УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Д-р ТАТОМИР П. АНЂЕЛИЋ

ОСНОВИ
МЕХАНИКЕ НЕПРЕКИДНИХ СРЕДИНА

Научна књига

ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
БЕОГРАД, 1950

САДРЖАЈ

УВОД

I. ДЕФОРМАЦИЈЕ И НАПОНИ У НЕПРЕКИДНОЈ СРЕДИНИ

II. ТЕОРИЈА ЕЛАСТИЧНОСТИ

III. ХИДРОМЕХАНИКА

ПРЕДГОВОР

Овај уџбеник се заснива на мојим предавањима из „механике непрекидних средина" на Природно-математичком факултету Универзитета у Београду. Садржај му је ограничен и одређен углавном за један кратак курс. Обрада је изведена векторском методом. Иако овај начин обраде није више редак, ипак је још врло често случај да су уџбеници ове врсте писани неком мешовитом методом, а опширна модерна дела користе и општу теорију тензора. Ја сам се трудио са своје стране да основни материјал теорије еластичности и хидромеханике изложим што је могуће јединственије, а употребио сам у излагању поред основа теорије вектора и математичке анализе само још теорију афинора. Стога, да бих књигу учинио што потпунијом додао сам у Уводу у кратким потезима основе теорије афинора.

У коректурама су ми помагали инж. М. Врeчко и студ. физике Марко Леко на чему сам им врло захвалан.

Издавачко предузеће „Научна књига" а нарочито колектив његове штампарије учинили су са своје стране све да књига буде што боље опремљена.

Писац

УВОД

1. Дијада

Ако посматрамо израз

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}), \tag{1}$$

видимо да имамо посла са две операције: са скаларним производом два вектора $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ и затим са производом тог скалара и вектора $\mathfrak{a}$. Као резултат увек добијамо неки вектор колинеаран вектору $\mathfrak{a}$, без обзира на вредности вектора $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$.

Поставимо сад ово питање. Како треба протумачити израз

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}, \tag{2}$$

ако желимо, како овај израз показује, прво векторе $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ да обухватимо неком операцијом, али да крајњи резултат има исто значење као и резултат израза (1), тј. да буде

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}). \tag{3}$$

У том случају простим размишљањем долазимо одмах до закључка да израз $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ *не може одређивати ни скалар ни вектор.*

Овај нарочити нови израз $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$, дефинисан једначином (3) зове се обично *дијада*, јер га образују два вектора. Вектори дијаде се обично пишу један крај другог без икаквих других знакова, а саме дијаде ћемо обележавати великим грчким словима, на пр.,

$$\Phi = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}. \tag{4}$$

Вектор $\mathfrak{a}$, први или леви вектор дијаде, зове се *претходни вектор* дијаде или *антецедент* дијаде, а вектор $\mathfrak{b}$, други или десни, зове се *наредни вектор* дијаде или *консеквент* дијаде.

Да бисмо утврдили природу дијада и нашли услове за њихову једнакост, уочимо неки произвољни орт $\mathfrak{e}$ и две дијаде $\Phi = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ и $\Psi = \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$. На основу дефиниције (3) треба за једнаке дијаде да буду испуњени услови

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{e} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{e} \quad \text{и} \quad \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}. \tag{5}$$

Из прве од ових једначина, међутим, добијамо

$$\mathfrak{a}_0\, ab \cos(\mathfrak{b}, \mathfrak{e}) = \mathfrak{A}_0\, AB \cos(\mathfrak{B}, \mathfrak{e}),$$

а из друге

$$\mathfrak{b}_0\, ab \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{e}) = \mathfrak{B}_0\, AB \cos(\mathfrak{A}, \mathfrak{e}),$$

одакле је јасно да су дијаде Φ и Ψ једнаке, ако су задовољени ови услови:

1) Претходни вектори за себе и наредни вектори за себе обе дијаде морају бити колинеарни; и то оба та пара вектора морају бити или истог или супротног смера, тј.

$$\mathfrak{a}_0 = \varepsilon \mathfrak{A}_0 \quad \text{и} \quad \mathfrak{b}_0 = \varepsilon \mathfrak{B}_0, \tag{6}$$

где је $\varepsilon = \pm 1$.

2) Производ интензитета ab вектора једне дијаде мора бити једнак производу интензитета AB вектора друге дијаде, дакле

$$ab = AB. \tag{7}$$

То значи да је дијада потпуно одређена познавањем ортова претходног и наредног вектора и производом њихових интензитета, тј. са *пет* бројева. Познавање интензитета сваког од вектора дијаде посебно није потребно.

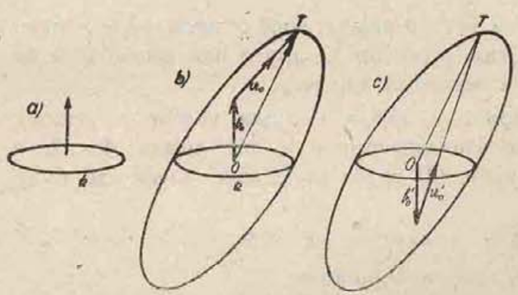
Производ интензитета вектора неке дијаде зове се ***коефицијент дијаде*** и он је увек позитиван.

Дијада се може претставити и геометриски. Како се то изводи показао је Билимовић („Геометриске основе рачуна са дијадама"). Наиме, ако се пође од чињенице да је за познавање дијаде потребно познавати ортове оба вектора дијаде и њен коефицијент, може се помоћу тих података на потпуно одређени начин конструисати оријентисани модел елипсоида. Под моделом елипсоида разуме се неки елипсоид облика заједничког елипсоидима разних величина. На пр., сви елипсоиди чије су главне осе у истом односу једнаког су облика и један ма који од њих може се сматрати као модел облика свих могућих елипсоида са тим односом главних оса.

Уочимо, на пр., дијаду

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = ab\,(\mathfrak{a}_0 \mathfrak{b}_0).$$

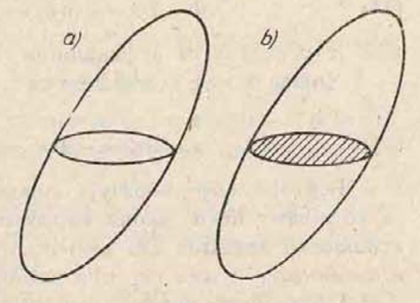
Конструишимо, прво, орт $\mathfrak{b}_0$ наредног вектора дијаде са почетком у ма којој тачки O простора и круг k јединичног полупречника чија је раван управна на $\mathfrak{b}_0$ а центар у тачки O (сл. 1, a). Кад се на крај орта $\mathfrak{b}_0$ надовеже вектор $ab\,\mathfrak{a}_0$, добићемо тачку T (сл. 1, b). Ако сад јединични круг k узмемо за кружни пресек неког елипсоида чији је центар у O, а дуж OT за односни конјуговани дијаметар, може се, како је познато из геометрије, конструисати елипсоид одређеног облика и положаја главних оса. Положај његовог центра O и његова величина (избор јединице) произвољни су. У вези са тим јасно је да се конструисани елипсоид може сматрати као модел одређеног облика и утврђене оријентације. Да је оријентација оваквог модела од битног значаја најбоље се увиђа на овај начин. Уочимо у тачки O као кружни пресек онај круг који



Сл. 1

је одређен ортом $\mathfrak{b}_0'$ супротним орту $\mathfrak{b}_0$, али да надовезивањем вектора $a'\,b'\,\mathfrak{a}_0'$ долазимо до исте тачке T, па да поново са другим подацима долазимо до истог кружног пресека и

истог му конјугованог дијаметра као у претходном случају (сл. 1, c). Овај ће елипсоид бити исти модел али очигледно друге оријентације. Разликовање једног и другог модела — њихово оријентисање — може се извршити најпростије на тај начин, што ћемо при цртању елипсоида нацртати и његов основни кружни пресек. Тај кружни пресек остављаћемо у случају који одговара сл. 1, b неосенчен и модел те оријентације звати „бели" модел (сл. 2, a). Напротив, у случају који одговара сл. 1, c тај кружни пресек треба осенчити и модел те оријентације се зове „црни" модел (сл. 2, b).



Сл. 2

Обрнуто, кад је дат оријентисани модел елипсоида, односна дијада је одређена. Јасно је, како се, на пр., у случају „белог" модела одређује орт претходног и наредног вектора као и коефицијент дијаде. Како у таквим случајевима треба поступати, може се одмах прочитати упоређивањем слика 1, b и 2, a, одн. сл. 1, c и 2, b које једна другој одговарају.

Из наведених разлога дијада се не мења, ако се један њен вектор помножи а други подели истим бројем, јер се тада коефицијент дијаде не мења, а у случају промене оријентације код оба вектора дијада остаје непромењена. Дакле

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (m\,\mathfrak{a})\left(\frac{1}{m}\,\mathfrak{b}\right), \tag{8}$$

где је m ма који број.

Ако су вектори обе дијаде Φ и Ψ дати својим Декартовим правоуглим координатама, тј.

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \{a_1\ a_2\ a_3\}; & \mathfrak{A} &= \{A_1\ A_2\ A_3\}, \\ \mathfrak{b} &= \{b_1\ b_2\ b_3\}; & \mathfrak{B} &= \{B_1\ B_2\ B_3\}, \end{aligned} \tag{9}$$

могу се услови за једнакост ове две дијаде изразити у скаларном облику помоћу координата вектора. У том случају услов (6) може се написати у облику

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{A_1} &= \frac{a_2}{A_2} = \frac{a_3}{A_3} = \lambda \\ \frac{b_1}{B_1} &= \frac{b_2}{B_2} = \frac{b_3}{B_3} = \mu, \end{aligned} \tag{10}$$

при чему је

$$\lambda\mu > 0.$$

Услов (7) остаје у суштини непромењен.

Из дефиниције дијаде јасно је и то да се дијада може сматрати као једнака нули само, ако је бар један од вектора дијаде једнак нули.

Помножити неку дијаду скаларом значи помножити тим скаларом претходни или наредни вектор дијаде, тј.

$$\lambda \Phi = \Phi \lambda = \lambda (\mathfrak{a} \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a} \mathfrak{b}) \lambda = (\lambda \mathfrak{a}) \mathfrak{b} = \mathfrak{a} (\lambda \mathfrak{b}), \tag{11}$$

што је у складу са дефиницијом дијаде.

Дијада $\Phi = \mathfrak{a} \mathfrak{b}$ помножена са -1 даје *негативну дијаду* што се пише $-\Phi$, тј.

$$(-1) \Phi = -\Phi = -\mathfrak{a} \mathfrak{b} = (-\mathfrak{a}) \mathfrak{b} = \mathfrak{a} (-\mathfrak{b}). \tag{12}$$

Вектори који образују дијаду везани су међу собом операцијом за коју важе неки закони множења бројева те се стога дијада назива и *дијадски производ* два вектора. Њен претходни вектор се зове стога и *префактор*, а њен наредни вектор и *постфактор*.

Одмах ћемо видети, које су то алгебарске особине дијаде.

Прво, малочас смо видели да је дијада једнака нули само, кад је један од чинилаца једнак нули. Из дефиниције се, пак, види да комутативни закон у општем случају за дијадско множење не важи. За дијадски производ комутативни закон важи само, ако су претходни и наредни вектор колинеарни. То значи, да се променом места векторима дијаде добија у општем случају нова дијада $\mathfrak{b} \mathfrak{a}$ која је првој *коњугована*. Та коњугованост је узајамна, а бележи се обично цртицом изнад првобитне дијаде, дакле

$$\overline{\Phi} = \mathfrak{b} \mathfrak{a} \quad \text{и} \quad \overline{(\overline{\Phi})} = \mathfrak{a} \mathfrak{b}. \tag{13}$$

О асоцијативном закону дијадског множења не може се уопште говорити, пошто имамо само два чиниоца. Ако, међутим, поред два вектора у дијадском производу има још скаларних чинилаца, тада је из претходних излагања јасно да асоцијативни закон важи.

Најзад питање важења дистрибутивног закона решава се на овај начин.

Нека буду дате две дијаде

$$\Phi_1 = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \quad \text{и} \quad \Phi_2 = \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 \tag{14}$$

и нека оне имају бар један пар колинеарних вектора, било претходне било наредне, на пр. само наредне

$$\mathfrak{b}_2 = \lambda \mathfrak{b}_1. \tag{15}$$

Ако се посматра израз

$$\mathfrak{a}_1 (\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{e}) + \mathfrak{a}_2 (\mathfrak{b}_2 \cdot \mathfrak{e}),$$

где је $\mathfrak{e}$ неки орт, који се може написати и у облику

$$(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1) \cdot \mathfrak{e} + (\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2) \cdot \mathfrak{e}$$

и по дефиницији уведемо да је

$$(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1) \cdot \mathfrak{e} + (\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2) \cdot \mathfrak{e} = (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2) \cdot \mathfrak{e}, \tag{16}$$

може се израз

$$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 \tag{17}$$

који претставља назначени збир две дијаде, написати на овај начин

$$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 + \lambda \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_1 = (\mathfrak{a}_1 + \lambda \mathfrak{a}_2) \mathfrak{b}_1, \tag{18}$$

а да се не дође у сукоб са већ уведеним дефиницијама. То значи, може се збир две дијаде са колинеарним члановима свести на једну дијаду.

Из ових излагања се види да ми уводимо важење дистрибутивног закона за дијадски производ два вектора по дефиницији, али у сагласности са раније уведеним дефиницијама

Сличним поступком може се уопште збир од n дијада, које имају све претходне или наредне векторе колинеарне, или и једне и друге, свести на једну дијаду — може се сабрати. При томе је јасно да све што је речено за сабирање у ствари важи за алгебарско сабирање, те се, према томе односи и на одузимање дијада са колинеарним претходним или наредним векторима.

Збир две или више дијада које немају колинеарних чланова не може се свести на једну дијаду. Видећемо мало касније да такав збир дефинише неку још сложенију величину.

Важење наведених закона множења за дијадски производ показује да се линеарне комбинације вектора могу и дијадски множити, ако се само води рачуна о реду чинилаца. Са друге стране ово показује да се свака дијада може раставити на произвољан број дијада сабирака са колинеарним било претходним било наредним векторима.

Дијада се може изразити и помоћу Декартових правоуглих координата својих вектора. У том циљу ћемо њене векторе $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ раставити у компоненте, тј.

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= a_1 \mathfrak{i} + a_2 \mathfrak{j} + a_3 \mathfrak{k}, \\ \mathfrak{b} &= b_1 \mathfrak{i} + b_2 \mathfrak{j} + b_3 \mathfrak{k}. \end{aligned} \tag{19}$$

Тако изражене векторе измножићемо дијадски на основу дистрибутивног закона, па ћемо добити

$$\begin{aligned} \Phi = \mathfrak{a} \mathfrak{b} &= (a_1 \mathfrak{i} + a_2 \mathfrak{j} + a_3 \mathfrak{k}) (b_1 \mathfrak{i} + b_2 \mathfrak{j} + b_3 \mathfrak{k}) = \\ &= a_1 b_1 (\mathfrak{i} \mathfrak{i}) + a_1 b_2 (\mathfrak{i} \mathfrak{j}) + a_1 b_3 (\mathfrak{i} \mathfrak{k}) + \\ &+ a_2 b_1 (\mathfrak{j} \mathfrak{i}) + a_2 b_2 (\mathfrak{j} \mathfrak{j}) + a_2 b_3 (\mathfrak{j} \mathfrak{k}) + \\ &+ a_3 b_1 (\mathfrak{k} \mathfrak{i}) + a_3 b_2 (\mathfrak{k} \mathfrak{j}) + a_3 b_3 (\mathfrak{k} \mathfrak{k}). \end{aligned} \tag{20}$$

У овом изразу јављају се дијаде образоване од ортова оса Декартова правоуглог триједра, тј. $\mathfrak{i} \mathfrak{i}$, $\mathfrak{j} \mathfrak{j}$, ... Њих ћемо звати *основне координатне дијаде* Декартова правоуглог триједра. Ако се договоримо да број 1 одговара орту $\mathfrak{i}$, број 2 орту $\mathfrak{j}$ и број 3 орту $\mathfrak{k}$, може се свака основна координатна дијада кратко означити са два индекса, где први одговара претходном, а други наредном орту координатне дијаде. На пр.

(21) $$\Phi_{11} = \mathfrak{i}\mathfrak{i}, \quad \Phi_{23} = \mathfrak{j}\mathfrak{k} \ldots$$

Ставимо ли још

(22) $$a_i\, b_j = \alpha_{ij}$$

може се (20) изразити у облику

(23) $$\begin{aligned}\Phi = \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \alpha_{11}\,\Phi_{11} + \alpha_{12}\,\Phi_{12} + \alpha_{13}\,\Phi_{13} + \\ + \alpha_{21}\,\Phi_{21} + \alpha_{22}\,\Phi_{22} + \alpha_{23}\,\Phi_{23} + \\ + \alpha_{31}\,\Phi_{31} + \alpha_{32}\,\Phi_{32} + \alpha_{33}\,\Phi_{33}\end{aligned}$$

и најзад

(24) $$\Phi = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\,\Phi_{ij}.$$

Из једначина (20) и (23) очигледно је да се две дијаде могу једна од друге разликовати само коефицијентима уз основне координатне дијаде, које остају непромењене и свака на свом одређеном месту у свакој дијади израженој помоћу Декартових правоуглих координата. Ти коефицијенти се зову ***координате*** дијаде. Отуда се може закључити да је дијада одређена таблицом коефицијената, на пр. у изразу (23), што се пише и овако

(25) $$\Phi = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Bmatrix}.$$

Овакве таблице бројева чија је особина да сваки број у њој има своје одређено место које се не може мењати, које су, дакле, прецизно уређене и слева на десно и одозго наниже, зову се у математици ***матрице***. Поједини бројеви у њој зову се њени ***елементи***.

Имали смо већ посла са матрицама. И три уређена броја — координате вектора образују матрицу; за разлику од тих матрица, матрица која одређује дијаду ***квадратна*** је.

Знамо да је за одређивање дијаде потребно пет бројева, међутим, посматрањем матрице (25) изгледа да је за одређивање таблице коефицијената те дијаде потребно девет бројева. У ствари од тих девет бројева има само пет независних, јер су с обзиром на једначине (20) и (22) врсте и колоне матрице (25) пропорционалне, па треба знати само елементе једне врсте и два фактора пропорционалности.

2. Операције са дијадама

Поред већ уведених операција са дијадама, множења дијаде скаларом, сабирања и одузимања дијада са колинеарним члановима, дефинише се још читав низ операција. Навешћемо само неке важније од тих операција које се употребљују у даљем излагању.

Једначина

(1) $$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}),$$

помоћу које смо у претходном параграфу дефинисали дијаде, служи и као дефиниција тзв. ***скаларног производа*** дијаде $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ и вектора $\mathfrak{c}$ здесна. Она показује да је тако дефинисани скаларни производ дијаде и вектора — вектор.

Ако, на исти начин, дијаду $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ помножимо истим вектором слева добићемо

(2) $$\mathfrak{c} \cdot (\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a})\,\mathfrak{b},$$

одакле је јасно да за скаларно множење дијаде и вектора у општем случају не важи комутативни закон. Поступак одређивања скаларног производа дијаде и вектора јасан је из самих једначина које га дефинишу. Увек треба дати вектор помножити скаларно са суседним вектором дијаде, па тај скалар помножити оним другим вектором дијаде да би се добио дефинитивни резултат.

Увек је тачно правило

(3) $$\Phi \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{r} \cdot \overline{\Phi},$$

које уопште није потребно доказивати, јер је непосредна последица дефиниције.

Асоцијативни закон важи, ако поред дијаде и вектора има у производу и неких скаларних чинилаца, на пр.

(4) $$(\lambda\,\Phi) \cdot \mathfrak{c} = \Phi \cdot (\lambda\,\mathfrak{c}) = \lambda\,(\Phi \cdot \mathfrak{c}).$$

Дистрибутивни закон такође важи.

Ако уочимо дијаду $\Phi = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ и нека два вектора $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{d}$, тада израз

(5) $$\mathfrak{c} \times (\Phi \cdot \mathfrak{d})$$

захтева извођење само познатих операција, јер треба извршити прво скаларно множење дијаде и вектора у загради, што даје вектор, па тај вектор помножити векторски вектором $\mathfrak{c}$. Захтевамо ли сад да у изразу (5) скаларно и векторско множење буде асоцијативно, тј. да буде

(6) $$\mathfrak{c} \times (\Phi \cdot \mathfrak{d}) = (\mathfrak{c} \times \Phi) \cdot \mathfrak{d}$$

морамо дефинисати операцију $\mathfrak{c} \times \Phi$. Ову операцију зваћемо ***векторски производ*** дијаде и вектора слева.

Ако се израз на левој страни једначине (6) развије и напише

$$\mathfrak{c}\times(\Phi\cdot\mathfrak{d})=\mathfrak{c}\times[\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{d})]=(\mathfrak{c}\times\mathfrak{a})(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{d})=[(\mathfrak{c}\times\mathfrak{a})\mathfrak{b}]\cdot\mathfrak{d},$$

види се да ће захтевани услов бити задовољен, кад се векторски производ дијаде и вектора слева дефинише једначином

$$\mathfrak{c}\times\Phi=\mathfrak{c}\times(\mathfrak{a}\mathfrak{b})=(\mathfrak{c}\times\mathfrak{a})\mathfrak{b}. \tag{7}$$

На потпуно исти начин, ако пођемо од услова

$$(\mathfrak{d}\cdot\Phi)\times\mathfrak{c}=\mathfrak{d}\cdot(\Phi\times\mathfrak{c}) \tag{8}$$

долазимо до једначине

$$\Phi\times\mathfrak{c}=(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}=\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}), \tag{9}$$

која дефинише векторско множење дијаде и вектора здесна.

Према томе, помножити дијаду векторски слева или здесна значи: суседни вектор дијаде помножити векторски датим вектором па образовати дијаду са другим вектором дијаде.

Производ две дијаде може се дефинисати на разне начине. Од више могућности задржаћемо се само на два таква производа који су непосредно потребни у наредним излагањима.

Нека буду дате две дијаде $\Phi=\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ и $\Psi=\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ и неки орт $\mathfrak{e}$ па се образује израз

$$(\mathfrak{e}\cdot\Phi)\cdot\Psi. \tag{10}$$

Све операције наведене у овом изразу, извршене у прописаном реду, већ су познате и могу се извести. Међутим, ако поставимо као захтев да у изразу (10) скаларно множење вектора $\mathfrak{e}$ и дијаде Φ буде асоцијативно са производом дијада $\Phi\cdot\Psi$ тј. да буде

$$(\mathfrak{e}\cdot\Phi)\cdot\Psi=\mathfrak{e}\cdot(\Phi\cdot\Psi), \tag{11}$$

добићемо дефиницију тзв. *скаларног производа* две дијаде Φ и Ψ који се пише

$$\Phi\cdot\Psi.$$

Ако се већ познате операције на левој страни једначине (11) изврше, може се написати

$$(\mathfrak{e}\cdot\Phi)\cdot\Psi=[(\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{a})\mathfrak{b}]\cdot(\mathfrak{c}\mathfrak{d})=(\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{a})(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})\mathfrak{d}=\mathfrak{e}\cdot[(\mathfrak{a}\mathfrak{d})(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})].$$

То значи, да ће услов (11) бити задовољен, кад се скаларни производ две дијаде дефинише једначином

$$\Phi\cdot\Psi=(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{c}\mathfrak{d})=(\mathfrak{a}\mathfrak{d})(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}). \tag{12}$$

На исти се начин добија и

$$\Psi\cdot\Phi=(\mathfrak{c}\mathfrak{b})(\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{a}) \tag{13}$$

Према томе, скаларни производ две дијаде је нова дијада која се добија, кад се дијадски производ претходног вектора прве дијаде и наредног вектора друге дијаде помножи скаларним производом наредног вектора прве дијаде и претходног вектора друге дијаде.

Из саме дефиниције видимо да за ово множење дијада у општем случају не важи комутативни закон. Скаларни производ две дијаде може бити једнак нули и кад ниједна од дијада није нула.

За скаларни производ основних координатних дијада Декартова правоуглог триједра $\Phi_{ij}\ (i, j=1, 2, 3)$ лако се долази до наредног правила

$$\Phi_{ij}\cdot\Phi_{kl}\begin{cases}=\Phi_{il}, & \text{за } j=k,\\ =0, & \text{за } j\neq k.\end{cases} \tag{14}$$

Ако су вектори обе дијаде дати својим Декартовим правоуглим координатама и ако се стави

$$a_i\,b_j=\alpha_{ij};\quad c_i\,d_j=\beta_{ij}\qquad (i, j=1, 2, 3) \tag{15}$$

може се дијада

$$\Theta=\Phi\cdot\Psi \tag{16}$$

претставити помоћу матрице

$$\Theta=\begin{Bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23}\\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33}\end{Bmatrix}, \tag{17}$$

где је, на пр.,

$$\gamma_{11}=\alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21}+\alpha_{13}\beta_{31},$$

и уопште

$$\gamma_{ij}=\sum_{k=1}^{3}\alpha_{ik}\,\beta_{kj}\qquad (i, j=1, 2, 3) \tag{18}$$

што поступним израчунавањем, према дефиницији, можемо потврдити.

Како је скаларни производ две дијаде опет дијада може се образовати скаларни производ произвољног броја дијада као чинилаца, па према томе, и *степен* дијаде. При томе важи асоцијативни закон множења.

Поред скаларног производа двеју дијада дефинише се и врло често користи још један производ двеју дијада. Тај други производ зваћемо *бискаларни производ* двеју дијада, обележаваћемо га са две тачке и дефинисати једначином

$$\Phi\cdot\cdot\Psi=(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\cdot\cdot(\mathfrak{c}\mathfrak{d})=(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c})(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{d}), \tag{19}$$

где је $\Phi=\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ и $\Psi=\mathfrak{c}\mathfrak{d}$.

Дакле, бискаларни производ двеју дијада је скалар и образује се на тај начин што се посебно образују скаларни производи претходних и наредних вектора обе дијаде у питању и та два скалара помноже. То је уједно и разлог за назив таквог множења.

Из саме дефиниције је јасно да је ово множење дијада комутативно, тј.

$$\Phi\cdot\cdot\Psi=\Psi\cdot\cdot\Phi. \tag{20}$$

Осим тога, исто тако је очигледно да, ако се образују конјуговане дијаде од оба чиниоца, тј. $\overline{\Phi}$ и $\overline{\Psi}$ и оне помноже бискаларно, добијамо исти резултат, јер је

$$\overline{\Phi}\cdot\cdot\overline{\Psi}=(\mathfrak{b}\,\mathfrak{a})\cdot\cdot(\mathfrak{d}\,\mathfrak{c})=(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{d})(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c})=\Phi\cdot\cdot\Psi. \tag{21}$$

3. Афинор

Уочимо неке три дијаде

$$\Phi_1=\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1,\quad \Phi_2=\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}_2,\quad \Phi_3=\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{b}_3. \tag{1}$$

Јасно је, како смо већ рекли, да се збир ове три дијаде, тј.

$$\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1+\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}_2+\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{b}_3, \tag{2}$$

ако су им било претходни било наредни вектори колинеарни, може свести на само једну дијаду. Међутим, ако су претходни вектори у дијадама (1), а исто тако и наредни вектори њихови линеарно независни, израз (2) остаје само назначени збир и не може се написати у облику једне дијаде. У том случају комплекс (2) образује нову сложену величину — *афинор*. Афиноре ћемо обележавати *нарочитим* словима и писати, на пр.,

$$\mathcal{A}=\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1+\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}_2+\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{b}_3. \tag{3}$$

Ако се посматра назначени збир више од три дијаде, може се одмах констатовати да се тај збир увек може свести на збир од само три дијаде. Наиме, сигурно је, да рецимо, претходни вектори у $n\,(n>3)$ дијада збира морају бити линеарно зависни у простору од *три* димензије, па се, према томе, може извршити наведена редукција.

Примера ради, нека буде дато n дијада

$$\Phi_i=\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{b}_i \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{4}$$

и *ма која* три линеарно независна вектора $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}$ који, дакле, образују триједар вектора. Тада се било претходни било наредни вектори могу сви раставити у компоненте у правцима триједра образованог од тих вектора, на пр.,

$$\mathfrak{b}_i=\beta_{i1}\,\mathfrak{A}+\beta_{i2}\,\mathfrak{B}+\beta_{i3}\,\mathfrak{C}.$$

Ако се ове вредности за наредне векторе $\mathfrak{b}_i$ унесу у израз

$$\sum_{i=1}^{n}\Phi_i=\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{b}_i \tag{5}$$

добиће се после краће трансформације

$$\sum_{i=1}^{n}\Phi_i=\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}+\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}+\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}, \tag{6}$$

где је стављено

$$\mathfrak{A}_1=\sum_{i=1}^{n}\beta_{i1}\,\mathfrak{a}_i;\quad \mathfrak{B}_1=\sum_{i=1}^{n}\beta_{i2}\,\mathfrak{a}_i;\quad \mathfrak{C}_1=\sum_{i=1}^{n}\beta_{i3}\,\mathfrak{a}_i.$$

Резултат (6) доказује, прво, наше тврђење да се збир произвољног броја дијада може свести на збир од само три дијаде, а друго, да се сваки афинор може довести на облик у коме су унапред дати или његови претходни или његови наредни вектори.

Ако су, било претходни било наредни вектори афинора (3) линеарно зависни, али нису колинеарни, тада се, један од њих увек може изразити као линеарна комбинација остала два, те се дакле афинор своди на збир само две дијаде. Такав афинор се назива *планарни афинор*, за разлику од *потпуног афинора* који се кратко зове само афинор. Са овог гледишта и сама дијада се може сматрати као дегенерисани афинор па се каткад зове и *линеарни афинор*.

И афинор се може изразити помоћу Декартових правоуглих координата својих вектора. Уочимо, на пр., афинор (3), где је

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_i&=\{\,a_{i1}\;a_{i2}\;a_{i3}\,\},\\ \mathfrak{b}_i&=\{\,b_{i1}\;b_{i2}\;b_{i3}\,\}.\end{aligned} \qquad (i=1,2,3) \tag{7}$$

Сваку од афинорових дијада, према (§ 1, 20 и 21) можемо претставити у облику

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1&=a_{11}\,b_{11}\,\Phi_{11}+a_{11}\,b_{12}\,\Phi_{12}+a_{11}\,b_{13}\,\Phi_{13}+\\
&+a_{12}\,b_{11}\,\Phi_{21}+a_{12}\,b_{12}\,\Phi_{22}+a_{12}\,b_{13}\,\Phi_{23}+\\
&+a_{13}\,b_{11}\,\Phi_{31}+a_{13}\,b_{12}\,\Phi_{32}+a_{13}\,b_{13}\,\Phi_{33};\\
\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}_2&=a_{21}\,b_{21}\,\Phi_{11}+a_{21}\,b_{22}\,\Phi_{12}+a_{21}\,b_{23}\,\Phi_{13}+\\
&+a_{22}\,b_{21}\,\Phi_{21}+a_{22}\,b_{22}\,\Phi_{22}+a_{22}\,b_{23}\,\Phi_{23}+\\
&+a_{23}\,b_{21}\,\Phi_{31}+a_{23}\,b_{22}\,\Phi_{32}+a_{23}\,b_{23}\,\Phi_{33};\\
\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{b}_3&=a_{31}\,b_{31}\,\Phi_{11}+a_{31}\,b_{32}\,\Phi_{12}+a_{31}\,b_{33}\,\Phi_{13}+\\
&+a_{32}\,b_{31}\,\Phi_{21}+a_{32}\,b_{32}\,\Phi_{22}+a_{32}\,b_{33}\,\Phi_{23}+\\
&+a_{33}\,b_{31}\,\Phi_{31}+a_{33}\,b_{32}\,\Phi_{32}+a_{33}\,b_{33}\,\Phi_{33}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Сабирањем и груписањем чланова са заједничким основним координатним дијадама, може се афинор (3) написати

(9) $$A = (a_{11}\, b_{11} + a_{21}\, b_{21} + a_{31}\, b_{31})\, \Phi_{11} + \cdot \cdot \cdot$$

Према томе, ако коефицијент уз основну координатну дијаду Φ_{ij} обележимо са α_{ij}, његова вредност биће сад дата једначином

(10) $$\alpha_{ij} = a_{1i}\, b_{1j} + a_{2i}\, b_{2j} + a_{3i}\, b_{3j} = \sum_{k=1}^{3} a_{ki}\, b_{kj}\,.$$

Ови коефицијенти α_{ij} зову се *координате* афинора и афинор се може написати

(11) $$\begin{aligned} A = \alpha_{11}\,\Phi_{11} + \alpha_{12}\,\Phi_{12} + \alpha_{13}\,\Phi_{13} + \\ + \alpha_{21}\,\Phi_{21} + \alpha_{22}\,\Phi_{22} + \alpha_{23}\,\Phi_{23} + \\ + \alpha_{31}\,\Phi_{31} + \alpha_{32}\,\Phi_{32} + \alpha_{33}\,\Phi_{33}\,. \end{aligned}$$

Ако се напише само таблица коефицијената уз основне координатне дијаде у претходној једначини, добиће се матрица

(12) $$A = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Bmatrix}$$

која потпуно одређује афинор (11).

Како се види, добили смо опет матрицу сличну матрици која је одређивала дијаду, али се оне у многоме једна од друге разликују. Тако, док је матрица дијаде имала све врсте и колоне пропорционалне и према томе је од девет бројева те матрице било само њих пет независних, сад су у општем случају свих *девет* бројева, дакле, свих девет координата афинора независне. У матрици која одговара потпуном афинору нема пропорционалних врста и колона, што се види из једначина (10).

За два афинора

(13) $$A_1 = \sum_{i=1}^{3} (\mathfrak{a}_i\, \mathfrak{b}_i) \text{ и } A_2 = \sum_{i=1}^{3} (\mathfrak{c}_i\, \mathfrak{d}_i)$$

каже се да су једнака, кад, трансформисани на исте претходне (или наредне) векторе, имају једнаке односне наредне (или претходне) векторе. То значи, биће

(14) $$A_1 = A_2,$$

ако се после трансформације тих афинора на неке, ма које једнаке наредне векторе $\mathfrak{n}_i$, тј.

$$A_1 = \sum_{i=1}^{3} (\mathfrak{A}_i\, \mathfrak{n}_i), \quad A_2 = \sum_{i=1}^{3} (\mathfrak{B}_i\, \mathfrak{n}_i),$$

добију једнаки и односни претходни вектори

$$\mathfrak{A}_i = \mathfrak{B}_i\,. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Ако су афинори (13) дати матрицама, тј.

(15) $$A_1 = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{Bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{Bmatrix},$$

биће једнаки, ако су сви односни елементи обе матрице једнаки, тј.

(16) $$\alpha_{ij} = \beta_{ij}\,.$$

За афинор A, дат једначином (3), дефинише се као *конјуговани афинор* — афинор образован од конјугованих дијада, тј.

(17) $$\bar{A} = \mathfrak{b}_1\, \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_2\, \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}_3\, \mathfrak{a}_3\,.$$

Ако је афинор A одређен матрицом (12), тада је лако рачуном утврдити да матрица конјугованог афинора изгледа овако

(18) $$\bar{A} = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{Bmatrix}.$$

Дакле, матрица конјугованог афинора је *транспонована* матрица (12). Стога, ако потражимо услов, кад неки афинор може бити сам себи конјугован, тј. кад ће бити

(19) $$A = \bar{A},$$

долазимо упоређивањем матрица (12) и (18) до закључка да матрица таквог афинора мора бити симетрична, дакле

(20) $$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

Из тих разлога се такви афинори зову *симетрични афинори*.

За афинор, који задовољава услов

(21) $$A = -\bar{A},$$

каже се да је *антисиметричан*. Ако се посматра матрица (12) афинора A, она у случају његове антисиметричности мора задовољавати услове

(22) $$\alpha_{ii} = 0; \quad \alpha_{ij} = -\alpha_{ji}\,.$$

Према томе, симетрични афинор је одређен са *шест* независних координата, а антисиметрични само са *три*.

Како је

$$(\overline{\overline{\mathcal{A}}}) = \mathcal{A}, \tag{23}$$

видимо одмах да је афинор $\bar{\mathcal{A}}+\mathcal{A}$ увек симетричан, а афинор $\mathcal{A}-\bar{\mathcal{A}}$ увек антисиметричан. Отуда закључујемо да се сваки афинор $\mathcal{A}$ може изразити као збир једног симетричног и једног антисиметричног афинора, тј.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}(\mathcal{A}+\bar{\mathcal{A}}) + \frac{1}{2}(\mathcal{A}-\bar{\mathcal{A}}). \tag{24}$$

Симетрични део афинора, тј. $\frac{1}{2}(\mathcal{A}+\bar{\mathcal{A}})$, зове се понекад и *тензор афинора*, а његов антисиметрични део, тј. $\frac{1}{2}(\mathcal{A}-\bar{\mathcal{A}})$, зове се и *аксијатор афинора*.

4. Инваријанте афинора

При трансформисању афинора остаје низ величина у вези са њим инваријантан. Навешћемо три скаларне инваријанте и једну векторску инваријанту.

Као *први скалар* S_1 афинора $\mathcal{A}$ (§ 3, 3) дефинишемо збир скаларних производа вектора појединих дијада, тј.

$$S_1 = \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{b}_3 = \sum_{i=1}^{3} \mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{b}_i. \tag{1}$$

Ако су координате вектора $\mathfrak{a}_i$ и $\mathfrak{b}_i$ дате једначинама (§ 3, 7), тада се може лако показати да је

$$S_1 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}. \tag{2}$$

Отуда следи да, ако је афинор одређен матрицом, први скалар афинора једнак је збиру елемената главне дијагонале те матрице.

Као *други скалар* S_2 афинора дефинише се израз

$$\begin{aligned} S_2 &= (\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_3)\cdot(\mathfrak{b}_2 \times \mathfrak{b}_3) + (\mathfrak{a}_3 \times \mathfrak{a}_1)\cdot(\mathfrak{b}_3 \times \mathfrak{b}_1) + (\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2)\cdot(\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2) = \\ &= \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{b}_3 \\ \mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{b}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{b}_1 \\ \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{b}_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{b}_2 \\ \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{b}_2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{3}$$

Ако се други скалар изрази координатама афинора добија се

$$S_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{33} & \alpha_{31} \\ \alpha_{13} & \alpha_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

те је, према томе, други скалар афинора збир главних минора детерминанте која одговара матрици нашег афинора.

Најзад, као *трећи скалар* S_3 дефинише се израз

$$S_3 = [\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3]\,[\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3], \tag{5}$$

одн. на основу обрасца за множење два мешовита производа вектора

$$S_3 = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{b}_3 \\ \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{b}_3 \\ \mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{b}_3 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Кад се ова скаларна инваријанта афинора изрази помоћу координата афинора, одмах се види да је она у ствари једнака детерминанти матрице афинора, тј.

$$S_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Векторска инваријанта или *инваријантни вектор* $\mathfrak{B}$ афинора $\mathcal{A}$ (§ 3, 3) је вектор одређен збиром векторских производа вектора појединих дијада афинора, тј.

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_3 \times \mathfrak{b}_3 = \sum_{i=1}^{3} \mathfrak{a}_i \times \mathfrak{b}_i = \\ &= (\alpha_{23} - \alpha_{32})\,\mathfrak{i} + (\alpha_{31} - \alpha_{13})\,\mathfrak{j} + (\alpha_{12} - \alpha_{21})\,\mathfrak{k}. \end{aligned} \tag{8}$$

За дијаду се инваријанте образују на исти начин. Код дијаде су други и трећи скалар стално једнаки нули. Код планарног афинора, пак, стално је једнак нули само трећи скалар.

Инваријантни вектор симетричног афинора, на основу (§ 3,20) увек је једнак нули, и обрнуто, сваки афинор чији је инваријантни вектор једнак нули, симетричан је.

За антисиметрични афинор су први и трећи скалар увек једнаки нули, а други различит од нуле. Међутим, његова главна карактеристика лежи у његовом инваријантном вектору који, на основу (§ 3,22), има облик

$$\mathfrak{B} = 2\,(\alpha_{23}\,\mathfrak{i} + \alpha_{31}\,\mathfrak{j} + \alpha_{12}\,\mathfrak{k}). \tag{9}$$

То значи да координате аксијалног вектора $\mathfrak{J}$, где је

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2}\mathfrak{B} = \alpha_{23}\,\mathfrak{i} + \alpha_{31}\,\mathfrak{j} + \alpha_{12}\,\mathfrak{k}, \tag{10}$$

у потпуности одређују антисиметрични афинор.

5. Операције са афинорима

Може се дефинисати читав низ операција са афинорима и векторима или само са афинорима. Од разних могућности дефинисаћемо само оне исте операције које смо дефинисали и са дијадама.

Тако се *скаларни производ афинора и вектора* добија скаларним множењем сваке дијаде афинора са датим вектором са оне стране са које се тим вектором множи сам афинор.

Комутативни закон у општем случају не важи, те, према томе, постоје два производа афинора и вектора, слева и здесна.

Очигледно је, међутим, да важи

(1) $$\mathcal{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{x} \cdot \bar{\mathcal{A}}$$

и то није потребно доказивати. Пошто је симетрични афинор једнак свом конјугованом афинору, из ове једначине закључујемо да за скаларно множење симетричног афинора и вектора важи комутативни закон. Са друге стране, како је конјуговани афинор антисиметричног афинора једнак самом афинору са промењеним знаком, то за скаларни производ антисиметричног афинора и вектора важи закон алтернације.

Уочимо неки триједар основних вектора $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ и нека $\mathfrak{a}^*, \mathfrak{b}^*, \mathfrak{c}^*$ буду вектори реципрочног триједра, па образујмо афинор

(2) $$I = \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^* + \mathfrak{b}\,\mathfrak{b}^* + \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}^*.$$

Помножимо сад овај афинор скаларно ма којим вектором $\mathfrak{r}$, на пр. здесна, па ћемо добити

$$I \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}^* \cdot \mathfrak{r}) + \mathfrak{b}\,(\mathfrak{b}^* \cdot \mathfrak{r}) + \mathfrak{c}\,(\mathfrak{c}^* \cdot \mathfrak{r}).$$

Међутим, на основу Гибзова обрасца имамо

(3) $$\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}^* \cdot \mathfrak{r}) + \mathfrak{b}\,(\mathfrak{b}^* \cdot \mathfrak{r}) + \mathfrak{c}\,(\mathfrak{c}^* \cdot \mathfrak{r}) = \mathfrak{r},$$

па је, према томе,

(4) $$I \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{r}.$$

На сличан начин скаларним множењем афинора I слева вектором $\mathfrak{r}$, долазимо до резултата

(5) $$\mathfrak{r} \cdot I = \mathfrak{r}.$$

Према томе је

(6) $$I \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{r} \cdot I = \mathfrak{r}.$$

Афинор I ове особине зове се *јединични афинор*.

Јединични афинор се може очигледно изразити у односу ма на који пар узајамно конјугованих триједара. Тако, пошто је триједар основних ортова $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ конјугован сам себи може се јединични афинор написати и у облику

(7) $$I = \mathfrak{i}\,\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\,\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\,\mathfrak{k}.$$

Он је, према томе, збир три основне координатне дијаде образоване од једнаких ортова. Стога, ако се напише матрица координата јединичног афинора, она ће имати облик

(8) $$I = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Може се без нарочите тешкоће показати да се скаларни производ антисиметричног афинора ${}^a\mathcal{A}$ (где смо са ^{a} назначили антисиметричност) и неког вектора $\mathfrak{x}$ у ствари своди на векторски производ вектора $\mathfrak{J}$ (половине инваријантног вектора датог антисиметричног афинора) и вектора $\mathfrak{x}$; тј.

(9) $${}^a\mathcal{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{x} \times \mathfrak{J}.$$

Ако поставимо као услов да важи једначина

(10) $$\mathfrak{x} \times (\mathcal{A} \cdot \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x} \times \mathcal{A}) \cdot \mathfrak{y},$$

долазимо до закључка да се векторски производ афинора и вектора слева, тј. $\mathfrak{x} \times \mathcal{A}$, мора дефинисати на овај начин. Свака дијада афинора $\mathcal{A}$ (§ 3, 3) помножи се векторски вектором са оне стране са које се множи цео афинор, на пр.

(11) $$\mathfrak{x} \times \mathcal{A} = (\mathfrak{x} \times \mathfrak{a}_1)\,\mathfrak{b}_1 + (\mathfrak{x} \times \mathfrak{a}_2)\,\mathfrak{b}_2 + (\mathfrak{x} \times \mathfrak{a}_3)\,\mathfrak{b}_3.$$

Векторски производ афинора и вектора је, према уведеној дефиницији, афинор.

Једначина (9) може се сад, с обзиром на једначину (6), написати у облику

$${}^a\mathcal{A} \cdot \mathfrak{x} = -\mathfrak{J} \times I \cdot \mathfrak{x},$$

па је, према томе,

(12) $${}^a\mathcal{A} = -\mathfrak{J} \times I = -I \times \mathfrak{J}.$$

Од разних могућности за дефинисање производа два афинора задржаћемо се, као и у случају дијада, на само два таква производа — *скаларном* који ћемо бележити тачком између афинора и *бискаларном* који ћемо бележити са две тачке.

Узмимо да су афинори претстављени у облику збира три дијаде. У том случају се, ако усвојимо дистрибутивност операције, може скаларни производ два афинора

(13) $$\mathcal{A} = \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_3\,\mathfrak{b}_3, \qquad \mathcal{B} = \mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1 + \mathfrak{c}_2\,\mathfrak{d}_2 + \mathfrak{c}_3\,\mathfrak{d}_3,$$

дефинисати у аналогији са скаларним производом две дијаде као скаларни производ сваке од дијада једног афинора са сваком од дијада другог афинора у одређеном реду, тј.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} &= (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1)\cdot(\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1)+(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1)\cdot(\mathfrak{c}_2\mathfrak{d}_2)+(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1)\cdot(\mathfrak{c}_3\mathfrak{d}_3)+\\
&+(\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2)\cdot(\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1)+(\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2)\cdot(\mathfrak{c}_2\mathfrak{d}_2)+(\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2)\cdot(\mathfrak{c}_3\mathfrak{d}_3)+\\
&+(\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3)\cdot(\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1)+(\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3)\cdot(\mathfrak{c}_2\mathfrak{d}_2)+(\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3)\cdot(\mathfrak{c}_3\mathfrak{d}_3)=\\
&=(\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1)(\mathfrak{b}_1\cdot\mathfrak{c}_1)+(\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_2)(\mathfrak{b}_1\cdot\mathfrak{c}_2)+(\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_3)(\mathfrak{b}_1\cdot\mathfrak{c}_3)+\\
&+(\mathfrak{a}_2\mathfrak{d}_1)(\mathfrak{b}_2\cdot\mathfrak{c}_1)+(\mathfrak{a}_2\mathfrak{d}_2)(\mathfrak{b}_2\cdot\mathfrak{c}_2)+(\mathfrak{a}_2\mathfrak{d}_3)(\mathfrak{b}_2\cdot\mathfrak{c}_3)+\\
&+(\mathfrak{a}_3\mathfrak{d}_1)(\mathfrak{b}_3\cdot\mathfrak{c}_1)+(\mathfrak{a}_3\mathfrak{d}_2)(\mathfrak{b}_3\cdot\mathfrak{c}_2)+(\mathfrak{a}_3\mathfrak{d}_3)(\mathfrak{b}_3\cdot\mathfrak{c}_3).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Како је овакав производ афинора опет афинор у општем случају, може се помножити неким вектором и слева и здесна. Ако узмемо афиноре (13) и вектор $\mathfrak{r}$, тада је очигледно

$$
(\mathfrak{r}\cdot\mathcal{A})\cdot\mathcal{B}=\mathfrak{r}\cdot(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}) \quad \text{и} \quad \mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}\cdot\mathfrak{r})=(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})\cdot\mathfrak{r},
\tag{15}
$$

тј. скаларно множење вектора са афинором, било слева било здесна, асоцијативно је са скаларним множењем афинора. Ову особину скаларног производа два афинора је лако проверити директним израчунавањем написаних израза.

Скаларни производ два афинора $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, као афинор, може се на исти начин скаларно помножити неким трећим афинором $\mathcal{C}$, и уопште образовати скаларни производ од више афинора за које важи асоцијативни закон множења, тј.

$$
(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})\cdot\mathcal{C}=\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}),
\tag{16}
$$

што је лако проверити.

У овом смислу се дефинише и *степен* афинора као вишеструки скаларни производ једнаких афинора.

Исто тако лако је потврдити тачност израза

$$
\mathcal{A}\cdot I=I\cdot\mathcal{A}=\mathcal{A},
\tag{17}
$$

који показује да се афинор скаларним множењем јединичним афинором било здесна било слева не мења.

Конјуговани афинор скаларног производа два афинора једнак је производу конјугованих афинора узетих само у обрнутом реду, тј.

$$
\overline{(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})}=\overline{\mathcal{B}}\cdot\overline{\mathcal{A}}.
\tag{18}
$$

Ово је јасно, с обзиром да се скаларни производи $\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}$ и $\overline{\mathcal{B}}\cdot\overline{\mathcal{A}}$ разликују само редом чинилаца у дијадским производима. Скаларни производ афинора и конјугованог афинора увек је симетрични афинор, јер је на основу (18)

$$
\overline{(\mathcal{A}\cdot\overline{\mathcal{A}})}=\mathcal{A}\cdot\overline{\mathcal{A}},
\tag{19}
$$

тј. такав производ је сам себи конјугован.

Најзад, ако се оба афинора $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изразе помоћу својих основних Декартових координатних дијада у облику

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \alpha_{11}\Phi_{11}+\alpha_{12}\Phi_{12}+\alpha_{13}\Phi_{13}+\\
&+\alpha_{21}\Phi_{21}+\alpha_{22}\Phi_{22}+\alpha_{23}\Phi_{23}+\\
&+\alpha_{31}\Phi_{31}+\alpha_{32}\Phi_{32}+\alpha_{33}\Phi_{33},\\
\mathcal{B} &= \beta_{11}\Phi_{11}+\beta_{12}\Phi_{12}+\beta_{13}\Phi_{13}+\\
&+\beta_{21}\Phi_{21}+\beta_{22}\Phi_{22}+\beta_{23}\Phi_{23}+\\
&+\beta_{31}\Phi_{31}+\beta_{32}\Phi_{32}+\beta_{33}\Phi_{33},
\end{aligned}
\tag{20}
$$

па изврши скаларно множење оба афинора према уведеној дефиницији, а с обзиром на (§ 2, 14), и збир добијених дијада уреди, добиће се афинор

$$
\mathcal{C}=\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}=\sum_{i,k}\alpha_{ik}\Phi_{ik}\cdot\sum_{k,j}\beta_{kj}\Phi_{kj}=\sum_{i,j}\gamma_{ij}\Phi_{ij},
\tag{21}
$$

где је

$$
\gamma_{ij}=\sum_{k=1}^{3}\alpha_{ik}\beta_{kj}.
\tag{22}
$$

Ако су афинори $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изражени матрицама

$$
\mathcal{A}=\begin{Bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{Bmatrix}, \quad
\mathcal{B}=\begin{Bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23}\\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33}\end{Bmatrix},
\tag{23}
$$

тада се матрица њихова скаларног производа, тј.

$$
\mathcal{C}=\begin{Bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23}\\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33}\end{Bmatrix},
\tag{24}
$$

зове производ матрица $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Према томе, као правило за множење матрица, узима се да је производ две матрице опет матрица чији се елементи образују помоћу елемената матрица које множимо по правилу (22).

Бискаларни производ два афинора дефинише се као бискаларни производ сваке дијаде једног афинора са сваком дијадом другог афинора. Према томе је бискаларни производ два афинора скалар. Очевидно је, с обзиром на дефиницију бискаларног производа две дијаде, да за овај производ два афинора важе иста правила која важе и за такав производ две дијаде, тј.

$$
\mathcal{A}\cdot\cdot\mathcal{B}=\mathcal{B}\cdot\cdot\mathcal{A}=\overline{\mathcal{A}}\cdot\cdot\overline{\mathcal{B}}.
\tag{25}
$$

Лако је израчунати да је бискаларни производ афинора и јединичног афинора увек једнак првом скалару афинора, тј.

$$\mathfrak{A} \cdot\cdot I = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \Phi_{ij} \cdot\cdot (\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}) = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = S_1 . \tag{26}$$

Једначином

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^{-1} = I \tag{27}$$

дефинише се датом афинору $\mathfrak{A}$ *реципрочни афинор* $\mathfrak{A}^{-1}$. То значи, да је скаларни производ афинора и њему реципрочног афинора јединични афинор.

Ако је тачна једначина (27) биће тачна и једначина

$$\mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{A} = I , \tag{28}$$

тј. скаларни производ афинора и њему реципрочног афинора је комутативан. Тачност ове једначине лако се изводи из једначине (27) скаларним множењем здесна те једначине афинором $\mathfrak{A}$, а с обзиром да за скаларно множење афинора важи асоцијативни закон. Наиме, после тог множења добија се

$$\mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \cdot I = \mathfrak{A},$$

одакле се добија једначина (28).

Ако се афинор $\mathfrak{A}$ изрази у дијадском облику, тј, напише

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_3 , \tag{29}$$

тада, с обзиром на једначину (27), мора бити, а то је лако проверити израчунавањем,

$$\mathfrak{A}^{-1} = \overset{*}{\mathfrak{b}}_1 \overset{*}{\mathfrak{a}}_1 + \overset{*}{\mathfrak{b}}_2 \overset{*}{\mathfrak{a}}_2 + \overset{*}{\mathfrak{b}}_3 \overset{*}{\mathfrak{a}}_3 , \tag{30}$$

где су $\overset{*}{\mathfrak{a}}_1$, $\overset{*}{\mathfrak{a}}_2$, $\overset{*}{\mathfrak{a}}_3$ и $\overset{*}{\mathfrak{b}}_1$, $\overset{*}{\mathfrak{b}}_2$, $\overset{*}{\mathfrak{b}}_3$ вектори реципрочног триједра вектора $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ одн. $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$. Ако се овај израз напише у развијеном облику имаћемо

$$\mathfrak{A}^{-1} = \frac{1}{S_3} [(\mathfrak{b}_2 \times \mathfrak{b}_3)(\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_3) + (\mathfrak{b}_3 \times \mathfrak{b}_1)(\mathfrak{a}_3 \times \mathfrak{a}_1) + (\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2)(\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2)] , \tag{31}$$

где је S_3 трећи скалар афинора (29). Одавде се закључује да се реципрочни афинор може образовати само за оне афиноре за које је $[\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3] \neq 0$ и $[\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3] \neq 0$ тј. $S_3 \neq 0$, а то значи само за потпуне афиноре.

Из једначина (29) и (30) закључујемо да је

$$(\overline{\mathfrak{A}})^{-1} = \overline{\mathfrak{A}^{-1}} . \tag{32}$$

До матрице реципрочног афинора, кад је дата матрица афинора $\mathfrak{A}$, може се доћи, на пр., на овај начин. Једначину (27) можемо написати у облику

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Bmatrix} \cdot \mathfrak{A}^{-1} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} . \tag{33}$$

Одатле се одмах види да матрица афинора $\mathfrak{A}^{-1}$ мора бити облика

$$\mathfrak{A}^{-1} = \frac{1}{S_3} \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Bmatrix} , \tag{34}$$

где су A_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ кофактори елемената детерминанте (§ 4, 7).

И заиста, ако се изврши множење матрице афинора $\mathfrak{A}$ и матрице (34) афинора $\mathfrak{A}^{-1}$, по правилу (22), добиће се за елементе главне дијагонале иста вредност S_3. За све остале елементе матрице добијају се нуле. Према томе добија се

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{S_3} \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Bmatrix} = \frac{1}{S_3} \begin{Bmatrix} S_3 & 0 & 0 \\ 0 & S_3 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{Bmatrix} .$$

Матрица на десној страни са једнаким скаларним вредностима на месту само чланова главне дијагонале зове се *скаларна матрица* и може се написати као производ скалара S_3 и јединичног афинора, тј.

$$\begin{Bmatrix} S_3 & 0 & 0 \\ 0 & S_3 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{Bmatrix} = S_3 \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} = S_3 I . \tag{35}$$

Тако смо показали да је (34) заиста матрица реципрочног афинора и да је транспонована матрица од матрице образоване од кофактора елемената матрице датог афинора и подељена са трећим скаларом датог афинора. Израз (34) показује поново да реципрочни афинор постоји само за потпуне афиноре.

Показаћемо још како се сваки симетрични афинор може на један нарочити, важан начин раставити у збир два члана. Ако симетрични афинор, чији је први скалар једнак нули, назовемо по Схоутену (Schouten) *девијатор*, може се казати: Сваки симетрични афинор се може раставити у збир девијатора и производа неког скалара са јединичним афинором. Овај, пак производ скалара и јединичног афинора зваћемо *изотропни афинор*.

Ако девијатор обележимо са $\mathfrak{A}_1$ а скалар са p, из једначине

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + p I , \tag{36}$$

изводимо

$$S_1 = 3 p , \quad p = \frac{1}{3} S_1 , \tag{37}$$

ако са S_1 обележимо први скалар датог симетричног афинора $\mathfrak{A}$.

Тачност ове једначине јасна је отуда што је први скалар девијатора $\mathcal{A}_1$ по претпоставци једнак нули, а први скалар изотропног афинора је $3p$, што је очигледно из облика његове скаларне матрице. Наиме, имамо

$$(38)\qquad pI = p\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{Bmatrix}.$$

Према томе је

$$(39)\qquad \mathcal{A}_1 = \mathcal{A} - \frac{1}{3} S_1 I,$$

па се може написати

$$(40)\qquad \mathcal{A} = \left(\mathcal{A} - \frac{1}{3} S_1 I\right) + \frac{1}{3} S_1 I$$

што смо и хтели да покажемо.

6. Афина трансформација простора. Тензорове површине

Уочимо неки промењљиви вектор положаја $\mathfrak{r}$ и одређени афинор

$$(1)\qquad \mathcal{A} = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_3,$$

тада је

$$(2)\qquad \mathfrak{R} = \mathcal{A} \cdot \mathfrak{r}$$

опет промењљиви вектор. Исто тако, неки нови промењљиви вектор $\mathfrak{P}$ одређен је и скаларним производом датог афинора и вектора положаја $\mathfrak{r}$ слева, тј.

$$(3)\qquad \mathfrak{P} = \mathfrak{r} \cdot \mathcal{A}.$$

При томе су промењљиви вектори $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{r})$ и $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\mathfrak{r})$ одређени једначинама (2) и (3) као линеарне и хомогене векторске функције вектора $\mathfrak{r}$, тј. као функције за које очигледно важе ове особине:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{R}(\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots) = \mathfrak{R}(\mathfrak{r}_1) + \mathfrak{R}(\mathfrak{r}_2) + \ldots \\ &\mathfrak{R}(\lambda \mathfrak{r}) = \lambda \mathfrak{R}(\mathfrak{r}). \end{aligned}$$

Геометриско тумачење линеарне векторске функције $\mathfrak{R} = \mathcal{A} \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{R}(\mathfrak{r})$ може се добити на овај начин. Ако се вектори $\mathfrak{r}$ замисле као вектори положаја тачака у неком простору, који ћемо назвати Q_1, а у односу на неки пол M, односне вредности променљивог вектора $\mathfrak{R}$ могу се замислити пренете као вектори положаја из исте тачке M (или неке друге тачке N) и тада њихови крајеви одређују свакој тачки првог простора Q_1 по једну тачку у новом простору, који ћемо звати Q_2.

При томе могу наступити ови случајеви. Ако промењљиви вектор $\mathfrak{r}$ може имати све могуће вредности у простору од три димензије, векторска функција $\mathfrak{R}$ може узимати такве вредности да међу њима има три линеарно независна вектора. У том случају се простор Q_1 трансформише опет у простор. Такав је случај, ако је дати афинор $\mathcal{A}$ потпун. Ако је, међутим, дати афинор планаран, читав простор Q_1 трансформише се у раван у простору Q_2. Најзад, у случају дијаде, читав простор Q_1 трансформише се у праву кроз пол у простору Q_2.

Оваква трансформација простора назива се *афина трансформација* или *афино пресликавање*. И баш стога што се ова трансформација изводи помоћу афинора, они су и добили то име.

Недегенеративна афина трансформација која се изводи помоћу потпуног афинора има ове особине:

1. Свакој правој линији у простору Q_1 одговара такође права линија у простору Q_2, тј. при афиној трансформацији праве прелазе у праве.

Заиста, у простору Q_1 је права линија одређена једначином

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \lambda \mathfrak{a},$$

где је λ произвољни параметар, а $\mathfrak{r}_0$ и $\mathfrak{a}$ константни вектори. Сви вектори $\mathfrak{R}$ у простору Q_2 који одговарају овим вредностима вектора $\mathfrak{r}$ имају, с обзиром на једначине (4), вредност

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{r}) = \mathfrak{R}(\mathfrak{r}_0) + \lambda \mathfrak{R}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{R}_0 + \lambda \mathfrak{A},$$

где смо ставили $\mathfrak{R}(\mathfrak{r}_0) = \mathfrak{R}_0$ и $\mathfrak{R}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{A}$. Одавде је јасно, да све тачке одређене крајевима вектора $\mathfrak{R}$ леже на једној правој.

2. Свака раван у простору Q_1 прелази, после афине трансформације, опет у неку раван простора Q_2.

Ако пођемо од једначине равни, на пр., у облику

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \lambda \mathfrak{a} + \mu \mathfrak{b}$$

за простор Q_1, где су λ и μ произвољни скалари, а $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ константни вектори, може се потпуно истим поступком, као у претходном случају, на основу једначина (4) показати тачност и овог тврђења.

3. Колинеарни вектори трансформишу се у колинеарне векторе и остају у истом односу.

Заиста, нека буду дата два колинеарна вектора у простору Q_1 који су у односу k, тј.

$$\mathfrak{r}_1 = k\, \mathfrak{r}_2.$$

Тада се, на основу једначина (4), у простору Q_2 добија одмах

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{r}_1) = k\, \mathfrak{R}(\mathfrak{r}_2),$$

па према томе, и у простору Q_2 добијамо два колинеарна вектора у истом односу k.

Одавде се закључује да се при афиној трансформацији паралелне праве трансформишу у паралелне праве и паралелне равни у паралелне равни.

4. При афиној трансформацији, међутим, не остају очуване дужине, па, према томе, ни углови, а то значи да је у општем случају трансформисани простор деформисан.

То ћемо најбоље увидети на овај начин. Уочимо у простору Q_1 неку сферу јединичног полупречника, са центром у полу, одређену једначином

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = 1, \tag{5}$$

или у Декартовим правоуглим координатама

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{6}$$

ако је $\mathfrak{r} = \{x, y, z\}$.

Нека афина трансформација буде одређена неким афинором A. Тада се сваки вектор положаја $\mathfrak{r}$ првог простора трансформише у вектор положаја $\mathfrak{R}$ другог простора једначином

$$\mathfrak{R} = A \cdot \mathfrak{r}, \tag{7}$$

па је

$$\mathfrak{r} = A^{-1} \cdot \mathfrak{R}. \tag{8}$$

Ако ову вредност за $\mathfrak{r}$ унесемо у једначину (5), она постаје

$$(A^{-1}\mathfrak{R}) \cdot (A^{-1} \cdot \mathfrak{R}) = 1. \tag{9}$$

Међутим, на основу обрасца (§ 5,1), може се написати

$$(\mathfrak{R} \cdot \bar{A}^{-1}) \cdot (A^{-1} \cdot \mathfrak{R}) = 1. \tag{10}$$

Ако, с обзиром на асоцијативност оваквог множења, здружимо унутрашње чиниоце, видимо одмах, да је њихов производ као производ афинора и конјугованог афинора увек неки симетрични афинор B, тј.

$$B = \bar{A}^{-1} \cdot A^{-1}.$$

На тај начин се једначина трансформисане површине може најзад изразити у облику

$$\mathfrak{R} \cdot B \cdot \mathfrak{R} = 1. \tag{11}$$

Ова се једначина може написати и у скаларном облику. Нека у том циљу буде дат неки триједар Декартових правоуглих оса у простору Q_2, одређен ортовима $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$. Нека у односу на тај триједар буде $\mathfrak{R} = \{X, Y, Z\}$ и нека симетрични афинор B, изражен помоћу својих основних координатних дијада, има облик

$$B = \sum_{i,j} \delta_{ij} \Phi_{ij}, \qquad (\delta_{ij} = \delta_{ji}) \tag{12}$$

или у облику матрице

$$B = \begin{Bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{13} & \delta_{23} & \delta_{33} \end{Bmatrix}. \tag{13}$$

После извршеног множења назначеног у једначини (11) долазимо у скаларном облику до једначине

$$\mathfrak{R} \cdot B \cdot \mathfrak{R} = \delta_{11} X^2 + \delta_{22} Y^2 + \delta_{33} Z^2 + 2\,\delta_{12} XY + 2\,\delta_{13} XZ + 2\,\delta_{23} YZ = 1. \tag{14}$$

Ова једначина, међутим, претставља очигледно, неку централну површину другог реда. Како, према једначини (7) која дефинише ову трансформацију, ова површина нема тачака у бесконачности, биће она елипсоид. Дакле, јединична сфера, па и иначе свака сфера претвара се афином трансформацијом у неки елипсоид. У специјалним случајевима овај елипсоид може бити ротациони, а може бити и сфера само слично повећана или смањена.

Поставимо сад питање шта ћемо добити, ако ма који афинор A помножимо два пут скаларно вектором положаја $\mathfrak{r} = \{x, y, z\}$ тј. образујемо

$$\mathfrak{r} \cdot A \cdot \mathfrak{r}, \tag{15}$$

при чему нису прописана никаква ограничења за вектор $\mathfrak{r}$, као што је то био случај горе са једначином (5). У том случају долазимо до ових закључака. Ако афинор A раставимо на збир симетричног афинора S и антисиметричног афинора T, што је, како знамо, увек на један једини начин могуће извршити, тј. ако напишемо

$$A = S + T, \tag{16}$$

па извршимо наведено множење добићемо

$$\mathfrak{r} \cdot A \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{r} \cdot S \cdot \mathfrak{r}, \tag{17}$$

јер је

$$\mathfrak{r} \cdot T \cdot \mathfrak{r} = 0. \tag{18}$$

Тачност овог последњег тврђења види се из ових разлога. Пошто је T антисиметрични афинор, за њега (§ 5) важи

$$\mathfrak{r} \cdot T = -T \cdot \mathfrak{r}$$

а то значи да је

$$\mathfrak{r} \cdot T \cdot \mathfrak{r} = -\mathfrak{r} \cdot T \cdot \mathfrak{r},$$

одакле следи (18).

Ако се симетрични афинор S изрази помоћу својих координатних дијада, одн. помоћу своје симетричне матрице, тј.

$$S = \begin{Bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{Bmatrix}, \tag{19}$$

добићемо, после извршеног множења

$$\mathfrak{r} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{r} \cdot \mathcal{S} \cdot \mathfrak{r} = \tag{20}$$
$$= \lambda_{11} x^2 + \lambda_{22} y^2 + \lambda_{33} z^2 + 2\lambda_{12} xy + 2\lambda_{13} xz + 2\lambda_{23} yz \equiv 2F.$$

Овај израз, како видимо, претставља хомогену квадратну форму координата вектора $\mathfrak{r}$. Јасно је, да свима афинорима са истим симетричним делом одговара иста квадратна форма. Ако посматрамо само симетричне афиноре — тензоре, тада сваком тензору, у том смислу, одговара потпуно одређена квадратна форма и обрнуто, свакој форми само један тензор.

Како се у том случају очигледно може конструисати породица површина другог реда

$$2F = \mathrm{const.}, \tag{21}$$

такве површине се зову *тензорове површине*. То су централне површине другог реда, а како нису прописана никаква ограничења за вектор $\mathfrak{r}$, оне могу бити елипсоиди, једнокрилни и двокрилни хиперболоиди. У случајевима планарних афинора, тензорове површине дегенеришу у цилиндарске површине. Ма која од тих површина може се сматрати као претставник односног симетричног афинора, а обично се за то узима баш површина,

$$2F = 1. \tag{22}$$

Могућност претстављања симетричних афинора на овај начин указује на неке важне особине таквих афинора. Уочимо, на пр., једначину тензорове површине у облику

$$2F \equiv \lambda_{11} x^2 + \lambda_{22} y^2 + \lambda_{33} z^2 + 2\lambda_{12} xy + 2\lambda_{13} xz + 2\lambda_{23} yz = 1. \tag{23}$$

Из аналитичке геометрије, међутим, знамо да се оваква једначина неке централне површине другог реда може свести на нарочити ***нормални облик***

$$2F \equiv \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = 1, \tag{24}$$

ако се уведе неки нарочити координатни систем Декартових правоуглих оса, одређених ортовима $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$. Осе овог система су *главне осе* дате централне површине, а правци тих оса *главни правци* уоченог симетричног афинора.

Одмах се види, да се у односу на тај систем оса, уочени симетрични афинор $\mathcal{S}$, може написати у облику збира само три координатне дијаде — нормалном облику, тј.

$$\mathcal{S} = \lambda_1 (\mathfrak{I}\mathfrak{I}) + \lambda_2 (\mathfrak{J}\mathfrak{J}) + \lambda_3 (\mathfrak{K}\mathfrak{K}), \tag{25}$$

или помоћу матрице облика

$$\mathcal{S} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Bmatrix}. \tag{26}$$

Одавде се за симетричне афиноре може извести читав низ закључака, на пр., да се свака симетрична матрица (19) подесним избором основног триједра референције може свести увек на облик (26) у коме има само елементе главне дијагонале. Очевидно је исто тако да мора бити

$$S_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33}, \tag{27}$$

ако је S_1 први скалар симетричног афинора (19) одн. (26).

Ако посматрамо поље чије су еквискаларне површине дате једначинама (21) и обележимо $\mathrm{grad}\, F = \mathfrak{R}$, добиће се

$$\mathfrak{R} = \mathrm{grad}\, F = \mathfrak{r} \cdot \mathcal{S}. \tag{28}$$

Ово се може потврдити израчунавањем с једне стране $\mathrm{grad}\, F$ а с друге одређивањем скаларног производа $\mathfrak{r} \cdot \mathcal{S}$. При томе $\mathrm{grad}\, F$ има правац нормале на оној тензоровој површини која пролази кроз крај вектора $\mathfrak{r}$. Помоћу једначине (28) може се једначина (21) написати у облику

$$2F \equiv \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{r} = \mathrm{const.}, \tag{29}$$

одакле је јасна равноправност улоге вектора $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{R}$. Елиминацијом вектора $\mathfrak{r}$ из ове једначине помоћу једначине (28), тј. уношењем вредности $\mathcal{S}^{-1} \cdot \mathfrak{R}$ за вектор $\mathfrak{r}$, добија се једначина

$$\mathfrak{R} \cdot \mathcal{S}^{-1} \cdot \mathfrak{R} = \mathrm{const.} \tag{30}$$

Како је и $\mathcal{S}^{-1}$ симетрични афинор, ова једначина такође одређује неку породицу површине другог реда, које се стога, што су у вези са реципрочним афинором $\mathcal{S}^{-1}$, зову *реципрочне тензорове површине*.

Однос површина (21) и (30) је узајаман. Сваки од вектора $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{r}$ стоји на односној површини у крају другог нормално.

У скаларном облику, ако замислимо тензор $\mathcal{S}$ у нормалном облику, тј.

$$\mathcal{S} = a(\mathfrak{i}\mathfrak{i}) + b(\mathfrak{j}\mathfrak{j}) + c(\mathfrak{k}\mathfrak{k}), \tag{31}$$

тензоровој површини

$$\mathfrak{r} \cdot \mathcal{S} \cdot \mathfrak{r} = 1,$$

где је $\mathfrak{r} = \{x, y, z\}$, одговара једначина

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1.$$

Реципрочној, пак, тензоровој површини

$$\mathfrak{R} \cdot \mathcal{S}^{-1} \cdot \mathfrak{R} = 1,$$

где је, на пр., $\mathfrak{R} = \{X, Y, Z\}$ одговара једначина

$$\frac{X^2}{a} + \frac{Y^2}{b} + \frac{Z^2}{c} = 1.$$

Најзад, ако извршимо афину трансформацију простора одређеног вектором $\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}$ помоћу симетричног афинора (31), на пр., множењем афинора слева тим вектором добићемо

(32) $$\mathfrak{R} = \mathfrak{r} \cdot \mathcal{S} = ax\,\mathfrak{i} + by\,\mathfrak{j} + cz\,\mathfrak{k}\,.$$

Према томе, при овој трансформацији свака дужина ма у ком од главних праваца продужена је (одн. скраћена) у одређеном односу који је у општем случају различит за све главне правце. Такву афину траисформацију зовемо *чиста деформација*, а сам симетрични афинор, који је одређује, из тих разлога се баш и назива *тензор*.

7. Примена Хамилтонова оператора

На векторску функцију положаја $\mathfrak{v}$ која дефинише неко векторско поље, може се Хамилтонов оператор

$$\nabla = \mathfrak{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\,,$$

као вектор, применити и у облику дијадског производа, тј. може се образовати израз

(1) $$\nabla\,\mathfrak{v} = \left(\mathfrak{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathfrak{v} = \mathfrak{i}\,\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} + \mathfrak{j}\,\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \mathfrak{k}\,\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z}\,.$$

Одавде се већ види, да је дијадски производ Хамилтонова оператора ∇ и векторске функције $\mathfrak{v}$ афинор $\nabla\mathfrak{v}$ који се зове *локални афинор* векторског поља, јер зависи и сам од положаја тачке у којој се посматра сама векторска функција. Поред овог назива афинор $\nabla\mathfrak{v}$ се зове и ***дијадски извод*** векторског поља или ***набла-афинор*** вектора $\mathfrak{v}$.

Конјуговани локални афинор са ознаком $\overline{\nabla\mathfrak{v}}$, што се понекад пише и $\mathfrak{v}\nabla$, одређен је, с обзиром на једначину (1), изразом

(2) $$\overline{\nabla\mathfrak{v}} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x}\,\mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}\,\mathfrak{j} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z}\,\mathfrak{k}\,.$$

Ако се и векторска функција $\mathfrak{v}$ изрази својим координатама у односу на неки Декартов правоугли триједар, тј. стави $\mathfrak{v} = \mathfrak{i}\,v_1 + \mathfrak{j}\,v_2 + \mathfrak{k}\,v_3$, може се дијадским множењем локални афинор изразити помоћу својих координата и координатних дијада у облику

(3) $$\begin{aligned} \nabla\mathfrak{v} &= \left(\mathfrak{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathfrak{i}\,v_1 + \mathfrak{j}\,v_2 + \mathfrak{k}\,v_3) = \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x}\,\Phi_{11} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\,\Phi_{12} + \frac{\partial v_3}{\partial x}\,\Phi_{13} + \\ &+ \frac{\partial v_1}{\partial y}\,\Phi_{21} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\,\Phi_{22} + \frac{\partial v_3}{\partial y}\,\Phi_{23} + \\ &+ \frac{\partial v_1}{\partial z}\,\Phi_{31} + \frac{\partial v_2}{\partial z}\,\Phi_{32} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\,\Phi_{33}\,. \end{aligned}$$

Одавде се одмах види да се помоћу матрице за локални афинор може написати

(4) $$\nabla\,\mathfrak{v} = \left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial v_1}{\partial y} & \dfrac{\partial v_2}{\partial y} & \dfrac{\partial v_3}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v_1}{\partial z} & \dfrac{\partial v_2}{\partial z} & \dfrac{\partial v_3}{\partial z} \end{matrix}\right\}.$$

Транспоновањем матрице локалног афинора добија се матрица конјугованог локалног афинора, тј.

(5) $$\overline{\nabla\,\mathfrak{v}} = \left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x} & \dfrac{\partial v_1}{\partial y} & \dfrac{\partial v_1}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial v_2}{\partial x} & \dfrac{\partial v_2}{\partial y} & \dfrac{\partial v_2}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial v_3}{\partial x} & \dfrac{\partial v_3}{\partial y} & \dfrac{\partial v_3}{\partial z} \end{matrix}\right\}.$$

Може се показати да локални афинор неког датог поља не зависи од избора координатног система.

Први скалар локалног афинора $\nabla\,\mathfrak{v}$, тј.

(6) $$\mathfrak{i}\cdot\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} + \mathfrak{j}\cdot\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \mathfrak{k}\cdot\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z} = \nabla\cdot\mathfrak{v} = \mathbf{div}\,\mathfrak{v}\,,$$

није ништа друго до дивергенција вектора $\mathfrak{v}$. Инваријантни, пак, вектор локалног афинора, тј.

(7) $$\mathfrak{i}\times\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} + \mathfrak{j}\times\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \mathfrak{k}\times\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z} = \nabla\times\mathfrak{v} = \mathrm{rot}\,\mathfrak{v}\,,$$

уствари је ротор вектора $\mathfrak{v}$.

За конјуговани локални афинор $\overline{\nabla\mathfrak{v}}$ први скалар је опет $\mathrm{div}\,\mathfrak{v}$, а инваријантни вектор је $-\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}$.

Помоћу појма локалног афинора могу се извести за векторско поље многи нови резултати, а многи већ познати обрасци могу се друкчије формулисати. Уједно се открива, да се иза многих нама већ познатих израза крију афинори.

На пр., промену векторске функције $\mathfrak{v}$ при елементарном померању $d\mathfrak{r}$ у пољу писали смо

$$d\mathfrak{v} = (d\mathfrak{r}\cdot\nabla)\,\mathfrak{v}\,,$$

а сад се то може написати и у облику

(8) $$d\mathfrak{v} = d\mathfrak{r}\cdot(\nabla\,\mathfrak{v})$$

и рећи: промена векторске функције при елементарном померању $d\mathfrak{r}$ у пољу је скаларни производ слева елементарног померања и локалног афинора.

Узећемо још да трансформишемо површински интеграл по затвореној површини S

$$\oint\limits_S d\mathfrak{f} \cdot X, \tag{9}$$

где је $d\mathfrak{f}$ управљени елемент уочене површине, а X афинор као функција положаја, у запремински по запремини V, ограниченој површином S, јер ћемо у каснијим излагањима ту трансформацију користити.

Уочимо за то вектор

$$\mathfrak{v} = X \cdot \mathfrak{e},$$

где је $\mathfrak{e}$ неки константни орт, а X дати афинор као функција положаја. Тада се на основу познатог Гаусовог (Gauss) става може написати

$$\oint\limits_S d\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{v} = \int\limits_V (\nabla \cdot \mathfrak{v})\, dV. \tag{10}$$

Површински интеграл на левој страни ове једначине може се овако трансформисати

$$\oint\limits_S d\mathfrak{f} \cdot (X \cdot \mathfrak{e}) = \Big(\oint\limits_S d\mathfrak{f} \cdot X\Big) \cdot \mathfrak{e}.$$

У интегралу на десној страни може се, пошто је $\mathfrak{e} = \text{const.}$, прво написати

$$\nabla \cdot \mathfrak{v} = \nabla \cdot (X \cdot \mathfrak{e}) = (\nabla \cdot X) \cdot \mathfrak{e}$$

и најзад сам интеграл у облику

$$\int\limits_V (\nabla \cdot \mathfrak{v})\, dV = \Big(\int\limits_V (\nabla \cdot X)\, dV\Big) \cdot \mathfrak{e}.$$

Ако се ове вредности интеграла на левој и десној страни једначине (10) унесу у ту једначину добићемо

$$\Big(\oint\limits_S d\mathfrak{f} \cdot X\Big) \cdot \mathfrak{e} = \Big(\oint\limits_V (\nabla \cdot X)\, dV\Big) \cdot \mathfrak{e}.$$

Пошто је $\mathfrak{e}$ потпуно произвољан вектор, из ове једначине изводимо

$$\oint\limits_S d\mathfrak{f} \cdot X = \int\limits_V (\nabla \cdot X)\, dV, \tag{11}$$

а то смо и тражили.

ДЕФОРМАЦИЈЕ И НАПОНИ У НЕПРЕКИДНОЈ СРЕДИНИ

1. Појам непрекидне средине

Проучавање кретања реалних — чврстих, течних и гасовитих — тела је врло сложен проблем. Из тог разлога се при проучавању кретања таквих тела врше разне апстракције да би се олакшала примена математичког апарата, али тако да постигнути резултати не противуречe стварности. Тако се, на пр., у рационалној механици проучава кретање тзв. *механички чврстог тела*, чије тачке задржавају за све време кретања своја узајамна растојања, иако знамо да таква тела, апсолутно узев, стварно не постоје. Појам *материјалне тачке* омогућава нам да проучавањем кретања само једне тачке проучимо кретање читавих тела у многим случајевима, итд.

Сва реална тела могу се под дејством сила *деформисати* — променити облик и величину. За проучавање оваквих деформација потребно је посматрати кретање појединих делова тела, једних у односу на друге. При томе, иако је структура тела са гледишта модерне физике позната, не можемо се увек упуштати у проучавање кретања појединих атома, па чак ни молекула, јер су таква кретања и сувише сложена. Морамо се често задовољити одређивањем кретања врло малих делова — *честица* — тела чије су димензије у односу на међумолекуларне просторе ипак довољно велике, а који се крећу као целине без обзира на то што су састављени од одвојених молекула и атома. Дакле, ако се овако *макроскопски* посматрају тела, може се узети да је њихов састав некрекидан и у овом смислу се говори о *непрекидној средини — континууму.*

Јасно је, да се у овако дефинисаној непрекидној средини, може говорити само о *врло малим деловима* тела и да се појмови „честица тела“ и „тачка тела“ односе у ствари увек на неки овако мали елемент. О бесконачнно малим величинама у математичком смислу се у оваквој средини не може уопште говорити. Према томе, у овом ограниченом смислу треба разумети и сваку математичку дефиницију примењену у оваквој средини као непрекидној. На пр., дефиниција густине масе $\sigma = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$ у одређеној тачки непрекидне средине губи очигледно свој смисао, ако би се смањивање запремине око дате тачке наставило и у унутрашњост атомског простора.

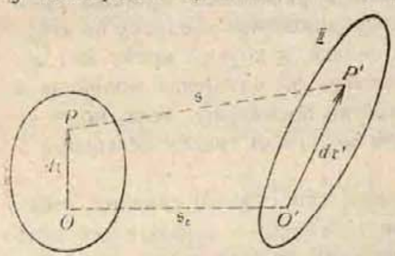
Механика непрекидних средина или, како се још каже, *механика деформабилних средина* проучава кретање непрекидних средина и обично се дели на онај део који проучава чврсте непрекидне средине *(теорију еластичности)* и нâ део који проучава течна и гасовита тела заједно *(хидромеханику)*. У вези са овим подвлачимо да је читав низ појава заједнички и за течности у обичном смислу и за гасове, те се при њиховом проучавању и гасови обухватају заједничким именом *течност*. Ако реч течност употребимо у овом ширем смислу, права течност се зове *капљива течност*, јер услед кохезије може да образује капљице за разлику од гаса. Као стручни термин за течност у овом смислу употребљује се и реч *флуид*. У току даљих излагања видећемо да је једна од основних разлика између капљивих течности и гасова у томе што су реалне течности готово *нестишљиве (инкомпресибилне)* за разлику од гасова који су увек *стишљиви (компресибилни)*.

Како с једне стране није увек лако разликовати чврсто тело од капљиве течности, а с друге стране су и течности у општем смислу еластичне, то је очигледно да многи резултати теорије еластичности могу да се пренесу и важе у хидромеханици.

У нашем излагању задржаћемо се, прво, на кинематичким и динамичким питањима која се односе на непрекидну средину уопште, а у наредним главама обрадићемо посебне проблеме теорије еластичности и хидромеханике.

2. Деформација

Кад неки елемент непрекидне средине пређе из положаја I (сл. 3) у непосредно му блиски положај II, он се у општем случају при томе и *деформише* — мења облик и величину. То је, на пр., код течних тела очигледно.



Сл. 3

Елементарна померања појединих честица непрекидне средине при том прелазу одређена су у општем случају *основним ставом кинематике непрекидне средине* који је формулисао Хелмхолц (Helmholtz) и који гласи:

Елементарно померање неке честице непрекидне средине резултат је транслације, ротације и деформације.

Овај став се може лако доказати.

Уочимо неки елемент непрекидне средине који образује околину тачке O (сл. 3), у којој нека буде координатни почетак, и тачку P у том елементу, одређену вектором положаја $d\mathfrak{r}$ у односу на тачку O. Нека елементарно померање тачке O буде $\mathfrak{s}_0$, а тачке P нека буде $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0 + d\mathfrak{s}$, при чему, претпостављамо, што је природно, да је вектор померања $\mathfrak{s} = \{\xi, \eta, \zeta\}$ појединих честица уоченог елемента непрекидна функција положаја, тј. $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}(\mathfrak{r})$.

Промена $d\mathfrak{s}$ вектора $\mathfrak{s}$ елементарног померања при прелазу од тачке O до тачке P, може се на познати начин изразити у облику

$$d\mathfrak{s} = (d\mathfrak{r} \cdot \nabla)\mathfrak{s} = d\mathfrak{r} \cdot \nabla \mathfrak{s}, \tag{1}$$

па је, према томе,

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0 + d\mathfrak{r} \cdot \nabla \mathfrak{s}. \tag{2}$$

Локални афинор

$$\nabla \mathfrak{s} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

одређује, дакле, промену вектора елементарног померања у околини тачке O.

Растављањем локалног афинора (3) на антисиметрични афинор — аксијатор $\mathcal{A}$ и симетрични афинор — тензор $\mathcal{D}$, може се једначина (2) написати у облику

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0 + d\mathfrak{r} \cdot \mathcal{A} + d\mathfrak{r} \cdot \mathcal{D}, \tag{4}$$

где је

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}(\nabla \mathfrak{s} - \overline{\nabla \mathfrak{s}}), \qquad \mathcal{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathfrak{s} + \overline{\nabla \mathfrak{s}}), \tag{5}$$

при чему је $\overline{\nabla \mathfrak{s}}$ афинор конјугован афинору $\nabla \mathfrak{s}$.

Ако елементарно померање посматрамо у односу на време и узмемо да уочени елемент непрекидне средине пређе из положаја I у положај II за време dt може се говорити о брзини појединих честица при том прелазу. Нека $\mathfrak{v}_0$ буде брзина тачке O, тј. њено померање у јединици времена, $\mathfrak{v}=\{v_1, v_2, v_3\}$, односна брзина тачке P биће онда $\mathfrak{v}=\mathfrak{v}_0+d\mathfrak{v}$, јер се у том случају и брзина може сматрати као непрекидна функција положаја, тј. $\mathfrak{v}=\mathfrak{v}(\mathfrak{r})$. Везе између елементарних померања честица уоченог елемента за време dt и њихових брзина одређене су обрасцима

$$\mathfrak{s}_0=\mathfrak{v}_0\,dt; \quad \mathfrak{s}=\mathfrak{v}\,dt=(\mathfrak{v}_0+d\,\mathfrak{v})\,dt. \tag{6}$$

Према томе, биће

$$d\,\mathfrak{v}=(d\mathfrak{r}\cdot\nabla)\,\mathfrak{v}=d\,\mathfrak{r}\cdot\nabla\mathfrak{v} \tag{7}$$

и

$$\mathfrak{v}=\mathfrak{v}_0+d\mathfrak{r}\cdot\nabla\mathfrak{v}, \tag{8}$$

где је

$$\nabla\mathfrak{v}=\begin{Bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial y} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} & \frac{\partial v_2}{\partial z} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{Bmatrix}. \tag{9}$$

Растављањем локалног афинора (9) на антисиметрични $\mathcal{A}'$ и симетрични део $\mathcal{D}'$, може се једначина (8) сад написати

$$\mathfrak{v}=\mathfrak{v}_0+d\,\mathfrak{r}\cdot\mathcal{A}'+d\,\mathfrak{r}\cdot\mathcal{D}', \tag{10}$$

где је

$$\mathcal{A}'=\frac{1}{2}(\nabla\mathfrak{v}-\overline{\nabla\mathfrak{v}}), \qquad \mathcal{D}'=\frac{1}{2}(\nabla\mathfrak{v}+\overline{\nabla\mathfrak{v}}). \tag{11}$$

Међутим, имаћемо

$$d\,\mathfrak{r}\cdot\mathcal{A}'=d\,\mathfrak{r}\cdot\frac{1}{2}(\nabla\mathfrak{v}-\overline{\nabla\mathfrak{v}})=-\frac{1}{2}\,d\,\mathfrak{r}\times(\nabla\times\mathfrak{v})=\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}\times d\,\mathfrak{r}, \tag{12}$$

па, ако ставимо

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}=\vec{\omega}, \tag{13}$$

добићемо

$$d\,\mathfrak{r}\cdot\mathcal{A}=d\,\mathfrak{r}\cdot\mathcal{A}'\,dt=(\vec{\omega}\times d\,\mathfrak{r})\,dt. \tag{14}$$

Према томе, елементарно померање (4) ма које честице може се најзад изразити у облику

$$\mathfrak{s}=\mathfrak{s}_0+d\,\mathfrak{s}=\mathfrak{s}_0+(\vec{\omega}\times d\,\mathfrak{r})\,dt+d\,\mathfrak{r}\cdot\mathcal{D}. \tag{15}$$

Из ове једначине се види да се померање уочене тачке непрекидне средине састоји од три компоненте у општем случају:

1. $\mathfrak{s}_0$ која је иста за све тачке уоченог елемента и према томе одговара транслацији;

2. $(\vec{\omega}\times d\,\mathfrak{r})\,dt$ која одговара ротацији уоченог елемента као чврстог тела, јер заиста у том случају $\vec{\omega}$ претставља тренутну угаону брзину. Но, и без осврта на ову чињеницу лако је показати, да се услед ове компоненте растојања тачака уоченог елемента после померања не мењају. Наиме, при прелазу елемента из положаја I у положај II (сл. 3), првобитно растојање $OP=|d\,\mathfrak{r}|$ тачака O и P се мења и постаје у општем случају $O'P'=|d\,\mathfrak{r}'|$, где је

$$d\,\mathfrak{r}'=d\,\mathfrak{r}+d\,\mathfrak{s}, \tag{16}$$

тј.

$$d\,\mathfrak{r}'=d\,\mathfrak{r}+(\vec{\omega}\times d\,\mathfrak{r})\,dt+d\,\mathfrak{r}\cdot\mathcal{D}, \tag{17}$$

па је, дакле,

$$|d\,\mathfrak{r}'|\neq|d\,\mathfrak{r}|. \tag{18}$$

Међутим, растојање тачака O и P у новом положају остаје непромењено, ако је

$$d\,\mathfrak{r}\cdot\mathcal{D}=\vec{\delta}=0.$$

Заиста, у том случају, после краћег рачуна добијамо

$$d\,\mathfrak{r}'^2=[d\,\mathfrak{r}+(\vec{\omega}\times d\,\mathfrak{r})\,dt]^2=d\,\mathfrak{r}^2,$$

јер је $d\,\mathfrak{r}\cdot(\vec{\omega}\times d\,\mathfrak{r})\,dt=0$, а $(\vec{\omega}\times d\,\mathfrak{r})^2 dt^2$ може да се као величина мала вишег реда у односу на $d\,\mathfrak{r}^2$ занемари.

3) најзад $\vec{\delta}$, од које једино, како видимо, зависи промена растојања после померања, дакле, његова *чиста деформација*.

У ствари деформацију уоченог елемента непрекидне средине карактерише *релативно померање* $d\,\mathfrak{s}$ његових честица, тј.

$$d\,\mathfrak{s}=(\vec{\omega}\times d\,\mathfrak{r})\,dt+\vec{\delta}. \tag{19}$$

То релативно померање, међутим, има, како се види, две компоненте, од којих је једна — $(\vec{\omega}\times d\,\mathfrak{r})\,dt$ — ротациона. Како се при ротацији не мењају ни дужине ни углови, сматра се као узрок праве, чисте деформације само компонента $\vec{\delta}$ релативног померања, јер она изазива промене дужина и промене величине углова. Отуда се понекад целокупно релативно померање сматра као деформација за разлику од његове компоненте $\vec{\delta}$ која се зове чиста деформација у том случају. У даљим излагањима разумећемо увек под деформацијом само чисту деформацију.

Деформација непрекидне средине може бити *врло мала* или, како се још каже, *инфинитезимална*, где реч „инфинитезимална" треба разумети у смислу наших дефиниција непрекидне средине, и *коначна*.

Разлика између једне и друге деформације није само у величини већ и у начину обраде. Наиме, ако се вектор померања $\mathfrak{s}$ као функција положаја развије по Тејлоровом обрасцу у околини тачке O у којој је $\mathfrak{s}_0$ вредност вектора, добиће се

$$\mathfrak{s}=\mathfrak{s}_0+d\mathfrak{s}+\frac{1}{2!}d^2\mathfrak{s}+\frac{1}{3!}d^3\mathfrak{s}+\cdots\cdots \tag{20}$$

Према томе, претходна излагања су тачна у првој апроксимацији само, ако је $d\mathfrak{s}$ врло мала величина (инфинитезимална у горњем смислу), те се остали чланови реда (20) као мале величине вишег реда могу занемарити. Само у том случају се једначина (15) може сматрати као тачна, тако да је релативно померање $d\mathfrak{s}$ тачке P у односу на тачку O врло мало, па, према томе, и сама деформација у том правцу врло мала. У таквом случају је релативно померање тачке P у односу на тачку O линеарна функција од $d\mathfrak{r}$, па се таква деформација назива и *хомогена деформација* непрекидне средине.

У нашим даљим излагањима задржаћемо се само на инфинитезималним деформацијама и само њих ћемо проучавати, пошто су оне важније за оне проблеме који нас интересују.

3. Тензор деформације

Вектор

$$\vec{\delta}=d\mathfrak{r}\cdot D, \tag{1}$$

како смо видели, одређује деформациону компоненту елементарног померања, па тиме и деформациону компоненту брзине, у зависности од $d\mathfrak{r}$. Сама деформација у околини тачке O' непрекидне средине одређена је у потпуности тензором

$$D=\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}+\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial z}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}+\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial\eta}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial z}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial\zeta}{\partial z} \end{Bmatrix}. \tag{2}$$

Овај тензор се зове *тензор деформације*. Он је функција положаја и потпуно је одређен у свакој тачки непрекидне средине, ако је познато елементарно померање $\mathfrak{s}$ као функција положаја. Тензор деформације одређен је са *шест* величина

$$\begin{aligned} &\delta_{11}=\frac{\partial\xi}{\partial x}, && \delta_{22}=\frac{\partial\eta}{\partial y}, && \delta_{33}=\frac{\partial\zeta}{\partial z}, \\ &\delta_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\right), && \delta_{13}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right), && \delta_{23}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial z}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

које се називају координате тензора деформације и које се лако могу израчунати.

Свака од ових координата има своје конкретно механичко тумачење што уједно показује да се деформација може рашчланити на простије саставне делове — на *просте* деформације. У том погледу је важан појам *линеарне дилатације* (одн. *контракције*). То је специфична, релативна промена дужине неког вектора у случају деформације. Другим речима, ако је вектор $d\mathfrak{r}$ после деформације постао вектор $d\mathfrak{r}'$ израз

$$\varepsilon=\frac{|d\mathfrak{r}'|-|d\mathfrak{r}|}{|d\mathfrak{r}|} \tag{4}$$

дефинише линеарну дилатацију ε вектора $d\mathfrak{r}$.

Посматрајмо случај, кад се тачка P налази на x-оси (сл. 4), тј. случај

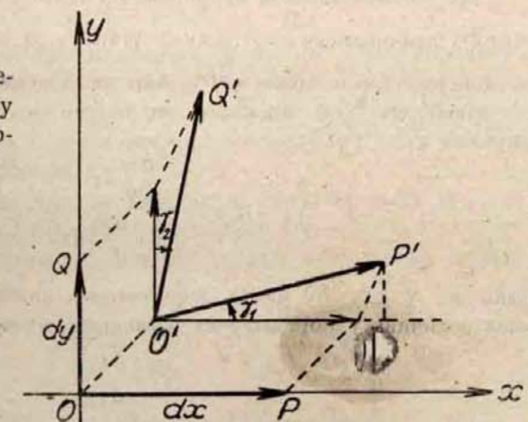
$$d\mathfrak{r}=\mathfrak{i}\,dx.$$

Тада је релативно померање тачке P у односу на тачку O после деформације дато изразом

$$d\mathfrak{s}=\mathfrak{i}\frac{\partial\xi}{\partial x}dx+\mathfrak{j}\frac{\partial\eta}{\partial x}dx+\mathfrak{k}\frac{\partial\zeta}{\partial x}dx,$$

па е стога

$$d\mathfrak{r}'=\mathfrak{i}\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)dx+\mathfrak{j}\frac{\partial\eta}{\partial x}dx+\mathfrak{k}\frac{\partial\zeta}{\partial x}dx.$$



Сл. 4

Међутим, у случају инфинитезималних деформација права дужина овог вектора $d\mathfrak{r}'$ врло мало се разликује од његове пројекције на x-осу, па је, према томе, у првој апроксимацији

$$|d\mathfrak{r}'| = \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) dx .$$

На тај начин се за линеарну дилатацију у правцу x-осе, с обзиром на једначину (4), добија

$$\frac{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) dx - dx}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \delta_{11} . \tag{5}$$

На потпуно исти начин се за линеарне дилатације у правцу оса y и z добија

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \delta_{22}; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \delta_{33} . \tag{6}$$

Према томе, координате тензора деформације које стоје на месту чланова главне дијагонале матрице (2) претстављају линеарне дилатације непрекидне средине у правцима оса x, y и z. Линеарне дилатације се кратко зову и само *дилатације*, а понекад и *линеарни коефицијенти дилатације* у односу на поменуте осе. На основу њиховог механичког тумачења очигледно је да дилатацијама (продужењима) у правом смислу речи одговарају позитивне вредности ових координата тензора деформације, док њихове негативне вредности одговарају контракцијама (скраћењима). Линеарне дилатације су врло мале величине.

Да бисмо добили механичко тумачење координата δ_{12}, δ_{13} и δ_{23} тензора деформације, потражимо угао γ_1 за који се вектор $\overrightarrow{OP}$ обрне да дође у нови положај $\overrightarrow{O'P'}$. Ако се занемари отступање тачке P' од равни Oxy (сл. 4) може се, пошто је тражени угао врло мали, написати

$$\gamma_1 \approx \operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} dx}{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) dx} = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{1 + \delta_{11}} .$$

Како је, у случају малих деформација, линеарна дилатација δ_{11} врло мала величина у поређењу са јединицом, може се написати

$$\gamma_1 = \frac{\partial \eta}{\partial x} .$$

Исто тако, ако се посматра вектор $\overrightarrow{OQ} = \mathfrak{j}\, dy$, па потражи угао обртања тог вектора при малој деформацији, добиће се истим поступком

$$\gamma_2 = \frac{\partial \xi}{\partial y} ,$$

и најзад

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} . \tag{7}$$

Угао γ претставља *укошење* правог угла POQ између оса x и y који после деформације прелази у угао $P'O'Q'$, тј. *смањење* (одн. *повећање*) тог угла. Половина угла γ, тј.

$$\frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) = \delta_{12} \tag{8}$$

одређује, дакле, координату δ_{12} тензора деформације. Њу ћемо, по угледу на Зомерфелда (Sommerfeld), звати *клизање* или *смицање* непрекидне средине. Иначе, у литератури је уобичајено да се *читав* угао γ зове смицање.

На потпуно исти начин добија се за укошење правог угла између оса z и x израз

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} ,$$

па, према томе,

$$\delta_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right). \tag{9}$$

Најзад се као половина угла укошења правог угла између оса y и z добија

$$\delta_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\right). \tag{10}$$

На тај начин добили смо механичко тумачење и за координате δ_{ij} $(i \neq j)$ тензора деформације у облику смицања. Са слике (сл. 4) очигледно је да позитивним смицањима одговара смањивање углова између позитивних смерова оса, а негативним — повећање тих углова. И смицања су врло мале величине.

Из дефиниције линеарних дилатација и смицања јасно је да је њихова димензија једнака димензији апстрактног броја.

Место тензора деформације D може се при проучавању деформације користити и тензор

$$D' = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{Bmatrix} , \tag{11}$$

јер су оба у простој вези (§ 2). Управо може се и D' сматрати као тензор деформације који одређује деформацију непрекидне средине у јединици времена. Координате

$$(12)\qquad \frac{\partial v_1}{\partial x}=\delta_{11}'\,;\qquad \frac{\partial v_2}{\partial y}=\delta_{22}'\,;\qquad \frac{\partial v_3}{\partial z}=\delta_{33}'\,,$$

овог тензора добијају се деобом са dt (јер је $\mathfrak{s}=\mathfrak{v}\,dt$) односних линеарних дилатација непрекидне средине и, према томе, претстављају ***брзине специфичних промена дужина*** у правцу x, y, z-осе.

Исто тако његове координате

$$(13)\qquad \delta_{12}'=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right),\quad \delta_{13}'=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}+\frac{\partial v_3}{\partial x}\right),\quad \delta_{23}'=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}+\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)$$

добијају се деобом односних смицања, тј. половина угла укошења са dt. При томе, на пр., δ_{12}' значи *средњу угаону брзину* обртања елементарних дужина OP и OQ при деформацији непрекидне средине. Такво исто аналогно значење имају и остале две координате δ_{13}' и δ_{23}'.

Треба још истаћи, да, за разлику од дилатација и смицања, координате δ_{ij}' $(i, j=1,2,3)$ тензора D' имају димензију $[t^{-1}]$, а могу се тумачити као дилатације и смицања у јединици времена. Осим тога су, како смо видели δ_{ij} $(i,j=1,2,3)$ врло мале величине, док су δ_{ij}' у општем случају коначне величине.

4. Површина деформације. Кубна дилатација

Како се у случају инфинитезималних деформација може са довољном тачношћу сматрати да је дужина $d\mathfrak{r}'$ (§ 2) једнака својој пројекцији на правац вектора $d\mathfrak{r}=\mathfrak{e}\,|d\mathfrak{r}|$, где је $\mathfrak{e}$ орт тог вектора, може се, с обзиром на § 2, једн. (1) и (16), написати

$$|d\mathfrak{r}'|=d\mathfrak{r}'\cdot\mathfrak{e}=(d\mathfrak{r}+d\mathfrak{r}\cdot\nabla\mathfrak{s})\cdot\mathfrak{e}=|d\mathfrak{r}|\,(1+\mathfrak{e}\cdot\nabla\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{e}).$$

Ако се, међутим, афинор $\nabla\mathfrak{s}$ разложи у аксијатор A и тензор D и напише

$$(1)\qquad \nabla\mathfrak{s}=A+D,$$

добиће се

$$\mathfrak{e}\cdot\nabla\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{e}=\mathfrak{e}\cdot D\cdot\mathfrak{e},$$

јер

$$(2)\qquad \mathfrak{e}\cdot A\cdot\mathfrak{e}=0.$$

На тај начин добијамо најзад

$$(3)\qquad |d\mathfrak{r}'|=|d\mathfrak{r}|\,(1+\mathfrak{e}\cdot D\cdot\mathfrak{e}).$$

Да је једначина (2) тачна, може се видети одмах на овај начин. Наиме, према једначинама (12) и (13) у § 2, може се написати

$$(4)\qquad \mathfrak{e}\cdot A=dt\,(\vec{\omega}\times\mathfrak{e}),$$

одакле се одмах добија

$$\mathfrak{e}\cdot A\cdot\mathfrak{e}=dt\,(\vec{\omega}\times\mathfrak{e})\cdot\mathfrak{e}=0,$$

што је и требало доказати.

Уношењем вредности (3) за $|d\mathfrak{r}'|$ у једначину (4), § 3, добиће се после краћег рачуна

$$(5)\qquad \varepsilon=\mathfrak{e}\cdot D\cdot\mathfrak{e},$$

што се може сматрати као линеарна дилатација уочене непрекидне средине у правцу одређеном ортом

$$(6)\qquad \mathfrak{e}=\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}.$$

У скаларном облику израз за линеарну дилатацију у правцу орта $\mathfrak{e}$ изгледа

$$(7)\qquad \varepsilon=\delta_{11}\alpha^2+\delta_{22}\beta^2+\delta_{33}\gamma^2+2\,\delta_{12}\alpha\beta+2\,\delta_{13}\gamma\alpha+2\,\delta_{23}\beta\gamma\equiv F(\alpha,\beta,\gamma).$$

Помоћу ове једначине може се лако дати геометриска интерпретација промене линеарне дилатације у зависности од правца на начин сличан, како се то ради, при конструкцији елипсоида инерције у геометрији маса. У том циљу из тачке O као почетка координатног система у правцу сваког орта $\mathfrak{e}$ конструише се вектор положаја $\mathfrak{r}$ чија је дужина обрнуто пропорционална квадратном корену из апсолутне вредности односне линеарне дилатације ε, тј.

$$(8)\qquad \mathfrak{r}=\frac{k}{\sqrt{|\varepsilon|}}\,\mathfrak{e},$$

где је k произвољна константа пропорционалности. Декартове координате овог вектора дате су обрасцима

$$(9)\qquad x=\frac{k\alpha}{\sqrt{|\varepsilon|}},\qquad y=\frac{k\beta}{\sqrt{|\varepsilon|}},\qquad z=\frac{k\gamma}{\sqrt{|\varepsilon|}},$$

одакле се израчунавањем α, β и γ и уношењем у једначину (7) добија, за $k=1$, једначина

$$(10)\qquad F(x,y,z)\equiv\delta_{11}x^2+\delta_{22}y^2+\delta_{33}z^2+2\,\delta_{12}xy+2\,\delta_{13}zx+2\,\delta_{23}yz=\pm 1.$$

На тај начин крајеви свих вектора (8) леже на површини другог реда одређеној једначином (10). Та површина се зове *површина деформације*. Она је очигледно, према облику једначине, централна површина другог реда, али не мора увек бити елипсоид како је то случај са елипсоидом инерције у геометрији маса, јер дилатације могу бити позитивне, негативне и једнаке нули. Дакле, површина деформације може бити ма која централна површина другог реда па чак и две равни у које може дегенерисати нека централна површина. Ако је површина деформације елипсоид, тада су после деформације сви линеарни елементи уочене непрекидне средине растегнути — дилатације у свима правцима су позитивне, или су сви линеарни елементи скраћени — дилатације у свима правцима су негативне, тј. контракције су. Ако у непрекидној средини има и дилатација и контракција, површину деформације образују два конјугована хиперболоида, од којих један одговара дилатацијама а други контракцијама. Асимптотски конус који их раздваја одговара оним линеарним елементима непрекидне средине чије су дилатације једнаке нули, тј. које своју дужину не мењају.

Познато је да се увек може изабрати такав Декартов координатни систем — систем *главних оса* — да се, после трансформације једначине ма које централне површине другог реда, из те једначине изгубе чланови са производима координата. Нека то буде систем $OXYZ$, ако је тачка O центар дате површине деформације. Тада се после трансформације добија једначина

$$f(X, Y, Z) \equiv \delta_1 X^2 + \delta_2 Y^2 + \delta_3 Z^2 = \pm 1. \tag{11}$$

Правци оса овога триједра зову се *главни правци деформације*. Коефицијенти δ_1, δ_2 и δ_3 једначине (11), који одређују дилатације у главним правцима, зову се *главне дилатације* или *главне контракције*. Ако је површина деформације елипсоид, тј. ако су сва три коефицијента δ_1, δ_2 и δ_3 позитивна или сва три негативна, тада један од главних праваца показује правац највећег линеарног продужења (скраћења), а један опет правац најмањег линеарног продужења (скраћења). Пошто су координате које одговарају смицањима у односу на триједар главних праваца једнаке нули, углови између оса главних праваца остају при деформацији непромењиви.

Према томе, ако се координате тензора деформације одреде у односу на овај систем, он ће бити дат матрицом

$$D = \begin{Bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{Bmatrix}, \tag{12}$$

па се може казати да је деформација у ма којој тачки непрекидне средине потпуно одређена са само *три* дилатације у главним правцима.

Уочимо сад неки запремински елемент dV непрекидне средине. Овај запремински елемент се после деформације у општем случају мења по величини и постаје, на пр., dV_1, при чему се његова запремина променила за

$$\triangle(dV) = dV_1 - dV.$$

Израз

$$e_1 = \frac{\triangle(dV)}{dV} \tag{13}$$

се тада зове *кубна* или *запреминска дилатација* или *кубни коефицијент дилатације* и претставља специфичну, тј. у односу на првобитну запремину, промену запремине.

Да бисмо одредили кубну дилатацију неке непрекидне средине, уочимо запремински елемент dV у облику правоуглог паралелепипеда чије су стране паралелне координатним равнима триједра главних праваца деформације, а теме у координатном почетку, тј.

$$dV = dX\,dY\,dZ.$$

После деформације ивице нашег паралелепипеда дилатирају и постају

$$dX(1+\delta_1), \quad dY(1+\delta_2), \quad dZ(1+\delta_3).$$

Како се при деформацији углови између главних праваца деформације не мењају, наш запремински елемент остаје и после деформације правоугли паралелепипед чија је запремина

$$dV_1 = dX\,dY\,dZ\,(1+\delta_1)(1+\delta_2)(1+\delta_3).$$

Према томе се, с обзиром на једначину (13), за кубну дилатацију добија израз

$$e_1 = (1+\delta_1)(1+\delta_2)(1+\delta_3) - 1.$$

Ако се, најзад, и овде задовољимо само са првом апроксимацијом и задржимо само мале величине првог реда, па стога чланове са производима главних дилатација δ_i $(i = 1, 2, 3)$ изоставимо, добићемо

$$e_1 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3. \tag{14}$$

Дакле, кубна дилатација непрекидне средине једнака је збиру главних линеарних дилатација. Ако се загледа матрица (12) тензора деформације, види се, да је у односу на тај тензор кубна дилатација прва скаларна инваријанта — први скалар. Како је, међутим, први скалар e_1 тензора инваријантан у односу на трансформације координата, то мора бити

$$e_1 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}, \tag{15}$$

што показује да је кубна дилатација непрекидне средине увек једнака збиру линеарних дилатација (у три узајамно управна правца) одређених за исту средину и на истом месту.

Димензија кубне дилатације је такође апстрактни број.

Ако кубну дилатацију e_1 поделимо временом dt трајања померања, добићемо ***брзину кубне дилатације*** i, одн. кубну дилатацију непрекидне средине у јединици времена. Вредност брзине кубне дилатације i одређена је изразом

$$i = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \operatorname{div} \mathfrak{v}. \tag{16}$$

5. Потенцијалне деформације. Промена облика и промена запремине

У нашим излагањима, како смо рекли, сматрамо као деформацију мала релативна померања честица непрекидне средине која зависе само од дилатација и смицања. Таква, чиста деформација, како смо такође видели, одређена је тензором деформације $\mathcal{D}$. Међутим, релативна померања честица имају у општем случају и ротациону компоненту. Ако су релативна померања честица у читавој уоченој непрекидној средини таква да не зависе од ротација, тј. ако је у читавој непрекидној средини и за свако $d\mathfrak{r}$

$$d\mathfrak{r}\cdot\mathcal{A}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{s}=0, \tag{1}$$

биће

$$\operatorname{rot}\mathfrak{s}=0. \tag{2}$$

Према томе, у том случају се векторска функција $\mathfrak{s}$ може претставити као градијент неког скалара U, тј.

$$\mathfrak{s}=\operatorname{grad}U. \tag{3}$$

Скаларна функција U са промењеним знаком је потенцијал векторске функције $\mathfrak{s}$ и стога се такве деформације непрекидне средине зову *потенцијалне*.

Најзад, чиста инфинитезимална деформација, одређена тензором деформације $\mathcal{D}$ може се увек разложити у две компоненте — *једну* коју чини само промена облика без промене запремине, и *другу* коју чини само промена запремине без промене облика (слично повећавање или смањивање уоченог елемента).

Јасно је да прва компонента треба да буде неки девијатор у смислу Схоутена тј. тензор чији је први скалар једнак нули, јер баш тај први скалар одређује кубну дилатацију, а она у првој компоненти треба да буде једнака нули. Друга пак компонента мора бити тензор који одређује у свака три ортогонална правца једнаке дилатације без смицања, дакле, тензор одређен скаларном матрицом Такав се тензор, како знамо, увек може претставити као производ неког скалара, на пр., p и јединичног тензора I (изотропни афинор).

Према томе, ако се прва компонента обележи са $\mathcal{D}_1$ може се написати

$$\mathcal{D}=\mathcal{D}_1+pI, \tag{4}$$

одакле је, према § 5 Увода,

$$p=\frac{1}{3}e_1. \tag{5}$$

Уношењем ове вредности за p у једначину (4) добија се решењем те једначине по $\mathcal{D}_1$

$$\mathcal{D}_1=\mathcal{D}-\frac{1}{3}e_1I, \tag{6}$$

па је, према томе,

$$\mathcal{D}=\left(\mathcal{D}-\frac{1}{3}e_1I\right)+\frac{1}{3}e_1I. \tag{7}$$

Матрица која одговара тензору $\mathcal{D}_1$, који одређује само промену облика, дата је изразом

$$\mathcal{D}_1=\begin{Bmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{e_1}{3} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) & \frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{e_1}{3} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial z}\right) & \frac{\partial\zeta}{\partial z}-\frac{e_1}{3}\end{Bmatrix}, \tag{8}$$

а матрица која одговара тензору који одређује само промену запремине изгледа

$$\begin{Bmatrix}\frac{e_1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{e_1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{e_1}{3}\end{Bmatrix}. \tag{9}$$

Односне компоненте тензора $\mathcal{D}'$ су

$$\mathcal{D}_1'=\mathcal{D}'-\frac{1}{3}\operatorname{div}\mathfrak{v}I \tag{10}$$

и

$$\frac{1}{3}\operatorname{div}\mathfrak{v}I. \tag{11}$$

6. Услови компатибилности

Видели смо већ да је проблем одређивања тензора деформације односно његових координата — дилатација и смицања — врло прост, ако је позната векторска функција

$$\mathfrak{s}=\{\xi,\eta,\zeta\}\quad\text{или}\quad\mathfrak{v}=\{v_1,v_2,v_3\}.$$

Сасвим је други случај, ако се ради о инверзном проблему, тј. о одређивању векторске функције $\mathfrak{s}$, одн. $\mathfrak{v}$ која дефинише померања одн. брзине честица у непрекидној средини, кад је дат тензор деформације као функција положаја, одн. његове координате. У том случају, поред тога што се ради о проблему интеграције који је увек сложенији и тежи од проблема диференцијације, треба приметити и водити рачуна о чињеници да се *сваки* симетрични афинор са својих шест координата не може сматрати као тензор деформације. Да би шест координата неког симетричног афинора могле да се сматрају као координате неког тензора деформације оне морају задовољавати неке услове који се зову *услови компатибилности* или по свом проналазачу *Сен-Венанови* (*Saint-Venant*) *услови*.

Да бисмо одредили те услове ми овако размишљамо. Ако се неки симетрични афинор D може сматрати као тензор деформације, мора се моћи довести на облик

$$D=\frac{1}{2}(\nabla\mathfrak{s}+\overline{\nabla\mathfrak{s}}). \tag{1}$$

Међутим, ако се на такав тензор примени Хамилтонов оператор ∇ слева и здесна векторски добија се нула, тј.

$$\nabla\times D\times\nabla=\frac{1}{2}\nabla\times(\nabla\mathfrak{s}+\overline{\nabla\mathfrak{s}})\times\nabla=0.$$

Тачност ове једначине следи одмах на основу правила за векторско-дијадско множење вектора и афинора слева и здесна, јер је на основу тих правила

$$\nabla\times\nabla\mathfrak{s}=0 \quad \text{и} \quad \overline{\nabla\mathfrak{s}}\times\nabla=0.$$

Према томе, ако неки дати симетрични афинор D задовољава услов

$$\nabla\times D\times\nabla=0, \tag{2}$$

он се може сматрати као тензор деформације.

Овај услов обухвата једном тензорском једначином све скаларне услове компатибилности. Лева страна једначине (2) је и сама симетрични афинор чијих шест координата морају бити једнаке нули и баш тих шест једначина образују скаларне услове компатибилности које морају задовољавати координате датог симетричног афинора, да би могле претстављати дилатације и смицања неке непрекидне средине. До скаларног облика ових услова долази се најлакше, ако се дати симетрични афинор D напише у облику збира координатних дијада, тј.

$$D=\delta_{11}(\mathfrak{i}\mathfrak{i})+\delta_{22}(\mathfrak{j}\mathfrak{j})+\delta_{33}(\mathfrak{k}\mathfrak{k})+\delta_{12}(\mathfrak{i}\mathfrak{j}+\mathfrak{j}\mathfrak{i})+\delta_{13}(\mathfrak{i}\mathfrak{k}+\mathfrak{k}\mathfrak{i})+\delta_{23}(\mathfrak{j}\mathfrak{k}+\mathfrak{k}\mathfrak{j}).$$

На тај начин се добијају две групе по три једначине, од којих ћемо навести само по једну, јер је остале лако написати цикличком

пермутацијом координата. Дакле,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\delta_{22}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\delta_{33}}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\delta_{23}}{\partial y\,\partial z}=0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial^2\delta_{11}}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2\delta_{23}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\delta_{13}}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2\delta_{12}}{\partial x\,\partial z}=0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{3}$$

Подвлачимо да компоненте тензора деформације, које одговарају само промени облика и само промени запремине, појединачно не задовољавају услове компатибилности.

7. Једначина континуитета

Сва наша досадашња разматрања су потпуно кинематичка. Узмимо сада у обзир материјалност непрекидне средине. У том случају се једначина, која изражава услов да је маса неког малог елемента непрекидне средине иста пре и после деформације, тј. да се маса деформацијом не мења, зове *једначина континуитета*.

Да бисмо нашли израз једначине континуитета у математичком облику, посматрајмо неки запремински елемент $\triangle V$, масе μ и густине ρ. Тада је маса одређена једначином

$$\mu=\rho\triangle V, \tag{1}$$

при чему густина може у општем случају бити функција положаја и времена, тј.

$$\rho=f(\mathfrak{r},t). \tag{2}$$

Уочени запремински елемент $\triangle V$ може услед кретања честица да промени свој облик или запремину, или и једно и друго, тј. може да се деформише, али његова маса остаје непромењена, тј.

$$\frac{d\mu}{dt}=0, \tag{3}$$

што у ствари претставља једначину континуитета. Она се може трансформисати. Сменом вредности (1) масе у једначину (3) добија се

$$\rho\frac{d(\triangle V)}{dt}+\triangle V\frac{d\rho}{dt}=0,$$

одн. после деобе са $\rho\triangle V$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\frac{1}{\triangle V}\frac{d(\triangle V)}{dt}=0. \tag{4}$$

Други члан у овој једначини показује промену запремине уоченог елемента у јединици времена израчунату за јединицу запремине, а то је брзина кубне дилатације. Према томе је

$$\frac{1}{\triangle V}\frac{d(\triangle V)}{dt}=\operatorname{div}\mathfrak{v},$$

што се може и директно показати.

На тај начин једначина континуитета (4) добија најзад облик

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\operatorname{div}\mathfrak{v}=0. \tag{5}$$

Једначина континуитета се може написати у још једном облику, ако се узме у обзир једначина (2). У том случају се за тоталну промену густине ρ добија

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathfrak{v}\cdot\operatorname{grad}\rho. \tag{6}$$

Сменимо ли ту вредност у једначини (5), добићемо

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathfrak{v}\cdot\operatorname{grad}\rho+\rho\operatorname{div}\mathfrak{v}=0, \tag{7}$$

одакле најзад за нови облик једначине континуитета следи

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\,\mathfrak{v})=0. \tag{8}$$

Извели смо једначину континуитета посматрањем исте масе чија се запремина и густина мења. Међутим, до једначине континуитета може се доћи и посматрањем одређене запремине V испуњене масом која протиче кроз граничну површину S ове запремине, тј. ако се посматра промена масе и густине при сталној запремини.

Ако запремину V замислимо подељену на запреминске елементе dV, тада је укупна маса μ у уоченој запремини

$$\mu=\int\limits_V\rho\,dV, \tag{9}$$

где је ρ променљива густина. Кроз површински елемент dS граничне површине протиче у јединици времена маса $\rho(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{n})\,dS$, где је $\mathfrak{n}$ орт спољашње нормале површине S. Кроз читаву површину протећи ће, дакле, у јединици времена

$$\int\limits_S\rho(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{n})\,dS. \tag{10}$$

Како је густина увек позитиван скалар, то маса истиче, ако је скаларни производ $(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{n})\,dS$ позитиван; ако је он негативан, маса утиче.

Нека, даље, буде μ_0 количина масе у уоченој запремини у тренутку t_0, а μ_1 маса у истој запремини у тренутку t_1. Тада је $\frac{\mu_1-\mu_0}{t_1-t_0}$ средња количина масе која је из запремине V истекла за јединицу времена. Кад је t_1-t_0 бесконачно мали период времена, горњи производ постаје, с обзиром на једначину (9),

$$-\frac{\partial\mu}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V\rho\,dV, \tag{11}$$

где смо знак $-$ узели под претпоставком да маса истиче, тј. да је $\mu_1-\mu_0<0$. Лева страна ове једначине претставља количину истекле масе у јединици времена из уочене запремине V. Ако израз (10), који показује колика је маса истекла у јединици времена из запремине V, изједначимо са десном страном једначине (11), која показује за колико се смањила маса у јединици времена, добиће се

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V\rho\,dV=\int\limits_S\rho(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{n})\,dS.$$

Међутим, по Гаусовој теореми биће

$$\int\limits_S\rho(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{n})\,dS=\int\limits_V\operatorname{div}(\rho\,\mathfrak{v})\,dV$$

и, према томе је

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V\rho\,dV=\int\limits_V\operatorname{div}(\rho\,\mathfrak{v})\,dV,$$

или

$$\int\limits_V\left[\operatorname{div}(\rho\,\mathfrak{v})+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]dV=0,$$

одакле, пошто је запремина потпуно произвољна, добијамо једначину континуитета у облику (8).

8. Спољашње силе и унутрашњи напони

Пошто смо проучили деформацију непрекидне средине са кинематичког гледишта, поставимо сад питање узрока који те деформације изазивају, тј. сила које дејствују на посматрана тела као ограничене делове непрекидне средине.

Разликујемо *спољашње* и *унутрашње силе.*

Спољашње силе са своје стране деле се у две врсте:

1) *Запреминске силе* које дејствују на све честице тела и пропорционалне су маси елемента. Тако, запреминска сила која дејствује на елемент масе dm мора бити величина истог реда као тај елемент, тј. та сила мора бити облика

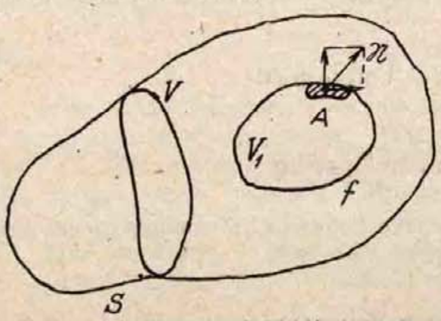
$$\mathfrak{F}\,dm,$$

где је $\mathfrak{F}$ *спољашња запреминска сила, израчуната на јединицу масе.* Таква је, на пр., сила теже и уопште силе гравитације, инерцијалне силе итд.

2) *Површинске силе* које дејствују само на честице тела на његовој површини – целој, или само неком њеном делу. Такве су силе: притисак других тела на уочено тело при додиру, хидростатички притисак на тело потопљено у течност итд. Ове силе не зависе од масе тела. Оне су у ствари резултат непосредне акције додира између честица разних тела, на пр., при дејству капиларних сила између молекула зидова суда и молекула граничне течности.

Унутрашње силе са своје стране су друкчије природе. Оне у оквиру уоченог затвореног система (тела) на основу принципа акције и реакције не долазе до динамичког изражаја. Оне су резултат узајамног привлачења честица тела и нарочитог стања у коме се налази, на пр., неко тело које је изложено дејству разних спољашњих, било запреминских било површинских сила, које је, на пр., притиснуто са свих страна и томе слично.

Ако се из неког таквог притиснутог тела запремине V, ограниченог површином S (сл. 5) замисли издвојен неки његов део V_1 ограничен површином f, првобитна равнотежа унутрашњих сила ће се пореметити. Тај поремећај је резултат дејства честица тела с једне стране површине f на оне са друге стране које су одвојене, и то било услед њиховог привлачења било услед пренетог дејства спољашњих сила на површину S.



Сл. 5

Према томе, ако се захтева да издвојена маса тела, запремине V_1, остане у првобитној равнотежи, мора се замислити да на то издвојено тело дејствују допунске површинске силе. При томе, ако се уочи неки површински елемент df површине f, треба сматрати да је површинска сила, која на њега дејствује, величина истог реда као и сам тај елемент, тј. да је та унутрашња сила

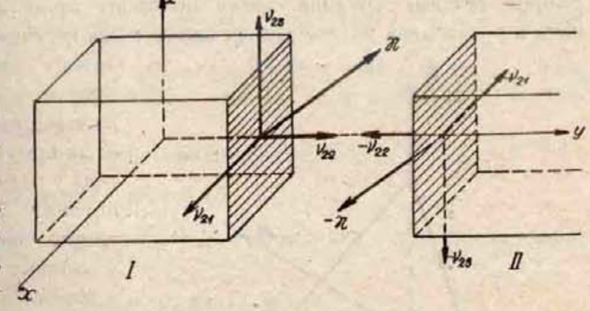
(1) $$\mathfrak{N}\,df.$$

Ова сила се зове *елементарни напон* који дејствује на површински елеменат df, а $\mathfrak{N}$ је *површинска сила, израчуната на јединицу површине*, која се зове *напон*.

Уочимо неку тачку A на површини f која ограничава издвојену запремину V_1 и нека $\mathfrak{n}$ буде орт спољашње нормале те површине.

Правац напона $\mathfrak{N}$ се, у општем случају, не поклапа са правцем спољашње нормале, већ има две компоненте – једну у правцу нормале – *нормални напон* и једну у тангентној равни површине – *тангентни напон.* Нормални напон, ако је позитиван, тј. ако је оријентисан као спољашња нормала зове се *затезање*, јер тежи да изазове растезање тела. Нормални напон, негативан, тј. оријентисан у супротном смеру према спољашњој нормали, зове се *притисак*, јер тежи да притискивањем изазове сажимање тела. Тангентна компонента очигледно тежи да изазове смицање или клизање по површинском елементу df и стога се назива *напон смицања* или *клизни напон.*

Слика 6 илуструје унутрашње напонско стање тела. Тело облика правоуглог паралелепипеда, са таквим положајем у односу на координатни систем да му стране стоје нормално на осама, пресечено је на два дела I и II са равни нормалном на y-осу. Пресечна површина нека буде величине $\triangle S$, а сматраћемо ону на делу I као позитивну, јер се њена спољашња нормала поклапа са позитивним смером y-осе, а ону одвојену на делу II као негативну, јер је њена позитивна нормала оријентисана у смеру негативне y-осе. Негативна површина дејствује на позитивну површину силом – напоном $\mathfrak{N}$ који у општем случају није нормалан на тој површини, а чија је величина једнака резултанти свих површинских сила, које дејствују на ту површину, подељеној са $\triangle S$.



Сл. 6

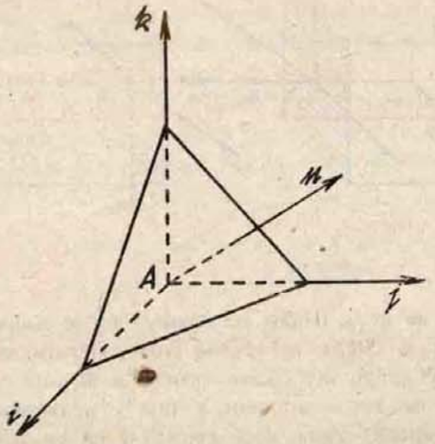
Ако тај напон разложимо у компоненте у правцу оса, тада је она компонента у правцу y-осе са интензитетом ν_{22} *нормални напон*, у нашем случају *затезање*. Компоненте у правцу x и z-осе са интензитетима ν_{21} и ν_{23} су *тангентни напони (смицања)*. Ознаке су изабране тако да први индекс увек значи положај пресечне равни, а други оријентацију напона, при чему бројеви 1, 2, 3 одговарају по реду осама x, y, z. Јасно је да су компоненте напона – нормални и тангентни напони – вектори, али се често и саме њихове координате ν_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ називају напонима.

На основу принципа акције и реакције, међутим, на одвојеној – негативној – површини напонско стање је друкчије. Тамо су и сам напон па и његове компоненте тачно супротни напонима на позитивној страни.

9. Тензор напона. Услови равнотеже непрекидне средине

Уочимо ма коју тачку A у унутрашњости неког тела V (сл. 5) у напонском стању. Поставимо ма коју површину f кроз ту тачку (може и раван пресек) и нека $\mathfrak{n}$ буде орт нормале те површине у тачки A. Узмимо сада мали део површине око уочене тачке и резултанту свих површинских сила, које дејствују на тачке тог дела површине, поделимо самом површином. Пустимо затим да се ова површина смањује и одредимо граничну вредност овог количника у смислу усвојених дефиниција. Ту граничну вредност $\mathfrak{N}$ сматрамо као ***напон у тачки А за раван одређену ортом*** $\mathfrak{n}$.

Очигледно је, да овако дефинисани напон у тачки непрекидне средине претставља функцију положаја, тј. да има разне вредности у разним тачкама средине према положају тачке. Али, може се поставити и разумљиво питање, да ли напон у некој тачки A тела зависи од положаја пресечне равни, тј. од орта $\mathfrak{n}$, и ако зависи, како зависи. Према томе, наш задатак је да проучимо напонско стање тела у одређеној тачки и у овом погледу. У том циљу посматрајмо елементарну масу тела у облику тетраедра који има у односу на изабрани Декартов правоугли триједар нарочити положај. Наиме, замислимо да му је врх смештен у координатни почетак A, бочне стране леже у координатним равнима, а основна раван нека је у првом октанту (сл. 7). Нека при томе $\mathfrak{n}=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ буде орт спољашње нормале на основи тетраедра чија је површина df, а површине бочних страна df_1, df_2 и df_3 са ортовима унутрашњих нормала $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ и $\mathfrak{k}$. Означимо напоне који дејствују на поједине честице основе и бочних површина нашег тетраедра са $\mathfrak{N}, -\mathfrak{N}_1, -\mathfrak{N}_2$ и $-\mathfrak{N}_3$ при чему је



Сл. 7

$$(1)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{N} &= \{\nu_{n1} \quad \nu_{n2} \quad \nu_{n3}\},\\ \mathfrak{N}_1 &= \{\nu_{11} \quad \nu_{12} \quad \nu_{13}\},\\ \mathfrak{N}_2 &= \{\nu_{21} \quad \nu_{22} \quad \nu_{23}\},\\ \mathfrak{N}_3 &= \{\nu_{31} \quad \nu_{32} \quad \nu_{33}\}. \end{aligned}$$

Ако је запремина нашег елементарног тетраедра dV, а густина његове масе ρ, биће му маса $\rho\, dV$, па је, према томе, запреминска

сила која дејствује на наш елемент дата изразом

$$\mathfrak{F}\rho\, dV,$$

где је $\mathfrak{F}$, као увек, запреминска сила израчуната на јединицу масе. Услов за равнотежу свих сила које дејствују на уочени елемент облика тетраедра јесте да, на пр., резултанта свих тих и површинских и запреминских сила буде једнака нули. У нашем случају се тај услов може написати у облику

$$\mathfrak{F}\rho\, dV + \mathfrak{N}\, df - \mathfrak{N}_1\, df_1 - \mathfrak{N}_2\, df_2 - \mathfrak{N}_3\, df_3 = 0.$$

Ако се величина уоченог запреминског елемента смањује и постане бесконачно мала у смислу наших дефиниција, тада се запреминска сила $\mathfrak{F}\rho\, dV$, као мала величина трећег реда, у односу на елементарне напоне као мале величине другог реда, може занемарити, те се добија

$$(2)\qquad \mathfrak{N}\, df = \mathfrak{N}_1\, df_1 + \mathfrak{N}_2\, df_2 + \mathfrak{N}_3\, df_3.$$

Ова једначина показује да је елементарни напон који одговара основи тетраедра резултанта елементарних напона који одговарају бочним странама уоченог тетраедра.

Како је, с обзиром на наше претпоставке,

$$df_1 = \alpha\, df, \quad df_2 = \beta\, df, \quad df_3 = \gamma\, df,$$

то се после уношења ових вредности у једначину (2) и после деобе са df добија

$$(3)\qquad \mathfrak{N} = \alpha\,\mathfrak{N}_1 + \beta\,\mathfrak{N}_2 + \gamma\,\mathfrak{N}_3.$$

Пошто се смањивањем запреминског елемента он готово своди на тачку A, ова једначина даје у ствари ***напон*** $\mathfrak{N}$ ***у тачки А за раван одређену ортом*** $\mathfrak{n}$ у зависности од напона у три ортогонална правца $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ и $\mathfrak{k}$ у истој тој тачки.

Пројицирањем векторске једначине (3) на осе Декартовог правоуглог триједра добијају се три скаларне тзв. *Кошијеве (Cauchy) једначине*

$$(4)\qquad \begin{aligned} \nu_{n1} &= \alpha\,\nu_{11} + \beta\,\nu_{21} + \gamma\,\nu_{31},\\ \nu_{n2} &= \alpha\,\nu_{12} + \beta\,\nu_{22} + \gamma\,\nu_{32},\\ \nu_{n3} &= \alpha\,\nu_{13} + \beta\,\nu_{23} + \gamma\,\nu_{33}. \end{aligned}$$

Ако се α, β, γ изразе помоћу образаца

$$(5)\qquad \alpha = \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{i}, \quad \beta = \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{j}, \quad \gamma = \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{k},$$

може се једначина (3) за одређивање напона $\mathfrak{N}$ написати у облику

$$(6)\qquad \mathfrak{N} = \mathfrak{n}\cdot N,$$

где је

$$(7)\qquad N = \mathfrak{i}\,\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{j}\,\mathfrak{N}_2 + \mathfrak{k}\,\mathfrak{N}_3$$

афинор, који одређује напонско стање у уоченој тачки тела, у дијадском облику.

Из једначине (6) је јасно да је напон у одређеној тачки тела линеарна векторска функција правца и да се, према томе, мења заједно са правцем у коме се посматра.

Кошијеве једначине (4) могу се сад написати и у облику

$$\nu_{n1}=\mathfrak{n}\cdot\mathcal{N}\cdot\mathfrak{i},\quad \nu_{n2}=\mathfrak{n}\cdot\mathcal{N}\cdot\mathfrak{j},\quad \nu_{n3}=\mathfrak{n}\cdot\mathcal{N}\cdot\mathfrak{k}. \tag{8}$$

Најзад, кад се вектори $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3$ у једначини (7) изразе помоћу својих координата добиће се израз афинора у облику збира координатних дијада, тј.

$$\begin{aligned}\mathcal{N}=&\,\nu_{11}(\mathfrak{i}\,\mathfrak{i})+\nu_{12}(\mathfrak{i}\,\mathfrak{j})+\nu_{13}(\mathfrak{i}\,\mathfrak{k})+\\&+\nu_{21}(\mathfrak{j}\,\mathfrak{i})+\nu_{22}(\mathfrak{j}\,\mathfrak{j})+\nu_{23}(\mathfrak{j}\,\mathfrak{k})+\\&+\nu_{31}(\mathfrak{k}\,\mathfrak{i})+\nu_{32}(\mathfrak{k}\,\mathfrak{j})+\nu_{33}(\mathfrak{k}\,\mathfrak{k}),\end{aligned} \tag{9}$$

или у облику матрице

$$\mathcal{N}=\begin{Bmatrix}\nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13}\\ \nu_{21} & \nu_{22} & \nu_{23}\\ \nu_{31} & \nu_{32} & \nu_{33}\end{Bmatrix}. \tag{10}$$

Овај афинор је *симетричан*, што ћемо одмах доказати, тј. у њему је

$$\nu_{ij}=\nu_{ji},$$

те се може дефинитивно написати у облику симетричне матрице

$$\mathcal{N}=\begin{Bmatrix}\nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13}\\ \nu_{12} & \nu_{22} & \nu_{23}\\ \nu_{13} & \nu_{23} & \nu_{33}\end{Bmatrix}. \tag{11}$$

Овај тензор одређује, дакле, напонско стање у тачки A тела и зове се ***тензор напона***. Он је одређен са шест скаларних координата ν_{ij}, које се називају ***нормални*** и ***тангентни напони***.

Ради доказа симетричности тензора напона $\mathcal{N}$ и иначе, проучићемо услове равнотеже у непрекидној средини. У том циљу уочимо неки коначни део запремине V_1, ограничен површином f, издвојен из тела запремине V (сл. 5) и одредимо услове његове равнотеже. За материјални систем услови равнотеже су: да главни вектор — резултанта свих сила (резултантна једначина) и главни момент свих сила у односу ма на који пол, на пр., координатни почетак (моментна једначина) буду једнаки нули. У нашем случају (претпоставка непрекидног распореда масе) могу се те једначине написати у облику

$$\int_{V_1}\mathfrak{F}\rho\,dV+\oint_f\mathfrak{N}\,df=0, \tag{12}$$

$$\int_{V_1}(\mathfrak{r}\times\mathfrak{F})\rho\,dV+\oint_f(\mathfrak{r}\times\mathfrak{N})\,df=0, \tag{13}$$

где је $\mathfrak{F}$ резултанта свих спољашњих запреминских сила а $\mathfrak{r}=\{x,\,y,\,z\}$ вектор положаја нападне тачке силе. Површинска интеграција се односи само на површину f издвојене запремине V_1, јер се при сабирању по површинама појединих запреминских елемената сви напони на унутрашњим елементима потиру, пошто на свакој граничној површини између два елемента дејствују два супротна напона.

Ако векторску једначину (12), ради лакшег тумачења, пројицирамо, на пр., на осу x, добиће се

$$\int_{V_1}X\rho\,dV+\oint_f\nu_{n1}\,df=0, \tag{14}$$

где је $\mathfrak{F}=\{X,\,Y,\,Z\}$, одн. с обзиром на једначине (4)

$$\int_{V_1}X\rho\,dV+\oint_f(\alpha\,\nu_{11}+\beta\,\nu_{21}+\gamma\,\nu_{31})\,df=0.$$

Површински интеграл у овој једначини може се с обзиром на обрасце (5) трансформисати на овај начин

$$\oint_f(\alpha\,\nu_{11}+\beta\,\nu_{21}+\gamma\,\nu_{31})\,df=\oint_f(\mathfrak{P}_1\cdot\mathfrak{n})\,df=\oint_f\mathfrak{P}_1\cdot d\mathfrak{f},$$

где је

$$\mathfrak{P}_1=\mathfrak{i}\,\nu_{11}+\mathfrak{j}\,\nu_{21}+\mathfrak{k}\,\nu_{31},$$

а $\mathfrak{n}\,df=d\mathfrak{f}$ управљени елемент површине f. Најзад, применом Гаусове теореме добијамо за овај површински интеграл израз

$$\oint_f\nu_{n1}\,df=\oint_f\mathfrak{P}_1\cdot d\mathfrak{f}=\int_{V_1}\nabla\cdot\mathfrak{P}_1\,dV. \tag{15}$$

Ако ову вредност површинског интеграла унесемо у једначину (14), она постаје

$$\int_{V_1}(\rho X+\nabla\cdot\mathfrak{P}_1)\,dV=0,$$

одакле се добија

$$\rho X+\nabla\cdot\mathfrak{P}_1=0. \tag{16}$$

На потпуно исти начин се добијају и једначине

$$\rho Y+\nabla\cdot\mathfrak{P}_2=0,\quad \rho Z+\nabla\cdot\mathfrak{P}_3=0, \tag{17}$$

пројицирањем једначине (12) на осе y и z.

Пројицирањем моментне једначине (13) на x-осу добија се

$$\int_{V_1}(yZ-zY)\rho\,dV+\oint_f(y\,\nu_{n3}-z\,\nu_{n2})\,df=0. \tag{18}$$

И у овој једначини може се површински интеграл на сличан начин као горе трансформисати и написати у облику

$$\oint_f(y\,\nu_{n3}-z\,\nu_{n2})\,df=\oint_f(y\,\mathfrak{P}_3-z\,\mathfrak{P}_2)\cdot d\mathfrak{f}=\int_{V_1}\left[\nabla\cdot(y\,\mathfrak{P}_3)-\nabla\cdot(z\,\mathfrak{P}_2)\right]dV,$$

где је

$$\mathfrak{P}_2=\mathfrak{i}\,\nu_{12}+\mathfrak{j}\,\nu_{22}+\mathfrak{k}\,\nu_{32},$$

$$\mathfrak{P}_3=\mathfrak{i}\,\nu_{13}+\mathfrak{j}\,\nu_{23}+\mathfrak{k}\,\nu_{33}.$$

Уношењем ове вредности површинског интеграла у једначину (18) добија се

$$\int_{V_1}\left[\rho y Z-\rho z Y+\nabla\cdot(y\mathfrak{P}_3)-\nabla\cdot(z\mathfrak{P}_2)\right]dV=0,$$

одн.

$$\rho y Z-\rho z Y+\nabla\cdot(y\mathfrak{P}_3)-\nabla\cdot(z\mathfrak{P}_2)=0$$

и после развијања израза $\nabla\cdot(y\mathfrak{P}_3)$ и $\nabla\cdot(z\mathfrak{P}_2)$

$$y(\rho Z+\nabla\cdot\mathfrak{P}_3)-z(\rho Y+\nabla\cdot\mathfrak{P}_2)+\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{P}_3-\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{P}_2=0.$$

Одавде, међутим, с обзиром на једначине (17) добијамо

(19) $$\nu_{23}=\nu_{32},$$

и на потпуно исти начин, пројицирањем моментне једначине на осе y и z

(20) $$\nu_{13}=\nu_{31},\qquad \nu_{12}=\nu_{21},$$

чиме је доказана симетричност тензора напона N, а на тај начин и идентичност вектора $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ са векторима $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3$.

Једначине (16) и (17), које дају услове за равнотежу у унутрашњости непрекидне средине у облику везе између запреминских сила и напона и које се по свом проналазачу зову *Навијеове* (*Navier*) *једначине*, могу се сад у развијеном облику написати

(21) $$\begin{aligned}\rho X+\frac{\partial\nu_{11}}{\partial x}+\frac{\partial\nu_{12}}{\partial y}+\frac{\partial\nu_{13}}{\partial z}&=0,\\ \rho Y+\frac{\partial\nu_{12}}{\partial x}+\frac{\partial\nu_{22}}{\partial y}+\frac{\partial\nu_{23}}{\partial z}&=0,\\ \rho Z+\frac{\partial\nu_{13}}{\partial x}+\frac{\partial\nu_{23}}{\partial y}+\frac{\partial\nu_{33}}{\partial z}&=0.\end{aligned}$$

Овим једначинама се може дати и кондензованији облик. Оне се могу написати и у облику једне једине векторске једначине на овај начин. Једначине (16) и (17) треба по реду помножити ортовима $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ па сабрати. Тада се добија

$$\rho\mathfrak{F}+\nabla\cdot\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{i}+\nabla\cdot\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{j}+\nabla\cdot\mathfrak{P}_3\,\mathfrak{k}=0,$$

одн.

(22) $$\rho\mathfrak{F}+\nabla\cdot N=0,$$

пошто је

$$\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{i}+\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{j}+\mathfrak{P}_3\,\mathfrak{k}=N$$

што је лако проверити.

10. Површина напона. Ламеов елипсоид напона

Распоред напона у одређеној тачки непрекидне средине може се геометриски интерпретирати на разне начине.

На пр., ако се напон $\mathfrak{N}=\mathfrak{n}\cdot N$ у одређеној тачки тела за раван одређену ортом $\mathfrak{n}$ пројицира на правац тог орта, добиће се

(1) $$n=\mathfrak{N}\cdot\mathfrak{n}=\mathfrak{n}\cdot N\cdot\mathfrak{n},$$

нормални напон на равни одређеној ортом $\mathfrak{n}=\{\alpha,\beta,\gamma\}$. Ова се једначина може написати и у скаларном облику

(2) $$n=\alpha^2\nu_{11}+\beta^2\nu_{22}+\gamma^2\nu_{33}+2\alpha\beta\nu_{12}+2\alpha\gamma\nu_{13}+2\beta\gamma\nu_{23}\equiv 2f(\alpha,\beta,\gamma),$$

ако се узме у обзир једначина (7) и једначине (4) претх. параграфа.

Конструишимо сад од уочене тачке вектор положаја $\mathfrak{r}=\{x,y,z\}$ у правцу и смеру орта $\mathfrak{n}$, чија је дужина обрнуто пропорционална квадратном корену из апсолутне величине односног нормалног напона n, на сличан начин како је то учињено у случају површине деформације, тј.

(3) $$\mathfrak{r}=\frac{k}{\sqrt{|n|}}\,\mathfrak{n},$$

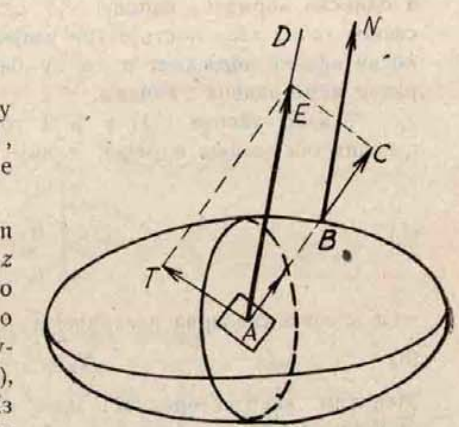
где је k произвољна константа. Ако се орт $\mathfrak{n}$, израчунат из ове једначине, замени у једначини (1) добиће се, за $k=1$ једначина

(4) $$\mathfrak{r}\cdot N\cdot\mathfrak{r}=\pm 1,$$

или у скаларном облику

(5) $$\begin{aligned}&2f(x,y,z)\equiv\\ &\equiv\nu_{11}x^2+\nu_{22}y^2+\nu_{33}z^2+2\nu_{12}xy+\\ &\quad+2\nu_{13}xz+2\nu_{23}yz=\pm 1.\end{aligned}$$

При томе се знак + добија у случају $n>0$, јер је тада $\sqrt{|n|}=\sqrt{n}$, а знак − у случају $n<0$, јер је тада $\sqrt{|n|}=\sqrt{-n}$.



Сл. 8

Ако сад замислимо да орт $\mathfrak{n}$ мења правац, биће и $\mathfrak{r}$ одн. x, y, z промењљиви и геометриско место крајева свих вектора положаја, овако конструисаних, биће површина другог реда, одређена једначином (5), која се зове *површина напона*. Из самог облика једначине је, као и у случају површине деформације, јасно, да је то централна површина и да не мора бити елипсоид.

Узмимо, примера ради, да је површина напона елипсоид и да је за тачку A већ конструисана (сл. 8). Уочимо кроз дату тачку A неку раван одређену ортом $\mathfrak{n}$. Тада дужина $r = AB$ вектора положаја оне тачке B на површини напона која лежи у правцу орта $\mathfrak{n}$, одређује на основу обрасца (3) нормални напон $\vec{\nu}_n = \overrightarrow{AC}$ у тачки A за уочену раван, јер је

$$\nu_n = \pm \frac{1}{r^2},$$

где знак одређује оријентацију напона. С друге стране, из једначине (4) одн. (5) види се да је

$$\operatorname{grad} f = \mathfrak{r} \cdot N = r\mathfrak{n} \cdot N = r\mathfrak{N}.$$

Према томе, нормала BN површине напона у тачки B одређује правац AD потпуног (тоталног) напона $\mathfrak{N}$ у тачки A за раван одређену ортом $\mathfrak{n}$. Познавањем нормалне компоненте $\vec{\nu}_n$ напона и његовог правца AD може се лако одредити потпуни напон $\mathfrak{N} = \overrightarrow{AE}$ у тачки A као и тангентна компонента напона $\overrightarrow{AT}$.

Ако се изврши трансформација координата и уведе нарочити Декартов правоугли триједар главних оса X, Y, Z са почетком у центру површине, тада се, како је познато, једначина (5) трансформише на облик

$$\nu_1 X^2 + \nu_2 Y^2 + \nu_3 Z^2 = \pm 1. \tag{6}$$

Овакве координатне осе зову се *главне осе напона у датој тачки*, а односни нормални напони ν_1, ν_2, ν_3 *главни напони*. Према томе, у свакој тачки тела постоје три узајамно управне равни за које су односни напони ***нормални*** и то су баш главни напони. У односу на те равни нема напона смицања.

Тензор напона (11) у § 9 трансформисан у односу на систем главних оса напона одређен је дијагоналном матрицом

$$N = \begin{Bmatrix} \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 \end{Bmatrix}, \tag{7}$$

чија је прва скаларна инваријанта N_1 дата једначином

$$N_1 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3. \tag{8}$$

Међутим, како се вредност прве скаларне инваријанте не мења при промени координатног система, то је уопште

$$N_1 = \nu_{11} + \nu_{22} + \nu_{33}, \tag{9}$$

или речима: Збир нормалних напона у односу на три ма које узајамно управне равни је за сваку тачку тела инваријанта.

Показаћемо још и како се одређују правци главних оса напона за дату тачку A тела у односу ма на који дати триједар Декартових правоуглих оса $Axyz$. У том циљу може се овако поступити. Узмимо да је $\mathfrak{n} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ орт једне од тражених главних оса. Тада је читав напон за раван нормалну на тој оси нормални напон, тј.

$$\mathfrak{N} = n\mathfrak{n}.$$

Његове пројекције на дате осе x, y, z биће

$$\nu_{n1} = \alpha n; \quad \nu_{n2} = \beta n; \quad \nu_{n3} = \gamma n.$$

Ако ове вредности за ν_{n1}, ν_{n2}, ν_{n3} унесемо у једначине (4) у § 9 и узмемо у обзир да је тензор напона симетричан, добићемо за одређивање α, β, γ одн. орта $\mathfrak{n}$ ове једначине

$$\begin{aligned} &\alpha(\nu_{11} - n) + \beta\nu_{12} + \gamma\nu_{13} = 0, \\ &\alpha\nu_{12} + \beta(\nu_{22} - n) + \gamma\nu_{23} = 0, \\ &\alpha\nu_{13} + \beta\nu_{23} + \gamma(\nu_{33} - n) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Како знамо, овај систем линеарних и хомогених једначина по непознатим α, β, γ има решења различита од нуле само, ако је

$$\begin{vmatrix} \nu_{11} - n & \nu_{12} & \nu_{13} \\ \nu_{12} & \nu_{22} - n & \nu_{23} \\ \nu_{13} & \nu_{23} & \nu_{33} - n \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

или

$$n^3 - N_1 n^2 + N_2 n - N_3 = 0, \tag{12}$$

где је N_1 прва скаларна инваријанта тензора напона, а

$$\begin{aligned} N_2 &= \begin{vmatrix} \nu_{22} & \nu_{23} \\ \nu_{23} & \nu_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \nu_{11} & \nu_{13} \\ \nu_{13} & \nu_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} \\ \nu_{12} & \nu_{22} \end{vmatrix}, \\ N_3 &= \begin{vmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} \\ \nu_{12} & \nu_{22} & \nu_{23} \\ \nu_{13} & \nu_{23} & \nu_{33} \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{13}$$

друга и трећа скаларна инваријанта тензора напона.

Једначина (11) позната је под именом *секуларне једначине* и појављује се у разним проблемима математике. Претпостављамо као познато да она за реалне вредности ν_{ij} има увек три реална корена. И баш та три корена дају у ствари вредности главних напона у уоченој тачки. Уносећи прво једну, па другу, па трећу од тих вредности у систем линеарних једначина (10) добићемо три система вредности за α, β, γ који одређују три тражена главна правца напона.

Поред геометриске интерпретације распореда напона у одређеној тачки тела за разне положаје пресека у облику површине напона коју је дао Коши, може се тај распоред напона интерпретирати геометриски и на други начин. Наиме, претпоставимо да је за дату тачку O тела одређен положај главних оса напона, на пр., $Oxyz$. У том случају ће напон $\mathfrak{N}$ за неку раван са ортом $\mathfrak{n}=\{\alpha, \beta, \gamma\}$ бити, с обзиром на једначине (4) у § 9, одређен координатама

$$(14) \qquad \nu_{n1}=\alpha\nu_1, \quad \nu_{n2}=\beta\nu_2, \quad \nu_{n3}=\gamma\nu_3,$$

пошто главни напони имају правце оса x, y и z а тангентних напона нема.

Конструишимо сад из тачке O вектор положаја једнак потпуном напону на раван одређену ортом $\mathfrak{n}$, тј.

$$(15) \qquad \mathfrak{r}=\mathfrak{N}.$$

Одатле с обзиром на обрасце (14) добијамо

$$(16) \qquad x=\alpha\nu_1, \quad y=\beta\nu_2, \quad z=\gamma\nu_3.$$

При промени правца орта $\mathfrak{n}$ крајеви овако конструисаних вектора положаја описиваће површину чија се једначина може добити на овај начин. Како је

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,$$

то заменом вредности α, β, γ из (16) добијамо

$$(17) \qquad \frac{x^2}{\nu_1^2}+\frac{y^2}{\nu_2^2}+\frac{z^2}{\nu_3^2}=1,$$

а то је једначина елипсоида познатог под именом *Ламеов елипсоид напона*, јер га је нашао Ламе (Lamé),

Како је једна од полуоса елипсоида највећа, а једна најмања, то је један од главних напона највећи напон у датој тачки, а други — најмањи. Ако су два од главних напона једнака, Ламеов елипсоид је ротациони елипсоид. Ако су још та два једнака главна напона истога знака, тада су напони за све равни које пролазе кроз осу ротације елипсоида једнаки и нормални на тим равнима. Очигледно је, ако су сва три главна напона једнака, да се Ламеов елипсоид претвара у сферу. У том случају ма која три узајамно нормална правца могу се узети као главни правци напона. Ако је један од главних напона једнак нули елипсоид дегенерише у елипсу и у том случају напони за све равни кроз уочену тачку леже у једној равни. Такво напонско стање тела назива се *равно напонско стање*. Најзад, ако су два од главних напона једнаки нули Ламеов елипсоид дегенерише у дуж и тада је напонско стање у уоченој тачки *линеарно*.

II

ТЕОРИЈА ЕЛАСТИЧНОСТИ

11. Еластична тела

У претходним разматрањима проучили смо, прво деформацију, како смо већ рекли, са чисто кинематичког гледишта. Затим смо, тражећи динамичке узроке деформација, проучили напонско стање тела под дејством спољашњих сила. Из тих разматрања је, међутим, очигледно да је познавање само спољашњих сила $\mathfrak{F}$, одређених на јединицу масе, недовољно за одређивање тензора напона. Он има шест координата, а из једначина (§ 9, 21), које добијамо из резултантне једначине равнотеже, могу се одредити само три од тих шест координата. Уопште, дакле, из самих услова равнотеже се не може одредити тензор напона, јер моментна једначина равнотеже показује само да је тензор напона симетричан.

Према томе, сад стојимо, прво, пред питањем одређивања тензора напона с једне стране и, друго, пред питањем како се уочено тело деформише при датим спољашњим силама. На оба ова питања, која су међусобно везана, може се одговорити тек пошто се утврди веза између тензора напона и тензора деформације, одн. између њихових координата. Та веза је у стварности *врло сложена*, па је, према томе, неопходно да се утврде претходно такве претпоставке које ће нам омогућити с једне стране да се проблем упрости, а с друге стране да конкретни експерименти са довољном тачношћу потврђују на тај начин изведене резултате. У вези са тим треба одмах подвући да су се наша досадашња излагања односила на непрекидну средину уопште, онакву какву смо у почетку дефинисали. Сад је, међутим, потребно, да се учине још неке претпоставке о телима која посматрамо, потребно је да прецизније дефинишемо тело као објект нашег посматрања.

У том циљу разликујемо тела, прво, као *хомогена* и *нехомогена (хетерогена)*. Као хомогено тело сматраћемо оно чији и најмањи елемент (макроскопски посматран у смислу наших досадашњих дефиниција) има исте специфичне особине за одређени правац у телу у свакој тачки тела као и цело тело. Свако друго тело је нехомогено. Понекад се појам хомогености узима уже у смислу само исте густине тела у свим његовим тачкама.

Поред ове поделе разликујемо још *изотропна* и *анизотропна* тела. Као изотропно сматрамо оно тело чије су физичке особине једнаке у свим правцима, а она код којих разни правци у истој тачки нису еквивалентни, већ их има нарочито истакнутих у погледу физичких особина, зову се анизотропна тела. Дакле, тело може бити хомогено и изотропно или хомогено и анизотропно, али тело може бити на пр. и нехомогено а изотропно.

Анизотропна тела су *кристали*. То су чврста тела, али постоје и неке капљиве течности које се показују анизотропне, па се према Лемановој (Lehmann) дефиницији зову *течни кристали*. Иначе изотропна тела чине гасови, течности и аморфна чврста тела, и она се једна од других разликују у погледу структуре углавном само већом или мањом кохезијом својих честица. Међутим, поред кристала у правом смислу речи, тзв. *монокристала*, постоје и тела као челик, мермер итд. чија структура посматрана микроскопски није ни хомогена ни изотропна, јер је састављена од врло малих кристала. Како тих ситних кристала има милионима у сваком кубном сантиметру, могу се и оваква тзв. *поликристална тела* сматрати као хомогена и изотропна све дотле, док се ми ограничавамо на посматрање таквих делова који су велики у односу на поједине кристале.

Задржимо се прво на чврстим телима. Из искуства знамо да многа чврста тела имају ту особину да се, кад спољашње силе које изазивају деформацију тела престану дејствовати, тело врати у првобитно стање и деформација изгуби. Ову грубу искуствену чињеницу треба унеколико допунити. Наиме, сва чврста тела у природи имају ту способност враћања у првобитно стање под условом да њихова деформација не пређе извесну границу која је различита за разна тела и у општем случају је *врло мала*. Таква тела зову се *еластична тела*, а сама особина *еластичност*. Граница, која је углавном везана за сасвим мале деформације, до које тело задовољава услов еластичности зове се *граница еластичности*. Ако се прекорачи та одређена граница еластичности и деформације постану веће тело губи способност да се врати у првобитно стање (облик и величину) и остаје трајно деформисано – оно постаје *пластично*.

Да бисмо наша проучавања упростили, сматраћемо да свуда у еластичном телу деформације зависе само и искључиво од напонског стања и обрнуто, и таква еластична тела зваћемо *идеално еластична тела*. При томе ми, дакле, занемарујемо све утицаје температуре, одн. посматрамо само такве проблеме где је утицај температуре на деформацију незнатан и занемарљив. Исто тако, ако се првобитно стање деформисаног тела не успоставља тренутно по престанку дејства

спољашњих сила, већ то враћање у првобитно стање траје извесно време, сматраћемо да тело није потпуно еластично. Дакле, само они проблеми и у оним границама у којима су наше претпоставке о природи идеално еластичног тела са довољном тачношћу задовољене биће предмет нашег проучавања.

Скрећемо пажњу да се наши називи не поклапају са обичним говором и нашим навикама. Условима идеално еластичног тела, на пр., више одговара стакло него каучук, јер стакло у својим границама еластичности показује знатно мање ремanентне (заостале) деформације него каучук. Сама пак величина деформације у односу на спољашње силе не игра никакву улогу у овој дефиницији идеално еластичног тела.

12. Веза између деформације и напона. Хуков закон

Напонско стање еластичног тела у ма којој његовој тачки дефинисано је тензором напона N, а еластична деформација у истој тој тачки одређена је тензором деформације D. Између та два тензора постоји у најопштијем случају веза

$$N = f(D), \tag{1}$$

или у облику шест скаларних једначина

$$\begin{aligned}
\nu_{11} &= f_1(\delta_{11},\ \delta_{22},\ \delta_{33},\ \delta_{12},\ \delta_{13},\ \delta_{23}),\\
\nu_{22} &= f_2(\delta_{11},\ \delta_{22},\ \delta_{33},\ \delta_{12},\ \delta_{13},\ \delta_{23}),\\
\nu_{33} &= f_3(\delta_{11},\ \delta_{22},\ \delta_{33},\ \delta_{12},\ \delta_{13},\ \delta_{23}),\\
\nu_{12} &= f_4(\delta_{11},\ \delta_{22},\ \delta_{33},\ \delta_{12},\ \delta_{13},\ \delta_{23}),\\
\nu_{13} &= f_5(\delta_{11},\ \delta_{22},\ \delta_{33},\ \delta_{12},\ \delta_{13},\ \delta_{23}),\\
\nu_{23} &= f_6(\delta_{11},\ \delta_{22},\ \delta_{33},\ \delta_{12},\ \delta_{13},\ \delta_{23}).
\end{aligned} \tag{2}$$

Посматрајмо идеално еластично тело. У том случају се може претпоставити да у недеформисаном стању ($D=0$) нема напона ($N=0$), тј. да је

$$f_i(0,0,0,0,0,0) = 0, \qquad (i=1,2,\ldots 6) \tag{3}$$

Ако сад функције f_i из једначина (2) развијемо у Тејлорове редове, узмемо у обзир једначине (3), и посматрамо само инфинитезималне деформације, тада ће веза између координата тензора напона и тензора деформације бити у првој апроксимацији са довољном тачношћу одређена једначинама

$$\begin{aligned}
\nu_{11} &= a_{11}\delta_{11} + a_{12}\delta_{22} + a_{13}\delta_{33} + a_{14}\delta_{12} + a_{15}\delta_{13} + a_{16}\delta_{23},\\
\nu_{22} &= a_{21}\delta_{11} + a_{22}\delta_{22} + a_{23}\delta_{33} + a_{24}\delta_{12} + a_{25}\delta_{13} + a_{26}\delta_{23},\\
\nu_{33} &= a_{31}\delta_{11} + a_{32}\delta_{22} + a_{33}\delta_{33} + a_{34}\delta_{12} + a_{35}\delta_{13} + a_{36}\delta_{23},\\
\nu_{12} &= a_{41}\delta_{11} + a_{42}\delta_{22} + a_{43}\delta_{33} + a_{44}\delta_{12} + a_{45}\delta_{13} + a_{46}\delta_{23},\\
\nu_{13} &= a_{51}\delta_{11} + a_{52}\delta_{22} + a_{53}\delta_{33} + a_{54}\delta_{12} + a_{55}\delta_{13} + a_{56}\delta_{23},\\
\nu_{23} &= a_{61}\delta_{11} + a_{62}\delta_{22} + a_{63}\delta_{33} + a_{64}\delta_{12} + a_{65}\delta_{13} + a_{66}\delta_{23}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Према томе, у границама у којима се реална тела понашају као идеално еластична тела и за инфинитезималне деформације, могу се координате напона, у врло доброј сагласности са искуством, сматрати као линеарне и хомогене функције координата деформације. Веза између тензора напона и тензора деформације дата једначинама (4) изражава *генерализани Хуков закон*, назван тако по физичару Хуку (Hooke) који је први изразио пропорционалност између деформације и напона латинском реченицом „Ut tensio sic vis".

Коефицијенти a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, 6)$, који се зову *коефицијенти еластичности*, њих укупно 36 на броју, могу бити функције положаја, али не зависе од величине напона и односних деформација. Они су везани за природу уоченог тела. То су у општем случају коначне величине димензије напона (сила подељена површином), јер координате тензора деформације, како смо видели, имају димензију апстрактне јединице.

Теорија еластичности изведена под претпоставком важења Хукова закона зове се каткад и *линеарна теорија еластичности* за разлику од *нелинеарне теорије еластичности* која има за основу неку сложенију везу између напона и деформација.

Број коефицијената еластичности се смањује, ако као објект наших проучавања узмемо хомогено еластично тело. У том случају се може показати, у шта се овде не можемо упуштати, да између 36 коефицијената еластичности постоји 15 веза, те се њихов број за такво тело своди на 21. Осим тога, за хомогено еластично тело коефицијенти еластичности су *константе* јер не зависе ни од положаја.

Најзад, ако претпоставимо даље, да је наше хомогено еластично тело и изотропно, тада ће се број коефицијената еластичности свести на само два константна коефицијента. Да то покажемо и нађемо израз Хуковог закона у том случају, уочимо у овако дефинисаном телу неки елемент у облику правоуглог паралелепипеда, чије су стране нормалне на главне правце напона. Тада облик елемента остаје под дејством главних напона ν_1, ν_2, ν_3 непромењен, јер нема тангентних напона који би изазивали смицање, те ће се и деформација састојати из чистих дилатација у правцу уочених главних оса напона. Другим речима, *главни правци напона поклапају се са главним правцима деформација*. Нека осе тих заједничких главних праваца напона и деформација буду одређене ортовима $\mathfrak{I}, \mathbf{J}, \mathfrak{K}$. Под овим претпоставкама, за уочену тачку, једначине (4), које изражавају везе између напона и деформација, своде се на само три везе главних напона са главним дилатацијама, тј.

$$
\begin{aligned}
& \nu_1 = A_{11}\,\delta_1 + A_{12}\,\delta_2 + A_{13}\,\delta_3, \\
(5) \qquad & \nu_2 = A_{21}\,\delta_1 + A_{22}\,\delta_2 + A_{23}\,\delta_3, \\
& \nu_3 = A_{31}\,\delta_1 + A_{32}\,\delta_2 + A_{33}\,\delta_3,
\end{aligned}
$$

где имамо посла са само 9 констаната. Међутим, због претпоставке о изотропности тела очигледно мора утицај напона ν_1 на дилатацију δ_1 бити исти такав какав је и утицај напона ν_2 на дилатацију δ_2, одн. напона ν_3 на дилатацију δ_3. Отуда одмах закључујемо да мора бити

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = a.$$

Са друге стране, и из истог разлога, мора утицај напона ν_1 на попречне дилатације δ_2 и δ_3 бити еквивалентан утицају напона ν_2 на попречне дилатације δ_3 и δ_1, одн. напона ν_3 на попречне дилатације δ_1 и δ_2. То значи да мора бити и

$$A_{12} = A_{13} = A_{23} = A_{21} = A_{31} = A_{32} = b.$$

На тај начин се једначине за везу главних напона и дилатација (5) у одређеној тачки могу написати у облику

$$
\begin{aligned}
& \nu_1 = a\,\delta_1 + b(\delta_2 + \delta_3) = (a - b)\,\delta_1 + b(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3), \\
(6) \qquad & \nu_2 = a\,\delta_2 + b(\delta_3 + \delta_1) = (a - b)\,\delta_2 + b(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3), \\
& \nu_3 = a\,\delta_3 + b(\delta_1 + \delta_2) = (a - b)\,\delta_3 + b(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3),
\end{aligned}
$$

где имамо само два константна коефицијента еластичности a и b.

Ако уведемо ознаке $a - b = 2\mu$ и $b = \lambda$, могу се претходне једначине написати у облику

$$(7) \qquad \nu_i = 2\mu\,\delta_i + \lambda e_1, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

пошто је

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = e_1,$$

како знамо, прва скаларна инваријанта тензора деформације. Константе μ и λ зову се *Ламеове константе еластичности*, јер их је прво увео Ламе.

Ако једначине (7) помножимо редом координатним дијадама $\mathfrak{I}\mathfrak{I}$, $\mathbf{J}\mathbf{J}$ и $\mathfrak{K}\mathfrak{K}$ и саберемо добићемо једначину

$$(8) \qquad N = 2\mu D + \lambda e_1 I,$$

пошто је

$$
\begin{aligned}
N &= \nu_1(\mathfrak{I}\mathfrak{I}) + \nu_2(\mathbf{J}\mathbf{J}) + \nu_3(\mathfrak{K}\mathfrak{K}), \\
D &= \delta_1(\mathfrak{I}\mathfrak{I}) + \delta_2(\mathbf{J}\mathbf{J}) + \delta_3(\mathfrak{K}\mathfrak{K}), \\
I &= \mathfrak{I}\mathfrak{I} + \mathbf{J}\mathbf{J} + \mathfrak{K}\mathfrak{K}.
\end{aligned}
$$

Једначина (8) изражава *Хуков закон* за изотропно и хомогено идеално еластично тело у облику решеном по тензору напона N. Ова једначина дефинише у природном облику везу између тензора напона и тензора деформације у свакој тачки уочене средине. Да бисмо је извели ми смо се послужили нарочитим координатним системом главних оса. Ако желимо, међутим, да изразимо те везе скаларним једначинама између координата оба тензора, не смемо се задржати на једначинама (7), јер се правци главних оса у општем случају мењају од тачке до тачке у уоченој средини те нису подесни за описивање тражене везе за читаву средину.

Узмимо стога ма који правоугли триједар оса одређен ортовима $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ па изразимо наше тензоре у дијадском облику у односу на овај триједар. Тада ћемо за тензор напона добити израз (9) у § 9. Ако и десну страну једначине (8) изразимо на исти начин, добиће се, упоређивањем коефицијената, тражене скаларне везе у облику шест једначина, од којих наводимо само две, јер је остале према њима лако написати:

$$\begin{aligned} &\nu_{11} = 2\mu\,\delta_{11} + \lambda\,(\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\nu_{12} = 2\mu\,\delta_{12}, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{9}$$

Решавањем једначине (8) по тензору деформације добија се

$$D = \frac{1}{2\mu} N - \frac{\lambda}{2\mu} e_1 I. \tag{10}$$

Из једначине (7) добија се за прву скаларну инваријанту тензора напона израз

$$N_1 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = (2\mu + 3\lambda)\, e_1 \tag{11}$$

тј.

$$e_1 = \frac{N_1}{2\mu + 3\lambda}, \tag{11 a}$$

те се, најзад, једначина (10) може написати у облику

$$D = \frac{1}{2\mu} N - \frac{\lambda}{2\mu\,(2\mu + 3\lambda)} N_1 I.$$

Ако уведемо још нове константе E — *Јунгов (Young) модул еластичности* и $\varkappa$ — *Поасонову (Poisson) константу еластичности* једначинама

$$\frac{1}{2\mu} = \frac{1+\varkappa}{E}; \qquad \frac{\lambda}{2\mu\,(2\mu+3\lambda)} = \frac{\varkappa}{E}, \tag{12}$$

добијамо *Хуков закон* за изотропно и хомогено идеално еластично тело у облику

$$D = \frac{1+\varkappa}{E} N - \frac{\varkappa}{E} N_1 I, \tag{13}$$

који је решен по тензору деформације.

Из једначина (12) изводимо одмах ове везе између Јунгова модула E и Поасонове константе $\varkappa$ с једне стране и Ламеових констаната μ и λ с друге стране

$$\mu = \frac{E}{2\,(1+\varkappa)}, \quad \lambda = \frac{\varkappa E}{(1+\varkappa)\,(1-2\varkappa)}. \tag{14}$$

Ако у једначини (13) поново тензоре D и N изразимо у дијадском облику у односу на неки произвољни правоугли триједар оса, одређених ортовима $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ и $\mathfrak{k}$, и упоредимо односне координате добићемо ове скаларне једначине, од којих су опет само две написане,

$$\begin{aligned} &\delta_{11} = \frac{1+\varkappa}{E}\nu_{11} - \frac{\varkappa}{E}(\nu_{11}+\nu_{22}+\nu_{33}), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\delta_{12} = \frac{1+\varkappa}{E}\nu_{12}, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{15}$$

13. Основне диференцијалне једначине равнотеже еластичног тела

Сад пошто смо успоставили везу између тензора напона и тензора деформације за изотропно и хомогено идеално еластично тело, а само о таквом ће у даљем излагању и бити говора, можемо дати одговоре на питања постављена у почетку параграфа 11.

Дакле, ако у једначини (8) § 12 изразимо тензор деформације помоћу померања (§ 2, 5) и узмемо у обзир једначине (16) и (17) у § 9 добићемо три везе између померања и спољашњих запреминских сила. Тај циљ постићи ћемо најпростије на овај начин. Помножимо обе стране једначине (8) у § 12 скаларно Хамилтоновим оператором ∇. Та тензорска једначина претвориће се после тога у векторску једначину

$$\nabla \cdot N = 2\mu\, \nabla \cdot D + \lambda \nabla e_1. \tag{1}$$

Ако узмемо у обзир једначину (7) у § 9, и чињеницу да је тензор напона симетричан, а вредност тензора деформације у облику (5) у § 2, може се ова једначина написати у облику

$$\mathfrak{i}\,(\nabla\cdot\mathfrak{N}_1) + \mathfrak{j}\,(\nabla\cdot\mathfrak{N}_2) + \mathfrak{k}\,(\nabla\cdot\mathfrak{N}_3) = \mu\,\Delta\mathfrak{s} + (\lambda+\mu)\,\nabla e_1.$$

Из једначина (16) и (17) у § 9, пошто је $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{P}_i$, добијамо

$$\nabla\cdot\mathfrak{N}_1 = -\rho X, \quad \nabla\cdot\mathfrak{N}_2 = -\rho Y, \quad \nabla\cdot\mathfrak{N}_3 = -\rho Z, \tag{2}$$

тј.

$$\mu\,\Delta\mathfrak{s} + (\lambda+\mu)\,\nabla e_1 + \rho\,\mathfrak{F} = 0. \tag{3}$$

Према томе, добијамо најзад ове три скаларне диференцијалне једначине за везе померања и спољашњих запреминских сила

$$\begin{aligned} &\mu\,\Delta\xi + (\lambda+\mu)\frac{\partial e_1}{\partial x} + \rho X = 0, \\ &\mu\,\Delta\eta + (\lambda+\mu)\frac{\partial e_1}{\partial y} + \rho Y = 0, \\ &\mu\,\Delta\zeta + (\lambda+\mu)\frac{\partial e_1}{\partial z} + \rho Z = 0. \end{aligned} \tag{3 a}$$

Ово су *основне диференцијалне једначине равнотеже еластичног тела*, познате под именом *Ламеових једначина*.

Дакле, ако су задати облик и величина еластичног тела, његове еластичне особине помоћу констаната еластичности, на пр., μ и λ, и спољашње запреминске силе $\mathfrak{F}$, могу се из основних једначина одредити координате померања ξ, η и ζ, тј. може се решити *основни проблем теорије еластичности*. Координате померања ξ, η и ζ су са своје стране довољне за одређивање деформације δ_{ij}, а, најзад, деформације су довољне за одређивање координата напона v_{ij}. Но, поред горњих података, као и код свих проблема формулисаних у облику парцијалних једначина, потребно је и познавање *граничних услова*. Ови услови треба у проблему равнотеже еластичног тела да даду за сваку тачку граничне површине уоченог тела напоне условљене дејством спољашњих сила.

Наиме, ако на јединицу површине уоченог еластичног тела дејствује спољашња сила $-\mathfrak{P}$, на површински елемент df дејствоваће сила $-\mathfrak{P}\,df$. С друге стране у случају успостављене еластичне равнотеже мора се ова спољашња сила потирати о дејство односног унутрашњег напона. Међутим, према једначини (6) у § 9, напон у тачки површине, одређеној ортом $\mathfrak{n}$ спољашње нормале, биће $\mathfrak{N}=\mathfrak{n}\cdot N$ одн. елементарни напон на уочени површински елемент df са нормалом $\mathfrak{n}$ биће $\mathfrak{N}\,df$. На тај начин у свакој тачки граничне површине тела мора бити

(4) $$\mathfrak{P}=\mathfrak{N} \quad \text{или} \quad \mathfrak{P}=\mathfrak{n}\cdot N.$$

Ако је $\mathfrak{P}=\{P_x, P_y, P_z\}$ имаћемо у скаларном облику једначине граничног услова

(5) $$\begin{aligned} P_x &= \alpha v_{11}+\beta v_{12}+\gamma v_{13}, \\ P_y &= \alpha v_{12}+\beta v_{22}+\gamma v_{23}, \\ P_z &= \alpha v_{13}+\beta v_{23}+\gamma v_{33}, \end{aligned}$$

где је $\mathfrak{n}=\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Ако је гранична површина уоченог тела слободна од дејства спољашњих сила, тада и односни унутрашњи напони на граничној површини тела морају бити једнаки нули и гранични услови се изражавају једначинама

(6) $$\begin{aligned} \alpha v_{11}+\beta v_{12}+\gamma v_{13} &= 0, \\ \alpha v_{12}+\beta v_{22}+\gamma v_{23} &= 0, \\ \alpha v_{13}+\beta v_{23}+\gamma v_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Најзад, може се врло лако доказати и *јединственост* решења основног проблема теорије еластичности у шта се нећемо упуштати.

14. Еластична равнотежа у случају отсуства спољашњих запреминских сила

У случају отсуства спољашњих запреминских сила векторска једначина (2) у § 13, одн. основне једначине (3) у § 13 се упрошћавају, али то не умањује њихову практичну вредност, јер се баш у проблемима технике често има посла само са силама које дејствују на површину уоченог тела. Са друге стране отсуство запреминских сила повлачи извесне особености које су од интереса за решавање таквих проблема. У том случају векторска једначина (3) у § 13 постаје

(1) $$\mu\,\triangle\mathfrak{s}+(\lambda+\mu)\,\nabla e_1=0,$$

а основне једначине у скаларном облику (3а) у § 13 своде се на систем једначина

(2) $$\begin{aligned} \mu\,\triangle\xi+(\lambda+\mu)\frac{\partial e_1}{\partial x} &= 0, \\ \mu\,\triangle\eta+(\lambda+\mu)\frac{\partial e_1}{\partial y} &= 0, \\ \mu\,\triangle\zeta+(\lambda+\mu)\frac{\partial e_1}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Ако на једначину (1) применимо Хамилтонов оператор ∇ скаларно, добићемо

$$\mu\nabla\cdot\triangle\mathfrak{s}+(\lambda+\mu)\triangle e_1=0,$$

па како је

$$\nabla\cdot\triangle\mathfrak{s}=\triangle(\nabla\cdot\mathfrak{s})=\triangle e_1,$$

имамо најзад

$$(2\mu+\lambda)\,\triangle e_1=0,$$

тј.

(3) $$\triangle e_1=0.$$

То значи, да је кубна дилатација еластичног тела, напрегнутог само спољашњим силама које дејствују по површини, хармониска функција.

Даља особеност је у овоме. Ако на једначину (1) применимо Лапласов оператор $\triangle$, добићемо

$$\mu\triangle^2\mathfrak{s}+(\lambda+\mu)\nabla(\triangle e_1)=0,$$

где смо ставили $\triangle(\triangle\mathfrak{s})=\triangle^2\mathfrak{s}$, а пошто је $\triangle(\nabla e_1)=\nabla(\triangle e_1)$, одакле, с обзиром на једначину (3), одмах закључујемо

(4) $$\triangle^2\mathfrak{s}=0,$$

или у скаларном облику

(5) $$\Delta^2\xi=0,\quad \Delta^2\eta=0,\quad \Delta^2\zeta=0.$$

Према томе, координате ξ, η и ζ померања су бихармониске функције. Из $\mathfrak{s}=\mathfrak{v}\,dt$, тј. $\xi=v_1\,dt, \eta=v_2\,dt, \zeta=v_3\,dt$ јасно је одмах, да су и координате брзине v_1, v_2 и v_3 бихармониске функције, тј. да је

(6) $$\Delta^2 v_1=0,\quad \Delta^2 v_2=0,\quad \Delta^2 v_3=0.$$

Из једначине (11а) у § 12 а на основу (3) одмах се може закључити и

(7) $$\Delta N_1=0,$$

што значи да је и први скалар тензора напона хармониска функција.

Најзад, ако оператор Δ^2 применимо на једначину (8) у § 12, која изражава Хуков закон, добићемо

(8) $$\Delta^2 N=2\mu\Delta^2 D+\lambda I\Delta^2 e_1.$$

Међутим је

$$\Delta^2 e_1=\Delta(\Delta e_1)=0.$$

Исто тако је и

(9) $$\Delta^2 D=0,$$

јер је с обзиром на једначину (5) у § 2

$$\Delta^2 D=\frac{1}{2}\left[\nabla(\Delta^2\mathfrak{s})+\overline{\nabla(\Delta^2\mathfrak{s})}\right].$$

У скаларном облику имаћемо из једначине (9) шест једначина

(10) $$\Delta^2\delta_{ij}=0, \qquad (i,j=1,2,3)$$

дакле, дилатације и смицања су бихармониске функције.

Према томе, из једначине (8) добијамо једначину

(11) $$\Delta^2 N=0$$

или шест скаларних једначина

(12) $$\Delta^2 \nu_{ij}=0, \qquad (i,j=1,2,3)$$

које изражавају услове по којима су у случају отсуства спољашњих запреминских сила и напони бихармониске функције.

Ако се на векторску једначину (1) примени Хамилтонов оператор векторски, добиће се

$$\Delta(\nabla\times\mathfrak{s})=\Delta(\nabla\times\mathfrak{v}\,dt)=\frac{1}{2}dt\,\Delta\vec{\omega}=0,$$

тј.

(13) $$\Delta\vec{\omega}=0.$$

То је јасно отуда, што се оператори ∇ и Δ могу и у овом случају разменити, јер је Δ скаларни оператор. С друге стране је увек, како

знамо, $\nabla\times\nabla=0$. Према томе, имаћемо, за $\vec{\omega}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$, из једн. (13) три скаларне једначине

$$\Delta\omega_1=0,\quad \Delta\omega_2=0,\quad \Delta\omega_3=0,$$

што показује да су координате ω_1,ω_2 и ω_3 тренутне угаоне брзине, па и координате ротационог померања, хармониске функције.

15. Белтрамијеве једначине

Додирнућемо још једно питање. Наиме, исто онако како смо поставили питање, да ли сваки симетрични афинор може да се сматра као тензор деформације и нашли да координате тог тензора морају задовољавати услове компатибилности, могли бисмо поставити то питање и за тензор напона. И у том случају долазимо до потпуно аналогног закључка, да се сваки симетрични афинор не може сматрати као тензор напона, тј. да и његове координате морају задовољавати извесне услове.

До ових услова може се одмах доћи на овај начин. Ако пођемо од услова компатибилности у тензорском облику (2) у § 6 и унесемо у њега из једначине (13) у § 12 вредност за тензор деформације D према Хукову закону, добићемо после простих свођења тензорску једначину

(1) $$(1+\varkappa)(\nabla\times N\times\nabla)-\varkappa(\nabla\times I\times\nabla)N_1=0.$$

Она изражава услов који мора задовољавати тензор N, да би могао бити тензор напона. У скаларном облику овој тензорској једначини одговара шест скаларних једначина по координатама тензора напона. Из ових једначина могу се помоћу Навијеових (§ 9, 21) и Ламеових једначина (§ 13, 3а) извести шест других за примену нарочито важних једначина (2 групе по 3 једначине), у чије се извођење нећемо упуштати, а написаћемо овде само две, јер је остале онда према њима лако написати

$$\Delta\nu_{11}+\frac{1}{1+\varkappa}\,\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}+2\rho\,\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\rho\varkappa}{1-\varkappa}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=0,$$

. . . .

(2) $$\Delta\nu_{12}+\frac{1}{1+\varkappa}\,\frac{\partial^2 N_1}{\partial x\,\partial y}+\rho\left(\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}\right)=0,$$

. . . .

У случају отсуства спољашњих запреминских сила или кад су ове константне (на пр., у случају Земљине теже, може се за обичне димензије тела са довољном тачношћу она сматрати као константна), једначине (2) се своде на једначине

$$\Delta v_{11}+\frac{1}{1+\varkappa}\,\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}=0,$$

. . . .

(3) $$\Delta v_{12}+\frac{1}{1+\varkappa}\,\frac{\partial^2 N_1}{\partial x\,\partial y}=0,$$

. . . .

Једначине (2) одн. једначине (3) су познате под именом *Белтрамијеве (Beltrami) једначине.* У ствари Белтрами је извео ове услове само за случај отсуства запреминских сила, а генералисао их је за општи случај физичар Мичел (Michell).

16. Енергија еластичне деформације

Ако се еластично тело деформише, јасно је, да се мора утрошити неки рад који остаје у деформисаном телу у облику потенцијалне енергије. На пр., ако је неки еластични штап савијањем деформисан, он, по престанку дејства спољашњих сила, може при исправљању да врши рад – његова потенцијална енергија се претвара у кинетичку.

Потражимо, дакле, израз који ће одређивати рад деформационих сила – *енергију еластичне деформације.* У том циљу уочимо неко еластично тело које се већ налази у деформисаном стању под дејством спољашњих сила, при чему је наступило померање честица, одређено вектором $\mathfrak{s}=\mathfrak{v}\,dt$. Нека је запремина тога тела у тако деформисаном стању V, а површина S. У томе телу уочимо ма који запремински елемент dV површине f. Између напона и спољашњих сила нека буде успостављена равнотежа.

Замислимо сад да се изврши ново, елементарно померање честица $\delta\mathfrak{s}=\delta\mathfrak{v}\,dt$. У том случају спољашње запреминске силе $\mathfrak{F}$ и површински напони $\mathfrak{N}$ врше рад. Удео рада спољашњих сила и напона за наш уочени запремински елемент очигледно је

$$\rho\mathfrak{F}dV\cdot\delta\mathfrak{s}+\oint_f\mathfrak{N}\,df\cdot\delta\mathfrak{s}$$

па, према томе, елементарни рад свих спољашњих сила и напона за читаво уочено тело износи

(1) $$\delta U=\int_V(\rho\,\mathfrak{F}\cdot\delta\mathfrak{s})\,dV+\oint_S(\mathfrak{N}\cdot\delta\mathfrak{s})df,$$

јер се површински интеграли по површинама унутрашњих елемената тела потиру због супротних напона, те остаје само интеграл по спољашњој површини.

Површински интеграл на десној страни једначине (1) може се с обзиром на једначину (6) у § 9 написати у облику

$$\oint_S(\mathfrak{n}\cdot N\cdot\delta\mathfrak{s})\,df=\oint_S d\mathfrak{f}\cdot(N\cdot\delta\mathfrak{s}),$$

где је $d\mathfrak{f}=\mathfrak{n}\,df$, као и увек, управљени елемент површине уоченог тела. Ако тај интеграл претворимо у запремински по Гаусовој теореми добићемо

$$\oint_S d\mathfrak{f}\cdot(N\cdot\delta\mathfrak{s})=\int_V\nabla\cdot(N\cdot\delta\mathfrak{s})\,dV=$$

$$=\int_V(\nabla\cdot N)\cdot\delta\mathfrak{s}\,dV+\int_V\nabla\cdot(\overset{*}{N}\cdot\delta\mathfrak{s})\,dV,$$

где звездица означује да се Хамилтонов оператор у другом интегралу не примењује на тензор напона N.

Ако ову вредност за површински интеграл унесемо у израз (1) за елементарни рад и групишемо прва два интеграла добићемо

$$\delta U=\int_V(\rho\mathfrak{F}+\nabla\cdot N)\cdot\delta\mathfrak{s}\,dV+\int_V\nabla\cdot(\overset{*}{N}\cdot\delta\mathfrak{s})\,dV,$$

одакле с обзиром на једначину (22) у § 9 изводимо

$$\delta U=\int_V\nabla\cdot(\overset{*}{N}\cdot\delta\mathfrak{s})\,dV.$$

Међутим је, пошто је N симетрични афинор,

$$\nabla\cdot(\overset{*}{N}\cdot\delta\mathfrak{s})=\nabla\cdot(\delta\mathfrak{s}\cdot\overset{*}{N})=\delta(\nabla\mathfrak{s})\cdot\cdot N,$$

где је $\nabla\delta\mathfrak{s}=\delta(\nabla\mathfrak{s})$, $\nabla\mathfrak{s}$ је локални афинор (3) у § 2, а са две тачке смо означили бискаларни производ афинора $\delta(\nabla\mathfrak{s})$ и N. Како је

$$\nabla\mathfrak{s}=\mathcal{A}+\mathcal{D},$$

имамо даље

$$\delta(\nabla\mathfrak{s})\cdot\cdot N=\delta(\mathcal{A}+\mathcal{D})\cdot\cdot N=\delta\mathcal{D}\cdot\cdot N,$$

јер је

$$\delta\mathcal{A}\cdot\cdot N=0,$$

као бискаларни производ антисиметричног афинора $\delta\mathcal{A}$ и симетричног афинора N. Наиме, вредност бискаларног производа два афинора, према дефиницији, не мења се, ако се уместо датих афинора помноже њихови конјуговани афинори. Међутим, у случају производа симетричног и антисиметричног афинора конјуговани афинор симетричном афинору остаје потпуно непромењен, а антисиметрични мења знак, па би према томе резултат множења после узимања конјугованих афинора морао променити знак. Отуда је јасно, да такав производ може бити само једнак нули, пошто и после ове промене знака треба да задржи исту вредност.

Тако за елементарни рад добијамо израз

$$(2) \qquad \delta U = \int_V (\delta \mathcal{D} \cdot\cdot \mathcal{N})\, dV,$$

одакле у оним случајевима, кад се при померањима $\delta\mathfrak{s}$ може тензор напона $\mathcal{N}$ сматрати као константан, изводимо

$$\delta U = \int_V (\delta \mathcal{D} \cdot\cdot \mathcal{N})\, dV = \delta \int_V (\mathcal{D} \cdot\cdot \mathcal{N})\, dV,$$

одн.

$$(3) \qquad U = \int_V (\mathcal{D} \cdot\cdot \mathcal{N})\, dV.$$

Како, у општем случају, тензор напона $\mathcal{N}$ не може да се сматра при померањима $\delta\mathfrak{s}$ као константан, унећемо у израз (2) за $\mathcal{N}$ његову вредност из Хукова закона (8) у § 12 и добити

$$\delta U = \int_V [\delta \mathcal{D} \cdot\cdot (2\mu \mathcal{D} + \lambda e_1 I)]\, dV.$$

Израз под интегралним знаком може се овако трансформисати. Наиме, очигледно је

$$\delta \mathcal{D} \cdot\cdot \mathcal{D} = \frac{1}{2} \delta (\mathcal{D} \cdot\cdot \mathcal{D}),$$

јер је бискаларни производ два афинора комутативан. Даље је

$$\delta \mathcal{D} \cdot\cdot I = \delta (\mathcal{D} \cdot\cdot I) = \delta e_1,$$

јер је I независан од померања, а

$$\mathcal{D} \cdot\cdot I = e_1,$$

што је лако проверити.

Тако се најзад за елементарни рад деформационих сила може написати

$$\delta U = \int_V \left[\mu \delta (\mathcal{D} \cdot\cdot \mathcal{D}) + \frac{1}{2} \lambda \delta (e_1^2)\right] dV,$$

или

$$(4) \qquad \delta U = \delta \int_V \left(\mu \mathcal{D} \cdot\cdot \mathcal{D} + \frac{1}{2} \lambda e_1^2\right) dV,$$

одакле за тражену енергију деформације, изражену само помоћу тензора напона и констаната еластичности, добијамо

$$(5) \qquad U = \int_V \left(\mu \mathcal{D} \cdot\cdot \mathcal{D} + \frac{1}{2} \lambda e_1^2\right) dV.$$

Ако у овом изразу за енергију деформације ставимо по Хукову закону

$$\mu \mathcal{D} = \frac{1}{2} \mathcal{N} - \frac{1}{2} \lambda e_1 I,$$

добићемо

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\mathcal{N} \cdot\cdot \mathcal{D} - \lambda e_1 I \cdot\cdot \mathcal{D} + \lambda e_1^2)\, dV,$$

па како је

$$I \cdot\cdot \mathcal{D} = \mathcal{D} \cdot\cdot I = e_1 \quad \text{и} \quad \mathcal{N} \cdot\cdot \mathcal{D} = \mathcal{D} \cdot\cdot \mathcal{N},$$

најзад

$$(6) \qquad U = \frac{1}{2} \int_V (\mathcal{D} \cdot\cdot \mathcal{N})\, dV.$$

Овај израз за енергију деформације, изведен под претпоставком да се напони при померањима и односним деформацијама мењају по Хукову закону, разликује се фактором $^1/_2$ од израза (3).

Енергија деформације U може се изразити и само помоћу тензора напона $\mathcal{N}$ и констаната еластичности. У том циљу треба само, на пр., у изразу (6) за U заменити вредност тензора деформације $\mathcal{D}$ по Хукову закону (13) у § 12, па ћемо добити одмах

$$(7) \qquad U = \frac{1}{2E} \int_V [(1+\varkappa)\, \mathcal{N} \cdot\cdot \mathcal{N} - \varkappa N_1^2]\, dV,$$

пошто је

$$I \cdot\cdot \mathcal{N} = N_1.$$

Ако тензор деформације $\mathcal{D}$ и тензор напона $\mathcal{N}$ изразимо помоћу координата, добићемо после краћег рачунања

$$(8) \qquad \mathcal{D} \cdot\cdot \mathcal{D} = (\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33})^2 + 2(\delta_{12}^2 + \delta_{13}^2 + \delta_{23}^2 - \delta_{11}\delta_{22} - \delta_{22}\delta_{33} - \delta_{33}\delta_{11}) = e_1^2 - 2e_2,$$

и

$$(9) \qquad \mathcal{N} \cdot\cdot \mathcal{N} = (\nu_{11}^2 + \nu_{22}^2 + \nu_{33}^2) + 2(\nu_{12}^2 + \nu_{13}^2 + \nu_{23}^2 - \nu_{11}\nu_{22} - \nu_{22}\nu_{33} - \nu_{33}\nu_{11}) = N_1^2 - 2N_2.$$

На тај начин енергија деформације U може сад да се изрази поред констаната еластичности и само са прве две скаларне инваријанте тензора деформације у облику

$$(10) \qquad U = \int_V \left[\frac{1}{2}(2\mu + \lambda)\, e_1^2 - 2\mu e_2\right] dV,$$

или само помоћу прве две скаларне инваријанте тензора напона у облику

$$(11) \qquad U = \frac{1}{2E} \int_V [N_1^2 - 2(1+\varkappa) N_2]\, dV.$$

Подвлачимо, да сва ова извођења важе под претпоставком да константе еластичности остају за време деформисања тела заиста непроменљиве, што је тачно у случају изотермних процеса. У случају адијабатских процеса енергија деформације се услед иако незнатних измена констаната еластичности макар и мало, али ипак разликује од оне у случају изотермног процеса.

17. Еластични потенцијал

Јасно је да распоред потенцијалне енергије у деформисаном телу стоји у вези са деформацијама које су функције положаја и да је тај распоред непрекидан. Стога се може поставити питање *густине енергије* за уочени елемент тела у облику граничне вредности количника укупне енергије и запремине.

Дакле, густина енергије W се дефинише као запремински извод енергије деформације, тј.

$$W=\frac{dU}{dV},$$

па се, с обзиром на једначине (5), (7), (10) и (11) у претходном параграфу, добија

$$W=\mu\, D\cdot\cdot\, D+\frac{1}{2}\lambda_1 e^2=\frac{1}{2}(2\mu+\lambda)e_1{}^2-2\mu e_2, \tag{1}$$

одн.

$$W=\frac{1}{2E}[(1+\varkappa)N\cdot\cdot N-\varkappa N_1{}^2]=\frac{1}{2E}[N_1{}^2-2(1+\varkappa)N_2]. \tag{2}$$

Из ових односа се види да је густина енергије хомогена квадратна функција координата деформације или координата напона. Даље је лако увидети, да се у случају, кад је W одређено као функција деформација δ_{ij}, напони могу добити као парцијални изводи функције W по односним деформацијама, тј.

$$\nu_{ij}=\frac{\partial W(\delta)}{\partial \delta_{ij}}. \tag{3}$$

Исто тако, ако је W одређено као функција напона ν_{ij}, могу се дилатације и смицања одредити као парцијални изводи функције W по односним напонима, тј.

$$\delta_{ij}=\frac{\partial W(\nu)}{\partial \nu_{ij}}. \tag{4}$$

Из ових разлога се функција W, узета обично са негативним знаком, зове *еластични потенцијал*. Понекад се и сама функција W назива еластични потенцијал.

Еластични потенцијал може, с обзиром на једначину (6) у § 16, да се изрази у облику

$$W=\frac{1}{2}(D\,..\,N), \tag{5}$$

што у скаларном облику даје образац

$$2W=\delta_{11}\nu_{11}+\delta_{22}\nu_{22}+\delta_{33}\nu_{33}+2(\delta_{12}\nu_{12}+\delta_{13}\nu_{13}+\delta_{23}\nu_{23})=\sum_i\sum_j\delta_{ij}\nu_{ij}, \tag{6}$$

познат под именом *Клапејронов* (*Clapeyron*) *образац*. Овај образац може одмах и директно да се изведе, ако применимо Ојлероз (Euler) образац за хомогене функције на W било у облику (1) било у облику (2), а узму у обзир изрази (3) одн. (4).

Треба још нагласити да еластични потенцијал постоји само, ако важе сви услови који су претпостављени при извођењу еластичног потенцијала, иначе он не мора увек постојати.

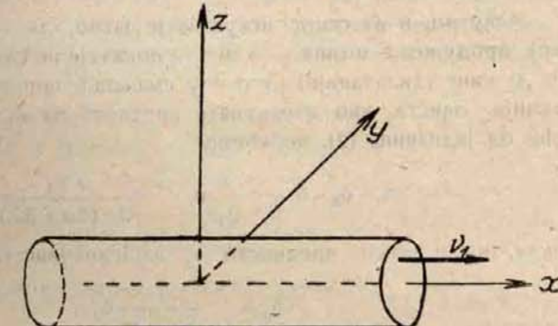
18. Константе еластичности и њихова механичка тумачења

Досада смо за хомогено и изотропно еластично тело користили четири константе еластичности: две Ламеове μ и λ, Јунгов модул E и Поасонову константу $\varkappa$. Једначинама (14) у § 12 утврђена је веза између Ламеових констаната с једне стране и Јунгова модула и Поасонове константе с друге стране. Из тих једначина је врло лако изразити, обрнуто, Јунгов модул и Поасонову константу помоћу Ламеових констаната, тј.

$$E=\frac{\mu(2\mu+3\lambda)}{\mu+\lambda};\qquad \varkappa=\frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}. \tag{1}$$

Видели смо под којим условима се може сматрати да су оне заиста константне.

Међутим, поред ове четири константе еластичности могу се увести и уводе се још две друге константе еластичности, а све оне имају своје механичко тумачење. Према томе, у наредним излагањима показаћемо како се уводе те нове константе и дати за све механичко тумачење.



Сл. 9

Посматрајмо у том циљу случај, кад на хомогено и изотропно идеално еластично тело, на пр., облика штапа (сл. 9), дејствује само напон $\nu_{11}=\nu_1$ у правцу x-осе, а

$$\nu_{22}=\nu_{33}=\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.$$

У том се случају једначине (9) у § 12, које у скаларном облику формулишу Хуков закон, своде на само три једначине

$$(2)\qquad \begin{aligned} \nu_1 &= 2\mu\delta_1 + \lambda e_1,\\ 0 &= 2\mu\delta_2 + \lambda e_1,\\ 0 &= 2\mu\delta_3 + \lambda e_1, \end{aligned}$$

јер је уосталом већ и из саме симетрије јасно да смицања не може бити.

Сабирањем једначина (2) добија се

$$\nu_1 = (2\mu + 3\lambda) e_1$$

одакле се може израчунати e_1 и заменити у прву од једначина (2). Тада се добија

$$(3)\qquad \nu_1 = \frac{\mu(2\mu+3\lambda)\delta_1}{\mu+\lambda}$$

и с обзиром на обрасце (1)

$$(4)\qquad \frac{\nu_1}{\delta_1} = \frac{\mu(2\mu+3\lambda)}{\mu+\lambda} = E.$$

Према томе, *Јунгов модул еластичности E је однос напона и односне дилатације* и претставља *материјалну константу* за уочено тело, тј. величину која, у одређеним границама, зависи само од природе тела, а не од спољашњих сила и димензија тела. Димензија Јунгова модула је очигледно једнака димензији напона, тј. сила са површином и у техници се мери са kg/cm². Јунгов модул је, према дефиницији, позитиван и обично велики број, јер су напони коначне величине, а дилатација врло мали бројеви; тако је, на пр., за челик

$$E = 2\cdot 10^6\ \text{kg/cm}^2.$$

Међутим, и из самог искуства је јасно, да се дејство напона у смеру продужења штапа — x-осе — показује не само у повећавању његове дужине (дилатацији) него и у смањењу попречног пресека у контракцији. Заиста, ако израчунату вредност за e_1 унесемо у другу и трећу од једначина (2), добићемо

$$\delta_0 = \delta_2 = \delta_3 = -\frac{\lambda}{2\mu}e_1 = -\frac{\lambda\nu_1}{2\mu(2\mu+3\lambda)};$$

одакле, после замене вредности ν_1 из једначине (3) добијамо

$$\delta_0 = -\frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}\delta_1$$

и најзад, с обзиром на обрасце (1),

$$(5)\qquad \varkappa = -\frac{\delta_0}{\delta_1}.$$

Дакле, Поасонова константа $\varkappa$ је такође материјална константа и претставља однос *попречне контракције и уздужне дилатације*. И она у одређеним границама, под одређеним условима, зависи само од природе тела и, на пр., за гвожђе износи око 0,3. Њена димензија је једнака димензији апстрактног броја. Ми смо у нашем примеру (сл. 9) претпоставили да напон ν_1 дејствује у правцу и смеру x-осе, тј. да имамо посла са затезањем. У таквом случају је $\delta_1 > 0$, $\delta_0 < 0$, те је према једначини (5) $\varkappa > 0$. Ако је напон ν_1 притисак, тј. дејствује у смеру супротном x-оси, $\varkappa$ задржава свој позитиван знак, јер је сад $\delta_1 < 0$, $\delta_0 > 0$.

До нове константе еластичности карактеристичне за уочено тело доћи ћемо на овај начин. Ако у изразу за Хуков закон (8) у § 12 тензор деформације D раздвојимо, према једначини (7) у § 5, на тензор D_1 који одређује само промену облика и тензор $\frac{1}{3}e_1 I$ који одређује само промену запремине, можемо написати

$$(6)\qquad N = 2\mu\left(D - \frac{1}{3}e_1 I\right) + \left(\lambda + \frac{2\mu}{3}\right)e_1 I.$$

Из ове једначине се види да од две константе карактеристичне за везу тензора напона и тензора деформације Ламеова константа μ стоји у вези само са променом облика тела, а да

$$(7)\qquad \lambda + \frac{2\mu}{3} = K,$$

одређује нову константу еластичности која је карактеристична само за запреминску дилатацију (промену запремине) уоченог тела. Ова константа еластичности зове се *модул компресије*. Из једначине (6) је даље јасно да константе μ и K имају димензију напона. Механичко тумачење константе K најлакше ћемо добити на овај начин. Замислимо неко тело на које по целој површини дејствује равномерно притисак p (на пр., као на чврсто тело потопљено у течност, како ћемо касније видети). Тада је

$$\nu_{11} = \nu_{22} = \nu_{33} = -p; \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.$$

Уносећи ове вредности у једначину (9) § 12 добија се

$$(8)\qquad \begin{aligned} \lambda e_1 + 2\mu\delta_{11} &= -p,\\ \lambda e_1 + 2\mu\delta_{22} &= -p,\\ \lambda e_1 + 2\mu\delta_{33} &= -p, \end{aligned}$$

одакле, после сабирања и скраћивања са 3, добијамо

$$(9)\qquad p = -\left(\lambda + \frac{2\mu}{3}\right)e_1 = -K e_1$$

Према томе је

$$(10)\qquad K = -\frac{p}{e_1},$$

однос притиска и односне кубне контракције уоченог тела. Јасно је да је $K>0$, јер је у случају притиска $p>0$, а $e_1<0$, јер се ради о контракцији. У случају пак затезања $p<0$ имамо посла са дилатацијом те је и $e_1>0$, па K остаје позитивно.

Најзад, ако у обрасцу (7) унесемо за λ и μ вредности одређене једначинама (14) у § 12 и упростимо добићемо за модул компресије K, вредност

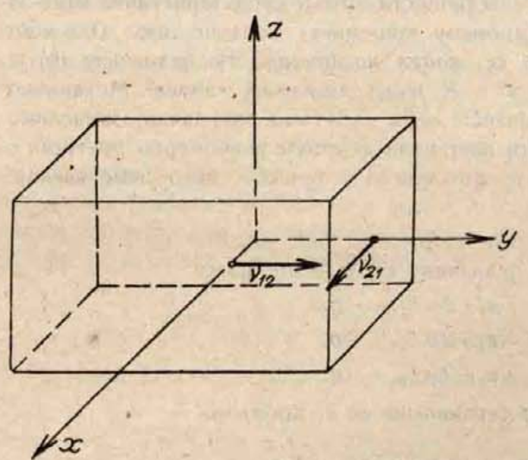
$$K=\frac{1}{3}\,\frac{E}{1-2\varkappa}. \tag{11}$$

Ова веза нам омогућује да одредимо горњу границу за вредност Поасонове константе на овај начин. Наиме, из једначине (10) добијамо у случају потпуне инкомпресибилности тела $(e_1=0)$ $K=\infty$ и, према томе, из једначине (11) за Поасонову константу као горњу границу

$$1-2\varkappa=0, \quad \text{одн.} \quad \varkappa=\frac{1}{2}\cdot$$

Очигледно је, да би за $\varkappa>\frac{1}{2}$ посматрано тело требало под равномерним притиском да се шири уместо да се скупља, што међу природним телима до сад није откривено.

Ради механичког тумачења Ламеове константе μ уочимо тело облика правоуглог паралелепипеда и посматрајмо га у односу на Декартов правоугли триједар оса које су нормалне на странама тог паралелепипеда (сл. 10). Узмимо овакво напонско стање тела. Стране нормалне на z-осу нека буду слободне од напона, те z-оса игра улогу једне од главних оса напона. Дакле,



Сл. 10

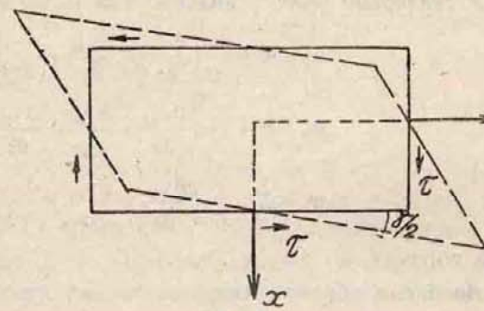
$$\nu_{33}=\nu_{13}=\nu_{31}=$$
$$=\nu_{23}=\nu_{32}=0.$$

На стране нормалне на x и y-осу дејствују само напони смицања

$$\nu_{12}=\nu_{21}=\tau.$$

У таквом случају напонско стање је равно и према томе га у потпуности карактерише стање у неком пресеку који је паралелан равни xy. Уочимо стога у тој равни неки правоугаоник (сл. 11). Под дејством напона смицања τ овај правоугаоник се деформише у кос паралелограм, тако да се један пар правих углова смањи за угао γ а други за толико исто повећа.

Овде се ради о чистој промени облика, јер је $N_1=0$, па с обзиром на једначину (11) у § 12 мора бити и $e_1=0$, тј. кубна дилатација је једнака нули. Пошто је $\nu_3=0$, то главни напони у уоченој равни морају бити супротни, тј. $\nu_1=-\nu_2$, јер је $N_1=0$. То значи да се неки елемент тела исечен нормално на ове главне осе у правцу једне од њих тачно онолико истеже колико се у другом стеже.



Сл. 11

У оваквом напонском стању искључиво смицања дефинише се нова материјална константа карактеристична баш за то стање материјала једначином

$$G=\frac{\tau}{\gamma}, \tag{12}$$

која се зове *модул смицања* или *клизања* или *модул торзије*. Дакле, *модул смицања је одређен односом напона смицања и односне промене угла*, те према томе, има димензију напона.

Показаћемо да је модул смицања G идентичан са Ламеовом константом μ. Наиме, у нашем случају из општих једначина (9) у § 12 имамо одмах

$$\mu=\frac{\nu_{12}}{2\delta_{12}}=\frac{\tau}{\gamma}=G, \tag{13}$$

јер је $\delta_{12}=\frac{1}{2}\gamma$. Тако се може рећи да је модул смицања једнак половини количника напона смицања и односног смицања.

19. Основне једначине динамике еластичних тела

До једначина динамике непрекидне средине може се врло просто доћи применом Даламберова (D'Alembert) принципа. Наиме, једначина (22) у § 9, изведена из резултантне једначине равнотеже непрекидне средине, остаје и у динамици у важности, ако се само дода инерцијална сила $-\rho\mathfrak{w}$ као запреминска сила.

Према томе имамо одмах

$$\rho\mathfrak{F}+\nabla\cdot N-\rho\mathfrak{w}=0,$$

одн.

$$\mathfrak{w}=\mathfrak{F}+\frac{1}{\rho}\,\nabla\cdot N, \tag{1}$$

где је $\mathfrak{w}$ убрзање уочене честице.

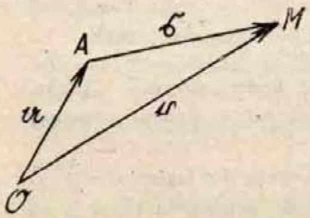
У скаларном облику имаћемо три једначине

$$\begin{aligned} w_1&=X+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial v_{11}}{\partial x}+\frac{\partial v_{12}}{\partial y}+\frac{\partial v_{13}}{\partial z}\right),\\ w_2&=Y+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial v_{12}}{\partial x}+\frac{\partial v_{22}}{\partial y}+\frac{\partial v_{23}}{\partial z}\right),\\ w_3&=Z+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial v_{13}}{\partial x}+\frac{\partial v_{23}}{\partial y}+\frac{\partial v_{33}}{\partial z}\right),\end{aligned}\tag{2}$$

где је убрзање $\mathfrak{w}=\{w_1, w_2, w_3\}$.

Да бисмо убрзање изразили помоћу извода померања $\mathfrak{s}$, уочимо у телу неку честицу која се пре деформације налазила у тачки A, одређеној вектором положаја $\mathfrak{a}$ (сл. 12), а после деформације, на пр., у тачки M са вектором положаја $\mathfrak{r}$. Тада је са слике очигледно

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{a}+\mathfrak{s},$$



Сл. 12

па, према томе, имамо прво

$$\mathfrak{v}=\frac{d\mathfrak{r}}{dt}=\frac{d\mathfrak{s}}{dt}=\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial t}+(\mathfrak{v}\cdot\nabla)\mathfrak{s},$$

јер је померање честице у општем случају функција положаја и времена, тј. $\mathfrak{s}=\mathfrak{s}(\mathfrak{r}, t)$. Међутим, како се ради само о инфинитезималним померањима, то је стационарни део промене померања занемарљив у односу на локалну промену, јер се у непосредној околини уочене тачке може сматрати да је $\mathfrak{s}$ функција само времена. На тај начин се може ставити

$$\mathfrak{v}=\frac{d\mathfrak{r}}{dt}=\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial t}. \tag{3}$$

Из истих разлога је

$$\mathfrak{w}=\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}=\frac{d\mathfrak{v}}{dt}=\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t}=\frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial t^2}, \tag{4}$$

јер се члан $(\mathfrak{v}\cdot\nabla)\mathfrak{v}$ у изразу за $\dfrac{d\mathfrak{v}}{dt}$ може занемарити.

Тако се, најзад, векторска једначина кретања честице непрекидне средине може написати у облику

$$\frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial t^2}=\mathfrak{F}+\frac{1}{\rho}\,\nabla\cdot N, \tag{5}$$

што даје три скаларне једначине

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}&=X+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial v_{11}}{\partial x}+\frac{\partial v_{12}}{\partial y}+\frac{\partial v_{13}}{\partial z}\right),\\ \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}&=Y+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial v_{12}}{\partial x}+\frac{\partial v_{22}}{\partial y}+\frac{\partial v_{23}}{\partial z}\right),\\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}&=Z+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial v_{13}}{\partial x}+\frac{\partial v_{23}}{\partial y}+\frac{\partial v_{33}}{\partial z}\right),\end{aligned}\tag{6}$$

где је померање $\mathfrak{s}=\{\xi, \eta, \zeta\}$.

У овим једначинама су непознате функције ξ, η, ζ и ρ, а независно променљиве x, y, z и t. За решење проблема мора се, дакле, поред једначина (6) узети у обзир још и једначина континуитета масе.

До једначине (1) може се доћи и директном применом основне једначине динамике без употребе Даламберовог принципа. Уочимо зато неки запремински елемент $\triangle V$, ограничен површином f. Тада се основна једначина динамике за тај елемент може написати у облику

$$\rho\triangle V\mathfrak{w}=\rho\triangle V\mathfrak{F}+\oint_f\mathfrak{N}\,df, \tag{7}$$

где је $\mathfrak{F}$ резултанта спољашњих запреминских сила, одређена на јединицу масе. Површински интеграл по површини f може се трансформисати у запремински по запремини $\triangle V$ на овај начин. Наиме, пошто је

$$\mathfrak{N}=N\cdot\mathfrak{n}=(\mathfrak{i}\mathfrak{N}_1+\mathfrak{j}\mathfrak{N}_2+\mathfrak{k}\mathfrak{N}_3)\cdot\mathfrak{n}=\mathfrak{i}(\mathfrak{N}_1\cdot\mathfrak{n})+\mathfrak{j}(\mathfrak{N}_2\cdot\mathfrak{n})+\mathfrak{k}(\mathfrak{N}_3\cdot\mathfrak{n}),$$

биће

$$\oint_f\mathfrak{N}\,df=\mathfrak{i}\oint_f(\mathfrak{N}_1\cdot d\mathfrak{f})+\mathfrak{j}\oint_f(\mathfrak{N}_2\cdot d\mathfrak{f})+\mathfrak{k}\oint_f(\mathfrak{N}_3\cdot d\mathfrak{f})=$$

$$=\int_{\triangle V}(\nabla\cdot\mathfrak{N}_1)\,\mathfrak{i}\,dV+\int_{\triangle V}(\nabla\cdot\mathfrak{N}_2)\,\mathfrak{j}\,dV+\int_{\triangle V}(\nabla\cdot\mathfrak{N}_3)\,\mathfrak{k}\,dV=\int_{\triangle V}(\nabla\cdot N)\,dV.$$

Ако овако трансформисану вредност површинског интеграла унесемо у једначину (7), поделимо са $\triangle V$ и пустимо да $\triangle V\to 0$, добићемо у граничном случају за уочену материјалну честицу једначину (1), што смо и хтели да учинимо.

При извођењу једначине (7) нису учињене никакве претпоставке о вези између напона и деформација. Ако се задржимо на хомогеном и изотропном идеално еластичном телу за које важи Хуков закон, тада се, с обзиром на једначину (3) у § 13, може написати

$$\nabla\cdot N=\mu\triangle\mathfrak{s}+(\lambda+\mu)\nabla e_1,$$

те, ако ту вредност унесемо у једначину (5), добићемо

$$\frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial t^2}=\mathfrak{F}+\frac{\mu}{\rho}\triangle\mathfrak{s}+\frac{\lambda+\mu}{\rho}\nabla e_1, \tag{8}$$

где је $e_1=\operatorname{div}\mathfrak{s}$.

Одавде добијамо у Декартовим координатама *основне једначине динамике еластичних тела* у облику

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e_1}{\partial x}+\mu\,\Delta\xi+\rho\left(X-\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right)=0,$$

(9) $$(\lambda+\mu)\frac{\partial e_1}{\partial y}+\mu\,\Delta\eta+\rho\left(Y-\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right)=0,$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e_1}{\partial z}+\mu\,\Delta\zeta+\rho\left(Z-\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right)=0.$$

Ове три симултане парцијалне диференцијалне једначине (заједно са једначином континуитета изразеном у померањима) довољне су за одређивање еластичних померања ξ, η и ζ, јер су λ, μ константе под условима за које важе ове једначине. На тај начин решење динамичког задатка теорије еластичности је у потпуности одређено тим једначинама, ако поред тога знамо:

1) услове на граничној површини тела – *граничне услове*;

2) услове у почетку кретања — *почетне услове*.

Ми ћемо сад једначину (8) одн. једначине (9) употребити за проучавање кретања честица еластичних тела изазваних поремећајима у равнотежи тих тела, кад на њих не дејствују никакве спољашње запреминске силе. У том случају имаћемо векторску једначину

(10) $$\frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2}=\frac{\mu}{\rho}\Delta\mathfrak{s}+\frac{\lambda+\mu}{\rho}\nabla e_1,$$

одн. три скаларне једначине

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{\mu}{\rho}\Delta\xi+\frac{\lambda+\mu}{\rho}\frac{\partial e_1}{\partial x},$$

(11) $$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=\frac{\mu}{\rho}\Delta\eta+\frac{\lambda+\mu}{\rho}\frac{\partial e_1}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=\frac{\mu}{\rho}\Delta\zeta+\frac{\lambda+\mu}{\rho}\frac{\partial e_1}{\partial z}.$$

Кретања, на која се овде мисли, односе се на кретања честица тела изазвана, како рекосмо, поремећајима равнотежног стања еластичног тела. У том погледу је карактеристично за динамичке једначине (11), да у њима у ствари не фигуришу сами напони као активне силе већ њихови просторни изводи (преко e_1). На пр., ма како велики равномерни притисак био, он не може произвести *трајно* кретање. Он само тренутно преводи тело из равнотежног ненапрегнутог стања у равнотежно напрегнуто стање. Исто тако отклањањем таквог притиска еластично тело треба тренутно да се врати у недеформисани облик ненапрегнуте равнотеже. Дакле, само просторно променљиви напони могу изазвати трајно кретање. Јасно је, даље, да ако изазвано кретање треба да буде трајно везано само за врло мале деформације

средине, оно нипошто не може бити увек у истом смеру, јер би се тако прешле границе еластичности тела, већ безусловно мора мењати смер, дакле, мора бити осцилаторног карактера – *треперење*.

Треперење честица може се, међутим, изазвати: 1) ако се у ненапрегнутом равнотежном стању тела изазове поремећај и тада имамо осцилације честица око положаја који оне заузимају у недеформисаном стању, и 2) ако се у напрегнутом равнотежном стању изазове поремећај и тада се осцилације врше око положаја који те честице имају у напрегнутом равнотежном стању. У овом погледу се тела различито понашају. Тако, на пр., штап и шипка могу треперити на оба начина, док жица може да трепери само у напрегнутом стању. При томе су *штап* и *шипка* еластична тела са једном истакнутом димензијом, штап обично цилиндарског а шипка призматичног облика, која се опиру савијању. *Жица* је пак влакнастог облика, њен пресек је незнатних димензија и она се готово уопште не опире савијању. Исто тако равне плоче могу осциловати на оба начина, а мембране само у напрегнутом стању. *Плоче* су тела код којих су две димензије знатно веће од треће, али која се опиру савијању, напротив *мембране* поред дужине и ширине имају сасвим незнатну дебљину и могу се скоро без икаквог отпора савијати. Ови термини се не поклапају у потпуности са навикама обичног говора. Тако је „мембрана“ телефонске слушалице у ствари еластична плоча итд.

20. Еластични таласи у неограниченој средини. Таласна једначина

Треперење честица изазвано поремећајем равнотеже ма на којем месту еластичног тела преноси се кроз тело. Према томе, ми ту имамо посла са *таласним процесом*. Овај се процес, како знамо, састоји у томе, што ма на ком месту у телу влада исто стање треперења као на месту поремећаја само са закашњењем у фази за онолико колико је потребно да се поремећај пренесе до тог места. При томе се уопште не узима у обзир само изазивање поремећаја и силе које то производе, већ посматра ситуација која наступа у телу после већ изазваног поремећаја.

При проучавању таласног кретања треба увек добро водити рачуна о томе да ли је могуће изједначавање температуре, тј. да ли је процес *изотермни* или нема изједначења температуре, и процес је *адијабатски*. О овоме треба водити рачуна при коришћењу векторске једначине (8) одн. скаларних једначина (9) из прет. параграфа, ради тога да би се узеле односне вредности за константе еластичности које се, како смо рекли, унеколико разликују за изотермни и адијабатски процес, иако се иначе топлотни утицаји занемарују.

Посматрајмо сад неограничену еластичну средину. У том случају се проблем теорије еластичности знатно упрошћава, јер отпада потреба да се задовоље гранични услови. Наравно, и овде треба бити начисто са тим да реч „неограничена" не треба разумети у строго математичком смислу, већ само довољно велики простор који приближно задовољава постављени захтев.

Како, даље, векторска функција померања $\mathfrak{s}$ дефинише у општем случају *сложено* поље са $\operatorname{div}\mathfrak{s}\neq 0$ и $\operatorname{rot}\mathfrak{s}\neq 0$, може се на познати начин раставити у две компоненте, тј. ставити

$$\mathfrak{s}=\mathfrak{s}_1+\mathfrak{s}_2, \tag{1}$$

при чему је у свакој тачки

$$\operatorname{div}\mathfrak{s}_1\neq 0, \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{s}_1=0, \tag{2}$$

а

$$\operatorname{div}\mathfrak{s}_2=0, \quad \operatorname{rot}\mathfrak{s}_2\neq 0. \tag{3}$$

Према томе, компонента $\mathfrak{s}_1$ померања дефинише *потенцијално* или *безвртложно* поље, а компонента $\mathfrak{s}_2$ дефинише *соленоидно* поље.

Векторска једначина (10) у претх. параграфу може се таквим разлагањем померања написати у облику

$$\frac{\partial^2\mathfrak{s}_1}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{s}_2}{\partial t^2}=\frac{\mu}{\rho}(\triangle\mathfrak{s}_1+\triangle\mathfrak{s}_2)+\frac{\lambda+\mu}{\rho}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{s}_1. \tag{4}$$

Ако се на обе стране ове векторске једначине примени Хамилтонов оператор ∇ скаларно, добиће се, с обзиром да се операције ∇ и парцијалног диференцирања по t могу разменити као једна од друге независне,

$$\frac{\partial^2(\operatorname{div}\mathfrak{s}_1)}{\partial t^2}=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\triangle(\operatorname{div}\mathfrak{s}_1), \tag{5}$$

одн.

$$\rho\frac{\partial^2 e_1}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\triangle e_1, \tag{6}$$

пошто је

$$e_1=\operatorname{div}\mathfrak{s}=\operatorname{div}(\mathfrak{s}_1+\mathfrak{s}_2)=\operatorname{div}\mathfrak{s}_1.$$

С друге стране, опет у вези са разменљивошћу операција ∇ и парцијалног диференцирања по t, може се једначина (5) написати и у облику

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{s}_1}{\partial t^2}-\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\triangle\mathfrak{s}_1\right)=0, \tag{7}$$

одакле, пошто с обзиром на услов (2) важи и једначина

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{s}_1}{\partial t^2}-\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\triangle\mathfrak{s}_1\right)=0,$$

закључујемо да је

$$\frac{\partial^2\mathfrak{s}_1}{\partial t^2}=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\triangle\mathfrak{s}_1, \tag{8}$$

јер је векторска функција, чији су div и rot у читавом уоченом простору једнаки нули, једнака нули. Како је

$$\frac{\lambda+2\mu}{\rho}$$

позитивна величина, може се ставити

$$a^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho} \tag{9}$$

и једначина (8) најзад написати у облику

$$\frac{\partial^2\mathfrak{s}_1}{\partial t^2}=a^2\triangle\mathfrak{s}_1. \tag{10}$$

Применимо ли Хамилтонов оператор векторски на обе стране векторске једначине (4) добићемо

$$\frac{\partial^2(\operatorname{rot}\mathfrak{s}_2)}{\partial t^2}=\frac{\mu}{\rho}\triangle(\operatorname{rot}\mathfrak{s}_2), \tag{11}$$

јер се опет операције ∇ и парцијално диференцирање по t могу разменити. Ако ставимо

$$\operatorname{rot}\mathfrak{s}_2=2\vec{\Omega}, \tag{12}$$

где је $\vec{\Omega}=\vec{\omega}\,dt$ ротационо померање (вектор ротације честице), добићемо једначину

$$\rho\frac{\partial^2\vec{\Omega}}{\partial t^2}=\mu\triangle\vec{\Omega}. \tag{13}$$

Једначина (11) може се написати и у облику

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{s}_2}{\partial t^2}-\frac{\mu}{\rho}\triangle\mathfrak{s}_2\right)=0,$$

па пошто је сад, с обзиром на услов (3), и

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{s}_2}{\partial t^2}-\frac{\mu}{\rho}\triangle\mathfrak{s}_2\right)=0,$$

добијамо једначину

$$\frac{\partial^2\mathfrak{s}_2}{\partial t^2}=\frac{\mu}{\rho}\triangle\mathfrak{s}_2, \tag{14}$$

одн.

$$\frac{\partial^2\mathfrak{s}_2}{\partial t^2}=b^2\triangle\mathfrak{s}_2, \tag{15}$$

где смо ставили

$$b^2 = \frac{\mu}{\rho}\,, \tag{16}$$

јер је $\frac{\mu}{\rho}$ позитивна величина.

Из ових излагања је јасно да се једначина (10) у § 19 раставља у две једначине (10) и (15) потпуно истог облика које се разликују само по константама a и b. Видимо, да се, према томе, таласно кретање дефинисано једначином (10) у § 19 може сматрати као састављено од два различита таласна кретања дефинисана једначинама (10) и (15). Из тих се разлога свака линеарна парцијална диференцијална једначина облика (10) одн. (15) зове *таласна једначина*.

Посматрајмо сад посебно таласно кретање типа (10). Општа једначина (10) у § 19 се увек своди на такву једначину ако је $\operatorname{rot} \mathfrak{s} = 0$, јер је тада

$$\triangle \mathfrak{s} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{s} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{s} = \nabla e_1\,,$$

после чега се једначина (10) у § 19 своди на једначину типа (10).

Дакле, таласна једначина типа (10) дефинише таласно кретање при коме нема ротација честица. Такви се таласи називају *безвртложни* или *компресиони таласи*, таласи са згушњавањем и разређивањем.

Друкчије стоји ствар са таласним кретањем типа (15) на коју се увек своди општа једначина (10) у § 19, кад је $\operatorname{div} \mathfrak{s} = 0$, што се одмах види. Код таквих таласа запремина остаје непромењена, јер је кубна дилатација једнака нули. Такви таласи су *еквиволумни* или *вртложни*.

Према томе, у непрекидној еластично средини постоје два типа таласа. Вредности констаната a и b су карактеристичне за дати материјал и увек је константа $a > b$. Однос ове две константе за гвожђе, за које је $\varkappa \approx 0{,}3$, како смо видели, износи

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} = \sqrt{\frac{2(1-\varkappa)}{1-2\varkappa}} \approx 1{,}87, \tag{17}$$

а за многе материје за које је Поасонова константа $\varkappa$ приближно једнака $^1/_4$ износи отприлике $\sqrt{3}$.

Види се да је та константа увек већа за компресионе таласе него за еквиволумне.

Од многих решења линеарне парцијалне једначине (10) одн. (15) у § 19 проучићемо, *прво*, оно које одговара специјалном случају, кад је вектор померања $\mathfrak{s}$ функција само једне од координата, на пр., координате x и времена t, тј. кад је

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}(x, t).$$

У таквом случају се скаларне једначине (11) у § 19 своде на једначине

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\,, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= b^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\,, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= b^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Како се у овим једначинама вектор померања, одн. његове координате ξ, η и ζ, мењају само у правцу x-осе, каже се да је *простирање таласа* или *померање фазе* у правцу x-осе. Јасно је да у случају оваквог померања честица, све честице које се у датом тренутку налазе у некој равни нормалној на x-оси трепере у истој фази, јер им одговара иста вредност вектора померања, па према томе и исте брзине. Услед тога се такви таласи зову *равански таласи*. Све три једначине (18) одређују раванске таласе који се простиру у правцу x-осе, али код прве су померања честица у правцу простирања таласа, а код две друге, које су идентичне по облику, померања честица су нормална на правац простирања таласа. Из тих разлога се равански таласи одређени првом од једначина (18) зову *лонгитудинални*. Равански пак таласи дефинисани једном од две друге једначине (18) зову се *трансверзални*.

Упоређивањем са једначинама (10) и (15) види се да је лонгитудинални талас компресиони талас, а да је трансверзални талас еквиволумни талас. Брзина простирања лонгитудиналних таласа је већа од брзине простирања трансверзалних таласа.

Пошто су све три једначине (18) истога облика решићемо једну од њих, на пр., прву, по Даламберовој методи. Треба, дакле, наћи ξ као функцију од x и t, кад су дати почетни услови

$$\xi = f(x), \qquad \frac{\partial \xi}{\partial t} = F(x) \quad \text{за} \quad t = 0, \tag{19}$$

где су $f(x)$ и $F(x)$ функције дефинисане за све реалне вредности x-а. Ако сад у првој од једначина (18), тј. у једначини

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\,, \tag{20}$$

извршимо смену промењљивих

$$u_1 = x - at\,, \qquad u_2 = x + at\,, \tag{21}$$

добићемо

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial \xi}{\partial u_1}+\frac{\partial \xi}{\partial u_2}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial t}=a\left(-\frac{\partial \xi}{\partial u_1}+\frac{\partial \xi}{\partial u_2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1{}^2}+2\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1\,\partial u_2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_2{}^2}, \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1{}^2}-2\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1\,\partial u_2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_2{}^2}\right),$$

тако да после уношења ових вредности једначина (20) постаје

(22)
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1\,\partial u_2}=0.$$

Почетни услови (19) пошто је, с обзиром на једначине (21), за $t=0$, $u_1=u_2=x$, своде се на

(23)
$$\xi=f(u_1), \qquad \frac{\partial \xi}{\partial u_2}-\frac{\partial \xi}{\partial u_1}=\frac{1}{a}F(u_1) \quad \text{за} \quad u_1=u_2.$$

Парцијална диференцијална једначина (22) може се написати у облику

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial u_1}\right)}{\partial u_2}=0,$$

одакле се одмах добија да

(24)
$$\frac{\partial \xi}{\partial u_1}=\varphi'(u_1)$$

зависи само од u_1, при чему очигледно φ може бити произвољна функција. Интеграцијом леве и десне стране једначине (24) добија се најзад

(25)
$$\xi=\varphi(u_1)+\psi(u_2),$$

где је и ψ произвољна функција само од u_2 (константа при интеграцији по u_1 може зависити од u_2).

Ако се вратимо на старе променљиве x и t добићемо *опште Даламберово решење* једначине (20) у облику

(26)
$$\xi(x,t)=\varphi(x-at)+\psi(x+at),$$

које, како видимо садржи две произвољне функције. Ове функције се могу одредити из почетних услова на овај начин. Наиме, према почетним условима мора бити за $t=0$

(27)
$$\varphi(u_1)+\psi(u_1)=f(u_1),$$
$$-\varphi'(u_1)+\psi'(u_1)=\frac{1}{a}F(u_1).$$

Из друге од ових једначина после промене знака и интеграције добијамо

$$\varphi(u_1)-\psi(u_1)=-\frac{1}{a}\int_0^{u_1}F(z)\,dz+C,$$

где је

$$C=\varphi(0)-\psi(0).$$

Међутим, без икаквих ограничења општности решења може се узети да је $C=0$, тј.

$$\varphi(0)-\psi(0)=0,$$

јер, ако би било $C\neq 0$, ми бисмо место произвољних функција φ и ψ могли увести функције

$$\varphi-\frac{C}{2} \quad \text{и} \quad \psi+\frac{C}{2},$$

што ни у чему не мења решење једначине.

Према томе, за одређивање функција φ и ψ које задовољавају дате почетне услове, имамо две једначине

$$\varphi(u_1)+\psi(u_1)=f(u_1),$$

$$\varphi(u_1)-\psi(u_1)=-\frac{1}{a}\int_0^{u_1}F(z)\,dz.$$

Решавањем ових једначина добијамо

(28)
$$\varphi(u_1)=\frac{1}{2}f(u_1)-\frac{1}{2a}\int_0^{u_1}F(z)\,dz,$$
$$\psi(u_1)=\frac{1}{2}f(u_1)+\frac{1}{2a}\int_0^{u_1}F(z)\,dz,$$

одн.

$$\psi(u_2)=\frac{1}{2}f(u_2)+\frac{1}{2a}\int_0^{u_2}F(z)\,dz,$$

и најзад

(29)
$$\xi=\frac{1}{2}\left[f(u_1)+f(u_2)\right]+\frac{1}{2a}\int_{u_1}^{u_2}F(z)\,dz.$$

У старим променљивима то решење изгледа

(30)
$$\xi=\frac{1}{2}\left[f(x-at)+f(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)\,dz.$$

Овако одређена функција $\xi=\xi(x,t)$ задовољава једначину (20), јер ако су $f(x)$, $F(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ и $F'(x)$ непрекидне функције, биће тада и парцијални изводи функције ξ непрекидне функције.

Ако са $\Phi(z)$ означимо неки неодређени интеграл функције $-\frac{1}{a}F(z)$ можемо за ξ написати

$$(31) \qquad \xi=\frac{1}{2}\,[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2}\,[\Phi(x-at)-\Phi(x+at)]\,.$$

Истичемо два важна специјална случаја овог решења таласне једначине:

1) случај, кад је почетна брзина једнака нули, тј.

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=F(x)=0 \quad \text{за} \quad t=0.$$

У том случају имамо као решење

$$(32) \qquad \xi(x,\,t)=\frac{1}{2}\,[f(x-at)+f(x+at)]\,,$$

док је у том истом тренутку очигледно

$$\xi(x,\,0)=f(x)\,.$$

2) случај, кад је почетно померање једнако нули, тј.

$$\xi(x,\,0)=f(x)=0\,,$$

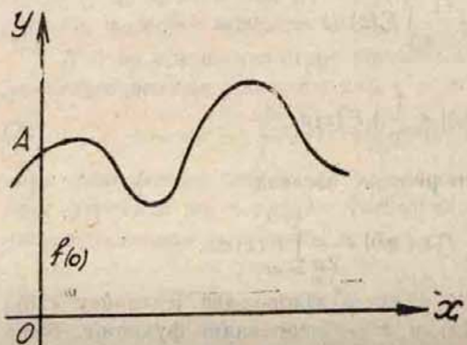
и тада се решење проблема своди на

$$(33) \qquad \xi(x,\,t)=\frac{1}{2}\,[\Phi(x-at)-\Phi(x+at)]\,,$$

одн.

$$\frac{\partial\xi(x,\,0)}{\partial t}=F(x).$$

Остаје још да механички објаснимо ово решење таласне једначине. Како су у оба случаја специјалних почетних услова решења углавном истог облика задржаћемо се само на тумачењу тих решења.



Сл. 13

Уочимо у том циљу прво само функцију

$$f(x-at)$$

и потражимо шта она претставља. Одмах ћемо утврдити да она претставља периодичан процес. Наиме, за $t=0$ имамо $y=f(x)$, неку функцију само од x, која се може графички претставити (сл. 13). Сад се поставља питање, какав ће ток имати функција $f(x-at)$ за друге вредности t. Одговор на то

питање може се лако дати на овај начин. На пр., вредност функције $f(x-at)$ за $x=0$ у случају $t=0$ дата је ординатом OA и износи $f(0)$. Међутим, ту исту вредност $f(0)$ има функција $f(x-at)$, не само за $x=0$, $t=0$, већ *увек, кад је* $x-at=0$. Према томе, за сваку посебну каснију вредност времена t_1 постоји на x-оси нека тачка $x_1=at_1$ за коју ће ордината бити једнака са ординатом OA криве $f(x)$. Ово исто се може доказати и за сваку тачку криве $f(x)$, тако да се читава крива остајући непромењена помера дуж x-осе и њено кретање је одређено коначном једначином

$$x-at=0,$$

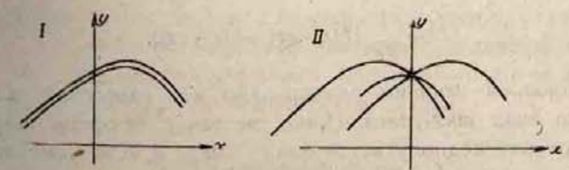
одакле је

$$\frac{dx}{dt}=a.$$

Видимо, дакле, да константа a претставља брзину којом се помера поремећај дуж x-осе, јер крива $f(x)$ претставља *стање (фазу)* треперења у тренутку $t=0$ а помера се у правцу x-осе. Та брзина се назива *брзина простирања таласа* или *фазна брзина*.

На потпуно исти начин се може показати да и функција $f(x+at)$ одређује исти ток појава само са брзином негативног знака, дакле, простирањем поремећаја на лево у негативном смеру. У општем случају је померање (32) одређено суперпозицијом од два посебно уочена таласна процеса, од којих се онај са простирањем на десно обично назива *директни* талас, а онај са простирањем на лево *индиректни* талас, само оба са половином амплитуде.

Резултантно померање се може овако графички претставити. За тренутак $t=0$ конструишу се два једнака графика који се поклапају (належу један на други), а затим се један креће на једну страну, десну – директни талас, а други на леву страну – индиректни талас. За сваки тренутак времена график резултантног кретања ће се добити као аритметичка средина тако раздвојених посебних кретања (сл. 14, I и II).



Сл. 14

Осим раванских таласа, где се ради о простирању таласа *у једном правцу*, посматраћемо још један важан специјалан случај простирања таласа који је карактеристичан за изотропну средину, кад је у њој изазван поремећај у једној њеној тачки. У том случају је померање честица и простирање таласа симетрично у односу на дату тачку.

Да бисмо дошли до решења у том случају приметимо да је, према (10) и (15), општи тип таласне једначине облика

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \triangle U, \tag{34}$$

где је $U = U(x, y, z, t)$, и где константа c мења своју вредност с једне стране од материјала до материјала а с друге према томе да ли је уочени талас компресиони или еквиволумни.

Ако у нашем примеру симетричности у односу на изабрани пол, уведемо сферне поларне кординате r, ϑ, φ, јасно је да ће функција U зависити само од r и t, тј.

$$U = U(r, t), \tag{35}$$

при чему је

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Како је у том случају

$$\triangle U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) = \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU),$$

може се таласна једначина (34) написати и у облику

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU), \tag{36}$$

одн.

$$\frac{\partial^2 (rU)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU). \tag{37}$$

Ова једначина је у односу на rU као функцију од r и t као променљивих истог облика као и једначина (20), па је, према томе, њено решење, на пр., за случај поремећаја без почетне брзине

$$rU = \frac{1}{2}[f(r - ct) + f(r + ct)], \tag{38}$$

одн.

$$U = \frac{1}{2r}[f(r - ct) + f(r + ct)]. \tag{39}$$

Размишљањем сличним размишљању код раванских таласа долазимо сада до ових закључака. Прво, све тачке на сфери полупречника $r = r_0$ трепере очигледно у истој фази – имају и иста померања и исте брзине. Према томе, имамо посла са таласима облика сфере. Стога се таласи који се простиру у свима правцима симетрично у односу на неку тачку зову *сферни таласи*. Друго, сферни таласи се простиру од тачке $r = 0$ у свима правцима брзином c.

У многим случајевима су од нарочитог значаја тзв. чиста периодичка решења таласне једначине. Ми ћемо их посматрати само за случај раванских таласа, јер су излагања за случај сферних таласа

потпуно аналогна. Чисто периодичка решења таласне једначине (20) су облика

$$A \cos k(x \pm at) \quad \text{и} \quad A \sin k(x \pm at). \tag{40}$$

Уочимо, на пр., решење

$$\xi = A \sin k(x - at). \tag{41}$$

Ако *период* ове функције — *време трајања једне осцилације* — обележимо са T, а *таласну дужину* — растојање до којега се простре поремећај за време T — са l, тада је, како знамо

$$T = \frac{2\pi}{ak}, \quad l = aT. \tag{42}$$

Једначина (41) може се сад написати у облику

$$\xi = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{l} - \frac{t}{T}\right).$$

Нарочито је у оваквим случајевима интересантно решење облика

$$\xi = A \sin 2\pi\left(\frac{x}{l} - \frac{t}{T}\right) + A \sin 2\pi\left(\frac{x}{l} + \frac{t}{T}\right), \tag{43}$$

где се ради о суперпозицији два таласа исте амплитуде и периода а супротних смерова простирања. Наиме, после тригонометриске трансформације израза на десној страни ове једначине она се може написати

$$\xi = A \sin 2\pi \frac{x}{l} \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Из ове једначине је, међутим, очигледно да је у тачкама $x = \frac{1}{2}\, nl$, где је n ма који цео број, стално $\xi = 0$. Ове тачке се уопште не померају и зову се *чворови* таласа. Овакви таласи се зову *стојећи таласи*. Очигледно је растојање два узастопна чвора једнако половини таласне дужине.

Да напоменемо на крају да поред раванских и сферних таласа, који су *просторни* таласи, постоје и *површински* таласи, који се простиру, на пр., само по граничној површини две разне средине. У њихово се проучавање овде не можемо упуштати, ма како они иначе били интересантни и важни, на пр., као земљотресни таласи.

21. Треперење жице

Општа теорија простирања таласа обично се показује на конкретним примерима треперења жица, мембрана, штапова и плоча. Ми ћемо овде као пример проучити само треперење жице, да не бисмо и сувише одужили наша излагања.

При томе подвлачимо једну важну чињеницу. Наиме, диференцијалне једначине треперења жице могу се, наравно, извести и из општих једначина динамике еластичних тела (10) у § 19, ако се узме у обзир-да жица може да трепери само у напрегнутом стању, у коме се може сматрати као готово једнодимензионо праволиниско тело. Међутим, гранични прелази који се при томе морају извршити, обично чине тај пут незгодним, па се до једначина треперења жице у неким случајевима долази обично директним извођењем из датих услова.

У том циљу уочимо жицу која се налази под јаким напоном P који дејствује у правцу жице. Нека се уочена жица у стању напрегнуте еластичне равнотеже налази положена у правцу x-осе.

1. Претпоставимо, прво, да је жица неограничена на оба краја. Да се простирање таласа у жици мора битно разликовати од простирања таласа у неограниченој еластичној средини, јасно је одмах. Осим тога треба разликовати таласе код којих честице трепере у правцу x-осе од оних где честице трепере нормално на правац x-осе. При томе је x-оса правац простирања таласа у самој жици, јер је то једини правац који жица има.

Посматрајмо сад таласе који су изазвани таквим поремећајем који је створио померање честица у правцу x-осе, дакле, у правцу простирања таласа — лонгитудинално треперење жице.

Ако је жица од хомогеног и изотропног материјала и на њену бочну површину не дејствују никакве спољашње силе од значаја, о којима би се морало водити рачуна, тада су лонгитудиналне деформације жице у ствари преношење дилатација (разређивања) и контракција (згушњавања) дуж жице. Међутим, при обичном развлачењу (дилатацији) у правцу x-осе (одн. при обичној контракцији) дејствује само напон ν_{11} тензора напона (у нашем случају напон P). Према томе, на основу Хукова закона, мора бити

$$\nu_{11} = E\,\delta_{11}. \tag{1}$$

Тада из општих једначина динамике еластичних тела (6) у § 19, у отсуству спољашњих сила (случај тзв. *слободних осцилација*), што одговара нашем случају, добијамо

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \nu_{11}}{\partial x} = \frac{E}{\rho}\,\frac{\partial \delta_{11}}{\partial x},$$

и најзад, с обзиром на везу (5) у § 3

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Ово је, међутим, једнодимензиона таласна једначина за $\xi = \xi(x, t)$ и то талас који се простире брзином

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{3}$$

Дакле, брзина простирања лонгитудиналних таласа у неограниченој жици једнака је квадратном корену из количника Јунгова модула еластичности и густине материјала од кога је жица начињена.

Ако упоредимо ову брзину простирања лонгитудиналних таласа у жици са брзином простирања таквих таласа уопште у неограниченој еластичној средини

$$a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\varkappa)}{\rho(1+\varkappa)(1-2\varkappa)}},$$

видимо, да је ова брзина c мања од брзине a. Према томе, лонгитудинални таласи у жици су истог карактера као и лонгитудинални таласи у неограниченој средини уопште, али се од ових разликују само брзином простирања.

Брзина простирања лонгитудиналних таласа не зависи уопште од напона, већ само од природе материјала – његових еластичних особина и густине.

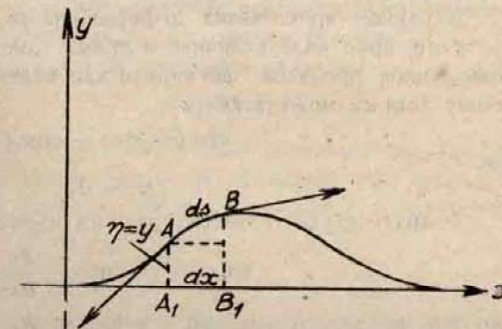
Према томе, изузев брзине све остало што се односи на решење једначине (2) истоветно је са оним што смо извели у случају једначине (20) у § 20. У истом смислу остају у важности и анализе разних случајева почетних услова.

У проблему треперења жице је, међутим, много важнији случај трансверзалног треперења. Трансверзално треперење жице је интересантно не само за акустику већ и за разне друге области физике.

Посматрајмо опет затегнуту неограничену жицу која се у стању равнотеже налази у положају x-осе. Нека у свакој њеној тачки дејствује напон P нормалан на пресек жице q – тј. нека има правац жице. Напона смицања нема, јер се жица сматра потпуно савитљивом. Зауставимо се на случају равних осцилација, на пр., у равни xOy и нека буде $\xi = 0$. У том случају је компонента померања η у ствари идентична са y с обзиром на положај жице, па се може ставити

$$\eta = y = y(x, t). \tag{4}$$

Ако се жица изведе из равнотежног положаја у правцу y-осе, тада се, природно, услед дилатације (повећане затегнутости) мења према Хукову закону унеколико и интензитет напона P. Та промена је, међутим, врло мала и може се занемарити, ако је померање η врло мало. Наиме, елемент жице $A_1B_1 = dx$ (сл. 15) постаје после деформације елемент



Сл. 15

$$AB = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

одн.

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \approx dx,$$

јер се виши степени деформације $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x}$ могу као мали вишег реда занемарити.

Из ових разматрања се види да је то продужење тако незнатно да се може занемарити, па, према томе, и односна промена величине напона. То значи да та промена величине напона не може бити узрок осцилација жице које настају после поремећаја њене равнотеже извођењем из равнотежног положаја. Ни спољашње силе не могу бити узрок осцилација жице, јер оне или не дејствују, или је њихово дејство (на пр. Земљине теже) сасвим незнатно. Прави узрок тих осцилација лежи у томе што се правци напона на крајевима елемента жице у положају AB не поклапају. Услед тога се појављује резултанта која је приближно нормална на правац равнотежног положаја жице.

У ствари на елемент AB дејствује с леве стране сила

$$-qP\,\mathfrak{t}(x)$$

а с десне стране сила

$$qP\,\mathfrak{t}(x+dx),$$

где је $\mathfrak{t}$ орт тангенте,

Резултанта $\mathfrak{R}$ ове две силе је дата једначином

$$\mathfrak{R} = qP\,[\mathfrak{t}(x+dx) - \mathfrak{t}(x)], \tag{5}$$

чије су пројекције на осе x и y дате једначинама

$$\begin{aligned} K_x &= qP\,[\cos(\alpha+d\alpha) - \cos\alpha], \\ K_y &= qP\,[\sin(\alpha+d\alpha) - \sin\alpha], \end{aligned} \tag{6}$$

где је α угао који орт $\mathfrak{t}(x)$ образује са x-осом

У случају врло малих деформација са којима ми рачунамо биће и α и $d\alpha$ врло мале величине и према томе се у првој апроксимацији може њихов производ занемарити као величина мала вишег реда. На основу тога се може ставити

$$\cos(\alpha+d\alpha) \approx \cos\alpha,$$

одн.

$$K_x \approx 0.$$

С друге стране из истих разлога имамо

$$\sin\alpha \approx \alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Ако ове вредности унесемо у израз за K_y у једначинама (6) и занемаримо величине мале вишег реда добићемо

$$K_y = qP\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] = qP\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx. \tag{7}$$

Како је маса елемента жице dx дата са $\rho\, q\, dx$, а пројекција убрзања на правац y-осе са $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, основна једначина динамике даје

$$\rho q\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,dx = qP\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx$$

одн. најзад

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{P}{\rho}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{8}$$

Ово је таласна једначина која одређује трансверзалне осцилације жице. Брзина простирања ових таласа

$$c_1 = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$$

не зависи уопште од еластичних особина материјала од кога је жица, али зато зависи од напона за разлику од случаја лонгитудиналних таласа.

Дакле, брзина простирања трансверзалних таласа жице директно је пропорционална квадратном корену из напона у жици, а обрнуто пропорционална квадратном корену из густине материјала од кога је жица.

Опште решење једначине (8) трансверзалних осцилација жице је потпуно истог облика са решењем опште једнодимензионе таласне једначине (20) у § 20, само ако се стави да је $a^2 = \frac{P}{\rho}$.

2. Посматрајмо сад случај жице ограничене дужине L, утврђене на оба краја. Нека је положај жице у равнотежи опет x-оса, а координате крајева $x=0$ и $x=L$.

У овом случају имамо опет посла са таласном једначином облика (20) у § 20, где се само вредност константе разликује за случај лонгитудиналних и трансверзалних таласа, са почетним условима (19) у § 20 у општем случају, и поред тога са граничним условима

$$\xi = 0 \quad \text{за} \quad x=0 \quad \text{и за} \quad x=L. \tag{9}$$

Према томе, постојање граничних услова разликује овај проблем треперења жице од претходног проблема. Функције $f(x)$ и $F(x)$ из почетних услова (19) у § 20 морају бити дефинисане у интервалу

$$0 \leqslant x \leqslant L$$

и морају се анулирати за $x=0$ и $x=L$, тј.

$$f(0) = f(L) = F(0) = F(L) = 0. \tag{10}$$

Поред тога морају функције $f(x)$ и $F(x)$ као и изводи $f'(x)$, $f''(x)$ и $F'(x)$ бити непрекидне функције за вредности x у уоченом интервалу $(0, L)$.

Даламберово решење једнодимензионе таласне једначине у облику (25) одн. (26) у § 20 одговара и овом случају, јер је потпуно опште, али одређивање произвољних функција φ и ψ на основу почетних услова по обрасцима (28) у § 20 изазива сад непредвиђене тешкоће. Оне су у томе што су функције $f(x)$ и $F(x)$ дефинисане само у интервалу $(0, L)$, а вредности аргумента $x \pm at$ у решењу (26) у § 20 могу бити и изван тог интервала. Према томе треба, математички говорено, у вези са датим граничним условима „продужити“ дате функције $f(x)$ и $F(x)$, одн. утврдити под којим ће условима оне важити за све реалне вредности x-а, или, физички речено, треба одредити такав почетни поремећај неограничене жице да треперење дате жице од 0 до L буде такво као да је она причвршћена на крајевима, а остали део жице отсечен.

Пођимо, стога од Даламберова општег решења (26) у § 20 и потражимо, прво, оне функције φ и ψ које задовољавају дате граничне услове (9). На тај начин добијамо

a) за $x=0$:

$$\varphi(-at)+\psi(at)=0$$

и ако место аргумента at ставимо x

(11) $$\psi(x)=-\varphi(-x).$$

b) за $x=L$:

$$\varphi(L-at)+\psi(L+at)=0,$$

одн. ако аргумент $-L-at$ обележимо са x и узмемо у обзир, да према функционалној вези (11) мора бити

$$\psi(L+at)=-\varphi(-L-at),$$

то је

(12) $$\varphi(x+2L)=\varphi(x),$$

што значи да је φ периодична функција.

Међутим, на основу почетних услова постоји функционална веза дата једначинама (27) у § 20. На тај начин с обзиром на (11) добијамо

(13) $$\begin{aligned}\varphi(x)-\varphi(-x)&=f(x)\\ \varphi'(x)-\varphi'(-x)&=-\frac{1}{a}F(x),\end{aligned}$$

одакле је

$$\begin{aligned}f(-x)&=-f(x)\\ F(-x)&=-F(x).\end{aligned}$$

Према томе, да би дати гранични услови могли бити задовољени, морају функције $f(x)$ и $F(x)$ бити *непарне*. Другим речима, ако су дефинисане у интервалу $(0, L)$ биће дефинисане и у интервалу $(-L, 0)$, тј., за вредности x

$$-L \leqslant x \leqslant 0.$$

Услед периодичности функције φ (једн. 12), мора према једначинама (13) бити и

(14) $$\begin{aligned}f(x+2L)&=f(x),\\ F(x+2L)&=F(x),\end{aligned}$$

а то значи да и функције $f(x)$ и $F(x)$ морају бити *периодичне* са реалним периодом $2L$. Како су оне дефинисане у интервалу $(-L, +L)$ чија је дужина $2L$ једнака периоду, биће ове функције дефинисане и за све реалне вредности x-а уопште. Тако смо одредили функције $f(x)$ и $F(x)$ да могу задовољавати постављене граничне услове.

Најзад, из друге од једначина (13) закључујемо да функција $\Phi(x)$ мора бити *парна* и *периодична* са такође реалним периодом $2L$, тј.

(15) $$\Phi(-x)=\Phi(x) \quad \text{и} \quad \Phi(x+2L)=\Phi(x).$$

Под овим условима Даламберово решење (31) у § 20, претставља решење нашег проблема, јер сад задовољава и постављене граничне услове. Наиме, за $x=0$ биће

$$\xi=\frac{1}{2}\,[f(-at)f+(at)]+\frac{1}{2}\,[\Phi(-at)-\Phi(at)]=0,$$

и за $x=L$

$$\begin{aligned}\xi&=\frac{1}{2}\,[f(L-at)+f(L+at)]+\frac{1}{2}\,[\Phi(L-at)-\Phi(L+at)]=\\ &=\frac{1}{2}\,[f(-L-at)+f(L+at)]+\frac{1}{2}\,[\Phi(-L-at)-\Phi(L+at)]=0.\end{aligned}$$

Замислимо непарне и периодичне функције $f(x)$ и $F(x)$ са реалним периодом $2L$ развијене у Фуријеов (Fourier) ред. Он мора бити облика

(16) $$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}A_n \sin\frac{n\pi x}{L},\\ F(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{L}B_n \sin\frac{n\pi x}{L},\end{aligned}$$

где су Фуријеови коефицијенти A_n и B_n одређени на познати начин обрасцима

(17) $$\begin{aligned}A_n&=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx,\\ B_n&=\frac{2}{n\pi a}\int_0^L F(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.\end{aligned}$$

Како знамо, довољан услов за конвергенцију Фуријеова реда у који је развијена нека функција $f(x)$ јесте, да тој функцији одговара коначан број непрекидних лукова у уоченом интервалу са одређеном тангентом у свакој тачки таква лука, тј. да функција и њен први извод буду у уоченом интервалу свуда непрекидни изузев коначног броја тачака прекида, а да вредност функције у свакој тачки прекида $x=\xi$ тежи разним коначним вредностима $f(\xi+0)$ и $f(\xi-0)$ кад се прекиду приближује с десна или с лева.

Ако је у ред развијена функција у читавом интервалу непрекидна, њен Фуријеов ред је равномерно конвергентан. Стога, ако је $F(x)$ непрекидна функција биће Фуријеов ред дат другом од једначина (16) равномерно конвергентан, па се, према томе, може интегралити и у том случају се подесним избором доње границе добија функција $\Phi(x)$ у облику конвергентног Фуријеова реда

$$\Phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\frac{n\pi x}{L}. \tag{18}$$

На тај начин се може најзад за случај ограничене жице са датим граничним условима написати решење (31) таласне једначине (20) у § 20 помоћу Фуријеова реда у облику

$$\begin{aligned}\xi=&\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[\sin\frac{n\pi(x-at)}{L}+\sin\frac{n\pi(x+at)}{L}\right]+\\ &+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n\left[\cos\frac{n\pi(x-at)}{L}-\cos\frac{n\pi(x+at)}{L}\right],\end{aligned} \tag{19}$$

или после тригонометриске трансформације

$$\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{L}+B_n\sin\frac{n\pi at}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{20}$$

где су коефицијенти A_n и B_n одређени као у једначинама (17).

Дакле, функција ξ померања одређена Фуријеовим редом (20), анулира се за $x=0$ и $x=L$ и задовољава у интервалу $0\leqslant x\leqslant L$ диференцијалну једначину (20) из § 20 и почетне услове (19) у § 20, где су $f(x)$ и $F(x)$ у интервалу $0\leqslant x\leqslant L$ дефинисане функције које се за $x=0$ и $x=L$ анулирају.

Партикуларни интеграл (20) у облику Фуријеова реда за случај треперења ограничене жице учвршћене на оба краја извели смо из општег Даламберовог решења. Међутим, до тог важног партикуларног решења може се доћи и директним путем, решавајући постављени задатак *методом партикуларних решења Данијела Бернулија (Daniel Bernoulli)*.

Наиме, ми тражимо прво неко партикуларно решење таласне једначине (20) у § 20, које задовољава постављене граничне услове (9), али не мора задовољавати дате почетне услове, у облику производа неке две функције: једне $T=T(t)$ која зависи само од t и друге $X=X(x)$

која зависи само од x. Дакле

$$\xi=TX. \tag{21}$$

Ако се ова вредност за ξ унесе у таласну једначину (20) у § 20 добиће се

$$XT''=a^2\,TX'',$$

одн.

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}=\frac{X''}{X}=-m, \tag{22}$$

где је m нека константа. Наиме, како лева страна ове једначине може бити функција само од t, а десна страна само од x, то оне могу бити једнаке само ако су независне и од t и од x, тј. ако су константне.

На тај начин се наша парцијална диференцијална једначина распада у две обичне диференцијалне једначине

$$\begin{aligned}&X''+mX=0,\\ &T''+a^2mT=0.\end{aligned} \tag{23}$$

Да бисмо задовољили граничне услове тражимо решење за ξ које ће за $x=0$ и $x=L$ бити једнако нули. То према (21) значи да треба наћи такво решење за прву од једначина (23). То је, међутим, могуће у случају $m\neq 0$ само кад је $m>0$, те се може ставити $m=k^2$. Према томе, општи интеграл прве од једначина (23) мора бити облика

$$X=C_1\cos kx+C_2\sin kx. \tag{24}$$

Из услова $X=0$ за $x=0$ добијамо одмах

$$C_1=0.$$

После тога из услова $X=0$ за $x=L$ добијамо једначину

$$C_2\sin kL=0.$$

У овом случају је претпоставка $C_2=0$ недопустива, јер би у том случају функција X била идентички једнака нули и такво решење нашег проблема тривијално. Дакле, мора бити

$$\sin kL=0. \tag{25}$$

И претпоставка $k=0$ је недопустива, јер и у том случају је функција X идентички једнака нули. Уопште, претпоставка $k=0$ се мора унапред одбацити, јер то повлачи $X''=T''=0$, одакле проистиче да су X и T линеарне функције од x одн. t. У таквом случају $\xi=TX$ идентички задовољава таласну једначину (20) у § 20 те, према томе, опет имамо посла са тривијалним решењем. То значи да мора бити

$$k=\frac{n\pi}{L}, \qquad (n=1,2,3,\ldots) \tag{26}$$

одн.

$$X = C_2 \sin kx = C_2 \sin \frac{n\pi}{L} x . \tag{27}$$

Напомињемо да се из једначине (25) види да је она задовољена и за негативне целе бројне вредности n у изразу за k, али, како је тада између случаја $k=\frac{n\pi}{L}$ и $k=-\frac{n\pi}{L}$ разлика само у знаку синуса испред кога и онако (јед. 27) стоји потпуно произвољна константа, то су оба таква решења једнака. Према томе, довољно је задржати се на позитивним целим бројним вредностима n. Анализом решења прве од једначина (23) ми смо у вези са граничним условима одредили могуће вредности коефицијента k.

У вези са овим излагањем јасно је да се опште решење друге од једначина (23) може написати у облику

$$T = C_3 \cos a k t + C_4 \sin a k t . \tag{28}$$

На тај начин се решење ξ таласне једначине (20) у § 20 може написати у облику

$$\xi = (A \cos a k t + B \sin a k t) \sin kx , \tag{29}$$

где смо ставили $C_2 C_3 = A$ и $C_2 C_4 = B$. У овом изразу се за k може ставити ма која од бескрајно много вредности (26) и тако се за разне вредности k добијају разни интеграли, њих бескрајно много, у облику

$$(\xi)_n = \left(A_n \cos \frac{n\pi a t}{L} + B_n \sin \frac{n\pi a t}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} , \tag{30}$$

где смо при увођењу разних вредности за k сматрали и константе као различне, јер су и онако потпуно произвољне.

Сва ова решења (30) задовољавају таласну једначину (20) у § 20 и граничне услове (9). Међутим, знамо да је збир више решења линеарне диференцијалне једначине опет њено решење, те се решење таласне једначине које задовољава постављене граничне услове може узети у облику бескрајног тригонометриског реда

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a t}{L} + B_n \sin \frac{n\pi a t}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} , \tag{31}$$

где сад бескрајно много произвољних констаната A_n и B_n треба одредити тако да буду задовољени и дати почетни услови проблема, тј. за $t=0$

$$\xi = f(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = F(x) .$$

Диференцирањем по t добијамо из једначине (31)

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\pi a}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(- n A_n \sin \frac{n\pi a t}{L} + n B_n \cos \frac{n\pi a t}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} . \tag{32}$$

Ако сад у једначинама (31) и (32) ставимо $t=0$ добићемо

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} , \qquad F(x) = \frac{\pi a}{L} \sum_{n=1}^{\infty} nB \sin \frac{n\pi x}{L} . \tag{33}$$

На тај начин добили смо функције $f(x)$ и $F(x)$ разложене у Фуријеове редове по синусима у интервалу $(0, L)$, чији су коефицијенти одређени обрасцима (17).

Према томе, ако у израз (31) за ξ унесемо ове вредности коефицијената A_n и B_n добићемо решење таласне једначине (20) у § 20 које задовољава дате и почетне и граничне услове. То решење је, како видимо, идентично са оним које смо добили пошав од општег Даламберовог решења, тј. са решењем (20).

Решење (31) одн. (20) даје за $n=1$, тзв. *основни тон*, а за $n = 2, 3, \ldots$ тзв *хармониске више тонове*, јер се треперењем жице ствара звук.

III

ХИДРОМЕХАНИКА

22. Идеална течност

Обично разликовање три агрегатна стања — чврстог, течног и гасовитог — оснива се на разликама које постоје између тела у погледу величине њихових међумолекуларних простора и покретљивости њихових молекула. Ове су величине врло мале код чврстих тела, мале код течности, а веће код гасова. Отуда закључујемо да су кохезионе силе код чврстих тела велике, код течних тела мале, а код гасова незнатне. Из ових разлога чврста тела имају познату чврстину и сталан облик, а честице течности готово се слободно крећу у течној маси те течности немају сталан облик већ узимају облик суда у коме се налазе. Ипак течности могу у суду у коме се налазе имати слободну површину, јер им је запремина готово непроменљива. Најзад гасови немају ни облик ни величину сталну већ испуњавају сваки простор који им стоји на расположењу — имају *експанзивну* способност.

Међутим, овакво разликовање је у многоме недовољно. Много корисније и строжије разликовање у стању тела може се извести на основу веза које постоје између деформација тела и напона који их изазивају. У овом смислу се тела деле на *чврста* и *флуидна* (течна у ширем смислу). Она тела, при томе, код којих напони (затезање, притисак и клизни напони) изазивају прво еластичне деформације, а касније кад се пређе преко одређених граница трајне (пластичне) деформације су *чврста* тела. Код *флуидних* тела, међутим, *прво*, сваки тангентни напон изазива готово слободно померање честица, она су неспособна да се опиру тангентним силама, тј. промени облика, она *теку;* и *друго*, код таквих тела је услед слабе кохезије отпор напонима затезања занемарљив, те се, према томе, еластичне особине таквих тела показују само под *притиском*. Флуидна тела обухватају и течности у обичном смислу речи, које ћемо од сад, како смо рекли, звати *капљиве течности* и *гасове*. У даљем излагању за флуидно стање тела употребљаваћемо заједнички назив *течност*, како смо такође већ раније казали.

Основна пак разлика између капљивих течности и гасова се показује у односу на дејство сила које треба да изазову промену запремине. Док је отпор капљивих течности при промени запремине врло велики, код гасова је мали, тј. капљиве течности су практички *нестишљиве (инкомпресибилне)* а гасови су врло *стишљиви (компресибилни)*.

Код течности (у ширем смислу) читав низ појава може да се третира на исти начин те нема потребе да се прави разлика између капљиве течности и гаса. Оно што све течности, дефинисане на тај начин, нарочито још одваја од чврстих тела јесте што се, услед готово слободне покретљивости честица у таквој средини, честице могу једне од друге удаљавати на коначна растојања, тј. у течности су коначне деформације могуће без икаквих ограничења, што није никад случај са чврстим телима.

Утицаји температурних промена су код течности још знатније него код чврстих тела. И поред тога ми ћемо се задржавати само на оним проблемима у којима се са довољном тачношћу такве температурне промене могу занемарити и само узгред наводити неизбежне утицаје температуре.

Све појаве које се односе на течност у овом смислу проучава *хидромеханика*. Она се дели на *хидростатику* (која проучава услове равнотеже течности) и *хидродинамику* (која проучава кретање течности). Оне пак појаве које се не могу са довољном тачношћу обухватити овим проучавањем, на пр., нарочити проблеми кретања гасова, обрађују се у посебној *аеродинамици*. Најзад, оне појаве у вези са течностима које се никако не могу посматрати без узимања у обзир топлотних појава улазе у оквир *термодинамике*.

Између самих течности може се уочити још једна важна разлика која се показује само код течности у покрету. Наиме, код течности у миру с обзиром на могућност слободног клижења честица једне крај друге не смеју постојати никакви тангентни напони. Осим тога, како су кохезионе силе мале она не може трпети никакво затезање (гасови су још и експанзивни) и, према томе, у миру се може узети да у свакој тачки граничне површине неког течног елемента постоји само нормални напон са смером у унутрашњост уоченог елемента, тј. *притисак*. Другим речима, у миру се капљиве течности и гасови разликују само по стишљивости. Друкчије ствар стоји у случају кретања течности. Тада се, при релативном померању честица у течностима појављују између њих, нарочито код неких капљивих течности, тангентни отпори — тзв. *унутрашње трење* течности, које омета слободно померање — *течење* — честица течности. Ово унутрашње трење се зове *вискозност* течности и везано је с једне стране за природу посматране течности, а с друге стране за величину деформације при релативном померању честица. Иако су све реалне течности без разлике вискозне, постоје међу њима у том погледу знатне разлике. Код гасова се вискозност може увек занемарити, а што је најважније она је и код многих капљивих течности таква да се у многим проблемима може без штете по тачност занемарити и течност сматрати као невискозна.

Оне течности за које се са довољном тачношћу може претпоставити да не постоји унутрашње трење између честица у случају њиховог релативног померања, одн. кад се може сматрати да се течност опире само и једино *промени запремине*, а да се уопште не опире *промени облика*, те да се облик може мењати без икаквог дејства силе, зову се *савршене* или *идеалне течности*. Оне пак течности чија је вискозност таква да се у датом проблему не може и не сме занемарити зову се *вискозне течности*. Подвлачимо да се не може учинити строга подела на идеалне и вискозне течности. То увек зависи од проблема и начина кретања течности у датом проблему. Једна иста течност може да се сматра у једном проблему као идеална док се у другом мора сматрати као вискозна, јер је утицај унутрашњег трења у другом проблему од већег значаја. Како смо видели, у односу на статичке проблеме разлика између идеалних и вискозних течности уопште не постоји. У односу на те проблеме се све течности могу сматрати као идеалне.

Објект нашег проучавања постаје сад, прво, идеална течност.

23. Притисак у течности

Изузев врло ретких случајева течност је увек изотропна средина. Поред тога, у случају идеалне течности, како смо видели, не постоје уопште тангентни напони, те правци оса главних напона за сваку поједину тачку морају бити *потпуно произвољни*. То је, међутим, могуће само ако је површина напона сфера, одн. ако су напони у уоченој тачки за све правце исти. Са друге стране, ако замислимо издвојен део течности он може остати у миру само под условом да се отстрањена течност замени нормалним напонима са смером у унутрашњост издвојеног дела течности, а то значи да напони у течности морају бити *притисци*.

У мирној течности у уоченој тачки притисак p уопште не зависи од правца већ само од положаја тачке и у општем случају од времена, тј.

(1) $$p = p(x, y, z, t).$$

Дакле, сви напони, па наравно и главни напони ν_1, ν_2, ν_3 за одређену тачку су једнаки притисци, тј.

(2) $$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = -p.$$

Знак − испред p ставили смо стога што се, по договору, нормални напон сматра као позитиван, кад је оријентисан као спољашња нормала затворене површине, а притисак је баш супротно оријентисан, па ако се узме $p > 0$ мора се ставити знак —.

Јасно је да је димензија притиска, као напона, сила подељена површином. Јединица за његово мерење је *бар* и има величину која одговара дејству притиска од 1 дина на 1 cm². Притисак од 1 kg на 1 cm² назива се *техничка атмосфера* (1 at). Међутим, како је притисак у уоченој тачки независан од оријентације површинског елемента на који дејствује и како је његов смер увек недвосмислено утврђен, то је довољно за сваку тачку течности познавати само скаларну вредност притиска, тј. p као функцију положаја и времена. Са тог гледишта може се притисак у некој тачки течности сматрати као скаларна величина.

Тензор напона (11) у § 9 одн. (7) у § 10 може се у овом случају изразити скаларном матрицом у облику

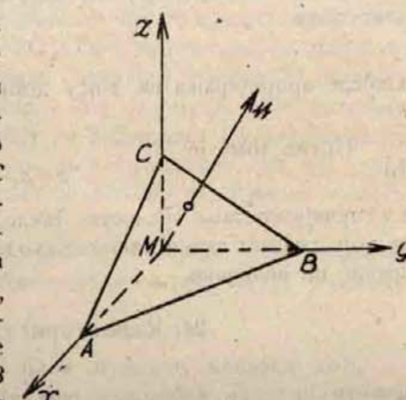
(3) $$N = \begin{Bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{Bmatrix}$$

или као производ скалара $-p$ и јединичног тензора I у облику

(4) $$N = -pI,$$

одакле је јасно да је у потпуности одређен скаларом p. Дакле, тензор напона код идеалне течности је *изотропни тензор*.

Али, не само у случају мировања идеалне течности, већ и у случају њеног кретања може се у свакој тачки дефинисати притисак који не мора у општем случају бити једнак односном притиску у миру, али који је такође независан од оријентације површинског елемента на који дејствује. Да ово покажемо замислимо неки течни елемент у облику тетраедра $MABC$ (сл. 16) чије су бочне стране у координатним равнима, врх у координатном почетку M, а основа ABC врло блиска тачки M. Притисак на страну MBC обележимо са p_1 (има правац и смер x-осе), а притиске на стране MAC и MAB са правцем и смером односних оса обележимо са p_2 и p_3. Најзад, притисак на основу ABC са смером $-\mathfrak{n}$, где је $\mathfrak{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ орт спољашње нормале основе тетраедра, са p. Ако елементарне површине ABC, MBC, MAC и MAB обележимо редом са df, df_1, df_2 и df_3, то је очигледно



Сл. 16

(5) $$df_1 = df\cos\alpha; \quad df_2 = df\cos\beta; \quad df_3 = df\cos\gamma.$$

На течни елемент у покрету применимо основну једначину динамике $m\mathfrak{w}=\mathfrak{R}$, где је са $\mathfrak{R}$ обележена резултанта свих запреминских и површинских сила које дејствују на уочени течни елемент. Ако је маса уоченог елемента dm, запремина dV и густина ρ имаћемо $dm=\rho dV$. На тај начин ћемо после пројицирања леве стране основне једначине динамике на x-осу добити израз $\rho dV x''$. Ако је запреминска сила одређена на јединицу масе $\mathfrak{F}=\{X; Y, Z\}$ биће пројекција на x-осу резултанте запреминских сила које дејствују на наш елемент дата изразом $\rho dV X$. Најзад пројекција притисака који дејствују на наш елемент у правцу x-осе дата је притиском p_1 у целини и пројекцијом притиска p на x-осу, тј. изразом $-p\cos\alpha$, јер су пројекције притисака p_2 и p_3 као нормалних на x-оси једнаке нули. На тај начин је диференцијална једначина кретања уоченог елемента у правцу x-осе

$$\rho dV x''=\rho dV X+p_1 df_1-p\,df\cos\alpha.$$

Међутим, како је уочени елемент врло мали (бескрајно мали у физичком смислу) то су величине df и df_1 мале нижег реда у односу на dV као малу вишег реда. Из тих разлога се могу чланови са dV занемарити у односу на оне са df и df_1. Тако се долази до једначине

$$p_1\,df_1-p\,df\cos\alpha=0,$$

или с обзиром на једначине (5)

$$p_1\,df_1=p\,df_1,$$

и најзад, што смо хтели показати,

$$p=p_1.$$

Ако би се пројицирање извршило на y-осу, добило би се истим поступком

$$p=p_2,$$

а после пројицирања на z-осу добијамо

$$p=p_3.$$

Према томе је

(6) $$p=p_1=p_2=p_3$$

и у случају кретања течности. Дакле, притисак у уоченој тачки течности, на коју се наш течни елемент своди граничним прелазом, исти је за све правце по величини.

24. Карактеристична једначина

Код идеалне течности, како рекосмо, може се промена облика вршити потпуно слободно, јер не постоје никакви тангентни напони смицања. Према томе у Хукову закону (8) у § 12, ако он треба да важи и за идеалну течност мора Ламеов коефицијент еластичности μ као модул смицања с обзиром на једначину (13) у § 18 бити једнак нули ($\mu=0$). Ламеов коефицијент еластичности λ пак, према једначини (7) у § 18, изједначује се са коефицијентом компресије K ($\lambda=K$) и Хуков закон се своди за идеалне течности на већ у § 18 наведени облик (9), тј.

(1) $$p=-Ke_1.$$

Ова једначина показује да притисак у некој тачки течности зависи само од запремине (јер су и K и e_1 у вези са запремином и њеном променом), односно, услед континуитета масе, у ствари од густине масе. Дакле, за идеалне течности се веза између напона и деформација своди углавном на везу између притиска p и густине ρ, тј.

(2) $$\rho=f(p).$$

Облик функције f зависи од природе уочене течности и према томе је карактеристичан за ту течност, те се једначина (2) зове *карактеристична једначина* течности.

У ствари карактеристична једначина стања неке течности у општем случају зависи и од температуре θ тј. има облик

(3) $$F(\rho, p, \theta)=0,$$

или

(4) $$\rho=\varphi(p,\theta),$$

и показује да је густина течности у општем случају зависна не само од притиска већ и од температуре.

Само у случајевима кад се температура неке течности за време посматрања не мења или сасвим незнатно мења — изотермни процеси, или, најзад, кад се промене температуре своде потпуно на промену густине као што је случај код адијабатских процеса, карактеристична једначина (4) своди се на облик (2) и густина зависи само од притиска.

Течности чија је карактеристична једначина облика (2) називају се по Бјеркнесу (Bjerknes) *баротропне*, а оне за чију је карактеристику стања потребна једначина (4) називају се *бароклине*. Очигледно је да ово разликовање стишљивих течности није суштинско. На пр., један исти гас може при датим условима да се понаша као баротропна течност, а при другим као бароклина.

За многе гасове, које ми стога називамо идеални гасови, карактеристична једначина је позната једначина гасног стања, на пр., у облику

(5) $$\rho=\frac{\rho_0}{p_0}\,\frac{p}{1+\alpha\theta},$$

где је $\alpha=\dfrac{1}{273{,}2}$ запремински коефицијент ширења гасова.

У нашем даљем излагању задржаваћемо се само на случајевима кад се течност може сматрати као баротропна. У таквим случајевима прво што се може претпоставити за стишљиве течности јесте да је густина директно пропорционална притиску, веза која је експериментално и проверена за идеалне гасове у случају изотермних процеса, тј. да је

$$\rho = C p . \tag{6}$$

Ова веза карактерише стање течности увек у односу на одређену непроменљиву температуру, на пр., $\theta = 0$. Константа C се може одредити на тај начин што се на тој температури за одређени притисак p_0 измери односна густина ρ_0. Тада је

$$C = \frac{\rho_0}{p_0} \tag{7}$$

и, према томе,

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0} p . \tag{8}$$

На пр., за ваздух на температури $\theta = 0°$C при нормалном притиску је $\rho_0 = 0{,}001\,293$ gr cm^{-3}.

Претпоставка о баротропности течности у суштини не захтева константност температуре, већ само да густина зависи само од притиска. Ови услови су остварени у случају адијабатских процеса код гасова, кад се температура истина мења, али је та промена услед топлотне изолованости процеса зависна само од притиска те у крајњој линији густина зависи само од притиска. Таква је ситуација, кад имамо посла са процесом који се одвија или сувише брзо у средини која споро проводи топлоту, или је потпуно топлотно изолован од остале околине те се температура не може изједначити. У таквом случају је облик функције $f(p)$ одређен једначином

$$f(p) = C p^n ,$$

где је n константа која за разне гасове и паре може имати разне вредности и претставља однос специфичних топлота при сталном притиску и при сталној запремини. За ваздух и уопште за двоатомне гасове њена вредност је 1,408. Константу C одређујемо на исти начин као у претходном случају и њена вредност је

$$C = \frac{\rho_0}{p_0^{\,n}} .$$

Према томе, у случају адијабатског процеса имамо карактеристичну једначину облика

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^n . \tag{9}$$

Карактеристична једначина овог облика зове се *политропна*, а односни процес *политропни процес*. Број $\gamma = \dfrac{1}{n}$ зове се *експонент политропе*. Очигледно је да је и изотермни процес са карактеристичном једначином (8) политропни процес коме одговара експонент политропе 1.

Најзад за изотермна стања нестишљиве течности карактеристична једначина гласи

$$\rho = \text{const.}, \tag{10}$$

тј. густина је непроменљива. Ова карактеристична једначина је довољна за скоро све капљиве течности у већини проблема и претставља практички најважнији случај.

Ако се жели или треба узети у обзир и оно мало стишљивости капљиве течности, то се постиже на овај начин. Из једначине

$$p = -K e_1 = -K \frac{dV - dV_0}{dV_0} ,$$

с обзиром на континуитет масе $dm = \rho\, dV = \rho_0\, dV_0$ добијамо

$$p = K \frac{\rho - \rho_0}{\rho} ,$$

одакле после краћег рачуна у првој апроксимацији имамо

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{p}{K} . \tag{11}$$

Из овог резултата се јасно види да се заиста за врло велике вредности коефицијента компресије K, што је случај код свих капљивих течности, густина може сматрати као константна.

25. Услов нестишљивости

Како је за нестишљиву (инкомпресибилну) течност густина $\rho = \text{const.}$ то се уношењем те вредности за ρ у једначину континуитета (5) у § 7 добија као услов нестишљивости неке течности

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0 , \tag{1}$$

или у координатном облику

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0 . \tag{2}$$

Ова једначина претставља потребан услов за нестишљивост течности већ и на основу тога што је $\operatorname{div} \mathfrak{v}\, dt$ кубна дилатација течности. Али овај услов није увек довољан да течност за коју је испуњен буде заиста нестишљива. На пр., ако је услов (1) задовољен и поље густине течности нема локалних промена, тј. ако густина не зависи експлицитно од времена $\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0\right)$, тада из једначине континуитета у облику (7) у § 7 добијамо

$$\mathfrak{v} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0 . \tag{3}$$

Другим речима, померање течних честица је увек у тангентној равни еквискаларне површине скалара ρ. Према томе, последица услова (1) је у том случају само да се кретање течности састоји у померању честица у слојевима исте густине. Ово наравно може бити и у течности која је стишљива. Обрнуто у нестишљивој течности може бити локалних промена густине $\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\neq 0\right)$, само тотална промена густине (6) у § 7 мора бити једнака нули.

26. Основни ставови хидростатике

Ако се пође од векторске једначине (§ 9, 22) која даје услов за равнотежу непрекидне средине и узме у обзир да је за идеалну течност, према (§ 23, 4)

$$N=-pI,$$

може се *основна диференцијална једначина статике течности* написати у облику

$$\mathfrak{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p=0, \tag{1}$$

одн.

$$\mathfrak{F}=\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p, \tag{2}$$

јер је

$$\nabla\cdot N=-(\nabla\cdot I)p=-\nabla p.$$

У скаларном облику имамо три једначине

$$X=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\quad Y=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\quad Z=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{3}$$

Једначина (1) је потребан услов за равнотежу течности, што се лако уверавамо и директним формирањем услова равнотеже за ма коју течну честицу у облику резултантне једначине статике. Међутим, за идеалну течност она је и довољна, јер, како смо видели (§ 9), услов равнотеже у облику моментне једначине за непрекидну средину показује само да је тензор напона симетричан, услов који је код течности унапред задовољен. Ова чињеница се може и директно доказати, ако се то жели. Наиме, моментна једначина равнотеже спољашњих запреминских сила и притисака за течност запремине V, ограничену површином f гласи

$$\int_V(\mathfrak{r}\times\rho\mathfrak{F})\,dV-\int_f\mathfrak{r}\times p\,d\mathfrak{f}=0. \tag{4}$$

Ако се површински интеграл по затвореној површини f претвори по Гаусовом ставу у запремински интеграл по односној запремини V, добиће се

$$\int_f p\mathfrak{r}\times d\mathfrak{f}=\int_V\operatorname{rot}(p\mathfrak{r})\,dV=\int_V(p\operatorname{rot}\mathfrak{r}-\mathfrak{r}\times\operatorname{grad}p)\,dV=-\int_V(\mathfrak{r}\times\operatorname{grad}p)\,dV,$$

јер је $\operatorname{rot}\mathfrak{r}=0$. Ако се ова вредност површинског интеграла унесе у једначину (4) и узме у обзир да важи једначина (2), види се да се моментна једначина (4) идентички своди на нулу. Другим речима, моментна једначина равнотеже течности је увек идентички задовољена, ако је задовољена резултантна једначина равнотеже.

У случају да на течност не би дејствовале никакве запреминске силе, може се из једначине (2) закључити

$$\operatorname{grad}p=0 \tag{5}$$

или у скаларном облику

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial z}=0. \tag{6}$$

То значи у течности на коју не дејствују никакве спољашње запреминске силе притисак је исти у свим тачкама течности *(Паскалов закон)*.

Посматрањем основне једначине статике течности у облику (2) долази се до занимљивих закључака.

Прво, за нестишљиву течност ($\rho=\text{const.}$) та једначина се може написати

$$\mathfrak{F}=\operatorname{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right). \tag{7}$$

Друго, у општем случају ма које баротропне течности, кад је $\rho=f(p)$ имамо

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p=\frac{1}{f(p)}\operatorname{grad}p=\operatorname{grad}P(p), \tag{8}$$

где је

$$P(p)=\int\frac{dp}{f(p)}. \tag{9}$$

Дакле, тада се наша основна једначина може написати у облику

$$\mathfrak{F}=\operatorname{grad}P(p). \tag{10}$$

Из једначина (7) и (10) проистиче да је равнотежа нестишљиве и уопште ма које баротропне идеалне течности при постојању спољашњих запреминских сила могућа само, ако су ове силе конзервативне, тј. ако је

$$\mathfrak{F}=-\operatorname{grad}V, \tag{11}$$

где је V потенцијал тих сила. Ово ограничење не треба ни мало да нам смета, јер су практички најважније запреминске силе — силе теже — конзервативне.

На тај начин се из једначине (7) за нестишљиву течност добија интеграл

$$V+\frac{p}{\rho}=C. \tag{12}$$

Неодређена константа интеграције C може се одредити, ако је познат притисак p_0 у некој тачки M_0 течности и истовремено односна вредност V_0 потенцијала. Тада је

$$C=V_0+\frac{p_0}{\rho},$$

па, према томе,

$$V+\frac{p}{\rho}=V_0+\frac{p_0}{\rho}, \tag{13}$$

одн.

$$V-V_0+\frac{p-p_0}{\rho}=0. \tag{14}$$

Из једначине (12), која важи за нестишљиве течности, може се још и ово закључити. На пр., ако је нестишљива течност изолована у суду који не испуњава потпуно, притисак на њеној слободној површини је $p=0$, тј. $V=C$. Дакле, та површина је еквипотенцијална. Даље се из једначине (12) види да је за $p=\text{const.}$ и $V=\text{const.}$ и обрнуто, па су површине истог притиска и еквипотенцијалне површине.

За ма коју баротропну течност добијамо из (10) интеграл

$$V+P(p)=C \tag{15}$$

и пошто одредимо константу C на исти начин као у претходном случају

$$V+P(p)=V_0+P(p_0), \tag{16}$$

одн.

$$V-V_0+\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{f(p)}=0. \tag{17}$$

Из једначине (15) се одмах може закључити да су у случају стишљивих течности површине истог притиска уједно и еквипотенцијалне површине и површине исте густине, пошто је за $p=\text{const.}$ и $V=\text{const.}$ а с обзиром на једначину (2) у § 24 и $\rho=\text{const.}$

Услов који морају задовољавати спољашње запреминске силе у најопштијем случају, да би течност могла бити у равнотежи може се овако формулисати. На једначину (2) применимо лево и десно векторски Хамилтонов оператор ∇. Тако се добија

$$\operatorname{rot}(\rho\mathfrak{F})=\rho\operatorname{rot}\mathfrak{F}-(\mathfrak{F}\times\operatorname{grad}\rho)=0,$$

јер је $\operatorname{rot}\operatorname{grad}p=0$. Ако се ова једначина помножи скаларно вектором $\mathfrak{F}$ добиће се $(\rho\neq 0)$

$$\mathfrak{F}\cdot\operatorname{rot}\mathfrak{F}=0, \tag{18}$$

а то је тражени услов који показује да поље запреминске силе $\mathfrak{F}$ мора бити ламеларно, ако је равнотежа течности могућа. То значи да се на систем линија сила може поставити систем ортогоналних површина. Другим речима, поље силе $\mathfrak{F}$ мора бити или потенцијално, тј.

$$\mathfrak{F}=-\operatorname{grad}V,$$

што смо имали у случају баротропне течности; или мора бити квазипотенцијално, тј.

$$\mathfrak{F}=-\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}V,$$

где је μ нека скаларна функција положаја.

Услов (18) се у скаларном облику може овако написати

$$X\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)+Y\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)+Z\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)=0, \tag{19}$$

кад је $\mathfrak{F}=\{X,Y,Z\}$.

Линеарна диференцијална форма

$$\mathfrak{F}\cdot d\mathfrak{r}=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz \tag{20}$$

која одређује елементарни рад оваквих спољашњих запреминских сила је, према томе, или тотални диференцијал или има интеграциони фактор $\mu(x,y,z)$.

Ако се у нестишљивој течности у некој тачки M_0 притисак p_0 промени и постане $p_0+\delta p_0$, тада се у тој течности успоставља нова равнотежа и притисак у ма којој тачки течности постаје $p+\delta p$ и једначина (13) постаје

$$V+\frac{p+\delta p}{\rho}=V_0+\frac{p_0+\delta p_0}{\rho}, \tag{21}$$

јер се при томе густина ρ уопште не мења, а не мењају се ни V ни V_0 пошто зависе само од положаја уочене тачке. Одузимањем једначине (13) која важи пре промене притиска у тачки M_0 од једначине (21) која показује распоред притиска после промене у тачки M_0, добија се

$$\delta p=\delta p_0. \tag{22}$$

Дакле, у нестишљивој течности која се налази у равнотежи притисак се преноси без промене у свима правцима. Овај резултат је један од примера исправности наших теориских расуђивања пошто смо добили познати експериментални закон за капљиве течности.

У стишљивим течностима наравно ствар стоји друкчије. Тамо се после промене притиска p_0 у $p_0+\delta p_0$ у уоченој тачки M_0 равнотежа на основу једначине (17) изражава са

$$V - V_0 + \int_{p_0+\delta p_0}^{p+\delta p} \frac{dp}{f(p)} = 0. \tag{23}$$

После одузимања једначине (17) добија се

$$\int_{p_0+\delta p_0}^{p+\delta p} \frac{dp}{f(p)} - \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{f(p)} = 0,$$

или што је лако проверити

$$\int_{p}^{p+\delta p} \frac{dp}{f(p)} = \int_{p_0}^{p_0+\delta p_0} \frac{dp}{f(p)}. \tag{24}$$

Ова једначина одређује преношење притиска у компресибилној течности. За бескрајно малу промену притиска δp_0 у некој тачки течности могу се у једначини (24) изједначити интегрални елементи, па се добија

$$\frac{\delta p}{f(p)} = \frac{\delta p_0}{f(p_0)},$$

одн. пошто је $\rho = f(p)$

$$\frac{\delta p}{\rho} = \frac{\delta p_0}{\rho_0}. \tag{25}$$

То значи да се мала промена притиска у стишљивој течности преноси у сваку тачку пропорционално густини у тој тачки.

Најзад, уочимо гранични слој две нестишљиве течности које се не мешају а имају разне густине ρ_1 и ρ_2. Ако постоји равнотежа, јасно је да су запреминске силе и притисци у граничном слоју једнаки за обе течности. Према томе, ако се померимо у граничном слоју за $d\mathfrak{r}$, добићемо после скаларног множења са $d\mathfrak{r}$ леве и десне стране основне једначине хидростатике за обе течности

$$\rho_1(\mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{r}) = d\mathfrak{r} \cdot \operatorname{grad} p = dp = \rho_2(\mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{r}).$$

Међутим, како је $\rho_1 \neq \rho_2$, то је ова једначина могућа само у случају

$$\mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{r} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0, \tag{26}$$

а то значи да је у граничном слоју у случају равнотеже идеалне

течности

$$dp = 0, \tag{27}$$

одн.

$$p = C. \tag{28}$$

Другим речима у граничном слоју две нестишљиве течности у случају равнотеже притисак је константан, тј. гранична површина је еквискаларна површина притиска. Како у случају равнотеже нестишљивих течности спољашње запреминске силе морају бити конзервативне, то је према (26)

$$dU = \mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{r} = 0, \tag{29}$$

одн.

$$U = -V = C, \tag{30}$$

тј. површина граничног слоја је и еквипотенцијална површина.

27. Статика тешке идеалне течности

Узмимо сад да проучимо услове равнотеже течности у специјалном случају кад на течност дејствују спољашње запреминске силе теже, дакле у случају, како се то каже, *тешке течности*.

Ако уочимо неку такву течност, можемо посматрати њену равнотежу у односу на један нарочити Декартов правоугли координатни систем код кога је z-оса вертикална и оријентисана навише. Тада, ако се ради, као што је обично случај, о течности обичних димензија и у близини Земљине површине, и наравно само у таквом случају, може се сматрати да је за простор читаве течности убрзање Земљине теже $\mathfrak{g}$ константни вектор и да је у односу на наш координатни систем

$$\mathfrak{g} = -g\mathfrak{k}, \tag{1}$$

где је g интезитет убрзања Земљине теже.

У таквом случају, дакле, основна једначина равнотеже течности (2) у § 26 постаје

$$\operatorname{grad} p = -\rho g \mathfrak{k}, \tag{2}$$

јер је спољашња запреминска сила $\mathfrak{F}$ увек одређена на јединицу масе и стога једнака $\mathfrak{g}$.

У скаларном облику имамо једначине

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \tag{3}$$

Ове једначине показују да је при ограничењима која смо увели у погледу величине простирања течности и у вези са нарочито изабраним положајем z-осе притисак у тешкој течности функција само од z, те се може написати

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \tag{4}$$

Одавде је јасно, да је притисак константан за све тачке ма које хоризонталне равни $z=\text{const.}$, и стога су хоризонталне равни *нивоске површине*, површине истог притиска и истог потенцијала. Према томе, и слободна површина течности, ако трпи у свима тачкама исти спољашњи притисак p_0 мора бити нивоска површина, а то значи хоризонтална раван. Дакле, гранична површина две тешке нестишљиве течности мора бити хоризонтална раван.

Интеграцијом једначине (4) добија се за $\rho=\text{const.}$

$$p = -\rho g z + C. \tag{5}$$

За одређивање константе C треба измерити притисак у ма којој нивоској површини која се налази на одређеној висини, на пр., измерити спољашњи притисак p_0 на слободној површини која се налази на висини z_0. Тада се из

$$p_0 = -\rho g z_0 + C$$

добија

$$C = p_0 + \rho g z_0$$

и најзад

$$p - p_0 = \rho g (z_0 - z), \tag{6}$$

одн.

$$p = p_0 + \rho g h, \tag{7}$$

где је $h = z_0 - z$ дубина уоченог слоја под слободном површином.

Ова једначина изражава познати хидростатички закон, да је притисак тешке капљиве течности у ма којој тачки у течности једнак тежини течног стуба изнад те тачке више спољашњи притисак, кад се притисак рачуна на јединицу површине.

Ако се раван слободног нивоа течности узме за основну раван xy тада се једначина (7) може написати у облику

$$p = p_0 - \rho g z. \tag{8}$$

Најзад, ако је слободна површина течности изложена атмосферском притиску p_0, овај се може заменити притиском неког замишљеног слоја саме уочене нестишљиве течности. Висина тог слоја мора очевидно бити

$$h_0 = \frac{p_0}{\rho g},$$

и тада се нивоска површина постављена на висини h_0 изнад слободне површине течности зове *редуковани ниво*. Ако се за основну раван xy

узме раван редукованог нивоа течности образац за притисак у тачки тешке течности постаје

$$p = -\rho g z. \tag{9}$$

И у случају стишљиве течности долази се до истог закључка. Тада се интеграцијом једначине (4) добија

$$p - p_0 = -\int_{z_0}^{z} \rho g \, dz, \tag{10}$$

јер је густина ρ а можда и g при великом висинском размаку функција од z. На десној страни је опет тежина течног стуба између равни z_0 и z.

Замислимо сад неко чврсто тело запремине V ограничено површином S потопљено у нестишљиву течност $\rho=\text{const.}$ На његову површину дејствује у свакој тачки притисак p, одн. на сваки управљени елемент површине $d\mathfrak{f}$ елементарни притисак $-p\,d\mathfrak{f}$. На укупну површину дејствује сила притиска чија је резултанта (главни вектор)

$$\mathfrak{K} = -\oint_S p \, d\mathfrak{f}. \tag{11}$$

После трансформације овог површинског интеграла у запремински по Гаусовом ставу с обзиром на једначину (2) добиће се

$$\mathfrak{K} = -\int_V \operatorname{grad} p \, dV = \rho g \mathfrak{k} \int_V dV = \rho g V \mathfrak{k} = -\mathfrak{P}, \tag{12}$$

где смо са $\mathfrak{P}$ обележили тежину течности запремине једнаке запремини потопљеног тела.

Према томе, тело потопљено у течност трпи *потисак* — (притисак навише) који је једнак тежини од тела потиснуте течности и за толико губи привидно у својој тежини *(Архимедов закон)*.

Главни момент сила притиска на чврсто тело биће у односу, на пр., на неку тачку O

$$\mathfrak{M}^{(O)} = -\oint_S p (\mathfrak{r} \times d\mathfrak{f}),$$

а овај површински интеграл се такође може претворити у запремински по запремини V, па се добија

$$\mathfrak{M}^{(O)} = \int_V \operatorname{rot}(p\mathfrak{r}) \, dV = -\int_V (\mathfrak{r} \times \operatorname{grad} p) \, dV, \tag{13}$$

што је лако проверити. Ако за grad p унесемо вредност из основне једначине равнотеже тешке течности и узмемо у обзир да се ради о нестишљивој течности може се за главни момент написати најзад

$$\mathfrak{M}^{(O)} = \rho g \int_V (\mathfrak{r} \times \mathfrak{k}) \, dV. \tag{14}$$

Ова једначина заједно са једначином (12) показује правилност претпоставке да систем сила притисака на чврсто тело потопљено у течност има резултанту $\mathfrak{R}$, јер је главни момент (14) нормалан на главном вектору (12), што је очигледно. Одмах ћемо показати да је нападна линија ове резултанте (централна оса система сила притисака) вертикала кроз центар масе потопљеног тела. Заиста, једначина (14) може се на овај начин трансформисати

$$\mathfrak{M}^{(O)} = \rho g V \frac{\int\limits_V (\mathfrak{r}\times\mathfrak{k})\,dV}{V} = \rho g V \frac{\int\limits_V \mathfrak{r}\,dV}{V}\times\mathfrak{k},$$

па ако узмемо у обзир да је вектор положаја $\mathfrak{r}_C$ центра масе потиснуте течности у односу на изабрани пол O дат једначином

$$\mathfrak{r}_C = \frac{\int\limits_V \mathfrak{r}\,dV}{V},$$

добијамо најзад

$$\mathfrak{M}^{(O)} = \rho g V(\mathfrak{r}_C\times\mathfrak{k}) = \mathfrak{r}_C\times(-\mathfrak{P}), \tag{15}$$

што потврђује да нападна линија резултанте спољашњих притисака на чврсто тело потопљено у течности пролази и кроз центар масе (тежиште) тела.

На овај начин је у потпуности и теориски образложен Архимедов закон.

Ако је чврсто тело само делимично потопљено у течност, може се замислити хоризонтални ниво течности продужен и у унутрашњост тела. Тада се претходна расуђивања могу применити на део тела ограничен површином тела у течности и делом хоризонталне равни нивоа, на коју дејствује свуда константни атмосферски притисак. На тај начин се истим поступком долази до резултата да тело делимично потопљено у течност трпи потисак навише једнак тежини потиснуте течности и да је нападна линија тог потиска вертикала кроз центар масе потопљеног дела тела.

Очигледно је да се аналогни закључци могу извести и за чврсто тело потопљено у стишљиву течност уз односне обзире у погледу промењљивости густине на чему се овде нећемо задржавати.

Да проучимо још и питање притиска тешке нестишљиве течности на плочу као граничну површину течности. У том случају притисци образују систем паралелних сила које дејствују с једне стране нормално на плочу. За такав систем сила знамо унапред из теорије везаних вектора, да има резултанту која је једнака збиру свих сила са нападном тачком у центру паралелних сила.

Може се узети, да је резултанта тих сила опет дата једначином (11), ако се раван плоче оријентише нормалом према течности и ако се узме у обзир да је интеграциона област сад само једна страна уочене плоче, па површински интеграл није контурни и не може се претворити у запремински. Ако z рачунамо било од слободне површине, ако је она слободна од притиска, било од редукованог нивоа, ако је слободна површина течности изложена атмосферском или неком другом притиску, биће према (9)

$$p = -\rho g z.$$

Према томе, за резултанту притиска тешке течности на плочу добијамо

$$\mathfrak{R} = \rho g \int\limits_S z\,d\mathfrak{f} = \rho g S \frac{\int\limits_S z\,d\mathfrak{f}}{S}. \tag{16}$$

Како је $d\mathfrak{f} = \mathfrak{n}_0\,dS$, где је $\mathfrak{n}_0$ константни орт оријентације равни плоче, а

$$\frac{\int\limits_S z\,dS}{S} = z_C,$$

где је z_C кота центра инерције плоче, може се најзад написати за резултанту притиска

$$\mathfrak{R} = \rho g S z_C \mathfrak{n}_0. \tag{17}$$

Дакле, притисак тешке нестишљиве течности на косу плочу једнак је тежини стуба те течности над плочом кад би се она налазила хоризонтално на дубини свога центра инерције.

Одредити нападну тачку те резултанте је истоветно са захтевом наћи центар паралелних сила притиска, који се у овом случају зове *центар притиска* дате тешке течности на плочу. Положај те тачке је, како знамо из теорије везаних вектора, одређен у односу на пол O једначином

$$\mathfrak{r}_C = \frac{\int\limits_S \mathfrak{r}\,p\,dS}{\int\limits_S p\,dS}, \tag{18}$$

одн. с обзиром на једначину (9)

$$\mathfrak{r}_C = \frac{\int\limits_S \mathfrak{r}\,z\,dS}{\int\limits_S z\,dS}. \tag{19}$$

Овој векторској једначини за одређивање центра притиска нестишљиве течности одговарају три скаларне једначине

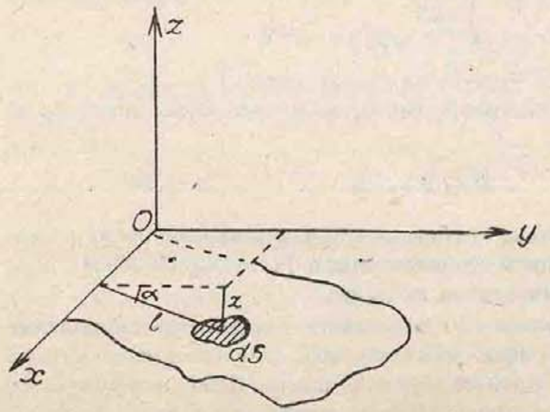
$$x_C = \frac{\int\limits_S xz\,dS}{\int\limits_S z\,dS} = \frac{\int\limits_S xz\,dS}{Sz_C},$$

(20)
$$y_C = \frac{\int\limits_S yz\,dS}{\int\limits_S z\,dS} = \frac{\int\limits_S yz\,dS}{Sz_C},$$

$$z_C = \frac{\int\limits_S z^2\,dS}{\int\limits_S z\,dS} = \frac{\int\limits_S z^2\,dS}{Sz_C},$$

где је $\mathbf{r}_C = \{x_C, y_C, z_C\}$.

Ове једначине показују да положај центра притиска не зависи уопште од нагиба плоче према хоризонту.



Сл. 17

У пракси је најважнија координата z_C и она се може изразити на други начин. Наиме, ако у равни редукованог нивоа узмемо, на пр. за x-осу пресек равни редукованог нивоа и равни плоче (сл. 17), тада је растојање l површинског елемента dS од ове осе дато једначином

$$z = l \sin\alpha,$$

где је α константни нагиб плоче према хоризонту.

Према томе, може се за z_C написати

(21)
$$z_C = \frac{\int\limits_S z^2\,dS}{\int\limits_S z\,dS} = \frac{\sin\alpha \int\limits_S l^2\,dS}{\int\limits_S l\,dS} = \frac{I_x \sin\alpha}{S l_C},$$

где је I_x момент инерције дате плоче у односу на такву x-осу, а l_C растојање центра инерције плоче од те осе.

Најзад ћемо помоћу хидростатичких разматрања извести тзв. *барометарски образац за одређивање надморске висине.*

Поставимо као обично z-осу вертикално навише, а за основну раван xOy узмимо раван морске површине (коју замишљамо као равну, што је, с обзиром на то да се ограничавамо на релативно мале делове површине, довољно тачно). Нека густина ваздуха на висини z буде одређена са $\rho(z)$ и сила теже $-\rho g \mathbf{k}$. Ако узмемо да је ваздух стишљива течност у миру може се успоставити веза између надморске висине и атмосферског притиска на тој висини на овај начин. Узмимо да су густина и притисак везани карактеристичном једначином изотермног стања у облику Мариотова закона, тј.

$$p = \frac{p_0}{\rho_0}\,\rho.$$

Ако из ове једначине израчунамо густину ρ и унесемо је у једначину равнотеже (4) добићемо

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0}\,g\,dz.$$

После интеграције између $z=0$ (нивоа мора) и $z=h$ добија се

$$\log\frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0}\,gh,$$

одн.

(22)
$$p = p_0\, e^{-\frac{\rho_0}{p_0}gh},$$

образац који даје тражену везу између притиска p и надморске висине h, а где p_0 претставља тзв. нормални атмосферски притисак на морском нивоу и ρ_0 односну густину ваздуха, све то на одређеној константној температури (обично $\theta = 0^\circ$C).

Барометарски образац у облику (22) важи, како огледи показују, само приближно и понекад показује и осетна отступања. То је јасно отуда, што је тај образац изведен под претпоставком изотермности процеса, прво, и друго, под претпоставком да је температура атмосфере до посматране висине свуда једна иста. Ова друга претпоставка баш није испуњена и при иоле знатнијим висинама претставља главни разлог отступања. Наиме, познато је да са висином температура ваздуха опада нешто мање од 1°C на 100 m.

У циљу отклањања ових недостатака с обзиром на значај овог обрасца за авијацију учињен је читав низ допуна и тако данас постоје практични обрасци који доста тачно одређују висину помоћу притиска.

28. Поље брзине течности. Вртложно поље. Ојлерове променљиве

Уочимо простор испуњен течношћу која се креће. Како међу течним честицама не постоје чврсте везе, оне се у општем случају крећу различитим брзинама. Тако у некој тачки A уоченог простора у датом тренутку t_0 може се налазити течна честица са брзином $\mathfrak{v}_1$, у другој тачки B тог простора у том истом тренутку може бити честица са брзином $\mathfrak{v}_2$, итд. Према томе, простор испуњен течношћу у покрету претставља векторско поље брзине покретне течности, јер свакој тачки одговара само једна вредност векторске функције брзине $\mathfrak{v}$ која поред тога може зависити још и од времена t, тј.

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(\mathfrak{r}, t). \tag{1}$$

Ова векторска функција одређује распоред брзина у покретној течности. Ако посматрамо распоред брзина само у једном тренутку, на пр., t_0, функција (1) зависи само од положаја. Јасно је, да за други тренутак времена t_1 распоред брзина у пољу може бити сасвим друкчији. У том тренутку ће се, на пр., у тачки A налазити нека друга течна честица са другом брзином у општем случају. Најзад, ако је функција (1) експлицитно независна од времена, распоред брзина у пољу зависи само од положаја, тј. кроз неку уочену тачку A ће пролазити разне честице течности, али ће увек у тој тачки све имати исту брзину. Такво поље брзине у коме, дакле, нема локалних промена брзине, зове се *стационарно* или *перманентно* поље.

Векторска функција (1), међутим, има у општем случају, како знамо, своју *локалну* и своју *стационарну* (конвективну) промену. Наиме, ако посматрамо вредност векторске функције $\mathfrak{v}$ у некој одређеној тачки у току времена dt, она ће се променити за $\delta\mathfrak{v}$, при чему је

$$\delta\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(\mathfrak{r}, t+dt) - \mathfrak{v}(\mathfrak{r}, t)$$

локална промена векторске функције која зависи само од промене времена. Са друге стране, ако у датом тренутку времена посматрамо промену векторске функције у правцу $d\mathfrak{r}$ (при померању $d\mathfrak{r}$ из уочене тачке), добићемо њену стационарну промену $d_1\mathfrak{v}$, која зависи само од промене положаја, тј.

$$d_1\mathfrak{v} = (d\mathfrak{r} \cdot \nabla)\,\mathfrak{v}.$$

И ова промена је изражена координатама уочене непокретне тачке и, према томе, одређена њеним положајем.

Тотална или *супстанцијална* промена $d\mathfrak{v}$ наше векторске функције у уоченој тачки збир је локалне и стационарне промене, тј.

$$d\mathfrak{v} = \delta\mathfrak{v} + d_1\mathfrak{v}.$$

После деобе ове једначине са dt добијамо брзину промене векторске функције $\mathfrak{v}$ у уоченој тачки, тј. тотални извод векторске функције брзине по времену, а то је *убрзање* $\mathfrak{w}$, у облику

$$\mathfrak{w} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v} \cdot \nabla)\,\mathfrak{v}. \tag{2}$$

Овај образац одређује распоред убрзања течних честица у датом пољу брзина. У случају стационарних поља он се своди на образац

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = (\mathfrak{v} \cdot \nabla)\,\mathfrak{v}, \tag{3}$$

јер је тада

$$\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} = 0.$$

У пољу брзине течности се као у сваком векторском пољу, ради боље прегледности, конструишу векторске линије. Ове се линије у пољу брзине течности зову *линије тока* или *струјне линије*. У свакој тачки линије тока вектор брзине који одговара тој тачки има правац тангенте. Линије тока одређују, ако су конструисане, за сваку тачку поља само правац односне брзине, смер само уколико је познат смер кретања течности. Интензитет брзине у појединим тачкама поља није уопште одређен конструкцијом линија тока.

Како у датом тренутку времена свакој тачки поља одговара само једна потпуно одређена брзина, наша векторска функција је једнозначна, па, према томе, кроз сваку тачку поља може пролазити само по једна линија тока.

Ако са $d\mathfrak{r}$ обележимо управљени елемент линије тока, може се лако, на основу дефиниције, написати њена векторска једначина у облику

$$d\mathfrak{r} = \lambda\,\mathfrak{v}, \tag{4}$$

где је λ неки произвољни параметар. У скаларном облику линије тока су одређене системом обичних диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{v_1} = \frac{dy}{v_2} = \frac{dz}{v_3} \qquad \left(= \frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{v} = \frac{ds}{v} \right), \tag{5}$$

ако је $d\mathfrak{r} = \{dx, dy, dz\}$ и $\mathfrak{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$, а ds лучни елемент линије тока.

Интеграција система (5) даје за дати тренутак времена t_0 једначине

$$F_1(x, y, z, t_0) = C_1; \qquad F_2(x, y, z, t_0) = C_2, \tag{6}$$

које кроз сваку тачку простора одређују по једну линију тока.

Линије тока показују распоред праваца брзине течних честица увек за дати одређени тренутак времена. Стога при интеграцији система обичних диференцијалних једначина (5) треба узети вредности функција v_1, v_2, v_3 за одређено време, тј. треба време при тој интеграцији сматрати као константно. Пошто линије тока мењају свој положај у току времена, јер брзина у уоченој тачки може касније имати сасвим други правац, то се трајекторија оне течне честице, која се у датом тренутку налази у уоченој тачки, не мора поклапати, и у општем случају неће поклапати, са линијом тока кроз ту тачку у том тренутку.

Ако је поље брзине течности стационарно, то значи непромењиво у току времена, тада се линија тока поклапа са трајекторијом честице. То се може доказати на овај начин.

Наиме, диференцијална једначина кретања уочене течне честице изгледа у векторском облику

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt}=\mathfrak{v}(\mathfrak{r},t)\,. \tag{7}$$

У скаларном облику имамо три једначине

$$\frac{dx}{dt}=v_1(x,y,z,t),\quad \frac{dy}{dt}=v_2(x,y,z,t),\quad \frac{dz}{dt}=v_3(x,y,z,t)\,. \tag{8}$$

Одавде се интеграцијом добија једначина трајекторије уочене честице течности у коначном облику, ако је познат њен почетни положај $\mathfrak{r}_0=\{a,\,b,\,c\}$ у тренутку $t=t_0$. Међутим, ако је поље брзине стационарно, тј. ако $v_1,\,v_2$ и v_3 не зависе експлицитно од времена, очигледно је да су једначине (8) еквивалентне систему (5) и да се могу свести на њега. У том случају оба система, дакле, одређују исто решење, што смо и хтели да докажемо.

Ако се у пољу брзине течности кроз неку затворену криву конструишу у свима њеним тачкама линије тока добиће се соленоид у коме се течност креће у датом тренутку, тако да брзине честица течности на омотачу додирују омотач. Овакав соленоид зове се *млаз* течности, а у случају да је врло танак *конац тока.*

Ако вектор брзине неког елемента течности задовољава услов

$$\operatorname{rot}\mathfrak{v}-2\vec{\omega}=0, \tag{9}$$

што конкретно значи да се уочени течни елемент не окреће, може се његов вектор брзине претставити у облику градијента неког скалара $\varphi=\varphi(x,\,y,\,z,\,t)$, тј.

$$\mathfrak{v}=-\operatorname{grad}\varphi. \tag{10}$$

Ова скаларна функција φ назива се *потенцијал брзине.* Ако је тај услов испуњен за све честице поља, оно је *безвртложно* или *потенцијално.* Знак минус у овом обрасцу се узима само да би се могло казати да течност тече са места вишег потенцијала на место нижег потенцијала.

Векторској једначини (10) одговарају ове три скаларне једначине

$$v_1=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\qquad v_2=-\frac{\partial\varphi}{\partial y},\qquad v_3=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,. \tag{11}$$

Потенцијално векторско поље може се сматрати одређено пољем скалара φ у коме се могу конструисати еквискаларне (тј. еквипотенцијалне) линије

$$\varphi=C(t), \tag{12}$$

које су одређене за сваки тренутак времена, а у општем случају се могу мењати у току времена.

Диференцијална једначина линија тока у потенцијалном пољу добија према (4) и (10) изглед

$$d\mathfrak{r}=-\lambda\operatorname{grad}\varphi, \tag{13}$$

одакле је очигледно да линије тока у потенцијалном пољу стоје нормално на еквипотенцијалним површинама, јер су колинеарне са њиховим градијентом. Како у потенцијалном пољу течност тече увек са места вишег потенцијала на место нижег, линије тока су увек отворене линије.

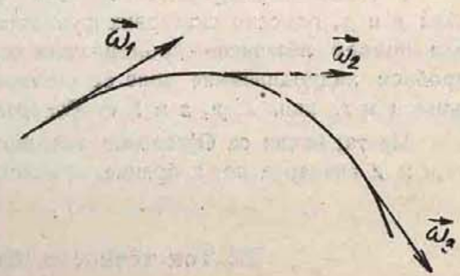
У случају да је поље брзине течности потенцијално и стационарно, биће еквискаларне површине и линије тока у таквом пољу потпуно непромењиве.

Поље брзине течности у коме је бар за неки део течности

$$\operatorname{rot}\mathfrak{v}=2\vec{\omega}\neq 0, \tag{14}$$

зове се *вртложно* или *вихорно.*

Још у проучавању деформације непрекидне средине видели смо, да је $\operatorname{rot}\mathfrak{v}$ у ствари једнак двострукој угаоној брзини $\vec{\omega}$ уочене честице, кад би она била чврста. Отуда је јасно да $\operatorname{rot}\mathfrak{v}=2\vec{\omega}$ карактерише обртање појединих честица течности и да је везан за њих а не за геометриски простор поља. То значи, ако се у пољу течности не обрћу све честице већ само извесне, у некој одређеној тачки простора поља могу се налазити честице које се обрћу у једном тренутку времена, а у другом честице које се не обрћу. Наравно, честице се могу кретати по кружним путањама а да се не обрћу.



Сл. 18

У вртложном пољу се могу конструисати векторске линије вектора угаоне брзине $\vec{\omega}$ (сл. 18) и оне се зову *вртложне* или *вихорне линије.* Соленоид опасан вртложним линијама зове се *вртложна цев.* Сасвим танке вртложне цеви зову се и *вртложни конци*, а затворене вртложне цеви се зову *вртложни прстенови.*

Векторска диференцијална једначина вртложне линије одређена је изразом

$$d\mathfrak{r}=\mu\vec{\omega}, \tag{15}$$

где је μ произвољни параметар, или системом скаларних диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{\omega_1}=\frac{dy}{\omega_2}=\frac{dz}{\omega_3}, \tag{16}$$

ако је $\vec{\omega}=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

У општем случају вртложно поље зависи и од времена, тј. $\vec{\omega}=\vec{\omega}(\mathfrak{r}, t)$. Међутим, ако вектор $\vec{\omega}$ не зависи експлицитно од времена имаћемо *стационарно вртложно* поље. У том случају вртложне линије поља остају непромењене.

Ако је у вртложном пољу свуда $\operatorname{div}\mathfrak{v}=0$, поље је *соленоидно*, одн. *чисто вртложно*. То је увек случај при вртложном струјању нестишљиве течности.

Међутим, ако је у вртложном пољу $\operatorname{div}\mathfrak{v}\neq 0$, имамо посла са *сложеним* пољем.

После ових излагања о пољу брзине течности јасно је, да се у проучавању кретања течности може поставити проблем одређивања распореда брзина у уоченом пољу за сваки тренутак времена.

Другим речима, може да нас у суштини интересује само геометриски простор поља и како се у том пољу кинематички елемент кретања — брзина $\mathfrak{v}=\mathfrak{v}(\mathfrak{r}, t)$ и динамички елементи — притисак $p=p(\mathfrak{r}, t)$ и густина $\rho=\rho(\mathfrak{r}, t)$ мењају: 1) у уоченој тачки у току времена (локално), и 2) од тачке до тачке у датом тренутку (стационарно).

У таквом случају имамо посла са одређивањем вектора $\mathfrak{v}$ и скалара p и ρ, односно скаларних функција v_1, v_2, v_3, p и ρ помоћу $\mathfrak{r}$ и t или помоћу независно променљивих x, y, z и t. Овако постављен проблем хидродинамике зове се *Ојлеров* (Euler) *проблем* — променљиве $\mathfrak{r}$ и t, одн. x, y, z и t су *Ојлерове* променљиве.

На тај начин са Ојлеровог гледишта објект проучавања су векторска и скаларна поља брзине, притиска, густине итд.

29. Ток течности. Циркулација

Ако у пољу брзине течности уочимо две ма које тачке A и B и неку линију L која их спаја, тада се

$$J=\int_A^B \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r}, \tag{1}$$

где је $d\mathfrak{r}$ управљени елемент дате криве линије L, зове *ток* течности дуж криве L од тачке A до тачке B.

У случају да се тачке A и B поклапају, тј. у случају да је крива L затворена, интеграл

$$J=\oint_L \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r} \tag{2}$$

назива се *циркулација* брзине $\mathfrak{v}$ дуж затворене криве L.

У потенцијалном пољу биће

$$J=-\int_A^B d\mathfrak{r}\cdot\operatorname{grad}\varphi=-\int_A^B d\varphi=\varphi(A)-\varphi(B). \tag{3}$$

Овај резултат показује да вредност тока течности у потенцијалном пољу не зависи од пута већ само од крајњих тачака пута.

Ако је потенцијал брзине φ нека униформна функција, биће у случају затворене контуре

$$\varphi(A)=\varphi(B),$$

па, према томе,

$$J=0, \tag{4}$$

тј. циркулација једнака нули. Такво кретање течности зове се *ациклично кретање*.

У случају да је потенцијал брзине мултиформна функција може се десити да је

$$\varphi(A)\neq\varphi(B)$$

и да циркулација буде различита од нуле. У том случају имамо посла са *цикличким кретањем* течности.

Ове особине потенцијалног поља у непосредној су вези са питањем конексности простора испуњеног течношћу у које се нећемо упуштати.

Најзад, ако се у пољу брзине течности налази нека површина S која је оријентисана и нека управљени елемент њен буде $d\mathfrak{f}$, тада се

$$F=\int_S \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f} \tag{5}$$

зове *протицање* или *флукс* брзине $\mathfrak{v}$ кроз површину S. У случају да је површина S затворена, може се интеграл (5) по површини претворити у запремински по Гаусову ставу, па се за протицање F брзине кроз затворену површину S може написати и

$$F=\int_V \operatorname{div}\mathfrak{v}\, dV, \tag{6}$$

где је V запремина ограничена затвореном површином S.

30. Лагранжеве променљиве. Једначина континуитета у Лагранжевим променљивим

Насупрот Ојлеровом гледишту може се у смислу рационалне механике уочити и пратити кретање неке течне честице у току времена као материјалне тачке. У таквом случају потребно је прво разликовати саме течне честице међу собом, тј. показати величине које ће одређивати индивидуалност уочене честице.

За величине које ће нам омогућити то разликовање међу честицама могу се узети, на пр., координате уочене честице x_0, y_0, z_0 у неком датом почетном тренутку t_0, одн. вектор положаја $\mathfrak{r}_0$ честице у том тренутку. Уопште могу се узети ма које три величине a, b, c које одређују једнозначно тај почетни положај у тренутку t_0, тј.

$$\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}(a, b, c, t_0), \tag{1}$$

или у скаларном облику

$$\begin{aligned} x_0 &= x(a, b, c, t_0), \\ y_0 &= y(a, b, c, t_0), \\ z_0 &= z(a, b, c, t_0). \end{aligned} \tag{2}$$

Наравно да ништа не смета да се и саме величине a, b и c сматрају као координате почетног положаја уочене честице.

На тај начин вектор положаја уочене честице, одн. њене Декартове координате x, y, z у ма ком тренутку времена морају бити функције од a, b, c и времена t. Дакле, мора бити

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(a, b, c, t), \tag{3}$$

или у скаларном облику

$$\begin{aligned} x &= x(a, b, c, t), \\ y &= y(a, b, c, t), \\ z &= z(a, b, c, t), \end{aligned} \tag{4}$$

при чему је, ако се баш a, b и c узму за координате течне честице у почетном тренутку t_0,

$$\begin{aligned} a &= x(a, b, c, t_0), \\ b &= y(a, b, c, t_0), \\ c &= z(a, b, c, t_0). \end{aligned} \tag{5}$$

Ако се проблем овако постави, дакле, ако се прати кретање сваке индивидуалне честице течности и тражи да се то кретање одреди за сваки тренутак времена, имамо посла са тзв. *Лагранжевим* (*Lagrange*) *проблемом* хидродинамике. Очигледно у Лагранжеву проблему треба одредити коначне једначине кретања уочене течне честице, тј. одредити x, y и z у функцији од времена t. Како за сваку уочену течну честицу ове координате морају зависити још од a, b и c, биће *Лагранжеве променљиве*, помоћу којих се одређују све потребне величине проблема, a, b, c, и t. Помоћу ових променљивих треба одредити за сваки тренутак времена и притисак $p = p(a, b, c, t)$ и густину $\rho = \rho(a, b, c, t)$

Брзину $\mathfrak{v}$ уочене честице добијамо диференцирањем вектора положаја (3) по времену, тј.

$$\mathfrak{v} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}, \tag{6}$$

одн. у скаларном облику

$$v_1 = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad v_2 = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad v_3 = \frac{\partial z}{\partial t}. \tag{7}$$

У овим обрасцима смо знак парцијалних извода написали само да бисмо истакли да векторска функција $\mathfrak{r}$ одн. скаларне функције x, y и z зависе још од a, b и c. Међутим, за дату честицу величине a, b и c су непроменљиве, па вектор положаја $\mathfrak{r}$ и његове координате x, y и z зависе само од промене t, па нема никакве разлике између парцијалног и тоталног извода по t.

За убрзање добијамо на исти начин и из истих разлога

$$\mathfrak{w} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2}, \tag{8}$$

одн.

$$w_1 = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad w_2 = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad w_3 = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \tag{9}$$

где је $\mathfrak{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$.

Најзад и у Лагранжеву проблему се мора узети у обзир чињеница да се при кретању и поред промене облика и запремине уоченог дела течности његова маса не мења, тј. мора се узети у обзир једначина континуитета. Једначина континуитета је већ изведена (§ 7), али у облицима који дозвољавају њено коришћење за хидродинамичке проблеме у Ојлеровом смислу и Ојлеровим променљивим x, y, z и t.

Да бисмо дошли до једначине континуитета у Лагранжевим променљивим, уочимо у тренутку t_0 неку запремину V_0 течности, ограничену површином S_0, која у неком каснијем тренутку t испуњава запремину V ограничену површином S.

Нека при томе течна честица, која се у тренутку t_0 налази у положају $\mathfrak{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ у којој је густина ρ_0 функција од $\mathfrak{r}_0$, буде у тренутку t у положају одређеном вектором $\mathfrak{r} = \{x, y, z\}$ у коме је густина ρ функција од $\mathfrak{r}$.

Како маса у запремини V_0 мора бити једнака маси у запремини V, добијамо услов континуитета у облику

$$\int_V \rho \, dV = \int_{V_0} \rho_0 \, dV_0. \tag{10}$$

Ако се уведу Лагранжеве променљиве a, b, c, t једначинама (1) и (3) одн. једначинама (2) и (4), може се написати прво

$$\rho_0 = f(a, b, c, t_0) \qquad (11)$$
$$\rho = f(a, b, c, t),$$

па треба још само израчунати запреминске елементе dV_0 и dV у новим променљивим. При томе, ако у датом тренутку t_0 уведемо нове променљиве a, b, c једначином (1) и одредимо запремински елемент dV_0 у новим координатама, добићемо на основу познатог обрасца

$$dV_0 = \left[\frac{\partial \mathfrak{r}_0}{\partial a}\,\frac{\partial \mathfrak{r}_0}{\partial b}\,\frac{\partial \mathfrak{r}_0}{\partial c}\right] da\,db\,dc = D_0\,da\,db\,dc, \qquad (12)$$

где је

$$D_0 = \left[\frac{\partial \mathfrak{r}_0}{\partial a}\,\frac{\partial \mathfrak{r}_0}{\partial b}\,\frac{\partial \mathfrak{r}_0}{\partial c}\right] = \frac{\partial(x_0, y_0, z_0)}{\partial(a, b, c)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial a} & \frac{\partial y_0}{\partial a} & \frac{\partial z_0}{\partial a} \\ \frac{\partial x_0}{\partial b} & \frac{\partial y_0}{\partial b} & \frac{\partial z_0}{\partial b} \\ \frac{\partial x_0}{\partial c} & \frac{\partial y_0}{\partial c} & \frac{\partial z_0}{\partial c} \end{vmatrix}. \qquad (13)$$

Област интеграције биће сад онај простор V у коме се мењају променљиве a, b, c, кад се променљиве $x_0, y_0\ z_0$ мењају у простору V_0.

На исти начин имаћемо у интегралу на левој страни

$$dV = \left[\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}\right] da\,db\,dc = D\,da\,db\,dc \qquad (14)$$

са истом облашћу интеграције V као и у интегралу на десној страни, а где је

$$D = \left[\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}\right] = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

На тај начин се једначина континуитета (10) може написати

$$\int_{\mathsf{V}} \rho D\,da\,db\,dc = \int_{\mathsf{V}} \rho_0 D_0\,da\,db\,dc$$

одн.

$$\int_{\mathsf{V}} (\rho D - \rho_0 D_0)\,da\,db\,dc = 0. \qquad (16)$$

Како је првобитна запремина V_0, па према томе и V, потпуно произвољна, то добијени интеграл (16) мора бити једнак нули за сваку запремину V, тј. мора бити

$$\rho D - \rho_0 D_0 = 0, \qquad (17)$$

а то је једначина континуитета у Лагранжевим променљивим у најопштијем случају.

Ако су величине a, b, c Лагранжевих променљивих координате течне честице у почетном тренутку времена t_0, биће $x_0 = a$, $y_0 = b$, $z_0 = c$, па је

$$D_0 = \frac{\partial(x_0, y_0, z_0)}{\partial(a, b, c)} = 1$$

и једначина континуитета се своди на

$$\rho D = \rho_0. \qquad (18)$$

За случај нестишљиве течности $\rho = \rho_0$ имамо из једначине (17) услов

$$D = D_0, \qquad (19)$$

одн.

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}\right] = \left[\frac{\partial \mathfrak{r}_0}{\partial a}\,\frac{\partial \mathfrak{r}_0}{\partial b}\,\frac{\partial \mathfrak{r}_0}{\partial c}\right].$$

Најзад, ако се у случају нестишљиве течности узме $x_0 = a$, $y_0 = b$, $z_0 = c$ једначина континуитета се своди на

$$D = 1. \qquad (20)$$

31. Основна једначина динамике идеалне течности

Уочимо неку покретну течност запремине V, ограничене површином S и у тој течности неки течни елемент масе $dm = \rho\,dV$ са убрзањем $\mathfrak{w}$. Према другом Њутновом закону је промена количине кретања тог елемента пропорционална резултанти $\mathfrak{P}$ свих и запреминских и површинских сила које на њега дејствују, тј.

$$dm \cdot \mathfrak{w} = \mathfrak{P}. \qquad (1)$$

Ако са $\mathfrak{F}$ обележимо запреминску силу одређену на јединицу масе, тада на уочени течни елемент дејствује запреминска сила $\rho\,dV\,\mathfrak{F}$, а на читаву течност у запремини V, запреминска сила

$$\int_V \rho \mathfrak{F}\,dV.$$

Површинска сила се у идеалној течности своди на притисак који ћемо, рачунат на јединицу површине, обележити са $-p\mathfrak{n}$, где је $\mathfrak{n}$ орт спољашње нормале на уоченом месту површине. Ако са $d\mathfrak{f}$ обележимо управљени елемент граничне површине $\mathfrak{f}$ течног елемента запремине dV, елементарни притисак који одговара овом површинском елементу биће $-p\,d\mathfrak{f}$, а за укупну површину елемента имаћемо притисак $-\oint_f p\,d\mathfrak{f}$.

Дакле, за уочени течни елемент може једначина (1) да се напише у облику

$$\rho\,dV\,\mathfrak{w} = \rho\,dV\,\mathfrak{F} - \oint_f p\,d\mathfrak{f} \tag{2}$$

За укупну масу течности ова једначина добија облик

$$\int_V \rho\,\mathfrak{w}\,dV = \int_V \rho\,\mathfrak{F}\,dV - \oint_S p\,d\mathfrak{S}, \tag{3}$$

јер се, при одређивању површинске силе која дејствује на граничне површине свих течних елемената течности у уоченој запремини, сви унутрашњи површински интеграли потиру и остаје само интеграл по граничној површини S читаве течне масе, тј. $-\oint_S p\,d\mathfrak{S}$, где је са $d\mathfrak{S}$ обележен управљени елемент граничне површине S.

После трансформације површинског интеграла на десној страни једначине (3) по Гаусовој теореми у запремински интеграл по запремини V, добија се

$$\oint_S p\,d\mathfrak{S} = \int_V \operatorname{grad} p\,dV,$$

па једначина (3) постаје

$$\int_V (\rho\,\mathfrak{w} - \rho\,\mathfrak{F} + \operatorname{grad} p)\,dV = 0.$$

Како ова једначина мора важити ма за коју запремину течности, биће овај интеграл једнак нули само ако је подинтегрална функција једнака нули, тј.

$$\rho\,\mathfrak{w} - \rho\,\mathfrak{F} + \operatorname{grad} p = 0,$$

одн.

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p, \tag{4}$$

а то је *основна једначина динамике идеалне течности*.

У скаларном облику имамо три једначине

$$w_1 = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad w_2 = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad w_3 = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{5}$$

Како је $\mathfrak{F}$ сила одређена за јединицу масе њена димензија је убрзање, па у случају да је спољашња запреминска сила Земљина тежа имамо као основну једначину динамике идеалне тешке течности

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{g} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p. \tag{6}$$

Показали смо како се долази до основне једначине динамике идеалне течности непосредно, посматрањем саме течности у кретању. Међутим, до те основне једначине се може одмах врло једноставно доћи и ако се пође од основне једначине динамике еластичних тела (1) у § 19. У том случају треба само узети у обзир да је код идеалне течности тензор напона одређен једначином (4) у § 23, па на исти начин, како смо изводили основну једначину (1) у § 26 статике течности, долазимо до једначине (4).

Основна једначина (4) може се с обзиром на једначину (2) у § 28 написати и у облику

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\cdot\nabla)\,\mathfrak{v} = \mathfrak{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p, \tag{7}$$

или, пошто је

$$(\mathfrak{v}\cdot\nabla)\,\mathfrak{v} = \frac{1}{2}\operatorname{grad} v^2 - \mathfrak{v}\times\operatorname{rot}\mathfrak{v}$$

у облику

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\operatorname{grad} v^2 - \mathfrak{v}\times\operatorname{rot}\mathfrak{v} = \mathfrak{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p. \tag{8}$$

Ако се одреде ротори вектора на левој и десној страни ове једначине, тј. ако се на леву и десну страну ове једначине примени Хамилтонов оператор ∇ векторски, и узме у обзир да је за баротропну течност увек $\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = \operatorname{grad} P$, добиће се

$$\frac{\partial(\operatorname{rot}\mathfrak{v})}{\partial t} - \operatorname{rot}(\mathfrak{v}\times\operatorname{rot}\mathfrak{v}) = \operatorname{rot}\mathfrak{F}, \tag{9}$$

јер је $\operatorname{rot}\operatorname{grad}$ увек једнак нули, а $\operatorname{rot}\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} = \frac{\partial(\operatorname{rot}\mathfrak{v})}{\partial t}$, пошто су операције rot и диференцирање по t независне једна од друге.

Овим поступком елиминисани су из основне једначине динамике идеалне течности динамички параметри — притисак p и густина ρ. Ако спољашња запреминска сила има потенцијал V, тј ако је $\mathfrak{F} = -\operatorname{grad} V$, једначина (9) се своди на

$$\frac{\partial(\operatorname{rot}\mathfrak{v})}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathfrak{v}\times\operatorname{rot}\mathfrak{v}), \tag{10}$$

из које су елиминисани сви динамички елементи, па фигуришу само кинематички елементи кретања течности.

32. Ојлерове једначине

За решење проблема хидродинамике у Ојлеровом смислу треба, како смо рекли, одредити поље брзине $\mathfrak{v}$ у функцији положаја и времена, тј.

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(\mathfrak{r}, t) = \{v_1 \; v_2 \; v_3\}. \tag{1}$$

За то је потребна:

a) основна једначина динамике у облику

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v} \cdot \nabla)\mathfrak{v} = \mathfrak{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p;$$

b) једначина континуитета у облику

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathfrak{v}) = 0;$$

c) карактеристична једначина

$$\rho = f(p).$$

Пројицирањем основне векторске једначине на осе Декартова правоуглог триједра добићемо три скаларне једначине

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \tag{2}$$

Ове скаларне једначине зову се *Ојлерове једначине* динамике идеалне течности.

Ојлерове једначине (2) заједно са једначином континуитета и карактеристичном једначином образују систем једначина са непознатим функцијама v_1, v_2, v_3 p и ρ, а по независно променљивим x, y, z и t.

Једначине (2) су линеарне парцијалне диференцијалне једначине првога реда, али нису хомогене што у многоме отежава њихово решавање. При решавању се обично, прво, из једначина (2) и једначине континуитета елиминише густина ρ помоћу карактеристичне једначине, па се систем своди на четири парцијалне диференцијалне једначине са непознатим функцијама v_1, v_2, v_3 и p, а по независно променљивим x, y, z, t.

Решење ових парцијалних једначина ће у општем случају садржавати и произвољне функције и произвољне константе. Да би се постигло потпуно одређено решење датога проблема, морају се узети у обзир још и почетни и гранични услови. При томе су почетни услови они који морају бити задовољени за све тачке течности у *почетном* *тренутку* времена, на пр., за $t = 0$, а гранични су они који морају бити испуњени за *сваки тренутак* времена на граничној површини течности.

Најзад, подвлачимо да се Ојлерове једначине (2) знатно упрошћавају при третирању проблема сасвим спорог кретања течности. Наиме, тада се може узети да су брзине v_1, v_2, v_3 и њихови изводи по x, y и z врло мале величине и да се према томе њихови производи могу без велике грешке занемарити. На тај начин се добијају једначине

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \tag{3}$$

33. Лагранжеве једначине

Нека a, b, c буду координате неке уочене честице течности у почетном тренутку t_0. Да бисмо решили проблем кретања течности у Лагранжевом смислу, треба, како знамо, одредити координате покретне течне честице x, y и z у функцији координата a, b, c почетног положаја и времена t. То значи да се све величине, које фигуришу у основној једначини динамике идеалне течности, као и у једначини континуитета и карактеристичној једначини, сматрају као функције од Лагранжевих променљивих.

Видели смо да се у Лагранжевим променљивим (§ 30) убрзање може изразити у облику

$$\mathfrak{w} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2},$$

па се основна једначина динамике може одмах написати у облику

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2} = \mathfrak{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \tag{1}$$

Ако ову векторску једначину желимо да пројицирамо на осе Декартова правоуглог триједра, али да притисак p сматрамо као функцију Лагранжевих променљивих, то значи да треба $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ изразити помоћу $\frac{\partial p}{\partial a}, \frac{\partial p}{\partial b}, \frac{\partial p}{\partial c}$. У том циљу помножимо векторску једначину (1) скаларно, на пр., са $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}$. Тако се добија

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a} = \mathfrak{F} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a} \cdot \operatorname{grad} p. \tag{2}$$

Међутим, знамо да је извод скаларне функције p у правцу a дат изразом

$$\frac{\partial p}{\partial a} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a} \cdot \operatorname{grad} p,$$

те се једначина (2) може написати у облику

$$\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2} - \mathfrak{F}\right) \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial a} = 0\,. \tag{3}$$

На исти се начин множењем основне једначине (1) скаларно са $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}$ одн. са $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}$ добијају још две једначине

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2} - \mathfrak{F}\right) \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial b} = 0\,, \\ &\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2} - \mathfrak{F}\right) \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial c} = 0\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Ако се три једначине (3) и (4) изразе помоћу Декартових координата, добиће се *Лагранжеве једначине* динамике идеалне течности у облику

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial a} = 0\,, \\ &\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial b} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial b} = 0\,, \\ &\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial c} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial c} = 0\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Поред ове три парцијалне диференцијалне једначине треба узети у обзир још и једначину континуитета у облику

$$\rho \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = \rho_0\,, \tag{6}$$

у којој треба вредност густине ρ сменити помоћу карактеристичне једначине

$$\rho = f(p)\,.$$

Једначине (5) и (6) образују систем од четири парцијалне диференцијалне једначине II реда, које поред тога садрже и квадратне

чланове, а имају четири непознате функције x, y, z, p, а независно променљиве су a, b, c и t. Њиховим решењем долазимо до

$$\begin{aligned} x &= x(a, b, c, t)\,, \\ y &= y(a, b, c, t)\,, \\ z &= z(a, b, c, t)\,, \\ p &= p(a, b, c, t)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

За уочену честицу се морају знати почетне вредности a, b, c које су, према томе, за одређену тачку константне величине и мењају се само од честице до честице. Јасно је да опет морају бити задовољени гранични услови.

34. Потенцијал убрзања. Веберова трансформација Лагранжевих једначина

Ако је течност баротропна, тј.

$$\rho = f(p)\,,$$

може се, како смо показали, написати

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = \frac{1}{f(p)}\operatorname{grad} p = \operatorname{grad} P(p)\,,$$

где је

$$P(p) = \int \frac{dp}{f(p)}\,.$$

Претпоставимо још да спољашња запреминска сила има функцију силе U, тј. да је

$$\mathfrak{F} = \operatorname{grad} U.$$

У том случају се основна једначина динамике идеалне течности може написати у облику

$$\mathfrak{w} = \operatorname{grad} U - \operatorname{grad} P = \operatorname{grad}(U - P)\,,$$

или, ако ставимо

$$U - P = Q\,,$$

најзад у облику

$$\mathfrak{w} = \operatorname{grad} Q\,. \tag{1}$$

Добијена једначина кретања показује да у посматраном случају постоји потенцијал убрзања одн. функција убрзања Q. Другим речима, она исказује да су у сваком тренутку t у целој течности, пројекције вектора убрзања на осе Декартова правоуглог триједра изводи по x, y, z извесне функције $Q(x, y, z, t)$, што значи да се векторско поље убрзања течности може сматрати као поље градијента неког скалара.

Обрнуто, ако знамо да убрзање кретања течности има потенцијал и да спољашње силе такође имају потенцијал, тада течност мора бити баротропна, или, ако постоји потенцијал убрзања и течност је баротропна, може се закључити да спољашње силе имају потенцијал.

Ако постоји потенцијал убрзања Q и проблем се третира у Лагранжевим променљивим, може се једначина (1) написати у облику

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2} = \operatorname{grad} Q, \tag{2}$$

где се сматра да је и Q изражено у зависности од Лагранжевих променљивих, тј.

$$Q = Q(a, b, c, t).$$

Вебер (Weber) је показао да се, у том случају, систем Лагранжевих парцијалних једначина II реда, може увођењем једне помоћне функције трансформисати у систем парцијалних диференцијалних једначина I реда, при чему је за одређивање те помоћне функције потребна само квадратура.

Наиме, ако се лева и десна страна векторске једначине (2) помноже скаларно, прво, са $\dfrac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}$ добија се

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a} \cdot \operatorname{grad} Q,$$

па, како је

$$\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a} \cdot \operatorname{grad} Q = \frac{\partial Q}{\partial a},$$

имамо

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a} = \frac{\partial Q}{\partial a}.$$

Ако леву и десну страну ове једначине интегралимо по t у границама од 0 до t, добићемо

$$\int_0^t \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\right) dt = \frac{\partial}{\partial a} \int_0^t Q\, dt, \tag{3}$$

јер је

$$\int_0^t \frac{\partial Q}{\partial a}\, dt = \frac{\partial}{\partial a} \int_0^t Q\, dt,$$

пошто a не зависи од t.

Интеграл на левој страни ове једначине може се парцијалном интеграцијом овако трансформисати

$$\int_0^t \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\right) dt = \left|\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\right|_0^t - \int_0^t \left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial a \partial t}\right) dt =$$

$$= \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a} - \mathfrak{v}_0 \cdot \mathfrak{i} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \int_0^t \left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\right)^2 dt,$$

јер, ако се узме да је $t = 0$ почетни момент, тада је

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\right)_{t=0} = \mathfrak{v}_0 = \{v_{01}, v_{02}, v_{03}\} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mathfrak{r}_0}{\partial a} = \mathfrak{i},$$

пошто је вектор положаја уочене тачке за $t = 0$, како знамо

$$\mathfrak{r}_0 = a\mathfrak{i} + b\mathfrak{j} + c\mathfrak{k}.$$

Према томе, може се најзад написати

$$\int_0^t \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\right) dt = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a} - v_{01} - \frac{\partial}{\partial a} \int_0^t \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\right)^2 dt.$$

Ако се ова вредност унесе у једначину (3) добићемо

$$\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a} - v_{01} - \frac{\partial}{\partial a} \int_0^t \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\right)^2 dt = \frac{\partial}{\partial a} \int_0^t Q\, dt,$$

одн.

$$\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a} - v_{01} = \frac{\partial}{\partial a} \int_0^t \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\right)^2 + Q\right] dt,$$

и ако још уведемо као помоћну функцију

$$\chi = -\int_0^t \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\right)^2 + Q\right] dt, \tag{4}$$

можемо прву од Лагранжевих једначина написати у облику

$$\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a} - v_{01} = -\frac{\partial \chi}{\partial a}. \tag{5}$$

На исти начин скаларним множењем једначине (2) са $\dfrac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}$ одн. $\dfrac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}$ трансформишу се и остале две Лагранжеве једначине па добијамо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b} - v_{02} &= -\frac{\partial \chi}{\partial b}, \\ \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c} - v_{03} &= -\frac{\partial \chi}{\partial c}. \end{aligned} \tag{6}$$

Ако *Веберову функцију* χ (4) диференцирамо по времену добијамо

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\right)^2 - Q. \tag{7}$$

Ова једначина заједно са једначином континуитета и једначинама (5) и (6), у којима је густина ρ смењена са $f(p)$, образује систем од пет парцијалних једначина првог реда које треба да задовољавају функције x, y, z, p и χ.

35. Лемове једначине. Хелмхолцове једначине

Ако се у векторској једначини (8) у § 31 стави

$$\mathrm{rot}\, \mathfrak{v} = 2\vec{\omega},$$

при чему је

$$\vec{\omega} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \tag{1}$$

а

$$2\omega_1 = \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \quad 2\omega_2 = \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \quad 2\omega_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y},$$

добиће се основна једначина хидродинамике у облику

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\, \frac{v^2}{2} - 2(\mathfrak{v} \times \vec{\omega}) = \mathfrak{F} - \frac{1}{\rho}\, \mathrm{grad}\, p. \tag{2}$$

Пројицирањем ове векторске једначине на осе Декартова правоуглог триједра добијамо скаларне једначине

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} v^2\right) - 2(v_2\omega_3 - v_3\omega_2) &= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2} v^2\right) - 2(v_3\omega_1 - v_1\omega_3) &= Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
\frac{\partial v_3}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2} v^2\right) - 2(v_1\omega_2 - v_2\varphi_1) &= Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Ове скаларне једначине познате су под именом *Лемових (Lamb) једначина*, и у суштини су само трансформација Ојлерових једначина са истим непознатим функцијама и истим независно променљивим. Жуковски (Aérodynamique стр. 52) наводи да је ове једначине први извео професор Громеко из Казана.

Према подацима којим располажемо и према величинама које у датом проблему динамике идеалне течности тражимо, треба основну једначину трансформисати у разне облике. Тако, ако се у векторској једначини (9) у § 31 стави $\mathrm{rot}\, \mathfrak{v} = 2\vec{\omega}$, добиће се

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \mathrm{rot}\,(\mathfrak{v} \times \vec{\omega}) = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\mathfrak{F}, \tag{4}$$

или друкчије написано помоћу Хамилтонова оператора ∇ у облику

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \nabla \times (\mathfrak{v} \times \vec{\omega}) = \frac{1}{2}\nabla \times \mathfrak{F}. \tag{5}$$

Међутим, увек је

$$\nabla \times (\mathfrak{v} \times \vec{\omega}) = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\mathfrak{v} - (\mathfrak{v} \cdot \nabla)\vec{\omega} - \vec{\omega}\, \mathrm{div}\, \mathfrak{v},$$

јер је $\mathrm{div}\, \vec{\omega} = 0$, као дивергенција ротора.

На тај начин долазимо до векторске једначине

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\mathfrak{v} \cdot \nabla)\vec{\omega} + \vec{\omega}\, \mathrm{div}\, \mathfrak{v} - (\vec{\omega} \cdot \nabla)\mathfrak{v} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathfrak{F}. \tag{6}$$

Посматрајмо два важна специјална случаја.

Узмимо, прво, да посматрамо нестишљиву течност, тј. течност за коју важи услов

$$\mathrm{div}\, \mathfrak{v} = 0.$$

Тада се једначина (6) своди на једначину

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\mathfrak{v} \cdot \nabla)\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla)\mathfrak{v} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathfrak{F}.$$

Прва два члана на левој страни ове једначине претстављају супстанцијални извод вектора $\vec{\omega}$ који одговара угаоној брзини уоченог течног елемента замишљеног као очврслог. Дакле,

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\mathfrak{v} \cdot \nabla)\vec{\omega} = \frac{d\vec{\omega}}{dt},$$

па се најзад добија једначина

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} - (\vec{\omega} \cdot \nabla)\mathfrak{v} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathfrak{F}. \tag{7}$$

Овој векторској једначини која важи за баротропну и нестишљиву течност одговарају три наредне скаларне једначине

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\omega_1}{dt}-\omega_1\frac{\partial v_1}{\partial x}-\omega_2\frac{\partial v_1}{\partial y}-\omega_3\frac{\partial v_1}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right),\\
(8)\qquad&\frac{d\omega_2}{dt}-\omega_1\frac{\partial v_2}{\partial x}-\omega_2\frac{\partial v_2}{\partial y}-\omega_3\frac{\partial v_2}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right),\\
&\frac{d\omega_3}{dt}-\omega_1\frac{\partial v_3}{\partial x}-\omega_2\frac{\partial v_3}{\partial y}-\omega_3\frac{\partial v_3}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right).
\end{aligned}
$$

Узмимо сад, друго, да је течност стишљива, али спољашње запреминске силе имају потенцијал. У том случају је $\nabla\times\mathfrak{F}=0$, а из једначине континуитета у облику (5) у § 7 излази да је

$$(9)\qquad \operatorname{div}\mathfrak{v}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}.$$

Према томе, једначина (6) добија облик

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}-\frac{\vec{\omega}}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=(\vec{\omega}\cdot\nabla)\mathfrak{v},$$

или

$$(10)\qquad \frac{d\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right)}{dt}=\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathfrak{v}.$$

У скаларном облику имамо једначине

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_1}{\rho}\right)=\frac{\omega_1}{\rho}\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\omega_2}{\rho}\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\omega_3}{\rho}\frac{\partial v_1}{\partial z},\\
(11)\qquad&\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_2}{\rho}\right)=\frac{\omega_1}{\rho}\frac{\partial v_2}{\partial x}+\frac{\omega_2}{\rho}\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\omega_3}{\rho}\frac{\partial v_2}{\partial z},\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_3}{\rho}\right)=\frac{\omega_1}{\rho}\frac{\partial v_3}{\partial x}+\frac{\omega_2}{\rho}\frac{\partial v_3}{\partial y}+\frac{\omega_3}{\rho}\frac{\partial v_3}{\partial z},
\end{aligned}
$$

познате под именом *Хелмхолцове једначине*. Оне се односе на кретање баротропне стишљиве течности под дејством спољашњих запреминских сила које имају потенцијал. У овој су једначини елиминисани сви динамички параметри изузев густине.

Најзад, ако имамо посла са нестишљивом течношћу која се креће под дејством спољашњих сила које имају потенцијал, једначина (10) може се скратити са $\frac{1}{\rho}$ и постаје

$$(12)\qquad \frac{d\vec{\omega}}{dt}=(\vec{\omega}\cdot\nabla)\mathfrak{v}.$$

36. Кошијеве једначине. Лагранжев став о кретању течности

Иако су Хелмхолцове једначине изражене у Ојлеровим променљивим, њихово решење, ако се постави питање одређивања вектора $\vec{\omega}$ који је увек везан за материјални елемент а не за геометриску тачку поља, претставља проблем у Лагранжевом смислу.

Узмимо, дакле, да одредимо непознату векторску функцију $\frac{\vec{\omega}}{\rho}$ из диференцијалне једначине (10) у претходном параграфу која нам у облику једне векторске једначине даје Хелмхолцове једначине, или, што је исто, да одредимо непознате скаларне функције $\frac{\omega_1}{\rho}$, $\frac{\omega_2}{\rho}$, $\frac{\omega_3}{\rho}$ из система Хелмхолцових диференцијалних једначина (§ 35, 11) под условом да је позната вредност $\vec{\omega}_0=\{\omega_{10},\omega_{20},\omega_{30}\}$ вектора $\vec{\omega}$ за почетни тренутак времена $t=0$.

До тог векторског интеграла, одн. скаларних интеграла, може се доћи директно трансформацијом Лагранжевих једначина кретања при датим условима на овај начин.

Прво треба имати пред очима да Хелмхолцова векторска једначина (10) у § 35 важи под условом да је: 1) течност баротропна и 2) да спољашње запреминске силе имају потенцијал. Међутим, ако су ти услови задовољени, постоји, како знамо потенцијал убрзања Q и Лагранжева једначина кретања у векторском облику може се написати, према (2) у § 34, овако

$$\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t^2}=\operatorname{grad}Q.$$

Ако ову једначину помножимо скаларно редом векторима $\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial a}$, $\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial b}$, $\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial c}$ добићемо једначине

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial a}=\frac{\partial Q}{\partial a},\\
(1)\qquad&\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial b}=\frac{\partial Q}{\partial b},\\
&\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial c}=\frac{\partial Q}{\partial c}.
\end{aligned}
$$

Ако је функција Q непрекидна и има своје прве и друге изводе коначне и непрекидне, може се ред парцијалних диференцирања разменити, тј. тада је

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial Q}{\partial a}\right)=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial Q}{\partial b}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial Q}{\partial b}\right)=\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial Q}{\partial c}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial Q}{\partial c}\right)=\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial Q}{\partial a}\right).$$

У том ће случају на основу прве од ових једначина, а с обзиром на прве две једначине (1), може написати

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial a}\right)=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial b}\right).$$

Како a, b, c не зависе од t добија се после развијања ових израза

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t\,\partial b}\right)\cdot\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial a}+\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial a\,\partial b}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t\,\partial a}\right)\cdot\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial b}+\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial a\,\partial b}.$$

Ако се на левој и десној страни ове једначине изоставе једнаки изрази $\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial a\,\partial b}$, а додаду једнаки изрази $\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t\,\partial b}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t\,\partial a}$, што не мења вредност једначине добиће се

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t\,\partial b}\right)\cdot\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial a}+\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t\,\partial b}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t\,\partial a}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t\,\partial a}\right)\cdot\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial b}+\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t\,\partial b}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t\,\partial a},$$

а то се може написати у облику

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t\,\partial b}\cdot\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial a}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t\,\partial a}\cdot\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial b}\right).$$

Интеграцијом ове једначине по времену добија се

(2) $$\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t\,\partial b}\cdot\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial a}-\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t\,\partial a}\cdot\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial b}=C,$$

где је C нека интеграциона константа која је независна од времена.

Константу C одредићемо из почетних услова на овај начин. Вектор положаја уочене течне честице у почетном тренутку $t=0$ је

$$\mathfrak{r}_0=a\,\mathfrak{i}+b\,\mathfrak{j}+c\,\mathfrak{k},$$

па је стога

(3) $$\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial a}\right)_{t=0}=\frac{\partial\mathfrak{r}_0}{\partial a}=\mathfrak{i},\quad\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial b}\right)_{t=0}=\frac{\partial\mathfrak{r}_0}{\partial b}=\mathfrak{j},\quad\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial c}\right)_{t=0}=\frac{\partial\mathfrak{r}_0}{\partial c}=\mathfrak{k}.$$

Нека почетна брзина буде одређена вектором

$$\mathfrak{v}_0=\nu_{01}\,\mathfrak{i}+\nu_{02}\,\mathfrak{j}+\nu_{03}\,\mathfrak{k}.$$

Како је у Лагранжеву проблему увек $\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial t}=\mathfrak{v}$ имамо

$$\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t\,\partial a}=\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial a},\quad\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t\,\partial b}=\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial b},$$

и према томе

(4) $$\left(\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t\,\partial a}\right)_{t=0}=\frac{\partial\mathfrak{v}_0}{\partial a}=\frac{\partial\nu_{01}}{\partial a}\,\mathfrak{i}+\frac{\partial\nu_{02}}{\partial a}\,\mathfrak{j}+\frac{\partial\nu_{03}}{\partial a}\,\mathfrak{k},$$
$$\left(\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t\,\partial b}\right)_{t=0}=\frac{\partial\mathfrak{v}_0}{\partial b}=\frac{\partial\nu_{01}}{\partial b}\,\mathfrak{i}+\frac{\partial\nu_{02}}{\partial b}\,\mathfrak{j}+\frac{\partial\nu_{03}}{\partial b}\,\mathfrak{k}.$$

Ако се вредности потребних израза из једначина (3) и (4) унесу у једначину (2) добија се за вредност константе C израз

(5) $$C=-\left(\frac{\partial\nu_{02}}{\partial a}-\frac{\partial\nu_{01}}{\partial b}\right).$$

Међутим, израз на десној страни је негативна координата ротора вектора брзине у правцу z-осе за тренутак $t=0$, у коме је $x=a$, $y=b$ и $z=c$, односно двострука негативна координата вектора $\vec{\omega}$ за почетни тренутак $t=0$. Дакле, према нашим ознакама је

(6) $$C=-2\,\omega_{30}.$$

Једначина (2) се може сад написати

(7) $$\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t\,\partial b}\cdot\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial a}-\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t\,\partial a}\cdot\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial b}=-2\,\omega_{30}.$$

У овој једначини се могу извршити наредне трансформације

$$\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t\,\partial a}=\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial a}=\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial a}\cdot\nabla\right)\mathfrak{v},$$

$$\frac{\partial^2\mathfrak{r}}{\partial t\,\partial b}=\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial b}=\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial b}\cdot\nabla\right)\mathfrak{v},$$

пошто су парцијални изводи вектора брзине $\mathfrak{v}$ по a и b у ствари изводи у односним правцима. После ове промене једначина (7) постаје

$$\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial b}\cdot\nabla\right)\mathfrak{v}\right]\cdot\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial a}-\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial a}\cdot\nabla\right)\mathfrak{v}\right]\cdot\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial b}=-2\,\omega_{30},$$

одн.

$$\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial b}\cdot\nabla\right)\left(\mathfrak{v}\cdot\frac{\partial\overset{*}{\mathfrak{r}}}{\partial a}\right)-\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial a}\cdot\nabla\right)\left(\mathfrak{v}\cdot\frac{\partial\overset{*}{\mathfrak{r}}}{\partial b}\right)=-2\,\omega_{30},$$

где звездица означује да се на односни члан не примењује оператор ∇.

Лева страна последње једначине може се написати у облику скаларног производа друга два векторска производа, тј. у облику

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\times\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\right)\cdot(\nabla\times\mathfrak{v})=2\,\omega_{30},$$

или, како је $\nabla\times\mathfrak{v}=2\vec{\omega}$, најзад у облику

$$\vec{\omega}\cdot\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\times\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\right)=\omega_{30}. \tag{8}$$

На исти се начин долази и до две друге аналогне једначине

$$\begin{aligned}\vec{\omega}\cdot\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\times\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}\right)&=\omega_{10},\\ \vec{\omega}\cdot\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}\times\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\right)&=\omega_{20}.\end{aligned} \tag{9}$$

Из три једначине (8) и (9), кад су познати вектори $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}$, $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}$, $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}$ и скалари $\omega_{10},\omega_{20},\omega_{30}$, може се одредити вектор $\vec{\omega}$ помоћу Гибзова обрасца на познати начин у облику

$$\vec{\omega}=\frac{\omega_{10}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}\times\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\right)\times\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\times\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\right)+\omega_{20}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\times\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\right)\times\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\times\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}\right)+\omega_{30}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\times\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}\right)\times\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}\times\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\right)}{\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\times\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}\right)\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}\times\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\times\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\right)\right]}.$$

Међутим, како је

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}\times\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\right)\times\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\times\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\right)&=\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\left[\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}\right],\\ \left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\times\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\right)\times\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\times\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}\right)&=\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\left[\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}\right],\\ \left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\times\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}\right)\times\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}\times\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\right)&=\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}\left[\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}\right],\end{aligned}$$

а

$$\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\times\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}\right)\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}\times\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\times\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\right)\right]=\left[\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}\right]^2,$$

што се одмах види после краћег рачуна, имамо

$$\vec{\omega}=\frac{\omega_{0}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}+\omega_{20}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}+\omega_{30}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}}{\left[\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}\right]}. \tag{10}$$

Најзад, ако за именилац у овој једначини унесемо вредност из једначине континуитета у Лагранжевим променљивим, једначине (15) и

(18) у § 30, добићемо тражени интеграл једначине (10) у § 35 у облику

$$\frac{\vec{\omega}}{\rho}=\frac{\omega_{10}}{\rho_0}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial a}+\frac{\omega_{20}}{\rho_0}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial b}+\frac{\omega_{30}}{\rho_0}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}. \tag{11}$$

Њему у скаларном облику одговарају тзв. ***Кошијеве једначине***

$$\begin{aligned}\frac{\omega_1}{\rho}&=\frac{\omega_{10}}{\rho_0}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\omega_{20}}{\rho_0}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\omega_{30}}{\rho_0}\frac{\partial x}{\partial c},\\ \frac{\omega_2}{\rho}&=\frac{\omega_{10}}{\rho_0}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\omega_{20}}{\rho_0}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\omega_{30}}{\rho_0}\frac{\partial y}{\partial c},\\ \frac{\omega_3}{\rho}&=\frac{\omega_{10}}{\rho_0}\frac{\partial z}{\partial a}+\frac{\omega_{20}}{\rho_0}\frac{\partial z}{\partial b}+\frac{\omega_{30}}{\rho_0}\frac{\partial z}{\partial c},\end{aligned} \tag{12}$$

које дају интеграле Хелмхолцових једначина.

Из векторске једначине (11), или из скаларних једначина (12) које јој одговарају, може се извести један врло важан закључак о кретању течности.

Наиме, из једначине (11) је очевидно, да, ако је у почетном тренутку $t=0$ за неки течни елемент $\vec{\omega}_0=0$, мора за тај исти елемент вектор $\vec{\omega}$ бити једнак нули и за сваки каснији тренутак времена. Обрнуто, ако у ма ком тренутку времена t важи $\vec{\omega}=0$, тај вектор је и у почетном тренутку морао бити једнак нули, тј. $\vec{\omega}_0=0$.

Према томе важи овај Лагранжев став о кретању течности:

Ако у уоченом делу идеалне и баротропне течности, на коју дејствују спољашње запреминске силе са потенцијалом, у одређеном тренутку времена нема честица у ротацији, онда их није било ни раније нити ће их у том делу течности бити касније.

Овај став показује да у идеалној и баротропној течности конзервативне силе не могу изазвати ротацију честица већ само неконзервативне спољашње силе или, ако се не ради о идеалној течности, онда силе трења (вискозност).

Лагранжев став може и друкчије да се формулише. При условима за које он важи биће за све честице уоченог дела течности стално $\vec{\omega}=0$, тј. $\operatorname{rot}\mathfrak{v}=0$. Одатле је јасно да се вектор брзине кретања течности може претставити као градијент неког скалара, тј.

$$\mathfrak{v}=-\operatorname{grad}\varphi, \tag{13}$$

где се скаларна функција положаја $\varphi=\varphi(x,y,z,t)$ зове ***потенцијал брзине***.

Према томе, може се Лагранжев став и овако исказати:

Ако брзине честица неког дела идеалне и баротропне течности, која се креће под утицајем конзервативних сила, имају у неком тренутку потенцијал, оне су га имале и раније, а имаће га и за сваки каснији тренутак.

У ствари Лагранж је свој став формулисао на овај други начин. Облик става у коме се показује да није било и неће бити ротације честица дао је прво Хелмхолц. Он је за нестишљиву течност закључио то из једначине (12) и § 35, што је очигледно недовољно. Касније се показало да став важи и за остале баротропне течности а да је еквивалентан првобитној Лагранжевој форми става. Ипак се и данас може у литератури наћи на два назива овог става — Лагранжев и Хелмхолцов став, према начину формулисања. Најубедљивији доказ става излази из Кошијевих једначина.

37. Таласно простирање малих поремећаја у течностима (брзина звука)

Пре свега потсетимо се из ранијих излагања да се течности могу сматрати као изотропна идеално еластична тела. Ако се још ради о идеалној течности, видели смо (§ 24), биће Ламеова константа еластичности μ једнака нули, а Хуков закон се своди на облик

$$p = -Ke_1, \tag{1}$$

где је p притисак у уоченој тачки течности, K коефицијент компресије, а e_1 кубна дилатација.

Из опште теорије о простирању поремећаја еластичне равнотеже у чврстим телима, према ранијем излагању (§ 20), проистиче да, како је за идеалне течности $\mu = 0$, у њима *не може бити* трансверзалних таласа, већ само лонгитудиналних који претстављају периодична згушњавања и разређивања средине.

Још о једној нарочитој чињеници мора се водити рачуна, то је: Ако желимо да једним општим разматрањем обухватимо све течности (капљиве и гасове), тада је веза (1) недовољна. Наиме, из ње проистиче да је, ако нема дилатације $e_1 = 0$, и притисак једнак нули. Међутим, ми знамо да код гасова у стању стабилне равнотеже увек постоји неки коначни притисак. Стога, да бисмо нашим проучавањем могли обухватити све идеалне течности, узећемо да је веза између притиска и дилатације течности одређена једначином

$$p = p_0 - Ke_1, \tag{2}$$

где би p_0 био онај притисак у течности који у њој влада у случају да се течност налази у равнотежном недилатираном стању ($e_1 = 0$). Вредност овог притиска се може разликовати за разне течности.

Посматрајмо сад мале поремећаје притиска, густине и брзине у некој тачки течности и њихово преношење кроз течну масу. Уочимо, рецимо, неку врло малу промену притиска dp. Тада из једначине (2) добијамо

$$p - p_0 = dp = -Ke_1. \tag{3}$$

Врло малој промени притиска одговара уопште и врло мала промена запремине, дакле и врло мала кубна дилатација e_1. Према томе, ако уочимо неки запремински елемент dV испуњен течношћу густине ρ тада, ако он претрпи неку бесконачно малу кубну дилатацију e_1, директном применом услова за континуитет масе добијамо

$$\rho\, dV = (1 + e_1)\, dV\, (\rho + d\rho)$$

одакле имамо у првој апроксимацији

$$e_1 = -\frac{d\rho}{\rho}. \tag{4}$$

Тако се с обзиром на једначину (3) добија

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{K}{\rho}. \tag{5}$$

Пођимо од таласне једначине (6) у § 20. Ако у тој једначини ставимо, према једначини (3)

$$e_1 = -\frac{p - p_0}{K},$$

пошто је p_0 константни равнотежни притисак, а K компресиона константа еластичности, добићемо таласну једначину

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \triangle p \tag{6}$$

или, с обзиром на једначину (5)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{dp}{d\rho} \triangle p. \tag{7}$$

Из ове једначине се може закључити да се мали поремећај притиска у течности уопште преноси брзином

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \tag{8}$$

Брзина простирања оваквих малих поремећаја који изазивају мале осцилације (у ваздуху *звучне таласе*) је брзина простирања звука. Да бисмо је одредили треба узети у обзир карактеристичну једначину дате течности.

На пр., за изотермни процес биће у случају простирања таласа кроз гасове, како знамо

$$p = \frac{p_0}{\rho_0} \rho,$$

одакле је

$$\frac{dp}{d\rho}=\frac{p_0}{\rho_0}.$$

Ако се ова вредност унесе у образац (8) добиће се као образац за брзину звука у ваздуху

(9) $$c=\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}},$$

где је p_0 нормални притисак атмосфере на морском нивоу на 0°C, а износи

$$p_0=1{,}033\ \mathrm{kg/cm^2}=1033.981\ \mathrm{gr/cm\ sec^2},$$

где је kg мера тежине а gr мера масе. Односна густина ваздуха је

$$\rho_0=1{,}293\cdot10^{-3}\ \mathrm{gr/cm^3},$$

па, према томе, за брзину звука у ваздуху добијамо

$$c=280\ \mathrm{m/sec},$$

што је, како знамо, и сувише мало.

Међутим, нетачност овог обрасца за одређивање брзине простирања малих поремећаја у ваздуху лежи у томе што је наша претпоставка изотермности процеса недовољна. Наиме, процес овог простирања кроз ваздух и гасове иде таквом брзином да се мора сматрати као топлотно изолован, дакле, адијабатски, јер је провођење топлоте слабо и споро. У том случају се мора узети карактеристична једначина за гасове у облику (9) у § 24

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(\frac{p}{p_0}\right)^n,$$

одн.

(10) $$\frac{dp}{d\rho}=\frac{1}{n}\,\frac{p_0}{\rho_0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{n}-1}\approx\gamma\,\frac{p_0}{\rho_0},$$

јер се због врло малих промена густине $\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{n}-1}$ незнатно разликује од јединице. Политропни коефицијент $\gamma=\frac{1}{n_a}$ је, како знамо, за двоатомне гасове и ваздух приближно 1,4.

Ако у таласну једначину (7) унесемо за $\frac{dp}{d\rho}$ вредност из једначине (10) добићемо тзв. *Лапласов (Laplace) образац* за одређивање брзине простирања звука у облику

(11) $$c=\sqrt{\gamma\,\frac{p_0}{\rho_0}},$$

који за брзину звука у ваздуху даје

$$c=332\ \mathrm{m/sec},$$

што се добро слаже са искуством.

Ова чињеница потврђује да је претпоставка о адијабатичности процеса била на свом месту.

Како је код капљивих, готово нестишљивих течности према једначини (11) у § 24

$$\frac{\rho}{\rho_0}=1+\frac{p}{K},$$

имаћемо за такве течности

$$\frac{dp}{d\rho}=\frac{K}{\rho_0}$$

тј.

(12) $$c=\sqrt{\frac{K}{\rho_0}},$$

а то је познати *Њутнов (Newton) образац* за одређивање брзине простирања малих поремећаја, то значи звука, у течностима уопште. Овај образац се може добити и директно из таласне једначине (6), ако се само узме у обзир чињеница да је за врло мало стишљиве течности промена густине ρ у односу на неку нормалну густину ρ_0 незнатна.

Дакле, ако се Њутнов образац сматра као општи и за капљиве течности и за гасове, видимо да се у случају изотермних процеса код гасова мора изједначити компресиони коефицијент еластичности са p_0, а у случају адијабатског процеса са γp_0. То показује да се за гасове компресиони коефицијент еластичности знатно разликује за изотермно и адијабатско стање гаса, што код чврстих и капљивих течних тела није случај.

Таласна једначина

(13) $$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=c^2\triangle p,$$

важи у потпуно истом облику и за преношење малих поремећаја густине ρ у течности (згушњавање и разређивање).

Заиста, за баротропну течност је

(14) $$\operatorname{grad} p=\frac{dp}{d\rho}\operatorname{grad}\rho=c^2\operatorname{grad}\rho,$$

и

(15) $$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{dp}{d\rho}\,\frac{\partial\rho}{\partial t}=c^2\,\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

где је c^2 константа за одређено нормално стање течности.

Према томе је

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} p = \triangle p = c^2 \triangle \rho ,$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} ,$$

што после уношења у једначину (13) даје

(16) $$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c^2 \triangle \rho ,$$

што смо и хтели да изведемо.

Најзад диференцијална једначина истог оваквог облика одређује и мале поремећаје у пољу брзине и то преко потенцијала брзине $\mathfrak{v} = -\operatorname{grad}\varphi$, *ако он постоји.*

Да бисмо то показали, потсетимо се које смо све претпоставке учинили при извођењу таласних једначина за притисак (13) и густину (16). *Прво*, да се кретање настало од поремећаја врши без утицаја спољашњих запреминских сила, или је тај утицај незнатан и занемарљив ($\mathfrak{F} = 0$). То је претпоставка под којом се уопште изводи таласна једначина. *Друго*, да се ради о врло малим поремећајима у течности са врло малим брзинама и врло малим променама брзине, услед чега се у основној једначини динамике идеалне течности може члан $(\mathfrak{v} \cdot \nabla)\mathfrak{v}$ занемарити као мала величина вишег реда у односу на $\dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}$. Наравно да се при поремећајима са великим брзинама, као при експлозијама, таква занемаривања не могу учинити. *Треће*, промене притиска и густине су такође врло мале, па се у једначини континуитета (7) у § 7 може члан $\mathfrak{v} \cdot \operatorname{grad}\rho$ занемарити, јер у том случају садржи чланове мале вишег реда.

То су, дакле, услови при којима су једначине (13) и (16) тачне, па, према томе, од њих не треба захтевати оно што оне не могу дати. Ако су сви наведени услови испуњени, тада се основна једначина динамике идеалне течности (7) у § 31 и једначина континуитета (7) у § 7 своде на једначине

(17) $$\rho \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} p = 0 ,$$

и

(18) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}\mathfrak{v} = 0 .$$

Стога, ако постоји потенцијал брзине $\mathfrak{v} = -\operatorname{grad}\varphi$, тада се ове две једначине могу написати у облику

(19) $$\rho_0 \operatorname{grad}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \operatorname{grad} p ,$$

и

(20) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_0 \triangle \varphi ,$$

где смо густину ρ сменили нормалном густином ρ_0, јер су варијације густине по претпоставци незнатне.

Једначина (19) може се, с обзиром на једначину (14), написати у облику

$$\operatorname{grad}\left(\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} - c^2 \rho\right) = 0 ,$$

одакле се после интеграције, ако се евентуална произвољна функција од t која се може појавити обухвати са φ, добија

$$\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = c^2 \rho .$$

Најзад се из једначине, која се добија диференцирањем ове једначине парцијално по t, тј. из једначине

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

и једначине (20) елиминацијом $\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ добија

(21) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \triangle \varphi ,$$

дакле, једначина по φ истог облика као и једначине (13) и (16), што оправдава наше тврђење да су и мали поремећаји брзине одређени истом таласном једначином.

Из једначина (17) и (18) могле би се директно извести и једначине (13) и (16) без осврта на општу таласну једначину преношења еластичних поремећаја.

На крају треба бити начисто с тим да се овде не ради о врло важним таласним кретањима у течностима чије је порекло дејство спољашњих сила, као што су уопште капиларни таласи, таласи плиме и осеке, бродски таласи итд. Сва ова таласна кретања су у ствари површински таласи који настају на површини течности (првенствено капљивих течности) и постепено се донекле преносе у унутрашњост течности. Оно таласно простирање малих поремећаја о коме је било речи еквивалентно је еластичним таласима у непрекидној еластичној средини и образују га просторни таласи. Наравно, они могу бити равански, на пр. у случају треперења ваздуха у цеви свирале, или сферни, ако се ради о поремећају у некој тачки хомогене средине.

Да су ови таласи искључиво лонгитудинални, поред закључка на основу $\mu=0$, може се показати и овим расуђивањем. Из једначине (14) види се да су $\operatorname{grad} p$ и $\operatorname{grad} \rho$ увек истог смера с једне стране, а с друге стране из једначине (17) видимо да је $\dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}$ колинеаран стално са $\operatorname{grad} p$ и супротног смера, а отуда се може закључити пошто су промене брзине врло мале да је и сам вектор брзине $\mathfrak{v}$ стално колинеаран супротног смера са $\operatorname{grad} p$. То све значи да се правац треперења, одређен вектором $\mathfrak{v}$, поклапа са правцем простирања таласа (разређивања и згушњавања) које је одређено са $\operatorname{grad} p$, дакле, таласи су заиста лонгитудинални.

38. Стационарно струјање идеалне течности. Бернулијев интеграл

Уочимо проблем стационарног струјања течности за које важи

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}=0, \quad \frac{\partial p}{\partial t}=0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t}=0. \tag{1}$$

У том случају се основна једначина динамике идеалне течности своди на једначину

$$(\mathfrak{v}\cdot\nabla)\,\mathfrak{v}=\mathfrak{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p, \tag{2}$$

а једначина континуитета (8) у § 7 на једначину

$$\operatorname{div}(\rho\,\mathfrak{v})=0. \tag{3}$$

Диференцијалне једначине (2) и (3) заједно са карактеристичном једначином $\rho=f(p)$ образују систем једначина који треба решити, да бисмо одредили $\mathfrak{v}$, p и ρ.

Ако спољашње запреминске силе $\mathfrak{F}$, одређене као увек на јединицу масе, имају потенцијал V, тј. ако је

$$\mathfrak{F}=-\operatorname{grad} V,$$

тада се може лако добити интеграл основне једначине (2) на овај начин.

Ако ставимо као и раније у сличним случајевима

$$P(p)=\int\frac{dp}{\rho}, \text{ тј. } \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p=\operatorname{grad} P \tag{4}$$

и узмемо у обзир да је, како знамо

$$(\mathfrak{v}\cdot\nabla)\,\mathfrak{v}=\operatorname{grad}\frac{v^2}{2}-(\mathfrak{v}\times\operatorname{rot}\mathfrak{v}), \tag{5}$$

тада се основна једначина динамике може написати у облику

$$\operatorname{grad}\frac{v^2}{2}-(\mathfrak{v}\times\operatorname{rot}\mathfrak{v})=\operatorname{grad} Q, \tag{6}$$

где је као и раније $Q=-(V+P)$.

Посматрајмо сад брзину течности дуж једне линије тока, или дуж неког врло танког млаза течности, и нека $\mathfrak{t}$ буде орт тангенте уочене линије тока у одређеној тачки. Ако једначину (6) помножимо скаларно са ортом $\mathfrak{t}$ добићемо

$$\mathfrak{t}\cdot\operatorname{grad}\frac{v^2}{2}=\mathfrak{t}\cdot\operatorname{grad} Q, \tag{7}$$

јер је $\mathfrak{t}\cdot(\mathfrak{v}\times\operatorname{rot}\mathfrak{v})=0$, због колинеарности вектора $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{v}$. Скаларни производи у овој једначини претстављају промене односних скалара при померању за ds дуж линије тока. Стога се једначина (7) може написати и у облику

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2}\right)=\frac{dQ}{ds},$$

или

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2}-Q\right)=0,$$

одакле се интеграцијом добија најзад с обзиром на вредност Q

$$\frac{v^2}{2}+V+P=C. \tag{8}$$

Написана једначина изражава *Бернулијев (Bernoulli) интеграл* (потиче од Данијела Бернулија) основне једначине динамике идеалне течности.

Лева страна једначине (8) остаје константна само дуж одређене линије тока, али вредности константе C су различите за разне линије тока уколико оне не полазе из исте тачке. За одређивање те константе за одређену линију тока треба знати почетне услове, а то значи да у почетном тренутку t_0 на једном одређеном пресеку уочене линије тока узмемо вредности v_0, V_0 и P_0 за v, V и P. Те вредности за пресек линије тока у почетном тренутку времена зову се и вредности полазног профила течности.

Вредност константе C биће, дакле

$$C=\frac{v_0^2}{2}+V_0+P_0, \tag{9}$$

па се Бернулијев интеграл може написати

$$\frac{v^2}{2}+V+P=\frac{v_0^2}{2}+V_0+P_0,$$

или

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) + (V - V_0) + \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho} = 0, \tag{10}$$

јер је

$$P - P_0 = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}.$$

За нестишљиву течност ($\rho = \text{const.}$) Бернулијев интеграл постаје

$$\frac{1}{2} v^2 + V + \frac{p}{\rho} = C, \tag{11}$$

или после одређивања произвољне константе C из полазног профила

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) + (V - V_0) + \frac{p - p_0}{\rho} = 0. \tag{12}$$

Бернулијев интеграл (8) претставља интеграл живе силе за стационарно струјање идеалне баротропне течности која се креће под дејством конзервативних спољашњих запреминских сила. Она исказује да је укупна енергија јединице масе константна дуж сваке линије тока, а има у општем случају различне вредности дуж разних линија тока. Укупну енергију чини кинетичка енергија $\frac{1}{2} v^2$, потенцијална енергија V и енергија притиска P.

Бернулијев интеграл се према потреби пише у разним видовима. Тако се, на пр., Бернулијев интеграл за нестишљиву течност (11) може, после измножавања са густином ρ, написати у облику

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho V = \rho C.$$

Ако константу C одредимо за полазни профил у коме је брзина $v = 0$ и потенцијал $V = 0$ добиће се $\rho C = p_0$, ако је p_0 притисак у полазном профилу, па се најзад може написати

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho V = p_0. \tag{13}$$

У овој једначини сви чланови на левој страни имају димензију притиска. Ако се спољашње силе могу занемарити ($V = 0$), тада се једначина (13) за притисак своди на

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0 \tag{14}$$

и показује да је у таквом случају највећи притисак у полазном профилу у коме је $v = 0$, а да је брзина највећа у случају $p = 0$, тако да израз $\sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}$ претставља граничну вредност брзине при датим условима.

Ако се ради о тешкој нестишљивој течности, случај који је за праксу врло важан, тада је

$$V = gz,$$

ако се триједар Декартових оса постави тако да је z-оса вертикална и оријентисана навише. У том случају Бернулијев интеграл (11) постаје

$$\frac{1}{2} v^2 + gz + \frac{p}{\rho} = C \tag{15}$$

или после одређивања произвољне константе

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) + g(z - z_0) + \frac{p - p_0}{\rho} = 0. \tag{16}$$

Једначина (15) је од основног значаја за технику, али се она тамо најчешће употребљује у облику који се добија после деобе те једначине убрзањем Земљине теже g, тј. у облику

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\sigma} = H, \tag{17}$$

где је $\sigma = \rho g$ специфична тежина уочене течности, а H нова произвољна константа која има димензију дужине, јер ту димензију имају и сви чланови на левој страни. Она се одређује из почетних услова. Поједини чланови на левој страни су: $\frac{v^2}{2g}$ – *брзинска висина* претставља висину коју може достићи материјална тачка бачена брзином v у празном простору у пољу Земљине теже вертикало навише; z – *геометриска висина* одређује висину положаја и $\frac{p}{\sigma}$ – *пијезометриска висина* показује висину коју мора имати неки стуб течности да би притисак на дно суда био p.

На крају подвлачимо још једном, да ако претпоставимо само стационарност струјања, Бернулијев интеграл важи само дуж појединих линија тока, одн. у врло танким млазевима – концима тока. Само, ако све линије сила полазе из исте тачке, или полазе из неког простора у коме су исти механички услови, тј. у коме течност мирује или се креће једнолико, биће вредност Бернулијеве константе за све линије тока иста, па она важи у том случају за читав простор, иначе не.

39. Последице Бернулијева интеграла

Ако су задовољени услови под којима важи Бернулијев интеграл било дуж појединих линија тока било у читавом простору течности, могу се извести из Бернулијева интеграла многи закључци који дају одговор на низ проблема.

a. Ограничење брзине тешке нестишљиве течности

За тешку нестишљиву течност Бернулијев интеграл има, на пр., облик дат једначином (16) у претходном параграфу и ако посматрамо течне честице на истој висини $z=z_0$, тада се тај интеграл може написати у облику

$$\frac{v_0^2}{2g}+\frac{p_0}{\sigma}-\frac{v^2}{2g}=\frac{p}{\sigma}.$$

Међутим, како је за течност увек $p\geqslant 0$, а густина је позитивна величина долазимо из те једначине до закључка да је за честице на истој висини горња граница брзине одређена неједначином

(1) $$\frac{v_0^2}{2g}+\frac{p_0}{\sigma}-\frac{v^2}{2g}\geqslant 0,\ \text{тј.}\ v^2\leqslant v_0^2+\frac{2p_0}{\rho}.$$

Видели смо већ да је највећа могућа брзина нестишљиве тешке течности при непрекидном току у случају да је брзина у полазном профилу $v_0=0$, кад је $p=0$ и да за $p\geqslant 0$ износи

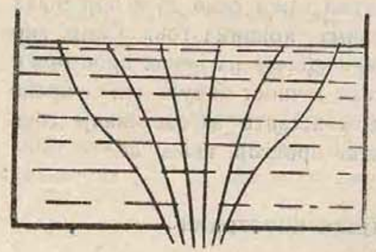
(2) $$v\leqslant\sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}.$$

Овакав случај имамо конкретно остварен, на пр., кад течност истиче из великог суда у коме се налази под атмосферским притиском p_0 у безваздушни простор ($p=0$).

За веће од ове брзине појављују се негативни притисци $p<0$, течност се кида и појављују у њој кавитације.

b. Истицање нестишљиве течности под дејством Земљине теже (Торичелијева теорема)

Посматрајмо сад истицање тешке нестишљиве течности из већег суда кроз неки мали отвор у зиду суда. Узмимо да су зидови суда врло танки, да се течност налази у отвореном суду под атмосферским притиском и да се одржава на истом нивоу висине изнад отвора, било сталним довођењем течности било на тај начин што је слободна површина течности врло велика те се при истицању ниво течности спушта сасвим споро (сл. 19). У том случају се може узети да је раван xOy нека раван паралелна слободној хоризонталној површини, а z-оса оријентисана вертикално навише као увек. Ако претпоставимо да је овакво истицање течности стационарно струјање, што се у потпуности слаже са искуством, тада је за читав простор течности константа Бернулијева интеграла једна иста. То је јасно отуда што све линије



Сл. 19

тока у овом случају полазе од слободне површине течности и иду према отвору. Како је слободна површина полазни профил за све линије тока, а на њој су у свима тачкама исти почетни услови, биће иста и вредност Бернулијеве константе која се израчунава помоћу тих услова. Дакле, за читаву течност је

$$C=\frac{1}{2}v_0^2+gz_0+\frac{p_0}{\rho},$$

где је p_0 атмосферски притисак на слободну површину. Ако се још узме у обзир да се према нашим претпоставкама брзина у полазном профилу може сматрати као једнака нули ($v_0=0$), Бернулијев интеграл (16), § 38 постаје

$$\frac{1}{2}v^2+g(z-z_0)+\frac{p-p_0}{\rho}=0.$$

Из ове једначине се може лако израчунати брзина v истицања течности кроз отвор на овај начин. Наиме, притисак на отвору је исти као и на слободну површину ($p=p_0$), а $z-z_0=h$ је дубина отвора под слободном површином, па се добија

$$v^2=2gh$$

одн.

(3) $$v=\sqrt{2gh}.$$

Овај образац се зове *Торичелијев* (*Torricelli*) *образац* и казује да је брзина истицања течности једнака брзини коју би добила тешка материјална тачка кад падне са висине h у празном простору. Он је од нарочитог значаја за технику струјања воде.

Ако са f обележимо површину отвора и са Q количину течности истекле у јединици времена имаћемо

(4) $$Q=\alpha fv=\alpha f\sqrt{2gh},$$

где је α тзв. *коефицијент контракције* чија је вредност између 0,61 и 0,64 одређена посматрањем.

Овакав резултат се објашњава на тај начин што се пресек млаза течности при истицању не поклапа са површином отвора. Контракција млаза пак објашњава се тиме, што течност из суда из свих праваца струји ка отвору и кад доспе до ивице отвора не може тренутно да промени свој правац у правац нормално на отвор. Да је ово тумачење тачно види се и отуда што у случају заокругљеног отвора и мало продуженог у цев ове контракције нема.

c. Истицање тешке течности из суда под дејством већег унутрашњег притиска

Уочимо неки суд великих димензија, у коме се налази нека течност под већим притиском од спољашњег притиска, и нека се на суду налази мали отвор према коме конвергирају течне честице и истичу напоље. Претпоставимо да се успоставља стационарно струјање, јер су димензије суда довољно велике да и поред истицања нема осетних промена у току времена. Узмимо још да је полазни профил далеко од отвора па се може сматрати да је почетна брзина v_0 једнака нули. Најзад, претпоставимо да се сила Земљине теже може занемарити ($V=V_0=0$) што је дозвољено увек кад се ради о гасовима или кад посматрамо ма коју хоризонталну линију тока.

У том случају се Бернулијев интеграл (10) у § 38 примењен на полазни профил и отвор суда своди на

$$\frac{1}{2}v^2+\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho}=0,$$

одн.

$$v^2=2\int_{p}^{p_0}\frac{dp}{\rho}, \tag{5}$$

где је p_0 унутрашњи већи притисак, p притисак у отвору суда, а v брзина истицања течности.

У изразу (5) брзина истицања течности је још утолико неодређена што се за сваки случај мора знати и карактеристична једначина, да би се могла успоставити веза између брзине истицања и разлике у притисцима, одн. густинама. Разликоваћемо три случаја:

1. У случају нестишљиве течности је густина $\rho=\text{const.}$ и образац (5) постаје

$$v^2=2\frac{p_0-p}{\rho},$$

одн.

$$v=\sqrt{\frac{2(p_0-p)}{\rho}}=\sqrt{\frac{2g(p_0-p)}{\sigma}}, \tag{6}$$

одакле се види оно што је потпуно природно да је истицање могуће само у случају $p_0>p$.

2. У случају да је течност стишљива, али је температура константна било у читавој течности било бар дуж уочене линије тока или конца тока, имаћемо изотермно стање за које важи Мариотов закон

$$\rho=\frac{\rho_0}{p_0}p.$$

Ако се ова вредност за ρ унесе у интеграл на десној страни једначине (5) и интеграција изврши добиће се

$$v^2=2\frac{p_0}{\rho_0}(\log p_0-\log p),$$

или

$$v^2=\frac{2p_0}{\rho_0}\log\frac{p_0}{p}. \tag{7}$$

Овај образац за истицање гасова под већим унутрашњим притиском зове се *Навијеов образац*.

3. Најзад, ако се стишљива течност креће тако, да услед брзине кретања и слабог провођења топлоте не постоји могућност изједначења температуре, већ се успоставља адијабатско стање, тада је према (9) у § 24

$$\rho=\rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Уношењем ове вредности за ρ у интеграл у једначини (5) добија се

$$\int_{p}^{p_0}\frac{dp}{\rho}=\frac{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho_0}\int_{p}^{p_0}\frac{dp}{p^{\frac{1}{\gamma}}}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]. \tag{8}$$

На тај начин у случају адијабатског процеса код гасова имамо за брзину истицања гасова образац

$$v^2=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]. \tag{9}$$

Овај образац је познат под именом *Цојнеров (Zeuner) образац*. И из њега је јасно, да пошто су p_0, ρ_0 и v_0^2 позитивне величине а политропни коефицијент $\gamma=\frac{1}{n}>1$, мора бити $p_0>p$.

Ако се узме у обзир да је за адијабатско стање гаса брзина простирања звука одређена једначином

$$c=\sqrt{\gamma\frac{p_0}{\rho_0}},$$

може се Цојнеров образац написати и у облику

$$v^2=\frac{2c^2}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]. \tag{10}$$

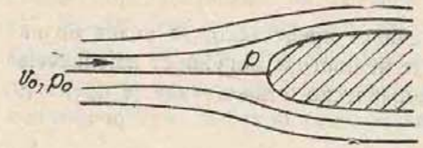
Кад гас истиче у скоро празан простор, дакле p тежи нули, из овог обрасца се добија горња граница за брзину истицања

$$v=c\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}. \tag{11}$$

При обичним условима истицања гасова Цојнеров образац најбоље одговара искуству.

d. Динамички притисак

Уочимо неко *једнолико* (хомогено транслаторно) струјање нестишљиве течности ($\rho_0 = \text{const.}$) брзине v_0 и нека се у течности налази неко чврсто тело као препрека струјању (сл. 20). Та препрека изазива устављање течности непосредно пред препреком и њено разилажење на све стране око тела. У самој средини препреке (гата, бране) струјање се потпуно умири ($v=0$). Та тачка се назива *гатна* или *критичка тачка.* Устављање течности у гатној тачки изазива нагло повећање притиска у тој тачки које се назива *динамички* или *гатни притисак.*



Сл. 20

Тачност овог тврђења може се доказати помоћу Бернулијева интеграла, одакле се изводи и образац за одређивање самог динамичког притиска на овај начин.

За линију тока која пролази кроз гатну тачку нека буде притисак у гатној тачки p, а у неком полазном профилу који је довољно удаљен од гатне тачке и налази се на истој висини са њом ($z=z_0$) нека он буде p_0. Тада за нестишљиву течност Бернулијев интеграл може да се напише у облику

$$\frac{p}{\rho_0} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0},$$

јер је у гатној тачки $v=0$. Из ове једначине се одмах добија за динамички притисак

$$p - p_0 = \frac{1}{2}\rho_0 v_0^2. \tag{12}$$

Овај образац нам даје динамички притисак $p-p_0$ и показује да се ради увек о повећању притиска, јер се на десној страни налази позитивна величина. Дакле, у тренутку удара течне честице о препреку притисак је увек већи од притиска у полазном профилу. Како се види, динамички притисак је директно пропорционалан густини течности и квадрату брзине уоченог једноликог струјања.

e. Стационарно струјање нестишљиве тешке течности кроз цев промењљивог пресека

Уочимо неку цев промењљивог пресека кроз коју течност струји стационарно. Она се може сматрати као млаз течности. Ако цев није велике дебљине и нема велике разлике у брзинама честица на појединим линијама тока, могу се за почетни пресек f_0 нормалан на млазу узети неке средње вредности v_0 и p_0, а исто тако за неки други нормални пресек млаза односне средње вредности v, p, јер је густина ρ

по претпоставци константна. Тада очигледно кроз оба пресека млаза протиче у јединици времена иста количина течности одређена до на чинилац ρ са

$$M' = vf = v_0 f_0, \tag{13}$$

што одмах следи из Гаусове теореме примењене на део цеви између оба пресека као на део соленоида.

Одавде се одмах види да је брзина обрнуто пропорционална пресеку, тј.

$$\frac{v}{v_0} = \frac{f_0}{f}, \tag{14}$$

што се после логаритмовања и диференцирања може написати и у облику

$$\frac{dv}{v} = -\frac{df}{f}, \tag{15}$$

који показује да кад пресек расте брзина опада и обрнуто.

Ако је цев још у хоризонталном положају ($z=z_0$) имаћемо Бернулијев интеграл (15) у § 38 у облику

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = C$$

и после уношења вредности за v из једначине (13) и пребацивања на другу страну

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{M'^2}{2f^2} + C.$$

Ако се у овој једначини диференцира лева и десна страна и M' поново замени из једначине (13) добиће се с обзиром на (15)

$$\frac{dp}{\rho v^2} = \frac{df}{f} = -\frac{dv}{v}. \tag{16}$$

Одавде се види да је притисак већи кад је пресек већи и обрнуто, а да притисак расте кад брзина опада и обрнуто.

Чињеница да на местима наглог сужавања цеви притисак нагло опада и може да постане, на пр., мањи од спољашњег атмосферског притиска, те ако је цев на том месту пробушена усисава у себе, позната је у експерименталној физици под именом *хидродинамичког парадокса.*

40. Поређење стационарних струјања стишљивих и нестишљивих течности

У овом поређењу стационарних струјања стишљивих течности (гасова) и нестишљивих (капљивих) течности одговорићемо на питање у којим границама и проблемима се стишљиве течности могу третирати као нестишљиве са довољном тачношћу.

У том циљу пођимо од Бернулијева интеграла у облику (10) у § 38 и напишимо га за случај тешке стишљиве течности у адијабатском стању што је најопштији случај у нашим разматрањима. Тада се добија с обзиром на једн. (8) у § 39

$$(1) \qquad \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) + g(z - z_0) + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right] = 0.$$

Ако ову једначину решимо, на пр., по притиску p, добићемо

$$(2) \qquad p = p_0\left[1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\rho_0}{p_0}\left\{\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) + g(z - z_0)\right\}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Ова једначина важи наравно само за притисак дуж одређене линије тока одн. уопште кад и Бернулијев интеграл. Да не би било раскидања течности и да се не би појавиле кавитације у течности мора бити $p \geqslant 0$, тј.

$$(3) \qquad \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) + g(z - z_0) \leqslant \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_0}{\rho_0}.$$

Ако десну страну једначине (2) развијемо у ред по биномном обрасцу, добићемо

$$p = p_0\left[1 - \frac{\rho_0}{p_0}\left\{\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) + g(z - z_0)\right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\gamma}\frac{\rho_0^2}{p_0^2}\left\{\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) + g(z - z_0)\right\}^2 - \cdots\right].$$

Из ове једначине добијамо у случају препреке у једноликом току стишљиве течности ($v = 0$; $z = z_0$) за притисак израз

$$p = p_0\left[1 + \frac{\rho_0}{2p_0}v_0^2 + \frac{\rho_0^2 v_0^4}{8\gamma p_0^2} + \cdots\right],$$

одакле за динамички притисак имамо

$$(5) \qquad p - p_0 = \frac{1}{2}\rho_0 v_0^2\left(1 + \frac{\rho_0 v_0^2}{4\gamma p_0} + \cdots\right).$$

Видели смо да је динамички притисак за нестишљиве течности био (једн. 12, § 39)

$$p - p_0 = \frac{1}{2}\rho_0 v_0^2,$$

то значи, ако се тим обрасцем послужимо и код гасова чинимо грешку приближно једнаку изразу

$$\frac{1}{2}\rho_0 v_0^2 \frac{\rho_0 v_0^2}{4\gamma p_0} = \frac{1}{2}\rho_0 v_0^2 \frac{v_0^2}{4c^2},$$

ако ставимо

$$c^2 = \gamma\frac{p_0}{\rho_0},$$

где је c брзина звука.

У процени грешке игра улогу питање, колика је грешка у датом проблему дозвољена. На пр., ако желимо да та грешка буде мања од 1%, тада је очигледно да мора бити

$$\frac{v_0^2}{4c^2} \leqslant \frac{1}{100},$$

тј.

$$v_0 \leqslant 0{,}2\,c.$$

Према томе, учињена грешка биће мања од 1%, ако је брзина стационарног једноликог струјања мања од 66,4 m/sec или 239 km/h.

Ако у једначину (1) унесемо густину место притиска по обрасцу

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma},$$

добићемо

$$(6) \qquad \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) + g(z - z_0) + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} - 1\right] = 0.$$

Ова једначина решена по ρ даје

$$\rho = \rho_0\left[1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\rho_0}{p_0}\left\{\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) + g(z - z_0)\right\}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

и кад се дејство Земљине теже може занемарити

$$(7) \qquad \rho = \rho_0\left[1 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma}\frac{\rho_0}{p_0}(v^2 - v_0^2)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

После развијања десне стране у ред по биномном обрасцу добијамо

$$(8) \qquad \rho = \rho_0\left[1 - \frac{\rho_0}{2\gamma p_0}(v^2 - v_0^2) + \cdots\right],$$

или

$$(9) \qquad \rho = \rho_0\left[1 - \frac{1}{2c^2}(v^2 - v_0^2) + \cdots\right].$$

Из обрасца (8), одн. (9), може се закључити да, при стационарном струјању стишљиве течности, кад брзина расте густина се смањује.

Да упоредимо и зависност брзине од притиска за нестишљиве и стишљиве течности.

Ако посматрамо нестишљиву течност ($\rho = \rho_0$) и узмемо два пресека неке линије тока на истој висини ($z = z_0$), Бернулијев интеграл (16) у § 38, може се написати у облику

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2(p_0 - p)}{\rho_0},$$

одн.

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2\triangle p}{\rho_0}}, \tag{10}$$

где смо ставили

$$p_0 - p = \triangle p. \tag{11}$$

У случају стишљиве течности добијамо за $z = z_0$ под претпоставком адијабатског процеса из Бернулијева интеграла (1) везу

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]. \tag{12}$$

С обзиром на (11) може се написати

$$p = p_0 - \triangle p,$$

па, према томе

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(1 - \frac{\triangle p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Кад се бином на десној страни развија у ред по биномном обрасцу добиће се

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\triangle p}{p_0} - \cdots \tag{13}$$

и ако се то унесе у једначину (12) добиће се за брзину струјања v у зависности од притиска p образац

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2\triangle p}{\rho_0}\left(1 + \frac{\triangle p}{2\gamma p_0} + \cdots\cdots\right)}.$$

Овај образац показује да брзина расте са сувишком притиска $\triangle p$. Другим речима, да би брзина дуж неке линије тока расла, мора притисак p да се смањује. Овај образац показује и то да се при истој разлици притисака у полазном и уоченом профилу брзина јаче мења у стишљивој течности. Та разлика у порасту брзине између нестишљивих и стишљивих течности углавном је одређена квадратним чланом по $\triangle p$ и може се занемарити кад је $\triangle p$ врло мало.

Најзад, да се осврнемо и на поређење стационарних струјања нестишљивих и стишљивих течности у цевима променљивог пресека, дакле, на питање да ли и под којим условима и за стишљиве течности постоји „хидродинамички парадокс".

Посматрајмо сад струјање стишљиве течности у хоризонталној цеви. Нека f_0 и f буду површине нормалних пресека у полазном и уоченом профилу, а ρ_0 и v_0, одн. ρ и v густине и брзине у тим профилима узете у облику средњих вредности. Тада се применом Гаусова става на део цеви између та два пресека добија

$$\rho f v = \rho_0 f_0 v_0 = M, \tag{14}$$

јер се уочени део цеви може сматрати као део млаза (соленоида).

Логаритмовањем овог израза и диференцирањем долазимо до једначине

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{df}{f} = 0. \tag{15}$$

Узмимо сад Бернулијев интеграл који се за овај случај (стишљива течност и $z = z_0$) може написати у облику

$$\frac{1}{2}v^2 + \int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho} = \frac{1}{2}v_0^2,$$

па ћемо после диференцирања из њега добити везу

$$v\,dv + \frac{dp}{\rho} = 0. \tag{16}$$

Најзад логаритмовањем и диференцирањем карактеристичне једначине за адијабатско стање гаса долазимо до једначине

$$\frac{dp}{p} = \gamma\frac{d\rho}{\rho}. \tag{17}$$

Из једначина (15), (16) и (17) може се лако извести тражена веза између пресека цеви, одн. млаза, и притиска који влада у том пресеку. Заиста, уношењем вредности за $\frac{dv}{v}$ и $\frac{d\rho}{\rho}$ из једначина (16) и (17) у једначину (15) долазимо до једначине

$$\frac{df}{f} = \frac{dp}{\rho v^2}\left(1 - \frac{\rho v^2}{\gamma p}\right),$$

или

$$\frac{df}{f} = \frac{dp}{\rho v^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), \tag{18}$$

где је $c = \sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}}$ брзина звука у уоченом пресеку, а не у полазном профилу.

Према томе, из ове једначине се види да притисак расте и код стишљивих течности са пресеком, али само док је

$$1 - \frac{v^2}{c^2} \geqslant 0,$$

тј.

$$v \leqslant c,$$

а то значи док је брзина струјања стишљиве течности (гаса) мања од односне брзине звука. Међутим, за брзине веће од брзине звука стишљиве течности се понашају супротно нестишљивим течностима. Тада већем пресеку одговара баш мањи притисак.

Из ових излагања је унеколико јасно да је брзина звука важна граница нарочито у погледу питања докле се извесни проблеми о стишљивим течностима могу третирати као проблеми о нестишљивим течностима са довољном тачношћу. Дакле, читав низ проблема о стишљивим течностима може се решавати и без обзира на стишљивост уколико су брзине знатно мање од односне брзине звука.

Стога се све брзине при проучавању стишљивих течности деле у *субакустичне* (мање од брзине звука) и *суперакустичне* (веће од брзине звука).

41. Потенцијално струјање идеалне течности. Лагранжев интеграл

За потенцијално струјање идеалне течности важи

$$\mathrm{rot}\, \mathfrak{v} = 0, \quad \text{тј.} \quad \mathfrak{v} = -\mathrm{grad}\, \varphi . \tag{1}$$

У том случају се основна једначина динамике идеалне течности у облику (8) у § 31, своди на једначину

$$-\mathrm{grad}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathrm{grad}\,\frac{v^2}{2} = \mathfrak{F} - \mathrm{grad}\, P , \tag{2}$$

кад се узме у обзир да су операција градијента и парцијално диференцирање по времену t независне једна од друге, те се могу разменити у реду, и кад се узме у обзир да за $\rho = f(p)$ имамо $\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\, p = \mathrm{grad}\, P$, где је $P = \int \frac{dp}{\rho}$.

Према томе, имамо даље

$$\mathfrak{F} = \mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}\, v^2 + P - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right), \tag{3}$$

што показује да код потенцијалног струјања сила *мора бити конзервативна* (градијент неког скалара), дакле,

$$-\mathrm{grad}\, V = \mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}\, v^2 + P - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right). \tag{4}$$

Интеграцијом ове једначине добија се

$$-V + D(t) = \frac{1}{2}\, v^2 + P - \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

где интеграциона константа D, како смо назначили, може зависити од времена t.

На тај начин се најзад добија овај интеграл основне једначине динамике идеалне течности

$$\frac{1}{2}\, v^2 + V + P - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = D(t) , \tag{5}$$

који се зове *Лагранжев интеграл*.

Овај интеграл важи за читав простор течности и није везан за поједине линије тока, али се његова вредност може мењати у току времена.

Ако је овакво потенцијално струјање још и стационарно, што значи да важи

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad D(t) = C, \tag{6}$$

где је C потпуно константно, тада се Лагранжев интеграл претвара у Бернулијев интеграл

$$\frac{1}{2}\, v^2 + V + P = C .$$

Разлика у односу на Бернулијев интеграл (8) у § 38, у ужем смислу је само у томе што се константа C односи сад увек на читав простор испуњен течношћу, а не само на поједину линију тока. Дакле, можемо закључити да је укупна енергија течности израчуната на јединицу масе константна за читав простор течности, ако се течност креће потенцијално и стационарно.

Лагранжев интеграл (5) може се с обзиром на једначине (1) написати и у облику

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right] + V + P = \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \tag{7}$$

где је $\Phi = \varphi + \int D(t)\, dt$.

Ова једначина заједно са једначином континуитета (5) у § 7 која се сад с обзиром на (1) може написати

$$\frac{d\rho}{dt} - \rho \triangle \Phi = 0, \tag{8}$$

и карактеристичном једначином

$$\rho = f(p), \tag{9}$$

образује систем од три једначине (две диференцијалне и једна коначна) из којих се могу израчунати функције Φ, p и ρ помоћу Ојлерових променљивих x, y, z и t.

Ако је течност нестишљива ($\rho = \text{const.}$), тада се горњи проблем своди само на одређивање две функције Φ и p из једначине

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right] + V + \frac{p}{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{10}$$

и једначине

$$\triangle \Phi = 0 \tag{11}$$

на коју се у том случају своди једначина континуитета (8). У ствари, у таквом случају читав проблем хидродинамике се своди на одређивање функције Φ која задовољава Лапласову једначину (11) и дате граничне и почетне услове.

У случају да је спољашња запреминска сила Земљина тежа, биће, како знамо, $V = gz$ (оса z оријентисана вертикално навише) и Лагранжев интеграл (5) постаје

$$\frac{1}{2} v^2 + gz + P - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = D(t), \tag{12}$$

а кад је течност још и нестишљива имамо

$$\frac{1}{2} v^2 + gz + \frac{p}{\rho} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = D(t). \tag{13}$$

42. Хармониске функције и њихове основне особине

У случају потенцијалног струјања нестишљиве течности, видели смо, биће проблем у ствари решен, ако се реши Лапласова једначина

$$\triangle \Phi = 0. \tag{1}$$

У том случају је поље брзине течности Лапласово, јер је у свима тачкама тога поља $\operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0$ и $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$.

Свако решење Φ Лапласове једначине (1) зове се *хармониска функција*. Нека функција је, међутим, хармониска у некој тачки, ако постоје други парцијални изводи те функције, ако су непрекидни у уоченој тачки и ако задовољавају Лапласову једначину. Функција је хармониска у читавој области, ако је хармониска у свакој унутрашњој тачки те области.

Иако је поље брзине течности Лапласово само у извесним нарочитим случајевима, постоји ипак читав низ проблема, који се са довољном тачношћу могу решити помоћу хармониских функција. Стога ћемо овде навести извесне основне особине тих функција.

Тако, ако су φ_1 и φ_2 две функције хармониске у некој затвореној области запремине V ограниченој површином S, тада мора бити

$$\oint_S (\varphi_2 \nabla \varphi_1 - \varphi_1 \nabla \varphi_2) \cdot d\mathfrak{f} = 0, \tag{2}$$

где је као обично $d\mathfrak{f}$ управљени површински елемент оријентисан у спољашњи простор.

Да бисмо ово доказали поступићемо на овај начин. Површински интеграл на левој страни по затвореној површини S може се на познати начин трансформисати по Гаусовој теореми у запремински по запремини V, па ће се добити једначина

$$\oint_S (\varphi_2 \nabla \varphi_1 - \varphi_1 \nabla \varphi_2) \cdot d\mathfrak{f} = \int_V (\varphi_2 \triangle \varphi_1 - \varphi_1 \triangle \varphi_2)\, dV,$$

која изражава тзв. главни Гринов (Green) став. Како је у уоченом простору свуда по претпоставци $\triangle \varphi_1 = 0$ и $\triangle \varphi_2 = 0$, своди се десна страна ове последње једначине на нулу чиме је наше тврђење доказано.

Посматрајмо нарочити случај, кад је

$$\varphi_1 = \varphi, \quad \varphi_2 = \frac{1}{r},$$

где је r растојање ма које тачке $Q(\xi, \eta, \zeta)$ од тачке $P(x, y, z)$. Ако та тачка P лежи у уоченој области ограниченој површином S, можемо је замислити окружену неком сфером врло малог полупречника δ са центром у тачки P, па ће $\frac{1}{r}$ бити хармониска функција у области између те сфере S_1 и затворене површине S, јер $\frac{1}{r}$, како знамо задовољава Лапласову једначину (1).

φ нека буде хармониска функција у читавој области ограниченој са S. Према томе, на основу једначине (2), пошто је простор у коме су обе функције φ и $\frac{1}{r}$ хармониске ограничен површинама S и S_1, може се сад написати

$$\oint_S \left(\frac{1}{r} \nabla \varphi - \varphi \nabla \frac{1}{r}\right) \cdot d\mathfrak{f} + \oint_{S_1} \left(\frac{1}{r} \nabla \varphi - \varphi \nabla \frac{1}{r}\right) \cdot d\mathfrak{f} = 0. \tag{3}$$

Други од ових интеграла може се раставити у збир од два интеграла, тј.

$$\oint_{S_1} \left(\frac{1}{r} \nabla \varphi - \varphi \nabla \frac{1}{r}\right) \cdot d\mathfrak{f} = \oint_{S_1} \frac{1}{r} \nabla \varphi \cdot d\mathfrak{f} - \oint_{S_1} \varphi \nabla \frac{1}{r} \cdot d\mathfrak{f}.$$

За израчунавање првог интеграла од ова два треба обратити пажњу на чињеницу да је $\frac{1}{r}$ на површини сфере S_1 константно и једнако $\frac{1}{\delta}$, па је, према томе,

$$\oint_{S_1} \frac{1}{r} \nabla \varphi \cdot d\mathfrak{f} = \frac{1}{\delta} \oint_{S_1} \nabla \varphi \cdot d\mathfrak{f}.$$

Ако још овај интеграл претворимо у запремински по Гаусовом ставу добићемо

$$\frac{1}{\delta}\oint_{S_1} \nabla \varphi \cdot d\mathfrak{f} = \frac{1}{\delta}\int_{V_1} \triangle\varphi \, dV = 0,$$

где је V_1 запремина лопте ограничене површином S_1, а $\triangle\varphi = 0$ по претпоставци.

Интеграл

$$\oint_{S_1} \varphi \nabla \frac{1}{r} \cdot d\mathfrak{f}$$

може се написати

$$\oint_{S_1} \varphi \, d\omega,$$

јер је

$$\nabla \frac{1}{r} \cdot d\mathfrak{f} = \frac{1}{r^2} df = d\omega,$$

где смо са $d\omega$ обележили просторни угао под којим се из тачке P види површински елемент df сфере S_1. Знак је плус, јер је орт $\mathfrak{r}_0$ супротан орту спољашње нормале чију оријентацију има управљени површински елемент $d\mathfrak{f}$. Ако се полупречник δ сфере S_1 смањује, добиће се као гранична вредност овог интеграла

$$\oint_{S_1} \varphi \, d\omega = \varphi(P) \oint_{S_1} d\omega = 4\pi\varphi(P),$$

где је са $\varphi(P)$ обележена вредност функције φ у тачки P области.

На тај начин се из једначине (3) добија на основу Гринова става

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi}\oint_S \left(\frac{1}{r}\nabla\varphi - \varphi\nabla\frac{1}{r}\right) \cdot d\mathfrak{f}. \tag{4}$$

Ако се тачка P налази изван уочене области ограничене затвореном површином S, тада ће у самој области у свима тачкама и φ и $\frac{1}{r}$ бити хармониске функције, па према томе за тај случај имамо на основу једначине (2)

$$\oint_S \left(\frac{1}{r}\nabla\varphi - \varphi\nabla\frac{1}{r}\right) \cdot d\mathfrak{f} = 0. \tag{5}$$

Из ових излагања на основу главног Гриновог става види се да је вредност функције φ, која је хармониска у простору ограниченом затвореном површином S, у свакој тачки у унутрашњости тог простора одређена вредношћу функција φ и $\frac{1}{r}$ и њихових градијената у тачкама граничне површине S.

Даље, из Лапласове једначине (1) после парцијалне диференцијације на пр., по x добија се

$$\frac{\partial}{\partial x}\triangle\varphi = \triangle\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0,$$

јер се ред оператора $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\triangle$ може очигледно разменити. Исто тако је

$$\triangle\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \quad \triangle\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

Дакле, ако је φ хармониска функција у некој тачки или некој области и сви њени парцијални изводи су хармониске функције у тој тачки, одн. у тој области.

Ако се Гаусов став о претварању површинских интеграла у запреминске примени на векторску функцију $\mathfrak{v} = \varphi_1 \nabla \varphi_2$, добиће се, како је познато

$$\oint_S \varphi_1 (\nabla\varphi_2 \cdot d\mathfrak{f}) = \int_V (\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 + \varphi_1 \triangle \varphi_2) \, dV, \tag{6}$$

па, ако је $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ и φ хармониска функција у области ограниченој са S, тј. $\triangle\varphi = 0$, имаћемо

$$\oint_S \varphi (\nabla\varphi \cdot d\mathfrak{f}) = \int_V (\nabla\varphi)^2 \, dV. \tag{7}$$

За функцију φ константну на граничној површини S биће

$$\int_V (\nabla\varphi)^2 \, dV = 0,$$

а то значи да је $\nabla\varphi$ идентички једнако нули у читавој уоченој области, дакле, φ је константно у читавој области.

Из једначине (7) исто тако јасно је, да ако је $\nabla\varphi$ једнако нули у свима тачкама граничне површине мора φ бити константно у читавој области.

Функција φ не може имати, у простору ограниченом површином S у коме је хармониска, ни максималну ни минималну вредност. Заиста, претпоставимо да је вредност хармониске функције φ у некој тачки P уочене области min. Замислимо око ове тачке као центра описану сферу S_1 довољно малог полупречника да она потпуно лежи у области S. Тада је јасно, с обзиром на чињеницу да је φ хармониска функција, да мора бити

$$\oint_{S_1} \nabla\varphi \cdot d\mathfrak{f} = \int_{V_1} \triangle\varphi \, dV = 0, \tag{8}$$

где V_1 означава запремину ограничену сфером S_1, а пошто је у читавом простору ограниченом површином S, па наравно и у простору ограниченом сфером S_1, свуда $\triangle\varphi = 0$. Међутим, ако функција φ има у тачки P, на пр., min. тада мора постојати неки правац у коме φ расте, па је према томе $\nabla\varphi > 0$. Површински пак интеграл (8) чија би подинтегрална функција понекад била позитивна а никако негативна не би могао бити једнак нули, што значи да у тачки P не може бити минимум. На исти се начин показује да функција φ не може ни у једној тачки области имати ни max.

Из ових разматрања је даље јасно да вредност функције φ у области где је функција хармониска не може имати ни на некој линији или површини вредности веће него у околини те линије или површине. Исто тако вредност функције φ не може бити ни у некој ма како малој запремини области већа или мања него у осталом простору, одакле се да закључити да хармониска функција, за коју се зна да има константну вредност у неком ма како малом делу области, мора имати константну вредност у читавој области.

Одмах се може закључити и да, ако је нека функција φ хармониска у некој области а на граничној површини S те области је једнака нули у свима тачкама, она мора бити идентички једнака нули у читавој области. Наиме, већ смо видели да у том случају функција φ мора бити константна у читавој области, тј. $\varphi = C$. Константа C, међутим, не може бити различита од нуле, јер би у том случају у унутрашњости уочене области вредност функције свуда била већа него на граничној површини и према томе на граничној површини $\nabla\varphi < 0$, што се противи претпоставци.

После ових излагања може се доказати и став, да су две функције φ_1 и φ_2 у некој области једнаке, ако су у њој хармониске и имају на њеној граничној површини једнаке вредности. Наиме, у том случају би њихова разлика била хармониска функција у читавој уоченој области, а нула на површини која ограничава област. То значи да она мора бити идентички једнака нули у читавој области што и треба доказати.

Простор који се налази изван неке области ограничене затвореном површином S и простире се у бескрајност чини неограничену област. Нека функција φ је хармониска у неограниченој области, ако је хармониска у свакој њеној произвољно изабраној ограниченој подобласти, а у бесконачности тежи нули као бесконачно мала величина.

43. Извор. Изворни пар

Већ смо поменули да нестишљива течност која струји потенцијално у неком пољу мора долазити из простора у коме се налазе извори и одлазити у простор у коме су понори, јер у самом том пољу не може бити ни извора ни понора. Уочимо стога извор у некој тачки простора O, замислимо га окружена сфером врло малог полупречника и издвојена од осталог простора, па потражимо хармониску функцију φ која у таквом случају одређује поље брзине те течности у простору ван мале сфере. Ако се узме да су услови за простирање течности у свима правцима око датог извора исти, мора постојати потпуна симетрија и тражена хармониска функција зависити само од r, где је r растојање уочене тачке P од извора O, дакле,

$$\varphi = \varphi(r). \tag{1}$$

Међутим, ова функција као хармониска мора задовољавати једначину

$$\triangle\varphi(r) = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi(r) = 0.$$

Како је

$$\operatorname{grad}\varphi(r) = \frac{d\varphi}{dr}\mathfrak{r}_0 = \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\mathfrak{r},$$

биће условна једначина

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\mathfrak{r}\right) = \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2\varphi}{dr^2} = 0, \quad \text{одн.}\ \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = 0.$$

Интеграцијом овог израза добијамо

$$r^2\frac{d\varphi}{dr} = A,$$

одн.

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{A}{r^2}, \tag{2}$$

где је A произвољна интеграциона константа. Најзад после још једне интеграције добићемо за тражену функцију φ израз

$$\varphi = -\frac{A}{r}, \tag{3}$$

где је неодређена интеграциона константа изостављена и увек се може одредити из допунских граничних услова. На пр., ако је вредност хармониске функције у бесконачности једнака нули биће ова интеграциона константа једнака нули итд.

Ова функција је бесконачно велика само у тачки O и та је тачка сингуларна тачка функције φ. У читавом осталом простору ван сфере којом смо издвојили тачку O функција дефинише Лапласово поље, тј. потенцијално кретање нестишљиве течности. Еквискаларне површине $\varphi = \text{const.}$ су концентричне сфере са центром у извору O; линије тока су праве које полазе из центра O, а соленоиди — конуси са врхом у тачки O. Потенцијал овог струјања је сличан Њутновом потенцијалу изоловане материјалне тачке.

Ако је $A < 0$, течне честице се удаљују од извора, као да течност извире стварно из те тачке, па се тада каже да је тачка O *позитивни извор* или само *извор*. Ако је $A > 0$, течне честице се примичу тачки O да би у њој нестале; таква се тачка назива *негативни извор* или *понор*.

Протицање m течности кроз ма коју затворену површину, која опкољава извор O, не зависи од облика површине, па ћемо га, јер је најлакше, израчунати кроз неку сферу S_1 полупречника ρ са центром у O. Тада имамо

$$(4)\qquad m=\oint_{S_1}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}=-\oint_{S_1}\operatorname{grad}\varphi\cdot d\mathfrak{f}=-\oint_{S_1}(\operatorname{grad}\varphi\cdot\mathfrak{n})\,df=$$

$$=-\oint_{S_1}\frac{d\varphi}{dr}\,df=-A\oint_{S_1}\frac{1}{r^2}\,df=-\frac{A}{\rho^2}\,4\pi\rho^2=-4\pi A;$$

дакле,

$$(5)\qquad \varphi=\frac{m}{4\pi r}.$$

Величина протицања m зове се *јачина* или *издашност* извора.

Ако имамо, на пр., више дискретно распоређених извора $O_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ и ако претпоставимо да њихове јачине m_i не зависе једна од друге, јасно је да потенцијал φ у некој тачки M простора може бити облика

$$(6)\qquad \varphi=\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i}+\psi(x,y,z),$$

где смо са r_i обележили растојање тачке M од појединих извора O_i и где је ψ нека функција која је хармониска у читавом простору, јер у пољу нема више извора а струјање ове нестишљиве течности је потенцијално. Како брзина простирања течности у оваквом пољу мора у бесконачности бити константна, на пр., једнака нули, то из

$$(\operatorname{grad}\varphi)_\infty=(\operatorname{grad}\psi)_\infty$$

закључујемо да је $\operatorname{grad}\psi=\text{const.}$, одн. једнак нули и да према томе мора функција ψ бити константна, тј. једнака нули.

На тај начин се потенцијал φ у ма којој тачки M простора у коме се налази n извора дискретно распоређених може изразити у облику

$$(7)\qquad \varphi=\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i}.$$

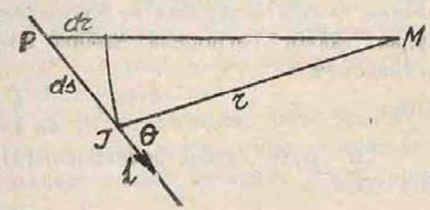
Ова функција φ овако дефинисана, хармониска је у читавом простору изузев самих извора (одн. понора). Лако је ово уопштити и на случај непрекидне изворне области као порекла потенцијала струјања нестишљиве течности.

Комбинација једног извора J и једног понора P истих јачина $(m>0)$ по апсолутној вредности, а на бескрајно малом растојању ds

назива се *изворни пар (дублет, дипол)*. Производ $m\,ds$ назива се *моћност* изворног пара и треба да има коначну вредност. Не можемо да не подвучемо оно што стално треба имати пред очима да овде „бескрајно мало растојање" значи врло мало растојање у поређењу са димензијама поља које проучавамо.

Права која пролази кроз изворни пар а оријентисана је ортом $\mathfrak{t}$ од понора ка извору (сл. 21) зове се *оса изворног пара*.

Како се течност креће од извора ка понору а градијент је супротно брзини оријентисан, то је оса пара оријентисана као градијент.



Сл. 21

Наш задатак се сад састоји у томе, да за потенцијално струјање нестишљиве течности, које настаје егзистенцијом само једног изворног пара у простору, одредимо потенцијал.

У том циљу уочимо неку тачку M простора и одредимо вредност потенцијала у тој тачки. Тада ћемо на основу једначине (7) имати

$$\varphi=\frac{m}{4\pi r}-\frac{m}{4\pi(r+dr)},$$

одн.

$$(8)\qquad \varphi=\frac{m\,dr}{4\pi r(r+dr)}.$$

Како dr зависи од положаја тачке M, оно је промењиво и може се изразити помоћу ds и угла θ који образује оса пара са потегом тачке M у извору J (види слику). Тако са слике одмах добијамо

$$dr=ds\cos(\theta+d\theta),$$

па се, према томе једначина (8) може изразити у облику

$$\varphi=\frac{m\,ds\cos(\theta+d\theta)}{4\pi r(r+dr)}.$$

Ако моћност изворног пара $m\,ds$ обележимо са μ и задржимо се на првој апроксимацији, добићемо за φ најзад израз

$$(9)\qquad \varphi=\frac{\mu\cos\theta}{4\pi r^2}.$$

На тај начин се види да потенцијал φ у уоченој тачки M зависи од растојања изворног пара r и угла θ.

Еквипотенцијалне површине су очигледно обртне површине чија је оса оса изворног пара. У једној од меридијанских равни у којој бисмо осу изворног пара узели за поларну осу, а r и θ за поларне координате имали бисмо као једначину еквипотенцијалних линија

$$\frac{\cos\theta}{r^2}=C.$$

Ако су извори непрекидно распоређени по некој површини, тада се, као јачина извора непрекидно распоређених по површинском елементу df, сматра $m\,df$, где сад m одговара тзв. *изворној густини*, тј, јачини извора непрекидно распоређених по јединици површине. Потенцијал таквог распореда извора по некој површини S одређен је једначином

(10) $$\varphi=\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{m\,df}{r}.$$

Са друге стране потенцијал (9) изворног пара може се написати и у облику

(11) $$\varphi=-\frac{\mu}{4\pi}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds},$$

јер је

$$\frac{\cos\theta}{r^2}=\frac{1}{r^2}\,(\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{r}_0)=\frac{1}{r^2}\,(\mathfrak{t}\cdot\operatorname{grad}r)=\frac{1}{r^2}\,\frac{dr}{ds}=-\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds},$$

где $\frac{d}{ds}$ означава извод у правцу осе пара.

Ако имамо посла са непрекидним распоредом таквих изворних парова по површини да је оса сваког од тих изворних парова нормала површине у односној тачки, тада изворним паровима на површинском елементу df одговара моћност $\mu\,df$, где је сад μ *густина моћности* изворних парова, одн. моћност изворних парова непрекидно распоређених по јединици површине. У том се случају за потенцијал, који ствара неки непрекидни распоред изворних парова по површини S чије су осе нормале те површине, може написати

(12) $$\varphi=-\frac{1}{4\pi}\int_S\mu\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\,df,$$

при чему смо још претпоставили да су осе свих изворних парова оријентисане као спољашње нормале на површину.

Са овим појмовима може се једначина (4) у § 42 из теорије потенцијала протумачити хидродинамички на овај начин. Наиме та једначина се може написати у облику

(13) $$\varphi=\frac{1}{4\pi}\oint_S\frac{\frac{d\varphi}{dn}}{r}\,df-\frac{1}{4\pi}\oint_S\varphi\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\,df.$$

Према томе, први интеграл се може протумачити као потенцијал који потиче од извора густине $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ непрекидно распоређених по површини S, а други, као потенцијал који ствара непрекидни распоред изворних парова густине φ по површини S тако, да су осе свих парова нормале те површине.

44. Равно потенцијално струјање идеалне течности. Функција тока. Комплексни потенцијал

Под *равним струјањем* разуме се такво кретање течности за које се може претпоставити да се врши на исти начин у свима равнима паралелним некој одређеној непокретној равни. Дакле, брзине свих течних честица паралелне су истој равни, а брзине свих течних честица на истој нормали на тој утврђеној равни једнаке су.

И заиста, то је стварно случај, на пр., са кретањем тешке течности у каналу чије су стране равне и вертикалне, а дно равно и хоризонтално, или, на пр., у случају ротације тешке течности у кружном цилиндру са вертикалним изводницама, итд.

Ако се, дакле, у случају оваквог кретања, утврђена раван узме за xOy раван, биће координата v_3 свих течних честица једнака нули, а две остале v_1 и v_2 могу зависити само од x, y и t, тј.

$$\mathfrak{v}=v_1\,\mathfrak{i}+v_2\,\mathfrak{j}.$$

Уопште читава слика кретања одређена је кретањем у само једној равни, на пр., у равни $z=0$. Поље брзина је равно. Оно што се односи на тачку важи и за праву нормалну на утврђеној равни кроз уочену тачку. Оно што се односи на линије, важи и за цилиндарске површине чије су изводнице нормалне на утврђеној равни, а чије су директрисе уочене линије, итд.

Под *протицањем* кроз неку линију L у равни $z=0$ разуме се, по дефиницији, протицање кроз део односне цилиндарске површине између равни $z=0$ и $z=1$.

Линије тока и трајекторије течних честица налазе се у равнима паралелним равни $z=0$.

У овом смислу се упрошћавају и једначине кретања и једначина континуитета.

Посматрајмо равно кретање *нестишљиве* течности. У том случају услов нестишљивости (2) у § 25 се своди на

(1) $$\operatorname{div}\mathfrak{v}=\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}=0,$$

а то се може написати и у облику

(2) $$\frac{\partial}{\partial x}(-v_1)=\frac{\partial}{\partial y}v_2.$$

Ова једначина је, међутим, услов да диференцијални израз

(3) $$v_2\,dx-v_1\,dy$$

буде тотални диференцијал неке функције $\psi(x,y)$, па се може написати

$$v_1 = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_2 = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{4}$$

а у случају нестационарног струјања може се t сматрати као параметар, па одређивање функције ψ изводити за сваки тренутак времена посебно.

Ове једначине дефинишу функцију ψ са тачношћу до неке адитивне константе или неке произвољне адитивне функције од t, ако v_1 и v_2 зависе експлицитно од t.

На тај начин може се израз (3) написати у облику

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = d\psi. \tag{5}$$

Овако дефинисана функција положаја ψ зове се *функција тока*, јер једначина $\psi = \text{const.}$ одређује линије тока. Другим речима, еквискаларне линије скалара ψ су линије тока у пољу равног струјања нестишљиве течности.

Ово тврђење се може лако проверити. Наиме, у случају равног струјања течности, линије тока биће одређене диференцијалном једначином

$$\frac{dx}{v_1} = \frac{dy}{v_2}, \tag{6}$$

тј. једначином

$$v_2\,dx - v_1\,dy = 0, \tag{7}$$

а то значи с обзиром на (4) и (5)

$$d\psi = 0,$$

одакле имамо као коначну једначину линија тока

$$\psi = \text{const.} \tag{8}$$

Ако је равно струјање нестишљиве течности још и потенцијално, дакле

$$\mathfrak{v} = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathfrak{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathfrak{j} = v_1\mathfrak{i} + v_2\mathfrak{j}, \tag{9}$$

тада је с обзиром на услов нестишљивости

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \triangle\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Међутим, на основу једначине (4) може се за ротор брзине нестишљиве течности у случају равног кретања написати

$$\operatorname{rot}\mathfrak{v} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\mathfrak{k} = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\mathfrak{k} = \triangle\psi\mathfrak{k}. \tag{10}$$

То значи, ако је струјање потенцијално ($\operatorname{rot}\mathfrak{v} = 0$) мора бити и

$$\triangle\psi = 0. \tag{11}$$

Одавде се види да су и потенцијал брзине φ и функција тока ψ хармониске функције од две променљиве x и y.

Дакле, у случају равног потенцијалног струјања нестишљиве течности, упоређивањем вредности за координате v_1 и v_2 брзине струјања из једначина (4) и (9) добија се између потенцијала φ и функције тока ψ веза

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{12}$$

Из ових једначина произлази тачност једначине

$$\operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad}\psi = 0, \tag{13}$$

која показује да се еквискаларне линије $\varphi = \text{const.}$ и линије тока $\psi = \text{const.}$ секу у свим тачкама поља под правим углом. Оне, дакле, образују *ортогоналну мрежу* кривих у равни $z = 0$.

Замислимо сад неко такво кретање течности чије је поље брзине одређено једначином

$$\mathfrak{V} = -\operatorname{grad}\psi, \tag{14}$$

што је очигледно могуће, пошто је и ψ хармониска функција. У том случају функције φ и ψ само мењају улоге, тј. линије $\psi = \text{const.}$ биће еквискаларне линије, а $\varphi = \text{const.}$ линије тока. То значи, да мрежа линија одређена тим функцијама остаје непромењена. Из тог разлога се функција ψ зове потенцијалу φ *коњуговани потенцијал*. Обрнуто је наравно за потенцијал ψ функција φ коњуговани потенцијал.

Веза између функција φ и ψ дата једначинама (12) показује да се функције φ и ψ могу сматрати као реални и имагинарни део неке аналитичке функције w комплексне променљиве $z = x + iy$, тј.

$$w = \varphi + i\psi = f(z). \tag{15}$$

Наиме, једначине (12) су познате *Коши-Риманове (Cauchy-Riemann) једначине* које морају задовољавати реални и имагинарни део функције (15) да би она била *аналитичка*. И заиста услов за аналитичност функције w комплексне променљиве z лежи у томе да вредност извода w по z не зависи од пута којим се вредност z приближује изабраној вредности. Према томе, на пр., при приближавању паралелно x-одн. y-оси имамо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}f(z) &= f'(z)\frac{\partial z}{\partial x} = f'(z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y}f(z) &= f'(z)\frac{\partial z}{\partial y} = if'(z) = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial y} \end{aligned} \tag{16}$$

и ако у оба случаја треба да се добије иста вредност за $f'(z)$ мора бити

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial y} = i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}\right), \tag{17}$$

одакле се одмах добијају једначине (12), што смо и хтели да покажемо.

Функција w зове се *комплексни потенцијал*. Дакле, ако је дат комплексни потенцијал равног струјања нестишљиве течности, еквискаларне линије и линије тока добијају се одвајањем реалног и имагинарног дела тог потенцијала.

Израз

$$u = -\frac{dw}{dz}$$

зове се *комплексна брзина*. Знак минус се ставља зато што је потенцијал брзине у ствари $-\varphi$ а не φ. Назив брзина има овај израз стога што се с обзиром на прву од једначина (16) може написати

$$u = -\frac{dw}{dz} = -f'(z) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{18}$$

а с обзиром још на једначине (12) и (9)

$$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_1 - i v_2. \tag{19}$$

Из ове последње једначине имамо

$$|u| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \tag{20}$$

Дакле, модул комплексне брзине једнак је интензитету брзине уочене течне честице. Сам комплексни број u одређује, у ствари, ону тачку равни која је симетрична крају вектора брзине v са почетком у почетку координатног система у односу на x-осу. Стога се комплексна брзина зове и *конјуговано комплексна брзина*.

45. Развијање комплексног потенцијала у ред. Криволиниски интеграли у комплексној равни

Пре но што уочимо неки одређени пример, морамо се упознати са неким основним ставовима о аналитичким функцијама комплексне променљиве.

Ако аналитичка функција $f(z)$ има у некој тачки комплексне равни одређену коначну вредност, непрекидна је и има одређени извод, за њу се каже да је *холоморфна* у тој тачки; сама та тачка пак зове се *обична тачка* уочене функције. Ако су све тачке неке области комплексне равни обичне тачке дате функције она је холоморфна у тој области. Најзад, ако је функција $f(z)$ холоморфна у свим тачкама

комплексне равни она је *цела*. Коначне тачке комплексне равни у којима вредност аналитичке функције $f(z)$ постаје бесконачно велика зову се њени *полови*. Оне пак тачке комплексне равни, које су карактерисане тиме што по обиласку такве тачке по некој контури функција мења своју вредност зову се *критичке тачке*. Полови и критичке тачке су *сингуларитети* аналитичких функција. При томе, ако нека аналитичка функција нема критичких тачака као сингуларитете она се зове *униформна* или *ациклична*, ако има и критичких тачака она је *мултиформна* или *циклична*.

У теорији аналитичких функција комплексне променљиве показује се, да се такве функције могу развити у редове разног облика према природи саме функције.

На пр., ако је нека аналитичка функција холоморфна у свакој тачки у унутрашњости неког круга, она се може развити у Тејлоров (Taylor) ред уређен по степенима од $(z-a)$, ако је центар уоченог круга у тачки a, а у Меклоринов (Mac Laurin) ред уређен по степенима од z, ако је центар круга у координатном почетку. Такав ред остаје униформно конвергентан за све вредности z у области тога круга као и сви редови добијени диференцијацијом датога реда ма колико пута.

Ствар стоји друкчије, ако је центар уочене кружне области неки сингуларитет аналитичке функције. У том случају, ми га можемо окружити малим кругом тако, да посматрана функција остаје сад холоморфна за све тачке прстенасте површине између кругова полупречника R и полупречника r (сл. 22). Ако је тај сингуларитет пол, дакле, ако се *ради о униформној функцији*, она се у том случају може развити у двоструки ред од којих је један уређен по растућим степенима од z, а други по растућим степенима од $\frac{1}{z}$, кад је пол у координатном почетку. Такав ред назива се *Лоранов (Laurent) ред* и његов први део је униформно конвергентан за све вредности z у већем кругу, а други за све вредности z изван области мањег круга.

Према томе, у општем случају се може написати

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \tag{1}$$

где су коефицијенти a_n и сами одређени комплексни бројеви.

Ако се комплексна променљива z изрази у поларним координатама, тј. стави

$$z = \rho e^{i\theta}$$

а комплексни коефицијенти a_n изразе у облику збира реалног и имагинарног дела

$$a_n = A_n + i B_n$$

и све то унесе у једначину (1) добиће се с обзиром на Моавров (Moivre) образац

$$(2) \qquad f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(A_n+iB_n)\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=\varphi+i\psi.$$

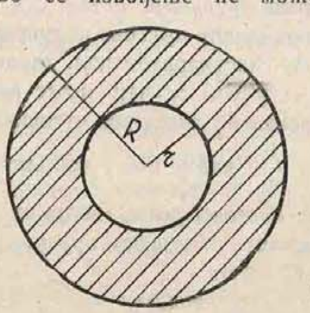
Одатле се за реални и имагинарни део функције $f(z)$ добија

$$(3) \qquad \begin{aligned}\varphi&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\rho^n(A_n\cos n\theta-B_n\sin n\theta),\\ \psi&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\rho^n(B_n\cos n\theta+A_n\sin n\theta).\end{aligned}$$

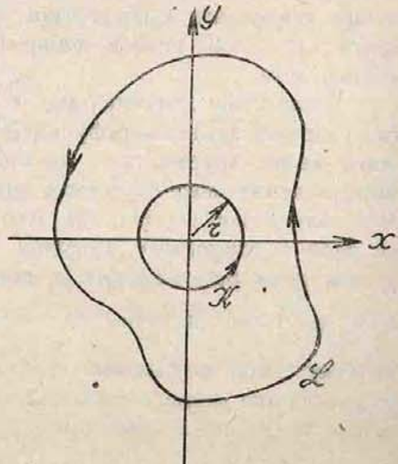
Ове једначине заједно са датим граничним условима одређују униформни комплексни потенцијал.

Не можемо се упуштати у детаље како ће изгледати ред у који се функција $f(z)$ може развити, ако она није униформна већ мултиформна. У том случају се може према потреби у конкретном проблему израз (2) за униформни комплексни потенцијал допунити неким мултиформним чланом, на пр., у облику $A\log z$ итд.

У теорији функција постоји више ставова о криволиниским интегралима у комплексној равни. Ни у њихово се извођење не можемо



Сл. 22



Сл. 23

упуштати већ ћемо само неке од њих навести, јер се користе при решавању хидродинамичких проблема.

Тако је криволиниски интеграл дуж затворене контуре L у комплексној равни једнак нули, тј.

$$(4) \qquad \oint_L f(z)\,dz=0,$$

ако је подинтегрална функција $f(z)$ холоморфна у свима тачкама области обухваћене контуром (сл. 23).

Међутим, ако се у унутрашњости области обухваћене контуром L налази неки сингуларитет, вредност криволиниског интеграла дуж контуре не мора бити једнака нули. При томе, на основу Кошијева става о еквивалентности путања интеграције, вредност криволиниског интеграла остаје непромењена за све контуре које обухватају само тај сингуларитет. То значи, да се место интеграције дуж ма које контуре L (сл. 23) она може извести, у случају *једне* сингуларне тачке, и дуж неког врло малог круга K полупречника r који опкољава ту сингуларну тачку.

На пр., нека сингуларитет обухваћен контуром буде пол m-тог реда. То значи да уочена функција у одређеној тачки постаје бесконачна m-тог реда, одн. да други део Лоранова реда има коначан број чланова m. Ако се узме да је сингуларна тачка баш у координатном почетку, може се у том случају Лоранов ред за нашу функцију написати у облику

$$(5) \qquad f(z)=\sum_{n=-m}^{+\infty}a_n z^n.$$

Познати Кошијев став о криволиниским интегралима у комплексној равни тврди тада да вредност интеграла

$$(6) \qquad \oint_L f(z)\,dz=\oint_K f(z)\,dz$$

зависи само од члана $a_{-1}z^{-1}$. И заиста, на кругу K (сл. 23) је $z=re^{i\theta}$, па ако је подинтегрална функција $f(z)$ дата Лорановим редом (5) имаћемо после са интегралима облика

$$(7) \qquad \oint_K z^n\,dz=ir^{n+1}\int_0^{2\pi}e^{(n+1)i\theta}\,d\theta=\frac{r^{n+1}}{n+1}\Big|\,e^{i(n+1)\theta}\Big|_0^{2\pi},$$

пошто је $dz=ire^{i\theta}\,d\theta$. Како комплексна експоненцијална функција има имагинарни период $2\pi i$, њене вредности су за горњу и доњу границу једнаке и, према томе, сви интеграли овога облика једнаки нули изузев, кад је $n=-1$. У том случају је

$$(8) \qquad \oint_K\frac{dz}{z}=\int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\theta}\,d\theta}{re^{i\theta}}=i\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi i.$$

Дакле, вредност криволиниског интеграла (6), ако интеграциони пут обухвата само један пол, износи

$$(9) \qquad \oint_K f(z)\,dz=2\pi i a_{-1}.$$

Коефицијент a_{-1}, који у развијању униформне функције комплексне променљиве игра нарочиту улогу, зове се *остатак* или *резидуум* Лоранова реда, одн. функције $f(z)$.

46. Аииклично потенцијално струјање око кружног цилиндра. Даламберов парадокс

Као пример одређивања комплексног потенцијала за равно струјање течности при датим граничним условима посматрајмо кретање кружног цилиндра у течности, која се простире у бесконачност и тамо мирује. Нека то кретање буде са константном брзином $-\mathfrak{v}$ нормалном на осу цилиндра. Ако замислимо кружни цилиндар у миру а течност у покрету, добићемо струјање течности чија ће брзина у бесконачности бити $\mathfrak{v}$.

Означимо полупречник цилиндра са R и узмимо почетак координатног система у центру попречног пресека цилиндра који ћемо узети за раван xOy. Нека x-оса буде оријентисана у правцу и смеру константне брзине $\mathfrak{v}$ (сл. 24).

Потражимо сад неку униформну функцију $w=f(z)$ као комплексни потенцијал који одређује струјање течности око овог цилиндра, а под овим граничним условима: *a*) да комплексна брзина u за бесконачно велико z прелази у реалну брзину v; и *b*) да контура кружног пресека цилиндра буде део линије тока, тј. да се течност при струјању око цилиндра *не одваја* од његове површине.

Пошто смо претпоставили да је наш комплексни потенцијал униформна функција, он може, према Лорановој теореми, бити облика

$$w=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \tag{1}$$

одакле је

$$u=-\frac{dw}{dz}=-\sum_{-\infty}^{-1} n a_n z^{n-1}-\sum_{1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}. \tag{2}$$

Одавде, међутим, на основу првог граничног услова очигледно мора бити

$$a_1=-v \quad \text{и} \quad a_n=0 \quad \text{за} \quad n>1. \tag{3}$$

Према томе, комплексни потенцијал који одређује тражено струјање може на основу првог граничног услова имати само облик

$$w=-vz+\sum_{-1}^{-\infty} a_n z^n, \tag{4}$$

где је независни члан изостављен, јер уопште не утиче на брзину па према томе ни на линије тока.

Потенцијал φ и функција тока ψ изгледаће у овом примеру

$$\varphi=-v\rho\cos\theta+\sum_{-1}^{-\infty}\rho^n(A_n\cos n\theta-B_n\sin n\theta), \tag{5}$$

$$\psi=-v\rho\sin\theta+\sum_{-1}^{-\infty}\rho^n(B_n\cos n\theta+A_n\sin n\theta). \tag{6}$$

Други гранични услов казује да дуж контуре цилиндра нема брзине у правцу нормалном на контуру, тј. да је

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}=0, \quad \text{за } \rho=R, \tag{7}$$

или што је исто, да је дуж те контуре $\psi=\text{const.}$, дакле

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=0, \quad \text{за } \rho=R. \tag{8}$$

Дакле, мора бити

$$-vR\cos\theta+\sum_{-1}^{-\infty}R^n(-B_n n\sin n\theta+A_n n\cos n\theta)=0.$$

Овај услов је задовољен, на пр., ако се изједначе са нулом коефицијенти уз поједине $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$. На тај начин се добија

$$A_n=0, \quad \text{за} \quad n\leqslant-2 \quad \text{и} \quad B_n=0, \quad \text{за} \quad n\leqslant-1, \tag{9}$$

а од коефицијента уз $\cos\theta$ (за $n=-1$) добија се

$$-vR-R^{-1}A_{-1}=0,$$

одакле је

$$A_{-1}=-vR^2. \tag{10}$$

Према томе, за тражени комплексни потенцијал најзад добијамо израз

$$\begin{aligned} w=\varphi+i\psi &= -vz+\frac{1}{\rho}A_{-1}(\cos\theta-i\sin\theta)= \\ &= -vz-\frac{vR^2}{z}=-v\left(z+\frac{R^2}{z}\right), \end{aligned} \tag{11}$$

одакле је

$$\varphi=-v\left(\rho+\frac{R^2}{\rho}\right)\cos\theta=-vx\left(1+\frac{R^2}{x^2+y^2}\right), \tag{12}$$

$$\psi=-v\left(\rho-\frac{R^2}{\rho}\right)\sin\theta=-vy\left(1-\frac{R^2}{x^2+y^2}\right). \tag{13}$$

Једначине линија тока су, дакле,

$$v\left(\rho-\frac{R^2}{\rho}\right)\sin\theta=C, \tag{14}$$

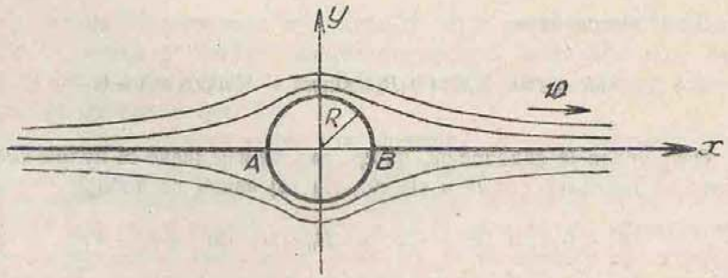
одн. у Декартовим координатама

$$(x^2+y^2-R^2)\,y=C(x^2+y^2). \tag{15}$$

То су линије трећег реда симетричне према оси y и имају асимптоте $y=C$ (сл. 24). Пошто течност струји у области $\rho \geqslant R$, то за $C>0$ мора бити $y>0$ и односна линија тока је у горњој полуравни, а за $C<0$ у доњој. Најзад за $C=0$ имамо

$$(x^2+y^2-R^2)\,y=0 \tag{16}$$

и према томе, линија тока се у том случају распада у круг $x^2+y^2=R^2$ и две полуправе $y=0$ (апсцисна оса с једне и друге стране



Сл. 24

круга). Тачке $(\mp R, 0)$ су гатне или критичке тачке у пољу струјања течности, јер је у њима брзина једнака нули, тј.

$$u=-\frac{dw}{dz}=\left(v-\frac{vR^2}{z^2}\right)_{z=\mp R}=0. \tag{17}$$

Линије тока у критичким тачкама A и B (а и трајекторије течних честица, јер је ово струјање стационарно) немају одређене тангенте. Оне се у тим тачкама гранају у две криве — праву и круг.

Међутим, у сваке две тачке на кружној контури, које су симетричне према y-оси, модули комплексне брзине, па према томе, и интензитети стварне брзине једнаки су. Одавде се на основу Бернулијеве једначине може закључити да су у свима симетричним тачкама и нормални притисци једнаки, те резултанта притиска струјања течности на цилиндар износи нулу. Дакле, претпоставка ацикличног потенцијалног струјања у овом случају доводи до парадокса, да течност не врши никакав притисак при струјању на тело потопљено у течност, одн. обрнуто да се тело може кретати кроз течност константном брзином без отпора, што није тачно. Овај резултат је познат по именом *Даламберова парадокса*.

До истог парадоксалног резултата долазимо под овим претпоставкама и кад посматрамо струјање течности око ма ког тела. То значи да су наше претпоставке или неоправдане или недовољне.

47. Циклично струјање течности око тела. Став Куте и Жуковског

Претпоставка о ацикличном потенцијалном струјању течности довела нас је у претходном примеру до парадоксног резултата. Претпоставићемо стога да око самог тела у течности постоји циркулација J *различита од нуле*, тј. да тело у својој околини ремети ациклично струјање. Израчунавање циркулације дуж контуре K профила тела може се врло лако извести помоћу комплексне брзине на овај начин. Интеграција по контури профила је интеграција дуж линије тока, дуж које је, како смо видели,

$$v_1\,dy-v_2\,dx=0. \tag{1}$$

Стога се може написати

$$\begin{aligned} J&=\oint_K \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r}=\oint_K (v_1\,dx+v_2\,dy)=\\ &=\oint_K [(v_1\,dx+v_2\,dy)+i(v_1\,dy-v_2\,dx)]=\\ &=\oint_K (v_1-i v_2)(dx+i\,dy)=\oint u\,dz. \end{aligned} \tag{2}$$

На тај начин се проблем одређивања циркулације дуж контуре профила своди прво на одређивање комплексне брзине. Како поремећај брзине треба да се у бесконачности изгуби и да се модул комплексне брзине изједначи са интензитетом брзине $\mathfrak{v}$, јасно је да се комплексна брзина може претставити у облику реда

$$u=u_0+\frac{a_{-1}}{z}+\frac{a_{-2}}{z^2}+\cdots, \tag{3}$$

кад је $z=0$ у унутрашњости контуре.

Ако се ова вредност за u унесе у интеграл (2) за циркулацију и узме у обзир да је према Кошијевом ставу интеграл $a_{-1}\oint_K \frac{dz}{z}$ различит од нуле, добија се за тражену циркулацију

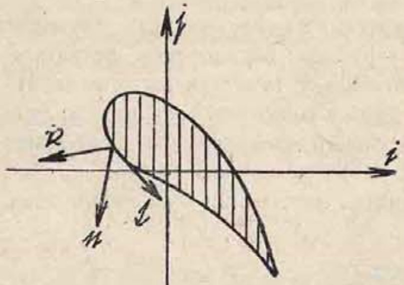
$$J=2\pi i a_{-1}. \tag{4}$$

Ако се за случај оваквог цикличног струјања одреди резултанта сила притиска течности на потопљено тело, она неће бити једнака нули, већ се слаже са резултатима добијеним из експеримената.

Наиме, притисак $\mathfrak{P}$ на цилиндар јединичне висине (сл. 25), који стоји нормално на равни цртања и чија је профилна контура K дата сликом, износи

$$\mathfrak{P}=-\oint_K p\,\mathfrak{n}\,ds, \tag{5}$$

где је p нормални притисак на јединицу површине, $\mathfrak{n}$ орт спољашње нормале површине цилиндра, а ds лучни елемент контуре профила.



Сл. 25

Пошто претпостављамо као и у претходној глави да се течност не одваја од контуре профила, биће та контура линија тока и према томе у случају стационарног струјања нестишљиве течности важи Бернулијев интеграл дуж контуре, тј.

(6) $$\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}=C,$$

ако се ради о случају кад функција силе отпада, на пр., при хоризонталном струјању тешке течности, струјању ваздуха итд. Из ове једначине се добија

(7) $$p=-\frac{\rho}{2}v^2+C_1,$$

где смо ставили $C\rho=C_1$, пошто је $\rho=\text{const.}$ Према томе је

(8) $$\oint_K p\,\mathfrak{n}\,ds=-\frac{\rho}{2}\oint_K v^2\mathfrak{n}\,ds+C_1\oint_K \mathfrak{n}\,ds.$$

Други интеграл на десној страни дуж затворене равне криве линије једнак је нули, јер је

(9) $$\mathfrak{n}=\mathfrak{t}\times\mathfrak{k},$$

где је $\mathfrak{t}$ орт тангенте контуре, а $\mathfrak{k}$ орт нормалан на равни xOy. Тада је

$$C_1\oint_K \mathfrak{n}\,ds=C_1\oint_K(\mathfrak{t}\times\mathfrak{k})\,ds=C_1\oint_K(d\mathfrak{r}\times\mathfrak{k})=-C_1\mathfrak{k}\times\oint_K d\mathfrak{r}=0,$$

где је $\mathfrak{t}\,ds=d\mathfrak{r}$, а пошто је $\mathfrak{k}=\text{const.}$ и уопште $\oint_K d\mathfrak{r}=0$.

Ради израчунавања првог интеграла на десној страни једначине (8) увешћемо комплексни број

(10) $$Z=Y+iX,$$

ако је

(11) $$\mathfrak{P}=X\mathfrak{i}+Y\mathfrak{j}.$$

Дакле, тачка одређена комплексним бројем Z симетрична је према крају вектора $\mathfrak{P}$ у односу на симетралу првог квадранта. На тај начин је

(12) $$Y=\frac{\rho}{2}\oint_K v^2(\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{j})\,ds,\qquad X=\frac{\rho}{2}\oint_K v^2(\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{i})\,ds.$$

Међутим, при позитивном обилажењу контуре (сл. 26) увек је

(13) $$(\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{j})\,ds=-dx,\qquad (\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{i})\,ds=dy,$$

јер је $\sphericalangle(\mathfrak{n},\mathfrak{j})=\pi+\sphericalangle(\mathfrak{t},\mathfrak{i})$, а $\sphericalangle(\mathfrak{n},\mathfrak{i})=\sphericalangle(\mathfrak{t},\mathfrak{j})$, па се заменом израза (13) у једначине (12) добија

(14) $$Z=-\frac{\rho}{2}\oint_K v^2(dx-i\,dy)=-\frac{\rho}{2}\oint_K (v_1^2+v_2^2)(dx-i\,dy).$$

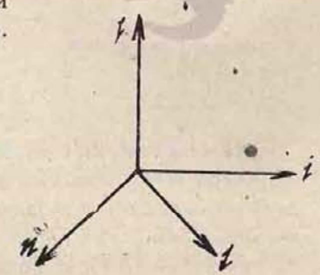
Ако се под интегралним знаком дода израз

$$2i(v_1\,dy-v_2\,dx)(v_1-iv_2)$$

који је с обзиром на једначину (1) идентички једнак нули добиће се

(15) $$Z=-\frac{\rho}{2}\oint_K (v_1^2-2iv_1v_2-v_2^2)(dx+i\,dy)=-\frac{\rho}{2}\oint_K u^2\,dz.$$

Вредност комплексне брзине дата је једначином (3) па је, с обзиром на Кошијев став о криволиниским интегралима дуж затворених контура у комплексној равни, јасно, да се све своди на интеграцију члана чији је резидуум $2a_{-1}u_0$. То значи



Сл. 26

(16) $$\oint_K u^2\,dz=2\pi i\,\frac{2J}{2\pi i}\,u_0=2Ju_0,$$

јер је према једначини (4)

(17) $$a_{-1}=\frac{J}{2\pi i}.$$

Дакле, најзад имамо

(18) $$Z=-\rho J(v_1-iv_2),$$

где су v_1 и v_2 координате вектора брзине у бесконачности, тј. $u_0=v_1-iv_2$. Одавде је

(19) $$X=\rho Jv_2,\qquad Y=-\rho Jv_1,$$

а то значи

(20) $$\mathfrak{P}=\rho Jv_2\mathfrak{i}-\rho Jv_1\mathfrak{j}.$$

Овај став који показује колика је резултанта притиска на контуру профила (тј. на цилиндарску површину висине једнаке јединици), при претпоставци о егзистенцији циркулације око контуре профила, зове се *став Куте и Жуковског.*

Објашњење Даламберова парадокса је у овоме. Експериментално је утврђено да ма колико течност била идеална она ипак застаје уз препреку и на тај начин потенцијално струјање прелази у вртложно.

С друге стране иза тела око кога течност струји (на пр. кружног цилиндра) течност се одваја од тела и образује вртложну област. Из свега овога се види да наше претпоставке у претходној глави нису биле довољно тачне и стога смо дошли до парадокса. Међутим, и поред тога што, како рекосмо, не може бити говора о потенцијалном струјању у непосредној околини тела, показало се проучавање овога струјања корисно из овог разлога. Наиме, утврђено је експерименталним путем да се вртложно одвајање граничног слоја течности од цилиндра може унеколико отклонити, ако се сам кружни цилиндар доведе у ротацију око своје осе. То су разлози који захтевају, да се у случају претпоставке о неодвајању граничног слоја течности мора још претпоставити да постоји струјање течности у круговима непосредно око цилиндра. Из тих разлога се мора даље претпоставити да поред ацикличног дела (11) комплексног потенцијала у § 46 постоји још неки циклични члан облика $A \log z$, тако да комплексни потенцијал у случају струјања око кружног цилиндра има облик

$$w = -vz - \frac{vR^2}{z} + A\log z, \tag{21}$$

а комплексна брзина

$$u = v - \frac{vR^2}{z^2} - Az^{-1}. \tag{22}$$

Према томе се стварно вртложно струјање течности око кружног цилиндра може протумачити са довољном тачношћу као суперпозиција два потенцијална струјања: једног ацикличног, одређеног униформним потенцијалом $-vz - vR^2z^{-1}$ и једног цикличног одређеног мултиформним потенцијалом $A\log z$ који даје циркулацију око цилиндра различиту од нуле. Дакле, циркулација ће у овом случају око контуре цилиндра бити

$$J = -2\pi i A. \tag{23}$$

Да не би уопште било одвајања течности од површине цилиндра мора се цилиндар обртати неком угаоном брзином ω, одн. у непосредној околини цилиндра мора течност кружити брзином $v = R\omega$ око непокретног цилиндра. Како је у том случају $ds = R\,d\theta$, биће циркулација одређена изразом

$$J = \oint_K \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r} = \oint_K v\,ds = R^2\omega\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\omega R^2, \tag{24}$$

јер су вектори $\mathfrak{v}$ и $d\mathfrak{r}$ колинеарни дуж линије тока и $|d\mathfrak{r}| = ds$.

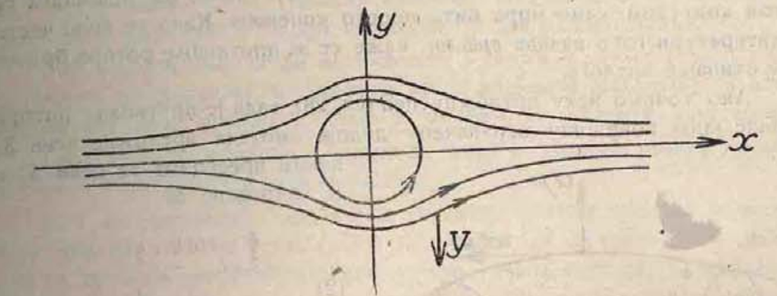
На тај начин за константу A имамо вредност према једначини (23)

$$A = \frac{J}{2\pi i} = -\omega R^2 i. \tag{25}$$

Ако је, даље, струјање течности у бесконачности константно и паралелно x-оси $v_1 = v$ и $v_2 = 0$ као што смо претпоставили у примеру струјања око кружног цилиндра, добиће се сад при цикличном струјању за координате резултанте притиска

$$X = 0,\quad Y = -2\pi\rho\omega R^2 v. \tag{26}$$

Овај резултат показује, да се као дејство притиска течности на тело потопљено у течност при струјању течности појављује попречна



Сл. 27

сила на правац струјања која је оријентисана на ону страну где су брзине струјања течности и брзина обртања цилиндра (одн. струјања око цилиндра) истог смера (сл. 27). Ово је тзв. *Магнусов ефект* и примењен је код Флетнеровог ротора.

Треба још подвући да гранични случај кад уопште нема одвајања течности од површине цилиндра не постоји те је стога стварна вредност Магнусовог ефекта отприлике упола мања.

Овај проблем равног струјања показује да се у неким случајевима може и вртложно кретање третирати као суперпозиција потенцијалних струјања.

48. Вртложно струјање течности

Видели смо у § 28 да течност струји вртложно ако је

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{v} \neq 0,$$

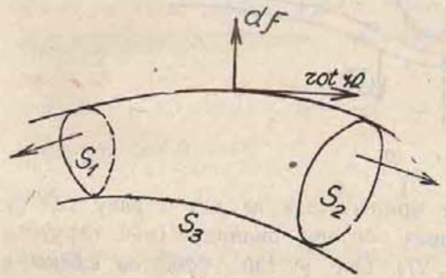
и упознали смо се са неким појмовима о вртложном пољу и низом облика који се конструишу при проучавању таквих поља.

Сад ћемо указати на нове особине таквих поља и извести неке ставове који важе за вртложно струјање течности. Тако је појам ротора брзине $\mathrm{rot}\,\mathfrak{v} = 2\vec{\omega}$ у тесној вези са појмом циркулације дуж неке оријентисане контуре L у вртложном пољу. Заиста, уочимо неку контуру L која граничи неку просто конексну површину S, па ћемо за циркулацију дуж те контуре на основу Стоксова (Stokes) става добити

$$J=\oint_L \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r}=\int_S \operatorname{rot}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}=2\int_S \vec{\omega}\cdot d\mathfrak{f}, \tag{1}$$

где је $d\mathfrak{f}$ управљени елемент површине S оријентисан тако да се оријентисана контура L обилази у директном смеру. Из овог става се види да је циркулација у вртложном пољу једнака протицању ротора брзине кроз површину ограничену контуром дуж које се одређује циркулација. Наравно да то може бити која било од површина са истом контуром, само мора бити просто конексна. Како се врло често у литератури $\operatorname{rot}\mathfrak{v}$ назива *вртлог*, каже се за протицање ротора брзине и протицање вртлога.

Ако уочимо неку вртложну цев (сл. 28), тада је протицање ротора брзине кроз површину ограничену делом омотача вртложне цеви S_3 неким пресецима те цеви S_1 и S_2, одређено са



Сл. 28

$$\oint_{S_1+S_2+S_3} \operatorname{rot}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f} = \int_{S_1+S_2} \operatorname{rot}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}, \tag{2}$$

јер је у свим тачкама омотача вртложне цеви $\operatorname{rot}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}=0$. Применом Гаусова става на простор ограничен том површином добиће се

$$\oint_{S_1+S_2+S_3} \operatorname{rot}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f} = \int_V \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{v}\, dV = 0, \tag{3}$$

јер је увек $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{v}=0$.

Упоређивањем једначина (2) и (3) закључујемо

$$\int_{S_1+S_2} \operatorname{rot}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}=0,$$

одн.

$$\int_{S_1} \operatorname{rot}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}+\int_{S_2} \operatorname{rot}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}=0$$

и најзад, ако управљене елементе оба пресека S_1 и S_2 оријентишемо на исту страну, можемо написати

$$J=\int_{S_1} \operatorname{rot}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}=\int_{S_2} \operatorname{rot}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}. \tag{4}$$

За вртложни конац, ако се уочи неки његов нормални пресек бесконачно мале површине $\vec{\sigma}$ у чијим се свима тачкама може сматрати

да је $\operatorname{rot}\mathfrak{v}$ константан, добија се

$$J=\operatorname{rot}\mathfrak{v}\cdot\vec{\sigma}=2\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma}. \tag{5}$$

Став (4) показује да је протицање кроз ма који пресек неке вртложне цеви независно од места и облика пресека цеви. Из њега се на основу става (1) може закључити, да су циркулације дуж свих контура, које обухватају вртложну цев, једнаке међу собом. Ова константна вредност циркулације зове се *интензитет вртложне цеви* или кратко *интензитет (јачина) вртлога*. Ако се ради о вртложном концу биће једначином (5) дат *интензитет вртложног конца*.

Ако искористимо појам интензитета вртлога може се став о константности циркулације по контури вртложне цеви формулисати и на овај начин: Дуж вртложне цеви је интензитет вртлога константан.

Овај став је поставио Хелмхолц који је уопште развио читаву теорију вртложног струјања течности.

Ако нас интересује, под којим условима настају вртлози, можемо на основу Лагранжева става (§ 36) закључити, да он престаје да важи и да се вртлози могу образовати у три главна случаја: 1) ако спољашње запреминске силе немају потенцијал; 2) ако течност није баротропна, већ густина зависи, на пр., још од влажности код ваздуха или од салинитета код морске воде итд; и 3) ако течност није идеална.

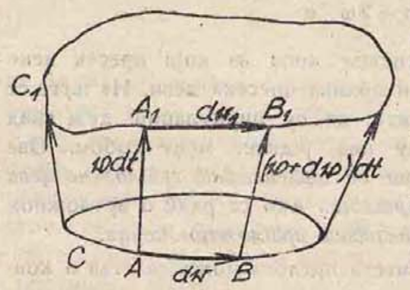
У доказивање да се у овим случајевима заиста јављају вртлози у течности и у којим се још случајевима они могу појавити, не можемо се упуштати.

Исто тако нећемо се упуштати у проблеме како се поље брзине струјања течности може одредити познавањем $\operatorname{rot}\mathfrak{v}$ и $\operatorname{div}\mathfrak{v}$ у свакој тачки поља уз граничне услове, што је могуће, како знамо из теорије поља.

49. Томсонов став о циркулацији брзине и Хелмхолцови ставови о вртложном струјању течности

Читаву теорију вртложног кретања, како смо рекли, разрадио је уствари Хелмхолц. Тако и Томсонов (Thomson) став о циркулацији брзине потиче од Хелмхолца, а по Томсону је назван стога што је Томсон употребио за његово извођење нарочиту методу, која знатно олакшава теорију, са којом ћемо се сад упознати.

Уочимо, дакле, неку контуру C у течности и замислимо је, по Томсону, *састављену од течних честица*. Оваква материјална контура креће се заједно са течношћу и при том деформише, тако, да ако су неке течне честице у тренутку t биле на контури C (сл. 29), те исте честице ће се у тренутку $t+dt$ налазити на контури C_1. Ако на контури C уочимо две бесконачно блиске тачке A и B на крајевима неког управљеног елемента $d\mathfrak{r}$, оне ће имати брзине $\mathfrak{v}$ и $\mathfrak{v}+d\mathfrak{v}$ и односне течне честице биће после времена dt у тачкама A_1 и B_1 на контури C_1 које одређују управљени елемент $d\mathfrak{r}_1 = d\mathfrak{r} + d(d\mathfrak{r})$ те контуре. Са слике се види да мора бити



Сл. 29

$$\mathfrak{v}\,dt + d\mathfrak{r}_1 = d\mathfrak{r} + (\mathfrak{v}+d\mathfrak{v})\,dt,$$

тј.

$$d\mathfrak{r}_1 - d\mathfrak{r} = d(d\mathfrak{r}) = d\mathfrak{v}\,dt$$

и најзад

$$\frac{d(d\mathfrak{r})}{dt} = d\mathfrak{v}. \tag{1}$$

Томсонов став казује да је извод циркулације брзине струјања течности по оваквој контури једнак циркулацији убрзања J_w по истој контури, тј. да важи

$$\frac{dJ}{dt} = J_w = \oint_C \mathfrak{w}\cdot d\mathfrak{r}. \tag{2}$$

Да бисмо овај став доказали, одредићемо извод циркулације брзине течности по времену, тј.

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt}\oint_C \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r},$$

али при томе треба имати у виду да се не мења само брзина већ и сама контура (тј. њен облик). Стога, по уношењу знака диференцирања по времену под знак интеграла, треба диференцирати и брзину $\mathfrak{v}$ и управљени елемент $d\mathfrak{r}$. На тај начин се добија

$$\frac{dJ}{dt} = \oint_C \frac{d\mathfrak{v}}{dt}\cdot d\mathfrak{r} + \oint_C \mathfrak{v}\cdot\frac{d}{dt}d\mathfrak{r}$$

и најзад, с обзиром на једначину (1),

$$J_w = \oint_C \mathfrak{w}\cdot d\mathfrak{r} + \oint_C \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{v} = \oint_C \mathfrak{w}\cdot d\mathfrak{r} + \oint_C v\,dv = \oint_C \mathfrak{w}\cdot d\mathfrak{r},$$

што је и требало доказати, јер је $\oint_C v\,dv$ по затвореној контури једнак нули.

У случају да за уочено струјање течности постоји униформни потенцијал убрзања, што је, како знамо, случај кад спољашње запреминске силе имају такав потенцијал и кад је течност баротропна, тј. ако је

$$\mathfrak{w} = \operatorname{grad} Q,$$

биће

$$\frac{dJ}{dt} = \oint_C \mathfrak{w}\cdot d\mathfrak{r} = \oint_C \operatorname{grad} Q\cdot d\mathfrak{r} = \oint_C dQ = 0.$$

После интеграције у овом случају добијамо

$$J = \oint_C \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r} = \text{const}. \tag{3}$$

Ова једначина изражава став да је у идеалној течности, кад постоји униформни потенцијал убрзања, циркулација брзине дуж неке контуре која се креће заједно са течношћу непромењлива у току времена а последица је Томсоновог става.

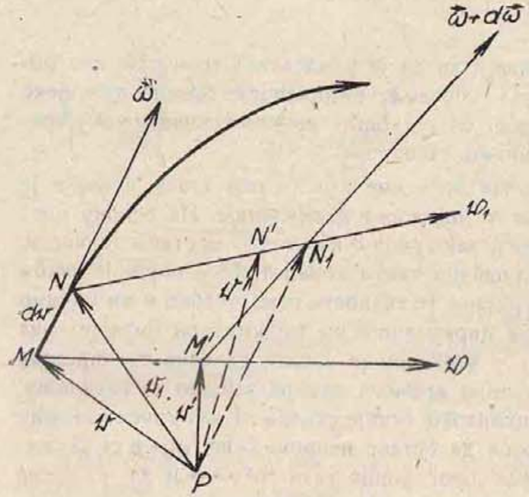
Често баш овај закључак носи име Томсоновог става, а иначе је познат под именом *закона о одржању циркулације*. На основу овог закона могу се извести многи закључци о карактеру кретања течности. На пр., замислимо неки бесконачно танки конац тока у чијем је неком пресеку $\operatorname{rot}\mathfrak{v}=0$. Ако је струјање те течности стационарно и ми уочимо контуру тог пресека, мора циркулација по тој контури бити једнака нули на основу става (1) у § 48, јер је у свим тачкама тог пресека $\operatorname{rot}\mathfrak{v}=0$. Ова контура се у току времена помера заједно са течношћу, али пошто је кретање стационарно, остаје стално на већ уоченом концу тока. Како циркулација треба да остане непромењена, може се закључити да је у свим тачкама овог конца тока $\operatorname{rot}\mathfrak{v}=0$ и да је, према томе, у таквом концу кретање течности безвртложно. Кратко, ако је $\operatorname{rot}\mathfrak{v}$ једнак нули у ма којој тачки неке линије тока, биће једнак нули у свим тачкама те линије тока. Ако струјање није стационарно, то исто важи за неку трајекторију течне честице. Јасно је да ови закључци важе само под датим претпоставкама.

Већ раније у § 36 навели смо Лагранжев став о кретању течности, који је Хелмхолц формулисао на други начин и извео читав низ нових закључака о кретању течности уопште а посебно о условима за настајање врложног кретања течности. Из тог става смо видели да у нестишљивој течности под дејством конзервативних спољашњих сила не може настати вртложно кретање.

Овде ћемо навести два нова Хелмхолцова става који се односе на вртложно кретање течности, а важе само кад су *задовољене све претпоставке*, наведене при извођењу Лагранжевог става, потребне за постојање вртложног кретања течности.

Први од тих ставова односи се на одржање вртложних линија и гласи: Све течне честице које су у неком одређеном тренутку биле на извесној вртложној линији остају у току кретања стално на њој и пливају заједно са њом.

Уочимо, ради доказа, у одређеном тренутку времена t, на некој вртложној линији две бесконачно блиске тачке M и N, које су на крајевима управљеног елемента $d\mathfrak{r}$ вртложне линије, а то значи на одређеном вектору $\vec{\omega}$ тренутне угаоне брзине (сл. 30). Ако је вектор положаја тачке M у односу на неки пол P одређен са $\mathfrak{r}$ а вектор положаја тачке N са $\mathfrak{r}_1$, и ако је $|d\mathfrak{r}|=ds$, јасно је са слике да се може написати



Сл. 30

$$\mathfrak{r}_1=\mathfrak{r}+d\mathfrak{r}=\mathfrak{r}+\frac{\vec{\omega}}{\omega}\,ds. \tag{4}$$

Између брзине $\mathfrak{v}$ у тачки M и брзине $\mathfrak{v}_1$ у тачки N постоји мала разлика одређена једначином

$$\mathfrak{v}_1=\mathfrak{v}+d\mathfrak{v}, \tag{5}$$

где је $d\mathfrak{v}$ стационарна промена брзине $\mathfrak{v}$ при прелазу од тачке M ка тачки N. Према томе се за $d\mathfrak{v}$ може написати

$$d\mathfrak{v}=(d\mathfrak{r}\cdot\nabla)\mathfrak{v}=\frac{ds}{\omega}(\vec{\omega}\cdot\nabla)\mathfrak{v}. \tag{6}$$

За нестишљиве и врло мало стишљиве течности може се, на основу Хелмхолцове једначине у облику (12) у § 35, написати

$$\mathfrak{v}_1=\mathfrak{v}+\frac{ds}{\omega}\left(\vec{\omega}\cdot\nabla\right)\mathfrak{v}=\mathfrak{v}+\frac{ds}{\omega}\frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{7}$$

Како се у овом специјалном случају доказ знатно упрошћава, задржаћемо се на њему, иако став важи за све баротропне течности.

Тако, у наредном тренутку времена $t+dt$ тачке M и N заузеће положаје M' и N', при чему је

$$\overrightarrow{MM'}=\mathfrak{v}\,dt,\quad \overrightarrow{NN'}=\mathfrak{v}_1\,dt.$$

Вектор тренутне угаоне брзине за тачку M' постаје $\vec{\omega}+d\vec{\omega}$, а вектор положаја тачке N' је с обзиром на (7)

$$\overrightarrow{PN'}=\mathfrak{r}_1'=\mathfrak{r}_1+\mathfrak{v}_1\,dt=\mathfrak{r}+\frac{ds}{\omega}\vec{\omega}+\mathfrak{v}\,dt+\frac{ds}{\omega}\,d\vec{\omega}=\mathfrak{r}+\mathfrak{v}\,dt+\frac{ds}{\omega}(\vec{\omega}+d\vec{\omega}),$$

па, како је $\mathfrak{r}'=\mathfrak{r}+\mathfrak{v}\,dt$, добијамо

$$\mathfrak{r}_1'=\mathfrak{r}'+\frac{ds}{\omega}(\vec{\omega}+d\vec{\omega}). \tag{8}$$

Вектор положаја $\overrightarrow{PN_1}=\mathfrak{r}_2$ тачке N_1, у којој вектор $\vec{\omega}+d\vec{\omega}$ сече основу вектора $\mathfrak{v}_1$, биће

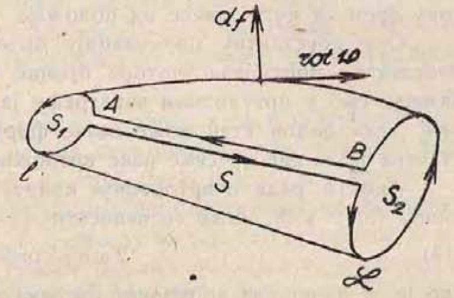
$$\mathfrak{r}_2=\mathfrak{r}'+\lambda(\vec{\omega}+d\vec{\omega}). \tag{9}$$

Упоређивањем образаца (8) и (9) може се закључити, да се тачка N_1 поклапа са тачком N', што смо и хтели да покажемо и да је

$$\lambda=\frac{ds}{\omega}.$$

Други Хелмхолцов став који ћемо овде навести односи се на интензитет протицања вектора тренутне угаоне брзине, на интензитет вртлога.

Уочимо на вртложној цеви две затворене криве l и L које је опасују. Спојмо ове криве неком линијом AB која лежи на омотачу цеви (сл. 31). Затворена крива $lABLBA$ обухвата површину омотача S који сада претставља просто конексну површину на коју можемо применити Стоксов став. Тада је



Сл. 31

$$\oint_l \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r}+\int_A^B \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r}+\oint_L \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r}+\int_B^A \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r}=\int_S \operatorname{rot}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}. \tag{10}$$

Како је у свакој тачки омотача S вртложне цеви

$$\operatorname{rot}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}=0$$

биће и

$$\int_S \operatorname{rot}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}=0$$

и једначина (10) се, после промене оријентације интеграционе путање у једном од криволиниских интеграла, своди на

$$\oint_l \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r}=\oint_L \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r}. \tag{11}$$

Ова једначина показује да је циркулација стална на свакој контури која лежи ма како на вртложној цеви. Другим речима, ова циркулација остаје иста дуж уочене цеви.

Ако је отвор l затворен неком површином S_1, како циркулација није једнака нули, биће, на основу става (1) у § 48, и протицање ротора брзине одн. вектора тренутне угаоне брзине кроз површину S_1 различито од нуле. Дакле

$$\oint_l \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r} = \int_{S_1} \operatorname{rot} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f} = 2 \int_{S_1} \vec{\omega} \cdot d\mathfrak{f}. \tag{12}$$

Ако је други отвор цеви, чија је контура L, затворен неком површином S_2, имаћемо

$$\oint_L \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r} = \int_{S_2} \operatorname{rot} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f} = 2 \int_{S_2} \vec{\omega} \cdot d\mathfrak{f}. \tag{13}$$

Пошто су циркулације на левој страни једначина (12) и (13) на основу горњих излагања при датим условима независне од времена и положаја на уоченој вртложној цеви, то су и изрази на десним странама тих једначина, који одређују протицања вектора тренутне угаоне брзине кроз пресеке вртложне цеви, константни и не мењају се ни у току времена нити зависе од положаја у вртложној цеви.

Ову константну циркулацију брзине око вртложне цеви, одн. константно протицање ротора брзине кроз пресеке вртложне цеви назвали смо у претходном параграфу јачина вртлога. На тај се начин овај Хелмхолцов став може овако формулисати: Јачина вртлога константна је за све пресеке неке вртложне цеви.

Ако се ради о вртложном концу, чија је јачина одређена једначином (5) у § 48, може се написати

$$2\,\omega\,\sigma = \mathrm{const.}, \tag{14}$$

ако је σ површина нормалног пресека вртложног конца. Из ове једначине се види, да ако је $\omega \neq 0$ не може бити $\sigma = 0$, што значи да вртложни конци не могу имати ни почетак ни крај у некој тачки у унутрашњости течности за коју су испуњене претпоставке од којих смо пошли.

Овај Хелмхолцов став о јачини вртлога може се одмах извести и упоређивањем једначине (1) у § 48 и једначине (3), узев у обзир да се свака контура у Томсоновом смислу може замислити као контура читавог низа површина.

50. Вискозна течност. Тензор вискозности

Већ смо раније казали, да у свима течностима без разлике, у случају кретања, постоји трење између појединих честица. Јасно је одмах, да се ово *унутрашње трење* или *вискозност* јавља само у оним случајевима кретања течности, кад у њој постоји релативно померање честица. Ово трење се појављује с једне стране као резултат узајамног дејства (кохезије) честица и показује се у облику тангентних или клизних напона између појединих слојева течности. Међутим, тангентни

напони се могу појавити и као резултат размене количине кретања између честица два слоја изазваних молекуларним кретањем нормално на правац општег кретања, посматрано са гледишта кинетичке теорије гасова.

Ове претпоставке налазе потврду у експерименталној чињеници да се вискозност течности знатно мења са температуром, али је ово дејство температуре супротно за стишљиве течности (гасове) и нестишљиве (капљиве) течности, због разлика које код њих постоје у међумолекуларним односима. Познато је да са порастом температуре код гасова вискозност расте, а код капљивих течности напротив опада. На основу наших претпоставки о узроцима појаве тангентних напона у течности може се ово објаснити овим размишљањем. Код гасова је кохезија незнатна и загревањем се још смањује, па према томе, тангентни напони код гасова настају углавном разменом количина кретања, а ове опет услед загревања расту, па се и тангентни напони повећавају. Напротив код капљивих течности тангентни напони су углавном резултат међусобног дејства (кохезије) између честица услед слабије покретљивости течних молекула, па како кохезија услед загревања слаби, смањују се и тангентни напони и вискозност капљиве течности после загревања слаби.

Поред вискозности у ужем смислу у течности постоји и еластичност слично као код чврстих тела, истина не у оном облику и у оној мери као код чврстих тела, али ипак постоји. Вискозност и еластичност су са физичког гледишта различите појаве, јер еластичност, на пр., зависи од промене облика, па је у том смислу код течности сасвим безначајна, а вискозност зависи од брзине мењања облика, а то је при истим условима за разне течности различито.

Јасно је да и у вискозној течности мора постојати притисак и то из истих разлога као код идеалних течности. Само у вискозној течности постоји још и тангентна компонента површинске силе, која заједно са притиском чини да резултанта површинске силе одређена на јединицу површине у вискозној течности не стоји више нормално на површини уоченог течног елемента. То значи да се изотропни тензор $-pI$, који у идеалној течности одређује распоред притисака, мора сад допунити неким новим чланом N' тако да за вискозну течност тензор који одговара тензору напона има облик

$$N = -pI + N', \tag{1}$$

где N' зависи од вискозности течности и зове се *тензор вискозности*. Другим речима распоред унутрашњих површинских сила у вискозној течности одређен је тензором N који претставља збир изотропног тензора $-pI$ који карактерише еластичност средине и тензора вискозности N'.

Облик тензора вискозности може се одредити овим размишљањем. Како се вискозност уопште појављује само у случају постојања релативних брзина међу честицама, посматрајмо две врло блиске честице течности на растојању $d\mathfrak{r}$ са брзинама $\mathfrak{v}$ и $\mathfrak{v}+d\mathfrak{v}$. Тада се под претпоставком непрекидног поља брзине може у првој апроксимацији написати

$$d\mathfrak{v}=(d\mathfrak{r}\cdot\nabla)\mathfrak{v}=d\mathfrak{r}\cdot(\nabla\mathfrak{v}). \tag{2}$$

Одавде се види да релативна брзина $d\mathfrak{v}$ тих честица, па према томе и вискозност зависи од локалног афинора $\nabla\mathfrak{v}$. Како је локални афинор потпуни афинор, остаје нам да даљим проучавањем покажемо да вискозност зависи само од његовог симетричног дела — од његовог тензора. У том циљу узмимо у обзир да афинор од кога зависи вискозност мора да се анулира у случају константне брзине $\mathfrak{v}=\text{const.}$ и заиста тада је $\nabla\mathfrak{v}=0$. Међутим, очигледно је, да се вискозност неће појавити ни у случају кад се течност обрће као целина (чврсто тело) па се, према томе, $\mathcal{N}'$ мора анулирати и у том случају. Разложимо, стога, локални афинор $\nabla\mathfrak{v}$ у симетрични и антисиметрични део, тј.

$$\nabla\mathfrak{v}=\frac{1}{2}(\nabla\mathfrak{v}+\overline{\nabla\mathfrak{v}})+\frac{1}{2}(\nabla\mathfrak{v}-\overline{\nabla\mathfrak{v}}). \tag{3}$$

Ако ову једначину помножимо слева скаларно са $d\mathfrak{r}$ добићемо, према једн. (2), релативну брзину

$$d\mathfrak{v}=d\mathfrak{r}\cdot(\nabla\mathfrak{v})=\frac{1}{2}d\mathfrak{r}\cdot(\nabla\mathfrak{v}+\overline{\nabla\mathfrak{v}})+\frac{1}{2}d\mathfrak{r}\cdot(\nabla\mathfrak{v}-\overline{\nabla\mathfrak{v}}).$$

Други члан на десној страни ове једначине може се, према једначинама (12) и (13) у § 2, написати у облику

$$\frac{1}{2}d\mathfrak{r}\cdot(\nabla\mathfrak{v}-\overline{\nabla\mathfrak{v}})=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{v}\times d\mathfrak{r}=\vec{\omega}\times d\mathfrak{r}, \tag{4}$$

где је $\vec{\omega}$ угаона брзина. Према томе, тај члан одређује само ону компоненту брзине честице која одговара ротацији течности као чврстог тела, па не даје релативну брзину, дакле, не утиче на вискозност. Из ових разматрања изводимо да вискозност течности може зависити само од симетричног дела $\mathcal{D}'$ локалног афинора $\nabla\mathfrak{v}$, при чему је

$$\mathcal{D}'=\frac{1}{2}(\nabla\mathfrak{v}+\overline{\nabla\mathfrak{v}}) \tag{5}$$

или у облику матрице (једн. 11 у § 3)

$$\mathcal{D}'=\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x}+\dfrac{\partial v_1}{\partial y}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial z}+\dfrac{\partial v_3}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x}+\dfrac{\partial v_1}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial v_2}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_3}{\partial y}+\dfrac{\partial v_2}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial z}+\dfrac{\partial v_3}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_3}{\partial y}+\dfrac{\partial v_2}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial v_3}{\partial z} \end{Bmatrix}. \tag{6}$$

На тај начин, ако се задовољимо са пропорционалношћу као најпростијом везом између тензора $\mathcal{D}'$ и тензора вискозности $\mathcal{N}'$, може се написати

$$\mathcal{N}'=2\mu\mathcal{D}'=\mu(\nabla\mathfrak{v}+\overline{\nabla\mathfrak{v}}), \tag{7}$$

где смо као коефицијент пропорционалности узели 2μ само да бисмо се ослободили оне двојке у изразу за $\mathcal{D}'$. Коефицијент μ не зависи од брзине, али у општем случају зависи од притиска и температуре, и зове се *динамички коефицијент вискозности*. У случају незнатних промена температуре и притиска у течности, а то је врло често са довољном приближношћу тачно, може се овај коефицијент сматрати као константан и зависан једино од природе уочене течности. На тај начин смо одредили тензор вискозности.

Нешто општији и потпунији облик тензора вискозности изводи се на овај начин. Тензор $\mathcal{D}'$ раставимо на збир девијатора и изотропног тензора, према једначинама (10) и (11) у § 5, у облику

$$\mathcal{D}'=\frac{1}{2}\left(\nabla\mathfrak{v}+\overline{\nabla\mathfrak{v}}-\frac{2}{3}I\operatorname{div}\mathfrak{v}\right)+\frac{1}{3}I\operatorname{div}\mathfrak{v}. \tag{8}$$

Како је овај девијатор у вези само са оном брзином којом се мења искључиво и једино облик уоченог елемента, а изотропни тензор $\frac{1}{3}I\operatorname{div}\mathfrak{v}$ са своје стране само са оним брзинама којима се мења само величина уоченог елемента при сличном повећавању и смањивању, може се нешто општије претпоставити да је тензор вискозности $\mathcal{N}'$ облика

$$\mathcal{N}'=2\mu\cdot\frac{1}{2}\left(\nabla\mathfrak{v}+\overline{\nabla\mathfrak{v}}-\frac{2}{3}I\operatorname{div}\mathfrak{v}\right)+3\lambda\cdot\frac{1}{3}I\operatorname{div}\mathfrak{v}. \tag{9}$$

То значи уводе се два динамичка коефицијента вискозности μ и λ од којих један показује вискозност изазвану чистом деформацијом у најужем смислу речи, а други вискозност изазвану сличним повећавањем односно смањивањем уоченог елемента течности. Динамичке коефицијенте вискозности μ и λ не треба бркати са Ламеовим константама еластичности. Ради згоднијег писања дефинитивног облика тензора узели смо као фактор пропорционалности са девијатором 2μ а са изотропним тензором 3λ.

Израз (9) за тензор вискозности може се лако трансформисати и написати најзад у облику

$$N' = \mu(\nabla\mathfrak{v} + \overline{\nabla\mathfrak{v}} - \frac{2}{3} I \operatorname{div} \mathfrak{v}) + \lambda I \operatorname{div} \mathfrak{v}. \tag{10}$$

51. Основне једначине кретања вискозне течности

Да бисмо добили једначине за кретање вискозне течности потребно је одредити још и компоненту силе вискозности на јединицу масе уочене течности поред спољашњих сила и сила притиска.

Међутим, сила вискозности $\mathfrak{t}$ може се као и напон сматрати као линеарна векторска функција управљеног елемента $d\mathfrak{f}$ граничне површине уоченог течног елемента, тј.

$$\mathfrak{t} = \mu(\nabla\mathfrak{v} + \overline{\nabla\mathfrak{v}}) \cdot d\mathfrak{f} \tag{1}$$

одн. с обзиром на 10 у § 50

$$\mathfrak{t} = (2\mu T + \lambda I \operatorname{div} \mathfrak{v}) \cdot d\mathfrak{f}, \tag{2}$$

где је сила вискозности $\mathfrak{t}$ одређена у односу на управљени површински елемент $d\mathfrak{f}$, а где смо са T, краткоће ради, обележили девијатор

$$T = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathfrak{v} + \overline{\nabla\mathfrak{v}} - \frac{2}{3} I \operatorname{div} \mathfrak{v}\right). \tag{3}$$

За читаву граничну површину σ уоченог течног елемента имаћемо

$$\oint_\sigma (2\mu T + \lambda I \operatorname{div} \mathfrak{v}) \cdot d\mathfrak{f},$$

па ако се коефицијенти вискозности μ и λ сматрају као константе, што је такође са довољном тачношћу, како смо рекли, на свом месту, добијамо по Гаусовој теореми

$$2\mu \int_{\delta V} (\nabla \cdot T)\, dV + \lambda \int_{\delta V} (\nabla \cdot I) \operatorname{div} \mathfrak{v}\, dV,$$

где је δV запремина уоченог елемента течности. Одавде се за јединицу запремине изводи

$$2\mu(\nabla \cdot T) + \lambda(\nabla \cdot I) \operatorname{div} \mathfrak{v},$$

и најзад за јединицу масе

$$\mathfrak{T} = 2\frac{\mu}{\rho}(\nabla \cdot T) + \frac{\lambda}{\rho}(\nabla \cdot I) \operatorname{div} \mathfrak{v}. \tag{4}$$

Како је

$$\nabla \cdot T = \frac{1}{2}\left(\triangle \mathfrak{v} + \frac{1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{v}\right) \quad \text{и} \quad (\nabla \cdot I) \operatorname{div} \mathfrak{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{v},$$

може се сила вискозности $\mathfrak{T}$, одређена на јединицу масе, написати у облику

$$\mathfrak{T} = \nu \triangle \mathfrak{v} + \left(\frac{\nu}{3} + \frac{\lambda}{\rho}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{v}, \tag{5}$$

где је $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ тзв. *кинематички коефицијент вискозности.*

Према томе, *општа једначина динамике вискозних течности* добија, с обзиром на једначину (4) у § 31, облик

$$\mathfrak{w} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \mathfrak{T},$$

одн. према једначини (5)

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \triangle \mathfrak{v} + \left(\frac{\nu}{3} + \frac{\lambda}{\rho}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{v}. \tag{6}$$

У случају нестишљиве течности ($\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$) из опште једначине динамике вискозне течности добијају се познате *Навије-Стоксове (Navier-Stokes) једначине* у облику једне векторске једначине

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v} \cdot \nabla)\mathfrak{v} = \mathfrak{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \triangle \mathfrak{v}, \tag{7}$$

где смо ставили

$$\mathfrak{w} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v} \cdot \nabla)\mathfrak{v}.$$

У скаларном облику једначине (7) изгледају

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \triangle v_1, \\
\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \triangle v_2, \\
\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \triangle v_3.
\end{aligned} \tag{8}$$

Ове три диференцијалне једначине заједно са условом нестишљивости (2) у § 25 одређују систем од четири парцијалне диференцијалне једначине за одређивање непознатих функција v_1, v_2, v_3 и p помоћу независно променљивих x, y, z, t. Дакле, пред нама је проблем у Ојлеровом смислу. Треба признати да је овај систем парцијалних једначина практички готово нерешљив изузев неких сасвим специјалних случајева.

Ако се случајно ради о врло спором кретању вискозне течности овај се систем једначина може *линеаризовати* изостављањем производа $v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x}$, $v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y}$, ... јер су тада и пројекције брзина и њихови изводи врло мали.

У том случају се систем (8) своди на овај систем линеарних парцијалних диференцијалних једначина првог реда

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial t} &= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \triangle v_1, \\
\frac{\partial v_2}{\partial t} &= Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \triangle v_2, \qquad (9) \\
\frac{\partial v_3}{\partial t} &= Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \triangle v_3,
\end{aligned}
$$

који омогућава решење извесног низа проблема о кретању вискозне течности.

Са друге стране, ако се узме у обзир да је увек

$$\triangle \mathfrak{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{v} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{v},$$

може се за силу вискозности $\mathfrak{T}$ у случају безвртложног струјања стишљиве течности написати

$$\mathfrak{T} = \left(\frac{4}{3}\nu + \frac{\lambda}{\rho}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{v}, \qquad (10)$$

одакле се изводи ова векторска једначина за кретање безвртложне а стишљиве течности

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \left(\frac{4}{3}\nu + \frac{\lambda}{\rho}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{v}. \qquad (11)$$

Проучавање вискозних течности пружа велике тешкоће и Озен (Oseen) је успео да у том проучавању дође до тачнијих резултата од оних које даје употреба само горњих парцијалних једначина. Како се ту ради о врло компликованом математичком апарату не можемо се у оквиру овог курса на томе задржавати.

52. Поазејев образац. Рејнолдсов број

Примера ради посматраћемо стационарно струјање вискозне нестишљиве течности кроз цев непромењљивог кружног пресека. Узмимо да је x-оса постављена у правцу цеви тако да течност струји у смеру x-осе. У таквом је случају очевидно због симетрије да брзина течности $\mathfrak{v} = \{v, 0, 0\}$ зависи само од координата y и z, тј. да је $v = v(y, z)$. Наиме, у том случају оправдано је сматрати да све течне честице подједнако удаљене од осе цеви имају једнаке брзине, а дуж цеви се брзина не мења.

Да бисмо упростили излагање изоставићемо спољашње силе. То је и иначе важан специјалан случај, ако је реч о сили теже као спољашњој сили, онда, кад је цев хоризонтална. Навије-Стоксове једначине изгледаће у том случају

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \\
&\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Из две последње једначине може се одмах закључити да притисак може зависити само од x, тј. $p = p(x)$, па се прва од једначина (1) може написати у облику

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}. \qquad (2)$$

Из ове пак једначине неминовно се намеће закључак

$$\frac{dp}{dx} = A, \qquad (3)$$

где је A нека константа. Наиме, обе стране једначине (2) морају бити константне, јер је њихова једнакост само тако могућа с обзиром да је v функција само од y и z а p опет само од x.

Интеграцијом једначине (3) у границама од почетка цеви (x_0) до њеног краја (x_1), где су притисци p_0 и p_1, добија се за константну алгебарску вредност A градијента притиска

$$A = -\frac{\triangle p}{l}, \qquad (4)$$

где смо ставили $\triangle p = p_0 - p_1$ и $l = x_1 - x_0$ (дужина цеви). Она је негативна јер течност мора тећи са места већег притиска.

На тај начин је распоред брзина течних честица у цеви одређен једначином

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{\triangle p}{\mu l}, \qquad (5)$$

која се добија из једначине (2) с обзиром на једначине (3) и (4). Ако се узме, што је врло често оправдано и експериментално проверено код спорог струјања, да течност не клизи дуж зидова цеви или да клизи врло мало па се преко тога може прећи, дакле, да за зидове цеви пријања, биће по омотачу цеви $v = 0$. Са тим контурним условом може се једначина (5) лако решити, ако се уведу поларне координате у равни yz са почетком у центру кружног пресека цеви. Како је због већ наведене симетрије $v = v(r)$, па брзина течности уопште не зависи од поларног угла, имаћемо, с обзиром на вредност Лапласова оператора у поларним координатама у равни, једначину

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = -\frac{\triangle p}{\mu l}. \tag{6}$$

Ако ову једначину напишемо

$$d\left(r\frac{dv}{dr}\right) = -\frac{\triangle p}{\mu l} r\,dr$$

и интегралимо, добићемо

$$r\frac{dv}{dr} = -\frac{\triangle p}{2\mu l} r^2 + C_1,$$

где је C_1 нека произвољна константа интеграције. Ова пак једначина може се написати у облику

$$dv = -\frac{\triangle p}{2\mu l} r\,dr + C_1\frac{dr}{r},$$

одакле се интеграцијом одмах добија

$$v = -\frac{\triangle p}{4\mu l} r^2 + C_1 \log r + C_2, \tag{7}$$

где је C_2 нова произвољна константа интеграције. Константе C_1 и C_2 могу се одредити на овај начин. Како брзина струјања течности остаје коначна на читавом сваком пресеку па и на осовини цеви, мора бити $C_1 = 0$. Константу C_2 одредићемо из контурног услова $v = 0$ за $r = R$, ако је R полупречник уочене цеви, тј.

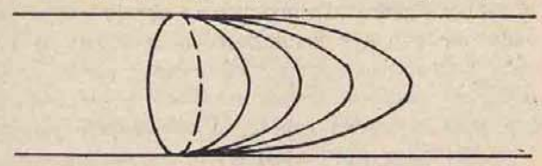
$$C_2 = \frac{\triangle p}{4\mu l} R^2.$$

Уношењем ових вредности за константе C_1 и C_2 у једначину (7) добија се најзад за брзину струјања течности

$$v = \frac{\triangle p}{4\mu l}(R^2 - r^2), \tag{8}$$

што значи да је брзина течности по пресеку цеви распоређена по параболичном закону. Дакле, течност струји кроз цев непроменљивог кружног пресека тако, да све честице које су у неком почетном тренутку $t = 0$ лежале на извесном попречном пресеку, у неком каснијем тренутку $(t > 0)$ леже на једном ротационом параболоиду који се пријањајући уз зидове цеви све више и више испупчава (сл. 32).

И количину Q течности која у једној секунди протече кроз пресек цеви, лако је одредити. Наиме, уочимо неки елемент површине $2\pi r\,dr$ пресека цеви у облику кружног прстена, где је r полупречник средњег круга прстена а dr његова дебљина. Све честице на том елементу имају приближно једнаке брзине v. Количина течности која протиче у јединици времена кроз тај елемент биће $2\pi\rho\, v r\,dr$, па, према томе, кроз читав пресек



Сл. 32

$$Q = 2\pi\rho\int_0^R r\,v\,dr, \tag{9}$$

где је ρ густина течности. Ако за v унесемо вредност из (8) и извршимо интеграцију, добићемо

$$Q = \frac{\pi\triangle p}{8\nu l} R^4, \tag{10}$$

где је ν кинематички коефицијент вискозности. Овај образац, који показује да је количина течности која у јединици времена протече кроз пресек неке цеви пропорционална четвртом степену полупречника цеви, зове се *Поазејев (Poiseuille) образац*. Овакво пак струјање течности кроз цеви које се покорава Поазејевом закону назива се *Поазејев ток*.

Узмимо, најзад, да струјање течности није само резултат рада притиска у цеви, већ је, на пр., струјање кроз неку цев у пољу теже која није хоризонтална. Тада ће се истицање вршити не само услед градијента притиска већ и због спољашње силе, у овом случају силе теже, која нека има константну пројекцију X на правац x-осе. У том случају за протицање кроз пресек цеви у јединици времена добијамо

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\nu}\left(\frac{\triangle p}{l} + X\right). \tag{11}$$

Поазејев ток за који једино важе изведени обрасци је *ламинарно струјање* вискозне течности кроз цеви. Ламинарно пак струјање течности уопште је оно, кад се течност може замислити подељена у слојеве који разним брзинама клизе један поред другог. На тај начин слој веће брзине тежи да повуче собом онај са мањом брзином и обрнуто.

Просто ламинарно струјање, међутим, није једини начин струјања који се може образовати у цеви и иначе. При већим брзинама наступа други начин струјања течности у цевима за који неће важити Поазејев образац. Тај други начин има ове карактеристике: 1) брзина истицања није више пропорционална разлици притисака Δp на почетку и крају цеви; 2) брзина и притисак не остају више локално непроменљиви већ осцилују око неких средњих вредности; 3) путање појединих честица нису више правилне, већ се течност непрестано меша, што се увођењем обојених конаца течности може и очигледно показати. Овај начин струјања течности зове се *турбулентно струјање*.

Рејнолдс (Reynolds) је на основу размишљања о механичкој сличности струјања закључио и експериментално потврдио да је за наступање турбулентног стационарног струјања вискозне течности у цевима, па и уопште, карактеристична вредност апстрактног броја Re, одређена обрасцем

$$Re = \frac{vl}{\nu}, \tag{12}$$

где је v брзина струјања, l дужина цеви, кад је реч о струјању у цевима, а ν кинематички коефицијент вискозности. Овај се апстрактни број зове *Рејнолдсов број*. Он игра врло важну улогу у хидродинамици вискозне течности, иако проблем турбулентног струјања вискозне течности није још потпуно разјашњен. На пр., при стационарном струјању нестишљиве вискозне течности кроз цев непроменљивог кружног пресека имаћемо Поазејев ток, тј. стабилно ламинарно струјање за $Re < 1100$ (до 1200). За вредности $Re > 1100$ ламинарно струјање постаје нестабилно и може лако прећи у турбулентно струјање што зависи још од неких других фактора.

Питање механичке сличности преко кога је Рејнолдс дошао до увођења броја Re састоји се у томе да се нађу *механички* услови под којима ће се два различита кретања одвијати на сличан начин, ако су *геометриски* услови слични. На пр., у двема кружним цилиндарским цевима које су геометриски сличне, тј. чије су димензије у истом односу, рецимо, у односу њихових дужина, биће геометриски слична места одређена координатама x, y, z које су све у односу дужина самих цеви. На таквим геометриски сличним местима струјања природно је са механичке стране да односи силе градијента притиска, вискозности и инерције буду исти. Међутим, с обзиром да ове три силе морају бити у равнотежи и да две одређују трећу могу се посматрати само две од њих. Обично се узимају само сила инерције и сила вискозности и њихов однос одређује Рејнолдсов број, који служи као критеријум за разграничење ламинарних од турбулентних струјања вискозне течности. Наравно да је лако одредити и однос све три силе, ако је то потребно. Као величине које служе за геометриску карактеристику појаве узима се нека карактеристична дужина (полупречник или пречник цеви, ширина канала, растојање плоча између којих је струјање, нека дужина у телу које се креће у течности итд.); кинематичке величине одређене су карактеристичним брзинама (брзина стру-

јања, брзина кретања тела у течности итд.); а динамичке са густином, динамичким коефицијентом вискозности (или место њих кинематичким коефицијентом вискозности) и притисцима.

До односа инерцијалне силе и силе вискозности доћи ћемо на овај начин. Наиме, у случају стационарних струјања течности биће инерцијална сила (на јединицу запремине) одређена изразом

$$-\rho\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\rho(\mathfrak{v}\cdot\nabla)\mathfrak{v} = -\rho v\frac{d\mathfrak{v}}{dl},$$

јер је $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = 0$ и где $\frac{d\mathfrak{v}}{dl}$ значи извод од $\mathfrak{v}$ у правцу струјања. Према томе, инерцијалне силе на сличним местима односиће се као изрази $\rho\frac{v^2}{l}$, јер се мале разлике брзина ($d\mathfrak{v}$) односе као карактеристичне брзине а исто тако и мале разлике дужина (dl) односе као саме карактеристичне дужине. Силе вискозности (такође на јединицу запремине) дате су изразима

$$\mu\Delta\mathfrak{v} = \mu\left(\frac{\partial^2\mathfrak{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{v}}{\partial z^2}\right)$$

и на односним местима су сразмерне изразима $\mu\frac{v}{l^2}$, јер се ради о количнику других диференција брзине и квадрата првих диференција дужине, а ове се такође односе као карактеристичне брзине и квадрати дужина. Однос пак силе инерције и силе вискозности биће, дакле, одређен апстрактним бројем

$$Re = \frac{\rho v^2}{l} : \frac{\mu v}{l^2} = \frac{\rho v l}{\mu} = \frac{vl}{\nu}. \tag{13}$$

Одавде је врло лако одредити димензију динамичког и кинематичког коефицијента вискозности. Наиме, ако у једначину (13) унесемо димензију брзине и дужине и узмемо у обзир да је на другој страни димензија апстрактног броја, као односа две величине исте димензије (силе), добићемо

$$\frac{[LT^{-1}][L]}{\nu} = 1,$$

одакле за димензију кинематичког коефицијента вискозности имамо

$$[\nu] = [L^2 T^{-1}]. \tag{14}$$

Из ових разматрања је јасно да Рејнолдсов број мањи од јединице значи да је сила вискозности већа од силе инерције у датом случају и обрнуто.

53. Кретање лопте у вискозној течности. Стоксов образац

У случају стационарног струјања нестишљиве вискозне течности Навије-Стоксова једначина има облик

$$(\mathfrak{v}\cdot\nabla)\mathfrak{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{\mu}{\rho}\Delta\mathfrak{v}.$$

Међутим, ако је такво струјање још и врло споро, тј. кад му одговара врло мали Рејнолдсов број ($Re \leqslant 1$), па је, према томе, сила вискозности, којој у односу на јединицу масе одговара члан $\frac{\mu}{\rho}\Delta\mathfrak{v}$, већа од силе инерције, којој опет на јединицу масе одговара члан $(\mathfrak{v}\cdot\nabla)\mathfrak{v}$, ова се последња може занемарити. Векторска диференцијална једначина таквог струјања течности постаје *линеарна* по $\mathfrak{v}$ и изгледа

(1) $$\mu\Delta\mathfrak{v} - \operatorname{grad} p = 0.$$

Ова једначина, заједно са једначином која изражава услов нестишљивости

(2) $$\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0,$$

потпуно одређује вектор $\mathfrak{v}$.

Као пример уочимо праволиниско и једнолико кретање лопте полупречника R у вискозној нестишљивој течности. Тај задатак је потпуно еквивалентан задатку о струјању (оптицању) течности око непокретне лопте, кад је брзина течности у бесконачности $\mathfrak{u} = \mathrm{const}$. Према томе, ако решимо овај други задатак, решење првог задатка се добија, кад се добијеном решењу дода брзина $-\mathfrak{u}$. У том случају ће се течност у бесконачности показати непокретна, а сама лопта ће се кретати константном брзином $-\mathfrak{u}$. Управо, ако је реч о стационарном струјању, онда баш и треба говорити о струјању око непокретне лопте, јер се код покретне лопте брзина течности у неким тачкама простора мења са временом.

Према томе, брзина $\mathfrak{v}$ струјања течности може се изразити у облику

(3) $$\mathfrak{v} = \mathfrak{w} + \mathfrak{u},$$

где је $\mathfrak{u}$, како смо рекли, константна брзина течности у бесконачности, а $\mathfrak{w}$ компонента брзине струјања која настаје услед пертурбације струјања коју изазива лопта. Из услова нестишљивости (2) међутим, може се закључити да је

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = \operatorname{div}\mathfrak{w} = 0,$$

одакле се види, да се вектор $\mathfrak{w}$ може претставити као ротор неког вектора $\mathfrak{U}$ (пошто је $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{U} = 0$), па написати

(4) $$\mathfrak{v} = \operatorname{rot}\mathfrak{U} + \mathfrak{u}.$$

Међутим, брзина $\mathfrak{v}$ је поларни вектор, па стога вектор $\mathfrak{U}$ мора бити аксијалан, да би његов ротор могао бити поларни вектор. Са друге стране, брзина $\mathfrak{v}$, па наравно и вектор $\mathfrak{U}$ зависи само од вектора положаја $\mathfrak{r}$ у односу на пол (почетак координатног система) који нека буде у центру лопте и од векторског параметра $\mathfrak{u}$. Најпростији аксијални вектор који задовољава све ове услове, с обзиром на потпуну симетрију која постоји, има облик $\varphi(r)(\mathfrak{r}\times\mathfrak{u})$, где је $\varphi(r)$ нека скаларна функција од r. Ако уведемо функцију $f(r) = \int\varphi(r)\,r\,dr$, може се вектор $\mathfrak{U}$ написати у облику

(5) $$\mathfrak{U} = f'(r)(\mathfrak{r}_0\times\mathfrak{u}) = \nabla f\times\mathfrak{u},$$

или пошто је $\mathfrak{u}$ константни вектор

(6) $$\mathfrak{U} = \operatorname{rot}(f\mathfrak{u}).$$

Према томе биће

(7) $$\mathfrak{w} = \operatorname{rot}(\nabla f\times\mathfrak{u}) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}(f\mathfrak{u}),$$

па се за брзину $\mathfrak{v}$ може написати, најзад,

(8) $$\mathfrak{v} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}(f\mathfrak{u}) + \mathfrak{u}.$$

Да бисмо одредили функцију $f(r)$ применићемо Хамилтонов оператор ∇ на једначину (1) векторски па ћемо добити

(9) $$\Delta\operatorname{rot}\mathfrak{v} = 0.$$

Ако за брзину $\mathfrak{v}$ узмемо вредност (8) имаћемо

$$\operatorname{rot}\mathfrak{v} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}(f\mathfrak{u}) = (\operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta)\operatorname{rot}(f\mathfrak{u}) = -\Delta\operatorname{rot} f\mathfrak{u},$$

па једначина (9) постаје, пошто због константности $\mathfrak{u}$ важи $\operatorname{rot} f\mathfrak{u} = \nabla f\times\mathfrak{u}$,

$$\Delta^2\operatorname{rot} f\mathfrak{u} = \Delta^2(\nabla f\times\mathfrak{u}) = \Delta^2(\operatorname{grad} f)\times\mathfrak{u} = 0.$$

Из ове једначине се пак може закључити да мора бити

(10) $$\Delta^2(\operatorname{grad} f) = \operatorname{grad}(\Delta^2 f) = 0,$$

јер вектор $\Delta^2\operatorname{grad} f$ није сталног правца, пошто то није ни $\operatorname{grad} f$.

Прва интеграција једначине (10) даје

$$\Delta^2 f = C.$$

Међутим, константа C мора бити једнака нули, а из ових разлога. У изразу $\Delta^2 f$ појављују се четврти парцијални изводи од f, док се брзина (7) изражава другим изводима од f. Како пак брзина $\mathfrak{w}$ мора у бесконачности бити једнака нули, мораће наравно бити једнаки нули и њени изводи. Дакле, може се ставити

(11) $$\Delta^2 f \equiv \Delta(\Delta f) = 0.$$

Ако сад Лапласов оператор Δ изразимо у сферним поларним координатама r, θ, φ, са полом у центру лопте и узмемо у обзир да $\triangle f$ не зависи ни од θ ни од φ јер је f функција само од r, може се једначина (11) написати у облику

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)\triangle f=0\,, \tag{12}$$

одн.

$$d\left(r^2\frac{d(\triangle f)}{dr}\right)=0\,.$$

одакле је после прве интеграције

$$r^2\frac{d(\triangle f)}{dr}=C_1\,,$$

где је C_1 произвољна константа интеграције. Кад се ова једначина напише у облику

$$d(\triangle f)=\frac{C_1}{r^2}\,dr\,,$$

из ње се другом интеграцијом добија

$$\triangle f=-\frac{C_1}{r}+C_2\,, \tag{13}$$

где је C_2 нова константа интеграције. Но, да би брзина $\mathfrak{v}$ била у бесконачности једнака нули мора константа C_2 бити једнака нули. Ако ставимо $-C_1=2a$ имаћемо

$$\triangle f=\frac{2a}{r}. \tag{14}$$

Ако у овој једначини поново изразимо оператор $\triangle$ у сферним поларним координатама и узмемо у обзир да је f функција само од r, имаћемо

$$\triangle f\equiv\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right)=\frac{2a}{r},$$

одн.

$$d\left(r^2\frac{df}{dr}\right)=2ar\,dr,$$

одакле се лако изводи решење

$$f=ar-\frac{A}{r}\,,$$

где је A произвољна константа интеграције. Ако ставимо $-A=b$, моћи ћемо написати за f

$$f=ar+\frac{b}{r}\,, \tag{15}$$

где су a и b произвољне константе интеграције. Адитивна константа у изразу за f изостављена је, јер не игра никакву улогу, пошто се брзина одређује изводима од f.

Најзад, кад се ова вредност за f унесе у израз (8) за брзину, добићемо после краћег рачуна образац

$$\mathfrak{v}=\mathfrak{u}-a\,\frac{\mathfrak{u}+\mathfrak{r}_0(\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{r}_0)}{r}+b\,\frac{3\,\mathfrak{r}_0(\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{r}_0)-\mathfrak{u}}{r^3}\,. \tag{16}$$

Константе a и b одредићемо из граничних услова. Наиме, на површини лопте (то значи за $r=R$) мора бити $\mathfrak{v}=0$, тј.

$$\mathfrak{u}-a\,\frac{\mathfrak{u}+\mathfrak{r}_0(\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{r}_0)}{R}+b\,\frac{3\,\mathfrak{r}_0(\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{r}_0)-\mathfrak{u}}{R^3}=0.$$

Међутим, како ова једначина треба да важи за произвољно $\mathfrak{r}_0$ ($\mathfrak{r}_0$ и $\mathfrak{u}$ су линеарно независни), морају коефицијенти уз $\mathfrak{u}$ и уз $\mathfrak{r}_0(\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{r}_0)$ сваки за себе бити једнаки нули, тј.

$$\frac{a}{R}+\frac{b}{R^3}-1=0,\qquad -\frac{a}{R}+\frac{3b}{R^3}=0. \tag{17}$$

Отуда се добија

$$a=\frac{3}{4}R,\qquad b=\frac{1}{4}R^3,$$

па, према томе, најзад

$$f=\frac{3}{4}Rr+\frac{R^3}{4r}\,, \tag{18}$$

$$\mathfrak{v}=\mathfrak{u}-\frac{3}{4}R\,\frac{\mathfrak{u}+\mathfrak{r}_0(\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{r}_0)}{r}-\frac{1}{4}R^3\,\frac{\mathfrak{u}-3\,\mathfrak{r}_0(\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{r}_0)}{r^3}. \tag{19}$$

На тај начин распоред брзина око покретне лопте је одређен.

Што се тиче распореда притиска, њега ћемо одредити на овај начин. Из једначине (1) с обзиром на вредност брзине (8) имамо

$$\operatorname{grad}p=\mu\triangle\mathfrak{v}=\mu\triangle[\operatorname{rot}\operatorname{rot}(f\mathfrak{u})]=\mu\triangle[\operatorname{grad}\operatorname{div}(f\mathfrak{u})-\triangle(f\mathfrak{u})]\,.$$

Како је $\triangle^2 f=0$ и $\mathfrak{u}=\mathrm{const.}$ биће

$$\operatorname{grad}p=\mu\triangle[\operatorname{grad}\operatorname{div}(f\mathfrak{u})]=\operatorname{grad}[\mu\triangle\operatorname{div}(f\mathfrak{u})]=\operatorname{grad}[\mu\,\mathfrak{u}\cdot\operatorname{grad}(\triangle f)]\,.$$

Отуда се добија

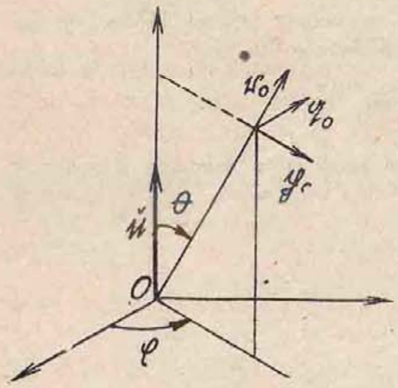
$$p=\mu\,\mathfrak{u}\cdot\operatorname{grad}(\triangle f)+p_0\,, \tag{20}$$

где је p_0 притисак у бесконачности. Ако унесемо вредност (18) за f добићемо коначан израз за распоред притиска

$$p=p_0-\frac{3}{2}\mu\,\frac{\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{r}_0}{r^2}R. \tag{21}$$

Најзад, поставимо питање одређивања силе $\mathfrak{F}$ притиска, коју течност при струјању око лопте врши на њу, одн. силе отпора коју лопта трпи при кретању кроз течност. Већ одређени распореди брзине и притиска пружају нам могућност за то.

Уведимо, ради тога, сферне поларне координате, тако да поларна оса буде оријентисана као вектор $\mathfrak{u}$ (сл. 33). Ако са θ обележимо поларно угаоно растојање, а са φ онај други поларни угао, биће све величине које посматрамо због симетрије у односу на овакву поларну осу зависне само од сферних координата r и θ а неће зависити од φ.



Сл. 33

Резултанта $\mathfrak{F}$ сила отпора биће очигледно оријентисана као вектор $\mathfrak{u}$. Да бисмо је израчунали узмимо у обзир да на јединицу површине уочене лопте дејствује хидростатички притисак p и сила вискозности. На управљени елемент $d\mathfrak{f}$ сфере дејствује

$$-p\,d\mathfrak{f}+\mathfrak{t},$$

ако је управљени елемент површине лопте оријентисан ван лопте, тј. ако је $d\mathfrak{f}=\mathfrak{r}_0\,df$, па је притисак супротно оријентисан, а пошто је за нестишљиву течност сила вискозности на елемент површине $d\mathfrak{f}$ дата обрасцем (§ 51, 1)

$$\mathfrak{t}=\mu(\nabla\mathfrak{v}+\overline{\nabla\mathfrak{v}})\cdot d\mathfrak{f}.$$

Према томе, за читаву површину S_1 сфере имамо

$$\mathfrak{F}=-\oint_{S_1}p\,d\mathfrak{f}+\mu\oint_{S_1}(\nabla\mathfrak{v}+\overline{\nabla\mathfrak{v}})\cdot d\mathfrak{f}=\oint_{S_1}[-p+\mu(\nabla\mathfrak{v}+\overline{\nabla\mathfrak{v}})]\cdot d\mathfrak{f}. \tag{22}$$

Но, одмах ћемо показати да се за израчунавање овога интеграла, интеграција може извести и по површини ма које са датом лоптом концентричне лопте. Заиста, ако посматрамо интеграл

$$\oint_{S_1+S_2}[-p+\mu(\nabla\mathfrak{v}+\overline{\nabla\mathfrak{v}})]\cdot d\mathfrak{f}$$

узет по површинама S_1 и S_2 две концентричне лопте од којих је једна наша дата лопта, а друга нека са њом концентрична која је обухвата, може се овај интеграл по Гаусовом ставу претворити у запремински по запремини V између површина тих лопти, па ће бити

$$\oint_{S_1+S_2}[-p+\mu(\nabla\mathfrak{v}+\overline{\nabla\mathfrak{v}})]\cdot d\mathfrak{f}=\int_V(-\operatorname{grad}p+\mu\,\Delta\mathfrak{v})\,dV,$$

кад се узме у обзир услов нестишљивости. Подинтегрална функција $-\operatorname{grad}p+\mu\,\Delta\mathfrak{v}$ је при учињеним претпоставкама (стационарно, споро струјање нестишљиве течности — једначина (1)) за читав простор испуњен течношћу једнака нули. Међутим, то није случај за простор заузет само датом лоптом и стога (22) није једнако нули. Отуда закључујемо да је

$$\oint_{S_1}[-p+\mu(\nabla\mathfrak{v}+\overline{\nabla\mathfrak{v}})]\cdot d\mathfrak{f}=\oint_{S_2}[-p+\mu(\nabla\mathfrak{v}+\overline{\nabla\mathfrak{v}})]\cdot d\mathfrak{f}, \tag{23}$$

јер је оријентација свуда замишљена у спољашњи простор, а у том случају су на обе сфере управљени елементи супротни.

Према томе, $\mathfrak{F}$ се може израчунати и одређивањем интеграла по некој концентричној сфери чији полупречник тежи бесконачности. Пошто површински елемент df овакве сфере расте као r^2, могу се под интегралом занемарити сви чланови који теже нули брже од $1/r^2$. Тако се у изразу (16) за брзину може унапред изоставити у вези са овим проблемом члан са r^3 у имениоцу, јер се под интегралом и иначе појављују само изводи од $\mathfrak{v}$, па би, према томе, тај члан давао чланове који теже нули брже од $1/r^2$.

Како сила притиска (отпора) $\mathfrak{F}$ има правац као $\mathfrak{u}_0$ довољно је одредити само њену алгебарску вредност F у том правцу, што ћемо добити пројицирањем силе $\mathfrak{F}$ на правац $\mathfrak{u}_0$. Са друге стране, из досадашњих излагања се види да се интеграција која је потребна за одређивање силе $\mathfrak{F}$ може извести и по површини концентричне сфере S_2 чији полупречник расте у бесконачност. Ако се та чињеница узме у обзир добиће се пројицирањем једначине (22) на правац орта $\mathfrak{u}_0$ за F израз

$$F=-\oint_{S_2}p\cos\theta\,df+\mu\oint_{S_2}[(\mathfrak{u}_0\cdot\nabla)\mathfrak{v}+\nabla(\mathfrak{u}_0\cdot\mathfrak{v})]\cdot d\mathfrak{f}, \tag{24}$$

па њега треба израчунати.

Да бисмо то постигли употребићемо Хамилтонов оператор ∇ изражен у нашим сферним поларним координатама у облику

$$\nabla=\mathfrak{r}_0\frac{\partial}{\partial r}+\mathfrak{p}_0\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\mathfrak{q}_0\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{25}$$

Дакле, с обзиром на слику (33), биће

$$\mathfrak{u}_0\cdot\nabla=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \tag{26}$$

односно, пошто брзина не зависи од φ и нема пројекцију на правац $\mathfrak{q}_0$,

$$(\mathfrak{u}_0\cdot\nabla)\mathfrak{v}=\mathfrak{r}_0\left(\cos\theta\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{\sin\theta}{r}v_\theta\right)+ \tag{27}$$

$$+\mathfrak{p}_0\left(\cos\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}v_r-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right),$$

где је

$$v_r = u\cos\theta\left(1-\frac{2a}{r}\right),\quad v_\theta = -u\sin\theta\left(1-\frac{a}{r}\right),$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{2au\cos\theta}{r^2},\qquad \frac{\partial v_r}{\partial\theta} = -u\sin\theta\left(1-\frac{2a}{r}\right),\tag{28}$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} = -\frac{au\sin\theta}{r^2},\qquad \frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} = -u\cos\theta\left(1-\frac{a}{r}\right).$$

Најзад, пошто је $d\mathfrak{f} = \mathfrak{r}_0\,df$, биће

$$[(\mathfrak{u}\cdot\nabla)\mathfrak{v}]\cdot\mathfrak{r}_0 = \cos\theta\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\sin\theta}{r}v_\theta = \tag{29}$$
$$= \frac{2au\cos^2\theta}{r^2} - \frac{au\sin^2\theta}{r^2}.$$

Са друге стране је

$$\mathfrak{u}_0\cdot\mathfrak{v} = \mathfrak{u}_0\cdot(v_r\mathfrak{r}_0 + v_\theta\mathfrak{p}_0) = v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta,\tag{30}$$

па је стога

$$\nabla(\mathfrak{u}_0\cdot\mathfrak{v}) = \mathfrak{r}_0\left(\cos\theta\frac{\partial v_r}{\partial r} - \sin\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) +\tag{31}$$
$$+\frac{\mathfrak{p}_0}{r}\left(\cos\theta\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - v_r\sin\theta - v_\theta\cos\theta - \sin\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right)$$

и најзад

$$[\nabla(\mathfrak{u}_0\cdot\mathfrak{v})]\cdot\mathfrak{r}_0 = \cos\theta\frac{\partial v_r}{\partial r} - \sin\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial r} = \frac{2au\cos^2\theta}{r^2} + \frac{au\sin^2\theta}{r^2}.\tag{32}$$

Ако се на крају за p узме вредност из обрасца (21) добиће се за F израз

$$F = \oint_{S_2}\left(-p_0\cos\theta + \frac{6au\mu}{r^2}\cos^2\theta\right)df =$$
$$= -p_0\oint_{S_2}\cos\theta\,df + 6au\mu\oint_{S_2}\cos^2\theta\,d\omega =\tag{33}$$
$$= 6au\mu\cdot\frac{4}{3}\pi = 8\pi a\mu u,$$

где $d\omega$ означава елемент просторног угла, тј. $d\omega = \frac{df}{r^2}$, а пошто је

$$\oint_{S_2}\cos\theta\,df = \oint_{S_2}\mathfrak{u}_0\cdot d\mathfrak{f} = \int_{V_2}\operatorname{div}\mathfrak{u}_0\,dV = 0.$$

Да бисмо олакшали читаоцу израчунавање интеграла $\oint_{S_2}\cos^2\theta\,d\omega$, навешћемо још да је елемент површине сфере у нашим сферним координатама одређен изразом $df = r\,d\theta\cdot r\sin\theta\,d\varphi = r^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta$, па је, стога $d\omega = \sin\theta\,d\varphi\,d\theta$.

Ако у обрасцу који смо извели у (33) за притисак (отпор) ставимо још за a вредност одређену из једначина (17), тј. $a = \frac{3}{4}R$, добићемо *Стоксов образац*

$$F = 6\pi\mu uR.$$

Питање знака је очигледно. Наиме, ако се, како смо ми узели лопта креће брзином $-\mathfrak{u}$, она ће трпети отпор који ће бити супротан смеру кретања, дакле, оријентисан као $\mathfrak{u}$. Образац важи само за сасвим споро кретање лопте у течности, јер је под таквим претпоставкама и изведен.

ЛИТЕРАТУРА

У овом списку наведена су, азбучним редом по имену писаца, само она дела која је писац овог уџбеника могао наћи и употребити.

1. Александров В. Л. — Техническая гидромеханика. Москва: Огиз, 1946.
2. Анђелић Т. — Теорија вектора, II изд. Београд: Научна књига, 1949.
3. Appel P. — Traité de mécanique rationelle, tome III. Paris: Gauthier-Villars, 1928.
4. Berliner A. — Lehrbuch der Physik. Berlin: Springer, 1934.
5. Билимовић А. — Геометриске основе рачуна са дијадама, Београд: С. А. Н., 1930.
6. Bjerknes V., Bjerknes J., Solberg H., Bergeron T. — Physikalische Hydrodynamik. Berlin: Springer, 1933.
7. Bruhat G. — Mécanique. Paris: Masson, 1948.
8. Eberhardt C. — Einführung in die theoretische Aerodynamik. München: Oldenbourg, 1927.
9. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. IV, 2 — Heft 1—4.
10. Есьман И. Г. — Гидравлика. Баку: Азнефтеиздат, 1947.
11. Филоненко-Бородич М. М. — Теория упругости. Москва: Огиз, 1947.
12. Grimsehl — Tomaschek — Lehrbuch der Physik, Bd. I. Leipzig: Teubner, 1942.
13. Handbuch der Physik (herausgegeben von H. Geiger und K. Scheel): Bd. VI — Mechanik der elastischen Körper; Bd. VII — Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper. Berlin: Springer, 1927.
14. Хайкин С. Э. — Механика. Москва: Огиз, 1947.
15. Hatschek E. — La viscosité des liquides, trad. française par G. Arçay. Paris: Dunod, 1932.
16. Хлитчијев J. — Поглавља из теорије еластичности. Београд: Научна књига, 1948.
17. Horn J. — Partielle Differentialgleichungen. Berlin: de Gruyter, 1929.
18. Jameson A. H. — An Introduction to Fluid Mechanics. London: Longmans, 1937.
19. Joos G. — Lehrbuch der theoretischen Physik. Leipzig: Akad. Verlag, 1945.
20. Joukowski N. — Aérodinamique, trad. française par S. Drzewiecki. Paris: Gauthier—Villars, 1931.
21. Жардецки В. — Основи теориске физике. Београд: Универзитетско издање, 1941.
22. Жардецки В. — Хидромеханика (литографисано). Београд, 1932.
23. Карман Т. и Био М. — Математические методы в инжинерном деле (перевод с английского М. Г. Шестопал). Москва: Огиз, 1946.
24. Кашин Н. В. — Курс физики, I. Москва: Учпедгиз, 1948.
25. Kellog O. D. — Foundation of Potential Theory. Berlin: Springer, 1929.

26. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. Б. — Теоретическая гидромеханика I. Москва: Огиз, 1948.
27. Кочин Н. Е. — Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Москва, Онти, 1934.
28. Lagally M. — Vektor-Rechnung. Leipzig: Akad. Verlag, 1945.
29. Ландау Л., Лифшиц Е. — Механика сплошных сред. Москва: Огиз, 1944.
30. Лейбензон Л. С. — Курс теории упругости. Москва: Огиз, 1947.
31. Lamb H. — Lehrbuch der Hydrodynamik (deutsche Übersetzung von J. Riedel). Leipzig: Teubner, 1907.
32. Levi-Civita T. — Caractéristiques des sistèmes différentiels et propagation des ondes. Paris: Alcan, 1932.
33. Максименко Ф. Е. — Курс гидравлики, част I. Москва: Госуд. изд., 1921.
34. Milne-Thomson L. M. — Theoretical Hydrodynamics. London: Macmillan, 1949.
35. Müller W. — Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten. Leipzig: Akad Verlag, 1932.
36. Огловлин, А. П. — Основы гидромеханики. Москва: НКАП, 1945.
37. Page L. — Introduction to Theoretical Physics. New York: van Nostrand, 1948.
38. Piercy N. A. V. — Aerodynamics. London: The English Universities Press, 1947.
39. Planck M. — Einführung in die Mechanik deformierbarer Körper. Leipzig: Hirzel, 1922.
40. Prandtl L. — Strömungslehre. Braunschweig: Vieweg, 1942.
41. Prašil F. — Technische Hydromechanik. Berlin: Springer, 1926.
42. Привалов И. И. — Введение в теорию функций комплексного переменного. Москва: Огиз, 1945.
43. Richardson E. G. — Sound, a physical text-book. London: E. Arnold, 1947.
44. Schaefer C. — Einführung in die theoretische Physik, Bd. I. Berlin: de Gruyter, 1929.
45. Schmidt H. — Aerodynamik des Fluges. Berlin: de Gruyter, 1929.
46. Sédille M. — Précis de mécanique des fluides. Paris: Dunod, 1944.
47. Sommerfeld A. — Vorlesungen über theoretische Physik II, Mechanik der deformierbaren Medien. Leipzig: Akad. Verlag, 1945.
48. Timoshenko S. — Theory of Elasticity. New-York: McGraw-Hill, 1934.
49. Великанов М. А. — Динамика русловых потоков. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1946.
50. Vennard J. K. — Elementary Fluid Mechanics. New-York: J. Wiley, 1947.
51. Villat H. — Aperçus théoriques sur la résistance des fluides. Paris: Gauthier-Villars, 1920.
52. „ „ — Mécanique des fluides. Paris: Gauthier-Villars, 1938.
53. „ „ — Leçons sur la théorie des tourbillons Paris: Gauthier-Villars, 1930.
54. „ „ — Leçons sur les fluides visqueux. Paris: Gauthier-Villars, 1943.
55. Webster A. G. — Szögö G. — Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Leipzig: Teubner, 1930.

РЕГИСТАР

ИСПРАВКЕ

стр.	ред	стоји	треба
114	1 одоздо	$\int_{f} \mathfrak{r}\times p\,d\mathfrak{f}$	$\oint_{f} \mathfrak{r}\times p\,d\mathfrak{f}$
115	4 одозго	$\int_{f} p\,\mathfrak{r}\times d\mathfrak{f}$	$\oint_{f} p\,\mathfrak{r}\times d\mathfrak{f}$
170	17 одоздо	$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{1}}$	$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$