипсоид;
2. Елиптични параболид;
3. Купа;
4. Хиперболид од једног дела;
5. Хиперболид од два дела.

Свако поглавље у овој путањи учења изграђено је по истом шаблону и састоји се од 6 корака:

- Опис;
- Облик;
- Облик у зависности од промена параметара површине;
- Пресеци;
- Трагови;
- Пресеци са равнима паралелним координатним равнима;

Први и четврти корак "Опис" и "Пресеци" су теоретске инструкције и формуле организоване као хипертекст у html-фајлу. Ови кораци садрже минимум информација неопходних за генерално разумевање саме математичке ситуације, а затим и задатке базиране на овим ситуацијама.

Организација једне путање учења са системом навигације и пример оваквих информативних корака приказани су на следећој слици.



Intersection of the **elliptical cone**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

and a plane parallel to some of the coordinate planes:

1. Plane z = d (parallel to xy-plane)

Intersection is ellipse for all values of d ¹ 0. In that case the intersection is ellipse in the plane z = d:

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1, \quad \text{where } a_1^2=\frac{a^2d^2}{c^2} \text{ and } b_1^2=\frac{b^2d^2}{c^2}$$

If d = 0, then obtained intersection with coordinate xy-plane is just one point – the origin (0,0,0).

2. Plane y = d (parallel to xz-plane)

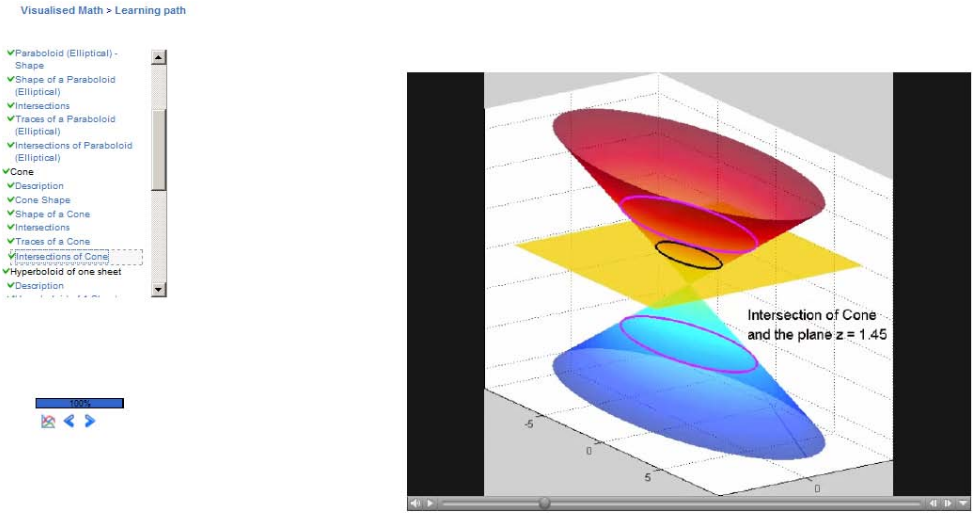
Intersection is hyperbola in the plane y = d, for all values of d not equal to 0:

$$\frac{z^2}{c_1^2}-\frac{x^2}{a_1^2}=1, \quad \text{where } a_1=\frac{cd}{b} \text{ and } c_1=\frac{cd}{b}$$

Сл. 3.19. Информативни корак: Корак Intersections (html фајл) поглавља Cone

Други и пети корак су графике - статичне мултимедијске алатке. Њихова намена је да се конкретно илустрира један одређени случај образложене ситуације, као што је то најчешће учињено у књигама и у редовној настави.

Најважнији кораци су делови путања учења који су практично видео-фајлови. У првој путањи, по шаблону то су трећи и шести корак. Ови видео фајлови су генерисани помоћу Matlab скрипте на начин већ описан у одељку 3.3.2. Након генерисања .avi фајла, видео фајлови су обрађени помоћу апликације Windows Movie Maker, а затим су компресирани да би били погодни за постављање на интернету. У систему управљања е-учењем интегрисани су видео фајлови у .mov формату, како би се независно од коришћеног броусера, могли видети у највећем броју случаја.



Сл. 3.20. Динамички корак: Корак Intersections of Cone видео визуализација, део поглавља Cone

На овај начин, путања учења "1. Површине" има 30 корака у 5 поглавља. 10 од њих су информативни кораци - хипертекст, 10 статичких слика и 10 видео фајлова.

Друга путања учења "2. Криве" имала је 3 поглавља:

1. Кретање у простору;
2. Изводи и кретање. Тангентни вектор;
3. Дужина лука - део просторне криве;

Поглавље "Кретање у простору" имало је један html фајл - "Параметризација криве у простору" и 5 видео фајлова на којима је приказано како се честица креће променом параметара и трајекторија коју притом она описује. 3 од ових фајлова односе се на конкретне примере векторских 3D функција који су обрађивани у току редовне наставе. Задња 2 видео фајла повезују криве и површине, приказујући специфичне криве: хеликс, као део цилиндричне површине и кружница- као део сфере.

Поглавље "Изводи и кретање. Тангентни вектор" имало је опет један html фајл - "Изводи - дефиниција" и три видео фајла. На овим видео фајловима приказано је неколико примера из којих се може видети веза између формално израчунатих извода функција-компоненте векторске 3D функције и оног што се реално догађа у 3D или 2D свету. Видео фајл "Векторске функције и кретање у простору. Изводи. Тангенте 3D криве", који је објављен и на популарном интернет порталу YouTube[66], као видео-клип: Derivatives of vector-valued function - geometrical significance, нарочито је привукао пажњу како студената, тако и самих колега. За разлику од осталих видео-фајлова где се све углавном фокусирало на самој поенти - главном дидактичком циљу одређеног едукативног фајла, у овом видео клипу монтирана је и музика препознатљива студентима, чиме се утиче и на доживљаје током учења. Утицај оваквих ефеката на процес учења и квалитет знања може бити предмет неког другог истраживања.

Задње поглавље "Дужина лука део просторне криве" има само један html фајл - "Дужина глатке криве" и један видео фајл у којем се приказује један приступ Римановых сума - геометријски и нумерички приказано. Поделом интервала интеграције, крива се апроксимира полигоналном линијом и истовремено се дужина те дијагоналне линије упоређује са вредношћу интеграла.

На овај начин, путања учења "2. Криве" има 12 корака у 3 поглавља. 3 од њих су информативни кораци - хипертекст и 9 су видео фајлови.

Трећа путања учења "3. Парцијални изводи и двојни интеграли" имала је 4 поглавља:

1. Парцијални изводи у односу на x;
2. Парцијални изводи у односу на y;
3. Тангентна раван;
4. Двоструки интеграли;

Прва два поглавља садрже по један html фајл - "Дефиниција и геометриско значење", по једну статичку слику и по један видео фајл. На видео фајлу приказана је парабола - пресек параболида и равни и тачка која се креће дуж параболе заједно са тангентом, чија је једначина изведена преко парцијалних извода.

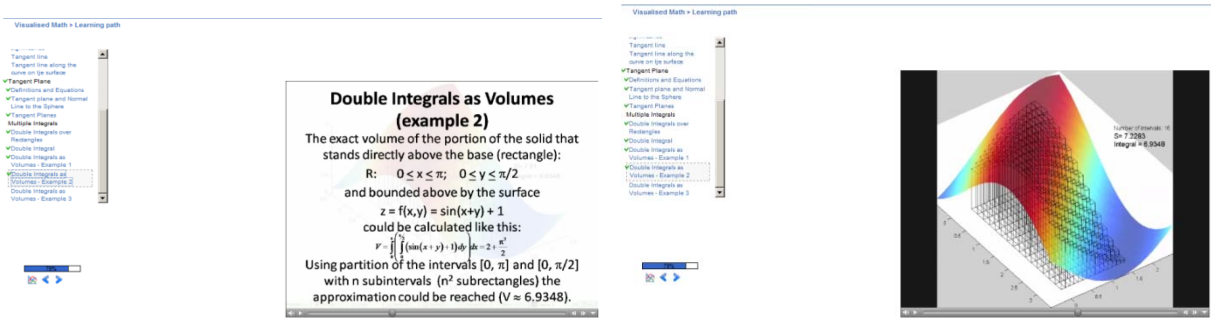
Поглавље "Тангентна раван" такође садржи један html фајл - "Дефиниција и једначине", једну статичку слику и један видео фајл на коме су приказана два примера која представљају илустарцију примене парцијалних извода и градиент вектора, визуелизацијом тангентне равни, који се крећу дуж једне криве - део дате површине.

Најзад, поглавље "Двоструки интеграли" садржи један html фајл - "Двоструки интеграли над правоугаоником", једну статичку слику и 3 видео фајла - визуелизацију интерпретације двоструких интеграла као запремина тела. Ова је визуелизација битна због суштинског схватања Риманове суме и усвајања аналогије као метода закључивања. Сам концепт на неки начин је генерализација концепта одређеног интеграла који се провлачи још од пре почетка курса Математика 2, али је знатно теже да се замисли подела правоугаоника и запремине призама којим се апроксимира

---

[66] [4]

запремина одређене површине – графика функције две промењљивих. Овај видео фајл је приказан на следећој слици, а сама визуелизација је повезана са задацима које су студенти требали самостално урадити.



Double Integrals as Volumes (example 2)

The exact volume of the portion of the solid that stands directly above the base (rectangle):

R: $0 \leq x \leq \pi; \quad 0 \leq y \leq \pi/2$

and bounded above by the surface

$z = f(x,y) = \sin(x+y) + 1$

could be calculated like this:

$$V = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}(\sin(x+y)+1)dy\right)dx = 2+\frac{\pi^2}{2}$$

Using partition of the intervals [0, π] and [0, π/2] with n subintervals (n^2 subrectangles) the approximation could be reached (V ≈ 6.9348).

Сл. 3.21. Динамички корак: Корак Double Integrals as Volumes - Example 2, видео визуелизација

На овај начин, путања учења "3. Парцијални изводи и двоструки интеграли" има 14 корака у 4 поглавља. 4 од њих су информативни кораци - хипертекст, 4 статичких слика и 6 су видео фајлови.

3.4.3. Преглед видео фајлова

Највећи део времена приликом припреме едукативних материјала у сврху овог истраживања је потрошено на израду видео фајлова који су интегрисани у систему управљања е-учењем.

	Име видео фајла (линк)	Дужина
1.	Форма елипсоида	1:10
2.	Пресеци елипсоида и равни паралелне координатним равнима	1:28
3.	Форма елиптичног параболида	1:13
4.	Пресеци елиптичног параболида и равни паралелне координатним равнима	0:59
5.	Форма конуса	1:23
6.	Пресеци конуса и равни паралелне координатним равнима	1:31
7.	Форма хиперболида од једног дела	1:13
8.	Пресеци хиперолида од једног дела и равни паралелне координатним равнима	2:17
9.	Форма хиперболида од два дела	1:21
10.	Пресеци хиперболида од два дела и равни паралелне координатним равнима	3:23
11.	Кретање у простору - пример 1	1:07
12.	Кретање у простору - пример 2	2:10
13.	Кретање у простору - пример 3	1:12
14.	Хеликс - кретање у простору - пример 4	2:00
15.	Кружница- кретање у простору - пример 5	1:12
16.	Изводи и кретање	0:53
17.	Векторске функције и кретање у простору. Изводи. Тангенте 3D криве	2:44
18.	Изводи и кретање. Вектор брзине. 2D случај	2:13
19.	Дужина лука	0:49
20.	Парцијални изводи у односу на x	1:13
21.	Парцијални изводи у односу на y	1:15
22.	Тангентне равни на ниво-површине	2:16
23.	Двојни интеграл као волумен - пример 1	0:49
24.	Двојни интеграл као волумен - пример 2	0:50
25.	Двојни интеграл као волумен - пример 3	0:50

Тиме је практично израђен видео материјал у укупном трајању од више 38 минута, организован у 25 видео фајлова интегрисаних у систему за управљање е-учењем, према стандардима е-учења.

3.5. Дидактички систем математичких задатака - израда интерактивних Matlab програма

У духу кинеске пословице:

> "*Чуо сам и - заборавио*
>
> *Видео сам и - упамтио*
>
> *Урадио сам - и разумео*."

ово истраживање се није зауставило на техници визуелизације. Након израде свих визуелизацијских алатки и организације едукативних материјала, студенти експерименталне групе су морали извести пројектну наставу.

Иако је наглашено коришћен приступ савремених трендова применом информационо-комуникацијске технологије у едукативне сврхе, ово се истраживање заокружава самим почетком развоја компјутерски базираног учења (CBL[67]). Наиме, савремени едукативни софтвери су наглашеноориснички оријентисани. Једноставност коришћења је веома важна карактеристика сваког, па и едукативног софтвера. Историјски, први револуцинарни софтверски пакет, базиран на Пијажеовој развојној психологији, је програмски пакет LOGO. Иако је овај пакет пре свега намењен млађим ђацима, компарација са приступима овог истраживања је умесна, јер и поред тога што је LOGO једноставан, он је ипак *програмски језик*, што подразумева да његова главна предност - интуитивни геометријски приступ не може доћи до изражаја код масовне популације због неопходности дубљих познавања математичке логике и начина размишљања који је потребан за програмирање. Оно што се догађа развојом компјутерски базираног учења је напуштање тог приступа едукативних софтвера у коме се од корисника тражи да изводе програмерске трикове, па се због тога граде сличне интерактивне геометријске лабараторије које користе једноставнију логику. Практично, развој популарних софтверских пакета као Cabri, Geonext, Geogebra и сличних, довео је до њихове популарности баш зато што су они кориснички оријентисани и дају могућности кликом да се изводе сложеније операције, без притом да се користи програмерска логика или писање било каквог кода. У овом смеру историски се развија CBL, преко мултимедијских система, веб/базираног учења, преко система управљања е-учењем, колаборативног учења, све до е-учења 2.0. Да би се у основи назвало компјутерски базираним учењем, уместо компјутерски потпомогнуто учење (CAL[68]), искључиво је важна могућност интеракције коју едукативни софтвер треба да омогућује кориснику. На тај начин, визуелизација помоћу ИКТ-а уз одређени ниво интерактивности најчешће је коришћена техника која се подразумева када се говори о интегрирању ИКТ-а у настави. Концепт израде било каквог типа програмског кода, нарочито у масовном смислу, не може се често употребити. Са друге стране, сама визуелизација се ипак односи само на перцепцију и због тога се њоме могу достићи само нижа когнитивна нивоа: препознавање и схватање. Да би се говорило о *разумевању*, значи да се поставе наставни циљеви за чију се реализацију од студената тражи да достигну виша когнитивна нивоа: примена, анализа, синтеза и евалуација[69]. Најделотворније технике које воде до виших когнитивних нивоа студента стављају у ситуацију да нешто уради, креира. Респектирајући сам процес стицања знања као најважније дидактичко питање савремених дидактичких теорија базираних на развојно-процесном психолошком правцу, креативност је врх когнитивне пирамиде. Када је реч о визуелизацији као алатки која користи ИКТ за постизање дидактичких циљева, најбољи ефекат би требало да имају методе којима се студент ставља у ситуацију да сам изради визуелизационе алатке помоћу ИКТ-а. Можда је то и тешко, или чак и неизводљиво са студентима којима математика није један од базичних предмета, али студенти техничких наука, математике, примењене математике, а

---

[67] CBL - Computer Based Learning

[68] CAL - Computer Aided Learning

[69] Према Блумовој таксономији наставних циљева

нарочито информатике и компјутерских наука, морају да поседују бар основне технике програмирања, добро да владају логиком и да буду у могућности да се користе неким од програмских језика чиме би били у стању да израде неку врсту програма којим се визуелизира одређена математичка ситуација.

Студенти на које се односи ово истраживање, да би били стављени у овакву ситуацију - да израђују програме, конкретно у Matlab-у којим се приказује визуелизација одређеног математичког проблема обрађиваног у редовној настави или у оквиру пројектне наставе, испуњавају све ове предиспозиције. У ту сврху састављен је дидактички систем задатака који је сваки студент експерименталне групе морао решити, спроводећи низ активности.

У додатку В. дат је опис пројектне активности "Visualized Math with Matlab", где се може видети циљ пројектне активности, форма рада, начин бодовања и помоћ и консултације. Овај документ је објављен пре формирања експерименталне групе, а након тога је дистрибуиран сваком студенту експерименталне групе преко система за управљање е-учењем, пре почетка пројектних активности. Овај документ, заједно за детаљним списком задатака, је официјални документ модула Математика 2 на UIS&T-у за пролећни семестар 2010.

Паралелно са објављивањем едукативних материјала преко система управљања е-учењем, сваки студент је добио сукцесивно 3 задатка који чине целисходно сачињен систем задатака, по један задатак из следећих 3 тема:

- Површине;
- Криве;
- Парцијални изводи и двоструки интеграли.

У додатку Г. може се видети шаблон по којем је састављен систем задатака. Дата су 3 примера која су добила 3 студента.

Осим тематске поделе, заједничко свим тројкама задатака је то што траже да самостално израђивање Matlab функције и/или програма којим се треба визуелизирати одређена математичка ситуација динамичке природе, при чему су студенти охрабрени да израде програме са што већим степеном интерактивности. Динамичка природа проблема се састоји у томе што графика која треба да се добије активирањем програма зависи од вредности неких улазних параметара. На овај начин, приликом сваког активирања програма, могу се задати различите вредности улазних параметара, чиме се може установити веза између вредности тих параметара и оног што се реално догађа у 3D свету.

Да би студент решио овај проблем и да би написао Matlab код, мора најпре суштински да разуме математичке појмове, тврђења, формуле и уопште сам концепт на који се односи тај проблем. Он мора математички да разради задатак, а онда да примени стечена знања о писању Matlab кода и примени команде којима би се постигао ефекат визуелизације конкретног проблема. У разумевању проблема требају му помоћи едукативни материјали који су симултано објављивани на систему управљања е-учењем. Решавањем ових 3 задатака постиже се циљ пројектне наставе. Они представљају дидактички систем јер се може претпоставити да би слеђењем упутстава е-курса Visualized Math и решавањем ових задатака, процесом учења и креирања студент стигао до есенцијалних знања у 3 наведених области.

Задатак из прве области "Површине" је варијација једног од два типа задатака - "Облик" или "Пресеци". Та два типа су илустрирана следећим примерима:

Пример 1. Користећи Matlab, приказати форму хиперболида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{9}=1$$

у зависност о вредности параматара *a*, између 1 и 6.

Пример 2. Користећи Matlab, приказати пресек параболида:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=\frac{z}{3}$$

и равни

$$y = d$$

у зависности о вредностима параматара *d*, између -2.5 и 2.5.

Задатак из друге области "Криве" је варијација једног од тва типа задатака - "Кретање и вектор брзине" и "Апроксимација дужине лука".

Пример 3. Користећи Matlab, приказати трајекторију честице чије је кретање одређено функцијом:

$$\mathbf{r}(t)=2\cos t\cdot\mathbf{i}+3\sin t\cdot\mathbf{j}+4t\cdot\mathbf{k}, \qquad t\in[0,3\pi]$$

и приказати вектор брзине у датом времену t = t_1.

Пример 4. Користећи Matlab, приказати трајекторију честице чије је кретање одређено функцијом:

$$\mathbf{r}(t)=t\cdot\mathbf{i}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\cdot\mathbf{k}, \qquad t\in[0,8]$$

и приказати полигоналну линију одређену тачкама те криве добијене поделом интервала [0, 8] na *n* подинтервале. Апроксимирати дужину лука, израчунавајући дужину добијене полигоналне линије.

Задатак из треће области "Парцијални изводи и двојни интеграли" је варијација једног од два типа задатака - "Тангентна раван" или "Апроксимација запремнине".

Пример 5. Користећи Matlab, приказати пресек параболида

$$z=5-\frac{x^2}{2}-y^2$$

и равни

$$y=\frac{1}{2}.$$

Затим приказати тангентну раван у тачки криве - пресека параболида и равни, за дату вредност $x = x_1$ у интервалу $x_1 \in [0, 2]$.

Пример 6. Користећи Matlab, приказати површину

$$z=f(x,y)=0.1x-0.2y+5$$

и приказати део тела које стоји директно над правоугаоником:

$$R: \quad x\in[0,3]; \qquad y\in[0,2]$$

ограниченим одозго површином $z = f(x, y)$.

Визуелизирати Риманову суму добијену поделом интервала [0, 3] и [0, 2] на по *n* подинтервала. Апроксимирати запремнину тог тела, израчунавајући суму запремнина добијених n^2 квадара.

Прегледом описа задатака о изради интерактивних програма у Matlab заокружен је преглед едукативних материјала израђених за ово истраживање.

Описом експерименталног дела истраживања биће образложена имплементација ових едукативних материјала. Он је дат у поглављу 4.

Решења задатака, њихова успешност и утицај пројектне наставе и визуелизације на квалитет студентових знања биће анализирани у поглављу 5.

4. Глава

Опис тока експерименталног дела истраживања

4.1. Предистраживање

У савременој дидактици математике, визуелизационе методе су готово увек потенциране као принципијелно најважније током учења математике на свим нивоима образовања, нарочито када се ради о изучавању функција. Примена информацијско-комуникацијске технологије у савременој настави математике предмет је највећег дела радова из ове области у задњој декади.

Ипак, савремени аутори углавном се баве развијањем одређене специфичне технике примене ИКТ-а за постизање одређених, конкретних наставних циљева. Постоји велики број истраживања која се односе на питање **како** искористити одређени програм или софтверски пакет приликом изучавања функција. Највећи део њих бави се функцијама једне променљиве и развијањем визуелизацијских техника које се геометријски односе на *дводимензионалну* математику.

Дакле недостаје дубљи приступ питањима: како искористити ИКТ за развијање визуелизацијских алатки које се односе на тродимензионалну математику, како интегрисати визуелизацијске методе у настави изучавања функција више реалних променљивих и нарочито какав је утицај примене оваквих метода на квалитет знања студената. Ово је био **мотив** да се дизајнира истраживање које ће дати неке од одговора на ова питања.

Пошто сам се и сам раније бавио питањем учења математике у информатичком друштву, увидео сам да сам се и ја као и остали истраживачи фокусирао на питање *како* израдити едукативне материјале користећи ИКТ и неким аспектима *интеграције* оваквих метода у настави математике. У фази предистраживања посматрао сам промену понашања студената када при наглој промени тока наставе, приказивањем визуелизацијских алатки које се односе на наставне садржаје који се изучавају углавном класичном наставом. Наиме, приликом увођења појма одређени интеграл, класичном наставом студентима је било објашњено шта значи Риманова сума, при чему је коришћена визуелизација која се односи на произвољној функцији, дакле сасвим солидан и веома прегледан цртеж графа непрекидне функције, и апроксимација површине помоћу правоугаоника који се добију поделом обсервираног интервала. Тек након тога, када се чинило да студенти разумеју случај коначне вредности броја подинтервала, постављено је питање постојања граничне вредности и њиме је уведен појам интеграбилности фунције и најзад појам одређени интеграл. Након тога сам израдио аплете користећи слободни софтвер GeoGebra[70], приказао студентима 2 варијанте интегралне суме и визуелизацију теореме о средњој вредности и посматрао њихове реакције. Први утисак је био да су знатно заинтересованији да виде о чему се ради у поређењу са њиховим интересом за класичне слике које су имали прилику да виде на часовима математике у класичној настави. Имајући у виду да су сами аплети веомаориснички оријентисани и имају велики степен интерактивних могућности, поставио сам ова три аплета на доступним веб локацијама[71] и анализирао дали ће студенти уложити време да "се играју" могућностима промене параметара (може се променити подинтегрална функција, интервал, као и број подинтервала) и најважније - осим очигледног повећања интереса за време извођења наставе, **дали ће примена оваквих визуелизационих метода утицати на повећање квалитета њихова знања о обрађеној тематици?**

Због постављености наставе на UIST-у, није било могуће дубље да се анализира овај утицицај са аспекта питања дали студенти **суштински** разумеју појмове Риманова сума, интеграбилност и одређени интеграл. Њихова знања су проверавана писменим путем, а степен остварености

---

[70] [5]

[71] [6], [7] и [8]

одговарајућег наставног циља је проверено на индиректан начин, преко математичког задатка доказати да:

$$\int_a^b x^2 = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

израчунавајући граничну вредност Риманове суме

$$\lim_{\|P\|} \sum_{k=1}^{n} f\left(c_k\right) \Delta x$$

где је P рамномерна подела интервала са n+1 елементима и c_k (k = 1, 2, ..., n) су елементи те поделе. Просечни број освојених бодова овог задатка је једва 46% од просечног броја бодова који су студенти освојили на испиту Математика 1. На први поглед ово говори да је остваривање овог наставног циља знатно мање успешно у поређењу са укупном успешношћу у остваривању наставних циљева овог курса. Али се поставља и питање разлога зашто је то тако и важније, да ли то што су студенти показали више знања код других, конкретнијих задатака у упоређењу са њиховим вештинама исписивања формалног доказа, значи да нису суштински разумели појам одређеног интеграла. Даље, већина студената који су почели разрађивањем доказа, успешно су поставили суму што показује да су научили дефиницију, али многи од њих су се заплели у гломазним формулама са сумама које је неопходно упростити. Ово значи да овај начин проверавања знања није погодан за извођење закључка о *суштинском* схватању нових појмова.

Овај пример из наставне практике био је **повод** за дизајнирање истраживања у коме ће се дубље анализирати веза између примене визуелизационих метода помоћу ИКТ-а и квалитета знања студената, нарочито оних суштинских, везаних за функције.

Респектирајући све досад наведено, проучио сам могућности које имам да спроведем истраживање са студентима UIST-а. Будући да је наставни програм предмета Математика 2 (одељак 3.1.1.) у најтешњој вези са предметом овог истраживања, одлучио сам да развијем детаљнији план и развијем идеју постављајући циљеве истраживања, избирајући одговарајућу методологију и израдом плана рада разрађеног у етапама, током пролећног семестра академске 2009/2010 године да споведем истраживање са студентима UIST-а са којима изводим наставу предмета Математика 2.

4.1.1. Главни циљ истраживања и очекивани резултати

Главни циљ истраживања, као експериментални део ове дисертације је:

- Утврђивање степена утицаја примене визуелизационих метода, базираних на теоријским основама дидактике математике и интегрираном приступу примене информацијско-комуникацијске технологије у настави матаматике на квалитет знања студената који се односе на наставне садржаје који обухватају функције, нарочито векторске функције једне реалне променљиве и функције више реалних променљивих и њихове особине како и тродимензионалне аналитичке геометрије - криве и површине.

Извођењем истраживања биће постигнути и следећи циљеви:

- Израђивање едукативних материјала у електронској форми чиме се студентима омогућује изучавање функција и њихове особине интерактивним алаткама помоћу рачунара, интегрираних у систем за управљање е-учењем;
- Израђивање инструмената којима се може измерити утицај примене визуелизацијских метода на квалитет есенцијалних знања;

Очекивани резултати истраживања су потврђивање претпоставке да визуелизациони методи базирани на теоријским основама дидактике математике и интегрисаном прилазу примене информатичко-комуникацијске технологије у настави метаматике, имају значајан утицај на квалитет знања студената и да изразито повољно делују на позитивне психолошке доживљаје студената током учења математике.

4.1.2. Етапе истраживања и методологија

У фази предистраживања обезбеђени су неопходни предуслови за спровођење истраживања и обављене су формалне припреме. Универзитет информационих наука и технологија у Охриду је обезбедио све неопходне услове за спровођење истраживања. Након добијене подршке професора д-р М. Ager који је био носилац извођења наставе предмета Математика 2, приступио сам формирању група студената - експерименталне и контролне групе (опширније у одељку 4.1.4.) и обезбедио сагласност студената да се резултати њиховог рада током курса, нарочито члановима експерименталне групе, могу користити у истраживачке сврхе. Нарочито сам посветио пажњу о заштити приватности података, тако да ће сви коришћени резултати бити презентирани без наведених имена и презимена, а исто тако ни у ком случају се неће моћи открити на ког конкретног студента се односе изнесени подаци или закључци.

Поставио сам нацрт-план за израду едукативних материјала и одлучио да се у ту сврху, нарочито за израду визуелизационих алатки користи софтверки пакет Matlab. Будући да је израда ових едукативних материјала детаљно образложена у поглављу 3, овде ће бити наведене само етапе планирања и њихова израда.

Да би студенти могли успешније да прате део наставе у коме су интегрисани визуелизациони методи помоћу едукативних материјала израђених у Matlab-у и да би се формирала експериментална група на добровољној основи, јер ће се у завршним етапама од студената ове групе тражити да и сами израде одговарајуће програме и функције, организован је такозвани Matlab семинар (опширније у одељку 4.1.3.).

Следећа фаза је изузетно важна за остваривање главног циља истраживања. Да би се могао извести закључак колики је степен утицаја примене ИКТ-а на квалитет знања студената, морало би се утврдити иницијално знање и упоредити са одговарајућим нивоом знања након спроведеног истраживања. Мерење овог почетног нивоа знања студената назвао сам *дијагностичко тестирање*.

Пре свега сам анализирао резултате студената са курса Математика 1, нарочито њихов успех при решавању задатака који се односе на суштинска знања везаних за функције једне променљиве. Али, како је већ образложено, због природе постављених испитних задатака, ови резултати нису били довољни да се изврши компарација нивоа знања која се односе на суштинско разумевање математичких појмова везаних за функције.

Због тога сам израдио такозвани дијагностички тест, пажљиво формулирајући питања која се односе на најважније појмове о функцијама једне променљиве и дводимензионалне аналитичке геометрије и који су аналогијом постављени као најважнији појмови - изабрани садржаји курса Математике 2, есенцијална знања о функцијама више променљивих и тродимензионалне аналитичке геометрије. Након етапе израде овог инструмента за мерење предиспозиција и предзнања студената, следећа етапа је била спровођење дијагностичког теста (детаљније у одељку 4.2.).

Задњу етапу ове друге фазе - анализу резултата дијагностичког теста немогуће је издвојити од етапе задње фазе - анализе резултата ре-теста, јер је кључно упоредити ове резултате и анализирати њихову корелираност, како и корелираност са методима који су примењени у току истраживања. Опширан осврт ове анализе налази се у поглављу 5.

На основу израђеног плана, тековно су израђивани едукативни материјали описани у одељку 3.3. Кључна етапа у овој фази је интегрисање ових едукативних материјала у настави. Методи који су примењени за унапређивање наставе употребом ИКТ-а при изучавању функција опширније су елаборирани у одељку 4.3.

Четврта фаза се односи на извођење пројектне наставе. Израдом одговарајућег пројекта, студенти експерименталне групе су постављени у ситуацију контролираних услова. Помоћу система за управљање е-учења пажљиво је вођен њихов рад на пројектним активностима. Мерење њиховог учинка је омогућено алаткама за праћење. Коришћени су извештаји које аутоматски генерира систем управљања е-учењем.

У првој етапи, на веб локацији [1] сетиран је курс Visualized Math и организован је рад студената експерименталне групе на порталу. Затим су израђени и објављивани едукативни материјали, опширније елаборирани у одељку 3.4. У следећој етапи израђен је дидактички систем математичких задатака. Сваки студент експерименталне групе требао је израдити 3 Matlab програма везаних за визуелизацију одређене математичке ситуације елабориране одговарајућим едукативним материјалима претходне етапе организиране у 3 одговарајуће путање учења. У одељку 3.5. детаљније је описан овај дидактички систем математичких задатака.

Студенти експерименталне групе подстицани су да раде на својим пројектним задацима у духу колаборативног учења. Њихова сарадња одвијала се у виртуелној околини преко система за управљање е-учењем, али и у реалној средини. Организовани су термини, издвојени од термина редовне наставе када су студенти добијали помоћ за израду својих задатака. Током њиховог рада, интензивно се одвијала и комуникација електронским путем - консултације за њихова решења, сваки пут кад је било који од њих то затражио, добијали су и преко електронске поште.

Задње две етапе ове фазе односе се на анализу учинка сваког студента експерименталне групе. Анализирано је колико су времена провели проучавајући објављене едукативне материјале на систему. Што је још важније, анализиран је квалитет решења њихових задатака - израђене Matlab програмом.

Пре него што је приступљено завршном делу истраживања, израђен је још један инструмент за мерење знања студената. Аналогно дијагностичком тесту, израђен је тест којим је установљен квалитет суштинских знања студената обе групе по изабраним садржајима. Овај је инструмент тако израђен да се може израдити компаративна анализа са иницијалног знања, чиме је утврђена **промена** која је настала код студената током истраживања.

Ово ре-тестирање спроведено је након завршетка редовне наставе и пројектне наставе, истовремено са завршним испитом курса Математика 2 (опширније о изради и спровођењу ре-теста, у одељку 4.5.).

За анализу знања студената везаних за функције више променљивих, векторских функција и тродимензионалне аналитичке геометрије, коришћени су и резултати испита курса Математика 2 (опшириније о овим анализама резултата, у поглављу 5.)

Задња фаза истраживања је обрада статистичких података сакупљених током истраживања, постављање и тестирање статистичких хипотеза, након чега су изведени завршни закључци дисертације.

Резиме

Фаза 1. Предистраживање

Етапа 1. Обезбеђивање формалних предуслова;

Етапа 2. Планирање и почетак израде едукативних материјала;

Етапа 3. Matlab семинар;

Етапа 4. Формирање група студената;

Фаза 2. Дијагностичко тестирање

Етапа 1. Анализа предзнања студената у вези функција

Етапа 2. Припрема инструмента за мерење предиспозиција и предзнања студената

Етапа 3. Тестирање

Етапа 4. Анализа резултата дијагностичког теста

Фаза 3. Интегрисање едукативних материјала у настави

Етапа 1. Израда едукативних материјала

Етапа 2. Извођење наставе

Фаза 4. Пројектна настава

Етапа 1. Сетирање електронског курса на систему за управљање е-учењем

Етапа 2. Израда едукативних материјала намењених за експерименталну групу студената

Етапа 3. Припрема пројектних задатака - израда дидактичког система математичких задатака

Етапа 4. Колаборативно учење и организација различитих форми помоћи студентима при изради програма

Етапа 5. Анализа учинка студената експерименталне групе

Етапа 6. Анализа постигнутих резултата пројектне наставе

Фаза 5. Ре-тест

Етапа 1. Припрема инструмента за мерење знања студената након истраживања

Етапа 2. Ре-тестирање

Етапа 3. Анализа резултата ре-теста

Фаза 6. Обрада статистичких података сакупљених током истраживања, постављање и тестирање статистичких хипотеза

4.1.3. Matlab семинар

Циљ семинара "Елементарни увод у Matlab" је упознавање студената-посетилаца семинара са Matlab радном околином, принципима рада у Matlab-у и њихово стицање знања о синтакси програмирања преко најједноставнијих процедура.

Matlab семинар је намењен свим студентима прве године, на добровољној бази. Организован је на самом почетку пролећног семестра, дакле одмах након фазе предистраживања. Студенти су већ стекли основе програмирања током јесењег семестра, тако да је семинар фокусиран на специфичности програмског пакета Matlab - Matrix Labarotory. Акцент је стављен на разумевању да је у Matlab-у дословце све третирано као матрица, па зато је и нужно суштински схватити рад са векторима и низовима. Даље, акценат је стављен на визуелизационе алатке којима се може описати већина математичких ситуација третираних у изабраним садржајима.

Један део семинара се односи на непосредан рад са студентима - предавања и вежбе организоване у 10 часова током 3 недеље. Други део односи се на домаћи рад: сваки студент треба да изради 10 једноставних програма.

Садржај семинара "Елементарни увод у Matlab":

1. Увод. Вектори и операције са векторима. Matlab-ов едитор и .m датотеке;
2. Условни циклуси. Циклуси понављања;
3. Тачкаста аритметика. Функције. Matlab-ова симболичка математика;
4. Графика у Matlab-у;
5. Матрице;

Сматрам да су овако разрађени садржаји сасвим довољни за сврху овог истраживања. Студенти који су успешно похађали семинар могли би потпуно да схвате начин на који су израђени едукативни материјали, како и да самостално креирају одговарајуће програме за визуелизацију математичких ситуација изабраних садржаја курса Математика 2. Ово Matlab семинар чини делом истраживања, јер је целисходно намењен да део студената припреми за форме и методе које ће касније бити примењене интеграцијом едукативних материјала у настави, а нарочито у пројектној настави, којом су студенти експерименталне групе задужени израдити програме у Matlab-у приказујући одређену конкретну математичку ситуацију динамичке природе.

Matlab семинар је организован у периоду 27 фебруара - 12 марта 2010.

Пријавило се 43 студената. Већина од њих је у току семинара активно учествовало. Партиципација студената је приказана у следећој табели:

Партиципација	Број студената
100%	18
80%	2
60%	11
50% и мање	12

Табела 4.1. Партиципација студената на Matlab семинару

Активност другог дела семинара - самостално решавање задатака и израде једноставних програма сличних програмима демонстрираних током предавања и вежби је била мања. Разлози нејвероватније леже у томе што је семинар био на добровољној основи и што је израда домаћих задатака требала бити у периоду кад су већ почели први парцијални испити пролећног семестра, па студенти нису имали довољно времена да решавају необавезне задатке.

Свега 17 студената су послали решења домаћих задатака. Њихова решења пажљиво су анализирана и бодована. Из следеће табеле се може видети квалитет показаних знања о Matlab-у стечених за време семинара:

Број бодова	Успешност у %	Број студената
8.5 - 10	85% - 100%	3
5 - 8.5	50% - 85%	9
мање од 5	мање од 50%	5

Табела 4.2. Успешност посетиоца Matlab семинара, преко решавања домаћих задатака

Matlab семинар је и формално део активности студената на UIST-у. У свом сам извештају[72] репортирао да је 15 студената успешно похађало семинар: 12 њих који су прешли праг од 50%, док су троје имали нешто мање од 50% успешности на својим задацима али су били искључиво активни и партиципирали су током предавања и вежби.

Сви материјали семинара преко интернета су били доступни свим студентима који су похађали курс Математика 2 у пролећном семестру 2010.

Може се сматрати да је Matlab семинар, као део предистраживања успешно поставио основе разумевања едукативних алатки које су касније коришћене у редовној и пројектној настави. Овај семинар, као и сазнање да ће се пројектне активности изводити решавањем математичких задатака помоћу програмског пакета Matlab, деловали су мотивирајуће за добровољно пријављивање студената за такозвану експерименталну групу.

4.1.4. Формирање група студената

Да би се реализовао главни циљ истраживања потребно је урадити дубљу анализу на који начин примена ИКТ-а утиче на квалитет знања студената. У ту сврху, примењена је методологија којом ће се група студената издвојити, поставити у специфичној наставној ситуацији, издвојеној од осталих студената и анализирати разлике у квалитету знања обе групе.

---

[72] "Matlab Seminar 2010 Report" је званичан документ UIST-а.

Оваква група, у сврху овог истраживања названа је **експерименталном групом** студената. Због осетљивости материје, веома пажљиво сам приступио формирању експерименталне групе. Да би ова група била репрезентативна и састављена од студената свих нивоа предиспозиција и предзнања, најбоље је било студенти ове групе да буду изабрани случајним путем. Ипак, пошто је исход њиховог рада током истраживања утицао на њихове оцене из курса Математика 2, одлучио сам да формирање експерименталне групе буде на добровољној бази. Наравно студенти нису знали да постају чланови такозване експерименталне групе, али им је објашњено да ће њихов рад бити изложен изразитој опсервацијии и дубљој анализи свега што ураде - од присуства на часовима, времена проведеног на систему управљања е-учењем, преко домаћих задатака и пројектних активности, све до детаљније анализе њихових одговора на свако питање на тестовима, колоквијумима и испитима у сврху извесног истраживања.

Да би мотивирао студенте добровољно да се пријаве, још на Matlab семинару сам најавио да они којима се рад Matlab-ом чини интересантним могу заобићи класичну пројектну наставу која се састоји од израде неке врсте "есеја", или такозваног "семинарског рада". Одмах након семинара дефинисао сам шта значи радити пројектну наставу програмирањем у Matlab-у и бити део истраживања. Документом "Project description for the project Visualized Math with Matlab" (Додатак В.) јасно је постављен **циљ** ове врсте пројектне наставе:

> *Сваки студент укључен у овом пројекту, треба креирати 3 Matlab програма, по један за сваки од следећих тема:*
>
> 1. *Површине;*
> 2. *Криве;*
> 3. *Парцијални изводи и вишеструки интеграли.*
>
> *Програми ће бити у вези са материјалом који покрива предмет Математика 2, језгрени предмет прве године на UIST-у у Охриду. Креирање оваквих алатки за визуелизацију студентима ће помоћи у учењу математичких концепата укључених у овом предмету.*

У овом документу су постављени и форма рада, начин бодовања, помоћ и консултације. Сматрам да је објављивањем овог документа, јасно постављена дистинкција између класичне пројектне наставе и пројекта "Visualized Math with Matlab".

Студентима је такође објашњено да у току израде пројеката требају анализирати математичке концепте из другог угла и да ће им на располагању бити едукативни материјали доступни само њима преко система управљања е-учењем, као и да ће њихова активност на овом систему бити пажљиво праћена.

Након ових припрема, затражио сам од студената који хоће добровољно да се пријаве, својеручно да потпишу сагласност да учествују у пројекту "Visualized Math with Matlab" чиме дају пристанак да њихови резултати рада буду искоришћени у истраживачке сврхе.

Пријавило се 18 студената чиме је формирана експериментална група.

Начин формирања експерименталне групе није случајан и може се рећи да је пријављеним студентима рад са ИКТ омиљенији и да су они ближи програмском пакету Matlab од осталих или да једноставно више воле програмирање него сувопарно бављење математиком. Ипак, сви студенти су са Универзитета Информационих Наука и Технологија, па се такође може претпоставити да су сви подједнако мотивирани да раде са ИКТ-ом. Сви студенти су учили језгрене предмете Програмирање 1 и 2, па програмерски начин размишљања није туђ ниједном од њих. Најзад, од 18 студената ексеприменталне групе, 9 су редовно похађала Matlab семинар партиципирањем 100% часова, 3 од њих је партиципирало на 60% предавања, а остала 6 су партиципирала мање од 50%. Може се видети да су чланови експерименталне групе веома слично дистрибуирани по критеријуму "партиципација на Matlab семинару" као и цела опсервирана популација на Табели 4.1.

Исто тако се може закључити и да је дистрибуција чланова експерименталне групе по критеријуму "успешност преко решавање домаћих задатака" слична оној датој у Табели 4.2. Наиме, 2 од њих су имали успешност 85-100%, 3 од њих успешност 50%-85% и 1 мање од 50%, док осталих 12 студената уопште нису послала решења задатака постављених као део Matlab семинара, као што су само 17 од 43 полазника семинара и радили на тим задацима.

Дакле, и поред тога што је допуштено да се студенти добровољно укључе у пројекат "Visualized Math with Matlab", експериментална група се може сматрати репрезантативним узорком студената прве године на UIST-у, са аспекта афинитета за разумевање и коришћење ИКТ, програмирања и познавања програмског пакета Matlab.

Битно је затим, обезбедити репрезентативност експерименталне групе са аспекта предиспозиција и предзнања.Пошто је креирање групе било на самом почетку пролећног семестара, на располагању сам имао једино податке о њиховим резултатима са курса Математика 1 са јесењег семестра исте 2009/10 академске године. Анализирајући успех чланова већ креиране експерименталне групе, одлучио сам формирати контролну групу са сличном дистрибуцијом резултата са курса Математика 1. На тај начин сам добио контролну групу састављену од 18 студената. Из следеће табеле може се видети компарација резултата чланова експерименталне и контролне групе:

Оцена	Број студената екпериментaлне групе	Број студената контролне групе
10	1	2
9	3	3
8	1	0
7	3	3
6	5	5
5	5	5

Табела 4.3. Дистрибуција студената обе групе према оценама предмета Математика 1

На овај начин, изабрано је 36 студената чији ће рад бити праћен током курса. Њихове предиспозиције и предзнања везана за функције касније су мерена помоћу дијагностичког теста (опширније у одељку 4.2.).

Студенти са оценом 5, нису прошли курс Математика 1 након јануарског испитног рока. И поред тога, они смеју узети курс Математика 2, али не смеју полагати финални испит пре него што обезбеде прелазну оцену из првог дела. Одлучио сам укључити 10 таквих студената у истраживање, по 5 у свакој од група. Дубље анализе студентских резултата из Математике 1 добијене су компарацијом њихових одговора на питања и задатке на парцијалним и финалном испиту.

Може се сматрати да је формирањем експерименталне и контролне групе завршена фаза предистраживања.

Будући да је истраживање дизајнирано тако да ће део едукативних материјала бити интегрисан у самој настави, са свим студентима, анализа утицаја примене ИКТ-а на квалитет знања везаног за функције може се извести на два нивоа:

- Измерити како је примена ИКТ-а утицала на чланове обе групе и компарирати резултате након завршетка курса Математика 2, са резултатима пре имплементације иновиране наставе. Конкретније, биће упоређени резултати добијени инструментом “Дијагностички тест” са резултатима добијеним инструментом “Ре-тест”, тиме се фокусирајући на изабране садржаје који се могу сматрати есенцијалним знањима везаним за функције.
- Упоредити постигнуте резултате експерименталне групе са контролном групом, чиме ће се измерити утицај израде Matlab програма за визуализацију тродимензионалних математичких ситуација на квалитет знања везаног за функције.

4.2. Дијагностичко тестирање

Основни циљ дијагностичког тестирања је да се добију релевантни подаци о студентовим предзнањима, како би се касније могла извести компаративна анализа са знањем које су стекли у току спроведеног истраживања. Како је део наставе на који се односи ово истраживање повезан са функцијама више променљивих, векторским функцијама и тродимензионалном аналитичком геометријом, предзнање се овде односи на функције једне променљиве и дводимензионалне аналитичке геометрије. Већи део садржаја на које се односи ово истраживање може се схватити помоћу аналогије функције једне променљиве и дводимензионалне аналитичке геометрије, па се зато и компаративна анализа односи на упоређивање резултата из ове области са резултатима из аналогне области.

Пошто је формирање група студената већ изведено у току предистраживања, на самом почетку могуће је тестирати равномерност обе групе по критеријуму предзнања, упоређујући резултате дијагностичког теста студената експерименталне групе са онима из контролне групе, будући да се приликом формирања група као једини параметар о предзнању користио резултат предмета Математика 1. Како је већ елаборирано, начин на који је проверавано знање студената о функцијама једне променљиве је такав, да се не може извести закључак о суштинском схватању математичких појмова, зато што су задаци постављени на испитима предмета Математика 1 комплекснији и на *индиректан* начин мере знања студената о функцијама.

Имајући у виду избор садржаја које сам у одељку 3.1.3. поставио као есенцијално знање које се односи на функције једне реалне променљиве, одлучио сам дијагностички тест тако да буде дизајниран да може да мери знања студената која се односе на следећих 5 категорија:

1. Гранична вредност функције у датој тачки и непрекидност реалних функција једне реалне променљиве;
2. График и особине функција једне реалне променљиве;
3. Диференцијабилност, извод функције једне реалне променљиве и геометријска интерпретација извода;
4. Одређени интеграл;
5. Дводимензионална аналитичка геометрија - криве другог реда.

Након одређивања категорија, приступио сам распоређивању индикатора по категоријама. Инструмент "Дијагностички тест" је дат интегрално онако како је спроведен у Додатку А. У следећој табели је дат преглед питања по категоријама.

Категорија	Број питања из одговаруће категорије	Редни број питања
1	3	1, 2, 10
2	4	3, 4, 5, 13
1 и 2	4	6, 7, 8, 11
3	4	9, 12, 14, 17
4	2	15, 16
5	3	18, 19, 20

Табела 4.4. Дијагностички тест - преглед питања по припадности одређеној категорији

Као што се види из Табеле 4.4, категорија 1 садржи групу од 3 питања. Њен циљ је да се провери у којој мери студенти суштински схватају дефиницију граничне вредности у тачки у којој функција може, али не мора да буде дефинисана, као и концепт непрекидности функције на датом интервалу.

Суштинско разумевање непрекидности у овом смислу подразумева да је студент у стању да извуче релевантне закључке о особинама функције, за које је познато да је непрекидна на датом интервалу.

Група сачињена од 4 питања односи се на категорију 2. Њен циљ је да провери способности студената у 'читању' особина функције гледајући њен график. Суштинско разумевање графика функције, подразумева да се може одредити вредност функција ако је дата вредност аргумента и да се то примени (питање 3), или да се одреде вредности аргумента ако је дата вредност функције (питање 13) и да се то опет примени.

Како су категорије 1 и 2 у веома тесној вези, креирана су још 4 питања која су класификована у групу питања које се односе на обе категорије. То значи да се проверава способност студената да расуђују и изводе закључке о графику функције у околини тачке, ако је дата информација о граничној вредности те функције у тој тачки (питање 6) или да изводе закључци о граничној вредности функције ако је дата информација о њеном графику (питање 7). Будући да је у фокусу суштинско знање о функцијама, сачињена су два питања (8 и 11) у којима је дата информација о граничној вредности и слика којом је визуелизиран график функције, а тражи се да се расуђује о непрекидности функције у тачки или на интервалу тако што ће се закључак формулисати вербално. Сматрам да се тиме, овим укупно 11 питања може измерити суштинско разумевање најважнијих појмова која се односе на граничну вредност, непрекидност и график реалне функције једне променљиве.

Диференцијабилност и изводи функције су обухваћени са 4 питања. Циљ ове групе питања је да се провери колико студенти схватају интерпретирање извода реалне функције једне променљиве као брзину промене, изражене преко коефицијента нагиба тангенте у одговарајућој тачки графика функције и детаљније као тангенс угла који одговарајућа тангента формира са позитивним делом апсцисне осе. Три од ових питања су типа вишекратног избора, а једно је отворено (питање 17).

Категорија 4 која садржи два питања, односи се само на тумачење одређеног интеграла као површине. Оба се односе на интеграл који је лако израчунати и фокусирају се на визуелизацију коју студент треба суштински разумети и повезати са самим концептом интегрисања како граничну вредност Риманове суме.

Група од 3 питања односи се на категорију 5. Њен циљ је проверити знање о кривама другог реда, јер се аналогијом ових крива могу схватити површине другог реда у тродимензионалној аналитичкој геометрији. Док су 2 од ових питања типа вишеструког избора, задње питање је типа повезивања.

На овај начин је израђен инструмент 'Дијагностички тест', састављен од 20 питања, од којих 18 су типа вишеструког избора - студент треба да изабере 1 тачан од 4 понуђених одговора, осим код једног питања где су понуђена само 2 одговора. По једно је питање отвореног типа - студент је требао унети одговор -2 на питању колики је тангенс угла који права дата једначином $y = -2x + 3$ формира са позитивним делом апсцисне осе, и једно је питање типа 'повезивање' - студент је требао повезати 4 слике на којима су вузелизиране криве другог реда са одговарајућом једначином. Предвиђено је да се овако креиран ,,Дијагностички тест” решава 45 минута.

Дијагностичко тестирање спроведено је 24-тог марта 2010 године. Студенти су решавали тест потписивајући се својим именом и презименом. Пре почетка тестирања, јасно им је стављено на знање да ће њихови резултати бити искоришћени у сврху истраживања и да неће имати никакав утицај на њихове оцене. Такође је наведено да је приватност података гарантована и да њихово име неће бити доведено у контекст резултата или закључака у случају да они буду објављени. Најзад, сваки студент се требао декларисати да се слаже бити део овог истраживања да би његов тест уопште могао бити узет у обзир приликом обраде резултата дијагностичког тестирања.

Овај дијагностички тест решавали су укупно 33 студената из обе групе и **постигли су просечан резултат 39.2%**.

Један студент експерименталне групе је био одсутан, тако да је 17 студената експерименталне групе решавало дијагностички тест. **Просечан резултат експерименталне групе је 40.3%.**

Двојица студената контролне групе су били отсутни, тако да је 16 студената контролне групе решавало дијагностички тест. **Просечан резултат контролне групе је 38.1%**.

Основни циљ дијагностичког тестирања је постигнут, јер су сакупљени подаци којима се може упоредити знање студената пре и после иновирања наставе, анализирајући аналогне концепте који се односе на суштинска знања о функцијама.

Упоређујући резултате који су постигли студенти експерименталне, са онима из контролне групе, може се закључити да су групе заиста избалансирано састављене, према критеријуму предзнања. Наиме, просечан резултат експерименталне групе од 40.3% може се сматрати приближно једнаким са просечним резултатом 38.1% контролне групе. Разлика од 2.2% може се сматрати статистички незначајном.

Оно што се може видети дескриптивним статистичким алаткама након дијагностичког тестирања је да заиста постоји проблем са суштинским знањем студената. Како сам и претпостављао, постоји јаз између знања које се мери класичним испитивањем у класичној настави и оно што сам дефинисао као суштинско знање о функцијама. Ако се анализирају испитна питања која су студенти имали полажући завршни испит или парцијалне испите предмета Математика 1, може се закључити да су они далеко "тежи" од питања постављених на дијагностичком тесту. Како је тежина испитног питања субјективне природе, можемо дубље анализирати когнитивна нивоа знања која се траже приликом решавања испитних задатака и одговарања на питања дијагностичког теста.

Користећи Блумову таксономију наставних циљева, може се закључити да је најнижи ниво који се тражи приликом решавања испитних задатака, ниво примене. Анализирајући задатак:

> "*Применити дефиницију извода као лимес количника разлике, израчунати извод функције*
>
> $$y = 1 + \frac{1}{x}$$
>
> *за све тачке x > 0.*"

може се закључити да студент мора добро владати дефиницијом извода као граничне вредности количника разлике и концептом граничне вредности реалне функције једне реалне променљиве, а исто тако и да поседује вештине рачунања граничне вредности, да би **применио** ово знање и да би дошао до траженог извода.

Да би студент успешно решио већ цитирани задатак са завршног испита:

> "*Доказати да:*
>
> $$\int_a^b x^2 = \frac{b^3 - a^3}{3}$$
>
> *тако што се израчуна гранична вредност Риманове суме:*
>
> $$\lim_{\|P\|} \sum_{k=1}^{n} f\left(c_k\right) \Delta x$$
>
> *где је P равномерна подела интервала са n+1 елементима и c_k (k = 1, 2, ..., n) су елементи те поделе.*"

морао би проћи кроз највишља когнитивна нивоа - нивоа анализе, синтезе и евалуације, јер је сама природа доказивања матататичких тврђења таква да је за исписивање и једноставнијег доказа неопходно проћи кроз сва та нивоа, све до највишег, креативног когнитивног нивоа.

Парадокс је у томе што су 23 од опсервираних студената прошли овај испит предмета Математика 1, али су само 12 њих, што је мање од 50% положених студената имали резултат бољи од 50% на дијагностичком тесту, који је на први поглед сачињен од питања која траже знатно нижи когнитивни ниво. Просечан резултат ова 23 студента који су положили испит предмета Математика 1, на дијагностичком тесту је 43.1%, што значи да би студент који је у ствари положио испит, имао проблема да положи испит сачињен по узору овог дијагностичког теста, или другим речима, чак и студенти који су званично имали потребно предзнање за предмет Математика 2, имају незанемарујуће проблеме са знањем које сам дефинисао као суштинско знање о функцијама једне променљиве.

Когнитивни ниво на које се односи питање типа вишеструког избора обично се сматра нижим. Због тога што су понуђени могући одговори, а студент треба само препознати и одабрати онај прави, сматра се да се тако само може проверити колико је постигнут наставни циљ који се односи на когнитивни ниво препознавања.

Ипак, сматрам да се оваквим питањима и те како може проверити квалитет суштинског знања. Када је питање вешто постављено и када су дистрактори (погрешни понуђени одговори) изабрани након дужег бављења наставном праксом тако да се подударају са најчешћим грешкама које студенти праве у сличним ситуацијама, може се избећи клише препознавања већ виђеног тачног одговора. Да би студент тачно одговорио на овакво питање, неопходно је да разуме задатак, тачно да разуме математичке појмове који су коришћени у питању (ниво схватања), затим да примени адекватну процедуру, поступак или метод (ниво примене), а у одређеним ситуацијама дубље да размисли и изводи адекватне закључке (ниво анализе и синтезе) како би избегнуо привлачност дистрактора и дошао до тачног одговора.

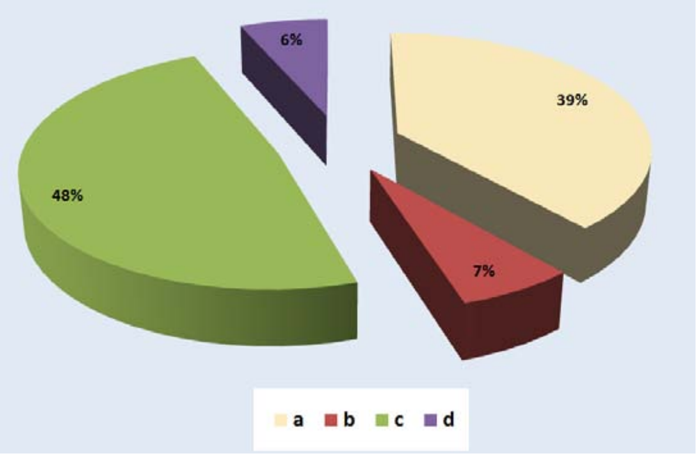
Питање 1. односи се на категорију 1 и формулисано је на следећи начин:

"*Нека је* $f(x)=\begin{cases} x, & x \neq 4 \\ 3, & x = 4 \end{cases}$. *Тада* $\lim\limits_{x \to 4} f(x) =$

a. 3 *b. 4* *c. не постоји* *d. ниједно од претходних*"

Студент мора суштински разумети дефиницију граничне вредности функције једне реалне променљиве у датој тачки да би знао да одредити граничну вредност значи размотрити које вредности прима дата функција у околини тачке, за произвољну вредност инпута, узимајући било коју вредност инпута из те околине, **осим** тачке чију околину разматрамо. Даље, постојање граничне вредности не повлачи непрекидност, нити је за постојање граничне вредности важно дали је функција уопште дефинисана у тој тачки.

Управо због ових разлога, дистрактори *a.* и *c.* питања 1. су толико привлачни, да су једва 7% студената изабрали тачног одговора *b.* демонстрирајући суштинско схватање појма граничне вредности функције једне реалне променљиве, схватајући да кад је *x* близу вредности 4, али није једнак 4, онда је дата функција дефинирана као *f*(*x*) = *x*, што повлачи да су вредности функције *f*(*x*) близу 4, без обзира на то што је функција *f*(*x*) дефинирана у тачки 4 тако да је *f*(4) = 3. Задњи факат, да је *f*(4) = 3 привукао је чак 39% студената да изаберу понуђени одговор *a.* Дистрактор *c.* је привукао запањујућих 48% студената, највероватније због тога што су "предосетили да нешто није у реду у околини тачке 4", не схватајући притом да то што функција није непрекинута у тачки 4, не повлачи непостојање граничне вредности у тој тачки.



Графикон 4.1. Питање 1. дијагностичког теста

Анализа студентских одговора на питање 1, показује да се питања типа вишеструког избора уопште не могу сматрати "лаким " и да су сасвим адекватни за проверавање квалитета суштинског знања о функцијама.

Али ова, као и анализа следећих неколико питања, илустративно говори о јазу између већ установљеног нивоа предзнања - судећи према резултатима испита предмета Математика 1 и објективног стања са есенцијалним знањем у вези са функција. Може се закључити да **значајна већина** студената није добро разумела концепт граничне вредности реалне функције једне реалне променљиве у датој тачки. Сматрам да је разлог тога недостатак квалитетније визуелизације приликом обраде овог суштински важног математичког појма, као и недовољан број разрађених примера сличних питању 1 из дијагностичког теста. Оваква хипотеза даје већу тежину постављеном циљу да се измери утицај примене визуелизације приликом разрађивања аналогних појмова, јер ако се са студентима оваквих предзнања успе постићи добар резултат, рецимо код суштинских знања о граничној вредности функције 2 променљивих, онда се он једино може приписати иновацији у настави, која се у случају овог истраживања односи на примене ИКТ, визуелизацијске алатке и програмирања у Matlab-у.

Приликом дефинисања појма есенцијалног, или суштинског знања о функцијама, у одељку 3.1.3., наведен је пример формалног знања о граничним вредностима реалних функција једне променљиве. Формулисао сам питање 6 (које припада категоријама 1 и 2) како би експериментално проверио утисак стечен у својој наставној пракси, да значајан део студената уме да израчуна граничну вредност функције примењујући формална алгебарска правила, а да притом не уме да визуелизује одговарајућу математичку ситуацију, нити да изведе релевантне закључке о понашању графика функције у околини тачке. Питање 6. формулисано је на следећи начин:

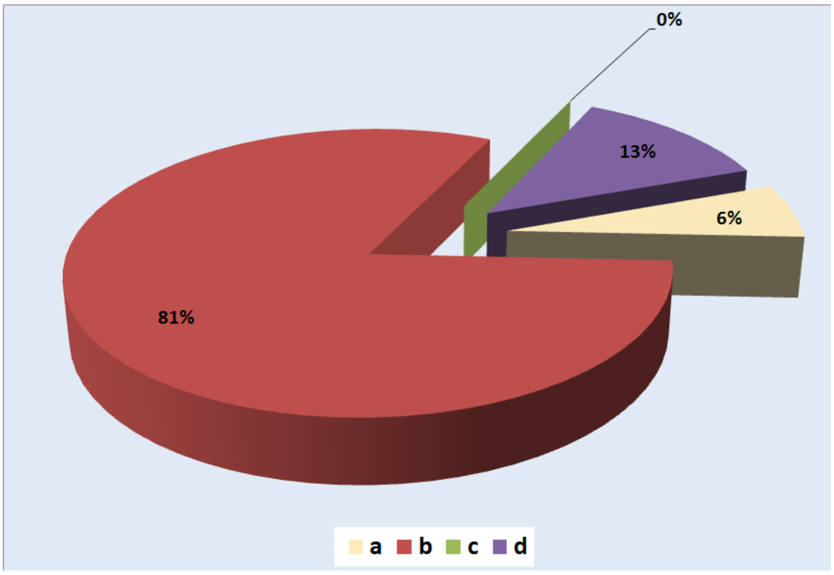
“Функција $f(x)=\frac{x^2-16}{x+4}$

a. Има вертикалну асимптоту x = 4

b. има вертикалну асимптоту x = –4

c. има две вертикалне асимптоте x = ±4

d. нема вертикалне асимптоте”



Графикон 4.2. Питање 6. дијагностичког теста

Дистрактор *b.* је толико привлачан, да су запањујућих 81% студената изабрали овај одговор. То значи да је убедљива већина студената на основу виђених рационалних функција

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

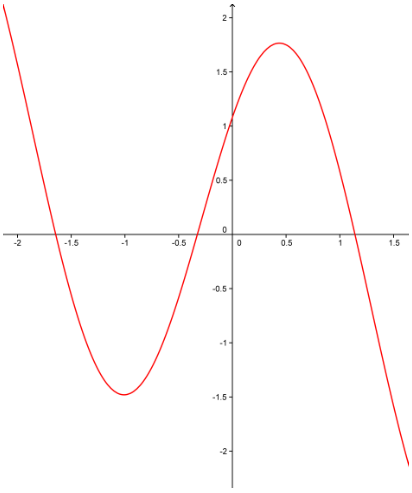
извукла закључак да ако је x_0 број такав да $Q(x_0) = 0$, онда функција $f(x)$ има вертикалну асимптоту $x = x_0$. То је класичан пример формалног знања. Како је већина студената положила испит предмета Математика 1, решавајући комплексније задатке, укључујући и задатке о граничним вредностима, основано верујем да би већина њих тачно израчунала граничну вредност:

$$\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4} = -8$$

Зашто је онда само 13% студената тачно одговорило на питање 6? Сматрам да је разлог томе што уместо да суштински схвате да постојање вертикалне асимптоте следи од бесконачног (левог или десног) лимеса у датој тачки, они изводе такав закључак на основу искуства која су стекли учећи особине реалних функција.

Питање 14. је формулисано на следећи начин:

“Нека је функција f(x) дата њеним графиком



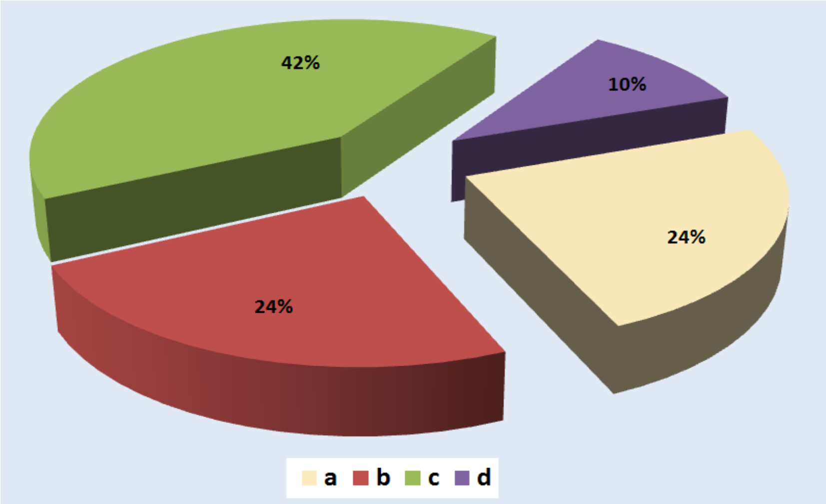
Одредити које тврђење је истинито:

a. не постоји $c \in [-2, 1]$ *тако да* $f'(c) = 0$;

b. постоји јединствени $c \in [-2, 1]$ *тако да* $f'(c) = 0$;

c. постоје тачно два броја $c \in [-2, 1]$ *тако да* $f'(c) = 0$;

d. постоје више него два броја $c \in [-2, 1]$ *тако да* $f'(c) = 0$;”

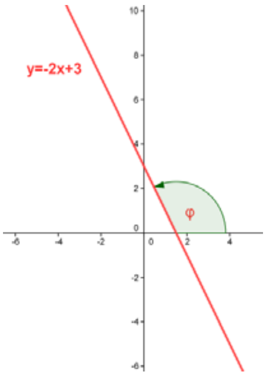


Графикон 4.3. Питање 14. дијагностичког теста

Студенти су нешто успешније решили ово питање, т.ј. 42% од њих је тачно одговорило. Ипак је више од 50% од њих било привучено дистракторима, што говори да више од пола студената нису у стању да повежу неколико информација и изведу добар закључак. Пошто је дата визуелизација ове математичке ситуације, а питање се односи на вредности инпута за које је извод функције 0, они су требали повезати знање о геометриској интерпретацији извода реалне функције једне променљиве и тражити тачке графика дате функције у којима би тангента била хоризонтална.

Да већина студената имају проблема са суштинским разумевањем геометриске интерпретације извода у тачки и повезивањем знања различитих делова истог предмета, говори анализа питања 17. Оно је формулисано на следећи начин:

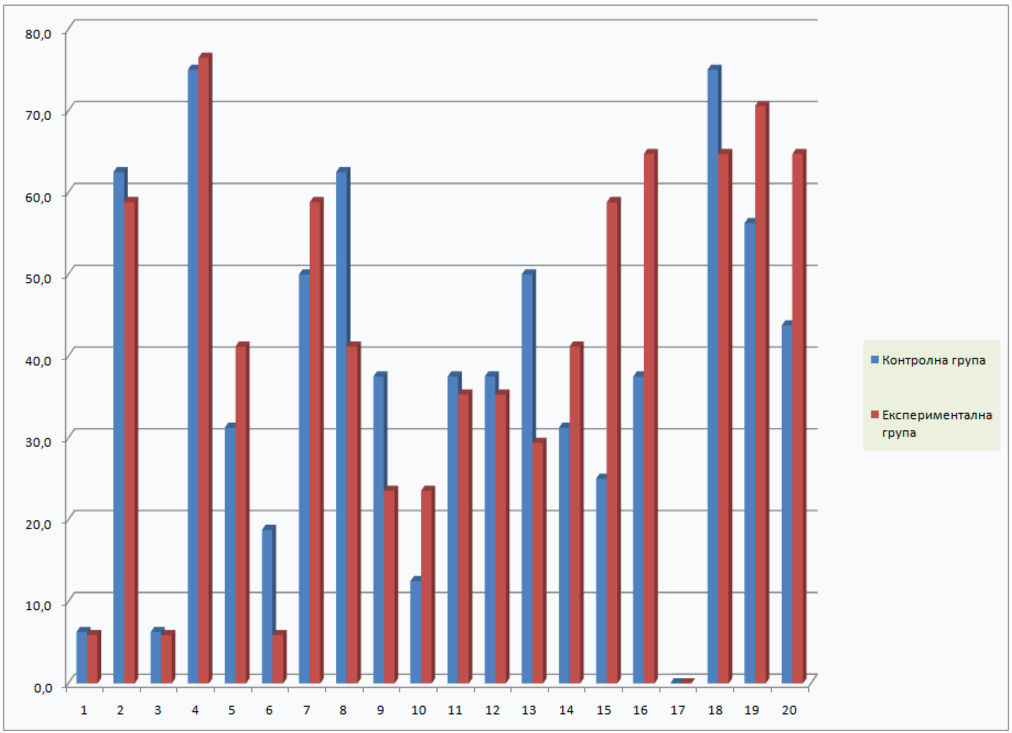
“*Видети слику и допунити*:



tanφ = ___________.

Ниједан испитаник није тачно одговорио, дакле није унео –2 на одговарајућем месту, док две трећине студената уопште није одговорило на ово питање. Ово показује да већина од њих, вероватно није разумела питање, или није схватила како треба одговорити. Ипак, драстичан резултат 0% запањајуће говори да готово свим студентима представља велики напор логички повезати коефицијент нагиба праве са тангенсом угла који та права формира са позитивним делом x-осе, што обично очекујемо да повежу са изводом функције у тачки и нагиба тангенте криве у одговарајућој тачки.

Детаљнији преглед резултата обе групе, по питањима може се видети на следећем графикону.



Графикон 4.4. Просечни резултат обе групе на дијагностичком тесту, по питањима у процентима

Следи преглед одговора који су студенти дали на питања типа вишеструки избор.

Питање број		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18	19
Обе групе	**a**	12	13	6	5	2	2	18	7	8	2	4	7	8	7	7	6	23	5
	b	2	20	6	2	3	26	8	6	10	4	12	12	9	7	8	17	3	1
	c	15	0	18	25	12	0	5	1	3	6	13	2	13	12	14	8	5	21
	d	2	0	2	1	13	4	2	17	5	17	2	10	2	3	3	1	0	5
	Σ	31	33	32	33	30	32	33	31	26	29	31	31	32	29	32	32	31	32
	/	2	0	1	0	3	1	0	2	7	4	2	2	1	4	1	1	2	1
Контролна група	**a**	5	6	3	2	1	2	8	3	4	1	1	4	3	6	6	2	12	4
	b	1	10	4	2	0	11	4	2	6	2	6	6	5	4	5	6	2	0
	c	9	0	8	12	5	0	3	1	0	2	6	1	8	5	4	7	1	9
	d	1	0	1	0	8	3	1	10	2	9	2	5	0	0	1	1	0	3
	Σ	16	16	16	16	14	16	16	16	12	14	15	16	16	15	16	16	15	16
	/	0	0	0	0	2	0	0	0	4	2	1	0	0	1	0	0	1	0
Експериментална група	**a**	7	7	3	3	1	0	10	4	4	1	3	3	5	1	1	4	11	1
	b	1	10	2	0	3	15	4	4	4	2	6	6	4	3	3	11	1	1
	c	6	0	10	13	7	0	2	0	3	4	7	1	5	7	10	1	4	12
	d	1	0	1	1	5	1	1	7	3	8	0	5	2	3	2	0	0	2
	Σ	15	17	16	17	16	16	17	15	14	15	16	15	16	14	16	16	16	16
	/	2	0	1	0	1	1	0	2	3	2	1	2	1	3	1	1	1	1

Табела 4.5. Дијагностички тест – детаљни преглед одговора на питања вишеструког избора

На крају овог одељка, може се извести генерални закључак да предзнање студената обе групе, без обзира да ли су положили Математику 1 или нису, које се односи на оно што сам определио као есенцијално знање о функцијама једне променљиве, није на завидном нивоу. Већина њих има проблеме са суштинским схватањима кључних појмова везаних за функције.

Други закључак је да су експериментална и контролна група што се тиче критеријума предзнања добро балансиране , т.ј. не постоји значајна разлика међу резултатима које су постигли студенти обе групе.

4.3. Интегрисање едукативних материјала у настави

Резултати дијагностичког тестирања су ме навели да приликом извођења наставе са свим студентима, обратим пажњу на низак ниво предзнања. Било је неопходно, да пре него што уопште покушам аналогијом обрадити неки математички појам, да се вратим корак назад и виртуелно обрадим најпре базу аналогије, јер, не може се очекивати да аналогија ради када је база аналогије нејасна, мутна.

На пример, приликом обрађивања садржаја квадратне површине, пре преласка на изучавање елипсоида детаљно сам разрађивао елипсу. У ту сврху сам користио аплете израђене слободним софтвером отвореног кода, GeoGebra[73], намењеног за учење динамичких математичких концепата

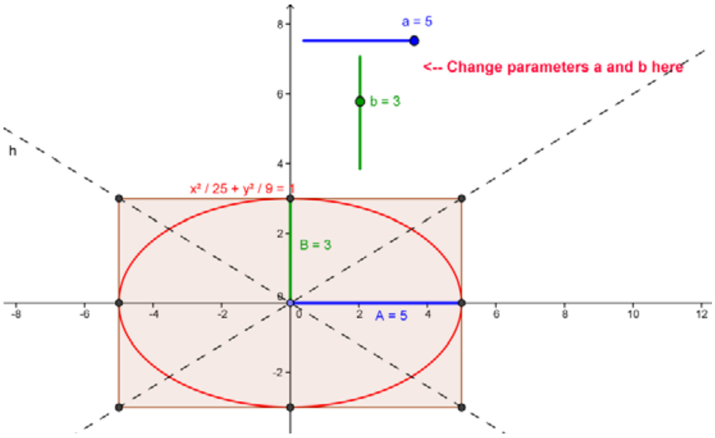
---

[73] [5]

који се односе на дводимензионалну математику. На тај начин, студенти су имали прилику да виде како се мења облик елипсе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

мењањем вредности параметара *a* и *b*.



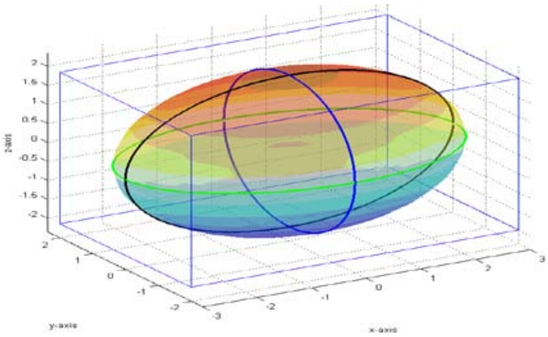
Сл. 4.1. GeoGebra аплет: промене облика елипсе настале мењањем вредности параметара

Тек након тога аналогијом сам објашњавао на који начин се мења облик елипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

мењањем вредности параметара *a*, *b* и *c*.

У ту сврху сам користио визуелизационе алатке израђене у Matlab-у.



Сл. 4.2. Промене облика елипсоида насталих мењањем вредности параметара

Сличним сам прилазом приступио превазиђењу свих уочених проблема са предзнањем, поготово са оним којим сам сматрао крајње неопходним да би се постигли постављени наставни циљеви предемета Математика 2.

Реализација прве фаза ове етапе - *израда едукативних материјала*, практично је почела још у етапи 1 - предистраживању и практично је трајала све до завршетка самог истраживања. Неке од едукативних материјала паралелно сам израђивао са дизајнирањем плана истраживања, експериментирајући са својим могућностима да у кратком времену израдим квалитетне едукативне материјале, као и могућностима Matlab-а за креирање функција и програма који могу бити искоришћени у дидактичке сврхе. Затим, за време извођења Matlab семинара такође сам продуцирао неколико програма које сам демонстрирао полазницима семинара, притом анализирајући које су команде најнеопходније за израду једноставних програма којим се могу ефикасније учити математички концепти.

Највећи део едукативних материјала је израђено у периоду 15 март - 15 мај 2010, дакле паралелно са извођењем наставе. То значи да сам продуцирајући ове материјале истовремено тражио начина да их интегришем у процесу наставе. Објављивао сам продукте и чинио их доступним свим студентима као део мултимедијске презентације које сам користио током наставе, а саме сам кодове на крају поделио и анализирао само са студентима експерименталне групе.

Детаљни опис мултимедијских алатки - статичких (графике) и динамичких (анимације) мултимедијских алатки, дат је у делу 3.2. Детаљно су елаборирани циљ, начин израде, могућности за визуелизацију, као и генерални прилаз - на кој начин су ови едукативни материјали интегрисани у настави.

Фаза извођења наставе је **централна фаза** овог истраживања и најдуже је трајала. Оно што се реално догађало у учионицама заправо је **генератор промена** који очекујемо. Иновација у настави се састоји у томе што је класична настава извођена таблом_и_кредом обогаћена применом информацијско-комуникацијске технонолије, конкретно интегрисањем израђених мултимедијских алатки у процесу наставе.

Фокусирао сам се на садржаје који су директно повезани са знањем које сам дефинисао као есенцијално знање о функцијама више променљивих и тродимензионалној аналитичкој геометрији у одељку 3.1.3. На тај начин сам дошао до избора од 6 блока часова, састављеним од по 3 наставна часа на којима сам интензивно примењивао иновирану наставу. Током пролећног семестра имао сам 15 блокова од по 3 наставна часа. То значи да сам овим избором од 6 блока, организовао 18 наставних часова иновираним прилазом и то покрива 40% од целокупног наставног времена којим сам располагао током семестра.

За сваки од ових 6 блокова изабрао сам по једну одговарајућу тему коју сам разрадио иновираним приступом:

1. Праве и равни у простору;
2. Цилиндри и квадратне површине;
3. Векторске функције;
4. Функције више променљивих;
5. Тангентне равни;
6. Двоструки интеграли;

Суштинска одлика иновираног приступа је та што сам за сваку од ових тема израдио *дидактички систем математичких задатака*, тако да је за сваки задатак припремљена одговарајућа визуелизација - графика или анимација израђена у Matlab-у. То значи да уместо уопштених генералних цртежа који у класичној настави веома грубо представљају уопштену ситуацију, овде су графика или анимација специјално израђени да прикажу конкретну математичку ситуацију на коју се односи одговарајући задатак.

Дидактички систем блока 1. Праве и равни у простору је састављен од 31 задатка, од којих 22 су разрађена користећи припремљене едукативне материјале, а 9 су задаци за самостални рад. За блок 2. Цилиндри и квадратне површине, припремљена су 22 одговарајућих програма у Matlabu намењених конкретним математичким ситуацијама 22 задатака од укупно 32. Остала 10 су квиз - питања.

Блокови 3-6 се односе на садржаје у којима је наглашена динамичка природа проблема. Овде је због тога нарочито дошла до изражаја примена динамичке мултимедијске алатке. Векторске функције су разрађене интензивно користећи 20 анимација и графика израђених у Matlab-у. Дидактички систем задатака који се односи на блок 4. Функција више променљивих састоји се од 30 задатака, од којих су 18 од њих разрађени графикама и анимацијама, за неке од задатака са по 2 приступа - дводимензионални (који се односи на домен функције) и тродимензионални који се односи на графике функције 2 независне променљиве. Осталих 12 задатака односе се на технике рачунања граничне вредности оваквих функција.

Тангентне равни опет су вешто разрађене користећи мноштво анимација, повезујући парцијалне изводе функције две променљивих са реалном тродимензионалном представом. Овај дидактички систем се састоји од 6 задатака. За све њих припремљене су одговарајуће анимације и графике. Задњи блок 6. Двоструки интеграли, разрађен је преко дидактичког система од 19 задатака. Одговарајући едукативни материјали израђени у Matlab-у односе се на дводимензионалну визуелизацију области интегрирања, како и на тродимензионалну визуелизацију интерпретације двоструког интеграла као запремнину, и визуелизацију Риманове суме функције две променљивих.

Дакле, 40% часова је реализовано овим иновираним приступом. У ту сам сврху употребио 138 математичких задатака системски организираних и систематизираних у 6 целине. За 107 од ових задатака употребио сам мултимедијске алатке - графике и анимације израђене у Maylab-у. Ове алатке су интегрисане у наставном процесу, тако да је за сваку конкретну ситуацију приказана одговарајућа визуелизација, али и кроз пажљиво одабрана питања, развијала се дискусија шта би се догодило кад би се променили неки од параметара, тако да је на лицу места коришћен Matlab код да би се приказале настале промене. На овај начин остваривана је интерактивност између студената и мултимедијске алатке као едукативни материјали. У свакој ситуацији кад је то било могуће, динамичка природа одређеног проблема или математичке ситуације је визуелизирана одговарајућом анимацијом.

Овакав је иновативни приступ примењен у настави коју су следили сви студенти. Дакле и студенти експерименталне и студенти контролне групе били су у ситуацији стећи суштинска знања о функцијама више променљивих и о тродимензионалној аналитичкој геометрији на начин драматично различитим од наставе организоване у претходном семестру. То значи да се очекује глобално побољшање квалитета знања свих студената, обе групе. Овакво очекивање је на крају истраживања проверено ре-тестирањем и компаративном анализом резултата пре почетка иновације и након спроведене иновиране наставе.

4.4. Пројектна настава

Суштински различита ситуација у којој су стављени чланови екпериментални групе је њихово партиципирање у специфичном облику пројектне наставе. Ови студенти су реализовали део предмета Математика 2 тако да су требали пратити догађаје на систему за управљање е-учењем и помоћу ових едукативних материјала израдити интерактивне Matlab програме као одговор на постављене математичке задатке из одговарајућих области.

Најснажније и најделотворније технике које студента могу довести до виших когнитивних нивоа темеље се на његовом подстицању да креира, односно треба га ставити у ситуацију да нешто сам уради. Због тога је циљ пројектне наставе постављен тако да од студента тражи да креира интерактивне програме у Matlab-у којим се визуелизира одређена математичка ситуација. Опис пројектне наставе дат је у Додатку В. Примери дидактичких система од по 3 задатка које је студент требао решити дат је у Додатку Г. и детаљније је описан у делу 3.5.

Само формирање експерименталне групе било је на основу добровољног пријављивања студената да реализују овакав тип пројектне наставе, слажући се при том да њихов свеукупни рад и резултати буду пажљиво праћени и коришћени у истраживачке сврхе. Ово значи да је почетак пројектне наставе био још у фази предистраживања.

Пројектне активности фактички су започеле када сам завршио сетирање система за управљање е-учењем. Крајем марта 2010, платформа Dokeos постављена је на сервер, креиран је електронски курс Visualized Math, сетирани су параметри курса и у систем су унети чланови експерименталне групе. Паралелно сам израдио едукативне материјале прве теме - "Површине", поставио их на сервер и организовао прву путању учења. Након тога су испуњени предуслови да се студенти укључе у пројектне активности, па сам 9-тог априла објавио прво саопштење преко система за управљање е-учењем, при чему је систем аутоматски слао одговарајућу поруку свим е-курсистима, дакле члановима експерименталне групе e-mail-ом.

Првим саопштењем позвао сам студенте да проучавају едукативне материјале прве путање учења и да очекују свој први задатак. Порука је била веома опширна и садржила је основна упутства о коришћењу доступних алатки на систему, наглашавајући да је кључна алатка путања учења.

Друго саопштење студенти су добили 2 дана касније. Њиме сам их позвао да провере свој dropbox, јер сам користећи управо ту алатку послао задатак 1, сваком од њих - члановима експерименталне групе. Ове две етапе су се циклично понављале још два пута. 1-ог сам маја објавио постављање едукативних материјала друге теме "Криве", а већ следећег дана поделио сам и други задатак. 25-ог маја објавио сам постављање едукативних материјала задње теме "Парцијални изводи и двоструки интеграли", а следећег сам дана поделио трећи задатак. На тај је начин, 26-ог маја 2010, сваки студент експерименталне групе имао на располагању све едукативне материјале намењене за пројектну наставу и располагао је сопственим дидактичким системом од 3 математичка задатка, чије решавање се сводило на израду програма у Matlab-у којим ће се на интерактиван начин визуелизирати одговарајући проблем. Да би креирао програм студент је морао проблем математички обрадити, а затим резултате те обраде искоритити креирајући Matlab програм.

На почетку сам имао идеју да и активности студената буду цикличне, очекујући да истовремено раде на решавању задатака. Због тога сам и након објављивања првог задатка објавио саопштење да је крајњи рок за решавање првог задатка 30 април. Сматрао сам да је 20-так дана разуман рок у којем бих након објављивања задатака могао да очекујем повратна решења. Испоставило се да овакав приступ не одговара студентима, након чега сам променио термин и као крајњи рок за све задатке означио 8 јун 2010.

Паралелно са овим етапама, од самог објављивања првог задатка, члановима експерименталне групе сам организовао специјалне термине за консултације. У овим терминима нисам изводио наставу, већ су студенти međусобно размењавали мишљења, док сам их ја само усмеравао како математички да обраде свој проблем и које Matlab-ове алатке да искористе да би постигли крајњи циљ. На овај начин екпериментална група и физички је издвојена од контролне групе, радећи на само 3 задатка, али су ови задаци репрезентативни и може се очекивати да као резултат овог колаборативног учења и креативног процеса стварања готовог производа, студенти експерименталне групе постигну већи квалитет својих есенцијалних знања.

Овакав тип часова за консултације и колаборативног учења организовани су сваког петка од 16 априла до 28 маја. У овом сам периоду стално добијао e-mail поруке којима су студенти тражили помоћ или даља упутства како да реше своје задатке. Свака од ових e-mail порука добијала је повратни одговор у року од 24 сата.

Након објављивања задњег, трећег задатка, користећи алатку dropbox, свим члановима експерименталне групе сам доставио и Matlab кодове које сам користио за визуелизацију оних 107 задатака које смо разрадили у редовној настави. На овај сам начин помагао студентима да се фокусирају на математичку обраду проблема, јер команде које би затим требали употребити и начин организовања Matlab кода лакше су могли увидети након анализе приложеног кода.

Анализа учинка чланова експерименталне групе је мерена према 2 критеријума: активност на порталу - колико (у процентима) је од корака студент посетио и време проведено на платформи - укупно време проведено на порталу. Вредности оба параметра су добијена аутоматски, користећи алатку Report система за управљање е-учењем.

Систем прати сваког курсисту на које кораке је кликнуо и даје извештај у процентима за напредак курсисте у свакој путањи учења засебно, и укупно за цели курс. У табели 4.6. дат је преглед активности студената на порталу. Студенти су просечно погледали 67% постављених корака - едукативних материјала. Све постављене едукативне материјале видело је њих 8, троје је видело више од 60%, четворо између 30 и 60%. Остала тројица уопште нису била активна на порталу. Они нису ни покушали да реше своје задатке, а на тестирању се или нису појавили или су имали искључиво слабе резултате. Може се рећи да од 18 студената експерименталне групе, 15 активно учествовало у пројектним активностима, а њих 11 веома активно.

Други параметар приказан на табели 4.6. је време проведено на платформи. Како је само прикачени видео материјал трајао дуже од 38 минута, а за дубље анализиирање задатака потребно је да студент погледа видео материјале и по неколико пута, и најзад како су осим видео материјала прикачени још и html фајлови као информативни кадрови и репрезентативне статичке вузеализације, сматрам да се озбиљност приступа чланова експерименталне групе према пројекту Visualized Math може еластично видети управо из овог параметра.

Просечно време проведено на платформи дуже је од 121 минута, што је судећи по претходној анализи потребног времена да се схвати поента израђених едукативних материјала заправо и оптимално време. Пола од студената експерименталне групе провело је више од 100 минута на платформи. Тројица су издвојила између 70 и 100 минута, а још се само један студент може ставити у графи између 40 и 70 минута. Пет студената је провело мање од 40 минута проучавајући едукативне материјале.

Оба параметра треба укрштено анализирати, јер сваки од њих сам за себе може довести до погрешних закључака. Наиме, пошто је студент 8 провео 77 минута на платформи може се закључити да је имао довољно времена да по 2 пута погледа све видео материјале, али он је заправо сво време потрошио само за 4,7% од постављеног материјала, док на остале није ни кликнуо, вероватно посвећујући се само одређеним анимацијама које су му биле потребне да реши своје задатке. Студент 10 је посетио 64% од линкова, али судећи по томе да је на све то потрошио 34 минута, може се закључити да је више кликао и бегло пролазио кроз материјал, него што је дубље анализирао шта је циљ постављене визуелизације.

Студент #	Активност на порталу	Време проведено на платформи (у минутима)
1	95,3%	74
2	100,0%	>300
3	100,0%	198
4	100,0%	>300
5	2,3%	2
6	0,0%	1
7	100,0%	127
8	4,3%	77
9	100,0%	178
10	64,0%	34
11	46,3%	29
12	100,0%	>300
13	33,3%	154
14	100,0%	129
15	33,3%	24
16	100,0%	87
17	85,7%	115
18	54,3%	47
Просек	67,7%	>121 минута

Табела 4.6. Анализа учинка студената експерименталне групе

Након истека рока 15 студената је послало своја решења постављених задатака, што је 83% чланова експерименталне групе. Најрелевантнији закључци о утицају овакве форме наставе и примене ИКТ у учењу математике могу се извести анализирајући постигнуте резултате ових студената након завршетка истраживања и њихова есенцијална знања о функцијама више промењљивих и тродимензионалне аналититчке геометрије.

Решење сваког задатка бодовао сам скалом 0-10. На тај начин, постигнути резултат студента у пројектној настави бодиран је максимумом од 30 бодова. Ови постугнути резултати и процентуални износ успешности сваког студента експерименталне групе дат је у следећој табели.

Студент #	Задатак 1	Задатак 2	Задатак 3	Укупно бодова	%
1	10	10	10	30	**100,0%**
2	10	10	10	30	**100,0%**
3	10	4	10	24	**80,0%**
4	10	9	9	28	**93,3%**
5	0	0	0	0	**0,0%**
6	0	0	0	0	**0,0%**
7	10	10	10	30	**100,0%**
8	10	5	2	17	**56,7%**
9	5	10	9	24	**80,0%**
10	8	10	10	28	**93,3%**
11	10	5	10	25	**83,3%**
12	2	10	10	22	**73,3%**
13	10	10	10	30	**100,0%**
14	7	10	5	22	**73,3%**
15	0	0	0	0	**0,0%**
16	7	10	8	25	**83,3%**
17	7	10	7	24	**80,0%**
18	9	10	10	29	**96,7%**
Просек	6,9	7,4	7,2	21,6	**71,9%**

Табела 4.7. Анализа постигнутих резултата пројектне наставе

Просечни резултат 71.9% говори да је пројектна настава реализована релативно успешно, нарочито кад се има у виду да су се тројица студената отказали и уопште нису послали решења својих задатака.

4 студента оцењени су максималним бројем бодова, 8 резултатом већим од 80%, а тројица резултатом између 50 и 80%. Ово је иста група од 15 студената експерименталне групе за које се може рећи да су успешно реализовали пројектну наставу.

Просечни резултат првог задатка који се односи на тему "Површине" је 6.9 (од 10). Код овог задатка, студенти су углавном имали проблема са параметризацијом квадратне површине.

Други задатак се односио на тему "Криве" и просечна оцена је 7.4, а трећи задатак који се односио на тему "Парцијални изводи и двоструки интеграли" оцењен је просечном оценом 7.2.

Тражена интерактивност произведених програма код свих студената сводила се на могућност корисника да унесу вредности улазног параметра и зависно од унесених вредности приказивана је адекватна визуелизација. Да би се добио програм већег ступња интерактивности, требало би да се користи Matlab-ов GUI (Graphics User Interface), што није објашњено студентима, него су саветовани да сами истражују овакве могућности. Због недостатка времена и великог обима обавеза студенти нису успели да произведу програме са већим ступњем интерактивности, тако да ниједан студент није ни добио бонус бодова по тој основи.

Свако решење сваког студента пропраћено са кратким коментарима и бројем бодова сам документирао и овај обиман документ је званични документ UIST-а. Због своје обимности он није укључен у овој дисертацији. Табеле 4.6. и 4.7. могу се сматрати сублиматом овог документа.

Анализом постигнутих резултата пројектне наставе заокружен је део истраживања који се односи на имплементацију специфичних наставних метода у сврху иновирања наставе математике применом ИКТ-а. Успешно реализована пројектна настава добра је основа за прелаз на завршну етапу - мерење суштинских знања студената експерименталне и контролне групе након завршетка пролећног семестра и мерење утицаја примене иновативног приступа у учењу функција више променљивих и тродимензионалне аналитичке геометрије помоћу ИКТ-а.

4.5. Ре-тестирање

Након реализације наставе иновираним приступом и успешне реализације пројектне наставе, могло се спровести мерење насталих промена у знања студената, како би се могао извести закључак о утицају примене ИКТ на знање студената везаних за функције.

Одговор на прво питање - "Шта да се проверава?" детерминисан је најмање са три аспекта. Прво, са аспекта есенцијалних знања које сам дефинисао у одељку 3.1.3. Затим, са аспекта примењене аналогије приликом изучавања математичких концепата о функцијама више реалних променљивих, векторске функције једне реалне променљиве и тродимензионалне аналитичке геометрије и да би се могла спровести квалитетнија компаративна анализа са дијагностичким тестирањем које се односило на базу аналогије - функције једне реалне променљиве и дводимензионалну аналитичку геометрију. Трећи аспект којим се одређује предмет завршног тестирања је стешњен избор садржаја на који се односио дидактички систем задатака пројектне наставе, организован кроз три теме:

1. Површине;
2. Криве;
3. Парцијални изводи и двоструки интеграли;

Одређујући циљ и предмет тестирања, прешао сам дизајнирању инструмента којим је било мерено знање након спроведених активности истаживања. Овај инструмент сам назвао ре-тестом, јер је у многоме слично дизајниран као што је био дизајниран дијагностички тест и сасвим је адаптиран циљу да се измери промена студентових есенцијалних знања, која су настала током истраживања.

Због тога сам одлучио да ре-тест буде дизајниран тако да ће мерити знање студената које се односи на следећих 5 категорија:

1р. Гранична вредност функције две реалних променљивих у датој тачки и непрекидност функција две реалних променљивих;

2р. Домен, ранг и график функције две реалних променљивих;

3р. Диференцијабилност, тангента криве и тангентна раван 3D површине ;

4р. Двоструки интеграл, запремнина;

5р. Тродимензионална аналитичка геометрија - праве, равни и површине другог реда.

Након одређивања категорија, приступио сам расподели индикатора по категоријама. Инструмент "Ре-тест" дат је интегрално онако како је спроведен у Додатку Б. У следећој табели дат је преглед питања по категоријама.

Категорија	Број питања из одговарајуће категорије	Редни број питања
1р	4	1, 2, 4, 8
2р	2	5, 6
1р и 2р	2	3, 7
3р	4	9, 10, 11, 12
4р	2	13, 14
5р	4	15, 16, 17, 18

Табела 4.8. Ре-тест - преглед питања по припадности одређеној категорији

Група од 4 питања односи се на категорију 1р. Њен циљ је проверити колико студенти разумеју концепт граничне вредности у тачки (x_0,y_0), затим колико разумеју околину тачке дводимензионалног домена и најзад да ли поседују суштинско знање о значењу граничне вредности у тачки (x_0, y_0), повезујући га са понашањем функције у одговарујућој околини, њеног графика и концепта непрекидности. Питања се односе на "по деловима дефинисане" функције, тако да је важно да студент анализира како је функција дефинисана у самој тачки дуж неке криве (праве) или уопште у њеној околини.

Категорија 2р покривена је са 2 питања - питање 5 којим се проверава могућност да студент интерпретира домен функције 2 променљивих као подскуп координатне ху-равни и питање 6, којим се проверава умеће студента да препозна график функције две променљивих, повезујући своја знања о квадратним површинама, о графику функције две променљивих и правећи аналогије са сличним дводимензионалним концептима.

Пошто је концепт графика функције јако повезан са концептом непрекидности и појма граничне вредности функције, састављена су 2 питања које није могуће сместити у само једној категорији. Питања 3 и 7 односе се на обе категорије 1р и 2р. Њиме се проверава умеће студената да визуелишу график функције две реалних променљивих задате по деловима, повезујући знање о њеној граничној вредности у тачки или дуж праве.

Група од 4 питања односи се на категорију 3р. Питањима 9 и 10 проверавају се знања студената о векторским функцијама. Питањима 11 и 12 од студената се тражи да суштински разумеју парцијалне изводе и да њиховим рачунањем одреде тангентну раван функције две променљиве у датој тачки (питање 11), односно нормалу имплицитно задате површине у датој тачки (питање 12).

Како је највише пажње код вишеструких интеграла посвећено одређивању области интеграције двоструког интеграла и интерпретацији двоструког интеграла као запремнину, састављена је група од 2 питања усмерена проверавању управо ових наставних циљева и односи се на категорију 4р.

Категорија 5р покривена је групом од 4 питања којима се проверава реализација наставног циља - рутинско препознавање квадратне површине у 3D простору, као и умеће студената да тумаче параметре квадратне једначине 3 променљиве и њихов утицај на облик квадратне површине.

Инструмент "Ре-тест" састављен на овај начин се састоји од 18 питања, од којих су сва осим једног које је типа повезивања, питања вишеструког избора. За 12 питања су понуђена по четири, за 2 по три одговора и по 1 питање са понуђених 1, 6 и 7 одговора. Предвиђено време за решавање је 45 минута.

Ре-тестирање је спроведено 10-ог јуна 2010, као део завршног испита предмета Математика 2. Укупно 33 студента обе групе решавала су "ре-тест" и постигли су **просечни резултат 58,8%.**

17 студената експерименталне групе решавали су "ре-тест". Један студент ове групе је био одсутан. **Просечни резултат експерименталне групе је 60,3%**.

16 студената контролне групе решавали су "ре-тест". Двојица чланова контролне групе су били отсутни. **Просечни резултат контролне групе је 57,2%**.

Главни циљ ре-тестирања је остварен тиме што је сакупљено довољно података за израду квалитетне компаративне анализе суштинских знања пре и након истраживања. Од укупно 36 студената обе групе, по 3 су била отсутни на дијагностичком тесту и на ре-тесту, тако да ће као основа компарације послужити резултати 30 студената.

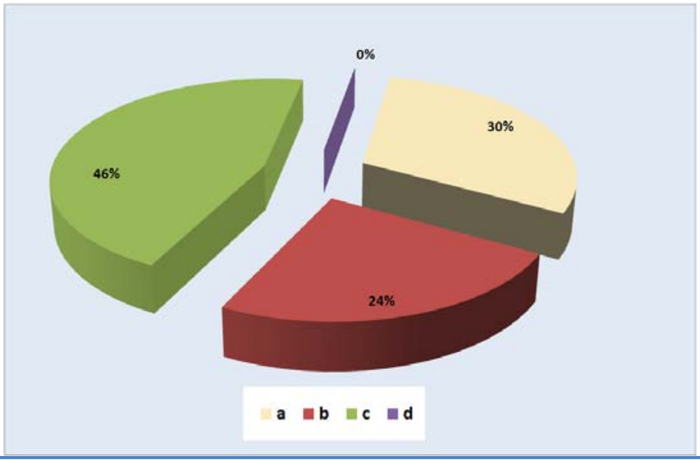
Аналогија између питања са дијагностичког теста и ре-теста може се видети анализом питања аналогних на питања елаборираних у делу 4.2.

Питање 1. формулисано је на следећи начин:

"*Нека* $f(x,y)=\begin{cases} x+y, & (x,y)\neq(3,4) \\ 5, & (x,y)=(3,4) \end{cases}$. *Тада* $\lim\limits_{(x,y)\to(3,4)} f(x,y)=$

a. 5 *b. 7* *c. не постоји* *d. ниједно од претходних*".

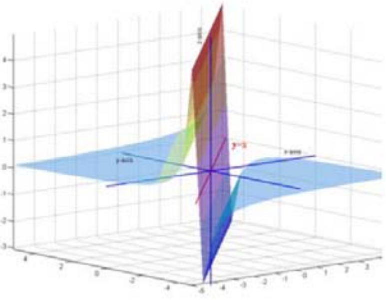
И поред свега, опет је дистрактор *c.* "не постоји" исувише привлачан. Овог пута 24% је изабрало тачан одговор што је много боље од 7% код дијагностичког теста. Ипак, за одговор *c.* су се одлучили готово идентичних 46% (овај проценат је био 48% на дијагностичком тесту).



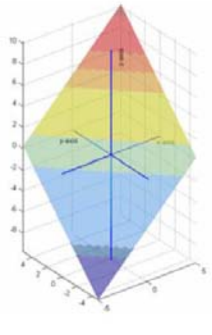
Графикон 4.5. Питање 1. ре-теста

Аналогија питања 6. из дијагностичког теста, је питање 3 из ре-теста. Ово је питање формулисано на следећи начин:

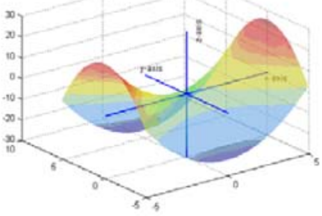
"*Нека је* $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}, & x\neq y \\ x+y, & x=y \end{cases}$. *На коју је од приложених слика приказан график функције f(x,y)?* "



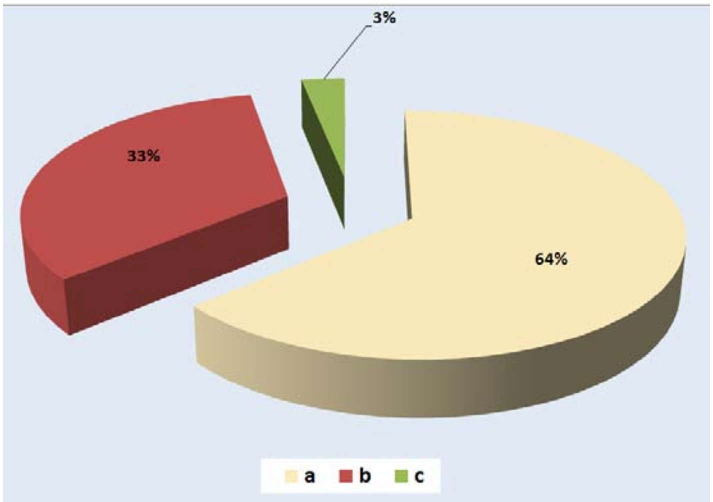
a.



b.



c.



Графикон 4.6. Питање 3. ре-теста

Опет се може приметити извесно побољшање суштинског схватања граничне вредности и њеног геометријског значења. Уместо 13%, сада 33% је изабрало тачан одговор, али је запањујуће да и поред свега, још значајна већина од 64% је привучена дистрактором *a.* што показује да студенти још увек имају проблеме при тумачењу значења постојања граничне вредности и геометријског тумачења егзистенције граничне врендости и непрекидности функције, анализирајући у овом случају шта се догађа са функцијом дуж праве *x* = *y*. Наиме, запањујућих 85% тачно је одговорило на питање 4. Ово значи да они умеју да израчунају

$$\lim_{(x,y)\to(3,3)} f(x,y) = 6,$$

али нису у стању да то и генералишу за све тачке (*x*, *y*) за које *x* = *y*, нити да изведу закључак да за све уређене парове $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, заправо

$$f(x,y) = x + y,$$

чиме би закључили да је график ове управо линеарне функције, раван

$$z = x + y.$$

Као што се могло видети од просечних резултата, оваква питања на којима су студенти показали присутност великих проблема са суштинским знањима о функцијама, као што су анализирана питања 1. и 3., у мањем су броју у поређењу са резултатима дијагностичког тестирања.

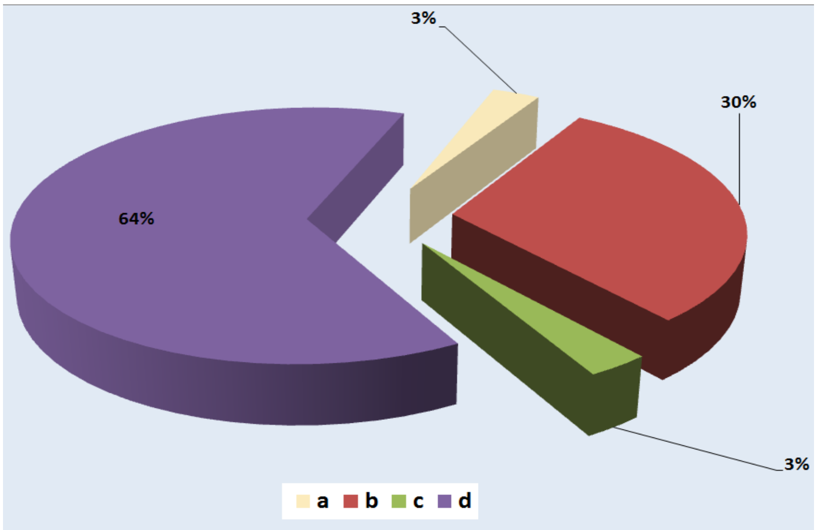
Питање 11. Ре-теста односи се на тангентне равни применом парцијалних извода и аналогно је питању 14. са дијагностичког теста. Питање 11. је формулисано на следећи начин:

“Тангентна раван површине $z = x^2 + y^2$ *у тачки* (1, 1, 5) *нормална је вектору:*

a. <–1, –1, –5> *b.* <8, 2, 0> *c.* <4, 1, –1> *d.* <8, 2, –1>”

У овом случају студенти су показали дубоко разумевање градиент вектора примењујући парцијалне изводе и повезујући знање о примени парцијалних извода са знањем о једначини равни.

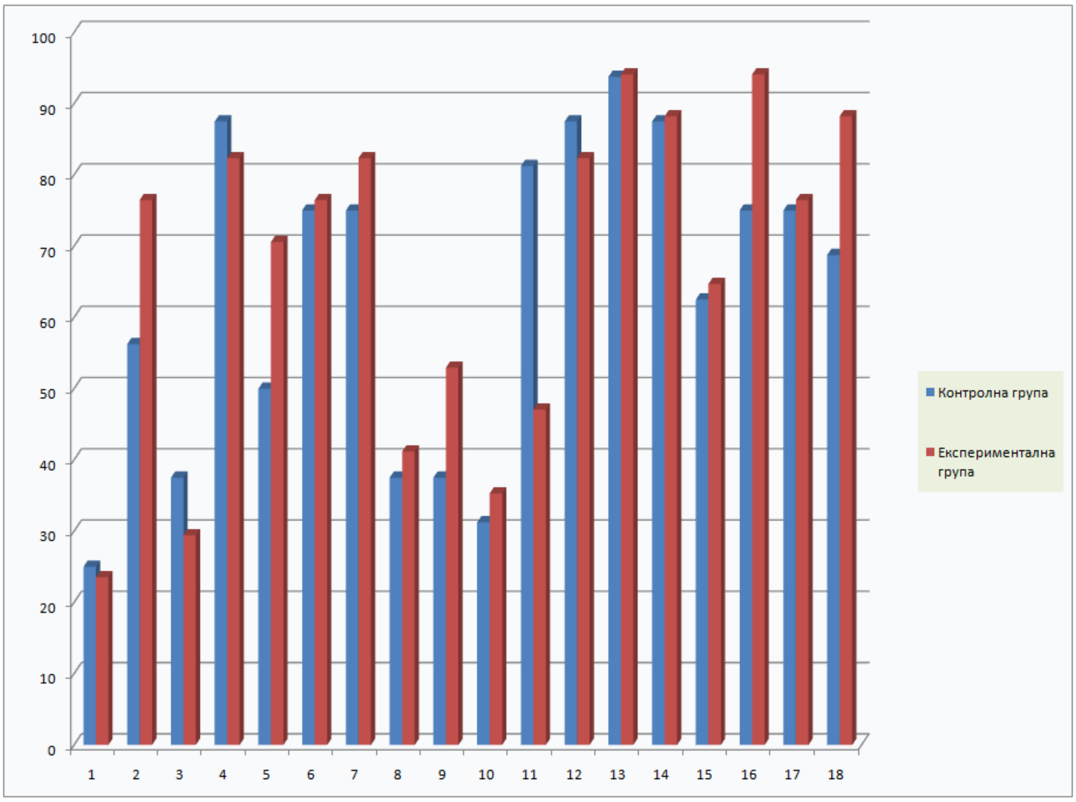
Дистрактор *b.* се показао привлачним, јер је чак 30% студената изабрало овај погрешан одговор. Ипак, 64% студената тачно су одговорили на ово питање што је знатно боље од 42% тачних одговора код аналогног питања 14. из дијагностичког теста.



Графикон 4.7. Питање 11. ре-теста

Највећи напредак се може уочити код питања категорије 5р. Просечни резултат тестираних студената на задњих 4 питања је чак 76%. Овде се могу приметити и највеће разлике међу студентима експерименталне и студената контролне групе, највероватније због тога што су ови садржаји били обрађивани први током пројектне наставе, а имало је и највише видео материјала који су им у почетку вероватно били интересантнији, након чега је интерес опадао.

Преглед успешности по питањима, посебно за обе групе, може се видети на следећем графикону.



Графикон 4.8. Просечни резултат обе групе на ре-тесту, по питањима у процентима

Следи преглед одговора студената на питања типа вишеструког избора

Питање број		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Обе групе	a	10	11	21	0	2	25	3	1	0	11	1	28	0	1	21	0	1
	b	8	22	11	0	20	7	4	19	15	15	10	2	31	0	1	0	0
	c	15	/	1	28	11	1	26	13	15	1	1	1	2	29	5	3	1
	d	0	/	/	5	/	0	0	0	3	5	21	2	0	2	6	0	25
	e	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	2	4
	f	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	28	1
	g	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	1
Контролна група	a	6	7	9	0	1	12	2	0	0	5	1	14	0	1	10	0	1
	b	4	9	6	0	8	4	2	10	8	10	2	1	15	0	1	0	0
	c	6	/	1	14	7	0	12	6	6	0	0	0	1	14	3	2	1
	d	0	/	/	2	/	0	0	0	2	1	13	1	0	1	2	0	12
	e	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	2	1
	f	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	12	1
	g	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	0
Експериментална група	a	4	4	12	0	1	13	1	1	0	6	0	14	0	0	11	0	0
	b	4	13	5	0	12	3	2	9	7	5	8	1	16	0	0	0	0
	c	9	/	0	14	4	1	14	7	9	1	1	1	1	15	2	1	0
	d	0	/	/	3	/	0	0	0	1	4	8	1	0	1	4	0	13
	e	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	0	3
	f	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	16	0
	g	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	1

Табела 4.9. Ре-тест – детаљни преглед одговора на питања вишеструког избора

Овим је завршен опис тока експерименталног дела истраживања, или прецизније, првих 5 фаза реализације овог истраживања.

У следећем поглављу детаљније ће бити елаборирана обрада статистичких података сакупљених током истраживања, постављање и тестирање статистичких хипотеза, што представља и задњу фазу експерименталног дела истраживања, **фаза 6.**

5. Глава

Опис и обрада статистичких података који су произашли из експерименталног дела. Статистичке хипотезе - постављање и тестирање

Будући да је истраживање дизајнирано тако што је део едукативних материјала био интегрисан у самој настави са свим студентима, анализа утицаја примене ИКТ-а на квалитет знања везаних за функције може се извести на два нивоа:

- Измерити како је примена ИКТ-а утицала на чланове обе групе и компарирати резултате након завршетка курса Математика 2, са резултатима пре имплементације иновиране наставе. Конкретније, биће упоређени резултати добијени инструментом “Дијагностички тест” са резултатима добијеним инструментом “Ре-тест”, тиме фокусирајући се на изабране садржаје који се могу сматрати есенцијалним знањима везаних за функције.
- Упоредити постигнуте резултате експерименталне групе са контролном групом, чиме ће се измерити утицај израде Matlab програма за визуелизацију тродимензионалних математичких ситуација на квалитет знања везаних за функције.

5.1. Опис узорка

Популација на коју се односи ово истраживање су студенти техничких наука, конкретније студенти прве године информационих наука и технологија. Овим студентима математика није главни предмет, али је један од најважнијих фундамената њихових знања, неопходних за професионални и академиски развој. Са друге стране, информационе технологије и техника уопште, веома је блиска њиховим интересима, тако да је примена информационе технологије у процесу учења такође очекивано прихватљива.

Изводећи наставу предмета Математика 1 и Математика 2, имао сам могућност непосредно да радим са 75 студената Универзитета информационих наука и техонологија "Св. Апостол Павле" у Охриду, у Македонији. Респектирајући околности, како је описано у одељку 4.1.4., у истраживање је укључено 36 студената који су начелно подељени у 2 групе - експерименталну и контролну групу, обе са по 18 студената.

Дакле, обим узорка популације је 36. Студенти УИСТ-а су, као и студенти осталих техничких универзитета у Македонији, углавном дошли из гимназија и стручних техничких школа. Према њиховим резултатима при упису на Универзитет може се закључити да је њихов састав што се тиче предзнања и афинитета врло сличан саставу студената осталих техничких универзитета. Иако су 36 студената укључена у истраживање, број студената који су били присутни на оба тестирања је 30. Због тога је у анализи података обим узорка најчешће 30.

Подаци који су сакупљени односе се на мере знања које су студенти имали пре почетка иновиране наставе. Ова предзнања су мерена инструментом "Дијагностички тест". Затим, инструментом "Ре-тест" су сакупљени подаци који се односе на њихова знања након извођења иновиране наставе. О студентима експерименталне групе, сакупљено је и мноштво података који се односе на пројектну наставу. Од њих, као релевантни могу се издвојити подаци о времену које су провели на порталу за е-учења, као и њихови резултати које су постигли решавајући пројектне задатке.

Неки аспекти и статистички подаци већ су изложени у претходна 2 поглавља. Подаци који су посебно релевантни за тестирање статистичких хипотеза које се односе на главни циљ истраживања, у овом одељку биће у целости приказани табелама и графиконима.

Због придржавање принципа приватности података, студенти ће бити означени редним бројевима. Припадност одређеној групи је означена са (е) за експерименталну групу и са (k) за контролну групу студената. У следећој табели је сажет скуп података који ће углавном бити даље коришћени.

Студент #	Група	Дијагностички тест	Ре-тест	Разлика	Matlab пројектна настава		Време (број минута) проведено на платформи
1	e	/	66,7%	/	25	83,3%	29
2	e	50,0%	55,6%	5,6%	28	93,3%	34
3	e	35,0%	66,7%	31,7%	29	96,7%	47
4	e	25,0%	50,0%	25,0%	22	73,3%	300
5	e	50,0%	66,7%	16,7%	30	100,0%	154
6	e	55,0%	72,2%	17,2%	30	100,0%	300
7	e	20,0%	61,1%	41,1%	22	73,3%	129
8	e	55,0%	94,4%	39,4%	30	100,0%	127
9	e	25,0%	61,1%	36,1%	28	93,3%	300
10	e	30,0%	66,7%	36,7%	24	80,0%	198
11	e	60,0%	72,2%	12,2%	25	83,3%	87
12	e	35,0%	27,8%	-7,2%	0	0,0%	24
13	e	60,0%	77,8%	17,8%	24	80,0%	178
14	e	50,0%	72,2%	22,2%	30	100,0%	74
15	e	45,0%	72,2%	27,2%	17	56,7%	77
16	e	50,0%	77,8%	27,8%	0	0,0%	1
17	e	15,0%	/	/	0	0,0%	2
18	e	25,0%	77,8%	52,8%	24	80,0%	115
19	k	25,0%	38,9%	13,9%			
20	k	35,0%	44,4%	9,4%			
21	k	30,0%	38,9%	8,9%			
22	k	55,0%	77,8%	22,8%			
23	k	/	66,7%	/			
24	k	45,0%	77,8%	32,8%			
25	k	/	77,8%	/			
26	k	30,0%	50,0%	20,0%			
27	k	30,0%	61,1%	31,1%			
28	k	10,0%	72,2%	62,2%			
29	k	70,0%	83,3%	13,3%			
30	k	60,0%	72,2%	12,2%			
31	k	35,0%	/	/			
32	k	65,0%	72,2%	7,2%			
33	k	35,0%	61,1%	26,1%			
34	k	15,0%	/	/			
35	k	40,0%	61,1%	21,1%			
36	k	30,0%	61,1%	31,1%			

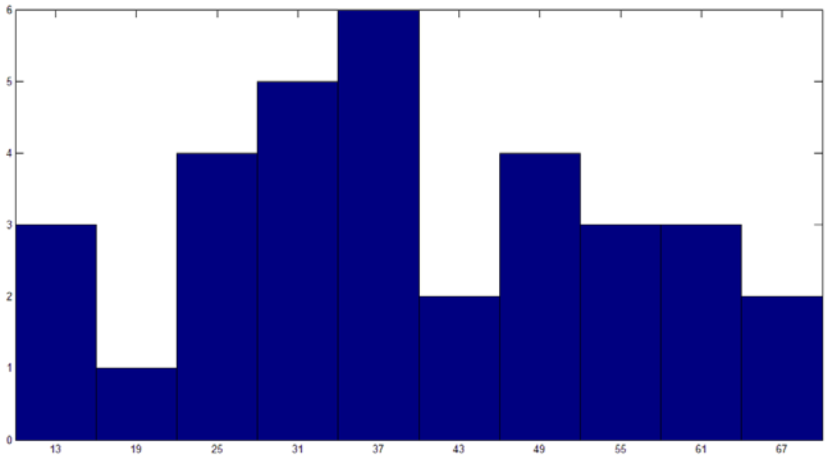
Табела 5.1.

Графички приказ статистичког низа резултата дијагностичког теста је дат на хистограму 1. Узевши у обзир 30 података који су релевантни за упоређивања резултата, за обележје "Резултати студената на дијагностичком тесту", добија се:

Аритметичка средина: 41.0

Стандардна девијација: 14.85

Обим: 30



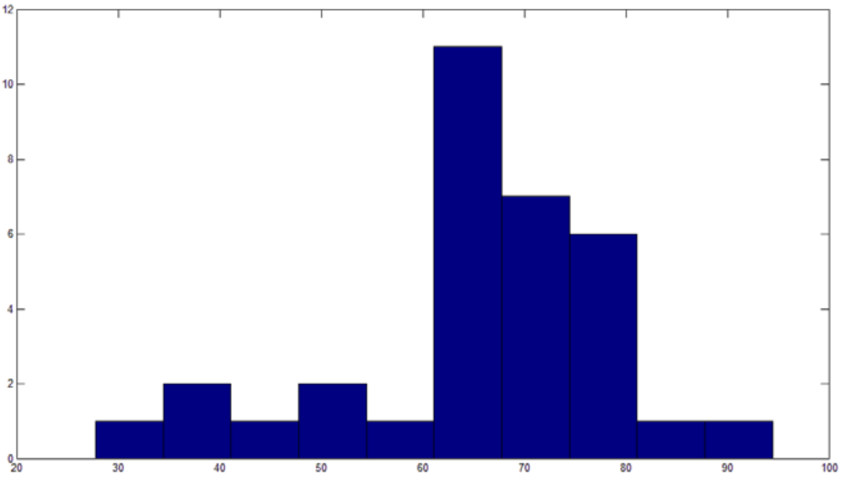
Хистограм 1. Резултати студената на дијагностичком тесту

Графички приказ статистичког низа резултата из ре-теста је дат на хистограму 2. Узевши у обзир 30 података који су релевантни за упоређивања резултата, за обележје "Резултати студената на ре-тесту", добија се:

Аритметичка средина: 64.8

Стандардна девијација: 14.37

Обим: 30



Хистограм 2. Резултати студената на ре-тесту

Како је у обрађивање наставних садржаја које се односе на функције више променљивих и 3D аналитичку геометрију била коришћена аналогија чија база су функције једне пороменљиве и 2D аналитичка геометрија, дизајнирање мерних инструмената је урађено респектирајући поделу индикатора, а затим и питања у одређене категорије, тако да се између њих опет може успоставити аналогија. Зато се у анализу резултата студената може дубље приступити тако да ће се анализирати њихов напредак у различитим категоријама.

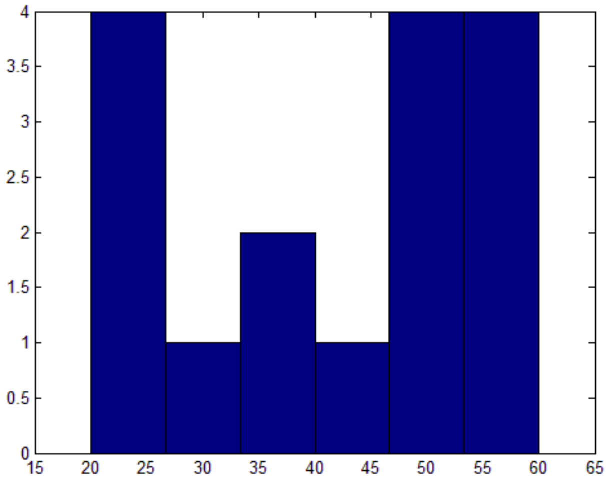
Такође је важно, не само установити постојање утицаја информационе технологије на квалитет знања везаних за функције, већ сазнати колики је тај утицај и затим дубље анализирати у којим областима је овај утицај већи, а у којим је ограничен.

У следоћој табели је дат детаљни преглед резултата које су студенти показали у свакој категорији дијагностичког теста, свакој категорији ре-теста и разлике између аналогних категорија које указују на напредак пре и после истраживање,који се односи на наставне садржаје из ових области.

	Категорије																	
Студент #	**1**	**1р**	**разлика**	**2**	**2р**	**разлика**	**1 и 2**	**1р и 2р**	**разлика**	**3**	**3р**	**разлика**	**4**	**4р**	**разлика**	**5**	**5р**	**разлика**
1	0	50	50	50	50	0	25	50	25	25	25	0	0	100	100	33	0	-33
2	33	50	17	50	50	0	50	50	0	25	50	25	0	50	50	33	25	-8
3	0	25	25	50	50	0	0	50	50	25	25	0	0	100	100	100	25	-75
4	67	25	-42	50	100	50	25	0	-25	25	50	25	50	100	50	100	75	-25
5	67	50	-17	75	50	-25	50	100	50	0	100	100	50	100	50	100	75	-25
6	0	75	75	50	100	50	25	50	25	0	25	25	50	100	50	100	75	-25
7	67	25	-42	25	100	75	50	50	0	0	25	25	0	100	100	0	50	50
8	33	75	42	50	50	0	50	100	50	25	25	0	100	100	0	67	75	8
9	0	50	50	25	100	75	50	0	-50	25	100	75	100	100	0	100	100	0
10	33	50	17	25	100	75	25	0	-25	25	50	25	50	50	0	33	50	17
11	33	50	17	25	50	25	75	50	-25	75	75	0	100	100	0	33	100	67
12	33	50	17	50	50	0	25	100	75	25	75	50	0	100	100	33	25	-8
13	0	75	75	50	50	0	25	50	25	0	50	50	50	100	50	0	50	50
14	33	100	67	75	100	25	50	50	0	25	100	75	100	100	0	67	100	33
15	0	75	75	0	50	50	25	0	-25	25	50	25	50	50	0	67	100	33
16	67	75	8	0	0	0	0	50	50	0	50	50	50	100	50	100	100	0
17	0	75	75	0	50	50	25	50	25	0	50	50	0	100	100	33	100	67
18	33	100	67	50	50	0	100	50	-50	50	75	25	50	100	50	100	100	0
19	33	50	17	50	100	50	50	100	50	75	50	-25	50	50	0	100	100	0
20	67	50	-17	25	50	25	25	50	25	25	0	-25	0	50	50	67	0	-67
21	33	50	17	50	100	50	75	50	-25	50	50	0	100	100	0	67	100	33
22	0	50	50	75	100	25	50	100	50	50	75	25	100	100	0	100	75	-25
23	33	50	17	50	100	50	100	50	-50	25	50	25	100	100	0	100	100	0
24	67	50	-17	25	50	25	50	50	0	25	50	25	0	100	100	33	75	42
25	33	50	17	50	50	0	50	50	0	50	25	-25	0	100	100	33	100	67
26	33	50	17	25	0	-25	50	50	0	25	100	75	0	50	50	33	75	42
27	33	25	-8	50	50	0	50	50	0	0	100	100	100	100	0	100	100	0
28	0	50	50	50	100	50	50	50	0	50	50	0	50	100	50	67	100	33
29	33	75	42	25	100	75	50	50	0	50	50	0	50	100	50	100	100	0
30	0	50	50	50	50	0	0	50	50	0	100	100	50	100	50	67	100	33
Просек	28,9	55,8	26,9	40,8	66,7	25,8	42,5	51,7	9,2	26,7	56,7	30,0	46,7	90,0	43,3	65,6	75,0	9,4

Табела 5.2.

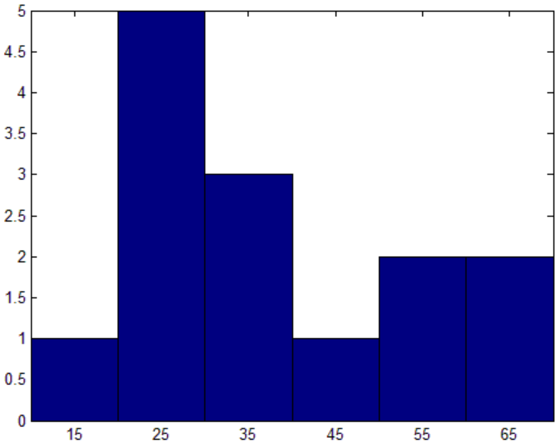
Да би се упоредили резултати експерименталне и контролне групе и како би се могао анализирати утицај пројектне наставе и самосталне израде Matlab програма на квалитет знања студената, биће дат опис статистичких низова који се односе на обе одговарајуће групе.



Хистограм 3. Резултати студената експерименталне групе на дијагностичком тесту

Графички приказ статистичког низа резултата студената експерименталне групе постигнутих на дијагностичком тесту дат је на хистограму 3. Узевши у обзир 16 података који су релевантни за упоређивање резултата, за обележје "Резултати студената експерименталне групе на дијагностичком тесту", добија се:

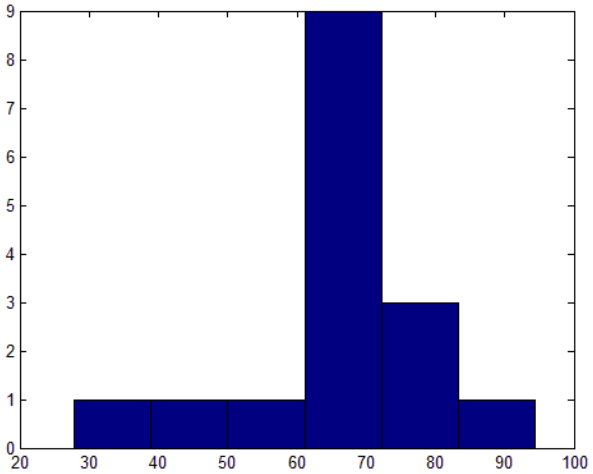
Аритметичка средина:	41.9
Стандардна девијација:	13.77
Обим:	16



Хистограм 4. Резултати студената контролне групе на дијагностичком тесту

Графички приказ статистичког низа резултата студената контролне групе постигнутих на дијагностичком тесту дат је на хистограму 4. Узевши у обзир 14 података који су релевантни за упоређивања резултата, за обележје "Резултати студената контролне групе на дијагностичком тесту", добија се:

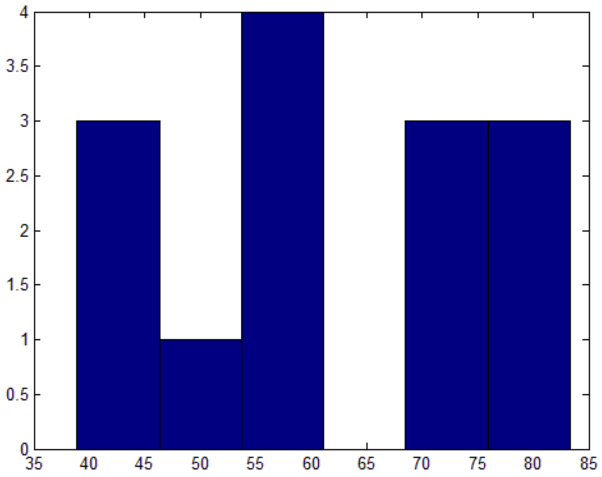
Аритметичка средина:	40.0
Стандардна девијација:	16.98
Обим:	14



Хистограм 5. Резултати студената експерименталне групе на ре-тесту

Графички приказ статистичког низа резултата студената експерименталне групе из ре-теста дат је на хистограму 5. Узевши у обзир 16 података који су релевантни за упоређивања резултата, за обележје "Резултати студената експерименталне групе на ре-тесту", добија се:

Аритметичка средина:	67.0
Стандардна девијација:	14.69
Обим:	16



Хистограм 6. Резултати студената контролне групе на ре-тесту

Графички приказ статистичког низа резултата студената контролне групе постигнутих на ре-тесту дат је на хистограму 6. Узевши у обзир 14 податaка који су релевантни за упоређивања резултата, за обележје "Резултати студената контролне групе на ре-тесту", добија се:

Аритметичка средина:	62.3
Стандардна девијација:	14.65
Обим:	14

У одељку 5.5. анализира се и обележје "Резултат којим су оцењени радови студената експерименталне групе". Аритметичка средина овог обележја је 75.6 са стандардном девијацијом 32.01.

Такође је у одељку 5.5. анализирано обележје "Време проведено на платформи". Аритметичка средина овог обележја је 134.06 (минута), са стандардном девијацијом 98.64.

5.2. Компарација математичких очекивања обележја “резултат на дијагностичком тесту” и ”резултат на ре-тесту”

Од укупно 36 студената укључених у истраживање, 30 их је било присутно и приликом спровођења дијагностичког и спровођења ре-теста. Њихови резултати су узети у обзир да би се упоредило њихово знање које су имали пре иновиране наставе и после тога.

Просечан резултат ових опсервираних 30 студената на дијагностичком тесту био је 41.0% са стандардном девијацијом 14.8.

Просечан резултат истих 30 студената на ре-тесту је био 64.8% са стандардном девијацијом 14.4.

Очигледна разлика резултата у корист резултата са ре-теста, проверена је статистичким t-тестом за једнакост математичких очекивања. Тестирана је статистичка нул-хипотеза

$$E(X) \geq E(Y)$$

где је X обележје (случајна променљива) "резултат студента на дијагностичком тесту", Y је обележје (случајна променљива) "резултат студента на ре-тесту", E(X) и E(Y) су њихова математичка очекивања, насупрот алтернативне хипотезе,

$$E(X) < E(Y).$$

Обим оба узорака је $n_x = n_y = 30$. Претпостављено је да случајне променљиве X и Y имају једнаке стандардне девијације. За процену те непознате стандардне девијације σ_p^2, коришћене су корегиране стандардне девијације узорака:

$s_x = 15.1$; $s_y = 14.6$.

Процена стандардне девијације је

$$\sigma_p{}^2 = \frac{\left(n_x - 1\right) s_x{}^2 + \left(n_y - 1\right) s_y{}^2}{n_x + n_y - 2} \approx 14.86 .$$

Тест величина

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sigma_p \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}}$$

за конкретне добијене резултате овог истраживања добија реализацију

$t = -6.1$.

Како је критичан домен овог једностраног теста са нивоом значајности $\alpha = 0.01$ интервал

$B = (-\infty, -2.39)$

може се закључити да добијена реалиација тест величине t дубоко упада у критични домен теста, што значи да се нул-хипотеза може одбацити и прихватити алтернативна хипотеза.

Ово значи да се са вероватношћу од 99% може извести статистички валидан закључак **да су резултати студента након извођење оваквог типа иновиране наставе, знатно бољи него њихови резултати о аналогним садржајима стекнути класичном наставом**.

Овим статистичким тестом је показано да применом оваквог типа едукативних материјала израђених помоћу информационе технологије, конкретније едукативних материјала израђених у Matlab-у и њиховим интегрисањем у настави, постиже се значајан утицај на квалитет знања везаних за функције. Тиме се практично потврдило очекивање овог истраживања да визуелизациске методе базиране на теоријским основама дидактике математике и интегрисаном приступу примене информационо-комуникацијске технологије у настави математике, имају значајан утицај на квалитет знања.

Како је постављеност рада на УИСТ-у током оба семестра била иста, постављеност наставног плана и извођење теоријског дела наставе такође је била иста за оба предмета Математика 1 и Математика 2, може се извести закључак да је основни разлог бољих резултата студената након завршетка курса Математика 2, конкретно резултата постигнутих на тесту дизајнираном као "Ре-тест", примена описаног типа иновиране наставе.

Побољшање знања студената може се довести у везу са повећањем њихове мотивације. И у овом случају, највећи део повећане мотивације студената може се приписати промени приступа који подразумева коришћење визуелних средстава и информационих технологија, јер нарочито код овог типа студената - студената информационих наука и технологија, ово изразито повољно делује на њихово позитивно психичко доживљавање у процесу учења.

У току учења математике знање се стиче кумулативно. Ово би могло да значи да је побољшање резултата студената проузроковано тиме што су они понављањем дошли до квалитетнијих знања о одређеним концептима. Ипак, како је већ образложено, стратешки прилаз наставе је био учење аналогијом, при чему ја база аналогије управо сачињена од знања које је тражено дијагностичким тестом. Примећене проблеме знања које се односе на функције једне промењиве и дводимензионалну аналитичку геометрију, уклоњивани су управо применом информационе технологије, након чега су обрађивани аналогни концепти везаних за функције више промењивих и тродимензионалну аналитичку геометрију. Ово значи да је примена информационе технологије и визуелних метода опет суштински разлог који је проузроковао побољшање резулатата.

На крају овог дела, важно је напоменути да су инструменти "Дијагностички тест" и "Ре-тест" дизајнирани тако да мере знања које сам дефинисао као суштинска знања о функцијама. То значи да је ово истраживање фокусирано управо на схватања суштинских појмова из математичке анализе и тродимензионалне аналитичке геометрије, на начин директно повезаним са визуелизацијама и геометриским интерпретацијама ових математичких концепата. У том смислу, овим статистичким тестом доказано је да се применом оваквог типа иновиране наставе постиже веома позитиван утицај на есенцијално, **суштинско** знање студената везаног за функције.

Главни циљ истраживања је испуњен. Коришћењем инструмената дизајнираних у ту сврху, показало се да постоји значајан утицај примене информационе технологије на квалитет есенцијалних знања студената везаних за функције. Дубља анализа природе овог утицаја следи у наредним одељцима. Утицај пројектне наставе и самостални рад студената на изради програма у Matlab-у везаних за конкретне математичке задатке, биће анализирани тестирањем одговарујућих статистичких хипотеза које се односе на сакупљене податке о резултатима експерименталне и контролне групе студената.

5.3. Зависност (веза) између резултата студената и категорија питања

Након што је у одељку 5.2. показано да иновирана настава, у којој су интегрисани едукативни материјали израђени у Matlab-у, знатно утиче на повећање квалитета есенцијалних знања студената везаних за функције, важно је поставити питање да ли се овакав напредак односи генерално на све садржаје на које се односи ово истраживање, или оваква иновирана настава има различите утицаје на различите делове наставних садржаја. Због тога ће бити урађена дубља анализа резултата студената укључених у истраживање, према различитим категоријама питања укључених у оба теста - пре и након истраживања.

Дијагностички тест је дизајниран тако да мери знање студената које се односи на следећих 5 категорија:

1. Гранична вредност функције у датој тачки и непрекидност реалних функција једне променљиве;
2. График и особине функције једне променљиве;
3. Диференцијабилност, извод функције једне променљиве и геометријска интерпретација извода;
4. Одређени интеграл;
5. Дводимензионална аналитичка геометрија - криве другог реда;

Детаљнији осврт категорија питања дијагностичког теста дат је у одељу 4.2. Овај тест интегрално је приложен као додатак А. Број питања сваке категорије може се детаљније видети у табели 4.4.

Ре-тест је дизајниран тако да мери знање студената које се односи на следећих 5 категорија:

1р. Гранична вредност функције две променљиве у датој тачки и непрекидност функција две реалних променљивих;

2р. Домен, ранг и график функције две реалних променљивих;

3р. Диференцијабилност, тангента криве и тангентна раван 3D површине ;

4р. Двоструки интеграл, волумен;

5р. Тродимензионална аналитичка геометрија - праве, равни и површине другог реда.

Детаљнији осврт категорија питања ре-теста је дат у одељу 4.5. Овај тест интегрално је приложен као додатак Б. Број питања сваке категорије може се детаљније видети у табели 4.8.

Једна од суштинских одлика иновиране наставе је разрађивање наставних садржаја преко аналогије. Због тога се и аналогно могу анализирати резултати сваке категорије и упоређивати резултати аналогне категорије. У том смислу, могу се издвојити резултати за сваку од категорија и израчунавањем разлике између одговарајућих резултата, рецимо, категорије 1р и категорије 1, може се сматрати да такав податак говори о напретку у знању које се односи на граничну вредност функција и концепт непрекидности функција, који је одговарајући студент постигао у току истраживања.

Имајући у виду да оба теста садрже питања категорије 1 и 2 (1р и 2р) између којих опет постоји аналогија, могу се добити 6 статистичких низова које се односе на разлике између резултата након и пре истраживња, за сваких од ових 6 категорија питања (садржаја).

Првична анализа се може урадити и описивањем аритметичких средина ових 6 статистичких низова, што се може видети из следеће табеле.

Категорија	Дијагностички тест	Ре-тест	Разлика
1 (1р)	28,9	55,8	26,9
2 (2р)	40,8	66,7	25,8
1 и 2 (1р и 2р)	42,5	51,7	9,2
3 (3р)	26,7	56,7	30,0
4 (4р)	46,7	90,0	43,3
5 (5р)	65,6	75,0	9,4

Табела 5.3. Компарација резултата оба теста, по категоријама

Да би се урадила дубља анализа, биће искоришћен статистички **тест хомогености**, чиме би се тестирало да ли добијених 6 статистичких низова потичу из исте расподеле вероватноће.

Обележје X - разлика између резултата на ре-тесту и на дијагностичком тесту, посматра се у 6 различитих варијанти, тако што су за свих 30 студената израчунате вредности обележја X које се односе само на одговарајућу категорију питања. Ово значи да сада располажемо са 180 података који се односе на обележје X, и они су груписани у m = 6 низова чији је обим $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = 30$.

Сви подаци су изражени у процентима, након чега добијене разлике - вредности обележја X у дијапазону од –80 до +100. Подаци су груписани у r = 9 интервала:

[–80, –60); [–60, –40); [–40, –20); [–20, 0); [0, 20); [20, 40); [40, 60); [60, 80); [80, 100].

Представник одговарајућег интервала је његова средња тачка. На тај начин рачунају се фреквенције појављивања вредности из скупа {–70, –50, –30, –10, 10, 30, 50, 70, 90}.

Генерално, нека располажемо са n података категоризованих у m категорија са обимима $n_1, n_2, ..., n_m$, тако да $n_1 + n_2 + ... + n_m = n$.

Ако скуп вредности које прима случајна промењива X је A = $\{a_1, a_2, ..., a_r\}$, онда за сваких m статитичких низова могу се дефинисати одговарајуће емпириске фреквенције $\hat{f}_j^{(i)}$. Ово значи да $\hat{f}_j^{(i)}$ означава припадну емпиријску фреквенцију вредности a_j у i-том статистичком низу ($i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., r$). За ових фреквенција је испуњено да

$$\sum_{j=1}^{r} \hat{f}_j^{(i)} = n_i \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{r} n_i = n .$$

Релативна фреквенција $\hat{p}_j^{(i)}$ аналогно означава релативну фреквенцију вредности a_j у i-тој статистичком низу, наиме:

$$\hat{p}_j^{(i)} = \frac{1}{n_i} \hat{f}_j^{(i)}, \quad \text{при чему} \qquad \sum_{j=1}^{r} \hat{p}_j^{(i)} = 1 .$$

Даље, уведена је ознака $\overline{p}_j$ за релативну фреквенцију вредности a_j обележја X, за коју је испуњено да

$$\overline{p}_j = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{m} \hat{f}_j^{(i)} .$$

За тестирање нул-хипотезе:

H_0: сви низови потичу од исте расподеле вероватноће

насупрот алтер-хипотези:

H_1: најмање два од ових низова не потичу од исте расподеле вероватноће

погодна је тест-статистика

$$D=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}\frac{\left(\hat{P}_j^{(i)}-\overline{P}_j\right)^2}{\overline{P}_j}\cdot n_i\,.$$

Тест-статистика D теоријски има Хи-квадрат расподелу са $(m-1)(r-1)$ степеном слободе. При томе $\hat{P}_j^{(i)}$ и $\overline{P}_j$ су процењивачи теоријских релативних фреквенција $p_j^{(i)}$ и p_j чије су реализације $\hat{p}_j^{(i)}$ и $\overline{p}_j$.

Ако је задато ниво значајности α, критички домен теста је интервал

$(H_v^{-1}(1-\alpha);\ +\infty)$

где је $v=(m-1)(r-1)$.

Конкретни подаци које се односе на обележје X - разлике између резултата на ре-тесту и на дијагностичком тесту, након груписања у 6 категорија питања, представљени су у табели 5.2. У колонама наранџасте боје смештене су фреквенције $\hat{f}_j^{(i)}$, затим, у колонама зелене боје смештене су релативне фреквенције $\hat{p}_j^{(i)}$. У задњој колони су израчунате релативне фреквенције $\overline{p}_j$ одговарајуће вредности a_j.

		Категорије																			
	a $_i$	**1 (1p)**			**2 (2p)**			**1 и 2 (1p и 2p)**			**3 (3p)**			**4 (4p)**			**5 (5p)**			Фреквенције	Релативне фреквенције
Разлика између резултата ре-теста и дијагностичког теста	-70	0	0	0,33	0	0	0,33	0	0	0,33	0	0	0,33	0	0	0,33	2	0,07	8,33	2	0,01
	-50	2	0,07	1,63	0	0	0,83	3	0,1	5,63	0	0	0,83	0	0	0,83	0	0	0,83	5	0,03
	-30	0	0	2,5	2	0,07	0,1	5	0,17	2,5	3	0,1	0,1	0	0	2,5	5	0,17	2,5	15	0,08
	-10	4	0,13	9	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	2	0,07	1	6	0,03
	10	10	0,33	0,08	11	0,37	0,37	9	0,3	0	7	0,23	0,51	11	0,37	0,37	7	0,23	0,51	55	0,31
	30	1	0,03	2,88	5	0,17	0,02	5	0,17	0,02	10	0,33	6,1	0	0	4,67	7	0,23	1,17	28	0,16
	50	7	0,23	0	8	0,27	0,14	7	0,23	0	4	0,13	1,29	12	0,4	3,57	4	0,13	1,29	42	0,23
	70	6	0,2	3,54	4	0,13	0,48	1	0,03	1,19	3	0,1	0,01	0	0	2,83	3	0,1	0,01	17	0,09
	90	0	0	1,67	0	0	1,67	0	0	1,67	3	0,1	1,07	7	0,23	17,1	0	0	1,67	10	0,06
Фреквенције		30	1		30	1		30	1		30	1		30	1		30	1		180	1,00
											Вредност статистике d =										100,64

Табела 5.4. Реализација тест-статистике D

У колонама жуте боје, израчунате су вредности:

$$\frac{\left(\hat{P}_j^{(i)}-\overline{P}_j\right)^2}{\overline{P}_j}\cdot n_i\,.$$

Њихов збир практично представља реализацију тест-статистике D. У овом случају, за податке сакупљене за ово истраживање, она износи $d = 100{,}64$.

Како је m = 6, r = 9, добија се да $v=(m-1)(r-1)=40$.

Гранична вредност критичког домена је

$H_v^{-1}(1-\alpha)=H_{40}^{-1}(0{,}95)\approx 55.76$.

Ово значи да је критички домен теста интервал $(55.76,\ +\infty)$.

Добијена вредност *d* = 100.64 припада критичком домену, што имплицира одбацивање нул-хипотезе и прихватање алтернативне хипотезе - најмање два од ових статистичких низова не потичу од исте расподеле вероватноће.

Дакле, може се извести статистички валидан закључак са вероватноћом већом од 95%, да осим случајних фактора, на добијене разлике у вредностима анализираних статистичких низова имају утицај и други чиниоци. Ово значи да примена иновиране наставе има различите утицаје на повећање квалитета есенцијалних знања студената у различитим категоријама наставних садржаја.

Да би утврдили код које категорије питања иновирана настава има највећи утицај промене приказаних резултата, може се извести статистички тест компарације математичких очекивања одговарајућих статистичких низова података који се односе на резултате дијагностичког теста (категорија 1 на пример) и резултате ре-теста (одговарајућа категорија 1р), слично као и у одељку 5.2.

Опет се користи статистика

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sigma_p \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}}$$

која има теоријски Студентову t расподелу вероватноће са $n_x + n_y - 2$ степена слободе.

Ако је ниво значајности $\alpha = 0.01$, будући да је опет као и у тесту описаном у одељку 5.2. $n_x = n_y = 30$, критички домен теста је исти интервал:

$B = (-\infty, -2.39)$.

У следећој табели су приказане израчунате вредности реализације тест-статистике Т, по одговарајућим категоријама.

Категорија	t
1 (1р)	–4.67
2 (2р)	–3.82
1 и 2 (1р и 2р)	–1.33
3 (3р)	–4.58
4 (4р)	–5.28
5 (5р)	–1.10

Табела 5.5. Вредности реализације тест статистике t, по категоријама

Ово значи да је најмањи ефекат постугнут код питања која се односе на сложеније ситуације које траже да студент повеже знање о граничним вредностима и непрекидности са графичким приказом функције и код питања из аналитичке геометрије. Овакав закључак се може извести јер су одговарајући тестови који се односе на категорију 1 и 2 (1р и 2р), а затим и на категорију 5 (5р) проузроковали вредности тест статистике након чега се не може одбацити нулта хипотеза и не може се тврдити да је настала статистички значајна промена резултата што се односи на питања у којима су комбинована знања о графику функција са знањима које се односе на суштинско разумевање концепта граничне вредности и непрекидности. Пошто су ова питања од студената тражила виши когнитивни ниво, може се рећи и да су добијени резултати очекивани, као и да је било потребно потрошити више наставног времена користећи визуелизациске алатке да би студенти могли довољно развити своје способности повезивања визуелизиране ситуације са дубљим питањима које се односе на граничне вредности и непрекидности функција, нарочито код функције задате по деловима.

Што се питања из категорије аналитичке геометрије тиче, може се увидети да је овде разлика мања управо зато што су предзнања из ове области била већа.

У свим осталим случајевима, добијене реализације тест статистике t упадају у критички домен теста. Ово значи да се одбацује нулта хипотеза и прихвата алтернативна хипотеза да је математичко очекивање другог статистичког низа, који се односи на резултате на ре-тесту знатно веће него математичко очекивање очекиваних резултата на дијагностичком тесту, пре извођење иновиране наставе.

То управо значи, да се може извести статистички значајан закључак да иновирана настава овог типа, која укључује описане едукативне материјале израђене у Matlab-у и изведена са студентима техничких наука, информационих наука и технологија:

- има значајан утицај на унапређивање квалитета есенцијалних знања које се односе на граничне вредности функција и концепт непрекидности функције;
- има значајан утицај на унапређивање квалитета есенцијалних знања које се односе на домен, ранг и график функција;
- има значајан утицај на унапређивање квалитета есенцијалних знања које се односе на концепт диференцијабилности и геометријске интерпретације извода функција;
- има значајан утицај на унапређивање квалитета есенцијалних знања која се односе на концепт интегрирања и геометријско значење интеграла;

5.4. Зависност (веза) између резултата експерименталне и контролне групе

Да би се измерио утицај пројектне наставе и свих активности које су спроведене током истраживања само са студентима експерименталне групе, потребно је спровести компаративну анализу резултата који су постигли студенти једне и друге групе. Очекивања су била да ће студенти експерименталне групе од које се тражило да и сами израде програме у Matlab-у решавајући притом пажљиво припремљен дидактички систем математичких задатака, имати знатно бољи напредак у учењу есенцијалних концепата везаних за функције више променљивих и 3D аналитичке геометрије.

У следећем тесту, анализиран је статистички низ "Разлика између резултата ре-теста и дијагностичког теста". Овим подацима практично је изражен напредак који су студенти демонстрирали пре и после истраживања. Овакав статистички низ састоји се од 30 података, али ће они бити посебно разматрани у два подниза: 16 података који се односе на студенте експерименталне и 14 података студената контролне групе.

На овај начин, добијена су 2 обележја:

X - разлика између резултата ре-теста и дијагностичког теста студената експерименталне групе

и Y - разлика између резултата ре-теста и дијагностичког теста студената контролне групе.

Поставља се питање, потичу ли они од исте расподеле вероватноће?

Оба обележја примају вредности истог скупа - интервала [-10, 70]. Подаци су груписани у 8 интервала. Сваки интервал је представљен средином интервала, тако да се посматрају обележја X и Y која црпе вредности са скупа {-5, 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65}. Емпиријска расподела података је приказана на следећој укрштеној табели:

	Средине интервала	**Контролна група**	**Експериментална група**	**Фреквенције**	
Разлика између резултата ре-теста и дијагностичког теста	-5	0	1	1	0,88
	5	3	1	4	1,29
	15	3	4	7	0,04
	25	4	4	8	0,04
	35	3	4	7	0,04
	45	0	1	1	0,88
	55	0	1	1	0,88
	65	1	0	1	1,14
Фреквенције		14	16	30	
				Вредност статистике d =	**5,18**

Табела 5.6. Реализација тест-статистике D

Тестирамо нул-хипотезу:

H_0: X и Y потичу од из исте расподеле вероватноће

насупрот алтернативној хипотези

H_1: X и Y не потичу од из исте расподеле вероватноће.

За тестирање ове статистичке хипотезе може бити употребљен Хи-квадрат тест за нивоом значајности $\alpha = 0.05$. У ту сврху, користи се статистика:

$$D = \frac{1}{m \cdot n} \sum_{j=1}^{r} \frac{\left(n \cdot \hat{F}_j - m \cdot \hat{G}_j\right)^2}{\hat{F}_j + \hat{G}_j}$$

где је m обим узорка обележја X (m = 16), n је обим узорка обележја Y (n = 14), затим статистика $\hat{F}_j$ је процењивач емпиријске фреквенције $\hat{f}_j$ вредности a_j у статистичком низу $x_1, x_2, ..., x_m$ - реализација обележја X и статистика $\hat{G}_j$ је процењивач емпиријске фреквенције $\hat{g}_j$ вредности a_j у статистичком низу $y_1, y_2, ..., y_n$ -реализација обележја Y.

Тест статистика D има хи-квадрат расподелу са r – 1 степена слободе, где је r број интервала. Критички домен теста је интервал

$$\left(\chi_{r-1}^{-1}(1-\alpha),\ +\infty\right).$$

У конкретном случају се добијају вредности приказане у табели 5.6. Емпиријске фреквенције $\hat{f}_j$ обележја X дате су у колони "Експериментална група", а емпиријске фреквенције $\hat{g}_j$ обележја Y дате су у колони "Контролна група".

Фреквенције у претпоследњој колони су фреквенције сваког од припадних интервала и они су у ствари $\hat{f}_j + \hat{g}_j$. Задња колона садржи вредности $\frac{\left(n \cdot \hat{f}_j - m \cdot \hat{g}_j\right)^2}{m \cdot n \cdot \left(\hat{f}_j + \hat{g}_j\right)}$. Сума ових бројева је наиме реализација тест-статистике:

d = 5.18.

За r = 8, добија се

$$\chi_7^{-1}(1-\alpha) = \chi_7^{-1}(0.95) \approx 14.067.$$

Значи, критички домен теста је интервал

$(14.067, +\infty)$.

Како је добијена вредност реализације d = 5.18 ван критичког домена, нул-хипотеза се не може одбацити са овим нивоом значајности.

Намеће се статистички валидан закључак да обележја X и Y потичу од из исте расподеле вероватноће. Ово значи да су разлике које се јављају међу подацима једног и другог обележја случајне природе. Најзад, ово повлачи да се не може тврдити да активности који су спроведене искључиво са студентима експерименталне групе: пројектна настава, едукативни материјали доступни само овим студентима преко система за управљање е-учењем и самостална израда Matlab програма одговарајући дидактичким системом математичких задатака, немају статистички значајан утицај на промене есенцијалних знања везаних за функције више промељивих и 3D аналитичку геометрију, у поређењу са студентима контролне групе, који су само као и студенти експерименталне групе били изложени на описани начин иновираној настави.

У следећем одељку биће направљена дубља анализа резултата експерименталне групе, како би открили који су фактори и спроведене активности са студентима експерименталне групе имале позитиван утицај на њихових знања.

5.5. Утицај израде пројектних задатака на промену резултата студената експерименталне групе

Да би се оценио утицај компоненте израда пројектних задатака - креирање Matlab програма којима се визуализира одређени математички проблем везан за функције више променљивих и 3D аналитичку геометрију, на промену резултата студената који су били укључени у овакву пројектну наставу, биће анализирана евентуална корелираност обележја:

X - Резултат којим су оцењени радови студената експерименталне групе;

и Y - Разлика између резултата ре-теста и дијагностичког теста студената експерименталне групе.

За процењивање којефицијента корелације ρ, према методу максималне веродостојности (Maximum Likelihood Method) употребљена је статистика

$$\hat{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}}$$

где су $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ аритметичке средине одговарајућих статистичких низова X_i и Y_i - реализације обележја X и Y.

За тестирање статистичке хипотезе

H_0: $\rho = 0$

насупрот алтернативној хипотези

H_1: $\rho \neq 0$

користи се статистика

$$T = \frac{\hat{P}}{\sqrt{1-\bar{P}^2}} \cdot \sqrt{n-2}$$

која има теоријску Студентову, t-расподелу са n – 2 степена слободе.

Ако је α ниво значајности теста, онда је критички домен оваквог теста

$$C_0 = \left(-\infty, -t_{n-2;\alpha/2}\right) \cup \left(t_{n-2;\alpha/2}, +\infty\right)$$

У конкретном случају, узевши у обзир n = 16 студената експерименталне групе, за реализацију обележја X добија се статистички низ X_i (i = 1,2,...,16) чија је аритметичка средина:

$$\overline{X} = 75.63$$

Ови подаци су добијени тако што је израчунат укупан број бодова на 3 задатака на којима су радили ови студенти. Решење сваког задатка пажљиво је оцењено узевши у обзир објективне критеријуме за оцењивање финалног производа - Matlab програма, математичку обраду проблема која је довела до одређеног приступа израде самог програма, како и употребљивост израђеног програма у смислу визуелизације конкретне математичке ситуације одређене тим задатком. Решење сваког задатка је оцењивано дијапазоном 0-10 бодова, тако да је максимални скор који је студент могао добити је 30 бодова. Елементи статистичког низа су процентуални износ добијених поена од могућих 30.

Број студента је 16, иако је у експерименталној групи укључено 18 студента, јер је потребно изразити разлику резултата са ре-теста и дијагностичког теста, а управо 16 њих су решавала оба теста.

За реализацију обележја Y добија се статистички низ Y_i (i = 1,2,...,16) чија је аритметичка средина:

$$\overline{Y} = 25.14$$

Израчунате конкретне суме одступања су:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = 15371.5$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = 3325.6$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right) = 2074.5$$

Сада, за реализацију статистике $\hat{P}$ се добија

$$\hat{p} = \frac{2074.5}{\sqrt{15371.5 \cdot 3325.6}} \approx 0,29 .$$

Ово указује на релативно слабу корелираност обележја X и Y. Да би се добио статистички валидан закључак, може се израчунати реализација статистике T, за коју се добија:

$$t = \frac{\hat{p}}{\sqrt{1-\hat{p}^2}} \cdot \sqrt{n-2} = \frac{0,29}{\sqrt{1-0,29^2}} \cdot \sqrt{14} \approx 1.13 .$$

Ако је узет α = 0.1 као ниво значајности теста, онда је граница критичког домена одређена са:

$$t_{n-2;\alpha/2} = t_{14;\,0.05} \approx 1,7613 .$$

Ово значи да је критични домен теста

$$C_0 = \left(-\infty, -1.7613\right) \cup \left(1.7613, +\infty\right).$$

Пошто добијена реализација тест-статистике t = 1.13 не припада критичном домену теста, на нивоу значајности 0.1 не може се одбацити нул-хипотеза, дакле не може се тврдити да су ова два обележја корелирана.

Намеће се као статистички валидан закључак да самостална израда Matlab програма студената експерименталне групе значајно не утиче на побољшање резултата које су ови студенти показали након истраживања. То значи да постоје други разлози за боље резултате. Како се у претходном тесту већ показало да је расподела вероватноће контролне групе слична расподели вероватноће експерименталне групе, може се извести закључак да је једини прави разлог бољих резултата иновирана настава, дакле редовна настава у којој су интегрисани едукативни материјали описани у поглављу 3, а не само пројектна настава спроведена само са студентима експерименталне групе.

Како је у фази пројектне наставе коришћен систем за управљање е-учења што би требало помоћи студентима експерименталне групе да лакше дођу до решења својих пројектних задатака, пажљиво је праћена њихова активност на порталу. Мерљив параметар њиховог учешћа у овој виртуелној наставној средини - време проведено на платформи. Сада и није изненађујуће што се и овај параметар показао недовољно утицајан на резултате студената експерименталне групе.

Наиме, ако се сличан тест спроведе узимајући случајну променљиву - обележје

X - Време (број минута) проведено на платформи за е-учење;

добија се још слабија процена коефицијента корелације

$$\hat{p} \approx 0,23.$$

У овом случају је реализација тест статистике

$$t \approx 0.92$$

што указује да се и обележје "време проведено на платформи за е-учењу" не може сматрати корелираним са обележјем "разлика између резултата ре-теста и дијагностичког теста студената експерименталне групе".

Ово значи да се и након дубље анализе фактора пројектне наставе, не може статистичким валидним тестом потврдити статистички значајан утицај пројектне наставе и израде Matlab програма за визуелизацију конкретних математичких проблема, на побољшање квалитета есенцијалних знања о функцијама.

Имајући у виду да су сви испитаници студенти информационих технологија, можда би разлоге за овакве резултате требало затражити у методици наставе информатике. Наиме, рад у току пројектне наставе био је пропраћен изразитим позитивним реакцијама студената. Они су сами изабрали да програмирају уместо да раде сувопарне семинарске радове. Истраживали су самостално, сарађивали међусебно и тражили помоћ е-маилом и у специјално организованим терминима за консултације. Ове консултације су се сводили на радионице у којима је колабортивним учењем размењивано искуство стечено самосталним радом.

Штавише, након оцењивања њихових радова, студенти су искључиво били задовољни својим резултатима. Сами су упоређивали своје резултате са резултатима осталих студената који су изабрали другу алтернативу за облик пројектне наставе и истицали да су добили знатно више поена, али и да им је математичка обрада проблема знатно помогла да схвате математичке концепте обухваћене курсом Математика 2.

Пошто је главни акценат постављен на знања које сам дефинисао као суштинска знања о функцијама више променљивих и 3D аналитичке геометрије, што је и мерено као знање инструментом "ре-тест", могу закључити да су се они, као студенти чији је главни интерес информатика и технологија, приликом тражења решења фокусирали на сам код, избегавајући да суштински схвате шта он суштински значи. Примера ради, може се стећи утисак да су они искључиво заинтересовани за приказивање рецимо хиперболида од два дела, дошли до његове параметризације и читаву енергију су потрошили како ову параметризацију да употребе средствима која им пружа програмски језик, а притом веома мало су размишљали о математичком значењу формула које су користили.

6.Глава
Закључне тезе и смернице за даља истраживања

Ни један други појам не представља активност, покретност и динамичност реалног света и узајамну зависност реалних величина са таквом непосредношћу и таквом конкретношћу као појам функција. У настави математике, нарочито у високом образовању, важно је применити наставне стратегије које се темеље на теоријске основе савремене дидактике и методике математике и којима би се што квалитетније изводило изучавање функција. Због важности функција у настави математике, неопходно је применити методе којима ће студенти стећи *суштинско знање* о функцијама, уместо формалног знања.

Према конструктивистичких психолошких теорија учења, процес учења је важнији од самог знања. У току учења, свака индивидуа ствара властити когнитивни систем. Због тога, образовна технологија, као скуп наставних метода, треба бити у предњем плану у савременој настави математике, респектирајући остале факторе наставног процеса.

Савремена педагогија тешко прати развој информационих технологија, јер се оне веома брзо развијају. Са друге стране, могућности које пружа ИКТ у настави су очигледне и привлаче ауторе да стварају едукативне материјале помоћу различитих софвера и различитим прилазима покушавају да иновирају наставни процес. Методичари математике дају значајан допринос педагогији тиме што предниче у својим покушајима да имплементирају иновирану наставу у којој је ИКТ приступ интегрисан у самом наставном процесу. Ипак, није велики број истраживања којим је утврђена веза између имплементације овакве наставе и ефекте које информациона технологија има на пораст квалитета математичких знања студената. Ово се највише односи на изучавање функција више реалних промењљивих, векторских функција реалне промењљиве и тродимензионалну аналитичку геометрију, т.ј. уопште на део математичког образовања које је тесно повезано са визуелизацијом тродимензионалних математичких ситуација.

Визуелизација се брине о спољашњој репрезентацији - систематичног и фокусираног дисплеја информација у облику слика, дијаграма, таблица.... такође, брине се о унутрашњој репрезентацији - менталног продуцирања, складирања и коришћења слике која је често резултат спољашне репрезентације. Визуелизација се може сматрати менталним исходом визуелног приказа који насликава неки објекат или догађај.

Визуелизација у настави се не односи само на то како "видети". Она треба ангажирати **целокупни перцептивни апарат** студента као фактора наставног процеса. Због тога је дидактички принцип визуелизације један од фундамената савремене наставе математике. Дидактички принцип визуелизације у настави математике је тражење примене визуелних средстава у настави са циљем постизања високог степена апстрактности током формирања математичких појмова.

Информационе технологије пружају велике могућности примене моћних алатки којима се могу продуцирати едукативни материјали чијим интегрисањем у наставном процесу може се ефектно имплементирати принцип визуелизације у настави математике. Развој примене ИКТ у наставу, почевши од компјутерски потпомогнутог учења, преко мултимедијског учења, све до најсавременије трендове колаборативног учења у духу филозофије е-учења 2.0 је детаљно проучен како би се могло одговорити на питању како треба дизајнирати савремену, иновирану наставу математике на Универзитету, користећи ИКТ у функцији унапређивања квалитета знања студената, нарочито знања која се односе на тродимензионалне математичке ситуације.

Полазећи од овакве теоријске основе, дизајниран је експериментални део ове дисертације. У потпуности су остварени следећи циљева истраживања:

- Израђивање едукативних материјала у електронској форми чиме се студентима омогућује изучавање функција и њихове особине интерактивним алаткама помоћу рачунара, интегрираних у систем за управљање е-учењем;
- Израђивање инструмената којима се може измерити утицај примене визуелизацијских метода на квалитет есенцијалних знања;

Едукативни материјали се односе на изабране делове наставних садржаја курса Математика 2 и оне су успешно интегрисане у наставном процесу са студентима прве године UIST-а. Изабрани наставни садржаји се односе на функције више реалних променљивих, векторске функције реалне променљиве и тродимензионалну аналитичку геометрију. Све графике и анимације се односе на одређену конкретну математичку ситуацију, везану за конкретан математички проблем. Израђене су помоћу софтверског пакета Matlab и заједно са видео фајловима и свим осталим материјалима у електронској форму су део ове докторске дисертације.

У току извођења наставе рад студената, њихово напредовање, доживљаје током учења и све активности у реалној учионици и кроз система за управљање е-учењем су интензивно обсервиране и праћене. Дизајнирана су два теста: “Дијагностички тест” и ”Ре-тест” којим је измерено знање пре и после истраживања, чиме је управо измерен утицај иновиране наставе на квалитет суштинских знања студената. Све ове активности су планирани и изведени да би се остварио главни циљ истраживања:

- Утврђивање степена утицаја примене визуелизационих метода, базираних на теоријским основама дидактике математике и интегрираном приступу примене информацијско-комуникацијске технологије у настави математике на квалитет знања студената који се односе на наставне садржаје који обухватају функције, нарочито векторске функције једне реалне променљиве и функције више реалних променљивих и њихове особине како и тродимензионалне аналитичке геометрије - криве и површине.

Након спровођења наставу курса Математика 2 иновираним приступом, и након сакупљања података о квалитету знања студената, израђена је компаративна анализа постигнутих резултата студената у сврху проверавања претпоставке да визуелизациони методи базирани на теоријским основама дидактике математике и интегрисаном прилазу примене информатичко-комуникацијске технологије у настави матаматике, имају значајан утицај на квалитет знања студената и да изразито повољно делују на позитивне психолошке доживљаје студената током учења математике.

Компарацијом математичких очекивања обележја “резултат на дијагностичком тесту” и ”резултат на ре-тесту”, са веројатношћу од 99% изведен је статистички валидан закључак **да су резултати студента након извођење оваквог типа иновиране наставе, знатно бољи него њихови резултати о аналогним садржајима стекнутим класичном наставом**.

Сама је настава структурирана тако да су одређени садржаји обрађивани аналогијом. Такође, инструменти мерења знања су дизајнирана тако да ове садржаје су издвојене у категоријама. Тиме је омогућено да се дубљом анализом установи веза између резултата студената и категорије питања на тестовима. Након овакве анализе, може се извести статистички значајан закључак да иновирана настава овог типа, која укључује описане едукативне материјале израђене у Matlab-у и изведена са студентима техничких наука, информатичке наука и технологија:

- има значајан утицај на унапређивање квалитета есенцијалних знања које се односе на граничну вредност функција и концепт непрекидности функције;
- има значајан утицај на унапређивање квалитета есенцијалних знања које се односе на домен, ранг и графиk функција;
- има значајан утицај на унапређивање квалитета есенцијалних знања које се односе на концепт диференцијабилности и геометриске интерпретације извода функција;
- има значајан утицај на унапређивање квалитета есенцијалних знања које се односе на концепт интегрирања и геометриско значење интеграла;

Истраживање је спроведено са студентима информационих наука и технологија. Пројектна настава је организована на тај начин што се од студената тражило да израде сопствене Matlab програме које се односе на визуелизирању неке математичке ситуације која је произашла од одређеног математичког проблема везаног за наставне садржаје које су обрађиване у току курса Математика 2. Очекивања да ће студенти решавајући свој програмерски задатак морати да прођу кроз математичку обраду проблема и да ће тиме стећи квалитетнија математичка знања, нису потврђена. Разлике у њиховим знањима пре и након истраживања нису у корелацији са њиховим ангажманом и резултатима пројектне наставе. Студенти који су учествовали у овакву пројектну наставу су показали боља знања, али само као резултат иновиране наставе. Ово наиме потврђује претпоставку да се делатност у процесу компјутерског програмирања мора третирати различито од процеса учења математике и примене математичке логике. Учење компјутерског програмирања, треба се спроводити различитим прилазом и то је задатак методике информатике.

Овом докторском дисертацијом даје се значајан допринос у методици математике. У теоријском делу је постављен фундамент примене информационе технологије у учењу математике, нарочито учењу математике у високом образовању везано за функције. Експерименталним делом који се односи на спроведеног истраживања, емпириски је утврђен утицај информационе технологије на квалитет знања везаних за функције.

Учење математике на високообразовном нивоу, је веома комплексан процес. Да би се дошло до одговора на питања како се стиће математичко мишљење, и кроз којих мисаоних процеса пролази личност стварајући свој систем математичких знања, у будућности се треба окренути ка математичкој когницији - област која ће у будућности дати одговоре на питања која могу бити основа нових праваца у методици математике.

Пратећи савремене трендове у методици математике и иновације наставе математике, веома је важно да се још истраживања спроведу у сврху испитивања утицаја ИКТ на знања која се односе на специфичнијих области математике на свим образовним нивоима, како и на доживљаја студената у току учења математике иновираним прилазима у савременом математичком образовању.

7. Дотаци

7.1. Додатак А: Дијагностички тест

T e s t

24th March 2010

This test is only for research purpose. The scores will have no any affect to the student's grade. Please do your best and attempt all questions.

Name and Surname: ____

I agree to be the part of the research ☐ **(no private data, including name, will be published)**

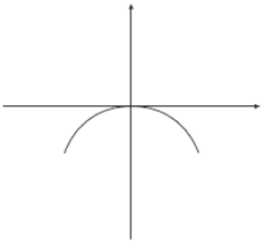
1. Let $f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 4 \\ 3, & x=4 \end{cases}$. Then, $\lim_{x\to 4} f(x)=$

a. 3 b. 4 c. does not exist d. none of the preceding.

2. Let $f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 4 \\ 3, & x=4 \end{cases}$. Can the graph of the function be drawn on the interval [-5, 5] from one side to the other without picking up my pencil?

a. Yes b. No

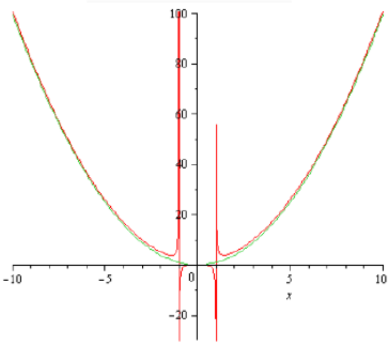
3. If the graph of f is as follows:



then $\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}$ is equal to:

a. $+\infty$ b. $-\infty$ c. 0 d. none of the preceding

4. The red curve is the graph of the function f(x) and the green one is the graph of the function g(x) = x^2.



Determine which statement is correct:

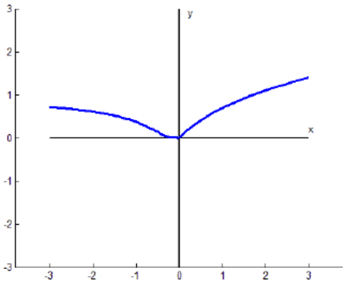
a. f(x) has not functional asymptote

b. as $x\to\pm\infty$, f(x) $\to x$

c. as $x\to\pm\infty$, f(x) $\to x^2$

d. as $x\to\pm\infty$, f(x) $\to x^3$

5. On the following picture is shown the graph of the function:



a. f(x) = |x|

b. f(x) = lnx

c. $f(x)=\begin{cases} \ln(x+1), & x\geq 0 \\ e^{1/x}, & x<0 \end{cases}$

d. $f(x)=\begin{cases} \ln x, & x\geq 0 \\ e^{-x}, & x<0 \end{cases}$

6. The function $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+4}$

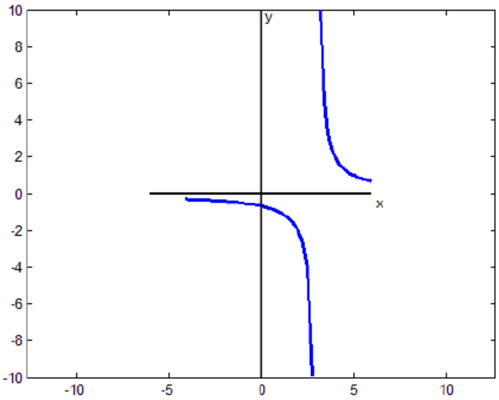
a. has vertical asymptote $x = 4$

b. has vertical asymptote $x = -4$

c. has two vertical asymptotes $x = \pm 4$

d. has not vertical asymptote

7. Let $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$.



Determine which statement is correct:

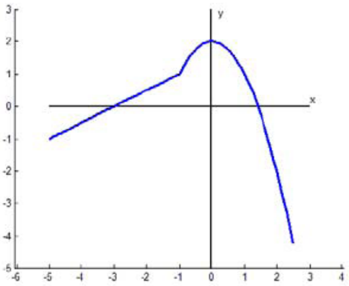
a. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$

b. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$

c. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 0$

d. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\dfrac{2}{3}$

8. Let $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+3}{2}, & x\le -1\\ -x^2+2, & x>-1\end{cases}$. The function f($x$)



a. has a point of discontinuity at x = –1 due to $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ does not exist;

b. has a point of discontinuity at x = –1 due to $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \ne \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$;

c. has a point of discontinuity at x = –1 due to f(–1) is not defined;

d. is continuous at x = –1.

9. Let $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+3}{2}, & x\le -1\\ -x^2+2, & x>-1\end{cases}$. The function f($x$)

a. is continuous and differentiable at $x = -1$;

b. is continuous but is NOT differentiable at $x = -1$;

c. is NOT continuous but it is differentiable at $x = -1$

d. is neither continuous neither differentiable at $x = -1$.

10. Let f:[–2,4]→ℝ be a continuous function, with f(–2) = 4 and f(4) = –2. Which statement CANNOT be deduced from the preceding ones?

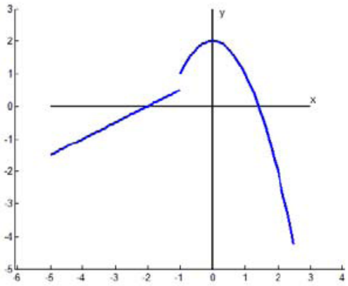
a. f is bounded

b. f has maximum and minimum

c. f is decreasing

d. f is equal to zero at least at one point.

11. Let $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{2}, & x\le -1\\ -x^2+2, & x>-1\end{cases}$. The function f(x)



a. is continuous on interval [–3, 3];

b. is continuous on interval (–1, 3];

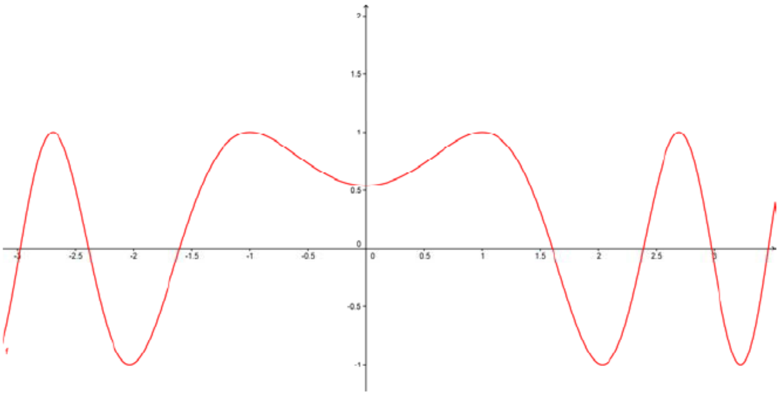
c. is continuous on interval [–1, 3]

d. is continuous on interval (–3, 3).

12. Consider the function f(x) = x^2. The equation of the tangent line to the graph of f(x) at $x_0 = 1$ is:

a. $x = 1$ b. $y = 2x - 1$ c. $y = 0.5x - 1$ d. $y = 1$.

13. Consider the function f(x) given by its graph.



The equation f(x) = 0.8

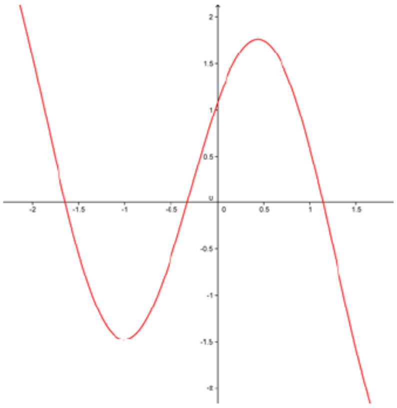
a. has not solution on [–2, 2]

b. has unique solution on [–2, 2]

c. has at least 3 solutions on [–2, 2]

d. has at least 8 solutions on [–2, 2]

14. Consider the function f(x) given by its graph.



Determine which statement is correct:

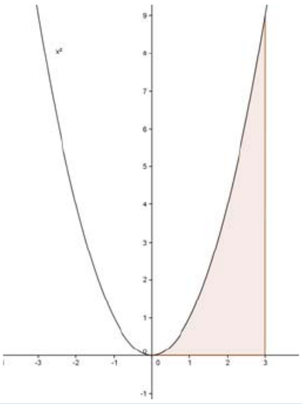
a. does not exist c ∈ [–2, 1] such that f '(c) = 0

b. exist unique c ∈ [–2, 1] such that f '(c) = 0

c. exist exactly 2 values c ∈ [–2, 1] such that f '(c) = 0

d. exist more than 2 values c ∈ [–2, 1] such that f '(c) = 0.

15. The area shown in the following picture is:



a. A = 27/2

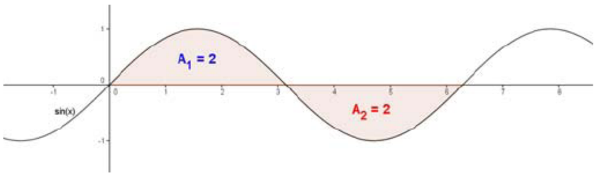
b. A = 28/3

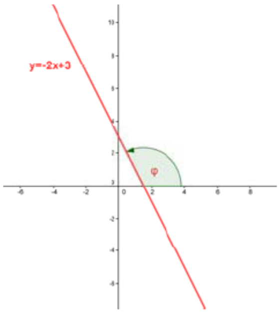
c. A = 9

d. A = 9/2

16. Use the picture to calculate

$\int_0^{2\pi} \sin x dx =$ a. 4 b. 0 c. 2π d. 4π





17. See the picture (left) and fill: tanφ = ______________ .

18. The given ellipse (see picture right)

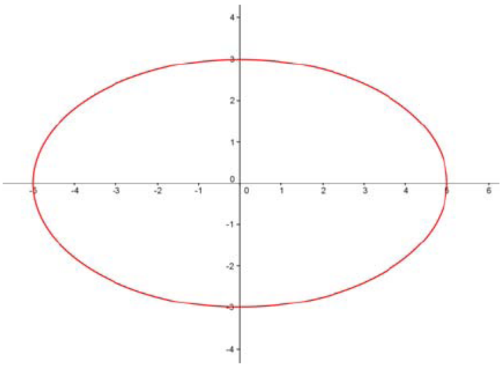
has equation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, with

a. $a = 5, b = 3$

b. $a = 3, b = 5$

c. $a = 25, b = 9$

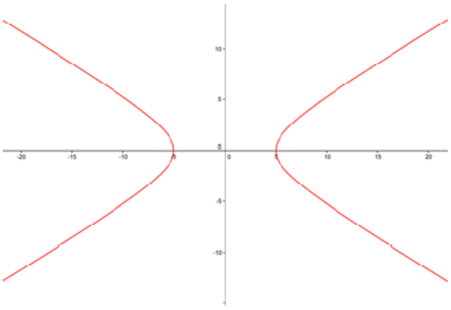
d. $a=\sqrt{3}, b=\sqrt{5}$



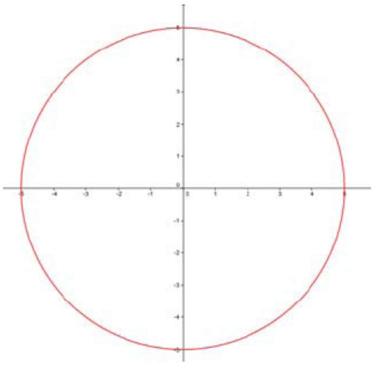
19. The equation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ represents

a. hyperbola b. parabola c. circle with radius a d. unit circle with center C(a,a)

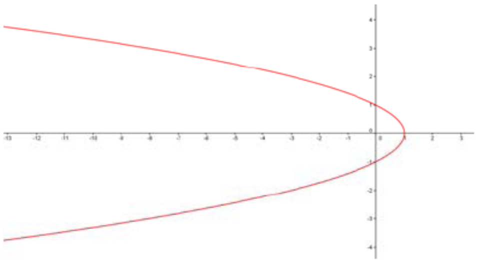
20. Match the appropriate equations and graphs



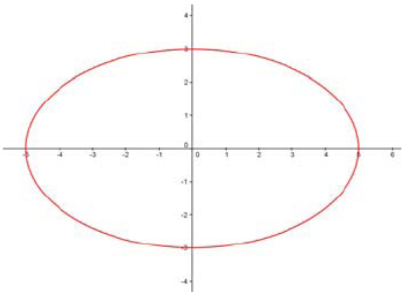
a.



b.



c.



d.

a. ● ☐ $x+y^2=1$

b. ● ☐ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

c. ● ☐ $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$

d. ● ☐ $x^2+y^2=25$

7.2. Додатак Б: Ре-тест

University for Information Science and Technology

Mathematics 2 Final Exam, Part 1: Test

Name and Surname: ____

Time allowed: 45 minutes **10th June 2010**

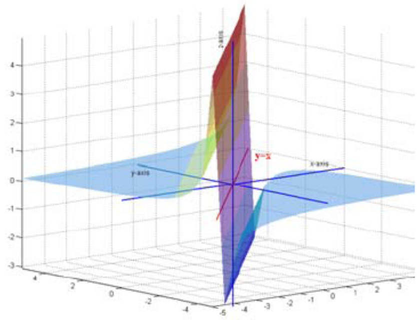
1. Let $f(x,y)=\begin{cases} x+y, & (x,y)\neq(3,4) \\ 5, & (x,y)=(3,4) \end{cases}$. Then, $\lim\limits_{(x,y)\to(3,4)} f(x,y)=$

a. 5 **b.** 7 **c.** does not exist **d.** none of the preceding.

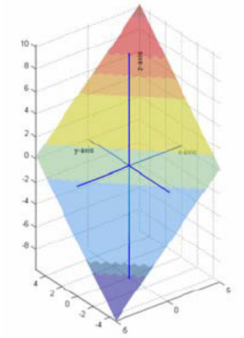
2. The function $f(x,y)=\begin{cases} x+y, & (x,y)\neq(3,4) \\ 5, & (x,y)=(3,4) \end{cases}$ is continuous at the point (3, 4).

a. Yes **b.** No

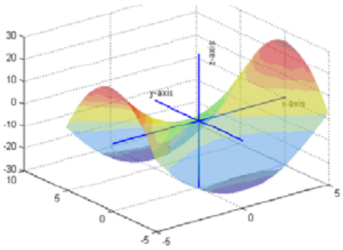
3. Let $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}, & x\neq y \\ x+y, & x=y \end{cases}$. Which of the pictures below shows the graph of the function *f*(*x*,*y*) ?



a.



b.

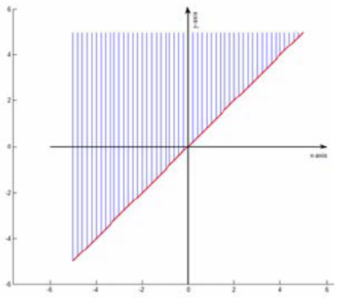


c.

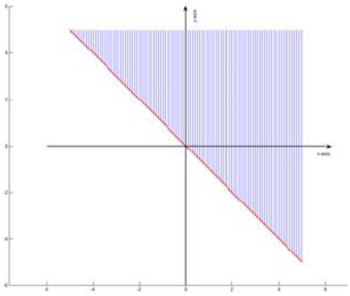
4. Let $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}, & x\neq y \\ x+y, & x=y \end{cases}$. Then $\lim\limits_{(x,y)\to(3,3)} f(x,y)$:

a. is 0 **b.** is 3 **c.** is 6 **d.** does not exist

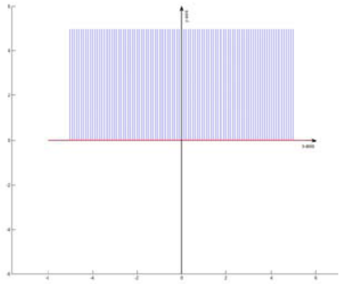
5. The domain of the function $f(x,y)=\sqrt{x+y}$ is shown on the picture:



a.

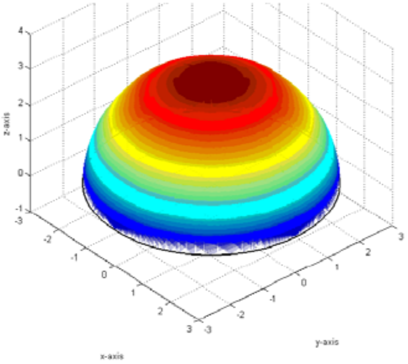


b.



c.

6. On the following picture is shown the graph of the function:



a. $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

b. $f(x,y)=9-x^2-y^2$

c. $f(x,y)=3-x-y$

d. $f(x,y)=3+x+y$

7. The graph of the function $f(x,y)=\dfrac{(x-2)(y+3)}{x-2}$ is

a. plane **b.** plane without point **c.** plane without straight line **d.** paraboloid

8. The function $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-2)(y+3)}{x-2}, & x\neq 2\\ y+3, & x=2\end{cases}$:

a. is continuous at every point in the plane, except at the point (2,0);

b. is continuous at every point in the plane, except at the points of the line $x = 2$ in the xy-plane;

c. is continuous at every point in the plane;

d. is not continuous at neither point in the plane;

9. The tangent line to the curve **r**(t) = cost·**i** + sint·**j** + e^t·**k** at the given parameter value t = π is parallel to the following vector:

a. <0, 1, π>; **b.** <–1, 0, e^π>; **c.** <0, –1, e^π> **d.** <0, –1, lnπ>

10. The length of the indicated portion of the curve $\mathbf{r}(t)=(t+1)\mathbf{i}+(t^2-1)\mathbf{j}$ for $0\leq t\leq 1$ is determined by:

a. $\int_0^1\left(\sqrt{1+4t^2}\right)dt$ **b.** $\int_0^1\left(t+t^2\right)dt$ **c.** $\int_0^1\sqrt{t+t^2}\,dt$ **d.** $\int_0^1(1+2t)\,dt$

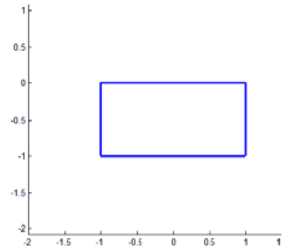
11. The tangent plane to the surface $z = 4x^2 + y^2$ at the point (1, 1, 5) is orthogonal to the following vector:

a. <–1, –1, –5>; **b.** <8, 2, 0>; **c.** <4, 1, –1> **d.** <8, 2, –1>

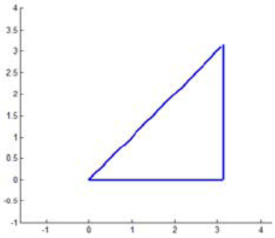
12. The normal line to the surface $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ through point (1, 1, 1) is parallel to the following vector:

a. <2, 2, 2>; **b.** <3, 1, 1>; **c.** <0, 0, –1> **d.** <1, 1, 0>

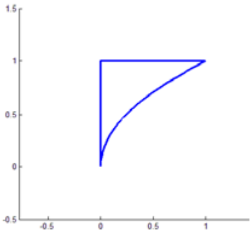
13. The region of integration of the integral $\int_0^{\pi}\int_0^{x} x\sin y\,dy\,dx$ is shown on the picture:



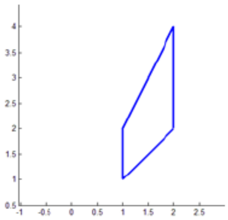
a.



b.

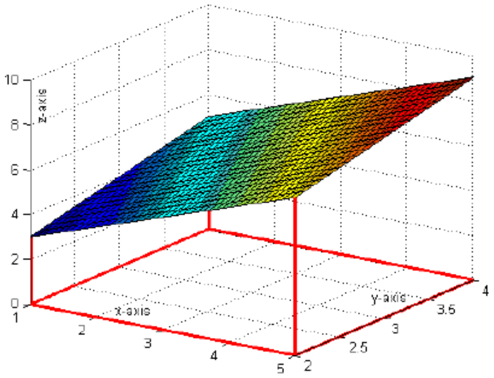


c.



d.

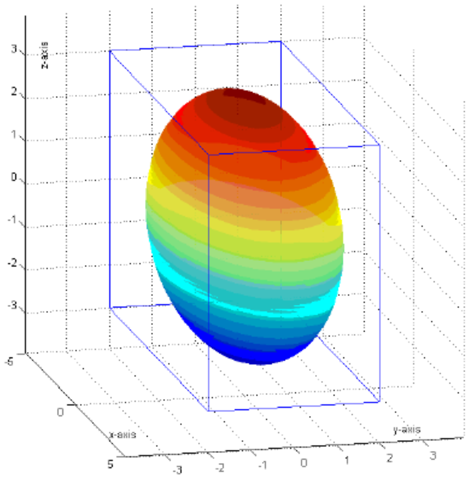
14. On the following picture is shown the part of the plane $z = x + y$.



The volume of the shown polyhedron could be evaluated as:

a. $\int_1^5\int_2^4 x\,dy\,dx$ **b.** $\int_1^5\int_2^4 y\,dx\,dy$ **c.** $\int_2^4\int_1^5 (x+y)\,dx\,dy$ **d.** $\int_2^4\int_1^5 (x+y)\,dy\,dx$

15. The given ellipsoid has equation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$, with



a. $a = 5$, $b = 2$, $c = 3$ **b.** $a = 25$, $b = 4$, $c = 9$ **c.** $a = -5$, $b = -2$, $c = 3$ **d.** $a=\sqrt{5}, b=\sqrt{2}, c=\sqrt{3}$

16. The equation $4z^2 - x^2 - y^2 = 4$ represents

a. elliptical cylinder **b.** parabolic cylinder **c.** elliptical paraboloid

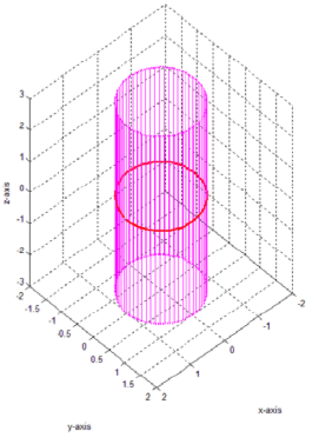
d. hyperbolic paraboloid **e.** hyperboloid of 1 sheet **f.** hyperboloid of 2 sheets

17. The equation $9x^2 + 16y^2 = 4z^2$ represents

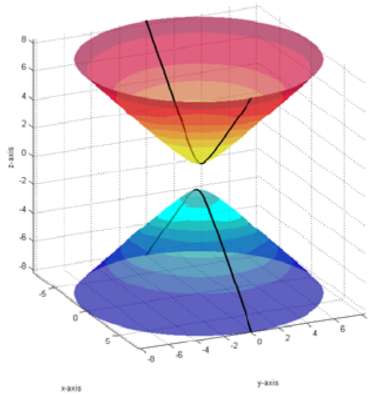
a. elliptical cylinder **b.** parabolic cylinder **c.** sphere **d.** cone

e. hyperboloid of 1 sheet **f.** hyperboloid of 2 sheets **g.** ellipsoid

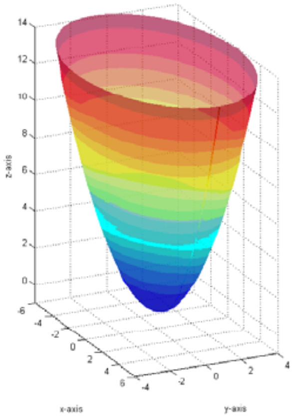
18. Match the appropriate equations and surfaces



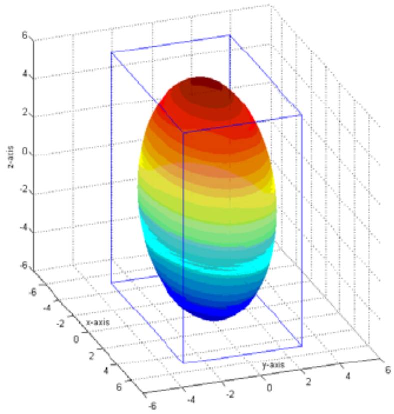
a.



b.



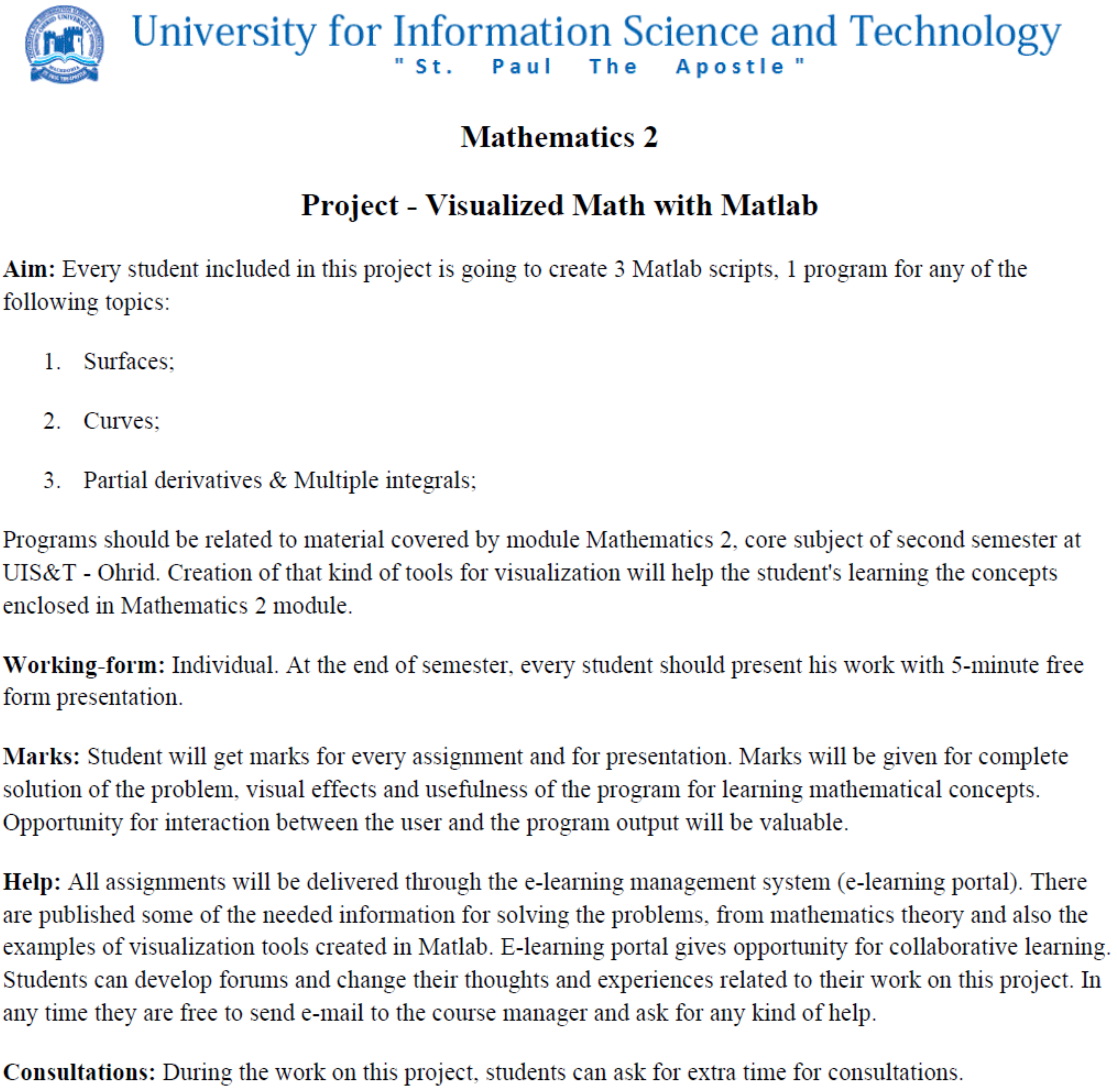
c.



d.

a. ●	☐ $x^2 + y^2 = 1$
b. ●	☐ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1$
c. ●	☐ $x^2 + y^2 - z^2 = -1$
d. ●	☐ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = \frac{z}{6}$

7.3. Додатак В: Опис пројекта



University for Information Science and Technology
"St. Paul The Apostle"

Mathematics 2

Project - Visualized Math with Matlab

Aim: Every student included in this project is going to create 3 Matlab scripts, 1 program for any of the following topics:

1. Surfaces;
2. Curves;
3. Partial derivatives & Multiple integrals;

Programs should be related to material covered by module Mathematics 2, core subject of second semester at UIS&T - Ohrid. Creation of that kind of tools for visualization will help the student's learning the concepts enclosed in Mathematics 2 module.

Working-form: Individual. At the end of semester, every student should present his work with 5-minute free form presentation.

Marks: Student will get marks for every assignment and for presentation. Marks will be given for complete solution of the problem, visual effects and usefulness of the program for learning mathematical concepts. Opportunity for interaction between the user and the program output will be valuable.

Help: All assignments will be delivered through the e-learning management system (e-learning portal). There are published some of the needed information for solving the problems, from mathematics theory and also the examples of visualization tools created in Matlab. E-learning portal gives opportunity for collaborative learning. Students can develop forums and change their thoughts and experiences related to their work on this project. In any time they are free to send e-mail to the course manager and ask for any kind of help.

Consultations: During the work on this project, students can ask for extra time for consultations.

7.4. Додатак Г: Примери задатака

Student: 03

Assignment 1.

Using Matlab, show the intersection of the paraboloid

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=\frac{z}{3}$$

and the plane

$$y=d$$

in dependence of values of the parameter d between -2.5 and 2.5.

Input: d - value from the interval [-2.5,2.5].

Output: figure(1) - surface of the determined paraboloid, the plane $y=d$ and their intersection.

Note: Opportunity for interaction between the user and the program output will be valuable.

Assignment 2.

Using Matlab, show the path made by particle, which motion is determined by the function:

$$\mathbf{r}(t)=2\cos t\cdot\mathbf{i}+3\sin t\cdot\mathbf{j}+4t\cdot\mathbf{k}\,,\qquad t\in[0,\,3\pi].$$

and show the velocity vector at given time $t=t_1$.

Input: t_1 - value from the interval [0,3π].

Output: figure(1) - determined curve and the velocity vector.

Note: Opportunity for interaction between the user and the program output will be valuable.

Assignment 3.

Using Matlab, show the intersection of the paraboloid $z=5-\frac{x^2}{2}-y^2$ and the plane $y=\frac{1}{2}$. Also show the tangent plane to the paraboloid at point of intersection curve for given value of the variable $x=x_1$.

Input: x_1 - value from the interval [0,2].

Output: figure(1) - the paraboloid, the intersection curve and the tangent plane at determined point.

Student: 09

Assignment 1.

Using Matlab, show the shape of the hyperbolod

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{9}=1$$

in dependence of values of the parameter a between 1 and 6.

Input: a - value from the interval [1,6].

Output: figure(1) - surface of the determined hyperboloid.

Note: Opportunity for interaction between the user and the program output will be valuable.

Assignment 2.

Using Matlab, show the path made by particle, which motion is determined by the function:

$$\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\mathbf{k}\,, \qquad t\in[0,\ 8].$$

and show the poligonal line determined by points on that curve obtained by partition of the interval [0, 8] with n subintervals. Approximate the length of the arc, calculating the length of the obtained poligonal line.

Input: n - integer (n < 25).

Output: figure(1) - determined curve and the poligonal line.

I - lenhth of the poligonal line.

Note: Opportunity for interaction between the user and the program output will be valuable.

Assignment 3.

Using Matlab, show the intersection of the paraboloid $z=5-\frac{x^2}{2}-y^2$ and the plane $x=\frac{3}{2}$. Also show the tangent plane to the paraboloid at point of intersection curve for given value of the variable $y=y_1$.

Input: y_1 - value from the interval [-1,1].

Output: figure(1) - the paraboloid, the intersection curve and the tangent plane at determined point.

Student: 16

Assignment 1.

Using Matlab, show the intersection of the hyperboloid

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=-1$$

and the plane

$$x=d$$

in dependence of values of the parameter d between -9 and 9.

Input: d - value from the interval [-9,9].

Output: figure(1) - surface of the determined hyperboloid, the plane $x = d$ and their intersection.

Note: Opportunity for interaction between the user and the program output will be valuable.

Assignment 2.

Using Matlab, show the path made by particle, which motion is determined by the function:

$$\mathbf{r}(t)=\cos t\cdot\mathbf{i}+a\sin t\cdot\mathbf{j},\mathrm{t}\in[0,\,2\pi].$$

in dependence of value of the parameter a.

Input: a - value from the interval [1,5].

Output: figure(1) - determined curve.

Note: Opportunity for interaction between the user and the program output will be valuable.

Assignment 3.

Using Matlab, show the surface $z = f(x, y) = 0.1x - 0.2y +5$ and show the portion of the solid that stands directly above the base (rectangle):

R: $0\le x\le 3;$ $0\le y\le 2.$

and bounded above by the surface $z = f(x, y)$. Visualize the Riemann sum obtained by partitions of the intervals [0, 3] and [0, 2] with n subintervals for each. Approximate the volume of the portion of the solid, calculating the sum of volumes of the obtained rectangular boxes.

Input: n - integer (n < 16).

Output: figure(1) - determined surface and the visualization of the Riemann sum.

V - sum of the volumes of the obtained n^2 rectangular boxes.

Коришћени ресурси

Литература

1. (СА) *Арсеновски, С.* **Методологија за развој на системи за мултимедијално учење и нејзина имплементација во систем за учење на предметот Информатика во средните чилишта во Република Македонија**, Електротехнички факултет - Скопје, 2001
2. (ВМБ) *Брадис, В.М.* **Методика преподаванија математики в среднеј школе**, Государственное учебно-педагогическое министерства просвешченија РСФСР - Москва, 1954
3. (ССБ) Бронштајн, С.С. **Алгебрата и нејното преподаване** - Софија, 1950
4. (AGGHRV) *Garcia, A. Garcia, F. Hoya, S. Rodriguez, G. De La Villa, A.* **Differential calculus of several variables with Mathematica or Maple**, Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level), 2002
5. (МГДЈДД) *Godsk, M. Jorgensen, D.S. Dorup, D.* **Implementing E-learning by Nurturing Evolution**, University of Aarhus - Denmark, 2005
6. (СГШ) *Грчева-Шопова, С.* **Учебник по информатика**, Универзитет Гоце Делчев - Штип
7. (LjD) *Dikovic, Lj.* **Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level**, Computer Science and Information Systems, Vol. 6, Issue 2, pp. 191-203, 2009
8. (ИД1) *Димовски, И.* **Математика за прва година реформирано гимназиско образование**, Табернакул - Скопје, 2002
9. (ИД2) *Димовски, И.* **Наставните програми, наставата у учењето математика во информациско општество**, магистерска работа - ПМФ Скопје, 2009
10. (PEDK) *Eggen, P. Kauchak, D.* - **Educational psychology - classroom connections** - Macmilian Publishing Vompany - New York, 1994
11. (ПИ) *Иванов, П.* **Методика на обучението по математика за горнија курс на средните училишта**, Наука и изкуство - Софија, 1965
12. (SJWDP) *Johnston-Wilder, S Prim, D* **Teaching Secondary Mathematics with ICT (Learning & Teaching With Information & Communications Technology)** - Open University Press, 2004
13. (MKKS) *Kendal, M. Stacey, K.* Teacher in Transition: **Moving towards CAS-supported Classroom**. ZDM The International Journal on Mathematics Education, 34(5): pp. 196–201, 2002
14. (AKMHSH) *Kilicman, A. Hassan, M.A. Husain, S.K.* **Teaching and Learning using Mathematics Software "The New Challenge"**. Procedia - Social and Behavioral Sciences. Vol. 8: pp. 613-619, 2010
15. (BK) *Kissane, B* **Teaching and learning elementary calculus concepts with a graphics calculator.** Lim C.S. et.al. (Eds.) Proceedings of Fourth East Asia Regional Conference on Mathematics Education (pp 243-250). Penang: Universiti Sains Malaysia, 2007
16. (ALLM) *Lois, A. Milevicich, L.* **The impact of technological tools in the teaching and learning of integral calculus.** Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Working Group 7: pp.1060-1070, 2009
17. (SMMEZ) *Maat, S.M. Zakaria, E.* **Exploring student's understanding of ordinary differential equations using computer algebraic system (CAS)**. The Turkish Online Journal of Educational Technology, Vol.10, Issue 3: pp. 123-128, 2011
18. (PMPM) *Mayer, R. Moreno, R.* **A Cognitive Theory of Multimedia Learning: Implications for Design Principles**, University of California, Santa Barbara

19.(РМ) *Малчески, Р.* **Методика на наставата по математика (Општ дел)** - Скопје, 2001

20.(ММ) *Milovanovic, M.* **Multimedia learning in education: Multimedia lessons on Rotation**, Зборник на трудови од III конгрес на математичарите на Македонија - Скопје, 2005

21. (ММЂТАМ) Milovanovic, M., Takaci, Đ., Milajic, A. **Multimedia approach in teaching mathematics - example of lesson about the definite integral application for determining an area**, 2010

22.(ИМЗА) *Mirchev, I.A. Aleksov, Z.A.* **Software tools for building the web-based distance learning systems - aproaches and comparison**, Зборник на трудови од III конгрес на математичарите на Македонија - Скопје, 2005

23.(EN) *Nardi, E.* **Amongst Mathematicians: Teaching and Learning Mathematics at University Level** - Springer Science+Business Media, LLC., 2008

24.(SNBWYW) *Noinang, S. Wiwatanapataphee B. Wu Y.H.* **Teaching-learning tool for integral calculus**. Far East Journal of Mathematical Education, Vol. 3, Issue 3, pp. 203 - 212, 2009

25.(RNGL) *Nunez, R. Lakoff, G.* **The cognitive foundations of mathematics - the role of conceptual metaphor**, Handbook of mathematical cognition, Psychology Press - New York 2005 (p. 109-124)

26. (STO) *Ottesen, S.T.* **Relating University Mathematics Teaching Practices and Students' Solution Processes,** IMFUFA, Department of Science, Systems and Models - Roskilde University

27. (LPSNJM) *Philips, L. Noris, S. Macnab, J.* **Visualization in Mathematics, Reading and Science Education** - Springer Dordrecht Heidelberg London New York, 2010

28. (КП2) *Попоски, К.* - **Современи сваќања за проверувањето и оценувањето на постигањата на учениците** - ППС "МИС", Скопје 1996

29. (КПЗС) *Попоски, К. Стојановски, З.* - **Тестови на знаење** - Просветно дело, Скопје 1995

30. (ВП) *Пољак, В.* **Програмирање, планирање и припремање за наставу** - Педагошки рад - Загреб, 1989

31. (BP) *Reding, V.* **Towards a learning society** - eLearning Conference for growth, jobs and an inclusive society - Brussels, 2005

32.(КС) *Симончев, К.* **Употреба на софтвер со отворен код во училиштата - концептуална стратегија**, Министерсво за образование и наука на РМ и УСАИД - Скопје, 2006

33.(МС1) *Сигала, М.* **Електронско учење: теорија и практика** - Скопје, 2003

34.(МС2) *Сигала, М.* **Користење на интернет заради подобрување и дополнување на наставата и учењето - развој на моделот за електронско учење** - Скопје, 2003

35.(KSEWJH) Scheiter, K Wiebe, E Holsanova, J **Theoretical and Instructional Aspects of Learning with Visualizations**, Cognitive Effects of Multimedia Learning – Information Science Reference IGI Global, Hershey 2009 (p.67-88)

36.(RS) *Sutherland, R* **Teaching for Learning Mathematics**, Open University Press - Maidenhead, 2007

37. (DjTID) *Takači Dj, Dimovski I.,* **Animations made in Matlab and their application for didactic purposes**, Croatian journal of education Vol. 13 (1/2011), pp. 99-137, ISSN 1846-1204 - Zagreb, 2011

38. (DjT1) *Takači Dj, Stojković R., Radovanovic J.,* **The influence of computer on examining trigonometric functions***,* Teaching Mathematics and Computer Science, 6/1, 111- 123, 2008, Debrecen, Hungary

39. (DjT2) *Takači, Đ., Herceg D., Stojković R.*, **Possibilities and limitati-ons of Scientific Workplace in studying trigonometric functions**, The Teaching of Mathematics,VIII_2 / 2006 стр. 61-72, Beograd.

40. (DjT3) *Takači, Dj., Pešić, D., J. Tatar*, **On the continuity of functions**, International Journal of Mathematical Education, Science and Technology, Taylor and Francis, Vol. 37,7 (2006), 783-791.

41. (DjT4) *Takači, Dj., Pešić, D.*, **The Continuity of Functions in Mathematical Education-Visualization method**, in Serbian, Nastava matematike (The Teaching of Mathematics), 49, 3-4, Beograd, 2004.
42. (DjT5) *Takači, Dj., Pešić, D., Tatar, J.*, **An introduction to the Continuity of functions using Scientific Workplace**, The Teaching of Mathematics, Vol. VI, 2, Belgrade, 105-112, 2003.
43. (GT) *Thomas, G.B. Weir, M.D. Hass, J. Giordano, F.R.* **Thomas' Calculus**, 11th edition - Addison Wesley, 2007
44. (ГТДД) *Tuparov, G. Dureva, D.* **One aproach for modeling of adaptive scenarios in e-learning environments**, Зборник на трудови од III конгрес на математичарите на Македонија - Скопје, 2005
45. (MKHGWB) *Heid, M.K Blume, G.W.* **Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics - Research Syntheses**, IAP-Information Age Publishing, 2008
46. (HCHKP1) *Hege, H-C Poltier, K .* **Visualization and mathematics: experiments, simulations, and environments**, Springer, 1997
47. (HCHKP2) *Hege, H-C Poltier, K .* **Visualization and mathematics III**, Springer, 2003
48. (JIDC) *Campbell, J. I.D.* **Handbook of mathematical cognition**, Psychology Press - New York 2005
49. (НЦ) *Целакоски, Н.* **Дидактика на математиката**, Нумерус - Скопје, 1993
50. (НШИД1) *Шекутковски, Н. Димовски, И.* **Математичка анализа за четврта година реформирано гимназиско образование - изборен предмет**, Просветно дело - Скопје 2008
51. (НШИД2) *Шекутковски, Н. Димовски, И.* **Конструкција на реалните броеви со помош на Дедекиндови пресеци на множеството од позитивни децимални броеви**, Зборник на трудови од IV конгрес на математичарите на Македонија - Скопје, 2008
52. (TJW) *van Weert, T.J.* **The impact of informatics on the teaching of mathematics.** Tinsley, D., Johnson, C.J. (Eds.) Information and Communications Technologies in School Mathematics, (pp.7-19). London: Chapman & Hall, 1998

Интернет ресурси

[1] www.e-ucitel.net
[2] http://www.mathworks.com/
[3] http://tesla.pmf.ni.ac.rs/people/nesiclj/predavanja/metodika/2008/2-2.pdf
[4] www.youtube.com
[5] www.geogebra.org
[6] http://e-ucitel.net/sums/Lower_sum.html
[7] http://e-ucitel.net/sums/Upper_sum.html
[8] http://e-ucitel.net/sums/mvt.html
[9] http://www.risc.jku.at/people/buchberg/white_box.html
[10] http://geonext.uni-bayreuth.de/index.php?id=2453
[11] http://www.ies.co.jp/math/
[12] http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/Main_Page
[13] http://www.educypedia.be/
[14] http://encarta.msn.com/
[15] http://www.britannica.com/
[16] http://wikipedia.org/
[17] http://www.scholarpedia.org/
[18] http://www.mathcentre.ac.uk/
[19] http://www.mathcentre.ac.uk/mlsc_links.php
[20] http://mathworld.wolfram.com/
[21] http://mathworld.wolfram.com/about/author.html
[22] http://www.wolframalpha.com
[23] http://en.wikipedia.org/wiki/Collaborative_learning
[24] http://en.wikipedia.org/wiki/E-learning
[25] http://www.cni.org/projects/netteach/1993/prop01.html
[26] http://en.wikipedia.org/wiki/Virtual_Learning_Environment
[27] http://en.wikipedia.org/wiki/Learning_management_system
[28] http://elearningtech.blogspot.com/2006/02/what-is-elearning-20.html
[29] http://www.learningcircuits.org/2007/0707karrer.html
[30] http://connect.educause.edu/Library/EDUCAUSE+Review/MindsonFireOpenEducationt/45823?time=1222739826
[31] http://www.erme.unito.it/CERME3/Groups/TG9/TG9_Lagrange_cerme3.pdf
[32] http://archives.math.utk.edu/ICTCM/VOL12/C021/paper.pdf

Кратка биографија

	**Игор** **Никола** **Димовски**
Адреса:	ул. „Трајко Сандански” 1-2/15 – Прилеп Република Македонија
Тел. **E-mail:**	(++ 389) 76-982-192 igor.jas@gmail.com
Датум и место рођења:	09.06.1973; Прилеп; Република Македонија
Држављанство:	Република Македонија
Образовање/Звања:	**2009** **МАГИСТАР МАТЕМАТИЧКОГ ОБРАЗОВАЊА** Универзитет "Св. Кирил и Методиј" Скопље, Природно-математички факултет Магистерски рада: ***Наставни програми, настава и учење математику у информациском друштву***. **1996** **Дипломирани професор математике** Универзитет "Св. Кирил и Методиј" Скопље, Природно-математички факултет Дипломски рад: ***Групе и геометрије***.

Радно искуство:	2009 - данас: Универзитет за информационе науке и технологије у Охриду, сарадник - асистент у области математике 2007 - данас: Микросам академија - истраживачки рад (примена математике у роботици), предавања из области: “Линеарна алгебра и компјутерска геометрија”, “Дизајнирање алгоритама”, “Нумеричка анализа”, "Компјутерска графика и геометриско моделирање" 2004 - 2009 : Гимназија „Мирче Ацев” - Прилеп; професор математике, математичке анализе и линеарне алгебре са аналитчком геометријом 2003-2004: Гимназија „Мирче Ацев” - Прилеп; професор математике, алгебре и линеарне алгебре са аналитичком геометријом 2001-2003: Гимназија „Мирче Ацев” - Прилеп; координатор реформираног гимназиског образовања и професор математике и елементарне алгебре 2000-2001: Гимназија „Мирче Ацев” - Прилеп; професор математике и нацртне геометрије 1998-2000: Гимназија „Мирче Ацев” - Прилеп и ДСЕМУ „Ристе Ристески-Ричко” - Прилеп; професор математике 1996-1998: Гимназија „Мирче Ацев” - Прилеп и УЦ „Орде Чопела” - Прилеп; професор математике 1996-1996: Гимназија „Наум Наумоски - Борче” - Крушево; професор математике
Посебна достигнућа, курсеви, семинари, награде, признања	Члан уређивачког одбора популарног математичког часописа “Нумерус”, 2006-2011; Члан редакцијског одбора математичког часописа „Сигма” - стручни сарадник, 2002-2004, 2009-2011; Члан Управног одбора СММ (Савеза Математичара Македоније), 2004-2011; *Постизања у откривању и раду со талентираним ученицима* Ментор 6 ученика који су учествовали на Интернационалним математичким олимпијадама. Бронзана медаља на Интернационалној математичкој олимпијади 2002 (ученик Весна Стојаноска). Златна медаља на Македонску математичку олимпијаду, бронзана медаља на Балканску математичку олимпијаду, бронзана медаља на Јуниорску математичку олимпијаду. Ментор ученицима који су 8 пута (од којих 6 пута узастопно, 1999-2004 и 2007, 2008) освојили прве награде на Смотрима младих истраживача из Р.Македоније - Народна техника Р. Македонија. Тим лидер македонског тима на меѓународном такмичењу из области математике, астрономије и компјутерских наука „Кванта 2004” у највећој школи у свету - Лакноу, Индија – новембар, 2004. Ментор македонског тима на Regional contest for young talents in natural sciences, Sofia - july 2008.

	Признање Савеза математичара и информатичара Македоније, Охрид - 2000 Признање за постизање истакнутих резултата у откривању и припреме надарених младх за учество на „Смотри младих истраживача из Р. Македоније” - Народна техника Р. Македонија, Савез организација покрета „Наука младима”, Скопље, 1998, 2007, 2008, 2009 *Постизања у настави, методици и образовању:* Аутор индивидуалног рада „Могућности и специфичности примене поединих типова наставе у математци”, објављена на интернет страници www.geocities.com/mathclub_pp; Активно учество на семинаре за наставу математике и семинаре за менаџмент у реформираном гимназиском образовању, организираних од Бироа за развој образовања Р. Македоније; Радионица за професионално усавршавање, у функцији обучивача наставника за “Примену ЕДУБУНТУ-а, образовног софтвера, у настави” - ФОН универзитет - фебруар 2009 Successful delivery of training for Secondary School Teachers in "Integration of ICT into the Curriculum", USAID - 2006; Завршена обука за “Професионални развој и интеграцију информатичке технологије у наставати”, USAID - 2005; Израђен пројект применом информатичке технологије у проектном учењу и повезивање са заедницом, USAID - 2005; Successful completion of the Professional Development Program "The E-School.mk - World Links ICT - Project Learning Workshop", USAID - 2004; Учество на конференцији „*Иновирање матурског испита у средњим школама*” у функцији претставника професора математике из средњих школа, Охрид 19-20.11.2002; Учество у пројекту „Креативна настава и критичко мишљење”, компонента „Читањем и писањем до критичког мишљења” у организацији ФИООМ - 2003
Познавање странских језика и информатичких технологија	Енглески језик активно познавање; Српски језик активно познавање; Microsoft Office - одлично познавање и искуство Matlab, Matematica, Cabri, Geonext, GeoGebra и друге апликации намењене за математику - одлично познавање и практично искуство са практичном применом у настави Desktop publishing - одлично познавање и искуство Internet - одлично познавање и искуство Multimedia - теориско познавање Базе података - одлично познавање и искуство Програмирање - солидне вештине и познавање Дизајнирање алгоритма - одлично познавање, искуство и истраживачки рад

Библиографија - публикације, радови и конференције	**I. Књиге** **Димовски, И.** Малчески, Р. Малческа, Ц. "*Праћење, проверивање и оцењивање достигнућа ученика*" Универзитет ФОН - Скопље, 2010; Шекутковски, Н. **Димовски, И.** "*Математичка анализа за четврту годину реформираног гимназиског образовања*" Просветно Дело АД - Скопље, 2008 (званични уџбеник); Петрушев, М. **Димовски, И.** "*Приручник математике за трећу годину реформираног гимназиског образовања*", Издање аутора - Скопље, 2003 ; **Димовски, И.** "*Математика за прву годину реформираног гимназиског образовања*", Табернакул - Скопље, 2002 (званични уџбеник); **II. Радови и конференције** Такачи, Ђ. **Димовски, И.** "*Animations made in Matlab and their application for didactic purposes*", Croatian journal of education Vol. 13 (1/2011), pp. 99-137, ISSN 1846-1204 - Zagreb, 2011 **Dimovski, I.** Trifunov, Z. "*Vector-valued functions and GeoGebra*", International GeoGebra Conference for Southeast Europe - Novi Sad, 2011 Donevska-Todorovska, A. **Dimovski, I.** "*Future Perspectives for Academic Careers of Gifted Students for Mathematics in the Republic of Macedonia*" - MICOM - International Congress on Mathematics - Ohrid, 2009 **Димовски, И.** "Настава, поучавање и учење математике у информацијском друштву" - Магистерска теза, Униврзитет "Св. Кирил и Методиј" Природно-математички факултет - Скопље, 2009, Sekutkovski, **N. Dimovski, I.** "*Construction of real numbers set with Dedekind cut of the set of finite decimal numbers*" IV Congress of Mathematicians of Macedonia - Struga, 2008; **Dimovski, I.** "*RSA cryptosystem - motivational application of number theory in algebra high school education*" IV Congress of Mathematicians of Macedonia - Struga, 2008; **Димовски, И.** "*Број делитеља*", "Нумерус" - часопис за популаризацију математике - за ученике основних школа, Nr XXXII-4 - Скопље, 2007; **Димовски, И.** "*Швејков проблем*", математички часопис "Сигма" Nr 72 - Скопље, 2006; **Димовски, И.** "*Веза биномних коефицијената и пермутације са понављањем*", математички часопис "Сигма" Nr 71 - Скопље 2006;

	Manova-Erakovic, V. Trifunov, Z. **Dimovski, I.** Markoska, J. Markoski, G. "*Macedonian educational system with criteria of comparative education from aspect of mathematics*", "Proceedings of III Congress of Mathematicians of Macedonia" Struga 2005; Trifunov, Z. **Dimovski, I.** Markoska, J. "*Educational standards about criteria for evaluation the student' achievement in the mathematics education*" "Proceedings of III Congress of Mathematicians of Macedonia" Struga 2005; **Димовски, И.** "*Неограниченост низа савршених и низа простих бројева*", математички часопис "Сигма" Nr 57 - Скопље, 2002; **Димовски, И.** "*Дезаргов теорем*", математички часопис "Сигма" Nr 53 - Скопље, 2001;

Нови Сад,
Октобар, 2011

мр Игор Димовски
____

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:

Идентификациони број:

ИБР

Тип документације: Монографска документација

ТД

Тип записа: Текстуални штампани материјал

ТЗ

Врста рада: Докторска дисертација

ВР

Аутор: мр Игор Димовски

АУ

Ментор: Професор др Ђурђица Такачи

МН

Наслов рада: Утицај информационе технологије на квалитет знања везаних за функције

МР

Језик публикације: Српски (ћирилица)

ЈП

Језике извода: Српски/Енглески

ЈИ

Земља публиковања: Република Србија

ЗП

Уже географско подручје: Војводина

УГП

Година: 2011

ГО

Издавач: Ауторски репринт

ИЗ

Место и адреса: Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет, Департман за математику и информатику, Трг Доситеја обрадовића 4

МА

Физички опис рада: (број поглавља, број страна, број лит. цитата, број табела, број слика, број графика, број прилога)

(6, 144, 84, 16, 39, 14, 4)

ФО

Научна област: Математика

НО

Научна дисциплина: Методика наставе математике

НД

Кључне речи: Функције; Информационе технологије; 3D визуелизација; Есенцијално математичко знање; Математичко мишљење; Утицај; Мерење утицаја.

ПО

УДК:

Чува се: Библиотека Департмана за математику и информатику, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду

ЧУ

Важна напомена:

ВН

Извод: У докторској дисертацији је презентирано свеобухватно педагошко истраживање које се односи на наставу математике на терцијарном, универзитетском нивоу. Израђени едукативни материјали у електронском формату, користећи програмског пакета Matlab, интегрисани су у настави. Статистички је истраживан утицај примене ИКТ на есенцијална знања која се односе на функције више променљивих, векторских функција и тродимензионалну аналитичку геометрију, интензивним коришћењем 3D статичке и динамичке визуелизациске алатке. Део студената укључене у истраживању су самостално израђивали Matlab програме. Један део истраживање је фокусиран на могуће утицаје вештине програмирања на учење математичких концепата.

ИЗ

Датум прихватања теме од стране НН већа: 25.11.2010

ДП

Датум одбране:

ДО

Чланови комисије:

КО

Председник:

Члан:

Члан:

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF SCIENCE

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Content Code: PhD Dissertation

CC

Author: Igor Dimovski, MSc

AU

Mentor: Đurđica Takači, PhD

MN

Title: Impact of information technology on the quality of knowledge related to the functions

XI

Language of text: Serbian (cyrillic)

LT

Language of abstract: Serbian/English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2011

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: University of Novi Sad, Faculty of Science, Department of mathematics and informatics, Trg Dositeja Obradovica 4

PP

Physical description: (chapters/pages/literature/tables/graphs/appendices)

(6, 144, 84, 16, 39, 14, 4)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Mathematics education

SD

Key words: Functions; Information technology; 3D visualization; essential mathematical knowledge; Mathematical thinking; Impact; Impact measurement.

KW

Holding data: Library of Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad

HD

Note:

Abstract: A comprehensive pedagogical research regarding teaching mathematics at a tertiary, university level has been presented in the PhD dissertation. The educational resources tailored in an electronic form using the programme package Matlab are integrated in the learning process. The impact of ICT use to the essential knowledge that refers to multivariate calculus (functions of several variables, vector-valued functions and the three-dimensional analytical geometry) has been statistically explored by intensive use of 3D static and dynamic visual tools. Part of the students who have participated in the research have developed Matlab programmes all by their own. One part of the research has been focused on probable impact of the programming skills on learning mathematical concepts.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 25.11.2010

Defended:

Thesis defend board:

President:

Member:

Member: