MAŠINSKI FAKULTET U KRAGUJEVCU

Књигу за успомену
проф. Д. Рашковић

Prof. Dr Ing. Dipl. math. DANILO P. RAŠKOVIĆ

ANALITIČKA MEHANIKA

– kratki kurs –

Kragujevac, 1974. godine

Izdavač:
MAŠINSKI FAKULTET U KRAGUJEVCU
ul. Sestre Janjić 6

Glavni urednik:
Dr Branislav Devedžić, dipl. inž.

Recenzent:
Dr Miloš Kojić, dipl. inž.

Štampa:
Biro za gradjevinarstvo
ul. Sremska 6/III, tel. 623-340
Beograd

Tiraž: 300

P R E D G O V O R

Motto: "... Onaj koji voli Analizu zaključiće sa zadovoljstvom da je ona njen deo i biće mi zahvalan, što sam na taj način proširio njen domen ..."

J. L. Lagrange

("Mecanique Analytique", 1788)

Sadržaj ove knjige je širi od kursa koji držim na postdiplomskim studijama na Mašinskom fakultetu u Kragujevcu, i može korisno poslužiti kandidatima trećeg stepena studija iz oblasti Tehničke mehanike koje vodim u Nišu, Kragujevcu, Sarajevu i Mostaru.

Gradivo je izloženo analitičkim metodama, ali je, ipak, protkano tehničkim problemima. Naročita pažnja je obraćena varijacionim principima, pošto se oni danas mnogo koriste u novoj disciplini Elastodinamici koja je spoj Teorije elastičnosti i Teorije oscilacija. Naravno, vodjeno je računa o obimu knjige, tako da su dati samo osnovi. Mnogi detalji mogu se naći u citiranoj literaturi.

Zahvaljujem se Mašinskom fakultetu u Kragujevcu koji je omogućio objavljivanje ove knjige.

Dipl. ing. Dragan Milosavljević, asistent na Katedri mehanika, pomogao mi je u korekturi teksta, mašinski tehničari Miroljub Milojević i Zvezdan Rodić iz Kragujevca, brižljivo su izradili crteže i pisani tekst, a daktilografkinja Milesa Bošković brižljivo je otkucala tekst, pa im se najsrdačnije zahvaljujem.

Kragujevac, 27.09.1974. godine.

D. R.

S A D R Ž A J

	Strana
1. GENERALISANI KOORDINATNI SISTEM	
1.1. Generalisani (krivolinijski) koordinatni sistem	1
1.2. Brzina pokretne tačke	4
1.3. Ubrzanje pokretne tačke	5
1.4. Dinamičke jednačine kretanja	9
1.5. Krivolinijske (generalisane) koordinate brzine i ubrzanja	12
1.6. Kovarijantne i kontravarijantne jednačine kretanja	17
2. PRINUDNA KRETANJA MATERIJALNIH SISTEMA. VEZE	
2.1. Prinudno kretanje materijalne tačke	19
2.2. Materijalni sistemi i njihove veze	20
2.3. Uslovi za brzine tačaka neslobodnog sistema	24
2.4. Uslov za ubrazanja tačaka neslobodnog sistema	25
2.5. Moguća i virtualna pomeranja	26
2.6. Varijacija funkcije	28
2.7. Brahistohrona za homogeno polje teže	32
2.8. Otpori (reakcije) veza	33
2.9. Diferencijalne jednačine kretanja sistema sa množiteljima veza	36
2.10. Opšte koordinate. Konfiguracioni prostor	40
3. DIFERENCIJALNI PRINCIPI	
3.1. Klasifikacija principa	44
3.2. D'Alambert-ov princip	45
3.3. Lagrange-ov princip virtualnih pomeranja	48
3.3.1. Ravnotežni oblik lančanice	50
3.4. Lagrange-d'Alambert-ov opšti ptincip. Opšta jednačina Dinamike	52

Strana

3.4.1. Drugi Newton-ov zakon 53
3.4.2. Zakon o količini kretanja 53
3.4.3. Zakon o momentu količine kretanja 54
3.4.4. Zakon o kinetičkoj energiji 55
3.4.5. Lagrange-ove jednačine prve vrste 55
3.4.6. Lagrange-ove jednačine druge vrste 58

4. ENERGIJE SISTEMA MATERIJALNIH TAČAKA
4.1. Kinetička energija 64
4.2. Potencijalna energija. Potencijal 67
4.3. Kinetički potencijal 67
4.4. Teorema o promeni totalne mehaničke energije 68
4.5. Giroskopske i disipativne sile 70
4.6. Generalisani potencijal 73
4.7. Generalisani integral energije (Jacobi-jev integral) 74
4.8. Jednačine kretanja skleronomnog sistema rešene po generalisanim ubrzanjima 76
4.9. Energija ubrzanja. Appel-ove jednačine 78
4.10. Male oscilacije sistema oko ravnotežnog položaja 81
4.10.1. Ljapunovljev kriterijum stabilnosti kretanja 81
4.10.2. Stabilnost ravnoteže 81
4.10.3. Male oscilacije konzervativnog sistema 82
4.10.4. Male oscilacije nekonzervativnog sistema 87
4.10.5. Prinudne oscilacije 89

5. KANONSKE JEDNAČINE I NJIHOVI INTEGRALI
5.1. Kanonske promenljive 91
5.2. Hamilton-ove kanonske jednačine 93
5.3. Prvi integrali Hamilton-ovih kanonskih jednačina 98
5.4. Poisson-ove zagrade 101
5.5. Routh-ove jednačine 103

	Strana
6. INTEGRALNI PRINCIPI	
6.1. Uloga integralnih principa	106
6.2. Hamilton-ov princip	107
6.3. Ekstremumi funkcionala	111
6.3.1. Ekstremum funkcionala koji zavisi od funkcije dve promenljive	111
6.3.2. Ekstremizacija trostrukog integrala	115
6.4. Oscilacije elastičnih tela	117
6.4.1. Transverzalne oscilacije žice	117
6.4.2. Torzijske oscilacije kružnog vratila	120
6.4.3. Transverzalne oscilacije grede	121
6.4.4. Oscilacije membrane	122
6.4.5. Transverzalne oscilacije tanke ploče	123
6.5. Lagrange-Maupertuis-ov princip najmanjeg dejstva	126
6.6. Kanonske (kontaktne) transformacije	129
6.7. Hamilton-Jacobi-jeva jednačina	130
7. ELEKTROMEHANIČKE ANALOGIJE	132
LITERATURA	139
REGISTAR IMENA	141
STVARNI REGISTAR	142

1. GENERALISANI KOORDINATNI SISTEM

1.1. Generalisani (krivolinijski) koordinatni sistem. – Položaj tačke M u prostoru od tri dimenzije (E_3) odredjuje se u odnosu na stalnu tačku – pol-početak (O) vektorom položaja $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$. U odnosu na Dekartov trijedar ovom vektoru odgovaraju kartezijanske koordinate (x, y, z), pa se može napisati vektorska relacija $\mathbf{r} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3$, gde su $\mathbf{e}_i$ jedinični vektori (ortovi) osa trijedra Oxyz. Kod pravouglog Dekartovog trijedra biće $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, gde su sada $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ jedinični vektori ovih upravnih osa. U ovom slučaju koordinate x, y, z jednake su ortogonalnim projekcijama vektora $\mathbf{r}$ na te ose, dok u prvom slučaju treba praviti razliku izmedju koordinata i ortogonalnih projekcija. Veličina $x\,\mathbf{e}_1$, odnosno $x\,\mathbf{i}$ jeste komponenta vektora položaja $\mathbf{r}$ u odnosu na dotični trijedar (Oxyz).

Položaj tačke M u prostoru E_3 može se odrediti i pomoću tri medjusobno nezavisna parametra q_1, q_2 i q_3 (odnosno q_i, i = 1, 2, 3). Kada se parametrima q_i daju sve moguće vrednosti i kada svakoj tački M u prostoru odgovara jedan i samo jedan uredjeni skup brojeva q_i i obratno, svakom uredjenom skupu od tri broja q_i jedna i samo jedna tačka M u prostoru, onda se parametri q_i nazivaju opšte (generalisane) krivolinijske koordinate tačke *). Tada se vektor položaja $\mathbf{r}$ može izraziti kao vektorska funkcija tih koordinata, pa takodje i njegove ortogonalne koordinate:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3); \quad \mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}; \quad x = x(q_i); \; y = y(q_i); \; z = z(q_i). \tag{1.1}$$

Ove funkcije x, y, z od q_i predstavljaju transformaciju starih promenljivih x, y, z u nove q_1, q_2 i q_3. Obratno, funkcije

$$q_1 = q_1(x,y,z); \quad q_2 = q_2(x,y,z); \quad q_3 = q_3(x,y,z); \quad q_i = q_i(x,y,z) \tag{1.2}$$

predstavljaju inverznu transformaciju. Prema tome, skupovi jednačina (1.1) i (1.2) predstavljaju jednačine koordinatnih transformacija. Pri ovome moraju biti ispunjena dva uslova: 1° da su funkcije $q_i = q_i(x,y,z)$ jednoznačne, kontinu-

*) Kinematika, čl. 1.5.

alne i da imaju neprekidne parcijalne izvode do potrebnog reda, i 2° da su jakobijani (funkcionalne determinante) različiti od nule,

$$J=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2,q_3)}\right|\neq 0\,;\; J^{*}=\left|\frac{\partial(q_1,q_2,q_3)}{\partial(x,y,z)}\right|=\frac{1}{J}=J^{-1}\neq 0. \quad (1.3)$$

Kada su dve koordinate konstantne (na primer q_2 = const; q_3 = const) a treća se menja i dobija sve moguće vrednosti (q_1) onda skup tačaka obrazuje krivu koja se naziva koordinatna linija (q_1 - linija). Kada se menjaju dve koordinate (naprimer q_1 i q_2) a treća je stalna (q_3 = const) dobija se koordinatna površ, $[q_1\ q_2]$ - površ). Svakoj tački M odgovaraju tri koordinatne površi koje se seku duž koordinatnih linija, pa obrazuju krivolinijski sistem koordinata (sistem referencije). Stoga jednačine transformacija (1.1) i (1.2) predstavljaju promene koordinata jedne iste tačke M prostora posmatrane u odnosu na razne sisteme referencije.

Iz (1.1) sledi da su jedinični vektori osa trijedra Oxyz

$$\mathbf{i}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}; \quad \mathbf{j}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}; \quad \mathbf{k}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}, \quad (1.4)$$

pa je parcijalni izvod vektora položaja

$$\mathbf{g}_i=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}=\frac{\partial x}{\partial q_i}\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial q_i}\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial q_i}\mathbf{k}. \quad (1.5)$$

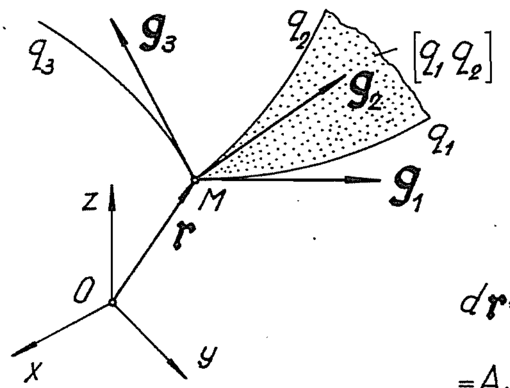
vektor koji pada u pravac tangente na koordinatnu liniju. Ovakvi se vektori nazivaju osnovni (bazni) vektori, i intenziteta su

$$|\mathbf{g}_i|=\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right|=A_i=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2\right]^{1/2} \; i=1,2,3, \quad (1.6)$$

gde je A_i tzv. Lamé-ov parametar. Pošto $\mathbf{g}_i$ zavise od položaja tačke, to oni obrazuju u svakoj tački prostora trijedar - vektorsku bazu za koordinate q_i, ali se neprekidno menjaju i po veličini i po pravcu. Oni su tangentni vektori, pa se mogu izraziti i na ovaj način

$$\mathbf{g}_i=|\mathbf{g}_i|\,\mathbf{t}_i=A_i\,\mathbf{t}_i\,; \quad \mathbf{t}_i=\frac{1}{A_i}\mathbf{g}_i, \quad (1.7)$$

gde su $\mathbf{t}_i$ jedinični vektori u pravcima baznih vektora. Oni čine ose generalisanih koordinata (sl. 1.1). Kada su ose upravne, $(\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_k) = 0$ za $i \neq k$, triedar je upravni (ortogonalni); u protivnom je kosi (loksogonalni). Drugi je opštiji od prvog, ali se u praksi manje upotrebljava.



Sl. 1.1

Kako je

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3 =$$
$$= A_1 dq_1 \mathbf{t}_1 + A_2 dq_2 \mathbf{t}_2 + A_3 dq_3 \mathbf{t}_3 =$$
$$= d\mathbf{s} = ds_1 \mathbf{t}_1 + ds_2 \mathbf{t}_2 + ds_3 \mathbf{t}_3$$

to je

$$ds_1 = A_1 dq_1; \quad ds_2 = A_2 dq_2; \quad ds_3 = A_3 dq_3; \quad A_i = ds_i / dq_i \tag{1.9}$$

gde su ds_i elementarni lukovi duž koordinantnih linija. Iz ovoga se vidi geometrijsko značenje Lamé-ovog koeficijenta: on je količnik elementa luka duž koordinatne linije i diferencijala koordinate te koordinatne linije.

Kvadrat elementa luka naziva se metrička forma i iznosi:

$$\begin{aligned} ds^2 = (d\mathbf{r}, d\mathbf{r}) &= (\mathbf{g}_1 dq_1 + \mathbf{g}_2 dq_2 + \mathbf{g}_3 dq_3, \mathbf{g}_1 dq_1 + \mathbf{g}_2 dq_2 + \mathbf{g}_3 dq_3) = \\ &= g_{11} dq_1^2 + g_{12} dq_1 dq_2 + g_{13} dq_1 dq_3 + \\ &+ g_{21} dq_2 dq_1 + g_{22} dq_2^2 + g_{23} dq_2 dq_3 + \\ &+ g_{31} dq_3 dq_1 + g_{32} dq_3 dq_2 + g_{33} dq_3^2 \end{aligned} \tag{1.10}$$

gde su prema (1.6) koeficijenti

$$g_{ik} = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_k) = A_i A_k (\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_k) = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_k} = g_{ki}. \tag{1.11}$$

S obzirom na komutativnost skalarnog proizvoda dva vektora oni su simetrični, $g_{ik} = (\mathbf{g}_i \mathbf{g}_k) = (\mathbf{g}_k, \mathbf{g}_i) = g_{ki}$, pa se relacija (1.10) može napisati u sledećem matričnom obliku

$$ds^2 = (d\mathbf{r})\{d\mathbf{r}\} = (dq)\mathbf{G}\{dq\} = (dq_1 dq_2 dq_3)\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{Bmatrix} = \qquad (1.12)$$

$$= \sum_i \sum_k g_{ik}\, dq_i\, dq_k ,$$

gde je (dq) matrica vrsta, $\{dq\}$ matrica kolona a $\mathbf{G}$ matrica metričkog tenzora, elemenata g_{ik} koji odredjuju metričku formu prostora. Ova je matrica kvadratna, trećeg reda, simetrična, jer su $g_{ik} = g_{ki}$. Njena determinanta je uvek različita od nule, det $\mathbf{G} = |\mathbf{G}| > 0$, i pozitivna je pošto je i kvadrat elementa luka (ds^2) pozitivna veličina.

U slučaju ortogonalnog generalisanog sistema, jedinični vektori su upravni, pa je $(\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_k) = 0$ za $i \neq k$, te je

$$g_{ii} = A_i^2;\; ds^2 = (dq)\,\mathbf{G}\,\{dq\} = (dq_1 dq_2 dq_3)\begin{pmatrix} A_1^2 & & \\ & A_2^2 & \\ & & A_3^2 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{Bmatrix} = \qquad (1.13)$$

$$= (A_1 dq_1)^2 + (A_2 dq_2)^2 + (A_3 dq_3)^2 ,$$

$q_{ik} = 0,\; i \neq k.$

1.2. Brzina pokretne tačke. - Kada se tačka M kreće u prostoru ona menja svoj položaj u odnosu na neki sistem koordinata, pa je kretanje odredjeno vektorskom, odnosno skalarnim jednačinama:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t);\; x = x(t);\; y = y(t);\; z = z(t);\; q_i = q_i(t), \qquad (1.14)$$

gde je t vreme. Ovo su konačne jednačine kretanja. One ujedno odredjuju krivu koja je trajektorija ili putanja tačke. Luk putanje predstavlja predjeni put u datom vremenskom razmaku, a promena luka sa vremenom je zakon puta, $s = s(t)$. Sa ta dva elementa - putanjom i zakonom puta - kretanje je tačke potpuno odredjeno.

Iz (1.8) sledi da je brzina pokretne tačke $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \sum_i^3 \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i =$

$$= \sum_i \mathbf{g}_i \dot{q}_i = A_1\dot{q}_1\mathbf{t}_1 + A_2\dot{q}_2\mathbf{t}_2 + A_3\dot{q}_3\mathbf{t}_3 = \dot{s}\mathbf{t} = v\mathbf{t} = \sum v_i \mathbf{t}_i , \qquad (1.15)$$

gde je $v = |\mathbf{v}| = ds/dt = \dot{s}$ intenzitet vektora brzine, a $\mathbf{t}$ jedinični vektor tangente na putanju u pokretnoj tački M, pa je $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$. Iz (1.12) sledi da je kvadrat vektora brzine

$$v^2 = (v)\{v\} = (\dot q)\boldsymbol{G}\{\dot q\} = g_{11}\dot q_1^2 + g_{22}\dot q_2^2 + g_{33}\dot q_3^2 + 2(g_{12}\dot q_1\dot q_2 + g_{13}\dot q_1\dot q_3 +$$

$$+ g_{23}\dot q_2\dot q_3) = \sum_i\sum_k g_{ik}\,\dot q_i\dot q_k \tag{1.16}$$

pa je u ortogonalnom sistemu:

$$v^2 = g_{11}\,\dot q_1^2 + g_{22}\,\dot q_2^2 + g_{33}\,\dot q_3^2 = (A_1\dot q_1)^2 + (A_2\dot q_2)^2 + (A_3\dot q_3)^2 = \sum_i (v_i)^2, \tag{1.17}$$

gde je $\dot q_i$ generalisana brzina ($\dot q_i = dq_i/dt$). S obzirom na generalisanu koordinatu ova brzina je ili linijska ili ugaona brzina. Iz (1.8) i (1.15) dobijaju se relacije

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \mathbf{g}_i = A_i\mathbf{t}_i = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot q_i}; \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i}, \tag{1.18}$$

jer je

$$\mathbf{v} = \sum \mathbf{g}_i\dot q_i; \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_k} = \sum_i \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i\partial q_k}\,\dot q_i = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_1\partial q_k}\,\dot q_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_2\partial q_k}\,\dot q_2 +$$

$$+ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_3\partial q_k}\,\dot q_3 = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} = \sum_i \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k\,\partial q_i}\,\dot q_i\,.$$

Projekcija vektora brzine na i-tu generalisanu osu iznosi $\mathbf{v} = \sum_k \mathbf{g}_k\dot q_k$;

$$v_{(i)} = (\mathbf{v},\mathbf{t}_i) = \sum_k \frac{1}{A_i}(\mathbf{g}_k\mathbf{g}_i)\dot q_k = \sum_k \frac{1}{A_i} g_{ik}\,\dot q_k = \frac{1}{2A_i}\frac{\partial v^2}{\partial \dot q_i} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial \dot q_i}\left(\frac{v^2}{2}\right) \tag{1.19}$$

jer je

$$\frac{\partial v^2}{\partial \dot q_i} = 2\sum_k g_{ik}\,\dot q_k = 2\,(g_{i1}\,\dot q_1 + g_{i2}\,\dot q_2 + g_{i3}\,\dot q_3) =$$

$$= 2\,(g_{ik})\,\{\dot q\} = 2\boldsymbol{G}\,\{\dot q\}. \tag{1.20}$$

Iz (1.15) vidi se da se koordinate v_i vektora brzine razlikuju od ovih projekcija na generalisane ose.

1.3. Ubrzanje pokretne tačke. - Projekcije vektora ubrzanja na ose krivolinijskog trijedra odredjuju se na ovaj način. One su skalarni proizvod vektora ubrzanja $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = \dot{\mathbf{v}}$ i jediničnog vektora dotične ose $\mathbf{t}_i$, te će biti

$$a_{(i)} = (\mathbf{a},\mathbf{t}_i) = (\dot{\mathbf{v}},\frac{1}{A_i}\,\mathbf{g}_i) = \frac{1}{A_i}(\dot{\mathbf{v}},\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}); \qquad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}}. \tag{1.21}$$

S obzirom na (1.18) slede relacije:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v},\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right)=\left(\dot{\mathbf{v}},\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right)+\left(\mathbf{v},\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right); \qquad \left(\dot{\mathbf{v}},\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right)=\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v},\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i}\right)-\left(\mathbf{v},\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i}\right)$$

a iz (1.16) dobija se

$$v^2=(\mathbf{v},\mathbf{v}); \qquad \frac{\partial v^2}{\partial \dot{q}_i}=2\left(\mathbf{v},\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i}\right); \qquad \frac{\partial v^2}{\partial q_i}=2\left(\mathbf{v},\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i}\right). \tag{1.22}$$

pa je projekcija vektora ubrzanja:

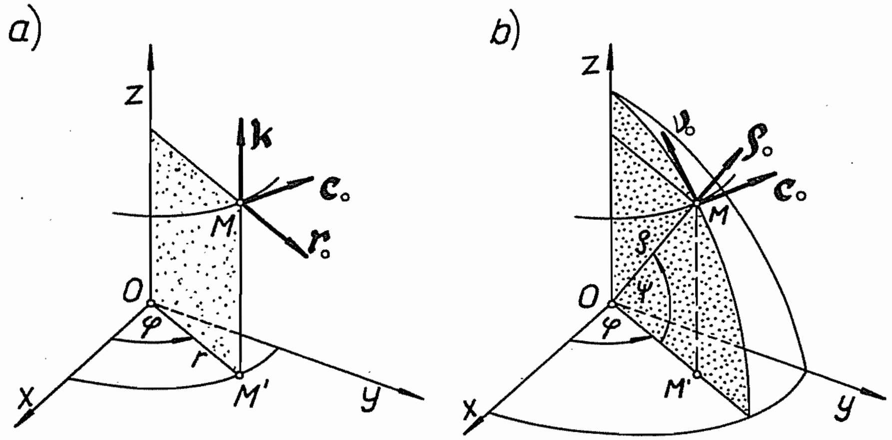
$$a_{(i)}=\frac{1}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v},\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right)-\left(\mathbf{v},\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right)\right]=\frac{1}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v},\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i}\right)-\left(\mathbf{v},\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i}\right)\right]$$

odnosno

$$a_{(i)}=\frac{1}{2A_i}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial v^2}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial v^2}{\partial q_i}\right]=\frac{1}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{v^2}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right]. \tag{1.23}$$

Veličine $\ddot{q}_i$ jesu generalisana ubrzanja, pa su ili linijska ili ugaona, što zavisi od generalisanih koordinata.

U praksi se najviše koriste dva ortogonalna krivolinijska sistema: polarno-cilindrički (slika 1.2a) i sferni sistem (slika 1.2b). Ovde su formule transformacija koordinata i jakobijani:



Slika 1.2.

a)
$$x = r\cos\varphi; \qquad r^2 = x^2 + y^2;$$
$$y = r\sin\varphi; \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x};$$
$$z = z; \qquad z = z;$$

(1.24)

$$J = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r;$$

$$J^* = \left|\frac{\partial(r,\varphi,z)}{\partial(x,y,z)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\frac{1}{r}\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} = J^{-1};$$

b)
$$x = \rho\cos\psi\cos\varphi; \qquad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$
$$y = \rho\cos\psi\sin\varphi; \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}; \qquad (1.25)$$
$$z = \rho\sin\psi; \qquad \sin\psi = \frac{z}{\rho} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$J = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\psi)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\varphi & \sin\psi \\ -\rho\cos\psi\sin\varphi & \rho\cos\psi\cos\varphi & 0 \\ -\rho\sin\psi\cos\varphi & -\rho\sin\psi\sin\varphi & \rho\cos\psi \end{vmatrix} = \rho^2\cos\psi;$$

$$J^* = J^{-1} = \left|\frac{\partial(\rho,\varphi,\psi)}{\partial(x,y,z)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \rho}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{\rho} & -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{-xz}{\rho^3\cos\psi} \\ \frac{y}{\rho} & \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{-yz}{\rho^3\cos\psi} \\ \frac{z}{\rho} & 0 & \frac{x^2+y^2}{\rho^3\cos\psi} \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho^2\cos\psi}.$$

Ostali rezultati dati su u tablici na sledećoj stranici.

Oznaka	Polarno-cilindrički sistem			Sferni sistem		
q_i	r	φ	z	ρ	φ	ψ
$\dot{q}_i$	$\dot{r}$	$\dot{\varphi}$	$\dot{z}$	$\dot{\rho}$	$\dot{\varphi}$	$\dot{\psi}$
$\ddot{q}_i$	$\ddot{r}$	$\ddot{\varphi}$	$\ddot{z}$	$\ddot{\rho}$	$\ddot{\varphi}$	$\ddot{\psi}$
ds_i	dr	$r\,d\varphi$	dz	$d\rho$	$\rho\cos\psi\,d\varphi$	$\rho\,d\psi$
ds^2	$(dr)^2+$	$(r\,d\varphi)^2$	$+(dz)^2$	$(d\rho)^2$	$+(\rho\cos\psi\,d\varphi)^2$	$+\ (\rho\,d\psi)^2$
A_i	1	r	1	1	$\rho\cos\psi$	ρ
$g_{ii}=A_i^2$	1	r^2	1	1	$(\rho\cos\psi)^2$	ρ^2
J		r			$\rho^2\cos\psi$	
J^{-1}		$1/r$			$1/\rho^2\cos\psi$	
$\mathbf{t}_i$	$\mathbf{r}_0$	$\mathbf{c}_0$	$\mathbf{k}$	$\boldsymbol{\rho}_0$	$\mathbf{c}_0$	$\boldsymbol{\nu}_0$
$\mathbf{g}_i=A_i\mathbf{t}_i$	$\mathbf{r}_0$	$r\mathbf{c}_0$	$\mathbf{k}$	$\boldsymbol{\rho}_0$	$(\rho\cos\psi)\mathbf{c}_0$	$\rho\boldsymbol{\nu}_0$
V^2	$\dot{r}^2+$	$(r\dot{\varphi})^2+$	$\dot{z}^2$	$\dot{\rho}^2$	$+(\rho\cos\psi\dot{\varphi})^2$	$+\ (\rho\dot{\psi})^2$
$\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{V^2}{2}\right)$	$\dot{r}$	$r^2\dot{\varphi}$	$\dot{z}$	$\dot{\rho}$	$(\rho\cos\psi)^2\dot{\varphi}$	$\rho^2\dot{\psi}$
$V_{(i)}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{V^2}{2}\right)$	$V_r=\dot{r}$	$V_c=r\dot{\varphi}$	$V_z=\dot{z}$	$V_\rho=\dot{\rho}$	$V_c=\rho\cos\psi\dot{\varphi}$	$V_\nu=\rho\dot{\psi}$
$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{V^2}{2}\right)$	$r\dot{\varphi}^2$	0	0	$\rho\left[(\dot{\varphi}\cos\psi)^2+\dot{\psi}^2\right]$	0	$-\frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}^2\sin 2\psi$
$a_{(i)}$	$a_r=\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2$	$a_c=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})=2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi}$	$a_z=\ddot{z}$	$a_\rho=\ddot{\rho}-\rho\left[(\dot{\varphi}\cos\psi)^2+\dot{\psi}^2\right]$	$a_c=\frac{1}{\rho\cos\psi}\cdot\frac{d}{dt}\left[(\rho\cos\psi)^2\dot{\varphi}\right]$	$a_\nu=\frac{1}{\rho}\left[\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\psi})+\frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}^2\sin 2\psi\right]$

(1.26)

1.4. Dinamičke jednačine kretanja. - Drugi Newton-ov zakon o kretanju u vektorskom obliku je $d(m\mathbf{v})/dt = m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, pri $m = \text{const} > 0$, gde je m masa materijalne tačke a $\mathbf{F}$ rezultanta sila koje dejstvuju na tu tačku. Kada se izraz (1.23) pomnoži masom on postaje

$$ma_{(i)} = m(\mathbf{a},\mathbf{t}_i) = (\mathbf{F},\mathbf{t}_i) = \frac{m}{A_i}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right].$$

Pošto je $m = \text{const}$ pa ne utiče na diferenciranje, a kako je $mv^2/2 = E_k$ kinematička energija, to gornja relacija postaje

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_K}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial E_K}{\partial q_i} = A_i\,(\mathbf{F},\mathbf{t}_i) = (\mathbf{F},\mathbf{g}_i) = \left(\mathbf{F},\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}\right) = (\mathbf{F},\mathbf{t}_i)ds_i = F_i ds_i = Q_i \tag{1.27}$$

gde je Q_i generalisana sila za i-tu generalisanu koordinatu. Ona predstavlja rad projekcije aktivne sile ($\mathbf{F}$) na i-tu koordinatnu liniju duž luka ds_i po toj liniji. Njena dimenzija zavisi od Lamé-ovog koeficijenta, pa predstavlja ili silu ili spreg sila. S obzirom na prednje, diferencijalne jednačine kretanja za materijalnu tačku mogu se napisati u obliku

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_K}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial E_K}{\partial q_i} = Q_i\,; \qquad Q_i = (\mathbf{F},\mathbf{g}_i)\,; \qquad i=1,2,3. \tag{1.28}$$

Ove su jednačine poznate kao Lagrange-ove jednačine druge vrste za tačku.

Sila $\mathbf{F}$ na pomeranju $d\mathbf{r}$ vrši mehanički rad, pa je:

$$dA = (\mathbf{F},d\mathbf{r}) = \sum_i(\mathbf{F},\mathbf{g}_i)\,dq_i = \sum_i Q_i dq_i\,; \qquad A = \int_{M_0}^{M}\left(\sum Q_i dq_i\right). \tag{1.29}$$

Ako sila $\mathbf{F}$ zavisi od položaja tačke, tj. od rastojanja $\mathbf{r}$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, i postoji takva funkcija položaja $U = U(\mathbf{r})$ da je njen gradijent jednak sili, grad $U = \mathbf{F}$, onda se ona naziva funkcijom sile. Analogno izrazu u pravouglom sistemu $dU = (\partial U/\partial x)\,dx + (\partial U/\partial y)\,dy + (\partial U/\partial z)\,dz = (\text{grad } U, d\mathbf{r})$, biće i u generalisanom sistemu:

$$dU = \sum_i\frac{\partial U}{\partial q_i}\,dq_i = (\nabla U, d\mathbf{r}) = \sum_i(\nabla U,\mathbf{g}_i)\,dq_i = \sum_i A_i\,(\nabla U,\mathbf{t}_i)\,dq_i\,; \qquad \nabla U = \sum_i\frac{1}{A_i}\frac{\partial U}{\partial q_i}\mathbf{t}_i \tag{1.30}$$

pa su

$$dA=(F,dr)=(\nabla U,dr)=dU\,;\quad A=U-U_0\,;\quad Q_i=\frac{\partial U}{\partial q_i}. \tag{1.31}$$

Dakle, rad ovakve sile ne zavisi od oblika putanje, već je jednak razlici vrednosti funkcije sile u tom i početnom položaju. Generalisana sila je jednaka parcijalnom izvodu te funkcije po dotičnoj koordinati. Funkcija sile U sa negativnim predznakom naziva se potencijalna funkcija, potencijal odnosno potencijalna energija $E_p = \Pi = - U$, pa se jednačine (1.28) mogu napisati u obliku

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_K}{\partial \dot q_i}-\frac{\partial E_K}{\partial q_i}=Q_i=\frac{\partial U}{\partial q_i}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\,;\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial E_K}{\partial \dot q_i}-\frac{\partial E_K}{\partial q_i}+\frac{\partial E_P}{\partial q_i}=0. \tag{1.32}$$

I ova funkcija zavisi od rastojanja, $\Pi=\Pi(\boldsymbol{r})$.

Višak kinetičke energije nad potencijalnom naziva se slobodna energija, kinetički potencijal ili Lagrange-ova funkcija*)

$$\mathcal{L}=E_K-E_P=E_K-\Pi=E_K+U. \tag{1.33}$$

Pošto funkcija sile zavisi samo od rastojanja, to unošenjem relacije $E_k=\mathcal{L}-U$ u Lagrange-ove jednačine (1.32) sledi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_i}(\mathcal{L}-U)-\frac{\partial}{\partial q_i}(\mathcal{L}-U)=\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=Q_i=\frac{\partial U}{\partial q_i},$$

pa se one svode na oblik

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}=0\,;\qquad i=1,2,3. \tag{1.34}$$

S obzirom na (1.16) dvostruka kinetička energija može se napisati u sledećem matričnom obliku

$$2E_K=mv^2=\sum_i\sum_K m g_{ik}\dot q_i \dot q_k=m(\dot q)\boldsymbol{G}\{\dot q\}\,;\qquad E_K=f(q_i,\dot q_i) \tag{1.35}$$

pa je, prema (1.20), generalisani impuls

*) Dinamika, čl. 11.1.

$$\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i}=m\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{V^2}{2}\right)=m\sum_K g_{iK}\dot{q}_K=m\mathbf{G}\{\dot{q}\}=p_i\ ;\quad 2E_K=\sum_i p_i\dot{q}_i=\sum_i\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\ ;\qquad (1.36)$$

koji predstavlja ili količinu kretanja ili moment količine kretanja (zamah). Kinetička energija zavisi i od generalisanih koordinata i od brzina, a potencijalna samo od generalisanih koordinata, pa su, s obzirom na Lagrange-ove jednačine (1.32), izvodi ovih energija po vremenu: $\frac{dE_K}{dt}=\sum_i\left(\frac{\partial E_K}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)$;

$$\frac{d\Pi}{dt}=\sum_i\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\dot{q}_i=\sum_i -Q_i\dot{q}_i=\sum_i\left(\frac{\partial E_K}{\partial q_i}\dot{q}_i-\dot{q}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i}\right).$$

Pošto je izvod

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i}\right)=\ddot{q}_i p_i+\dot{q}_i\dot{p}_i\ ;\qquad \dot{q}_i\dot{p}_i=\frac{d}{dt}(\dot{q}_i p_i)-\ddot{q}_i p_i$$

to je

$$\frac{d\Pi}{dt}=\sum_i\left(\frac{\partial E_K}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)-\sum_i\frac{d}{dt}(\dot{q}_i p_i)=\frac{dE_K}{dt}-2\frac{dE_K}{dt}=-\frac{dE_K}{dt}=\frac{dE_P}{dt},$$

pa je totalna mehanička energija $\boldsymbol{E}$ konstantna

$$\frac{d(E_K+E_P)}{dt}=\frac{d\boldsymbol{E}}{dt}=0\ ;\quad \boldsymbol{E}=E_K+E_P=h=const\ ;\quad E_K=h-\Pi=U+h \qquad (1.37)$$

što predstavlja zakon održanja mehaničke energije, te postoji integral energije. Ovakvo kretanje pri kome je totalna mehanička energija konstantna naziva se konzervativno, pa su i sile koje imaju funkciju sile (odnosno potencijal) konzervativne sile. One imaju i osobinu da vrednost mehaničkog rada ne zavisi od oblika putanje već samo od vrednosti funkcija sile u krajnjem i početnom položaju.

Ako postoji takva generalisana koordinata q_c da ispunjava dva uslova: 1° da kinetička energija ne zavisi eksplicitno od nje, i 2° da je generalisana sila za tu koordinatu $Q_c = 0$, onda Lagrange-ova jednačina (1.32), s obzirom na (1.36), daje integral

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_K}{\partial \dot q_c} - \frac{\partial E_K}{\partial q_c} = Q_c; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial E_K}{\partial \dot q_c} = \dot p_c = 0; \quad p_c = const \tag{1.38}$$

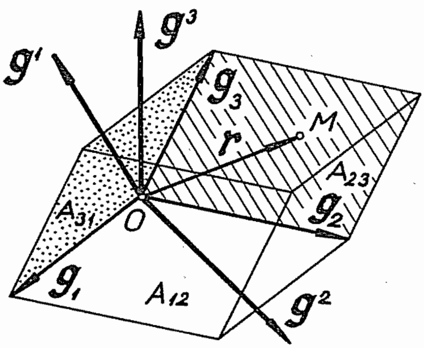
koji se naziva ciklički integral. Takva koordinata naziva se ciklička koordinata, pa njoj, dakle, odgovara konstantni generalisani impuls.

Naprimer, u slučaju planetskog kretanja pod uticajem privlačne sile $\mathbf{F} = -c\mathbf{r}$, koordinata φ je ciklička ($q_c = \varphi$), pa ciklički integral predstavlja integral površine; naime, sektorska brzina je konstantna, jer je

$$2E_K = m(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2); \; Q_\varphi = 0; \; \frac{d}{dt}(mr^2\dot\varphi) = 0; \; p_c = mr^2\dot\varphi = const; \; 2\dot S_z = r^2\dot\varphi = C = const.$$

Diferencijalna jednačina kretanja je: $\quad m(\ddot r - r\dot\varphi^2) = -cr.$

1.5. Krivolinijske (generalisane) koordinate brzine i ubrzanja. - Tri vektora $\mathbf{g}_i$, $i = 1, 2, 3$, sa zajedničkim početkom O a koji ne leže u jednoj ravni obrazuju trijedar osnovnih (baznih) vektora (slika 1.3). Oni, uopšte uzev nisu jedinični vektori, $\mathbf{e}_i = \mathbf{g}_i/|\mathbf{g}_i|$; $|\mathbf{g}_i| \neq 1$; $|\mathbf{e}_i| = 1$. Dva sistema baznih vektora $\mathbf{g}_i$ i $\mathbf{g}^i$, $i = 1, 2, 3$, sa zajedničkim početkom O koji nisu komplanarni zovu se recipročni ili konjugovani ako su vektori drugog sistema ($\mathbf{g}^i$) upravni na stranicama kosouglog paralelepipeda koga obrazuju osnovni vektori prvog sistema ($\mathbf{g}_i$), i obratno. Vektor položaja tačke M, $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, može se jednoznačno razložiti u komponente u pravcima osnovnih vektora prema Gibbs-ovom obrascu*). Pošto je dupli vektorski proizvod



Slika 1.3.

$$\mathbf{v} = [[\mathbf{r}\mathbf{g}_1][\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3]] = [\mathbf{a}[\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3]]; \quad \mathbf{v} = [[\mathbf{r}\mathbf{g}_1]\mathbf{b}] = -[\mathbf{b}[\mathbf{r}\mathbf{g}_1]] = [\mathbf{b}[\mathbf{g}_1\mathbf{r}]],$$

jedan isti vektor $\mathbf{v}$ to se razvijanjem i izjednačenjem dobija:

*) Statika, Dodatak, čl. 16.

$$v=g_2(g_3,a)-g_3(g_2,a)=g_1(r,b)-r(g_1,b)=g_1(r,b)-r\Delta;\quad \Delta=(g_1[g_2,g_3])\neq 0$$

odnosno, posle permutovanja mesta osnovnih vektora u vektorskim proizvodima

$$r=\frac{1}{\Delta}(r[g_2,g_3])g_1+\frac{1}{\Delta}(r[g_3,g_1])g_2+\frac{1}{\Delta}(r[g_1,g_2])g_3 = \\ =(r,g^1)g_1+(r,g^2)g_2+(r,g^3)g_3 \tag{1.39}$$

gde su osnovni vektori recipročnog trijedra:

$$g^1=\frac{1}{\Delta}[g_2,g_3];\quad g^2=\frac{1}{\Delta}[g_3,g_1];\quad g^3=\frac{1}{\Delta}[g_1,g_2];\quad \Delta=(g_1[g_2,g_3]) \tag{1.40}$$

a $\Delta\neq 0$, pošto su osnovni vektori nekomplanarni.

Pošto je trijedar osnovnih vektora g_i recipročan trijedru vektora g^i, to se vektor r može takodje jednoznačno razložiti u tri komponente u pravcima osa novog trijedra (g^i), pa će biti:

$$r=(r,g_1)g^1+(r,g_2)g^2+(r,g_3)g^3 \tag{1.41}$$

gde su sada osnovni vektori g_i izraženi pomoću recipročnih:

$$g_1=\frac{1}{\Delta^*}[g^2,g^3];\quad g_2=\frac{1}{\Delta^*}[g^3,g^1];\quad g_3=\frac{1}{\Delta^*}[g^1,g^2];\quad \Delta^*=(g^1[g^2,g^3])=\frac{1}{\Delta}. \tag{1.42}$$

Iz (1.39) i (1.41) vidi se da se vektor r može izraziti svojim komponentama u odnosu na oba trijedra osnovnih vektora. Skalarni proizvodi vektora r sa osnovnim vektorima jesu njegove koordinate u odnosu na trijedre

$$x^i=(r,g^i);\qquad x_i=(r,g_i);\qquad i=1,2,3, \tag{1.43}$$

i nazivaju se kontravarijantne (x^i) odnosno kovarijantne (x_i) koordinate vektora položaja r odnosno tačke M u tom prostoru.*) Prema tome biće

$$r=x^1g_1+x^2g_2+x^3g_3=\sum_i x^ig_i=x^ig_i;\qquad r=\sum_i x_ig^i=x_ig^i \tag{1.44}$$

ako se primeni Einstein-ova konvencija o sabiranju: "U svakom izrazu gde se isti indeks pojavljuje dva puta, jednom kao gornji a jednom kao donji, podrazumeva se sabiranje po tome indeksu". Ovi su indeksi nemi, prividni ili anonimni (dummy); u protivnom ako se ne pojavljuju po dva puta oni su slobodni.

*) Kontravarijantne koordinate imaju prirodu komponenata vektora, a kovarijantne prirodu projekcija vektora.

Kod pravouglog trijedra Oxyz ($Ox_1x_2x_3$) osnovni vektori $\mathbf{g}_i$ su jedinični vektori ($\mathbf{i}_i$), pa je trijedar sam sebi recipročan, te nema razlike izmedju ovih koordinata tačke ($x^i = x_i = x_{(i)}$).

Ako se uvedu generalisane kontravarijantne koordinate q^i, onda su transformacione formule $x^i = x^i(q^k)$, i obratno $q^i = q^i(x^k)$, pa su $\mathbf{g}_i$ osnovni (bazični) vektori kovarijantne vektorske baze, te su relacije

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i = \mathbf{g}_i\, dq^i; \qquad ds^2 = (d\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_k) dq^i dq^k = g_{ik}\, dq^i dq^k. \quad (1.45)$$

Koeficijenti metričke forme g_{ik} su kao skalarni proizvodi simetrični $g_{ik} = g_{ki}$, zavise od koordinata, pa u potpunosti odredjuju metričku formu (ds^2), te su elementi simetričnog tenzora drugog reda dvaput kovarijantnog, pošto su dq^i i dq^k kontravarijantni vektori. Ovaj se tenzor naziva metrički tenzor. Njemu odgovara simetrična kvadratna matrica $\mathbf{G}$ (1.12), pa je $\det \mathbf{G} = \det (g_{ik}) = |g_{ik}| > 0$, jer je ds^2 uvek pozitivna kvadratna forma.

Metričkom tenzoru (g_{ik}) sa matricom $\mathbf{G}$ može se pridružiti i recipročni tenzor sa elementima g^{ik} i matricom $\mathbf{G}^{-1}$, inverznom prvoj. Stoga se ovi elementi odredjuju po obrascu

$$g^{ik} = K^{ki}/|g_{ik}|; \qquad \mathbf{G}^{*} = \mathbf{G}^{-1} = (g^{ik}); \qquad |\mathbf{G}|\cdot|\mathbf{G}^{-1}| = |g_{ik}|\cdot|g^{ik}| = 1 \quad (1.46)$$

gde je K^{ki} kofaktor elementa g_{ik} determinante matrice $\mathbf{G}$ pa ovi elementi čine kontravarijantni tenzor drugog reda. I ovaj je tenzor simetričan, te je $g^{ik} = g^{ki}$. Njima odgovaraju osnovni vektori $\mathbf{g}^i$ koji čine kontravarijantnu vektorsku bazu za sistem koordinata q^i. Tako je

$$g_{ik} = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_k); \; g^{ik} = (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^k); \; \mathbf{g}^i = g^{ik}\mathbf{g}_k = g^{i1}\mathbf{g}_1 + g^{i2}\mathbf{g}_2 + g^{i3}\mathbf{g}_3; \; \mathbf{g}_i = g_{ik}\mathbf{g}^k; \; (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_k) = \delta^i_k \quad (1.47)$$

gde je δ^i_k Kronecker-ov delta simbol koji ima vrednost 1 za $i = k$, i 0 kada je $i \neq k$.

Kod pravouglog generalisanog sistema su

$$g_{ii} = (A_i)^2; \quad g^{ii} = 1/(A_i)^2; \quad g_{ik} = 0; \quad g^{ik} = 0 \quad za \quad i \neq k. \quad (1.48)$$

Iz (1.45) delenjem sa dt dobijaju se, s obzirom na (1.47) sledeće vrednosti kontravarijantnih (v^i) i kovarijantnih (v_i) koordinata brzine *):

$$\mathbf{v}=\dot{q}^i\mathbf{g}_i=v^i\mathbf{g}_i=\dot{q}^K g_{iK}\,\mathbf{g}^i=v_i\mathbf{g}^i;\quad v^i=\dot{q}^i;\quad v_i=g_{iK}\dot{q}^K=g_{iK}v^K. \tag{1.49}$$

Dakle, kontravarijantne koordinate brzine jednake su generalisanim brzinama, a kovarijantne su proporcionalne njima. Obe ove vrste brzina nemaju uopšte uzev fizičke dimenzije brzina, te se stoga uvode i fizičke koordinate brzine. One su ustvari projekcije vektora brzine na ose generalisanog sistema i stoga imaju uvek dimenziju i jedinicu brzine [m/sec]. Dakle, biće fizičke koordinate:

$$V_{(M)}=(\mathbf{v},\mathbf{t}_M)=\frac{1}{A_M}(\mathbf{v},\mathbf{g}_M)=\frac{v_M}{A_M}=\frac{1}{A_M}g_{KM}v^K;\quad V_{(M)}=A_M v^M \text{ za } i=K=M, \tag{1.50}$$

gde se sabiranje ne vrši po indeksu M = 1, 2, 3.

Analogno brzini mogu se i kod ubrzanja dati pored fizičkih koordinata (1.23) još i kontravarijantne i kovarijantne koordinate. Iz (1.49) diferenciranjem se dobija ubrzanje

$$\mathbf{a}=\dot{\mathbf{v}}=\ddot{q}^i\mathbf{g}_i+\frac{\partial\mathbf{g}_i}{\partial q^j}\dot{q}^i\dot{q}^j=a_K\mathbf{g}^K=a^p\mathbf{g}_p. \tag{1.51}$$

Skalarnim množenjem osnovnim vektorom $\mathbf{g}_k$ dobija se kovarijantna koordinata ubrzanja

$$a_K=(\mathbf{a},\mathbf{g}_K)=g_{iK}\ddot{q}^i+\left(\frac{\partial\mathbf{g}_i}{\partial q^j},\mathbf{g}_K\right)\dot{q}^i\dot{q}^j=g_{iK}\ddot{q}^i+\Gamma_{ij,K}\dot{q}^i\dot{q}^j, \tag{1.52}$$

gde je uveden Chirstoffel-ov simbol prve vrste ("srednja zagrada")

$$\Gamma_{ij,K}=\Gamma_{ji,K}=[ij,K]=\left(\frac{\partial\mathbf{g}_i}{\partial q^j},\mathbf{g}_K\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{jK}}{\partial q^i}+\frac{\partial g_{Ki}}{\partial q^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^K}\right]. \tag{1.53}$$

On se dobija na ovaj način. S obzirom na osobinu parcijalnog izvoda

$$\partial\mathbf{g}_i/\partial q^K=\partial^2\mathbf{r}/\partial q^i\partial q^K=\partial^2\mathbf{r}/\partial q^K\partial q^i=\partial\mathbf{g}_K/\partial q^i;$$

---

*) Kinematika, Dodatak, čl. 3.6.

sabiranjem dveju relacija $\frac{\partial}{\partial q^i}(\mathbf{g}_j,\mathbf{g}_k) = \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} = \left(\frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial q^i},\mathbf{g}_k\right) + \left(\mathbf{g}_j,\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial q^i}\right);$

$$\frac{\partial}{\partial q^j}(\mathbf{g}_k,\mathbf{g}_i) = \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} = \left(\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial q^j},\mathbf{g}_i\right) - \left(\mathbf{g}_k,\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial q^j}\right),$$

i oduzimanjem od tog zbira treće relacije

$$\frac{\partial}{\partial q^k}(\mathbf{g}_i,\mathbf{g}_j) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = \left(\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial q^k},\mathbf{g}_j\right) + \left(\mathbf{g}_i,\frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial q^k}\right) = \left(\mathbf{g}_j,\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial q^i}\right) + \left(\mathbf{g}_i,\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial q^j}\right),$$

koristeći i osobinu komutativnosti skalarnog proizvoda vektora.

Kontravarijantne koordinate su:

$$a^p = (\mathbf{a},\mathbf{g}^p) = g^{kp}a_k = g^{kp}g_{ik}\ddot{q}^i + g^{kp}\Gamma_{ij,k}\dot{q}^i\dot{q}^j = \delta^p_i\ddot{q}^i + \Gamma^p_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j,$$

odnosno

$$a^p = (\mathbf{a},\mathbf{g}^p) = \ddot{q}^p + \Gamma^p_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j, \qquad (1.54)$$

pošto je $g^{kp}g_{ik} = \delta^p_i$ i $\delta^p_i\ddot{q}^i = \ddot{q}^p$ a uveden je i Christoffel-ov simbol druge vrste ("velika zagrada")

$$\Gamma^p_{ij} = \Gamma^p_{ji} = \left\{ {p \atop ij} \right\} = g^{pk}\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}g^{pk}\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right];$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial q^j} = \Gamma^p_{ij}\mathbf{g}_p \qquad (1.55)$$

Izmedju ovih koordinata postoje relacije kao i kod brzina (1.49), to jest:

$$a_i = g_{ik}a^k \quad ; \quad a^i = g^{ik}a_k. \qquad (1.56)$$

Fizičke koordinate se odredjuju po obrascu (1.23) odnosno analogno obrascima za brzine (1.50), pa su za neki pravac M:

$$a_{(M)} = (\mathbf{a},\mathbf{t}_{(M)}) = a_M/A_M \,; \quad a_{(M)} = A_M a^M \qquad M=1,2,3, \qquad (1.57)$$

a sabiranje se ne vrši po indeksu M.

Analogno tablici (1.26) dobija se tablica za ubrzanja:

	Polarno-cilindrički sistem			Sferni sistem		
A_i	1	1	1	1	$\varrho\cos\psi$	ϱ
$g_{ii}=A_i^2$	1	r^2	1	1	$(\varrho\cos\psi)^2$	ϱ^2
g^{ii}	1	$1/r$	1	1	$1/(\varrho\cos\psi)^2$	$1/\varrho^2$
v^i	$\dot{r}$	$\dot{\varphi}$	$\dot{z}$	$\dot{\varrho}$	$\dot{\varphi}$	$\dot{\psi}$
v_i	$\dot{r}$	$r^2\dot{\varphi}$	$\dot{z}$	$\dot{\varrho}$	$(\varrho\cos\psi)^2\dot{\varphi}$	$\varrho^2\dot{\psi}$
$v_{(i)}$	$\dot{r}$	$r\dot{\varphi}$	$\dot{z}$	$\dot{\varrho}$	$(\varrho\cos\psi)\dot{\varphi}$	$\varrho\dot{\psi}$
$\Gamma_{ij,k}$	$\Gamma_{12,2}=r\,;\ \Gamma_{22,1}=-r$			$\Gamma_{12,2}=\varrho\cos^2\psi;\ \Gamma_{22,1}=-\varrho\cos^2\psi;\ \Gamma_{13,3}=\varrho$ $\Gamma_{33,1}=-\varrho\ ;\ \Gamma_{22,3}=\varrho\sin\psi\cos\psi=-\Gamma_{23,2}$		
Γ_{ij}^{p}	$\Gamma_{12}^{2}=\Gamma_{21}^{2}=\frac{1}{r};\ \Gamma_{22}^{1}=-r$			$\Gamma_{22}^{1}=-\varrho\cos^2\psi;\ \Gamma_{33}^{1}=-\varrho\ ;\ \Gamma_{12}^{2}=\Gamma_{13}^{3}=\frac{1}{\varrho}$ $\Gamma_{23}^{2}=-\mathrm{tg}\,\psi\ ;\ \Gamma_{22}^{3}=\sin\psi\cos\psi$		
$a_{(i)}$	a_r	a_c	a_z	a_ϱ	a_c	a_ν
$a^i=a_{(i)}/A_i$	a_r	a_c/r	a_z	a_ϱ	$a_c/\varrho\cos\psi$	a_ν/ϱ
$a_i=a_{(i)}A_i$	a_r	$a_c r$	a_z	a_ϱ	$(\varrho\cos\psi)a_\varrho$	ϱa_ν

(1.58)

1.6. Kovarijantne i kontravarijantne jednačine kretanja. – Iz (1.52) množenjem masom m slede jednačine

$$ma_k=m(g_{ik}\ddot{q}^i+\Gamma_{ij,k}\dot{q}^i\dot{q}^j)=m(\mathbf{a},\mathbf{g}_k)=(\mathbf{F},\mathbf{g}_k)=Q_k\,. \quad (1.59)$$

One predstavljaju kovarijantne jednačine kretanja a Q_k su kovarijantne generalisane sile. Ako su X_i koordinate sile $\mathbf{F}$ u Dekartovom trijedru $Ox_1x_2x_3$ onda je generalisana sila

$$Q_k=(\mathbf{F},\mathbf{g}_k)=X_1\frac{\partial x^1}{\partial q^k}+X_2\frac{\partial x^2}{\partial q^k}+X_3\frac{\partial x^3}{\partial q^k}=X_j\frac{\partial x^j}{\partial q^k}\,. \quad (1.60)$$

Analogno se dobijaju i kontravarijantne jednačine kretanja iz (1.54)

$$ma^p=m(\ddot{q}^p+\Gamma_{ij}^{p}\dot{q}^i\dot{q}^j)=Q^p, \quad (1.61)$$

gde je Q^p kontravarijantna generalisana sila

$$Q^{p}=(\mathbf{F},\mathbf{g}^{p})=(\mathbf{F},g^{kp}\mathbf{g}_{k})=(\mathbf{F},\mathbf{g}_{k})g^{kp}=g^{kp}Q_{k}. \qquad (1.62)$$

Lagrange-ove jednačine druge vrste (1.28) jesu kovarijantne jednačine. Ovo se može dokazati na ovaj način. Iz izraza za kinetičku energiju (1.35) sledi:

$$2E_k=mv^2=mg_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k=mg_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k; \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^i}=mg_{ik}\dot{q}^k; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^i}=mg_{ik}\ddot{q}^k+$$

$$+m\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\dot{q}^j\dot{q}^k=mg_{ik}\ddot{q}^k+2m\Gamma_{ij,k}\dot{q}^j\dot{q}^k; \quad \frac{\partial E_k}{\partial q^i}=\frac{1}{2}m\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}\dot{q}^j\dot{q}^k-m\Gamma_{ji,k}\dot{q}^j\dot{q}^k;$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial E_k}{\partial q^i}=m\left[g_{ik}\ddot{q}^k+(2\Gamma_{ij,k}-\Gamma_{ij,k})\dot{q}^j\dot{q}^k\right]=m\left[g_{ik}\ddot{q}^k+\Gamma_{ij,k}\dot{q}^j\dot{q}^k\right]=Q_i,$$

jer je*)

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}=\frac{\partial}{\partial q^i}(\mathbf{g}_j,\mathbf{g}_k)=\left(\frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial q^i},\mathbf{g}_k\right)+\left(\mathbf{g}_j,\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial q^i}\right)=\Gamma_{ji,k}+\Gamma_{ki,j}=\Gamma_{ij,k}+\Gamma_{ik,j},$$

pošto se sabiranje vrši po indeksima j i k.

Uobičajeno je da se jednačine (1.59) i (1.61) pišu prema koordinatama q^i, pa će biti:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial E_k}{\partial q^i}=m\left[g_{ik}\ddot{q}^k+\Gamma_{jk,i}\dot{q}^j\dot{q}^k\right]=Q_i; \qquad (1.63)$$

$$m(\ddot{q}^i+\Gamma^i_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k)=Q^i. \qquad (1.64)$$

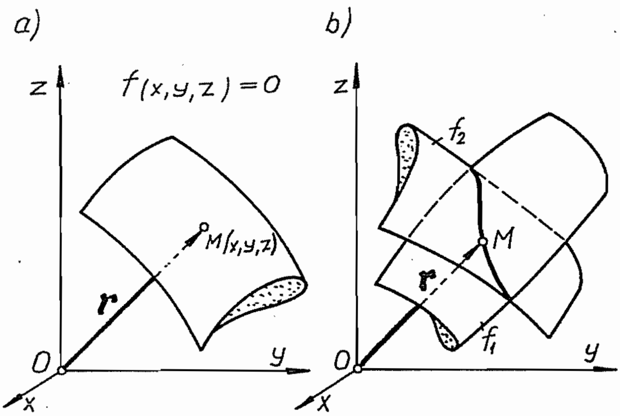
---

*) $\Gamma_{ij,k}+\Gamma_{ik,j}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}+\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}+\frac{\partial g_{ji}}{\partial q^k}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\right]=\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}.$

2. PRINUDNA KRETANJA MATERIJALNIH SISTEMA. VEZE.

2.1. Prinudno kretanje materijalne tačke. - Kada na materijalnu tačku mase m dejstvuje rezultanta sila $\mathbf{F}$, ona se kreće u prostoru slobodno prema drugom Newton-ovom zakonu, $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$. Njeno kretanje je, dakle, odredjeno samo tom silom ($\mathbf{F}$) i početnim uslovima kretanja (početnim položajem $\mathbf{r}_o$ i početnom brzinom $\mathbf{v}_o$ u početnom vremenu t_o). Može se pomoću materijalnih tela ograničiti sloboda kretanja tačke, pa je tada njeno kretanje neslobodno, odnosno prinudno. Materijalno telo koje ograničava slobodu kretanja naziva se veza ili prinuda, pa je tačka prinudjena da se kreće po toj vezi, stoga je neslobodna (vezana).

Veze koje ograničavaju neposredno položaj. tačke, a samim time i posredno njenu brzinu zovu se geometrijske, konačne ili prema Hertzu holonomne*).



Slika 2.1.

Veza $f(x,y,z) = 0$ zahteva da se za svo vreme kretanja tačka kreće po površi (sl. 2.1.a). Veza izražena jednačinama $f_1/x,y,z/ = 0$ i $f_2(x,y,z) = 0$ zahteva da se tačka kreće po presečnoj liniji ovih površi (sl. 2.1.b).

Veza oblika $\varphi(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = 0$ ograničava brzinu ($\mathbf{v}$) pokretne tačke. Takva je veza diferencijalna, kinematička ili neholonomna. Diferencijalna je stoga što je odredjena diferencijalnim relacijama, kinetička zato što ograničava brzinu ($\mathbf{v}$) a neholomna je zato što nije holonomna. Veza $f = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ predstavlja sferu, poluprečnika R. Veza $\varphi = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0$ je samo prividno neholonomna, jer se integraljenjem

---

*) ὅλος (ceo); νόμος (zakon).

dobija prva. Zbog toga se ovakva veza zove i seminolonomna.

Veza koja se ne menja u toku vremena naziva se skleronomna ili stacionarna,*) a ona koja se menja zove se reonomna ili nestacionarna. Zbog toga se veze izražavaju matematički na ovaj način:

$$f(x,y,z)=0;\ \varphi(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z})=0;\ f(x,y,z,t)=0;\ \varphi(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t)=0. \quad (2.1)$$

Veza koja prinudjava tačku da stalno ostane na njoj naziva se dvostrana (bilateralna) ili zadržavajuća. Ona, pak, veza koja ograničava kretanje samo sa jedne strane veze i može da dozvoli da tačka napusti vezu naziva se jednostrana (unilateralna) ili nezadržavajuća. Prve se izražavaju jednačinama a druge nejednačinama:

$$f(x,y,z,t)=0;\ \varphi(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)=0;\ f(x,y,z,t)\gtrless 0;\ \varphi(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)\gtrless 0. \quad (2.2)$$

Veza (prinuda) je materijalno telo, pa je izvor sile kojom ono dejstvuje na pokretnu tačku. Ta sila je otpor ili reakcija veze ($\mathbf{F}_w$) pa se kretanje vrši prema drugom Newton-om zakonu

$$m\mathbf{a}=\mathbf{F}+\mathbf{F}_w \quad (2.3)$$

u saglasnosti sa vezama. Ako je veza oblika površi a otpor pada u pravac njene normale $\mathbf{F}_w = \mathbf{F}_{wn}$ onda se kaže da je ta veza idealna, a porvrš je glatka, u protivnom je veza neidealna, pa površ nije glatka. Kod glatke linije otpor veze pada u pravac njene glavne normale. Za neidealne veze moraju se uvesti naknadni uslovi (naprimer, Coulomb-ovi zakoni o trenju).

2.2. Materijalni sistemi i njihove veze.- Mehanički sistem materijalnih tačaka m_ν, $\nu = 1,2,\ldots, N$, naziva se takav skup tih tačaka u kome kretanje svake tačke zavisi od položaja i kretanja ostalih tačaka sistema. Položaj svake materijalne tačke m_ν odredjuje se u odnosu na neki pol (O) vektorom položaja $\mathbf{r}_\nu$. Položaj svih tačaka sistema odredjuje konfiguraciju sistema ($\sum$) kojom je odredjen i izgled (oblik) sistema. Dve su karakteristike materijalnog si-

---

*) σκληρός (nepromenljiv); ῥέω (teći).

stema: 1° njegova masa $M=\sum m_{\nu}$; $\nu=1,2,\ldots,N$, i 2° središte masa, tj. ona tačka C u kojoj smatramo da je sažeta celokupna masa sistema, odredjena relacijom $\boldsymbol{r}_C=\left[\sum_{\nu}(m_{\nu}\boldsymbol{r}_{\nu})\right]/M$.

Kada se materijalne tačke kreću onda relacije

$$\boldsymbol{r}_{\nu}=\boldsymbol{r}_{\nu}(t) \tag{2.4}$$

predstavljaju konačne vektorske jednačine kretanja sistema. Njih ima N koliko i materijalnih tačaka. Pri kretanju menja se i konfiguracija pa je $\sum=\sum(t)$. Skalarne jednačine kretanja zavise od izbora koordinatnog sistema. Kako svakoj tački u prostoru odgovara po tri koordinate to ih je ukupno 3N, pa će biti

$$x_{\nu}=x_{\nu}(t);\ y_{\nu}=y_{\nu}(t);\ z_{\nu}=z_{\nu}(t);\quad q^k_{(\nu)}=q^k_{(\nu)}(t);\qquad \begin{matrix}k=1,2,3;\\ \nu=1,2,\ldots,N.\end{matrix} \tag{2.5}$$

Sistem se naziva slobodan ako se njegove materijalne tačke kreću slobodno bez ograničenja njihovih položaja i brzina. Konfiguracija ovakvog sistema odredjena je sa n = 3N medjusobno nezavisnih parametara, tzv. koordinata sistema, te stoga sistem ima 3N stepeni slobode kretanja. U protivnom kada su položaji i brzine tačaka sistema ograničeni vezama (prinudama) sistem je neslobodan (vezan), pa mu je kretanje prinudno u skladu sa vezana kojima je podčinjen.

Kao i kod jedne materijalne tačke (čl. 2.1) ove veze mogu biti:

1. dvostrane (bilateralne, zadržavajuće) i jednostrane (unilateralne, nezadržavajuće);
2. konačne (geometrijske, holonomne) i diferencijalne (kinematičke, neholonomne), i
3. stacionarne (skleronomne) i nestacionarne (reonomne).

U opštem slučaju sistem može biti ograničen konačnim i diferencijalnim vezama oblika

$$f_{\alpha}(\boldsymbol{r}_{\nu},t)=f(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_{\nu},\ldots\boldsymbol{r}_N;t)=0;\quad \alpha=1,2,\ldots,h; \tag{2.6}$$
$$\varphi_{\beta}(\boldsymbol{r}_{\nu},\dot{\boldsymbol{r}}_{\nu}=\boldsymbol{v}_{\nu},t)=\varphi_{\beta}(\boldsymbol{r}_1\ldots,\boldsymbol{r}_N;\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_N;t)=0;\quad \beta=1,2,\ldots,l.$$

Konačne veze $f_\alpha(\mathbf{r}_\nu, t)$ dejstvuju tako da sistem ne može u svakom trenutku da zauzima proizvoljan položaj u prostoru, a diferencijalne veze φ_β ograničavaju brzine pojedinih tačaka sistema. Sloboda sistema ograničena je sa h + l ovih veza, te je stepen slobode kretanja sistema s = n = 3N - (h + l), pa je potrebno n međjusobno nezavisnih parametara - koordinata - za opisivanje ovog prinudnog kretanja. Broj veza (h + l) mora biti manji od 3N, jer u protivnom kretanje ne bi bilo moguće.

Može se dogoditi da se jedna ili više diferencijalnih veza (2.7) dobijaju kao rezultat diferenciranja neke funkcije koja ne zavisi od brzine $\Phi(\mathbf{r}_\nu, t) = C = \text{const}$, pa je takva veza integrabilna, te je semiholonomna, i uvrštava se u holonomne veze. Sistemi podvrgnuti konačnim i diferencijalnim integrabilnim vezama, tj. holonomnim vezama, nazivaju se holonomni, a kada postoje i neholonomne veze (neintegrabilne diferencijalne veze) ili samo neholonomne veze sistem je neholonoman.

Neholonomne veze u opštem slučaju mogu da zavise od brzina na proizvoljan način, ali se u praksi upotrebljavaju samo one koje zavise linearno od brzina, tzv. linearne diferencijalne veze

$$\varphi_\beta = (\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) = \sum_\nu (\boldsymbol{\ell}_{\beta\nu}, \mathbf{v}_\nu) + D_\beta = 0; \quad \boldsymbol{\ell}_{\beta\nu} = A_{\beta\nu}\mathbf{i} + B_{\beta\nu}\mathbf{j} + C_{\beta\nu}\mathbf{k}, \tag{2.8}$$

gde su koordinate vektora $\boldsymbol{\ell}_{\beta\nu}$ funkcije koordinata i vremena t a takodje i skalarna vrednost D_β, sa pretpostavkom da svi vektori $\boldsymbol{\ell}_{\beta\nu}$ nisu jednovremeno jednaki nuli.

Skalarne jednačine veza u Dekartovom pravouglom sistemu su

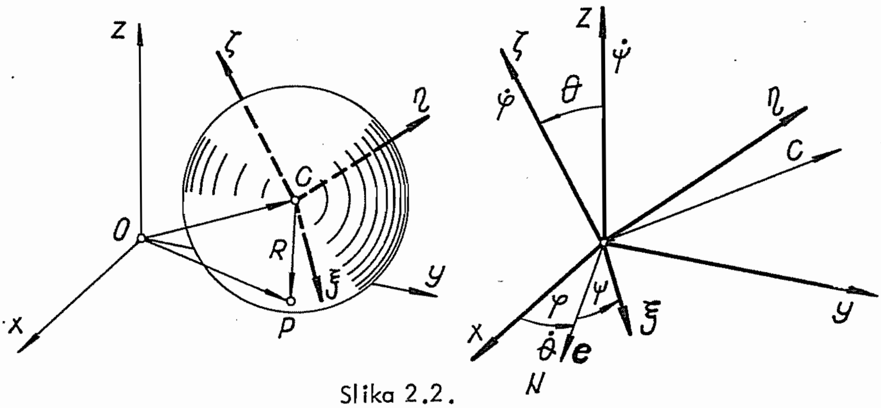
$$f_\alpha(\mathbf{r}_\nu, t) = f_\alpha(x_\nu, y_\nu, z_\nu; t) = 0; \quad \nu = 1,2,\dots,N; \; \alpha = 1,2,\dots h \tag{2.9}$$

$$\varphi_\beta(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) = \sum_{\nu=1}^{N} (A_{\beta\nu}\dot{x}_\nu + B_{\beta\nu}\dot{y}_\nu + C_{\beta\nu}\dot{z}_\nu) + D_\beta = 0; \quad \beta = 1,2,\dots,\ell. \tag{2.10}$$

Kada je N = 1 i $\alpha = 1$ tada se tačka kreće po vezi f(x,y,z,t) = 0, tj. po pokretnoj ili nepokretnoj površi. Veza je konačna, reonomna ili skleronomna.

Za N = 1 i $\alpha = 2$ kretanje je po liniji $f_1(x,y,z,t) = 0$ i $f_2(x,y,z,t) = 0$. Veza je konačna, stacionarna odnosno nestacionarna.

Dve materijalne tačke (N = 2) vezane su štapom stalne dužine ℓ, pa je veza $f_1 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - \ell^2 = 0$. Sistem je holonomno –



Slika 2.2.

skleronomni. Ako bi štap bio promenljive dužine $\ell = \ell(t)$, onda bi veza bila holonomna ali nestacionarna, pa je sistem holonomno-reonomni.

Klasičan primer neholonomne veze je kotrljanje bez klizanja sfere (lopte), poluprečnika R, po nepokretnoj ravni Oxy (slika 2.2). Uslov kotrljanja bez klizanja je da je brzina dodirne tačke P jednaka nuli, pa je

$$V_P = V_C + [\vec{\omega}, \vec{CP}] = 0; \quad \vec{OP} = \vec{OC} + \vec{CP}; \quad \vec{CP} = -R\vec{k}.$$

Euler-ove kinematičke jednačine su

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi; \\ \omega_y &= \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi; \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{aligned}$$

pa se dobijaju jednačine veza:

$$\dot{x}_C - R\omega_y = 0; \quad \dot{y}_C + R\omega_x = 0; \quad \dot{z}_C = 0.$$

Prve dve veze su neholonomne, jer se sistem tih dveju diferencijalnih jednačina ne može zameniti sistemom konačnih jednačina. Treća veza je konačna, pošto je $\dot{z}_C = 0$, te je $z_C = R = \text{const}$.

----

*) Kinematika, čl. 10.

Veza $x\dot{y} - y\dot{x} = 0$ je semiholonomna, jer je $\ln(x/y) = C = \text{const}$.

2.3. Uslovi za brzine tačaka neslobodnog sistema. – Holonomne veze ograničavaju položaje tačaka neslobodnog (vezanog) sistema, ali posredno nameću izvesne uslove i brzinama tačaka. Diferenciranjem izraza (2.9) po vremenu dobija se uslov

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \dot{f}_\alpha = \sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu}\dot{x}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\nu}\dot{y}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\nu}\dot{z}_\nu\right) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = $$
$$= \sum_{\nu=1}^{N}(\mathrm{grad}_\nu f_\alpha, \mathbf{v}_\nu) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \qquad (2.11)$$

gde je uveden delimični gradijent funkcije f_α za ν -tu tačku

$$\mathrm{grad}_\nu f_\alpha = \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu}\mathbf{i} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\nu}\mathbf{j} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\nu}\mathbf{k} = \mathrm{grad}_{\mathbf{r}_\nu} f_\alpha = \nabla_\nu f_\alpha; \quad \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}_\nu f_\alpha = 0 \qquad (2.12)$$

ili Lamé-ov diferencijalni parametar prvog reda. On se može shvatiti i kao gradijent skalarne funkcije*) f_α po vektoru položaja $\mathbf{r}_\nu$.

Ove uslove treba da zadovoljavaju brzine tačaka holonomnog materijalnog sistema. Njih ima h koliko i holonomnih veza.

Kod neholomnog sistema, uslovima (2.11) treba dodati i uslove koje brzinama nameću neholonomne veze (2.10),

$$\varphi_\beta = \sum_{\nu=1}^{N}(A_{\beta\nu}\dot{x}_\nu + B_{\beta\nu}\dot{y}_\nu + C_{\beta\nu}\dot{z}_\nu) + D_\beta = \sum_\nu (q\,\mathrm{grad}_\nu \varphi_\beta, \mathbf{v}_\nu) + D_\beta = 0, \qquad (2.13)$$

gde je uveden pojam qvazigradijenta linearne diferencijalne veze, oblika

$$q\,\mathrm{grad}_\nu \varphi_\beta = A_{\beta\nu}\mathbf{i} + B_{\beta\nu}\mathbf{j} + C_{\beta\nu}\mathbf{k}; \qquad \mathrm{rot}\,q\,\mathrm{grad}_\nu \varphi_\beta \neq 0. \qquad (2.14)$$

Ovih uslova ima ℓ , pa je ukupan broj uslova za brzine h + ℓ jednak broju konačnih i diferencijalnih veza neslobodnog sistema.

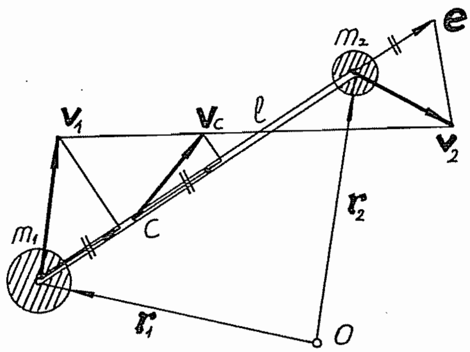
Brzine koje ispunjavaju pomenute uslove (2.11) i (2.13) zovu se moguće brzine sistema za date veze, jer su dopuštene tim vezama.

---

*) Ako je skalarna funkcija $\Phi = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ onda je

$$\mathrm{grad}_{\mathbf{a}}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial a_x}\mathbf{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial a_y}\mathbf{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial a_z}\mathbf{k} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k} = \mathbf{b}; \quad \mathrm{grad}_{\mathbf{b}}\Phi = \mathbf{a};$$
$$(\mathbf{a}, \nabla_a\Phi) = (\mathbf{b}, \nabla_b\Phi) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \Phi.$$

Naprimer, dve tačke masa m_1 i m_2, kreću se u ravni Oxy a vezane su tankim štapom dužine ℓ. Ovde su jednačina veze i uslov



Slika 2.3.

$$f=(r_2-r_1)^2-\ell^2=0;$$

$$\dot f=2(r_2-r_1)(V_2-V_1)=(\ell, V_2-V_1)=0,$$

tj. $(V_2, e)=(V_1, e)$; $\ell=\ell e$.

Uslov je da su projekcije brzina tačaka na pravac štapa jednake – tzv. brzine klizanja (sl. 2.3). Za težište je $M r_C = m_1 r_1 + m_2 r_2$, pa je $M V_C = m_1 V_1 + m_2 V_2$, te je $M(V_C, e) = m_1 (V_1, e) + m_2 (V_2, e) = (m_1 + m_2)(V_1, e)$, tj. $(V_C, e) = (V_1, e) = (V_2, e)$.

2.4. Uslov za ubrzanja tačaka neslobodnog sistema. – Diferenciranjem izraza (2.11) po vremenu dobija se uslov za ubrzanje pri holonomnim vezama

$$\frac{d^2 f_\alpha}{dt^2}=\sum_{\nu=1}^{N}(\mathrm{grad}_\nu f_\alpha, a_\nu)+D_2 f_\alpha=0; \qquad \alpha=1,2,\dots,h \tag{2.15}$$

gde je uvedena funkcija $D_2 f_\alpha = \sum_{\nu=1}^{N}\left(V_\nu, \frac{d}{dt}\mathrm{grad}_\nu f_\alpha\right)+\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} =$

$$=\sum_{\nu=1}^{N}\Big[\dot x_\nu \sum_{r=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_\nu \partial x_r}\dot x_r+\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_\nu \partial y_r}\dot y_r+\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_\nu \partial z_r}\dot z_r\right)+$$

$$+\dot y_\nu\left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial y_\nu \partial x_r}\dot x_r+\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial y_\nu \partial y_r}\dot y_r+\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial y_\nu \partial z_r}\dot z_r\right)+$$

$$+\dot z_\nu\left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial z_\nu x_r}\dot x_r+\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial z_\nu \partial y_r}\dot y_r+\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial z_\nu \partial z_r}\dot z_r\right)+ \tag{2.16}$$

$$+2\left(\dot x_\nu\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_\nu \partial t}+\dot y_\nu\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial y_\nu \partial t}+\dot z_\nu\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial z_\nu \partial t}\right)\Big]+\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t^2}.$$

Funkcija $D_2 f_\alpha$ je kvadratna funkcija u pogledu koordinata brzina. Kada je veza $f_\alpha(\mathbf{r}_\nu)=0$ stacionarna, tada je funkcija $D_2 f_\alpha$ homogena kvadratna forma.

Diferenciranjem izraza (2.10) dobija se uslov za ubrzanje u slučaju neholonomnih veza

$$\frac{d\varphi_\beta}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N}(\boldsymbol{\ell}_{\beta\nu}, \mathbf{a}_\nu) + D_2\varphi_\beta = \sum_{\nu=1}^{N}(A_{\beta\nu}\ddot{x}_\nu + B_{\beta\nu}\ddot{y}_\nu + C_{\beta\nu}\ddot{z}_\nu) + D_2\varphi_\beta = 0, \tag{2.17}$$

gde je uvedena funkcija $D_2\varphi_\beta = \sum_{\nu=1}^{N}\left(\mathbf{v}_\nu, \frac{d}{dt}\boldsymbol{\ell}_{\beta\nu}\right) + \frac{d}{dt}D_\beta =$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\nu=1}^{N}\Bigg[\dot{x}_\nu \sum_{r=1}^{N}\left(\frac{\partial A_{\beta\nu}}{\partial x_r}\dot{x}_r + \frac{\partial A_{\beta\nu}}{\partial y_r}\dot{y}_r + \frac{\partial A_{\beta\nu}}{\partial z_r}\dot{z}_r + \frac{\partial A_{\beta\nu}}{\partial t}\right) + \\
&+ \dot{y}_\nu \sum_{r=1}^{N}\left(\frac{\partial B_{\beta\nu}}{\partial x_r}\dot{x}_r + \frac{\partial B_{\beta\nu}}{\partial y_r}\dot{y}_r + \frac{\partial B_{\beta\nu}}{\partial z_r}\dot{z}_r + \frac{\partial B_{\beta\nu}}{\partial t}\right) + \\
&+ \dot{z}_\nu \sum_{r=1}^{N}\left(\frac{\partial C_{\beta\nu}}{\partial x_r}\dot{x}_r + \frac{\partial C_{\beta\nu}}{\partial y_r}\dot{y}_r + \frac{\partial C_{\beta\nu}}{\partial z_r}\dot{z}_r + \frac{\partial C_{\beta\nu}}{dt}\right) + \\
&+ \left(\frac{\partial D_\beta}{\partial x_\nu}\dot{x}_\nu + \frac{\partial D_\beta}{\partial y_\nu}\dot{y}_\nu + \frac{\partial D_\beta}{\partial z_\nu}\dot{z}_\nu\right)\Bigg] + \frac{\partial D_\beta}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

I ova funkcija $D_2\varphi_\beta$ je kvadratna u odnosu na koordinatne brzina tačaka sistema. Ako su linearne diferencijalne veze stacionarne i homogene, tj. oblika $\varphi_\beta(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu) = \sum_\nu(\boldsymbol{\ell}_{\beta\nu}, \mathbf{v}_\nu) = 0$, onda je funkcija $D_2\varphi_\beta$ homogena kvadratna forma brzina.

Ukupan broj uslova za ubrzanja u najopštijem slučaju sistema za holonomnim i neholonomnim vezama je h + 1 koliko ima i veza.

Ubrzanja koja zadovoljavaju pomenute uslove nazivaju se moguća ubrzanja za taj sistem veza, jer su dopuštena tim vezama.

2.5. Moguća i virtualna pomeranja. – Sistem malih pomeranja $d\mathbf{r}_\nu = \mathbf{v}_\nu dt$, gde su $\mathbf{v}_\nu$ moguće brzine, zove se sistem mogućih pomeranja koje veze dopuštaju. Iz uslova za brzine (2.11) i (2.13) množenjem sa dt dobijaju se sledeći uslovi za moguća pomeranja

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\mathrm{grad}_\nu f_\alpha , d\mathbf{r}_\nu) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0; \tag{2.19}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{\ell}_{\beta\nu}, d\mathbf{r}_\nu) + D_\beta dt = \sum_{\nu=1}^{N} (A_{\beta\nu} dx_\nu + B_{\beta\nu} dy_\nu + C_{\beta\nu} dz_\nu) + D_\beta dt = 0. \tag{2.20}$$

I ovih uslova ima $h + \ell$ koliko ima holonomnih i neholonomnih veza.

Ako u jednom položaju sistema i u datom trenutku (t) postoje dva sistema mogućih pomeranja $d\mathbf{r}_\nu = \mathbf{v}_\nu\, dt$ i $d\bar{\mathbf{r}}_\nu = \bar{\mathbf{v}}_\nu\, dt$, ona moraju zadovoljiti uslove (2.19):

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\mathrm{grad}_\nu f_\alpha , d\bar{\mathbf{r}}_\nu) - (\partial f_\alpha / \partial t) dt = 0; \quad \sum_{\nu} (\mathrm{grad}_\nu f_\alpha , d\mathbf{r}_\nu) + (\partial f_\alpha / \partial t) dt = 0,$$

i (2.20)

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{\ell}_{\beta\nu} , d\bar{\mathbf{r}}_\nu) + D_\beta dt = 0; \qquad \sum_{\nu} (\boldsymbol{\ell}_{\beta\nu} , d\mathbf{r}) + D_\beta dt = 0 .$$

Razlika dva moguća pomeranja naziva se <u>virtualno pomeranje</u>

$$\delta \mathbf{r}_\nu = d\bar{\mathbf{r}}_\nu - d\mathbf{r}_\nu \tag{2.21}$$

i ono, s obzirom na prethodne relacije, zadovoljava sledeće jednačine

$$\sum_{\nu} (\mathrm{grad}_\nu f_\alpha , \delta \mathbf{r}_\nu) = \sum_{\nu} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu} \delta x_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\nu} \delta y_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\nu} \delta z_\nu \right) = 0; \quad \alpha = 1,\dots,h; \tag{2.22}$$

$$\sum_{\nu} (\boldsymbol{\ell}_{\beta\nu} , \delta \mathbf{r}_\nu) = \sum_{\nu} (q\, \mathrm{grad}_\nu \varphi_\beta , \delta \mathbf{r}_\nu) =$$
$$= \sum_{\nu} (A_{\beta\nu} \delta x_\nu + B_{\beta\nu} \delta y_\nu + C_{\beta\nu} \delta z_\nu) = 0; \qquad \beta = 1,\dots,\ell, \tag{2.23}$$

gde su δx_ν, δy_ν, δz_ν <u>komponentna virtualna pomeranja</u> (ili <u>varijacije</u>).

Sistem vektora $\delta \mathbf{r}_\nu$ koji zadovoljava jednačine (2.22) i (2.23) predstavlja <u>sistem virtualnih pomeranja</u>.

Ako su konačne veze stacionarne, $f_\alpha(\mathbf{r}_\nu) = 0$, te je $\partial f_\alpha / \partial t = 0$, a diferencijalne veze homogene, to jest $D_\beta = 0$, onda su jednačine (2.22) i (2.23) identične sa jednačinama (2.19) i (2.20), pa se virtualna pomeranja poklapaju sa mogućim pomeranjima koje veze dopuštaju, $\delta \mathbf{r}_\nu = d\,\mathbf{r}_\nu$. Ovakve se veze "zamrznute", pošto se vreme fiksira, pa se holonomna veza javlja stacionarnom (fiksnom), te je $\partial f_\alpha / \partial t = 0$. Zamrzavanje kod neholonomne veze uslovljava njenu homogenost ($D_{\beta'} = 0$), i fiksiranje vremena (t) koje eksplicitno ulazi u koeficijente vektora $\boldsymbol{\ell}_{\beta\nu}$. Dakle, veze su stacionarne, pa se može reći "da se pri stacionarnim vezama virtualna pomeranja poklapaju sa mogućim". Virtualna pomeranja (varijacije) mogu se shvatiti kao pomeranja tačaka sistema iz jednog mogućeg položaja u datom trenutku (t) u drugi beskrajno bliski mogući položaj u istom tom vremenskom trenutku.

Naprimer, pri kretanju tačke po nepokretnoj površi $f(x,y,z) = 0$, zbog stacionarnosti je $\delta \mathbf{r}_\nu = d\mathbf{r}_\nu$, pa je virtualno pomeranje jedno od mogućih pomeranja. Pošto grad f pada u pravac normale površi, to su ova pomeranja u tangencijalnoj ravni površi. Medjutim, kada je veza pokretna, $f(x,y,z,t)=0$, tada je apsolutna brzina vektorski zbir relativne i prenosne brzine, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_p$, pa je moguće pomeranje $d\mathbf{r} = \mathbf{v}_a dt$, dok je virtualno pomeranje $\delta \mathbf{r}$ u tangencijalnoj ravni površi kao da je ona "zamrznuta", tj. zamišljena da je zaustavljena.

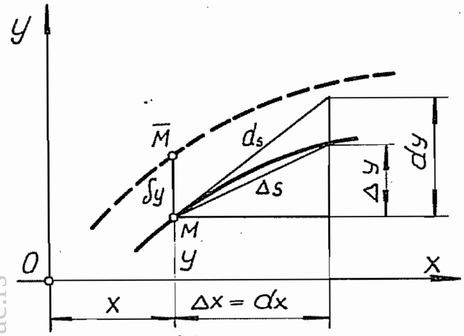
Ako je $h + \ell$ broj veza čije su jednačine nezavisne, onda izmedju 3N koordinatnih varijacija δx_ν, δy_ν, δz_ν postoji samo $n = 3N - (h + l)$ nezavisnih, gde je n broj stepeni slobode kretanja materijalnog sistema.

Naprimer, tačka se kreće po nepokretnoj sferi $f = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$, pa iz uslova

$$(\text{grad } f, \delta \mathbf{r}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta z = 2(x\delta x + y\,\delta y + z\delta z) = 0$$

sledi da su dve varijacije nezavisne a treća je zavisna, $\delta z = -(x\,\delta x + y\,\delta y)/z$, pod uslovom da $z \neq 0$, te tačka ima dva stepena slobode kretanja.

2.6. Varijacija funkcije.- Funkcija $y = y(x)$, gde je x nezavisno promenljiva, predstavlja u Oxy ravni krivu (slika 2.4). Priraštaji Δx, Δy, Δs računati u odnosu na sečicu nazivaju se diferencije, a priraštaji $dx = \Delta x$, $dy = f'(x)\,dx$ i $ds = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$ računati po tangenti jesu diferencijali. Medjutim, kada se umesto krive $y = y(x)$ uzme nova kriva odredjena funkcijom



Slika 2.4.

$\overline{y} = y(x) + \varepsilon\eta(x)$, gde je ε proizvoljni mali broj a η (x) proizvoljna diferencijabilna funkcija od x, onda se priraštaj ordinate (y) usled promene oblika same funkcije naziva prva (prosta) varijacija funkcije ili samo varijacija funkcije

$$\delta y = \overline{y}(x) - y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x) - y(x) = \varepsilon\eta(x). \tag{2.24}$$

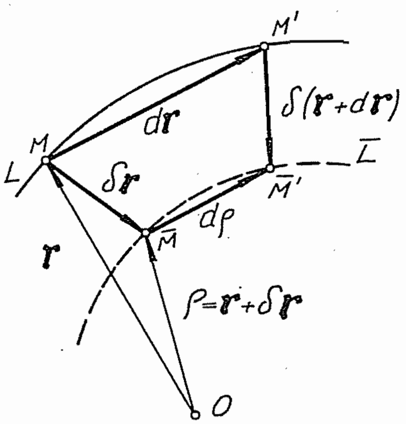
Varijacija funkcije δy predstavlja promenu ordinate usled promene oblika same funkcije ali kada se ne menja nezavisno promenljiva. Pošto se ova poslednja (x) ne menja, to se ova varijacija naziva izohronom.

Iz (2.24) diferenciranjem po x dobija se da je

$$\frac{d}{dx}\delta y = \overline{y}' - y' = \varepsilon\eta' = \delta y' = \delta\frac{dy}{dx}; \qquad \frac{d}{dx}\delta y = \delta\frac{dy}{dx} = \delta y'$$

te u slučaju izohrone varijacije diferenciranje i variranje imaju komutativni karakter.

Ovo pravilo možemo dokazati i kinematički. Neka je tačka M bila u trenutku t u položaju M na putanji L (slika 2.5) sa vektorom položaja $\mathbf{r}$. Ako bi se u tom trenutku prešlo na obližnju krivu $\overline{L}$, tačka bi prešla u položaj $\overline{M}$, pa je $\delta\mathbf{r}$ varijacija, a njen je vektor položaja $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$. Za vreme Δt tačka M će po stvarnoj putanji L preći u položaj M′ odredjen vektorom položaja $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$, gde je $d\mathbf{r}$ stvarno (moguće) pomeranje. Medjutim, za isto vreme bi tačka $\overline{M}$ prešla u položaj $\overline{M}'$ sa vektorom položaja $\boldsymbol{\rho} + d\boldsymbol{\rho}$. Iz vektorske relacije



Slika 2.5.

$\overrightarrow{M\overline{M}} + \overrightarrow{\overline{M}\,\overline{M}'} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'\overline{M}'}$ sledi

$$\delta \mathbf{r}+d(\mathbf{r}+\delta \mathbf{r})=d\mathbf{r}+\delta(\mathbf{r}+d\mathbf{r}); \qquad d\delta \mathbf{r}=\delta d\mathbf{r}. \tag{2.26}$$

Totalna (druga) varijacija je promena funkcije usled priraštaja nezavisno promenljive i promene same funkcije, pa je

$$\Delta y = \delta y + y'\Delta x. \tag{2.27}$$

Prvi deo ovog izraza (δy) predstavlja glavni deo ove varijacije.

Diferenciranjem po x dobija se

$$\frac{d}{dx}\Delta y=\frac{d}{dx}(\delta y)+y''\Delta x+y'\frac{d}{dx}\Delta x=\delta y'+y''\Delta x+y'\frac{d}{dx}\Delta x=\Delta y'+y'\frac{d}{dx}\Delta x\neq\Delta y', \tag{2.28}$$

pa se vidi da za ovu varijaciju ne važi zakon komutativnosti diferenciranja i variranja kao kod izohrone varijacije.

Odredjeni integral

$$J=\int_a^b f(x,y,y')\,dx, \tag{2.29}$$

stalnih granica $[a, b]$, čija je podintegralna funkcija f funkcija od nezavisno promenljive x, funkcije y = y(x) i njenog izvoda y' = dy/dx, naziva se funkcional klase funkcija y = y(x) ako svakoj toj funkciji odgovara odredjena vrednost integrala. Ona kriva iz familije y = y(x) koja funkcionalu daje ekstremnu vrednost naziva se ekstremala tog funkcionala. Ako se umesto krive y = y(x) uzme kriva $\bar{y} = \bar{y}(x)$ dobija se vrednost $\bar{J}$, te su varijacija funkcionala i uslov ekstremuma

$$\bar{J}=\int_a^b f(x,\bar{y},\bar{y}')\,dx; \qquad \delta J=\bar{J}-J; \qquad \delta J=0. \tag{2.30}$$

Dakle, uslov ekstremuma funkcionala je da je njegova varijacija jednaka nuli.

Prvu opštu metodu za odredjivanje ekstremala dao je Jacob Bernoulli, a usavršio je Euler ("Traité des isopérimètres", 1744. godine). Unošenjem funkcije $\bar{y}$ = y(x) + $\varepsilon\eta$ (x) u integral (2.29) dobija se

$$\bar{J}=\int_a^b f(x;y+\delta y;y'+\delta y')\,dx=J+\int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right)dx+\cdots,$$

Ako se zbog malog ε ograničimo samo na članove prvog stepena, dobija se da je prva varijacija funkcionala

$$\delta J=\int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right)dx=\int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d}{dx}(\delta y)\right]dx;$$

$$y(a)=A;\quad y(b)=B.$$

Smenama $u = \partial f/\partial y'$; $dv = \delta y'\,.\,dx = d(\delta y)$, parcijalnom integracijom se dobija drugi član u prednjem integralu

$$\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y'}d(\delta y)=\left[\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\right]_a^b-\int_a^b d\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y=-\int_a^b d\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y;\qquad [\delta y]_b=[\delta y]_a=0,$$

sa graničnim (konturnim) uslovima $y(a) = A; y(b) = B$. Prema tome su varijacija i uslov ekstremuma

$$\delta J=\int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\,dx;\qquad \frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=0;\quad y(a)=A;\quad y(b)=B, \tag{2.31}$$

pošto je varijacija δy proizvoljna ($\delta y \neq 0$). Ovaj uslov ekstremuma predstavlja Euler-ovu diferencijalnu jednačinu Varijacionog računa ili tzv. varijacioni (Lagrange-ev) izvod.

Euler-ova jednačina je drugog reda i može se napisati u drugom obliku a rešenja su joj ekstremale, te će biti

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y'}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y'}y'-\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y''=0;\qquad y=y(x;C_1;C_2), \tag{2.32}$$

gde su C_i integracione konstante koje se odredjuju iz graničnih uslova $y(a) = A$ i $y(b) = B$.

U specijalnom slučaju kada podintegralna funkcija $f(x,y,y')$ ne zavisi eksplicitno od x, dobija se lako prvi integral. Množenjem Euler-ove jednačine sa y' sledi:

$$y'\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=y'\frac{\partial f}{\partial y}-\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}y'\right)-\frac{\partial f}{\partial y'}y''\right]=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}y''\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}y'\right)=\frac{df}{dx}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}y'\right)=0,$$

odnosno

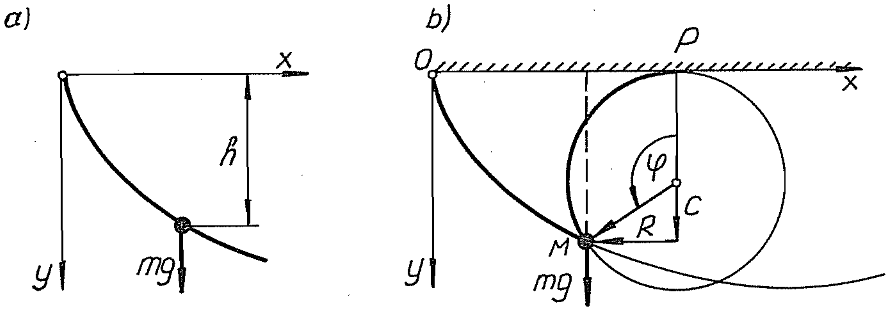
$$f=f(y,y');\qquad \frac{d}{dx}\left[f-\frac{\partial f}{\partial y'}y'\right]=0;\qquad f-\frac{\partial f}{\partial y'}y'=C, \tag{2.33}$$

pa se ona svodi na jednačinu prvog reda.

Naprimer, od svih krivih $y = y(x)$ koje prolaze kroz dve tačke $T_1(a,A)$ i $T_2(b,B)$ odrediti onu koja ima najmanju dužinu. Ovde je funkcional luk (s), pa pošto je $f(y,y')$ to se pomoću (2.33) dobija:

$$J = \jmath = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx\ ; \quad \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = C'; \quad y' = C_1\ ; \quad y = C_1 x + C_2,\ (\text{prava}).$$

2.7. Brahistohrona za homogeno polje teže. - Teška tačka (mg) spušta se po glatkoj krivoj iz početnog položaja O bez početne brzine ($v_o=0$) Kriva linija - trajektorija teške tačke - po kojoj je spuštanje za odredjenu visinu



Slika 2.6.

h najkraće naziva se brahistohrona za homogeno polje teže (slika 2.6.a).

Johaun Bernoulli je pokazao da je ta kriva cikloida. Dokaz se izvodi na ovaj način. Iz integrala energije sledi

$$v^2 = 2gy = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{(1+y'^2)}{dt^2}\,dx^2;$$

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,dx\ ; \qquad T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,dx$$

Pošto je $f = f(y,y')$ i ne zavisi eksplicitno od x, to se, prema (2.33), dobija odmah prvi integral

$$\left[f - (\partial f/\partial y')\,y'\right] = \left[y\,(1+y'^2)\right]^{-1/2} = C_1; \quad y(1+y'^2) = C_1^{-2} = k = const.$$

Smenom $y' = tg\theta$ sledi da je $y = k/(1 + tg^2\theta) = k/\cos^2\theta = k\,(1 + \cos 2\theta)/2$,

pa su

$dy = -k \sin 2\theta\ .\ d\theta = tg\theta . dx$, $dx = -2k \cos^2\theta d\theta$, $x = \left[-k\,(2\theta + \sin 2\theta)/2\right] + C_2$.

Kako je za $t_o = 0$; $x_o = y_o = 0$; $v_o = 0$; to je $2\theta_o = \pi$, pa je $C_2 = k\pi/2$.

Smenama $k/2 = R$, $2\theta = \pi - \varphi$ dobijaju se parametarske jednačine cikloide (slika 2.6.b)

$$x = R(\varphi - \sin\varphi); \qquad y = R(1 - \cos\varphi), \tag{2.34}$$

jer je

$$k = y(1 + y'^2) = y\left[1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right] = R(1-\cos\varphi)\left[1 + \left(\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}\right)^2\right] = 2R.$$

2.8. Otpori (reakcije) veza. - Diferencijalne jednačine kretanja slobodnog materijalnog sistema su

$$m_\nu \mathbf{a}_\nu = \mathbf{F}_\nu; \quad m_\nu \ddot{x}_\nu = X_\nu; \quad m_\nu \ddot{y}_\nu = Y_\nu; \quad m_\nu \ddot{z}_\nu = Z_\nu; \tag{2.35}$$

gde je $\mathbf{F}_\nu$ rezultanta sila koje dejstvuju na ν-tu tačku sistema. Kada se izraz za ubrzanje $\mathbf{a}_\nu = \mathbf{F}_\nu/m_\nu$ unese u uslove za ubrzanja (2.15) i (2.17) ona postaju

$$\sum_\nu^N \left(\mathrm{grad}_\nu f_\alpha, \frac{1}{m_\nu}\mathbf{F}_\nu\right) + D_2 f_\alpha = 0; \quad \sum_\nu^N \left(\boldsymbol{\ell}_{\beta\nu}, \frac{1}{m_\nu}\mathbf{F}_\nu\right) + D_2 \varphi_\beta = 0 \tag{2.36}$$

Ako se sve jednačine (2.36), ili samo neke od njih, pretvaraju u identitete onda iz sistema jednačina (2.35) slede jednačine

$$d^2 f_\alpha / dt^2 = 0; \qquad d\varphi_\beta / dt = 0 \tag{2.37}$$

za sve veze ili samo za one za koje se javljaju gornji identiteti, pa su opšti integrali diferencijalnih jednačina slobodnog kretanja sistema

$$f_\alpha = a_\alpha t + b_\alpha; \quad \varphi_\beta = c_\beta; \quad \alpha = 1,2,\dots,h; \quad \beta = 1,2,\dots,\ell, \tag{2.38}$$

gde su a_α, b_α, c_α integracione konstante. Za specijalne vrednosti konstanti dobijaju se partikularni integrali

$$a_\alpha = b_\alpha = c_\beta = 0; \quad f_\alpha(\mathbf{r}_\nu, t) = 0; \quad (\boldsymbol{\ell}_{\beta\nu}, \mathbf{v}_\nu) + D_\beta = 0 \tag{2.39}$$

koji predstavljaju jednačine veza (2.9) i (2.10).

Izuzev ovog slučaja mogu ubrzanja $\mathbf{a}_\nu$ da ne zadovoljavaju uslove za ubrzanja (2.15) i (2.17), pa su takva ubrzanja nemoguća za te veze. Zbog toga se moraju uvesti dopunske sile koje će svojim dejstvima omogućiti da nemoguća ubrzanja postanu moguća. Te sile dolaze od materijalnih tela - veza-i nazivaju se otpori (reakcije) veza. Ako je $\boldsymbol{F}_{w\nu}$ rezultanta svih otpora (reakcija) veza od svake veze (konačne i diferencijalne) koja dejstvuje na tu tačku, onda su, kao i (2.3), diferencijalne jednačine kretanja neslobodnog materijalnog sistema:

$$m_\nu \boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{F}_{w\nu}; \quad m_\nu \ddot{x}_\nu = X_\nu + X_{w\nu}; \quad m_\nu \ddot{y}_\nu = Y_\nu + Y_{w\nu}; \quad m_\nu \ddot{z} = Z_\nu + Z_{w\nu}; \tag{2.40}$$

a uslovi za ubrzanja daju veze

$$\sum_\nu \left(\operatorname{grad}_\nu f_\alpha, \frac{1}{m_\nu} \boldsymbol{F}_\nu\right) + D_2 f_\alpha = -\sum_\nu \left(\operatorname{grad}_\nu f_\alpha, \frac{1}{m_\nu} \boldsymbol{F}_{w\nu}\right); \quad \alpha = 1, \dots, h; \tag{2.41}$$

$$\sum_\nu \left(\boldsymbol{\ell}_{\beta\nu}, \frac{1}{m_\nu} \boldsymbol{F}_\nu\right) + D_2 \varphi_\beta = -\sum_\nu \left(\boldsymbol{\ell}_{\beta\nu}, \frac{1}{m_\nu} \boldsymbol{F}_{w\nu}\right); \quad \beta = 1, \dots, \ell. \tag{2.42}$$

Dinamički problem neslobodnog materijalnog sistema sastoji se u ovome: zadate su aktivne sile koje dejstvuju na sistem $\boldsymbol{F}_\nu (\boldsymbol{r}_s, \boldsymbol{v}_s, t)$ i poznati su početni uslovi kretanja za svaku tačku m_ν sistema (početni položaj $\boldsymbol{r}_\nu^{(o)}$ i $\boldsymbol{v}_\nu^{(o)}$) a treba odrediti kretanje sistema i otpore veza $\boldsymbol{F}_{w\nu}$.

Ovako postavljen dinamički problem je neodredjen, jer treba odrediti za svaku materijalnu tačku m_ν ($\nu = 1,2,\dots,N$) po šest nepoznatih x_ν, y_ν, z_ν, $X_{w\nu}$, $Y_{w\nu}$, $Z_{w\nu}$ ukupno 6N nepoznatih veličina, a na raspolaganju stoji 3N diferencijalnih jednačina kretanja sistema (2.40) i h + 1 veza (2.9) i (2.10), to jest 3N + (h+1) jednačina. Da bi zadatak bio rešljiv potrebno je uvesti još 6N - $-[3N+(h+1)] = 3N - (h+1) = n$ medjusobno nezavisnih odnosa medju traženim veličinama. Te dopunske uslove dobijamo ako predpostavimo da su veze idealne, tj. ako otpori dejstvuju u pravcu gradijenta holonomnih veza odnosno kvazigradijenta linearnih neholonomnih veza. Osobina je ovih sila da je zbir njihovih radova na virtualnim pomeranjima (varijacijama) jednak nuli

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_{w\nu}, \delta \boldsymbol{r}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{N} (X_{w\nu}\, \delta x_\nu + Y_{w\nu}\, \delta y_\nu + Z_{w\nu}\, \delta z_\nu) = 0. \tag{2.43}$$

Ovaj uslov je poznat kao kriterijum idealnosti veza.

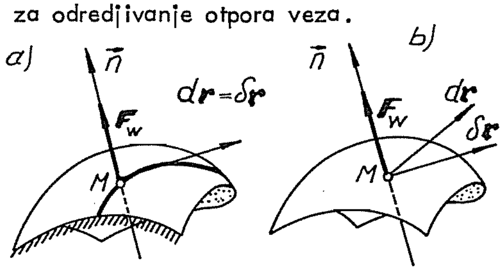
Izmedju 3N varijacija (2.43) ima ih n nezavisnih, dok su 3N-n = h+1 zavisne koje se mogu izraziti pomoću n nezavisnih i na taj način dobiti još n potrebnih uslova. To se postiže metodom Lagrange-ovih multiplikatora. Sva virtualna pomeranja $\delta \mathbf{r}_\nu$ nisu proizvoljna, jer h + 1 njih moraju da zadovolje relacije (2.22) i (2.23). Pomnožimo redom holonomne uslove (2.22) multiplikatorima λ_α a neholonomne uslove (2.23) multiplikatorima μ_β pa ih oduzmimo od uslova (2.43), onda se dobija

$$\sum_{\nu=1}^{N}\Big(\mathbf{F}_{w\nu}-\sum_{\alpha=1}^{h}\lambda_\alpha \,\mathrm{grad}_\nu f_\alpha-\sum_{\beta=1}^{\ell}\mu_\beta\, \boldsymbol{\ell}_{\beta\nu}\,,\ \delta\mathbf{r}_\nu\Big)=0. \qquad (2.44)$$

U ovom su izrazu nepoznati multiplikatori, i njih h+1 mogu se tako izabrati da se h+1 virtualnih pomeranja, koji nisu proizvoljni ali su odredjeni uslovima (2.22) i (2.23), eliminišu iz (2.44) anulirajući zagrade koje stoje pored tih pomeranja. Tako se dobija da su idealne veze oblika

$$\mathbf{F}_{w\nu}=\sum_{\alpha=1}^{h}\lambda_\alpha \,\mathrm{grad}_\nu f_\alpha+\sum_{\beta=1}^{\ell}\mu_\beta\, \boldsymbol{\ell}_{\beta\nu}\,. \qquad (2.45)$$

U ovoj relaciji ima h+1 multiplikatora, a toliko ima i uslova (2.41) i (2.42) za odredjivanje otpora veza.



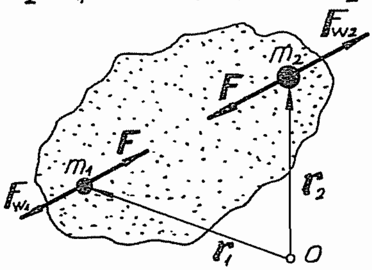
Slika 2.7.

Naprimer, glatka nepokretna ili pokretna površ je idealna veza, pošto otpor pada u pravac normale površi (slika 2.7) samo je u slučaju nepokretne veze (slika 2.7.a) zadovoljen uslov $(\mathbf{F}_w, d\mathbf{r}) = (\mathbf{F}_w, \delta\mathbf{r}) = 0$, a kod pokretne je $(\mathbf{F}_w, \delta\mathbf{r}) = 0$, ali $(\mathbf{F}_w, d\mathbf{r}) \neq 0$ (slika 2.7.b).

Dve materijalne čestice m_1 i m_2 krutog tela nalaze se na stalnom rastojanju ℓ, a izložene su uzajamnom privlačnom dejstvu gravitacionih sila $\pm\mathbf{F}$ jednakih veličina a suprotnih smerova (slika 2.8). Čestice su izložene silama veza-reakcija $\mathbf{F}_{w1}$ i $\mathbf{F}_{w2}$ koje su zbog relacije $\mathbf{F} + (-\mathbf{F}) = 0$ takodje suprotne sile. Rad sila na virtualnim pomeranjima iznosi

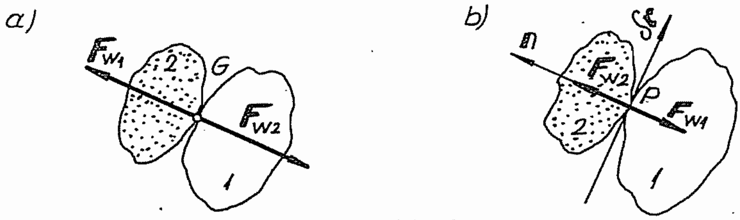
$$(\mathbf{F}_{w1}, \delta\mathbf{r}_1) + (\mathbf{F}_{w2}, \delta\mathbf{r}_2) = (\mathbf{F}_{w2}, \delta\mathbf{r}_2 - \delta\mathbf{r}_1) = (\mathbf{F}_{w2}, \delta\boldsymbol{\ell}) = 0,$$

jer je $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\ell}$, pa je $\delta\mathbf{r}_2 - \delta\mathbf{r}_1 = \delta\boldsymbol{\ell} = 0$ te su veze idealne.



Slika 2.8.

Dakle, može se smatrati da je kruto telo sistem materijalnih tačaka pod dejstvom idealnih veza. Kada su dva kruta tela vezana zglobom G (slika 2.9.a), tada je $(\mathbf{F}_{w1}, \delta\mathbf{r}) + (\mathbf{F}_{w2}, \delta\mathbf{r}) = (\mathbf{F}_{w1} + \mathbf{F}_{w2}, \delta\mathbf{r}) = 0$, pa su otpori zgloba jednaki ali suprotnog smera. Tako je i pri dodiru dvaju glatkih tela, samo su otpori veze upravni na dodirnu ravan u tački P (slika 2.9.b).



Slika 2.9.

2.9. Diferencijalne jednačine kretanja sistema sa množiteljima veza. - U slučaju idealnih veza otpori se odredjuju jednačinom (2.45), pa jednačina (2.40) postaje

$$m_\nu \mathbf{a}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \sum_{\alpha=1}^{h} \lambda_\alpha \operatorname{grad}_\nu f_\alpha + \sum_{\beta=1}^{\ell} \mu_\beta \boldsymbol{\ell}_{\beta\nu} \; ; \qquad \nu = 1,2,\dots,N. \tag{2.46}$$

Sistemu vektorskih diferencijalnih jednačina odgovara sledeći sistem skalarnih jednačina za Dekartov pravougli trijedar Oxyz:

$$m_\nu \ddot{x}_\nu = X_\nu + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu} + \sum_\beta \mu_\beta A_{\beta\nu}; \quad m_\nu \ddot{y}_\nu = Y_\nu + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\nu} + \sum_\beta \mu_\beta B_{\beta\nu};$$
$$m_\nu \ddot{z}_\nu = Z_\nu + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\nu} + \sum_\beta C_{\beta\nu}; \quad \alpha = 1,2,\dots,h; \quad \beta = 1,2,\dots,\ell. \tag{2.47}$$

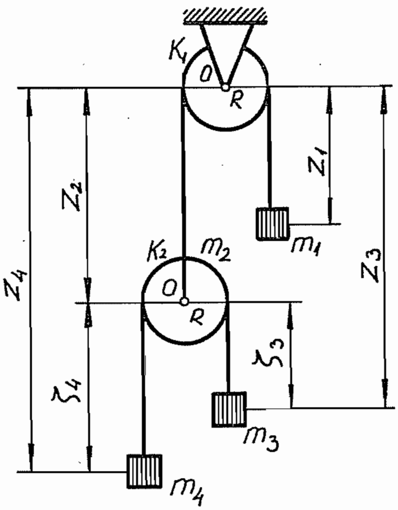
Ovaj sistem skalarnih diferencijalnih jednačina naziva se sistem diferencijalnih jednačina kretanja neslobodnog sistema sa množiteljima veza ili Lagrange-ove diferencijalne jednačine prve vrste.

Ovim jednačinama treba dodati i jednačine veza

$$f_\alpha(\vec r_\nu) = 0; \qquad \sum_\nu (\vec\ell_{\beta\nu}, \vec v_\nu) + D_\beta = 0; \tag{2.48}$$

pa se tako dobija 3N + (h+1) skalarnih jednačina (2.47) i (2.48) za odredjivanje 3N + (h + 1) nepoznatih veličina $x_\nu, y_\nu, z_\nu; \lambda_\alpha, \mu_\beta$.

Primeri: 1. Preko nepokretnog kotura K_1 (slika 2.10) prebačeno je uže dužine l_1 o čiji je jedan kraj obešen teret mase $m_1 = 4$ m. Uže je drugim krajem vezano za pokretni kotur K_2, mase $m_2 = 2m$, istog poluprečnika R kao i kotur K_1. Preko ovog kotura prebačeno je uže dužine l_2, o čijim su krajevima obešeni tereti masa $m_3 = 2m$ i $m_4 = m$. Težina mg iznosi 3,5 kp. Odredimo zakon kretanja i multiplikatore.



Slika 2.10.

Jednačine veza su

$$f_1 = z_1 + z_2 + R\pi - l_1 = 0;$$

$$f_2 = \zeta_3 + \zeta_4 + R\pi - l_2 = z_3 + z_4 - 2z_2 + R\pi - l_2 = 0.$$

Jednačine kretanja (2.47) su:

$$m_\nu \ddot z_\nu = m_\nu g + \lambda_1 \,\mathrm{grad}_\nu f_1 + \lambda_2 \,\mathrm{grad}_\nu f_2;$$

$$m_1 \ddot z_1 = m_1 g + \lambda_1; \quad m_2 \ddot z_2 = m_2 g + \lambda_1 - 2\lambda_2; \quad m_3 \ddot z_3 = m_3 g + \lambda_1; \quad m_4 \ddot z_4 = m_4 g + \lambda_2,$$

a uslovi koje daju veze su:

$$d^2 f_\alpha / dt^2 = 0; \quad \ddot z_1 + \ddot z_2 = 0; \quad \ddot z_3 + \ddot z_4 - 2\ddot z_2 = 0.$$

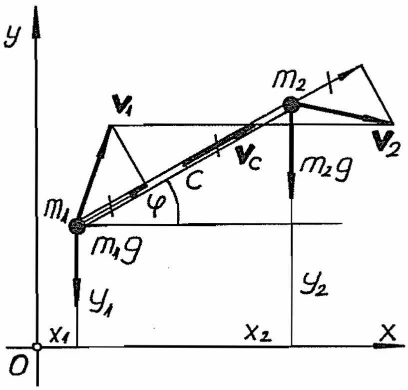
Kada se u ove uslove unesu naznačena ubrzanja iz jednačina kretanja dobija se sistem jednačina sa rešenjima

$$3\lambda_1 - 4\lambda_2 = -8mg; \quad -\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0; \quad \lambda_1 = -24mg/7; \quad \lambda_2 = -4mg/7;$$

pa su:

$$\ddot{z}_1 = g/7 = 140\,cm/sec^2; \quad \lambda_1 = -12\,kp; \quad \lambda_2 = -2\,kp.$$

2. Dve jednake teške mase (m) vezane su tankim štapom (mase $M = 0$) i kreću se u vertikalnoj ravni Oyz pod uticajem težina ali tako da je brzina težišta (C) štapa kolinearna sa samim štapom (slika 2.11). Rastojanje tačaka (dužina štapa) je konstantna, $\overline{M_1 M_2} = 1$. Koordinate središta su $x_C = u = (x_1 + x_2)/2$, $y_C = v = (y_1 + y_2)/2$, pa je uslov $[\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{v}_C] = 0 = \boldsymbol{k}[\dot{v}(x_2 - x_1) - \dot{u}(y_2 - y_1)]$ te su jednačine veza



Slika 2.11.

$$f = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - \ell^2 = 0; \qquad \text{(a)}$$

$$\varphi = (x_2 - x_1)(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) - (y_2 - y_1)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = 0, \qquad \text{(b)}$$

Uzimajući da je $m = 1$ dinamičke jednačine su

$$\ddot{x}_\nu = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \mu A_{1\nu}; \quad \ddot{y}_\nu = -g + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_\nu} + \mu B_{1\nu},$$

odnosno

$$\ddot{x}_1 = -\lambda(x_2 - x_1) - \mu(y_2 - y_1) = -\lambda \ell \cos\varphi - \mu \ell \sin\varphi; \qquad \text{(c)}$$

$$\ddot{y}_1 = -g - \lambda(y_2 - y_1) + \mu(x_2 - x_1) = -g - \lambda \ell \sin\varphi + \mu \ell \cos\varphi; \qquad \text{(d)}$$

$$\ddot{x}_2 = \lambda(x_2 - x_1) - \mu(y_2 - y_1) = \lambda \ell \cos\varphi - \mu \ell \sin\varphi; \qquad \text{(e)}$$

$$\ddot{y}_2 = -g + \lambda(y_2 - y_1) + \mu(x_2 - x_1) = -g + \lambda \ell \sin\varphi + \mu \ell \cos\varphi, \qquad \text{(f)}$$

Kada se jednačina (c) pomnoži sa $\cos\varphi$, a (d) sa $\sin\varphi$ i saberu, a zatim (c) sa $\sin\varphi$ a (d) sa $-\cos\varphi$ i saberu, onda, s obzirom na (a), sledi:

$$\ddot{x}_1\cos\varphi+\ddot{y}_1\sin\varphi=-g\sin\varphi-\lambda\ell;\ \ddot{x}_1\sin\varphi-\ddot{y}_1\cos\varphi=g\cos\varphi-\mu\ell. \tag{g}$$

Kada se jednačina (e) pomoži prvo sa $\cos\varphi$, a (f) sa $\sin\varphi$, i saberu, a zatim (e) sa $-\sin\varphi$, a (f) sa $\cos\varphi$ i saberu, dobiće se relacije

$$\ddot{x}_2\cos\varphi+\ddot{y}_2\sin\varphi=-g\sin\varphi+\lambda\ell;\ -\ddot{x}_2\sin\varphi+\ddot{y}_2\cos\varphi=-g\cos\varphi+\mu\ell. \tag{h}$$

Eliminisanjem λ i μ iz jednačina (g) i (h) slede relacije:

$$(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1)\sin\varphi-(\ddot{y}_2-\ddot{y}_1)\cos\varphi=0; \tag{i}$$

$$(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)\cos\varphi+(\ddot{y}_1+\ddot{y}_2)\sin\varphi+2g\sin\varphi=0. \tag{j}$$

Pošto su $x_2-x_1=l\cos\varphi$; $y_2-y_1=l\sin\varphi$, to su $\dot{x}_2-\dot{x}_1=-(l\sin\varphi)\dot{\varphi}$; $\dot{y}_2-\dot{y}_1=(l\cos\varphi)\dot{\varphi}$; $\ddot{x}_2-\ddot{x}_1=-(l\cos\varphi)\dot{\varphi}^2-(l\sin\varphi)\ddot{\varphi}$; $\ddot{y}_2-\ddot{y}_1= -(\ell\sin\varphi)\dot{\varphi}^2+(\ell\cos\varphi)\ddot{\varphi}$, pa se unošenjem u uslov (i) dobija relacija

$$-\ell(\dot{\varphi}^2\cos\varphi+\ddot{\varphi}\sin\varphi)\sin\varphi-\ell(-\dot{\varphi}^2\sin\varphi+\ddot{\varphi}\cos\varphi)\cos\varphi=0;\ \ddot{\varphi}=0;\ \dot{\varphi}=\omega=const;\ \varphi=\omega t+\alpha. \tag{k}$$

Pošto su koordinate vektora brzine težišta $\dot{x}_c=\dot{u}=(\dot{x}_1+\dot{x}_2)/2$; $\dot{y}_C=\dot{v}=(\dot{y}_1+\dot{y}_2)/2$, to su $\ddot{x}_1+\ddot{x}_2=2\ddot{u}$, $\ddot{y}_1+\ddot{y}_2=2\ddot{v}$, pa se unošenjemtih relacija u jednačinu (j) dobija

$$\ddot{u}\cos\varphi+\ddot{v}\sin\varphi+g\sin\varphi=0. \tag{l}$$

Iz neholonomne veze (b) sledi takodje relacija

$$\dot{v}\cos\varphi-\dot{u}\sin\varphi=0;\quad \operatorname{tg}\varphi=\dot{v}/\dot{u};\quad \dot{u}=f\cos\varphi;\ \dot{v}=f\sin\varphi;$$

$$f=f/t/; \tag{m}$$

te se unošenjem ove relacije u uslov (1) dobija def. jednačina

$$\ddot{u}+(\ddot{v}+g)\operatorname{tg}\varphi=0;\quad \ddot{u}\dot{u}+(g+\ddot{v})\dot{v}=0;\qquad \dot{f}+g\sin\varphi=0. \tag{n}$$

Zbog toga što je $\dot{f}=df/dt=(df/d\varphi).(d\varphi/dt)=\omega(df/d\varphi)$, dobija se $f=(g/\omega)\cos\varphi+C_1$; $\dot{u}=(g/\omega)\cos^2\varphi+C_1\cos\varphi$; $\dot{v}=(g/\omega)\cos\varphi\sin\varphi+C_1\cdot\sin\varphi$. (o)

Kako su i $\dot{u}=\omega(du/d\varphi)$ i $\dot{v}=\omega(dv/d\varphi)$, to se integraljenjem dobijaju koordinate težišta štapa (C):

$$u=\frac{g}{2\omega^2}(\sin\varphi\cos\varphi+\varphi)+\frac{C_1}{\omega}\sin\varphi+C_2;\ v=-\frac{g}{2\omega^2}\cos^2\varphi-\frac{C_1}{\omega}\cos\varphi+C_3, \tag{p}$$

a pošto su $u=(x_1+x_2)/2$, $v=(y_1+y_2)/2$, i $x_2-x_1=l\cos\varphi$, $y_2-y_1= l\sin\varphi$; to su

$$x_1 = u - \frac{\ell}{2}\cos\varphi; \quad x_2 = u + \frac{\ell}{2}\cos\varphi; \quad y_1 = v - \frac{\ell}{2}\sin\varphi; \quad y_2 = v + \frac{\ell}{2}\sin\varphi$$

pa su zakoni kretanja:

$$\varphi = \omega t + \alpha; \quad \alpha = const.$$

$$x_1 = \frac{g}{2\omega^2}(\sin\varphi\cos\varphi + \varphi) - \frac{\ell}{2}\cos\varphi + \frac{C_1}{\omega}\sin\varphi + C_2; \qquad (q)$$

$$y_1 = -\frac{g}{2\omega^2}\cos^2\varphi - \frac{\ell}{2}\sin\varphi - \frac{C_1}{\omega}\cos\varphi + C_3;$$

$$x_2 = \frac{g}{2\omega^2}(\sin\varphi\cos\varphi + \varphi) + \frac{\ell}{2}\cos\varphi + \frac{C_1}{\omega}\sin\varphi + C_2;$$

$$y_2 = -\frac{g}{2\omega^2}\cos^2\varphi + \frac{\ell}{2}\sin\varphi - \frac{C_1}{\omega}\cos\varphi + C_3, \qquad (r)$$

gde su C_i integracione konstante.

2.10. Opšte koordinate. Konfiguracioni prostor. - Diferencijalne jednačine neslobodnog sistema sa idealnim holonomnim (konačnim) i neholonomnim (neintegrabilnim diferencijalnim) vezama sa multiplikatorima λ_α i μ_β (2.46), mogu se preglednije napisati ako se umesto Dekartovih pravouglih koordinata x_ν, y_ν, z_ν uvedu Dekartove pravougle opšte koordinate ξ_j kojih ima 3N, gde je N broj materijalnih tačaka sistema, takvih da postoje relacije za koordinate

$$x_\nu = \xi_{3\nu-2}; \quad y_\nu = \xi_{3\nu-1}; \quad z_\nu = \xi_{3\nu}; \quad \nu = 1,2,\ldots,N \qquad (2.49)$$

i za mase

$$m_{3\nu-2} = m_{3\nu-1} = m_{3\nu}; \quad \nu = 1,2,\ldots,N. \qquad (2.50)$$

Naprimer, biće

za $\nu=1$; $\quad x_1 = \xi_1; \quad y_1 = \xi_2; \quad z_1 = \xi_3; \quad m_1 = m_2 = m_3;$

za $\nu=2$; $\quad x_2 = \xi_4; \quad y_3 = \xi_5; \quad z_2 = \xi_6; \quad m_4 = m_5 = m_6.$

Sa novim - opštim - koordinatama ξ_i, $i = 1,2,\ldots,3N$, vektor položaja i brzina m -te tačke

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu \;(\xi_1, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_{3N});$$

$$\mathbf{v}_\nu = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial \xi_j}\dot{\xi}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t},$$

pa zbog toga holonomne veze (2.9) postaju

$$f_\alpha(\mathbf{r}_\nu, t) = f_\alpha(\xi_j, t), \qquad \begin{array}{l}\alpha = 1,2,\ldots,h,\\ j = 1,2,\ldots,3N.\end{array} \tag{2.52}$$

Ove su funkcije medjusobno nezavisne, što znači da izmedju njih ne postoji neka funkcionalna veza oblika $\Phi(f_1, f_2, \ldots, f_h) = 0$, odnosno da je rang Jacobi-jeve matrice jednak broju h, tj. da je jakobijan različit od nule

$$J = \frac{\partial(f_1 \ldots f_h)}{\partial(\xi_1 \ldots \xi_{3N})} = \begin{vmatrix} \partial f_1/\partial\xi_1 & \partial f_2/\partial\xi_1 & \partial f_h/\partial\xi_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial f_1/\partial\xi_{3N} & \partial f_2/\partial\xi_{3N} & \partial f_h/\partial\xi_{3N}\end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.53}$$

Neholonomne veze (2.10) su sada oblika

$$\varphi_\beta(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) = \sum_\nu^N (\boldsymbol{\ell}_{\beta\nu}, \mathbf{v}_\nu) + D_\beta = \sum_{j=1}^{3N} N_{\beta j}\dot{\xi} + N_\beta = 0; \quad \beta = 1,2,\ldots,\ell, \tag{2.54}$$

gde su

$$N_{\beta j} = \sum_\nu^N \left(\boldsymbol{\ell}_{\beta\nu}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_j}\right); \qquad N_\beta = \sum_\nu^N \left(\boldsymbol{\ell}_{\beta\nu}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right) + D_\beta. \tag{2.55}$$

Uslovi (2.22) i (2.23) za virtualna pomeranja sada postaju

$$\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \xi_j}\delta\xi_j = 0; \qquad \alpha = 1,2,\ldots,h; \tag{2.56}$$

$$\sum_{j=1}^{3N} N_{\beta j}\,\delta\xi_j = 0; \qquad \beta = 1,2,\ldots,\ell, \tag{2.57}$$

pa su Lagrange-ove jednačine prve vrste

$$m_j\ddot{\xi}_j = F_j + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \xi_j} + \sum_\beta \mu_\beta N_{\beta j}; \qquad \begin{array}{l} j = 1,2,\ldots,N;\; N+1,\ldots,3N;\\ \alpha = 1,2,\ldots h;\quad \beta = 1,2,\ldots,\ell.\end{array} \tag{2.58}$$

Ovim jednačinama treba dodati jednačine veza (2.52) i (2.54), pa se dobija sistem od 3N + (h + 1) jednačina za odredjivanje 3N koordinata ξ_i tačaka sistema i (h + 1) množitelja (multiplikatora) λ_α i μ_β veza. Kada se integrali sistem tih jednačina dobijaju se ξ_i, λ_α i μ_β u funkciji od vremena (t), tj. odredjeno je kretanje i otpori veza.

Naprimer, za masu m_ν bile bi komponentne reakcije:

$$X_\nu ; Y_\nu ; Z_\nu ; \quad \xi_{3\nu-2} ; \quad \xi_{3\nu-1} ; \xi_{3\nu} ; \quad \lambda_\alpha (\partial f_\alpha / \partial \xi_{3\nu-2}) ; \lambda_\alpha (\partial f_\alpha / \partial \xi_{3\nu-1}) ;$$
$$\lambda_\alpha (\partial f_\alpha / \partial \xi_{3\nu}) ; \quad \mu_\beta N_{\beta, 3\nu-2} ; \quad \mu_\beta N_{\beta, 3\nu-1} ; \quad \mu_\beta N_{\beta, 3\nu} .$$

Opštih (generalisanih) koordinata ξ_i ima 3N, gde je N broj materijalnih tačaka sistema. Ove se koordinate mogu shvatiti kao koordinate jedne reprezentativne tačke u novom 3N-dimenzionom prostoru (V_{3N}) koji odredjuje konfiguraciju mehaničkog sistema, pa se zbog toga naziva konfiguracioni prostor. U tom prostoru holonomne veze (2.52) predstavljaju hiperpovrši, a parcijalni izvodi odredjuju normale tih površi (gradijente). Brzine $\dot{\xi}$ su generalisane brzine reprezentativne tačke u konfiguracionom prostoru. Ovim je uspostavljena potpuna analogija izmedju kretanja tačke u prostoru V_3 i reprezentativne tačke u prostoru V_{3N}.

Zbog holonomnih veza (2.52) ξ_h koordinata je zavisno a n = 3N -h je medjusovno nezavisno i to od ξ_{h+1} do ξ_{3N}. Ako je jakobijan $\left| \partial (f_1 \ldots f_h V) / \partial (\xi_1 \ldots \xi_h) \right| \neq 0$, onda se sistem jednačina (2.52) može rešiti po zavisnim koordinatama $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\alpha, \ldots, \xi_h$ koje se dalje mogu izraziti pomoću ostalih n = 3N - h nezavisnih koordinata i vremena t, te će se dobiti relacije

$$\xi_\alpha = \xi_\alpha (\xi_{h+1}, \xi_{h+2}, \ldots, \xi_{3N}, t); \quad \alpha = 1, 2, \ldots, h \qquad (2.60)$$

kojim se zavisne koordinate izražavaju pomoću 3N - h nezavisnih koordinata. U slučaju da dejstvuju i neholonomne veze bilo bi n = 3N - (h+1) nezavisnih koordinata.

Umesto nezavisnih Dekartovih koordinata ξ_j mogu se uvesti druge nezavisne koordinate, tzv. generalisane koordinate, koje odredjuju konfiguraciju sistema. Ove su koordinate krivolinijske i mogu biti dužine, uglovi, Gauss-ovi parametri za tačku na površi, itd. Njih treba da ima $n = 3N - h$ tako da zadovoljavaju relacije

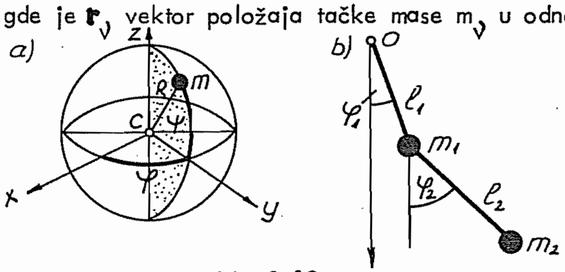
$$\xi_{h+i} = \xi_{h+i}(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n; t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{2.61}$$

pomoću kojih se odredjuju nezavisne Dekartove koordinate ξ_{h+j}. Pri ovome mora jakobijan biti različit od nule, $J = \left| \partial(\xi_{h+1}, \xi_{h+2}, \dots, \xi_{3N}) / \partial(q_1, q_2, \dots q_n) \right| \neq 0$, da bi se prethodni sistem jednačina mogao rešiti po koordinatama q_i.

Ako se relacije (2.61) unesu u (2.60), onda se prema (2.49) mogu sve Dekartove koordinate, a time i vektor položaja tačke, izraziti pomoću ovih nezavisnih generalisanih koordinata

$$\begin{aligned} &\xi_j = \xi_j(q_i, t); \quad x_\nu = x_\nu(q_i, t); \quad y_\nu = y_\nu(q_i \quad , & i = 1, 2, \dots, n; \\ &\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n; t); & \nu = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \tag{2.62}$$

gde je $\mathbf{r}_\nu$ vektor položaja tačke mase m_ν u odnosu na trijedar Oxyz.

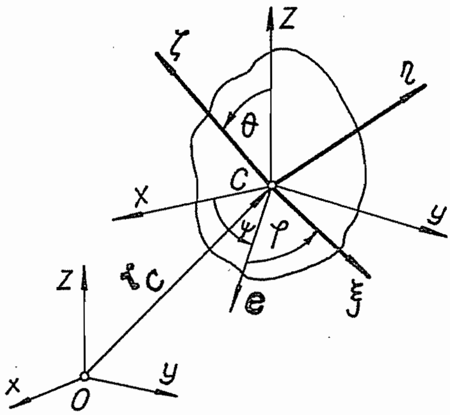


Slika 2.12.

Slobodna tačka ima u prostoru tri stepena slobode kretanja, pa se za generalisane koordinate mogu uzeti Dekartove pravougle koordinate x, y, z, polarno-cilindričke r, φ i z ili sferne ρ, φ i ψ. Tačka na nepokretnoj sferi, poluprečnika R, jednačine $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$, ima dva stepena slobode kretanja (slika 2.12 .a), pa će se za njene koordinate uzeti uglovi φ i ψ. Ako se, pak, sfera kreće translatorno a koordinate su njenog središta, a, b, c, onda su

$$x = at + R\cos\psi\cos\varphi; \; y = bt + R\cos\psi\sin\varphi; \; z = ct + R\sin\psi;$$
$$q_1 = \varphi; \; q_2 = \psi.$$

Dvojno klatno ima dva stepena slobode oscilovanja, pa su generalisane koordinate uglovi $q_1 = \varphi_1$ i $q_2 = \varphi_2$ (slika 2.12.b).



Slika 2.13.

Telo koje se obrće oko nepomične tačke ima tri stepena slobode kretanja, pa su generalisane koordinate Euler-ovi uglovi (ψ, φ, θ). Kruto telo u prostoru ima šest stepeni slobode kretanja pa se za nezavisne koordinate uzimaju koordinate središta x_C, y_C, z_C i tri Euler-ova ugla (slika 2.13).

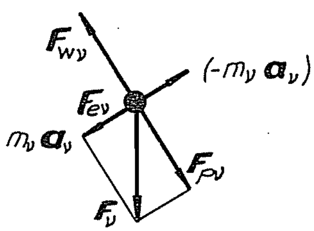
3. DIFERENCIJALNI PRINCIPI

3.1. Klasifikacija principa. - Glavni zadatak dinamike sistema materijalnih tačaka je odredjivanje kretanja sistema kada su poznate sile koje dejstvuju na mase sistema, veze koje ograničavaju slobodu kretanja sistema i početno kinematičko stanje (početni položaj i početna brzina) svake materijalne tačke. Da bi se izvršio ovaj zadatak potrebno je obrazovati diferencijalne jednačine kretanja na osnovu Newton-ovih aksioma o kretanju i dopunskih uslova o vezama i principa "oslobadjanja od veza" (zamišljamo da smo veze odstranili a njihove uticaje zamenili nepoznatim otporima veza, koji se sada javljaju kao nepoznate sile koje treba odrediti). Pomoću Newton-ovih aksioma, a u cilju pojednostavljenja rešavanja problema, mogu se postaviti izvesni dinamički zakoni (o količini kretanja, o momentu količine kretanja i o kinetičkoj energiji sistema). Pored ovih teorema ili zakona postoje i opštiji stavovi koji u potpunosti karakterišu kretanje i koji važe za najopštiji slučaj sistema ili, pak, za specijalne sisteme (na primer, samo za holonomne sisteme ili samo za konzervativne sisteme). Ovi se stavovi dokazuju polazeći od Newton-ovih principa i dinamičkih zakona, a obratno, kada se podje od ovih stavova dobijaju se jednačine kretanja i dinamički zakoni. Ovi se stavovi, kao opštiji, nazivaju principi.

Principi mehanike dele se na dve grupe: diferencijalne i integralne. Prvi principi imaju, matematički posmatrano, analitički izraz kojim se definišu u diferencijalnom obliku, drugi, pak, u integralnom. Diferencijalni principi su vezani za jednu u datom trenutku proizvoljno izabranu konfiguraciju, pa se zatim posmatraju pomeranja sistema u odnosu na tu konfiguraciju. Integralni principi odnose se na konačne promene konfiguracije materijalnog sistema posmatrane u konačnom vremenskom razmaku. Njima se obično iznose ekstremalna svojstva materijalnog sistema, pa se stoga zovu varijacioni ili ekstremalni principi.

Diferencijalni principi su opštiji od integralnih, jer se primenjuju na holonomne i neholonomne sisteme, dok se drugi primenjuju samo na holonomne sisteme.

3.2. D'Alembert-ovi princip. – 1873. god. d'Alembert je formulisao u delu "Traité de Dynamique" princip kojim se mogu dinamički problemi rešavati statičkom metodom "o ravnoteži sila" i koji je poznat pod njegovim imenom. Na masu m_ν sistema materijalnih tačaka, $\nu = 1,2,\dots,N$, dejstvuje napadna – aktivna (data) sila $\mathbf{F}_\nu$ ("la force donée") i otpor veze $\mathbf{F}_{w\nu}$ ("la force de liaison") pa se kretanje vrši, prema drugom Newton-ovom zakonu pod uticajem efektivne sile ("la force motrice") $\mathbf{F}_{e\nu} = m_\nu \mathbf{a}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{F}_{w\nu}$ Napadna sila može se razložiti na dve komponente: efektivnu ($\mathbf{F}_{e\nu}$) i izgubljenu ($\mathbf{F}_{p\nu}$) ("la force perdue"), pa je (slika 3.1):



Slika 3.1.

$$m_\nu \mathbf{a}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{F}_{w\nu} = \mathbf{F}_{e\nu} + \mathbf{F}_{p\nu} + \mathbf{F}_{w\nu} = \mathbf{F}_{e\nu} \quad (3.1)$$

odnosno

$$\mathbf{F}_{p\nu} + \mathbf{F}_{w\nu} = 0. \quad (3.2)$$

Ovo je izraz d'Alembert-ovog principa za materijalnu tačku: "U svakom trenutku pri kretanju tačke izgubljena sila se uravnotežava sa otporom veze."

Analogno tome za materijalni sistem od N masa biće prema (3.1):

$$\sum_\nu^N \mathbf{F}_\nu + (-m_\nu \mathbf{a}_\nu) + \mathbf{F}_{w\nu} = \sum_\nu (\mathbf{F}_{p\nu} + \mathbf{F}_{w\nu}) = \sum_\nu \mathbf{F}_{p\nu} + \sum \mathbf{F}_{w\nu} = 0, \quad (3.3)$$

pa princip glasi: "U svakom trenutku pri kretanju sistema materijalnih tačaka izgubljene sile u ravnoteži su sa otporima veza."

Prednji uslov može se izraziti i u obliku momenta, pa je

$$\sum_{\nu}^{N}\left[\boldsymbol{r}_\nu , \boldsymbol{F}_\nu + (-m_\nu\, \boldsymbol{a}_\nu) + \boldsymbol{F}_{w\nu}\right] = 0 \qquad (3.4)$$

Euler je 1740. god. postavio sličan princip: "Sistem efektivnih sila jednog materijalnog sistema ekvivalentan je sistemu aktivnih (datih) sila". Dokaz neposredno sledi iz (3.3) pošto se izgubljene sile uravnotežavaju sa otporima veza.

D'Alambert-ov princip obično se u tehnici primenjuje kao kineto-statički princip uvodeći silu inercije $\mathcal{F}_{\nu j} = -(m_\nu\, \boldsymbol{a}_\nu)$ koja je suprotna efektivnoj sili $\boldsymbol{F}_{e\nu}$, pa se za materijalnu tačku može napisati "ravnotežni uslov":

$$\boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{F}_{w\nu} + \mathcal{F}_{j\nu} = \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{F}_{w\nu} + (-m_\nu\, \boldsymbol{a}_\nu) = 0 \qquad (3.5)$$

i glasi: "Za vreme kretanja materijalne tačke aktivna sila, sila veze i sila inercije jesu uravnotežene sile". Ovaj se "ravnotežni uslov" može napisati i u obliku momenata, pa je

$$\left[\boldsymbol{r}_\nu , \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{F}_{w\nu} + \mathcal{F}_{j\nu}\right] = 0; \qquad \mathcal{F}_{j\nu} = (-m_\nu\, \boldsymbol{a}_\nu). \qquad (3.6)$$

Za materijalni sistem "ravnotežni uslovi" su:

$$\sum_{\nu}^{N} \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{F}_{w\nu} + \mathcal{F}_{j\nu} = 0; \qquad \sum_{\nu}^{N}\left[\boldsymbol{r}_\nu , \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{F}_{w\nu} + \mathcal{F}_{j\nu}\right] = 0 \qquad (3.7)$$

pa princip glasi: "Pri kretanju materijalnog sistema svaki njegov položaj može se smatrati ravnotežnim ako se aktivnim silama i silama veza dodaju sile inercije".

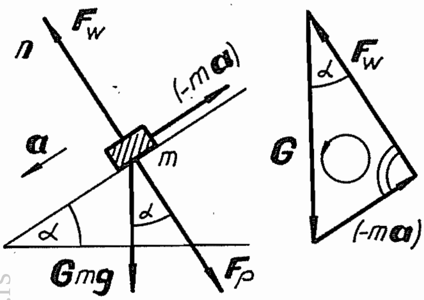
Dok su aktivne sile i otpori veza stvarne sile, dotle su sile inercije fiktivne, jer se za njih, shodno Newton-ovim zakonima, ne mogu pokazati izvori iz kojih dejstvuju.

Uloga d'Alembert-ovog principa je vrlo velika u tehničkim problemima, jer se dinamički problemi rešavaju statičkom metodom ravnoteže sila*).

Naprimer, kod klizenja tela niz glatku strmu ravan (slika 3.2) aktivna je sila teža, G = mg, otpor veze je otpor glatke ravni koji dejstvuje u smeru normale

---

*) Dinamika, čl. 14.2.



Slika 3.2.

Na sila inercije je usmerena uz ravan, pa je ravnotežni uslov :

$$G + F_w + (-m\mathbf{a}) = 0,$$

te se iz trougla sila dobijaju relacije:

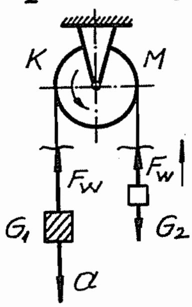
$$-ma + mg\sin\alpha = 0; \quad F_p - F_w = 0$$

$$\text{tj. } a = g\sin\alpha; \quad F_w = mg\cos\alpha$$

Kod Atwood-ove mašine (slika. 3.3) pod pretpostavkom da je $G_1 > G_2$, pošto tačke imaju jednaka ubrzanja ali suprotnog smera pa je sila u užetu ista, biće:

$$1)\ G_1 - F_w - m_1 a = 0; \qquad a = (G_1 - G_2)g/(G_1 + G_2);$$

$$2)\ G_2 - F_w + m_2 a = 0; \qquad F_w = 2G_1G_2/(G_1 + G_2).$$



Slika 3.3.

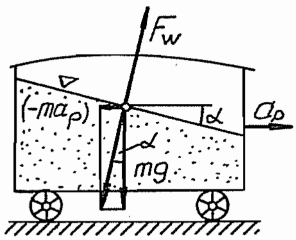
Ako se uzme u obzir i obrtanje kotura, mase M, ugaonim ubrzanjem $\dot{\omega}$, onda sile u delovima užeta nisu jednake, a postoji inercijalni moment $(-J\dot{\omega})$, gde je J moment inercije diska za njegovu obrtnu osu kroz O, pa su jednačine ravnoteže:

$$1)\ G_1 - F_{w1} - m_1 a = 0; \quad a = a_T = R\dot{\omega}; \quad a = 2(G_1 - G_2)g/[2(G_1 + G_2) + G_k];$$

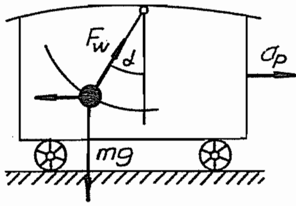
$$2)\ G_2 - F_{w2} + m_2 a = 0; \qquad F_{w1} = G_1[1 - (a/g)];$$

$$3)\ (F_{w1} - F_{w2})R - J\dot{\omega} = 0; \quad J = \frac{1}{2}MR^2; \quad F_{w2} = G_2[1 - (a/g)].$$

Cisterna ispunjena tečnošću kreće se pravolinijski ubrzanjem a_p, (slika. 3.4). Usled ubrzanog kretanja menja se nivo tečnosti, jer na svaku česticu utiču: teža,



Slika 3.4.



Slika 3.5.

sila inercije i otpor, pa je "jednačina ravnoteže"

$$\mathbf{G}+\mathbf{F}_w+(-m\mathbf{a}_p)=0;$$

$$tg\alpha = a_p/g.$$

Slično prednjem, pomoću ugla otklona klatna odredjuje se ubrzanje vozila (slika 3.5) - metoda generala Desdouit-a.*)

3.3. Lagrange-ov princip virtualnih pomeranja. - Materijalni sistem je u ravnoteži kada se pod uticajem atkvinih sila i otpora veza nalazi u trajnom miru. Pošto su tada brzine i ubrzanja tačaka jednaki nuli, to iz uslova za brzinu (2.11) i (2.13), sledi da mora biti:

$$\partial f/\partial t=0; \quad D=0; \quad tj. \quad f_\alpha(\mathbf{r}_\nu)=0; \quad \sum_\beta(\boldsymbol{\ell}_{\beta\nu},\mathbf{r}_\nu)=0 \qquad (3.8)$$

što znači da moraju konačne veze (holonomne) biti skleronomne (stacionarne) a linearne diferencijalne veze homogene, pa su tada virtualna pomeranja jednaka mogućim $\delta\mathbf{r}_\nu = d\mathbf{r}_\nu$. Za jednu materijalnu tačku biće rad svih sila na virtualnim pomeranjima

$$\delta A=(\mathbf{F}_\nu+\mathbf{F}_{w\nu}-m_\nu\mathbf{a}_\nu,\delta\mathbf{r}_\nu)=(\mathbf{F}_\nu+\mathbf{F}_w,\delta\mathbf{r})=(\mathbf{F}_\nu,\delta\mathbf{r}_\nu)=0, \qquad (3.9)$$

pa je rad aktivne sile na virtualnom pomeranju jednak nuli. Za slučaj jednostrane nezadržavajuće veze taj rad mora biti negativan $(\mathbf{F}_\nu,\delta\mathbf{r}_\nu)<0$, jer tačka može da napusti vezu, a ovaj bi joj rad onemogućio to napuštanje.

Za materijalni sistem bilo bi

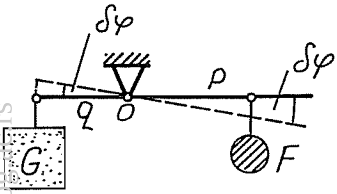
$$\sum_{\nu=1}^{N}(\mathbf{F}_\nu,\delta\mathbf{r}_\nu)\leqslant 0; \quad \sum_{\nu}^{N}X_\nu\delta x_\nu+Y_\nu\delta y_\nu+Z_\nu\delta z_\nu\leqslant 0 \qquad (3.10)$$

pa princip glasi: U slučaju ravnoteže sistema materijalnih tačaka zbir radova aktivnih sila na virtualnim pomeranjima ne može biti pozitivan. U slučaju zadržavajućih veza rad je jednak nuli.

---

*) Detaljnije videti: Zbirka zadataka iz Mehanike, I i II.

Lagrange-ov princip je osnovni princip Statike i on daje mogućnost da se statički problemi rešavaju dinamičkom metodom – vritualnog rada. Klasičan je zakon "zlatno pravilo mehanike" koje potiče od Aristotela a potenciran je od Galileja kao problem kantara (slika 3.6). Teg težine F održava na kantaru ravnoteži teretu težine G. Kantar može da se obrće oko zgloba O, pa su virtualna pomeranja δh_F i δf_G, te je uslov



Slika 3.6.

$$F\delta h_F - G\delta h_G = (Fp - Gq)\delta\varphi = 0; \quad Fp = Gq$$

poznat pod pravilom "što se dobije na sili izgubi se na predjenom putu".

Slično prednjem mogu se izvesti ravnotežni uslovi na raznim složenim koturačama*), kod punih nosača, rešetkastih nosača (statički odredjenih i neodredjenih).

Princip virtualnih pomeranja je opšti princip Analitičke statike, pa se pomoću njega mogu izvesti ravnotežni uslovi. Ako se kruto telo kreće translatorno brzinom $\boldsymbol{v}_C$ i obrće ugaonom brzinom ω, onda je obimna brzina čestice $[\omega, \boldsymbol{r}_\nu]$, pa su virtualni rad i uslovi

$$\delta A = \sum_\nu (\boldsymbol{F}_\nu, \boldsymbol{v}_C + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}_\nu])dt = \sum_\nu (\boldsymbol{F}_\nu, \delta\boldsymbol{r}_C) + \sum_\nu (\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{r}_\nu, \boldsymbol{F}_\nu])dt =$$

$$= (\sum_\nu \boldsymbol{F}_\nu)\delta\boldsymbol{r}_C + \sum_\nu [\boldsymbol{r}_\nu, \boldsymbol{F}_\nu]\delta\varphi = 0; \quad \sum_\nu \boldsymbol{F}_\nu = 0; \; \mathfrak{M}_O = \sum_\nu [\boldsymbol{r}_\nu, \boldsymbol{F}_\nu] = 0. \tag{3.12}$$

Ravnotežni uslovi su: glavni vektor i glavni moment prostornog sistema sila jednaki su nuli.

Kada se sistem sastoji od krutih tela, tada su ona izložena dejstvu teže. Ako su težine G_ν onda je ukupna težina sistema G, a položaj težišta je $x_C = 0$; $y_C = 0$; $\boldsymbol{G} z_C = \sum_\nu G_\nu z_\nu$, pa je ravnotežni uslov:

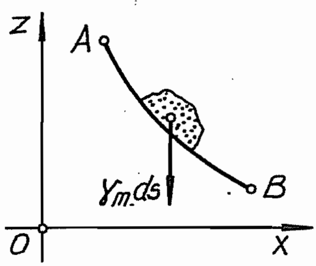
$$\delta \boldsymbol{A} = \sum_\nu G_\nu \delta z_\nu = G\delta z_C = 0, \; tj. \quad \delta z_C = 0. \tag{3.13}$$

Ovo je izraz Torricelli-jevog principa: "Materijalni sistem krutih tela pod uti-

*) Detaljnije Dinamika, čl. 14.3.

cajem težina je u ravnoteži ako mu težište (C) zauzima stacionarni položaj po vertikali". Ovo znači da je varijacija vertikalne koordinate težišta jednaka nuli.

3.3.1. Ravnotežni oblik lančanice. - Koordinata težišta elementa lančanice dužine ds, specifične težine materijala γ_m (slika 3.7), i njegova varijacija, prema (3.13) su



Slika 3.7.

$$z_C=\gamma_m\int z\,ds\,/(\gamma_m\int ds)=\int z\,ds\,/\int ds,\quad \delta z_C=0;$$

pa se problem svodi na odredjivanje ekstremale

$$\delta J=\delta\int z\,ds=\delta\int z\sqrt{dx^2+dz^2}=$$
$$=\delta\int z\sqrt{1+x'^2}\,dz=0;\quad x'=dx/dz.$$

Pošto je podintegralna funkcija $f = z\sqrt{1+x'^2} = f(z,x')$ to je prema Euler-ovoj jednačini (2.31):

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dz}\frac{\partial f}{\partial x'}=-\frac{d}{dz}\frac{\partial f}{\partial x'}=-\frac{d}{dz}\left(\frac{zx'}{\sqrt{1+x'^2}}\right)=0;$$

odnosno

$$\frac{zx'}{\sqrt{1+x'^2}}=C_1=c;\quad x'=\frac{dx}{dz}=\frac{c}{\sqrt{z^2-c^2}}=\frac{1}{\sqrt{(z/c)^2-1}}.$$ Smenom

$\frac{z}{c}=Ch\,u;\ \frac{dx}{du}=c$ dobija se $x=cu+C_2$ pa je

jednačina krive: $z=c\,Ch\,u=c\,Ch\left(\frac{x-\alpha}{c}\right);\ C_2=\alpha=const.$ (3.14)

Ako se položaj materijalnog sistema odredjuje nezavisnim generalisanim koordinatama q_i, $i = 1,2,\ldots,n$, gde je n broj stepeni slobode kretanja sistema, onda se iz (2.62) pri fiksiranom vremenu dobija varijacija

$$\delta \mathbf{r}_\nu=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\delta q_i\ ;\quad i=1,2,\ldots,n\ ;\quad \nu=1,2,\ldots,N, \tag{3.15}$$

pa ako se taj izraz unese u izraz za virtualni rad (3.10) sledi

$$\begin{aligned}\delta A&=\sum_\nu(\mathbf{F}_\nu,\delta\mathbf{r}_\nu)=\sum_\nu\Big(\mathbf{F}_\nu\sum_i\frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\Big)\delta q_i=\\&=\sum_i^n\Big[\sum_\nu\Big(\mathbf{F}_\nu,\frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\Big)\Big]\delta q_i=\sum_i^n Q_i\,\delta q_i=0,\end{aligned} \tag{3.16}$$

gde je generalisana sila Q_i za koordinatu q_i odredjena izrazom

$$Q_i=\sum_{\nu=1}^{N}\left(\mathbf{F}_\nu,\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\right)=\sum_{\nu=1}^{N}\left(X_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}+Y_\nu\frac{\partial y_\nu}{\partial q_i}+Z_\nu\frac{\partial z_\nu}{\partial q_i}\right);\quad i=1,2\ldots,n. \tag{3.17}$$

Za odredjivanje generalisane sile Q_i za svaku koordinatu q_i lakše je koristiti "princip zamrzavanja (zaustavljanja) veza". Naime, pretpostavi se da je samo i-toj koordinati dato virtualno pomeranje $\delta q_i \neq 0$, dok su sva ostala jednaka nuli $\delta q_s = 0$, za $s = 1,2,\ldots, n \neq i$, onda su virtualni rad samo na tom pomeranju i ta sila

$$\delta A_{(i)}=Q_i\,\delta q_i\,;\qquad Q_i=\delta A_{(i)}/\delta q_i\,. \tag{3.18}$$

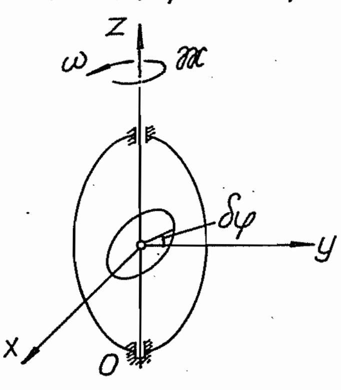
Priraštaji (varijacije) nezavisnih generalisanih koordinata q_i su potpuno nezavisni pa je ravnotežni položaj sistema, prema (3.16), moguć samo onda kada su generalisane sile jednake nuli

$$Q_i = 0,\qquad i = 1,2,\ldots, n.$$

te se može reći: "Ravnotežni položaj holonomnog sistema je samo onaj moguć kada su u tome položaju sve generalisane sile jednake nuli".

Naprimer, kada se telo kreće translatorno duž Ox-ose pod dejstvom sile $\mathbf{F} = X\mathbf{i}$, tada su:

$$\delta\mathbf{r}=\delta x\mathbf{i}\;;\quad n=1\;;\quad \delta A=X\delta x=Q\delta q\;;\quad Q=X\;;\quad X=0.$$



Slika 3.8.

Dakle, ovde je generalisana sila stvarna sila. Pri obrtanju krutog tela oko Oz-ose ugaonom brzinom ω (slika 3.8) generalisana koordinata je ugao φ a obrtanje izvodi obrtni moment oko te ose $\mathfrak{M}_z=\mathfrak{M}$, pa će biti $n=1;\ \delta q=\delta\varphi\,;$

$$\delta A=\mathfrak{M}\delta\varphi=Q\delta q\;;\quad Q=\mathfrak{M}\;;\quad \mathfrak{M}=0.$$

U ovom slučaju je, dakle, generalisana sila spreg sila.

Kod slobodnog krutog tela u prostoru (slika 2.13) sistem se sila mora svesti na galavni vektor i glavni moment, pa će biti:

$$\delta A = Q_x\,\delta x + Q_y\,\delta y + Q_z\,\delta z + Q_\psi\,\delta\psi + Q_\theta\,\delta\theta + Q_\varphi\,\delta\varphi,$$

te su generalisane sile:

$$Q_x = X;\quad Q_y = Y;\quad Q_z = Z;\quad Q_\psi = \mathfrak{M}_z;\quad Q_\theta = \mathfrak{M}_e;\quad Q_\varphi = \mathfrak{M}_\zeta. \tag{3.20}$$

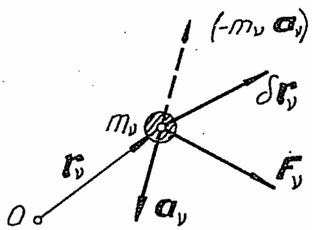
Tri su sile, a tri su spregovi. Ravnotežni uslov je da su sile X = Y = Z = O i glavni momenti oko čvorne ose, ose precesije i figurne ose jednaki nuli. Skalarne jednačine (3.20) ekvivalentne su vektorskim jednačinama: glavnom vektoru i glavnom momentu za tačku C (težište):

$$F_r = 0;\qquad \mathfrak{M}_C = 0. \tag{3.21}$$

3.4. Lagrange-d'Alembert-ov opšti princip. Opšta jednačina Dinamike. — D'Alambert-ov princip (čl. 3.2) svodi dinamički problem odredjivanja kretanja pod uticajem sila na statički, tj. na ispitivanje "ravnoteže pri kretanju" svih sila koje dejstvuju uključujući i fiktivne sile inercije. Lagrange-ov princip virtualnih pomeranja (član 3.3) sastoji se u rešavanju statičkih problema ravnoteže dinamičkom metodom, naime, u konfiguraciji ravnoteže mora rad svih aktivnih (datih) sila na svakom virtualnom pomeranju pri idealnim dvostranim vezama biti jednak nuli. Kada se ovaj princip primeni na d'Alembert-ov princip onda se dobija vektorska jednačina

$$\sum_{\nu=1}^{N} (F_\nu - m_\nu a_\nu,\ \delta r_\nu) = $$
$$= \sum_\nu (X_\nu - m_\nu \ddot{x}_\nu)\delta x_\nu + (Y_\nu - m_\nu \ddot{y}_\nu)\delta y_\nu + (Z_\nu - m_\nu \ddot{z}_\nu)\delta z_\nu \leqslant 0. \tag{3.22}$$

Stoga se princip izražava ovako (slika 3.9) "Zbir radova aktivnih sila i sila inercije tačaka materijalnog sistema na svim virtualnim pomeranjima ne može biti pozitivan. Za slučaj dvostranih veza on je jednak nuli".



Slika 3.9.

Ovaj princip koji predstavlja sjedinjenje d'Alembert-ovog principa i principa virtualnih pomeranja osnovni je princip Mehanike. Jednačina (3.22) naziva se opšta jednačina Dinamike, i važi za svaki položaj sistema u toku kretanja; a pri mirovanju – ravnoteži – svodi se na Lagrange-ev princip odnosno na opštu jednačinu ravnoteže. Ona je izvedena za slučaj idealnih veza, u protivnom, kod neidealnih veza treba otpore takvih veza smatrati aktivnim silama.

Lagrange-d'Alembert-ov opšti princip Mehanike i opšta jednačina (3.22) izvedena je na osnovu Newton-ovih aksioma i dinamičkih zakona, pošto ona povezuje dinamičke veličine koje karakterišu kretanje. Obratno, mogu se dinamički zakoni izvesti iz ovog principa i time potvrditi njegovu osobinu opšteg principa. Pri tome ne mogu se izvesti relacije za otpore veza, jer se za njih moraju uvesti ograničenja.

3.4.1. Drugi Newton-ov zakon. – Pošto su virtualna pomeranja slobodnog sistema medjusobno nezavisna, to iz (3.22), s obzirom na osobinu $M\mathbf{r}_C = \sum_\nu m_\nu \mathbf{r}_\nu$, sledi:

$$\delta\mathbf{r}_\nu \neq 0; \quad \sum_\nu \mathbf{F}_\nu = \sum_\nu m_\nu \mathbf{a}_\nu = M\mathbf{a}_C \qquad M\mathbf{a}_C = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu = \mathbf{F} \quad (3.23)$$

i predstavlja Newton-ov zakon o kretanju središta sistema ubrzanjem $\mathbf{a}_C$.

Naprimer, kod strme ravni (slika 3.2) je $(\mathbf{G} - m\mathbf{a}, \delta\mathbf{s}) = 0$; $a = g\sin\alpha$.

3.4.2. Zakon o količini kretanja. – Neka su veze sistema takve da mu omogućavaju translatorno kretanje u pravcu orijentisanom jediničnim vektorom $\mathbf{t}$, onda su virtualna pomeranja $\delta\mathbf{r}_\nu = \delta_s \cdot \mathbf{t}$, pa se iz (3.22) dobija

$$\sum(\mathbf{F}_\nu - m_\nu \dot{\mathbf{v}}_\nu, \mathbf{t})\delta s = 0; \quad \sum_\nu(\dot{\mathbf{K}}_\nu, \mathbf{t}) = \sum_\nu(\mathbf{F}_\nu, \mathbf{t}); \quad \dot{K}_t = \sum_\nu(\mathbf{F}_\nu, \mathbf{t}) = \sum_\nu F_{\nu t} \quad (3.24)$$

te je: "Izvod po vremenu količine kretanja sistema na pravac mogućeg translatornog kretanja sistema ($\mathbf{t}$) jednak je zbiru projekcija svih aktivnih sila na taj pravac". U zbir ulaze samo spoljašnje aktivne sile, jer se unutrašnje poništavaju, pošto se javljaju poparno.

Kako je prema zakonu o središtu masa $M\mathbf{r}_C = \sum_\nu m_\nu \mathbf{r}_\nu$, to će biti

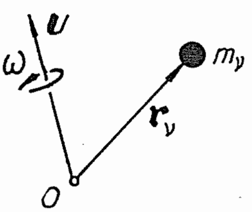
$$M\dot{\mathbf{v}}_C = \sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{v}}_\nu = \sum_\nu \dot{\mathbf{K}}_\nu = \dot{\mathbf{K}}; \quad (\dot{\mathbf{K}}, \mathbf{t}) = \dot{K}_t = \sum_\nu F_{\nu t} = Ma_{Ct} \quad (3.25)$$

gde je $\mathbf{K}$ količina kretanja sistema. Dakle, ako sistem može da se kreće translatorno u nekom pravcu ($\mathbf{f}$), onda se projekcija središta sistema na taj pravac kreće kao materijalna tačka mase M jednake ukupnoj masi sistema pod dejstvom zbira projekcija aktivnih sila na taj pravac. Ako na sistem ne dejstvuju sile, ili je njihov zbir jednak nuli, onda iz prednjeg sledi

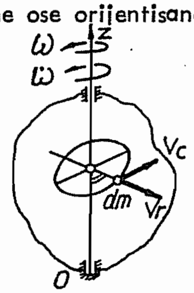
$$M\, a_{Cf} = 0; \quad a_{Cf} = 0; \quad v_{Cf} = c = \text{const}; \quad \mathbf{r}_C = \mathbf{c}t + \mathbf{b} \tag{3.26}$$

pa se središta sistema kreće u tom pravcu pravolinijski i jednoliko (Newton-ov znak o kretanju središta materijalnog sistema).

3.4.3. Zakon o momentu količine kretanja. - Neka veze sistema dozvoljavaju obrtanje oko neke stalne ose orijentisane jediničnim vektorom $\mathbf{u}$ koja prolazi kroz stalnu tačku O, uganom brzinom ω (slika 3.10) onda je virtualno pomeranje $\delta\mathbf{r}_\nu = [\boldsymbol{\omega}\delta t, \mathbf{r}_\nu] = \omega\delta t[\mathbf{u}, \mathbf{r}_\nu] = [\mathbf{u}, \mathbf{r}_\nu]\,\delta\varphi$, gde je $\delta\varphi$ elementarni ugao obrtanja oko Ou-ose. Unošenjem ove relacije u (3.23) dobija se



Slika 3.10.



Slika 3.11.

$$\sum_\nu (\mathbf{F}_\nu - m_\nu\, \mathbf{a}_\nu, [\mathbf{u}, \mathbf{r}_\nu])\,\delta\varphi = \\ = (\mathbf{u}\delta\varphi, \sum_\nu [\mathbf{r}_\nu, \mathbf{F}_\nu] - \sum_\nu [\mathbf{r}_\nu, m_\nu \mathbf{a}_\nu]) = 0. \tag{3.27}$$

Pošto je $\mathbf{u}\,\delta\varphi$ proizvoljni vektor a $m_\nu \mathbf{v}_\nu$ je količina kretanja, to iz prednje relacije sledi da je

$$\sum_\nu [\mathbf{r}_\nu, m_\nu\, \mathbf{a}_\nu] = \frac{d}{dt}\sum_\nu [\mathbf{r}_\nu, m_\nu \mathbf{v}_\nu] = \\ = \frac{d}{dt}\mathbf{L}_O = \sum_\nu [\mathbf{r}_\nu, \mathbf{F}_\nu] = \mathfrak{M}_O; \qquad \dot{\mathbf{L}}_O = \mathfrak{M}_O \tag{3.28}$$

"Izvod po vremenu kinetičkog momenta-momenta količine kretanja-za pol O jednak je glavnom momentu svih spoljašnjih sila na taj pol". Ako se uzme da je $\delta\varphi$ proizvoljno ($\delta\varphi \neq 0$), onda iz (3.27) sledi ovaj zakon za projekciju glavnog momenta na obrtnu osu

$$\delta\varphi\{(\mathbf{u}, \mathfrak{M}_O) - (\mathbf{u}, \dot{\mathbf{L}}_O)\} = 0; \qquad \dot{L}_U = \mathfrak{M}_U \,. \tag{3.29}$$

"Izvod po vremenu projekcije momenta količine kretanja na obrtnu osu jednak je glavnom momentu sila za tu osu".

Naprimer, kod obrtanja krutog tela oko Oz-ose (slika 3.11) radijalna brzina $v_r = \dot{r}$ seče Oz-osu, a cirkularna $v_c = r\dot{\varphi} = r\omega$ ukršta se sa osom pod pravim uglom, pa su moment te količine kretanja $dK_c = v_c\, dm$ i izvod

$$L_z = \int_V dK_c r = \iiint_V r^2 \omega\, dm = J_z \omega; \quad \dot{L}_z = \mathfrak{M}_z; \, J_z \dot{\omega} = \mathfrak{M}_z. \tag{3.30}$$

3.4.4. Zakon o kinetičkoj energiji.- Kada su veze skleronomne, tada je stvarno pomeranje jedno od virtualnih, $\delta \mathbf{r}_\nu = d\mathbf{r}_\nu$, pa se dobija

$$\sum_\nu (\mathbf{F}_\nu - m\mathbf{a}_\nu, d\mathbf{r}_\nu) = 0;$$

te je
$$\sum_\nu (\mathbf{F}_\nu, d\mathbf{r}_\nu) = \sum_\nu m_\nu \left(\frac{d\mathbf{v}_\nu}{dt}, \mathbf{v}_\nu\, dt\right) = \sum_\nu m_\nu (\mathbf{v}_\nu, d\mathbf{v}_\nu),$$

$$\sum_\nu m_\nu (\mathbf{v}_\nu, d\mathbf{v}_\nu) = d\left[\sum_\nu \frac{1}{2} m_\nu v_\nu^2\right] = \sum_\nu (\mathbf{F}_\nu, d\mathbf{r}_\nu);$$

$$\sum_\nu dE_K = E_K - E_{KO} = \sum_\nu d\mathbf{A} = \mathbf{A}. \tag{3.31}$$

Ovo je izraz zakona o kinetičkoj energiji: "Priraštaj kinetičke energije jednak je zbiru elementarnih radova aktivnih i unutrašnjih sila".

3.4.5. Lagrange-ove jednačine prve vrste.- Ove su jednačine izvedene u čl. 2.10. a ovde ćemo ih povezati sa opštim principom. Ako se uvedu opšte Dekartove pravougle koordinate ξ_i prema (2.49), onda opšta jednačina (3.22) ima oblik:

$$\sum_{j=1}^{3N} (F_j - m_j \ddot{\xi}_j)\, \delta\xi_j = 0; \qquad j = 1,2,\ldots,3N. \tag{3.32}$$

Varijacije tih koordinata moraju zadovoljiti uslove (2.56) i (2.57), tj.

$$\sum_j (\partial f_\alpha / \partial \xi_j)\, \delta\xi_j = 0; \quad \sum_j N_{\beta j}\, \delta\xi_j = 0; \quad \alpha = 1,\ldots,h; \quad \beta = 1,\ldots,\ell. \tag{3.33}$$

Zbog ovoga je 3N varijacija $\delta\xi_j$ vezano sa h + ℓ uslova (3.32), pa je broj nezavisnih varijacija 3N – (h+1), dok je broj zavisnih h+1. Pomoću uslova (3.33) mogu se h+1 zavisnih varijacija izraziti pomoću 3N – (h+1) nezavisnih (proizvoljno izabranih), pa kada se te relacije unesu u opštu jednačinu (3.32) u njoj će ostati samo nezavisne varijacije. Ovo se najbolje postiže Lagrange-ovom metodom multiplikatora. Ako se uslovi veza (3.33) pomnože pojedinačno multiplikatorima λ_α i μ_β i ove se jednačine saberu sa (3.32) dobiće se relacija

$$\sum_j \Big(F_j - m_j \ddot{\xi}_j + \sum_\alpha \lambda_\alpha (\partial f_\alpha / \partial \xi_j) + \sum_\beta \mu_\beta N_{\beta j}; \qquad \begin{matrix} \alpha = 1, \dots, h, \\ \beta = 1, \dots, \ell. \end{matrix}$$

Multiplikatore λ_α i μ_β kojih ima h+1 treba tako izabrati da bi množitelji pri h+1 zavisnih varijacija bili jednaki nuli, pa se tako dobija sistem od 3N jednačina

$$m_j \ddot{\xi}_j = F_j + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \xi_j} + \sum_\beta \mu_\beta N_{\beta j}; \qquad j = 1, 2, \dots, 3N, \tag{3.34}$$

koje se nazivaju Lagrange-ove jednačine prve vrste ili jednačine sa množiteljima veza. Njima treba dodati i h+1 jednačina veza

$$f_\alpha(\xi_j, t) = 0; \qquad \sum_j N_{\beta j} \dot{\xi}_j + N_\beta = 0; \qquad j = 1, 2, \dots, 3N, \tag{3.35}$$

pa se dobija sistem od 3N + (h+1) jednačina za određivanje 3N koordinata kretanja i (h+1) Lagrange-ovih multiplikatora veza.

Naprimer, za slučaj jedne idealne veze (n = 1) iz (3.34) se dobija:

$$\begin{aligned} m\mathbf{a} &= \mathbf{F} + \lambda\,\mathrm{grad} f; & m\ddot{x} &= X + \lambda(\partial f/\partial x); \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda(\partial f/\partial y); & m\ddot{z} &= Z + \lambda(\partial f/\partial z); \end{aligned} \tag{3.36}$$

Ovaj se rezultat može dobiti i neposredno. Pošto je veza zadržavajuća to je virtualno pomeranje u tangencijalnoj ravni, te je (grad f, $\delta\mathbf{r}$) = 0, te postoji treći proizvoljni vektor $\delta\mathbf{p}$ upravan na ova dva, $\delta\mathbf{r} = [\mathrm{grad}\, f, \delta\mathbf{p}]$ pa se dobija

$$(\mathbf{F} - m\mathbf{a}, [\nabla f, \delta\mathbf{p}]) = (\delta\mathbf{p}, [\mathbf{F} - m\mathbf{a}, \nabla f]) = 0; \quad \mathbf{F} - m\mathbf{a} = \lambda \nabla f.$$

Lagrange-ove jednačine prve vrste daju integral energije ako su ispunjena ova dva uslova: 1°. ako su veze skleronomne, tj. da su

$$\partial f_\alpha / \partial t = 0; \quad N_\beta = 0; \quad \alpha = 1,\dots,h; \qquad \beta = 1,\dots,\ell, \tag{3.37}$$

i 2°. da postoji funkcija sile $U = U(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \dots, 3N)$ takva da su sile

$$F_j = \frac{\partial U}{\partial \xi_j}, \qquad j = 1,2,\dots,3N. \tag{3.38}$$

Ako se svaka od jednačina (3.34) pomnoži sa $d\xi_j$ i sve saberu dobiće se jednačina

$$\sum_j m_j \ddot{\xi}_j d\xi_j = \sum_j F_j d\xi_j + \sum_j \Big(\sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \xi_j} d\xi_j\Big) + \sum_j \Big(\sum_\beta \mu_\beta N_{\beta j} d\xi_j\Big). \tag{3.39}$$

S obzirom na (3.31), (3.38) i jednačine veza (3.35) dobijaju se sledeće relacije:

$$\sum_j m_j \ddot{\xi}_j d\xi_j = \sum_j m_j \frac{d\dot{\xi}}{dt} \dot{\xi} dt = d \sum_j \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 = dE_k;$$

$$\sum_j F_j d\xi_j = \sum_j \frac{\partial U}{\partial \xi_j} d\xi_j = dU;$$

$$\sum_j \frac{\partial f_\alpha}{\partial \xi_j} d\xi_j + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0; \qquad \sum_j \frac{\partial f_\alpha}{\partial \xi_j} d\xi_j = -\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt;$$

$$\sum_j N_{\beta j} \dot{\xi}_j + N_\beta = 0; \qquad \sum_j N_{\beta j} d\xi_j = -N_\beta dt.$$

Kada se one unesu u jednačinu(3.39) ona se pretvara u jednačinu

$$dE_k = dU - \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt - \sum_\beta \mu_\beta N_\beta dt. \tag{3.40}$$

Ako su ispunjeni uslovi stacionarnosti (3.37) i (3.38) onda se dobija integral energije

$$dE_k = dU; \; E_k = U + h; \; h = \text{const}. \tag{3.41}$$

Primer videti u čl. 2.9.

3.4.6. Lagrange-ove jednačine druge vrste. - Neka se materijalni sistem od N tačaka kreće pod uticajem h holonomnih veza, onda mu je broj stepeni slobode kretanja $n = 3N - h$, pa se položaj svake tačke može odrediti sa n nezavisnih koordinata q_i, te se vektor položaja ν -te tačke i njegova varijacija

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu (q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots, q_n ; t); \quad \delta \mathbf{r}_\nu = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i ; \quad \nu = 1, \ldots, N. \tag{3.42}$$

Brzina te tačke je

$$\mathbf{v}_\nu = \dot{\mathbf{r}}_\nu = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} ; \qquad i=1,2,\ldots n, \tag{3.43}$$

pa se vidi da brzine linearno zavise od generalisanih brzina $\dot{q}_i$.

Opšta jednačina (3.22) postaje

$$\sum (\mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{a}_\nu, \delta \mathbf{r}_\nu) = \sum_\nu (\mathbf{F}_\nu, \delta \mathbf{r}_\nu) + \sum_\nu (-m_\nu \mathbf{a}_\nu, \delta \mathbf{r}_\nu).$$

Prvi član ove jednačine može se, prema (3.16), zameniti virtualnim radom generalisanih sila

$$\sum_\nu (\mathbf{F}_\nu, \delta \mathbf{r}_\nu) = \sum_i Q_i \delta q_i ; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3.44}$$

Drugi član predstavlja virtualni rad sila inercije i on se može predstaviti na ovaj način:

$$\sum_\nu (m_\nu \mathbf{a}_\nu, \delta \mathbf{r}_\nu) = \sum_\nu (m_\nu \mathbf{a}_\nu, \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i) = \sum_i \Big(\sum_\nu (m_\nu \mathbf{a}_\nu, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}) \Big) \delta q_i .$$

Iz (3.43) sledi

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i};$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_k} = \sum_i \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q_k \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q_k \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_k} \Big(\sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \Big) = \frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial q_k},$$

pa je

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}; \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial q_i}$$

te je

$$\frac{d}{dt} (m_\nu \mathbf{v}_\nu, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}) = (m_\nu \mathbf{a}_\nu, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}) + (m_\nu \mathbf{v}_\nu, \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}),$$

odnosno

$$(m_\nu \mathbf{a}_\nu, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}) = \frac{d}{dt}(m_\nu \mathbf{v}_\nu, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i}) - (m_\nu \mathbf{v}_\nu, \frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial q_i}) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(\frac{1}{2} m_\nu \mathbf{v}_\nu^2)\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}(\frac{1}{2} m_\nu \mathbf{v}_\nu^2).$$

Uvodjenjem kinetičke energije materijalnog sistema dobija se virtualni rad sila inercije

$$E_K = \sum_\nu \frac{1}{2} m_\nu v_\nu^2; \quad \sum_\nu (-m_\nu \mathbf{a}_\nu, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}) = -\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_K}{\partial q_i}\right], \tag{3.46}$$

pa, s obzirom na (3.44), opšta jednačina (3.22) postaje

$$\sum_\nu (\mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{a}_\nu, \delta \mathbf{r}_\nu) = \sum_i \left\{ Q_i - \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_K}{\partial q_i}\right]\right\} \delta q_i . \tag{3.47}$$

U ovoj su jednačini sve krivolinijske varijacije proizvoljne, pa se mogu uzeti da su sve jednake nuli izuzev jedne, $\delta q_i \neq 0$, tada mora biti izraz u zagradi jednak nuli, te se dobija da je za svako i:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_K}{\partial q_i} = Q_i ; \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Jednačine ovog sistema nazivaju se Lagrange-ove jednačine druge vrste. Njih ima n koliko i stepeni slobode kretanja materijalnog sistema. One su diferencijalne jednačine drugog reda u odnosu na generalisane koordinate q_i koje se nazivaju Lagrange-ove koordinate materijalnog sistema. Njihovim integralenjem odredjuju se te koordinate u funkciji od vremena, $q_i = q_i(t)$, i 2n integracionih konstanti koje se odredjuju iz početnog kinematičkog stanja sistema. Stoga ove jednačine u potpunosti odredjuju kretanje (unutrašnju dinamiku), dok u njih ne ulaze veze, pa se moraju upotrebiti Lagrange-ove jednačine prve vrste za odredjivanje otpora veza.

Osobina Lagrange-ovih jednačina druge vrste da ne sadrže otpore veza i da ih ima onoliko koliko i nezavisnih koordinata (q_i) daje im preimućstvo pri rešavanju dinamičkih problema.

Ove jednačine predstavljaju diferencijalne jednačine kretanja jedne slobodne reprezentativne tačke u prostoru V_n čiji se broj dimenzija ("mernost") poklapa sa brojem stepeni slobode kretanja sistema (n) pod dejstvom generalisanih sila Q_i.

Ako su sile konzervativne i imaju funkciju sile (3.38), onda je prema (3.17), generalisana sila

$$Q_i = \sum_j F_j \frac{\partial \xi_j}{\partial q_i} = \sum_j \frac{\partial U}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}; \quad i=1,2,\dots,n, \qquad (3.49)$$

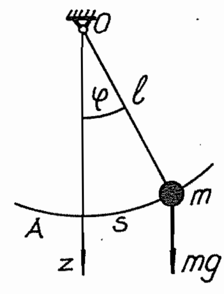
pa se Lagrange-ove jednačine druge vrste pišu u obliku

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_K}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial E_K}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}; \qquad i=1,2,\dots,n. \qquad (3.50)$$

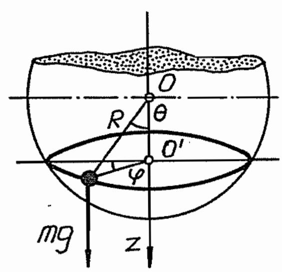
Pošto funkcija sile $U = U(q_i)$ ne zavisi od generalisanih brzina, to se može uvesti Lagrange-ova funkcija ili kinetički potencijal kao zbir kinetičke energije i funkcije U, pa se jednačine (3.48) pišu i u ovom obliku

$$\mathcal{L} = E_K + U; \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0; \quad i=1,2,\dots,n. \qquad (3.51)$$

Primeri: - 1. Matematičko klatno. - Kod matematičkog klatna (slika 3.12) su:



Slika 3.12.



Slika 3.13.

$n=1;\ q=\varphi;$

$E_k = mv^2/2 = m\dot s^2/2 = ml^2\dot\varphi^2/2;$

$U = mgz = mgl\cos\varphi;$

$ml^2\ddot\varphi = -mgl\sin\varphi$

(sinusna karakteristika). Za male oscilacije uzima se da je $\sin\varphi \approx \varphi$, pa će biti

$$\ddot\varphi + (g/l)\varphi = 0$$

(pravolinijska karakteristika).

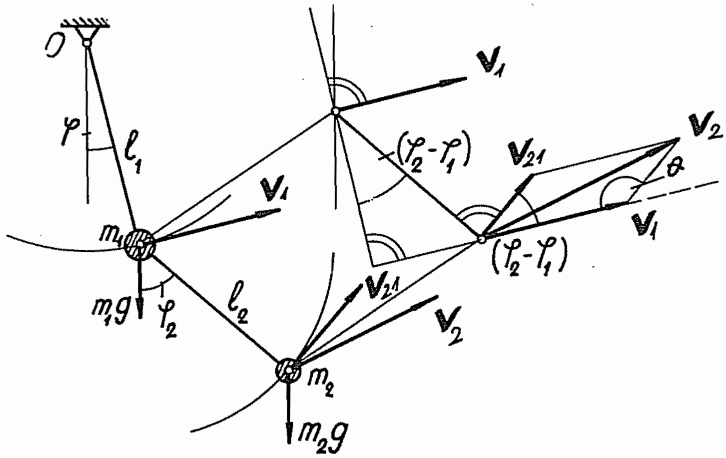
2. Sferno klatno. - Kod sfernog klatna (slika 3.13) su:

$$n=2;\quad q_1=\varphi;\quad q_2=\theta;$$

$$E_k=\frac{1}{2}m\left[(R\sin\theta)^2\dot{\varphi}^2+R^2\dot{\theta}^2\right];\qquad U=mgz=mgR\cos\theta;$$

$$\frac{d}{dt}(mR^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi})=0;\quad R^2\dot{\varphi}\sin^2\theta=C;\quad R^2\ddot{\theta}-R^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta=-Rg\sin\theta.$$

3. Dvojno matematičko klatno. – U ovome slučaju (slika 3.14) su:



Slika 3.14.

$$n=2;\quad q_i=\varphi_i;\quad \mathbf{V}_2=\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_{21};\quad \theta=\pi-(\varphi_2-\varphi_1);$$

$$v_2^2=v_1^2+v_{21}^2-2v_1v_{21}\cos\theta=l_1^2\dot{\varphi}_1^2+l_2^2\dot{\varphi}_2^2+2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2-\varphi_1);$$

$$E_k=\frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2+m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)+\frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\varphi}_2^2.$$

Generalisane sile se odredjuju pomoću rada:

$$z_1=l_1\cos\varphi_1;\qquad z_2=l_1\cos\varphi_1+l_2\cos\varphi_2;$$

$$\delta A=Q_1\delta\varphi_1+Q_2\delta\varphi_2=m_1g\delta z_1+m_2g\delta z_2=-m_1gl_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1-$$
$$-m_2g(l_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1+l_2\sin\varphi_2\delta\varphi_2)=-(m_1+m_2)gl_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1-m_2gl_2\sin\varphi_2\delta\varphi_2,$$

pa su Lagrange-ove jednačine druge vrste:

$$\frac{d}{dt}\left[(m_1+m_2)\ell_1^2\dot{\varphi}_1+m_2\ell_1\ell_2\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)\right]-m_2\ell_1\ell_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)=-(m_1+m_2)g\ell_1\sin\varphi_1;$$

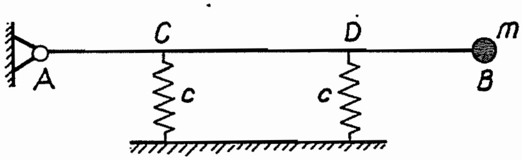
$$\frac{d}{dt}\left[m_2\ell_1\ell_2\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_2-\varphi_1)+m_2\ell_2^2\dot{\varphi}_2\right]+m_2\ell_1\ell_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)=-m_2g\ell_2\sin\varphi_2.$$

Za male oscilacije može se vektorski zbir brzina $\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_{21}$ zameniti skalarnim $v_2\approx v_1+v_{21}=\ell_1\dot{\varphi}_1+\ell_2\dot{\varphi}_2$; $\varphi_2-\varphi_1=0$, $\cos(\varphi_2-\varphi_1)\approx 1$, $\sin\varphi_1\approx\varphi_1$; $\sin\varphi_2\approx\varphi_2$; pa će biti

$$\frac{d}{dt}\left[(m_1+m_2)\ell_1^2\dot{\varphi}_1+m_2\ell_1\ell_2\dot{\varphi}_2\right]+(m_1+m_2)g\ell_1\varphi_1=0;$$

$$\frac{d}{dt}\left[m_2\ell_1\ell_2\dot{\varphi}_1+m\ell_2^2\dot{\varphi}_2\right]+m_2g\ell_2\varphi_2=0.$$

4. Oscilacije mase na lakoj gredi. – Na kraj lakog štapa AB koji je zglobno vezan u A nasadjena je masa m (slika 3.15). Štap je poduprt sa dve cilindrične opruge krutosti c, dužina s u nenapregnutom stanju, na mestima C i D; $\overline{AC}=\overline{CD}=\overline{DB}$. U ravnotežnom položaju štap je horizontalan jer je ispunjen ravnotežni uslov $\sum M_A = mgl - c_1a_1\cdot(s-p) - c_2a_2(s-p) = mgl - cl(s-p) = Q$, pa se težina dalje eliminiše.



Slika 3.15.

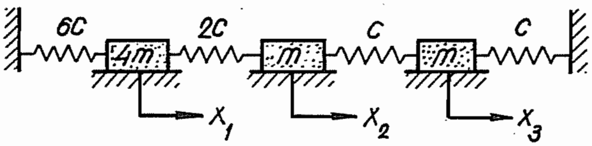
Stoga su:

$$E_K=\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2;\quad U=-\frac{1}{18}c\ell^2\varphi^2-\frac{4}{18}c\ell^2\varphi^2=-\frac{5}{18}c\ell^2\varphi^2;$$

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2-\frac{5}{18}c\ell^2\varphi^2;\quad m\ell^2\ddot{\varphi}+\frac{5}{9}c\ell^2\varphi=0;$$

$$\ddot{\varphi}+\left(\frac{5c}{9m}\right)\varphi=0;\quad \omega^2=\frac{5c}{9m}.$$

5. Oscilacije vezanog lančanog sistema. - Na glatkom podu nalaze se mase (slika 3.16) vezane oprugama. Ovde su:



Slika 3.16.

$$E_k=\frac{1}{2}m(4\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2);\quad U=-\frac{1}{2}6cx_1^2-\frac{1}{2}2c(x_2-x_1)^2-\frac{1}{2}c(x_3-x_2)^2-\frac{1}{2}cx_3^2;$$

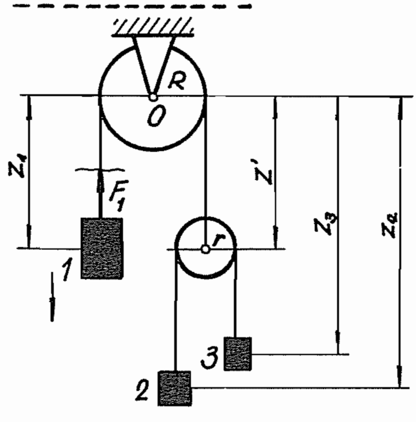
$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m(4\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)-\frac{c}{2}(8x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3);$$

$$\begin{aligned} 4m\ddot{x}_1+8cx_1-2cx_2&=0;\\ 2m\ddot{x}_2+3cx_2-2cx_1&=0;\\ m\ddot{x}_3+2cx_3-cx_2&=0; \end{aligned}\qquad \begin{pmatrix} 8-4u & -2 & 0\\ -2 & 3-2u & -1\\ 0 & -1 & 2-u \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} A_1\\ A_2\\ A_3 \end{Bmatrix};$$

$$f\left(u=\frac{m\omega^2}{c}\right)=(2-u)(u^2-5u+4)=0,$$

pa su svojstvene vrednosti: $u_s = m\,\omega_s^2/c = 1;\ 2;\ 4.$

6. Koturača sa teretima.*) - Preko tankih obruča poluprečnika R i r = R/2 prebačena su užad o čijim krajevima vise tereti masa m_i (redom) = = 9 m; 7 m i 3 m; i = 1,2,3, težina mg = 29 kp (slika 3.17).



Slika 3.17.

a) Veze:

$$z_1+z'+R\pi=\ell_1;$$

$$z_2-z'+z_3-z'+r\pi=\ell_2;$$

$$z_3=-z_2+2z'+\ell_2-r\pi=-2z_1-z_2+c;$$

$$\dot{z}_3=-2\dot{z}_1-\dot{z}_2.$$

b) Kinetička energija sistema:

$$E_k=\sum_i\frac{1}{2}m_i\dot{z}_i^2=\frac{1}{2}m(21\dot{z}_1^2+10\dot{z}_2^2+12\dot{z}_1\dot{z}_2).$$

---

*) Detaljnije videti: Zbirka zadataka iz Mehanike II.

c) Funkcija sile:

$$U=\sum_i m_i g z_i = mg(3z_1+4z_2+3c).$$

d) Lagrange-ove jednačine:

$$7\ddot{z}_1+2\ddot{z}_2=g; \qquad \ddot{z}_1=g/29; \qquad \ddot{z}_3=-2\ddot{z}_1-\ddot{z}_2=-13g/29.$$

$$3\ddot{z}_1+5\ddot{z}_2=2g; \qquad \ddot{z}_2=11g/29;$$

e) Sila u prvom užetu.- Po d'Alembert-ovom principu biće:

$$\mathbf{G}_1+(-m_1\mathbf{a}_1)+\mathbf{F}_{w1}=0; \qquad m_1 g-m_1\ddot{z}_1-F_1=0;$$

$$F_1=m_1\left(1-\frac{1}{29}\right)g=\frac{9\cdot 28}{29}mg=252\ kp.$$

4. ENERGIJE SISTEMA MATERIJALNIH TAČAKA

4.1. Kinetička energija. - Da bi se napisao sistem Lagrange-ovih diferencijalnih jednačina drugog reda (3.48) potrebno je izraziti kinetičku energiju materijalnog sistema kao funkciju od generalisanih brzina, koordinata i vremena. Neka sistem ima N materijalnih tačaka i n = 3N - (h + 1) stepeni slobode kretanja, onda je za opisivanje kretanja potrebno n nezavisnih generalisanih koordinata (3.42), a brzina tačke je data izrazom (3.43), pa je izraz za kinetičku energiju sistema:

$$E_k=\sum_{\nu}^{N}\frac{1}{2}m_\nu V_\nu^2=\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu\left(\sum_i\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}\right)^2=\frac{1}{2}\sum_i^n\sum_k^n a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k+\sum_i^n a_i\dot{q}_i+\frac{1}{2}a_0; \quad (4.1)$$

gde su koeficijenti skalarni proizvodi

$$a_{ik}=a_{ki}=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i},\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_k}\right)=\sum_\nu m_\nu(\mathbf{g}_{\nu i},\mathbf{g}_{\nu k}); \quad (4.2a)$$

$$a_i=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i},\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}\right); \quad (4.2b)$$

$$a_0=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t},\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}\right). \quad (4.2c)$$

Ovi su koeficijenti funkcije od generalisanih koordinata q_i, $i = 1,2,\ldots,n$, i vremena t.

Obrazac (4.1) pokazuje da se kinetička energija holonomnog sistema izražava kao kvadratna funkcija u odnosu na generalisane brzine, te se može napisati u obliku

$$E_k = E_k^{(2)} + E_k^{(1)} + E_k^{(0)} \tag{4.3}$$

gde su

$$E_k^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_i \sum_k a_{ik}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_k; \quad E_k^{(1)} = \sum_i a_i \dot{q}_i; \quad E_k^{(0)} = \frac{1}{2} a_o. \tag{4.4}$$

Prvi član predstavlja homogenu kvadratnu formu generalisanih brzina $\dot{q}_i$ a zbog komutativnosti skalarnog proizvoda njeni koeficijenti su simetrični, $a_{ik} = a_{ki}$. Drugi član je linearna forma po generalisanim brzinama, a treći ne zavisi od brzina. Stoga se (4.1) može napisati u matričnom obliku

$$E_K = \frac{1}{2}(\dot{q})\mathbf{A}\{\dot{q}\} + (\dot{q})\{a\} + \frac{1}{2}a_o \tag{4.5}$$

gde je $(\dot{q})$ matrica vrsta a $\{\dot{q}\}$ matrica kolona. Matrica $\mathbf{A}$ naziva se inercijskom matricom.

U slučaju skleronomnog sistema vektor položaja $\mathbf{r}_\nu$ i koordinate q_i ne zavise eksplicitno od vremena, te je $\partial \mathbf{r}_\nu/\partial t=0$, pa su koeficijenti $a_j = 0$ i $a_o = 0$, te je kinetička energija

$$E_K = E_K^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{K=1}^{n} a_{iK}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_K = \frac{1}{2}(\dot{q})\mathbf{A}\{\dot{q}\}. \tag{4.6}$$

Dakle, kinetička energija skleronomnog sistema je homogena kvadratna forma generalisanih brzina.

Kinetička energija $E_k^{(2)}$ je kinetička energija sistema pri "zaustavljenim"/"zamrznutim"/vezama", pa je uvek pozitivno definitna, $E_k^{(2)} > 0$, a jednaka je nuli samo u slučaju kada su sve koordinate $q_i \equiv 0$. Tada koeficijenti a_{ik} forme zadovoljavaju Sylvester-ove uslove*) da su početne determinante od determinante matrice forme pozitivne:

*) Osnovi matričnog računanja.

$$\det\mathbf{A}=|\mathbf{A}|>0;\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}>0; \quad a_{11}>0 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0. \tag{4.7}$$

Naprimer, sledeća ternerna kvadratna forma je pozitivno definitna i može da predstavlja kinetičku energiju holonomno skleronomnog sistema:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=13>0; \quad \begin{matrix} 4>0; \\ 12-4=8>0; \end{matrix}$$

$$E_K=4\dot{q}_1^2+3\dot{q}_2^2+2\dot{q}_3^2+4\dot{q}_1\dot{q}_2+2\dot{q}_1\dot{q}_3+2\dot{q}_2\dot{q}_3 .$$

Izvod kinetičke energije po generalisanoj brzini je generalisani impuls

$$p_i=\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i}=\sum_K a_{iK}\dot{q}_K+a_i=\mathbf{A}\{\dot{q}\}+\{a\} \tag{4.8}$$

pa su oni linearne funkcije generalisanih brzina. Stoga se Lagrange-ove jednačine druge vrste (3.48) mogu napisati u obliku

$$\mathbf{A}\{\ddot{q}\}+\mathbf{C}\{q\}=\{Q\};\quad Q_i=Q_i(q_s,\dot{q}_s,t);\quad s=1,\dots,n, \tag{4.9}$$

gde matrica $\mathbf{C}$ predstavlja matricu elemenata koji ne sadrže druge izvode po koordinatama q_i i vremenu t. U opštem slučaju generalisane sile zavise od koordinata, brzina i vremena, i ne sadrže druge izvode $(\ddot{q}_i)$. Ako je $\det\mathbf{A}\neq 0$, tada se prednje jednačine mogu rešiti po generalisanim ubrzanjima

$$\ddot{q}_i=f_i\quad(q_k;\ \dot{q}_k;\ t),\quad i=1,2,\dots,n. \tag{4.10}$$

Pod pretpostavkom da funkcije f_i imaju neprekidne parcijalne izvode prvog reda, koje su u Mehanici uvek ispunjene, postoji jedno i samo jedno rešenje Lagrange-ovih jednačina (4.9) za dato početno kinematičko stanje $(q_i^{(o)};\ \dot{q}_i^{(o)})$ u vremenu $t=t_o$, $i=1,2,\dots,n$).

4.2. Potencijalna energija. Potencijal. - Ako generalisane sile ne zavise od generalisanih brzina već samo od koordinata i vremena

$$Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots, q_n, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (4.11)$$

gde je n broj stepeni slobode kretanja sistema, i postoji funkcija $\Pi = \Pi(q_1, \ldots, q_i, \ldots, q_n; t)$ takva da je njen parcijalni izvod jednak generalisanoj sili

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi(q_i; t)}{\partial q_i} = -\frac{\partial E_p(q_i, t)}{\partial q_i} = \frac{\partial U(q_i, t)}{\partial q_i} \qquad (4.12)$$

onda se funkcija naziva potencijalnom funkcijom, potencijalom ili potencijalnom energijom ($\Pi = E_p$) a generalisana sila je potencijalna. Pri ovome je

$$\delta \Pi = \sum_i \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \delta q_i; \qquad \delta A = \sum_i Q_i \delta q_i = -\sum \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \delta q_i = -\delta \Pi. \qquad (4.13)$$

Negativna vrednost ove funkcije je funkcija sile $U = -E_p = -\Pi$.

Potencijalne sile su konzervativne sile, pa je takvo kretanje konzervativno. U tome slučaju Lagrange-ove jednačine druge vrste mogu se napisati u sledećem obliku:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0. \qquad (4.14)$$

4.3. Kinetički potencijal. - Ako potencijal ne zavisi od genralisanih brzina, $\Pi = \Pi(q_i, t)$, onda je višak kinetičke energije nad potencijalnom tzv. kinetički potencijal ili Lagrange-ova funkcija:

$$\mathcal{L} = E_k - E_p = E_k - \Pi = E_k + U; \quad \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i = \partial E_k/\partial\dot{q}_i; \quad \partial\mathcal{L}/\partial q_i = (\partial E_k/\partial q_i) - (\partial\Pi/\partial q_i) \qquad (4.15)$$

pa se Lagrange-ove jednačine (4.14) mogu napisati u obliku

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (4.16)$$

Kinetički potencijal je kao i kinetička energija kvadratna funkcija u odnosu na generalisane brzine i može se predstaviti u obliku

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}^{(2)}+\mathcal{L}^{(1)}+\mathcal{L}^{(0)}=\frac{1}{2}\sum_i\sum_k l_{ik}\,\dot{q}_i\dot{q}_k+\sum_i l_i\,\dot{q}_i+\frac{1}{2}l_0, \tag{4.17}$$

gde su koeficijenti l_{ik}, l_i, l_o funkcije koordinata (q_i) i vremena (t). Uporedjenjem sa (4.3) dobija se da su:

$$\mathcal{L}^{(2)}=E_K^{(2)}; \qquad \mathcal{L}^{(1)}=E_K^{(1)}; \qquad \mathcal{L}^{(0)}=E_K^{(0)}-\Pi. \tag{4.18}$$

4.4. Teorema o promeni totalne mehaničke energije. – Pored konzervativnih sila(4.12) mogu da dejstvuju i nezkonzervativne sile $Q_i^* = Q_i^*(q_k, \dot{q}_k, t)$. Tada je totalna generalisana sila

$$Q_i + Q_i^* = -(\partial\Pi/\partial q_i) + Q_i^*, \tag{4.19}$$

pa Lagrange-ove jednačine druge vrste (4.14) postaju

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial E_K}{\partial q_i}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}+Q_i^*. \tag{4.20}$$

Totalna mehanička energija materijalnog sistema je zbir kinetičke i potencijalne, pa je

$$\mathbf{E}=E_K+E_P=E_K+\Pi. \tag{4.21}$$

Da bismo našli izvod ove energije po vremenu $d\mathbf{E}/dt$ nadjimo prvo izvod kinetičke energije $E_k = E_k(q_i, \dot{q}_i, t)$ po vremenu. On iznosi

$$\frac{dE_K}{dt}=\sum_i^n\left(\frac{\partial E_K}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)+\frac{\partial E_K}{\partial t}=\frac{d}{dt}\sum_i^n\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i+\sum_i\left[\frac{\partial E_K}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i}\right]\dot{q}_i+\frac{\partial E_K}{\partial t}$$

jer se diferenciranjem dobija da je

$$\frac{d}{dt}\sum_i\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=\sum_i\frac{d}{dt}\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i+\sum_i\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i.$$

Drugi izraz u prethodnoj relaciji može se zameniti Lagrange-ovim jednačinama (4.19), te se dobija da je

$$\frac{dE_K}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_i\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i+\sum_i\left[\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}-Q_i^*\right]\dot{q}_i+\frac{\partial E_K}{\partial t}.$$

Kada se generalisani impuls p_i (4.8) pomnoži sa $\dot{q}_i$ i sabere za ceo sistem, onda će, zbog relacije (4.4), biti:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_i \sum_k a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_i a_i \dot{q}_i = (\dot{q}) \mathbf{A} \{\dot{q}\} + (\dot{q}) \{a\} = 2E_K^{(2)} + E_K^{(1)},$$

odnosno, s obzirom na relaciju (4.3):

$$\sum_i p_i \dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2\left[E_K - E_K^{(1)} - E_K^{(0)}\right] + E_K^{(1)} = 2E_K - E_K^{(1)} - 2E_K^{(0)},$$

pa je izvod kinetičke energije po vremenu

$$\frac{dE_K}{dt} = \frac{d}{dt}\left[2E_K - E_K^{(1)} - 2E_K^{(0)}\right] + \sum_i \left[\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - Q_i^*\right] \dot{q}_i + \frac{\partial E_K}{\partial t}. \quad (4.22a)$$

Izvod potencijalne energije po vremenu je

$$\frac{d\Pi}{dt} = \sum_i \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \Pi}{\partial t}; \quad \sum_i \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{d\Pi}{dt} - \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \quad (4.22b)$$

Stoga je izvod po vremenu totalne mehaničke energije

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{d(E_K + \Pi)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[2E_K - E_K^{(1)} - 2E_K^{(0)}\right] + \frac{\partial E_K}{\partial t} + \frac{d\Pi}{dt} - \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \sum_i Q_i^* \dot{q}_i + \frac{d\Pi}{dt} =$$

$$= \frac{d}{dt}(2E_K + 2\Pi) - \frac{d}{dt}\left[E_K^{(1)} + 2E_K^{(0)}\right] + \frac{\partial E_K}{\partial t} - \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \sum_i Q_i^* \dot{q}_i,$$

odnosno

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[E_K^{(1)} + 2E_K^{(0)}\right] - \frac{\partial E_K}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \sum Q_i^* \dot{q}_i. \quad (4.23)$$

Zbir proizvoda nekonzervativnih sila i generalisanih brzina predstavlja efekt (snagu) nepotencijalnih sila i piše se u obliku

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \frac{dq_i}{dt} = \frac{d\mathbf{A}^*}{dt}. \quad (4.24)$$

Obrazac (4.23) odredjuje promenu totalne mehaničke energije pri kretanju proizvoljnog holonomnog nekonzervativnog materijalnog sistema. Specijalni slučajevi su:

1. Skleroromni sistem. - Ovde su moguća dva slučaja:

a) Potencijal zavisi eksplicitno od vremena

$$E_K^{(1)}=0; \quad E_K^{(0)}=0; \quad \frac{d\mathbf{E}}{dt}=\frac{\partial\Pi}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot{q}_i \; ; \tag{4.25}$$

b) Potencijal ne zavisi eksplicitno od vremena

$$E_K^{(1)}=0; \quad E_K^{(0)}=0; \quad \frac{d\mathbf{E}}{dt}=\sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot{q}_i \, , \tag{4.26}$$

te je izvod totalne mehaničke energije po vremenu jednak efektu nekonzervativnih sila.

2. Konzervativni sistem. - U ovom slučaju su ispunjena tri uslova: a) sistem je skleronoman, b) sile su konzervativne i c) potencijal ne zavisi eksplicitno od vremena, pa je izvod totalne energije

$$E_K=E_K^{(2)}; \quad Q_i^*=0; \quad \frac{d\mathbf{E}}{dt}=0; \quad \mathbf{E}=E_K+E_p=h=const; \quad E_K=U+h \, . \tag{4.27}$$

Dakle, u ovom slučaju se totalna energija ne menja, pa važi integral energije.

4.5. Giroskopske i disipativne sile. - Prema efektu nekonzervativnih sila nekonzeravativne (nepotencijalne) sile dele se na giroskopske i disipativne sile.

Giroskopske sile su one čiji je efekt jednak nuli

$$\sum_i Q_i^* \dot{q}_i = \sum_i Q_{\gamma i}^* \dot{q}_i = 0. \tag{4.28a}$$

Pošto generalisane nekonzervativne sile zavise i od brzina $Q_i^* = Q_i(q_i, \dot{q}_i, t)$, onda u slučaju linearne zavisnosti od brzina postoji giroskopska matrica $\mathbf{\Gamma}$ koja je antisimetrična tako da su sile

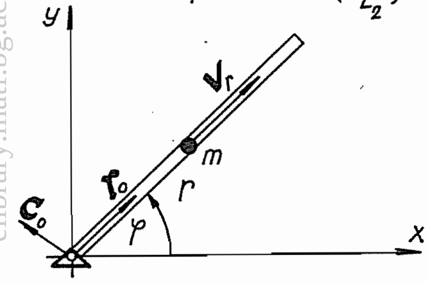
$$Q_{\gamma i}^*=\mathbf{\Gamma}\{\dot{q}\}=\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ik}\dot{q}_k; \quad \gamma_{ik}=-\gamma_{ki}; \quad \gamma_{ii}=0, \tag{4.28b}$$

jer je tada

$$\sum Q^*_{\gamma i}\,\dot q_i = (\dot q)\,\Gamma\{\dot q\} = 0. \qquad (4.28c)$$

Naprimer, matrica drugog reda sa $\gamma_{12} = 1 = -\gamma_{21}$ je giroskopska, jer je efekt:

$$\Gamma = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix};\ (\dot q_1\ \dot q_2)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\dot q_1\\ \dot q_2\end{Bmatrix} = (\dot q_1\ \dot q_2)\begin{Bmatrix}\dot q_2\\ -\dot q_1\end{Bmatrix} = \dot q_1\dot q_2 - \dot q_2\dot q_1 = 0.$$



Slika 4.1.

Cev se obrće u ravni Oxy ugaonom brzinom ω oko zgloba O a u njoj se kreće kuglica mase m relativnom brzinom v_r (slika 4.1). Dinamička jednačina ovog relativnog kretanja je

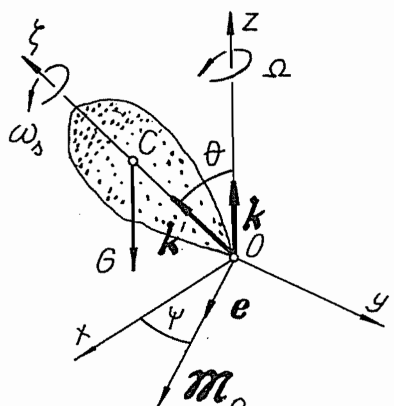
$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + (-m\boldsymbol{a}_p) + (-m\boldsymbol{a}_C) + \boldsymbol{F}_w,$$

a Coriollis-ova sila inercije

$$\mathcal{F}_C = (-m\boldsymbol{a}_C) = -2m[\omega\boldsymbol{k}, \boldsymbol{v}_r] = -2m\omega v_r\boldsymbol{c}_0 = Q^*_\gamma\boldsymbol{c}_0$$

je giroskopska sila, pošto je uslov (4.28) zadovoljen:

$$Q^*_\gamma\dot q_1 = Q^*_\gamma\dot r\,(\boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{r}_0) = 0.$$



Slika 4.2.

Kod precesionog kretanja giroskopa (slika 4.2) koji se obrće velikom ugaonom brzinom ω_s oko figurne ose ($O\zeta$) i precesionom brzinom $\omega_p = \boldsymbol{\Omega}$ oko ose precesije (Oz-ose) biće trenutna ugaona brzina

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\Omega} = \omega_s\boldsymbol{k}' + \Omega\boldsymbol{k}.$$

Prema Resal-ovoj teoremi je izvod zamaha

$$d\boldsymbol{L}_O/dt = \boldsymbol{L}_O + [\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{L}_O] \approx [\boldsymbol{\omega}, J_s\boldsymbol{\omega}] = J_s\,[\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\omega}_s] = \mathfrak{M}_O = \boldsymbol{Q}^*_\gamma,$$

"giroskopska sila", jer je njen efekt jednak nuli

Kao što je poznato iz Dinamike ovaj se moment naziva giroskopski*), pa su zbog njega i sile dobile naziv "giroskopske sile".

Ako potencijal ne zavisi eksplicitno od vremena, $\Pi = \Pi(q_i, t)$ onda iz (4.25) sledi da za giroskopske sile važi integral energije, pošto je $d\mathbf{E}/dt = 0$.

Kod disipativnih sila je efekt negativan ili jednak nuli, te je

$$\sum_i Q_i^* \dot{q}_i = \sum Q_{di}^* \dot{q}_i \leqslant 0. \tag{4.29}$$

Za ove sile postoji simetrična matrica $\mathcal{B}$, $b_{ik} = b_{ki}$, takva da je disipativna sila

$$Q_{di}^* = -\sum_k b_{ik} \dot{q}_k = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}; \qquad 2\Phi = (\dot{q})\mathcal{B}\{\dot{q}\} \geqslant 0, \tag{4.30}$$

gde je Φ Rayleigh-ova funkcija rasipanja ("dissipative function"), jer je

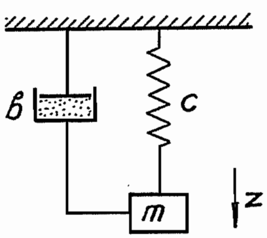
$$\sum_i Q_{di}^* \dot{q}_i = -\sum_i \sum_k b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = -(\dot{q})\mathcal{B}\{\dot{q}\} = 0. \tag{4.31}$$

Ako je sistem skleronoman i potencijal ne zavisi eksplicitno od vremena, onda sledi

$$\Pi = \Pi(q_i); \quad \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \sum Q_{di}^* \dot{q}_i = -(\dot{q})\mathcal{B}\{\dot{q}\} = -2\Phi,$$

pa se vidi da dvostruka Rayleigh-ova funkcija predstavlja rasipanje energije.

Naprimer, kod oscilatora sa amortizacijom (slika 4.3) biće



$$E_k = \frac{1}{2} m\dot{z}^2; \quad E_p = -U = \frac{1}{2} cz^2; \quad \Phi = \frac{1}{2} b\dot{z}^2;$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial E_k}{\partial z} = -\frac{\partial E_p}{\partial z} + Q_d^*; \quad m\ddot{z} = -cz - b\dot{z};$$

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + cz = 0.$$

Slika 4.3.

Množenjem prednje relacije sa $\dot{z}$ dobija se

$m\ddot{z}\dot{z} + cz\dot{z} = -b\dot{z}^2$, ili $(dE_k/dt) + (dE_p/dt) = (d\mathbf{E}/dt) = -2\Phi$.

---

*) Dinamika, čl. 20.4.

4.6. Generalisani potencijal. – Potencijal koji zavisi samo od koordinata i vremena zove se običnii, $\Pi=\Pi(q_i,t)$, a ako zavisi od brzina, koordinata i vremena on je generalisani $\mathcal{P}=\mathcal{P}(q_i,\dot{q}_i,t)$. Sada se generalisane sile izražavaju obrascem

$$\widehat{Q}_i=\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial q_i}\;;\qquad i=1,\ldots,n, \tag{4.33}$$

pa Lagrange-ove jednačine druge vrste, postaju

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial E_k}{\partial q_i}=\widehat{Q}_i=\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial q_i}\;;\qquad i=1,\ldots,n, \tag{4.34}$$

odnosno

$$\widehat{\mathcal{L}}=E_k-\mathcal{P};\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\widehat{\mathcal{L}}}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial\widehat{\mathcal{L}}}{\partial q_i}=0, \tag{4.35}$$

gde je $\widehat{\mathcal{L}}$ generalisani kinetički potencijal.

U Mehanici se tretiraju problemi u kojima generalisane sile ne zavise eksplicitno od generalisanih ubrzanja, već su samo funkcije generalisanih koordinata, brzina i vremena, tj. oblika

$$\widehat{Q}_i=\widehat{Q}_i(q_i,\dot{q}_i,t);\quad i=1,\ldots,n \tag{4.36}$$

pa tada generalisani potencijal $\mathcal{P}$ linearno zavisi od generalisanih brzina

$$\mathcal{P}=\sum_{i=1}^{n}\Pi_i\dot{q}_i+\Pi=\mathcal{P}_\ell+\Pi\;;\qquad \mathcal{P}_\ell=\mathcal{P}^{(1)}=\sum_i\Pi_i\dot{q}_i, \tag{4.37}$$

gde su Π_i, $i=1,\ldots,n$ i Π funkcije koordinata q_i i vremena t. U tome slučaju generalisani kinetički potencijal je kvadratna funkcija generalisanih brzina, pa postoje, slično (4.16), relacije

$$\widehat{\mathcal{L}}_2^{(2)}=E_k^{(2)};\qquad \widehat{\mathcal{L}}^{(1)}=E_k^{(1)}-\mathcal{P}^{(1)};\qquad \widehat{\mathcal{L}}^{(0)}=E_k^{(0)}-\Pi. \tag{4.38}$$

Kada se izraz (4.37) unese u (4.33) dobija se

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_i=\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial q_i}&=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\Big[\sum_i\Pi_i\dot{q}_i+\Pi\Big]-\frac{\partial}{\partial q_i}\Big[\sum_k\Pi_k\dot{q}_k+\Pi\Big]=\\&=\frac{d\Pi_i}{dt}-\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}+\sum_k\Big(\frac{\partial\Pi_i}{\partial q_k}-\frac{\partial\Pi_k}{\partial q_i}\Big)\dot{q}_k.\end{aligned} \tag{4.39}$$

Iz ovog obrasca se vidi da kada linearni deo generalisanog potencijala $\mathcal{P}_\ell$ ne zavisi eksplicitno od vremena, da se tada generalisana sila sastoji iz potencijalne i giroskopske

$$\widehat{Q}_i = -\frac{\partial\Pi}{\partial q_i} + \sum_k \left(\frac{\partial\Pi_i}{\partial q_k} - \frac{\partial\Pi_k}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k = Q_i + Q^*_{\gamma i}\,; \qquad \gamma_{ik} = -\gamma_{ki} = \frac{\partial\Pi_i}{\partial q_k} - \frac{\partial\Pi_k}{\partial q_i} \cdot \tag{4.40}$$

Generalisani potencijal igra važnu ulogu u Elektrodinamici i Kvantnoj mehanici.

4.7. Generalisani integral energije (Jacobi-jev integral). - Ako kinetička energija materijalnog sistema ne zavisi eksplicitno od vremena $E_k = E_k(q_i, \dot{q}_i)$ ali je nehomogena kvadratna funkcija brzina $(\dot{q}_i)$, to su $E_k^{(2)}$, $E_k^{(1)}$ i $E_k^{(0)}$ homogene funkcije drugog, prvog i nultog reda od generalisanih brzina $(\dot{q}_i)$ ali takodje ne zavise eksplicitno od vremena (t), pa se iz obrasca (4.3) dobija:

$$E_k = E_k^{(2)} + E_k^{(1)} + E_k^{(0)};$$

$$\sum_i^n \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \sum_i^n \frac{\partial E_k^{(2)}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial E_k^{(1)}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2E_k^{(2)} + E_k^{(1)}. \tag{4.41}$$

Unošenjem ove relacije u ranije izvedene jednačine (4.21) dobija se dif. jednačina

$$\frac{d}{dt}\left[\left(2E_k^{(2)} + E_k^{(1)}\right) - \left(E_k^{(2)} + E_k^{(1)} + E_k^{(0)}\right)\right] = -\sum \frac{\partial\Pi}{\partial q_i}\dot{q}_i = -\frac{d\Pi}{dt} = \frac{dU}{dt}$$

pošto je $\partial E_k / \partial t = 0$ a sistem je konzervativan, $(Q_i^* = 0)$, čijim se integraljenjem dobija integral

$$d\left[E_k^{(2)} - E_k^{(0)}\right]/dt = dU/dt; \quad E_k^{(2)} - E_k^{(0)} = U + h. \tag{4.42}$$

Ovaj se integral naziva generalisani integral energije ili Jacobi-jev integral pošto ga je izveo Jacobi za slučaj relativnog kretanja*). Na levoj strani ovog integrala javlja se izraz $E_k^{(2)} - E_k^{(0)}$ koji ne predstavlja ukupnu kinetičku energiju, pa i ovaj integral ne predstavlja integral energije u fizičkom smislu te se stoga i naziva generalisanim integralom energije. Pada u oči da u tom integralu nema dela $E_k^{(1)}$, te ne ulaze članovi koji linearno zavise od brzine ("giroskopski članovi").

---

*) Dinamika, čl. 10.2.

Ako i kinetički potencijal ne zavisi eksplicitno od vremena $\partial\mathcal{L}/\partial t = 0$, onda se stavljajući relacije (4.17) u integral (4.42), dobija Jacobi-jev integral u novom obliku

$$E_k^{(2)} - E_k^{(0)} - U - \mathcal{L}^{(2)} - (\mathcal{L}^{(0)} + \Pi) - U = h; \quad \mathcal{L}^{(2)} - \mathcal{L}^{(0)} = h = const. \tag{4.43}$$

Generalisani integral izveden je pod pretpostavkom da je kinetički potencijal $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$ kvadratna funkcija generalisanih brzina. Medjutim, ako je on proizvoljna funkcija, onda se množenjem jednačina (4.16) sa $\dot{q}_i$ i sabiranjem dobija

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\dot{q}_i\right] = \frac{d}{dt}\sum_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i -$$

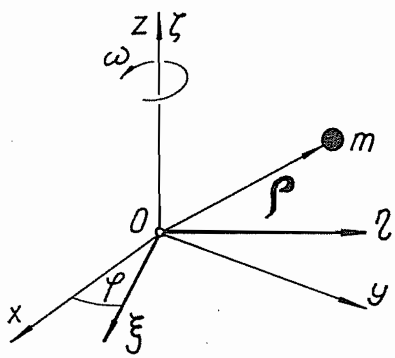
$$-\sum_i\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i\right] = \frac{d}{dt}\left[\sum_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right) - \mathcal{L}\right] = 0,$$

pa je generalisani integral

$$\sum\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right) - \mathcal{L} = const., \tag{4.44}$$

pošto su

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i; \quad \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i; \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0$$



Slika 4.4.

Naprimer, tačka se kreće u odnosu na pokretni trijedar $O\xi\eta\zeta$ pod dejstvom konzervativne sile sa funkcijom $U = U(\rho)$ a trijedar se obrće oko Oz-ose konstantnom ugaonom brzinom ω, (slika 4.4). Ovde je $\zeta = z$, pa je apsolutna brzina

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_p = \dot{\boldsymbol{\rho}} + \omega[\mathbf{k}, \boldsymbol{\rho}];$$

$$\boldsymbol{\rho} = \xi\mathbf{i}' + \eta\mathbf{j}' + z\mathbf{k},$$

te su

$$\dot{x} = \dot{\xi} - \omega\eta; \quad \dot{y} = \dot{\eta} + \omega\xi; \quad \dot{z} = \dot{\zeta} = \dot{z}.$$

Kinetička energija pokretne tačke je

$$E_K = \frac{1}{2} m \left[(\dot{\xi} - \omega \eta)^2 + (\dot{\eta} + \omega \xi)^2 + \dot{z}^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{z}^2) + m\omega(\dot{\eta}\xi - \dot{\xi}\eta) + \frac{1}{2} m\omega^2(\xi^2 + \eta^2) =$$

$$= E_K^{(2)} + E_K^{(1)} + E_K^{(0)},$$

pa važi Jacobi-jev integral

$$E_K^{(2)} - E_K^{(0)} = U + h;$$

$$\frac{1}{2} m (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} m\omega^2 (\xi^2 + \eta^2) = U + h.$$

Giroskopski član $E_k^{(1)}$ u energiji predstavlja zamah za Oz-osu pomnožen ugaonom brzinom

$$E_K^{(1)} = \omega \begin{vmatrix} \xi & \eta \\ m\dot{\xi} & m\dot{\eta} \end{vmatrix} = \omega (K_\eta \xi - K_\xi \eta) = \omega L_z.$$

Član $E_k^{(0)}$ predstavlja potencijal centrifugalnih sila koji treba dodati potencijalu $\Pi = -U$.

Diferencijalne jednačine kretanja su:

$$m(\ddot{\xi} - 2\omega \dot{y} - \omega^2 \xi) = \partial U / \partial \xi;$$

$$m(\ddot{\eta} + 2\omega \dot{\xi} - \omega^2 \eta) = \partial U / \partial \eta; \qquad m\ddot{z} = \partial U / \partial z.$$

4.8. <u>Jednačine kretanja skleronomnog sistema rešene po generalisanim ubrzanjima.</u> - Kod skleronomnog sistema kinetička energija je homogena kvadratna forma generalisanih brzina

$$E_K = E_K^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{K=1}^{n} a_{iK} \dot{q}_i \dot{q}_K = \frac{1}{2} (\dot{q}) \mathbf{A} \{\dot{q}\} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{K=1}^{n} a_{jK} \dot{q}_j \dot{q}_K, \tag{4.45}$$

pa se diferenciranjem dobija

$$\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{K=1}^{n} a_{iK} \dot{q}_K;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{K=1}^{n} a_{iK} \ddot{q}_K + \sum_{j=1}^{n} \sum_{K=1}^{n} \frac{\partial a_{jK}}{\partial q_j} \dot{q}_j \dot{q}_K;$$

$$\frac{\partial E_K}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{K=1}^{n} \frac{\partial a_{jK}}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_K.$$

Unošenjem ovih izvoda u Lagrange-ove jednačine (3.48) dobija se

$$\sum_K a_{iK} \ddot{q}_K + \sum_j \sum_K \frac{\partial a_{iK}}{\partial q_j} \dot{q}_j \dot{q}_K - \frac{1}{2} \sum_j \sum_K \frac{\partial a_{jK}}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_K = Q_i. \tag{4.46}$$

Zamenom indeksa j i k može se drugi član prednje jednačine napisati u obliku

$$\sum_j \sum_k \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} \dot{q}_j \dot{q}_k = \sum_j \sum_k \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \left[\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right]$$

pa jednačina (4.46) postaje

$$\sum_k a_{ik} \ddot{q}_k + \sum_j \sum_k \Gamma_{jk,i} \dot{q}_j \dot{q}_k = Q_i \qquad (4.47)$$

gde je, prema (1.53), uveden Christoffel-ov simbol prve vrste

$$\Gamma_{jk,i} = [jk, i] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} \right]. \qquad (4.48)$$

Jednačine (4.47) su linearne u odnosu na generalisana ubrzanja a drugog stepena u odnosu na generalisane brzine, pa pošto je $E_k = E_k^{(2)}$ homogena pozitivna kvadratna forma, to je det $(a_{ik}) = |\mathbf{A}| \neq 0$, mogu se rešiti po generalisanim ubrzanjima. Razvoj determinante po elementima k-te kolone je

$$|\mathbf{A}| = |a_{ik}| = \sum_i a_{ik} K_{ik} = a_{1k} K_{1k} + a_{2k} K_{2k} + \dots + a_{nk} K_{nk},$$

gde je K_{ik} kofaktor elementa a_{ik} determinante $|a_{ik}| = |\mathbf{A}|$. S obzirom na osobine razvoja determinanti slede relacije razvoja

$$\sum_i \frac{a_{ik} K_{ik}}{|\mathbf{A}|} = 1; \quad \sum_i \frac{a_{ik} K_{ip}}{|\mathbf{A}|} = \delta_{kp} = \begin{cases} 0 & \text{ZA } p \neq k \\ 1 & \phantom{\text{ZA }} p = k \end{cases} \qquad (4.49)$$

gde je, prema (1.47), uveden Kronecker-ov delta simbol.

Kada se jednačine (4.47), pomnože redom redukovanim kofaktorima $K_{ip}/|\mathbf{A}|$ i saberu po indeksu i, onda se, s obzirom na (4.49), dobija da je prvi član pomenute jednačine

$$\sum_i \sum_k a_{ik} \ddot{q}_k \frac{K_{ip}}{|\mathbf{A}|} = \sum_k \left[\sum_i a_{ik} \frac{K_{ip}}{|\mathbf{A}|} \right] \ddot{q}_k = \sum_k \delta_{kp} \ddot{q}_k = \ddot{q}_p .$$

Zbir drugih članova je

$$\sum_j \sum_k \left[\sum_i \frac{K_{ip}}{|\mathbf{A}|} \Gamma_{jk,i} \right] \dot{q}_j \dot{q}_k = \sum_j \sum_k \Gamma_{jk}^{p} \dot{q}_j \dot{q}_k ,$$

gde je, prema (1.55), uveden drugi Christoffel-ov simbol

$$\Gamma_{jk}^{\;\;p} = \left\{ {p \atop jk} \right\} - \sum_i \frac{K_{ip}}{|\mathbf{A}|} \Gamma_{jk,i} , \qquad (4.50)$$

a na desnoj strani je novi izraz za generalisanu silu

$$\sum_i \frac{K_{ip}}{|\mathbf{A}|} Q_i = \bar{Q}_p .$$

Stoga jednačine (4.47) postaju

$$\ddot{q}_p + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{jk}^{\;\;p} \dot{q}_j \dot{q}_k = \bar{Q}_p . \qquad (4.51)$$

Ovaj sistem jednačina je ekvivalentan sistemu Lagrange-ovih jednačina (3.48) a rešen je po generalisanim ubrzanjima.

Ako se označe sa a^{ik} redukovani kofaktori, $a^{ik} = K_{ik}/|\mathbf{A}|$ i uvedu kontravarijantne koordinate q^i, zameni indeks p sa i, onda se, prema (1.64), mogu Lagrange-ove jednačine izraziti i na ovaj način

$$\ddot{q}^i + \Gamma_{jk}^{\;\;i} \dot{q}^j \dot{q}^k = Q^i, \qquad (4.52)$$

gde se, prema Einstein-ovoj konvenciji, sabiranje vrši po indeksima j i k.

Kretanje je inercijsko kada su sile $Q^i = 0$, pa ako se tada smatra i kretanje sistema kao kretanje jedne "reprezentativne tačke" u V_n prostoru od n dimenzija, onda se ta reprezentativna tačka kreće po "geodezijskoj liniji" tog V_n prostora. Stoga sistem jednačine

$$\ddot{q}^i + \Gamma_{jk}^{\;\;i} \dot{q}^j \dot{q}^k = 0; \qquad i = 1,2,\dots,n , \qquad (4.53)$$

predstavlja sistem diferencijalnih jednačina tih linija u parametarskom obliku sa vremenom kao parametrom (t).

4.9. Energija ubrzanja. Appel-ove jednačine. - 1900. godine je francuski matematičar Paul Appel ("Traité de Mécanique rationelle"), izveo jednačine kretanja slične Lagrange-ovim jednačinama a koje se primenjuju na holonomne i neholonomne sisteme, uvodeći energiju ubrzanja:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3N} m_j \ddot{\xi}_j^{\,2}, \qquad j = 1,2,\dots,3N \qquad (4.54)$$

gde je N broj materijalnih tačaka a ξ_j su uopštene Dekartove koordinate (2.49). Ova se energija naziva i Appel-ova funkcija.

Za slučaj slobodnog materijalnog sistema iz opšteg principa Mehanike, tj. opšte jednačine (3.22), s obzirom na (4.54) a pošto su varijacije nezavisne, $\delta\xi_i \neq$ $\neq 0$, slede Appel-ove jednačine:

$$\sum_j (F_j - m_j \ddot{\xi}_j)\,\delta\xi_j = \sum_j \left(F_j - \frac{\partial A}{\partial \ddot{\xi}_j}\right)\delta\xi_j = 0; \qquad F_j = \frac{\partial A}{\partial \ddot{\xi}_j}; \qquad j = 1, \dots, 3N. \tag{4.55}$$

Za slučaj holonomnog sistema, broj stepeni n slobode kretanja je n = 3N - h, pa je potrebno n nezavisnih generalisanih koordinata q_i, i = 1, 2, ... n. Pošto su tada varijacija, brzina i ubrzanje

$$\delta\xi_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial q_i}\delta q_i;$$

$$\dot{\xi}_j = \sum_i \frac{\partial \xi_j}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \xi_j}{\partial t}; \qquad \ddot{\xi}_j = \sum_i \frac{\partial \xi_j}{\partial q_i}\ddot{q}_i + (\dots), \tag{4.56}$$

to sledi da je

$$\frac{\partial \ddot{\xi}_j}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{\partial \xi_j}{\partial q_i}. \tag{4.56b}$$

Prvi član leve strane jednačine (4.55), prema (3.44), je

$$\sum_{\nu}^{N} (\mathbf{F}_\nu, \delta\mathbf{r}_\nu) = \sum_j^{3N} F_j\,\delta\xi_j = \sum_i Q_i\,\delta q_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{4.57}$$

gde je Q_i generalisana sila. Drugi se član transformiše na ovaj način

$$\sum_{j=1}^{3N} m_j \ddot{\xi}_j \delta\xi_j = \sum_j m_j \ddot{\xi}_j \sum_i \frac{\partial \xi_j}{\partial q_i}\delta q_i = \sum_i \left[\sum_j m_j \ddot{\xi}_j \frac{\partial \ddot{\xi}_j}{\partial \ddot{q}_i}\right]\delta q_i = \sum \frac{\partial A}{\partial \ddot{q}_i}\delta q_i \tag{4.58}$$

Kada se izrazi (4.57) i (4.58) unesu u opštu jednačinu (4.55), tada se dobija

$$\sum_j (F_j - m_j \ddot{\xi}_j)\,\delta\xi_j = \sum_i \left[Q_i - \frac{\partial A}{\partial \ddot{q}_i}\right]\delta q_i = 0 \tag{4.59}$$

pa kako su varijacije nezavisne $\delta q_i \neq 0$, to slede Appel-ove jednačine za holonomni sistem

$$\frac{\partial A}{\partial \ddot{q}_i} = Q_i; \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{4.60}$$

Ako je sistem neholonoman sa vezama (3.35) koje se mogu sa uslovima za varijacije napisati pomoću generalisanih koordinata u obliku

$$\sum_i N_{\beta i}\,\dot q_i + N_\beta = 0;\quad \sum_i N_{\beta i}\,\delta q_i = 0;\quad \dot q_i = dq_i/dt;\quad \beta = 1,2,\ldots,\ell, \tag{4.61}$$

onda se n diferencijala dq_i i varijacija δq_i vezanih prednjim uslovima mogu isključiti iz uslova za varijacije i brzine (4.56.a) koji sada postaju

$$\dot\xi_j = \sum_s^{n-\ell} A_{js}\,\dot q_s + A_j;\qquad \delta\xi_j = \sum_s A_{js}\,\delta q_s;\quad \begin{matrix} j=1,2,\ldots,3N; \\ s=1,2,\ldots,n-\ell; \end{matrix}\quad \dot q_s = \frac{dq_s}{dt}; \tag{4.62}$$

pri čemu su varijacije δq_s i diferencijali dq_s nezavisni.

Kada se ove relacije unesu u opštu jednačinu (4.55), onda se, s obzirom na energiju ubrzanja (4.54), dobija

$$\sum_j F_j\,\delta\xi_j = \sum_j\sum_s F_j\,A_{js}\,\delta q_s = \sum_s Q_s\,\delta q_s;$$

$$\ddot\xi_j = \sum_s A_{js}\,\ddot q_s + (\ldots);\qquad \partial\ddot\xi_j/\partial\ddot q_s = A_{js};$$

$$\sum_j m_j\ddot\xi_j\,\delta\xi_j = \sum_j\sum_s m_j\ddot\xi_j A_{js}\,\delta q_s = \sum_j\sum_s m_j\ddot\xi_j\,\frac{\partial\ddot\xi_j}{\partial\ddot q_s}\,\delta q_s = \sum_s \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\ddot q_s}\,\delta q_s,$$

pa opšta jednačina (4.55) postaje

$$\sum_s\left(Q_s - \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\ddot q_s}\right)\delta q_s = 0;\qquad s=1,2,\ldots,n-\ell \tag{4.63}$$

Pošto su varijacije δq_s nezavisne ($\delta q_s \neq 0$) to slede Appel-ove jednačine za neholonomne sisteme

$$\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\ddot q_s} = Q_s;\qquad s=1,2,\ldots,n-\ell. \tag{4.64}$$

Ove jednačine obrazuju sistem od $n-\ell$ običnih diferencijalnih jednačina drugog reda. Da bi se one napisale, potrebno je prvo izraziti energiju ubrzanja u funkciji od generalisanih koordinata q_i, $i=1,2,\ldots,n$, a zatim pomoću jednačina neholonomnih veza isključiti zavisne druge izvode tih koordinata, i napisati jednačine (4.64), koje zajedno sa jednačinama veza daju sistem od n jednačina za odredjivanje ne nepoznatih generalisanih koordinata.

Analogno S. König-ovoj teoremi*) može se i za energiju ubrzanja postaviti analogni obrazac

*) Dinamika, čl. 12.7.

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\sum_{\nu} m_\nu \ddot{r}_\nu^2=\frac{1}{2}M(\mathbf{a}_C)^2+\frac{1}{2}\sum_{\nu} m_\nu (\ddot{\boldsymbol{\rho}}_\nu)^2; \qquad \nu=1,2,\dots,N \tag{4.65}$$

pošto su

$$\mathbf{r}_\nu=\mathbf{r}_C-\boldsymbol{\rho}_\nu;\quad M\mathbf{r}_C=\sum_\nu m_\nu \mathbf{r}_\nu;\quad \sum_\nu m_\nu \boldsymbol{\rho}_\nu=0;\quad \sum m_\nu \ddot{\boldsymbol{\rho}}_\nu=0;$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_\nu=\ddot{\mathbf{r}}_C+\ddot{\boldsymbol{\rho}}_\nu;\quad \ddot{\mathbf{r}}_\nu^2=(\ddot{\mathbf{r}}_C)^2+(\ddot{\boldsymbol{\rho}}_\nu)^2+2(\ddot{\mathbf{r}}_C\,\ddot{\boldsymbol{\rho}}_\nu);$$

$$\sum_\nu m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu^2=M(\ddot{\mathbf{r}}_C)^2+\sum_\nu m_\nu(\ddot{\boldsymbol{\rho}}_\nu)^2+2(\ddot{\mathbf{r}}_C,\sum_\nu m_\nu \ddot{\boldsymbol{\rho}}_\nu).$$

4.10. Male oscilacije sistema oko ravnotežnog položaja. - Kretanje materijalnog sistema odredjeno koordinatama $q_i = q_i(t)$, $i = 1,2,\dots,n$, gde je n broj stepeni slobode kretanja, pri datom početnom kinematičkom stanju naziva se osnovno ili neporemećeno. Medjutim, ako se to početno stanje promeni kretanje je poremećeno, a veličine promena koordinata i brzina izazvane ovom promenom nazivaju se poremećaji (perturbacije) kretanja sistema.

4.10.1. Ljapunov-ljev kriterijum stabilnosti kretanja. - Neka su $q_i = q_i(t)$ jednačine neporemećenog kretanja, a $\overline{q}_i = \overline{q}_i(t)$ poremećenog i neka su $\eta_i = \eta_i(t)$ odstupanja u koordinatama $\eta_i = \overline{q}_i - q_i$, ili u brzinama $\dot{\overline{q}}_i - \dot{q}_i$ ili su uopšte $\eta_i = \eta_i(q_i, \dot{q}_i; \overline{q}_i, \dot{\overline{q}}_i)$.

Ako su u početnom položaju (t_o) promene η_{io} i $\dot{\eta}_{io}$ koordinata q_{io} i početnih brzina $\dot{q}_{io}$, onda je po Ljapunov-u neporemećeno kretanje stabilno ako se za svaki unapred zadat mali broj $\varepsilon>0$ može naći drugi broj $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ takav da u svakom i početnom trenutku postoje nejednakosti

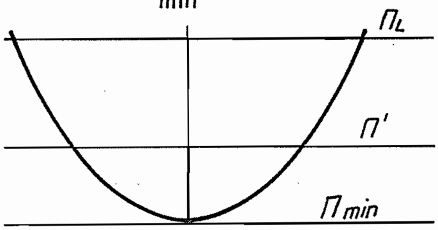
$$|\eta_i|_t<\varepsilon;\quad |\dot{\eta}_i|_t<\varepsilon;\quad |\eta_i|_{t_o}<\delta;\quad |\dot{\eta}_i|_{t_o}<\delta. \tag{4.66}$$

Kada $t\to\infty$ tada poremećaji $\eta_i(t)\to 0$, pa je neporemećeno kretanje prema Ljapunov-u asimptotski stabilno.

4.10.2. Stabilnost ravnoteže. - U ravnotežnom položaju su sve koordinate $q_i = q_{io}$ pa je prema Ljapunov-u ravnoteža stabilna ako odstupanja $|\eta_i|$ od ravnotežnog položaja i odstupanja $|\dot{\eta}_i|$ od nultih vrednosti brzina zadovoljavaju uslove (4.66).

Kada su sile konzervativne one imaju potencijal (ili funkciju sile), pa se u ravnotežnom položaju odredjenom koordinatama $q_{io} = 0$ može uzeti da je $\Pi_o = 0$, a kako je $Q_{io} = -(\partial\Pi/\partial q_i)_o = 0$ to potencijalna energija ima u ravnotežnom položaju stacionarnu vrednost. Lejeune-Dirichlet-ov kriterijum ravnoteže je: "Ako u ravnotežnom položaju sistema potencijalna energija ima minimum onda je ravnoteža sistema stabilna".

Neka je $\Pi_{min} = 0$ onda se oblast minimuma može ograničiti po volji malom vrednosti Π_L (slika 4.5) tako da je uvek $\Pi < \Pi_L$. Ako se sistemu u okolini minimuma dadu početne energije E_k' i Π' ali tako da se sistem dalje kreće sa gornjim ograničenjem, onda, pošto je sistem konzervativan, sledi da je totalna enerija



Slika 4.5.

$$\mathbf{E} = E_k + \Pi = E_k' + \Pi'; \quad E_k = E_k' + \Pi' - \Pi .$$

Pošto je $E_k > 0$, jer je pozitivna definitna forma, to sledi nejednačina $\Pi < E_k' + \Pi'$. Početna kinetička energija može se izabrati po volji malom tako da sistem ne stigne do granice (L), tj. da je $E_k' + \Pi' < \Pi_L$. Na ovaj se način dobijaju dve nejednakosti i uslov

$$\Pi < E_k' + \Pi'; \quad \Pi' < \Pi_L - E_k'; \quad \Pi + \Pi' < \Pi' + \Pi_L; \quad \Pi < \Pi_L, \qquad (4.67)$$

kojim je teorema Leujene-Dirichlet-a dokazana, jer sistem ne može izaći iz oblasti minimuma, pa je ravnoteža zaista stabilna.

4.10.3. Male oscilacije konzervativnog sistema. - Ako se položaj sistema koji je skleronoman i pod dejstvom konzervativnih sila izabere u početku kretanja vrlo blisko položaju stabilne ravnoteže ($q_{io} = 0$) i ako su date male početne brzine, onda će u toku kretanja biti mala odstupanja ovog sistema od ravnotežnog položaja a takodje i veličine brzina će biti male. Ovaj stav o "malim kretanjima" omogućava da se diferencijalne jednačine kretanja linearizuju, tj. da se zadrže samo linearni članovi u odnosu na odstupanja i brzine a da se viši zanemare.

Kinetička i potencijalna energija skleronomnog sistema biće:

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_i\sum_k a_{ik}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_k;\; a_{ik} = a_{ik}(q_1,\dots,q_n);\Pi_p = E_p = E_p(q_i), \qquad (4.68)$$

gde je n broj stepeni slobode oscilovanja sistema.

Ako se koeficijenti a_{ik} razviju u Taylor-ov red u oblasti ravnoteže onda će biti

$$a_{ik} = (a_{ik})_o + \sum_r\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_r}\right)_o q_r + \sum_r\sum_s\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_r\partial q_s}\right)_o q_r q_s + \cdots,$$

Zaustavljajući se na prvom članu reda energija se može napisati u obliku

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_i\sum_k a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k = \frac{1}{2}(\dot{q})\boldsymbol{A}\{\dot{q}\};\quad a_{ik} = a_{ki} = const, \qquad (4.69)$$

pa su izvodi

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k a_{ik}\dot{q}_k = \boldsymbol{A}\{\dot{q}\};\; \frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k a_{ik}\ddot{q}_k = \boldsymbol{A}\{\ddot{q}\};\; \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = 0. \qquad (4.70)$$

Razložimo takodje i potencijalnu energiju u Taylor-ov red

$$E_p = \Pi = \Pi_o + \sum_i\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)_o q_i + \frac{1}{2}\sum_i\sum_k\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i\partial q_k}\right) q_i q_k + \cdots.$$

Kako je prema izboru sistema koordinata $\Pi_o = 0$, a položaj je ravnotežni pa je $Q_{io} = -(\partial\Pi/\partial q_i)_o = 0$, to ako se zadržimo na trećem članu reda, onda se potencijalna energija izražava kao kvadratna forma generalisanih koordinata

$$E_p = \Pi = \frac{1}{2}\sum_i\sum_k c_{ik}q_iq_k = \frac{1}{2}(q)\boldsymbol{C}\{q\};\; c_{ik} = c_{ki} = (\partial^2\Pi/\partial q_i\partial q_k)_o = const. \qquad (4.71)$$

pa je izvod

$$\frac{\partial E_p}{\partial q_i} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = -Q_i = \sum_k c_{ik}q_k = \boldsymbol{C}\{q\}. \qquad (4.72)$$

Pod ovim pretpostavkama vidimo da su koeficijenti a_{ik} elementi simetrične kvadratne matrice $\boldsymbol{A}$ koja se naziva inercijska matrica, pa su i koeficijenti inercijski, a koeficijenti c_{ik} su elementi kvadratne simetrične matrice $\boldsymbol{C}$ koja se naziva kvazielastična matrica, pa su koeficijenti c_{ik} kvazielastični koeficijenti ili koeficijenti uspostavljanja, jer se pomoću tih elemenata sistem vraća u ravnotežni položaj.

Obe energije se izražavaju kao homogene kvadratne forme i to od generalisanih brzina, odnosno koordinata. Kinetička energija je po svojoj prirodi uvek pozitivno definitna forma, a druga je takva ako je ravnotežni položaj stabilan, pa potencijalna energija ima minimum. Elementi c_{ik} matrice $\mathbf{C}$ moraju zadovoljiti Sylvester-ov kriterijum (4.7).

S obzirom na izvode energija (4.70) i (4.72) Lagrange-ove jednačine druge vrste pišu se u obliku

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial E_K}{\partial q_i}+\frac{\partial E_P}{\partial q_i}=0;\quad \sum_K a_{iK}\ddot{q}_K+c_{iK}q_K=0;\quad \mathbf{A}\{\ddot{q}\}+\mathbf{C}\{q\}=0. \tag{4.73}$$

Dakle, male oscilacije skleronomno konzervativnog sistema oko položaja stabilne ravnoteže opisuju se homogenim linearnim sistemom diferencijalnih jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Zbog toga se rešenje može pretpostaviti u obliku

$$\{q\}=\{r\}\cos\omega t;\qquad r=(A_1,\ldots,A_n) \tag{4.74}$$

gde je $\{r\}$ amplitudni vektor sa amplitudama A_k, pa se unošenjem u (4.73) dobija sistem

$$\sum_K (c_{iK}-a_{iK}\omega^2)A_K=0;\qquad (\mathbf{C}-\mathbf{A}\omega^2)\{r\}=0 \tag{4.75}$$

homogenih linearnih algebarskih jednačina sa nepoznatim amplitudama A_i. Da bi ovaj sistem imao i druga rešenja sem trivijanih $\{r\}\equiv 0$, mora determinanta sistema tih jednačina biti jednaka nuli

$$f(\lambda)=\| c_{iK}-\lambda a_{iK}\|=0;\quad f(\lambda)=|\mathbf{C}-\lambda\mathbf{A}|=0;\quad \lambda=\omega^2. \tag{4.76}$$

Ona se naziva frekventna jednačina ili Lagrange-ova determinanta. Kada se razvije dobiće se frekventni polinom $f(\lambda=\omega^2)=0$, reda n po vrednostima λ koje se nazivaju sopstvene (svojstvene) vrednosti oscilatornog sistema. Njih ima n i redjaju se po porastu vrednosti $\lambda_1 < \lambda_2 \dots < \lambda_n$. Dokazuju se ako su energije pozitivno definitne forme da su ti koreni realni i različiti*).

Koordinate amplitudnog vektora (A_i) nisu potpuno odredjene, već stoje u odnosima kao kofaktori elemenata poslednje vrste determinante (4.76), pa obrazuju matricu amplitudnih vektora – tzv. modalnu matricu:

$$\frac{A_{s1}}{K_{n1}^{(\lambda_s)}} = \frac{A_{s2}}{K_{n2}^{(\lambda_s)}} = \cdots = \frac{A_{sk}}{K_{nk}^{(\lambda_s)}} = C_s, \quad \mathbf{R} = (\{r_s\}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4.77}$$

Svakoj sopstvenoj vrednosti λ_s odgovara po jedan sopstveni vektor $\{r_s\}$ sa n koordinata A_{si}. Pošto su jednačine linearne to je i zbir rešenja takodje rešenje sistema jednačina, pa je

$$\{q\} = \mathbf{R}\,\{C_s \cos(\omega_s t + \alpha_s)\}, \tag{4.78}$$

gde su C_s i α_s integracione konstante. Njih ima 2n i odredjuju se iz početnih uslova kretanja, u početku ($t_o = 0$) dato je početno kinetičko stanje sistema (početni položaji i početne brzine).

Relacija (4.75) zadovoljena je za svaku svojstvenu vrednost

$$\mathbf{C}\{r_i\} = \lambda_i \mathbf{A}\{r_i\}; \quad \mathbf{C}\{r_j\} = \lambda_j \mathbf{A}\{r_j\}.$$

Ako se prva pomnoži skalarno sa $\{r_j\}$ a druga sa vektorom $\{r_i\}$ i oduzmu dobijaju se tzv. uslovi ortogonalnosti ovih oscilacija

$$(\lambda_j - \lambda_i)(r_j)\mathbf{A}\{r_j\} = 0; \quad (r_i)\mathbf{A}\{r_j\} = 0; \quad (r_i)\mathbf{C}\{r_j\} = 0; \quad i \neq j. \tag{4.79}$$

Pošto su obe energije pozitivno definitne forme generalisanih brzina, odnosno koordinata, to se mogu pomoću linearne transformacije koordinata

$$\{q\} = \mathbf{R}\,\{\xi\}; \quad (q) = (\xi)\mathbf{R}' \tag{4.80}$$

svesti na kanonske oblike

$$2E_k = (\dot{q})\mathbf{A}\{\dot{q}\} = (\dot{\xi})\mathcal{A}\{\dot{\xi}\}; \quad 2E_p = (q)\mathbf{C}\{q\} = (\xi)\mathcal{B}\{\xi\}; \tag{4.81}$$

$$\mathcal{A} = \mathbf{R}'\mathbf{A}\mathbf{R} \qquad \mathcal{B} = \mathbf{R}'\mathbf{C}\mathbf{R}.$$

*) Teorija oscilacija, čl. 6.3.

gde je $\mathbf{R}' = \mathbf{R}^T$ transponovana modalna matrica. Matrice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ su dijagonalne matrice $\mathcal{A}(\alpha_{ii} = \alpha_i)$ i $\mathcal{B}(\beta_{ii} = \beta_i)$ pa Lagrange-ove jednačine (4.73) postaju

$$\mathcal{A}\{\ddot{\xi}\} + \mathcal{B}\{\xi\} = 0; \quad \alpha_i \ddot{\xi}_i + \beta_i \xi_i = 0; \quad \omega_i^2 = \beta_i / \alpha_i . \qquad (4.82)$$

Nove koordinate ξ nazivaju se glavne koordinate a ovaj postupak je "svodjenje na glavne ose hiper površi" ("Hauptaxenproblem").

Linearnom transformacijom koordinata

$$\{q\} = \mathbf{V}\{\eta\} \qquad (q) = (\eta)\mathbf{V}' \qquad (4.83)$$

energije se svode na oblike

$$2E_K = (\dot{\eta})\mathbf{I}\{\dot{\eta}\}; \quad 2E_p = (\eta)\mathbf{\Lambda}\{\eta\}; \quad \mathbf{I} = \mathbf{V}'\mathbf{A}\mathbf{V}; \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}'\mathbf{C}\mathbf{V}; \ddot{\eta}_i + \lambda_i \eta_i = 0; \qquad (4.84)$$

gde je $\mathbf{I}$ jedinična matrica a $\mathbf{\Lambda}$ matrica sopstvenih vrednosti - tzv. "lambda matrica". Obe su matrice dijagonalne reda n. Matrica $\mathbf{V}$, gde je $\mathbf{V}' = \mathbf{V}^T$ transponovanja matrica, je matrica svojstvenih vektora ortonormiranih u pogledu matrice $\mathbf{A}$, te su

$$(V_r)\mathbf{A}\{V_s\} = \begin{cases} 0 & \text{za } r \neq s \\ 1 & r = s \end{cases};$$

$$(V_s)\mathbf{A}\{V_s\} = 1; \quad \{V_s\} = V_{s1}\{r_s\}; \quad V_{s1}^2 (r_s)\mathbf{A}\{r_s\} = 1 . \qquad (4.85)$$

Naprimer, za m=1, c=1, $x_i = q_i$ (slika 3.16) biće:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \; 8>0; \quad \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 20>0; \quad |\mathbf{C}| = 32>0;$$

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 8-4\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 4(2-\lambda)^2(3-\lambda) - 4(2-\lambda) - 4(2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0;$$

$$\lambda_s = 1;\, 2;\, 4 .$$

$$\frac{A_{s1}}{2} = \frac{A_{s2}}{4(2-U_s)} = \frac{A_{s3}}{4(2-U_s)(3-U_s)-4} = C_s; \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{R}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ 2\xi_1 - 4\xi_3 \\ 2\xi_1 - 2\xi_2 + 2\xi_3 \end{Bmatrix}; \quad \mathcal{A} = \mathbf{R}'\mathbf{A}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 12 & & \\ & 8 & \\ & & 24 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 12 & & \\ & 16 & \\ & & 96 \end{pmatrix};$$

$$12\ddot{\xi}_1+12\xi_1=0;$$
$$8\ddot{\xi}_2+16\xi_2=0;$$
$$24\ddot{\xi}_3+96\xi_3=0;$$

$$\{V_1\}=V_{11}\begin{Bmatrix}1\\2\\2\end{Bmatrix};\quad V_{11}^2(r_1)\boldsymbol{A}\{r_1\}=12V_{11}^2=1;\quad V_{11}=\frac{1}{\sqrt{12}}=\frac{1}{2\sqrt{3}};\quad \{V_1\}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{Bmatrix}1\\2\\2\end{Bmatrix};$$

$$\boldsymbol{V}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{6}}{12}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1\\ 2\sqrt{2} & 0 & -4\\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{3} & 2\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{V}'=\frac{\sqrt{6}}{12}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\\ \sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{3}\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{V}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\\ \sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{3}\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\sqrt{2} & 4\sqrt{3} & 4\\ 2\sqrt{2} & 0 & -4\\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{3} & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}24 & & \\ & 24 & \\ & & 24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{V}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{V}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\\ \sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{3}\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\sqrt{2} & 8\sqrt{3} & 16\\ 2\sqrt{2} & 4\sqrt{3} & -16\\ 2\sqrt{2} & -4\sqrt{3} & 8\end{pmatrix}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}24 & & \\ & 48 & \\ & & 96\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 4\end{pmatrix};$$

$$\ddot{\eta}_1+\eta_1=0;\qquad \ddot{\eta}_2+2\eta_2=0;\qquad \ddot{\eta}_3+4\eta_3=0.$$

4.10.4. Male oscilacije nekonzervativnog sistema. - Ako su nekonzervativne sile samo disipativne sile, onda se pri malim brzinama mogu smatrati da su linearne funkcije generalisanih brzina, te postoji funkcija rasipanja, pa će, prema (4.30), biti

$$Q_{di}^*=-\sum_K b_{iK}\dot{q}_K=-\boldsymbol{B}\{\dot{q}\}\qquad 2\Phi=(\dot{q})\boldsymbol{B}\{\dot{q}\}\qquad (4.86)$$

te se Lagrange-ove jednačine druge vrste pišu u obliku

$$\sum_K a_{ik}\ddot{q}_k+b_{ik}\dot{q}_k+c_{ik}q_k=0;\quad \boldsymbol{A}\{\ddot{q}\}+\boldsymbol{B}\{\dot{q}\}+\boldsymbol{C}\{q\}=0.\qquad (4.87)$$

Sada se rešenje mora predpostaviti u obliku

$$\{q\}=\{r\}e^{\lambda t};\qquad q_K=A_K e^{\lambda t};\qquad (4.88)$$

pa se dobija sistem algebarskih linearnih homogenih jednačina sa nepoznatima A_K

$$\sum_K(a_{iK}\lambda^2+b_{iK}\lambda+c_{iK})A_K=0;\quad (\boldsymbol{A}\lambda^2+\boldsymbol{B}\lambda+\boldsymbol{C})\{r\}=0\qquad (4.89)$$

te je karakteristični polinom ovog oscilatornog sistema

$$f(\lambda)=\left\|a_{iK}\lambda^2+b_{iK}\lambda+c_{iK}\right\|=0;\quad f(\lambda)=\left|\boldsymbol{A}\lambda^2+\boldsymbol{B}\lambda+\boldsymbol{C}\right|=0\qquad (4.90)$$

Za ovo kretanje ne može se, zbog disipacije energije, unapred reći da je oscilatorno, pa da bismo ispitali korene karakterističnog polinom pomnožimo (4.89) skalarno sopstvenim vektorom (r) sleva, onda se dobija

$$(r)\mathbf{A}\{r\}\lambda^2+(r)\mathbf{B}\{r\}\lambda+(r)\mathbf{C}\{r\}=\bar{\Phi}_1\lambda^2+\bar{\Phi}\lambda+\bar{\Phi}_2=0, \tag{4.91}$$

gde su $\bar{\Phi}_i$ kvadratne forme kada se umesto brzina, odnosno koordinata, stave sopstveni vektori. Tako se dobija kvadratna jednačina a njeni su koreni

$$\lambda=\left[-\bar{\Phi}\pm\sqrt{\bar{\Phi}^2-4\bar{\Phi}_1\bar{\Phi}_2}\right]\Big/2\bar{\Phi}_1=\left[-\bar{\Phi}\pm\sqrt{\Delta}\right]\Big/2\Phi_1, \tag{4.92}$$

i biće:

1. realni i različiti ako je $\Delta > 0$,
2. konjugovano kompleksni ako je $\Delta < 0$, i
3. realni i jednaki ako je $\Delta = 0$.

Funkcije $\bar{\Phi}_1$ i $\bar{\Phi}$ su pozitivno definitne kvadratne funkcije, pa karakter kretanja zavisi od potencijalne energije koja može biti definitna ili nedefinitna funkcija (minimum, maksimum i minimax - neodredjena). Razlikovaćemo dva slučaja:

1. $\bar{\Phi}_2<0; \Delta>0$.- Koreni jednačine (4.92) su realni i različiti, pozitivni (kada se ispred korena uzme znak +) i negativni (kada se ispred korena uzme znak -), pa se iz (4.88) vidi da je kretanje aperiodičko.

2. $\bar{\Phi}_2>0$. - U ovome slučaju karakter malih kretanja zavisi od otpora, tj. od funkcije rasipanja, pa mogu biti dva slučaja:

a) $\bar{\Phi}_2>0; \bar{\Phi}^2>4\bar{\Phi}_1\bar{\Phi}_2$ (veliki otpor): koreni su realni i negativni, pa se vidi da tada koordinate q_k opadaju i teže nuli. Ravnotežni položaj je stabilan, ali je kretanje aperiodičko.

b) $\bar{\Phi}_2>0; \bar{\Phi}^2<4\bar{\Phi}_1\bar{\Phi}_2$ (mali otpor): koreni su kompleksno-konjugovani sa realnim negativnim delom

$$\lambda_s=-\alpha_s\pm i\beta_s; \qquad s=1, 2,\ldots, n. \tag{4.93}$$

pa je, prema (4.88), rešenje

$$q_k = \sum_s e^{-\alpha_s t}\cdot\left[A_k \cos\beta_s t + B_k \sin\beta_s t\right];\ s = 1, 2, \ldots, n. \qquad (4.94)$$

Dokaz da je realni deo korena (4.93) negativan izvešćemo na ovaj način. Ako su koreni konjugovano kompleksni onda su takve i amplitude $\{r_s\}=\{A_s+iB_s\}$, i $\{\bar{r}_s\}=\{A_s-iB_s\}$ Ako se (4.89) pomnože redom sa $(\bar{r})=(A-iB)$ i saberu dobija se

$$\lambda^2(\bar{r})\mathbf{A}\{r\}+\lambda(\bar{r})\mathbf{B}\{r\}+(\bar{r})\mathbf{C}\{r\}=0,$$

pa je prema Viète-ovim obrascima zbir korena

$$\lambda_1+\lambda_2=\lambda+\bar{\lambda}=(\mu+i\nu)+(\mu-i\nu)=2\mu=-\frac{(\bar{r})\mathbf{B}\{r\}}{(\bar{r})\mathbf{A}\{r\}}=-\frac{\bar{\Phi}(A)+\bar{\Phi}(B)}{\bar{\Phi}_1(A)+\bar{\Phi}_2(B)}<0,$$

jer je

$$(\bar{r})\mathbf{A}\{r\}=(A-iB)\mathbf{A}\{A+iB\}=(A-iB)\left[\mathbf{A}\{A\}+i\mathbf{A}\{B\}\right]=$$

$$=(A)\mathbf{A}\{A\}+(B)\mathbf{A}\{B\}-i(B)\mathbf{A}\{A\}+i(A)\mathbf{A}\{B\}=$$

$$=\bar{\Phi}_1(A)+\bar{\Phi}_1(B)>0.$$

Naprimer,

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix};\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}5&2\\2&1\end{pmatrix};\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix};$$

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}2\lambda^2+5\lambda+3 & \lambda^2+2\lambda+1\\ \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda^2+\lambda+1\end{vmatrix}=0;$$

$$f(\lambda)=\lambda^4+3\lambda^3+4\lambda^2+4\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda+2)=0;$$

$$\lambda_s=-1;\ -1{,}544;\ -0{,}228\ \pm 1{,}115\, i;\qquad i=\sqrt{-1}\ .$$

4.10.5. Prinudne oscilacije.- Obično su u tehničkoj praksi perturbacione (poremećajne) sile harmonijske funkcije vremena i traži se režim prinudnog kretanja, pa se dobija

$$\mathbf{A}\{\ddot{q}\}+\mathbf{C}\{q\}=\{Q^*\}\cos\Omega t;\qquad \{q_p\}=\{p\}\cos\Omega t \qquad (4.95)$$

odnosno

$$(\mathbf{C}-\Omega^2\mathbf{A})\{p\}=\mathbf{K}\{p\}=\{Q^*\};\quad \{p\}=\mathbf{K}^{-1}\{Q\}, \qquad (4.96)$$

gde je $\mathbf{K}^{-1}$ recipročna matrica.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}16 & & \\ & 4 & \\ & & 4\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}32 & -8 & 0\\ -8 & 2 & -4\\ 0 & -4 & 8\end{pmatrix};\quad \left\{Q^*\right\}\cos\Omega t=\begin{Bmatrix}24\\16\\5\end{Bmatrix}\cos\tfrac{1}{2}t;$$

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}-\tfrac{1}{4}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}28 & -8 & 0\\ -8 & 11 & -4\\ 0 & -4 & 7\end{pmatrix};\quad \left|\boldsymbol{K}\right|=28.45;$$

$$\begin{Bmatrix}P_1\\P_2\\P_3\end{Bmatrix}=\frac{1}{28.45}\begin{pmatrix}61 & 56 & 32\\ 56 & 196 & 112\\ 32 & 112 & 244\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}24\\16\\5\end{Bmatrix}=\frac{1}{1260}\begin{Bmatrix}2520\\5040\\3780\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\4\\3\end{Bmatrix}.$$

Često se koriste glavne koordinate. Smenom (4.80), množenjem sleva matricom $\boldsymbol{R}'$ dobija se jednačina

$$\boldsymbol{R}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}\{\ddot{\xi}\}+\boldsymbol{R}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}\{\xi\}=\boldsymbol{R}'\{Q^*\}\cos\Omega t; \tag{4.97}$$

$$\mathcal{A}\{\ddot{\xi}\}+\mathcal{B}\{\xi\}=\boldsymbol{R}'\{Q^*\}\cos\Omega t.$$

Ako sa $\{\bar{p}\}$ označimo amplitudni vektor režima prinudnih oscilacija biće

$$\{q\}=\boldsymbol{R}\{\xi\}=\{p\}\cos\theta;\quad \{\xi\}=\{\bar{p}\}\cos\theta;\qquad \{p\}=\boldsymbol{R}\{\bar{p}\}, \tag{4.98}$$

pa se dobija

$$(\mathcal{B}-\Omega^2\mathcal{A})\{\bar{p}\}=\boldsymbol{P}\{\bar{p}\}=\boldsymbol{R}'\{Q^*\};\quad \{\bar{p}\}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{R}'\{Q^*\}, \tag{4.99}$$

gde je $\boldsymbol{P}^{-1}$ inverzna matrica.

U prednjem primeru biće:

$$f(\lambda)=\left|\boldsymbol{C}-\lambda\boldsymbol{A}\right|=0;\qquad \lambda_s=1;2;4;$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -4\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix};\ \boldsymbol{R}'=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix};\ \mathcal{A}=\begin{pmatrix}48 & & \\ & 32 & \\ & & 96\end{pmatrix};\ \mathcal{B}=\begin{pmatrix}48 & & \\ & 64 & \\ & & 384\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{P}=\mathcal{B}-\tfrac{1}{4}\mathcal{A}=\begin{pmatrix}36 & & \\ & 56 & \\ & & 360\end{pmatrix};\ \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{36} & & \\ & \frac{1}{56} & \\ & & \frac{1}{360}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & & \\ & \frac{1}{14} & \\ & & \frac{1}{90}\end{pmatrix};$$

$$\{\bar{p}\}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & & \\ & \frac{1}{14} & \\ & & \frac{1}{90}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}24\\16\\5\end{Bmatrix}=\frac{1}{12}\begin{Bmatrix}22\\3\\-1\end{Bmatrix};$$

$$\{p\}=\boldsymbol{R}\{\bar{p}\}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -4\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}22\\3\\-1\end{Bmatrix}=\frac{1}{12}\begin{Bmatrix}24\\48\\36\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\4\\3\end{Bmatrix}.$$

$$q_k = \sum_s e^{-\alpha_s t} \cdot \left[A_k \cos\beta_s t + B_k \sin\beta_s t \right]; \; s = 1, 2, \ldots, n. \quad (4.94)$$

Dokaz da je realni deo korena (4.93) negativan izvešćemo na ovaj način. Ako su koreni konjugovano kompleksni onda su takve i amplitude $\{r_s\} = \{A_s + iB_s\}$, i $\{\bar{r}_s\} = \{A_s - iB_s\}$ Ako se (4.89) pomnože redom sa $(\bar{r}) = (A - iB)$ i saberu dobija se

$$\lambda^2 (\bar{r}) \mathbf{A} \{r\} + \lambda (\bar{r}) \mathbf{B} \{r\} + (\bar{r}) \mathbf{C} \{r\} = 0,$$

pa je prema Viète-ovim obrascima zbir korena

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda + \bar{\lambda} = (\mu + i\nu) + (\mu - i\nu) = 2\mu = -\frac{(\bar{r})\mathbf{B}\{r\}}{(\bar{r})\mathbf{A}\{r\}} = -\frac{\bar{\Phi}(A) + \bar{\Phi}(B)}{\bar{\Phi}_1(A) + \bar{\Phi}_2(B)} < 0,$$

jer je

$$(\bar{r})\mathbf{A}\{r\} = (A - iB)\mathbf{A}\{A + iB\} = (A - iB)\left[\mathbf{A}\{A\} + i\mathbf{A}\{B\}\right] =$$
$$= (A)\mathbf{A}\{A\} + (B)\mathbf{A}\{B\} - i(B)\mathbf{A}\{A\} + i(A)\mathbf{A}\{B\} =$$
$$= \bar{\Phi}_1(A) + \bar{\Phi}_1(B) > 0.$$

Naprimer,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \; \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 2\lambda^2 + 5\lambda + 3 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 \\ \lambda^2 + 2\lambda + 1 & \lambda^2 + \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$f(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0;$$

$$\lambda_s = -1; \; -1{,}544; \; -0{,}228 \pm 1{,}115\, i; \quad i = \sqrt{-1}.$$

4.10.5. Prinudne oscilacije.- Obično su u tehničkoj praksi perturbacione (poremećajne) sile harmonijske funkcije vremena i traži se režim prinudnog kretanja, pa se dobija

$$\mathbf{A}\{\ddot{q}\} + \mathbf{C}\{q\} = \{Q^*\}\cos\Omega t; \qquad \{q_p\} = \{p\}\cos\Omega t \quad (4.95)$$

odnosno

$$(\mathbf{C} - \Omega^2\mathbf{A})\{p\} = \mathbf{K}\{p\} = \{Q^*\}; \quad \{p\} = \mathbf{K}^{-1}\{Q\}, \quad (4.96)$$

gde je $\mathbf{K}^{-1}$ recipročna matrica.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}16&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix};\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}32&-8&0\\-8&2&-4\\0&-4&8\end{pmatrix};\quad \{Q^*\}\cos\Omega t=\begin{Bmatrix}24\\16\\5\end{Bmatrix}\cos\tfrac{1}{2}t;$$

$$\mathbf{K}=\mathbf{C}-\tfrac{1}{4}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}28&-8&0\\-8&11&-4\\0&-4&7\end{pmatrix};\quad |\mathbf{K}|=28.45;$$

$$\begin{Bmatrix}P_1\\P_2\\P_3\end{Bmatrix}=\frac{1}{28.45}\begin{pmatrix}61&56&32\\56&196&112\\32&112&244\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}24\\16\\5\end{Bmatrix}=\frac{1}{1260}\begin{Bmatrix}2520\\5040\\3780\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\4\\3\end{Bmatrix}.$$

Često se koriste glavne koordinate. Smenom (4.80), množenjem sleva matricom $\mathbf{R}'$ dobija se jednačina

$$\mathbf{R}'\mathbf{A}\mathbf{R}\{\ddot{\xi}\}+\mathbf{R}'\mathbf{C}\mathbf{R}\{\xi\}=\mathbf{R}'\{Q^*\}\cos\Omega t; \qquad (4.97)$$
$$\mathcal{A}\{\ddot{\xi}\}+\mathcal{B}\{\xi\}=\mathbf{R}'\{Q^*\}\cos\Omega t.$$

Ako sa $\{\bar{p}\}$ označimo amplitudni vektor režima prinudnih oscilacija biće

$$\{q\}=\mathbf{R}\{\xi\}=\{p\}\cos\theta;\quad \{\xi\}=\{\bar{p}\}\cos\theta;\qquad \{p\}=\mathbf{R}\{\bar{p}\}, \qquad (4.98)$$

pa se dobija

$$(\mathcal{B}-\Omega^2\mathcal{A})\{\bar{p}\}=\mathbf{P}\{\bar{p}\}=\mathbf{R}'\{Q^*\};\quad \{\bar{p}\}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}'\{Q^*\}, \qquad (4.99)$$

gde je $\mathbf{P}^{-1}$ inverzna matrica.

U prednjem primeru biće:

$$f(\lambda)=|\mathbf{C}-\lambda\mathbf{A}|=0;\qquad \lambda_s=1;2;4;$$

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&-4\\2&-2&2\end{pmatrix};\ \mathbf{R}'=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&0&-2\\1&-4&2\end{pmatrix};\ \mathcal{A}=\begin{pmatrix}48&&\\&32&\\&&96\end{pmatrix};\ \mathcal{B}=\begin{pmatrix}48&&\\&64&\\&&384\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{P}=\mathcal{B}-\tfrac{1}{4}\mathcal{A}=\begin{pmatrix}36&&\\&56&\\&&360\end{pmatrix};\ \mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{36}&&\\&\frac{1}{56}&\\&&\frac{1}{360}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\frac{1}{9}&&\\&\frac{1}{14}&\\&&\frac{1}{90}\end{pmatrix};$$

$$\{\bar{p}\}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\frac{1}{9}&&\\&\frac{1}{14}&\\&&\frac{1}{90}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\1&0&-2\\1&-4&2\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}24\\16\\5\end{Bmatrix}=\frac{1}{12}\begin{Bmatrix}22\\3\\-1\end{Bmatrix};$$

$$\{p\}=\mathbf{R}\{\bar{p}\}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&-4\\2&-2&2\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}22\\3\\-1\end{Bmatrix}=\frac{1}{12}\begin{Bmatrix}24\\48\\36\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\4\\3\end{Bmatrix}.$$

U slučaju prinudnih oscilacija sa amortizacijom primenjuju se kompleksni brojevi

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\{\ddot{q}\}+\mathbf{B}\{\dot{q}\}+\mathbf{C}\{q\}&=\{Q^*\}\cos\Omega t; \\ \mathbf{A}\{\ddot{\mathfrak{z}}\}+\mathbf{B}\{\dot{\mathfrak{z}}\}+\mathbf{C}\{\mathfrak{z}\}&=\{\mathcal{F}\}e^{i\Omega t} \end{aligned} \tag{4.100}$$

pa su rešenje i sistem jednačina

$$\{\mathfrak{z}\}=\{\mathcal{A}\}e^{i\Omega t}; \qquad (\mathbf{C}-i\Omega\mathbf{B}-\Omega^2\mathbf{A})\{\mathfrak{z}\}=\{\mathcal{F}\} \tag{4.101}$$

iz kojih treba odrediti kompleksne brojeve $\{\mathfrak{z}\}$.

5. KANONSKE JEDNAČINE I NJIHOVI INTEGRALI

5.1. Kanonske promenljive. – Lagrange-eve jednačine druge vrste predstavljaju sistem od n običnih diferencijalnih jednačina drugog reda u odnosu na krivolinijske koordinate (q_i). Ako je poznat kinetički potencijal ili Lagrange-eva funkcija

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}(q_1,q_2,\dots q_n;\ \dot{q}_1,\dot{q}_2,\dots\dot{q}_n;\ t)\equiv E_k-E_p \tag{5.1}$$

one se pišu u obliku

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}=0; \qquad i=1,2,\dots,n. \tag{5.2}$$

Promenljive t, q_i, $\dot{q}_i$, $i=1,2,\dots,n$, kojima se izražava kinetički potencijal zovu se Lagrange-eve promenljive. Sistem vrednosti tih promenljivih karakteriše vremenski trenutak i stanje sistema u tome trenutku, tj. karakteriše položaj sistema i brzine njegovih tačaka, pa ako je poznat kinetički potencijal i zadato početno kinematičko stanje sistema, onda je kretanje sistema jednoznačno odredjeno.

Kada je kinetički potencijal funkcija drugog stepena od generalisanih brzina, sistem jednačina (2) naziva se dinamički, pa je tada

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}^{(2)}+\mathcal{L}^{(1)}+\mathcal{L}^{(0)}. \tag{5.3}$$

Kada je sistem skleronoman, tada kinetički potencijal ne zavisi eksplicitno od vremena, pa je kvadratna forma generalisanih brzina, $\mathcal{L}=\mathcal{L}^{(2)}$. Ako postoje takve koordinate q_c od kojih kinetički potencijal ne zavisi eksplicitno, onda je $\partial \mathcal{L} / \partial q_c = 0$, pa se takve koordinate nazivaju cikličkim. U izraz za $\mathcal{L}$ ulaze ciklične brzine $\dot{q}_c$, pa važi ciklički integral - generalisani impuls je $p_c = \text{const}$.

Sistem diferencijalnih jednačina (5.2) može se svesti na sistem od 2n običnih diferencijalnih jednačina prvog reda, kada se brzine $\dot{q}_i$ uzmu za nepoznate funkcije, pa je

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0; \qquad \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}; \qquad i = 1, \dots, n. \tag{5.4}$$

Da bi se sistem jednačina (5.2) sveo na kanonski oblik uvode se umesto Lagrange-ovih promenljivih t, q_i i $\dot{q}_i$ nove promenljive t, q_i, p_i koje se nazivaju kanonske promenljive, gde su p_i generalisani impulsi odredjeni jednakostima

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{5.5}$$

Dakle, Lagrange-eve promenljive su vreme, koordinate i brzine, a kanonske su vreme, koordinate i generalisani impulsi (t, q_i, p_i).

Ovakva transformacija koju su izveli Poisson i Hamilton moguća je ako sistem od n jednačina (5.5) može biti rešen po generalisanim brzinama $\dot{q}_i$, tj. ako je jakobijan ove transformacije - koji se naziva hesijan-, različit od nule

$$\boldsymbol{H} = \frac{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n}\right)}{\partial(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)} \equiv \left|\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\right| \neq 0 . \tag{5.6}$$

Lagrange-ovi sistemi kod kojih je hesijan različit od nule, $\boldsymbol{H} \neq 0$, nazivaju se normalnim sistemima. Ako je sistem dinamički, onda su

$$\mathcal{L} = \overset{(2)}{\mathcal{L}} + \overset{(1)}{\mathcal{L}} + \overset{(0)}{\mathcal{L}}; \quad \overset{(2)}{\mathcal{L}} = \overset{(2)}{E_k} = \frac{1}{2}\sum_i \sum_k a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k; \quad \overset{(1)}{\mathcal{L}} = \overset{(1)}{E_k} = \sum_i a_i \dot{q}_i; \quad p_i = \sum_k a_{ik} \dot{q}_k + a_i, \tag{5.7}$$

pa je hesijan jednak diskriminanti kvadratne forme $\boldsymbol{H} = \left\| \partial^2 \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k \right\| = |\boldsymbol{A}| \neq 0$, te je dinamički sistem normalni i za njega važi ova Poisson-Hamilton-ova transformacija, $\left[\mathcal{L}^{(2)} = E_k^{(2)}\right]$.

Kada se sistem jednačina (5.5) reši po brzinama $\dot{q}_i$, tada se dobija da su brzine funkcije koordinata, impulsa i vremena

$$\dot{q}_i = f_i\,(q_1,\, q_2, \dots, q_n;\, p_1, p_2, \dots, p_n; t) \tag{5.8}$$

pa kada se ove relacije unesu u kinetički potencijal (5.1) on će biti izražen pomoću kanonskih promenljivih

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) \to \overline{\mathcal{L}}(q_i, p_i, t). \tag{5.9}$$

Tada se za funkcije $\mathcal{L}$ $(q_i,\, \dot{q}_i,\, t)$ i $\overline{\mathcal{L}}$ (q_i, p_i, t) kaže da su spregnute.

S obzirom na (5.8), (5.5) i (5.2) umesto Lagrange-ovih jednačina dobija se sistem od 2n jednačina prvog reda

$$\dot{q}_i = dq_i/dt = f_i\,(\, q_i,\, p_i,\, t\,)\; ; \quad i = 1, 2, \dots, n; \tag{5.10}$$
$$\dot{p}_i = dp_i/dt = \partial\overline{\mathcal{L}}/\partial q_i,\; \overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}}(q_i,\, p_i, t)$$

koje su jednačine kretanja sistema u kanonskom obliku.

5.2. Hamilton-ove kanonske jednačine.- 1834. god. je irski naučnik W.R. Hamilton tvorac kvaterniona ("Lectures on Quaternions") dao drugi oblik kanonskim jednačinama (5.10) izražavajući desne strane tih jednačina pomoću jedne funkcije koja se analogno Lagrange-ovoj funkciji naziva Hamilton-ova funkcija ($\mathcal{H}$). Pošto je $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i,\, \dot{q}_i,\, t)$ to je

$$d\mathcal{L} = \sum_i^n \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right] + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} dt, \tag{5.11a}$$

a kako su Lagrange-eve jednačine druge vrste

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i^*, \tag{5.12}$$

gde je Q_i^* nekonzervativna sila, onda, s obzirom na njih i (.5.5), sledi

$$\dot{p}_i - (\partial\mathcal{L}/\partial q_i) = Q_i^*; \quad \partial\mathcal{L}/\partial q_i = \dot{p}_i - Q_i^*,$$

pa se unošenjem u (5.11a) dobija

$$d\mathcal{L} = \sum_i [\, (\dot{p}_i - Q_i^*)\, dq_i + p_i\, d\dot{q}_i \,] + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} dt. \tag{5.11b}$$

S obzirom na relaciju

$$d(p_i \dot{q}_i) = \dot{q}_i \, dp_i + p_i d\dot{q}_i \,; \quad p_i \, d\dot{q}_i = d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i \,,$$

izraz (5.11a) postaje

$$d\mathcal{L} = \sum_i [(\dot{p}_i - Q_i^*) dq_i + d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \,, \qquad (5.11c)$$

pa se preuredjivanjem dobija izraz

$$d[\sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}] = \sum_i [(Q_i^* - \dot{p}_i) dq_i + \dot{q}_i dp_i] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \,. \qquad (5.13)$$

Funkcija na levoj strani je Hamilton-ova funkcija

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - \bar{\mathcal{L}} \,, \qquad (5.14)$$

pa se diferenciranjem dobija

$$d\mathcal{H} = \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \,, \qquad (5.15)$$

te se uporedjenjem ovog izraza sa (5.13), s obzirom na (5.10), dobijaju Hamilton-ove kanonske jednačine

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \,; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + Q_i^* \,; \qquad i = 1, 2, \cdots, n \,, \qquad (5.16)$$

i identitet

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial t} \equiv - \frac{d\mathcal{H}}{dt} \,. \qquad (5.17)$$

Hamiltonove kanonske jednačine predstavljaju sistem od 2n običnih diferencijalnih jednačina prvog reda koje odredjuju koordinate (q_i) i generalisane impulse (p_i) u funkciji od vremena (t).

Kada se u izraz (5.15) unesu kanonske jednačine (5.16), onda se, s obzirom na (5.17), dobija

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_i [(Q_i^* - \dot{p}_i)\dot{q}_i + \dot{q}_i \dot{p}_i] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \sum_i Q_i^* \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial t} \,. \qquad (5.18)$$

Neka je sistem prirodan (tj. tada postoji obični ili generalisani potencijal) i stavimo da je $\widehat{\mathcal{L}}=\mathcal{L}$, onda je Lagrange-ova funkcija kvadratna (5.7), pa je izraz

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \left[\mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(0)}\right] =$$

$$= 2\mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(1)} - \left[\mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(0)}\right]; \quad 2\mathcal{L}^{(2)} = (\dot{q})\mathbf{A}\{\dot{q}\}; \quad \mathcal{L}^{(1)} = (\dot{q})\{a\}$$

te je Hamilton-ova funkcija

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{L}}^{(2)} - \mathcal{L}^{(0)} \tag{5.19}$$

gde je $\overline{\mathcal{L}}^{(2)}$ kinetički potencijal $\mathcal{L}^{(2)}$ kada se u njega umesto brzina $\dot{q}_i$ stave impulsi (p_i).

Ako je $E_k = E_k^{(2)} + E_k^{(1)} + E_k^{(0)}$ a sile imaju obični ili generalisani potencijal, onda je, prema (4.38), Hamilton-ova funkcija

$$\mathcal{H} = \overline{E}_k^{(2)} - (E_k^{(0)} - \Pi). \tag{5.20}$$

Kod prirodnog skleronomnog sistema su $E_k = E_k^{(2)}$; $E_k^{(1)} = E_k^{(0)} = 0$, pa je Hamilton-ova funkcija

$$\mathcal{H} = \overline{E}_k^{(2)} + \Pi = \overline{\mathbf{E}} \tag{5.21}$$

i jednaka je totalnoj mehaničkoj energiji izraženoj pomoću Hamilton-ovih promenljivih.

Kod prirodnog konzervativnog skleronomnog sistema sa potencijalom koji ne zavisi eksplicitno od vremena, ni Hamilton-ova funkcija ne zavidi eksplicitno od vremena, pa je $\partial\mathcal{H}/\partial t = 0$, a pošto ni kinetički potencijal ne zavisi od vremena to iz(5.17), s obzirom na (5.21), sledi integral

$$\mathcal{H}(q_i, p_i) = \overline{E}_k + \Pi = \overline{\mathbf{E}} = h = const; \quad \mathbf{E} = E_k + \Pi, \tag{5.22}$$

te važi zakon o održanju energije.

Ovaj se integral energije naziva generalisani integral energije, pa je $\mathcal{H}$ generalisana totalna energija sistema. Sistemi kod kojih Hamilton-ova funkcija ne zavisi eksplicitno od vremena zovu se generalisano-konzervativni.

U tehničkoj praksi se mahom koriste Lagrange-ove jednačine druge vrste, ali se Hamilton-ove kanonske jednačine koriste u mnogim disciplinama kao: a) teoriji transformacija, b) Nebeskoj mehanici, c) Statističkoj mehanici i d) Kvantnoj mehanici.

Primeri: - 1. Slobodan pad teške tačke u homogenom polju teže. - Ovde su $q = z$; $E_k = m\dot{z}^2/2$; $\Pi = E_p = mgz$; $\mathcal{L} = (m\dot{z}^2/2) + mgz$, pa će biti

$$p_z = p = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{z} = m\dot{z};\quad \bar{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + mgz;\qquad \mathcal{H} = p\dot{z} - \bar{\mathcal{L}} = \frac{p^2}{2m} - mgz;$$

$$\dot{q} = \dot{z} = \frac{p}{m};\quad \dot{p} = mg;\quad m\ddot{z} = mg;\quad \ddot{z} = g\ (\text{Newton}).$$

2. Harmonijski oscilator. - Kod harmonijskog oscilatora sa jednim stepenom slobode oscilovanja (slika 3.16. sa samo jednim članom), mase m i opruge krutosti c, biće:

$$E_k = m\dot{x}^2/2;\quad E_p = cx^2/2;\quad q = x;\quad \mathcal{L} = (m\dot{x}^2 - cx^2)/2;\quad p_x = p = k_x = m\dot{x};$$

$$\bar{\mathcal{L}} = (p^2/2m) - (cx^2)/2;\ \mathcal{H} = p^2/2m + (cx^2)/2;\ \dot{x} = p/m;\ \dot{p} = -cx = m\ddot{x};\ m\ddot{x} + cx = 0.$$

3. Matematičko klatno. - U ovom slučaju (slika 3.12) su: $q = \varphi$; $E_k = ml^2\dot{\varphi}^2/2$; $E_p = -mgz = -mgl\cos\varphi$; $\mathcal{L} = (ml^2\dot{\varphi}^2/2) - mgl\cos\varphi$;

$$p_\varphi = p = ml^2\dot{\varphi};\quad \mathcal{H} = p\dot{\varphi} - \bar{\mathcal{L}} = (p^2/2ml^2) - mgl\cos\varphi;$$

$$\dot{\varphi} = p/ml^2;\quad \dot{p} = -mgl\sin\varphi = ml^2\ddot{\varphi};\quad l\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi.$$

Pošto je sila konzervativna a potencijal ne zavisi eksplicitno od vremenu, tada, prema (5.22), važi integral energije

$$E = E_k + \Pi = h = E_{k0} + \Pi_0;\quad l^2\dot{\varphi}^2 = l^2\dot{\varphi}_0^2 + 2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_0).$$

4. Kretanje tačke u ravni pod dejstvom privlačne sile. – Tačka mase m kreće se u ravni Oxy pod dejstvom centralne privlačne sile $Q_r = -cr$, gde je r rastojanje od centra privlačenja (O). Ovde će biti:

$$q_i = r;\ \varphi;\ \mathcal{L} = m(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2)/2 - cr^2/2;\ p_r = m\dot r = K_r;$$

$$p_c = mr^2\dot\varphi = mrv_c = L_z;\ \mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left[p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_c^2\right] + \frac{1}{2}cr^2;\ \dot r = p_r/m;$$

$$\dot p_r = \frac{1}{mr^3}p_c^2 - cr = m\ddot r;\qquad \dot\varphi = p_c/mr^2;\qquad \dot p_c = 0.$$

Koordinata φ je ciklička, pa je ciklički integral $p_c = mr^2\dot\varphi = \mathrm{const}$, tj.

$$r^2\dot\varphi = C = \mathrm{const};\quad m\ddot r = \frac{1}{mr^3}m^2r^4\frac{C^2}{r^4} - cr = \frac{mC^2}{r^3} - cr.$$

Smenom $u = 1/r$, pošto su $\dot\varphi = Cu^2$; $\dot r = -Cu'$; $u' = du/d\varphi$, $\ddot r = -C u''\dot\varphi = -C^2u^2u''$ dobija se $m\,C^2u^2(u'' + u) = -cr = -c/u$ (Binet-ov obrazac).

5. Kretanje tačke u prostornom polju centralne svile. – Tačka se kreće u prostoru pod dejstvom sile koja ima potencijal $E_p = \Pi(\rho)$. Ovde će biti:

$$q_i = \rho;\ \varphi;\ \psi;\ \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left[\dot\rho^2 + (\rho^2\cos^2\psi)\dot\varphi^2 + \rho^2\dot\psi^2\right] - \Pi(\rho);\ p_\rho = m\dot\rho;$$

$$p_c = m(\rho^2\cos^2\psi)\dot\varphi;\qquad p_\nu = m\rho^2\dot\psi;$$

$$\mathcal{H} = p_\rho\dot\rho + p_c\dot\varphi + p_\nu\dot\psi - \mathcal{L} = \frac{1}{2m}\left[p_\rho^2 + \frac{p_c^2}{\rho^2\cos^2\psi} + \frac{p_\nu^2}{\rho^2}\right] + \Pi(\rho);$$

$$\dot\rho = p_\rho/m;\qquad \dot\varphi = p_c/m\rho^2\cos^2\psi;\qquad \dot\psi = p_\nu/m\rho^2;$$

$$\dot p_\rho = \frac{1}{m\rho^3}\left[\frac{p_c^2}{\cos^2\psi} + p_\nu^2\right] - \frac{\partial\Pi}{\partial\rho};\qquad m\ddot\rho - m\left[\rho\cos^2\psi\cdot\dot\varphi^2 + \rho\dot\psi^2\right] - \frac{\partial\Pi}{\partial\rho};$$

$$\dot p_c = 0;\qquad (\rho^2\cos^2\psi)\dot\varphi = C = \mathrm{const};$$

$$\dot p_\nu = -\frac{p_c^2}{m\rho^2}\frac{\sin\psi}{\cos^3\psi};\qquad \frac{d}{dt}(\rho^2\dot\psi) = -\frac{1}{2}\rho^2\dot\varphi^2\sin 2\psi.$$

Koordinata $q_2 = \varphi$ je ciklička, a ciklički integral je integral površine.

5.3. Prvi integrali Hamilton-ovih kanonskih jednačina.- Neka funkcija $f(q_i, p_i, t)$ naziva se prvim integralom Hamilton-ovih kanonskih jednačina za konzervativni sistem.

$$\dot{q}_i = d\, q_i/dt = \partial \mathcal{H}/\partial p_i; \quad \dot{p}_i = dp_i/dt = -\partial \mathcal{H}/\partial q_i, \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{5.23}$$

ako je konstantna pri svim značenjima koordnata (q_i) i impulsa (p_i) koje zadovoljavaju gornje jednačine (5.23), odnosno, funkcija $f(q_i, p_i, t)$ e prvi integral kanonskih jednačina (5.23) ako je

$$f(q_i, p_i, t) = \text{const} = C \tag{5.24}$$

za vreme kretanja pri proizvoljnim početnim uslovima. Ako je $f(q_i, p_i, t) = C_1$ prvi integral, onda je i $F'\left[f(q_i, p_i, t)\right] = C' = \text{const}$ takodje prvi integral sistema jednačina.

Problem integralenja jednačina (5.23) sastoji se u tome da se koordinate i impulsi odrede u funkciji od vremena (t) i 2n proizvoljnih kontanti C_i koje se odredjuju iz početnih uslova kretanja, te sledi:

$$q = q(t, C_1, C_2, \ldots, C_{2n}); \quad p = p(t, C_1, C_2, \ldots, C_{2n}). \tag{5.25}$$

Ako se nadje 2n medjusobno nezavisnih prvih integrala, $f_1 = C_1$; $f_2 = C_2$; $\ldots$; $f_{2n} = C_{2n}$, onda se iz sistema tih funkcija mogu odrediti p i q ako je jakobijan različiti od nule $\left|\partial\left[f_1, f_2, \ldots, f_{2n}\right] / \partial\left[q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n\right]\right| \neq 0$.

Kada je, dakle, poznato 2n nezavisnih integrala f_i tada su poznata sva kretanja sistema. Naprotiv, ako je poznato f_m nezavisnih integrala, gde je $m < 2n$, onda se poznaje samo m kretanja sistema, pa je predstava o kretanju sistema nepotpuna, što znači da treba odrediti što veći broj nezavisnih prvih integrala.

U nekim slučajevima, kao što je već izneto u prethodnom članu, dobijaju se odmah prvi integrali. Najvažniji su slučajevi - 1°. Kada Hamilton-ova funkcija ne zavisi eksplicitno od vremena, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_i, t_i)$ pa je $\partial \mathcal{H}/\partial t = 0$, tada iz (5.15), s obzirom na kanonske jednačine (5.16), za slučaj konzervativnih sila, sledi prvi integral

$$\partial\mathcal{H}/\partial t=0;\quad d\mathcal{H}/dt=0;\qquad \mathcal{H}(q_i,p_i)=h=const \tag{5.26}$$

S obzirom na (5.19) gornji je integral generalisani integral energije. Ako je sistem dinamički, tj. ako je kinetički potencijal kvadratna funkcija od generalisanih brzina, onda se, prema (5.20), svodi na Jacobijev integral (4.42):

$$\bar{E}_k^{(2)} - E_k^{(0)} + \Pi = h{=}const, \tag{5.27}$$

a u slučaju da je $E_k = E_k^{(2)}$ onda postaje fizički integral energije

$$E = E_K + \Pi = h = const, \tag{5.28}$$

gde je h totalna mehanička energija.

2° Ako je koordinata q_c ciklička, onda Hamilton-ova funkcija ne zavisi eksplicitno od te koordinate, pa iz (5.16), za konzervativni sistem sledi

$$\partial\mathcal{H}/\partial q_c = 0;\quad dp_c/dt = 0;\quad p_c = C = const, \tag{5.29}$$

te je taj integral ciklički integral. Kada ima više cikličkih integrala (k), tada Hamiltonova funkcija zavisi od necikličnih koordinata, impulsa i vremena t, pa je

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}(q_{k+1}, q_{k+2},\dots,q_n;\ p_1,\dots,p_i,\dots,p_n;t); \tag{5.30}$$

te postoji k cikličkih integrala

$$\partial\mathcal{H}/\partial q_c = 0;\ p_1 = C_1;\ p_2 = C_2;\ p_c = C_c,\dots,p_k{=}C_k. \tag{5.31}$$

Ako bi sve generalsane koordinate bile cikličke, onda bi Hamilton-ova funkcija zavisila samo od impulsa i vremena, pa bi bilo n cikličnih integrala

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}(p_1,p_2,\dots,p_i,\dots,p_n,t);\ p_i = C_i = const.;\ i = 1,2,\dots,n. \tag{5.32}$$

Najpovoljniji je slučaj kada su sve koordinate cikličke a funkcija ne zavisi eksplicitno od vremena, tada su

$$\partial\mathcal{H}/\partial t=0;\ \mathcal{H}=\mathcal{H}(p_i=C_i);\quad \dot{q}_i=\partial\mathcal{H}/\partial p_i = a_i = const;\ q_i=a_i t+b_i \tag{5.33}$$

pa se generalisane koordinate linearno menjaju sa vremenom.

Ciklične koordinate nazivaju se i skrivene ("ignorisane", "ignorable coordinates") jer od njih funkcija ne zavisi eksplicitno, a ciklički integrali $p_c = C = \text{const}$ se smatraju parametrima. One se češće zovu cikličkim, jer se pri kretanju po zatvorenoj putanji (ciklima), koja se karakteriše koordinatom $q_c = \varphi$, ista ne ulazi eksplicitno u kinetički potencijal, pa se stoga javlja kao ciklična koordinata.

Transformacije kanonskih promenljivih q_i i p_i u druge kanonske koordinate $\overline{q}_i$ i $\overline{p}_i$ pod uslovom da forma kanonskih jednačina ostane i dalje kanonska a da te nove koordinate budu cikličke, nazivaju se kanonske ili kontaktne transformacije ("contact transformations").

Kod holonomnog sistema sa cikličkim koordinatama biće $\partial\mathcal{H}/\partial q_c = 0$, pa se dobija ciklički integral. Kod generalisanog konzervativnog sistema funkcija $\mathcal{H}$ ne zavisi eksplicitno od vremena (t), pa je $\partial\mathcal{H}/\partial t = 0$, te važi integral energije $\mathcal{H}(q_i, p_i) = h = \text{const}$. Tako, dakle, postoji jedna analogija izmedju ova dva sistema.

Naprimer, energije jednog sistema su

$$E_K = \frac{1}{2}\left[\frac{\dot{q}_1^2}{a+bq_2} + \dot{q}_2^2\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\dot{q}_1^2}{2+8q_2} + \dot{q}_2^2\right]; \quad E_P = \Pi = c + dq_2^2 = 1 + 2q_2^2; \quad \mathcal{L} = E_K - \Pi;$$

te su

$$p_1 = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_1 = \dot{q}_1/(2+8q_2); \quad p_2 = \dot{q}_2; \quad \mathcal{H} = \left[(2+8q_2)p_1^2 + p_2^2 + 4q_2^2\right]/2;$$

pa su kanonske jednačine

$$\dot{q}_1 = (2+8q_2)\,p_1; \quad \dot{q}_2 = p_2; \quad \dot{p}_1 = 0; \quad \dot{p}_2 = -4p_1^2 - 4\,q_2.$$

Koordinata q_1 je ciklička, pa je $p_1 = C_1$ ciklički integral, te sledi

$$\dot{q}_1 = (2+8q_2)C_1; \quad q_2 = (\dot{q}_1/8C_1) - (1/4); \quad \dot{p}_2 = -4C_1^2 - 4\,q_2 = -4C_1^2 - (\dot{q}_1/2C_1) + 1.$$

Integraljenjem se dobijaju impulsi

$$p_1 = C_1; \quad p_2 = -(q_1/2C_1) + (1 - 4C_1^2)t + C_2,$$

a zatim će biti

$$\ddot{q}_2 = \dot{p}_2 = -4C_1^{\ 2} - 4q_2;\ \ddot{q}_2 + 4q_2 = -4C_1^{\ 2};\ \dot{q}_1 = C_1\ (2+8\ q_2);$$

odnosno

$$q_2 = A\cos 2t + B\sin 2t - C_1^{\ 2};\ q_1 = 4C_1\left[A\sin 2t - B\cos 2t\right] + 2C_1(1-4C_1^2)t + C_3.$$

5.4. Poisson-ove zagrade. - Metoda Poisson-a daje mogućnost kada se poznaju dva prva integrala sistema kanonskih jednačina (5.16) za slučaj konzervativnog sistema da se odredi treći prvi integral. Neka je $f/q_i, p_i, t/= C=$ const prvi integral kanonskih jednačina, onda se, s obzirom na te jednačine, dobija da je

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\right) = 0. \tag{5.34}$$

Drugi izraz naziva se Poisson-ova zagrada*) i pored uobičajene oznake u maloj zagradi stavićemo srednju zagradu, s obzirom da ima osobine vektorskog proizvoda dvaju vektora. Sa tim oznakama gornja relacija je oblika

$$(f,\mathcal{H}) = [f,\mathcal{H}] = \sum_i^n\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\right) = \sum_i^n\begin{vmatrix} \partial f/\partial q_i & \partial f/\partial p_i \\ \partial \mathcal{H}/\partial q_i & \partial \mathcal{H}/\partial p_i \end{vmatrix}, \tag{5.35}$$

pa jednačina (5.34) postaje

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f, \mathcal{H}] = \frac{\partial f}{\partial t} - [\mathcal{H}, f] = 0. \tag{5.36}$$

Poisson-ove zagrade imaju sledeće osobine:

$$\begin{aligned}
&1.\ [f,\varphi] = -[\varphi, f];\quad [f,-\varphi] = -[f,\varphi] = [\varphi,f];\quad f,\varphi/(q_i, p_i, t);\\
&2.\ [f, c] = 0;\qquad c = const.\\
&3.\ [f+\varphi, \psi] = [f,\psi] + [\varphi,\psi];\\
&4.\ \frac{\partial}{\partial t}[f,\varphi] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, \varphi\right] + \left[f, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right];\\
&5.\ [f[\varphi,\psi]] + [\varphi[\psi, f]] + [\psi[f,\varphi]] \equiv 0.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

---

*) Poisson, Journal de l'École polytech., VIII, ch. 15,1809. god.

Poslednja relacija (5) naziva se Poisson-ova identičnost.*) Ona se može dokazati neposredno razvijanjem duplih Poisson-ovih zagrada ili, zbog simetričnosti u odnosu na sve tri funkcije, može se dokaz izvesti samo za jednu funkciju, naprimer f. Označimo zagradu $[\varphi, f] = \Phi f$ u vidu operatora, i uzmimo dva člana iz poslednje relacije (5.37) onda će biti

$$[\varphi[\psi f]]+[\psi[f\varphi]]=[\varphi[\psi f]]-[\psi[\varphi f]]=[[\varphi\bar{\psi}-\psi\Phi]f] \tag{5.38}$$

pa se vidi da desna strana ove realcije ne sadrži druge izvode od f. Prema tome, će leva strana od relacije 5. u (5.38) biti takva da ne sadrži nijedan izvod drugog reda od tih triju funkcija, te je jednaka nuli čime je identičnost dokazana.

Poisson-ova teorema glasi: „Ako su funkcije $f/q_i; p_i; t/ = a = const$ i $\varphi/q_i, p_i, t/ = b = const$ prvi integrali kanonskih jednačina, onda je i funkcija $\psi = [f, \varphi] = c = const$ takodje prvi integral tih jednačina."

Dokaz se izvodi na ovaj način. Pošto su f i φ prvi integrali to zbog (5.36) mora biti

$$(\partial f/\partial t)+[f,\mathcal{H}]=0; \qquad (\partial\varphi/\partial t)+[\varphi,\mathcal{H}]=0 \tag{5.39}$$

Koristeći osobinu 4. iz (5.37), s obzirom na prednje relacije i Poisson-ovu identičnost (5., 5.37), dobija se:

$$\frac{\partial}{\partial t}[f,\varphi]=\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[\frac{\partial f}{\partial t}\,\varphi\right]+\left[f\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]; \quad \frac{\partial f}{\partial t}=-[f,\mathcal{H}]; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}=-[\varphi,\mathcal{H}];$$

odnosno

$$[\mathcal{H}[f,\varphi]]+[f[\varphi,\mathcal{H}]]+[\varphi[\mathcal{H},f]]=-[[f,\varphi]\mathcal{H}]-\left[f\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]+$$

$$+\left[\varphi,\frac{\partial f}{\partial t}\right]=-[[f,\varphi]\mathcal{H}]-\left[f\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]-\left[\frac{\partial f}{\partial t}\,\varphi\right]\equiv 0,$$

pa je funkcija ψ, zaista integral kanonskih jednačina

---

*) $[a[bc]]+[b[ca]]+[c[ab]] = b(ac)-c(ab)+c(ab)-a(bc)$
$+a(bc)-b(ac)\equiv 0.$

$$\frac{\partial}{\partial t}[f,\varphi]+[[f,\varphi]\mathcal{H}=0. \qquad (5.40)$$

a to je i trebalo dokazati.

Kada je sistem skleronoman tada je $\partial\mathcal{H}/\partial t = 0$, pa postoji generalisani integral energije (5.26), da je $\mathcal{H}/(q,p) = h$ = const. Ako je funkcija $f(q,p,t)=$ $=C$ prvi integral, onda će, prema (5.36), biti

$$(\partial f/\partial t) + [f,\mathcal{H}] = 0,$$

pa kako je i funkcija $(f,\mathcal{H}) = c$ takodje integral, sledi da je

$$[f,\mathcal{H}] = -\partial f/\partial t = c = const. \qquad (5.41)$$

Iz ovog zaključujemo da ako prvi integral $f(q,p,t) = C$ eksplicitno zavisi od vremena onda je prvi izvod $\partial f/\partial t = c_1$ takodje prvi integral, pa su prvi integrali i svi viši izvodi po vremenu: $\partial^2 f/\partial t^2 = c_2$; $\partial^3 f/\partial t^3 = c_3;\ldots;$. Medjutim, ako prvi integral ne zavisi eksplicitno od vremena t, tj. ako je $f(q,p) = C$, onda je $\partial f/\partial t = 0$, pa je $[f,\mathcal{H}] \equiv 0$, te funkcija $[f,\mathcal{H}]$ nije prvi integral kanonskih jednačina (5.23).

Ako je dat sistem prvih integrala $f_1, f_2,\ldots,f_i,\ldots,f_m(q_i,p_i)$ koji ne zavise eksplicitno od vremena, i ako je Poisson-ova zagrada

$$[f_r, f_s] \equiv 0, \qquad r,s = 1,2,\ldots,m, \qquad (5.42)$$

onda se kaže da je ovaj sistem integrala u involuciji. Poisson-ova zagrada ma koja dva integrala iz gornjeg sistema u involuciji samo je funkcija tih prvih integrala, ali nije novi prvi integral kanonskih jednačina.

5.5. Routh-ove jednačine. - Umesto da se pri postavljanju kanonskih jednačina (5.23) sve generalisane brzine $(\dot{q}_i)$ izraze pomoću svih generalisanih impulsa (p_i), $i = 1,2,\ldots,n$, može se kako je uradio Routh 1876. godine to uraditi i delimično, i uzeti jedan deo Lagrange-ovih promenljivih a drugi deo Hamilton-ovih promenljivih. Tako se kao Routh-ove promenljive uvode

$$t, q_i, \dot{q}_j, p_r = t;\ q_j; q_r; \dot{q}_j;\ p_r; \qquad i=1,2,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m<n;\ r=m+1,\ldots,n,$$

i Routh-ova funkcija

$$\mathcal{R}=\sum_{j=1}^{m} p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} = Q(q_j; q_r; \dot{q}_j; p_r, t) \tag{5.43}$$

koja zavisi od n generalisanih koordinata, m generalisanih impulsa, n-m generalisanih brzina i vremena (t). Kako je kinetički potencijal funkcija

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \mathcal{L}(q_j, q_r, \dot{q}_j, \dot{q}_r, t) \tag{5.44}$$

to su izvodi Routh-ove funkcije po promenljivima q_j, p_j, $\dot{q}_r$, p_r, t:

$$\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial q_j}=-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j};\ \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial \dot{q}_j}=-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j};\ \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial p_j}=\dot{q}_j;\ \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial q_r}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_r};\ \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial \dot{q}_r}=-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r};\ \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial t}=-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}. \tag{5.45}$$

Za kretanje konzervativnog sistema važe Lagrange-ove jednačine (5.4), pa se s obzirom na prvu prethodnu relaciju dobija da je generalisani impuls

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j}=0;\ \frac{d}{dt}p_j=\dot{p}_j=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j}=-\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial q_j};\ \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial q_j}=-\dot{p}_j;\quad j=1,\dots,n. \tag{5.46}$$

Iz ove dve grupe jednačina sledi sistem Routh-ovih diferencijalnih jednačina kretanja:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial q_j}=0;\ \dot{q}_r=\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial p_r};\ \dot{p}_r=-\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial q_r};\quad \begin{array}{l} j=1,2,\dots,m<n, \\ r=m+1,\ m+2,\dots,n. \end{array} \tag{5.47}$$

On se sastoji iz m jednačina drugog reda Lagrange-ovog i 2(n-m) dif.jednačina prvog reda Hamilton-ovog oblika. Pri ovome kod prvih koordinata (q_j) Routh-ova funkcija igra ulogu kinetičkog potencijala ($\mathcal{L}$), a kod drugih (q_r, p_r) igra ulogu Hamilton-ove funkcije ($\mathcal{H}$).

Routh-ove jednačine su pogodne za smanjivanje broja jednačina kretanja u slučaju da postoje cikličke koordinate. Neka su prvih s koordinata q_j necikličke, a ostale s = n-m cikličke; q_c; c = m + 1; m + 2;...,n. Pošto Lagrange-ova funkcija ne zavisi eksplicitno od cikličke koordinate, to postoji ciklički integral $\partial\mathcal{L}/\partial \dot{q}_c = p_c = C_c$ = const. Zbog toga ni Hamilton-ova niti Routh-ova funkcija ne zavise eksplicitno od cikličkih koordinata, pa se mogu napisati da su funkcije

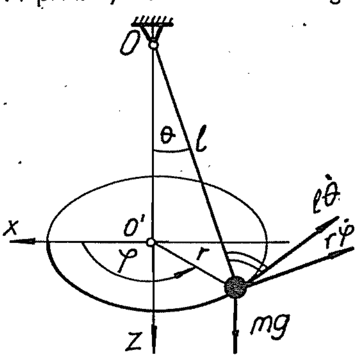
$$\mathcal{L}=\mathcal{L}(q_j,\dot{q}_i,t); \quad \mathcal{R}=\sum C_c\dot{q}_c-\mathcal{L}=\mathcal{R}(q_j,\dot{q}_j,C_c), \tag{5.48}$$

te je sistem Routh-ovih jednačina:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial q_j}=0; \quad p_c=C_c=const; \quad \dot{q}_c=\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial p_c}=\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial C_c}. \tag{5.49}$$

Prve jednačine ne sadrže ni cikličke koordinate niti cikličke brzine, pa je broj dif. jednačina drugog reda sveden na $n-s$ jednačina u kojima se pojavljuje toliko nepoznatih funkcija vremena. Ovaj sistem jednačina ne sadrži, dakle, "suvišnih funkcija" koje prethodno treba odrediti, pa se kaže da je to autonomni sistem dif. jednačina. Koordinate q_c mogu se odrediti kvadraturama.

Naprimer, kod centrifularnog regulatora (slika 5.1) biće:



Slika 5.1.

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\left[\ell^2\dot{\theta}^2+(\ell\sin\theta)^2\dot{\varphi}^2\right]+mg\ell\cos\theta;$$

$$U=-\Pi=mgz,$$

pa je koordinata φ ciklička, te su:

$$\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi}=m(\ell\sin\theta)^2\dot{\varphi}=p_c=C;$$

$$\mathcal{H}=C\dot{\varphi}-\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}m\ell^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2-mg\ell\cos\theta=$$

$$=\frac{C^2}{2m\ell^2\sin^2\theta}-\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2-mg\ell\cos\theta.$$

Pošto je θ neciklička koordinata, to je prema prvoj jednačini (5.49), diferencijalna jednačina kretanja:

$$\frac{d}{dt}\left(-m\ell^2\dot{\theta}\right)+\frac{C^2\cos\theta}{m\ell^2\sin^3\theta}-mg\ell\sin\theta=0;$$

$$\ddot{\theta}-\frac{C^2\cos\theta}{m^2\ell^4\sin^3\theta}+\frac{g}{\ell}\sin\theta=0.$$

6. INTEGRALNI PRINCIPI

6.1. Uloga integralnih principa. - Poznato je da se u Geometriji osobine neke klase krivih daju diferencijalnim relacijama. Naprimer, kod familije parabola $y^2 = 2px$ diferencijalna je osobina da je subnormala $S_n = y\, y' = p = const$; kod krugova je poluprečnik krivine konstantan; kružna zavojnica ima konstantnu i krivinu i fleksiju. Geodezijske krive na površi imaju osobinu da je glavna normala kolinearna sa normalom površi. Analogno, mogu se osobine krivih izraziti i varijaciono, iznoseći neka njihova stacionarna svojstva. Tako se geodezijska linija na površi može definisati i kao najkraće rastojanje dveju tačaka na toj površi. Os svih krivih $y = y(x)$ koje prolaze u ravni Oxy kroz dve stalne tačke, lančanica proizvodi najmanju površ pri potpunom obrtanju oko Ox-ose. Os svih tih krivih lančanica ima i najniže težište u odnosu na Ox-osu.

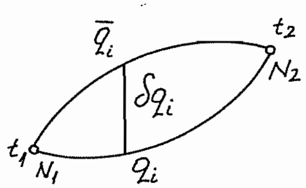
Tako se postupa i u Mehanici. Newton-ovi aksiomi i Lagrange-d'Alembert-ov princip omogućavaju da se zakoni kretanja izraze diferencijalnim jednačinama. Medjutim, danas se koriste sve više varijacioni principi. Naprimer, u Statici pri ispitivanju ravnoteže lančanice može se poći od diferencijalnih jednačina te krive dobijenih iz ravnotežnih uslova, ili se, pak, može primeniti Torricelli-jev princip (3.13).

Diferencijalni principi formulišu se lokalno, tako što se u odredjenom trenutku posmatraju razne moguće konfiguracije sistema koje su bliske stvarnoj konfiguraciji, koja, zbog sila i veza, mora da ispunjava odredjene uslove. Integralni se principi bitno razlikuju od diferencijalnih u tome što se njima uporedjuju konačna pomeranja za konačne vremenske razmake.

Neka je konzervativni sistem podčinjen holonomnim idealnim vezama, i neka ima n stepeni slobode kretanja, onda je njegov položaj odredjen sa n generalisanih nezavisnih koordinata

$$q_1 = q_1(t);\ q_2 = q_2(t); \dots ; q_i = q_i(t); \dots ;\ q_n = q_n(t), \qquad (6.1)$$

koje su funkcije vremena (t). Skup ovih koordinata (funkcija) čini skup putanja svih materijalnih tačaka ili, pak, putanju reprezentativne tačke sistema u konfiguracionom prostoru. Skup koordinata $q_i(t_o)$ u početnom trenutku odredjuje početnu konfiguraciju sistema. Ako se kretanje posmatra u konačnom vremenskom razmaku $(t_2 - t_1)$, onda je početna konfiguracija sistema $q_i(t_1)$, a krajnja $q_i(t_2)$. Sistem može iz početne konfiguracije da stigne u krajnju po beskrajno mnogo puteva koje veze dopuštaju, tj. koji su kinematički mogući. Onaj put kojim sistem stvarno prelazi iz jedne konfiguracije u drugu u vremenskom razmaku $t_2 - t_1$ naziva se direktni ili stvarni put; ostali su zaobilazni ili okolni putevi. Razlika koordinata sistema na direktnom i zaobilaznom putu, (slika 6.1), u istom trenutku (t), je varijacija generalisane koordinate, pa je



Slika 6.1.

$$\bar{q}_i = q_i + \delta q_i ; \quad \delta q_i = \bar{q}_i - q_i = \varepsilon \eta_i(t). \quad (6.2)$$

Ako sistem iz početne konfiguracije predje u krajnju za isto vreme $(t_2 - t_1)$ kretanje je izohrono ("jednakovremeno"). Ako u svakom trenutku svakoj konfiguraciji sistema na direktnom putu uvek istovremeno (tj. bez variranja vremena) odgovaraju konfiguracije na zaobilaznim putevima izohrono kretanje je sinhrono; u protivnom je asinhrono.

6.2. Hamilton-ov princip. - Suština Hamilton-ovog principa sastoji se u tome što on postavlja kriterijum pomoću koga se može ukazati na stvarni put kretanja sistema izmedju svih kinematičkih mogućih zaobilaznih puteva koja se vrše u istom vremenskom razmaku od početne do krajnje konfiguracije.

Hamilton-ov princip može se izvesti iz Lagrange-ovih jednačina. Kako je kinetički potencijal $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, holonomnog konzervativnog sistema sa n stepeni slobode, to ako se Lagrange-ova jednačina za koordinatu q_i pomnoži varijacijom δq_i i izvrši sabiranje po tome indeksu, dobiće se:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0; \quad \mathcal{L} = E_K - E_P = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t); \quad i = 1, \ldots, n. \quad (6.3)$$

Izraz u zagradi može se, zbog osobine izohronosti prve varijacije (2.25), napisati u obliku

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right)-\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i\right);\quad \frac{d}{dt}\delta q_i=\delta\dot{q}_i;$$

pa gornja relacija (6.3) postaje

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right)=\sum_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i\right), \tag{6.4}$$

a kako je prva varijacija kinetičkog potencijala

$$\delta\mathcal{L}=\delta(q_i,\dot{q}_i,t)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i\right), \tag{6.5}$$

to jednačina (6.4) dobija oblik

$$d\sum_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right)=\delta\mathcal{L}dt.$$

Integralenjem u razmaku (t_1, t_2), a pošto su u početnoj i krajnjoj konfiguraciji varijacije jednake nuli, $\left[\delta q_i\right]t_1=0;$ $\left[\delta q_i\right]t_2=0$, jer su te tačke fiksirane, i s obzirom na osobinu izohronosti prve varijacije (2.25), dobija se da je

$$\left[\sum_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right)\right]_{t_1}^{t_2}=0=\int_{t_1}^{t_2}\delta\mathcal{L}dt=\delta\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}dt. \tag{6.6}$$

Integral

$$W=\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}dt=\int_{t_1}^{t_2}(E_K-E_P)dt=\int_{t_1}^{t_2}(E_K+U)dt, \tag{6.7}$$

naziva se dejstvo (actio) u Hamilton-ovom smislu ili glavna Hamilton-ova funkcija a uveo ju je Hamilton 1834. god. (u Phil. Trans., page 307). Dejstvo ima dimenziju $[W]=[FLT]$, a jedinicu $[\mathrm{kpmsec}]$. Stoga je izraz Hamilton-ovog principa

$$\delta W=0, \tag{6.8}$$

koji glasi: "Dejstvo u Hamilton-ovom smislu ima na direktnom putu stacionarnu vrednost u poredjenju sa njegovim vrednostima na zaobilaznim kinematički mogućim putevima koji se vrše u istom vremenskom razmaku, a poklapaju se sa direktnim putem u početnom i krajnjem trenutku".

Hamilton-ov princip izveli smo iz Lagrange-ovih jednačina, tj. iz opšteg Lagrange-d'Alembert-ovog principa, obratno, mogu se pomoću ovog principa izvesti Lagrange-ove jednačine. Prva varijacija dejstva je

$$W=\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}\,dt;\qquad \delta W=\delta\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i}^{n}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}\delta\dot q_i\right)dt$$

a kako se parcijalnom integracijom, smenom $u = \partial\mathcal{L}/\partial\dot q_i$, $dv = \delta\dot q_i\,dt = d(\delta q_i)$, zbog izohronosti varijacije (2.25), i graničnih uslova $[\delta q_i]_{t_1} = 0$ i $[\delta q_i]_{t_2} = 0$, dobija

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}\delta\dot q_i\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}d(\delta q_i)=\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}\delta q_i\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\delta q_i\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}=-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}$$

to je

$$\delta W=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}\right]\delta q_i\,dt=0.$$

Pošto su varijacije nezavisne $\delta q_i \neq 0$, moraju biti zadovoljene relacije u zagradama, a one predstavljaju Lagrange-ove jednačine

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}=0;\qquad i=1,\dots,n. \tag{6.9}$$

Pošto smo izveli ove jednačine iz Hamilton-ovog principa, to se on može s pravom prihvatiti da je princip Mehanike holonomnih sistema.

Sa gledišta Varijacionog računa Lagrange-ove jednačine igraju ulogu krivih koje odgovaraju funkcionalu - dejstvu - **W**. Ona od krivih koja funkcionalu daje ekstremnu vrednost jeste ekstremala, odnosno direktni put kretanja holonomnog sistema.

Iz (5.14) sledi da je kinetički potencijal

$$\mathcal{L} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}; \qquad p_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i, \tag{6.10}$$

pa je prva varijacija

$$\delta\mathcal{L} = \sum_i^n \left[\dot{q}_i - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}\right]\delta p_i + \sum_i^n \left[p_i \delta\dot{q}_i - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}\delta q_i\right]. \tag{6.11}$$

Izraz u prvoj zagradi je jednak nuli pošto nije u vezi sa varijacijama koordinata, pa predstavlja prvu grupu Hamilton-ovih jednačina (5.23). Stoga će dalje biti prva varijacija dejstva u Hamilton-ovom smislu kada se izvrši parcijalna integracija pomoću smena $u = p_i$ i $v = \delta q_i$

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[p_i d(\delta q_i) - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}\delta q_i dt\right] = -\int_{t_1}^{t_2} \sum_i^n \left[\dot{p}_i + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}\right]\delta q_i \, dt = 0, \tag{6.12}$$

pa pošto $\delta q_i \neq 0$ to se dobija drugi sistem Hamilton-ovih jednačina (5.23). Na taj način su i Hamilton-ove jednačine za konzervativni sistem (5.23) dobijene pomoću Hamilton-ovog principa.

Hamilton-ov princip se primenjuje i na nekonzervativne holonomne sisteme. U ovome slučaju varijaciji kinetičkog potencijala treba dodati virtualni rad nekonzervativnih generalisanih sila, te će, s obzirom na (6.9), biti:

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta\mathcal{L} + Q_i^* \delta q_i\right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i^n \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} + Q_i^*\right]\delta q_i \, dt = 0, \tag{6.13}$$

pa slede Lagrange-ove jednačine za nekonzervativni sistem

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i^*; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{6.14}$$

Naprimer, materijalna tačka kreće se po Ox-osi pod dejstvom potencijalne sile $X = -\partial\Pi/\partial x = -d\Pi/dx$. U ovom slučaju je

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \Pi\right) dt; \quad \delta W = \int (m\dot{x}\delta\dot{x} - \delta\Pi) dt = \int \left[m\dot{x}d(\delta x) - \frac{\partial\Pi}{\partial x}\delta x dt\right] =$$

$$=m\left\{\left[\dot{x}\delta x\right]_{t_1}^{t_2}-\int\delta x d\dot{x}\right\}-\int\frac{\partial\Pi}{\partial x}\delta x dt=\int(-m\ddot{x}+X)\delta x dt=0;\ m\ddot{x}+X=0;\ u=\dot{x};\ v=\delta x.$$

U slučaju horizontalnog harmonijskog oscilatora (kao na sl. 3.16. ali sa jednom masom), s obzirom na Euler-ovu jednačinu Varijacionog računa (2.31) za promenljive y = x i x = t, sledi:

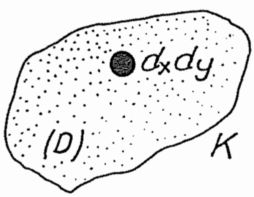
$$W=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2-cx^2\right)dt=\int_{t_1}^{t_2} f(x,\dot{x})dt;\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial f}{\partial x}=m\ddot{x}+cx=0.$$

Hamilton-ov princip kako je ovde izveden ne može se primeniti na neholonomne sisteme, pošto varijacije generalisanih koordinata moraju da zadovolje i naknadne uslove nametnute neholonomnim vezama. Zbog toga se primenjuju drugi principi u integralnom obliku, ali oni nisu varijacioni

6.3. Ekstremumi funkcionala. - Hamilton-ov princip je povezan sa Varijacionim računom, pa treba odrediti ekstremume višestrukih integrala.

6.3.1. Ekstremum funkcionala koji zavisi od funkcije dve promenljive. - Dat je funkcional (slika 6.2) funkcije f od dve promenljive x, y

$$J(w)=\iint_{(D)} f(x,y,w,p,q)dxdy, \qquad (6.15)$$



Slika 6.2.

gde je f data funkcija, w = w(x,y) je tražena ekstremala (tj. funkcija koja daje ekstremum tom integralu), $p=\partial w/\partial x$; $q=\partial w/\partial y$; a poznata je vrednost funkcije w(x,y) na konturi, $[w(x,y)]_K$ koja omedjava domen (D).

Pretpostavimo da je w = w(x,y) ekstremala funkcionala J, onda se neka druga funkcija koja zadovoljava isti konturni uslov može uzeti u obliku

$$\overline{w}(x,y)=w(x,y)+\varepsilon\eta(x,y);\ [\overline{w}]_K=[w]_K, \qquad (6.16)$$

gde je $\eta(x,y)$ kontinualna, diferencijabilna funkcija čija je vrednost na konturi jednaka nuli $[\eta(x,y)]_K=0$, a ε je parametar koji ne zavisi od x i y, $\varepsilon\neq\varepsilon(x,y)$, tako da je

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}=\iint_{(D)} f(x,y,\overline{w},\overline{p},\overline{q})dxdy;\qquad \frac{dJ}{d\varepsilon}=0 \text{ za } \varepsilon\to 0. \qquad (6.17)$$

Pošto su izvodi

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \mathcal{E}}=\eta ; \quad \frac{\partial(\partial \bar{w}/\partial x)}{\partial \mathcal{E}}=\frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{E}}=\frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \frac{\partial(\partial \bar{w}/\partial y)}{\partial \mathcal{E}}=\frac{\partial \bar{q}}{\partial \mathcal{E}}=\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

to je

$$\frac{dJ}{d\mathcal{E}}=\iint\limits_{(D)}\left[\frac{\partial f}{\partial \bar{w}}\eta+\frac{\partial f}{\partial \bar{p}}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right]dx\,dy,$$

pa kako je $\bar{w} = w$ kada je $\mathcal{E} = 0$, to će biti:

$$\left[\frac{dJ}{d\mathcal{E}}\right]_{\mathcal{E}=0}=\iint\limits_{(D)}\left[\frac{\partial f}{\partial w}\eta+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right]dx\,dy=0. \qquad (6.18)$$

Primenom Riemann-ove formule *)

$$\iint\limits_{(D)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint\limits_{(K)}(P\,dx+Q\,dy),$$

na funkcije

$$Q=\eta F;\ P=\eta G;\ \partial Q/\partial x=F(\partial \eta/\partial x)+\eta(\partial F/\partial x);\ \partial P/\partial y=G(\partial \eta/\partial y)+\eta(\partial G/\partial y),$$

dobija se

$$\iint\limits_{(D)}\left[\left(F\frac{\partial \eta}{\partial x}-G\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+\eta\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial G}{\partial y}\right)\right]dx\,dy=\oint\limits_{(K)}\left[\eta(G\,dx+F\,dy)\right]. \qquad (6.20)$$

Izraz (6.18) postaje

$$\left[\frac{dJ}{d\mathcal{E}}\right]_0=\iint\limits_{(D)}\eta\frac{\partial f}{\partial w}dx\,dy+\iint\limits_{(D)}\left[\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right]dx\,dy=0,$$

pa ako se uporedi sa prethodnim i stavi $F = \partial f/\partial p$ i $-G = \partial f/\partial q$, on se može, uvodjenjem izraza(6.20), napisati u obliku

$$\iint\limits_{(D)}\eta\frac{\partial f}{\partial w}dx\,dy-\iint\limits_{(D)}\left[\eta\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial G}{\partial y}\right)\right]dx\,dy+\oint\limits_{(K)}\left[\eta\left[F\frac{dy}{ds}+G\frac{dx}{ds}\right]ds=0.\right.$$

Pošto je η na konturi nula, $[\eta]_K = 0$, to treći član otpada, pa se dobija da

*)R.Kašanin,V.Matematika,II, knjiga 2, str. 289.,Beograd, 1950. god.

je površinski integral

$$\iint\limits_{(D)} \eta \left[\frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right] dx dy = 0, \tag{6.21}$$

te je uslov ekstremuma

$$\frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right) = 0; \quad p = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{6.22}$$

koji mora da zadovolji ekstremala w (x,y) svuda u domenu (D). Ova jednačina je Euler-ova jednačina Varijacionog računa.

Ako je $f = p^2 + q^2$, onda su $\partial f/\partial w = 0$; $\partial f/\partial p = 2p$; $\partial f/\partial q = 2q$, pa je uslov ekstremuma (6.22), Laplace-ova diferencijalna jednačina

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \Delta w(x,y) = 0 \tag{6.23}$$

gde je Δ laplasijan za ravan. Funkcije w(x,y) koje zadovoljavaju Laplace-ovu jednačinu nazivaju se harmonijske funkcije.

Funkcional (6.15) proširićemo tako da je oblika

$$J = \iint\limits_{(D)} f(x,y,w,p,q,r,s,t)\, dx\, dy \tag{6.24}$$

gde su parcijalni izvodi:

$$p = \partial w/\partial x; \quad q = \partial w/\partial y; \quad r = \partial^2 w/\partial x^2; \quad s = \partial^2 w/\partial x \partial y; \quad t = \partial^2 w/\partial y^2$$

pretpostavljajući da su na konturi (K), koja obuhvata domen (D), utvrdjene vrednosti funkcije w i njenih prvih parcijalnih izvoda p i q, kao i da su zadovoljeni uslovi neprekidnosti i diferencijabilnosti od funkcije w i njenih izvoda. Dalje se pretpostavlja da je w(x,y) ekstremala funkcionala (6.24), te da je obližnja funkcija $\overline{w}(x,y)$ data izrazom (6.16), i da su na konturi K funkcija η (x,y) i njeni parcijalni izvodi $\partial\eta/\partial x$ i $\partial\eta/\partial y$ jednaki nuli.

Analogno relaciji (6.18) dobija se da je uslov ekstremuma

$$\iint \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial w}\eta + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right] + \left[\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right]\right\} dx dy = 0 \tag{6.25}$$

Prvi deo prethodnog integrala je isti kao u (6.18) i on se svodi na oblik (6.21) na način koji je iznet u prethodnom članu. Drugi deo integrala se može preurediti*), ako se podje od identiteta

$$\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial r}\right)\eta\right] + \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\right]\eta;$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\eta\right] + \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\right]\eta;$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial s}\right)\eta\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial s}\right)\eta\right] + \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial s}\right]\eta\right\}.$$

Primenom Green-ove formule (6.19) na prve delove prednjih relacija dobija se

$$\iint\limits_{(D)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \oint\limits_{(K)}\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial r}\right)\eta\right]dy - \left[\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\eta\right]dx\right\} = 0;$$

$$\oint\limits_{(K)}\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial s}\right)\eta\right]dy - \left[\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial s}\right)\eta\right]dx\right\} = 0,$$

jer su na konturi $[\eta]_K = 0$; $[\partial\eta/\partial x]_K = 0$ i $[\partial\eta/\partial y]_K = 0$. Tako se dobija da se izvod $dJ/d\varepsilon$ za $\varepsilon = 0$ svodi na oblik

$$\iint\limits_{(D)}\left[\frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial f}{\partial t}\right]\eta\,dx\,dy = 0,$$

pa pošto je po pretpostavci η (x,y) proizvoljna neprekidna funkcija, to se ekstremni uslov svodi na jednačinu Ostrogradskog

$$\frac{\partial f}{\partial w} - \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q}\right] + \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\right] = 0. \tag{6.26}$$

Ako je funkcional oblika

$$J = \iint\limits_{(D)} (r^2 + 2s^2 + t^2)\,dx\,dy,$$

onda su $\partial f/\partial r = 2r$; $\partial f/\partial s = 4s$; $\partial f/\partial t = 2t$, pa uslov (6.26) postaje

---

*) Fempl S., Elementi Varijacionog računa, Beograd, 1965. god.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\Delta\Delta w(x,y)=\nabla^2\nabla^2 w(x,y)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 w=0. \tag{6.27}$$

Funkcije koje zadovoljavaju ovakvu parcijalnu jednačinu jesu biharmonijske funkcije.

Naprimer, ako je podintegralna funkcija $f = (r + t)^2$ onda je $w(x,y)$ takodje biharmonijska funkcija $\Delta\Delta W = 0$.

6.3.2. Ekstremizacija trostrukog integrala. – Posmatrajmo trostruki integral

$$J=\iiint_{(V)} f\left(x,y,z,w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial w}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz, \tag{6.28}$$

u konačnom području (V) prostora xyz. Podintegralna funkcija f eksplicitno je data kao funkcija naznačenih argumenata, kontinualna je i dvaput diferencijabilna. Problem se sastoji u tome da se odredi diferencijalna jednačina koju mora da zadovoljava takva funkcija $w = w(x,y,z)$ kada daje funkcionalu J ekstremum u odnosu na funkciju f za koju se pretpostavlja da ima odredjene vrednosti u svima tačkama konturne površi (S) koja omedjava područje (V).

Kada se uvede jednoparametarska familija komparativnih funkcija $\overline{w} = \overline{w}(x,y,z)$ za ekstremalu $w = w(x,yz)$ u obliku

$$\overline{w}(x,y,z) = w(x,y,z) + \varepsilon\eta(x,y,z), \tag{6.29}$$

gde je ε parametar a $\eta=\eta(x,y,z)$ proizvoljna diferencijabilna funkcija koja je jednaka nuli na konturnoj površi $\left[\eta(x,y,z)\right]_S = 0$, onda je uslov ekstremuma $dJ/d\varepsilon=0$ za $\varepsilon=0$.

Radi jednostavnosti uvedimo oznake

$$p=\partial w/\partial x;\quad q=\partial w/\partial y;\quad r=\partial w/\partial z;\quad u=\partial\eta/\partial x;\quad v=\partial\eta/\partial y;\quad \omega=\partial\eta/\partial z,$$

onda su

$$\overline{p}=\partial\overline{w}/\partial x=p+\varepsilon u;\ \overline{q}=q+\varepsilon v;\ \overline{r}=r+\varepsilon\omega;\ \partial\overline{w}/\partial\varepsilon=\eta;\ \partial\overline{p}/\partial\varepsilon=u;\ \partial\overline{q}/\partial\varepsilon=v;\ \partial\overline{r}/\partial\varepsilon=\omega.$$

Ove vrednosti za $\varepsilon = 0$ postaju $\overline{w} = w$, $\overline{p} = p,\ldots$, pa se, slično obrascu (6.18), dobija uslov ekstremuma

$$\iiint_{(V)}\left(\frac{\partial f}{\partial w}\eta+\frac{\partial f}{\partial p}u+\frac{\partial f}{\partial q}v+\frac{\partial f}{\partial r}\omega\right)dxdydz=0;\ u=\frac{\partial \eta}{\partial x};\ v=\frac{\partial \eta}{\partial y};\ \omega=\frac{\partial \eta}{\partial z}. \tag{6.30}$$

Primenjujući Green-ovu formulu za prostor

$$\iiint_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iint_{(S)}(P\alpha+Q\beta+R\gamma)dS$$
$$\mathbf{n}\ (\alpha,\beta,\gamma), \tag{6.31}$$

na funkcije $P = \eta F$; $Q = \eta G$; $R = \eta H$, dobija se

$$\iiint_{(V)}\left[\left(F\frac{\partial \eta}{\partial x}+G\frac{\partial \eta}{\partial y}+H\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)+\eta\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}\right)\right]dxdydz=$$
$$=\iint_{(S)}\left[F\alpha+G\beta+H\gamma\right]\eta dS. \tag{6.32}$$

Pošto je na konturnoj površi η 0 to je desna strana (6.32) jednaka nuli, i upore-djivanjem (6.30) i (6.32) sledi da su $F = \partial f/\partial p$; $G = \partial f/\partial q$ i $H = \partial f/\partial r$ te uslov ekstremuma (6.30) postaje

$$\iiint_{(V)}\eta\left[\frac{\partial f}{\partial w}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\right]dxdydz=0, \tag{6.33}$$

te se ekstremni uslov svodi na Euler-Lagrange-ovu diferencijalnu jednačinu*):

$$\frac{\partial f}{\partial w}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)=0;\quad p=\frac{\partial w}{\partial x};\ q=\frac{\partial w}{\partial y};\ r=\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{6.34}$$

Generalizacijom Green-ovog obrasca na prostor od n-dimenzija, prednja se jednačina može primeniti i na mnogostruke integrale.

Naprimer, ako je

$$f = \tfrac{1}{2}(p^2+q^2+r^2);\ p=\partial w/\partial x;\ q=\partial w/\partial y;\ r=\partial w/\partial z,$$

onda iz (6.34) sledi da je ekstremala

$$\frac{\partial}{\partial x}(p)+\frac{\partial}{\partial y}(q)+\frac{\partial}{\partial z}(r)=0;\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w=\Delta w=0,$$

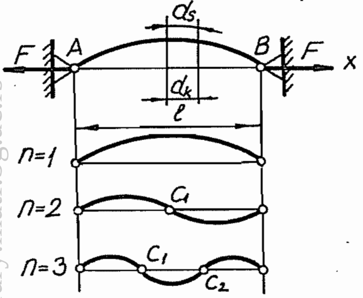
prostorna harmonijska funkcija.

---

*) Weinstock R., Calculus of Variations, McGraw-Hill Book Comp. Inc., New York, 1952. p. 133.

6.4. Oscilacije elastičnih tela. - Hamilton-ov princip se mnogo primenjuje u teoriji malih oscilacija elastičnih tela (žice, greda, membrana, ploča).

6.4.1. Transverzalne oscilacije žice. - Savršeno savitljiva elastična žica (struna), dužine ℓ, učvršćena je na krajevima A i B i zategnuta aksijalnim silama **F**, odnosno naponima $\sigma = F/A$, (slika 6.3.). U ravnotežnom položaju žica se poklapa sa Ax-osom. Ako se žica izvede iz ravnotežnog položaja tako da su male amplitude pojedinih tačaka i pusti, nastupiće transverzalne oscilacije (treperenje) usled promene pravaca aksijalnih sila (odnosno napona). Pomeranje



Slika 6.3.

$w = w(x,t) = y(x,t)$ sa graničnim uslovom $y(0,t) = 0$ i $y(\ell,t) = 0$, gde je $0 \leqslant x \leqslant \ell$, opisuju oblik žice pri oscilovanju.

Brzina svake čestice (tačke) žice mase $\rho A dx$ je $\partial y/\partial t$, pa je elementarna kinetička energija $\rho A(\partial y/\partial t)^2 dz/2$. Rad utrošen pri treperenju upotrebljava se na povećanje dužine žice, pa se za male oscilacije, koje se obično proučavaju, dobijaju energije:

$$E_K=\frac{1}{2}\rho A\int_0^\ell\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx \quad E_P=\int_0^\ell F(ds-dx)=F\int_0^\ell\left(\sqrt{1+y'^2}\,dx-dx\right)\approx\frac{1}{2}F\int_0^\ell\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{6.35a}$$

Stoga dejstvo u Hamilton-ovom smislu

$$W=J=\int_{t_1}^{t_2}(E_K-E_P)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^\ell\frac{1}{2}A\left[\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-\sigma\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]dx\,dt, \tag{6.35b}$$

pa podintegralna funkcija $f(x,t)$ mora da zadovolji Euler-ovu jednačinu (6.22) za promenljive x i t umesto x i y, i za $p = \partial y/\partial x$; $q = \partial y/\partial t$, te će biti:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma\frac{\partial y}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\frac{\partial y}{\partial t}\right]=0.$$

Tako se dobija diferencijalna jednačina transverzalnih oscilacija žice

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \qquad c^2 = \frac{\sigma}{\rho} = \frac{\sigma g}{\gamma m} \qquad \left[\left(\frac{cm}{sec}\right)^2\right], \tag{6.36}$$

gde je c brzina prostiranja talasa, a ρ gustina (specifična masa).

Opšte rešenje prvi je izveo d'Alembert. Smenama

$$u = x - ct, \qquad v = x + ct \tag{6.37}$$

pošto su izvodi

$$\partial u/\partial x = 1; \qquad \partial v/\partial x = 1; \qquad \partial u/\partial t = -c; \qquad \partial v/\partial t = c;$$

$$\partial y/\partial x = (\partial y/\partial u)(\partial u/\partial x) + (\partial y/\partial v)(\partial v/\partial x) = (\partial y/\partial u) + (\partial y/\partial v);$$

$$\partial^2 y/\partial x^2 = (\partial^2 y/\partial u^2) + 2(\partial^2 y/\partial u\partial v) + (\partial^2 y/\partial v^2);$$

$$(\partial y/\partial t) = (\partial y/\partial u)(\partial u/\partial t) + (\partial y/\partial v)(\partial v/\partial t) = -c[(\partial y/\partial u) - (\partial y/\partial v)];$$

$$\partial^2 y/\partial t^2 = c^2[(\partial^2 y/\partial u^2) - 2(\partial^2 y/\partial u\partial v) + (\partial^2 y/\partial v^2)];$$

dobija se jednačina

$$4c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} = 0; \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) = 0, \tag{6.38}$$

pa je opšti integral jednačine (6.30) :

$$y = \varphi(u) + \psi(v) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct). \tag{6.39}$$

Proizvoljne funkcije φ i ψ moraju da zadovolje granične i početne uslove.

a) Granični uslovi. - Za $x = 0$ i $x = l$ su $y(0,t) = 0$ i $y(l,t) = 0$ za svako t, pa će biti

$$\varphi(-ct) + \psi(ct) = 0; \quad \varphi(l - ct) + \psi(l + ct) = 0. \tag{6.40}$$

Funkcija $\varphi(x + 2l - ct) = \varphi(x - ct)$ je periodička, perioda $2l$.

b) Početni uslovi. - U trenutku $t=0$ žici je dat oblik $y(x,0) = F(x)$ i svakoj tački početna brzina $[\partial y\ \partial t]\ x,0) = \Phi(x)$, pa se iz (6.33) dobijaju relacije

$$\varphi(x) + \psi(x) = F(x); \qquad -\frac{\partial\varphi(x)}{\partial t} + \frac{\partial\psi(x)}{\partial t} = \frac{1}{c}\Phi(x).$$

Uvodeći novu promenljivu z integraljenjem druge jednačine, dobija se sistem jednačina

$$\varphi(x) + \psi(x) = F(x); \quad \varphi(x) - \psi(x) = -\frac{1}{c}\int_0^x \phi(z)\,dz, \qquad (6.41)$$

iz kojih se odredjuju nepoznate funkcije $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ a time i rešenje

$$y(x,y) = \frac{1}{2}\left[F(x-ct)+F(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\phi(z)\,dz. \qquad (6.42)$$

Partikularno rešenje može se dobiti metodom partikularnih integrala Daniel-a Bernoulli-ja. Rešenje jednačine (6.30) traži se u obliku proizvoda dveju funkcija od samo po jedne promenljive

$$y(x,t) = X(x).\ T(t), \qquad (6.43)$$

ali tako da su zadovoljeni granični uslovi $X(0)\ T(t) = X(\ell)\ T(t) = 0$. Unoseći rešenje (6.43) u jednačinu (6.36) ona se razdvaja na dve jednačine

$$c^2X''T - XT'' = 0; \quad X'' + \lambda^2 X = 0; \ T'' + \omega^2 T = 0; \quad \omega = c\lambda, \qquad (6.44)$$

sa rešenjima

$$X = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x; \quad T = C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t, \qquad (6.45)$$

gde je λ svojstvena vrednost a ω kružna frekvencija. Funkcija X(x) je normalna funkcija i ona treba da zadovolji granične uslove, pa iz uslova da je za $x = 0$ i $X(0,t) = 0$ i za $x = \ell$ je $X(\ell,t) = 0$, slede relacije

$$C_1 = 0; \ C_2 \sin \lambda \ell = 0; \ C_2 \neq 0; \ \sin \lambda \ell = 0; \lambda n = n\pi/\ell; \omega_n = cn\pi/\ell, \qquad (6.46)$$

gde je n proizvoljan pozitivan broj. Harmonici su pokazani na slici 6.3. Za najnižu vrednost $\lambda_1 = \pi/\ell$ dobija se osnovni oblik, ostali su viši harmonici. Red harmonika poklapa se sa brojem čvorova ("stojnih tačaka"). Pošto je jednačina homogena, to je rešenje

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos \frac{n\pi}{\ell} ct + B_n \sin \frac{n\pi}{\ell} ct) \sin \frac{n\pi}{\ell} x. \qquad (6.47)$$

Iz početnih uslova da je za $t = 0$ dato $y = F(x)$ i $\partial y/\partial t = \phi(x)$ dobija se iz (6.46):

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x; \quad \phi(x) = \frac{\pi c}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty} n B_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

Ako se ove funkcije pomnože sa $\sin(n\pi x/l)$ i integrale u granicama $(0, l)$ dobijaju se konstante:

$$\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} z\,dz = \frac{1}{2} l;$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx; \quad B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx. \qquad (6.48)$$

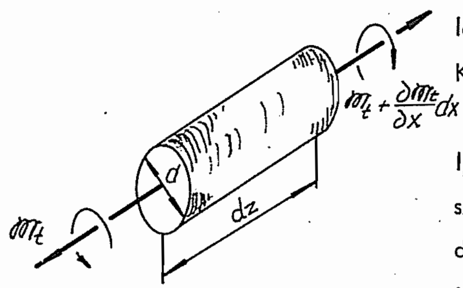
One su koeficijenti Fourier-ovih redova u koje se razvijaju funkcije $F(x)$ i $\phi(x)$ za $t = 0$ u razmaku $0 \leqslant x \leqslant l$.

Normalne funkcije su ortogonalne u razmaku raspona žice, te je uslov ortogonalnosti

$$\int_0^l X_r(x)\, X_s(x)\,dx = 0 \quad \text{za} \quad r \neq s. \qquad (6.49)$$

Naprimer, lako se dokazuje da su funkcije $\sin(\pi x/l)$ i $\sin(2\pi x/l)$ ortogonalne u razmaku $[0, l]$.

6.4.2. Torzijske oscilacije kružnog vratila. - U mašinskoj tehnici važan je slučaj torzijskih oscilacija kružnog vratila, prečnika ϕd (slika 6.4), koje je izloženo dejstvu torzijskog momenta $\mathfrak{M}_t$. Kinetička energija elementa dz biće $\rho I_0 dz(\partial\theta/\partial t)^2/2$, gde su: ρ gustina, I_0 polarni moment inercije poprečnog preseka, θ torzijski ugao, $\theta = \theta(z,t)$, a dz dužina. Rad utrošen na izvodjenje vratila iz ravnotežnog položaja za ugao $\partial\theta$ je deformacioni rad pri torziji, pa je



Slika 6.4.

$\mathfrak{M}_t(\partial\theta/\partial z)/2$. Po Hooke-ovom zakonu je

$$\theta = \mathfrak{M}_t l/\mathbf{G}I_0; \quad \partial\theta/\partial z = \mathfrak{M}_t/\mathbf{G}I_0 \quad \text{pa je} \quad \partial A_{dt} = \mathbf{G}I_0(\partial\theta/\partial z)^2/2.$$

Stoga je dejstvo u Hamilton-ovom smislu

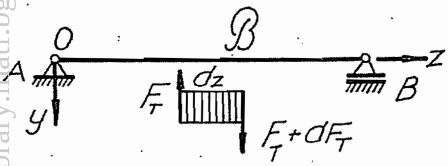
$$W = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \frac{1}{2}\left[\rho I_0(\partial\theta/\partial t)^2 - \mathbf{G}I_0(\partial\theta/\partial z)^2\right]dz\,dt, \qquad (6.50)$$

pa je, prema (6.22), parcijalna jednačina torzijskh oscilacija

$$\partial^2\theta/\partial t^2 = c^2(\partial^2\theta/\partial z^2); \quad c^2 = \mathbf{G}/\rho, \qquad (6.51)$$

gde je c brzina prostiranja talasa. Ova je jednačina analogna jednačini treperenja žice (6.30) samo je generalisana koordinata ugao torzije i druga je brzina oscilovanja. Stoga sve što je izneto o žici važi i u slučaju ovih oscilacija. G je modul klizanja, $G = E/2(1+\mu) = E/2{,}6$ (za čelik).

6.4.3. Transverzalne oscilacije grede. - Predpostavlja se da je greda homogena, elastična, malog poprečnog preseka u odnosu na njegovu dužinu, i da se vrše male poprečne (transverzalne) oscilacije u vertikalnoj glavnoj ravni savijanja Oyz (slika 6.5). Zanemarujući uticaj smicanja i inercije obrtanja poprečnog preseka, kinetička energija elementa grede dz biće $\rho A(\partial y/\partial t)^2\, dz/2$.



Slika 6.5.

Potencijalna energija je deformacioni rad pri savijanju $\delta A_{df} = M_f^2\, dz/2\mathcal{B} = \mathcal{B}\,(\partial^2 y/\partial z^2)^2\, dz/2$, gde je $\mathcal{B} = EI_x$ savojna krutost grede. Stoga je dejstvo u Hamilton-ovom smislu

$$W=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{\ell}\frac{1}{2}\left[\rho A\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-\mathcal{B}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right)^2\right]dz\,dt,$$

pa mora biti zadovoljena jednačina (6.26) gde su sada $w = y$; $q = \partial y/\partial t$, $x = z$; $r = \partial^2 y/\partial z^2$, te je parcijalna jednačina ovih oscilacija

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)=0; \tag{6.52}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+c^2\frac{\partial^4 y}{\partial z^4}=0; \qquad c=\sqrt{\frac{\mathcal{B}}{\rho A}}=\sqrt{\frac{\mathcal{B}\ell g}{G}}, \qquad \left[\frac{cm^2}{sec}\right],$$

gde je c sektorska brzina prostiranja talasa.

Partikularno rešenje traži se u obliku proizvoda funkcija

$$y(z,t) = Z(z)\,.\,T(t) \tag{6.53}$$

gde je Z(z) normalna funkcija koja zadovoljava granične uslove. Ova se jednačina četvrtog reda razdvaja na dve obične diferencijalne jednačine

$$Z^{IV}-\kappa^4 Z=0; \quad T''+\omega^2 T=0; \quad \lambda=\kappa^4; \quad \omega=\kappa^2 c, \tag{6.54}$$

gde je $\lambda = k^4$ svojstvena vrednost, a ω kružna frekvencija. Rešenja ovih jednačina su

$$Z = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz + C_3 \,\mathrm{Ch}\, kz + C_4 \,\mathrm{Sh}\, kz; \qquad (6.55)$$

$$T = C_5 \cos \omega t + C_6 \sin \omega t .$$

Prema tome je opšte rešenje

$$y(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n T_n = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)\, Z_n(z). \qquad (6.56)$$

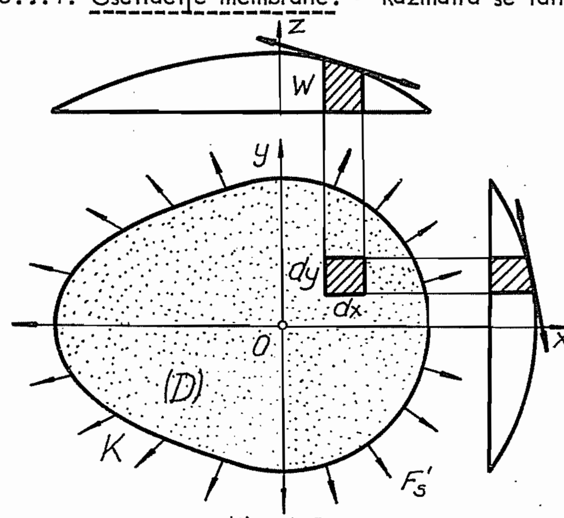
Oblici normalnih funkcija Z_n zavise od graničnih uslova, tj. uslova oslanjanja grede na krajevima. Četiri granična uslova daju četiri jednačine sa četiri konstante C_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Rešenja ovih jednačina, sem trivijalnog $C_i \equiv 0$, postoji ako je determinanta sistema jednaka nuli, pa ona predstavlja frekventnu jednačinu u transcendentnom obliku. Pomoću nje odredjuju se sopstvene vrednosti k_n a time i frekvencije ω_n. Zbog toga postoji beskrajno mnogo svojstvenih (normalnih) funkcija. One su ortogonalne u rasponu grede.

Za date početne uslove: za $t = 0$ je $y(z,0) = F(z)$ i $\partial y/\partial t = \Phi(z)$, množenjem jednačina (6.56) za $t = 0$ normalnim funkcijama Z_n i integraljenjem u rasponu grede, koristeći osobinu ortogonalnosti, dobijaju se konstante *)

$$A_n = \left[\int_0^{\ell} F(z) Z_n(z)\,dz\right] \Big/ \left[\int_0^{\ell} Z_n^2(z)\,dz\right]; \qquad (6.57)$$

$$B_n = \left[\int_0^{\ell} \Phi(z) Z_n(z)\,dz\right] \Big/ \left[\omega_n \int_0^{\ell} Z_n^2(z)\,dz\right].$$

6.4.4. Oscilacije membrane. - Razmatra se tanka homogena membrana, gustine ρ'' razapeta po konturi K, (slika 6.6), koja omedjava ravan domen D koji se poklapa sa membranom u njenom ravnotežnom položaju Oxy. Pretpostavlja se da su pomeranja (ugibi) tačaka membrane $w = w(x,y,t)$ vrlo mali i da tangencijalna ravan u tački (x,y,w) deformisane membrane gradi vrlo mali ugao sa Oxy-ravni. Ugib $[w(x,y,t)]_K = 0$ na konturi je jednak nuli za sva-



Slika 6.5.

*) Detaljnije videti: Teorija oscilacija, čl. 18.

ko t, tj. u svakom trenutku oscilovanja. Uočimo površinski element membrane $dA=dxdy$ onda je kinetička energija membrane

$$E_K=\frac{1}{2}\iint_{(D)}\rho''\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dxdy, \tag{6.58}$$

gde je ρ'' površinska gustina, γ''_m/g, jedinice $\left[kpsec^2/cm^3\right]$.

Stranica dx elementa dA izdužuje se, a takodje i dy, i biće, kao kod žice (6.35.a), priraštaj površinskog elementa

$$\Delta dA=(dA)'-dA=dxdy\left\{\left[\sqrt{1+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}\right]\left[\sqrt{1+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}\right]-1\right\}\approx\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]dxdy.$$

Potencijalna energija je deformacioni rad utrošen na deformisanje membrane, pa će biti

$$E_p=\frac{1}{2}F_s'\iint_{(D)}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dxdy, \tag{6.59}$$

gde je F_s' jedinična zatezna sila po luku konture (K) membrane, jedinice $\left[kp/cm\right]$. Prema tome ovde se može primeniti jednačina (6.34) zamenjujući promenljivu z sa t, pošto je domen (V) prizmatični, proizveden kretanjem domena (D) u "t-pravcu", pa je w = 0 na konturnoj površi. Stoga će biti:

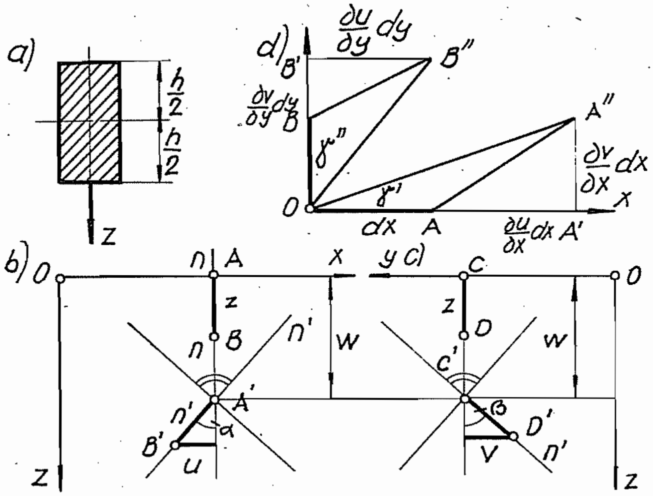
$$f=\frac{1}{2}\left\{\rho''\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2-F_s'\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\right\};\quad p=\frac{\partial w}{\partial y};\quad q=\frac{\partial w}{\partial y};\quad r=\frac{\partial w}{\partial z},$$

pa je diferencijalna jednačina oscilovanja membrane

$$\rho''\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=F_s'\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right];\quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=c^2\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]=c^2\Delta w;\quad c^2=\frac{F_s'}{\rho''} \tag{6.60}$$

gde je c brzina prostiranja talasa $\left[cm/sec\right]$, a uveden je i laplasijan za ravan.

6.4.5. Transverzalne oscilacije tanke ploče. – Pod tankom pločom porazumeva se elastično telo prizmatičnog oblika male debljine (h) u odnosu na druge dve poprečne dimenzije ploče (slika 6.7.a). Srednja ravan ploče uzima se za koordinatnu Oxy-ravan, a Oz-osa je vertikalna. Pri oscilovanju srednja ravan prelazi u elastičnu površ, a ugibi w = w(x,y,t) su mali. Sem toga, slično kao



Slika 6.7.

kod greda uvodi se "hipoteza pravolinijskog elementa": normala na srednju ravan ostaje upravna i na elastičnoj površi. Neka tačka A srednje ravni elementa preseka paralelnog Oxz - ravni (slika 6.7.b.) preći će u položaj A'. Druga tačka B na istoj normali (n-n) na rastojanju z od prve, spustiće se ali i zaokrenuti, preći u položaj B' i pomeriti u Ox-pravcu. Analogno tome tačka D (slika 6.7.c) na rastojanju z od tačke C srednje ravni elementa preseka paralelnog Oyz-ravni preći će u položaj D' i pomeriti se u Oy-pravcu. Ta su pomeranja:

$$u=-z\,tg\alpha\approx -z\alpha=-z\,(\partial w/\partial x);\quad v=-z\,tg\beta\approx -z\beta=-z\,(\partial w/\partial y) \tag{6.61}$$

pošto su obrtanja vrlo mala.

Štap OA, dužine dx, na Ox-osi (slika 6.7.d) izdužiće se, zaokrenuti i preći u položaj OA". Analogno tome, štap OB, dužine dy, na Oy-osi preći će u položaj OB". Dilatacije i klizanja iznose

$$\varepsilon_x=\frac{\overline{OA'}-\overline{OA}}{\overline{OA}}=\frac{dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx-dx}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x};$$

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y};\quad tg\gamma'\approx\gamma'=\frac{\overline{A'A''}}{\overline{OA}}=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{dx(1+\varepsilon_x)}\approx\frac{\partial v}{\partial x};\qquad \gamma''\approx\frac{\partial u}{\partial y},$$

i s obzirom na (6.61) biće:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}. \tag{6.62}$$

Prema Hooke-ovom zakonu dilatacije i naponi su

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y);\quad \varepsilon_y=\frac{1}{E}(-\mu\sigma_x+\sigma_y);\quad \sigma_x=E(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)/\Delta;\quad \sigma_y=E(\mu\varepsilon_x+\varepsilon_y)/\Delta;$$

$$\Delta=1-\mu^2;\qquad \tau_{xy}=G\gamma_{xy};\qquad G=E/2(1+\mu), \tag{6.63}$$

pa je deformacioni rad ploče

$$A_d = \frac{1}{2}\iiint_{(V)}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy})\,dV =$$

$$= \frac{1}{2}\iiint_{(V)}\left[\frac{E}{\Delta}(\varepsilon_x^2 + 2\mu\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2) + G\gamma_{xy}^2\right]dV, \qquad (6.64)$$

gde je μ Poisson-ov koeficijent. Ako se u ovaj izraz unesu izrazi (6.62) i integrali po z u granicama $-h/2$ do $h/2$, jer je $dV = dxdydz$, dobija se da je deformacioni rad koji se utroši da srednju ravan ploče prevede u elastičnu površ, tj. potencijalna energija E_p:

$$A_d = \frac{1}{2}\mathcal{D}\iint_{(D)}\left\{\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]^2 - 2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}dxdy, \quad (6.65)$$

gde je $\mathcal{D} = Eh^3/12(1-\mu^2)$ savojna krutost ploče ("flexural rigidity of the plate").

Kinetička energija ploče iznosi

$$E_K = \frac{1}{2}\iiint_{(V)}\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dxdydz = \frac{1}{2}\rho h\iint_{(D)}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dxdy, \qquad (6.66)$$

pa je dejstvo u Hamilton-ovom smislu (6.7):

$$W = \int_{t_1}^{t_2}\iint_{(D)}\frac{1}{2}\left\langle \rho h\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 - \mathcal{D}\left\{\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]^2 - 2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}\right\rangle dxdydt = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\iint f\,dxdydt. \qquad (6.67)$$

Uzimajući komparativnu funkciju u obliku

$$\overline{w}(x,y,t) = w(x,y,t) + \varepsilon\eta(x,y,t) \qquad (6.68)$$

gde je ε parametar, pod uslovom da je $\eta(x,y,t_1) = \eta(x,y,t_2) = 0$ i na konturi $[\eta(x,y,t)]_K = 0$; $[\partial\eta/\partial x]_K = 0$; $[\partial\eta/\partial y]_K = 0$ onda se uslov ekstremuma

$$\frac{dW}{d\varepsilon}(\varepsilon=0) = \int_{t_1}^{t_2}\iint_{(D)}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{w}}\dot{\eta}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t^*}\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right)\right]dxdydt = 0, \qquad (6.69)$$

gde su uvedene oznake kao u (6.24) i $t^* = \partial^2 w/\partial y^2$.

Parcijalnom integracijom ovog izraza u zagradi, s obzirom da je $\eta = 0$ za t_1 i t_2 dobija se

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_{(D)} \frac{\partial f}{\partial \dot{w}} \dot{\eta}\, dx dy dt = -\int_{t_1}^{t_2}\iint_{(D)} \eta \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{w}}\right) dx dy dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[\iint_{(D)} -\varrho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \eta\, dx dy\right] dt.$$

Druga tri člana mogu se kao u čl. 6.3.a transformisati, pa je uslov ekstremuma kao drugi deo od (6.25)

$$\iint_{(D)} \eta\left[-\varrho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \mathcal{D} \Delta\Delta w\right] dx dy = 0,$$

pa je diferencijalna jednačina oscilovanja ploče*)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha^4 \Delta\Delta w = 0; \qquad \alpha^4 = \frac{\mathcal{D}}{\varrho h} = \frac{E h^2}{12\varrho(1-\mu^2)} . \tag{6.70}$$

6.5. Lagrange-Maupertius-ov princip najmanjeg dejstva. - 1744. godine je francuski naučni Moreau de Maupertius objavio princip koji pokazuje da integral $\int mvds$ uzet po direktnom putu materijalne tačke ima minimum u sravnjenju sa vrednošću tog integrala po zaobilaznim putevima koji prolaze zajedno sa stvarnim putem kroz dve fiksne tačke. Ovaj princip nazvao je princip najmanjeg dejstva ("le principe de la moindre action") a integral "dejstvom".

Sve je ovo izrazio u nejasnoj formi, ali je ipak Euler 1747. godine prihvatio princip, a Lagrange ga 1760. godine razradio i matematički formulisao tako da nosi naziv Lagrange-Maupertius-ov princip najmanjeg dejstva.

Za holonomne konzervativne sisteme važi integral energije, pa je totalna mehanička energija konstantna, te se može napisati

$$\mathbf{E} = E_K + E_p = E_K - U = h = const; \qquad \mathcal{L} = E_K - E_p = E_K + U = 2E_K - h. \tag{6.71}$$

Stoga je dejstvo u Hamilton-ovom smislu

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} (2E_K - h) dt = \int_{t_1}^{t_2} 2E_K dt - h(t_2 - t_1) = \mathbf{S} - h(t_2 - t_1) \tag{6.72}$$

*) Detaljnije videti, Teorija oscilacija, strana 421.

gde je $\mathcal{S}$ dejstvo u Lagrange-ovom smislu ili karakteristična funkcija.

Ako se pretpostavi : 1. da je odstupanje zaobilaznog puta od stvarnog infinitezimalno kao i kod Hamilton-ovog principa, 2. da je kretanje po stvarnom i zaobilaznim putevima u razmaku $t_2 - t_1$ izohrono, ali da nije sinhrono te vreme varira (asinhrona varijacija) i 3. da se kretanje po svim putevima vrši pri stalnoj mehaničkoj energiji $\mathbf{E} = h = const$, onda će na zaobilaznom putu biti dejstva

$$\overline{W}=\int_{t_1}^{t_2} 2\overline{E}_K\,dt-h(t_2-t_1)=\overline{\mathcal{S}}-h(t_2-t_1),$$

pa je prva varijacija

$$\delta W=\overline{W}-W=\overline{\mathcal{S}}-\mathcal{S}=\delta\mathcal{S}=0, \qquad (6.73)$$

koja izražava ovaj princip: "Svaki holonomni konzervativni sistem kreće se tako da na njegovom stvarnom putu dejstvo u Lagrange-ovom smislu ima stacionarnu vrednost u poredjenju sa vrednostima tog dejstva na zaobilaznim putevima, ako se kretanje po svim putevima vrši istom totalnom mehaničkom energijom".

Ako je v_ν brzina tačke onda je $v_\nu\,dt = ds_\nu$ element luka trajektorije, pa se dejstvo može napisati u Maupertius-ovom obliku :

$$\mathcal{S}=\int_{t_1}^{t_2} 2E_K\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\nu}^{N} m_\nu v_\nu^2\,dt=\int_A^B\sum_{\nu} m_\nu v_\nu\,ds_\nu; \qquad \nu=1,2,\ldots,N. \quad (6.74)$$

Dejstvo se može prikazati i u Jacobi-jevom obliku koji omogućava da se pomoću integrala energije eliminiše vreme, jer je

$$2E_K=\sum_{\nu}^{N} m_\nu v_\nu^2=\sum m_\nu\left(\frac{ds_\nu}{dt}\right)^2=2(U+h); \qquad dt=\sqrt{\frac{\sum m_\nu ds_\nu^2}{2(U+h)}},$$

pa će biti

$$\mathcal{S}=\int_{t_1}^{t_2} 2E_K\,dt=\int_A^B\sqrt{2(U+h)}\,\sqrt{\sum_{\nu} m_\nu ds_\nu^2}, \qquad \nu=1,2,\ldots,N. \quad (6.75)$$

Radi ilustracije razlike Hamilton-ovog principa i principa najmanjeg dejstva prikažimo inercijsko kretanje tačke po glatkoj površi. Tada je $E_k = mv^2/2$, $U = C$, pa prema Hamilton-ovom principu dejstvo W ima stacionarnu vrednost na direktnom putu od položaja $A(t_o)$ u položaju $B(t)$, te je

$$W=\int_0^t\left(\frac{1}{2}mv^2+C\right)dt=\frac{1}{2}mv^2t+Ct; \quad \delta W=\delta(v^2)=0; \quad v=minimum \tag{6.76}$$

pa je brzina minimalna. Dakle, od svih kinematički mogućih kretanja tačke iz položaja A u položaj B različitim brzinama ali za isto vreme, stvarno je kretanje ono za koje je brzinama minimalna. Kako je $s = vt$ to će biti i najkraći put, pa se stvarno kretanja vrši po geodezijskoj liniji. Medjutim, prema principu najmanjeg dejstva biće

$$S=\int_0^t 2E_k dt=\int_0^t mv^2dt=mv^2t; \quad \delta S=mv^2\delta t=0; \quad \delta t=0. \tag{6.77}$$

Dakle, od svih kinematički mogućih kretanja tačke iz A u B istom brzinom ali u različitim vremenima, stvarno je ono za koje je potrebno najkraće vreme (t minimum), pa kako je $vt = s$, to je s takodje minimalno, što znači da je trajektorija geodezijska linija te površi.

U Optici je poznat Fermat-ov princip: "Od svih krivih koje spajaju dve tačke A i B prostora svetlost se prostire po onoj za koju ejkonal ima stacionarnu vrednost u poredjenju sa vrednostima na drugim krivima". Pod ejkonalom se podrazumeva dejstvo na optičkom putu

$$S^*=\int_A^B \mu\, ds; \qquad \delta S^*=0$$

gde je $\mu = c/v$ koeficijent prelamanja (odnos brzine svetlosti c u vakuumu prema brzini v u datoj sredini).

Za materijalnu tačku, prema (6.75), dejstvo u Lagrange-ovom smislu je

$$S=\int_A^B\sqrt{2m(U+h)}\,ds; \qquad \delta S=0, \tag{6.79}$$

pa postoji analogija izmedju optike i mehanike: trajektorija svetlosnog zraka poklapa se sa trajektorijom pokretne tačke funkcije sile $U=(\mu^2/2m)-h$.

6.6. Kanonske (kontaktne) transformacije. – Transformacija kanonskih promenljivih q_i i p_i u nove kanonske promenljive $\bar{q}_i = \bar{q}_i(t, q_k, p_k)$; $\bar{p}_i = \bar{p}_i(t, q_k, p_k)$, i, k = 1,2,...,n, naziva se kanonska, ako prevodi koji bilo sistem kanonskih Hamilton-ovih jednačina (5.23) ponovo u sistem kanonskih Hamilton-ovih jednačina ali sa novom, obično jednostavnijom, Hamilton-ovom funkcijom

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i};\ \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \longrightarrow \frac{d\bar{q}_i}{dt}=\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \bar{p}_i};\ \frac{d\bar{p}_i}{dt}=-\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \bar{q}_i}. \quad (6.80)$$

U čl. 6.2., obr. 6.12. Hamilton-ove kanonske jednačine izvedene su pomoću Hamilton-ovog principa, pa da bi i novo izvedene jednačine bile kanonske mora biti zadovoljen taj princip, to, prema (6.7) i 1 (6.10) mora biti

$$\bar{W}=\int_{t_0}^{t_1}\bar{\mathcal{L}}dt=\int_{t_0}^{t_1}\Big[-\bar{\mathcal{H}}+\sum_i \bar{p}_i\,\dot{\bar{q}}_i\Big]dt;\qquad \delta\bar{W}=0. \quad (6.81)$$

Da bi taj uslov bio zadovoljen moraju se kinetički potencijali razlikovati za izvod po vremenu neke funkcije $V(q_i, \bar{q}_i, t)$ jer je

$$\bar{\mathcal{L}}=-\bar{\mathcal{H}}+\sum_i \bar{p}_i\dot{\bar{q}}_i=\mathcal{L}+\frac{dV}{dt};\ \delta\bar{W}=\delta W+\delta\int_{t_0}^{t_1}\frac{dV}{dt}=0;\ \ \delta\big[V(q_i,\bar{q}_i,t)\big]_{t_0}^{t_1}=0 \quad (6.82)$$

te na granicama integriranja funkcija V ima konstantnu vrednost čija je varijacija jednaka nuli. Kada se jednačina (6.82) pomnoži sa dt i sredi dobiće se

$$\sum_i \bar{p}_i d\bar{q}_i-\sum_i p_i dq_i+(\mathcal{H}-\bar{\mathcal{H}})dt=dV=\sum_i\frac{\partial V}{\partial \bar{q}_i}d\bar{q}_i+\sum_i\frac{\partial V}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial V}{\partial t}dt.$$

Uporedjivanjem koeficijenta uz iste diferencijale sa obe strane ove jednakosti dobijaju se relacije

$$1)\quad p_i=-\frac{\partial V}{\partial q_i};\quad \bar{p}_i=\frac{\partial V}{\partial \bar{q}_i};\quad \bar{\mathcal{H}}=\mathcal{H}-\frac{\partial V}{\partial t};\quad i=1,2,\dots,n, \quad (6.83a)$$

koje omogućavaju da se odrede nove kanonske koordinate. Kada se zna funkcija V onda se iz prve relacije (6.83) odredjuju koordinate $q_i = q_i(q_k, p_k, t)$ a zatim iz druge relacije generalisani impulsi $p_i = p_i(q_k, p_k, t)$. Iz izloženog vidi se da kanonska transformacija zavisi od izbora proizvoljne funkcije $V(q_i, \bar{q}_i, t)$ starih i novih koordinata. Ova se funkcija stoga naziva generatrijskom (izvodnom, - "la fonction génératrice"). Pored ove transformacije sa funkcijom V mogu se izvesti još tri forme transformacija sledećim kombinacijama:

$$2)\ P(\bar q, p, t) = V + \sum_i p_i \bar q_i; \qquad q_i = \frac{\partial P}{\partial p_i}; \qquad \bar p_i = \frac{\partial P}{\partial \bar q_i}; \qquad \bar{\mathcal{H}} = \mathcal{H} - \frac{\partial P}{\partial t}; \tag{6.83b}$$

$$3)\ Q(q, \bar p, t) = V - \sum_i \bar p_i \bar q_i; \qquad p_i = -\frac{\partial Q}{\partial q_i}; \qquad \bar q_i = -\frac{\partial Q}{\partial \bar p_i}; \qquad \bar{\mathcal{H}} = \mathcal{H} - \frac{\partial Q}{\partial t}; \tag{6.83c}$$

$$4)\ R(p, \bar p, t) = V - \sum_i \bar p_i \bar q_i + \sum_i p_i q_i; \qquad q_i = \frac{\partial R}{\partial p_i}; \qquad \bar q_i = -\frac{\partial R}{\partial \bar p_i}; \qquad \bar{\mathcal{H}} = \mathcal{H} - \frac{\partial R}{\partial t}. \tag{6.83d}$$

Naprimer, sledeće transformacije su kanonske:

$$1^\circ\ \bar q_i = a q_i;\ \bar p_i = b p_i;\ a \neq 0,\ b \neq 0;\quad \bar{\mathcal{H}} = ab\mathcal{H};\ \frac{1}{a}\dot{\bar q}_i = \frac{1}{ab}\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \bar p_i}\frac{\partial \bar p_i}{\partial p_i} = \frac{1}{a}\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \bar p_i};$$

$$2^\circ\ \bar q_i = a p_i;\ \bar p_i = b q_i,\ a \neq 0;\ b \neq 0;\quad \bar{\mathcal{H}} = -ab\mathcal{H};\ \frac{1}{b}\dot{\bar p}_i = \frac{-1}{ab}\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \bar q_i}\frac{\partial \bar q_i}{\partial p_i} = -\frac{1}{b}\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \bar q_i}.$$

6.7. Hamilton-Jacobi-jeva jednačina. - Linearna parcijalna jednačina $Pp + Qq = R$, gde su P, Q, R funkcije od x, y, z, a $p = \partial z/\partial x$; $q = \partial z/\partial y$, ima rešenje $f(x,y,z) = C$, gde je C proizvoljna konstanta. Iz ovog rešenja dobija se da su $P(\partial f/\partial x) + Q(\partial f/\partial y) + R(\partial f/\partial z) \equiv 0$. Kako su tri promenljive x, y i z a jedna jednačina, to je jedna promenljiva glavna (x), ostale dve su paramtetarske (y, z), te postoje i dva integrala jednačine

$$Pp + Qq = R;\ f_1(x,y,z) = C_1;\ f_2(x,y,z) = C_2. \tag{6.84}$$

Uzimajući izvode tih funkcija a takodje i identitete

$$\partial f_i/\partial x + (\partial f_i/\partial y)y' + (\partial f_i/\partial z)z' = 0;\ P(\partial f_i/\partial x) + Q(\partial f_i/\partial y) + R(\partial f_i/\partial z) \equiv 0;\ i = 1,2,$$

parcijalna jednačina (6.84) svodi se na sistem običnih diferencijalnih jednačina

$$Pp + Qq = R;\quad y' = \frac{Q}{P};\quad z' = \frac{R}{P};\quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{6.85}$$

sa opštim integralom

$$y=f_1(x, C_1, C_2); \quad z=f_2(x, C_1, C_2) \tag{6.86}$$

koji odredjuje prostornu krivu. Kada se koordinate tačke $N_o(x_o, y_o, z_o)$ unesu u opšti integral (6.86), možemo odrediti konstante $C_1 = F_1(x_o, y_o, z_o)$ i $C_2 = F_2(x_o, y_o, z_o)$, pa kroz tačku N_o prolazi samo jedna kriva koja se zove karakteristika parcijalne jednačine (6.85), te je sistem običnih diferencijalnih jednačina (6.85) sistem jednačina karakteristika.

Sistem Hamilton-ovih kanonskih jednačina za konzervativni sistem (5.23) može se napisati u obliku sistema običnih diferencijalnih jednačina karakteristika

$$\frac{dq_1}{P_1}=\frac{dq_2}{P_2}=\dots=\frac{dq_n}{P_n}=\frac{dp_1}{Q_1}=\frac{dp_2}{Q_2}=\dots=\frac{dp_n}{Q_n}=\frac{dt}{1}; \quad P_i=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}; \quad Q_i=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i},$$

parcijalne diferencijalne jednačine (6.87)

$$\frac{\partial W}{dt}+\mathcal{H}\left(q_1,\dots,q_n;\frac{\partial W}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial W}{\partial q_n};t\right)=0; \quad p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i}; \quad W=W, \tag{6.88}$$

gde je W nepoznata funkcija. Ova se jednačina naziva Hamilton-Jacobi-jeva jednačina, a W je glavna Hamilton-ova funkcija.

Potpuni integral jednačine (6.88) je oblika

$$W=W(t_o, t; q_1, q_2,\dots,q_n; C_1, C_2,\dots,C_n) + C_{n+1}, \tag{6.89}$$

gde su C_i proizvoljne konstante.

Da je glavna funkcija W stvarno dejstvo u Hamilton-ovom smislu dokazaćemo na ovaj način, jer se diferenciranjem, s obzirom na (6.88) i (6.7), dobija

$$\frac{dW}{dt}=\frac{\partial W}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial W}{\partial q_i}\dot{q}_i=-\mathcal{H}+\sum_i p_i\dot{q}_i=\mathcal{L}; \quad W=\int_{t_o}^{t}\mathcal{L}\,dt=W. \tag{6.90}$$

Teorija kanonskih transformacija (čl. 6.6) je u tesnoj vezi sa Hamilton-Jacobi-jevom jednačinom (6.88). Naime, treba naći takvu transformaciju da je Hamilton-ova funkcija $\bar{\mathcal{H}} = 0$, te tada iz (6.80) sledi da su odredjene konačne jednačine kretanja

$$\bar{q}_i = a_i = \text{const}; \ \bar{p}_i = b_i = \text{const}, \ i=1,2,\dots,n. \tag{6.91}$$

S obzirom na (6.82) mora generatrijska funkcija $V(q_i, \bar{q}_i, t)$ zadovoljiti relaciju

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{H}\left(t, q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = 0; \qquad p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}, \tag{6.92}$$

koja je Hamilton-Jacobi-jeva parcijalna jednačina (6.88). S obzirom na ovo Jacobi je postavio sledeću teoremu: "Ako je $V(t, q_i, a_i)$ neki potpuni integral Hamilton-Jacobi-jeve parcijalne jednačine (6.92), onda se konačne jednačine kretanja holonomnog sistema sa datom funkcijom $\mathcal{H}$ mogu napisati u obliku

$$\partial V/\partial q_i = p_i; \qquad \partial V/\partial a = b_i; \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.93}$$

gde su a_i i b_i proizvoljne konstante".

Dakle, kada se poznaje potpuni integral parcijalnih Hamilton-Jacobi-jevih jednačina, tada nije potrebno integraliti kanonske jednačine*).

7. ELEKTROMEHANIČKE ANALOGIJE

Poznato je da se u Fizici nailazi na čitav niz analogija izmedju različitih fizičkih pojava, koje se mogu opisivati istim matematičkim aparatom. Ovo je naročito važno u oblasti mehaničkih i električnih oscijacija**).

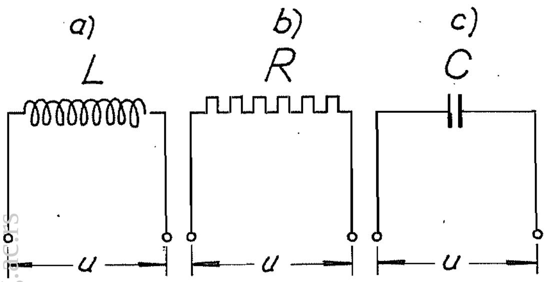
Kao što je poznato iz Elektrotehnike trenutne vrednosti električnih veličina obeležavaju se malim slovima: struja (i), napon (u), i elektromotorna sila (e). Vrednosti koje mere aparati (ampermetri i voltmetri) u efektivne vrednosti i beleže se velikim slovima (I, U, E). Izmedju napona (u- razlike potencijala na krajevima električnog elementa) i struje $i = dq/dt = \dot{q}$, gde je q električnost (opterećenje) za indukcioni kalem sačinioca samoindukcije L (slika 7.1.a), za otpornik (slika 7.1.b), otpora R, i kondenzator (slika 7.1.c), kapaciteta C,

*) Detaljnije videti Bilimović A., Racionalna mehanika II, čl. 7.3., strana 290. Beograd, 1951.

**) Detaljnije videti, Teorija oscilacija, čl. 5, strana 129.

postoje prema Ohm-ovom zakonu, odnosi:

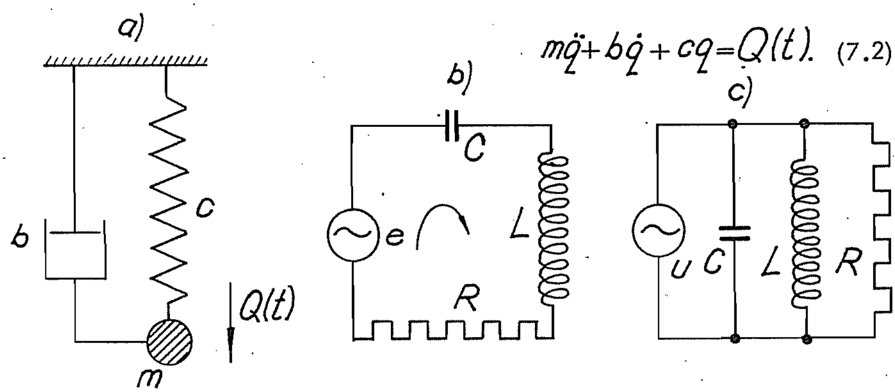
$$u=L\frac{di}{dt};\quad u=Ri;\quad u=\frac{1}{C}\int i\,dt. \tag{7.1}$$



Slika 7.1.

Za postavljanje diferencijalnih jednačina električnih kola uzimaju se kao promenljive struja i (odnosno električnost q) i napon. S obzirom na dva Kirchhoff-ova zakona: "o struji" ("da je zbir svih struja koje se stiču u čvoru jednak nuli u svakom trenutku" - "zakon ravnoteže") i "o naponu" ("da je zbir padova svih napona duž zatvorenog kola jednak nuli u svakom trenutku" - "zakon saglasnosti - kompatibiliteta") moguće je da jednom mehaničkom sistemu odgovaraju dva električna modela. Tako mehaničkom oscilatoru sa prigušnicom na koju dejstvuje poremećajna sila (slika 7.2.a) odgovara diferencijalna jednačina

$$m\ddot{q}+b\dot{q}+cq=Q(t). \tag{7.2}$$



Slika 7.2.

Njemu odgovaraju dva električna modela. U prvom kolu (slika 7.2.b) postoji spoljašnji izvor sile e(t), koja je jednaka zbiru napona u pojedinim elementima, pa je diferencijalna jednačina

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int i\,dt=e(t),$$

odnosno

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e(t). \tag{7.3}$$

U drugom kolu (slika 7.2.c) sabiraju se struje, pa će biti

$$C\frac{du}{dt} + \frac{1}{L}\int u\,dt + \frac{u}{R} = i(t)$$

te se diferenciranjem dobija

$$C\ddot{u} + \frac{1}{R}\dot{u} + \frac{1}{L}u = \frac{di}{dt}. \tag{7.4}$$

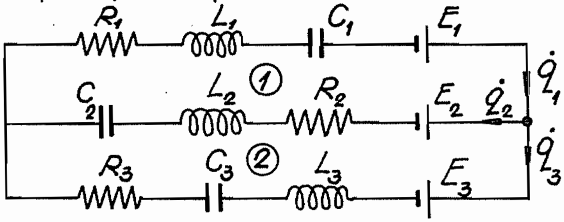
Uporedjenjem mehaničkih oscilacija sa oscilacijama ova dva električna modela, mogu se uočiti analogije izmedju fizičkih veličina kako je pokazano u donjoj tablici.

					$Q(t)$	E_K	Φ	$\Pi=E_P$
Meh.	q	m	b	c	Q	$\frac{1}{2}m\dot{q}^2$	$\frac{1}{2}b\dot{q}^2$	$\frac{1}{2}cq^2$
El.-1.	q	L	R	$\frac{1}{C}$	e	$\frac{1}{2}L\dot{q}^2$	$\frac{1}{2}R\dot{q}^2$	$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$
El.-2.	u	C	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{L}$	$\frac{di}{dt}$	$\frac{1}{2}C\dot{u}^2$	$\frac{1}{2}\frac{\dot{u}^2}{R}$	$\frac{1}{2}\frac{u^2}{L}$

(7.5)

Kod složenih kola treba prvo odrediti broj stepeni slobode. Svako zasebno (pojedinačno) kolo ("loop") predstavlja jedan stepen slobode. Obično se koriste oba Kirchhoff-ljeva pravila.

Naprimer, sistem prikazan na slici 7.3. ima dva stepena slobode, jer postoji



Slika 7.3.

veza, pošto je $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 + \dot{q}_3$, tj. $\dot{q}_3 = \dot{q}_1 - \dot{q}_2$. Dakle, biće energije i funkcija rasipanja, kada se zanemare indukcije L_{12}, L_{13} i L_{23} provodnika:

$$E_K = \frac{1}{2}\left[L_1\dot{q}_1^2 + L_2\dot{q}_2^2 + L_3(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2\right];$$

$$E_p = \frac{1}{2}\left[\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2} + \frac{(q_1-q_2)^2}{C_3}\right] - E_1 q_1 + E_2 q_2 + E_3 (q_1 - q_2);$$

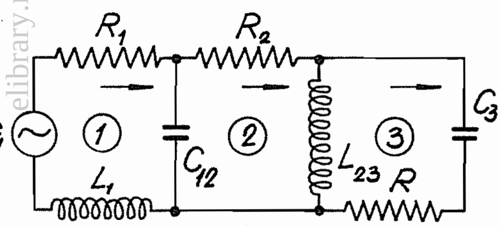
$$\Phi = \frac{1}{2}\left[R_1 \dot{q}_1^2 + R_2 \dot{q}_2^2 + R_3 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2\right],$$

pa su Lagrange-ove jednačine:

$$(L_1+L_3)\ddot{q}_1 + (R_1+R_3)\dot{q}_1 + \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_3}\right) q_1 - L_3\ddot{q}_2 - R_3\dot{q}_2 - \frac{1}{C_3} q_2 = E_1 - E_3;$$

$$(L_2+L_3)\ddot{q}_2 + (R_2+R_3)\dot{q}_2 + \left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right) q_2 - L_3\ddot{q}_1 - R_3\dot{q}_1 - \frac{1}{C_3} q_1 = -E_2 + E_3.$$

Sistem prikazan na slici 7.4. ima tri stepena slobode, pa će biti:



Slika 7.4.

$$E_K = \frac{1}{2}\left[L_1 \dot{q}_1^2 + L_{23} (\dot{q}_2 - \dot{q}_3)^2\right];$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\left[R_1 \dot{q}_1^2 + R_2 \dot{q}_2^2 + R_3 \dot{q}_3^2\right];$$

$$E_p = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{C_{12}} (q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{C_3} q_3^2\right],$$

te su Lagrange-ove jednačine druge vrste:

$$L_1\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + \frac{1}{C_{12}} q_1 - \frac{1}{C_{12}} q_2 = E_1 \sin\Omega t;$$

$$L_{23}\ddot{q}_2 - L_{23}\ddot{q}_3 + R_2\dot{q}_2 - \frac{1}{C_{12}} q_1 + \frac{1}{C_{12}} q_2 = 0;$$

$$-L_{23}\ddot{q}_2 + L_{23}\ddot{q}_3 + R_3\dot{q}_3 + \frac{1}{C_3} q_3 = 0.$$

Kod automobilskog apsorbera (slika 7.5) bilo bi:

$$E_K = \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2);$$

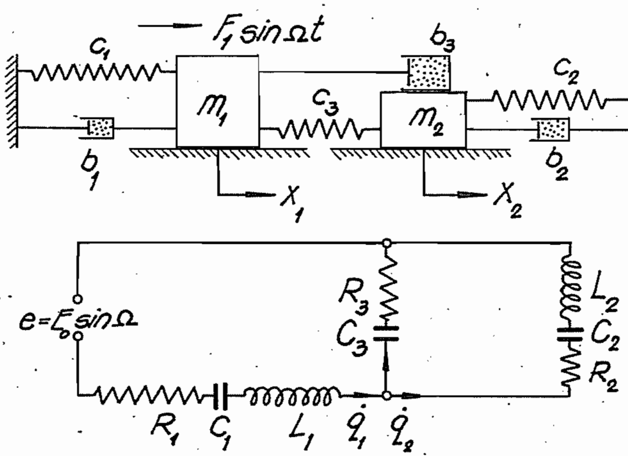
$$\Phi = \frac{1}{2}\left[b_1 \dot{x}_1^2 + b_2 \dot{x}_2^2 + b_3 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2\right];$$

$$E_p = \frac{1}{2}\left[c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 (x_1 - x_2)^2\right],$$

pa su jednačine

$$m_1\ddot{x}_1+(b_1+b_3)\dot{x}_1+(c_1+c_3)x_1-b_3\dot{x}_2-c_3x_2=F_1\sin\Omega t;$$

$$m_2\ddot{x}_2+(b_2+b_3)\ddot{x}_2+(c_2+c_3)x_3-b_3\dot{x}_1-c_3x_1=0.$$



Slika 7.5.

Ako je perturbaciona sila u (7.2) oblika $Q=Q_o e^{i\Omega t}=Q_o e^{pt}$, gde je $p=i\Omega$ a Ω je kružna frekvencija poremećajne sile, onda se umesto q može uvesti kompleksni broj $\mathfrak{z}=\mathcal{A}e^{pt}$, pa se ta jednačina svodi na oblik

$$(mp^2+bp+c)\mathfrak{z}=\mathcal{F};$$

$$\mathfrak{z}=\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{Z}(p)};$$

$$\mathcal{F}=Q_o e^{pt};\qquad \mathcal{Z}(p)=(c-m\Omega^2)+i(b\Omega), \tag{7.6}$$

gde je uvedena mehanička impedenca $\mathcal{Z}$(p) koja je kompleksna veličina. Analogno tome uvodi se i električna impedanca za jednačinu (7.3) kada se pretpostavi da je elektromotorna sila periodička funkcija

$$\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)\mathfrak{z}=\mathcal{E}=E_o e^{pt};\quad \mathcal{Z}(p)=Lp^2+Rp+\frac{1}{C};\quad q=Re\,\mathfrak{z}. \tag{7.7}$$

Medjutim, uobičajeno je u elektrotehničkoj praksi da se uvodi strujna impedanca. Naime, kako je struja $i=\dot{q}$; $\dot{\mathfrak{z}}=p\mathfrak{z}=\mathcal{J}$ gde je $\mathcal{J}$ kompleksna struja, to jednačina (7.7) postaje

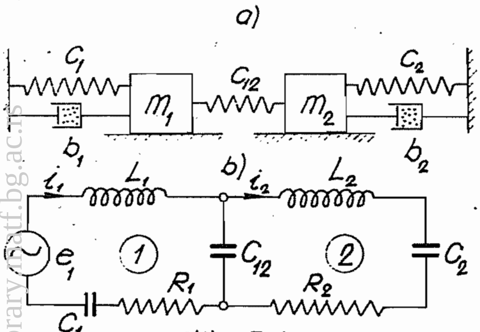
$$\left(Lp+R+\frac{1}{Cp}\right)\mathcal{J}=\mathcal{E};\quad \mathcal{J}=\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{Z}(p)};\quad \mathcal{E}=E_o e^{pt};\quad \mathcal{Z}(p=i\Omega)=Lp+R+\frac{1}{Cp} \tag{7.8}$$

gde je sada $\mathcal{Z}$(p) strujna impedanca.

Naprimer, modelu apsorbera (slika 7.6.a) odgovara električni model na slici 7.6.b, pa će biti:

$$L_1\frac{di_1}{dt}+R_1 i_1+\frac{1}{C_1}\int i_1\,dt+\frac{1}{C_{12}}\int(i_1-i_2)\,dt=e_1,$$

$$L_2\frac{di_2}{dt}+R_2 i_2+\frac{1}{C_2}\int i_2\,dt-\frac{1}{C_{12}}\int(i_1-i_2)\,dt=0.$$



Slika 7.6.

Kako je $e_1=E_1\sin\Omega t$, biće $\mathcal{E}_1=E_1\cdot e^{pt}$; $p=i\Omega$, te su jednačine:

$$L_1\dot{\mathcal{J}}_1+R_1\mathcal{J}_1+\frac{1}{C_1}\int\mathcal{J}_1\,dt+\frac{1}{C_{12}}\int(\mathcal{J}_1-\mathcal{J}_2)\,dt=\mathcal{E}_1;$$

$$L_2\dot{\mathcal{J}}_2+R_2\mathcal{J}_2+\frac{1}{C_2}\int\mathcal{J}_2\,dt-\frac{1}{C_{12}}\int(\mathcal{J}_1-\mathcal{J}_2)\,dt=0.$$

Uzimajući da je $\mathcal{J}=Ie^{pt}$ dobija se da je $\dot{\mathcal{J}}=p\mathcal{J}=pIe^{pt}$, te se gornje jednačine svode na oblik:

$$\left(\mathcal{L}_1+\frac{1}{C_{12}p}\right)I_1-\frac{1}{C_{12}p}I_2=E_1;\quad -\frac{1}{C_{12}p}I_1+\left(\mathcal{L}_2+\frac{1}{C_{12}p}\right)I_2=0.$$

Rešenja ovih jednačina su:

$$I_1=\frac{E_1}{\Delta}\left[\mathcal{L}_2+c_{12}\right];\qquad I_2=\frac{E_1}{\Delta}c_{12};\qquad \Delta=\Delta(p)=\begin{vmatrix}\mathcal{L}_1+c_{12} & -c_{12}\\ -c_{12} & \mathcal{L}_2+c_{12}\end{vmatrix};\qquad c_{12}=\frac{1}{C_{12}p};\quad p=i\Omega;\quad \mathcal{L}=L_ip+R+\frac{1}{C_ip}.$$

Homogeni torzijski sistem sa oprugama (slika 7.7) je model mašine za ispitivanje materijala na zamor. Jednačina torzijskih oscilacija k-tog diska biće

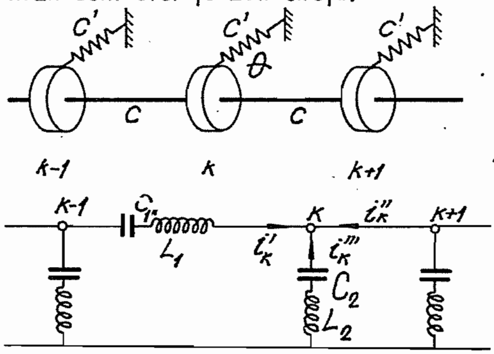
$$J\ddot{\theta}_k=-c(\theta_k-\theta_{k-1})+c(\theta_{k+1}-\theta_k)-c'\theta_k. \tag{7.9}$$

Smenom $Q_k=A_k\sin\omega t$ ovaj sistem jednačina se svodi na sistem algebarskih jednačina

$$A_{k-1} - 2uA_k + A_{k+1} = 0; \quad u = 1 + \frac{c' - J\omega^2}{2c}. \qquad (7.10)$$

Stavljajući da je $A = e^{k\lambda}$ dobija se uslov $\mathrm{Ch}\,\lambda = u$, koji za $u = 0$ daje realne vrednosti za λ. Kada je $u > 1$ tada je $(c'/c) - (J\omega^2)/c > 0$ ili $\omega^2 < c'/J$, pa je $\omega = \sqrt{c'/J}$ donja granica harmonijskog rešenja.

Ovom mehaničkom sistemu odgovara model električnog filtra (slika 7.8). Za naznačeni čvor je zbir struja:



Slika 7.8.

$$i_k' + i_k'' + i_k''' = 0$$

Kako su impedance $Z_i = \mathcal{L}_i$

$$Z_1 = L_1 p + \frac{1}{C_1 p}; \quad Z_2 = L_2 p + \frac{1}{C_2 p},$$

to su, prema (7.8) struja

$$i_k' = \frac{U_{k-1} - U_k}{Z_1}; \quad i_k'' = \frac{U_{k+1} - U_k}{Z_1};$$

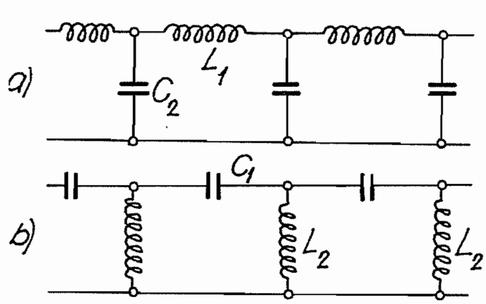
$$i_k''' = \frac{-U_k}{Z_2};$$

pa se unošenjem u jednačinu (a) dobija jednačina

$$U_{k-1} - 2\beta U_k + U_{k+1} = 0; \quad \beta = 1 + \frac{1}{2}\frac{Z_1}{Z_2} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{L_1\Omega^2 - (1/C_1)}{L_2\Omega^2 - (1 - C_2)} \qquad (7.11)$$

analogna jednačini (7.10), pošto je količnik impedanci realni broj.

Progresivni talasi mogu da se provode kroz sistem samo ako je $-1 < \beta < 1$. Na slici 7.9. prikazani su nisko-frekventni filter ("low-pass filter") i visoko - frekventni filter ("high-pass filter").



Slika 7.9.

Kod prvog (slika 7.9.a) je $L_2 = 0$, $C_1 = \infty$, te je $\beta = 1 - \frac{1}{2} L_1 C_2 \omega^2$; pa je $\omega_1 = 2/\sqrt{L_1 C_2}$. Kod drugog (slika 7.9.b) je $L_1 = 0$ a $C_2 = \infty$, te je

$$\beta = 1 - (2C_1 L_2 \omega^2)^{-1},$$

pa se dobija $\omega_2 = 1/2\sqrt{L_2 C_1}$.

LITERATURA

1. Andjelić T, Stojanović R., Racionalna mehanika, Beograd, 1966.
2. Appel, Traité de mécanique rationnelle, t.2., Paris, 1953.
3. Barker J., Mechanical and Electrical Vibrations, J.Wiley, 1964.
4. Bilimović A., Racionalna mehanika II, Mehanika sistema, Beograd, 1951.
5. Buhgolc, Osnovnoj kurs teoretičeskoj mehaniki, č.2.Moskva, 1937.
6. Cannon R., Dynamics of Physical Systems, McGraw-Hill Book Co. New York, 1967.
7. Coe J., Theoretical Mechanics, Macmillan, 1938.
8. Ewing G., Calculus of Variations with Applications, Norton and Co., Inc. New York, V ed. 1969.
9. Fempl. S., Elementi Varijacionog računa, Beograd, 1965.
10. Gantmaher R.F., Analitička mehanika (srpski prevod) Moskva, 1960.
11. Goldstein H., Classical Mechanics, Addison-Wesley, 1950.
12. Kašanin R., Viša matematika, II, Beograd, 1951.
13. Kilmister C., Hamiltonian Dynamics, J.Wiley, 1964.
14. Landau L., Lifšic E., Mehanika, Moskva, 1958. Gelfand I, Fomin S., Calculus of Variations, Prentice-Hall, Inc.
15. Lanczos C., The Variational Principles of Mechanics, Toronto, 1962.
16. Lavrentiev M, Ljusternik L., Osnovi variacionogo isčislenia, Moskva, 1935.
17. Levi-Civita T., Amaldi U., Lezioni di meccanica razionale, Vol. 2.s.2, Bologna, 1927.
18. Lurie A., Analitičeskaja mehanika, Moskva, 1961.
19. Mitrinović D., Kečkić J., Jednačine matematičke fizike, Beograd, 1972.
20. Rašković D., Teorija oscilacija, III izd. Beograd, 1974.
21. Rašković D., Mehanika III - Dinamika, 4. izd. Beograd, 1972.
22. Rašković D., Osnovi matričnog računanja, Beograd, 1971.
23. Rašković D., Osnovi tenzorskog računa, Kragujevac, 1974. god.
24. Saltikov N., Teorija parcijalnih jednačina prvog reda, Beograd, 1953.
25. Suslov G., Teoretičeskaja mehanika, Moskva, 1946.

26. Weinstock R., Calculus of Variations, McGraw-Hill Book Co., New York, 1952.

27. Wells D., Theory and Problems of Lagrangian Dynamics, Schaum Publ.Co. New York, 1967.

28. Whittaker E., A Treatise on the Analytical Dynamics, Cambridge, 1937.

REGISTAR IMENA

(Brojevi označavaju strane)

Appel P.E. 78, 80
Aristotel 49
Atwood G. 47
Bernoulli Daniel 119
Johann 32
Jacob 30
Binet J.P.M. 97
Christoffel 16, 76
Coulomb C. 20
D'Alembert J.le R. 45, 52
Dekart (Descartes R) 1, 42
Desdouit 48
Dirichlet Lejeune 82, 83
Einstein A. 13, 78
Euler L. 31, 46, 113, 116
Fermat P. 128
Fourier J.B. 120
Galilej (Galilei G) 49
Gibbs J. 12
Green G. 114, 116
Hamilton W.R. 92, 107, 109
Jacobi Ch. G. 2, 41, 74, 99, 127
Kirchhoff R. 133
König S. 79
Kronecker 14, 76
Lagrange J. L. 9, 18, 31, 41, 58, 91, 126
Lamé G. 2, 9
Laplace P. 113
Ljapunov 81
Maupertius 126
Newton I. 9, 46, 53, 96
Ohm 133
Ostrogradski 114
Poisson S.D. 92, 101, 125
Rayleigh lord 72, 77
Riemann B. 112
Routh E.J. 103
Sylvester J. J. 65
Torricelli E. 49

STVARNI REGISTAR
(Brojevi označavaju strane)

Akcija (dejstvo) 108, 126
amortizacija 89
amplituda 85
amplitudni vektor 85
analogija 42
analogije elektromehaničke 132
automobilski apsorber 135
Atwood-ov mašina 47

Baza vektorska 2
brahistohrona 32
brzina 4
apsolutna 75
dopuštena 24
moguća 24
relativna 75
talasa 118, 121
tačke 9
tela 23
brzine generalisane 5
krivolinijske 5
Centar masa 74
Cikli 100
Dejstvo u Hamilton-ovom smislu 108
Lagrange-ovom smislu 126
determinanta Lagrange-ova 84
diferencija 28
dužina luka 4

Efekt giroskopski 71
nepotencijalnih sila 69
rada 69
ejkonal 128
ekstremala 109
ekstremum funkcionala 111
električnost 132
energija kinetička 10,64
potencijalna 10
slobodna 10, 64
totalna 11, 68
ubrzanja 78
Forma definitna 65
indefinitna 65
semidefinitna 65
Formula Green-ova 114
Riemann-ova 112

frekvencija 63, 121
frekventna jednačina 84
frekventni filtri 138
polinom 84
funkcija Appel-ova 79
generatrijska 129
Hamilton-ova 93
harmonijska 113, 116
izvodna 129
karakteristična 63

funkcija komparativna 117
Lagrange-ova 10, 60
potencijalna 10, 67
rasipanja 72
Rayleigh-ova 72
Routh-ova 104
sile 9, 67
funkcional 30, 111
Generalisana brzine 5
koordinate 1
ubrzanja 5
geodežijska kriva 106, 128
giroskop 71
giroskopske sile 70
giroskopski članovi 74
gradijent delimični 24
Harmonijski oscilator 96
harmonik osnovni 119
viši 119
hiperpovrš 42
hipoteza prav. elementa 124
Impedanca električna 136
mehanička 138
strujna 136
impuls generalisani 10, 66
sile 10
indeksi 13
indukcioni kalem 132
integral energije 10, 57, 74
Jacobi-jev 74
količine kretanja 53
integral momenta količine kretanja 54
površine 54
zamaha 54
integrali ciklički 12
dif. jednačina kretanja 9
prvi kanonskih jedn. 98
involucija 103
izvod Lagrange-ev 31
varijacioni 31
Jakobijan 2
Jacobi-jev integral 74
Jacobi-jeva matrica 41
jednačina dinamička osnovna 52
Euler-ova 31, 113
Euler-Lagrange-ova 116
frekventna 84
Hamilton-Jacobi-jeva 130
kretanja tačke 9
Ostrogradskog 114
varijacionog računa 31, 113
jednačine Appel-ove 79
Hamilton-ove 94
kanonske 94
Lagrange-ove 18, 37, 55
Routh-ove 103
Klatna 43, 61, 96, 105
koeficijenti inercijski 65
kvazielastični 84
metričke forme 14
prelamanja 128
uspostavljanja 84

količina kretanja 53
komponente brzine 5
ubrzanja 7
kondenzator 132
konfiguracija sistema 20, 107
konvencija Einstein-ova 12
koordinate cikličke 12, 100
fizičke 15
glavne 16, 90
kontravarijantne 12
kovarijantne 12
opšte 40
skrivene 100
Kretanje amortizovano 89
aperiodičko 88
asinhrono 108
izohrono 107
sinhrono 107
tačke 9
tela 9, 44
krutost opruge 62
kvadrat brzine 5, 10, 64
kvazigradijent 24
Lančanica 50
laplasijan 113
linija geodezijska 106, 128
Ljapunovljev kriterijum 81
Masa 21
matrica inercijska 65
jedinična 85
kvazielastična 84
lambda 85
modalna 85
metoda Desdouit-a 48
part. integrala 119
množilac veze 35
moment giroskopski 70
inercije 47
inercijalni 47
kinetički 54
multiplikator veze 56
Napon 132
Newton-ovi zakoni
Obrazac Binet-ov 97
Gibbs-ov 12
obrasci Viete-ovi 89
odstupanje 81
oscilacija amortizovana 89
harmonijska 63
mala 63
prinudna 81
slobodna 63
oscilacije grede 121
membrane 122
ploče 123
torzijske vratila 121
žice 117
Osnovni oblik 119
otpor veze 33
otpornik 132
Parametar Lame-ov 2, 24
period oscilovanja 63
Poisson-ova identičnost 102
zagrada 102
polje sile 11, 32
pomeranje moguće 26

pomeranje stvarno 26, 29
virtualno 26
položaj ravnoteže 46
potencijal generalisani 73
kinetički 10, 60
sistema 73
površ 2,35
elastična 124
precesija 71
princip d'Alember-ov 45
Fermat-ov
Hamilton-ov 107
kinetostatički 46
Lagrange-ov virt. pomeranja 48
Lagrange-d'Alembert-ov 52
Lagrange-Maupertius-ov 126
opšti 52
Torricelli-jev 49
vijaracioni 45
zamrzavanja veza 51
principi diferencijalni 44
integralni 45
varijacioni 45
promenljive glavne 130
Hamilton-ove 107
kanonske 91
Lagrange-ove 59
parametarske 130
prostor 1
konfiguracioni 40
putanja 4
put direktni 109
susedni 108
zaobilazni 108
Rad elementarni 46
izgubljenih sila 46
sile 9, 46
virtualni 48
reakcija, veze 33
red Foufier-ov 120
Taylor-ov 83
režim prinudnog kretanja 40
rešenje d'Alambert-ovo 118
Savojna krutost grede
ploče 125
sila aktivna 45
disipativna 70
efektivna 45
generalisana 9
giroskopska 70
gravitaciona 32
inercijska 45
izgubljena 45
kontravarijantna 18
konzervtivna 11
kovarijantna 18
Coriolis-ova 70
otporna 89
poremećajna 81
potencijalna 11
zatezna 122
simbol Christoffel-ov 15, 77
Kronecker-ov 14, 77

sistem autonomni 105
dinamički 91
prirodni 91
konzervativan 11
nekonzervativan 11
složeno kolo 135
stabilnost ravnoteže 81
struja 235
svojstvena vrednost 119
Tačka reprezentativna 78
tenzor metrički 4
teorema Konig-ova 79
Lejeune Dirichlet-ova 82
Ljapunovljeva 81
transformacije 1, 85
kanonske 100
kontaktne 100
trijedar 1, 2
recipročni 12
Ubrzanje 5
uglovi Euler-ovi 23
uslov ekstremuma 30
o ortogonalnosti 85
ravnotežni 46
uslovi granični 122
oslanjanja 122
Sylvester-ov 65
za brzinu 24
za ubrzanje 25
Varijacija asinhrona 127
druga 30
Varijacija funkcije 28
izohrona 29
prva 29
vektor 1
vektori osnovni 2
vektorska baza 2
veze cele 19
diferencijalne 19
dvostrane 20
geometrijske 19
holonomne 20
idelane 36
jednostrane 20
konačne 19
neholonomne 19
nezadržavajuće 20
reonomne 20
skleronomne 20
stacionarne 20
zadržavajuće 20
Zagrade Poisson-ove 107
zakon Kirchooff-ov 133
Coulom-ov 20
Newton-ov 53
Ohm-ov 131
zakoni o kinetičkoj energiji 55
o količini kretanja 53
o kretanju središta masa 54
o momentu količine kretanja 54
poluge 48
zlatno pravilo mehanike 49