DRUŠTVO MATEMATIČARA SR SRBIJE

Materijali za mlade matematičare, sv. 11

M. Ašić, M. Božić, Lj. Čukić,
V. Janković, Z. Kadelburg, V. Mićić,
L. Milin, J. Vukmirović, Đ. Vukomanović

MEĐUNARODNE MATEMATIČKE OLIMPIJADE

Drugo dopunjeno izdanje

BEOGRAD
1986.

PREDGOVOR PRVOM IZDANJU

Ova sveska edicije Materijali za mlade matematičare posvećena je XIX međunarodnoj matematičkoj olimpijadi, koja je početkom jula 1977. godine održana u našoj zemlji. Jugoslavija je kao domaćin ove značajne međunarodne manifestacije u potpunosti opravdala poverenje koje joj je ukazano. Savez društava matematičara, fizičara i astronoma SFRJ bio je uspešan nosilac akcije dok je Društvo matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije bilo njen uspešni organizator. Beograd je tih dana bio centar matematičkog sveta, pružajući gostoprimstvo najboljim mladim matematičarima, predstavnicima 21 zemlje sa četiri kontinenta. Verujemo da je ova međunarodna matematička olimpijada dala značajan doprinos razvoju i daljoj afirmaciji ove smotre i takmičenja talentovanih mladih matematičara, obogatila je novim sadržajima i otvorila nove puteve njenog daljeg širenja.

Pružajući ovim putem našoj matematičkoj javnosti, a pre svega mladim matematičarima, informacije o svim do sada održanim međunarodnim matematičkim olimpijadama, učešću naših mladih matematičara na njima, dajući tekstove i rešenja svih zadataka sa do sada održanih olimpijada, uvereni smo da će ova sveska predstavljati veoma koristan materijal za čitaoce i doprineti daljem radu s talentovanim mladim matematičarima.

Autori sveske su učesnici ranijih olimpijada, sada diplomirani matematičari, mnogi od njih istaknuti naučni i stručni radnici u raznim matematičkim disciplinama. Ta činjenica u mnogome doprinosi autentičnosti ovog teksta. Jer, svi su autori rešenja doživljavali zadatke kao njihovi rešavaoci na olimpijadama, kao rukovodioci naših ekipa na tim takmičenjima, kao predavači na pripremama naših učenika za učešće na olimpijadama. Prilikom redakcije teksta nastojalo se da se intervencije redaktora svedu na minimum, kako bi ova izvornost i na taj način bila sačuvana.

Uvereni smo da će korisnici naših Materijala za mlade matematičare i u ovoj svesci naći mnogo korisnih sadržaja za rad u okviru dodatne nastave i slobodnih aktivnosti učesnika.

Vladimir Mićić

PREDGOVOR DRUGOM IZDANJU

Prvo izdanje ove sveske edicije Materijali za mlade matematičare naišlo je na veoma dobar prijem korisnika, učenika srednjih škola i profesora matematike, i relativno brzo je rasprodato. To je ohrabrilo Uređivački odbor da pristupi pripremanju drugog izdanja sveske. Ono obuhvata materijale sa svih do sada održanih međunarodnih matematičkih olimpijada; time je broj olimpijada koje su u knjizi obrađene povećao sa devetnaest na dvadesetsedam, pa je sveska znatno obogaćena novim sadržajima. Nadamo se da će i drugo izdanje knjige Međunarodne matematičke olimpijade doprineti unapređenju vannastavnih aktivnosti iz matematike.

Autor celog materijala kojim je ova sveska dopunjena je dr Zoran Kadelburg, rukovodilac ekipe mladih matematičara Jugoslavije na većini ovih olimpijada.

MEĐUNARODNE MATEMATIČKE OLIMPIJADE

Nadmetanja matematičara u rešavanju raznih problema stara su, verovatno, koliko i matematika; ona su sastavni deo istorije matematike i jedna od značajnih komponenata koje su doprinosile njenom razvoju i napretku. Ta su nadmetanja imala različite forme i bila motivisana raznim motivima. Ponekad je to bilo nadmetanje u rešavanju nekog praktičnog problema, ponekad borba za prestiž, ali je uvek to bilo mobilisanje čoveka, matematičara, i njegovih intelektualnih sposobnosti u susretu sa novim nepoznatim, u otkrivanju novih istina o svetu koji okružuje čoveka i o njemu samom.

Mladi ljudi se sa matematikom, njenim lepotama i stalnim izazovima koje im ona upućuje, upoznaju kroz nastavu u školama. Međutim, odavno je uočeno da se, zbog različitog stepena zainteresovanosti za matematiku i sposobnosti za njeno razumevanje i rad u oblasti matematike, na časovima ne mogu zadovoljiti zahtevi izvesnog broja učenika, koji pokazuju posebne sklonosti prema matematici i radoznalost da saznaju znatno više od onoga što im škola može pružiti. Razne forme vannastavnih aktivnosti su prilika da se takvim učenicima popomogne, da se njihove sposobnosti podrže i razviju, da se pomogne u otkrivanju i razvijanju talenta za matematiku. U okviru tih aktivnosti našla su mesto i takmičenja mladih matematičara u rešavanju zadataka.

Organizovana takmičenja mladih matematičara održavala su se još u prošlom veku. U početku to su bila takmičenja u rešavanju zadataka koji su postavljani u raznim časopisima. Posle toga počele su takmičenja koja su imala oblik sličan sadašnjim takmičenjima mladih matematičara, na kojima su se učenici okupljali i rešavali u toku određenog vremenskog intervala zadatke koje im postave njihovi profesori. Prvo ovakvo takmičenje održano je u Mađarskoj 1894. godine. Posle toga „matematičke olimpijade" su organizvane i u mnogim drugim zemljama sveta.

U našoj zemlji takmičenja mladih matematičara održavaju se od 1955. godine, kada je održano prvo republičko takmičenje mladih matematičara u SR Makedoniji. Posle toga ovu su akciju prihvatili i matematičari u drugim republikama. Prvo savezno takmičenje mladih matematičara, učenika srednjih škola, održano je 1960. godine i otada se ono održava redovno svake godine. I mladi matematičari iz osnovnih škola počeli su da se nadmeću u rešavanju matematičkih problema. 1970. godine održano je prvo Savezno takmičenje mladih matematičara, učenika osnovnih škola.

Iz činjenice da su se krajem pedesetih godina mladi srednješkolci u mnogim zemljama nadmetali u rešavanju matematičkih problema na nacionalnim olimpijadama rodila se ideja da se okupe na jednom mestu mladi matematičari iz raznih zemalja sveta i odmere svoja znanja i kreativnost, sretnu se i upoznaju, zbliže, razmene iskustva, ... Tako je 1959. godine, na inicijativu Rumunskog društva matematičara i fizičara, održana Prva međunarodna matematička olimpijada. Od tada, one se održavaju svake godine. Danas, u nizu vannastavnih aktivnosti s talentovanim mladim matematičarima, međunarodne matematičke olimpijade zauzimaju veoma značajno mesto. One su se svojim osamnaestogodišnjim delovanjem afirmisale kao smotra i takmičenje najboljih mladih matematičara, predstavnika zemalja iz čitavog sveta, manifestacija njihovih izuzetnih sposobnosti koje su posvetili matematici, i stekle izuzetan ugled u svetu, posebno u matematičkoj javnosti. Iz godine u godinu broj zemalja učesnica raste i već se približio broju 20. Ovakvom je razvoju događaja u mnogome doprinela i činjenica da je Jugoslavija, kad je bila domaćin IX međunarodne matematičke olimpijade, zahvaljujući svom međunarodnom položaju i ugledu u svetu, izbrisala granice kojima je Olimpijada bila u izvesnom smislu ograničena i tako je ona prerasla u široku manifestaciju koja obuhvata predstavnike mnogih zemalja sa raznih kontinenata.

Mladi matematičari Jugoslavije priključili su se ovoj međunarodnoj manifestaciji 1963. godine. Od tada je Jugoslavija redovan učesnik međunarodnih matematičkih olimpijada i na njima su naši mladi matematičari postigli i dosta zapaženih rezultata. Naša je zemlja, kako je već pomenuto, bila uspešan domaćin IX međunarodne matematičke olimpijade. Nadamo se da će tu ulogu naša zemlja i njeni matematičari uspešno obaviti i na sledećoj, XIX* međunarodnoj matematičkoj olimpijadi. Verujemo da će to biti do sada najveća manifestacija međunarodnog karaktera ove vrste u svetu, da će ona doprineti daljem razvoju matematike u svetu i kod nas, da će značiti dalji doprinos SFRJ konstruktivnoj saradnji među zemljama i narodima sveta.

* Ovaj deo teksta pisan je pre održane XIX IMO, kad se očekivalo da sveska izađe iz štampe do početka te olimpijade.

Kako se odvijaju međunarodne matematičke olimpijade?

Svaka delegacija se sastoji od osam učenika i dva rukovodioca (šefa delegacije i njegovog zamenika). Zemlje učesnice šalju predloge zadataka organizatoru IMO. Na osnovu tih predloga napravi se preliminarni izbor zadataka koji dalje razmatra Žiri IMO, sastavljen od šefova svih delegacija i predsednika. Po pravilu se izabere šest zadatka koje zatim učenici rešavaju u toku dva dana. Rad Žirija odvija se na engleskom, ruskom, francuskom i nemačkom jeziku, dok učenici rešavaju zadatke na jezicima kojima se služe. Posle toga zadatke pregledaju rukovodioci ekipa i daju predloge poena. Konačnu ocenu daje ekipa koordinatora. To su matematičari koje imenuje zemlja domaćin, a zadatak im je da obezbede usaglašavanje kriterijuma za sve takmičare. U slučaju spora definitivnu odluku donosi Žiri IMO .Najuspešnijim učesnicima dodeljuju se nagrade — prva, druga i treća nagrada. Obično se dodeljuje po nekoliko prvih, drugih i trećih nagrada, pri čemu odnos broja nagrađenih tim nagradama treba da bude 1 : 2 : 3. Za originalna rešenja pojedinih zadataka dodeljuju se specijalne nagrade.

IMO nije ekipno takmičenje pa se zvanično objavljuju samo pojedinačni rezultati. Ipak, na osnovu zbira osvojenih poena obično se prati i uspeh ekipa i prave nezvanične rang liste.

Niz pratećih aktivnosti upotpunjuje ovu veliku manifestaciju. Tu su brojni susreti s omladinom, međusobni susreti, poznanstva i prijateljstva učesnika IMO, upoznavanje sa kulturno-istorijskim znamenostima i prirodnim lepotama zemlje domaćina, upoznavanje sa dostignućima privrednog i društvenog razvoja te zemlje. Mnoštvo susreta, odmeravanja snaga u raznim sportskim disciplinama, nadmetanje u pesmi i igri, . . . , sve to doprinosi da IMO za njenog učesnika predstavlja nezaboravan doživljaj.

Razmena znanja i iskustava, „pojedinačni dueli" u rešavanju zadataka, razmena interesantnih zadataka i ideja, sve to prati svaki dan olimpijade. Oseća se potreba da se to bogatstvo, ta riznica originalnih rešenja i ideja nekako organizuje, ponudi što širem krugu zainteresovanih talentovanih mladih matematičara. To je razlog zbog kojeg se razmišlja o organizovanju naučno-stručnih sastanaka učesnika, u cilju upotpunjavanja tradicionalnih sadržaja IMO. Jugoslavija će, kao domaćin XIX IMO, učiniti prvi korak u tom pravcu.

Želja nam je da ovaj materijal upozna čitaoca sa do sada održanim međunarodnim matematičkim olimpijadama i učešćem naših mladih matematičara na njima.

I

Prva međunarodna matematička olimpijada održana je 1959. godine u Rumuniji. Na njoj su učestvovali mladi matematičari iz sledećih sedam zemalja: Bugarska, Čehoslovačka, DR Nemačka, Mađarska, Poljska, Rumunija, SSSR.

Najviše uspeha imali su mladi matematičari iz Rumunije i Mađarske.

II

Druga međunarodna matematička olimpijada održana je 1960. godine u Rumuniji. Na njoj su učestvovali mladi matematičari iz sledećih pet zemalja: Bugarska, Čehoslovačka, DR Nemačka, Mađarska, Rumunija.

Najviše uspeha imali su mladi matematičari iz Čehoslovačke, Mađarske i Rumunije.

III

Treća međunarodna matematička olimpijada održana je 1961. godine u Mađarskoj. Na njoj su učestvovali mladi matematičari iz sledećih šest zemalja: Bugarska, Čehoslovačka, DR Nemačka, Mađarska, Poljska, Rumunija.

Najviše uspeha imali su mladi matematičari iz Mađarske i Poljske.

IV

Četvrta međunarodna matematička olimpijada održana je 1962. godine u Čehoslovačkoj. Na njoj su učestvovali mladi matematičari, iz sledećih sedam zemalja: Bugarska, Čehoslovačka, DR Nemačka, Mađarska, Poljska, Rumunija, SSSR.

Najviše uspeha imali su mladi matematičari iz Mađarske, SSSR-a i Rumunije.

V

Peta međunarodna matematička olimpijada održana je 1963. godine u Poljskoj. Na njoj su učestvovali mladi matematičari iz sledećih osam zemalja: Bugarska, Čehoslovačka, DR Nemačka, Jugoslavija, Mađarska, Poljska, Rumunija, SSSR.

Najviše uspeha imali su mladi matematičari iz SSSR-a i Mađarske.

Ekipa mladih matematičara Jugoslavije, koja se te godine prvi put pojavila na međunarodnim matematičkim olimpijadama, formirana je posle IV saveznog takmičenja mladih matematičara, učenika srednjih škola, kraćih priprema i naknadnog izbornog takmičenja za sastav ekipe. Njeni su članovi bili:

Bjelik Valerijan | *Mršević Mila*
Boljevski Ivan | *Petek Peter*
Dacar Franc | *Stevanović Katica*
Kalmar Ferenc | *Vrščaj Stanko*

Ekipa je na Olimpijadi nastupila veoma uspešno, prema zbiru osvojenih poena zauzela bi četvrto mesto u plasmanu. Od 7 dodeljenih prvih nagrada jedna je pripala našim predstavnicima.

Nagrade su osvojili:

Franc Dacar — prvu nagradu;
Ivan Boljevski i *Patar Petek* — drugu nagradu;
Mila Mršević — treću nagradu.

VI

Šesta međunarodna matematička olimpijada održana je 1964. godine u SSSR-u. Na njoj su učestvovali mladi matematičari iz sledećih devet zemalja. Bugarska, Čehoslovačka, DR Nemačka, Jugoslavija, Mađarska, Mongolija, Poljska, Rumunija, SSSR.

Najviše uspeha imali su predstavnici SSSR-a i Mađarske.
Ekipa Jugoslavije nastupila je na olimpijadi u sastavu:

Bole Velimir | *Urumov Viktor*
Globevnik Josip | *Vrščaj Stanko*
Gonda Zoran | *Zdravkovska Smilka*
Jovanović Boško | *Lazarević Srbijanka*
Popović Bojan

Za postignute rezultate nagrađeni su:

Urumov Viktor — drugom nagradom;
Vrščaj Stanko — trećom nagradom.

VII

Sedma međunarodna matematička olimpijada održana je 1965. godine u DR Nemačkoj. Na njoj su učestvovali mladi matematičari iz sledećih deset zemalja: Bugarska, Čehoslovačka, DR Nemačka, Finska, Jugoslavija, Mađarska, Mongolija, Poljska, Rumunija, SSSR.

Najviše uspeha imali su mladi matematičari iz SSSR-a, Mađarske i Rumunije.

Ekipa Jugoslavije nastupila je u sastavu:

Ašić Miroslav
Bole Velimir
Dugošija Đorđe
Jovanović Boško
Pavlin Igor
Udovičić Enes
Ungar Šime
Vukomanović Đorđe

Nagrade za postignute rezultate dobili su:

Velimir Bole i *Miroslav Ašić* — treću nagradu.

VIII

Osma međunarodna matematička olimpijada održana je 1966. godine u Bugarskoj. Na ovoj olimpijadi učestvovali su predstavnici sledećih devet zemalja: Bugarska, Čehoslovačka, DR Nemačka, Jugoslavija, Mađarska, Mongolija, Poljska, Rumunija, SSSR.

Najviše uspeha imali su mladi matematičari SSSR-a, Mađarske i DR Nemačke.

Članovi ekipe mladih matematičara Jugoslavije bili su:

Dugošija Đorđe
Pisanski Tomo
Polajnar Jernej
Primc Mirko
Simić Slobodan
Stefanović Mihajlo
Torgašev Aleksandar
Vukmirović Jovan

Nagrade su osvojili:

Jovan Vukmirović i *Aleksandar Torgašev* — drugu nagradu;
Jernej Polajnar — treću nagradu.

IX

Deveta međunarodna matematička olimpijada održana je 1967. godine u Jugoslaviji. Cetinje i Budva su bili gradovi domaćini olimpijade koja je bila prava prekretnica u razvoju ove značajne manifestacije. U želji da se prevaziđu dotadašnji okviri, kojima je IMO bila ograničena, na IX olimpijadu su pozvani predstavnici većeg broja zapadnoevropskih zemalja. Pozivu su se odazvale Francuska, Italija, Švedska i Velika Britanija. Tako su na ovoj olimpijadi učestvovali predstavnici sledećih trinaest zemalja: Bugarska, Čehoslovačka, DR Nemačka, Francuska, Italija, Jugoslavija, Mađarska, Mongolija, Poljska, Rumunija, SSSR, Švedska, Velika Britanija.

Najviše uspeha na ovoj olimpijadi imali su mladi matematičari iz SSSR-a, DR Nemačke, Mađarske, Velike Britanije i Rumunije.

Članovi ekipe mladih matermatičara Jugoslavije bili su:

Gojković Radoslav — *Pisanski Tomo*
Ivić Aleksandar — *Popović Slobodan*
Kolarić Zvonko — *Simić Slobodan*
Obradović Milutin — *Slivnik Tomaž.*

Nagrade su od naših predstavnika osvojili:

Tomo Pisanski, Slobodan Popović i *Tomaž Slivnik* — treću nagradu.

X

Deseta međunarodna matematička olimpijada održana je 1968. godine u SSSR-u. Na ovoj olimpijadi učestvovali su predstavnici sledećih dvanaest zemalja: Bugarska, Čehoslovačka, DR Nemačka, Italija, Jugoslavija, Mađarska, Mongolija, Poljska, Rumunija, SSSR, Švedska, Velika Britanija.

Najviše uspeha imali su predstavnici DR Nemačke, SSSR-a i Mađarske.

Ekipu Jugoslavije sačinjavali su:

Gojković Radoslav — *Najman Branko*
Kadelburg Zoran — *Simić Slavko*
Kolarić Zvonko — *Svrtan Dragutin*
Legiša Peter — *Žitko Tomo.*

Nagrađeni su:

Branko Najman, Zoran Kadelburg i *Tomo Žitko* — trećom nagradom;

Slavko Simić — specijalnom nagradom za originalno rešenje trećeg zadatka.

XI

Jedanaesta međunarodna matematička olimpijada održana je 1969. godine u Rumuniji. Broj zemalja učesnica porastao je na 14. Bili su to mladi matematičari sledećih zemalja: Belgija, Bugarska, Čehoslovačka, DR Nemačka, Francuska, Holandija, Jugoslavija, Mađarska, Mongolija, Poljska, Rumunija, SSSR, Švedska, Velika Britanija.

Najviše uspeha imali su predstavnici Mađarske, DR Nemačke, SSSR-a i Rumunije.

Posle nekoliko godina odsustvovanja iz spiska uspešnijih ekipa naši su se mladi matematičari ponovno probili u „gornji dom" i prema zbiru osvojenih poena plasirali se na sedmo mesto, što je bio veoma solidan rezultat. Ekipu Jugoslavije sačinjavali su:

Božić Milan	*Janković Vladimir*
Čerin Zvonko	*Kadelburg Zoran*
Čukić Ljubomir	*Mrđenović Branko*
Henč Damir	*Sazdović Branislav.*

Nagrade su od naših predstavnika osvojili:

Vladimir Janković i *Damir Henč* — drugu nagradu;

Zoran Kadelburg i *Ljubomir Čukić* — treću nagradu.

XII

Dvanaesta međunarodna matematička olimpijada održana je 1970. godine u Mađarskoj. Na njoj su učestvovali mladi matematičari sledećih četrnaest zemalja: Austrija, Bugarska, Čehoslovačka, DR Nemačka, Francuska, Holandija, Jugoslavija, Mađarska, Mongolija, Poljska, Rumunija, SSSR, Švedska, Velika Britanija.

Najviše uspeha na ovoj olimpijadi imali su predstavnici Mađarske, SSSR-a, DR Nemačke, Jugoslavije i Rumunije.

Ekipa mladih matematičara Jugoslavije zabeležila je na ovoj olimpijadi izvanredan uspeh. Prema zbiru osvojenih poena plasirala se na četvrto mesto, svrstala se među najuspešnije ekipe na olimpijadi a čak šest članova ekipe osvojili su nagrade. Ekipu su sačinjavali:

Božić Milan	*Janković Vladimir*
Ćirić Ninoslav	*Milin Lazar*
Henč Damir	*Sazdović Branislav*
Janc Mirko	*Tumbas Josip.*

Nagrađeni su:

Vladimir Janković, Lazar Milin i *Branislav Sazdović* — drugom nagradom;

Ninoslav Ćirić, Damir Henč i *Mirko Janc* — trećom nagradom.

XIII

Trinaesta međunarodna matematička olimpijada održana je 1971. godine u Čehoslovačkoj. Učestvovali su mladi matematičari iz sledećih petnaest zemalja: Austrija, Bugarska, Čehoslovačka, DR Nemačka, Francuska, Holandija, Jugoslavija, Kuba, Mađarska, Mongolija, Poljska, Rumunija, SSSR, Švedska i Velika Britanija.

Najviše uspeha imali su predstavnici Mađarske i SSSR-a.

Članovi ekipe mladih matematičara Jugoslavije bili su:

Cerar Janez
Majkić Zoran
Markelj Karel
Milin Lazar
Milin Milan
Stević Ljubodrag
Tadić Marko
Zavaljevski Aleksandar.

Nagrade su osvojili:

Lazar Milin i *Aleksandar Zavaljevski* — treće nagrade.

XIV

Četrnaesta međunarodna matematička olimpijada održana je 1972. godine u Poljskoj. Učestvovali su predstavnici sledećih četrnaest zemalja: Austrija, Bugarska, Čehoslovačka, DR Nemačka, Holandija, Jugoslavija, Kuba, Mađarska, Mongolija, Poljska, Rumunija, SSSR, Švedska i Velika Britanija.

Najviše uspeha na ovoj olimpijadi imali su mladi matematičar SSSR-a, Mađarske, DR Nemačke i Rumunije.

Članovi ekipe mladih matematičara Jugoslavije bili su:

Lavrič Boris
Ljubić Dragoslav
Milutinović Uroš
Mirković Ivan
Mladenović Pavle
Ognjanović Srđan
Tadić Marko
Vulović Vladimir

Nagrade su osvojili:

Vladimir Vulović, Boris Lavrič i *Ivan Mirković* — treću nagradu.

XV

Petnaesta međunarodna matematička olimpijada održana je 1973. godine u SSSR-u. Učestvovali su predstavnici sledećih šesnaest zemalja: Austrija, Bugarska, Čehoslovačka, DR Nemačka, Finska, Francuska, Holandija, Jugoslavija, Kuba, Mađarska, Mongolija, Poljska, Rumunija, SSSR, Švedska i Velika Britanija.

Najviše uspeha imali su predstavnici SSSR-a i Mađarske.

Predstavnici Jugoslavije na ovoj olimpijadi bili su:

Krstić Sava	*Mladenović Pavle*
Lavrić Boris	*Vrećica Siniša*
Milutinović Uroš	*Živaljević Rade*
Mirković Ivan	*Živković Miodrag.*

Nagrađeni su:

Boris Lavrič, Miodrag Živković, Uroš Milutinović, Ivan Mirković i *Pavle Mladenović* — trećom nagradom.

XVI

Šesnaesta međunarodna matematička olimpijada održana je 1974. godine u DR Nemačkoj. Broj zemalja učesnica povećao se na 18. Bili su to predstavnici sledećih zemalja: Austrija, Bugarska, Čehoslovačka, DR Nemačka, Finska, Francuska, Holandija, Jugoslavija, Kuba, Mađarska, Mongolija, Poljska, Rumunija, SAD, SSSR, Švedska, Velika Britanija i Vijetnam.

Najviše uspeha imali su predstavnici SSSR-a, SAD-a, Mađarske, DR Nemačke, Jugoslavije i Austrije.

I na ovoj olimpijadi su naši mladi matematičari postigli izvanredan rezultat, kako ekipno, jer su se plasirali na peto mesto među 18 ekipa, tako i pojedinačno. Čak su dva naša predstavnika osvojila prve nagrade, pa su od ukupno deset dodeljenih prvih nagrada po dve osvojili samo naši učenici i predstavnici SSSR-a.

Jugoslaviju su na ovoj olimpijadi predstavljali:

B. Varga Jožef	*Liščević Vladimir*
Jovanović Miroslav	*Mladenović Pavle*
Kostić Miomir	*Šifrer Darko*
Krstić Sava	*Živković Miodrag.*

Nagrađeni su:

Jožef B. Varga i *Miodrag Živković* — prvom nagradom;
Miroslav Jovanović — drugom nagradom;
Sava Krstić i *Pavle Mladenović* — trećom nagradom.

XVII

Sedamnaesta međunarodna matematička olimpijada održana je 1975. godine u Bugarskoj. Na njoj su učestvovali mladi matematičari iz sledećih sedamnaest zemalja: Austrija, Bugarska, Čehoslovačka, DR Nemačka, Francuska, Holandija, Jugoslavija, Kuba, Mađarska, Mongolija, Poljska, Rumunija, SAD, SSSR, Švedska, Velika Britanija i Vijetnam.

Najviše uspeha imali su predstavnici Mađarske, DR Nemačke, SAD, SSSR i Velike Britanije.

Ekipa Jugoslavije nastupila je u sastavu:

B. Varga Jožef
Ćojbašić Milenko
Forstnerič France
Ignjatović Aleksandar
Jančić Zoran
Kostić Miomir
Perić Milan
Perović Žikica.

Nagrađeni su:

B. Varga Jožef — drugom nagradom;

Kostić Miomir — trećom nagradom.

XVIII

Osamnaesta međunarodna matematička olimpijada održana je 1976. godine u Austriji. Broj zemalja učesnica povećao se na 19. Na ovoj olimpijadi učestvovali su mladi matematičari sledećih zemalja: Austrija, Bugarska, Čehoslovačka, DR Nemačka, Finska, Francuska, Grčka, Holandija, Jugoslavija, Kuba, Mađarska, Poljska, Rumunija, SAD, SR Nemačka, SSSR, Švedska, Velika Britanija i Vijetnam.

Najviše uspeha imali su predstavnici SSSR i Velike Britanije.

Jugoslaviju su predstavljali:

Bestvina Mladen
Bešlagić Amer
Cvetič Gorazd
Čefarin Tamar
Dimitrić Ivko
Ignjatović Aleksandar
Perić Milan
Stojmenović Ivan.

Nagrađeni su:

Mladen Bestvina — drugom nagradom;

Milan Perić, Amer Bešlagić i *Ivan Stojmenović* — trećom nagradom.

XIX MEĐUNARODNA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Devetnaesta međunarodna matematička olimpijada održana je 1977. godine u Jugoslaviji. Beograd i Aranđelovac bili su gradovi domaćini olimpijade. Naša zemlja dala je i ovog puta svoj doprinos daljem razvoju ovih manifestacija. S jedne strane je broj zemalja učesnica dalje povećan i po prvi puta je prešao broj 20, pri čemu smo uspeli da se, učešćem ekipe Alžira, u olimpijade uključi i Afrika, i da, učešćem Brazila kao posmatrača, Južna Amerika najavi da će u skoroj budućnosti i mladi matematičari ovog kontinenta priključiti svojim kolegama sa ostalih kontinenata. S druge strane olimpijade su obogaćene i novim sadržajima, prestale su biti samo nadmetanje mladih matematičara u rešavanju zadataka. U okviru nje održan je simpozijum „Omladina i matematika" čiji je prvi deo, uz učešće rukovodilaca delegacija, bio posvećen problematici otkrivanja i razvijanja talentovanih mladih matematičara u okviru reforme nastave matematike u srednjoj školi, dok je drugi deo, u kojem su učestvovali mladi matematičari, učesnici Olimpijade, predstavljao „mladi matematički kongres", jer su u okviru njega učenici u odgovarajućim naučnim i stručnim sekcijama saopštavali svoje originalne naučne rezultate, originalne probleme i njihova rešenja, iznosili svoja iskustva i davali svoja mišljenja i predloge o radu s mladim talentima u njihovim zemljama. Svi su učesnici Olimpijade pozdravili organizovanje simpozijuma i izrazili želju da on postane tradicionalan.

Na XIX olimpijadi učestvovali su mladi matematičari iz sledeće 21 zemlje: Alžir, Austrija, Belgija, Bugarska, DR Nemačka, Čehoslovačka, Finska, Francuska, Holandija, Italija, Jugoslavija, Kuba, Mađarska, Mongolija, Poljska, Rumunija, SAD, SR Nemačka, SSSR, Švedska, Velika Britanija. Kao posmatrač učestvovao je predstavnik Brazila.

Najviše uspeha na takmičarskom delu Olimpijade imali su predstavnici SAD, SSSR, Mađarske, Velike Britanije i Holandije.

Članovi ekipe mladih matematičara Jugoslavije bili su:

Bestvina Mladen	*Hanjš Željko*
Bešlagić Amer	*Kulosman Hamid*
Blažić Novica	*Trenčevski Kostadin*
Cvetič Gorazd	*Vidmar Matjaž.*

Nagrađeno je čak šest članova naše ekipe, što je svakako značajan uspeh. Nagrade su osvojili:

Amer Bešlagić, Gorazd Cvetič i *Kostadin Trenčevski* — drugu nagradu;

Mladen Bestvina, Novica Blažić i *Matjaž Vidmar* — treću nagradu.

XX

Na dvadesetoj međunarodnoj matematičkoj olimpijadi koja je 1978. godine održana u Rumuniji po prvi put su učestvovali mladi matematičari iz Turske, a ukupan broj zemalja-učesnica bio je 17. Najviše uspeha imali su domaćini, a iza njih su se plasirali takmičari iz SAD, V. Britanije i Vijetnama.

Ekipa Jugoslavije na ovom takmičenju bila je u sastavu:

Mladen Bestvina
Amer Bešlagić
Novica Blažić
Danko Jocić
Moma Jovanović
Olga Timčenko
Kostadin Trenčevski
Aleksandar Vučić

Nagrade su osvojili:

Mladen Bestvina — drugu nagradu;
Amer Bešlagić i *Aleksandar Vučić* — treću nagradu.

XXI

Broj zemalja-učesnica je na 21. međunarodnoj matematičkoj olimpijadi, koja je 1979. godine održana u Velikoj Britaniji, dostigao 23. Među njima su bile i tri zemlje koje su po prvi put učestvovale — Brazil, Izrael i Luksemburg. Najbolje rezultate ostvarili su takmičari iz Sovjetskog Saveza, Rumunije, SR Nemačke i V. Britanije.

Jugoslavija, koju su predstavljali:

Dražen Borković
Danko Jocić
Nina Ležaić
Leopold Matoh
Romeo Meštrović
Gordan Savin
Predrag Tanović
Boban Veličković,

povratila je svoje mesto u gornjoj polovini tabele. Nagrađeni su:

Boban Veličković — drugom nagradom;
Danko Jocić, *Gordan Savin*, *Predrag Tanović* i *Romeo Meštrović* — trećom nagradom.

1980.

Te godine nije održana međunarodna matematička olimpijada. Razlog je bio finansijski — nije se našla zemlja koja bi je organizovala na uobičajeni način, tj. tako da plati troškove boravka za sve učesnike. Da godina ipak ne bi prošla bez međunarodnih matematičkih takmičenja, organizovano je nekoliko manjih. Jugoslavija je uzela učešće na jednom takvom takmičenju koje je održano u Luksemburgu i na kome su, osim nas i domaćina, još učestvovale ekipe Belgije, V. Britanije, Holandije i (van konkurencije) francuske pokrajine Alzas. Našu ekipu su sačinjavali:

Miloš Arsenović
Igor Aurer
Nebojša Elez
Nina Ležaić
Leopold Matoh
Gordan Savin
Predrag Tanović

Osim po broju zemalja, ovo takmičenje je u svemu ostalom organizovano po pravilima za međunarodnu matematičku olimpijadu. Naši takmičari pokazali su odlične rezultate, jer su, iako sa jednim članom ekipe manje, osvojili drugo mesto, i to sa svega šest poena manje od V. Britanije. Svi naši takmičari osvojili su nagrade, i to:

Nebojša Elez, *Nina Ležaić* i *Leopold Matoh* — drugu nagradu;
Gordan Savin, *Predrag Tanović*, *Miloš Arsenović* i *Igor Aurer* — treću nagradu.

XXII

1981. godine održana je prva Međunarodna matematička olimpijada van Evrope — domaćin su bile Sjedinjene Američke Države. Učestvovao je rekordan broj od 27 zemalja, među kojima su novi učesnici bili Australija, Venecuela, Kanada, Kolumbija, Meksiko i Tunis. Učešćem Australije ovo takmičenje postalo je svetsko u pravom smislu te reči — nema više nezastupljenog kontinenta. Mnoge ekipe, međutim, opet iz finansijskih razloga, nisu bile kompletne na ovoj olimpijadi, pa je to otežalo formiranje ekipne rang-liste. Od zemalja koje su imale svih osam takmičara, najviše uspeha su imale SAD i SR Nemačka.

U jugoslovenskoj ekipi na ovoj olimpijadi bili su:

Igor Aurer
Ivica Bošnjak
Mladen Despić
Nebojša Elez
Radovan Jevtić
Nina Ležaić
Nikola Miljković
Dragan Vukotić

Pored solidnog ekipnog, oni su ostvarili i izvanredan pojedinačn uspeh. Naime, *Mladen Despić* bio je prvi od jugoslovenskih takmičara uopšte koji je bez greške uradio sve zadatke i osvojio maksimalni broj poena. Osim njegove prve nagrade, osvojili su još:

Nina Ležaić i *Nikola Miljković* — drugu nagradu;
Nebojša Elez, *Ivica Bošnjak* i *Igor Aurer* — treću nagradu.

XXIII

Zbog već pominjanih finansijskih razloga broj članova koje su ekipe na 23. međunarodnoj olimpijadi u Mađarskoj 1982. godine imale smanjen je na četiri. Broj zemalja je ponovo povećan — iznosio je 30, a debitanti su bili Kuvajćani. Najbolji su bili predstavnici SR Nemačke, a iza njih su se plasirali takmičari SSSR-a, SAD i Nemačke DR.

Ekipa Jugoslavije bila je u sastavu:

Mladen Despić
Igor Kukavica
Petar Pavešić
Pavle Pandžić.

Ekipno smo se održali u gornjoj polovini tabele, a nagrade su osvojili:

Mladen Despić i *Pavle Pandžić* — drugu nagradu.

XXIV

24. međunarodna matematička olimpijada održana je 1983. godine u Francuskoj. Učestvovale su 32 zemlje (po prvi put Španija i Maroko), sa po šest takmičara. Ubedljivo najbolji su bili predstavnici SR Nemačke, a zatim SAD, Mađarske i SSSR.

Članovi ekipe Jugoslavije bili su:

Roman Drnovšek
Ivan Keglević
Marko Nedeljkov
Zoran Piličev
Ivan Sajić
Mirjana Spasojević.

Nagrade su osvojili:

Roman Drnovšek, *Ivan Sajić*, *Ivan Keglević*, *Marko Nedeljkov* i *Mirjana Spasojević* — treću nagradu.

XXV

Čehoslovačka je bila domaćin jubilarne, dvadesetpete, međunarodne matematičke olimpijade. Sa debitantima Kiprom i Norveškom broj zemalja-učesnica se popeo na 34, pri čemu su ekipe brojale po šest takmičara. Najbolje rezultate postigli su SSSR, Bugarska, Rumunija, Mađarska i SAD.

Ekipa Jugoslavije određena je, kao i obično, na osnovu rezultata Saveznog takmičenja mladih matematičara, a sačinjavali su je:

Roman Drnovšek
Andrej Dujella
Nikola Lakić
Aleksandar Marković
Uroš Seljak
Aleksandar Zorović

Treće nagrade su osvojili:

Andrej Dujella, *Roman Drnovšek*, *Aleksandar Marković* i *Nikola Lakić*.

XXVI

Na 26. olimpijadi, koja je održana u Finskoj, učestvovalo je 38 zemalja, među kojima po prvi put takmičari iz Kine i Islanda. Najviše uspeha imale su ekipe Rumunije, SAD, Mađarske i Bugarske.

Jugoslovensku ekipu sačinjavali su:

Roman Drnovšek
Sašo Džeroski
Goran Gogić
Marko Janković
Boban Nikolić
Marko Vojinović

Treće nagrade su osvojili: *Roman Drnovšek* i *Sašo Džeroski*.

ZADACI SA MEĐUNARODNIH MATEMATIČKIH OLIMPIJADA

I

1. Dokazati da razlomak $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ ne može da se skrati ni za jedan prirodan broj n.

2. Za koje realne brojeve x su tačne sledeće jednakosti:

   a) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$;

   b) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$;

   c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$?

3. Neka je x neki ugao i neka realni brojevi $a, b, c, \cos x$ zadovoljavaju jednakost

$$a\cos^2 x+b\cos x+c=0.$$

   Napisati analognu kvadratnu jednakost za $a, b, c, \cos 2x$. Uporediti datu i dobijenu jednakost za slučaj $a=4$, $b=2$, $c=-1$.

4. Konstruisati pravougli trougao čija je hipotenuza c data, ako je poznato da je težišna linija, povučena na c, geometrijska sredina kateta.

5. U ravni je data duž AB i unutar nje proizvoljna tačka M. Nad dužima AM i MB kao stranicama konstruisani su kvadrati $AMCD$ i $BMEF$ koji se nalaze s iste strane AB. Krugovi opisani oko kvadrata s centrima P i Q seku se, pored tačke M, i u tački N.

a) Dokazati da prave FA i BC prolaze kroz tačku$N$.

b) Dokazati da prava MN prolazi kroz jednu istu tačku S, ma kakav položaj imala tačka M.

c) Naći geometrijsko mesto sredina duži PQ kada se tačka M pomera po duži AB.

6. Date su ravni α i β koje se seku po pravoj p. U ravni α je data tačka A, u ravni β tačka C, tako da nijedna od tih tačaka ne leži na pravoj p. Konstruisati u ravni α tačku B a u ravni β tačku D tako da četvorougao $ABCD$ bude jednakokraki trapez ($AB \parallel CD$) u koji se može upisati krug.

II

1. Naći sve trocifrene brojeve koji pri deljenju sa 11 daju broj jednak zbiru kvadrata cifara polaznog broja.

2. Za koje realne brojeve x važi nejednačina

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9?$$

3. Dat je pravougli trougao ABC čija je hipotenuza jednaka a i koja je podeljena na n jednakih delova (n — neparan broj). Neka je α ugao pod kojim se iz tačke A vidi onaj od n odsečaka koji sadrži sredinu hipotenuze. Dokazati da je

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)\,\alpha};$$

gde je h visina trougla.

4. Konstruisati trougao ABC ako su poznati h_a, h_b i m_a (h_a i h_b su visine iz A i B, redom, a m_a težišna linija iz temena A).

5. Data je kocka $ABCDA'B'C'D'$.

(a) Naći geometrijsko mesto sredina duži XY, gde je X bilo koja tačka duži AC i Y — bilo koja tačka duži $B'D'$.

(b) Naći geometrijsko mesto tačaka Z duži XY za koje je $ZY = 2XZ$.

6. Dat je jednakokraki trapez s osnovama a i b i visinom h.
   (a) Na osi simetrije trapeza konstruisati tačku P iz koje se oba kraka trapeza vide pod pravim uglom.
   (b) Naći rastojanje tačke P od jedne od osnova trapeza.
   (c) Uz koje uslove se tačka P može konstruisati (razmotriti sve moguće slučajeve).

7. Data je prava kružna kupa i u nju je upisana lopta. Oko te lopte je opisan prav kružni valjak čija osnova leži u ravni osnove date kupe. Neka je V_1 zapremina kupe i V_2 zapremina valjka.
   (a) Dokazati da je jednakost $V_1 = V_2$ nemoguća.
   (b) Naći najmanje k za koje je $V_1 = kV_2$ i u tom slučaju konstruisati ugao pri vrhu osnog preseka kupe.

III

1. Rešiti sistem jednačina

$$x+y+z=a$$
$$x^2+y^2+z^2=b^2$$
$$xy=z^2,$$

gde su a i b dati brojevi. Odrediti uslove koje treba da zadovoljavaju a i b, a pri kojima sistem ima pozitivna i različita rešenja.

2. Neka su a, b, i c dužine stranica trougla površine S. Dokazati

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}\,.$$

Kada važi jednakost?

3. Rešiti jednačinu $\cos^n x - \sin^n x = 1$, gde je n prirodan broj.

4. U unutrašnjosti trougla $P_1P_2P_3$ data je tačka P. Neka su $Q_1Q_2Q_3$, tim redom, presečne tačke pravih P_1P, P_2P, P_3P sa naspravmnim stranicama. Dokazati da među kolčnicima $\frac{P_1P}{PQ_1}$ $\frac{P_2P}{PQ_2}$ $\frac{P_3P}{PQ_3}$, postoji bar jedan koji nije veći od 2 i bar jedan koji nije manji od 2.

5. Konstruisati trougao ABC ako je dato: $AC=b$, $AB=c$ i $<AMB=\omega$ ($\omega<90°$), gde je M središte duži BC. Dokazati da zadatak ima rešenja ako i samo ako je

$$b\cdot \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\leqslant c<b.$$

Kada važi znak jednakost?

6. Data je ravan ε i sa jedne njene strane tri nekolinearne tačke A, B i C takve da ravan određena njima nije paralelna ravni ε. U ravni ε uzete su tri proizvoljne tačke A', B', C'. Neka su tačke L, M i N, tim redom, središta duži AA', BB' i CC', a G težište trougla LMN (ukoliko nije degenerisan). Odrediti geometrijsko mesto tačaka G, ako se tačke A', B' i C' kreću po ravni ε nezavisno.

IV

1. Odrediti najmanji prirodan broj n sa svojstvima:
   (I) njegov zapis u dekadnom sistemu se završava cifrom 6,
   (II) ako poslednju cifru 6 premestimo ispred ostalih cifara dobija se 4 puta veći broj.

2. Odrediti sve realne brojeve x za koje je

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}.$$

3. Data je kocka $ABCDA'B'C'D'$. $ABCD$ i $A'B'C'D'$ su odgovarajuće osnove donja i gornja i $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Tačka X kreće se konstantnom brzinom po stranama kvadrata $ABCD$ u pravcu $ABCDA$; tačka Y kreće se istom brzinom kao X po stranama kvadrata $B'C'CB$ u pravcu $B'C'CBB'$. Tačke X i Y počinju sa kretanjem istog momenta i to X polazi iz A a Y iz B'. Naći i nacrtati geometrijsko mesto sredina odsečka XY.

4. Rešiti jednačinu:

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1.$$

5. Na kružnici K su zadate tri tačke A, B, C. Konstruisati (šestarom i lenjirom) na kružnici četvrtu tačku D, takvu da se u četvorougao $ABCD$ može upisati krug.

6. Neka je dat jednakokraki trougao ABC, sa poluprečnikom opisane kružnice jednakim r, a poluprečnikom upisane kružnice jednakim ρ. Dokazati da je rastojanje od centra opisane do centra upisane kružnice, koje ćemo označiti sa d, dato sa:

$$d=\sqrt{r(r-2\rho)}.$$

7. Tetraedar $SABC$ ima svojstvo da postoji pet različitih sfera koje dodiruju prave SA, SB, SC, AB, BC, CA ako i samo ako je pravilan. Dokazati!

V

1. Odrediti sve realne korene jednačine

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x$$

gde je p realan broj.

2. Odrediti u prostoru geometrijsko mesto temena pravog ugla čiji jedan krak prolazi kroz datu tačku A, a drugi ima bar jednu zajedničku tačku sa duži BC.

3. Ako su u n-touglu svi unutrašnji uglovi jednaki, a uzastopne strane ispunjavaju uslove $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, dokazati da je

$$a_1=a_2=a_3=\ldots=a_n.$$

4. Odrediti sva rešenja x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sistema jednačina

$$x_5+x_2=yx_1 \qquad (1)$$
$$x_1+x_3=yx_2 \qquad (2)$$
$$x_2+x_4=yx_3 \qquad (3)$$
$$x_3+x_5=yx_4 \qquad (4)$$
$$x_4+x_1=yx_5 \qquad (5)$$

gde je y realan parametar.

5. Dokazati jednakost $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

6. Učenici A, B, C, D i E su učestvovali na nekom takmičenju. Pokušavajući da pogodi rezultate takmičenja, neko je pretpostavio da će

se dobiti redosled A, B, C, D, E ali se ispostavilo da on nije tačno odredio mesto nijednog učesnika niti nijedan par učenika koji su se plasirali jedan iza drugog. Neko drugi, pretpostavljajući da je rezultat D, A, E, C, B, pravilno je pogodio mesto dvojice učenika, a isto tako i dva para učesnika koji su se plasirali jedan iza drugog. Kakav je bio u stvari rezultat na takmičenju?

VI

1. a) Odrediti sve prirodne brojeve n, takve da je 2^n-1 deljivo sa 7.
   b) Dokazati da 2^n+1 nije deljivo sa 7 ni za jedan prirodan broj n.
2. Ako su a, b i c dužine stranica trougla, dokazati da

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3\,abc$$

3. U trougao ABC, sa stranicama a, b i c, upisan je krug i konstruisane njegove tangente, paralelne stranicama trougla. Te tangente odsecaju od trougla ABC tri nova trougla. U svaki, na taj način dobijen, trougao, upisan je krug. Izračunati zbir površina sva četiri kruga.
4. Sedamnaest naučnika se dopisuju, svaki sa svakim. Dopisivanje se obavlja na tri teme. Svaki par se dopisuje samo po jednoj temi. Dokazati da postoje bar tri naučnika, koji se međusobno dopisuju na istu temu.
5. U ravni je dato 5 tačaka. Među pravim, određenim tim tačkama, nema podudarnih, paralelnih, niti upravnih. Kroz svaku tačku konstruišemo prave, upravne na sve ostale prave koje se mogu dobiti povezivanjem ostale 4 tačke. Odrediti maksimalan broj presečnih tačaka tih upravnih, ne računajući date tačke.
6. Dat je tetraedar $ABCD$. Teme D spojeno je sa težištem strane ABC, D_1. Kroz tačke A, B i C konstruisane su prave paralelne sa DD_1 čije su presečne tačke sa naspramnim stranama A_1, B_1 i C_1, tim redom. Dokazati da je zapremina tetraedra $ABCD$ tri puta manja od zapremine tetraedra $A_1B_1C_1D_1$. Da li je ovo tačno ukoliko je D_1 proizvoljna tačka u trouglu ABC?

VII

1. Naći sve realne brojeve x iz intervala $0\leqslant x\leqslant 2$ za koje je ispunjeno

$$2\cos x\leqslant \left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right|\leqslant\sqrt{2}\,.$$

2. Dat je sistem jednačina

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0$$

$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0,$$

čiji koeficijenti zadovoljavaju uslove:
a) a_{11}, a_{22}, a_{33} su pozitivni;
b) svi ostali koeficijenti su negativni;
c) u svakoj jednačini je zbir koeficijenata pozitivan.
Dokazati da je $x_1=x_2=x_3=0$ jedino rešenje datog sistema.

3. Dat je tetraedar $ABCD$. Neka ivica AB ima dužinu a, ivica CD ima dužinu b; rastojanje između mimoilaznih pravih AB i CD jednako je d, veličina ugla između tih pravih jednaka je ω. Ravan π, paralelna ivicama AB i CD, seče tetraedar na dva dela. Izračunati odnos zapremina ovih delova ako se zna da je odnos rastojanja od AB do π prema rastojanju od CD do π jednak k.

4. Odrediti četiri realna broja x_1, x_2, x_3, x_4 takva da je zbir svakog od njih sa proizvodom preostalih jednak 2.

5. Neka je u trouglu OAB veličina ugla AOB jednaka α ($\alpha<90°$). Kroz proizvoljnu tačku M, koja se ne poklapa sa O, povučene su normale MP na OA i MQ na OB. Neka je H ortocentar trougla OPQ. Odrediti geometrijsko mesto tačaka H ako:
a) M prolazi odsečkom AB;
b) M prolazi unutrašnjost trougla AOB.

6. U ravni je dato $n \geqslant 3$ tačaka. Neka je d maksimalno rastojanje između proizvoljne dve od tih tačaka. Nazovimo d dijametrom datog skupa tačaka. Dokazati da dijametara ima najviše n.

VIII

1. Na olimpijadi su bila data 3 zadatka A, B, C. 25 učenika je rešilo makar jedan od tih zadataka. Onih učenika koji su rešili zadatak B a nisu A bilo je 2 puta više nego onih koji su rešili zadatak C a nisu rešili A. Onih učenika koji su rešili samo zadatak A ima jedan više nego onih koji su pored A rešili još neki zadatak. Od učenika koji su rešili samo jedan zadatak polovina ih je rešila zadatak A. Koliko učenika je rešilo samo zadatak B.

2. Ako su a, b, c dužine stranica i α, β, γ naspramni uglovi trougla kod kojeg je $a+b=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{4}(a \operatorname{tg} \alpha+b \operatorname{tg}\beta)$, onda je taj trougao jednakokraki. Dokazati!
3. Dokazati da je zbir rastojanja od centra sfere opisane oko pravilnog tetraedra do temena tetraedra manji od zbira rastojanja od neke druge tačke do temena tetraedra.
4. Dokazati jednakost:

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2^n x,$$

gde je n prirodan broj i $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$ ($k=0, 1, 2, \ldots n$; λ—ceo broj).

5. Rešiti sistem:

$$\left.\begin{array}{l}
|a_1-a_2|x_2+|a_1-a_3|x_3+|a-a_4|x_4=1\\
|a_2-a_1|x_1+|a_2-a_3|x_3+|a_2-a_4|x_4=1\\
|a_3-a_1|x_1+|a_3-a_2|x_2+|a_3-a_3|x_4=1\\
|a_4-a_1|x_1+|a_4-a_2|x_2+|a_4-a_3|x_3=1
\end{array}\right\}$$

gde su a_1, a_2, a_3, a_4 dati međusobno različiti realni brojevi.

6. Neka su M, K, L, tačke koje se nalaze redom na stranicama AB, BC, CA trougla ABC, pri čemu ni jedna od tačaka M, K, L nije teme trougla ABC. Dokazati da površina makar jednog od trouglova MAL, KBM, LCK ne prelazi $^1/_8$ površine P trougla ABC.

IX

1. U paralelogramu $ABCD$, trougao ABD je oštrougli. Neka je $AB=a$, $AD=1$ i $\measuredangle BAD=\alpha$. Dokazati da krugovi K_A, K_B, K_C i K_D poluprečnika 1, sa središtima A, B, C i D, tim redom, pokrivaju paralelogram ako i samo ako je $a \leqslant \cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$.
2. Dat je tetraedar u kome je dužina tačno jedne ivice veća od 1. Dokazati da zapremina nije veća od $^1/_8$.
3. Neka su k, m i n prirodni brojevi $m+k+1$ prost broj veći od $n+1$. Neka je $C_s=s(s+1)$. Dokazati da je proizvod $(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\ldots(C_{m+n}-C_k)$ deljiv proizvodom $C_1 C_2 \ldots C_n$.

4. Data su dva oštrougla trougla $A_0B_0C_0$ i $A_1B_1C_1$. Konstruisati trougao ABC sličan trouglu $A_1B_1C_1$, takav da je opisan oko trougla $A_0B_0C_0$ i $C_0 \in AB$, $A_0 \in BC$, $B_0 \in CA$. Konstruisati trougao sa navedenim osobinama koji ima maksimalnu površinu.

5. Dat je niz

$$C_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_8$$
$$C_2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_8^2$$
$$C_n = a_1^n + a_2^n + \ldots + a_8^n$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_8$ realni brojevi koji nisu svi nula. Među članovima niza postoji beskonačno mnogo jednakih nuli. Naći sve n za koje je $C_n = 0$.

6. Na takmičenju koje je trajalo n dana, podeljeno je m medalja. Prvog dana je dodeljena jedna medalja i još $\frac{1}{7}$ preostalih $m-1$ medalja. Drugog dana su dodeljene dve medalje i još $\frac{1}{7}$ preostalih (posle toga) medalja, itd. Konačno, n-tog, poslednjeg dana dodeljeno je preostalih n medalja. Koliko dana je trajalo takmičenje i koliko medalja je podeljeno?

X

1. Dokazati da postoji tačno jedan trougao čije su stranice uzastopni prirodni brojevi, a jedan od uglova dva puta veći od jednog od druga dva ugla.

2. Odrediti sve prirodne brojeve x čiji je proizvod cifara (u dekadnom sistemu) jednak $x^2 - 10x - 22$.

3. Dat je sistem jednačina

$$ax_1^2 + bx_1 + c = x_2$$
$$ax_2^2 + bx_2 + c = x_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c = x_n$$
$$ax_n^2 + bx_n + c = x_1,$$

gde su a, b i c realni brojevi i $a \neq 0$. Dokazati da

(a) za $(b-1)^2 - 4ac < 0$ sistem nema realnih rešenja;

(b) za $(b-1)^2-4ac=0$ sistem ima tačno jedno rešalno rešenje;

(c) za $(b-1)^2-4ac>0$ sistem ima više od jednog realnog rešenja.

4. Dokazati da u svakom tetraedru postoji takav vrh da se od ivica koje iz njega polaze može konstruisati trougao.

5. Neka je $a>0$ realan broj i $f(x)$ realna funkcija, definisana za svako realno x, koja za svako x zadovoljava uslov

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}$$

(a) Dokazati da je funkcija f periodična, tj. da postoji takav realan broj $b>0$, da je za svako x, $f(x+b)=f(x)$.

(b) Za $a=1$ naći primer takve funkcije $f\not\equiv \text{const}$.

6. Neka je $[x]$ najveći ceo broj koji nije veći od x. Za svaki prirodni broj n izračunati zbir

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\cdots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]+\cdots$$

XI

1. Dokazati da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva a sa sledećom osobinom: Ma kakav da je prirodan broj n, broj $z=n^4+a$ nije prost.

2. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ realne konstante, x realna promenljiva i

$$f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{\cos(a_2+x)}{2}+\frac{\cos(a_3+x)}{2^2}+\cdots+\frac{\cos(a_n+x)}{2^{n-1}}.$$

Dokazati da iz $f(x_1)=f(x_2)=0$ sledi da je $x_1-x_2=m\pi$, gde je m ceo broj.

3. Za $k=1, 2, 3, 4, 5$ naći neophodan i dovoljan uslov koji treba da zadovolji broj $a>0$ da bi postojao tetraedar čijih k ivica ima dužinu a a ostalih $6-k$ ivica dužinu 1.

4. Polukružnica γ konstruisana je nad prečnikom AB. Tačka C leži na γ i različita je od A i B. Obeležimo sa D ortogonalnu projekciju tačke C na AB. Posmatrajmo tri kružnice $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ koje sve tri dodiruju AB: prva od njih, γ_1, upisana je u trougao ABC, γ_2 i γ_3 dodiruju odsečak CD i γ_1. Dokazati da $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ imaju i drugu zajedničku tangentu.

5. U ravni je dato $n>4$ tačaka, od kojih nikoje tri ne leže na jednoj pravoj. Dokazati da postoji bar $\binom{n-3}{2}$ konveksnih četvorouglova sa temenima u četiri date tačke.

6. Dokazati da, ako je $x_1>0$, $x_2>0$ i $x_1y_1-z_1^2>0$, $x_2y_2-z_2^2>0$, onda je

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\leqslant\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}.$$

Odrediti neophodne i dovoljne uslove pod kojima u datoj nejednakosti važi znak jednakosti.

XII

1. Dat je trougao ABC. Neka je M unutrašnja tačka stranice AB. Neka su, dalje, r_1, r_2, r — poluprečnici kružnica, upisanih, tim tim redom, u trouglove AMC, BMC, ABC a ρ_1, ρ_2, ρ — poluprečnici kružnica koje: a) leže unutar ugla ACB; b) spolja su upisane, tim redom, u trouglove AMC, BMC, ABC. Dokazati da je

$$\frac{r_1\cdot r_2}{\rho_1\cdot\rho_2}=\frac{r}{\rho}.$$

2. Neka su a, b, n — prirodni brojevi veći od jedan. Brojevi a i b su osnove dvaju sistema računanja. Neka brojevi A_n i B_n imaju jednaku reprezentaciju $x_nx_{n-1}x_{n-2}\ldots x_1x_0$ u sistemima računanja s osnovama a i b, pri čemu je $x_n\neq0$ i $x_{n-1}\neq0$. Obeležimo sa A_{n-1} i B_{n-1} brojeve koji se dobijaju kad se prva cifra x_n izostavi. Dokazati da je $a>b$ ako i samo ako je

$$\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

3. Niz realnih brojeva $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ispunjava uslov

$$1=a_0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n\leqslant\ldots. \tag{1}$$

Niz $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ definisan je sa

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$

Dokazati: a) za svako n je $0\leqslant b_n<2$; b) za dato c, takvo da je $0\leqslant c<2$, postoji niz $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ koji ispunjava uslov (1) i pri tome je $b_n>c$ za beskonačno mnogo indeksa n.

4. Naći sve prirodne brojeve n za koje se skup $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ može podeliti na dva podskupa tako da je proizvod svih elemenata jednog od tih podskupova proizvodu svih elemenata drugog od njih.

5. U tetraedru $ABCD$ je $DB \perp DC$ a podnožje normale, spuštene iz temena D na ravan trougla ABC, poklapa se s ortocentrom tog trougla. Dokazati da je $(|AB|+|BC|+|AC|)^2 \leq 6(|AD|^2+|BD|^2+|CD|^2)$. Za kakve tetraedre važi znak jednakosti?

6. U ravni je dato 100 tačaka od kojih nikoje tri ne leže na jednoj pravoj. Posmatrajmo sve moguće trouglove s temenima u tim tačkama. Dokazati da je među tim trouglovima najviše 70% oštrouglih trouglova.

XIII

1. Tvrđenje: „Za proizvoljne realne brojeve $a_1, a_2, \dots, a_n$ ispunjena je nejednakost:

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n+\dots+ +(a_n-a_1)(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1})\geq 0\text{“}$$

Istinito je za $n=3$ i $n=5$ a nije istinito za ostale prirodne brojeve veće od 2.

2. Dat je konveksan poliedar P_1 sa tačno 9 vrhova $A_1, A_2, \dots, A_9$. Obeležimo sa $P_2, P_3, \dots P_9$ poliedre dobijene translacijama poliedra P_1 koje tačku A_1 premeštaju u $A_2, A_3, \dots A_9$ respektivno. Dokazati da bar dva od poliedara $P_1, P_2, \dots, P_9$ moraju da imaju bar jednu zajedničku unutrašnju tačku.

3. Dokazati da niz 2^n-3, $n=1, 2, \dots$ sadrži beskonačno mnogo brojeva takvih da su svaka dva od njih uzajamno prosti.

4. Dat je tetraedar $ABCD$ čije su sve strane oštrougli trouglovi. Posmatrajmo zatvorene poligonalne linije $XYZTX$ određene na sledeći način:

   X je tačka na ivici AB, različita od A i B. Analogno, Y, Z i T su unutrašnje tačke ivica BC, CD, DA respektivno.

   a) Ako je $\sphericalangle DAB+\sphericalangle BCD\neq\sphericalangle ABC+\sphericalangle CDA$ dokazati da među svim poligonalnim linijama nema najkraće.

   b) Ako je $\sphericalangle DAB+\sphericalangle BCD=\sphericalangle ABC+\sphericalangle CDA$, onda postoji beskonačno mnogo takvih poligonalnih linija sa minimalnom dužinom i ta je dužina jednaka $2AC \sin \alpha/2$, gde je $\alpha = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD + \sphericalangle DAB$. Dokazati!

5. Dokazati da za proizvoljan prirodan broj m postoji neprazan konačan skup S tačaka u ravni sa sledećom osobinom: „svaka tačka iz skupa S je na jediničnom rastojanju od tačno m drugih tačaka iz S.
6. Posmatrajmo kvadratnu tablicu

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}$$

koja se sastoji od nenegativnih celih brojeva i ima sledeću osobinu: kad god je $a_{ij}=0$, onda je zbir elemenata i-te vrste i j-te kolone

$$a_{i1}+a_{i2}+\dots+a_{in}+a_{1j}+a_{2j}+\dots+a_{nj} \geqslant n$$

Dokazati da je zbir svih elemenata u tablici $\geqslant \dfrac{n^2}{2}$.

XIV

1. Dokazati da se iz skupa od bilo kojih deset različitih dvocifrenih prirodnih brojeva mogu izabrati dva disjunktna podskupa takva da su zbirovi brojeva iz oba podskupa jednaki.
2. Dokazati da je sledeće tvrđenje tačno za svaki prirodan broj $n \geqslant 4$: proizvoljan tetivan četvorougao se može razbiti na n tetivnih četvorouglova.
3. Dokazati da je za svaka dva nenegativna cela broja m i n broj

$$\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!}$$

ceo $(0!=1)$.

4. Naći sva rešenja $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ sistema nejednačina:

$$\begin{aligned} (x_1^2-x_3x_5)\,(x_2^2-x_3x_5) &\leqslant 0 \\ (x_2^2-x_4x_1)\,(x_3^2-x_4x_1) &\leqslant 0 \\ (x_3^2-x_5x_2)\,(x_4^2-x_5x_2) &\leqslant 0 \\ (x_4^2-x_1x_3)\,(x_5^2-x_1x_3) &\leqslant 0 \\ (x_5^2-x_2x_4)\,(x_1^2-x_2x_4) &\leqslant 0. \end{aligned}$$

5. Neka su f i g realne funkcije, definisane za svaki realan broj, takve da je

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y)$$

za svako x i y. Ako funkcija f nije identički jednaka nuli i ako je $|f(x)| \leqslant 1$ za svako x, dokazati da je $|g(y)| \leqslant 1$ za svako y.

6. Date su četiri različite paralelne ravni. Dokazati da postoji pravilan tetraedar čije je svako teme u jednoj od datih ravni.

XV

1. Tačka O leži na pravoj l; $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \ldots, \overrightarrow{OP_n}$ su jedinični vektori takvi da tačke $P_1, P_2, \ldots, P_n$ leže u ravni kojoj pripada prava l i nalaze se sa iste strane prave l. Ako je n neparan broj, dokazati da je

$$|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\ldots+\overrightarrow{OP_n}| \geqslant 1,$$

gde je sa $|\overrightarrow{OM}|$ označena dužina vektora $\overrightarrow{OM}$.

2. Utvrditi da li postoji u prostoru konačan skup M tačaka koje ne leže u jednoj ravni, takav da za svake dve tačke A i B skupa M postoje dve druge tačke C i D skupa M takve da su prave AB i CD paralelne i različite.
3. Naći najmanju vrednost izraza a^2+b^2, gde su a i b realni brojevi za koje jednačina $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ ima bar jedan realan koren.
4. Vojnik treba da proveri da li u oblasti koja ima oblik jednakostraničnog trougla (uključujući i granicu) ima mina. Radijus dejstva njegovog detektora jednak je polovini visine trougla. Vojnik polazi iz jednog temena trougla. Kakvim putem on treba da se kreće da bi izvršio zadatak, a da pri tome pređen put bude najmanji mogući?
5. Neprazan skup G funkcija realne promenljive x oblika $f(x)=ax+b$, gde su a i b realni brojevi, $a \neq 0$, zadovoljava sledeće uslove:

1° ako su $f, g \in G$ onda je $g \circ f \in G$, gde je $(g \circ f)(x)=g(f(x))$,

2° ako je $f \in G, f(x)=ax+b$, onda inverzna funkcija $f^{-1} \in G$, gde je

$$f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$$

3° Za svako $f \in G$ postoji x_f, takvo je da je $f(x_f)=x_f$.

Dokazati da postoji realan broj k takav da je $f(k)=k$ za svako $f \in G$.

6. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dati pozitivni brojevi i q dati realan broj, $0<q<1$. Naći takvih n realnih brojeva $b_1, b_2, \ldots, b_n$ da bude ispunjeno:

a) $a_k<b_k$, za $k=1, 2, \ldots, n$

b) $q<\dfrac{b_{k+1}}{b_k}<\dfrac{1}{q}$, za $k=1, 2, \ldots, n-1$

c) $b_1+b_2+\cdots+b_n<\dfrac{1+q}{1-q}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$

XVI

1. Date su tri karte i na svakoj od njih napisan je po jedan ceo broj Ta tri broja, p, q i r, zadovoljavaju uslov $0<p<q<r$. Tri igrača, A, B i C, igraju igru čiji se jedan krug sastoji u sledećem: karte se promešaju i podele tako da svaki igrač dobije po jednu kartu; zatim svaki dobija onoliko kuglica koliki je broj napisan na njegovoj karti; zatim se karte vraćaju, dok već dobijene kuglice ostaju kod igrača. Igra ima N krugova, $N \geqslant 2$. Na kraju igre, igrač A je ukupno imao 20 kuglica, B—10 juglica, a C—9 kuglica.

   Poznato je da je u poslednjem krugu igrač B dobio r kuglica. Koji je od igrača dobio q kuglica u prvom krugu?

2. Dat je trougao ABC. Dokazati da nejednakost

$$\sin A \cdot \sin B \leqslant \sin^2 \frac{C}{2}$$

   važi ako i samo ako na stranici AB postoji tačka D takva da je duž CD geometrijska sredina duži AD i BD.

3. Neka je n proizvoljan prirodan broj. Dokazati da broj

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} \cdot 2^{3k}$$

   nije deljiv sa 5.

4. Razmatrajmo razlaganja šahovske table 8×8 na p pravougaonika, koji nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka, pri čemu ta razlaganja zadovoljavaju sledeće uslove:

(1) Svaki se pravougaonik sastoji od jednakog broja belih i crnih polja;

(2) Ako je a_i broj belih polja u i-tom pravougaoniku, onda je

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_p.$$

Odrediti maksimalnu vrednost broja p za koju je takvo razlaganje mogućno. Za ovu vrednost p odrediti sve mogućne nizove takvih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

5. Neka su a, b, c, d proizvoljni pozitivni realni brojevi. Odrediti skup svih mogućnih vrednosti izraza

$$S=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}.$$

6. Neka je P polinom s celim koeficijentima, različit od konstante. Obeležimo sa $n(P)$ broj svih različitih brojeva k za koje je $[P(k)]^2=1$. Dokazati da je $n(P)-s(P)\leqslant 2$, gde smo sa $s(P)$ obeležili stepen polinoma P.

XVII

1. Neka su x_i, y_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ realni brojevi, takvi da je

$$x_1\geqslant x_2\geqslant \ldots \geqslant x_n, \quad y_1\geqslant y_2\geqslant \ldots \geqslant y_n$$

i neka je $z_1, z_2, \ldots, z_n$ proizvoljna permutacija brojeva $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Dokazati da je

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2.$$

2. Neka je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ strogo rastući niz prirodnih brojeva. Dokazati da postoji beskonačno mnogo članova a_m tog niza koji se mogu predstaviti u obliku

$$a_m=xa_p+ya_q,$$

gde su x, y prirodni brojevi i $p\neq q$.

3. Nad stranicama proizvoljnog trougla ABC spolja su konstruisani trouglovi BPC, CQA, ARB, takvi da je

$$\sphericalangle PBC=\sphericalangle CAQ=45^\circ$$
$$\sphericalangle BCP=\sphericalangle QCA=30^\circ$$
$$\sphericalangle ABR=\sphericalangle RAB=15^\circ.$$

Dokazati da je $\sphericalangle QRP=90^\circ$ i da je $QR=RP$.

4. Neka je A zbir cifara broja 4444^{4444} i B zbir cifara broja A. Naći zbir cifara broja B. (Svi brojevi su zapisani u dekadnom sistemu.)

5. Može li se na krugu poluprečnika 1 odrediti 1975 tačaka, takvih da je rastojanje između svake dve od njih racionalan broj?

6. Naći sve homogene polinome stepena n dveju promenljivih koji zadovoljavaju sledeće uslove:

   1° Za svaka tri realna broja a, b, c važi

$$P(a+b, c)+P(b+c, a)+P(c+a, b)=0;$$

   2° $P(1, 0)=1$.

   Napomena: Polinom P je homogen stepena n ako za svaka tri realna broja t, x, y važi $P(tx, ty)=t^n P(x, y)$, gde je n prirodan broj.

XVIII

1. Površina ravnog konveksnog četvorougla je 32 cm², a suma dužina dveju njegovih naspramnih stranica i jedne dijagonale jednaka je 16 cm. Odrediti sve vrednosti koje može imati dužina druge dijagonale.

2. Neka je

$$P_1(x)=x^2-2 \text{ i}$$

$$P_k(x)=P_1(P_{k-1}(x)) \text{ za } k=2, 3, \ldots$$

   Dokazati da su za svako prirodno n svi koreni jednačine

$$P_n(x)=x$$

   realni i međusobno različiti.

3. Pravougaona kutija je takva da se može potpuno ispuniti jediničnim kockama. Ako se u nju stavljaju kocke zapremine 2 čije su ivice

paralelne ivicama kutije, maksimalan mogući broj tih kocki popunjava tačno 40% zapremine kutije. Odrediti (unutrašnje) dimenzije svih kutija sa tim svojstvima.

Napomena: $\sqrt[3]{2}=1,2599\ldots$

4. Naći najveći broj koji je proizvod prirodnih brojeva čija je suma 1976. (Odgovor obrazložiti.)

5. Dat je sistem od p jednačina sa $q=2p$ nepoznatih

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1q}x_q=0 \\ a_{21}x_1+\ldots+a_{2q}x_q=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1+\ldots+a_{pq}x_q=0 \end{cases}$$

u kome $a_{ij}\in\{-1, 0, 1\}$ $(i=1, 2, \ldots, p; j=1, 2, \ldots, q)$. Dokazati da postoji rešenje $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ tog sistema, tako da važi:

(a) svi x_j $(j=1, 2, \ldots, q)$ su celi brojevi,

(b) bar za jedno j $(1\leqslant j\leqslant q)$ $x_j\neq 0$ i

(c) za svako $j=1, 2, \ldots, q$, $|x_j|\leqslant q$.

6. Niz $u_0, u_1, u_2, \ldots$ je definisan na sledeći način:

$$\begin{cases} u_0=2, \quad u_1=\dfrac{5}{2} \\ n_{n+1}=u_n\,(u_{n-1}^2-2)-u_1 \quad (n=1,2,\ldots). \end{cases}$$

Dokazati da je za $n=1, 2, \ldots$

$$[u_n]=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$$

($[x]$ označava najveći ceo broj koji nije veći od x.)

XIX

1. Unutar datog kvadrata $ABCD$ konstruisani su jednakostranični trouglovi ACK, BCL, CDM, DAN. Dokazati da su središta odsečaka KL, LM, MN, NK i središta odsečaka AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN temena pravilnog dvanaestougla.

2. U konačnom nizu realnih brojeva suma proizvoljnih sedam uzastopnih članova je negativna, a suma proizvoljnih jedanaest uzastopnih članova je pozitivna. Odrediti najveći mogući broj članova takvog niza.

3. Dat je prirodan broj n veći od 2. Neka je V_n skup brojeva oblika $1+kn$, gde je $k=1, 2, 3, \ldots$. Za broj $m \in V_n$ kažemo da je nerazloživ u V_n ako ne postoje brojevi p, $q \in V_n$, takvi da je $m=pq$.

   Dokazati da postoji broj $r \in V_n$ koji se na više od jednog načina može predstaviti kao proizvod čiji su faktori nerazloživi u V_n. (Predstavljanja koja se razlikuju samo poretkom faktora iz V_n smatraju se istim.)

4. Neka su a, b, A, C dati realni brojevi. Posmatrajmo funkciju

$$f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x.$$

   Ako je $f(x)\geqslant 0$ za svako realno x, dokazati da je

$$a^2+b^2\leqslant 2 \quad \text{i} \quad A^2+C^2\leqslant 1.$$

5. Neka su a i b pozitivni celi brojevi. Pri deljenju a^2+b^2 sa $a+b$ dobija se količnik (kvocijent) q i ostatak r. Naći sve parove (a, b) za koje je $q^2+r=1977$.

6. Neka je f funkcija definisana za svaki pozitivan ceo broj čije su vrednosti takođe pozitivni celi brojevi. Ako za svako n važi nejednakost

$$f(n+1)>f(f(n)),$$

   dokazati da je za svko n

$$f(n)=n.$$

XX

1. Neka su m i n prirodni brojevi, takvi da je $n>m\geqslant 1$. Poslednje tri cifre broja 1978^m jednake su, respektivno, poslednjim trima ciframa broja 1978^n (u decimalnom zapisu).

   Odrediti m i n tako da $m+n$ ima najmanju moguću vrednost.

2. Neka je P data tačka unutar date sfere. A, B i C su tri proizvoljne tačke na toj sferi, takve da su PA, PB i PC uzajamno normalni. Neka je Q teme, dijagonalno suprotno sa P, paralelepipeda određenog sa PA, PB i PC.

   Odrediti geometrijsko mesto tačaka Q, za sve moguće položaje tačaka A, B i C.

3. Skup svih prirodnih brojeva je predstavljen u obliku unije dva svoja disjunktna podskupa:

   $$\{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\}, \{g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots\},$$

   gde je

   $$f(1)<f(2)<\ldots<f(n)<\ldots, \quad g(1)<g(2)<\ldots<g(n)<\ldots$$

   i

   $$g(n)=f(f(n))+1 \text{ za svako } n\geqslant 1.$$

   Odrediti $f(240)$.

4. Neka je ABC trougao u kome je $AB=AC$. Krug, koji iznutra dodiruje opisani krug trougla ABC, dodiruje takođe stranice AB i AC u tačkama P i Q. Dokazati da je središte duži PQ centar upisanog kruga trougla ABC.

5. Neka je (a_k), $k=1, 2, \ldots, n, \ldots$, niz različitih prirodnih brojeva. Dokazati da za svako n važi nejednakost:

   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

6. Međunarodno društvo čine članovi iz 6 različitih zemalja. Spisak članova društva sastoji se od 1978 imena, numerisanih brojevima $1, 2, \ldots, 1978$. Dokazati da postoji bar jedan član društva čiji je broj jednak zbiru brojeva dvaju članova iz njegove zemlje ili je jednak dvostrukom broju nekog člana društva iz njegove zemlje.

XXI

1. Neka su p i q prirodni brojevi, takvi da je

$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}.$$

Dokazati da je broj p deljiv brojem 1979.

2. Data je petougaona prizma sa osnovama $A_1A_2A_3A_4A_5$ i $B_1B_2B_3B_4B_5$. Sve ivice osnova i sve duži A_iB_j $(i,j=1,2,3,4,5)$ obojene su crvenom ili zelenom bojom tako da u svakom trouglu, koga obrazuju temena prizme, čije su sve tri stranice obojene, postoje dve stranice obojene raznim bojama. Dokazati da su svih deset ivica osnova obojene istom bojom.

3. U ravni su data dva kruga, C_1 i C_2, koji se seku. Neka je A jedna njihova presečna tačka. Iz tačke A počinju istovremeno da se kreću tačke M_1 i M_2 po krugovima C_1, odnosno C_2. Tačke se kreću po svojim krugovima međusobno jednakim konstantnim ugaonim brzinama u istom smeru. Tačke M_1 i M_2, dakle istovremeno obiđu svaka svoj krug i sreću se u tački A. Pokazati da u ravni postoji nepokretna tačka P koja je u svakom trenutku podjednako udaljena od tačaka M_1 i M_2.

4. Date su ravan π, tačka P u toj ravni i tačka Q van nje. Odrediti sve tačke R u ravni π za koje je odnos

$$\frac{QP+PR}{QR}$$

maksimalan.

5. Odrediti sve realne brojeve a za koje postoje nenegativni brojevi x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, koji zadovoljavaju relacije

$$\sum_{k=1}^{5} k\,x_k=a,\quad \sum_{k=1}^{5} k^3\,x_k=a^2,\quad \sum_{k=1}^{5} k^5\,x_k=a^3.$$

6. Neka su A i E dva naspramna temena pravilnog osmougla. Na temenu A nalazi se žaba. Sa svakog temena osmougla, osim temena E, žaba može skočiti na susedno teme. Kada dospe na teme E žaba ostaje na njemu. Neka je a_n broj načina na koje žaba može sa te-

mena A dospeti na teme E skočivši tačno n puta. Pokazati da je

$$a_{2n-1}=0, \qquad a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1}-y^{n-1}) \qquad n=1, 2, 3, \ldots,$$

gde je $x=2+\sqrt{2}$ i $y=2-\sqrt{2}$.

(Pod načinom na koji žaba može dospeti sa temena A na teme E skočivši tačno n puta podrazumeva se niz temena $(P_0, \ldots, P_n)$ koji zadovoljava sledeće uslove:

(*i*) $P_0=A$, $P_n=E$;

(*ii*) za svako i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $P_i \neq E$;

(*iii*) za svako i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, P_i i P_{i+1} su susedna temena osmougla).

1980.

1. Naći sve funkcije $f: Q \to Q$ koje zadovoljavaju sledeća dva uslova

   (*i*) $f(1)=2$;

   (*ii*) $f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$ za sve x, y iz Q.

   (Q je skup racionalnih brojeva).

2. Neka su A, B, C tri kolinearne tačke, takve da je B između A i C. Sa iste strane prave AC konstruisana su tri polukruga nad AB, BC i AC kao nad prečnicima. Zajednička tangenta prva dva polukruga u tački B seče treći polukrug u tački E. Neka su U i V tačke u kojima zajednička spoljašnja tangenta dodiruje prva dva polukruga. Izraziti odnos

   $$\frac{\text{površina } \Delta\, EUV}{\text{površina } \Delta\, EAC}$$

   u funkciji od $r_1=\frac{1}{2}AB$ i $r_2=\frac{1}{2}BC$.

3. Neka je p prost i n prirodan broj. Dokazati da su sledeća dva tvrđenja ekvivalentna:

   (*i*) Nijedan od binomnih koeficijenata $\binom{n}{k}$, $k=0, 1, \ldots, n$, nije deljiv sa p.

(*ii*) n se može predstaviti u obliku $n=p^s q-1$, gde su s i q celi brojevi, $s\geqslant 0, 0<q<p$.

4. Dva kruga se dodiruju (iznutra ili spolja) u tački P. Prava t dodiruje jedan od tih krugova u tački A, a seče drugi u tačkama B i C. Dokazati da je prava PA simetrala jednog od uglova između pravih PB i PC.

5. Deset igrača počeli su igru, svaki sa istom sumom novca. Jedan za drugim, svaki od njih bacao je pet kockica. Posle svakog bacanja, igrač koji je bacao kockice isplatio je svakom od svojih devet protivnika sumu jednaku n-tom delu sume koju je taj protivnik imao do tog trenutka, gde je n zbir brojeva koje su pokazale kockice. Kada je poslednji, deseti igrač bacio kockice zbir brojeva na njima iznosio je 12, a pošto je izvršeno isplaćivanje, pokazalo se da svaki igrač ima istu sumu novca kao na početku igre. Odrediti, ako je moguće, zbirove koje su pokazivale kockice u prethodnih devet bacanja.

6. Odrediti sve parove (x,y) celih brojeva koji zadovoljavaju jednačinu

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=8(x^2+xy+y^2+1).$$

XXII

1. Za tačku P unutar datog trougla ABC označimo sa D, E i F njene ortogonalne projekcije na prave BC, CA i AB, respektivno. Naći sve tačke P za koje je

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$$

minimalno.

2. Dati su celi brojevi n i r $(1\leqslant r\leqslant n)$. Formirajmo sve r-člane podskupove skupa $\{1,2,\ldots,n\}$ i za svaki od tih podskupova posmatrajmo njegov najmanji element. Označimo sa $f(n,r)$ aritmetičku sredinu svih tako dobijenih brojeva. Dokazati da je $f(n,r)=\dfrac{n+1}{r+1}$.

3. Neka su m i n celi brojevi $(1\leqslant m\leqslant 1981,\ 1\leqslant n\leqslant 1981)$ koji zadovoljavaju jednačinu

$$(n^2-mn-m^2)^2=1.$$

Odrediti maksimalnu moguću vrednost za m^2+n^2.

4. (a) Naći sve vrednosti $n \geqslant 3$ za koje postoji skup od n uzastopnih prirodnih brojeva sa sledećim svojstvom: najveći od tih brojeva je delilac najmanjeg zajedničkog sadržaoca ostalih $n-1$ brojeva.
(b) Za koje vrednosti $n \geqslant 3$ postoji tačno jedan skup sa tim svojstvom?

5. Data su tri kruga jednakih poluprečnika sa zajedničkom tačkom O koji leže unutar trougla ABC. Svaki od tih krugova dodiruje dve stranice tog trougla. Dokazati da tačka O i centri opisanog i upisanog kruga trougla ABC leže na jednoj pravoj.

6. Funkcija $f(x,y)$ zadovoljava uslove

(1) $f(0,y)=y+1$,

(2) $f(x+1,0)=f(x,1)$ i

(3) $f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y))$

za sve nenegativne cele brojeve x,y. Odrediti $f(4,1981)$.

XXIII

1. Funkcija $f(n)$ je definisana za sve prirodne brojeve n i uzima nenegativne celobrojne vrednosti. Poznato je da:

(a) Za svako m i n, $f(m+n)-f(m)-f(n)$ uzima jednu od vrednosti 0 ili 1;

(b) $f(2)=0$;

(c) $f(3)>0$;

(d) $f(9999)=3333$.

Odrediti $f(1982)$.

2. Dat je nejednakokraki trougao $A_1A_2A_3$ sa stranicama a_1,a_2,a_3 (a_i je stranica naspramna temenu A_i). Neka je M_i središte stranice a_i, T_i tačka u kojoj upisani krug datog trougla dodiruje stranicu a_i, a S_i tačka simetrična tački T_i u odnosu na simetralu unutrašnjeg ugla kod A_i ($i=1,2,3$). Dokazati da se prave M_1S_1, M_2S_2 i M_3S_3 seku u jednoj tački.

3. Posmatrajmo nizove (x_n) pozitivnih realnih brojeva sa svojstvom:

$$1=x_0 \geqslant x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant \ldots .$$

(a) Dokazati da za svaki niz sa tim svojstvom postoji n, takvo da je

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant 3{,}999.$$

(b) Naći niz (x_n) sa tim svojstvom, takav da za svako n važi

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}<4.$$

4. Data je jednačina

$$x^3-3xy^2+y^3=n.$$

Ako je n takav prirodan broj da data jednačina ima celobrojno rešenje (x,y), dokazati da ona tada ima bar tri celobrojna rešenja. Dokazati da za $n=2891$ ta jednačina nema nijedno celobrojno rešenje.

5. Na dijagonalama AC i CE pravilnog šestougla $ABCDEF$ izabrane su unutrašnje tačke M i N, respektivno, takve da je $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=\lambda$. Ako se zna da tačke B, M i N leže na jednoj pravoj, odrediti λ.

6. Dat je kvadrat S stranice 100. Neka je $L=A_0A_1A_2\ldots A_n$ poligonalna linija u S koja samu sebe niti seče niti dodiruje i takva da je $A_0\neq A_n$. Neka za svaku tačku P granice kvadrata S postoji tačka linije L, na rastojanju od tačke P ne većem od 1/2.
Dokazati da postoje takve dve tačke X i Y na liniji L, da rastojanje tačaka X i Y nije veće od 1, a dužina dela linije L između tačaka X i Y nije manja od 198.

XXIV

1. Odrediti sve funkcije f koje preslikavaju skup pozitivnih realnih brojeva u samog sebe i zadovoljavaju sledeća dva uslova:

(1) $f(xf(y))=yf(x)$ za sve pozitivne realne brojeve x i y;

(2) $f(x)\to 0$ kad $x\to+\infty$.

2. U ravni su data dva kruga koja se seku, k_1 i k_2, različitih poluprečnika, sa centrima O_1 i O_2, respektivno. Neka je A jedna od njihovih presečnih tačaka. Jedna od zajedničkih tangenata tih krugova do-

diruje k_1 u P_1 i k_2 u P_2, a druga dodiruje k_1 u Q_1 i k_2 u Q_2. Neka su M_1 i M_2 središta duži P_1Q_1 i P_2Q_2, respektivno. Dokazati da je $\sphericalangle O_1AO_2 = \sphericalangle M_1AM_2$.

3. Neka su a,b,c pozitivni celi brojevi od kojih su bilo koja dva uzajamno prosta. Dokazati da je

$$2abc - ab - bc - ca$$

najveći ceo broj koji se ne može predstaviti u obliku

$$xbc + yca + zab$$

sa nenegativnim celim brojevima x,y,z.

4. Dat je jednakostranični trougao ABC. Neka je E skup svih tačaka duži AB, BC i CA (uključujući A, B i C). Da li je tačno da za proizvoljnu podelu skupa E na dva disjunktna podskupa postoji pravougli trougao čija sva tri temena pripadaju jednom te istom od tih podskupova?

5. Dokazati ili opovrgnuti sledeće trvđenje:

U skupu prirodnih brojeva $\{1,2,3,\ldots,10^5\}$ može se naći podskup od 1983 elementa, koji ne sadrži nijednu trojku brojeva koji su uzastopni članovi neke aritmetičke progresije.

6. Neka su a, b i c dužine stranica nekog trougla. Dokazati:

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geqslant 0.$$

Ispitati kada važi jednakost.

XXV

1. Neka su x, y i z nenegativni realni brojevi za koje važi jednakost $x+y+z=1$. Dokazati nejednakost

$$0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}.$$

2. Naći jedan par prirodnih brojeva a,b za koje važi:

(1) proizvod $ab(a+b)$ nije deljiv sa 7,

(2) broj $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ deljiv je sa 7^7.

3. U ravni su date dve različite tačke O i A. Za svaku tačku X iz ravni, različitu od O, označimo sa $\alpha(X)$ veličinu ugla AOX izraženu u radijanima ($0 \leqslant \alpha(X) < 2\pi$, ugao se meri od kraka AO u smeru suprotnom od kazaljke na satu). Označimo sa $C(X)$ kružnicu sa centrom O i poluprečnikom $OX+\dfrac{\alpha(X)}{OX}$. Pretpostavimo da je svaka tačka u ravni obojena jednom od konačno mnogo boja. Dokazati da postoji tačka Y u ravni za koju je $\alpha(Y)>0$, takva da se na kružnici $C(Y)$ nalazi tačka obojena istom bojom kao i Y.

4. Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao, takav da je prava CD tangenta na krug sa dijametrom AB. Dokazati da je prava AB tangenta na krug sa dijametrom CD ako i samo ako su prave BC i AD paralelne.

5. Označimo sa d zbir dužina svih dijagonala ravnog konveksnog poligona sa n temena ($n>3$), a sa p njegov obim. Dokazati:

$$n-3<\frac{2d}{p}<\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2.$$

6. Neka su a, b, c, d neparni celi brojevi za koje važe sledeći uslovi:

(1) $0<a<b<c<d$;

(2) $ad=bc$;

(3) $a+d=2^k$, $b+c=2^m$ za neke prirodne brojeve k i m.

Dokazati da je $a=1$.

XXVI

1. Kružnica ima središte na stranici AB konveksnog tetivnog četvorougla $ABCD$. Preostale tri stranice dodiruju tu kružnicu. Dokazati da je

$$AD+BC=AB.$$

2. Neka je n prirodan broj, k ceo broj uzajamno prost sa n, $1 \leqslant k \leqslant n-1$ i $M=\{1,2,\ldots,n-1\}$. Svaki element iz M obojen je jednom od dve boje — belom ili plavom — tako da važi:

(1) za svako $i \in M$, brojevi i, $n-i$ imaju jednaku boju;

(2) za svako $i \in M$, $i \neq k$, brojevi i, $|i-k|$ imaju jednaku boju.

Dokazati da svi elementi iz M imaju jednaku boju.

3. Za polinom P s celobrojnim koeficijentima $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_kx^k$ sa $w(P)$ je označen broj koeficijenata a_j koji su neparni. Za svaki nenegativan ceo broj i neka je $Q_i(x)=(1+x)^i$. Dokazati da ako celi brojevi $i_1, i_2, \ldots, i_n$ zadovoljavaju uslov $0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_n$, tada je

$$w(Q_{i_1}+Q_{i_2}+\ldots+Q_{i_n}) \geqslant w(Q_{i_1}).$$

4. Dat je skup M koji se sastoji od 1985 različitih prirodnih brojeva. Nijedan od njih nema prostog delioca većeg od 26. Dokazati da se iz skupa M mogu izabrati četiri međusobno različita broja čiji je proizvod četvrti stepen celog broja.

5. Dati su trougao ABC i kružnica sa centrom O koja sadrži tačke A i C i seče duži AB i BC još u različitim tačkama K i N, respektivno. Kružnice opisane oko trouglova ABC i KBN imaju tačno dve zajedničke tačke B i M.

   Dokazati da je ugao OMB prav.

6. Za svaki realan broj x_1 definiše se niz $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ pomoću

$$x_{n+1}=x_n\left(x_n+\frac{1}{n}\right) \text{ za } n=1,2,3,\ldots.$$

   Dokazati da postoji jedna i samo jedna vrednost x_1, takva da važ

$$0<x_n<x_{n+1}<1 \text{ za svako } n.$$

REŠENJA ZADATAKA

I. 1.

Budući da je $3\cdot(14n+3)-2\cdot(21n+4)=1$ vidimo da su brojevi $21n+4$ i $14n+3$ uzajamno prosti za svako $n\in N$, pa skraćivanje nije moguće.

I. 2.

S obzirom da je $(x-1)^2\geqslant 0$ odnosno $x^2\geqslant 2x-1$ vidimo da su pri $x\geqslant 1/2$ svi koreni definisani. Ako označimo $u=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}$, $v=\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$ imaćemo $u^2+v^2=2x$ i $uv=|x-1|$. Pošto je $(u+v)^2=u^2+v^2+2uv=2x+2|x-1|$, sledi da je $u+v=\sqrt{2}$ za $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$, $u+v=\sqrt{4x-2}$ za $x\geqslant 1$. Stoga jednakost a) važi za $\frac{3}{2}\leq x\leq 1$, jednakost c) za $x=\frac{3}{2}$, a jednakost b) ni za jedno realno x.

I. 3.

Ako jednakost

$$a\cos^2 x+b\cos x+c=0$$

pomnožimo sa $4(a\cos^2 x-b\cos x+c)$ dobićemo, posle sređivanja,

$$4a^2\cos^4 x+2(4ac-2b^2)\cos^2 x+4c^2=0.$$

Pošto je $2\cos^2 x=1+\cos 2x$, dobijena jednakost postaje

$$a^2(1+\cos 2x)^2+(4ac-2b^2)\,(1+\cos 2x)+4c^2=0$$

ili

$$a^2\cos^2 2x+(2a^2+4ac-2b^2)\cos 2x+(a^2+4ac-2b^2+4c^2)=0$$

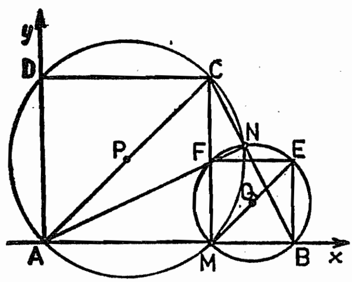
Za $a=4$, $b=2$, $c=-1$ iz jednakosti $4\cos^2 x+2\cos x-1=0$ dobijamo $16\cos^2 2x+8\cos 2x-4=0$, ili $4\cos^2 2x+2\cos 2x-1=0$.

I. 4.

Neka je α jedan od oštrih uglova traženog trougla. Tada je $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}$, gde su b i a katete traženog trougla. No kako je težišna linija koja dogovara hipotenuzi trougla jednaka polovini hipotenuze, to po uslovu imamo $c^2/4 = ab$, te iz gornje jednakosti nalazimo $\sin 2\alpha = 1/2$. Pošto je α oštar ugao imamo $\alpha = 15°$ ili $\alpha = 75°$. Sada konstruišemo pravougli trougao čija je hipotenuza c, a oštri uglovi su 15° i 75°. Lako je proveriti da su uslovi zadatka ispunjeni. Konstrukcija je moguća za svaku duž c i rešenje je jedinstveno (tj. svi trouglovi koji zadovoljavaju uslove zadatka su podudarni).

I. 5.

Postavimo koordinatni sistem tako da je prava AB x-osa, a prava AD y-osa. Tačka A ima koordinate (0,0), a neka tačke B, M i D imaju koordinate $(b, 0)$, $(m, 0)$ i $(0, d)$, redom.



(a) Tačke F i C imaju koordinate $(m, b-m)$ i (m, m), redom, pa su jednačine pravih AF i BC:

$$AF: y = \frac{b-m}{m} x$$

$$BC: y = \frac{m}{m-b}(x-b)$$

Presek prave AF i kruga opisanog oko $AMCD$, čija je jednačina $\left(x-\frac{m}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{2}$ je tačka

$$N'\left(\frac{b}{1+\left(\frac{b-m}{m}\right)^2}, \frac{(b-m)b}{m\left[1+\left(\frac{b-m}{m}\right)^2\right]}\right)$$

Lako se proverava da koordinate tačke N' zadovoljavaju jednačinu prave BC i kruga $\left(x-\frac{b+m}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{b-m}{2}\right)^2 = \frac{(b-m)^2}{2}$ opisanog oko $MBEF$, tj. tačka N' se poklapa sa tačkom N.

(b) Kako je $N=N'$, to je jednačina prave MN

$$MN; y=\frac{b}{2m-b}(x-m)$$

Ako tačka M_1 ima koordinate $(m_1, 0)$, onda je jednačina prave M_1N_1:

$$M_1N_1 : y=\frac{b}{2m_1-b}(x-m_1).$$

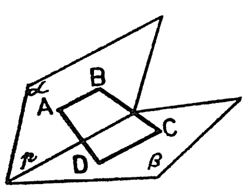
Prave MN i M_1N_1 se seku u tački $S\left(\frac{b}{2}, \ -\frac{b}{2}\right)$.

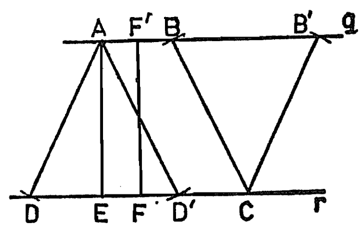
Kako koordinate te tačke ne zavise od m i m_1, to sve prave MN prolaze kroz tačku S.

(c) Sredina duži PQ je tačka s koordinatama $\left(\frac{b+2m}{4}, \ \frac{b}{4}\right)$ Dakle, $x=\frac{b+2m}{4}$ i $y=\frac{b}{4}$. Kako je $o \leqslant m \leqslant b$, to je traženo geometrijsko mesto duž čiji su krajevi tačke s koordinatama $\left(\frac{b}{4}, \ \frac{b}{4}\right)$ i $\left(\frac{3b}{4}, \ \frac{b}{4}\right)$.

I. 6.

Neka je $ABCD$ tražen trapez. Tada je $AB \| CD \| p$. Dakle, kroz tačke A i C treba konstruisati prave q i r, paralelne sa p i na njima treba naći tačke B i D, tako da četvorougao $ABCD$ zadovoljava uslove zadatka. Ako je krug upisan u trapez $ABCD$, onda je $AB+CD=$





$=AD+BC=2AD$. Tada je $AF'=FE$ (gde je F' središte stranice AB, $FF' \perp r$ i E projekcija A na CD), pa je $AB=2AF'=2EF$ i $CD=2CE-$

$=2EF$. Odatle je $AD=EC$, pa tačka D leži na krugu poluprečnika EC, s centrom u A. Da bi zadatak imao rešenje, mora biti $AD=EC\geqslant \geqslant F'F$, tj. $\frac{AE}{EC}\leqslant 1$, tj. $\measuredangle ACE\leqslant 45°$. Taj uslov je i dovoljan.

Opis konstrukcije i dokaz prepuštamo čitaocu (videti sliku).

II. 1.

Pošto je traženi broj trocifreni i deljiv sa 11, on se može napisati kao $11u$ i gde je $10\leqslant u=90$ i u je prirodan broj. Neka je $u=10a+b$; $a, b\in\{0, 1, \ldots, 9\}$. Razlikovaćemo dva slučaja:

1° $a+b<10$. Traženi trocifreni broj je tada $100a+10(a+b)+b$ i, po uslovu, $a^2+(a+b)^2+b^2=10a+b$ ili $2(a^2+b^2+ab-5a)=b$ pa b mora biti paran, tj. $b\in\{0, 2, 4, 6, 8\}$. Ispitivanjem ovih mogućnosti (za a imamo, dakle, kvadratnu jednačinu) nalazimo samo jedno rešenje: $a=5$, $b=0$ te je traženi broj 550.

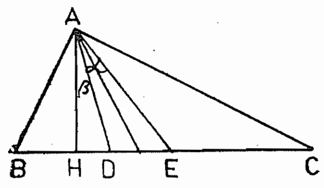
2° $a+b\geqslant 10$. Traženi trocifreni broj je $100(a+1)+10(a+b-10)+b$ i, po uslovu, $(a+1)^2+(a+b-10)^2+b^2=10a+b$ ili, što je isto, $2(a^2-14a+b^2-10b+50+ab)=b-1$, pa b mora biti neparan tj. $b\in\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Ispitivanjem ovih mogućnosti nalazimo samo jedno rešenje: $a=7$, $b=3$ i traženi broj je sada 803.

Dakle, jedini brojevi koji zadovoljavaju uslove su 550 i 803.

II. 2.

Izraz na levoj strani je definisan pod uslovom da je $x\geqslant -\frac{1}{2}$ i $x\neq 0$. Dalje je $\frac{4x^2}{(1-\sqrt{2x+1})^2}=(1+\sqrt{1+2x})^2$. Budući da je funkcija $f(x)=(1+\sqrt{1+2x})^2-2x-9=2\sqrt{1+2x}-7$ rastuća i da je $f\left(\frac{45}{8}\right)=0$ zaključujemo da je nejednakost zadovoljena ako i samo ako je $-\frac{1}{2}\leq x<\frac{45}{8}$ i $x\neq 0$.

II. 3.



Neka je DE odsečak koji sadrži sredinu hipotenuze, i neka je $BH=x$ (gde je H podnožje visine iz A na BC). Tada je $x(a-x)=h^2$. Označimo sa α i β uglove DAE i HAD, redom. Tada je $\measuredangle EAH=\alpha+\beta$.

Primetimo da je $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$. Iz pravouglog trougla AHE je $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{HE}{AH}$. Dalje je $HE=HD+DE$, $HD=BD-BH$ i $BD=\dfrac{n-1}{2n}a$, pa je $HE=\dfrac{n+1}{2n}a-x$ i $HD=\dfrac{n-1}{2n}a-x$. Zašto je

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{n+1}{2n}a-x}{h} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}\beta=\frac{\frac{n-1}{2n}a-x}{h},$$

Zamenjujući to u identitet $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, dobijamo

$$\frac{\frac{n+1}{2n}a-x}{h}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{\frac{n-1}{2n}a-x}{h}}{1-\dfrac{\frac{n-1}{2n}a-x}{h}\operatorname{tg}\alpha}$$

a odatle

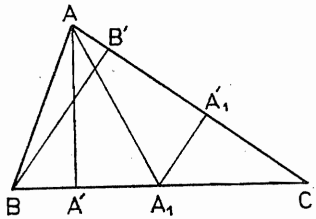
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{ah}{nh^2+\frac{n^2-1}{4n}a^2-axn+x^2n}$$

Kako je $x^2-ax=-h^2$, to je

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{ah\cdot 4n}{(n^2-1)a^2}=\frac{4nh}{a(n^2-1)}$$

II. 4.

Analiza. Neka je trougao ABC konstruisan. Označimo sa A_1 sredinu duži BC, a sa A', B' i A_1' podnožja normala iz tačaka A, B i A_1 na stranice BC i AC. Duž A_1A_1' je srednja linija trougla BCB', pa je $A_1A_1'=\dfrac{1}{2}h_b$. Konstrukcija je sada jasna: prvo se konstruiše trougao $AA'A_1$, zatim tačka A_1' (iz A se konstruiše tangenta na krug s centrom u A_1 i poluprečnikom $\frac{1}{2}h_b$ — tako se dobija tačka A_1')



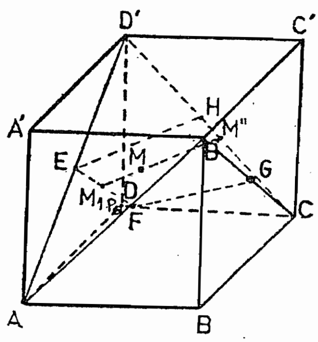
Tačke B i C se lako nalaze.

Detaljan opis konstrukcije i dokaz prepuštamo čitaocu.

Zadatak ima rešenja (i pri tome, dva suštinski različita) samo u slučaju kada je $m_a > h_a$ i $m_a > \frac{h_b}{2}$.

II. 5.

(a) Jasno je da će traženo geometrijsko mesto pripadati ravni koja je normalna na ivicu AA' i koja prolazi kroz njenu sredinu. Da bismo odredili granice tog geometrijskog mesta posmatrajmo slučaj kada se tačka X poklapa sa tačkom A, a Y zauzima bilo koji položaj na $B'D'$. Geometrijsko mesto sredina duži AY je (što se lako dokazuje) srednja linija EF trougla $AB'D'$. Na sličan način, ako uzmemo da se X poklapa sa C, dobijamo srednju liniju GH trougla $B'CD'$. Četvorougao $EFGH$ je kvadrat (dokazati!) i on (sa unutrašnjim delom) predstavlja traženo geometrisjko mesto. Zaista, već smo videli da stranice tog kvadrata pripadaju traženom geometrijskom mestu. Neka je M proizvoljna tačka u unutrašnjosti kvadrata. Dokazaćemo da postoje tačke X_1 na AC i Y_1 na $B'D'$ takve da je tačka M sredina duži X_1Y_1. Kroz M i AC postavimo ravan. Ona seče ravan kvadrata po pravoj $M'M''||AC||EH$. Znači, konstruisana ravan seče $D'B'$ u unutrašnjoj tački Y_1. Prava MY_1 seče AC u unutrašnjoj tački X_1. Pri tome e $X_1M=MY_1$, jer je $M'M''$ srednja linija trougla Y_1AC.



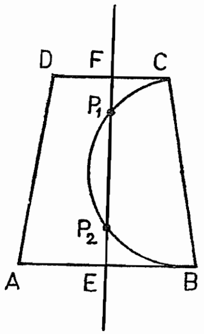
Dokažimo sada da sredina duži X_2Y_2, gde je X_2 bilo koja tačka na AC, a Y_2 bilo koja tačka na $B'D'$, pripada kvadratu $EFGH$. Srednja linija trougla ACY_2 je linija preseka ravni ACY_2 i ravni kvadrata. Duž X_2Y_2 seče tu srednju liniju, pa je ona njome podeljena na dva jednaka dela i dokaz je završen.

(b) Koristeći zaključke slične prethodnim, dobijamo da je traženo geometrijsko mesto pravougaonik $EFKL$, gde su E, F, K i L tačke na AB', CB', CD' i AD', redom, takve da je ravan pravougaonika na rastojanju $\frac{1}{3}AA'$ od ravni $ABCD$.

II. 6.

(a) Koristeći poznatu teoremu da je geometrijsko mesto tačaka iz koje se data duž vidi pod pravim uglom krug čiji je prečnik data duž, lako izvodimo konstrukciju: nad krakom BC kao nad prečnikom konstruišemo krug. On seče osu simetrije EF u traženoj tački P.

(b) Neka je $FP_1=x$, $EP_1=h-x$.
Lako se dokazuje da je $\Delta FP_1C \sim \Delta P_1EB$.
Odatle je



$$\frac{FP_1}{EB}=\frac{FC}{P_1E}, \quad \text{tj.} \quad \frac{x}{\frac{a}{2}}=\frac{\frac{b}{2}}{h-x}, \quad \text{tj.} \quad x^2-hx+\frac{ab}{4}=0.$$

Rešenja ove jednačine su

$$x_{1,2}=\frac{h}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{h^2-ab}$$

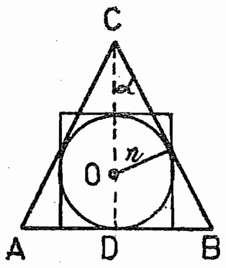
(c) Ako je $h^2>ab$ zadatak ima dva rešenja (kao na slici).
Ako je $h^2=ab$, zadatak ima jedno rešenje (krug dodiruje osu EF).
Ako je $h^2<ab$ zadatak nema rešenja (krug ne seče osu EF).

II. 7.

Posmatrajmo osni presek kupe, valjka i lopte. Neka je 2α ugao pri vrhu C osnog preseka konusa, a r poluprečnik lopte. Zapremina kupe je $V_1=\frac{\pi ha^2}{3}$ gde je $a=DB$ i $h=CD$. Kako je

$$CD=OC+OD=\frac{r}{\sin\alpha}+r=\frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha} \quad \text{i} \quad DB=\frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}\operatorname{tg}\alpha,$$

to je $$V_1=\frac{\pi r^3(1+\sin\alpha)^2}{3\sin\alpha(1-\sin\alpha)}.$$



Zapremina valjka je $V_2=2\pi r^3$ ($2r$ je visina valjka). Neka je

$$k=\frac{V_1}{V_2}$$

Tada je $k=\dfrac{(1+\sin\alpha)^2}{6\sin\alpha(1-\sin\alpha)}$ pa je

$$(1+6k)\sin^2\alpha+2(1-3k)\sin\alpha+1=0.$$

Ta jednačina ima rešenja (po $\sin\alpha$) samo u slučaju kada je diskriminanta $D\geqslant 0$, tj. kada je $(1-3k)^2-(1+6k)\geqslant 0$. Odatle je $k\geqslant\frac{4}{3}$.

Prema tome, jednakost $V_1=V_2$ je nemoguća. Za $k=\frac{4}{3}$ je $\sin\alpha=\frac{4}{3}$

$OC=3r$. Konstrukcija se lako izvodi.

III. 1.

$$\begin{aligned} x+y+z&=a\\ x^2+y^2+z^2&=b^2\\ xy&=z^2. \end{aligned}$$

Iz prve jednačine dobijamo:

(1) . . . $z=a-x-y$, a odatle, kvadriranjem:

(2) . . . $z^2=a^2+x^2+y^2+2xy-2a(x+y)$.

Iz druge i treće jednačine je $b^2=x^2+y^2+xy$, pa zamenom u (2) proizlazi:

(3) . . . $z^2=a^2+b^2+xy-2a(x+y)$.

Iz (3) i treće jednačine, konačno dobijamo:

(4) . . . $a^2+b^2=2a(x+y)$.

Razlikujemo dva slučaja:

1° $a=0$. Zamenom u (4) proizlazi $b=0$, pa druga jednačina postaje $x^2+y^2+z^2=0$. Dakle, u slučaju da $a=0$ sistem ima, po (x, y, z) tačno jedno rešenje, (0, 0, 0).

2° $a\neq 0$. U ovom slučaju iz (4) dobijamo:

(5) . . . $x+y=\dfrac{a^2+b^2}{2a}$, a odatle zamenom u (1)

(6) ... $z=z_0=\dfrac{a^2-b^2}{2a}$. Iz (6) i treće jednačine proizlazi:

(7) ... $xy=\left(\dfrac{a^2-b^2}{2a}\right)^2$. S obzirom na (5) i (7), x i y su ma koje od rešenja jednačine:

(8) ... $t^2-\dfrac{a^2+b^2}{2a}t+\left(\dfrac{a^2-b^2}{2a}\right)^2=0$

Rešenja ove jednačine su $t_{1,2}=\dfrac{a^2+b^2\pm\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}}{4a}$.

Prema tome u slučaju da $a\neq 0$, sistem ima, po (x, y, z), dva rešenja, (t_1, t_2, z_0) i (t_2, t_1, z_0).

Da bi sistem imao pozitivna i različita rešenja, potrebno je i dovoljno da jednačina (8) ima pozitivna i različita rešenja i da $z_0>0$. Da bi jednačina (8) imala pozitivna i različita rešenja potrebno je i dovoljno da $(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)>0$ (rešenja su realna i različita) i $xy=\left(\dfrac{a^2+b^2}{2a}\right)^2>0$, $x+y=\dfrac{a^2+b^2}{2a}>0$ (rešenja su pozitivna). Uslov $z_0>0$ svodi se na $a^2>b^2$. Odavde dobijamo traženi potreban i dovoljan uslov: $3b^2>a^2>b^2$ i $a>0$, odnosno $|b|<a<\sqrt{3}\,|b|$.

III. 2.

Označimo sa α meru ugla zahvaćenog stranicama čije su dužine b i c.

Uz te oznake važe poznati obrasci:

(1) ... $S=\dfrac{bc\sin\alpha}{2}$, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$.

S obzirom na (1) važi sledeći niz ekvivalencija:

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4S\sqrt{3}\Leftrightarrow b^2+c^2-2bc\cos\alpha+b^2+c^2\geqslant 4\frac{bc\sin\alpha}{2}\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow b^2+c^2\geqslant bc(\sin\alpha\sqrt{3}+\cos\alpha)$$

$$\Leftrightarrow b^2+c^2 \geqslant 2bc\left(\sin\alpha\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\alpha\frac{1}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow b^2+c^2 \geqslant 2bc\,(\sin\alpha\sin 60^\circ+\cos\alpha\cos 60^\circ)$$
$$\Leftrightarrow b^2+c^2 \geqslant 2bc\cos(\alpha-60^\circ)$$
$$\Leftrightarrow (b-c)^2+2bc\,(1-\cos(\alpha-60^\circ)\geqslant 0$$

Dakle, polazna nejednakost ekivalentna je sa poslednjom u nizu koja je očigledno tačna.

Jednakost važi ako i samo ako su oba sabirka u poslednjoj nejednakosti jednaka nuli, tj. ako je $b=c$ i $\cos(\alpha-60^\circ)=1$.

Odavde, jer je $0^\circ<\alpha<180^\circ$, proizlazi $\alpha=60^\circ$. Zaključujemo, prema tome da trougao mora biti jednakostranični; odnosno, potreban i dovoljan uslov da važi jednakost je $a=b=c$.

III. 3.

Polazeći od date jednačine za $n\geqslant 2$, važi:

$$\begin{aligned} 1&=\cos^n x-\sin^n x\\ &\leqslant |\cos^n x-\sin^n x|\\ &\leqslant |\cos^n x|+|\sin^n x|\\ &\leqslant \cos^2 x+\sin^2 x=1. \end{aligned}$$

Da bi jednačina imala rešenja potrebno je i dovoljno da postoje takvi x, da gornji niz nejednakosti postane niz jednakosti, odnosno da:

(i) $\cos^n x-\sin^n x=1$

(ii) $-\cos^n x\sin^n x\geqslant 0$

(iii) $|\cos^n x|=\cos^2 x$, $|\sin^n x|=\sin^2 x$

1° n je paran broj. U ovom slučaju (ii) važi kao i samo ako je $\sin x=0$ (jer $\cos x=0$ otpada zbog (i)). Direktnom proverom se utvrđuje da je to i dovoljno. Dakle $x=k\pi$, $k\in Z$.

2° n je neparan broj. Uovom slučaju (ii) važi ako i samo ako je $-\cos x\sin x\geqslant 0$, a (iii) važi ako i samo ako $\cos x=0, -1, 1$ i $\sin x=0, -1, 1$. Nije moguće da $\cos x=-1$, jer u tom slučaju (zbog (i)) $\sin x=-1$, pa (ii) ne važi. Prema tome neophodno je da $\cos x=0$ ili $\cos x=1$. Lako se proverava da ako $\cos x=1$ onda $\sin x=0$, a ako $\cos x=0$ onda $\sin x=-1$. Dakle, postoje dva niza rešenja $x=2k\pi$ i

$$x=2k\pi-\frac{\pi}{2},\quad k\in Z.$$

U slučaju

3° $n=1$, jednačina postaje $1=\cos x-\sin x$. Ekvivalentnim transformacijama dobijamo

$$\begin{aligned}1&=\cos x-\sin x\\&=\cos x-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\&=-2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\\&=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

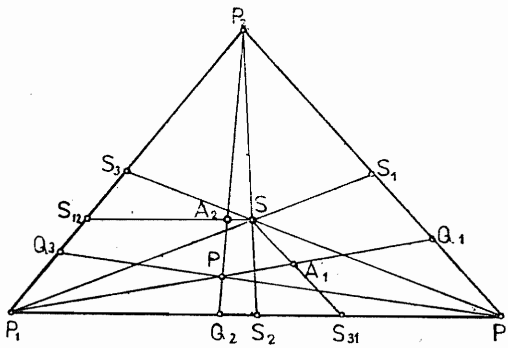
Odavde $x=2k\pi$ i $x=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$, $k\in Z$.

III. 4.

Neka je S težište trougla $P_1P_2P_3$ a P_1S_1, P_2S_2 i P_3S_3 njegove težišne linije.

Ako je $P=S$ onda su svi količnici o kojima je reč jednaki 2 pa je tvrđenje tačno.

Neka je P različito od S. Tada tačka P leži u unutrašnjosti ili na stranici nekog od trougla (ima ih šest) na koje težišne linije razbijaju trougao. Određenosti radi pretpostavimo da je to trougao P_1SS_2.



Odaberimo tačke S_{12} i S_{31} tako da stranice P_1P_2 i P_1P_3 dele u odnosu $2:1$. Očigledno $S_{12}S\,||\,P_1P_3$ i $S_{31}S\,||\,P_2P_3$. Trougao, P_1SS_2 leži unutar trapeza $P_1S_{12}SS_2$. Prava P_2Q_2 seče duž $S_{12}S$ u tački A_2 koja je između tačaka P_2 i Q_2. Odavde je:

$$P_2P : PQ_2 \geqq P_2A_2 : A_2Q_2 = 2:1$$

Na sličan način, trougao P_1SS_2 leži unutar trougla P_1SS_{31}. Prava P_1P seče pravu SS_{31} u tački A_1 koja je sada unutar duži PQ_1. Odavde

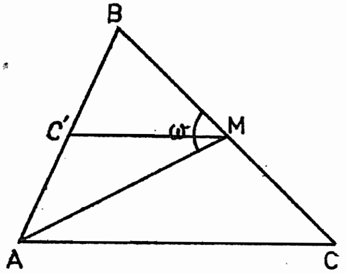
$$P_1P : PQ_1 \leqq P_1A_1 : A_1Q_1 = 2:1$$

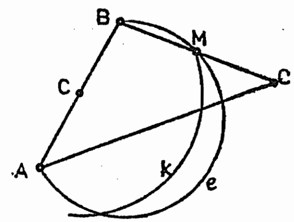
što je trebalo dokazati.

III. 5.

Neka je ABC trougao sa pretpostavljenim osobinama. U trouglu AMB poznati su stranica AB $(=c)$ i $\sphericalangle AMB=\omega$.

Duž MC' paralelna sa AC je srednja linija trougla ABC i dužina joj je $\frac{b}{2}$. C' je prema tome središte AB. Dakle u trouglu ABM su poznati sledeći elementi: stranica AB odgovarajuća ležišna linija MC' i ugao AMB.





Konstruišimo duž $AB=c$ i geometrijsko mesto tačaka sa koga se duž AB vidi pod uglom ω. Kao što je poznato to je kružni luk (l). Konstruišimo krug (k) kome je središte C' središte duži AB a poluprečnik $\frac{b}{2}$.

U preseku kruga k i luka l dobijamo tačku M (eventualno dve).

U preseku prave BM i kruga sa središtem u A i poluprečnikom b dobijamo tačku C. Tačke A, B, C formiraju traženi trougao, što je lako pokazati.

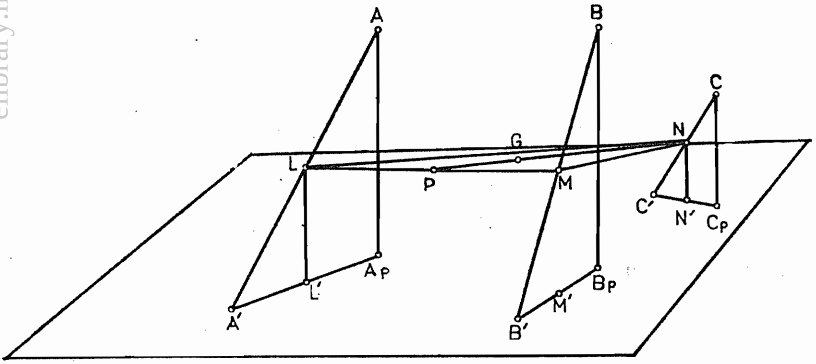
Da bi zadatak imao rešenja potrebno je i dovoljno da postoji presek kruga k i luka l. Naime, duž AB se uvek može konstruisati kao i krug k i luk l i krug sa središtem A. Ako postoji presek l i k onda

Da bi zadatak imao rešenja potrebno je i dovoljno da postoji presek kruga k i luka l. Naime, duž AB se uvek može konstruisati kao i krug k i luk l i krug sa središtem A. Ako postoji presek l i k postoji tačka M pa i tačka C. Kako je ugao ω oštar to je za egzistenciju preseka l i k potrebno i dovoljno da poluprečnik kruga k bude veći od visine luka l a manji od polovine tetive (AB).

Dakle: $\frac{b}{2} > r(k) \geqslant \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$ odnosno $\frac{b}{2} > \frac{c}{2} \geqslant \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$

III. 6.

Neka su A_p, B_p, C_p, upravne projekcije tačaka A, B, C, tim redom, na ravan ε. Neka su, dalje, A', B', C' proizvoljne tačke ravnj ε. Trougli $AA'A_p$, $BB'B_p$, $CC'C_p$ su, zbog izbora tačaka A_p, B_p, C_p, pravougli. Ako su L, M, N, središta duži AA', BB', CC', tim redom, a L', M', N', njihove upravne projekcije na ravan ε, onda su duži LL', MM', NN' srednje linije u odgovarajućim pravouglim trouglovima.



Ako dužine duži AA_p, BB_p, CC_p, označimo sa $2a$, $2b$, $2c$ onda su dužine duži LL', MM', NN', kao srednjih linija, a, b, c. Tačke L, M, N se prema tome, nalaze u ravnima paralelnim sa ε na odstojanjima a, b, c.

Odavde je jednostavno odrediti odstojanje G (težišta trougla LMN) od ravni. Ako je P središte duži MN onda je odstojanje P od ravni jednako $\frac{a+b}{2}$, a kako tačka G deli duž LP u odnosu $2:1$ to je odstojanje tačke G od ravni jednako $\frac{a+b+c}{3}$. Prema tome odstojanje tačke G ne zavisi od izbora tačaka A', B', C'. Dakle, sva težišta trougla tipa LMN nalaze se u ravni π paralelnoj ravni ε na odstojanju $\frac{a+b+c}{3}$ (što je, ustvari, polovina odstojanja težišta trougla ABC od ravni).

Preostaje još da se pokaže da sve tačke ravni π pripadaju traženom geometrijskom mestu tačaka.

Neka je G proizvoljna tačka ravni π. U paralelnim ravnima sa ravni na odstojanju a i b odaberimo proizvoljne tačke L i M. Ako konstruišemo trougao LMN u kome je tačka G težište; tačka N, s obzirom na prethodno, leži u ravni paralelnoj ε na odstojanju c. Prave AL, BM, CN, prodiru ravan ε u tačkama A', B', C', takvim da su L, M, N središta duži AA', BB', CC'. Dakle G je težište jednog trougla iz pretpostavke zadatka. Primetimo, na kraju da uslov, da ravan u kojoj leže tačke A, B, C nije paralelna sa ravni ε nije relevantan za rešavanje zadatka.

IV. 1.

Po pretpostavci zadatka je

$$n=\overline{a_m\,a_{m-1}\,\ldots\,a_1\,6},\qquad 4\cdot n=\overline{6\,a_m\,a_{m-1}\,\ldots\,a_1}.$$

Možemo da pišemo i ovako $n=a_m\cdot 10^m+a_{m-1}\,10^{m-1}+\ldots+a_1\cdot\cdot 10+6$, $4n=6\cdot 10^m+a_m\cdot 10^{m-1}+\ldots+a_2\cdot 10+a_1$. Pošto se broj $4n$ završava sa 4, jer je $6\cdot 4=24$, nalazimo da je $a_1=4$; dalje imamo da se broj $4n$ završava sa 84, jer je $4\cdot 46=184$, pa je $a_2=8$. Nastavljajući ovaj postupak dobijamo $n=153846$.

IV. 2.

Leva strana nejednakosti je definisana za $-1\leqslant x\leqslant 3$, a nenegativna za $-1\leqslant x\leqslant 1$. Koristeći još na 2 mesta kvadriranje nejednačine dobijamo da je

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}\sim\left.\begin{array}{r}\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\dfrac{1}{2}\\ x\geqslant -1\\ x\leqslant 1\end{array}\right\}\sim$$

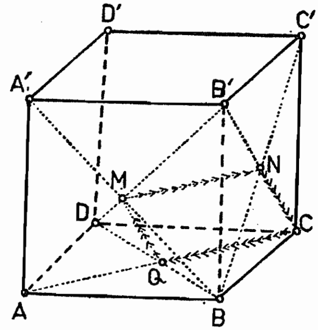
$$\sim\left.\begin{array}{r}\sqrt{3-x}\quad\sqrt{x+1}<\dfrac{15}{8}\\ x\geqslant -1\\ x\leqslant 1\end{array}\right\}\sim\left.\begin{array}{r}64x^2-128x+33>0\\ x\geqslant -1\\ x\leqslant 1\end{array}\right\}\sim$$

$$\sim\left.\begin{array}{r}\left(x\leqslant 1-\dfrac{\sqrt{31}}{8}\right)\vee\left(x\geqslant 1+\dfrac{\sqrt{31}}{8}\right)\\ x\geqslant -1\\ x\leqslant 1\end{array}\right\}\sim\left.\begin{array}{r}x\leqslant 1-\dfrac{\sqrt{31}}{8}\\ x\geqslant -1\end{array}\right\}.$$

Poslednji sistem nazivamo rešenjem polazne nejednačine.

IV. 3.

Neka je M centar (težište) kvadrata $ABA'B'$, N centar kvadrata $BCB'C'$ i Q centar kvadrata $ABCD$.



Pretpostavimo da se tačka X nalazi na ivici AB. Neka je $AX=\lambda \cdot AB$. Tada je $B'Y=\lambda \cdot B'C'$, pa je $\frac{1}{2}(\vec{AX}+\vec{AY})=$ $=\frac{1}{2}(\lambda\vec{AB}+\vec{AB'}+\lambda\vec{B'C'})=\frac{\vec{AB'}}{2}+\lambda$ $\left(\frac{\vec{AB}+\vec{B'C'}}{2}\right)=\vec{AM}+\lambda\cdot\vec{MN}$, što znači da se sredina odsečka XY kreće po duži MN, za vreme dok se X kreće po AB. Neka je tačka X na BC, tj. neka je $\vec{AX}=\vec{AB}+\mu\vec{BC}$. Tada je $+\vec{AY}=\vec{AC'}+\mu\,\vec{C'C}$ i $\frac{1}{2}(\vec{AX}+\vec{AY})=\vec{ON}+\mu\left(\frac{\vec{BC}+\vec{C'C}}{2}\right)=\vec{ON}+$ $+\mu\vec{NC}$, što znači da tačka koja polovi odsečak XY prelazi put NC za vreme dok se X nalazi između B i C. Dalje kretanje tačke je od C do Q pa od Q do M. Traženo geometrijsko mesto je četvorougao $MNCQ$.

IV. 4.

Uzimajući da je $2\cos^2 x=1+\cos 2x$, $2\cos^2 2x=1+\cos 4x$, dobijamo $\cos 2x+\cos 4x+2\cos^2 3x=0$. Pretvarajući u proizvod $\cos 2x+$ $+\cos 4x$ dobijamo jednačinu

$$2\cos 3x\,(\cos x+\cos 3x)=0$$

i na kraju

$$2\cos 3x\cdot 2\cos 2x\cos x=0.$$

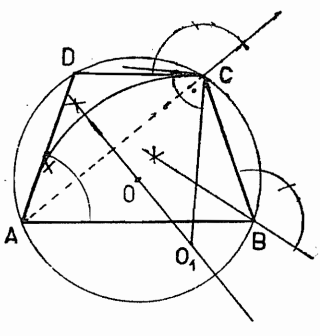
Uvek kad je $\cos x=0$ jeste i $\cos 3x=0$ pa je poslednja jednačina ekvivalentna sa jednačinom:

$$\cos 2x\cdot\cos x=0$$

Sva rešenja su opisana sa $x_k=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $\bar{x}_k=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$, gde je $k=0,\pm 1,\pm 2,\ \ldots.$

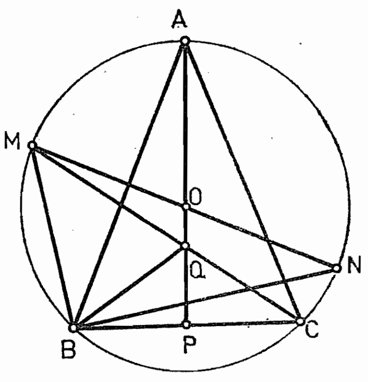
IV. 5.

Prema teoremi za tangentne četvorouglove položaj tačke D treba da bude takav da je ispunjena jednakost $AB+CD=BC+DA$. Osim toga tačka D treba da pripada onom luku AC kojem ne pripada tačka A. Pretpostavimo da je npr. $AB>BC$ (konstrukcija je jednostavna kad je $AB=BC$). Konstruišimo geometrijsko mesto tačaka iz kojih se duž AC vidi pod uglom $180°-\dfrac{\sphericalangle ABC}{2}$ i koje su sa one strane prave AC sa koje nije tačka B, zatim odredimo tačku X tog geometrijskog mesta tako da je $XA=AB-AC$. Presečnu tačku prave AX i luka CA različitu od A obeležimo sa D.



Treba da se dokaže da je $AD-DC=AB-BC$. Prema konstrukciji je $\sphericalangle CXD=\sphericalangle\dfrac{ABC}{2}$, $\sphericalangle CDX=\sphericalangle CDA=180°-\sphericalangle ABC$, jer je ovako konstruisani četvorougao tetivan. Sledi da je $\sphericalangle XCD=180°-(180°-\sphericalangle ABC)-\dfrac{\sphericalangle ABC}{2}=\dfrac{\sphericalangle ABC}{2}=\sphericalangle CXD$. Trougao CDX je jednakokraki pa je $CD=DX$, a stoga je $AD-CD=AX=AB-AC$.

IV. 6.



Neka je kod trougla ABC strana AB jednaka strani AC, O centar opisanog kruga, Q centar upisanog kruga, P sredina osnovice BC, M tačka na opisanoj kružnici koja polovi luk AB na kojem se ne nalazi tačka C i tačka N dijametralno suprotna tačka od M na opisanoj kružnici ΔABC.

Dokažimo najpre da je $MB=MQ$. Imamo da je $\sphericalangle MQB$ kao spoljašnji ugao trougla jednaki zbiru $\sphericalangle QBC$ i $\sphericalangle QCB$. S druge strane je $\sphericalangle MBQ = \sphericalangle MBA + \sphericalangle ABQ = \sphericalangle MCA + \sphericalangle ABQ = \sphericalangle MCB + \sphericalangle$ $\sphericalangle CBQ$, pa je $\sphericalangle MBQ = \sphericalangle MQB$, odnosno $MB = MQ$. Dalje iz sličnosti trouglova: MBN i PQB nalazimo da je $BQ : QP = MN : MB$ tj. $MB \cdot BQ = \rho \cdot 2r = MQ \cdot QC$. Sada, koristeći potenciju tačke Q u odnosu na opisanu kružnicu trougla ABC, dobijamo da je $MQ \cdot QC = (r+d)(r-d)$. Imamo jednakost:

$$2r\rho = (r+d)(r-d)$$

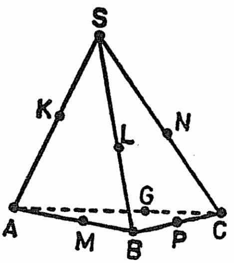
iz koje izvodimo: $d = \sqrt{r(r-2\rho)}$.

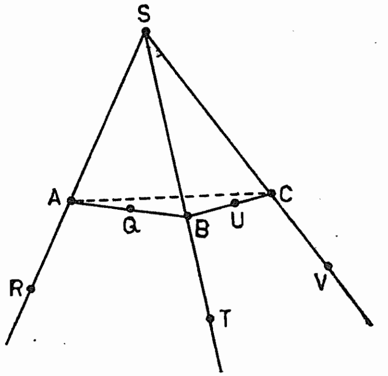
Napomena. Jednakost $d = \sqrt{r(r-2\rho)}$ važi za bilo kakav trougao i poznata je pod imenom *Eulerova* formula.

IV. 7.

Primetimo najpre da svaka sfera koja dodiruje prave SA, SB, SC, AB, BC, CA seče svaku od ravni trouglova SAB, SBC, SCA, ABC po upisanoj ili pripisanoj (tj. spolja upisanoj) kružnici trougla. Od te četiri (tako dobijene) kružnice su kod svake sfere tri pripisane a jedna upisana ili sve četiri upisane, što će biti dokazano.

Neka sfera σ dodiruje sve prave SA, SB, SC, AB, BC, CA i neka seče ravni trouglova SAB, SBC po upisanim kružnicama. Ozna-





čimo tačke dodira izica SA, SB, AB, SC, BC redom sa K, L, M, N, P. Pošto pripisana kružnica trougla ima samo jednu zajedničku tačku sa trouglom to u ovom slučaju znači da sfera σ mora da seče ravni trouglova SCA i ABC po upisanim kružnicama tih trouglova. (Obeležimo tačku dodira σ i AC sa G). Proizlazi da su sve 4 kružnice upisane. Uopšte, ako su bilo koje 2 kružnice upisane i ostale 2 su upisane.

Pretpostavimo da sfera τ dodiruje sve prave SA, SB, SC, AB, BC, CA i da seče ravan trougla SAB po pripisanoj kružnici trougla ABC, tako da sa duži AB ima zajedničku tačku Q, a sa pravom SA odnosno SB zajedničke tačke R odnosno T. Pošto tačka T ne pripada duži SB, presek sfere τ i ravni trougla SBC će biti pripisana kružnica trougla SBC. Ta kružnica će dodirivati duž BC u nekoj tački U, a pravu SC u nekoj tački V. Dalje, sledi da sfera seče ravan trougla ABC po upisanoj kružnici, a ravan trougla SCA po pripisanoj kružnici trougla. Znači, od 4 pomenute kružnice tri su pripisane, a jedna upisana. Uopšte, ako je neka od kružnica pripisana, onda moraju da budu 3 pripisane a jedna upisana.

Postoji najviše 5 sfera koje dodiruju prave SA, SB, SC, AB, BC, CA i to najviše jedna koja daje sve 4 upisane kružnice u preseku sa ravnima strana i najviše 4 sfere kod kojih su od presečnih kružnica tri pripisane, a jedna upisana, jer tetraedar ima 4 strane.

Pretpostavljajući da postoji svih 5 sfera —σ, τ i ostale tri — nalazimo da je $SK=SL=SN$, $AK=AM=AG$, $BM=BL=BP$, $CP=$ $=CN=CG$, odakle je $SA+BC=SB+CA=SC+AB$. (korištena je predpostavka da sfera σ postoji). Sada korišćenjem pretpostavke da sfera τ postoji nalazimo da je $SA-BC=SB-CA=SC-AB$, što znači da je $SA=SB=SC$, $AB=BC=CA$. Korišćenjem pretpostavke da postoji bar jedna od preostalih tri sfere zaključujemo i da je $SA=AB$, odnosno da je tetraedar pravilan.

Treba još da se dokaže da kod pravilnog tetraedra postoji svih 5 sfera. Težište pravilnog tetraedra ima jednako rastojanje od svih ivica tetraedra, što znači da sefra σ postoji. Centar sfere σ je težište. Ako uzmemo redom za centar homotetije temena A, B, C, D i koeficijent homotetije tri, dobićemo četiri sfere koje su homogene slike sfere σ. Lako proveravamo da svaka od ovih sfera dodiruje sve prave SA, SB, SC, AB, BC, CA.

V. 1.

Data jednačina može imati samo pozitivna rešenja, pa ćemo je posmatrati u obliku:

$$\sqrt{1-\frac{p}{x^2}}+2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=1, \quad x>0. \tag{1}$$

Ako uvedemo oznake $u=\sqrt{1-\frac{p}{x^2}}$, $v=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$ tada će biti

$$u+2v=1,\ u^2-1=p\,(v^2-1),\ v^2=1-\frac{1}{x^2} \tag{2}$$

$$0\leqslant u,\ 0\leqslant v<1,\ x>0 \tag{3}$$

Sistem (2) zajedno sa uslovima (3) je ekvivalentan jednačini (1) u sledećem smislu: ako je $u=u_0$, $v=v_0$, $x=x_0$ rešenje sistema (2, 3) tada je $x=x_0$ rešenje jednačine (1), i obrnuto, ako je $x=x_0$ rešenje jednačine (1), tada je $u=\sqrt{1-\frac{p}{x_0^2}}$, $v=\sqrt{1-\frac{1}{x_0^2}}$, $x=x_0$ rešenje sistema (2, 3)

Rešimo sistem (2, 3). Iz prve jednačine sledi

$$u=1-2v,$$

a to zajedno sa drugom jednačinom daje kvadratnu jednačinu po v

$$(4-p)\,v^2-4v+p=0,$$

(To je kvadratna jednačina, jer ako je $4-p=0$ onda je $v=1$ što je u kontradikciji sa uslovima (3)) čija su rešenja

$$v_1=1 \quad \text{i} \quad v_2=\frac{p}{4-p}$$

Prvo rešenje ne zadovoljava uslove (3), a za drugo rešenje prva dva uslova (3) se svode na

$$0\leqslant\frac{4-3p}{4-p},\ 0\leqslant\frac{p}{4-p}<1. \tag{4}$$

Prva nejednakost je zadovoljena za $p\leq\frac{4}{3}$ i za $p>4$, leva strana druge za $0\leqslant p<4$ i desna strana druge za $p<2$ i za $p>4$, dakle (4) je zadovoljeno za

$$0\leqslant p\leqslant\frac{4}{3}. \tag{5}$$

Iz treće jednačine u (2), uzimajući u obzir $x>0$ dobijamo

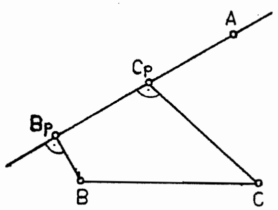
$$x=\frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}. \tag{6}$$

Dakle, ako je ispunjen uslov (5) data jednačina ima jedinstveno rešenje (6), a ako uslov (5) nije ispunjen, jednačina nema rešenja.

V. 2.

Posmatrajmo proizvoljnu pravu p (u prostoru) koja prolazi kroz tačku A. Neka su B_p i C_p projekcije tačaka B i C na pravu p. Očigledno, na pravoj p traženom geometrijskom mestu tačaka pripadaju sve tačke duži B_pC_p (uključujući i B_p i C_p) i nijedna tačka više.

Tačke B_p i C_p pripadaju redom sferama $\overline{S}_{AB}$ i $\overline{S}_{AC}$ čiji su prečnici AB i AC. Pri tome duži AB_p i AC_p pripadaju odgovarajućim loptama (unutrašnje tačke tih duži nalaze se u unutrašnjosti sfera). Lako se vidi da, bez obzira na međusobni položaj tačaka A, B_p i C_p, duž B_pC_p možemo predstaviti kao deo prave p koji se nalazi unutar tačno jedne od pomenutih sfera ili na nekoj od njih.



Pošto se svaka tačka traženog geometrijskog mesta nalazi na nekoj pravoj postavljenoj kroz A, zaključujemo da se to mesto može opisati na sledeći način

$$\overline{S}_{AB} \cup \overline{S}_{AC} \cup (S_{AB} \triangle S_{AC})$$

gde S_{AB} i S_{AC} označavaju unutrašnjosti sfera $\overline{S}_{AB}$ i $\overline{S}_{AC}$ redom.

V. 3.

Ako se vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ određeni stranicama tog poligona (i orijentisani tako da određuju isti smer obilaska poligona) dovedu na zajednički početak O, i njihovi vrhovi označe sa $A_1, A_2, \ldots, A_n$, biće ispunjeni sledeći uslovi

(a) $\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\ldots+\vec{OA_n}=\vec{0}$;

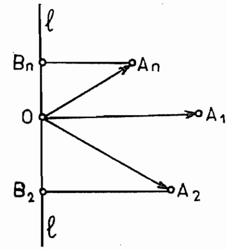
(b) $\measuredangle A_1OA_2=\measuredangle A_2OA_3=\ldots=\measuredangle A_nOA_1 \left(=\dfrac{2\pi}{n}\right)$;

(c) $OA_1 \geqslant OA_2 \geqslant \ldots \geqslant OA_n$.

Dokažimo da je tada $OA_1=OA_2=\ldots=OA_n$.

Neka je l prava koja sadrži O i normalna je na $\vec{OA_1}$, a $B_2, B_3, \ldots, B_n$ projekcije tačaka $A_2, A_3 \ldots, A_n$ na pravu l. Zbog uslova (a) zbir duži OB_i koje se nalaze sa jedne strane tačke O mora biti jednak zbiru duži OB_i koje se nalaze sa druge strane tačke O. Iz uslova (b) i (c) sledi da je $OB_2 \geqslant OB_n$, $OB_3 \geqslant OB_{n-1}$, itd., svaka duž sa jedne strane je veća ili jednaka od odgovarajuće duži sa druge strane. Da bi zbirovi bili jednaki, moraju tada odgovarajući sabirci biti jednaki. No iz $OB_2 = OB_n$ sledi da je $OA_2 = OA_n$, dakle

$$OA_2 = OA_3 = \ldots = OA_{n-1} = OA_n.$$



Slično, posmatrajući normalu na $\overrightarrow{OA_n}$, dokazujemo da je $OA_1 = OA_{n-1}$.

N a p o m e n a : Ako je $n=2k$ paran broj, onda $B_{k+1}=O$ pa sa svake strane tačke O ima po $k-1$ duži; ako je $n=2k+1$ neparan broj, onda sa svake strane tačke O ima po k duži.

V. 4.

Iz (1) i (2) dobijamo

$$x_2 = yx_1 - x_5,$$

$$x_3 = yx_2 - x_1$$

odnosno

$$x_3 = (y^2-1)\,x_1 - yx_5. \tag{6}$$

Slično, iz (4) i (5) dobijamo

$$x_3 = (y^2-1)\,x_5 - yx_1. \tag{7}$$

Iz (6) i (7) sledi $(y^2-1)\,x_1 - yx_5 = (y^2-1)\,x_5 - yx_1$, tj.

$$(y^2+y-1)\,(x_1-x_5)=0.$$

Razmotrimo dva slučaja:

Prvi slučaj. $y^2+y-1 \neq 0$. Posmatrajući, umesto (1), (2) i (4), (5), parove jednačina (2), (3) i (5), (1), dobijamo $x_2 = x_1$, a nastavljajući tako imaćemo da je

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x.$$

Za $y=2$, x može biti bilo koji broj, a za $y \neq 2$ mora biti $x=0$.

Drugi slučaj. $y^2+y-1=0$. Pomnožimo (1), (2) i (3) redom sa 1, y, $-y$ i saberimo. Dobijamo

$$x_5 + x_2 + yx_1 + yx_3 - yx_2 - yx_4 = yx_1 + y^2x_2 - y^2x_3$$

odnosno

$$x_5 + (y^2+y)\,x_3 = yx_4 + (y^2+y-1)x_2$$

što se zbog uslova $y^2+y=1$ svodi na (4). Dakle (4) je posledica prve tri jednačine. Isto važi i za (5), jer se ona, slično kao gore, može izvesti iz (2), (3) i (4), a (4) je posledica prve tri jednačine.

Dakle za x_1 i x_5 možemo uzeti proizvoljne brojeve. Dobijamo

$$x_2=yx_1-x_5, \tag{8}$$

$$x_3=-y(x_1+x_5), \tag{9}$$

$$x_4=yx_5-x_1, \tag{10}$$

pri čemu su (1), (2) i (3) zadovoljene, a onda isto važi i za (4) i (5).

Prema tome, osim trivijalnog rešenja $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$, sistem (1—5) može imati sledeća rešenja:

ako je $y=2$, $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x$; proizvoljan realan broj

ako je $y^2+y-1=0$, tj. $y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, $x_2=yx_1-x_5$,

$x_3=-y(x_1+x_5)$, $x_4=yx_5-x_1$, x_1 i x_5 proizvoljni realni brojevi.

V. 5.

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=$$

$$=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{14}}\left(\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{7}\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{14}}\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{14}-\cos\frac{5\pi}{14}-\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{7\pi}{14}+\cos\frac{5\pi}{14}\right)$$

$$=\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{14}}\left(\cos\frac{\pi}{14}+\cos\frac{7\pi}{14}\right)=\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{14}}\cdot\cos\frac{\pi}{14}=\frac{1}{2}.$$

Koristili smo formulu $\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))$.

V. 6.

Posmatrajmo prognozu drugog prognozera. U njoj imamo četiri para: DA, AE, EC i CB. Dva od njih su tačno prognozirana.

Neka tačno prognozirani parovi imaju zajednički element (DA, AE ili AE, EC ili EC, CB). Tada nijedno od tačno prognoziranih mesta ne može pripadati nekom od tačno prognoziranih parova, jer bi tada bilo bar tri tačno prognozirana mesta. Ako su oba pogođena mesta van trojke sa pogođenim redosledom, tada bi svih pet mesta bila tačno prognozirano (jer tri preostala mesta popunjavaju tačnim redosledom tri preostala takmičara).

Dakle, tačno prognozirani parovi su disjunktni. Preostaju tri mogućnosti (prema tome koji su parovi tačno prognozirani).

(1) DA i EC. Bar jedno pogođeno mesto pripada pogođenom paru, pa taj par predstavlja dva pogođena mesta, a drugi par pogrešno prognozirana mesta. Ako je par DA sa tačno prognoziranim mestima, rezultat takmičenja bi morao biti $DABEC$, što je nemoguće jer bi tada prvi prognozer imao pogođen par AB. Ako je par EC tačan, tada i par DA mora da bude tačno prognoziran (u odnosu na mesta) što je nemoguće.

(2) AE i CB. Slično kao u (1) se pokazuje da u ovom slučaju ne postoji rešenje zadatka.

(3) DA i CB. DA tačan $\Rightarrow$ rezultat je $DACBE$ što je nemoguće (C je na trećem mestu kao kod prvog prognozera). CB tačan $\Rightarrow$ rezultat je $EDACB$ i tada su svim uslovi zadatka ispunjeni.

VI. 1.

a) Odredimo prvi prirodan broj n, takav da je $2^n \equiv 1 \pmod 7$. Očigledno to je 3. Takođe, s obzirom da je $2^3 \equiv 1 \pmod 7$, važi i $2^{3k} \equiv 1 \pmod 7$ za $k=0, 1, 2, \ldots$

Brojevi oblika $3k+i$, $i=1, 2$, $k=0, 1, 2, \ldots$, nemaju osobinu da je $2^{3k+i}-1$ deljivo sa 7, jer je $2^{3k+i}-1=2^i(2^{3k}-1)+2^i-1$, gde je prvi sabirak deljiv sa 7 a drugi (može biti 1 ili 3) očigledno nije.

Dakle 2^n-1 je deljivo sa 7 ako i samo ako je n deljiv sa 3.

b) Koristeći ideju izloženu u rešenju zadatka pod a), svaki prirodan broj n se može napisati u obliku $3k+i$, $i=0, 1, 2$, $k=0, 1, \ldots$

Tada je $2^n+1=2^{3k+i}+1=2^i(2^{3k}-1)+2^i+1$. Prvi sabirak je, prema prethodnom, deljiv sa 7, a drugi (može biti 2, 3 ili 5) očigledno nije.

VI. 2.

Prvo rešenje. S obzirom da je nejednakost koju treba dokazati simetrična, možemo, ne umanjujući opštost, pretpostaviti $a \geqslant b \geqslant c$.

Tada važi sledeći lanac ekvivalencija:

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\geqslant 3abc$$

$$\Leftrightarrow abc-a^2b-a^2c+a^3+abc-b^2c-b^2a+b^3+abc-c^2a-c^2b+c^3\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c)+(b-c)(b^2-ab-c^2+ac)\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c)+(b-c)[(b-c)(b+c)-a(b-c)]\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c)+(b-c)^2(b+c-a)\geqslant 0$$

Zbog pretpostavke $a\geqslant b\geqslant c$, poslednja nejednakost (koja je ekvivalentna sa polaznom) je tačna. Naime, prvi sabirak je nenegativan zbog pretpostavke a drugi je nenegativan je su a, b i c dužine stranica trougla pa za njih važi $b+c>a$.

Jednakost važi ako i samo ako su oba sabirka na levoj strani poslednje nejednakosti jednaka nuli, tj. ako i samo ako je $a=b=c$.

Drugo rešenje. Metod koji ćemo izložiti pogodan je za rešavanje svih mogućih zadataka u kojima se pojavljuju metričke relacije trougla. Naime, svi metrički elementi trougla mogu se izraziti pomoću racionalnih funkcija i radikala kao funkcija stranica a, b, c. Međutim među brojevima a, b, c vladaju (jer su mere stranica trougla) izvesne relacije, što ponekad usložnjava analizu. Stoga uvedimo smenu:

$$\begin{aligned} b+c-a&=x & & & a&=\frac{y+z}{2} & \\ c+a-b&=y & \quad (T) \quad & \text{odavde je} & b&=\frac{z+x}{2} & \quad (T') \\ a+b-c&=z & & & c&=\frac{x+y}{2} & \end{aligned}$$

Kako je potreban i dovoljan uslov da tri duži čine trougao, taj da je zbir svake dve veći od treće to gornja smena uspostavlja obostrano jednoznačno preslikavanje između trojki realnih brojeva (pozitivnih) i trojki brojeva koji su mere stranica trougla.

Tako se ovom smenom nejednakost iz zadatka svodi na:

$$\left(\frac{y+z}{2}\right)^2 x+\left(\frac{z+x}{2}\right)^2 y+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 z\leqslant 3\left(\frac{y+z}{2}\right)\left(\frac{z+x}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Sređivanjem i skraćivanjem dobija se ekvivalentna nejednakost.

$$6xyz \leqslant xy^2+x^2y+yx^2+z^2y+zx^2+z^2x$$

Poslednja nejednakost je, dalje ekvivalentna sa:

$$0 \leqslant xy^2+xz^2 \leqslant 2xyz+yz^2+yx^2-2xyz+zx^2+zy^2-2xyz$$

odnosno sa:

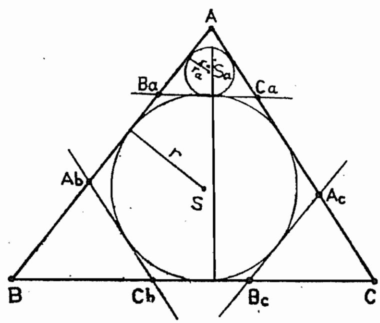
$$0 \leqslant x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2$$

koja je očigledno tačna.

Jednakost važi u slučaju kada $x=y=z$, a to je ekvivalentno sa $a=b=c$.

VI. 3.

Označimo sa r poluprečnik kruga upisanog u trougao ABC, a sa r_a, r_b, r_c poluprečnike krugova upisanih u trouglove dobijene konstruisanjem tangenti, na upisani krug, paralelnih stranicama a, b, c tim redom. Neka je, dalje, P-površina trougla ABC a $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ — njegov poluobim. Prema oznakama sa slike, trougli AB_aC_a i ABC su slični pa se poluprečnici upisanih krugova r_a i r odnose kao visine h_a' i h_a, koje odgovaraju stranicama B_aC_a i BC tim redom. Dakle,



$$\frac{r}{r_a}=\frac{h_a'}{h_a} \tag{1}$$

Kako je $h_a'=h_a-2r$, to iz (1) dobijamo:

$$r_a=\frac{h_a-2r}{h_a}\,r.$$

Slično važi i za r i r, pa važi:

$$r_i=\frac{h_i-2r}{h_i}\,r \qquad i=a,\ b,\ c \tag{2}$$

Kako je $r=\dfrac{P}{s}$, a $h_i=\dfrac{2P}{i}$ (2) postaje:

$$r_i=\frac{P(s-i)}{s^2} \qquad i=a,\ b,\ c \tag{3}$$

Uzimajući u obzir (3) traženi zbir je:

$$S=r^2\pi+r^2{}_a\pi+r^2{}_b\,\pi+r^2{}_c\,\pi$$

$$=\pi\,\frac{P^2}{s^4}\,[(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2+s^2]$$

$$=\pi\,\frac{P^2}{s^4}\,[3s^2+a^2+b^2+c^2-2s\,(a+b+c)+s^2]$$

$$=\pi\,\frac{P^2}{s^4}\,[4s^2+a^2+b^2+c^2-4s^2]\ (\text{jer } a+b+c=2s)$$

$$=\ \frac{\pi}{s^4}\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(a^2+b^2+c^2)s\ \ (\text{jer } P^2=(s-a)\,(s-b)\,(s-c)s)$$

$$=\ \frac{8\,\pi(b+c-a)\,(c+a-b)\,(a+b-c)\,(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^3}$$

VI. 4.

Odaberimo proizvoljnog naučnika iz pretpostavljene grupe od 17. S obzirom da se on dopisuje sa svakim od preostalih 16, a prepiska se vrši na tri teme, postoji bar jedna tema o kojoj se on dopisuje sa bar 6 ostalih naučnika. Naime, kada bi se on o svakoj od tema dopisivao sa ne više od 5 naučnika, s obzirom da postoje tri teme, ukupan broj preostalih naučnika ne bi bio veći od 15 što je nemoguće.

Odaberimo, dakle, jednu takvu grupu od 6 naučnika sa kojima se pretpostavljeni dopisuje po jednoj istoj temi. Ako među ovih 6 naučnika postoje bar dvojica koji se među sobom dopisuju po istoj temi kao i sa pretpostavljenim, onda oni zajedno sa njim čine traženu trojku. Ako to nije tačno, onda se svih 6 naučnika dopisuju među sobom o samo dve preostale teme. Odaberimo nekog od njih. Među preostalih 5 naučnika postoje bar trojica sa kojima se on dopisuje o jednoj temi (jer su sada preostale samo dve teme). Ako se bar dvojica od njih dopisuju o istoj temi kao i sa odabranim, onda oni sa njima čine traženu trojku. U suprotnom, sva trojica se dopisuju po jedinoj preostaloj temi, pa opet čine traženu trojku.

Dakle, tražena trojka naučnika koja se dopisuje o istoj temi uvek postoji, što je i trebalo dokazati.

VI. 5.

Neka su date tačke A, B, C, D, E. Kroz ovih pet tačaka prolazi ukupno $\binom{5}{2}=10$ pravih. Kroz svaku tačku pojedinačno, prolaze 4 prave.

Prema tome preostaje 6 pravih koje kroz odabranu tačku ne prolaze i prema tome 6 upravnih kroz odabranu tačku, na date prave.

Posmatrajmo proizvoljne dve tačke, A i B na primer. Izračunaćemo broj preseka upravnih iz tačke A sa upravnim iz tačke B. Upravne, kroz B, na prave koje prolaze kroz A, seku sve upravne iz tačke A. Kroz tačku C prolaze 3 prave koje ne sadrže B. Dakle, iz B se na njih mogu spustiti 3 upravne. One se seku sa upravnima iz tačke A u $3 \cdot 6=$ $=18$ tačaka. Svaka druga upravna iz tačke B seče 5 upravnih iz tačke A (sa jednom se ne seče jer su upravne na istu pravu). To je dakle $3 \cdot 5=15$ presečnih tačaka. Zajedno, to su 33 tačke. Ovakvih parova tačaka, kao što su A i B, ima ukupno 10 pa presečnih tačaka nema više od $33 \cdot 10=330$. Ali, neke od njih su podudarne. Naime svake 3 tačke od 5 datih formiraju trougao. Visine tog trougla se seku u jednoj tački, a spadaju u razmatrane upravne. Takvih trouglova je $\binom{5}{3}=10$ pa je presečnih tačaka $330-30+10=310$.

VI. 6.

Dokazaćemo tvrđenje zadatka u opštem slučaju. Dakle, neka je D_1 proizvoljna tačka u trouglu ABC. Ako su P, Q, R presečne tačke pravih AD_1, BD_1, CD_1 sa stranicama BC, AC, AB respektivno, onda se prave AA_1 i $P\text{Đ}$ seku u tački A_1, BB_1 i QD u tački B_1 a prave CC_1 i RD u tački C_1. Neka je D_2 presečna tačka prave DD_1 i ravni $A_1B_1C_1$. Lako je videti da tetraedri $D_1A_1D_2C_1$ i D_2AD_1C imaju jednake zapremine. Isto važi za tetraedre $D_1C_1D_2B_1$ i D_2CD_1B odnosno $D_1B_1D_2A_1$ i D_2BD_1A. Zbog toga su zapremine tetraedara $A_1B_1C_1D_1$ i $ABCD_2$ jednake, pa je dovoljno dokazati da tetraedar $ABCD_2$ ima tri puta veću zapreminu od tetraedra $ABCD$. Ta dva tatraedra imaju zajedničku stranu ABC pa je dovoljno dokazati da je visina prvog od njih tri puta veća od visine drugog. Na, to je ekvivalentno sa $D_1D_2=3D_1D$.

Neka je M tačka u kojoj prava AD prodire ravan CBB_1C_1 i neka je N presečna tačka pravih PM i B_1C_1. Zapazimo da je N istovremeno i presečna tačka pravih A_1D_2 i B_1C_1. U trapezu BCC_1B_1 duž PN je paralelna osnovama i prolazi kroz tačku preseka njegovih dijagonala.

Onda je $PM=MN$. Zbog toga je A_1M težišna linija trougla A_1PN. Ako je D_3 presečna tačka duži A_1M i DD_2, onda je $DD_3=D_3D_2$. Na sličan način zaključujemo da je $D_1D=DD_3$, odakle neposredno sledi da je $D_1D_2=3D_1D$, što je i trebalo dokazati.

VII. 1.

Za svako realno x važi

$$|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}| \leqslant \max\{\sqrt{1+\sin 2x}, \sqrt{1-\sin 2x}\} \leqslant \sqrt{2}$$

Prema tome, dovoljno je ispitati kada važi leva nejednakost. Primetimo da je $\sqrt{1+\sin 2x}=\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}=|\sin x+\cos|$ i, slično, $\sqrt{1-\sin 2x}=|\sin x-\cos x|$. Za $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ je $\cos x \leqslant 0$, pa nejednakost važi. Za $0 \leqslant x < \frac{\pi}{4}$ je $||\sin x+\cos|-|\sin x-\cos x||=2\sin x<$ $<2\cos x$, pa nejednakost ne važi. Za $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ je $||\sin x+\cos x|-$ $-|\sin x-\cos x||=2\cos x$, te nejednakost važi. Slično nejednakost važi i za $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}$, a ne važi pri $\frac{7\pi}{4} < x \leqslant 2\pi$. Zaključak: obe nejednakosti su zadovoljene pri $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}$.

VII. 2.

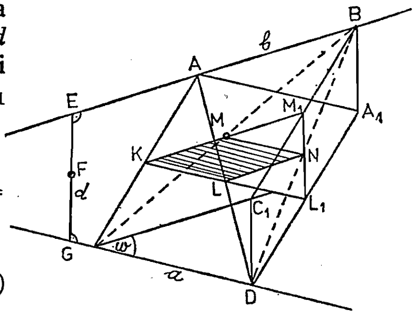
S obzirom na uslove zadatka možemo pisati: $a_{12}=-a$, $a_{13}=-b$, $a_{21}=-c$, $a_{23}=-d$, $a_{31}=-e$, $a_{32}=-f$, zatim $a_{11}=a+b+\alpha$, $a_{22}=c+$ $+d+\beta$, $a_{33}=e+f+\gamma$, gde su svi brojevi $a, b, c, d, e, f, \alpha, \beta, \gamma$ pozitivni. Determinanta sistema je stoga:

$$\begin{vmatrix} a+b+\alpha & -a & -b \\ -c & c+d+\beta & -d \\ -e & -f & e+f+\gamma \end{vmatrix} = (a+b+\alpha)(c+d+\beta)(e+f+\gamma)-ade-$$

$-bcf-ac(e+f+\gamma)-be(c+d+\beta)-df(a+b+\alpha)$. Kada se izvrše naznačena množenja i dobijeni izraz se sredi, dobiće se samo pozitivni sabirci, pa vidimo da je determinanta različita od nule (pozitivna je). Stoga sistem ima samo trivijalno rešenje, što je i trebalo dokazati.

VII. 3.

Ako tačke A_1 i C_1 ispunjavaju uslove: $\overline{AA_1}=\overline{CD}$ i $AA_1 \parallel CD$ odnosno $\overline{CC_1}=\overline{AB}$ i $CC_1 \parallel AB$, onda je $AC \parallel A_1D \parallel BC_1$ i $\overline{AC}=\overline{A_1D}=\overline{BC_1}$, tako da je tetraedar $ABCD$ dopunjen do trostrane prizme CDC_1AA_1B kojoj je visina jednaka najmanjoj udaljenosti d između mimoilaznih pravih AB i CD. Piramide DAA_1B i $BCDC_1$ imaju jednake volumene:



$$V_{DAA_1B}=V_{BCDC_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ab\sin\omega d=\frac{ab\,d}{6}\sin\omega \qquad (1)$$

jer su im bazisi međusobno kongruentni ($\Delta CDC_1 \cong \Delta AA_1B$ i njihova je površina $1/2\,ab\sin\omega$) a visine iste (jednake d).

Ravan paralelna mimoilaznim pravim AB i CD (i stoga i ravnima AA_1B i CDC_1) koja deli zajedničku normalu EG tih pravih u razmeri $k:1$,

$$\overline{EF}:\overline{FG}=k:1, \qquad (2)$$

deli i ostale ivice AC, BC, BD, AD, A_1D i BC_1 tetraedra odnosno prizme u istoj razmeri redom u tačkama K, M, N, L, L_1 i M.

Iz (2) sledi

$$(\overline{EF}+\overline{FG}):\overline{FG}=(k+1):1 \text{ ili } d:\overline{FG}=(k+1):1 \text{ ili } \overline{FG}:d=1:(k+1) \qquad (3)$$

$$\text{i } \overline{EF}:(\overline{EF}+\overline{FG})=k:(k+1) \text{ ili } \overline{EF}:d=k:(k+1). \qquad (4)$$

Očigledno je:

$$V_{ABKLMN}=V_{KL_1M_1AA_1B}-V_{LL_1NAA_1B}-V_{BMNM_1} \qquad (5)$$

$$\text{i} \quad V_{CDKLMN}=V_{CDC_1KL_1M_1}-V_{CDC_1MNM_1}-V_{DLL_1N}. \qquad (6)$$

Iz poslednjih proporcija u (4) i (3) izlazi redom:

$$V_{KL_1M_1AA_1B}=\frac{1}{2}ab\sin\omega\cdot\overline{EF}=\frac{ab\,dk}{2(k+1)}\sin\omega \qquad (7)$$

$$\text{i} \quad V_{CDC_1KL_1M_1}=\frac{1}{2}ab\sin\omega\cdot\overline{FG}=\frac{abd}{2(k+1)}\sin\omega. \qquad (8)$$

Kako je:

$$V_{BMNM_1} : V_{BCDC_1} = (\overline{EF} : \overline{EG})^3 = (\overline{EF} : d)^3 = \frac{k^3}{(k+1)^3} \tag{9}$$

$$\text{i} \quad V_{DLL_1N} : V_{DAA_1B} = (\overline{FG} : \overline{EG})^3 = (\overline{FG} : d)^3 = \frac{1}{(k+1)^3}, \tag{10}$$

imamo iz (1) i (9) odnosno (1) i (10):

$$V_{BMNM_1} = \frac{k^3}{(k+1)^3} V_{BCDC_1} = \frac{ab\,dk^3}{6\,(k+1)^3} \sin\omega \tag{11}$$

$$\text{i} \quad V_{DLL_1N} = \frac{1}{(k+1)^3} V_{DAA_1B} = \frac{ab\,d}{6\,(k+1)^3} \sin\omega. \tag{12}$$

Iz (1) i (12) odnosno (1) i (11) proizlazi:

$$V_{LL_1NAA_1B} = V_{DAA_1B} - V_{DLL_1N} = \frac{abd}{6} \sin\omega \left(1 - \frac{1}{(k+1)^3}\right) \tag{13}$$

$$V_{CDC_1MNM_1} = V_{BCDC_1} - V_{BMNM_1} = \frac{abd}{6} \sin\omega \left(1 - \frac{k^3}{(k+1)^3}\right) \tag{14}$$

Konačno, (5), (6), (7), (8), (11), (12), (13) i (14) daju:

$$V_{ABKLMN} : V_{CDKLMN} = \frac{\frac{1}{6} abd \sin\omega \left[\frac{3k}{k+1} - \left(1 - \frac{1}{(k+1)^3}\right) - \frac{k^3}{(k+1)^3}\right]}{\frac{1}{6} abd \sin\omega \left[\frac{3}{k+1} - \left(1 - \frac{k^3}{(k+1)^3}\right) - \frac{1}{(k+1)^3}\right]} =$$

$$= \frac{k^2(k+3)}{3k+1}.$$

VII. 4.

Prema uslovima zadatka x_1, x_2, x_3, x_4 zadovoljavaju sistem $x_1 + x_2x_3x_4 = 2$, $x_2 + x_1x_3x_4 = 2$, $x_3 + x_1x_2x_4 = 2$, $x_4 + x_1x_2x_3 = 2$. Množeći ove jednačine redom sa x_1, x_2, x_3, x_4 vidimo da x_1, x_2, x_3, x_4 su koreni kvadratne jednačine $\lambda^2 - 2\lambda + a = 0$ (gde je $a = x_1x_2x_3x_4$), pa među brojevima x_1, x_2, x_3, x_4 ne može biti više od dva različita.

1° $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$; imamo $x^3_1 = x_1 = 2$, pa je $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ (zanimaju nas samo realna rešenja).

2° $x_1=u$, $x_2=x_3=x_4=v$; $u+v^3=2$ i $v+uv^2=2$. Množenjem prve jednačine sa v^2 i oduzimanjem druge dobijamo $v^5-2v^2-v+2=0$ ili $(v-1)^2(v+1)(v^2+v+2)=0$. $v=1$ daje već dobijeno rešenje, a $v=-1$ daje $u=3$, tj. $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=-1$ (novo rešenje).

3° $x_1=x_2=u$, $x_3=x_4=v$. Sistem postaje $u+uv^2=2$, $v+u^2v=2$, ili, oduzimanjem $(u-v)(1-uv)=0$. Za $u=v$ imamo slučaj 1°. Za $uv=1$ jednačina $u+uv^2=2$ daje $u+v=2$ pa je opet $u=v=1$ (slučaj 1°) Stoga su jedina rešenja sledeća: $x_1=x_2=x_3=x_4=1$ i jedan od x_i je jednak 3, a ostali su jednaki -1.

VII. 5.

a) Neka tačke $A_1, B_1, P, Q, P_1, Q_1, A_2, B_2$ ispunjavaju uslove:

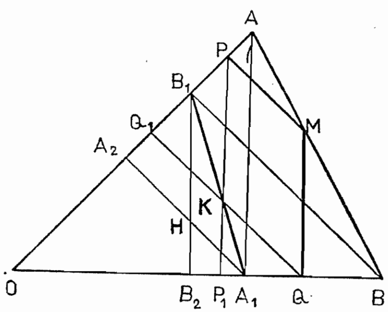
$$MQ \parallel AA_1 \parallel PP_1 \parallel B_1B_2 \perp OB$$

$$\text{i } MP \parallel BB_1 \parallel QQ_1 \parallel A_1A_2 \perp OA.$$

Iz Thalesove teoreme slede proporcije:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{PB_1}}=\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1B_2}}=$$

$$=\frac{\overline{A_1Q}}{\overline{QB}}=\frac{\overline{A_2Q_1}}{\overline{Q_1B_1}}. \quad (*)$$



Dokažimo da se ortocentar H trougla ΔOPQ (tj. presek visina PP_1 i QQ_1) nalazi na A_1B_1. Neka je K presek visine PP_1 i prave A_1B_1. Iz $\Delta B_1B_2A_1 \sim \Delta KP_1A_1$ i $(\cdot)$ izlazi

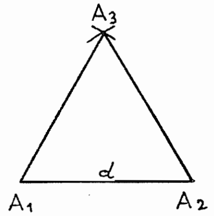
$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1B_2}}=\frac{\overline{A_1K}}{\overline{KB_1}} \quad \text{odnosno} \quad \frac{\overline{A_2Q_1}}{\overline{Q_1B_1}}=\frac{\overline{A_1K}}{\overline{KB_1}}.$$

Iz poslednje proporcije imamo sličnost $\Delta A_1A_2B_1 \sim \Delta KQ_1B_1$ a odatle $KQ_1 \perp OA$, tj. K je i na visini Q_1Q, odnosno poklapa se sa ortocentrom H. Time je dokazano da ortocentar H pripada A_1B_1.

Nije teško videti da za svaku tačku K duži A_1B_1 (i samo te tačke) postoji tačka M na AB takva da je K ortocentar ΔOPQ gde je $MP \perp OA$ i $MQ \perp OB$.

b) Ako je M u ΔOAB, onda postoji duž $A'B' \parallel AB$ takva da je M na $A'B'$. Očigledno $\Delta OA'B' \sim \Delta OAB$ i ortocentar $H \Delta OP'Q'$

($MP' \perp OA'$, $MQ' \perp OB'$) nalazi se na duži $A_1'B_1'$ koja je homotetična sa A_1B_1 u odnosu na O s koeficijentom homotetije $\overline{OA'}/\overline{OA}$. Zbog neprekidnosti homotetije, izlazi da kada M prolazi unutrašnjošću ΔOAB, H prolazi unutrašnjošću ΔOA_1B_1.



VII. 6.

Dokaz je induktivan.

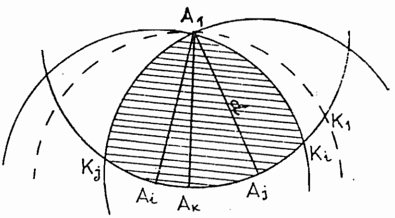
I očigledno je da broj dijametara za skup od 3 tačke može biti najviše 3 (ako je $\Delta A_1A_2A_3$ jednakostraničan, onda je broj tri dostignut).

II Pretpostavimo da je broj dijametara ili, što je isto, broj parova tačaka između kojih je razdaljina jednaka maksimalnoj, tj. dijametru d, za ma koji skup od n tačaka i ravni najviše n. Dokazimo tada da brojnost skupa $\{A_iA_j \mid \overline{A_iA_j}=d$ i $d=\max\limits_{i,j}\{\overline{A_iA_j}\}$, i, j $\in\{1, \ldots, n+1\}$ ne može biti veća od $n+1$.

Povucimo sve dijametre u skupu od $n+1$ tačaka. Moguća su dva slučaja.

Prvi slučaj. Ako iz svake od $n+1$ tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ ne polaze više od dva dijametra, onda takvih dijametara može biti najviše $2(n+1)\cdot\frac{1}{2}=n+1$ (jer je svaki dijametar računat dvaput: A_iA_j i A_jA_i).

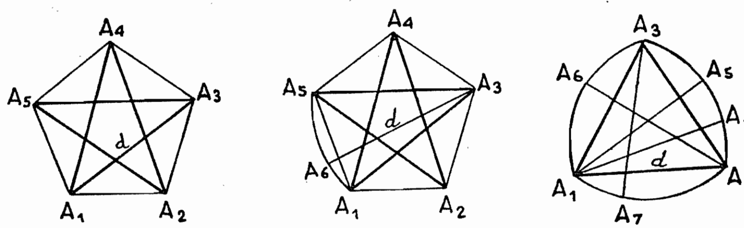
Drugi slučaj. Iz jedne tačke, recimo A_1, polaze bar tri dijametara, recimo A_1A_i, A_1A_j i A_1A_k (i eventualno još neki). Kako je $\overline{A_1A_i}=\overline{A_1A_j}=\overline{A_1A_k}=d$, tačke A_i, A_j i A_k leže na krugu K_1 radijusa d sa centrom u A_1. Zbog $\overline{A_iA_j}$, $\overline{A_jA_k}$, $\overline{A_kA_i} \leqslant d$ tačke A_i, A_j i A_k nalaze se na luku kruga K_1 koji odgovara centralnom uglu manjem od 60°. Ako je tačka A_k na luku A_iA_j ($\sphericalangle A_iA_1A_j \leq 60°$), onda svih $n+1$ tačaka leži u preseku krugova K_1, K_i i K_j (K_i i K_j su krugovi radijusa d sa središtima redom u tačkama A_i i A_j). Otuda je A_1 jedina tačka našeg skupa udaljena od A_k za d, tj. iz A_k polazi jedan jedini dijametar $A_k A_1$.



Skup od n tačaka: $\{A_1, \ldots, A_{n+1}\} \setminus \{A_k\}$ ima, prema indukcijskoj pretpostavci, najviše n dijametara. Ako se tome skupu doda tačka A_k iz koje polazi jedan dijametar, dobijamo polazni skup od $n+1$ tačaka koji ima najviše $n+1$ dijametara.

Gornje rasuđivanje baca više svetlosti na mogućne rasporede skupa od n tačaka kad je maksimalan broj dijametara dostignut i iznosi n. Iz triju logičkih mogućnosti: 1. postoji tačka iz koje polazi najviše jedan dijametar, 2. iz svake tačke polaze dva dijametra, 3. postoji tačka iz koje polaze bar tri dijametra, i razmatranja u drugom slučaju indukcijskog koraka, izlazi da 3. mogućnost ima kao posledicu 1. To znači da su mogućnosti 1. i 2. jedine (a one se međusobno isključuju).

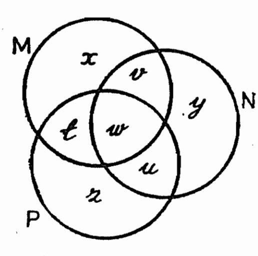
Maksimalan broj od n dijametara dostignut je kada je n neparno i tačke $A_1, \ldots, A_n$ su temena pravilnog n-tougla (na slici je petougao) ili kad je n parno a $A_1, \ldots, A_{n-1}$ su vrhovi pravilnog n-tougla a A_n je



tačka opisanog kruga oko tog n-tougla. Takođe je dostignut kod figure gde su A_1, A_2, A_3 temena ravnostranog trougla (stranice d) a ostale tačke $A_4, \ldots, A_n$ su na jednom od lukova A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 s centrima redom u A_3, A_1, A_2 (na slici je $n=7$).

VIII. 1.

Označimo sa M skup svih onih učenika koji su rešili zadatak A; slično sa N, P skupove svih onih učenika koji su rešili zadatak B odnosno C. Sa $k(F)$, za neki (konačan) skup F, označimo broj elemenata skupa F. Neka je $k(M/(N\cup P))=x, \ldots, k(M\cap N\cap P)=w$. (Videti sliku). U zadatku se traži da odredimo y. Imamo, na osnovu predpostavki u zadatku, sledeće jednačine:

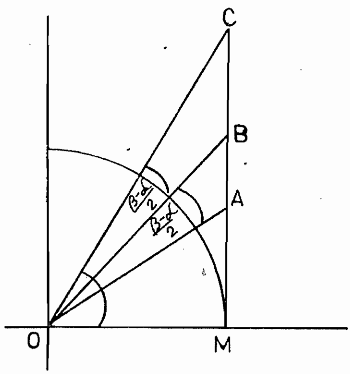


$$x+y+z+t+u+v+w=25 \quad (1)$$
$$y+u=2\,(z+u) \quad (2)$$
$$x-1=t+v+w \quad (3)$$
$$x=z+y \quad (4)$$

Iz jednačina (1) i (3) dobijamo: $2x+y+z+u=26$, a zatim korišćenjem (2) i (4) izvodimo jednačinu $z+4y=26$. S obzirom da su $x, y, \ldots, w$ celi nenegativni brojevi iz poslednje jednačine sledi da y nije veće od 6. Iz jednačine (2) zaključujemo da je $y=2z+u$, $z \leqslant \frac{y}{2}$, a time je $26=z+4y \leqslant \frac{y}{2}+4y=\frac{9y}{2}$, odnosno $y \geqslant \frac{52}{9}=5{,}7\ldots$. Prema tome, ako sistem jednačina (1), (2), (3), (4) ima rešenja mora da bude $y=6$. Jedno rešenje sistema bilo bi: $x=8$, $y=6$, $z=2$, $t=1$, $u=2$, $v=1$, $w=5$.

VIII. 2.

α i β su oštri uglovi. (Ako bi npr. bilo $\alpha>90^\circ$ imali bismo da je $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}(a \operatorname{tg}\alpha+b \operatorname{tg}\beta)<b \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \operatorname{tg}\beta \leqslant b \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=b<a+b$). Pretpostavimo da je $a<b$. Tada je $a \operatorname{tg}\alpha+b \operatorname{tg}\beta-(a+b)\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}(a-b)$ $(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)>0$ i $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2}>\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$ zbog konveksnosti funkcije $\operatorname{tg} x$ na $\left(o, \frac{\pi}{2}\right)$. Stoga je $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}(a \operatorname{tg}\alpha+b \operatorname{tg}\beta)>\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}(a+b)\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2}\right)>$ $>\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot(a+b)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot(a+b)\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=a+b$. Dobijena je kontradikcija. Slično zaključujemo da ne može da bude $b<a$.



N a p o m e n a : Svojstvo $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2}$ može da se dokaže i korišćenjem svojstva simetrale ugla trougla, da deli naspramnu stranu na odsečke koji su proporcionalni odgovarajućim drugim dvema stranicama. (Videti sliku!). Imamo: $CB-BA=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta-2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>0$, jer je $CO-AO>O$ i $CO:AO=CB:BA$.

VIII. 3.

Prvo rešenje. Postavimo koordinatni sistem $Oxyz$ tako da se temena tetraedra, za neko $a>o$, poklapaju sa tačkama $A(-a, -a, -a)$, $B(a, a, -a)$, $C(a, -a, a)$, $D(-a, a, a)$. (Lako se može proveriti da je $AB=AC=AD=BC=BD=CD$). Zbir rastojanja tačke (x, y, z) od temena A, B, C, D jednak je

$$f(x, y, z)=\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2+(z+a)^2}+$$
$$+\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2+(z+a)^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y+a)^2+(z-a)^2}+$$
$$+\sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2}\,.$$

S obzirom da je, prema nejednakosti kvadratne i aritmetičke sredine tri broja: $\sqrt{\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3}}\geqslant\dfrac{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}{2}\geqslant\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$, nalazimo da je

$$f(x,\ y,\ z)\geqslant\frac{1}{\sqrt{3}}\,[(x+a)+(y+a)+(z+a)+(a-x)+(a-y)+(z+a)+$$
$$+(a-x)+(a+y)+(a-z)+(a+x)+(a-y)+(a-z)]=4a\sqrt{3}.$$ Jednakost važi jedino u slučaju kad je $x=y=z=0$.

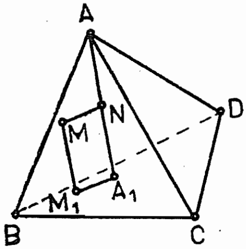
Drugo rešenje. Neka je $\lambda>0$ fiksiran realan broj i $\varphi(x, y)=$ $=\sqrt{x^2+\lambda^2}+\sqrt{y^2+\lambda^2}$, $x\geqslant o, y\geqslant o$. Lako dokazujemo, kvadriranjem, da je $\varphi(x, y)\geqslant\varphi\left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right)$ Neka je $\psi(x,\ y,\ z)=\sqrt{x^2+\lambda^2}+$ $+\sqrt{y^2+\lambda^2}+\sqrt{z^2+\lambda^2}$, $x\geqslant o,\ y\geqslant o,\ z\geqslant o$. Dvostrukom primenom nejednakosti $\varphi(x, y)\geqslant\varphi\left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right)$ nalazimo da je $\psi(x,\ y,\ z)\geqslant$ $\geqslant\psi\left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2},\ z\right)\geqslant\psi\left(\dfrac{x+y+2z}{4}, \dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y+2z}{4}\right)$. Definišimo

$$(x_{n+1},\ y_{n+1},\ z_{n+1})=\left(\frac{x_n+y_n+2z_n}{4},\ \frac{x_n+y_n}{2},\ \frac{x_n+y_n+2z_n}{4}\right),$$

$(x_1, y_1, z_1)=(x, y,\ z)$ kao i $a_n=|x_n-y_n|+|y_n-z_n|+|z_n-x_n|$. Nalazimo da je $0\leqslant a_{n+1}\leqslant\dfrac{a_n}{2}$, $n=1, 2,\ \ldots$ tj. $a_n\to 0$, $n\to\infty$, odnosno $x_n-y_n\to 0$, $y_n-z_n\to 0$, $z_n-x_n\to 0, n\to\infty$. Pošto je $x_n+y_n+z_n=x+$ $+y+z$ sledi da $x_n\to\dfrac{x+y+z}{3}$, $y_n\to\dfrac{x+y+z}{3}$, $z_n\to\dfrac{z+y+z}{3}$, $n\to +$

$+\infty$. Kako je $\psi(x_n, y_n, z_n) \geqslant \psi(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$, $n=1, 2, \ldots$ biće $\psi(x, y, z) \geqslant$

$$\geqslant \psi\left(\frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}\right).$$



Označimo sa A, B, C, D temena tetraedra, sa A_1 podnožje visine tetraedra iz temena A, sa M neku tačku koja nije izvan tetraedra, sa M_1 njenu ortogonalnu projekciju na ravan BCD i sa N tačku visine AA_1 za koju je $NA_1 = MM_1$.

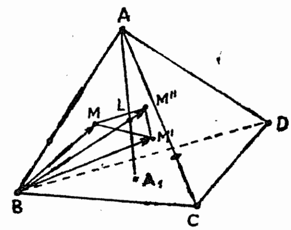
Prema predhodno dokazanom je

$$MB+MC+MD \geqslant 3\sqrt{\left(\frac{M_1B+M_1C+M_1D}{3}\right)^2 + MM_1^2} \geqslant$$

$\geqslant 3\sqrt{A_1B^2 + MM_1^2} = NB+NC+ND$. Takođe je i $MA \geqslant NA$.

Ispunjeno je dakle: $MA+MB+MC+MD \geqslant NA+NB+NB+$ $+NC$.

Označimo sa N_{2k+1} ortogonalnu projekciju tačke N_{2k} na visinu CC_1, a sa N_{2k+2} ortogonalnu projekciju tačke N_{2k+1} na visinu AA_1, $N_0 = N$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Niz tačaka N teži težištu tetraedra i važi $N_{k+1}A+$ $+N_{k+1}B+N_{k+1}C+N_{k+1}D \leqslant N_kA+N_kB$ $+N_kC+N_kD$. To znači da je $MA+MB$ $+MC+MD \geqslant TA+TB+TC$, gde je T težište tetraedra. Lako se dokazuje da poslednja nejednakost važi i kad je tačka N izvan tetraedra $ABCD$.



Treće rešenje. Neka je $ABCD$ pravilan tetraedar i M tačka koja ne pripada pravoj AA_1. (AA_1 je visina tetraedra). Rotaciom tetraedra oko AA_1 za $120°$ odnosno $240°$, tačka M prelazi u M' odnosno M''. Imamo: $MB+MC+MD = M'B+M'C+M'D = M''B+M''C+$ $+M''D$. Težište trougla $MM'M''$ označimo sa L. Biće $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BM'}+$ $+\overrightarrow{BM''} = 3\overrightarrow{BL}+\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{LM'}+\overrightarrow{LM''} = 3\overrightarrow{BL}$; $|\overrightarrow{BM}|+|\overrightarrow{BM'}|+|\overrightarrow{BM''}| >$ $>|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BM'}+\overrightarrow{BM''}| = 3\,|\overrightarrow{BL}|$, $|\overrightarrow{CM}|+|\overrightarrow{CM'}|+|\overrightarrow{CM''}| > 3\,|\overrightarrow{CL}|$,

$|\overrightarrow{DM}|+|\overrightarrow{DM'}|+|\overrightarrow{DM''}|>3\,|\overrightarrow{DL}|$, a to znači da je $BM+CM+DM>$ $>BL+CL+DL$. Takođe je $AM>AL$.

Ako je L neka tačka visine AA_1 tetraedra, definišimo na visinama BB_1, CC_1, DD_1 tačke L', L'', L''' takve da je $AL=BL'=CL''=DL'''$. Označimo sa T težište tetraedra. T je ujedno težište tetraedra $LL'L''L'''$ pa je $\vec{AL}+\vec{AL'}+\vec{AL''}+\vec{AL'''}=4\cdot\vec{AT}$. Slično kao malopre zaključujemo da je $AT+BT+CT+DT\leqslant AL+BL+CL+DL$, pri čemu jednakost važi samo kad je $T\equiv L$.

Na kraju izvodimo zaključak da je $AM+BM+CM+DM\geqslant$ $\geqslant AT+BT+CT+DT$ i da jednakost važi jedino kad je $M\equiv T$. Ovaj dokaz se može znatno skratiti ako se koristi grupa svih rotacija tetraedra.

VIII. 4.

S obzirom da je $\dfrac{1}{\sin 2^k x}=\operatorname{ctg} 2^{k-1}x-\operatorname{ctg} 2^k x$, $k=1,2,\cdots$, $x\neq\dfrac{\lambda\pi}{2^k}$, nalazimo da je

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^m x}=(\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} 2x)+\cdots+$$
$$+(\operatorname{ctg} 2^{n-1}x-\operatorname{ctg} 2^n x)=\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2^n x.$$

VIII. 5.

Neka je $L_1=|a_1-a_2|x_2+|a_1-a_3|x_3+|a_1-a_4|x_4$, $\ldots$, $L_4=$ $=|a_4-a_1|x_1+|a_4-a_2|x_2+|a_4-a_2|x_3$. Predpostavimo da je $a_1<a_2<$ $<a_3<a_4$. Tada je

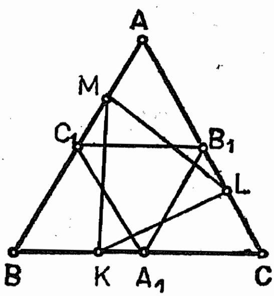
$$|a_3-a_2|L_1-|a_1-a_3|L_2+|a_1-a_2|L_3=2|a_1-a_2||a_2-a_3|x_2=0,$$
$$|a_4-a_3|L_2-|a_4-a_2|L_3+|a_3-a_2|L_4=2|a_2-a_3||a_3-a_4|x_3=0.$$

Dobijamo: $x_2=0$, $x_3=0$, a zatim $x_4=\dfrac{1}{|a_1-a_4|}=x_1$.

U opštem slučaju, ako je $a_i<a_j<a_k<a_l$, gde je i,j,k,l neka permutacija brojeva 1, 2, 3, 4 biće $x_j=x_k=0$, $x_i=x_l=\dfrac{1}{|a_l-a_i|}$.

VIII. 6.

Prvo rešenje. Pretpostavimo najpre da je trougao ABC jednakostraničan. Neka su A_1, B_1, C_1 sredine stranica BC, CA, AB. Ako je npr. $AM<AC_1$, posebno treba da se ispita slučaj kad je $BK<BA_1$, $CL<CB_1$. (Ostali slučajevi su jednostavni). Ako je $MC_1 \leqslant KA_1$, onda je $BM \cdot BK \leqslant (BC_1+KA_1)(BA_1-KA_1)<$ $<BC_1 \cdot BA_1$, tj. $P_{\Delta}MBK<P_{\Delta}BC_1A_1=\frac{1}{4}P$;



ako je $KA_1 \leqslant LB_1$ onda je $P_{\Delta}KCL<\frac{1}{4}P$;

ako je $LB_1 \leqslant MC_1$ onda je $P_{\Delta}AML \leqslant \frac{P}{4}$.

Pošto ne može da bude $MC_1>KA_1>LB_1>MC_1$, tvrđenje zadatka za jednakosrani trougao je tačno. Primetimo još da se svaki trougao afinom transformacijom može da preslika u jednakostraničan trougao, to jest za bilo koji trougao postoji u prostoru ravan na koju se ortogonalno projektuje u jednokostraničan. Pritom se čuvaju razmere površina.

Drugo rešenje. Neka je $AM : AB=x$, $BK : BC=y$, $CL : CA=$ $=z$. Biće: $P_{\Delta}AML \cdot P_{\Delta}BMK \cdot P_{\Delta}CLK=\frac{1}{2}\, AB \cdot x \cdot AC \cdot (1-z) \cdot$

$$\sin A \cdot \frac{1}{2} AB \cdot (1-x) \cdot BC \cdot y \sin B \cdot \frac{1}{2} BC\,(1-y) \cdot AC \cdot Z \sin C =$$

$$=\frac{1}{8} x(1-x) \cdot y(1-y) \cdot z(1-z) \cdot AB^2 AC^2 BC^2 \sin A \sin B \cdot \sin c \leqslant \frac{1}{8} \cdot$$

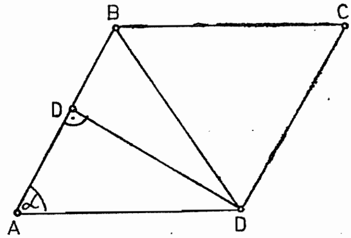
$$\cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 AB^2\, AC^2\, BC^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \left(\frac{P}{4}\right)^3$$ Znači da je

$$\frac{4P_{\Delta}AML}{P} \cdot \frac{4P_{\Delta}BMK}{P} \cdot \frac{4P_{\Delta}CLK}{P} \leqslant 1,$$ te je bar jedan od tri činioca sa leve strane nejednakosti manji ili jednak jedan.

U dokazu je korištena nejednakost $\lambda(1-\lambda) \leqslant \frac{1}{4}$, $0<\lambda<1$ koju dokazujemo npr. primenom nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine brojeva λ i $(1-\lambda)$.

IX. 1.

Trouglovi ABD i BCD (vidi sliku) su (jer je četvorougao $ABCD$ paralelogram) podudarni. Prema tome, da bi krugovi K_A, K_B, K_C i K_D pokrivali paralelogram $ABCD$, potrebno je i dovoljno da krugovi K_A, K_B i K_D pokrivaju trougao ABD.

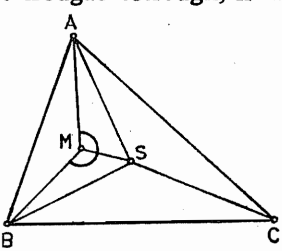


Po pretpostavci trougao ABD je oštrougli (pa je takav i BCD). Pokazaćemo da važi sledeća lema.

Lema. Neka je ABD oštrougli trougao. Krugovi K_A, K_B i K_D poluprečnika r, sa središtima u A, B i D, tim redom, pokrivaju trougao ABD ako i samo ako pokrivaju središte kruga opisanog oko trougla ABD.

Dakle, potreban i dovoljan uslov da bi ovi krugovi pokrivali trougao je $R \leqslant r$, gde je R poluprečnik kruga opisanog oko trougla.

Dokaz. Pretpostavimo da krugovi pokrivaju trougao. Tada bar jedan od njih pokriva i središte opisanog kruga, koje se, zbog toga što je trougao oštrougli, nalazi unutar trougla. Dakle, $R \leqslant r$; a kako su svi krugovi istog poluprečnika to svi oni pokrivaju središte opisanog kruga.



Pretpostavimo da krugovi K_A, K_B i K_D pokrivaju središte opisanog kruga, odnosno, $R \leqslant r$. Ovo središte se, kako je pomenuto, nalazi unutar trougla ABD. Neka je M proizvoljna tačka u unutrašnjosti (ili sa ruba) trougla ABD. Ako se M nalazi na nekoj od duži SA, SB, SD (S — središte opisanog kruga), onda je pokrivena bar jednim od pretpostavljenih krugova (jer su im središta u A, B, D i pokrivaju S).

U suprotnom, M se nalazi u nekom od trouglova ABS, BDS, DAS ili na nekoj od duži AB, BD, DA. Ne umaljujući opštost, možemo pretpostaviti da se M nalazi u trouglu ABS ili na AB. Bar jedan od uglova $\sphericalangle AMS$ i $\sphericalangle BMS$ nije oštar (jer bi u suprotnom ugao AMB bio veći od opruženog ugla). Neka je to ugao $\sphericalangle AMS$. Tada je trougao AMS, trougao sa ne oštrim uglom kod temena M, pa je u njemu stranica AS najveća. Dakle, $AS > AM$. Kako je $AS = R \leqslant r$, to je i $AM < r$, pa je M u krugu K_A. Kraj dokaza.

U našem slučaju $r=1$. Stranice trougla ABD su, po pretpostavci $AB=a$, $AD=1$ i $BD=\sqrt{1+a^2-2a\cos\alpha}$. Površina trougla ABD je:

$$P_{ABD}=\frac{AB\cdot AD}{2}\cdot\sin\alpha=\frac{a\cdot\sin\alpha}{2}.$$

Odavde je poluprečnik opisanog kruga:

$$R=\frac{AB\cdot AD\cdot BD}{4P_{ABD}}=\frac{1\cdot a\cdot\sqrt{1+a^2-2a\cos\alpha}}{2a\sin\alpha}=\frac{\sqrt{1+a^2-2a\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$$

Dakle, uslov R r ekvivalentan je sa

$$\frac{\sqrt{1+a^2-2a\cos a}}{2\sin\alpha}\leqslant 1 \tag{1}$$

Rešavajući nejednakost (1) po a, dobijamo:

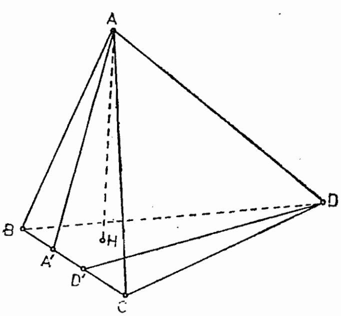
$$\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha\geqslant a\geqslant\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha. \tag{2}$$

Nejednakosti (1) i (2) su ekvivalentne. Međutim, desna nejednakost u (2) je zbog pretpostavki zadatka uvek tačna. Naime, kako je trougao ABD oštrougli podnožje visine DD' nalazi se na duži AB (vidi sl. 1). Takođe $AD'=AD\cos\alpha=\cos\alpha$. Sem toga $AD'<AB=a$, pa je $\cos\alpha<a$. Odavde je jasno da je i $a\geqslant\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$.

Konačno, paralelogram $ABCD$ je pokriven krugovima K_A, K_B, K_C i K_D ako i samo ako je trougao ABD pokriven krugovima K_A, K_B i K_D, što je, kako je pokazano, ekvivalentno sa $a\geqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\ \sin\alpha$.

IX. 2.

Neka je u tetraedru $ABCD$ ivica AD dužine veće od 1. Tada su, prema pretpostavci, dužine svih ostalih ivica najviše 1. Označimo sa x dužinu ivice BC naspramne ivici AD, sa H podnožje visine tetraedra iz temena A, sa A' podnožje visine trougla ABC iz temena A i sa D' podnožje visine trougla DBC iz temena D.



Trougao AHA' je pravougli, sa pravim uglom kod temena H pa je $AH\leqslant AA'$ (jednakost važi u slučaju da je trougao AHA' degenerisan). U trouglu ABC tačka A' deli stranicu BC na dva dela od kojih bar jedan nije manji od $\frac{x}{2}$. Neka je to, na primer,

$A'C$. Trougao $AA'C$ je pravougli sa pravim uglom kod temena A' pa je:

$$A'A^2=AC^2-A'C^2\leqslant 1-\left(\frac{x}{2}\right)^2=1-\frac{x^2}{4}.$$

Dakle

$$A'A\leqslant\sqrt{1-\frac{x^2}{4}},\ \text{pa je i}\ \ AH\leqslant\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}.$$

Slično razmatranje važi i za trougao DBC, odnosno:

$$DD'\leqslant\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}.$$

Za zapreminu tetraedra $ABCD$ važi, s obzirom na prethodno, sledeći niz nejednakosti:

$$\begin{aligned}V_{ABCD}&=\frac{1}{3}AH\cdot P_{DBC}=\frac{1}{3}AH\cdot\frac{1}{2}BC\cdot DD'\\&\leqslant\frac{1}{6}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\cdot x\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\\&=\frac{1}{24}x(4-x^2).\end{aligned}$$

Po pretpostavci $0<x\leqslant 1$. U ovom intervalu funkcija $x(4-x^2)$ je rastuća, pa najveću vrednost dostiže za $x=1$ i ona iznosi 3.

Dakle:

$V_{ABCD}\leqslant\frac{1}{8}$. Što je i trebalo dokazati.

Može se pokazati i više, tj. da se ova nejednakost ne može poboljšati. U tom cilju dovoljno je pokazati da postoji tetraedar koji zadovoljava pretpostavke zadatka i ima zapreminu $\frac{1}{8}$

To je tetraedar u kome su trouglovi ABC i DBC jednakostranični sa stranicama dužine 1 i međusobno upravni. U ovom slučaju $AD=\frac{3}{2}>1$, pa su pretpostavke zadatka ispunjene, a zapremina ovog tetraedra je, što je lako proveriti, $\frac{1}{8}$.

IX. 3.

Prema definiciji C_s lako dobijamo:

$$(1) \ldots \quad C_p - C_q = p^2 + p - (q^2 + q) = (p-q)\,(p+q+1)$$

Koristeći (1) može se izračunati:

$$(C_{m+1} - C_k)\,(C_{m+2} - C_k) \ldots (C_{m+n} - C_k) =$$
$$= (m+1-k)\,(m+1+k+1)\,(m+2-k)\,(m+2+k+1) \ldots (m+n+k)\,(m+n+k+1)$$
$$= [(m-k+1)\,(m-k+2) \ldots (m-k+n)] \cdot [(m+k+2)\,(m+k+3) \ldots (m+k+n+1)] = A$$

Takođe:

$$C_1 C_1 \ldots C_n = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \cdot n \cdot (n+1) = n!\,(n+1)! = B$$

Prema tome treba dokazati da je $\dfrac{A}{B}$ ceo broj.

$$\frac{A}{B} = \frac{[(m-k+1)\cdots(m-k+n)]}{n!} \cdot \frac{[(m+k+2)\cdots(m+k+n+1)]}{(n+1)!}$$
$$= \binom{m-k+n}{n} \cdot \binom{m+k+n+1}{n+1} \frac{1}{m+k+1}$$

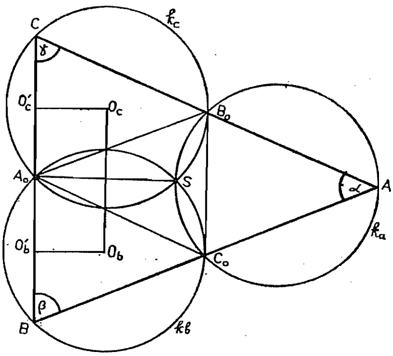
Prvi binomni koeficijent $\binom{m-k+n}{n}$ je, naravno, ceo broj (mogućnost $m-k+n \leqslant 0$ ne menja ništa bitno jer je proizvod n uzastopnih celih brojeva uvek deljiv sa $n!$ bez obzira na znak).

Proizvod $\binom{m+k+n+1}{n+1} \dfrac{1}{m+k+1}$ je takođe ceo broj, jer je binomni koeficijent $\binom{m+k+n+1}{n+1}$ deljiv sa $m+k+1$, zbog toga što je $m+k+1$ prost broj veći od $n+1$ pa prema tome i uzajamno pros tsa $(n+1)!$. Kraj dokaza.

IX. 4.

Kako je trougao $A_0B_0C_0$ dat, za traženi trougao ABC (ako postoji) treba da važi: (1) $ABC \simeq A_1B_1C_1$ i (2) $A_0 \perp BC$, $B_0 \perp CA$, $C_0 \perp AB$. Prema tome temena traženog trougla, A, B i C će se nalaziti na kružnim lukovima sa kojih se stranice B_0C_0, C_0A_0 i A_0B_0 vide pod oštrim uglovima α, β, γ koji odgovaraju temenima trougla $A_1B_1C_1$

tim redom. Kako su svim trouglovi ABC čija se odgovarajuća temena nalaze na ovim lukovima i koji zadovoljavaju uslov (2), međusobno slični, to će među njima najveću površinu imati onaj koji ima najveću stranicu (na pr. uočimo BC). Pokazaćemo da takav trougao postoji.



Neka je ABC (v. sliku) trougao koji ispunjava uslove (1) i (2). Ako bar jedan takav trougao postoji tačke B i C se nalaze sa različitih strana tačke A_0. Neka su, dalje, O_c i O_b središta krugova k_c i k_b koji odgovaraju uglovima γ i β. Primetimo da se krugovi k_a, k_b i k_c seku u tački S unutar trougla $A_0B_0C_0$ jer je $\alpha+\beta+\gamma=180°$ a spoljašnji uglovi su oštri pa su spoljašnji lukovi veći. Projektujemo tačke O_b i O_c na pravu BC. Neka su projekcije O'_b i O'_c. Kako projekcija središta kruga polovi tetivu to je:

$$(3) \ldots \quad BC=BA_0+A_0C=2O'_bA_0+2A_0O'_c=2O'_bO'_c$$

Prema tome duž BC je najveća kada je duž $O'_cO'_b$ (koja je projekcija duži O_bO_c) najveća; to je tada kada je $BC \| O_bO_c$, tj. kada $O_bO_c=O'_bO'_c$. Preostaje još da pokažemo da prava paralelna sa O_bO_c seče krugove k_b i k_c u tačkama B i C koje su sa različitih strana tačke A_0, jer to zahteva uslov (2). Za to je dovoljno pokazati da su tačke O_b i O_c sa različitih strana prave SA_0 (koja im je zajednička tetiva). No, to je tačno jer su uglovi nad SA_0 u krugovima k_b i k_c oštri (manji su od oštrih uglova β i γ a ugao $\sphericalangle B_0A_0C_0$ je oštar po pretpostavci). Dakle duž BC sa traženim osobinama postoji.

Konstrukcija je trivijalna.

IX. 5.

Kako svi brojevi $a_1, \ldots, a_8$ nisu nula, to su svi brojevi $c_n = a^n_1 + \ldots + a^n_8$ za parno n pozitivni i dakle različiti od nule. Prema brojevima c_n koji su nula mogu imati samo neparne indekse.

Dokazaćemo da ako među brojevima c_{2n-1}, $n \in N$ ima beskonačno mnogo jednakih nuli onda su svi oni jednaki nuli. Takođe na rešenje zadatka ne utiče to što svaki od c_n ima osam sabiraka već je jedino relevantno to što ih ima parno mnogo, na primer $2k$.

Neka je $a = \max\limits_{1 \leq i \leq 2k} |a_i|$. Neka je dalje među brojevima a_i tačno p onih koji su pozitivni i jednaki a i tačno q onih koji su negativni i jednaki $-a$. I, neka je $p \neq q$.

Tada važi

$$c_{2n-1} = (p-q)a^{2n-2} + c'_{2n-1} \tag{1}$$

gde je c'_{2n-1} zbir preostalih sabiraka čiji je maksimum apsolutnih vrednosti, na primer b, manji od a i ima ih, na primer, r.

Tada iz (1) proizlazi sledeća ocena:

$$|c_{2n-1}| \geqq |p-q| a^{2n-2} - r b^{2n-2} \tag{2}$$

Kako je $a > b$ to, ako je $2n-1 > \log_{\frac{a}{b}} \dfrac{r}{|p-q|}$, važi $|c_{2n-1}| > 0$.

Prema tome ako je $p \neq q$ onda su svi c_n posle nekog n različiti od nule, što je suprotno pretpostavci. Dobijena kontradikcija pokazuje da je $p = q$.

Dakle brojeva a_i sa apsolutnom vrednošću a ima parno mnogo i oni se javljaju u parovima, pozitivan i negativan. Dakle u svim zbirovima c_{2n-1} oni se poništavaju. Preostali deo zbira ima manje od $2k$ sabiraka i izloženi postupak se može induktivno produžiti dok se ne iscrpe svi brojevi a_i.

Konačno, brojevi a_i se javljaju u parovima, pozitivan i njemu suprotan; pa se, prema tome, ponavljaju u c_n sa parnim indeksima a poništavaju u c_n sa neparnim indeksima. Odnosno, svi c_{2n-1} su jednaki nuli.

IX. 6.

Prema uslovima zadatka, ako uvedemo oznake x_k za broj medalja dodeljenih k-tog dana, važi:

$$x_1 = 1 + \frac{1}{7}(m-1)$$

$$x_2 = 2 + \frac{1}{7}(m - x_1 - 2)$$

$$\vdots$$

$$x_k = k + \frac{1}{7}(m - x_1 - x_2 - \cdots - x_{k-1} - k) \quad 2 \leqslant k \leqslant n-1$$

$$\vdots$$

$$x_n = n$$

Koristeći gornje rekurentne formule lako dobijamo $x_{k+1} - x_k = = 1 - \frac{1}{7}(x_k + 1)$.

Dobijena formula može se svesti na oblik:

$$x_{k+1} - 6 = \frac{6}{7}(x_k - 6) \tag{1}$$

Formula (1) važi za $1 \leqslant k \leqslant n-2$ (za $k=1$ može se direktno proveriti). Prema tome brojevi $x_k - 6$ čine geometrijsku progresiju sa količnikom $\frac{6}{7}$. Stoga.

$x_{k+1} - 6 = \frac{6^k}{7^k}(x_1 - 6)$, a zamenom vrednosti za x_1 dobija se:

$$x_{k+1} = \frac{6^k}{7^{k+1}}(m - 36) + 6 \ldots \quad (2)$$

$0 \leqslant k \leqslant n-2$ (za $k=0$ proverava se direktno).

Koristeći (2) možemo izračunati:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = 6(n-1) + \left(1 - \frac{6^n}{7^n}\right)(m - 36)$$

Kako je $x_n = n$, a $x_1 + \ldots + x_n = m$ (ukupan broj dodeljenih medalja) to je:

$$m = x_1 + \cdots + x_n = 6(n-1) + \left(1 - \frac{6^n}{7^n}\right)(m - 36) + n \tag{3}$$

Iz (3) se dobija:

$$\frac{n-6}{6^n}=\frac{m-36}{7^{n+1}} \tag{4}$$

Kako je $n-6$ ceo broj a brojevi 6 i 7 su uzajamno prosti to jedna, pa prema tome i druga strana jednakosti (4) mora biti ceo broj. Međutim, lako je pokazati da je $|n-6|<6^n$, pa prema tome, da bi $\frac{n-6}{6^n}$. bio ceo broj mora biti $n-6=0$, odnosno $n=6$. Odavde je $m=36$ Prema tome takmičenje je trajalo 6 dana, a podeljeno je 36 medalja i to, što je lako izračunati, svaki dan po 6.

X. 1.

Neka trougao ABC sa stranicama $AB=n$, $BC=n+1$, $CA=n-1$, ($n>1$ prirodan broj) zadovoljava uslove zadatka. Tada su njegovi uglovi α, 2α i $\pi-3\alpha$, gde je $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$. Razmatrajmo sledeća tri moguća slučaja:

(a) $\sphericalangle B=\alpha$, $\sphericalangle A=2\alpha$. Iz relacije

$$\text{(1)} \qquad \frac{\sin(\pi-3\alpha)}{\sin\alpha}=\left(\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}\right)^2-1$$

i sinusne teoreme dobijamo $\frac{n}{n-1}=\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2-1$, odakle $n=5$.

(b) $\sphericalangle B=\alpha$, $\sphericalangle C=2\alpha$. Relacija (1) daje $\frac{n+1}{n-1}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^2-1$, odnosno $n=2$, što međutim nije rešenje zadatka.

(c) $\sphericalangle C=\alpha$, $\sphericalangle A=2\alpha$. Ovaj put dobijamo $\frac{n-1}{n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2-1$, odnosno $n^2-3n-1=0$. No, ova jednačina nema celobrojnih rešenja.

Dakle, jedini trougao koji može zadovoljavati uslove zadatka je trougao sa stranicama 4, 5 i 6. Za njegove uglove važi

$$\cos(\sphericalangle B)=\frac{3}{4} \quad \text{i} \quad \cos(\sphericalangle A)=\frac{1}{8}=2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2-1=\cos(2\cdot\sphericalangle B),$$

tj. $0<\sphericalangle B<\frac{\pi}{2}$, $0<\sphericalangle A<\frac{\pi}{2}$ i $\sphericalangle A=2\cdot\sphericalangle B$, čime je tvrđenje zadatka dokazano.

X. 2.

Neka je n broj cifara broja x i $p(x)$ pomenuti proizvod. Tada je

$$p(x) \leqslant 9^n \text{ i } x \geqslant 10^{n-1}.$$

1° Ako je $n=1$, dobijamo

$$p(x)=x,\ x^2-11x-22=0.$$

No, ova jednačina nema celobrojnih rešenja.

2° za $n=2$ je $x^2-10x-22=p(x) \leqslant 81$, odakle

$$x^2-10x+25 \leqslant 128,\ |x-5| \leqslant \sqrt{128}<12,$$

tj. $10 \leqslant x \leqslant 16$. Provera pokazuje da od ovih brojeva jedino $x=12$ zadovoljava uslove zadatka.

3° Neka je $n \geqslant 3$. Tada je

$$0<10^{n-1}-5 \leqslant x-5,\ (10^{n-1}-5)^2 \leqslant (x-5)^2,$$
$$p(x)=(x-5)^2-47 \geqslant 10^{2n-2}-10^n-22.$$

Iz $10^n \geqslant 1000$ i $10^{n-2}-2 \geqslant 8$ sledi $10^{2n-2}-2 \cdot 10^n \geqslant 8000$, pa je

$$p(x) \geqslant 10^{2n-2}-10^n-22 \geqslant 10^n+8000-22>10^n,$$

što protivreči uslovu $p(x) \leqslant 9^n$.

Dakle, jedini broj koji zadovoljava uslove zadatka je $x=12$.

X. 3.

Označimo $D=(b-1)^2-4ac$. Potražimo najpre rešenja sistema za koja je $x_1=x_2=\ldots=x_n=y$. Dovoljno je rešiti jednačinu $ay^2+(b-1)y+c=0$. Ona za $D<0$ nema realnih rešenja, za $D=0$ ima tačno jedno realno rešenje, a za $D>0$ ima dva realna rešenja. Zato je još dovoljno dokazati da za $D \leqslant 0$ dati sistem nema drugih rešenja.

Pretpostavimo da takvo rešenje postoji i saberimo sve jednačine sistema. Ako označimo $\sum_{i=1}^{n} x_i=X$, dobijamo

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2+(b-1) \cdot X+nc=0. \tag{2}$$

Kako je (s obzirom da po pretpostavci nisu svi x_i jednaki među sobom) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > \frac{1}{n} \cdot X^2$, to iz (2) dobijamo

$$\frac{a}{n} \cdot X^2+(b-1) \cdot X+nc<0$$

u slučaju $a>0$, odnosno

$$\frac{a}{n}\cdot X^2+(b-1)X+nc>0$$

u slučaju $a<0$. No, obe ove nejednakosti su nemoguće za realno X, jer je diskriminanta kvadratnog trinoma na levoj strani jednaka D i po pretpostavci $\leqslant 0$.

X. 4.

Neka su ivice tetraedra $ABCD$ $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $AD=d$, $BD=e$ i $CD=f$. Pretpostavimo da je ivica $AD=d$ takva da nijedna druga ivica nije duža od nje. Tada je

$$d+e>f \quad \text{i} \quad d+f>e, \tag{3}$$

$$d+b>c \quad \text{i} \quad d+c>b. \tag{4}$$

Iz trouglova ABD i ADC dobijamo $c+e>d$ i $b+f>d$, odakle $b+c+$ $+e+f>2d$. Zato važi bar jedna od nejednakosti

$$b+c>d, \quad e+f>d,$$

što zajedno sa (3) ili (4) dokazuje tvrđenje zadatka.

X. 5. (a) važi:

$$f(x+2a)=f[(x+a)+a]=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-[f(x+a)]^2}=$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f'x)]^2}-\left(\frac{1}{4}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}+f(x)-\right.}$$

$$\left.-[f(x)^2]\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+[f(x)]^2}=\frac{1}{2}+\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|.$$

No, kako je

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x-a)-[f(x-a)]^2}\geqslant\frac{1}{2},$$

to je

$$f(x+2a)=f(x),$$

tj. $b=2a$.

(b) za $a=1$ ($b=2$) datu relaciju zadovoljava npr. periodična funkcija definisana sa

$$f(x)=\begin{cases} 1/2, & -1\leqslant x<0 \\ 1, & 0\leqslant x<1 \end{cases}, \quad f(x+2)=f(x)$$

ili npr. neprekidna funkcija $f(x)=\frac{1}{2}\left(1+\left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|\right)$.

X. 6.

Prvo rešenje. Neka je $n=x_m\, x_{m-1}\ldots x_1x_0=\sum_{i=0}^{m} 2^i x_i$, $x_i\in\{0, 1\}$, zapis broja n u binarnom sistemu. Razmatrajući slučajeve $x_k=0$ i $x_k=1$ lako se proverava da je

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=\begin{cases} x_m\, x_{m-1}\ldots x_{k+1}+x_k, & k<m \\ x_m\quad , & k=m \\ 0\quad , & k>m \end{cases}$$

Odatle je tražena suma:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=(x_m\, x_{m-1}\cdots x_1+x_0)+(x_m\cdots x_2+x_1)+\cdots+(x_m+$$
$$+x_{m-1})+x_m=x_m(2^{m-1}+2^{m-2}+\cdots+2^0+1)+$$
$$+x_{m-1}(2^{m-2}+2^{m-3}+\cdots+2^0+1)+\cdots+x_1(2^0+$$
$$+1)+x_0=2^m x_m+2^{m-1}x_{m-1}+\cdots+2x_1+x_0=n.$$

Drugo rešenje. Razmatrajući slučajeve $x-[x]<1/2$ i $x-[x]\geqslant\frac{1}{2}$ lako se dokazuje da za svako realno x važi relacija

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x].$$

Stavljajući u nju vrednosti $x=\frac{n}{2^{k+1}}$ za $k=0, 1, 2, \ldots, m$ i sabirajući dobijene relacije, dobijamo

$$\sum_{k=0}^{m}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=[n]-\left[\frac{n}{2^m}\right].$$

Kako je očigledno $\lim\limits_{m\to\infty}\left[\frac{n}{2^m}\right]=0$, to je i tražena suma

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=n.$$

XI. 1.

Neka je $a=4k^4$, gde je k prirodan broj veći od 1. Tada je

$$\begin{aligned}
z&=n^4+a\\
&=n^4+4k^4\\
&=n^4+4n^2k^2+4k^4-4n^2k^2\\
&=(n^2+2k^2)^2-(2nk)^2\\
&=(n^2+2k^2-2nk)\,(n^2+2k^2+2nk);
\end{aligned}$$

$$n^2+2k^2-2nk=(n-k)^2+k^2\geqslant k^2>1;$$

$$n^2+2k^2+2nk=(n+k)^2+k^2>k^2>1.$$

Broj z je složen, jer se može predstaviti u obliku proizvoda dva prirodna broja veća od 1. Odavde sledi tvrđenje zadatka.

XI. 2.

Pomoću adicione formule dokazujemo da je

$$f(x)=A\sin x+B\cos x,$$

gde je
$$-A=\sin a_1+\frac{\sin a_2}{2}+\ldots+\frac{\sin a_n}{2^{n-1}}$$

i
$$B=\cos a_1+\frac{\cos a_2}{2}+\ldots+\frac{\cos a_n}{2^{n-1}}.$$

Brojevi A i B ne mogu biti oba jednaki nuli. Zaista, ako bi bilo $A=B=0$, funkcija f bi bila identički jednaka nuli, a to nije tačno jer je

$$f(-a_1)=\cos(a_1-a_1)+\frac{\cos(a_2-a_1)}{2}+\ldots+\frac{\cos(a_n-a_1)}{2^{n-1}}$$

$$\geqslant 1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}>0.$$

Postoji broj φ takav da je $A=C\cos\varphi$, $B=C\sin\varphi$, gde je $C=\sqrt{A^2+B^2}$. Za φ se može uzeti mera ugla koji vektor (A, B) zaklapa sa x-osom. Sledi da je

$$f(x)=C\sin(x+\varphi).$$

Kako je $C\neq 0$, nule funkcije f su $x=-\varphi+k\pi$, $k\in Z$. Odavde sledi tvrđenje zadatka.

XI. 3.

1) $k=1$. Neka je $AB=a$, $AC=AD=BC=BD=CD=1$. Obeležimo sa M središte ivice CD. Tada je $AM=BM=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Kako je $AB<AM+BM$, to je $a<\sqrt{3}$. Ovaj uslov je i dovoljan. Zaista, ako je $a<\sqrt{3}$ postoji trougao ABM kod koga je $AB=a$, $AM=BM=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Neka je n normala ravni ABM u tački M, C i D tačke na n takve da je $MC=MD=\frac{1}{2}$. Ivica tetraedra $ABCD$ su $AB=a$ i $AC=AD=$ $=BC=BD=CD=1$.

2) $k=2$. Postoje dve mogućnosti.

a) Ivice dužine a polaze iz istog temena. Neka je $AC=AD=a$, $AB=BC=BD=CD=1$ i M središte ivice CD. Tada je $AM=\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}$ u $BM=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Kako je $AB-BM<AM<AB+BM$, to je

$$1-\frac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}>1+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ova nejednakost je ekvivalentna redom sa

$$1-\sqrt{3}+\frac{3}{4}<a^2-\frac{1}{4}<1+\sqrt{3}+\frac{3}{4},$$

$$2-\sqrt{3}<a^2<2+\sqrt{3},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}<a<\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Dokažimo da su poslednje nejednakosti i dovoljan uslov. Ako je $\sqrt{2-\sqrt{3}}<a<\sqrt{2+\sqrt{3}}$, postoji trougao ABM čije su stranice $AB=1$, $AM=\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}$ i $BM=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Neka je n normala ravni ABM u tački M, C i D tačke na n takve da je $MC=MD=\frac{1}{2}$. Lako je pokazati da za ivice tetraedra $ABCD$ važe jednakosti $AC=AD=a$, $AB=$ $=BC=BD=CD=1$.

b) Ivice dužine a su naspramne. Neka je $AB=CD=a$, $AC=$ $=AD=BC=BD=1$ i M središte ivice CD. Tada je $MA=MB=$ $=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$. Nejednakost $AB<MA+MB$ je ekvivalentna redom sa:

$$a<2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}};\quad a^2<4\left(1-\frac{a^2}{4}\right);\quad a^2<2;\quad a<\sqrt{2}.$$

Poslednja nejednakost je i dovoljan uslov. Ako je $a<\sqrt{2}$ postoji trougao ABM čije su stranice $AB=a$, $MA=MB=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$. Neka je n normala ravni ABM u tački M, C i D tačke na n takve da je $MC=$ $=MD=\frac{a}{2}$. Lako je pokazati da važe jednakosti: $AB=CD=a$, $AC=$ $=AD=BC=BD=1$.

Dakle, za $k=2$ traženi neophodan i dovoljan uslov je

$$a<\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

3) $k=3$. Dokažimo da za svaki pozitivan broj a postoji tetraedar čije su tri ivice dužine a a preostale tri dužine 1. Neka je $a\geqslant 1$. Postoji jednostraničan trougao BCD stranice 1. Neka je O središte ovog trougla. Lako je pokazati da je $OB=OC=OD=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Neka je n normala ravni BCD u tački O i A tačka na n takva da je $OA=\sqrt{a^2-\frac{1}{3}}$. Lako je pokazati da je $AB=AC=AD=a$. Na sličan način se razmatra, slučaj $a\leqslant 1$.

4) $k=4$. Posmatrajmo tetraedar sličan datom s koeficijentom sličnosti $\frac{1}{a}$. Taj tetraedar ima 4 ivice dužine 1 i 2 ivice dužine $\frac{1}{a}$. Na osnovu 2) zaključujemo da je traženi neophodan i dovoljan uslov

$$\frac{1}{a}<\sqrt{2+\sqrt{3}}, \quad \text{tj.} \quad a>\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

5) $k=5$. Posmatrajmo tetraedar sličan datom s koeficijentom sličnosti $\frac{1}{a}$. On ima pet ivica dužine 1 i jednu ivicu dužine $\frac{1}{a}$. Na osnovu razmatranja za slučaj 1) zaključujemo da je traženi neophodan i dovoljan uslov

$$\frac{1}{a}<\sqrt{3} \quad \text{tj.} \quad a>\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

XI. 4.

Prvo rešenje. Dovoljno je dokazati da su centri S_1, S_2 i S_3 krugova γ_1, γ_2 i γ_3 kolinearni.

Neka su K_1, K_2 i K_3 tačke u kojima prava AB dodiruje krugove γ_1, γ_2 i γ_3, L_2 i L_3 tačke u kojima prava CD dodiruje krugove γ_2 i γ_3, M_2 i M_3 tačke u kojima krugovi γ_2 i γ_3 dodiruju krug γ i O središte duži AB. Pretpostavimo da tačka K_2 leži između tačaka A i D a da K_3 leži između B i D (nacrtaj sliku). Duži OB i S_2L_2 su paralelne i istosmerne. Kako je $OB=OM_2$ i $S_2L_2=S_2M_2$, tačke B, L_2 i M_2 su kolinearne. Na osnovu stava o potenciji je $BK_2^2=BL_2 \cdot BM_2$. Četvorougao ADL_2M_2 je tetivan jer su mu dva naspramna ugla prava. Zato je $BL_2 \cdot BM_2=BD \cdot BA$. Prema poznatom stavu je $BD \cdot BA=BC^2$. Sledi da je $BK_2=BC$. Na sličan način može da se pokaže da je $AK_3=AC$. Kako je

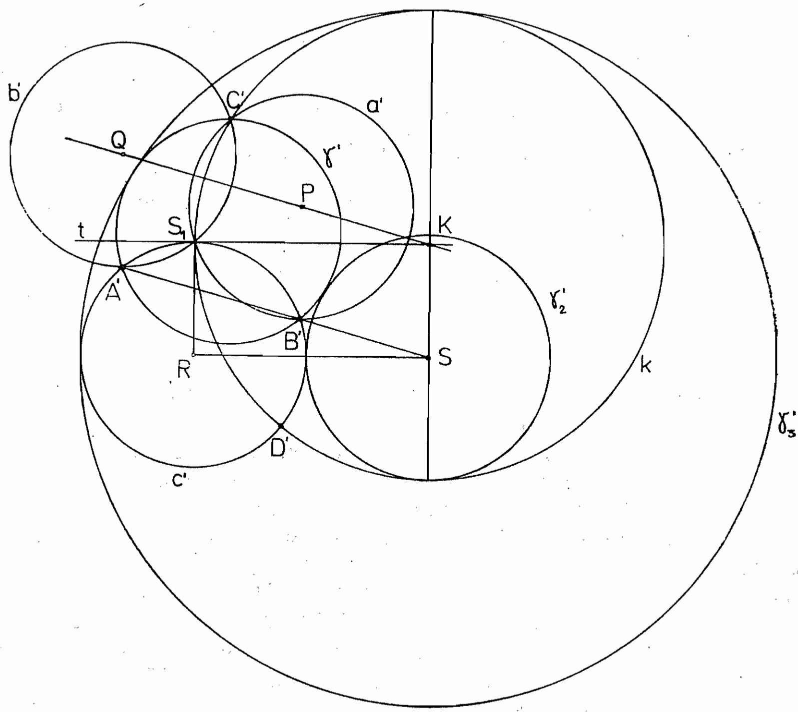
$$AK_2+AK_3=-a+b+c=2AK_1,$$

to je K_1 središte duži K_2K_3. Pomoću dokazanih jednakosti takođe dobijamo da je

$$K_2S_2+K_3S_3=K_2D+K_3D=K_2K_3=a+b-c=2K_1S_1.$$

Kako su duži K_1S_1, K_2S_2 i K_3S_3 paralelne i istosmerne, tačka K_1 središte duži K_2K_3 i duž K_1S_1 jednaka poluzbiru duži K_2S_2 i K_3S_3, sledi da je tačka S_1 središte duži S_2S_3. Time je tvrđenje dokazano.

Drugo rešenje. Inverzijom u odnosu na krug γ tačke A, B i C se preslikavaju u tačke A', B' i C' a prave BC, CA i AB u krugove a', b' i c'. Ovi krugovi prolaze kroz centar S_1 kruga γ_1 i imaju jednake poluprečnike. Neka su P, Q i R centri krugova a', b' i c'. Krug γ se



preslikava u krug γ' opisan oko trougla $A'B'C'$. Kako su $QA'RS_1$ i RS_1PB' rombovi, što je $QA' \# S_1R \# PB'$. Sledi da je $PQA'B'$ paralelogram a odatle $PQ = A'B'$. Na sličan način može da se, pokaže da je $QR = B'C'$ i $RP = C'A'$. Trouglovi $A'B'C'$ i PQR su podudarni, zato što su im odgovarajuće stranice jednake. Centar kruga opisanog oko trougla PQR je S_1 a poluprečnik je jednak poluprečnicima krugova a', b' i c'. Dakle, krugovi a', b', c' i γ' imaju jednake poluprečnike. Prava CD se preslikava u krug k koji prolazi kroz tačke C' i S_1 i koji je ortogonalan na krugu c'. Zato je njegov centar presek K prave PQ i tangente t kruga c' u tački S_1. Neka je S takva tačka da je

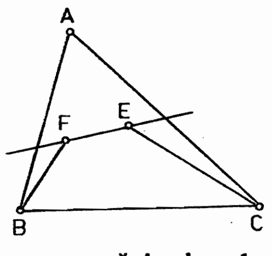
RS_1KS paralelogram, γ_2' i γ_3' krugovi s centrom u S koji dodiruju krug k. Lako je pokazati da krugovi γ_2' i γ_3' dodiruju krug c' ako se ima u vidu da su duži SR i SK jednake poluprečnicima krugova k i c'. Duži QA', PB' i KS su paralelne i istosmerne i jednake duži S_1R. Kako su tačke Q, P i K kolinearne, to su i tačke A', B' i S kolinearne. Sledi da krugovi γ_2' i γ_3' dodiruju krug γ'. Inverzijom u odnosu na krug γ_1 ovi krugovi se preslikavaju u krugove γ_2 i γ_3. Sledi da su centri krugova γ_1, γ_2 i γ_3 kolinearni. Oni leže na pravoj S_1S.

Napomena 1: Potrebno je posebno razmatrati slučaj kada centar S_1 kruga γ_1 leži na visini CD trougla ABC, tj. kada je $CA=CB$. Dokaz je u ovom slučaju znatno jednostavniji od prethodnog.

Napomena 2: U ovom dokazu nije korištena činjenica da je luk ACB polukrug. Dakle tvrđenje zadatka može da se uopšti.

XI. 5.

Lema. Ako od pet komplanarnih tačaka nikoje tri ne pripadaju jednoj ravni, među njima postoje četiri tačke koje predstavljaju temena konveksnog četvorougla.



Dokaz leme. Ako je konveksan omotač datog skupa tačaka petougao, proizvoljne četiri tačke iz datog skupa su temena konveksnog četvorougla. Ako je konveksan omotač datog skupa tačaka četvorougao, njegova temena zadovoljavaju postavljene uslove. Neka je konveksan omotač datog skupa tačaka trougao. Tada su tri tačke, A, B i C, temena trougla u čijoj se unutrašnjosti nalaze preostale dve tačke. Prava EF seče dve stranice trougla ABC. Neka su to, na primer, AB i AC. Tačke B, C, E i F su temena konveksnog četvorougla.

Dokaz tvrđenja zadatka. Posmatrajmo sve kombinacije od po 5 tačaka. Njih ima C_n^5. Svaka od njih sadrži bar jedan podskup od 4 tačke koje su temena konveksnog četvorougla. Temena svakog četvorougla su uključena u $n-4$ kombinacije. Dakle postoje bar $\frac{1}{n-4}C_n^5$ konveksna četvorougla čija temena pripadaju datom skupu tačaka. Ostaje još da se pokaže nejednakost $\frac{1}{n-4}C_n^5 \geqslant C_{n-3}^2$. Ona je tačna jer je ekvivalentna nejednakosti $(n-5)(n-6)(n+8)\geq 0$. Jednakost važi samo za $n=5$ i $n=6$.

XI. 6.

Prvo rešenje. Pod datim uslovima je $y_1>0$ i $y_2>0$. Uvedimo oznake $u_1=\sqrt{x_1y_1}+z_1$, $u_2=\sqrt{x_2y_2}+z_2$, $v_1=\sqrt{x_1y_1}-z_1$ i $v_2=\sqrt{x_2y_2}-z_2$. Jasno je da su u_1, u_2, v_1 i v_2 pozitivni. Kako je

$$(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2=$$

$$=(\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_2y_2})^2+(\sqrt{x_1y_2}-\sqrt{x_2y_1})^2-(z_1+z_2)^2=$$

$$=(\sqrt{x_1y_1}+z_1+\sqrt{x_2y_2}+z_2)(\sqrt{x_1y_1}-z_1+\sqrt{x_2y_2}-z_2)+$$

$$+(\sqrt{x_1y_2}-\sqrt{x_2y_1})^2=$$

$$=(u_1+u_2)(v_1+v_2)+(\sqrt{x_1y_2}-\sqrt{x_2y_1})^2,$$

to je

$$(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2\geq(u_1+u_2)(v_1+v_2).$$

Jednakost važi akko je $x_1y_2=x_2y_1$.

Dovoljno je dokazati nejednakost

$$\frac{8}{(u_1+u_2)(v_1+v_2)}\leq\frac{1}{u_1v_1}+\frac{1}{u_2v_2},$$

odnosno

$$8\,u_1v_1u_2v_2\leq(u_1+u_2)(v_1+v_2)(u_1v_1+u_2v_2).$$

Poslednja nejednakost je tačna jer je

$$2\sqrt{u_1u_2}\leq u_1+u_2,\ 2\sqrt{v_1v_2}\leq v_1+v_2 \text{ i } 2\sqrt{u_1v_1u_2v_2}\leq u_1v_1+u_2v_2.$$

Jednakost važi akko je $u_1=u_2$ i $v_1=v_2$.

Time je data nejednakost dokazana. Jednakost važi akko je $x_1y_2=x_2y_1$, $u_1=u_2$ i $v_1=v_2$, odnosno akko je $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ i $z_1=z_2$.

Drugo rešenje. Uvodimo oznake: $D_1=x_1y_2-z_1^2$, $D_2=x_2y_2-z_2^2$, $D=(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2$ Posmatrajmo kvadratne trinome $p_1(t)=x_1t^2+2z_1\,t+y_1$, $p_2(t)=x_2\,t^2+2z_2\,t+y_2$, $p(t)=p_1(t)+$

$+p_2(t)$. Njihovi minimumi su $\frac{D_1}{x_1}$, $\frac{D_2}{x_2}$ i $\frac{D}{x_1+x_2}$. Iz

$$\min p(t) \geqslant \min p_1(t) + \min p_2(t)$$

sledi

$$\frac{D}{x_1+x_2} \geqslant \frac{D_1}{x_1} + \frac{D_2}{x_2}.$$

Jednakost važi ako i samo ako trinomi $p_1(t)$ i $p_2(t)$ dostižu minimum u istoj tački, tj. ako je $\frac{z_1}{x_1} = \frac{z_2}{x_2}$,

Dovoljno je dokazati nejednakost

$$\frac{8}{(x_1+x_2)\left(\frac{D_1}{x_1}+\frac{D_2}{x_2}\right)} \leqslant \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}$$

ili njoj ekvivalentu

$$8 D_1 D_2 \leqslant (x_1+x_2)\left(\frac{D_1}{x_1}+\frac{D_2}{x_2}\right)(D_1+D_2).$$

Poslednja nejednakost je tačna jer je

$$2\sqrt{x_1 x_2} \leqslant (x_1+x_2),\ 2\sqrt{\frac{D_1 D_1}{x_1 x_2}} \leqslant \frac{D_1}{x_1} + \frac{D_2}{x_2} \ \text{ i } \ 2\sqrt{D_1 D_2} \leqslant D_1 + D_2$$

Jednakost važi akko je $x_1 = x_2$ i $D_1 = D_2$.

Time je data nejednakost dokazana. Jednakost važi akko je $\frac{z_1}{x_1} = \frac{z_2}{x_2}$, $x_1 = x_2$ i $D_1 = D_2$ odnosno akko je $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ i $z_1 = z_2$.

Treće rešenje. Neka je $C = \{(x, y, z) \mid x > 0,\ xy - z^2 > 0\}$. Skup C je očigledno otvoren. Dokažimo da je konveksan. Treba pokazati da je izraz

$$(q_1 x_1 + q_2 x_2)\ (q_1 y_1 + q_2 y_2) - (q_1 z_1 + q_2 z_2)^2$$

pozitivan za $(x_1, y_1, z_1) \in C$, $(x_2, y_2, z_2) \in C$, $q_1+q_2=1$ i $q_1, q_2>0$. Ovo postaje očigledno ako se dati izraz transformiše u

$$q_1^2(x_1y_1-z_1^2)+q_2^2(x_2y_2-z_2^2)+q_1q_2(\sqrt{x_1y_2}-\sqrt{x_2y_1})^2+$$
$$+2q_1q_2(\sqrt{x_1y_1x_2y_2}-z_1z_2).$$

Funkcija $f: C \to R$ je definisana sa

$$f(x, y, z)=\frac{1}{xy-z^2}.$$

Ona ima neprekidne porcijalne izvode drugog reda. Njen Hesian

$$\begin{bmatrix} \dfrac{2y^2}{(xy-z^2)^3} & \dfrac{xy+z^2}{(xy-z^2)^3} & \dfrac{-4yz}{(xy-z^2)^3} \\ \dfrac{xy+z^2}{(xy-z^2)^3} & \dfrac{2x^2}{(xy-z^2)^3} & \dfrac{-4xz}{(xy-z^2)^3} \\ \dfrac{-4yz}{(xy-z^2)^3} & \dfrac{-4xz}{(xy-z^2)^3} & \dfrac{2xy+6z^2}{(xy-z^2)^3} \end{bmatrix}$$

je pozitivno definitan, jer su mu glavni minori

$$D_1=\frac{2y^2}{(xy-z^2)^3}, \quad D_2=\frac{3xy+z^2}{(xy-z^2)^5}, \quad D_3=\frac{6}{(xy-z^2)^6}$$

pozitivni. Funkcija f je striktno konveksna. Zato važi nejednakost

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[f(x_1, y_1, z_1)+$$
$$+f(x_2\ y_2, z_2)]$$

koja je ekvivalentna datoj nejednakosti. Jednakost važi akko je $x_1=$ $=x_2$, $y_1=y_2$ i $z_1=z_2$.

XII. 1.

Prvo rešenje. Lema: Neka je $\sphericalangle BAC=\alpha$ i $\sphericalangle ABC=\beta$. Tada je

$$\frac{r}{\rho}=tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}$$

Dokaz leme. Neka je O centar upisanog kruga i K tačka u kojoj taj krug dodiruje stranicu AB. Dalje, neka je O_1 centar spolja upisanog kruga i L tačka njegovog dodira sa stranicom AB. Tada je

$$AB=AK+KB=\frac{r}{tg\frac{\alpha}{2}}+\frac{r}{tg\frac{\beta}{2}}=\frac{r}{tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}}\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}\right)$$

$$AB=AL+LB=\rho\,tg\frac{\alpha}{2}+\rho\,tg\frac{\beta}{2}=\rho\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}\right)$$

Sledi

$$\frac{r}{\rho}=tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}.$$

Dokaz tvrđenja zadatka. Neka je $\sphericalangle MAC=\varphi$. Prema prethodnoj lemi je

$$\frac{r_1}{\rho_1}=tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\varphi}{2}$$

$$\frac{r_2}{\rho_2}=tg\frac{\beta}{2}\,tg\frac{180^\circ-\varphi}{2}=tg\frac{\beta}{2}\,ctg\frac{\varphi}{2}$$

Množenjem ovih jednakosti dobijamo

$$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2}=tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\varphi}{2}\,tg\frac{\beta}{2}\,ctg\frac{\varphi}{2}=tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}=\frac{r}{\rho}$$

što je i trebalo dokazati.

Drugo rešenje. Uvodimo oznake: $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$, $AM=p$, $BM=q$, $CM=m$. Iz formula za površinu trougla

$$S=r\,\frac{a+b+c}{2}\quad\text{i}\quad S=\rho\,\frac{a+b-c}{2}$$

dobijamo

$$\frac{r}{\rho}=\frac{a+b-c}{a+b+c}=\frac{a+b-p-q}{a+b+p+q}$$

Slično

$$\frac{r_2}{\rho_1}=\frac{b+m-p}{b+m+p} \quad \text{i} \quad \frac{r_2}{\rho_2}=\frac{a+m-q}{a+m+q}.$$

Relacija koju treba da dokažemo ekvivalentna je sa

$$\frac{a+b-p-q}{a+b+p+q}=\frac{b+m-p}{b+m+p}\cdot\frac{a+m-q}{a+m+q}.$$

Poslednja relacija se može transformisati u njoj ekvivalentnu

$$pa^2+qb^2=p^2q+pq^2+pm^2+qm^2$$

a ovu, imajući u vidu da je $p+q=c$, u

$$cm^2=pa^2+qb^2-pqc.$$

Poslednja jednakost je tačna prema Stjuartovoj (*Stewart*) teoremi*.

XII. 2.

$$\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}\Leftrightarrow\frac{A_{n-1}}{x_n a^n+A_{n-1}}\leqslant\frac{B_{n-1}}{x_n b^n+B_{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow x_n a^n B_{n-1}>x_n b^n A_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow a^n \sum_{\nu=0}^{n-1} x_\nu b^\nu > b^n \sum_{\nu=0}^{n-1} x_\nu a^\nu$$

*) Videti, npr. Dr Dragomir Lopandić Zbirka zadataka iz osnova geometrije, zadatak broj 297.

$$\Leftrightarrow \sum_{\nu=0}^{n-1} x_\nu (a^n b^\nu - a^\nu b^n) > 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b) \sum_{\nu=0}^{n-1} x_\nu \, a^\nu \, b^\nu \, \frac{a^{n-\nu} - b^{n-\nu}}{a-b} > 0$$

$$\Leftrightarrow a - b > 0$$

$$\Leftrightarrow a > b$$

Pretposlednja ekvivalencija važi jer je

$$x_\nu a^\nu b^\nu \frac{a^{n-\nu} - b^{n-\nu}}{a-b} = x_\nu a^\nu b^\nu (a^{n-\nu-1} + a^{n-\nu-2} b + \cdots + b^{n-\nu-1}) \geqslant 0$$

za $\nu = 0, 1, \ldots, n-2$, i

$$x_\nu a^\nu b^\nu \frac{a^{n-\nu} - b^{n-\nu}}{a-b} = x_{n-1} a^{n-1} b^{n-1} > 0$$

za $\nu = n-1$.

XII. 3. Prvo rešenje. a) Ako je $0 < x \leq y$, onda je

$$\left(1 - \frac{x}{y}\right) \frac{1}{\sqrt{y}} \leqslant 2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right).$$

Zaista

$$\left(1 - \frac{x}{y}\right) \frac{1}{\sqrt{y}} \leqslant 2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right) \Leftrightarrow \frac{y-x}{y\sqrt{y}} \leqslant 2 \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{y}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y-x}{y} \leqslant 2 \frac{y-x}{\sqrt{x}(\sqrt{y} + \sqrt{x})}$$

$$\Leftrightarrow (y-x)(2y - \sqrt{x}\sqrt{y} - x) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (y-x)[(y-x) + \sqrt{y}(\sqrt{y} - \sqrt{x})] \geqslant 0.$$

Korišćenjem ove nejednakosti dobijamo

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)=2\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}}-\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)<2.$$

b) Neka je $a_n=q^n$, $q>1$. Očigledno je zadovoljen uslov (1). Odredimo b_n koristeći formulu za zbir prvih n članova geometrijske progresije.

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{q^{k-1}}{q^k}\right)\frac{1}{\sqrt{q^k}}=\left(1-\frac{1}{q}\right)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^k=$$

$$=\left(1-\frac{1}{q}\right)\frac{1}{\sqrt{q}}\,\frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{q^n}}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{q}}}=\frac{\sqrt{q}+1}{q}\left(1-\frac{1}{\sqrt{q^n}}\right).$$

Kako je $\lim\limits_{q\to 1}\dfrac{\sqrt{q}+1}{q}=2$, možemo pretpostaviti da je $\dfrac{\sqrt{q}+1}{q}>c$.
Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\dfrac{\sqrt{q}+1}{q}$, skoro svi članovi niza (b_n) su veći od c.

Drugo rešenje. a) Neka $f:[1,+\infty[\to R$, funkcija data formulom $f(x)=x^{-\frac{3}{2}}$. Ova funkcija je monotono opadajuća pa je zato b_n donja Darbuova suma ove funkcije za podelu $1=a_0\leqslant a_1\leqslant\ldots\leqslant a_n$ intervala $[1, a_n]$. Zato je

$$b_n\leqslant\int_1^{a_n}x^{-\frac{3}{2}}\,dx<\int_1^{+\infty}x^{-\frac{3}{2}}\,dx=2.$$

b) Kako je

$$\int_1^{+\infty}x^{-\frac{3}{2}}dx=2,$$

postoji $\alpha>1$, takav da je

$$\int_1^{\alpha} x^{-\frac{3}{2}}\,dx>c.$$

Neka je $1=a_0<a_1<\ldots<a_m=\alpha$ podela intervala $[1, \alpha]$ za koju je donja Dorbuova suma funkcije f veća od c. Neka je (a_n) rastući niz čiji su prvi članovi $a_0, a_1, \ldots, a_m$. Nejednakost $b_n>c$ očigledno važi za svaki $n\geqslant m$.

XII. 4.

Prvo rešenje. Lema: Među šest uzastopnih prirodnih brojeva postoji jedan koji je uzajamno prost s preostalima.

Dokaz leme. Među šest uzastopnih prirodnih brojeva nalaze se tri uzastopna neparna broja. Jedan od njih je deljiv sa 3 i najviše jedan je deljiv sa 5. Prema tome, među šest uzastopnih prirodnih brojeva postoji jedan koji nije deljiv ni sa 2, ni sa 3, ni sa 5. Taj broj je uzajamno prost sa ostalima, jer najveći zajednički delilac dva broja čija razlika nije veća od 5 može biti samo jedan od brojeva 1, 2, 3, 4 ili 5. Time je lema dokazana.

Pretpostavimo da se skup $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ može podeliti na dva skupa tako da je proizvod elemenata jednog od njih jednak proizvodu elemenata drugog. Među elementima polaznog skupa postoji jedan koji je uzajamno prost sa ostalima. Kako je on činilac jednog proizvoda, on deli drugi proizvod. Ovo je moguće samo ako je taj broj 1. Polazni skup sadrži 1 samo ako je $n=1$. U skupu $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ samo je jedan broj deljiv sa 5. Zato je jedan od proizvoda deljiv sa 5 a drugi nije, što je nemoguće, jer su proizvodi jednaki.

Dakle, u skupu prirodnih brojeva ne postoji broj n koji zadovoljava dato svojstvo.

Drugo rešenje. Neka je skup $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ razložen na dva skupa A i B. Neka su a i b proizvodi elemenata skupova a i b.

Ako jedan od ova dva skupa, recimo A, ima manje od tri elementa, onda je $a\neq b$. Zaista: za $n=1$ $ab=720$ nije potpun kvadrat. Za $n>1$ očigledno važe nejednakosti $n+4\leqslant n(n+1)$ i $n+5<(n+3)(n+4)$ pa je zato $(n+4)(n+5)<n(n+1)(n+2)(n+3)$. Kako je $a\leqslant(n+4)(n+5)$ i $b\geqslant n(n+1)(n+2)(n+3)$, to je $a<b$.

Dalje razmatramo slučajeve u kojima A i B imaju po tri elementa. Pretpostavljamo da $n\in A$.

Ako $n+5 \in B$, onda je $a<b$. Zaista, $a \leqslant n(n+3)(n+4)$, $b \geqslant (n+1)(n+2)(n+5)$ i $n(n+3)(n+5)<(n+1)(n+2)(n+5)$, jer je $n(n+3)<<(n+1)(n+2)$ i $n+4<n+5$.

Ako je $n+5 \in A$, onda je ispunjena jedna od sledećih četiri mogućnosti.

(i) $a=n(n+1)(n+5)$ $b=(n+2)(n+3)(n+4)$,

(ii) $a=n(n+2)(n+5)$ $b=(n+1)(n+3)(n+4)$,

(iii) $a=n(n+3)(n+5)$ $b=(n+1)(n+2)(n+4)$,

(iv) $a=n(n+4)(n+5)$ $b=(n+1)(n+2)(n+3)$.

Lako je pokazati da je svakom od ova četiri slučaja $a \neq b$. Npr. u slučaju (i) je $a=b$ ako i samo ako je $n^2+7n+8=0$, a jednačina $t^2+7t++8=0$ nema ni jedno rešenje u skupu prirodnih brojeva.

Dakle, ne postoji pirodan broj koji zadovoljava dati uslov.

Treće rešenje. Pretpostavimo da postoji prirodan broj n koji zadovoljava dati uslov. Tada je proizvod $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$ potpun kvadrat.

Među brojevima $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ ni jedan nije deljiv sa 7 (zašto?) pa zato oni formiraju redukovan sistem ostataka po modulu 7. Zato je

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \equiv 6! \equiv -1 \pmod 7$$

Kongruencija

$$x^2 \equiv -1 \pmod 7$$

nema rešenja, jer je

$$(-1)^{\frac{7-1}{2}} \equiv -1 \pmod 7.$$

Kako nas polazna pretpostavka dovodi do kontradikcije, sledi da ni jedan prirodan broj ne zadovoljava dati uslov.

XII. 5.

Prvo dokažimo da su naspramne ivice tetraedra $ABCD$ uzajamno normalne. Neka je H ortocentar trougla ABC. Projekcija prave CD na ravan ABC je prava CH. Kako je $AB \perp CH$, to je, prema teoremi triju normala $AB \perp CD$. Na sličan način se pokazuje da je $BC \perp DA$ i $CA \perp DB$.

Dokažimo da su svi ivični uglovi kod temena D pravi. Ugao BDC je prav prema pretpostavci. Kako je $CD \perp BD$ i $CD \perp AB$, to je $CD \perp ABD$. Sledi da je ugao CDA prav. Na sličan način se pokazuje da je ugao ADB prav.

Prema Pitagorinoj teoremi važe jednakosti:

$$AB^2 = DA^2 + DB^2, \quad BC^2 = DB^2 + DC^2 \text{ i } CA^2 = DC^2 + DA^2.$$

Data nejednakost je ekvivalentna nejednakosti

$$(AB+BC+CA)^2 \leqslant 3(AB^2+BC^2+CA^2),$$

a ova nejednakosti

$$0 \leqslant (AB-BC)^2 + (BC-CA)^2 + (CA-AB)^2.$$

Poslednja nejednakost očigledno važi. Znak jednakosti važi ako je $AB=BC=CA$. Istovremeno je $DA=DB=DC$.

XII. 6.

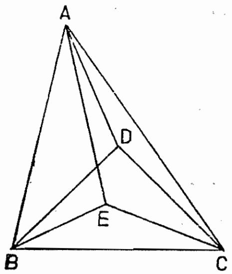
Lema: U ravni je dato 5 tačaka tako da nikoje tri među njima nisu kolinearne. Postoje tri neoštrougla trougla s temenima u tim tačkama.

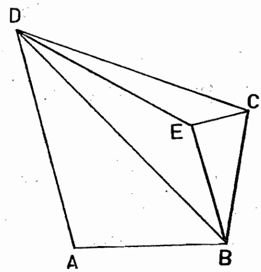
Dokaz leme. Neka je konveksan omotač tih tačaka trougao (sl. 1). Među uglovima ADB, BDC i CDA bar su dva tupa. Slično su među uglovima AEB, BEC i CEA bar dva puta. Dakle postoje bar četiri tupougla trougla s temenima u datim tačkama.

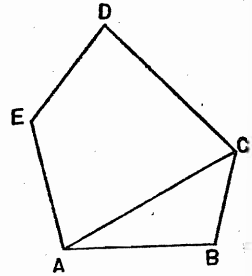
Neka je konvekan omotač tih tačaka konvensan četvorougao (sl. 2). Bar jedan ugao tog četvorougla nije tup. Tačka E pripada unutrašnjosti jednog od trouglova BAD i BCD. Neka je to trougao BCD. Među uglovima BEC, CED i DEB bar su dva tupa. Dakle, u ovom slučaju postoje bar tri neoštrougla trougla s temenima u datim tačkama.

Najzad, neka je konveksan omotač tih tačaka konveksan petougao (sl. 3). Ako bi četiri ugla tog petougla bili oštri, zbir uglova u petouglu bio bi manji od $4 \cdot 90° + 180° = 540°$. Prema tome, bar dva ugla tog petougla nisu oštri. Možemo pretpostaviti da se oni nalaze među uglovima kod temena A, B i C. Bar jedan ugao konveksnog četvorougla $ACDE$ nije oštar. Prema tome, i u ovom slučaju postoje bar tri neoštrougla trougla s temenima u datim tačkama.

Dokaz tvrđenja zadatka. Posmatrajmo sve kombinacije od po 5 tačaka izabranih među datih 100 tačaka. Njih ima C_{100}^5 Za svaku od njih postoje bar tri neoštrougla trougla s temenima u tačkama te kombinacije. No temena svakog trougla uključena su u C_{97}^2 kombinacije. Prema tome, postoji bar $\frac{3 \cdot C_{100}^5}{C_{97}^2}$ neoštrouglih trouglova čija temena pripadaju datom skupu od 100 tačaka. Kako je ukupan broj trouglova







s temenima u datim tačkama C_{100}^3, odnos broja oštrouglih trouglova prema ukupnom broju ne može biti veći od

$$1 - \frac{3\, C_{100}^5}{C_{97}^2\, C_{100}^3} = 0{,}7$$

što je i trebalo dokazati.

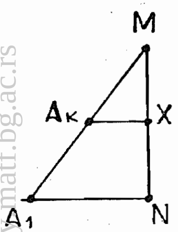
XIII. 1.

Za $n=3$ je leva strana nejednakosti jednaka $\frac{1}{2}[(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+(a_2-a_3)^2]$. Da bismo skratili dokaz za $n=5$ predpostavimo da je $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4 \geqslant a_5$. Na ovu predpostavku imamo pravo s obzirom da je leva strana nejednakosti simetrična u odnosu na a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. S obzirom da je $a_1-a_3 \geqslant a_2-a_3$, $a_1-a_4 \geqslant a_2-a_4$, $a_1-a_5 \geqslant a_2-a_5$ sledi da je $(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5) \geqslant 0$. Takođe je $(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5) \geqslant 0$ kao i $(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)+(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4) \geqslant 0$, što znači da je iskaz za $n=5$ tačan.

Za $n=4$ možemo da uzmemo $a_1=0$, $a_2=a_3=a_4=1$, a za $n>5$, $a_1=a_2= \ldots =a_{n-4}=0$, $a_{n-3}=a_{n-2}=a_{n-1}=2$, $a_n=1$ i na taj način zaključujemo da tvrđenje navedeno u postavci zadatka nije tačno.

XIII. 2.

Označimo sa P poliedar koji je homotetičan poliedru P_1 sa centrom homotetije A_1 i koeficijentom homotetije 2. Neka je X neka tačka poliedra A_k, $k \in \{2, 3, \ldots 9\}$. Imamo $\vec{A_1X} = \vec{A_1A_k} + \vec{A_kX}$. Neka su M i N takve tačke u prostoru da je $\vec{A_1M} = 2\vec{A_1A_k}$, $\vec{A_1N} = 2\vec{A_kX}$. Tačke



M i N pripadaju poliedru P; tačka X pripada duži MN, a samim tim pripada P jer je P konveksan. Zaključujemo da poliedar P sadrži svih 9 poliedara $P_1, P_2, \ldots, P_9$, a zapremina mu je 8 puta veća od zapremine svakog od njih što znači da neka dva poliedra od $P_1, P_2, \ldots, P_9$ imaju bar jednu zajedničku unutrašnju tačku.

XIII. 3.

U dokazu će biti primenjena Euler-ova teorema, prema kojoj je za uzajamno proste prirodne brojeve a i n broj $a^{\varphi(n)}-1$ deljiv brojem n; $\varphi(n)$ označava broj prirodnih brojeva koji nisu veći od n, a deljivi su sa n. (Tako je $\varphi(2)=1$, $\varphi(3)=2$, $\varphi(4)=2, \ldots, \varphi(8)=4, \ldots$). Izvedimo dokaz primenom matematičke indukcije. Predpostavimo da su $k_1, k_2, \ldots, k_s$ prirodni brojevi takvi da su brojevi $2^{k_1}-3$, $2^{k_2}-3$, $\ldots, 2^{k_s}-3$ svaka dva uzajamno prosti. Dokažimo da je broj $2^{\varphi(n)}-3$ uzajamno prost sa svakim od ovih brojeva.

Po Eulerovoj teoremi je $2^{\varphi(n)}-1$ deljiv sa n, a time je $2^{\varphi(n)}-1$ deljiv sa $2^{k_\alpha}-3$ za svako $\alpha=1, 2, \ldots, s$. Pretpostavimo da $2^{\varphi(n)}-3$ i $2^{k_\alpha}-3$ imaju zajednički činilac q. Broj q je onda činilac i broja $2^{\varphi(n)}-1$, jer je $2^{\varphi(n)}-1$ deljiv sa $2^{k_\alpha}-3$. Dalje zaključujemo da je q činilac broja $(2^{\varphi(n)}-1)-(2^{\varphi(n)}-3)$, tj. broja 2.

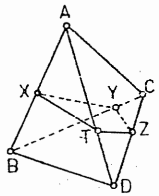
Jedina mogućnost je da bude $q=1$ jer je $2^{\varphi(n)}-1$ neparan broj. To znači da su $2^{\varphi(n)}-3$ i $2^{k_\alpha}-3$ uzajamno prosti za svako $\alpha \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Možemo da stavimo $k_{s+1}=\varphi(n)$. Svaka dva broja skupa

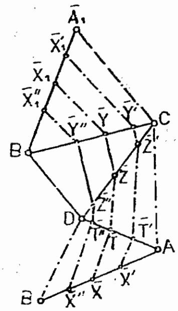
$$\{2^{k_1}-3, 2^{k_2}-3, \ldots, 2^{k_{s+1}}-3\}$$

su uzajamno prosti. Tvrđenje je tačno za $s=1$, pa je time matematičkom indukcijom izveden dokaz za svaki prirodan broj. To je (u ovom slučaju) dovoljno da su u beskonačnom nizu $2^{k_1}-3, 2^{k_2}-3, \ldots$ čiji se članovi konstruišu ovim postupkom svaka dva broja uzajamno prosti.

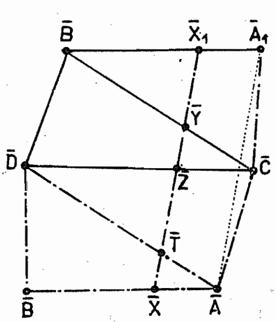
XIII. 4.

Pretpostavimo da su X, Y, Z, T unutrašnje tačke ivica AB, BC, CD, DA i da je pritom poligonalna linija $XYZTX$ minimalne dužine. Neka je X' tačka koja se nalazi između X i A na duži XA, označićemo ovako: $X—X'—A$. Slično neka su X'', Y', Y'', Z', Z'', T', T'' tačke za koje je $B—X''—X$, $B—Y''—Y$, $Y—Y'—C$, $C—Z'—Z$, $Z—Z''—D$, $D—T''—T$, $T—T'—A$. Možemo da izaberemo položaje tačaka X', X'', Y', . . . , T'' tako da su duži XX' i $X''X$ jednake kao i $X'Y' \| X''Y'' \| XY$, $Y'Z' \| Y''Z'' \| YZ$, $Z'T' \| ZT \| Z''T''$. XY je srednja linija trapeza čije su paralelne stranice $X'Y'$ i $X''Y''$; slično i YZ, ZT, TX su srednje linije odgovarajućih trapeza. To znači da je zbir dužina izlomljenih linija $X'Y'Z'T'X'$ i $X''Y''Z''T''X''$ jednak dvostrukoj dužini izlomljene linije $XYZTX$. Kako po pretpostavci $XYZTX$ ima svojstvo minimalnosti, to su sve tri ove linije iste (minimalne) dužine. Razvijajući tetrader u mrežu u ravan tako što ga rasečemo po ivicama AB, AC, BD (na slici), zaključujemo da u oborenom položaju moraju te poligonalne linije da budu prave tj. duži, a zatim da su oba oborena položaja duži AB međusobno paralelna: $\overline{A}\overline{B} \| \overline{A}_1\overline{B}_1$. Posledica toga je da je $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA$, čime je dokazano $a)$.





Ako je $\sphericalangle DAB + BCD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA$ postoji $XYZTX$ sa opisanim svojstvima, jer ne bi u suprotnom svi uglovi strana tetraedra bili oštri. Postoji i beskonačno mnogo položaja tačaka X', Y', Z', T', X'', Y'', Z'', T'' sa opisanim svojstvom, znači da linija sa opisanim svojstvom ima beskonačno mnogo. Linije $XYZTX$ minimalne dužine jednake su duži $\overline{A}\overline{A}_1$. ($\overline{A}$ i $\overline{A}_1$ su oboreni položaji tačke A pri opisanom razvijanju u mrežu tetraedra $ABCD$). S obzirom da je $\overline{B}\overline{A} \| \overline{B}_1\overline{A}_1$ to je $\sphericalangle \overline{B}\overline{A}\overline{D} + \sphericalangle \overline{D}\overline{A}\overline{C} + \sphericalangle \overline{A}\overline{C}\overline{A}_1 + \sphericalangle \overline{C}\overline{A}_1\overline{B}_1 = 2\pi$, tj.

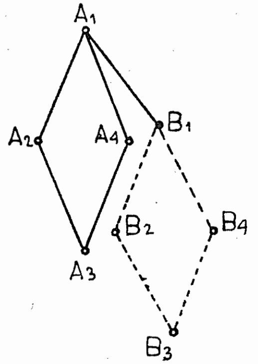


$\sphericalangle \overline{A}\overline{C}\overline{A}_1 = 2\pi - \alpha$. Trougao $\overline{A}\overline{C}\overline{A}_1$ je jednakokraki pa je $\overline{A}\overline{A}_1 = 2\overline{A}\overline{C} \sin\frac{\alpha}{2}$, što znači da je $\overline{X}_1\overline{X} = 2\overline{A}\overline{C} \sin\frac{\alpha}{2} = 2AC \sin\frac{\alpha}{2}$.

XIII. 5.

Tvrđenje zadatka je tačno za $m=1$. (Uzmu se 2 tačke na rastojanju jedan). Predpostavimo da je tvrđenje tačno za prirodan broj m.

Pri tome neka je $S=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Oko svake tačke A_i, $i=1, 2, \ldots, n$, opišimo jedinićnu kružnicu u toj ravni. Onih tačaka koje pripadaju bar dvema od tih kružnica ima konačno mnogo. Neka su to tačke $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$. Neka je e jednačini vektor različit od bilo kojeg od vektora $\overrightarrow{A_i A_j}$, $\overrightarrow{A_i Q_k}$; $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Pri translaciji za vektor $\vec{e}$ neka se tačka A_i preslika u tačku B_i, ($i=1, 2, \ldots, n$).



Za slučaj $m+1$ možemo da uzmemo za S skup $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n\}$. Svaka tačka ovog skupa je na rastojanju 1 od tačno $m+1$-ne tačke ovog skupa. Time je tvrđenje zadatka dokazano primenom matematičke indukcije.

XIII. 6.

Pretpostavimo da s-ta kolona ima svojstvo da je zbir elemenata te kolone manji ili jednak od zbira elemenata ma koje vrste odnosno kolone. Označimo zbir u s-toj koloni sa m. Neka je $m<n$. Svaka vrsta koja ima na s-tom mestu nulu ima zbir elemenata veći ili jednak $n-m$. Izdvojimo takvih $n-m$ vrsta. (Makar toliko ih ima). Ostalih m imaju zbirove elemenata veće ili jednake od m, tako da je ukupan zbir elemenata u tablici $\geqslant (n-m)^2+m^2$. Prema nejednakosti kvadratne i aritmetičke sredine je

$$\sqrt{\frac{(n-m)^2+m^2}{2}} \geqslant \frac{n-m+m}{2} = \frac{n}{2}, \text{ pa je } (n-m)^2+m^2 \geqslant \frac{n^2}{2}.$$

XIV. 1.

Izračunajmo prvo koliko nepraznih podskupova ima skup od 10 datih brojeva. Podskupova s jednim elementom ima $\binom{10}{1}$, s dva $\binom{10}{2}$ itd. Dakle, skup od 10 datih brojeva ima

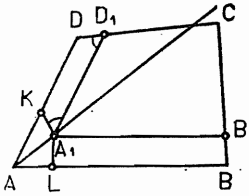
$$\binom{10}{1}+\binom{10}{2}++\ldots+\binom{10}{10}=(1+1)^{10}-1=1023$$

neprazna podskupa.

Kako je 99 najveći dvocifren broj i kako podskup može imati najviše 10 elemenata, to zbir brojeva iz svakog podskupa nije veći od $99 \cdot 10 = 990$. Dakle, može biti najviše 990 različitih zbirova. A obzirom da ima 1023 podskupa, a 990 različitih zbirova to postoje dva podskupa sa jednakim zbirovima elemenata. Ako ti podskupovi imaju zajedničkih elemenata, onda te elemente odbacimo (iz oba) — zbirovi i dalje ostaju jednaki.

XIV. 2.

Neka je teme najmanjeg ugla četvorougla tačka A. Ostala temena označimo sa B, C i D. Kroz tačku A, unutar ugla BAD konstruišemo polupravu. Na toj polupravoj postoji tačka A_1 takva da prave konstruisane kroz A_1 paralelno stranicama AB i AD seku stranice BC i AD, redom (dokažite!). Označimo presečne tačke sa B_1 u D_1, redom. Četvorouglo $A_1B_1CD_1$ je tetivan, jer ima uglove jednake odgovarajućim uglovima četvorougla $ABCD$. Dalje, kako je $\measuredangle BAD$ najmanji ugao četvorougla $ABCD$, to je $\measuredangle A_1AD < \measuredangle D_1DA$. Odatle sledi da na stranici AD postoji tačka K, takva da je $\measuredangle A_1KD = \measuredangle D_1DK$. Slično, na stranici AB postoji tačka L, takva da je $\measuredangle A_1LB = \measuredangle B_1BL$. Lako je dokazati da je četvorougao ALA_1K tetivan:



$$\measuredangle ALA_1 + \measuredangle AKA_1 = (\pi - \measuredangle ABC) + (\pi - \measuredangle CDA) = 2\pi - (\measuredangle ABC + \measuredangle CDA) = \pi.$$

Četvorougao A_1D_1DK je takođe tetivan jer je on jednakokraki trapez (kao i LBB_1A_1). Jednakokraki trapez LBB_1A_1 razbijemo na $n-3$ dela pravama paralelnim stranici AB. Tako dobijamo $n-3$ jednakokraka trapeza; oni su tetivni, pa je dokaz završen.

XIV. 3.

Dokazaćemo da najveći stepen α prostog broja p takav da se p^α sadrži u brojiocu datog razlomka nije manji od najvećeg stepena β prostog broja p, takvog da se p^β sadrži u imeniocu datog razlomka. Samim tim, tvrđenje zadatka će biti dokazano.

Lema 1. Ako je p prost broj, k prirodan broj i a najveći stepen broja p, takav da se p^a sadrži u $k!$, onda je

$$a = \left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k}{p^2}\right] + \left[\frac{k}{p^3}\right] + \dots$$

gde je sa $[x]$ označen ceo deo broja x (zbir je konačan, jer za $p^i > n$ važi $\left[\frac{n}{p^i}\right] = 0$).

Dokaz. Dokaz ćemo izvesti indukcijom. Tvrđenje je, jasno, tačno za $1!$. Pretpostavimo da je tačno za $(k-1)!$ i neka je b najveći stepen broja p takav da se p^b sadrži u k. Kako je $k! = k \cdot (k-1)!$, to treba dokazati da je

$$\left(\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{p^2}\right]+\left[\frac{k}{p^3}\right]+\dots\right)-\left(\left[\frac{k-1}{p}\right]+\left[\frac{k-1}{p^2}\right]+\left[\frac{k-1}{p^3}\right]+\dots\right)=b,$$

a ova jednakost sledi iz jednakosti

$$\left[\frac{k}{p^i}\right]-\left[\frac{k-1}{p^i}\right]=\begin{cases} 1, & \text{ako se } p^i \text{ sadrži } u\, k \\ 0, & \text{ako se } p^i \text{ ne sadrži } u\, k \end{cases}$$

Lema 2. Ako su x i y nenegativni brojevi, onda je

$$[2x]+[2y] \geqslant [x]+[y]+[x+y].$$

Dokaz. Neka je $x = [x]+\alpha$, $y = [y]+\beta$, gde je $0 \leqslant \alpha, \beta < 1$. Ako je $\alpha+\beta<1$, onda je $[x+y]=[x]+[y]$, pa je $[2x]+[2y] \geqslant 2[x]+2[y] = [x]+[y]+[x+y]$. Ako je $\alpha+\beta \geqslant 1$, onda je $2\alpha \geqslant 1$ ili $2\beta \geqslant 1$. Neka je $2\alpha \geqslant 1$. Tada je $[x+y]=[x]+[y]+1$ i $[2x]=2[x]+1$, pa je $[2x]+[2y] \geqslant 2[x]+2[y]+1=[x]+[y]+[x+y]$. Time je dokaz leme 2. završen.

Neka je j takav prirodan broj da je $p^{j+1}>2m$ i $p^{j+1}>2n$. Tada je $p^{j+1}>m+n$, pa lema 1. daje:

$$\alpha=\left[\frac{2n}{p}\right]+\left[\frac{2n}{p^2}\right]+\dots+\left[\frac{2n}{p^j}\right]+\left[\frac{2m}{p}\right]+\left[\frac{2m}{p^2}\right]+\dots+\left[\frac{2m}{p^j}\right],$$

$$\beta=\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\dots+\left[\frac{m}{p^j}\right]+\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\dots+\left[\frac{n}{p^j}\right]+\left[\frac{m+n}{p}\right]+$$
$$+\left[\frac{m+n}{p^2}\right]+\dots+\left[\frac{m+n}{p^j}\right]$$

Iz leme 2 dobijamo (stavljajući $x=\frac{m}{p^i}$, $y=\frac{n}{p^i}$; $i=1,2,\dots,j$):

$$\left[\frac{2m}{p^i}\right]+\left[\frac{2n}{p^i}\right] \geqslant \left[\frac{m}{p^i}\right]+\left[\frac{n}{p^i}\right]+\left[\frac{m+n}{p^i}\right],$$

pa je $\alpha \geqslant \beta$, *a* to je i trebalo dokazati.

XIV. 4.

Jasno je da je

$$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=a$$

rešenje datog sistema, za svaki realan broj a. Dokazaćemo da drugih rešenja nema. Kako se dati sistem ne menja pri cikličnoj permutaciji nepoznatih, to možemo pretpostaviti da je $x_1 \geqslant x_i$, $i=1, 2, 3, 4, 5$. Iz prve i pete nejednačine dobijamo da je $x_2^2-x_3x_5 \leqslant 0$ i $x_5^2-x_2x_4 \leqslant 0$. Odatle sledi, u slučaju da x_2, x_3, x_4, x_5 nisu međusobno jednaki, da je $x_3 \geqslant x_i$, $i=2, 3, 4, 5$ ili $x_4 \geqslant x_i$, $i=2, 3, 4, 5$. Lako se vidi da se dati sistem nejednačine ne menja ako u njemu x_3 i x_4 promene mesta i, istovremeno, promene mesta x_2 i x_5. Zato se može pretpostaviti da je $x_3 \geqslant x_i$, $i=2, 3, 4, 5$. Kako je $x_1 \geqslant x_3 \geqslant x_i$ $(i=2, 3, 4, 5)$, to je $x_1x_3 \geqslant x_4^2$ i $x_1x_3 \geqslant x_5^2$, pa iz četvrte nejednačine sledi da je $(x_4^2-x_1x_3)(x_5^2-x_1x_3)=$ $=0$. Dakle, ili je $x_1x_3=x_4^2$, ili $x_1x_3=x_5^2$. Iz treće nejednačine onda sledi ili $x_1=x_3=x_4$, ili $x_1=x_3=x_5$. U prvom slučaju bar jedan od x_2, x_5 mora biti jednak sa $x_1=x_3=x_4$, zbog treće nejednačine, pa su svi x_i međusobno jednaki. U drugom slučaju je $x_5 \geqslant x_i$, $i=2, 3, 4$, pa je $x_2=x_3=$ $=x_4=x_5$. Kako je i $x_1=x_3$, to su i u ovom slučaju svi x_i međusobno jednaki.

XIV. 5.

Neka je $M=sup\,|f(x)|$ (tj. neka je M najmanji od svih brojeva k za koje je $|f(x)| \leqslant k$ za svako x). Broj M postoji, jer je $|f(x)| \leqslant 1$ i $M \neq 0$ jer funkcija f nije identički jednaka nuli. Tada je

$$|2f(x)g(y)|=|f(x+y)+f(x-y)| \leqslant |f(x+y)|+|f(x-y))| \leqslant 2M,$$

tj. $|f(x)||g(y)| \leqslant M$ za svako x i y. Neka je za neko y_0, $|g(y_0)|>1$. Tada je, za svako x, $|f(x)| \leqslant \dfrac{M}{|g(y_0)|}<M$, pa M nije supremum od $|f(x)|$. Kontradikcija.

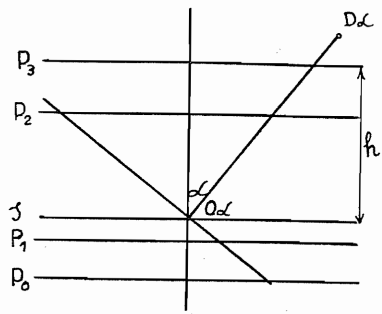
XIV. 6.

Koristićemo sledeće tvrđenje:

Lema. Neka su u nekoj ravni date tri različite paralelne prave. Tada se može konstruisati jednakostraničan trougao, tako da na svakoj pravoj leži po jedno teme trougla. Pri tome, dužina stranice tog trougla ne zavisi od načina konstrukcije i jednoznačno je određena rastojanjima između pravih.

Dokaz ovog tvrđenja prepuštamo čitaocu (koristiti, za konstrukciju, rotaciju za 60° oko bilo koje tačke neke od pravih).

Neka su π_0, π_1, π_2 i π_3 date ravni; možemo smatrati da su π_1, π_2 i π_3 sa iste strane ravni π_0 i njihova rastojanja od π_0 označimo sa d_1, d_2, d_3; $0<d_1<d_2<d_3$. Posmatrajmo proizvoljnu ravan ρ_α čija normala obrazuje ugao $\alpha (\alpha\neq 0)$ sa normalom ravni π_0. Ona seče π_0, π_1 i π_2 po paralelnim pravima $l_0^\alpha, l_1^\alpha, l_2^\alpha$ na koje možemo primeniti lemu. Primetimo da su rastojanja od l_0^α do l_1^α i l_2^α jednaka $\dfrac{d_1}{\sin\alpha}$ i $\dfrac{d_2}{\sin\alpha}$, redom. Označimo trougao konstruisan na osnovu leme sa $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ a, dužinu njegove stranice sa a_α. Homotetijom u ravni ρ_α, s centrom u A_α i koeficijentom $k=\sin\alpha$ trougao $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ preslikamo u jednakostraničan trougao stranice $a_\alpha.\sin\alpha$ s temenima na paralelnim pravama, od kojih su dve udaljene od treće za d_1 i d_2. Dužina stranice dobijenog je jednoznačno određena veličinama d_1 i d_2 i ona je konstantna ako je fiksiran položaj posmatranih ravni. Tu dužinu označimo sa a. Onda je $a=a_\alpha \sin\alpha$, ili $a_\alpha=\dfrac{a}{\sin\alpha}$.



Izračunajmo sada na kom se rastojanju od π_0 nalazi centar O_α trougla $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$. Neka je E_α središte stranice $B_\alpha C_\alpha$. Posmatrajući ravan koja sadrži pravu $B_\alpha C_\alpha$ i normalna je na π_0, primećujemo da je rastojanje tačke E_α od π_0 jednako $\dfrac{1}{2}(d_1+d_2)$. Zatim, postavljajući kroz pravu $A_\alpha E_\alpha$ ravan normalnu na π_0 i uzimajući u obzir da je $A_\alpha O_\alpha = \dfrac{2}{3} A_\alpha E_\alpha$, primećujemo da je rastojanje od O_α do π_0 jednako $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{d_1+d_2}{2}=\dfrac{d_1+d_2}{3}$ tj. ono ne zavisi od α. Znači, centri svih mogućih jednakostraničnih trouglova c temenima y π_0, π_1 i π_2 leže u jednoj ravni σ koja je na fiksnom rastojanju od π_0, a samim tim i od π_3. Rastojanje od σ do π_3 označimo sa h.

Konstruišemo pravilan tetraedar $A_\alpha B_\alpha C_\alpha D_\alpha$, čija je osnovica posmatrani trougao $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$, pri čemu biramo, od dve mogućnosti za D_α onu u kojoj je D_α dalje od π_0. Visina $D_\alpha O_\alpha$ konstruisanog tetraedra je $a_\alpha \sqrt{\frac{2}{3}}$ Konstruišemo ravan kroz D_α O_α normalnu na π_0. Iz slike u toj ravni, gde su p_0, p_1, p_2, p_3 s preseci te ravni s ravnima π_0, π_1, π_2, π_3 i σ, primećujemo da je D_α udaljena od σ za $a_\alpha \cos\alpha \sqrt{\frac{2}{3}} = a \cdot \operatorname{ctg}\alpha \sqrt{\frac{2}{3}}$. Da bi teme D_α pripadalo ravni π_3 neophodno je i dovoljno da je nađena udaljenost jednaka h, tj. da je $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{h}{a}\sqrt{\frac{3}{2}}$ Pošto takav ugao α postoji, to je dokaz završen.

XV. 1.

Dokaz ćemo izvesti metodom matematičke indukcije. Jasno, tvrđenje je tačno za $n=1$. Pretpostavimo da je ono tačno za svakih n tačaka koje zadovoljavaju uslove zadatka i dokažimo da je ono tačno i za svake $n+2$ tačke koje zadovoljavaju uslove zadatka (dokazujemo za $n+2$, jer je n neparan broj). Možemo smatrati da su tačke označene tako da je $\sphericalangle(l, \overrightarrow{OP_1}) < \sphericalangle(l, \overrightarrow{OP_2}) < \ldots < \sphericalangle(l, \overrightarrow{OP_{n+2}})$. U ravni u kojoj se nalaze tačke P_i postavljamo koordinatni sistem na sledeći način: y-osa je simetrala $\sphericalangle P_1OP_{n+2}$, a x-osa prolazi kroz tačku O. Tada je, ako su (x_i, y_i) koordinate tačaka P_i y datom koordinatnom sistemu, $y_i \geqslant O$ i $x_1 = -x_{n+2}$, $y_1 = y_{n+2}$, pa je

$$
\begin{aligned}
&|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\ldots+\overrightarrow{OP_{n+2}}|^2=\\
&=(x_1+x_2+\ldots+x_{n+2})^2+(y_1+y_2+\ldots+y_{n+2})^2=\\
&=(x_2+\ldots+x_{n+1})^2+(y_1+y_2+\ldots+y_{n+2})^2\geqslant\\
&\geqslant(x_2+\ldots+x_{n+1})^2+(y_2+\ldots+y_{n+1})^2=\\
&=|\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}+\ldots+\overrightarrow{OP_{n+1}}|^2.
\end{aligned}
$$

Po induktivnoj pretpostavci je $|\overrightarrow{OP_2}+\overleftarrow{OP_3}+\ldots+\overrightarrow{OP_{n+1}}|\geqslant 1$, pa iz prethodnog dobijamo da je $|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\ldots+\overrightarrow{OP_{n+2}}|\geqslant 1$.

XV. 2.

Zadatak ima više rešenja. Jedno od njih je: skup temena dva pravilna šestougla s zajedničkim centrom, koji ne leže u istoj ravni. Dokaz da taj skup tačaka zadovoljava uslove zadatka je lak: ako su A i B tačke koje su temena jednog šestougla, onda se tačke C i D lako nalaze. Ako, pak, tačke A i B nisu temena jednog šestougla, onda su tačke C i D ona temena koja su simetrična sa A i B u odnosu na zajednički centar šestouglova.

XV. 3.

Napišimo datu jednačinu u sledećem obliku:

$$(x^3+x)a+x^2b+x^4+1=0.$$

Ta jednačina je jednačina prave u koordinatnom sistemu aOb za svako x koje je njen realan koren. Neka je (a, b) proizvoljna tačka te prave. Njeno rastojanje od koordinatnog početka je $d=\sqrt{a^2+b^2}$. To rastojanje je najmanje (a samim tim, i a^2+b^2 je najmanje) u slučaju da je ta tačka podnožje normale iz koordinatnog početka na pravu. U tom slučaju je

$$d=\frac{x^4+1}{\sqrt{(x^3+x)^2+x^4}}.$$

Neka je $f(x)=d^2=\dfrac{(x^4+1)^2}{(x^3+x)^2+x^4}$ Tada je Tada je

$$f'(x)=\frac{2x(x^8-1)(x^4+6x^2+1)}{[(x^3+x)^2+x^4]^2}$$

Nule prvog izvoda su $x_1=-1$, $x_2=0$ i $x_3=1$, pa je

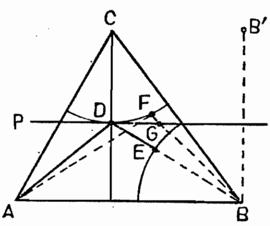
$$\begin{aligned}
&f'(x)<0, \text{ za } x\in(-\infty, -1)\\
&f'(x)>0, \text{ za } x\in(-1, 0)\\
&f'(x)<0, \text{ za } x\in(0, 1)\\
&f'(x)>0, \text{ za } x\in(1, +\infty).
\end{aligned}$$

Dakle, u tačkama x_1 i x_3 su lokalni minimumi funkcije $f(x)$ i tu je $f(x_1)=f(x_3)=\dfrac{4}{5}$. Kako je $f(x)$ opada na intervalu $(\infty, -1)$ i raste na intervalu $(1, +\infty)$, to su nađeni lokalni minimumi ujedno i apsolutni minimumi funkcije $f(x)$. Prema tome, uvek je $a^2+b^2=d^2=f(x)\geq\frac{4}{5}$.

Kako je $x=1$ koren polazne jednačine za $a=-\frac{4}{5}$ i $b=\frac{2}{5}$ $\left(\text{tu je } a^2+b^2=\frac{4}{5}\right)$, to je najmanja vrednost izraza a^2+b^2 jednaka $\frac{4}{5}$

XV. 4.

Neka vojnik polazi iz temena A. Da bi proverio temena B i C, on mora da bude na lukovima poluprečnika $\frac{h}{2}$ (h je visina trougla) s centrima u B i C. Neka je on prvo bio na luku s centrom u C, a zatim na luku s centrom u B. Ako se tome putu doda put do temena B, onda se zadatak svodi na nalaženje najkraćeg puta od A do B uz uslov da se dođe na luk s centrom C. Dokazaćemo da je najkraći takav put put ADB, gde je D središte visine iz C neka je E presečna tačka duži DB i luka s centrom u B, a F proizvoljna tačka na luku s centrom u C. Konstruišemo kroz D pravu $p\,||\,AB$ i preslikamo simetrično tačku B u odnosu na p. Dobijenu tačku označimo sa B', a sa G presečnu tačku duži FB i prave p. Tada je $FA+FB=AF+FG+GB'\geq AB'=AD+DB'=AD+DB$ (tačke A, D, B' su na jednoj pravoj — za dokaz koristiti srednje linije trougla). Dakle, ADB je najkraći put iz A u B, pa je rešenje zadatka put ADE (dokažite da će biti proverena cela oblast!).



XV. 5.

Primetimo da je $b=0$ ako funkcija $f(x)=1\cdot x+b$ pripada G. Tada je, za svako x, $f(x)=x$. Zato možemo smatrati da skup G sadrži bar dve funkcije $f_1(x)=a_1x+b_1$ i $f_2(x)=a_2x+b_2$ za koje je $a_1\neq1$ i $a_2\neq1$. Onda je $x_{f_1}=\frac{b_1}{1-a_1}$ u $x_{f_2}=\frac{b_2}{1-a_2}$ Iz 1° i 2° sledi $g=f_1\circ f_2\in G$, $h=f_2\circ f_1\in G$ i $g\circ h^{-1}\in G$. Računajući dobićemo:

$$g(x)=a_1(a_2x+b_2)+b_1$$

$$h(x)=a_2(a_1x+b_1)+b_2$$

$$h^{-1}(x)=\frac{x-a_2 b_1-b_2}{a_2 a_1} \quad (a_1a_2\neq 0. \text{ po uslovu zadatka})$$

$$g\circ h^{-1}(x)=x+[(a_1b_2+b_1)-(a_2b_1+b_2)]$$

Kako je $g\circ h^{-1}\in {}^1G$ i kako je koeficijent uz x u $g\circ h^{-1}$ jednak 1, to je $(a_1b_2+b_1)-(a_2b_1+b_2)=0$. Odatle

$$\frac{b_1}{1-a_1}=\frac{b_2}{1-a_2}, \quad \text{tj. } x_{f_1}=x_{f_2},$$

što je i trebalo dokazati.

XV. 6.

Dokazaćemo da brojevi

$$b_k=a_1q^{k-1}+a_2q^{k-2}+\ldots+a_{k-1}q+a_k+a_{k+1}q+\ldots+a_nq^{n-k}$$

zadovoljavaju uslove a), b) i c) zadatka. Za uslov a) je to jasno. Ako je $1\leq k\leq n-1$, onda je

$$qb_k-b_{k+1}=a_{k+1}(q^2-1)+\ldots+a_nq^{n-k-1}(q^2-1)<0$$

o analogno:

$$qb_{k+1}-b_k<0$$

pa je i uslov b) zadovoljen.

Konačno,

$$\begin{aligned}b_1+b_2+\ldots+b_n&=a_1+a_2q+a_3q^2+\ldots+a_nq^{n-1}\\&+a_1q+a_2+a_3q+\ldots+a_nq^{n-2}+\ldots+\\&+a_1q^{n-1}+a_2q^{n-2}+a_3q^{n-3}+\ldots+a_n<\\&<(a_1+a_2+\ldots+a_n)(1+2q+2q^2+\ldots+2q^{n-1})\\&\leq(a_1+b_2+\ldots+a_n)\frac{1+q}{1-q}\end{aligned}$$

XVI. 1.

Ukupan broj podeljenih kuglica u igri je

$$N\cdot(p+q+r)=20+10+9=39.$$

No, kako je $N\geqslant 2$ i $p+q+r\geqslant 1+2+3=6$, to je $N=3$ i $p+q+r=13$. S obzirom da je B u poslednjem krugu dobio r kuglica, A ukupno 10, i da je $p+q+r=13>10$, to je on u prva dva kruga morao dobiri po p kuglica. To znači da je C u prava dva kruga dobio bar q kuglica. Da je on bar u jednom krugu dobio r kuglica, ukupno bi imao bar $r+q+$ $+p=13$ kuglica. No, on ih ima samo 9, što znači da je u prvom krugu dobio tačno q kuglica.

Napomena: daljim razmatranjem lako se dobija da je $p=1$, $q=4$, $r=8$ i da je raspored dobijanja kuglica sledeći:

$$A-r, r, q; \quad B-p, p, r; \quad C-q, q, p.$$

XVI. 2.

Neka je D tačka na stranici AB trougla ABC. Primenom sinusne teoreme na trouglove ACD i BCD dobijamo

$$\frac{AD}{\sin\varphi}=\frac{CD}{\sin A} \quad \text{i} \quad \frac{BD}{\sin(C-\varphi)}=\frac{CD}{\sin \mathrm{B}},$$

gde je $\varphi=\sphericalangle ACD$. Odatle

$$AD\cdot BD=CD^2\cdot\frac{\sin\varphi\cdot\sin(C-\varphi)}{\sin A\cdot\sin B}.$$

Prema tome, tačka D koja ispunjava uslove zadatka postoji ako i samo ako postoji ugao φ $(0<\varphi<C)$ za koji je $\sin A\cdot\sin B=\sin\varphi\sin(C-\varphi)$. Pretpostavimo da takva tačka postoji. Tada je

$$\sin A\cdot\sin B=\sin\varphi\cdot\sin(C-\varphi)\leqslant\left[\frac{1}{2}\left(\sin\varphi+\sin(C-\varphi)\right)\right]^2=$$

$$=\left(\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C-2\varphi}{2}\right)^2\leqslant\sin^2\frac{C}{2}.$$

S druge strane, ako je $\sin A\cdot\sin B\leqslant\sin^2\frac{C}{2}$, posmatrajmo funkciju $f(x)=\sin X\cdot\sin(C-X)$. Ona je neprekidna na odsečku $\left[0,\frac{C}{2}\right]$ i važi $f(0)=0$ i $f\left(\frac{C}{2}\right)=\sin^2\frac{C}{2}$. Zbog $f(0)<\sin A\cdot\sin B\leqslant f\left(\frac{C}{2}\right)$, postoji φ, $o<\varphi\leqslant\frac{C}{2}$, tako da je $f(\varphi)=\sin\varphi\cdot\sin(C-\varphi)=\sin A\cdot\sin B$.

XVI. 3.

Razvijanjem izraza $(1+\sqrt{8})^{2n+1}$ po binomnoj teoremi dobijamo

$$(1+\sqrt{8})^{2n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}\sqrt{8}^{2k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}\sqrt{8}^{2k+1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}\cdot 8^{k}+\sqrt{8}\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}\cdot 8^{k}=a_n+b_n\sqrt{8},$$

gde su a_n i b_n celi brojevi. Treba dokazati da nijedan od brojeva b_1, b_2, ... nije deljiv sa 5.

Prvi način

Iz $a_0+b_0\sqrt{8}=1+\sqrt{8}$ dobijamo $a_0=b_0=1$. Za $n\geqslant 0$ važi

$$a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{8}=(1+\sqrt{8})^{2n+3}=(1+\sqrt{8})^{2}(1+\sqrt{8})^{2n+1}=$$

$$=(9+2\sqrt{8})(a_n+b_n\sqrt{8})=(9a_n+16b_n)+(2a_n+9b_n)\sqrt{8},$$

odakle

$$a_{n+1}=9a_{n+}+16b_n$$

$$b_{n+1}=2a_n+9b_n \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Odavde se lako dobija $b_1=11\equiv 1 \pmod 5$ i $b_{n+2}=18b_{n+1}-49b_n\equiv \equiv 3b_{n+1}+b_n \pmod 5$ za $n=0, 1, 2, \ldots$. Iz poslednje relacije dobijaju se ostaci brojeva $b_0, b_1, \ldots, b_{13}$ pri deljenju sa 5:

$$1, 1, 4, 3, 3, 2, 4, 4, 1, 2, 2, 3, 1, 1,$$

odakle se zaključuje da se ostaci brojeva b_n pri deljenju sa 5 periodično ponavljaju i da nijedan od njih nije 0.

Drugi način

Množeći relacije

$$(1+\sqrt{8})^{2n+1}=a_n+b_n\sqrt{8}$$

$$(1-\sqrt{8})^{2n+1}=a_n-b_n\sqrt{8}$$

dobijamo $a_n^2+7^{2n+1}=8\cdot b_n^2$. Ako bi neki od brojeva b_n bio deljiv sa 5, tada bi broj $a_n^2+7^{2n+1}$ bio deljiv sa 10. Međutim, ovo je nemoguće, jer poslednja cifra broja a_n^2 može biti 0, 1, 4, 5, 6 ili 9, a broja 7^{2n+1} samo 3 ili 7.

XVI. 4.

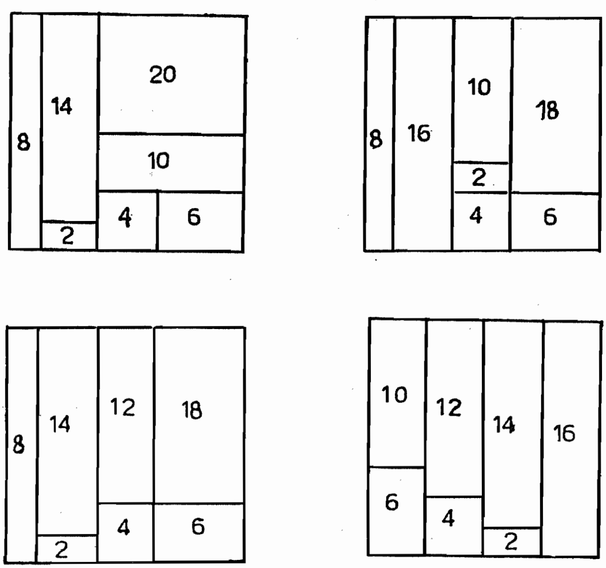
Ukupan broj belih polja je $a_1+a_2+\ldots+a_p=32$. S druge strane, zbog stroge monotonije brojeva a_i, važi

$$a_1+a_2+\ldots+a_p \geqslant 1+2+\ldots+p=\frac{p(p+1)}{2},$$

odakle dobijamo $p\leqslant 7$. Broj 32 može se na sledećih 5 načina prikazati u obliku zbira 7 međusobno različitih prirodnih brojeva:

$$\begin{aligned}32&=1+2+3+4+5+6+11=\\&=1+2+3+4+5+7+10=\\&=1+2+3+4+5+8+9=\\&=1+2+3+4+6+7+9=\\&=1+2+3+5+6+7+8.\end{aligned}$$

Prvom od ovih načina ne odgovara nijedno razlaganje šahovske table, jer se na njoj ne može smestiti pravougaonik sa 22 polja ($a_7=11$). Ostalim slučajevima odgovaraju razlaganja prikazana na slici



XVI. 5.

Zbog pozitivnosti brojeva a, b, c, d važe nejednakosti

$$\frac{a}{a+b+c+d}<\frac{a}{a+b+d}<\frac{a}{a+b}$$

$$\frac{b}{a+b+c+d}<\frac{b}{a+b+c}<\frac{b}{a+b}$$

$$\frac{c}{a+b+c+d}<\frac{c}{b+c+d}<\frac{c}{c+d}$$

$$\frac{d}{a+b+c+d}<\frac{d}{a+c+d}<\frac{d}{c+d}.$$

Njihovim sabiranjem dobija se $1<S<2$. Zamenjujući vrednosti $a=1$, $b=x$, $c=1-x$, $d=(1-x)x$, gde je $0<x<1$, dobija se

$$S=f(x)=\frac{1}{1+2x-x^2}+\frac{x}{2}+\frac{1-x}{1+x-x^2}+\frac{(1-x)x}{2-x^2}.$$

Kako je $f(x)$ neprekidna funkcija za $0<x<1$ i $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=2$ i $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=1$ zaključujemo da je traženi skup vrednosti interval $(1, 2)$.

XVI. 6.

Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_k$ takvi celi brojevi za koje je $P(a_i)=1, i=1, 2, \ldots, k$ i $b_1, b_2, \ldots, b_l$ celi brojevi za koje je $P(b_j)=-1, j=1, 2, \ldots, l$. Tada su a_i koreni polinoma $P(x)-1$, pa važi

(1) $$P(x)-1=(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a\ )\cdot Q(x),$$

gde je $Q(x)$ polinom sa celim koeficijentima.

Ako je $l<2$, važi $k+l<k+2\leqslant s(P)+2$. Ako je $l>2$, stavljajući u (1) $x=b_j$ $(j=1, 2, \ldots, l)$ dobijamo

$$-2=P(b_j)-1)=(b_j-a_1)(b_j-a_2)\ldots(b_j-a_k)\cdot Q(b_j),$$

odakle zaključujemo da je svaki od brojeva b_j-a_i $(i=1, 2, \ldots, k;$ $j=1, 2, \ldots, l)$ delitelj broja 2. Ako bi bilo $k>2$ i npr. $a_1<a_2<a_3$, $b_1<b_2<b_3$ i $a_1<b_1$, dobili bismo $b_3-a_1\geqslant 3$, što je nemoguće. Zato je $k<2$, pa je $k+l<2+l<s(P)+2$.

XVII. 1.

1. Rešenje. Lako je pokazati da je data nejednakost ekvivalentna nejednakosti

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i < \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Ovu nejednakost možemo dokazati metodom matematičke indukcije.

Nejednakost je očigledno tačna za $n=1$.

Pretpostavimo da je nejednakost tačna za neki prirodan broj n i dokažimo da je tačna za $n+1$. Neka je $z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}$ permutacija brojeva $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$. Postoje dve mogućnosti

1° $z_{n+1}=y_{n+1}$. U ovom slučaju je $z_1, z_2, \ldots, z_n$ permutacija brojeva $y_1, y_2, \ldots, y_n$, pa je prema induktivnoj pretpostavci

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i < \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Dodavanjem levoj i desnoj strani $x_{n+1} y_{n+1}$ dobijamo nejednakost koju dokazujemo.

2° $z_k=y_{n+1}$, $k \neq n+1$. Neka je $z_1', z_2', \ldots, z_n', z'_{n+1}$ permutacija brojeva $z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}$ koja se dobija transponovanjem k-tog i $n+1$-og člana. Tada je

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i z_i' - \sum_{i=1}^{n+1} x_i z_i = x_k y_l + x_{n+1} y_{n+1} - x_k y_{n+1} - x_{n+1} y_l$$

$$= (x_k - x_{n+1})(y_l - y_{n+1}) \geqslant 0,$$

gde je $y_l = z_{n+1}$. Kako je

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i z_i < \sum_{i=1}^{n+1} x_i z_i' .$$

dovoljno je dokazati nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i z_i' < \sum_{i=1}^{+1} x_i y_i$$

Ova nejednakost pripada slučaju 1° koji je već dokazan.

Drugo rešenje. Sledeće nejednakosti očigledno važe:

$$x_1-x_2\geqslant 0,\ x_2-x_3\geqslant 0,\ \ldots,\ x_{n-1}-x_n\geqslant 0;$$

$$z_1\leqslant y_1,\ z_1+z_2\leqslant y_1+y_2,\ \ldots,\ z_1+z_2+\ldots+z_n\leqslant y_1+y_2+\ldots+y_n.$$

Data nejednakost je ekvivalentna nejednakosti

$$x_1z_1+x_2z_2+\ldots+x_nz_n\leqslant x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n,$$

koja se može dokazati na sledeći način

$$\begin{aligned}&x_1z_1+x_2z_2+\ldots+x_nz_n=\\&=(x_1-x_2)z_1+(x_2-x_3)(z_1+z_2)+\ldots+\\&+(x_{n-1}-x_n)(z_1+z_2+\ldots+z_{n-1})+x_n(z_1+z_2+\ldots+z_n)\leqslant\\&\leqslant(x_1-x_2)y_1+(x_2-x_3)(y_1+y_2)+\ldots+\\&+(x_{n-1}-x_n)(y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})+x_n(y_1+y_2+\ldots+y_n)=\\&=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n.\end{aligned}$$

XVII. 2.

Neka je (a_{k_i}) podniz niza $(a_k)_{k>1}$ koji sadrži sve članove koji zadovoljavaju uslov $a_k\equiv r \pmod{a_1}$, gde je $0\leqslant r<a_1$. Neka je $a_{k_i}=q_ia_1+r$. Za $m=k_i$, $i>1$, važi jednakost

$$a_m=xa_p+ya_q,$$

gde je $x=q_i-q_1>0$, $y=1$, $p=1$, $q=k_1>1$.

Dakle za svaki r, $0\leqslant r<a_1$, postoji najviše jedan član podniza (a_{k_i}) koji ne može da se predstavi u datom obliku. Sledi da se najviše a_1+1 član niza $(a_k)_{k\geqslant 1}$ ne može predstaviti u datom obliku. Time je dokazano opštije tvrđenje od onog koje je dato u zadatku.

XVII. 3.

Prvo rešenje. Neka su α, β, γ uglovi kod temena A, B, C, a, b, c njima naspramne stranice i S površina trougla ABC. Prema sinusnoj teoremi je

$$CP=a\frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ}=\frac{a}{\sqrt{2}\cos 15^\circ}\quad \text{i}\quad CQ=b\frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ}=\frac{b}{\sqrt{2}\cos 15^\circ}$$

Korišćenjem ovih formula dobijamo

$$PQ^2=CP^2+CQ^2-2\ CP\cdot CQ\cos(\gamma+60^\circ)$$

$$=\frac{a^2}{2\cos^2 15^\circ}+\frac{b^2}{2\cos^2 15^\circ}-2\frac{ab}{2\cos^2 15^\circ}\left(\frac{1}{2}\cos\gamma-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\gamma\right)$$

$$=\frac{a^2}{2\cos^2 15^\circ}+\frac{b^2}{2\cos^2 15^\circ}-\frac{a^2+b^2-c^2}{4\cos^2 15^\circ}+\frac{S\sqrt{3}}{\cos^2 15^\circ}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\cos^2 15^\circ}+\frac{S\sqrt{3}}{\cos^2 15^\circ}.$$

Prema sinusnoj teoremi je

$$AQ=b\frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ}=\frac{b}{2\cos 15^\circ}\quad \text{i}\quad AR=c\frac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{c}{2\cos 15^\circ}$$

Korišćenjem ovih formula dobijamo

$$QR^2=AQ^2+AR^2-2\,AQ\cdot AR\cos(\alpha+60^\circ)$$

$$=\frac{b^2}{4\cos^2 15^\circ}+\frac{c^2}{4\cos^2 15^\circ}-2\frac{bc}{4\cos^2 15^\circ}\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\gamma\right)$$

$$=\frac{b^2}{4\cos^2 15^\circ}+\frac{c^2}{4\cos^2 15^\circ}-\frac{b^2+c^2-a^2}{8\cos^2 15^\circ}+\frac{S\sqrt{3}}{2\cos^2 15^\circ}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{8\cos^2 15^\circ}+\frac{S\sqrt{3}}{2\cos^2 15^\circ}.$$

Na sličan način se pokazuje da je

$$PR^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{8\cos^2 25^\circ}+\frac{S\sqrt{3}}{2\cos^2 15^\circ}.$$

Na osnovu dobijenih formula zaključujemo da je

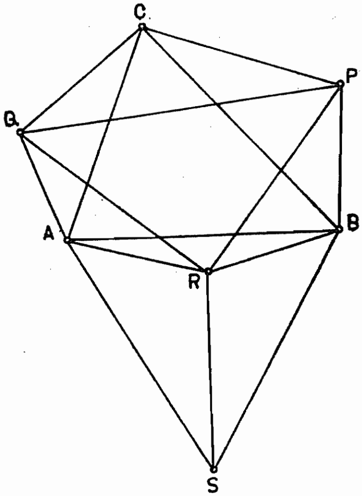
$$GR=QR\ \text{ i }\ PR^2+QR^2=PQ^2.$$

Sledi da je PQR jednakokrako pravougli trougao s pravim uglom kod temena R.

Drugo rešenje. Neka je ABS jednakostraničan trougao spolja konstruisan nad stranicom AB trougla ABC. Očigledno je

$$\angle RAS = \angle RBS = 45°,$$

$$\angle RSA = \angle RSB = 30°.$$



Neka je F obrtna homotetija čiji je centar B, koja preslikava tačku P u tačku C. Dalje, neka je G obrtna homotetija sa centrom u A koja preslikava tačku C u tačku Q. Kompozicija $H = G \circ F$ je takođe obrtna homotetija. Njen ugao je $\angle PBC + \angle CAQ = 90°$ a koeficijent $\frac{CB}{PB} \cdot \frac{QA}{CA} = 1$. Kako je $F(R) = S$ i $G(S) = R$, to je R invarijantna tačka preslikavanja H. Dakle, H je rotacija za prav ugao sa centrom u R. Iz činjenice da H preslikava P u Q sledi da je $RP = RQ$ i $\angle PRQ = 90°$.

XVII. 4.

Neka je C zbir cifara broja B. Kako je $4444^{4444} < 10000^{4444}$, broj cifara broja 4444^{4444} nije veći od $4 \cdot 4444 < 20000$. Zato je $A < 9 \cdot 20000 = 180\,000$. Sledi $B \leqslant 9 \cdot 5 = 45$ i $C \leqslant 12$.

Kako je $4444 \equiv -2 \pmod 9$ i $(-2)^{4444} = 2^{3 \cdot 1481 + 1} = 2 \cdot 8^{1481} \equiv 2 \cdot (-1)^{1481} \equiv -2 \equiv 7 \pmod 9$, to je $4444^{4444} \equiv 7 \pmod 9$. Zbir cifara nekog broja daje isti ostatak pri deljenju sa 9 kao i sam broj. Zato je $4444^{4444} \equiv A \equiv B \equiv C \pmod 9$. Sledi $C \equiv 7 \pmod 9$.

Prirodan broj C zadovoljava uslove $C \leqslant 12$ i $C \equiv 7 \pmod 9$. Odavde dobijamo da je $C = 7$.

XVII. 5.

Postoji beskonačno mnogo brojeva α u intervalu $[0, \pi]$ za koje su $\cos\alpha$ i $\sin\alpha$ racionalni brojevi. Takvi su npr., $\alpha_n = arc\cos\frac{n^2-1}{n^2+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Različiti su među sobom jer niz $\frac{n^2-1}{n^2+1} = 1 - \frac{2}{n^2+1}$

monotono raste a funkcija *arc* cos je monotono opadajuća, $\cos\alpha_n=$ $=\frac{n^2-1}{n^2+1}$, $\sin\alpha_n=\frac{2n}{n^2+1}$. Niz tačaka A_n $(\cos 2\alpha_n, \sin 2\alpha_n)$ pripadaju jediničnom krugu rastojanje dve tačke A_k i A_l ovog niza

$$A_kA_l=2|\sin(\alpha_k-\alpha_l)|=2|\sin\alpha_k\cos\alpha_l-\cos\alpha_k\sin\alpha_l|$$

je očigledno racionalan broj.

XVII. 6.

Prvo rešenje. Posmatrajmo polinom $Q(t)$ definisan sa

$$Q(t)=P\left(\frac{2+t}{3}, \frac{1-t}{3}\right).$$

Polinom Q zadovoljava jednakost $Q(-2t)=-2Q(t)$. Zaista, ako u jednakosti pod 1° uvrstimo $a=b=\frac{1-t}{3}$ i $c=\frac{1+2t}{3}$ dobijamo

$$P\left(\frac{2-2t}{3}, \frac{1+2t}{3}\right)+P\left(\frac{2+t}{3}, \frac{1-t}{3}\right)+P\left(\frac{2+t}{3}, \frac{1-t}{3}\right)=0,$$

odnosno

$$Q(-2t)+Q(t)+Q(t)=0.$$

Pomoću ove relacije i jednakosti $Q(1)=P(1,0)=1$ možemo metodom matematičke indukcije pokazala da je $Q((-2)^n)=(-2)^n$ za $n=0, 1, 2, \ldots$. Polinomi $Q(t)$ i t su jednaki sa beskonačno mnogo različitih vrednosti t pa su zato identični.

Dakle, $Q(t)=t$. Za $t=\frac{x-2y}{x-y}$ dobijamo

$$Q\left(\frac{x-2y}{x+y}\right)=\frac{x-2y}{x-y}, \text{ tj. } P\left(\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y}\right)=\frac{x-2y}{x+y}.$$

Odavde dobijamo, korišćenjem uslova homogenosti, da je

$$P(x,y)=(x-2y)(x-y)^{n-1}.$$

Drugo rešenje. Ako u jednakost pod 1° uvrstimo $a=b=c=y$, dobijamo $P(2y, y)=0$. Odavde zaključujemo da je polinom $P(x, y)$ deljiv polinomom $x-2y$.

Neka je $n>1$. Ako u istu jednakost uvrstimo $a=b=y$, $c=-2y$ i iskoristimo uslov homogenosti, dobijamo $(-2)^n P(-y, y)+2P(-y, y)=0$, odakle sledi $P(-y, y)=0$. Odavde zaključujemo da je polinom $P(x, y)$ deljiv polinomom $x-y$. Neka je $Q(x, y)=\frac{P(x, y)}{x+y}$. Ovo je homogen polinom stepena $n-1$ koji zadovoljava uslove 1°. Zaista:

$$Q(tx, ty)=\frac{P(tx, tx)}{tx+ty}=\frac{t^n P(x, y)}{t(x+y)}=t^{n-1} Q(x, y),$$

$$Q(a+b, c)+Q(b+c, a)+Q(c+a, b)=$$

$$=\frac{P(a+b, c)}{a+b+c}+\frac{P(b+c, a)}{b+c+a}+\frac{P(c+a, b)}{c+a+b}.$$

Metodom matematičke indukcije može da se pokaže da je polinom $P(x, y)$ deljiv polinomom $(x+y)^{n-1}$.

Kako je $P(x, y)$ polinom n-tog stepena koji je deljiv polinomima $x-2y$ i $(x+y)^{n-1}$, može se predstaviti u obliku

$$P(x, y)=K(x-2y)(x+y)^{n-1}.$$

Korišćenjem uslova 2° dobijamo da je $K=1$. Dakle

$$P(x, y)=(x-2y)(x+y)^{n-1}.$$

XVIII. 1.

Neka je u četvorouglu $ABCD$

$$BA+AC+CD=16 \qquad (1)$$

Tada za njegovu površinu P važi

$$2P=AB\cdot AC \sin\alpha+AC\cdot DC \sin\gamma$$

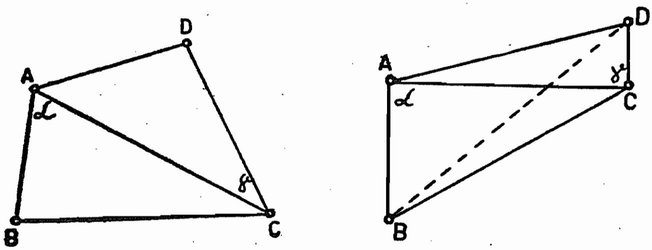
gde su α i γ oznake za uglove $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle DCA$.

Dalje biće

$$2P \leqslant AB \cdot AC + AC \cdot DC = AC(AB + DC)$$

tj. zbog (1)

$$2P \leqslant AC(16 - AC)$$



pri čemu znak jednakosti važi jedino u slučaju $\alpha = \gamma = 90°$. Pošto izraz $x(16 - x)$ ima maksimum 64 (za $x = 8$) biće

$$2P \leqslant 64. \tag{2}$$

Prema uslovu zadatka u (2) mora da važi jednakost, dakle mora biti $AC = 8$ i $\alpha = \gamma = 90°$. Tada je, kao što se lako vidi

$$BD = 8\sqrt{2}.$$

XVIII. 2.

Polinom P_k ima stepen dva puta veći od stepena polinom P_{k-1} (to sledi iz rekurentne formule), a P_1 ima stepen 2, dakle stepen polinoma P_k je 2^k. Dokažimo da jednačina $P_n(x) - x = 0$ ima 2^n različitih realnih korena.

Prvi način. Dokažimo najpre lemu:

Lema. Za svako prirodno k postoje brojevi

$$-2 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{2^k - 1} < a_{2^k} = 2 \tag{1}$$

takvi da je $P_k(a_j) = (-1)^j 2$ za $j = 0, 1, \ldots, 2^k$.

Dokaz leme ćemo provesti metodom matematičke indukcije. Za $k = 1$ neposredno proveravamo da brojevi -2, 0, 2 zadovoljavaju tvrđenje leme.

Pretpostavimo da je tvrđenje leme tačno za $k=n$, tj. da postoje brojevi

$$-2=\alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_{2^n}=2 \tag{2}$$

takvi da je $P_n(\alpha_j)=(-1)^j 2$. Između svaka dva člana niza (2) P_n ima po jedan koren (ukupno 2^n korena) jer su $P_n(\alpha_i)$ i $P_n(\alpha_{i+1})$ različitog znaka za $i=0, 1, \ldots, 2^n-1$. Članovi niza (2) i koreni polinoma P_n čine novi niz

$$-2=\beta_0<\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_{2^{n+1}}=2$$

takav da je $P_n(\beta_j)=0$ za j neparno i $|P_n(\beta_j)|=2$ za j parno. Tada će biti $P_{n+1}(\beta_j)=P_1(P_n(\beta_j))=P_1(0)=-2$ za j neparno i $P_{n+1}(\beta_j)=P_1(\pm 2)=2$ za j parno. Time je dokaz leme završen.

Iz leme sledi da izraz $P_k(x)-x$ ima za $x\in\{a_0, a_2, \ldots, a_{2^k}\}$, pozitivnu vrednost, a za $x\in\{a_1, a_3, \ldots, a_{2^k-1}\}$ negativnu vrednost, dakle između svaka dva člana niza (1) jednačina $P_k(x)-x$ ima po jedno rešenje osim između a_{2^k-1} i a_{2^k}. Međutim, pošto je a_{2^k} rešenje jednačine, ukupan broj različitih realnih rešenja je 2^k.

Drugi način. Ako je $x=2\cos\alpha$, biće

$$P_1(x)=4\cos^2\alpha-2=2\cos 2\alpha.$$

Matematičkom indukcijom lako dokazujemo da je

$$P_n(x)=2\cos 2^n\alpha.$$

Posmatrajmo jednačinu $P_n(x)=x$, tj.

$$\cos 2^n\alpha=\cos\alpha. \tag{3}$$

Njena rešenja se dobijaju iz

$$2^n\alpha-\alpha=2k\pi \quad (k \text{ — ceo broj}) \tag{4}$$

ili iz $2^n\alpha+\alpha=2l\pi \quad (l \text{ — ceo broj})$ (5)

Razmotrimo 2^{n-1} rešenja iz (4)

$$0,\ \frac{2\pi}{2^n-1},\ \frac{4\pi}{2^n-1},\ \ldots,\ \frac{2(2^{n-1}-1)\pi}{2^n-1}; \tag{6}$$

i 2^{n-1} rešenja iz (5)

$$\frac{2\pi}{2^n+1}, \frac{4\pi}{2^n+1}, \ldots, \frac{2\cdot 2^{n-1}\pi}{2^n+1} \tag{7}$$

O njima možemo reći sledeće:

(a) ako je α jednak nekom od njih, tada je α rešenje jednačine (3), pa je $x=2\cos\alpha$ rešenje jednačine $P_n(x)=x$;

(b) svaka dva broja iz (6), odnosna svaka dva broja iz (7) su međusobno različita;

(c) nijedan broj se ne pojavljuje i u (6) i u (7) (zaista $\frac{2k\pi}{2^n-1}=$ $=\frac{2l\pi}{2^n+1} \Rightarrow \frac{k}{l}=\frac{2^n-1}{2^n+1}$, a to je nemoguće, jer su 2^n-1, i 2^n+1 uzajamno prosti i $k<2^n-1$);

(d) svi brojevi iz (6) i (7) su nenegativni i manji od π.

Iz (b), (c) i (d) sledi da su kosinusi ovih brojeva različiti. Prema tome jednačina $P_n(x)=x$ ima 2^n različitih realnih rešenja.

XVIII. 3.

Ako su dimenzije kutije m, n i p tada kocke zapremine 2 obuhvataju zapreminu

$$2\left[\frac{m}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{p}{\sqrt[3]{2}}\right],$$

dakle uslov zadatka se svodi na

$$q=\frac{m\,n\,p}{\left[\frac{m}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{p}{\sqrt[3]{2}}\right]}=5. \tag{1}$$

Dalje će nam biti korisna tablica

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\left[\frac{m}{\sqrt[3]{2}}\right]$	1	2	3	3	4	5	6	7	7

i nejednakost

$$\sqrt[3]{2}<\frac{m}{\left[\frac{m}{\sqrt[3]{2}}\right]}<\sqrt[3]{2}\cdot\frac{m}{m-\sqrt[3]{2}}. \tag{2}$$

Tablica se dobija izračunavanjem, a (2) je posledica očigledne nejednakosti $x>[x]>x-1$.

Možemo pretpostaviti da je $m\geqslant n\geqslant p$. Dokazaćemo da je $p=2$. Ako je $x\geqslant 10$ biće

$$\frac{x}{\left[\frac{x}{\sqrt[3]{2}}\right]}\leqslant\sqrt[3]{2}\frac{10}{10-\sqrt[3]{2}}<1{,}26\,\frac{10}{8{,}5}<\frac{3}{2} \tag{3}$$

pa iz $p\geqslant 3$ sledi $q\leqslant\left(\frac{5}{3}\right)^3=\frac{125}{27}<5$ što je u kontradikciji sa (1). (Koristeći (3) i tablicu zaključujemo da je za $x\geqslant 3$ tačno $\frac{x}{\left[\frac{x}{\sqrt[3]{2}}\right]}\leqslant\frac{5}{3}\Big)$ Dakle $p=2$.

Ako je $n=2$ onda bi bilo $\frac{m}{\left[\frac{m}{\sqrt[3]{2}}\right]}=\frac{5}{4}<\sqrt[3]{2}$ što je u kontrakciiji sa (2). Dakle $n\geqslant 3$.

Ako nijedan od brojeva m i n nije 5, bilo bi $q\leqslant\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 2=\frac{9}{2}<5$ $\left(\text{jer za } x\neq 2 \text{ i } x\neq 5 \text{ važi } \frac{x}{\left[\frac{x}{\sqrt[3]{2}}\right]}\leqslant\frac{3}{2}\right)$ Dakle, imamo dva slučaja:

(1) $p=2,\quad n=5,\quad \frac{m}{\left[\frac{m}{\sqrt[3]{2}}\right]}=\frac{3}{2}$ i $m\geqslant 5$, pa je $m=6$;

(2) $p=2,\quad m=5,\quad \frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]}=\frac{3}{2}$ i $2\leqslant n<5$, pa je $n=3$.

Dimenzije kutije mogu biti 2, 5, 6 ili 2, 3, 5.

XVIII. 4.

Označimo sa N najveći takav broj. Neka je

$$N = a_1 a_2 \ldots a_n$$

i

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1976.$$

Dokažimo da je $a_i \leqslant 4$. Zaista, ako bi za neko i bilo $a_i \geqslant 5$, onda bi broj koji umesto a_i ima činioce 2 i $a_i - 2$ bio veći (zbog $2(a_i-2) > a_i$) od N, a zbir njegovih činilaca bi bio takođe 1976.

Dakle $N = 2^k 3^l$ pri čemu je $2k + 3l = 1976$ (4 je zamenjeno sa $2 \cdot 2$). Zbog $2^3 < 3^2$ i $2+2+2=3+3$ mora biti $k \in \{0, 1, 2\}$

Pošto je $1976 = 3 \cdot 658 + 2$ biće $k=1$ i

$$N = 2 \cdot 3^{658}.$$

XVIII. 5.

Za svaku q-torku $(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ celih brojeva možemo odrediti p-torku celih brojeva $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)$ formulama

$$\beta_i = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \ldots + a_q y_q \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{1}$$

Pri tome ako je $|y_j| \leqslant p$ biće

$$|\beta_i| \leqslant |a_{i1}||y_1| + |a_{i2}||y_2| + \ldots + |a_{iq}| \; v \; \leqslant$$
$$\leqslant |y_1| + |y_2| + \ldots + \; y_q| < qp.$$

Ukupan broj q-torki $(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ celih brojeva takvih da je $|y_j| \leqslant p$ (za $j = 1, 2, \ldots, q$) biće

$$(2p+1)^q = (4p^2 + 4p + 1)^p$$

a ukupan broj p-torki celih brojeva $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)$ takvih da je $|\beta_i| \leqslant qp$ (za $i = 1, 2, \ldots, p$) biće

$$(2pq + 1)^p = (4p^2 + 1)^p$$

Pošto je $(2p+1)^q > (2pq+1)^p$ postojaće dve različite q-torke $(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ i $(z_1, z_2, \ldots, z_q)$ koje formulama (1) određuju istu p-torku. Lako je proveriti da je $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$, pri čemu je $x_j = y_j - z_j$, rešenje datog sistema koje zadovoljava uslove (a), (b) i (c).

XVIII. 6.

Dokazaćemo da je, za $n=0, 1, 2, \ldots$

$$u_n=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}+2^{-\frac{2^n-(-1)^n}{3}} \tag{1}$$

Zaista (1) je tačno za $n=0$ i $n=1$ i ako je tačno $n=k-1$ i $n=k$ biće

$$u_{k+1}=\left(2^{\frac{2^k-(-1)^k}{3}}+2^{-\frac{2^k-(-1)^k}{3}}\right)\left(2^{2\frac{2^{k-1}-(-1)^{k-1}}{3}}+2^{-2\frac{2^{k-1}-(-1)^{k-1}}{3}}\right)-\frac{5}{2}$$

$$=2^{\frac{2^k-(-1)^k+2^k-2(-1)^{k-1}}{3}}+2^{\frac{2^k-(-1)^k-2^k+2(-1)^{k-1}}{3}}+$$

$$+2^{\frac{-2^k+(-1)^k+2^k-2(-1)^{k-1}}{3}}+2^{\frac{-2^k+(-1)^k-2^k+2(-1)^{k-1}}{3}}-\frac{5}{2}=$$

$$=2^{\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}}+2^{(-1)^{k+1}}+2^{-(-1)^{k+1}}+2^{\frac{-2^{k+1}+(-1)^{k+1}}{3}}-\frac{5}{2}=$$

$$=2^{\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}}+2^{-\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}}$$

jer je $2^{(-1)^{k+1}}+2^{-(-1)^{k+1}}=\frac{5}{2}$ (jedan od sabiraka je uvek 2, a drugi 2^{-1}). Ovim je završen dokaz jednakosti (1). Pošto je, za $n>0$ drugi sabirak u (1) uvek manji od 1 (jer je odgovarajući eksponent negativan), a prvi sabirak ceo broj (jer iz $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+ + \ldots +ab^{n-2}+b^{n-1})$ sledi da je odgovarajući eksponent ceo broj) biće i

$$[u_n]=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$$

XIX. 1.

Označimo sa $X_1, X_2, \ldots, X_{12}$ redom središta duži KL, CL, AK, LM, DM, BL, MN, AN, CM, NK, DN, BK i sa P presek duži CL i AK, vidi sliku na str. 133.

Trougao LX_3P je pravougli, a X_2 je središte njegove hipotenuze LP. Zaista, X_3 je zajednika tačka normalnih duži AK i BL, a trougao LX_2X_3 je, zbog simetrije tačaka X_2 i X_3 u odnosu na pravu LN, jednakostraničan.

Tačke P i X_1 su na dijagonali BD (zbog simetrije tačaka K i L, odnosno A i C) pa je i LX_1P pravougli trougao.

Dakle $X_1X_2=X_2X_3 \left(=\frac{1}{2} LP\right)$,

Ako se pođe od jednakosti $\sphericalangle LPX_3=30°$, lako se, redom dobijaju sledeće: $\sphericalangle X_1PL=75°$ (polovina spoljašnjeg ugla); $\sphericalangle X_1X_2P=30°$ (ugao naspram osnovice jednakokrakog trougla X_1X_2P) i, konačno $\sphericalangle X_1X_2X_3=150°$ (zbir uglova $\sphericalangle X_1X_2P$ i $\sphericalangle PX_2X_3$).

Uz pomoć simetrija u odnosu na prave KM, LN, AC i BD zaključujemo da su sve stranice dvanaestougla $X_1X_2 \ldots X_{12}$ međusobno jednake i da uglovi kod temena $X_2, X_3, X_5, X_6, X_8, X_9, X_{11}, X_{12}$ iznose po 150°, a da su uglovi kod temena X_1, X_4, X_7, X_{10} međusobno jednaki. Znajući da je zbir svih uglova dvanaestougla $10 \cdot 180°$ dobiiamo da je

$$\sphericalangle X_1 = \ldots = \sphericalangle X_{10} = \frac{1}{4} \; (10 \cdot 180° - 8 \cdot 150°) = 150°.$$

XIX. 2.

Pretpostavimo da takav niz ima bar 17 članova. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_{17}$ prvih 17 članova.

Pošto je

$$x_i + x_{i+1} + \ldots + x_{i+10} > 0, \tag{1}$$

i

$$x_{i+4} + \ldots + x_{i+10} < 0, \tag{2}$$

za svako $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ biće

$$x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{+3} > 0 \text{ za } i=1, 2, \ldots, 7. \tag{3}$$

Ali, iz (3) i

$$x_i + x_{i+1} + \ldots + x_{i+6} < 0 \text{ za } i=1, 2, \ldots, 11 \tag{4}$$

sledi daje

$$x_{i+4} + x_{i+5} + x_{i+6} < 0 \text{ za } i=1, 2, \ldots, 7$$

ili, u drugom zapisu

$$x_i + x_{i+1} + x_{i+2} < 0 \text{ za } i=5, 6, \ldots, 11. \tag{5}$$

Iz (3) i (5) sledi da je

$$x_{i+3} > 0 \text{ za } i=5, 6, 7$$

tj. da je

$$x_8<0, \ x_9<0, \ x_{10}<0, \qquad (6).$$

a to je u kontradikciji sa (5) za $i=8$.

Dakle, takav niz može imati najviše 16 članova. (Čitaocu savetujemo da pokuša sa istim rezonovanjem za niz od 16 članova).

Navešćemo primer koji pokazuje da je 16 maksimalan broj članova tog niza.

5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5.

XIX. 3.

1. rešenje

Očigledno je da su $(n-1)^2$, $(2n-1)^2$, $(n-1)\,(2n-1) \in V_n$. Neka je

$$r=(n-1)^2\,(2n-1)^2.$$

$(n-1)^2$ je nerazloživ u V_n jer bi u protivnom bilo

$$(n-1)^2=pq \geqslant (n+1)^2.$$

Sledi da se broj r može predstaviti kao proizvod čiji su faktori nerazloživi u V_n tako, da je jedan od njih $(n-1)^2$. Predstavimo broj r kao proizvod dva činioca

$$r=[(n-1)\,(2n-1)]\,[(n-1)\,(2n-1)],$$

a zatim svaki od njih rastavimo na činioce nerazložive u V_n. Među njima se neće pojaviti $(n-1)^2$, zato što

$$(n-1)^2 \text{ ne deli } (n-1)\,(2n-1).$$

Zato je ova falstorizacija broja r različita od prethodne.

2. rešenje

Neka je p proizvoljan prost delilac broja $n-1$. Jasno je da p ne deli n i da $p \not\equiv 1 \pmod n$. Neka je s najmanji prirodan broj za koji je

$$p^s \equiv 1 \pmod n,$$

tj. za koji je

$$p^s \in V_n.$$

Pravi delioci broja p^s su brojevi oblika p^k, $k<s$. Kako nijedan od njih ne pripada V_n, p^s je nerazloživ u V_n. Neka je

$$r=p^s[(p^{s-1}+n)\,(p+n)].$$

Jasno je da $r \in V_n$. Broj r može da se predstavi kao proizvod čiji su faktori nerazloživi u V_n tako ,da je jedan od njih p^s. Predstavimo broj r kao proizvod dva činioca iz V_n

$$r=(p^s+np)\ (p^s+np^{s-1})$$

a zatim svaki od njih rastavimo na činioce nerazložive u V_n. Među njima se neće pojaviti p^s, zato što

$$p^s \text{ ne deli } p^s+np \text{ i } p^s \text{ ne deli } p^s+np^{s-1}.$$

Zato je ova faktorizacija broja r različita od prethodne.

3. rešenje

Prvo dokažimo da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva koji ne dele n i ne pripadaju V_n. Takav je svaki prost delilac broja $n-1$. Pretpostavimo da ih ima konačno mnogo. Neka su to $p_1, p_2, \ldots, p_t$. Broj

$$np_1p_2 \ldots p_t - 1$$

ne pripada V_n. Zato on ima prost delilac p_{t+1} koji nije u V_n. Očigledno je da p_{t+1} ne deli n i da je različit od $p_1, p_2, \ldots, p_t$. Kontradikcija.

Neka su p i q dva takva broja kongruentna po modulu n. Neka je s najmanji prirodni broj za koji je

$$p^s \equiv 1 \pmod{n}.$$

Jasno je da $p^s, q^s, p^{s-1}q, pq^{s-1} \in V_n$. Pravi delioci ovih brojeva imaju oblik p^kq^l, $k+l<s$. Kako je

$$p^kq^l \equiv p^{k+l} \not\equiv 1 \pmod{n},$$

to $p^kq^l \in V_n$. Zato su brojevi $p^s, q^s, p^{s-1}q, pq^{s-1}$ nerazloživi u V_n. Broj

$$r=(p^s)\ (q^s)=(p^{s-1}q)\ (pq^{s-1})$$

očigledno zadovoljava postavljeni uslov.

XIX. 4.

Funkciju $f(x)$ možemo predstaviti u obliku

$$f(x)=1-\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)-$$

$$-\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos 2x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin 2x\right),$$

odnosno

$$f(x)=1-\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)-\sqrt{A^2+B^2}\sin(2x+\psi),$$

$$\text{gde je } \sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\psi=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

(a) Neka je $x_0+\varphi=\frac{\pi}{4}$, $x_1+\varphi=\frac{3\pi}{4}$. Tada je

$$f(x_0)=1-\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\sqrt{A^2+B^2}\sin\left(\psi+\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)\geqslant 0$$

i

$$f(x_1)=1-\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\sqrt{A^2+B^2}\sin\left(\psi+\frac{3\pi}{2}-2\varphi\right))\geqslant 0.$$

Pošto su treći sabirci različitog znaka(argumenti se razlikuju za π) biće

$$1-\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant 0$$

odnosno

$$a^2+b^2\leqslant 2.$$

(b) Nejednakost $A^2+B^2\leqslant 1$ se dobija sličnim putem, treba odabrati x_0 i x_1, tako da je

$$2x_0+\psi=\frac{\pi}{2}\ 2,\quad 2x_1+\varphi=\frac{5\pi}{2}.$$

XIX. 5.

Brojevi a, b, q i r treba da zadovoljavaju sledeća tri uslova:

$$a^2+b^2=(a+b)\,q+r,$$
$$0\leqslant r<a+b,$$
$$q^2+r=1977.$$

Iz $q^2\leqslant 1977$ sledi $q\leqslant 44$. Zato je

$$a^2+b^2<44\,(a+b)+(a+b)=45\,(a+b),$$

što zajedno sa

$$(a+b)^2\leqslant 2\,(a^2+b^2)$$

daje

$$(a+b)^2\leqslant 90\,(a+b)$$

odnosno

$$a+b\leqslant 90.$$

Sledi da je $r<90$. Iz

$$q^2=1977-r>1977-90=1887$$

sledi da je $q>43$. Dakle $q=44$ i $r=41$.

Ostaje da odredimo prirodne brojeve a i b koji zadovoljavaju jednačinu

$$a^2+b^2=44\,(a+b)+41,$$

odnosno

$$(a-22)^2+(b-22)^2=1009.$$

Odredimo celobrojna rešenja jednačine

novi plus

$$x^2+y^2=1009$$

koja zadovoljavaju uslov $0\leqslant x\leqslant y$. Iz $y^2\leqslant 1009$ sledi $y\leqslant 31$ a iz $2y^2\geqslant 1009$ sledi $y\geqslant 23$. Ako se ovo ima u vidu lako se proverava da je $x=15$, $y=28$ jedino rešenje ove jednačine.

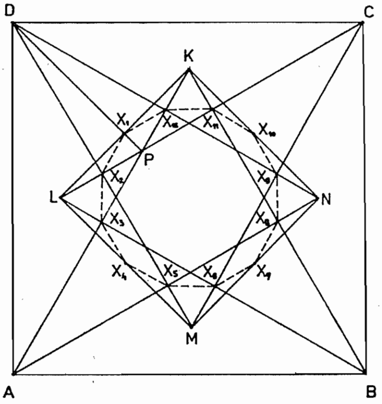
Problem se svodi na određivanje prirodnih brojeva a i b koji zadovoljavaju jedan od sledeća dva sistema jednačina

$$|a-22|=15 \qquad |a-22|=28$$
$$|b-22|=28 \quad \text{i} \quad |b-22|=15.$$

Prvi sistem jednačina ima rešenja $(a, b)=(37,50)$ i $(a, b)=(7,50)$ a drugi $(a, b)=(50,37)$ i $(a, b)=(50,7)$. Prema tome, traženi parovi su $(37,50)$, $(7,50)$, $(50,37)$ i $(50,7)$.

XIX. 6.

Matematičkom indukcijom po n dokažimo da je $f(k)\geqslant n$ ako je $k\geqslant n$. Za $n=1$ tvrđenje očigledno važi. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za neki prirodan broj n. Neka je $k\geqslant n+1$. Iz $k-1\geqslant n$ sledi, na osnovu induktivne pretpostavke, da je $f(k-1)\geqslant n$, a odavde $f(f(k-1))\geqslant$ $\geqslant n$. Kako je $f(k)>f(f(k-1))$, to je $f(k)\geqslant n+1$. Iz dokazanog tvrđenja sledi da je $f(n)\geqslant n$ za svaki prirodan broj n. Pretpostavimo da za neko n važi nejednakost $f(n)>n$. Neka je $f(m)=\min_{k>n} f(k)$. Kako je $m-1\geqslant n$ to je $f(m-1)>n$ (ako je $m-1>n$ ovo sledi iz $f(m-1)\geqslant \geqslant m-1$, a ako je $m-1=n$ iz $f(n)>n$). Neka je $l=f(m-1)$. Iz $f(m)> >f(f(m-1))$ sledi $f(m)>f(l)$. Kontradikcija!



XX. 1.

Prema uslovu zadatka je $1978^m(1978^{n-m}-1)$ umnožak broja $1000=8\cdot 125$. Odatle, s obzirom da je broj $1978^{n-m}-1$ neparan, a 1978 nije deljiv sa 5, sledi

$$8 \mid 1978^m \text{ i } 125 \mid 1978^{n-m}-1.$$

Zbog $1978=2\cdot 989$ iz prvog uslova sledi $m\geqslant 3$. Iz drugog dobijamo

$$1978^{n-m}\equiv(-2)^{n-m}\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5),$$

što je moguće jedino za $n-m=4k$, $k\geqslant 1$. Ostaje da se odredi najmanje k za koje je $1978^{4k}-1$ deljivo sa 125. Lako se nalazi $1978^4\equiv 6\ (\mathrm{mod}\ 125)$, pa dobijamo uslov $6^k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 125)$. Najmanje takvo k je 25, pa je rešenje zadatka $m=3$, $n=103$.

XX. 2.

Uvedimo vektore $\vec{a}=\overrightarrow{PA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{PB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{PC}$, $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$ i $\vec{q}=\overrightarrow{OQ}$, gde je O centar date sfere. Važi:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0,\quad \vec{q}=\vec{p}+\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},$$

$$(\vec{p}+\vec{a})^2=(\vec{p}+\vec{b})^2=(\vec{p}+\vec{c})^2=R^2,$$

gde je R poluprečnik sfere. Odatle:

$$\vec{q}^2=\vec{p}^2+\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{p}+2\vec{b}\cdot\vec{p}+2\vec{c}\cdot\vec{p}=$$
$$=(\vec{a}+\vec{p})^2+(\vec{b}+\vec{p})^2+(\vec{c}+\vec{p})^2-2\vec{p}^2=3R^2-2p^2,$$

gde je $p=|\vec{p}|$. Kako je tačka P unutar date sfere, to je $p<R$, pa je $q=|\vec{q}|=\sqrt{3R^2-2p^2}>R$.

Dakle, tačka Q pripada sferi, koncentričnoj sa datom, poluprečnika $\sqrt{3R^2-2p^2}$. Dokažimo da je ta sfera traženo geometrijsko mesto tačaka, tj. da za svaku tačku Q te sfere postoje tačke A, B i C date sfere, takve da su PA, PB i PC međusobno normalni i da je Q dijagonalno suprotno teme temenu P paralelepipeda određenog sa PA, PB i PC.

Za datu tačku Q sa osobinom $OQ=\sqrt{3R^2-p^2}$ konstruišimo sferu sa dijametrom PQ. Zbog $OQ>R>OP$ ona seče datu sferu; označimo sa C proizvoljnu od presečnih tačaka i sa X dijagonalno suprotno teme temenu C pravougaonika određenog sa CP i CQ. Dobijamo $OP^2+OQ^2=OC^2+OX^2$*), odakle

$$OX^2=OP^2+(3R^2-2\cdot OP^2)-R^2=2R^2-OP^2>R^2,$$

tj. X je izvan date sfere. Ravan α kroz tačku P, normalna na PC, seče datu sferu po krugu k; pri tom je tačka P unutar kruga k, a X izvan njega. Krug dijametra PX u ravni α seče krug k u tački B. Neka je A teme naspramno temenu B u pravougaoniku $PBXA$. Kako je B na datoj sferi, dobijamo

$$OA^2=OP^2+OX^2-OB^2=OP^2+2R^2-OP^2-R^2=R^2,$$

tj. A takođe pripada sferi i svi uslovi su ispunjeni.

---

*) Ta relacija se jednostavno dokazuje vektorski.

XX. 3.

Zbog $g(n)=f(f(n))+1$, kako je $f(f(n))$ član niza f, postoji tačno $n-1$ član niza g koji je manji od $f(f(n))$. Odatle sledi da je

$$f(f(n))=f(n)+n-1. \tag{1}$$

Zbog $g(1)=f(f(1))+1>1$ imamo $f(1)=1$, odakle $g(1)=f(1)+1=2$. Primetimo još da broj koji prethodi članu niza g mora pripadati nizu f, tj. ne mogu dva uzastopna broja biti članovi niza g. Uzimajući to u obzir i primenjujući više puta formulu (1) dobijamo redom:

$$f(2)=3,\ f(3)=f(2)+1=4,\ f(4)=f(3)+2=6,$$

$$f(6)=f(4)+3=9,\ f(9)=9+5=14,\ f(14)=22,$$

$$f(22)=35,\ f(35)=56,\ f(56)=90,\ f(90)=145,$$

$$f(145)=234,\ f(234)=378.$$

Vratimo se sada na $f(35)=56$. Odatle dobijamo da je $91=f(f(35))+$ $+1$ član niza g, pa je $f(57)=92$. Iz (1) dobijamo redom:

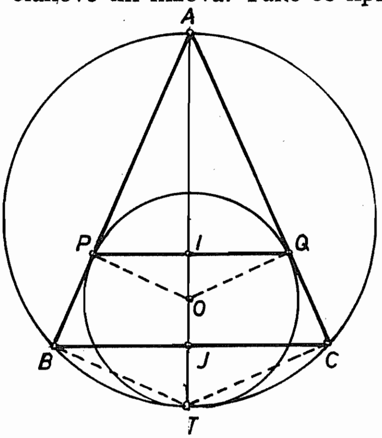
$$f(92)=148,\ f(148)=239,\ f(239)=386.$$

Najzad, $387=f(f(148))+1$ je član niza g, pa je $f(240)=388$.

Napomena: Iz ovog rešenja jasno je da su nizovi f i g jednoznačno određeni. To se može i strogo dokazati, a takođe se mogu izvesti i eksplicitne formule za opšte članove tih nizova. Tako se npr. dobija

$$f(n)=\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\,n\right].$$

XX. 4.



Neka je O centar datog kruga i T njegova dodirna tačka sa opisanim krugom oko ΔABC. Cela slika je simetrična u odnosu na pravu koja prolazi kroz A, O, T i kroz središte J duži BC i normalna je na BC. Homotetija sa centrom A koja prevodi T u J, prevodi dati krug u upisani krug trougla ABC, dakle tačku O u centar I tog kruga.

Centar opisanog kruga ΔABC je takođe na pomenutoj osi, pa je $\sphericalangle ABT = \sphericalangle ACT = 90°$. Četvorouglovi $ABTC$ i $APOQ$ su slični, pa pomenuta homotetija prevodi O u središte duži PQ.

Dakle, središte duži PQ i centar I upisanog kruga ΔABC se poklapaju.

XX. 5.

Fiksirajmo dati broj n. Ako niz $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ne bi bio rastući, postojalo bi j, takvo da je $a_j > a_{j+1} (1 \leqslant j < n)$. Tada bi, kako je lako proveriti, važila nejednakost

$$\frac{a_j}{j^2} + \frac{a_{j+1}}{(j+1)^2} > \frac{a_{j+1}}{j^2} + \frac{a_j}{(j+1)^2}.$$

To znači da bi zbir $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}$ bio veći od odgovarajućeg zbira za niz $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ kod koga je $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$. Kako je još, očigledno $b_k \geqslant k$ za $k = 1, 2, \ldots, n$, to dobijamo:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Napomena: Uporediti ovaj zadatak sa XVII. 1.

XX. 6.

Zbog $329 \cdot 6 < 1978$, u jednoj od zemalja, nazovimo je A, postoji 330 članova društva — neka su njihovi brojevi $a_1 < a_2 < \ldots < a_{330}$.

Posmatrajmo 329 razlika $a_{330} - a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 329)$. Ako bi neka od njih bila broj člana društva iz A, tvrđenje zadatka bi bilo dokazano. Ako pretpostavimo da to nije slučaj, tada (zbog $65 \cdot 5 < 329$) postoji 66 od tih razlika u nekoj zemlji, npr. B. Ako su to

$$a_{330} - a_{i_1} < a_{330} - a_{i_2} < \ldots < a_{330} - a_{i_{66}},$$

tada ili neka od razlika

$$(a_{330} - a_{i_{66}}) - (a_{330} - a_{i_j}) = a_{i_j} - a_{i_{66}} (j = 1, 2, \ldots, 65)$$

pripada nekoj od zemalja A, B (u kom slučaju je tvrđenje dokazano) ili nijedna ne pripada nijednoj od te dve zemlje.

Nastavljajući ovaj postupak, ako pretpostavimo da tvrđenje zadatka nije tačno, dobijamo 17 od tih razlika u istoj zemlji, npr. C; zatim od 16 njihovih razlika 6 u zemlji D; od 5 sledećih razlika nalazimo 3 u E. Najzad, dve nove razlike moraju biti u preostaloj zemlji F, dok njihova razlika ne može biti ni u jednoj od zemalja A,B,C,D,E,F, što je nemoguće.

Time je tvrđenje zadatka dokazano.

Napomena: Zadatak je specijalan slučaj sledećeg tvrđenja, poznatog kao Šurova lema:

Ako je n prirodan broj i e osnova prirodnih logaritama, tada ako se skup

$$\{1, 2,3,\ldots, [en!]\}$$

rastavi na n disjunktnih podskupova, bar jedan od tih podskupova će sadržati sa neka dva svoja elementa i njihovu razliku.

U našem slučaju je $n=6$ i $[e\cdot n!]=1957<1978$, pa tvrđenje sledi. Inače, dokaz same Šurove leme ne razlikuje se bitno od dokaza u specijalnom slučaju koji smo sproveli.

XXI. 1.

Neka je $A=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{1319}$ i $B=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1318}$.

Tada je

$$\frac{p}{q}=A-B=(A+B)-2B=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{1319}\right)-$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{659}\right)=\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\ldots+\frac{1}{1319}=$$

$$=\left(\frac{1}{660}+\frac{1}{1319}\right)+\left(\frac{1}{661}+\frac{1}{1318}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{989}+\frac{1}{990}\right)=$$

$$=\frac{1979}{660\cdot 1319}+\frac{1979}{661\cdot 1318}+\ldots+\frac{1979}{989\cdot 990}=$$

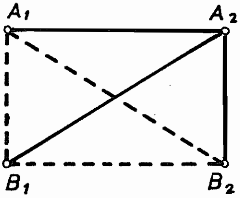
$$=\frac{1979\,N}{660\cdot 661\cdot\ldots\cdot 1319}.$$

Kako je broj 1979 prost, to se on ne može skratiti ni sa jednim od faktora u imeniocu. Dakle, brojilac dobijenog razlomka deljiv je sa 1979.

XXI. 2.

1° Dokažimo najpre da ako je neka od ivica bilo koje osnove obojena jednom bojom, tada za svako teme koje je kraj te ivice postoje bar tri duži koje ga spajaju sa teminima druge osnove i koje su obojene drugom bojom.

Pretpostavimo npr. da je ivica A_1A_2 obojena zeleno i, suprotno tvrđenju, da su najmanje tri duži $A_2B_i (i=1,2,\dots,5)$ obojene takođe zeleno. Neka su to duži A_2B_j, A_2B_k A_2B_m. Od tri temena B_j, B_k, B_m petougla bar dva su susedna. Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da je $j=1, k=2$. Tada su duži A_1A_2, A_2B_1 i A_2B_2 obojene zeleno (na slici označeno punom linijom). Iz pretpostavke zadatka odatle sledi da su duži A_1B_1, A_1B_2 i B_1B_2 obojene crveno, tj. da je $\Delta A_1B_1B_2$ jednobojan, što je nemoguće.



Time je dokazano da su najmanje tri od duži A_2B_i $(i=1,2,\dots,5)$ obojene crveno.

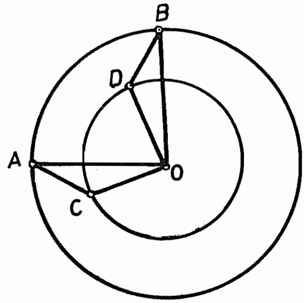
2° Dokažimo sada da je svaki od petouglova osnova jednobojan. Pretpostavimo, suprotno, da u nekom od njih postoje ivice raznih boja; tada postoje i susedne ivice raznih boja. Neka je npr. ivica A_1A_2 zelena, a ivica A_2A_3 crvena. Na osnovu 1°, najmanje tri od duži A_2B_i $(i=1,2,\dots,5)$ su crvene i najmanje tri zelene, što je očigledno nemoguće.

3° Pretpostavimo, najzad, da osnova $A_1A_2A_3A_4A_5$ ima sve stranice zelene, a osnova $B_1B_2B_3B_4B_5$ sve stranice crvene. Primenjujući 1° na stranice osnove $A_1A_2A_3A_4A_5$ zaključujemo da među 25 duži A_iB_j $(i,j=1,2,\dots,5)$ ima bar $5 \cdot 3=15$ crvenih; primenjujući to tvrđenje na stranice osnove $B_1B_2B_3B_4B_5$ zaključujemo da među tim dužima ima bar 15 zelenih. To je, naravno, takođe nemoguće, pa zaključujemo da su svih 10 ivica obeju osnova prizme obojene istom bojom.

Napomena: Prizma sa svojstvima opisanim u zadatku postoji. Takva je npr. prizma kod koje su sve ivice osnova zelene, a sve duži A_iB_j crvene.

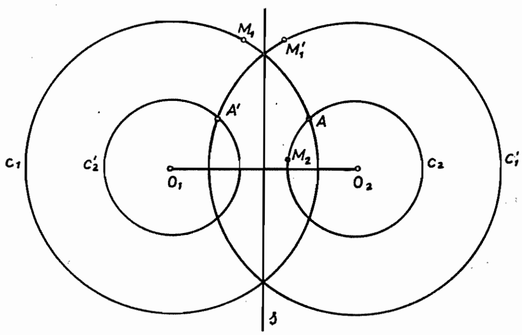
XXI. 3.

Ostavljamo čitaocu da dokaže sledeće jednostavno pomoćno tvrđenje: Ako su AB i CD lukovi dvaju krugova sa zajedničkim centrom O i ako je $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$, tada je $AC = BD$ (v. sliku).



Pređimo na rešenje datog zadatka. Neka su O_1 i O_2 centri datih krugova C_1 i C_2, s simetrala duži O_1O_2 i φ simetrija ravni u odnosu na pravu s. Označimo $A' = \varphi(A)$, $C_1' = \varphi(C_1)$, $C_2' = \varphi(C_2)$ (očigledno je $A' \in C_1' \cap C_2'$). Jasno je da su krugovi C_1' i C_2 koncentrični, kao i krugovi C_2' i C_1.

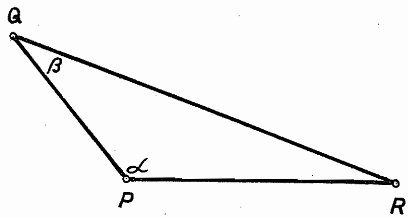
Dokažimo da je A' tačka koja zadovoljava uslove zadatka. Neka se u proizvoljnom trenutku prva tačka nalazi u $M_1 \in C_1$, a druga u



$M_2 \in C_2$. Prema uslovima zadatka tada je $\sphericalangle AO_1M_1 = \sphericalangle AO_2M_2$. Ako je $M_1' = \varphi(M_1)$, važi $AM_1' = A'M_1$. Takođe je $\sphericalangle A'O_2M_1' = \sphericalangle AO_1M_1 = \sphericalangle AO_2M_2$, pa je na osnovu pomoćnog tvrđenja $A'M_2 = AM_1'$. Dakle, $A'M_1 = A'M_2$, tj. tačka A' je zaista u svakom trenutku podjednako udaljena od tačaka M_1 i M_2.

XXI. 4.

Neka je R tačka ravni π, različita od P i označimo $\sphericalangle QPR = \alpha$, $\sphericalangle PQR = \beta$. Iz ΔPQR dobijamo



$$\frac{QR}{\sin\alpha}=\frac{QP}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{PR}{\sin\beta},$$

odakle

$$\frac{QR+PR}{QP}=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin\beta}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)$$

Ako fiksiramo ugao α, taj odnos ima najveću vrednost ako je $\sin\left(\beta+\right.$ $\left.+\frac{\alpha}{2}\right)=1$, tj. $\beta+\frac{\alpha}{2}=90°$. To je ispunjeno ako i samo ako je $\sphericalangle PRQ=$ $=\beta$, tj. $PR=QP$.

Na taj način, za fiksirano α odnos $\dfrac{QP+PR}{QR}$ ima maksinalmu vrednost $\dfrac{2\cos\alpha/2}{\sin\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha/2}$ ako je ΔPQR jednakokraki ($PR=QP$). Zbog $0<\alpha<180°$ je $0<\alpha/2<90°$, pa (kako je sin rastuća funkcija na $(0, 90°)$) dati odnos ima najveću vrednost kada je ugao α najmanji, a to je ispunjeno kada je ravan trougla PQR normalna na ravan π i tačka R je takva da $\sphericalangle QPR$ nije tup.

Ako je prava PQ normalna na ravan π, skup tačaka R koje zadovoljavaju uslove zadatka jeste krug sa centrom P, poluprečnika jednakog PQ. Ako prava PQ nije normalna na π, postoji samo jedna tačka R koja zadovoljava uslove zadatka. To je tačka koja pripada ravni normalnoj na π koja sadrži pravu PQ, pri čemu je rastojanje tačke R od P jednako PQ i $\sphericalangle QPR$ je oštar (tim uslovima tačka R je jednoznačno određena).

XXI. 5.

Pretpostavimo da broj a zadovoljava uslove zadatka. Tada je

$$a^3=\sum_{k=1}^{5}k^5x_k,\qquad a^3=a\sum_{k=1}^{5}k^3x_k,\qquad a^3=a^2\sum_{k=1}^{5}k\,x_k.$$

Ako pomnožimo drugu od tih relacija sa -2 i sve tri saberemo, dobijamo

$$0=\sum_{k=1}^{5} kx_k(k^4-2ak^2+a^2)=\sum_{k=1}^{5} kx_k(k^2-a)^2.$$

Kako su svi sabirci poslednjeg zbira nenegativni, sledi

$$kx_k(k^2-a)^2=0 \text{ za } k=1,2,3,4,5.$$

Jedno moguće rešenje je $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$, odakle sledi $a=0$. Ako je neko $x_k\neq 0$ mora biti $a=k^2$; lako se proverava da takvo a zaista zadovoljava uslove zadatka jer dati sistem zadovoljavaju brojevi

$$x_k=k,\ x_j=0\ (j\neq k,\ 1\leqslant j\leqslant 5).$$

Dakle, traženi brojevi su 0, 1, 4, 9, 16 i 25.

XXI. 6.

Numerišimo uzastopna temena osmougla brojevima $-3,-2,-1,0,1,2,3,4$, tako da temenu A odgovara broj 0, a temenu E broj 4. U svakom skoku žaba menja parnost temena na kome se nalazi, te joj je za put od 0 do 4 svakako potreban paran broj skokova. Dakle, $a_{2n-1}=0$ za $n=1,2,\ldots$.

Označimo sa u_{2n} broj puteva dužine $2n$ (tj. koji se sastoje od $2n$ skokova) od tačke 0 do tačke 0, koji ne prolaze kroz tačku 4; sa v_{2n} označimo broj puteva dužine $2n$ od 0 do 2, koji ne prolaze kroz 4. Tada je i broj puteva dužine $2n$ od 0 do -2 koji ne prolaze kroz 4 takođe jednak v_{2n}.

Svaki put dužine $2n+2$ od tačke 0 do tačke 4 koji zadovoljava uslove zadatka sastoji se od nekog puta dužine $2n$ od 0 do 2 (ili od 0 do -2) — takvih puteva ima $2v_{2n}$ — i puta dužine 2 od 2 (odnosno -2) do 4 — takav put je samo jedan. Zbog toga je

$$a_{2n+2}=2v_{2n} \text{ za } n=1,2,\ldots . \tag{1}$$

Važi takođe sledeća relacija:

$$u_{2n+2}=2u_{2n}+2v_{2n} \text{ za } n=1,2,\ldots , \tag{2}$$

jer se svaki put dužine $2n+2$ od tačke 0 do 0 koji ne prolazi kroz 4 sastoji od:

— nekog puta dužine $2n$ od 0 do 0 koji ne prolazi kroz 4 (takvih puteva ima u_{2n}) i puta dužine 2 od 0 do 0 (dva su takva puta: (0, 1, 0) i (0, −1, 0)) ili

— nekog puta dužine $2n$ od 0 do 2 (ili do −2) koji ne prolazi kroz 4 (takvih puteva ima $2v_{2n}$) i puta dužine 2 od 2 (odnosno −2) do 0 (takav put je samo jedan).

Na sličan način se dokazuje:

$$v_{2n+2}=u_{2n}+2v_{2n} \text{ za } n=1,2,\dots . \tag{3}$$

Iz (2) i (3) dobijamo

$$v_{2n+4}=u_{2n+2}+2v_{2n+2}=2u_{2n}+2v_{2n}+2v_{2n+2}=2(v_{2n+2}-2v_{2n})+$$
$$+2v_{2n}+2v_{2n+2}=4v_{2n+2}-2v_{2n}.$$

Kombinujući sa (1) imamo

$$a_{2n+4}=4a_{2n+2}-2a_{2n} \text{ za } n=1,2,\dots . \tag{4}$$

Lako se vidi da je $a_2=0$ (jer nema puteva dužine 2 od 0 do 4) i $a_4=2$ (dva su puta dužine 4 od 0 do 4: (0, 1, 2, 3, 4) i (0, −1, −2, −3, 4)). Rešavajući diferencnu jednačinu (4) sa tim početnim uslovima dobijamo

$$a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1}-y^{n-1}),\ n=1,2,\dots ,$$

gde je $x=2+\sqrt{2}$ i $y=2-\sqrt{2}$.

Napomena: O rešavanju diferencnih jednačina videti npr. sv. 8 ovih materijala. Tvrđenje se inače lako može dokazati i bez poznavanja algoritma rešavanja jednačine (4) — dovoljno je primeniti indukciju po n.

1980. 1.

Stavljajući $y=1$ u (*ii*) dobijamo $f(x)=2f(x)-f(x+1)+1$, tj. $f(x+1)=f(x)+1$ za sve $x\in Q$. Odatle lako sledi $f(x+n)=f(x)+n$ za sve cele n i, specijalno, $f(n)=n+1$ (zbog (*i*)).

Svaki $x\in Q$ se može napisati kao $x=\dfrac{m}{n}$ sa celim m,n i $n\neq 0$.

Imamo

$$f(nx)=f(x)f(n)-f(x+n)+1,$$

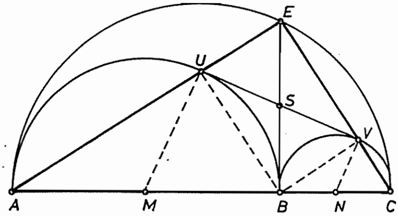
$$m+1=f(m)=f(x)(n+1)-f(x)-n+1=nf(x)-n+1,$$

odakle

$$f(x)=\frac{m}{n}+1=x+1, \text{ za sve } x\in Q.$$

Neposredno se proverava da funkcija $f(x)=x+1$ zadovoljava datu jednačinu.

1980. 2.



Iz $BE^2=2r_1\cdot 2r_2$ dobijamo $BE=2\sqrt{r_1r_2}$. S druge strane, $UV^2=MN^2-(MU-NV)^2=4r_1r_2$ (M i N su središta polukrugova), odakle $UV=2\sqrt{r_1r_2}=BE$.

Dalje, $SU=SB=SV=\frac{1}{2}UV=\sqrt{r_1r_2}=ES$, pa je četvorougao $BVEU$ pravougaonik, jer su mu dijagonale jednake i polove se. Pošto su $\sphericalangle AUB$ i $\sphericalangle EUB$ pravi, tačke A,U,E i, slično, E,V,C su kolinearne. Trougao EUV je podudaran trouglu EUB koji je sličan sa ΔEAC, pa su i ΔEUV i ΔEAC slični sa koeficijentom $k=\frac{UV}{AC}=\frac{2\sqrt{r_1r_2}}{2(r_1+r_2)}$.

Zato je

$$\frac{\text{površina } \Delta EUV}{\text{površina } \Delta EAC}=k^2=\frac{r_1r_2}{(r_1+r_2)^2}.$$

1980. 3.

Neka je $n+1=p^sq$, gde je $s\geqslant 0$ i q ceo broj koji nije deljiv sa p.

Pretpostavimo da ne važi tvrđenje (*ii*), tj. da je $q>p$. Tada je za $k=p^s(q-p)$, $o<k<n$ i

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}\frac{n+1-k}{k}=\binom{n}{k-1}\frac{p^{s+1}}{p^s(q-p)}=\binom{n}{k-1}\frac{p}{q-p},$$

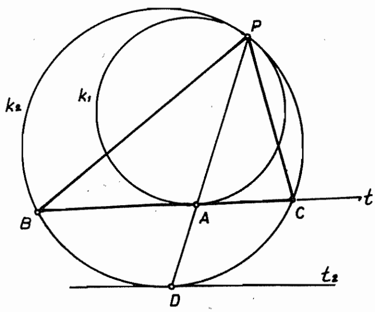
tj. $p\mid\binom{n}{k}$, pa ne važi tvrđenje (*i*).

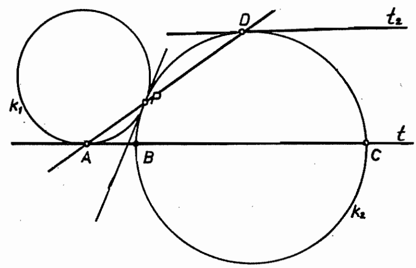
Pretpostavimo sada da tvrđenje (*ii*) važi, tj. da je $0<q<p$. Indukcijom po k, $0\leqslant k\leqslant n$, dokažimo da važi (*i*), tj. da $p\nmid\binom{n}{k}$. Očigledno $p\nmid\binom{n}{0}$. Pretpostavimo da $p\nmid\binom{n}{k-1}$ za neko k, $1\leqslant k\leqslant n$. Neka je $k=p^t r$, gde je r ceo broj koji nije deljiv sa p. Očigledno je $t\leqslant s$, a ako je $t=s$, onda $r<q$. Zato $p\nmid p^{s-t}q-r$. Iz

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}\frac{n+1-k}{k}=\binom{n}{k-1}\frac{p^s q-p^t r}{p^t r}=\binom{n}{k-1}\frac{p^{s-t}q-r}{r}$$

sledi da $p\nmid\binom{n}{k}$.

1980. 4.





Posmatrajmo homotetiju H sa centrom u P koja krug k_1, preslikava u k_2. H preslikava A u $D=PA\cap k_2$, a tangentu t kruga k_1 u tangentu t_2 kruga k_2, paralelnu sa t. Zbog toga je tačka D središte luka BC kruga k_2, pa je PD simetrala unutrašnjeg ili spoljašnjeg (v. slike) ugla kod P trougla BPC.

1980. 5.

Neka je T suma sa kojom je svaki igrač počeo igru i neka je n_j zbir koje su pokazale kockice u j-tom bacanju. Igrač broj i posle $i-1$ bacanja ima

$$S=T\left(1+\frac{1}{n_1}\right)\left(1+\frac{1}{n_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n_{i-1}}\right).$$

Tada je njegov red da plaća. Ukupan iznos koji on treba da isplati je $\frac{1}{n_i}(10T-S)$, pa mu posle toga ostaje

$$S-\frac{1}{n_i}(10\,T-S)=T\left[\left(1+\frac{1}{n_i}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n_{i-1}}\right)\left(1+\frac{1}{n_i}\right)-\frac{10}{n_i}\right].$$

Posle 10 bacanja on ima

$$T\left[\left(1+\frac{1}{n_i}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n_{10}}\right)-\frac{10}{n_i}\left(1+\frac{1}{n_{i+1}}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n_{10}}\right)\right],$$

što je jednako polaznoj sumi T. Za $i=0,1,\ldots,9$ označimo $a_i=\left(1+\frac{1}{n_{i+1}}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n_{10}}\right)$ i $a_{10}=1$. Tada dobijamo sledeći sistem od 10 jednačina:

$$a_0-\frac{10}{n_i}\,a_i=1 \ (i=1,2,\ldots,10).$$

Oduzimajući jednačine i i $i+1$ dobijamo

$$\frac{10}{n_i}\,a_i=\frac{10}{n_{i+1}}\,a_{i+1},$$

odnosno

$$\frac{1}{n_i}\left(1+\frac{1}{n_{i+1}}\right)=\frac{1}{n_{i+1}},$$

tj.

$$n_{i+1}+1=n_i \ (i=1,2,\ldots,9).$$

Iz $n_{10}=12$ dobijamo $n_9=13, n_8=14,\ldots,n_1=21$.

Provera pokazuje da se igra zaista mogla odvijati na opisani način.

1980. 6.

x i y moraju očigledno da budu iste parnosti, pa su i $u=\frac{x+y}{2}$ i $v=\frac{x-y}{2}$ celi brojevi. Jednačina dobija oblik

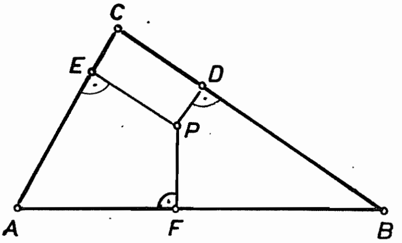
$$4u^3+4uv^2=8(3u^2+v^2+1),$$

odnosno

$$(u-2)(u^2+v^2)=4u^2+2.$$

Sledi da je $u>2$, pa je $4u^2+2<5(u^2+v^2)$ i zato $u-2<5$. Proverom vrednosti $u\in\{3,4,5,6\}$ dobijcju se celobrojna rešenja $u=5, v=\pm 3$, odakle $(x,y)=(8,2)$ ili $(x,y)=(2,8)$.

XXII. 1.



Označimo $a=BC, b=AC, c==AB$ i izraz čiji minimum tražimo sa

$$S=\frac{a}{PD}+\frac{b}{PE}+\frac{c}{PF}.$$

Ako je P površina ΔABC, imamo

$$2P=a\cdot PD+b\cdot PE+c\cdot PF,$$

pa je

$$2\,PS=a^2+b^2+c^2+bc\left(\frac{PF}{PE}+\frac{PE}{PF}\right)+ca\left(\frac{PD}{PF}+\frac{PF}{PD}\right)+ab\left(\frac{PD}{PE}+\frac{PE}{PD}\right)\geqslant$$

$$\geqslant a^2+b^2+c^2+2\,(bc+ca+ab)+(a+b+c)^2,$$

pri čemu znak jednakosti važi ako i samo ako je $PD=PE=PF$, tj. kada je P centar upisanog kruga ΔABC. Tada dati izraz ima minimalnu vrednost

$$S_{\min}=\frac{(a+b+c)^2}{2P}.$$

(Korišćena je nejednakost $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$ za $x>0$ u kojoj znak jednakosti važi ako i samo ako je $x=1$.)

XXII. 2.

Kako je broj k $(=1,2,\ldots,n-r+1)$ minimalni element u $\binom{n-k}{r-1}$ r-članih podskupova skupa $\{1,2,\ldots,n\}$, to je

$$f(n,r)=\frac{1}{\binom{n}{r}}\sum_{k=1}^{n-r+1} k\binom{n-k}{r-1}.$$

Indukcijom, ili na neki drugi način, lako je dokazati da je

$$\sum_{k=1}^{n-r+1} k\binom{n-k}{r-1}=\binom{n+1}{r+1}.$$

Zbog toga je

$$f(n,r)=\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}}=\frac{n+1}{r+1},$$

što je i trebalo dokazati.

XXII. 3.

Za $m=1$, n može biti jednako 1 ili 2. Ako je $m>1$, mora biti $n>m$, jer je $n(n-m)=m^2\pm 1>0$. Označimo $p=n-m>0$. Neposredno se proverava da ako je par (n,m) rešenje jednačine, onda je i (m,p) takođe rešenje. Takođe i obrnuto: svako rešenje (n,m) daje novo rešenje $(m+n,n)$. Zato su sva rešenja date jednačine parovi uzastopnih Fibonačijevih brojeva*):

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, . . .,

pa je tražena maksimalna vrednost 987^2+1597^2.

XXII. 4.

Neka niz

$$a-n+1, a-n+2, \ldots, a-1, a \qquad (1)$$

prirodnih brojeva zadovoljava uslove zadatka, tj. neka

$$a \mid [a-n+1, \ldots, a-1].$$

Neka je $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}$ kanonska faktorizacija broja a na proste činioce ($p_1<p_2<\ldots<p_r$, $\alpha_j>0$ za $j=1,2,\ldots,r$). Tada za svako j ($j=$

*) O Fibonačijevim brojevima videti npr. u sv. 8 ovih materijala

$=1,2,\ldots,r$) postoji m ($m=1,2,\ldots,n-1$), tako da $p_j^{\alpha_j} \mid a-m$. Kako je i $p_j^{\alpha_j} \mid a$, to mora biti $p_j^{\alpha_j} \leqslant n-1$ za sve $j=1,2,\ldots,r$. Ako bi bilo $r=1$, dobili bismo $n \leqslant a = p_1^{\alpha_1} \leqslant n-1$, što je nemoguće; dakle, $r \geqslant 2$. No, to znači da moraju postojati bar dva prosta broja manja od n, pa je $n \geqslant 4$.

Dokazaćemo da za svako $n \geqslant 4$ postoji niz (1) koji zadovoljava uslove zadatka, a da za $n \geqslant 5$ postoje bar dva takva niza. Drugim rečima, odgovor na pitanje pod (*a*) je $n \geqslant 4$, a pod (*b*) $n=4$.

Ako je $n=4$ mora biti $p_1^{\alpha_1} \leqslant 3$, $p_2^{\alpha_2} \leqslant 3$, pa je $r=2$, $p_1=2$, $p_2=3$, $\alpha_1=\alpha_2=1$, tj. jedini niz tipa (1) koji zadovoljava uslove zadatka može biti 3,4,5,6 — lako se proverava da ih on zaista zadovoljava.

Lako se nalaze dva petočlana niza — 2,3,4,5,6 i 8,9,10,11,12 — koji zadovoljavaju uslove zadatka.

Neka je $n \geqslant 6$. Označimo sa r, s, t prirodne brojeve koji zadovoljavaju nejednakosti $2^r \leqslant n-1 < 2^{r+1}$, $3^s \leqslant n-1 < 3^{s+1}$, $5^t \leqslant n-1 < 5^{t+1}$. U nizu (1) izaberimo da bude $a = 2^r \cdot 3^s$, odnosno $a = 2^r \cdot 5^t$. Tada je

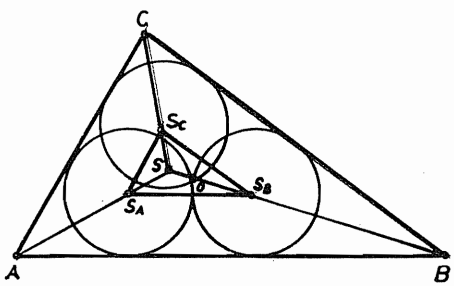
$$n-1 < 2^{r+1} < 2^r \cdot 3 \leqslant 2^r \cdot 3^s = a,$$

odnosno

$$n-1 < 2^{r+1} < 2^r \cdot 5 \leqslant 2^r \cdot 5^t = a,$$

pa nizovi (1) za takva dva izbora broja a zadovoljavaju sve uslove zadatka.

XXII. 5.



Označimo sa S_A, S_B, S_C centre datih krugova, pri čemu S_A leži na simetrali ugla A trougla ABC itd. Tada je $S_AS_B \| AB$, $S_BS_C \| BC$, $S_CS_A \| CA$ i simetrale uglova ΔABC su ujedno simetrale uglova $\Delta S_AS_BS_C$. Ta dva trougla zato imaju zajednički centar upisanog kruga — označimo ga sa S — koji je centar homotetije K koja preslikava $\Delta S_AS_BS_C$ u ΔABC.

Tačka O je podjednako udaljena od tačaka S_A, S_B i S_C, tj. ona je centar opisanog kruga $\Delta S_AS_BS_C$, pa pomenutom homotetijom K

prelazi u centar P opisanog kruga ΔABC. Zato tačke S, O i P leže na jednoj pravoj.

XXII. 6.

Iz (2) i (1) odmah dobijamo $f(1,0)=f(0,1)=2$. Kombinujući taj rezultat sa (1) i (3) za $x=0$ dobijamo

$$f(1,y+1)=f(0,f(1,y))=f(1,y)+1 \text{ za } y\geqslant 0$$

i

$$f(1,y)=y+2 \text{ za } y\geqslant 0. \tag{4}$$

Iz (2) i (4) imamo $f(2,0)=f(1,1)=3$. Iz (3) za $x=1$ i (4) dobijamo

$$f(2,y+1)=f(1,f(2,y))=f(2,y)+2 \text{ za } y\geqslant 0.$$

Kombinujući ta dva rezultata indukcijom nalazimo

$$f(2,y)=2y+3 \text{ za } y\geqslant 0. \tag{5}$$

Stavimo sada $x=2$ u (3); koristeći (5) dobijamo

$$f(3,y+1)=f(2,f(3,y))=2f(3,y)+3 \text{ za } y\geqslant 0,$$

što zajedno sa $f(3,0)=f(2,1)=5=8-3$ indukcijom daje

$$f(3,y)=2^{y+3}-3 \text{ za } y\geqslant 0. \tag{6}$$

Stavimo najzad $x=3$ u (3); s obzirom na (6) to daje

$$f(4,y+1)=f(3,f(4,y))=2^{f(4,y)+3}-3 \text{ za } y\geqslant 0.$$

Kako je $f(4,0)=f(3,1)=2^4-3$, to lako induktivno dobijamo

$$f(4,y)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}-3 \text{ ($y+3$ dvojke) za } y\geqslant 0,$$

odnosno

$$f(4,1981)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}-3 \text{ (1984 dvojke).}$$

XXIII. 1.

$$m=n=1 \text{ daje } 0=f(2)=\begin{cases}2f(1)\\2f(1)+1\end{cases}, \text{ pa je } f(1)=0.$$

$m=2$, $n=1$ daje $f(3)=\begin{cases} f(2)+f(1)=0 \\ f(2)+f(1)+1=1 \end{cases}$, pa je $f(3)=1$ zbog (c). Dalje e $f(3n+3)\geqslant f(3n)+f(3)=f(3n)+1$, odakle indukcijom $f(3n)\geqslant n$. Pri tom, ako u toj relaciji znak $>$ važi za neko n, tada on važi i za sve veće n. Zbog $f(9999)=3333$, to znači da je $f(3n)=n$ za sve $n\leqslant 3333$. Specijalno:

$$1982=f(3\cdot 1982)\geqslant f(2\cdot 1982)+f(1982)\geqslant 3\cdot f(1982),$$

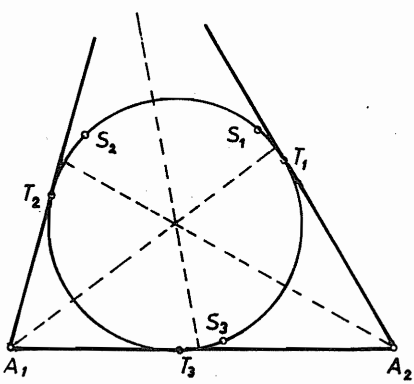
pa je

$$661>\frac{1982}{3}\geqslant f(1982)\geqslant f(1980)+f(2)=660,$$

odakle $f(1982)=660$.

Napomena: Funkcije f sa navedenim svojstvima postoje, npr. takva je $f(n)=\left[\frac{n}{3}\right]$.

XXIII. 2.



Prvo rešenje. Tačke S_1, S_2 i S_3, naravno, pripadaju upisanom krugu. Simetrijom u odnosu na simetralu ugla A_1 luk T_3S_1 tog kruga prelazi u luk T_2T_1, a simetrijom u odnosu na simetralu ugla A_2 luk T_3S_2 prelazi u luk T_1T_2. Zbog toga:

$$T_3S_1=-T_2T_1=T_1T_2=-T_3S_2$$

(u ovoj relaciji su $T_3S_1,\dots$ oznake za orijentisane lukove upisanog kruga). Odavde sledi $S_1S_2 \parallel A_1A_2$ i zato $S_1S_2 \parallel M_1M_2$. Na sličan način se dokazuje $S_1S_3 \parallel M_1M_3$ i $S_2S_3 \parallel M_2M_3$. Trouglovi $M_1M_2M_3$ i $S_1S_2S_3$ imaju, dakle, paralelne stranice, pa su povezani ili translacijom ili homotetijom. Translacija je nemoguća jer je opisani krug $\Delta M_1M_2M_3$ veći od opisanog kruga $\Delta S_1S_2S_3$ (tj. upisanog kruga $\Delta A_1A_2A_3$ — tu je korišćena pretpostavka da su stranice datog trougla sve različite). Zbog toga je centar homotetije zajednička tačka pravih M_1S_1, M_2S_2 i M_3S_3. (Te prave su definisane jer je $M_i\neq S_i$ posledica različitosti stranica $\Delta A_1A_2A_3$.)

Drugo rešenje. Izaberimo koordinatni sistem sa početkom u centru O upisanog kruga $\Delta A_1A_2A_3$, tako da je taj krug jedinični. Označavaćemo malim slovima kompleksne brojeve koji odgovaraju datim tačkama označenim velikim slovima. Jasno je da važi $t_1\bar{t}_1=\bar{t}_2t_2=t_3\bar{t}_3=1$. Tetive T_2T_3 i T_1S_1 datog kruga su paralelne (obe su normalne na simetralu ugla A_1), pa je $t_2t_3=t_1s_1$ (jer su sva četiri broja u toj relaciji modula 1), odnosno $s_1=t_2t_3\bar{t}_1$. Analogno je $s_2=t_1t_3\bar{t}_2$ i $s_3=t_1t_2\bar{t}_3$. Odatle

$$s_2-s_3=t_1(t_2\bar{t}_3-t_3\bar{t}_2).$$

Broj u zagradi je čisto imaginaran (kao razlika dva međusobno konjugovana broja), što pokazuje da je $OT_1\perp S_2S_3$ i prave S_2S_3 i A_2A_3 su paralelne.

Dalje zaključivanje je isto kao i kod prvog rešenja.

XXIII. 3.

Prvo rešenje. (a) Označimo $\frac{x_{i-1}}{x_i}=k_i(i=1,2,\ldots)$. Tada je (zbog $k_i+\frac{a}{k_i}\geqslant 2\sqrt{a}$ za $a>0$, $i=1,2,\ldots,n$ i $k_i\geqslant 1$ za $i=1,2,\ldots,n$):

$$S_n=\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}=k_1+\frac{k_2}{k_1}+\frac{k_3}{k_1k_2}+\ldots+\frac{k_n}{k_1k_2\ldots k_{n-1}}=$$

$$=k_1+\frac{1}{k_1}\left(k_2+\frac{1}{k_2}\left(k_3+\ldots+\frac{1}{k_{n-2}}\left(k_{n-1}+\frac{k_n}{k_{n-1}}\right)\ldots\right)\right)\geqslant$$

$$\geqslant k_1+\frac{1}{k_1}\left(k_2+\frac{1}{k_2}\left(k_3+\ldots+\frac{1}{k_{n-3}}\left(k_{n-2}+\frac{2}{k_{n-2}}\right)\ldots\right)\right)\geqslant$$

$$\geqslant\ldots\geqslant k_1+\frac{1}{k_1}2\sqrt{2\sqrt{\cdots\sqrt{2}}}\geqslant 2\sqrt{2\sqrt{\cdots\sqrt{2}}}=y_n.$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=4$, tvrđenje pod ($a$) je dokazano.

(b) Niz $x_n=2^{-n}$ zadovoljava zadati uslov:

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}=2^1+2^0+\ldots+2^{-n+2}=4-2^{-n+2}<4$$

za svako n.

Drugo rešenje. (a) Pokušajmo da odredimo niz pozitivnih brojeva c_n, takav da za svaki niz $x_0 \geqslant x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant \ldots 0$ važi nejednakost

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqslant c_n x_0 \text{ za svako } n. \tag{1}$$

Ako takav niz postoji, onda je i

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\left(\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{x_{n+1}}\right) \geqslant \frac{x_0^2}{x_1}+c_n x_1 \geqslant 2\sqrt{x_0^2 c_n}=x_0 \cdot 2\sqrt{c_n},$$

pa vidimo da se može uzeti $c_{n+1}=2\sqrt{c_n}$. S obzirom da je $\frac{x_0^2}{x_1} \geqslant x_0$, uzmimo npr. $c_1=1$ i zato

$$c_2=2,\ c_3=2\sqrt{2}=2^{1+\frac{1}{2}},\ c_4=2\sqrt{c_3}=2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$$

i uopšte

$$c_n=2^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}}=4 \cdot 2^{-\frac{1}{2^{n-2}}}$$

Kako $c_n \to 4$ $(n \to \infty$ i $x_0=1$, to iz (1) sledi tvrđenje pod (a).

Napomena. Ovo rešenje omogućava da pokažemo da je navedeni primer pod (b) jedinstveni moguć. Zaista, ako za svako n važi

$$4 \geqslant \frac{x_0^2}{x_1}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqslant \frac{x_0^2}{x_1}+c_{n-1} x_1,$$

gde je c_n niz izabran pod (a), onda zbog $\lim c_n=4$ imamo

$$4 \geqslant \frac{x_0^2}{x_1}+4x_1=4+\frac{1}{x_1}(x_0-2x_1)^2,$$

što znači $x_0=2x_1$. Slično se indukcijom dobija $x_n=2x_{n+1}$ za svako n, pa iz $x_0=1$ sledi $x_n=2^{-n}$.

XXIII. 4.

Zbog

$$x^3-3xy^2+y^3=(y-x)^3-3x^2y+2x^3=(y-x)^3-3(y-x)x^2-x^3,$$

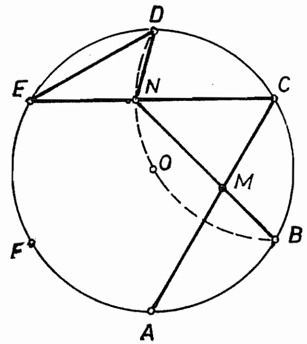
ako je par (x,y) rešenje jednačine, onda je i par $(y-x,-x)$ rešenje jednačine, a takođe i $(-y,x-y)$. Neposredna provera pokazuje da ako su bilo koja dva od tri para (x,y), $(y-x,-x)$, $(-y,x-y)$ jednaka među sobom, tada je $x=y=0$, što je isključeno pretpostavkom $n\neq 0$.

Pretpostavimo sada da je

$$x^3-3xy^2+y^3=2891\equiv 2 (\mathrm{mod}\ 9). \tag{1}$$

Lako se, međutim, proverava da su mogući ostaci kubova celih brojeva pri deljenju sa 9 jednaki 0 i ± 1. No, to za posledicu ima da je relacija (1) nemoguća.

XXIII. 5.



Zbog $CM=EN$, trouglovi BMC i DNE su podudarni, pa je

$$\measuredangle NBC=\measuredangle EDN.$$

Pored toga, $\measuredangle ECB=90°$, $\measuredangle CED=30°$, pa je

$$\measuredangle BND=\measuredangle BNC+\measuredangle CND=(90°-$$
$$-\measuredangle NBC)+(\measuredangle CED+\measuredangle NDE)=120°.$$

To znači da se duž BD vidi iz N pod istim uglom kao i iz centra kruga 0. Zato N leži na krugu sa centrom u C, poluprečnika $CD=CB$, tj. $CN=CB$. Najzad, $\lambda=CN:CE=CB:CE=1:\sqrt{3}$ jer je u pravouglom ΔBCE, $\measuredangle EBC=60°$.

XXIII. 6.

Rastojanje između tačaka ili skupova U, V označavaćemo sa $d(U,V)$ (pri tom, ako su U,V skupovi, $d(U,V)=\min\limits_{x\in U, y\in V} d(x,y)$*)). Za $P,Q\in L$ označavaćemo sa $L(P,Q)$ deo linije L između P i Q, a sa $l(P,Q)$ dužinu tog dela. Neka su $B_i (i=1,2,3,4)$ temena kvadrata S. Postoje tačke $B_i'\in L$, takve da je

$$d(B_i,B_i')\leqslant 1/2 \ (i=1,2,3,4).$$

*) Za učenike kojima su ti pojmovi poznati, pomenimo da u zadatku uvek baratamo sa ograničenim i zatvorenim skupovima, te je pomenuti minimum uvek definisan.

Pri tom, indeksi se mogu tako izabrati da je

$$l(A_0,B_1')<l(A_0,B_i') \ (i=2,3,4),$$

da su B_2 i B_3 susedna temenu B_1 i da je $l(A_0,B_3')<l(A_0,B_2')$.

Označimo sa D, odnosno E, skupove tačaka P stranice B_1B_2 sa osobinom $d(P,L(A_0,B_3'))\leqslant 1/2$, odnosno $d(P,L(B_3',A_n))\leqslant 1/2$. Prema pretpostavci, $D\cup E=B_1B_2$. Kako se D i E sastoje od konačnog broja zatvorenih intervala (ili tačaka) i $D\neq\varnothing$, $E\neq\varnothing$ (jer $B_1\in D$, $B_2\in E$), to je $D\cap E\neq\varnothing$. Neka je $P\in D\cap E$ i neka su $X\in L(A_0,B_3')$, $Y\in L(B_3', A_n)$, takve da je

$$d(P,X)\leqslant 1/2 \text{ i } d(P,Y)\leqslant 1/2.$$

Tada je $d(X,Y)\leqslant 1$. S druge strane, $d(P,L(X,B_3'))\leqslant 1/2$ i $d(B_3,L(X,B_3'))\leqslant 1/2$ povlači $l(X,B_3')\geqslant 99$ i slično $l(B_3',Y)\geqslant 99$, pa je

$$l(X,Y)=l(X,B_3')+l(B_3',Y)\geqslant 2\cdot 99=198.$$

XXIV. 1.

Stavljajući $y=x$ u datu relaciju (1), vidimo da postoje pozitivni realni brojevi z, takvi da je $f(z)=z$ (takav je svaki broj oblika $xf(x)$). Neka je z proizvoljan takav broj. Tada je i

$$f(z^2)=f(zf(z))=zf(z)=z^2,$$

pa slično induktivno dobijamo

$$f(z^n)=z^n \text{ za } n\in N. \tag{3}$$

Dalje, iz $z=f(z)=f(1\cdot f(z))=z\cdot f(1)$, zbog $z\neq 0$, dobijamo $f(1)= =1$, a iz

$$zf\left(\frac{1}{z}\right)=f\left(\frac{1}{z}f(z)\right)=f(1)=1$$

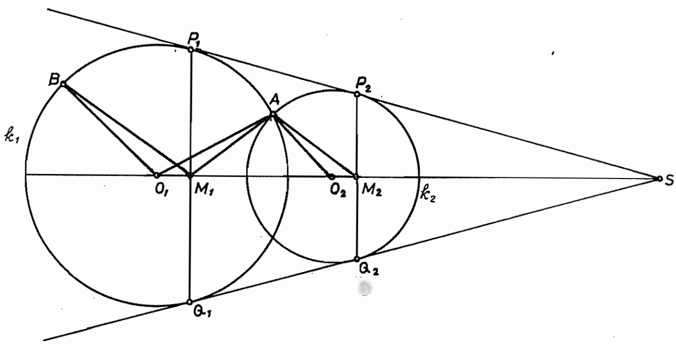
sledi $f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z}$ i, slično kao malopre,

$$f\left(\frac{1}{z^n}\right)=\frac{1}{z^n} \text{ za } n\in N. \tag{4}$$

Ako bi bilo $z>1$, iz (2) i (3) bi sledilo $0=\infty$; slično se eliminiše slučaj $z<1$ na osnovu (4). Dakle, jedini broj sa osobinom $z=f(z)$

je $z=1$, a kako tu osobinu ima svaki broj oblika $xf(x)$, to je $f(x)=\frac{1}{x}$ za sve x. Očigledno je da ta funkcija zaista zadovoljava uslove (1) i (2).

XXIV. 2.



Dovoljno je dokazati da je $\sphericalangle O_1AM_1=\sphericalangle O_2AM_2$. Neka je S presek zajedničkih tangenata krugova k_1 i k_2 i neka prava SA seče krug k_1 još u tački B. Zbog očigledne homotetičnosti krugova k_1 i k_2 važi $\sphericalangle O_2AM_2=\sphericalangle O_1BM_1$. Dakle, ostaje da se dokaže $\sphericalangle O_1AM_1=$ $=\sphericalangle O_1BM_1$, a za to je dovoljno dokazati da tačke A,B,O_1 i M_1 pripadaju jednom krugu. No, to sledi iz

$$SA\cdot SB=SP_1\cdot SP_1=SO_1\cos\alpha\cdot\frac{SM_1}{\cos\alpha}=SO_1\cdot SM_1.$$

$(\alpha=\sphericalangle P_1SO_1)$.

Napomena: Zadatak se može uopštiti. S ne mora biti zajednička tačka tangenata, već može biti bilo koja tačka prave O_1O_2 (van krugova), a P_i,Q_i dodirne tačke tangenata iz S na krugove $k_i (i=1,2)$.

XXIV. 3.

Neka je $n>2abc-ab-bc-ca$ i neka je (x_0,y_0,z_0) bilo koje celobrojno rešenje jednačine

$$bcx+cay+abz=n$$

(takvo uvek postoji za bilo koji ceo broj n zbog $(a,b)=(b,c)=(c,a)=1$)e Pokazaćemo da se može izabrati celobrojno rešenje (x,y,z) te jednačin.

za koje je $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Oduzimajući dobijamo

$$bc(x-x_0)+ca(y-y_0)+ab(z-z_0)=0. \tag{1}$$

Zbog $(a,b)=(a,c)=1$ mora da bude $a \mid x-x_0$, tj. $x-x_0=as (s \in Z)$. Zamenjujući u (1) dobijamo

$$bcs+c(y-y_0)+b(z-z_0)=0. \tag{2}$$

Zbog $(b,c)=1$ mora da bude $b \mid y-y_0$, tj. $y-y_0=bt (t \in Z)$. Zamenjujući u (2) dobijamo $cs+ct+z-z_0=0$, tj. $z-z_0=-c(s+t)$.*)

U relacijama $x=x_0+as$ i $y=y_0+bt$ brojevi s i t se mogu tako izabrati da bude $0 \leqslant x \leqslant a-1$ i $0 \leqslant y \leqslant b-1$. Tada je i

$$abz=n-bcx-acy>(2abc-ab-bc-ca)-bc(a-1)-ca(b-1)=$$
$$=-ab,$$

dakle $z>-1$, tj. $z \geqslant 0$.

Dokažimo sada da se broj $2abc-ab-bc-ca$ ne može prikazati u obliku $bcx+cay+abz$ sa nenegativnim celim x,y,z. Pretpostavimo, suprotno, da je

$$2abc-ab-bc-ca=bcx+cay+zab,\ x,y,z \geqslant 0.$$

Tada je

$$bc(x+1)+ca(y+1)+ab(z+1)=2abc,$$

pri čemu je $x+1 \geqslant 1$, $y+1 \geqslant 1$, $z+1 \geqslant 1$. Zbog $(a,b)=(a,c)=1$ mora biti $a \mid x+1$, odakle $a \leqslant x+1$. Slično, $b \leqslant y+1$ i $c \leqslant z+1$ i zato

$$bca+cab+abc \leqslant bc(x+1)+ca(y+1)+ab(z+1)=2abc,$$

tj. $3abc \leqslant 2abc$.

Napomena: Zadatak se može uopštiti. Naime, može se, npr. indukcijom, dokazati sledeće tvrđenje: Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prirodni brojevi, uzajamno prosti u parovima, i neka je

$$X=\{x_1a_2\ldots a_n+a_1x_2\ldots a_n+\ldots+a_1\ldots a_{n-1}x_n \mid x_1,\ldots,x_n \in N \cup \{0\}\}.$$

Tada je

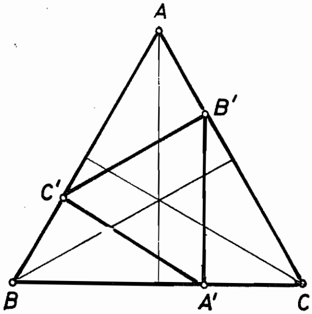
$$max\,(N \setminus X)=a_1\ldots a_n\left(n-1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

---

*) Direktno se proverava da svaka trojka oblika $(x_0+as,\ y_0+bt,\ z_0-c(s+t))$ zaista zadovoljava datu jednačinu za bilo koje $s,t \in Z$.

XXIV. 4.

Odgovor je „da". Da bismo to dokazali, uočimo trougao $A'B'C'$ koji ima sledeće osobine: $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$ i njegove stranice paralelne su visinama datog trougla (takav trougao postoji — za tačku A' treba uzeti jednu od dve tačke koje stranicu BC dele na tri jednaka dela). Pretpostavimo sada da tvrđenje koje dokazujemo nije tačno, tj. da postoji podela skupa E na disjunktne podskupove X i Y, tako da nijedan od tih podskupova ne sadrži tri tačke koje su temena pravouglog trougla. Od tačaka A', B', C' bar dve — neka su to npr. A' i B' — pripadaju istom podskupu — npr. skupu X. Tada sve tačke duži BC (osim A') pripadaju skupu Y. Ako bi tačka C' pripadala skupu Y, u Y bi se našao pravougli trougao (C', B i projekcija C' na BC); ako bi C' pripadala skupu X, tada bi sve tačke duži AB (osim C') pripadale skupu Y, pa bi ponovo Y sadržao temena pravouglog trougla (A, B i projekcija A na BC). Dakle, u oba slučaja dobija se kontradikcija.



XXIV. 5.

Dokazaćemo da je tvrđenje navedeno u zadatku tačno. U tom cilju, označimo sa T_n skup svih nenegativnih celih brojeva koji kada se zapišu u sistemu sa osnovom 3 imaju najviše n cifara, pri čemu nijedna od tih cifara nije dvojka. Broj elemenata skupa T_n je 2^n, a njegov najveći element je $11\ldots1 = 3^0 + 3^1 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$. S druge strane, skup T_n ne sadrži nijednu aritmetičku trojku. Zaista, ako bi bilo $x, y, z \in T_n$ i $2y = x + z$, broj $2y$ bi u zapisu sa osnovom 3 imao sve cifre jednake 0 ili 2, a broj $x + z$ (ako su x i z različiti elementi iz T_n) morao bi bar na nekom mestu da ima cifru 1.

Još ostaje da se pogodno izabere n. Lako je videti da $n = 11$ daje skup T_n koji zadovoljava uslove zadatka, jer je $2^{11} > 1983$, a $\frac{1}{2}(3^{11} - 1) = 88573 < 100000$.

XXIV. 6.

Prvo rešenje. Za svaki trougao sa stranicama a,b,c uvek postoje tri nenegativna broja x,y,z, takva da je $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ (ti brojevi odgovaraju podeli stranica trougla tačkama dodira upisanog kruga). Zamenjujući u datu nejednakost, posle sređivanja dobijamo ekvivalentnu nejednakost

$$xy^3+yz^3+zx^3 \geqslant xyz(x+y+z).$$

Ta nejednakost, međutim, sledi primenom nejednakosti Koši-Bunjakovskog

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

na brojeve

$$a_1=\sqrt{z},\ a_2=\sqrt{x},\ a_3=\sqrt{y},\ b_1=\sqrt{xy^3},\ b_2=\sqrt{yz^3},\ b_3=\sqrt{zx^3},$$

pri čemu znak jednakosti važi ako i samo ako je

$$\frac{xy^3}{z}=\frac{yz^3}{x}=\frac{zx^3}{y},$$

tj. ako i samo ako je $x=y=z$, odnosno $a=b=c$.

Drugo rešenje. Može se pokazati da je izraz na levoj strani date nejednakosti jednak

$$\frac{1}{2}(a+b-c)(a-b+c)(c-a)^2+(b+c-a)(b-c+a)(b-a)^2+(c+$$
$$+a-b)(c-a+b)(c-b)^2].$$

Ako su a,b,c stranice trougla, taj izraz je očigledno nenegativan, a jednak je nuli ako i samo ako je $a=b=c$.

XXV. 1.

Prvo rešenje. Iz uslova zadatka sledi $0 \leqslant x,y,z \leqslant 1$, pa je $xy \geqslant \geqslant xyz$, $yz \geqslant xyz$, $zx \geqslant xyz$, odakle

$$xy+yz+zx \geqslant 3xyz,$$

što je jače od leve strane date nejednakosti.*)

*) Važi, ustvari, još jača nejednakost: $xy+yz+zx \geqslant 9xyz$, što sledi iz poznate nejednakosti (koja je specijalan slučaj nejednakosti Koši-Bunjakovskog): $(x+y+z$ $(x+y+z)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqslant 9$ za $x,y,z>0$.

Za dokaz desne strane, označimo

$$f(x,y,z)=xy+yz+zx-2xyz.$$

Primetimo da je za $x=y=z=\frac{1}{3}$, $f(x,y,z)=\frac{7}{27}$. Pretpostavimo zato da nisu svi x,y,z jednaki $\frac{1}{3}$. Dati izraz je simetričan, pa zato možemo pretpostaviti da je npr. $x\geqslant y\geqslant z$. Moguća su dva slučaja:

$$1^\circ\ x>\frac{1}{3}\geqslant y\geqslant z,\ z<\frac{1}{3}.$$

Stavimo $x=\frac{1}{3}+d+e$, $y=\frac{1}{3}-e$, $z=\frac{1}{3}-d$, $d\geqslant e\geqslant 0$. Tada je

$$f(x,y,z)=\left(\frac{1}{3}+d+e\right)\left(\frac{1}{3}-e\right)+\left(\frac{1}{3}-e\right)\left(\frac{1}{3}-d\right)+\left(\frac{1}{3}-d\right)\left(\frac{1}{3}+d+e\right)-$$
$$-2\left(\frac{1}{3}+d+e\right)\left(\frac{1}{3}-e\right)\left(\frac{1}{3}-d\right)=\frac{7}{27}-\frac{e^2}{3}-\frac{de}{3}-\frac{d^2}{3}-2de^2-2d^2e<\frac{7}{27}.$$

$$2^\circ x\geqslant y>\frac{1}{3}>z.$$

Stavimo $x=\frac{1}{3}+e$, $y=\frac{1}{3}+d$, $z=\frac{1}{3}-d-e$, $d+e<\frac{1}{3}$, $e\geqslant d>0$.

Dobijamo

$$f(x,y,z)=\left(\frac{1}{3}+e\right)\left(\frac{1}{3}+d\right)+\left(\frac{1}{3}+d\right)\left(\frac{1}{3}-e-d\right)+\left(\frac{1}{3}-e-d\right)\left(\frac{1}{3}+\right.$$
$$\left.+e\right)-2\left(\frac{1}{3}+e\right)\left(\frac{1}{3}+d\right)\left(\frac{1}{3}-e-d\right)=$$
$$=\frac{7}{27}-\frac{d^2}{3}-\frac{e^2}{3}-\frac{de}{3}+2de^2+2d^2e=$$
$$=\frac{7}{27}-\frac{d^2+de+e^2}{3}+2de(d+e)<$$

$$<\frac{7}{27}-\frac{d^2+de+e^2}{3}+\frac{2}{3}de=$$

$$=\frac{7}{27}-\frac{e^2-de+d^2}{3}=\frac{7}{27}-\frac{(e-d)^2+ed}{3}<\frac{7}{27}.$$

Drugo rešenje. Dokazaćemo desnu nejednakost standardnim postupkom određivanja ekstremnih vrednosti funkcija više promenljivih. Eliminacijom promenljive z pomoću datog uslova dobijamo da se izraz koji ispitujemo svodi na

$$g(x,y)=2x^2y+2xy^2-x^2-y^2-3xy+x+y,$$

pri čemu važe ograničenja $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant 1$. Na rubu te oblasti funkcija g se svodi na izraz tipa $x-x^2$, te ekstremne vrednosti može eventualno imati samo u tačkama $\left(\frac{1}{2},0\right)$, $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ ili $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Što se unutraš njosti oblasti tiče, u njoj su parcijalni izvodi funkcije g jednaki:

$$g_x'=4xy+2y^2-2x-3y+1,$$

$$g_y'=2x^2+4xy-2y-3x+1.$$

Izjednačavanje tih izvoda sa nulom daje sistem koji u unutrašnjosti naše oblasti ima samo jedno rešenje — $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. Kako je ta oblast kompaktna (ograničena i zatvorena), to neprekidna funkcija g na njoj dostiže svoju maksimalnu vrednost i ona može biti samo jedna od njenih vrednosti u dobijene 4 tačke. Kako je $g\left(\frac{1}{2},0\right)=g\left(0,\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$, a $g\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{27}>\frac{1}{4}$, to je zaista $g(x,y)\leqslant\frac{7}{27}$.

XXV. 2.

Važi:

$$(a+b)^7-(a^7+b^7)=7ab[(a^5+b^5)+3ab(a^3+b^3)+5a^2b^2(a+b)]=$$

$$=7ab(a+b)(a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4)=$$

$$=7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2.$$

Kako proizvod $ab(a+b)$ ne treba da bude deljiv sa 7, ostaje da brojeve a i b tako odredimo da bude $7^3 \mid a^2+ab+b^2$. Mora da bude

$$(a+b)^2 > a^2+ab+b^2 \geqslant 7^3 = 343,$$

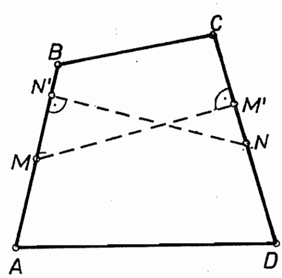
tj. $a+b \geqslant 19$. Provera pokazuje da brojevi $a=18, b=1$ zadovoljavaju uslove zadatka.

XXV. 3.

Posmatrajmo proizvoljne dve kružnice $R=(O,r)$ i $S=(O,s)$ sa $0<r<s<1$. Na kružnici R izaberimo tačku X za koju je $\alpha(X)=r(s-r)$ — jasno je da je $C(X)=S$ i $0<\alpha(x)<1$. Ako tvrđenje zadatka ne bi bilo tačno, boja tačke X ne bi se pojavljivala na kružnici S, pa bi skup svih boja koje se pojavljuju na kružnici R bio različit od skupa svih boja koje se pojavljuju na kružnici S.

Dakle, ako tvrđenje zadatka ne bi bilo tačno, proizvoljne dve kružnice poluprečnika manjeg od 1 imale bi različite skupove boja kojima su obojene. No, takvih kružnica ima beskonačno mnogo, a mogućih podskupova (konačnog) skupa boja samo konačno mnogo. Kontradikcija.

XXV. 4.



Neka je M središte duži AB i M' njegova projekcija na pravu CD. Tada je $MM' = \frac{1}{2} AB$ i

$$P_{ABCD} = P_{AMD} + P_{MBC} + P_{CMD} = \frac{1}{2} P_{ABD} + \frac{1}{2} P_{CAB} + \frac{1}{4} CD \cdot AB. \qquad (1)$$

Neka je N središte duži CD i N' njegova projekcija na AB. Tada je

$$P_{ABCD} = P_{BCN} + P_{AND} + P_{ANB} = \frac{1}{2} P_{BCD} + \frac{1}{2} P_{ACD} + \frac{1}{2} AB \cdot NN'. \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) sledi

$$P_{ABD}+P_{CAB}+\frac{1}{2}CD\cdot AB=P_{BCD}+P_{ACD}+AB\cdot NN',$$

odnosno

$$P_{ABD}+(P_{ABCD}-P_{ACD})-(P_{ABCD}-P_{ABD})-P_{ACD}=AB(NN'-\frac{1}{2}CD)$$

i

$$2(P_{ABD}-P_{ACD})=AB\left(NN'-\frac{1}{2}CD\right).$$

Jasno je da krug sa dijametrom CD dodiruje pravu AB ako i samo ako je $NN'=\frac{1}{2}CD$. Prema (3), taj uslov je ekvivalentan sa $P_{ABD}=$ $=P_{ACD}$. No, to je očigledno ispunjeno ako i samo ako je $BC \parallel AD$.

XXV. 5.

Označimo temena datog n-tougla sa $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i za svako j stavimo $A_{n+j}=A_j$. Neka je A_iA_j proizvoljna dijagonala. Ako sa X označimo presek dijagonala A_iA_j i $A_{i+1}A_{j+1}$, iz trouglova $A_iA_{i+1}X$ i $A_jA_{j+1}X$ dobijamo

$$A_iA_j+A_{i+1}A_{j+1}>A_iA_{i+1}+A_jA_{j+1}.$$

Sabirajući te nejednakosti, napisane za svaku od $\frac{n(n-3)}{2}$ dijagonale n-tougla, dobijamo

$$2d>(n-3)p.$$

tj. levu stranu date nejednakosti.

Za dijagonalu A_iA_j važi takođe

$$A_iA_j<A_iA_{i+1}+\ldots+A_{j-1}A_j \tag{1}$$

i

$$A_iA_j<A_jA_{j+1}+\ldots+A_{i-1}A_i. \tag{2}$$

Ako je n neparno, $n=2k+1$, izaberimo za svaku dijagonalu A_iA_j onu od nejednakosti (1), (2) čija desna strana ima manje sabiraka.

Sabiranjem tako dobijenih $\frac{n(n-3)}{2}$ nejednakosti dobijamo

$$d<\frac{(k-1)(k+2)}{2}p=\frac{p}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2\right).$$

Ako je n parno, $n=2k$, za $j=i+k$ važi nejednakost $A_iA_{i+k}<\frac{p}{2}$; za ostale dijagonale uzmimo onu od nejednakosti (1), (2) čija desna strana ima manje sabiraka. Sabiranje tako dobijenih nejednakosti daje

$$d<k\frac{p}{2}+\frac{(k-2)(k+1)}{2}p=\frac{k^2-2}{2}p=$$

$$=\frac{p}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2\right).$$

Time je i desna strana date nejednakosti dokazana.

XXV. 6.

Iz uslova (1) i (2) neposredno sledi da je $a+d>b+c$. Zaista:

$$0<(d-b)(b-c)=d^2-bd+bc-cd=$$

$$=d^2-bd+ad-cd=d[(a+d)-(b+c)].$$

Na osnovu (3) dobijamo da je $k>m$.

Iz $d=2^k-a$ i $c=2^m-b$, zamenom u (2) dobijamo $a(2^k-a)=$ $=b(2^m-b)$, odakle

$$(b+a)(b-a)=2^m(b-2^{k-m}a). \tag{4}$$

Zbog $k>m$ je $2^{k-m}a$ paran broj, pa kako je b neparan, najviši stepen dvojke kojim je deljiva desna strana relacije (4) je m. Dakle, $(b+a)(b-a)$ je deljivo sa 2^m, a nije deljivo sa 2^{m+1}, odakle sledi:

$$b+a=2^{m_1}p,\ b-a=2^{m_2}q, \tag{5}$$

gde je $m_1+m_2=m$, $m_1\geqslant 1$, $m_2\geqslant 1$ i p i q su neparni.

Rešavajući sistem (5) po a i b dobijamo:

$$b=\frac{2^{m_1}p+2^{m_2}q}{2},\qquad a=\frac{2^{m_1}p-2^{m_2}q}{2}.$$

Kako su a i b neparni, to je $m_1=1$ ili $m_2=1$. Pokažimo da je $m_1=1$ nemoguće. Zaista, iz $m_1=1$ sledilo bi $b-a=2^{m-1}q\geqslant 2^{m-1}$, a iz $b+c=2^m$ i $b<c$ sledi $b<2^{m-1}$, pa bi bilo $b<b-a$, što je nemoguće.

Dakle, $m_2=1$, $m_1=m-1$ i relacije (5) daju

$$a+b=2^{m-1}p,\ b-a=2q.$$

Zbog $2^m=b+c>a+b=2^{m-1}p$ imamo $p<2$, tj. $p=1$. Znači:

$$a+b=2^{m-1},\ b-a=2q, \tag{6}$$

gde je q neparan broj. Zamenjujući u (4) dobijamo posle skraćivanja sa 2^m: $q=b-2^{k-m}a$. No iz (6) sledi $b=2^{m-2}+q$, pa je

$$q=2^{m-2}+q-2^{k-m}a,$$

tj. $2^{k-m}a=2^{m-2}$. Kako je a neparan i $k>m$, to iz poslednje relacije sledi $a=1$, što je i trebalo dokazati.

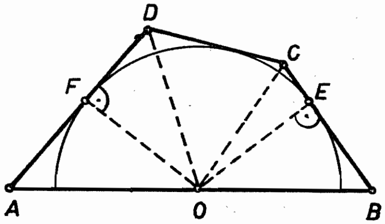
Napomena. Daljim razmatranjem se lako dolazi do zaključka da su sve četvorke (a,b,c,d) koje zadovoljavaju uslove (1), (2) i (3) oblika

$$(1, 2^{m-1}-1, 2^{m-1}+1, 2^{2m-2}-1),$$

gde je m proizvoljan prirodan broj $\geqslant 3$.

XXVI. 1.

Neka je O središte pomenute kružnice, r njen poluprečnik i E i F tačke u kojina ona dodiruje stranice BC i AD, respektivno.



Tada je $BE=r\operatorname{ctg}\beta$, $EC=r\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$, $DF=r\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}$, $FA=r\operatorname{ctg}\alpha$, $OB=\frac{r}{\sin\beta}$, $OA=\frac{r}{\sin\alpha}$, gde su sa α,β,γ i δ označeni uglovi datog četvorougla $ABCD$. Relacija $AD+BC=AB$ ekvivalentna je redom sa

$$r\left(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\right)+r\left(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{r}{\sin\alpha}+\frac{r}{\sin\beta},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{1-\cos\beta}{\sin\beta},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

Poslednja relacija, međutim, direktno sledi iz

$$\alpha+\gamma=\pi \text{ i } \beta+\delta=\pi.$$

XXVI. 2.

Za dato bojenje skupa M izvršimo bojenje celog skupa N prirodnih brojeva na sledeći način:

za dato $i\in M$ svi brojevi kongruentni sa i po modulu n, tj. svi brojevi oblika $tn+i$, $t\in N$, imaju istu boju kao i;

svi brojevi oblika tn, $n\in N$, imaju istu boju kao broj k.

Dokažimo da su tada svi brojevi

$$(*) \qquad k, 2k, \ldots, pk, \ldots$$

jednako obojeni. Dovoljno je dokazati da su za svako $p\in N$ brojevi pk i $(p+1)k$ jednako obojeni. Razmotrimo sledeća tri slučaja:

1° Jedan od brojeva pk, $(p+1)k$, napr. neka je to pk, jeste oblika tn za neko $n\in N$. Tada je on po definiciji obojen isto kao k, a takođe je i broj $(p+1)k$ tako obojen, jer je u tom slučaju $(p+1)k\equiv k(\mathrm{mod}\, n)$. Slučaj $(p+1)k=tn$ razmatra se analogno.

2° Za neko n je $pk<tn<(p+1)k$. Neka oznaka $i\leftrightarrow j$ znači „i i j imaju jednaku boju". Tada je

$$(p+1)k=tn+i\leftrightarrow i\leftrightarrow k-i\leftrightarrow n-k+i\leftrightarrow tn-k+i=pk.$$

3° Za neko n je $tn<pk<(p+1)k<(t+1)n$.

Tada je

$$(p+1)k=tn+j\leftrightarrow j\leftrightarrow j-k\leftrightarrow tn+j-k=pk.$$

Time je dokazano da su svi brojevi oblika (*) jednako obojeni. Neka je sada $i\in M$ proizvoljan. Kako su k i n uzajamno prosti, to postoji broj $p\in M$, takav da je $pk\equiv i\ (mod\ n)$. To znači da i broj i ima istu boju kao brojevi oblika (*), pa svi elementi skupa M imaju istu boju.

XXVI. 3.

Prepuštamo čitaocu da dokaže sledeće jednostavno pomoćno tvrđenje:

LEMA 1. Ako je $m=2^s$ (s—nenegativan ceo broj), tada je

$$Q_m(x)=(1+x)^m=1+R(x)+x^m,$$

gde je $R(x)$ polinom sa parnim koeficijentima.

Odatle se lako izvodi i:

LEMA 2. Ako je $m=2^s$ i P polinom stepena manjeg od m, tada je

$$w(PQ_m)=2w(P).$$

Zaista, iz leme 1 sledi da je $P(x)Q_m(x)=P(x)+P(x)R(x)+$ $+x^m P(x)$. Pri tom, polinomi $P(x)$ i $x^m P(x)$ nemaju članove istog stepena, a svi koeficijenti polinoma $P(x)R(x)$ su parni.

Pređimo sada na dokaz tvrđenja zadatka. Označimo sa s najmanji nenegativan ceo broj koji ima osobinu da je $i_n<2^s=m$, gde je $i_1, i_2, \ldots, i_n$ data n-torka koja zadovoljava uslove zadatka. Tvrđenje ćemo dokazati indukcijom po s.

Za $s=0$ tvrđenje je trivijalno, jer je u tom slučaju jedina mogućnost $n=1$, $i_1=0$, $Q_{i_1}(x)\equiv 1$, pa se nejednakost koju dokazujemo svodi na jednakost

$$w(Q_{i_1})=w(Q_{i_1})(=1).$$

Pretpostavimo sada da je tvrđenje zadatka ispunjeno kadgod data n-torka ispunjava uslov $i_n<2^s=m$ i dokažimo da ono važi i za bilo koju n-torku kod koje je $2^s\leqslant i_n<2^{s+1}$. Razmotrimo sledeća dva moguća slučaja:

1° $i_1\geqslant 2^s=m$. Tada je

$$Q_{i_1}(x)+\ldots+Q_{i_n}(x)=(1+x)^{i_1}+\ldots+(1+x)^{i_n}=Q_m(x)\cdot P(x),$$

gde je P polinom oblika

$$P(x)=Q_{i_1'}(x)+\ldots+Q_{i_n'}(x),$$

stepena $i_n'=i_n-m<2^{s+1}-2^s=2^s$. Na osnovu leme 2 imamo

$$(1)\quad w(Q_{i_1}+\ldots+Q_{i_n})=w(Q_m P)=2w(P).$$

S druge strane, na osnovu induktivne pretpostavke je

(2) $$w(P) \geqslant w(Q_{i_1'}) = w(Q_{i_n-m}).$$

Najzad, stepen polinoma Q_{i_1-m} je manji od m, pa iz $Q_{i_1}=Q_{i_1-m}Q_m$, ponovnom primenom leme 2 dobijamo

(3) $$w(Q_{i_1}) = 2w(Q_{i\;-m}).$$

Iz (1), (2) i (3) sledi nejednakost koju dokazujemo.

2° $i_1 < 2^s$. Tada je

$$Q_{i_1}(x)+\ldots+Q_{i_n}(x)=$$
$$=a_0+a_1x+\ldots+a_{m-1}\,x^{m-1}+(1+x)^m\,(b_0+b_1x+\ldots+b^{m-1}\,x^{m-1})=$$
$$=\sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i+\sum_{j=0}^{m-1} b_j x^j+x^m\sum_{j=0}^{m-1} b_j x^j+R(x),$$

gde je $R(x)$ polinom sa parnim koeficijentima (ponovo je iskorišćena lema 1). Izračunajmo broj neparnih koeficijenata dobijenog polinoma. Drugi i treći sabirak u poslednjoj sumi su polinomi koji nemaju članove jednakog stepena. Ako bi neki od neparnih koeficijenata a_i bio poništen neparnošću odgovarajućeg koeficijenta b_j, u krajnjem zbiru bi se opet pojavio neparni koeficijent b_j u sabirku $b_j x^{j+m}$. Na taj način, važi

(4) $$w(Q_{i_1}+\ldots+Q_{i_n}) \geqslant w\left(\sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i\right).$$

No, polinom $\sum\limits_{i=0}^{m-1} a_i x^i$ je takođe oblika

$$Q_{i_1}(x)+Q_{i_2}(x)+\ldots+Q_{i_p}(x),$$

sa $i_p < m = 2^s$, pa za njega po induktivnoj pretpostavci važi

(5) $$w\left(\sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i\right) \geqslant w(Q_{i_1}).$$

Iz (4) i (5) sledi nejednakost iz tvrđenja zadatka.

Time je tvrđenje indukcijom u potpunosti dokazano.

XXVI. 4.

Prostih broejva manjih od 26 ima 9. Zato je svaki element x_j skupa M oblika $\prod_{i=1}^{9} p_i^{a_{ij}}$, gde je $a_{ij} \geqslant 0$ i $p_i \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$. Proizvod $x_j x_k$ je kvadrat celog broja ako i samo ako je

$$a_{ij} + a_{ik} \equiv 0 \pmod 2) \text{ za sve } i=1,\ldots,9.$$

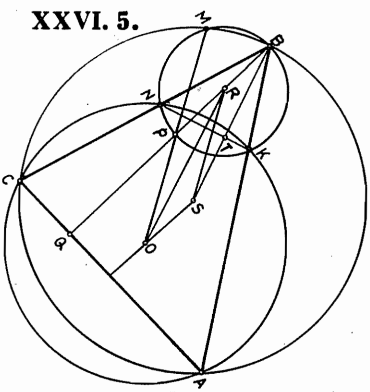
Kako je broj različitih devetorki po modulu 2 jednak $2^9=512$, svaki podskup skupa M sa bar 513 elemenata sadržaće par elemenata čiji je proizvod kvadrat. Polazeći od skupa M i eliminišući takve parove, nalazimo

$$(1985-513)/2=736>513$$

različitih dvoelementnih podskupova od M od kojih svaki ima kvadrat za proizvod elemenata.

Rezonujući analogno, nalazimo među tim kvadratima bar jedan par (u stvari, očigledno ih mora biti i više) čiji je proizvod četvrti stepen celog broja.

XXVI. 5.



Pretpostavimo, određenosti radi, da je dati trougao ABC oštrougli. U slučaju neoštrouglog trougla dokaz je sličan.

Neka su S i R, redom, središta kružnica opisanih oko trouglova ABC i KBN. Ako je $\sphericalangle ACB=\gamma$, onda je $\sphericalangle ASB=2\gamma$. Kako je četvorougao $AKNC$ tetivni, imamo

$$\sphericalangle BNK=180^\circ-\sphericalangle KNC=\sphericalangle CAK,$$

odakle je $\sphericalangle BKN=\gamma$, pa je $\Delta ABC \sim \Delta NBK$.
No, onda je i $\sphericalangle NRB=2\gamma$, pa iz jednakokrakih trouglova ABS i BNR dobijamo

$$\sphericalangle ABS=\sphericalangle NBR=90^\circ-\gamma,$$

što znači da su trouglovi BTK i BQC pravougli (označili smo $T=BS\cap NK$ i $Q=BR\cap CA$), sa pravim uglovima kod T, odnosno Q. Sada imamo $OS \perp AC$ i $BR \perp AC$, pa je $BR \parallel OS$ i, slično, $BS \parallel RO$, jer je $BS \perp NK$ i $RO \perp NK$. Na taj način, četvorougao $OSBR$ je paralelogram.

Neka je P tačka simetrična tački B u odnosu na R. Tada je i četvorougao $OSRP$ paralelogram. Tačke S i R obe leže na simetrali duži BM, pa je $SR \perp BM$, odakle $OP \perp BM$. Najzad, $PM \perp BM$ (BP je prečnik kruga), pa tačke O, P i M leže na jednoj pravoj i $OM \perp BM$, što je i trebalo dokazati.

XXVI. 6.

Definišimo niz funkcija f_n na sledeći način:

$$f_1(t)=t,\ f_{n+1}(t)=f_n(t)\left(f_n(t)+\frac{1}{n}\right),\ n\geqslant 1,\ t\geqslant 0.$$

Tvrđenje zadatka sada se može preformulisati ovako:

„Postoji jedan i samo jedan broj a, takav da je

$$0<f_n(a)<f_{n+1}(a)<1 \text{ za sve } n\geqslant 1.\text{"}$$

Ili, ekvivalentno:

„Postoji jedan i samo jedan broj a, takav da je

$$1-\frac{1}{n}<f_n(a)<1, \text{ za sve } n\geqslant 1.\text{"}$$

Svaka od funkcija f_n je, prema definiciji, polinom s pozitivnim koeficijentima, pa je, za $t\geqslant 0$, rastuća funkcija. Takođe je $f_n(0)=0$ i $f_n(1)\geqslant 1$. Zato su za svako n jednoznačno određeni brojevi s_n i t_n, takvi da je

$$f_n(s_n)=1-\frac{1}{n},\ f_n(t_n)=1.$$

Pri tom je

$$s_n\geqslant 1-\frac{1}{n}=f_n(s_n),\ t_n<1=f_n(t_n). \tag{1}$$

Zaista, iz $s_n<1-\frac{1}{n}$ bi sledilo (prema definiciji funkcija f_n) $f_1(s_n)<1-\frac{1}{n}$, $f_2(s_n)<1-\frac{1}{n},\ldots,$ $f_n(s_n)<1-\frac{1}{n}$ suprtno definiciji broja s_n i, slično iz $t_n\geqslant 1$ bi sledilo $f_1(t_n)\geqslant 1$ $f_2(t_n)>1,\ldots,$ $f_n(t_n)>1$, suprotno definiciji broja t_n.

Iz (1) sledi

$$0<t_n-s_n<f_n(t_n)-f_n(s_n)=\frac{1}{n}. \tag{2}$$

Dalje, važi

$$f_{n+1}(s_n)=1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n+1}=f_{n+1}(s_{n+1}),$$

što, zbog monotonosti funkcije f_{n+1}, povlači $s_n<s_{n+1}$.
Slično, iz

$$f_{n+1}(t_n)=1+\frac{1}{n}>1=f_{n+1}(t_{n+1})$$

i monotonosti funkcije f_{n+1} sledi $t_{n+1}<t_n$. Dakle, niz s_n je monotono rastući i ograničen odozgo ($s_n<t_n<1$), a niz t_n je monotono opadajući i ograničen odozdo ($t_n>0$). Iz (2) sledi da oni imaju zajedničku granicu

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty} t_n=a.$$

Niz $x_n=f_n(a)$ ima tražena svojstva, jer je

$$1-\frac{1}{n}=f_n(s_n)<f_n(a)<f_n(t_n)=1.$$

Nađena vrednost a je jedinstvena, jer za bilo koje $t\neq a$ postoji ili s_n, takvo da je $t<s_n<a$, ili t_n, takvo da je $a<t_n<t$, što bi imalo za posledicu ili $f_n(t)<f_n(s_n)=1-\frac{1}{n}$ ili $f_n(t)>f(t_n)=1$, pa t ne može zadovoljavati uslove zadatka.

MOGU SE DOBITI JOŠ SLEDEĆE SVESKE EDICIJE MATERIJALI ZA MLADE MATEMATIČARE:

sv. 9 *M. Miličić, V. Stojanović:* Zbirka rešenih zadataka (brojevi, jednačine, nejednačine, logički zadaci)

sv. 10 *Lj. Čukić, M. Janc, L. Milin:* Neke funkcije teorije brojeva. Kompleksni brojevi u geometrijskim zadacima. Problem boja

sv. 12 grupa autora: 60 zadataka za XIX internacionalnu matematičku olimpijadu

sv. 13 *Ž. Ivanović, R. Petrović:* Nejednakosti. O nekim metričkim osobinama tetraedra

sv. 14 *S. Vrećica, J. Vukmirović:* Neprekidne funkcije. Verovatnoća

sv. 15 *V. Mićić, Z. Kadelburg:* Uvod u teoriju brojeva

sv. 16 grupa autora: Savezna i republička matematička takmičenja srednjoškolaca

Tiraž

3.000 primeraka

Štampa: ŠIRO »SRBIJA«, Beograd, Mije Kovačevića 5