Prirodno- matematički
fakultet Univerziteta
u Beogradu

BOOL-OVE ALGEBRE
U LOGICI

(magistarski rad)

Žarko Mijajlović

1975 g.

Uvod

Rad je podeljen na tri dela.

I deo: U tački 1. izložena je jedna formulacija ekvivalentna aksiomi izbora. Ovo tvrđenje ilustrovano je sa nekoliko primera. U tački 2. izloženi su neki stavovi teorije modela. Napominjemo, da je T.3. od bitne važnosti u razmatrnju u delu III.

II deo: Ovaj deo satoji se iz pet tačaka.

U tački 1. navedeni su neki aksiomatski sitemi Bool-ovih algebri.

U tački 2. data je definicija Bool-ove algebre sa operatorima (T, S_4, S_5, S_6 algebre).

U tački 3. navedene su osnovne definicije i tvrđenja u vezi sa Bool-ovim algebrama (pojam ideala, filtra, atomske, kompletne Bool-ove algebre, Stone-ov o reprezentaciji Bool-ovih algebri itd.)

U tački 4. prikazana su neka zapažanja u vezi sa Bool-ovim algebrama. U ovoj tački uveden je pojam rastavljenog skupa (R-skup, Def.1.) i celularnost Bool-ove algebre B: $\mathrm{cel}B = \sup\{kS \mid S \subseteq B, S \text{ je R-skup}\}$. Možemo reći, da je ideja uvođenja celB u vezi sa /6/. U vezi sa R-skupovima, koje možemo da shvatimo kao poobštenja skupa atoma Bool-ove algebre B, izložena su nekoliko tvrđenja (T.1, T.2, T.7, T.,8, T.9). U nekim slučajevima nađen je celB, naprimer, kada je B atomska algebra, i ako je B Bool-ova algebra regularno otvorenih skupova topološkog prostora. Takođe, R-skupovi su korišćeni u dokazu, da u svakoj beskonačnoj Bool-ovoj algebri postoji ideal I da je $\bigvee I = 1$, i takođe, da se svaka konačna Bool-ova algebra može utopiti u svaku beskonačnu Bool-ovu algebru. U ovoj tački, izrečeno je i nekoliko tvrđenja u vezi sa distributivnim mrežama (T.13, T.14). Tvrđenje T.16. pokazuje da se neki stavovi iz teorije skupova mogu preneti na Bool-ove algebre.

U tački 5. ukazano je na neke prirodne veze između operatora zatvaranja Bool-ove algebre B i binarnih relacija na A, gde je A skup atoma algebre B (C.3.1-4). Tvrđenje T.4. koristi se u delu III u veži sa S_5 i S_6 algebrama.

III deo: satoji se iz 8 tačaka. Ovaj deo može se smatrati, da je centralni deo rada. Ovde se Bool-ove algebre razmatraju u okviru više formalnih teorija i to na raznim nivoima: teorija Bool-ovih algebri u jednačinskom računu (teorija $\mathcal{B}_0$), teorija Bool-ovih algebri u iskaznom računu (teorije $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_6$), teorija Bool-ovih algebri u predikatskom računu (teorija $\mathcal{B}$). Takođe, izrečeno je više meta tvrđenja u vezi sa navedenim teorijama.

U tački 1. uvedena je teorija $\mathcal{B}_0$. Osnovno tvrđenje je T.2. koje ukazuje na razne interpretacije teorije $\mathcal{B}_0$. Deo dokaza u T.2, $4^\circ \longrightarrow 1^\circ$ u osnovi zasniva se na ideji dokaza u /11/, str. 299.

U tački 2. uvodi se teorija $\mathcal{B}_1$, koja je ustvari teorija univerzalnih (etvorenih) iskaza x teorijé Boålovih algebri u predikatskom računu.

U tački 3. uvodi se teorija $\mathcal{B}_6$, koja je pomoćnog karaktera. Osnovno je, da je makoja formula teorije $\mathcal{B}_1$ ekvivalentna elementarnoj formuli oblika u = v teorije $\mathcal{B}_6$. Možemo reći, da ideja (mada daleka), potiče iz (14), gde je slična radnja vršena na formulama teorije prirodnih brojeva iz drugih razloga. Tu je takođe dokazano, da je $\mathcal{B}_6$ a time i $\mathcal{B}_1$ odlučiva.

U tački 4. dokazuje se, da se mogu koristiti Kripke-ovi modeli u postupku utvrđivanja da li je neka formula teorije $\mathcal{B}_1$, teorema. U osnovi, koristi se ideja semantičkih tabloa za modalni T račun, prema /3/. Osnovno tvrđenje je T.1. Interesantna posledica je T.2.

U tački 5. razmatra se red terma t, u oznacá r(t). U osnovi, ideja potiče iz reda formule za modalni račun S_5, prema /3/. Kao glavno tvrđenje ove tačke može se uzeti T.2.

U tački 6. razmatra se elementarna teorija Bool-ovih algebri u predikatskom računu. U T.2. dokazuje se, da je u nekim formulama moguće eliminisati kvantifikatore. Takođe, pokazano je, kako se teorija Bool-ovih Bool-ovih algebri može dopuniti do kompletne teorije, i takođe , da je teorija bez atomskih Bool-ovih algebri odlučiva.

U tački 7. razmatra se teorija Bool-ovih jednačina. Tvrđenja T.1. i T.2. pokazuju da je svaka Bool-ova jednačina efektivno rešiva.

U tački 8. razmatra se odnos teorije Bool-ovih algebri prema drugim teorijama, specijalno prema iskaznom računu $\mathcal{L}$ (T.3), i modalnom S_5 računu. Takođe je pokazano da su univerzalni iskazi elementarne teorije distributivnih mreža odlučivi (T.2). Pored toga, dat je topološki dokaz stava kompaktnosti (konačnosti; Malcev, Gödel) za iskazni račun $\mathcal{L}$.

Korišćene su sledeće oznake:

1. $\mathcal{B}X$ je Boolean skupa X.
2. Simbol $\doteq$ ima značenje "je zamena", ili je meta jednakost.
3. $\vdash_{\mathcal{T}} \alpha$ ima značenje: α je teorema teorije $\mathcal{T}$.
4. $\sim\vdash_{\mathcal{T}} \alpha$ ima značenje: α nije teorema teorije $\mathcal{T}$.
5. $B \models \alpha$ ima značenje: α je tačna formula u modelu B.
6. $B \sim\models \alpha$ ima značenje: α nije tačna formula u modelu B.
7. $\mathcal{L}$ je oznaka za iskazni račun (v. /3/).
8. Ako je α formula (term), $\alpha(x)$ ima sledeće značenje: $\alpha(x|t)$ je formula (term) koji se dobija, kada se sva pojavljivanja promenljive x u α zamene sa t. Kad god je jasno, umesto $\alpha(x|t)$ pisaćemo $\alpha(t)$.
9. Simbol $\subseteq$ je znak inkluzije, dok je $\subset$ znak stroge inkluzije.

I

1. Navodimo nekoliko formulacija ekvivalentnih aksiomi izbora, koje ćemo u daljem koristiti. Pre toga uvodimo nekoliko definicija. Ovde je P iskazna shema (u teoriji koja u sebi sadrži teoriju skupova), α je kardinalni broj.

Def.1. Formula $(\forall_A B)P$ je zamena za $(\forall B)(B \subseteq A \Rightarrow P)$.

Def.2. 1° $P_{\alpha}(A) \doteq (\forall_A B)(kB = \alpha \Rightarrow P(B))$

2° $P_{\leq\alpha}(A) \doteq (\forall_A B)(kB \leq \alpha \Rightarrow P(B))$

3° $P_{<\alpha}(A) \doteq (\forall_A B)(kB < \alpha \Rightarrow P(B))$

4° $P_{\geq\alpha}(A) \doteq (\forall_A B)(kB \geq \alpha \Rightarrow P(B))$

5° $P_{>\alpha}(A) \doteq (\forall_A B)(kB > \alpha \Rightarrow P(B))$

Def.3. Familija skupova $\mathcal{M}$ je induktivna akko svaki $\subseteq$ – lanac u $\mathcal{M}$ ima supremum.

T.1. Neka je $\mathcal{M}$ induktivna familija i $A \in \mathcal{M}$. Tada:

$$P_{<\aleph_0}(A) \Rightarrow (\exists M \in \mathcal{M})(A \subseteq M \wedge P_{<\aleph_0}(M) \wedge (\forall N \in \mathcal{M})(A \subseteq N \wedge P_{<\aleph_0}(N) \wedge M \subseteq N \Rightarrow M = N))$$

tj. ako svi konačni podskupovi skupa A imaju svojstvo P, tada postoji maksimalan skup $M \in \mathcal{M}$ da je $A \subseteq M$ i da svaki konačan podskup od M ima svojstvo P.

Dokaz Neka je $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{M} \mid A \subseteq X \wedge P_{<\aleph_0}(X)\}$. Kako je $A \in \mathcal{F}$, to $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Neka je $\mathcal{L} \subseteq$ – lanac u $\mathcal{F}$ i neka je $N = \cup\mathcal{L}$. Tada $N \in \mathcal{M}$. Neka je $kB < \aleph_0$, $B \subseteq N$. Kako je B konačan i $\mathcal{L}$ je lanac, to postoji $L_0 \in \mathcal{L}$ da $B \subseteq L_0$. Pošto je $L_0 \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$, to $L_0 \in \mathcal{F}$, odakle $P(B)$. Otuda $P_{<\aleph_0}(N)$, te $N \in \mathcal{F}$. Prema tome $\mathcal{F}$ je induktivna familija, te prema Zornovoj lemi postoji maksimalan skup M u $\mathcal{F}$.

C.1. Kako je $\mathcal{B}X$ induktivna familija, to ako je $A \subseteq X$ i $P_{<\aleph_0}(A)$, to postoji maksimalan $M \subseteq X$ da $P_{<\aleph_0}(M)$ i $A \subseteq M$.

Takođe važi opštije tvrđenje: Neka je $\bar{P}_{<\alpha}(A) \doteq (\forall_A B)(kB < \alpha \Rightarrow P(B,A))$. Neka je $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow (P(B,A_1) \Rightarrow P(B,A_2))$. Tada važi T.1. ako se P zameni sa $\bar{P}$.

Na sličan način se dokazuju sledeća tvrđenja. Neka je $\mathcal{M}$ induktivna familija. Tada, ako je n prirodan broj i Q je bilo koji od predikata $P_{<n}(A)$, $P_{\leq n}(A)$, $P_n(A)$, tada:

T.2. $Q(A) \Rightarrow (\exists M \in \mathcal{M})(A \subseteq M \wedge Q(M) \wedge (\forall N \in \mathcal{M})(A \subseteq N \wedge Q(N) \wedge M \subseteq N \Rightarrow M = N))$

Ako se u 4^0, 5^0 uzme da je B konačan skup, važe analogna tvrđenja.

Primer 1^0 Neka je $f: A \to B$. Tada postoji maksimalan A' (u odnosu na $\subseteq$) da je $A' \subseteq A$ i $f|A'$ je 1-1 preslikavanje.

Dokaz 1^0 f je konstanta. Tada za A' možemo uzeti ma koji jednočlan podskup skupa A.

2^0 f nije konstanta. Tada postoji A_0 da je $kA_0 \geq 2$ i da je $f|A_0$ 1-1 preslikavanje. Neka je $P(B) \doteq (\forall x,y \in B)(f(x)=f(y) \Rightarrow x=y)$ i $\mathcal{M} = \mathcal{B}A$. Otuda $P_2(A_0)$. Prema T.2. postoji maksimalan A' da $A_0 \subseteq A' \subseteq A$ i $f|A'$ je 1-1 preslikavanje.

Primetimo da odavde neposredno sleduje aksioma izbora. Zaista, neka je $\mathcal{F}$ ma koja familija nepraznih disjunktnih skupova. Neka je $f: \cup\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ gde $(\forall X \in \mathcal{F})(\forall x \in X)(f(x)=X)$. Tada je f preslikavanje na, a razbijanje koje odgovara jezgru preslikavanja f je upravo familija $\mathcal{F}$. Prema prethodnom, postoji maksimalan $A' \subseteq \cup\mathcal{F}$ da $f|A: A' \xrightarrow[1-1]{} \mathcal{F}$. Pretpostavimo da je za neki $X_0 \in \mathcal{F}$ ispunjeno $A' \cap X_0 = \emptyset$. Neka je $x_0 \in X_0$, $A'' = A' \cup \{x_0\}$ i $g: A'' \to \mathcal{F}$, tako da $g|_{A'} = f|_{A'}$ i $g(x_0) = X_0$. Tada $A' \subset A''$ i $f|_{A''}$ je 1-1 preslikavanje što je kontradikcija.

Prema prethodnom zaključujemo da je za $Q \doteq P_2(A)$, T.2. ekvivlentno sa aksiomom izbora.

Primer 2^0 Neka je data algebra (A,Ω) i zakon Z: $t_1=t_2$ (nad Ω u osnovnom alfabetu $\{x_0,x_1,x_2,\ldots\}$). Ako postoji $A' \in \mathcal{B}_\Omega(A)$ 1), koja zadovoljava zakon Z, onda postoji maksimalna podalgebra algebre A koja zadovoljava zakon Z.

---

1) $\mathcal{B}_\Omega(A)$ je skup podalgebri algebre A.

Dokaz Neposredno se proverava da je $\mathcal{B}_\Omega(A)$ induktivna familija. Neka je n broj slova (promenljivih) koje učestvuju u zakonu Z. Neka je $P(B) \doteq$ "B zadovoljava zakon Z" (tj. $(\forall b_1, b_2, \dots, b_n \in B)(t_1(b_1, \dots, b_k) = t_2(b_{k+1}, \dots, b_n))$). Neka je $A' \in \mathcal{B}_\Omega(A)$ koja zadovoljava zakon Z. Tada $P_{\leq n}(A)$, ta prema T.2. postoji maksimalna algebra $A_z \in \mathcal{B}_\Omega(A)$, da $P_{\leq n}(A_z)$. Kako je $P_{\leq n}(A_z)$ akko A_z zadovoljava zakon Z, to A_z zadovoljava zakon Z.

Primedba Da smo umesto $\mathcal{B}_\Omega(A)$ za $\mathcal{M}$ uzeli $\mathcal{B}A$, tada bi prethodno tvrđenje bilo da postoji maksimalan skup $A' \subseteq A$, da A' zadovoljava zakon Z. Jasno je da u opštem slučaju nije $A' \in \mathcal{B}_\Omega(A)$.

C.2.1. Ako (A, Ω) ima trivijalnu podalgebru, tada za svaki zakon Z nad Ω postoji maksimalna podalgebra koja zadovoljava zakon Z.

Dokaz neposredno sledi iz činjenice da trivijalna algebra zadovoljava svaki zakon.

C.2.2. U svakoj grupi postoji maksimalna komutativna podgrupa.

Ovde je Z: $xy=yx$. Tvrđenje sledi iz činjenice da svaka grupa ima trivijalnu podgrupu.

C.2.3. U svakoj lupi postoji maksimalna podlupa, koja je grupa.

Ovde je Z: $(xy)z=x(yz)$. Tvrđenje sledi iz činjenice da svaka lupa ima trivijalnu podlupu.

Primer 3° (Tukey, Teichmüller) U svakoj familiji skupova $\mathcal{K}$ konačnog karaktera[1] postoji maksimalan skup A.

Dokaz Neka je $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\cup\mathcal{K})$, $P(B) \doteq B \in \mathcal{K}$. Neka je $A \in \mathcal{M}$. Tada $P_{<\aleph_0}(A)$. Prema T.1. postoji maksimalan $M \in \mathcal{M}$ da $P_{<\aleph_0}(M)$. No kako je $P_{<\aleph_0}(M) \Leftrightarrow M \in \mathcal{K}$, to $M \in \mathcal{K}$. Kako je $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$, to je M maksimalan u $\mathcal{K}$.

Primer 4° Svaki antilanac u $(X, \leq)$ sadržan je u maksimalnom antilancu.

Dokaz Neposrednom primenom T.2. na $\mathcal{M} = \mathcal{B}X$, $P(B) \doteq (\forall x, y \in B)(x \neq y \Rightarrow x \| y)$.[2]

---

1) $\mathcal{K}$ je konačnog karaktera akko $(\forall A)(A \in \mathcal{K} \Leftrightarrow (\forall_A B)(kB < \aleph_0 \Rightarrow B \in \mathcal{K}))$

2) $x \| y \doteq \neg(x \leq y \vee y \leq x)$

2. U ovom delu izložićemo nekoliko činjenica iz teorije modela koje ćemo u daljem koristiti.

Pod modelom teorije $\mathcal{T}$ podrazumevaćemo standardne modele, onako kako su opisani, naprimer, u /9/, odnosno u /2/.

Za datu teoriju $\mathcal{T}$ i unarni predikat P može se konstruisati teorija $\mathcal{T}_P$ relativizacijom kvantifikatora u $\mathcal{T}$ na P (ta procedura opisana je u /18/). Postupak se sastoji u tome, što se za formulu F teorije $\mathcal{T}$ sve sotformule formule F oblika $(\forall x)F_1(x)$, $(\exists x)F_1(x)$ zamenjuju respektivno formulama $(\forall x)(P(x) \Rightarrow F_1(x))$, $(\exists x)(P(x) \wedge F_1(x))$. Tako dobijena formula F_P je formula teorije $\mathcal{T}_P$. Ovde ćemo uzimati da je $P(x)$ oblika $x \in A$, gde je (A,Ω) model teorije $\mathcal{T}$.

Neka je struktura (A,Ω) model teorije $\mathcal{T}$. Pod valuacijom podrazumevamo preslikavanje $v: I \to A$, gde je I skup promenljivih teorije $\mathcal{T}$. Neka je P predikat u jeziku teorije $\mathcal{T}$. Pisaćemo $A \models_v P$, ako je $P(vx_1,\ldots,vx_n)$ ispunjeno na (A,Ω) (preciznije, ako je relativizacija formule $P(vx_1,\ldots,vx_n)$ u odnosu na ~~xx~~ "$x \in A$" tačna). O ovome je raspravljeno, naprimer, u /2/, /3/.

Ako je za proizvoljnu valuaciju v ispunjeno $A \models_v P$ pisaćemo $A \models P$.

Algebra A je karakteristična za teoriju $\mathcal{T}$ akko: $\models_{\mathcal{T}} \alpha$ akko $A \models \alpha$. Ovde je α formula teorije $\mathcal{T}$.

Neka su algebarske strukture (A,Ω), (B,Ω) modeli teorije $\mathcal{T}$. Tada

T.1. Ako su strukture (A,Ω), (B,Ω) izomorfne sa izomorfizmom f tada za proizvoljni predikat P teorije $\mathcal{T}$:

$A \models_v P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ akko $B \models_v P(fx_1,fx_2,\ldots,fx_n)$.

To tvrđenje je, naprimer, dokazano u /4/ (str. 92.). Na sličan način
Samo za pozitivne formule : $\exists x_1 \ldots \exists x_n P$, P je pozitivna
se dokazuje da ako je (B,Ω) homomorfna slika strukture (A,Ω) preko homomorfizma f, onda, ako je $A \models_v P(x_1,\ldots,x_n)$ tada $B \models_v P(fx_1,\ldots,fx_n)$.

T.2. Neka je (B_i,Ω), $(i \in I)$ skup algebri i $B = \prod_{i \in I} B_i$ sa proizvodnom strukturom. Tada: ako je za svaki $i \in I$ $B_i \models u=v$, onda $B \models u=v$. Ovde su u, v termi.

Do Dokaz Neka je za svaki $i \in I$ $B_i \models u=v$. Kako je $\bar{u}_i : B \to B_i$ homomorfizam[1], to $\bar{u}_i u(\varphi_1,\dots,\varphi_n) = u(\bar{u}_i \varphi_1,\dots,\bar{u}_i \varphi_n) = v(\bar{u}_i \varphi_1,\dots,\bar{u}_i \varphi_n) = \bar{u}_i v(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$, gde $\varphi_1,\dots,\varphi_n \in B$. Otuda $u(\varphi_1,\dots,\varphi_n)=v(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ za proizvoljne $\varphi_1,\dots,\varphi_n \in B$, tj. $B \models u=v$.

C.2. Ako je B homomorfna slika od $\prod_{i \in I} B_i$, pri uslovima T.2., onda $B \models u=v$.

T.3. Neka je teorija $\mathcal{T}_1$ podteorija teorije $\mathcal{T}_2$ (tj. jezik teorije $\mathcal{T}_1$ sadržan je u jeziku teorije $\mathcal{T}_2$ i aksiome teorije $\mathcal{T}_1$ su aksiome ili su izvodljive u teoriji $\mathcal{T}_2$). Neka za svaki model $\mathcal{A}$ teorije $\mathcal{T}_1$ postoji model $\mathcal{B}$ teorije $\mathcal{T}_2$ koji je proširenje za $\mathcal{A}$, tj. ako je $\mathcal{A} = (A,\Omega)$, $\mathcal{B} = (B,\Omega_1)$ tada $A \subseteq B$ i za svaki $\omega \in \Omega$ postoji $\omega_1 \in \Omega_1$ da $\omega_1|_A = \omega$. Neka je F univerzalni iskaz teorije $\mathcal{T}_1$. Tada $\vdash_{\mathcal{T}_1} F$ akko $\vdash_{\mathcal{T}_2} F$.

Dokaz ($\Rightarrow$) Očigledno.

($\Leftarrow$) Neka $\vdash_{\mathcal{T}_2} F$. Neka je $\mathcal{A}$ proizvoljan model za $\mathcal{T}_1$. $\mathcal{A}$ je sadržan u nekom $\mathcal{B}$ koji je model za $\mathcal{T}_2$. Pošto je $\vdash_{\mathcal{T}_2} F$ to $B \models F$. Međutim F je oblika $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)F_1$, tj. $F \doteq (\forall x_1)\dots(\forall x_n)F_1$, te je formula $(\forall x_1 \in B)\dots(\forall x_n \in B)F_1$ tačna. Kako je $A \subseteq B \Rightarrow ((\forall x \in B)P \Rightarrow (\forall x \in A)P)$ to onda $(\forall x_1 \in A)\dots(\forall x_n \in A)F_1$, tj. $A \models F$. Otuda F važi na svim modelima teorije $\mathcal{T}$ te $\vdash_{\mathcal{T}_1} F$.

T.4. Neka su ispunjeni uslovi tvrđenja T.3., s tim što je skupovni deo modela $\mathcal{A}$ jednak skupovnom delu modela $\mathcal{B}$, tj. $A = B$. Tada za proizvoljni iskaz F teorije $\mathcal{T}_1$: $\vdash_{\mathcal{T}_1} F$ akko $\vdash_{\mathcal{T}_2} F$.

Dokaz je sličan dokazu u T.3., s tim što se F predstavi u preneksnoj formi i iskoristi činjenica da je $A=B \Rightarrow ((\exists x \in A)P \Leftrightarrow (\exists x \in B)P)$.

Navodimo teoremu Vaught-a[2]

T.5. Neka je $\mathcal{T}$ elementarna teorija bez konačnih modela, koja je α-kategorična za beskonačni kardinalni broj α, gde $\alpha \geq k\,\Omega$. Tada je $\mathcal{T}$ kompletna (potpuna) teorija.

---

1) $\bar{u}_i$ je projekcija.

2) Applications of the Lövenheim-Skolem-Tarski theorem to problems of completness and decidability, Indig. Math. 16 (1954), 467-472. Takođe/2/.

II

1. Aksiomatski sistemi Bool-ovih algebri.

Bool-ova algebra, koja se ponekad naziva i algebra logike, je algebarski sistem sa mnogobrojnim, važnim primenama u raznim delovima matematike, specijalno u matematičkoj logici. Postoje više ekvivalentnih zadavanja Bool-ove algebre. Navodimo jedno koje se najčešće koristi. Algebarski sistem $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ je Bool-ova algebra akko je B skup, $\wedge$, $\vee$, binarne operacije na B, $'$ je unarna operacija na B, a 0, 1 su nularne operacije sa sledećim aksiomama:

B1.	$(x\wedge y)\wedge z = x\wedge(y\wedge z)$	B1′.	$(x\vee y)\vee z = x\vee(y\vee z)$
B2.	$x\wedge(y\vee z) = (x\wedge y)\vee(x\wedge z)$	B2′.	$x\vee(y\wedge z) = (x\vee y)\wedge(x\vee z)$
B3.	$x\wedge y = y\wedge x$	B3′.	$x\vee y = y\vee x$
B4.	$x\wedge x' = 0$	B4′.	$x\vee x' = 1$
B5.	$x\wedge 1 = x$	B5′	$x\vee 0 = x$

B6. $0 \neq 1$

Ovaj sistem aksioma dao je (bez B1, B1′) Huntington, E.V.[1]. Navedeni sistem aksioma nije minimalan. Naprimer, B2-B4, B2′-B4′, B5, B6, B7 je minimalan sistem aksioma[2]. Takođe neki autori ne uzimaju B6 kao aksiomu.

Hungtinton je takođe dao sledeću aksiomatizaciju: 1° $x\vee y = y\vee x$, 2° $(x\vee y)\vee z = x\vee(y\vee z)$, 3° $(x'\vee y)'\vee(x'\vee y)' = x$.

Alternativnu aksiomatizaciju predstavlja Byrneeov sistem[3] $(B, \wedge, ', 0, 1)$

1) Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic, Trans. Anal. Math. Soc. 5, 288-309, takođe T.A.M.S. 35, 274-304, 557-558, 971 (1933).

2) U /8/ je dat dokaz da su navedene aksiome nezavisne.

3) Byrne L. Two Brief Formulation of Boolean Algebra, Bull. Amer. Math. Soc. 52, 269-272 (1946), takođe Short Formulations of Boolean Algebra using ring operations, Canadian J. Math. 3, 31-33, 1951.

sa aksiomama: 1° $x \wedge y = y \wedge x$, 2° $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$, 3° $x \wedge x = x$, 4° $x \wedge y' = 0 \Leftrightarrow x \wedge y = x$, 5° $0 \neq 0'$.

Takođe Byrne-u pripada sledeća aksiomatizacija: 1° $x = x \wedge y \Leftrightarrow x \wedge y' = z \wedge z'$, 2° $(x \wedge y) \wedge z = (y \wedge z) \wedge x$.

Pored ovih, Tarski razmatra u /17/ dva sistema od kojih prvi sadrži sedam aksioma U1-U7 (i prošireni sistem aksioma U1-U10, koje se odnose na kompletne Bool-ove algebre), dok drugi sistem aksioma sadrži četiri aksiome B1-B4 i dve definicije B5-B6. Ovaj poslednji sistem odnosi se na teoriju kompletnih Bool-ovih algebri.

U svakoj Bool-ovoj algebri $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ operacija $\wedge$ (odnosno $\vee$) inducira uređenje definisano sa $x \leq y$ akko $x = x \wedge y$. Tada je $(B, \leq, ')$ komplementarna, distributivna mreža, gde je (1) $\sup(x,y) = x \vee y$ i (2) $\inf(x,y) = x \wedge y$, U tom slučaju 0,1 su najmanji odnosno najveći element u B u odnosu na $\leq$. Otuda strukturu $(B, \leq, ')$ pogodno je zvati Bool-ovom mrežom. Prema tome Bool-ova algebra na B inducira na B Bool-ovu mrežu. Međutim važi i obrnuto: Bool-ova mreža $(B, \leq, ', 0, 1)$ inducira na B Bool-ovu algebru $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ upravo preko jednakosti (1) i (2). Otuda teorija Bool-ovih algebri ekvivalentna je sa teorijom Bool-ovih mreža.[1)]

Prsten $(B, \Delta, \wedge)$ zovemo Bool-ovim[2)] akko su ispunjeni uslovi $x \Delta x = 0$, $x \wedge x = x$. Važi tvrđenje (naprimer /19/, /4/): Bool-ova algebra $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ inducira na B Bool-ov prsten sa jedinicom, gde $x \Delta y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$. Takođe Bool-ov prsten $(B, \Delta, \wedge, 0, 1)$ inducira na B Bool-ovu algebru $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$, gde $x \vee y = x \Delta y \Delta x \wedge y$, $x' = 1 \Delta x$. Pri tom, ako je $(B, \Delta, \wedge, 1)$ inducirano sa $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$, a $(B, \wedge_1, \vee_1, ', 0, 1)$ inducirano sa $(B, \Delta, \wedge, 1)$, tada $(B, \wedge_1, \vee_1, ', 0, 1) = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$. Slično, ako je Bool-ova algebra B inducirana Bool-ovim prstenom P, tada Bool-ov prsten P_1 induciran algebrom B, jednak je prstenu P.

Prema tome, teorija Bool-ovih algebri ekvivalentna je teoriji Bool-ovih prstena.[1)]

1) U smislu /1/, str. 252.
2) Formulacija Bool-ovih prstena pripada Stone-u.

Ubuduće pod Bool-ovom strukturom podrazumevamo $(B,\wedge,\vee,',\Delta,0,1,\leq)$ gde su navedene operacije i uređenje $\leq$ saglasne.

2. Bool-ove algebre sa operatorima.

Unarna operacija $\ast$ u Bool-ovoj algebri $(B,\wedge,\vee,',0,1)$ zove se operator. Operator o definisan sa $x^{o} = x^{'\ast'}$ zovemo dualnim u odnosu na $\ast$. Neposredno se proverava da je dualni operator u odnosu na o upravo $\ast$. Nas će specijalno interesovati ako $\ast$ zadovoljava neke od aksioma:

01. $0^{\ast} = 0$ 02. $x \leq x^{\ast}$ 03. $(x \vee y)^{\ast} = x^{\ast} \vee y^{\ast}$

04. $x^{\ast\ast} = x^{\ast}$ 05. $x \leq x^{\ast o}$ 06. $x^{\ast o} = x^{\ast}$

07. $(x = 0) \vee (x^{\ast} = 1)$

Uvodimo sledeće definicije. Za algebru $(B,\wedge,\vee,',0,1,\ast) = \mathcal{B}$:

1° Algebra $\mathcal{B}$ u kojoj su zadovoljene aksiome 01-03 je T-algebra. Ova algebra je u vezi sa modalnim T računima.

2° Algebra $\mathcal{B}$ u kojoj su zadovoljene aksiome 01-04 je S_4 algebra. U ovom slučaju $\mathcal{B}$ je u vezi sa modalnim S_4 računom.

3° Algebra $\mathcal{B}$ u kojoj su zadovoljene aksiome 01-03 i 05 je I algebra. Ova algebra je u vezi sa intuicionističkim iskaznim računom.

4° Algebra $\mathcal{B}$ sa aksiomama 01-03 i 06 je S_5 algebra. Ova algebra je u vezi sa modalnim S_5 računom. Primetimo da je 04 posledica navedenih aksioma. Zaista: Stavljajući u 06 x' dobija se $x^{'\ast'\ast'} = x^{'\ast}$. Otuda $x^{o\ast} = x^{'\ast'}$, tj. (1) $x^{o\ast} = x^{o}$. Dalje, primenjujući (1) i 06, dobija se $x^{\ast o\ast} = x^{\ast o} = x^{\ast}$, dok prema 06 $x^{\ast o\ast} = x^{\ast\ast}$. Otuda $x^{\ast\ast} = x^{\ast}$, tj. svaka S_5 algebra je S_4 algebra.

5° Algebra $\mathcal{B}$ u kojoj su zadovoljene aksiome 01 i 07 je S_6 algebra. Lako se proverava da su u S_6 zadovoljene i ostale aksiome 02-06.

Više o ovim algebrama raspravljeno je, naprimer, u /3/ i /11/.

---

1) Nazivi T, S_4, S_5 uzeti su prema /3/.

3. Navodimo nekoliko poznatih definicija i tvrđenja koja se mogu naći naprimer, u /4/, /7/, /11/, /15/ i /17/. U nekim slučajevima navodimo autore koji su uveli navedene pojmove, odnosno dokazali tvrđenja.

Def.1. Algebra[1] $\mathcal{B}' = (B, \vee, \wedge, ', 1, 0)$ je dualna algebri $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$

T.1. $\mathcal{B}' \simeq \mathcal{B}$. Preslikavanje $'$ ostvaruje izomorfizam između ovih algebri.

Def.2. $a \in B$ je atom akko $(\forall x \in B)(x \leq a \Rightarrow x = 0 \vee x = a)$. Skup atoma algebre[1] B označava se sa $\mathcal{A}(B)$. Algebra B je atomska akko $(\forall x \in B)(\exists a \in \mathcal{A}(B))(a \leq x)$. (Tarski /17/).

Def.3. Algebra B je kompletna akko je kompletna u odnosu na odgovarajuće uređenje $\leq$.

Def.4. B je uopšteno distributivna akko ~~je kompletna~~ za proizvoljne familije skupova $\{b_t \mid t \in T,\ b_t \in B\}$, $\{T_u \mid u \in U,\ T = \bigcup_u T_u\}$, $K = \{Y \subseteq T \mid (\forall u \in U) T_u \cap Y \neq \emptyset\}$ je $\bigwedge_{u \in U} \bigvee_{t \in T_u} b_t = \bigvee_{Y \in K} \bigwedge_{t \in Y} b_t$ [2] (Tarski /17/).

T.2. Svaki parcijalno uređeni skup $(X, \leq)$ utapa se u neki kompletno uređeni skup $(\mathcal{X}, \leq)$ (Uopštenje Dedekindovog stava v. /4/, /5/). Kompletno proširenje Bool-ove algebre je kompletna Bool-ova algebra.

Def.5. I je ideal u mreži B akko:

1° $y \leq x \wedge x \in I \Rightarrow y \in I$, 2° $x, y \in I \Rightarrow x \vee y \in I$, 3° $I \neq B$.

F je filter u mreži B akko:

1° $x \leq y \wedge x \in F \Rightarrow y \in F$, 2° $x, y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F$, 3° $F \neq B$.

Def.6. Ideal I u distributivnoj mreži je prost akko: $x \wedge y \in I \Rightarrow x \in I \vee y \in I$. Dualno, filter F je prost akko: $x \vee y \in F \Rightarrow x \in F \vee y \in F$.

Def.7. Ideal (filter) je maksimalan (u tom slučaju tove se ultraideal odnosno ultrafilter) akko nije pravi podskup drugog ideala (filtra).

---

1) "Algebra" ovde ima značenje Bool-ova algebra.

2) $\bigwedge_{x \in S} T(x) \doteq \inf\{T(x) \mid x \in S\}$. Slično ~~za~~ $\bigvee_{x \in S} T(x) \doteq \sup\{T(x) \mid x \in S\}$. Umesto $\bigwedge_{x \in S} x$ pisaćemo $\bigwedge S$ i dualno za $\bigvee_{x \in S} x$, $\bigvee S$.

Navodimo nekoliko tvrđenja za ideale (filtre). Takođe važe dualna tvrđenja za filtre (ideale).

T.3. U distributivnoj mreži svaki ideal je sadržan u nekom prostom idealu (v. /4/).

T.4. Svaka netrivijalna mreža sa nulom sadrži maksimalni ideal (ovo tvrđenje ekvivalentno je sa aksiomom izbora, v. /13/).

T.5. U Bool-ovoj strukturi $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1, \Delta, \leq)$ sledeće činjenice su ekvivalentne: 1^o I je ideal Bool-ove algebre $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$, 2^o I je algebarski ideal Bool-ovog prstena $(B, \Delta, \wedge, 1)$.

T.6. Svaki filter je algebarski ideal dualne Bool-ove algebre $\mathcal{B}'$. Iz tog razloga, filtri se često zovu dualnim idealima.

T.7. U Bool-ovoj algebri pojam prostog filtra poklapa se sa pojmom ultrafiltra. F je ultra filter akko $(\forall x \in B)(x \in F \vee x' \in F)$.

T.8. U distributivnoj mreži sa nulom, svaki filter sadržan je u nekom maksimalnom filtru (Tarski 1930).

Navodimo nekoliko stavova o reprezentaciji Bool-ovih algebri.

T.9. Kompletna i atomska Bool-ova algebra izomorfna je sa $\mathcal{B}X$ za neki X (Tarski /17/).

T.10. Kompletna i potpuno distributivna Bool-ova algebra izomorfna je sa $\mathcal{B}X$ za neki X (Tarski /17/).

T11. Svaka distributivna mreža izomorfna je nekoj mreži skupova (Stone)

T.12. Svaka Bool-ova algebra izomorfna je nekom polju skupova (Stone).

T.13. Svaka konačna Bool-ova algebra izomorfna je sa $\mathcal{B}X$ za neki X.

T.14. U Bool-ovoj algebri B, ideal I je maksimalan akko $B/I \simeq \{0,1\}$[1] (Tarski)

T.15. Svako monotono preslikavanje u kompletnoj mreži ima nepokretnu tačku (Tarski). Ako svako monotono preslikavanje u mreži B ima nepokretnu tačku, tada je svaki maksimalan lanac u B kompletan (Kogalovski, v./15/).

T.16. Svake dve prebrojive algebre bez atoma su izomorfne.

---

1) B/I je količnička struktura Bool-ovog prstena $(B, \Delta, \wedge)$ u odnosu na algebarski ideal I, v. T.5.

Primedba Neka od navedenih tvrđenja biće dokazana u kontekstu tvrđenja koja slede.

Navodimo nekoliko primera primera Bool-ovih algebri.

1° Algebra $\{0,1\}$ (Negde se označava i sa $\{\top,\bot\}$).

2° $(\mathcal{B}X, \cap, \cup, C_X, \emptyset, X)$, X je skup. Ova algebra je atomska i kompletna.

3° Slobodna Bool-ova algebra $S(A)$ nad skupom A. Ako je A beskonačan skup, tada $S(A)$ nije ni atomska ni kompletna.

4° Bool-ova algebra karakterističnih funkcija skupa I, $\{0,1\}^I$. Ova algebra je izomorfna sa $\mathcal{B}I$, odnosno sa proizvodnom strukturom algebre $\{0,1\}$

5° Mnoštvo B_τ regularno zatvorenih (otvorenih) skupova topološkog prostora (X,τ), gde za $a,b\in B_\tau$ $a\vee b \doteq a\cup b$, $a\wedge b \doteq \overset{\circ}{\widehat{a\cap b}}$, $a' \doteq \overline{C_X a}$, $0 \doteq \emptyset$, $1 \doteq X$. Ova algebra je kompletna (v. /4/, /12/), međutim ne mora da bude atomska, naprimer, za Euklidski prostor R^n.

6° Mnoštvo $\mathcal{S}_\tau$ skupova potpuno nesvezanog kompaktnog topološkog prostora (X,τ)[1], koji su otvoreni i zatvoreni sa skupovnim operacijama $\cap$, $\cup$, C_X. Inače za svaku Bool-ovu algebru B postoji topološki prostor (X,τ) navedenog tipa da $\mathcal{S}_\tau \simeq B$ (Stone, v. /4/, /7/).

4. Ovde ćemo izložiti nekoliko zapažanja o Bool-ovim algebrama[2].

Def. Neka je $S\subseteq B$ sa svojstvom: 1° $S\neq\emptyset$, 2° $0\notin S$,
3° $(\forall x,y\in S)(x\neq y \Rightarrow x\wedge y = 0)$. U tom slučaju S zovemo rastavljen skup (Kraće ćemo označavati sa R-skup).

T1. Za svaki R-skup S postoji maksimalan (u odnosu na $\subseteq$) R-skup $\bar{S}$ da $S\subseteq\bar{S}$.

Dokaz Jasno je da je S rastavljen akko je svaki njegov dvočlan skup rastavljen. Neka je $P(B) \doteq (\forall x,y\in B)(x\neq y \Rightarrow x\wedge y=0)$ i $\mathcal{M} = \mathcal{B}B$. Primenom I.1.T.2. (n=2), tvrđenje neposredno sledi.

Primetimo da maksimalan R-skup ne mora da bude i maksimalni antilanac (u odnosu na $\leq$ u B), mada je jasno da je svaki R-skup antilanac. Napri-

---

1) Takav prostor zove se Bool-ov prostor.
2) U ovoj tački B će označavati Bool-ovu algebru.

mer, $\{x, x'\}$ je maksimalno rastavljen skup za $x \neq 0,1$.

Def.2. $\mathrm{cel}B = \sup\{kS \mid S \subseteq B$, S je ~~maksimalan~~ R-skup$\}$.

Def.3. $\Psi_S(a) = \{x \in S \mid x \wedge a \neq 0\}$.

T.2. Neka je S R-skup u B. Tada:

S je maksimalno rastavljen skup u B akko $\bigvee S = 1$.

Dokaz $(\Rightarrow)$ 1° Očigledno $(\forall x \in S)\ x \leq 1$.

2° Neka je $b \in B$ tako da $(\forall x \in S)\ b \geq x$. Pretpostavimo da $b < 1$. Otuda $b' \neq 0$. Dalje, za $x \in S$, pošto je $b \geq x$, biće $b' \wedge x = 0$. Otuda $S_1 = S \cup \{b'\}$ je R-skup i $S \subset S_1$ što je kontradikcija.

$(\Leftarrow)$ Pretpostavimo da S nije maksimalan R-skup. Tada postoji $b \in B$, $b \neq 0$ da za svaki $x \in S$, $b \wedge x = 0$. Otuda[1] $b = b \wedge 1 = b \wedge \bigvee_{x \in S} x = \bigvee_{x \in S}(b \wedge x) = \bigvee_{x \in S} 0 = 0$, odakle $b = 0$, što je kontradikcija.

C.2. Ako je S maksimalan R-skup tada je za $a \in B$ ispunjeno $a = \bigvee_{x \in S}(a \wedge x)$

Primetimo da je svaki skup atoma u B R-skup. Ako je B atomska algebra i $A = \mathcal{A}(B)$, tada je A maksimalan R-skup. Zaista, ako $x \notin A$, $x \neq 0$ tada postoji $a \in A$ da $a \leq x$, tj. A se ne može proširiti do nekog drugog R-skupa. Neka je $\Psi(x) = \Psi_A(x)$. Kako je za $a \in A$ ispunjeno $x \wedge a = 0$ ili $x \wedge a = a$, to $\Psi(x) = \{a \in A \mid x \wedge a \neq 0\} = \{a \in A \mid a \leq x\}$. Otuda prema T.2., C.2. neposredno imamo sledeća tvrđenja:

T.3 1° $\bigvee A = 1$,[2] 2° $x = \bigvee_{a \leq x} a = \bigvee \Psi(x)$, tj. funkcija $\Psi : B \to \mathcal{B}A$ je injektivno preslikavanje (u opštem slučaju preslikavanje $a \to a \wedge S$ je injektivno, ako je S maksimalan R-skup. Zaista ako je $\{x \wedge a \mid x \in S\} = \{x \wedge b \mid x \in S\}$, prema C.2. $a = \bigvee_{x \in S}(x \wedge a) = \bigvee_{x \in S}(x \wedge b) = b$, tj. $a = b$).

Primetimo da važi i obrat tvrđenja T.3.1°, tj. ako je $A = \mathcal{A}(B)$ i ako je $\bigvee A = 1$, tada je B atomska Bool-ova algebra. Zaista, ako je $x \in B$, $x \neq 0$ tada $x = \bigvee_{a \in A}(x \wedge a)$, te pošto je $x \neq 0$, to je bar za jedno $a \in A$ ispunjeno $x \wedge a \neq 0$, tj. $x \wedge a = a$, odakle $(\forall x \in B)(\exists a \in A)\ a \leq x$.

---

1) Koristimo tvrđenje o Bool-ovim algebrama: Ako postoji $\bigvee_{x \in S} x$, tada postoji i $\bigvee_{x \in S}(a \wedge x)$ i $a \wedge (\bigvee_{x \in S} x) = \bigvee_{x \in S}(a \wedge x)$, v. /4/, str. 459.

2) Tarski

T.4. Neka je B atomska Bool-ova algebra, $A = \mathcal{A}(B)$. Tada:

1° $\Psi(x \wedge y) = \Psi(x) \cap \Psi(y)$, 2° $\Psi(x \vee y) = \Psi(x) \cup \Psi(y)$

3° $\Psi(x') = C\Psi(x)$, gde $C\Psi(x) = \mathcal{B}A - \Psi(x)$,

4° Ako postoji $\vee R$ $(\wedge R)$, gde $R \subseteq B$, tada $\Psi(\vee R) = \cup\Psi(R)$ $(\Psi(\wedge R) = \cap\Psi(R))$.

Dokaz 1° Neka je $a \in A$. Kako je $a \leq x \wedge y \Leftrightarrow (a \leq x) \wedge (a \leq y)$, to $\Psi(x \wedge y) = \{a \in A \mid a \leq x \wedge y\} = \{a \in A \mid (a \leq x) \wedge (a \leq y)\} = \{a \in A \mid a \leq x\} \cap \cap \{a \in A \mid a \leq y\} = \Psi(x) \cap \Psi(y)$.

3° $\Psi(x') = \{a \in A \mid a \leq x'\} = \{a \in A \mid a \wedge x = 0\} = \{a \in A \mid a \nleq x\} = C\Psi(x)$.

2° Prema 1°, 3° dobija se $\Psi(x \vee y) = \Psi((x' \wedge y')') = C(C\Psi(x) \cap C\Psi(y)) = \Psi(x) \cup \Psi(y)$.

4° Neka postoji $\bigwedge\limits_{x \in R} x$. Tada $\Psi(\wedge R) = \{a \in A \mid a \leq \bigwedge\limits_{x \in R} x\} = \{a \in A \mid (\forall x \in R)(a \leq x)\} = \bigcap\limits_{x \in R}\{a \in A \mid a \leq x\} = \cap\Psi(R)$.

Dalje neka postoji $\vee R$. Tada postoji $\bigwedge\limits_{x \in R} x'$ (v. /4/, str.160) te $\Psi(\bigvee\limits_{x \in R} x) = \Psi((\bigwedge\limits_{x \in R} x')') = C\bigcap\limits_{x \in R} C\Psi(x) = \bigcup\limits_{x \in R}\Psi(x) = \cup\Psi(R)$.

T.5. Neka je B atomska Bool-ova algebra i $A = \mathcal{A}(B)$. Tada:
$(B, \wedge, \vee, ', 0, 1) \simeq (\mathcal{P}(A), \cap, \cup, C, \emptyset, A)$.

Dokaz. Kako je $\Psi(1) = \{x \in A \mid x \leq 1\} = A$, $\Psi(0) = \{x \in A \mid x \leq 0\} = \emptyset$, to prema T.4. tvrđenje neposredno sledi. Sem toga, primetimo da preslikavanje Ψ održava beskonačni supremum i infimum (4°) bilo kojeg podskupa skupa B. Otuda minimalno kompletno proširenje algebre B biće upravo $\mathcal{B}A$.

Prethodno tvrđenje ustvari je stav o reprezentaciji atomskih Bool-ovih algebri u polje skupova. Primetimo da smo ovo tvrđenje dokazali bez primene aksioma izbora, ili njenog ekvivalenta.

T.6 Ako je B atomska i kompletna Bool-ova algebra, tada je $B \simeq \mathcal{B}A$. (Tarski)

Dokaz Kako je $\sup: \mathcal{B}A \to B$ definisano, to prema T.4.4° za $R \subseteq A$ imamo $\Psi(\vee R) = \cup\Psi(R) = \bigcup\limits_{a \in R}\{a\} = R$, tj. $\Psi: B \xrightarrow{na} \mathcal{B}A$. Otuda prema T.5. tvrđenje sledi.

Kako je svaka konačna Bool-ova algebra atomska i kompletna, to je za konačnu Bool-ovu algebru B, $B \simeq \beta X$ za neki skup X. Otuda $kB = 2^n$ za neki prirodni broj n. Takođe ako su B_1, B_2, konačne Bool-ove algebre i $kB_1 = kB_2$, onda $B_1 \simeq B_2$.

T.7. $kB \geqslant \aleph_0 \Rightarrow celB \geqslant \aleph_0$.

Dokaz 1° Neka je B atomska Bool-ova algebra i $A = \mathcal{A}(B)$. Kako je A maksimalno rastavljen skup, to $kA \leq celB$. S druge strane ako bi A bio konačan skup, onda bi i B bio konačan skup (v. T.6.), što je protivno pretpostavci. Otuda $kA \geqslant \aleph_0$ tj. $kB \geqslant \aleph_0$.

2° Ako B nije atomska algebra, tada postoji $a \in B$, tako da ne postoji atom koji je manji od a. Tada:

(1) $(\forall x \in B)(x < a \wedge x \neq 0 \Rightarrow (\exists y \in B)(y < x \wedge y \neq 0))$.

Neka je f funkcija izbora za $\mathcal{P}(B) - \emptyset$ i $O(x) = \{ y \in B \mid y < x \}$. Neka je niz $(a_n)_{n \in N}$ definisan sa $a_1 = a$, $a_{n+1} = f(O(a_n) - \emptyset)$ (takav niz postoji prema (1)). Tada $a_1 > a_2 > \dots$ i $a_n \neq 0$ $(n \in N)$. Neka je $s_n = a_n \wedge a'_{n+1}$. Tada ako $n > k$ onda $a_n > a_k$, odakle $a_{n+1} \geqslant a_k$, $a_{n+1} \geqslant a_{k+1}$. Otuda $s_n \wedge s_k = a_n \wedge a'_{n+1} \wedge a_k \wedge a'_{k+1} = a_k \wedge (a_{n+1} \vee a_{k+1})' = a_k \wedge a'_{n+1} \leqslant$ $\leqslant a_k \wedge a'_k = 0$, tj. $\{ s_n \mid n \in N \}$ je prebrojiv R-skup, tj. $celB \geqslant \aleph_0$.

T.8. Ako je B atomska algebra i $A = \mathcal{A}(B)$, tada $celB = kA$.

Dokaz 1° Kako je A maksimalan R-skup, to $kA \leq celB$.

2° Neka je S bilo koji maksimalan R-skup. Neka su $x, y \in S$. Tada, pošto je $x \wedge y = 0$ (pretpostavljamo da je $x \neq y$), biće $\Psi(x) \cap \Psi(y) = 0$, (prema T.5.). S druge strane $A = \bigcup_{x \in S} \Psi(x)$ (prema T.2.). Otuda familije $\mathcal{S} = \{ \Psi(x) \mid x \in S \}$ jeste jedno razbijanje skupa S. Neka je f funkcija izbora za $\mathcal{S}$. Tada $f : \mathcal{S} \to A$. Kako je f injektivno preslikavanje, to $k\mathcal{S} \leq kA$. Otuda $celB \leq kA$.

Iz 1° i 2° sleduje $celB = kA$.

T.9. Neka je B_τ Bool-ova algebra regularno otvorenih skupova topološkog prostora (X, τ). Neka za svaki neprazan, otvoren skup V prostora X postoji neprazan regularno otvoren skup U da $U \subseteq V$. Tada $celB_\tau = cel\,X_\tau$.

gde je $cel_\tau X$ (topološka) celularnost prostora X.

Dokaz 1° Neka je $S \subseteq B$ bilo koji maksimalno rastavljen skup. Ako $U, V \in S$, $U \neq V$, onda $U \cap V = U \wedge V = \emptyset$. Dalje, svi skupovi u S su otvoreni, tj. S je familija otvorenih, disjunktnih skupova prostora X. Otuda $kS \leq cel\ X$. Odavde sleduje $cel B_\tau \leq cel_\tau X$.

2° Neka je $\mathcal{F}$ ma koja disjunktna familija otvorenih nepraznih skupova u X. Neka je $U \in \mathcal{F}$, $\mathcal{C}_U = \{V \in B_\tau \mid V \neq \emptyset,$ V je regularno otvoren, $V \subseteq U\}$. Prema pretpostavci, $\mathcal{C}_U \neq \emptyset$. Očigledno $U_1, U_2 \in \mathcal{F}$, $U_1 \neq U_2$ povlači $\mathcal{C}_{U_1} \cap \mathcal{C}_{U_2} = \emptyset$. Neka je f funkcija izbora za familiju $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_U \mid U \in \mathcal{F}\}$. Tada je $S = f(\mathcal{C})$ R-skup u B, te pošto je f 1-1 preslikavanje, to $k\mathcal{F} \leq kS \leq cel B_\tau$. Otuda $cel_\tau X \leq cel B_\tau$.

Prema 1° i 2° tvrđenje sledi.

c C.9.1. Neka je (X, τ) regularan normalan topološki prostor. Tada $cel B_\tau = cel_\tau X$

Dokaz neposredno sleduje iz činjenice, da se u svaki otvoren skup normalnog prostora može upisati regularno otvoren skup.

C.9.2. Neka je B_n Bool-ova algebra regularno otvorenih skupova Euklidskog prostora R^n. Tada $cel B_n = \aleph_0$.

Dokaz neposredno sleduje iz činjenice da je $cel R^n = \aleph_0$.

T.10. Neka je $kB \geq \aleph_0$. Tada postoji ideal I algebre B, da je $\bigvee I = 1$.

Dokaz Neka je $kB \geq \aleph_0$. Tada postoji maksimalan R-skup $S \subseteq B$, da je $kS \geq \aleph_0$ (prema T.7.). Neka je $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq S$. Pretpostavimo da je $a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n = 1$. Kako je $S - \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \emptyset$, neka je $a \in S - \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Tada $a \wedge (a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n) = a \wedge 1 = a$, a pošto je $a = (a \wedge a_1) \vee (a \wedge a_2) \vee \ldots \vee (a \wedge a_n) = 0$, biće $a = 0$, a to je kontradikcija. Otuda ideal I generisan sa S je sobstven. Kako je $S \subseteq I$, prema T.2. biće $\bigvee I = 1$.

Odavde se neposredno izvodi dualno tvrđenje: Postoji filter F u beskonačnoj Bool-ovoj algebri da je $\bigwedge F = 0$.

Poslednje tvrđenje karakteristično je za beskonačne Bool-ove algebre. Ako je I ideal konačne Bool-ove algebre, tada je $I = I(a)$[1], gde

---

1) $I(a) = \{x \in B \mid x \leq a\}$

$a = \bigvee_{x\in I} x$, tj. svi ideali konačne Bool-ove algebre su [redacted].

Primetimo sledeće činjenice.

1° Ako je B atomska Bool-ova algebra i $A = \mathcal{A}(B)$, tada ako je za ideal I ispunjeno $\bigvee I = 1$, onda $A \subseteq I$. Zaista, ako je $a \in A$, onda $a = \bigvee_{x\in I} (a \wedge x)$, odakle bar za jedan $x \in I$ biće $a \wedge x \neq 0$, tj. $a \leq x$, odakle $a \in I$.

2° Ako je $\bigvee I = 1$, I ne mora da bude prost (maksimalan) ideal, kao što pokazuje sledeći primer: Neka je $B = \mathcal{B}(N)$ (N je skup prirodnih brojeva), $I = \{X \in B \mid X \text{ je konačan}\}$. Očigledno $\bigcup_{X\in I} X = N$, ali I nije prost, jer $2N \notin I$, $2N+1 \notin I$ (v. 1T.7.).

<u>T.11.</u> Neka je B_1 konačna Bool-ova algebra. Tada u svakoj beskonačnoj Bool-ovoj algebri B postoji podalgebra B_0 da je $B_1 \simeq B_0$.

<u>Dokaz</u> Neka je S beskonačan maksimalan R-skup u B i $A_0' = \{a_1, \dots, a_{n-1}\} \subseteq B$, gde je n ($n \geq 2$) broj atoma u B_1. Dokažimo da je podalgebra B_0 generisana sa A_0 izomorfna algebri B_1. Ako je $i \neq j$, $i, j \leq n-1$, onda

(1) $a_i \wedge a_j = 0$, odakle $a_i' \vee a_j' = 1$. Otuda

(2) $a_i \wedge a_j' = a_i$.

Za $s = a_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge a_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$, $a_i^{\alpha_i} \in \{a_i, a_i'\}$ postoje sledeće mogućnosti:

1° $s = a_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge a_i \wedge \dots \wedge a_j \wedge \dots\ a_{n-1}^{\alpha_{n-1}} = 0$, zbog (1).

2° $s = a_1' \wedge \dots \wedge a_{i-1}' \wedge a_i \wedge a_{i+1}' \dots \wedge a_{n-1}' = a_i$, zbog (2).

3° $s = a_1' \wedge \dots \wedge a_{n-1}'$. Tada $s \neq 0$ i $s \wedge a_i = 0$, za $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Zaista ako je $s = 0$, tada $a_1 \vee \dots \vee a_{n-1} = 1$, što je kontradikcija (v. T.10). Da je $s \wedge a_i = 0$, sleduje neposredno.

Neka je $a_n = a_1' \wedge \dots \wedge a_{n-1}'$ i $A_0 = A_0' \cup \{a_n\}$. Primetimo da je A_0 rastavljen skup.

Neka je $a_{i_1} \vee \dots \vee a_{i_k} = a_{j_1} \vee \dots \vee a_{j_s}$, ($i_p, j_p \in \{1, 2, \dots, n\}$). Tada

$a_{i_p} = a_{i_p} \wedge (a_{i_1} \vee \dots \vee a_{i_k}) = a_{i_p} \wedge (a_{j_1} \vee \dots \vee a_{j_s}) = (a_{i_p} \wedge a_{j_1}) \vee \dots \vee (a_{i_p} \wedge a_{j_s})$. Kako je $a_i \wedge a_j = 0$ ili $a_i \wedge a_j = a_i = a_j$, to $a_{i_p} = a_{i_r}$ za neko $r \in \{1, 2, \dots, s\}$. Otuda:

(3) $a_{i_1} \vee \dots \vee a_{i_k} = a_{j_1} \vee \dots \vee a_{j_s} \Rightarrow \{a_{i_1},\dots,a_{i_k}\} = \{a_{j_1},\dots,a_{j_s}\}$ i $k=s$.

Iz prethodnih činjenica sleduje da je B_0 konačna Bool-ova algebra, gde $\mathcal{A}(B_0) = A_0$. Kako je $kA_0 = k\mathcal{A}(B_1)$, to $B_0 \simeq \mathcal{B}A_0 \simeq B_1$.

Na sličan način može se dokazati: Ako je B_1 kompletna Booleova algebra, B_2 atomska Bool-ova algebra i $\mathrm{cel}B_2 < \mathrm{cel}B_1$, tada postoji podalgebra B_0 algebre B_1 da $B_2 \simeq B_0$. Tada je T.5. specijalan slučaj ovog tvrđenja. Da poslednje tvrđenje ne mora da važi pod opštijim uslovima, vidi se iz sledećeg primera. Neka je B Bool-ova algebra regularno otvorenih skupova topološkog prostora $X = \{0,1\}^I$ sa proizvodnom topologijom, gde je diskretna topologija na $\{0,1\}$. Tada je $\mathrm{cel}B = \aleph_0$ (/12/, str. 32), dok $kB \geq kI$ ($kB \geq kI$, jer za svaki $i \in I$ $\pi_i^{-1}(\{0\}) \in B$). Otuda za $kI = 2^{2^c}$ algebra B nije predstavljiva $\mathcal{B}R$, mada $\mathrm{cel}B < \mathrm{cel}\mathcal{B}R$ (R je skup realnih brojeva, $c = kR$).

Radi potpunosti dajemo dokaz Stone-ove teoreme o reprezentaciji Bool-ovih algebri.

<u>T.12.</u> Svaka Bool-ova algebra može se utopiti u atomsku Bool-ovu algebru B_1.

<u>Dokaz</u> Neka je $\mathcal{F}$ skup svih ultrafiltera algebre B i neka je $\theta : B \to \mathcal{B}(\mathcal{F})$ definisano sa $\theta(x) = \{F \in \mathcal{F} \mid x \in F\}$. Primetimo da ako je $x \neq 0$, tada $(\exists F \in \mathcal{F})(x \in F)$ i $\theta(0) = \emptyset$. Tada koristeći svojstva ultrafiltera imamo:

1° $\theta(x \wedge y) = \{F \in \mathcal{F} \mid x \wedge y \in F\} = \{F \in \mathcal{F} \mid x \in F \wedge y \in F\} = \{F \in \mathcal{F} \mid x \in F\} \cap \{F \in \mathcal{F} \mid y \in F\} = \theta(x) \cap \theta(y)$.

2° $\theta(x \vee y) = \{F \in \mathcal{F} \mid x \vee y \in F\} = \{F \in \mathcal{F} \mid x \in F \vee y \in F\} = \{F \in \mathcal{F} \mid x \in F\} \cup \{F \in \mathcal{F} \mid y \in F\} = \theta(x) \cup \theta(y)$.

3° $\theta(x') = \{F \in \mathcal{F} \mid x' \in F\} = \{F \in \mathcal{F} \mid x \notin F\} = C\theta(x)$. $(C\theta(x) = \mathcal{B}\mathcal{F} - \theta(x))$

4° Neka je $\theta(x) = \theta(y)$. Tada $F(x)$[1] $= \bigcap_{x \in F \in \mathcal{F}} F = \bigcap_{F \in \theta(x)} F = \bigcap_{F \in \theta(y)} F = F(y)$, odakle $x = y$. (Jer za ma koji filter S, $S = \bigcap_{S \subseteq F \in \mathcal{F}} F$).

---

1) $F(x) = \{u \in B \mid u \geq x\}$ je glavni filter generisan elementom x.

Otuda $B \simeq \theta(B)$, $\theta(B) \subseteq \mathcal{B}F$. Tada je θ utapanje algebre B u B_1, gde je B_1 podalgebra algebre $\mathcal{B}\mathcal{F}$, generisana skupom $\theta B \cup \{\{F\} \mid F \in \mathcal{F}\}$. Osim toga $\theta(B)$ je polje skupova, te imamo reprezentaciju algebre B u polje skupova (Stone).

C.12. $\mathrm{cel}B \leq k\mathcal{F}$. Ako je B konačna Bool-ova algebra, tada su svi ultrafiltri oblika $F(a)$, gde je a atom algebre B. U tom slučaju $\mathrm{cel}B = k\mathcal{F} = n$, gde je $n = k\mathcal{A}(B)$. Napomenimo rezultat Tarskog (v. /4/, s.303) da je broj ultraideala (ultrafiltera) u beskonačnoj Bool-ovoj algebri $\mathcal{B}X$, jednak $2^{2^{kX}}$. Otuda gornja nejednakost može biti stroga nejednakost, (jer $\mathrm{cel}\mathcal{B}X = kX$).

Na sličan način, kao u T.12., dokazuje se stav o reprezentaciji distributivnih mreža (v. /4/).

T.13. Svaka disributivna mreža može se proširiti do Bool-ove algebre.

Dokaz Prema 1.T.11 za distributivnu mrežu $(D, \wedge, \vee)$ važi $(D, \wedge, \vee) \simeq (M, \cap, \cup)$ za neku mrežu skupova M. Neka je $A = \cup M$, $B = \mathcal{B}A$. Tada je $(M, \cap, \cup)$ podmreža Bool-ove algebre $(B, \cap, \cup, C_B, \emptyset, A)$, odakle tvrđenje sledi. Primetimo da se prema prethodnom, svaki linearno uređeni skup $(L, \leq)$, može proširiti do Bool-ove algebre B. U tom slučaju L je lanac u B.

Navedimo još nekoliko činjenica o reprezentaciji Bool-ovih algebri. Ako se u skupu $\mathcal{F}$ ultra filtera Bool-ove algebre B uvede topologija tako da je $\theta(B)$ baza, dobija se takozvani Stone-ov prostor $\mathcal{Y}(B)$, koji je kompaktan i potpuno nesvezan. U tom smislu postoje mnoga uopštenja, naprimer, reprezentacija Bool-ovih algebri sa operatorima (Tarski-Jonson), reprezentacija σ-ideala[1] (Luis), reprezentacija pseudo Bool-ovih algebri (Sikorski, Raseeva), topološka reprezentacija prostih ideala (algebarskog) prstena (Zariski). Više o ovome videti, naprimer, u /11/.

T.14. Sledeća tvrđenja za distributivnu mrežu $(B, \wedge, \vee)$ su ekvivalentna:

1° Svaki dobro uređen lanac u B ima supremum.

---

1) $I \subseteq B$ je σ-ideal akko za svaki prebrojiv $S \subseteq I$, $\vee S \subseteq I$

2^o Svaki lanac u B ima supremum.

3^o Svako usmereno (filtrirajuće) mnoštvo u B ima supremum.

4^o Svaka podmreža $B' \subseteq B$ ima supremum.

5^o B je kompletna mreža.

Dokaz Očigledno $5^o \to 4^o \to 3^o \to 2^o \to 1^o$. Da $1^o \to 2^o \to 3^o$, sleduje prema /2/, str. 46. Dokažimo da $3^o \to 4^o$. Neka je 3^o i neka je $(B', \wedge, \vee)$ podalgebra algebre $(B, \wedge, \vee)$. Kako je $(\forall x, y \in B')(x \vee y \in B' \wedge x \leq x \vee y \wedge \wedge\, y \leq x \vee y)$ to je B' usmereno mnoštvo, te po pretpostavci postoji $\bigvee_{x \in B'} x$.

Dokažimo da $4^o \to 5^o$. Neka je 4^o i $S \subseteq B$. Neka je B' algebra generisana skupom S. Otuda $x \in B' \Leftrightarrow (\exists s_{11}, \ldots, s_{nk_n} \in S)\ x = \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{k_i} s_{ij}$. Po pretpostavci postoji $\bigvee_{x \in B'} x$. Neka je $b = \bigvee_{x \in B'} x$. Pošto je $S \subseteq B$ to $(\forall x \in S)\ x \leq b$. Neka je $c \in B$, tako da $(\forall x \in S)\ x \leq c$. Tada ako je $s_{11}, \ldots, s_{1k_1}, \ldots, s_{nk_n} \in S$, biće $c \geq \bigwedge_{j=1}^{k_i} s_{ij}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Otuda $c \geq \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{k_i} s_{ij}$. Prema tome $(\forall x \in B)\ x \leq c$, odakle $b \leq c$, tj. $b = \bigvee_{x \in S} x$.

C.14. Ako svako monotono preslikavnje distributivne mreže B u samu sebe ima nepokretnu tačku, Tada je B kompletna mreža (Diluors).

Dokaz Neposredno prema T.14. i 3.T.15.

T.15. Na svakom beskonačnom skupu X postoji atomska Bool-ova algebra.

Dokaz Neka je $B = \{S \subseteq X \mid kS < \aleph_0\}$. Prema aksiomi izbora, $kB = kX$. Tada je $(B, \triangle, \cap, \emptyset)$ Bool-ov prsten bez jedinice. Minimalno proširenje prstena $(B, \triangle, \cap, \emptyset)$ je $(B_1, \triangle, \cap, \emptyset, X)$, gde $S \in B_1 \Leftrightarrow kS < \aleph_0 \vee C_X S < \aleph_0$. Otuda $kB_1 = kB + \overset{=kB}{kB}$, odakle $kB = kX$. Prema tome postoji funkcija $f\colon X \xrightarrow[1-1]{na} B$. Tada $\mathcal{X} = (X, \wedge, \cup, ', 0, 1) \underset{f}{\cong} (B_1, \cap, \cup, C_X, \emptyset, X)$, gde $0 = f^{-1}(\emptyset)$, $1 = f^{-1}(X)$, za a, b X, $a \wedge b = f^{-1}(f(a) \cap f(b))$, $a \vee b = f^{-1}(f(a) \cup f(b))$, $a' = f^{-1}(C_X f(a))$ (tj. funkcija f prenosi [illegible] strukturu sa B_1 na X). Kako je B_1 atomska algebra, to je i $\mathcal{X}$ atomska Bool-ova algebra.

S druge strane ako je X beskonačan skup, može se na X preneti struktura slobodne Bool-ove algebre S(X) nad X, jer $kS(X) = kX$. Algebra X je bez atoma, te važi činjenica da na svakom beskonačnom skupu X postoji struktura bez atomske Bool-ove algebre.

Prema prethodnom, na svakom beskonačnom skupu postoje bar dve neizomorfne Bool-ove algebre, za razliku od konačnih Boolo-ovih algebri.

Mnogi stavovi u teoriji skupova imaju svog analogona u teoriji Bool-ovih algebri. Navodimo sledeći primer.

T.16. Neka su A, B Bool-ovi prsteni od kojih je bar jedan kompletan, i neka su $f: A \to B$, $g: B \to A$ monotona preslikavanja sa svojstvom $(\forall x,y \in A)\ f(x-y) = f(x)-f(y)$, $(\forall x,y \in B)\ g(x-y) = g(x)-g(y)$ gde $x - y = x \Delta (x \wedge y)$. Neka su $a \in A$, $b \in B$ i $f(A) \subseteq I(b)$, $g(B) \subseteq I(a)$. Tada postoje $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ da:

$a = a_1 \vee a_2$, $a_1 \wedge a_2 = 0$, $b = b_1 \vee b_2$, $b_1 \wedge b_2 = 0$, $f(a_1) = b_1$, $g(b_2) = a_2$.

Dokaz Pretpostavimo da je A kompletan Bool-ov prsten. Neka je $F: A \to A$, definisano sa $F(x) = (a - g(b)) \vee g(f(x))$. Kako su f, g monotona preslikavanja, to je i F monotono preslikavanje. Otuda prema 3.T.15. za neko $a_1 \in A$ biće $F(a_1) = a_1$. Kako je $a_1 = (a-g(b)) \vee g(f(a_1))$ i $a-g(b), g(f(a_1)) \leq a$, to $a_1 \leq a$. Neka je $a_2 = a-a_1$, $b_1 = f(a_1)$ i $b_2 = b-b_1$. Tada $a = a_1 \vee a_2$, $a_1 \wedge a_2 = 0$, $b = b_1 \vee b_2$, $b_1 \wedge b_2 = 0$, $f(a_1) = b_1$

Dalje, $g(b_2) = g(b-b_1) = g(b)-g(b_1) = g(b)-g(f(a_1)) =$
$= a-((a-g(b)) \vee g(f(a_1))) = a_2$, tj. $g(b_2) = a_2$.

C.16.1. Ako su f, g homomorfizmi Bool-ovih prstena A, B od kojih je bar jedan kompletan i za $a \in A$, $b \in B$ je ispunjeno $f(A) \subseteq I(b)$, $g(B) \leq I(a)$, tada važi tvrđenje T.16.

C.16.2 (Banach-ova lema, v. /5/). Ako su f_1, g_1 1-1 preslikavanja $f_1: X \to Y$, $g_1: Y \to X$, tada postoje skupovi X_1, X_2, Y_1, Y_2 da $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $Y_1 \cup Y_2 = Y$, $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ i $f_1(X_1) = Y_1$, $g_1(Y_2) = X_2$.

Dokaz neposredno sledi primenom T.16. na $A = \mathcal{B}X$, $B = \mathcal{B}Y$, $f: A \to B$, $g: B \to A$, gde za $C \in \mathcal{B}X$, $f(C) = \{f_1(x) \mid x \in C\}$, za $D \in \mathcal{B}Y$, $g(D) = \{g_1(x) \mid x \in D\}$. (Inače odavde neposredno sleduje Cantor-Bernstein-ov stav o kardinalnim brojevima skupova).

5. U ovom delu ukazaćemo na neke prirodne veze između operatora Bool-ove algebre B i binarnih operacija na A gde je $A = \mathcal{A}(B)$.

Neka je B konačna Bool-ova algebra i $A = \mathcal{A}(B)$.

Def.1 Neka je $\rho \subseteq A^2$. Operator $*$ (pisaćemo $*(\rho)$ ako želimo da istaknemo učešće relacije ρ) je induciran relacijom ρ akko za svaki $x \in B$ je $x^* = \vee \rho\,(\Psi(x))$[1].

Def.2. Neka je $*$ operator na B. Binarna relacija $\rho \subseteq A^2$ je generisana operatorom $*$ akko $(\forall a,b \in A)(a \rho b \Leftrightarrow b \leq a^*)$.

Važe sledeća tvrđenja (v. /3/, gl.XVII, takođe Jonson-Tarski za S_4 algebre):

T.1. 1° Ako je ρ refleksivna relacija, onda je $*(\rho)$ T-operator. Ako je $*$ T-operator, onda je $\rho\,(*)$ refleksivna relacija (/3/).

2° Ako je ρ refleksivna i simetrična relacija, onda je $*(\rho)$ I-operator. Ako je $*$ I-operator, onda je $\rho\,(*)$ refleksivna i simetrična relacija.

3° Ako je ρ refleksivna i tranzitivna relacija, onda je $*(\rho)$ S_4 operator. Ako je $*$ S_4- operator, tada je $\rho\,(*)$ refleksivna i tranzitivna relacija.(Tarski-Jonson).

4° Ako je ρ relacija ekvivalencije, onda je $*(\rho)$ S_5-operator. Ako je $*$ S_5-operator, onda je $\rho\,(*)$ relacija ekvivalencije.

Tvrđenja 2°, 3°, 4° inače se mogu dokazati kao što je to urađeno za 1° u /13/.

T.12. Neka je $\mathcal{R}$ skup refleksivnih relacija na A, a $\mathcal{M}$ skup T-operatora na B i $\lambda : \mathcal{R} \to \mathcal{M}$, $\mu : \mathcal{M} \to \mathcal{R}$, gde $\lambda(\rho) = *(\rho)$, $\mu\,(*) = \rho\,(*)$. Tada su λ, μ uzajamno inverzne bijekcije.

Dokaz 1° Neka je $\rho_1 = \mu\lambda\rho$, $* = \lambda\rho$ gde $\rho \in \mathcal{R}$. Neka $a,b \in A$, $a \rho b$. Tada, kako je $\Psi(a) = \{a\}$, $b \in \rho(\Psi(a))$, sleduje

---

1) $\rho\,(S) = \{x \mid (\exists y \in S)\ x \rho y\}$.

$b \leq V\rho(\Psi(a))$, tj. $b \leq a^*$. Otuda $a\rho_1 b$, odakle (1) $\rho \subseteq \rho_1$. Neka $a\rho_1 b$. Otuda $b \leq a^*$, tj. $b \leq \bigvee_{\substack{a\rho c \\ c\in A}} c$. Prema tome $b = \bigvee_{a\rho c}(b \wedge c)$. Odavde sleduje da postoji c_0 da je $a\rho c_0$ i $b\wedge c_0 = 0$. Kako su b, c_0 atomi to $b = c_0$, tj. $a\rho b$. Otuda (2) $\rho_1 \subseteq \rho$. Iz (1) i (2) sleduje $\rho = \rho_1$, odnosno (3) $\mu\lambda = i_{\mathcal{R}}$.

2° Neka je $*_1 = \lambda\mu *$, $\mu * = \rho$, $* \in \mathcal{M}$. Kako je $*$ T-operator to prema T.1. ρ je refleksivna relacija i $*_1$ je T-operator. Dalje po pretpostavci, B je konačna Bool-ova algebra, te za $x \in B$ biće:

$$x^{*1} = (\bigvee_{a\in\Psi(x)} a)^{*1} = \bigvee_{a\in\Psi(x)} a^{*1} = \bigvee_{a\in\Psi(x)} (\bigvee_{a\rho b} b) = \bigvee_{a\in\Psi(x)} (\bigvee_{\substack{b\leq a^* \\ b\in A}} b) = \bigvee_{a\in\Psi(x)} (\bigvee \Psi(a^*)) =$$
$$= \bigvee_{a\in\Psi(x)} a^* = (\bigvee_{a\in\Psi(x)} a)^* = x^*,$$ tj. $x^* = x^{*1}$. Otuda (4) $\lambda\mu = i_{\mathcal{M}}$.

Prema (3) i (4) tvrđenje sledi.

Kombinujući T.1, T.2. dobija se

__C.1.1.__ Neka je B konačna Bool-ova algebra, $A = \mathcal{A}(B)$. Tada je broj različitih T $(I; S_4; S_5)$ algebri na B jednak broju refleksivnih (i simetričnih; i tranzitivnih; relacija ekvivalencija) relacija na A.

__C.1.2.__ Broj topologija na konačnom skupu X jednak je broju refleksivnih i tranzitivnih relacija na X. Zaista, primetimo da je svaki topološki prostor $(X,-)$[1] S_4 algebra na $\mathcal{B}X$, te primenom C.1.1 tvrđenje sledi.

__T.3.__ Neka je B kompletna Bool-ova algebra, $\mathcal{K}$ skup svih kompletnih podalgebri algebre B i Φ je klasa svih S_5 algebri nad B. Neka za $B_0 \in \mathcal{K}$, $\lambda B_0 \doteq *$, gde za svaki $x\in B$, $x^* = \wedge\{u \mid x \leq u, u\in B_0\}$, i za $* \in \Phi$, $\mu * \doteq B_0$, gde $B_0 = \{u \mid (\exists v\in B)\ u = v^*\}$. Tada preslikavanja $\lambda : \mathcal{K} \to \Phi$, $\mu : \Phi \to \mathcal{K}$ su uzajamno inverzne bijekcije.

__Dokaz__ 1° Neka je $* \in \Phi$ i $B_0 = \{u \mid (\exists v\in B)\ u = v^*\}$. Tada:

(1) $x = x^* \Rightarrow x \in B_0$, $(x \in B)$.

(2) Neka je $x \in B_0$. Tada za neki $u \in B$ biće $x = u^*$. Otuda $x^* = u^{**} = u^*$, tj. $x^* = x$. Prema tome $x \in B_0 \Rightarrow x^* = x$.

---

1) $-$ je operator zatvorenja (Kuratowski).

(3) Neka $x,y \in B_0$. Tada $x \vee y = x^* \vee y^* = (x \vee y)^*$, tj. $x \vee y \in B_0$.

(4) Kako je za S_5 algebre $x^* \wedge y^* = (x \wedge y^*)^*$, to za $x,y \in B_0$ sledi: $x \wedge y = x^* \wedge y^* = (x \wedge y^*)^*$, tj. $x \wedge y \in B_0$.

(5) Kako je za S_5 algebre $x^{0*} = x^0$, biće za $x \in B_0$: $x' = x^{*\prime} = x^{\prime 0} = x^{\prime 0 *}$, tj. $x' \in B_0$.

(6) Neka je $S \subseteq B_0$ i $a = \wedge S$. Tada za $x \in S$, $a \le x$, odakle $a^* \le x^*$. Kako je $x^* = x$ (jer $x \in B_0$), to $a^* \le \wedge S$. Otuda $a^* \le a$. S druge strane $a \le a^*$, te $a = a^*$, odakle $a \in B_0$.

Iz (3)-(6) sleduje da je B_0 kompletna podalgebra algebre B.

2^0 Neka je $B_0 \in \mathcal{K}$ i za $x \in B$, $x^* \doteq \wedge \{u \mid x \le u, u \in B_0\}$.

(1) Očigledno $x^* \geqq x$.

(2) Kako je $0 \in B_0$, to $0 \in \{u \mid 0 \le u, u \in B_0\}$ te $0^* = 0$.

(3) Kako je B_0 kompletna algebra, to $x^* \in B_0$.

(4) Kako je $x, y \le x \vee y$, to $x^*, y^* \le (x \vee y)^*$, odakle $x^* \vee y^* \le (x \vee y)^*$. Dalje zbog (1), $x^* \vee y^* \geqslant x \vee y$, te zbog (3) $(x^* \vee y^* \in B_0)$, biće $x^* \vee y^* \geqslant (x \vee y)^*$. Otuda $(x \vee y)^* = x^* \vee y^*$.

(5) Prema (1), $x^* \le x^{**}$. S druge strane pošto je $x^* \in B_0$, to $x^* \in \{u \mid x^* \le u, u \in B_0\}$. Kako je $x^{**} = \wedge \{u \mid x^* \le u, u \in B_0\}$, to $x^{**} \le x^*$. Otuda $x^{**} = x^*$.

(6) Prema (3) $x^* \in B_0$. Otuda pošto je B_0 Bool-ova algebra, $x^{*\prime} \in B_0$, odakle $x^{*\prime *} = x^{*\prime}$. Otuda, $x^{*\prime *\prime} = x^{*\prime\prime}$, tj. $x^{*0} = x^*$.

Iz (1)-(6) sleduje da je $*$ S_5 operator.

3^0 Neka je $B_0 \subseteq B$, kompletna podalgebra algebre B, inducirana S_5 operatorom $*$ i neka je $*_1$ operator induciran algebrom B_0. Kako je $x^{*1} = \wedge S$ za neki $S \subseteq B_0$, to $x^{*1} \in B_0$. Otuda $x^{*1} = y^*$ za neki $y \in B$. Kako je $x \le x^{*1}$, to $x \le y^*$, odakle $x^* \le y^{**}$, tj. $x^* \le y^*$. Otuda (1) $x^* \le x^{*1}$. S druge strane, kako je $x \le x^*$ i $x^* \in B_0$, biće (2) $x^{*1} \le x^*$.

Iz (1) i (2) sleduje $x^* = x^{*1}$, tj. $\lambda \mu = i_\Phi$.

4^0 Neka je $*$ operator induciran kompletnom podalgebrom $B_0 \subseteq B$ i neka je B_1 kompletna (prema 1^0) podalgebra inducirana operatorom $*$. (Prema 2^0 $*$ je S_5 operator).

Neka je $x \in B_0$. Tada $x^* = x$, odakle $x \in B_1$. Otuda (1) $B_0 \subseteq B_1$.

Neka $x \in B_1$. Tada $x = v^*$ za neki $v \in B$. Kako je $v^* = \wedge S$ za neki $S \subseteq B_0$ i B_0 je kompletna algebra, $v^* \in B_0$, tj. $x \in B_0$. Otuda (2) $B_1 \subseteq B_0$.

Iz (1) i (2) sleduje $B_0 = B_1$, tj. $\mu\lambda = i_X$.

Iz 3° i 4° sleduje da su μ, λ međusobno inverzne bijekcije.

C.3.1. Broj kompletnih podalgebri kompletne Bool-ove algebre B jednak je broju S_5 operatora na B.

Koristeći T2. i T.3. imamo sledeća tvrđenja za konačnu Bool-ovu algebru B

C.3.2. (Kardinalni) broj podalgebri algebre B jednak je broju S_5 operatora na B (jer ako je B konačna Bool-ova algebra, onda je ona kompletna i sve njene podalgebre su kompletne).

C.3.3. Broj podalgebri algebre B jednak je broju relacija ekvivalencija na A, gde $A = \mathcal{A}(B)$.

C.3.4. Ako je $kA = n$, tada je broj neizomorfnih podalgebri algebre B jednak broju particija prirodnog broja n.

T.4. Ako je B konačna S_5 algebra, tada postoje $B_1, B_2, \ldots, B_n$ S_6 algebre da $B \simeq \prod_{i=1}^{n} B_i$ (gde je $\prod_{i=1}^{n} B_i$ sa proizvodnom strukturom).

Dokaz Prema T.1., T.2. operator * algebre B inducira relaciju ekvivalencije ρ na A, gde $A = \mathcal{A}(B)$. Neka je $A_1, A_2, \ldots, A_n$ odgovarajuće razbijanje skupa A i neka je B_i S_6 algebra čiji je skup atoma upravo skup A_i[1], (odatle neposredno sledi da $B_i \simeq \mathcal{B}A_i$). Očigledno možemo uzeti da je $x \in B_i$ akko je $x = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k$ za neke $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A_i$.

Neka je $B_0 = \prod_{i \in I} B_i$ i $f\colon B_0 \to B$ definisano sa:

za $\alpha \in B_0$, tj. $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in B_i$, $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$

$f(\alpha) = \bigvee_{i=1}^{n} x_i$, tj. $f(\alpha) = \bigvee_{i=1}^{n} \pi_i \alpha$.

Neposredno se proverava da je f izomorfizam. Primetimo samo da je inverzna funkcija funkciji f, upravo preslikavanje g definisano na sledeći način: $g(x) = \alpha$, gde $\pi_i \alpha = \vee\{a \in A_i \mid a \leq x\}$, $(x \in B)$.

---

1) B_i je slobodna Bool-ova algebra nad A_i, gde su a_i atomi u toj algebri.

III

U ovom delu razmatraćemo Bool-ove algebre kao formalne teorije.

1. Teorija $\mathcal{B}_o$.

Promenljive teorije $\mathcal{B}_o$ je ma koji, najmanje prebrojiv skup simbola I. Pretpostavljamo da su simboli $x,y,z,x_1,y_1,z_1,\dots$ u skupu I. Konstante ove teorije su 0,1. Operacijski simboli su $\wedge$, $\vee$, $'$. Termi se rekurzivno definišu na uobičajen način. Znak $=$ je relacijski simbol dužine dva. Sve formule teorije $\mathcal{B}_o$ su oblika $u = v$, gde su u,v termi. Za aksiome uzimamo formule B1-B5', II.1 (bez B.6.).

Pravila izvođenja su:

$\alpha_1: \dfrac{x=y}{y=x}$, $\alpha_2: \dfrac{x=y,\ y=z}{x=z}$, $\alpha_3: \dfrac{x=y}{x'=y'}$, $\alpha_4: \dfrac{x=y}{x\wedge z=y\wedge z}$

$\alpha_5: \dfrac{x=y}{x\vee z=y\vee z}$

Takođe pravilo substitucije: $\vdash_{\mathcal{B}_o} u(x) = v(x) \longrightarrow \vdash_{\mathcal{B}_o} u(T) = v(T)$, gde su u,v,T termi .

Lako se izvode pravila $\alpha_6: \dfrac{x=y}{z\wedge x=z\wedge y}$, $\alpha_7: \dfrac{x=y}{z\vee x=z\vee y}$, i

takođe tvrđenje $x=x$.

T.1.1 $\dfrac{x = y}{T(x)=T(y)}$, gde je T term teorije .

Dokaz Dokaz sprovodimo potpunom indukcijom po broju operacijskih simbola u T.

Neka je u T(x) n operacijskih simbola i neka tvrđenje važi za $k < n$. Postoji sledeća mogućnost:

1° $T(x) \doteq T_1(x) \vee T_2(x)$.

Po induktivnoj hipotezi $\dfrac{x=y}{T_1(x)=T_1(y)}$, $\dfrac{x=y}{T_2(x)=T_2(y)}$. Tada:

(1) $x = y$ (hipoteza), (2) $T_1(x) = T_1(y)$, (3) $T_2(x) = T_2(y)$

(4) $T_1(x) \vee T_2(x) = T_1(x) \vee T_2(y)$ (iz (3) po α_7)

(5) $T_1(x) \vee T_2(y) = T_1(y) \vee T_2(y)$ (iz (2) po α_5)

(6) $T_1(x) \vee T_2(x) = T_1(y) \vee T_2(y)$ (iz (4),(5), po α_2)

(7) $T(x) = T(y)$ (definicija 1^o).

Na sličan način se razmatraju ostale mogućnosti:

2^o $T(x) \doteq T_1(x) \wedge T_2(x)$, 3^o $T(x) \doteq T_1'(x)$.

<u>Def.1.</u> $x \leq y \doteq x = x \wedge y$.

Radi ilustracije dajemo dokaze sledećih tvrđenja:

<u>T.1.</u> 1^o $\vdash_{\mathcal{B}_0} x = x \wedge x$

2^o $\vdash_{\mathcal{B}_0} x \leq x$.

<u>Dokaz</u> 1^o (1) $x = x \wedge 1$ [B5], (2) $1 = x \vee x'$ [B4'], (3) $x \wedge 1 = x \wedge (x \vee x')$ [(2), α_6], (4) $x \wedge (x \vee x') = (x \wedge x) \vee (x \wedge x')$ [B2], (5) $x \wedge x' = 0$ [B4], (6) $(x \wedge x) \vee (x \wedge x') = (x \wedge x) \vee 0$ [(5), α_7], (7) $(x \wedge x) \vee 0 = x \wedge x$ [B5'], (8) $x = x \wedge (x \vee x')$ [(1),(3), α_2], (9) $x = (x \wedge x) \vee (x \wedge x')$ [(4),(8), α_2], (10) $x = (x \wedge x) \vee 0$ [(9),(6), α_2], (11) $x = x \wedge x$ [(10),(7) α_2]

2^o $x = x \wedge x$ [1^o], $x \leq x$ (Def.1.)

Na sličan način mogu se dokazati drugi Bool-ovi identiteti. U daljem mi ćemo ih pretpostavljati.

<u>T.2.</u> Sledeća tvrđenja su ekvivalentna: Neka su f,g termi teorije .

1^o $\vdash_{\mathcal{B}_0} f = g$

2^o $\models f = g$

3^o $f = g$ je ispunjeno na svakom polju skupova pri interpretaciji

$$\begin{pmatrix} \wedge & \vee & ' & 0 & 1 \\ \cap & \cup & \complement_X & \emptyset & X \end{pmatrix}$$

4^o $\{0,1\} \models f = g$

5^o $\vdash_{\mathcal{L}} f \Leftrightarrow g$ pri interpretaciji $\begin{pmatrix} \wedge, & \vee, & ' \\ \wedge, & \vee, & \neg \end{pmatrix}$

($\mathcal{L}$ je iskazni račun, videti na primer /9/)

Shema dokaza:

$$\begin{tikzcd} 1^\circ \arrow[r] \arrow[d] & 2^\circ \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & 3^\circ \\ 5^\circ \arrow[r] & 4^\circ \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

$1^\circ \longrightarrow 2^\circ$ Očigledno

$2^\circ \longrightarrow 3^\circ$ Očigledno

$3^\circ \longrightarrow 2^\circ$ Prema II.3.T.12 (Stav o reprezentaciji Bool-ovih algebri)

$1^\circ \longrightarrow 5^\circ$ Neposredno, jer su pri navedenoj interpretaciji aksiome Bool-ove algebre teoreme računa $\mathcal{L}$ i pravila izvođenja u $\mathcal{B}_\circ$ čuvaju svojstvo "biti teorema" u $\mathcal{L}$.

$5^\circ \longrightarrow 4^\circ$ Jer je svaka teorema u $\mathcal{L}$ tautologija, što se neposredno dokazuje.

$4^\circ \longrightarrow 1^\circ$ <u>Dokaz</u> Neka je T skup terma teorije $\mathcal{B}_\circ$ i relacija $\sim$ u T definisana sa: $f \sim g$ akko $\vdash_{\mathcal{B}_\circ} f = g$. Neposredno se dokazuje da za proizvoljne terme f, g, h (u $\mathcal{B}_\circ$) važi:
(1) $f \sim f$, (2) $f \sim g$ i $g \sim h$ povlači $f \sim h$, (3) Ako je $f \sim g$, onda $g \sim f$, (4) Ako je $f \sim g$, onda $f' \sim g'$, (5) Ako je $f \sim g$, tada $f \wedge h \sim g \wedge h$, $f \vee h \sim g \vee h$.

Tvrđenja (1)-(5) pokazuju da je $\sim$ kongruencija. Označimo sa $T/\!=$ skup $T/\!\sim$. Očigledno, $T/\!=$ je slobodna Bool-ova algebra nad skupom I. Primetimo da je $T/\!=$ karakteristična algebra za $\mathcal{B}_\circ$, tj. $\vdash_{\mathcal{B}_\circ} u = v$ akko $T/\!= \models u = v$.

Neka je $\mathcal{E} : T \longrightarrow T/\!=$ kanonsko preslikavanje. Tada, $\mathcal{E} f' = (\mathcal{E} f)'$, $\mathcal{E}(f \wedge g) = (\mathcal{E} f) \wedge (\mathcal{E} g)$, $\mathcal{E}(f \vee g) = (\mathcal{E} f) \vee (\mathcal{E} g)$, $\mathcal{E}\, 0 = 0$, $\mathcal{E}\, 1 = 1$[1]. Kako je $\vdash_{\mathcal{B}_\circ} f = g$ akko $\vdash_{\mathcal{B}_\circ} f \triangle g = 0$, to je dovoljno dokazati $4^\circ \longrightarrow 1^\circ$ za formule oblika $h = 0$.

Pretpostavimo da je (1) $\{0,1\} \models h = 0$ i $\sim \vdash_{\mathcal{B}_\circ} h = 0$. Tada nije $\mathcal{E}\, h = 0$, tj. $\mathcal{E}\, h \neq 0$ (jer je $T/\!=$ karakteristična algebra). Neka je F ultafilter, da $\mathcal{E}\, h \in F$ ($F(\mathcal{E}\, h) = \{x \mid \mathcal{E}\, h \leq x,\ x \in T/\!=\}$ je filter te prema II.3.T.3. postoji ultrafilter F da $F(\mathcal{E}\, h) \subseteq F$, odakle, postji ultra-

---

1) Najveći i najmanji element Bool-ove algebre $T/\!=$ takođe su označeni sa 0,1. Slična primedba je i za operacije $\wedge$, $\vee$, $'$.

komplement

fiter da $\mathcal{E} h \in F$). Tada je $I = C_{T/=}F$ maksimalan ideal da $\mathcal{E} h \notin I$. prema II.3.T.14. tada $(T/=)/I \simeq \{0,1\}$. Neka je $k\colon T/= \longrightarrow (T/=)/I$ kanonski homomorfizam i $\eta = k\mathcal{E}$. Tada za $h(x_1,\dots,x_n)$, pošto je η homomorfizam, $\eta h(x_1,\dots,x_n) = h(\eta x_1,\dots,\eta x_n)$. Kako je $\mathcal{E} h \notin I$, to $k(\mathcal{E} h) = 1$, tj. $\eta h = 1$. Otuda za $\eta x_1,\dots,\eta x_n \in \{0,1\}$, biće $\eta h = 1$. S druge strane, prema (1), je $\{0,1\} \models h = 0$, što je kontradikcija.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "\mathcal{E}"] \arrow[dr, "\eta"'] & & T/= \arrow[dl, "\kappa"] \\ & (T/=)/I & \end{tikzcd}$$

C.2.1 Algebra $\{0,1\}$ je karakterističan model za $\mathcal{B}_0$. Kako je $2^\circ \longleftrightarrow 1^\circ$ to važi stav potpunosti za $\mathcal{B}_0$.

C.2.2. Kako je $\{0,1\}$ karakteristična algebra, to je $\mathcal{B}_0$ odlučiva teorija.

C.2.3. Kako je $\vdash_{\mathcal{B}_0} \alpha = 1$ akko $\vdash_{\mathcal{B}_0} \alpha = x \vee x'$ akko $\vdash_{\mathcal{L}} \alpha \Leftrightarrow x \vee \neg x$ akko $\vdash_{\mathcal{L}} \alpha$, to je $\mathcal{L}$ odlučiv račun. Jasno je ~~prema~~ prethodnom, da za skup za skup iskaznih slova možemo uzeti ma koji skup simbola.

C.2.4. Neposredno sledi da je odlučivo proširenje računa $\mathcal{L}$ sa dve konstante T, $\perp$, $(0, 1)$ i aksiomama $\perp \Rightarrow A$, $A \Rightarrow T$.

T.3. Za svaki term f teorije $\mathcal{B}_0$, postoje termi a,b teorije $\mathcal{B}_0$, u kojima nema pojavljivanja promenljiva x i da je $\vdash_{\mathcal{B}_0} f = (a \wedge x) \vee (b \wedge x')$.

Dokaz Kako je $\{0,1\} \models f(x) = (f(1) \wedge x) \vee (f(0) \wedge x')$, to prema T.2. to tvrđenje neposredno sledi, utimajući da je $a = f(1)$, $b = f(0)$. Prema prethodnom sleduje, da za svaki $\mathcal{B}_0$ term postoji (efektivna) reprezentacija u disjuntivnoj normalnoj formi.

Primetimo, da svaki term teorije $\mathcal{B}_0$, možemo da interpretiramo kao Bool-ovu funkciju, te je $\mathcal{B}_0$ teorija o računu sa Bool-ovim funkcijama

2. Teorija $\mathcal{B}_1$.

Termi teorije $\mathcal{B}_1$ su termi teorije $\mathcal{B}_0$, elementarne formule su formule teorije $\mathcal{B}_0$, a formule su elementarne formule i na uobičajen način izgrađene formule sa logičkim simbolima $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$[1]. Pored aksioma Bool-ove algebre, uzima se i jedna aksiomatizacija (klasičnog) iskaznog računa, naprimer, računa $\mathcal{L}$ (v. /9/). Pravilo izvođenja je modus ponens (MP) i eventualno, pravilo substitucije (ako logičke aksiome nisu date kao shema aksiome).

Prema prethodnom, vidi se da su formule teorije $\mathcal{B}_1$ sve otvorene[2] formule teorije Bool-ovih algebri u predikatskom računu.

T.1. $\vdash_{\mathcal{B}_0} T_1 = T_2$ akko $\vdash_{\mathcal{B}_1} T_1 = T_2$, gde su T_1, T_2 termi teorije $\mathcal{B}_0$ ($\mathcal{B}_1$).

Dokaz ($\rightarrow$) Kako je $\mathcal{B}_1$ proširenje teorije $\mathcal{B}_0$, tvrđenje neposredno sledi.

($\leftarrow$) 1° način. Ako je $\mathcal{B}_1 \vdash T_1 = T_2$, tada $\models T_1 = T_2$, te prema 1.T.2. tvrđenje neposredno sledi.

2° način. Neka je $\theta = \begin{pmatrix} I & \wedge & \vee & ' & \top & = \\ I & \wedge & \vee & \neg & \neg & \Leftrightarrow \end{pmatrix}$ interpretacija teorije $\mathcal{B}_1$ u račun $\mathcal{L}$. Neposredno se dokazuje da $\vdash_{\mathcal{B}_1} \alpha \rightarrow \vdash_{\mathcal{L}} \theta(\alpha)$ (dokaz se sprovodi potpunom indukcijom po dužini dokaza u $\mathcal{B}_1$). Specijalno, za $\alpha \triangleq u=v$ biće $\vdash_{\mathcal{B}_1} u=v \rightarrow \vdash_{\mathcal{L}} u \Leftrightarrow v$, te prema 1.T.2. tvrđenje sledi. Odavde sleduje da je $\mathcal{B}_1$ neprotivurečna teorija (u odnosu na $\neg$).

Prema prethodnom imamo:

C.1. Teorija $\mathcal{B}_1$ je neesencijalno proširenje teorije $\mathcal{B}_0$.

3. Teorija $\mathcal{B}_6$.

Teorija $\mathcal{B}_6$ dobija se dodavanjem jeziku teorije $\mathcal{B}_1$ simbola $*$ (koji ima značenje unarnog operatora) i aksioma:

1° $0^* = 0$, 2° $\neg(x = 0) \Rightarrow x^* = 1$.

---

1) Simboli $\wedge$, $\vee$ označavaće operacije Bool-ove algebre a takođe i logičke simbole (i, ili). Iz konteksta biće jasno na šta se šta odnosi. U tom smislu simboli $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ označavaće i operacije Bool-ove algebre ($x \Rightarrow y = x' \vee y$, slično za $\Leftrightarrow$).

2) Na modelu B uzima se zatvorenje odgovarajuće formule.

Neposredno se vidi da su formule teorije $\mathcal{B}_6$ otvorene formule teorije S_6 algebri u predikatskom računu.

T.1. Ne postoji term U teorije $\mathcal{B}_1$ da je $\vdash_{\mathcal{B}_6} x^* = U$.

Dokaz Pretpostavimo da je $\vdash_{\mathcal{B}_6} x^* = U$ za neki $\mathcal{B}_1$ - term U. Tada, prema 2.T.3. $\vdash_{\mathcal{B}_1} U = (a \wedge x) \vee (b \wedge x')$ za neke $\mathcal{B}_1$- terme a,b koji ne sadrže u sebi simbol x. Otuda $\vdash_{\mathcal{B}_6} x^* = (a \wedge x) \vee (b \wedge x')$. Iz $\vdash_{\mathcal{B}_6} 0^* = 0$ dobija se $\vdash_{\mathcal{B}_1} b = 0$. Slično, za $x = 1$ imamo $\vdash_{\mathcal{B}_1} a = 1$. Otuda $\vdash_{\mathcal{B}_6} x^* = x$. Međutim $\sim \models x^* = x$ u što se neposredno uveravamo ako uočimo S_6 algebru od 4 elementa.

T.2. Ako je α formula teorije $\mathcal{B}_1$, tada $\vdash_{\mathcal{B}_1} \alpha \longleftrightarrow \vdash_{\mathcal{B}_6} \alpha$

Dokaz $(\longrightarrow)$ Kako je teorija $\mathcal{B}_6$ proširenje teorije $\mathcal{B}_1$, to tvrđenje neposredno sledi.

$(\longleftarrow)$ Očigledno, na proizvoljnoj Bool-ovoj algebri možemo uvesti S_6 operator $*$. Tada su ispunjeni uslovi tvrđenje I.2.T.4. te tvrđenje važi ako je α formula teorije Bool-ovih algebri u predikatskom računu, a otuda ako je α otvorena formula.

C.2. Teorija $\mathcal{B}_6$ je neesencijalno proširenje teorije $\mathcal{B}_1$.

Primetimo da se na sličan način mogu dokazati analogna tvrđenja za teorije T, I, S_4 algebri u iskaznom (predikatskom) računu.

T.3. $\mathcal{B}_1$ nema konačne karakteristične algebre.

Dokaz Pretpostavimo da je B konačna karakteristična algebra za $\mathcal{B}_1$ i neka je $m = kB$, $n = m+1$.

Neka je $\alpha \doteq x_1=x_2 \vee x_1=x_3 \vee \ldots \vee x_1=x_n \vee x_2=x_3 \vee \ldots \vee x_{n-1}=x_n$. Tada $B \models \alpha$ ali $\sim \vdash_{\mathcal{B}_1} \alpha$, jer ako bi bilo $\vdash_{\mathcal{B}_1} \alpha$ onda bi sve Bool-ove algebre imale najviše n elemenata, što nije tačno.

C.3. $\mathcal{B}_6$ nema konačne karakteristične algebre.

Tvrđenje neposredno sleduje prema T.2.

T.4. Ako $\sim \vdash_{\mathcal{B}_1} \alpha$, tada postoji konačna Bool-ova algebra S i valuacija v da $S \sim \vdash_v \alpha$.

Dokaz Neka je I_α skup promenljivih u formuli α. Neka $\sim\vdash\alpha$. Tada postoji Bool-ova algebra B i valuacija v da $B\sim\models_v \alpha$. Neka je $vI_\alpha = S_o$ i S minimalna podalgebra algebre B koja sadrži skup S_o. Očigledno $S \sim\models\alpha$. Kako je I_α konačan skup, to je i S_o konačan skup a otuda i algebra S ja takođe konačna, te tvrđenje sledi. Primetimo da je $kS \leq 2^{2^{kS_o}} \leq 2^{2^{kI_\alpha}}$, tj. $kS \leq 2^{2^{kI_\alpha}}$, te imamo:

C.4. $\vdash_{\mathcal{B}_1}\alpha$ akko u svim Bool-ovim algebrama B, za kje je $kB \leq 2^{2^{kI_\alpha}}$ ispuneno $B \models\alpha$.

Odavde sleduje da je $\mathcal{B}_1$ odlučiva teorija. Kasnije ćemo navesti efektivniju proceduru, kojom je moguće ispitati da li je formula α teorije $\mathcal{B}_1$ teorema ili ne.

Jedna posledica od C.4. je odlučivost računa jednakosti ($\mathcal{J}$). (Elementarne formule računa $\mathcal{J}$ su formule oblika $x_i = x_j$, gde su x_i, x_j promenljive, a formule su elementarne formule i na uobičajen način izgrađene formule preko logičkih simbola $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\neg$, $\Leftrightarrow$. Aksiome su $x = x$, $x = y \Rightarrow y = x$, $x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$). Zaista, pre svega primetimo da su modeli za $\mathcal{J}$ skupovi. Međutim svaki skup X može se utopiti u neku Bool-ovu algebru (naprimer u $\mathcal{B}X$), te prema I.2.T.5. za formulu F računa $\mathcal{J}$ važi $\vdash_{\mathcal{J}} F$ akko $\vdash_{\mathcal{B}_1} F$. Otuda tvrđenje sledi prema C.4.

Def.1. 1^o $x < y \doteq (x \Rightarrow y)^o$, 2^o $x \equiv y \doteq (x \Leftrightarrow y)^o$, 3^o $\bar{x} \doteq x^{*}$.

T.5. Neka je α formula teorije $\mathcal{B}_6$. Tada postoji term U teorije $\mathcal{B}_6$ da je $\vdash_{\mathcal{B}_6} \alpha \Leftrightarrow U = 0$.

Dokaz Kako je (1) $\vdash_{\mathcal{B}_6} x = y \Leftrightarrow x \triangle y = 0$,

(2) $\vdash_{\mathcal{B}_6} x = 0 \wedge y = 0 \Leftrightarrow x \vee y = 0$,

(3) $\vdash_{\mathcal{B}_6} \neg(x = 0) \Leftrightarrow \bar{x} = 0$,

(4) $\vdash_{\mathcal{B}_6} x = 0 \vee y = 0 \Leftrightarrow x^{*} \wedge y^{*} = 0$

(5) $\vdash_{\mathcal{B}_6} x \leq y \Leftrightarrow x = x \wedge y$,

tvrđenje neposredno sledi (dokaz se sprovodi potpunom indukcijom po broju logičkih znakova i znaka $=$ u α).

<u>Primer 1°</u> Neka je $\alpha \doteq x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$. Tada niz sledećih formula dovodi nas do terma U:

$$(x = x \wedge y) \wedge (y = y \wedge z) \Rightarrow x = x \wedge z,$$

$$x \vartriangle (x \wedge y) \neq 0 \vee y \vartriangle (y \wedge z) \neq 0 \vee x \vartriangle (x \wedge z) = 0,$$

$$\overline{x \vartriangle (x \wedge y) = 0} \vee \overline{y \vartriangle (y \wedge z) = 0} \vee x \vartriangle (x \wedge z) = 0$$

$$U \doteq \overline{x \vartriangle (x \wedge y)}^{*} \wedge \overline{(y \vartriangle (y \wedge z))}^{*} \wedge (x \vartriangle (x \wedge z))^{*} = 0 .$$

Tada $\vdash_{\mathcal{B}_6} \alpha \Leftrightarrow U = 0$.

<u>Def.2.</u> Neka je τ preslikavanje skupa formula teorije $\mathcal{B}_6$ u skup terma, definisano sa :

1° Ako je u ~~x~~-term tada
$\tau(u) = u$
2°.

1° Ako je x promenljiva, tada $\tau(x) \doteq x$.

2° Ako su u,v termi tada

$\tau(u \vee v) \doteq \tau(u) \vee \tau(v)$, $\tau(u \wedge v) \doteq \tau(u) \wedge \tau(v)$,

$\tau(u') \doteq \tau(u)'$, $\tau(u = v) \doteq \tau(u) \equiv \tau(v)$,

$\tau(u^*) \doteq \tau(u)^*$, $\tau(u \leq v) \doteq \tau(u) \prec \tau(v)$.

3° Ako su α, β formule, tada [1)]

$\tau(\alpha \vee \beta) \doteq \tau(\alpha) \vee \tau(\beta)$, $\tau(\alpha \wedge \beta) \doteq \tau(\alpha) \wedge \tau(\beta)$

$\tau(\neg \alpha) \doteq \tau(\alpha)'$, $\tau(\alpha \Rightarrow \beta) \doteq \tau(\alpha) \Rightarrow \tau(\beta)$

<u>T.6.</u> Ako je α formula teorije $\mathcal{B}_6$, tada je $\vdash_{\mathcal{B}_6} \tau(\alpha) = 0 \vee \tau(\alpha) = 1$

<u>Dokaz</u> Dokaz indukcijom po broju logičkih znakova i simbola = u α.

(1) $\alpha \doteq u = v$. Tada :

$\tau(\alpha) \doteq \tau(u = v) \doteq \tau(u) \equiv \tau(v) \doteq (\tau(u) \Leftrightarrow \tau(v))^{0}$. Kako je $\vdash_{\mathcal{B}_6} x^{0} = 0 \vee x = 1$, to $\vdash_{\mathcal{B}_6} \tau(\alpha) = 0 \vee \tau(\alpha) = 1$.

(2) Pretpostavimo da tvrđenje važi za $k < n$, gde je n broj logičkih znakova u α . Tada razlikujemo slučajeve:

(i) $\alpha \doteq \beta \vee \gamma$. Tada $\tau(\alpha) \doteq \tau(\beta) \vee \tau(\gamma)$. Po induktivnoj hipotezi je $\vdash_{\mathcal{B}_6} \tau(\beta) = 0 \vee \tau(\beta) = 1$ i $\vdash_{\mathcal{B}_6} \tau(\gamma) = 0 \vee \tau(\gamma) = 1$. Otuda $\vdash_{\mathcal{B}_6} \tau(\alpha) = 0 \vee \tau(\alpha) = 1$.

---

1) Na desnoj strani jednakosti, simboli $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, su znaci operacija.

(ii) Slučajevi $\alpha \doteq \beta\wedge\gamma$, $\alpha \doteq \neg\beta$ dokazuju se kao pod (i)

T.7. $\vdash_{B_6} \alpha \Leftrightarrow \tau(\alpha)=1$

Dokaz. Dokaz ćemo sprovesti potpunom indukcijom po broju logičkih znakova u α.

(1) $\alpha \doteq u = v$, gde su u, v B_6-termi.

Neka je $u = v$ u B_6. Tada: $(u \Leftrightarrow v) = 1$, $(u \Leftrightarrow v)' = 0$, $(u \Leftrightarrow v)'^{*} = 0$, $(u \Leftrightarrow v)^{\circ} = 1$, tj. $u \equiv v = 1$.

Neka je $u \equiv v = 1$ u B_6. Tada: $(u \Leftrightarrow v)^{\circ} = 1$, $(u \Leftrightarrow v)'^{*} = 0$, $(u \Leftrightarrow v)' = 0$, $u \Leftrightarrow v = 1$, $u = v$.

(2) Pretpostavimo da tvrđenje važi za $k < n$, n je ~~[illegible]~~ broj logičkih znakova u α.

(i) $\alpha \doteq \neg\beta$. Po induktivnoj hipotezi $\beta \Leftrightarrow (\tau(\beta) = 1)$. Otuda:

$$\neg\beta \Leftrightarrow \neg(\tau(\beta) = 1).$$

Po T.6. biće $\tau(\beta) = 0 \vee \tau(\beta) = 1$. Otuda

$$\neg\beta \Leftrightarrow (\tau(\beta) = 0), \quad \neg\beta \Leftrightarrow (\tau(\beta)' = 1), \quad \neg\beta \Leftrightarrow (\tau(\neg\beta) = 1).$$

(ii) $\alpha \doteq \beta \vee \gamma$. Po induktivnoj hipotezi biće $\beta \Leftrightarrow \tau(\beta) = 1$, $\gamma \Leftrightarrow (\tau(\gamma) = 1)$. Dalje imamo:

$\alpha \Leftrightarrow \beta \vee \gamma$, $\beta \vee \gamma \Leftrightarrow (\tau(\beta) = 1) \vee (\tau(\gamma) = 1)$. Po T.6. dobija se $(\tau(\beta) = 1) \vee (\tau(\gamma) = 1) \Leftrightarrow (\tau(\beta) \vee \tau(\gamma) = 1)$. $(\tau(\beta) \vee \tau(\gamma)) = 1 \Leftrightarrow \tau(\beta \vee \gamma) = 1$

Otuda $\alpha \Leftrightarrow \tau(\alpha) = 1$.

Kako je $\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta$, to su ovi slučajevi izvodljivi iz (i), (ii). Otuda tvrđenje sledi.

Primer 2° (1) Neka je $\alpha \doteq (a \le b \vee c) \Rightarrow (a \le b) \vee (a \le c)$. Tada $\tau(\alpha) \doteq (a < (b \vee c)) \Rightarrow (a < b) \vee (a < c)$.

(2) Neka je $\alpha \doteq a = b \vee a = c \vee b = c$. Tada je $\tau(\alpha) \doteq (a \equiv b) \vee (a \equiv c) \vee (b \equiv c)$.

C.7. $\vdash_{B_6} \alpha$ akko $\models \tau(\alpha) = 1$, gde je α B_6-term.

T.8. Ako $\sim\vdash_{B_6} \alpha = 1$, gde je α B_6-term, tada postoji konačna Bool-ova[1] algebra i valuacija v da $B \sim\models_v \alpha = 1$.

Dokaz Neka je T skup terma teorije $\mathcal{B}_6$, i T/= slobodna $\mathcal{B}_6$ algebra nad I, gde je I skup promenljivih teorije $\mathcal{B}_6$ (v. 1.T.2.). Tada je T/= katakteristična algebra za formule oblika u= v. Neka je $\sim\vdash_{\mathcal{B}_6}\alpha = 1$. Tada postoji valuacija $v: I_\alpha \to T/=$ (I_α je skup promenljivih u termu α), da $T/= \sim\models_v \alpha = 1$. Neka je $S_o = vI_\alpha$ i B minimalna $\mathcal{B}_6$ algebra nad S_o. Kako je S_o konačan skup, to je B konačan skup, preciznije $kB \leq 2^{2^{kS_o}}$, jer B je ustvari minimalna Bool-ova algebra nad S_o (u T/=). Ako je U podterm terma α, tada $v(U) \in B$, te se v može suziti na preslikavanje $\bar{v}: I_\alpha \to B$ da za ma koji podterm β terma α, bude $V(\beta) = \bar{V}(\beta)$. Otuda $B \sim\models_v \alpha = 1$. Primetimo da je $kB \leq 2^{2^{kI_\alpha}}$, te imamo:

C.8. Neka je α $\mathcal{B}_6$ formula. Ako je za sve $\mathcal{B}_6$ algebre B, za koje je $kB \leq 2^{2^{kI_\alpha}}$, ispunjeno $B \models \tau(\alpha) = 1$, tada $\vdash_{\mathcal{B}_6}\alpha$.

Ovo tvrđenje neposredno sleduje prema C.7. i T.8. Otuda:

C.9. Teorija $\mathcal{B}_6$ je odlučiva.

4. Dosad smo razmatrali Teoriju Bool-ovih algebri preko standardnih modela i algebarskim metodama (odeljak 3., preslikavanje τ). U ovom delu primenićemo metod, koji u osnovi sadrži Kripkeov metod semantičkih tablea (v. /3/, str. 82.). Ovaj metod omogućiće da se za proizvoljnu formulu α teorije $\mathcal{B}_6$ (a na osnovu 2.C.1, 3.C.2 i za $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_1$ formule), utvrdi da li je α teorema, a takođe ako α nije teorema da odredimo model B i valuaciju v u kojoj $B \sim\models_v \alpha$. Napomenimo da je ovde Bool-ova algebra po pravilu atomska.

Neka je T skup terma teorije $\mathcal{B}_6$, $u, v \in T$, A je neki konačan skup. Neka je $\Phi_o : A \times I$[2] $\to \{0,1\}$ i Φ produženje preslikavanja Φ_o

---

1) Kako na Bool-ovoj algebri $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ postoji tačno jedan operator saglasan sa operacijama $\wedge$, $\vee$, $'$, to je moguće govoriti umesto $\mathcal{B}_6$ algebri, prosto Bool-ova algebra.

2) I je skup promenljivih teorije $\mathcal{B}_6$.

na T, tj. $\Phi : A \times T \to \{0,1\}$, $\Phi | A \times I = \Phi_0$, tako da je za $a \in A$

$$\Phi(a, u \vee v) \doteq \Phi(a,u) \vee \Phi(a,v) ,$$
$$\Phi(a,u') \doteq \Phi(a,u)' ,$$
$$\Phi(a,u^{*}) \doteq \bigvee_{x \in A} \Phi(x,u) , \qquad \Phi(a,u^{\circ}) \doteq \bigwedge_{x \in A} \Phi(x,u) ,$$
$$\Phi(a, u = v) \doteq \bigwedge_{x \in A} (\Phi(x,u) \Leftrightarrow \Phi(x,v)).$$

Jasno je da je Φ jednoznačno odredeno sa Φ_0. Zato ćemo ubuduće umesto Φ_0 pisati odmah Φ.

Sa obzirom na T.7., možemo Φ definisati samo za terme a ne i za proizvoljne formule.

Neka je B atomska i kompletna Bool-ova algebra[1], da $A = \mathcal{A}(B)$ (tj. $B \simeq \mathcal{B}A$). Za dato Φ neka je v_Φ valuacija $v_\Phi : I \to B$, tako da $v_\Phi(x) = \bigvee_{\Phi(a,x)=1} a$. Kažemo da je valuacija v_Φ inducirana preslikavanjem Φ.

Def.1. Ako je $(\forall a \in A)\ \Phi(a, \tau(\alpha)) = 1$, kažemo da je (A, Φ) K[2]-model za α. Ako je za svaki konačan skup A, (A, Φ) model za α, reći ćemo da je α K-valjana. Preslikavanje Φ zvaćemo K-preslikavanje.

Def.2. Neka je data valuacija $v : I \to B$. Neka je preslikavanje $\Phi_v : A \times I \to \{0,1\}$ definisano sa $\Phi_v(a,x) = 1$ akko $a \leq v(x)$, $(a \in A)$. Kažemo da je Φ_v inducirano valuacijom v.

L.1 1° Neka je K-preslikavanje Φ inducirano valuacijom v, i neka je valuacija v_1 inducirana preslikavanjem Φ. Tada $v = v_1$.

2° Neka je valuacija v inducirana K-preslikavanjem Φ i neka je Φ_1 K-preslikavanje inducirano valuacijom v. Tada $\Phi = \Phi_1$.

Dokaz 1° Po definiciji imamo $\Phi(a,x) = 1 \Leftrightarrow a \leq v(x)$. Dalje:

$$v_1(x) = \bigvee_{\Phi(a,x)=1} a = \bigvee\{a \mid \Phi(a,x) = 1\} = \bigvee\{a \mid a \leq v(x),\ a \leq x\} =$$
$$= \bigvee \Psi(v(x)) = v(x) \quad \text{(prema II.4.T.3.2°)}.$$ Otuda $v(x) = v_1(x)$, tj. $v = v_1$.

---

1) U nadaljem stalno ćemo pretpostavljati da je ispunjen naveden uslov za B u odnosu na A.

2) Prema Kripke-u.

3^0 Po definiciji imamo $v(x) = \bigvee\limits_{\Phi(a,x)=1} a = \bigvee\{a \mid \Phi(a,x) = 1\}$.

Otuda za $a \in A$ imamo:

$\Phi_1(a,x) = 1 \Leftrightarrow a \leq v(x) \Leftrightarrow a \in \Psi(v(x)) \Leftrightarrow a \in \Psi \bigvee\{a \mid \Phi(a,x) = 1\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a \in \{a \mid \Phi(a,x) = 1\} \Leftrightarrow \Phi(a,x) = 1.$ Otuda
$\Phi(a,x) = 1 \Leftrightarrow \Phi_1(a,x) = 1$, tj. $\Phi = \Phi_1$ (jer vrednosti funkcija Φ, Φ_1 su samo $0,1$).

<u>L.2.</u> Ako je valuacija v inducirana K-preslikavanjem Φ, tada za proizvoljni $\mathcal{B}_6$ term t važi $v(t) = \bigvee\limits_{\Phi(a,t)=1} a$.

<u>Dokaz</u> Dokaz ćemo sprovesti potpunom indukcijom po broju znakova operacija u t.

1^0 $t \doteq x$, x je promenljiva. Tada $v(x) = \bigvee\limits_{\Phi(a,x)=1} a$, neposredno prema definiciji.

2^0 $t \doteq t_1 \vee t_2$. Po induktivnoj hipotezi ispunjeno je
$v(t_1) = \bigvee\limits_{\Phi(a,t_1)=1} a$, $v(t_2) = \bigvee\limits_{\Phi(a,t_2)=1} a$, odakle sleduje:

$$v(t) = v(t_1 \vee t_2) = v(t_1) \vee v(t_2) = \Big(\bigvee_{\Phi(a,t_1)=1} a\Big) \vee \Big(\bigvee_{\Phi(a,t_2)=1} a\Big) =$$
$$= (\bigvee\{a \mid \Phi(a,t_1) = 1\}) \vee (\bigvee\{a \mid \Phi(a,t_2) = 1\}) =$$
$$= \bigvee(\{a \mid \Phi(a,t_1) = 1\} \cup \{a \mid \Phi(a,t_2) = 1\})^{1)} =$$
$$= \bigvee\{a \mid \Phi(a,t_1) = 1 \ \vee \ \Phi(a,t_2) = 1\} =$$
$$= \bigvee\{a \mid (\Phi(a,t_1) \vee \Phi(a,t_2)) = 1\} \overset{2)}{=} \bigvee\{a \mid \Phi(a,t_1 \vee t_2) = 1\} = \bigvee_{\Phi(a,t_1\vee t_2)=1} a =$$
$$= \bigvee_{\Phi(a,t)=1} a = 1$$

3^0 $t \doteq t_1'$. Po induktivnoj hipotezi biće $v(t_1) = \bigvee\limits_{\Phi(a,t_1)=1} a$, te:

$$v(t) = v(t_1') = v(t_1)' = \Big(\bigvee_{\Phi(a,t_1)=1} a\Big)' = \bigwedge_{\Phi(a,t_1)=1} a' = \bigwedge\{a' \mid \Phi(a,t_1) = 1\} \doteq \alpha.$$

S druge strane je:

$$\bigvee_{\Phi(a,t_1')=1} a = \bigvee_{\Phi(a,t_1)=0} a = \bigvee\{a \mid \Phi(a,t_1) = 0\} \doteq \beta.$$

Neka je $c \in \Psi(\alpha)$. Tada $c \leq \alpha$. Otuda za svaki a za koji je [illegible]

---

1) Koristi se da je $\bigvee(A \cup B) = (\bigvee A) \vee (\bigvee B)$.

2) Jer su vrednosti preslikavanja Φ samo $0,1$.

$\Phi(a,t_1) = 1$, biće $c \leq a'$. Pretpostavimo da je $\Phi(c,t_1) = 1$. Otuda $c \leq c'$, odakle $c = c \wedge c' = 0$, što je kontradikcija (jer je c atom). Prema tome $\Phi(c,t_1) = 0$, tj. $c \in \Psi(\beta)$. Prema prethodnom imamo:

(i) $\Psi(\alpha) \leq \Psi(\beta)$

Neka je $c \in \Psi(\beta)$. Tada $\Psi(c,t_1) = 0$. Neka je $a \in A$ za koji je $\Phi(a,t_1) = 1$. Pretpostavimo da $c \nleq a'$. Otuda sleduje $c \leq a$. Kako su c, a atomi ta c=a, odakle $\Psi(c,t_1) = 1$, što je kontradikcija. Prema tome $c \leq a'$, tj. $c \leq \alpha$. Otuda $c \in \Psi(\alpha)$, odakle

(ii) $\Psi(\beta) \leq \Psi(\alpha)$

Iz (i), (ii) sleduje $\Psi(\alpha) = \Psi(\beta)$, te $\alpha = \beta$.

4^0 $t = t_1^*$. Po induktivnoj hipotezi biće $v(t_1) = \bigvee_{\Phi(a,t_1)=1} a$. Otuda:

$$v(t) = v(t_1^*) = v(t_1)^* = \Big(\bigvee_{\Phi(a,t_1)=1} a\Big)^* = \bigvee_{\Phi(a,t_1)=1} 1 = \begin{cases} 1, & \text{ako je bar za jedno } a \in A \text{ ispunjeno } \Phi(a,t_1) = 0 \\ 0, & \text{ako je za svaki } a \in A \text{ ispunjeno } \Phi(a,t_1) = 0 \end{cases}$$

S druge strane imamo:

$$\bigvee_{\Phi(a,t_1^*)=1} a = \bigvee\{a \mid \Phi(a,t_1)^* = 1\} = \bigvee\{a \mid a \in A, \bigvee_{x \in A}\Phi(x,t_1) = 1\} =$$

$$= \bigvee\{a \mid a \in A, \text{"bar za jedno } x \in A, \Phi(x,t_1) = 1\text{"}\} = \begin{cases} \bigvee A, & \text{ako je bar za jedno } a \in A, \Phi(a,t_1)=1 \\ \bigvee \emptyset, & \text{ako je za svaki } a\ a \in A, \Phi(a,t_1)=0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{ako je bar za jedno } a \in A, \Phi(x,t_1) = 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases} .$$

Ovde smo koristili da je $\bigvee A = 1$ (v. II.4.T.3.1^0).

Kako su operacije $\wedge$, $\Rightarrow$ izrazive preko $'$, $\vee$, a operacija o preko $*$, to tvrđenje sledi.

<u>L.3.</u> Neka je Φ K-preslikavanje inducirano valuacijom v. Tada za B_6 term t biće: $(\forall a \in A)\ \Phi(a,t) = 1 \Leftrightarrow a \leq v(t)$.

<u>Dokaz</u> Prema L.1., v je takođe inducirano preslikavanjem Φ. Tada prema prema L.2. biće $v(t) = \bigvee\{a \mid \Phi(a,t) = 1\}$, odakle

$\Psi(v(t)) = \{a \mid \Phi(a,t) = 1\}$. Otuda neposredno :

$\Phi(a,t) = 1 \Leftrightarrow a \leq v(t)$.

L.4. Ako je valuacija v inducirana K-preslikavanjem Φ, odnosno Φ valuacijom v, tada za $\mathcal{B}_6$ formulu α biće:

(A, Φ) je K-model za α akko $B \models_v \alpha$

Primedba (A, Φ) je K-model za α akko $(\forall a \in A)\ \Phi(a, \tau(\alpha)) = 1$

Dokaz ($\rightarrow$) Neka je (A, Φ) K-model za α. Prema L.2. biće $v(\tau(\alpha)) = \bigvee\{a \mid \Phi(a, \tau(\alpha)) = 1\}$. S druge strane po pretpostavci (A, Φ) je K-model za α, tj. $(\forall a \in A)\ \Phi(a, \tau(\alpha)) = 1$, te je $v(\tau(\alpha)) = \bigvee A = 1$, tj. (1) $v(\tau(\alpha)) = 1$.

Prema 3.C.7.: $\vdash_{\mathcal{B}_6} \alpha \iff \tau(\alpha) = 1$. Otuda $B \models_v \alpha$ akko $v(\tau(\alpha)) = 1$. Zaista, pretpostavimo da je $B \models_v \alpha$. Kako je $\vdash \alpha \iff \tau(\alpha) = 1$ to $\models \alpha \iff \tau(\alpha) = 1$, odakle $B \models_v \alpha \iff \tau(\alpha) = 1$, pa zbog pretpostavke $B \models_v \alpha$ sleduje $B \models_v \tau(\alpha) = 1$, a to je ekvivalentno sa $v(\tau(\alpha)) = 1$ u B (primetimo da je $\tau(\tau(\alpha)) = \tau(\alpha)$, jer ako je t term u $\mathcal{B}_6$, tada $\tau(t) = t$). Slično, ako se pretpostavi da je $v(\tau(\alpha)) = 1$ u B dobija se da $B \models_v \alpha$. Prema tome $v(\tau(\alpha)) = 1$ akko $B \models_v \alpha$. Otuda zbog (1) $B \models_v \alpha$.

($\leftarrow$) Neka je $B \models_v \alpha$. Tada (1) $v(\tau(\alpha)) = 1$ u B. Kako je $\Phi(a, \tau(\alpha)) = 1$ akko $a \leq v(\tau(\alpha))$ (prema L.3.), to zbog (1): $(\forall a \in A)\ a \leq v(\tau(\alpha))$, tj. $(\forall a \in A)\ \Phi(a, \tau(\alpha)) = 1$, odakle sleduje da je (A, Φ) K-model za α.

T.1. α je K-valjana akko $\vdash_{\mathcal{B}_6} \alpha$.

Dokaz ($\rightarrow$) Neka je $\vdash_{\mathcal{B}_6} \alpha$. Neka je A proizvoljan skup, B kompletna atomska algebra, tako da $A = \mathcal{A}(B)$ i neka je Φ K-preslikavanje. Tada za induciranu valuaciju v biće $B \models_v \alpha$ (prema L.4.). Otuda formula α je K-valjana.

($\leftarrow$) Pretpostavimo da $\sim \vdash_{\mathcal{B}_6} \alpha$. Tada prema 3.T.8. postoji konačna Bool-ova algebra B i valuacija v da $B \sim\models_v \alpha$. Međutim, pošto je B konačna Bool-ova algebra, to $B \simeq \mathcal{B}A$, gde $A = \mathcal{A}(B)$. Tada za inducirano K- preslikavanje Φ, prema L.4. (A, Φ) nije K-model za α, tj. α nije K-valjana formula.

Primetimo da se prema prethodnom možemo ograničiti uzimajući da je A konačan skup, tj. α je K-valjana ako je za svaki konačan skup A, (A, Φ) model za α.

Navedimo i ovu činjenicu koja sleduje iz 3.0.4.

T.2. Svaki univerzalni iskaz u teoriji skupova koji sadrži samo skupovne operacije $(\cap, \cup, -, \triangle$ itd.) i inkluziju $(\subseteq)$ je odlučiv.

Preko K-modela (A, Φ) moguće je neposredno utvrditi da li je α formula teorema. Ako α nije teorema, moguće je neposredno odrediti bar jedan model (A, Φ) u kojem je α oboriva, a time i Bool-ovu algebru B i valuaciju v u kojoj $B \sim\vdash_v \alpha$, drugim rečima, Bool-ovu algebru u kojoj α nije ispunjena. U tom cilju, da ne bi suvišno prevodili formulu α na oblik $\tau(\alpha) = 1$, moguće je produžiti Φ na sve formule teorije $\mathcal{B}\mathcal{C}$, tako da je za formule α, β:

$$\Phi(a, \neg\alpha) = \Phi(a, \alpha)'$$

$$\Phi(a, \alpha \vee \beta) = \Phi(a, \alpha) \vee \Phi(a, \beta),$$

i slično za ostale logičke simbole.

Jasno je da (A, Φ) je model za α akko $(\forall a \in A)\, \Phi(a, \alpha) = 1$. Tada ispitivanje valjanosti (odnosno da li je teorema) formule α, sastoji se u sledećem.

Pretpostavimo da α nije valjana. Tada postoji (A, Φ) i $a \in A$, da je $\Phi(a, \alpha) = 0$. uvodimo konstantu a_1 da $\Phi(a_1, \alpha) = 0$ Koristeći svojstva preslikavanja Φ i svojstva logičkih i Bool-ovih operacija imamo sledeće mogućnosti:

1^0 $\alpha \doteq \alpha_1 \vee \alpha_2$. Otuda $\Phi(a_1, \alpha_1 \vee \alpha_2) = 0$, odakle $\Phi(a_1, \alpha_1) = 0$, $\Phi(a_1, \alpha_2) = 0$.

2^0 $\alpha \doteq \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2$. Otuda $\Phi(a_1, \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2) = 0$, odakle $\Phi(a_1, \alpha_1) = 1$, $\Phi(a_1, \alpha_2) = 0$.

3^0 $\alpha \doteq \neg\alpha_1$. Otuda $\Phi(a_1, \neg\alpha_1) = 0$, odakle $\Phi(a_1, \alpha_1) = 1$.

---

1) Ovde simbol $\vee$ je znak Bool-ove operacije.

4° $\alpha \doteq \alpha_1 \wedge \alpha_2$. Otuda $\Phi(a_1, \alpha_1 \wedge \alpha_2) = 0$, odakle $\Phi(a_1, \alpha_1) = 0$ i $\Phi(a_1, \alpha_2) = 0$, ili, $\Phi(a_1, \alpha_1) = 0$ i $\Phi(a_1, \alpha_2) = 1$, ili, $\Phi(a_1, \alpha_1) = 1$ i $\Phi(a_1, \alpha_2) = 0$. Svaka mogućnost kasnije se zasebno razmatra.

5° $\alpha \doteq u_1 \leq u_2$; gde su u_1, u_2 $\mathcal{B}6$ termi. Otuda $\Phi(a_1, u_1 \leq u_2) = 0$. To znači da je za neko $a \in A$ ispunjeno $\Phi(a, u_1 \Rightarrow u_2) = 0$. Uvodimo kostantu a_2 $(\neq a_1)$ za koju je $\Phi(a_2, u_1 \Rightarrow u_2) = 0$, tj. $\Phi(a_2, u_1) = 1$, $\Phi(a_2, u_2) = 0$.

6° $\alpha \doteq u_1 = u_2$, gde su u_1, u_2 $\mathcal{B}6$ termi. Otuda $\Phi(a_1, u_1 = u_2) = 0$ odakle za neki $a \in A$, $\Phi(a, u_1 \Leftrightarrow u_2) = 0$. Uvodimo konstantu a_2 $(\neq a_1)$ da $\Phi(a_2, u_1 \Leftrightarrow u_2) = 0$. Tada $\Phi(a_2, u_1) = 0$ i $\Phi(a_2, u_2) = 1$, ili, $\Phi(a_2, u_1) = 1$ i $\Phi(a_2, u_2) = 0$.

Svaku od ovih mogućnosti posebno razmatramo.

Tačkama 1°-6° iscrpljene su sve mogućnosti za polaznu formulu. Dalje ponavljamo proseduru opisanu sa 1° - 6°, tj. određujemo vrednosti od $\Phi(a_1, u)$, gde je u neki neki podterm (podformula) ~~termaz~~ (formule) v, za koji smo inače odredili u prethodnom koraku vrednost (vrednosti) za $\Phi(a_1, v)$, i eventualno uvodimo novu konstantu $a_j \notin \{a_1, \ldots, a_{j-1}\}$, i određujemo vrednost za $\Phi(a_j, u)$.

Primetimo da se mogu pojaviti novi momenti u odnosu na opisane :

7° $\Phi(a_1, v) = 1$, gde je v $\mathcal{B}6$ term. Tada vrednost od $\Phi(a_1, u)$ gde je u neposredni podterm terma v zavisi od toga kako je v izgrađen, naprimer ako su u pitanju Bool-ove operacije biće kao pod 1°-6°.

8° Mogu se pojaviti mogućnosti $\Phi(a, u^*) = 1$, odnosno $\Phi(a, u^*) = 0$. Ako je $\Phi(a, u^*) = 0$, tada je $\Phi(c, u) = 0$ za sve prethodno uvedene konstante c.

Neka je $\Phi(a, u^*) = 1$. Tada postoji c da je $\Phi(c, u) = 0$. Onda uvodimo konstantu b, koja je različita od prethodno uvedenih, da je $\Phi(b, u) = 1$.

Kako je $u^\circ = u^{\cdot * \cdot}$, to se slučaj $\Phi(a, u^\circ) = 0$, odnosno $\Phi(a, u^\circ) = 1$ svodi na prethodno opisani.

Ovim su opisane sve mogućnosti u određivanju vrednosti preslikavanja $\Phi(a,u)$.

U toku opisanog postupka, može se doći do kontradikcije, tj. da je za neku uvedenu konstantu a_1, $\Phi(a_1,u) = 0$ i $\Phi(a_1,u) = 1$. U tom slučaju, zbog T.1., polazna formula α je teorema teorije $\mathcal{B}_6$. Ako se ne dođe do kontradikcije, onda je određen skup konstanti $A = \{a_1,\dots,a_n\}$ i vrednosti $\Phi(a_i,u)$ (ove ne moraju biti jednoznačno određene), gde je u podterm ili podformula formule α. Tada je (A,Φ) K-model teorije $\mathcal{B}_6$ u kojem formula α nije ispunjena. Konačna Bool-ova algebra B, za koju je $A = \mathcal{A}(B)$, je model teorije $\mathcal{B}_6$. Prema L.6. biće $B \sim\models_v \alpha$, gde je valuacija v definisana sa $v(t) = \bigvee\{a \mid \Phi(a,t) = 1\}$, gde je t podterm (podformula) formule α.

Prema prethodnom važi:

<u>T.3.</u> Neka je α formula teorije $\mathcal{B}_6$. Tada se može efektivno odrediti da li je α teorema. Ako α nije teorema, tada se efektivno određuje K-model (A,Φ), odnosno Bool-ova algebra B i valuacija v, da α nije ispunjena na modelu (A,Φ) i $B \sim\models_v \alpha$.

<u>Primer 1°</u> $\alpha \doteq x=y \vee x=z \vee y=z$. Rezultati ispitivanja formule dati su u tabeli. Znak $\otimes$ znači da na tom mestu može da stoji bilo koje od simbola 0,1. Mi ćemo po pravilu birati vrednost 0.

Φ	x	y	z
a_1	1	0	$\otimes$
a_2	1	$\otimes$	0
a_3	$\otimes$	1	0

0	x	=	y	$\vee$	x	=	z	$\vee$	y	=	z
a_0		0				0				0	
a_1	1		0								
a_2					1		0				
a_3									1		0

Vrednosti valuacije v: $v(x) = a_1 \vee a_2$, $v(y) = a_3$, $v(z) = 0$.

U Bool-ovoj algebri od 8 elementa, čiji je skup atoma $\{a_1,a_2,a_3\}$, formula α nije ispunjena u B, tj. nije $(a_1 \vee a_2 = a_3) \vee (a_1 \vee a_2 = 0) \vee (a_3 = 0)$ (Simbol "=" interpretira se kao dijagonalna relacija u B).

Primer 2° $\alpha \doteq (x \leq y \Rightarrow x \leq z) \Rightarrow y \leq z$.

	$(x \leq y \Rightarrow x \leq z) \Rightarrow y \leq z$
0	$(x \leq y \Rightarrow x \leq z) \Rightarrow y \leq z$
a_0	1 (2) 0 (1) 0 (3)
a_1	0(6) 1 (7) 0(8) 0(9) 1(4) 0(5)

Broj u zagradi govori u kojem koraku je određena vrednost.

Φ	x	y	z
a_0	0	0	0
a_1	0	1	0

$v(x) = 0, \quad v(y) = a_1, \quad v(z) = 0$.

Otuda za Bool-ovu algebru B, u kojoj α nije ispunjena, možemo uzeti dvo atomsku Bool-ovu algebru.

Primer 3° $\alpha \doteq x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2 \Rightarrow x_1 \vee x_2 \leq y_1 \vee y_2$.

	$x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2 \Rightarrow x_1 \vee x_2 \leq y_1 \vee y_2$
0	$x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2 \Rightarrow x_1 \vee x_2 \leq y_1 \vee y_2$
a_0	1(4) 1 (2) 1 (5) 0 (1) 0 (3)
a_1	0(11) 1 0 0(12) 1 0 0 1(10) 0 0(6) 0(8) 0(7) 0(9)
	0(13)

Kako je $\Phi(a_1, x_1 \vee x_2) = 1, \quad \Phi(a_1, x_1 \vee x_2) = 0$, imamo kontradikciju. Otuda α je teorema.

5. Red terma t, u oznaci r(t).

Def.1. 1° Ako je t promenljiva ili 0,1, tada $r(t) \doteq 0$.

2° Ako su u, v termi i $r(u) = m$, $r(v) = n$, tada:

$r(u \wedge v)$, $r(u \vee v)$, $r(u \Rightarrow v)$, $r(\neg u)$ je $\max(m,n)$

3° $r(u^{*}) = r(u) + 1$, $r(u^{\circ}) = r(u) + 1$.

Def.2. Ako je α $\mathcal{B}_6$ – formula, tada, $r(\alpha) = r(\tau(\alpha))$.

L.1. Važe sledeći identiteti u $\mathcal{B}_6$.

1° $(x \vee y^{\circ})^{\circ} = x^{\circ} \vee y^{\circ}$

2° $(x \vee y^{*})^{\circ} = x^{\circ} \vee y^{*}$

3° $(x \wedge y^{\circ})^{*} = x^{*} \wedge y^{\circ}$

4° $(x \wedge y^{*})^{*} = x^{*} \wedge y^{*}$

5 $(x \wedge y)^{\circ} = x^{\circ} \wedge y^{\circ}$

6° $(x \vee y)^{*} = x^{*} \vee y^{*}$

7° $x^{*\cdot} = x^{\cdot\circ}$

8° $x^{\circ\cdot} = x^{\cdot *}$

9 $x^{*\circ} = x^{*}$

10 $x^{\circ *} = x^{\circ}$

Dokažimo naprimer 3°. Neka je $y \neq 1$. Tada $(x \wedge y^{\circ})^{*} = (x \wedge 0)^{*} = 0^{*} = 0 = (x^{*} \wedge 0) = x^{*} \wedge y^{\circ}$. Ako je $y = 1$, tada $(x \wedge y^{\circ})^{*} = (x \wedge 1)^{*} = x^{*} = (x^{*} \wedge 1) = x \wedge y^{\circ}$.

Slično se dokazuju ostala tvrđenja,

T.1. Neka je t term teorije $\mathcal{B}_6$. Tada:

(i) Postoji $\mathcal{B}_6$ term u da je $r(u) = 1$ i $\vdash_{\mathcal{B}_6} t = u$.

(ii) Postoje termi $u_1, u_2, \ldots, u_n$ da je $t = u_1 \vee u_2 \ldots \vee u_n$ i da za svaki $u \in \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ postoje termi teorije $\mathcal{B}_4$, $v_0, v_1, \ldots, \ldots, v_n, v$ da $\vdash_{\mathcal{B}_6} u = v_0 \wedge v_1^{*} \wedge \ldots \wedge v_n^{*} \wedge v^{\circ}$.

Dokaz (i) Neka je $K(t)$ skup podterma terma t sa uređenjem: za $t_1, t_2 \in K(t)$ $t_1 \preccurlyeq t_2$ akko t_1 je podterm terma t_2. Kako je $K(t)$ konačan skup, to svaki neprazni podskup skupa $K(t)$ ima maksimalni i minimalni element. Neka je $K^{*}(t) \subseteq K(t)$ definisan sa: $u \in K^{*}(t)$ akko postoji $v \in K(t)$, da je $u = v^{*}$ ili $u = v^{\circ}$. Terme iz skupa $K^{*}(t)$ nazovimo modalnim. Neka je $S = \{t_1, \ldots, t_n\}$ skup maksimalnih elemenata iz $K^{*}(t)$ i maksimalnih $\mathcal{B}_1$ podterma terma t. Otuda je $t \doteq F(t_1, \ldots, t_n)$, gde je $F(x_1, \ldots, x_n)$ $\mathcal{B}_1$ term, tj. ne sadrži operatore $*$, $\circ$.

Primer $t \doteq (x_1 \Rightarrow (x_2^{\circ} \equiv x_3^{*})) \wedge ((x_2 \leq x_3) \vee x_4^{*}) \wedge x_5$.

Tada: $t \doteq (x_1 \Rightarrow (x_2^{\circ} \Leftrightarrow x_3)^{\circ}) \wedge ((x_2 \Rightarrow x_3)^{\circ} \vee x_4^{*}) \wedge x_5$.

$K^{*}(t) = \{x_1, x_2^{\circ}, x_3, x_4, (x_2^{\circ} \Leftrightarrow x_3)^{\circ}, (x_2 \Rightarrow x_3)^{\circ}\}$

$S = \{x_1, (x_2^{\circ} \Leftrightarrow x_3)^{\circ}, (x_2 \Rightarrow x_3)^{\circ}, x_4, x_5\}$

$F(x_1, x_2, x_3, x_4) \doteq (x_1 \Rightarrow x_2) \wedge (x_3 \vee x_4) \wedge x_5$

Dokaz ćemo sprovesti potpunom indukcijom po broju operacija koje učestvuju u t. Neka je n broj operacija u t i neka tvrđenje važi za $k < n$. Tada postoje sledeće mogućnosti:

1° Ako u t učestvuje jedan ili nijedan operacijski simbol, tada tvrđenje očigledno važi.

2° $t = t_1'$. Broj operacija u t_1 je $n-1$, te po pretpostavci postoji term u da je $r(u) \leq 1$ i $t_1 = u$, Otuda je $t = u'$, te $r(t) = r(u') = r(u) \leq 1$, te tvrđenje važi.

3° $t \doteq t_1 \vee t_2$. Broj operacija u t_1, t_2 je manji od n, te po induktivnoj hipotezi postoje termi u_1, u_2 da je $t_1 = u_1$, $t_2 = u_2$ i $r(u_1), r(u_2) \leq 1$. Tada je $r(t) = r(u_1 \vee u_2)$ $\max(r(u_1), r(u_2)) \leq 1$, te tvrđenje sledi.

4° $t = t_1^*$. Broj operacijskih simbola u t_1 je n-1, te po induktivnoj hipotezi, postoji term u da $t_1 = u$ i $r(u) \leq 1$. Ako $r(u) = 0$, tada $r(u\ ) = 1$, te tvrđenje sledi.

Neka je $r(u) = 1$. Prema prethodnom, $u = F(t_1, \ldots, t_k)$, gde je $F(x_1, \ldots, x_k)$ $\mathcal{B}_1$ term, a $t_1, \ldots, t_k$ su $\mathcal{B}_6$ termi od kojih je bar jedan modalan. Neka je F predstavljen u obliku disjunktivne normalne forme:

$F(x_1, \ldots, x_k) = (x_1^{\alpha_1^1} \wedge \ldots \wedge x_k^{\alpha_k^1}) \vee \ldots \vee (x_1^{\alpha_1^\nu} \wedge \ldots \wedge x_k^{\alpha_k^\nu})$. Tada

$u = (t_1^{\alpha_1^1} \wedge \ldots \wedge t_k^{\alpha_k^1}) \vee \ldots \vee (t_1^{\alpha_1^\nu} \wedge \ldots \wedge t_k^{\alpha_k^\nu})$. Otuda prema L.1.$6^\circ$

$u^* = (t_1^{\alpha_1^1} \wedge \ldots \wedge t_k^{\alpha_k^1})^* \vee \ldots \vee (t_1^{\alpha_1^\nu} \wedge \ldots \wedge t_k^{\alpha_k^\nu})^* = u_1 \vee \ldots \vee u_k$.

Neka je $v \in \{u_1, \ldots, u_k\}$. Razlikujemo sledeće slučajeve:

(1) U termu v ne učestvuje nijedan modalan operator. U tom slučaju $r(v) = 1$.

(2) Pretpostavimo da u v učestvuje bar jedan operator $*$, o. Prema L.1, $5^\circ, 7^\circ, 8^\circ$, za neke $\mathcal{B}_1$ terme $v_0, v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}$ biće

(a) $v = v_0 \wedge v_1^* \wedge \ldots \wedge v_r^* \wedge v_{r+1}^o$ ili (b) $v = v_0 \wedge v_1^* \wedge \ldots \wedge v_r^*$ ili (c) $v = v_0 \wedge v_{r+1}^o$ ili (d) $v = v_1^* \wedge v_2^* \wedge \ldots \wedge v_r^*$.

Koristeći L.1, $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 9^\circ, 10^\circ$ dobijamo, naprimer za (a),

$v^* = (v_0 \wedge v_1^* \wedge \ldots \wedge v_r \wedge v_{r+1}^o)^* = v_0^* \wedge v_1^* \wedge \ldots \wedge v_r^* \wedge v_{r+1}^o$.

Slično je za ostale slučajeve.

Otuda $r(u_i) \leq 1$, te $r(u_1 \vee \ldots \vee u_k) = \max(r(u_1), \ldots, r(u_k)) \leq 1$, tj. $r(t) \leq 1$.

Iz 1°-4° tvrđenje sledi.

(ii) Neposredno sleduje prema (i). Primetimo da zbog L.1, $5^\circ, 6^\circ$ možemo uzeti da je v_i^* oblika $(x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_k^{\alpha_k})^*$, a da je v_i° oblika $(x_1^{\alpha_1} \vee \dots \vee x_k^{\alpha_k})^\circ$, gde su $x_1,\dots,x_k$ promenljive. U tom slučaju $u_1 \vee \dots \vee u_k$ zovemo modalnom disjunktivnom formom (MDF), terma t (analogno prema /3/). Ako je α formula teorije $\mathcal{B}_6$, tada MDF terma zovemo MDF formule α.

Primer α : $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$. Tada je MDF formule α ;
$\tau(\alpha) = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)^* \vee ((x \vee y')^\circ \wedge (x' \vee y)^\circ)$.

Za n promenljivih $x_1,\dots,x_n$ broj različitih izraza oblika

$$(x_{i_1}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_{i_p}^{\alpha_p}) \wedge (x_{j_{11}}^{\beta_1} \wedge \dots \wedge x_{j_{1p}}^{\beta_{1p_1}})^* \wedge \dots \wedge (x_{j_{k1}}^{\beta_{k1}} \wedge \dots \wedge x_{j_{kp_k}}^{\beta_{kp_k}})^* \wedge$$

$\wedge (x_{s_1}^{\gamma_1} \vee \dots \vee x_{s_r}^{\gamma_r})^\circ$, gde su promenljive $x_{i_\nu}, x_{j_{\lambda\mu}}$ neke od promenljivih $x_1,\dots,x_n$, očigledno je konačan. Otuda ne postoji beskonačan niz terma $t_1,\dots,t_n,\dots$ u kojima su jedine promenljive $x_1,\dots,x_k$ da je za $i \neq j$ ispunjeno $\vdash_{\mathcal{B}_6} t_i \neq t_j$. Koristeći 3.C.7. dobija se:

T.2. Broj ne ekvivalentnih $\mathcal{B}_6$ formula u kojima su jedine promenljive neke od promenljivih $x_1,\dots,x_n$ je konačan.

Dokaz Pretposavimo da postoje formule $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ tako da su svake dve ne ekvivalentne međusobom. Tada za odgovarajuće terme $\tau(\alpha_1), \tau(\alpha_2), \dots$ važi: ako je $i \neq j$ onda $\vdash_{\mathcal{B}_6} \tau(\alpha_i) \neq \tau(\alpha_j)$ što je kontradikcija.

6. Teorija $\mathcal{B}$ Bool-ovih algebri u predikatskom računu.

T.1. Ako je $f(x)$ $\mathcal{B}_1$ term, tada je u teoriji $\mathcal{B}$:

1° $(\exists x)(f(x) = 0) \Leftrightarrow f(0) \wedge f(1) = 0$.

2° $(\forall x)(f(x) = 0) \Leftrightarrow f(0) \vee f(1) = 0$.

Dokaz 1° Neka je $(\exists x)\, f(x) = 0$. Kako je $f(x) = (f(1) \wedge x) \vee (f(0) \wedge x')$ to $(\exists x)(f(1) \wedge x) \vee (f(0) \wedge x') = 0$. Uvođenjem konstante a dobija se $(f(1) \wedge a) \vee (f(0) \wedge a') = 0$, odakle $f(1) \wedge a = 0$, $f(0) \wedge a' = 0$, te $a \leq f(1)'$, $f(0) \leq a$. Otuda $f(0) \leq f(1)'$, tj. $f(0) \wedge f(1) = 0$.

Neka je $f(0) \wedge f(1) = 0$, Tada $(f(1) \wedge f(0)) \vee (f(0) \wedge f(0)') = 0$

odakle, $f(f(0)) = 0$. Otuda $(\exists x)\ f(x) = 0$.

2° Neka je $(\forall x)\ f(x) = 0$. Tada $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, odakle $f(0) \vee f(1) = 0$.

Neka je $f(0) \vee f(1) = 0$. Tada $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, odakle, pošto je $f(x) = (f(1) \wedge x) \vee (f(0) \wedge x')$, $f(x) = (0 \wedge x) \vee (0 \wedge x') = 0$, tj. $f(x) = 0$. Otuda $(\forall x)\ f(x) = 0$.

T.2. Neka su t_1, t_2 $\mathcal{B}_1$ termi. Tada za formulu $F \doteq (k_1x_1)(k_2x_2)\dots(k_nx_n)\ t_1 = t_2$, gde su k_i univerzalni odnosno egzistencijalni kvantifikatori, postoji efektivan postupak, kojim se utvrđuje da li je $\vdash_{\mathcal{B}_1} F$.

Dokaz Kako je $t_1 = t_2 \Leftrightarrow t_1 \triangle t_2 = 0$, to se možemo ograničiti na formule oblika $F \doteq (k_1x_1)\dots(k_nx_n)\ f(x_1,\dots,x_n) = 0$.

Neka je

$$f_{k_i}(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) = \begin{cases} f(x_i|0) \wedge f(x_i|1) & \text{ako je } k_i \text{ egzistencijalni kvantifikator,} \\ f(x_i|0) \vee f(x_i|1) & \text{ako je } k_i \text{ univerzalni kvantifikator.} \end{cases}$$

Tada prema T.1. $F \Leftrightarrow f_{k_nk_{n-1}\dots k_1}$. Kako formula $f_{k_nk_{n-1}\dots k_1} = 0$ ne sadrži kvantifikatore, ona je odlučiva, te je odlučiva i formula F.

Primer 1° $\vdash_{\mathcal{B}} (\forall u)(\exists a)(\exists b)(\forall x)\ u = b \triangle (a \wedge x)$.

Neka je $F \doteq u \triangle b \triangle a \wedge x$. Tada $(\forall x)F \Leftrightarrow (u \triangle b \triangle (a \wedge 0)) \vee (u \triangle b \triangle (a \wedge 1)) = 0$, tj. $(\forall x)F \Leftrightarrow (u \triangle b) \vee (u \triangle b \triangle a) = 0$.

Dalje,

$$(\exists b)(\forall x)F \Leftrightarrow ((u \triangle 0) \vee (u \triangle 0 \triangle a)) \wedge ((u \triangle 1) \vee (u \triangle 1 \triangle a)) = 0$$
$$\Leftrightarrow (u \vee (u \triangle a)) \wedge (u' \vee (u' \triangle a)) = 0$$
$$\Leftrightarrow (u \vee a) \wedge (u' \vee a) = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Dalje,

$(\exists a)(\exists b)(\forall x)F \Leftrightarrow (\exists a)\ a = 0 \Leftrightarrow 0 \wedge 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, tj.

$\vdash_{\mathcal{B}} (\exists a)(\exists b)(\forall x)F$, odakle $\vdash_{\mathcal{B}} (\forall u)(\exists a)(\exists b)(\forall x)F$.

Primer 2° Neka je $\mathcal{T}$ $\mathcal{B}_1$ - term. Tada $\vdash_{\mathcal{B}} (\exists x)\ \mathcal{T}(x) = x \Leftrightarrow \mathcal{T}(0) \le \mathcal{T}(1)$

Dokaz Neka je $F \doteq (\exists x)\ \mathcal{C}(x) = x$. Tada

$F \Leftrightarrow (\exists x)\ \mathcal{C}(x) \vartriangle x = 0$, $F \Leftrightarrow (\mathcal{C}(0) \vartriangle 0) \wedge (\mathcal{C}(1) \vartriangle 1) = 0$,

$F \Leftrightarrow \mathcal{C}(0) \wedge \mathcal{C}(1)' = 0$, $F \Leftrightarrow \mathcal{C}(0) \leq \mathcal{C}(1)$.

Def.1. $\mathcal{A}(a) \doteq a \neq 0 \wedge (\forall x)(x < a \Rightarrow x = 0)$.

Ako aksiomama Bool-ove algebre dodamo aksiomu

(A) $(\forall x)(\exists a)(\mathcal{A}(a) \wedge a \leq x)$

tada dobijamo teoriju atomskih Bool-ovih algebri. Kako postoji bezatomska Bool-ova algebra (naprimer slobodna Boål-ova algebra nad beskonačnim skupom I), zaključujemo da je (A) nezavisna od ostalih aksioma. Primetimo da je (A) ispunjena na svim konačnim Bool-ovim algebrama. Odavde sleduje da se ne mogu iz svake formule teorije Bool-ovih algebri eliminisati kvantifikatori. Zaista, neka je F upravo formula (A). Ako bi postojala $\mathcal{B}_1$ formula F_0 da je $\vdash_{\mathcal{B}} F \Leftrightarrow F_0$, tada pošto je $B \models F$ u svakoj konačnoj Bool-ovoj algebri B, tada bi i $B \models F_0$ u svakoj konačnoj Bool-ovoj algebri B, a otuda prema 3.C.4 $\vdash_{\mathcal{B}_1} F_0$, odakle $\vdash_{\mathcal{B}} F_0$, te i $\vdash_{\mathcal{B}} F$, što je kontradikcija.

Ako aksiomama Bool-ove algebre dodamo formulu

(A′) $(\forall x)(\exists y)(x \neq 0 \Rightarrow (y \neq 0 \wedge y < x))$

dobijamo teoriju bez-atomskih Bool-ovih algebri. Kako postoji Bool-ova algebra sa atomima (naprimer svaka konačna Bool-ova algebra) zaključujemo da je (A′) nezavisna od ostalih aksioma.

Def.2. Neka je α formula teorije $\mathcal{B}$, t(x) term. Tada

$a = \bigwedge_{\alpha(x)} t(x)$ je zamena za

(S) $(\forall x)((\alpha(x) \Rightarrow a \leq t(x)) \wedge (\forall y)((\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow y \leq t(x)) \Rightarrow y \leq a)$.

Definicija je korektna jer $S(a_1) \wedge S(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.

Ako aksiomama Bool-ove algebre priključimo shema aksiomu

(K) $(\exists a)\ a = \bigwedge_{\alpha(x)} t(x)$

dobija se teorija kompletnih Bool-ovih algebri. Ova aksioma nije posledica ostalih (jer naprimer slobodna Bool-ova algebra nad beskonačnim skupom I nije kompletna).

Možemo postaviti pitanje koje formule je dovoljno priključiti aksiomama Bool-ove algebre, da bi dobili kompletnu teoriju. Prema II.3.T.16 svake dve prebrojive bez-atomske Bool-ove algebre su izomorfne, tj. teorija bez-atomskih Bool-ovih algebri je $\aleph_0$ kategorična. Otuda prema I.2.T.5. teorija bez-atomskih Bool-ovih algebri je kompletna (tj. ne može se proširiti do neke šire teorije). Tada prema (v. /17/, str.14)

T.3. Za kompletnu teoriju $\mathcal{T}$ sledeća tri uslova su ekvivalentna
1° $\mathcal{T}$ je neodlučiva, 2° $\mathcal{T}$ je esencijalno neodlučiva
3° $\mathcal{T}$ nije aksiomatizabilna.

izlazi da je teorija bez-atomskih Bool-ovih algebri odlučiva, jer očigledno ima konačno mnogo aksioma a time je i aksiomatizabilna.

Ako aksiomama teorije atomskih, kompletnih Bool-ovih algebri dodamo shema aksiomu

$$(\exists x_1)\dots(\exists x_n)(x_1\neq x_2 \wedge x_1\neq x_3 \wedge \dots \wedge x_1\neq x_n \wedge x_2\neq x_3 \wedge \dots \wedge x_{n-1}\neq x_n)$$

dobija se teorija beskonačnih atomskih, kompletnih Bool-ovih algebri. Prema II.3.T.9. ova teorija je $2^{\aleph_0}$ kategorična, te prema I.2.T.5. ona je kompletna teorija.

Napominjemo da je Tarski[1] dokazao neodlučivost teorije mreža, modularnih mreža, komplementarnih modularnih mreža, dok je Grzegorczyk[2] dobio analogne rezultate za teoriju distributivnih mreža i Brouwerove algebre. (Prema tome teorija Bool-ovih algebri u predikatskom računu je neodlučiva.) Međutim sa obzirom da ima konačno odlučivo proširenje (teorija bez-atomskih Bool-ovih algebri) vidimo da nije esencijalno neodlučiva.

---

1) Alfred Tarski, Undecidability of the theories of lattices and projective geometries, Journal of Symbolic Logic, 14(1949), str.77-78.

2) Andrzej Grzegorczyk, Undecidablity of some topological theories, Fundamenta Mathematicae, 38(1951), str.137-152.

7. Bool-ove jednačine.

Neka su u, v $\mathcal{B}_1$ termi, (u ovoj tački po pravilu svi termi su $\mathcal{B}_1$ termi). Kako je $u = v \Leftrightarrow u \triangle v = 0$, dovoljno je posmatrati jednačine oblika $t = 0$. Dalje kako je

$$t_1 = 0 \wedge \ldots \wedge t_n = 0 \Leftrightarrow t_1 \vee \ldots \vee t_n = 0,$$

svaki sistem jednačina ekvivalentan je jednoj jednačini. Najzad, pošto je $t_1 \leq t_2 \Leftrightarrow t_1 = t_1 \wedge t_2$, nejednačine su specijalan slučaj jednačina.

Def.1. $\hat{f}(x) \doteq x \triangle f(1) \wedge x \triangle f(0) \wedge x'$. $\hat{f}(x) = x \triangle f(x)$

T.1. U $\mathcal{B}$ je

1° $\hat{\hat{f}}(x) = f(x)$

2° $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \hat{f}(x)$

3° $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x = \hat{f}(x)) \wedge (f(0) \wedge f(1) = 0)$

4° $(\exists x)\ f(x) = 0 \Leftrightarrow f(0) \wedge f(1) = 0 \Leftrightarrow \hat{f}(\hat{f}(x)) = \hat{f}(x)$

5° $(\exists x)\ f(x) = 0 \Rightarrow (f(x) = 0 \Leftrightarrow (\exists\alpha)(x = \hat{f}(\alpha)))$, tj. ako jednačina (J) $f(x) = 0$ ima bar jedno rešenje, tada je $\hat{f}(\alpha)$ obšte rešenje jednačine (J).

Dokaz 1° $\hat{\hat{f}}(x) = x \triangle \hat{f}(1) \wedge x \triangle \hat{f}(0) \wedge x' = x \triangle f(1)' \wedge x \triangle f(0) \wedge x' = x \wedge f(1) \triangle f(0) \wedge x' = f(x)$, jer $\hat{f}(1) = f(1)'$, $\hat{f}(0) = f(0)$.

2° Kako je $f(x) = f(1) \wedge x \triangle f(0) \wedge x'$, to je tvrđenje očigledno.

3° $(\Leftarrow)$ Važi prema 2°

$(\Rightarrow)$ Neka je $f(x) = 0$. Prema 2° $x = \hat{f}(x)$. Dalje $(\exists x)\ f(x) = 0$ te prema 6.T.1.1° $f(0) \wedge f(1) = 0$.

4° Prva ekvivalencija je prema 6.T.1.1°. Dalje:

$$\hat{f}(\hat{f}(x)) = (x \triangle f(1) \wedge x \triangle f(0) \wedge x') \triangle f(1) \wedge (x \triangle f(1) \wedge x \triangle f(0) \wedge x') \triangle$$
$$\triangle f(0) \wedge (x \triangle f(1) \wedge x \triangle f(0) \wedge x') =$$
$$= x \triangle f(1) \wedge x \triangle f(0) \wedge x' \triangle f(1) \wedge x \triangle f(1) \wedge x \triangle f(0) \wedge f(1) \wedge x' \triangle$$
$$\triangle f(0) \wedge x' \triangle f(0) \wedge f(1) \wedge x \triangle f(0) \wedge x' =$$
$$= x \triangle f(1) \wedge x \triangle f(0) \wedge x' \triangle f(0) \wedge f(1),$$ tj.

$\hat{f}(\hat{f}(x)) = x \triangle f(1) \wedge x \triangle f(0) \wedge x' \triangle f(0) \wedge f(1)$. Otuda neposredno slede ostale ekvivalencije.

Otuda izlazi da je jednačina $x = \hat{f}(x)$ reproduktivna [1] čim ima (ili jednačina $f(x) = 0$) bar jedno rešenje.

5° Iz formule možemo eliminisati kvantifikatore:

(1) $f(0) \wedge f(1) \Rightarrow (f(1) \wedge x \,\Delta\, f(0) \wedge x' = 0 \Leftrightarrow (x \,\Delta\, \hat{f}(0)) \wedge (x \,\Delta\, \hat{f}(1)) = 0)$

te se preko K-modela utvrđuje da je (1) teorema. Međutim sleduje i neposredno prema prethodnim tačkama, jer ako je $(\exists x)\ f(x) = 0$, tada zbog 4°, $\hat{f}(x) = x$ je reproduktivna jednačina a sa druge strane ona je ekvivalentna sa $f(x) = 0$ (prema 2°).

Prema tome ako jednačina $f(x) = 0$ ima bar jedno rešenje (što se efektivno utvrđuje zbog 4°), tada je njeno obšte rešenje $\hat{f}(\alpha)$ [2], koje se, kao što vidimo, efektivno konstruiše.

T.2. $(\exists x)\ \varphi(x) = x \Rightarrow \varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$,

tj. ako jednačina $\varphi(x) = x$ ima bar jedno rešenje, ona je reproduktivna.

Dokaz Neka je $(\exists x)\ \varphi(x) = x$. Kako je $\varphi(x) = x \Leftrightarrow \varphi(x) \,\Delta\, x = 0$, to za $f(x) = \varphi(x) \,\Delta\, x$, biće

$$\hat{f}(x) = (\varphi(1) \,\Delta\, 1) \wedge x \,\Delta\, (\varphi(0) \,\Delta\, 0) \wedge x' \,\Delta\, x =$$

$$= \varphi(1) \wedge x \,\Delta\, \varphi(0) \wedge x' = \varphi(x) \text{ , tj.}$$

(1) $\hat{f}(x) = \varphi(x)$.

Pošto je $(\exists x)\ \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow (\exists x)\ f(x) = 0$, biće prema pretpostavci $(\exists x)\ f(x) = 0$. Prema T.1.4° onda je $\hat{f}(\hat{f}(x)) = \hat{f}(x)$, odakle, prema (1), $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$.

Löwenheim je bio prvi.

1) Pojam reproduktivne jednačine u Bool-ovoj algebri, potiče od S.Rudeanu-a: Boolean Equations and their Applications to the Study of Bridge Circuts, I, Bull. Math. Soc. Math. Phys. R.P.R., 3, 447-473, 1959.

S. Prešić je u: Une Classe d'Equations Matricielles et l'Equation fonctionnelle $f^2 = f$, Publ. Inst. Math, T. 8(22), 1968 dao opšti pojam reproduktivne jednačine. Takođe u /10/ implicitno se koriste svojstva reproduktivne jednačine.

2) Obšte rešenje u smislu da je 1° $f(\hat{f}(\alpha)) = 0$, 2° $f(x) = 0 \Leftrightarrow (\exists \alpha)\ x = \hat{f}(\alpha)$.

T.3. Neka je f $\mathcal{B}_1$ term. Tada

1° $(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\ f(x_1,\ldots,x_n) = 0 \Leftrightarrow \bigwedge_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\{0,1\}^n} f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = 0$

2° Ako jednačina $f(x_1,\ldots,x_n) = 0$ ima bar jedno rešenje, tada se može efektivno odrediti njeno obšte rešenje.

Dokaz 1° Neposredno sleduje prema 6.T.1.1°.

2° Dokaz se sprovodi indukcijom po broju nepoznatih. Pretpostavimo da

(1) $(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)(\exists x)\ f(x_1,\ldots,x_n,x) = 0.$ Prema T1.3° dobija se

(2) $f(x_1,\ldots,x_n,x) = 0 \Leftrightarrow (x = \hat{f}_x(x_1,\ldots,x_n,x))\wedge$
$\wedge(f(x_1,\ldots,x_n,0)\wedge f(x_1,\ldots,x_n,1) = 0).$

Prema (1) i 6.T.1.1° je

$(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\ f(x_1,\ldots,x_n,0)\wedge f(x_1,\ldots,x_n,1) = 0.$

Prema induktivnoj hipotezi, jednačina $f(x_1,\ldots,x_n,0)\wedge f(x_1,\ldots,x_n,1)=0$ ima obšte rešenje $x_1 = \tau_1,\ldots, x_n = \tau_n$, gde su $\tau_1,\ldots,\tau_n$ termi.

Prema (2) dobija se:

$f(x_1,\ldots,x_n,x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \hat{f}_x(x_1,\ldots,x_n,x)\wedge(\exists\alpha_1)\ldots(\exists\alpha_n)(x_1 = \tau_1\wedge\ldots\wedge x_n = \tau_n)$

$\Leftrightarrow (\exists\alpha_1)\ldots(\exists\alpha_n)(x = \hat{f}_x(x_1,\ldots,x_n,x)\wedge x_1 = \tau_1\wedge\ldots\wedge x_n = \tau_n)$

$\Leftrightarrow (\exists\alpha_1)\ldots(\exists\alpha_n)((\exists\alpha)(x = \hat{f}_x(\tau_1,\ldots,\tau_n,\alpha))\wedge x_1 = \tau_1\wedge\ldots\wedge x_n = \tau_n)$

$\Leftrightarrow (\exists\alpha_1)\ldots(\exists\alpha_n)(\exists\alpha)(x = \hat{f}_x(\tau_1,\ldots,\tau_n,\alpha)\wedge x_1 = \tau_1\wedge\ldots\wedge x_n = \tau_n)$

Prema tome $\tau_1,\ldots,\tau_n,\ \hat{f}_x(\tau_1,\ldots,\tau_n,\alpha)$ je obšte rešenje jednačine $f(x_1,\ldots,x_n,x) = 0$, te tvrđenje sledi.

Primetimo, da prema dokazu, možemo efektivno odrediti obšte rešenje jednačine od n+1 nepoznatih, ako možemo da odredimo efektivno bilo koje $\mathcal{B}_1$ jednačine od n nepoznatih. Međutim, kako se efektivno određuje obšte rešenje $\mathcal{B}_1$ jednačine sa jednom nepoznatom, to je svaka $\mathcal{B}_1$ jednačina $f(x_1,\ldots,x_n) = 0$ efektivno rešiva[1].

---

1) U smislu da 1° da li jednačina ima bar jedno rešenje, i, 2° ako ga ima naći jedno opšte rešenje.

$\hat{f}_x(x,y) = x \triangle f(x,y)$

<u>Primer</u> (J) $f(x,y) = 0$

1° (J) ima rešenje akko $f(0,0) \wedge f(0,1) \wedge f(1,0) \wedge f(1,1) = 0$.

2° Kako je $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x = \hat{f}_x(x,y)) \wedge (f(0,y) \wedge f(1,y) = 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = \hat{f}_x(x,y)) \wedge (y = \widehat{f(0,y) \wedge f(1,y)})$, to je

$y = \beta \triangle f(0,1) \wedge f(1,1) \wedge \beta \triangle f(0,0) \wedge f(1,0) \wedge \beta' \doteq \mathcal{C}(\beta)$

$x = \alpha \triangle f(1, \mathcal{C}(\beta)) \wedge \alpha \triangle f(0, \mathcal{C}(\beta)) \wedge \alpha'$

obšte rešenje jednačine (J), ukoliko ima bar jedno rešenje, tj. ako je ispunjen uslov 1°.

Primetimo, da ako proširimo jezik teorije $\mathcal{B}$ skupom konstanti W i aksomama oblika (1) $w_i' = w_k$, $w_i \wedge w_j = w_k$ ili nekim shema aksiomama čije su posledice formule (1), onda svi iskazi u 7., 8. važe.

<u>8.</u> Ovde ćemo razmatrati odnos nekih drugih teorija prema teorijama $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_6$.

Neka je $\mathcal{B}_5$ teorija S_5-algebri.

<u>T.1.</u> Neka su u,v $\mathcal{B}_5$ termi[1]. Tada $\vdash_{\mathcal{B}_5} u = v$ akko $\vdash_{\mathcal{B}_6} u = v$.

<u>Dokaz</u> Kako je $u = v \Leftrightarrow u \triangle v' = 1$, to se možemo ograničiti na formule oblika $u = 1$.

1° ($\rightarrow$) Kako je teorija $\mathcal{B}_6$ proširenje teorije $\mathcal{B}_5$, to tvrđenje neposredno sledi.

2° ($\leftarrow$) Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije u skupu T svih terma teorije $\mathcal{B}_5$ definisina kao u 1.T.2. Tada je T/= karakteristična algebra za formule oblika $u = v$. Neka je $\sim \vdash_{\mathcal{B}_5} u = 1$. Tada $T/= \sim \models_{\varepsilon} u = 1$, gde je $\varepsilon : T \rightarrow T/=$ kanonsko preslikavanje. Neka je B_0 skup svih klasa ekvivalencija potformula od u. B_0 je konačan skup i $B_0 \subseteq T/=$. Tada se B_0 može proširiti do konačne $\mathcal{B}_5$ algebre B (v.naprimer /3/ za T-algebre), tako da $\varepsilon B \subseteq B$. Neka je ε_0 suženje preslikavanja ε na B.

---

1) Primetimo da se termi teorije $\mathcal{B}_5$ i $\mathcal{B}_6$ grafički poklapaju. Ustvari, teorija $\mathcal{B}_6$ je proširenje teorije $\mathcal{B}_5$.

Tada, zbog izbora skupa B_0, $B \sim \models_{\mathcal{E}_c} u = 1$. Kako je B konačan skup, tada prema II.5.T.4. $B = \prod_{i=1}^{n} B_i$, gde su B_i S_6-algebre. Prema I.2.T.2. onda bar za jedan $i \in \{1,2,\dots,n\}$ $B_i \sim \models u = 1$, tj. $\sim \vdash_{\mathcal{B}_6} u = 1$.

<u>C.1.1.</u> Formule teorije $\mathcal{B}_5$ oblika $u = v$ su odlučive.

<u>C.1.2.</u> Modalni S_5[1] račun je odlučiv (v.naprimer /3/).

Da bi to dokazali, možemo uzeti preslikavanje θ, koje preslikava skup formula $For(S_5)$ računa S_5 u skup terma T teorije $\mathcal{B}_5$, s tim što se simboli $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$ preslikavaju u odgovarajuće Bool-ove operacije, dok je $\theta M\alpha = (\theta\alpha)^*$, $\theta L\alpha = (\theta\alpha)^o$.

Kako je $\vdash_{S_5} \alpha$ akko je u proizvoljnoj S_5 algebri B, $B \models \theta\alpha = 1$ (stav potpunosti za račun S_5, v. /3/), to $\vdash_{S_5} \alpha$ akko $\mathcal{B} \models \theta\alpha = 1$. Otuda neposredno sleduje odlučivost računa S_5.

Primetimo da se $\mathcal{B}_5$ i S_5 dokazuju analogna tvrđenja, tvrđenju 5.T.1 (u slučaju S_5 reč "term" treba zameniti sa "formula", a simbole $*$, o, $'$ simbolima M, L, $\neg$).

Primetimo da se tvrđenje T.1. ne može primeniti na bilo koje (otvorene) formule, jer naprimer za formulu $\alpha \doteq x \neq 0 \Rightarrow x^* = 1$, je $\vdash_{\mathcal{B}_6} \alpha$ dok $\sim \vdash_{\mathcal{B}_5} \alpha$.

Sledeće tvrđenje govori o odnosu teorije distributivnih mreža ($\mathcal{D}$) i teorije $\mathcal{B}$. Očigledno možemo uzeti da je $\mathcal{B}$ proširenje teorije $\mathcal{D}$ (aksiomama teorije $\mathcal{D}$ dodajemo nove aksiome).

<u>T.2.</u> Ako je α otvorena formula teorije $\mathcal{D}$, tada

$\vdash_{\mathcal{D}} \alpha$ akko $\vdash_{\mathcal{B}_1} \alpha$

<u>Dokaz</u> Pošto za svaku distributivnu mrežu D postoji proširenje do Bool-ove algebre B (prema II.4.T.13.) to tvrđenje neposredno sledi prema

---

1) S_5 pored iskaznih operacija sadrži i modalne operacije M (moguće je), L (nužno je) sa aksiomama, pored aksioma iskaznog računa, $M(p \vee q) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow Mp \vee Mq$, $p \Rightarrow Mp$, $Mp \Rightarrow LMp$, $Lp \doteq \neg M \neg p$, i dodatna pravila izvođenja $\vdash_{S_5} \alpha \longrightarrow \vdash_{S_5} L\alpha$, $\vdash_{S_5} \alpha \Leftrightarrow \beta \longrightarrow \vdash_{S_5} M\alpha \Leftrightarrow M\beta$.

I.2.T.3.. Otuda, sve otvorene formule teorije $\mathcal{D}$ su odlučive. Specijalno, elementarnu formulu α (oblika $u = v$) dovoljno je proveriti da li važi na algebri $\{0,1\}$, da bi se utvrdilo da li je $\vdash_{\mathcal{D}} \alpha$. Primetimo, da analogno tvrđenje možemo iskazati i za Bool-ove prstene bez jedinice, jer se svaki Bool-ov prsten bez jedinice može proširiti do Bool-ovog prstena sa jedinicom.

Rezultate o teoriji $\mathcal{B}_1$ možemo primeniti na određen način na račun $\mathcal{L}$, tačnije na jedan deo metateorije računa $\mathcal{L}$.

Jasno je da svaku formulu α računa $\mathcal{L}$ možemo da shvatimo kao term teorije $\mathcal{B}_1$. Dalje, zbog potpunosti računa $\mathcal{L}$ je

(1) $\quad \vdash_{\mathcal{L}} \alpha \quad$ akko $\quad \vdash_{\mathcal{B}_1} (\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\ \alpha(x_1,\ldots,x_n) = 1$.

Međutim, prema 6.T.2. formule oblika $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\ \alpha(x_1,\ldots,x_n) = 1$ su odlučive.

Neka je sa $\longrightarrow$ označena meta implikacija, sa $\&$ meta "i", i neka "ne", "ili" imaju uobičajena značenja.[1] Tada zbog (1), formula oblika

(2) $\quad F(\vdash_{\mathcal{L}} \alpha_1, \ldots, \vdash_{\mathcal{L}} \alpha_n, \&, \text{ili}, \rightarrow, \text{ne})$, gde su α_i formule računa $\mathcal{L}$, biće tačna akko je $\vdash_{\mathcal{B}_1} F(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n, \wedge, \vee, \Rightarrow, \neg)$, gde je $\bar{\alpha}_i \doteq (\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\ \alpha(x_1,\ldots,x_n) = 1$. Za konkretne α_i, formule oblika (2) su odlučive (taj slučaj i nije toliko interesantan), dok za ma koje α_i dobijaju se sheme za koje ne mora da postoji opšti postupak za ispitivanje njihove tačnosti. Naprimer formula

$\vdash_{\mathcal{L}} \alpha \ \& \ \vdash_{\mathcal{L}} \beta \longrightarrow \vdash_{\mathcal{L}} \alpha \wedge \beta$ prevođenjem postaje

$$\Big(\bigwedge_{\lambda\in\{0,1\}^n} \alpha(\lambda)^{2)}\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{\mu\in\{0,1\}^n} \beta(\mu)\Big) \Longrightarrow \bigwedge_{\nu\in\{0,1\}^n} (\alpha\wedge\beta)(\nu).$$

Međutim, teorija $\mathcal{B}_1$ pruža mogućnost, da se prirodno opišu izvođenja u računu $\mathcal{L}$.

---

1) Pretpostavljamo da svi novo uvedeni simboli zadovoljavaju aksiome računa $\mathcal{L}$, naprimer $A \rightarrow (B \rightarrow A)$, slično za ostale. Formule A, B su oblika (2).

2) $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, n je broj promenljivih u α.

Pogledajmo sledeći primer u teoriji $\mathcal{L}$:

Ako je p i ako je q, onda je $p \wedge q$.

Ovu rečenicu možemo zapisati u obliku:

(1) $p \,\&\, q \rightarrow p \wedge q$.

U teoriji $\mathcal{B}_1$ (1) će biti $\alpha \doteq p = 1 \wedge q = 1 \Rightarrow p \wedge q = 1$. Kako je $\tau(p = 1) \doteq (p \Leftrightarrow 1)^{\circ} \doteq p^{\circ}$, to $\tau(\alpha) \doteq p^{\circ} \wedge q^{\circ} \Rightarrow (p \wedge q)^{\circ}$. Neposredno se proverava da je $\tau(\alpha) = 1$, odakle $\vdash_{\mathcal{B}_1} \alpha$. Otuda formula (1) je tačna.

Substitucijom u α dobija se za proizvoljne terme P,Q

(2) $P \,\&\, Q \rightarrow P \wedge Q$, odakle

(3) $P = 1 \wedge Q = 1 \Rightarrow P \wedge Q = 1$.

Ako zatvorimo formulu (3) dobija se

$(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(P = 1 \wedge Q = 1 \Rightarrow P \wedge Q = 1)$, gde su $x_1,\ldots,x_n$ promenljive u P,Q.

Otuda, kako je $(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) \Rightarrow ((\forall x)\alpha(x) \Rightarrow (\forall x)\beta(x))$ valjana formula, to $((\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\, P = 1) \wedge ((\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\, Q = 1) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\,(P \wedge Q) = 1$, odakle $\vdash_{\mathcal{L}} P \,\&\, \vdash_{\mathcal{L}} Q \rightarrow \vdash_{\mathcal{L}} P \wedge Q$ (ako je P teorema i Q teorema, tada je P ∧ Q teorema).

Prethodno razmatranje možemo formalizovati na sledeći način.

Neka je $\mathcal{L}_1$ proširenje računa $\mathcal{L}$ sa novim operacijama $\&$, $\rightarrow$, "ne", "ili", $\longleftrightarrow$ koje zadovoljavaju aksiome računa $\mathcal{L}$ (v. str.54. fusnota 1)). Jezik teorije $\mathcal{L}_1$ sgrađen je na sledeći način:

1° Formule računa $\mathcal{L}$ su elementarne formule računa $\mathcal{L}_1$.

2° Elementarne formule računa $\mathcal{L}_1$ su formule računa $\mathcal{L}_1$.

3° Ako su α, β formule računa $\mathcal{L}_1$, tada su ne α, $\alpha \,\&\, \beta$, α ili β, $\alpha \rightarrow \beta$, $\alpha \longleftrightarrow \beta$ formule računa $\mathcal{L}_1$.

4° Ako je α formula računa $\mathcal{L}_1$, tada se dobija nekim od pravila 1°,2°,3°.

Pravilo izvođenja je modus ponens: u, $u \rightarrow v$ izvodi se v.

T.3. 1° Ako je α formula računa $\mathcal{L}$, tada $\vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ akko $\vdash_{\mathcal{L}_1} \alpha$.

2° $\mathcal{L}_1$ je odlučiva teorija.

Dokaz ($\rightarrow$) Kako je $\mathcal{L}$ sadržan u $\mathcal{L}_1$, tvrđenje sledi.
($\leftarrow$) Neka je α elementarna formula i $\vdash_{\mathcal{L}_1} \alpha$. Pretpostavimo da $\sim \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$. Tada za neke vrednosti $a_1, \dots, a_n$ iskaznih slova $x_1, \dots, x_n$ formule α za koje je $\alpha \Leftrightarrow \bot$, zamenimo redom u α umesto $x_1, \dots, x_n$ neke teoreme, odnosno kontradikcije (iz $\mathcal{L}$) $\beta_1, \dots, \beta_n$ i to β_i je teorema akko $a_i = T$, β_i je kontradikcija ako je $a_i = \bot$. Tako se dobija formula $\beta \doteq \alpha(\beta_1, \dots, \beta_n)$ koja je kontradikcija, odakle $\vdash_{\mathcal{L}} \neg\beta$. Prema 1° $\vdash_{\mathcal{L}_1} \neg\beta$. No kako je $\vdash_{\mathcal{L}_1} \alpha$ to $\vdash_{\mathcal{L}_1} \beta$, što je nemoguće (jer je $\mathcal{L}_1$ neprotivurečan, što se može dokazati, naprimer kao u 2.T.1.2°).

2° Neka je $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \&, \text{ne}, \text{ili}, \rightarrow)$ formula teorije $\mathcal{L}_1$, gde su $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ elementarne formule. Neka je

$\theta F = F(\alpha_1^\circ, \dots, \alpha_n^\circ, \wedge, ', \vee, \Rightarrow)$. Kako je $\vdash_{\mathcal{L}_1} \alpha_i$ akko $\vdash_{\mathcal{L}} \alpha_i$ akko $\vdash_{\mathcal{B}_1} \alpha_i = 1$ i u obe teorije $\mathcal{L}_1, \mathcal{B}_1$ su iste logičke aksiome (to su aksiome iskaznog računa) i jedino pravilo izvođenja je modus ponens, imamo

$\vdash_{\mathcal{L}_1} F(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \&, \text{ne}, \text{ili}, \rightarrow)$ akko $\vdash_{\mathcal{B}_1} F(\alpha_1 = 1, \dots, \alpha_n = 1, \wedge, \neg, \vee, \Rightarrow)$

Dalje

$\vdash_{\mathcal{B}_6} F(\alpha_1 = 1, \dots, \alpha_n = 1, \wedge, \neg, \vee, \Rightarrow) \Leftrightarrow F(\alpha_1 \equiv 1, \dots, \alpha_n \equiv 1, \wedge, ', \vee, \Rightarrow)$

a pošto je $\vdash_{\mathcal{B}_6} \alpha \equiv 1 \Leftrightarrow \alpha^\circ$ to

$\vdash_{\mathcal{L}_1} F$ akko $\vdash_{\mathcal{B}_6} \theta F$

Navodimo topološki dokaz stava kompaktnosti (konačnosti; Malcev, Gödel) za iskazni račun.

Neka je $\mathcal{F}$ skup formula iskaznog računa (ili, što je isto, terma teorije $\mathcal{B}_1$), sa svojstvom da svaki konačan podskup od $\mathcal{F}$ ima model tj.

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F} \wedge \text{Fin}\, \mathcal{A} \Rightarrow (\exists p \in \mathcal{X})(\forall F \in \mathcal{A})(F(p) = 1)$, gde je:
I je skup indeksa iskaznih slova , tj. $\mathcal{P} = \{p_i \mid i \in I\}$ je skup iskaznih slova, $\mathcal{X} = \{0,1\}^I$ je topološki prostor sa proizvodnom topologijom, gde je diskretna topologija na $\{0,1\}$, $\text{Fin}\, \mathcal{A}$ je zamena za $\mathcal{A}$ je konačan skup.

Prema teoremi Tihonova, $\mathcal{X}$ je kompaktan prostor, jer je $\{0,1\}$ kompaktan prostor.

Neka je za svaki $F \in \mathcal{F}$ funkcija $\overline{F}: \{0,1\}^I \to \{0,1\}$ definisana na sledeći način: za $p \in \mathcal{X}$, $\overline{F}(p) = F(\pi_{i_1} p, \dots, \pi_{i_n} p)$, gde je $p_{i_1}, \dots, p_{i_n}$ skup iskaznih slova u formuli F, tj. $I_F = \{p_{i_1}, \dots, p_{i_n}\}$.

Neka je $\overline{\mathcal{F}} = \{\overline{F} \mid F \in \mathcal{F}\}$. Možemo smatrati da $F: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, (ako je $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n$, tada $F(\alpha) = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = F(p_{i_1}|\alpha_1, \dots, p_{i_n}|\alpha_n)$). Ovde je $\pi_i : \{0,1\}^I \to \{0,1\}$ projekcija.

Neka je $\alpha \in \{0,1\}$. Neka je $S_i^\alpha = \pi_i^{-1}(\alpha)$, tj. $S_i^\alpha = \{p \mid p(i) = \alpha\}$. Neka je $S_{i_1 \dots i_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \bigcap_{j=1}^{n} S_{i_j}^{\alpha_j}$. Kako su $\{0\}$, $\{1\}$ zatvoreni i otvoreni skupovi u $\{0,1\}$ i π_i je neprekidno preslikavanje, to su i skupovi S_i^α, a time i $S_{i_1 \dots i_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ zatvoreni i otvoreni skupovi u $\{0,1\}^I$. Primetimo da su skupovi $S_{i_1 \dots i_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ baza prostora $\mathcal{X}$.

<u>L.1.</u> Ako je $\alpha \in \{0,1\}$, tada je $\overline{F}^{-1}(\alpha)$ zatvoren skup.

<u>Dokaz</u> Formula $F(p_{i_1}, \dots, p_{i_n})$ uzima vrednost 1 za nekih k nizova 0,1 dužine n. Neka je $F(p_{i_1}, \dots, p_{i_n}) = 1$ za

$$\begin{array}{cccc} p_{i_1} & p_{i_2} & \dots & p_{i_n} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn} \end{array}$$

Kako je $\overline{F}(p) = F(p(i_1), \dots, p(i_n))$ to

$\overline{F}(p) = 1$ akko $(p(i_1) = \alpha_{11} \wedge \dots \wedge p(i_n) = \alpha_{1n}) \vee \dots \vee (p(i_1) = \alpha_{k1} \wedge \dots \wedge p(i_n) = \alpha_{kn})$,

odakle $\overline{F}^{-1}(1) = \{p \mid (p(i_1) = \alpha_{11} \wedge \dots \wedge p(i_n) = \alpha_{1n}) \vee \dots \vee (p(i_1) = \alpha_{k1} \wedge \dots \wedge p(i_n) = \alpha_{kn})\}$

Otuda

$$\overline{F}^{-1}(1) = \{p \mid (p(i_1) = \alpha_{11} \wedge \dots \wedge p(i_n) = \alpha_{1n}\} \cup \dots \cup \{p \mid p(i_1) = \alpha_{k1} \wedge \dots \wedge p(i_n) = \alpha_{kn}\} =$$
$$= (\{p \mid p(i_1) = \alpha_{11}\} \cap \dots \cap \{p \mid p(i_n) = \alpha_{1n}\}) \cup \dots \cup (\{p \mid p(i_1) = \alpha_{k1}\} \cap \dots \cap \{p \mid p(i_n) = \alpha_{kn}\})$$
$$= (S_{i_1}^{\alpha_{11}} \cap \dots \cap S_{i_n}^{\alpha_{1n}}) \cup \dots \cup (S_{i_1}^{\alpha_{k1}} \dots S_{i_n}^{\alpha_{kn}}) = S_{i_1 \dots i_n}^{\alpha_{11} \dots \alpha_{1n}} \cup \dots \cup S_{i_1 \dots i_n}^{\alpha_{k1} \dots \alpha_{kn}}.$$

odakle

$$\overline{F}^{-1}(1) = \bigcup_{j=1}^{k} S_{i_1\ldots i_n}^{\alpha_{j1}\ldots\alpha_{jn}}$$

Prema tome $\overline{F}^{-1}(1)$ je konačana unija zatvorenih skupova, odakle $F^{-1}(1)$ je zatvoren skup. Slično se dokazuje da je $\overline{F}^{-1}(0)$ zatvoren skup.

Prema prehodnom, $\mathcal{H} = \{\overline{F}^{-1}(1) \mid \overline{F} \in \mathcal{F}\}$ je familija zatvorenih skupova u $\mathcal{X}$.

__L.2.__ Neka je $\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = \{F^{-1}(1) \mid F \in \mathcal{A}\}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$. Tada $\bigcap \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{A}$ ima model.

__Dokaz__ $\bigcap \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists\, p \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow (\exists p)(\forall F \in \mathcal{A})(\overline{F}(p) = 1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\exists p)(\forall F \in \mathcal{A})(F(p) = 1) \Leftrightarrow \mathcal{A}$ ima model.

__T.1.__ $\mathcal{F}$ ima model akko svaki konačan podskup skupa $\mathcal{F}$ ima model

__Dokaz__ $(\Rightarrow)$ Očigledno.

$(\Leftarrow)$ Neka svaki konačan podskup skupa $\mathcal{F}$ ima model. Prema L.1. $\mathcal{H}$ je familija zatvorenih skupova. Neka je $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ je konačan. Tada je $\mathcal{K} = \{F^{-1}(1) \mid F \in \mathcal{A}\}$, za neki $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$, gde je $\mathcal{A}$ konačan skup. Prema uslovu tvrđenja $\mathcal{A}$ ima model, te prema L.2. $\bigcap \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \neq \emptyset$. Otuda $\mathcal{H}$ je centrirana familija zatvorenih skupova u kompaktnom prostoru $\mathcal{X}$, te $\bigcap \mathcal{H} \neq \emptyset$. Neka je $p \in \bigcap \mathcal{H}$. Tada $\forall F \in \mathcal{F}$ $p \in \overline{F}^{-1}(1)$, tj. $(\forall F \in \mathcal{F})\ F(p) = 1$, odakle sleduje da $\mathcal{F}$ ima model.

__T.2.__ Proširenje $\mathcal{L} + \mathcal{F}$ iskaznog računa $\mathcal{L}$ je neprotivurečno akko je svaki konačan podskup skupa formula od $\mathcal{F}$ neprotivurečan.

__Dokaz__ $(\Rightarrow)$ Očigledno.

$(\Leftarrow)$ Tvrđenje neposredno sleduje prema T.1. ako dokažemo: $\mathcal{L} + \mathcal{F}$ je neprotivurečna teorija akko $\mathcal{F}$ ima model.

Neka je $\mathcal{L} + \mathcal{F}$ neprotivurečna teorija. Tada je i svaki konačan podskup od $\mathcal{F}$ neprotivurečan. Neka $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$, i $F = F_1 \wedge \ldots \wedge F_n$. Tada F nije kontradikcija. Kako je $\vdash F$ akko $\{0,1\} \vDash F$, to za neko α, $F(\alpha) = 1$. Otuda $\{F_1, \ldots, F_n\}$ ima model, te prema T.1. $\mathcal{F}$ ima model.

Neka $\mathcal{F}$ ima model p. Pretpostavimo da je $\mathcal{F}$ protivurečan skup formula. Tada postoji F da je $\mathcal{F} \vdash_{\mathcal{L}} F$, $\mathcal{F} \vdash_{\mathcal{L}} \neg F$. Otuda, za neke formule $F_1, \ldots, F_n$ biće $F_1, \ldots, F_n \vdash_{\mathcal{L}} F, \neg F$ tj. $\vdash_{\mathcal{L}} F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \Rightarrow F$, $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \Rightarrow \neg F$. Koristeći tautologiju $(p \Rightarrow \neg q) \wedge (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge \neg q)$ dobija se $\vdash_{\mathcal{L}} F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \Rightarrow F \wedge \neg F$ odakle $\vdash_{\mathcal{L}} \neg(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n)$, tj. $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n$ je kontradikcija. Otuda $(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n)(p) = 0$, što je protivno pretpostavci.

Literatura

1. Н. БУРБАКИ: ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ, ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР", МОСКВА, 1965

2. P.M. Cohn: Universal Algebra, Harper and Row, Publishers, London 1965.

3. G.E. Hughes, M.J. Cresswell: An Introduction to Modal Logic, Methuen and Co LTD, London 1972.

4. K. Kuratowski and A. Mostovski: Set Theory, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1967.

5. Đuro Kurepa: Teorija skupova, "Školska knjiga", Zagreb, 1951.

6. Đuro Kurepa: O tri osnovna suda u teoriji skupova i njihovoj konjunkciji, Neki nerešeni problemi u matematici, Matematička biblioteka 25, Beograd, 1963.

7. Eliot Mendelson: Introduction to Mathematical Logic, D. Van Nostrand Company, Inc., London, 1971.

8. Elliott Mendelson: Theory and Problems of Boolean Algebra, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York, 1970.

9. Slaviša B. Prešić: Elementi matematičke logike, Matematička biblioteka 34, Beograd, 1968.

10. Slaviša Prešić: Sur l'Equation Fonctionnelle, Publ. Elek. Fak. Univ. u Beogradu, 64, str. 29-31, 1961.

11. Helena Rasiowa and Roman Sikorski: The Mathematics of Metamathematics, Polska Akademia Nauk, Monografie matematyczne, tom 41.

12. J. Barkley Rosser: Simplified Independence Proofs, Academic Press, London, 1969.

13. Herman Rubin and Jean E. Rubin: Equivalents of the Axiom of Choice, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1963.

14. Th. Skolem: Peano's Axioms and Models of Arithmetic, Mathematical Interpretacion of Formal Systems, North-Holland Publishing Co. Amsterdam, 1971.

15. Л.А. СКОРНЯКОВ: ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРИИ СТРУКТУР, ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА", МОСКВА, 1970.

16. В.А. СМИРНОВ: ЛОГИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ФОРМУЛАМИ-АНАЛОГАМИ ЗАПИСЕЙ О ВЫВОДИМОСТИ, ЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА НАУЧНОГО ЗНАНИЯ, "НАУКА", 1965, МОСКВА

17. Alfred Tarski: On the Foundations of Boolean Algebra, Logic, Semantics, Metamathematics, Oxford University Press, 1969.

18. Alfred Tarski: A general Method in Proofs of Undecidability, Undecidable Theories, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1971.

19. Vladimir Devide: Matematička Logika, Posebna izdanja Matematičkog instituta, Beograd, 1972.

20. Slaviša B. Prešić: Une Classe d'Équations Maticielles et l'Équation fonctionnelle $f^2 = f$, Publ. Inst. Math. T.8(22), 1968.

21. А.И. МАЛЬЦЕВ: АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, „НАУКА", МОСКВА, 1970.