

NAUČNI PODMLADAK

STRUČNI ČASOPIS STUDENATA UNIVERZITETA U NIŠU

Tehničke
nauke



GODINA V

1973.

BROJ 3-4

**PRIRODNI GRANIČNI USLOVI ELASTIČNIH TELA KOJA OSCILUJU
IZVEDENI PRIMENOM HAMILTON-OVOG PRINCIPA**

**Mr. Ing. Katica Stevanović i Ing. Mile Maksić asistenti Katedre
za Mehaniku Mašinskog fakulteta u Nišu**

U radu su pomoću Hamilton-ovog principa izvedene parcijalne diferencijalne jednačine oscilovanja i prirodni granični uslovi elastičnih tela koja osciluju — strune, grede, membrane i tanke ploče.

U V O D

Veličina

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^t (E_k - E_p) dt$$

određena ukupnim kretanjem materijalnog sistema u vremenskom intervalu (t_1 , t_2) naziva se (deјstvo) u Hamilton-ovom smislu ili glavna Hamilton-ova funkcija. Podintegralna funkcija predstavlja kinetički potencijal ili Lagrange-ovu funkciju — višak kinetičke energije nad potencijalnom energijom.

Ako je materijalni sistem podvrgnut sledećim ograničenjima: da na materijalni sistem dejstvuju konzervativne aktivne sile; da su odstupanja zaobilaznih puteva od direktnog infinitezimalna; i da je kretanje sinhrono, odnosno da sistem polazi iz početne konfiguracije u trenutku t_1 i stiže u krajnju konfiguraciju po direktnoj i zaobilaznim putevima u isto vreme t_2 , tada za kretanje sistema važi Hamiltonov princip: Deјstvo u Hamilton-ovom smislu ima za stvarni put sistema ekstremnu (stacionarnu) vrednost u poređenju sa vrednostima dejstva na zaobilaznim putevima, što znači da je $\delta W = 0$

I. OSCILACIJE STRUNE

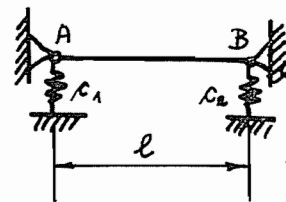
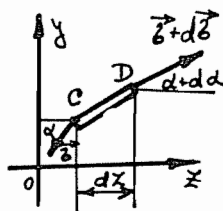
Neka je struna dužine l zategnuta na krajevima A i B, tako da u svakom poprečnom preseku dejstvuje normalni napon σ , koji pada u pravac same žice. Zbog potpune savitljivosti strune pretpostavljamo da

tangencijalni naponi ne dejstvuju. Krajevi strune A i B neka su elastično učvršćeni oprugama krutosti c_1 i c_2 kao na slici 1. Pretpostavljamo da su pomeranja svake tačke strune $y=v(z,t)$ mala. Posmatramo element dužine dz u deformisanom stanju čija je dužina

$$(1) \quad ds = (dy^2 + dz^2)^{1/2} = dz \sqrt{1 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} \approx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] dz$$

Δok je njegovo izduženje usled transverzalnog kretanja strune

$$(2) \quad \Delta(ds) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 dz$$



Sl. 1

Ukupna potencijalna energija strune usled deformativnog rada na izduženju elementa strune i deformativnosti opruga na krajevima je

$$(3) \quad E_p = \int_0^l \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 dz + \frac{1}{2} c_1 v^2(0,t) + \frac{1}{2} c_2 v^2(l,t)$$

dok je ukupna kinetička energija strune

$$(4) \quad E_k = \int_0^l \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dz$$

Na osnovu izraza (3) i (4) formiramo višak kinetičke energije nad potencijalnom pri samom kretanju — Lagrange-ovu funkciju L , pomoću koje sastavljamo dejstvo u Hamilton-ovom smislu:

$$(5) \quad W = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{1}{2} A \left\{ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 - \rho \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right\} dz dt - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ c_1 v^2(0,t) + c_2 v^2(l,t) \right\} dt$$

Da bi smo odredili uslove pod kojima Hamilton-ovo dejstvo ima stacionarnu vrednost potražićemo prvu varijaciju izraza (5) imajući pri tome u vidu da je

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta v \right] - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial t^2} \delta v$$

(6)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \frac{\partial \delta v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \delta v \right] - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z^2} \delta v$$

i transformacijom izraza uz parcijalnu integraciju nekih članova dobijamo

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l A \left[\mathcal{L} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \mathcal{L} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] \delta v \, dz \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[A \mathcal{L} \frac{\partial v}{\partial z} - \mathcal{L}_1 v \right] \delta v \right\}_{z=0} dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[A \mathcal{L} \frac{\partial v}{\partial z} + \mathcal{L}_2 v \right] \delta v \right\}_{z=l} dt - \int_0^l \left[\mathcal{L} A \frac{\partial v}{\partial t} \delta v \right]_{t_1}^{t_2} dz \end{aligned}$$

(7)

Kako je kretanje sinhrono to je δv za $t = t_1$ i $t = t_2$ jednako nuli dok je δv u ostalim trenucima različito od nule i da bi Hamilton-ovo dejstvo imalo stacionarnu vrednost, tj. prvu varijaciju jednaku nuli potrebno je da su zadovoljeni sledeći uslovi

$$(8) \quad \mathcal{L} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \mathcal{L} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

$$(9) \quad \left[A \mathcal{L} \frac{\partial v}{\partial z} - \mathcal{L}_1 v \right]_{z=0} = 0$$

$$(10) \quad \left[A \mathcal{L} \frac{\partial v}{\partial z} + \mathcal{L}_2 v \right]_{z=l} = 0$$

Prvi od dobijenih uslova predstavlja parcijalnu diferencijalnu jednačinu transverzalnih oscilacija strune, dok uslovi (9) i (10) predstavljaju prirodne granične uslove.

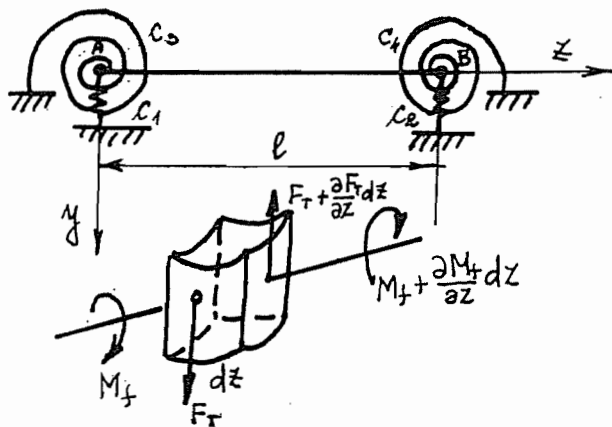
II. TRANSVERZALNE OSCILACIJE GREDE

Pretpostavimo da je u nedeformisanom stanju elastična osa grede pravolinijska i da se poklapa sa geometrijskim mestom težišta poprečnih preseka; da se transverzalne oscilacije tačaka elastične grede izvode u glavnoj ravni savijanja i da su ugibi mali, tako elastične sile koje se javljaju ostaju u granicama proporcionalnosti. Ugibi pojedinih tačaka ose

grede se izvode normalno u odnosu na pravolinijsku nedoformisanu elastičnu osu pri čemu zanemarujemo pomeranja tih tačaka u pravcu paralelnom osi. Neka na gredu deluje raspodeljeno po rasponu poprečno opterećenje $q(z,t)$ slika 2). Ukupna kinetička energija grede poprečnog preseka A , dužine l , zapreminske gustine ρ , je

$$(11) \quad E_k = \int_0^l \left[\frac{1}{2} \rho A \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho I_x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] dz$$

i nastoji se od energije translacije elemenata brzinom $\frac{\delta v}{\delta t}$ i energije rotacije elemenata ugaonom brzinom $\frac{\delta \varphi}{\delta t}$. t je vreme, z koordinata duž ose grede, $v(z,t)$ ugib i $f(z,t)$ nagib elastične linije savijene grede.



Sl. 2

Potencijalna energija grede se sastoji iz potencijalne energije usled savijanja

$$(12) \quad E_{P1} = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{M_T^2}{B} dz = \int_0^l \frac{1}{2} B \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 dz$$

i potencijalne energije usled dejstva transverzalnih sila

$$(13) \quad E_{P2} = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{\kappa}{GA} F_T^2 dz = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{GA}{\kappa} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \varphi \right)^2 dz$$

i usled dejstva spoljašnjih sila. U izrazima (12) i (13) oznake su: β — savojna krutost grede, G : modul klizanja, κ , koeficijant smicanja. Ako pretpostavimo da su krajevi grede elastično učvršćeni pomoću zavoynih i torzionih opruga koeficijenata elastičnosti C_1 i C_2 , odnosno C_3 i C_4 , izraz za ukupnu potencijalnu energiju možemo napisati kao

$$(14) \quad E_p = \int_0^{\ell} \left[\beta \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{GA}{\kappa} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \varphi \right)^2 + 2q(z,t)v \right] dz + \\ + \frac{1}{2} \left[C_1 v^2(0,t) + C_2 v^2(\ell,t) + C_3 \varphi^2(0,t) + C_4 \varphi^2(\ell,t) \right]$$

Višak kinetičke energije nad potencijalnom je

$$(15) \quad \mathcal{L} = \int_0^{\ell} \left[\rho A \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \rho I_x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] dz - \int_0^{\ell} \left[\beta \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{GA}{\kappa} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \varphi \right)^2 + 2q(z,t)v \right] dz - \\ - \frac{1}{2} \left[C_1 v^2(0,t) + C_2 v^2(\ell,t) + C_3 \varphi^2(0,t) + C_4 \varphi^2(\ell,t) \right]$$

Dejstvo u Hamilton-ovom smislu je

$$(16) \quad W = \int_{t_0}^t \int_0^{\ell} \left[\rho A \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \rho I_x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \left[\beta \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{GA}{\kappa} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \varphi \right)^2 + 2q(z,t)v \right] \right] dz dt - \\ - \int_{t_0}^t \left[C_1 v^2(0,t) + C_2 v^2(\ell,t) + C_3 \varphi^2(0,t) + C_4 \varphi^2(\ell,t) \right] dt$$

Potražimo sada prvu varijaciju dejstva u Hamilton-ovom smislu (16) uzimajući u ozbir da je

$$(17) \quad \frac{\partial v}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) = \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \delta v = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial v}{\partial t} \delta v \right] - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \delta \varphi = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta \varphi \right] - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \delta \varphi \\ \frac{\partial v}{\partial z} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \delta v = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial v}{\partial z} \delta v \right] - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \delta v \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \delta \varphi = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta \varphi \right] - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \delta \varphi$$

Posle transformacije članova pomoću izraza (17) i parcijalne integracije nekih članova za prvu varijaciju dobijamo

$$\begin{aligned}
 \delta W = & \int_{t_0}^t \int_0^l \left\{ q(z,t) - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{GA}{\mathcal{K}} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] \right\} \delta v dz dt + \\
 & + \int_{t_0}^t \int_0^l \left\{ \rho B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \rho I_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{GA}{\mathcal{K}} - \varphi \frac{GA}{\mathcal{K}} \right\} \delta \varphi dz dt + \\
 (18) \quad & + \int_{t_0}^t \left[\frac{GA}{\mathcal{K}} \left[\left(\varphi - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta v \right] - \rho B \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta \varphi \right]_0^l dt + \int_0^l \left[\rho A \frac{\partial v}{\partial t} \delta v + \rho I_x \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta \varphi \right]_t^t dx - \\
 & - \int_{t_0}^t \left[\mathcal{L}_1 v_0(0,t) \delta v(0,t) + \mathcal{L}_2 v(l,t) \delta v(l,t) + \mathcal{L}_3 \varphi(0,t) \delta \varphi(0,t) + \mathcal{L}_4 \varphi(l,t) \delta \varphi(l,t) \right] dt
 \end{aligned}$$

Da bi Hamilton-ovo dejstvo imalo stacionarnu vrednost mora da je nje-gova prva varijacija jednaka nuli, odakle slede uslovi

$$(19) \quad q(z,t) - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{GA}{\mathcal{K}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0$$

$$(20) \quad \rho B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \rho I_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{GA}{\mathcal{K}} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \varphi \right) = 0$$

$$(21) \quad \left[\rho B \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mathcal{L}_3 \varphi \right]_{z=0} = 0$$

$$(22) \quad 0 = {}^{0=z} \left[\alpha^2 \gamma + \left(\frac{z_0}{\mathcal{A}e} - \lambda \right) \frac{\mathcal{H}}{V_0} \right]$$

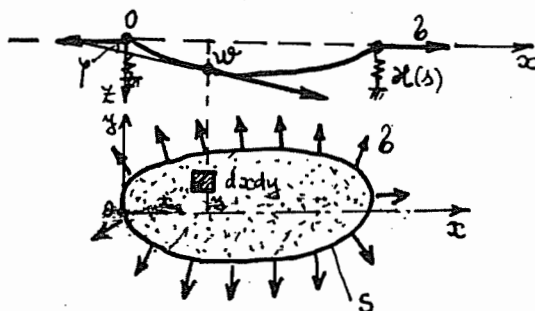
$$(23) \quad 0 = {}^{l=z} \left[\alpha^2 \gamma + \frac{z_0}{\mathcal{A}e} \mathcal{G} \right]$$

$$(24) \quad \left[\frac{GA}{\mathcal{K}} \left(\varphi - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \mathcal{L}_2 v \right]_{z=l} = 0$$

Uslovi (19) i (20) daju sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina trans-verzalnih oscilacija grede, gde su uzeti u račun uticaji transverzalnih si-la i rotacija preseka. Uslovi (21), (22), (23) i (24) predstavljaju prirodne granične uslove koji moraju da budu zadovoljeni na krajevima grede. Poslednji član izraza (18) za prvu varijaciju Hamilton-ovog dejstva je jednak nuli jer je po pretpostavci kretanja sistema sinhrono.

III. OSCILACIJE MEMBRANE

Na slici 3 je data skica membrane sa elementom dimenzije dx i dy . Pretpostavlja se da je membrana tanka i potpuno savitljiva te se ne



Sl. 3

opire savijanju usled sila koje dejstvuju na membranu i koje računamo na jedinicu dužine kao $\delta(x,y)$. Takođe pretpostavljamo da je površina membrane u nedeformisanom stanju ravan Oxy i da su pomeranja — ugibi tačaka membrane $w(t,x,y)$ vrlo mali, u poređenju sa poprečnim dimenzijama, i isto tako da tangencijalna ravan membrane u tački (x, y, w) gradi vrlo mali ugao sa horizontalnom ravni Oxy . Pod takvim pretpostavkama kinetička energija membrane je

$$(25) \quad E_k = \iint_A \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy$$

gde je ρ površinska gustina, A površina membrane.

Dužine elementa dx i dy prilikom deformacije membrane se izdužuju i njihove dužine su tada

$$(26) \quad \begin{aligned} d\Delta_x &= dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} \approx dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ d\Delta_y &= dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2} \approx dy \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

i na osnovu toga priraštaj površine tog elementa je

$$(27) \quad \Delta dA = d\Delta_x d\Delta_y - dx dy \approx \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

Utrošeni rad na deformaciju membrane je

$$(28) \quad A_d = \iint_A \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

Ako je membrana elastično oslonjena po konturi pomoću opruga krutosti $\kappa(s)$ gde je s dužina luka po konturi, ukupna potencijalna energija membrane je

$$(29) \quad \mathbb{E}_p = \int_A \int \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_L \frac{1}{2} \kappa(s) w^2(s, t) ds$$

gde je L linija konture membrane. Dejstvo u Hamilton-ovom smislu je

$$(30) \quad \mathbb{W} = - \int_{t_0}^t \int_A \int \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy dt + \int_{t_0}^t \int_A \int \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy dt - \int_{t_0}^t \int_L \frac{1}{2} \kappa w^2(s, t) ds dt$$

Prva varijacija Hamilton-ovog dejstva, posle niza transformacija i parcijalne integracije nekih članova je oblika

$$(31) \quad \delta \mathbb{W} = \int_{t_0}^t \int_A \int \left\{ \rho \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\} \delta w dx dy dt - \int_A \int \left[\rho \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right]_{t_0}^t dx dy - \int_{t_0}^t \int_L \left[\rho \frac{\partial w}{\partial n} + \kappa(s) w \right] \delta w(s, t) ds dt$$

Da bi prva varijacija Hamilton-ovog dejstva bila jednaka nuli potrebno je da je

$$(32) \quad \rho \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

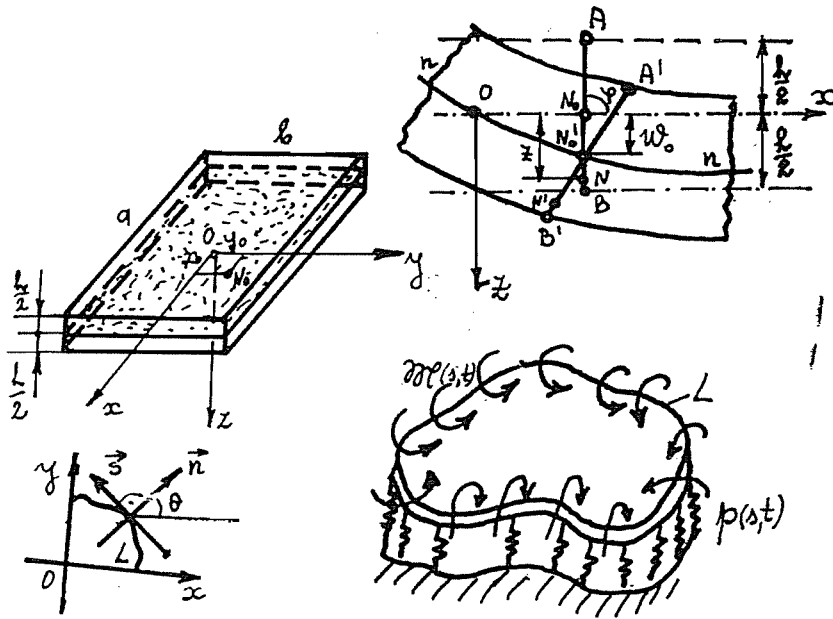
$$(33) \quad \rho \frac{\partial w(s)}{\partial n} + \kappa(s) w(s) = 0$$

Iz prvog uslova (32) dobijamo parcijalnu diferencijalnu jednačinu oscilovanja membrane, dok drugi uslov predstavlja prirodni granični uslov, koji mora da bude zadovoljen na konturi membrane.

IV. TRANSVERZALNE OSCILACIJE PLOČE

Pretpostavimo da je ploča od elastičnog, homogenog i izotropnog materijala i da joj je debljina h mala u odnosu na druge dve dimenzije i da se njena srednja ravan u nedeformisanom stanju poklapa sa ravni Oxy. Prilikom oscilovanja središnja ravan prelazi u krivu površinu — elastičnu površinu. Kao i u teoriji savijanja grede pretpostavlja se da je srednja ravan nenapregnuta tj. da je neutralna površina. Uvodimo takođe i sledeća uprošćenja koja je uveo Kirkofof: a) tačke koje se nalaze na normali na neutralnu površinu u nedeformisanom stanju ostaju i posle

deformacije na normali na neutralnu površinu, ali se pri tome okreću oko neutralnih osa $n-n$ (vidi sl. 4); b) u toku deformacije ne pojavljuju se dilatacije i klizanja u srednjoj površini; c) zanemaruje se uticaj tangencijalnih napona τ_{xz} i τ_{yz} na neformaciju ploče.



Sl. 4

Ugib ploče je $w(t,x,y)$ pa su komponentna pomeranja

$$(34) \quad \begin{aligned} \epsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned}$$

$$(35) \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

dok su normalni naponi

$$(36) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

i tangencijalni napon

$$(37) \quad \tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Deformacioni rad savijanja ploče je

$$(38) \quad A_d = \frac{1}{2} \iiint_V (\epsilon_x \epsilon_x + \epsilon_y \epsilon_y + \tau_{xy} \tau_{xy}) dx dy dz =$$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{D} \iint_A \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy$$

gde je sa \mathcal{D} obeležena savojna krutost ploče

$$(39) \quad \mathcal{D} = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}$$

E modul elastičnosti, h debljina ploče, μ Poisson-ov koeficijent. Ako po konturi ploče dejstvuju momenti savijanja $m(s, t)$, sile $p(s, t)$, gde je s dužina luka po konturi, i po površini ploče upravno na ploču dejstvuje površinsko opterećenje $f(x, y, t)$, ukupan rad spoljašnjih sila i momenata je dat izrazom

$$(40) \quad A = \iint_A f(x, y, t) w(x, y, t) dx dy + \int_L p(s, t) ds + \int_L m(s, t) \frac{\partial w}{\partial n} d\Delta$$

gde je n ort normale na konturu (slika 4). Ukupna kinetička energija ploče je

$$(41) \quad E_k = \frac{\rho h}{2} \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy$$

gde je ρ zapreminska gustina materijala ploče. Hamilton-ovo dejstvo je

$$(42) \quad W = \int_{t_0}^t \iint_A \left\{ \frac{1}{2} \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - \mathcal{D} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy dt -$$

$$- \int_{t_0}^t \int_L \left[p(s, t) w(s, t) + m(s, t) \frac{\partial w}{\partial n} \right] ds dt - \int_{t_0}^t \iint_A f(x, y, t) w(x, y, t) dx dy dt$$

Imajući u vidu da je

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w \right) + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \right) \\
 (43) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta w \right) + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \delta w - 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \delta w \right) \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w \right) + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w - 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \delta w \right) \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta w \right) + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \delta w \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \delta w \right)
 \end{aligned}$$

i

$$(44) \quad \frac{\partial \delta w}{\partial x} = \frac{\partial \delta w}{\partial n} \cos \theta - \frac{\partial \delta w}{\partial s} \sin \theta \quad ; \quad \vec{n} - \text{ort normale na konturu}$$

$$\frac{\partial \delta w}{\partial y} = \frac{\partial \delta w}{\partial n} \sin \theta + \frac{\partial \delta w}{\partial s} \cos \theta \quad ; \quad \vec{s} - \text{ort tangente na konturu}$$

dobijamo prvu varijaciju Hamiltonovog dejstva u obliku

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \int_{t_0}^t \iint_A \left[f(x, y, t) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \mathcal{D} \nabla^2 w \right] \delta w dx dy dt - \\
 &\quad - \int_{t_0}^t \int_L \left[m(s, t) \delta \frac{\partial w}{\partial n} + p(s, t) \delta w \right] ds dt + \int_A \int_{t_0}^t \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right) dx dy - \\
 (45) \quad &\quad - \mathcal{D} \int_{t_0}^t \int_L \left[\nabla^2 w - (1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos^2 \theta \right) \right] \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds dt + \\
 &\quad + \mathcal{D} \int_{t_0}^t \int_L \left\{ \nabla^2 \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) - (1-\mu) \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \right] \right\} \delta w ds dt
 \end{aligned}$$

Da bi prva varijacija δW bila jednaka nuli i kako je $\delta \omega$ proizvoljno to mora da je

$$(46) \quad f(x, y, t) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \mathcal{D} \nabla^4 w = 0$$

$$(47) \quad m(\lambda, t) + \mathcal{D} \left\{ \nabla^2 w - (1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos^2 \theta \right] \right\} = 0$$

$$(48) \quad p(\lambda, t) - \mathcal{D} \left\{ \nabla^2 \frac{\partial w}{\partial n} - (1-\mu) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \right] \right\} = 0$$

Jednačina (46) predstavlja parcijalnu diferencijalnu jednačinu transversalnih oscilacija tanke ploče, dok su izrazi (47) i (48) prirodni granični uslovi.

Treba napomenuti da je za potpuno određivanje uslova oscilovanja strune, grede, membrane i tanke ploče, pored diferencijalnih jednačina oscilovanja i graničnih uslova potrebno poznavanje i početnih uslova oscilovanja elastičnog tela.

LITERATURA:

1. Anđelić T. Stojanović R. Racionalna Mehanika, Beograd 1965.
2. Novacki V. Dinamika elastičnih sistema, Grad. knjiga, 1966.
3. Fempl. S. Elementi varijacionog računa, Beograd, 1965.
4. Rašković D. Dinamika, N. knjiga, Beograd, 1962.
5. Rašković D. Teorija oscilacija, N. knjiga, 1965.
6. Vujičić V. Teorija oscilacija, Savr. administracija, Beograd, 1967.
7. Gelefanđ, Fomin. Calculus of Variations, Prentice — Hall, Inc, 1970.

ИССЛЕДОВАНИЕ „ВЫШЕЧАСТОТНЫХ” КОЛЕБАНИЙ В ОДНОЧАСТОТНОМ РЕЖИМЕ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ И МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

К. СТЕВАНОВИЧ, Д. РАШКОВИЧ (НИШ-БЕЛГРАД)

Тезисы

В статье даны формулы на первое и второе асимптотическое приближения решения нелинейной системы с несколькими степенями свободы с медленно меняющимися параметрами в одночастотном режиме под действием малого возмущения, зависящего периодически от N функций θ_n ($n = 1, \dots, N$) с периодами 2π , где $d\theta_n/dt = \nu_n(\tau)$ медленно меняющиеся частоты, близкие собственной частоте свободных колебаний невозмущенной системы.

Используется асимптотический метод Крылова-Боголюбова и асимптотическая теория нестационарных колебаний Митропольского. Данные в статье результаты представляют обобщение результатов Митропольского, относящихся к построению асимптотических решений, отвечающих одночастотному режиму в колебательной нелинейной системе с многими степенями свободы и медленно меняющимися параметрами.

Дана энергетическая трактовка уравнения первого порядка на амплитуду и фазу, которая создает возможность применения метода для систем с распределенными параметрами. Дан пример колебаний балки под действием нескольких движущихся грузов с приложенными почти-периодическими медленно меняющимися частотами.

В нелинейных колебательных системах принцип суперпозиции не имеет места. Результирующее сложное колебание, которое возникает в системе при воздействии на нее нескольких гармонических сил не будет равно сумме простых колебаний, которые возникли бы в системе при отдельном действии составляющих сил.

При совместном действии на нелинейную колебательную систему нескольких сил, в системе возникают сложные колебания, которые кроме гармоник с частотами возмущающих сил будут содержать еще гармоники с различными комбинационными частотами и кроме того, основные гармоники имеющие частоты возмущающих сил будут взаимно влиять друг на друга.

Рассматривая колебания систем с многими степенями свободы, которые описываются дифференциальными уравнениями близкими к линейным, в одночастотном режиме, при котором все координаты рассматриваемой системы совершают колебания с одной частотой, как это предложил Боголюбов [3], нужно обратить внимание на то, что в уравнениях первого приближения для амплитуды и фазы появляется суперпозиция влияний нелинейных членов, которую можно назвать символически термином „нелинейная суперпозиция”. Но, надо обратить внимание, что эта суперпозиция влияний нелинейных членов выступает для скорости изменений

амплитуды и фазы в одной из форм колебаний и только в первом приближении. Значит, результирующее колебание не будет суперпозицией действий.

Исследование совместного влияния гармоник возмущающих сил на развитие колебаний в нелинейных системах имеет большое практическое значение и поэтому представляет интерес рассмотрение нестационарных колебательных явлений. Однако в большинстве работ исследовалось прохождение через резонанс в системах, на которые действует возмущающая сила с одной частотой.

Прохождению через резонанс в линейных колебательных системах посвящено целый ряд теоретических и экспериментальных работ: Люиса, Пешля, Каца, Пугачёва, Фещенка, Смелкова и других. Шаталов исследовал экспериментально прохождение через резонанс в нелинейной системе с одной степенью свободы. Подробному теоретическому исследованию нелинейных колебательных систем с медленно меняющимися параметрами посвящены работы Ю. А. Митропольского [1, 2, 6]. В работе [6] даны теоретические основы исследования нестационарных процессов в колебательных системах.

Чекмарев в [12] рассмотрел экспериментально и теоретически, с помощью метода Ван дер Поля стационарный режим в нелинейной колебательной системе с одной степенью свободы при воздействии возмущающей силы с несколькими гармониками. При этом считал параметры системы постоянными, трением пренебрегал, а изучал случай жесткой характеристики нелинейной упругой силы. Рубаник [8] рассматривал взаимное влияние нескольких гармоник в нелинейных системах с различными характеристиками нелинейной упругой силы, с учетом сил трения и при различных условиях прохождения системы через резонанс. В той же работе проведен анализ, как стационарных так и нестационарных режимов, и сделан ряд выводов о характере нестационарных колебательных явлений в нелинейной системе с одной степенью свободы.

Митропольский в работах [1, 6] построил асимптотические решения, соответствующие одночастотному режиму в нелинейной колебательной системе со многими степенями свободы и медленно меняющимися параметрами. Получил уравнения первого и второго приближения для амплитуды и фазы резонансной формы колебаний. Уравнения эти верны когда система находится под воздействием возмущающей нелинейной силы — периодической функции периода 2π и только одной медленно меняющейся частоты. В упомянутых работах доказано что эти уравнения можно построить без предварительного составления точных дифференциальных уравнений задач, вводя простую энергетическую интерпретацию, которая позволяет формально применить метод для построения асимптотических приближенных решений уравнений в частных производных, описывающих колебательные процессы в системах с распределенными параметрами.

В настоящей статье построены асимптотические решения и уравнения первого и второго приближения для амплитуды и фазы соответствующие одночастотному режиму в нелинейной колебательной системе со многими степенями свободы и медленно меняющимися параметрами, когда действующая на систему возмущающая нелинейная сила является периодической функцией периода 2π и нескольких

медленно меняющихся частот, близких первой основной частоте собственных колебаний или частота имеет значение первой собственной частоты умноженной на p/q , где p и q простые числа. Представлена энергетическая интерпретация полученных уравнений. Эти уравнения представляют обобщения уравнений Ю. А. Митропольского.

Для иллюстрации приведен пример — крутильные колебания коленчатого вала, на который действуют два внешние периодические крутящие моменты [1, 5]. В качестве применения энергетической интерпретации дан пример колебаний балки под действием системы передвигающихся грузов и периодических сил, рассмотренный ранее в работах [10, 11], но здесь частоты внешних сил могут отличаться друг от друга, хотя должны быть близкими первой собственной частоте свободных колебаний балки.

1. Построение асимптотических решений „высочастотных“ колебаний, соответствующих одночастотному режиму в колебательной системе со многими степенями свободы и медленно меняющимися параметрами

Перейдем теперь к разработке метода построения асимптотических приближений для колебательных систем со многими степенями свободы и медленно меняющимися параметрами, когда действующая на систему возмущающая нелинейная сила является периодической функцией периода 2π , несколько медленно меняющихся частот, близких к первой собственной частоте или дробной вредности первой собственной частоте. Пользуемся при этом асимптотически методом Крылова–Боголюбова–Митропольского.

Асимптотические приближение решения будем строить непосредственно для уравнений Лагранжа второго рода. Будем рассматривать систему n нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с медленно меняющимся коэффициентами

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij}(\tau) \dot{q}_i \right\} + \sum_{i=1}^n b_{ij}(\tau) q_i = \varepsilon Q_j(\tau, \theta_1, \dots, \theta_N, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, \varepsilon), \quad (1)$$

$$j = 1, 2, \dots, n,$$

где q_1, q_2, \dots, q_n — обобщение координаты, $\tau = \varepsilon t$ — „медленное“ время, ε — малый положительный параметр, $a_{ij}(\tau) = a_{ji}(\tau)$ — коэффициенты матрицы инерции, $b_{ij}(\tau) = b_{ji}(\tau)$ — коэффициенты квазиупругой матрицы — некоторые функции „медленного“ времени τ , имеющие производные любого порядка при всех конечных значениях τ . Исследуемая колебательная система находится под воздействием малого возмущения, определяемого обобщенными силами

$$\varepsilon Q_j(\tau, \theta_1, \dots, \theta_N, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, \varepsilon) = \sum_{l=1}^l \varepsilon^l Q_j^{(l)}(\tau, \theta_1, \dots, \theta_N, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n),$$

$$j = 1, 2, \dots, n; \quad l = 1, 2, \dots \quad (2)$$

периодическими по $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ с периодом 2π .

Предположим, что функции стоящие в правой части выражения (2) могут быть представлены в виде конечных сумм Фурье

$$Q_j^{(l)}(\tau, \theta_1, \dots, \theta_N, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \sum_{n_1 \dots n_N} e^{i \sum_{k=1}^N n_k \theta_k} Q_{j(n_1 \dots n_N)}^{(l)}(\tau, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n),$$

$$j = 1, 2, \dots, n; \quad l = 1, 2, \dots; \quad -M_k \leq n_k \leq M_k, \quad (3)$$

где $Q_{j(n_1, n_2, \dots, n_N)}^{(l)}$ являются некоторыми полиномами по отношению к q_i и \dot{q}_i , и $\frac{d\theta_k}{dt} = v_k(\tau)$ — медленно меняющиеся частоты внешней силы.

Подставляя $\varepsilon = 0$, а считая τ постоянной величиной, получаем систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}(\tau) \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^n b_{ij}(\tau) q_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

которую в дальнейшем используем как вспомогательную при построении решений уравнений (1). Систему (4) будем как и в [1] называть системой дифференциальных уравнений невозмущенного движения или просто невозмущенной системой.

Для этой системы, известно что, можно построить решения, соответствующие нормальным колебаниям

$$q_i^{(m)} = \varphi_i^{(m)}(\tau) a_m \cos(\omega_m t + \alpha_m), \quad i, m = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

где $\omega_m(\tau)$ ($m = 1, 2, \dots, n$) — собственные частоты, определяемые уравнением

$$\text{Det} \{-a_{ij}(\tau) \omega^2 + b_{ij}(\tau)\} = 0, \quad (6)$$

$\varphi_i^{(m)}(\tau)$ — нормальные функции являющиеся нетривиальными решениями системы однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^n \{-a_{ij}(\tau) \omega_m^2 + b_{ij}(\tau)\} \varphi_i^{(m)}(\tau) = 0, \quad j, m = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

и обладающие свойствами ортогональности

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\tau) \varphi_i^{(m)}(\tau) \varphi_j^{(l)}(\tau) = 0; \quad \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(\tau) \varphi_i^{(m)}(\tau) \varphi_j^{(l)}(\tau) = 0, \quad (8)$$

$$m \neq l, \quad m \neq l$$

и a_m и α_m — вещественные произвольные постоянные. Если теперь, положим $\tau = \varepsilon t$, решения (5) только приблизительно будут удовлетворять уравнениям (4) и при этом получаем колебания с медленно меняющимися частотой $\omega_m(\tau)$ и формой $\varphi_i^{(m)}(\tau)$. Для построения асимптотических приближений решения соответствующих одночастотным колебаниям достаточно близких к первому нормальному невозмущен-

тому колебанию (5) — $m = 1$, допустим, как в [1], что для всех значений параметра ε выполняются следующие условия:

а) В невозмущенной системе возможны незатухающие гармонические колебания с частотой $\omega_1(\tau)$ зависящие только от двух произвольных постоянных;

б) Единственным решением системы уравнений (4) соответствующим равновесию в невозмущенной системе является тривиальное решение $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$.

в) В невозмущенной системе отсутствуют внутренние резонансы, то есть $\omega_1(\tau) \neq \frac{s}{r} \omega_k(\tau)$, где s и r — взаимно простые числа, $k = 2, 3, \dots, n$.

При этих допущениях асимптотическое приближение m -го порядка, решения системы уравнений (1) ищем в виде

$$q_i = \varphi_i^{(1)}(\tau) a \cos \psi + \sum_{l=1}^m \varepsilon^l \mu_i^{(l)}(\tau, a, \theta_1, \dots, \theta_N, \psi), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

где $\tau = \varepsilon t$, функции $\mu_i^{(l)}(\tau, a, \theta_1, \dots, \theta_N, \psi)$ периодические по $\theta_1, \dots, \theta_N$ с периодами 2π , а величины a и φ как функции времени определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{da}{dt} = \sum_{l=1}^m \varepsilon^l A_l(\tau, a, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N) \varepsilon^l = \varepsilon; \quad \varphi_1 = \varphi, \quad (10)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_1(\tau) - \frac{p}{q} \nu_1(\tau) + \sum_{l=1}^m \varepsilon^l B_l(\tau, a, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N),$$

где

$$\psi = \frac{p}{q} \theta_1 + \varphi_1 \dots = \frac{p}{q} \theta_k + \varphi_k = \omega_1(\tau)t + \alpha_1(\tau), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (11)$$

где p и q взаимно простые небольшие числа, выбор которых зависит от исследуемого резонанса, $\omega_1(\tau)$ — корень уравнения (6), $\varphi_j^{(1)}(\tau)$ — нетривиальные решения уравнений (7).

Для составления асимптотического приближения решения необходимо найти такие выражения для функций

$$\mu_i^{(l)}(\tau, a, \theta_1, \dots, \theta_N, \psi), \quad A_l(\tau, a, \varphi, \varphi_2, \dots, \varphi_N), \quad B_l(\tau, a, \varphi, \varphi_2, \dots, \varphi_N), \quad (12)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

периодических по $\theta_1, \dots, \theta_N, \varphi, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ периода 2π , чтобы выражения (9) после подстановки в них вместо a и φ функции времени определяемых уравнениям (10) являлись решениями системы (1).

Надо отметить, что выражение (9) есть приближенное представление не для общего решения уравнений (1), а только для некоторого двухпараметрического семейства частных решений.

Дифференцируя выражения (9) по времени и учитывая при этом уравнения (10) находим

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} = & -\varphi_i^{(1)}(\tau)\omega_1(\tau)a\sin\psi + \varepsilon \left\{ \left[\frac{d\varphi_i^{(1)}(\tau)}{d\tau} a + \varphi_i^{(1)}(\tau)A_1(\tau, a, \varphi_k) \right] \cos\psi - \right. \\ & \left. -\varphi_i^{(1)}(\tau)aB_1(\tau, a, \varphi_k)\sin\psi + \frac{\partial\mu_i^{(1)}}{\partial\psi}\omega_1(\tau) + \sum_{k=1}^N \frac{\partial\mu_i^{(1)}}{\partial\theta_k} \nu_k(\tau) \right\} + \\ & + \varepsilon^2 \left\{ \varphi_i^{(1)}(\tau)A_2(\tau, a, \varphi_k)\cos\psi - \varphi_i^{(1)}(\tau)aB_2(\tau, a, \varphi_k)\sin\psi + \frac{\partial\mu_i^{(1)}}{\partial\tau} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial\mu_i^{(1)}}{\partial a} A_1(\tau, a, \varphi_k) + \frac{\partial\mu_i^{(1)}}{\partial\psi} B_1(\tau, a, \varphi_k) + \frac{\partial\mu_i^{(2)}}{\partial\psi}\omega_1(\tau) + \sum_{k=1}^N \frac{\partial\mu_i^{(2)}}{\partial\theta_k} \nu_k(\tau) \right\} + \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \quad (13)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{d^2q_i}{dt^2} = & -\varphi_i^{(1)}(\tau)a\omega_1^2(\tau)\cos\psi + \varepsilon \left\{ -\sin\psi \left\langle 2a\omega_1 \frac{d\varphi_i^{(1)}}{d\tau} + 2\varphi_i^{(1)}\omega_1 A_1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \varphi_i^{(1)}(\tau)a \left[\frac{d\omega_1}{d\tau} + \sum_{k=1}^N \left(\omega_1 - \frac{p}{q} \nu_k \right) \frac{\partial B_1}{\partial\varphi_k} \right] \right\rangle + \cos\psi \left\langle \varphi_i^{(1)}(\tau) \left[-2a\omega_1 B_1 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{k=1}^N \left(\omega_1 - \frac{p}{q} \nu_k \right) \frac{\partial A_1}{\partial\varphi_k} \right] \right\rangle + \frac{\partial^2\mu_i^{(1)}}{\partial\psi^2}\omega_1^2 + 2 \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2\mu_i^{(1)}}{\partial\psi\partial\theta_k} \omega_1 \nu_k + \\ & \left. + \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N \nu_k \nu_l \frac{\partial^2\mu_i^{(1)}}{\partial\theta_k\partial\theta_l} \right\} + \varepsilon^2 \left\{ \cos\psi \left\langle \frac{d^2\varphi_i^{(1)}}{d\tau^2} a + 2 \frac{d\varphi_i^{(1)}}{d\tau} A_1 - \right. \right. \\ & \left. \left. -\varphi_i^{(1)}a(B_1^2 + 2\omega_1 B_2) + \varphi_i^{(1)} \left[\frac{\partial A_1}{\partial\tau} + \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \sum_{k=1}^N \frac{\partial A_1}{\partial\varphi_k} \left(B_1 - \frac{p}{q} \sigma_k \right) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{k=1}^N \left(\omega_1 - \frac{p}{q} \nu_k \right) \frac{\partial A_2}{\partial\varphi_k} \right] \right\rangle - \sin\psi \left\langle 2aB_1 \frac{d\varphi_i^{(1)}}{d\tau} + 2\varphi_i^{(1)}(\omega_1 A_2 + A_1 B_1) + \right. \\ & \left. + \varphi_i^{(1)}a \left[\frac{\partial B_1}{\partial\tau} + \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + \sum_{k=1}^N \frac{\partial B_1}{\partial\varphi_k} \left(B_1 - \frac{p}{q} \sigma_k \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{k=1}^N \frac{\partial B_2}{\partial\varphi_k} \left(\omega_1 - \frac{p}{q} \nu_k \right) \right] \right\rangle + 2 \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2\mu_i^{(1)}}{\partial a\partial\theta_k} A_1 \nu_k + \\ & \left. + 2 \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2\mu_i^{(1)}}{\partial\psi\partial\theta_k} \nu_k B_1 + 2\omega_1 A_1 \frac{\partial^2\mu_i^{(1)}}{\partial a\partial\psi} + 2\omega_1 B_1 \frac{\partial^2\mu_i^{(1)}}{\partial\psi^2} + \right. \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 \mu_i^{(1)}}{\partial \theta_k \partial \tau} \nu_k + 2 \frac{\partial^2 \mu_i^{(1)}}{\partial \tau \partial \psi} \omega_1 + \frac{\partial \mu_i^{(1)}}{\partial a} \sum_{k=1}^N \left(\omega_1 - \frac{p}{q} \nu_k \right) \frac{\partial A_1}{\partial \varphi_k} + \\
& + \frac{\partial \mu_i^{(1)}}{\partial \psi} \left[\frac{d\omega_1}{d\tau} + \sum_{k=1}^N \left(\omega_1 - \frac{p}{q} \nu_k \right) \frac{\partial B_1}{\partial \varphi_k} \right] + \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mu_i^{(1)}}{\partial \theta_k} \frac{d\nu_k}{dt} + \\
& + \frac{\partial^2 \mu_i^{(2)}}{\partial \psi^2} \omega_1^2 + 2 \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 \mu_i^{(2)}}{\partial \psi \partial \theta_k} \nu_k \omega_1 + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{\partial^2 \mu_i^{(2)}}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \nu_k \nu_l \Big\} + \varepsilon^3 \dots,
\end{aligned}$$

где

$$\varphi_k = \psi - \frac{p}{q} \theta_k = \varphi - \varepsilon \frac{p}{q} \bar{\theta}_k, \quad \varphi \equiv \varphi_1, \quad \varepsilon \bar{\theta}_k = \theta_k - \theta_1, \quad \sigma_k = \frac{d\theta_k}{dt}. \quad (15)$$

Подставляя найденные значения q_j , $\frac{dq_j}{dt}$, $\frac{d^2 q_j}{dt^2}$ в левые и правые части уравнения (1) и раскладывая правую часть уравнения (1) в степенные ряды Тейлора по возрастающим степеням ε и приравнявая коэффициенты в левых и правых частях при одинаковых степенях ε , в результате получим системы уравнений относительно неизвестных функций (12). Первые две системы уравнений будут

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \left\{ a_{ij} \left[\frac{\partial^2 \mu_i^{(1)}}{\partial \psi^2} \omega_1^2 + 2 \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 \mu_i^{(1)}}{\partial \psi \partial \theta_k} \omega_1 \nu_k + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \nu_k \nu_l \frac{\partial^2 \mu_i^{(1)}}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \right] + b_{ij} \mu_i^{(1)} \right\} = \\
& = \sum_{i=1}^n a_{ij} \left\{ \sin \psi \left\langle a \left[2\omega_1 \frac{d\varphi_i^{(1)}}{d\tau} + \varphi_i^{(1)} \frac{d\omega_1}{d\tau} \right] + \varphi_i^{(1)} \left[2\omega_1 A_1 + a \sum_{k=1}^N \left(\omega_1 - \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{p}{q} \nu_k \right) \frac{\partial B_1}{\partial \varphi_k} \right] \right\rangle - \cos \psi \left\langle \varphi_i^{(1)} \left[\sum_{k=1}^N \left(\omega_k - \frac{p}{q} \nu_k \right) \frac{\partial A_1}{\partial \varphi_k} - 2a\omega_1 B_1 \right] \right\rangle + \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{da_{ij}}{d\tau} \varphi_i^{(1)} \omega_1 a \sin \psi + Q_j^{(1)}(\tau, \theta_1, \dots, \theta_N, a, \psi) \equiv \\
& \equiv G_j^{(1)}(\tau, \theta_1, \dots, \theta_N, a, \psi), \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
& \sum_{i=1}^n \left\{ a_{ij} \left[\frac{\partial^2 \mu_i^{(2)}}{\partial \psi^2} \omega_1^2 + 2 \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 \mu_i^{(2)}}{\partial \psi \partial \theta_k} \omega_1 \nu_k + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{\partial^2 \mu_i^{(2)}}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \nu_k \nu_l \right] + b_{ij} \mu_i^{(2)} \right\} = \\
& = \sum_{i=1}^n a_{ij} \left\{ \sin \psi \left\langle \varphi_i^{(1)} \left[2\omega_1 A_2 + a \sum_{k=1}^N \frac{\partial B_2}{\partial \varphi_k} \left(\omega_1 - \frac{p}{q} \nu_k \right) \right] \right\rangle - \cos \psi \left\langle \varphi_i^{(1)} \left[-2a\omega_1 B_2 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{k=1}^N \frac{\partial A_2}{\partial \varphi_k} \left(\omega_1 - \frac{p}{q} \nu_k \right) \right] \right\rangle \right\} + \sum_{i=1}^n a_{ij} \left\{ \sin \psi \left\langle 2aB_1 \frac{d\varphi_i^{(1)}}{d\tau} + \varphi_i^{(1)} \left[2A_1 B_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial \tau} + \right. \right. \right.
\end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial B_1}{\partial a} a A_1 + \sum_{k=1}^N a \frac{\partial B_1}{\partial \varphi_k} \left(B_1 - \frac{p}{q} \sigma_k \right) \Big] \Big\} - \cos \psi \left\langle \frac{d^2 \varphi_i^{(1)}}{d\tau^2} a + 2 \frac{d\varphi_i^{(1)}}{d\tau} A_1 + \right. \\
& + \varphi_i^{(1)} \left[-a B_1^2 + \frac{\partial A_1}{\partial \tau} + \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \sum_{k=1}^N \frac{\partial A_1}{\partial \varphi_k} \left(B_1 - \frac{p}{q} \sigma_k \right) \right] \Big\} + \\
& + \phi_{j0}^{(2)}(\tau, a, \theta_1, \dots, \theta_N, \psi) \equiv G_j^{(2)}(\tau, a, \theta_1, \dots, \theta_N, \psi), \quad j = 1, 2, \dots, n,
\end{aligned} \tag{17}$$

в которых введены обозначения

$$\begin{aligned}
\phi_{j0}^{(2)}(\tau, a, \theta_1, \dots, \theta_N, \psi) = & - \sum_{i=1}^n \frac{da_{ij}}{d\tau} \left\{ \left[\frac{d\varphi_i^{(1)}}{d\tau} a + \varphi_i^{(1)} A_1 \right] \cos \psi - \varphi_i^{(1)} a B_1 \sin \psi \right\} - \\
& - \sum_{i=1}^n \frac{da_{ij}}{d\tau} \left\{ \frac{\partial \mu_i^{(1)}}{\partial \psi} \omega_1 + \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mu_i^{(1)}}{\partial \theta_k} \nu_k \right\} - \sum_{i=1}^n a_{ij} \left\{ 2 \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 \mu_i^{(1)}}{\partial a \partial \theta_k} A_1 \nu_k + \right. \\
& + 2 \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 \mu_i^{(1)}}{\partial \psi \partial \theta_k} \nu_k B_1 + 2 \omega_1 A_1 \frac{\partial^2 \mu_i^{(1)}}{\partial a \partial \psi} + 2 \omega_1 B_1 \frac{\partial^2 \mu_i^{(1)}}{\partial \psi^2} + 2 \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 \mu_i^{(1)}}{\partial \theta_k \partial \tau} \nu_k + \\
& + 2 \frac{\partial^2 \mu_i^{(1)}}{\partial \tau \partial \psi} \omega_1 + \frac{\partial \mu_i^{(1)}}{\partial a} \sum_{k=1}^N \frac{\partial A_1}{\partial \varphi_k} \left(\omega_1 - \frac{p}{q} \nu_k \right) + \frac{\partial \mu_i^{(1)}}{\partial \psi} \left[\frac{d\omega_1}{d\tau} + \right. \\
& + \sum_{k=1}^N \frac{\partial B_1}{\partial \varphi_k} \left(\omega_1 - \frac{p}{q} \nu_k \right) \Big] + \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mu_i^{(1)}}{\partial \theta_k} \frac{d\nu_k}{d\tau} \Big\} + Q_j^{(2)}(\tau, \theta_1, \dots, \theta_N, a, \psi) + \\
& + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial Q_j^{(1)}}{\partial q} \mu_i^{(1)} + \frac{\partial Q_j^{(1)}}{\partial \dot{q}_i} \left[\left(\frac{d\varphi_i^{(1)}}{d\tau} a + \varphi_i^{(1)} A_1 \right) \cos \psi - \varphi_i^{(1)} a \sin \psi B_1 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial \mu_i^{(1)}}{\partial \psi} \omega_1 + \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mu_i^{(1)}}{\partial \theta_k} \nu_k \right] \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, n,
\end{aligned} \tag{18}$$

$$Q_j^{(m)}(\tau, \theta_1, \dots, \theta_N, a, \psi) = Q_j^{(m)}(\tau, \theta_1, \dots, \theta_N, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \Big|_{\substack{q_i = \varphi_i^{(1)} a \cos \psi \\ \dot{q}_i = -\varphi_i^{(1)} a \omega_1 \sin \psi}} \tag{19}$$

$$\frac{\partial Q_j^{(1)}}{\partial q_i} = \frac{\partial Q_j^{(1)}}{\partial q_i} \Big|_{\substack{q_i = \varphi_i^{(1)} a \cos \psi \\ \dot{q}_i = -\varphi_i^{(1)} a \omega_1 \sin \psi}} \tag{19'}$$

$$\frac{\partial Q_j^{(1)}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial Q_j^{(1)}}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\substack{q_i = \varphi_i^{(1)} a \cos \psi \\ \dot{q}_i = -\varphi_i^{(1)} a \omega_1 \sin \psi}} \tag{19''}$$

Главные части уравнения (16), как периодические функции относительно $\theta_1, \dots, \theta_N$ и ψ целесообразно представить в виде сумм Фурье

$$G_j^{(1)}(\tau, a, \theta_k, \psi) = \sum_{m, n_1, \dots, n_N} g_j^{(m, n_1, \dots, n_N)}(\tau, a) e^{i\{m\psi + \sum_{k=1}^N n_k \theta_k\}}, \quad (20)$$

где

$$g_j^{(m, n_1, \dots, n_N)}(\tau, a) = \frac{1}{(2\pi)^{N+1}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi}}_{N+1} G_j^{(1)}(\tau, a, \theta_k, \psi) e^{-i\{m\psi + \sum_{k=1}^N n_k \theta_k\}} d\psi d\theta_1 \dots d\theta_N, \quad (21)$$

функции $\mu_j^{(1)}(\tau, a, \theta_1, \dots, \theta_N, \psi)$ будем искать в виде сумм

$$\mu_i^{(1)}(\tau, a, \theta_1, \dots, \theta_N, \psi) = \sum_{m, n_1, \dots, n_N} \mu_{(i1)}^{(m, n_1, \dots, n_N)}(\tau, a) e^{i\{m\psi + \sum_{k=1}^N n_k \theta_k\}}, \quad (22)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad -\infty < m, n_1, \dots, n_N < +\infty$$

в которых коэффициенты $\mu_{(i1)}^{(m, n_1, \dots, n_N)}(\tau, a)$ подлежат определению.

Дифференцируя выражения (22) и подставляя в уравнения (16) а затем приравнявая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем для определения коэффициентов $\mu_{(i1)}^{(m, n_1, \dots, n_N)}(\tau, a)$ систему алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^n \{b_{ij} - a_{ij} (m\omega_1 + \sum_{k=1}^N n_k \nu_k)^2\} \mu_{i1}^{(m, n_1, \dots, n_N)}(\tau, a) = g_{(i1)}^{(m, n_1, \dots, n_N)}(\tau, a), \quad (23)$$

для решения которой воспользуемся нормальными координатами, искажая выражения для $\mu_{i1}^{(m, n_1, \dots, n_N)}(\tau, a)$ в виде суммы

$$\mu_{i1}^{(m, n_1, \dots, n_N)}(\tau, a) = \sum_{l=1}^n C_l^{(m, n_1, \dots, n_N)}(\tau, a) \varphi_i^{(l)}(\tau), \quad (24)$$

где $\varphi_i^{(l)}(\tau)$ нормальные функции, а $C_l^{(m, n_1, \dots, n_N)}$ неизвестные коэффициенты подлежащие определению. Подставляя (24) в (23) и умножая эти уравнения соответственно на $\varphi_j^{(l)}(\tau)$ и суммируя результат по j находим, что

$$C_l^{(m, n_1, \dots, n_N)}(\tau, a) = \frac{\sum_{j=1}^n g_{(j1)}^{(m, n_1, \dots, n_N)}(\tau, a) \varphi_j^{(l)}(\tau)}{m_l(\tau) \{\omega_l^2 - (m\omega_1 + \sum_{k=1}^N n_k \nu_k)^2\}}, \quad (25)$$

причем мы приняли во внимание ортогональность нормальных функций (8) и ввели обозначение

$$m_l(\tau) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\tau) \varphi_i^{(l)}(\tau) \varphi_j^{(l)}(\tau). \quad (26)$$

Для иско́мых функций получаем

$$\mu_l^{(1)}(\tau, a, \theta_1, \dots, \theta_N, \psi) = \sum_{m, n_1, \dots, n_N} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{g_{(j1)}^{(m, n_1, \dots, n_N)}(\tau, a) \varphi_j^{(l)}(\tau) \varphi_l^{(l)}(\tau)}{m_l \{ \omega_l^2 - (m\omega_1 + \sum_{k=1}^N n_k \nu_k)^2 \}} e^{i\{m\psi + \sum_{k=1}^N n_k \theta_k\}}$$

Периодические функции $\mu_{i(j1)}^{(1)}(\tau, a, \theta_1, \dots, \theta_N, \psi)$ должны быть конечными, для этого должны отсутствовать члены, знаменатели которых могут обратиться в нуль при некоторых значениях τ . Это может случиться при значениях m и n_k , удовлетворяющих равенствам

$$m\omega_1 + \sum_{k=1}^N n_k \nu_k = \pm \omega_1 \quad (27)$$

или

$$p(m \pm 1) + q \sum_{k=1}^N n_k = 0,$$

так как при некоторых значениях τ возможно $\omega_1(\tau) = \frac{p}{q} \nu_k(\tau)$. Поэтому $\mu_i^{(1)}(\tau, a, \theta_1, \dots, \theta_N, \psi)$ принимают конечные значения, если выполняется следующее условие

$$\sum_{m, n_1, \dots, n_N} \sum_{j=1}^n g_{(j1)}^{(m, n_1, \dots, n_N)}(\tau, a) \varphi_j^{(1)}(\tau) e^{i\{m\psi + \sum_{k=1}^N n_k \theta_k\}} = 0, \quad \left[p(m \pm 1) + q \sum_{k=1}^N n_k = 0 \right] \quad (28)$$

тождественно по a и τ в рассматриваемой области их изменения, поэтому нужно заранее оценить область возможного изменения функций $a(\tau)$.

Надо сказать, что функции (3) не должны содержать членов в которых при $m = 0, \sum_{k=1}^N n_k = 0, k \neq 1, n_k \neq 0$. Это всегда можно сделать введя новые θ_l . Принимая во внимание (28) и (26), (20), (21), (22) находим для $\mu_i^{(1)}(\tau, a, \theta_1, \dots, \theta_N, \psi)$ следующие выражения

$$\begin{aligned} \mu_i^{(1)}(\tau, a, \theta_1, \dots, \theta_N, \psi) &= \left[p(m \pm 1) + q \sum_{k=1}^N n_k \neq 0 \text{ для } l = 1 \right] \\ & \frac{1}{(2\pi)^{N+1}} \sum_{m, n_1, \dots, n_N} \sum_{l=1}^n \varphi_l^{(l)}(\tau) \\ & \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^n Q_j^{(1)}(\tau, a, \theta_k, \psi) e^{-i\{m\psi + \sum_{k=1}^N n_k \theta_k\}} d\psi d\theta_1, \dots, d\theta_N}{m_l \{ \omega_l^2 - (\omega_1 m + \sum_{k=1}^N n_k \nu_k)^2 \}} e^{i\{m\psi + \sum_{k=1}^N n_k \theta_k\}} \end{aligned}$$

$$-2\omega_1(\tau)a \sum_{i=2}^n \frac{\sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T(\dot{q})}{\partial \dot{q}_j} \right]_{\dot{q}_i = \dot{\varphi}_i^{(1)}(\tau)} \varphi_j^{(1)}(\tau)}{m_i \{\omega_i^2 - \omega_1^2\}} \sin \psi, \quad (29)$$

где

$$m_i(\tau) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\tau) \varphi_i^{(1)}(\tau) \varphi_j^{(1)}(\tau) = 2T[\varphi_i^{(1)}(\tau)]. \quad (30)$$

Вводя обозначения $m = \sigma q \pm 1$ и $\sigma p = -\sigma_p$ равенство (26) можно представить в виде

$$\sum_{\sigma, n_1, \dots, n_N} \sum_{j=1}^n g_{(j1)}^{(\sigma q \pm 1, n_1, \dots, -\sigma p, \dots, n_N)}(\tau, a) \varphi_j^{(1)}(\tau) e^{\pm i\psi + i\sigma_q \varphi_r + \sum_{k=1}^N n_k \theta_k} = 0 \quad (31)$$

$$[n_k \neq n_r; \quad \sum n_k = 0, k \neq r].$$

Подставляя значения $g_{(j1)}^{(\sigma q \pm 1, n_1, \dots, -\sigma p, \dots, n_N)}(\tau, a)$ и приравнявая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^N \left[\omega_1(\tau) - \frac{p}{q} \nu_r(\tau) \right] \frac{\partial A_1}{\partial \varphi_r} - 2a\omega_1 B_1 = \\ & = \frac{2}{m_1(2\pi)^{N+1}} \sum_{k=1}^N \sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma_q \varphi_k} \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi}}_{N+1} \sum_{j=1}^n \varphi_j^{(1)} Q_j^{(1)} \cos \psi e^{-i\sigma_q \varphi_k} d\psi d\theta_1 \dots d\theta_N, \\ & 2\omega_1 A_1 + a \sum_{r=1}^N \left[\omega_1(\tau) - \frac{p}{q} \nu_r(\tau) \right] \frac{\partial B_1}{\partial \varphi_r} = -\frac{a}{m_1} \frac{d[m_1 \omega_1]}{d\tau} - \\ & - \frac{2}{m_1(2\pi)^{N+1}} \sum_{k=1}^N \sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma_q \varphi_k} \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi}}_{N+1} \sum_{j=1}^N \varphi_j^{(1)} Q_j^{(1)} \sin \psi e^{-i\sigma_q \varphi_k} d\psi d\theta_1 \dots d\theta_N. \end{aligned} \quad (32)$$

Введем обозначения

$$c_{\sigma k}(\tau, a) = \frac{2}{m_1(2\pi)^{N+1}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi}}_{N+1} \sum_{j=1}^N \varphi_j^{(1)} Q_j^{(1)} \cos \psi e^{-i\sigma_q \left(\psi - \frac{p}{q} \theta_k \right)} d\psi d\theta_1 \dots d\theta_N, \quad (33)$$

$$d_{\sigma k}(\tau, a) = -\frac{2}{m_1(2\pi)^{N+1}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi}}_{N+1} \sum_{j=1}^N \varphi_j^{(1)} Q_j^{(1)} \sin \psi e^{-i\sigma_q \left(\psi - \frac{p}{q} \theta_k \right)} d\psi d\theta_1 \dots d\theta_N.$$

Функции $A_1(\tau, a, \varphi_k)$, $B_1(\tau, a, \varphi_k)$ однозначно определяются из неоднородной системы линейных уравнений (31) как частное, периодическое решение этой системы методом неопределенных коэффициентов

$$A_1(\tau, a, \varphi, \varphi_2, \dots, \varphi_N) = -\frac{a}{2m_1\omega_1} \frac{d[m_1\omega_1]}{d\tau} +$$

$$+ \sum_{k=1}^N \sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty} \frac{i\sigma q \left(\omega_1 - \frac{p}{q} \nu_k\right) c_{\sigma k}(\tau, a) + 2\omega_1 d_{\sigma k}(\tau, a)}{4\omega_1^2 - \sigma^2(q\omega_1 - p\nu_k)^2} e^{i\sigma q \varphi_k}, \quad (34)$$

$$B_1(\tau, a, \varphi, \varphi_2, \dots, \varphi_N) = \sum_{k=1}^N \sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty} \frac{i\sigma q \left(\omega_1 - \frac{p}{q} \nu_k\right) d_{\sigma k}(\tau, a) - 2\omega_1 c_{\sigma k}(\tau, a)}{a\{4\omega_1^2 - \sigma^2(q\omega_1 - p\nu_k)^2\}} e^{i\sigma q \varphi_k},$$

где

$$i = \sqrt{-1}.$$

На основании (33) можем построить уравнения первого приближения для амплитуды и фазы

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon a}{2m_1\omega_1} \frac{d(\omega_1 m_1)}{d\tau} + \varepsilon \sum_{k=1}^N \sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty} \frac{i\sigma(q\omega_1 - p\nu_k) c_{\sigma k} + 2\omega_1 d_{\sigma k}}{4\omega_1^2 - \sigma^2(q\omega_1 - p\nu_k)^2} e^{i\sigma(q\varphi - \varepsilon p \bar{\nu}_k)},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_1 - \frac{p}{q} \nu_1 + \varepsilon \sum_{k=1}^N \sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty} \frac{i\sigma(q\omega_1 - p\nu_k) d_{\sigma k} - 2\omega_1 c_{\sigma k}}{a\{4\omega_1^2 - \sigma^2(q\omega_1 - p\nu_k)^2\}} e^{i\sigma(q\varphi - \varepsilon p \bar{\nu}_k)}. \quad (35)$$

Из уравнений (17) получим для определения $A_2(\tau, a, \varphi_1, \dots, \varphi_N)$ и $B_2(\tau, a, \varphi_1, \dots, \varphi_N)$ систему уравнений

$$\sum_{k=1}^N \left[\omega_1 - \frac{p}{q} \nu_k \right] \frac{\partial A_2}{\partial \varphi_k} - 2a\omega_1 B_2 = - \left\{ \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \sum_{k=1}^N \frac{\partial A_1}{\partial \varphi_k} \left(B_1 - \frac{p}{q} \sigma_k \right) + \right.$$

$$+ \frac{\partial A_1}{\partial \tau} - a B_1^2 + \frac{dm_1}{d\tau} \frac{A_1}{m_1} + \frac{a}{m_1} \sum_{j=1}^n \frac{d}{d\tau} \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{d\varphi_i^{(1)}}{d\tau} \right) \varphi_j^{(1)} \left. \right\} +$$

$$+ \frac{2}{(2\pi)^{N+1} m_1} \sum_{k=1}^N \sum_{\sigma} e^{i\sigma q \varphi_k} \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^n \phi_j^{(2)} \varphi_j^{(1)} e^{-i\sigma q \varphi_k} \cos \psi d\psi d\theta_1 \dots d\theta_N}_{N+1},$$

$$\sum_{k=1}^N \left[\omega_1 - \frac{p}{q} \nu_k \right] a \frac{\partial B_2}{\partial \varphi_k} + 2\omega_1 A_2 = - \left\{ a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + a \sum_{k=1}^N \frac{\partial B_1}{\partial \varphi_k} \left(B_1 - \frac{p}{q} \sigma_k \right) + \right.$$

$$+ a \frac{\partial B_1}{\partial \tau} + 2A_1 \frac{dm_1}{d\tau} + \frac{dm_1}{d\tau} a \frac{B_1}{m_1} \left. \right\} -$$

$$- \frac{2}{(2\pi)^{N+1} m_1} \sum_{k=1}^N \sum_{\sigma} e^{i\sigma q \varphi_k} \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^n \phi_j^{(2)} \varphi_j^{(1)} e^{-i\sigma q \varphi_k} \sin \psi d\psi d\theta_1 \dots d\theta_N}_{N+1}.$$

Система (35) имеет такой-же вид как и система (32), так что определение явных выражений для $A_2(\tau, a, \varphi, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ и $B_2(\tau, a, \varphi, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ не представляет затруднений.

В качестве первого приближения принимаем выражение

$$q_i|_I = \varphi_i^{(1)}(\tau) a \cos\left(\frac{p}{q} \theta_1 + \varphi\right), \quad (37)$$

в котором a и φ функции определяемые из первого приближения (35). В качестве второго приближения принимаем выражение:

$$q_i|_{II} = \varphi_i^{(1)}(\tau) a \cos\left(\frac{p}{q} \theta_1 + \varphi\right) + \varepsilon \mu_i^{(1)}(\tau, a, \theta_1, \dots, \theta_N, \varphi), \quad (37')$$

где a и φ определяются из уравнений второго приближения

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\tau, a, \varphi, \varphi_2, \dots, \varphi_N) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \varphi, \varphi_2, \dots, \varphi_N), \quad (38)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_1 - \frac{p}{q} \nu_1 + \varepsilon B_1(\tau, a, \varphi, \varphi_2, \dots, \varphi_N) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \varphi, \varphi_2, \dots, \varphi_N),$$

где $\varphi_1 \equiv \varphi$, $\varphi_k \equiv \varphi - \frac{p}{q} \varepsilon \bar{\theta}_k$ причем $A_2(\tau, a, \varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_N)$, $B_2(\tau, a, \varphi_1, \dots, \varphi_N)$ определяются из системы уравнений (36). Уравнения первого и второго приближения для амплитуды и фазы, a и φ , в общем случае не интегрируются в замкнутом виде и их приходится интегрировать численными методами.

2. Асимптотическое решение и уравнения первого приближения для частного случая системы (1)

Пусть исследуемая система находится под воздействием малого возмущения, определяемого обобщенными силами вида

$$\varepsilon Q_j(\tau, \theta_1, \dots, \theta_N, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \varepsilon Q_j^*(\tau, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) + \sum_{k=1}^N \varepsilon h_{kj}(\tau) \sin \theta_k. \quad (39)$$

Тогда исследование колебательного процесса сводится к рассмотрению системы нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \right\} + \sum_{i=1}^n b_{ij} q_i = \varepsilon Q_j^*(\tau, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) + \sum_{k=1}^N \varepsilon h_{kj} \sin \theta_k. \quad (40)$$

Предполагаем выполненными условия из параграфа 1 и будем рассматривать случай основного резонанса, когда частоты внешней силы $\frac{d\theta_k}{dt} = \nu_k(\tau) \approx \omega_1(\tau)$ блиски

к первой собственной частоте. И для упрощения остановимся на построении первого приближения двухпараметрического семейства частных решений, соответствующих одночастотному колебательному режиму, который близок к первому нормальному колебанию. В первом приближении такое решение будет

$$q_i(t) = \varphi_i^{(1)}(\tau) a \cos(\theta_1 + \varphi), \quad (41)$$

где амплитуда a и фаза φ , как функции времени должны быть определены из системы уравнений первого приближения

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = & -\frac{\varepsilon a}{2m_1\omega_1} \frac{d(\omega_1 m_1)}{d\tau} - \frac{\varepsilon}{2\pi m_1\omega_1} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^n \varphi_j^{(1)} Q_j^*(\tau, a, \psi) \cos \psi d\psi - \\ & - \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon \sum_{j=1}^n h_{kj} \varphi_j^{(1)}}{m_1(\omega_1 + \nu_k)} \cos(\varphi - \varepsilon \bar{\theta}_k), \\ \frac{d\varphi}{dt} = & \omega_1 - \nu_1 - \frac{\varepsilon}{2\pi m_1\omega_1} a \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^n \varphi_j^{(1)} Q_j^*(\tau, a, \psi) \sin \psi d\psi - \\ & - \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon \sum_{j=1}^n h_{kj} \varphi_j^{(1)}}{m_1 a(\omega_1 + \nu_k)} \sin(\varphi_k - \varepsilon \bar{\theta}_k), \end{aligned} \quad (42)$$

причем $\varphi_1 \equiv \varphi$, $\theta_1 = 0$.

Остановимся и на частном случае, когда в системе действуют диссипативные силы

$$\varepsilon Q_j^*(\tau, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \varepsilon \sum_{i=1}^N \lambda_{ij}(\tau) \dot{q}_i. \quad (43)$$

Решение предполагаем в виде (41), где a и φ должны быть определены из системы уравнений первого приближения

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = & \frac{\varepsilon}{2m_1\omega_1} \left\{ n_1(\tau) \omega_1 - \frac{d(\omega_1 m_1)}{d\tau} \right\} - \varepsilon \sum_{k=1}^N \frac{\sum_{j=1}^n h_{kj} \varphi_j^{(1)}}{m_1(\omega_1 + \nu_k)} \cos(\varphi_k - \varepsilon \bar{\theta}_k), \\ \frac{d\varphi}{dt} = & \omega_1 - \nu_1 + \varepsilon \sum_{k=1}^N \frac{\sum_{j=1}^n h_{kj} \varphi_j^{(1)}}{m_1 a(\omega_1 + \nu_k)} \sin(\varphi_k - \varepsilon \bar{\theta}_k), \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$n_1(\tau) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}(\tau) \varphi_i^{(1)}(\tau) \varphi_j^{(1)}(\tau).$$

3. Энергетический метод построения уравнения для амплитуды и фазы первого асимптотического приближения решения

Уравнения первого приближения (35) допускают простую энергетическую интерпретацию, используя которую возможно найти уравнения приближений без предварительного составления точных уравнений.

Запишем выражение среднего значения виртуальной работы которую совершают возмущающие силы $Q_j^{(1)}(\tau, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, \theta_1, \dots, \theta_N)$ в режиме синусоидальных колебаний

$$q_i = \varphi_i^{(1)}(\tau) a \cos \psi, \quad \dot{q}_i = -\varphi_i^{(1)}(\tau) a \omega_1 \sin \psi \quad (45)$$

на виртуальных перемещениях

$$\delta q_i^{(k)} = \varphi_i^{(1)}(\tau) [\delta a \cos \psi - a \sin \psi \delta \varphi_k], \quad (46)$$

соответствующих вариациям амплитуды и фазы первого „нормального“ колебания.

С точностью до величин первого порядка малости имеем

$$\delta \bar{W} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^n Q_j^{(1)}(\tau, a, \psi, \theta_1, \dots, \theta_N) \varphi_j^{(1)} \{ \delta a \cos \psi - a \sin \psi \delta \varphi_k \} d\psi. \quad (47)$$

Разложив $Q_j^{(1)}$ в ряд Фурье

$$Q_j^{(1)}(\tau, a, \psi, \theta_1, \dots, \theta_N) = \sum_{m, n_1, \dots, n_N} f_{(j1)}^{(m, n_1, \dots, n_N)}(\tau, a) e^{i \{ m\psi + \sum_{k=1}^N n_k \theta_k \}}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (48)$$

и интегрируя после этого выражение (47) для полной фазы ψ получим

$$\begin{aligned} \delta \bar{W} = & \sum_{k=1}^N \sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty} \frac{\delta a e^{i\sigma q \varphi_k}}{(2\pi)^{N+1}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi}}_{N+1} \sum_{j=1}^n Q_j^{(1)} \varphi_j^{(1)} \cos \psi e^{-i\sigma q \varphi_k} d\psi d\theta_1 \dots d\theta_N - \\ & - \sum_{k=1}^N \sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty} \frac{a e^{i\sigma q \varphi_k} \delta \varphi_k}{(2\pi)^{N+1}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi}}_{N+1} \sum_{j=1}^n Q_j^{(1)} \varphi_j^{(1)} \sin \psi e^{-i\sigma q \varphi_k} d\psi d\theta_1 \dots d\theta_N. \end{aligned} \quad (49)$$

Индексы суммирования δ и k связаны с индексами n_k и m разложения (48) в ряд Фурье соотношениями $m = \sigma q \pm 1$ и $n_k = -\sigma r$.

Среднюю величину виртуальной работы можно записать в виде

$$\delta \bar{W} = \sum_{k=1}^N \sum_{\sigma} \left(\frac{\delta \bar{W}_{\sigma, k}}{\delta a} \right) \delta a + \left(\frac{\delta \bar{W}_{\sigma, k}}{\delta \varphi_k} \right) \delta \varphi_k \quad (50)$$

($\delta \bar{W}$ — в общем случае не является дифференциалом).

При таком обозначении уравнения первого приближения для амплитуды и фазы принимают вид

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon a}{2\omega_1 m_1} \frac{d(\omega_1 m_1)}{d\tau} + \frac{2\varepsilon}{m_1} \sum_{k=1}^N \sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty} \frac{i\sigma(q\omega_1 - p\nu_k) \frac{\delta \bar{W}_{\sigma,k}}{\delta a} + 2\omega_1 \frac{1}{a} \frac{\delta \bar{W}_{\sigma,k}}{\delta \varphi_k}}{4\omega_1^2 - \sigma^2(q\omega_1 - p\nu_k)^2},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_1 - \frac{p}{q} \nu_1 + \frac{2\varepsilon}{m_1 a} \sum_{k=1}^N \sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty} \frac{i\sigma(q\omega_1 - p\nu_k) \frac{\delta \bar{W}_{\sigma,k}}{\delta \varphi_k} \frac{1}{a} - 2\omega_1 \frac{\delta \bar{W}_{\sigma,k}}{\delta a}}{\alpha \{4\omega_1^2 - \sigma^2(q\omega_1 - p\nu_k)^2\}},$$

$$\varphi_k = \varphi - \varepsilon \frac{p}{q} \bar{\theta}_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N; \quad \bar{\theta}_1 \equiv 0.$$

4. Примеры

1. Рассмотрим крутильные колебания коленчатого вала при нестационарном режиме, когда на вторую и третью массы действуют периодические крутящие моменты

$$M_2 = E_2 \sin \theta_2, \quad M_3 = E_3 \sin \theta_3, \quad (51)$$

где

$$E_1 = \text{const}; \quad E_3 = \text{const}; \quad \frac{d\theta_2}{dt} = \nu_2(\tau) \approx \omega_1(\tau)';$$

$$\frac{d\theta_3}{dt} = \nu_3(\tau) \approx \omega_1(\tau)'. \quad (52)$$

Колебания этого вала с одним крутящим моментом рассмотрены в [1]. Обозначим моменты инерции масс двигателя через $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$, и углы отклонения от равномерного вращения — через $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Пусть упругий момент зависящий от разности углов поворота прилегающих масс первого участка описывает нелинейная функция:

$$F(\varphi_2 - \varphi_1) = c_1(\varphi_2 - \varphi_1) + \varepsilon f(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (52)$$

и для второго — линейная функция $c_2(\varphi_3 - \varphi_2)$. Будем учитывать внутреннее трение второго участка вала. Уравнения крутильных колебаний вала в этом случае будут

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 \ddot{\varphi}_1 - F(\varphi_2 - \varphi_1) &= 0, \\ \mathcal{J}_2 \ddot{\varphi}_2 + F(\varphi_2 - \varphi_1) - c_2(\varphi_3 - \varphi_2) &= M_2 + \alpha(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2), \\ \mathcal{J}_3 \ddot{\varphi}_3 + c_2(\varphi_3 - \varphi_2) &= -\alpha(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2) + M_3. \end{aligned} \quad (53)$$

Введя замену $\varphi_2 - \varphi_1 = x$ и $\varphi_3 - \varphi_1 = y$ получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2 \ddot{x} + c_1(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2)x - c_2 \mathcal{J}_1 y &= -(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2) \varepsilon f(x) + \alpha \mathcal{J}_1 \dot{y} + E_2 \mathcal{J}_1 \sin \theta_2, \\ \mathcal{J}_2 \mathcal{J}_3 \ddot{y} - c_1 \mathcal{J}_3 x + c_2(\mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3)y &= \mathcal{J}_3 \varepsilon f(x) - \alpha(\mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3) \dot{y} - \mathcal{J}_3 E_2 \sin \theta_2 + \mathcal{J}_2 E_3 \sin \theta_3. \end{aligned} \quad (54)$$

Первую собственную частоту колебаний получаем как решение уравнения

$$\omega^4 \check{y}_1 \check{y}_2 \check{y}_3 - \omega^2 \check{y}_2 [c_1 \check{y}_3 (\check{y}_1 + \check{y}_2) + c_2 \check{y}_1 (\check{y}_2 + \check{y}_3)] - c_1 c_2 \check{y}_1 \check{y}_3 = 0 \quad (55)$$

и нормальные функции как решения системы

$$\begin{aligned} [c_1 (\check{y}_1 + \check{y}_2) - \omega^2 \check{y}_1 \check{y}_2] \varphi_1^{(1)} - c_2 \check{y}_2 \varphi_2^{(1)} &= 0, \\ -c_1 \check{y}_3 \varphi_1^{(1)} + [c_2 (\check{y}_2 + \check{y}_3) - \omega^2 \check{y}_2 \check{y}_3] \varphi_2^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Тогда согласно (42) частным решением системы (54) соответствующим одночастотным колебаниям близким к первому нормальному колебанию невозмущенного движения в первом приближении будет

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1^{(1)} a \cos(\theta_1 + \varphi), \\ y &= \varphi_2^{(1)} a \cos(\theta_1 + \varphi), \end{aligned} \quad (57)$$

где a и φ должны быть определены из системы уравнений первого приближения

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\alpha}{m_1} [(\check{y}_2 + \check{y}_3) \varphi_2^{(1)2} - \check{y}_1 \varphi_1^{(1)} \varphi_2^{(1)}] a - \frac{E_2 (\check{y}_1 \varphi_1^{(1)} - \check{y}_3 \varphi_2^{(1)})}{m_1 (\omega_1 + \nu_2)} \cos \varphi - \\ &\quad - \frac{E_3 \check{y}_2 \varphi_2^{(1)}}{m_1 (\omega_1 + \nu_3)} \cos(\varphi - \varepsilon \bar{\theta}), \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_1 - \nu_2(\tau) - \frac{[\check{y}_3 \varphi_2^{(1)} - (\check{y}_1 + \check{y}_2) \varphi_1^{(1)}]}{2\pi \omega_1 m_1 a} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(\varphi_1^{(1)} a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi - \\ &\quad - \frac{E_2 (\check{y}_1 \varphi_1^{(1)} - \check{y}_3 \varphi_2^{(1)})}{m_1 (\omega_1 + \nu_2) a} \sin \varphi + \frac{E_3 \check{y}_2 \varphi_2^{(1)}}{m_1 (\omega_1 + \nu_3) a} \sin(\varphi - \varepsilon \bar{\theta}), \end{aligned}$$

где введено

$$\varphi_2 \equiv \varphi, \quad \varphi_3 \equiv \varphi - \varepsilon \bar{\theta}, \quad \varepsilon \bar{\theta} = \theta_3 - \theta_2, \quad m_1 = \check{y}_1 \check{y}_2 \varphi_1^{(1)2} + \check{y}_2 \check{y}_3 \varphi_2^{(1)2}.$$

2. Рассмотрим поперечные колебания балки находящейся под воздействием системы подвижных грузов с приложенными к ним пульсирующими силами. Этот случай рассмотрен в работах [10, 11], когда грузы движутся с постоянной скоростью и медленно изменяющейся скоростью, но скорости изменения частот внешней силы одинаковые. Здесь составим уравнения первого приближения для амплитуды и фазы, когда скорости изменения частот внешней силы между собой отличаются. Введем обозначения: $M = \rho A l$ — масса балки, εM_k — массы грузов, $\varepsilon F_k = \varepsilon M h_k \sin \theta_k$ — внешняя сила действующая на k -ый подвижный груз, $\zeta_k = \zeta_k(t)$ — координата k -го груза считая от левой опоры, l — длина балки, A — площадь поперечного сечения (предположим, что она мала по сравнению с длиной балки), E — модуль Юнга, I — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси перпендикулярной к плоскости изгиба.

Как известно уравнение невозмущенного колебания имеет вид

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{\rho A}{EI} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (59)$$

с краевыми условиями

$$u(x, t) \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_{z=l} = 0. \quad (60)$$

Отсюда можно построить нормальные функции в виде

$$Z(x) = \varphi^{(k)}(x) = \sin \frac{k\pi}{l} x \quad (61)$$

и собственные частоты

$$\omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{A}}. \quad (62)$$

Возмущающая сила, которая действует на балку имеет следующий вид

$$\varepsilon \phi(\tau, \theta_1, \dots, \theta_N) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varepsilon \sum_{k=1}^N \left[F_k \sin \theta_k + M_k g - M_k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]_{z=\zeta_k}. \quad (63)$$

Решения соответствующие „высечастотному” колебанию балки (поперечному) в одночастотном режиме, близком первому нормальному колебанию при $\frac{d\theta_k}{dt} = v_k(\tau) \approx \omega_1$, ищем в виде

$$u(x, t) = a \sin \frac{\pi x}{l} \cos \psi, \quad (64)$$

где $\psi = \theta_1 + \varphi$, a и φ должны определяться из уравнения первого приближения.

Подставляя (64) и его производные в (63) получаем

$$\varepsilon \phi(\tau, \theta_1, \dots, \theta_N, -\omega_1^2 \varphi_1^{(1)}(x) a \cos \psi) = \varepsilon \sum_{k=1}^N \left[F_k \sin \theta_k + M_k g + M_k \omega_1^2 a \sin \frac{\pi \zeta_k}{l} \cos \psi \right]. \quad (65)$$

Пользуясь формально энергетическим методом, получаем следующие выражения для „частных” производных средней виртуальной работы

$$\begin{aligned} \frac{\delta \bar{W}_{1,k}}{\delta a} &= \frac{i}{4} e^{i\varphi_k} F_k \sin \frac{\pi}{l} \zeta_k, \\ \frac{\delta \bar{W}_{-1,k}}{\delta a} &= -\frac{i}{4} e^{-i\varphi_k} F_k \sin \frac{\pi}{l} \zeta_k, \\ \frac{\delta \bar{W}_{1,k}}{\delta \varphi_k} &= -\frac{a}{4} e^{i\varphi_k} F_k \sin \frac{\pi}{l} \zeta_k, \\ \frac{\delta \bar{W}_{-1,k}}{\delta \varphi_k} &= -\frac{a}{4} e^{-i\varphi_k} F_k \sin \frac{\pi}{l} \zeta_k, \\ \frac{\delta \bar{W}_{0,k}}{\delta a} &= \frac{a}{2} M_k \omega_1^2 \sin^2 \frac{\pi}{l} \zeta_k, \\ \frac{\delta \bar{W}_{\sigma,k}}{\delta a} &= 0; \quad \frac{\delta \bar{W}_{\sigma,k}}{\delta \varphi_k} = 0, \quad \text{для } \sigma \neq \pm 1, 0. \end{aligned} \quad (66)$$

Введено обозначения

$$m_1 = \rho A \int_0^l \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx = \frac{M}{2}; \quad \frac{M_k}{M} = \mu_k; \quad \frac{F_k}{M} = h_k \quad (67)$$

и на основании энергетической интерпретации уравнений первого приближения составляем уравнения первого приближения

$$\frac{da}{dt} = - \sum_{k=1}^N \frac{2\varepsilon h_k}{\omega_1 + \nu_k} \sin \frac{\pi}{l} \zeta_k(\tau) \cos \varphi_k,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_1 - \nu_1 - \sum_{k=1}^N \varepsilon \omega_1 \mu_k \sin^2 \frac{\pi}{l} \zeta_k(\tau) + \sum_{k=1}^N \frac{2\varepsilon h_k}{a(\omega_1 + \nu_k)} \sin \frac{\pi}{l} \zeta_k(\tau) \sin \varphi_k; \quad (68)$$

где

$$\zeta_k = \zeta_k(\tau), \quad \varphi_k = \varphi - \varepsilon \bar{\theta}_k, \quad \bar{\theta}_1 \equiv 0.$$

Интегрируя численными методами систему уравнений (68), можно построить резонансную кривую нестационарных колебаний балки в этом случае. Уравнения (68) можно применять в интервале времени, для которого все грузы движутся на балке, и выполняются условия

$$\nu_k(\tau) \approx \omega_{1(\tau)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Митропольский Ю. А., *Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах*, Изд. АН УССР, Киев 1955.
- [2] Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И., *Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных*, Изд. Института математики АН УССР, Киев 1968.
- [3] Боголобов Н. Н., *Одночастотные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы*, Сб. трудов Института строительной механики АН УССР, 10, 1949.
- [4] Крылов Н. М., Боголобов Н. Н., *Введение в нелинейную механику*, Изд. АН УССР, Киев 1937.
- [5] Боголобов Н. Н., Митропольский Ю. А., *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, ГОСТ ИММЛ, Москва 1958.
- [6] Митропольский Ю. А., *Медленные процессы в нелинейных системах со многими степенями свободы*, Прикладная матем. и мех., т. XIV 2, 1950.
- [7] Фещенко С. Ф., *Асимптотические представления интегралов линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами*, Докл. АН УССР, 2, 1947.
- [8] Рубаник В. П., *О взаимном влиянии гармоник в нелинейных системах при прохождении через резонанс*, Студенческие научные работы, Сб. XV 1, 1955.
- [9] Рашкович Д., *Теорија осцилација*, Научна књига, Београд 1965.
- [10] Л. М. Порхун, *Поперечные колебания балки, находящейся под воздействием системы пульсирующих сил с подвижными точками приложения*, Прикладная механика, т. 3, 11, 1967.

- [11] Стеванович Р. К., *О поперечных колебаниях балки под воздействием системы масс и приложенных к ним пульсирующих сил, двигающихся с переменной скоростью*, Сб. Асимптотические и качественные методы в теории нелинейных колебаний, Изд. Института математики АН УССР, Киев 1971.

Университет в Нише,
Югославия

BADANIA DRGAŃ WIELOCZĘSTOŚCIOWYCH NIELINIOWYCH UKŁADÓW
O WIELU STOPNIACH SWOBODY I Z WOLNO ZMIENIAJĄCYMI SIĘ PARAMETRAMI

Streszczenie

Wyniki uzyskane w tej pracy są uogólnieniem znanych wyników Ju. A. Mitropolskiego na temat aproksymacji asymptotycznych dla rozwiązań, które odpowiadają jednoczęstotliwościowym drganiom w pewnych układach nieliniowych, gdy siła zaburzająca zależy tylko od jednej wolno zmieniającej się częstotliwości. Procedura ta może być również zastosowana do układów drgających opisywanych przez cząstkowe równania różniczkowe z zaburzonymi parametrami.

"MANY FREQUENCY VIBRATION" IN ONE FREQUENCY REGIME OF
NONLINEAR SYSTEMS WITH SEVERAL DEGREES OF FREEDOM

Summary

The study is performed by the Krylov-Bogoliubov-Mitropolski asymptotic method. The results obtained here represent the generalization of the known asymptotic approximations of solutions which correspond to one-frequency vibration of nonlinear systems with several degrees of freedom. In such systems, both the parameters and perturbing force are slowly varying variables. This procedure can also be applied to vibrating systems described by partial differential equations with distributed parameters.

Поступило в Редакцию 10.V.1972

NELINEARNE OSCILACIJE S TRENJEM

Dr. Katica R. HEDRIH, docent Mašinskog fakulteta Univerziteta u Nišu

Miroslav B. DJURDJANOVIĆ, asistent Mašinskog fakulteta Univerziteta u Nišu

Proučićemo sopstvene oscilacije sistema s jednom materijalnom tačkom mase m i oprugom kod koje se javlja nelinearna zavisnost sile elastičnosti i deformacije opruge. Oscilator je prikazan na slici 1., pri čemu je sila elastičnosti opruge nelinearna funkcija izduženja (skraćenja) opruge prema zakonu:

$$F_e = c \cdot f(x)$$

Pored elastičnosti opruge, na materijalnu tačku dejstvuje sila težine tela i sila trenja. Sila težine tela se poništava s normalnim otporom F_n , a sila trenja - prema Coulomb-ovom zakonu o trenju - srazmerna je normalnom otporu $F_n = mg$, kolinearna je s brzinom ali je suprotnog smera:

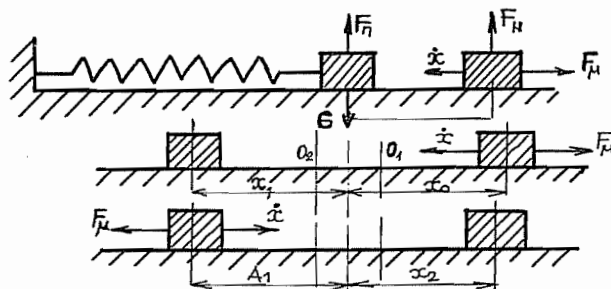
$$F_{\mu} = -\mu F_n (\text{sign } v) = -\mu F_n (\text{sign } \dot{x}) \quad (1)$$

gde je μ kinematički koeficijent trenja pri klizanju koji smatramo konstantnim, ali manjim od statičkog koeficijenta trenja pri mirovanju.

Diferencijalna jednačina kretanja nalevo biće:

$$m\ddot{x} + c.f(x) = -\mu mg(\text{sign } \dot{x}) + F_0 \cos \Omega t. \quad (2)$$

Kada se materijalna tačka izvede iz ravnotežnog položaja za elongaciju x_0 i pusti bez početne brzine, nastupiće kretanje nalevo



Slika 1.

ako je sila elastičnosti opruge po apsolutnoj vrednosti veća od sile trenja mirovanja $|-c.f(x_0)| > \mu_0 mg$, gde je μ_0 koeficijent trenja pri mirovanju. Navedena diferencijalna jednačina je oblika:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 f(x) = \mu g \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu g + \epsilon F(x) \quad \text{za } F_0 = 0 \quad (3)$$

gde je ϵ mali parametar. Za $\epsilon = 0$, dobijamo jednačinu neporemećenog oscilovanja u obliku

$$x_{1n}(t) = A_1 \cos \omega_0 t + B_1 \sin \omega_0 t + s \quad (4)$$

gde je $s = \mu g / \omega_0^2$ i $\omega_0^2 = c/m$. Potražimo rešenje jednačine poremećenog oscilovanja u obliku

$$x_1 = s + a_1 \cos \Psi_1 + \epsilon u_{11}(a_1, \Psi_1) + \dots \quad (5)$$

u kome su a_1 i Ψ_1 funkcije vremena koje se, saglasno metodi Krilova-Bogoljubova, određuju iz sistema diferencijalnih jednačina prve aproksimacije

$$\frac{da_1}{dt} = \varepsilon A_1(a_1) + \dots \quad (6)$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \omega_1 + \varepsilon B_1(a_1) + \dots$$

U predhodnim diferencijalnim jednačinama prve aproksimacije, funkcije $A_1(a_1)$ i $B_1(a_1)$ određuju se iz obrazaca:

$$A_1(a_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\pm s + a_1 \cos \psi_1) \sin \psi_1 d\psi_1 = 0$$

$$B_1(a_1) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\pm s + a_1 \cos \psi_1) \cos \psi_1 d\psi_1 = \frac{3}{8} \gamma a_1 (4s^2 + a_1^2) \quad (7)$$

u kojima je $F(\pm s + a_1 \cos \psi_1)$ zamenjeno sa

$$F(x) = \gamma x^3$$

$$F(\pm s + a_1 \cos \psi_1) = \gamma \left\{ \pm \frac{s}{2} \left[2s^2 + a_1 (1 + \cos 2\psi_1) \right] + \frac{3a_1}{4} (4s^2 + a_1^2) \cos \psi_1 + \frac{a_1^3}{4} \cos^3 \psi_1 \right\} \quad (8)$$

Kako su početni uslovi dati sa

$$t = 0 \quad x = x_0 \quad \dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = x_0 + s$$

to je zakon oscilovanja u prvoj aproksimaciji za slučaj kretanja nalevo:

$$x_1 = s + a_1 \cos \psi_1 = s + (x_0 + s) \cos \psi_1 \quad (9)$$

u kome su amplituda a_1 i faza ψ_1 u prvoj aproksimaciji:

$$\frac{da_1}{dt} = 0 \quad a_1 = x_0 + s \quad (10a)$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \omega_0 + \frac{3}{8} \frac{\epsilon \gamma}{\omega_0} (3s^2 + a_1^2); \quad \psi_1 = \omega_0 t + \frac{3}{8} \frac{\epsilon \gamma}{\omega_0} (3s^2 + a_1^2) t + \psi_{10}; \quad \psi_{10} = 0 \quad (10b)$$

odnosno kružna frekvencija poluoscilacije je funkcija amplitude poluoscilacije:

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{3}{8} \frac{\epsilon \gamma}{\omega_0} (3s^2 + a^2) \quad (11)$$

Telo će se kretati nalevo sve dok brzina materijalne tačke ne postane jednaka nuli, kada se materijalna tačka trenutno zaustavi. Taj trenutak je definisan sa:

$$t_0 = \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{\pi}{\omega_0 + \frac{3}{8} (3s^2 + a^2) \frac{\epsilon \gamma}{\omega_0}} \quad (12)$$

i tada materijalna tačka ima elongaciju:

$$x_1 = - (x_0 - 2s) \quad (13)$$

te je $|x_1| < |x_0|$. Pri trenutnom zaustavljanju menja se u tom trenutku znak brzine pa će nastupiti kretanje nadesno, ukoliko je ispunjen uslov

$$|-c(x_0 - 2s)| > \mu mg \quad (14)$$

Diferencijalna jednačina kretanja nadesno ima oblik

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\mu g + \epsilon F(\dot{x}) \quad (15)$$

Rešenje jednačine neporemećenog oblika je

$$x_{2n} = A_2 \cos \omega_0 t + B_2 \sin \omega_0 t - s \quad (16)$$

a rešenje jednačine poremećenog oscilovanja pri kretanju nadesno

$$x_2 = -s + a_2 \cos \psi_2 + \dots \quad (17)$$

u kome su amplituda $a_2(t)$ i faza oscilovanja $\Psi_2(t)$, funkcije vremena i određuju se iz sistema diferencijalnih jednačina prve aproksimacije:

$$\frac{da_2}{dt} = \varepsilon \mathcal{A}_2(a_2) + \dots \quad (18)$$

$$\frac{d\Psi_2}{dt} = \omega_0 + \varepsilon \mathcal{B}_2(a_2) + \dots$$

Funkcije $\mathcal{A}_2(a_2)$ i $\mathcal{B}_2(a_2)$ iz jednačina (18) određuju se naredjujući način

$$\mathcal{A}_2(a_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-s + a_2 \cos \Psi_2) \sin \Psi_2 d\Psi_2 = 0 \quad (19)$$

$$\mathcal{B}_2(a_2) = -\frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} (-s + a_2 \cos \Psi_2) \cos \Psi_2 d\Psi_2 = \frac{1}{\omega_0} \frac{3}{8} \varepsilon (3s^2 + a_2^2)$$

Početni uslovi za određivanje integracionih konstanti su uslovi (12) i (13) te su za kretanje nalevo, amplituda i faze:

$$\frac{da_2}{dt} = 0 \quad a_2 = x_0 - 3s$$

$$\frac{d\Psi_2}{dt} = \omega_0 + \frac{3}{8} \varepsilon \gamma \frac{1}{\omega_0} (3s^2 + a_2^2) \quad \Psi_2 = \omega_0 t + \frac{3}{8} \varepsilon \gamma \frac{1}{\omega_0} (3s^2 + a_2^2) t + \Psi_{20}, \quad \Psi_{20} = 0 \quad (20)$$

odnosno frekvencija

$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{3}{8} \varepsilon \gamma \frac{1}{\omega_0} (3s^2 + a_2^2) \quad (21)$$

Materijalna tačka će se kretati nadesno do trenutka kada njena brzina postane jednaka nuli:

$$t_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\omega_0 + \frac{3}{8} \frac{\varepsilon \gamma}{\omega_0} (3s^2 + a_2^2)} \quad (22)$$

kada je elongacija

$$x_2 = x_0 - 4s \quad (23)$$

koja predstavlja, pored brzine, početni uslov za naredni period kretanja nalevo.

Ako sa x_n označimo zakon kretanja materijalne tačke, gde indeks n označava redni broj poluperioda kretanja, to onda imamo u prvoj aproksimaciji da je:

$$x_n = (-1)^{n-1} s + \left[x_0 - (2n-1)s \right] \cos \left\{ \omega_n t + \frac{3}{8} \frac{\epsilon \gamma}{\omega_0} \left[3s^2 + (x_0 - (2n-1)s)^2 \right] \right\} \quad (24)$$

gde je

$$\omega_n = \omega_0 + \frac{3}{8} \frac{\epsilon \gamma}{\omega_0} \left\{ 3s^2 + \left[x_0 - (2n-1)s \right]^2 \right\} \quad (25)$$

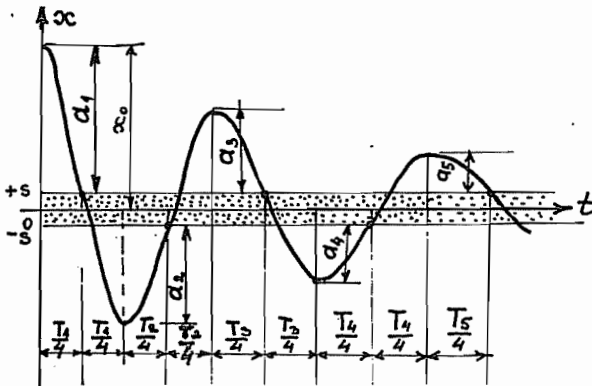
kružna frekvencija poluoscilacije koja je funkcija amplitude kretanja i veličine s koja zavisi od koeficijenta trenja i sopstvene frekvencije neporemećenog oscilovanja.

Period poluoscilacije može se u prvoj aproksimaciji odrediti u obliku

$$\frac{T_n}{2} = \frac{\pi}{\omega_n} = \frac{\pi}{\omega_0 + \frac{3}{8} \frac{\epsilon \gamma}{\omega_0} \left\{ 3s^2 + \left[x_0 - (2n-1)s \right]^2 \right\}} \quad (26)$$

Analizom dobijenih rezultata primenom metode Krilova-Bogoljubova dolazimo do sledećih zaključaka koji važe u prvoj aproksimaciji:

1) Dijagram x, t su kosinusne linije koje menjaju apscisnu osu kao kod linearnog oscilatora s trenjem, slika 2. Poluoscilacije sa negativnom brzinom $\dot{x} < 0$ imaju za osu pravu $x=s$, a poluoscilacije



sa pozitivnom brzinom $\dot{x} > 0$ osu $x = -s$. Ove krive linije seku prave $x = \pm s$ u tačkama čije su apscise $T_1/4$, $T_1/2 + T_2/4$, zatim $(T_1 + T_2)/2 + T_3/4$, $(T_1 + T_2 + T_3)/2 + T_4/4$, itd., što se već razlikuje od linearnog oscilatora s trenjem.

2) Amplitude poluoscilacija imaju vrednosti

$$a_n = x_0 - (2n-1)s$$

i iste su kao i kod linearnog oscilatora, tj. poluamplitude obrazuju opadajuću aritmetičku progresiju.

3) Kretanje je kvaziperiodično sa periodom poluoscilacije

$$\frac{T_n}{2} = \frac{\pi}{\omega_0 + \frac{3}{8} \frac{\mu g}{\omega_0} (3s^2 + a_n^2)}, \quad s = \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

koji je funkcija amplitude odgovarajuće poluoscilacije. On se menja tako da mu vrednost raste sa rednim brojem poluoscilacije. Period poluoscilacije nelinearnog oscilatora s trenjem je funkcija i koeficijenta trenja, za razliku od linearnog oscilatora s trenjem kod koga je on konstantan.

L i t e r a t u r a

- /1/ MITROPOLSKII J.A., Problemi asimptotičeskoj teoriji nestacionarnih kolebanii, Nauka, Moskva 1964.
- /2/ RAŠKOVIĆ D., Teorija oscilacija, Gradjevinska knjiga, Beograd 1974.
- /3/ VUJIČIĆ V., Teorija oscilacija, Naučna knjiga, Beograd 1969.
- /4/ STEVANOVIĆ R.K., RAŠKOVIĆ P.D., Isledovanie "višečastotnih" kolebanii v odnočastotnom režime v nelinjenih sistemah so mnogimi stepenjami svobodi i medleno menjajuščisja parametrami, Nonlinear vibration problems, 1974., Waršava

HEDRIH R.K., DJURDJANOVIĆ B.M.

NELINEARNE OSCILACIJE S TRENJEM

R e z i m e

U ovom radu je razmatrana problematika nelinearnog oscilovanja s trenjem metodom Krilov-Bogoljubova. Zaključeno je da se amplitude poluoscilacija i ovde ponašaju isto kao i kod linearnog oscilatora s trenjem. Međutim, period poluoscilacije je zavisan od koeficijenta trenja, za razliku od linearnog oscilatora gde je on konstantan.

NONLINEAR VIBRATIONS WITH FRICTION

S u m m a r y

In this paper is studied a vibrator with degree of freedom, by a nonlinear property spring, moving on the rough surface of the coefficient of friction.

It is derived the formulas determining a radian frequencies of the vibrations depending of the coefficient of frictions. Furthermore, comparisons is made with the case the vibrator having linear property spring and force of the friction.

1968



Dipl. ing. Katica Stevanović, asistent

ELASTIČNA STABILNOST AKSIJALNO NAPREGNUTIH (NA IZVIJANJE) ŠTAPOVA

Ovaj članak ima za cilj da čitaocu informiše o pitanju stabilnosti štapova aksijalno napregnutih na pritisak.

U klasičnim udžbenicima metode za izučavanje i dimenzionisanje aksijalno napregnutih štapova statički prilaze ovom pitanju. U najnovijoj literaturi iz oblasti nelinearne Mehanike i nelinearnih oscilacija mogu se naći metode koje ovom pitanju prilaze kao čisto dinamičkom problemu, a sa time i stabilnost položaja ravnoteže izvijenih štapova proučavaju kao oscilovanje štapa oko položaja ravnoteže. Ovde će biti dat prikaz dva načina posmatranja stabilnosti aksijalno napregnutih štapova, dinamičkim putem.

U prvoj metodi je korišćena fazna ravan i krive energije modela (aproksimacija elastičnog štapa) da bi se mogli izučiti položaji ravnoteže. U drugom slučaju posmatra se stabilnost vitkog štapa koji osciluje pod dejstvom pulzirajuće aksijalne sile, a konkretna diskusija o stabilnosti se bazira na Ince-Strutt-ovoj karti (koja prikazuje stabilne i nestabilne oblasti rešenja Methieu-ove diferencijalne jednačine) prilagođenoj za ovaj slučaj.

1° Za proučavanje elastične stabilnosti pravog štapa dinamičkim putem, na koji aksijalno dejstvuju kompresione sile može se usvojiti uprošćeni model sa slike br. 1. Model se sastoji iz dve šipke dužine l bez mase, koje po vertikali slobodno klize, a drugim delom su spojene zglobovom C. U zglobu se postiže otpor pomoću toziona opruge i još u zglobu je smeštena čestica mase m , koja zamenjuje masu elastične šipke. Model je dopunjen zavojnom oprugom.

Štap će biti u ravnoteži dok kompresione sile ne pređu izvesnu kritičnu vrednost, posle čega nastaje izvijanje ili lom. Rezultati ispitivanja na uprošćenom modelu mogu pružiti dovoljno tačne podatke o stanju stabilnosti, iako je ispitivanje svedeno na jedan stepen slobode oscilovanja, umesto da se radi sa beskonačno mnogo stepenij slobode kretanja.

Kompresione sile dejstvuju na krajevima A i B štapova duž vertikalne linije. Zavojne opruge u zglobu C stvaraju bočnu silu koja zavisi

od pomeranja x . Štapovi AC i BC dejstvuju jedan na drugi pomoću torziona opruge u zglobu C, čiji je moment srazmeran uglu zaokretanja jednog u odnosu na drugi. Ova torziona opruga zamenjuje krutost izvijanja elastičnog štapa, čija je aproksimacija model.

Iz uslova jednakosti sila u vertikalnom pravcu sledi da su vertikalne komponente sila jednake, dok iz momentne jednačine za tačku C sledi

$$-\frac{M}{2} + V_1 \sin \theta - \frac{Fl}{2} \cos \theta = 0 \quad (1)$$

gde je

$$M = 2k_1 \theta = 2k_1 \arcsin \frac{x}{l}$$

moment torziona opruge u zglobu, te se iz jednačine (1) dobija sila F kao funkcija koordinate x

$$F(x) = \frac{2Pl \sin \theta - k_1 \arcsin \frac{x}{l}}{l \cos \theta} = \frac{2Px - k_1 \arcsin \frac{x}{l}}{(l^2 - x^2)^{1/2}} \quad (1')$$

Jednačina kretanja mase je

$$m \ddot{x} + f(x) = F \quad (2)$$

gde je

$$f(x) = \alpha x + \beta x^3 \quad (2')$$

sila zavojne opruge izražena preko nelinearne karakteristike. Uzevši u obzir (1') i (2') izraz (2) dobija oblik

$$m \ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 - \frac{2P \frac{x}{l} - \frac{k_1}{l} \arcsin \frac{x}{l}}{\left[1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right]^{1/2}} = 0 \quad (2'')$$

Kako je obično pomeranje x suviše malo u odnosu na dužinu l ($x \ll l$) to možemo $F(x)$ razviti po stepenima (x/l) do trećeg stepena, a više stepene možemo zanemariti, te je

$$F(x) = \left(\frac{2k_1}{l^2} - \frac{2P}{l}\right) x + \left(\frac{4k_1}{3l^4} - \frac{P}{l^3}\right) x^3 + \dots \quad (1'')$$

Jednačina oscilovanja postaje

$$m \ddot{x} + \left(\alpha + \frac{2k_1}{l^2} - \frac{2P}{l}\right) x + \left(\beta + \frac{4k_1}{3l^4} - \frac{P}{l^3}\right) x^3 = 0 \quad (3)$$

Ako sa a_1 i a_3 obeležimo izraze uz prvi i treći stepen uz x onda diferencijalna jednačina kretanja dobija prostiji oblik

$$m \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_3 x^3 = 0$$

Kada bi samo problem posmatrali statički, stavili bi smo da je ubrzanje jednako nuli, tj. da je

$$a_1 \dot{x} + a_3 x^3 = 0$$

pri čemu bi smo pretpostavili da je x malo, tako da se x^3 može zanemariti i zadržati samo linearni član $a_1 \dot{x} = 0$, odakle sledi da je $\dot{x} = 0$ stanje ravnoteže, izuzev ako nije $a_1 = 0$. Iz $a_1 = 0$ dobija se kritična vrednost sile

$$P_{\text{krit.}} = \frac{\alpha l}{2} + \frac{k_1}{l}$$

Štap bi morao da se izviija, jer je ravnoteža indiferentna.

Za dinamičko proučavanje problema stabilnosti može se koristiti metoda fazne ravni, gde se na apscisnu osu nanosi koordinata x , a na

$$\text{ordinatnu osu } y = \dot{x} = \frac{dx}{dt}.$$

Diferencijalna jednačina faznih krivih je

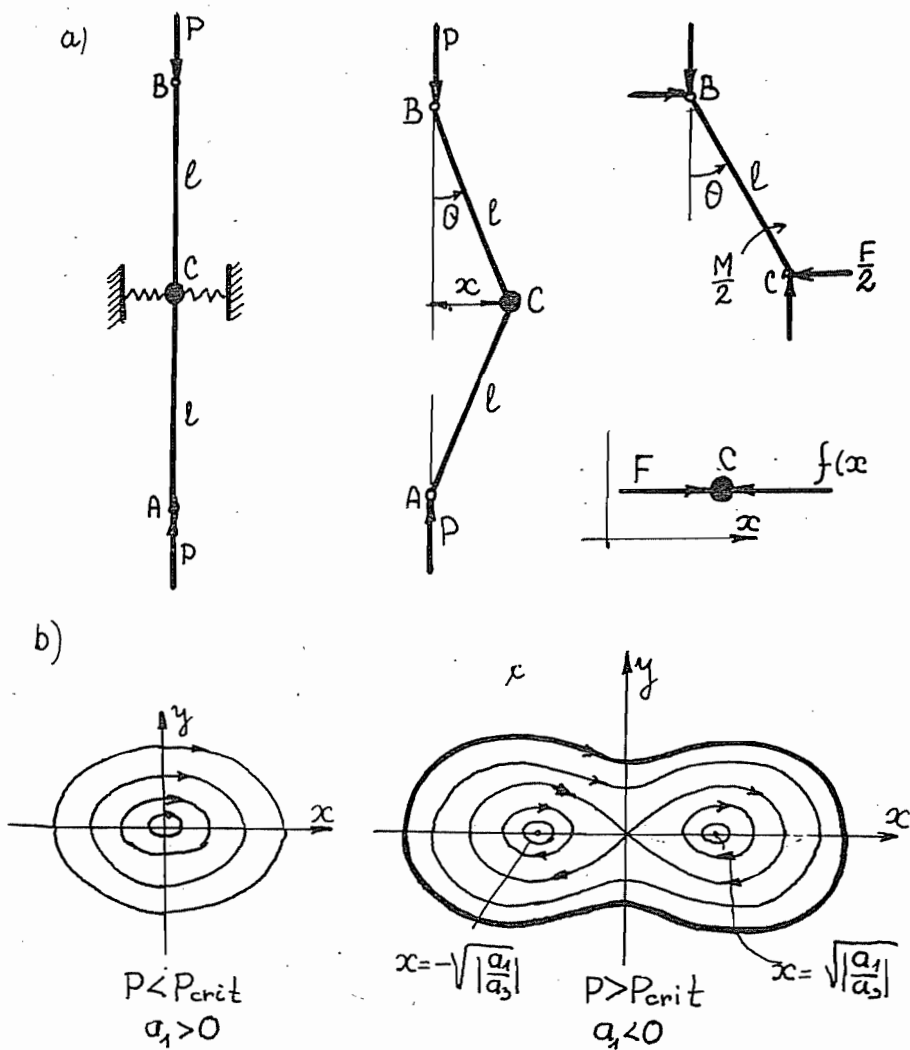
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{m} \frac{-a_1 x - a_3 x^3}{y} \quad (4)$$

što u konačnom obliku daje

$$y^2 + \frac{1}{m} (a_1 x^2 + \frac{1}{2} a_3 x^4) = \text{const.} \quad (5)$$

Fazne trajektorije imaju kao singularne tačke $y = 0$ i $a_1 x - a_3 x^3 = 0$. Singularna tačka $x = 0, y = 0$ se uvek javlja, dok su singularne tačke $y = 0, x = \pm \sqrt{-a_1/a_3}$ uslovljene znakom količnika a_1 i a_3 .

Pretpostavljajući da je $a_3 > 0$, što je opravdano ako je β dovoljno veliko (a i P/l^3 je malo zbog vitkog štapa), singularitete možemo posmatrati samo zavisno od znaka a_1 . Ako je $a_1 > 0$, tj. $P < P_{\text{krit.}}$ u faznom portretu javlja se samo jedna singularna tačka $x = 0, y = 0$ i to kao stabilni centar. Fazne trajektorije za taj slučaj su zatvorene krive i štap osciluje periodično oko položaja stabilne ravnoteže $x = 0, y = 0$. Na slici br. 1 b) prikazane su fazne trazekcije za taj slučaj.



Slika br. 1

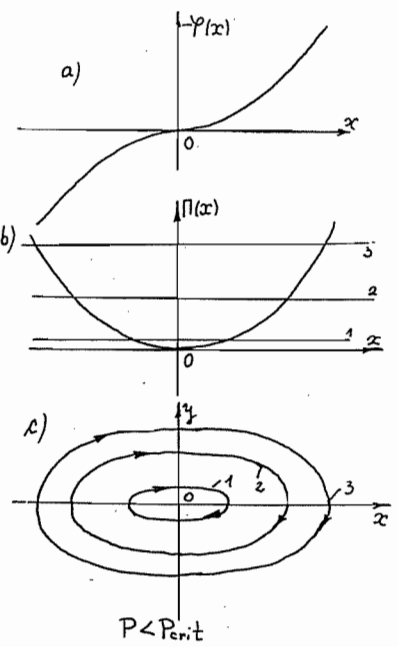
Za $a_1 < 0$, tj $P > P_{krit}$. fazni portret sadrži singularitete $x = 0$, $y = 0$, $x = \pm \sqrt{-a_1/a_3}$, $y = 0$. Prva je nestabilna sedlasta tačka, a druge dve tačke su stabilni centri.

Integralna kriva koja prolazi kroz sedlastu tačku je separatrisa u vidu »osmice« i obuhvata centre i zatvorene krive — fazne trajektorije, a okružena je takođe zatvorenim faznim trajektorijama. Kretanje je peri-odičko u širokom opsegu. Na slici br. 1 c) se mogu videti fazne krive za taj slučaj.

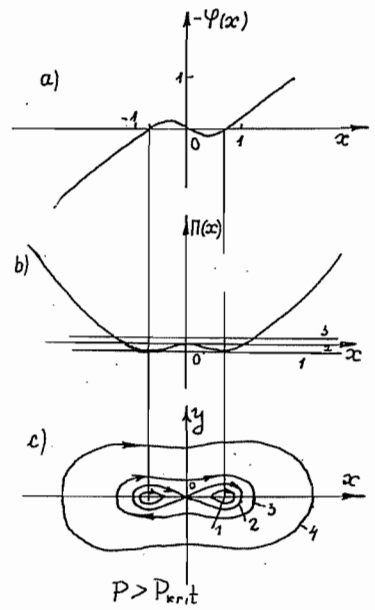
Kako je potencijalna energija

$$\Pi(x) = - \int \varphi(x) dx = \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{4} a_3 x^4 \quad (6)$$

izražena polinomom po x četvrtog stepena to se grafički mogu dobiti krive energije sa skica br. 2 i 3 pod b). Skice na slici br. 2 su izrađene za slučaj $P < P_{krit}$ dok je na slici br. 3 prikazan slučaj $P > P_{krit}$. Pomoću pravih $E = const$ na skicama obeleženim sa 1, 2, 3, mogu se dobiti fazne krive, koje kod konzervativnih sistema jednovremeno predstavljaju i krive na kojima je energija konstantna.



Slika br. 2



Slika br. 3

2° Interesantno je ispitati uticaj visokog trenja — prigušivanja — na elastičnu stabilnost prethodno posmatranog modela elastičnog stuba. Jednačina kretanja je tada

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + a_1 x + a_3 x^3 = 0 \quad (7)$$

gde je $b > 0$. Diferencijalna jednačina faznih krivih je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - a_1 x - a_3 x^3 - by}{m y} \quad (8)$$

Singularne tačke faznih krivih, položaji ravnoteže, ostaju kao i u slučaju

bez prigušivanja. Za $a_1 > 0$ singularitet $x = 0, y = 0$ je stabilna tačka, jer karakteristična jednačina prve proksimacije $r^2 + br + a_1 = 0$ sa korenima

$$r_{1/2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a_1}$$

koji imaju negativni realni deo za $b^2/4 < a_1$ kada je singularitet žiža, a oba su negativna za $b^2/4 > a_1$, te je tačka stabilni čvor.

ristična jednačina je $r^2 + br - |a_1| = 0$, i korni su

Za $a_1 > 0$ postoje tri singularne tačke. Za $x = 0, y = 0$ karakte-

$$r_{1/2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + |a_1|}$$

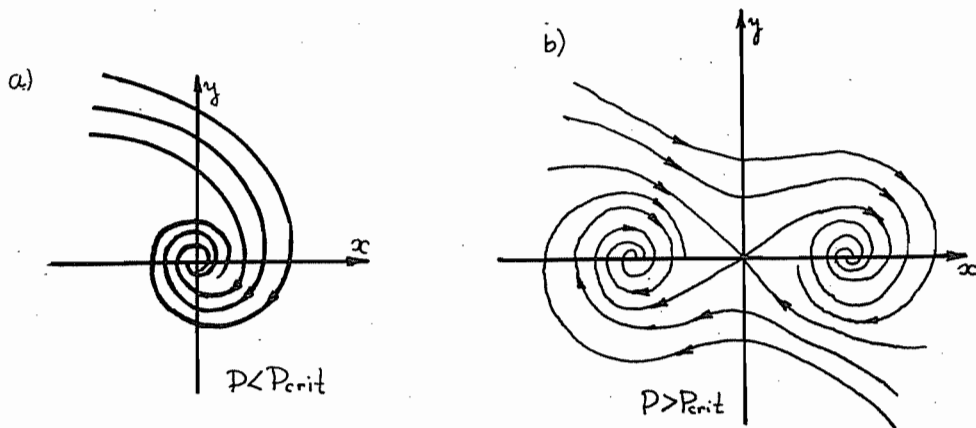
realni iraznog znaka pa je singularitet sedlo.

Za $x = \pm \sqrt{-a_1/a_3}, y = 0$ karakteristična jednačina sistema u prvom približenju je

$$r^2 + br + 2|a_1| = 0, \text{ sa korenima } r_{1/2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2|a_1|}$$

koji za $b^2/4 > 2|a_1|$ određuju čvornu tačku, dok za $b^2/4 < 2|a_1|$ određuju žižu. Obadve tačke javljaju se kao stabilni položaji ravnoteže.

Fazne krive su skicirane na slici br. 4 a i b. Može se uočiti da sva



Sl. 4.

kretanja teže jednom ili drugom položaju ravnoteže (žiža ili čvor). Fazne krive sadrže sedlastu tačku razdvajanja fazne trajektorije koje su usmerene ka stabilnim položajima ravnoteže.

Dinamička obrada problema stabilnosti elastičnog stuba na upro-

šćenom modelu daje zadovoljavajuće rezultate za objašnjenje pojave izvijanja.

3^o Posmatrajmo slučaj stabilnosti vitkog štapa koji osciluje pod dejstvom pulzirajuće aksijalne sile. Diferencijalna jednačina oscilovanja štapa je

$$(EI y'''' + m\ddot{y} = -Py'' \quad (10)$$

gde su

E — modul elastičnosti

I — moment inercije za osu savijanja

m — masa raspoređena duž štapa po jedinici dužine

$P = P_0 + S \cos \Omega t$ pulzirajuća aksijalno pritisna sila

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = y'' \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}$$

Ako se uzme u obzir promenljivost aksijalne sile jednačina oscilovanja se dobija u obliku

$$EI y^{IV} + (P_0 + S \cos \Omega t) y'' + m\ddot{y} = 0 \quad (10')$$

Rešenje ove jednačine se može pretpostaviti u obliku proizvoda dveju funkcija kordinate z i vremena t

$$y = Y(z) T(t)$$

Za ivične uslove štapa

$$\begin{aligned} y(0) = y(l) = 0 \\ y''(0) = y''(l) = 0 \end{aligned}$$

rešenje se dobija u obliku

$$y(z,t) = A \sin \frac{n\pi z}{l} T(t) \quad (11')$$

Unošenje rešenja u jednačinu (10') uz smenu promenljive $\Omega t = \tau$ dobija se

$$T'' + T \left[\frac{1}{\Omega^2} \left(\frac{EI}{m} \frac{n^4 \pi^4}{l^4} - P_0 \frac{n^2 \pi^2}{ml^2} \right) - S \frac{n^2 \pi^2}{\Omega^2 ml^2} \cos \tau \right] = 0 \quad (10'')$$

a stavljajući

$$\lambda = \frac{1}{\Omega^2} \left(\frac{EI}{m} \frac{n^4 \pi^4}{l^4} - P_0 \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right) = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} (i - p)$$

$$\gamma = -\frac{\omega_0^2}{\Omega^2} s \text{ gde je sa } p \text{ i } s \text{ obelženo } p = \frac{P_0}{P_E} s = \frac{s}{P_E}$$

i $P_{E,n} = P_E = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$ je Euler — ova kritična sila i stavljeno je

$$\omega_0^2 = \frac{EI}{m} \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \text{ radi skraćenog pisanja.}$$

Jednačina (10'') se sada svodi na oblik koji je jednak Matheiu-ovoj diferencijalnoj jednačini

$$T'' + T(\lambda + \gamma \cos \tau) = 0 \quad (10''')$$

Na taj način je problem posmatranja stabilnosti aksijalno pritisnutog štapa sveden na posmatranje stabilnosti rešenja Matheiu-ove diferencijalne jednačine, te se u tom smislu može iskoristiti Ince—Strutt-ova karta. (Videti sliku br. 21.10 na 469 strani Teorije oscilacija — D. Rašković).

Podatke o stabilnosti kretanja ograničene oblasti (λ, γ) sa Ince—Strutt-ove karte možemo preneti na konstantne parametre proučavanog elastičnog štapa ω_0, P_0, S, Ω i $P_{E,n}$. Ako je potrebno dati stub ispitati na vrste opterećenja P , onda je potrebno utvrditi vrednosti za ω_0^2 i $P_{E,n}$. Kao osnova za diskusiju može se uzeti Euler-ova kritična sila $P_{E,1}$ za $n=1$, a i odgovarajuća vrednost λ . Aksijalna sila P u sebi sadrži P_0, S i Ω a sve te tri veličine određuju parametre transformisane jednačine λ i γ .

Kako frekvencija Ω utiče na oba parametra λ i γ , to se može uzeti u proučavanje stabilnost kretanja vitkog štapa za razne vrednosti odnosa

$$\frac{\omega_0^2}{\Omega^2} = \frac{1}{8}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; 1; 4.$$

za koje možemo »precrtati« Ince—Strutt-ovu kartu, ali tako da apscisa bude $p = P_0/P$, jer zavisi od p , a ordinata $s = S/P$ jer zavisi od s . Rezultati su prikazani na slikama 5 a,b,c,d,e. Vidi se da sada granične krive imaju suprotnu tendenciju (usmerenost) od onih u (λ, γ) ravni, jer je λ srazmerno negativnoj vrednosti p (plus jedna konstanta).

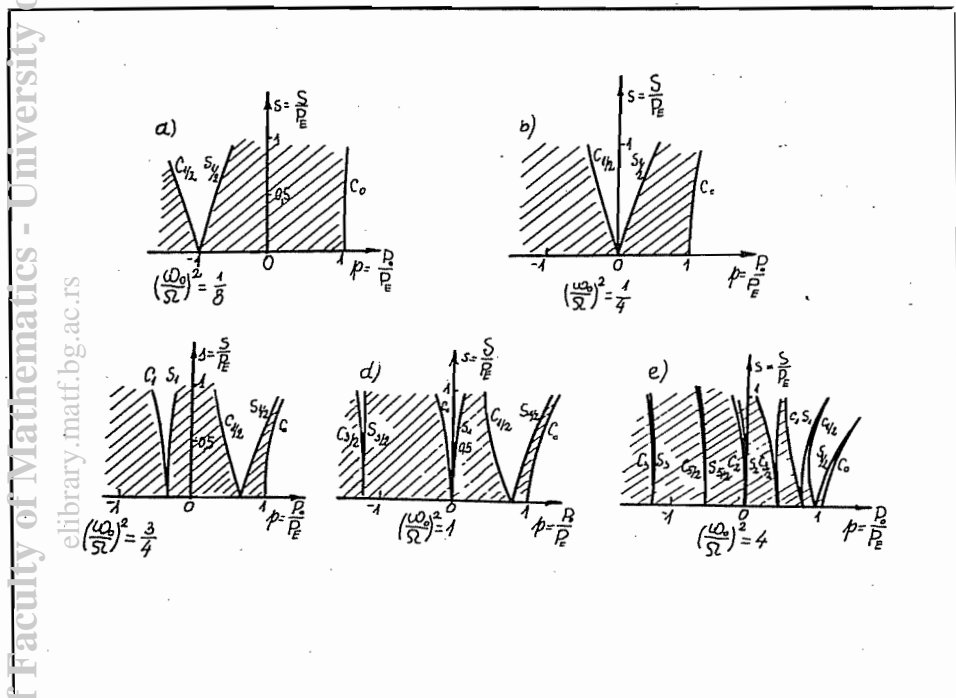
Nulta tačka Ince—Strutt-ove karte $\lambda = 0, \gamma = 0$ odgovara opterećenju stuba (štapa) pomoću Euler-ove kritične sile jer je

$$P_0 = P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad S = 0$$

Za $P_0 < P_E$ je $\lambda > 0$ i stanje je stabilno za $s=0$. Za $P_0 > P_E$ je $\lambda < 0$ i stanje vitkog štapa je nestabilno. Na osi p može se videti da je za $p < 1$ stabilno stanje, dok je za $p > 1$ labilno. Ovo su i objašnjenja Euler-ove teorije statičkim proučavanjem dejstva konstantne aksijalne sile. Za $P = 0$ dobija

se tačka Ince—Stutt-ove karte sa $\lambda = \omega_o^2/\Omega^2$.

Iz priloženih Ince—Strutt-ovih karti može se uočiti da sa poras-



Sl. 5

tom (ω_o/Ω^2) područja nestabilnosti se gomilaju između $p=0$ i $p=1$. Za odnos $(\omega_o/\Omega^2) = 1/4$ područje stabilnosti između $p=0$ i $p=1$ je veliko, dok već za $(\omega_o/\Omega^2) = 4$ taj interval za p sadrži nagomilana područja nestabilnosti ali je svima zajedničko da su labila stanja za $P_o > L_E$ tj. $P > 1$.

Područja nestabilnosti postaju beznačajna za λ sa velikim rednim brojem.

Neophodno je spomenuti nekoliko karakteristika uočenih na Ince-

Strutt-ovoj karti za odnos $(\frac{\omega_o}{\Omega}) = 1/4$, a to je da nestabilno područje

$X = 1/4$ leži u okolini vrednosti $P_0 = 0$. Tada, u slučaju da se jedna mala pulzirajuća aksijalna sila javi sa frekvencijom $\Omega = 2\omega_o$, štab bi počeo nestabilno kretanje sa amplitudom koja neće biti konačna za duže vreme, te bi bilo razumljivo da mora doći do loma štaba. Isti slučaj se

javlja kada je odnos $(\frac{\omega_o}{\Omega}) = n^2/4$.

4^o Na sličan način kao pod 3^o može se posmatrati stabilnost vitkog štapa koji osciluje pod dejstvom pulzirajuće aksijalne sile u sredini sa viskoznom trenjem. Sa prigušivanjem stabilna područja se povećavaju zavisno od koeficijenta prigušivanja, sa tim da se područja nižeg reda n manje menjaju od onih višeg reda n.

Područja nestabilnosti vitkog štapa u prigušenoj sredini se povlače sa apscisne ose p i to utoliko više ukoliko su područja uža, tj. imaju veću vrednost.

LITERATURA:

Osnovna ideja za ovaj članak potckla je iz knjiga Technische Schwingungslehre od Dr. Karla Klotter-a i Nichtlineare Mechanik od Dr. Hans-a Kauderer-a.

1. Karl Klotter: Technische Schwingungslehre;
2. Hans Kauderer: Nichtlineare Mechanik;
3. J.J. Stoker Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems;
4. Kurt Magnus: Schwingungen;
5. Danilo Rašković: Teorija oscilacija.

Katica Hedrih, asistent
Mile Maksić, asistent
Mašinskog fakulteta u Nišu

JEDNAČINE TRANSVERZALNIH OSCILACIJA VRATILA,
U USLOVIMA UTICAJA INERCIJE OBRATANJA I TRANSVER-
ZALNIH SILA, IZVEDENE POMOĆU VARIJACIONOG PRINCIPA

Neka je data greda - vratilo različitih aksijalnih momenata inercije poprečnog preseka za glavne ose inercije preseka, koja se obrće promenljivom ugaonom brzinom $\omega(t)$. Pretpostavimo da je u nedeformisanom stanju elastična osa grede pravolinijska i da se ne poklapa sa geometrijskim mestom težišta poprečnog preseka. Pretpostavljamo da su ugibi takvi da elastične sile koje se javljaju ostaju u granicama proporcionalnosti. Ugibi pojedinih tačaka ose grede se izvode normalno u odnosu na pravolinijsku nedeformisanu elastičnu osu pri čemu zanemarujemo pomeranja tih tačaka u pravcu paralelnom osi. Neka na gredu dejstvuje vertikalno raspodeljno po rasponu poprečno opterećenje $q(x,t)$. Pretpostavimo i da se greda u procesu oscilovanja ne uvija. Smatramo da je greda statički neuravnotežena. Geometrijsko mesto tačaka težišta elemenata nepokretne grede pomeren je u odnosu na geometrijsku osu i ravna je kriva, pri čemu uzimamo da je zakon promene statičke neuravnoteženosti poznat. Uzdužne oscilacije takođe zanemarujemo.

Za sastavljanje jednačina kretanja uvedimo dva sistema koordinata - nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$ i pokretni koordinatni sistem vezan za poprečni presek O_5z_5 , koji se obrće ugaonom brzinom $\omega(t)$ zajedno sa gredom vratilom. Ose Ox i Oz su u pravcu ose obrtanja, čiji se pravac poklapa sa pravolinijskom osom nepokretne grede. Ose pokretnog koordinatnog sistema O_5z_5 i O_5x_5 neka se poklapaju sa glavnim pravcima inercije poprečnog preseka. Osu O_5x_5 nepokretnog

Adrese autora: K. Hedrih, Niš, 7 juli, blik II, zgrada 11, stan 60;
Mile Maksić, Niš, Borisa Kidriča 2. Saopštenje sa Katedre za
Mehaniku i Automatiku.

2.

sistema usmerimo vertikalno naniže. Označimo sa l dužinu grede, A površinu poprečnog preseka, B_{ξ} i B_{η} savojne krutosti za glavne ose inercije, S linijsku gustinu mase, $\vec{S}_c(x)$ vektor ekscentričnosti težišta elemenata poprečnih preseka, koji na osnovu izbora koordinata u pokretnom koordinatnom sistemu je funkcija samo koordinata, \vec{w} vektor pomeranja geometrijskog centra elemenata poprečnog preseka.

Sa slike 1 se vidi da je $\vec{r}_c = \vec{w} + \vec{S}_c$ odnosno u pokretnom koordinatnom sistemu koordinate brzine težišta elemenata poprečnog preseka su

$$v_{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} - \omega(\eta + S_{\eta})$$

$$v_{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \omega(\xi + S_{\xi}) \quad (1)$$

Ako sa $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ i $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ označimo ugaone brzine elemenata u odnosu na ξ odnosno η osu, onda možemo da napišemo da je kinetička energija vratila

$$E_k = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ SA \left[\left\langle \frac{\partial \xi}{\partial t} - \omega(\eta + S_{\eta}) \right\rangle^2 + \left\langle \frac{\partial \eta}{\partial t} + \omega(\xi + S_{\xi}) \right\rangle^2 \right] + S \left[I_{\xi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + I_{\eta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} dx \quad (2)$$

Iz izraza za kinetičku energiju se vidi da se ona sastoji iz kinetičke energije translacije brzinom težišta elemenata poprečnog preseka i kinetičkih energija rotacije oko osa O_{ξ} i O_{η} .

Potencijalna energija grede - vratila sastoji se iz potencijalne energije usled savijanja i usled dejstva transverzalnih sila i rada usled dejstva spoljašnjih konzervativnih sila. Označimo sa G modul klizanja, \mathcal{H}_{ξ} i \mathcal{H}_{η} koeficijente smicanja.

$$\mathcal{H}_{\xi} = \frac{1}{A} \iint_{(A)} \left(\frac{S_{\xi}}{I_{\xi} S} \right)^2 dA; \quad \mathcal{H}_{\eta} = \frac{1}{A} \iint_{(A)} \left(\frac{S_{\eta}}{I_{\eta} S} \right)^2 dA \quad (3)$$

Alio pretpostavimo da su krajevi grede elastično učvršćeni pomoću zavojskih i torzionih opruga koeficijentata krutosti C_{15} i C_{17} , C_{25} , C_{27} odnosno C_{35} , C_{37} , C_{45} i C_{47} izraz za ukupnu potencijalnu energiju se može napisati u obliku

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \beta_5 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 + \beta_7 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 + GA \left[\frac{1}{\beta_5} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \psi \right)^2 + \frac{1}{\beta_7} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \psi \right)^2 \right] \right\} dz -$$

$$- \int_0^l g(x,t) (\eta \cos \theta - \xi \sin \theta) dz + \frac{1}{2} \left\{ C_{15} \xi^2(0,t) + C_{17} \eta^2(0,t) + \right.$$

$$+ C_{25} \xi^2(l,t) + C_{27} \eta^2(l,t) + C_{35} \psi^2(0,t) + C_{37} \psi^2(0,t) +$$

$$\left. + C_{45} \psi^2(l,t) + C_{47} \psi^2(l,t) \right\}; \quad \Theta = \int_0^t \omega(t) dt$$

Višak kinetičke energije nađ potencijalnom je

$$\mathcal{L} = E_k - E_p \quad (5)$$

pa se dejstvo u Hamilton-ovom smislu može napisati u obliku

$$W = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left\{ SA \left[\left\langle \frac{\partial \xi}{\partial t} - \omega(\eta + \beta_7) \right\rangle^2 + \left\langle \frac{\partial \eta}{\partial t} + \omega(\xi + \beta_5) \right\rangle^2 \right] + S \left[I_5 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \right. \right.$$

$$+ I_7 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \left. \right] - \beta_5 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 - \beta_7 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 - GA \left[\frac{1}{\beta_5} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \psi \right)^2 + \frac{1}{\beta_7} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \psi \right)^2 \right] +$$

$$+ 2g(x,t) (\eta \cos \theta - \xi \sin \theta) \left. \right\} dx dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left\{ C_{15} \xi^2(0,t) + \right.$$

$$+ C_{17} \eta^2(0,t) + C_{25} \xi^2(l,t) + C_{27} \eta^2(l,t) + C_{35} \psi^2(0,t) + C_{37} \psi^2(0,t) +$$

$$\left. + C_{45} \psi^2(l,t) + C_{47} \psi^2(l,t) \right\} dt \quad (6)$$

Ako je materijalni sistem podvrgnut sledećim ograničenjima: da na materijalni sistem dejstvuju konzervativne aktivne sile, da su odstupanja zaobilaznih puteva od direktnog infinitezimalna, da je kretanje sinhrono, odnosno da sistem polazi iz početne konfiguracije u trenutku t_0 i stiže u krajnju konfiguraciju po direktnom i zaobilaznim putevima u isto vreme t_1 , tada za kretanje sistema važi Hamilton-ov princip: Dejstvo u Hamilton-ovom smislu ima za stvarni put sistema ekstremnu stacionarnu vrednost i u poređenju sa vrednostima dejstva na zaobilaznim putevima, što znači da je $\delta W = 0$.

Prva varijacija funkcije W ima oblik

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left\{ SA \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega(\xi + \rho_\xi) \right] \omega - q(z, t) \sin \theta - \frac{\partial}{\partial z} \left[SA \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \omega(\eta + \rho_\eta) \right) \right] - \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{GA}{\rho_\xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \gamma \right) \right] \delta \xi dz dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left\{ \frac{GA}{\rho_\xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \gamma \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(SI_\xi \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_\xi \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \delta \psi dz dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left\{ -SA \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} - \omega(\eta + \rho_\eta) \right] \omega + q(z, t) \cos \theta - \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left[SA \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \omega(\xi + \rho_\xi) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{GA}{\rho_\eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \gamma \right) \right] \delta \eta dz dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left\{ \frac{GA}{\rho_\eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \gamma \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(SI_\eta \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_\eta \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right\} \delta \psi dz dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{GA}{\rho_\xi^2} \left[\left(\gamma - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \delta \xi \right] - \rho_\xi \frac{\partial \psi}{\partial z} \delta \psi \right\} dt + \int_{t_0}^l \left[SA \frac{\partial \xi}{\partial t} \delta \xi + SI_\xi \frac{\partial \psi}{\partial t} \delta \psi \right]_{t_0}^{t_1} dz + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{GA}{\rho_\eta^2} \left[\left(\gamma - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \delta \eta \right] - \rho_\eta \frac{\partial \psi}{\partial z} \delta \psi \right\} dt + \int_{t_0}^l \left[SA \frac{\partial \eta}{\partial t} \delta \eta + SI_\eta \frac{\partial \psi}{\partial t} \delta \psi \right]_{t_0}^{t_1} dz - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \left[C_{1\xi} \xi(0, t) \delta \xi(0, t) + C_{2\xi} \xi(l, t) \delta \xi(l, t) + C_{3\xi} \psi(0, t) \delta \psi + \right. \\ & + C_{4\xi} \psi(l, t) \delta \psi(l, t) + C_{1\eta} \eta(0, t) \delta \eta(0, t) + C_{2\eta} \eta(l, t) \delta \eta(l, t) + C_{3\eta} \psi(0, t) \delta \psi + \\ & \left. + C_{4\eta} \psi(l, t) \delta \psi(l, t) \right] dt \end{aligned}$$

„a bi funkcija W imala stacionarnu vrednost mora da je njego-
gova prva varijacija jednaka nuli, odakle slede uslovi

$$\begin{aligned} \rho A \left[\frac{\partial z}{\partial t} + \omega (\xi + \rho_{\xi}) \right] \omega - q(z, t) \sin \theta + \rho A \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} - \omega (\eta + \rho_{\eta}) \right] - \\ - \frac{GA}{\rho_{\xi}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \varphi \right) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{GA}{\rho_{\xi}} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \varphi \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho I_{\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_{\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} -\rho A \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} - \omega (\eta + \rho_{\eta}) \right] \omega + q(z, t) \cos \theta - \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho A \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + \omega (\xi + \rho_{\xi}) \right] + \right. \\ \left. + \frac{GA}{\rho_{\eta}} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \gamma \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{GA}{\rho_{\eta}} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \gamma \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho I_{\eta} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_{\eta} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) = 0 \quad (11)$$

$$\left[\rho_{\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - c_{3\xi} \varphi \right]_{z=0} = 0 \quad (12)$$

$$\left[\rho_{\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + c_{4\xi} \varphi \right]_{z=l} = 0 \quad (13)$$

$$\left[\frac{GA}{\rho_{\xi}} \left(\gamma - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) + c_{1\xi} \xi \right]_{z=0} = 0 \quad (14)$$

$$\left[\frac{GA}{\rho_{\xi}} \left(\gamma - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) - c_{2\xi} \xi \right]_{z=l} = 0 \quad (15)$$

$$\left[\rho_{\eta} \frac{\partial \gamma}{\partial z} - c_{3\eta} \gamma \right]_{z=0} = 0 \quad (16)$$

$$\left[\rho_{\eta} \frac{\partial \gamma}{\partial z} + c_{4\eta} \gamma \right]_{z=l} = 0 \quad (17)$$

$$\left[\frac{GA}{\rho_{\eta}} \left(\gamma - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) + c_{1\eta} \eta \right]_{z=0} = 0 \quad (18)$$

$$\left[\frac{GA}{\rho_{\eta}} \left(\gamma - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) - c_{2\eta} \eta \right]_{z=l} = 0 \quad (19)$$

Prva četiri uslova daju sistem parcijalnih dife-
rencijalnih jednačina transverzalnih oscilacija grede, gde su
uzeti u računaticaji inercije obrtanja poprečnog preseka i
transverzalne sile u uslovima kada se greda obrće ugaonom brzi-
nom $\omega(t)$ oko svoje geometrijske ose.

Ostalih osam uslova predstavljaju prirodne granične uslove koji moraju da budu zadovoljeni na krajevima grede-vratila. Šesti i osmi integral u izrazu (7) za prvu varijaciju su jednaki nuli jer je po pretpostavci kretanje sistema sinhrono.

Rešavanjem jednačine (8) po $\frac{\partial y}{\partial z}$ dobijamo

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{S \partial \xi}{G} \left[2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + \omega^2 (\xi + S_\xi) - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + (\eta + S_\eta) \frac{d\omega}{dt} \right] - \frac{\mathcal{H}_\xi}{GA} q(z,t) \sin \theta \quad (20)$$

Diferenciranjem ovog izraza dva puta po z odnosno po t dobijamo sledeće izraze

$$\frac{\partial^3 y}{\partial z^3} = \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + \frac{S \partial \xi}{G} \left[2 \frac{\partial^3 \omega}{\partial z^2 \partial t} + \omega^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 S_\xi}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial^4 \xi}{\partial t^4} + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 S_\eta}{\partial z^2} \right) \frac{d\omega}{dt} \right] - \frac{\mathcal{H}_\xi}{GA} \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \sin \theta \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 y}{\partial z \partial t^2} = & \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{S \partial \xi}{G} \left\{ \omega^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 \xi}{\partial t^4} + 2\omega \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} + \frac{d\omega}{dt} (5 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + 4\omega \frac{\partial \xi}{\partial t}) + \right. \\ & \left. + \frac{d^2 \omega}{dt^2} \left[4 \frac{\partial \eta}{\partial t} + 2\omega (\xi + S_\xi) \right] + 2 \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 (\xi + S_\xi) + \frac{d^2 \omega}{dt^2} (\eta + S_\eta) \right\} + \\ & + \frac{\mathcal{H}_\xi}{GA} \left\{ \sin \theta \left[\omega^2 q - \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \right] - \cos \theta \left[2\omega \frac{\partial q}{\partial t} + q \frac{d\omega}{dt} \right] \right\} \quad (22) \end{aligned}$$

Jednačinu (9) diferenciramo po z i u nju unesemo izraze parcijalnih izvoda po z , odnosno po t , odnosno po z i t , (20), (21) i (22) koja posle sredjivanja i uvodjenja oznaka

$$\rho_\xi^2 = \frac{\beta_\xi}{SA} ; \quad i_\xi^2 = \frac{I_\xi}{A} ; \quad p_\xi = i_\xi^2 \frac{\mathcal{H}_\xi}{G} \quad (23)$$

dobija oblik

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \rho_\xi^2 \frac{\partial^4 \xi}{\partial t^4} - 2\omega \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{d\omega}{dt} (\eta + S_\eta) - \omega^2 (\xi + S_\xi) + \frac{1}{SH} q(z,t) \sin \theta - \\ & - [i_\xi^2 + p_\xi E] \frac{\partial^4 \xi}{\partial t^2 \partial z^2} + S p_\xi \frac{\partial^4 \xi}{\partial t^4} + 2E p_\xi \omega \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^2 \partial t} - 2S p_\xi \omega \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} - p_\xi \frac{d\omega}{dt} \times \\ & \times \left[S \left(5 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + 4\omega \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) - E \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 S_\eta}{\partial z^2} \right) \right] - p_\xi \omega^2 \left[S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -E\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) - \rho_{\xi} S \frac{d^2 \omega}{dt^2} \left[4 \frac{\partial \eta}{\partial t} + 2\omega(\xi + \xi) \right] - 2 \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 (\xi + \xi) \rho_{\xi} S - \\
 & - \rho_{\xi} S (\eta + \eta) \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{\rho_{\xi}}{A} \left\{ \sin \theta \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{E}{S} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \omega^2 \eta(z,t) \right] + \right. \\
 & \left. + \cos \theta \left[\frac{d\omega}{dt} \eta(z,t) + 2\omega \frac{\partial \eta}{\partial t} \right] \right\} = 0 \tag{24}
 \end{aligned}$$

Na sličan način jednačinu (10) rešimo po $\frac{\partial \gamma}{\partial z}$ i nadjemo njene izvode $\frac{\partial^3 \gamma}{\partial z \partial t^2}$, $\frac{\partial^3 \gamma}{\partial z^3}$, i unesemo ih u jednačinu (11) koju smo prethodno diferencirali po z , tako da dobijemo sledeću jednačinu analognu jednačini (24)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \rho_{\eta}^2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + 2\omega \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{d\omega}{dt} (\xi + \xi) - \omega^2 (\eta + \eta) - \frac{1}{S A} \eta(z,t) \cos \theta - \left[\rho_{\eta}^2 + \rho_{\eta} E \right] \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} + \\
 & + \rho_{\xi} S \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - 2\rho_{\eta} \omega \left[E \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^2 \partial t} - S \frac{\partial^3 \xi}{\partial t^3} \right] - \rho_{\eta} \frac{d\omega}{dt} \left[E \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) - \right. \\
 & \left. - S \left(5 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - 4\omega \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \right] + \rho_{\eta} \omega^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) E - S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right] - \rho_{\eta} S \frac{d^2 \omega}{dt^2} \cdot \\
 & \cdot \left[4 \frac{\partial \xi}{\partial t} - 2\omega(\eta + \eta) \right] - 2S \rho_{\eta} \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 (\eta + \eta) + \rho_{\eta} S \frac{d^2 \omega}{dt^2} (\xi + \xi) + \\
 & + \frac{\rho_{\eta}}{A} \left\{ \cos \theta \left[\frac{E}{S} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \omega^2 \eta + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right] + \sin \theta \left[2\omega \frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta \frac{d\omega}{dt} \right] \right\} = 0 \tag{25}
 \end{aligned}$$

Sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina (24) i (25) sa graničnim uslovima od (12) do (19) predstavlja jednačine oscilovanja elastične grede - vratila koje se okreće ugaonom brzinom ω . Ako radi uprošćenja hoćemo da posmatramo transverzalne oscilacije grede - vratila u uslovima stacionarnog obrtanja, tj. kada je $\omega = \text{const.}$ i onda se sistem jednačina (24) i (25) znatno uprošćava. Jednačine (24) i (25) možemo da napišemo kao jednu ako uvedemo kompleksnu promenljivu

$$\eta = \xi + j\eta \qquad \eta_c = \xi_c + j\eta_c \qquad j = \sqrt{-1} \tag{26}$$

i uvedemo pomoćne oznake

$$l^2 = \frac{l_1^2 + l_2^2}{2}; \quad p = \frac{p_1 + p_2}{2}; \quad c^2 = \frac{c_1^2 + c_2^2}{2} \quad (27)$$

tako da se sada sistem jednačina svodi na jednačinu - parcijalnu diferencijalnu četvrtoг reda

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial z^2} + 2\omega j \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \omega^2 (\bar{y} + \bar{z}_c) - j \frac{1}{sA} \varrho(\alpha, t) e^{j\theta} - [l^2 + pE] \frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial t^2 \partial z^2} + \\ & + sp \frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial t^4} + 2j p \omega \left(s \frac{\partial^3 \bar{y}}{\partial t^3} - E \frac{\partial^3 \bar{y}}{\partial z^2 \partial t} \right) - p \omega \left[s \frac{\partial^3 \bar{y}}{\partial t^2} - E \left(\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \bar{z}_c}{\partial z^2} \right) \right] + \\ & + j \frac{p}{A} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial t^2} e^{-j\theta} + \left(\omega^2 \bar{z} + \frac{E}{s} \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z^2} + 2\omega \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial t^2} \right) e^{j\theta} \right\} = \varepsilon Q = \\ & = \varepsilon Q \left(\frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial t^2 \partial z^2}, \frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial t^4}, \frac{\partial^3 \bar{y}}{\partial z^2 \partial t}, \frac{\partial^3 \bar{y}}{\partial t^3}, \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial z^2}, \bar{y}, \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z^2}, \varrho, \frac{\partial \bar{z}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z^2}, \theta \right) \end{aligned} \quad (28)$$

gde je

$$\begin{aligned} \varepsilon Q = & \left[\frac{l_1^2 - l_2^2}{2} + E \frac{p_1 - p_2}{2} \right] \frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial t^2 \partial z^2} - (p_1 - p_2) \frac{1}{2} \left[s \frac{\partial^3 \bar{y}}{\partial t^3} + 2j \omega \left[E \frac{\partial^3 \bar{y}}{\partial z^2 \partial t} - \frac{\partial^3 \bar{z}}{\partial t^3} \right] - \right. \\ & \left. - \omega^2 \left[s \bar{z} + E \left(\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \bar{z}_c}{\partial z^2} \right) \right] \right] - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2sA} \frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial z^4} + \frac{p_1 - p_2}{2A} j \times \\ & \times \left\{ \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial t^2} e^{j\theta} + e^{-j\theta} \left[\frac{E}{s} \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z^2} + \omega^2 \bar{z} - 2\omega \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} \right] \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

Kako izrazi na desnoj strani sadrže činioce $\frac{l_1^2 - l_2^2}{2}$ i $\frac{p_1 - p_2}{2}$ koji su male veličine to je izraz na desnoj strani jednačine (28) mala veličina u odnosu na izraze na levoj strani, tako da se za "neporemećeno" oscilovanje može uzeti jednačina (28) za slučaj kada je njena desna strana jednaka nuli. Ova jednačina se pomoću formule transformacije

$$z = \bar{y} e^{j\theta}$$

(30)

где $\bar{y} = \alpha + j\gamma$ може да трансформише на координате nepokretnog koordinatnog sistema, где се добија погоднији облик за решавање, о чему одве неће бити речи.

Literatura:

1. Mitropoljskij J.A. Problemi asimptotičeskoj teoriji nestacionarnih kolebanjij, Izdvo "Nauka" Moskva 1964
2. Andjelić T. i Stojanović R. Racionalna mehanika, Beograd 1960
3. Rašković D. Teorija oscilacija, Beograd 1965
4. Vujičić V. Teorija oscilacija, Beograd 1966.

Катица Једрић, асистент

Миле Максић, асистент

Машиностроителни факултет у Нише

Уравнения поперечных колебаний вала, в условиях влияния инерции вращения и перерезывающих сил, получены вариационным принципом

В работе составляются уравнения в частных производных поперечных колебаний вала в условиях влияния инерции вращения и перерезывающих сил, пользуются вариационным принципом.

MASS MOMENT VECTORS AT AN N -DIMENSIONAL COORDINATE SYSTEM.

*Presented at the 90th Anniversary Conference
of Akitsugu KAWAGUCHI's Birth
Bucharest, Aug. 24-29, 1992.*

By Katica Stevanović HEDRIH.

Introduction. This paper introduces the vectors $\vec{S}_n^{(0)}$ of the mass linear moment and $\vec{\mathcal{I}}_n^{(0)}$ of the mass inertia moment at the pole O for the axis oriented by the unit vector \vec{n} at an N -dimensional coordinate system. The vectors can be used for the interpretation of the rigid body kinetic characteristics. The change of the vector $\vec{\mathcal{I}}_n^{(0)}$ of the mass inertia moment is determined in the transition from one space point to another when the axis retains its orientation which represents the Huygens-Steiner theorem translated for the defined mass inertia moment vector at an N -dimensional coordinate system.

Using the definition of the vector $\vec{\mathcal{I}}_n^{(0)}$ of the mass inertia moment and the definition of the vector $\vec{S}_n^{(0)}$ of the mass linear moment according to [2]¹⁾ [3] [6] [7], [11] and according to the notation in Fig. 1, we can write the following :

* for rigid body :

$$(1^*) \quad \vec{\mathcal{I}}_n^{(0)} = \iint_V \int [\vec{\rho}, [\vec{n}, \vec{\rho}]] dm, \quad \vec{S}_n^{(0)} = \iint_V \int [\vec{n}, \vec{\rho}] dm,$$

* for material point (particle)

$$(1) \quad \vec{\mathcal{I}}_n^{(0)} = [\vec{\rho}, [\vec{n}, \vec{\rho}]] m, \quad \vec{S}_n^{(0)} = [\vec{n}, \vec{\rho}] m.$$

The material point position vector $\vec{\rho}$ can be written in the form

$$(2) \quad \vec{\rho} = x^k \vec{g}_k,$$

while the unit vector \vec{n} of the axis orientation can be written in the form (see [1], [12])

$$(3) \quad \vec{n} = \lambda^k \vec{g}_k.$$

In the previous expressions of \vec{g}_k the basic vectors of the n -dimensional system of the curvilinear coordinates x^k are $\vec{g}_k = \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial x^k}$. For these vectors it stands that $(\vec{g}_k, \vec{g}_l) = g_{kl}$.

§ 1. The material point mass inertia moment vector for the pole and the axis with respect to the pole and the axis. Substituting the expressions (2) and (3) in the expression for the vector $\vec{\mathcal{I}}_n^{(0)}$ and using definition of the material point mass inertia moment for the

Received January 21, 1994.

1) Numbers in brackets refer to the references at the end of the paper.

pole O and the axis oriented by the unit vector \vec{n} , we obtain

$$(4) \quad \vec{J}_n^{(0)} = [\vec{g}_k, [\vec{g}_l, \vec{g}_p]] x^k x^p \lambda^l m.$$

The expression (4) can be written in the form

$$(5) \quad \vec{J}_n^{(0)} = x^k x^p \lambda^l m (g_{kp} \vec{g}_l - g_{kl} \vec{g}_p).$$

If we multiply scalarly the previous expression (5) by the unit vector \vec{n} , we obtain

$$(\vec{J}_n^{(0)}, \vec{n}) = x^k x^p \lambda^l m (g_{kp} g_{li} - g_{kl} g_{pi})$$

which represents the axial moment of the material point inertia of the mass m for the axis oriented by the vector \vec{n} .

If now we multiply the expression (5) twice vectorly by the unit vector \vec{n} , that is, according to [2], [4], [5], if we separate the body mass inertia moment vector deviational part for the pole and the axis, we obtain

$$\vec{D}_n^{(0)} = [\vec{n}, [\vec{J}_n^{(0)}, \vec{n}]],$$

that is,

$$\vec{D}_n^{(0)} = \{g_{kp} g_{li} \vec{g}_i - g_{ki} g_{lp} \vec{g}_p + (g_{ki} g_{lp} - g_{kp} g_{li}) \vec{g}_j\} x^k x^p \lambda^l m.$$

The last expression represents the vector $\vec{D}_n^{(0)}$ of the deviation load by the material point mass inertia moment of the axis oriented by the vector \vec{n} (see [9], [10], [8]) at the N -dimensional coordinate system.

By substituting the expressions (2) and (3) in the expression for the vector $\vec{S}_n^{(0)}$, definition of the material point mass linear moment for the pole O , and the axis oriented by the unit vector \vec{n} , we obtain

$$\vec{S}_n^{(0)} = [\vec{g}_i, \vec{g}_k] x^k \lambda^i m.$$

§ 2. Rigid body mass inertia moment vector for the pole and the axis at the n -dimensional coordinate system. Using the definition (1), according to the Fig. 1b as well as the expressions (2) and (3), we can write for the vector $\vec{J}_n^{(0)}$ of the rigid body mass inertia moment for the pole O and the axis oriented by the unit vector \vec{n}

$$\vec{J}_n^{(0)} = \iiint_V [\vec{g}_k, [\vec{g}_l, \vec{g}_p]] x^k x^p \lambda^l dm.$$

Using a transformation the previous expression can be written in the form

$$\vec{J}_n^{(0)} = \iiint_V (g_{kp} \vec{g}_l - g_{kl} \vec{g}_p) x^k x^p \lambda^l dm.$$

Using the definition (1), according to the Fig. 1b as well as the expressions (2) and (3), we can write for the vector $\vec{S}_n^{(0)}$ of the rigid body mass linear moment for the pole O and the axis oriented by the unit vector \vec{n}

$$\vec{S}_n^{(0)} = \iiint_V [\vec{g}_i, \vec{g}_k] x^k \lambda^i dm.$$

If we multiply the previous expression scalarly by \vec{n} , we obtain the following

$$(\mathcal{F}_n^{(0)}, \vec{n}) = \iint_V \int (g_{kp}g_{ti} - g_{ki}g_{pt}) x^k x^p \lambda^i \lambda^t dm.$$

The last expression represents the axial moment of the rigid body mass inertia moment for the axis oriented by the unit vector \vec{n} through the pole O .

According to [2], we can write the deviational part $\vec{D}_n^{(0)}$ of the body mass inertia moment vector for the pole O and the axis \vec{n} in the form

$$\vec{D}_n^{(0)} = \iint_V \int \{g_{kp}g_{ti}\vec{g}_i - g_{ki}g_{tp}\vec{g}_p + (g_{ki}g_{tp} - g_{kp}g_{ti})\vec{g}_j\} x^k x^p \lambda^i \lambda^t dm.$$

§ 3. Huygens-Steiner theorem. According to [2], [13] for the vector $\vec{F}_n^{(0)}$ of the rigid body mass inertia moment the Huygens-Steiner theorem is derived. It can be written in the following form for the curvilinear coordinates system

$$\vec{F}_n^{(0)} = \vec{F}_n^{(c)} + [\vec{\rho}_c, [\vec{n}, \vec{\rho}_c]]M = \vec{F}_n^{(c)} + [\vec{g}_k, [\vec{g}_i, \vec{g}_p]]x^k x^i \lambda^p M,$$

$$\vec{F}_n^{(0)} = \vec{F}_n^{(c)} + x^k x^i \lambda^p M (g_{kp}\vec{g}_i - g_{ki}\vec{g}_p).$$

According to the same [2] and also [8], [9], [10] for the vector $\vec{D}_n^{(0)}$ of the deviation load

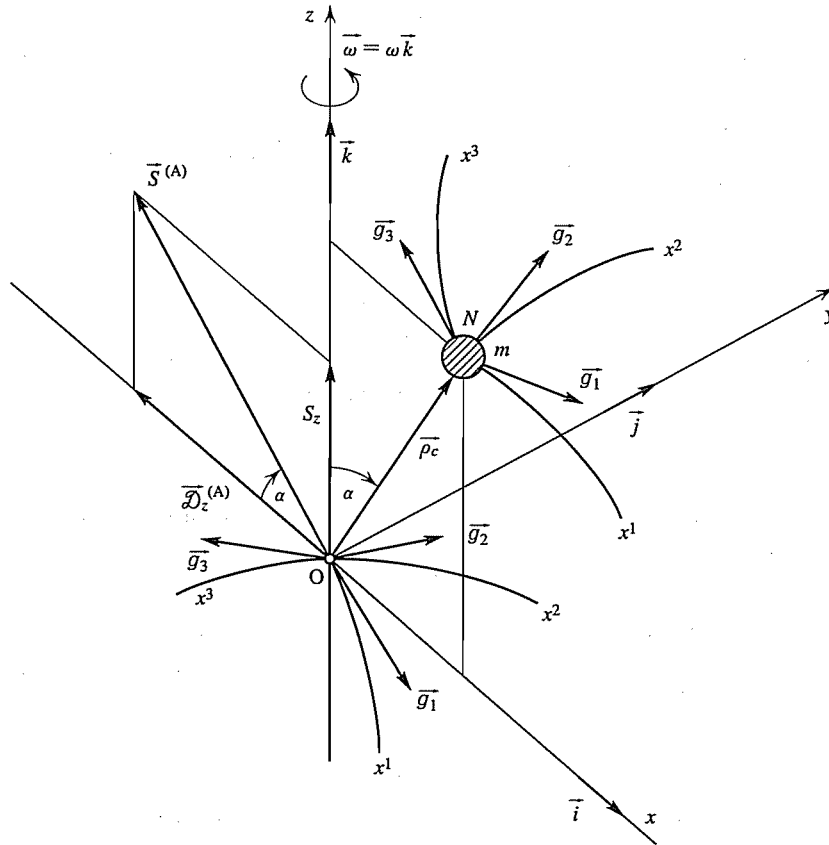


Fig. 1a

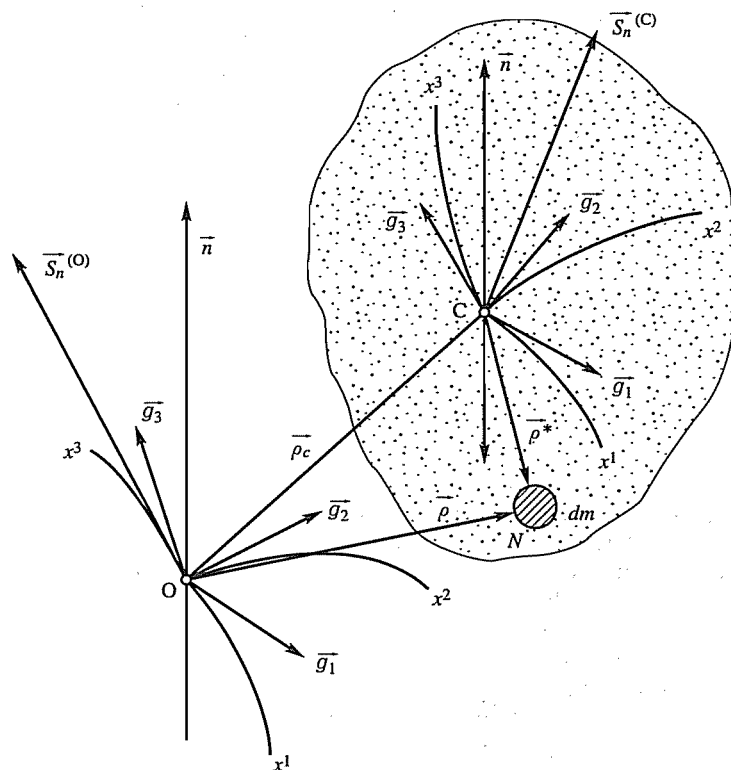


Fig. 1b

by the rigid body mass inertia moment of the axis oriented by the unit vector \bar{n} in the curvilinear coordinates system, we can write the following expression

$$\bar{\mathcal{I}}_n^{(0)\text{dev}} = \bar{\mathcal{D}}_n^{(0)} = \bar{\mathcal{D}}_n^{(C)} - (\bar{n}, \bar{\rho}_C)[\bar{n}, [\bar{\rho}_C, \bar{n}]]M$$

i. e.

$$\bar{\mathcal{I}}_n^{(0)\text{dev}} = \bar{\mathcal{D}}_n^{(0)} = \bar{\mathcal{D}}_n^{(C)} - g_{ij}[\bar{g}_k, [\bar{g}_l, \bar{g}_p]]x_c^i x_c^l \lambda^i \lambda^k \lambda^p M$$

or

$$\bar{\mathcal{I}}_n^{(0)\text{dev}} = \bar{\mathcal{D}}_n^{(0)} = \bar{\mathcal{D}}_n^{(C)} - g_{ij}(g_{kp}\bar{g}_l - g_{kl}\bar{g}_p)x_c^i x_c^l \lambda^i \lambda^k \lambda^p M,$$

which represents the expression of Huygens-Steiner theorem generalized to the vector $\bar{\mathcal{D}}_n^{(0)}$

§ 4. Conclusion remarks. This paper introduces the vectors $\bar{S}_n^{(0)}$ of the mass linear moment and $\bar{\mathcal{I}}_n^{(0)}$ of the mass inertia moment of the material point and of the rigid body, at the pole O for the axis oriented by the unit vector \bar{n} on N -dimensional coordinate system. The vectors can be used for the interpretation of the rigid body kinetic characteristics. The change of the vector $\bar{\mathcal{I}}_n^{(0)}$ of the mass inertia moment is determined in the transition from one space point to another, when the axis retains its orientation, which represents Huygens-Steiner theorem translated for the defined mass inertia moment vector at N -dimensional coordinate system.

This paper gives some interpretations of the vectors $\vec{D}_n^{(0)}$ of the axis deviation load through the referential pole by the body mass inertia moment as well as by the material point mass inertia moment in an N -dimensional coordinate system.

Acknowledgment. This research is supported by the National Science Foundation of Republic of Serbia, Yugoslavia, Project No. 0402.

Mechanical Engineering Faculty
University of Nis
Institute of Mathematics SANU,
Belgrade, Yugoslavia

REFERENCES

- [1] T. Andjelic : Tenzorski račun, *Naučna knjiga, Beograd*, 1952.
- [2] K. S. Hedrih : On some interpretations of the rigid bodies kinetic parameters, *Reports, Feb.*, (1991), *Institute of Mathematics SANU, Belgrade, Yu.*
- [3] K. S. Hedrih : Interpretation of kinetic pressures upon the bearings due to a rigid body's rotation about an axis by means of the vector of the body mass inertia moment for the rotation axis, *Reports, March*, (1991), *Institute of Mathematics SANU, Belgrade, Yu.*
- [4] K. S. Hedrih : Analogije modela stanja napona, stanja deformacije i stanja momenta inercije mase tela, *Tehnika, Beograd*, 6 (1995), M8-M14.
- [5] K. J. S. Hedrih : Analogy between models of stress state, strain state and state of moment inertia mass of body, *Facta Universitatis, Series "Mechanics, Automatic Control and Robotics"*, Niš, 1 (1991), 105-120.
- [6] K. S. Hedrih : On some interpretations of the rigid bodies kinetic parameters, *18th ICTAM HAIFA 1992, Abstracts, International Union of Theoretical and Applied Mechanics*, 73-74.
- [7] K. S. Hedrih : Same vectorial interpretations of the kinetic parameters of solid material lines, *ZAMM. Angew. Math. Mech.*, 73 (1993), 4-5, T153-T156.
- [8] K. S. Hedrih : Interpretation of the motions of a heavy body around a stationary axis in the field with turbulent damping and kinetic pressures on bearing by means of the mass moment vector for the pole and the axis, "*Facta Universitatis*", *Series "Mechanics, Automatic Control and Robotics"*, 1 (1994), 519-538.
- [9] K. S. Hedrih : Interpretation of the motion of a heavy body around a stationary axis and kinetic pressures on bearing by means of the mass moment vector for the pole and the axis, *Theoretical and Applied Mechanics*, 20 (1994), 69-87.
- [10] K. S. Hedrih : Interpretation of the motion equations of a variable mass object rotating around a stationart axis by means of the mass moment vector for the pole and the axis, *Proceedings of th 4th Greek National Congress on Mechanics, Vol. 1, Mechanics of Solids, Democritus University of Thrace, Xanthi*, 1995, 690-696.
- [11] K. S. Hedrih : New interpretation of the rigid bodies kinetic parameters, *Abstracts of 2nd International Symposium of Ukrainian Mechanical Engineers in Lviv, State University "Lvivska Politehnika," Ukrainian Engineers Society in Lviv and Ukrainian Engineer's Society of America, INC.*, (1995), 51.
- [12] D. Rašković : Osnovi tenzorskog računa, *Mašinski fakultet Kragujevac*, 1974.
- [13] V. Vujičić : O tenzorskim osobinama tenzora inercije, *Matematički vesnik, Beograd*, 3 (1966), 11-15.

Katica Stefanović

POVRŠINA, TEŽIŠTE POVRŠINE I MOMENTI INERCIJE POVRŠINE,
OGRANIČENE LUKOM PARABOLE n -TOG REDA, ZA OSE U RAVNI
POVRŠINE

ZAPREMINA, STATIČKI MOMENT, TEŽIŠTE I MOMENTI INERCIJE
TELA KOJA POSTAJU POTPUNOM ROTACIJOM POVRŠINE,
DELOM OGRANIČENE I LUKOM GRAFIKA STEPENE
FUNKCIJE n -TOG REDA, OKO ORDINATNE OSE

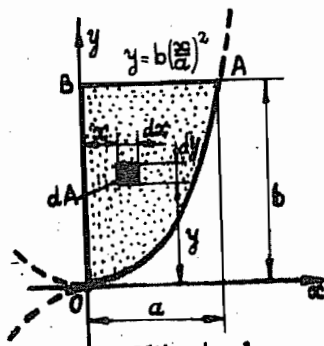
- iz Zbornika 1968=1969. Tehničkog fakulteta u Nišu -

POVRŠINA, TEŽIŠTE POVRŠINE I MOMENTI INERCIJE
POVRŠINE, OGRANIČENE LUKOM PARABOLE n -TOG
REDA, ZA OSE U RAVNI POVRŠINE

Katica Stefanović

Posmatrajmo površinu OAB u ravni Oxy, koja je ograničena delom ordinatne ose OB ($0 \leq y \leq b$), duži AB ($y = b$, $0 \leq x \leq a$) i lukom parabole n -tog reda od tačke $O(0,0)$ do tačke $A(a,b)$. Parabola n -tog reda zadana je stepenom funkcijom $y = \frac{bx^n}{a^n}$, ($n \geq 0$) i u koordinatnom početku ima teme ili prevoj što je definisano vrednošću eksponenta n . Na slici br. 1 naznačen je element površine $dA = dx dy$ i integraljenjem po površini A dobija se ukupna površina.

$$A = \iint_A dx dy = \int_0^a dx \int_{\frac{bx^n}{a^n}}^b dy = \int_0^a b \left(1 - \frac{x^n}{a^n}\right) dx = \frac{n}{n+1} ab \quad (1)$$



Slika br. 1

Statički momenti posmatrane površine su

$$S_x = Ay_c = \iint_A y \, dx \, dy = \int_0^a dx \int_{\frac{bx}{a}}^b y \, dy = \frac{n}{2n+1} ab^2; \text{ za } 0x \text{ osu,} \quad (2)$$

$$S_y = Ax_c = \int_A x \, dx \, dy = \int_0^a x \, dx \int_{\frac{bx}{a}}^b dy = \frac{n}{2(n+2)} a^2 b; \text{ za } 0y \text{ osu.} \quad (3)$$

Koordinate središta površine se dobijaju ako se odgovarajući statički momenti podele ukupnom površinom slike. Za osu $0x$ koordinata težišta je

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{n+1}{2(n+2)} a \quad (4)$$

dok je za $0y$ osu

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{n+1}{2n+1} b \quad (5)$$

Polarni moment inercije površine za pol u koordinatnom početku je

$$I_o = \iint_A (x^2 + y^2) \, dA = \int_0^a dx \int_{\frac{bx}{a}}^b (x^2 + y^2) \, dy = n ab \left[\frac{a^2}{3(n+3)} + \frac{b^2}{3n+1} \right] \quad (6)$$

a jednak je sa aksijalnim momentom inercije za osu $0z$, upravnu na ravan slike.

Aksijalni moment inercije površine za $0x$ osu je

$$I_x = \iint_A y^2 dx dy = \int_0^a dx \int_{\frac{bx}{a^n}}^b y^2 dy = \frac{n}{3n+1} ab^3 \quad (7)$$

(posmatrati sliku br. 1), dok je moment inercije za ordinatnu osu Oy

$$I_y = \iint_A x^2 dx dy = \int_0^a x^2 dx \int_{\frac{bx}{a^n}}^b dy = \frac{n}{3(n+3)} a^3 b \quad (8)$$

Centrifugalni moment inercije za Ox i Oy ose u ravni površine je

$$I_{xy} = \iint_A xy dx dy = \int_0^a x dx \int_{\frac{bx}{a^n}}^b y dy = \frac{n}{4(n+1)} a^2 b^2 \quad (9)$$

Koristeći se izrazom (1) za površinu momente inercije možemo napisati u sledećem obliku

$$I_x = \frac{n+1}{3n+1} b^2 A, \quad I_y = \frac{n+1}{3(n+3)} a^2 A, \quad I_{xy} = \frac{1}{4} ab A \quad (10)$$

Posmatrajući centrifugalni moment inercije napisan u obliku (10) možemo doći do zaključka da nije potrebno poznavati eksponent stepene funkcije, ako znamo veličinu površine k , ordinatnoj osi i koordinate a i b , da smo sračunali ce ntrifugalni moment inercije. To znači da centrifugalni moment inercije, izražen preko površine A , eksplicitno ne zavisi od eksponenta n stepene funkcije.

Momente inercije za težišne ose možemo sračunati koristeći se Steiner-ovom teoremom. Na slici br. 2 označene su ose C_ξ i C_η , te su aksijalni momen-

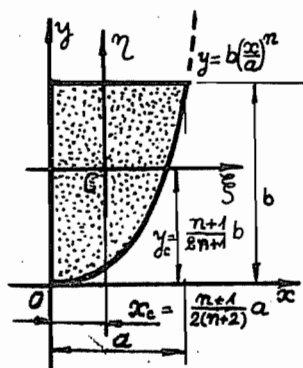
ti inercije

$$I_{\xi_c} = I_x - y_c^2 A = \frac{n^3}{(3n+1)(2n+1)^2} ab^3 \quad (11)$$

$$I_{\eta_c} = I_y - x_c^2 A = \frac{n^3}{12(n+3)(2n+1)^2} ab^3 \quad (12)$$

Centrifugalni moment inercije za težišne ose C_{ξ} i C_{η} je

$$I_{\xi_c \eta_c} = I_{xy} - x_c y_c A = \frac{n^2}{4(n+1)(n+2)(2n+1)} a^2 b^2 \quad (13)$$



Slika br. 2

Na slikama br. 3 iz tablice br. 1, obeleženim sa a), b), c), d), e) i f) predstavljene su površine za posmatrani slučaj kada eksponent n uzima posebne vrednosti $n = 1/3, 1/2, 1, 2, 3, \text{ i } 4$. U priloženoj tablici br. 1, sračunate su vrednosti za površinu, koordinate težišta, aksijalne momente inercije za koordinatne ose Ox i Oy i momente inercije za težišne ose C_{ξ} i C_{η} .

Tablica br. 1

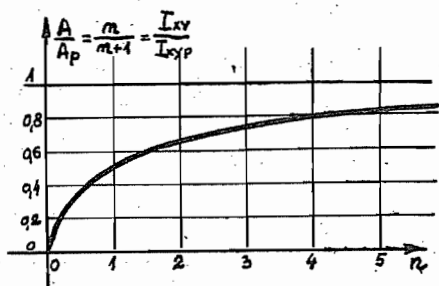
| n | 1/3 | 1/2 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------|-----------------------|------------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| A | $(1/4)ab$ | $\frac{1}{3}ab$ | $\frac{1}{2}ab$ | $\frac{2}{3}ab$ | $\frac{3}{4}ab$ | $\frac{4}{5}ab$ |
| x^c | $\frac{2}{7}a$ | $\frac{3}{10}a$ | $\frac{1}{3}a$ | $\frac{3}{8}a$ | $\frac{2}{5}a$ | $\frac{5}{12}a$ |
| y^c | $\frac{4}{5}b$ | $\frac{3}{4}b$ | $\frac{2}{3}b$ | $\frac{3}{5}b$ | $\frac{4}{7}b$ | $\frac{5}{9}b$ |
| l_x | $\frac{1}{6}ab^3$ | $\frac{1}{5}ab^3$ | $\frac{1}{4}ab^3$ | $\frac{2}{3}ab^3$ | $\frac{3}{10}ab^3$ | $\frac{4}{13}ab^3$ |
| l_y | $\frac{1}{30}a^3b$ | $\frac{1}{21}a^3b$ | $\frac{1}{12}a^3b$ | $\frac{2}{15}a^3b$ | $\frac{1}{6}a^3b$ | $\frac{4}{21}a^3b$ |
| l_{xy} | $\frac{1}{18}a^2b^2$ | $\frac{1}{12}a^2b^2$ | $\frac{1}{8}a^2b^2$ | $\frac{1}{6}a^2b^2$ | $\frac{3}{16}a^2b^2$ | $\frac{1}{5}a^2b^2$ |
| l_{5c} | $\frac{1}{150}ab^3$ | $\frac{1}{80}ab^3$ | $\frac{1}{36}ab^3$ | $\frac{8}{175}ab^3$ | $\frac{27}{490}ab^3$ | $\frac{64}{1053}ab^3$ |
| l_{7c} | $\frac{19}{1470}a^3b$ | $\frac{37}{2100}a^3b$ | $\frac{1}{36}a^3b$ | $\frac{19}{480}a^3b$ | $\frac{7}{150}a^3b$ | $\frac{13}{252}a^3b$ |
| l_{5c7c} | $\frac{3}{560}a^2b^2$ | $\frac{1}{1200}a^2b^2$ | $\frac{1}{72}a^2b^2$ | $\frac{1}{60}a^2b^2$ | $\frac{9}{560}a^2b^2$ | $\frac{2}{135}a^2b^2$ |
| | | | | | | |

Ako se obrazuje pravougaonik osnovice a i visine b , površine $A = ab$, to se mogu izvršiti korisna upoređivanja površina, koordinata težišta i momenta inercije površina koje su ograničene i delom parabole n -tog reda i istih veličina kod pravougaonika.

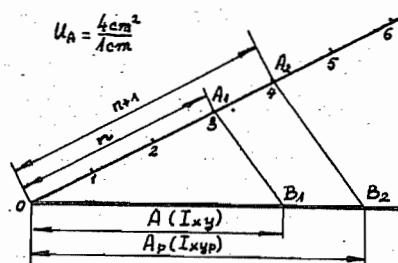
Odnos površine slike iz posmatrane familije slika i površine pravougaonika se može izraziti kao

$$\frac{A}{A_p} = \frac{n}{n+1} \quad (1)$$

Na slici br. 4a nacrtan je grafički prikaz tog odnosa u zavisnosti promene eksponenta n , dok je na slici 4b predstavljena konstruktivna metoda nalazjenja površine pomoću proporcionalnih duži, pri poznavanju eksponenta n i površine odgovarajućeg pravougaonika opisanog oko površine OAB ograničene delom parabole n -tog reda.



Slika br. 4a



Slika br. 4b

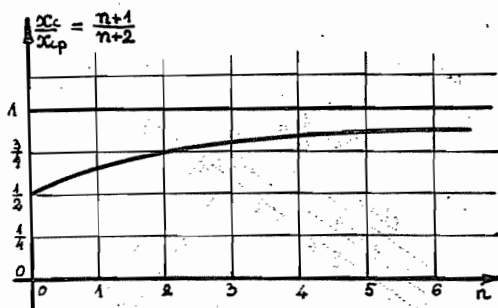
Uzimajući u obzir da su koordinate težišta pravougaonika $x_p = \frac{a}{2}$ i $y_p = \frac{b}{2}$, to se koordinate težišta površine sa slike br. 1 mogu izraziti kao

$$x_c = \frac{n+1}{n+2} x_p \quad \text{i} \quad y_c = \frac{2(n+1)}{2n+1} y_p \quad (4) \quad (5)$$

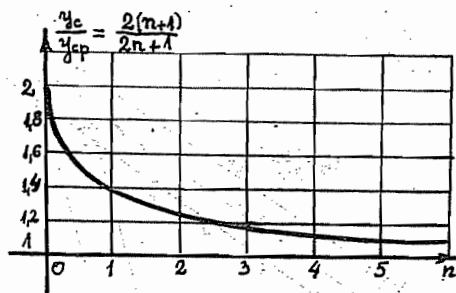
Na slikama br. 5a) i b) prikazane su zavisnosti odnosa

$$\left(\frac{x_c}{x_p}\right) \quad \text{i} \quad \left(\frac{y_c}{y_p}\right)$$

od eksponenta n stepene funkcije kojom je ograničena površina.



Slika br. 5a

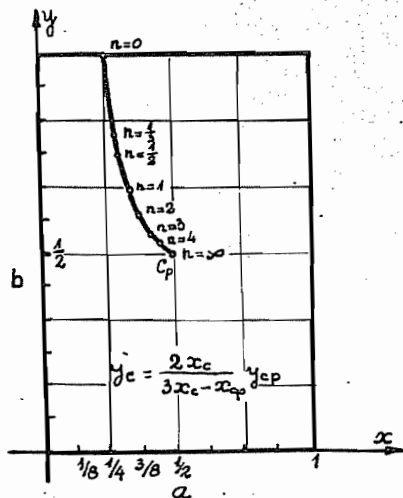


Slika br. 5b

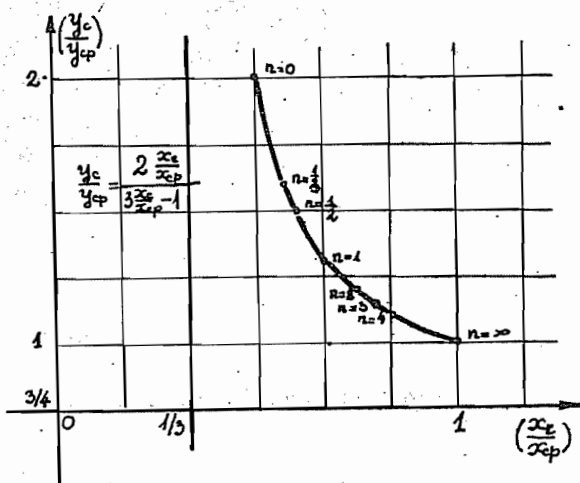
Na slikama br. 6 a) i b) nacrtano je geometrijsko mesto tačaka težišta površina kada se eksponent n menja od nule do beskonačnosti. Na slici pod a) prikazano je za posebne vrednosti a i b , dok je na slici pod b) dato u odnosu na koordinate težišta pravougaonika, tj. u koordinatnom sistemu

$$\left(\frac{x}{x_p}\right) \quad \text{i} \quad \left(\frac{y}{y_p}\right)$$

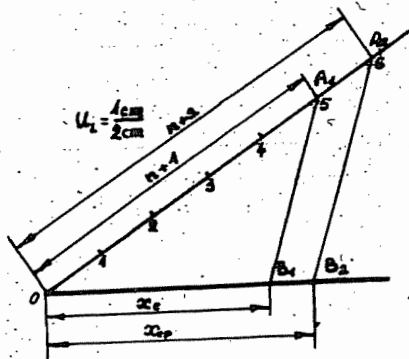
te važi za bilo koje odnose izmedju a i b . Koristeći se osobinom proporcionalnih duži mogu se koordinate težišta naći i grafički, što se da videti i sa slika br. 7 a), b) i c).



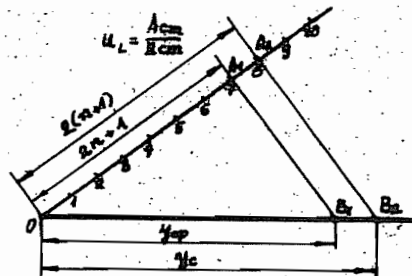
Slika br. 6a



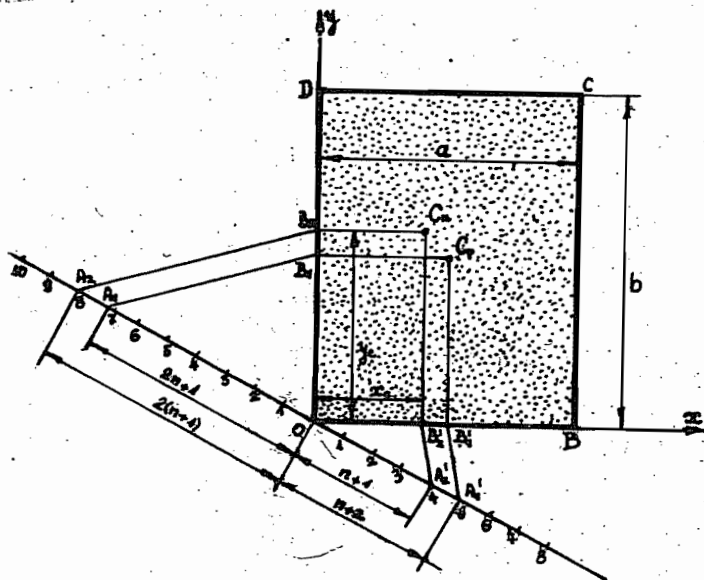
Slika broj 6b



Slika br. 7a



Slika br. 7b



Slika br. 7c

Momenti inercije pravougaonika su:

$$I_{xp} = \frac{1}{3} ab^3$$

$$I_{yp} = \frac{1}{3} a^3 b$$

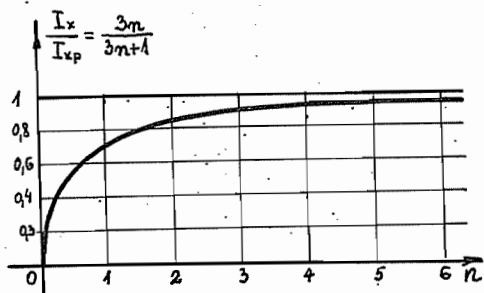
$$I_{xyp} = \frac{1}{4} a^2 b^2$$

(7)(8)(9)

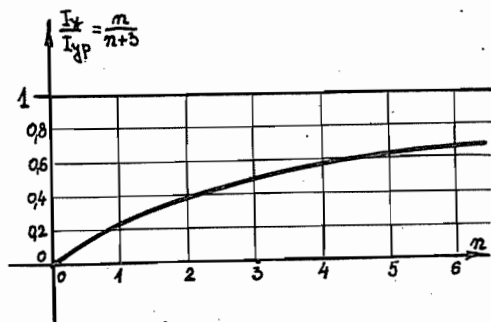
te su momenti inercije posmatrane slike

$$I_x = \frac{3n}{3n+1} I_{xp} \quad I_y = \frac{n}{n+3} I_{yp} \quad I_{xy} = \frac{n}{n+1} I_{xyp} \quad (7''') \quad (8''') \quad (9''')$$

Na slikama br. 8 a) i b) i 4 a) dati su grafici promene odnosa momenata inercije u zavisnosti od eksponenta n stepene funkcije.

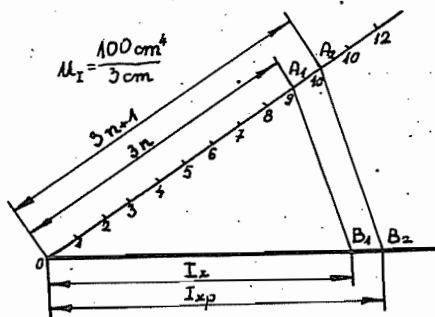


Slika br. 8a

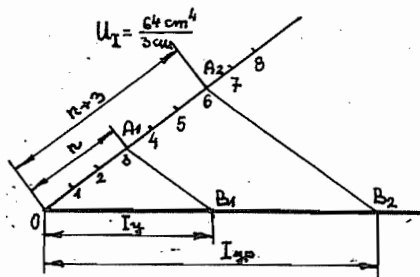


Slika br. 8b

Grafičke konstrukcije za nalaženje momenata inercije prikazane su na slikama br. 9 a) i b) i br. 4 b).



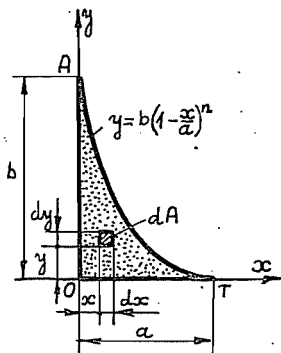
Slika br 9a



Slika br. 9b

Drugi slučaj bi bio, kada bismo posmatrali površinu ispod stepene funkcije do apscisne ose. Za taj slučaj posmatrajmo površinu OTA sa slike br. 10. Površina je ograničena koordinatnim osama i lukom parabole n -tog reda od tačke $T(a,0)$ na apscisnoj osi do tačke $A(0,b)$ na ordinatnoj osi. Jednačina stepene funkcije je $y = \frac{b}{a^n} (a-x)^n$ gde je $n \geq 0$. Površina se dobija sračunavanjem dvostrukog integrala

$$A = \iint_A dy dx = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a^n}(a-x)^n} dy = \frac{1}{n+1} ab \quad (14)$$



Slika br. 10

Statički momenti za koordinatne ose su:

$$S_y = Ax_C = \int_0^a x dx \int_0^{\frac{b}{a^n}(a-x)^n} dy = \frac{a^2 b}{(n+1)(n+2)}, \quad \text{za } Oy\text{-osu i} \quad (15)$$

$$S_x = Ay_C = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a^n}(a-x)^n} y dy = \frac{ab^2}{2(2n+1)}, \quad \text{za } Ox\text{-osu.} \quad (16)$$

Koordinate težišta su

$$x_C = \frac{1}{n+2} a \quad y_C = \frac{n+1}{2(2n+1)} b \quad (17) \text{ i } (18)$$

Aksijalni momenti inercije su

$$I_x = \iint_A y^2 dx dy = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a^n}(a-x)^n} y^2 dy = \frac{1}{3(3n+1)} ab^3 \quad \text{za } O_x\text{-osu i} \quad (19)$$

$$I_y = \iint_A x^2 dx dy = \int_0^a x^2 dx \int_0^{\frac{b}{a^n}(a-x)^n} dy = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} a^3 b =$$

$$= \frac{2n!}{(n+3)!} a^3 b \quad \text{za } O_y\text{-osu. Centrifugalni moment inercije je}$$
(20)

$$I_{xy} = \iint_A xy dx dy = \frac{1}{4(2n+1)(n+1)} a^2 b^2 \quad (21)$$

Koristeći se izrazom za površinu (14) momenti inercije se mogu napisati i u sledećim oblicima:

$$I_x = \frac{n+1}{3(3n+1)} Ab^2, \quad I_y = \frac{2}{(n+2)(n+3)} Aa^2, \quad I_{xy} = \frac{1}{4(2n+1)} Aab \quad (22)$$

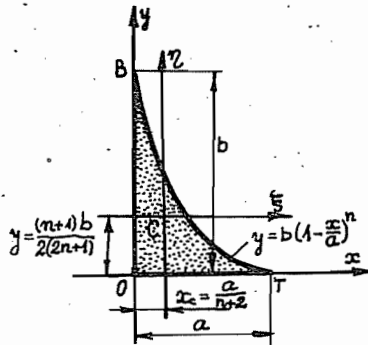
Na slici br. 11 prikazane su težišne ose c_ξ i c_η za koje su momenti inercije

$$I_{\xi c} = I_x - x_c^2 A = \frac{b^3 a}{12} \frac{7n^2 + 4n + 1}{(3n+1)(2n+1)} \quad \text{za } c_\xi \text{ - osu paralelnu osi } O_x \text{ i} \quad (23)$$

$$I_{\eta c} = I_y - y_c^2 A = \frac{a^3 b}{(n+2)(n+3)} \quad \text{za } c_\eta \text{ - osu paralelnu osi } O_y. \quad (24)$$

Centrifugalni moment inercije za težišne ose je

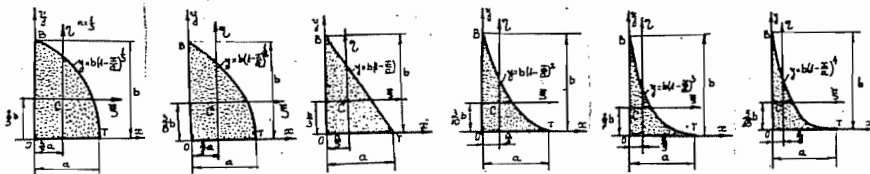
$$I_{C^{\eta}C} = I_{xy} - x_C y_C A = \frac{-n a^2 b^2}{4(n+1)(n+2)(2n+1)}. \quad (25)$$



Slika br. 11

Na slikama br. 12 obeleženim sa a), b), c), d), e) i f) u tablici broj 2, predstavljene su površine i označene koordinate težišta za slučajeve kada eksponent n uzima razne vrednosti. U tablici br. 2 nalaze se vrednosti veličine površine, koordinata težišta i momenta inercije za nekoliko posebnih vrednosti eksponenta n .

Tablica br. 2.

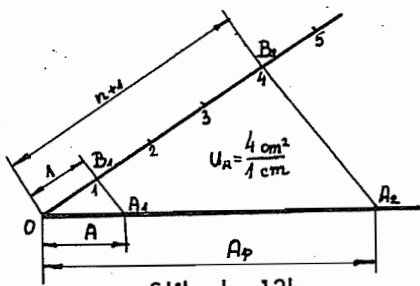
| n | 1/3 | 1/2 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--|------------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------------|------------------------|------------------------|
| A | $\frac{3}{4}ab$ | $\frac{2}{3}ab$ | $\frac{1}{2}ab$ | $\frac{1}{3}ab$ | $\frac{1}{4}ab$ | $\frac{1}{5}ab$ |
| x_C | $\frac{3}{7}a$ | $\frac{2}{5}a$ | $\frac{1}{3}a$ | $\frac{1}{4}a$ | $\frac{1}{5}a$ | $\frac{1}{6}a$ |
| y_C | $\frac{2}{5}b$ | $\frac{3}{8}b$ | $\frac{1}{3}b$ | $\frac{3}{10}b$ | $\frac{2}{7}b$ | $\frac{5}{18}b$ |
| I_x | $\frac{1}{6}ab^3$ | $\frac{2}{15}ab^3$ | $\frac{1}{12}ab^3$ | $\frac{1}{21}ab^3$ | $\frac{1}{30}ab^3$ | $\frac{1}{39}ab^3$ |
| I_y | $\frac{27}{140}a^3b$ | $\frac{16}{105}a^3b$ | $\frac{1}{12}a^3b$ | $\frac{1}{30}a^3b$ | $\frac{1}{60}a^3b$ | $\frac{1}{105}a^3b$ |
| I_{xy} | $\frac{9}{80}a^2b^2$ | $\frac{1}{12}a^2b^2$ | $\frac{1}{24}a^2b^2$ | $\frac{1}{60}a^2b^2$ | $\frac{1}{112}a^2b^2$ | $\frac{1}{180}a^2b^2$ |
| $I_{\xi c}$ | $\frac{7}{150}ab^3$ | $\frac{19}{480}ab^3$ | $\frac{1}{36}ab^3$ | $\frac{37}{2100}ab^3$ | $\frac{19}{1470}ab^3$ | $\frac{43}{4212}ab^3$ |
| $I_{\eta c}$ | $\frac{27}{490}a^3b$ | $\frac{8}{175}a^3b$ | $\frac{1}{36}a^3b$ | $\frac{1}{80}a^3b$ | $\frac{1}{150}a^3b$ | $\frac{1}{252}a^3b$ |
| $I_{\xi c \eta c}$ | $-\frac{9}{560}a^2b^2$ | $-\frac{1}{60}a^2b^2$ | $-\frac{1}{72}a^2b^2$ | $-\frac{1}{1200}a^2b^2$ | $-\frac{3}{560}a^2b^2$ | $-\frac{1}{270}a^2b^2$ |
|  | <p>Slika br. 12a</p> | <p>Slika br. 12b</p> | <p>Slika br. 12c</p> | <p>Slika br. 12d</p> | <p>Slika br. 12e</p> | <p>Slika br. 12f</p> |

Slično kao u prethodnom primeru mogu se izvršiti upoređivanja istih elemenata i veličina pravougaonika i posmatrane površine sa slike br. 11.

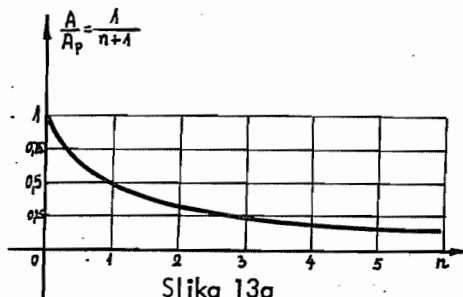
Odnos površina je

$$\frac{A}{A_p} = \frac{1}{n+1} \quad (14')$$

Na slici br. 13a) dat je grafički prikaz odnosa površina u zavisnosti od eksponenta n , a na slici br. 13b) konstruktivna metoda nalaženja površine kada se zna površina pravougaonika i vrednost eksponenta n .



Slika br. 13b

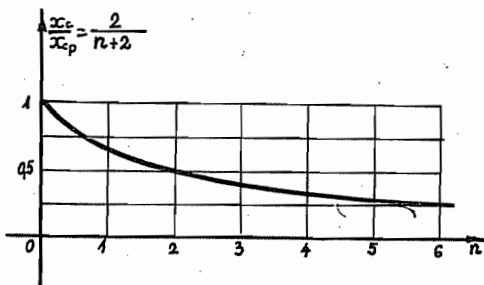


Slika 13a

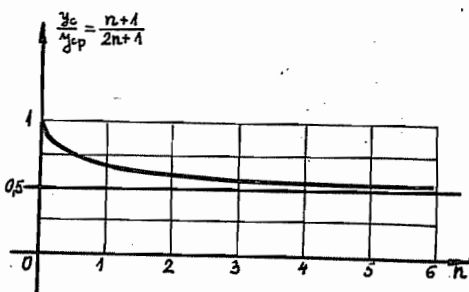
Odnosi koordinata težišta su:

$$\frac{x_C}{x_p} = \frac{2}{n+2} \quad \frac{y_C}{y_p} = \frac{n+1}{2n+1} \quad (17') \quad (18')$$

Na slikama br. 14 a) i b) prikazani su ti odnosi u funkciji eksponenta n .

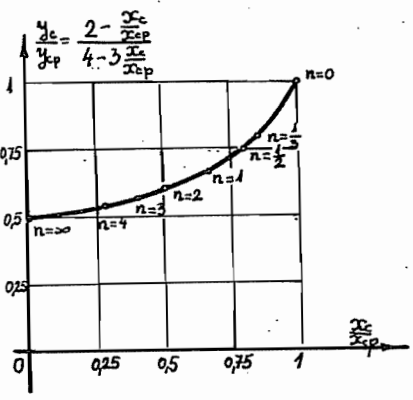


Slika br. 14a

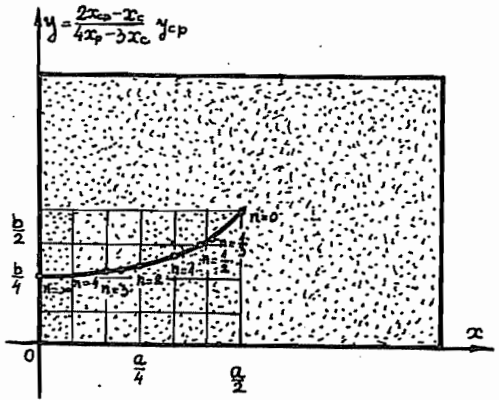


Slika br. 14b

Na slikama br. 15 a) i b) nacrtano je geometrijsko mesto tačaka težišta površina kada se eksponent menja. Na slici pod a) je prikazano u relativnom odnosu prema položaju težišta pravougaonika, dok je na slici označenoj sa b) prikazano za slučaj posebnih vrednosti a i b.

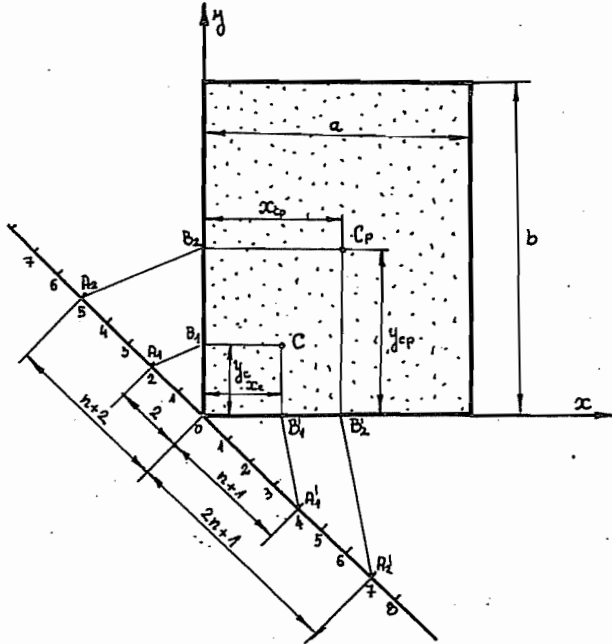


Slika broj 15a



Slika br. 15b

Do položaja težišta se može doći grafički kao što se to može utvrditi sa slike br. 16.

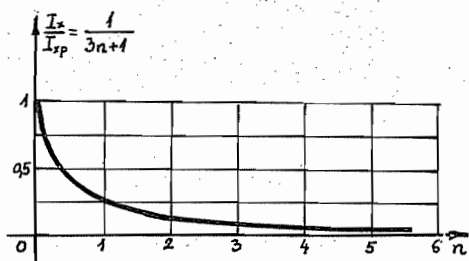


Slika broj 16

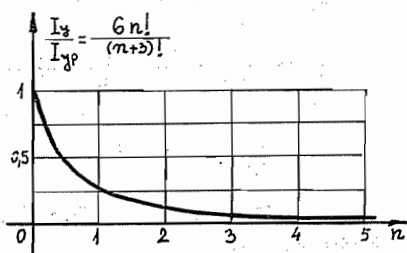
Za momente inercije se može pisati

$$\frac{I_x}{I_{xp}} = \frac{1}{3n+1}, \quad \frac{I_y}{I_{yp}} = \frac{6}{(n+1)(n+2)(n+3)}, \quad \frac{I_{xy}}{I_{xyp}} = \frac{1}{(2n+1)(n+1)} \quad (20)$$

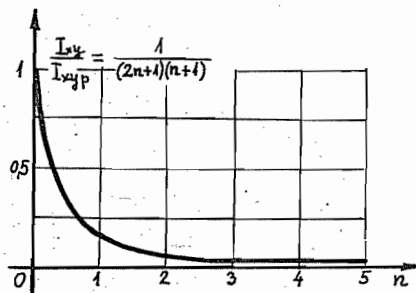
Na slikama br. 17 a), b) i c) prikazane su promene ovih odnosa u funkciji eksponenta n .



Slika br. 17a

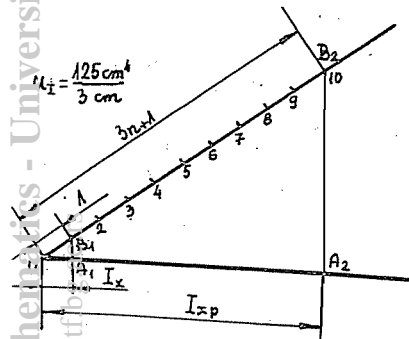


Slika broj 17b

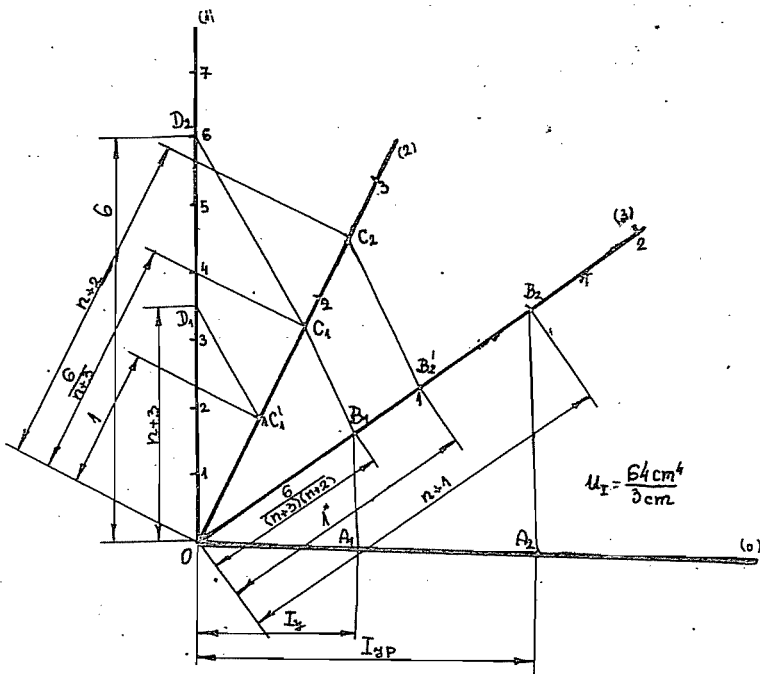


Slika br. 17c

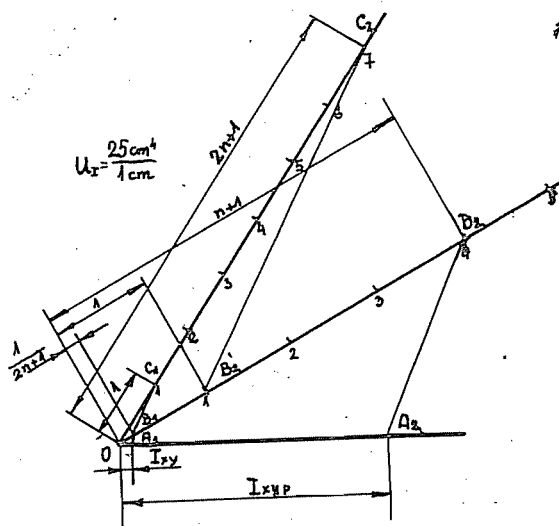
Grafička konstrukcija za nalaženje momenata inercije-slike ograničene lukom parabole n -tog reda kada se zna moment inercije pravougaonika strana a i b i vrednost eksponenta n prikazana je na slikama br. 18 a), b) i c) za aksijalne odnosno centrifugalni moment inercije.



Slika br. 18a



Slika br. 18b



Slika br. 18c

REZIME

U ovom članku sračunate su veličine površina, koordinata težišta i momenti inercije površina u funkciji eksponenta n stepene funkcije, čijim je grafikom ograničena površina kako je to na skicama prikazano.

Računski deo je praćen grafičkim konstrukcijama preko eksponenta n i odgovarajućih veličina za pravougaonik. Takođe su prikazani i dijagrami u funkciji eksponenta n .

SUMMARY

In this work there are calculated surfaces, coordinates of gravity centres, inercial momentums of surface in function of exponent n grades of function which graph limits the surface (n grades of function with which the surface is limited).

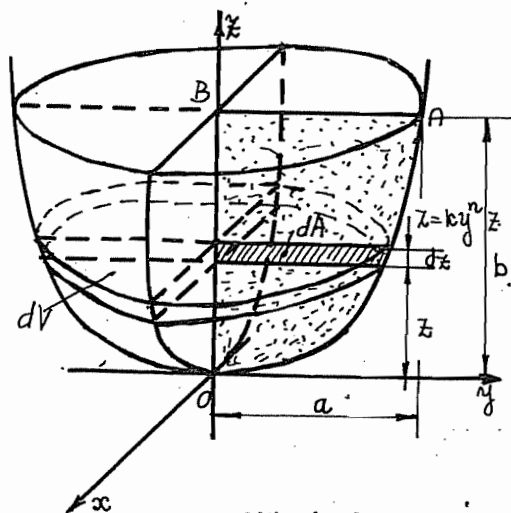
The account part is accompanied with graphic constructions in function of axponent n and responfent sizes (dimensions) for parallelogram. The diagrams are presented (given) too.

**ZAPREMINA, STATIČKI MOMENT, TEŽIŠTE I MOMENTI INERCIJE
 TELA KOJA POSTAJU POTPUNOM ROTACIJOM POVRŠINE,
 DELOM OGRANIČENE I LUKOM GRAFIKA STEPENE
 FUNKCIJE n - TOG REDA, OKO ORDINATNE OSE**

Katica Stefanović

Površina OAB sa slike br. 1, potpunom rotacijom oko ordinatne ose opisuje osnosimetrično telo prikazano na slici br. 1, u koordinatnom sistemu $Oxyz$. Izaberimo element površine dA oblika pravougaonika osnovice y i visine dz , koji potpunom rotacijom oko ordinatne ose Oz opisuje zapreminu $dV = \pi y^2 dz$. Ukupna zapremina tela sa slike br. 1 dobija se integraljenjem po z u granicama od nule do b .

Jednačina stepene funkcije je sada $z = \frac{b}{n} y^n$, a diferenciranjem se dobija $dz = n \frac{b}{a} y^{n-1} dy$, te je zapremina obrtnog tela



Slika br.1

$$V = \pi \int_0^b y^2 dz = \frac{n}{n+2} \pi a^2 b \quad (1)$$

Zapremina $dV = \pi y^2 dz$ je sa težištem u $(0, 0, z)$ te je statički moment

$$S_z = z_e V = \iiint_V z dV = \pi \int_0^b z y^2 dz = \frac{n}{2(n+1)} \pi a^2 b^2 \quad (2)$$

$$S_x = S_y = 0$$

Težište obrtne zapremine se dobija kao količnik statičkog momenta i zapremine tela. Pri tome smatramo da je telo homogeno.

$$x_C = y_C = 0 \quad z_C = \frac{n+2}{2(n+1)} b \quad (3)$$

Momenti inercije se mogu računati pomoću izraza za momente inercije obrtnih tela koji su naznačeni brojem (445) u *Dinamici*. * Momenti inercije posmatrane familije obrtnih tela u funkciji od a i b i eksponenta n , su

$$J_z = \frac{1}{2} \rho \pi \int_0^b y^4 dz = \frac{n}{2(n+4)} \rho \pi a^4 b, \quad \text{za obrtnu osu } Oz, \quad (4)$$

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_z + \rho \pi \int_0^b z^2 y^2 dz = \frac{n \rho \pi a^2 b}{4(n+4)(3n+2)} \left[(3n+2)a^2 + 4(n+4)b^2 \right] \quad (5)$$

za ose Ox i Oy koje su upravne na obrtnu osu Oz . Imajući u vidu da je zapremina obrtnog tela zadata izrazom (1), a ρ gustina homogenog tela, to je masa tela

$$M = \frac{n}{n+2} \rho \pi a^2 b \quad (1)$$

* *Dinamika* - D. P. Rašković

Koristeći se izrazima za masu momenta inercije se mogu napisati i u sledećem obliku

$$J_z = \frac{n+2}{2(n+4)} M a^2 \quad (4)$$

$$J_x = J_y = \frac{(n+2)M}{4(n+4)(3n+2)} \left[(3n+2) a^2 + 4(n+4) b^2 \right] \quad (5)$$

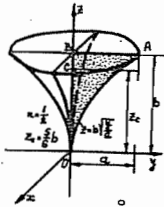
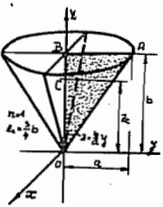
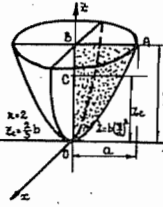
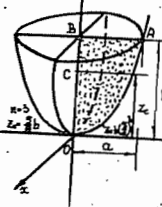
Za težišne ose momenta inercije su

$$J_\xi = J_z = \frac{n+2}{2(n+4)} M a^2 \quad (6)$$

$$J_\eta = J_x = J_y - z_C^2 M = \frac{(n+2)M}{4(n+4)(3n+2)(n+1)^2} \left[(3n+2)(n+1)^2 a^2 + n^2 (n+4) b^2 \right] \quad (7)$$

Na slikama br. 2 a, b, c i d prikazana su obrtna tela i naznačene vrednosti koordinate težišta za slučaj kada je eksponent $n = \frac{1}{2}, 1, 2, 3$. U tabeli br. 1 su za te iste vrednosti eksponenta n sračunate vrednosti koordinata težišta, zapremine, mase i momenta inercije.

Tablica br. 1

| n | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 |
|-----------|---|---|---|--|
| V | $\frac{1}{5} \pi a^2 b$ | $\frac{1}{3} \pi a^2 b$ | $\frac{1}{2} \pi a^2 b$ | $\frac{3}{5} \pi a^2 b$ |
| z_C | $\frac{5}{6} b$ | $\frac{3}{4} b$ | $\frac{2}{3} b$ | $\frac{5}{8} b$ |
| J_z | $\frac{1}{18} \pi a^4 b$ | $\frac{1}{10} \pi a^4 b$ | $\frac{1}{6} \pi a^4 b$ | $\frac{5}{14} \pi a^4 b$ |
| $J_{x=y}$ | $\frac{1}{252} M(7a^2 + 36b^2)$ | $\frac{3}{20} M(a^2 + 4b^2)$ | $\frac{1}{6} M(a^2 + 3b^2)$ | $\frac{5}{308} M(11a^2 + 28b^2)$ |
| |  <p>Slika br. 2a</p> |  <p>Slika br. 2b</p> |  <p>Slika br. 2c</p> |  <p>Slika br. 2d</p> |

Ako se obrazuje cilindar (valjak) poluprečnika osnove a i visine b , za premine $V = a^2 b \sqrt{n}$, mogu se izvršiti upoređivanja zapremine, masa, koordinata težišta i momenata inercije cilindra i tela iz familije obrtnih tela koje posmatramo.

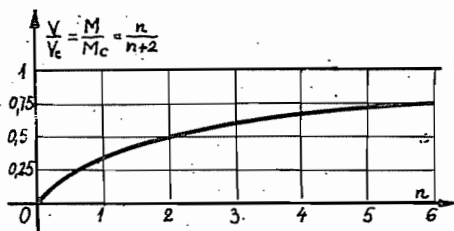
Upoređujući zapremine i mase (homogenih tela) dobijamo

$$\frac{V}{V_c} = \frac{n}{n+2} = \frac{M}{M_c} \quad (1'')$$

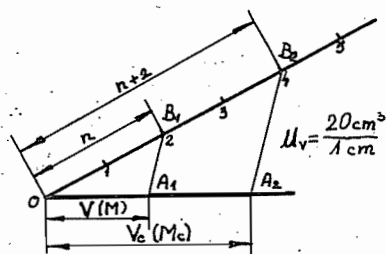
Na slici br. 3 a) prikazana je grafički zavisnost odnosa zapremine odnosno masa u funkciji od eksponenta, n , dok je na slici br. 3 b) pokazana konstrukcija veličine zapremine odnosno mase obrtnog tela kada se zna zapremina odnosno masa odgovarajućeg cilindra i eksponent n .

Upoređivanje statičkih momenata daje odnos

$$\frac{S_z}{S_{zc}} = \frac{n}{n+1} \quad (2)$$

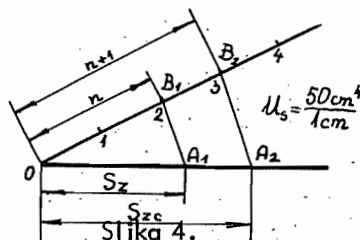


Slika br. 3a



Slika br. 3b

Na slici br. 4 pokazana je grafička konstrukcija za nalazjenje statičkog momenta.

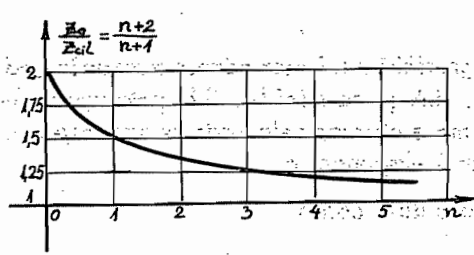


Slika 4.

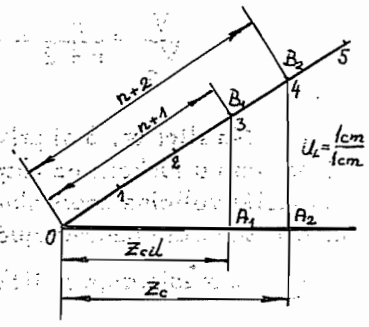
Odnos koordinata težišta je

$$\frac{z_c}{z_{cil}} = \frac{n+2}{n+1} \quad (3)$$

Na slici br. 5 a) prikazana je zavisnost tog odnosa od eksponenta n, dok je na slici br. 5 b) pokazana grafička konstrukcija nalaženja koordinate težišta kada se zna visina b i eksponent n.



Slika br. 5a

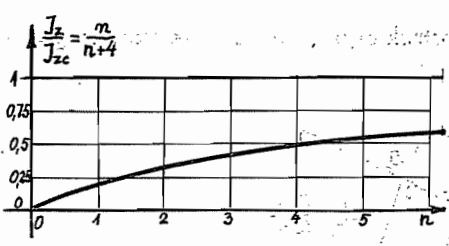


Slika br. 5b

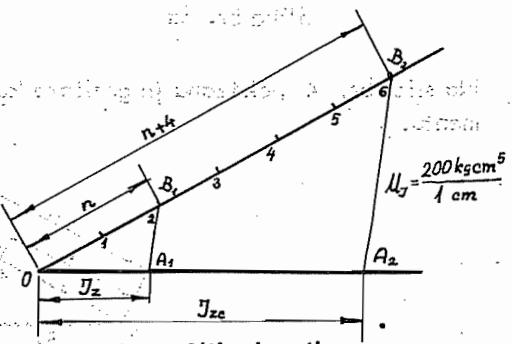
Odnos momenata inercije za obrtnu Oz osu je

$$\frac{J_z}{J_{zc}} = \frac{n}{n+4} \quad (4)$$

što je pokazano na slici br. 6 a). Na slici br. 6 b) predstavljena je grafička metoda nalaženja momenta inercije obrtnog tela kada se poznaje moment inercije cilindra i eksponent n.



Slika br. 6a

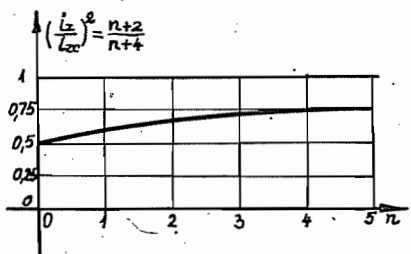


Slika br. 6b

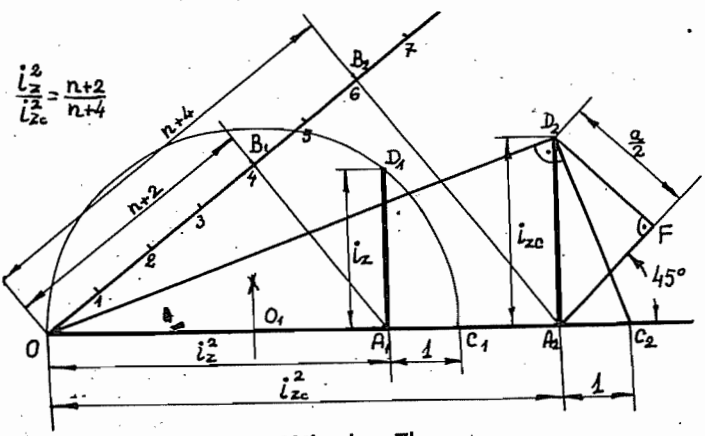
Kvadrat poluprečnika inercije za osu Oz cilindra je $i_{zc}^2 = \frac{a^2}{2}$, pa se odnos kvadrata poluprečnika inercije obrtnog tela iz familije posmatranih i cilindra može napisati u sledećem obliku

$$\frac{i_z^2}{i_{zc}^2} = \frac{n+2}{n+4} \quad (8)$$

Na slici br.7a) vidi se zavisnost tog odnosa od eksponenta n . Slika br 7b) pokazuje metodu za grafičku konstrukciju poluprečnika inercije obrtnog tela kada se poznaje eksponent n i poluprečnik a . Konstruiše se poluprečnik inercije cilindra i_{zc} kao hipotenuza pravouglog jednako katetnog trougla D_2A_2F katete $\frac{a}{2}$, povuče se, zatim, prava upravna na pravac D_2A_2 i na njoj se obeleži duž $\overline{A_2C_2}$ dužine jedne jedinice u istoj razmeri kao i na pravcu D_2A_2 . Tačka C_2 se spoji sa tačkom D_2 i na pravcu C_2D_2 povuče se prava upravna, koja seče pravu A_2C_2 u tački O . Duž $\overline{OA_2}$ predstavlja kvadrat poluprečnika inercije cilindra. Iz tačke O povuče se poluprava, pod proizvoljnim uglom, i nanese duži $\overline{OB_1} = n+2$ i $\overline{OB_2} = n+4$, pomoću kojih se konstruiše duž i_z^2 kvadrat poluprečnika inercije obrtnog tela. U produžetku OA_1 , nanese se duž $\overline{A_1C_1}$ jednaka $\overline{A_2C_2}$, tj. jedinici u razmeri, polovinom duži $\overline{OC_1}$, kao poluprečnikom opiše se polukrug sa centrom u O_1 . Polukrug seče normalu kroz A_1 u tački D_1 . Duž $\overline{A_1D_1}$ predstavlja traženi poluprečnik inercije, u istoj razmeri u kojoj je i poluprečnik inercije cilindra za obrtnu osu.



Slika br. 7a

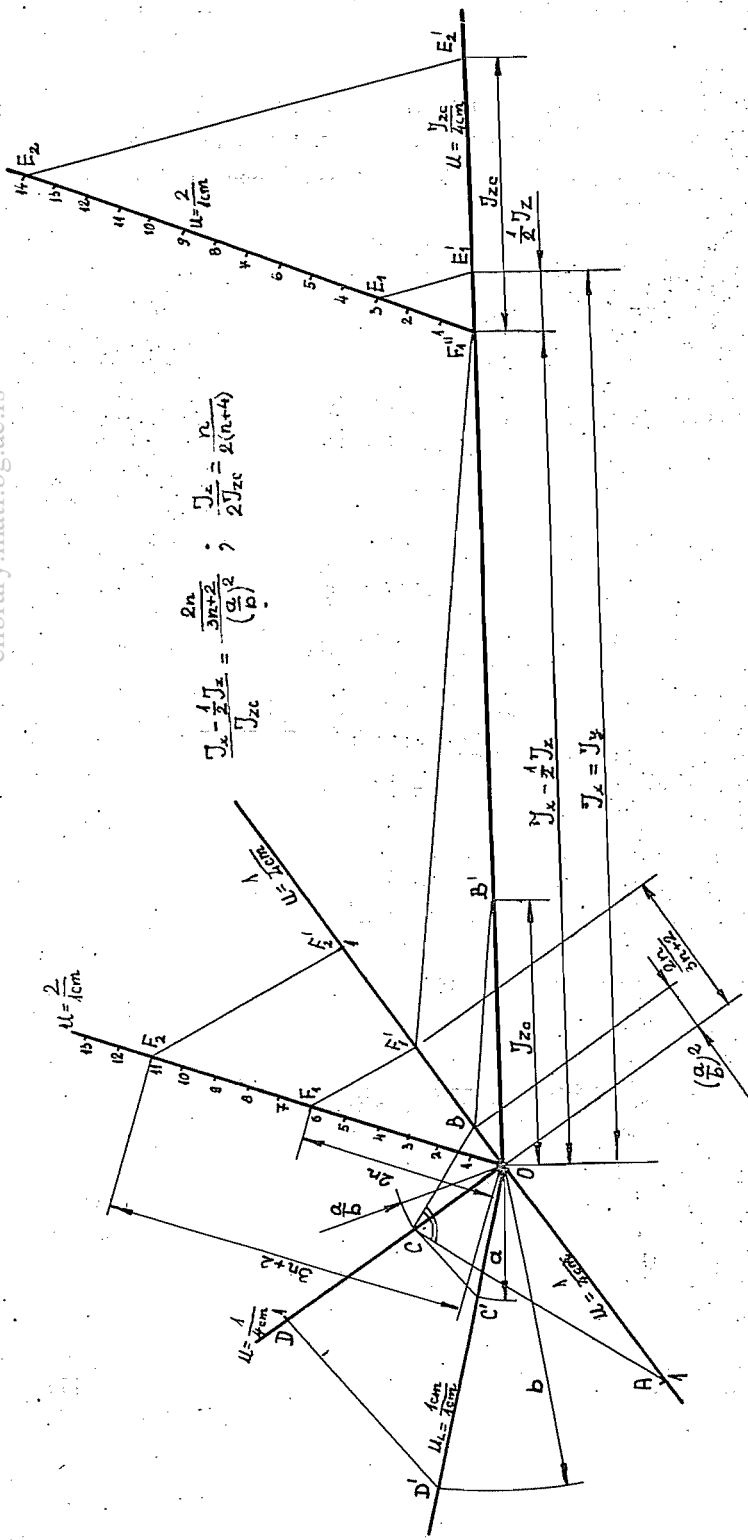


Slika br. 7b

Posmatrajući momente inercije za Ox , odnosno Oy i Oz osu i moment inercije za Oz osu cilindra poluprečnika osnove a i visine b , može se napisati sledeći izraz

$$\frac{J_x - \frac{1}{2} J_z}{J_{zc}} = \frac{\left(\frac{2n}{3n+2}\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)^2} \quad (5'')$$

Ovako napisana zavisnost napred pobrojanih momenata inercije omogućava da se konstruiše razlika $J_x - \frac{1}{2} J_z$, kada se poznaje moment inercije cilindra za Oz osu i eksponent n , stepene funkcije. Na slici br. 8 prikazana je grafička metoda nalaženja momenta inercije za ose Ox , odnosno Oy . Kroz tačku O povuku se prava AOB i poluprava OD uzajamno upravne jedna na drugu. U istoj razmeri se obeleže jedinice \overline{OA} , \overline{OF}_2 , \overline{OD} . Zatim se povuče poluprava OD' na koju se nanese u izabranoj razmeri poluprečnik $a = \overline{OC}'$ i visina $b = \overline{OD}'$. Tačka D' se spoji sa tačkom D , a zatim iz tačke C' se povuče paralela sa DD' , tako da se dobije tačka C . Duž \overline{OC} predstavlja odnosa $\left(\frac{a}{b}\right)$. Smatrajući odsečak OC srednjom geometrijskom proporcionalom, to konstruišemo duž OB , pomoću normale na AC u tački C , koja preseca pravac OB u tački B . Duž OB predstavlja kvadrat odnosa a i b . Kroz tačku O povuče se poluprava OF_2 i na njoj se obeleže duži $\overline{OF}_1 = 2n$ i $\overline{OF}_2 = 3n + 2$. Tačka F_2 spoji se sa tačkom F_2' , a kroz tačku F_1 se povuče paralela F_1F_1' sa F_2F_2' . Duž \overline{OF}_1' predstavlja odnos $\frac{2n}{3n+2}$. Kroz tačku O se povuče poluprava i na nju se nanese moment inercije za Oz osu cilindra u izabranoj razmeri. $\overline{OB}' (= J_{zc})$. Tačka B se spoji sa tačkom B' , pa se kroz tačku F_1' povuče paralela sa BB' do preseka F_1'' . Duž \overline{OF}_1'' predstavlja razliku $J_x - \frac{1}{2} J_z$. Kroz tačku F_1'' pod proizvoljnim uglom povuče se poluprava i na njoj obeleže duži $\overline{F_1''E_1} = n$ i $\overline{F_1''E_2} = 2(n+4)$. U pravcu OF_1'' nanese se duž $\overline{F_1''E_2}'$ u razmeri jedna ka J_{zc} . Spojе se tačke E_2 i E_2' pa se kroz tačku E_1 povuče paralela sa E_2E_2' do preseka u tački E_1' . Duž $\overline{F_1''E_1}'$ predstavlja polovinu momenta inercije za Oz osu posmatranog obrtnog tela. $\overline{OE_1}'$ u odgovarajućoj razmeri predstavlja moment, inercije za Oy , odnosno Ox osu.



$$J_x - \frac{1}{2} J_{z_c} = \frac{\rho n}{2M^2} \cdot \frac{J_z}{2J_{z_c}} ; \quad J_z = \frac{n}{2(n+4)}$$

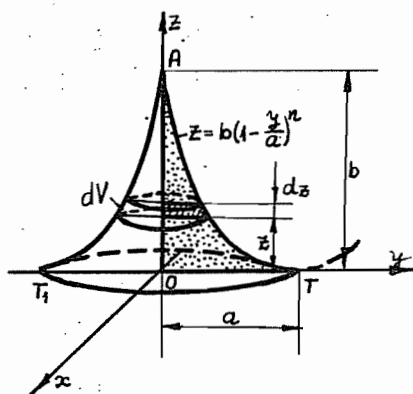
Slika 8.

Na sličan način se može doći i do poluprečnika inercije za ove ose.

Drugi slučaj obrtnog tela bi bio kada bi površina OTA sa slike br. 9 izvršila potpunu rotaciju oko ordinatne ose. Na slici br. 9 prikazano je obrtno telo u koordinatnom $Oxyz$ sistemu, za taj slučaj. Zapremina tela, tako dobijenog je

$$V = \pi \int_0^b y^2 dz = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \pi a^2 b \quad (9)$$

jer je jednačina parabole n -tog reda $z = b(1 - \frac{y}{a})^n$.



Slika br. 9

Statički moment za Oz osu je

$$S_z = V z_c = \iiint_V z dV = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \pi b^2 a^2 \quad (10)$$

Koordinate težišta su

$$x_C = y_C = 0$$

$$z_C = \frac{n+2}{4(2n+1)} b \quad (11)$$

Momenti inercije su

$$\begin{aligned}
 J_z &= \frac{1}{2} \rho \pi \int_0^b y^4 dz = \frac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \rho \pi a^4 b = \\
 &= \frac{12n!}{(n+4)!} \pi a^4 b \rho
 \end{aligned} \tag{12}$$

za Oz obrtnu osu.

$$\begin{aligned}
 J_x = J_y &= \frac{1}{2} J_z + \rho \pi \int_0^b z^2 y^2 dz = \\
 &= 2 \rho \pi a^2 b \left[\frac{3n}{(n+4)} a^2 + \frac{(3n)}{3(3n+2)} b^2 \right]
 \end{aligned} \tag{13}$$

za ose Ox i Oy , za koje su momenti inercije medju sobom jednaki. Koristeći izraz (9) može se masa homogenog tela napisati u sledećem obliku:

$$M = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \rho \pi a^2 b \tag{9}$$

te su momenti inercije

$$J_z = \frac{6}{(n+3)(n+4)} M a^2 \tag{12}$$

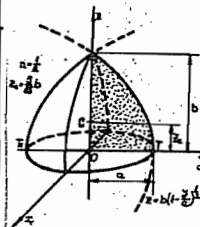
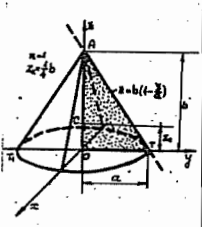
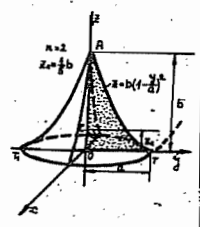
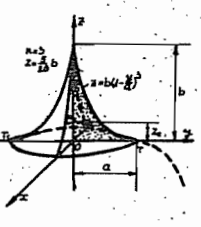
$$J_x = J_y = M \left[\frac{3}{(n+3)(n+4)} a^2 + \frac{(n+1)(n+2)}{3(3n+1)(3n+2)} b^2 \right] \tag{13}$$

Za težišnu C_z osu moment inercije je isti kao i za Oz osu. Za druge dve težišne ose momenti inercije su

$$J_{\xi} = J_{\eta} = M \left\{ \frac{3}{(n+3)(n+4)} a^2 + \left[\frac{(n+1)(n+2)}{3(3n+1)(3n+2)} - \frac{(n+2)^2}{16(2n+1)^2} b^2 \right] \right\} \tag{14}$$

Na slikama br. 10 a, b, c i d prikazana su obrtna tela za slučajeve kada eksponent n uzima posebne vrednosti $\frac{1}{2}, 1, 2, 3$, i naznačene su vrednosti koordinate težišta u svakom posebnom slučaju. U tablici br. 2 nalaze se vrednosti zapremine, koordinate težišta i momenata inercije za nekoliko vrednosti eksponenta n .

Tablica br. 2.

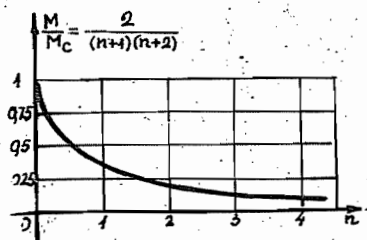
| n | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 |
|-------------|--|--|--|---|
| V | $\frac{8}{15}\pi a^2 b$ | $\frac{1}{3}\pi a^2 b$ | $\frac{1}{6}\pi a^2 b$ | $\frac{1}{10}\pi a^2 b$ |
| z_C | $\frac{5}{16}b$ | $\frac{1}{4}b$ | $\frac{1}{5}b$ | $\frac{5}{28}b$ |
| J_z | $\frac{24}{63}Ma^2$ | $\frac{3}{10}Ma^2$ | $\frac{1}{5}Ma^2$ | $\frac{1}{7}Ma^2$ |
| $J_x = J_y$ | $\frac{M}{7}(4a^2 + b^2)$ | $\frac{M}{20}(3a^2 + 2b^2)$ | $\frac{M}{70}(7a^2 + 5b^2)$ | $\frac{M}{462}(33a^2 + 28b^2)$ |
| |  <p>Slika br. 10a</p> |  <p>Slika br. 10b</p> |  <p>Slika br. 10c</p> |  <p>Slika br. 10d</p> |

Poredjenja zapremina, koordinata težišta i momenata inercije posmatranog obrtnog tela i cilindra daju sledeće odnose

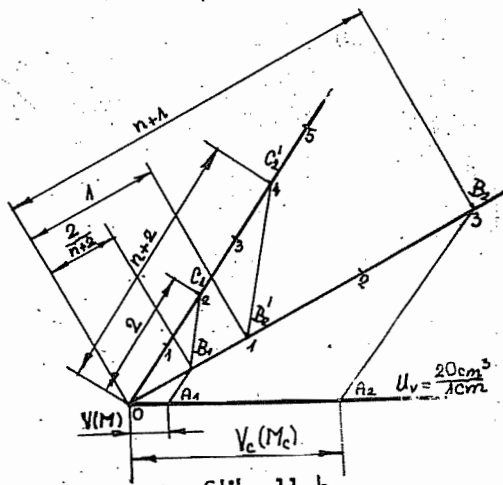
$$\frac{V}{V_c} = \frac{M}{M_c} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} ; \quad \frac{z_c}{z_{cil}} = \frac{n+2}{2(2n+1)} \quad (9''') \quad (11'')$$

$$\frac{J_z}{J_{zc}} = \prod_{k=1}^{k=4} \frac{k}{n+k} ; \quad \frac{J_x - \frac{1}{2} J_z}{J_{zc}} = \frac{\frac{4}{(3n+2)(3n+1)}}{3\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (12'') \quad (13'')$$

Na slikama br. 11 a), 12 a) i 13 a) prikazane su grafičke zavisnosti pobrojanih odnosa u funkciji eksponenta n , dok su na slikama br. 11 b), 12 b) i 13 b) i 15 prikazane grafičke metode (konstrukcije) za nalaženje zapremine, mase, koordinate težišta, momenata inercije za ose Oz , Oy i Ox , obrtnog tela kada se znaju odgovarajuće veličine kod cilindra i eksponent stepene funkcije. Konstrukcija na slici br. 15 slična je konstrukciji sa slike br. 8 u svom prvom delu, dok je identična sa konstrukcijom sa slike br. 11 b) u svom drugom delu, te smatra da nije potrebno da bude posebno obrazložena.



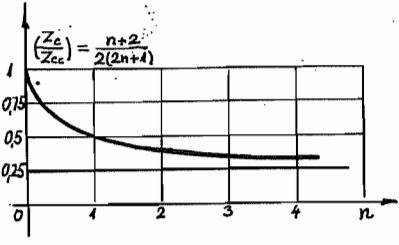
Slika br. 11 a.



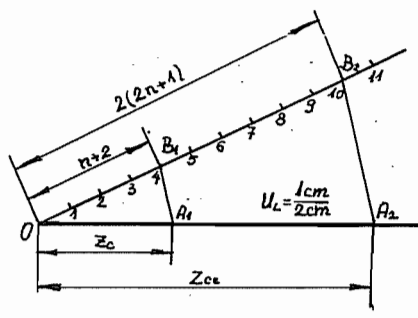
Slika 11-b

Odnos kvadrata poluprečnika inercije

$$\left(\frac{i_z}{i_{zc}}\right)^2 = \frac{12}{(n+3)(n+4)} \quad (15)$$

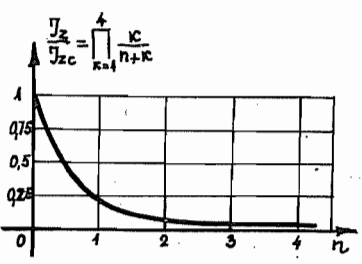


Slika br. 12a

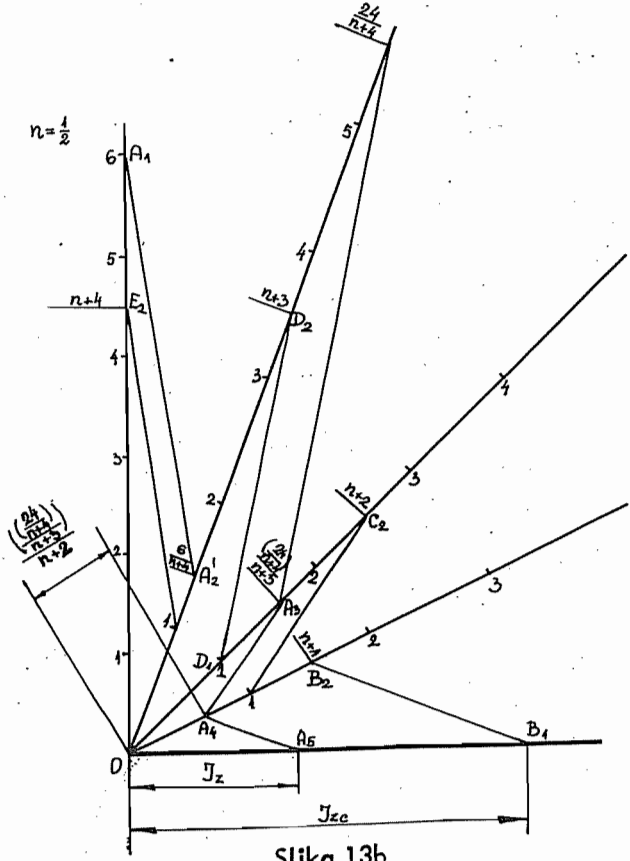


Slika br. 12b

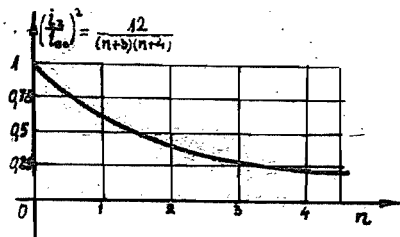
je prikazan na slici br. 14 a) u funkciji eksponenta n . Na slikama br. 14 b) i c) predstavljene su dve mogućnosti za konstrukciju poluprečnika inercije za Oz osu, koja je obrtna za posmatrano telo, kada se zna poluprečnik inercije cilindra za istu osu i eksponent n .



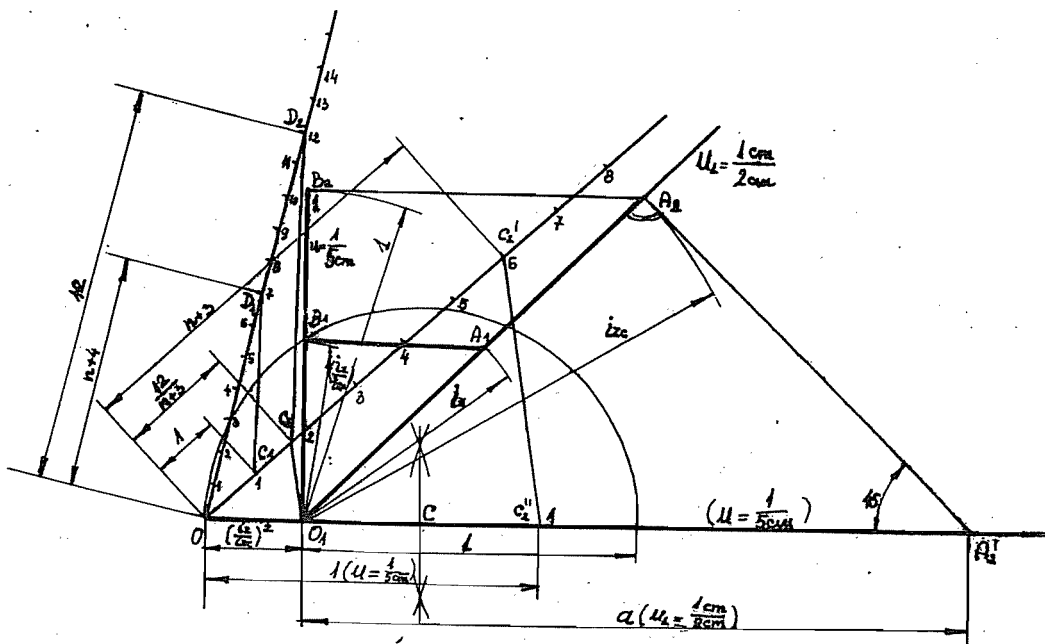
Slika br. 13a



Slika 13b



Slika 14a



Slika 14b

REZIME

U ovom članku su sračunate veličine zapremine, koordinate težišta tela i momenata inercije tela ograničenih paraboličnim obrtnim površinama n -tog reda, koje postaju rotacijom grafika stepene funkcije oko koordinatne ose.

Računski deo je praćen grafičkim konstrukcijama pomoću eksponenta n i odgovarajućih veličina za cilindar. Takođe su dati i dijagrami u zavisnosti od eksponenta n .

SUMMARY

In this work there are calculated cubics (capacities), coordinates of gravity centres of a body and interial momentums of a body limited with parabolic turned sufraces of n th series.

The account part is aocompanied with graphic constructions in function of exponent n and respofent sizes (dimensions) for cylinder. The diagrams are prezented (given) too.

LITERATURA

Mehanika III - Dinamika: dr D. P. Rašković