

MAŠINSKI FAKULTET UNIVERZITETA U NIŠU  
KATEDRA ZA MEHANIKU I AUTOMATIKU

**IZABRANA POCLAVLJA  
teorije elastičnosti**

II IZDANJE — prošireno i dopunjeno

KATICA R. (STEVANOVIC) HEDRIH

N I Š  
1988.

---

Na osnovu odluke Nastavno-naučnog veća Mašinskog fakulteta Univerziteta u Nišu od 27 marta 1988 br.259/1 odobreno kao udžbenik za studente Mašinskog fakulteta Univerziteta u Nišu

---

Izdavač

Mašinski fakultet Univerziteta u Nišu  
Katedra za mehaniku i automatiku  
ul.Beogradska 14  
18 000 Niš

Naslov

IZABRANA POGLAVLJA TEORIJE ELASTIČNOSTI

Autor

dr Katica R.(Stevanović) Hedrih, redovni profesor  
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Nišu

Recenzenti

Akademik dr Tatomir P. Andjelić, redovni profesor  
redovni član Srpske akademije nauka i umetnosti  
dopisni član Jugoslovenske akademije znanosti i umetnosti

Prof.dr Vlatko Brčić, redovni profesor  
Gradjevinskog fakulteta u Beogradu

Tiraž: 600 primeraka

Štampa: RO "Vuk Karadžić" - N I Š

N I Š 1988

**Uspomeni profesora DANILA RAŠKOVIĆA**



## SADRŽAJ

|   |       |    |
|---|-------|----|
| PREDGOVOR   | ..... | 11 |
| UVOD  | ..... | 15 |
| <br>I.TEORIJA NAPONA  |       |    |
| I.1.Spoljašnje i unutrašnje sile  | ..... | 19 |
| I.2. Pojam napona i stanja napona   | ..... | 19 |
| I.3. Komponentni naponi.Pojam tenzora napona.                                       | ..... | 21 |
| I.4. Tenzor napona.Jednačine kretanja i ravnoteže u komponentama tenzora napona.    | ..... | 23 |
| I.5. Granični (konturni) uslovi   | ..... | 26 |
| I.6. Jednačine ravnoteže i kretanja u Descartes-ovom koordinatnom sistemu           | ..... | 32 |
| I.7. Osnovno pravilo analize napona   | ..... | 33 |
| I.8. Transformacija matrice tenzora napona pri rotaciji koordinatnog sistema        | ..... | 42 |
| I.9. Jednačine ravnoteže i kretanja izražene pomoću polarno-cilindričkih koordinata | ..... | 43 |
| I.10. Jednačine ravnoteže i kretanja izražene u sfernom koordinatnom sistemu        | ..... | 46 |
| I.11. Glavni naponi i invarijante stanja napona                                     | ..... | 51 |
| I.12. Mohr-ovi krugovi napona   | ..... | 55 |
| I.13.Ekstremne vrednosti tangencijalnih napona                                      | ..... | 60 |
| I.14. Naponske površi.Elipsoide napona.   | ..... | 63 |
| I.15. Oktaedarske ravni i oktaedarski naponi  | ..... | 67 |
| I.16. Razlaganje tenzora napona i sferni i devijatorski deo                         | ..... | 71 |
| II.TEORIJA DEFORMACIJA  | ..... | 72 |
| II.1. Pojam deformacije.Vektor pomeranja  | ..... | 76 |
| II.2. Dilatacije i klizanja.Zapreminska dilatacija                                  | ..... | 76 |
| II.3. Homogena deformacija  | ..... | 82 |
| II.4. Tenzor konačne deformacije.Tenzor male deformacije                            | ..... | 87 |
|   | ..... | 88 |

6.

|  |       |     |
|--|-------|-----|
| II.5. Tenzor male deformacije u ortogonalnom krivo-linijskom koordinatnom sistemu  | ..... | 99  |
| II.6. Komponente tenzora male deformacije i obrtanja u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu   | ..... | 101 |
| II.7. Komponente tenzora male deformacije i obrtanja u sfernom koordinatnom sistemu  | ..... | 104 |
| II.8. Uslovi kompatibilnosti deformacija   | ..... | 108 |
| II.9. Uslovi kompatibilnosti deformacija u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu   | ..... | 114 |
| II.10. Uslovi kompatibilnosti deformacija u sfernom koordinatnom sistemu   | ..... | 115 |
| II.11. Određivanje komponentnih pomeranja  | ..... | 117 |
| II.12. Transformacija matrice tenzora deformacije pri rotaciji koordinatnog sistema  | ..... | 124 |
| II.13. Glavne dilatacije i glavni pravci dilatacija  | ..... | 126 |
| II.14. Vektor specifične deformacije za linijski element orijentisan oktaedarskim ortom  | ..... | 128 |
| II.15. Površi deformacije  | ..... | 129 |
| II.16. Razlaganje tenzora deformacije na sferni i devijatorski deo   | ..... | 130 |
| II.17. Pravilo analize deformacija. Ekstremne vrednosti deformacije klizanja   | ..... | 132 |
|  |       |     |
| III.ELASTOMEHANIKA   | ..... | 135 |
| III.1. Odnosi izmedju napona i deformacija   | ..... | 135 |
| III.2. Idealni materijali  | ..... | 138 |
| III.3. Odnosi izmedju napona i deformacija elastičnih materijala   | ..... | 145 |
| III.4. Drugi oblik Hooke-ovog zakona   | ..... | 155 |
| III.5. Modul kompresije. Veza izmedju devijatora napona i devijatora deformacije   | ..... | 158 |
| III.6. Odnosi izmedju napona i deformacija izvedeni u Descartes-ovom koordinatnom sistemu. Uopšteni Hooke-ov zakon                           | ..... | 159 |
| III.7. Drugi oblik Hooke-ovog zakona. Veza izmedju devijatora napona i devijatora deformacije izražena u Descartes-ovom koordinatnom sistemu | ..... | 164 |
| III.8. Jednačine ravnoteže i kretanja elastičnog tela. Lamé-ove jednačine  | ..... | 166 |
| III.9. Lamé-ove jednačine ravnoteže u polarno-cilindričkim koordinatama  | ..... | 168 |
| III.10. Lamé-ove jednačine ravnoteže u sfernom koordinatnom sistemu  | ..... | 169 |

|   |       |     |
|---|-------|-----|
| III.11. Lamé-ove jednačine ravnoteže izražene u Descartes-ovom koordinatnom sistemu                         | ..... | 170 |
| III.12. Drugi oblik Cauchy-jevih graničnih uslova   | ..... | 172 |
| III.13. Beltrami-Michell-ove jednačine u opštem obliku  | ..... | 173 |
| III.14. Beltrami-Michell-ove jednačine izvedene u Descartes-ovom pravouglom koordinatnom sistemu            | ..... | 177 |
| III.15. Beltrami-jeve i Beltrami-Michell-ove jednačine izvedene u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu | ..... | 179 |
| III.16. Beltrami-jeve i beltrami-Michell-ove jednačine izvedene u sfernom koordinatnom sistemu              | ..... | 180 |

#### IV. PREGLED IZVEDENIH JEDNAČINA

|   |       |     |
|---|-------|-----|
| TEORIJE ELASTIČNOSTI                              | ..... | 183 |
| <sup>A</sup> O Statičke jednačine                 | ..... | 183 |
| <sup>B</sup> O Geometrijsko-kinematičke jednačine | ..... | 185 |
| <sup>C</sup> O Fizičke jednačine                  | ..... | 189 |

#### V. DEFORMACIONI RAD

|  |       |     |
|--|-------|-----|
| ELASTIČNI POTENCIJAL                         | ..... | 196 |
| V.1. Elastični potencijal                    | ..... | 196 |
| V.2. Deformacioni rad - energija deformacije | ..... | 197 |

#### VI. METODE ZA REŠAVANJE PROBLEMA

|                                |       |     |
|--------------------------------|-------|-----|
| TEORIJE ELASTIČNOSTI I OSNOVNI | ..... |     |
| ZADACI STATIKE ELASTIČNOG TELA | ..... | 211 |

|   |       |     |
|---|-------|-----|
| VI.1. Osnovni zadaci dinamike elastičnog tela                                   | ..... | 217 |
| VI.2. Saint Venant-ov princip   | ..... | 218 |
| VI.3. Torzija prizmatičnog štapa kružnog poprečnog preseka                      | ..... | 221 |
| VI.4. Sferni sud izložen dejstvu normalnog pritiska.<br>Primena obratne metode. | ..... | 229 |
| VI.5. Saint Venat-ov problem. Primena poluobratne metode.                       | ..... | 235 |
| VI.6. Torzija vratila proizvoljnog poprečnog preseka                            | ..... | 247 |
| VI.7. Torzija vratila eliptičnog poprečnog preseka                              | ..... | 255 |
| VI.8. Torzija vratila pravougaonog poprečnog preseka                            | ..... | 258 |

|  |           |
|--|-----------|
| VII. RAVNO STANJE NAPONA I   |           |
| RAVNO STANJE DEFORMACIJA   | ..... 265 |
| VII.1. Ravno stanje deformacija  | ..... 266 |
| VII.2. Ravno stanje napona   | ..... 273 |
| VII.3. Uopšteno ravno naponsko stanje  | ..... 275 |
| VII.4. Napomska Airy-jeva funkcija   | ..... 280 |
| VII.5. Airy-jeva napomska funkcija izražena<br>u polarnim koordinatama                             | ..... 282 |
| VII.6. Primena funkcije kompleksne promenljive<br>na rešavanje problema ravne teorije elastičnosti | ..... 284 |
| VII.6.1. Definisanje stanja napona i stanja deformacija<br>pomoću funkcija kompleksne promenljive  | ..... 286 |
| VII.6.2. Granični uslovi   | ..... 292 |
|  |           |
| VIII. OSNOVI METODE KONAČNIH ELEMENATA   | ..... 295 |
| VIII.2. Opšte osnove metode konačnih elemenata   | ..... 298 |
| VIII.3. Princip virtualnih pomeranja   | ..... 300 |
| VIII.4. Opšti opis postupka MKE za probleme<br>u oblasti elastomehanike                            | ..... 302 |
| VIII.4.1. Matrica polja i interpolaciona matrica<br>konačnog elementa                              | ..... 302 |
| VIII.5. Osnovna jednačina konačnog elementa  | ..... 308 |
| VIII.6. Matrice transformacije   | ..... 313 |
| VIII.6*. Jednačina konstrukcije  | ..... 316 |
| VIII.7. Granični uslovi  | ..... 321 |
| VIII.8. Čvorna opterećenja   | ..... 323 |
| VIII.9. Redukovana matrica krutosti  | ..... 324 |
| VIII.10. Rešavanje linijskih konstrukcija po metodi<br>konačnih elemenata                          | ..... 326 |
| VIII.10.1. Označavanje linijskih elemenata   | ..... 326 |
| VIII.10.2. Odredjivanje interpolacione matrice   | ..... 329 |
| VIII.10.3. Odredjivanje matrice krutosti   | ..... 335 |
|  |           |
| IX. OSNOVI TERMOELASTIČNOSTI   | ..... 340 |
| IX.1. Termodinamičke osnove termoelastičnosti  | ..... 342 |
| IX.2. Postavke zadatka termoelastičnosti   | ..... 343 |

|  |     |
|--|-----|
| IX.3. Osnovne jednačine statičkog zadatka termoelastičnosti .....  | 344 |
| IX.3.1. Polje temperature .....  | 344 |
| IX.3.2. Termički naponi .....  | 346 |
| IX.3.3. Modifikovane Lamé-ove jednačine .....  | 349 |
| IX.3.4. Modifikovani Cauchy-jevi granični uslovi .....   | 350 |
| IX.3.5. Uporedjenja jednačina ravnoteže i graničnih uslova izotermičke teorije elastičnosti i termoelastičnosti .....  | 350 |
| IX.3.6. Jednačine termoelastičnosti u polarno-cilindričkom i sfernem koordinatnom sistemu .....                        | 351 |
| IX.3.6*. Polarno-cilindrički koordinatni sistem .....  | 351 |
| IX.3.6**. Sferni koordinatni sistem .....  | 352 |
| IX.3.7. Deformacioni rad termomehanički izotropnog tela sa kompatibilnim deformacijama i Castigliano-ove teoreme ..... | 353 |
| IX.3.8. Termoelastični potencijal .....  | 355 |
| IX.4. Naprezanje tankog kružnog diska u stacionarnom temperaturnom polju .....   | 357 |
| IX.5. Naprezanje dugačkog punog kružnog cilindra u stacionarnom osnosimetričnom temperaturnom polju .....              | 360 |
| IX.6. Naprezanje lopte u stacionarnom polju temperature .....  | 365 |
| IX.7.* Stacionarno polje temperature u pravougaonoj ploči .....  | 369 |
| IX.8. Naprezanje tanke po konturi ukleštene ploče u stacionarnom temperaturnom polju .....                             | 372 |
| IX.9. Naprezanje tanke slobodno osloanjene ploče u stacionarnom temperaturnom polju .....                              | 375 |

## X. OPTIČKA ANALIZA NAPONSKOG STANJA

## FOTOELASTIČNA ANALIZA NAPONSKOG STANJA .....

|  |     |
|--|-----|
| X.1. Teorema Moris-Levy-ja .....   | 379 |
| X.2. Prva istraživanja efekta fotoelastičnosti .....   | 380 |
| X.3. Osobine svetlosti koja se koristi u optičkoj analizi naponskog stanja .....                       | 381 |
| X.4. Polarizovana svetlost .....   | 387 |
| X.5. Osnovi teorije dvojnog prelamanja kod optički izotropnih materijala podvrgnutih opterećenju ..... | 388 |
| X.6. Polariskopi .....   | 392 |
| X.6.1. Linearni polariskop .....   | 394 |
| X.6.2. Cirkularni polariskop .....   | 399 |
| X.6.3. Odredjivanje reda izohroma i postupci kompenzacije .....  | 403 |
| X.6.4. Tardy-Senarmont-ova metoda kompenzacije .....   | 406 |

|  |     |
|--|-----|
| 10.  |     |
| X.6.5. Babinet - Soleil kompenzator. Nultobalansna kompenzacija .....                              | 407 |
| X.6.6. Odredjivanje znaka iyičnog napona .....   | 408 |
| X.6.7. Analiza naponskog stanja modela .....   | 408 |
| X.6.8. Materijali za modele i izrada modela za optičku analizu naponskog stanja konstrukcija ..... | 409 |
| X.7. Površinska fotoelastičnost .....  | 410 |
| X.8. Prostorna fotoelastičnost .....   | 411 |
| X.9. Prilog .....  | 412 |
| <br>LITERATURA .....   | 417 |
| Registar imena .....   | 421 |
| Registar pojmova .....   | 422 |

## P R E D G O V O R

"Savremena nauka može biti razumljiva svakome, ko ima živ duh, samopregor i prilazi joj jednostavno. Za sve koji joj prilaze komplikovano, sa "zadnjim mislima", isprobavaju je, postavljajući joj zahteve i ni u čemu se ne žrtvujući za nju, ona za njih ostaje, čak oni bili mudri kao zmaj, besmislenim formalizmom, logičkim casse-tête, koja u sebi na sadržava nikakvu suštinu".

Ova knjiga pred Vama rezultat je stalnih priprema predavanja koja sam u proteklih četrnaest godina držala studentima V semestra u okviru predmeta Elastodinamika - deo Teorija elastičnosti na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Nišu, kao i postdiplomcima na grupi Tehnička mehanika, kao i smerova Proizvodnog, Konstrukcijskog i Preciznog mašinstva u okviru istoimenog izbornog predmeta.

Udžbenik sadrži deset poglavlja: I.Teorija napona, II.Teorija deformacija, III.Elastomehanika, IV.Pregled izvedenih jednačina Teorije elastičnosti, V.Deformacioni rad - Elastični potencijal, VI.Metode za rešavanje problema Teorije elastičnosti i osnovni zadaci statike elastičnog tela, VII. Ravno stanje napona i ravno stanje deformacija, VIII.Osnovi metode konačnih elemenata, IX.Osnovi termoelastičnosti, i X. Optička analiza naponskog stanja sa priloženim spiskom literature. Poglavlja I,II,III,IV, VI i VII bila su sadržana u izdanju Saveza socijalističke omladine - studenata mašinstva u vidu skripte - štampanih predavanja iz 1976 godine i bilo je vrlo brzo rasprostranljeno. Poglavlja VIII, IX i X ,takođe u vidu štampanih predavanja bila su dostupna studentima. Izvorni materijal je preradjen i dopunjen poglavljem V., kao i metodom funkcije kompleksne promenljive, tako da je dobio konačnu formu ovog izdanja.

U pripremanju predavanja,a sa tim i ovog teksta nastojala sam da dam što opštije formulacije oslanjajući se na najsvremeniji matematič-

ki aparat, sa ciljem da ga približim nivou znanja iz matematike studenata koji izučavaju Teoriju elastičnosti. Dajući uporednu matematičku interpretaciju pojmove kojima se opisuje stanje napona i stanje deformacija napregnutog tela: konstrukcije u generalisanom krivolinijskom koordinatnom sistemu, polarno-cilindričkom i sfernom koordinatnom sistemu kao i Descartes-ovom pravougлом sistemu koordinata želela sam da jasno ukažem na invarijantnost fizičkih svojstava napregnutog tela u odnosu na izabrane matematičke modele kojima se opisuju njegova stanja napona i stanja deformacija i da ona zavise isključivo od spoljašnjeg opterećenja, geometrije deformabilnog tela kao i materijala od ko-  
ga je načinjeno. Uporedo sam prikazivala kovarijantne, kontravarijantne i fizičke koordinate vektorskih i tenzorskih veličina da bi se ti pojmovi približili lakše inženjerima. Naravno da u tim nastojanjima konsekventnost nije potpuna jer je težište na fizičkim tumačenjima a ne na strogosti matematičkih dokazi-  
vanja, za kojim se takodje težilo.

Sama koncepcija udžbenika je usmerena ka detaljnoj analizi stanja napona i stanja deformacija, njihovoj vezi za klasične slučajeve i klasu naprezanja deformabilnog tela. Date su opštije metode, ali zbog obima udžbenika nisu obradjivani specijalni slučajevi u vidu teorijskih zadataka koji će biti predmet posebne zbirke zadataka.

Govoreći o ovom udžbeniku ne mogu a da ne istaknem da svoja prva saznanja iz Teorije elastičnosti dugujem svom profesoru dr Danilu Raškoviću uz čiju sam stručnu pažnju i usmeravanje nastavila svoj rad u ovoj oblasti, tako da sam jedan veći broj pojmove i oznaka zadržala onako kako sam ih izvorno od njega saznavala.

U izlaganjima materije korišćeni su elementi matričnog, vektorskog i tenzorskog računa i funkcije kompleksne promenljive, pa je zato čitaocu za olakšano praćenje i razradu materije potrebno poznavanje osnova tih matematičkih disciplina. Kao osnovnu matematičku literaturu pri sastavljanju udžbenika i predavanja konsultovala sam udžbenike mojih divnih profesora akademika Tatjomiра Andjelića, Tenzorski račun, prof. Danila Raškovića: Matrice i Osnovi tenzorskog računa i prof. Dragoslava Mitrinovića: Kompleksna analiza, te iste preporučujem za eventualne dopune matematičkih znanja korisnika ovog udžbenika.

Osnovna literatura za poglavlja od I do VII su bile sledeće knjige: D. Rašković /61/, Amenzade JU. /4/, Chi-Teh Wang /92/, Stojanović R. /67/, Andjelić T. /2/. Poglavlje VIII - M K E sastavljeno je na osnovu monografije Ervina Preloga /59/ i M. Sekulovića /72/ i Zienkiewics O.S. /23/. Poglavlje IX - Osnovi termoelastičnosti izvornu literaturu ima u knjizi Kovalejenko A-D. /35/, Naerlović-Veljković /51/, Rašković D. /62/ i Josifović M. /25/.

Deseto poglavlje - Optička analiza naponskog stanja sastavljeno je na osnovu tehničke dokumentacije uz opremu koja ide uz Teaching Polariscop system firme Wischay i knjige M.Radojković /66/ i Vukotić R. /14/ i sinopsisa predavanja profesora M.Banića /8/ od koga sam i stekla prva saznanja o mogućnostima fotoelastične metode kao i o njenom znacaju za analizu stanja napona i stanja deformacija konstrukcija o čemu je u toku naših razgovora na Kongresima Jugoslovenskog društva za mehaniku nadahnuto govorio. Pored ove navedene osnovne literature na kraju udžbenika dat je i spisak šire korišćene literature.

U prilogu poslednjeg poglavlja prikazane su fotografije kojima se ilustruje optička analiza naponskog stanja opterećenih modela,koje su snimljene u laboratoriji Fakulteta strojarstva i brodogradnje Univerziteta u Zagrebu uz stručnu pomoć prof. dr S.Jecića,te je ovo prilika da se zahvalim kolegi na učešću u usavršavanju asistenata sa Katedre za mehaniku Mašinskog fakulteta u Nišu,studenata postdiplomske studije Tehničke mehanike na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Nišu.

Ubedjena sam da će ovaj udžbenik korisno poslužiti ne samo studentima Mašinskog fakulteta kojima je namenjen, nego i onima koji se u okviru stručne i naučne delatnosti bave problematikom Teorije elastičnosti.

Akademik prof.dr Tatomir Andjelić i prof.dr Vlatko Brčić pročitali su rukopis ove knjige i učinili korisne predloge,izvršili recenziju rukopisa i pružili stručnu podršku da ovaj udžbenik bude štampan na čemu im se posebno toplo zahvaljujem.

Posebno se zahvaljujem kolegama članovima Nastavno-naučnog veća Mašinskog fakulteta kao i članovima Radničkog saveta koji su svojom podrškom omogućili izdavanje ovog udžbenika.

Zahvaljujem se i izdavačkoj radnoj organizaciji "Vuk Karadžić" koja je preuzela štampanje udžbenika po povoljnoj ceni.

Niš, Juni 1988 godine.



## U V O D

Teorija elastičnosti proučava mehaničko ponašanje čvrstog tela, koje vrši reverzibilnu deformaciju. Za razliku od krutog tela, kakvo prirodi ne postoji, čvrsto telo je objektivniji prikaz realnog tela, jer može da se deformeša menjajući oblik i zapreminu. Realna tela kada su u čvrstom stanju mogu da se pod dejstvom sila deformešu, da promene pri tome oblik i zapreminu, pa se tada rastojanja pojedinih čestica menjaju. Kako se čestice tela sastoje iz molekula i atoma, i kako bi proučavanje njihovog kretanja pojedinačno bilo veoma složeno, to se tela u teoriji elastičnosti posmatraju makroskopski. Naime posmatraju se kao celine u česticama iako su one sastavljene iz odvojenih molekula i atoma. Sastav ovih čestica je neprekidan pa u telu čini neprekidnu sredinu.

Čvrsto telo kao objekt izučavanja teorije elastičnosti vrši reverzibilnu deformaciju pod dejstvom termomehaničkog uticaja, a to je takva deformacija koja u potpunosti isčeščava po prestanku dejstva termomehaničkog uticaja, koji je bio uzrok njenе pojave. Osobine elastičnosti su vezane za vrstu materijala od koga je sastavljeno čvrsto telo, i za intenzitet termomehaničkog uticaja koji dovodi do naprezanja i deformacije neprekidne čvrste sredine. Čvrsto telo zbog navedenih njegovih osobina naziva se i deformabilno telo.

Unutrašnje sile koje se javljaju usled dejstva spoljašnjih sila, mogu se definisati samo kao površinske sile koje dejstvuju na zamišljenim presečnim površinama u telu, čime smo ponašanje mnogo molekula sadržanih u česticama tela zamenili nekim prosečnim vrednostima koje su odredjene na osnovu statističkih zakonitosti.

16.

Teorija elastičnosti kao uža disciplina pripada opštijoj Mechanici neprekidnih sredina, koja obuhvata kako mehaniku čvrstih tela tako i mehaniku fluida.

Osobina čvrstih tela da vrši reverzibilnu deformaciju se naziva osobinom elastičnosti. Sva su čvrsta tela manje ili više elastična do izvesne granice koja se naziva granica elastičnosti. Granica elastičnosti zavisi od hemijskog sastava i strukture tela. Veza između unutrašnjih sila i deformacija je veoma složena, a za njeno određivanje nije dovoljno poznavati samo karakter dejstva spoljašnjih sila, pa se zato uvode pretpostavke o osobinama čvrstih tela. Jedna od osobina čvrstih tela je da ona mogu biti homogene. Kod homogenog tela svaka čestica posmatrano makroskopski ima iste osobine kao i celo telo. Specifična masa i gustina ne zavise od koordinata čestice, već su konstantne. Ako nije zadovoljen ovaj uslov telo ima osobinu nehomogenosti. Ako homogeno telo ima fizičko-mehaničke osobine jednake samo u određenim pravcima paralelnim medjusobom i sa nekom osom koordinatnog sistema onda takvo telo nazivamo ortotropnim.

Sile koje dejstvuju na čvrsto telo mogu biti spoljni ašnje i unutrašnje. Zavisno od karaktera dejstva spoljašnje sile se dele na zapreminske i površinske. Unutrašnje sile su medjumolekularne sile i rezultat su uzajamnog privlačenja čestic i napregnutog stanja u kome se telo nalazi. Usled dejstva spoljašnjih sila i deformacije koja usled toga nastupaju se napadne tačke unutrašnjih sila zajedno sa promenom medjumolekularnih rastojanja, pa unutrašnje sile vrše rad koji se kao energija deformacije - potencijalna energija deformacije zadržava u telu i ima sposobnost da po prestanku dejstva sila telo vrati u prethodni položaj i oblik i zapreminu, koje je telo imalo pre dejstva sila.

Teorija elastičnosti izučava vezu između spoljašnjih opterećenja, unutrašnjih sila i deformacija čvrstih elastičnih tela. U najopštijem slučaju izučavanje te veze je veoma složeno i iz tog razloga za proizvoljni oblik tela ni do danas nije strogo egzaktno izučeno. Ovo je vezano i za komplikovanost matematičkog aparata koji je u ovim zadacima neizbežan. Dobijena su rešenja samo za neke prostije slučajeve oblika tela.

Pod uticajem spoljašnjeg opterećenja čvrsto telo se deformešće sve dok se ne uspostavi ravnoteža spoljašnjeg opterećenja i unutraš-

njih sila od kog trenutka se čvrsto telo ponaša kao kruto, pa se mogu primeniti zakoni Statike krutog tela. Zbog toga pri proučavanju zadataka teorije elastičnosti koristimo princip soldififikacije, koji kaže da ako je kontinuum u ravnoteži onda je i njegov svaki deo u ravnoteži, dok je opšta metoda rada metoda zamislenih ili fizikalnih preseka. Ona se sastoji u tome što se zamisli da je čvrsto telo presećeno ravni ili krivom površinom na dva dela, pa se uticaj jednog dela tela na drugi zamenjuje unutrašnjim silama, koje se na preseku javljaju kao spoljašnje sile, pa se posmatra ravnoteža svakog dela pojedinačno primenjujući zakone statike krutog tela.

U klasičnoj teoriji elastičnosti usvaja se pretpostavka da su deformacije male i da je veza izmedju unutrašnjih sila i deformacija linearna, pa se elastično popnašanje materijala izražava matematički linearnim vezama komponenata napona i deformacija.

Virtual Library of Faculty of Mathematics - University of Belgrade

[elibrary.matf.bg.ac.rs](http://elibrary.matf.bg.ac.rs)

## I. TEORIJA NAPONA

### I.1. SPOLJAŠNJE I UNUTRAŠNJE SILE

Spoljašnje sile se javljaju kao uticaji spoljašnjih tela na posmatrano deformabilno telo. Spoljašnje sile mogu biti površinske i zapreminske. Zapremske sile dejstvuju na sve materijalne čestice i srazmerne su masi tela ili zapremini koja odgovara toj masi. Neka na element mase  $dm = \rho dV$ , koji je zatvoren u elementu zapremine tela  $dV$ , dejstvuje sila  $\vec{dF}_m$ . Tada vektor

$$\vec{F}'_m = \frac{\vec{dF}_m}{dm} \quad \text{odnosno} \quad \vec{F}'_v = \frac{\vec{dF}_v}{dm},$$

predstavlja masenu odnosno zapreminsku silu u odnosu na jedinicu mase odnosno zapremine. Te sile nose naziv jedinična masena  $\vec{F}'_m$ , odnosno jedinična zapreminska sila  $\vec{F}'_v$ . Ovakve sile su sila teže, sila gravitacije i sl. Na slici br. 1 je prikazano čvrsto telo zapremine  $V$ , u kome uočimo tačku 0 i zapreminu elementa oko nje veličine  $\Delta V$ . Sve zapremske sile tog elementa redukujemo na tačku 0 i kao rezultat redukcije dobijamo torzer, čiji je glavni vektor  $\vec{F}'_v$  i glavni moment  $\vec{\Delta m}_v$  redukovanih zapreminskih sila. Pretpostavimo da se zapremina elementa smanjuje obuhvatajući stalno tačku 0, dobijamo granične vrednosti dva količnika:

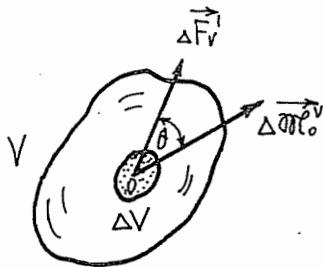
$$\vec{F}'_v = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_v}{\Delta V} = \frac{d\vec{F}_v}{dV}; \quad \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta m}_v}{\Delta V} = 0 \quad (1)$$

od kojih je prvi specifična zapreminska sila ili jedinična zapreminska sila, koja je vektor u redukcionoj tački. Priroda zapremske sile je takva da ona ne može biti koncentrisana već uvek mora biti vezana za neku ma-

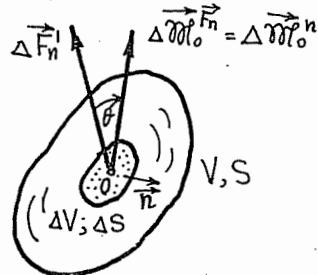
20.

kar sasvim malu zapreminu.

Površinske sile dejstvaju na delovima ili celoj površi omotača tela i nezavisne su od mase tela. Kao površinske sile javljaju se: uzajamni pritisak tela na dodirnim površinama, kapilarne sile na dodirnim površinama molekula zidova tela i molekula graničnog sloja fluida, hidro-



Slika br.1



Slika br.2

statički pritisak fluida na dodirnim površinama tela potopljenog u fluidu, aerodinamički pritisak gasa na površinu tela koje je potopljeno u gasu itd. Neka je  $\Delta V$  zapremina elementarne mase  $\Delta m$  koja je obuhvaćena omotačem površine  $\Delta S$  i neka se tačka 0 nalazi unutar tog omotača, kao na slici br.2. Površinske sile koje dejstvaju na element površine  $\Delta S$  redukuju se na tačku 0 u kojoj dobijamo torzer, sa glavnim vektorom  $\vec{F}_n$  površinskih sila posmatranog elementa i glavnim momentom  $\vec{M}_n$  tih sila. Pretpostavimo sada da se zapremina elementa oko tačke 0 smanjuje s čim se smanjuje i površina  $\Delta S$  njenog omotača, pa možemo odrediti i granične vrednosti količnika:

$$\vec{F}_n = \vec{q}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_n}{\Delta S} = \frac{d \vec{F}_n}{d S}; \quad \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}_n}{\Delta S} = 0 \quad (2)$$

od kojih je prvi jedinična površinska sila ili specifično opterećenje po jedinici površine omotača. Kao i zapreminska sila tako i površinska sila ne može biti koncentrisana, već mora dejstvovati na nekoj makar koliko maloj površini omotača. Površinska sila u opštem slučaju se ne poklapa sa pravcem normale na površ omotača.

Unutrašnje sile kao što smo u uvodu napomenuli su medjumolekularne sile i rezultat su uzajamnog privlačenja čestica i napregnutog stanja u kome se telo nalazi. U nedeformisanom telu položaj čestica odgovara stanju njegove topotne ravnoteže, a njegove čestice su medjusobno izložene dejstvuju unutrašnjih sile. Pod dejstvom spoljašnjih sile položaj čes-

tica u telu se menja, tj. telo se deformeš i kao rezultat toga se javljuju dopunske unutrašnje sile koje menjaju vrednosti rezultujućih unutrašnjih sila. Za nas su posebno važne te dopunske komponente unutrašnjih sila koje se javljaju kao rezultat dejstva spoljašnjih sila, a koje nestaju posle prestanka dejstva spoljašnjih sila. O unutrašnjim silama koje se javljaju kao rezultat topotne ravnoteže nedeformisanog tela nećemo voditi računa, nego ćemo u daljem tekstu pod pojmom unutrašnjih sila podrazumevati samo one koje se javljaju kao rezultat dejstva spoljašnjih sila i deformacije deformabilnog elastičnog tela. Za određivanje unutrašnjih sila koristi se pomenuta metoda fiktivnih preseka. Površine fiktivnih preseka koje pripadaju delu tela su opterećene raspodeljenim po površini unutrašnjim silama veze medju česticama, koje sada možemo posmatrati kao spoljašnje površinske sile.

## I.2. POJAM NAPONA I STANJA NAPONA

U telu koje se nalazi u ravnoteži pod dejstvom spoljašnjih sila uočimo tačku  $N$  i proizvoljnu presečnu ravan kroz nju, kojom je telo podeljeno na dva dela zapremina  $V_I$  i  $V_{II}$  kao što je na slici br. 3 naznačeno. Odstranimo deo zapremine  $V_{II}$  i njegov uticaj na deo zapremine  $V_I$  moramo zameniti unutrašnjim silama koje se prenose preko presečne površine  $S$ , a koje se sada javljaju kao spoljašnje sile. Raspored ovih sila za sada nije određen. Uočimo oko tačke  $N$  elementarnu površinu  $\Delta A$  presečnoj ravni sa normalom  $\vec{n}$ . Sile koje se preko tog površinskog elementa prenose sa jednog dela tela na drugi mogu se redukovati na uočenu tačku  $N$  na torzor glavnog vektora  $\vec{\Delta F_n}$  i glavnog momenta  $\vec{\Delta m_n}$ . Količnik  $\Delta \vec{m}_n / \Delta A$  teži nuli kada element popvršine  $\Delta A$  teži nuli. Količnik  $\Delta \vec{F}_n / \Delta A = \vec{p}_s$  se naziva srednji (prosečni) napon u tački  $N$  za ravan sa normalom  $\vec{n}$ . To je istovremeno intenzitet unutrašnjih sila redukovanih na jedinicu površine.

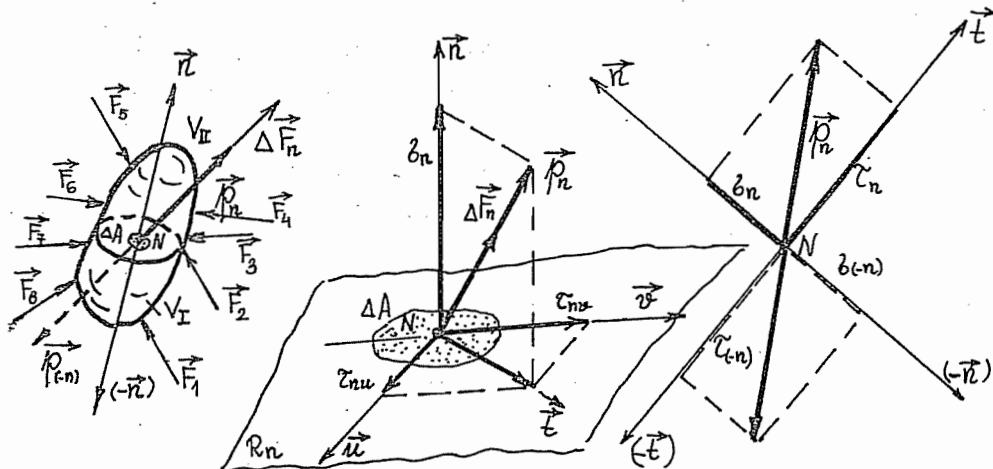
Ako se površina  $\Delta A$  smanjuje, ali pod uslovom da uvek obuhvata tačku  $N$  vektor  $\vec{p}_s$  teži konačnoj graničnoj vrednosti

$$\vec{p}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta F}_n}{\Delta A} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \vec{p}_s = \frac{d \vec{F}_n}{d A}, \quad (3)$$

koja se naziva totalni napon u tački  $N$  za ravan  $R_n$  sa normalom  $\vec{n}$ . Totalni napon ima dimenziju sile po jedinici površine. Totalni napon za ravan sa normalom  $\vec{n}$  nije u opštem slučaju kolinearan sa

22.

sa normalom ravni, te se može jednoznačno razložiti u dve komponente: jednu u pravcu normale na ravan, a drugu u samoj ravnji. Komponenta totalnog napona za ravan sa normalom  $\vec{n}$ , u pravcu te normale je  $\sigma_n$  i naziva se normalni napon, dok se druga komponenta koja leži u samoj ravnji naziva tangencijalni ili smicajni napon. Tan-



Slika br. 3

Tangencijalnu komponentu totalnog napona možemo razložiti na dve komponente u dva upravna pravca ( $\vec{u}, \vec{v}$ ) u ravnji sa normalom  $\vec{n}$ . Te komponente označimo sa  $\tau_{nu}$  i  $\tau_{nv}$ . Ako sa  $\vec{t}$  označimo ort pravca totalnog tangencijalnog napona u ravnji sa normalom  $\vec{n}$ , za totalni napon u tački N za ravan sa normalom  $\vec{n}$  možemo pisati da je:

$$\vec{p}_n = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{t} = \sigma_n \vec{n} + \tau_{nu} \vec{u} + \tau_{nv} \vec{v}, \quad (4)$$

gde je  $\sigma_n$  projekcija totalnog napona na pravac normale  $\vec{n}$ , dok je  $\tau_n$  projekcija totalnog napona na pravac određen ortom  $\vec{t}$ :

$$\sigma_n = (\vec{p}_n, \vec{n}) = (p_n) \{n\}; \quad \tau_n = (\vec{p}_n, \vec{t}) = (p_n) \{t\}. \quad (5)$$

Intenzitet totalnog napona za ravan sa normalom je:

$$p_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_{nu}^2 + \tau_{nv}^2. \quad (6)$$

Kada je totalni napon istosmeran sa normalom ravnji onda je on napon zatezanja, a kada je suprotnosmeran tada je on napon pritiska.

Zamislimo sada da smo umesto dela tela zapremine  $V_{II}$ , odstranili deo tela zapremine  $V_I$ , onda njegov uticaj na deo zapremine  $V_{II}$  moramo zameniti glavnim vektorom sila koji je suprotnog smera nego u prethodnom slučaju, jer je sada normala presečne ravni suprotnog smera od normale te iste ravni u odnosu na prvi deo tela, pa je:

$$\vec{P}_n + \vec{P}_{(-n)} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{(-n)} = -\vec{P}_n \quad (7)$$

pa zato važi:

$$\sigma_{(-n)} = (P_{(-n)}) \{-n\} = (P_n) \{n\} = \sigma_n$$

$$\tau_{(-n)} = (P_{(-n)}) \{t\} = -(P_n) \{t\} = -\tau_n \quad (8)$$

Iz izloženog se može uočiti da je pojam napona vezan za tačku i ravan kroz tu tačku. Kako se kroz svaku tačku može povući bezbroj ravni koje obrazuju prostorno snop ravni kroz tu tačku, postojiće za tu tačku beskrajno mnogo totalnih napona vezanih za svaku odgovarajuću ravan kroz tu tačku. Skup svih tih totalnih napona u tački  $N$  nazivamo stanjem napona u tački  $N$ . Poznavanje stanja napona u jednoj tački napregnutog tela je dakle vezano sa poznavanjem beskonačnog broja totalnih napona za različite ravni u jednoj tački. Postavljamo pitanje: da li je za poznavanje stanja napona u toj tački zaista potrebno beskonačno mnogo podataka ili se može odrediti konačan, potreban i dovoljan broj totalnih napona u posmatranoj tački da bi stanje napona bilo poznato i jednoznačno odredjeno?

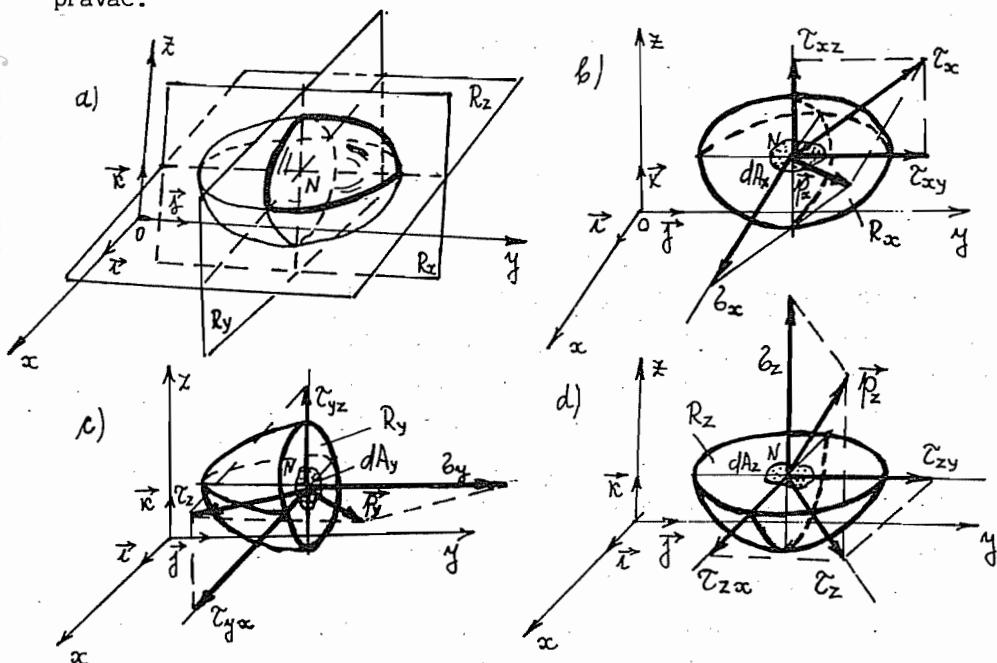
### I.3. KOMPONENTNI NAPONI. POJAM Tenzora NAPONA.

Iz ranijeg izlaganja smo videli da je za potpuno definisanje totalnog napona u nekoj tački tela, pored veličine, pravca i smera vektora totalnog napona potrebno poznavati koordinate tačke, kao i ort normale koji definiše površ kroz datu tačku u kojoj se on određuje. Znači da su naponi tensorske veličine, jer je potrebno znati vektor totalnog napona, tačku i ort normale ravni za koju se vezuje odredjeni napon. Izvlačimo zaključak: da je potrebno poznavati devet veličina: intenzitet, pravac i smet vektora totalnog napona ili tri koordinate tog vektora; tri kosinusa smera orta normale na ravan i tri koordinate tačke za koju je vezan totalni napon. Međutim te veličine nisu potpuno nezavisne, nego je samo šest od njih nezavisno. Jedna od veza je da su kosinusi smerova orta normale vezani jediničnim intenzitetom orta, odnosno zbir kvadrata kosinusa smerova je jedinica.

24.

Druge dve veze su date izrazima (8) iz prethodnog člana, tj. pri promeni orijentacije ravni sa normalom  $\vec{n}$  normalni napon se ne menja, dok tangencijalni napon menja znak. Ovim smo pokazali da je totalni napon u tački N za ravan  $R_n$  sa normalom  $\vec{n}$  potpuno definisan sa šest nezavisnih podataka.

Usvojimo proizvoljan koordinatni sistem osa  $Ox$ ,  $Oy$  i  $Oz$  pravougli desne dispozicije i u njemu telo kao na slici br. 4.a. Uočimo jednu proizvoljnu tačku u telu i kroz tu tačku N postavimo tri uzajamno upravne ravni koje su paralelne koordinatnim ravnima. Posmatrajmo sada na slici br. 4.b. deo tela ograničen ravnim koja je paralelna koordinatnoj ravni  $Oyz$  sa normalom u pravcu  $Ox$  ose, odnosno orta  $\vec{x}$ . Totalni napon u tački N za ovu presečnu ravan označićemo sa  $\vec{P}_x$ , gde indeks  $x$  označava da je  $Ox$  osa normala presečne ravni. Ovaj vektor totalnog napona na ravan sa normalom  $\vec{x}$ , se može razložiti u normalnu  $b_x$  i tangencijalnu  $\tilde{\tau}_x$  komponentu totalnog napona. Normalna komponenta  $b_x$  pada u pravac  $Ox$  ose dok tangencijalna komponenta  $\tilde{\tau}_x$  totalnog napona  $\vec{P}_x$  leži u presečnoj ravni  $R_x$  i može se razložiti u dve ortogonalne komponente  $\tilde{\tau}_{xy}$  i  $\tilde{\tau}_{xz}$  u pravcima koordinatnih osa  $Oy$  i  $Oz$ . Te dve komponente tangencijalnog napona koje smo označili sa  $\tilde{\tau}_{xy}$  i  $\tilde{\tau}_{xz}$  se vektorski slažu u totalni smičući napon  $\tilde{\tau}_x$ . U oznakama za  $\tilde{\tau}_{xy}$  i  $\tilde{\tau}_{xz}$  prvi indeks odnosi se na normalu površi u kojoj se napon javlja, a drugi indeks označava njegov pravac.



Slika br. 4

Sada za totalni napon u tački N napregnutog tela za presečnu ravan sa normalom  $\vec{\tau}$  možemo da napišemo:

$$\vec{P}_x = \delta_x \vec{\tau} + \tilde{\epsilon}_{xy} \vec{f} + \tilde{\epsilon}_{xz} \vec{k} \quad (9)$$

Na slici br.4.c i d prikazani su totalni naponi u tački N napregnutog tela, a za presečne ravni sa normalama  $\vec{f}$  i  $\vec{k}$  i njihovi komponentni normalni i tangencijalni naponi. Za taj slučaj možemo da napišemo:

$$\vec{P}_y = \tilde{\epsilon}_{yx} \vec{\tau} + \delta_y \vec{f} + \tilde{\epsilon}_{yz} \vec{k}; \quad \vec{P}_z = \tilde{\epsilon}_{zx} \vec{\tau} + \tilde{\epsilon}_{zy} \vec{f} + \delta_z \vec{k}. \quad (9')$$

Iz izloženog se vidi da su  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  i  $\delta_z$  normalne komponente totalnog napona ili normalni naponi, dok su  $\tilde{\epsilon}_{xy}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{xz}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{yz}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{yx}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{zx}$  i  $\tilde{\epsilon}_{zy}$  tangencijalne komponente totalnog napona ili tangencijalni naponi u tački N napregnutog tela, a za presečne ravni kroz tu tačku paralelne koordinatnim ravnima.

Pored vektorskog načina izražavanja totalnih naponi u tačkama napregnutog tela, a za presečne ravni sa ortovima normala  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{f}$  i  $\vec{k}$  gde se totalni napon prikazuje vektorom vezanim za tačku i ravan, možemo da koristimo i matrični način koji je veoma pogodan za preglednost i radu, pa zato uvodimo matrice kolone za vektore totalnih naponi:

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \tilde{\epsilon}_{xy} \\ \tilde{\epsilon}_{xz} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} P_y \\ P_z \\ P_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\epsilon}_{yx} \\ \delta_y \\ \tilde{\epsilon}_{yz} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} P_z \\ P_x \\ P_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\epsilon}_{zx} \\ \tilde{\epsilon}_{zy} \\ \delta_z \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Iz izloženog se vidi da je stanje napona ili naponsko stanje u određenoj tački napregnutog tela određeno sa devet komponentnih naponi: tri normalna i šest tangencijalnih u trima ortogonalnim ravnima. Devet komponentnih naponi kao devet skalara nazivamo komponentama tenzora napona i obično u tehničkoj literaturi pišemo u obliku kvadratne šeme koju nazivamo m a t r i c o m t e n z o r a n a p o n a ili kraće t e n z o r n a p o n a . Matricu tenzora napona pišemo u obliku:

$$N = (\{P_x\} \{P_y\} \{P_z\}) = \begin{bmatrix} \delta_x & \tilde{\epsilon}_{yx} & \tilde{\epsilon}_{zx} \\ \tilde{\epsilon}_{xy} & \delta_y & \tilde{\epsilon}_{zy} \\ \tilde{\epsilon}_{xz} & \tilde{\epsilon}_{yz} & \delta_z \end{bmatrix} \quad (11)$$

Vidimo da su elementi na glavnoj dijagonali matrice  $N$  normalni naponi

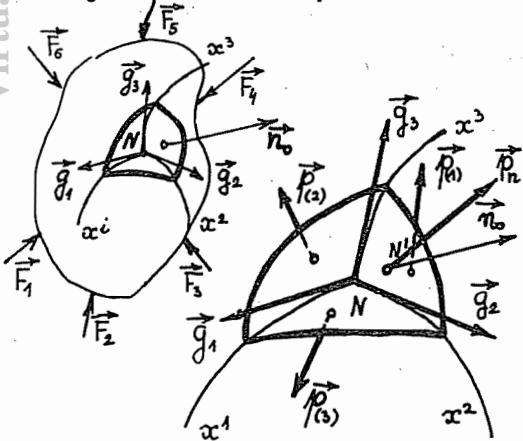
$\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\sigma_z$ , dok su elementi van glavne dijagonale komponentni tangencijalni naponi  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$  i  $\tau_{zy}$ . O ostalim osobinama matrice tensora napona biće kasnije reči. Elementi svake kolone matrice tensora napona su Descartes-ove pravouglne koordinate vektora totalnih napona za presečne ravni paralelne koordinatnim ravnima.

Vektori totalnih napona u određenoj tački napregnutog tela za snop presečnih ravni kroz tu tačku određujuju u opštem slučaju prostorni snop, pa se takvo naponsko stanje naziva prostorno naponsko stanje ili prostorno stanje napona. Postoje slučajevi kada vektori totalnih napona u određenoj tački napregnutog tela za sve proizvolje ravni kroz tu tačku leže u jednoj jedinoj ravni pa imamo slučaj ravnog naponskog stanja, ili pak da su svi kolinearni kada se radi o linearном naponskom stanju.

#### I.4. TENZOR NAPONA. JEDNAČINE KRETANJA I RAVNOTEŽE U KOMPONENTAMA TENZORA NAPONA

Izaberimo u napregnutom telu neku tačku  $N$  i povučimo kroz nju koordinatne linije proizvoljnog krivolinijskog koordinatnog sistema koordinata  $x^k$ . Posmatraćemo ravnotežu elementa deformabilnog tela u obliku zamišljeno izdvojenog krivolinijskog tetraedra sa temenom u tački  $N$ , gde smo smestili koordinatni početak uočenog proizvoljnog krivolinijskog koordinatnog sistema. Tetraedar je određen trima koordinatnim površinama definisanim kovarijantnim bazisnim vektorima  $\vec{q}_i$  i površinom čija je spoljašnja normala  $\vec{n}$ , koja prolazi kroz isti tačku, kao što je na slici br. 5 prikazano. Označimo sa  $dA_1$ ,  $dA_2$ ,  $dA_3$  i

$dA$  redom površine površi CNB, ANC, ANB i ABC bočnih strana i baze. Na osnovu jednakosti intenziteta unutrašnjih napona na svakoj površi zamišljenih delova sa raznih strana zajedničke površi zaključujemo da ako je u ravnoteži svaki delić tela pojedinačno onda je u ravnoteži i celo proučavano napregnuto telo, a važi i obrnuto. Ako je napregnuto telo u ravnoteži onda je u ravnoteži i svaki njegov delić zamišljeno izdvojen iz celine.



Slika br. 5

Površinsku silu koja se javlja i dejstvuje na element površi površine  $dA$ , sa normalom  $\vec{n}$ , označimo sa  $\vec{p}_n dA$ , gde je  $\vec{p}_n$  vektor totalnog napona u tački N napregnutog tela za presečnu ravan sa normalom  $\vec{n}$ . Na bočnim stranama tetraedra, čije su normale vektori uzajamnih bazisa  $\vec{g}^k$  dejstvuju površinske sile  $\vec{p}_k dA_k$ , gde je  $\vec{p}_k$  vektor totalnog napona u istoj tački, a za koordinatnu površ sa normalom  $\vec{g}^k$ . Osim toga na masu uočenog tetraedra dejstvuje zapreminska sila  $\rho (\vec{F}_m - \vec{w}) dV$ , u kojoj je  $dV$  zapremina elementarnog krivolinijskog tetraedra,  $\vec{F}_m = \rho \vec{F}_m$ , specifična zapreminska sila, a  $\vec{w}$  ubrzanje mase u toj tački.

Primenićemo princip soldifikacije koji se sastoji u tome da ako je neko telo posle deformacije u ravnoteži njegova se ravnoteža neće narušiti, ako se zamisli da ono očvrsne tj. soldifikuje se. Onda sledi da ako je telo posle deformacije u ravnoteži, onda je i svaki njegov deo u ravnoteži. Kako je deformisano telo u ravnoteži to se i posmatrani tetraedar nalazi u stanju ravnoteže, pa zato moraju biti zadovoljeni uslovi ravnoteže koji važe i za kruta tela. Ti uslovi su: da je rezultanta svih sila koje dejstviju na ovaj element jednaka nuli i da je vektorski zbir svih momenata sila koje dejstvuju na taj element za proizvoljnu momentnu tačku jednak nuli. To znači da se kao rezultat redukcije sila u redukcionoj tački dobija torzer sa glavnim vektorom i glavnim momentom koji su jednaki nuli. Na osnovu ovog uslova staticke ili dinamičke ravnoteže možemo pisati jednačinu ravnoteže ili jednačinu kretanja u obliku:

$$\vec{p}_n dA - \vec{p}_k dA_k - \rho \vec{F}_m' dV = 0 \quad (12)$$

$$\vec{p}_n dA - \vec{p}_k dA_k - \rho (\vec{F}_m' - \vec{w}) dV = 0 \quad (12*)$$

U ovim jednačinama se u drugom sabirku sabiranje vrši po indeksu  $k$  od 1 do 3. Kako je za omotač tetraedra kao zatvorene površi zbir vektora površina jednak nuli to je:

$$\vec{n} dA = \frac{dA_k}{|\vec{g}^k|} \vec{g}^k, \quad (13)$$

i uzimajući u obzir da je  $\vec{g}^k \cdot \vec{g}^k = g^{kk}$  i  $\vec{n} = n_k \vec{g}^k$  gde su  $n_k$  kovarijantne komponente jediničnog vektora  $\vec{n}$ , to umesto prethodnog imamo da je:

$$n_k dA \vec{g}^k = \frac{dA_k}{|\vec{g}^k|} \vec{g}^k,$$

odakle sledi da je:

28.

$$dA_k = \sqrt{g^{kk}} n_k dA .$$

Unesemo zatim ovaj izraz u jednačine ravnoteže sila (12) ili jednačinu kretanja (12\*) i podelivši iste sa  $dA$  dobijamo:

$$\vec{P}_n - \vec{P}_k \sqrt{g^{kk}} n_k - g \vec{F}'_m \frac{dV}{dA} = 0 ;$$

$$\vec{P}_n - \vec{P}_k \sqrt{g^{kk}} n_k - g (\vec{F}'_m - \vec{w}) \frac{dV}{dA} = 0 .$$

Usvojimo da pri nepromenljivom smeru orta  $\vec{n}$ , rastojanje tačke N od površi ABC teži nuli. Kako je  $\frac{dV}{dA} \rightarrow 0$  to iz poslednjih jednačina dobijamo da je:

$$\vec{P}_n = \sqrt{g^{kk}} \vec{P}_k n_k . \quad (14)$$

Vektor totalnog napona  $\vec{P}_k$  može biti pretstavljen tri-ma komponentama u odnosu na vektore kovarijantnog bazisa  $\vec{g}_m$  :

$$\sqrt{g^{kk}} \vec{P}_k = \delta^{km} \vec{g}_m . \quad (15)$$

Unoseći poslednji izraz u jednačinu (14) dobijamo:

$$\vec{P}_n = \delta^{km} n_k \vec{g}_m . \quad (16)$$

Imajući u vidu da je:

$$\vec{P}_n = (P_n)^m \vec{g}_m ,$$

gde su  $(P_n)^m$  kontravarijantne komponente vektora napona, nalazimo da je:

$$(P_n)^m = \delta^{km} n_k . \quad (17)$$

U izrazu (16) izvodi se sumiranje po oba indeksa,  $k$  i  $m$ , dok se u poslednjem sumiranje vrši samo po indeksu  $k$ .

U jednačinama (17) veličine  $\delta^{km}$  pretstavljaju kontravarijantne komponente (koordinate) tensora napona. Tenzor  $\delta^{km}$  drugog reda naziva se kontravariantnim tenzorom napona.

Jednačine (17) koje smo dobili u tensorskome obliku u literaturi su poznate pod nazivom Cauchy-jeve jednačine i one daju zavisnost totalnog napona u posmatranoj tački napregnutoga tela za odredjenu ravan u zavisnosti od pravca normale ravni i komponentnih napona za koordinatne površi kroz tu tačku, a koji su elementi tensora napona. Kako su elementi

tenzora napona funkcije položaja tačke, to je totalni napon  $\vec{p}_n$  u uočenoj tački za ravan sa normalom  $\vec{n}$  kroz tu tačku takođe funkcija i položaja te tačke.

Cauchy-jeve jednačine u kovarijantnom obliku glase:

$$(p_n)_m = \delta_{km} n^k, \quad (18)$$

dok bi za mešoviti oblik bile:

$$(p_n)^m = \delta_k^m n^k, \quad (19)$$

gde su  $\delta_{mk}$  kovarijantne koordinate tenzora napona,  $\delta_k^m$  mešovite koordinate tenzora napona.

Da bi smo sastavili jednačine kretanja deformabilnog tela neophodno je i dovoljno da izjednačimo sa nulom glavni vektor, glavni moment sila i sila inercije koje dejstvuju na svaki delić tela koji možemo zamišljeno da izdvojimo iz tela. Jelakost nuli glavnog vektora i glavnog momenta sila i sila inercije koje dejstvuju na zamišljeno izdvojeni deo traži određivanje uslova izmene komponenata tenzora napona pri prelasku od jedne tačke tela ka drugoj. Pretpostavimo zato da su komponente tenzora napona neprekidne i imaju parcijalne izvode u svim tačkama tela. Posmatrajmo sada zamišljeno izdvojeni elementarni deo proizvoljnog oblika zapremine  $V$ , koji je okružen omotačem površine  $A$ , a ima masenu gustinu  $\rho$ . Na taj deo neka dejstvuju specifične zapreminske sile  $F'_v$ , pa je ukupna zapreminska sila  $\rho F'_v dV$  i sila inercije  $-\rho \vec{w} dV$ . Spoljašnje površinske sile izražavamo pomoću specifičnih površinskih sila, pa ovde tu ulogu imaju totalni naponi  $\vec{p}_n$ . Uslov da glavni vektor sila koje dejstvuju na izdvojeni element zapremine  $dV$  i to sabrano za sve delove napregnutog tela, treba da bude jednak nuli daje sledeće:

$$\int_V \rho (\vec{F}'_v - \vec{w}) dV + \int_A \vec{p}_n dA = 0. \quad (20)$$

Drugi uslov da glavni moment (zbir momenata svih sila redukovani na jednu tačku) za slučaj dinamičke ravnoteže napregnutog tela mora biti jednak nuli daje:

$$\int_V [\vec{r}, \rho (\vec{F}'_v - \vec{w})] dV + \int_A [\vec{r}, \vec{p}_n] dA = 0. \quad (21)$$

Uzimajući u obzir Cauchy-jeve jednačine (17) i formulu Gauss-Ostrogradskog

$$\int_V B_{,\kappa}^{\kappa} dV = \int_A B^{\kappa} n_{\kappa} dA,$$

kao i da je parcijalni izvod vektora baze krivolinijskog koordinatnog sistema

$$\frac{\partial \vec{g}_n}{\partial x^k} = \Gamma_{nk}^j \vec{g}_j,$$

kao i da je kovarijantni izvod kontravarijantnog tenzora  $\delta^{mn}$  jednak:

$$\delta_{,k}^{mn} = \frac{\partial \delta^{mn}}{\partial x^k} + \Gamma_{ak}^m \delta^{an} + \Gamma_{ak}^n \delta^{ma},$$

površinski integral u jednačini (20) može da se transformiše na oblik:

$$\int_A \vec{p}_n dA = \int_A \delta^{km} \vec{g}_m n_k dA = \int_V (\delta^{km} \vec{g}_m)_{,k} dV = \int_V \delta_{,k}^{km} \vec{g}_m dV,$$

tako da jednačina (20) dobija oblik:

$$\int_V [g(\vec{F}'_M - \vec{w}) + \delta_{,k}^{km} \vec{g}_m] dV = 0. \quad (22)$$

Odavde na osnovu neprekidnosti podintegralne funkcije i proizvoljnosti zapreminskog elementa ,a s obzirom da jednačina mora da bude zadovoljena za svaki proizvoljni deo uočenog deformabilnog tela,sledi da podintegralna funkcija mora biti jednak nuli u svakoj tački tela,pa sledi:

$$\delta_{,k}^{km} \vec{g}_m + g \vec{F}'_M = g \vec{w} \quad (23)$$

Ako telo miruje i nalazi se u ravnoteži to će ubrzanje elementa mase biti jedнако nuli i jednačine dobijaju oblik:

$$\delta_{,k}^{km} \vec{g}_m + g \vec{F}'_M = 0 \quad (24)$$

Jednačine (23) i (24) koje daju vezu izmedju komponenata tenzora napona i zapreminskih sila u proizvoljnoj tački unutar tela,nazivaju se redom jednačinama ravnoteže deformabilnog tela. Ako projektujemo te jednačine na pravac kontravarijantnog vektora  $\vec{g}^k$  baze i uzmememo u obzir da je:

$$\vec{g}_m \cdot \vec{g}^k = \delta_m^k$$

dobijamo sledeće jednačine:

$$\delta_{,m}^{mk} + g (F'_M)^k = g w^k \quad (25)$$

odnosno

$$\delta_{,m}^{mk} + g (F'_M)^k = 0 \quad (26)$$

U ovim jednačinama  $\delta_{,m}^{mk}$  je kovarijantni izvod tenzora napona  $\delta^{mk}$ , a sabiranje se vrši po indeksu  $m$  od 1 do 3.

Jednačine (26) u literaturi su ponate pod imenom Navier-ove jednačine ravnoteže. U poslednjim jednačinama  $\delta(F_M^i)^k$  su kontravariantne koordinate specifične zapreminske sile.

Druga jednačina dinamičke ravnoteže (21) je rezultat zbiru momenata zapreminskih sila  $\delta(F_M^i - \vec{w})$  elementa zapremine  $dV$  za koordinatni početak

$$\int [\vec{r}, \delta(F_M^i - \vec{w})] dV,$$

momenata površinskih sila  $\vec{p}_n$  elemenata obuhvaćenih površinom omotača  $S$ :

$$\int [\vec{r}, \vec{p}_n] dS,$$

gde su  $\vec{r}$  vektori položaja napadnih tačaka zapreminskih odnosno površinskih sila. Ova druga vektorska jednačina daje mogućnost da pokažemo simetričnost tenzora napona u svakoj tački tela. Zato u jednačini (21) koristeći formulu Gauss-Ostrogradskog izvršimo transformaciju površinskog integrala u zapreminski tako da je:

$$\begin{aligned} \int_A [\vec{r}, \vec{p}] dS &= \int_A [\vec{r}, \delta^{km} \vec{q}_m] n_k dS = \int_V [\vec{r}, \delta^{km} \vec{q}_m]_k dV = \\ &= \int_V [\vec{r}, \delta^{km}]_k \vec{q}_m dV + \int_V \left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^k}, \delta^{km} \vec{q}_m \right] dV, \end{aligned} \quad (27)$$

pri čemu smo iskoristili Cauchy-jeve jednačine (16), tako da iz momentne jednačine (21) dobijamo:

$$\int_V [\vec{r}, (\delta^{km} \vec{q}_m + \delta(F_M^i - \vec{w}))] dV + \int_V \left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^k}, \delta^{km} \vec{q}_m \right] dV = 0$$

Prvi sabirak u prethodnoj jednačini je jednak nuli na osnovu Navier-ovih jednačina (23) koje smo prethodno izveli iz uslova jednakosti nuli glavnog vektora sile, a kako je  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^k} = \vec{q}_k$ , to se poslednja jednačina sudi na oblik:

$$\int [\vec{q}_k, \delta^{km} \vec{q}_m] dV = 0$$

odakle zbog proizvoljno izabrane zapremine  $dV$  i neprekidnosti podintegralne funkcije sledi da je:

$$\delta^{km} [\vec{q}_k, \vec{q}_m] = 0 \Rightarrow (\delta^{km} - \delta^{mk}) [\vec{q}_k, \vec{q}_m] = 0 \quad (28)$$

32.

Razvijanjem poslednjeg izraza imamo

$$[\vec{g}_1, \vec{g}_2](\delta^{12} - \delta^{21}) + [\vec{g}_1, \vec{g}_3](\delta^{13} - \delta^{31}) + [\vec{g}_2, \vec{g}_3](\delta^{23} - \delta^{32}) = 0,$$

odakle sledi da je:

$$\delta^{mk} = \delta^{km}.$$

(29)

Ovaj uslov pokazuje da je tenzor napona simetričan nezavisno od izbora koordinatnog sistema, zato i važi da je:

$$\delta_{mk} = \delta_{km}.$$

Veza izmedju kovarijantnih i kontravarijantnih koordinata tenzora napona data je sa:

$$\delta_{km} = g_{ke} g_{mj} \delta^{ej}.$$

(Zbog simetrije tenzora napona nema razlike izmedju  $\delta^{mk},_{..j}$  i  $\delta^{mk},_{j..}$ ).

Zbog osobine simetričnosti tenzora napona sledi da je napopnsko stanje u datoј tački napregnutog tela određeno sa šest nezavisnih komponenata.

### I.5. GRANIČNI (KONTURNI) USLOVI

Raniјe smo pokazali da su neophodni i dovoljni uslovi ravnoteže deformabilnog tela jednakost nuli glavnog vektora i glavnog momenta sила koje dejstvuju na svaki parcijani deo tela koji smo misaono izdvojili iz tela. Potrebno je da taj uslov bude zadovoljen i za delice tela koji imaju zajedničku površ sa omotačem tela. Pretpostavimo da su komponente tenzora napona neprekidne i duž te granice.

Posmatrajmo tačku P koja je blizu površi spoljašnjeg omotača - konture tela i uočimo beskonačno mali krivolinijski tetraedar na slici br.5 čija se površ ABC poklapa sa površi spoljašnje konture tela, a tema je u uočenoj tački P. Uslov ravnoteže uočenog tetraedra daje vezu izmedju napona i spoljašnjih sила oblika:

$$(\rho_n)_m = \delta_{mn} n^k, \quad (30)$$

s tom razlikom od ranije izvedenih Cauchy-jevih jednačina (18) što će

$n^k$  biti kontravarijantne koordinate vektora spoljašnje normale površi spoljašnjeg omotača tela u datoј tački na konturi. Ovi se uslovi nazivaju uslovi na površini ili granični (konturni) uslovi. Ovi su uslovi poznati i pod nazivom Cauchy-jevi granični uslovi.

Na taj način, iz neophodnog i dovoljnog uslova jednakosti

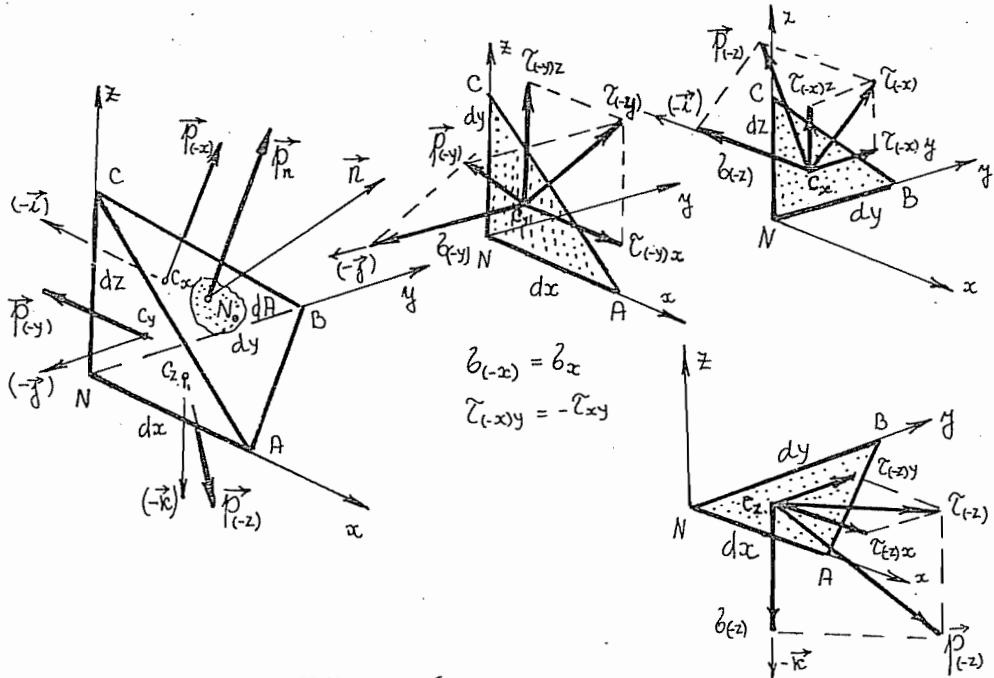
zuli glavnog vektora i glavnog momenta sila sistema koji dejstvuje na svaki deo tela, uključujući i delove tela koji imaju zajednički deo sa površinom omotača tela proizilazi da šest komponenata tenzora napona moraju da zadovoljavaju unutar tela tri diferencijalne jednačine ravnoteže - Navier-Caue jednačine za slučaj statičkog opterećenja, odnosno tri jednačine kretanja za slučaj dinamičkog opterećenja i tri uslova (30) na površi konture tela, odnosno tri granična uslova. Treba uočiti da je šest komponenata tenzora napona iz sistema od tri diferencijalne jednačine nejednoznačno određeno. Svako rešenje iz beskonačnog skupa rešenja tog sistema jednačina, koje zadovoljava i granične uslove odgovara nekom statički mogućem napregnutom stanju. Iz ovoga sledi da se pod dejstvom spoljašnjih sila može javiti skup statički mogućih naponskih stanja, a to znači da je zadatak o nalaženju naponskog stanja u telu statički neodredjen problem. Kasnije ćemo viti kako se iz ovog skupa mogućih rešenja određuje realno naponsko stanje.

### I.6. JEDNAČINE RAVNOTEŽE I KRETANJA U DESCARTES-OVOM KOORDINATNOM SISTEMU

Izaberimo u napregnutom telu neku tačku N i povucimo kroz nju koordinatne ose Descartes-ovog pravouglog koordinatnog sistema Oxyz, čiji su osnovni koordinatni vektori ortovi  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  i  $\vec{z}$ . Posmatraćemo ravnotežu elementa deformabilnog tela u obliku zamišljeno izdvajenog tetraedra kao na slici br.6, obuhvaćenog koordinatnim ravnima čiji su jedinični vektori  $-\vec{x}$ ,  $-\vec{y}$  i  $-\vec{z}$ , i površi čija je normala  $\vec{n}$ . Označimo redom sa  $dA_x$ ,  $dA_y$ ,  $dA_z$  i  $dA$  površine površi CNB, ANC, ANB i ABC, bočnih strana i baze. Neka je  $\vec{p}_n$  totalni napon u tački N za ravan koja prolazi kroz tačku N i odredjena je ortom normali  $\vec{n}$ . Totalni napon za tačku u težištu osnove ABC tetraedra sa normalom  $\vec{n}$  je  $\vec{p}_n + d\vec{p}_n$ . Kako je osnova ABC tetraedra na vrlo malom rastojanju od tačke N to se priraštaj napona  $d\vec{p}_n$  pri prelasku iz tačke N u tačku N' težiste osnove tetraedra, a za paralelne ravni sa istom normalom  $\vec{n}$  može zanemariti i usvojiti da je  $\vec{p}_n$ . Površinska sila  $\vec{p}_n dA$  dejstvuje na element površine  $dA$  sa normalom  $\vec{n}$ , dok na bočnim površinama tetraedra, čije su normale ortovi koordinatnih osa dejstvuju površinske sile  $-\vec{p}_x dA_x$ ,  $-\vec{p}_y dA_y$ ,  $-\vec{p}_z dA_z$  gde su  $\vec{p}_{(x)} = -\vec{p}_y$ ,  $\vec{p}_{(y)} = -\vec{p}_x$  i  $\vec{p}_{(z)} = -\vec{p}_z$  totalni naponi za bočne stranice sa normalama  $-\vec{x}$ ,  $-\vec{y}$  i  $-\vec{z}$ . Osim toga na uočeni tetrae-

34.

dar dejstvuje i zapreminska sila  $\vec{F}'_v dV = \rho \vec{F}_m dV$  gde je  $dV$  zapremina elementarnog tetraedra.



Slika br. 6

Primenićemo princip soldifikacije koji se sastoji u tome da ako je neko telo posle deformacije pod dejstvom opterećenja u ravnoteži onda je i svaki njegov deo u ravnoteži, a to znači da i posmatrani tetraedar koji pripada napregnutom telu u ravnoteži mora da bude u ravnoteži. Zato možemo da primenimo uslove ravnoteže koji kažu da su glavni vektor sila i glavni moment sila koje dejstvuju na tetraedar jednaki nuli. Iz uslova da je glavni vektor sila jednak nuli dobijamo sledeću jednačinu:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{P}_n dA - \vec{P}_x dA_x - \vec{P}_y dA_y - \vec{P}_z dA_z + \vec{F}'_v dV = 0, \quad (31)$$

Kako je za tetraedar zbir površina omotača u vektorskome obliku jednak nuli to možemo da pišemo da je:

$$\vec{n} dA + (-\vec{x} dA_x) + (-\vec{y} dA_y) + (-\vec{z} dA_z) = 0 \quad (32)$$

odakle sledi da je  $(\vec{n}, \vec{x}) = \cos \alpha (=) \alpha$ ;  $(\vec{n}, \vec{y}) = \cos \beta (=) \beta$ ;  $(\vec{n}, \vec{z}) = \cos \delta (=) \delta$ ,

$$\cos \alpha = \frac{dA_x}{dA}, \quad \cos \beta = \frac{dA_y}{dA}, \quad \cos \delta = \frac{dA_z}{dA} \quad (33)$$

Uzimajući u obzir poslednju vezu iz jednačine (31) dobijamo:

$$\vec{P}_n = \vec{P}_x \cos\alpha + \vec{P}_y \cos\beta + \vec{P}_z \cos\gamma - \vec{F}_v \frac{dV}{dA}. \quad (34)$$

poslednjem izrazu poslednji sabirak možemo da zanemarimo kao malu veličinu višeg reda jer količnik  $\frac{dV}{dA} \rightarrow 0$  teži nuli, ako se tetraedar smanjuje, pa u konačnom obliku dobijamo u vektorskom obliku jednačinu:

$$\vec{P}_n = \vec{P}_x \alpha + \vec{P}_y \beta + \vec{P}_z \gamma, \quad (35)$$

koju u skalarnom obliku možemo da napišemo kao:

$$\begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x \alpha + \tau_{yx} \beta + \tau_{zx} \gamma, & \cos \alpha &= \alpha \\ p_{ny} &= \tau_{xy} \alpha + \sigma_y \beta + \tau_{zy} \gamma, & \cos \beta &= \beta \\ p_{nz} &= \tau_{xz} \alpha + \tau_{yz} \beta + \sigma_z \gamma, & \cos \gamma &= \gamma \end{aligned} \quad (36)$$

nde su  $p_{nx}$ ,  $p_{ny}$  i  $p_{nz}$  projekcije totalnog napona u tački napregnutog tela za ravan sa normalom  $\vec{n}$ , na pravce koordinatnih osa. Ove jednačine u skalarnom obliku je izveo Cauchy, te se zato nazivaju Cauchy-jeve jednačine. Ove jednačine daju vezu izmedju triju totalnih napona za preseke paralelne koordinatnim ravnima i totalnog napona za ravan presek sa normalom  $\vec{n}$ . Cauchy-jeve jednačine znači daju vezu izmedju triju projekcija totalnog napona u tački N za ravan sa normalom  $\vec{n}$ , određenom kosinusima smera  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  i devet komponentnih napona  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{zy}$  i  $\sigma_z$  za tri ravni paralelne koordinatnim ravnima trijedra Oxyz, kroz tačku N napregnutog tela.

Cauchy-jeve jednačine u matričnom obliku se mogu napisati kao:

$$\{p_n\} = \begin{Bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix},$$

a koristeći uvedeni pojam tensora napona i njemu pridruženu maticu  $N$ , te jednačine se mogu napisati u obliku:

$$\{p_n\} = N \{n\}. \quad (37)$$

36.

Kada smo posmatrali ravnotežu tetraedra NABC pretpostavili smo da stranice tetraedra ne dodiruju spoljašnju površ - omotač deformabilnog tela. Ako je tačka N u blizini omotača tela onda možemo izabrati takav tetraedar da njegova stranica ABC leži u tangencijalnoj ravni (tangentnoj ravni) povućenoj u tački N na površ omotača deformabilnog tela. Na tu površ omotača dejstvaju površinske sile zadate pomoću  $\vec{F}_n'$  sračunata na jedinicu površine i ima iste dimenzije kao i totalni napon. Uslov ravnoteže sile daje jednačine oblika (35) odnosno (36) ili (37) u kojima je umesto totalnog napona za ravan sa normalom  $\vec{n}$  stavljena specifična površinska sila  $\vec{F}_n'$  za ravan sa normalom  $\vec{n}$ . Tako dobijene jednačine u matričnom obliku imaju formu:

$$\left\{ \vec{F}_n' \right\} = \nabla \{ n \}, \quad \begin{pmatrix} X_n' \\ Y_n' \\ Z_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{xx} & \tilde{\epsilon}_{yx} & \tilde{\epsilon}_{zx} \\ \tilde{\epsilon}_{xy} & \delta_{yy} & \tilde{\epsilon}_{zy} \\ \tilde{\epsilon}_{xz} & \tilde{\epsilon}_{yz} & \delta_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{xx}\alpha + \tilde{\epsilon}_{yx}\beta + \tilde{\epsilon}_{zx}\gamma \\ \tilde{\epsilon}_{xy}\alpha + \delta_{yy}\beta + \tilde{\epsilon}_{zy}\gamma \\ \tilde{\epsilon}_{xz}\alpha + \tilde{\epsilon}_{yz}\beta + \delta_{zz}\gamma \end{pmatrix}, \quad (38)$$

i nazivaju se granični ili površinski uslovi ili konturni uslovi. Granični uslovi su staticki uslovi ravnoteže sile na površi konture napregnutog tela.  $X_n'$ ,  $Y_n'$  i  $Z_n'$  su koordinate specifične površinske sile.

Uslov da je glavni moment sile koje dejstvaju na posmatrani tetraedar jednak nuli, daje sledeću jednačinu:

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_N = 0 \Rightarrow [\vec{r}_x, \vec{p}_n dA] + [\vec{r}_x, -\vec{p}_x dA_x] + [\vec{r}_y, -\vec{p}_y dA_y] + [\vec{r}_z, -\vec{p}_z dA_z] + [\vec{r}, \vec{F}_n' dV] \stackrel{\approx 0}{=} 0, \quad (39)$$

u kojoj su  $\vec{r}_x$ ,  $\vec{r}_y$  i  $\vec{r}_z$  vektori položaja napadnih tačaka površinskih sile  $-\vec{p}_x dA_x$ ,  $-\vec{p}_y dA_y$  i  $-\vec{p}_z dA_z$  koje se javljaju na površinama omotača tetraedra, koje se poklapaju sa ravnima paralelnim koordinatnim ravnima i njihove vrednosti su:

$$\begin{aligned} \vec{r}_x &= \frac{1}{3} (\vec{j} dy + \vec{k} dz), \\ \vec{r}_y &= \frac{1}{3} (\vec{i} dx + \vec{k} dz), \\ \vec{r}_z &= \frac{1}{3} (\vec{i} dx + \vec{j} dy), \end{aligned} \quad (40)$$

dok je  $\vec{r}_c$  vektor položaja napadne tačke površinske sile koja dejstvuje na osnovu tetraedra, a redukuje se na njeno težište:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{3} (\vec{x} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz). \quad (41)$$

Unošenjem vrednosti vektora položaja napadnih tačaka sile (40) i (41) u jednačinu (39) dobijamo:

$$\frac{1}{3} \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ dx & dy & dz \\ p_{nx} & p_{ny} & p_{nz} \end{vmatrix} - \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ 0 & dy & dz \\ \tilde{\epsilon}_{xy} & \tilde{\epsilon}_{yz} & \tilde{\epsilon}_{zx} \end{vmatrix} \alpha - \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ dx & 0 & dz \\ \tilde{\epsilon}_{yx} & \tilde{\epsilon}_{yz} & \tilde{\epsilon}_{zx} \end{vmatrix} \beta - \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ dx & dy & 0 \\ \tilde{\epsilon}_{zx} & \tilde{\epsilon}_{zy} & \tilde{\epsilon}_{yz} \end{vmatrix} \gamma = 0.$$

Ova vektorska jednačina se raspada na tri skalarne oblike:

$$\begin{aligned} p_{ny} dz - p_{nz} dy - (\tilde{\epsilon}_{xz} dy - \tilde{\epsilon}_{xy} dz) \alpha - (-\tilde{\epsilon}_y dz) - \tilde{\epsilon}_z dy \delta^x &= 0, \\ p_{nx} dz - p_{nz} dx - \tilde{\epsilon}_x dz \alpha - (\tilde{\epsilon}_{yx} dz - \tilde{\epsilon}_{yz} dx) \beta - (-\tilde{\epsilon}_z dx) \delta^y &= 0, \\ p_{ny} dz - p_{nx} dz - (-\tilde{\epsilon}_x dy) \alpha - \tilde{\epsilon}_y dx \beta - (\tilde{\epsilon}_{xy} dx - \tilde{\epsilon}_{zx} dy) \delta^z &= 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Ako uzmememo u obzir Cauchy-jeve jednačine (36) i veze površina (33) dobijamo tri sledeća uslova:

$$\tilde{\epsilon}_{zy} = \tilde{\epsilon}_{yz}, \quad \tilde{\epsilon}_{xx} = \tilde{\epsilon}_{zz}, \quad \tilde{\epsilon}_{xy} = \tilde{\epsilon}_{yx}. \quad (43)$$

Ovi uslovi kazuju da su komponentni tangencijalni naponi u dvema uzajamno upravnim ravnima jednaki. To je izraz pravila o konjugovanosti tangencijalnih napona. U dvema međusobno upravnim ravnima komponente napona smicanja (tangencijalnog napona) koje su upravne na presečnu pravu tih ravnih jednake su po veličini i obe su usmerene ka ili od presečne prave dveju ravnih.

Na osnovu pravila o konjugovanosti tangencijalnih napona zaključujemo da je matrica tensora napona (11) simetrična. Do tog istog zaključka došli smo i iz uopštenog razmatranja ravnoteže krivolinijskog elementarnog tetraedra u prethodnom članu, u kome smo pokazali osobinu simetričnosti tensora napona koristeći krivolinijski koordinatni sistem. U ovom članu smo videli i fizičko tumačenje osobine simetričnosti tensora napona.

Sada pomoću pridružene matrice tensoru napona možemo da napišemo intenzitet totalnog napona u tački N napregnutog tela za presečnu ravan sa normalom  $\vec{n}$ :

$$p_n^2 = (\vec{p}_n, \vec{p}_n) = (p_n) \{p_n\} = (n) N' N \{n\} = (n) N^2 \{n\}, \quad (44)$$

ili u razvijenom obliku:

$$\begin{aligned} p_n^2 = p_{nx}^2 + p_{ny}^2 + p_{nz}^2 &= (\tilde{\epsilon}_x^2 + \tilde{\epsilon}_{xy}^2 + \tilde{\epsilon}_{xz}^2) \alpha^2 + (\tilde{\epsilon}_{yx}^2 + \tilde{\epsilon}_y^2 + \tilde{\epsilon}_{yz}^2) \beta^2 + (\tilde{\epsilon}_{zx}^2 + \tilde{\epsilon}_{zy}^2 + \tilde{\epsilon}_z^2) \gamma^2 + \\ &+ 2[(\tilde{\epsilon}_x \tilde{\epsilon}_{xy} + \tilde{\epsilon}_y \tilde{\epsilon}_{xy} + \tilde{\epsilon}_{xz} \tilde{\epsilon}_{yz}) \alpha \beta + (\tilde{\epsilon}_x \tilde{\epsilon}_{zx} + \tilde{\epsilon}_{xy} \tilde{\epsilon}_{yz} + \tilde{\epsilon}_z \tilde{\epsilon}_{xz}) \alpha \gamma + (\tilde{\epsilon}_{xy} \tilde{\epsilon}_{xz} + \tilde{\epsilon}_y \tilde{\epsilon}_{yz} + \tilde{\epsilon}_z \tilde{\epsilon}_{yz}) \beta \gamma]. \end{aligned} \quad (45)$$

Kako je normalni napon projekcija totalnog napona za ravan sa normalom  $\vec{n}$  na tu normalu, to možemo da odredimo da je:

$$\begin{aligned}\delta_n &= (n)\{\rho_n\} = (n) \text{N} \{n\} = \rho_{nx} \alpha + \rho_{ny} \beta + \rho_{nz} \gamma = \\ &= \delta_x \alpha^2 + \delta_y \beta^2 + \delta_z \gamma^2 + (\tau_{xy} + \tau_{yx}) d\beta + (\tau_{xz} + \tau_{zx}) \alpha \gamma + (\tau_{yz} + \tau_{zy}) \beta \gamma,\end{aligned}\quad (46)$$

dok je tangencijalni napon projekcija totalnog napona za ravan sa normalom  $\vec{n}$  na tu ravan i pada u pravac orta  $\vec{t}$  koji leži u toj ravni:

$$\tilde{\tau}_n = (t) \text{N} \{n\} = \sqrt{\rho_n^2 - \delta_n^2} = \sqrt{(n) \text{N}' \text{N} \{n\} - [(n) \text{N} \{n\}]^2} \quad (47)$$

Da bi smo našli vezu izmedju unutrašnjih napona i spoljašnjih zapreminskih sila izaberimo u telu tačku O i sa jednim temenom u toj tački izdvojimo elementarni paralelopiped OABCDEFG, infinitezimalnih ivica  $d\alpha$ ,  $dy$  i  $dz$ , kao što je to na slici br. 7 naznačeno. Kako su ivice infinitezimalne možemo pretpostaviti da su unutrašnje sile ravnomerno rasporedjene i možemo ih sada smatrati površinskim jer sada dejstvuju na površinama zamišljeno izdvojenog paralelopipeda iz deformabilnog napregnutog tela. Na slici br. 7 prikazano je kako one dejstvuju. Ovde moramo uzeti razlike u naponima na suprotnim stranama paralelopipeda. To je iz razloga što je priraštaj napona u dvema bliskim tačkama za dve paralelne ravni mala veličina prvog reda u odnosu na veličinu napona, te je površinska sila koja odgovara elementarnoj površini mala veličina trećeg reda i istog reda kao i zapreminska sila koja dejstvuje na posmatrani zamišljeno izdvojeni paralelopiped, čiju ravnotežu posmatramo. Totalni napon za površinu stranice OECD sa normalom  $-\vec{t}$  u negativnom smeru Ox ose je  $\vec{\rho}_{(x)}$ , te je površinska sila koja se preko ove stranice prenosi je  $-\vec{\rho}_x dA_x$ . Totalni napon  $\vec{\rho}_x'$  na suprotnoj stranici AFBG sa spoljašnjom normalom  $\vec{x}$  u pravcu +Ox ose razlikovaće se za priraštaj koji odgovara pomeranju ravni za  $d\alpha$  i biće jednak  $\vec{\rho}_x + \frac{\partial \vec{\rho}_x}{\partial x} d\alpha$ , te je površinska sila koja se preko te stranice prenosi  $(\vec{\rho}_x + \frac{\partial \vec{\rho}_x}{\partial x} d\alpha) dA_x$ . Znači da je ona jednaka rezultanti unutrašnjih sila koja se preko zamišljene površi ABGF prenosi kao površinska sila uticaja jednog dela tela na drugi. Slično ovome preko površi - stranice AFEO sa normalom  $-\vec{j}$  u negativnom smeru Oy ose, prenosi se sila  $\vec{\rho}_{(y)} dA_y$ , dok se preko stranice GBCD sa normalom  $\vec{j}$  u pozitivnom smeru Oy ose prenosi sila  $(\vec{\rho}_y + \frac{\partial \vec{\rho}_y}{\partial y} dy) dA_y$ . Preko stranice OABC sa normalom  $-\vec{k}$  u smeru -Oz ose prenosi se površinska sila  $\vec{\rho}_{(z)} dA_z$ , dok se preko stranice EFGD sa normalom  $\vec{k}$  u pozitivnom smeru Oz ose prenosi površinska sila  $(\vec{\rho}_z + \frac{\partial \vec{\rho}_z}{\partial z} dz) dA_z$ . Neka je deo tela u obliku izdvojenog paralelopipeda infinitezimalnih ivica

$dx$ ,  $dy$  i  $dz$  izložen dejstvu zapreminskih sila  $\vec{F}'_v dV$ . Da bi deo tela u obliku paralelopipeda pod dejstvom svih nabrojanih sila bio u ravnoteži potrebno je da glavni vektor svih sila i glavni moment svih sila budu jednaki nuli. Iz prvog uslova jednakosti glavnog vektora sistema sila nuli dobijamo prvu jednačinu ravnoteže. Iz nje sledi:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

$$(-\vec{p}_x + \vec{p}_z + \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} dx) dA_x + (-\vec{p}_y + \vec{p}_z + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} dy) dA_y + (-\vec{p}_z + \vec{p}_z + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} dz) dA_z + \vec{F}'_v dV = 0. \quad (48)$$

Posle skraćivanja sa  $dV$  iz ove jednačine sledi:

$$\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} + \vec{F}'_v = 0. \quad (49)$$

Ovu jednačinu u matričnom obliku možemo da napišemo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \{p_x\} + \frac{\partial}{\partial y} \{p_y\} + \frac{\partial}{\partial z} \{p_z\} + \{F'_v\} = 0. \quad (49^*)$$

Kako je svaki totalni napon za ravni kroz datu tačku pralelne koordinatnim ravnima odredjen sa tri komponentna napona, kao što je to prikazano u izrazima (10) to poslednju jednačinu možemo da napišemo u obliku:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} \zeta_{xx} \\ \zeta_{xy} \\ \zeta_{xz} \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} \zeta_{yx} \\ \zeta_{yy} \\ \zeta_{yz} \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} \zeta_{zx} \\ \zeta_{zy} \\ \zeta_{zz} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X'_v \\ Y'_v \\ Z'_v \end{Bmatrix} = 0. \quad (50)$$

Vektorsku jednačinu (49), odnosnu istu napisanu u matričnom obliku možemo da napišemo i pomoću tri skalarne oblike:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_{zx}}{\partial z} + X'_v &= 0, \\ \frac{\partial \zeta_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_{zy}}{\partial z} + Y'_v &= 0, \\ \frac{\partial \zeta_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_{zz}}{\partial z} + Z'_v &= 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Ove jednačine daju vezu izmedju komponentnih napona za ravni kroz datu tačku napregnutog tela, a za ravni paralelne koordinatnim ravnima i zapreminskih sila. Te jednačine su u literaturi poznate pod imenom N̄vier-ove jednačine napregnutog tela.

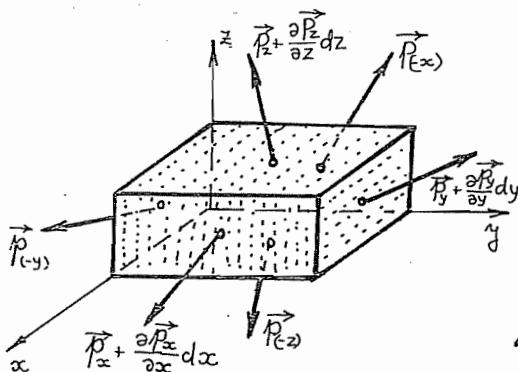
Ako napregnuto telo posmatramo dinamički onda na njega dejstvuje i sila inercije, koja je tipa zapreminske ili masene sile, te je

40.

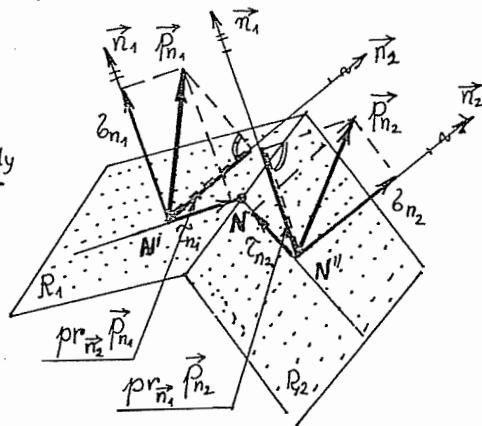
dodatna zapreminska sila, koja dejstvuje na zamišljeno izdvojeni elementarni paralelopiped  $\oint \vec{w} dV$  i jednačinu dinamičke ravnoteže sada možemo napisati u obliku:

$$\frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{P}_z}{\partial z} + \vec{F}_v = \oint \vec{w} \quad (52)$$

Poslednja jednačina predstavlja jednačinu kretanja deformabilnog tela.



Slika br. 7



Slika br. 8

Drugi uslov ravnoteže, da je glavni moment sistema sila koje dejstvuju na deo napregnutog tela u obliku elementarnog paralelopipeda jednak nuli, daje potvrdu stava o konjugovanosti tangencijalnih napona (43) koji smo već ranije izveli. Neka su  $\vec{r}_x$ ,  $\vec{r}_y$  i  $\vec{r}_z$  vektori položaja težišta  $C_i$  stranica paralelopipeda koje su paralelne koordinatnim ravnima, a  $\vec{r}_x'$ ,  $\vec{r}_y'$  i  $\vec{r}_z'$  vektora položaja težišta preostalih stranica takodje paralelnih koordinatnim ravnima a razstojanjima  $dx$ ,  $dy$  i  $dz$  od prethodnih, a njihove vrednosti su:

$$\begin{aligned}\vec{r}_x &= \frac{1}{2} (\vec{r} dy + \vec{r} dz), & \vec{r}_x' &= \vec{r}_x + \vec{r} dx, \\ \vec{r}_y &= \frac{1}{2} (\vec{r} dx + \vec{r} dz), & \vec{r}_y' &= \vec{r}_y + \vec{r} dy, \\ \vec{r}_z &= \frac{1}{2} (\vec{r} dx + \vec{r} dy), & \vec{r}_z' &= \vec{r}_z + \vec{r} dz.\end{aligned}$$

Sa  $\vec{r}_c$  obeležimo vektor položaja težišta elementarnog paralelopipeda:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{2} (\vec{r} dx + \vec{r} dy + \vec{r} dz)$$

Drugi uslov ravnoteže sada daje sledeću jednačinu:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^n \vec{M}_N \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \\
 & [\vec{r}_x, \vec{p}_{(\infty)}] dA_x + [\vec{r}'_x, \vec{p}_x + \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} dx] dA_x + \\
 & + [\vec{r}_y, \vec{p}_{(y)}] dA_y + [\vec{r}'_y, \vec{p}_y + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} dy] dA_y + \\
 & + [\vec{r}_z, \vec{p}_{(z)}] dA_z + [\vec{r}'_z, \vec{p}_z + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} dz] dA_z + [\vec{r}_c, \vec{F}_v] dV = 0. \tag{53}
 \end{aligned}$$

Kako je:

$\vec{p}_{(\infty)} = -\vec{p}_x$ ;  $\vec{p}_{(y)} = -\vec{p}_y$ ;  $\vec{p}_{(z)} = -\vec{p}_z$ ;  $\vec{r}'_x - \vec{r}_\infty = \vec{x} dx$ ;  $\vec{r}'_y - \vec{r}_y = \vec{y} dy$ ;  $\vec{r}'_z - \vec{r}_z = \vec{z} dz$ ,  
to se prethodni uslov ravnoteže posle zanemarivanja malih veličina višeg re-  
da svodi na:

$$[\vec{x}, \vec{p}_x] + [\vec{y}, \vec{p}_y] + [\vec{z}, \vec{p}_z] = 0. \tag{54}$$

Množenjem poslednjeg izraza redom ortovima koordinatnih osa  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  i  
 $\vec{z}$  dobijamo:

$$(\vec{p}_y, \vec{r}) = (\vec{p}_z, \vec{f}), \quad (\vec{p}_x, \vec{f}) = (\vec{p}_y, \vec{x}), \quad (\vec{p}_x, \vec{r}) = (\vec{p}_z, \vec{x}).$$

Kako su projekcije totalnog napona  $\vec{p}_x$  na pravce orijentisane orto-  
vima  $\vec{f}$  i  $\vec{r}$  komponentni tangencijalni naponi  $\tau_{xy}$   
i  $\tau_{xz}$ ; projekcije totalnog napona  $\vec{p}_y$  na pravce koordinatnih osa  
orijentisanih ortovima  $\vec{x}$  i  $\vec{r}$  komponentni tangencijalni naponi  
 $\tau_{yx}$  i  $\tau_{yz}$ ; i projekcije totalnog napona  $\vec{p}_z$  na pravce koordi-  
natnih osa orijentisanih ortovima  $\vec{x}$  i  $\vec{f}$  jednaki komponentnim  
tangencijalnim naponima  $\tau_{zx}$  i  $\tau_{zy}$ , to poslednji uslov daje:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Poslednji uslovi su identični sa već izvedenim uslovima (43) koji izražava-  
ju stav o konjugovanosti tangencijalnih naponi.

Znači da smo iz uslova ravnoteže zamišljeno izdvojenog  
 dela napregnutog tela u obliku elementarnog paralelopipeda dobili sistem  
parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda kao jednačine ravnoteže i  
jednačine koje izražavaju stav o konjugovanosti tangencijalnih naponi, odno-  
sno daju potvrdu o simetričnosti matrice pridružene tenzoru napona.

42.

Stav o konjugovanosti tangencijalnih napšona ,koji govori o jednakosti komponentnih tangencijalnih napona u uzajamno upravnim ravнима smanjuje broj nezavisnih komponentnih napona od devet na šest. Tako, ako su poznate spoljašnje sile koje dejstvaju na deformabilno telo ostaju nam tri jednačine ravnoteže - Navier-ove jednačine za odredjivanje šest nepoznatih komponentnih napona,pa je problem odredjivanja komponentnih napona moguć uz korišćenje Cauchy-jevih graničnih uslova. Kao dopunske uslove koristićemo vezu izmedju napona i deformacija o čemu će biti reči u sledećem poglavlju.

Da rezimiramo,Navier-ove jednačine ravnoteže daju vezu izmedju unutrašnjih sila izraženih pomoću napona i spoljašnjih zapreminskih sila,dok Cauchy-jevi granični uslovi daju vezu izmedju unutrašnjih sila u tačkama na konturi tela i spoljašnjih opterećenja u obliku površinskih sila.

### I.7. OSNOVNO PRAVILO ANALIZE NAPONA

Kroz tačku  $N$  napregnutog tela postavimo dve ravni  $R_i$  sa jediničnim vektorima normale  $\vec{n}_1$  i  $\vec{n}_2$  kao što je na slici br.8 prikazano. Neka je  $\vec{p}_{n_1}$  totalni napon u tački  $N$  napregnutog tela za ravan sa normalom  $\vec{n}_1$ ,dok je  $\vec{p}_{n_2}$  totalni napon u istoj tački  $N$  ali za ravan sa normalom  $\vec{n}_2$ . Neka su u tački  $N$  poznati komponentni naponi za koordinatne ravni odredjeni matricom tenszora napona  $\mathcal{N}$ ,onda za totalne napone  $\vec{p}_{n_1}$  i  $\vec{p}_{n_2}$  možemo u matričnom obliku da pišemo:

$$\{p_{n_1}\} = \mathcal{N} \{n_1\}, \quad \{p_{n_2}\} = \mathcal{N} \{n_2\}.$$

Prvu jednačinu pomnožimo skalarno sa  $(n_2)$ , a drugu sa  $(n_1)$  tako da dobijamo:

$$(n_2) \{p_{n_1}\} = (n_2) \mathcal{N} \{n_1\} = (n_1) \mathcal{N}' \{n_2\} = (n_1) \mathcal{N} \{n_2\},$$

$$(n_1) \{p_{n_2}\} = (n_1) \mathcal{N} \{n_2\}.$$

Kako je matrica pridružena tenszoru napona simetrična to su matrični proizvodi na desnoj strani prethodnih izraza jednaki pa sledi:

$$(n_2) \{p_{n_1}\} = (n_1) \{p_{n_2}\} \tag{55}$$

Ovom matričnom jednačinom je iskazan osnovni stav analize napona ili osnovno pravilo analize napona:

$$\text{pr}_{\vec{n}_2} \vec{p}_{n_1} = \text{pr}_{\vec{n}_1} \vec{p}_{n_2} \quad \text{ili}$$

U bilo kojoj tački napregnutog tela projekcija totalnog totalnog napona  $\vec{P}_{n_1}$  napregnutog tela za ravan sa normalom  $\vec{n}_1$ , na pravac odredjen ortom  $\vec{n}_2$  jednaka je po veličini i znaku projekciji totalnog napona  $\vec{P}_{n_2}$  za ravan sa normalom  $\vec{n}_2$  na pravac odredjen ortom  $\vec{n}_1$ .

Ako posmatramo specijalan slučaj kada su te dve ravni ortogonalne, tj. kada je  $\{n_1\} \{n_2\} = 0$  i kako totalni napon  $\vec{P}_{n_1}$  u tački N za ravan sa normalom  $\vec{n}_1$ , možemo da razložimo na komponentne, normalni i tangencijalni to je:

$$\{P_{n_1}\} = \delta_{n_1} \{n_1\} + \{\tilde{\epsilon}_{n_1}\}; \quad (n_2) \{P_{n_1}\} = (n_2) \{\tilde{\epsilon}_{n_1}\} = \tilde{\epsilon}_{12},$$

stočno znači da je njegova projekcija na pravac normale  $\{n_2\}$  jednaka komponentnom tangencijalnom naponu  $\tilde{\epsilon}_{12}$  u pravcu te normale. Na isti način dolazimo do sledećeg:

$$\{P_{n_2}\} = \delta_{n_2} \{n_2\} + \{\tilde{\epsilon}_{n_2}\}; \quad (n_1) \{P_{n_2}\} = (n_1) \{\tilde{\epsilon}_{n_2}\} = \tilde{\epsilon}_{21},$$

da je projekcija totalnog napona  $\vec{P}_{n_2}$  na pravac normale  $\vec{n}_1$  jednaka komponentnom tangencijalnom naponu  $\tilde{\epsilon}_{21}$ . Kako su te dve projekcije prema osnovnom pravilu analize napona jednake dolazimo do zaključka da je  $\tilde{\epsilon}_{12} = \tilde{\epsilon}_{21}$ , što znači da smo iz osnovnog pravila analize napona izveli kao specijalni slučaj pravilo o konjugovanosti tangencijalnih napona. Da se potsetimo da pravilo o konjugovanosti tangencijalnih napona kaže da su u dvema upravnim ravnima oni komponentni tangencijalni naponi koji su upravljeni na presečnu pravu ravni jednaki po veličini, a usmereni ka presečnoj pravoj ili usmereni od nje.

### I.8. TRANSFORMACIJA MATRICE Tenzora NAPONA PRI ROTACIJI KOORDINATNOG SISTEMA

Neka je  $\mathcal{N}$  matrica tenszora napona u Descartes-ovom pravouglog koordinatnom sistemu koordinatnih osa O<sub>x</sub>, O<sub>y</sub> i O<sub>z</sub> oblika:

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \delta_x & \tilde{\epsilon}_{yx} & \tilde{\epsilon}_{zx} \\ \tilde{\epsilon}_{xy} & \delta_y & \tilde{\epsilon}_{zy} \\ \tilde{\epsilon}_{xz} & \tilde{\epsilon}_{yz} & \delta_z \end{pmatrix} \quad (56)$$

Normalni napon kao projekcija totalnog napona  $\vec{P}_n$  u nekoj tački N za ravan sa normalom  $\vec{n}$  na pravac te normale je na osnovu izraza (46):

44.

$$\beta_n = (n) \{ p_n \} = (n) \bar{N} \{ n \}, \quad (57)$$

dok je tangencijalni napon  $\tilde{\tau}_n$  kao komponenta totalnog napona pravcu odredjenim ortom  $\vec{n}$  jednak na osnovu (47):

$$\tilde{\tau}_{nt} = (t) \{ p_n \} = (t) \bar{N} \{ n \}. \quad (58)$$

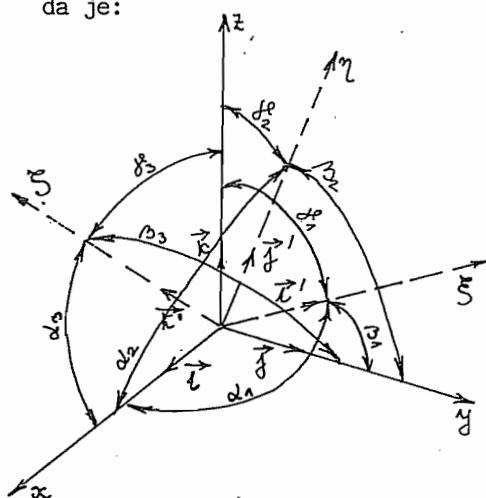
Zaokretanjem oko koordinatnog početka, koordinatni sistem Oxyz prelazi u koordinatni sistem O $\xi\eta\zeta$  sa ortovima orijentacije osa  $\vec{\xi}$ ,  $\vec{\eta}$  i  $\vec{\zeta}$  koji su odredjeni kosinusima smerova kao:

$$\{i'\} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \beta_1 \\ \cos \delta_1 \end{Bmatrix} (=) \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \delta_1 \end{Bmatrix}, \quad \{j'\} = \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}, \quad \{k'\} = \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \delta_3 \end{Bmatrix}. \quad (59)$$

Označimo sa  $\bar{N}$  matricu tenszora napona u istoj tački napregnutog tela ali u novom koordinatnom sistemu O $\xi\eta\zeta$  i njegove koordinate napišemo u matričnom obliku kao:

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{\xi\xi} & \tilde{\sigma}_{\eta\xi} & \tilde{\sigma}_{\zeta\xi} \\ \tilde{\sigma}_{\xi\eta} & \tilde{\sigma}_{\eta\eta} & \tilde{\sigma}_{\zeta\eta} \\ \tilde{\sigma}_{\xi\zeta} & \tilde{\sigma}_{\eta\zeta} & \tilde{\sigma}_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \quad (60)$$

Koristeći izraze (57) i (58) možemo da odredimo komponente tenszora napona  $\bar{N}$  u novom koordinatnom sistemu, jer su elementi na glavnoj dijagonali matrice tenszora napona (60) normalni komponentni naponi, a elementi van glavne dijagonale komponentni tangencijalni naponi pa možemo da pišemo da je:



Slika br.9.

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\xi\xi} &= (i') \bar{N} \{ i' \}, & \tilde{\sigma}_{\eta\xi} &= (\alpha_1 \ \beta_1 \ \delta_1) \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{xx} & \tilde{\sigma}_{xy} & \tilde{\sigma}_{xz} \\ \tilde{\sigma}_{yx} & \tilde{\sigma}_{yy} & \tilde{\sigma}_{yz} \\ \tilde{\sigma}_{zx} & \tilde{\sigma}_{zy} & \tilde{\sigma}_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \delta_1 \end{Bmatrix}, \\ \tilde{\sigma}_{\xi\eta} &= (i') \bar{N} \{ j' \}, & \tilde{\sigma}_{\eta\xi} &= (j') \bar{N} \{ i' \}, \\ \tilde{\sigma}_{\xi\zeta} &= (i') \bar{N} \{ k' \}, & \tilde{\sigma}_{\zeta\xi} &= (j') \bar{N} \{ i' \}, \\ \tilde{\sigma}_{\eta\zeta} &= (k') \bar{N} \{ i' \}, & \tilde{\sigma}_{\zeta\eta} &= (k') \bar{N} \{ i' \}, \\ \tilde{\sigma}_{\xi\zeta} &= (i') \bar{N} \{ j' \}, & \tilde{\sigma}_{\zeta\xi} &= (i') \bar{N} \{ j' \}, \\ \tilde{\sigma}_{\eta\zeta} &= (k') \bar{N} \{ j' \}, & \tilde{\sigma}_{\zeta\eta} &= (k') \bar{N} \{ j' \}, \\ \tilde{\sigma}_{\xi\xi} &= (i') \bar{N} \{ k' \}, & \tilde{\sigma}_{\eta\eta} &= (j') \bar{N} \{ k' \}, \\ \tilde{\sigma}_{\zeta\zeta} &= (j') \bar{N} \{ k' \}. & \tilde{\sigma}_{\xi\zeta} &= (j') \bar{N} \{ k' \}. \end{aligned} \quad (61)$$

Ako uvedemo matricu  $\mathbb{A}$  čije su kolone matrice kolone kosinusa smerova ortova koordinatnih osa  $i'$ ,  $j'$  i  $k'$  i njoj transponovanu matricu  $\mathbb{A}'$ , čije su vrste matrice vrste kosinusa smerova ortova koordinatnih osa kao:

$$\mathbb{A} = (\{i'\} \{j'\} \{k'\}) = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{pmatrix}, \quad (62)$$

onda matricu tenzora napona  $\overline{\mathcal{N}}$  u novom koordinatnom sistemu Oxyz možemo da napišemo u obliku:

$$\overline{\mathcal{N}} = \begin{Bmatrix} (i') \\ (j') \\ (k') \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \delta_x & \tilde{\delta}_{yx} & \tilde{\delta}_{zx} \\ \tilde{\delta}_{xy} & \delta_y & \tilde{\delta}_{zy} \\ \tilde{\delta}_{xz} & \tilde{\delta}_{yz} & \delta_z \end{pmatrix} (\{i'\} \{j'\} \{k'\}). \quad (63)$$

Poslednja jednačina predstavlja jednačinu transformacije matrice tenzora napona pri rotaciji koordinanog sistema. Matrica  $\mathbb{A}$  u literaturi je poznata pod nazivom matrica transformacije. U razvijenom obliku matrica tenzora napona u novom koordinatnom sistemu dobijenom rotacijom koordinatnog sistema Oxyz u kome je poznata matrica tenzora napona u posmatranoj tački napregnutog tela prema formuli transformacije

$$\overline{\mathcal{N}} = \mathbb{A}' \mathcal{N} \mathbb{A}, \quad (64*)$$

može da se napiše kao:

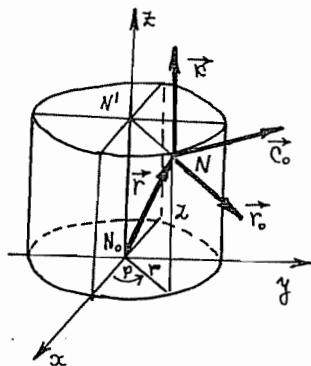
$$\begin{pmatrix} \delta_5 & \tilde{\delta}_{55} & \tilde{\delta}_{55} \\ \tilde{\delta}_{55} & \delta_7 & \tilde{\delta}_{57} \\ \tilde{\delta}_{55} & \tilde{\delta}_{57} & \delta_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & \beta_1 & \delta_1 \\ d_2 & \beta_2 & \delta_2 \\ d_3 & \beta_3 & \delta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_x & \tilde{\delta}_{yx} & \tilde{\delta}_{zx} \\ \tilde{\delta}_{xy} & \delta_y & \tilde{\delta}_{zy} \\ \tilde{\delta}_{xz} & \tilde{\delta}_{yz} & \delta_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{pmatrix} \quad (64)$$

Kako je matrica tenzora napona  $\mathcal{N}$  u bilo kojoj tački napregnutog tela izražene u sistemu koordinata Oxyz simetrična kvadratna to će i matrica tenzora napona  $\overline{\mathcal{N}}$  u istoj tački napregnutog tela za novi koordinatni sistem biti simetrična kvadratna.

### I.9. JEDNAČINE RAVNOTEŽE I KRETANJA IZRAŽENE POMOĆU POLARNO-CILINDRIČNIH KOORDINATA

Često je veoma korisno koristiti jednačine kretanja i ravnoteže u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu koordinata  $r$ ,  $\varphi$  i  $z$ , kao što je na slici br.10 prikazano.

Lamè-ovi koeficijenti za polarno-cilindrički koordinatni sistem su:  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = r$  i  $A_3 = 1$ , dok su Kristofel-ovi simboli druge vrste:



Slika br.10

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r$$

Fizičke koordinate zapremske sile  $\vec{F}_v^i$  i ubrzanja  $\vec{w}^i$  u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu respektivno označimo sa  $F_r^i$ ,  $F_\varphi^i$ ,  $F_z^i$ ,  $w_r^i$ ,  $w_\varphi^i$  i  $w_z^i$ . Veza izmedju kontravarijantnih koordinata vektora i njegovih fizičkih koordinata data je sa:

$$w^i = \frac{w_i^k}{A_i}$$

Zato su kontravarijantne koordinate zapremske sile  $\vec{F}_v^i$  i kontravarijantne koordinate vektora ubrzanja  $\vec{w}^i$  date sa:

$$\vec{F}_v^i \quad F^1 = F_r^i, \quad F^2 = \frac{1}{r} F_\varphi^i, \quad F^3 = F_z^i$$

$$\vec{w}^i \quad w^1 = w_r^i = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w^2 = \frac{1}{r} w_\varphi^i = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}), \quad w^3 = w_z^i = \ddot{z}. \quad (62)$$

Fizičke koordinate tensora napona u polarno-cilindričnom koordinatnom sistemu neka su  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{rz}$ ,  $\sigma_{r\varphi}$ ,  $\sigma_{\varphi r}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{zz}$  i  $\sigma_{z\varphi}$ . Kako je veza izmedju fizičkih i kontravarijantnih koordinata tensora drugog reda u ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu data sa:

$$\delta^{ij} = \frac{1}{A_i A_j} \delta_{(ij)}$$

to kontravarijantne koordinate tensora napona možemo da izrazimo pomoću njegovih fizičkih kao:

$$\sigma^{11} = \frac{\sigma_r}{A_1^2} = \sigma_r, \quad \sigma^{22} = \frac{\sigma_\varphi}{A_2^2} = \frac{\sigma_\varphi}{r^2}, \quad \sigma^{33} = \frac{\sigma_z}{A_3^2} = \sigma_z, \quad (63)$$

$$\tilde{\beta}^{12} = \frac{\tilde{\beta}_{rp}}{A_1 A_2} = \frac{1}{r} \tilde{\beta}_{rp}, \quad \tilde{\beta}^{13} = \frac{\tilde{\beta}_{rz}}{A_1 A_2} = \tilde{\beta}_{rz}, \quad \tilde{\beta}^{23} = \frac{\tilde{\beta}_{\varphi z}}{A_2 A_3} = \frac{1}{r} \tilde{\beta}_{\varphi z}. \quad (63)$$

Imajući u vidu jednačine kretanja (25) u kontravarijantnom obliku to je potrebno da sračunamo kovarijantni izvod  $\tilde{\beta}_{,j}^{ij}$  kontravarijantnog tenzora  $\tilde{\beta}^{ij}$  koji se može napisati u obliku:

$$\tilde{\beta}_{,j}^{ij} = \frac{\partial \tilde{\beta}^{ij}}{\partial x^j} + \Gamma_{jm}^j \tilde{\beta}^{mi} + \Gamma_{mj}^i \tilde{\beta}^{mj}, \quad (64)$$

gde je  $i=1,2,3$ . Za  $i=1$  u razvijenom obliku kovarijantni izvod kontravarijantnog tenzora  $\tilde{\beta}_{,j}^{ij}$  glasi:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{,j}^{1j} &= \frac{\partial \tilde{\beta}^{11}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{\beta}^{12}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{\beta}^{13}}{\partial z} + \Gamma_{jm}^j \tilde{\beta}^{m1} + \Gamma_{mj}^1 \tilde{\beta}^{mj} = \frac{\partial \tilde{\beta}^{11}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{\beta}^{12}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{\beta}^{13}}{\partial z} + \\ &+ (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3) \tilde{\beta}^{11} + (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{32}^3) \tilde{\beta}^{21} + (\Gamma_{13}^1 + \Gamma_{23}^2 + \Gamma_{33}^3) \tilde{\beta}^{31} + (64*) \\ &+ \Gamma_{11}^1 \tilde{\beta}^{11} + \Gamma_{21}^1 \tilde{\beta}^{21} + \Gamma_{31}^1 \tilde{\beta}^{31} + \Gamma_{12}^1 \tilde{\beta}^{12} + \Gamma_{22}^1 \tilde{\beta}^{22} + \Gamma_{32}^1 \tilde{\beta}^{32} + \Gamma_{13}^1 \tilde{\beta}^{13} + \Gamma_{23}^1 \tilde{\beta}^{23} + \Gamma_{33}^1 \tilde{\beta}^{33}. \end{aligned}$$

Ako sada izvršimo zamenu kontravarijantnih koordinata tenzora napona i uzmešo u obzir vrednosti Kristofel-ovih simbola druge vrste u konačnom obliku iz prethodnog izraza dobijamo da je:

$$\tilde{\beta}_{,j}^{1j} = \frac{\partial \tilde{\beta}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\beta}_{rp}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{\beta}_{rz}}{\partial z} + \frac{\tilde{\beta}_r - \tilde{\beta}_\varphi}{r}. \quad (65)$$

Na sličan način dobijamo i ostala dva kovarijantna izvoda kontravarijantnih koordinata tenzora napona,  $\tilde{\beta}_{,j}^{2j}$  i  $\tilde{\beta}_{,j}^{3j}$ , u obliku:

$$\tilde{\beta}_{,j}^{2j} = \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\beta}_{rp}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial z} + \frac{2}{r^2} \tilde{\beta}_{rz}, \quad (66)$$

$$\tilde{\beta}_{,j}^{3j} = \frac{\partial \tilde{\beta}_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\beta}_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{\beta}_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tilde{\beta}_{rz}. \quad (67)$$

Unoseći ove izračunate kovarijantne izvode kontravarijantnih koordinata tenzora napona u jednačine kretanja (25), a i odgovarajuće koordinate zapreminske sile i vektora ubrzanja za polarno-cilindrički koordinatni sistem dobijamo jednačine kretanja u obliku:

$$\frac{\partial \tilde{\beta}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\beta}_{rp}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{\beta}_{rz}}{\partial z} + \frac{\tilde{\beta}_r - \tilde{\beta}_\varphi}{r} + F_r^1 = g w_r (=) g (\ddot{r}_s - r_s \dot{\varphi}^2) \quad (68)$$

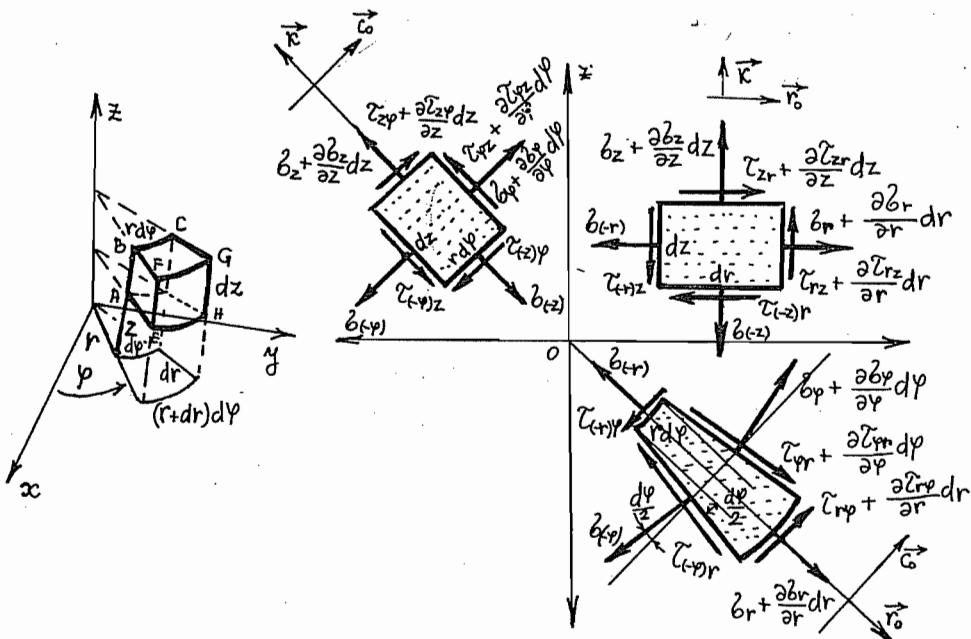
48.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\tau}_{rp}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\tau}_{\varphi p}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{pz}}{\partial z} + \frac{2 \tilde{\tau}_{rp}}{r} + F_p^1 &= \sigma w_p (=) \frac{1}{r_s} \frac{d}{dt} (r_s^2 \dot{\psi}_s), \\ \frac{\partial \tilde{\tau}_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\tau}_{pz}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{zr}}{\partial z} + \frac{\tilde{\tau}_{rz}}{r} + F_z^1 &= \sigma w_z (=) \sigma \ddot{z}_s. \end{aligned} \quad (68)$$

Za slučaj ravnoteže te jednačine dobijaju oblik:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\tau}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\tau}_{rp}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{zr}}{\partial z} + \frac{\tilde{\tau}_r - \tilde{\tau}_{\varphi}}{r} + F_r^1 &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{\tau}_{rp}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\tau}_{\varphi p}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{pz}}{\partial z} + \frac{2 \tilde{\tau}_{rp}}{r} + F_p^1 &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{\tau}_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\tau}_{pz}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{zr}}{\partial z} + \frac{\tilde{\tau}_{rz}}{r} + F_z^1 &= 0 \end{aligned} \quad (69)$$

i predstavljaju Navier-ove jednačine ravnoteže napregnutog tela izražene u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu. Do ovih jednačina ravnoteže napregnutog tela izvedenih u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu možemo doći postavljanjem uslova ravnoteže iz napregnutog tela izdvojenog elementarnog krivolinijskog "paralelopipeda" osnovnih ivica  $dr$ ,  $r d\varphi$  i  $dz$  kao što je to na slici br. 11 prikazano.



Slika br. 11

Posmatraćemo u tački A napregnutog tela totalne napone za tri koordinatne

Površi sa ortovima normala na tangentne ravni u toj tački,  $-\vec{r}_o$ ,  $-\vec{\alpha}_o$  i  $\vec{\kappa}$ . Na površi ABCD sa spoljašnjom normalom  $-\vec{r}_o$  javlja se totalni napon  $\vec{P}_{(r)}$ , čije su komponente: normalni napon  $\sigma_r$  i tangencijalni naponi,  $\tau_{ry}$  u pravcu tangente na koordinatnu liniju  $\varphi$ , i  $\tau_{rz}$  u pravcu koordinatne linije  $z$ . Na površi EFGH koja je koncentrična sa površi ABCD i ima ort normale  $\vec{r}_o$ , a nalazi se na rastojanju  $dr$  od nje, javlja se totalni napon  $\vec{P} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial r} dr$  sa komponentama: normalnim naponom  $\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr$  u pravcu normale na tu površ, i tangencijalnim naponima  $\tau_{ry} + \frac{\partial \tau_{ry}}{\partial r} dr$  i  $\tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} dr$  u prvcima tangenti na koordinatne linije  $\varphi$  i  $z$  respektivno. Površina stranice ABCD jednaka je  $dA_r = rd\vartheta dz$ , pa je površinska sila koja se prenosi s jednog dela napregnutog tela na drugo preko te stranice jednaka  $-\vec{P}_r dA_r$ , odnosno komponente te sile su:

$$-\sigma_r dA_r = -\sigma_r r dz d\varphi \quad \text{u radijalnom pravcu}$$

$$-\tau_{ry} dA_r = \tau_{ry} r dz d\varphi \quad \text{u cirkularnom pravcu}$$

$$-\tau_{rz} dA_r = \tau_{rz} r dz d\varphi \quad \text{u aksijalnom pravcu}$$

Površinske sile koje se prenose s jednog dela napregnutog tela na drugo preko stranice EFGH su:

$$(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr) r dz d\varphi \quad \text{u radijalnom pravcu}$$

$$(\tau_{ry} + \frac{\partial \tau_{ry}}{\partial r} dr) r dz d\varphi \quad \text{u cirkularnom pravcu}$$

$$(\tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} dr) r dz d\varphi \quad \text{u aksijalnom pravcu}$$

To su komponente površinske sile  $(\vec{P}_r + \frac{\partial \vec{P}}{\partial r} dr) dA_r$ . Preko stranice BFGC prenosi se s jednog dela napregnutog tela na drugi deo površinska sila  $(\vec{P}_z + \frac{\partial \vec{P}_z}{\partial z} dz) dA_z$  dok se putem stranice AFHD prenosi površinska sila  $\vec{P}_{(z)} dA_z$ . Komponente tih sila u prvcima tangenti na koordinatne linije u tački A napregnutog tela su:

$$-\tau_{zr} r dr d\varphi \text{ i } (\tau_{zr} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} dz) r dr d\varphi \quad \text{u radijalnom pravcu}$$

$$-\tau_{zy} r dr d\varphi \text{ i } (\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz) r dr d\varphi \quad \text{u cirkularnom pravcu}$$

$$-\sigma_z r dr d\varphi \text{ i } (\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz) r dr d\varphi \quad \text{u aksijalnom pravcu}$$

50.

Preko stranice ABFE prenosi se površinska sila  $\vec{P}_{(\varphi)} dA_\varphi$  sa jednog dela napregnutog tela na drugi, dok se preko stranice CDGH prenosi površinska sila  $(\vec{P}_\varphi + \frac{\partial \vec{P}_r}{\partial \varphi} d\varphi) dA_\varphi$ . Prilikom odredjivanja projekcija totalnih napona u radijalnom i cirkularnom pravcu uzećemo da je  $\cos \frac{d\varphi}{2} \approx 1$  i da je  $\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$  jer je ugao  $\varphi$  mali. Sada komponente površinskih sila  $\vec{P}_{(\varphi)} dA_\varphi$  i  $(\vec{P}_\varphi + \frac{\partial \vec{P}_r}{\partial \varphi} d\varphi) dA_\varphi$  u pravcima ortova polarno-cilindričnog koordinatnog sistema možemo da napišemo u obliku:

$$-\tilde{\zeta}_{pr} dr dz - \beta_\varphi \frac{d\varphi}{2} dr dz \quad \text{u radijalnom pravcu}$$

$$-\tilde{\zeta}_{\varphi z} dr dz \quad \text{u aksijalnom pravcu}$$

$$\tilde{\zeta}_{pr} \frac{d\varphi}{2} dr dz - \beta_\varphi dr dz \quad \text{u cirkularnom pravcu}$$

$$\left[ (\tilde{\zeta}_{pr} + \frac{\partial \tilde{\zeta}_{pr}}{\partial \varphi} d\varphi) dr dz + (\beta_\varphi + \frac{\partial \beta_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi) \frac{d\varphi}{2} dz dz \right] \quad \text{u radijalnom pravcu}$$

$$\left( \tilde{\zeta}_{\varphi z} + \frac{\partial \tilde{\zeta}_{\varphi z}}{\partial \varphi} d\varphi \right) dr dz \quad \text{u aksijalnom pravcu}$$

$$\left[ (\tilde{\zeta}_{pr} + \frac{\partial \tilde{\zeta}_{pr}}{\partial \varphi} d\varphi) dr dz + (\beta_\varphi + \frac{\partial \beta_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi) dr dz \right] \quad \text{u cirkularnom pravcu}$$

Ako je telo u ravnoteži pod dejstvom spoljašnjih sila, tada je i svaki zamišljeno izdvojeni njegov deo u uslovima takvog naprezanja u ravnoteži pa sledi da je za ravnotežu potrebno da je glavni vektor sila koje dejstvuju na zamišljeno izdvojeni deo tela jednak nuli. Iz tog uslova sledi da je zbir projekcija sila pojedinačno na radijalni, cirkularni i aksijalni pravac jednak nuli. Iz uslova da je zbir projekcija svih sila koje dejstvuju na elementarni krivolinijski "paralelopiped" jednak nuli dobijamo sledeću jednačinu:

$$\sum F_r = 0$$

$$\begin{aligned} & -\beta_r r d\varphi dz + \left( \beta_r + \frac{\partial \beta_r}{\partial r} dr \right) (r+dr) d\varphi dz - \beta_\varphi dr dz \frac{d\varphi}{2} - \left( \beta_\varphi + \frac{\partial \beta_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \right) dz dr \frac{d\varphi}{2} - \\ & - \tilde{\zeta}_{pr} dr dz + \left( \tilde{\zeta}_{pr} + \frac{\partial \tilde{\zeta}_{pr}}{\partial \varphi} d\varphi \right) dr dz - \tilde{\zeta}_{\varphi z} r dr d\varphi + \left( \tilde{\zeta}_{\varphi z} + \frac{\partial \tilde{\zeta}_{\varphi z}}{\partial z} dz \right) r d\varphi dr + F_r' r dr d\varphi dz = 0 \end{aligned} \quad (70)$$

Što posle sredjivanja daje:

$$\frac{\partial \beta_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\zeta}_{pr}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{\zeta}_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{\beta_r - \beta_\varphi}{r} + F_r' = 0 \quad (70^*)$$

Iz uslova ravnoteže svih sila koje dejstvuju na elementarni krivolinijski "paralelepiped" izdvojen iz napregnutog tela koji pišemo za cirkularni pra-

pravac dobijamo sledeću jednačinu:  $\sum F_c = 0$

$$\begin{aligned}
 & -\tilde{\zeta}_p dr dz + (\tilde{\zeta}_p + \frac{\partial \tilde{\delta}_p}{\partial \psi} d\psi) dr dz - \tilde{\zeta}_{rp} r d\psi dz + (\tilde{\zeta}_{rp} + \frac{\partial \tilde{\zeta}_{rp}}{\partial r} dr)(r+dr) d\psi dz - \\
 & - \tilde{\zeta}_{zp} r d\psi dr + (\tilde{\zeta}_{zp} + \frac{\partial \tilde{\zeta}_{zp}}{\partial z} dz) r d\psi dz + (\tilde{\zeta}_{rp} + \frac{\partial \tilde{\zeta}_{rp}}{\partial \psi} d\psi) dr dz \frac{d\psi}{2} + \tilde{\zeta}_{pr} r dr dz \frac{d\psi}{2} + \\
 & \text{koja posle sredjivanja daje: } + F_c' r d\psi dr dz = 0
 \end{aligned} \tag{71}$$

$$\frac{\partial \tilde{\zeta}_{rp}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\delta}_p}{\partial \psi} + \frac{\partial \tilde{\zeta}_{zp}}{\partial z} + \frac{2 \tilde{\zeta}_{rp}}{r} + F_c' = 0 \tag{71*}$$

Poslednji uslov pišemo za aksijalni pravac pa dobijamo:

$$\begin{aligned}
 & -\tilde{\zeta}_{rz} r dz d\psi + (\tilde{\zeta}_{rz} + \frac{\partial \tilde{\zeta}_{rz}}{\partial r} dr)(r+dr) dz d\psi - \tilde{\zeta}_z r dr dz + (\tilde{\zeta}_z + \frac{\partial \tilde{\zeta}_z}{\partial z} dz) r dr d\psi + \\
 & + (\tilde{\zeta}_{pz} + \frac{\partial \tilde{\zeta}_{pz}}{\partial \psi} d\psi) dz dr - \tilde{\zeta}_{pz} dr dz + F_z' r dr d\psi dz = 0
 \end{aligned} \tag{72}$$

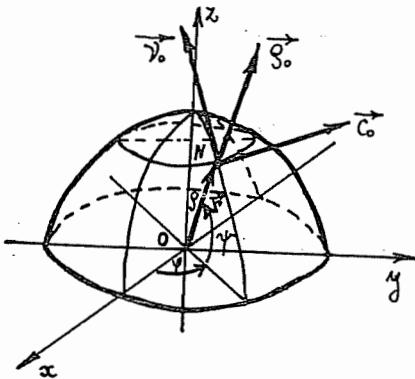
odakle sledi:

$$\frac{\partial \tilde{\zeta}_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\zeta}_{zp}}{\partial \psi} + \frac{\partial \tilde{\zeta}_z}{\partial z} + \frac{\tilde{\zeta}_{rz}}{r} + F_z' = 0 \tag{72*}$$

Ovako dobijene jednačine ravnoteže (70\*), (71\*) i (72\*) identične su sa sistemom jednačine (69) koje smo izveli iz tenzorske.

### I.10. JEDNAČINE RAVNOTEŽE I KRETANJA IZRAŽENE U SFERNOM KOORDINATNOM SISTEMU

Kao koordinate sfernog koordinatnog sistema usvojimo  $\xi$ ,  $\psi$  i  $\gamma$  kao što je to na slici br. 12 naznačeno. Lamè-ovi koeficijenti za sferni koordinatni sistem su:  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = \xi \cos \gamma$  i  $A_3 = \xi$ , dok su Kristofel-ovi simboli druge vrste:



Slika br.12

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{22}^1 &= -\xi \cos^2 \gamma, \\
 \Gamma_{33}^1 &= -\xi, \\
 \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{\xi}, \\
 \Gamma_{23}^2 &= \Gamma_{32}^2 = -\operatorname{tg} \gamma, \\
 \Gamma_{22}^3 &= \frac{1}{2} \sin 2\gamma.
 \end{aligned}$$

52.

Fizičke koordinate zapreminske sile  $\vec{F}_v'$  u sfernem koordinatnom sistemu su  $F_g'$ ,  $F_\varphi'$  i  $F_\gamma'$ , dok su fizičke koordinate vektora ubrzanja:

$$w_g = \ddot{s} - s(\dot{\varphi}^2 \cos^2 \gamma + \dot{\gamma}^2),$$

$$w_\varphi = \frac{1}{s \cos \gamma} \frac{d}{dt} (s^2 \dot{\varphi} \cos^2 \gamma),$$

$$w_\gamma = \frac{1}{s} \frac{d}{dt} (s^2 \dot{\gamma}) + \frac{1}{2} s \dot{\varphi}^2 \sin 2\gamma.$$

Kontravarijantne koordinate vektora zapreminske sile su sada:

$$F^1 = F_g', \quad F^2 = \frac{1}{s \cos \gamma} F_\varphi', \quad F^3 = \frac{1}{s} F_\gamma',$$

dok su kontravarijantne koordinate vektora ubrzanja:

$$w^1 (=) \ddot{s}_s - s_s (\dot{\varphi}_s^2 \cos^2 \gamma_s + \dot{\gamma}_s^2),$$

$$w^2 (=) \frac{1}{s_s^2 \cos^2 \gamma_s} \frac{d}{dt} (s_s^2 \dot{\varphi}_s \cos^2 \gamma_s),$$

$$w^3 (=) \frac{1}{s_s^2} \frac{d}{dt} (s_s^2 \dot{\gamma}_s) + \frac{1}{2} \dot{\varphi}_s^2 \sin 2\gamma_s.$$

Neka su fizičke koordinate tenzora napona u sfernem koordinatnom sistemu  $\beta_g$ ,  $\beta_\varphi$ ,  $\beta_\gamma$ ,  $\tilde{\tau}_{gp}$ ,  $\tilde{\tau}_{p\gamma}$  i  $\tilde{\tau}_{\gamma p}$ . Kontravarijantne koordinate tenzora napona izražene pomoću fizičkih koordinata tenzora napona u sfernem koordinatnom sistemu su:

$$\begin{aligned} \beta^{11} &= \beta_g, & \beta^{22} &= \frac{\beta_\varphi}{A_2^2} = \frac{1}{s^2 \cos^2 \gamma} \beta_\varphi, & \beta^{33} &= \frac{\beta_\gamma}{A_3^2} = \frac{1}{s^2} \beta_\gamma, \\ \beta^{12} &= \frac{\tilde{\tau}_{gp}}{A_1 A_2} = \frac{\tilde{\tau}_{p\gamma}}{s \cos \gamma}, & \beta^{13} &= \frac{\tilde{\tau}_{gp}}{A_1 A_3} = \frac{1}{s} \tilde{\tau}_{p\gamma}, & \beta^{23} &= \frac{1}{s^2 \cos \gamma} \tilde{\tau}_{\gamma p}. \end{aligned} \quad (73)$$

Koristeći izraz (64) odnosno (64\*) za razvijeni oblik kovarijantnog izvoda kontravarijantnog tenzora  $\delta_{ij}^{ij}$  i imajući u vidu vrednosti Cristoffel-ovih simbola druge vrste i vezu kontravarijantnih koordinata tenzora napona sa njegovim fizičkim koordinatama potrebne kovarijantne izvode kontravarijantnih koordinata tenzora napona dobijamo izražene pomoću njegovih fizičkih koordinata u sfernem koordinatnom sistemu:

$$\delta_{ij}^{ij} = \frac{\partial \tilde{\beta}_g}{\partial g} + \frac{1}{s \cos \gamma} \frac{\partial \tilde{\tau}_{gp}}{\partial \varphi} + \frac{1}{s} \frac{\partial \tilde{\tau}_{gp}}{\partial \gamma} + \frac{2 \tilde{\beta}_g - \tilde{\beta}_\varphi - \tilde{\beta}_\gamma - \tilde{\tau}_{p\gamma} t_g \gamma}{s},$$

$$\delta_{jj}^{2j} = \frac{1}{s \cos \gamma} \left[ \frac{\partial \tilde{\tau}_{gp}}{\partial g} + \frac{1}{s \cos \gamma} \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{s} \frac{\partial \tilde{\tau}_{gp}}{\partial \gamma} + \frac{3 \tilde{\tau}_{p\gamma} - 2 \tilde{\tau}_{\gamma p} t_g \gamma}{s} \right], \quad (74)$$

$$\delta_{jj}^{3j} = \frac{1}{s} \left[ \frac{\partial \tilde{\tau}_{\gamma p}}{\partial g} + \frac{1}{s \cos \gamma} \frac{\partial \tilde{\tau}_{\gamma p}}{\partial \varphi} + \frac{1}{s} \frac{\partial \tilde{\beta}_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{3 \tilde{\tau}_{\gamma p} + (\tilde{\beta}_\varphi - \tilde{\beta}_\gamma) t_g \gamma}{s} \right].$$

Unošenjem izračunatih kovariantnih izvoda kontravariantnih koordinata tenzora napona (74) u jednačine kretanja (25), a i odgovarajuće koordinate zapremske sile i vektora ubrzanja za sferski koordinatni sistem dobijamo jednačine kretanja deformabilnog tela u obliku:

$$\frac{\partial \tilde{b}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{g \cos \psi} \frac{\partial \tilde{c}_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{g} \frac{\partial \tilde{c}_{\varphi\gamma}}{\partial \gamma} + \frac{2 \tilde{b}_\varphi - \tilde{b}_\varphi - \tilde{b}_\gamma - \tilde{c}_{\varphi\gamma} \operatorname{tg} \psi}{g} + F'_\varphi = \bar{s} w_\varphi^e,$$

$$\frac{\partial \tilde{c}_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{g \cos \psi} \frac{\partial \tilde{b}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{g} \frac{\partial \tilde{c}_{\varphi\gamma}}{\partial \gamma} + \frac{3 \tilde{c}_{\varphi\varphi} - 2 \tilde{c}_{\varphi\gamma} \operatorname{tg} \psi}{g} + F'_\varphi = \bar{s} w_\varphi^e, \quad (75)$$

$$\frac{\partial \tilde{c}_{\varphi\gamma}}{\partial \varphi} + \frac{1}{g \cos \psi} \frac{\partial \tilde{c}_{\varphi\gamma}}{\partial \varphi} + \frac{1}{g} \frac{\partial \tilde{b}_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{3 \tilde{c}_{\varphi\gamma} + \operatorname{tg} \psi (\tilde{b}_\varphi - \tilde{b}_\gamma)}{g} + F'_\gamma = \bar{s} w_\gamma^e.$$

Za slučaj ravnoteže deformabilnog tela izloženog dejstvu zapremskih sile dobijamo sledeći sistem jednačina :

$$\frac{\partial \tilde{b}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{g \cos \psi} \frac{\partial \tilde{c}_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{g} \frac{\partial \tilde{c}_{\varphi\gamma}}{\partial \gamma} + \frac{2 \tilde{b}_\varphi - \tilde{b}_\varphi - \tilde{b}_\gamma - \tilde{c}_{\varphi\gamma} \operatorname{tg} \psi}{g} + F'_\varphi = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{c}_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{g \cos \psi} \frac{\partial \tilde{b}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{g} \frac{\partial \tilde{c}_{\varphi\gamma}}{\partial \gamma} + \frac{3 \tilde{c}_{\varphi\varphi} - 2 \tilde{c}_{\varphi\gamma} \operatorname{tg} \psi}{g} + F'_\varphi = 0 \quad (75*)$$

$$\frac{\partial \tilde{c}_{\varphi\gamma}}{\partial \varphi} + \frac{1}{g \cos \psi} \frac{\partial \tilde{c}_{\varphi\gamma}}{\partial \varphi} + \frac{1}{g} \frac{\partial \tilde{b}_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{3 \tilde{c}_{\varphi\gamma} + \operatorname{tg} \psi (\tilde{b}_\varphi - \tilde{b}_\gamma)}{g} + F'_\gamma = 0$$

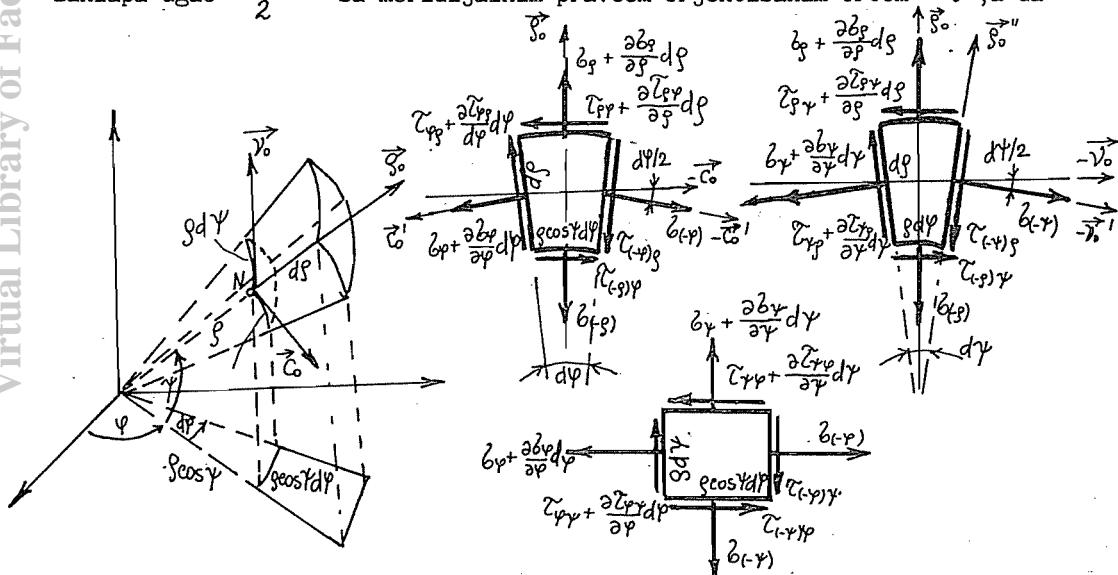
I te jednačine predstavljaju Navier-ove jednačine ravnoteže napregnutog deformabilnog tela u sferskom koordinatnom sistemu. Do ovih jednačina ravnoteže možemo doći i direktno, posmatranjem ravnoteže zamišljeno izdvojenog iz napregnutog tela dela u obliku elementarnog krivolinijskog "paralelopipeda" osnovnih ivica  $d\varphi$ ,  $g \cos \psi d\varphi$  i  $g d\gamma$ , kao što je na slici br. 13 prikazano.

U tački A napregnutog tela uočimo koordinatne površi sa ortovima normala  $\vec{s}_0$ ,  $\vec{x}_0$  i  $\vec{y}_0$  i neks u u toj tački za koordinatne površi redom totalni naponi  $\vec{P}_{(\varphi)}$ ,  $\vec{P}_{(\varphi)}$  i  $\vec{P}_{(\gamma)}$ . Površinske sile koje se prenose putem površi sa jednog dela tela na drugi tim površima zamišljeno podeljenim su:

putem površi ABCD sa normalom  $\vec{s}$  prenosi se sila  $\vec{P}_s dA_s$  ;  
 putem površi ABFE sa normalom  $\vec{c}$  prenosi se sila  $\vec{P}_{(s)} dA_p$  ;  
 putem površi BCFG sa normalom  $\vec{v}$  prenosi se sila  $\vec{P}_{(p)} dA_p$  ;  
 koje se redom mogu izraziti i kao:  $-\vec{P}_s s \cos \gamma d\varphi d\varphi d\gamma$ ,  $-\vec{P}_p s d\gamma d\varphi$  i  
 $-\vec{P}_p s \cos \gamma d\varphi d\gamma$ . Putem ostalih triju površi: EHFG sa normalom  $\vec{s}$ ,  
 DCGH sa normalom  $\vec{c}$  i ADHE sa normalom  $\vec{v}$  koje prolaze kroz tačku H napregnutog tela sa koordinatama  $s + ds$ ,  $\varphi + d\varphi$  i  $\gamma + d\gamma$   
 prenose se površinske sile redom:

$$\begin{aligned}
 & \left( \vec{P}_s + \frac{\partial \vec{P}_s}{\partial s} ds \right) (s + ds)^2 \cos \gamma d\gamma d\varphi, \\
 & \left( \vec{P}_p + \frac{\partial \vec{P}_p}{\partial p} d\varphi \right) (s + ds) d\gamma d\varphi, \\
 & \left( \vec{P}_p + \frac{\partial \vec{P}_p}{\partial p} d\gamma \right) (s + ds) \cos \gamma d\varphi d\gamma.
 \end{aligned}$$

Kako totalni naponi  $\vec{P}_s$ ,  $\vec{P}_p$  i  $\vec{P}_r$   
 imaju svoje komponentne normalne i tangencijalne napone  $b_s$ ,  $\tau_{sy}$  i  
 $\tau_{sx}$ ;  $b_p$ ,  $\tau_{yp}$  i  $\tau_{yp}$ ;  $b_r$ ,  $\tau_{yr}$  i  $\tau_{ry}$ ; to  
 se sa slike br. 13 vidi sledeće: 1º normalna komponenta  $b_y$  na površ BCGF  
 zaklapa ugao  $\frac{d\gamma}{2}$  sa meridijalnim pravcem orjentisanim ortom  $\vec{v}$ , a da



Slika br. 13

tangencijalna komponenta  $\tau_y$  sa radijalnim pravcem orjentisanim ortom  $\vec{s}$  zaklapa ugao  $\frac{d\gamma}{2}$ ; 2º Normalna komponenta napona  $b_y$  na površ ABFE zaklapa ugao  $\frac{d\gamma}{2}$  sa cirkularnim pravcem orjentisanim ortom  $\vec{c}$  dok tangencijalna komponenta  $\tau_{ys}$  sa radijalnim pravcem zaklapa ugao  $\frac{d\varphi}{2}$

Imajući u vidu da su uglovi mali to možemo staviti da je  $\sin \frac{d\gamma}{2} \approx \frac{d\gamma}{2}$  i  $\cos \frac{d\gamma}{2} \approx 1$ . Postavljajući sada jednačine ravnoteže sila za radijalni, cirkularni i meridijalni pravac dobijamo Navier-ove jednačine ravnoteže deformacionog napregnutog tela u sfernom koordinatnom sistemu u obliku:  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$ ,

$$\vec{R}_s \varrho \cos \gamma d\psi \varrho d\gamma + \vec{P}_{(\varphi)} \varrho d\gamma d\varphi + \vec{P}_{(\psi)} \varrho \cos \gamma d\varphi d\psi + (\vec{P}_s + \frac{\partial \vec{P}}{\partial \varphi} d\varphi) (\varrho + d\varphi)^2 \cos \gamma d\psi d\gamma + (\vec{P}_\varphi + \frac{\partial \vec{P}_\varphi}{\partial \psi} d\psi) (\varrho + d\varphi) d\gamma d\varphi + (\vec{P}_\psi + \frac{\partial \vec{P}_\psi}{\partial \varphi} d\varphi) (\varrho + d\varphi) \cos \gamma d\varphi d\psi + \vec{F}_\varphi + \vec{F}_\psi + \vec{F}_s = 0$$

$$\vec{P}_r = \beta_r \vec{v}_o' + \tilde{\epsilon}_{rp} \vec{s}_o'' + \tilde{\epsilon}_{rr} \vec{c}_o , \quad \vec{P}_\varphi = \beta_\varphi \vec{c}_o' + \tilde{\epsilon}_{\varphi p} \vec{s}_o' + \tilde{\epsilon}_{\varphi r} \vec{v}_o ,$$

$$(\vec{v}_o', \vec{s}_o') = -\sin \frac{d\psi}{2} \approx -\frac{d\psi}{2} ; \quad (\vec{c}_o', \vec{s}_o) = -\sin \frac{d\varphi}{2} ; \quad (\vec{s}_o', \vec{c}_o) = \sin \frac{d\varphi}{2} , \dots .$$

iz kojih sredjivanjem dobijamo sistem jednačina (76) koji smo dobili matički iz tenzorske jednačine (25).

### I.11. GLAVNI NAPONI I INVARIJANTE STANJA NAPONA

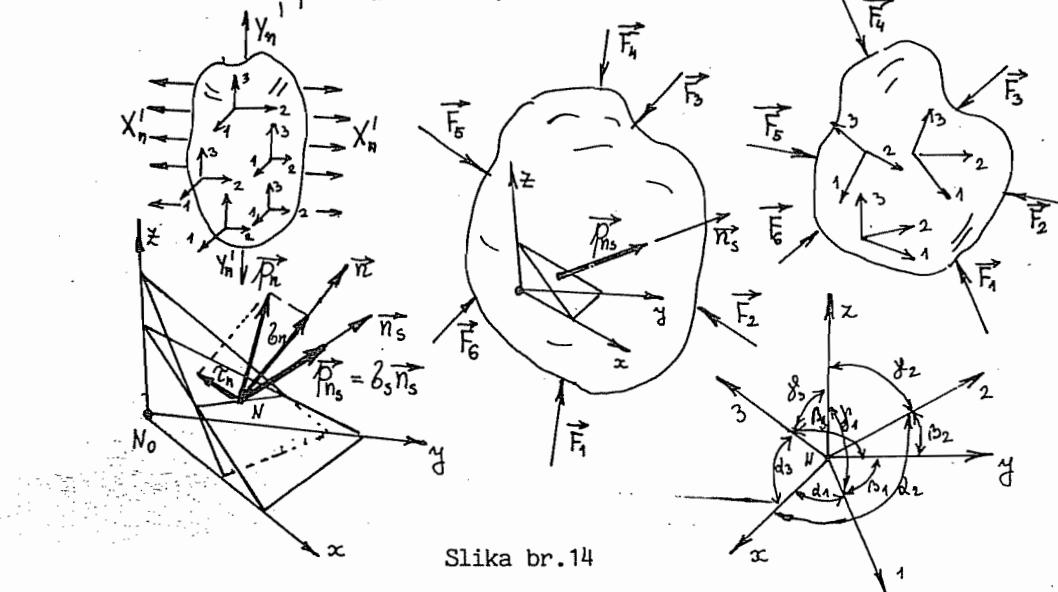
Kroz proizvoljnu tačku napregnutog tela možemo postaviti beskrajno mnogo ravnih i svakoj od njih odgovara po jedan totalni napon  $\vec{P}_n$  koji u opštem slučaju nije kolinearan sa normalom odgovarajuće ravni. U opštem slučaju ima normalnu komponentu  $\beta_n$  i tangencijalnu komponentu  $\tilde{\epsilon}_n$ , ali se može naći takva ravan za koju je totalni napon  $\vec{P}_{n_s}$  kolinearan sa normalom te ravni  $\vec{n}_s$ , u kom slučaju ima samo normalnu komponentu  $\beta_{n_s}$ , dok je tangencijalna komponenta jednaka nuli. Takva ravan  $R_s$  za koju je totalni napon  $\vec{P}_{n_s}$  kolinearan sa normalom ravni  $\vec{n}_s$  naziva se glavna ravan, a taj napon  $|\vec{P}_{n_s}| = \beta_{n_s}$  se naziva glavni napon. Pravac normale glavne ravni naziva se glavni pravac napona ili glavni pravac naprezanja. Vektor totalnog napona u tački N napregnutog tela za ravan sa normalom  $\vec{n}_s$ , koja je glavna ravan ima samo normalnu komponentu  $\beta_s$  pa je vektor totalnog napona kolinearan sa normalom i zato možemo da napišemo:

$$\vec{P}_{n_s} = \beta_s \vec{n}_s , \quad \{P_{n_s}\} = N \{n_s\} = \beta_s \{n_s\} , \quad (N - \beta_s I) \{n_s\} = 0 \quad (76)$$

gde je  $\beta_s$  intenzitet totalnog napona za glavnu ravan. Na slici br. 14 prikazano je napregnuto telo u kome smo uočili tačku N i u njoj proizvoljnu ravan  $R_n$  sa normalom  $n$  i glavnu ravan  $R_{n_s}$  za koju je totalni napon kolinearan sa normalom ravni i za koju smo napisali prethodni uslov (76). Prethodna matrična jednačina je homogena i ima rešenja različita od trivijalnih samo ako je determinanta sistema jednaka nuli odakle dobijamo sledeću jednačinu:

56.

$$f(\beta_s) = |\mathcal{N}I - \beta_s II| = \begin{vmatrix} \beta_x - \beta_s & \tilde{\beta}_{yx} & \tilde{\beta}_{zx} \\ \tilde{\beta}_{xy} & \beta_y - \beta_s & \tilde{\beta}_{zy} \\ \tilde{\beta}_{xz} & \tilde{\beta}_{yz} & \beta_z - \beta_s \end{vmatrix} = 0, \quad (77)$$



Slika br. 14

što daje algebarsku jednačinu sa nepoznatom  $\beta_s$ , i koja se naziva sekularna jednačina, pod kojim je nazivom najčešće u literaturi. Sekularna jednačina se može napisati i u obliku:

$$f(\beta_s) = -(\beta_s^3 - \mathcal{N}_1 \beta_s^2 + \mathcal{N}_2 \beta_s - \mathcal{N}_3) = 0, \quad (78)$$

u kojoj su uvedene oznake:

$$\mathcal{N}_1 = \beta_x + \beta_y + \beta_z,$$

$$\mathcal{N}_2 = \begin{vmatrix} \beta_x & \tilde{\beta}_{yx} \\ \tilde{\beta}_{xy} & \beta_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_y & \tilde{\beta}_{zy} \\ \tilde{\beta}_{yz} & \beta_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_x & \tilde{\beta}_{zx} \\ \tilde{\beta}_{xz} & \beta_z \end{vmatrix},$$

(79)

$$\mathcal{N}_3 = \det \mathcal{N}I = \begin{vmatrix} \beta_x & \tilde{\beta}_{yx} & \tilde{\beta}_{zx} \\ \tilde{\beta}_{xy} & \beta_y & \tilde{\beta}_{zy} \\ \tilde{\beta}_{xz} & \tilde{\beta}_{yz} & \beta_z \end{vmatrix}$$

za skalare matrice  $\mathcal{N}I$  pridružene tenzoru napona u svakoj tački napregnutog tela. Prvi skalar  $\mathcal{N}_1$  matrice tenzora napona jednak je zbiru elemenata sa glavne dijagonale, odnosno jednaka je zbiru komponentnih normalnih

napon za površi kroz tu tačku čije su normale paralelne koordinatnim ortovima. Drugi skalar  $M_2$  je jednak zbiru subdeterminanti naponske matrice za elemente sa glavne dijagonale. Treći skalar  $M_3$  je jednak determinanti naponske matrice  $\Delta$ . Sekularna jednačina je kubna i ima tri korena, i to sva tri realna  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  i  $\delta_3$ . Prvi je maksimalni normalni napon  $\delta_1$ , drugi je srednji normalni napon, a  $\delta_3$  je minimalni normalni napon. Sva tri napona  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  i  $\delta_3$  su glavni normalni naponi.

Ort normale ravni  $\vec{n}_s$  je određen nepoznatim cosinusima smera  $\cos \alpha_s$ ,  $\cos \beta_s$  i  $\cos \gamma_s$  medju kojima postoji sledeća veza:

$$\cos^2 \alpha_s + \cos^2 \beta_s + \cos^2 \gamma_s = 1, \quad (80)$$

jer je ort jediničnog intenziteta. Nepoznati kosinusi smerova  $\cos \alpha_s$ ,  $\cos \beta_s$  i  $\cos \gamma_s$  ( $s = 1, 2, 3$ ) orta  $\vec{n}_s$  iz sistema linearnih homogenih algebarskih jednačina prikazanih matrično jednačinom (76) se mogu dobiti samo u vidu odnosa sa kofaktorima elemenata poslednje ili bilo koje vrste i odgovarajuće kolone determinante sistema (77) kao:

$$\frac{\cos \alpha_s}{K_{31}^{(s)}} = \frac{\cos \beta_s}{K_{32}^{(s)}} = \frac{\cos \gamma_s}{K_{33}^{(s)}} = C_s, \\ \frac{\cos \alpha_s}{\begin{vmatrix} \tilde{\epsilon}_{yx} & \tilde{\epsilon}_{zx} \\ \tilde{\epsilon}_{yz} & \tilde{\epsilon}_{zy} \end{vmatrix}} = \frac{\cos \beta_s}{\begin{vmatrix} \delta_x - \delta_s & \tilde{\epsilon}_{zx} \\ \tilde{\epsilon}_{xy} & \tilde{\epsilon}_{zy} \end{vmatrix}} = \frac{\cos \gamma_s}{\begin{vmatrix} \delta_x - \delta_s & \tilde{\epsilon}_{yx} \\ \tilde{\epsilon}_{xy} & \delta_y - \delta_s \end{vmatrix}} = C_s, \quad (81)$$

Dok su potpuno određeni kada se uzme u obzir veza (80). Ove odnose i uslov (80) treba odrediti za svaki glavni napon  $\delta_s$ . Kako smo dobili tri glavna napona, kao tri realna korena sekularne jednačine, to ćemo dobiti i tri grupe kosinusa smerova koji određuju tri pravca u jednoj tački napregnutog tela. Ta tri pravca su glavni pravci napona ili glavni pravci naprezanja i međusobno su upravljeni. Znači da smo dobili u svakoj tački napregnutog tela bez obzira na vrstu naprezanja, odnosno opterećenja i oblik konturne površi tela tri ortogonalna pravca određena ortovima  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$  i  $\vec{n}_3$  koji čine ortogonalni trijedar. Glavni normalni naponi  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  i  $\delta_3$  ili samo normalni naponi su sada sa poznatim pravcima i ravnima, jer su oni sada vezani za glavne ravni koje su u posmatranoj tački određeni ortovima  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$  i  $\vec{n}_3$  čije smo kosinuse smerova odredili. Karakteristično je uočiti da u svakoj tački napregnutog tela pod dejstvom proizvoljnog opterećenja postoje uvek tri glavna pravca i tri realne vrednosti glavnih napona, uključujući pozitivne, negativne vrednosti i nulu.

Dokažimo sada tvrdnju da su glavni pravci ortogonalni. To

58.

možemo dokazati koristeći osnovno pravilo analize napona. Uzmimo sada dva proizvoljno izabrana glavna pravca  $\vec{n}_r$  i  $\vec{n}_s$  od tri. Koristeći osnovno pravilo analize napona možemo da pišemo da je:

$$(n_r)\{p_{\vec{n}_s}\} = (n_s)\{p_{\vec{n}_r}\} = (n_r) \text{N} \{n_s\} = (n_s) \text{N} \{n_r\}.$$

Sada iskoristimo osobinu glavnih pravaca da su totalni naponi za ravni određene normalama u glavnim pravcima kolinearni sa tim normalama, ravni sledi da je:

$$\{p_{\vec{n}_r}\} = \text{N} \{n_r\} = \beta_r \{n_r\} \quad \text{odnosno} \quad \{p_{\vec{n}_s}\} = \text{N} \{n_s\} = \beta_s \{n_s\}.$$

Kako su intenziteti glavnih napona za dva glavna pravca različiti u opštem slučaju to na osnovu pravila analize napona sledi da je:

$$(n_r)\{p_{\vec{n}_s}\} - (n_s)\{p_{\vec{n}_r}\} = (\beta_s - \beta_r)(n_r)\{n_s\} = 0 \Rightarrow (n_r)\{n_s\} = 0, \quad (82)$$

što je uslov ortogonalnosti glavnih pravaca napona, odnosno glavnih pravaca naprezanja. Taj uslov je istovremeno i uslov ortonormiranosti jediničnih vektora glavnih pravaca naprezanja, koji u razvijenom obliku možemo napisati:

$$\cos \alpha_r \cos \alpha_s + \cos \beta_r \cos \beta_s + \cos \gamma_r \cos \gamma_s = 0. \quad (82*)$$

Ako se glavni pravci naprezanja usvoje za pravce osa koordinatnog sistema  $Oxyz$ , onda tenzor napona  $N$  u tom koordinatnom sistemu za isto stanje naprezanja možemo da napišemo pomoću dijagonalne matrice  $G$  čiji su elementi na glavnoj dijagonali glavni normalni naponi  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  i  $\beta_3$ :

$$N_s = G = \begin{bmatrix} \beta_1 & & \\ & \beta_2 & \\ & & \beta_3 \end{bmatrix}. \quad (83)$$

Skalari ove matrice tenzora napona su:

$$\begin{aligned} G_1 &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \\ G_2 &= \beta_1 \beta_2 + \beta_2 \beta_3 + \beta_1 \beta_3, \\ G_3 &= \beta_1 \beta_2 \beta_3. \end{aligned} \quad (84)$$

Koren kubne jednačine (84) koji su elementi na glavnoj dijagonali matrice tenzora napona napisane za koordinatni sistem čije se ose poklapaju u svakoj tački napregnutog tela sa glavnim pravcima naprezanja, zadovoljavaju proširene Viète-ove obrascе. Viète-ovi obrasci napisani za jednačinu (84)

daju vezu izmedju korena te jednačine i njenih koeficijenata u obliku:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1 &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = G_1, \\ \mathcal{N}_2 &= \beta_1 \beta_2 + \beta_2 \beta_3 + \beta_1 \beta_3 = G_2, \\ \mathcal{N}_3 &= \beta_1 \beta_2 \beta_3 = G_3.\end{aligned}\tag{85}$$

Imajući u vidu da su  $\mathcal{N}_1$ ,  $\mathcal{N}_2$  i  $\mathcal{N}_3$  skalari matrice tenzora napona  $\mathbb{G}$  izraženog u sistemu proizvoljnih koordinata Oxyz u posmatranoj tački napregnutog tela i prethodnu vezu (85) koja ih izjednačava sa odgovarajućim skalarima matrice tenzora napona  $\mathbb{G}$  za sistem koordinatnih osa u pravcima glavnih pravaca naprezanja u istoj tački za posmatrano stanje napona zaključujemo da su skalari tenzora napona u dатој таčки invariantne veličine i ne zavise od izbora koordinatnog sistema u kome je matricom tenzora napona izraženo, odnosno opisano stanje napona za zadato telo i zadato opterećenje. Veličine  $\mathcal{N}_1$ ,  $\mathcal{N}_2$  i  $\mathcal{N}_3$ , odnosno  $G_1$ ,  $G_2$  i  $G_3$  nazivaju se naponske invarijante i ne menjaju se pri transformaciji koordinatnog sistema u kome se izražava stanje napona. One zavise samo od stanja napona u dатој таčki, a ne i od njegovog matematičkog izražavanja, odnosno opisivanja. Takođe glavni naponi su svojstvene veličine koje karakterišu stanje napona u posmatranoj tački napregnutog tela i nezavisni su od izbora koordinatnog sistema u odnosu na koji vršimo njihovo izračunavanje. Iсти zaključak važi i za glavne pravce naprezanja. Oni su locirani u istim pravcima vezanim za telo i zavise isključivo od oblika tela i opterećenja i ne zavise od izbora koordinatnog sistema u odnosu na koji vršimo izračunavanja, tako da se menjaju vrednosti cosinusa smerova, odnosno uglovi u odnosu na izabrane ose. I glavni pravci naprezanja su svojstvo izazvanog stanja napona u napregnutom telu, tj u svakoj njegovoj tački.

U koordinatnom sistemu glavnih pravaca naprezanja u posmatranoj tački  $N$  napregnutog tela totalni napon  $\vec{P}_n$  za ravan sa normalom  $\vec{n}$  odredjujemo iz izraza:

$$\{P_n\} = \begin{Bmatrix} P_{n\delta} \\ P_{n\gamma} \\ P_{n\beta} \end{Bmatrix} = \mathbb{G} \{n\} = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_1 \alpha \\ \beta_2 \beta \\ \beta_3 \gamma \end{Bmatrix}, \tag{86}$$

dok kvadrat njegovog intenziteta odredjujemo po obrazcu:

$$P_n^2 = (P_n) \{P_n\} = (n) \mathbb{G}' \mathbb{G} \{n\} = (n) \mathbb{G}^2 \{n\} = (\beta_1 \alpha)^2 + (\beta_2 \beta)^2 + (\beta_3 \gamma)^2. \tag{87}$$

60.

Normalna komponenta  $\sigma_n$  totalnog napona  $\vec{p}_n$  u tački N za ravan sa normalom  $\vec{n}$  je:

$$\sigma_n = (n) \{p_n\} = (n) G \{n\} = (\alpha \beta \gamma) \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \sigma_1 \alpha^2 + \sigma_2 \beta^2 + \sigma_3 \gamma^2. \quad (88)$$

Kvadrat tangencijalne komponente  $\tau_n$  totalnog napona  $\vec{p}_n$  u tački N za ravan sa normalom  $\vec{n}$  je:

$$\begin{aligned} \tau_n^2 &= p_n^2 - \sigma_n^2 = (n) G^2 \{n\} - [(n) G \{n\}]^2 = \sigma_1^2 \alpha^2 + \sigma_2^2 \beta^2 + \sigma_3^2 \gamma^2 - [\sigma_1 \alpha^2 + \sigma_2 \beta^2 + \sigma_3 \gamma^2]^2, \\ \tau_n^2 &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \alpha^2 \beta^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \alpha^2 \gamma^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \beta^2 \gamma^2. \end{aligned} \quad (89)$$

### I.12. MOHR-OVI KRUGOVI NAPONA

U tački N napregnutog tela usvojimo trijedar  $Oxyz$  glavnih pravaca naprezanja i ravan koja prolazi kroz tu tačku odredjena ortom normale  $\vec{n}$ . Totalni napon  $\vec{p}_n$  za tu tačku i tu ravan sa normalom  $\vec{n}$  i njegovu normalnu komponentu  $\sigma_n$  možemo da napišemo u obliku:

$$p_n^2 = \sigma_1^2 \alpha^2 + \sigma_2^2 \beta^2 + \sigma_3^2 \gamma^2 \quad (90)$$

$$\sigma_n = \sigma_1 \alpha^2 + \sigma_2 \beta^2 + \sigma_3 \gamma^2 / -(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (91)$$

$$1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 / \sigma_1 \sigma_2 \quad (92)$$

$$\cos \alpha (=) \alpha, \cos \beta (=) \beta, \cos \gamma (=) \gamma,$$

gde su  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  i  $\cos \gamma$  kosinusi smera orta normale ravni koji sa glavnim pravcima naprezanja zaklapa uglove  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ , i zadovoljavaju jednačinu (92), dok su  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$  glavni normalni naponi. Sve tri poslednje jednačine (90), (91) i (92) su linearne po  $\cos^2 \alpha$ ,  $\cos^2 \beta$  i  $\cos^2 \gamma$ . Kada drugu jednačinu (91) pomnožimo sa  $-(\sigma_1 + \sigma_2)$ , a treću jednačinu (92) sa  $\sigma_1 \sigma_2$  i sve tri jednačine saberemo dobicemo jednačinu u kojoj figuriše samo  $\cos^2 \gamma$  i možemo je rešiti po  $\cos^2 \gamma$ . Zatim jednačinu (91) možemo pomnožiti sa  $-(\sigma_2 + \sigma_3)$ , a jednačinu (92) pomnožimo sa  $\sigma_2 \sigma_3$  i saberemo ih sa jednačinom (90) dobicemo jednačinu u kojoj figuriše samo  $\cos^2 \alpha$ . Ako na kraju jednačinu (91) pomnožimo sa  $-(\sigma_1 + \sigma_3)$ , a jednačinu (92) pomnožimo sa  $\sigma_1 \sigma_3$ , i saberemo ih sa jednačinom (90) dobijamo jednačinu u kojoj figuriše samo  $\cos^2 \beta$ . Rešavanjem tako dobijenih jednačina po kvadratima kosinusa smera orta normale na ravan za koju smo napisali totalni napon i njegovu normalnu komponentu u koordinatnom sistemu

glavnih pravaca naprezanja dobijamo sledeće vrednosti:

$$\cos^2 \alpha = \frac{\beta_n^2 - \beta_n(\beta_1 + \beta_2) + \tilde{\beta}_n^2 + \beta_1\beta_2}{(\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 - \beta_3)},$$

$$\cos^2 \beta = \frac{\beta_n^2 - \beta_n(\beta_1 + \beta_2) + \tilde{\beta}_n^2 + \beta_1\beta_2}{(\beta_3 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2)},$$

(93)

$$\cos^2 \gamma = \frac{\beta_n^2 - \beta_n(\beta_1 + \beta_3) + \tilde{\beta}_n^2 + \beta_1\beta_3}{(\beta_2 - \beta_3)(\beta_2 - \beta_1)}.$$

Kako smo prepostavili da je  $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3$  i kako kvadrat kosinusa smera nekog ugla mora da bude pozitivan broj manji od jedinice, to da bi taj uslov bio zadovoljen u sistemu (93) potrebno je da su zadovoljeni sledeći uslovi:

$$\left(\beta_n - \frac{\beta_2 + \beta_3}{2}\right)^2 + \tilde{\beta}_n^2 - \left(\frac{\beta_2 - \beta_3}{2}\right)^2 \geq 0$$

$$\left(\beta_n - \frac{\beta_3 + \beta_1}{2}\right)^2 + \tilde{\beta}_n^2 - \left(\frac{\beta_3 - \beta_1}{2}\right)^2 \leq 0$$

$$\left(\beta_n - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right)^2 + \tilde{\beta}_n^2 - \left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}\right)^2 \geq 0 \quad (94)$$

Ove tri nejednačine su vezane za tri kruga u koordinatnom sistemu osa  $\beta_n$  oblika:

$$K_1 * * \quad \left(\beta_n - \frac{\beta_2 + \beta_3}{2}\right)^2 + \tilde{\beta}_n^2 = \left(\frac{\beta_2 - \beta_3}{2}\right)^2$$

$$K_2 * * \quad \left(\beta_n - \frac{\beta_3 + \beta_1}{2}\right)^2 + \tilde{\beta}_n^2 = \left(\frac{\beta_3 - \beta_1}{2}\right)^2$$

$$K_3 * * \quad \left(\beta_n - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right)^2 + \tilde{\beta}_n^2 = \left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}\right)^2$$

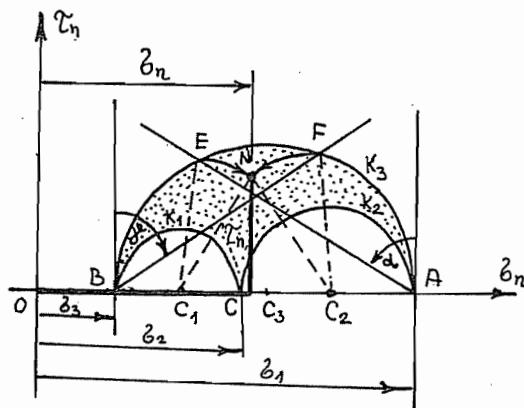
(95)

jer se uzimanjem znaka jednakosti iz njih dobijaju. Ti krugovi imaju središta na koordinatnoj osi  $\beta_n$  i poluprečnike jednake polurazlici po dva glavna napona, kao što je to prikazano sledećim izrazima:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \left[ \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0, \frac{\tau_{12} - \tau_{31}}{2} \right] \\
 K_2 &= \left[ \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0, \frac{\tau_{13} - \tau_{21}}{2} \right] \\
 K_3 &= \left[ \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0, \frac{\tau_{23} - \tau_{12}}{2} \right]
 \end{aligned} \tag{96}$$

Mohr-ovi krugovi napona zbog simetrije oko ose  $\sigma_n$  se crtaju kao polukružnici kao što je to prikazano na slici br. 15, a označeno sa  $K_1$ ,  $K_2$  i  $K_3$ . Samo onaj par vrednosti normalnog  $\sigma_n$  i tangencijalnog napona  $\tau_n$  koji predstavlja koordinate tačaka u oblasti šrafirane površine unutar krugova može predstavljati normalni i tangencijalni napon za neku presečnu ravan u posmatranoj tački u kojoj je stanje napona određeno glavnim naponima  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$ . Mohr-ovi krugovi napona sa slike br. 15 su nacrtani za prostorno stanje napona u tački napregnutog tela u kojoj su sva tri glavna naponi zatezani, a glavni pravci naprezanja glavni pravci zatezani tela u toj tački. Pojedinačno ovi krugovi predstavljaju Mohr-ove krugove napona za tri ravne naponske stanje, a za preseke upravne na po jedan glavni pravac naprezanja.

Postoje razne konstrukcije kojima se može uspostaviti veza između uglova koje zaklapa normala presečne ravni u datoj tački napregnutog tela sa koordinatnim osama i normalnog i tangencijalnog napona kao koordinate tačke u oblasti definisanom Mohr-ovim krugovima, ali se mi ovde nećeemo upuštati u detalje tih konstrukcija. Na slici br. 15 očigledno je prikazan postupak određivanja komponentnih normalnog i tangencijalnog napona u tački N napregnutog tela sa glavnim naponima  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$ , a za ravan čija normala zaklapa uglove  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  sa glavnim pravcima naprezanja.



Slika br.15

### I.13. EKSTREMNE VREDNOSTI TANGENCIJALNIH NAPONA

Do ekstremnih vrednosti tangencijalnih napona  $\tau_I$ ,  $\tau_{II}$  i  $\tau_{III}$  možemo da dodjemo grafički posredstvom Mohr-ovih krugova sa slike br.15. Ordinate tačaka  $M_1$ ,  $M_2$  i  $M_3$  na svakom od tri Mohr-ova kruga sa najvećom ordinatom  $\tau_I$ ,  $\tau_{II}$  i  $\tau_{III}$  predstavljaju tangencijalne napone sa ekstremnim vrednostima i jednake su po apsolutnoj vrednosti poluprečnicima tih krugova. Te ekstremne vrednosti tangencijalnih napona jednaki su po apsolutnim vrednostima polurazlike glavnih normalnih napona. Sa slike Mohr-ovih krugova očigledno je da su to vrednosti:

$$\tau_I = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{II} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{III} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (97)$$

Koristeći pak postupak određivanja komponentnih, normalnog i tangencijalnog napona u tački napregnutog tela sa glavnim naponima  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$ , a za ravan čija normala zaklapa uglove  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  sa koordinatnim osama glavnih pravaca naprezanja, sa slike br. 15 zaključujemo da su uglovi koje zaklapaju ravni ekstremnih vrednosti smičućih napona sa glavnim pravcima naprezanja u dotoj tački po  $\pi/4$  u odnosu na dva pravca, a prolaze kroz treći. Na osnovu tih podataka pročitanih sa Mohr-ovih krugova sa slike br.15 možemo sastaviti sledeću tablicu:

|       | $\alpha$            | $\beta$              | $\gamma$            | $\tau_{max}$                                     | $\alpha$             | $\beta$              | $\gamma$             | $\sigma_n$                                     |
|-------|---------------------|----------------------|---------------------|--|----------------------|----------------------|----------------------|--|
| $K_1$ | $\pm \frac{\pi}{2}$ | $\pm \frac{\pi}{4}$  | $\pm \frac{\pi}{4}$ | $\tau_I = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$     | $\pm \frac{\pi}{2}$  | $\pm \frac{3\pi}{4}$ | $\pm \frac{3\pi}{4}$ | $\sigma_I = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$     |
| $K_2$ | $\pm \frac{\pi}{4}$ | $\pm \frac{\pi}{2}$  | $\pm \frac{\pi}{4}$ | $\tau_{II} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$  | $\pm \frac{3\pi}{4}$ | $\pm \frac{\pi}{2}$  | $\pm \frac{3\pi}{4}$ | $\sigma_{II} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$  |
| $K_3$ | $\pm \frac{\pi}{4}$ | $\pm \frac{3\pi}{4}$ | $\pm \frac{\pi}{2}$ | $\tau_{III} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ | $\pm \frac{3\pi}{4}$ | $\pm \frac{3\pi}{4}$ | $\pm \frac{\pi}{2}$  | $\sigma_{III} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ |

Tablica br.1

Iz tablice se vide i vrednosti normalnih napona u ravnima najvećih tangencijalnih napona:

$$\sigma_I = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \quad \sigma_{II} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad \sigma_{III} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \quad (97*)$$

Do istih rezultata možemo da dodjemo i matematički, analitičkim putem. U tački N napregnutog tela usvojimo trijedar  $Oxyz$  čije se koordinatne ose poklapaju sa glavnim pravcima naprezanja u kojima su glavni normalni naponi  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$ . Neka ort  $\vec{n}$  zaklapa sa koordinatnim osama uglove  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  to jedan od uglova možemo izraziti pomoću ostala dva kao:

$$\cos^2 \delta = 1 - \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha, \quad \cos \alpha (=) \alpha, \quad \cos \beta (=) \beta,$$

Tangencijalnu komponentu  $\tilde{\tau}_n$  totalnog napona  $\tilde{P}_n$  u tački N napregnutog tela za ravan sa normalom  $\vec{n}$ , koristeći prethodnu vezu možemo da napišemo u obliku:

$$\tilde{\tau}_n = \sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_3^2)\cos^2 \alpha + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)\cos^2 \beta + \sigma_3^2 - [(\sigma_1 - \sigma_3)\cos^2 \alpha + (\sigma_2 - \sigma_3)\cos^2 \beta + \sigma_3]^2}, \quad (98)$$

tako da je funkcija samo kosinusa uglova  $\alpha$  i  $\beta$ . Kako se u izrazu (98) pojavljuju samo  $\cos \alpha$  i  $\cos \beta$  to ekstremnu vrednost tangencijalnog napona u posmatranoj tački napregnutog tela možemo da tražimo u funkciji  $\cos \alpha$  i  $\cos \beta$  položaja ravni. Radi skraćenog pisanja sa  $\alpha$  i  $\beta$  označimo te kosinuse i kvadrat tangencijalnog napona možemo da napišemo u obliku:

$$\tilde{\tau}_n^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2)\alpha^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)\beta^2 + \sigma_3^2 - [(\sigma_1 - \sigma_3)\alpha^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)\beta^2 + \sigma_3]^2. \quad (99)$$

Uslovi ekstremuma  $\frac{\partial \tilde{\tau}_n}{\partial \alpha} = 0$  i  $\frac{\partial \tilde{\tau}_n}{\partial \beta} = 0$ , daju sva uslova za određivanje kosinusa smerova orta normale ravni u kojoj se javlja tangencijalni napon ekstremne vrednosti i na osnovu njih pišemo sledeće:

$$\frac{\partial \tilde{\tau}_n}{\partial \alpha} = 0 \quad (\sigma_1 - \sigma_3) \{ (\sigma_1 + \sigma_3) - 2[(\sigma_1 - \sigma_3)\alpha^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)\beta^2 + \sigma_3] \} \alpha = 0,$$

$$\frac{\partial \tilde{\tau}_n}{\partial \beta} = 0 \quad (\sigma_2 - \sigma_3) \{ (\sigma_2 + \sigma_3) - 2[(\sigma_1 - \sigma_3)\alpha^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)\beta^2 + \sigma_3] \} \beta = 0, \quad (100)$$

1º Prepostavimo da su glavni naponi međusobno različiti, tj. da je  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ . Jednačine (100) su kubne po  $\alpha$  i  $\beta$  te imaju po tri rešenja za  $\alpha$  i  $\beta$ . S obzirom na vezu izmedju kosinusa smera, mogu biti sledeće kombinacije:

1.1. Prepostavimo da su svi kosinusi različiti od nule u kom slučaju jednačine (100) mogu biti zadovoljene samo kada su svi glavni naponi međusobno jednak, što je suprotno prepostavci o različitim vrednostima glavnih napona. To je nemoguć slučaj da svi kosinusi smera orta normale ravni budu različiti od nule.

1.2. Prepostavimo sada da su  $\cos \alpha$  i  $\cos \beta$  jednak

nuli, a  $\cos \delta^e$  jednak jedinici, tada sledi da je tangencijalni napon u posmatranoj tački za ravan sa normalom čiji su to cosinusii smera jednak nuli, a to bi bila glavna ravan u kojoj je ekstremna vrednost normalnog napona, pa je taj slučaj nemoguć.

1.3. Prepostavljamo da je  $\cos \alpha = 0$  i da je  $\cos \beta \neq 0$ . Iz prve jednačine (100) sledi da je identički zadovoljena, dok iz druge dobijamo da je:

$$(\beta_2 - \beta_3)(1 - 2\beta^2) = 0$$

Kako je  $\cos \beta$  različito od nule, a prema početnoj prepostavci i  $\beta_1 \neq \beta_2$ , to sledi da je  $1 - 2\beta^2 = 0$ , odnosno za kosinuse uglova orta normale ravni dobijamo:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= 0 ; & \cos \beta &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} ; & \cos \delta^e &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} ; \\ \alpha &= \pm \frac{\pi}{4} ; & \beta &= \pm \frac{\pi}{4} ; \pm \frac{3\pi}{4} ; & \delta^e &= \pm \frac{\pi}{4} ; \pm \frac{3\pi}{4} . \end{aligned} \quad (101)$$

Kada se ove vrednosti za kosinuse uglova unesu u izraz (98) dobijamo prvu ekstremnu vrednost tangencijalnog napona:

$$\tau_I = \pm \frac{\beta_2 - \beta_3}{2} , \quad (102)$$

i njemu odgovarajući normalni napon za tu ravan:

$$\sigma_I = \frac{\beta_2 + \beta_3}{2} . \quad (103)$$

1.4. Prepostavimo sada da je  $\cos \alpha$  različito od nule, a  $\cos \beta$  jednak nuli. Na sličan način kao i u prethodnom slučaju za kosinuse smerova orta normale ravni ekstremne vrednosti tangencijalnog napona dobijamo:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} ; & \cos \beta &= 0 ; & \cos \delta^e &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} ; \\ \alpha &= \pm \frac{\pi}{4} ; \pm \frac{3\pi}{4} ; & \beta &= \pm \frac{\pi}{2} ; & \delta^e &= \pm \frac{\pi}{4} ; \pm \frac{3\pi}{4} , \end{aligned} \quad (104)$$

dok je za tu ravan ekstremna vrednost tangencijalnog napona

$$\tau_{II} = \pm \frac{\beta_1 - \beta_3}{2} , \quad (105)$$

i njemu odgovarajući normalni napon za tu ravan:

$$\sigma_{II} = \frac{\beta_1 + \beta_3}{2} . \quad (106)$$

1.5. Prepostavimo sada da je  $\cos \delta^e$  jednak nuli, i izraz za tangencijalni napon možemo napisati u obliku:

$$\tau_h^2 = \beta_2^2 + (\beta_3^2 - \beta_2^2) \delta^e^2 + (\beta_1 - \beta_2) \alpha^2 + [(\beta_3 - \beta_2) \delta^e^2 + (\beta_1 - \beta_2) \alpha^2 + \beta_2]$$

Diferenciranjem ovog izraza po  $\cos \alpha (=) \alpha$  dobijamo uslov ekstremuma u obliku:

66.

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \{ [(\lambda_1 - \lambda_2) \alpha^2 + (\lambda_3 - \lambda_2) \delta^2 + \lambda_2] - \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2) \} \alpha = 0 \quad (107)$$

odakle izračunavamo da je:

$$\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos \beta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos \delta = 0 \\ \alpha = \pm \frac{\pi}{4}; \pm \frac{3\pi}{4}; \quad \beta = \pm \frac{\pi}{4}; \pm \frac{3\pi}{4}; \quad \delta = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (108)$$

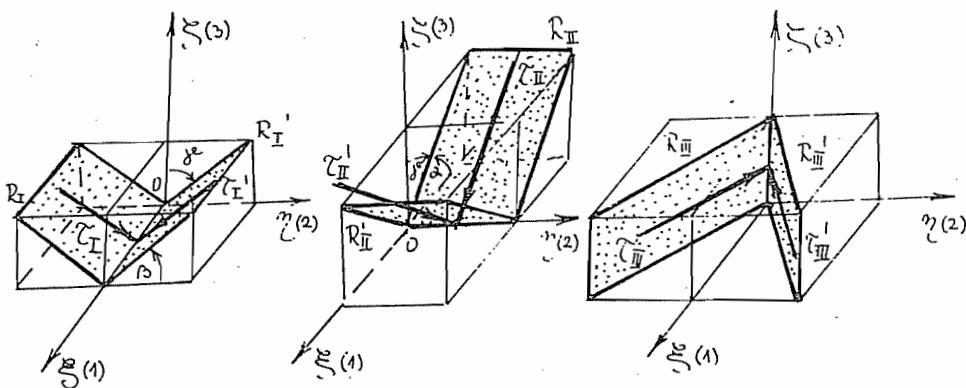
pa je najveći tangencijalni napon u ravni sa normalom čiji su kosinusi smera određeni vrednostima (108) :

$$\zeta_{III} = \pm \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \quad (109)$$

i njemu odgovarajući normalni napon:

$$\delta_{III} = - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \quad (110)$$

Pod pretpostavkom da su glavni naponi  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  i  $\lambda_3$  različiti dobili smo kosinuse smerova ortova normala ravni u kojima se javljaju ekstremne vrednosti tangencijalnih napona i odredili njihove vrednosti kao i vrednosti odgovarajućih normalnih napona, kao što je to prikazano u tablici br. 1, koju smo sastavili čitajući podatke sa Mohr-ovih krugova za prostorno stanje napona u tački napregnutog tela. Na slici br. 16 prikazane su ravni u kojima se javljaju tangencijalni naponi ekstremni po vrednosti.



Slika br. 16

Ravni ekstremnih vrednosti tangencijalnih napona prolaze kroz jedan odgovarajući glavni pravac naprezanja i zaklapa uglove od po  $45^\circ$  sa ostala dva glavna pravca naprezanja.

Posebni slučajevi koji se javlja su:

a° Kada je jedan normalni napon jednak nuli prostorno stanje napona se svodi na ravno i najveći tangencijalni napon je jednak:

$$\tau_{max} = \tau_{\text{III}} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}; \quad (111)$$

a ravan ekstremne vrednosti smičućeg napona zaklapa uglove od po  $45^\circ$  sa glavnim pravcima naprezanja u kojima su glavni naponi  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$

b° Kada su dva glavna napona  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$  jednaka i razlicita od trećeg,  $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$  i uz pretpostavku da je  $\cos\alpha$  razlicito od nule iz jednačine (100) dobijamo da je:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)(1 - 2\cos^2\alpha) = 0,$$

odakle izračunavamo da je  $\cos\alpha = \pm\sqrt{2}/2$ , dok za druga dva kosinusa smera crta normale na ravan dobijamo vezu:

$$\cos^2\beta + \cos^2\delta = \frac{1}{2}, \quad (112)$$

dok je najveći normalni napon:

$$\tau_{max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (113)$$

Kako smo za druga dva ugla dobili vezu (112) zaključujemo da svaka ravan koja sa glavnim pravcem naprezanja (1) gradi ugao od  $45^\circ$  je ravan najvećeg tangencijalnog napona, a sve te ravni su tangentne ravni kružnog konusa ugla otvora  $90^\circ$  i osom simetrije u glavnom pravcu naprezanja (1). Na sličan način nalazimo ekstremnu vrednost tangencijalnog napona i kada je neki drugi glavni pravac naprezanja osa simetrije naponskog stanja napregnutog tela.

c° Kada su svi glavni naponi jednakodobnosno kada je:  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ , tj. kada postoji centralna simetrija stanja napona u datoj tački napregnutog tela, onda su tangencijalni naponi za bilo koju ravan kroz tu tačku jednak nuli, ili svaka ravan kroz tu tačku je glavna ravan.

#### I.14. NAPONSKIE POVRŠI. ELIPSOID NAPONA.

Normalni napon  $\sigma_n$  u tački O napregnutog tela za ravan sa normalom  $\vec{n}$  čiji su kosinusi smera  $\cos\alpha$ ,  $\cos\beta$  i  $\cos\delta$  je:

$$\sigma_n = (n) \nabla \{n\} = (\cos\alpha \cos\beta \cos\delta) \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\delta \end{Bmatrix}. \quad (114)$$

Pomnožimo prethodnu jednačinu kvadratom intenziteta  $r^2$  vektora položaja  $\vec{r} = r\vec{n}$  u pravcu normale za ravan za koju smo izabrali normalni napon. Koordinate tog vektora položaja su:  $x$ ,  $y$  i  $z$  pa zbog veze:  $x = r \cos \alpha$ ,

$y = r \cos \beta$  i  $z = r \cos \gamma$  možemo da napišemo da je:

$$\phi(x, y, z) = (r) N[r] = (x \ y \ z) \begin{bmatrix} \ell_x & \ell_{yx} & \ell_{zx} \\ \ell_{xy} & \ell_y & \ell_{zy} \\ \ell_{xz} & \ell_{yz} & \ell_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \ell_n r^2. \quad (114*)$$

Prethodno definisana funkcija je homogena terna kvadratna forma koordinate  $x$ ,  $y$  i  $z$  i predstavlja Cauchy-jevu naponsku površ. To je centralna površ drugog reda. Poznata je u literaturi kao Cauchy-jev "kvadrik". Ta površ može biti: elipsoid, jednograni hiperboloid ili dvograni hiperboloid i asimptotske konus. Ako se predje u koordinatni sistem čije su koordinatne ose u prvcima glavnih normalnih napona  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  i  $\ell_3$ , naponska površ dobija oblik:

$$\phi(\xi, \eta, \varsigma) = (\xi \ \eta \ \varsigma) \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_2 & \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_3 & \ell_3 & \ell_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \varsigma \end{bmatrix} = \ell_1 \xi^2 + \ell_2 \eta^2 + \ell_3 \varsigma^2 = \ell_n r^2 \quad (115)$$

Od znaka glavnih napona i kombinacije napona pritiska i zatezanja u glavnim prvcima naprezanja za tu tačku zavisiće i oblik naponske površi. Ako su glavni normalni naponi istog znaka naponska površ je elipsoid, a normalni naponi su svi ili naponi zatezanja ili naponi pritiska. Za slučaj različitog znaka glavnih normalnih napona naponska površ je jednograni hiperboloid, dvograni hiperboloid ili asimptotski konus. Te mogućnosti su prikazane u tablici br.2.

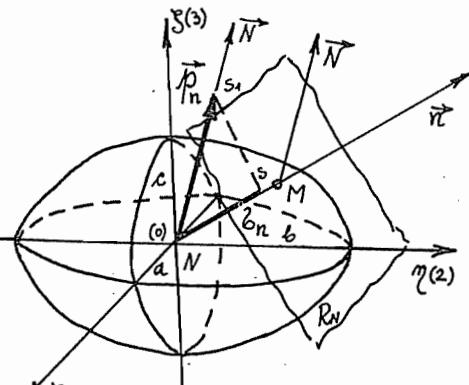
| Znak glavnih napona                      | Konstanta $\pm C^2 = \ell_n r^2$ | Napon $\ell_n$     | Naponska površ         | Jednačina naponske površi   |
|--|----------------------------------|--------------------|------------------------|---|
| $\ell_1 > 0, \ell_2 > 0$<br>$\ell_3 > 0$ | $> 0$                            | $> 0$<br>Zatezanje | Elipsoid               | $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\varsigma^2}{c^2} = 1$  |
| $\ell_1 < 0, \ell_2 < 0$<br>$\ell_3 < 0$ | $< 0$                            | $< 0$<br>Pritisak  | Elipsoid               | - -- -  |
| $\ell_1 > 0, \ell_2 > 0$<br>$\ell_3 < 0$ | $> 0$                            | $> 0$              | Jednograni hiperboloid | $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\varsigma^2}{c^2} = 1$  |
| $\ell_1 > 0, \ell_2 > 0$<br>$\ell_3 < 0$ | $< 0$                            | $< 0$              | Dvograni hiperboloid   | $-\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\varsigma^2}{c^2} = 1$ |
| $\ell_1 > 0, \ell_2 > 0$<br>$\ell_3 < 0$ | $= 0$                            | $= 0$              | Asimptotski konus      | $\ell_1 \xi^2 + \ell_2 \eta^2 - \ell_3 \varsigma^2 = 0$                 |
|  |                                  |                    |                        | $a^2 = C^2 / \ell_1 ; b^2 = C^2 / \ell_2 ; c^2 = C^2 / \ell_3$          |

Tablica br.2

Pomoću naponske površi može se odrediti totalni napon  $\vec{p}_n$  za ravan sa normalom  $\vec{n}$  kroz datu tačku napregnutog tela, jer je:

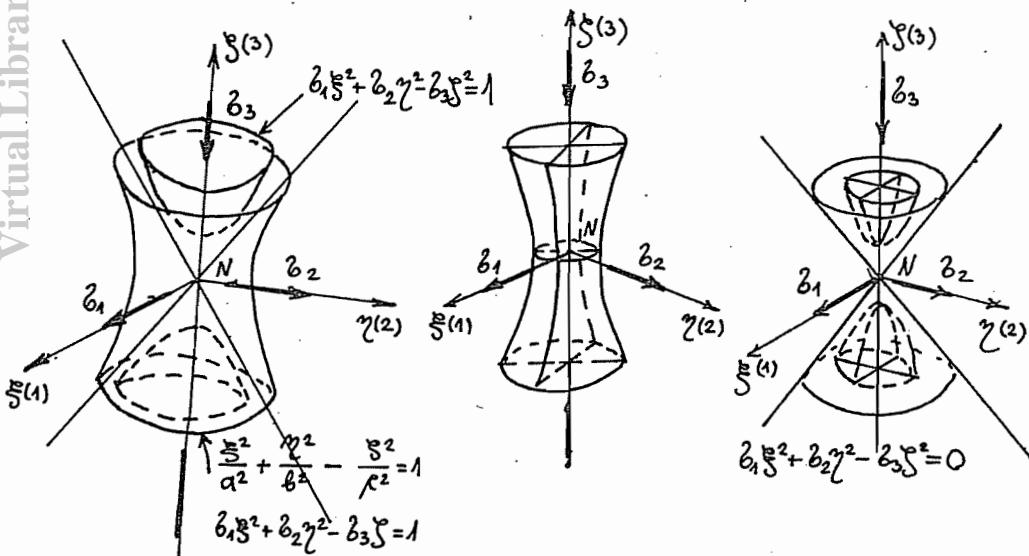
$$\{p_n\} = \nabla \{n\} = \frac{1}{\lambda} \operatorname{grad} \phi = \frac{1}{2r} \operatorname{grad} [(r) \nabla \{r\}]. \quad (116)$$

Da bi smo geometrijski odredili totalni napon u tački N napregnutog tela za ravan sa normalom  $\vec{n}$ , potrebno je iz tačke N povući pravac normale koji u tački M prodire naponsku površ (naprimjer elipsoid napon) i u toj tački povući normalu na naponsku površ. To je prikazano na slici br. 17. Od tačke M u pravcu orta  $\vec{n}$  nanesemo intenzitet normalnog napona  $b_n$ , pa iz završne S tačke povučemo upravnu ravan na ort  $\vec{n}$  do preseka sa pravcem orijentisanim vektorom  $\vec{N}$  u pravcu gradijenta naponske površi, tako da dobijemo totalni napon  $\vec{p}_n$  za ravan sa normalom  $\vec{n}$ , po intenzitetu pravcu i smeru.



Slika br. 17

Na slici br. 18 grafički su prikazani različiti slučajevi oblika naponske površi saglasno analizi dатој у табелици бр. 2. Треба нагласити да се у свакој таčки напregnутог тела одређује напонска површ и да се у општем случају када се од таčке до таčке менјају главни напони и њихова комбинација – затегање – притисак менјају и форме напонских површи, односно



Slika br. 18

70.

u tačkama proizvoljno napregnutog tela mogu da se javljaju sva četiri oblika naponskih površi: elipsoid napon, jednograni hiperbopoid, dvograni hiperboloid i asymptotski konus, pojedinačno. Samo u slučaju homogenih naponskih stanja u svim tačkama napregnutog tela naponske površi su jednake. Znači da je to samo u slučaju kada u svim tačkama napregnutog tela imamo jednake glavne pravce naprezanja i iste komplete glavnih naponi  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$ .

Pored ove geometrijske interpretacije promene totalnog napon pomoću Cauchy-jeve naponske površi postoji i geometrijska interpretacija vektora totalnog naponi  $\vec{P}_n$  pomoću Lamè-ovog elipsoida naponi. Usvojimo

ose koordinatnog sistema u pravcima glavnih naponi  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$ , onda je totalni napon  $\vec{P}_n$  u posmatranoj tački napregnutog tela za ravan sa normalom  $\vec{n}$  jednak:

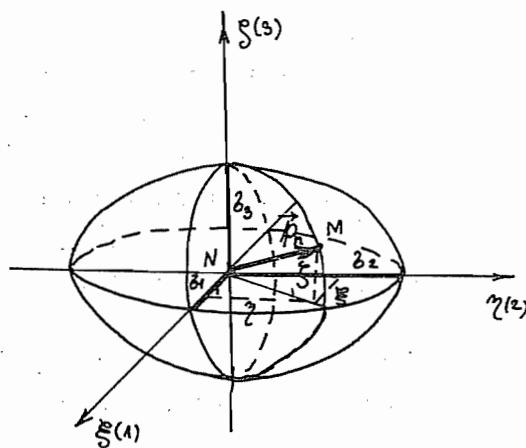
$$\{\vec{P}_n\} = \begin{pmatrix} P_{n\sigma_1} \\ P_{n\sigma_2} \\ P_{n\sigma_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 d \\ \sigma_2 \beta \\ \sigma_3 \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad (117)$$

jer je:

$$d (=) \cos \alpha = \frac{P_{n\sigma_1}}{\sigma_1}; \beta (=) \cos \beta = \frac{P_{n\sigma_2}}{\sigma_2},$$

$$\gamma (=) \cos \gamma = \frac{P_{n\sigma_3}}{\sigma_3}.$$

Kako je zbir kvadrata kosinusa uglova koje jedan vektor zaklapa sa koordinatnim osama jednak



Slika br. 19

jedinici, to dobijamo iz prethodnog da je:

$$\left(\frac{P_{n\sigma_1}}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{P_{n\sigma_2}}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{P_{n\sigma_3}}{\sigma_3}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{\xi}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{\sigma_3}\right)^2 = 1. \quad (118)$$

Ova jednačina predstavlja jednačinu Lamèovog elipsoida naponi u sistemu koordinatnih osa glavnih normalnih naponi. Lamè-ov elipsoid naponi prikazan je na slici br. 19 i vidimo da je on troosni centralni za opšti slučaj naprezanja. Ako su dva glavna naponi jednaka Lamè-ov elipsoid je rotacioni, a kada su sva tri glavna naponi jednaka on je sfera. Svakoj tački površi Lamè-ovog elipsoida odgovara vektor totalnog naponi. Znači da Lamè-ov elipsoid naponi određuje geometrijsko mesto tačaka krajeva vektora naponi za izabranu tačku napregnutog tela i kao takav predstavlja geometrijsku prezentaciju stanja naponi u toj tački.

## I.15. OKTAEDARSKE RAVNI I OKTAEDARSKI NAPONI

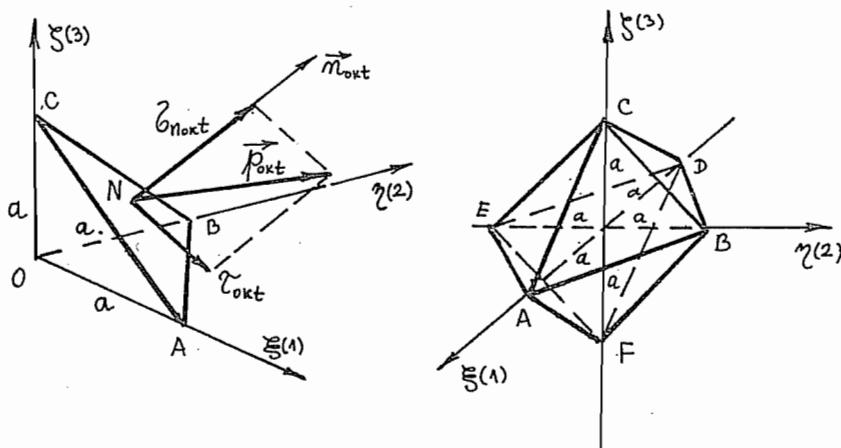
Ravan koja na glavnim osama u pravcima glavnih normalnih napona odseca jednake odsečke i njena normala gradi jednake uglove sa tim osama naziva se o k t a e d a r s k a r a v a n . Kosinusii smerova orta te normale su međusobno jednaki:  $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \sqrt{3}/3$  . Totalni napon u tački N napregnutog tela za oktaedarsku ravan je:

$$\{\boldsymbol{\tau}_{\text{okt}}\} = \mathbb{G} \{\boldsymbol{n}_{\text{okt}}\} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad (119)$$

pa je kvadrat njegovog intenziteta:

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{okt}}^2 = \frac{1}{3} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = \frac{1}{3} \mathcal{N}_1 (\mathbb{G}^2). \quad (120)$$

Totalni napon  $\overrightarrow{\boldsymbol{\tau}_{\text{okt}}}$  određen izrazom (119) je o k t a e d a r s k i napon. Na slici br. 20 prikazana je oktaedarska ravan, a naziv je dobila prema oktaedru koji obrazuje osam ravni u osam koordinatnih oktanata.



Slika br.20

Normalna komponenta  $\boldsymbol{\tau}_{n_{\text{okt}}}$  oktaedarskog napona  $\overrightarrow{\boldsymbol{\tau}_{n_{\text{okt}}}}$  je:

$$\boldsymbol{\tau}_n = \boldsymbol{\tau}_{n_{\text{okt}}} = (\boldsymbol{n}_{\text{okt}}) \mathbb{G} \{\boldsymbol{n}_{\text{okt}}\} = \frac{1}{3} (b_1 + b_2 + b_3), \quad (121)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{n_{\text{okt}}} = \frac{1}{3} \mathcal{N}_1 = \boldsymbol{\tau}_{sr} = \boldsymbol{\tau}_s = \boldsymbol{\tau}.$$

Iz poslednjeg izraza za normalnu komponentu oktaedarskog napona se vidi da je jednak aritmetičkoj sredini glavnih normalnih napona ili jednoj trećini prve invariante matrice tenzora napona.

Kvadrat tangencijalne komponente oktaedarskog napona je:

$$\tilde{\sigma}_{\text{okt}}^2 = p_{\text{okt}}^2 - \beta_{\text{okt}}^2 = \frac{1}{3}(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) - \frac{1}{9}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)^2, \quad (122)$$

$$\tilde{\tau}_{\text{okt}}^2 = \frac{4}{9}(\tilde{\tau}_x^2 + \tilde{\tau}_{\bar{x}}^2 + \tilde{\tau}_{\bar{\bar{x}}}^2) = \frac{1}{9}[(\beta_y - \beta_z)^2 + (\beta_x - \beta_y)^2 + (\beta_z - \beta_x)^2 + 2(\tilde{\tau}_{xy}^2 + \tilde{\tau}_{xz}^2 + \tilde{\tau}_{yz}^2)].$$

Oktaedarski tangencijalni napon može da se izrazi i pomoću invariјanti matriće tenzora napona u datoj tački napregnutog tela, kao:

$$\tilde{\tau}_{\text{okt}}^2 = \frac{2}{9}[(N_1)^2 - 3N_2]. \quad (123)$$

Izvlačimo sledeće zaključke o totalnom i komponentnim naponima za oktaedarske ravni: Kvadrat intenziteta totalnog napona za oktaedarsku ravan jednak je aritmetičkoj sredini kvadrata glavnih normalnih napona; Normalni napon za oktaedarsku ravan jednak je aritmetičkoj sredini glavnih napona; Tangencijalni napon za oktaedarsku ravan jednak je dve trećine od zbiru kvadrata glavnih - ekstremnih vrednosti tangencijalnih napona; Oktaedarski naponi u datoj tački napregnutog tela jednaki su u svim oktaedarskim ravnima koje se mogu povući kroz tu tačku.

### I.16. RAZLAGANJE TENZORA NAPONA U SFERNI I DEVIJATORSKI DEO

Oktaedarski normalni napon  $\beta_{\text{okt}}$  jednak je srednjem normalnom naponu  $\beta_{\text{sr}}$  ili srednjem normalnom pritisku  $p$  i jednak je jednoj trećini prve invariante matrice tenzora napona. Zamislimo u posmatranoj tački napregnutog tela stanje napona definisano sledećim tenzorom napona:

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} p & & \\ & p & \\ & & p \end{bmatrix} = p\mathbb{II} \quad (124)$$

čije su invariante - tri skalara matriće  $\mathbb{S}$ :

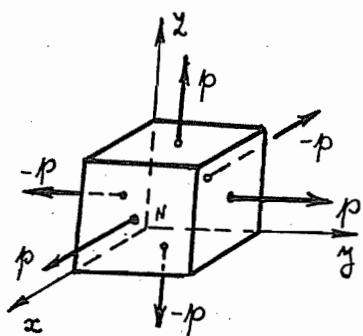
$$S_1 = 3p = N_1 = \beta_{xx} + \beta_{yy} + \beta_{zz} = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 3\beta_{\text{sr}}$$

$$S_2 = 3p^2 = \frac{1}{3}(N_1)^2 = \frac{1}{3}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)^2 \quad (125)$$

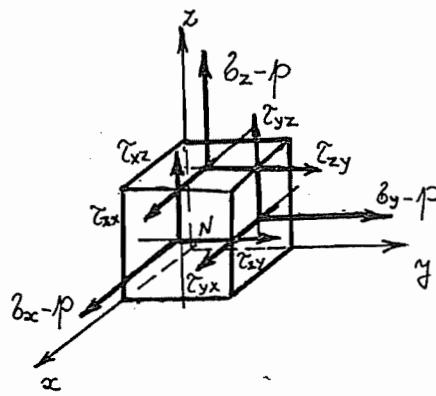
$$S_3 = p^3 = \frac{1}{27}(N_1)^3$$

U ovom slučaju sva tri glavna napona međusobno su jednaka, a sa tim i svi

otalni naponi u toj tački za sve presečne ravni biće međusobno jednaki i kolinearne sa normalom odgovarajuće ravni. U ovom slučaju Lamé-ov elipsoid naponi i Cauchy-jeva naponska površ biće (lopte) sfere, pa se zato tenzor naponi oblika (124) naziva sferni tenzor naponi. Stanje naponi definisano sfernim tenzorom naziva se s f e r n o stanje naponi ili h i d r o s t a - t i č k o stanje naponi, jer se javlja u slučaju kada je telo izloženo dejstvu hidrostatičkog pritiska  $p$ , kao što je na slici br. 21 prikazano. U izotropnim materijalima, tj. materijalima sa istim materijalnim osobinama za sve pravce sferni tenzor naponi karakteriše takvo stanje naponi koje dovodi samo do promene zapremine bez njene promene oblika. Znači da uniformna raspodela pritiska na deo tela u okolini posmatrane tačke napregnutog tela od izognog materijala u vidu materijalne sfere ne bi izazvala promenu njenog oblika već samo njene zapremine, što nebi bio slučaj kada se radi o anizotropnim materijalima.



Slika br.21



Slika br.22

Neka je u tački N napregnutog tela stanje naponi definisano tenzorom naponi sa pridruženom matricom  $\mathcal{N}$  i taj tenzor naponi možemo da rastavimo na sferni  $\mathfrak{S}$  i devijatorski deo  $\mathfrak{D}^{(2)}$

$$\mathcal{N} = \mathfrak{S} + \mathfrak{D}^{(2)}$$

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} b_x & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & b_y & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & & \\ & p & \\ & & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x - p & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & b_y - p & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & b_z - p \end{pmatrix} \quad (126)$$

Devijator naponi je tenzor čija je matrica  $\mathfrak{D}^{(2)}$  simetrična i kvadratna oblika:

$$\mathcal{D}^{(2)} = \begin{bmatrix} b_x - p & \tilde{\epsilon}_{yx} & \tilde{\epsilon}_{zx} \\ \tilde{\epsilon}_{xy} & b_y - p & \tilde{\epsilon}_{zy} \\ \tilde{\epsilon}_{xz} & \tilde{\epsilon}_{yz} & b_z - p \end{bmatrix}, \quad (127)$$

sa skalarima:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1^{(2)} &= 0, \quad \mathcal{D}_2^{(2)} = -\frac{1}{3} [(\mathcal{N}_1)^3 - 3\mathcal{N}_2] = -\frac{2}{3} (\tilde{\epsilon}_I^2 + \tilde{\epsilon}_{II}^2 + \tilde{\epsilon}_{III}^2) = -\frac{3}{2} \tilde{\epsilon}_{\text{okt}}^2, \\ \mathcal{D}_2^{(2)} &= \left| \begin{array}{cc} b_x - p & \tilde{\epsilon}_{yx} \\ \tilde{\epsilon}_{xy} & b_y - p \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} b_x - p & \tilde{\epsilon}_{zx} \\ \tilde{\epsilon}_{xz} & b_z - p \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} b_y - p & \tilde{\epsilon}_{zy} \\ \tilde{\epsilon}_{yz} & b_z - p \end{array} \right|, \quad (128) \\ \mathcal{D}_3^{(2)} &= |\mathcal{D}^{(2)}| = \mathcal{N}_3 - \frac{1}{3} \mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2 + \frac{2}{27} (\mathcal{N}_1)^3. \end{aligned}$$

Na osnovu oblika devijatora napona zaključujemo da je to tenzor koji određuje odstupanje, devijaciju od sfernog stanja napona. Karakteristika ovog tenzora je da je njegova prva invariјanta jednaka nuli. Druga invariјanta odnosno drugi skalar devijatorskog dela tenzora napona srazmeran je zbiru kvadrata ekstremnih vrednosti tangencijalnih napona u posmatranoj tački napregnutog tela. Ovaj skalar jednak je tri polovine kvadrata oktaedarskog tangencijalnog napona. U slučaju napregnutih tela od izotopnog materijala stanje napona u izabranoj tački tela koje se izražava devijatorskim delom tenzora napona izaziva promenu oblika bez promene zapremine.

Ako zamislimo, da je u posmatranoj tački N napregnutog tela stanje napona definisano devijatorskim delom tenzora napona oblika (127) i kako je njegova prva invariјanta - skalar jednaka nuli, to s obzirom da tenzor napona možemo razložiti na sferski deo koji definiše stanje napona koje izaziva promenu zapremine, i kako se deformacija tela sastoji od promene zapremine i promene oblika, to sledi da devijatorski deo tenzora napona karakteriše stanje napona koje izaziva samo promenu oblika, ako se radi o izotropnim materijalima. Mogućnost razlaganja u sferski i devijatorski deo je karakteristično svojstvo svih simetričnih tenzora drugog reda.

Glavni pravci devijatorskog dela tenzora napona određuju se analogno određivanju glavnih pravaca naprezanja čije je stanje napona zadato tenzorom napona. Bez dokaza, jer je evidentan, zaključujemo da za stanja napona izražena tenzorom napona  $\mathcal{N}$  i njegovim devijatorskim delom  $\mathcal{D}^{(2)}$  dobijamo iste glavne pravce naprezanja dok im se sopstvene vrednosti: glavni normalni naponi  $b_1$ ,  $b_2$  i  $b_3$ , i sopstvene vrednosti devijatora napona razlikuju za srednji normalni napon iz sferskog dela tenzora napona, odnosno  $b_1 - p$ ,  $b_2 - p$ ,  $b_3 - p$ .

Na slici br.22 prikazani su elementi matrice devijatorskog dela matrice tenzora napona, odnosno komponentni naponi stanja napona defi-

nisanog devijatorskim delom tenzora napona.

Kada se usvoji koordinatni sistem 0<sub>575</sub> čije koordinatne ose padaju u pravce glavnih pravaca naprezanja, odnosno glavnih normalnih naponova devijatorski deo tenzora napona se može predstaviti dijagonalnom matricom:

$$\overline{\mathcal{D}}^{(2)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - p & & \\ & \lambda_2 - p & \\ & & \lambda_3 - p \end{pmatrix}, \quad (129)$$

sa skalarima - invarijantama:

$$\mathcal{D}_1^{(2)} = 0$$

$$\mathcal{D}_2^{(2)} = (\lambda_1 - p)(\lambda_2 - p) + (\lambda_2 - p)(\lambda_3 - p) + (\lambda_3 - p)(\lambda_1 - p) = -\frac{1}{3}[(N_1)^2 - 3N_2], \quad (130)$$

$$\mathcal{D}_3^{(2)} = (\lambda_1 - p)(\lambda_2 - p)(\lambda_3 - p) = N_3 - \frac{1}{3}N_1N_2 + \frac{2}{27}(N_1)^3.$$

Ovi skalari - invarijante devijatorskog dela tenzora napona mogu se dovesti u vezu sa odgovarajućim linearnim, kvadratnim i kubnim odstupanjem stanja nápona definisanog devijatorskim delom tenzora napona i sfernim delom tenzora napona u oblik:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{D}_1^{(2)} = 0 \\ Q &= \sqrt{-\frac{2}{3}\mathcal{D}_2^{(2)}} = \sqrt{[(\lambda_1 - p)^2 + (\lambda_2 - p)^2 + (\lambda_3 - p)^2] \frac{1}{3}} = \text{Zokt} \\ K &= \sqrt[3]{\mathcal{D}_3^{(2)}} = \sqrt[3]{[(\lambda_1 - p)^3 + (\lambda_2 - p)^3 + (\lambda_3 - p)^3]} \end{aligned} \quad (131)$$

Cauchy-jeva naponska površ za stanje napona definisano devijatorskim delom tenzora napona je hiperboloid. Ekstremne vrednosti tangencijalnih naponova za stanje napona odredjeno devijatorskim delom tenzora napona su iste kao i za stanje napona definisano tenzorom napona, ali su normalni naponi različiti za te ravni.

## II. TEORIJA DEFORMACIJA

## II.1. POJAM DEFORMACIJE: VEKTOR POMERANJA.

U prethodnom članu smo utvrdili da je dovoljno da poznajemo u izabranoj tački napregnutog tela šest komponentnih napona za tri uzajamno upravne ravni da bi smo poznavali stanje napona u toj tački, ili pak da poznajemo elemente matrice tenzora napona. Za odredjivanje komponentnih napona iz uslova zadatih spoljašnjih površinskih i zapreminskih opterećenja izveli smo iz uslova ravnoteže Navier-ve jednačine ravnoteže i Cauchy-jeve građične uslove. Kako se radi o deformabilnom telu te jednačine nisu dovoljne da bi smo poznavali kompletno stanje naprezanja deformabilnog napregnutog tela, te je zato potrebno da izvršimo i analizu njegovih deformacija. U okviru naših izučavanja pod deformacijom čvrstog tela podrazumevaćemo male promene oblika i zapremine telapod dejstvom spoljašnjih sila, dok ćemo njegovo kretanje kao krutog tela eliminisati.

Neka na deformabilno telo sa slike br. 1 dejstvuje sistem spoljašnjih sila putem površi konture tela pod čijim se dejstvom čvrsto telo deformeše. To znači da čvsto telo iz prirodnog stanja bez napona u ravnima zamišljenih preseka prelazi u napregnuto stanje u kome se u tim presečnim ravnima javljaju odgovarajući naponi, a istovremeno je promenilo i oblik i zapremenu, odnosno deformisalo se. Označimo sada sa I konfiguraciju tela pre dejstva spoljašnjeg opterećenja, tj u prirodnom stanju tela kada je ne-deformisano, dok sa II označimo konfiguraciju tela pod dejstvom spoljašnjeg

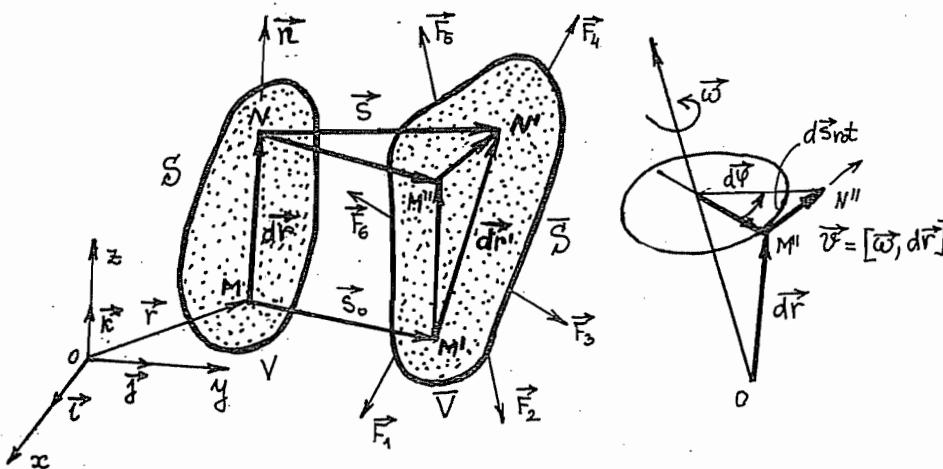
opterećenja. Uočavamo da je konfiguracija tela I u prirodnom stanju različita od konfiguracije II tela u napregnutom stanju jer se telo deformisalo u odnosu na svoju prirodnu konfiguraciju. Uočimo u konfiguraciji I u prirodnom stanju tela proizvoljnu tačku M, čiji je položaj određen vektorom položaja  $\vec{OM} = \vec{r}$  u odnosu na proizvoljno izabrani koordinatni početak O nepokretnog trijedra Oxyz. Prilikom deformacije konfiguracija I napregnutog tela prelazi u konfiguraciju II napregnutog tela, a sa tim i tačka M predje u tačku  $M'$  sa vektorom položaja  $\vec{r}'$ . Ako sa  $\vec{s}_o$  označimo vektor  $MM'$  tada važi da je:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{s}_o. \quad (1)$$

Vektor  $\vec{s}_o$  je pomeranje tačke M. Ako tačku M uzmemos za referentnu tačku i u odnosu na nju odredujemo promenu konfiguracije ostalih tačaka tela, onda vektor pomeranja

$$\vec{s}_o = u_o(x, y, z)\vec{i} + v_o(x, y, z)\vec{j} + w_o(x, y, z)\vec{k}, \quad (2)$$

gde su  $u_o(x, y, z)$ ,  $v_o(x, y, z)$  i  $w_o(x, y, z)$  Descartes-ove pravougaone koordinate, možemo smatrati pomeranjem usled translacije koje dobijaju pod dejstvom opterećenja sve tačke tela, ali da ostale tačke tela imaju i dočinska pomeranja čiju analizu treba izvršiti. Zato u konfiguraciji nedeformisanog tela uočimo tačku N u okolini tačke M, a na istom elementu tela. Neka je u toj konfiguraciji tačka N određena relativnim vektorom položaja  $\vec{MN} = \vec{dr} = \vec{g}$  u odnosu na tačku M. Pri deformisanju tela, odnosno pri prelasku tela iz konfiguracije I u konfiguraciju II tačka N je prešla u položaj  $N'$  pa je



Slika br.1

78.

njen vektor pomeranja  $\vec{NN'} = \vec{s}$ , a sa slike br. 1 se vidi da je:

$$\vec{s} = \vec{S}(\vec{r}) = u(x, y, z)\vec{i} + v(x, y, z)\vec{j} + w(x, y, z)\vec{k} = \vec{s}_0 + d\vec{s}, \quad (3)$$

gde su  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  i  $w(x, y, z)$  Descartes-ove pravougle koordinate vektora pomeranja  $\vec{s}(\vec{r})$  pojedinih čestica napregnutog tela u okolini posmatrane tačke M. One su funkcije koordinata  $x$ ,  $y$  i  $z$  tačke M. Koordinate  $u$ ,  $v$  i  $w$  se nazivaju i komponentnim pomeranjima. Prepostavljamo da u deformabilnom telu u konfiguraciji napregnutog, deformisanog tela, a i u toku deformisanja nema prekida, tj da se da se kontinuitet materije tela održava. Takođe prepostavljamo da je pri prelasku tela iz konfiguracije I u konfiguraciju II deformacija infinitezimalna i kontinualna, što znači da se pri prelasku iz jedne u drugu konfiguraciju okolina tačke M preslikava u okolinu tačke M', pa će komponentna pomeranja biti neprekidne jednoznačne funkcije vektora položaja tačke M, odnosno neprekidne, jednoznačne i diferencijabilne funkcije njenih koordinata  $x, y$  i  $z$ .

Za elementarna razmatranja prepostavljemo da su komponentna pomeranja mala u odnosu na dimenzije tela, tako da se kvadrati, proizvodi i viši stepeni komponentnih pomeranja mogu zanemariti. Ovim uvodimo ograničenje razmatranja na infinitezimalne ili male deformacije.

Ukupna promena vektora pomeranja  $d\vec{s}$  data je totalnim diferencijalom:

$$d\vec{s} = \frac{\partial \vec{s}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{s}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{s}}{\partial z} dz, \quad (4)$$

u kome su  $\frac{\partial \vec{s}}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \vec{s}}{\partial y}$  i  $\frac{\partial \vec{s}}{\partial z}$  parcijalni izvodi vektora pomeranja:

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial w}{\partial x} \vec{k},$$

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial w}{\partial y} \vec{k},$$

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial z} \vec{j} + \frac{\partial w}{\partial z} \vec{k}$$

Uvedimo sada funkcionalnu matricu  $\mathcal{S}$  čije su kolone matrice kolone parcijalnih izvoda vektora pomeranja po  $x$ ,  $y$  i  $z$  respektivno, odnosno čiji su elementi parcijalni izvodi komponentnih pomeranja  $u$ ,  $v$  i  $w$ , a koja je kvadratna, nesimetrična oblika:

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Ukupnu promenu vektora pomeranja u matričnom obliku možemo da napišemo u obliku:

$$\{ds\} = \mathcal{D}\{dr\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Vidimo da je priraštaj vektora pomeranja  $\{ds\}$  proizvod funkcionalne matrice  $\mathcal{D}$  i matrice kolone vektora položaja  $\{dr\}$  čiji su elementi koordinate vektora  $\overrightarrow{MN}$ .

Funkcionalna nesimetrična matrica  $\mathcal{D}$  se može pretstaviti kao zbir simetrične  $\mathcal{D}_s$  i kososimetrične matrice  $\mathcal{D}_k$ :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_k + \mathcal{D}_s$$

$$\mathcal{D}_s = \frac{1}{2}(\mathcal{D} + \mathcal{D}') = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathcal{D}_k = \frac{1}{2}(\mathcal{D} - \mathcal{D}') = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) & 0 & -\frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}) \\ -\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}) & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

gde je  $\mathcal{D}'$  transponovana matrica matrice  $\mathcal{D}$ . Promenu vektora pomeranja možemo sada da napišemo u obliku:

$$\{ds\} = \{ds'\} + \{ds''\} = \mathcal{D}_k\{dr\} + \mathcal{D}_s\{dr\}. \quad (9)$$

Odavde vidimo da se promena vektora pomeranja sastoji iz dva dela, od kojih se prvi deo može napisati u obliku:

$$\{ds'\} = \mathcal{D}_k\{dr\} = \begin{pmatrix} 0 & -r & \varrho \\ r & 0 & -p \\ -\varrho & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{cases} pdz - rdy \\ rdx - pdz \\ pdy - \varrho dx \end{cases} \quad (10)$$

Da bi smo dali objašnjenje porekla ovog dela promene vektora pomeranja, potražimo rotor vektora pomeranja  $\vec{s}$ :

$$\text{rot } \vec{s} = (\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\vec{k} = 2(p\vec{i} + \varrho\vec{j} + r\vec{k}) = 2\vec{\omega}. \quad (11)$$

80.

Sada odredimo vektorski proizvod rotora vektora pomeranja i priraštaja vektora položaja  $d\vec{r}$  u obliku:

$$[\text{rot} \vec{s}, d\vec{r}] = [\text{rot} \vec{v}, d\vec{r}] dt = 2[\vec{\omega}, d\vec{r}] dt = 2[d\vec{\psi}, d\vec{r}]. \quad (11*)$$

Izraz za pomeranje u slučaju male rotacije za ugao  $d\vec{\psi}$  u prostoru oko jedne ose trenutne rotacije ugaonom brzinom  $\vec{\omega}$  poznat je iz kinematike krutog tela i na osnovu njega možemo da napišemo:

$$d\vec{s}_{\text{rot}} = [\vec{\omega}, d\vec{r}] dt = [d\vec{\psi}, d\vec{r}] = \vec{v} dt \quad (12)$$

gde je  $d\vec{s}_{\text{rot}}$  put tačke M" što se vidi sa slike br. 1, a  $\vec{v}$  brzina te tačke, a  $dt$  vreme. Na osnovu poslednjih izraza zaključujemo da deo promene vektora pomeranja zadat izrazom (10) potiče od čiste rotacije tela kao krutog oko trentne ose kroz tačku M, pri čemu je ugao trenutnog obrtanja  $d\vec{\psi} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{s}$ . Iz kinematike krutog tela poznato je da se translacija i rotacija mogu zameniti jednom rotacijom oko trenutne ose rotacije.

Drugi deo promene vektora pomeranja se može napisati u obliku:

$$\{ds_{\text{def}}\} = \{\delta\} = \oint_s \{dr\} = \oint \{dr\} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix} \begin{cases} dx \\ dy \\ dz \end{cases} \quad (13)$$

i predstavlja čistu deformaciju vektora pomeranja pri prelasku tela iz konfiguracije I u konfiguraciju II, i naziva se vektor deformacijski. Kako vektor  $\vec{MN}$  možemo pretavstaviti kao proizvod orta  $\vec{n}$  u pravcu vektora  $\vec{MN}$  i njegovog intenziteta  $dr$ , to se vektor deformacije može napisati u obliku:

$$\{ds_{\text{def}}\} = \oint \{n\} dr = \{\delta_n\} dr \quad (14)$$

gde je  $\vec{\delta}_n$  redukovani vektor deformacije u posmatranoj tački M deformabilnog tela za linijski element u pravcu orta  $\vec{n}$ . Dakle pomeranja svih tačaka koje leže na jednom pravcu određenim ortom  $\vec{n}$  u okolini tačke M karakterisana su vektorom deformacije  $\vec{\delta}_n$  koji predstavlja pomeranje tačke na jediničnom rastojanju, tj. redukovanim vektorom deformacije. Takodje zaključujemo da su relativna komponentna pomeranja usled čiste deformacije, i to infinitezimalne proporcionalne dužini  $dr$ , rastojanju tačke N od tačke M. Redukovani vektor deformacije  $\vec{\delta}_n$  koji karakteriše relativna pomeranja linijskog elementa u pravcu orta  $\vec{n}$ , zavisi od tog pravca i referentne

tačke M na isti način kao i vektor totalnog napona  $\vec{P}_n$  od pravca normalne na presečnu ravan i zato analogno možemo redukovane vektore deformacije u uočenoj tački napregnutog deformabilnog tela M za linijske elemente u prvcima koordinatnih osa  $M_x$ ,  $M_y$  i  $M_z$  u konfiguraciji I da napišemo u obliku:

$$\{\delta_x\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}, \quad \{\delta_y\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}, \quad \{\delta_z\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

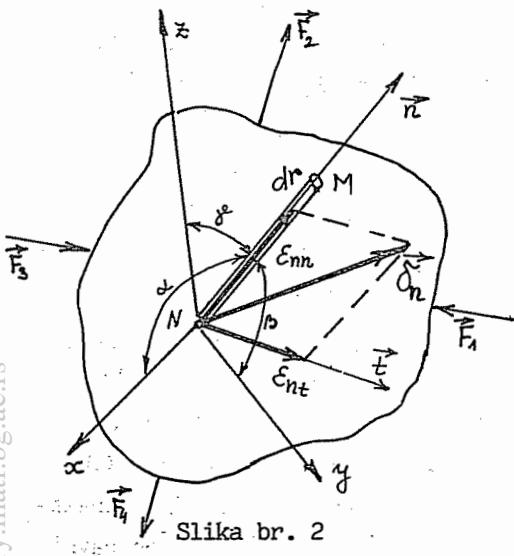
Oznake  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\varepsilon_{xy}$ ,  $\varepsilon_{xz}$  i  $\varepsilon_{yz}$  koje smo već uveli bez objašnjenja, kroz izraz (13) sada dobijaju svoje značenje kao Descartes-ove koordinate redukovanih vektora deformacije u posmatranoj tački M deformabilnog tela za linijske elemente u prvcima ortova koordinatnih osa. Kako smo iz prethodnog zaključili da postoji matematička analogija između obrazaca za totalni napon u posmatranoj tački napregnutog tela a za presečne ravne paralelne koordinatnim ravnima i obrazaca za redukovane vektore deformacije u posmatranoj tački deformabilnog tela a za linijske elemente orijentisane ortovima koordinatnih osa to po ugledu na komponentne napone, normalni i tangencijalni možemo formalno koordinate redukovanih vektora pomeranja  $\vec{\delta}_x$ ,  $\vec{\delta}_y$  i  $\vec{\delta}_z$  nazvati komponentnim deformacijama, dilatacijom u pravcu orta orientacije linijskog elementa i klizanjem u pravcu upravnom na pravac orijentacije linijskog elementa. Kao neposredna posledica toga je da će stanje deformacija u izabranoj tački deformabilnog tela biti potpuno određeno ako su poznate komponentne deformacije za linijske elemente iz te tačke u tri uzajamno upravna pravca u konfiguraciji prirodnog stanja tela. Zato analogno tensoru napona možemo da uvedemo pojam tensora deformacije. Sada analogno vektoru totalnog napona za ravan sa normalom  $\vec{n}$  u dатој tački možemo na osnovu (13) i (14) da napišemo redukovani vektor deformacije u dатој tački za linijski element iz nje u pravcu određenom ortom  $\vec{n}$  u obliku:

$$\{\delta_n\} = \text{C}^0 \{n\}. \quad (16)$$

Poslednji izraz je analogan Cauchy-jevim jednačinama za totalni napon. Na slici br. 2. prikazan je linijski element iz tačke N u pravcu orijentisanom ortom  $\vec{n}$ , i vektor redukovanih vektora totalne deformacije sa svojim komponentama normalnom - dilatacijom i tangencijalnom - klizanjem,  $\varepsilon_{nn}$  i  $\varepsilon_{nt}$ . Iz izloženog vidimo da je redukovani vektor totalne deformacije

82.

$\delta_n$ , ili redukovani vektor ukupne deformacije vektor u određenoj tački za određeni pravac. To je znači vektor vezan za tačku i pravu. U opštem slučaju



Slika br. 2

ne mora da bude kolinearan sa tim pravcem. Znači da je za poznavanje redukovanih vektora ukupne deformacije potrebno poznavanje šest nezavisnih skalara, odnosno šest nezavisnih komponentnih deformacija. Zato uvodimo pojam tenzora deformacije u obliku matrice  $\mathcal{E}$  tenzora deformacije koju smo dobili kao simetrični deo funkcionalne matrice  $\mathcal{S}$ :

$$\mathcal{E} = \mathcal{S}_s = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = (\{\delta_x\} \{\delta_y\} \{\delta_z\}) \quad (17)$$

S obzirom na sve već rečeno vektor pomeranja  $\vec{s}$  možemo sada da napišemo u obliku:

$$\vec{s} = \vec{s}_0 + d\vec{s}_{rot} + d\vec{s}_{def} \quad \text{ili} \quad \{s\} = \{s_0\} + \{s_{rot}\} + \{d s_{def}\} \quad (18)$$

i da izvučemo sledeći zaključak:

Pri prelazu elementa deformabilnog tela iz konfiguracije nedeformisanog (prirodnog) stanja u konfiguraciju napregnutog (deformisanog) stanja elementarno pomeranje je rezultat translacije, rotacije i čiste infinitezimalne deformacije.

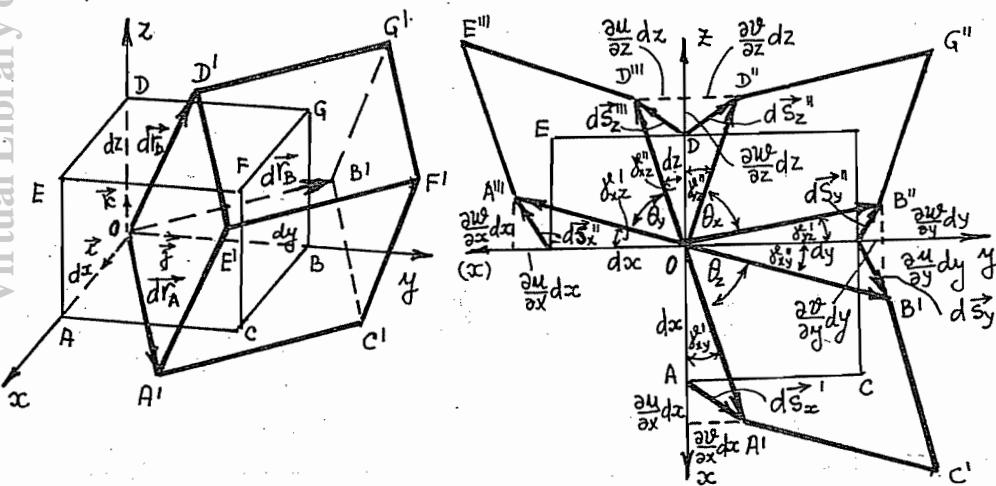
Ovaj zaključak predstavlja osnovni stav kinematike deformabilnog tela i poznat je kao Helmholtz-ov stav. Predstavlja fundamentalnu teoremu.

## II.2. DILATACIJE I KLIZANJA.ZAPREMINSKA DILATACIJA.

Videli smo da se stanje deformacija napregnutog tela osim vektorima pomeranja tačaka može izraziti i vektorom čiste infinitezimalne deformacije, a i redukovanim vektorom totalne deformacije, koji daje neposredan uvid u deformaciju linijskih, a time i zapreminskih elemenata u okolini

proizvoljno izbrane tačke deformabilnog tela. Međutim do tih rezultata mi smo došli čisto matematičkim putem i analogijom sa stanjem napona koje smo ranije analizirali. Pri deformaciji tela, tj. pri prelasku tela iz jedne konfiguracije u drugu menjaju se relativni položaji čestica tela, a sa tim i posmatranih tačaka u telu. Te deformacije geometrijski se ogledaju u promenama rastojanja tačaka, a to znači dužina linijskih elemenata i promeni uglova između tih linijskih elemenata u konfiguraciji napregnutog tela u odnosu na konfiguraciju nенapregnutog tela. Relativnu promenu dužina i uglova u deformabilnom telu karakterišu veličine koje su dilatације i лизана, koje smo jednim imenom nazvali specifičnim komponentnim deformacijama.

Da bi smo elementima matrice tenzora deformacije  $\mathcal{F}$ , odnosno deformatoru vektora pomeranja dali i geometrijska očigledna značenja posmatraćemo zamišljeno izdvojeni iz deformabilnog tela deo u obliku elementarnog paralelopipeda OABCDEFG u referentnoj konfiguraciji prirodnog stanja tela i prepostavimo da nema translacije, odnosno da smo je eliminisali. Pod dejstvom spoljašnjeg opterećenja telo prelazi u napregnuto stanje i odgovarajuću konfiguraciju deformisanog tela menjajući oblik i zapreminu uočeni paralelopiped prelazi u odgovarajući OA'B'C'D'E'F'G' kao što je to na slici br.3



Slika br.3

prikazano. Posmatrajmo deformaciju osnovice OABC u ravni Oxy, koja prelazi u oblik O'B'C'A', jer su se tačke A, B i C pomerile u položaje A', B', i C'. Ivice paralelopipeda u konfiguraciji nенapregnutog tela su bile  $d\mathbf{x}$ ,

84.

$dy$  i  $dz$  kao što je na slici br. 3 prikazano. Neka je  $\vec{s} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$  vektor pomeranja tačke O. Priroštaj vektora pomeranja pri prelasku iz tačke O u tačku A je:

$$d\vec{s}_x = \frac{\partial \vec{s}}{\partial x} dx = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial w}{\partial x} \vec{k} \right) dx, \quad (19)$$

pa je sada vektor  $\vec{OA}$  prešao u položaj  $\vec{OA}' = d\vec{r}_A'$  i pri tome promenio pravac, smer i intenzitet, tako da je sada:

$$d\vec{r}_A' = \vec{OA} + \vec{AA}' = \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \vec{i} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial w}{\partial x} \vec{k} \right) dx. \quad (20)$$

U slučaju infinitezimalnih deformacija dužina vektora  $d\vec{r}_A'$  malo se razlikuje od njegove projekcije na pravac Ox ose, te su njegove dužine pre i posle deformacije:

$$|\vec{OA}| = dx \quad |\vec{OA}'| = |d\vec{r}_A'| \approx \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx.$$

Dilataciju linijskog elementa u pravcu Ox ose možemo da definišemo kao relativno izduženje linijskog elementa u pravcu Ox ose te je jednako količniku razlike dužine tog elementa posle i pre deformacije i njegove dužine pre deformacije:

$$\varepsilon_x = \frac{|d\vec{r}_A'| - |d\vec{r}_A|}{|d\vec{r}_A|} = \frac{\left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (21)$$

Na isti način odredjujemo dužine linijskih elemenata  $\vec{OB}$  i  $\vec{OD}$  pre i posle deformacije tela, a u pravcima koordinatnih osa Oy i Oz u referentnoj konfiguraciji tela:

$$|d\vec{r}_B| = dy \quad |d\vec{r}_B'| \approx \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \\ |d\vec{r}_D| = dz \quad |d\vec{r}_D'| \approx \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz$$

pa su dilatacije linijskih elemenata u pravcima tih osa:

$$\varepsilon_z = \frac{|d\vec{r}_D'| - |d\vec{r}_D|}{|d\vec{r}_D|} = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_y = \frac{|d\vec{r}_B'| - |d\vec{r}_B|}{|d\vec{r}_B|} = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (22)$$

Ugao  $\theta_z$  izmedju vektora  $d\vec{r}_A'$  i  $d\vec{r}_B'$ , odnosno linijskih elemenata  $\vec{OA}'$  i  $\vec{OB}'$  u konfiguraciji napregnutog tela odredjujemo pomoću njegovog kosinusa kao:

$$\cos \theta_z = \frac{(d\vec{r}_A', d\vec{r}_B')}{|d\vec{r}_A'| \cdot |d\vec{r}_B'|} = \frac{\left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \frac{\partial v}{\partial y} dy + \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial z} dx \frac{\partial w}{\partial y} dy}{\left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy}$$

Kako je  $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \ll 1$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y \ll 1$  i  $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \ll 1$  to za infinitezimalne deformacije možemo da odredimo njegovu približnu vrednost:

$$\cos \theta_z \approx \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_{xy}\right) = \sin \delta_{xy} \approx \delta_{xy} = 2 \varepsilon_{xy} \quad (23)$$

gde smo sa  $\delta_{xy}$  obeležili ukupno smanjenje ugla  $\angle AOB$ , koji je pre deformacije bio prav. Ova promena pravog ugla izražena u radijanima naziva se k l i z a n j e ili s m i c a n j e . Klizanje (smicanje) se sastoji iz dva dela  $\delta_{xy}'$  i  $\delta_{xy}''$ . Vrednosti tih uglova su:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_{xy}' \approx \delta_{xy}' &= \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{(1 + \frac{\partial u}{\partial x}) dx} \approx \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} \\ \operatorname{tg} \delta_{xy}'' \approx \delta_{xy}'' &= \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{(1 + \frac{\partial u}{\partial y}) dy} \approx \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \frac{\partial u}{\partial y}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \delta_{xy} = \delta_{xy}' + \delta_{xy}'' \\ \delta_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (24)$$

što je sa slike očigledno. Na potpuno isti način određujuju se i preostala klizanja u ravнима  $Oxz$  i  $Oyz$ , što daje:

$$\cos \theta_y = \frac{(d\vec{r}_A', d\vec{r}_B')}{|d\vec{r}_A'| |d\vec{r}_B'|} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} = \delta_{xz}' + \delta_{xz}'' = \delta_{xz}^e = 2 \varepsilon_{xz}, \quad (25)$$

$$\cos \theta_z = \frac{(d\vec{r}_B', d\vec{r}_C')}{|d\vec{r}_B'| |d\vec{r}_C'|} = \frac{\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}}{1 + \frac{\partial v}{\partial y}} = \delta_{yz}' + \delta_{yz}'' = \delta_{yz}^e = 2 \varepsilon_{yz}.$$

Iz izložene geometrijske interpretacije vidimo da su elementi tenzora deformacije koji leže na glavnoj dijagonali komponentne dilatacije linijskih elemenata u pravcima koordinatnih osa, dok su elementi van glavne dijagonale jednaki polovinama komponentnih klizanja u odgovarajućim koordinatnim ravnima. Matrica tenzora deformacije sada može da se napiše i kao:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \delta_{yx} & \frac{1}{2} \delta_{zx} \\ \frac{1}{2} \delta_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \delta_{zy} \\ \frac{1}{2} \delta_{xz} & \frac{1}{2} \delta_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad (26)$$

i ona

je simetrična matrica. Izvedeni izrazi za komponentne dilatacije i klizanja oblika:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \delta_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \delta_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \delta_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned} \quad (27)$$

nazivaju se Cauchy-jeve jednačine ili Cauchy-jeve kinematičke jednačine.

Iz svega prethodnog rečenog sledi da je stanje deformacija napregnutog tela u okolini neke tačke određeno sa šest komponentnih deformacija i to tri dilatacije i tri klizanja. Posmatrano geometrijski možemo da formulišemo i sledeće zaključke: da pozitivnoj dilataciji odgovara izduženje, a negativ-

noj skraćenje; pozitivnom klizanju odgovara smanjenje pravog ugla izmedju linijskih elemenata u pozitivnim smerovima koordinatnih osa, dok negativnom klizanju odgovara povećanje tog ugla.

Pri deformaciji posmatranog dela tela u obliku paralelopipeda sa slike br. 2 videli smo da se menjaju dužine i uglovi, ali smo prećutno uveli pretpostavku da paralelne prave i posle deformacije ostaju paralelne, tj. da je deformacija afina, pa je paralelopiped postao kosi sa平行ivama, koje su i pre deformacije bile paralelne. Sa promenama dužina i uglova menja se i zapremina posmatranog paralelopipeda. Njegova zapremina pre deformacije je bila  $dV = dx dy dz$ . Vektori položaja tačaka A, B i D posle deformacije su poznati, pa je zapremina kosog elementarnog paralelopipeda jednaka mešovitom proizvodu tih vektora - ivica paralelopipeda u konfiguraciji napregnutog stanja deformabilnog tela:

$$dV' = (d\vec{r}_A' [d\vec{r}_B', d\vec{r}_D']) = dx dy dz \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad (28)$$

$$dV' \approx dx dy dz (1 + \frac{\partial u}{\partial x})(1 + \frac{\partial v}{\partial y})(1 + \frac{\partial w}{\partial z}) \approx dx dy dz (1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}).$$

Kako su dilatacije mnogo manje od jedinice to se nelinearni članovi kao male veličine višeg reda mogu zanemariti što smo i učinili u prethodnom izrazu, pa je sada zapremska ili volumna dilatacija jednaka količniku promene zapremine elementa napregnutog tela pri prelasku iz konfiguracije prirodnog stanja nenapregnutog tela u napregnuto stanje tela pod opterećenjem i zapremine elementa tela u nenapregnutom stanju, pa možemo da pišemo:

$$\varepsilon_v = \frac{dV' - dV}{dV} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div} \vec{S} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (28*)$$

Invariante matrice tenzora deformacije su:

$$\mathcal{E}_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div} \vec{S} = \varepsilon_v,$$

$$\mathcal{E}_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\delta_{xy}^2 \\ \frac{1}{2}\delta_{xy} & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\delta_{xz}^2 \\ \frac{1}{2}\delta_{xz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\delta_{yz}^2 \\ \frac{1}{2}\delta_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_z - \frac{1}{4}(\delta_{xy}^2 + \delta_{xz}^2 + \delta_{yz}^2),$$

$$\mathcal{E}_3 = \det \vec{S} = |\vec{S}| = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z - \frac{1}{4}(\varepsilon_x \delta_{yz}^2 + \varepsilon_y \delta_{xz}^2 + \varepsilon_z \delta_{xy}^2) + \frac{1}{4}\delta_{xy}\delta_{xz}\delta_{yz}. \quad (29)$$

gdakle vidimo da je prva invarijanta - prvi skalar matrice tenzora deformacije jednaka zapreminskoj dilataciji.

### II.3. HOMOGENA DEFORMACIJA

Ako posmatramo aksijalno napregnuti štap zaključujemo da su kod njega u svim tačkama i za sve linijske elemente paralelne jednom pravcu komponentne dilatacije i klizanja medjusobom jednaka. Takva deformacija tela naziva se homogena deformacija.

U opštem slučaju deformacija u telu je nehomogena, ali u beskonačno maloj okolini posmatrane tačke zbog kontinuiteta deformabilnog tela i posle deformacije može se uzeti da je deformacija homogena.

Kada su komponente deformacije - komponentne dilatacije i klizanja, i komponente rotacije  $p$ ,  $q$  i  $r$  konstantne onda su komponentna pomeranja linearne funkcije koordinata tačke te se takva deformacija naziva homogena deformacija i vektor pomeranja je tada:

$$\{s\} = \{s_0\} + A\{r\},$$

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}. \quad (30)$$

Zavisno od toga da li su komponentne dilatacije i klizanja ili pak komponentne rotacije jednake nuli razlikujemo dva slučaja homogene deformacije.

$1^{\circ}$  Posmatrajmo slučaj kada su komponentne deformacije jednake nuli  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \delta_{xy} = \delta_{xz} = \delta_{yz} = 0$ , tada u izrazu za vektor pomeranja ne postoji član koji odgovara čistoj deformaciji, te vektor pomeranja možemo napisati u obliku:

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad (31)$$

koji kazuje da se deformabilno telo pod dejstvom spoljašnjih sila u tom slučaju ponaša kao kruto telo, koje izvodi translatorno kretanje odredjeno sa  $\vec{s}_0$  i rotaciju odredjenu vektorom ugaonog obrtanja  $(\psi) = (p \ q \ r)$ .

88.

$2^{\circ}$  Neka su komponente ugla rotacije jednake nuli, a komponentne dilatacije i klizanja različiti od nule. Iz uslova jednakosti nuli komponenata ugla rotacije dobijamo sledeće uslove:

$$2 \begin{Bmatrix} p \\ \chi \\ r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{rot } \vec{s} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (32)$$

koji kažu da se vektorska funkcija - vektor pomeranja može izraziti kao gradijent neke skalarne funkcije:

$$\vec{s} = \text{grad } U(x, y, z) \quad (33)$$

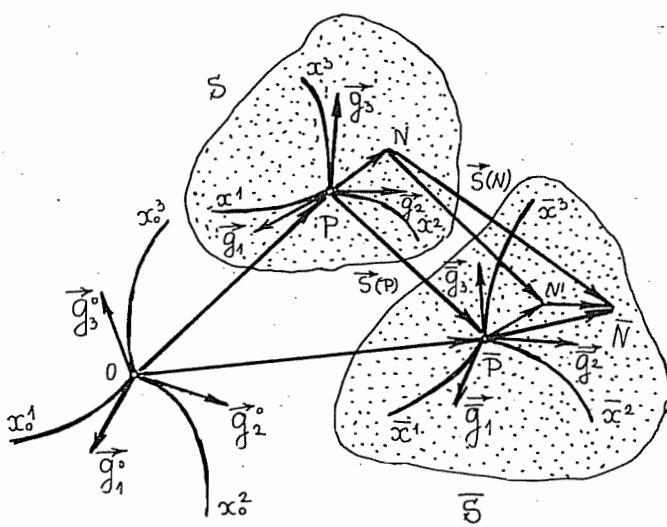
što znači da vektorska funkcija  $\vec{s}(x, y, z)$  ima svoj potencijal  $-U(x, y, z)$ , pa se ovakva homogena deformacija naziva potencijalnom. Znači u slučaju čiste homogene deformacije vektoru pomeranja odgovara potencijal  $-U(x, y, z)$

#### II.4. Tenzor konačne deformacije. Tenzor male deformacije.

Posmatrajmo neprekidnu deformabilnu sredinu koja se deformeše pod dejstvom opterećenja na njenoj konturnoj površi. Analizom njenе deformacije zaključujemo da zahtev da je prostor fizičkih dogadjaja - transformacija konfiguracije deformabilnog tela pod dejstvom spoljašnjeg opterećenja, euklidski trodimenzionalni povlači za sobom egzistenciju pravouglog Descartes - Cartesius -ovog koordinatnog sistema u odnosu na koji se može odrediti položaj bilo koje tačke iz oblasti unutar konturne površi deformabilnog tela. Descartes-ov pravougli koordinatni sistem je privilegovan u odnosu na druge koordinatne sisteme sa stanovišta geometrije prostora. Za opisivanje kretanja deformabilnog tela u euklidskom trodimenzionalnom prostoru često je pogodnije koristiti druge koordinatne sisteme. Izbor ovih koordinatnih sistema sa ciljem opisivanja deformabilnog tela zavisi od konkretnog problema, konturne površi deformabilnog tela i oblika opterećenja kojim je napregnuto deformabilno telo.

Možemo pretpostaviti da je referentna konfiguracija u pri-

rodnom stanju tela kada smatramo da je telo u nedeformisanom stanju i u posmatranoj tački tela  $P$  sa koordinatama  $x^1$ ,  $x^2$  i  $x^3$  definišemo položaj čestice tela čije je središte u toj tački. Koordinate  $x^k$ ,  $k = 1, 2, 3$  identificuju česticu u početnoj konfiguraciji pa ih nazivamo materijalne ili Lagrange-ove koordinate čestice  $P$ . Posle deformacije u konfiguraciji napregnutog tela čestice deformabilnog tela zauzimaju u prostoru oblast ograničenu površi konture  $\bar{S}$ . Čestica tela iz referentne konfiguracije  $P$  sada zauzima u novoj konfiguraciji položaj u tački  $\bar{P}$  koja je određena novim sistemom krivolinijskih koordinata  $\bar{x}^1$ ,  $\bar{x}^2$  i  $\bar{x}^3$ . Ove koordinate  $\bar{x}^i$ ,  $i=1,2,3$ , određuju položaj čestice u konfiguraciji napregnutog tela pa ih nazivamo prostorne koordinate. Kada se transformacija konfiguracije čestica tela iz prirodnog stanja u stanje napregnutog tela posmatra u vremenu ove prostorne koordinate u literaturi su poznate i kao Euler-ove koordinate.



Slika br.4

Posmatrajmo sada neprekidnu deformabilnu sredinu zatvorenu konturnom površi  $S$  u prirodnom stanju tela, kada je telo nenapregnuto, odnosno kada na njega ne dejstvuje spoljašnje opterećenje i kada smatramo da je nedeformisano i kao što je to na slici br. 4 prikazano izaberimo krivolinijski sistem koordinata  $x^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Neka skup nekih funkcija koordinata  $x^k$  definiše izduženje proizvoljnog infinitezimalnog pravo-

linijskog elementa (odsečka), koji prolazi kroz zadatu tačku deformabilne sredine, onda te funkcije definišu deformaciju materijalne okoline te tačke. Prepostavimo da se koordinatne linije koje smo izabrali u posmatranoj neprekidnoj deformabilnoj sredini u referentnoj (početnoj) konfiguraciji koja odgovara nenapregnutoj sredini sastoje iz materijalnih čestica te sredine. U procesu deformacije i u konačnoj konfiguraciji deformisanog, napregnutog tela pretpostavljamo da se koordinatne linije sastoje iz tih istih materijalnih tačaka (čestica) kao i u početnoj, referentnoj konfiguraciji. Kao rezultat dejstva spoljašnjih sila javlja se deformacija neprekidne deformabilne sredine obuhvaćene konturnom površi  $S$  u referentnoj konfiguraciji koja posle deformacije konačno prelazi u konturnu površ  $\bar{S}$ . Pri tome se početni zadati referentni sistem krivolinijskih koordinata  $x^k$  sa osnovnim koordinatnim vektorima  $\vec{g}_k$ , koje možemo smatrati materijalnim koordinatnim linijama, deformeše i sa novom konfiguracijom napregnutog tela od njih postaju materijalne linije drugačijeg oblika koje možemo uzeti kao novi sistem krivolinijskih koordinata  $\bar{x}^k$  sa osnovnim koordinatnim vektorima  $\vec{\bar{g}}_k$ . Znači da se referentni koordinatni sistem koordinata  $Ox^1x^2x^3$  sa osnovnim koordinatnim vektorima transforme u novi sistem krivolinijskih koordinata  $O\bar{x}^1\bar{x}^2\bar{x}^3$  sa osnovnim koordinatnim vektorima  $\vec{\bar{g}}_k$ , istovremeno sa deformisanjem napregnutog tela. Kao referentni koordinatni sistem u kome je određeno ukupno pomeranje tela uključujući i njegovo pomeranje kao krutog tela usvojimo sistem krivolinijskih koordinata  $Ox^1x^2x^3$  sa osnovnim koordinatnim vektorima  $\vec{g}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) kao što je to prikazano na slici br. 4. Sistem krivolinijskih koordinata  $Ox^1x^2x^3$  možemo izabrati prema potrebi, a jedan od sistema koordinata  $x^k$  ili  $\bar{x}^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) proizvoljno, dok je drugi potpuno definisan deformacijom.

Kvadrati linijskih elemenata :  $ds^2$  u referentnoj konfiguraciji prirodnog stanja tela - nedeformisanog, nenapregnuto, i  $d\bar{s}^2$  u konfiguraciji deformisanog, napregnutog tela pod dejstvom opterećenja dati su sledećim izrazima:

$$ds^2 = g_{nk} dx^n dx^k, \quad (34)$$

$$d\bar{s}^2 = \hat{g}_{nk} d\bar{x}^n d\bar{x}^k, \quad (35)$$

u kojima su  $g_{nk}$  i  $\hat{g}_{nk}$  kovarijantni metrički tensori koji se izračunavaju kao skalarni proizvodi odgovarajućih osnovnih koordinatnih vektora:

$$g_{nk} = (\vec{g}_n, \vec{g}_k), \quad \hat{g}_{nk} = (\vec{\hat{g}}_n, \vec{\hat{g}}_k), \quad (36)$$

čak su  $d\bar{x}^k$  kontravarijantne komponente (koordinate) infinitezimalnog vektora  $\bar{PN}$ , koji definiše relativni položaj tačke N u odnosu na tačku P, i  $d\bar{x}^k$  komponente (koordinate) infinitezimalnog vektora  $\bar{PN}$ , koji definiše relativni položaj tačke N u odnosu na tačku P. Infinitezimalnost vektora  $\bar{PN}$  je posledica neprekidnosti deformabilne sredine unutar konturne površi S pri njenoj transformaciji na konfiguraciju napregnutog tela unutar konturne površi  $\bar{S}$

Iz tenzorskog računa je poznato da je uporedjivanje i izvodjenje transformacija nad veličinama određenim svojim komponentama u odnosu na dopustivi koordinatni sistem datog prostora, moguće je samo ako se te veličine dovedu u istu tačku prostora, a to je vezano za paralelno pomeranje veličina, linijskih elemenata i uglova u datom prostoru. Prostori kod kojih paralelno pomeranje veličina ne zavisi od puta pomeranja nazivaju se prostori apsolutnog paralelizma, a takvi su svi euklidski prostori.

Kao što smo ranije već zaključili razlika rastojanja bilo koje dve tačke deformabilnog tela pre i posle deformacije je mera deformacije. Da bi smo odredili meru deformacije možemo uporedjivati dužine elementarnih linijskih elemenata pre ili posle deformacije kao i uglove između njih pre i posle deformacije. To znači da bi smo znali da li se telo pod dejstvom opterećenja deformiše ili ponaša kao kruto potrebno je uporediti dužine linijskih elemenata, koji se sastoje od istih čestica u obe konfiguracije deformabilnog tela, kada je deformabilno telo nenapregnuto i kada je pod opterećenjem. Ove veličine možemo da uporedimo samo ako ih doveđemo u istu tačku prostora. Kako rezultat poredjenja treba da bude invarijantan u odnosu na izbor tačke u oblasti deformabilnog tela, odnosno u prostoru, to je zgodno birati one tačke (ili čestice) u kojima se linijski elementi na najpogodniji način izražavaju kao funkcije istih promenljivih. Imajući to u vidu kvadrate linijskih elemenata  $ds^2$  i  $d\bar{s}^2$ , respektivno, u referentnoj konfiguraciji prirodnog stanja tela i konfiguraciji napregnutog - deformisanog tela možemo napisati i u obliku:

$$ds^2 = g_{nk} dx^k dx^n = g_{nk}^* d\bar{x}^n d\bar{x}^k, \quad (34*)$$

$$d\bar{s}^2 = \hat{g}_{nk} d\bar{x}^k d\bar{x}^n = \bar{g}_{nk} dx^k dx^n, \quad (35*)$$

gde je označeno sa:

92.

$$\bar{g}_{nk} = \hat{g}_{im} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^n} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^k}, \quad (37)$$

$$g_{nk}^* = g_{im} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^k}. \quad (38)$$

Izrazom (37) definisan je Green-ov tenzor deformacije, a izrazom (38) Cauchy-jev tenzor deformacije kako su poznati u mehanici kontinuma. Ovi tenzori su poznati i kao desni Cauchy-Green-ov tenzor deformacije,  $\bar{g}_{nk}$  i levi Cauchy-Green-ov tenzor deformacije,  $g_{nk}^*$ . Oba ova tensora su simetrična i pozitivno definitna.

Odredimo sada meru deformacije napregnutog tela uporedjujući linijske elemente iz konfiguracije napregnutog, deformisanog tela i referentne konfiguracije prirodnog stanja tela, određivanjem razlike kvadra-ta njihovih linijskih elemenata u obliku:

$$d\bar{s}^2 - ds^2 = \hat{g}_{nk} d\bar{x}^n d\bar{x}^k - g_{nk} dx^n dx^k. \quad (39)$$

Infinitezimalni vektor  $\vec{PN}$  posle transformacije krivolinijskih koordinata  $x^n$  u krivolinijske koordinate  $\bar{x}^n$ , što se postiže prelaskom tela iz referentne konfiguracije prirodnog stanja tela u napregnuto stanje tela, transformiše se u vektor pomeranja  $\vec{PN}$  čije koordinate date jednačinom :

$$d\bar{x}^n = \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^k} dx^k. \quad (40)$$

Koristeći ovaj izraz jednačina (39) dobija oblik:

$$d\bar{s}^2 - ds^2 = 2\varepsilon_{nk} dx^n dx^k = 2\bar{\varepsilon}_{nk} d\bar{x}^n d\bar{x}^k, \quad (39*)$$

u kojoj smo uveli tenzor deformacije oblika:

$$\varepsilon_{nk} = \frac{1}{2} (\bar{g}_{nk} - g_{nk}), \quad (41)$$

koji je simetričan kovarijantni tenzor drugog reda. Ovaj tenzor deformacije je poznat u literaturi kao Lagrange-ov tenzor relativne deformacije. Razliku kvadrata dužina linijskih elemenata možemo napisati i u obliku:

$$d\bar{s}^2 - ds^2 = (\hat{g}_{nk} - g_{nk}^*) d\bar{x}^n d\bar{x}^k = 2\bar{\varepsilon}_{nk} d\bar{x}^n d\bar{x}^k \quad (39**)$$

gde smo uveli oznaku za sledeći izraz:

$$\bar{\epsilon}_{nk} = \frac{1}{2} (\hat{g}_{nk} - g_{nk}^*) \quad (41)$$

koji predstavlja simetričan kovarijantni tenzor drugog reda koji je u literaturi poznat kao Euler-ov tenzor relativne deformacije.

Iz izraza (39\*) se vidi da kada je  $\epsilon_{nk} = 0$  u svim tačkama deformabilnog tela, tada se linijski element ne menja po dužini i ne menjaju se uglovi izmedju linijskih elemenata te se telo ne deformiše.

Relativno izduženje ili dilatacija linijskog elementa  $d\bar{s}_N$  duž koordinatne linije krivolinijskog koordinatnog sistema koordinata  $\alpha^n$  jednako je količniku izduženja linijskog elementa u procesu deformisanja i dužine linijskog elementa u nedeformisanom stanju:

$$e_N = \frac{d\bar{s}_N - d{s}_N}{d{s}_N} \quad (42)$$

Saglasno formulama (34) i (35) za dužine linijskih elemenata duž koordinatnih linija u referentnoj konfiguraciji i konačnoj konfiguraciji deformisanog tela dobijamo:

$$d\bar{s}_N = \sqrt{\bar{g}_{NN}} d\alpha^n, \\ d{s}_N = \sqrt{g_{NN}} d\alpha^n, \quad (43)$$

Za relativno izduženje linijskog elementa duž koordinatne linije u odnosu na referentnu konfiguraciju dobijamo:

$$e_N = \sqrt{\frac{\bar{g}_{NN}}{g_{NN}}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{2\epsilon_{NN}}{g_{NN}}} - 1 \quad (42*)$$

Uvde se sumiranje po indeksu N ne izvodi, a znak (+) je uzet iz razloga što je za  $\epsilon_{NN} = 0$  i relativno izduženje jednako nuli.

Kosinus ugla  $\theta_{NK}$  izmedju dvaju linijskih elemenata  $d\bar{s}_N$  i  $d\bar{s}_K$ , koji su pre prelaska deformabilnog tela u novu konfiguraciju, u referentnoj konfiguraciji bili usmereni duž koordinatnih linija  $\alpha^n$  i  $\alpha^k$  krivolinijskog koordinatnog sistema, je:

$$\cos \bar{\theta}_{NK} = \frac{\hat{g}_{NK} d\bar{s}_N d\bar{s}_K}{d\bar{s}_N d\bar{s}_K} = \frac{\hat{g}_{ij} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^N} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^K} dx^N dx^K}{\sqrt{\bar{g}_{NN} \bar{g}_{KK}}} \quad (44)$$

Uzimajući u obzir izraz (37) prethodna formula dobija oblik:

$$\cos \bar{\theta}_{NK} = \frac{\bar{g}_{NK}}{\sqrt{\bar{g}_{NN} \bar{g}_{KK}}} = \frac{g_{NK} + 2\epsilon_{NK}}{\sqrt{(g_{NN} + 2\epsilon_{NN})(g_{KK} + 2\epsilon_{KK})}} \quad (45)$$

94.

Formule (42\*) i (45) pokazuju da šest komponenata Lagrange-ovog tenzora relativne deformacije koji su definisani formulama (41) u potpunosti omogućavaju izračunavanje relativnih izduženja linijskih elemenata duž koordinatnih linija, koji polaze iz posmatrane tačke deformabilnog tela, kao i ugao izmedju dvaju linijskih elemenata posle deformacije tela, koji su do deformacije bili usmereni duž koordinatnih linija  $x^k$ . Kako je ugao koordinatnih linija u referentnoj konfiguraciji u prirodnom stanju tela poznat, to se lako određuje promena tog ugla posle deformacije.

Potrebito je da sada odredimo vezu izmedju komponenata  $\mu^i$  vektora pomeranja  $\vec{s}$  i komponenata tenzora deformacije  $\epsilon_{nk}$ . Sa slike br. 4 očigledno je da je:

$$\overrightarrow{r} = \vec{r} + \vec{s}. \quad (46)$$

Kako se  $\vec{g}_n$  i  $\overrightarrow{\vec{g}}_n$  javljaju kao osnovni koordinatni vektori konfiguracije tela pre i posle dejstva opterećenja, to za njih važi da je:

$$\vec{g}_k = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^k}; \quad \overrightarrow{\vec{g}}_k = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial x^k}; \quad d\vec{r} = \vec{e} ds = \overrightarrow{\vec{g}}_n dx^n, \quad (47)$$

dok iz vektorske jednačine (46) diferenciranjem dobijamo da je:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^k} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial x^k} + \frac{\partial \vec{s}}{\partial x^k} \quad (48)$$

Unošenjem izraza (47) u prethodnu jednačinu dobijamo da je:

$$\overrightarrow{\vec{g}}_m \frac{\partial \vec{x}^m}{\partial x^k} = \overrightarrow{\vec{g}}_k + \frac{\partial \vec{s}}{\partial x^k}. \quad (49)$$

Kako za konfiguracije unutar konturne površi  $S$  i konturne površi  $\overline{S}$  važi redom da je:

$$g_{nk} = (\vec{g}_n, \vec{g}_k), \quad \widehat{g}_{nk} = (\overrightarrow{\vec{g}}_n, \overrightarrow{\vec{g}}_k),$$

to pomoću pravila skalarnog množenja i izraza za transformaciju (37) nalazimo da je:

$$\overline{g}_{nk} = \left( \overrightarrow{\vec{g}}_n + \frac{\partial \vec{s}}{\partial x^n} \right) \left( \overrightarrow{\vec{g}}_k + \frac{\partial \vec{s}}{\partial x^k} \right) = g_{nk} + \overrightarrow{\vec{g}}_n \cdot \frac{\partial \vec{s}}{\partial x^k} + \overrightarrow{\vec{g}}_k \cdot \frac{\partial \vec{s}}{\partial x^n} + \frac{\partial \vec{s}}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial \vec{s}}{\partial x^k}, \quad (50)$$

Unošenjem poslednjeg izraza u izraz (41) za Lagrange-ov tenzor relativne deformacije ili kratko kako ćemo ubuduće upotrebljavati tenzor deformacije dobijamo:

$$\epsilon_{nk} = \frac{1}{2} \left( \overrightarrow{\vec{g}}_n \cdot \frac{\partial \vec{s}}{\partial x^k} + \overrightarrow{\vec{g}}_k \cdot \frac{\partial \vec{s}}{\partial x^n} + \frac{\partial \vec{s}}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial \vec{s}}{\partial x^k} \right) \quad (51)$$

U odnosu na krivolinijski sistem koordinata  $x^k$  vektor pomeranja  $\vec{s}$  možemo da pretstavimo pomoću kontravarijantnih  $\mu^k$  i kovarijantnih  $\lambda_k$

koordinata u obliku:

$$\vec{s} = \mu^k \vec{g}_k = \mu_k \vec{g}^k, \quad (52)$$

gde se sumiranje vrši po indeksu  $k$ . Imajući u vidu izraze za parcijalne izvode osnovnih koordinatnih vektora

$$\frac{\partial \vec{g}_n}{\partial x^k} = \Gamma_{nk}^j \vec{g}_j, \quad \frac{\partial \vec{g}^n}{\partial x^k} = -\Gamma_{jk}^n \vec{g}^j, \quad (53)$$

i da kovarijantni izvodi kontravarijantnog i kovarijantnog vektora imaju oblik :

$$\begin{aligned} \mu_{,j}^i &= \frac{\partial \mu^i}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^i \mu^k, \\ \mu_{ij} &= \frac{\partial \mu_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \mu_k \end{aligned} \quad (54)$$

nalazimo parcijalne izvode vektora pomeranja  $\vec{s}$  u obliku:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{s}}{\partial x^n} &= \mu_{,n}^k \vec{g}_k \\ \frac{\partial \vec{s}}{\partial x^k} &= \mu_{,k} \vec{g}^i \end{aligned} \quad (55)$$

gde su  $\mu_{,n}^k$  i  $\mu_{,k}$  kovarijantni izvodi odgovarajućih kontravarijantnih i kovarijantnih koordinata vektora pomeranja. U napred navedenim izrazima,  $\Gamma_{ij}^k$  su Cristoffel-ovi simboli druge vrste i izračunavaju se za metrički tenzor u konfiguraciji koja odgovara prirodnom stanju tela, tj. nezapregnutog tela. Ako sada unesemo izraze (55) za parcijalne izvode vektora pomeranja u izraz (51) za tenzor deformacije i uzmememo u obzir da je

$$\vec{g}_n \cdot \vec{g}^\alpha = g_n^\alpha = \delta_n^\alpha$$

dobijamo izraz za Lagrange-eov tenzor relativne deformacije, koji ćemo u buduće zvati kratko tenzor deformacije, u obliku:

$$\epsilon_{nk} = \frac{1}{2} (\mu_{n,k} + \mu_{k,n} + \mu_{d,k} \mu_{d,n}^\alpha) \quad (56)$$

Prema poslednjoj formuli, a pomoću kovarijantnih izvoda kontravarijantnih i kovarijantnih komponenata vektora pomeranja  $\vec{s}$  u sistemu osnovnih koordinatnih vektora  $\vec{g}^\alpha$  i  $\vec{g}_\alpha$  možemo da izračunamo komponente tenzora konačne deformacije nelinearne funkcije kovarijantnih izvoda kontravarijantnih i kovarijantnih koordinata vektora pomeranja.

Ako su deformacije (izduženja i klizanja) male veličine istog reda malih veličina, to u formuli (56) za komponente tenzora konačne rela-

tivne deformacije možemo zanemariti nelinearne članove i dobiti uprošćeni izraz za izračunavanje komponenata tenzora male deformacije u obliku:

$$\varepsilon_{nk} = \frac{1}{2} (\mu_{n,k} + \mu_{k,n}). \quad (57)$$

Materijali koji se primenjuju u tehnici, sa isključenjem takvih kao što je guma i plastične mase, zadržavaju osobinu elastičnosti samo pri veoma malim izduženjima i klizanjima. Odatle je i vidljiva praktična važnost izučavanja malih deformacija, a sa tim i uvodjenja pojma tenzora malih deformacija.

Do izraza za tenzor malih deformacija možemo doći i na sledeći način. Na slici br. 4 neka je pomeranje tačke  $P$  u tačku  $\bar{P}$  određeno vektorom pomeranja  $\vec{PP} = \vec{S}$ , dok je pomeranje tačke  $N$  bliske tački  $P$  u tačku  $N$  određeno vektorom pomeranja  $\vec{NN} = \vec{s}_1$ .

Razložimo sada vektor pomeranja tačke  $N$  u red u okolini tačke  $P$  i zanemarimo članove viših redova malih veličina tako da dobijamo:

$$\vec{s}_1(N) = \vec{S}(P) + \frac{\partial \vec{S}(P)}{\partial x^n} dx^n = \vec{S}(P) + \frac{\partial}{\partial x^n} (\mu^k \vec{g}_k) dx^n, \quad (58)$$

odakle nalazimo pomeranje  $d\vec{s}$  tačke  $N$  u odnosu na pomeranje tačke  $P$ :

$$d\vec{s} = \mu_{,n}^k \vec{g}_k dx^n = d\mu_k \vec{g}^k \quad (59)$$

Ako prethodni izraz pomnožimo skalarno osnovnim koordinatnim vektorom  $\vec{g}_m$  dobijamo:

$$d\mu_k = \mu_{k,n} dx^n \quad (60)$$

gde je  $\mu_{k,n}$  kovarijantni izvod kovarijantne koordinate vektora pomeranja u tački  $P$ . Ako uvedemo simetrični  $\varepsilon_{nk}$  i antisimetrični tenzor drugog reda  $\omega_{kn}$  u obliku:

$$\varepsilon_{kn} = \frac{1}{2} (\mu_{k,n} + \mu_{n,k}), \quad (61)$$

$$\omega_{kn} = \frac{1}{2} (\mu_{k,n} - \mu_{n,k}), \quad (62)$$

to za koordinate vektora priraštaja vektora pomeranja imamo:

$$d\mu_k = \varepsilon_{nk} dx^n + \omega_{nk} dx^n \quad (63)$$

Simetrični tenzor  $\varepsilon_{nk}$  je tenzor relativne deformacije, dok antisimetrični tenzor  $\omega_{nk}$  odgovara rotaciji tela kao da je kruto, odnosno okoline posmatrane tačke  $P$ .

Koristeći izraze (54) za kovarijantne izvode, za komponente tenzora deformacije dobijamo:

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} - 2 \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ i \ j \end{smallmatrix} \right\} u_k \right]. \quad (64)$$

Ovaj tenzor deformacije naziva se još i **deformatator vektora pomeranja**.

Da bi smo dali fizičko objašnjenje elemenata tenzora male deformacije iskoristićemo ranije izvedene izraze (42\*) za relativno izduženje linijskog elementa u pravcu koordinatne linije i izraza (45) za kosinus ugla  $\theta_{NK}$  između dva linijska elemenata u prvcima koordinatnih linija. U izrazu za izduženje linijskog elementa duž koordinatne linije za slučaj malih deformacija izraz  $2 \mathcal{E}_{NN}/g_{NN}$  je mala veličina prvog reda u odnosu na jedinicu te zbog toga izraz sa korenom možemo razviti u red i začvrzati samo prva dva člana tako da dobijemo:

$$\mathcal{E}_{(NN)} = \sqrt{1 + \frac{2 \mathcal{E}_{NN}}{g_{NN}}} - 1 \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{2 \mathcal{E}_{NN}}{g_{NN}} - 1 = \frac{\mathcal{E}_{NN}}{g_{NN}}; \quad (65)$$

$N=1, 2, 3.$

Ako tenzor male deformacije predstavimo pomoću simetrične matrice  $\epsilon_{ij}$  kao

$$(\epsilon_{ij}) = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{21} & \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{22} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad (66)$$

to iz izraza (65) zaključujemo da su dijagonalni članovi simetrične matrice pridružene simetričnom tenzoru relativne deformacije jednaki proizvodima linijskih dilatacija u prvcima duž koordinatnih linija i odgovarajućih koordinata metričkog tenzora  $g_{ij}$ .

Koristeći izraz (45) i stavivši da je  $\epsilon_{NK} = 0$  dobijamo vrednost kosinusa ugla koji zaklapaju odgovarajući linijski elementi u prvcima koordinatnih linija u referentnoj konfiguraciji nedformisanog tela:

$$\cos \theta_{NK} = \frac{g_{NK}}{\sqrt{g_{KK} g_{NN}}} \quad (67)$$

Ti uglovi su prikazani na slici br. 5. Ugao koji zaklapaju dva linijska elementa u prvcima koordinatnih linija u konfiguraciji čestica deformisanog tela jednak je zbiru ugla koji zaklapaju ti linijski elementi u referentnoj konfiguraciji nedformisanog tela  $\theta_{NK}$  i promeni  $\delta_{NK}^\theta$  tog ugla pri deformisanju tela i zato za  $\bar{\theta}_{NK}$  možemo da napišemo:

$$\begin{aligned} \cos \bar{\theta}_{NK} &= \cos(\theta_{NK} - \delta_{NK}^\theta) = \cos \theta_{NK} \cos \delta_{NK}^\theta + \sin \theta_{NK} \sin \delta_{NK}^\theta \approx \\ &\approx \cos \theta_{NK} + \delta_{NK}^\theta \sin \theta_{NK}. \end{aligned} \quad (68)$$

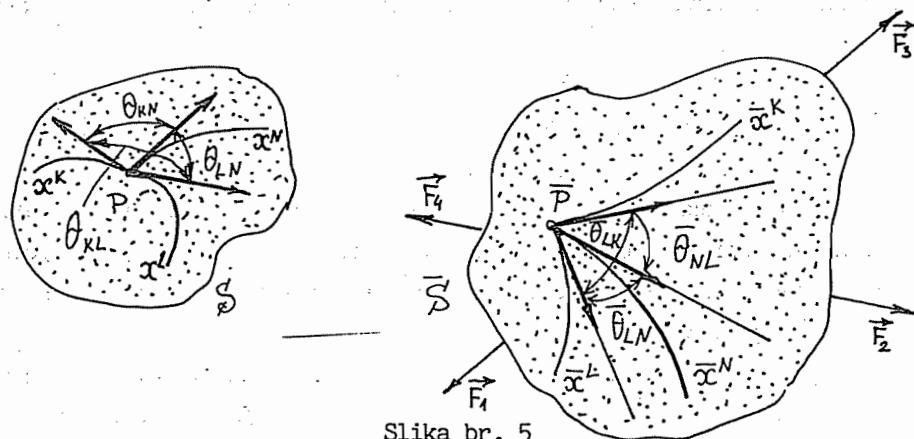
98.

Kako se radi o malim deformacijama to je ugao  $\delta_{NK}$ , tj., klizanje malo pa važi da je  $\cos \delta_{NK} \approx 1$ ;  $\sin \delta_{NK} \approx \delta_{NK}$  i kako je izraz  $\frac{2 \varepsilon_{NN}}{g_{NN}}$  za slučaj malih deformacija mali u odnosu na jedinicu to izraze sa korenima u imeniku možemo da razvijemo u red i u završnom rezultatu da zanemarimo male veličine višeg reda tako da dobijemo da je:

$$\delta_{NK} \sin \theta_{NK} = \cos \theta_{NK} - \cos \theta_{NK}$$

$$\delta_{NK} = \frac{1}{\sin \theta_{NK}} \left[ \frac{g_{NK} + 2 \varepsilon_{NK}}{\sqrt{(1 + \frac{2 \varepsilon_{NN}}{g_{NN}})(1 + \frac{2 \varepsilon_{KK}}{g_{KK}})}} - g_{NK} \right] \frac{1}{\sqrt{g_{NN} g_{KK}}} \approx \frac{2 \varepsilon_{NK}}{\sqrt{g_{NN} g_{KK}} \sin \theta_{NK}} \quad (69)$$

Koristeći poslednji izraz i izraz (66) dolazimo do zaključka da elementi van glavne dijagonale matrice pridružene simetričnom tenzoru relativne deformacije izražavaju promenu ugla između dva linijska elementa u pravcima koordinatnih linija i jednaki su toj promeni pomnoženoj polovinom kvadratnog korena proizvoda odgovarajućih koordinata metričkog tenzora i sinusom ugla koji su ti linijski elementi zaklapali u referentnoj konfiguraciji tela.



Slika br. 5

U prethodnom tekstu smo definisali zapreminsку dilataciju ili kubnu dilataciju kao divergenciju vektora pomeranja  $\vec{s}$  te ovde možemo za slučaj krivolinijskih koordinata da je napišemo u obliku:

$$\varepsilon_v = \operatorname{div} \vec{s} = \operatorname{div} (\mu^i \vec{g}_i) = \mu^i_{;i}$$

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta V} = \mu^i_{;i} = g^{ij} \mu_{ij} = g^{ij} \varepsilon_{ij} = \varepsilon^i_i = \frac{\partial \mu^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ki} \mu^k. \quad (70)$$

Kubna dilatacija je jednaka zbiru elemenata sa glavne dijagonale matrice tenzora deformacije.

## II.5. TENZOR MALE DEFORMACIJE U ORTOGONALNOM KRIVOLINIJSKOM KOORDINATNOM SISTEMU

U primeni na probleme teorije elastičnosti iz tehničke prakse najviše se koristi euklidski trodimenzionalni prostor  $E_3$  u odnosu na sistem ortogonalnih krivolinijskih koordinata  $\vec{g}^i$ . Osnovni koordinatni vektori  $\vec{g}_i$  sistema generalisanih koordinata  $\vec{g}^i$  u opštem slučaju nisu jedinični, ali su ortogonalni te važi da je njihov skalarni proizvod:

$$g_{ij} = (\vec{g}_i, \vec{g}_j), \quad (\vec{g}_i, \vec{g}^j) = (g_i) \{ g^j \} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}. \quad (71)$$

dok je njihov intenzitet:

$$|\vec{g}_i| = \sqrt{\vec{g}_i \cdot \vec{g}_i} = \sqrt{g_{ii}} = A_i = \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial g^1})^2 + (\frac{\partial x}{\partial g^2})^2 + (\frac{\partial x}{\partial g^3})^2}, \quad (72)$$

gde su  $A_i$  Lamè-ovi koeficijenti. Za slučaj ortogonalnih krivolinijskih sistema koordinata metrički tenzori se uprošćavaju, jer imaju samo po tri elementa različita od nule tako da su njima pridružene matrice dijagonalne, čiji su elementi na glavnoj dijagonali  $g_{ii} = (A_i)^2$  i  $g^{ii} = (A_i)^{-2}$ :

$$\mathbb{G} = (g_{ik}) = \begin{pmatrix} (A_1)^2 & & \\ & (A_2)^2 & \\ & & (A_3)^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{G}^{-1} = \begin{pmatrix} (A_1)^{-2} & & \\ & (A_2)^{-2} & \\ & & (A_3)^{-2} \end{pmatrix} \quad (73)$$

Svakom vektoru  $\vec{s}$  možemo pridružiti pridružiti: kontravariantne  $u^i$ , kovariantne  $u_i$  i fizičke  $u_{(i)}$  koordinate na sledeći način:

$$\vec{s} = u^i \vec{g}_i = u_i \vec{g}^i = u_{(i)} \vec{t}_{(i)}, \quad \vec{t}_{(i)} - \text{ort koordinatne ose} \quad (74)$$

Kontravariantne koordinate se izračunavaju prema izrazu:

$$u^i = (\vec{s}, \vec{g}^i) = g^{ik} u_k. \quad (75)$$

Kovariantne koordinate se izračunavaju pomoću izraza:

$$u_i = (\vec{s}, \vec{g}_i) = g_{ik} u^k = u^k (\vec{g}_i, \vec{g}^k) = g_{ii} u^i = (A_i)^2 u^i, \quad (76)$$

$(g_{ik} = 0, \quad i \neq k, \quad g_{ii} \neq 0),$

100.

dok se fizičke koordinate određuju pomoću izraza:

$$\mathcal{U}_{(i)} = (\vec{s}, \vec{t}_{(i)}) = (u^k \vec{g}_k, \vec{t}_{(i)}) = u^k \frac{1}{A_i} (\vec{g}_i, \vec{g}_k) = \frac{g_{ik} u^k}{A_i} = A_i u^i \quad (77)$$

Fizičke koordinate  $\mathcal{E}_{(ij)}$ , kontravarijantne koordinate  $\mathcal{E}^{ij}$  i kovarijantne koordinate  $\mathcal{E}_{ij}$  tenzora deformacije su u sledećim vezama:

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{\mathcal{E}^{ij}}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}} = \frac{\mathcal{E}^{ij}}{A_i A_j} = A_i A_j \mathcal{E}^{ij} \quad (\text{Ne vrši se sabiranje po indeksu } ij, \text{ po indeksu } ij)$$

(u ovim izrazima ne vrši se sabiranje po indeksima  $i, j$ ). Veza između kovarijantnih i kontravarijantnih koordinata tenzora deformacije data je sada o obliku:

$$\mathcal{E}_{ij} = (A_i)^2 (A_j)^2 \mathcal{E}^{ij}, \quad (g_{ij} = 0, i \neq j), \quad (79)$$

a u pravcima koordinatnih linija krivolinijskog ortogonalnog sistema koordinata.

Na osnovu definisanih veza fizičkih, kovarijantnih i kontravarijantnih koordinata vektora i tenzora za pravce krivolinijskih ortogonalnih osa možemo da napišemo fizičke koordinate tenzora male deformacije u tom krivolinijskom ortogonalnom sistemu u obliku:

$$\mathcal{E}_{(ij)} = \mathcal{E}_{IJ} = \frac{1}{2\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi^j} (\sqrt{g_{ii}} \mathcal{U}_{(i)}) + \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\sqrt{g_{jj}} \mathcal{U}_{(j)}) - 2\sqrt{g_{kk}} \Gamma_{ij}^k \right], \quad (80)$$

(sumiranje samo po indeksu  $k$ )

gde su  $\mathcal{E}_{IJ}$  fizičke koordinate tenzora deformacije, dok su  $\mathcal{U}_I = \mathcal{U}_{(i)}$  fizičke koordinate vektora pomeranja  $\vec{s}$ . Ako se predje na Lamè-ove koeficijente za fizičke koordinate tenzora deformacije dobijamo:

$$\mathcal{E}_{IJ} = \frac{1}{2A_I A_J} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi^j} (A_I \mathcal{U}_I) + \frac{\partial}{\partial \xi^I} (A_J \mathcal{U}_J) - 2A_k \mathcal{U}_k \Gamma_{IJ}^k \right] \quad (81)$$

U poslednjim izrazima Cristoffel-ovi simboli druge vrste od 27 koliko ih ima svega je devet linearne nezavisnih i različitih od nule, što sledi iz simetrije i ortogonalnosti krivolinijskog koordinatnog sistema. su:

$$\Gamma_{jk}^i = 0, \quad i \neq j \neq k,$$

$$\Gamma_{jj}^i = g^{il} \Gamma_{jj,l} = -\frac{1}{2(A_i)^2} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (A_j)^2; \quad (82)$$

$$\Gamma_{ii}^i = g^{ii} \Gamma_{ii,i} = \frac{1}{2(A_i)^2} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (A_i)^2,$$

$$\Gamma_{ik}^i = g^{il} \Gamma_{ik,l} = \frac{1}{2(A_i)^2} \frac{\partial}{\partial x^k} (A_i)^2.$$

Zapreminska dilatacija se može napisati pomoću fizičkih koordinata vektora pomeranja, kao:

$$\epsilon_V = \operatorname{div} \vec{s} = \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} [A_2 A_3 M_{(1)}] + \frac{\partial}{\partial x^2} [A_1 A_3 M_{(2)}] + \frac{\partial}{\partial x^3} [A_1 A_2 M_{(3)}] \right\} \quad (83)$$

## II.6. KOMPONENTE Tenzora male deformacije i obrtanja u polarno-cilindričnom koordinatnom sistemu

Usvojimo polarno-cilindrički koordinatni sistem ortogonalnih koordinata  $r$ ,  $\varphi$  i  $z$  kao što je na slici br. 6 naznačeno. Osnovni koordinatni vektori neka su  $\vec{r}$ ,  $\vec{c}$  i  $\vec{k}$ . Neka je vektor položaja tačke  $N$  određen sa:  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \varphi$ ,  $x^3 = z$ ,

$$\vec{s} = g^{ij} \vec{g}_i = r \vec{r} + z \vec{k} = \vec{r} \cos \varphi + \vec{z} \sin \varphi + z \vec{k}. \quad (84)$$

Osnovni kovarijantni vektori su:

$$\vec{g}_i = \frac{\partial \vec{s}}{\partial x^i}, \quad \vec{g}_1 = \vec{r} \cos \varphi + \vec{z} \sin \varphi, \quad \vec{g}_2 = -\vec{r} \sin \varphi + \vec{z} \cos \varphi, \quad \vec{g}_3 = \vec{k}, \quad (85)$$

te su kovarijantne koordinate metričkog tensora:

$$g_{ii} = (\vec{g}_i, \vec{g}_i), \quad g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = 1, \quad g_{ik} = 0, \quad i \neq k, \quad (86)$$

dok se kontravarijantne koordinate metričkog tensora izračunavaju prema obrazcu:

$$g^{ij} = \frac{G^{ji}}{g}, \quad g = \det G,$$

gde su  $G^{ji}$  odgovarajući kofaktori matrice metričkog kovarijantnog tensora, i na osnovu toga dobijamo:  $g^{11} = 1$ ,  $g^{22} = r^{-2}$ ,  $g^{33} = 1$  jer je:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad G^{11} = r^2, \quad G^{22} = 1, \quad G^{33} = r^2, \quad G^{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad g = r^2. \quad (87)$$

Osnovni kontravarijantni koordinatni vektori za polarno-cilindričke koordinate su:

$$\vec{g}^i = g^{ij} \vec{g}_j$$

$$\vec{g}^1 = \vec{x} \cos\varphi + \vec{y} \sin\varphi, \quad \vec{g}^2 = -\frac{1}{r} \vec{x} \sin\varphi + \frac{1}{r} \vec{y} \cos\varphi. \quad (88)$$

Lamè-ovi koeficijenti su sada:

$$A_1 = 1, \quad A_2 = r, \quad A_3 = 1,$$

dok su Cristoffel-ovi simboli druge vrste:

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{jk}^i = 0 \quad \begin{matrix} i \neq 1, 2 \\ j \neq k \end{matrix} \text{ ili } \begin{matrix} j \neq 1, k \neq 2 \end{matrix}. \quad (89)$$

Vektor pomeranja u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu definišemo kao:

$$\vec{s} = u(r, \varphi, z) \vec{r} + v(r, \varphi, z) \vec{\varphi} + w(r, \varphi, z) \vec{z} \quad (90)$$

gde su  $u(r, \varphi, z)$ ,  $v(r, \varphi, z)$  i  $w(r, \varphi, z)$  fizičke koordinate vektora pomeranja  $\vec{s}$ . Kontravarijantne koordinate vektora pomeranja su sada:

$$u^1 = \frac{u^{(1)}}{A_1} = u, \quad u^2 = \frac{u^{(2)}}{A_2} = \frac{v}{r}, \quad u^3 = \frac{u^{(3)}}{A_3} = w, \quad (91)$$

dok su kovarijantne koordinate vektora pomeranja:

$$u_1 = A_1 u^{(1)} = u, \quad u_2 = A_2 u^{(2)} = r v, \quad u_3 = A_3 u^{(3)} = w \quad (92)$$

Koristeći sada obrasce (80) i (81) dobijamo za kovarijantne koordinate tensora deformacije u polarno-cilindričnom koordinatnom sistemu sledeće izraze:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \epsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v + r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \\ \epsilon_{22} &= r \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right), & \epsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ \epsilon_{33} &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \epsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (93)$$

dok za fizičke koordinate tensora deformacije dobijamo sledeće izraze:

$$\begin{aligned} \epsilon_{(11)} &= \epsilon_r = \frac{\epsilon_{11}}{A_1^2} = \frac{\partial u}{\partial r}, & \epsilon_{(12)} &= \epsilon_{r\varphi} = \frac{\epsilon_{12}}{A_1 A_2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \right], \\ \epsilon_{(22)} &= \epsilon_\varphi = \frac{\epsilon_{22}}{A_2^2} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right), & \epsilon_{(43)} &= \epsilon_{rz} = \frac{\epsilon_{13}}{A_1 A_3} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right], \\ \epsilon_{(33)} &= \epsilon_z = \frac{\epsilon_{33}}{A_3^2} = \frac{\partial w}{\partial z}, & \epsilon_{(23)} &= \epsilon_{rz} = \frac{\epsilon_{23}}{A_2 A_3} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (94)$$

koje možemo da prikažemo pomoću matrice tensora deformacije u obliku:

$$\underline{\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \right] & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \right] & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_r & \epsilon_{r\varphi} & \epsilon_{rz} \\ \epsilon_{r\varphi} & \epsilon_\varphi & \epsilon_{z\varphi} \\ \epsilon_{rz} & \epsilon_{rz} & \epsilon_z \end{pmatrix}. \quad (95)$$

Do istih rezultata možemo da dodjemo i elementarnim putem izračunavanjem priraštaja vektora pomeranja  $\vec{s}$  koji je dat izrazom (90) u kome su ortovi koordinatnih osa polarno-cilindričnog koordinatnog sistema:

$$\begin{aligned}\vec{r}_0 &= \vec{x} \cos \varphi + \vec{y} \sin \varphi, & \frac{d\vec{r}_0}{dp} &= \vec{c}_0, \\ \vec{c}_0 &= -\vec{x} \sin \varphi + \vec{y} \cos \varphi, & \frac{dc_0}{d\varphi} &= -\vec{r}_0, \\ \vec{k} &= \vec{r}_0.\end{aligned}\quad (96)$$

Promena vektora pomeranja je:

$$d\vec{s} = \left[ \frac{\partial u}{\partial r} dr + \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) d\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right] \vec{r}_0 + \left[ \frac{\partial v}{\partial r} dr + \left( u + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) d\varphi + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right] \vec{c}_0 + \left( \frac{\partial w}{\partial r} dr + \frac{\partial w}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) \vec{k}, \quad (97)$$

i može se u matričnom obliku napisati:

$$\{ds\} = \mathcal{D} \{d\beta\} = \mathcal{D} \begin{Bmatrix} dr \\ r d\varphi \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( u + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} dr \\ r d\varphi \\ dz \end{Bmatrix}, \quad (98)$$

i vidimo da je to proizvod funkcionalne nesimetrične matrice  $\mathcal{D}$  i vektora kolone  $\{d\beta\}$ . Funkcionalna matrica se može napisati kao zbir dve matrice, od kojih je jedna simetrična  $\mathcal{S} = \mathcal{D}_s$  i druga antisimetrična oblike:

$$\mathcal{C} = \mathcal{D}_s = \frac{1}{2} (\mathcal{S} + \mathcal{D}') = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \right] & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \right] & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (99)$$

$$\mathcal{D}_k = \frac{1}{2} (\mathcal{D} - \mathcal{D}') = \begin{Bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) \right] & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) \right] & 0 & -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial z} \right] \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{Bmatrix} \quad (99*)$$

Simetrična matrica  $\mathcal{C}$  predstavlja matricu tensora deformacije čiji su elementi fizičke koordinate tensora relativne deformacije, dok je druga matrica  $\mathcal{D}_k$ , antisimetrična i predstavlja matricu tensora rotacije. Ta kososimetrična matrica omogućava da ugao elementarne rotacije možemo da napišemo u obliku:

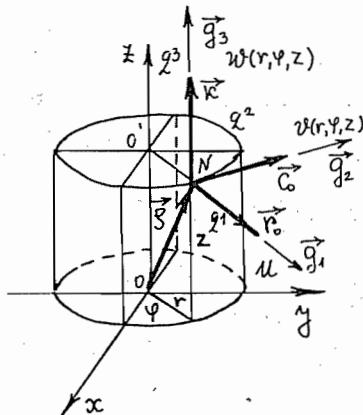
$$\vec{\psi}^* \{ \vec{\psi} \} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{s} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{v}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \end{array} \right\} \quad (100)$$

Zapreminska dilatacija izražena pomoću fizičkih koordinata vektora pomeranja u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu je:

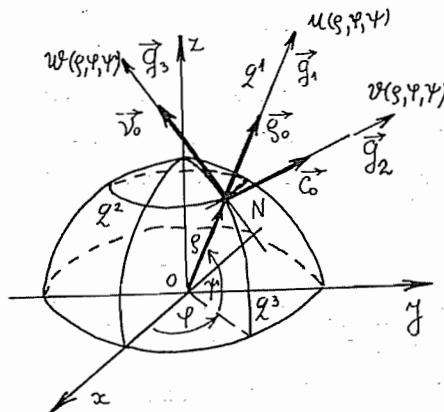
$$\epsilon_v = \operatorname{div} \vec{s} = \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (101)$$

U slučaju kada vektor pomeranja ne zavisi eksplisitno od koordinate  $z$  i nema komponentu pomeranja u pravcu Oz ose komponentne deformacije i ugao elementarne rotacije su:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \delta_{r\varphi} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial r}; \\ \epsilon_\varphi &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right), & \psi_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (102)$$



Slika br. 6



Slika br. 7

## II.7. KOMPONENTE Tenzora male deformacije i obrtanja u sfernom koordinatnom sistemu

Usvojimo sferni koordinatni sistem ortogonalnih koordinata  $\varrho^1 = \varrho$ ,  $\varrho^2 = \varphi$  i  $\varrho^3 = \psi$  kao što je to na slici br. 7 naznačeno. Osnovni jedinični koordinatni vektori neka su  $\vec{g}_0$ ,  $\vec{c}_0$ .

→ Neka je vektor položaja tačke  $N$  deformabilnog tela određen sa:

$$\vec{s} = \vec{s}^e \vec{g}_i = \vec{s} \vec{g}_o = \vec{x} g \cos \varphi \cos \psi + \vec{y} g \cos \varphi \sin \psi + \vec{z} g \sin \varphi. \quad (103)$$

Osnovni kovarijantni vektori su:  $\vec{g}_i = \frac{\partial \vec{s}}{\partial q_i}$ ,

$$\vec{g}_1 = \frac{\partial \vec{s}}{\partial g} = \vec{g}_o = \vec{x} g \cos \varphi \cos \psi + \vec{y} g \cos \varphi \sin \psi + \vec{z} g \sin \varphi,$$

$$\vec{g}_2 = \frac{\partial \vec{s}}{\partial \varphi} = -\vec{x} g \cos \varphi \sin \psi + \vec{y} g \cos \varphi \cos \psi, \quad (104)$$

$$\vec{g}_3 = \frac{\partial \vec{s}}{\partial \psi} = -\vec{x} g \sin \varphi \cos \psi - \vec{y} g \sin \varphi \sin \psi + \vec{z} g \cos \varphi,$$

te su sada kovarijantne koordinate metričkog tenzora

$$g_{ij} = (\vec{g}_i, \vec{g}_j), \quad g_{11}=1, \quad g_{22}=g^2 \cos^2 \psi, \quad g_{33}=g^2, \quad g_{ik}=0, \quad i \neq k, \quad (105)$$

dok se kontravarijantne koordinate metričkog tenzora mogu napisati pomoću:

$$g^{ij} = \frac{G^{ij}}{g}, \quad g = d\omega^1 \wedge \dots \wedge d\omega^r, \quad (106)$$

gdje su  $G^{ij}$  odgovarajući kofaktori matrice metričkog kovarijantnog tenzora za sferni koordinatni sistem iznose:

$$\begin{aligned} g^{11} &= 1, & g &= g^2 \cos^2 \psi, \\ g^{22} &= \frac{1}{g^2 \cos^2 \psi}, & G^1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ & g^2 \cos^2 \psi \\ & & g^2 \end{pmatrix}, & G^{11} &= g^4 \cos^2 \psi, \\ g^{33} &= \frac{1}{g^2}, & G^2 &= \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & 1 \end{pmatrix}, & G^{22} &= g^2, \\ & & & & G^{33} &= g^2 \cos^2 \psi. \end{aligned} \quad (107)$$

Sada osnovni kovarijantni koordinatni vektori za sferni koordinatni sistem

su:

$$\begin{aligned} \vec{g}^1 &= g^{ij} \vec{g}_j, \\ \vec{g}^1 &= \vec{x} \cos \varphi \cos \psi + \vec{y} \cos \varphi \sin \psi + \vec{z} \sin \varphi, \\ \vec{g}^2 &= \frac{1}{g \cos \psi} (-\vec{x} \sin \psi + \vec{y} \cos \psi), \\ \vec{g}^3 &= \frac{1}{g} (-\vec{x} \sin \varphi \cos \psi - \vec{y} \sin \varphi \sin \psi + \vec{z} \cos \varphi). \end{aligned} \quad (108)$$

Lamé-ovi koeficijenti su  $A_1=1$ ,  $A_2=g \cos \varphi$  i  $A_3=g$ .

Vektor pomeranja  $\vec{s}(g, \varphi, \psi)$  u sfernom koordinatnom sistemu definišemo kao:

$$\vec{s}(g, \varphi, \psi) = u(g, \varphi, \psi) \vec{p}_o + v(g, \varphi, \psi) \vec{q}_o + w(g, \varphi, \psi) \vec{z}_o \quad (109)$$

gde su  $u(g, \varphi, \psi)$ ,  $v(g, \varphi, \psi)$  i  $w(g, \varphi, \psi)$  fizičke koordinate vektora pomeranja. Kontravarijantne koordinate vektora pomeranja su sada:

106.

$$\mathcal{U}^1 = \frac{\mathcal{U}(1)}{A_1} = \mathcal{U}, \quad \mathcal{U}^2 = \frac{\mathcal{U}(2)}{A_2} = \frac{v}{g \cos \gamma}, \quad \mathcal{U}^3 = \frac{\mathcal{U}(3)}{A_3} = \frac{w}{\rho}, \quad (110)$$

dok su kovarijantne koordinate vektora pomeranja:

$$U_1 = A_1 \mathcal{U}(1) = \mathcal{U}, \quad U_2 = A_2 \mathcal{U}(2) = \frac{v}{g \cos \gamma}, \quad U_3 = A_3 \mathcal{U}(3) = \rho w. \quad (111)$$

Koristeći obrasce (80) odnosno (81) dobijamo za kovarijantne koordinate tenzora deformacije u sfernog koordinatnog sistemusledeće izraze:

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial g}, \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \gamma} + g \cos \gamma \frac{\partial v}{\partial \rho} - v \cos \gamma \right],$$

$$\epsilon_{22} = g \cos \gamma \left[ \frac{\partial v}{\partial \rho} + \mathcal{U} \cos \gamma - w \sin \gamma \right], \quad \epsilon_{13} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \gamma} + g \frac{\partial w}{\partial \rho} - w \right], \quad (112)$$

$$\epsilon_{33} = g \left( \frac{\partial w}{\partial \gamma} + \mathcal{U} \right), \quad \epsilon_{23} = \frac{1}{2} g \left[ \cos \gamma \frac{\partial w}{\partial \gamma} + \frac{\partial w}{\partial \rho} + v \sin \gamma \right].$$

dok za fizičke koordinate tenzora deformacije dobijamo izraze:

$$\epsilon_{gg} = \epsilon_g = \frac{\epsilon_{11}}{A_1^2} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \gamma}, \quad \epsilon_{g\gamma} = \frac{\epsilon_{12}}{A_1 A_2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{g \cos \gamma} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \gamma} + \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{g} \right],$$

$$\epsilon_{\gamma\gamma} = \epsilon_\gamma = \frac{\epsilon_{22}}{A_2^2} = \frac{1}{g \cos \gamma} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{\mathcal{U}}{g} - \frac{w}{g} \sin \gamma, \quad \epsilon_{g\gamma} = \frac{\epsilon_{13}}{A_1 A_3} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{g} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \gamma} + \frac{\partial w}{\partial \rho} - \frac{w}{g} \right], \quad (113)$$

$$\epsilon_{\gamma\gamma} = \epsilon_\gamma = \frac{1}{g} \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \gamma} + \mathcal{U} \right), \quad \epsilon_{\gamma\gamma} = \frac{\epsilon_{23}}{A_2 A_3} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial \gamma} + \frac{1}{g \cos \gamma} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{v}{g} \sin \gamma \right],$$

koje možemo da prikažemo i pomoću matrice tenzora deformacije u kojoj se prethodni izrazi elementi kolona i vrsta:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{gg} & \epsilon_{g\gamma} & \epsilon_{\gamma\gamma} \\ \epsilon_{g\gamma} & \epsilon_{\gamma\gamma} & \epsilon_{\gamma\gamma} \\ \epsilon_{\gamma\gamma} & \epsilon_{\gamma\gamma} & \epsilon_{\gamma\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_g & \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \gamma} & \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \gamma} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \gamma} & \epsilon_\gamma & \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \gamma} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \gamma} & \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \gamma} & \epsilon_\gamma \end{pmatrix}. \quad (114)$$

Do istih rezultata možemo da dodjemo i elementarnim putem izračunavanjem priraštaja vektora pomeranja  $\vec{s}$ , koji je zadat izrazom (109) u kome su ortovi koordinatnih osa sfernog koordinatnog sistema:

$$\begin{aligned} \vec{g}_o &= \cos \gamma (\vec{x} \cos \varphi + \vec{y} \sin \varphi) + \vec{z} \sin \gamma, \\ \vec{C}_o &= -\sin \varphi \vec{x} + \cos \varphi \vec{y}, \\ \vec{v}_o &= -\sin \gamma (\cos \varphi \vec{x} + \sin \varphi \vec{y}) + \cos \gamma \vec{z}. \end{aligned} \quad (115)$$

Priraštaj vektora pomeranja je sada:

$$\begin{aligned} d\vec{s} = & \left\{ \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi + \left( \frac{\partial u}{\partial \psi} - v \cos \psi \right) d\psi + \left( \frac{\partial u}{\partial \gamma} - w \right) d\gamma \right\} \vec{s}_0 + \\ & + \left\{ \frac{\partial v}{\partial \varphi} d\varphi + \left( u \cos \psi + \frac{\partial v}{\partial \psi} \right) d\psi + \frac{\partial v}{\partial \gamma} d\gamma - w \sin \psi d\psi \right\} \vec{s}_0 + \\ & + \left\{ \frac{\partial w}{\partial \varphi} d\varphi + \left( v \sin \psi + \frac{\partial w}{\partial \psi} \right) d\psi + \left( u + \frac{\partial w}{\partial \gamma} \right) d\gamma \right\} \vec{s}_0, \end{aligned} \quad (116)$$

može se u matričnom obliku napisati kao:

$$\{d\vec{s}\} = \mathcal{B} \begin{pmatrix} ds \\ s \cos \psi d\psi \\ s d\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \varphi} & \frac{1}{s \cos \psi} \left( \frac{\partial u}{\partial \psi} - v \cos \psi \right) & \frac{1}{s} \left( \frac{\partial u}{\partial \gamma} - w \right) \\ \frac{\partial v}{\partial \varphi} & \frac{1}{s \cos \psi} \left( u \cos \psi + \frac{\partial v}{\partial \psi} \right) & \frac{1}{s} \frac{\partial v}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial w}{\partial \varphi} & \frac{1}{s \cos \psi} \left( v \sin \psi + \frac{\partial w}{\partial \psi} \right) & \frac{1}{s} \left( u + \frac{\partial w}{\partial \gamma} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ds \\ s \cos \psi d\psi \\ s d\gamma \end{pmatrix} \quad (117)$$

proizvod funkcionalne matrice  $\mathcal{S}$  i vektora kolone  $\{ds\}$ . Funkcionalnu matricu  $\mathcal{S}$  možemo napisati kao zbir dve matrice, od kojih je jedna simetrična  $\mathcal{S}_s = \mathcal{S}_0$  i druga antisimetrična  $\mathcal{S}_k$  oblika:

$$\mathcal{S}_s = \frac{1}{2} (\mathcal{S} + \mathcal{S}^t), \quad \mathcal{S}_k = \frac{1}{2} (\mathcal{S} - \mathcal{S}^t),$$

$$\mathcal{S}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \varphi} & \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s \cos \psi} \frac{\partial u}{\partial \psi} - \frac{v}{s} \right] & \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s} \frac{\partial u}{\partial \gamma} - \frac{w}{s} + \frac{\partial w}{\partial \psi} \right] \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s \cos \psi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{v}{s} \right] & \frac{u}{s} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s \cos \psi} \frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{w}{s} \right] & \frac{1}{2} \left[ \frac{v}{s} \operatorname{tg} \psi + \frac{1}{s \cos \psi} \frac{\partial v}{\partial \gamma} + \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial \psi} \right] \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{w}{s} + \frac{\partial u}{\partial \psi} \right] & \frac{1}{2} \left[ \frac{v}{s} \operatorname{tg} \psi + \frac{1}{s \cos \psi} \frac{\partial w}{\partial \psi} \right] & \frac{1}{s} \left( u + \frac{\partial u}{\partial \gamma} \right) \end{pmatrix}, \quad (118)$$

$$\mathcal{S}_k = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{v}{s} - \frac{1}{s \cos \psi} \frac{\partial u}{\partial \psi} \right] & \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s} \frac{\partial u}{\partial \gamma} - \frac{w}{s} - \frac{\partial w}{\partial \psi} \right] \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{v}{s} - \frac{1}{s \cos \psi} \frac{\partial u}{\partial \psi} \right] & 0 & -\frac{1}{2} \left[ \frac{v}{s} \operatorname{tg} \psi + \frac{1}{s \cos \psi} \frac{\partial v}{\partial \gamma} - \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial \psi} \right] \\ -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{w}{s} - \frac{\partial u}{\partial \psi} \right] & \frac{1}{2} \left[ \frac{v}{s} \operatorname{tg} \psi + \frac{1}{s \cos \psi} \frac{\partial w}{\partial \psi} - \frac{1}{s} \frac{\partial u}{\partial \gamma} \right] & 0 \end{pmatrix} \quad (119)$$

Simetrična matrica predstavlja matricu tenszora deformacije, dok druga matrica  $\mathcal{S}_k$ , koja je antisimetrična pretstavlja matricu tenszora rotacije, te je ugao elementarne rotacije oblika:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{v}{s} \operatorname{tg} \psi + \frac{1}{s \cos \psi} \frac{\partial w}{\partial \psi} - \frac{1}{s} \frac{\partial v}{\partial \gamma} \\ \frac{1}{s} \frac{\partial u}{\partial \psi} - \frac{w}{s} - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{v}{s} - \frac{1}{s \cos \psi} \frac{\partial u}{\partial \psi} \end{pmatrix} \quad (120)$$

108.

Zapreminska dilatacija izražena pomoću fizičkih koordinata vektora pomeranja u sfernom koordinatnom sistemu je:

$$\mathcal{E}_v = \operatorname{div} \vec{s} = 2 \frac{u}{s} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{s} \frac{\partial v}{\partial \gamma} - \frac{w}{s} \operatorname{tg} \gamma + \frac{1}{s \cos \gamma} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \quad (121)$$

Za izvodjenje obrazaca (112) i (113) koristili smo obrazce (82) za izračunavanje Cristoffel-ovih simbola druge vrste, koji za sferni koordinatni sistem iznose:

$$\Gamma_{22}^1 = -s \cos^2 \gamma,$$

$$\Gamma_{33}^1 = -s, \quad (122)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{s},$$

$$\Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = -\operatorname{tg} \gamma,$$

$$\Gamma_{22}^3 = \sin \gamma \cos \gamma.$$

## II.8. USLOVI KOMPATIBILNOSTI DEFORMACIJA

Svaki tenzor deformacije  $\epsilon_{ij}$  je simetričan, ali svaki simetrični tenzor ne može biti tenzor deformacije koji odgovara nekom elementarnom pomeranju čestica neprekidne sredine. Komponente tenzora deformacije su simetrične su simetrične komponente tenzora koji se dobija kovarijantnim diferenciranjem vektora elementarnog pomeranja i svih šest njegovih koordinata zavisni samo od kontravarijantnih koordinata  $u^i$  vektora pomeranja

$\vec{s}$ , koje su funkcije položaja tačke P. Izvodimo zaključak da koordinate tenzora deformacije mogu da budu funkcije koje se dobijaju od kovarijantnog izvoda vektora, a uslovi koji to izražavaju biće uslovi kompatibilnosti deformacija.

Uslove kompatibilnosti dobijamo eliminacijom koordinata  $u_i$  vektora elementarnog pomeranja  $\vec{s}$  iz izraza:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (123)$$

tako da dobijemo izraze u kojima se javljaju samo koordinate tenzora deformacije. Zato diferenciramo tenzor deformacije (123) dva puta kovarijantno po koordinati  $x^i$  tako da dobijemo:

$$\epsilon_{ij,rs} = \frac{1}{2} (u_{i,jrs} + u_{j,irs}). \quad (124)$$

Prethodno dobijeni izraz pomnožimo dva puta uzastopno Ricci-jevim antisimetričnim tenzorom

$$\varepsilon^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk}, \quad (125)$$

tako da dobijemo:

$$\varepsilon^{inp} \varepsilon^{js2} \varepsilon_{ij,rs} = \frac{1}{2} (\varepsilon^{inp} \varepsilon^{js2} M_{ij,rs} + \varepsilon^{inp} \varepsilon^{js2} M_{j,irs}). \quad (126)$$

U najopštijem slučaju dvostruko kovarijantno diferenciranje nije komutativno jer promena mesta indeksa koji odgovaraju izvodu dovodi do promene samog kovarijantnog izvoda. Tu razliku izmedju kovarijantnih izvoda koju izaziva razmena indeksa, odnosno reda diferenciranja karakteriše Reimann-Cristoffel-ov tenzor. Kako mi radimo sa Euklidskim prostorom u kome je  $R_{mnpq}$  Reimann-Cristoffel-ov tenzor jednak nuli, to će tenzor  $M_{i,jrs}$  biti simetričan u odnosu na ma koji par indeksa  $j, r$  i  $i, s$ . S obzirom na to da se pri razmeni indeksa  $j, r$  i  $i, s$  ne menja izvod, odnosno da je:

$$M_{i,jrs} = M_{i,srj}, \quad (127)$$

i da za Ricci-jeve antisimetrične tenzore pri razmeni indekasa važi:

$$\varepsilon^{js2} = - \varepsilon^{sj2}, \quad (128)$$

množenjem dva poslednja izraza dobijamo:

$$\varepsilon^{sj2} M_{i,srj} = - \varepsilon^{js2} M_{i,jrs}. \quad (129)$$

Kako se izrazi ne menjaju pri zamjeni nemih indekasa, ovde razmenom indeksa  $i, s$  na desnoj strani, jer su ti indeksi nemi, dobijamo da je:

$$\varepsilon^{sj2} M_{i,srj} = - \varepsilon^{sj2} M_{i,srj}, \quad (129*)$$

odakle sledi:

$$\varepsilon^{js2} M_{i,jrs} = 0. \quad (129**)$$

Analognim načinom se pokazuje da je identički uvek:

$$\varepsilon^{inp} M_{j,irs} = 0. \quad (130)$$

Na osnovu ovoga dolazimo do uslova

$$\varepsilon^{inp} \varepsilon^{js2} \varepsilon_{ij,rs} = 0 \quad (131)$$

koje moraju uvek da zadovoljavaju koordinate tenzora deformacije. Ovi uslovi izraženi u tenzorskom obliku su uslovi kompatibilnosti ili

110.

slaganja deformacija i ima ih  $\delta_{ij}$  skalarnom obliku. Ovih šest skalarnih uslova kompatibilnosti je linearne nezavisno, ali nije i diferencijalno nezavisno, jer divergencija tensora daje:

$$\epsilon^{irp} \epsilon^{jsq} \epsilon_{ij,rs} = 0$$

Poslednji izraz je identički jednak nuli, jer je tensor  $\epsilon_{ij,rs}$  u euklidskom prostoru simetričan u odnosu na indekse, naprimjer  $p$  i  $q$ , dok je tensor  $\epsilon^{irp}$  u odnosu na te indekse antisimetričan tako da je prethodna jednačina identički zadovoljena. To pokazuje da je broj potpuno i u svakom slučaju nezavisnih uslova kompatibilnosti tri. To znači tri skalarne jednačine.

Uslove kompatibilnosti (131) možemo da napišemo u razvijenom obliku

$$\epsilon_{ik,rs} + \epsilon_{rs,ik} - \epsilon_{rk,is} - \epsilon_{is,rk} = 0. \quad (132)$$

gde indeksi  $ik$ ,  $rs$  uzimaju redom vrednosti  $12,12; 13,13; 23,23; 12,13; 21,23; 31,32$ .

Kovarijantni izvod tensora  $\epsilon_{ij}$  po  $x^k$  u odnosu na osnovni metrički tensor  $g_{ij}$  je:

$$\epsilon_{ij,k} = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x^k} - \epsilon_{rj} \Gamma_{ik}^r - \epsilon_{ir} \Gamma_{jk}^r, \quad (133)$$

dok je njegov dva put kovarijantni izvod:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij,kl} &= \frac{\partial^2 \epsilon_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial \epsilon_{rj}}{\partial x^k} \Gamma_{ik}^r - \frac{\partial \epsilon_{ir}}{\partial x^k} \Gamma_{jk}^r - \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x^r} \Gamma_{lk}^r - \frac{\partial \epsilon_{ri}}{\partial x^k} \Gamma_{ik}^r - \\ &- \frac{\partial \epsilon_{ir}}{\partial x^k} \Gamma_{jk}^r + \epsilon_{nj} \Gamma_{ir}^m \Gamma_{lk}^r + \epsilon_{mj} \Gamma_{rl}^m \Gamma_{ik}^r + \epsilon_{mr} \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jk}^r + (134) \end{aligned}$$

$$+ \epsilon_{im} \Gamma_{jr}^m \Gamma_{lk}^r + \epsilon_{rm} \Gamma_{jr}^m \Gamma_{ik}^r + \epsilon_{im} \Gamma_{rl}^m \Gamma_{jk}^r - \epsilon_{rj} \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{ik}^r - \epsilon_{ir} \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{jk}^r.$$

gde su  $r, i, m$  nemi indeksi. Poslednji izraz iskoristićemo za transformisanje oblika uslova kompatibilnosti deformacija (132) i zato je potrebno razmenom oznaka indeksa  $i, k, r$  i  $s$  da odredimo pojedinačno izvode

$\epsilon_{ik,rs}$ ,  $\epsilon_{rs,ik}$ ,  $\epsilon_{ir,ks}$  i  $\epsilon_{ks,ir}$  i njihovim sabiranjem prema (132) dobijamo uslove kompatibilnosti deformacija kao šest nezavisnih jednačina oblika:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{ik}}{\partial x^r \partial x^s} + \frac{\partial^2 \epsilon_{rs}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 \epsilon_{rk}}{\partial x^i \partial x^s} - \frac{\partial^2 \epsilon_{is}}{\partial x^r \partial x^k} - 2 \epsilon_{ksp}^* \Gamma_{ir}^p + 2 \epsilon_{irk}^* \Gamma_{sr}^p -$$

$$-2\mathcal{E}_{irp}^*\Gamma_{sk}^p + 2\mathcal{E}_{srp}^*\Gamma_{ik}^p - 2\mathcal{E}_{mp}(\Gamma_{ki}^m\Gamma_{rs}^p - \Gamma_{ir}^m\Gamma_{ks}^p) = 0, \quad (135)$$

gde smo uveli oznaku:

$$\mathcal{E}_{ksp}^* = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathcal{E}_{pk}}{\partial x^s} + \frac{\partial \mathcal{E}_{sp}}{\partial x^k} - \frac{\partial \mathcal{E}_{ks}}{\partial x^p} \right], \quad (136)$$

a indeksi ikrs uzimaju sledeće vrednosti 1212, 1313, 2323, 1213, 2123, 3132.

Za Descartes-ov pravougli koordinatni sistem koordinata  $x, y$  i  $z$ , gde su koordinate metričkog tenzora konstantne, a sa tim Cristoffel-ovi simboli jednaki nuli i fizičke koordinate tenzora deformacije jednake sa sa kovarijantnim koordinatama, uslovi kompatibilnosti deformacija se svode na oblik:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{22}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{12}}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{11}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \mathcal{E}_{12}}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{E}_{13}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_{23}}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{22}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{33}}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{23}}{\partial z \partial y}, & \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{22}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \mathcal{E}_{23}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_{12}}{\partial z} \right], \\ \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{11}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{33}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{13}}{\partial x \partial z}, & \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{33}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \mathcal{E}_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_{13}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_{12}}{\partial z} \right], \end{aligned} \quad (137)$$

gde su  $\mathcal{E}_{11}$ ,  $\mathcal{E}_{22}$ ,  $\mathcal{E}_{33}$  dilatacije i  $\mathcal{E}_{12}$ ,  $\mathcal{E}_{23}$ ,  $\mathcal{E}_{13}$  klinanja, zajedno komponentne deformacije.

Do uslova kompatibilnosti deformacija možemo doći i na sledeći način polazeći od činjenice da telo u referentnoj konfiguraciji nedeformisanog stanja kao na slici br.4. prikazano, kao i u konfiguraciji deformisanog tela je smešteno u Euklidovom prostoru od tri dimenzije. Kako je poznato potreban i dovoljan uslov da prostor bude Euklidov je da je Reimann-Cristoffel-ov tenzor jednak nuli. To znači da kako za referentnu konfiguraciju S nedeformisanog tela, tako i za konfiguraciju  $\bar{S}$  deformisanog tela mora da Reimann-Cristoffel-ov tenzor bude jednak nuli, tj da je:

$$R_{mnpq} = 0 \quad \bar{R}_{mnpq} = 0,$$

ili

$$\bar{R}_{mnpq} - R_{mnpq} = 0 \quad (138)$$

Reimann-Cristoffel-ov simbol je oblika

$$R_{mnpq} = \frac{\partial}{\partial x^p} \Gamma_{m,nq} - \frac{\partial}{\partial x^q} \Gamma_{m,np} + \Gamma_{np}^r \Gamma_{r,mq} - \Gamma_{nq}^r \Gamma_{r,mp}, \quad (139)$$

112.

gde su Cristoffel-ovi simboli prve i druge vrste:

$$\Gamma_{ik,e} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ke}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ei}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^e} \right), \quad \Gamma_{ij}^k = g^{kh} \Gamma_{ij,h}$$

i prva dva člana se mogu napisati u obliku:

$$\frac{\partial}{\partial x^p} \Gamma_{m,nq} - \frac{\partial}{\partial x^q} \Gamma_{m,np} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 g_{qm}}{\partial x^n \partial x^p} + \frac{\partial^2 g_{np}}{\partial x^q \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{nq}}{\partial x^p \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{pm}}{\partial x^q \partial x^n} \right].$$

Imajući u vidu vezu (37) uslov (138) možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \epsilon_{mq}}{\partial x^n \partial x^p} + \frac{\partial^2 \epsilon_{np}}{\partial x^m \partial x^q} - \frac{\partial^2 \epsilon_{nq}}{\partial x^m \partial x^p} - \frac{\partial^2 \epsilon_{mp}}{\partial x^n \partial x^q} - 2 \epsilon_{rs} (\Gamma_{qm}^r \Gamma_{pn}^s - \Gamma_{mp}^r \Gamma_{qn}^s) + \\ & + 2 \epsilon_{mqr}^* \Gamma_{np}^r + 2 \epsilon_{npr}^* \Gamma_{qm}^r - 2 \epsilon_{mpr}^* \Gamma_{nq}^r - 2 \epsilon_{nqr}^* \Gamma_{mp}^r = 0 \end{aligned} \quad (140)$$

gde je:

$$\epsilon_{npr}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \epsilon_{pr}}{\partial x^n} + \frac{\partial \epsilon_{rn}}{\partial x^p} - \frac{\partial \epsilon_{np}}{\partial x^r} \right).$$

A ovo su već ranije dobijeni uslovi kompatibilnosti isti sa izrazima (135) u kojima je uvedena oznaka za  $\epsilon_{npr}^*$  prema (136).Uslove kompatibilnosti deformacija (140) možemo napisati u nešto sažetijem obliku, a takodje, takodje razvijene za direktna računanja, pomoću  $e^{mnp}$  simbola u obliku:

$$e^{mni} e^{pqr} \left[ \frac{\partial^2 \epsilon_{mq}}{\partial x^n \partial x^p} + \Gamma_{qm}^r \Gamma_{np}^s \epsilon_{rs} + \epsilon_{mqr}^* \Gamma_{np}^r + \epsilon_{npr}^* \Gamma_{mq}^r \right] \quad (140*)$$

Do ovakvog oblika uslova kompatibilnosti deformacija možemo doći i na sledeći način polazeći od izaraza (138) u kome izvršimo transformaciju izraza (139) za Reimann-Cristoffel-ov tenzor  $R_{mnpq}$  koji možemo da napišemo u obliku:

$$\begin{aligned} R_{mnpq} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 g_{qm}}{\partial x^n \partial x^p} + \frac{\partial^2 g_{np}}{\partial x^q \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{nq}}{\partial x^p \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{pm}}{\partial x^q \partial x^n} \right] + \frac{1}{2} \left[ \Gamma_{mq}^r \Gamma_{np,r} + \right. \\ & \left. + \Gamma_{np}^r \Gamma_{mq,r} - \Gamma_{nq}^r \Gamma_{mp,r} - \Gamma_{mp}^r \Gamma_{nq,r} \right] = \frac{1}{2} e^{mni} e^{pqr} \left[ \frac{\partial^2 g_{mq}}{\partial x^n \partial x^p} + \Gamma_{mq,r} \Gamma_{np,s} g^{rs} \right], \end{aligned}$$

odnosno

$$\Gamma_{mq}^r = \Gamma_{qm}^r, \quad \Gamma_{mq}^r = g^{rs} \Gamma_{mq,s}, \quad \Gamma_{mq}^r \Gamma_{np,r} = \Gamma_{np}^r \Gamma_{mq,r}$$

gde smo koristili da je:

$$\bar{R}_{mnpq} = \frac{1}{2} e^{mni} e^{pj} \left[ \frac{\partial^2 g_{mq}}{\partial x^n \partial x^p} + \bar{\Gamma}_{mq,r} \bar{\Gamma}_{np,s} g^{rs} \right],$$

Reimann-Cristoffel-ov tenzor  $\bar{R}_{mnpq}$  za konfiguraciju  $\bar{s}$  deformisanog tela sada možemo da napišemo u obliku:

$$\bar{R}_{mnpq} = \frac{1}{2} e^{mni} e^{pj} \left[ \frac{\partial^2 \bar{g}_{mq}}{\partial x^n \partial x^p} + \bar{\Gamma}_{mq,r} \bar{\Gamma}_{np,s} \bar{g}^{rs} \right]$$

Kako je metrički tenzor  $\bar{g}_{mq}$  za konfiguraciju  $\bar{s}$  deformisanog tela jednak

$$\bar{g}_{mq} = g_{mq} + 2 \varepsilon_{mq}$$

To je prema definiciji Cristoffel-ov simbol prve vrste za konfiguraciju  $\bar{s}$  deformisanog tela jednak:

$$\bar{\Gamma}_{mq,r} = \Gamma_{mq,r} + 2 \varepsilon_{mq,r}^*$$

gde smo uveli oznaku:

$$\varepsilon_{mq,r}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varepsilon_{qr}}{\partial x^m} + \frac{\partial \varepsilon_{mr}}{\partial x^q} - \frac{\partial \varepsilon_{mq}}{\partial x^r} \right)$$

Za izračunavanje razlike Reimann-Cristoffel-ovih tenzora za dve definisane konfiguracije  $s$  i  $\bar{s}$  prema izrazu (138) potrebno je sračunati sledeće izraze:

$$\frac{\partial^2 \bar{g}_{mq}}{\partial x^n \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{mq}}{\partial x^n \partial x^p} = \frac{\partial^2 (\bar{g}_{mq} - g_{mq})}{\partial x^n \partial x^p} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{mq}}{\partial x^n \partial x^p},$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{mq,r} \bar{\Gamma}_{np,s} \bar{g}^{rs} &= (\Gamma_{mq,r} + 2 \varepsilon_{mq,r}^*) (\Gamma_{np,s} + 2 \varepsilon_{np,s}^*) (g^{rs} + 2 \varepsilon^{rs}) = \\ &= (\Gamma_{mq,r} \Gamma_{np,s} + 2 \varepsilon_{mq,r}^* \Gamma_{np,s} + 2 \varepsilon_{np,s}^* \Gamma_{mq,r} + 4 \varepsilon_{mq,r}^* \varepsilon_{np,s}^*) (g^{rs} + 2 \varepsilon^{rs}). \end{aligned}$$

Iz poslednih izraza zanemarivanjem članova - malih veličina višeg reda dobijamo da je:

$$\bar{\Gamma}_{mq,r} \bar{\Gamma}_{np,s} \bar{g}^{rs} - \Gamma_{mq,r} \Gamma_{np,s} g^{rs} = 2 \Gamma_{mq,r} \Gamma_{np,s} \varepsilon^{rs} + 2 (\Gamma_{mq,r} \varepsilon_{np,s}^* + \Gamma_{np,s} \varepsilon_{mq,r}^*) g^{rs},$$

što zamenom u izraz (138) daje konačan oblik, što predstavlja jednačinu kompatibilnosti deformacija, oblika (140\*).

## II.9. USLOVI KOMPATIBILNOSTI DEFORMACIJA U POLARNO-CILINDRIČKOM KOORDINATNOM SISTEMU

Neka su fizičke koordinate tenzora deformacije u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu  $\varepsilon_{rr}$ ,  $\varepsilon_{pp}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\varepsilon_{rp}$ ,  $\varepsilon_{rz}$ , i  $\varepsilon_{pz}$ . Veza izmedju kovarijantnih koordinata tenzora deformacije i fizičkih koordinata tog tenzora u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu je data vezama:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{12} &= r \varepsilon_{rp} \\ \varepsilon_{22} &= r^2 \varepsilon_{pp} & \varepsilon_{13} &= \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{33} &= \varepsilon_{zz} & \varepsilon_{23} &= r \varepsilon_{pz},\end{aligned}\tag{141}$$

Cristoffel-ovi simboli druge vrste, različiti od nule, za polarno-cilindrički koordinatni sistem su:

$$\Gamma_{22}^1 = -r ; \quad \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} ; \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} ;$$

i pomoću njih možemo sada da predjemo na transformacije uslova kompatibilnosti datih u opštem obliku izrazima (140), na polarno-cilindričke koordinate.

Prvi uslov ćemo dobiti ako stavimo da su indeksi  $mnpq$  jednakim indeksima 1212 i jednačina (140) dobija oblik:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial r \partial p} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial r \partial p} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial p \partial p} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial r \partial r} - 2 \varepsilon_{22}^* \Gamma_{11}^p + 2 \varepsilon_{12p}^* \Gamma_{12}^p - 2 \varepsilon_{11p}^* \Gamma_{22}^p + 2 \varepsilon_{21p}^* \Gamma_{12}^p - \\ - 2 \varepsilon_{mp} (\Gamma_{12}^m \Gamma_{12}^p - \Gamma_{11}^m \Gamma_{22}^p) = 0,\end{aligned}$$

i kada se uzmu u obzir vrednosti Cristoffel-ovih simbola druge vrste, ona se transformiše na oblik:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial r \partial p} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial p \partial r} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial p \partial p} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial r \partial r} + 2 \varepsilon_{22}^* \Gamma_{12}^2 - 2 \varepsilon_{111}^* \Gamma_{22}^1 + 2 \varepsilon_{212}^* \Gamma_{12}^2 - 2 \varepsilon_{22} (\Gamma_{12}^1)^2 = 0$$

Sada kovarijantne koordinate izrazimo pomoću fizičkih na osnovu veza (141) i uzmemmo u obzir vrednosti za:

$$\varepsilon_{12p}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varepsilon_{1p}}{\partial p} + \frac{\partial \varepsilon_{2p}}{\partial r} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x^p} \right), \quad \varepsilon_{111}^* = 0, \quad \varepsilon_{212}^* = \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial r} \tag{142}$$

dobijamo u konačnom obliku prvu jednačinu kompatibilnosti deformacija u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu. Na isti način dobijamo i ostalih pet jednačina menjajući redom indekse  $mnpq$ . Konačan oblik uslova kompatibilnosti deformacija izraženih pomoću fizičkih koordinata u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu dat je sledećim sistemom od šest jednačina oblika:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \epsilon_{rr}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \epsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right) - \frac{\partial \epsilon_{rr}}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 (r \epsilon_{r\varphi})}{\partial r \partial \varphi} = 0 & \epsilon_{rr} &= \epsilon_r \\
 & \frac{\partial^2 \epsilon_{rr}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial r^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{rz}}{\partial r \partial z} & \epsilon_{\varphi\varphi} &= \epsilon_\varphi \\
 & \frac{\partial^2 \epsilon_{\varphi\varphi}}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial r \partial \varphi} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \epsilon_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \epsilon_{rz} \right) = 0 & \epsilon_{zz} &= \epsilon_z \\
 & \frac{1}{r^2} r \frac{\partial}{\partial z} \left[ \epsilon_{rr} - \frac{\partial (r \epsilon_{\varphi\varphi})}{\partial r} \right] - \frac{\partial^2 \epsilon_{rz}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 (r \epsilon_{rz})}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial^2 (r \epsilon_{r\varphi})}{\partial z \partial \varphi} = 0 & \epsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \delta_{r\varphi} \\
 & \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \epsilon_{rr}}{\partial \varphi \partial z} - \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \epsilon_{\varphi z}) \right] - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} (r^2 \epsilon_{r\varphi}) - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left( \frac{\epsilon_{rz}}{r} \right) = 0 & \epsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \delta_{rz} \\
 & \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \epsilon_{rz}}{\partial \varphi \partial z} + r \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left( \frac{\epsilon_{\varphi z}}{r} \right) - \frac{\partial^2 \epsilon_{r\varphi}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left( \frac{\epsilon_{zz}}{r} \right) = 0 & \epsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{2} \delta_{\varphi z} \\
 \end{aligned} \tag{143}$$

Uslovi kompatibilnosti deformacija za slučaj da se radi o polarnom koordinatnom sistemu u ravni se svode na jednu jednačinu kompatibilnosti deformacija oblika:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \epsilon_{rr}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \epsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right) - \frac{\partial \epsilon_{rr}}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 (r \epsilon_{r\varphi})}{\partial r \partial \varphi} = 0 \tag{144}$$

## II.10. USLOVI KOMPATIBILNOSTI DEFORMACIJA U SFERNOM KOORDINATNOM SISTEMU

Neka su fizičke koordinate tenzora deformacija u sfernom koordinatnom sistemu  $\epsilon_{\varrho\varrho}$ ,  $\epsilon_{\varphi\varphi}$ ,  $\epsilon_{\gamma\gamma}$ ,  $\epsilon_{\varrho\varphi}$ ,  $\epsilon_{\varrho\gamma}$  i  $\epsilon_{\varphi\gamma}$ . Veza izmedju kovarijantnih koordinata tenzora deformacije i njegovih fizičkih koordinata data je sa:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{11} &= \epsilon_{\varrho\varrho} & \epsilon_{33} &= \varrho^2 \epsilon_{\gamma\gamma} & \epsilon_{13} &= \varrho \epsilon_{\varrho\gamma} \\
 \epsilon_{22} &= \varrho^2 \cos^2 \gamma \epsilon_{\varphi\varphi} & \epsilon_{12} &= \varrho \cos \gamma \epsilon_{\varrho\varphi} & \epsilon_{23} &= \varrho^2 \cos \gamma \epsilon_{\varrho\gamma}
 \end{aligned} \tag{145}$$

Cristoffel-ovi simboli druge vrste različiti od nule za sferni koordinatni sistem su:  $\Gamma_{22}^1 = -\varrho \cos^2 \gamma$ ,  $\Gamma_{33}^1 = -\varrho$ ,  $\Gamma_{22}^3 = \sin \gamma \cos \gamma$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{\varrho} \quad \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = -\tan \gamma.$$

Način transformacije uslova kompatibilnosti iz opšteg oblika (140) na oblik u sfernom koordinatnom sistemu pokazaćemo na primeru transformacije jedne jednačine, naprimjer čiji su indeksi mnpq jednaki 2323. Za transformaciju

116.

ostalih jednačina postupak je identičan. Uslov za izabrane vrednosti 2323 u razvijenom obliku glasi:

$$2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{32}}{\partial \gamma \partial \rho} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{22}}{\partial \psi^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{23}}{\partial \psi^2} - 2 \mathcal{E}_{33}^* \Gamma_{22}^P + 2 \mathcal{E}_{23}^* \Gamma_{23}^P - 2 \mathcal{E}_{22}^* \Gamma_{33}^P - 2 \mathcal{E}_{mp} (\Gamma_{23}^m \Gamma_{23}^P - \Gamma_{22}^m \Gamma_{33}^P) = 0 \quad (146)$$

gde su:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{331}^* &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial \mathcal{E}_{33}}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial \mathcal{E}_{31}}{\partial \gamma} \right]; \quad \mathcal{E}_{221}^* = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial \mathcal{E}_{22}}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial \mathcal{E}_{21}}{\partial \gamma} \right], \quad \mathcal{E}_{333}^* = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{E}_{33}}{\partial \gamma}; \\ \mathcal{E}_{332}^* &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial \mathcal{E}_{33}}{\partial \psi} + 2 \frac{\partial \mathcal{E}_{23}}{\partial \gamma} \right]; \quad \mathcal{E}_{232}^* = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{E}_{22}}{\partial \gamma}, \end{aligned} \quad (147)$$

Ako sada uzmememo u obzir vrednosti Cristoffel-ovih simbola druge vrste, izraze (147) i veze kovarijantnih i fizičkih koordinata tenzora deformacije transformisana jednačina uslova kompatibilnosti dobija oblik:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{pp}}{\partial \psi^2} + \frac{1}{\varphi^2 \cos^2 \psi} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{pp}}{\partial \psi^2} + \frac{2 \mathcal{E}_{rr}}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi} \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathcal{E}_{rr}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\operatorname{tg} \psi}{\varphi^2} \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{rr}}{\partial \gamma} - 2 \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \gamma} \right) \\ - \frac{2}{\varphi^2 \cos \psi} \left( \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{pp}}{\partial \psi \partial \gamma} - \operatorname{tg} \psi \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \psi} + \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \psi} \right) + \frac{2}{\varphi^2} \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \gamma} - \operatorname{tg} \psi \mathcal{E}_{pp} \right) = 0 \end{aligned} \quad (148)$$

Na sličan način se dobijaju i ostale jednačine uslova kompatibilnosti deformacija u sfernom koordinatnom sistemu, tako da ih sada možemo napisati u konačnom obliku:

$$\frac{2}{\varphi^2} \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \gamma} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{pp}}{\partial \varphi \partial \gamma} - \frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{pp}}{\partial \gamma^2} - \frac{2}{\varphi} \frac{\partial \mathcal{E}_{rr}}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{rr}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \varphi} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi \cos \psi} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{pp}}{\partial \varphi \partial \gamma} - \frac{1}{\varphi^2 \cos^2 \psi} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{pp}}{\partial \psi^2} - \frac{2}{\varphi^2} \mathcal{E}_{pp} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{pp}}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{\varphi} \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\varphi^2 \cos \psi} \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \gamma} + \\ + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \varphi} - \frac{\operatorname{tg} \psi}{\varphi^2} \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \gamma} - \frac{2}{\varphi} \operatorname{tg} \psi \mathcal{E}_{pp} - \frac{2}{\varphi} \operatorname{tg} \psi \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\varphi^2 \cos \psi} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{pp}}{\partial \varphi \partial \gamma} + \frac{2 \operatorname{tg} \psi}{\varphi^2 \cos \psi} \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \gamma} - \frac{2}{\varphi} \left[ \frac{2}{\varphi} \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \gamma} + \frac{2}{\varphi \cos \psi} \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \varphi} - 2 \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \varphi} \right] - \\ - \frac{4}{\varphi^2} \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \gamma} - \frac{4}{\varphi^2 \cos \psi} \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \varphi} + \frac{4}{\varphi} \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \varphi} + \frac{2 \operatorname{tg} \psi}{\varphi} \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \varphi} + \frac{2 \operatorname{tg} \psi}{\varphi^2} \mathcal{E}_{pp} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{pp}}{\partial \varphi \partial \gamma} - \frac{1}{\varphi} \frac{\partial}{\partial \gamma} (\mathcal{E}_{pp} - \mathcal{E}_{rr}) + \operatorname{tg} \psi \frac{\partial}{\partial \varphi} (\mathcal{E}_{rr} - \mathcal{E}_{pp}) + \frac{\operatorname{tg} \psi}{\varphi} (\mathcal{E}_{rr} - \mathcal{E}_{pp}) - \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \gamma} - \\ - \frac{1}{\cos \psi} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \mathcal{E}_{rr}}{\partial \varphi} - \frac{1}{\varphi \cos \psi} \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \varphi} \right] - \frac{\operatorname{tg}^2 \psi}{\varphi} \mathcal{E}_{pp} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{2}{\varphi} \mathcal{E}_{pp} - \frac{\operatorname{tg} \psi}{\varphi} \left[ \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \gamma} - \varphi \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \varphi} - \frac{1}{\cos \psi} \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \varphi} \right] + \frac{\operatorname{tg} \psi}{\varphi \cos \psi} \left[ \frac{\partial \mathcal{E}_{pp}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathcal{E}_{rr}}{\partial \varphi} \right] = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g \cos \gamma} \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial \varphi \partial \varphi} + \frac{1}{g^2 \cos^2 \gamma} \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial \psi^2} - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \frac{1}{g \cos \gamma} \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial g} - \frac{1}{g} \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial \psi} \right] - \\ - \frac{1}{g} \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial \gamma} - \frac{2}{g} \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial \psi} + \frac{\operatorname{tg} \gamma}{g^2} \left[ 2 \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial \psi} + g \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial g} - \varepsilon_{yy} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial \psi^2} + \frac{1}{g^2 \cos^2 \gamma} \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial \varphi^2} + \frac{2 \varepsilon_{yy}}{g^2} + \frac{1}{g} \left( \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial g} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial \psi} \right) + \frac{\operatorname{tg} \gamma}{g^2} \left( \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial \psi} - 2 \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial \varphi} \right) - \\ - \frac{2}{g^2 \cos \gamma} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial \varphi \partial \varphi} - \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial \psi} \right) + \frac{2}{g^2} \left( \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial \gamma} - \operatorname{tg} \gamma \varepsilon_{yy} \right) = 0 \end{aligned}$$

## II.11. ODREDJIVANJE KOMPONENTNIH POMERANJA

Pomoću formula (21) do (25) mogu da se izračunaju komponente tenzora male deformacije, kada su u Descartes-ovom koordinatnom sistemu poznate koordinate vektora pomeranja  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  i  $w(x, y, z)$ . To je veoma lako jer se izvodi diferenciranjem. U tehničkoj praksi pak često se sreće obrnuti zadatak, naime poznate su komponente tenzora deformacije, a treba odrediti vektor pomeranja  $\vec{s}$ , odnosno njegove koordinate - komponentna pomeranja  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  i  $w(x, y, z)$ . Za izračunavanje komponenata vektora pomeranja kada su zadate komponente tenzora male deformacije  $\varepsilon_{ij}$ , potrebno je rešiti sistem od šest linearnih parcijalnih jednačina prvog reda. Znači zadatak se svodi na sledeći problem: poznate su jednoznačno odredjene komponentne deformacije  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\delta_{xy}$ ,  $\delta_{xz}$  i  $\delta_{yz}$  koje su u opštem slučaju funkcije koordinata  $x$ ,  $y$  i  $z$  sa određenim neprekidnim izvodima do drugog reda, a potrebno je odrediti tri funkcije  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  i  $w(x, y, z)$  koje su takođe funkcije koordinata  $x$ ,  $y$  i  $z$ , a koje treba isto da budu jednoznačne i da imaju neprekidne izvode trećeg reda. Zato i zadatak ne može biti jednoznačan po rešenju ako date funkcije - komponentne deformacije - dilatacije i klizanja ne ispunjavaju neke dopunske uslove.

Ako po datim komponentama tenzora deformacije odredimo pomeranja  $u$ ,  $v$  i  $w$ , to prisjedinjujući s njima beskonačno malo pomeranje tela kao krute celine dobijamo nova pomeranja, što očevidno takodje odgovara datim komponentama tenzora deformacije, tako da pomeranje tela kao krutog u celini nema nikakvog uticaja na čistu deformaciju. Zbog toga radi

118.

definisanosti, dopunski možemo zadati projekcije pomeranja neke tačke tela i komponente tenzora obrtanja u toj tački. Neka su zato u tački  $P$  poznata komponentna pomeranja  $u_0$ ,  $v_0$  i  $w_0$ , i komponente tenzora obrtanja  $p$ ,  $q$  i  $r$ . Kao što smo ranije rekli da u slučaju čiste homogene deformacije u okolini date tačke vektor pomeranja ima svoj potencijal i pomoću njega se može izraziti kao njegov gradijent. Takođe je iz matematike poznato da ako su zadate tri funkcije  $P(x,y,z)$ ,  $Q(x,y,z)$  i  $R(x,y,z)$  koje predstavljaju parcijalne izvode neke skalarne funkcije  $U(x,y,z)$  tako da je:

$$P(x,y,z) = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}, \quad Q(x,y,z) = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}, \quad R(x,y,z) = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} \quad (150)$$

onda tu skalarnu funkciju možemo odrediti pomoću izraza:

$$U(x,y,z) = \int_{x_0}^x P(x,y,z) dx + \int_{y_0}^y Q(x,y,z) dy + \int_{z_0}^z R(x,y,z) dz + C, \quad (151)$$

pri čemu funkcije  $P(x,y,z)$ ,  $Q(x,y,z)$  i  $R(x,y,z)$  ne mogu biti zadate proizvoljno već moraju zadovoljavati Cauchy-Reimann-ove uslove:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad (152)$$

Ovo su uslovi integrabilnosti. Integraciona konstanta u izrazu (151) određuje se iz graničnog uslova u tački  $P$ .

Pomeranja  $u(x,y,z)$ ,  $v(x,y,z)$  i  $w(x,y,z)$  moraju biti nezavisna od putanje kojom tačka  $P$  predje u tačku  $P'$ , jer je vektor pomeranja za slučaj čiste deformacije gradijent skalarne funkcije, te zato pomeranja  $u$ ,  $v$  i  $w$  možemo da odredimo pomoću obrasca (151), zbog čega je potrebno da pozajmimo prve parcijalne izvode komponentnih pomeranja. Međutim nama su poznate komponentne deformacije, dilatacije  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  i  $\epsilon_z$  i klizanja  $\delta_{xy}$ ,  $\delta_{xz}$  i  $\delta_{yz}$ , koje nam direktno daju samo neke parcijalne izvode komponentnih pomeranja, dok ostale moramo da odredimo, što se može izvesti korišćenjem Cauchy-Reimann-ovih uslova (152).

$1^{\circ}$  Za određivanje komponentnog pomeranja u pravcu  $Ox$  ose potrebno je da odredimo sledeće parcijalne izvode  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$  i  $\frac{\partial u}{\partial z}$ . Ovde je neposredno  $\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x$ .

Za određivanje parcijalnog izvoda  $\frac{\partial u}{\partial y}$  treba prvo odrediti njegove parcijalne izvode te će s obzirom na komponentne deformacije biti:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \epsilon_y} = \frac{\partial \epsilon_x}{\partial \epsilon_y},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \delta_{xy} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial \delta_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial \delta_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \delta_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \delta_{xz}}{\partial y} \right) \quad (153).$$

Kako sada znamo parcijalne izvode parcijalnog izvoda  $\frac{\partial u}{\partial y}$  to primenom obrasca (151) imamo da je:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial \delta_{xy}}{\partial y} dx + \int_{y_0}^y \left[ \frac{\partial \delta_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \delta_{xy}}{\partial x} \right] dy + \int_{z_0}^z \left[ \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial \delta_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \delta_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \delta_{xz}}{\partial y} \right) \right] dz + C_1. \quad (154)$$

Na sličan način odredjujemo i parcijalne izvode parcijalnog izvoda  $\frac{\partial u}{\partial z}$  kao:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial \delta_{xz}}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial \delta_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \delta_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \delta_{xz}}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \delta_{zx} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial \delta_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial \delta_{xz}}{\partial x}, \end{aligned} \quad (155)$$

Te primenom obrasca (151) odredjujemo parcijalni izvod kao:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \int_{x_0}^x \frac{\partial \delta_{xz}}{\partial z} dx + \int_{y_0}^y \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \delta_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \delta_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \delta_{yz}}{\partial x} \right] dy + \int_{z_0}^z \left[ \frac{\partial \delta_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \delta_{xz}}{\partial x} \right] dz + C_2. \quad (156)$$

Pošto su poznati izvodi  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$  i  $\frac{\partial u}{\partial z}$  lako se može odrediti komponentno pomeranje  $u(x, y, z)$  u pravcu Ox ose, a primenom istog obrasca (151), tako da dobijemo:

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx + \int_{y_0}^y \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right] dy + \int_{z_0}^z \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right] dz + C_3. \quad (157)$$

Za određivanje komponentnog pomeranja u pravcu Oy ose potrebno je da odredimo sledeće parcijalne izvode  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$  i  $\frac{\partial v}{\partial z}$ . Međutim kako smo već odredili komponentno pomeranje  $u(x, y, z)$  u pravcu Ox ose to je određivanje komponentnog pomeranja  $v(x, y, z)$  u pravcu Oy ose nešto prostije jer su nam neki izvodi već poznati.

Iz Cauchy-jeve jednačine neposredno sledi da je:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \delta_{xy} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \delta_{yy},$$

dok za određivanje parcijalnog izvoda  $\frac{\partial v}{\partial z}$  treba prvo odrediti njegove

120.

parcijalne izvode kao:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial \delta_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \delta_{yz} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial \delta_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y},\end{aligned}\quad (158)$$

pomoću kojih, a i obrazaca (151) odredjujemo parcijalni izvod

kao:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \int_{x_0}^x \left[ \frac{\partial \delta_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx + \int_{y_0}^y \left[ \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} \right]_{x=x_0} dy + \int_{z_0}^z \left[ \frac{\partial \delta_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} \right]_{x=x_0, y=y_0} dz + C_4. \quad (159)$$

Pošto smo odredili parcijalne izvode komponentnog pomeranja

$\psi(x, y, z)$  to primenom obrazaca (151) odredjujemo to komponentno pomeranje u pravcu Oy ose:

$$v(x, y, z) = \int_{x_0}^x \left[ \delta_{xy} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx + \int_{y_0}^y [\epsilon_y]_{x=x_0} dy + \int_{z_0}^z \left[ \frac{\partial v}{\partial z} \right]_{x=x_0, y=y_0} dz + C_5. \quad (160)$$

3° Kako su svi parcijalni izvodi funkcija  $u(x, y, z)$  i  $v(x, y, z)$ , komponenata vektora pomeranja  $\vec{S}$  u prvcima Ox i Oy osa ranije odredjeni, parcijalne izvode komponente  $w(x, y, z)$  vektora pomeranja u pravcu Oz ose, odredjujemo najprostije neposredno iz Cauchy-jevih jednačina tako da su njihove vrednosti

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \delta_{xz} - \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \delta_{yz} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \epsilon_z. \quad (161)$$

Unošenjem poslednjih izraza u obrazac (151) odredjujemo samu komponentu  $w(x, y, z)$  vektora pomeranja  $\vec{S}(x, y, z)$ , koja je u pravcu ose Oz:

$$w(x, y, z) = \int_{x_0}^x \left[ \delta_{xz} - \frac{\partial u}{\partial z} \right] dx + \int_{y_0}^y \left[ \delta_{yz} - \frac{\partial v}{\partial z} \right]_{x=x_0} dy + \int_{z_0}^z [\epsilon_z]_{x=x_0, y=y_0} dz + C_6 \quad (162)$$

U toku odredjivanja funkcija  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  i  $w(x, y, z)$  kao komponenata vektora pomeranja  $\vec{S}(x, y, z)$ , javilo se šest integracionih konstanti: tri prilikom odredjivanja parcijalnih izvoda  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z}$  i  $\frac{\partial v}{\partial z}$ ; i tri pri odredjivanju samih funkcija - komponentnih pomeranja  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  i  $w(x, y, z)$ .

Već smo ranije rekli da ove komponente vektora pomeranja, koje smo odredili odgovaraju pomeranjima usled čiste deformacije, pa je zato potrebno dodati im pomeranja koja odgovaraju pomeranju tela kao krutog usled čiste translacije i čiste rotacije, a ta pomeranja iznose:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \varrho z - ry \\ v &= v_0 + rx - pz \\ w &= w_0 + py - \varrho x, \end{aligned} \tag{163}$$

gde pomeranja  $u_0$ ,  $v_0$  i  $w_0$  odgovaraju malim translacijama, dok ostali delovi odgovaraju rotaciji. S obzirom na izvedene relacije integracione konstante koje se pojavljuju u izvedenim integralima za komponentna pomeranja su jednake:

$$\begin{aligned} C_1 &= -r & C_3 &= u_0 & C_5 &= v_0 \\ C_2 &= \varrho & C_4 &= -p & C_6 &= w_0, \end{aligned}$$

t.j. njihove vrednosti se određuju iz graničnih uslova.

Da bi bilo moguće određivanje komponentnih pomeranja  $u_i$ , koja su geometrijski moguća, potrebno je da izmedju komponenata tenzora deformacije postoje izvesne veze, koje nisu ništa drugo do uslovi integrabilnosti dati Cauchy-Reimann-ovim uslovima.

Da bi smo odredili parcijalni izvod  $\frac{\partial u}{\partial y}$  komponentnog pomeranja  $u(x,y,z)$  u pravcu Ox ose, potrebno je da njegovi parcijalni izvodi  $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$  i  $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$  zadovoljavaju Cauchy-Reiman-ove uslove integrabilnosti koji se mogu napisati u obliku:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right], \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right], \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right], \end{aligned} \tag{164}$$

koje unošenjem desnih strana izraza (153) daju sledeće uslove:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \varphi_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial z \partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \varphi_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_{yz}}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x \partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \varphi_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{xz}}{\partial y} \right]. \end{aligned} \tag{165}$$

Da bi se iz izraza (156) odredio parcijalni izvod  $\frac{\partial u}{\partial z}$  potrebno je da njegovi parcijalni izvodi  $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$  i  $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$ , zadovoljavaju Cauchy-Reiman-ove uslove integrabilnosti:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]$$
(166)

Kada se u prethodne uslove unesu izrazi (155) dobijamo sledeće uslove:

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi_{xz}}{\partial x \partial z},$$

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial z \partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \varphi_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_{yz}}{\partial x} \right],$$

$$\frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \varphi_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_{xy}}{\partial z} \right],$$
(167)

od kojih je drugi identičan sa drugim uslovom iz (165).

Na kraju, da bi se iz izraza (159) odredio parcijalni izvod  $\frac{\partial v}{\partial z}$  komponentnog pomeranja  $v(x, y, z)$ , potrebno je da njegovi parcijalni izvodi  $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial v}{\partial z})$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial v}{\partial z})$  i  $\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial v}{\partial z})$  takodje zadovoljavaju Cauchy-Reimannove uslove integrabilnosti u obliku:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right].$$
(168)

Ako u poslednje uslove unesemo izraze sa desne strane sistema (158) dobijemo samo jedan novi uslov, jer su ostala dva identična već ranije dobijenim i to:

$$\frac{\partial^2 \xi_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi_{yz}}{\partial y \partial z}$$
(169)

Cauchy-Reiman-ovi uslovi integrabilnosti izmedju samih funkcija  $u$ ,

$v$  i  $w$  komponentnih pomeranja ne daju ni jedan novi uslov u odnosu na već dobijene. Izvodimo zaključak da postoji šest uslova kojima su podvrgnute komponentne dilatacije i klizanja da bi one bile geometrijski moguće u konfiguraciji linijskih elemenata i uglova izmedju njih za deformisano telo i telo u prirodnom stanju i da bi se mogla odrediti komponentna pomeranja tačaka iz jedne konfiguracije prirodnog stanja tela u konfiguraciju deformisanog tela. Ti uslovi sredjeni u sistem od šest su:

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi_{xz}}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \xi_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi_{yz}}{\partial y \partial z}$$
(170)

$$\begin{aligned}
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \delta_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \delta_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \delta_{yz}}{\partial x} \right], \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \delta_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \delta_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \delta_{xz}}{\partial y} \right], \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \delta_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \delta_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \delta_{xy}}{\partial z} \right]. \tag{170*}
 \end{aligned}$$

Ovaj sistem od šest parcijalnih diferencijalnih jednačina po specifičnim deformacijama: komponentnim dilatacijama  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  i  $\varepsilon_z$  i komponentnim klizanjima  $\delta_{xy}$ ,  $\delta_{xz}$  i  $\delta_{yz}$  nazivaju se uslovima poklapanja deformacija ili Saint-Venant-ovim uslovima kompatibilnosti ili saglasnosti deformacija. Ovi uslovi moraju biti ispunjeni u svakoj tački tela da bi se zadate komponentne specifične deformacije mogle ostvarivati, tj. da bi pomoću njih određena pomeranja mogla dešavati prilikom prelaska tela iz jedne u drugu konfiguraciju. Prva tri uslova daju vezu izmedju komponentnih dilatacija linijskih elemenata u dva ortogonalna pravca kroz tu tačku i komponentnog klizanja – promene pravog ugla izmedju njih pri prelasku tela i konfiguracije prirodnog stanja tela u konfiguraciju deformisanog tela. Znači da ta tri prva uslova daju vezu izmedju komponentnih specifičnih deformacija dve dilatacije i jednog klizanja u jednoj ravni. Svaki od druga tri uslova daju vezu izmedju dilatacije linijskog elementa kroz posmatranu tačku i promena pravih uglova izmedju linijskih elemenata u tri ortogonalna pravca kroz tu tačku, od kojih je jedan pravac određen linijskim elementom naznačene dilatacije. Znači da druga tri uslova vezujemo za prostorno stanje deformacija, za razliku od prethodna tri koja su vezana za jednu od ravni, jer daju vezu izmedju jedne komponentne dilatacije i tri komponentna klizanja.

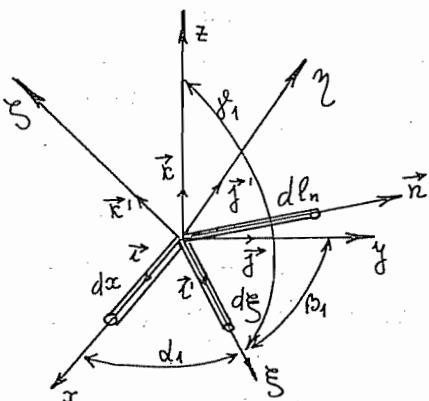
Ovde izvedeni uslovi kompatibilnosti deformacija (170) dobijeni su kao posledica uslova integrabilnosti prilikom određivanja komponentata vektora pomeranja  $\vec{S}(x, y, z) = u(x, y, z)\vec{i} + v(x, y, z)\vec{j} + w(x, y, z)\vec{k}$  identični su sa uslovima (137) koje smo izveli iz tenzorskog oblika. Geometrijska potreba za postojanjem uslova kompatibilnosti se može obijasniti i na sledeći način. Neka zamislimo da deformabilno telo podelimo na veći broj delova u nedeformisanom stanju i damo im male deformacije, a zatim pokušamo da od tako deformisanih delića sastavimo telo u novoj konfiguraciji kojoj odgovara deformisano stanje tela usled dejstva spoljašnjih sila. To će nam uspeti jedino pod uslovom da deformacije tih komponentnih delova nisu proizvoljne. Znači da bi smo opet dobili telo koje predstavlja neprekidnu sredinu, male deformacije delova tela moraju da zadovoljavaju uslove kompatibilnosti deformacije, koji su matematički izraženi u obliku (170).

II.12. TRANSFORMACIJA MATRICE Tenzora DEFORMACIJE  
PRI ROTACIJI KOORDINATNOG SISTEMA

Neka je  $\mathcal{E}^0$  matrica tenzora specifične deformacije u Descartes-ovom koordinatnom sistemu. Oxyz:

$$\mathcal{E}^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\delta_{xy} & \frac{1}{2}\delta_{xz} \\ \frac{1}{2}\delta_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\delta_{zy} \\ \frac{1}{2}\delta_{xz} & \frac{1}{2}\delta_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (171)$$

Neka se sada trijedar Oxyz zaokrene oko svog koordinatnog početka 0 i pređe u trijedar O $\xi\eta\zeta$  kao što je na slici br. 8 prikazano. Taj novodobijeni koordinatni sistem je isto pravougli Descartes-ov, i njegove koordinatne ose grade sa osama starog trijedra uglove čiji su kosinusi:  $\cos\alpha_i$ ,  $\cos\beta_i$  i  $\cos\gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Tih devet kosinusa smera su koeficijenti transformacija pravouglih koordinata i pomoću njih možemo sastaviti transformacionu matricu  $A$  čije su kolone kosinusi smerova ortova novih osa u odnosu na stare, što je takodje uočljivo sa slike br. 8. Transformaciona matrica  $A$  se može napisati u obliku:



Slika br. 8

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix} \quad (172)$$

Posmatrajmo sada vektor položaja tačke P u starom i novom koordinatnom sistemu i njemu pridružen linijski element OP. Neka je  $\{r\}$  matrica kolona sastavljena od koordinata vektora položaja tačke P u starom koordinatnom sistemu,  $\{\xi\}$  matrica kolona koordinata istog vektora u novom koordinatnom sistemu. Vezu izmedju njih možemo napisati pomoću transformacije matrice  $A$  kao:

$$\{r\} = A \{\xi\} \quad \{\xi\} = A^{-1} \{r\} \quad (173)$$

Kako je transformaciona matrica ortogonalna, a kako je njena determinanta jednaka jedinici,  $|A| = 1$ , to će njena inverzna matrica biti jednaka transponovanoj,  $A^{-1} = A^T$  te zbog toga možemo da napišemo da je:

$$\{\delta\} = \mathbf{A}^{-1} \{r\} = \mathbf{A}' \{r\}. \quad (173*)$$

Neka je  $\bar{\delta}_n$  redukovani vektor deformacije izražen pomoću matrice kolone  $\{\delta_n\}$  u starom koordinatnom sistemu, a  $\{\bar{\delta}_n\}$  taj isti redukovani vektor specifične deformacije u novom koordinatnom sistemu. Označimo sa  $\mathcal{E}$  tenzor deformacije u referentnom koordinatnom sistemu Oxyz u tački P tela za određeno stanje deformacija izazvano definisanim dejstvom spoljašnjeg opterećenja, a sa  $\bar{\mathcal{E}}$  matricu tenzora deformacije za isto stanje deformacija, ali u novom koordinatnom sistemu O $\xi\eta\xi$ . Na osnovu jednačine (16) za određivanje redukovanih vektora deformacije u istoj tački P i za linijski element u pravcu orta  $\vec{n}$ , koji u starom koordinatnom sistemu izražavamo matricom kolonom  $\{n\}$ , a u novom koordinatnom sistemu matricom kolonom  $\{\bar{n}\}$ , možemo da napišemo sledeće:

$$\begin{aligned} \{\delta_n\} &= \mathcal{E} \{n\}, & \{\bar{\delta}_n\} &= \mathbf{A}' \{\delta_n\} \\ \{\bar{\delta}_n\} &= \bar{\mathcal{E}} \{\bar{n}\}, & \{\bar{n}\} &= \mathbf{A}' \{n\} \end{aligned} \quad (174)$$

Kako je redukovani vektor specifične deformacije  $\bar{\delta}_n$  u tački P tela za pravac određen ortom  $\vec{n}$  nepromenljiv za određeno stanje deformacija iako menjamo koordinatni sistem u kome ga matematički opisujemo, to će se promeniti samo njegove koordinate sadržane u matrici koloni koju mu u određenom koordinatnom sistemu pridružujemo. Zato postoji sledeća veza:

$$\{\bar{\delta}_n\} = \mathbf{A}' \{\delta_n\} = \mathbf{A}' \mathcal{E} \{n\} = \mathbf{A}' \mathcal{E} \mathbf{A} \{\bar{n}\} = \bar{\mathcal{E}} \{\bar{n}\} \quad (175)$$

Ako imamo u vidu vezu (174) dolazimo do zavisnosti komponenata tenzora deformacije u novom i starom sistemu koordinata oblika:

$$\bar{\mathcal{E}} = \mathbf{A}' \mathcal{E} \mathbf{A}$$

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \xi_g & \frac{1}{2}\delta_{\eta\xi} & \frac{1}{2}\delta_{\zeta\xi} \\ \frac{1}{2}\delta_{\eta\xi} & \xi_\eta & \frac{1}{2}\delta_{\zeta\eta} \\ \frac{1}{2}\delta_{\zeta\xi} & \frac{1}{2}\delta_{\zeta\eta} & \xi_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \cos \beta_1 \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 \cos \beta_2 \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 \cos \beta_3 \cos \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x & \frac{1}{2}\delta_{yx} & \frac{1}{2}\delta_{zx} \\ \frac{1}{2}\delta_{xy} & \xi_y & \frac{1}{2}\delta_{zy} \\ \frac{1}{2}\delta_{xz} & \frac{1}{2}\delta_{yz} & \xi_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 \end{pmatrix} \quad (176)$$

Ako nas interesuju pojedinačno komponentne dilatacije u novom koordinatnom sistemu izražene pomoću dilatacija i klizanja u starom koordinatnom sistemu možemo da napišemo:

$$\begin{aligned} \xi_g &= (i') \bar{\mathcal{E}} \{i'\} \\ \xi_\eta &= (j') \bar{\mathcal{E}} \{j'\} \\ \xi_\zeta &= (k') \bar{\mathcal{E}} \{k'\}, \end{aligned} \quad (177)$$

126.

Odnosno za komponentna klizanja možemo da napišemo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \delta_{xy}^{\theta} &= (\gamma') \mathcal{E} \{ i' \} \\ \frac{1}{2} \delta_{xz}^{\theta} &= (\kappa') \mathcal{E} \{ i' \} \\ \frac{1}{2} \delta_{yz}^{\theta} &= (\kappa') \mathcal{E} \{ j' \}\end{aligned}\quad (178)$$

## II.13. GLAVNE DILATACIJE I GLAVNI PRAVCI DILATACIJA

Kroz svaku tačku  $P$  proizvoljno izabranu u napregnutom telu, koje je deformisano u odnosu na prirodno stanje, može se postaviti beskrajno mnogo linijskih elemenata različitih pravaca i svakom od njih odgovara po jedan redukovani vektor deformacije, odnosno vektor specifične deformacije, koji u opštem slučaju se ne poklapa sa pravcem određenim ortom  $\{n\}$  orijentacije linijskog elementa u prirodnom stanju tela. Ali se ipak može naći takav linijski element u pravcu orta  $\vec{n}_s$  za koji je redukovani vektor deformacije  $\vec{\delta}_{n_s} = \delta_{n_s} \vec{n}_s$  kolinearan sa tim pravcem. Za taj pravac vektor  $\vec{\delta}_{n_s}$  specifične deformacije je u istom pravcu kao i linijski element uočen u prirodnom stanju tela. Takav pravac se zove glavni pravac dilatacije, a ta dilatacija glavna dilatacija. Redukovani vektor deformacije ili vektor specifične deformacije za linijski element u pravcu glavne dilatacije je kolinearan sa ortom koji određuje pravac glavne dilatacije i zato pišemo:

$$\vec{\delta}_{n_s} = \delta_{n_s} \vec{n}_s = \varepsilon_s \vec{n}_s, \quad \{\vec{\delta}_{n_s}\} = \mathcal{E} \{n_s\} = \varepsilon_s \{n_s\} \quad (179)$$

odakle dobijamo matričnu jednačinu oblika:

$$(\mathcal{E} - \varepsilon_s \mathbb{I}) \{n_s\} = 0, \quad \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x - \varepsilon_s & \frac{1}{2} \delta_{xy}^{\theta} & \frac{1}{2} \delta_{xz}^{\theta} \\ \frac{1}{2} \delta_{xy}^{\theta} & \mathcal{E}_y - \varepsilon_s & \frac{1}{2} \delta_{zy}^{\theta} \\ \frac{1}{2} \delta_{xz}^{\theta} & \frac{1}{2} \delta_{yz}^{\theta} & \mathcal{E}_z - \varepsilon_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_s \\ \beta_s \\ \gamma_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (180)$$

Ova matrična jednačina odgovara sistemu homogenih algebarskih jednačina koji ima rešenja različita od trivijalnih, samo ako je determinanta sistema jednaka nuli. Taj uslov daje jednačinu oblika:

$$f(\varepsilon_s) = |\mathcal{E} - \varepsilon_s \mathbb{I}| = \varepsilon_s^3 - \mathcal{E}_1 \varepsilon_s^2 + \mathcal{E}_2 \varepsilon_s - \mathcal{E}_3 = 0$$

$$f(\varepsilon_s) = \begin{vmatrix} \mathcal{E}_x - \varepsilon_s & \frac{1}{2} \delta_{xy}^{\theta} & \frac{1}{2} \delta_{xz}^{\theta} \\ \frac{1}{2} \delta_{xy}^{\theta} & \mathcal{E}_y - \varepsilon_s & \frac{1}{2} \delta_{zy}^{\theta} \\ \frac{1}{2} \delta_{xz}^{\theta} & \frac{1}{2} \delta_{yz}^{\theta} & \mathcal{E}_z - \varepsilon_s \end{vmatrix} = 0. \quad (181)$$

Ova dobijena jednačina je sekularna jednačina. Ona ima tri realna korena  $\xi_s$ ,  $s = 1, 2, 3$ . Ti koreni su vrednosti glavnih dilatacija. Koeficijenti sekularne jednačine su skaliari - invarijante matrice tenzora deformacije i izračunavaju se pomoću definisanih izraza (29) ako se radi o Descartes-ovom koordinatnom sistemu. Pravci orijentacija linijskih elemenata  $\vec{n}_s$  sa kojima su kolinearни njihovi vektori specifičnih deformacija nazivaju se glavni pravci dilatacija ili još i glavni pravci stanja deformacija. Kosinusi smerova  $\cos \alpha_s$ ,  $\cos \beta_s$  i  $\cos \gamma_s$  glavnih pravaca dilatacija odnose se jedan prema drugom kao odgovarajući kofaktori elemenata poslednje vrste i odgovarajuće kolone u determinanti iz izraza (181) i moraju da zadovoljavaju uslov da je:

$$\cos^2 \alpha_s + \cos^2 \beta_s + \cos^2 \gamma_s = 1 \quad (182)$$

Definisani odnosi su oblika:

$$\frac{\cos \alpha_s}{\begin{vmatrix} \frac{1}{2}\delta_{xy} & \frac{1}{2}\delta_{xz} \\ \xi_x - \xi_s & \frac{1}{2}\delta_{xz} \end{vmatrix}} = \frac{\cos \beta_s}{\begin{vmatrix} \xi_x - \xi_s & \frac{1}{2}\delta_{xy} \\ \frac{1}{2}\delta_{xy} & \frac{1}{2}\delta_{yz} \end{vmatrix}} = \frac{\cos \gamma_s}{\begin{vmatrix} \xi_x - \xi_s & \frac{1}{2}\delta_{xy} \\ \frac{1}{2}\delta_{xy} & \xi_y - \xi_s \end{vmatrix}} = C_s \quad (183)$$

gde su  $\xi_s$  glavne dilatacije ili intenziteti glavnih vektora specifične deformacije i izračunati su kao koreni sekularne jednačine (181). Ove jednačine treba uzeti za svaki glavni pravac dilatacije i njemu odgovarajuću vrednost glavne dilatacije  $\xi_s$ , tako da će se dobiti tri glavna pravca dilatacija odredjena odgovarajućim setom od po tri kosinusa smera. Ti glavni pravci deformacija ili dilatacija su uzajamno ortogonalni što možemo pokazati iz sledećih jednačina za pravce označene sa s i r :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\{n_s\} &= \xi_s \{n_s\} / (n_r) \\ \mathcal{C}\{n_r\} &= \xi_r \{n_r\} / (n_s) \end{aligned} \quad (184)$$

Prvu od ovih jednačina pomnožimo ortom  $\{n_r\}$  glavnog pravca označenog sa r, a drugu ortom  $\{n_s\}$  jednog od preostala dva glavna pravca označenog sa s tako dobijene jednačine oduzmemo, pa sledi da je:

$$(\xi_s - \xi_r) \{n_s\} \{n_r\} = 0 \quad (184*)$$

Kako glavne dilatacije  $\xi_s$  i  $\xi_r$  u opštem slučaju nisu međusobno jednake to mora da je:

$$(n_s) \{n_r\} = 0 \Rightarrow \vec{n}_s \perp \vec{n}_r \quad (185)$$

što predstavlja uslov ortogonalnosti glavnih pravaca dilatacija, odnosno glavnih pravaca vektora specifičnih deformacija. Kada je koordinatni sistem izabran tako da se njegove koordinatne ose poklapaju sa glavnim pravcima dilatacija onda odgovarajući tenzor deformacije ima pridruženu matricu dijagonalnu.

128.

Elementi na glavnoj dijagonalni matrice tenzora specifične deformacije za koordinatni sistem glavnih pravaca deformacija su jednaki vrednostima glavnih dilatacija. Ta matrica tenzora deformacije ima oblik:

$$\mathcal{E}^{(g)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_2 & \\ & & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (186)$$

Redukovani vektor deformacije ili vektor specifične deformacije za linijski element orjentisan ortom  $\{n\}$  se sada može napisati u obliku:

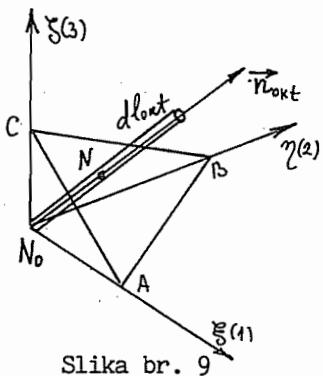
$$\{\delta_n\} = \mathcal{E}^{(g)} \{n\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_2 & \\ & & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \cos\alpha \\ \varepsilon_2 \cos\beta \\ \varepsilon_3 \cos\gamma \end{pmatrix} \quad (187)$$

Primenjujući Viète-ove obrasce iz sekularne jednačine sledi da su invarijante tenzora deformacije (186) jednake:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ \mathcal{E}_2 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \\ \mathcal{E}_3 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \end{aligned} \quad (188)$$

#### II.14. VEKTOR SPECIFIČNE DEFORMACIJE ZA LINIJSKI ELEMENT ORJENTISAN OKTAEDARSKIM ORTOM

Oktaedarski ort je ort pravca normale na oktaedarsku ravan:



$$\{n_{okt}\} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (189)$$

jer oktaedarska ravan zaklapa iste uglove sa koordinatnim ravnima koordinatnog sistema čije se koordinatne ose poklapaju sa glavnim pravcima deformacija. Redukovani vektor deformacije za linijski element orjentisan oktaedarskim ortom  $n_{okt}$

je:

$$\{\delta_{n_{okt}}\} = \begin{pmatrix} \delta_{1_{okt}} \\ \delta_{2_{okt}} \\ \delta_{3_{okt}} \end{pmatrix} = \mathcal{E}^{(g)} \{n_{okt}\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (190)$$

dok su njegove projekcije na oktaedarski pravac  $\vec{n}_{\text{okt}}$  i oktaedarsku ravan odredjene sa:

$$\delta_{nn_{\text{okt}}} = (n_{\text{okt}}) \{ \delta_{n_{\text{okt}}} \} = \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \frac{1}{3} \mathcal{E}_1 = \frac{1}{3} \varepsilon_v$$

$$\delta_{n_{\text{okt}}} = (t) \{ \delta_{n_{\text{okt}}} \} = \left\{ \frac{1}{3} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2] \right\}^{1/2} = \delta_{n_{\text{okt}}}. \quad (191)$$

## II.15. POVRŠI DEFORMACIJE

Dilatacija linijskog elementa orijentisanog ortom  $\vec{n}$  je:

$$\delta_{nn} = \varepsilon_n = (n) \mathcal{E} \{ n \} \quad (192)$$

Pomožimo prethodnu jednačinu intenzitetom  $r$  vektora položaja  $\vec{r} = r \vec{n}$  pravcu orta  $\vec{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ . Njegove koordinate su  $x$ ,  $y$  i  $z$  pa zbog veze  $x = r\alpha$ ,  $y = r\beta$  i  $z = r\gamma$  možemo da napišemo:

$$(x, y, z) = (r) \mathcal{E} \{ r \} = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \delta_{xy} & \frac{1}{2} \delta_{zx} \\ \frac{1}{2} \delta_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \delta_{zy} \\ \frac{1}{2} \delta_{zx} & \frac{1}{2} \delta_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \varepsilon_n r^2 \quad (193)$$

Prethodna funkcija definiše površ deformacije ili deformacijsku površ, koja je geometrijsko mesto završnih tačaka vektora  $\vec{r}$ , konstruisanih tako da je dilatacija za taj pravac obrnuto srazmerna kvadratu intenziteta tog vektora. Površ deformacije je centralna površ drugog reda. Ako se predje na koordinatni sistem sa osama u pravcima glavnih pravaca deformacija površ deformacije dobija jednačinu u obliku:

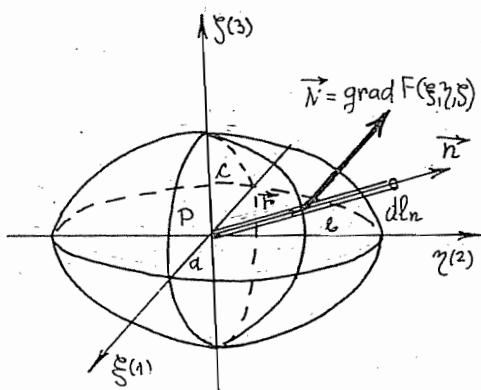
$$(\xi, \eta, \zeta) = (r) \mathcal{E}^{(q)} \{ r \} = (\xi \ \eta \ \zeta) \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_2 & \\ & & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \varepsilon_n r^2, \quad (194)$$

gde su  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  i  $\varepsilon_3$  glavne dilatacije, od čijih znakova i zavisi oblik deformacijske površi. Ako su glavne dilatacije istog znaka površ deformacije je troosni elipsoid, kome odgovara takvo stanje deformacija u posmatranoj tački linijski elementi u svim pravcima izloženi deformacijama istezanja ili skraćivanja. Ako su glavne dilatacije različitih znakova deformacijska površ je jednograni ili dvograni hiperboloid razdeljen asymptotskim konusom. Vektor specifične deformacije ili redukovani vektor deformacije za linijski element orijentisan ortom  $\vec{n}$  je:

$$\vec{\delta}_n = \frac{1}{2r} \operatorname{grad} F(\xi, \gamma, S).$$

i vidimo da je proporcionalan gradijentu skalarne funkcije  $F(\xi, \gamma, S)$ , koja je analitički izraz površi deformacije. Da bi smo grafički odredili pravac vektora specifične deformacije u tački P treba povući pravac orijentacije linijskog elementa za koji se traži vektor specifične deformacije i u prodornoj tački tog pravca kroz površ deformacije povući normalu na površ i vektor

specifične deformacije  $\vec{\delta}_n$  u tački P za linijski element u pravcu  $\vec{n}$  padaju pravac normale na površ deformacije, kao što je to na slici br. 10 prikazano.



Slika br. 10

## II.16. RAZLAGANJE Tenzora DEFORMACIJE NA SFERNI I DEVIJATORSKI DEO

Matricu tenszora relativne deformacije možemo razložiti na dva dela matricu koja odgovara sfernom delu tenszora relativne deformacije,  $\mathfrak{E}^{(E)}$  i matricu koja odgovara devijatorskom delu tenszora deformacije,  $\mathfrak{D}^{(E)}$ , kao:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^{(E)} + \mathfrak{D}^{(E)} = \begin{bmatrix} \epsilon_{sr} & & \\ & \epsilon_{sr} & \\ & & \epsilon_{sr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_x - \epsilon_{sr} & \frac{1}{2}\delta_{xy} & \frac{1}{2}\delta_{xz} \\ \frac{1}{2}\delta_{xy} & \epsilon_y - \epsilon_{sr} & \frac{1}{2}\delta_{yz} \\ \frac{1}{2}\delta_{xz} & \frac{1}{2}\delta_{yz} & \epsilon_z - \epsilon_{sr} \end{bmatrix}, \quad (196)$$

gde je

$$\epsilon_{sr} = \frac{1}{3}(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = \frac{1}{3}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) = \frac{\epsilon_v}{3} = \frac{\mathfrak{E}}{3} = \delta_{norm} = \epsilon_{norm} \quad (197)$$

srednja dilatacija i vidimo da je jednaka dilataciji linijskog elementa za oktaedarski pravac. Sferni deo tenszora specifične deformacije definisan mat-

matricom  $\mathcal{D}^{(\epsilon)}$  je:

$$\mathcal{D}^{(\epsilon)} = \begin{bmatrix} \epsilon_{sr} & & \\ & \epsilon_{sr} & \\ & & \epsilon_{sr} \end{bmatrix}, \quad (198)$$

i definiše stanje deformacija pri kome se desila samo promena zapremine bez primene oblika. Devijatorski deo tenzora deformacije definisan matricom  $\mathcal{D}^{(\epsilon)}$

$$\mathcal{D}^{(\epsilon)} = \begin{bmatrix} \epsilon_x - \epsilon_{sr} & \frac{1}{2}\delta_{yx} & \frac{1}{2}\delta_{zx} \\ \frac{1}{2}\delta_{xy} & \epsilon_y - \epsilon_{sr} & \frac{1}{2}\delta_{zy} \\ \frac{1}{2}\delta_{xz} & \frac{1}{2}\delta_{yz} & \epsilon_z - \epsilon_{sr} \end{bmatrix}, \quad (199)$$

definiše stanje deformacija pri kome se desila samo promena oblika bez promene zapremine pri prelasku tela iz konfiguracije prirodnog stanja u konfiguraciju deformisanog stanja napregnutog tela. Ovi zaključci se mogu proveriti neposredno, jer su kod sfernog dela tenzora deformacije klizanja jednaka između linijskih elemenata i jednaka nuli, pa znači da se uglovi izmedju njih ne menjaju, već samo njihove dužine, pa znači da se oblik zapremine izmedju njih takođe ne menja, pa nema promene oblika, ali ima promene zapremine. Invarijante matrice devijatora deformacije su:

$$\mathcal{D}_1^{(\epsilon)} = 0$$

$$\mathcal{D}_2^{(\epsilon)} = (\epsilon_x - \epsilon_{sr})(\epsilon_y - \epsilon_{sr}) + (\epsilon_x - \epsilon_{sr})(\epsilon_z - \epsilon_{sr}) + (\epsilon_y - \epsilon_{sr})(\epsilon_z - \epsilon_{sr}) - \frac{1}{4}(\delta_{xy}^2 + \delta_{yz}^2 + \delta_{xz}^2) = \frac{(-1)}{6}[(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_1 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2] \quad (200)$$

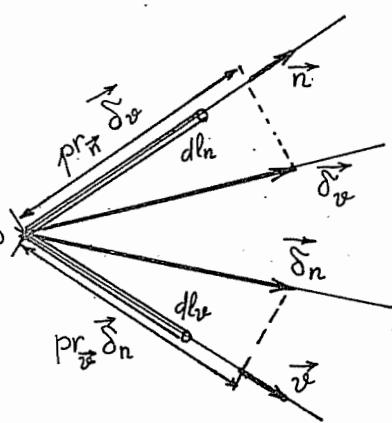
$$\mathcal{D}_2^{(\epsilon)} = -\frac{3}{2} \mathcal{D}_{\text{ntort}}^2$$

$$\mathcal{D}_3^{(\epsilon)} = |\mathcal{D}^{(\epsilon)}| = (\epsilon_x - \epsilon_{sr})(\epsilon_y - \epsilon_{sr})(\epsilon_z - \epsilon_{sr}) - \frac{1}{4}[(\epsilon_x - \epsilon_{sr})\delta_{yz}^2 + (\epsilon_y - \epsilon_{sr})\delta_{xz}^2 + (\epsilon_z - \epsilon_{sr})\delta_{xy}^2 - \delta_{xy}\delta_{xz}\delta_{yz}]$$

Iz poslednjeg se vidi da je prva invarijanta devijatora deformacije jednaka nuli, što odgovara zapreminskoj dilataciji stanja deformacije, njime definisanog, koja je jednaka nuli, pa zaključujemo da pri takvom stanju deformacija nema promene zapremine, može da se promeni oblik zapremine, ali ne mora, ali se menja oblik tela u smislu premeštanja njegovih čestica, jednih u odnosu na druge. Deformacijska površ za stanje deformacija definisano devijatorskim delom tenzora deformacije je hiperboloid, dok je deformacijska površ koja odgovara stanju deformacija definisanom sfernim delom tenzora deformacije je sfera, pa su dilatacije u svim pravcima iste.

## II.17. PRAVILA ANALIZE DEFORMACIJA EKSTREMNE VREDNOSTI DEFORMACIJE KLIZANJA

Na slici br. 11 prikazana su dva linijska elementa u pravcima odredjenim ortovima  $\vec{n}$  i  $\vec{v}$  i vektori relativne deformacije tih linijskih elemenata iz tačke P opterećenog tela se mogu napisati kao:



Slika br. 11

$$\{\delta_n\} = \mathcal{E} \{n\} \quad (201)$$

$$\{\delta_v\} = \mathcal{E} \{v\}$$

Pomnožimo skalarno prvi ortom ( $v$ ), a drugi ortom ( $n$ ) pa ih oduzmimo i imajući u vidu da je matrica tenszora deformacije  $\mathcal{E}$  simetrična dobijamo da je:

$$(v) \{\delta_n\} = (n) \{\delta_v\} \quad (202)$$

odnosno

$$\operatorname{pr}_{\vec{v}} \delta_n = \operatorname{pr}_{\vec{n}} \delta_v \quad (202^*)$$

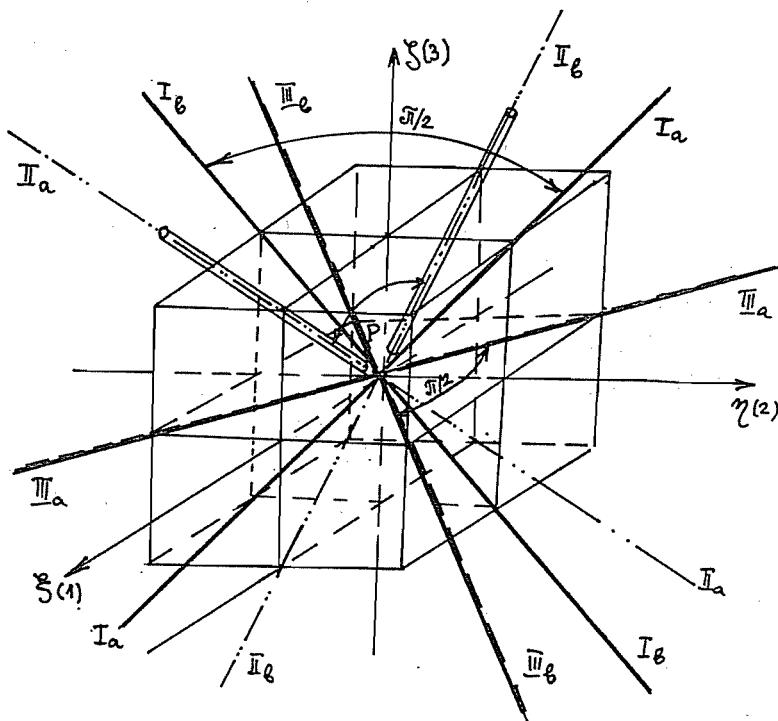
Ovi izrazi predstavljaju pravilo analize deformacija koje možemo da definišemo na sledeći način: Za dva linijska elementa povučena iz jedne tačke P napregnutog tela u pravcima odredjenim ortovima  $\vec{n}$  i  $\vec{v}$  važi da je projekcija vektora relativne deformacije linijskog elementa u pravcu orta  $\vec{n}$  na pravac orta  $\vec{v}$ , jednaka je projekciji vektora relativne deformacije linijskog elementa u pravcu orta  $\vec{v}$  na pravac orta  $\vec{n}$ .

Ovo je pravilo sasvim analogno osnovnom pravilu analize napona, a koje se svodi na pravilo o konjugovanosti smičućih napona kada se radi o ortogonalnim ortovima kojima su definisane ravni za koje se određuju ti naponi. Kada se radi o ortogonalnim linijskim elementima onda se iz ovog pravila dobija identitet  $\delta_{nv} = \delta_{vn}$  u kome figurišu klizanja, promene pravog ugla izmedju ortogonalnih linijskih elemenata od konfiguracije prirodnog stanja tela do konfiguracije deformisanog tela.

Ako uporedimo matematičke modele kojima smo opisivali stanje napona i stanje deformacija vidimo da su oni skoro identični sa vrlo ma-

lim specifičnostima i da su fizičko -geometrijska tumačenja analogna sa izvesnim specifičnostima.Ukažimo na odgovarajuću analogiju koja postoji između veličina kojima opisujemo stanja napona i stanja deformacija opterećenog tela. Tenzoru napona odgovara tenzor relativne deformacije,pa je matrici tenzora napona  $\mathcal{V}$  odgovarajuća matica tenzora relativne deformacije  $\mathcal{G}$ . Vektoru totalnog napona  $\vec{P}_n$  odgovara vektor relativne deformacije  $\vec{\delta}_n$ , a normalnom naponu  $\vec{\sigma}_n$  za ravan sa normalom  $\vec{n}$  odgovara dilatacija  $\varepsilon_n$  linijskog elementa u pravcu orta  $n$ ,tj. projekcija vektora relativne deformacije  $\vec{\delta}_n$  za taj linijski element na sam pravac linijskog elementa,dok smičućem naponu  $\vec{\sigma}_{nv}$  za ravan sa normalom  $\vec{n}$  u pravcu orta  $\vec{v}$  odgovara komponenta  $\delta_{nv}$  vektora relativne deformacije  $\vec{\delta}_n$  linijskog elementa orijentisanog ortom  $\vec{n}$  a u pravcu odredjenom ortom  $\vec{v}$ .Ako su ta dva orta  $\vec{n}$  i  $\vec{v}$  ortogonalna onda smičućem naponu odgovara klizanje, odnosno  $\delta_{nv}$ . Glavnim normalnim naponima  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$  odgovaraju glavne dilatacije  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  i  $\varepsilon_3$  odnosno glavne specifične deformacije,a glavnim pravcima naprezanja 1,2 i 3 glavni pravci deformacija odnosno dilatacija, 1,2 i 3.

Uopštavajući sada dalje,bez izvodjenja izraza na osnovu uočene analogije možemo izvesti sledeći zaključak: U pravcima odredjenim orto-



Slika br. 12

134.

vima normala parova ravni ekstremnih vrednosti smičućih napona odgovaraju pravci linijskih elemenata izmedju kojih se javljaju najveće specifične deformacije - klizanje, odnosno najveće promene pravih uglova pri uporedjenju konfiguracije prirodnog stanja tela i napregnutog tela. To se odnosi na parove u konfiguraciji prirodnog stanja tela ortogonalnih linijskih elemenata koji sa glavnim pravcima dilatacija zaklapaju uglove od  $\pm \sqrt{3}/4$ . Te promene pravih uglova predstavljaju ekstremne vrednosti klizanja i analogno izračunava-ekstremnih vrednosti smičućih napona možemo da napišemo za ta klizanja:

$$\delta_{I_{ab}}^e = \pm (\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \quad \delta_{II_{ab}}^e = \pm (\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \quad \delta_{III_{ab}}^e = \pm (\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad (203)$$

dok su dilatacije linijskih elemenata u tim pravcima odredjene srednjim vrednostima poluzbira glavnih dilatacija:

$$\varepsilon_I = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3), \quad \varepsilon_{II} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3), \quad \varepsilon_{III} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \quad (204)$$

Na slici br. 12 prikazani su parovi pravaca:  $I_a$  i  $I_b$ ;  $II_a$  i  $II_b$  i  $III_a$  i  $III_b$  parova linijskih elemenata koji polaze iz iste tačke deformabilnog tela u konfiguraciji prirodnog stanja tela koji su tada ortogonalni, a izmedju njih se javljaju ekstremne vrednosti promene pravih uglova u predjenju sa ostalim ortogonalnim linijskim elementima iz iste tačke pri prelasku u novu konfiguraciju deformisanog tela usled dejstva spoljašnjeg opterećenja.

Ako su dve glavne dilatacije medjusobno jednake onda postoji najmanje još dva ortogonalna linijska elementa izmedju kojih nema promene pravog ugla pri deformaciji, što važi za glavne pravce dilatacija, a to dalje dovodi do zaključka da je preostali glavni pravac osa deformacijske simetrije u posmatranoj tački tela u konfiguraciji deformisanog tela.

Ako su dve glavne dilatacije u posmatranoj tački P napregnuto og tela iste apsolutne vrednosti, a razlikuju se po znaku (dilatacije su skraćenja i izduženja) onda se u toj tački mogu naći dva ortogonalna linijska elementa izmedju kojih je maksimalna specifična deformacija - klizanje, ali kod kojih se ne javlja promena dužina jer su njihove dilatacije jednake nuli. Ako se izmedju takvih linijskih elemenata kao ivica paralelograma uoči površinski element kod njega se ne javlja promena površine pri prelasku tela iz konfiguracije prirodnog stanja tela u konfiguraciju deformisanog tela. Zepreminski element konstruisan nad tim površinskim elementom sa visinom u pravcu preostalog glavnog pravca pri deformaciji ima zapreminsku dijalaciju jednaku toj glavnoj dilataciji.

### III. ELASTOMEHANIKA

#### III.1. ODNOSI IZMEDJU NAPONA I DEFORMACIJA

Da bi smo mogli da rešimo niz zadataka iz oblasti naprezanja deformabilnog tela potrebno je da uspostavimo veze izmedju stanja napona i stanja deformacija u svakoj tački napregnutog deformabilnog tela, jer su matematički modeli opisivanja stanja napona i stanja deformacija nedovoljni pri nespregnutoj upotrebi jer nismo izveli spregu izmedju tih modela. Očigledno je iz iskustva uočeno da stanja napona i stanja deformacija u svakoj tački napregnutog tela su povezana sa spoljašnjim opterećenjem kao i osobinama materijala od koga je deformabilno telo. Te zavisnosti stanja napona i stanja deformacija definišu se u zavisnosti od fizičkih svojstava čvrstog tela koje se deformiše pod dejstvom spoljašnjih sila. Uspostavljanje veze izmedju stanja napona i stanja deformacije u napregnutom deformabilnom telu je jedan od važnih zadataka mehanike deformabilne sredine i zahteva prethodno izvodjenje eksperimenta. Obično se te veze idealizuju prostijim matematičkim modelima.

U procesu deformisanja u nekim slučajevima prestanak dejstva spoljašnjih sila dovodi do potpunog vraćanja tela u prirodno stanje tj. deformacija iščezava, proces je povratan, dok u drugim slučajevima posle prestanka dejstva sila u telu ostaju deformacije, koje nazivamo zaostale ili plastične i tada deformacija nije povratna.

Znači da je deformisanje realnih tela praćeno veoma složenim procesom koji je teško definisati nekim mnogo složenim analitičkim izrazom, pa se zato definišu idealna tela. Ispitivanjem materijala dolazi se do osobina materijala koje omogućavaju da se uspostave osnovne i bitne veze izmedju modela stanja napona i stanja deformacija napregnutog tela, koje su istovremeno dovoljno opšte da zadovolje potrebe u proračunu konstrukcija od raznih materijala kao i jednostavne za račun. Pripisujući deformabilnom telu odredjeno ponašanje tela pod opterećenjem možemo definisati odredjene veze

izmedju stanja napona i stanja deformacija pri prostim naprezanjima pri kojima definišemo osobine idealnih tela.

U delu Teorija napona analizirali smo ravnotežu dela tela elementarne zapremine, a u delu Teorija deformacija analizirali smo geometrijske odnose linijskih elemenata i konfiguracije tela u prirodnom i stanju deformisanog tela ne upuštajući se u mehaničke i druge karakteristike materijala. Veza izmedju stanja napona i stanja deformacija, odnosno ponašanje materijala pod opterećenjem zavisi od mehaničkih karakteristika pa je zato potrebno poznavati strukturu materijala. Mi se ovde nećemo time baviti jer je to predmet ispitivanja materijala, već ćemo samo navesti neke osobine idealnih tela. Teorijska Reologija obuhvata osnovna idealna tela: idealno elastično ili Hooke-ovo telo, idealno plastično ili Saint-Venant-ovo telo i viskozni fluid ili Newton-ov materijal (na kome je zasnovana klasična mehanika fluida) kao i veliki broj složenih modela tela koja definišu osobine tela bliže realnom telu.

"Reološki modeli" su zamišljeni tako da mogu dati kvalitativnu sluku o ponašanju različitih realnih materijala u napregnutom stanju pod dejstvom opterećenja, na osnovu koga se mogu definisati veze izmedju stanja napona i stanja deformacija. Stvarno ponašanje materijala pri različitim tehnološkim procesima i opterećenjima u konstrukcijama je mnogo složenije nego što to opisuju i složeni reološki modeli jer treba obuhvatiti i termodinamička svojstva materijala.

Zakonomernost ponašanja deformabilnih tela od različitih materijala i zakonomernost njihovog reagovanja na spoljašnje opterećenje ili uticaje je uslovljena prirodom materijala od koga je telo sačinjeno i odredjena relacijama izmedju veličina koja karakterišu njegova materijalna svojstva. S fizičkog stanovišta te relacije predstavljaju jednačine stanja ako izučavamo i njegova termodinamička svojstva ili konstitutivne jednačine kako je to uobičajeno u mehanici kontinuuma. Ove jednačine stanja ili konstitutivne jednačine moraju biti napisane u tenzorskom obliku jer fizički proces, osobine i ponašanje materijala ne zavisi od izbora koordinatnog sistema u koji smo smestili prostor fizičkih dogadjaja. Promena koordinatnog sistema ne sme da izazove promenu ponašanja materijala kroz fizičke procese koje opisujemo matematičkim modelom.

Osnovni principi koji važe za sva materijalna tela su opšti zakoni konzervacije i balansa: zakon konzervacije mase, zakon balansa količine kretanja, zakon balansa momenta količine kretanja (ili zakoni kretanja deformabilnog tela) i prvi zakon termodinamike ili zakon balansa energije.

je, kojih je ukupno osam. Ovih osam jednačina nazivamo jednačinama polja. Ovim zakonima treba dodati i Clausius-Duhemo-ovu nejednakost (disipacionu nejednakost) za nehomogene termodinamičke procese. Cauchy-jevi zakoni kretanja obuhvataju jednačinu balansa količine kretanja koje smo dobili kao jednačine kretanja ili ravnoteže deformabilnog tela (I.52) i jednačine balansa momenta količine kretanja koje nisu jednačine kretanja nego rezultiraju u pravila o konjugovanosti smičućih napona i izražavaju uslov da je tenzor napona simetričan (I.59). Jednačina energetskog balansa ili balansa energije u raznim oblicima povezuje rad, mehaničku i druge vrste energije opisujući mogućnosti prelaska jedne vrste energije u drugu. Naprimer, prelazak mehaničke energije u topotnu i obrnuto, hemijske u topotnu itd. Prethodnim jednačinama treba pridružiti i Cauchy-jeve granične uslove kojima obuhvatamo uticaj površinskih opterećenja na površi konture deformabilnog tela.

Analizom navedenih zakona može se zaključiti da se fizički proces u neprekidnom materijalnom deformabilnom telu može opisati sledećim fizičkim veličinama: 1<sup>o</sup> vektorom pomeranja  $\vec{s}$ ; 2<sup>o</sup> tenzorom napona  $N$ ; 3<sup>o</sup> tenzorom deformacije  $G$ ; 4<sup>o</sup> gustinom ili specifičnom masom  $\rho$ ; 5<sup>o</sup> zapreminskom silom  $\vec{F}_V'$  ili masenom silom  $\vec{F}_m'$ ; 6<sup>o</sup> površinskim silama na konturnoj površi  $\vec{F}_n'$ ; 7<sup>o</sup> specifičnom unutrašnjom energijom  $E_u'$ ; 8<sup>o</sup> vektorom topotnog fluksa  $\vec{Q}$ ; 9<sup>o</sup> specifičnom proizvodnjom topote  $Q'$ ; 10<sup>o</sup> specifičnom entropijom  $\eta$ ; 11<sup>o</sup> apsolutnom temperaturom  $T$ .

Ovaj skup fizičkih veličina je definisan u svakoj tački i za svaku česticu deformabilnog tela i u svakom trenutku vremena t i predstavlja termodinamički proces ako i samo ako je saglasan sa zakonom konzervacije mase, zakonom balansa količine kretanja, zakonom balansa momenta količine kretanja i prvim zakonom termodinamike.

U mehanici kontinuma od posebnog interesa je specijalan slučaj kada se proces odvija pod dejstvom mehaničkih, a u odsustvu termičkih uticaja, tj. slučaj dinamičkog procesa.

Osnovni konstitutivni stav možemo definisati kao:

U tački N koja određuje položaj proizvoljno izabrane materijalne čestice deformabilnog tela u nekom trenutku vremena t, tenzor napona  $N$ , specifična unutrašnja energija  $E_u'$ , vektor topotnog fluksa  $\vec{Q}$ , i specifična entropija  $\eta$  su jednoznačno odredjene kretanjem deformabilnog tela i rasporedom temperature u njemu.

Do sada smo razmatrali samo geometrijsko - kinematičke karakteristike stanja deformacija. Zavisno od vrste materijala deformabilnog tela napon u tačkama tela za zamišljene ravni se javlja kao otpor materije

138.

tela deformaciji i može se nazvati odgovorom tela materiji. Odgovor tela deformaciji odredjen je unutrašnjim fizičkim osobinama materijala deformabilnog tela, i za isto stanje deformacija imamo sasvim različito stanje napona za različite vrste materijala deformabilnog napregnutog tela. Funkcionalne zavisnosti stanja napona i stanja deformacija - funkcije odgovora zavisno od materije od koje je telo sačinjeno opisuju konstituciju tela pa se zovu konstitutivne varijante ili jednačine. Mi se nećemo baviti problemom izvodjenja konstitutivnih jednačina opštijeg oblika već ćemo se ograničiti samo na slučaj infinitezimalnih deformacija i za elastične materijale i u okvirima Teorije elastičnosti i Termoelastičnosti. Zato ćemo samo ukratko samo ukazati na osnovne principe koje moraju da zadovolje konstitutivne jednačine.

1<sup>o</sup> Princip lokalnog dejstva - Funkcija odgovora napona deformaciji materijalne čestice u tački N je odredjena kretanjem samo infinitezimalno male okoline te čestice.

2<sup>o</sup> Princip uzročnosti (determinizma) - Naponsko stanje u čestici tela odredjeno je istorijom kretanja infinitezimalno male okoline te čestice, kao i istorijom temperature te okoline.

3<sup>o</sup> Princip prostorne invarijantnosti (objektivnosti) - Funkcije odgovora napona na deformacije ne zavise od izbora prostornog koordinatnog sistema u odnosu na koji se utvrđuje položaj tela i njegovih čestica u prostoru u toku vremena.

4<sup>o</sup> Princip materijalne invarijantnosti - Konstitutivne relacije su invarijantne u odnosu na grupu materijalnih simetrija koju materijal deformabilnog tela poseduje.

### III.2. IDEALNI MATERIJALI

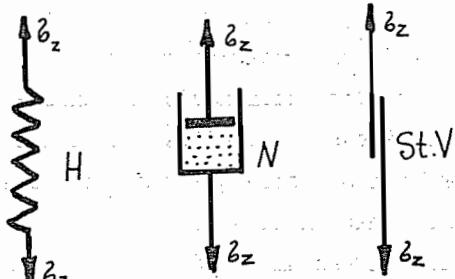
Funkcionalne zavisnosti stanja napona i stanja deformacija odredjene su unutrašnjim fizičkim osobinama materijalnog tela i na njima se zasnivaju konstitutivne jednačine na osnovu kojih se dalje razvija matematička teorija kao deo mehanike kontinuuma. Osnovne fizičke osobine deformabilnih tela su osobine elastičnosti, viskoznosti i plastičnosti, a njima možemo pridružiti i toplotnu provodljivost deformabilnog tela. Navedene osobine poseduje svako telo, a koja će od ovih osobina biti dominantna zavisi kako od unutrašnje strukture tela tako i od spoljašnjih uticaja, naprimjer veličine opterećenja ili količine prenešene toplote, ili pak od brzine deformacije. Pod dejstvom spoljašnjeg opterećenja fluid teče, jer ne stvara otpor pojavom

smičućeg napona, a po prestanku dejstva opterećenja fluid se ne vraća u konfiguraciju početnog stanja pre dejstva opterećenja. Tečenje čvrstih tela nastaje kada intenzitet opterećenja predje granicu tečenja za taj materijal. Tada govorimo o plastičnom tečenju materijala u napregnutom telu i o pratećoj plastičnoj deformaciji. Plastično tečenje se može odvijati samo pod dejstvom mehaničkog opterećenja i možemo smatrati da ne zavisi od vremena ni od temperature. Po prestanku dejstva opterećenja telo se ne vraća u konfiguraciju prirodnog stanja - konfiguraciju nedeformisanog tela. Razlika izmedju viskozog i plastičnog tečenja je u tome što je za plastično tečenje potrebno da opterećenje bude takvo da se predje granica tečenja, dok viskozno tečenje može da izazove sasvim malo opterećenje, pa se i u tom slučaju po prestanku dejstva opterećenja telo ne vraća na početnu konfiguraciju prirodnog stanja. Brzina deformacije se sa smanjenjem opterećenja smanjuje i po iščezavanju opterećenja postaje jednaka nuli. Kada su opterećenja takva da ne prelaze određenu granicu tečenja telo se elastično deformiše. Osobina elastičnosti se ogleda u tome da po prestanku dejstva sila deformabilno telo se vraća na prirodno stanje bez unutrašnjih napona i na konfiguraciju početnog prirodnog nedeformisanog stanja.

U prethodnom delu nabrojali smo osnovna idealna tela - materijale i svako od njih prestavlja model tela sa jednom od prethodno analiziranih osobina elastičnosti, viskoznosti i plastičnosti. Realna tela imaju spregnute osobine pa se mogu razmatrati i složeni modeli idealnih tela sa spregnutim osobinama koje smo pobrojali.

Karakteristične osobine idealnih materijala ilustrovaćemo elementarnim mehaničkim modelima za slučaj aksijalnog naprezanja - linearног i homogenog stanja napona u svim tačkama poprečnog preseka štapa ili cevi.

Na slici br. 1 prikazani su reološki modeli osnovnih idealnih materijala:



Slika br. 1

1º Hooke-ov idealno elastični materijal - napon  $\sigma_z$  je proporcionalan dilataciji  $\dot{\epsilon}_z$ , pa je:

$$\sigma_z = E \dot{\epsilon}_z \quad (1)$$

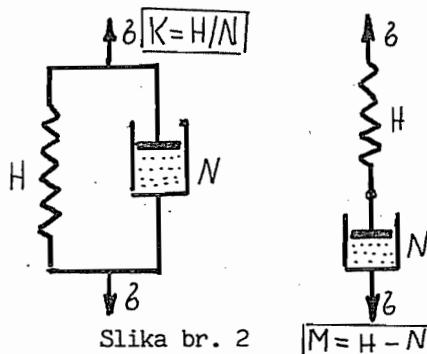
2º Newton-ov idealno viskozni fluid - normalni napon  $\sigma_z$  je proporcionalan brzini dilatacije  $\dot{\epsilon}_z$ , a faktor proporcionalnosti  $\mu$  je

koeficijent viskoznosti, pa je:

$$\sigma_z = \mu \dot{\epsilon}_z \quad (2)$$

$3^{\circ}$  Saint-Venant-ov idealno plastični materijal - normalni napon je konstantan u toku plastičnog tečenja i ne zavisi od vremena i jednak je naponu plastičnog tečenja.

Ovakve modele osnovnih idealnih materijala možemo sprezati u složene modele, pri čem se jedan par osnovnih materijala može vezivati na dva načina : a<sup>o</sup> serijski - u nizu što se označava horizontalnom crtom i b<sup>o</sup> paralelno što se označava vertikalnom crtom izmedju elemenata. Na slici br.



2 su prikazani modeli složenih idealnih materijala:

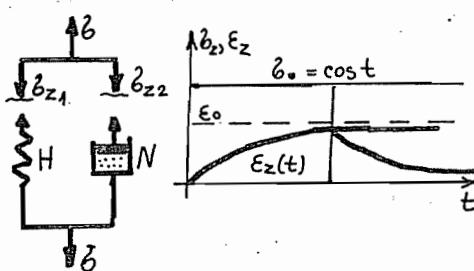
4<sup>o</sup> Kelvin - ov (Voigt - ov) idealni viskoelastični materijal i

5<sup>o</sup> Maxwell - ov idealni elastoviskozni fluid.

I kod jednog i kod drugog materijala pri obrazovanju veze izmedju napona i deformacije bitnu ulogu igra vreme.

Proučimo sada pojedinačno uticaj vremena na veze izmedju napona i deformacije kod ovih definisanih materijala.

KELVIN - ov ili VOIGT - ov idealni viskoelastični materijal prikazan je na slici br. 3 sa strukturnom formulom  $K = \frac{H}{N}$  i na zamišljenom preseku označili smo sa  $\delta_{z_1}$  i



Slika br. 3

šljenjom preseku označili smo sa  $\delta_{z_1}$  i  $\delta_{z_2}$  napone koji se javljaju kao rezultat osobina elastičnosti i viskoznosti pa je ukupni napon u materijalu jednak zbiru ta dva, te je:

$$\delta_z = \delta_{z_1} + \delta_{z_2}$$

$$\delta_z = E \varepsilon_z + \mu \dot{\varepsilon}_z . \quad (3)$$

Ovom vezom je data zavisnost napona od dilatacije  $\varepsilon_z$  i brzine dilatacije  $\dot{\varepsilon}_z$

U slučaju mirovanja i pri veoma sporoj promeni opterećenja, kada možemo staviti da brzina deformacije teži nuli  $\dot{\varepsilon}_z \rightarrow 0$ , materijal se ponaša kao idealno elastičan i napon je skoro proporcionalan dilataciji,  $\delta_z \rightarrow E \varepsilon_z$ . Ako normalni napon naglo poraste od nule do neke konačne vrednosti  $\delta_o$  koja ostaje konstantna dobijamo zavisnost dilatacije od vremena u obliku:

$$\varepsilon_z = \frac{\delta_o}{E} \left( 1 - e^{-\frac{E}{\mu} t} \right) \quad (4)$$

Iz poslednjeg vidimo da se dilatacija sa porastom vremena  $t \rightarrow \infty$ , asimptotski približava nekoj graničnoj vrednosti  $\dot{\epsilon}_z \rightarrow \dot{\epsilon}_0/E$ . Slično se ovaj materijal ponaša i pri naglom rasterećenju. Na slici br. 3 date su zavisnosti napona i dilatacije od vremena. Sa tog grafika se može videti karakteristično svojstvo viskoelastičnog materijala zaostajanje promene dilatacije za naponom. To svojstvo je naknadna elastičnost. Iako se u ovom materijalu javlja viskozni otpor deformaciji ipak se radi o čvstom telu, a ne fluidu. Voigt je proučavao ovakav materijal proučavajući fenomen prigušivanja oscilacija u kristolima.

MAXWELL - ov idealni elastoviskozni fluid je elastoviskozni materijal i prikazan je na slici br. 4 sa strukturnom formulom  $M = H - N$

i normalni napon je isti u bilo kom poprečnom preseku dok je rezultujuća brzina dilatacije jednaka zbiru brzina dilatacije Hooke-ovog  $\dot{\epsilon}_{zh}$  i Newton-ovog materijala:

$$\dot{\epsilon}_z = \dot{\epsilon}_{zh} + \dot{\epsilon}_{zn}. \quad (5)$$

Iz osobine elastičnosti sledi da je:

$$\dot{\epsilon}_{zh} = \frac{1}{E} \dot{\epsilon}_z,$$

a iz osobine viskoznosti sledi da je:  $\dot{\epsilon}_{zn} = \frac{1}{\mu} \dot{\epsilon}_z$  pa je rezultujuća brzina dilatacije za linearno stanje napona:

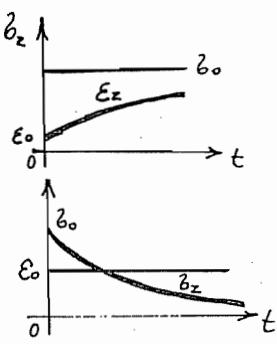
$$\dot{\epsilon}_z = \frac{1}{E} \dot{\epsilon}_z + \frac{1}{\mu} \dot{\epsilon}_z. \quad (6)$$

Kada brzina promene normalnog napona teži nuli  $\dot{\epsilon}_z \rightarrow 0$  materijal se ponaša kao viskozni fluid jer je:  $\dot{\epsilon}_z \rightarrow \mu \dot{\epsilon}_z$ , jer deformacija tela raste neograničeno bez porasta opterećenja. Pri rasterećenju materijala elastična deformacija isčezava, dok deformacija usled teččenja materijala ne isčezava.

Ako je ovaj materijal naglo opterećen do neke vrednosti normalnog napona  $\dot{\epsilon}_0$ , njemu odgovara elastična dilatacija  $\dot{\epsilon}_0 = \dot{\epsilon}_0/E$  jer zbog naglog opterećenja odmah u početku posmatranja ponašanja materijala tečenje ne dolazi do izražaja. Ako spričimo razvijanje deformacije, pretpostavljajući da brzina dilatacije teži nuli, onda normalni napon odredujujemo kao:

$$\frac{1}{E} \dot{\epsilon}_z + \frac{1}{\mu} \dot{\epsilon}_z = 0, \quad \dot{\epsilon}_z = \dot{\epsilon}_0 e^{-\frac{E}{\mu} t} \quad (7)$$

Vidimo da će u tom slučaju normalni napon asimptotski opadati i težiti nuli, kao što je na slici br. 4 prikazano. Pojava opadanja napona sa vremenom pri



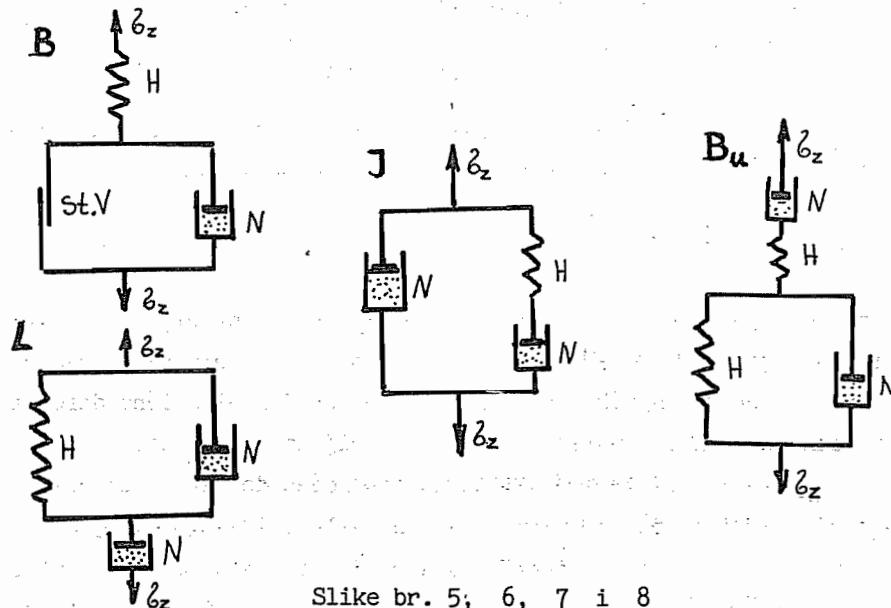
Slika br. 4

142.

konstantnoj dilataciji naziva se relaksacija napona. Proučavani materijal je fluid i može se koristiti kao model za opisivanje osobina metala pri visokim temperaturama, ili za opisivanje ponašanja betona.

Na primerima Foigt-ovog materijala i Maxwell-ovog materijala možemo da uočimo postojanje strukturalnih formula slično kao u hemiji te i da strukturu reoloških materijala možemo da izrazimo reološkim formulama. Na ovim primerima se vidi da je pri vezivanju osobina elementarnih reoloških modela materijala u seriju ukupno izduženje jednako zbiru komponentnih izduženja, dok je za paralelnu vezu ukupan normalni napon jednak zbiru normalnih napona koji se javljaju u elementarnim reološkim modelima.

Na slikama br. 5, 6, 7 i 8 prikazani su modeli složenih reoloških materijala: Bingham-ov idealni materijal sa reološkom formulom  $B = H - (St.V|N)$ ; Lethersich-ov idealni materijal sa reološkom formulom  $L = K - N = (N|H) - N$ ; Jeffreys-ov idealni materijal sa reološkom formulom  $J = N|M = N|(N-H)$ ; Burgers-ov idealni materijal sa reološkom formulom  $B_u = M - K = (N - H) - (N|H)$ ; respektivno. Postoje i drugi idealni materijali konstruisani za objašnjenje mehaničkih pojava nekih tehnički važnih materijala pa ćemo nabrojati još i: Schwoedoff-ov idealni materijal sa reološkom formulom  $S_{chw} = H - (St.V|M)$ ; Poyting-ov ili Thompson-ov idealni materijal sa reološkom formulom  $PTh = H|M$ ; Trouton-ov ili Rankin-ov idealni mate-



Slike br. 5, 6, 7 i 8

materal sa reološkom formulom  $TR = N - PTh$ ; Schofield-Scot-Blair-ov materijal sa reološkom formulom  $S_{ch} S_B = S_{chw} - K$ . Moguće je prizvoljan broj kombinacija rednog i paralelnog vezivanja modela osobina reoloških modela za

opisivanje reološkog ponašanja raznih materijala.

Izvršimo analizu ponašanja materijala u uslovima aksijalnog opterećenja modela za neke od navedenih modela prikazanih na slikama br. 5, 6, 7 i 8.

BINGHAM-ov idealni materijal sadrži paralelnu vezu Saint Venant-ovog idealno plastičnog materijala i Newton-ovog idealno viskoznog fluida u rednoj vezi sa Hooke-ovim idealno elastičnim telom. Ovakva veza određuje njegove konstitutivne jednačine, odnosno vezu između normalnog napona i dilatacije odnosno brzine dilatacije u obliku:

$$\sigma_z = E \varepsilon_z \quad \text{za } |\dot{\varepsilon}_z| < |\dot{\varepsilon}_{zg}|$$

$$\sigma_z - \sigma_{zg} = \mu^* \dot{\varepsilon}_z \quad \text{za } |\dot{\varepsilon}_z| \geq |\dot{\varepsilon}_{zg}| \quad (8)$$

gde je  $\mu$  koeficijent plastične viskoznosti. Ovakva veza je rezultat toga što je Saint Venant-ov materijal po definiciji krut do izvesnog stanja napona  $\sigma_{zg}$ , koji nazivamo uslov plastičnosti, pri daljim deformacijama napon ostaje konstantan, dok materijal teče plastično.

LETHERSICH-ov idealni materijal prikazan na slici br.6 sadrži paralelnu vezu Hooke-ovog i Newton-ovog materijala u rednoj vezi sa Newton-ovim materijalom. Označimo sa  $\varepsilon_{ZN}$  i  $\varepsilon_{ZK}$  specifične deformacije - dilatacije Newton-ovog i Kelvin-ovog elementa, pa za ukupnu dilataciju njihove redne sprege dobijamo:  $\dot{\varepsilon}_z = \dot{\varepsilon}_{ZN} + \dot{\varepsilon}_{ZK}$ . Konstitutivna jednačina Lethersich-ovog materijala dobija se sabiranjem brzina specifične deformacije komponentnih materijala:  $\dot{\varepsilon}_z = \dot{\varepsilon}_{ZN} + \dot{\varepsilon}_{ZK}$ . Za Newton-ov viskozni fluid imamo da je:

$$\dot{\varepsilon}_{ZN} = \frac{1}{\mu} \dot{\sigma}_z \quad (9)$$

dak je za Kelvin-ov idealni materijal:

$$\dot{\sigma}_z = E \varepsilon_z + \mu \dot{\varepsilon}_z \quad (10)$$

odakle sledi da je:

$$\dot{\varepsilon}_{ZK} = e^{-\frac{E}{\mu_K} t} \left( \varepsilon_{0K} + \frac{1}{\mu_K} \int e^{\frac{E}{\mu_K} t} \dot{\sigma}_z dt \right) \quad (11)$$

gde je  $\varepsilon_{0K}$  početna dilatacija. Diferencirajući po vremenu i dodajući dobijamo za dilataciju Lethersich-ovog idelnog materijala:

$$\dot{\varepsilon}_{zL} = \left( \frac{1}{\mu_N} + \frac{1}{\mu_K} \right) \dot{\sigma}_z - \frac{E}{\mu_K} e^{-\frac{E}{\mu_K} t} \left( \varepsilon_{0K} + \frac{1}{\mu_K} \int e^{\frac{E}{\mu_K} t} \dot{\sigma}_z dt \right) \quad (12)$$

144.

Jeffreys-ov idealni materijal prikazan na slici br. 7 sadrži paralelnu vezu Newton-ovog idealno viskoznog fluida i Maxwell-ovog idealnog materijala za koje pojedinačno imamo vezu izmedju napona i dilatacija odnosno brzina dilatacija:

$$\sigma_{ZN} = \mu \dot{\varepsilon}_z \quad (13)$$

$$\dot{\varepsilon}_z = \frac{1}{E} \ddot{\sigma}_z + \frac{1}{\mu} \sigma_z . \quad (14)$$

Integraljenjem izraza (14) dobijamo:

$$\sigma_{ZM} = e^{-\frac{E_M}{\mu} t} \left( \sigma_{0M} + E_M \int e^{\frac{E_M}{\mu} t} \dot{\varepsilon}_z dt \right) . \quad (15)$$

Sabiranjem  $\sigma_{ZN}$  i  $\sigma_{ZM}$  dobijamo za normalni napon Jeffreys-ovog materijala sledeći izraz:

$$\sigma_{ZJ} = \mu_N \dot{\varepsilon}_z + e^{-\frac{E_M}{\mu} t} \left( \sigma_{0M} + E_M \int e^{\frac{E_M}{\mu} t} \dot{\varepsilon}_z dt \right) . \quad (16)$$

BURGERS-ov idealni materijal prikazan je modelom na slici br.8 i predstavlja rednu vezu Maxwell-ovog i Kelvin-ovog idealnog materijala. Konstitutivne jednačine ovog materijala sadrže izvode po vremenu višeg reda. Ukupna dilatacija jednak je zbiru dilatacija  $\dot{\varepsilon}_{zK}$  i  $\dot{\varepsilon}_{zM}$  Kelvin-ovog i Maxwell-ovog elementa, dok je napon u svim poprečnim preseцима oba elementa konstantna. Na osnovu analize možemo da napišemo sledeće jednačine:

$$\dot{\varepsilon}_z = \dot{\varepsilon}_{zM} + \dot{\varepsilon}_{zK} , \quad (17)$$

$$\ddot{\sigma}_z = E_M \dot{\varepsilon}_{zK} + \mu_K \dot{\varepsilon}_{zM} ,$$

$$\dot{\varepsilon}_{zM} = \frac{1}{E_M} \ddot{\sigma}_z + \frac{1}{\mu_M} \dot{\sigma}_z .$$

Diferencirajmo prvu jednačinu iz prethodnog sistema i izvršimo zamenu člana trećom jednačinom istog sistemapa možemo napisati:

$$\dot{\varepsilon}_z = \dot{\varepsilon}_{zM} + \dot{\varepsilon}_{zK} = \frac{1}{E_M} \ddot{\sigma}_z + \frac{1}{\mu_M} \dot{\sigma}_z + \dot{\varepsilon}_{zK} , \quad (18)$$

odakle još jednim diferenciranjem dobijamo:

$$\ddot{\varepsilon}_z = \frac{1}{E_M} \ddot{\sigma}_z + \frac{1}{\mu_M} \dot{\sigma}_z + \ddot{\varepsilon}_{zK} \quad (18*)$$

Pomnožimo sada jednačinu (18) sa  $E_K$ , a jednačinu (18\*) sa  $\mu_K$  i saberimo ih, pa pošto je  $E_K \dot{\varepsilon}_{zK} + \mu_K \dot{\varepsilon}_{zK} = \dot{\sigma}_z$  za Kelvin-ov materijal, imamo da je:

$$\ddot{\delta}_z + \dot{\delta}_z \left( \frac{E_K}{\mu_M} + \frac{E_M}{\mu_K} + \frac{E_M}{\mu_M} \right) + \dot{\delta}_z \frac{E_M E_K}{\mu_M \mu_K} = \frac{E_M E_K}{\mu_K} \ddot{\varepsilon}_z + E_M \ddot{\varepsilon}_z \quad (19)$$

Ova poslednja jednačina koja daje vezu izmedju naponu i dilatacija Burgers-ovog idealnog materijala predstavlja njegovu konstitutivnu jednačinu.

Posmatrajmo sada primer PRANDTL-ovog tela kojim predstavlja-mo telo sledećih osobina: Materijal se ponaša kao Hooke-ov idealno elastični materijal sve do te dobre god je normalni napon manji od napona tečenja, a ukupna dilatacija se sastoji iz elastične dilatacije  $\varepsilon_{zh}$  i plastične dilatacije  $\varepsilon_{zs}$ :

$$\begin{aligned} \text{H} & \quad \varepsilon_{zh} = \frac{1}{E} \dot{\delta}_z \\ \text{St.V.} & \quad \varepsilon_{zs} = \lambda \dot{\delta}_z \end{aligned} \quad (20)$$

pa je brzina totalne dilatacije:

$$\dot{\varepsilon}_z = \frac{1}{E} \dot{\delta}_z + \frac{1}{2} \dot{\delta}_z \quad (21)$$

Napon tečenja i dilatacija pri kojoj počinje tečenje određuju tačku tečenja. Napon tečenja se određuje uvedenjem odredjene hipoteze koja je u boljoj ili slaboj saglasnosti sa eksperimentom. Postoje različite hipoteze o plastičnom tečenju.

### III.3. ODMOSI IZMEDJU NAPONA I DEFORMACIJA ELASTIČNIH MATERIJALA

U prethodnom delu smo analizirali osnovne reološke osobine: elastičnost viskoznost i plastičnost, kao i složene koje nastaju kombinacijom osnovnih osobina. Pretpostavljali smo prećutno da su ovi procesi izotermički. Pod osobinom elastičnošću podrazumevamo osobinu materijala da posle prestanka dejstva sila, koje su izazvale deformaciju u potpunosti povrati konfiguraciju prirodnog stanja. Ova osobina u reološkom modelu je prikazana simbolički spiralnom oprugom kao na slici br. 1 a, materijale sa ovakvim svojstvom nazvali smo Hooke-ovim idealno elastičnim materijalima. Za slučaj aksijalnog naprezanja za ovakve materijale normalni napon je proporcionalan dilataciji u aksijalnom pravcu.

Idealno elastični materijal ima svojstvo konzervacije ener-

146.

gije koja se u telu nagomila pri deformaciji, i absolutne reverzibilnosti te energije pri rasterećenju. Za slučaj aksijalnog naprezanja ta energije je jednaka poluproizvodu normalnog napona i dilatacije u aksijalnom pravcu i definiše se kao specifični deformacioni rad:  $A_{de} = \frac{1}{2} \epsilon_z \sigma_z$ .

Kod elastičnih materijala konstitutivnim jednačinama uspostavlja se veza između tenzora napona i tenzora deformacije u svakoj tački napregnutog i deformisanog tela. Problem izvodjenja konstitutivnih jednačina za idealno elastične materijale je relativno jednostavniji nego za druge modele materijala za prostorno stanje naprezanja, jer je proces elastičnih deformacija reverzibilan. Mi ćemo se u našim razmatranjima ograničiti na slučaj infinitezimalnih deformacija. Pri ovakvim deformacijama i pri prostornom stanju naprezanja elastičnog tela, ponašanje tela zadovoljavajuće opisujemo i linearnim konstitutivnim jednačinama.

U okvirima Teorije elastičnosti predmet proučavanja stanja napona i stanja deformacija i njihove veze u uslovima proizvoljnog prostornog stanja naprezanja biće tela od idealno elastičnih materijala odnosno od Hooke-ovog materijala.

U svakoj tački napregnutog deformabilnog tela od idealno elastičnog materijala postoji uzajamna jednoznačna veza između stanja napona i stanja deformacija. Kako smo stanje napona ili naponsko stanje u nekoj proizvoljno izabranoj tački u telu definisali tenzorom napona sa pridruženom matricom  $\mathcal{N}$ , a stanje deformacija tenzorom specifične deformacije kome smo pridružili matricu  $\mathcal{E}$  to se u opštem slučaju njihova veza može napisati u obliku:

$$\mathcal{N} = f(\mathcal{E}), \quad (22)$$

ili u obliku veze kovarijantnih koordinata tenzora napona  $\delta_{ij}$  i kontravarijantnih koordinata tenzora deformacije  $\epsilon^{ij}$  za krivolinijski sistem koordinata u obliku:

$$\delta_{ij} = f_{ij}(\epsilon^{ke}) \quad (23)$$

koji daje šest zavisnosti koje su jednoznačne u odnosu na izražavanje te zavisnosti u inverznom obliku:

$$\epsilon^{ij} = \psi^{ij}(\delta_{ke}) \quad (24)$$

Uvedimo pojam prirodne konfiguracije.Za materijalnu česticu kažemo da ima prirodnu konfiguraciju ako je napon za tu četicu jednak nuli u slučaju kada je neka okolina te tačke u stanju mirovanja u toj konfiguraciji za sva prošla i buduća vremena.Ranije smo definisali pojam prirodno stanje tela i dogovorili se da u takama takvog tela za zamišljene presečne ravni naponi su jednaki nuli.Sada možemo povezati sa prethodnim,odnosno da su u prirodnom stanju tela čestice sa prirodnom konfiguracijom. To znači da za nedekformisano stanje elastičnog deformabilnog tela usvajamo pretpostavku o prirodnom stanju kada u njemu nema napona.Time smo uspostavili vezu izmedju stanja napona i stanja deformacija u prirodnom stanju tela.Tada su elementi matrice tenzora napona jednaki nuli,  $\sigma_{ij} = 0$  i elementi matrice tenzora deformacija su takođe su takođe jednaki nuli,  $\epsilon_{ij} = 0$ . To stanje napona i stanje deformacija uzimamo kao početno za dalje uspostavljanje veze izmedju stanja napona i stanja deformacija.To znači da ne vodimo računa o prethodnim naprezanjima kojima je telo bilo izloženo, i da nema zaostalih napona i deformacija od eventuálnih ranijih opterećivanja i deformisanja deformabilnog tela.Znači pretpostavljamo da je proces naprezanja i deformisanja tela reverzibilan.Znači kad nema napona nema ni deformacija u telu i obrnuto.

Do sada izvedeni eksperimenti za veliki broj materijala koji se primenjuju u tehnički pokazuju da je veza izmedju stanja napona i stanja deformacija linearna ako naponi ne predju izvesnu granicu.Kao model takvog tela je idealno elastično telo koje zadovoljava uslov da je u određenim granicama tenzor napona  $\sigma_{ij}$  koji definiše stanje napona,homogena linearna funkcija tenzora deformacije  $\epsilon_{ij}$  koji definiše stanje deformacija.Na osnovu toga može se napisati veza izmedju tenzora napona i tenzora deformacije u obliku u opštenu (generalisanoh) Hooke-ovog zakona:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon^{kl} \quad (25)$$

u kome su  $C_{ijkl}$  elementi tenzora četvrtog reda koji se naziva tenzor elastičnosti ili materijalni tenzori. Koordinate ovog tenzora elastičnosti  $C_{ijkl}$  nazivaju se : materijalne konstante,konstante elastičnosti,koeficijenti elastičnosti ili elastični moduli.Ove materijalne konstante karakterišu mehaničke osobine elastičnog tela i kao takve mogu se odrediti jedino eksperimentalnim putem.Te konstante elastičnosti definišu vezu izmedju stanja naponai stanja deformacija u napregnutom deformabilnom telu i za tela heterogene strukture funkcije su položaja tačaka u kojima se posmatra stanje napona i stanje deformacija,dok su za tela homogene strukture konstantni i nezavisni od položaja posmatrane

148.

tačke. Kako je tenzor elastičnosti tenzor četvrtog reda  $C_{ijkl}$  i kako mu indeksi uzimaju vrednosti 1, 2 i 3, broj njegovih koordinata je  $3^4 = 81$ , a to znači da imamo 81 materijalnu konstantu. Međutim sve ove konstante nisu međusobno nezavisne. Kako su tenzor napona  $\sigma_{ij}$  i tenzor deformacije  $\epsilon^{ij}$  simetrični to iz uopštenog Hooke-ovog zakona proizilazi da i tenzor elastičnosti mora biti simetričan u odnosu na prva dva indeksa  $i$  i  $j$ , a takođe i na poslednja dva indeksa  $\kappa$  i  $\ell$ , tj. mora zadovoljavati uslove simetričnosti:

$$C_{ijk\ell} = C_{ikj\ell} = C_{ij\ell k} = C_{jik\ell}. \quad (26)$$

Ovi uslovi simetričnosti daju 45 veza, te se broj nezavisnih koordinata tenzora elastičnosti od 81 svodi na 36. Za homogena elastična tela tenzor elastičnosti je simetričan u odnosu na prvi i drugi par indeksa te važi

$$C_{ijk\ell} = C_{k\ell ij} \quad (27)$$

što daje još 15 novih veza koje smanjuju broj nezavisnih koordinata tenzora elastičnosti na 21. Konstante elastičnosti kao elementi tenzora elastičnosti zavise od metričkog tenzora  $g_{ij}$  konfiguracije nedeformisanog tela i od fizičkih svojstava materijala.

Elastična tela po svojoj strukturi mogu biti kristalna, kristalasta i amorfna. Zavisno od strukture elastičnih tela broj nezavisnih materijalnih konstanti se još može smanjiti.

Anizotropija je osobina elastičnih tela sa kristalnom strukturu da imaju različita elastična svojstva za različite materijalne pravce u telu. Za takva tela se kaže da su anizotropna. Iz kristalografske je poznato da postoje 32 različite kristalne strukture koje mogu posedovati anizotropna tela. Svaka od kristalnih struktura poseduje tačno odredjene elastične simetrije. To su materijalni pravci za koje su elastična svojstva ista što za sobom povlači odredjeni broj nezavisnih materijalnih konstanti u vezi tenzora napona i tenzora deformacije. Kada anizotropno elastično telo ima ravan elastične simetrije broj nezavisnih materijalnih konstanti se svodi na 13. Anizotropno elastično telo poseduje ravan elastične simetrije ako su elastične osobine tela iste za sve pravce koji se u tački tela dobijaju ogledanjem u odnosu na tu ravan.

Kada u svakoj tački deformabilnog tela postoje tri međusobno upravne ravni elastične simetrije za telo kažemo da je ortotropno ili da je telo sa ortogonalnom anizotropijom. Za taj slučaj broj nezavisnih materijalnih konstanti je 9.

Amorfna tela imaju osobinu da su im elastična svojstva u svim pravcima ista. pa su izotropna.

Metali su tela sa kristalastom strukturom i sastavljeni su od vrlo malih kristala različitih dimenzija i orijentacija. Svaki od ovih malih kristala je anizotropan i ima različita elastična svojstva u različitim pravcima. Makroskopski gledano zbog malih dimenzila kristala i njihovog nepravilnog rasporeda u telu ponašanje tela u celini se može smatrati izotropnim kako su elastična svojstva izotropnih materijala ista za sve pravce u tački teia i pošto se ovi pravci mogu potpuno definisati svojstvo izotropije uslovjava invarijantnost veze izmedju stanja napona i stanja deformacije.

Najprostijim telima pored osobine homogenosti možemo da pripišemo sa dovoljnom tačnošću i osobinu izotropnosti, a to znači da telo u svim tačkama ima iste osobine u svim pravcima koji prolaze kroz istu tačku. Stoga tenzor elastičnosti mora imati iste elemente u bilo kom koordinatnom sistemu, koji se dobija rotacijom nekog referentnog koordinatnog sistema oko koordinatnog početka. Znači da tenzor elastičnosti mora biti izotropan četvrtog reda i za njega važi veza:

$$\bar{C}_{ijkl} = C_{ijkl}, \quad (28)$$

gde je  $\bar{C}_{ijkl}$  tenzor elastičnosti za novi koordinatni sistem koji je postao rotacijom nekog referentnog. Uočimo vektor pomeranja sa kontravarijantnim koordinatama  $x^i$  u referentnom koordinatnom sistemu. Posle elementarne rotacije tog koordinatnog sistema uvek pomeranje  $x^i$  u obliku  $\bar{x}^i$ , pri čemu je:

$$\bar{x}^i - x^i = -\Omega_j^i x^j, \quad (29)$$

gde je  $\Omega_{ij}$  antisimetrični tenzor elementarne rotacije. Nove koordinate arinog vektora pomeranja se sada mogu napisati u obliku:

$$\bar{x}^i = x^i - \Omega_j^i x^j = (\delta_j^i - \Omega_j^i) x^j. \quad (30)$$

Koordinate afinog tenzora ma kog reda pri rotaciji koordinatnog sistema po definiciji se menjaju kao proizvod odgovarajućeg broja kovarijantnih vektora, te za tenzor elastičnosti možemo da napišemo:

$$\bar{C}_{ijkl} = \sum_{mnpq} C_{mnpq} (\delta_i^m - \Omega_i^m)(\delta_j^n - \Omega_j^n)(\delta_k^p - \Omega_k^p)(\delta_\ell^q - \Omega_\ell^q). \quad (31)$$

Posle množenja i sumiranja dobijamo:

$$\bar{C}_{ijkl} = C_{ijkl} - \sum_m (\Omega_i^m C_{mjkl} + \Omega_j^m C_{imkl} + \Omega_k^m C_{ijml} + \Omega_\ell^m C_{ijkm}) + \dots \quad (32)$$

150.

Ovde se radi o malim rotacijama te znači da je ugao rotacije infinitezimalna veličina, pa sve proizvode koordinata tenzora  $\Omega_j^i$  možemo zanemariti i u prvoj aproksimaciji zadržati samo linearne članove. Kako pri rotaciji koordinatnog sistema tenzor elastičnosti ne treba da se menja da bi bilo  $C_{ijk} = C_{ijkl}$ , to mora biti zadovoljen uslov:

$$\sum_m (\Omega_i^m C_{mjkl} + \Omega_j^m C_{imkl} + \Omega_k^m C_{ijml} + \Omega_l^m C_{ijkm}) = 0. \quad (33)$$

Ovaj uslov nam omogućava da izvedemo još neke veze koje moraju da zadovoljavaju koordinate izotropnog tenzora elastičnosti  $C_{ijkl}$ . Indeksi  $i, j, k$  i  $l$  moraju uzimati vrednosti 1, 2, 3 te su dva uvek međusobom jednak. Neka su  $i = j = I$ ;  $k = K$ ;  $l = L$ . Prethodna jednačina se svodi na jednačinu:

$$\sum_{m=I,K,L} (\Omega_I^m C_{mIKL} + \Omega_I^m C_{ImKL} + \Omega_K^m C_{IILM} + \Omega_L^m C_{IILK}) = 0, \quad (34)$$

koja se u razvijenom obliku može napisati :

$$\begin{aligned} & \Omega_I^I C_{IIKL} + \Omega_I^I C_{IILK} + \Omega_K^I C_{III L} + \Omega_L^I C_{IIKI} + \Omega_I^K C_{KIKL} + \Omega_I^K C_{IKKL} + \\ & + \Omega_K^K C_{IIKL} + \Omega_L^K C_{IILK} + \Omega_I^L C_{ILKL} + \Omega_I^L C_{ILKL} + \\ & + \Omega_K^L C_{IIIL} + \Omega_L^L C_{IIKL} = 0, \end{aligned} \quad (34*)$$

$$\Omega_K^I (C_{III L} - 2 C_{KIKL}) + \Omega_L^I (C_{IIKI} - 2 C_{ILKL}) + \Omega_L^K (C_{IIKK} - C_{IIKL}) = 0,$$

jer je  $\Omega_I^I = \Omega_L^L = \Omega_K^K = 0$  i  $\Omega_I^K = -\Omega_K^I$  zbog antisimetričnosti tenzora rotacije. Poslednja relacija je zadovoljena za bilo koju vrednost  $\Omega_j^i$  ako je:

$$\begin{array}{lll} C_{III L} = 0 & C_{IIKI} = 0 & C_{IIKK} = C_{IIIL} \\ C_{ILKL} = 0 & C_{KIKL} = 0 & \end{array} \quad (35)$$

Za slučaj  $I \neq K \neq L$  neka su  $i=I$ ,  $j=J$ ,  $k=I$  i  $l=L$  i proučavana relacija daje:

$$\sum_{m=I,J,L} (\Omega_I^m C_{mjIL} + \Omega_J^m C_{imIL} + \Omega_I^m C_{ijmL} + \Omega_L^m C_{ijIm}) = 0$$

$$\begin{aligned} & \Omega_I^I C_{IJIL} + \Omega_J^I C_{IIIL} + \Omega_I^I C_{IJIL} + \Omega_L^I C_{IJII} + \Omega_I^J C_{JJIL} + \\ & + \Omega_J^J C_{IJIL} + \Omega_I^J C_{IJJL} + \Omega_L^J C_{IJII} + \Omega_I^L C_{LJIL} + \Omega_J^L C_{ILIL} + \\ & + \Omega_I^L C_{IJLL} + \Omega_L^L C_{IJIL} = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\Omega_I^J(-C_{IIIIL} + C_{JJIL}) + \Omega_I^J C_{IJJL} + \Omega_L^J(C_{IJII} - C_{ILIL}) + \Omega_I^L C_{IJLL} = 0$$

odakle dolazimo do uslova da je:

$$C_{JJIL} = 0, \quad C_{IJJL} = 0, \quad C_{IJLL} = 0, \quad C_{IJII} = C_{ILIL}, \quad (37)$$

na kraju u slučaju kada su  $i=j=k=L$ ; tada se relacija (33) može u razvijenom obliku napisati ako:

$$\sum_{m=k,L} (\Omega_K^m C_{mKKL} + \Omega_K^m C_{KmKL} + \Omega_K^m C_{KKmL} + \Omega_L^m C_{KKKm}) = 0 \quad (38)$$

ili

$$\Omega_K^K C_{KKKL} + \Omega_K^K C_{KKKL} + \Omega_K^K C_{KKKL} + \Omega_L^K C_{KKKK} +$$

$$+ \Omega_K^L C_{LKKL} + \Omega_K^L C_{KLKL} + \Omega_K^L C_{KKLL} + \Omega_L^L C_{KKKL} = 0 \quad (39)$$

dobijamo vezu preostalih koeficijenata tenzora elastičnosti

$$\Omega_L^K (C_{KKKK} - 2C_{LKKL} - C_{KKLL}) = 0, \quad C_{KKKK} = 2C_{LKKL} + C_{KKLL}. \quad (40)$$

Dobijene veze koordinata tenzora elastičnosti mogu da se sistematizuju i da-ju u obliku

$$C_{IIIL} = C_{IILK} = C_{IIJJ} = C_{IJJJ}, \quad (41)$$

$$C_{IJJJ} = C_{ILIL} = C_{IKIK},$$

$$C_{KKKK} = 2C_{LKKL} + C_{KKLL}.$$

Iz izložene analize dolazimo do zaključka da postoji 12 koeficijenata tenzora elastičnosti različitih od nule, ali su medju njima samo dva nezavisna, dok se svi ostali mogu izraziti pomoću njih, odnosno tri su medju njima različita.

Sada možemo da rezimiramo rezultate koji definišu uslove koje zadovoljavaju koordinate tenzora elastičnosti  $C_{ijkl}$ :

1° Kada su sva četiri indeksa koeficijenata elastičnosti

$C_{IIIJ} = C_{KKKK} = C_{LLLL}$  jednaka medjusobom on je različit od nule;

2° Sve koordinate tenzora elastičnosti  $C_{IIKK} = C_{IIIL} = C_{KKLL} =$

$= \lambda$  čiji je prvi par indeksa jednak za sebe i drugi par indeksa jednak zasebno, su medjusobom jednaki;

3° Sve koordinate tenzora elastičnosti  $C_{IJJJ} = C_{IKIK} = C_{KJKJ} =$

$= \gamma$  čiji je prvi par indeksa jednak drugom paru indeksa jednake su medju-sobom;

4<sup>o</sup> Sve koordinate tenzora elastičnosti  $C_{ijkl}$  sa dva jednaka indeksa, a druga dva različita, jednake su nuli.

Uvedene konstante materijala  $\lambda$  i  $\nu$  su poznate konstante elastičnosti pod nazivom Lamé-ove konstante elastičnosti.

Koordinate tenzora elastičnosti  $C_{iiii}$  sa jednakim indeksima, sada se mogu izraziti pomoću Lamé-ovih konstanti u obliku:

$$C_{KKKK} = \lambda + 2\nu. \quad (42)$$

Lamé-ove konstante elastičnosti karakterišu elastične osobine elastičnog homogenog i izotropnog tela u datoj tački. Veza izmedju koordinata tenzora napona i tenzora deformacije može se sada izraziti samo pomoću dveju konstanti elastičnosti. S obzirom na prethodno odredjenu vezu koordinata tenzora elastičnosti isti možemo pretpostaviti kao zbir dva tenzora elastičnosti na sledeći način:

$$C_{ijkl} = \lambda \mu_{ijkl} + \nu v_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \nu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (43)$$

pri čemu je prvi tenzor:

$$\mu_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{za } i=j \quad k=l \\ 0 & \text{za } i \neq j \quad k \neq l \end{cases} \quad (44)$$

dok je drugi tenzor

$$v_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} = \delta_{il} \delta_{jk} = \begin{cases} 2 & \text{za } i=j=k=l \\ 0 & \text{za } i+j \neq k+l \end{cases} \quad (45)$$

Ako sada u uopšteni Hooke-ov zakon elastičnosti unesemo dobijeni izotropni tenzor elastičnosti dobijamo vezu izmedju tenzora napona  $\delta_{ij}$  i tenzora deformacije  $\epsilon^{kl}$  u obliku:

$$\delta_{ij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \epsilon^{kl} + \nu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \epsilon^{kl} \quad (46)$$

koji kada se uzme u obzir da je zapreminska dilatacija:

$$g_{ij} \epsilon_v = \epsilon g_{ij} = \delta_{ij} \delta_{kl} \epsilon^{kl}; \quad \epsilon = g_{kl} \epsilon^{kl} = g^{kl} \epsilon_{kl} = \epsilon_i^i; \quad (47)$$

i da je

$$\delta_{ik} \delta_{jl} \epsilon^{kl} = \epsilon_{ij} \quad i \quad \delta_{il} \delta_{jk} \epsilon^{kl} = \epsilon_{ij} \quad (48)$$

dobija konačan kovarijantni oblik:

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = \lambda g_{ij} \epsilon + 2\nu \epsilon_{ij} \quad (49)$$

Uopšteni Hooke-ov zakon u ortogonalnom sistemu krivolinjskih koordinata glasi:

a<sup>o</sup> u kovarijantnom obliku

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = \lambda g_{ij} \epsilon + 2\nu \epsilon_{ij}, \quad (50)$$

b<sup>o</sup> u kontravarijantnom obliku

$$\tilde{\epsilon}^{ij} = \lambda g^{ij} \epsilon + 2\nu \epsilon^{ij}, \quad (51)$$

c<sup>o</sup> u mešovitom obliku

$$\tilde{\epsilon}_j^i = \lambda g_j^i \epsilon + 2\nu \epsilon_j^i \quad (52)$$

U Descartes-ovom pravouglom koordinatnom sistemu uopšteni Hooke-ov zakon se u matričnom obliku može napisati kao:

$$\tilde{\epsilon} = \lambda \epsilon \mathbb{I} + 2\nu \tilde{\epsilon}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\epsilon}_x & \tilde{\epsilon}_{yx} & \tilde{\epsilon}_{zx} \\ \tilde{\epsilon}_{xy} & \tilde{\epsilon}_y & \tilde{\epsilon}_{zy} \\ \tilde{\epsilon}_{xz} & \tilde{\epsilon}_{yz} & \tilde{\epsilon}_z \end{bmatrix} = \lambda \epsilon \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + 2\nu \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\delta_{yx}^x & \frac{1}{2}\delta_{zx}^x \\ \frac{1}{2}\delta_{xy}^x & \epsilon_y & \frac{1}{2}\delta_{zy}^x \\ \frac{1}{2}\delta_{xz}^x & \frac{1}{2}\delta_{yz}^x & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (53)$$

Ako odredimo prve skalarne invarijante matrica sa leve i sa desne strane dobijećemo vezu izmedju invarijanti matrice tenzora napona,  $\mathcal{N}_1$ , i matrice tenzora deformacije,  $\mathcal{E}_1$ , kao:

$$\mathcal{N}_1 = (3\lambda + 2\nu) \mathcal{E}_1 ; \quad \mathcal{E}_1 = \epsilon_v = \epsilon, \quad (54)$$

te možemo iz (53) da izrazimo matricu tenzora deformacije  $\tilde{\epsilon}$  pomoću matrice tenzora napona  $\tilde{\epsilon}$ :

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{2\nu} \tilde{\epsilon} - \frac{\lambda}{2\nu(3\lambda+2\nu)} \mathcal{N}_1 \mathbb{I} \quad (55)$$

U polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu s obzirom na ranije dobijene veze kovarijantnih koordinata i fizičkih koordinata tenzora napona  $\tilde{\epsilon}$  i tenzora deformacije  $\tilde{\epsilon}$  i na osnovu (51) možemo uopštiti Hooke-ov zakon da napišemo u obliku:

$$\varepsilon = \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$\begin{pmatrix} b_r & \frac{1}{r} \tilde{c}_{\varphi r} & \tilde{c}_{zr} \\ \frac{1}{r} \tilde{c}_{r\varphi} & \frac{1}{r^2} \tilde{c}_\varphi & \frac{1}{r} \tilde{c}_{z\varphi} \\ \tilde{c}_{rz} & \frac{1}{r} \tilde{c}_{\varphi r} & b_z \end{pmatrix} = 2\nu \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{2r} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \right] & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2r} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \right] & \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) & \frac{1}{2r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) & \frac{1}{2r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} + \lambda \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{r^2} \\ \frac{1}{r^2} & 1 \end{pmatrix} \quad (56)$$

ili izraženo po komponentnim naponima:

$$b_r = \lambda \left( \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\nu \frac{\partial u}{\partial r},$$

$$b_\varphi = \lambda \left( \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\nu \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right), \quad (57)$$

$$b_z = \lambda \left( \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\nu \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\tilde{c}_{r\varphi} = \nu \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \right]$$

$$\tilde{c}_{r\varphi} = \nu \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right]$$

$$\tilde{c}_{z\varphi} = \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

U sfernom koordinatnom sistemu na sličan način imamo izraz uopštenog Hooke-ovog zakona:

$$\begin{pmatrix} b_\rho & \frac{\tilde{c}_{\rho\varphi}}{s \cos \gamma} & \frac{\tilde{c}_{\rho\gamma}}{s} \\ \frac{\tilde{c}_{\rho\varphi}}{s \cos \gamma} & \frac{b_\varphi}{s^2 \cos^2 \gamma} & \frac{\tilde{c}_{\varphi\gamma}}{s^2 \cos^2 \gamma} \\ \frac{\tilde{c}_{\rho\gamma}}{s} & \frac{\tilde{c}_{\varphi\gamma}}{s^2 \cos^2 \gamma} & \frac{b_\gamma}{s^2} \end{pmatrix} = \lambda \left( 2 \frac{u}{s} + \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{1}{s} \frac{\partial v}{\partial \gamma} - \frac{w}{s} \operatorname{tg} \gamma \right) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{s^2 \cos^2 \gamma} & \\ & & \frac{1}{s^2} \end{pmatrix} + \quad (58)$$

$$+ 2\nu \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \rho} & \frac{1}{2s \cos \gamma} \left[ \frac{1}{s \cos \gamma} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \left( \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{s} \right) \right] & \frac{1}{2s} \left[ \frac{1}{s} \left( \frac{\partial u}{\partial \gamma} - w \right) + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right] \\ \frac{1}{2s \cos \gamma} \left[ \frac{1}{s \cos \gamma} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \left( \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{s} \right) \right] & \frac{1}{s^2 \cos^2 \gamma} \left[ \frac{1}{s \cos \gamma} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{s} \left( u - w \operatorname{tg} \gamma \right) \right] & \frac{1}{2s^2 \cos^2 \gamma} \left[ \frac{1}{s} \left( \frac{\partial v}{\partial \gamma} + v \operatorname{tg} \gamma \right) + \frac{1}{s \cos \gamma} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] \\ \frac{1}{2s} \left[ \frac{1}{s} \left( \frac{\partial u}{\partial \gamma} - w \right) + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right] & \frac{1}{2s^2 \cos^2 \gamma} \left[ \frac{1}{s} \left( \frac{\partial v}{\partial \gamma} + v \operatorname{tg} \gamma \right) + \frac{1}{s \cos \gamma} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] & \frac{1}{s^3} \left( \frac{\partial w}{\partial \gamma} + u \right) \end{pmatrix}$$

ili izraženo po komponentnim naponima:

$$b_\rho = \lambda \varepsilon_v + 2\nu \frac{\partial u}{\partial \rho}$$

$$b_\varphi = \lambda \varepsilon_v + 2\nu \left[ \frac{1}{s \cos \gamma} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{s} \left( u - w \operatorname{tg} \gamma \right) \right] \quad (59)$$

$$b_\gamma = \lambda \varepsilon_v + 2\nu \frac{1}{s} \left( \frac{\partial w}{\partial \gamma} + u \right)$$

$$\varepsilon_v = 2 \frac{u}{s} + \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{1}{s \cos \gamma} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{s} \operatorname{tg} \gamma$$

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}_{\varphi\varphi} &= \nu \left[ \frac{1}{\beta \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{v}{\beta} \right) \right], \\ \tilde{\zeta}_{\varphi\psi} &= \nu \left[ \frac{1}{\beta} \left( \frac{\partial u}{\partial \psi} - w \right) + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right], \\ \tilde{\zeta}_{\psi\psi} &= \nu \left[ \frac{1}{\beta} \left( \frac{\partial v}{\partial \psi} + v \tan \varphi \right) + \frac{1}{\beta \cos \varphi} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right]\end{aligned}\quad (59*)$$

## III.4. DRUGI OBLIK HOOKE-OVOG ZAKONA

Potražimo sada, prvu invariјantu  $\mathcal{N}_1$  tenzora napona  $\sigma_{ij}$ , polazeći od uopštenog Hooke-ovog zakona izraženog u krivolinijskom sistemu koordinata:

$$\sigma_{ij} = \lambda g_{ij} \epsilon + 2\nu \epsilon_{ij} \quad (60)$$

tako da dobijemo vezu sa prvom invariјantom  $\mathcal{E}_1$  tenzora deformacije u obliku:

$$\mathcal{N}_1 = g^{ij} \sigma_{ij} = \lambda g^{ij} g_{ij} \epsilon + 2\nu g^{ij} \epsilon_{ij} = (3\lambda + 2\nu) \epsilon \quad (61)$$

Koristeći ovu vezu invariјanti  $\mathcal{N}_1$  i  $\mathcal{E}_1$  tenzora napona  $\sigma_{ij}$  i tenzora deformacije  $\epsilon_{ij}$ , Hooke-ov zakon možemo napisati u obliku zavisnosti tenzora deformacije od tenzora napona u obliku:

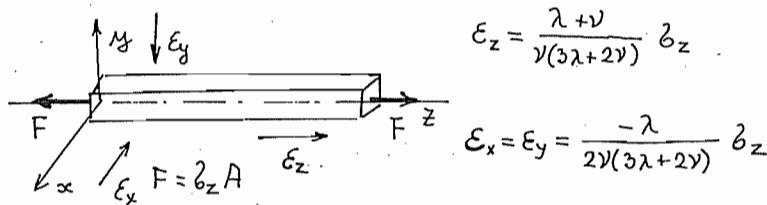
$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\nu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\nu(3\lambda+2\nu)} g^{ij} \mathcal{N}_1 \quad (62)$$

Hooke-ov zakon je uveden za jednodimenzionalno stanje naprezanja, kao veza izmedju napona i dilatacije za slučaj aksijalnog naprezanja, dok je koefficijent elastičnosti  $E$  uveo Thomas Young kao koefficijent proporcionalnosti izmedju napona i dilatacije.

U tehničkim problemima umesto Lamé-ovih konstanti  $\lambda$  i  $\nu$  uvode se dve nove konstante: modul elastičnosti  $E$  i Poišson-ov koefficijent  $\mu$ , kao koefficijent bočne (poprečne) kontrakcije.

Neka je cilindrični štap kao na slici br. 1 zategnut aksijalnom silom u pravcu geometrijske ose štapa, onda od šest komponentnih napona postoji samo normalni napon  $\sigma_z = \sigma_{II}$  i tada iz Hooke-ovog zakona sledi da je:

156.



$$\varepsilon_z = \frac{\lambda + \nu}{\nu(3\lambda + 2\nu)} \delta_z \quad (63)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{-\lambda}{2\nu(3\lambda + 2\nu)} \delta_z$$

Slika b.1

Za ovaj definisani slučaj naprezanja možemo da damo fizičko tumačenje tehničkih konstanti elastičnosti i to:

Modul elastičnosti  $E$  je količnik normalnog napona  $\delta_z$  u poprečnom preseku štapa i dilatacije  $\varepsilon_z$  linijskih elemenata u pravcu ose štapa, odnosno dejstva sile:

$$E = \frac{\delta_z}{\varepsilon_z} = \frac{\nu(3\lambda + 2\nu)}{\lambda + \nu} \quad (64)$$

Poisson-ov koeficijent  $\mu$  poprečne kontrakcije, definišemo kao količnik dilatacija  $\varepsilon_x$  linijskih elemenata u pravcu poprečno na čsu štapa i dilatacije  $\varepsilon_z$  linijskih elemenata u pravcu ose štapa za slučaj aksijalnog naprezanja:

$$\mu = \frac{|\varepsilon_x|}{|\varepsilon_z|} = \frac{|\varepsilon_y|}{|\varepsilon_z|} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \nu)} \quad (65)$$

Ove uvedene tehničke konstante elastičnosti su uvek pozitivne za sve materijale. Modul elastičnosti  $E$  kao koeficijent proporcionalnosti između normalnog napona i odgovarajuće dilatacije ima istu dimenziju kao i napona, sila po jedinici površine:  $[N/cm^2]$ , a fizički stvarno predstavlja napon koji je potreban da bi dilatacija bila jednaka jedinici. To je napon koji je potrebno postići da bi se štap od određenog materijala izdužio za prvobitnu dužinu.

Drugu tehnički konstantu uveo je Poisson (1829) i dao joj vrednost  $1/4$ , a na osnovu molekularne teorije prema kojoj se broj konstanti elastičnosti svodi na jedan. Međutim opiti su pokazali da je vrednost Poisson-ovog koeficijenta u sledećim granicama

$$\frac{1}{4} < \mu < \frac{1}{3} \quad (66)$$

i da upraktičnim zadacima Teorije elastičnosti i Otpornosti materijala njeni vrednosti se za materijale obično usvaja  $1/3$  i ona je bez dimenzija kao odnos dilatacija. Za slučaj čistog smicanja tangencijalni napon je  $\tau_{IK} = 2\nu \varepsilon_{IK}$  ( $I \neq K$ ),

te se po analogiji sa zatezanjem tehnička konstanta  $G = \nu$  zove konstanta torzije ili modul klizanja ili modul smica - nja, a ima iste dimenzije kao i modul elastičnosti.

Lamé-ove konstante se mogu izraziti pomoću tehničkih konstanti kao:

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \frac{\mu K E}{1+\mu} = 2\mu K G; \quad (67)$$

$$\nu = G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \quad \kappa = \frac{1}{1-2\mu}$$

Vezu izmedju prvih skalara tensora napona  $N_1$  i tensora deformacije  $E_1$  možemo da napišemo u obliku:

$$N_1 = \kappa E E_1 = \frac{E}{1-2\mu} \epsilon_v \quad (68)$$

Koristeći novouvedene tehničke konstante možemo da napišemo drugi oblik Hooke-ovog zakona u kome je tenzor deformacije izražen u funkciji tensora napona i to:

1º pomoću njegovih kovarijantnih koordinata:

$$E_{ij} = \frac{1}{E} \left\{ (1+\mu) \delta_{ij} - \mu g_{ij} N_1 \right\}, \quad (69)$$

2º pomoću njegovih kontravarijantnih koordinata

$$E^{ij} = \frac{1}{E} \left\{ (1+\mu) \delta^{ij} - \mu g^{ij} N_1 \right\}, \quad (70)$$

ili tenzor napona  $\delta_{ij}$  izražen u funkciji od tensora deformacije  $E_{ij}$  i to:

3º pomoću njegovih kovarijantnih koordinata

$$\delta_{ij} = 2G \left\{ \epsilon_{ij} + \mu \kappa \epsilon g_{ij} \right\}, \quad (71)$$

4º pomoću njegovih kontravarijantnih koordinata

$$\delta^{ij} = 2G \left\{ \epsilon^{ij} + \mu \kappa \epsilon g^{ij} \right\}. \quad (72)$$

III.5. MODUL KOMPRESIJE. VEZA IZMEDJU DEVIJATORA NAPONA  
I DEVIJATORA DEFORMACIJE

Uvedimo srednji napon  $p$  u obliku

$$p = \frac{1}{3} M_1 = \frac{2}{3} G(1+\mu) K \varepsilon = \frac{1}{3} g^{kl} \delta_{kl} = \frac{2}{3} G(1+\mu) K g^{kl} \varepsilon_{kl}, \quad (73)$$

te je prema definiciji devijator napona

$$d_{ij}^{(2)} = \delta_{ij} - p g_{ij} \quad (74)$$

Iskoristimo sada uopšteni Hooke-ov zakon koji daje vezu izmedju kovarijantnih koordinata tenzora napona  $\delta_{ij}$  i odgovarajućih koordinata tenzora deformacije  $\varepsilon_{ij}$  oblika (71) i umesto koordinata tenzora napona unesemo u prethodnu jednačinu, tako da dobijemo

$$d_{ij}^{(2)} = 2G \{ \varepsilon_{ij} + \mu K \varepsilon g_{ij} \} - \frac{2}{3} G(1+\mu) K \varepsilon g_{ij}, \quad (75)$$

a imajući u vidu vezu (73) posle sredjivanja dobijamo:

$$d_{ij}^{(2)} = 2G \left\{ \varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon}{3} g_{ij} \right\} \quad (76)$$

Izraz u zagradi poslednje jednačine predstavlja po definiciji devijator deformacije, tako da dobijemo konačni oblik veze izmedju devijatora napona i devijatora deformacije, kao:

$$d_{ij}^{(2)} = 2G d_{ij}^{(\varepsilon)} \quad (77)$$

gde smo sa  $d_{ij}^{(\varepsilon)}$  obeležili kovarijantne koordinate devijatora tenzora deformacije. Ako bismo devijatorima napona i deformacije pridružili odgovarajuće matrice  $\mathcal{D}^{(2)}$  i  $\mathcal{D}^{(\varepsilon)}$  to bismo poslednju vezu mogli da napišemo u obliku:

$$\mathcal{D}^{(2)} = 2G \mathcal{D}^{(\varepsilon)} \quad (78)$$

Neka je telo izloženo dejству hidrostatickog pritiska  $p$ , onda tenzor napona ima samo sferni deo, dok je devijatorski deo jednak nuli, te znači da tako napregnuto telo samo menja zapreminu, a ne i oblik. Imajući

u vidu vezu izmedju prvih invariјanti tenzora napona i tenzora deformacije možemo da nadjemo sledeću vezu:

$$p = -\frac{N_1}{3} = -\frac{3\lambda+2\nu}{3} \epsilon_v = -\frac{E}{3(1-2\mu)} \epsilon_v = -K \epsilon_v, \quad (79)$$

izmedju hidrostatičkog pritiska i zapremske dilatacije koja je linearna. Ta linearna veza je posredstvom koeficijenta  $K$  čija je vrednost

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} = \frac{2}{3} (1+\mu) \kappa G, \quad (80)$$

i nazivamo ga modulom kompresije, koji ima dimenzije napona, a jedinice naprimer  $[N/cm^2]$ , ili Pa, ili bar.

### III.6. ODNOŠI IZMEDU NAPONA I DEFORMACIJA IZVEDENI U DESCARTES-OVOM KOORDINATNOM SISTEMU. UOPŠTENI HOOKE-OV ZAKON.

Polazeći od fizičkih razmatranja o vezi napona i deformacija koju smo izveli u III.1., 2., 3. koja je za idealno elastično telo i male deformacije linearna možemo za Descartes-ove koordinate tenzora napona i tenzora deformacije u matričnom obliku da napišemo tu linearnu vezu kao:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (81)$$

Ova linearna veza sadrži 36 koeficijenata elastičnosti na koje se svodi tenzor elastičnosti  $C_{ij}$  kada se uzme u obzir njegova osobina simetričnosti, pa smo radi jednostavnijeg razmatranja uveli nove oznake  $C_{ij}$  za koordinate tenzora elastičnosti u kojima indeksi  $i$  i  $j$  uzimaju vrednosti 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Ovakom uopštenim zakonom elastičnosti obuhvaćena su i anizotropna tela. Rekli smo da je za homogena tела tenzor elastičnosti simetri-

160.

čan u odnosu na prvi i drugi par indeksa pa sledi da su novouvedeni koeficijenti  $C_{ik}$  simetrični tj. da je:

$$C_{ik} = C_{ki} = \text{const} \quad (82)$$

petnaest novih veza pa je broj nezavisnih koeficijenata  $C_{ik}$  sada 21.

To znači da matrica koeficijenata  $C_{ik}$  jeste simetrična u odnosu na elemente  $C_{ii}$  koji leže na glavnoj dijagonali.

Izotropno telo ima iste fizičke osobine u svim pravcima u svakoj tački i kako koeficijenti matrice elastičnosti ne zavise od izbora koordinatnog sistema to znači da veza oblika (81) se ne menja pri rotaciji koordinatnog sistema. Zato pretpostavimo da smo izvršili rotaciju koordinatnog sistema oko  $Ox$  ose u pozitivnom matematičkom smeru za ugao  $\vartheta$  tako da je osa  $Oy$  prešla u  $-Oy$  osu, dok je osa  $Oz$  prešla u  $-Oz$  osu te početnu relaciju (81) možemo da napišemo u obliku:

$$\begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ -\tilde{\epsilon}_{xy} \\ -\tilde{\epsilon}_{xz} \\ \tilde{\epsilon}_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ -\delta_{xy} \\ -\delta_{xz} \\ \delta_{yz} \end{Bmatrix}. \quad (83)$$

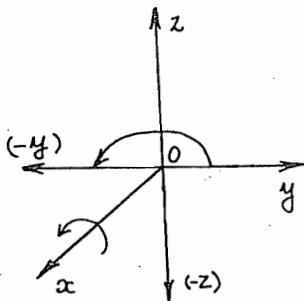
Pri tome smo imali u vidu da normalni naponi ne menjaju znak pri promeni smera orta normale na ravan tj. da je  $\delta_{(-n)} = \delta_n$ , a da tangencijalni naponi menjaju znak kao  $\tilde{\epsilon}_{(-n)} = -\tilde{\epsilon}_n$ , što je analogno i za dilatacije koje ne menjaju znak tj.  $\epsilon_{(-n)} = \epsilon_n$ , a klizanja menjaju znak  $\delta_{(-n)v} = -\delta_{nv}$  jer je u jednom slučaju smanjenje pravog ugla, a u drugom povećanje. S obzirom na promenu znaka  $\tilde{\epsilon}_{xy}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{xz}$ ,  $\delta_{xy}$  i  $\delta_{xz}$ , a da bi se sačuvala invarijantnost uopštenog Hooke-ovog zakona potrebno je da su sledeći koeficijenti jednaki nuli:

$$C_{14} = C_{41} = 0 \quad C_{15} = C_{51} = 0 \quad C_{24} = C_{42} = 0 \quad C_{25} = C_{52} = 0 \\ C_{34} = C_{43} = 0 \quad C_{35} = C_{53} = 0 \quad C_{46} = C_{64} = 0 \quad C_{56} = C_{65} = 0.$$

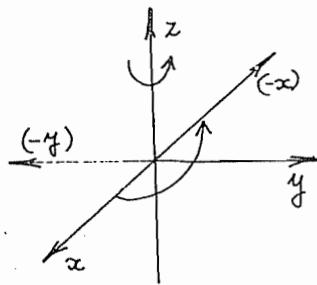
Pretpostavimo sada da smo izvršili rotaciju koordinatnog sistema oko  $Oz$  ose za  $\vartheta$  tako da je osa  $Ox$  prešla u  $-Ox$  osu, a osa  $Oy$  prešla u osu  $-Oy$ . Tada se menjaju znaci tangencijalnih napona  $\tilde{\epsilon}_{xz}$  i

$\tau_{zy}$ , kao i klizanja  $\delta_{zx}$  i  $\delta_{zy}$ , tako da se veza (81) izmedju napona i deformacija uzimajući u obzir da su neki koeficijenti jednaki nuli prema (84) može da napiše u obliku:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ -\tau_{xz} \\ -\tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \delta_{xy} \\ -\delta_{xz} \\ -\delta_{yz} \end{Bmatrix} \quad (85)$$



Slika br. 2 a



Slika br. 2 b

Da bi se sačuvala invarijantnost zakona elastičnosti potrebno je da koeficijenti pred kojima se promenio znak u izrazima za normalne napone budu jednaki nuli odakle sledi da je

$$\begin{aligned} C_{16} &= C_{61} = 0, & C_{62} &= C_{26} = 0, \\ C_{54} &= C_{45} = 0, & C_{63} &= C_{36} = 0. \end{aligned} \quad (86)$$

Na osnovu poslednjih zaključaka zaključujemo da se broj nezavisnih konstanti u matrici elastičnosti smanjio na devet, tako da Hooke-ov zakon sada ima oblik:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \\ C_{44} & & \\ C_{55} & & \\ C_{66} & & \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \delta_{xy} \\ \delta_{xz} \\ \delta_{yz} \end{Bmatrix} \quad (87)$$

162.

Iz poslednjeg oblika vidimo da normalni komponentni naponi zavise samo od dilatacija, dok tangencijalni komponentni naponi zavise samo od klizanja. Izvršimo sada takvu rotaciju koordinatnog sistema oko koordinatnog početka da osa  $Ox$  predje u osu  $Oy$ , osa  $Oy$  predje u osu  $Oz$  i osa  $Oz$  predje u osu  $Ox$ . Uopšteni Hooke-ov zakon oblika (87) sada prelazi u

$$\begin{Bmatrix} \delta_y \\ \delta_z \\ \delta_{xz} \\ \tilde{\epsilon}_{yz} \\ \tilde{\epsilon}_{yx} \\ \tilde{\epsilon}_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{44} \\ C_{55} \\ C_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_y \\ \epsilon_x \\ \epsilon_z \\ \delta_{xy} \\ \delta_{yz} \\ \delta_{zx} \end{Bmatrix} \quad (88)$$

Da bi se sačuvala invarijantnost oblika zakona elastičnosti, potrebno je da su sledeći koeficijenti međusobom jednaki:

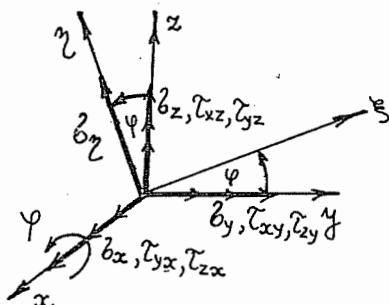
$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = A, \quad C_{21} = C_{12} = C_3 = C_{31} = C_{32} = C_{23} = B. \quad (89)$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = C,$$

Posle ovog razmatranja dolazimo do zaključka da se broj nezavisnih konstanti matrice elastičnosti sveo na tri. Sada uopšteni Hooke-ov zakon možemo napisati posredstvom dve matrične jednačine na koje se svodi veza (88) u obliku:

$$\begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \tilde{\epsilon}_{xy} \\ \tilde{\epsilon}_{xz} \\ \tilde{\epsilon}_{yz} \end{Bmatrix} = C \begin{Bmatrix} \delta_{xy} \\ \delta_{xz} \\ \delta_{yz} \end{Bmatrix} \quad (69)$$

Za slučaj potpuno izotropnog tela možemo izvršiti potpuno proizvoljnu rotaciju koordinatnog sistema  $Oxyz$  za ugao  $\varphi$  u pozitivnom smeru oko ose  $Ox$  (ili  $Oz$  ili  $Oy$ ) tako da osa  $Oy$  predje u osu  $Oz$ , a osa  $Oz$  predje u osu  $Oy$ , kao što je to naznačeno na slici br. 3. Normalni



napon u ravni sa normalom  $Oy$  u pravcu ose  $Oy$  jednak je:

$$\delta_y = (j') \wedge \{j'\}$$

$$\delta_y = (\cos\varphi \sin\varphi) \begin{Bmatrix} \delta_y & \tilde{\epsilon}_{zy} \\ \tilde{\epsilon}_{yz} & \delta_z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{Bmatrix}, \quad (91)$$

Slika br. 3

$$\begin{aligned}\delta_y &= (A-B)\varepsilon_y + B\varepsilon = \delta_y \cos^2\varphi + \delta_z \sin^2\varphi + 2\delta_{zy} \sin\varphi \cos\varphi = \\ &= (A-B) \left[ \varepsilon_y \cos^2\varphi + \varepsilon_z \sin^2\varphi + \frac{2C}{A-B} \delta_{zy} \sin\varphi \cos\varphi \right] + B\varepsilon,\end{aligned}\quad (91*)$$

gde smo uzeli u obzir zakon transformacije koordinata tenzora napona pri rotaciji koordinatnog sistema (I.8.61) i poslednji izvedeni izraz (90) uopšteneog Hooke-ovog zakona. Dilatacija linijskog elementa u pravcu O $\gamma$  ose je:

$$\varepsilon_y = (\gamma') \begin{pmatrix} \mathcal{E} \\ \mathcal{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma' \\ \gamma' \end{pmatrix} = (\cos\varphi \ \sin\varphi) \begin{pmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\delta_{zy} \\ \frac{1}{2}\delta_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \varepsilon_y \cos^2\varphi + \varepsilon_z \sin^2\varphi + \delta_{zy} \sin\varphi \cos\varphi \quad (92)$$

Uspoređujući poslednji izraza (92) sa izrazom u srednjoj zagradi izraza (91\*) dolazimo do zaključka da mora postojati sledeća veza tri preostala koeficijenta matrice elastičnosti

$$A - B = 2C, \quad (93)$$

koja je karakteristična za homogena i izotropna tela. Tu istu vezu smo dobili i u ranijim proučavanjima. Na sličan način kao i ranije možemo da uvedemo Lamé-ove konstante  $\lambda$  i  $\nu$  u obliku:

$$\nu = C = \frac{A-B}{2}, \quad A = 2\nu + \lambda, \quad \lambda = B, \quad (94)$$

koje smo već i ranije definisali.

Uopšteni Hooke-ov zakon se sada može napisati u obliku:

$$\mathcal{N} = \lambda \varepsilon \mathbb{I} + 2\nu \mathcal{E} \quad (95)$$

ili

$$\begin{bmatrix} \delta_x & \delta_{yx} & \delta_{zx} \\ \delta_{xy} & \delta_y & \delta_{zy} \\ \delta_{xz} & \delta_{yz} & \delta_z \end{bmatrix} = \lambda \varepsilon \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + 2\nu \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\delta_{yx} & \frac{1}{2}\delta_{zx} \\ \frac{1}{2}\delta_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\delta_{zy} \\ \frac{1}{2}\delta_{xz} & \frac{1}{2}\delta_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (95*)$$

gde je  $\mathbb{I}$  jedinična dijagonalna matrica. Ako potražimo invariјantu matrice na levoj i desnoj strani kao zbir elemenata na glavnim dijagonalama dobijamo vezu izmedju prvih invariјanti matrice tenzora napona  $\mathcal{N}$  i matrice tenzora deformacije  $\mathcal{E}$  u obliku:  $\varepsilon = \varepsilon_v = \mathcal{E}_1$

$$\mathcal{N}_1 = \delta_x + \delta_y + \delta_z = (3\lambda + 2\nu)(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = (3\lambda + 2\nu) \varepsilon_v. \quad (96)$$

164.

Rešavanjem matrične jednačine (95) odnosno (95\*) po tenzoru deformacije  $\mathcal{E}$  dobijamo eksplicitnu vezu tenzora deformacije i tenzora napona u obliku:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\nu} N\bar{I} - \frac{\lambda}{2\nu(3\lambda+2\nu)} M_1 \bar{II}, \quad (97)$$

ili u razvijenom obliku:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\delta_{yx} & \frac{1}{2}\delta_{zx} \\ \frac{1}{2}\delta_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\delta_{zy} \\ \frac{1}{2}\delta_{xz} & \frac{1}{2}\delta_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2\nu} \begin{pmatrix} \delta_x & \tilde{\gamma}_{yx} & \tilde{\gamma}_{zx} \\ \tilde{\gamma}_{xy} & \delta_y & \tilde{\gamma}_{zy} \\ \tilde{\gamma}_{xz} & \tilde{\gamma}_{yz} & \delta_z \end{pmatrix} - \frac{\lambda(\delta_x + \delta_y + \delta_z)}{2\nu(3\lambda+2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}. \quad (97*)$$

### III.7. DRUGI OBLIK HOOKE-OVOG ZAKONA. VEZA IZMEDJU DEVIJATORA NAPONA I DEVIJATORA DEFORMACIJE IZRAŽENA U DESCARTES-OVOM KOORDINATNOM SISTEMU.

Koristeći već definisane tehničke konstante: modul elastičnosti  $E$  izrazom (64), Poisson-ov koeficijent  $\mu$  poprečne kontrakcije definisan izrazom (65) i uvedeni koeficijent torzije ili modul klizanja  $G$  u Descartes-ovom koordinatnom sistemu drugi oblik Hooke-ovog zakona je:

$$N\bar{I} = 2G\{\mathcal{E} + \mu\kappa\varepsilon\bar{II}\}, \quad \kappa = \frac{1}{1-2\mu}, \quad (98*)$$

$$\begin{aligned} \delta_x &= 2G[\varepsilon_x + \mu\kappa\varepsilon] = 2G\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\kappa \operatorname{div} \vec{s}\right], \\ \delta_y &= 2G[\varepsilon_y + \mu\kappa\varepsilon] = 2G\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \mu\kappa \operatorname{div} \vec{s}\right], \\ \delta_z &= 2G[\varepsilon_z + \mu\kappa\varepsilon] = 2G\left[\frac{\partial w}{\partial z} + \mu\kappa \operatorname{div} \vec{s}\right], \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{xy} &= G\delta_{xy} = G\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right], \\ \tilde{\gamma}_{yz} &= G\delta_{yz} = G\left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right], \\ \tilde{\gamma}_{xz} &= G\delta_{xz} = G\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right]. \end{aligned}$$

ili ako iste izrazimo po matrići tenzora deformacije:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{E} \{(1+\mu)N\bar{I} - \mu M_1 \bar{II}\}, \quad (99)$$

ili

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [b_x - \mu(b_y + b_z)], & \delta_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \gamma_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [b_y - \mu(b_x + b_z)], & \delta_{yz} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \gamma_{yz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [b_z - \mu(b_x + b_y)], & \delta_{xz} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \gamma_{xz}.\end{aligned}\quad (99*)$$

Na osnovu ranije izvedene veze izmedju devijatora napona  $\mathcal{D}^{(2)}$  i devijatora tenzora deformacije za Descartes-ov koordinatni sistem možemo u razvijenom obliku da napišemo:

$$\mathcal{D}^{(2)} = 2G \mathcal{D}^{(\epsilon)}, \quad (100)$$

ili u razvijenom obliku:

$$\begin{bmatrix} b_x - p & \gamma_{yx} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & b_y - p & \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & b_z - p \end{bmatrix} = 2G \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \frac{1}{3}\varepsilon_v & \frac{1}{2}\delta_{xy} & \frac{1}{2}\delta_{zx} \\ \frac{1}{2}\delta_{xy} & \varepsilon_y - \frac{1}{3}\varepsilon_v & \frac{1}{2}\delta_{zy} \\ \frac{1}{2}\delta_{xz} & \frac{1}{2}\delta_{yz} & \varepsilon_z - \frac{1}{3}\varepsilon_v \end{bmatrix}. \quad (100^*)$$

Sada pokažimo da prethodna veza važi. Po definiciji devijator napona dobiće-mo kao razliku tenzora napona  $\mathcal{N}$  i sfernog tenzora  $\mathcal{D}^{(2)}$ , koristeći pri tome Hooke-ov zakon:

$$\mathcal{D}^{(2)} = \mathcal{N} - p\mathbb{I} = 2G(\mathcal{E} + \mu k\varepsilon\mathbb{I}) - \frac{2}{3}G(1+\mu)\varepsilon_k\mathbb{I} = 2G\left(\mathcal{E} - \frac{1}{3}\varepsilon\mathbb{I}\right)$$

gde je

$$p = 2G(1+\mu) \frac{k}{3} \varepsilon = \frac{\mathcal{N}_i}{3}$$

pa konačno dobijamo da je:

$$\mathcal{D}^{(2)} = 2G \mathcal{D}^{(\epsilon)}$$

što je i dokaz izraza (100).

### III.8. JEDNAČINE RAVNOTEŽE I KRETANJA ELASTIČNOG TELA LAME-OVE JEDNAČINE

Iz Navier-ovih jednačina ravnoteže ne može se odrediti svih šest komponentnih napona ako su poznate samo spoljašnje sile. Tako postavljen problem za neprekidnu sredinu je neodređen. Međutim ako se ograničimo na homogenu i izotropnu neprekidnu sredinu za koju smo formulisali vezu između komponenata tenzora napona  $\sigma^{ij}$  i komponenata tenzora deformacije  $\epsilon^{ij}$  pomoću uopštenog Hooke-ovog zakona možemo izvesti jednačine ravnoteže odnosno kretanja koje će dati vezu između spoljašnjih sila i komponentnih pomeranja. Iz takvih jednačina možemo odrediti komponentna pomeranja, pomoću kojih možemo zatim sastaviti tenzor deformacija posredstvom Hooke-ovog zakona izračunati i komponentne napone, tako da u krajnjem rezultatu dobijamo vezu između napona i spoljašnjih sila.

Koristeći uopšteni oblik Hooke-ovog zakona u kontravarijantnom obliku

$$\sigma^{ij} = \lambda g^{ij} + 2\mu \epsilon^{ij} = 2G\{\epsilon^{ij} + \mu K \epsilon^{ij}\}, \quad (101)$$

izvršimo zamenu tenzora napona  $\sigma^{ij}$  u Navier-ovim jednačinama u kontravarijantnom obliku:

$$\sigma_{,j}^{ij} + g(F_m)^i = 0 \quad \text{ili} \quad \sigma_{,j}^{ij} + (F_v')^i = 0, \quad (102)$$

čime dobijamo da je:

$$g(F_m)^i + 2G\epsilon_{,j}^{ij} + 2G_{MK}g_{,j}^{ij} = 0, \quad (103)$$

jer je:

$$\sigma_{,j}^{ij} = 2G\{\epsilon_{,j}^{ij} + \mu K \epsilon_{,j}^{ij}\}. \quad (104)$$

Veza između koordinata tenzora deformacije i koordinata vektora pomeranja je:

$$\epsilon^{ij} = \frac{1}{2}(u^{i,j} + u^{j,i}) \quad (105)$$

tako kovarijantnim diferenciranjem daje:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{,j}^{ij} &= \frac{1}{2} (\mu^{i,j} + \mu^{j,i}) = \frac{1}{2} [(\mu_{,k}^i g^{kj}),_j + (\mu_{,k}^j g^{ki}),_j] = \\ &= \frac{1}{2} [\Delta \mu^i + g^{ik} \mu_{,ki}^j] = \frac{1}{2} [\Delta \mu^i + g^{ij} \varepsilon_{,i}], \end{aligned} \quad (106)$$

jer je:

$$(\mu^{j,i}),_j = (g^{ik} \mu_{,k}^j),_j = g^{ik} \mu_{,kj}^j = g^{ij} \mu_{,kj}^k = g^{ij} \varepsilon_{,j}, \quad (107)$$

$$\mu^e R^k e_{jk} = \mu_{,jk}^k - \mu_{,kj}^k = 0. \quad (107*)$$

Zamenom dobijenog izraza (106) u jednačinu ((103)) možemo iz nje dobiti sledeću:

$$(F_v')^i + G[\Delta \mu^i + \kappa \varepsilon_{,j} g^{ij}] = 0, \quad (108)$$

ili ako je prevedemo na kovarijantni oblik dobijamo:

$$(F_v')_i + G[\Delta \mu_i + \kappa \varepsilon_{,i}] = 0. \quad (109)$$

Poslednja jednačina predstavlja tenzorski oblik zapisa Lamé-ovih jednačina ravnoteže idealnog homogenog i izotropnog elastičnog tela. Ove jednačine daju vezu između spoljašnjih zapreminskih sila i koordinata vektora pomeranja  $\vec{S}$ . Te jednačine su osnovne diferencijalne jednačine ravnoteže.

Lamé-ove jednačine (109) su opšte jer:

a° izražavaju uslove ravnoteže svakog elementa deformabilnog tela obuhvatajući uticaj zapreminskih sila;

b° jer sadrže geometrijske karakteristike: komponentnu pomeranja  $\vec{S}$  i kubnu dilataciju  $\varepsilon_v$ ;

c° u sebi sadrže i fizičke karakteristike deformabilnog tela: modul klizanja  $G$  i Poisson-ov koeficijent  $\mu$  poprečne kontrakcije koji karakterišu elastične osobine tela.

Lamé-ove jednačine predstavljaju osnov linearne teorije elastičnosti.

Osnovne jednačine kretanja idealno elastičnog homogenog i izotropnog tela možemo napisati pomoću D'Alambert-ovog principa i prethodno izvedenih osnovnih diferencijalnih jednačina ravnoteže, tako da dobijamo da je:

$$(F'_v)^i + G[\kappa \varepsilon_{ij} g^{ij} + \Delta u^i] = g w^i \quad (110)$$

ili u kovarijantnom obliku:

$$(F'_v)_i + G[\kappa \varepsilon_{ji} + \Delta u_i] = g w_i \quad (111)$$

Ako se radi o infinitezimalnim pomeranjima i deformacijama i ako se zanemare male veličine višeg reda za vektor ubrzanja  $w^i$  možemo da napišemo:

$$w^i \approx \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2},$$

te se sada osnovna jednačina dinamike elastičnih, homogenih i izotropnih deformabilnih tela može napisati u obliku:

$$g \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} \approx (F'_v)^i + G[\kappa \varepsilon_{ij} g^{ij} + \Delta u^i]. \quad (112)$$

Da bi smo Lamé-ove jednačine napisali u razvijenom obliku potrebno je odrediti  $\Delta u_i$ , te koristeći da je:

$$\Delta u_i = g^{jk} u_{ijk}, \quad (113)$$

u razvijenom obliku nalazimo da je:

$$\begin{aligned} \Delta u_i &= g^{jk} \left\{ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^k \partial x^j} + u_m (\Gamma_{is}^m \Gamma_{kj}^s + \Gamma_{js}^m \Gamma_{ik}^s) - \right. \\ &\quad \left. - \Gamma_{ij}^s \frac{\partial u_s}{\partial x^k} - \frac{\partial u_s}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^s - u_s \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^s - \frac{\partial u_i}{\partial x^s} \Gamma_{kj}^s \right\}. \end{aligned} \quad (114)$$

### III.9. LAME-OVE JEDNAČINE RAVNOTEŽE U POLARNO-CILINDRIČKIM KOORDINATAMA

Da bi smo jednačine (108) napisali u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu potrebno je da odredimo vrednosti  $\Delta u_i$  prema izrazu (114). Kako su ranije izračunate kovarijantne koordinate metričkog tensora  $g^{ij}$  i Cristoffel-ovi simboli druge vrste  $\Gamma_{ij}^k$ :

$$g^{11}=1, \quad g^{22}=\frac{1}{r^2}, \quad g^{33}=1, \quad \Gamma_{12}^2=\Gamma_{21}^2=\frac{1}{r}, \quad \Gamma_{22}^1=-r. \quad (115)$$

a takodje su nam iz (II.6.91) poznate veze izmedju kovarijantnih i fizičkih koordinata vektora pomeranja u obliku:

$$\mu_1 = \mu, \quad \mu_2 = r v^2, \quad \mu_3 = w^2. \quad (116)$$

to pomoću izraza (114) dobijamo da je:

$$\begin{aligned} \Delta \mu_1 &= \Delta \mu - \frac{2}{r} \frac{\partial v^2}{\partial \varphi} - \frac{\mu}{r^2}, \\ \Delta \mu_2 &= r \Delta v^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} - \frac{v^2}{r}, \\ \Delta \mu_3 &= \Delta w^2, \end{aligned} \quad (117)$$

gdje je sa  $\Delta$  označen operator:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Sada možemo da sastavimo Lamé-ove jednačine ravnoteže u polarno-cilindričnom koordinatnom sistemu:

$$\begin{aligned} G \left\{ \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \Delta \mu - \frac{2}{r} \frac{\partial v^2}{\partial \varphi} - \frac{\mu}{r^2} \right\} &= 0 \\ G \left\{ \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} + \Delta v^2 + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} - \frac{v^2}{r^2} \right\} + F'_\varphi &= 0 \\ G \left\{ \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \Delta w^2 \right\} + F'_z &= 0 \end{aligned} \quad (118)$$

### III.10. LAME-OVE JEDNAČINE RAVNOTEŽE U SFERNOM KOORDINATNOM SISTEMU

Da bi smo Lamé-ove jednačine ravnoteže napisali u sfernom koordinatnom sistemu potrebno je da odredimo vrednosti  $\Delta \mu^i$  prema izrazu (114). Kako su ranije izračunate kontravarijantne koordinate metričkog tenzora  $g^{ij}$  i Cristoffel-ovi simboli druge vrste  $\Gamma_{ij}^k$  (u II.7):

$$\begin{aligned} g^{11} &= 1, & \Gamma_{22}^1 &= -\beta \cos \gamma, & \Gamma_{33}^1 &= -\beta, \\ g^{22} &= \frac{1}{\beta^2 \cos^2 \gamma}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{\beta}, & \Gamma_{22}^3 &= \sin \gamma \cos \gamma, \\ g^{33} &= \frac{1}{\beta^2}, & \Gamma_{13}^2 &= \Gamma_{23}^2 = -\frac{1}{\beta} \gamma, & & \end{aligned} \quad (119)$$

a takodje su nam poznate i veze (II.7.111) izmedju kovarijantnih  $\mu_i$  i fizičkih koordinata  $\mu$ ,  $v^2$  i  $w^2$  vektora pomeranja  $\vec{s}$  u obliku:

170.

$$\mu_1 = u, \quad \mu_2 = v \rho \cos \gamma, \quad \mu_3 = w \rho, \quad (120)$$

to prema izrazu (114) dobijamo da je:

$$\begin{aligned}\Delta \mu_1 &= \Delta u + \frac{2}{\rho^2} \left( w \operatorname{tg} \gamma - \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial \gamma} - u \right), \\ \Delta \mu_2 &= (\Delta v) \rho \cos \gamma + \frac{2}{\rho} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{v}{\cos \gamma} \right\}, \\ \Delta \mu_3 &= \rho \Delta w + \frac{2}{\rho} \left( \frac{\partial u}{\partial \gamma} + \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\cos \gamma} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) - \frac{w}{\rho \cos^2 \gamma},\end{aligned}\quad (121)$$

gde je operator  $\Delta$  oblika:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \gamma} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \gamma} \quad (122)$$

Na osnovu poslednjih izraza Lamé-ove jednačine ravnoteže u sfernom koordinatnom sistemu se mogu napisati u obliku:

$$\begin{aligned}G \left[ \kappa \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} + \Delta u + \frac{2}{\rho^2} \left( w \operatorname{tg} \gamma - \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial \gamma} - u \right) \right] + F_\rho' &= 0 \\ G \left[ \frac{\kappa}{\rho \cos \gamma} \frac{\partial \epsilon}{\partial \varphi} + \Delta v + \frac{2}{\rho^2 \cos \gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) - \frac{v}{\rho^2 \cos^2 \gamma} \right] + F_\gamma' &= 0 \\ G \left[ \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial \epsilon}{\partial \gamma} + \Delta w + \frac{2}{\rho} \left( \frac{\partial u}{\partial \gamma} + \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\cos \gamma} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) - \frac{w}{\rho^2 \cos^2 \gamma} \right] + F_\varphi' &= 0\end{aligned}\quad (123)$$

### III.11. LAME-OVE JEDNAČINE RAVNOTEŽE IZRAŽENE U U DESCARTES-OVOM KOORDINATNOM SISTEMU

Do Lamé-ovih jednačina u Descartes-ovom koordinatnom sistemu možemo da dodjemo direktno iz tenzorske jednačine (108) zamenom kovarijantnih koordinata fizičkim koordinatama što je ovde veoma prosto. Ovde ćemo pokazati kako se iz Navier-ovih jednačina ravnoteže (I.6.50) i Hooke-ovog zakona (III.7.98) može doći do Lamé-ovih jednačina ravnoteže ili Navier-ovih

Jednačina druge vrste pod kojim se imenom u literaturi mogu naći.

Lamé-ove jednačine, kao osnovne diferencijalne jednačine ravnoteže elastičnog tela možemo da dobijemo iz Navier-ovih jednačina oblika:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_v' \\ Y_v' \\ Z_v' \end{Bmatrix} = 0, \quad (124)$$

u kojima ćemo izvršiti zamenu komponentnih normalnih i tangencijalnih napona u funkciji komponentnih pomeranja  $u$ ,  $v$  i  $w$ , a koristeći vezu datu drugim oblikom Hooke-ovog zakona:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = 2G \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} + 2G\mu\kappa \varepsilon \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (125)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{Bmatrix},$$

Teško da u konačnom obliku, posle sredjivanja dobijamo Lamé-ove jednačine ravnoteže:

$$G \begin{Bmatrix} \Delta u + \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \\ \Delta v + \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \\ \Delta w + \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_v' \\ Y_v' \\ Z_v' \end{Bmatrix} = 0, \quad (126)$$

koje se u vektorskom obliku mogu napisati kao:

$$G(\Delta \vec{S} + \kappa \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{S}) + \vec{F}_v' = 0. \quad (127)$$

U slučaju kada nema zapreminskih sila Lamé-ove jednačine se svode na oblik

$$G(\Delta \vec{S} + \kappa \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{S}) = 0, \quad (128)$$

iz koga sledi da je:

$$\Delta \varepsilon = 0 \quad i \quad \Delta \Delta \vec{S} = 0. \quad (129)$$

172.

Iz poslednjeg zaključujemo da su, u odsustvu zapreminskih sila, u uslovima ravnoteže elastičnog tela koordinate vektora pomeranja biharmonijske funkcije koordinata i da je zapreminska dilatacija harmonijska funkcija koordinata. Takodje u odsustvu zapreminskih sila pri ravnoteži deformabilnog tela stanje deformacija je takvo da je prva invarijanta tenzora deformacije harmonijska funkcija.

Integraljenjem vektorske jednačine (127) koja daje vezu izmedju vektora pomeranja  $\vec{s}$  i zapreminskih sila  $\vec{F}'_v$ , mogu se odrediti koordinate vektora pomeranja  $\vec{s}$ . Pri tome pretpostavljamo da su nam poznati uslovi na konturi bilo da su zadati posredstvom pomeranja tačaka konture ili da su nam poznate površinske sile na konturi tela. To znači da je problem rešavanja jednačine (127) zadatak određivanja onih integrala te jednačine koji na konturi tela zadovoljavaju granične uslove.

### III.12. DRUGI OBLIK CAUCHY-JEVIH GRANIČNIH USLOVA

Ranije smo izveli Cauchy-eve granične uslove u obliku

$$\{F'_n\} = \bigcap_k \{n\}_k \quad (130)$$

Sada matricu tenzora napona  $\mathcal{N}$  pomoću drugog oblika Hooke-ovog zakona

$$\mathcal{N} = 2G(\mathcal{E} + \mu k \epsilon \mathbb{I}), \quad (131)$$

izrazimo pomoću matrice tenzora deformacije  $\mathcal{E}$  i to unesemo u Cauchy-jeve granične uslove oni će dobiti oblik:

$$\{F'_n\} = 2G(\mathcal{E} + \mu k \epsilon \mathbb{I})_k \{n\}_k, \quad (132)$$

koji u vijenom obliku postaje:

$$G \begin{pmatrix} 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu k \epsilon\right) & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu k \epsilon\right) & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & 2\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \mu k \epsilon\right) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X'_n \\ Y'_n \\ Z'_n \end{Bmatrix} \quad (132*)$$

koji je pogodan za korišćenje u sprezi sa Lamé-ovim jednačinama. Ovim Cauchy-jevim graničnim uslovima dovodimo u vezu spoljašnje površinske sile - opterećenje i koordinate vektora pomeranja.

## III.13. BELTRAMI-MICHELL-OVE JEDNAČINE U OPŠTEM OBLIKU

Pokazali smo da pomoću Lamé-ovih jednačina posrednim putem preko koordinata vektora pomeranja  $\vec{S}$  i tenzora deformacije  $\varepsilon_{ij}$  možemo da pomoću Hooke-ovog zakona odredimo koordinate tenzora napona  $\delta^{ij}$  tj. fizičke koordinate tenzora napona kao komponentne normalne i tangencijalne napone. Ovde sebi postavljamo zadatak da sastavimo jednačine koje će davati direktnе veze između komponentnih napona i spoljašnjih sila i omogućiti njihovo direktno određivanje pomoću poznatih spoljašnjih sila. Da bi smo sastavili takve jednačine iskoristićemo Lamé-ove jednačine ravnoteže, koje ćemo diferencirati po  $x^k$  i dobiti:

$$(F'_v)_{i,j} + G[\kappa \varepsilon_{ij} + (\Delta u_i)_{,j}] = 0. \quad (133)$$

Rezultat kovarijantnog diferenciranja je dva puta kovarijantni tenzor koji možemo da razdvojimo na njegov simetrični i antisimetrični deo na sledeći način:

$$\begin{aligned} & (F'_v)_{i,j} + (F'_v)_{j,i} + G\{\kappa(\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}) + (\Delta u_i)_{,j} + (\Delta u_j)_{,i}\} + \\ & + (F'_v)_{i,j} - (F'_v)_{j,i} + G\{\kappa(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ji}) + (\Delta u_i)_{,j} - (\Delta u_j)_{,i}\} = 0 \end{aligned} \quad (134)$$

Euklidskom prostoru uvek važi da je:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ji} & u^m_{,imk} &= u^m_{,jmi} \\ (\Delta u_i)_{,j} &= \Delta(u_{i,j}) \end{aligned} \quad (135)$$

Provera poslednje relacije potvrđuje njenu tačnost:

$$\begin{aligned} (\Delta u_i)_{,j} &= (g^{ml}u_{i,ml})_{,j} = (u_{i,m}{}^m)_{,j} = u_{i,m}{}^m_{,j} \\ \Delta(u_{i,j}) &= u_{i,j}{}^m{}_m = u_{i,m}{}^m{}_{,j} = (\Delta u_i)_{,j} \end{aligned} \quad (136)$$

Diferencirajmo sada Navier-ove jednačine kovarijantnim diferenciranjem po  $x^k$  tako da dobijamo:

174.

$$(F'_v)_{i,j} + \delta_{i,mj}^m = 0, \quad (137)$$

dok razmenom indeksa dobijamo:

$$(F'_v)_{j,i} + \delta_{j,mi}^m = 0. \quad (137*)$$

Oduzimanjem ovih dveju poslednjih jednačina dobijamo:

$$(F'_v)_{i,j} - (F'_v)_{j,i} + (\delta_{i,mj}^m - \delta_{j,mi}^m) = 0 \quad (138)$$

Iskoristimo sada uopšteni Hooke-ov zakon koji daje vezu izmedju tenzora napona i tenzora deformacije u mešovitom obliku:

$$\delta_i^j = 2G \{ \epsilon_i^j + \mu \kappa \delta_i^j \epsilon \}, \quad (139)$$

tako da odredujemo da je:

$$\delta_{i,mj}^m - \delta_{j,mi}^m = 2G \{ \epsilon_{i,mj}^m - \epsilon_{j,mi}^m \} + 2G \mu \kappa \{ \epsilon_{ij} - \epsilon_{ji} \}. \quad (140)$$

Iskoristimo sada vezu

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}, \quad (141)$$

kao i da je tenzor deformacije izražen pomoću koordinata vektora pomeranja:

$$\epsilon_j^i = \frac{1}{2} (\mu_j^{im} \epsilon_{mj} + \mu_i^{mj} \epsilon_{ij}), \quad (142)$$

pa iz (121) dobijamo:

$$\delta_{i,mj}^m - \delta_{j,mi}^m = 2G (\mu_i^{jm} \epsilon_{mj} - \mu_j^{im} \epsilon_{mi}) = 2G [(\Delta \mu_i)_{ij} - (\Delta \mu_j)_{ji}]. \quad (143)$$

Pomoću prethodne jednačine jednačina (138) se svodi na sledeću:

$$(F'_v)_{i,j} + (F'_v)_{j,i} + 2G \kappa \epsilon_{ij} + G \Delta (\mu_{ij} + \mu_{ji}) = 0. \quad (144)$$

Ako sada izvršimo zamenu invarijanti tenzora deformacije  $\mathcal{E}_1$  i tenzora napona  $N_1$  izmedju kojih postoji veza:

$$N_1 = \kappa E \mathcal{E}_1 = \kappa E \epsilon = 2\kappa G(1+\mu) \epsilon, \quad (145)$$

i vezu

$$\mu_{ij} + \mu_{ji} = 2\varepsilon_{ij} = \frac{1}{G(1+\mu)} \left\{ (1+\mu) \delta_{ij} - \mu g_{ij} \delta \right\}. \quad (146)$$

dobijamo da je: ( $\mathcal{N}_1 = 2$ )

$$(F'_v)_{ij} + (F'_v)_{ji} + \frac{1}{1+\mu} \delta_{ij} + \Delta \delta_{ij} - \frac{\mu}{1+\mu} g_{ij} \Delta \delta = 0. \quad (147)$$

Poslednja jednačina predstavlja rešenje zadatka koji smo u početku postavili. Ona daje direktnu vezu između koordinata tenszora napona i spoljašnjih zapreminskih sila, ali se ove jednačine koriste u nešto drugačijem obliku pa ćemo ih prevesti na taj oblik.

Diferencirajmo zato Lamé-ove jednačine oblika:

$$(F'_v)^i + G(\kappa g^{ij} \varepsilon_{,j} + \Delta \mu^i) = 0, \quad (148)$$

kovariantno po  $x^k$  i zatim izvršimo kontrakciju po indeksima  $i, i, k$ :

$$(F'_v)^i_{,i} + G(\kappa g^{ij} \varepsilon_{,ji} + \mu^{ij}_{,ij}) = 0. \quad (149)$$

Kako je:

$$\mu^{ij}_{,ij} = \Delta \mu^i_{,i} = \Delta \varepsilon,$$

prethodna jednačina postaje:

$$(F'_v)^i_{,i} + G\{\kappa g^{ij} \varepsilon_{,ij} + \Delta \varepsilon\} = 0 \quad (150)$$

Kako je:

$$g^{ij} \varepsilon_{,ik} = \varepsilon^{,i}_{,k},$$

to je i

$$g^{ij} \varepsilon_{,ij} = \Delta \varepsilon,$$

te se poslednja jednačina (150) svodi na :

$$(F'_v)^i_{,i} + 2\kappa G(1-\mu) \Delta \varepsilon = 0 \quad (151)$$

Invarijantu  $\varepsilon$  zamenimo sa (145) tako da dobijamo:

$$(F'_v)^i_{,i} + \frac{1-\mu}{1+\mu} \Delta \beta = 0 ,$$

odakle je:

$$\Delta N_1 = \Delta \beta = - \frac{1+\mu}{1-\mu} (F'_v)^i_{,i} \quad (152)$$

Unesemo sada ovaj izraz u jednačinu (147) te dobijamo sledeću jednačinu:

$$(F'_v)_{i,j} + (F'_v)_{j,i} + \frac{1}{1+\mu} \delta_{ij} + \Delta \delta_{ij} + \frac{\mu}{1-\mu} g_{ij} (F'_v)^m_{,m} = 0 , \quad (153)$$

gde je  $ij = 12, 11, 13, 22, 23, 33$ . Poslednja jednačina u tenzorskom obliku predstavlja sistem od šest Beltrami-Michell-ove jednačine koje je trebalo izvesti. Do ovih Beltrami-Michell-ovih jednačina se može doći i iz Saint-Venant-ovih uslova kompatibilnosti deformacija pa se mogu shvatiti i ka jednačine kompatibilnosti napona, odnosno kompatibilnosti deformacija izraženih pomoću napona. Na taj način one izražavaju ograničenje na funkcije kojima može biti prikazana raspodela napona u napregnutom elastičnom telu.

U jednačinama (153) odgovarajući kovarijantni izrazi se izračunavaju prema sledećim izrazima:

$$(F'_v)_{i,j} = \frac{\partial (F'_v)_i}{\partial x^j} - (F'_v)_s \Gamma_{ij}^s \quad (154)$$

$$(F'_v)_{,j}^j = \frac{\partial (F'_v)^j}{\partial x^j} + (F'_v)^m \Gamma_{mj}^j \quad (155)$$

$$\delta_{ij} = \frac{\partial \beta}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial \beta}{\partial x^m} \Gamma_{ij}^m \quad (156)$$

$$\begin{aligned} \Delta \beta_{ik} &= g^{ml} \beta_{ik,ml} = g^{ml} \left\{ \frac{\partial^2 \beta_{ik}}{\partial x^m \partial x^l} - \frac{\partial \beta_{rk}}{\partial x^l} \Gamma_{im}^r - \frac{\partial \beta_{ir}}{\partial x^l} \Gamma_{km}^r - \right. \\ &\quad - \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial x^r} \Gamma_{me}^r - \frac{\partial \beta_{rk}}{\partial x^m} \Gamma_{ie}^r - \frac{\partial \beta_{er}}{\partial x^m} \Gamma_{ke}^r + \beta_{pk} \Gamma_{ir}^p \Gamma_{me}^r + \\ &\quad + \beta_{pk} \Gamma_{rm}^p \Gamma_{ie}^r + \beta_{pr} \Gamma_{im}^p \Gamma_{ke}^r - \beta_{rk} \frac{\partial}{\partial x^e} \Gamma_{im}^r + \\ &\quad \left. + \beta_{ip} \Gamma_{kr}^p \Gamma_{ie}^r + \beta_{rp} \Gamma_{km}^p \Gamma_{ie}^r + \beta_{ip} \Gamma_{rm}^p \Gamma_{ke}^r - \beta_{ir} \frac{\partial}{\partial x^e} \Gamma_{km}^r \right\} \end{aligned} \quad (157)$$

III.14. BELTRAMI-MICHELL-OVE JEDNAČINE IZVEDENE U  
DESCARTES-OVOM PRAVOUGLOM KOORDINATNOM  
SISTEMU

Lamé-ove jednačine izražene u Descartes-ovom koordinatnom sistemu imaju oblik:

$$\left. \begin{aligned} G \left[ \Delta \mu + K \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right] + X_v' &= 0 \quad / \frac{\partial}{\partial y} \quad \left. \begin{aligned} / \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \right\} \\ G \left[ \Delta \nu + K \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + Y_v' &= 0 \quad / \frac{\partial}{\partial x} \quad \left. \begin{aligned} / \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \right\} \\ G \left[ \Delta \omega + K \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right] + Z_v' &= 0 \quad / \frac{\partial}{\partial x} \quad \left. \begin{aligned} / \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (158)$$

Diferencirajmo sada redom jednačine po  $x$ ,  $y$  i  $z$  dobijamo:

$$\left. \begin{aligned} G \left[ \Delta \varepsilon_x + K \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial X_v'}{\partial x} &= 0 \\ G \left[ \Delta \varepsilon_y + K \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial Y_v'}{\partial y} &= 0 \\ G \left[ \Delta \varepsilon_z + K \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial Z_v'}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

Pa ih saberemo, tako da dobijamo sledeće:

$$\Delta \varepsilon = - \frac{1}{G(1+K)} \operatorname{div} \vec{F}_v' \quad (160)$$

Pre Hooke-ovog zakona dobijamo vezu između invarijanti matrica tensora deformacije i tensora napona u obliku:

$$\varepsilon = \frac{1-2\mu}{E} \mathcal{N}_1,$$

što unošenjem u jednačinu (160) daje da je:

$$\Delta \mathcal{N}_1 = \frac{E}{1-2\mu} \Delta \varepsilon = - \frac{\kappa E}{G(1+K)} \operatorname{div} \vec{F}_v' = - \frac{1+\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}_v' \quad (161)$$

Diferencirajmo sada prvu jednačinu sistema (158) po  $y$ , a drugu po  $x$  pa ih saberimo, zatim prvu od tih jednačina diferencirajmo po  $z$ , a treću po  $x$  te ih saberimo i na kraju drugu jednačinu istog sistema diferencirajmo po  $z$ , a treću po  $y$  i saberimo ih tako da u rezultatu dobijemo

sledeće tri jednačine:

$$\begin{aligned} G \left[ \Delta \delta_{xy}^2 + 2\kappa \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial X_v'}{\partial y} + \frac{\partial Y_v'}{\partial x} &= 0, \\ G \left[ \Delta \delta_{xz}^2 + 2\kappa \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial z} \right] + \frac{\partial X_v'}{\partial z} + \frac{\partial Z_v'}{\partial x} &= 0, \\ G \left[ \Delta \delta_{yz}^2 + 2\kappa \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y \partial z} \right] + \frac{\partial Y_v'}{\partial z} + \frac{\partial Z_v'}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (162)$$

Izrazimo sada Hooke-ov zakon u obliku:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} &= \frac{\mu+1}{E} \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{Bmatrix} - \frac{\mu}{E} \mathcal{N}_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \delta_{xy} \\ \delta_{xz} \\ \delta_{yz} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{G} \begin{Bmatrix} \tilde{\tau}_{xy} \\ \tilde{\tau}_{xz} \\ \tilde{\tau}_{yz} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (163)$$

i na specifične deformacije - dilatacije  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  i  $\varepsilon_z$  i klizanja  $\delta_{xy}$ ,  $\delta_{xz}$  i  $\delta_{yz}$  primenimo Laplace-ov operator i rezultate unesemo u sistem dobijenih jednačina (159) i (162) i imajući u vidu (161) posle sredjivanja dobijamo u konačnom obliku sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned} \Delta \delta_x + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial x^2} + \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}_v' + 2 \frac{\partial X_v'}{\partial x} &= 0 \\ \Delta \delta_y + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial y^2} + \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}_v' + 2 \frac{\partial Y_v'}{\partial y} &= 0 \\ \Delta \delta_z + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial z^2} + \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}_v' + 2 \frac{\partial Z_v'}{\partial z} &= 0 \\ \Delta \tilde{\tau}_{xy} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial X_v'}{\partial y} + \frac{\partial Y_v'}{\partial x} &= 0 \\ \Delta \tilde{\tau}_{xz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial X_v'}{\partial z} + \frac{\partial Z_v'}{\partial x} &= 0 \\ \Delta \tilde{\tau}_{yz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial Y_v'}{\partial z} + \frac{\partial Z_v'}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (164)$$

koji predstavlja sistem od šest jednačina koje daju vezu izmedju komponentnih pomeranja i spoljašnjih sila i to su Beltrami - Michell -ove jednačine.

Ove jednačine (164) zajedno sa Navier-ovim jednačinama

(I.6.50) i Cauchy-jevim konturnim uslovima (I.6.38) čine potpuni sistem jednačina za određivanje komponentnih normalnih i tangencijalnih napona.

Kada su zapreminske sile zanemarljive sistem jednačina (164) se svodi na oblik:

$$\begin{aligned} \Delta \beta_x + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} &= 0, & \Delta \tilde{\epsilon}_{xy} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \Delta \beta_y + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} &= 0, & \Delta \tilde{\epsilon}_{xz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial z} &= 0, \\ \Delta \beta_z + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 N_1}{\partial z^2} &= 0, & \Delta \tilde{\epsilon}_{yz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 N_1}{\partial y \partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (165)$$

koji je poznat pod imenom Beltrami-jeve jednačine.

### III.15. BELTRAMI-JEVE I BELTRAMI-MICHELL-OVE JEDNAČINE IZVEDENE U POLARNO-CILINDRIČKOM KOORDINATNOM SISTEMU

Koristeći izraze (156) i (157) određujemo izvode  $\beta_{ij}$  i izraz za  $\Delta \beta_{ik}$  tako da unošenjem u jednačinu (153) uz zanemarivanje zapremskih sila dobijamo Beltrami-jeve jednačine u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu u obliku:

$$\begin{aligned} \Delta \beta_r - \frac{2}{r^2} (\beta_r - \beta_\varphi) - \frac{4}{r^2} \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{rp}}{\partial p} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 N_1}{\partial r^2} &= 0 \\ \Delta \beta_\varphi + \frac{2}{r^2} (\beta_r - \beta_\varphi) + \frac{4}{r^2} \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{rp}}{\partial p} + \frac{1}{1+\mu} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial N_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 N_1}{\partial p^2} \right) &= 0 \\ \Delta \beta_z + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 N_1}{\partial z^2} &= 0 \\ \Delta \tilde{\epsilon}_{rp} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial p} (\beta_r - \beta_\varphi) - \frac{4}{r^2} \tilde{\epsilon}_{rp} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial N_1}{\partial p} \right) &= 0 \quad (166) \\ \Delta \tilde{\epsilon}_{rz} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{pz}}{\partial p} - \frac{\tilde{\epsilon}_{rz}}{r^2} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 N_1}{\partial r \partial z} &= 0 \\ \Delta \tilde{\epsilon}_{pz} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \beta_z}{\partial p} - \frac{\tilde{\epsilon}_{pz}}{r^2} + \frac{1}{1+\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 N_1}{\partial p \partial z} &= 0 \end{aligned}$$

Pri sastavljanju ovih jednačina iskoristili smo vezu (I.9.63) izmedju fizičkih i kovarijantnih koordinata tensora napona koju smo već ranije izveli, te to nismo ovde ponavljali. Takodje smo koristili izraze za Cristoffel-ove sim-

180.

bole iz člana (I.9).

Ako sada prema izrazima (154) i (155) odredimo potrebne izvode koordinata zapreminske sile možemo da sastavimo Beltrami-Michell-ove jednačine u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu u obliku:

$$\begin{aligned} \Delta \delta_r - \frac{2}{r^2} (\delta_r - \delta_\varphi) - \frac{4}{r^2} \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{rp}}{\partial \varphi} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \tilde{N}_1}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial F_r^1}{\partial r} + \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}_r^1 = 0, \\ \Delta \delta_\varphi + \frac{2}{r^2} (\delta_r - \delta_\varphi) + \frac{4}{r^2} \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{rp}}{\partial \varphi} + \frac{1}{1+\mu} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{N}_1}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}_r^1 + \frac{2}{r} \left( \frac{\partial F_\varphi^1}{\partial \varphi} + F_r^1 \right) = 0, \\ \Delta \delta_z + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \tilde{N}_1}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial F_z^1}{\partial z} + \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}_r^1 = 0 \quad (167) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\epsilon}_{rp} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\delta_r - \delta_\varphi) - \frac{4}{r^2} \tilde{\epsilon}_{rp} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial F_r^1}{\partial \varphi} - F_\varphi^1 \right) + \frac{\partial F_\varphi^1}{\partial r} = 0 \\ \Delta \tilde{\epsilon}_{rz} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{rz}}{\partial \varphi} - \frac{\tilde{\epsilon}_{rz}}{r^2} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \tilde{N}_1}{\partial r \partial z} + \frac{\partial F_r^1}{\partial z} + \frac{\partial F_z^1}{\partial r} = 0 \\ \Delta \tilde{\epsilon}_{\varphi z} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \delta_z}{\partial \varphi} - \frac{\tilde{\epsilon}_{\varphi z}}{r^2} + \frac{1}{1+\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{N}_1}{\partial \varphi \partial z} + \frac{\partial F_\varphi^1}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_z^1}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned}$$

gde je operator  $\Delta$  jednak:  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ .

### III.16. BELTRAMI-JEVE I BELTRAMI-MICHELL-OVE JEDNAČINE IZVEDENE U SFERNOM KOORDINATNOM SISTEMU

Koristeći izraze (156) i (157) odredjujemo izvode  $\delta_{ij}$  i izraz za  $\Delta \delta_{ik}$ , a imajući u vidu ranije izvedene veze (I.10.73) izmedju fizičkih koordinata i kovarijantnih koordinata tensora napona uz zanemarivanje zapreminskih sile možemo da unušenjem u jednačinu (153) da dobijemo Beltrami-jeve jednačine u sfernom koordinatnom sistemu u obliku:

$$\Delta b_p - \frac{2}{\beta} (b_p - b_y) - \frac{2}{\beta^2 \cos^2 \gamma} (b_p - b_y) + \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{\beta^2} \tilde{c}_{sy} - \frac{4}{\beta^2} \frac{\partial \tilde{c}_{sy}}{\partial \gamma} + \frac{4}{\beta^2 \cos^3 \gamma} \frac{\partial \tilde{c}_{sy}}{\partial \mu} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \beta^2} = 0,$$

$$\Delta b_p - \frac{2}{\beta^2 \cos^2 \gamma} b_p + \frac{1}{(1+\mu) \beta^2 \cos^2 \gamma} \frac{\partial^2 \tilde{N}_1}{\partial \gamma^2} = 0,$$

$$\Delta b_y + \frac{2}{\beta^2} (b_p - b_y) + \frac{2}{\beta \cos \gamma} (b_p - b_y) - \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{\beta^2} \tilde{c}_{sy} + \frac{4}{\beta^2} \frac{\partial \tilde{c}_{sy}}{\partial \gamma} + \frac{4}{\beta^2 \cos^3 \gamma} \frac{\partial \tilde{c}_{sy}}{\partial \mu} + \frac{1}{1+\mu} \left( \frac{1}{\beta} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \tilde{N}_1}{\partial \gamma^2} \right) = 0, \quad (168)$$

$$\Delta \tilde{c}_{sy} + \frac{2}{\beta^2 \cos \gamma} \frac{\partial b_p}{\partial \mu} - \frac{\tilde{c}_{sp}}{\beta^2} - \frac{4 \tilde{c}_{sp}}{\beta^2 \cos^2 \gamma} - \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\beta^2} \tilde{c}_{sy} + \frac{2}{\beta^2} \frac{\partial \tilde{c}_{sy}}{\partial \gamma} + \frac{1}{(1+\mu) \beta \cos \gamma} \left( \frac{\partial^2 \tilde{N}_1}{\partial \mu \partial \beta} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \mu} \right) = 0,$$

$$\Delta \tilde{c}_{sy} - \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\beta^2} (b_p - b_y) - \frac{2}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \gamma} (b_p - b_y) - \frac{4}{\beta^2} \tilde{c}_{sy} - \frac{2 \tilde{c}_{sy}}{\beta^2 \cos^2 \gamma} + \frac{1}{(1+\mu) \beta} \left( \frac{\partial^2 \tilde{N}_1}{\partial \mu \partial \gamma} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \gamma} \right) = 0,$$

$$\Delta \tilde{c}_{sy} + \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{\beta^2 \cos \gamma} \frac{\partial b_y}{\partial \mu} - \frac{1}{\beta^2} (\tilde{c}_{sy} - \operatorname{tg} \gamma \tilde{c}_{sy}) + \frac{4 \tilde{c}_{sy}}{\beta^2 \cos^2 \gamma} - \frac{2}{\beta} \left( \frac{\partial \tilde{c}_{sy}}{\partial \gamma} + \frac{2}{\cos \gamma} \frac{\partial \tilde{c}_{sy}}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{(1+\mu) \beta^2 \cos \gamma} \left( \frac{\partial^2 \tilde{N}_1}{\partial \mu \partial \gamma} - \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \mu} \right) = 0,$$

šude je  $\Delta$  operator:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta^2 \cos^2 \gamma} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{2}{\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \gamma}$$

Ako pak uzmemo u račun i zapreminske sileda bi smo sastavili Beltrami-Michell-ove jednačine potrebno je da pomoću izraza (154) i (155) odredimo potrebne izvode i iste dodamo odgovarajućim Beltramijevim jednačinama (168). Ti izrazi po izračunavanju imaju oblik:

$$2(F'_v)_{1,1} + \frac{\mu}{1-\mu} g_{11} (F'_v)_{2,j}^j = 2 \frac{\partial F'_v}{\partial \beta} + \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}'_v,$$

$$2(F'_v)_{2,2} + \frac{\mu}{1-\mu} g_{22} (F'_v)_{1,j}^j = 2 \beta \cos \gamma \left[ \frac{\partial F'_v}{\partial \mu} + \cos \gamma F'_s - \sin \gamma F'_y \right] + \frac{\mu}{1-\mu} \beta^2 \cos^2 \gamma \operatorname{div} \vec{F}'_v,$$

$$\begin{aligned}
 & 2(F_v')_{3,3} + \frac{\mu}{1-\mu} g_{33}(F_v')_{\beta\beta} = 2g\left(\frac{\partial F_\psi'}{\partial \gamma} + F_\beta'\right) + \frac{\mu}{1-\mu} g^2 \operatorname{div} \vec{F}_v' , \\
 & (F_v')_{1,2} + (F_v')_{2,1} = g \cos \gamma \left[ \frac{1}{g \cos \gamma} \frac{\partial F_\beta'}{\partial \gamma} - \frac{1}{g} F_\beta' + \frac{\partial F_\beta'}{\partial \beta} \right] , \\
 & (F_v')_{1,3} + (F_v')_{3,1} = g \left[ \frac{1}{g} \left( \frac{\partial F_\beta'}{\partial \gamma} - F_\gamma' \right) + \frac{\partial F_\beta'}{\partial \beta} \right] , \\
 & (F_v')_{2,3} + (F_v')_{3,2} = g^2 \cos^2 \gamma \left[ \frac{1}{g \cos \gamma} \left( \frac{\partial F_\beta'}{\partial \gamma} + \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\partial F_\beta'}{\partial \gamma} + \operatorname{tg} \gamma F_\beta' \right) \right]
 \end{aligned} \tag{169}$$

Sada možemo napisati u kompletnom obliku Beltrami-Michell-ove jednačine:

$$\begin{aligned}
 \Delta b_\beta - \frac{2}{g} (b_\beta - b_\gamma) - \frac{2}{g^2 \cos^2 \gamma} (b_\beta - b_\gamma) - \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{g^2} \tilde{c}_{\beta\gamma} - \frac{4}{g^2} \frac{\partial \tilde{c}_{\beta\gamma}}{\partial \gamma} + \frac{4}{g^2 \cos^3 \gamma} \frac{\partial \tilde{c}_{\beta\gamma}}{\partial \gamma} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial N_1}{\partial \beta} + \\
 + 2 \frac{\partial F_\beta'}{\partial \beta} + \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}_v' = 0
 \end{aligned}$$

$$\Delta b_\gamma - \frac{2}{g^2 \cos^2 \gamma} b_\gamma + \frac{1}{(1+\mu) g^2 \cos^2 \gamma} \frac{\partial^2 N_1}{\partial \gamma^2} + \frac{2}{g \cos \gamma} \left[ \frac{\partial F_\beta'}{\partial \gamma} + \cos \gamma F_\beta' - \sin \gamma F_\gamma' \right] + \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}_v' = 0$$

$$\begin{aligned}
 \Delta b_\gamma + \frac{1}{g^2} (b_\beta - b_\gamma) + \frac{2}{g \cos \gamma} (b_\gamma - b_\beta) - \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{g^2} \tilde{c}_{\beta\gamma} + \frac{4}{g^2} \frac{\partial \tilde{c}_{\beta\gamma}}{\partial \gamma} + \frac{4}{g^2 \cos^3 \gamma} \frac{\partial \tilde{c}_{\beta\gamma}}{\partial \gamma} - \\
 + \frac{1}{1+\mu} \left( \frac{1}{g} \frac{\partial N_1}{\partial \beta} + \frac{1}{g^2} \frac{\partial^2 N_1}{\partial \gamma^2} \right) + \frac{2}{g} \left( \frac{\partial F_\beta'}{\partial \gamma} + F_\beta' \right) + \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}_v' = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \tilde{c}_{\beta\gamma} + \frac{2}{g^2 \cos \gamma} \frac{\partial b_\beta}{\partial \gamma} - \frac{\tilde{c}_{\beta\gamma}}{g^2} - \frac{4 \tilde{c}_{\beta\gamma}}{g^2 \cos^2 \gamma} - \frac{\operatorname{tg} \gamma}{g^2} \tilde{c}_{\beta\gamma} + \frac{2}{g^2} \frac{\partial \tilde{c}_{\beta\gamma}}{\partial \gamma} + \\
 + \frac{1}{(1+\mu) g \cos \gamma} \left( \frac{\partial^2 N_1}{\partial \beta \partial \gamma} - \frac{1}{g} \frac{\partial N_1}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{g \cos \gamma} \frac{\partial F_\beta'}{\partial \gamma} - \frac{1}{g} F_\beta' + \frac{\partial F_\beta'}{\partial \beta} = 0 \tag{170}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \tilde{c}_{\beta\gamma} - \frac{\operatorname{tg} \gamma}{g^2} (b_\beta - b_\gamma) - \frac{2}{g^2} \frac{\partial}{\partial \gamma} (b_\beta - b_\gamma) - \frac{4}{g^2} \tilde{c}_{\beta\gamma} - \frac{2 \tilde{c}_{\beta\gamma}}{g^2 \cos^2 \gamma} + \frac{1}{(1+\mu) g} \left( \frac{\partial^2 N_1}{\partial \beta \partial \gamma} - \frac{1}{g} \frac{\partial N_1}{\partial \gamma} \right) + \\
 + \frac{1}{g} \left( \frac{\partial F_\beta'}{\partial \gamma} - F_\gamma' \right) + \frac{\partial F_\beta'}{\partial \beta} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \tilde{c}_{\beta\gamma} + \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{g^2 \cos \gamma} \frac{\partial b_\gamma}{\partial \gamma} - \frac{1}{g^2} (\tilde{c}_{\beta\gamma} - \operatorname{tg} \gamma \tilde{c}_{\beta\gamma}) + \frac{4 \tilde{c}_{\beta\gamma}}{g^2 \cos^2 \gamma} - \frac{2}{g^2} \left( \frac{\partial \tilde{c}_{\beta\gamma}}{\partial \gamma} + \frac{2}{\cos \gamma} \frac{\partial \tilde{c}_{\beta\gamma}}{\partial \beta} \right) + \\
 + \frac{1}{(1+\mu) g^2 \cos \gamma} \left( \frac{\partial^2 N_1}{\partial \beta \partial \gamma} - \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial N_1}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{g \cos \gamma} \left( \frac{\partial F_\beta'}{\partial \gamma} + \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\partial F_\beta'}{\partial \beta} + \operatorname{tg} \gamma F_\beta' \right) = 0
 \end{aligned}$$

#### IV. PREGLED IZVEDENIH JEDNAČINA TEORIJE ELASTIČNOSTI

U prethodnim poglavljima izveli smo jednačine Teorije elastičnosti za slučaj stanja napona i stanja deformacija kada su deformacije male koristeći pri tome uopšteni, tenzorski način njihovog prikazivanja uz istovremenu njihovu konkretizaciju za Descartes-ov pravougli koordinatni sistem i uporedno za polarno-cilindrički i sferni koordinatni sistem. S obzirom naologu izvedenih jednačina zavisno od toga kakve uslove izražavaju možemo ih grupisati u: statičke, geometrijsko-kinematicke, fizičke ili jednačine koje daju vezu izmedju stanja napona i stanja deformacija.

##### $A^0$ STATIČKE JEDNAČINE

$A^0$  1. Navier-ove jednačine ravnoteže:

a) Tenzorski oblik u krivolinijskom koordinatnom sistemu

$$\delta_{,i}^{ij} \vec{g}_j + \vec{F}_v = 0 ; \quad \delta_{,i}^{ij} + (F_v')^j = 0. \quad (1)$$

b) u Descartes-ovom pravouglom koordinatnom sistemu:

$$\frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{P}_z}{\partial z} + \vec{F}_v = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \delta_y \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \delta_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_v' \\ Y_v' \\ Z_v' \end{Bmatrix} = 0 \quad (2)$$

c) U polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\sigma}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\tau}_{rp}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{rz}}{\partial z} + \frac{\tilde{\sigma}_r - \tilde{\sigma}_p}{r} + F_r^1 &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{\tau}_{rp}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\sigma}_p}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{pz}}{\partial z} + \frac{2 \tilde{\tau}_{rp}}{r} + F_p^1 &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{\tau}_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\tau}_{pz}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_z}{\partial z} + \frac{\tilde{\tau}_{rz}}{r} + F_z^1 &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

d) u sfernom koordinatnom sistemu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\sigma}_p}{\partial \varphi} + \frac{1}{\varrho \cos \gamma} \frac{\partial \tilde{\tau}_{\varphi p}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \tilde{\tau}_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{2 \tilde{\sigma}_p - \tilde{\sigma}_r - \tilde{\sigma}_\varphi - \tilde{\tau}_{\varphi r} \tan \gamma}{\varrho} + F_p^1 &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{\tau}_{\varphi p}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\varrho \cos \gamma} \frac{\partial \tilde{\sigma}_p}{\partial r} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{pr}}{\partial r} + \frac{3 \tilde{\tau}_{\varphi p} - 2 \tilde{\tau}_{\varphi r} \tan \gamma}{\varrho} + F_\varphi^1 &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{\tau}_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\varrho \cos \gamma} \frac{\partial \tilde{\tau}_{\varphi p}}{\partial r} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \tilde{\sigma}_r}{\partial r} + \frac{3 \tilde{\tau}_{\varphi r} + \tan \gamma (2 \tilde{\sigma}_p - \tilde{\sigma}_r)}{\varrho} + F_r^1 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

A° 2. Cauchy-jevi granični (konturni) uslovi

a) u krivolinijskom koordinatnom sistemu

$$\vec{p}_n = \delta^{ij} n_i \vec{g}_j ; \quad (p_n)^j = \delta^{ij} n_i \quad (5)$$

b) u Descartes-ovom koordinatnom sistemu

$$\vec{p}_n = \vec{p}_x \alpha + \vec{p}_y \beta + \vec{p}_z \gamma; \quad \{p_n\} = N \{n\} = \{F_n^1\},$$

$$\begin{Bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{xx} & \delta_{yx} & \delta_{zx} \\ \delta_{xy} & \delta_{yy} & \delta_{zy} \\ \delta_{xz} & \delta_{yz} & \delta_{zz} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_n^1 \\ Y_n^1 \\ Z_n^1 \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

c) u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu

$$\begin{Bmatrix} p_{nr} \\ \frac{1}{r} p_{np} \\ p_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_r & \frac{1}{r} \tilde{\tau}_{rp} & \tilde{\tau}_{rz} \\ \frac{1}{r} \tilde{\tau}_{rp} & \frac{1}{r^2} \delta_p & \frac{1}{r} \tilde{\tau}_{pz} \\ \tilde{\tau}_{rz} & \frac{1}{r} \tilde{\tau}_{pz} & \delta_z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{rn}^1 \\ \frac{1}{r} F_{pn}^1 \\ F_{zn}^1 \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

d) u sfernom koordinatnom sistemu

$$\begin{Bmatrix} P_{ng} \\ \frac{1}{g \cos \gamma} P_{np} \\ \frac{1}{g} P_{n\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_g & \frac{\delta_{\varphi p}}{g \cos \gamma} & \frac{\delta_{\varphi p}}{g} \\ \frac{\delta_{\varphi p}}{g \cos \gamma} & \frac{\delta_p}{g^2 \cos^2 \gamma} & \frac{\delta_{p\gamma}}{g^2 \cos \gamma} \\ \frac{1}{g} \delta_{p\gamma} & \frac{\delta_{p\gamma}}{g^2 \cos \gamma} & \frac{\delta_p}{g^2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ng}^1 \\ F_{np}^1 \\ \frac{1}{g} F_{n\gamma}^1 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

B<sup>o</sup> GEOMETRIJSKO-KINEMATIČKE JEDNAČINEB<sup>o</sup> 1. Cauchy-jeve kinematičke jednačine

a) u krivolinijskom koordinatnom sistemu

$$\mathcal{E}_{nk} = \frac{1}{2} (\mathcal{U}_{n,k} + \mathcal{U}_{k,n}) ; \quad \mathcal{E}_{rs} = \frac{1}{A_r A_s} \left[ \frac{\partial}{\partial g^r} (A_r U_s) + \frac{\partial}{\partial g^s} (A_s U_r) - 2 A_k U_k \Gamma_{rs}^k \right] \quad (9)$$

b) u Descartes-ovom koordinatnom sistemu

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{E}_x & \frac{1}{2} \delta_{yx} & \frac{1}{2} \delta_{zx} \\ \frac{1}{2} \delta_{xy} & \mathcal{E}_y & \frac{1}{2} \delta_{zy} \\ \frac{1}{2} \delta_{xz} & \frac{1}{2} \delta_{yz} & \mathcal{E}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

c) u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \delta_{rp} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial r}, \\ \mathcal{E}_\varphi &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial r} + u \right), & \delta_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \\ \mathcal{E}_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \delta_{z\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \quad (11)$$

d) u sfernom koordinatnom sistemu

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_g &= \frac{\partial u}{\partial g}, & \delta_{gp} &= \frac{1}{g \cos \gamma} \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial v}{\partial g} - \frac{v}{g}, \\ \mathcal{E}_\varphi &= \frac{1}{g \cos \gamma} \frac{\partial v}{\partial p} + \frac{u}{g} - \frac{w}{g} \operatorname{tg} \gamma, & \delta_{p\varphi} &= \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{g \cos \gamma} \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{v}{g} \operatorname{tg} \gamma, \\ \mathcal{E}_\gamma &= \frac{1}{g} \left( \frac{\partial w}{\partial p} + u \right), & \delta_{p\gamma} &= \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial p} - \frac{w}{g}. \end{aligned} \quad (12)$$

B<sup>o</sup> 2. Saint-Venant-ovi uslovi kompatibilnosti deformacija

a) u Krivolinijskom koordinatnom sistemu

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x^r \partial x^s} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{rs}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{rk}}{\partial x^i \partial x^s} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ks}}{\partial x^r \partial x^k} - 2 \varepsilon_{ksp}^* \Gamma_{ir}^p + 2 \varepsilon_{ikp}^* \Gamma_{sr}^p - \\ - 2 \varepsilon_{irp}^* \Gamma_{sk}^p + 2 \varepsilon_{srp}^* \Gamma_{ik}^p - 2 \varepsilon_{mp} (\Gamma_{ki}^m \Gamma_{rs}^p - \Gamma_{ir}^m \Gamma_{ks}^p) = 0, \quad (13)$$

$$\varepsilon_{ksp}^* = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \varepsilon_{pk}}{\partial x^s} + \frac{\partial \varepsilon_{sp}}{\partial x^k} - \frac{\partial \varepsilon_{ks}}{\partial x^p} \right].$$

b) u Descartes-ovom pravouglom koordinatnom sistemu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \delta_{xy}}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \delta_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \delta_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \delta_{yz}}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \delta_{yz}}{\partial y \partial z}, & \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \delta_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \delta_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \delta_{xy}}{\partial z} \right], \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \delta_{xz}}{\partial x \partial z}, & \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \delta_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \delta_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \delta_{yz}}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

c) u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varepsilon_{r\varphi}}{\partial r} \right) - \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 (r \varepsilon_{r\varphi})}{\partial r \partial \varphi} &= 0 & \varepsilon_{rr} &= \varepsilon_r \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial r^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{rz}}{\partial r \partial z} & \varepsilon_{r\varphi} &= \varepsilon_\varphi \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial r \partial \varphi} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varepsilon_{rz}}{\partial \varphi} + \varepsilon_{rz} \right) &= 0 & \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_z \\ \frac{1}{r} r \frac{\partial}{\partial z} \left[ \varepsilon_{rr} - \frac{\partial (r \varepsilon_{r\varphi})}{\partial r} \right] - \frac{\partial^2 \varepsilon_{rz}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 (r \varepsilon_{rz})}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial^2 (r \varepsilon_{r\varphi})}{\partial z \partial \varphi} &= 0 & \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \delta_{rz}^\varphi \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \varphi \partial z} - \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \delta_{rz}) \right] - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} (r^2 \varepsilon_{r\varphi}) - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left( \frac{\varepsilon_{rz}}{r} \right) &= 0 & \varepsilon_{z\varphi} &= \frac{1}{2} \delta_{z\varphi}^\varphi \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rz}}{\partial \varphi \partial z} + r \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left( \frac{\varepsilon_{rz}}{r} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\varphi}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left( \frac{\varepsilon_{zz}}{r} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

d) u sfernom koordinatnom sistemu

$$\frac{2}{\beta^2} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial \gamma} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial \beta \partial \gamma} - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial \gamma^2} - \frac{2}{\beta} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial \beta} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial \beta} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta \cos \gamma} \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial \beta \partial \gamma} - \frac{1}{\beta^2 \cos^2 \gamma} \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial \gamma^2} - \frac{2}{\beta^2} \varepsilon_{r\theta} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \beta^2} + \frac{2}{\beta} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \cos^2 \gamma} \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial \gamma} + \\ + \frac{1}{\beta} \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial \beta} - \frac{t \gamma}{\beta^2} \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \gamma} - \frac{2}{\beta} t \gamma \varepsilon_{r\theta} - \frac{2}{\beta} t \gamma \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \beta} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{\xi^2 \cos \gamma} \frac{\partial^2 \xi_{yy}}{\partial \varphi \partial \gamma} + \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{\xi^2 \cos \gamma} \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \varphi} - \frac{2}{\xi} \left[ \frac{2}{\xi} \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \gamma} + \frac{2}{\xi \cos \gamma} \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \varphi} - 2 \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \varphi} \right] - \\
 & - \frac{4}{\xi^2} \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \gamma} - \frac{4}{\xi^2 \cos \gamma} \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \varphi} + \frac{4}{\xi} \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \varphi} + \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{\xi} \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \varphi} + \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{\xi^2} \xi_{yy} = 0, \\
 & \frac{\partial^2 \xi_{yy}}{\partial \varphi \partial \gamma} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \gamma} (\xi_{yy} - \xi_{pp}) + \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial}{\partial \varphi} (\xi_{yy} - \xi_{pp}) + \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\xi} (\xi_{yy} - \xi_{pp}) - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \gamma} - \\
 & - \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \varphi} - \frac{1}{\xi \cos \gamma} \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \varphi} \right] - \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma}{\xi} \xi_{yy} + \\
 & + \frac{2}{\xi} \xi_{yy} - \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\xi} \left[ \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \gamma} - \xi \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \varphi} - \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \varphi} \right] + \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\xi \cos \gamma} \left[ \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \gamma} \right] = 0, \\
 & (16) \\
 & \frac{1}{\xi \cos \gamma} \frac{\partial^2 \xi_{yy}}{\partial \varphi \partial \gamma} + \frac{1}{\xi^2 \cos \gamma} \frac{\partial^2 \xi_{yy}}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \frac{1}{\xi \cos \gamma} \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \varphi} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \gamma} \right] - \\
 & - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \gamma} - \frac{2}{\xi} \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \varphi} + \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\xi^2} \left[ 2 \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \gamma} + \xi \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \varphi} - \xi_{yy} \right] = 0, \\
 & \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \xi_{yy}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\xi^2 \cos^2 \gamma} \frac{\partial^2 \xi_{yy}}{\partial \varphi^2} + \frac{2 \xi_{yy}}{\xi^2} + \frac{1}{\xi} \left( \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \gamma} \right) + \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\xi^2} \left( \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \gamma} - 2 \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \varphi} \right) - \\
 & - \frac{2}{\xi^2 \cos \gamma} \left( \frac{\partial^2 \xi_{yy}}{\partial \varphi \partial \gamma} - \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \varphi} \right) + \frac{2}{\xi^2} \left( \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial \gamma} - \operatorname{tg} \gamma \xi_{yy} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

B<sup>o</sup> 3. Kinematičke jednačine - tenzor rotacije

a) u krivolinijskom koordinatnom sistemu

$$\omega_{n,k} = \frac{1}{2} (\mu_{k,n} - \mu_{n,k}) \quad (17)$$

b) u Descartes-ovom koordinatnom sistemu

$$\omega_k = \begin{pmatrix} 0 & -r & \varphi \\ r & 0 & -p \\ -\varphi & p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) & 0 & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

c) u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu

188.

$$\mathcal{G}_K = \begin{pmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_r \\ -r_y & r_r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - v \right) \right] & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - v \right) \right] & 0 & -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial v}{\partial z} \right] \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

d) u sfernom koordinatnom sistemu

$$\mathcal{G}_K = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{v}{\rho} - \frac{1}{\rho} \cos \psi \frac{\partial u}{\partial \rho} \right] & \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{u}{\rho} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{v}{\rho} - \frac{1}{\rho} \cos \psi \frac{\partial u}{\partial \rho} \right] & 0 & -\frac{1}{2} \left[ \frac{v}{\rho} \tan \psi + \frac{1}{\rho} \sin \psi \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \\ -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{u}{\rho} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] & \frac{1}{2} \left[ \frac{v}{\rho} \tan \psi + \frac{1}{\rho} \sin \psi \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

B<sup>o</sup> 4. Sistem jednačina za odredjivanje komponenata vektora pomeranja  $\vec{s}$ : - u Descartes-ovom koordinatnom sistemu:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} dx + \int_{y_0}^y \left[ \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} \right] dy + \frac{1}{2} \int_{z_0}^z \left[ -\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} \right] dz \Big|_{x=x_0, y=y_0} + C_1, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \int_{x_0}^x \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} dx + \int_{y_0}^y \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial x} \right] dy - \int_{z_0}^z \left[ \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} \right] dz \Big|_{x=x_0, y=y_0} + C_2 \end{cases}$$

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx + \int_{y_0}^y \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right] dy + \int_{z_0}^z \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right] dz + C_3 \quad (21)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = \epsilon_{xy} - \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y \\ \frac{\partial v}{\partial z} = \int_{x_0}^x \left[ \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} \right] dx + \int_{y_0}^y \left[ \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} \right] dy + \int_{z_0}^z \left[ \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} \right] dz \Big|_{x=x_0, y=y_0} + C_4 \end{cases}$$

$$v(x, y, z) = \int_{x_0}^x \left[ \epsilon_{xy} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx + \int_{y_0}^y \left[ \epsilon_y \right] dy + \int_{z_0}^z \left[ \frac{\partial v}{\partial z} \right] dz + C_5$$

$$w(x, y, z) = \int_{x_0}^x \left[ \epsilon_{xz} - \frac{\partial u}{\partial z} \right] dx + \int_{y_0}^y \left[ \epsilon_{yz} - \frac{\partial v}{\partial z} \right] dy + \int_{z_0}^z \left[ \epsilon_z \right] dz + C_6$$

C<sup>o</sup> FIZIČKE JEDNAČINE

C<sup>o</sup> 1. Uopšteni oblik Hooke-ovog zakona

a) u krivolinijskom koordinatnom sistemu

$$\begin{aligned}\delta_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon^{kl} ; \\ \delta_{ij} &= \lambda g_{ij} \varepsilon + 2\nu \varepsilon_{ij} ; \quad \delta^4 = \lambda g^4 E + 2\nu \varepsilon^4 \quad (22)\end{aligned}$$

b) u Descartes-ovom pravouglom koordinatnom sistemu

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= 2\nu \mathcal{E} + \lambda \mathcal{I} , \\ \mathcal{E} &= \frac{1}{2\nu} \mathcal{N} - \frac{\lambda}{2\nu(3\lambda+2\nu)} \mathcal{N} \mathcal{I} . \quad (23)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_x &= 2\nu \varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) , \\ \delta_y &= 2\nu \varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) , \\ \delta_z &= 2\nu \varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) , \quad (23^*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \nu \delta_{xy} , \\ \gamma_{xz} &= \nu \delta_{xz} , \\ \gamma_{zy} &= \nu \delta_{zy} .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{2\nu} \delta_x - \frac{\lambda}{2\nu(3\lambda+2\nu)} (\delta_x + \delta_y + \delta_z) , \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2\nu} \delta_y - \frac{\lambda}{2\nu(3\lambda+2\nu)} (\delta_x + \delta_y + \delta_z) , \quad (23^{**}) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2\nu} \delta_z - \frac{\lambda}{2\nu(3\lambda+2\nu)} (\delta_x + \delta_y + \delta_z) , \\ \delta_{xy} &= \frac{1}{\nu} \gamma_{xy} , \quad \delta_{yz} = \frac{1}{\nu} \gamma_{yz} . \\ \delta_{xz} &= \frac{1}{\nu} \gamma_{xz}\end{aligned}$$

c) u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu

$$\begin{aligned}\delta_r &= \lambda \left( \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\nu \frac{\partial u}{\partial r} , \\ \delta_\varphi &= \lambda \left( \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\nu \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) , \\ \delta_z &= \lambda \left( \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\nu \frac{\partial w}{\partial z} , \quad (24) \\ \gamma_{r\varphi} &= \nu \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \right] \\ \gamma_{rz} &= \nu \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right] \\ \gamma_{z\varphi} &= \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

d) u sfernom koordinatnom sistemu

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\rho &= \lambda \varepsilon_v + 2\nu \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \\ \mathcal{E}_\varphi &= \lambda \varepsilon_v + 2\nu \left[ \frac{1}{\rho \cos \psi} \frac{\partial v}{\partial \psi} + \frac{1}{\rho} (\mu - v \operatorname{tg} \psi) \right] \\ \mathcal{E}_\psi &= \lambda \varepsilon_v + 2\nu \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \mu}{\partial \psi} + \mu \right) \\ \varepsilon_v &= 2 \frac{\mu}{\rho} + \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \psi} + \frac{1}{\rho \cos \psi} \frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{v}{\rho} \operatorname{tg} \psi \quad (25) \\ \tilde{\varepsilon}_{\rho\varphi} &= \nu \left[ \frac{1}{\rho \cos \psi} \frac{\partial \mu}{\partial \psi} + \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{v}{\rho} \right) \right] \\ \tilde{\varepsilon}_{\rho\psi} &= \nu \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \mu}{\partial \psi} - v \right) + \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \right] \\ \tilde{\varepsilon}_{\varphi\psi} &= \nu \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial v}{\partial \psi} + v \operatorname{tg} \psi \right) + \frac{1}{\rho \cos \psi} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \right]\end{aligned}$$

C<sup>o</sup> 2. Veze izmedju Lamé-ovih i tehničkih konstanti

$$\begin{aligned}E &= \frac{\nu(3\lambda+2\nu)}{\lambda+\nu}, & \mu &= \frac{\lambda}{2(\lambda+\nu)}, \\ \lambda &= \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \frac{\mu K E}{1+\mu} = 2MK \mathcal{G}, & (26) \\ \nu &= \mathcal{G} = \frac{E}{2(1+\mu)}, & K &= \frac{1}{1-2\mu}.\end{aligned}$$

C<sup>o</sup> 3. Drugi oblik Hooke-ovog zakona

a) u krivolinijskom koordinatnom sistemu

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{ij} &= 2\mathcal{G} \{ \varepsilon_{ij} + MK \varepsilon g_{ij} \}, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{E} \{ (1+\mu) \mathcal{E}_{ij} - \mu g_{ij} \mathcal{N}_i \} \quad (27)\end{aligned}$$

b) u Descartes-ovom pravouglom koordinatnom sistemu

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_I &= 2\mathcal{G} \{ \mathcal{E} + MK \varepsilon \mathbb{I} \}, \\ \mathcal{E} &= \frac{1}{E} \{ (1+\mu) \mathcal{N}_I - \mu \mathcal{N}_I \mathbb{I} \}, \quad (28)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_x &= 2G[\varepsilon_z + \mu K \varepsilon] = 2G\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \mu K \operatorname{div} \vec{s}\right], \\ \beta_y &= 2G[\varepsilon_y + \mu K \varepsilon] = 2G\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \mu K \operatorname{div} \vec{s}\right], \\ \beta_z &= 2G[\varepsilon_z + \mu K \varepsilon] = 2G\left[\frac{\partial w}{\partial z} + \mu K \operatorname{div} \vec{s}\right],\end{aligned}\quad (28*)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= G \delta_{xy} = G\left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right], \\ \gamma_{yz} &= G \delta_{yz} = G\left[\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\right], \\ \gamma_{zx} &= G \delta_{zx} = G\left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}\right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\beta_x - \mu(\beta_y + \beta_z)], & \delta_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \gamma_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\beta_y - \mu(\beta_x + \beta_z)], & \delta_{yz} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \gamma_{yz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\beta_z - \mu(\beta_x + \beta_y)], & \delta_{xz} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \gamma_{xz}.\end{aligned}\quad (28**)$$

c) u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu

$$\begin{aligned}\beta_r &= 2G\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \mu K \varepsilon\right], & \gamma_{rp} &= G\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial p} - v\right) + \frac{\partial v}{\partial r}\right], \\ \beta_p &= 2G\left[\frac{\partial v}{\partial p} + \mu + \mu K \varepsilon\right], & \gamma_{rz} &= G\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right], \\ \beta_z &= 2G\left[\frac{\partial w}{\partial z} + \mu K \varepsilon\right], & \gamma_{pz} &= G\left[\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial p} + \frac{\partial v}{\partial z}\right].\end{aligned}\quad (29)$$

d) u sfernom koordinatnom sistemu

$$\begin{aligned}\beta_\rho &= 2G\left[\frac{\partial u}{\partial \rho} + \mu K \varepsilon\right], & \gamma_{\rho\varphi} &= G\left[\frac{1}{\rho \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho}\right] \\ \beta_\varphi &= 2G\left[\frac{1}{\rho \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho}(\mu - w + tg \varphi) + \mu K \varepsilon\right], & \gamma_{\rho\varphi} &= G\left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - w\right) + \frac{\partial w}{\partial \rho}\right] \\ \beta_\vartheta &= 2G\left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \mu\right) + \mu K \varepsilon\right], & \gamma_{\varphi\vartheta} &= G\left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + v + tg \varphi\right) + \frac{1}{\rho \cos \varphi} \frac{\partial w}{\partial \varphi}\right].\end{aligned}\quad (30)$$

C<sup>o</sup> 4. Veza izmedju prvih skalara tenzora napona i tenzora deformacije

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1 &= (3\lambda + 2\nu) \mathcal{E}_1, & \mathcal{E}_v &= \mathcal{E} = \mathcal{E}_1, \\ \mathcal{N}_1 &= \kappa E \varepsilon = \frac{E}{1-2\mu} \varepsilon,\end{aligned}\quad (31)$$

$$\mathcal{N}_1 = 2(1+\mu) \kappa \varepsilon G.$$

D<sup>O</sup> GENERALISANE JEDNAČINED<sup>O</sup> 1. Lamé-ove diferencijalne jednačine

a) u krivolinijskom koordinatnom sistemu

$$(F_v^i)_i + G \left[ \Delta u^i + \kappa \varepsilon_{j,i} g^{ij} \right] = 0 \quad (32)$$

$$(F_v^i)_i + G \left[ \Delta u_i + \kappa \varepsilon_{i,j} \right] = 0$$

gde je:

$$\Delta u_i = g^{jk} \left\{ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^k \partial x^j} + u_m \left( \Gamma_{is}^m \Gamma_{kj}^s + \Gamma_{js}^m \Gamma_{ik}^s \right) - \Gamma_{ij}^s \frac{\partial u_s}{\partial x^k} - \frac{\partial u_s}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^s - u_s \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^s - \frac{\partial u_i}{\partial x^s} \Gamma_{kj}^s \right\} \quad (32*)$$

b) u Descartes-ovom koordinatnom sistemu

b) 1. vektorski

$$G(\Delta \vec{s} + \kappa \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s}) = 0, \quad (33)$$

b) 2. matrično

$$G \begin{Bmatrix} \Delta u + \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \\ \Delta v + \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \\ \Delta w + \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_v^i \\ Y_v^i \\ Z_v^i \end{Bmatrix} = 0, \quad (33*)$$

c) u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu

$$G \left\{ \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \Delta u - \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{r} \right\} = 0, \\ G \left\{ \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} + \Delta v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r^2} \right\} + F_\varphi^i = 0, \\ G \left\{ \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \Delta w \right\} + F_z^i = 0, \quad (34)$$

gde je:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

d) usfernog koordinatnog sistema

$$\begin{aligned} \text{G}_1: & K \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} + \Delta u + \frac{2}{\rho^2} \left( \omega \operatorname{tg} \gamma - \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial \varphi} - u \right) + F'_s = 0 \\ \text{G}_2: & \frac{K}{\rho \cos \gamma} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} + \Delta v + \frac{2}{\rho^2 \cos \gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) - \frac{v}{\rho^2 \cos^2 \gamma} + F'_\rho = 0 \\ \text{G}_3: & \frac{K}{\rho} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} + \Delta w + \frac{2}{\rho} \left( \frac{\partial u}{\partial \gamma} + \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\cos \gamma} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) - \frac{w}{\rho^2 \cos^2 \gamma} + F'_\gamma = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

gde je:

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \gamma} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \gamma}$$

D<sup>o</sup> 2. Cauchy-jevi granični uslovi u drugom obliku

a) u ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu

$$(P_n)^j = (F_n')^j = \lambda \varepsilon g^{ij} n_i + 2\nu \varepsilon^{ij} n_i, \quad (36)$$

$$(F_n')^j = 2G [\varepsilon^{ij} n_i + \mu_K \varepsilon g^{ij} n_i]. \quad (36*)$$

b) u Descartes-ovom pravouglom koordinatnom sistemu

$$\{F_n'\} = \bigcup_K \{n\}_K$$

$$\begin{pmatrix} 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \mu_K \varepsilon \right) & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} & 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \mu_K \varepsilon \right) & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & 2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \mu_K \varepsilon \right) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_n' \\ Y_n' \\ Z_n' \end{Bmatrix} \quad (37)$$

c) u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu

$$G \begin{pmatrix} 2 \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \mu_K \varepsilon \right] & \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \right] & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \right] & 2 \left[ \frac{\partial v}{\partial r} + u + \mu_K \varepsilon \right] & \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 2 \left[ \frac{\partial w}{\partial z} + \mu_K \varepsilon \right] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{hr}' \\ F_{hp}' \\ F_{hz}' \end{Bmatrix} \quad (38)$$

194.

d) u sfernom koordinatnom sistemu

$$\begin{aligned}
 F_{n\delta}^1 &= 2G \left[ \frac{\partial u}{\partial \delta} + \mu K \epsilon \right] \alpha + \frac{G}{\rho \cos \gamma} \left[ \frac{1}{\rho \cos \gamma} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \delta} - \frac{v}{\rho} \right] \beta + \frac{G}{\rho} \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial u}{\partial \gamma} - w \right) + \frac{\partial w}{\partial \delta} \right] \delta^2, \\
 F_{n\varphi}^1 &= G \left[ \frac{1}{\rho \cos \gamma} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \delta} - \frac{v}{\rho} \right] \alpha + \frac{2G}{\rho \cos \gamma} \left[ \frac{1}{\rho \cos \gamma} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} (u - w \operatorname{tg} \gamma) + \mu K \epsilon \right] \beta + \\
 &\quad + \frac{G}{\rho} \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial v}{\partial \gamma} + w \operatorname{tg} \gamma \right) + \frac{1}{\rho \cos \gamma} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] \delta^2, \\
 F_{n\gamma}^1 &= G \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial u}{\partial \gamma} - w \right) + \frac{\partial w}{\partial \delta} \right] \alpha + \frac{G}{\rho \cos \gamma} \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial v}{\partial \gamma} + w \operatorname{tg} \gamma \right) + \frac{1}{\rho \cos \gamma} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] \beta + \\
 &\quad + \frac{2G}{\rho} \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial w}{\partial \gamma} + w \operatorname{tg} \gamma \right) + \mu K \epsilon \right] \delta^2. \tag{39}
 \end{aligned}$$

 D<sup>o</sup> 3. Beltrami-Michell-ove diferencijalne jednačine

a) Krivolinijski koordinatni sistem

$$(F_v^1)_{ij,j} + (F_v^1)_{j,i} + \frac{1}{1+\mu} \delta_{ij} + \Delta \delta_{ij} + \frac{\mu}{1-\mu} g_{ij} (F_v^1)_{,m}^m = 0. \tag{40}$$

b) u Descartes-ovom pravouglom koordinatnom sistemu

$$\begin{aligned}
 \Delta \delta_x &+ \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} + \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}_v^1 + 2 \frac{\partial X_v^1}{\partial x} = 0, \\
 \Delta \delta_y &+ \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} + \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}_v^1 + 2 \frac{\partial Y_v^1}{\partial y} = 0, \\
 \Delta \delta_z &+ \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 N_1}{\partial z^2} + \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}_v^1 + 2 \frac{\partial Z_v^1}{\partial z} = 0, \\
 \Delta \tilde{\delta}_{xy} &+ \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial X_v^1}{\partial y} + \frac{\partial Y_v^1}{\partial x} = 0, \tag{41} \\
 \Delta \tilde{\delta}_{xz} &+ \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial X_v^1}{\partial z} + \frac{\partial Z_v^1}{\partial x} = 0, \\
 \Delta \tilde{\delta}_{yz} &+ \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 N_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial Y_v^1}{\partial z} + \frac{\partial Z_v^1}{\partial y} = 0. \\
 \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.
 \end{aligned}$$

c) u Polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \tilde{\delta}_r - \frac{2}{r^2} (\tilde{\delta}_r - \tilde{\delta}_\varphi) - \frac{4}{r^2} \frac{\partial \tilde{\delta}_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \tilde{N}_1}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \tilde{F}_r'}{\partial r} + \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}_v' = 0, \\
 \Delta \tilde{\delta}_\varphi + \frac{2}{r^2} (\tilde{\delta}_r - \tilde{\delta}_\varphi) + \frac{4}{r^2} \frac{\partial \tilde{\delta}_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{1+\mu} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{N}_1}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}_v' + \frac{2}{r} \left( \frac{\partial \tilde{F}_\varphi'}{\partial \varphi} + \tilde{F}_r' \right) = \\
 \Delta \tilde{\delta}_z + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \tilde{N}_1}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \tilde{\delta}_z}{\partial z} + \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}_v' = 0 \\
 \Delta \tilde{\delta}_{r\varphi} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tilde{\delta}_r - \tilde{\delta}_\varphi) - \frac{4}{r^2} \tilde{\delta}_{r\varphi} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \tilde{F}_r'}{\partial \varphi} - \tilde{F}_\varphi' \right) + \frac{\partial \tilde{F}_\varphi'}{\partial r} = 0 \\
 \Delta \tilde{\delta}_{rz} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{\delta}_{rz}}{\partial \varphi} - \frac{\tilde{\delta}_{rz}}{r^2} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \tilde{N}_1}{\partial r \partial z} + \frac{\partial \tilde{F}_r'}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{F}_z'}{\partial r} = 0 \quad (42) \\
 \Delta \tilde{\delta}_{\varphi z} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{\delta}_z}{\partial \varphi} - \frac{\tilde{\delta}_{\varphi z}}{r^2} + \frac{1}{1+\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{N}_1}{\partial \varphi \partial z} + \frac{\partial \tilde{F}_\varphi'}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{F}_z'}{\partial \varphi} = 0
 \end{aligned}$$

d) u sfernom koordinatnom sistemu

$$\begin{aligned}
 \Delta \tilde{\delta}_\rho - \frac{2}{\tilde{s}^2} (\tilde{\delta}_\rho - \tilde{\delta}_\varphi) - \frac{2}{\tilde{s}^2 \cos^2 \gamma} (\tilde{\delta}_\rho - \tilde{\delta}_\varphi) - \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{\tilde{s}^2} \tilde{\delta}_{\varphi\gamma} - \frac{4}{\tilde{s}^2} \frac{\partial \tilde{\delta}_{\varphi\rho}}{\partial \varphi} + \frac{4}{\tilde{s}^2 \cos^2 \gamma} \frac{\partial \tilde{\delta}_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \tilde{s}^2} + \\
 + 2 \frac{\partial \tilde{F}_\rho'}{\partial \tilde{s}} + \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}_v' = 0 \\
 \Delta \tilde{\delta}_\varphi - \frac{2}{\tilde{s}^2 \cos^2 \gamma} \tilde{\delta}_\varphi + \frac{1}{(1+\mu) \tilde{s}^2 \cos^2 \gamma} \frac{\partial^2 \tilde{N}_1}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{\tilde{s} \cos \gamma} \left[ \frac{\partial \tilde{F}_\varphi'}{\partial \varphi} + \cos \gamma \tilde{F}_\rho' - \sin \gamma \tilde{F}_\gamma' \right] + \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}_v' = 0 \\
 \Delta \tilde{\delta}_\gamma + \frac{1}{\tilde{s}^2} (\tilde{\delta}_\rho - \tilde{\delta}_\gamma) + \frac{2}{\tilde{s} \cos \gamma} (\tilde{\delta}_\varphi - \tilde{\delta}_\gamma) - \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{\tilde{s}^2} \tilde{\delta}_{\varphi\gamma} + \frac{4}{\tilde{s}^2} \frac{\partial \tilde{\delta}_{\varphi\gamma}}{\partial \varphi} + \frac{4}{\tilde{s}^2 \cos^2 \gamma} \frac{\partial \tilde{\delta}_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - \\
 + \frac{1}{1+\mu} \left( \frac{1}{\tilde{s}} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \tilde{s}} + \frac{1}{\tilde{s}^2} \frac{\partial^2 \tilde{N}_1}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{2}{\tilde{s}} \left( \frac{\partial \tilde{F}_\varphi'}{\partial \varphi} + \tilde{F}_\rho' \right) + \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}_v' = 0 \quad (43) \\
 \Delta \tilde{\delta}_{\varphi\gamma} + \frac{2}{\tilde{s}^2 \cos \gamma} \frac{\partial \tilde{\delta}_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\tilde{\delta}_{\varphi\gamma}}{\tilde{s}^2} - \frac{4 \tilde{\delta}_{\varphi\gamma}}{\tilde{s}^2 \cos^2 \gamma} - \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\tilde{s}^2} \tilde{\delta}_{\varphi\varphi} + \frac{2}{\tilde{s}^2} \frac{\partial \tilde{\delta}_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \\
 + \frac{1}{(1+\mu) \tilde{s} \cos \gamma} \left( \frac{\partial^2 \tilde{N}_1}{\partial \varphi \partial \tilde{s}} - \frac{1}{\tilde{s}} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\tilde{s} \cos \gamma} \frac{\partial \tilde{F}_\varphi'}{\partial \varphi} - \frac{1}{\tilde{s}} \tilde{F}_\varphi' + \frac{\partial \tilde{F}_\varphi'}{\partial \tilde{s}} = 0 \\
 \Delta \tilde{\delta}_{\varphi\gamma} - \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\tilde{s}^2} (\tilde{\delta}_\rho - \tilde{\delta}_\gamma) - \frac{2}{\tilde{s}^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tilde{\delta}_\rho - \tilde{\delta}_\gamma) - \frac{4}{\tilde{s}^2} \tilde{\delta}_{\varphi\gamma} - \frac{2 \tilde{\delta}_{\varphi\gamma}}{\tilde{s}^2 \cos^2 \gamma} + \frac{1}{(1+\mu) \tilde{s}} \left( \frac{\partial^2 \tilde{N}_1}{\partial \tilde{s} \partial \varphi} - \frac{1}{\tilde{s}} \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \varphi} \right) + \\
 + \frac{1}{\tilde{s}} \left( \frac{\partial \tilde{F}_\varphi'}{\partial \varphi} - \tilde{F}_\gamma' \right) + \frac{\partial \tilde{F}_\gamma'}{\partial \tilde{s}} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \tilde{\delta}_{\varphi\varphi} + \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{\tilde{s}^2 \cos \gamma} \frac{\partial \tilde{\delta}_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{\tilde{s}^2} (\tilde{\delta}_{\varphi\varphi} - \operatorname{tg} \gamma \tilde{\delta}_{\varphi\gamma}) + \frac{4 \tilde{\delta}_{\varphi\varphi}}{\tilde{s}^2 \cos^2 \gamma} - \frac{2}{\tilde{s}^2} \left( \frac{\partial \tilde{\delta}_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{\cos \gamma} \frac{\partial \tilde{\delta}_{\varphi\gamma}}{\partial \varphi} \right) + \\
 + \frac{1}{(1+\mu) \tilde{s}^2 \cos \gamma} \left( \frac{\partial^2 \tilde{N}_1}{\partial \varphi \partial \varphi} - \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\tilde{s} \cos \gamma} \left( \frac{\partial \tilde{F}_\varphi'}{\partial \varphi} + \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\partial \tilde{F}_\varphi'}{\partial \varphi} + \operatorname{tg} \gamma \tilde{F}_\rho' \right) = 0
 \end{aligned}$$

## V. DEFORMACIONI RAD - ELASTIČNI POTENCIJAL

## V.1. ELASTIČNI POTENCIJAL

Uvedimo funkciju  $\mathcal{W}(\varepsilon_{ij})$  kao funkciju koordinata  $\varepsilon_{ij}$  tenzora specifične deformacije i nazovimo je elastični potencijal ili potencijal napon, jer ćemo pomoću nje izraziti koordinate tenzora napona  $\sigma^{ij}$  kao:

$$\sigma^{ij} = \frac{\partial \mathcal{W}(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (1)$$

Za funkciju  $\mathcal{W}(\varepsilon_{ij})$ , elastični potencijal prepostavimo da je neprekidna i diferencijabilna funkcija svojih argumenata - koordinata  $\varepsilon_{ij}$  tenzora relativne deformacije.

Elastični potencijal  $\mathcal{W}(\varepsilon_{ij})$  možemo razviti u stepeni red po koordinatama  $\varepsilon_{ij}$  tenzora relativne deformacije u okolini prirodnog stanja (prirodne konfiguracije) deformabilnog tela oslanjajući se o prepostavku o malim deformacijama, pa možemo napisati:

$$\mathcal{W}(\varepsilon_{ke}) = \mathcal{W} \Big|_{\varepsilon_{ke}=0} + \left( \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{\varepsilon_{ke}=0} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \right)_{\varepsilon_{mn}=0} \varepsilon_{ji} \varepsilon_{ke} + \dots \quad (2)$$

Ako imamo u vidu prepostavku o prirodnom stanju idealno-elastičnih tela, da kada nema napona nema ni deformacija, to za prirodnu konfiguraciju koordinate tenzora napona i tenzora deformacije su jednake nuli, te imajući u vidu definiciju (1) sledi da je:

$$\sigma^{ij} \Big|_{\varepsilon_{ke}=0} = \frac{\partial \mathcal{W}(\varepsilon_{ke})}{\partial \varepsilon_{ij}} \Big|_{\varepsilon_{ke}=0} = 0 \quad (3)$$

i uvećemo prepostavku da je u prirodnom stanju tela elastični potencijal napona jednak nuli sledi da je:

$$\mathcal{W}(\varepsilon_{ke}) \Big|_{\varepsilon_{ke}} = 0 \quad (4)$$

Uvedimo sada oznaku:

$$C^{ijkl} = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \right)_{\epsilon_{mn}=0}, \quad (5)$$

te elastični potencijal možemo izraziti kao homogenu kvadratnu formu po specifičnim deformacijama  $\epsilon_{ij}$  u obliku:

$$W(\epsilon_{mn}) = \frac{1}{2} C^{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}. \quad (6)$$

Ako diferenciramo elastični potencijal  $W$  po koordinatama tenzora specifične deformacije  $\epsilon_{ij}$ , dobijamo:

$$\frac{\partial W(\epsilon_{mn})}{\partial \epsilon_{ij}} = C^{ijkl} \epsilon_{kl} = \delta^{ij}, \quad (7)$$

ime smo dobili vezu izmedju tenzora napona  $\delta^{ij}$  i tenzora specifične deformacije  $\epsilon_{ij}$  posredstvom tenzora elastičnosti  $C^{ijkl}$ , koji smo nazvali i materijalni tenzor. Ta veza predstavlja konstitutivne jednačine za idealno elastični materijal. Ovde smo pokazali da pomoću izraza (5) tenzor elastičnosti možemo da dovedemo u vezu sa elastičnim potencijalom.

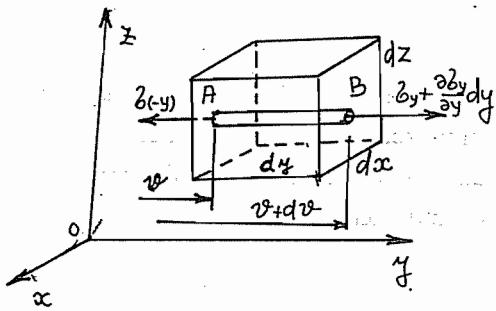
## V.2. DEFORMACIONI RAD - ENERGIJA DEFORMACIJE

dejstvom spoljašnjeg opterećenja na telo, telo prelazi u napregnuto stanje pri čemu se menja konfiguracija njegovih čestica pa se pod dejstvom spoljašnje prinude uspostavljaju određena korespondentna stanja napona i stanja deformacija, koja su zavisna i od materijala od koga je sagradjeno deformabilno telo, a o čemu smo već govorili u poglavljiju III. Pri prelasku tela iz prirodne konfiguracije u prisilnu konfiguraciju čestica koja odgovara napregnutom i deformisanom telu vrši se određeni rad, jer se čestice pod dejstvom sile pomeraju, a sa tim se pomeraju i napadne tačke spoljašnjih zapreminskih i površinskih sila koje su vezane ili za središta čestica ili za središta površine dejstva sile na površi konture tela, pa se pri tome vrši rad. Taj rad spoljašnjih sila pretvara se u potencijalnu energiju - energiju deformacije. Pri tome smatramo da je dejstvo sile statičko, tj. da je u svakom trenutku i stanju prisilne konfiguracije čestica uspostavljena statička ravnoteža unutrašnjih i spoljašnjih sila. Pri laganom (opet statičkom)

198.

uklanjanju spoljašnjeg opterećenja (sila) ta potencijalna energija deformacije će se utrošiti na uspostavljanje prvobitne prirodne konfiguracije čestica u telu pod pretpostavkom da je materijal tela idealno elastičan i da dozvoljava reverzibilnost prirodne i prinudne konfiguracije čestica u deformabilnom telu. Znači da po potpunom prestanku dejstva opterećenja deformabilno telo je prešlo na nedeformisano i nenapregnuto stanje, a ta račun utroška elastičnog potencijala.

Znači da možemo smatrati da se pri deformisanju tela, pomeranjem njegovih čestica i uspostavljanjem nove, prinudne, njihove konfiguracije akumulira energija deformacije - potencijalna energija, koja se pri uklanjanju spoljašnjih opterećenja oslobadja vršeći rad na pomeranju čestica tela do njihovog položaja u prirodoj konfiguraciji tela.



Slika br. 1

Neka je elementarni paralelopiped sa slike br. 1 deo napregnutog tela tako da se uticaj celine na njega prenosi zatezanjem u aksijalnom pravcu ose Oy, kao što je prikazano. Tada se na stranicama površi površine  $dxdydz$  javljaju naponi  $\sigma_y$  i  $\sigma_y + d\sigma_y$  i zbog male dimenzije  $dy$  možemo da zanemarimo povećanje napona  $d\sigma_y = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$ , linijski element AB dužine  $dy$  se izduži za  $\Delta dy$  koja iznosi:

$$\Delta dy = (1 + \epsilon_y) dy - dy = \epsilon_y dy \quad (8)$$

Ako stranica A ima pomeranje  $v$ , a stranica B pomeranje  $v + dv$  u pravcu određenom Oy osom, to se stranica B u odnosu na A relativno pomeri za  $dv = \frac{\partial v}{\partial y} dy$ , pa možemo napisati da površinska sila  $\sigma_y dx dz$  pri statickom dejstvu vrši rad na putu  $dv$ , usled istezanja elementarnog paralelopipeda, pa je rad:

$$dA_{de} = \frac{1}{2} \sigma_y dv dx dy = \frac{1}{2} \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} dx dy dz \quad (9)$$

Ukupan rad nad celim telom zapremine V je sada:

$$A_{de} = \int_V \frac{1}{2} \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_y \epsilon_y dV = \int_V W_e dV, \quad (10)$$

gde je  $dV = dx dy dz$  zapremina dela tela u obliku elementarnog paralelopipeda.

$\mathbb{W}_e$  elastični potencijal ili specifični deformacioni rad  $A'_de$  ili potencijalna energija po jedinici zapremine tela ili gustina potencijalne energije.

Diferenciranjem izraza (10) po zapremini dobijamo:

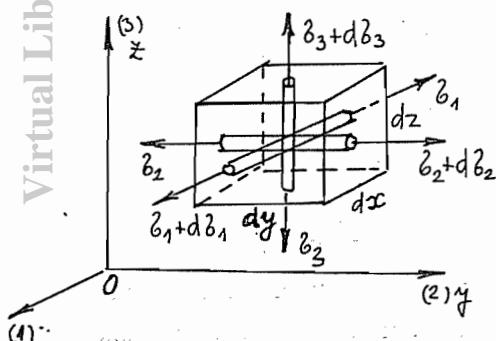
$$\mathbb{W}_e = A'_de = \frac{1}{2} \beta_y \varepsilon_y = \frac{dA'_de}{dV}, \quad (11)$$

izraz za specifični deformacioni rad.

Na sličan način možemo posmatrati istezanje dela tela u obliku elementarnog paralelopipeda sa slike br. 1, ali pojedinačno zategnut na istezanje u pravcu ose Ox ili Oz, i korišćenjem principa superpozicije opterećenja odrediti ukupan specifičan deformacioni rad koji se troši na promenu konfiguracije tog dela tela pri složenom naprezanju na zatezanje u tri upravna pravca. Za slučaj kada je deo tela u obliku elementarnog paralelopipeda zategnut u tri upravna pravca, kada se javljaju normalni naponi  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  i  $\beta_3$  u Ox, Oy i Oz pravcu i linijskim elementima u prvcima tih osa odgovaraju odgovaraju dilatacije  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  i  $\varepsilon_3$  možemo napisati da je specifični deformacioni rad ili elastični potencijal za taj slučaj :

$$A_d = \mathbb{W}_e = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 \beta_1 + \varepsilon_2 \beta_2 + \varepsilon_3 \beta_3). \quad (12)$$

Na slici br. 2 prikazano je to stanje naprezanja. Ose Ox, Oy i Oz se istovremeno i glavni pravci naprezanja i glavni pravci deformacija. Kako između napona i deformacija važi Hooke-o zakon :



Slika br. 2

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\beta_1 - \mu(\beta_2 + \beta_3)], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\beta_2 - \mu(\beta_1 + \beta_3)], \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\beta_3 - \mu(\beta_1 + \beta_2)], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2G[\varepsilon_1 + \mu \kappa \varepsilon_v], \\ \beta_2 &= 2G[\varepsilon_2 + \mu \kappa \varepsilon_v], \\ \beta_3 &= 2G[\varepsilon_3 + \mu \kappa \varepsilon_v], \end{aligned} \quad (13^*)$$

to specifični deformacioni rad  $A_d$  možemo napisati samo u funkciji glavnih normalnih naponi  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  i  $\beta_3$  u obliku:

$$A'_d = \frac{1}{2E} [(1+\mu)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) - \mu \sqrt{\beta_1^2}], \quad (14)$$

200.

$$\Delta_d^1 = \frac{1}{2E} \left[ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 2\mu (\beta_1 \beta_2 + \beta_2 \beta_3 + \beta_1 \beta_3) \right], \quad (14*)$$

ili samo u funkciji glavnih dilatacija  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  i  $\varepsilon_3$  linijskih elemenata u glavnim pravcima deformacija, kao:

$$\Delta_d^1 = G \left[ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \mu \kappa \varepsilon_v^2 \right], \quad (15)$$

$$\Delta_d^1 = \frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ (1-\mu)(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + 2\mu(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_3) \right]. \quad (15*)$$

Ako diferenciramo specifični deformacioni rad  $\Delta_d^1$  dat izrazom (14) po naponima  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  ili  $\beta_3$ , ili dat izrazima (15) po dilatacijama  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  ili  $\varepsilon_3$  dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_d^1}{\partial \beta_1} &= \frac{1}{E} \left[ (1+\mu) \beta_1 - \mu \beta_1^2 \right] = \varepsilon_1, \quad \frac{\partial \Delta_d^1}{\partial \beta_i} = 1, \\ \frac{\partial \Delta_d^1}{\partial \beta_2} &= \frac{1}{E} \left[ (1+\mu) \beta_2 - \mu \beta_1^2 \right] = \varepsilon_2, \\ \frac{\partial \Delta_d^1}{\partial \beta_3} &= \frac{1}{E} \left[ (1+\mu) \beta_3 - \mu \beta_1^2 \right] = \varepsilon_3, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_d^1}{\partial \varepsilon_1} &= 2G(\varepsilon_1 + \mu \kappa \varepsilon_v) = \beta_1, \quad \frac{\partial \Delta_d^1}{\partial \varepsilon_i} = 1, \\ \frac{\partial \Delta_d^1}{\partial \varepsilon_2} &= 2G(\varepsilon_2 + \mu \kappa \varepsilon_v) = \beta_2, \\ \frac{\partial \Delta_d^1}{\partial \varepsilon_3} &= 2G(\varepsilon_3 + \mu \kappa \varepsilon_v) = \beta_3, \end{aligned} \quad (17)$$

Ovi izrazi predstavljaju izraz Castigliano-ove teoreme:

Kada se specifični deformacioni rad (elastični potencijal) izrazi kao homogena kvadratna forma samo od komponentnih naponu (odnosno specifičnih deformacija) tada je parcijalni izvod specifičnog deformacionog rad po komponentnom naponu (odnosno specifičnoj deformaciji) jednak odgovarajućoj specifičnoj deformaciji (odnosno komponentnom naponu).

Specifični deformacioni rad se delom troši na promenu oblika, a delom na promenu zapremine, jer se deformacija tela izvodi promenom oblika.

ka i promenom zapremine. Zato posmatrajmo prvo stanje napona i deformacija koje je definisano sfernim delom tenzora napona i sfernim delom tenzora deformacije. Tada je

$$\rho = \beta_{sr} = \frac{1}{3}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = \frac{N_1}{3} = K \epsilon_v ,$$

gde je  $\epsilon_v$  zapreminska dilatacija, a  $\rho$  srednji pritisak, pa je specifični deformacioni rad koji se troši na promenu zapremine:

$$\begin{aligned} A_d^{(v)} &= W^{(v)} = \frac{1}{2} \rho \epsilon_v = \frac{1-2\mu}{6E} N_1^2 = \\ &= \frac{(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)^2}{18K} = \frac{K \epsilon_v^2}{2} = \frac{\rho^2}{2K} = \frac{\beta_{okt}^2}{2K} . \end{aligned} \quad (18)$$

Sada posmatrajmo stanje napona koje je definisano devijatorskim delom  $\mathcal{D}^{(2)}$  tenzora napona i devijatorskim delom  $\mathcal{D}^{(\epsilon)}$  tenzora specifične deformacije, onda se u pravcima zatezanja javljaju naponi  $\beta_1 - \rho$ ,  $\beta_2 - \rho$  i  $\beta_3 - \rho$  i pri takvom stanju napona dolazi samo do promene oblika. Specifični deformacioni rad koji se troši na promenu oblika možemo dobiti kada od ukupnog specifičnog deformacionog rada  $A_d^1$  definisanim izrazom (14) oduzmemo specifični deformacioni rad  $A_d^{(v)}$  koji se troši na promenu zapremine, koji je definisan izrazom (18) tako da dobijamo:

$$A_d^{(o)} = A_d^1 - A_d^{(v)},$$

$$A_d^{(o)} = \frac{1}{2E} \left[ (1+\mu)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) - \mu N_1^2 \right] - \left[ \frac{1-2\mu}{6E} N_1^2 \right] \quad (19)$$

Posle sredjivanja prethodni izraz postaje:

$$A_d^{(o)} = \frac{(1+\mu)}{6E} \left[ 3(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) - N_1^2 \right] \quad (20)$$

$$\begin{aligned} A_d^{(o)} &= \frac{1+\mu}{6E} \left[ (\beta_1 - \beta_2)^2 + (\beta_1 - \beta_3)^2 + (\beta_2 - \beta_3)^2 \right] = \\ &= \frac{2(1+\mu)}{3E} \left[ \tilde{\epsilon}_I^2 + \tilde{\epsilon}_{II}^2 + \tilde{\epsilon}_{III}^2 \right] = \frac{3}{4} \frac{\tilde{\epsilon}_{okt}^2}{G} = \left| -\frac{1}{2G} \mathcal{D}_2^{(2)} \right|. \end{aligned} \quad (20*)$$

U izrazima (20) i (20\*) specifični deformacioni rad utrošen na promenu oblika  $A_d^{(o)}$  izražen je pomoću glavnih napona. Sada ga izrazimo pomoću glavnih dilatacija:

$$A_d^{(o)} = \frac{G}{3} \left[ 3(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) - \epsilon_v^2 \right], \quad (21)$$

$$A_d^{(o)} = \frac{G}{3} \left[ 2(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) - 2(\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2 \epsilon_3 + \epsilon_1 \epsilon_3) \right]$$

$$\Delta_d^{(o)} = \frac{G}{3} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2]. \quad (21*)$$

Do izraza za specifični deformacioni rad  $\Delta_d^{(o)}$  oblika (20) možemo doći kada u izrazu (14) za specifični deformacioni rad  $\Delta_d^l$  umesto  $b_1$ ,  $b_2$  i  $b_3$  stavimo redom  $b_1-p$ ,  $b_2-p$  i  $b_3-p$ . Na osnovu izraza (20\*) možemo da formulišemo Hencky-jevu teoremu:

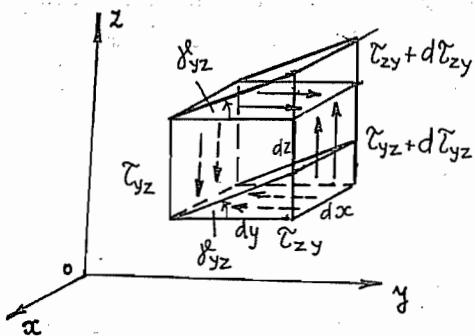
Specifični deformacioni rad (elastični potencijal) utrošen na promenu oblika elastičnog tela srazmeran je kvadratu oktaedarskog napona ili drugoj invarijanti devijatora napona.

Pretpostavimo sada da na elementarni deo tela u obliku elementarnog paralelopipeda dejstvuju sile tako da se u površima stranica ivica  $d\alpha, dy$  javljaju smičući naponi  $\tilde{\tau}_{zy}$ , a u površima stranica ivica  $dz, d\alpha$  smičući naponi  $\tilde{\tau}_{yz}$ . Usled takvog naprezanja deo tela oblika paralelopipeda prikazanog na slici br. 3 se deformešće tako da se javlja

promena pravog ugla za  $\delta_{yz}$  izmedju njegovih linijskih elemenata u pravcima osa Oy i Oz. Površinske sile, koje se javljaju u parovima,  $\tilde{\tau}_{yz} d\alpha dz$  i  $\tilde{\tau}_{xy} d\alpha dy$  obrazuju spregove momenata

$$dM_{yz} = \tilde{\tau}_{yz} d\alpha dz \cdot dy$$

$$dM_{xy} = \tilde{\tau}_{xy} d\alpha dy \cdot dz$$



Slika br. 3

pa je ukupan rad pri statičkom dejstvu tih spregova:

$$dA_{dt} = \frac{1}{2} dM_{yz} \frac{1}{2} \delta_{yz} + \frac{1}{2} dM_{xy} \frac{1}{2} \delta_{yz}.$$

Sada možemo napisati da je ukupan deformacioni rad koji se troši na deformaciju dela tela oblika elementarnog paralelopipeda:

$$dA_{dt} = \frac{1}{4} \tilde{\tau}_{yz} \delta_{yz} d\alpha dy dz + \frac{1}{4} \tilde{\tau}_{xy} \delta_{yz} d\alpha dy dz, \quad (22)$$

Uz korišćenje pravila o konjugovanosti sručućih naponi poslednji izraz dobija oblik:

$$dA_{dt} = \frac{1}{2} \sum_{xy} \delta_{xy} dV, \quad (23)$$

pa je ukupan rad koji se troši na deformaciju tela:

$$A_{dt} = \int_V A_{dt}^1 dV, \quad (24)$$

gde je  $A_{dt}^1$  specifični deformacioni rad usled čistog smicanja:

$$A_{dt}^1 = \frac{1}{2} \sum_{xy} \delta_{xy}^2 = \frac{\sum_{xy}^2}{2G} = \frac{G \delta_{xy}^2}{2}. \quad (25)$$

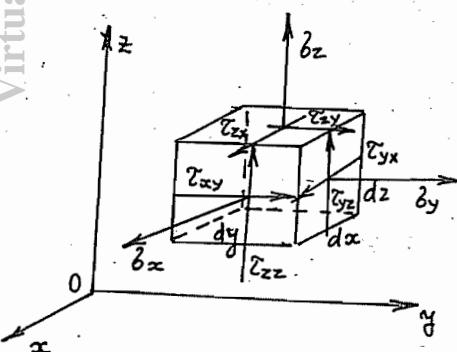
Za slučaj da se u svim stranicama javljaju samo sručući naponi, kao što je to na slici br. 4 prikazano specifični deformacioni rad usled smicanja bi imao oblik:

$$A_{dt}^1 = \frac{1}{2} (\sum_{xx} \delta_{xy} + \sum_{yy} \delta_{xy} + \sum_{zz} \delta_{xy}) \quad (26)$$

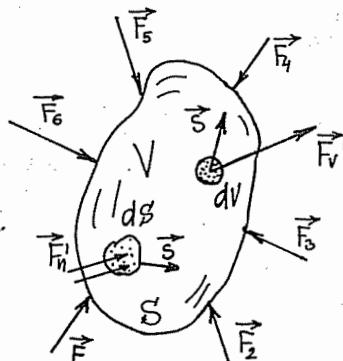
Pa je ukupan specifični deformacioni rad pri proizvoljnom prostornom stanju naprezanja svake čestice tela jednak:

$$A_{dt}^1 = \frac{1}{2} (\beta_x \varepsilon_x + \beta_y \varepsilon_y + \beta_z \varepsilon_z + \sum_{xx} \delta_{xx} + \sum_{yy} \delta_{yy} + \sum_{zz} \delta_{zz}) \quad (27)$$

Do tog rezultata možemo doći i na sledeći način. Ukupan rad spoljašnjih sila koje dejstvuju na telo jednak je zbiru rada spoljašnjih



Slika br. 4



Slika br. 4 a

površinskih sila  $\vec{F}_n' d\vec{s}$  gde je  $d\vec{s}$  element površine površi konture deformabilnog tela, na pomeranjima  $\vec{s}$  tačaka konture i rada spoljašnjih zapre-

204.

minskih sile  $\vec{F}_v' dV$  koje dejstvuju na svaku česticu tela zapremine  $dV$ , na pomeranjima  $\vec{s}$  tačaka unutar tela ukupne zapremine  $V$  i ukupne površine površi konture  $S$ . Ako smatramo da spoljašnje sile i površinske i zapreminske statički dejstvuju, onda je prema Clapeyron-ovoj teoremi o radu sile pri statičkom dejstvu:

$$\Delta_d = \frac{1}{2} \int_S (\vec{F}_n', \vec{s}) dS + \frac{1}{2} \int_V (\vec{F}_v', \vec{s}) dV, \quad (28)$$

gde je  $\vec{s}$  vektor pomeranja,  $\vec{F}_n'$  površinska sila i  $\vec{F}_v'$  zapreminska sila:

$$\begin{aligned} \vec{s}(x, y, z) &= u(x, y, z) \vec{i} + v(x, y, z) \vec{j} + w(x, y, z) \vec{k}, \\ \vec{F}_n'(x_n, y_n, z_n) &= X_n^i \vec{i} + Y_n^j \vec{j} + Z_n^k \vec{k}, \\ \vec{F}_v'(x, y, z) &= X_v^i \vec{i} + Y_v^j \vec{j} + Z_v^k \vec{k}, \end{aligned} \quad (29)$$

pa prethodni izraz (28) možemo da napišemo u obliku:

$$\Delta_d = \frac{1}{2} \int_S (X_n^i u + Y_n^j v + Z_n^k w) dS + \frac{1}{2} \int_V (X_v^i u + Y_v^j v + Z_v^k w) dV. \quad (30)$$

Koristeći Cauchy-jeve granične uslove u vektorskome obliku:

$$\vec{F}_n' = \vec{p}_x \alpha + \vec{p}_y \beta + \vec{p}_z \gamma, \quad \begin{aligned} \alpha &= \cos \alpha, \\ \beta &= \cos \beta, \\ \gamma &= \cos \gamma, \end{aligned} \quad (31)$$

i formulu Green-Ostrogradskog za pretvaranje površinskog integrala po zatvorenoj površi u zapreminski integral po zapremini unutar te površi:

$$\int_S (\vec{\alpha}, d\vec{S}) = \int_V \operatorname{div} \vec{\alpha} dV = \int_V \left( \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} \right) dV, \quad (32)$$

možemo prvi integral iz (28) da transformišemo u zapreminski. Kako je skalarni proizvod u podintegralnoj funkciji prvog integrala (28) na osnovu Cauchy-jevih graničnih uslova (31) jednak:

$$(\vec{F}_n', \vec{s}) = (\vec{p}_x, \vec{s}) \alpha + (\vec{p}_y, \vec{s}) \beta + (\vec{p}_z, \vec{s}) \gamma, \quad (33)$$

to uporedjenjem sa (32) vektor  $\vec{\alpha}$  ima oblik:

$$\vec{\alpha} = (\vec{p}_x, \vec{s}) \vec{i} + (\vec{p}_y, \vec{s}) \vec{j} + (\vec{p}_z, \vec{s}) \vec{k} \quad (34)$$

Pa se prvi integral izraza (28) može napisati kao:

$$\int_S (\vec{F}_n^!, \vec{s}) dS = \int_S (\vec{a}, d\vec{S}) = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV, \quad (35)$$

gde je

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a} &= \frac{\partial}{\partial x} (\vec{p}_x, \vec{s}) + \frac{\partial}{\partial y} (\vec{p}_y, \vec{s}) + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{p}_z, \vec{s}) = \\ &= \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z}, \vec{s} \right) + (\vec{p}_x, \frac{\partial \vec{s}}{\partial x}) + (\vec{p}_y, \frac{\partial \vec{s}}{\partial y}) + (\vec{p}_z, \frac{\partial \vec{s}}{\partial z}), \quad (36) \\ \operatorname{div} \vec{a} &= (-\vec{F}_v^!, \vec{s}) + (\vec{p}_x, \frac{\partial \vec{s}}{\partial x}) + (\vec{p}_y, \frac{\partial \vec{s}}{\partial y}) + (\vec{p}_z, \frac{\partial \vec{s}}{\partial z}), \end{aligned}$$

jer je iz Navier-ove jednačine u vektorskem obliku veza izmedju totalnih naponata  $\vec{p}_x$ ,  $\vec{p}_y$  i  $\vec{p}_z$  i zapreminske sile  $\vec{F}_v^!$ :

$$\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} = -\vec{F}_v^! \quad (37)$$

Integral (35). Rad spoljašnjih površinskih sila  $\vec{F}_n^!$  se može sada napisati u obliku:

$$\mathbb{A}_d^{(n)} = \frac{1}{2} \int_S (\vec{F}_n^!, \vec{s}) dS = \frac{1}{2} \int_V (-\vec{F}_v^!, \vec{s}) dV + \frac{1}{2} \int_V [(\vec{p}_x, \frac{\partial \vec{s}}{\partial x}) + (\vec{p}_y, \frac{\partial \vec{s}}{\partial y}) + (\vec{p}_z, \frac{\partial \vec{s}}{\partial z})] dV. \quad (38)$$

Sada uzimajući u obzir izraz (28) sledi da je ukupan rad spoljašnjih sila:

$$\mathbb{A}_d = \frac{1}{2} \int_V [(\vec{p}_x, \frac{\partial \vec{s}}{\partial x}) + (\vec{p}_y, \frac{\partial \vec{s}}{\partial y}) + (\vec{p}_z, \frac{\partial \vec{s}}{\partial z})] dV, \quad (39)$$

jednak je deformacionom radu  $\mathbb{A}_d$ . Iz podintegralne funkcije izdvajamo izraz za specifični deformacioni rad  $\mathbb{A}_d'$  u obliku:

$$\mathbb{A}_d' = \frac{1}{2} \left[ (\vec{p}_x, \frac{\partial \vec{s}}{\partial x}) + (\vec{p}_y, \frac{\partial \vec{s}}{\partial y}) + (\vec{p}_z, \frac{\partial \vec{s}}{\partial z}) \right] \quad (40)$$

Poslednji izraz je u vektorskem obliku izražen pomoću skalarnih proizvoda totalnih naponata za površi sa ortovima normala u pravcima koordinatnih osa i parcijalnih izvoda vektora pomeranja po x, y i z. Razvijanjem pojedinačno skalarnih proizvoda iz izraza (40) dobijamo:

$$\left( \vec{p}_x, \frac{\partial \vec{s}}{\partial x} \right) = (\beta_x \gamma_{xy} \gamma_{xz}) \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = \beta_x \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \gamma_{xz} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (41)$$

$$\left( \vec{P}_y, \frac{\partial S}{\partial y} \right) = (\tilde{\epsilon}_{yx}, \tilde{\epsilon}_y, \tilde{\epsilon}_{yz}) \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \tilde{\epsilon}_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tilde{\epsilon}_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tilde{\epsilon}_y \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (41*)$$

$$\left( \vec{P}_z, \frac{\partial S}{\partial z} \right) = (\tilde{\epsilon}_{zx}, \tilde{\epsilon}_{zy}, \tilde{\epsilon}_z) \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} = \tilde{\epsilon}_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tilde{\epsilon}_{zy} \frac{\partial w}{\partial z} + \tilde{\epsilon}_z \frac{\partial v}{\partial z} \quad (41**)$$

Unošenjem ovih izraza u (40) dobijamo sledeći oblik za specifični deformacioni rad:

$$\begin{aligned} A_d' = & \frac{1}{2} \left[ b_x \frac{\partial u}{\partial x} + b_y \frac{\partial v}{\partial y} + b_z \frac{\partial w}{\partial z} + \tilde{\epsilon}_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \tilde{\epsilon}_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tilde{\epsilon}_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} + \tilde{\epsilon}_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \tilde{\epsilon}_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tilde{\epsilon}_{xy} \frac{\partial w}{\partial z} \right], \end{aligned} \quad (42)$$

pa vodeći računa o Cauchy-jevim kinematičkim jednačinama koje daju vezu između koordinata vektora pomeranja i specifičnih deformacija - dilatacija i klizanja poslednji izraz dobija konačni oblik, pa je specifični deformacioni rad:

$$A_d' = \frac{1}{2} (b_x \epsilon_x + b_y \epsilon_y + b_z \epsilon_z + \tilde{\epsilon}_{xy} \delta_{xy} + \tilde{\epsilon}_{xz} \delta_{xz} + \tilde{\epsilon}_{yz} \delta_{yz}), \quad (43)$$

čime smo dobili isti izraz do koga smo došli i elementarnim putem.

Imajući u vidu Hooke-ov zakon koji daje vezu izmedju komponentnih napona i komponentnih specifičnih deformacija, specifični deformacioni rad možemo da izrazimo u obliku homogene kvadratne forme:

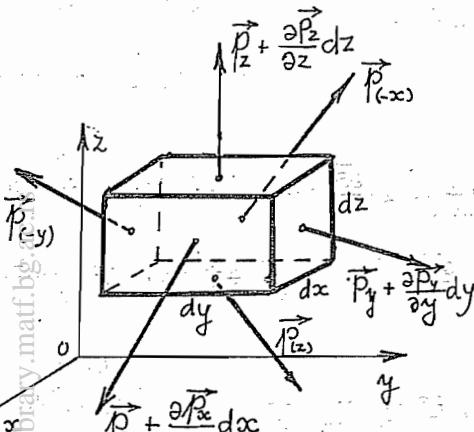
- komponentnih specifičnih deformacija - dilatacija i klizanja:

$$A_d' = G \left[ (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2) + \mu K (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)^2 + \frac{1}{2} (\delta_{xy}^2 + \delta_{xz}^2 + \delta_{yz}^2) \right], \quad (44)$$

- komponentnih napona - normalnih ili smičućih -:

$$A_d' = \frac{1}{2E} \left[ (b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - 2\mu (b_x b_y + b_x b_z + b_y b_z) + 2(1+\mu) (\tilde{\epsilon}_{xy}^2 + \tilde{\epsilon}_{xz}^2 + \tilde{\epsilon}_{yz}^2) \right] \quad (45)$$

Pokazaćemo još jedan način kako možemo izvesti izraz za specifični deformacioni rad. Uočimo deo napregnutog tela u obliku elementarnog paralelopipeda osnovnih ivica  $dx$ ,  $dy$  i  $dz$  tako da mu je jedno teme u tački A, koja ima pomeranje odredjeno vektorom  $\vec{s}$ . Na slici br. 5 prikazan je elementarni paralelopiped sa odgovarajućim totalnim naponima.



Slika br. 5

Sa slike se vidi da pri prelasku iz tačke A u središte stranice sa normalom ( $-\vec{t}$ ) je pri promeni koordinate za  $\frac{1}{2}dy$  i  $\frac{1}{2}dz$ , pa vektor pomeranja središta te stranice označimo sa  $S_{(-x)}$ , a središta stranice sa ortom normale ( $\vec{t}$ ) sa  $S_x$  pa je:

$$\vec{S}_{(-x)} = \vec{s} + \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{s}}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{s}}{\partial z} dz, \quad (46)$$

$$\vec{S}_x = \vec{s} + \frac{\partial \vec{s}}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{s}}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{s}}{\partial z} dz,$$

na sličan način određujemo i vektore pomeranja središta ostalih stranica paralelopipeda:

$$\vec{S}_{(-y)} = \vec{s} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{s}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{s}}{\partial z} dz \right),$$

$$\vec{S}_y = \vec{s} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{s}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{s}}{\partial z} dz \right) + \frac{\partial \vec{s}}{\partial y} dy, \quad (46*)$$

$$\vec{S}_{(-z)} = \vec{s} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{s}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{s}}{\partial y} dy \right),$$

$$\vec{S}_z = \vec{s} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{s}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{s}}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial \vec{s}}{\partial z} dz, \quad (46**)$$

$$\vec{S}_T = \vec{s} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{s}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{s}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{s}}{\partial z} dz \right). \quad (46***)$$

Poslednji izraz se odnosi na vektor pomeranja središta paralelopipeda.

Ukupan rad koji vrše površinske sile koje dejstvuju po konturi paralelopipeda pri statickom dejstvu prema Clapeyron-ovoј teoremi je:

$$dA_{dn} = \frac{1}{2} \left\{ (\vec{p}_x + \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} dx) \cdot \vec{S}_x dy dz + \vec{p}_{(x)} \cdot \vec{S}_{(x)} dy dz + \left( \vec{p}_y + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} dy \right) \vec{S}_y dx dz + \right. \\ \left. + \vec{p}_{(y)} \cdot \vec{S}_{(y)} dx dz + (\vec{p}_z + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} dz) \cdot \vec{S}_z dx dy + \vec{p}_{(z)} \cdot \vec{S}_{(z)} dx dy + \frac{1}{2} (\vec{F}'_v, \vec{S} + \frac{1}{2} d\vec{S}) \cdot dV \right\} \quad (47)$$

Unošenjem izraza za pomeranja iz (46) u (47) za elementarni rad dobijamo:

$$dA_{dn} = \frac{1}{2} \left[ \left[ (\vec{p}_x + \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} dx) \left( \vec{S} + \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{S}}{\partial x} dx \right) - \vec{p}_x \cdot \left( \vec{S} + \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial z} dz \right) \right] dy dz + \right. \\ \left. + \left[ (\vec{p}_y + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} dy) \left( \vec{S} + \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{S}}{\partial y} dy \right) - \vec{p}_y \cdot \left( \vec{S} + \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial z} dz \right) \right] dx dz + \right. \\ \left. + \left[ (\vec{p}_z + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} dz) \cdot \left( \vec{S} + \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{S}}{\partial z} dz \right) - \vec{p}_z \cdot \left( \vec{S} + \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial y} dy \right) \right] dx dy + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\vec{F}'_v, \vec{S} + \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial z} dz) dx dy dz \right], \quad (47*)$$

što posle sredjivanja daje:

$$dA_{dn} = \frac{1}{2} \left[ (\vec{p}_x, \frac{\partial \vec{S}}{\partial x}) + (\vec{p}_y, \frac{\partial \vec{S}}{\partial y}) + (\vec{p}_z, \frac{\partial \vec{S}}{\partial z}) \right] dV + \frac{1}{2} (\vec{F}'_v, \vec{S}) dV + \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z}, \vec{S} \right) dV + \frac{1}{4} (\vec{F}'_v, d\vec{S}) dV + \\ + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z}, \frac{\partial \vec{S}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{S}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{S}}{\partial z} dz \right). \quad (47**)$$

Imajući u vidu vezu izmedju specifičnih zapreminskih sila  $\vec{F}'_v$  i totalnih napona  $\vec{p}_x$ ,  $\vec{p}_y$  i  $\vec{p}_z$  iz Navier-ovih jednačina (37) zaključujemo da se poslednji članovi iz (47\*\*) potisu i da se taj izraz svodi na sledeći oblik:

$$dA_d = \frac{1}{2} \left[ (\vec{p}_x, \frac{\partial \vec{S}}{\partial x}) + (\vec{p}_y, \frac{\partial \vec{S}}{\partial y}) + (\vec{p}_z, \frac{\partial \vec{S}}{\partial z}) \right] dV, \quad (48)$$

odakle zaključujemo da je specifični deformacioni rad:

$$\mathbb{A}_d' = \frac{d\mathbb{A}_d}{dV} = \frac{1}{2} \left[ \left( \vec{p}_x, \frac{\partial \vec{s}}{\partial x} \right) + \left( \vec{p}_y, \frac{\partial \vec{s}}{\partial y} \right) + \left( \vec{p}_z, \frac{\partial \vec{s}}{\partial z} \right) \right], \quad (49)$$

a taj izraz je identičan sa već izvedenim izrazom (40).

Iz izaraza (44) i (45) vidimo da je specifični deformacioni rad ili elastični potencijal,  $\mathbb{A}_d'$  ili  $\mathbb{W}$ , homogena, pozitivno definita, kvadratna, regularna forma komponentnih, normalnih i tangencijalnih naponi, odnosno specifičnih deformacija, dilatacija i klizanja. Iz ovoga sledi da specifični deformacioni rad  $\mathbb{A}_d'$ , a sa tim i elastični potencijal  $\mathbb{W}$  mogu biti jednaki nuli samo kada su sve specifične deformacije - dilatacije i klizanja jednaki nuli, odnosno kada su komponentni naponi - normalni i tangencijalni istovremeno jednaki nuli, a to znači u prirodnom stanju tela, činjenicu nenapregnutom i nedeformisanom u prirodoj konfiguraciji čestica tela.

I za opšti slučaj prostornog stanja naprezanja i prostornog stanja deformacija važe castigliano-ovi obrasci (teorema):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbb{A}_d'}{\partial \varepsilon_x} &= \frac{\partial \mathbb{W}}{\partial \varepsilon_x} = \varepsilon_x, & \frac{\partial \mathbb{A}_d'}{\partial \varepsilon_y} &= \frac{\partial \mathbb{W}}{\partial \varepsilon_y} = \varepsilon_y, \\
 \frac{\partial \mathbb{A}_d'}{\partial \varepsilon_y} &= \frac{\partial \mathbb{W}}{\partial \varepsilon_y} = \varepsilon_y, & \frac{\partial \mathbb{A}_d'}{\partial \varepsilon_z} &= \frac{\partial \mathbb{W}}{\partial \varepsilon_z} = \varepsilon_z, \\
 \frac{\partial \mathbb{A}_d'}{\partial \varepsilon_z} &= \frac{\partial \mathbb{W}}{\partial \varepsilon_z} = \varepsilon_z, & \frac{\partial \mathbb{A}_d'}{\partial \gamma_{xy}} &= \frac{\partial \mathbb{W}}{\partial \gamma_{xy}} = \gamma_{xy}, \\
 \frac{\partial \mathbb{A}_d'}{\partial \gamma_{xy}} &= \frac{\partial \mathbb{W}}{\partial \gamma_{xy}} = \gamma_{xy}, & \frac{\partial \mathbb{A}_d'}{\partial \gamma_{xz}} &= \frac{\partial \mathbb{W}}{\partial \gamma_{xz}} = \gamma_{xz}, \\
 \frac{\partial \mathbb{A}_d'}{\partial \gamma_{xz}} &= \frac{\partial \mathbb{W}}{\partial \gamma_{xz}} = \gamma_{xz}, & \frac{\partial \mathbb{A}_d'}{\partial \gamma_{yz}} &= \frac{\partial \mathbb{W}}{\partial \gamma_{yz}} = \gamma_{yz},
 \end{aligned} \quad (50)$$

Kako su u prirodnom stanju tela, u prirodoj konfiguraciji komponentni naponi i komponentne specifične deformacije jednake nuli, to sledi da tada specifični deformacioni rad, odnosno elastični potencijal imaju stacionarnu vrednost, jer su im prvi izvodi po komponentnim naponima, odnosno komponentnim specifičnim deformacijama jednaki nuli. Pošto su izrazi za specifični deformacioni rad  $\mathbb{A}_d'$  odnosno elastični potencijal  $\mathbb{W}$  pozitivno definitne kvadratne forme koordinata specifičnih deformacija, odnosno komponentnih naponi to sledi da u prirodnom stanju tela, prirodoj konfiguraciji imaju minimum. Da naglasimo i specifični deformacioni rad i elastični

potencijal u prirodnom stanju tela imaju minimum.

Ako se posle ovih fizičkih objašnjenja vratimo na početak ovog poglavlja V.1. na izraz (1) za elastični potencijal i njegovu vezu sa tenzorom napona zaključujemo da izraz (V.1.1) predstavlja uopšteni Castigliano-ov obrazac za slučaj krivolinijskog koordinatnog sistema, gde se umesto sa fizičkim koordinatama tenzora napona i tenzora deformacije račina sa kontravariantnim koordinatama tenzora napona i kovariantnim koordinatama tenzora specifične deformacije.

Isto tako pretpostavke (3), (4) i (5) u izrazu (2) odnosno (6) dobijaju svoje fizičko tumačenje na fizičkim koordinatama tenzora napona i tenzora deformacije.

Izraz (7) možemo smatrati izrazom uopštene Castigliano-ove teoreme u krivolinijskom koordinatnom sistemu:

Kada elastični potencijal (generalisanu vrednost specifičnog deformacionog rada) izrazimo kao homogenu kvadratnu formu kovariantnih koordinata tenzora specifične deformacije onda je parcijalni izvod elastičnog potencijala po kovariantnim koordinatama tenzora specifične deformacije jednakodgovarajućim kontravariantnim koordinatama tenzora napona.

## VI. METODE ZA REŠAVANJE PROBLEMA TEORIJE ELASTIČNOSTI I OSNOVNI ZADACI STATIKE ELASTIČNOG TELA

U praktičnoj primeni matematičke teorije elastičnosti susrećemo se sa najrazličitijim zadacima koji se u osnovnom mogu svrstati u tri grupe zavisno od toga šta nam je poznato, opterećenje tela ili uslovi na granicama tog tela ili pak pomeranja njegovih tačaka. Zato i razlikujemo tri najrasprostranjenija slučaja:

1<sup>o</sup> Poznate su površinske sile koje dejstvuju po površi omotača deformabilnog tela;

2<sup>o</sup> Poznati su vektori pomeranja tačaka površi omotača deformabilnog tela;

3<sup>o</sup> Na jednom delu površi omotača deformabilnog tela poznata su pomeranja tačaka tela, dok su na ostalom delu površi poznate spoljašnje površinske sile.

Iz dosadašnje analize stanja napona i stanja deformacija, kaso i veze izmedju tih stanja možemo da konstantujemo da su zadaci statike elastičnih tela takvi zadaci gde je pored rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina ravnoteže deformabilnog tela potrebno i zadovoljavanje zadatih graničnih uslova na površi konture deformabilnog tela, pa se takvi zadaci nazivaju zadaci sa graničnim uslovima ili konturnim uslovima.

Prvi osnovni zadatak sa graničnim uslovima sastoji se u odredjivanju koordinata vektora pomeranja iz Lamé-ovih jednačina i šest komponenata tenzora napona u tačkama deformabilnog tela. Te koordinate vektora pomeranja i komponente tenzora napona moraju biti neprekidne funkcije koordinata tačaka unutar tela sve do tačaka na površi omotača gde treba da zadovoljavaju granične (konturne) uslove. Ovako postavljen problem je direktni jer se rešavanjem Lamé-ovih jednačina određuju tri koordinate vektora pomeranja  $\vec{s}$ , pa se pomoću vektora pomeranja i Cauchy-jevih kinematičkih jed-

212.

načina određuju komponente tenzora deformacije - dilatacije i klizanja, a zatim se posredstvom Hooke-ovog zakona određuju komponente tenzora napona. Pri tome moraju da budu zadovoljeni Cauchy-jevi granični uslovi, kao i Saint Venant-ovi uslovi kompatibilnosti deformacija i Beltrami-Michell-ovi uslovi kompatibilnosti napona. Ovako postavljen zadatak bi bio idealni pristup rešavanju zadatka da se problemi ne javljaju u startu. Naime već pri rešavanju Lamé-ove jednačine dolazi se do zaključka da je to moguće u vrlo malom broju slučajeva i oblika tela i opterećenja.

Drugi osnovni zadatak statike elastičnog tela sastoji se u nalaženju komponenata tenzora naponaposredstvom Navier-ovih jednačina, a zatim određivanja komponenata tenzora specifične deformacije pomoću Hooke-ovog zakona uz zadovoljavanje Beltrami-michell-ovih jednačina saglasnosti napona i Saint-Venant-ovih uslova saglasnosti deformacija, a zatim određivanjem koordinara vektora pomeranja  $\vec{S}$  tačaka deformabilnog tela, pri čemu treba da su zadovoljeni granični uslovi oblika:

$$(\vec{S})_k = S_k \quad \text{ili} \quad u_r = u_r(q_{ik})$$

kojima se definišu komponente vektora pomeranja tačaka na površi omotača tela. Ovako postavljeni zadatak je "zadatak po naponima" za razliku od prethodno definisanog koji bi bio "rešenje po pomeranjima".

Treći osnovni zadatak statike elastičnog tela se sastoji u određivanju takvog rešenja Navier-ovih jednačina ravnoteže, ili Lamé-ovih jednačina uz korišćenje Hooke-ovog zakona i uz zadovoljenje Saint Venant-ovih uslova saglasnosti deformacija i Beltrami-Michell-ovih jednačina saglasnosti napona kojima ćemo odrediti jedan broj komponenata tenzora napona i jedan broj komponenata vektora pomeranja koje zadovoljavaju granične uslove zadate površinskim silama na delu površi omotača deformabilnog tela, i jedan broj koji zadovoljava granične uslove zadate pomeranjima tačaka ili na površi omotača ili unutar deformabilnog tela. U ovom slučaju rešenje ide preko jednog broja komponenata tenzora napona i jednog broja koordinata vektora pomeranja pa kažemo da se radi o "kombinovanom rešenju".

S obzirom na pristup kako se dolazi do izabranih nepoznatih integraljenjem jednačina ili njihovim prepostavljanjem pa proverom prepostavljenih rešenja imamo tri metode za rešavanje problema teorije elastičnosti: direktnu, obratnu (inverznu) i poluobratnu (semi-inverse). U obratnoj metodi nepoznate se ustvari "pogadjaju" pa proveravaju, a u poluobratnoj metodi jedan broj nepoznatih se "pogadja" a drugi određuje rešavanjem parcialnih diferencijalnih jednačina pa utoliko nije matematički "fundirana" ali

tehnički vrlo korisna.

U prethodnim poglavljima izvedene su jednačine teorije napona, teorije deformacija jednačine koje daju vezu između stanja napona i stanja deformacija i u njima se u opštem slučaju javlja 15 nepoznatih: šest komponenata tenzora napona, bilo da se radi o fizičkim koordinatama ili generalisanim koordinatama; šest komponenata tenzora deformacije; tri koordinate vektora pomeranja. U krivolinijskom koordinatnom sistemu nepoznate su:  $\delta_{ij}$ ,  $E_{ij}$ ,  $\mu^i$ , gde su  $i, j = 1, 2, 3$ . U Descartes-ovom koordinatnom sistemu to su: tri normalna napona  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  i  $\delta_z$ ; tri smičuća napona  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$  i  $\gamma_{zx}$  kao elementi matrice tenzora napona  $N$ ; tri dilatacije  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  i  $\epsilon_z$ ; tri klizanja  $\delta_{xy}^x$ ,  $\delta_{yz}^x$  i  $\delta_{zx}^x$ ; kao elementi matrice tenzora deformacije  $E$ ; i tri koordinate vektora pomeranja  $S$ ; u polarno cilindričkom koordinatnom sistemu to su: tri normalna napona  $\delta_r$ ,  $\delta_\theta$  i  $\delta_z$ , tri smičuća napona  $\gamma_{rp}$ ,  $\gamma_{\theta p}$  i  $\gamma_{zp}$ ; tri dilatacije  $\epsilon_r$ ,  $\epsilon_\theta$  i  $\epsilon_z$ , tri klizanja  $\delta_{rp}^r$ ,  $\delta_{\theta p}^r$  i  $\delta_{zp}^r$ ; i tri koordinate  $u_r$ ,  $u_\theta$  i  $u_z$  vektora pomeranja. U sfernom koordinatnom sistemu nepoznate su: tri normalna napona  $\delta_\rho$ ,  $\delta_\varphi$  i  $\delta_\gamma$ ; tri smičuća napona  $\gamma_{\rho\varphi}$ ,  $\gamma_{\rho\gamma}$  i  $\gamma_{\varphi\gamma}$ ; tri dilatacije  $\epsilon_\rho$ ,  $\epsilon_\varphi$  i  $\epsilon_\gamma$ ; tri klizanja  $\delta_{\rho\varphi}^\rho$ ,  $\delta_{\rho\gamma}^\rho$  i  $\delta_{\varphi\gamma}^\rho$ ; tri koordinate  $u_\rho$ ,  $u_\varphi$  i  $u_\gamma$  vektora pomeranja. Zato je potrebno u postupku rešavanja postavljenog zadatka u početku izabrati one nepoznate veličine koje smatramo osnovnim koje se neposredno određuju iz jednačina ravnoteže ili pak se u startu pretpostavljaju njihove vrednosti ili funkcionalne zavisnosti pa se vrše provere tačnosti njihovog pretpostavljanja, a zatim se pomoću tih osnovnih nepoznatih dalje određuju preostale nepoznate do broja 15.

U direktnim rešenjima zadatka statike elastičnog tela traže se komponente tenzora napona  $N$  i komponente tenzora deformacije  $E$ , i vektor pomeranja  $S$  koji karakterišu stanje napona i stanje deformacija kao i polje pomeranja tačaka elastičnog tela koja su izazvana dejstvom spoljašnjih zapreminskih i površinskih sila. U direktnoj metodi znači poznate su spoljašnje sile, površinske i zapreminske, komponentna pomeranja  $u$ ,  $v$  i  $w$  određujemo rešavanjem Lamé-ove parcijalne diferencijalne jednačine uz korišćenje Cauchy-jevih graničnih uslova druge vrste. Zatim korišćenjem Hooke-ovog zakona određujemo komponente tenzora napona  $N$ , uz prethodno određivanje komponenta tenzora deformacije  $E$  korišćenjem Cauchy-jevih kinematičkih jednačina. Ovo bi bio slučaj direktnе metode po pomeranju. Takodje se direktna metoda može smatrati i u slučaju kada za osnovne nepoznate usvojimo komponente tenzora napona, pa uz poznavanje spoljašnjih zap-

reminskih sila napone odredjujemo iz Navier-ovih jednačina ravnoteže i Beltrami-Michell-ovih jednačina saglasnosti napona za zadate granične uslove kojima obuhvatano uticaj spoljašnjih površinskih sila. Znači da tada govorimo o direktnoj metodi primjenjenoj na zadatak po naponima. Dalje korišćenjem veze između napona i deformacija posredstvom Hooke-ovog zakona odredjujemo nepoznate dilatacije i klizanja, a zatim pomoću njih komponente vektora pomeranja integraljenjem po već izvedenim jednačinama datim u delu pregled.

U rešenjima obratna metoda se sastoji u tome da se zadaju ili komponente vektora pomeranja ili komponente tenzora napona ili komponente tenzora deformacije u tačkama izučavanog tela kao funkcije koordinata tih tačaka pa se određuju spoljašnje sile koje bi mogle izazvati takva komponentna pomeranja ili takvo stanje napona ili takvo stanje deformacija. Pri tome se koriste Beltrami-Michell-ove jednačine iz kojih se određuju sile koje moraju da zadovolje granične uslove na površi omotača elastičnog tela da bi bile stvarne sile koje izazivaju takva pomeranja tačaka tela.

Obratna metoda je matematički jednostavnija od direktne, jer kod direktne metode nailazimo na velike matematičke teškoće oko integraljenja parcijalnih diferencijalnih jednačinačija rešenja moraju da zadovolje i granične uslove na površi omotača elastičnog tela. Direktno postavljeni problem se može rešiti samo u nekoliko prostih slučajeva bez neke naročite koristi za tehniku. Kod obratne metode integraljenja sistema simultanih parcijalnih diferencijalnih jednačina sa zadatim graničnim uslovima ceo problem se svodi na diferenciranje zadatih komponenata vektora pomeranja. Vidimo da primena obratne metode ne predstavlja posebne teškoće, sem što u startu zahteva pogadjanje nekih funkcija kao koordinata vektora pomeranja. Uspemo li da pogodimo oblik tih funkcija primena je vrlo prosta, međutim ni ovom metodom se nije došlo do nekih važnijih rešenja za tehničku praksu.

Posle mnogih uzaludnih pokušaja najboljih matematičara prve polovine prošlog veka da pomoći jedne od definisanih i matematički koriktnih metoda dodju do rešenja korisnih za tehničku praksu francuski inženjer Baré de Saint Venant predložio je originalnu, mada matematički vrlo primitivnu i matematički nezasnovanu metodu koju je nazvao poluobratnom (La méthode semi-inverse) koja se sastoji u delimičnom zadavanju istovremeno koordinata vektora pomeranja i koordinata tenzora napona i zatim određivanju pomoći izvedenih jednačina statike elastičnog tela preostalih komponenata vektora pomeranja i koordinata tenzora napona, koje ovi moraju da zadovoljavaju. Zatim se određuju i spoljašnje sile koje odgovaraju stanju napona i stanju defor-

nacija, koja su dobijena delimično pretpostavkama, a delimično izračunavanjem. Ako odredjene spoljašnje sile odgovaraju uslovima postavljenog zadatka onda je problem rešen, dok u protivnom učinjene pretpostavke odgovaraju drugom zadatku, te za postavljeni zadatak treba izabrati druge pretpostavke i postupak rešavanja ponoviti. Mada je ovakva metoda matematički nezasnovana niti opravljana, to je i danas jedina kojom se rešavaju najvažniji tehnički problemi. Samo poluobratna metoda ne daje jasan i logički jednostavan tok rešavanja, jer ne definiše jasno koje nepoznate pretpostavljamo, a koje izračunavamo. U tome se najbolje pri izboru osloniti na neke eksperimentalne osnove ili ogledom indicirane karaktere stanja napona i stanja pomeranja napregnutog tela. Saint Venant je svoju metodu primenjivao na zadatke torzije i savijanja prizmatičnih tела.

U novije vreme razvio se veliki broj metoda za rešavanje posebnih klasa zadataka teorije elastičnosti. Medju analitičkim metodama poznate su metoda potencijala i metoda integralnih transformacija. Za rešavanje ravnih zadataka teorije elastičnosti koristi se metoda funkcije kompleksne promenljive uz korišćenje metode konformnog preslikavanja. Za predstavljanje funkcija napona i raznih potencijala koriste se stepeni redovi i trigonometrijski redovi sa konačnim ili beskonačnim brojem članova. Razvojem kompjuterске tehnike i skraćivanjem vremena računanja na različitim računarima u novije vreme se sve više razvijaju razne numeričke metode u primeni za rešavanje problema teorije elastičnosti. Od numeričkih metoda široku primenu su već dobine metoda konačnih razlika i metoda konačnog elementa. Osnovna ideja metode konačnih elemenata je u fizičkoj diskretizaciji kontinuuma u kom slučaju se lakše nalaze rešenja. Metodu fizičke diskretizacije kontinuuma primenio je Hrenikoff 1941, kod rešavanja ravnih problema teorije elastičnosti.

Osnovna ideja pri rešavanju problema teorije elastičnosti putem metoda potencijala je u tome da se komponente tenzora napona, tenzora deformacije ili neke druge fizičke veličine izraze kao funkcije jedne funkcije koordinata tačke za koju se vezuju i da zamenom u osnovne jednačine dobijemo jednačinu koju funkcija – potencial treba da zadovoljava. Najčešće se definije potencijal napona i potencijal specifične deformacije.

Za rešavanje jednog broja zadataka teorije elastičnosti koriste se varijacione metode. Jedna od najpoznatijih metoda je metoda Ritz-a i njenom primenom se može dobiti niz uskcesivnih sve tačnijih aproksimacija u odnosi na početnu. Pri primeni ove metode potrebno je dati i ocenu tačnosti približnog rešenja, što u mnogome zavisi od izbora fundamentalnih (koordinatnih) funkcija i opštem slučaju ona raste sa uvećanjem njihovog broja.

Metoda Bubnova-Galjorkina je opšta približna metoda integraljenja diferencijalnih jednačina teorije elastičnosti i ima šireoku primenu.U osnovnom ona nije povezana sa varijacionim principom.Pri rešavanju zadataka teorije elastičnosti metodom Bubnova-Galjorkina neophodno je da funkcije približnog rešenja izaberemo tako da bi unapred bili zadovoljeni granični uslovi - statički i geometrijski.

Postoje i razne vreste energetskih metoda koje se koriste za rešavanje zadataka teorije elastičnosti.

Pored analitičkih i numeričkih metoda za rešavanje problema teorije elastičnosti svoje značajno mesto imaju eksperimentalna ispitivanja stanja napona i stanja deformacija napregnutog tela.Medju eksperimentalnim metodama koje se primenjuju za ispitivanje stanja napona i stanja deformacija ima metoda merenja mehaničkih veličina električnim putem kao jedna od tenzometrijskih metoda.Kao merni element - pretvarač mehaničke veličine u električnu koriste se merne trake.Merne trake su omski pasivni pretvarači mehaničkih veličina u električne.To se ostvaruje izduženjem provodnika i promenom njenog električnog otpora.Zato je potrebno poznavati osetljivost merne trake .Mernom trakom se mere izduženja i skraćenja linijskih elemenata za koje su prilepljene.Na osnovu deformacije merne trake mogu da se izvuku zaključci o dilataciji linijskog elementa u određenom pravcu kao i o pravcu te dilatacije.Posredno mogu da se izvuku zaključci o veličini normalnih napona.Merna traka se sastoji od dve tanke folije od plastične mase izmedju kojih se nalazi tzv. merna rešetka koja je aktivni deo sklopa merne trake.Merna rešetka merne trake se sastoji od tankog materijala koji provodi struju.Debliji priključci na krajevima merne rešetke služe za priključak kablova.Plastična folija koja je nosač merne rešetke olakšava rukovanje mernom trakom i pruža sigurnu zaštitu merne rešetke od oštećenja.Za praktičnu analizu stanja napona i stanja deformacija potrebno je napraviti plan merenja i postavljanja mernih traka da bi se u karakterističnim tačkama mogli izmeriti tačno određeni komponentni naponi,odnosno dilatacije i klizanja.Pri posavljanju mernih traka treba voditi računa o efektu kompenzacije neželjenih pojava.

U eksperimentalne metode spada i optička analiza naponskog stanja napregnutog tela.Pri modelskom ispitivanju stanja napona i stanja deformacije napregnutog tela model se može praviti od materijala koji se po svojim mehaničkim karakteristikama razlikuje od stvarnog tela.Optička analiza naponskog stanja bazira se na činjenici da izvesni providni materi-

ali menjaju optičke osobine pri opterećivanju i dovodjenju u napregnuto stanje.Znači da se optička analiza naponskog stanja napregnutih providnih tela temirira na osobini fotoelastičnosti.Neki providni materijali su u prirodnom stanju homogeni i izotropni i ne vrše polarizaciju svetlosti.Pod dejstvom opterećenja ti materijali polarizuju svetlost i dući od tačke do tačke napregnutog tela materijal se ponaša kao skup kristala sa različito orijentisanim optičkim osama.Posmatranjem takvog modela kroz specijalno konstruisane polariskepe sa odgovarajućim polarizatorima i analizatorima i principu njihovog rada kao linearne ili cirkularne dobijamo odredjene slike stanja napona u napregnutom modelu.Te slike definišemo kao mape izoklina i mape izohroma i one nam omogućavaju da analiziramo stanje napona,glavne pravce naprezanja i koncentraciju napona, a predstavljaju i vrlo pogodnu osnovu za izvlačenje zaključka o kritičnim tačkama stanja napona u konstrukciji.O karakteristikama ove metode i njenim mogućnostima biće reči u jednom od narednih poglavljja ove knjige.

#### VI.1. OSNOVNI ZADACI DINAMIKE ELASTIČNOG TELA

U slučaju dinamike elastičnog tela kao i u slučaju statike postoje tri metode: direktna, obratna i poluobratna sa odgovarajućim pratećim metodama rešavanja odgovarajućih diferencijalnih jednačina.Za razliku od zadataka statike elastičnog tela gde se u zadacima zahteva zadovoljenje graničnih uslova,kada se radi o zadacima sa dinamičkim opterećenjem graničnim uslovima treba dodati i početne uslove kojima se zadaju koordinate vektora pomeranja i koordinate vektora brzine tačaka tela u nekom početnom trenutku vremena  $t_0$  od koga počinje izučavanje stanja deformacija i stanja napona u tačkama napregnutog elastičnog tela:

$$\mathcal{U}_k(q^i, t_0) = \mathcal{U}_k^0(q_i)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}_k(q^i, t) \right]_{t=t_0} = \dot{\mathcal{U}}_k^0(q_i)$$

Na taj način integrali sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina kretanja elastičnog tela pored graničnih uslova moraju da zadovoljavaju i postavljene početne uslove.

## VI.2. SAINT VENAT-OV PRINCIP

Saint Venant-ov princip je poznat u literaturi još i pod nazivom principa pomeranja graničnih uslova. Posmatrajući zadatke o savijanju i uvijanju dugih prizmatičnih štapova Saint Venant je 1855 godine objavio svoj poznati princip:

"Način dejstva i rasporeda sila na krajevima prizmatičnog štapa je nevažan za efekte koje izazivaju te sile na ostaloj dužini, zbog toga što je uvek moguće da sa dovoljnim stepenom tačnosti zamenimo sile koje dejstvuju statički ekvivalentnim silama, koje imaju taj isti puni moment i to isto dejstvo".

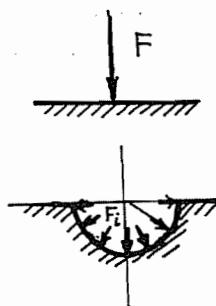
Trideset godina kasnije 1855 godine Businesque daje uopštenje ovog principa:

"Uravnoteženi sistem sila koji dejstvuje na elastično telo kada sve tačke dejstva sila tog sistema leže unutar date sfere, izvode deformaciju zanemarljivo malu na rastojanju od sfere dovoljno velikom u poređenju sa njenim radijusom".

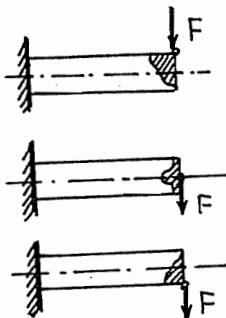
Businesque je za dokazivanje Saint Venant-ovog principa razmotrio polubeskonačno telo koje se nalazi pod dejstvom koncentrisanih sila, upravnih na njegovu ravnu granicu. Nije bez interesa naglasiti da do sada strogog opštег dokaza Saint Venant-ovog principa nema. Postoje u tom smjeru opiti posvećeni oceni pogrešnosti Saint Venant-ovog principa u primeni na prizmatična, a takodje i tela čije se sve dimenzije javljaju kao veličine istog reda. Pitanje o oceni greške tog principa na tankozidne štapove i ljuške, zbog same složenosti problema nije razradjeno.

Pri rešavanju zadataka teorije elastičnosti često se koristi Saint Venant-ov princip tako da tako da se izvrši ekvivalentna zamena zadatih površinskih sula po konturi tela sa ciljem uprošćavanja rešenja samog zadatka. Ako bi se pak pri rešenju zadataka teorije elastičnosti granični uslovi zadržali tačno prema rasporedu kako stvarno dejstvuju dobijanje rešenja se može dovesti u pitanje ili pak može biti značajno složenije. Na osnovu Saint Venant-ovog principa moguće je ekvivalentnom zamenom površinskih sila i pomerajući granične uslove, uspeti da se dobije takvo rešenje, da ono za veliki deo tela da polje tensora napona i stanja napona veoma blisko stvar-

Za određivanje komponenata tenzora napona u tačkama na mestu (u zoni) dejstva opterećenja se definišu posebni zadaci teorije elastičnosti koji su obuhvaćeni grupom kontaktnih zadataka ili zadataka iz oblasti izučavanja lokalnih naprezanja.



Slika br. 1



Slika br. 2

Na slici br.1 prikazana su dva statički ekvivalentna sistema sila ,pri čemu je jedan sistem sila u obliku koncentrisane sile upravne na ravnu granicu polubeskonačne ploče,dok je drugi sistem u obliku ravnomerno raspodeljenih na polucilindarskoj površi sila,čija je rezultanta upravna na granicu ploče. U dovoljno udaljenim tačkama od zone (mesta) dejstva zadatih sistema sila tenzor napona je isti za oba slučaja opterećenja. Na slici br. 2 prikazane su konzole za koje u tačkama blizu slobodnog kraja,gde dejstvuju sile komponente tenzora napona zavise od načina dejstva ( prenošenja) površinskih sila - opterećenja, što je prikazano šrafiranim površinama.

Efektivno rešavanje zadataka elastične ravnoteže u opštem slučaju je vezano sa velikim matematičkim teškoćama.Zato je i Saint Venant-ov princip u tom zauzeo posebno mesto.Zahvaljujući tom principu mi danas imamo rešenja velikog broja zadataka teorije elastičnosti, uprkos tome što Saint Venant-ov princip dozvoljava pomeranje graničnih uslova a sa tim i njihovo "oslabljenje". Zadati sistem sila koji dejstvuje na elastično telo zamenjuje se drugim ekvivalentnim i zgodnijim za uprošćenje postupka rešavanja samog zadataka,koristeći statičku ekvivalenciju sistema sila,koji dejstvuje na taj isti deo površi konture tela.

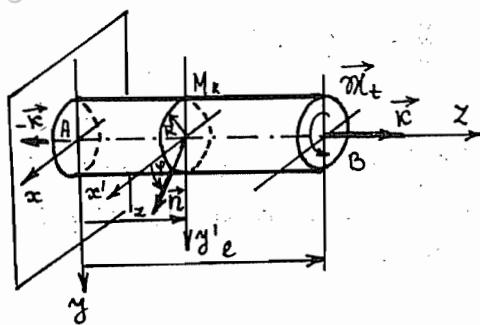
Saint Venant-ov princip je poznat u literaturi i kao: princip elastične ekvivalencije statički ekvivalentnih sistema, pa se može definisati i na sledeći nači:

"Kada se u ma kome delu deformabilnog tela doda sistem suprotnih uravnoteženih sila ekvivalentan datom sistemu sila pod čijim dejstvom posmatramo stanje napona u telu, onda on u neposrednoj okolini toga mesta izaziva lokalno naprezanje čiji naponi naglo opadaju udaljavanjem od mesta dodavanja sistema suprotnih sila".

Lokalno naprezanje se može zanemariti samo onda kada naponi toga naprezanja ne predju kritičnu granicu velikih izduženja kada nastaje tečenje materijala. Znači samo ako su naponi u granicama elastičnosti.

### VI.3. TORZIJA PRIZMATIČNOG ŠTAPA KRUŽNOG POPREČNOG PRESEKA

Konzolno vratilo, kružnog poprečnog preseka poluprečnika  $R$ , leвim krajem A je uklešteno, dok je na desnom kraju B opterećeno dejstvom sprega momenta uvijanja  $M_t = m_t \vec{e}$ . Na bočnoj površi ne dejstvuju površinske sile pa je  $\vec{F}_n = 0$ , i zapreminskih sila nema pa je  $\vec{F}_V = 0$ . U ovom slučaju vratilo je izloženo naprezanju na uvijanje i deformaciji na uvijanje. Zadatak je postavljen tako da su poznate spoljašnje sile, a potrebno je odrediti stanje napona i stanje deformacija te je očigledno da treba primeniti direktnu metodu.



Slika br. 3

Ort normalne na površ omotača,  $\vec{n}$ , posmatranog vratila sa slike br.3 upravan je na Oz osu, dok sa Ox osom gradi ugao  $\psi$  te možemo da ga definišemo pomoću kosinusa smera kao:

$$\{\vec{n}\} = \begin{Bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Na površi omotača napregnutog vratila moraju da budu zadovoljeni granični uslovi oblika:

$$\{F'_n\} = N \{\vec{n}\}_k, \quad \begin{pmatrix} \delta_x & \tilde{\tau}_{yx} & \tilde{\tau}_{zx} \\ \tilde{\tau}_{xy} & \delta_y & \tilde{\tau}_{zy} \\ \tilde{\tau}_{xz} & \tilde{\tau}_{yz} & \delta_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2)$$

Ova matrična jednačina koja izražava Cauchy-jeve granične uslove na konturi se svodi na tri skalarne jednačine oblika:

$$\begin{aligned} \delta_x \cos \psi + \tilde{\tau}_{yx} \sin \psi &= 0 / \cdot \cos \psi \\ \tilde{\tau}_{xy} \cos \psi + \delta_y \sin \psi &= 0 / \cdot (-\sin \psi) \\ \tilde{\tau}_{zx} \cos \psi + \tilde{\tau}_{yz} \sin \psi &= 0 \end{aligned} \quad \left. \right\} + \quad (2*)$$

222.

Ako sada prvu jednačinu pomnožimo sa  $\cos \varphi$ , a drugu sa  $-\sin \varphi$ , i iste saberemo dobijemo da je:

$$\sigma_x \cos^2 \varphi - \sigma_y \sin^2 \varphi = 0 \Rightarrow \sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$$

odakle sledi da su normalni komponentni naponi  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  jednaki nuli.

Iz poslednje jednačine sistema (2\*) dobijamo da je

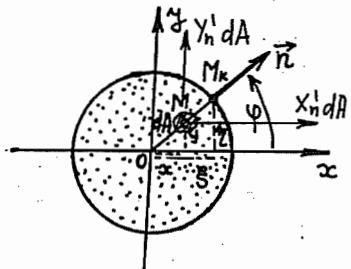
$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\tau_{xz}}{\tau_{yz}}$$

Kako je  $\varphi$  ugao koji ort normale  $\vec{n}$  na bočnu površ zaklapa sa pravcem Ox ose, to ako iz bilo koje tačke na površi omotača povučemo ravan poprečnog preseka onda ćemo dobiti u toj ravni konturu poprečnog preseka na kojoj leži tačka  $M_k$  iz koje možemo povući poluprečnik  $O'M_k$  koji zaklapa isti ugao  $\varphi$  sa pravcem Ox ose. Na tom poluprečniku izaberimo proizvoljnu tačku  $M$  sa koordinatama  $x$  i  $y$ , i ako sa  $\xi$  i  $\eta$  obeležimo koordinate tačke  $M_k$  na konturi poprečnog preseka a i konturnoj površi štapa, onda možemo da napišemo da važi odnos:

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{yz}} = -\operatorname{tg} \varphi = -\frac{y}{x} = -\frac{\eta}{\xi} = -\frac{cy}{cx}, \quad (3)$$

odakle uvodjenjem koeficijenta proporcionalnosti  $c$  možemo za komponen-

tne tangencijalne napone da napišemo sledeće izraze:



$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -cy$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = cx \quad (4)$$

te matrica tensora napona sada može da se napiše u obliku:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (5)$$

Prva invariјanta matrice tensora napona bi sada bila:  $M_1 = \sigma_z$ . Komponentni normalni i smičući naponi treba da zadovolje Navier-ove jednačine ravnoteže oblika:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \tilde{\epsilon}_{xy} \\ \tilde{\epsilon}_{xz} \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} \tilde{\epsilon}_{yx} \\ \delta_y \\ \tilde{\epsilon}_{yz} \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} \tilde{\epsilon}_{zx} \\ \tilde{\epsilon}_{zy} \\ \delta_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X'_v \\ Y'_v \\ Z'_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

odakle sledi da je  $\delta_z = 0$ , što je uslov koji mora biti zadovoljen da bi treća jednačina ovog sistema napisanog u matričnom obliku, bila zadovoljena, jer su prve dve identički zadovoljene. Komponentni: normalni i tangencijalni naponi moraju da zadovoljavaju i Beltrami-Michell-ove jednačine saglasnosti naponia:

$$\begin{aligned} \Delta \delta_x + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} + \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}_v' + 2 \frac{\partial X'_v}{\partial x} &= 0 & \delta_x &= 0 \\ \Delta \delta_y + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} + \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}_v' + 2 \frac{\partial Y'_v}{\partial y} &= 0 & \delta_y &= 0 \\ \Delta \delta_z + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 N_1}{\partial z^2} + \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}_v' + 2 \frac{\partial Z'_v}{\partial z} &= 0 & \tilde{\epsilon}_{xy} &= 0 \\ \Delta \tilde{\epsilon}_{xy} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial X'_v}{\partial y} + \frac{\partial Y'_v}{\partial x} &= 0 & \tilde{\epsilon}_{xz} &= -cy \\ \Delta \tilde{\epsilon}_{xz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial X'_v}{\partial z} + \frac{\partial Z'_v}{\partial x} &= 0 & \tilde{\epsilon}_{yz} &= cx \\ \Delta \tilde{\epsilon}_{yz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 N_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial Y'_v}{\partial z} + \frac{\partial Z'_v}{\partial y} &= 0, & N_1 &= \delta_x + \delta_y + \delta_z = \delta_z & \delta_z &= ax + by \end{aligned} \quad (7)$$

Odavde sledi da je preostali komponentni normalni napon  $\delta_z$  linearna kombinacija koordinata tačke za koju se određuje, tj. da je:  $\delta_z = ax + by$ . U toku dosadašnjeg rada iskoristili smo granične uslove na površi omotača štapa, međutim komponentni naponi moraju da zadovoljavaju i granične uslove i na osnovama štapa. Zato čemo sada iskoristiti te preostale granične uslove vezane za površi baza, da bi smo odredili i normalni napon  $\delta_z$ , a i koeficijente  $a, b, c$  doveli u vezu sa spoljašnjim opterećenjem, spregom momenta  $M_t$ . Ort normale slobodne osnove je  $\vec{n}_1 = \vec{k}$ , dok je ort normale ukleštenog bazisa  $-\vec{k} = \vec{n}_2$ . Iz Cauchy-jevih graničnih uslova sledi da je:

$$\{F'_n\} = N_k \{n\}_k \quad \begin{Bmatrix} X'_v \\ Y'_v \\ Z'_v \end{Bmatrix}_{x=0} = \begin{Bmatrix} \delta_x & \tilde{\epsilon}_{xx} & \tilde{\epsilon}_{zx} \\ \tilde{\epsilon}_{xy} & \delta_y & \tilde{\epsilon}_{zy} \\ \tilde{\epsilon}_{xz} & \tilde{\epsilon}_{yz} & b_z \end{Bmatrix}_{x=0} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\epsilon}_{zx} \\ \tilde{\epsilon}_{zy} \\ \delta_z \end{Bmatrix}_{x=0} \quad (8)$$

224.

odnosno

$$\begin{aligned} X_n' &= \tilde{\tau}_{zx} = -cy, \\ Y_n' &= \tilde{\tau}_{zy} = cx, \\ Z_n' &= \tilde{\tau}_z \Big|_{z=\ell} = [\alpha x + \beta y]_{z=\ell} = 0. \end{aligned} \quad (8*)$$

Kako na slobodnoj osnovi nema spoljašnjih površinskih sila koje su upravne na površ, a spreg se može zameniti ekvivalentnim sistemom sila koje dejstvuju tangencijalno na površ to sledi da je normalni napon  $\tilde{\tau}_z$  jednak nuli. Kako smo pokazali da su svi komponentni normalni naponi jednakci nuli, to je i prva invarijanta matrice tenzora napona jednaka nuli,  $N_1 = 0$ , a s obzirom na vezu sa zapreminskom dilatacijom sledi da je:

$$N_1 = \tilde{\tau}_x + \tilde{\tau}_y + \tilde{\tau}_z = 0 = \frac{E}{1-2\mu} \epsilon_v = 0, \epsilon_v = 0, V = \text{const.}$$

Iz ovoga možemo da zaključimo da pri ovako definisanoj deformaciji uvijanja promena konfiguracije čestica tela se svodi na promenu oblika, ali ne i promenu zapremine, koja ostaje konstantna u toku procesa deformisanja štapa kružnog poprečnog preseka naprezanjem na uvijanje. Treba obratiti pažnju da pri ovome oblik zapremine koju zauzimaju čestice štapa u prirodnjoj i prinudnoj konfiguraciji ne menja oblik, ali se menja konfiguracija čestica tela pa zato ustvari kažemo da ima promene oblika.

Korišćenjem Hooke-ovog zakona u drugom obliku

$$\mathcal{E} = \frac{1+\mu}{E} N_I - \frac{\mu}{E} N_1 I, \quad E = 2(1+\mu)G, \quad (9)$$

odredjujemo komponentne specifične deformacije: dilatacije i klizanja u obliku:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 0, \quad \gamma_{xy} = 0, \quad (9*)$$

$$\gamma_{xz} = -my, \quad \gamma_{yz} = mx, \quad m = \frac{C}{G},$$

te je stanje deformacija odredjeno tenzorom deformacije  $\mathcal{E}$  čija je matrična oblika:

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -my \\ 0 & 0 & mx \\ -my & mx & 0 \end{bmatrix} \quad (9**)$$

Da bi smo odredili vezu spoljašnjeg opterećenja - sprega

momenta  $\mathcal{M}_t$ , posmatraćemo ravnotežu spoljašnjih i unutrašnjih sila na površi baze - slobodne osnove. Kako je posmatrano konzolno vratilo na levoj slobodnoj osnovi opterećeno spregom momenta  $\mathcal{M}_t$ , to znači da redukcija svih sila koje dejstvaju na površi osnove slobodnog kraja B na bilo koju njenu tačku treba da da samo spreg momenta  $\mathcal{M}_t$ . Na slici br. 5 prikazana je osnova i tačka N sa koordinatama  $x$  i  $y$  oko koje uočimo elemet površine  $dA$ , na koji dejstvuje površinska sila sa koordinatama  $X_n'$  i  $Y_n'$ , čiji je raspored po površi osnove odredjen izrazima (8\*) te možemo da napisemo:

$$\sum X_i = \iint_A X_n' dA = -c \iint_A y dA = -c S_x = 0,$$

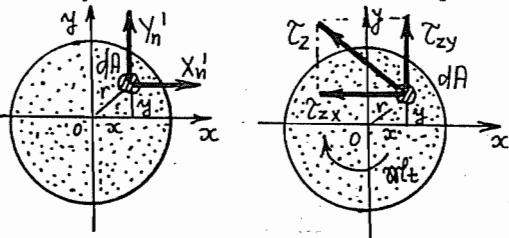
$$\sum Y_i = \iint_A Y_n' dA = c \iint_A x dA = c S_y = 0, \quad (10)$$

$$\sum Z_i = \iint_A Z_n' dA = 0, \quad a=0, b=0,$$

$$\sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0,$$

$$\sum M_z = \mathcal{M}_t = \iint_A (x Y_n' - y X_n') dA = c \iint_A (x^2 + y^2) dA = c I_o. \quad (11)$$

Znači, glavni vektor redukovanih sistema sila na osnovi treba da je jednak nuli, što je i zadovoljeno jer su ose  $Bx$  i  $By$  težišne ose, pa su statički momenti površine osnove za te ose jednaki nuli, čime su prve dve jednačine



Slika br. 5

sistema (10) zadovoljene. Izraz (11) pokazuje da se redukcijom sila koje dejstvuju na osnovu dobija glavni moment koji je jednak momentu uvijanja  $\mathcal{M}_t$ .

Ovde smo sa  $I_o$  označili polarni moment inercije površine osnove kružnog oblika. Iz te poslednje veze izmedju koeficijenta proporcionalnosti  $c$  i momenta uvijanja i određujemo njegovu vrednost kao:

$$c = \frac{\mathcal{M}_t}{I_o}, \quad (12)$$

količnika izmedju momenta uvijanja i polarnog momenta inercije površine slobodne osnove. Sada možemo da rezimiramo zaključke o stanju na-

pona i stanju deformacija štapa kružnog poprečnog preseka koji je spregom momenta opterećen na uvijanje koje ćemo napisati matricama tenzora napona i tenzora specifične deformacije u obliku:

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{m_t}{I_o} y \\ 0 & 0 & \frac{m_t}{I_o} x \\ -\frac{m_t}{I_o} y & \frac{m_t}{I_o} x & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{m_t}{G I_o} y \\ 0 & 0 & \frac{m_t}{G I_o} x \\ -\frac{m_t}{G I_o} y & \frac{m_t}{G I_o} x & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Kako je  $\tilde{\epsilon}_{xy} = 0$ , to je, kao što se vidi sa slike br.5, totalni tangencijalni napon  $\tilde{\epsilon}_z$  jednak:

$$\tilde{\epsilon}_z = \tilde{\epsilon} = \sqrt{\tilde{\epsilon}_{zx}^2 + \tilde{\epsilon}_{zy}^2} = \frac{m_t}{I_o} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{m_t}{I_o} r, \quad (14)$$

Ovaj obrazac je isti sa onim koji smo izveli u otpornosi materijala uvodeći Coulomb-ovu hipotezu o ravnim poprečnim presecima, tj. da nema deplanacije poprečnog preseka vratila. Ovu tvrdnju ćemo pokazati po odredjivanju komponentata pomeranja.

Kako sada poznajemo specifične deformacije: dilatacije i klizanja, to ćemo pomoću njih da odredimo i komponentna pomeranja, komponente vektora pomeranja  $\vec{s}$ . Parcijalni izvodi komponentnog pomeranja  $u(x,y,z)$  su:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \int_0^x \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial x} dx + \int_0^y \left[ \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} \right] dy + \frac{1}{2} \int_0^z \left[ \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} \right] dz + C_1 = -mz + C_1 \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \int_0^x \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial z} dx + \frac{1}{2} \int_0^y \left[ \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} \right] dy + \int_0^z \left[ \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial x} \right] dz + C_2 = -my + C_2 \end{aligned} \quad (15)$$

Sada pomoću prethodnih izraza odredujemo komponentno pomeranje u pravcu Ox ose:

$$u(x,y,z) = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^y \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{x=0} dy + \int_0^z \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{y=0} dz + C_3 = -mz^2 + C_1 y + C_2 z + C_3 \quad (16)$$

Parcijalni izvodi komponentnog pomeranja  $v(x,y,z)$  u pravcu Oy ose su:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= \delta_{xy} - \frac{\partial u}{\partial y} = mz - C_1, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \varepsilon_y = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= \int_0^x \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \delta_{xy} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx + \int_0^y \left[ \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} \right]_{x=0} dy + \int_0^z \left[ \frac{\partial \delta_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} \right]_{y=0} dz + C_4 = mx + C_4,\end{aligned}\quad (17)$$

pa je komponentno pomeranje u tom pravcu

$$w(x, y, z) = \int_0^x \frac{\partial v}{\partial x} dx + \int_0^y \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{x=0} dy + \int_0^z \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{y=0} dz + C_5 = mzx - C_1x + C_4z + C_5 \quad (18)$$

U na kraju parcijalni izvodi komponentnog pomeranja  $w(x, y, z)$  u pravcu ose Oz su:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \delta_{xz} - \frac{\partial u}{\partial z} = -C_2 \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \delta_{yz} - \frac{\partial v}{\partial z} = -C_4 \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \varepsilon_z = 0\end{aligned}\quad (19)$$

je komponentno pomeranje  $w(x, y, z)$  u pravcu Oz ose:

$$w(x, y, z) = \int_0^x \frac{\partial w}{\partial x} dx + \int_0^y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x=0} dy + \int_0^z \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)_{y=0} dz + C_6 = -C_2x - C_4y + C_6 \quad (20)$$

U izrazima (16), (18) i (20) se javlja šest integracionih konstanti koje treba odrediti. Još nismo iskoristili poslednji granični uslov za ukleštenu osnovu A, koji izražava uslov da su pomeranja tačaka te osnove jednaka nuli i da nema okretanja osnove:

$$x = y = z = 0 \quad u = v = w = 0 \quad p = q = r = 0$$

$$\begin{cases} p \\ q \\ r \end{cases} = \frac{1}{2} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}, \quad \begin{cases} p \\ q \\ r \end{cases} = \begin{cases} \frac{mz}{2} - C_4 \\ -\frac{my}{2} + C_2 \\ \frac{mx}{2} - C_1 \end{cases}, \quad (21)$$

odakle sledi da su sve integracione konstante jednake nuli:

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 0 \quad (21*)$$

Komponentna pomeranja sada možemo napisati u obliku:

$$\mu(y,z) = -\frac{m_t}{J} yz; \quad v(x,z) = \frac{m_t}{J} xz; \quad w=0$$

$$J = GI. \quad (22)$$

gde smo sa  $J$  obeležili torzijsku krutost vratila. Treće komponentno pomeranje je jednako nuli,  $w=0$ , što kazuje da nema deplanacije poprečnog preseka, jer se pomeranja tačaka odvijaju u samoj površi poprečnog preseka, te vidimo da je opravdانا Coulomb-ova pretpostavka da nema deplanacije poprečnog preseka. Označimo sa  $S_{xy}$  pomeranje tačaka poprečnog preseka u samoj ravni poprečnog preseka i izračunavanjem pomoću komponentnih pomeranja (22) dobijamo:

$$S_{xy} = \sqrt{\mu^2 + v^2} = \frac{m_t}{J} z r. \quad (23)$$

Ugao uvijanja vratila po jedinici njegove dužine je:

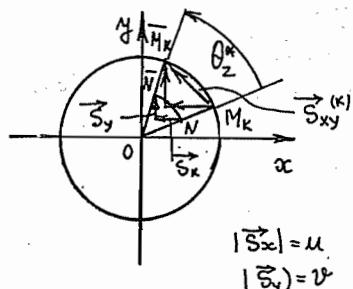
$$r|_{z=1} = \psi_z|_{z=1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = \frac{m_t}{2} |_{z=1} = \frac{m_t}{GI} = \theta^* = \frac{\psi_z}{l}. \quad (24)$$

Do ovog istog izraza došli smo i pomoću elementarne teorije u Otpornosti materijala.

Analizirajući izraz za pomeranje  $S_{xy}$  u ravni poprečnog preseka i izraz za specifični ugao uvijanja dolazimo do sledeće veze:

$$S_{xy} = \theta^* z r, \quad S_{xy}|_{z=l} = \psi_z r, \quad (25)$$

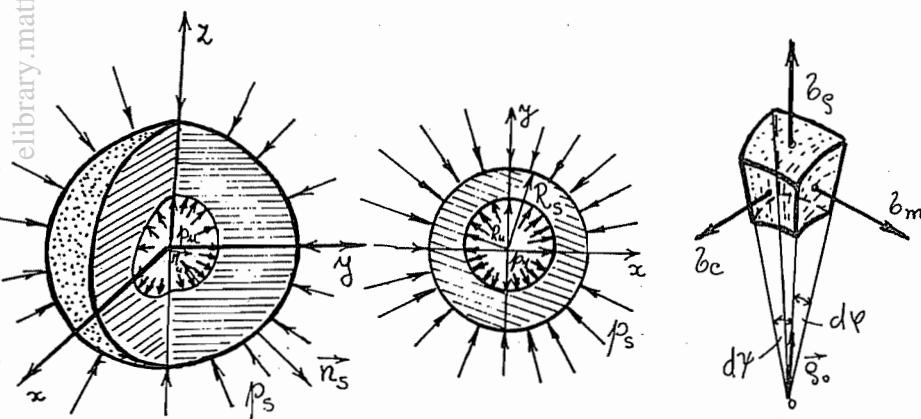
a to znači da je put koji pri uvijanju predje tačka jednak luku nad potegom  $r$  koji odgovara udaljenju tačke od ose uvijanja i ukupnom uglu za koji se zaokrene presek na udaljenju  $z$  od ukleštenja. Na slici br. 6 označene su komponente vektora pomeranja  $\mu(x,y,z)$  i  $v(x,y,z)$ , i rezultujuće pomeranje kao i ugao  $\psi_z(x,y,z)$  za koji se obrće odgovarajući poprečni presek u



odnosu na presek u ukleštenju koji je od njega udaljen za  $z$ . Vidi se da se tačke - čestice tela kreću po kružnim lukovima.

Slika br. 6

VI.4. SFERNI SUD IZLOŽEN DEJSTVU NORMALNOG PRITiska.  
PRIMENA OBRATNE METODE.



Slika br. 7

Ovo je jedan od retkih zadataka u kojima su raspored opterećenja i geometrijski oblik tela takvi da dozvoljavaju da se pogode pomeranja tačaka napregnutog tela. Iz centralne simetrije suda i centralne simetrije opterećenja možemo zaključiti da pomeranja tačaka suda zavise samo od njihovih rastojanja od središta suda. Opterećenje je centralno simetrično u odnosu na središte suda 0, pa prirodna konfiguracija čestica deformabilnog suda se transformiše u prinudnu konfiguraciju čestica deformabilnog suda pod dejstvom opterećenja pomeranjem čestica suda samo u radijalnim pravcima koji su određeni ortovima radijalnog pravca u svakoj tački prirodnog stanja suda. To znači da se ovde može uspešno da primeni obratna metoda, koja se sastoji u tome da se prepostavite pomeranja tačaka tela, kao date funkcije koor-

230.

dinata pa da se traže spoljašnje površinske sile koje bi izazvale takva pomeranja. Znači problem se, umesto na integraljenje sistema simultanih parcijalnih diferencijalnih jednačina svodi na diferenciranje datih funkcija.

Na osnovu, kao što smo zaključili, simetrije suda i opterećenja prepostavljamo da pomeranja tačaka suda zavise samo od njihovih rastojanja od središta suda u obliku:

$$\vec{s} = s \vec{r}_o = s \frac{\vec{r}}{r}, \quad (26)$$

gde je  $\vec{r} = r \vec{r}_o$  vektor položaja tačke (čestice) napregnutog suda čije pomeranje  $\vec{s}(r)$  u radijalnom pravcu prepostavljamo;  $s$  je koordinata u radijalnom pravcu, a  $\vec{r}_o$  ort radijalnog pravca. Vektor pomeranja  $\vec{s}(r)$  tačaka (čestica) suda mora da zadovoljava Lamé-ovu jednačinu oblika:

$$G(\Delta \vec{s} + \kappa \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s}) + \vec{F}_v' = 0, \quad (27)$$

koja u vektorskome obliku je ista kao i za Descartes-ov koordinatni sistem. Ako prepostavimo da je uticaj sopstvene težine suda zanemarljiv, možemo da prepostavimo da zapremske sile ne dejstvuju te da stavimo da je  $\vec{F}_v' = 0$ . Kako je opterećenje simetrično u odnosu na središte suda, očigledno je da će u prinudnoj konfiguraciji čestica napregnuto telo ostati simetrično i posle deformacije. Za prepostavljeni polje pomeranja odredjeno vektorom  $\vec{s}(r)$  je

$$\Delta \vec{s} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{s} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s}, \quad (28)$$

jer je:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{s} = \operatorname{rot} [\operatorname{rot} \frac{s}{r} \vec{r}] = \operatorname{rot} \left\{ \frac{s}{r} \operatorname{rot} \vec{r} + [\operatorname{grad} \frac{s}{r}, \vec{r}] \right\} = 0,$$

$$\operatorname{div} \vec{r} = 3, \quad \operatorname{rot} \vec{r} = 0,$$

$$\operatorname{grad} \frac{s}{r} = \vec{r}_o \frac{d}{dr} \left( \frac{s}{r} \right) = \vec{r}_o \frac{s'r - s}{r^2} = \frac{s'r - s}{r^3} \vec{r}. \quad (29)$$

Lamé-ova jednačina (27) u vektorskome obliku se sada svodi na:

$$(1+\kappa) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s} = 0, \quad \vec{r}_o \frac{d}{dr} \left( s' + 2 \frac{s}{r} \right) = 0, \quad (30)$$

Prvi integral prethodne jednačine je linearna diferencijalna jednačina oblika:

$$s'(r) + \frac{2}{r} s(r) = C_1, \quad (31)$$

Opšti integral prethodne obične linearne diferencijalne jednačine je:

$$S(r) = e^{-\int \frac{2}{r} dr} \left[ \int C_1 e^{\int \frac{2}{r} dr} dr + C_2 \right] = Ar + Br^{-2}, \quad (32)$$

te se vektor pomeranja  $\vec{S}$  tačaka (čestica) deformabilnog suda može napisati u obliku:

$$\vec{S}(r) = \left( Ar + \frac{B}{r^2} \right) \frac{\vec{r}}{r}, \quad (32*)$$

u kome su  $A$  i  $B$  konstante integracije koje treba odrediti iz graničnih uslova.

Komponentne napone odredićemo korišćenjem drugog oblika Hooke-ovog zakona

$$\mathcal{N} = 2G[\mathcal{E} + \mu k \mathcal{E} \mathbb{I}], \quad \mathcal{N} = \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_c \\ \sigma_m \end{bmatrix}; \quad \mathcal{E} = \begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_c \\ \epsilon_m \end{bmatrix}, \quad \epsilon = \epsilon_v, \quad (33)$$

napisanog za sferni koordinatni sistem, gde su  $\mathcal{N}$  matrica tensora napona i  $\mathcal{E}$  matrica tensora relativne deformacije u sfernom koordinatnom sistemu.

Iz prve jednačine Hooke-ovog zakona dobijamo za radikalni normalni napon :

$$\sigma_r = 2G(\epsilon_r + \mu k \epsilon) \quad (33*)$$

gde je

$$\epsilon_r = \frac{ds}{dr} = A - \frac{2B}{r^3}$$

dilatacija linijskog elementa u radikalnom pravcu, dok je zapreminska dilatacija  $\epsilon_v$  jednaka:

$$\epsilon = \epsilon_v = \operatorname{div} \vec{S} = S'(r) + 2 \frac{S(r)}{r},$$

te za normalni napon u radikalnom pravcu dobijamo sledeći izraz:

$$\sigma_r = 2G \left[ (1 + \mu k) S'(r) + 2\mu k \frac{S(r)}{r} \right], \quad (34)$$

koji je u funkciji pomeranja  $S(r)$  u radikalnom pravcu. Druga dva normalna napona u istoj tački:  $\sigma_m$  za ravan sa normalom u meridionalnom pravcu  $\vec{v}_o$  i  $\sigma_c$  za ravan sa normalom u cirkularnom pravcu  $\vec{c}_o$ , a koji leže u ravni sa normalom u radikalnom pravcu  $\vec{r}_o$ , su zbog simetrije suda i opterećenja međusobno jednaki. Prvi skalar matrice tensora napona jednak je zbiru normalnih napona u radikalnom  $\sigma_r$ , cirkularnom  $\sigma_c$  i meri-

dijalnom  $\sigma_m$ , pravcu pa je:

$$\mathcal{N}_1 = \sigma_r + \sigma_m + \sigma_c = \sigma_r + 2\sigma_m = E_k \epsilon_v = 2Gk(1+\kappa)(S' + 2\frac{S}{r}). \quad (35)$$

U poslednjem izrazu uzeta je veza izmedju prvih skalara (invariјanti) matri- ca tenzora napona i tenzora deformacije. Iz izraza (35) uz korišćenje izraza (34) za normalne napone  $\sigma_m$  i  $\sigma_c$  u meridijalnom i cirkularnom pravcu dobijamo sledeći izraz:

$$\sigma_m = \sigma_c = 2G \left[ \mu \kappa S'(r) + \kappa \frac{S(r)}{r} \right] \quad (36)$$

jer je  $\kappa - 1 = 2\mu\kappa$ . Ako sada u izraze (34) i (36) za normalne napone  $\sigma_r$ ,  $\sigma_m$  i  $\sigma_c$  unesemo vrednosti izraza dobijenih za pomeranje  $S(r)$  i njegov izvod iz (32), dobijamo:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r) &= 2G \left[ (1+3\mu\kappa)A - \frac{2}{r^3}B \right], \\ \sigma_m(r) = \sigma_c(r) &= 2G \left[ (1+3\mu\kappa)A + \frac{1}{r^3}B \right] \end{aligned} \quad (37)$$

U ovim poslednjim izrazima figurišu nepoznate konstante integracije  $A$  i  $B$ , koje smo dobili integraljenjem Lamé-ove diferencijalne jednačine i za njihovo odredjivanje koristimo granične uslove na unutrašnjoj i spoljašnjoj površi tela. Kako je normala spoljašnje površi usmerena u smeru orta radijusa  $\vec{r}$ , to je za  $r = R_s$  normalni napon na toj površi u radijalnom pravcu jednak spoljašnjem pritisku  $-p_s$ , sa negativnim znakom zbog njegove suprotnosmernosti sa ortom normale:

$$\sigma_r(R_s) = -p_s = 2G \left[ (1+3\mu\kappa)A - 2\frac{B}{R_s^3} \right]. \quad (38)$$

Kako je normala unutrašnje površi usmerena u negativnom smeru orta radijalnog pravca  $-\vec{r}_o$ , to je za  $r = R_u$  normalni napon u radijalnom pravcu za tačke na toj površi jednak unutrašnjem pritisku  $-p_u$  sa promenjenim zna- kom zbog suprotnosmernosti sa njim, pa je:

$$\sigma_r(R_u) = -p_u = 2G \left[ (1+3\mu\kappa)A - 2\frac{B}{R_u^3} \right]. \quad (39)$$

Iz graničnih uslova (38) i (39) odredjujemo integracione konstante u obliku:

(40)

$$A = \frac{1}{2(1+3\mu K)} \frac{\gamma^3 p_u - p_s}{1 - \gamma^3},$$

$$B = \frac{\gamma^3}{1 - \gamma^3} \frac{p_u - p_s}{4G} R_s^3,$$

gde je označeno  $\gamma = R_u/R_s$ , pa su sada glavni normalni naponi definitivno obliku:

$$\sigma_r = \frac{1}{1 - \gamma^3} \left[ \gamma^3 \left( 1 - \frac{R_s^3}{r^3} \right) p_u - \left( 1 - \frac{\gamma^3 R_s^3}{r^3} \right) p_s \right],$$

$$\sigma_c = \sigma_m = \frac{1}{1 - \gamma^3} \left[ \gamma^3 \left( 1 + \frac{R_s^3}{2r^3} \right) p_u - \left( 1 + \frac{\gamma^3 R_s^3}{2r^3} \right) p_s \right]. \quad (41)$$

Iz izloženog zaključujemo i da su glavni pravci naprezanja radijalni, cirkularni i meridionalni pa u koordinatnim površima sa normalama u pravcima koordinatnih osa sfernog koordinatnog sistema nema smičućih naponi. Glavni pravci dilatacija su takođe radijalni, cirkularni i meridionalni, te linijski elementi u tim pravcima zadržavaju svoje orijentacije i pri prelasku sfernog suda u prinudnu konfiguraciju čestica tela pravi uglovi između njih se ne menjaju. Znači da su klizanja jednaka nuli. Dilatacije linijskih elemenata u radijalnom, cirkularnom i meridijalnom pravcu su:

$$\epsilon_r = \frac{1}{1 - \gamma^3} \left[ \frac{\gamma^3 p_u - p_s}{2(1+3\mu K)} - \gamma^3 \frac{p_u - p_s}{2G} \frac{R_s^3}{r^3} \right], \quad (42)$$

$$\epsilon_c = \epsilon_m = \frac{1}{2(1 - \gamma^3)} \left[ \frac{\gamma^3 p_u - p_s}{1 + 3\mu K} + \gamma^3 \frac{p_u - p_s}{2G} \frac{R_s^3}{r^3} \right].$$

Zapreminska dilatacija čestica sfernog suda u tačkama na udaljenju  $r$  od središta suda je:

$$\epsilon_v = \epsilon_r + \epsilon_m + \epsilon_c = \frac{3}{2(1+3\mu K)} \frac{\gamma^3 p_u - p_s}{1 - \gamma^3}. \quad (42*)$$

Kada smo odredili konstante integracije  $A$  i  $B$  možemo za pomeranja čestica suda u radijalnom pravcu da napišemo:

$$s(r) = \frac{1}{2G(1 - \gamma^3)} \left[ \frac{\gamma^3 p_u - p_s}{1 + 3\mu K} + (p_u - p_s) \gamma^3 \frac{R_s^3}{2r^2} \right], \quad (43)$$

234.

pa su pomjerenja tačaka sa spoljašnje i unutrašnje površi suda jednaka:

$$S_s = S(R_s) = \frac{R_s}{2G(1-\gamma^3)} \left[ \frac{\gamma^3 p_u - p_s}{1+3\mu K} + \frac{\gamma^3}{2} (p_u - p_s) \right], \quad (44)$$

$$S_u = S(R_u) = \frac{1}{2G(1-\gamma^3)} \left[ \frac{\gamma^3 p_u - p_s}{1+3\mu K} R_u + \gamma^3 (p_u - p_s) \frac{R_s}{2} \right],$$

te je promena debljine suda u odnosu na prirodno stanje kada nije napregnut:

$$\Delta \delta = \delta - \delta_d = S_s - S_u,$$

$$\delta_d = R_s + S_s - (R_u + S_u) = (R_s - R_u) + (S_s - S_u), \quad (44*)$$

Matrice tensora napona  $\mathcal{N}$  i tensora deformacije  $\mathcal{E}$  su dijagonalne oblike:

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \sigma_r & & \\ & \sigma_c = \sigma_m & \\ & & \sigma_m = \sigma_c \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} \epsilon_r & & \\ & \epsilon_m = \epsilon_c & \\ & & \epsilon_c = \epsilon_m \end{pmatrix} \quad (45)$$

Pod dejstvom naznačenog opterećenja deformacija suda je samo uz promenu zapremine bez promene oblika, jer sud je i u novoj prinudnoj konfiguraciji sferni.

Ako je spoljašnji pritisak jednak nuli  $p_s = 0$ , onda su komponentni normalni naponi jednaki:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\gamma^3}{1-\gamma^3} \left( 1 - \frac{R_s^3}{r^3} \right) p_u; \\ \sigma_m &= \sigma_c = \frac{\gamma^3}{1-\gamma^3} \left( 1 + \frac{R_s^3}{2r^3} \right) p_u, \end{aligned} \quad (41*)$$

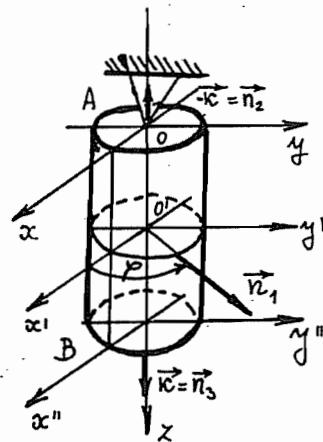
dok je pomeranje u tom slučaju:

$$S_s = S(R_s) = \frac{\gamma^3}{1-\gamma^3} \frac{1-M}{1+M} \frac{3}{4G} p_u R_s, \quad (43*)$$

$$S_u = S(R_u) = \frac{\gamma^3}{1-\gamma^3} \frac{1}{4G} p_u R_s \frac{2\gamma + (4+3MK)}{1+3\mu K}.$$

### VI.5. SAINT VENANT-OV PROBLEM. PRIMENA POLUOBRAZNE METODE.

Posmatrajmo prizmatični štap dužine  $\ell$ , težine  $G$ , koji je obešen o gornji kraj u tački A, težištu gornje osnove. Usvojimo za  $Ox$  i  $Oy$  glavne centralne ose inercije gornje osnove, dok za  $Oz$  osu usvojimo upravnu na njima, a koja se istovremeno poklapa sa geometrijskom osom štapa. Da bi smo primenili poluobratnu metodu uvešćemo pretpostavke kao i u otpornosti materijala za aksijalno naprezanje, a to je da su svi tangencijalni komponentni naponi jednaki nuli, a od normalnih napona da je samo  $\sigma_z$  različit od nule. Tako pretpostavljeni naponsko stanje možemo da predstavimo matricom tenzora napona:



Slika br. 8

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad (46)$$

te je prvi skalar matrice tenzora napona jednak

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = M_1 = \sigma_z. \quad (47)$$

Komponente tenzora napona za ovako pretpostavljeni stanje napona moraju da zadovoljavaju Navier-ove jednačine ravnoteže:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X'_v \\ Y'_v \\ Z'_v \end{Bmatrix} = 0 \quad (48)$$

te jednačine su zadovoljene samo ako zapreminska sila ima pravac geometrijske ose štapa - ose Oz, tako da je:

$$X'_v = 0, \quad Y'_v = 0, \quad Z'_v + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow Z'_v = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \delta_m \quad (49)$$

236.

gde je  $\delta_m$  specifična težina homogenog i izotropnog materijala prizmatičnog štapa. Isto tako, komponente tenzora napona  $N$  moraju da zadovoljavaju i Beltrami-Michell-ove jednačine saglasnosti napona:

$$\Delta \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{Bmatrix} + \frac{1}{1+\mu} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{Bmatrix} N_1 + \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{F}_v' \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} \frac{\partial X_v'}{\partial x} \\ \frac{\partial Y_v'}{\partial y} \\ \frac{\partial Z_v'}{\partial z} \end{Bmatrix} = 0 \quad (50)$$

$$\Delta \begin{Bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} + \frac{1}{1+\mu} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \end{Bmatrix} N_1 + \begin{Bmatrix} \frac{\partial X_v'}{\partial y} + \frac{\partial Y_v'}{\partial x} \\ \frac{\partial X_v'}{\partial z} + \frac{\partial Z_v'}{\partial x} \\ \frac{\partial Y_v'}{\partial z} + \frac{\partial Z_v'}{\partial y} \end{Bmatrix} = 0$$

iz kojih sledi da je:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \delta_z}{\partial x^2} &= 0, \quad \frac{\partial^2 \delta_z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \delta_z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \delta_z}{\partial y \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 \delta_z}{\partial x \partial z} = 0, \\ \Delta \delta_z + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \delta_z}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 N_1}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \delta_z}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} (-\delta_m) = 0 \Rightarrow \Delta \delta_z = 0. \end{aligned} \quad (51)$$

te možemo da zaključimo da normalni napon  $\delta_z$  u tačkama štapa za presek sa normalom Oz, mora biti linearna funkcija koordinata  $x$ ,  $y$  i  $z$ :

$$\delta_z(x, y, z) = Ax + By + Cz + D \quad (52)$$

gde su  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  konstante integracije koje se određuju iz Cauchy-jevih graničnih uslova na spoljašnjim površima konture štapa - omotaču i osnovama. Kako je:

$$\frac{\partial \delta_z}{\partial z} = C = -\delta_m,$$

to je konstanta  $C$  poznata. U svim tačkama bočne površi ort normale je upravan na Oz osu, a sa Ox osom zaklapa ugao  $\varphi$  tako da je ort normale bočne površi :

$$\{n_1\} = \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (53)$$

pa iz Cauchy-jevih graničnih uslova u tačkama omotača sledi da je:

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}_{x^2+y^2=R^2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad X'_{n_1} = 0, \\ Y'_{n_1} = 0, \quad Z'_{n_1} = 0, \quad (54)$$

Odakle zaključujemo da u tačkama bočne površi ne dejstvuju spoljašnje sile.  
U svim tačkama površine gornje osnove ort normale ravni pada u pravac - Oz ose, tj. ort je  $(n_2) = (0 \ 0 \ -1)$ , te iz Cauchy-jevih graničnih uslova sledi da je:

$$\begin{Bmatrix} X'_{n_2} \\ Y'_{n_2} \\ Z'_{n_2} \end{Bmatrix}_{z=0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_z \end{Bmatrix}_{z=0} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\beta_z \end{Bmatrix}_{z=0}, \quad (55)$$

Odakle nalazimo komponente površinske sile na gornjoj osnovi:

$$X'_{n_2} = 0, \quad Y'_{n_2} = 0, \\ Z'_{n_2} = (-\beta_z)_{z=0} = -(Ax + By + D). \quad (56)$$

U svim tačkama površine donje osnove ort normale ravni pada u smer +0z ose te iz Cauchy-jevih graničnih uslova sledi da je:

$$\begin{Bmatrix} X'_{n_3} \\ Y'_{n_3} \\ Z'_{n_3} \end{Bmatrix}_{z=l} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_z \end{Bmatrix}_{z=l} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_z \end{Bmatrix}_{z=l}, \quad (57)$$

Odakle nalazimo komponente površinske sile na donjoj osnovi:

$$X'_{n_3} = 0, \quad Y'_{n_3} = 0, \\ Z'_{n_3} = (\beta_z)_{z=l} = Ax + By + D - \delta_m l. \quad (58)$$

Izvršimo sada redukciju svih sila koje napadaju tačke gornje osnove na njenu težište, tako da dobijemo glavni vektor sila, čije su projekcije na koordinatne ose:

$$\sum X_i = 0 \\ \sum Y_i = 0 \\ \sum Z_i = \iint_{A'_o} Z'_{n_2} dA'_o = - \iint_{A'_o} (Ax + By + D) dA'_o = -AS'_y - BS'_x - DA_o = -DA_o = -F_A \quad (59)$$

i glavni moment - redukcionii spreg čije su projekcije na koordinatne ose:

$$\overrightarrow{m}_o = \iint_{A_o} [\vec{x}y Z'_{n_2} - \vec{y}x Z'_{n_2}] dA_o = -\vec{x} \iint_{A_o} y(Ax + By + D) dA_o + \vec{y} \iint_{A_o} x(Ax + By + D) dA_o \quad (60)$$

$$\overrightarrow{m}_o = -\vec{x}(AI_{xy} + BI_x + DS_x) + \vec{y}(AI_y + BI_{xy} + DS_y) = -\vec{x}BI_x + \vec{y}AI_y$$

$$\overrightarrow{m}_o = m_x \vec{x} + m_y \vec{y}, \quad m_x = -BI_x, \quad m_y = AI_y,$$

u kojima smo uveli oznake:

$$I_x = \iint_{A_o} y^2 dA_o, \quad I_y = \iint_{A_o} x^2 dA_o, \quad (61)$$

$$I_{xy} = \iint_{A_o} xy dA_o, \quad S_x = \iint_{A_o} y dA_o, \quad S_y = \iint_{A_o} x dA_o,$$

iskoristili uslove da su statički momenti za težišne ose jednaki nuli, kao i da je centrifugalni moment površine za glavne centralne ose jednak nuli. Iz rezultata redukcije (59) i (60) zaključujemo da se površinske sile koje dejstvaju na gornju osnovu svede na rezultantu usmerenu u negativnom smeru Oz ose i na dva sprega momenata  $i$ . Na isti način redukcijom sila u središte površine donje osnove dobijamo glavni vektor sila sa projekcijama:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0, \\ \sum Y_i &= 0, \end{aligned} \quad (62)$$

$$\sum Z_i = \iint_{A_o} Z'_{n_3} dA_o = DA_o - \delta_m l A_o = DA_o - G = F,$$

i redukcioni moment za tačku redukcije u središtu osnove:

$$\overrightarrow{m}_o = \iint_{A_o} (\vec{x}y Z'_{n_3} - \vec{y}x Z'_{n_3}) dA_o = \vec{x}BI_x - \vec{y}AI_y,$$

$$\overrightarrow{m}_o = m_x \vec{x} + m_y \vec{y}, \Rightarrow m_x = BI_x, \quad m_y = -AI_y. \quad (63)$$

Vidimo da se površinske sile koje dejstvaju na donju osnovu redukuju na rezultantu usmerenu u pozitivnom smeru Oz ose i koja se po intenzitetu razlikuje od rezultante na gornjoj osnovi za težinu štapa i dva sprega istih momenata, ali suprotnih smerova od odgovarajućih na gornjoj osnovi. Iz jednacina (59), (60), (62) i (63) odredujujemo konstante  $A$ ,  $B$  i  $D$  pomoću sile  $F_o$  i spregova  $m_x$  i  $m_y$ , kao

$$\begin{aligned} D &= \frac{F_o}{A_o} + \delta_m l, \quad A = \pm \frac{m_y}{I_y}, \\ C &= -\delta_m l, \quad B = \mp \frac{m_x}{I_x}, \end{aligned} \quad (64)$$

i normalni napon u tačkama preseka sa normalom u pravcu Oz ose jesada:

$$\sigma_z = \frac{F_0}{A_0} + \frac{G}{A} \left(1 - \frac{z}{l}\right) \pm \frac{M_x}{I_x} y \mp \frac{M_y}{I_y} x. \quad (65)$$

Kako su komponentni tangencijalni naponi  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  i  $\tau_{yz}$  u svim tačkama štapa jednaki nuli, zaključujemo da su glavni naponi u svakoj tački štapa paralelni koordinatnim osama. Najveći tangencijalni naponi su u ravnima čije normale zaklapaju sa Oz osom uglove  $\pm 45^\circ$  i jednaki su  $\pm \frac{\sigma_z}{2}$ , dok su za te ravni normalni naponi jednaki  $\frac{\sigma_z}{2}$ .

Na osnovu rečenog zaključujemo da uvedena pretpostavka da su u svim tačkama prizmatičnog štapa svi komponentni naponi za koordinatne ravni jednaki nuli osim normalnog napona  $\sigma_z$ , odgovara takvom stanju napona izazvanom sledećim spoljašnjim opterećenjima štapa: a<sup>o</sup> dejstvom para aksijalnih sila na osnovama štapa; b<sup>o</sup> dejstvom sopstvene težine štapa; c<sup>o</sup> dejstvom dva suprotna sprega u jednoj ravni savijanja koja prolazi kroz Oy i Oz ose, intenziteta  $M_x$ ; d<sup>o</sup> dejstvom dva sprega momenata  $M_y$  koji dejstvuju u jednoj ravni savijanja Oxz.

Znači da rešenje koje smo odredili obuhvata šire postavljeni problem od prostog aksijalnog naprezanja, tj. obuhvata složeno naprezanje koje se dobija superpozicijom aksijalnog naprezanja i čistih savijanja u glavnim ravnima inercije štapa.

Ostaje nam još da rešimo drugi deo zadatka, a to je određivanje komponentnih pomeranja. S obzirom da smo u domenu linearne teorije elastičnosti i da važi princip superpozicije opterećenja, a sa tim i napona i deformacija i pomeranja, a zbog pojednostavljinjanja rada pogodno je odrediti komponente vektora pomeranja pojedinačno za svaki slučaj prostog naprezanja, te superpozicijom odrediti rezultujuće komponente vektora pomeranja za opšti slučaj složenog naprezanja do koga smo došli.

### a<sup>o</sup> Aksijalno naprezanje

Usled naprezanja aksijalnom silom normalni napon je:

$$\sigma_z = \frac{F}{A_0} \quad (66)$$

pa su komponentne dilatacije i klizanja

$$\epsilon_x = -\mu \alpha, \quad \epsilon_y = -\mu \alpha, \quad \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{F}{EA_0} = \alpha, \quad (67)$$

$$\alpha = \frac{F}{EA_0}, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0,$$

gde smo sa  $\mathcal{A} = EA$  obeležili aksijalnu krutost. Koristeći jednačine (IV.21) iz pregleda izvedenih jednačina, a za odredjivanje komponenata vektora pomerenja odredjujemo parcijalne izvode komponentnog pomeranja  $\mu$ , u obliku:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = c_x = -\mu/c, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = c_1, \quad \frac{\partial \mu}{\partial z} = c_2. \quad (68)$$

pa je komponentno pomeranje  $\mu$  dato izrazom:

$$\mu(x, y, z) = -\mu/c x + c_1 y + c_2 z + c_3. \quad (69)$$

Parcijalni izvodi komponentnog pomeranja  $v(x, y, z)$  su:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -c_1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\mu/c, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = c_4, \quad (70)$$

pa je samo komponentno pomeranje  $v$  jednako:

$$v(x, y, z) = -c_1 x - \mu/c y + c_4 z + c_5, \quad (70^*)$$

i najzad parcijalni izvodi komponentnog pomeranja  $w(x, y, z)$  su:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -c_2, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -c_4, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = c, \quad (71)$$

dok je samo komponentno pomeranje  $w$  oblika:

$$w(x, y, z) = -c_2 x - c_4 y + c z + c_6. \quad (71^*)$$

Integracione konstante se određuju iz sledećih graničnih uslova:

1<sup>o</sup> Težište gornje osnove je zglobno učvršćeno te ne dozvoljava pomeranja, te su njegova komponentna pomeranja jednaka nuli, i na osnovu toga pišemo:

$$x = y = z = 0 \quad \mu = v = w = 0 \Rightarrow c_3 = c_5 = c_6 = 0. \quad (72)$$

2<sup>o</sup> Težište donje osnove je učvršćeno pokretnim zglobnim ležištem koje ne dozvoljava pomeranja u pravcima Ox i Oy ose, a dozvoljava klizanje u pravcu Oz ose, te na osnovu toga pišemo:

$$x = y = 0 \quad z = l \quad \mu = v = 0 \Rightarrow c_4 = 0 = c_2 \quad (72^*)$$

3<sup>o</sup> Ne postoji uvijanje štapa oko Oz ose, pa možemo da postavimo i sledeći granični uslov:

$$2r = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} = -2c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0. \quad (72^{**})$$

Kako smo odredili integracione konstante to možemo da za slučaj aksijalnog naprezanja napošemo konačno izraze za komponentna pomeranja:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u(x) = -\mu \frac{F_o}{\delta} x, \\ v(x,y,z) &= v(y) = -\mu \frac{F_o}{\delta} y, \\ w(x,y,z) &= w(z) = \mu z = \frac{F_o}{\delta} z. \end{aligned} \quad (73)$$

Iz izraza za komponentna pomeranja se vidi da tačke koje pripadaju Oz osi ( $x = 0, y = 0$ ) imaju pomeranja samo u pravcu te ose, dok tačke neke prave paralelne Oz osi, na rastojanju  $r$  od nje dobijaju horizontalno pomeranje  $S_h$ :

$$S_h(x,y,z) = S_h(x,y) = \sqrt{u^2 + v^2} = \mu \frac{F_o}{\delta} \sqrt{x^2 + y^2} = \mu \frac{F_o}{\delta} r \quad (74)$$

to znači da će ta prava ostati prava i paralelna Oz osi i u prinudnoj konfiguraciji čestica deformisanog štapa, samo će se približiti toj osi Oz za vrednost horizontalnog pomeranja  $S_h = \mu c r$  proporcionalnom veličini aksijalnih sile koje zatežu štap, a udaljiti se ako ga pritiskaju. Sve tačke koje su pripadale površini poprečnog preseka na odstojanju  $z$  od gornje osnove imaju ista pomeranja u pravcu Oz ose, što znači da presek ostaje ravan i translatorno se pomera u tom pravcu. Čestice na koncentričnim cilindričnim površima u prirodnjoj konfiguraciji štapa takođe ostaju na cilindričnim površima i u prinudnoj konfiguraciji samo promenjenog poluprečnika koji se razlikuje za veličinu horizontalnog pomeranja tačaka. Za slučaj zatezanja štapa aksijalnim silama nema promene oblike već samo promene zapremine. Deformacija štapa se znači izvodi samo promenom tapremine bez promene oblike.

### bº Zatezanje štapa sopstvenom težinom

Usled zatezanja štapa sopstvenom težinom normalni napon u tačkama za poprečni presek je:

$$\sigma_z = \frac{G}{A_o} \left( 1 - \frac{z}{\ell} \right), \quad (75)$$

pa kako su ostali naponi jednaki nuli, komponentne dilatacije i klizanja kao elementi tenzora deformacije za definisani koordinatni sistem su:

242.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x = \varepsilon_y &= -\mu \frac{G}{A} \left(1 - \frac{z}{l}\right), & \delta = A_0 E \\ \varepsilon_z &= \frac{G}{A} \left(1 - \frac{z}{l}\right), & \delta_{xy} = \delta_{xz} = \delta_{yz} = 0.\end{aligned}\quad (76)$$

Parcijalni izvodi komponentnog pomeranja  $\mu(x,y,z)$  su:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = -\mu \frac{G}{A} \left(1 - \frac{z}{l}\right), \quad (77)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = C_1,$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial z} = \mu \frac{G}{A} \frac{x}{l} + C_2,$$

dok je samo komponentno pomeranje  $\mu(x,y,z)$  u pravcu Ox ose:

$$\mu(x,y,z) = -\mu \frac{G}{A} \left(1 - \frac{z}{l}\right)x + C_1y + C_2z + C_3. \quad (77^*)$$

Parcijalni izvodi komponentnog pomeranja  $w(x,y,z)$  su:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -C_1,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\mu \frac{G}{A} \left(1 - \frac{z}{l}\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = C_4 + \frac{G}{A} \frac{y}{l},$$

dok je samo komponentno pomeranje  $w(x,y,z)$  u pravcu Oy ose:

$$w(x,y,z) = -C_1x - \mu \frac{G}{A} \left(1 - \frac{z}{l}\right)y + C_4z + C_5. \quad (78^*)$$

I na kraju parcijalni izvodi komponentnog pomeranja  $w(x,y,z)$  su:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\mu \frac{G}{A} \frac{x}{l} - C_2,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\mu \frac{G}{A} \frac{y}{l} - C_4,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{G}{A} \left(1 - \frac{z}{l}\right),$$

te je samo komponentno pomeranje  $w(x,y,z)$  u pravcu Oz ose:

$$w(x,y,z) = -\mu \frac{G}{A} \frac{x^2}{2l} - C_2x - \mu \frac{G}{A} \frac{y^2}{2l} - C_4y + \frac{G}{A} \left(z - \frac{z^2}{2l}\right) + C_6. \quad (79^*)$$

Integracione konstante koje figurišu u izrazima za komponentna pomeranja se određuju iz istih graničnih uslova kao i u prethodnom slučaju, pa je:

$$\begin{aligned}x = y = z = 0 &\quad \mu(0,0,0) = w(0,0,0) = w(0,0,0) = 0 \\ \Rightarrow C_3 &= C_5 = C_6 = 0\end{aligned}\quad (80)$$

$$\begin{aligned} x = y = 0 \quad z = \ell \quad u(0,0,\ell) = v(0,0,\ell) = 0 \Rightarrow C_2 = C_4 = 0, \\ 2r = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0, \end{aligned} \quad (80*)$$

te u konačnom obliku komponente vektora pomeranja  $\vec{s}$  možemo da napišemo kao:

$$\vec{s}(x,y,z) = u(x,y,z)\vec{i} + v(x,y,z)\vec{j} + w(x,y,z)\vec{k},$$

$$u(x,y,z) = -\mu \frac{G}{EA_0} \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) x, \quad (80**)$$

$$v(x,y,z) = -\mu \frac{G}{EA_0} \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) y,$$

$$w(x,y,z) = \frac{G}{EA_0} \left[ z \left(1 - \frac{z}{2\ell}\right) - \frac{\mu}{2\ell} (x^2 + y^2) \right].$$

Iz poslednjih obrazaca se vidi sledeće:

1° Tačke i čestice na Oz osi pomeraju se samo u pravcu Oz jer je  $x = 0, y = 0$  i  $u(0,0,z) = 0, v(0,0,z) = 0$

$$w(0,0,z) = \frac{G}{EA_0} z \left(1 - \frac{z}{2\ell}\right).$$

2° Tačke neke prave paralelne Oz osi i materijačne čestice na njoj, koje su na rastojanju  $r$  od ose Oz u prirodnoj konfiguraciji, imaju horizontalna pomeranja

$$S_H = \sqrt{u^2 + v^2} = -\mu \frac{G}{EA_0} \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) \sqrt{x^2 + y^2} = -\mu \frac{G}{EA_0} \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) r = -\varphi(r) \left(1 - \frac{z}{\ell}\right)$$

tako da posle deformacije u prinudnoj konfiguraciji čestica napregnutog štapa više nisu paralelne Oz osi, jer su pored horizontalnog pomeranja  $S_H$  dobile i vertikalno pomeranje za  $w(x,y,z)$ . To znači da se pravac na kome smo posmatrali čestice zaokrenuo za mali ugao  $\varphi = \mu \frac{G}{EA_0} \frac{r}{\ell}$

3° Kao posledica prethodne analize možemo da izvučemo još jedan zaključak, a to je da: čestice tela koje su se nalazile na cilindričnoj površi sa osom Oz u prirodnoj konfiguraciji sada u prinudnoj konfiguraciji napregnutog tela sopstvenom težinom obrazuju konusne površi sa istom osom simetrije Oz.

4° Tačke površine nekog poprečnog preseka na odstojanju  $z$  od gornje osnove štapa, a sa time i čestice tela rasporedjene po uočenom poprečnom preseku pomeraju se u pravcu Oz ose za:

$$w(r,z) = \frac{G}{EA_0} \left[ z \left(1 - \frac{z}{2\ell}\right) - \frac{\mu}{2\ell} r^2 \right],$$

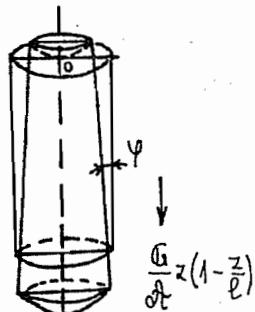
što znači da se ceo poprečni presek i čestice tela vezane za njega translaciono pomeraju za  $\frac{G}{EA_0} z \left(1 - \frac{z}{2\ell}\right)$ ,

244.

u smeru Oz ose i deforme se u rotacioni paraboloid jednačine

$$w(x, y) = -\mu \frac{G}{2EA_0l} (x^2 + y^2),$$

kao što je to na slici br. 9 prikazano.



Slika br. 9

c° Čisto savijanje spregovima

Usled dejstva dva sprega intenziteta  $\mathcal{M}_y$  koji dejstvuju u ravni savijanja Oxz izazivaju čisto savijanje štapa sa naponskim stanjem u kome su sve komponente tenzora napona jednake nuli sem normalnog napona za ravan sa normalom u pravcu Oz ose:

$$\epsilon_x = -\frac{\mathcal{M}_y}{I_y} x \quad (81)$$

pa su komponentne dilatacije i klizanja:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \mu \frac{\mathcal{M}_y}{EI_y} x = \mu \frac{\mathcal{M}_y}{\partial y} x, \quad \epsilon_z = -\frac{\mathcal{M}_y}{\partial y} x, \quad (82)$$

$$\delta_{xy} = \delta_{xz} = \delta_{yz} = 0, \quad \partial y = EI_y.$$

Parcijalni izvodi komponentnog pomeranja  $u$  su:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\mathcal{M}_y}{\partial y} x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\mu \frac{\mathcal{M}_y}{\partial y} y + C_1, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\mathcal{M}_y}{\partial y} z + C_2, \quad (83)$$

dok je samo komponentno pomeranje  $u(x, y, z)$  u pravcu Ox ose:

$$u(x, y, z) = \frac{\mathcal{M}_y}{2\partial y} \left[ (\mu x^2 + z^2) - \mu y^2 \right] + C_1 y + C_2 z + C_3. \quad (83*)$$

Parcijalni izvodi komponentnog pomeranja  $v(x, y, z)$  su:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \mu \frac{\mathcal{M}_y}{\partial y} y - C_1; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \mu \frac{\mathcal{M}_y}{\partial y} x, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = C_4, \quad (84)$$

pa je samo komponentno pomeranje  $v(x, y, z)$  u pravcu Oy ose:

$$w(x,y,z) = \mu \frac{m_y}{\partial y} xy - C_1 x + C_4 z + C_5 \quad (84*)$$

Parcijalni izvodi komponentnog pomeranja  $w$  su:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{m_y}{\partial y} z - C_2, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -C_4, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{m_y}{\partial y} x, \quad (85)$$

dok je samo komponentno pomeranje  $w(x,y,z)$  u pravcu Oz ose:

$$w(x,y,z) = -\frac{m_y}{\partial y} xz - C_2 x - C_4 y + C_6. \quad (85*)$$

Integracione konstante se odredjuju iz istih graničnih uslova kao i u prethodna dva slučaja, jer se radi o istom tipu oslonaca štapa, te su integracione konstante:

$$\begin{aligned} x = y = z = 0, \quad & \mu(0,0,0) = v(0,0,0) = w(0,0,0) = 0 \\ & \Rightarrow C_3 = C_5 = C_6 = 0 \quad (86) \\ x = y = 0, z = l, \quad & \mu(0,0,l) = v(0,0,l) = 0 \Rightarrow C_2 = C_4 = 0 \\ 2r = 2C_1 = 0, \quad & \Rightarrow C_1 = 0, \end{aligned}$$

tako da u konačnom obliku za komponente vektora pomeranja  $\vec{s}$  dobijamo:

$$\begin{aligned} \mu(x,y,z) &= \mu \frac{m_y}{2\partial y} \left[ (x^2 - y^2) + \frac{1}{\mu} z^2 \right], \\ v(x,y,z) &= \mu \frac{m_y}{\partial y} xy, \\ w(x,y,z) &= -\mu \frac{m_y}{\partial y} xz. \end{aligned} \quad (86*)$$

Iz dobijenih izraza za komponente vektora pomeranja možemo da zaključimo sledeće:

1º Tačke neutralnog sloja za  $x = 0$ , dobijaju pomeranja u pravcu Ox ose:

$$\mu(0,y,z) = \frac{m_y}{2\partial y} (z^2 - \mu y^2), \quad (87)$$

čime se ta ravan pretvara u površ drugog reda. Čestice štapa koje su u prirodnoj konfiguraciji ležale na ravni, sada u prudnoj konfiguraciji štapa napregnutog na savijanje spregovima  $m_y$  zauzimaju položaj na površi drugog reda definisanoj jednačinom (87).

2º Osa štapa ( $x = 0, y = 0$ ) prelazi u krivu drugog reda, elastičnu liniju štapa jednačine:

$$\mu_z(z) = \mu(0,0,z) = \frac{m_y}{2\partial y} (z^2) = \frac{m_y}{2EI_y} z^2, \quad (87*)$$

246.

čija je krivina

$$\frac{d^2 U_n(z)}{dz^2} = \frac{m_y}{\beta y} = \text{const} \quad (87**)$$

konstantna, što je isti rezultat koji smo imali i u Otpornosti materijala. Materijalne čestice štapa koje su se nalazile na osi štapa u prirodnoj konfiguraciji, sada u prinudnoj konfiguraciji obrazuju elastičnu liniju jednacine (87\*\*). Ta elastična linija je kružni luk.

3° Za tačke površine poprečnog preseka na rastojanju  $z$  od osnove štapa, komponentna pomeranja su upravna na taj presek i jednaka

$-\frac{m_y}{\beta y} x z$  što znači da presek ostaje ravan, a zaokreće se za ugao koji je jednak:  $\frac{m_y}{\beta y} z$ . Zaokretanje preseka je oko ose odgovarajućeg poprečnog preseka, koja je paralelna sa  $Oy$  osom. Znači da materijalne čestice tela u prirodnoj konfiguraciji raspoređene po poprečnom preseku, u prinudnoj konfiguraciji koja odgovara napregnutom štapu čistim savijanjem spregovima momenta  $m_y$  leže u ravni koja je zaokrenuta oko ose poprečnog preseka paralelne  $Oy$  osi, za ugao  $\frac{m_y}{\beta y} z$ . Ovim je pokazana ispravnom hipoteza o ravnim presecima pri pravom čistom savijanju koja je uvedena u Otpornosti materijala.

Iz do sada izloženog se može zaključiti da su tačne pretpostavke uvedene o stanju napona i stanju deformacija za proučene slucajeve naprezanja. Istovremeno se mora izvršiti analiza rasporeda odgovarajućeg opterećenja na osnovama prizmatičnog štапакоје је ekvivalentno statički dejstvu aksijalne sile i para spregova. Raspored sila na osnovama je sasvim određen i dobijamo ga iz zakona promene normalnog napona  $\delta_z$  za  $z=0$  i  $z=l$ , pri čemu dobijamo raspored specifičnih površinskih sila na osnova štapa:

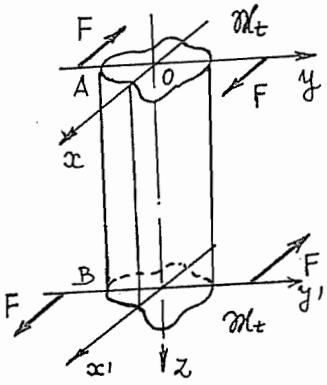
$$Z_{n_2}^1 = \frac{F_o}{A_o} - \frac{m_y}{I_y} x + \frac{m_x}{I_x} y, \quad (88)$$

$$Z_{n_3}^1 = -\frac{F_o}{A_o} - \frac{G}{A_o} + \frac{m_y}{I_y} x - \frac{m_x}{I_x} y.$$

Iz ovih jednačina zaključujemo da površinske sile koje izazivaju aksijalno naprezanje su jednoliko raspoređene po površinama osnova, dok su sile koje se redukuju na spregove i izazivaju čisto savijanje u svakoj tački osnove proporcionalne njenom rastojanju od  $Ox$  ili  $Oy$  ose. Strogo uvezši rešenje koje smo našli odgovara samo tom rasporedu sila, dok bi za svaki drugi raspored trebalo tražiti drugo rešenje, međutim za duge štapove ovo rešenje se može usvojiti i za bilo koji drugi raspored sila, jer važi Saint Venant-ov princip o lokalnim naprezanjima i pomeranju graničnih uslova.

## VI.6. TORZIJA VRATILA PROIZVOLJNOG POPREČNOG PRESEKA

Na slici br. 10 prikazan je homogeni prizmatični štap proizvoljnog poprečnog preseka na čijim osnovama dejstvuju sile kojima je statički ekvivalentan spreg torzije čiji je vektor momenta upravan na ravan osnove, tj. pada u pravac Oz ose koja je geometrijska osa štapa. Sa  $M_t$  označimo moment sprega torzije. Momenti torzije (uvijanja) na donjoj i gornjoj osnovi su suprotno usmereni. Za rešenje ovako postavljenog zadatka možemo koristiti poluobratnu Saint Venant-ovu metodu koja se sastoji u tome da izvesne komponentne napone prepostavimo, a ostale izračunamo. Zato uvodimo prepostavku da su komponentni normalni naponi  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\sigma_z$ , a takođe i tangencijalni napon  $\tau_{xy}$  u tačkama štapa, a za ravni paralelni koordinatni ravnina Oxy, Oxz i Oyz jednaki nuli, tako da tenzor napona možemo da napišemo u obliku:



Slika br. 10

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{pmatrix}. \quad (89)$$

Zapreminske sile koje se javljaju usled sopstvene težine štapa kao male veličine ćemo zanemariti. Navier-ove jednačine ravnoteže uz uvedene prepostavke se svode na:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z} + \vec{F}_v &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (90)$$

Prve dve jednačine sistema (90) pokazuju da je raspored tangencijalnih napona  $\tau_{xz}$  i  $\tau_{yz}$  u tačkama štapa, a za ravni poprečnih preseka nezavistan od koordinate  $z$ , tj. od položaja tog preseka u odnosu na osnove. Da bi bila zadovoljena treća jednačina sistema (90) uvodimo funkciju  $\phi(x, y)$  ko-

248.

ja zavisi samo od koordinata  $x$  i  $y$  i tangencijalne napone  $\tilde{\epsilon}_{xx}$  i  $\tilde{\epsilon}_{xy}$  izražavamo kao parcijalne izvode te funkcije u obliku:

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}_{xx} &= \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y}, \quad \tilde{\epsilon}_{xy} = -\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{xy}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \left(-\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) \equiv 0\end{aligned}\quad (91)$$

Za ovako pretpostavljene napone  $\tilde{\epsilon}_{xx}$  i  $\tilde{\epsilon}_{xy}$  provera Navier-ovih jednačina ravnoteže siatema (90) dovodi nas do zaključka o opravdanosti uvodjenja takve funkcije  $\phi(x,y)$ . Ova funkcija u literaturi je poznata pod imenom funkcija napona pri torziji ili funkcija torzije, a takođe i kao Prandtl-ova funkcija.

Pored Navier-ovih uslova ravnoteže potrebno je da su zadovoljeni i uslovi kompatibilnosti napona odnosno Beltrami-jeve jednačine, jer su zapreminske sile zanemarene:

$$\Delta \begin{Bmatrix} \tilde{\epsilon}_{xx} \\ \tilde{\epsilon}_{xy} \\ \tilde{\epsilon}_{yy} \end{Bmatrix} + \frac{1}{1+\mu} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{Bmatrix} \mathcal{N}_1 = 0, \quad (92)$$

$$\Delta \begin{Bmatrix} \tilde{\epsilon}_{xy} \\ \tilde{\epsilon}_{xz} \\ \tilde{\epsilon}_{yz} \end{Bmatrix} + \frac{1}{1+\mu} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \end{Bmatrix} \mathcal{N}_1 = 0, \quad \mathcal{N}_1 = 0$$

Kako je prva invariјanta matrice tenszora napona  $\mathcal{N}_1$  jednaka nuli to se Beltrami-jeve jednačine svode na sledeće:

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{\epsilon}_{xz} &= 0, \quad \Delta \tilde{\epsilon}_{yz} = 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tilde{\epsilon}_{xz} &= 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tilde{\epsilon}_{yz} = 0,\end{aligned}\quad (93)$$

odnosno ako se uzmu u obzir izrazi (91) ti uslovi se svode na:

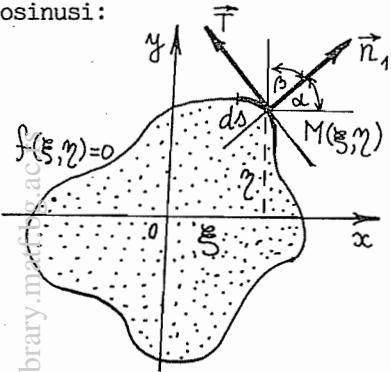
$$\Delta \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} = 0, \quad \Delta \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} = 0, \quad (93^*)$$

Integraljenjem poslednjih jednačina dobijamo:

$$\Delta \phi(x,y) = C, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \phi(x,y) = C, \quad (94)$$

gde je  $C$  proizvoljna konstanta integracije. Znači ako funkcija napona pri korziji  $\Phi(x,y)$  zadovoljava poslednju parcijalnu diferencijalnu jednačinu onda su zadovoljeni uslovi kompatibilnosti napona.

Pretpostavljamo da po površi omotača štapa ne dejstvuju površinske sile. Ort normale bočne površi  $\vec{n}_1$  prizmatičnog štapa je upravljan na geometrijsku osu štapa, dok sa  $Ox$  i  $Oy$  osama zaklapa uglove čiji su kosinusi:



Slika br.11

$$\cos \alpha_1 = \frac{d\eta}{ds},$$

$$\cos \beta_1 = -\frac{ds}{d\eta}, \quad (95)$$

gde su  $\xi$  i  $\eta$  koordinate tačaka na konturi poprečnog preseka, dok je  $ds$  element luka meren po konturi poprečnog preseka, kao što je na slici br. 11 prikazano. Cauchy-jevi granični uslovi na bočnoj površini su zadovoljeni ako je:

$$\begin{Bmatrix} X_n' \\ Y_n' \\ Z_n' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \tilde{\epsilon}_{zx} \\ 0 & 0 & \tilde{\epsilon}_{zy} \\ \tilde{\epsilon}_{xz} & \tilde{\epsilon}_{yz} & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \beta_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (96)$$

odakle sledi da je:

$$Z_n' = \tilde{\epsilon}_{xz} \cos \alpha_1 + \tilde{\epsilon}_{yz} \cos \beta_1 = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{d\xi}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{d\eta}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = 0. \quad (97)$$

Iz poslednjeg izraza zaključujemo da na konturi poprečnog preseka funkcija napona  $\Phi(\xi, \eta) = \text{const}$ , ima konstantnu vrednost, koja se može uzeti da je jednaka nuli u slučaju kada je poprečni presek jednostruko-povezana oblast, jer je vrednost ove konstante proizvoljna i ne utiče na njene izvode pomoću kojih izračunavamo vrednosti komponentnih tangencijalnih napona.

Problem odredjivanja funkcije napona se sada sveo na problem nalaženja harmonijske funkcije sa zadatim izvodom po normali na konturu, a to je klasičan Neuman-ov problem.

Ort normale na gornju osnovu je  $\vec{n}_2 = -\vec{k}$ , dok je ort normale na donju osnovu  $\vec{n}_3 = \vec{k}$  te granične uslove na osnovama štapa možemo da napišemo u obliku:

$$\begin{Bmatrix} X_n' \\ Y_n' \\ Z_n' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \tilde{\epsilon}_{zx} \\ 0 & 0 & \tilde{\epsilon}_{zy} \\ \tilde{\epsilon}_{xz} & \tilde{\epsilon}_{yz} & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mp 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mp \tilde{\epsilon}_{zx} \\ \mp \tilde{\epsilon}_{zy} \\ 0 \end{Bmatrix}_{z=0}^{z=\ell}, \quad (98)$$

250.

gde znak minus važi za gornju osnovu, a znak plus za donju osnovu. Ovi površinsku uslovi biće zadovoljeni ako su spoljašnje površinske sile rasporedjene po površini osnove po istom zakonu po kome i tangencijalni naponi, odnosno:

$$\begin{aligned} z = 0 \quad X_{n_2}^1 &= -\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{z=0}, \quad Y_{n_2}^1 = \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{z=0}, \\ z = l \quad X_{n_3}^1 &= \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{z=l}, \quad Y_{n_3}^1 = -\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{z=l}, \end{aligned} \quad (99)$$

što mi možemo pretpostaviti da je tačno koristeći se Saint Venant-ovim principom. Na osnovu Saint Venant-ovog principa potrebno je da tim površinskim silama bude staticki ekvivalentansprek torzije. Zato je potrebno da izvršimo redukciju površinskih sila na težište osnove prizmatičnog štapa. Redukcija sile na težište gornje, odnosno donje osnove daje:

$$\sum X_i = \pm \iint_A X_n^1 dA = \mp \iint_A \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy = \mp \int_x \phi(x, y) dx = 0, \quad (100)$$

$$\sum Y_i = \pm \iint_A Y_n^1 dA = \pm \iint_A \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy = \mp \int_y \phi(x, y) dy = 0,$$

jer je funkcija napona  $\phi(x, y)$  na konturi jednaka nuli. Kao rezultat redukcije površinskih sila na težište osnove dobijamo glavni moment površinskih sila  $\vec{M}_o$ , koji je jednak momentu sprega torzije  $\vec{m}_{ot}$ :

$$\begin{aligned} \vec{M}_o &= \pm \vec{m}_{ot} = \vec{m}_t = m_t \vec{k} = \pm \iint_A ([\vec{F}, \vec{F}_n^1] dA) = \pm \vec{k} \iint_A (y X_n^1 - x Y_n^1) dA = \\ &= \pm \iint_A (y \frac{\partial \phi}{\partial y} + x \frac{\partial \phi}{\partial x}) dA = \pm \int_x [y \phi]_y - \int_y [\phi dy] dx \pm \int_y [x \phi]_x - \int_x [\phi dx] dy. \end{aligned} \quad (101)$$

Prema tome sile na osnovama se stvarno redukuju na spreg, čiji je intenzitet jednak:

$$m_t = \pm 2 \iint_A \phi(x, y) dx dy. \quad (102)$$

Iz poslednjeg izraza vidimo da ako vrednosti funkcije napona  $\phi(x, y)$  nanesemo kao aplikate nad ravni poprečnog preseka grede dobićemo prostornu površ i vidimo da je moment sprega torzije  $m_t$  jednak dvostrukojoj zapremini koju zatvara ova površ i poprečni presek sa odgovarajućim aplikatama koje odgovaraju konturi, dok je veličina smičućeg napona proporcionalna nagibu tangente na ovu površ u pravcu upravnog na pravac traženog smičućeg napona.

Na osnovu rezultata dosadašnje analize možemo formulisati sledeće zaključke: 1<sup>o</sup> Pretpostavka o stanju napona (89) koju smo uveli nije protivurečna sa uslovima koje zahtevaju Navier-ove jednačine ravnoteže i Beltrami-Michell-ove jednačine kompatibilnosti napona. Takvo naprezanje koje je definisano stanjem napona (89) izazivaju dva suprotna sprega  $\pm \mathcal{M}_t$  u ravni osnova prizmatičnog štapa. 2<sup>o</sup> Komponentni tangencijalni naponi određuju se iz jednačina (91) pomoću funkcije napona  $\phi(x,y)$  koja u tačkama površine preseka treba da zadovolji parcijalnu diferencijalnu jednačinu drugog reda (94), a na njegovoj jednostruko povezanoj konturi bude jednaka nuli. Na taj način problem smo sveli na rešavanje jednačine:

$$\frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial y^2} = 0, \text{ uz uslov na konturi } \phi(\xi, \eta) = 0$$

što predstavlja konturni problem. Teorijski je zadatak o torziji prizmatičnog štapa je rešen, međutim praktično nema opštih metoda za rešenje takvog konturnog problema za opšti slučaj konture poprečnog preseka, već za svaki poseban slučaj treba tražiti rešenje. 3<sup>o</sup> Funkcija napona  $\phi(x,y)$  je nadjena za čitav niz konturnih linija, ali samo mali broj njih dolazi u obzir za tehničku primenu.

Totalni napon u tačkama štapa, a za ravni poprečnog preseka čije su normale u pravcu Oz ose jednak je tangencijalnom naponu  $\tilde{\sigma}_n$ , jer je komponentni normalni napon jednak nuli:

$$\tilde{\sigma}_n = \tilde{\sigma}_{xz} \cos \alpha + \tilde{\sigma}_{zy} \cos \beta = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad (103)$$

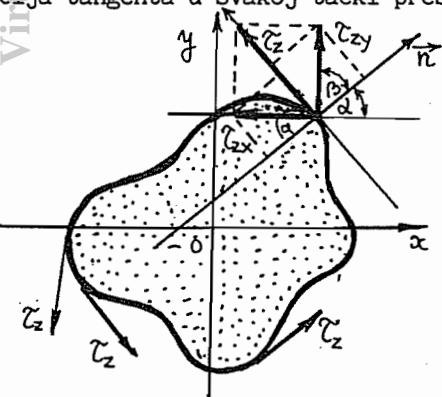
gde su  $\cos \alpha = \frac{dy}{ds}$  i  $\cos \beta = \frac{dx}{ds}$  kosinusim smera orta normale na liniju čija tangenta u svakoj tački preseka ima pravac tangencijalnog napona. Ukupni tangencijalni napon jednak je projekciji tangencijalnih komponentnih napona na pravac tangente na liniju koja ima osobinu da se njena tangenta poklapa sa pravcem tangencijalnog napona u toj tački:

$$\cos \alpha = \frac{dx}{dn} \quad \cos \beta = \frac{dy}{dn}$$

$$\tilde{\sigma}_n = \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_z = -(\tilde{\sigma}_{xz} \cos \beta + \tilde{\sigma}_{zy} \cos \alpha) \quad (104)$$

$$\tilde{\sigma}_z = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dn} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dn} = -\frac{d\phi}{dn}$$

Slika br. 12



252.

Iz poslednjeg izraza zaključujemo sledeće: Veličina tangencijalnog napona u nekoj tački jednaka je izvodu funkcije napona  $\phi(x,y)$  po normali na liniiju napona u toj tački sa promjenjenim znakom.

Linije napona su linije tangencijalnog napona i imaju osobinu da je tangencijalni napon  $\tilde{\tau}_z$  usled torzije kolinearan sa tangentom povučenom u istoj tački na tu krivu. Linije tangencijalnih napona se dobijaju iz uslova:

$$\phi(x,y) = D \quad (105)$$

kada se uzmu razne vrednosti konstante  $D$ . Tangencijalni napon se određuje kao gradijent skalarne funkcije napona  $\phi(x,y)$  i karakterisan je gustinom linijskim napona. Linijski napon daje pravac tangencijalnog napona u proizvoljnoj tački preseka.

Da bi smo odredili komponentna pomeranja  $u(x,y,z)$ ,  $v(x,y,z)$  i  $w(x,y,z)$  tačaka (čestica) napregnutog štapa, potrebno je da prethodno odredimo funkciju napona  $\phi(x,y)$  za određeni oblik poprečnog preseka prizmatičnog štapa. Medjutim i bez znanja funkcije napona  $\phi(x,y)$  mogu se odrediti osobine komponentnih pomeranja  $u$ ,  $v$  i  $w$  svojstvene svim na uvijanje napregnutim homogenim prizmatičnim štapovima.

Koristeći već ranije izvedene opšte jednačine za određivanje komponentnih pomeranja, ako su poznate komponentne dilatacije i klizanja:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_y = \epsilon_z = 0 & \delta_{xy} &= 0 \\ \delta_{xz} &= \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} ; & \delta_{yz} &= -\frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned} \quad (106)$$

za parcijalne izvode komponentnog pomeranja  $u$  u pravcu Ox ose dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 , & \Delta \phi(x,y) &= C_1 , \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{C_2}{2G} + C_1 , & & \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{C_3}{2G} + C_2 , & & \end{aligned} \quad (107)$$

dok je samo komponentno pomeranje  $u(x,y,z)$ :

$$u(x,y,z) = \frac{C}{2G} yz + C_1 y + C_2 z + C_3 . \quad (107*)$$

Parcijalni izvodi komponentnog pomeranja  $v(x,y,z)$  u pravcu Oy ose su:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{C}{2G} z - C_1 , & \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 , & \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{C}{2G} x + C_4 , & \end{aligned} \quad (108)$$

čok je samo komponentno pomeranje  $v(x,y,z)$  jednako:

$$v(x,y,z) = -\frac{C}{2G} zx - C_1 x + C_4 z + C_5 . \quad (108*)$$

Parcijalni izvodi komponentnog pomeranja  $w(x,y,z)$  u pravcu Oz ose su:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{C}{2G} y - C_2 , \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= -\frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{C}{2G} x - C_4 , \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 , \end{aligned} \quad (109)$$

samo komponentno pomeranje  $w(x,y,z)$  je:

$$w(x,y,z) = \frac{1}{G} \int_0^x \frac{\partial \phi}{\partial y} dx - \frac{1}{G} \int_0^y \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{x=0} dy - \frac{C}{2G} xy - C_2 x - C_4 y + C_6 . \quad (109*)$$

Konstante integracije odredjujemo iz graničnih uslovana gornjoj osnovi, koja je ukleštena. Težište A gornje osnove je nepomično, dok težište donje osnove se ne pomera u horizontalnom pravcu i pravac AB se ne okreće oko osa Ox i Oy, odakle slede sledeći granični uslovi:

$$x = y = z = 0 \quad u(0,0,0) = v(0,0,0) = w(0,0,0) = 0 \Rightarrow C_3 = C_5 = C_6 = 0 ,$$

$$x = y = 0 \quad z = l \quad u(0,0,l) = v(0,0,l) = 0 \Rightarrow C_2 = C_4 = 0 , \quad (110)$$

$$2r = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 .$$

Komponentna pomeranja u opštem obliku, za konturu proizvoljnog poprečnog preseka se sada mogu napisati kao:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \frac{C}{2G} yz , \\ v(x,y,z) &= -\frac{C}{2G} zx , \\ w(x,y,z) &= \frac{1}{G} \int_0^x \frac{\partial \phi}{\partial y} dx - \frac{1}{G} \int_0^y \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x=0} dy - \frac{C}{2G} xy , \end{aligned} \quad (111)$$

Horizontalno pomeranje neke tačke za  $z = a$  udaljene od gornje osnove štapa je:

$$S_{xy} = S_u = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{C}{2G} zr , \quad (112)$$

gde je r rastojanje te tačke od težišta površine preseka. Kosinusim smera tog pomeranja tačke, u odnosu na Ox i Oy osu su  $\frac{y}{r}$  i  $\frac{x}{r}$ , dok je ugao rotacije preseka:

$$-\frac{1}{2} z \frac{C}{G} \quad (112*)$$

Veličina ovog ugla za preseke na udaljenju za jedinicu dužine štapa je:

$$\theta = -\frac{1}{2} \frac{C}{G} \quad (112**)$$

i pretstavlja ugao torzije redukovani na jedinicu dužine prizmatičnog štapa i zove se kratko ugao torzije. Koristeći ugao torzije možemo da odredimo konstantu:

$$C = -2 G \theta$$

(112\*\*\*)

Osim okretanja poprečnog preseka kao celine tačke tog preseka se pomeraju upravno na njegovu ravan pretvarajući ga u krivolinijsku površ, čiji oblik zavisi od funkcije napona, tj. od oblika same konture. Znači da u slučaju uvijanja štapa proizvoljnog poprečnog preseka ima deplanacije poprečnog preseka pa se ne može uvoditi hipoteza o ravnim presecima koja važi za uvijanje štapova kružnog i kružno-prstenastog poprečnog preseka.

Iz izloženog možemo da zaključimo da smo izveli opštu teoriju potrebnu za analizu stanja napona i stanja deformacije napregnutog prizmatičnog štapa spregovima na uvijanje za slučaj proizvoljnog poprečnog preseka. U osnovi rešavanja zadataka sa torzijom štapova je pravilan izbor ili pogadjanje naponske funkcije. Za izbor naponske funkcije ne postoji neka metoda koja bi omogućila njen lakši izbor ili pak pouzdan. Opšti pristup bi bio da se naponska funkcija  $\phi(x, y)$  bira u obliku jednačine konture poprečnog preseka štapa čije naprezanje na uvijanje izučavamo. Kada smo pretpostavili naponsku funkciju treba proveriti da li ona zadovoljava odredjene uslove koje smo izveli, ako je odgovor da zadatak je u najtežem delu rešen, a dalji postupak se svodi na određivanje napona, specifičnih deformacija i koordinata vektora pomeranja što je najlakši deo zadatka i u načelu uvek rešiv. Izabrana naponska funkcija treba da zadovoljava uslov da je na konturi konstantna  $\phi(\xi, \eta) = \text{const}$  i da je  $\Delta \phi = C$

### VI.7. TORZIJA VRATILA ELIPTIČNOG POPREČNOG PRESEKA

U prethodnom članu pokazali smo da se problem rešavanja zadatka torzije prizmatičnih štapova svodi na određivanje funkcije napona ili naponske funkcije  $\phi(x,y)$  koja u tačkama preseka treba da zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednačinu (VI.6.94), a da na konturi poprečnog preseka bude jednaka nuli. Znači da se rešenje zadatka o torziji vratila eliptičkog poprečnog preseka svodi na nalaženje funkcije napona  $\phi(x,y)$  koja će u tačkama koje pripadaju površini obuhvaćenoj elipsom:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (113)$$

gde su  $a$  i  $b$  poluose poprečnog preseka vratila oblika elipse zadovoljavati parcijalnu diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = C, \quad (114)$$

a u tačkama konture biti jednaka nuli. Prirodno je zato da se pri traženju funkcije napona  $\phi(x,y)$ , prvo pokuša sa polinomom kao najprostijim oblikom funkcije. Zato ćemo pokušati sa polinomom drugog stepena, jer je i jednačina konture oblika polinoma drugog stepena i još zadovoljava uslov da je u tačkama konture poprečnog preseka jednaka nuli. Na osnovu ovoga naponsku funkciju  $\phi(x,y)$  prepostavljamo u obliku:

$$\phi(x,y) = A \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right), \quad (115)$$

gde je  $A$  nepoznati koeficijent koji treba da odredimo iz uslova da je zadovoljena parcijalna diferencijalna jednačina (114) odakle sledi da je:

$$A = \frac{C a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)}, \quad (116)$$

te je sada funkcija napona za eliptični poprečni presek:

$$\phi(x,y) = \frac{C a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (117)$$

256.

Ova funkcija napona  $\phi(x,y)$  zadovoljava i diferencijalnu jednačinu (114) i konturni uslov da je u tačkama konture jednaka nuli. Konstantu  $C$  odredjujemo iz uslova (VI.6.102) izvedenog u prethodnom članu zamenom funkcije koju smo izabrali (117) za naponsku funkciju, te na osnovu toga imamo:

$$\mathcal{M}_t = 2 \iint_{A_0} \phi(x,y) dx dy = \frac{C a^2 b^2}{a^2 + b^2} \iint_{A_0} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) dx dy, \quad (118)$$

odakle sledi da je:

$$\mathcal{M}_t = \frac{C a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( \frac{I_y}{a^2} + \frac{I_x}{b^2} - A_0 \right) = - \frac{a^3 b^3 \bar{\Gamma}}{2(a^2 + b^2)}; \quad C = - \frac{2 \mathcal{M}_t (a^2 + b^2)}{a^3 b^3 \bar{\Gamma}}. \quad (118*)$$

U prethodnim izrazima uveli smo oznake za aksijalne momente inercije površine elipse i njenu površinu:

$$I_x = \frac{1}{3} b^3 a \bar{\Gamma}; \quad I_y = \frac{1}{3} b a^3 \bar{\Gamma}; \quad A_0 = ab\bar{\Gamma}. \quad (119)$$

Konačno naponsku funkciju pri torziji vratila eliptičnog poprečnog preseka, kada znamo poluose poprečnog preseka i moment sprega torzije koji dejstvuje u površini osnove možemo da napišemo u obliku:

$$\phi(x,y) = - \frac{\mathcal{M}_t}{\bar{\Gamma} a b} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (120)$$

Tangencijalni komponentni naponi su sada jednaki:

$$\tilde{\sigma}_{zx} = - \frac{2 \mathcal{M}_t}{a b^3 \bar{\Gamma}} y; \quad \tilde{\sigma}_{zy} = \frac{2 \mathcal{M}_t}{a^3 b \bar{\Gamma}} x; \quad (121)$$

dok je rezultujući tangencijalni napon jednak:

$$\tilde{\sigma}_z = \sqrt{\tilde{\sigma}_{zx}^2 + \tilde{\sigma}_{zy}^2} = \frac{2 \mathcal{M}_t}{\bar{\Gamma} a b} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}} \quad (121*)$$

Analitički ekstremum ove funkcije se javlja u težištu površine poprečnog preseka ( $x = 0, y = 0$ ), ali je napon u toj tački za poprečni presek jednak nuli, te nam taj podatak nije od praktične važnosti za tehničku praksu. Očevidno je da je na krajevima manje poluose najveća vrednost tangencijalnog napona, a to znači u tačkama konture koje su najbliže težištu površine preseka. Ta vrednost maksimalnog tangencijalnog napona je:

$$\tilde{\sigma}_{max} = \pm \frac{2 \mathcal{M}_t}{\bar{\Gamma} a b^2} \quad (122)$$

Na osnovu izraza (VI.6.111) prethodnog člana za komponentna pomeranja dobijamo sledeće izraze:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= -\frac{\mathcal{M}_t(a^2+b^2)}{a^2b^2\mathcal{G}} \frac{y}{a} \frac{z}{b}, \quad v(x,y,z) = \frac{\mathcal{M}_t(a^2+b^2)}{a^2b^2\mathcal{G}} \frac{x}{a} \frac{z}{b}, \\ w(x,y,z) &= \frac{\mathcal{M}_t(b^2-a^2)}{a^2b^2\mathcal{G}} \frac{x}{a} \frac{y}{b} \end{aligned} \quad (123)$$

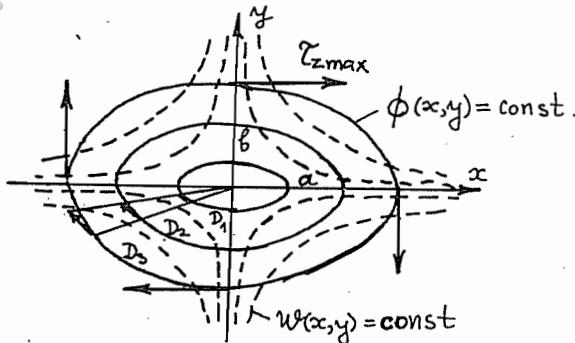
Iz poslednjeg obrasca se vidi da se presek deformiše u krivu površ koja predstavlja hiperbolički paraboloid, čije su izohipse hiperbole sa zajedničkim asimptotama u pravcima glavnih osa poprečnog preseka vratila. U specijalnom slučaju za  $a = b = R$  kada je poprečni presek krug dobijamo da je  $w = 0$ , kada presek ostaje ravan, tj. nema deplanacije poprečnog preseka. Iz izraza za funkciju napona  $\phi(x,y)$  je jasno da u tačkama krive linije

$$\left(\frac{x}{\kappa a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\kappa b}\right)^2 = 1, \quad \kappa < 1, \quad (124)$$

funkcija napona ima vrednost

$$\phi(x,y) = -\frac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)} C(1-\kappa^2) = D = \text{const}, \quad (125)$$

koja je konstantna te jednačina (124) predstavlja jednačinu linijsa tangencijalnih napona koje su predstavljene na slici br. 13.



Slika br. 13

Ugao torzije za taj slučaj vratila eliptičnog poprečnog preseka:

$$\Theta^* = \frac{a^2+b^2}{\mathcal{J} a^2 b^3} \frac{\mathcal{M}_t}{G}; \quad \Theta = \Theta^* z. \quad (126)$$

## VI.8. TORZIJA VRATILA PRAVOUGAONOG POPREČNOG PRESEKA

Rešenje zadatka o torziji vratila pravougaonog poprečnog preseka, kao i u prethodnom primeru svodi na nalaženje funkcije napona  $\phi(x,y)$  koja će u tačkama koje pripadaju površini obuhvaćenoj pravougaonikom

$$-a \leq x \leq a \quad -b \leq y \leq b, \quad (127)$$

gde su  $2a$  i  $2b$  ivice pravougaonika - poprečnog preseka vratila, zadovoljavati parcijalnu diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = C, \quad (127*)$$

i u tačkama konture biti jednaka nuli. U slučaju torzije štapa pravougaonog poprečnog preseka pri traženju funkcije napona do rešenja ne možemo doći pretpostavljajući istu u vidu polinoma. Ovo je karakterističan primer pomoću koga se može prikazati primena trigonometrijskih redova na rešavanje konturnih zadataka.

Funkciju napona  $\phi(x,y)$  pretpostavimo u obliku:

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2} C [x^2 - a^2 + \psi(x,y)] + \text{const.} \quad (128)$$

gde smo uveli nepoznatu funkciju  $\psi(x,y)$  koju sada treba odrediti iz uslova da je njena vrednost na konturi

$$\begin{array}{ll} \text{za } & x = \xi = \pm a \\ \text{za } & y = \eta = \pm b \end{array} \quad \begin{array}{l} \psi(\xi, y) = 0 \\ \psi(\xi, \eta) = a^2 - \xi^2, \end{array} \quad (129)$$

dok u tačkama koje pripadaju poprečnom preseku mora da zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednačinu:

$$\Delta \psi(x,y) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (130)$$

To znači da je funkcija  $\psi(x,y)$  harmonijska. Ako funkcija  $\psi(x,y)$  zadovoljava uslove na konturi (129) i diferencijalnu jednačinu (130) onda funkcija torzije  $\phi(x,y)$  zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednačinu (128) i uslov na konturi da je jednaka nuli. Znači da smo rešenje zadatka o torziji

homogenog prizmatičnog štapa pravougaonog poprečnog preseka sveli na odredjivanje novouvedene funkcije  $\Psi(x,y)$  koju možemo da potražimo u obliku proizvoda dveju funkcija  $X(x)$  i  $Y(y)$ , pri čem je svaka od njih funkcija samo jedne koordinate tačke (čestice) napregnutog štapa:

$$\Psi(x,y) = X(x) Y(y), \quad (131)$$

Pretpostavljeni rešenje za funkciju  $\Psi(x,y)$  unesemo sada u parcijalnu diferencijalnu jednačinu (130) i u rezultatu toga ona se svodi na običnu diferencijalnu jednačinu oblika:

$$X''(x) Y(y) + Y''(y) X(x) = 0, \quad (132)$$

u kojoj su sa ' i '' označeni prvi odnosno drugi izvodi po odgovarajućoj koordinati. Poslednju jednačinu podelimo sa  $X(x)Y(y)$  tako da dobijemo:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \pm m^2 \quad (132*)$$

Leva strana ove jednačine zavisi samo od koordinate  $x$ , dok desna strana te iste jednačine zavisi samo od  $y$ , a to je moguće samo ako su i leva i desna strana konstante i jednake  $\pm m^2$ . Uvodjenjem konstante  $\pm m^2$  te dve strane jednačine se mogu razmatrati kao dve nezavisne jednačine oblika:

$$X''(x) \mp m^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) \mp m^2 Y(y) = 0 \quad (133)$$

Kako su ove jednačine homogene sa konstantnim koeficijentima, to su nam njihova partikularna rešenja poznata i oblika su:  $\text{Ch } mx$  i  $\text{Sh } mx$ , odnosno  $\cos my$  i  $\sin my$ . Ako konstantu  $\pm m^2$  uzmemo sa promenjenim znakom dobijamo kao rešenja  $\cos mx$  i  $\sin mx$ , odnosno  $\text{Ch } mx$  i  $\text{Sh } mx$ .

Vidimo da svaki par odgovarajućih rešenja predstavlja harmonijsku funkciju, kao proizvod hiperboličke funkcije jedne promenljive i trigonometrijske funkcije druge promenljive. Iz graničnih uslova se međutim vidi da funkcija  $\Psi(x,y)$  mora biti parna funkcija u odnosu na promenljive  $x$  i  $y$ , te kao takva diktira da se izaberu parne funkcije  $\cos mx$  i  $\text{Ch } my$  kao činioci u proizvodu pretpostavljenog rešenja. Ove funkcije istovremeno moraju da zadovolje granični uslov da je za  $\Psi(\xi, \eta) = 0$   $x = \xi = \pm \alpha$ . Znači da nam ostaje da kao rešenje usvojimo proizvod trigonometrijskog kosinusa od  $mx$  i hiperboličkog kosinusa  $my$ . Drugi granični uslov na stranama  $x = \pm \alpha$  može biti zadovoljen ako proizvoljnoj kon-

stanti  $\pm m^2$  damo vrednosti:

$$m = \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha}, \quad (134)$$

gde je  $n$  proizvoljan ceo broj, jer će tada  $m\alpha$  biti jednako neparnom broju umnožaka  $\pi/2$  te je za  $x = \pm \alpha$ ,  $\cos m\alpha = \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} = 0$ .

Kako je diferencijalna jednačina (130) linearna, to je njen rešenje i linearna kombinacija njenih partikularnih rešenja, te je:

$$\psi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{Ch} \frac{(2n+1)\pi y}{2\alpha} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\alpha}, \quad (135)$$

gde su  $A_n$  nepoznati koeficijenti, koje odredjujemo iz uslova da je na konturi:

$$y = \pm b \quad \psi(\xi, \gamma) = a^2 - \xi^2$$

odnosno da je:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{Ch} \frac{(2n+1)\pi b}{2\alpha} \cos \frac{(2n+1)\pi \xi}{2\alpha} = a^2 - \xi^2. \quad (136)$$

Desnu stranu ove jednačine razvijemo u Fourier-ov red u intervalu  $-\alpha \leq \xi \leq \alpha$  i njeni su koeficijenti razvoja:

$$a_{2n+1} = \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha (a^2 - \xi^2) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha} x dx = (-1)^n \frac{32 a^2}{\pi^3 (2n+1)} \quad (137)$$

te je:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{Ch} \frac{(2n+1)\pi b}{2\alpha} \cos \frac{(2n+1)\pi \xi}{2\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{32 a^2 (-1)^n}{\pi^3 (2n+1)^3} \cos \frac{(2n+1)\pi \xi}{2\alpha}. \quad (138)$$

Uporedjivanjem koeficijenata na desnoj i levoj strani poslednje jednačine, uz  $\cos (2n+1)/2$ , izračunavamo nepoznate koeficijente u obliku:

$$A_n = \frac{32}{\pi^3} a^2 \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \operatorname{Ch} \frac{(2n+1)\pi b}{2\alpha}, \quad (138)$$

tako da pomoću njih sada možemo da sastavimo izraz za uvedenu pomoćnu funkciju:

$$\psi(x, y) = \frac{32}{\pi^3} a^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{Ch} \frac{(2n+1)\pi y}{2\alpha} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\alpha}}{(2n+1)^3 \operatorname{Ch} \frac{(2n+1)\pi b}{2\alpha}} \quad (140)$$

Konačni izraz za funkciju napona  $\phi(x,y)$  pri torziji vratila pravougaonog poprečnog preseka je sada:

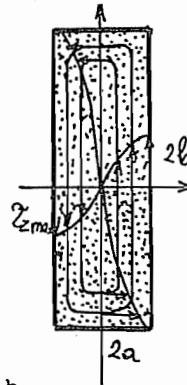
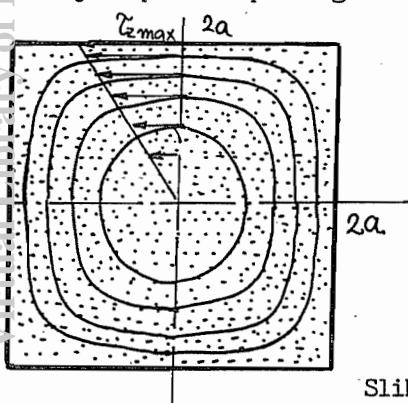
$$\phi(x,y) = \frac{1}{2} C(x^2 - a^2) + \frac{16}{\pi^3} C a^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{Ch \frac{(2n+1)\pi y}{2a} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2a}}{(2n+1)^3 Ch \frac{(2n+1)\pi b}{2a}} \quad (141)$$

Sada možemo da napišemo izraze za komponentne tangencijalne napone u obliku:

$$\tau_{zx} = -C \left\{ x - \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{Ch \frac{(2n+1)\pi y}{2a} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a}}{(2n+1)^2 Ch \frac{(2n+1)\pi b}{2a}} \right\}, \quad (142)$$

$$\tau_{zy} = C \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{Sh \frac{(2n+1)\pi y}{2a} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2a}}{(2n+1)^2 Sh \frac{(2n+1)\pi b}{2a}}.$$

Kada se stavi da je naponska funkcija konstantna,  $=$   
 $= \text{const}$  dobijaju se linije prikazane na slici br. 14 a i b i one predstavljaju linije napona za pravougaoni poprečni presek.



Slika br. 14 a i b

Najveći smičući napon je u tačkama preseka na sredinama dužih strana, tj. u tačkama sa koordinatama  $x=\pm a, y=0$  i njegova vrednost je:

$$\tau_{max} = \mp C a \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 Ch \frac{(2n+1)\pi b}{2a}} \right\} \quad (143)$$

Za slučaj da je odnos strana  $b > a$ , poslednji red brzo konvergira i za tehničku praksu dobijaju se dovoljno tačni rezultati ako se računa i samo sa

262.

prvim članom reda, a ostali se zanemare tako da možemo koristiti sledeći približni obrazac za praktične proračune:

$$\Sigma_{max} = \mp C \alpha \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2 Ch \frac{\pi b}{2a}} \right\}. \quad (144)$$

Proračuni po ovom obrascu daju rezultate čija greška ne prelazi 1/2 %.

Moment torzije se sračunava po ranije izvedenom obrascu, tako da kada nam je poznata funkcija napona lako je doći do sledećeg izraza za moment torzije:

$$M_t = 2 \iint_{-a-b}^{a+b} \phi(x,y) dx dy = \frac{8}{3} C b a^3 - \frac{512}{\pi^5} (C \alpha^4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T h \frac{(2n+1)\pi b}{2a}}{(2n+1)^5}. \quad (145)$$

I u ovom obrascu za praktičnu primenu dovoljno je zadržati samo prvi član reda:

$$M_t = C \left[ \frac{8}{3} \alpha^2 b - \frac{512}{\pi^5} \alpha^4 T h \frac{\pi b}{2a} \right], \quad (146)$$

tako da konstantu dobijamo u obliku:

$$C = \frac{M_t}{\left[ \frac{8}{3} \alpha^2 b - \frac{512}{\pi^5} \alpha^4 T h \frac{\pi b}{2a} \right]} \quad (147)$$

Pomeranja tačaka (čestica) napregnutog na uvijanje štapa pravougaonog poprečnog preseka, u pravcu Oz ose su odredjena sledećim izrazom:

$$w(x,y) = \frac{C}{2G} \left\{ xy - \frac{32}{\pi^3} \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{Sh \frac{(2n+1)\pi y}{2a}}{Ch \frac{(2n+1)\pi b}{2a}} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a} \right\} \quad (148)$$

Iz dobijenih rezultata vidimo da se poprečni preseci pri torziji štapa krive i dolazi do deplanavije poprečnog preseka.

## VI.9. MEMBRANSKA ANALOGIJA

Rešavanje problema naprezanja štapova na uvijanje svodi se na rešavanje harmonijskog problema uz odgovarajuće uslove na konturi. Zadatak torzije prizmatičnih štapova rešen je za različite oblike kontura poprečnih preseka, ali za mnoge tehnički važne oblike poprečnih preseka još nisu dobijena analitička rešenja koja se mogu u praktičnim problemima i zadatacima primenjivati. Zato se često primenjuju eksperimentalne metode, koje se zasnivaju na tome da i za neke druge fizičke pojave važe iste matematičke jednačine kao i za funkciju torzije i da pri tome postoji potpuna analogija karakterističnih fizičkih veličina.

Kod torzije prizmatičnih štapova veoma je pogodna analogija sa naprezanjem membrane. Pokažimo u čemu se sastoji ta analogija. Na slici br. 15 prikazana je membrana, koja je opterećena pritiskom  $\varrho$  jednolikom rasporedjenim po jedinici površine površi membrane, dok je  $F'$  sila jednoliko podeljena po jedinici dužine konture membrane. Sile zatezanja koje dejstvuju na stranama AD i BC infinitezimalnog elementa ABCD daju u slučaju malih ugiba rezultantu  $-F' \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dA$

usmerenu u negativnom smjeru Oz ose. Na isti način sile koje dejstvaju na drugim dvema stranama elementarne površine imaju rezultantu  $-F' \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  u istom negativnom smjeru Oz ose, te je jednačina ravnoteže elementa membrane:

$$\varrho dx dy + F' \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + F' \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy = 0 \quad (149)$$

Slika br. 15

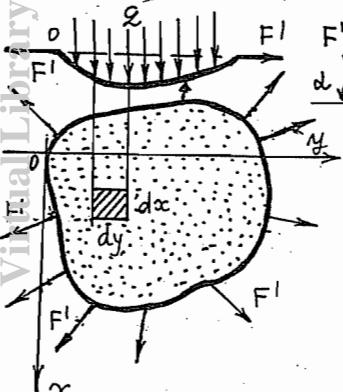
gnute membrane u obliku:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\varrho}{F'}, \quad \text{ili}$$

$$dy [F' \sin \alpha - F' \sin (\alpha + d\alpha)] = [F' \frac{\partial w}{\partial x} - F' \frac{\partial}{\partial x} (w + \frac{\partial w}{\partial x} d\alpha)] dy = -F' \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy \quad (150)$$

$$\Delta w(x, y) = -\frac{\varrho}{F'}$$

gde je  $w(x, y)$  ugib membrane.  $w(x, y)$  je pomeranje tačke (čestice) membrane upravno na površinu membrane u ravnotežnom stanju bez dejstva pritiska



Kada sredimo prethodnu jednačinu dobijamo jednačinu elastične površi napre-

Na konturi ugib membrane je jednak nuli, pa važi  $w(\xi, \eta) = 0$ . Uporedjivanjem poslednje jednačine za ugib membrane  $w(x, y)$  i jednačine (VI.6.94) koju mora da zadovoljava funkcija napona  $\phi(x, y)$  kod torzije vidimo da su ove dve jednačine matematički potpuno identične i da su ugib membrane  $w(x, y)$  i funkcija napona  $\phi(x, y)$  dve potpuno analogne veličine, jer moraju da zadovoljavaju iste parcijalne diferencijalne jednačine. Znači da su ova dva problema ugibanje membrane odredjene konture i torzija vratila poprečnog preseka koji ima oblik konture membrane po matematičkom modelu potpuno identični zadaci. Prema tome očigledno je da će ugib membrane predstavljati u izvesnoj razmeri vrednost funkcije napona pri torziji, a nagibi tangente u odredjenoj tački na membranu u ravnima paralelnim koordinatnim ravnima  $Oxz$  i  $Ozy$  komponentne tangencijalne napone  $\tau_{zx}$  i  $\tau_{zy}$ . Izohipse površi membrane prikazuju linije tangencijalnih napona. Kako se ugibi i nagibi mogu meriti raznim optičkim metodama, to merenjem odgovarajućih ugiba i nagiba membrane pod raznim opterećenjima možemo da dobijemo vrednosti komponentnih tangencijalnih napona u zadacima torzije štapova proivoljnog poprečnog preseka koji odgovara konturi membrane za koju smo vršili merenja.

Ako se opterećenje membrane redukovano sa  $F'$  zameni sa  $2G\theta$ , tada dvostruka zapremina između površi membrane u napregnutom stanju i ravni  $Oxy$  daje vrednost koja odgovara momentu torzije kojim je opterećeno vratilo na uvijanje:

$$M_t = \pm 2 \iint_A \phi(x, y) dx dy, \quad V = \iint_A w(x, y) dx dy. \quad (151)$$

Analogija sa membranom omogućuje nam da odredimo i razna analitička rešenja tehnički važnih problema. Membransku analogiju kod torzije štapova u elastičnoj oblasti naprezanja dao je prvi Prandtl.

Praktično ova analogija se može pokazati pomoću sledećeg eksperimenta. Uzmemo veoma tanku opnu (npr. mehur od sapunice, koji se pri eksperimentima i stvarno upotrebljavaju) i zategnemo je preko otvora cevi koja ima isti oblik kao i poprečni presek štapa napregnutog na torziju i zatim je opteretimo jednakopodeljenim opterećenjem (pumpanjem vazduha) onda će njeni ugibi zadovoljiti diferencijalnu jednačinu (150) i iste granične uslove kao i funkcija napona  $\phi(x, y)$  kod torzije. Ostali deo eksperimenta se sastoji u merenju ugiba i nagiba, određivanju zapreminе koju zahvata membrana - opna.

## VII. RAVNO STANJE NAPONA I RAVNO STANJE DEFORMACIJA

Pri rešavanju zadataka Teorije elastičnosti za opšti slučaj naprezanja trodimenzionalnih deformabilnih tela sreću se velike matematičke teškoće, što nas primjerava da predjemo na rešenje šire ili uže klase posebnih zadataka. Jedan od takvih posebnih zadataka je ravan zadatak teorije elastičnosti, koji je posebno značajan za tehničku primenu te je zbog toga ova oblast teorije elastičnosti bogato obradjena u literaturi.

Ravan problem teorije elastičnosti razmatra tri slučaja elastične ravnoteže tela, koji su od velikog značaja za tehničku primenu, a to su: 1<sup>o</sup> slučaj ravne deformacije; 2<sup>o</sup> slučaj ravnog stanja napona i 3<sup>o</sup> slučaj generalisanog ravnog naponskog stanja.

Ravan problem teorije elastičnosti se ograničava na dvodimenzionalni prostor samo da bi se izbegle matematičke teškoće na koje se nailazi pri rešavanju problema teorije elastičnosti u opštem obliku. Rešenje ovako uprošćenog problema često baca svetlost i na složene probleme. Imat će mnogo problema u teoriji elastičnosti gde sama priroda postavljenog problema nameće takvo uprošćenje.

1<sup>o</sup> Problem ravne deformacije se susreće kod veoma dugih šipova, cevi tunela opterećenih po svom omotaču površinskim silama upravnim na osu štapa, odnosno zapreminskim silama upravnim na osu štapa, pri čemu su obvezne od koordinate duž ose štapa. Na taj način deformacija je vezana za ravan kojoj te tačke preseka pripadaju i ne postoji pomeranja u pravcu ose štapa.

2<sup>o</sup> Problem ravnog naponskog stanja se odnosi na tela pločastog oblika kod kojih je debljina malih dimenzija u odnosu na dimenzije osnova, a koja su opterećena površinskim silama paralelnim njenim osnovama i raspoređenim po konturi (omotaču) ili zapreminskim silama koje dejstvuju paralelno osnovicama pločastog tela.

## VII.1. RAVNO STANJE DEFORMACIJA

Stanje deformacija u tačkama napregnutog tela je ravno, ako je vektor pomeranja proizvoljne tačke tela paralelan nekoj fiksiranoj ravni, koju nazivamo r a v a n d e f o r m a c i j e , i ne zavisi od rastojanja proučavane tačke od te fiksirane ravni deformacije.

Pretpostavimo da je u napregnutom deformabilnom telu ravno stanje deformacija i da je ravan deformacije paralelna koordinatnoj ravni Oxy, u kom slučaju postoje pomeranja tačaka paralelna ravni Oxy, pa su komponentna pomeranja:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0 \quad (1)$$

u pravcima koordinatnih osa Ox i Oy. Koordinate tenzora deformacije su u tom slučaju:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = 0; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = 0; \quad \gamma_{yz} = 0; \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

dok je zapreminska dilatacija:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (3)$$

i javlja se kao funkcija koordinata x i y .

Koristeći Hooke-ov zakon u obliku:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \underline{\underline{\varepsilon}} + 2\nu \underline{\underline{C}},$$

odredujemo koordinate tenzora napona  $\underline{\underline{\sigma}}$  u obliku:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x}, & \sigma_z &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \sigma_y &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\nu \frac{\partial v}{\partial y}, & \tau_{xz} &= 0, \\ \tau_{xy} &= \nu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & \tau_{yz} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

tako da matricu tenzora napona možemo da napišemo u obliku:

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (5)$$

Iz ovoga zaključujemo da se pri ravnom stanju deformacija, u opštem slučaju tenzor napona sastoji od pet komponentnih napona različitih od nule, ali su samo tri od njih nezavisna. Jedna veza je na osnovu osnovnog pravila analize napona, tj. konjugovanosti tangencijalnih napona pa je  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ , dok se treći normalni napon  $\sigma_z$  može izraziti помоћу prva dva,  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$ . Sabiranjem normalnih komponentnih napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  koji su dati izrazima (4) dobijamo:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2(\lambda + \nu)\varepsilon = 2(\lambda + \nu)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad (6)$$

odakle nalazimo da je za ravno stanje deformacija:

$$\varepsilon = \frac{1}{2(\lambda + \nu)} (\sigma_x + \sigma_y), \quad (7)$$

što unošenjem u jednačinu  $\sigma_z$  daje:

$$\sigma_z = \mu (\sigma_x + \sigma_y), \quad \mu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \nu)} \quad (8)$$

Poslednji izraz pretstavlja prostu vezu izmedju komponentnih normalnih napona za slučaj ravnog stanja deformacija. Na taj način stanje napona za slučaj ravnog stanja deformacija je određeno sa tri nezavisna komponentna napona  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$ , dok je četvrti  $\sigma_z$  komponentni napon određen izrazom (8). Vidimo da stanje napona pri ravnom stanju deformacija nije ravno, ali su sva četiri komponentna napona funkcije samo dva argumenta, koordinata  $x$  i  $y$ .

Unesimo sada, koordinate tenzora napona kojē smo prethodno odredili, u Navier-ove jednačine ravnoteže, tako da dobijemo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X_v' &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y_v' &= 0 \\ \cancel{\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z_v'} &= 0 \Rightarrow Z_v' = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Jednačine ovog sistema pokazuju da zapreminska sila koja dejstvuje u proizvoljnoj tački tela na materijalnu česticu, mora da bude paralelna ravnim de-

268.

formacije i ne sme da zavisi od koordinate  $z$ .

Ako smo kao osnovne nepoznate usvojili koordinate tenzora napona onda Navier-ovim jednačinama ravnoteže (9) treba pridružiti Cauchy-jeve granične uslove. Ako imamo slučaj prizmatičnog tela velike dužine pri čemu se osa tela poklapa sa koordinatnom osom Oz, onda je normala u tačkama osove tog tela:  $\{n\} = (0 \ 0 \ \pm 1)$  dok je normala u tačkama na površi omotača prizmatičnog tela:

$$\{n\} = \begin{cases} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{cases} \quad (10)$$

Koristeći Cauchy-jeve granične uslove dobijamo da na osnovama treba da je:

$$\begin{cases} X_n^1 \\ Y_n^1 \\ Z_n^1 \end{cases} = \begin{cases} \delta_x & \delta_{yx} & 0 \\ \delta_{xy} & \delta_y & 0 \\ 0 & 0 & \delta_z \end{cases}_{z=z_k} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \pm \delta_z \end{cases}_{z=z_k}, \quad \begin{cases} X_n^1 = 0, \\ Y_n^1 = 0, \\ Z_n^1 = (\pm \delta_z)_{z=z_k}, \end{cases} \quad (11)$$

odakle zaključujemo da na osnovama prizmatičnog tela dejstvuju površinske sile koje su paralelne geometrijskoj osi štapa, čijom se redukcijom na težište odgovarajuće osove dobija statički dvektor čije su koordinate:

$$\begin{aligned} X_n^1 &= 0, \quad Y_n^1 = 0 \quad Z_n^1 = \pm \iint_A \delta_z \, dx \, dy, \\ M_x &= \iint_A Z_n^1 y \, dx \, dy = \pm \iint_A \delta_z y \, dx \, dy, \\ M_y &= \iint_A Z_n^1 x \, dx \, dy = \pm \iint_A \delta_z x \, dx \, dy, \quad M_z = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Po pvrši omotača dejstvuju površinske sile koje leže u ravnima poprečnih preseka i na osnovu Cauchy-jevih graničnih uslova za površ omotača pišemo sledeće:

$$\begin{cases} X_n^1 \\ Y_n^1 \\ Z_n^1 \end{cases} = \begin{cases} \delta_x & \delta_{yx} & 0 \\ \delta_{xy} & \delta_y & 0 \\ 0 & 0 & \delta_z \end{cases} \begin{cases} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} \delta_x \cos \alpha + \delta_{xy} \sin \alpha \\ \delta_{xy} \cos \alpha + \delta_y \sin \alpha \\ 0 \end{cases} \quad (13)$$

Kako smo za osnovne nepoznate usvojili koordinate tenzora napona, da bi odgovarajuća komponentna pomeranja bila jednoznačne neprekidne funkcije koordinata u oblasti izbora tačaka na poprečnom preseku potrebno je da su zadovoljeni Saint Venant-ovi uslovi kompatibilnosti deformacija. Pet uslova kompatibilnosti deformacija je identički zadovoljeno, sem sledećeg:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (14)$$

Koordinate tenzora deformacije izrazimo pomoću koordinata tenzora napona:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2\nu} \left[ \beta_x - \frac{\lambda}{2(\lambda+\nu)} (\beta_x + \beta_y) \right], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2\nu} \left[ \beta_y - \frac{\lambda}{2(\lambda+\nu)} (\beta_x + \beta_y) \right], \\ \varepsilon_{xy} &= \gamma_{xy}/2 = \gamma_{xy}/2\nu, \end{aligned} \quad (15)$$

i iste unesemo u uslov kompatibilnosti deformacija (14) tako da dobijemo:

$$\frac{\partial^2 \beta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x^2} - \mu (\Delta \beta_x + \Delta \beta_y) = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (16)$$

Ako sada prvu Navier-ovu jednačinu ravnoteže iz sistema (9) diferenciramo po  $x$ , a drugu po  $y$  i saberimo ih dobijamo da je:

$$\frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial X_v'}{\partial x} + \frac{\partial Y_v'}{\partial y} = 0 \quad (14*)$$

i ako sada tu jednačinu saberemo sa jednačinom (18) posle sredjivanja dobijemo da je:

$$\begin{aligned} 1-\mu &= \frac{\lambda+2\nu}{2(\lambda+\nu)}, \\ \Delta (\beta_x + \beta_y) &= -\frac{2(\lambda+\nu)}{\lambda+2\nu} \left[ \frac{\partial X_v'}{\partial x} + \frac{\partial Y_v'}{\partial y} \right], \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Do istog rezultata smo mogli da dodjemo i iz Beltrami-Michell-ovih jednačina. Znači da ako su granični uslovi zadati po silama. Pomoću rasporeda površinskih sila, zadatak se svodi na rešavanje uslova ravnoteže (9) pri čemu rešenja moraju da zadovoljavaju uslov kompatibilnosti deformacija (17) izražen pomoću komponenata tenzora napona, tj. Beltrami-Michell-ove jednačine.

U odsustvu zapreminskih sila uslov (19) se svodi na:

$$\Delta (\beta_x + \beta_y) = 0, \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\beta_x + \beta_y) = 0 \quad (17*)$$

koji je u literaturi poznat pod imenom Morrisa - Levy - jeve jednačine.

Ako pak za osnovne nepoznate izaberemo komponentna pomerenja, onda unošenjem odgovarajućih komponentnih pomeranja u Lamé-ove jednačine

one se svode na sledeći sistem:

$$\begin{aligned} (\lambda + \nu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \nu \Delta u + X_v^1 &= 0, \\ (\lambda + \nu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \nu \Delta v + Y_v^1 &= 0, \\ Z_v^1 &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

koji sadrži dve parcijalne diferencijalne jednačine po dvema nepoznatim funkcijama  $u(x,y)$  i  $v(x,y)$  koordinata  $x$  i  $y$  tačaka poprečnog preseka. Ako su na konturi poprečnog preseka zadata komponentna pomeranja tačaka tela,  $u(\xi,\eta)$  i  $v(\xi,\eta)$  gde su  $\xi$  i  $\eta$  koordinate tačaka na konturi, tj. poznati su granični uslovi po pomeranjima, onda je zadatak sa ravnim stanjem deformacija kompletno određen jednačinama (18) preko pomeranja i odgovarajućim graničnim uslovima.

Iz definicije ravne deformacije proizilazi da se ona tačno javlja u prizmatičnom telu beskonačno velike dužine sa pravolinijskom geometrijskom osom, a pri tome površinske i zapreminske sile moraju ležati u ravним poprečnih preseka i ne smeju zavisiti od koordinata duž ose tela.

Kada prizmatično telo ima konačnu dužinu ravno stanje deformacija u njemu se ne realizuje tačno, pri čemu što je telo duže to se tačnije realizuje ravna deformacija pri uslovima da su na njenim stranama priložene sile rasporedjene po zakonu:  $Z_n^1 = \delta_z = \lambda \varepsilon$

Ukoliko saglasno definiciji, granični uslovi na bočnim stranama prizmatičnog tela ne zavise od koordinate  $z$ , to se granični uslovi zadaju na konturi jednog od poprečnih preseka ili na nekoliko kontura, ako je presek mnogostruko povezana oblast. Na taj način sistem diferencijalnih jednačina ravnoteže (9) odnosno (18) sa odgovarajućim graničnim uslovima karakterišu zadatke teorije elastičnosti.

Diferencijalne jednačine ravnoteže (9) i granični uslovi (13) zajedno sa jednačinom (17\*) koja se naziva Levy-jeva jednačina, u otsustvu zapreminskih silane sadrže elastične konstante materijala, te iz toga možemo da izvučemo sledeću konstantaciju: U slučaju ravnog stanja deformacija u otsustvu zapreminskih sila naponsko stanje tela u proizvoljnim tačkama a za ravni poprečnih preseka jednostrukopovezane konture, paralelnim ravni deformacije određuje se zadatim na njegovoj konturi silama, njegovim oblikom i ne zavisi od svojstava materijala. Ako presek pretstavlja višestrukou povezanu oblast to nezavisnost stanja napona od svojstava materijala ostvaruje se dopunskim uslovima, koji se sastoje u uravnoteženju spoljašnjih sila prilože-

nih na svakoj od granica što ovde nećemo dokazivati. Ovaj zaključak predstavlja teoremu Moris-a Levy-ja, koja leži u osnovi definicije tenzora napona na modelima od materijala sa drugim elastičnim svojstvima (prozračni materijali).

Pri ravnom stanju deformacija očevidno je da je vektor rotacije sa sledećim koordinatama:

$$2r = 2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad p = q = 0. \quad (19)$$

Iz formula (3) i (19) odredjujemo diferenciranjem prve po  $x$  i druge po  $y$  i njihovim oduzimanjem, sledeće:

$$2 \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \Delta u = \frac{\partial \epsilon}{\partial x} - 2 \frac{\partial \omega_z}{\partial y}, \quad (20)$$

a njihovim sabiranjem sledeće:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \Delta v = \frac{\partial \epsilon}{\partial y} + 2 \frac{\partial \omega_z}{\partial x}. \quad (21)$$

Ako poslednje odredjene izraze unesemo u Lamé-ove jednačine (18) dobijamo sistem jednačina po nepoznatim: zapreminske dilataciji  $\epsilon$  i ugлу obrtanja  $\omega_z$ :

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\nu) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} - 2\nu \frac{\partial \omega_z}{\partial y} + X_v' &= 0 \\ (\lambda + 2\nu) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} + 2\nu \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + Y_v' &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

koje se u otsustvu zapreminskih sila svode na sledeći oblik:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} &= \frac{\partial \omega_z^*}{\partial y}, \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial y} &= -\frac{\partial \omega_z^*}{\partial x}, \end{aligned} \quad (23)$$

gde smo uveli redukovana vrednost komponente tenzora rotacije:

$$\omega_z^* = \frac{2\nu}{\lambda + 2\nu} \omega_z, \quad \text{i.e. } \omega_z^* = \frac{2}{1+\kappa} \omega_z. \quad (24)$$

Iz poslednjih jednačina zaključujemo da je to odnos Cauchy-Reimann-a i slijedi da su funkcije dilatacija  $\epsilon(x, y)$  i redukovana ugao rotacije  $\omega_z^*(x, y)$  harmonijski međusobom konjugovane veličine.

Posmatrajmo sada slučaj kada su zapremske sile konzervativne.

272.

tivne, tj kada je:

$$X_v' = - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y_v' = - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (25)$$

gde je  $-U(x,y)$  funkcija sile i funkcija koordinata  $x$  i  $y$ . Uvedimo sada proizvoljnu funkciju  $\phi(x,y)$  pomoću koje možemo da definišemo komponen-tni tangencijalni napon kao:

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (26)$$

Unesimo sada prepostavljene vrednosti za  $\tau_{xy}$  i projekcije zapreminske sile  $X_v'$  i  $Y_v'$  u Navier-ove jednačine ravnoteže (9) tako da dobijemo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \beta_x - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - U \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \beta_y - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - U \right] &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Iz poslednjih jednačina integraljenjem se dobija:

$$\begin{aligned} \beta_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + U(x,y) \\ \beta_y &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + U(x,y) \end{aligned} \quad (28)$$

Ako sada ove vrednosti za komponentne normalne napone unesemo u jednačinu (17) dobijamo:

$$\Delta(\beta_x + \beta_y) = \Delta \Delta \phi(x,y) = - \frac{2\nu}{\lambda+2\nu} \Delta U(x,y), \quad (29)$$

$$\text{ili } \Delta \Delta \phi(x,y) = \frac{3-2\nu}{1-\nu} \Delta U(x,y),$$

u kojoj je:

$$\Delta \Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Na taj način problem ravnog stanja deformacija sveden je na određivanje i nalaženje funkcije  $\phi(x,y)$  koja bi zadovoljila parci-jalnu diferencijalnu jednačinu (29) i površinske (granične) uslove na omo-taču:

$$\begin{aligned} X_n' &= \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + U \right) \cos \alpha - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \sin \alpha, \\ Y_n' &= - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \cos \alpha + \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + U \right) \sin \alpha, \end{aligned} \quad (30)$$

na osnovama:

$$Z_n^1 = \pm \sigma_z \Big|_{z=z_k} = \pm \mu (\Delta \phi + 2U)_{z=z_k}. \quad (31)$$

Funkcija  $\phi(x,y)$  koju smo uveli naziva se Airy - jeva funkcija napona.

Ova izlaganja se mogu nešto proširiti i to na slučaj ravnog stanja deformacija, koje prati jednolika dilatacija  $\epsilon$ . u uzdužnom pravcu. To je slučaj kod dugačke cevi napregnute jednolikim pritiskom spolja i iznutra. Za taj slučaj je:

$$\sigma_z = \mu (\epsilon_x + \epsilon_y) + E \epsilon_0, \quad (32)$$

ček je normalna površinska sila:

$$Z_n^1 = \pm \left\{ \mu [\Delta \phi(x,y) + 2U(x,y)] + E \epsilon_0 \right\}. \quad (33)$$

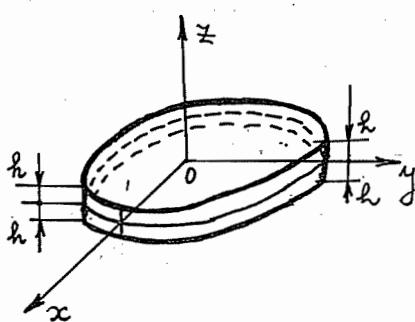
## VII.2. RAVNO STANJE NAPONA

Stanje napona naziva se ravnim, ako je vektor normalnog napona za sve račke tela, a za ravni paralelne osnovi, jednak nuli.

Ako srednju površ ploče debljine  $2h$  usvojimo za koordinatnu Oxy ravan, a osu Oz upravno na njoj, onda je vektor totalnog napona  $\tau$  jednak nuli, pa su i komponentni naponi  $\sigma_z$ ,  $\sigma_{xx}$  i  $\sigma_{yy}$  jednaki nuli. U tom slučaju matrica tensora napona za ravno stanje napona se

može pretstaviti u sledećem obliku:

$$M = \begin{bmatrix} \sigma_y & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$



Slika br. 1

Ako uvedene pretpostavke za ravno stanje napona unesemo u Navier-ove jednačine ravnoteže, dobijamo:

274.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta_x}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_y}{\partial y} + X_v^1 &= 0, \\ \frac{\partial \zeta_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + Y_v^1 &= 0,\end{aligned}\quad Z_v^1 = 0, \quad (35)$$

odakle zaključujemo da zapreminska sila mora biti paralelna koordinatnoj ravni Oxy.

Kako je  $\zeta_z = 0$ , iz Hooke-ovog zakona sledi da je:

$$\zeta_z = \lambda \varepsilon + 2\nu \varepsilon_z = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\nu \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (36)$$

odnosno

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\lambda}{\lambda+2\nu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (36*)$$

Kako smo dilataciju  $\varepsilon_z$  linijskog elementa u pravcu Oz ose izrazili kao funkciju ostalih dilatacija, to možemo da odredimo vezu izmedju napona i komponentnih pomeranja u sledećem obliku:

$$\begin{aligned}\zeta_x &= \lambda^* \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \zeta_y &= \lambda^* \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\nu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \zeta_{xy} &= \nu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \zeta_{xz} &= \nu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \\ \zeta_{yz} &= \nu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0, \quad \zeta_z = 0,\end{aligned}\quad (37)$$

gde je uvedena modifikovana vrednost Lamé-ovog koeficijenta u obliku:

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\nu}{\lambda+2\nu} \quad (38)$$

Prva invariјanta tenzora deformacije je:

$$\mathcal{E}_1 = \varepsilon_v = \varepsilon = \frac{2\nu}{\lambda+2\nu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (39)$$

Uporedjujući formalno zapreminske dilatacije za slučajeve ravnog stanja deformacija i ravnog stanja napona vidimo da se one odnose kao:

$$\frac{\mathcal{E}_v^{(nap)}}{\mathcal{E}_v^{(def)}} (=) \frac{2\nu}{\lambda+2\nu} \quad \mathcal{E}_v^{(nap)}(x, y, z) = (1-2\nu) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (40)$$

$$\mathcal{E}_v^{(def)}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

međutim ima suštinske razlike u tome što je pri ravnom stanju napona dilatacija  $\mathcal{E}_v^{(nap)}$  funkcija sve tri koordinate, a za slučaj ravnog stanja deformacija funkcija samo dveju koordinata.

Daljim uporedjivanjem jednačina koje daju vezu izmedju napona i deformacija zaključujemo da se prve tri jednačine razlikuju jedino u tome što je za ravno stanje napona uvedena modifikovana Lamé-ova konstanta  $\lambda^*$ , koja se dobija množenjem Lamé-ove konstante faktorom  $\frac{2\nu}{\lambda+2\nu}$ , ali pri tome ne treba izgubiti izvida da komponentna pomeranja za slučaj ravnog stanja napona mogu zavisiti od sve tri koordinate  $x$ ,  $y$  i  $z$  tačke tela, što pretstavlja suštinsku razliku u odnosu na odgovarajuće jednačine za ravno stanje deformacija, gde naponi i dilatacije zavise samo od dve koordinate  $x$  i  $y$ .

Lamé-ove jednačine ravnoteže sada glase:

$$\begin{aligned} (\lambda^* + \nu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \nu \Delta u + X_v &= 0, \\ (\lambda^* + \nu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \nu \Delta v + Y_v &= 0, \\ Z_v &= 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Na osnovu uporedjenja izvedenih jednačina za ravno stanje deformacija i ravno stanje napona možemo izvesti sledeće zaključke: 1<sup>o</sup> Odgovarajuće Navier-ove i Lamé-ove jednačine se formalno slažu, ali se problemi u suštini bitno razlikuju. 2<sup>o</sup> Bitna razlika izmedju problema ravnog stanja deformacija i ravnog stanja napona je u tome što je prvi problem stvarno dvodimenzionalan, dok je drugi u suštini trodimenzionalni problem - prostorni problem.

### VII.3. UOPŠTENO RAVNO NAPONSKO STANJE

Videli smo da je problem ravnog stanja napona i pored toga što su izvršena značajna uprošćenja ostao trodimenzionalni. Zato je L.N.Filon (Fajlon) za slučaj kada je debeljina ploče dovoljno mala u odnosu na druge dimenzije, dao ideju koja dozvoljava da se trodimenzionalni problem ravnog stanja napona svede na dvodimenzionalni. Ideja se sastoji u tome da izračunate srednje vrednosti veličina vektora pomeranja i koordinata tenzora napona u tačkama tanke ploče dovoljno tačno definišu rešenje problema sa ravnim stanjem napona. Prema toj ideji *λab* je za to ravno stanje napona uveo naziv "uopšteno ravno stanje napona".

Pretpostavimo da je tanka ploča male visine  $2h$ , opterećena

na bočnim površima spoljašnjim površinskim silama paralelnim osnovama i simetrično raspodeljenim u odnosu na srednju površ. Pretpostavljamo takodje, da na osnovama ne dejstvuju spoljašnje površinske sile. Osim toga smatraćemo da je komponenta zapreminske sile upravna na srednjoj površi ploče jednaka nuli, a da su ostale dve komponente simetrično raspodeljene u odnosu na srednju površ ploče. Naponska stanja koja se javljaju u takvoj ploči nazivaju se uopštenim naponskim stanjem. Ovakvo uopšteno ravno naponsko stanje često se javlja u primeni i predstavlja važan slučaj za praksu.

Prema uslovu uopštenog ravnog stanja napona na osnovama je: za  $z = \pm h$ , ort normale na osnovu je  $(n) = (0 \ 0 \ \pm 1)$ , te iz graničnih uslova sledi da je:

$$X_n' = \tilde{\sigma}_{xz} = 0, \quad Y_n' = \tilde{\sigma}_{yz} = 0, \quad Z_n' = \tilde{\sigma}_z = 0, \quad (42)$$

dok je na bočnoj površi ort normale na površinu  $(n) = (\cos \alpha \ \cos \beta \ 0)$  i iz graničnih uslova sledi da je:

$$\begin{Bmatrix} X_n' \\ Y_n' \\ Z_n' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_x & \tilde{\sigma}_{yx} & \tilde{\sigma}_{zx} \\ \tilde{\sigma}_{xy} & \tilde{\sigma}_y & \tilde{\sigma}_{zy} \\ \tilde{\sigma}_{xz} & \tilde{\sigma}_{yz} & \tilde{\sigma}_z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad Z_n' = \tilde{\sigma}_{xz} \cos \alpha + \tilde{\sigma}_{yz} \cos \beta = 0. \quad (43)$$

Dakle u tačkama i gornje i donje osnove je  $\tilde{\sigma}_{xz} = \tilde{\sigma}_{yz} = \tilde{\sigma}_z = 0$ . Kako ovo važi za sve tačke koje pripadaju gornjoj odnosno donjoj osnovi to sledi da je promena po koordinatama  $x$  i  $y$  ovih napona u tačkama tih kontura jednak nuli. Znači da je:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{xz}}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{\sigma}_{xx}}{\partial y} = 0, \quad \text{za } z = \pm h, \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}_{zy}}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{\sigma}_{zy}}{\partial y} = 0, \quad \text{za } z = \pm h, \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}_z}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{\sigma}_z}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Iz treće Navier-ove jednačine ravnoteže za  $z$  pravac, a za tačke na konturi ploče  $z = \pm h$ , sledi da je:

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_z}{\partial z} + Z_v' = 0, \quad (45)$$

te uzimajući prethodne uslove sledi da je:

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_z}{\partial z} = 0 \quad \text{za } z = \pm h. \quad (46)$$

Znači da za  $z = \pm h$  nije jednaka nuli samo komponenta  $\bar{\epsilon}_z$ , nego i njen izvod po koordinati  $z$ . Zato pri dovoljno maloj debljini ploče normalni napon  $\bar{\epsilon}_z$  će biti veoma mali te mi možemo smatrati da je jednak nuli u svim tačkama ploče. Ovakva pretpostavka je približnija stvarnom stanju napona ukoliko je debljina ploče manja u poređenju sa ostalim njenim dimenzijama. Na osnovu pretpostavljenih simetrije opterećenja u odnosu na srednju površ ploče očevidno je da je projekcija vektora pomeranja proizvoljne tačke srednje površi na Oz osu jednaka nuli.

Kako smo pretpostavili da je debljina ploče mala i s obzirom da je  $u^0(z=0) = 0$  možemo pretpostaviti da će pomeranja  $u^0(x,y,z)$  tačaka ploče van srednje ravni biti različita od nule i da će njihova srednja vrednost biti jednaka nuli:

$$\int_{-h}^h u^0(x,y,z) dz = 0. \quad (47)$$

Takodje zbog male debljine ploče smatraćemo da je promena komponentnih pomeranja  $u(x,y,z)$  i  $v(x,y,z)$  po debljini ploče duž iste normale na srednju površ mala, te umesto veličina  $u(x,y,z)$  i  $v(x,y,z)$  možemo posmatrati njihove srednje vrednosti koje se određuju po formulama:

$$\bar{u}(x,y) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u(x,y,z) dz; \quad \bar{v}(x,y) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h v(x,y,z) dz. \quad (48)$$

Napisaćemo sada Navier-ove jednačine ravnoteže i integrali ih duž koordinate  $z$  u granicama od donje do gornje osnove, tako da dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\epsilon}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\epsilon}_{yz}}{\partial y} + X_v' &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\epsilon}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\epsilon}_{zy}}{\partial y} + Y_v' &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\epsilon}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\epsilon}_{yz}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (49)$$

gde smo uzeli u obzir da je:

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^h \frac{\partial \bar{\epsilon}_{xz}}{\partial z} dz = \frac{1}{2h} [\bar{\epsilon}_{xz}]_{-h}^h = 0 \quad (50)$$

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^h \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial z} dz = \frac{1}{2h} \left[ \bar{\tau}_{yz} \right]_{-h}^h = 0, \quad (50*)$$

i uveli označke

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_x dz, & \bar{\chi}'_v &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \chi'_v dz, \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_y dz, & \bar{\gamma}'_v &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \gamma'_v dz, \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \tau_{xy} dz, & & \end{aligned} \quad (51)$$

za srednje vrednosti komponentnih napona  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$ ,  $\bar{\tau}_{xy}$  i komponentnih zapreminskeh sila  $\chi'_v$ ,  $\gamma'_v$

Iz definicije ravnog naponskog stanja proizilazi da su komponentna pomeranja  $\mu(x,y,z)$  i  $\nu(x,y,z)$  i komponentni naponi  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  parne funkcije koordinata, a  $\chi_{xz}$  i  $\chi_{yz}$  neparne funkcije koordinate, dok su njihove srednje vrednosti jednake nuli.

Iz formula veza izmedju napona i deformacija prema uopštenom Hooke-ovom zakonu, a prelazeći na srednje vrednosti i uzimajući u obzir da je  $\sigma_z = 0$  dobijamo da je:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \lambda^* \bar{\epsilon} + 2\nu \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x}, \\ \bar{\sigma}_y &= \lambda^* \bar{\epsilon} + 2\nu \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial y}, \\ \bar{\tau}_{xy} &= \nu \left( \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (52)$$

gde je:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} &= \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial y}, \\ \lambda^* &= \frac{2\nu}{\lambda+2\nu} \lambda \end{aligned} \quad (53)$$

Dobijeni odnosi medju srednjim vrednostima komponenata tensora napona  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$ ,  $\bar{\tau}_{xy}$  i izvodima srednjih vrednosti komponentnih pomeranja  $\bar{\mu}$  i  $\bar{\nu}$  pri uopštenom ravnom naponskom stanju razlikuju-

ju se od odgovarajućih pri ravnoj deformaciji samo time što umesto Lamé-ove konstante  $\lambda$  učestvuje njena modifikovana vrednost  $\lambda^*$ .

Diferencijalne jednačine, koje treba da zadovoljavaju srednjevrednosti komponentnih napona i komponentnih pomeranja za uopšteno ravno stanje, a to su jednačine ravnoteže, Lamé-ove jednačine i Beltrami-Michell-ove jednačine za osrednjene vrednosti biće istog oblika kao i odgovarajuće pri ravnoj deformaciji, samo što će umesto Lamé-ove konstante figurisati njena modifikovana vrednost. Lamé-ove jednačine dobijaju oblik:

$$\begin{aligned} (\lambda^* + \nu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \nu \Delta \bar{u} + \bar{X}'_v &= 0 \\ (\lambda^* + \nu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \nu \Delta \bar{v} + \bar{Y}'_v &= 0 \end{aligned} \quad (54)$$

Ako su zadate srednje vrednosti pomeranja tačaka sa cilindričnog omotača - konturi poprečnog preseka ploče a to su zadate vrednosti komponentnih pomeranja  $\bar{u}_k$  i  $\bar{v}_k$  na konturi srednje ravni ploče, tada ti granični uslovi zajedno sa modifikovanim Lamé-ovim jednačinama određuju komponentna pomeranja  $\bar{u}$  i  $\bar{v}$  za sve tačke srednje ravni ploče, a posredstvom modifikovanog Hooke-ovog zakona se mogu odrediti i komponentni naponi.

Kada su na konturi ploče zadate površinske sile zadatak rešavamo preko napona vodeći računa o tome da koordinate tenzora napona ne budu protivurečne sa uslovima kompatibilnosti deformacija za osrednjene vrednosti komponentnih pomeranja. Ti uslovi su:

$$\frac{\partial^2 \bar{\epsilon}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{\delta}_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (55)$$

jer se svode na jedan, koji je izražen pomoću komponentnih napona dobija oblik:

$$\Delta(\bar{\epsilon}_x + \bar{\epsilon}_y) = -2 \frac{\lambda^* + \nu}{\lambda^* + 2\nu} \left[ \frac{\partial \bar{X}'_v}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Y}'_v}{\partial y} \right] \quad (56)$$

Koordinate tenzora napona moraju da zadovoljavaju granične uslove, koji su na omotaču oblika:

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}'_n \\ \bar{Y}'_n \\ \bar{Z}'_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_x & \bar{\epsilon}_{xy} & 0 \\ \bar{\epsilon}_{xy} & \bar{\epsilon}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (57)$$

u kojima su  $\bar{X}_n'$  i  $\bar{Y}_n'$  usrednjene vrednosti spoljašnjih površinskih sila po konturi:

$$\bar{X}_n' = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h X_n' dz, \quad \bar{Y}_n' = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h Y_n' dz. \quad (58)$$

Ovim smo pokazali da su u suštini zadaci ravne teorije elastičnosti - ravno stanje deformacija i uopšteno ravno stanje napona matematički identični. Medutim moramo voditi računa da medju njima postoji i suštinska razlika u tome da kod zadatka ravnog stanja deformacija se određuje egzaktno rešenje postavljenog graničnog zadatka, dok kod uopštenog ravnog stanja napona određujući srednje vrednosti po debljini ploče odgovarajućih pomerenja i komponentnih napona, određujemo približno rešenje graničnog zadatka za tanku ploču. Znači da je sličnost ova dva problema formalne prirode.

#### VII.4. NAPONSKA AIRY-JEVA FUNKCIJA

Rešenje zadatka ravne teorije elastičnosti znatno se uprošćava ako se zapreminske sile zanemare, bilo zbog njihove male vrednosti, bilo zbog toga što zadatak pri postojanju zapreminskih sila možemo da svedemo na zadatak bez zapreminskih sila, ako nadjemo bilo kakvo partikularno rešenje odgovarajućih nehomogenih diferencijalnih jednačina ravnoteže. Mi ćemo u daljem pretpostavljati da zapreminske sile otsustvuju. U ravnom zadatku teorije elastičnosti veliku ulogu igra uvodjenje Airy-jeve pomoćne funkcije. Treba istaknuti da je zahvaljujući uvođenju te funkcije bila postavljena plodotvorna metoda rešavanja zadataka ravne teorije elastičnosti.

U slučaju odsustva zapreminskih sile Navier-ove jednačine ravnoteže dobijaju oblik:

$$\frac{\partial \zeta_y}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\zeta}_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\zeta}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_y}{\partial y} = 0. \quad (59)$$

Prva jednačina pokazuje da se izraz  $\zeta_x dx - \tilde{\zeta}_{xy} dy$  javlja kao potpuni diferencijal neke funkcije  $Q(x, y)$  pa sledi da je:

$$\tilde{\zeta}_{xy} = -\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \zeta_x = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad (60)$$

Na isti način iz sistema (59) sledi da je

$$\beta_y = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad (61)$$

šde je  $P(x,y)$  neka funkcija koordinata  $x$  i  $y$ . Uporedjenjem ovih funkcija vidimo da važi uslov - odnos:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

koji pokazuje da izraz  $P dx + Q dy$  predstavlja puni diferencijal neke funkcije koju označimo sa  $\Phi(x,y)$  tako da sledi da komponentne napone možemo da predstavimo u obliku:

$$\beta_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad \beta_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}. \quad (62)$$

Ove formule prvi je izveo Airy te se ta funkcija napona,  $\Phi(x,y)$  naziva Airy-jeva funkcija ili Airy-jeva naponska funkcija.

Očigledno je da ako važi veza izmedju Airy-jeve funkcije  $\Phi(x,y)$  i komponentnih napona  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  i  $\tau_{xy}$  da će Navier-ove jednačine ravnoteže u otsustvu zapreminskih sila biti identički zadovoljene. Osim toga komponentni naponi moraju da zadovolje uslove kompatibilnosti da bi odgovarale stavarnom naponskom stanju, te su one dužne da zadovoljavaju jednačinu:

$$\Delta(\beta_x + \beta_y) = 0, \quad (63)$$

a kako je  $\Delta \Phi = \beta_x + \beta_y$  to se uslovi kompatibilnosti izraženi pomoću Airy-jeve naponske funkcije svode na Maxwell-ovu diferencijalnu jednačinu:

$$\Delta \Delta \Phi(x,y) = 0 \quad (64)$$

gde je  $\Delta \Delta$  diferencijalni operator

$$\Delta \Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

i koja kao rešenje ima skup biharmonijskih funkcija.

VII.5. AIRY-JEVA NAPONSKA FUNKCIJA IZRAŽENA U  
POLARNIM KOORDINATAMA

Jednačine ravnotežeravnog zadatka teorije elastičnosti u polarnom koordinatnom sistemu koordinata na osnovu jednačina ravnoteže za slučaj otsustva zapreminskih sila glase:

$$\frac{\partial \delta_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{rp}}{\partial \varphi} + \frac{\delta_r - \delta_\varphi}{r} = 0, \quad (65)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \delta_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{rp}}{\partial r} + \frac{2}{r} \tilde{\epsilon}_{rp} = 0.$$

Rešenje ovog sistema može biti zadato u obliku:

$$\delta_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}, \quad (66)$$

$$\tilde{\epsilon}_{rp} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \varphi},$$

$$\delta_\varphi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2},$$

gde je  $\phi(r, \varphi)$  Airy-jeva naponska funkcija u polarnom koordinatnom sistemu koordinata  $r$  i  $\varphi$

Komponentni naponi moraju da zadovoljavaju uslove kompatibilnosti deformacija, koji se svode na:

$$\Delta(\delta_r + \delta_\varphi) = 0, \quad (67)$$

gde je  $\Delta$  dvodimenzionalni Laplace-ov operator u polarnom sistemu koordinata:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (68)$$

Unoseći vrednosti za komponentne napone u uslov kompatibilnosti napona dobijamo za određivanje Airy-jeve naponske funkcije sledeću jednačinu:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \cdot \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right) = 0 \quad (69)$$

Za slučaj centralno simetričnog u ravni rasporeda napona u odnosu na koordinatni početak prethodna jednačina dobija oblik:

$$\frac{d^4\phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3\phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\phi}{dr} = 0. \quad (70)$$

čije je opšte rešenje:

$$\phi(r) = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D \quad (71)$$

Sada su komponente tenzora napona:

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C \quad (72)$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C$$

$$\tau_{r\varphi} = 0$$

Ako tačka  $r = 0$  pripada oblasti to je za ograničenje komponenata tenzora napona potrebno da konstante  $A$  i  $B$  budu jednake nuli,  $A = B = 0$ .

### VII.6. PRIMENA FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMENLJIVE NA REŠAVANJE PROBLEMA RAVNE TEORIJE ELASTIČNOSTI

U prethodnom delu smo de upoznali sa zadacima i problemima ravne teorije elastičnosti u ukazali na pristupe njihovom rešavanju i ukazali na tri klase zadataka. Takodje smo pokazali da se naponsko stanje i odgovarajući komponentni naponi - normalni i smičući mogu izraziti pomoću naponske funkcije  $\phi(x,y)$  i u uslovima kada nema zapreminskih sila pokazali da ona zadovoljava biharmonijsku jednačinu i da je biharmonijska funkcija koordinata. Prilikom razmatranja i konstrukcije biharmonijske funkcije  $\phi(x,y)$  kojom možemo izražavati komponentne napone ravno napregnute ploče sa različitim krivolinijskim konturama koje ograničavaju jedno- ili višestrukopovezane oblasti sa uspehom se mogu primenjivati analitičke funkcije kompleksne promenljive.

Prvi put primenu funkcije kompleksne promenljive pri rešavanju zadataka ravne teorije elastičnosti srećemo u studioznim istraživanjima i radovima G.V.Kolasova. Medjutim za dalji sistematski razvoj i primenu ove teorije funkcije kompleksne promenljive zaslужaj je N.I.Mushelišvili, koji je dao značajan doprinos razvoju matematičke teorije elastičnosti.

Osnovna ideja ove metode je da se naponska funkcija izrazi pomoću analitičkih funkcija kompleksne promenljive - analitičkih kompleksnih funkcija. Kada je to uradjeno za pravougli Descartes-ov ili polarno-cilindrički koordinatni sistem definišu se komponente vektora pomeranja i komponentni naponi pomoću odredjene naponske funkcije kompleksne promenljive. Ti izrazi treba da budu izvedeni uz zadovoljenje graničnih ili konturnih uslova na konturi ploče kojima se obuhvataju spoljašnje površinske sile izražene intenzitetom po jedinici dužine konture. Zato analitičke funkcije kompleksne promenljive kojima se konstruiše naponska funkcija prepostavljaju se u obliku stepenih redova sa kompleksnim konstantnim koeficijentima, koje određujemo eksplicitno u funkciji spoljašnjih površinskih opterećenja. Za rešavanje konkretnih zadataka umesto beškonačnih redova koristi se konačan broj članova tako izabranih da se granični uslovi sa dovoljnom i zahtevanom tačnošću aproksimiraju. Sa tako određenim brojem članova konstruiše se naponska funkcija i sastavljaju izrazi za komponentne normalne i tangencijalne napone i dilatacije i

klijanja. Za konkretnе primere numerički zadate neophodna je upotreba računara da bi se izvršila kompletна obrada stanja napona i stanja deformacija.

Zamjicanjem zapreminskih sila, rešenja ravnog stanja napona i ravnog stanja deformacija naponskom funkcijom  $\phi(x,y)$  koja zadovoljava biharmonijsku jednačinu  $\Delta\Delta\phi(x,y) = \Delta(\Delta\phi) = 0$  možemo je odrediti pomoću metode funkcije kompleksne promenljive. Naponska funkcija zadovoljava jednačinu:

$\Delta\phi(x,y) = p(x,y)$  u kojoj je  $p(x,y)$  harmonijska funkcija koja zadovoljava Laplace-ovu parcijalnu diferencijalnu jednačinu  $\Delta p(x,y) = 0$ .

Uvedimo analitičku funkciju

$$f(z) = p(x,y) + iQ(x,y), \quad (1)$$

kojoj je  $i = \sqrt{-1}$  imaginarna jedinica,  $z = x+iy$  kompleksna promenljiva, a  $Q(x,y)$  harmonijska funkcija konjugovana funkciji  $p(x,y)$  i sa njom u paru zadovoljava Cauchy-Reimann-ove uslove  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ .

Kako je funkcija definisana izrazom (1) analitička funkcija to je i integral te funkcije po  $z$  još jedna analitička funkcija oblika:

$$F(z) = P(x,y) + iQ(x,y) = \frac{1}{4} \int f(z) dz, \quad (2)$$

čiji realni  $P(x,y)$  i imaginarni  $Q(x,y)$  deo su harmonijske funkcije i pojedinačno zadovoljavaju Laplace-ovu diferencijalnu jednačinu. Diferenciranjem po  $z$  funkcije  $F(z)$  dobijamo da je:

$$F'(z) = \frac{1}{4} f(z) = \frac{1}{4} (p+iQ) = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (3)$$

Odakle sledi da je:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{4} p(x,y), \quad (4)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{4} Q(x,y),$$

jer je:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dF}{dz}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dF}{dz}. \end{aligned} \quad (5)$$

Kako su  $P(x,y)$  i  $Q(x,y)$  harmonijske funkcije i zadovoljavaju Laplace-ovu diferencijalnu jednačinu: to možemo pisati da je:

$$\begin{aligned} \Delta [xP(x,y) + yQ(x,y)] &= 2 \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + x\Delta P + y\Delta Q = \\ &= 2 \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) = p(x,y) = \Delta\phi(x,y) \end{aligned} \quad (6)$$

odakle sledi

$$\Delta [\phi(x,y) - xP(x,y) - yQ(x,y)] = 0, \quad (7)$$

odnosno:

$$\phi(x,y) = xP(x,y) + yQ(x,y) + R(x,y), \quad (8)$$

gde je  $R(x,y)$  harmonijska funkcija koju smo dobili u rezultatu integraljenja iz (7). Uvedimo još jednu harmonijsku funkciju  $S(x,y)$  konjugovanu funkciji  $R(x,y)$  tako da pomoću njih formiramo analitičku funkciju  $\mathcal{H}(z)$  kompleksne promenljive  $z = x+iy$  u obliku:

$$\mathcal{H}(z) = R(x,y) + iS(x,y). \quad (9)$$

Formirajmo sada funkciju  $\bar{z}F(z) + \mathcal{H}(z)$ , gde je  $\bar{z}$  konjugovano  $z$  i iznosi:  $\bar{z} = x - iy$ , u obliku:

$$\begin{aligned} \bar{z}F(z) + \mathcal{H}(z) &= (x - iy)(P + iQ) + R + iS = \\ &= xP + yQ + R + i(-yP + xQ + S), \end{aligned} \quad (10)$$

Ividimo da je njen realni deo jednak naponskoj funkciji  $\phi(x,y)$ , te možemo da je definišemo u obliku:

$$\phi(x,y) = \operatorname{Re}\{\bar{z}F(z) + \mathcal{H}(z)\} = \frac{1}{2}[\bar{z}F(z) + z\bar{F}(\bar{z}) + \mathcal{H}(z) + \bar{\mathcal{H}}(\bar{z})], \quad (11)$$

gde smo sa  $\bar{F}(\bar{z}) = P(x,y) - iQ(x,y)$  i  $\bar{\mathcal{H}}(\bar{z}) = R(x,y) - iS(x,y)$  označili konjugovane funkcije funkcijama  $F(z)$  i  $\mathcal{H}(z)$ .

Isti rezultati važe i ako se opredelimo za izražavanje naponske funkcije pomoću polarnih koordinata  $r$  i  $\varphi$  i naponsku funkciju  $\phi(r,\varphi)$  možemo usvojiti u istom obliku:

$$\phi(r,\varphi) = \operatorname{Re}\{\bar{z}F(z) + \mathcal{H}(z)\} \quad (12)$$

pri čemu je kompleksni argument izražen kao  $z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$  i  $\bar{z} = re^{-i\varphi}$ .

#### VII.6.1. DEFINISANJE STANJA NAPONA I STANJA DEFORMACIJA POMOĆU FUNKCIJA KOMPLEKSNE PROMENLJIVE

Pošto smo definisali naponsku funkciju  $\phi(x,y)$  odnosno  $\phi(r,\varphi)$  pomoću analitičkih funkcija  $F(z)$  i  $\mathcal{H}(z)$  kompleksne promenljive  $z = x+iy$  odnosno  $z = re^{i\varphi}$ , potrebno je da pomoću nje izrazimo komponentne normalne i smičući napon, odnosno dilatacije i klizanja, kao i koordinate vektora pomeranja, bilo da se radi o Descartes-ovom koordinatnom sistemu bilo da

se radi o poarnocilindričkom koordinatnom sistemu, pri čem i cemo koristiti izraze koje smo izveli prethodnom delu ovog poglavlja:

a° Za Descartes-ov koordinatni sistem izraze VII.1 (26) i (28) odnosno VII.4. (66) oblika:

$$\beta_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}; \quad \beta_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \quad \beta_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (13)$$

b° Za polarni koordinatni sistem izraze VII.4. (62) i (66):

$$\begin{aligned} \beta_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}; & \beta_\varphi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}; \\ \beta_{rp} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \varphi}; \end{aligned} \quad (14)$$

a° Komponente vektora pomeranja i komponentni naponi u Descartes-ovom koordinatnom sistemu izraženi pomoću funkcija  $F(x)$  i  $\delta(x)$  kompleksne promenljive.

Veze dilatacija linijskih elemenata u pravcima koordinatnih osa i klizanja izmedju njih i normalnih i smičućih napona za revni sa normalama u pravcima koordinatnih osa u Descartes-ovom koordinatnom sistemu se mogu izraziti u obliku:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} (\beta_x - \mu \beta_y) = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right); \\ E_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\beta_y - \mu \beta_x) = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right); \\ f_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2(1+\mu)}{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{2(1+\mu)}{E} \beta_{xy} \end{aligned} \quad (15)$$

Imajući u vidu da je  $p(x,y) = \Delta \phi(x,y)$  i da je  $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{4} p(x,y)$  sledi da je:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} \left[ (P - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}) - \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] = \frac{1}{E} \left[ P - (1+\mu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right], \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} \left[ 4 \frac{\partial P}{\partial x} - (1+\mu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]; \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{E} \left[ 4 \frac{\partial Q}{\partial y} - (1+\mu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right]; \end{aligned} \quad (16)$$

odakle integraljenjem po x odnosno y dobijamo komponente  $u(x,y)$  i  $v(x,y)$  vektora pomeranja  $\vec{S}(x,y)$  u obliku:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{E} \left[ 4 P(x,y) - (1+\mu) \frac{\partial \phi}{\partial x} + f_1(y) \right]; \\ v(x,y) &= \frac{1}{E} \left[ 4 Q(x,y) - (1+\mu) \frac{\partial \phi}{\partial y} + f_2(x) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

U poslednjim izrazima  $f_1(y)$  i  $f_2(x)$  su proizvoljne funkcije, koje se svede na oblik:  $f_1(y) = -C_2 y + C_1$  i  $f_2(x) = C_2 x + C_2$  jer moraju da zadovolje uslov  $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$  i treci uslov iz (15) koji se svodi na  $\frac{df_1}{dy} + \frac{df_2}{dx} = 0$ .

Ove komponente  $f_1(y)$  i  $f_2(x)$  predstavljaju komponente vektora pomeranja krutog tela i mogu se izostaviti iz izraza (17) kojima hoćemo da obuhvatimo samo deo vektora pomeranja čestica ploče koji odgovara čistoj deformaciji ploče koja se izvodi promenom oblika i promenom zapremine. Imajući u vidu poslednje rečeno, komponente  $u(x,y)$  i  $v(x,y)$  vektora pomeranja  $\tilde{S}(x,y)$  čestica napregnute ploče koji potiču od čiste deformacije promenom oblika i zapremine ploče, uz eliminisanje dela koji se odnosi na čistu translaciju i rotaciju koje odgovaraju krutom telu, možemo da napišemo:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{E} \left[ 4P(x,y) - (1+\mu) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right], \\ v(x,y) &= \frac{1}{E} \left[ 4Q(x,y) - (1+\mu) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (17*)$$

Pomnožimo komponentno pomeranje  $v(x,y)$  imaginarnom jedinicom i saberimo ga sa  $u(x,y)$  tako da dobijamo:

$$u(x,y) + i v(x,y) = \frac{1}{E} \left[ 4(P+iQ) - (1+\mu) \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right]. \quad (18)$$

Imajući u vidu da je  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}} = 1$  i da je  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{y}} = i$ , kao i  $F(z) = P + iQ$  sledi da je:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{d\phi}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{d\phi}{d\bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}} + i \frac{d\phi}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} + i \frac{d\phi}{d\bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{y}} = 2 \frac{d\phi}{dz}; \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} &= F(z) + z \bar{F}'(\bar{z}) + \bar{\lambda}'(\bar{z}) + [F'(z) + \lambda'(z) + \bar{F}'(\bar{z})] \frac{dz}{d\bar{z}}; \end{aligned} \quad (19)$$

odakle sledi da je:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} = F(z) + z \bar{F}'(\bar{z}) + \bar{\lambda}'(\bar{z}). \quad (20)$$

Sada izraz (18) možemo napisati u obliku:

$$u(x,y) + i v(x,y) = \frac{3-\mu}{E} F(z) + z \bar{F}'(\bar{z}) + \bar{\lambda}'(\bar{z}). \quad (21)$$

Zimo sada  $\beta_x + \beta_y$  i  $\beta_y - \beta_x + 2i \tilde{\lambda}_{xy}$  pomoću naponske funkcije  $\phi(x,y)$ , obijamo da je:

$$\beta_x + \beta_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2};$$

$$\beta_y - \beta_x + 2i \tilde{\lambda}_{xy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}. \quad (22)$$

steći izraz (20) njegovim diferenciranjem redom po x odnosno po y dobija-

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = F''(z) + z \bar{F}''(\bar{z}) + \bar{F}'(\bar{z}) + \bar{\lambda}''(\bar{z}) \quad (23*)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + i \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = i \left[ F'(z) - z \bar{F}''(\bar{z}) + \bar{F}'(\bar{z}) - \bar{\mathcal{H}}''(\bar{z}) \right] \quad (23**)$$

Da bi smo dobili prethodne izraze (22) izražene pomoću funkcija kompleksne promenljive  $F(z)$  i  $\mathcal{H}(z)$ , drugu jednačinu sistema (23) pomnožimo imaginarnom jedinicom  $i\sqrt{-1}$  i oduzmemmo je ili saberemo sa prvom istog sistema dobićemo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= 2 \left[ F'(z) + \bar{F}'(\bar{z}) \right] = 4 \operatorname{Re} \{ F'(z) \} ; \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} &= 2 \left[ z \bar{F}''(\bar{z}) + \bar{\mathcal{H}}''(\bar{z}) \right], \end{aligned} \quad (24)$$

što nas zatim dovodi do sledećih relacija:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= b_x + b_y = 2 \left[ F'(z) + \bar{F}'(\bar{z}) \right] = 4 \operatorname{Re} \{ F'(z) \} ; \\ b_y - b_x - 2i \tilde{\epsilon}_{xy} &= 2 \left[ z \bar{F}''(\bar{z}) + \bar{\mathcal{H}}''(\bar{z}) \right]. \end{aligned} \quad (24*)$$

Poslednje relacije daju vezu izmedju normalnih komponentnih napona  $b_x$  i  $b_y$  i smičućeg napona  $\tilde{\epsilon}_{xy}$  i analitičkih funkcija  $F(z)$  i  $\mathcal{H}(z)$  kompleksne promenljive  $z$ , odnosno njihovih konjugovanih vrednosti.

Poslednja jednačina sistema (24\*) se u literaturi nalazi i u obliku koji se dobija kada se u kojumesto  $-i$  stavi  $i$  u obe strane:

$$b_y - b_x + 2i \tilde{\epsilon}_{xy} = 2 \left[ \bar{z} \bar{F}''(z) + \bar{\mathcal{H}}''(z) \right] \quad (24**)$$

t.j. ovo je konjugovani oblik drugoj jednačini iz sistema (24\*).

$b^0$  Komponente vektora pomeranja i komponentni normalni i smičući naponi u polarnom koordinatnom sistemu izraženi pomoću funkcija  $F(z)$  i  $\mathcal{H}(z)$  kompleksne promenljive.

Veze izmedju dilatacija  $\epsilon_r$  i  $\epsilon_\varphi$  linijskih elemenata u radijalnom i cirkularnom pravcu i klizanja  $\delta_{rp}$  izmedju njih i komponenata tensora napona  $b_r$ ,  $b_\varphi$  i  $\tilde{\epsilon}_{rp}$  za ravni sa ortovima normala u radijalnom i cirkularnom pravcu, su oblika:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial \mu_r}{\partial r} = \frac{1}{E} \left[ (1+\mu) b_r - \mu \mathcal{N}_1 \right], \\ \epsilon_\varphi &= \frac{1}{r} \left[ \mu_r + \frac{\partial \nu_r}{\partial \varphi} \right] = \frac{1}{E} \left[ (1+\mu) b_\varphi - \mu \mathcal{N}_1 \right]; \\ \delta_{rp} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \mu_r}{\partial \varphi} - \nu_r \right) + \frac{\partial \nu_r}{\partial r} \right] = \frac{2(1+\mu)}{E} \tilde{\epsilon}_{rp}; \end{aligned} \quad (25)$$

gde smo sa  $\mu_r(r, \varphi)$  i  $\nu_r(r, \varphi)$  označili komponente vektora pomeranja  $\vec{s}(r, \varphi) = \mu_r \vec{r}_0 + \nu_r \vec{C}$  u radijalnom i cirkularnom pravcu, dok je  $\mathcal{N}_1 = b_x + b_y = b_r + b_\varphi$  dato izazrom (24\*). Imajući u vidu vezu (14) izmedju komponenata tezora napona i naponske

290.

funcije  $\phi(r,\varphi)$  to jednačine (25) možemo izraziti pomoću naponske funkcije  $\phi(r,\varphi)$  koju smo usvojili u ubliku (11) s tim što kompleksne promenljive izražavamo pomoću polarnih koordinata radijusa  $r$  i polarnog ugla  $\varphi$ . Sada naponska funkcija zadovoljava uslov:

$$\Delta \phi(r,\varphi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = P(r,\varphi) \quad (26)$$

Zatim sličnim postupkom kao i u a<sup>o</sup> možemo integraljenjem da dodjemo do sledeće veze:

$$U_r(r,\varphi) + i U_\varphi(r,\varphi) = e^{-i\varphi} \left\{ \frac{3-\mu}{E} F(z) - \frac{1+\mu}{E} \left[ z \bar{F}'(\bar{z}) + \bar{F}'(\bar{z}) \right] \right\}, \quad (27)$$

odnosno:

$$\begin{aligned} b_r + b_\varphi &= 4R \left\{ F'(z) \right\} = 2 \left[ F'(z) + \bar{F}'(\bar{z}) \right]; \\ b_\varphi - b_r + 2i \tilde{c}_{r\varphi} &= 2 \left[ \bar{z} F''(z) + \bar{F}''(\bar{z}) \right] e^{2i\varphi}; \end{aligned} \quad (28)$$

ili:

$$b_r - i \tilde{c}_{r\varphi} = F'(z) + \bar{F}'(\bar{z}) - \left[ \bar{z} F''(z) + \bar{F}''(\bar{z}) \right] e^{2i\varphi} \quad (29)$$

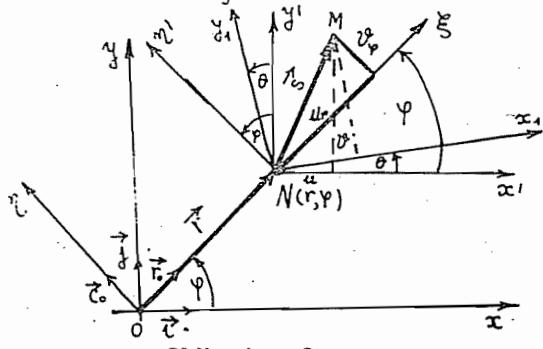
Pri izvodjenju izraza (27) i (28) imali smo u obzir da je funkcija  $F(z) = P(r,\varphi) + i Q(r,\varphi)$  i da za njen realni i imaginarni deo važe Cauchy-Reimann-ovi uslovi oblika  $r \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial Q}{\partial \varphi}$ ,  $r \frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial \varphi}$ , kao i da je izvod funkcije  $F(z)$  oblika:

$$F'(z) = \left( \frac{\partial P}{\partial r} + i \frac{\partial Q}{\partial r} \right) e^{-i\varphi} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial Q}{\partial \varphi} - i \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right) e^{-i\varphi} \quad (30)$$

Do izraza (27) i (28) možemo doći i transformacijom koordinata vektora pomeranja

$$\vec{s}(r,\varphi) = U_r(r,\varphi) \vec{r}_0 + U_\varphi(r,\varphi) \vec{c}_0 = U(x,y) \vec{i} + V(x,y) \vec{j} \quad (31)$$

iz Descartes-ovog polarni koordinatni sistem.



Slika br. 2

Ortovi radijalnog i cirkularnog pravca su:

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j} \\ \vec{c}_0 &= -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \end{aligned} \quad (31*)$$

ta njihovim unošenjem u izraz za vektor pomeranja (31) dobijamo:

$$\vec{s}(r,\varphi) = [U_r(r,\varphi) \cos \varphi - U_\varphi(r,\varphi) \sin \varphi] \hat{i} + [U_r(r,\varphi) \sin \varphi + U_\varphi(r,\varphi) \cos \varphi] \hat{j} \quad (31**)$$

ili ako predjemo na pomeranje u kompleksnom obliku možemo da pišemo:

$$s(r,\varphi) = U(x,y) + i V(x,y) = [U_r(r,\varphi) + i U_\varphi(r,\varphi)] e^{i\varphi} \quad (32)$$

gde je  $i = \sqrt{-1}$  imaginačna jedinica, za razliku od  $\hat{i}$  i  $\hat{j}$  koji su ortovi koordinatnih osa Descartes-ovog koordinatnog sistema. Pomoću izraza (32) i izraza (18) direktno dobijamo izraz (27) do koga smo došli direktnim integraljenjem.

Prva relacija izraza (24\*) se može automatski u istom obliku prevesti na polarni koordinatni sistem koristeći činjenicu da taj izraz predstavlja prvu invariјantu  $N_1 = \bar{\epsilon}_x + \bar{\epsilon}_y = \bar{\epsilon}_r + \bar{\epsilon}_\varphi$  posmatranog ravnog stanja napona, tj. da su  $\bar{\epsilon}_r$  i  $\bar{\epsilon}_\varphi$  kao  $\bar{\epsilon}_x$  i  $\bar{\epsilon}_y$  u istoj ravni i da se mogu dobiti transformacijom matrice tensora napona pri rotaciji koordinatnog sistema Oxyz oko ose Oz do poklapanja osa Ox i Oy sa radialnim i cirkularnim pravcima, pa se direktno ovim obrazloženjem sa te jednačine može preći na njen oblik – prvu jednačinu datu sistemom (28).

Za dobijanje druge veze sistema (28) treba izvršiti transformaciju izraza  $\bar{\epsilon}_x - \bar{\epsilon}_y - 2i\bar{\epsilon}_{xy}$  preko  $\bar{\epsilon}_r, \bar{\epsilon}_\varphi, \bar{\epsilon}_{r\varphi}$  za posmatrano naponsko stanje. To ćemo uraditi na sledeći način: Pomoću formula transformacije koordinata tensora napona možemo da napišemo:

$$\bar{\epsilon}_r = (r_o) N \{ r_o \}; \quad \bar{\epsilon}_\varphi = (c_o) N \{ c_o \}; \quad \bar{\epsilon}_{r\varphi} = (c_o) N \{ r_o \}, \quad (33)$$

odakle sledi veza izmedju koordinata tensora napona u Descartes-ovom i polarnom koordinatnom sistemu oblika:

$$\bar{\epsilon}_r = (\cos \varphi \sin \varphi) \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_x & \bar{\epsilon}_{yx} \\ \bar{\epsilon}_{xy} & \bar{\epsilon}_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} = \bar{\epsilon}_x \cos^2 \varphi + \bar{\epsilon}_y \sin^2 \varphi + 2\bar{\epsilon}_{xy} \sin \varphi \cos \varphi;$$

$$\bar{\epsilon}_\varphi = (-\sin \varphi \cos \varphi) \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_x & \bar{\epsilon}_{yx} \\ \bar{\epsilon}_{xy} & \bar{\epsilon}_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix} = \bar{\epsilon}_x \sin^2 \varphi + \bar{\epsilon}_y \cos^2 \varphi - 2\bar{\epsilon}_{xy} \sin \varphi \cos \varphi; \quad (34)$$

$$\bar{\epsilon}_{r\varphi} = (-\sin \varphi \cos \varphi) \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_x & \bar{\epsilon}_{yx} \\ \bar{\epsilon}_{xy} & \bar{\epsilon}_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} = (\bar{\epsilon}_y - \bar{\epsilon}_x) \sin \varphi \cos \varphi + \bar{\epsilon}_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi).$$

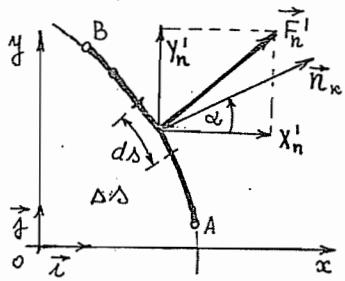
Pomoću prethodnih izraza lako sastavljamo sledeću vezu:

$$\bar{\epsilon}_\varphi - \bar{\epsilon}_r + 2i\bar{\epsilon}_{r\varphi} = (\bar{\epsilon}_y - \bar{\epsilon}_x - 2i\bar{\epsilon}_{xy}) e^{2i\varphi}, \quad (35)$$

pri čemu smo uzeli u obzir da je:  $e^{2i\varphi} = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$ .

Ovaj poslednji izraz drugu vezu iz sistema (24\*) prevodi na oblik iz sistema (28).

### VII.6.2. GRANIČNI USLOVI



Slika br. 3

Da bi smo pri rešavanju zadataka mogli da obuhvatimo dejstvo spoljašnjeg opterećenja rasporedjenog po konturnim površima ravno napregnute ploče čije stanje napona i stanje deformacija proučavamo, potrebno je odrediti vezu između unutrašnjih napona  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  u tačkama na konturoj površi za istu površ i spoljašnjih površinskih sile koje će-

mo izraziti pomoću specifičnih vrednosti  $\vec{F}_n' = X_n' \vec{x} + Y_n' \vec{y}$  koje dejstvuju po jedinici površine konturnih površi ploče. Ako uzmemo jediničnu debljinu ploče i vežemo specifične površinske sile za jedinicu dužine konture ploče, onda na osnovu Cauchy-jevih graničnih uslova možemo da pišemo sledeće:  $\{F_n'\} = M_K \{n_k\}$ , gde je  $(n)_k = (\cos \alpha \quad \sin \alpha)$  ort normale na konturnu površ ploče u tački na konturi, kao što je to prikazano na slici br. 3:

$$\begin{aligned} X_n' &= [\sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha]_k \\ Y_n' &= [\sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha]_k \end{aligned} \quad (36)$$

Ako sa označimo element luka ko konturi srednje površi ploče, i uzmemo u obzir da je  $\cos \alpha = \frac{dy}{ds}$  i  $\sin \alpha = -\frac{dx}{ds}$  i imajući u vidu veze (13) uslovi (36) se transformišu na oblik:

$$\begin{aligned} X_n' &= \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} \right]_k = \left[ \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right]_k \\ Y_n' &= \left[ -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} \right]_k = \left[ -\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right]_k \end{aligned} \quad (37)$$

gde je  $\frac{d}{ds}$  izvod po luku  $\Delta s$ .

Ukupna sila koja destvuje po konturnoj površi određenoj jediničnom debljinom ploče i lukom  $\Delta s$  od tačke A do tačke B konture je:

$$\begin{aligned} X_n &= \int_A^B X_n' ds = \int_A^B \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_k ds = \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_A^B \\ Y_n &= \int_A^B Y_n' ds = - \int_A^B \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_k ds = - \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_A^B \end{aligned} \quad (38)$$

Moment površinskih sila koje dejstvuju po konturnoj površi jedinične debljine i luka  $\Delta s$  konture od tačke A do tačke B za koordinatni početak je:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n^{\vec{F}_n} &= \int_A^B \left[ \vec{r}, \vec{F}_n \right] d\lambda = \int_A^B (x Y_n - y X_n) d\lambda = - \int_A^B \left[ x d\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + y d\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \right] = \\ &= - \left[ x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] \Big|_A^B + \phi(x, y) \Big|_A^B \end{aligned} \quad (39)$$

Da bi smo rešili zadatke koristeći opisanu metodu funkcije kompleksne promenljive treba još ukazati na pristup korišćenju graničnih uslova. Zadatak se sastoji u određivanju tri komponente tenzora napona  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  i  $\gamma_{xy}$  ili  $\delta_r$ ,  $\delta_\theta$  i  $\gamma_{rp}$  i tenzora deformacije  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  i  $\gamma_{xy}$  ili  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$  i  $\gamma_{rp}$  i vektora pomeranja  $\vec{s}$ , odnosno njegovih koordinata  $u$  i  $v$ , ili  $u_r$  i  $v_\theta$ , a koristeći se pri tome izvedenim izrazima (21) i (24) za Descartes-ov i (27) i (28) za polarni koordinatni sistem. Koji ćemo od koordinatnih sistema izabrati zavisi od samog oblika ploče - njene konture odnosno od njenih graničnih uslova koji obuhvataju i oblik konturne površi i oblik i vrstu spoljašnjeg površinskog opterećenja za koje smo izrazima (38) i (39) pokazali da su za deo konture ekvivalentni sili i spregu.

U naznačenim izrazima (21), (24), (27), i (28) figurišu sve analitičke funkcije  $F(z)$  i  $\mathcal{H}(z)$  kompleksne promenljive ili njihovi izvodi. Po ovoj metodi zadatku se sada sastoji u određivanju ili izboru tih funkcija. Ne postoji uputstvo kako bi smo te funkcije pouzdano izabrali ili odredili unapred, tako da budu u konačnom obliku, pa je zato pouzdano koristiti LOrin-ov red po kompleksnoj promenljivoj  $z = x + iy = re^{i\varphi}$ . Nepoznate koeficijente takvih redova treba odrediti iz uslova zadovoljenja graničnih uslova, a i ograničavanje reda na određeni konačni broj članova se definiše željenom tačnošću aproksimacije. To znači da je definisana tačnost aproksimacije graničnih uslova kriterijum za određivanje broja članova reda kojim definišemo analitičke funkcije  $F(z)$  i  $\mathcal{H}(z)$  kompleksne promenljive. Zato te funkcije pretpostavljamo u vidu njihovih izvoda po kompleksnoj promenljivoj,  $F'(z)$  i  $\mathcal{H}''(z)$  u obliku:

$$F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{-n}, \quad \mathcal{H}''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^{-n}, \quad (40)$$

na osnovu čega integraljenjem postaje:

$$\begin{aligned} F(z) &= A_0 z_0 + A_1 \ln z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n z^{-n+1}}{1-n} + C_1 \\ \mathcal{H}'(z) &= B_0 z + B_1 \ln z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n z^{-n+1}}{n-1} + C_2 \end{aligned} \quad (41)$$

b<sup>o</sup>

$$F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n, \quad \mathcal{H}''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n, \quad (42)$$

što integraljenjem daje:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{z^{n+1}}{n+1} + C_3, \quad \mathcal{H}'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^{n+1}}{n+1} + C_4. \quad (43)$$

c<sup>o</sup>

$$F'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^n, \quad \mathcal{H}''(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n z^n \quad (44)$$

u kojima su  $A_n$  i  $B_n$  nepoznati koeficijenti koji se odredjuju iz graničnih uslova uzimanjem u obzir rasporeda površinskih sila ili pomeranja tačaka konture.

Kako se radi o zadacima sa jednostruko ili višestruko povezanim oblastima to postoji više konturnih linija  $k_i$  koje prepostavljamo da mogu biti otvorene ili zatvorene, i kako granične uslove možemo zadavati pomoću površinskih sila i komponenata vektora pomeranja to granični uslovi se mogu napisati u obliku:

$$1^o \quad [\mu(x,y) + i v(x,y)]_{k_i} = \sum_{-\infty}^{+\infty} D_n z^n \Big|_{k_i} = g_{1i}(x,y) \Big|_{k_i},$$

$$[\beta_x + \beta_y]_{k_i} = \sum_{-\infty}^{\infty} L_n z^n \Big|_{k_i} = g_{2i}(x,y) \Big|_{k_i}, \quad (45)$$

$$[\beta_y - \beta_x + 2i \gamma_{xy}]_{k_i} = \sum_{-\infty}^{\infty} N_n z^n \Big|_{k_i} = g_{3i}(x,y) \Big|_{k_i},$$

2<sup>o</sup>

$$[\mu_r + i v_\varphi]_{k_i} = \sum_{-\infty}^{\infty} H_n z^n \Big|_{k_i} = g_{1i}(r,\varphi) \Big|_{k_i},$$

$$[\beta_r + \beta_\varphi]_{k_i} = \sum_{-\infty}^{\infty} V_n z^n \Big|_{k_i} = g_{2i}(r,\varphi) \Big|_{k_i}, \quad (46)$$

$$[\beta_\varphi - \beta_r - 2i \gamma_{r\varphi}]_{k_i} = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n z^n \Big|_{k_i} = g_{3i}(r,\varphi) \Big|_{k_i},$$

u kojima su  $D_n$ ,  $L_n$ ,  $N_n$ ,  $H_n$ ,  $V_n$ , i  $C_n$  koeficijenti razvoja graničnih us u Lorin-ov red i koji su nam u načelu poznati, a zatim pomoću njih možemo raziti nepoznate koeficijente  $A_n$  i  $B_n$  čime smo zadatak rešili.

## VIII.OSNOVI METODE KONAČNIH ELEMENATA

Metoda konačnih elemenata ,u daljem tekstu MKE , bazira se na uoptrebi matrične algebre za diskretizaciju proizvoljnog deformabilnog tela ( proizvoljne elastične konstrukcije) na odgovarajuće konačne elemente za koje koristimo odgovarajuće jednačine elastomehanike.Metoda konačnih elemenata pripada metodama diskretne analize.Za razliku od numeričkih metoda koje se zasnivaju na matematičkoj diskretizaciji jednačina graničnih problema, metoda konačnih elemenata se zasniva na fizičkoj diskretizaciji razmatranog deformabilnog tela.Umesto elemenata diferencijalno malih dimenzija u MKE osnovu za razmatranje predstavlja deo domena konačnih dimezija, poddomen ili konačni element.Zbog toga su osnovne jednačine pomoću kojih se opisuje stanje napona i deformacija u pojedinim elementima, a pomoću kojih se formuliše i problem u celini,umesto diferencijalni i integralnih obične algebarske.Sa stanovišta fizičkog tumačenja MKE, proučavano deformabilno telo kao kontinuum sa beskonačno mnogo stepeni slobode zamenjuje se diskretnim modelom međusobno povezanih konačnih elemenata, sa konačnim brojem stepeni slobode.

Argyris je 1954 - 55 godine prvi objavio opšte osnove i koncepte metode konačnih elemenata,mada je osnovna ideja o fizičkoj diskretizaciji kontinuuma,na kojoj se zasniva MKE veoma stara,koliko i ljudsko nastojanje da se teško rešivi problemi zamene jednostavnijim,čija se rešenja lakše nalaze.Još pre 2000 godine na ovom principu su rešavani neki zadaci iz geometrije (napr. Arhimed je sračunavao granice u kojima se nalazi broj  $\pi$ ). Ipak razvoj MKE,iako baziran na poznatoj ideji,počeo je tek oko polovine ovog veka.i razvijao se kroz dva pristupa prvo inženjerskim,a zatim i matematičkim. Metodu fizičke diskretizacije kontinuuma prvo je primenio Hrenikoff 1941,međutim tek radovi Argyris-a i njegovih učenika predstavljaju polaznu osnovu za opštu matričnu formulaciju poznatih metoda statike linijskih konstrukcija

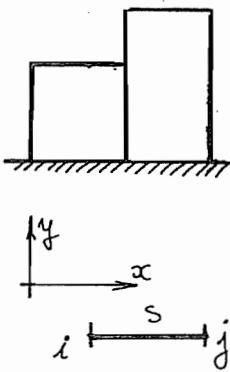
i početak brzog napredka u proračunu konstrukcija koji je nastao primenom računara.

Matematička teorija konačnih elemenata postavljena je sedamdesetih godina kroz niz objavljenih članaka i nekoliko monografija, koje su posvećene matematičkim osnovama MKE.

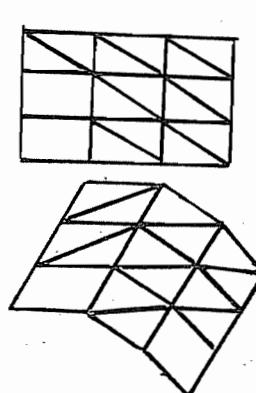
Metoda konačnih elemenata zasnovana je tako da je lako jednim opštim postupkom rešimo razne probleme konstrukcija izvedenih kao linijske, ravne ili pak konstrukcije u obliku deformabilnog tela. Lake konstrukcije se mogu predstaviti modelom koji predstavlja kombinaciju elemenata u vidu linijskih, površinskih (pločastih) ili trodimenzionalnih tela.

Kako je broj diskretnih modela za jedno deformabilno napregnuto telo neograničeno veliki, osnovni je zadatak da se izabere onaj model kojim najbolje aproksimiramo stanje naponai stanje deformacija, kao i granične uslove na površi konture tela. Iako nema egzaktnih kriterijuma koji obezbedjuju izbor najboljeg diskretnog modela, teorija konačnih elemenata omogućava da se dodje do rešenja koja odgovaraju stvarnom stanju napona i deformacija napregnutog tela, čemu svakako doprinosi inženjerska intuicija i kvalitativno poznavanje stanja napona i stanja deformacije (naprimjer uz pomoć eksperimentalnih metoda ili posmatranja).

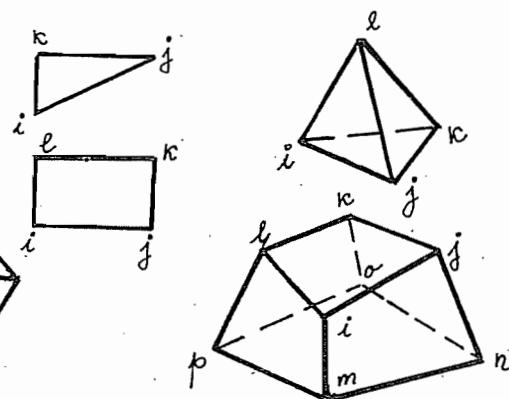
Po metodi konačnih elemenata deformabilno telo (konstrukciju) diskretizujemo na konačne elemente jednog tipa ili pak različitih tipova. Za linijske konstrukcije konačne elemente biramo u obliku linijskih elemenata ili stubova, kao što je na slici br. 1 prikazano. Za površinske i ravne konstrukcije konačni elementi su oblika pločica i to: trouglastih, pravougaonih ili opšte četvorougaonih, kao što je na slici br. 2 prikazano.



Slika br. 1



Slika br. 2



Slika br. 3

Za prostorne konstrukcije u obliku trodimezionalih tela konačne elemente uzimamo u obliku tetraedra i heksaedra, kao što je na slici br.3 prikazano. Svi ti konačni elementi, bez obzira kakvog su tipa, pomoću čvorova konačnih elemenata povezani su medjusobom u jednu celinu tako da čine prvobitnu konstrukciju koju smo diskretizacijom razdelili na razne tipove ili iste tipove konačnih elemenata. Konačni elementi na koje smo konstrukciju rastavili moraju da budu kompatibilni pre i posle dejstva spoljašnjih opterećenja tj. u prirodnjoj i prinudnoj konfiguraciji, nenapregnutom i napregnutom stanju, odnosno u nedeformisanom i deformisanom stanju konstrukcije.

Suština aproksimacije kontinuma (deformabilnog tela, elastične konstrukcije) po metodi konačnih elemenata sastoji se u sledećem:

1<sup>o</sup> Izučavani domen kontinuma, čije stanje napona i stanje deformacija treba da aproksimiramo, deli se pomoću fiktivnih (zamišljenih) površi ili linija na određen broj poddomena - konačnih elemenata - konačnih dimenzija. Skup konačnih elemenata za ceo domen kontinuma - deformabilnog tela naziva se sistem ili mreža konačnih elemenata.

2<sup>o</sup> Prepostavljamo da su konačni elementi medjusobom povezani u konačnom broju tačaka, koje se usvajaju na konturi konačnih elemenata. Te tačke su čvorne tačke ili čvorovi.

3<sup>o</sup> Stanje napona, stanje deformacija, polje pomeranja, polje temperature itd., u svakom konačnom elementu opisuje se pomoću interpolacionih funkcija i konačnog broja parametara u čvorovima. To su istovremeno i osnovne nepoznate veličine u metodi konačnih elemenata.

4<sup>o</sup> Za analizu stanja napona, stanja deformacija, polja vektora pomeranja konačnih elemenata i konstrukcije važe teorija napona, teorija deformacija, veza između stanja napona i stanja deformacija, kao i svi principi i postupci koji važe za klasične diskretne sisteme.

Još jednom treba naglasiti da su bazne karakteristike MKE izbor mreže konačnih elemenata, osnovnih nepoznatih, čvorova i interpolacionih funkcija, kao i analiza dobijenih rezultata od kojih zavisi saglasnost aproksimacije rešenja sa stvarnim rešenjem.

Posle izbora po MKE odgovarajućih konačnih elemenata, upotreboj jednačina elastomehanike odredujujemo veze medju pomeranjima u polju elementa i pomeranjima u čvorovima, koji odgovaraju posmatranom elementu. Tako dobijamo osnovnu jednačinu konačnog elementa, čija su čvorna pomeranja nepoznata. U daljem postupku po MKE grupišemo osnovne jednačine pojedinačnih konačnih elemenata u jednacinskoj konstrukciji u matričnom obliku, koja daje sis-

tem linearnih jednačina iz kojih, uz uzimanje u račun čvornih opterećenja i graničnih uslova, možemo da izračunamo tražene nepoznate. U ovom slučaju nepoznate su čvorna pomeranja, specifične deformacije i komponentni naponi.

U metodi koju smo opisali kao osnovne nepoznate smo izabrali deformacijske veličine, pa se ona naziva deformacijska metoda konačnih elemenata. U metodi konačnih elemenata moguće je upotrebiti i metodu sila, ali deformacijska metoda konačnih elemenata ima prednost nad njom. Takođe postoji i mešovita ili hibridna metoda. Rešenja za pomeranja po metodi deformacije uvek su sa donje, a rešenja po metodi sila su s gornje strane u odnosu na tačno rešenje. Prema mešovitoj ili hibridnoj metodi konačnog elementa za pomeranja se dobijaju vrednosti koje su sa raznih strana od tačnog rešenja.

Prema načinu na koji se izvode i definišu osnovne jednačine metoda konačnih elemenata, odnosno osnovne jednačine konačnih elemenata postoje četiri osnovna vida MKE: 1<sup>o</sup> Direktna metoda (Direct Finite Element Method); 2<sup>o</sup> Variaciona metoda (Variational Finite Element Method); 3<sup>o</sup> Metoda reziduuma (Residual Finite Element Method); i 4<sup>o</sup> Mateoda energetskog balansa (Energy Balance Finite Element Method).

Od navedenih vidova metode konačnih elemenata u mehanici deformabilnih tela od posebnog su značaja varijaciona metoda i metoda reziduuma.

### VIII.2. OPŠTE OSNOVE METODE KONAČNIH ELEMENATA

Koristeći sve rečeno u poglavljima Teorija napona i Teorija deformacija i Elatomehanika potrebno je da jedan broj tih jednačina damo u matričnom obliku koji mnogo više odgovara MKE i nudi čitav niz prednosti pri programiranju u poređenju sa tenzorskim načinom njihovog zapisivanja ili već prikazanim matričnim.

Tenzor napona, tenzor deformacije i vektor pomeranja pišemo u obliku matrica vrsta, odnosno matrica kolona sa šest ili sa tri elemenata:

$$\{\boldsymbol{\gamma}\} = (\gamma_x \ \gamma_y \ \gamma_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}), \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = (\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \delta_{xy}^x \ \delta_{yz}^y \ \delta_{zx}^z),$$

$$\{\boldsymbol{\gamma}\} = \begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}, \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \delta_{xy}^x \\ \delta_{yz}^y \\ \delta_{zx}^z \end{pmatrix}, \quad \{S\} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (1)$$

Navier-ove jednačine ravnoteže pisaćemo u obliku:

$$\mathbb{D}^{\dagger}\{\boldsymbol{\varepsilon}\} + \{\mathbf{F}_v^{\dagger}\} = 0,$$

gde je  $\mathbb{D}$  matrica diferencijalnih operatora oblika:

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

zaključak je  $\mathbb{D}^{\dagger}$  transponovana matrica matrice diferencijalnih operatora:

$$\mathbb{D}^{\dagger} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$\{\mathbf{F}_v^{\dagger}\}$  je matrica kolona čiji su elementi koordinate specifične zapreminske sile:

$$\{\mathbf{F}_v^{\dagger}\} = \begin{Bmatrix} X_v^{\dagger} \\ Y_v^{\dagger} \\ Z_v^{\dagger} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Eksplicitni oblik zapisivanja Navier-ovih jednačina ravnoteže je:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_v^{\dagger} \\ Y_v^{\dagger} \\ Z_v^{\dagger} \end{Bmatrix} = \{0\}. \quad (5)$$

Cauchy-jeve kinematičke jednačine deformabilnog tela, koje daju vezu između specifičnih deformacija i vektora pomeranja, odnosno tensora deformacije i vektora pomaranja u matričnom obliku se mogu napisati kao:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \mathbb{D}\{\mathbf{s}\} \quad (6)$$

ili u razvijenom obliku:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \delta_{xy} \\ \delta_{yz} \\ \delta_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (6*)$$

Hooke-ov zakon pišemo u obliku:

$$\{b\} = [\mathbb{E}\{\varepsilon\} + \{\delta^t\}], \quad (7)$$

gde je  $\mathbb{E}$  matrica elastičnih konstanti, ili matrica tenzora elastičnosti, kvadratna oblika:

$$\mathbb{E} = \begin{Bmatrix} \lambda + 2\nu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\nu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

i  $\{\delta^t\}$  matrica kolona čiji su elementi komponentni naponi, rezultat temperaturnih naprezanja. U eksplisitnom obliku Hooke-ov zakon elastičnosti možemo napisati kao:

$$\begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda + 2\nu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\nu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \delta_{xy} \\ \delta_{yz} \\ \delta_{zx} \end{Bmatrix} - \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

### VIII.3. PRINCIP VIRTUALNIH POMERANJA

Pod virtualnim pomeranjem podrazumevaju se moguća beskonačno mala pomeranja koja su neprekidne i diferencijabilne funkcije koordinata tačaka tela i koja su jednaka nuli u svim tačkama konturne površi tela u kojima su zadata pomeranja jednaka nuli. Ako deformabilno telo dobije mala virtualna pomeranja  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  koja veze dopuštaju mora zbir radova svih sila i spoljašnjih i unutrašnjih, na svim pomeranjima biti jed-

nak nuli. To znači da i virtualni rad spoljašnjih sila mora biti jednak pričastaju potencijalne energije. Veze koje omogućavaju virtualna pomeranja moraju zadovoljavati uslov neprekidnosti deformacija i granične uslove za pomeranja tačaka površi omotača tela. Ako uvedemo pojam virtualne specifične deformacije: virtualne dilatacije  $\delta \varepsilon_{ij}$  i virtualnog klizanja  $\delta \gamma_{ij}$  onda specifični virtualni deformacioni rad ili virtualni elastični potencijal može se napisati u obliku:

$$\delta A_d^1 = \delta W = \delta_x \delta \varepsilon_x + \delta_y \delta \varepsilon_y + \delta_z \delta \varepsilon_z + \sum_{xy} \delta \delta_{xy}^x + \sum_{yz} \delta \delta_{yz}^y + \sum_{zx} \delta \delta_{zx}^z, \quad (10)$$

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij}.$$

Koristeći izvedene Castigliano-ve obrasce iz (V.2.50) kao i izraze za vezu rada spoljašnjih sila i elastičnog potencijala i kako spoljašnje sile ne podležu varijaciji, princip virtualnih pomeranja možemo izraziti ovako:

$$\delta \left[ \int_S (\vec{F}_n' \cdot \vec{s}) dS + \int_V (\vec{F}_V' \cdot \vec{s}) dV - 2 \int_V W dV \right] = \delta \Pi = 0, \quad (11)$$

što je istovremeno i uslov ekstremuma potencijalne energije deformabilnog tela. Prema Lejeune-Dirichlet-ovom kriterijumu stabilnosti u konfiguraciji statilne elastične ravnoteže potencijalna energija ima stacionarnu vrednost i to minimum. Od svih mogućih pomeranja koje veze dopuštaju stvarna pomeranja deformabilnog tela se odlikuju time što je za njih potencijalna energija deformabilnog tela ima ekstremnu vrednost i to minimum. Ovo je princip minimuma potencijalne energije pri varijaciji komponentnih pomeranja ili princip virtualnog rada.

Označimo sada sa  $\{F\}$  vektor maticu kolonu čiji su elementi generalisane koordinate čvornih sila, a sa  $\{\delta u\}$  vektor-matricu vrstu čiji su elementi generalisane koordinate vektora virtualnih pomeranja napadnih tačaka odgovarajućih čvornih sila:

$$(F) = (F_1 \ F_2 \ \dots \ F_n \ M_1 \ M_2 \ \dots \ M_n),$$

$$(\delta u) = (\delta u_1 \ \delta u_2 \ \dots \ \delta u_n \ \delta \gamma_1 \ \delta \gamma_2 \ \dots \ \delta \gamma_n) \quad (12)$$

Onda je za sisteme u ravnoteži a sa tim i za jedan njegov konačni element virtualni rad čvornih sila jednak virtualnom radu unutrašnjih sila kontinuuma, što za MKE je pogodno napisati u matričnom obliku i to:

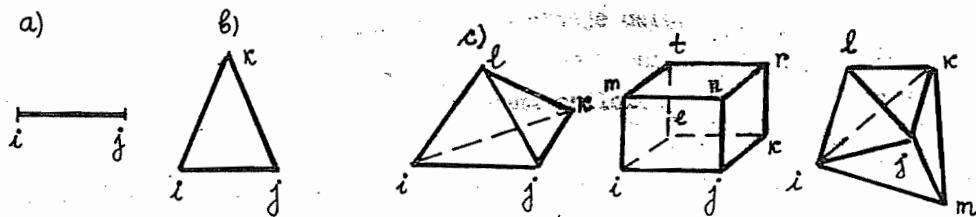
$$(\delta u) \{ F \} = (\delta \varepsilon) \{ \delta \} dV, \quad (13)$$

gde je  $dV$  elementarna zapremina tela.

#### VIII.4. OPŠTI OPIS POSTUPKA MKE ZA PROBLEME U OBLASTI ELASTOMEHANIKE

##### VIII.4.1. MATRICA POLJA I INTERPOLACIONA MATRICA KONAČNOG ELEMENTA

Konstrukciju ili deformabilno telo na koje hoćemo da primenimo MKE podelimo na konačne elemente zavisno od tipa konstrukcije ili oblika deformabilnog tela. Ako se radi o linijskim konstrukcijama podelićemo ih na konačne elemente u obliku pravih delova - linijskih elemenata, kao na slici br. 4 pri čemu ćemo čvorove da označimo sa  $i, j, k$ . Ako se radi o



Slika br. 4

ravnim konstrukcijama ili pločastim telima, materijalnim površima, podelićemo ih na ravne konačne elemente, naprimjer trouglove sa čvorovima označenim sa  $i, j, k$  ili pak četvorouglove sa čvorovima  $i, j, k, l$ , kao što je na slici br. 4 b naznačeno. Ako se radi o prostornim konstrukcijama - trodimenzionanim telima onda ćemo ih izdeliti na konačne elemente, naprimjer u obliku tetraedra sa čvorovima  $i, j, k, l$ , ili u obliku kvadra sa čvorovima  $i, j, k, l, m, n, r, t$ , ili oblika heksaedra sa čvorovima  $i, j, k, l, m$ , kao što je na slici br. 4 c prikazano. U slučaju kombinovane konstrukcije istu ćemo podeliti na odgovarajuće konačne elemente koji mogu biti raznih tipova, koje smo već pojedinačno nabrojali.

Svaki element konstrukcije ili deformabilnog tela ima polje i čvorove. Konstrukcija je preko zajedničkih čvorova elemenata povezana u celinu. Elementi na koje smo fiktivno podelili konstruk-

čiju moraju biti kompatibilni i u prirodnoj i u prinudnoj konfiguraciji deformabilnog tela - konstrukcije. Konačni elementi pomoću odgovarajućih čvorova se povezuju u konstrukciju.

Izvadimo iz deformabilnog tela (konstrukcije) jedan konačni elemet i posmatrajmo vektor pomeranja  $\{s\}$  u polju tog elementa. U opštem slučaju za proizvoljni oblik opterećenja vektor pomeranja je funkcija koordinata tačaka u polju elementa i komponente vektora pomeranja  $\{s\}$  su nepoznate funkcije koordinata:

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(x,y,z) \\ g(x,y,z) \\ h(x,y,z) \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Medino za linijske elemente koristeći rezultate iz otpornosti materijala možemo uzeti da su za poznate slučajeve nosača i opterećenja poznate komponente vektora pomeranja.

Za opštije primere linijskih elemenata možemo da pišemo da je komponenta vektora pomeranja u obliku polinoma:

$$v = \sum_{i=1}^m C_i x^i, \quad (m=3) \quad (15)$$

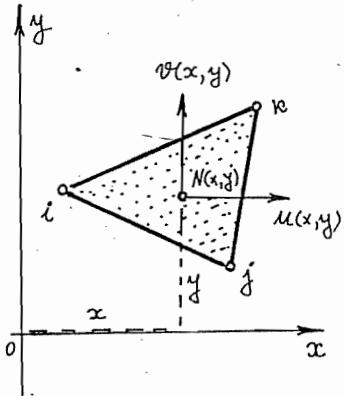
gde su  $C_i$  konstante, koje biramo tako da su zadovoljeni granični uslovi elementa, odnosno uslovi u čvorovima posmatranog linijskog elementa. Vektor pomeranja  $\{s\}$  možemo da napišemo u obliku:

$$\{s\} = \mathcal{A} \{C\}, \quad (16)$$

gde je  $\{s\}$  vektor pomeranja u polju elementa,  $\mathcal{A}$  pravougaona matrica koju nazivamo matica polja elementa,  $\{C\}$  vektor kolona čiji su elementi konstante  $C_i$  koje moramo izabrati tako da vektor pomeranja  $\{s\}$  u čvorovima elementa ima samo odredjene vrednosti uslovljene graničnim uslovima.

Matica polja elementa  $\mathcal{A}$  je sa izuzetkom linijskih elemenata unapred nepoznata, te je zato moramo izabrat. Da bi smo pokazali način izbora matrice polja  $\mathcal{A}$  izabraćemo konačni element u obliku trougla sa čvorovima koje ćemo da označimo sa  $i, j, k$  kao što je na slici br. 5 prikazano. Prepostavimo, kao najjednostavniju aproksimaciju, da je promena komponenata vektora pomeranja  $\{s\}$  u polju dovoljno malog trougaonog elementa linearna, te možemo da pišemo:

$$\{s\} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 x + C_3 y \\ C_4 + C_5 x + C_6 y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{pmatrix} = \mathcal{Q}\{C\}, \quad (17)$$



Slika br. 5

gde je u ovom izabranom primeru matrica polja oblika:

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}, \quad (17*)$$

i matrica koeficijenata:

$$\{C\} = (C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_6), \quad (17**)$$

koje treba odrediti. Pri ovakovom izboru matrice polja  $\mathcal{Q}$  smo napravili vr-

lo grubu aproksimaciju. Umesto linearog zakona za komponentna pomeranja bolja aproksimacija bi bila oblika kvadratne ili kubne zavisnosti od koordinate tačaka u polju konačnog elementa. Naprimjer za slučaj aproksimacije polinoma drugog reda matrica polja  $\mathcal{Q}$  imala bi oblik:

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

dok bi matrica kolona nepoznatih konstanti sada imala 12 elemenata.

$$\{C\} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} \quad (18*)$$

Na ovakovom primeru aproksimacije već je uočljivo da opisivanje vektora pomeranja polinomima višeg reda pored tačnije aproksimacije sobom povlači i pojavu velikog broja nepoznatih konstanti, a sa tim se javljaju i teškoće sa gromaznim računskim operacijama. S druge strane da bi se dobila jednastavna, a istovremeno i dobra aproksimacija, potrebno je uzeti veći broj manjih konačnih elemenata. Zato se može govoriti o elementarnim i višim vrstama konačnih elemenata.

Matrica polja  $\alpha$  konačnog elementa i matrica  $\{C\}$  koeficijenata nisu sasvim nezavisne od izbora čvornih elemenata. Njihov izbor zavisi od izabralih čvornih vektora konačnog elementa. Naglasili smo već da komponente vektora  $\{C\}$  moramo izabrati tako da su zadovoljeni uslovi u čvorovima elemenata, tj. vektor pomeranja  $\{S\}$  tačaka u polju elementa mora da u čvorovima elementa uzima odredjene propisane vrednosti.

Označimo sa  $\{S\}$  čvorni vektor pomeranja, tj. vektor pomeranja čvorova elementa, i on ima kao matrica kolona broj elemenata koji je jednak proizvodu broja čvorova konačnog elementa i stepeni slobode kretanja čvora, odnosno elementa. Naprimjer za konačni element u obliku trougla čvorni vektor pomeranja ima u matrici koloni 2.3 = 6 elemenata:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} \{S_i\} \\ \{S_j\} \\ \{S_k\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Elementi matrice kolone koja predstavlja čvorni vektor pomeranja su pomeranja u pravcima x i y osa svakog od tri čvora. Matrica kolona  $\{C\}$  ima šest elemenata, jer možemo postaviti šest graničnih uslova elementa, tj. šest uslova za vektor pomeranja u čvorovima.

Kao elemente čvornog vektora, pored pomeranja u pravcima osa x i y, možemo uzeti i pravce tangenata na komponente vektora pomeranja  $U(x,y)$  i  $V(x,y)$  u odnosu na ose x i y, te bi za svaki čvor konačnog elementa imali po šest komponenata što ukupno iznosi  $3.6 = 18$  elemenata u matrici koloni:

$$\{S_i\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ \partial U_i / \partial x \\ \partial V_i / \partial x \\ \partial U_i / \partial y \\ \partial V_i / \partial y \end{Bmatrix}; \quad \{S_j\} = \begin{Bmatrix} U_j \\ V_j \\ \partial U_j / \partial x \\ \partial V_j / \partial x \\ \partial U_j / \partial y \\ \partial V_j / \partial y \end{Bmatrix}; \quad \{S_k\} = \begin{Bmatrix} U_k \\ V_k \\ \partial U_k / \partial x \\ \partial V_k / \partial x \\ \partial U_k / \partial y \\ \partial V_k / \partial y \end{Bmatrix}; \quad \{S\} = \begin{Bmatrix} \{S_i\} \\ \{S_j\} \\ \{S_k\} \end{Bmatrix}; \quad \{S\} = \{S\}_{\text{čvoru}}, \quad (20)$$

Od izabranog čvornog vektora  $\{S\}$  zavisi i izbor matrice  $\{C\}$  i matrice polja  $\alpha$ . Matrica konstanti  $\{C\}$  mora imati toliko komponenta koliko ih ima i čvorni vektor  $\{S\}$ . Pri takvom izboru moramo zadovoljiti sve čvorne uslove elementa. I matrica polja  $\alpha$  mora da bude odgovarajuće izabrana za čvorni vektor  $\{S\}$ . Matrica polja  $\alpha$  mora da ima

306.

onoliko kolona koliko matrica  $\{C\}$  ima vrsta (elemenata u koloni), a onoliko vrsta koliko matrica  $\{S\}$  ima vrsta (elemenata u koloni), jer je:

$$\{S\} = \partial \{C\}. \quad (21)$$

To znači da  $\{S\}$  i  $\partial$  imaju isti broj vrsta. Eksplisitni oblik zapisa graničnih uslova bi bio:

- u čvoru i:  $x = x_i \quad u = U_i,$   
 $y = y_i \quad v = V_i,$
- u čvoru j:  $x = x_j \quad u = U_j,$   
 $y = y_j \quad v = V_j,$
- u čvoru k:  $x = x_k \quad u = U_k,$   
 $y = y_k \quad v = V_k.$

Uopšteno za granične uslove pišemo:

$$\{S^k\} = \{S\} = \{S\}_k; \quad (22)$$

gde smo indeksom  $k$  naznačili da se radi o graničnim (konturnim) uslovima u čvorovima konačnog elementa. Vektor pomeranja u polju elementa je:

$$\{S\} = \partial \{C\} \quad \text{te je za granične uslove (uslove u čvorovima):}$$

$$\{S\} = \partial_C \{C\}, \quad (23)$$

ili u eksplisitnom obliku:

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} \quad (24*)$$

Matricu  $\alpha_k$  nazivamo matriicom polja graničnih vrednosti. Ona je sastavljena od matrice po-1ja konačnog elementa za vrednosti koordinata u čvorovima konačnog elementa. Ona je konstantna za odredjene granične uslove konačnog elementa, kvadratna je, nesingularna pa ju je moguće invertovati (naći joj inverznu). Zato iz (24) možemo da osredimo matricu nepoznatih konstanti u obliku:

$$\{C\} = \alpha_k^{-1} \{S\} \quad (24**)$$

pa da za vektor pomeranja  $\{S\}$  u polju elemnta dobijemo:

$$\{S\} = \alpha \{C\} = \alpha \alpha_k^{-1} \{S\} = B \{S\} \quad (25)$$

gde je:

$$B = \alpha \alpha_k^{-1} \quad (26)$$

Jednačina

$$\{S\} = B \{S\} = \alpha \alpha_k^{-1} \{S\} \quad (27)$$

je veoma značajna jednačina u teoriji MKE, jer daje vezu izmedju vektora pomeranja  $\{S\}$  u polju elementa i čvornog vektora pomeranja  $\{S\}$  konačnog elementa.

Matricu  $B$  nazivamo interpolacionom matriicom (Shape Function). Izbor ove matrice  $B$  je od fundamentalnog značaja za metodu konačnog elementa. Kada interpolacionu matricu odredimo saglasno ranije navedenim zahtevima, dalje operacije po MKE teku po jedinstvenom postupku.

Konačne elemente koji ispunjavaju sve zahteve po opisanom postupku nazivamo kompatibilni konačni elementi (izoparametarski konačni elementi). Napred opisani postupak nije jedini mogući način da dobijemo jednačinu (27) koja daje vezu izmedju vektora pomeranja u polju elementa interpolacione matrice  $B$  i čvornog vektora pomeranja. Mogući su primjeri kada su čvorni parametri veći ili pak manji (super i subparametarski elementi) mada ćemo izučavati samo kompatibilne elemente.

## VIII.5. OSNOVNA JEDNAČINA KONAČNOG ELEMENTA

Kada smo izabrali odredjenu vrstu konačnog elementa, interpolacionu matricu  $\mathcal{B}$ , moguće je sastaviti osnovnu jednačinu konačnog elementa. Potrebno je da izračunamo i odredimo sledeće matrice:  $\{\varepsilon\}$  tenzora specifične deformacije i  $\{\delta\}$  tenzora napona u funkciji čvornog vektora  $\{S\}$  posmatranog konačnog elementa. Matrica  $\{\varepsilon\}$  tenzora specifične deformacije je:

$$\{\varepsilon\} = \mathbb{D} \{S\} = \mathbb{D} \mathcal{B} \{S\} = \mathcal{P} \{S\}, \quad (28)$$

gde je:

$$\mathcal{P} = \mathbb{D} \mathcal{B} = \mathbb{D} \alpha \alpha^{-1}. \quad (29)$$

Matrica  $\{\delta\}$  tenzora napona je:

$$\{\delta\} = \mathbb{E} \{\varepsilon\} + \{\delta^t\} = \mathbb{E} \mathcal{P} \{S\} + \{\delta^t\}. \quad (30)$$

Jednačine:

$$\{\varepsilon\} = \mathcal{P} \{S\}, \quad \{\delta\} = \mathbb{E} \mathcal{P} \{S\} + \{\delta^t\}, \quad (31)$$

omogućavaju da lako izračunamo specifične deformacije - dilatacije i klizanja - i napone - normalne i tangencijalne u proizvoljnoj tački elementa čim poznajemo čvorni vektor pomeranja  $\{S\}$ . Sa tim smo odredili parametre stanja napona i stanja deformacija konačnog elementa.

Da bi smo dobili čvorni vektor generalisanih pomeranja pri poznatom spoljašnjem opterećenju potrebno je da sastavimo osnovnu jednačinu konačnog elementa. Za određivanje osnovne jednačine konačnog elementa iskoristićemo princip virtualnog rada u obliku:

$$\{\delta u\} \{P\} = (\delta \varepsilon) \{\delta\} dV, \quad (32)$$

prilagodjavajući ga na izabrani konačni element. Neka su čvorne sile koje nadaju konačni element spoljašnje sile i neka čvorni vektor sile  $\{F\}$  ima isti broj prostornih koordinata kao i čvorni vektor pomeranja  $\{S\}$ . Za površinski element sa slike br.5 čvorni vektor sila je:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} \{F_i\} \\ \{F_j\} \\ \{F_k\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \\ X_k \\ Y_k \end{Bmatrix} \quad (33)$$

Ovim silama u čvorovima konačnog elementa možemo da pridružimo čvorni vektor virtualnih pomeranja  $\{\delta S\}$  tako da je virtualni rad spoljašnjih sila koje dejstvuju na posmatrani konačni element:

$$\delta W^s = (\delta S) \{F\}. \quad (34)$$

Virtualni deformacioni rad ili virtualni elastični potencijal unutrašnjih sila konačnog elementa je:

$$\delta W^u = \int_V (\delta \varepsilon) \{\delta\} dV. \quad (35)$$

Ako sada unesemo vrednosti za  $(\delta \varepsilon)$  i  $\{\delta\}$ :

$$(\delta \varepsilon) = (\delta S) \mathbb{E} p', \quad (36)$$

$$\{\delta\} = E p \{S\} + \{\delta^t\}, \quad (37)$$

prethodni integral za rad unutrašnjih sila pri varijaciji deformacionog stanja elementa dobijamo:

$$\delta W^u = \int_V (\delta S) \mathbb{E} p' E p \{S\} dV + \int_V (\delta S) \mathbb{E} p' \{\delta^t\} dV, \quad (38)$$

ili:

$$\delta W^u = (\delta S) \left[ \int_V \mathbb{E} p' E p \{S\} dV + \int_V \mathbb{E} p' \{\delta^t\} dV \right]. \quad (38*)$$

Izjednačavanjem virtualnog rada spoljašnjih sila i virtualnog deformacionog rada unutrašnjih sila dobijamo:

$$(\delta S) \left[ \{F\} - \int_V p' E p \{S\} dV - \int_V p' \{\epsilon^t\} dV \right] = 0. \quad (39)$$

Kako je upštem slučaju varijacija čvornog vektora pomeranja proizvoljna, to je:

$$\{F\} = \int_V p' E p \{S\} dV + \int_V p' \{\epsilon^t\} dV. \quad (40)$$

Ako sada uvedemo oznake:

$$R = \int_V p' E p dV, \quad (41)$$

$$\{F^t\} = \int_V p' \{\epsilon^t\} dV, \quad (42)$$

dobijamo jednačinu:

$$\{F\} = R\{S\} + \{F^t\}, \quad (43)$$

koju nazivamo jednačinom konačnog elementa. Ako promenu temperature deformabilnog tela (konstrukcije) ne uzmemo u račun dobijamo osnovnu jednačinu konačnog elementa u sledećem obliku:

$$\{F\} = R\{S\}. \quad (44)$$

Ova jednačina daje vezu izmedju vektora čvornih sila  $\{F\}$  i vektora  $\{S\}$  čvornih pomeranja konačnog elementa.

Matricu  $R$  odredjenu izrazom (41) nazivamo maticom krutosti konačnog elementa, gde smo sa  $p$  označili proizvod prema izrazu (29), a u kome su da se potsetimo  $D$  matica diferencijalnih operatora i  $E$  matica tensora elastičnosti, prema izrazima (3) i (8), dok je za konkretni proučavani trouglasti konačni element matica polja  $\alpha$  i  $\alpha_k$  matica polja graničnih vrednosti:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}, \quad (45)$$

$$\mathcal{A}_k = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{pmatrix}, \quad (45*)$$

tako da matricu krutosti  $\mathcal{B}$  konačnog elementa lako izračunavamo za unapred izabrani konačni element.

Kada smo matricu  $\mathcal{B}$  izabrali možemo iz jednačine konačnog elementa da izračunamo čvorna pomeranja  $\{S\}$ , pri čemu je nophodno da uzmemo u obzir i uzajamno dejstvo susednih konačnih elemenata konstrukcije (deformabilnog tela) tj. da konstrukcija ima e elemenata, koji su povezani medjusobom.

Kako za svaki konačni element konstrukcije ili deformabilnog tela možemo napisati po jednu jednačinu, to tih jednačina, za posmatranu konstrukciju ima e. Odgovarajućim grupisanjem svih e jednačina konačnih elemenata konstrukcije dobijamo tako zvanu jednačinu konstrukcije. Kada se uzmuh u obzir granični uslovi cele konstrukcije (uslovi u osloncima i površinske sile na konturi) i poznata čvorna opterećenja iz postavljenog sistema jednačina konačnih elemenata konstrukcije moguće je izračunati (odrediti) nepoznate komponente vektora pomeranja za čvorove elemenata konstrukcije. Vektor  $\{F^t\}$  je poznat, ako je poznata raspodela temperature po polju konstrukcije, ili je možemo odrediti iz jednačina prenosa topline. Zato možemo da napišemo da je:

$$\{G\} = \{F\} - \{F^t\}, \quad (46)$$

te je jednačina konačnog elementa oblika:

$$\{G\} = \mathcal{R} \{S\} \quad (47)$$

Ova jednačina ima isti oblik kao i kad ne uzmemo u obzir termoelastične uticaje. Sada su sve komponente vektora  $\{G\}$  poznate sa izuzetkom reakcija.

Matrica krutosti  $\mathcal{B}$  konačnog elementa izračunava se jedan put za određeni tip konačnog elementa i važi za sve konačne elemente konstrukcije koji su istog tipa. To je rezultat toga što je matrica krutosti konačnog elementa rezultat

312.

geometrijskih karakteristika konačnog elementa i fizičkih karakteristika materijala od koga je konačni element - konstanti elastičnosti materijala.

Matricu  $\mathcal{P}$  možemo da napišemo u obliku:

$$\mathcal{P} = \mathbb{D} \alpha \alpha_k^{-1} = \mathbb{D} \alpha^{-1}, \quad (29*)$$

gde je

$$\mathbb{D} = \mathbb{D} \alpha, \quad (48)$$

dok njenu transponovanu  $\mathcal{P}'$  pišemo u obliku:

$$\mathcal{P}' = (\alpha_k^{-1})' \mathbb{D}'. \quad (49)$$

Matricu krutosti konačnog elementa  $\mathcal{K}$  možemo sada da napišemo u obliku:

$$\mathcal{K} = \int_V \mathcal{P}' E \mathcal{P} dV = (\alpha_k^{-1})' \int_V \mathbb{D}' E \mathbb{D} dV \alpha_k^{-1}. \quad (50)$$

Ako pak uvedeno matricu  $\mathcal{K}_2$  u obliku:

$$\mathcal{K}_2 = \int_V \mathbb{D}' E \mathbb{D} dV; \quad (51)$$

to matricu krutosti  $\mathcal{K}$  konačnog elementa možemo da napišemo i u obliku:

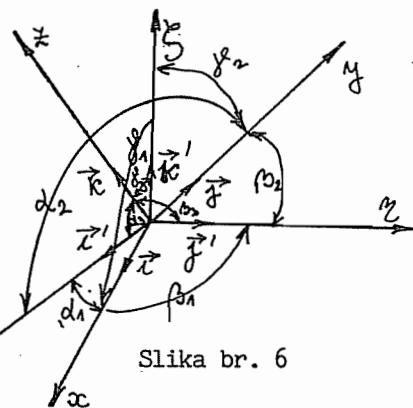
$$\mathcal{K} = (\alpha_k^{-1})' \mathcal{K}_2 \alpha_k^{-1}. \quad (52)$$

Ovakav oblik matrice krutosti konačnog elementa daje niz prednosti pri konkretnom radu po MKE. Matricu  $\mathcal{K}$  nazivamo uopštena ili generalisana matrica krutosti konačnog elementa i ima svoj smisao. Kako su  $\mathbb{D}$  i  $E$  nezavisne od položaja elementa u prostoru, to znači da za iste tipove konačnih elemenata imamo identičnu uopštenu matricu krutosti. Tako je naprimjer ta matrica zajednička za bilo koji trougaoni element, a za istu matricu  $\mathcal{B}$  - interpolacionu matricu. Uticaj položaja pojedinog elementa sa čvorovima  $i, j, k$  na konstrukciji (ili u deformabilnom telu) je zadat matricom  $\alpha_k^{-1}$ . Prednost upotrebe uopštene matrice krutosti konačnog elementa je onda kada se koriste

elementi višeg reda, jer tada matrica  $\mathcal{C}^{-1}$  je glomazna, te se često ne može izračunati u opštim brojevima, već je potrebno računati sa konkretnim brojnim vrednostima, te bi bilo potrebno računati integralne jednačine za svaki konačni element pojedinačno.

### VIII.6. MATRICE TRANSFORMACIJE

Konačni elementi konstrukcije su različito postavljeni u prostoru zavisno od same konfiguracije konstrukcije, pa je pre sastavljanja jednačine kostrukcije potrebno sve osnovne jednačine konačnih elemenata izraziti u jednom opštem - zajedničkom - globalnom koordinatnom sistemu vezanom za neku repernu tačku konstrukcije (tela). Taj zajednički koordinatni sistem se najčešće bira tako da najveći broj lokalnih koordinatnih sistema konačnih elemenata ima ose paralelne sa njim. Transformacija osnovnih jednačina pojedinih konačnih elemenata iz lokalnih koordinatnih sistema  $(x, y, z)$  u zajednički (opšti) -  $(\xi, \eta, \zeta)$  sistem izvodimo pomoću matrica transformacije ili transformacijskih matrica.



Slika br. 6

Neka je osnovni vektor  $\vec{V}$  u koordinatnom sistemu vezanom za konačni element sa koordinatama sredjenim u matrici vrsti:

$$(V) = (V_x \ V_y \ V_z). \quad (53)$$

Potrebno je osnovni vektor  $\vec{V}$  izraziti pomoću koordinata u opštem - zajedničkom koordinatnom sistemu:

$$\{\vec{V}\} = (\vec{V}_\xi \ \vec{V}_\eta \ \vec{V}_\zeta). \quad (54)$$

To ćemo izvesti pomoću matrice transformacije  $A_0$  oblika:

$$A_0 = (\{n_x\} \ {n_y\} \ {n_z\}) = (\{i\} \ {j\} \ {k\}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \quad (55)$$

čiji su elementi kosinusi smerova ortova osa lokalnog koordinatnog sistema u odnosu na opšti koordinatni sistem.

Transformacija koordinata osnovnog vektora iz lokalnog u

314.

opšti koordinatni sistem se izvodi po formuli transformacije:

$$\{\bar{V}\} = \mathbb{A}_o \{V\} \quad (56)$$

koja u razvijenom obliku izgleda:

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} = \mathbb{A}_o \begin{Bmatrix} V_{\xi} \\ V_{\eta} \\ V_{\zeta} \end{Bmatrix} \quad (56^*)$$

Transformaciona matrica  $\mathbb{A}_o$  je nesingularna i simetrična i za nju važi da je inverzna jednaka transponovanoj:

$$\mathbb{A}_o^{-1} = \mathbb{A}_o^T \quad \det \mathbb{A}_o = 1 \quad (57)$$

U MKE pored osnovnih vektora koristimo i vektore sa više komponenata nego što ih imaju osnovni vektori, tj sa uopštenim vektorima koje predstavljamo kao matrice kolone ili matrice vrste. Transformacija koordinata tih vektora iz jednog koordinatnog sistema u drugi opšti izvodimo pomoću uopštene matrice transformacije  $\mathbb{A}$ , koja ima sledeći oblik:

$$\mathbb{A} = \text{diag } \mathbb{A}_o = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{o1} & & & & & \\ & \mathbb{A}_{o2} & & & & \\ & & \mathbb{A}_{o3} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mathbb{A}_{on} & \end{pmatrix} \quad (58)$$

Uopštena matrica transformacije  $\mathbb{A}$  sadrži na glavnoj dijagonali toliko osnovnih transformacijskih podmatrica koliko osnovnih vektora sadrži generalisani vektor čije koordinate transformišemo.

Na primeru uopštenog vektora  $\{F\}$  koji predstavljamo u vidu matrice kolone od šest elemenata, koji su koordinate tog vektora, a njihovo fizičko značenje je sila ili moment sa po tri komponente:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}, \quad (59)$$

prikazaćemo izgled uopštene transformacijske matrice  $\mathbb{A}$ . Zakon transformacije matrica kolona kojima predstavljamo uopštene vektor je:

$$\{\bar{F}\} = \mathbb{A} \{F\} \quad (60)$$

ili u razvijenom obliku:

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_x \\ \bar{F}_y \\ \bar{F}_z \\ \bar{M}_x \\ \bar{M}_y \\ \bar{M}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} \quad (60^*)$$

Iz poslednje matrične jednačine se vi i oblik uopštene transformacijske matrice koja je kvadratna sa šest vrsta i šest kolona. Ova transformacija je takva da se pri transformaciji očuva fizičko značenje koordinata, odnosno sile ili moment moraju pri transformaciji zadržati svoja fizička značenja.

Jednačinu transformacije (60\*) možemo zapisati i u obliku:

$$\begin{Bmatrix} \{\bar{F}\} \\ \{\bar{M}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\bullet\bullet} & \{F\} \\ A_{\bullet\bullet} & \{M\} \end{bmatrix}, \quad (60^{**})$$

gdakle razdvajanjem sile i momenta dobijamo:

$$\{\bar{F}\} = A_{\bullet\bullet} \{F\}, \quad \{\bar{M}\} = A_{\bullet\bullet} \{M\}, \quad (61)$$

što odgovara jednačinama transformacije osnovnog vektora.

Ubuduće vektore i matrice koje su date u opštem (zajedničkom, globalnom) koordinatnom sistemu ćemo označavati istim oznakama kao i u lokalnom samo sa crtom nadvučenom nad oznakom.

Na osnovu prikazanog pravila za transformaciju uopštenih vektora možemo da napišemo transformaciju osnovne jednačine konačnog elementa iz lokalnog u uopšteni koordinatni sistem (zajednički za sve elemente konstrukcije).

Za čvornu silu i čvorni vektor pomeranja konačnog elementa koji su uopšteni vektori važe sledeće jednačine transformacije:

$$\{\bar{F}\} = A_{\bullet\bullet} \{F\}, \quad (62)$$

$$\{\bar{S}\} = A_{\bullet\bullet} \{S\}, \quad (62^*)$$

$$\{S\} = A^{-1} \{\bar{S}\} = A^T \{S\} \quad (62^{**})$$

316.

Kada osnovnu jednačinu konačnog elementa pomnožimo sa leve strane uopštenom transformacijskom matricom  $\mathbf{A}$  dobijamo:

$$\mathbf{A} \{F\} = \mathbf{A} \mathbf{R} \{S\}, \quad (63)$$

odnosno

$$\{\bar{F}\} = \mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{A}' \{\bar{S}\} = \bar{\mathbf{R}} \{\bar{S}\}, \quad (63^*)$$

gde smo uveli oznaku

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{A}'. \quad (64)$$

Poslednje definisana matrica  $\bar{\mathbf{R}}$  pretstavlja transformisanu matricu krutosti konačnog elementa u opštem (zajedničkom) koordinatnom sistemu. Poslednja jednačina (64) pretstavlja zakon transformacije matrice krutosti  $\mathbf{R}$  konačnog elementa i lokalnog u opšti koordinatni sistem. Vidimo da ima isti oblik kao i formule transformacije matrice tenzora napona  $\mathbf{V}$  i matrice tenzora specifične deformacije  $\mathcal{E}$  pri rotaciji koordinatnog sistema koje smo izveli u poglavljima I. i II..

Transformisana osnovna jednačina konačnog elementa iz lokalnog u opšti koordinatni sistem je:

$$\{\bar{F}\} = \bar{\mathbf{R}} \{\bar{S}\} \quad (65)$$

Jednačina transformacije (64) matrice krutosti konačnog elemnta je veoma značajna, jer pretstavlja istovremeno i pavidlo o transformaciji kvadratnih matrica. Operacija transformacije zahteva pri praktičnom proračunu dugo računsko vreme te zato u praksi pokušavamo uvek kada je to moguće da osnovne jednačine konačnih elemenata od početka pišemo u opštem zajedničnom koordinatnom sistemu.

### VIII.6.\* JEDNAČINA KONSTRUKCIJE

Jednačinu konstrukcije dobijamo tako što združimo (e) osnovnih jednačina konačnih elemenata oblika (65) koje smo transformacijom preveli na oblik u zajedničnom koordinatnom sistemu u skupnu jednačinu koju simbolički pišemo u sledećem obliku:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{S}. \quad (66)$$

Združivanje jednačina izvodimo tako da združimo sve elemente matrica, koji pripadaju jednom zajedničkom čvoru, tako da se oni u jednačini konstrukcije javljaju samo jedanput. Tako dobijamo sledeće vektore: matricu kolonu čiji su elementi komponente generalisanih čvornih sila  $\mathbf{F}$ , i matricu kolonu čiji su elementi komponente čvornih vektora pomeranja  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \{\bar{F}^{(1)}\} \\ \{\bar{F}^{(2)}\} \\ \vdots \\ \vdots \\ \{\bar{F}^{(n-1)}\} \\ \{\bar{F}^{(n)}\} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{Bmatrix} \{\bar{S}^{(1)}\} \\ \{\bar{S}^{(2)}\} \\ \vdots \\ \vdots \\ \{\bar{S}^{(n-1)}\} \\ \{\bar{S}^{(n)}\} \end{Bmatrix} \quad (67)$$

Pri sastavljanju prethodnih matrica kolona uzeli smo u obzir da konstrukcija deformabilno telo ima  $(n)$  čvorova u koje smo uračunali i njegove oslonce. Svaka podmatrica  $\{\bar{F}^{(i)}\}$  odnosno  $\{\bar{S}^{(i)}\}$  koja je data u opštem - zajedničkom koordinatnom sistemu ima toliko elemenata koliko prostornih stepeni slobode kretanja ima svaki pojedini čvor konstrukcije, tako da matrice  $\mathbf{F}$  odnosno  $\mathbf{S}$  su sa po  $p.n$  elemenata ili ako ih posmatramo kao uopštene vektore to oni imaju  $p.n$  komponenata.

Matrica krutosti konstrukcije  $\mathbf{K}$  je sastavljena od  $n.n$  podmatrica  $\mathbf{k}_{sr}$  koje su složene na sledeći način:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{k}_{1n} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & & & & & \mathbf{k}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{k}_{n1} & \mathbf{k}_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{k}_{nn} \end{pmatrix} \quad (68)$$

318.

Da bi smo dobili podmatrice  $\bar{R}_{sr}$  krutosti, moramo matrice krutosti pojedinih elemenata razbiti na podmatrice koje pripadaju pojedinim čvorovima. Naprimer za linijski element koji ima dva čvora  $i, j$  čija je osnovna jednačina oblika:

$$\{\bar{F}^{(e)}\} = \bar{R}^{(e)} \{\bar{S}^{(e)}\}, \quad (69)$$

to razdeljivanje vršimo na sledeći način:

$$\begin{Bmatrix} \{\bar{F}_i\} \\ \{\bar{F}_j\} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{R}_{ii} & \bar{R}_{ij} \\ \bar{R}_{ji} & \bar{R}_{jj} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{S}_i\} \\ \{\bar{S}_j\} \end{Bmatrix} \quad (70)$$

Naprimjer za trougaoni konačni element sa čvorovima  $i, j, k$  to razdeljivanje matrice krutosti izvodimo na sledeći način:

$$\begin{Bmatrix} \{\bar{F}_i\} \\ \{\bar{F}_j\} \\ \{\bar{F}_k\} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{R}_{ii} & \bar{R}_{ij} & \bar{R}_{ik} \\ \bar{R}_{ji} & \bar{R}_{jj} & \bar{R}_{jk} \\ \bar{R}_{ki} & \bar{R}_{kj} & \bar{R}_{kk} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{S}_i\} \\ \{\bar{S}_j\} \\ \{\bar{S}_k\} \end{Bmatrix} \quad (71)$$

Na taj način smo dobili podmatrice  $\bar{R}_{rs}$  koje su transformacijom date u zajedničkom koordinatnom sistemu, bilo da se radi o dijagonalnim podmatricama  $\bar{R}_{rr}$  ili o onima van glavne dijagonale  $\bar{R}_{rs}$ .

Dijagonalne podmatrice  $\bar{R}_{rr}$  pripadaju svakom čvoru  $(r)$  i sastavljene su iz onoliko dijagonalnih podmatrica  $\bar{R}_{ii}, \bar{R}_{jj}, \bar{R}_{kk}, \bar{R}_{ll}, \dots$ , koliko se elemenata stiče u posmatranom čvoru:

$$\bar{R}_{rr} = \sum (\bar{R}_{ii}^{(e)}, \bar{R}_{jj}^{(e)}, \bar{R}_{kk}^{(e)}, \dots) \quad (72)$$

Kada se u čvoru  $(r)$  stiče  $(s)$  elemenata u ovoj jednačini se javljaju podmatrice  $\bar{R}_{ii}$  ili  $\bar{R}_{jj}$  ili  $\bar{R}_{kk} \dots$  što pak zavisi od toga da li je posmatrani element čvora  $(r)$  čvor  $i, j$  ili  $k$ . Na slici br. 7 prikazan je primer ravnog konstrukcije. U čvoru  $(7)$  stiče se pet konačnih elemenata oblika trougla i zavisno od posmatranja čvora kao pripada-

jedeg jednom od elemenata konstrukcije on nosi oznaku po dva puta (i) za elemente (g) i (h) dva puta oznaku (k) za elemente (e) i (f) i jedan put oznaku (j) za elemente (m). Podmatrica  $\bar{B}_{77}$  se formira od sledećih podmatrica:

$$\bar{B}_{77} = \bar{B}_{rr} = \bar{B}_{kk}^{(e)} + \bar{B}_{kk}^{(f)} + \bar{B}_{ii}^{(g)} + \bar{B}_{jj}^{(m)} + \bar{B}_{ii}^{(h)} \quad (72^*)$$

Da ne bi bilo potrebno za svaki pojedini element označavati "unutrašnje" tač-

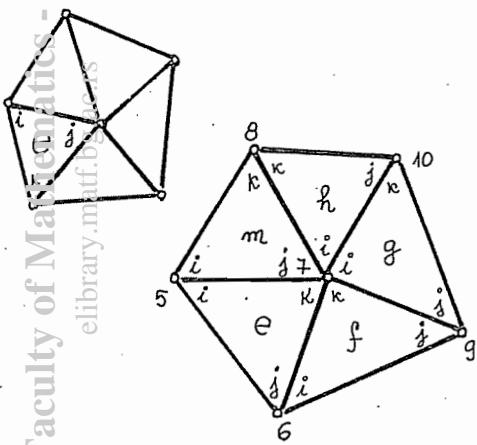
ke elementa, najbolji je dogovor da je tačka (1) uvek čvor sa najmanjom brojčanom oznakom, a preostale "unutrašnje" tačke da slede u smeru suprotnom kretanju kazaljke na satu.

Izvan dijagonalne podmatrice  $\bar{B}_{rs}$  gde je čvor (s) susedan čvoru (r) su sastavljeni od podmatrica elemenata koji se stiču na vezi (s) - (r). Na primeru sa slike br. 7 za elemente koji se stiču na vezi  $s = 7$  i  $r = 9$  izvandijagonalna matrica  $\bar{B}_{rs}$  je:

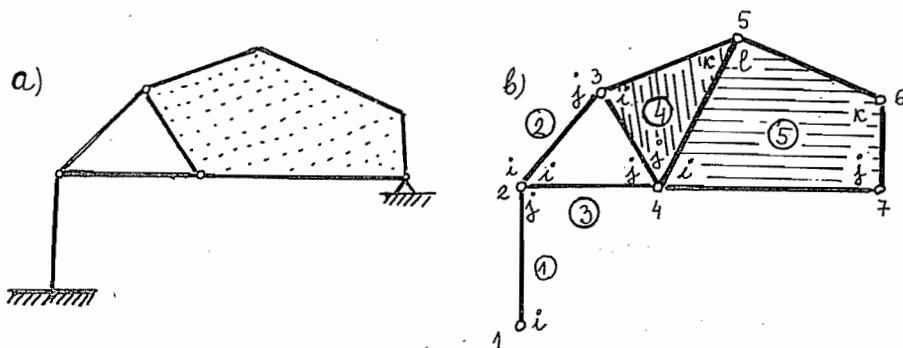
$$\bar{B}_{rs} = \bar{B}_{rs}^{(f)} + \bar{B}_{rs}^{(g)} = \bar{B}_{(kj)}^{(f)} + \bar{B}_{(ij)}^{(g)} = \bar{B}_{97}. \quad (72^{**})$$

Ako se radi o elementu na konturi onda imamo samo jednu podmatricu. Naprimjer element na vezi (6) - (9). Opet je izbor podmatrica  $\bar{B}_{ij}$ ,  $\bar{B}_{ik}$ ,  $\bar{B}_{jk}$ , ..... zavistan od toga da li su čvorovi (r) - (s) čvora i, ili k posmatranih elemenata. Označavanje čvorova na konstrukciji počev (1) dalje je u načelu proizvoljno, mada iz praktičnih razloga označavanje bismo tako da dobijamo što uži obim matrice krutosti  $K$ , što pretstavlja i sam zahtev za što racionalnijim korišćenjem računskog sata računara.

Na primeru mešovite konstrukcije pokažimo postupak sastavljanja matrice krutosti konstrukcije i jednačine konstrukcije. Konstrukcija neka je prikazana na slici br. 8 a. Konstrukciju možemo izdeliti na sledeće konačne elemente: tri linijska elementa i dva površinska u obliku trougla i četvorougla, kao što je prikazano sa odgovarajućim oznakama na slici br. 8 b. Čvorovi čije smo oznake sasvim proizvoljno izabrali su od (1) do (7). Podmatrice matrice krutosti na glavnoj dijagonali imaju sledeće vrednosti:



Slika br. 7



Slika br.8 a i b

$$\begin{aligned}
 \overline{R}_{11} &= \overline{R}_{ii}^{(1)}, \\
 \overline{R}_{22} &= \overline{R}_{jj}^{(1)} + \overline{R}_{ii}^{(2)} + \overline{R}_{ii}^{(3)}, \\
 \overline{R}_{33} &= \overline{R}_{jj}^{(2)} + \overline{R}_{ii}^{(4)}, \\
 \overline{R}_{44} &= \overline{R}_{jj}^{(3)} + \overline{R}_{jj}^{(4)} + \overline{R}_{ii}^{(5)}, \\
 \overline{R}_{55} &= \overline{R}_{kk}^{(4)} + \overline{R}_{ee}^{(5)}, \\
 \overline{R}_{66} &= \overline{R}_{kk}^{(5)}, \\
 \overline{R}_{77} &= \overline{R}_{jj}^{(5)}
 \end{aligned} \tag{73}$$

Elementi konstrukcije, koja je kombinacija površinskih i linijskih elemenata, imaju po dva, po tri i po četiri čvora. Elementi (1), (2) i (3) imaju čvorove  $i, j$ ; element (4) ima čvorove  $i, j, k$ , dok element (5) ima čvorove  $i, j, k$ . Oznake su izabrane tako da je čvor (1) sa najnižom brojnom oznakom, a ostale slede u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu.

Izvan dijagonalne matrice su:

$$\begin{aligned}
 \overline{R}_{12} &= \overline{R}_{ij}^{(1)}, & \overline{R}_{45} &= \overline{R}_{jk}^{(4)} + \overline{R}_{ie}^{(5)}, \\
 \overline{R}_{23} &= \overline{R}_{ij}^{(2)}, & \overline{R}_{47} &= \overline{R}_{ij}^{(5)}, \\
 \overline{R}_{24} &= \overline{R}_{ij}^{(3)}, & \overline{R}_{56} &= \overline{R}_{ek}^{(5)}, \\
 \overline{R}_{35} &= \overline{R}_{ik}^{(4)}, & \overline{R}_{67} &= \overline{R}_{jk}^{(5)}
 \end{aligned} \tag{74}$$

Kako je matrica krutosti konstrukcije simetrična to nije potrebno posebno računati podmatrice ispod glavne dijagonale:

$$\underline{\underline{R}}_{sr} = \underline{\underline{R}}_{rs}^T \quad (75)$$

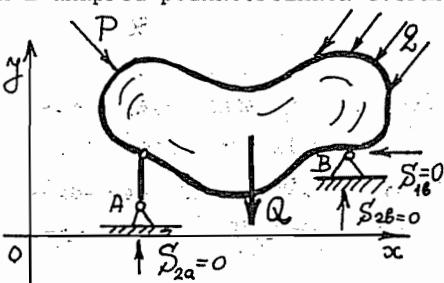
Šema jednačine posmatrane konstrukcije je sada:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{F}}^{(1)} \\ \underline{\underline{F}}^{(2)} \\ \underline{\underline{F}}^{(3)} \\ \underline{\underline{F}}^{(4)} \\ \underline{\underline{F}}^{(5)} \\ \underline{\underline{F}}^{(6)} \\ \underline{\underline{F}}^{(7)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccccccc} \underline{R}_{11} & \underline{R}_{12} & & & & & \\ \underline{R}_{21} & \underline{R}_{22} & \underline{R}_{23} & \underline{R}_{24} & & & \\ \underline{R}_{31} & \underline{R}_{32} & \underline{R}_{33} & \underline{R}_{34} & \underline{R}_{35} & & \\ \underline{R}_{41} & \underline{R}_{42} & \underline{R}_{43} & \underline{R}_{44} & \underline{R}_{45} & \underline{R}_{47} & \\ \underline{R}_{51} & \underline{R}_{52} & \underline{R}_{53} & \underline{R}_{54} & \underline{R}_{55} & \underline{R}_{56} & \\ \underline{R}_{61} & \underline{R}_{62} & \underline{R}_{63} & \underline{R}_{64} & \underline{R}_{65} & \underline{R}_{66} & \underline{R}_{67} \\ \underline{R}_{71} & \underline{R}_{72} & \underline{R}_{73} & \underline{R}_{74} & \underline{R}_{75} & \underline{R}_{76} & \underline{R}_{77} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{S}}^{(1)} \\ \underline{\underline{S}}^{(2)} \\ \underline{\underline{S}}^{(3)} \\ \underline{\underline{S}}^{(4)} \\ \underline{\underline{S}}^{(5)} \\ \underline{\underline{S}}^{(6)} \\ \underline{\underline{S}}^{(7)} \end{array} \right\} \quad (76)$$

Vektore  $\{\underline{\underline{F}}_i\}$  i  $\{\underline{\underline{S}}_i\}$  unosimo u šemu jednačine konstrukcije direktno. Kada su sile date u lokalnim koordinatnim sistemima njih je potrebno pre unošenja u jednačinu konstrukcije odgovarajuće transformisati na zajednički koordinatni sistem.

### VIII.7. GRANIČNI USLOVI

Svaka konstrukcija koju izučavamo u statici mora biti stabilno oslonjena, te zato deo čvornih pomeranja ili obrtanja mora biti propisan i unapred poznat. Poznata čvorna pomeranja (obrtanja tangent) predstav-



Slika br. 9

ljuju granične uslove konstrukcije. Zbog konjugovane veze izmedju sila i pomeranja (odnosno, momenata i obrtanja) na osloncima kada su jedne vrednosti poznate, druge su nepoznate i obrnuto. Zato je potrebno da nadjemo prikladnu transformaciju jednačine konstrukcije, pomoću razdelji-

322.

vanja (deljenja - parcioniranja) da bi smo mogli da izračunamo prvo sve nepozнате komponente vektora pomeranja  $\underline{S}$ , a zatim reakcije, odnosno nepozнате komponente vektora  $\underline{F}$ .

Da bi smo postavljeni zadatak ostvarili potrebno je da razdelimo jednačinu konstrukcije (66) tako da združimo sve poznate komponente vektora  $\underline{S}$  u podmatricu  $\underline{S}_m$ , a preostale komponente pak u matricu  $\underline{S}_r$ .

Za odgovarajuće razdeljivanje matrice  $\underline{F}$ , zbog navedene konjugovanosti pomeranja i sila, dobijamo podmatrice  $\underline{F}_m$  i  $\underline{F}_r$ , čiji su elementi komponente reakcija, dok su elementi podmatrice  $\underline{F}_m$  poznata opterećenja, tako da možemo dobiti razdeljenu jednačinu konstrukcije u obliku:

$$\begin{Bmatrix} \underline{F}_m \\ \underline{F}_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{mr} \\ K_{rm} & K_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{S}_m \\ \underline{S}_r \end{Bmatrix}, \quad (77)$$

ili posle izvršenog množenja podmatrica i razdvajanja u dve matrične jednačine dobijamo:

$$\underline{F}_m = K_{mm} \underline{S}_m + K_{mr} \underline{S}_r, \quad (78)$$

$$\underline{F}_r = K_{rm} \underline{S}_m + K_{rr} \underline{S}_r. \quad (79)$$

Kada su sve komponente vektora  $\underline{S}_r$  poznate (obično su nule - nepokretni oslonci) dobijamo:

$$K_{mm} \underline{S}_m = \underline{F}_m - K_{mr} \underline{S}_r / K_{mm}^{-1},$$

$$K_{mm}^{-1} K_{mm} = 1, \quad (80)$$

$$\underline{S}_m = K_{mm}^{-1} (\underline{F}_m - K_{mr} \underline{S}_r),$$

ili ako vektor  $\underline{S}_r$  ima vrednost nula, onda sledi:

$$\underline{S}_m = K_{mm}^{-1} \underline{F}_m \quad (80*)$$

Pomoću izvedenih jednačina možemo da izračunamo sve komponente čvornih vektora pomeranja  $\{\underline{S}\}$ . Kada smo izračunali sve komponente vektora  $\underline{S}_m$  izračunavamo reakcije konstrukcije. Sa ovim je ustvari statički problem rešen. Napone i specifične deformacije za pojedine elemente konstrukcije dobijamo iz jednačina (31).

Kada su komponente vektora  $\vec{S}$  izračunate u opštem koordinatnom sistemu moramo te vrednosti pre unošenja u prethodne jednačine za određivanje  $\{\zeta\}$  i  $\{\xi\}$  da transformišemo na lokalni koordinatni sistem. Tako sada za proizvoljni konačni element konstrukcije pišemo:

$$\{\xi\}_e = \mathbf{P}_e \mathbf{A}_e^T \{\bar{S}\}_e, \quad (81)$$

$$\{\zeta\}_e = \mathbf{E}_e \mathbf{P}_e \mathbf{A}_e^T \{\bar{S}\}_e + \{\zeta^t\}_e. \quad (82)$$

### VIII.8. ČVORNA OPTEREĆENJA

Pri primeni MKE u račun unosimo sile koje opterećuju konstrukciju, a među njima i  $\{F^t\}$  od temperaturnih naprezanja, posredstvom čvorova, u jednačinu konstrukcije. Pri tome su sile zadate u zajedničkom koordinatnom sistemu. Kada je konstrukcija opterećena koncentrisanim opterećenjem (u tački), čvorove konačnih elemenata biramo u tačkama u kojima dejstvuju ta opterećenja. Spoljašnje opterećenje razložimo na komponente u smjeru koordinata opšteg koordinatnog sistema, pa ih zato možemo direktno da unosimo na odgovarajuća mesta vektora  $\mathbf{F}$ . Čvorovi koji su neopterećeni imaju sve komponente odgovarajućeg vektora jednake nuli. Ti čvorovi su uglavnom unutrašnji čvorovi kada težinu konstrukcije ne uzimamo u obzir.

U slučaju kontinualno raspodeljenog opterećenja moramo izvršiti zamenu polja opterećenja sa ekvivalentnim čvornim opterećenjem. Ponekad je to moguće načiniti direktno, ako naprimjer poznajemo momente i poprečne sile u čvorovima  $i, j$  linijskog elementa, koji je u obema tačkama učvršćen i slobodno opterećen. Za opštije primere tu ekvivalentnost dostižemo upotrebom principa virtualnih pomeranja.

Kao što smo rekli, izmedju čvornih sile i sile u polju konačnog elementa kada su u ravoteži, važi princip virtualnog rada:

$$\delta W_{čvora} = \delta W_{polja}, \quad (83)$$

što znači da virtuelni rad čvornih ekvivalentnih sile mora biti jednak virtualnom radu unutrašnjih sile (sila u polju elementa):

$$\delta W_{čvora} = \{\delta S\} \{F_{ek}\} \quad (84)$$

Označimo sa  $\{\varphi\}$  vektor raspodeljenog opterećenja na jednoj površi elementa, a sa  $\{\delta S\}$  tim opterećenjima pridružena virtualna pomeranja, te je rad raspodeljenog opterećenja:

$$\delta W_{\text{polja}} = \int_A (\delta S) \{\varphi\} dA. \quad (85)$$

Uzmimo u obzir jednačine:

$$(\delta S) = (\delta S) \mathcal{B}', \quad (86)$$

transponovane jednačini (27) i napisane za virtualna pomeranja, i unesimo u jednačinu (85) tako da dobijamo:

$$\delta W_{\text{polja}} = (\delta S) \int_A \mathcal{B}' \{\varphi\} dA. \quad (87)$$

Iz jednačavanjem dobijenih izraza za virtualne radove dobijamo:

$$(\delta S) \{F^e\} = (\delta S) \int_A \mathcal{B}' \{\varphi\} dA, \quad (88)$$

odakle sledi da je:

$$\{F^e\} = \int_A \mathcal{B}' \{\varphi\} dA. \quad (89)$$

Pomoću ove jednačine određen je vektor ekvivalentnih sile u lokalnom koordinatnom sistemu. Kako te sile unosimo u jednačinu konstrukcije u opštem koordinatnom sistemu to moramo izvršiti transformaciju na sledeći način:

$$\{\bar{F}^e\} = A \int_A \mathcal{B}' \{\varphi\} dA \quad (90)$$

### VIII.9. REDUKOVANA MATRICA KRUTOSTI

Matrica krutosti konačnog elementa ili konstrukcije  $K$  povezuje sve sile i pomeranja obradjujane konstrukcije. U nekim primerima od praktičnog interesa želimo da odredimo neke sile, odnosno momente. U tim primerima često je potrebno da izračunamo novu matricu krutosti, koja bi obuhvatila odgovarajuće parametre čvornih vektora i njima pridruženih vektora pomeranja. Takvu matricu krutosti bi smo nazvali redukovana matrica krutosti.

Praktični primer takve redukcije bi bio u primeru koji ima površinske elemente (4) i (5), u čvorovima samo dva stepena slobode (površina). Elementi (1), (2) i (3) koji su linijski u ravni i imaju po tri stepena slobode kretanja (dva pomeranja i jedno obrtanje, odnosno osnu, poprečnu силу и момент). Da bi smo obradili mešovitu konstrukciju sa slike br. 8, potrebno je da oba čvora gde se stiču površinski i linijski elementi predstaviti čvornim vektorom istog ranga, a sa tim i tu matricu krutosti pridruženih elemenata.

Naznačimo sa (a) značajne stepene slobode kretanja (oni koji nas interesuju), a sa (b) one manje važne (koje želimo iz računa da izbacimo), a zatim jednačinu konstrukcije radelimo u obliku:

$$\begin{cases} \{F_a\} \\ \{F_b\} \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{cases} \{S_a\} \\ \{S_b\} \end{cases} \quad (91)$$

Pretpostavimo sada da su sile  $\{F_b\} = 0$ , to sledi da je:

$$\mathbf{K}_{ba} \{S_a\} + \mathbf{K}_{bb} \{S_b\} = 0 \quad (92)$$

Iz poslednje jednačine možemo da pišemo:

$$\{S_b\} = -\mathbf{K}_{bb}^{-1} \mathbf{K}_{ba} \{S_a\} \quad (93)$$

Kada je  $\mathbf{K}_{bb} \neq 0$  prethodna jednačina je uvek moguća, pa prvu jednačinu iz (91) dobijamo u obliku:

$$\{F_a\} = \mathbf{K}_{aa} \{S_a\} + \mathbf{K}_{ab} \{S_b\}, \quad (94)$$

ili koristeći (93) dobijamo jednu jednačinu za sile u čvoru (2) znova, tako da je  $\{F_a\} = (\mathbf{K}_{aa} - \mathbf{K}_{ab} \mathbf{K}_{bb}^{-1} \mathbf{K}_{ba}) \{S_a\}$ , ili, koristeći (94) dobijamo

$$\{F_a\} = \mathbf{K}_c \{S\}, \quad (96)$$

gde smo uveli oznaku  $\mathbf{K}_c$  za:

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{K}_{aa} - \mathbf{K}_{ab} \mathbf{K}_{bb}^{-1} \mathbf{K}_{ba}. \quad (97)$$

326.

oslednju matricu nazivamo redukovana matrica krutosti ili kondenzovana matrica krutosti.

Jednačina (96) sadrži samo te elemente vektora  $\{F\}$  i  $\{S\}$  koji nas u daljem računaju interesuju.

stifla su  
komponente  
čvorački

### VIII.10. REŠAVANJE LINIJSKIH KONSTRUKCIJA PO METODI KONAČNIH ELEMENATA

Metoda konačnih elemenata je posebno primenljiva za rešavanje linijskih konstrukcija. Kod linijskih konstrukcija deformaciono stanje linijskog elementa je poznato. Odgovarajuće jednačine slede otpornosti materijala te je zato interpolaciona matrica - funkcija unapred poznata.

Za linijske elemente konačni elementi su štapovi. Kada su isti konstantnog poprečnog preseka, možemo da uzmemo za linijske konačne elemente dužinu koja polazi od čvora do čvora konstrukcije. Zato su linijske konstrukcije sastavljene iz relativno malog broja elemenata, te je obim računanja manji, tako da za tu vrstu konstrukcija zadovoljavaju računari srednjih kapaciteta. Manje primere je moguće rešiti i bez računara. Zbog jednostavnog i veoma preglednog koncepta metoda konačnog elementa ima odredjenu praktičnu prednost nad klasičnim metodama (metoda sila, deformacijska metoda), a posebno kada obradujemo prostorne linijske konstrukcije. Naglašavamo da su rezultati dobijeni po MKE veoma tačni, posebno u okviru uzetih jednačina iz Otpornosti materijala.

stifla su

#### VIII.10.1. OZNAČAVANJE LINIJSKIH ELEMENATA

Proizvoljno opterećeni linijski element  $i, j$  čija je dužina  $\ell$ , orjentišemo tako da se pozitivan smer x-ose poklapa sa smerom od čvora ( $i$ ) ka čvoru ( $j$ ). Ostale ose  $z$  i  $y$  postavimo tako da se poklapaju sa pravcima glavnih centralnih osa inercije poprečnog preseka nosača, a da pri tome dobijamo desni koordinatni sistem.

Tako postavljeni numerički model elementa ima u svakom čvoru  $i, j$  po šest komponentnih generalisanih sila (tri komponentne sile i tri komponentne momente) i po šest komponentnih generalisanih pomeranja (deformacija) - tri komponentne pomeranja i tri komponentne uvijanja, obrtanja.

Čvorni vektori  $\{F_i\}$  i  $\{F_j\}$  su definisani jednačinama:

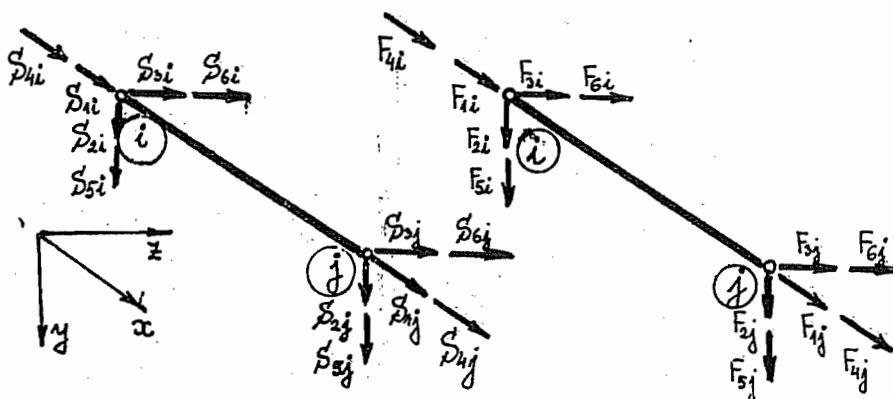
(10)

$$\{F_i\} = \begin{cases} F_{1i} = N_i \\ F_{2i} = Y_{ri} \\ F_{3i} = Z_{ri} \\ F_{4i} = M_{xi} \\ F_{5i} = M_{yi} \\ F_{6i} = M_{zi} \end{cases}, \quad \{F_j\} = \begin{cases} F_{1j} \\ F_{2j} \\ F_{3j} \\ F_{4j} \\ F_{5j} \\ F_{6j} \end{cases} \quad (98)$$

Na analogan način vektore pomeranja predstavljamo kao:

$$\{S_i\} = \begin{cases} S_{1i} = u_i \\ S_{2i} = v_i \\ S_{3i} = w_i \\ S_{4i} = \psi_{xi} \\ S_{5i} = \psi_{yi} \\ S_{6i} = \psi_{zi} \end{cases} = \{\{U_i\}\}; \quad \{S_j\} = \begin{cases} S_{1j} \\ S_{2j} \\ S_{3j} \\ S_{4j} \\ S_{5j} \\ S_{6j} \end{cases} \quad (99)$$

Komponente vektora čvornih pomeranja i čvornih sila predstavljene su na slici br.10.



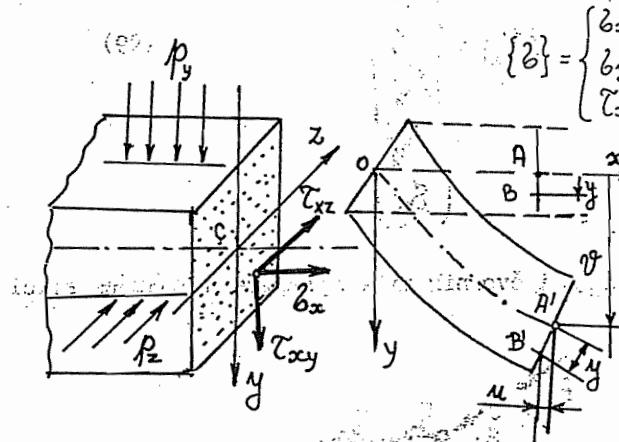
Slika br. 10

Iz navedenih oznaka čvornih sila i pomeranja, vidi se da komponente čvornih vektora označavamo sa po dva indeksa od kojih prvi označava komponentu, a drugi pripadnost čvoru, dok same čvorne vektore označavamo jednim indeksom. Zbirni čvorni vektor sile, odnosno pomeranja posmatranog konačnog li-

nijskog elementa je:

$$\{F\} = \begin{cases} \{F_i\} \\ \{F_j\} \end{cases}, \quad \{S\} = \begin{cases} \{S_i\} \\ \{S_j\} \end{cases} \quad (100)$$

Pozitivno definisani smerovi komponenata u čvorovima  $i, j$  uzimaju se uvek sa pozitivno izabranim smerovima desnog koordinatnog sistema. U daljem izlaganju ćemo se ograničiti na linijske elemente čije opterećenje prolazi kroz težišnu osu nosača, tako da uzimamo u obzir pri obradi deformacija samo Saint Venant-ovo savijanje i prostu torziju. Uopšte, opštē proizvoljno opterećenje linijskih nosača je inače moguće i obradjavati po M.K.E., iako je potrebno u tim slučajevima ovde izvedene jednačine dopuniti. Naponsko i deformaciono stanje tako opterećenog nosača ja zadato tenzorom napona definisanim pomoću matrice kolone  $\{\epsilon\}$  i tenzorom specifične deformacije definisanim matricom kolonom  $\{\varepsilon\}$  i vektorom pomeranja  $\{S\}$ :



Slika br. 11

$$\{\epsilon\} = \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}, \quad \{\varepsilon\} = \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}, \quad \{S\} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \quad (101)$$

Na slici br. 11 prikazan je linijski element sa presekom u kome su naznačeni komponentni naponi i komponentne deformacije (b). U ovom slučaju matica diferencijalnih operatora se može uzeti u obliku:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (102)$$

Navier-ove jednačine ravnoteže se mogu zapisati u obliku:

$$D\{\epsilon\} + \{F_v'\} = 0 \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_v \\ Y_v \\ Z_v \end{pmatrix}' = 0. \quad (103)$$

Hooke-ov zakon se pojednostavljuje i može se napisati u obliku:

$$\{\epsilon\} = E\{\varepsilon\} \quad \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (104)$$

gde je  $E$  modul elastičnosti,  $G$  modul klizanja. Cauchy-jeve kinemtičke jednačine se sada mogu napisati u obliku:

$$\{\varepsilon\} = \mathbb{D}\{S\}, \quad \begin{cases} \varepsilon_x \\ \delta_{xy} \\ \delta_{xz} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{cases} \mu \\ v \\ w \end{cases} \quad (105)$$

### VIII.10.2. ODREDJIVANJE INTERPOLACIONE MATRICE

Deformacija prizmatične gredenastaje zbog unutrašnjih sila  $X_T$ ,  $Y_T$  i  $Z_T$  i momenata  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  i poznajemo iz elementarne teorije. Usled dejstva aksijalne sile  $X_A = N$  i dva momenta  $M_y$  i  $M_z$  javljaju se deformacije, pa je veza izmedju deformacija i opterećenja data sledećim jednačinama:

$$\begin{aligned} \frac{N}{A} &= E \frac{du}{dx}, \\ \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{M_z}{B_z} &= 0, \\ \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{M_y}{B_y} &= 0. \end{aligned} \quad (106)$$

Slika br. 12

Uvezši u obzir veze izmedju momenta savijanja i spoljašnjeg opterećenja u obliku:

$$\frac{d^2M_y}{dx^2} = -P_z, \quad \frac{d^2M_z}{dx^2} = -P_y, \quad (107)$$

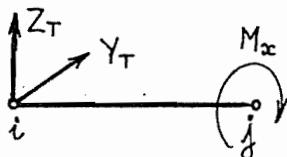
prethodne jednačine dobijaju oblik:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{N}{E}, & A &= EA, \\ \frac{d^4v}{dx^4} &= \frac{P_z}{B_z}, & B_z &= EI_z, \\ \frac{d^4w}{dx^4} &= \frac{P_y}{B_y}, & B_y &= EI_y. \end{aligned} \quad (108)$$

Poslednje dve jednačine opisuju deformaciono stanje linijskog elementa (nosača) na težišnoj liniji. Van težišne linije, zbog Bernoulli-jeve hipoteze o ravnim presecima tачke preseka dobijaju pomeraj  $\mu$  koji je za ravan xy jednak:

$$\mu = -\frac{dv}{dx} y \quad \text{dok je za ravan xz} \quad \mu = -\frac{dw}{dx} z \quad (109)$$

Sile smicanja  $Y_T$  i  $Z_T$  prouzrokuju pomeranja  $v$  i  $w$  za preseke za koje važi Graskof-ova hipoteza (simetrični preseci) pa je veza izmedju pomeranja i sila data sledećim jednačinama:



$$\frac{dv}{dx} = \frac{Y_T}{GA^s}, \quad \frac{dw}{dx} = \frac{Z_T}{GA^s}, \quad (110)$$

gde je

$$A^s = \frac{A}{x},$$

redukovani presek smicanja. Torzioni moment  $M_x$  uzrokuje pri prostoj torziji (Saint Venant-ova torzija) uvijanje štapa oko x-ose:

Slika br.13

$$\frac{d\psi_x}{dx} = \frac{M_x}{GI_t}, \quad (111)$$

odnosno u poprečnom preseku pomeranja tačaka su:

$$v = -\frac{\theta^*}{l} xz, \quad w = \frac{\theta^*}{l} xy, \quad \theta^* = \frac{M_t}{GI_t} \quad (112)$$

gde je  $I_t$  polarni (torzioni) moment inercije obradjivanog preseka.

Jednačine za odredjivanje komponentnih pomeranja opisuju deformaciono stanje ravnog nosača. Gore navedene jednačine su međusobom nezavisne te pri traženju interpolacione matrice možemo da iskoristimo mogućnost superpozicije, pa ćemo zato obradjivati svaki slučaj opterećenja posebno i vrednosti superponirati. U praksi se obično uticaji deformacija smicanja zanemaruju pri rešavanju linijskih konstrukcija. To ćemo i mi uraditi, pa ćemo u naknadnim razmatranjima dobijene rezultate popraviti.

Kako posmatramo deformaciono stanje elemeta u MKE samo na elemetu koji je opterećen u čvorovima (kada ti zahtevi nisu ispunjeni tražimo ekvivalentno čvorno opterećenje) i kada smicanje zanemarimo dobicemo sledeće četiri grupe diferencijalnih jednačina:

$$I^0 \quad \frac{du}{dx} = c_2,$$

$$II^0 \quad \frac{dv}{dx^4} = 0, \quad u = -\frac{dv}{dx} y, \quad (114)$$

$$III^0 \quad \frac{dw}{dx^4} = 0, \quad u = -\frac{dw}{dx} z,$$

$$IV^0 \quad \frac{d\psi}{dx} = 0.$$

Po integraljenju prethodnih jednačina dobijamo:

$$\text{I}^0 \quad u(x) = c_1 + c_2 x,$$

$$\text{II}^0 \quad v(x) = c_3 + c_4 x + c_5 x^2 + c_6 x^3,$$

$$u(x,y) = -(c_4 + 2c_5 x + 3c_6 x^2) y,$$

(116)

$$\text{III}^0 \quad w(x) = c_7 + c_8 x + c_9 x^2 + c_{10} x^3,$$

$$u(x,z) = -(c_8 + 2c_9 x + 3c_{10} x^2) z,$$

$$\text{IV}^0 \quad \psi(x) = c_{11} x + c_{12},$$

odnosno

$$v(x,z) = -\psi(x) z = -c_{11} x z - c_{12} z,$$

$$w(x,y) = \psi(x) y = c_{11} x y + c_{12} y. \quad (117)$$

Jednačinu

$$\{S\} = \mathcal{Q} \{C\},$$

(118)

napisaćemo za svako od razmatranih vrsta opterećenja:

a<sup>0</sup> za normalnu silu:

$$\{S\}_N = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \mathcal{Q}_N \{C\}_N; \quad (118*)$$

b<sup>0</sup> za moment  $M_z$ :

$$\{S\}_{M_z} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & -y & -2xy & -3x^2y \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \mathcal{Q}_{M_z} \{C\}_{M_z} \quad (118**)$$

c<sup>0</sup> za moment  $M_y$ :

$$\{S\}_{M_y} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & -z & -2xz & -3x^2z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} C_7 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \end{Bmatrix} = \mathcal{Q}_{M_y} \{C\}_{M_y}; \quad (118***)$$

d<sup>0</sup> za moment  $M_x$ :

$$\{S\}_{M_x} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -xz & -z \\ xy & y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_{12} \end{Bmatrix} = \mathcal{Q}_{M_x} \{C\}_{M_x} \quad (118****)$$

Skupni zapis tih jednačina je pomoću matrice  $\mathcal{Q}$  polja li-  
nijskog elementa je u obliku (118) u kome su matrica  $\mathcal{Q}$  i  $\{C\}$  oblika:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_N \\ \alpha_{M_z} \\ \alpha_{M_y} \\ \alpha_{M_x} \end{pmatrix}, \quad \{C\} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \\ C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} \quad (119)$$

Pošto čvorni vektor pomeranja

$$\{S\} = \begin{pmatrix} \{S_{ij}\} \\ \{S_{jj}\} \end{pmatrix}, \quad (120)$$

kao što je očigledno sadrži ukupno 12 stepeni slobode, pa je tako izabrani ko-  
načni linijski element kompatibilan, i pri tome imamo na raspolaganju 12 gra-  
ničnih uslova koji omogućavaju izračunavanje 12 komponenti matrice  $\{C\}$

Granični uslovi su sada za pojedine vrste opterećenja:

Za tačke na neutralnoj liniji:  $y = 0, z = 0$ :

1º Za aksijalnu (normalnu) silu  $N$ :

$$\begin{aligned} x=0 & \quad u = S_{1i} \\ x=l & \quad u = S_{2j} \end{aligned}$$

2º Za moment savijanja  $M_z$  je:

$$\begin{aligned} x=0 & \quad \vartheta = S_{2i} & \frac{d\vartheta}{dx} = S_{6i}, \\ x=l & \quad \vartheta = S_{2j} & \frac{d\vartheta}{dx} = S_{6j}. \end{aligned} \quad (121)$$

3º Za moment savijanja  $M_y$  je:

$$\begin{aligned} x=0 & \quad \vartheta = S_{3i} & \frac{dw}{dx} = -S_{5i}, \\ x=l & \quad \vartheta = S_{3j} & \frac{dw}{dx} = -S_{5j}. \end{aligned}$$

4º Za torzioni moment  $M_x$  je:

$$\begin{aligned} x=0 & \quad \psi_x = S_{4i} \\ x=l & \quad \psi = S_{4j} \end{aligned}$$

Ako navedene granične uslove redom unosimo u odgovarajuće matrice polja  $\boldsymbol{\alpha}$ , dobićemo matricu polja  $\boldsymbol{\alpha}_k$  graničnih vrednosti, a zatim prema jednačini (26) odrediti interpolacionu matricu  $\mathcal{B}$ . Unošenjem redom graničnih uslova dobijamo:

1º Za aksijalno opterećenje  $N$  matrica polja je:

$$(\mathcal{Q}_k)_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}, \quad (\mathcal{Q}^{-1}_k)_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}, \quad (122)$$

pa je interpolaciona matrica:

$$(\mathcal{B})_N = \mathcal{Q} \mathcal{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{x}{l} & \frac{x}{l} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (122^*)$$

2º Za opterećenje  $M_z$  matrica polja je:

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -y & -2xy & -3x^2y \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (123)$$

te je za granične vrednosti:

$$(\mathcal{Q}_k)_{M_z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix}; \quad (\mathcal{Q}^{-1}_k)_{M_z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \quad (123^*)$$

Interpolaciona matrica je sada:

$$(\mathcal{B})_{M_z} = \begin{bmatrix} 0 & -y & -2xy & -3x^2y \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} 6xy(l-x) & -ly(l^2-4xl+3x^2) & -6xy(l-x) & ly(l-3x) \\ l^3-3x^2l+2x^3 & lx(l^2-2xl+x^2) & 3x^2(l-x) & -lx^2(l-x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3º Na sličan način ćemo dobiti i matricu  $\mathcal{B}$  za opterećenje  $M_y$  i njen oblik je:

$$(\mathcal{B})_{M_y} = \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} 6xz(l-x) & xl(l^2-4xl+3x^2) & -6xz(l-x) & lxz(-2l+3x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ l^3-3x^2l+2x^3 & xl(-l^2+2xl-x^2) & 3x^2(l-x) & -lx^2(l-x) \end{bmatrix} \quad (124)$$

334.

$4^o$  Za torzijsko opterećenje matrica polja za granične vrednosti imaj oblik:

$$(\alpha_k)_{M_x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ e & 0 \end{bmatrix}; \quad (\alpha_k^{-1})_{M_x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{e} & \frac{1}{e} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (125)$$

te je interpolaciona matrica:

$$(\beta)_{M_x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -xz & -z \\ xy & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{e} & \frac{1}{e} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{e} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z(x-e) & -xz \\ y(e-x) & xy \end{bmatrix}. \quad (125^*)$$

Superponiranjem pojedinih podmatrica dobijamo interpolacionu matricu  $\beta$  konačnog linijskog elementa za slučaj opšter opterećenja koje je superpozicija pojedinačnih koje smo rasmatrali:

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_N \\ \beta_{M_z} \\ \beta_{M_y} \\ \beta_{M_x} \end{bmatrix} \quad (126)$$

Kada unesemo izračunate vrednosti za interpolacione matriće  $\beta$  u poslednju matricu i sredimo kolone i vrste po redosledu vrsta oznaka vektora  $\{S\}$  odnosno  $\{F\}$  dobicemo sledeći potpuni zapis za interpolacionu matricu (data u transponovanom obliku):

$$\beta' = \frac{1}{e^3} \begin{bmatrix} e^2(e-x) & 0 & 0 \\ 6xy(e-x) & e^3 - 3x^2e + 2x^3 & 0 \\ 6xz(e-x) & 0 & e^3 - 3lx^2 + 2l^3 \\ 0 & -xe^2(e-x) & -ye^2(x-l) \\ ze(l^2 - 4ex + 3x^2) & 0 & xe(-l^2 + 2xl - x^2) \\ ye(-l^2 + 4ex - 3x^2) & xe(e^2 - 2ex + x^2) & 0 \\ xe & 0 & 0 \\ 6xy(x-l) & x^3(3l-2x) & 0 \\ -6xz(l-x) & 0 & x^2e(3l-2x) \\ 0 & -xe^2 & xy e^2 \\ -xzl(2l-3x) & 0 & x^2e(l-x) \\ yxl(2l-3x) & -x^2e(l-x) & 0 \end{bmatrix} \quad (127)$$

### VIII.10.3. ODREDJIVANJE MATRICE KRUTOSTI

Da bi smo odredili matricu krutosti konačnog linijskog elementa možemo da postupimo na dva načina: 1<sup>o</sup> da upotrebimo direktni obrazac za računavanje (41); i 2<sup>o</sup> što je pogodnije, da upotrebimo jednačinu za određivanje uopštene matrice krutosti linijskog konačnog elementa u obliku (51), pa zatim odredimo matricu krutosti  $\mathcal{D}_e$  konačnog linijskog elementa pomoću izraza (52) u kome je  $\mathcal{D}$  dato izrazom (48).

Ako se odlučimo za drugi način potrebno je da odredimo uopštenu matricu krutosti  $\mathcal{D}_z$ , a zatim matricu krutosti  $\mathcal{D}_e$  konačnog linijskog končnog elementa.

Radi preglednijeg pisanja, ovde ćemo uzeti u obzir uticaj svakog opterećenja posebno, pa ćemo posle toga dobijene rezultate superponirati. Matrice  $\mathcal{D}$  za pojedinačne vrste opterećenja imaju sledeće oblike:

1<sup>o</sup> Za aksijalnu silu:

$$\mathcal{D}_N = \mathcal{D} \mathcal{Q}_N = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (128)$$

2<sup>o</sup> Za moment  $M_z$  je:

$$\mathcal{D}_{M_z} = \mathcal{D} \mathcal{Q}_{M_z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2y & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (128*)$$

3<sup>o</sup> Za moment  $M_y$  je:

$$\mathcal{D}_{M_y} = \mathcal{D} \mathcal{Q}_{M_y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2z & -6xz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (128**)$$

4<sup>o</sup> Za torzioni moment  $M_x$  je:

$$\mathcal{D}_{M_x} = \mathcal{D} \mathcal{Q}_{M_x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \quad (128****)$$

336.

Pojedine uopštene matrice krutosti su:

1º Za slučaj aksijalne sile:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{E}_N} = \int_V \mathcal{D}' E \mathcal{D} dV = \int_0^l \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A dx ; \quad (129)$$

 2º Za moment savijanja  $M_z$  :

$$\mathcal{R}_z^{M_z} = \int_V [\mathcal{D}' E \mathcal{D}]^{M_z} dV = \int_0^l \int_A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2y & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx dA ;$$

$$\mathcal{R}_z^{M_z} = E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\ell I_z & 6\ell^2 I_z \\ 0 & 0 & 6\ell^2 I_z & 12\ell^3 I_z \end{pmatrix} \quad (129*)$$

Pojedine matrice krutosti konačnog linijskog elementa su:

 1º za normalnu silu  $N$ :

$$\mathcal{R}^N = A \ell E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (130)$$

 2º Za moment savijanja  $M_z$  je:

$$\mathcal{R}^{M_z} = (\mathcal{D}_K^{-1})' \mathcal{R}_z^{M_z} \mathcal{D}_K = \frac{1}{\ell^3} \begin{pmatrix} \ell^3 & 0 & -3\ell & 2 \\ 0 & \ell^3 & -2\ell^2 & \ell \\ 0 & 0 & 3\ell & -2 \\ 0 & 0 & -\ell^2 & \ell \end{pmatrix} EI_z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\ell & 6\ell^2 \\ 0 & 0 & 6\ell^2 & 12\ell^3 \end{pmatrix} \frac{1}{\ell^3} \begin{pmatrix} \ell^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ell^3 & 0 & 0 \\ -3\ell & -2\ell^2 & 3\ell & \ell^2 \\ 2 & \ell & -2 & \ell \end{pmatrix} ;$$

$$\mathcal{R}^{M_z} = \frac{EI_z}{\ell^3} \begin{pmatrix} 12 & 6\ell & -12 & -12 \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & 6\ell & 4\ell^2 \end{pmatrix} \quad (130*)$$

Na sličan način se dolazi do matrice krutosti konačnog elementa kada se razmatra naprezanje na savijanje momentom, kada ona ima oblik:

$$\underline{\underline{B}}^M_y = \frac{EI_y}{l^3} \begin{pmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ 6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{pmatrix}, \quad (131)$$

dok za slučaj opterećenja na torziju momentom  $M_x$  matrica krutosti konačnog elementa ima oblik:

$$\underline{\underline{B}}^M_x = \frac{1}{l} \begin{pmatrix} -1 & l \\ 1 & 0 \end{pmatrix} G I_t l \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ l & 0 \end{pmatrix} = \frac{G I_t}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (131^*)$$

da bi smo dobili zajedničku matricu krutosti konačnog linjinskog elementa grupišemo dobijene podmatrice u zajedničku matricu krutosti konačnog elementa, s tim da uredimo kolone i vrste, opet po redu vrsta oznaka čvornih vektora. Tako je matrica krutosti linijskog elementa:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} a & b_y & c_y & -a & 0 & c_y \\ b_y & b_z & -c_z & -b_y & c_y & -c_z \\ b_z & -c_z & t & -b_z & -c_z & -t \\ c_y & d_z & c_z & c_z & e_z & e_y \\ c_z & d_z & a & c_z & e_z & -c_y \\ -b_y & c_y & b_y & a & e_y & -c_y \\ -b_z & c_z & -t & b_z & c_z & t \\ -c_z & e_z & c_z & c_z & d_z & d_y \\ 0 & c_y & e_y & -c_y & d_y & \end{pmatrix} \quad (132)$$

gde su:

$$a = \frac{a t}{l}; \quad b_y = \frac{12 B_z}{l^3}; \quad b_z = \frac{12 B_z}{l^3}; \quad c_y = \frac{6 B_z}{l^2}; \quad c_z = \frac{6 B_y}{l^2};$$

$$d_y = \frac{4 B_z}{l}; \quad d_z = \frac{4 B_y}{l}; \quad e_y = \frac{d_y}{2}; \quad e_z = \frac{d_z}{2}; \quad t = \frac{G I_t}{l}. \quad (132^*)$$

$$\mathcal{A} = EA, \quad \mathcal{B}_z = EI_z, \quad \mathcal{B}_y = EI_y. \quad (132**)$$

Matricu krutosti  $\mathcal{K}$  prostorno opterećenog linijskog konačnog elementa je simetrična matrica reda 12.12. Ako razdelimo gornju matricu na podmatrice po čvorovima  $i, j$  dobijemo:

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix}. \quad (133)$$

Pošto pojedine podmatrice predstavljaju matrice reda 6.6 to im pripadaju elementi u pojedinim "kvadratima" matrice krutosti  $\mathcal{K}$  kao što je to prikazano na samoj matrici.

Za ravansku konstrukciju matrica krutosti  $\mathcal{K}$  konačnog linijskog elementa se odgovarajuće pojednostavljuje i dobija oblik:

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} a & & -a & & & \\ d & c & & -b & -c & \\ c & d & & -c & e & \\ -a & & a & & & \\ -b & c & & b & -c & \\ c & e & & -c & d \end{pmatrix}, \quad (134)$$

gde je:

$$a = \frac{E}{l}; \quad b = \frac{12B_3}{l^3}; \quad c = \frac{6B_3}{l^2}; \quad d = \frac{4B_3}{l}; \quad e = \frac{d}{2}, \quad (134*)$$

i čvorni vektori  $\{S\}$  i  $\{F\}$  dobijaju jednostavniji oblik:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} S_{1i} \\ S_{2i} \\ S_{6i} \\ S_{1j} \\ S_{2j} \\ S_{6j} \end{Bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_{1i} \\ F_{2i} \\ F_{6i} \\ F_{1j} \\ F_{2j} \\ F_{6j} \end{Bmatrix}, \quad (135)$$

Kod štapova u prostoru kada je  $M_x = M_y = M_z = 0$  dobijamo matricu krutosti konačnog elementa reda 6.6 u obliku:

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} a & \cdot & \cdot & -a & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ -a & \cdot & \cdot & a & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (136)$$

Čvorni vektori pomeranja i sile u lokalnom koordinatnom sistemu su:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} S_{1i} \\ 0 \\ 0 \\ S_{1j} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_{1i} \\ 0 \\ 0 \\ F_{1j} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (137)$$

medjutim ta dva vektira u opštem zajedničkom koordinatnom sistemu imaju svih čest koordinata različitih od nule,ako se ne radi o nekom specijalnom slučaju.

Prilikom određivanja matrice krutosti linijskog konačnog elementa nismo užimali u obzir deformacije smicanja,jer su uglavnom male,sem u specijalnim slučajevima,kada i njih treba uzeti u obzir.

Dalji postupak rada u slučaju linijskih konstrukcija kada smo već odredili matrice krutosti konačnih elemenata je prema,već u početnom delu opisanom opštem postupku.Jednačinu konstrukcije ćemo dobiti na taj način što podmatrice krutosti svih elemenata transformišemo iz lokalnog u zajednički koordinatni sistem, a prema jednačinama transformacije koje smo ranije naveli. Oblik i rang transformacionih matrica zavisi od konkretnog tipa konstrukcije. Osnovni koncept formiranja transformacionih matrica smo već opisali u istoimenom poglavlju.

Kada napišemo jednačinu cele konstrukcije  $\mathbb{F} = \mathbb{K} \mathbb{S}$ , izvešćemo na osnovu graničnih uslova razdeljivanje u matrici za čvorna pomeranja na elemente koji se odnose na poznate ili unapred određene i one koje tražimo. Spoljašnje opterećenje uzimamo u obzir kroz elemente matrice kolone koji su poznati.Kada su linijski elementi opterećeni u polju elementa onda upotrebljavamo princip ekvivalencije da bi smo odredili odgovarajuća čvorna opterećenja,a po postupku koji je ranije opisan.

Primeri primene MKE na linijske i površinske konstrukcije nisu dati zbog ograničenja obima udžbenika,a mogu se naći u navedenoj literaturi.

## IX. OSNOVI TERMOELASTIČNOSTI

U razradi novih konstrukcija parnih i gasnih turbina, reaktivnih i raketnih motora, visokobrzinskih motora i nuklearnih reaktora došlo se do zaključka da su elementi tih konstrukcija izloženi neravnomernom nestacionarnom zagrevanju, pri kome se menjaju fizičko-mehanička svojstva materijala, javljaju se padovi temperature praćeni nejednakim topotnim širenjem delova elemenata konstrukcije.

Neravnomerno topotno širenje, u opštem slučaju ne može se odvijati slobodno u elastičnom telu, usled čega se javlja topotno naprezanje, čije odgovarajuće naponsko stanje je definisano topotnim (termičkim, temperaturnim) naponima. Poznavanje veličina i karaktera dejstva termičkih naponi neophodno je za svestranu analizu otpornosti konstrukcija. Topotni naponi odvojeno ili zajedno sa naponima usled dejstva spoljašnjih mehaničkih sila mogu izazvati pojave pukotina i razaranja u konstrukcijama. Neki materijali pri brzoj pojavi napona usled jako izražene nestacionarnosti temperaturnog polja postaju krti i ne izdržavaju topotne udare. Ponovljeno dejstvo termičkih naponi dovodi do termozamornog rušenja elemenata konstrukcije. Dejstvo termičkih naponi može izazvati znatnu plastičnu deformaciju koja vodi ka potpunom ili progresivnom razaranju konstrukcije.

Duhamel (1838) i Neumann (1841) su razradili osnove teorije termoelastičnosti bazirane na pretpostavkama da ukupna deformacija rezultira iz elastične deformacije povezane sa pojavom napona i deformacija čistog topotnog širenja koje se određuje na osnovu klasične teorije topotno provodnog temperaturnog polja. Međutim ta teorija za nestacionarna topotna i mehanička dejstva se pokazala ograničenom.

U opštem slučaju promena temperature tela proizilazi ne samo kao posledica provođenja topote od spoljašnjih izvora topote, nego i u

rezultatu samog procesa deformisanja. Pri deformisanju tela od mehaničkih ili topotnih dejstava, koja se realizuju velikim brzinama javlja se efekat spregnutosti ostvaren uzajamnim dejstvom polja deformacije i temperature. On se javlja pri obrazovanju i kretanju topotnih tokova (struja) unutar tela povodom spregnutih elastičnih i topotnih talasnih, termoelastičnom rasturanju (gubitku) energije itd. Zato je studiozno izučavanje mehanizma formiranja naponskog i deformacionog stanja usled termičkih dejstava moguće samo na osnovu termodinamičkih zakona, pomoću kojih se dobijaju spregnute jednačine termoelastičnosti. U okvirima klasične termodinamike stroga analiza je moguća samo za izotermičke i adijabatske povratne procese deformisanja.

U teoriji termoelastičnosti obično se postavljaju ograničenja na veličinu termičkog poremećaja: pretpostavlja se da je priraštaj temperature veoma malo u poređenju sa početnom temperaturom. Odbacivanje ove pretpostavke kao ograničenja ne narušava pretpostavke o malim deformacijama, ali dovodi do pojave nelinearnih članova povezanih sa jednačinama termoelastičnosti.

Specifičnosti zadataka termoelastičnosti u ravni u odnosu na zadatke izotermičke teorije elastičnosti u ravni povezani su sa karakterom temperaturnog polja. Ravno deformaciono stanje u zadacima termoelastičnosti je rezultat pojave dvodimenzionalnog (ravnog) temperaturnog polja. Ravno naponsko stanje u granicama prostorne teorije elastičnosti može da se javi pri prostornom temperaturnom polju koje zadovoljava odredjene uslove.

Postavka ravnog naponskog stanja u zadacima termoelastičnosti mora da uzima u obzir uslove jednoznačnosti pomeranja.

Teorija termoelastičnosti tankih ploča, kao i odgovarajuća izotermička teorija zasnovana je na hipotezi o nepromenljivosti normalnog elementa i na pretpostavci o dvodimenzionom naponskom stanju, analogno ravnom naponskom stanju.

Pri jako izraženom nestacionarnom polju temperature zakon promene čisto topotnih deformacija po debljini tanke ploče ili ljske bitno se razlikuje od linearног i zato hipoteza o nepromenljivosti normalnog napona u opštem slučaju ne odgovara linearном zakonu promene topotnih napona po debljini tela.

### IX.1. TERMODINAMIČKE OSNOVE TERMOELASTIČNOSTI

U teoriji termoelastičnosti proučava se ravnoteža elastičnog čvrstog tela, kao termodinamički sistem čije uzajamno dejstvo sa okolnom sredinom se javlja samo u mehaničkom radu spoljašnjih sila i toplotnoj razmeni. Kao i u klasičnoj teoriji pretpostavlja se da je telo idealno elastično; početno homogeno i izotropno i da trpi male deformacije u odnosu na neko početno "prirodno" stanje tela, a koriste se pojmovi i postavke klasične teorije elastičnosti povezane sa definisanjem naponskog i deformacionog stanja.

Termodinamički sistem definisan je konačnim brojem nezavisno promenljivih - makroskopskih veličina - termodinamičkih parametara. Temperatura je jedan od nezavisnih makroskopskih parametara dinamičkog sistema i predstavlja mjeru intenziteta njegovog toplotnog kretanja. Temperatura se može menjati kao posledica toplotne promene sa okolnom sredinom dejstva izvora topline, kao i u rezultatu samog procesa deformisanja. Određivanje veze između deformacionog stanja tela i temperature moguća je neposrednom primenom zakona klasične termodinamike samo u slučajevima povratnih procesa.

Radni proces termoelastičnog deformisanja tela strogo uveži je nepovratan. Termodinamički sistem kada se ne menjaju spoljašnji uslovi dolazi u stanje termodinamičke ravnoteže, koje se karakteriše postojanošću svih termodinamičkih parametara i otsustvom makroskopskih kretanja. Dva termodinamički ravnotežna sistema dovedena u toplotni kontakt neće se nalaziti u termodinamičkoj ravnoteži, dok se kroz neko vreme kroz rezultat razmene energije obatela dovedu u stanje nove termodinamičke ravnoteže. Stanje termodinamičke ravnoteže definisano je i temperaturom, kao unutrašnjim parametrom, koji karakteriše unutrašnje kretanje sistema.

Ravnotežni proces se javlja kao povratni (reverzibilni) i može se odvijati u suprotnom smeru kroz ista stanja, kao i u direktnom procesu ne izazivajući nikakve promene u okolnoj sredini, saglasno pretpostavkama koje smo učinili u termoelastičnosti.

## IX.2. POSTAVKE ZADATAKA TERMOELASTIČNOSTI

Zadatak termoelastičnosti treba da u uslovima zadatih mehaničkih i topotnih dejstava odredi 16 funkcija koordinata  $x, y, z$  i vremena  $t$ :

- 1º šest komponenata tenzora napona  $\sigma_{ij}$ ;
- 2º šest komponenata tenzora deformacije  $\epsilon_{ij}$ ;
- 3º tri komponente vektora pomeranja  $u_i$ ;
- 4º polje temperature  $T$ .

Koje je zadovoljavaju:

- 1º tri jednačine kretanja ili ravnoteže;
- 2º šest odnosa između napona i deformacija i temperature;
- 3º šest odnosa između deformacija i pomeranja;
- 4º jednačinu provodjenja toplote;
- 5º početne i granične termomehaničke uslove.

Počeni uslovi se obično zadaju u obliku raspodeljenih komponenata vektora pomeranja i njihovih brzina i temperature u celoj oblasti elastičnog tela. Granični uslovi na površi konture elastičnog tela ili slaganje ili kombinacija mehaničkih i topotnih uslova. Mehanički granični uslovi zadaju se bilo pomoću pomeranja bilo pomoću napona - površinskih sila na površi konture tela. Kao topotni granični uslov primenjuje se jedan od graničnih uslova teorije provodjenja toplote. Naprimjer topotni granični uslovi na jednom delu površi tela zadaju se rasporedom temperature, a na ostalom delu konturne površi zakonom konvektivne razmene toplote sa okolnom sredinom.

Za  $(T - T_0)/T_0 \ll 1$  vrednosti elastičnih i termičkih koeficijenata pretpostavljamo konstantnim.  $T_0$  je početna temperatura,  $(T - T_0)$  je promena temperature tela u izučavanom naponskom i deformacionom stanju tela.

Termoelastična deformacija tela, koja nastaje kao rezultat nestacionarnih mehaničkih i topotnih dejstava praćena je suprotnim efektom izmenom njegovog temperaturnog polja, tako da odgovarajući sistem jednačina sadrži jednačinu provodjenja toplote, pa je to spregnuti zadatak termoelastičnosti.

Za  $(T - T_0)/T_0 \ll 1$  jednačina provodjenja toplote se linearizuje i linearno je povezana sa ostalim jednačinama zadatka termoelastičnosti.

344.

čnosti.

Deformacija elastičnog tela od mehaničkih i topotnih dejstava izaziva male promene temperature tako da je uticaj efekata spregnutosti u običnim uslovima izmene toplote od manjeg uticaja za zadatke sa termičkim naponima u odnosu na zadatke o termoelastičnom rasejavanju energije. U slučaju adijabatskog procesa deformisanja definišemo rešenje problema rešavanjem jednačina sistema nezavisno od jednačine provodjenja toplote. Pri stacionarnom temperaturnom polju zadatak termoelastičnosti se javlja kao statički.

### IX.3. OSNOVNE JEDNAČINE STATIČKOG ZADATKA TERMOELASTIČNOSTI

Kod statičkog zadatka termoelastičnosti za razliku od kvazi-statičkog polja temperature se javlja kao stacionarno.

#### IX.3.1. POLJE TEMPERATURE

prvi korak u rešavanju statičkog zadatka termoelastičnosti sastoji se u određivanju temperaturnog polja, koje se svodi na rešavanje jednačine prostiranja topline:

$$\lambda \Delta T + \frac{Q}{\rho c} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

gde je  $\lambda = \frac{k}{\rho c}$  koeficijent temperaturnog provodjenja,  $k$  koeficijent provodjenja topline,  $\rho$  gustina materijala,  $c$  specifična toplota,  $Q$  količina toplotne energije koju proizvede zapreminski izvor po jedinici zapreme tla u jedinici vremena.

Integral parcijalne diferencijalne jednačine provodjenja topline zavisi od topotnih početnih i graničnih uslova. Početnim uslovima se definiše raspodela temperature u telu u početnom trenutku vremena. Početna temperatura je najčešće konstantna, ako se radi o telu u termodinamičkoj ravnoteži i kako nas interesuje promena temperature u odnosu na temperaturu u "prirodnom" stanju tela to možemo uzeti u tom slučaju da je ona jednaka nuli.

Topotni granični uslovi mogu biti zadati:  $T(x_k, y_k, z_k, t) = f(t)$  raspadom temperature na graničnoj površi tela u obliku:

$$T(x_k, y_k, z_k, t) = f(t). \quad (2)$$

2º zakonom ekvivalentne razmene toplotne sa okolnom sredinom koji za izotropni materijal glasi:

$$\varphi(x_k, y_k, z_k, t) = -k \frac{\partial T(x_k, y_k, z_k, t)}{\partial n}, \quad (3)$$

gde je  $\varphi(x_k, y_k, z_k, t)$  toplotni fluks u nekoj tački  $P(x_k, y_k, z_k)$  konturne površi tela u pravcu orta  $\vec{n}$

Specijalni slučajevi toplotnih graničnih uslova su:

1º Idealno izolovana površ tela preko koje se ne vrši toplotni fluks, pa je toplotni granični uslov u tom slučaju:

$$\frac{\partial T(x_k, y_k, z_k, t)}{\partial n} = 0 \quad (3^*)$$

2º Površ tela temperature  $T(x_k, y_k, z_k, t)$  se nalazi u okolnoj sredini čija je temperatura  $T_0$  pa se može usvojiti da je toplotni fluks kroz tu konturnu površ tela proporcionalan razlici temperature na konturi tela i okolne temperature  $T_0$  koju poznajemo, te granični uslov dobija oblik:

$$k \frac{\partial T(x_k, y_k, z_k, t)}{\partial n} = h [T_0 - T(x_k, y_k, z_k, t)], \quad (3^{**})$$

gde je  $h$  koeficijent prelaza toplote.

3º Granični uslovi na kontaktu – dodirnim površima dva čvrsta tela izmedju kojih, prepostavljamo da postoji idealni toplotni kontakt i prepostavlja se da su temperature oba tela iste na dodirnim površima, kao i toplotni fluks u tačkama dodira suprotnosmeran u odnosu na ortove normala sponjašnjih strana dodirnih površi tela. Ako sa (1) i (2) označimo indekse termičkih veličina koja se odnose na tela u toplotnom kontaktu, toplotni granični uslovi na dodirnim površima su:

$$T_1(x_k, y_k, z_k, t) = T_2(x_k, y_k, z_k, t), \quad (3^{***})$$

$$k_1 \frac{\partial T_1(x_k, y_k, z_k, t)}{\partial n_1} = -k_2 \frac{\partial T_2(x_k, y_k, z_k, t)}{\partial n_2},$$

Rešenje jednačine (1) provođenja toplote sa odgovarajućim početnim i graničnim uslovima određuje jedinstveno polje temperature u telu. Kada polje temperature u telu ne zavisi od vremena zapreminski toplotni izvori su stacionarni pa je prostiranje toplote:

$$\partial \Delta T(x, y, z) + \frac{Q}{\rho c} = 0, \quad (4)$$

i njoj treba pridružiti stacionarne granične uslove (koji ne zavise od vremena).

U odsustvu toplotnih izvora prethodna jednačina postaje Laplace-ova parcijalna diferencijalna jednačina stacionarnog polja temperature:

$$\Delta T(x, y, z) = 0. \quad (5)$$

Integral Laplace-ove diferencijalne jednačine za odgovarajuće stacionarne toplotne granične uslove pretpostavlja postojanje stacionarnog polja temperaturе. Kada smo odredili zakon raspodele temperature prelazimo na određivanje termoelastičnog naponskog stanja.

### IX.3.2. TERMIČKI NAPONI

Posmatramo elastično termomehanički izotropno telo sa istom temperaturom  $T_0$  u svim tačkama u "prirodnom" stanju tela - nedeformisanom i nenapregnutom i pretpostavljamo da se to elastično termomehanički izotropno telo u pojedinim tačkama zagrejalo za neki priraštaj temperature  $T = T(x, y, z)$  koji zavisi od koordinata tačaka i promenljiv je u opštem slučaju od tačke do tačke tela. Sa  $\alpha$  označimo koeficijent linearne temperaturne deformacije. Pretpostavimo da je priraštaj temperature  $T(x, y, z)$  dovoljno mali da se termomehaničke konstante materijala mogu posmatrati nezavisnim od promene temperature.

Elementi termomehanički izotropnog tela u polju temperature dobijaju linearnu dilataciju:

$$\epsilon_t = \alpha T(x, y, z), \quad (6)$$

linijskih elemenata u svim pravcima, ako se oni mogu slobodno širiti, te se deformacije klizanja ne bi javile. Kako se u opštem slučaju linijski elementi termomehanički izotropnog tela ne mogu širiti slobodno pojavice se naprezanje tela, a sa tim i termički naponi te će ukupna deformacija biti zbir deformacija usled promene temperature tela i deformacija usled nastalih napona.

Ako bi smo termomehanički izotropno telo izdelili na male delice i svaki od njih izložili dejstvu odgovarajuće njima temperature iz po-

ja homogene raspodele temperature oni bi se deformisali šireći se i iste deformisane ne bi smo mogli da sastavimo u neprekidno telo. Kako se eksperimentom uveravamo da deformisano termomehanički izotropno telo pod uticajem istog polja nehomogene raspodele temperature ostaje neprekidno to znači da se u tezu javljaju dopunske elastične deformacije kao rezultat pojava unutrašnjih naponu u funkciji očuvanja neprekidnosti unutar deformabilnog tela (kontinuuma). Ova druga deformacija je elastična. Koordinate tenzora rezultujuće specifične deformacije tela moraju zadovoljavati uslove kompatibilnosti deformacija. Koordinate tenzora specifične deformacije koji bi odgovarao samo termičkim ne zadovoljavaju uslove kompatibilnosti deformacija u opštem slučaju, što znači da bi te deformacije bile inkompatibilne.

Neka je naponsko stanje koje je rezultat deformacija usled promene polja temperature i elastičnih deformacija usled nastalih naponu, jer se elementi termomehanički izotropnog tela ne mogu slobodno širiti, odredjeno matricom tenzora napona:  $\mathcal{N}_t$  i matricom tenzora deformacije  $\mathcal{E}_t$  odgovarajuće deformaciono stanje:

$$\mathcal{N}_t = \begin{pmatrix} \delta_x & \gamma_{yx} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & \delta_y & \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \delta_z \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Veza izmedju matrice tenzora deformacije  $\mathcal{E}_t$ , tenzora napona  $\mathcal{N}_t$  i temperature  $T$ , za odgovarajuće naponsko i deformaciono stanje i temperaturu je:

$$\mathcal{E}_t = \frac{1}{E} [(1+\mu) \mathcal{N}_t - \mu \mathcal{N}_1 \mathbb{I}] + \alpha T \mathbb{I} \quad (8)$$

Ako uvedemo zapreminski koeficijent termičkog širenja  $\alpha = 3\alpha$  veza izmedju naponskog i deformacionog stanja i temperature može se napisati kao:

$$\mathcal{E}_t = \frac{1}{E} [(1+\mu) \mathcal{N}_t - \mu \mathcal{N}_1 \mathbb{I}] + \frac{1}{3} \alpha T \mathbb{I}, \quad (8*)$$

ili u razvijenom obliku:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\delta_x - \mu (\delta_y + \delta_z)] + \frac{1}{3} \alpha T, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\delta_y - \mu (\delta_x + \delta_z)] + \frac{1}{3} \alpha T, \end{aligned} \quad (8**)$$

$$\mathcal{E}_z = \frac{1}{E} [\delta_z - \mu(\delta_x + \delta_y)] + \frac{1}{3} c T,$$

$$\delta_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \delta_{xy}, \quad \delta_{xz} = \frac{2(1+\mu)}{E} \delta_{xz}, \quad \delta_{yz} = \frac{2(1+\mu)}{E} \delta_{yz}. \quad (8**)$$

Kako se u linearnoj teoriji termoelastičnosti ograničavamo na termomehanički izotropna tela sa kompatibilnim deformacijama, to smo u prethodnim izrazima iskoristili Hooke-ov zakon za vezu izmedju deformacionog i naponskog stanja.

Veže izmedju napona i deformacija eksplisitno izražene pomoću napona slobijamo rešavanjem prethodne matrične jednačine (8\*) ili sistema (8\*\*). Zato je potrebno da odredimo vezu izmedju prvih invarijanti:  $\mathcal{E}_1$  matrice tenzora deformacije  $\mathcal{E}_t$  i  $\mathcal{N}_t$  matrice tenzora napona  $N_t$  usled elastičnih deformacija i temperature:

$$\mathcal{N}_t = \frac{E}{1-2\mu} (\mathcal{E}_1 - cT) = \kappa E (\mathcal{E}_1 - cT), \quad (9)$$

gde je  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_v$  zapreminska dilatacija. Matrica tenzora napona izražena pomoću matrice tenzora deformacije i temperature je:

$$N_t = 2G \left[ \mathcal{E}_t + \kappa \mathcal{E}_v \mathbb{I} - \frac{1}{3} \kappa c T \mathbb{I} \right], \quad (10)$$

ili ako uvedemo Lamé-ove konstante:

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}; \quad \nu = G; \quad \beta = \frac{Ec}{3(1-2\mu)}; \quad (10*)$$

prethodna matrična jednačina dobija oblik:

$$N_t = 2\nu \mathcal{E}_t + \lambda \mathcal{E}_v \mathbb{I} - \beta T \mathbb{I}. \quad (10**)$$

Zapreminska dilatacija je:

$$\mathcal{E}_v = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E} = \frac{1-2\mu}{E} \mathcal{N}_t + c T \quad (11)$$

Matrična jednačina (10\*\*) predstavlja fizički zakon izražen pomoću matrica tenzora deformacije  $\mathcal{E}_t$ , matrice tenzora napona  $N_t$  i temperature  $T$  i termičkih  $c$  i mehaničkih  $G, \mu$  konstanti materijala i u literaturi je poznat pod nazivom Duhamele - Neumann -

zov zakon, koji u razvijenom obliku izgleda ovako:

$$\begin{aligned}\delta_x &= 2G\left(\epsilon_x + \mu k \epsilon_v - \frac{1+\mu}{3} k c T\right), \\ \delta_y &= 2G\left(\epsilon_y + \mu k \epsilon_v - \frac{1+\mu}{3} k c T\right), \\ \delta_z &= 2G\left(\epsilon_z + \mu k \epsilon_v - \frac{1+\mu}{3} k c T\right), \\ \gamma_{xy} &= G \delta_{xy}, \quad \gamma_{xz} = G \delta_{xz}, \quad \gamma_{yz} = G \delta_{yz}.\end{aligned}\tag{12}$$

### IX.3.3. MODIFIKOVANE LAME-OVE JEDNAČINE

Koordinate tenzora napona treba da zadovolje uslove tavnoteže u stacionarnom temperaturnom polju. Zato komponente tenzora napona (10) zamениmo u Navier-ove jednačine ravnoteže zanemarujući uticaj zapreminske siла i izražavajući komponente tenzora deformacije pomoću rezultujućih komponentnih pomeranja  $\mu$ ,  $v$  i  $w$  tako da dobijemo sledeću vektorskiju jednačinu:

$$G \left[ \Delta \vec{S} + k \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{S} - \frac{2}{3}(1+\mu) k c \operatorname{grad} T \right] \tag{13}$$

gde su:  $\vec{S}$  vektor pomeranja čestica (tačaka) tela:

$$\begin{aligned}\vec{S}(x, y, z) &= u(x, y, z) \vec{i} + v(x, y, z) \vec{j} + w(x, y, z) \vec{k}, \\ \operatorname{div} \vec{S} &= \epsilon_v = \epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},\end{aligned}\tag{14*}$$

$$\operatorname{grad} T = \vec{x} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{y} \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{z} \frac{\partial T}{\partial z}. \tag{14**}$$

Vektorska jednačina (13) predstavlja u vektorskiju obliku modifikovane Lamé-ove jednačine ili Navier-ove jednačine druge vrste za primenu u termoelastičnosti na elastična tela u stacionarnom polju temperature. Ista jednačina se primenjuje i za slučaj kvazistatičkog zadatka termoelastičnosti i za slučaj spore sa vremenom promene temperature.

## IX.3.4. MODIFIKOVANI CAUCHY-JEVI GRANIČNI USLOVI

Cauchy-jevi granični uslovi u slučaju termoelastičnih napona dobijaju oblik:

$$\{F'_n\} = N \{n\}_k , \quad (15)$$

ili u razvijenom obliku:

$$\{F'_n\} = 2G \left[ \mathcal{E} + \mu \kappa \varepsilon \mathbb{I} - \frac{1}{3}(1+\mu) \kappa c \mathbb{I} T \right] \{n\}_k . \quad (16)$$

U uslovima termoelastičnog naprezanja na onim delovima površi konture gde granični uslovi nisu zadati pomeranjima, već su površine slobodne, površinske sile iščezavaju, nema ih, pa su u tom slučaju granični uslovi oblika:

$$2G \left[ \mathcal{E} + \mu \kappa \varepsilon \mathbb{I} \right] \{n\} = 2G \frac{\kappa(1+\mu)}{3} c T \mathbb{I} \{n\} . \quad (17)$$

Za ostale delove površi konture tela granični uslovi se zadaju pomoću (16) ili pomoću pomeranja tačaka konturne površi:

$$\vec{s}(x_k, y_k, z_k) = \vec{s}_k \quad (18)$$

U opštem slučaju mogući su mešoviti granični uslovi.

## IX.3.5. UPOREDJENJA JEDNAČINA RAVNOTEŽE I GRANIČNIH USLOVA IZOTERMIČKE TEORIJE ELASTIČNOSTI I TERMOELASTIČNOSTI

Uporedjivanjem vektorske Lamé-ove jednačine termoelastičnosti i odgovarajuće njoj jednačine izotermičke teorije elastičnosti termomehanički homogenog i izotropnog tela zaključujemo da se u jednačini (13) umesto zapreminskih sila  $\vec{F}'_v$  kod termoelastičnih naprezanja javljaju veličine:

$$\{F'_v\} = -\frac{2}{3} G(1+\mu) \kappa c \{grad T\} . \quad (19)$$

U poređenjem graničnih uslova kod elastičnog izotermičkog i termoelastičnog naprezanja vidimo da se kod termoelastičnog naprezanja pojavuju umesto površinskih sile  $F_n'$  sledeće veličine:

$$\{F_n'\} = \frac{E\kappa c}{3} T \{n\}. \quad (20)$$

Na osnovu prethodnih zaključaka iz izraza (19) i (20) kao i iz jednačina (13) i (17) zaključujemo da su komponentna pomeranja  $u$ ,  $v$  i  $w$  usled promene temperaturnog polja za  $T(x,y,z)$  ista sa pomeranjima koja izazivaju zapremske sile koje su definisane izrazom (19) i površinske sile na površi konture tela koje dejstvuju zatežuće, a definisane su izrazom (20).

### IX.3.6. JEDNAČINE TERMOELASTIČNOSTI U POLARNO-CILINDRIČKOM I SFERNOM KOORDINATNOM SISTEMU

Do sada smo prikazali osnovne jednačine termoelastičnosti u Descartes-ovom pravouglom koordinatnom sistemu, te ćemo sada ovde dati njihov odgovarajući oblik u polarno-cilindričkom odnosno sfernom koordinatnom sistemu, jer su u tom obliku pogodnije za primenu pri rešavanju problema termoelastičnosti za obrtna tela, ograničena cilindričnim ili sfernim površima.

#### IX.3.6\*. POLARNO-CILINDRIČKI KOORDINATNI SISTEM

Cauchy-jeve kinematičke jednačine su identične sa odgovarajućim izotermičke teorije elastičnosti. Isto važi i za Navier-ove jednačine ravnoteže izražene pomoću komponenata tensora napona u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu. Veze izmedju tensora napona, tensora specifične deformacije i temperature u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu si istog matičnog zapisa kao (8) i (10) iz ovog poglavlja ali u razvijenom obliku izgledaju ovako:

$$\begin{aligned}\delta_r &= 2G \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \mu \kappa \epsilon_v - \frac{1+\mu}{3} \kappa c T \right], \\ \delta_\theta &= 2G \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \mu + \mu \kappa \epsilon_v - \frac{1+\mu}{3} \kappa c T \right], \\ \delta_z &= 2G \left[ \frac{\partial w}{\partial z} + \mu \kappa \epsilon_v - \frac{1+\mu}{3} \kappa c T \right],\end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}_{ry} &= G \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \right], \\ \tilde{\epsilon}_{rz} &= G \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right], \\ \tilde{\epsilon}_{rz} &= G \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z} \right],\end{aligned}\quad (21*)$$

Modifikovane Lamé-ove jednačine u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu su:

$$\begin{aligned}G \left\{ \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \Delta u - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r} - \frac{2}{3}(1+\mu)Kc \frac{\partial T}{\partial r} \right\} &= 0, \\ G \left\{ \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} + \Delta v + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{3}(1+\mu)Kc \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right\} &= 0, \\ G \left\{ \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \Delta w - \frac{2}{3}(1+\mu)Kc \frac{\partial T}{\partial z} \right\} &= 0,\end{aligned}\quad (22)$$

gde je Laplace-ov operator:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (23)$$

### IX.3.6\*\*. SFERNI KOORDINATNI SISTEM

Cauchy-jeve kinematičke jednačine imaju idealni oblik kao i u izotermičkoj teoriji elastičnosti. Isto važi i za Navier-ove jednačine ravnoteže izražene pomoću komponenata tensora napona u sfernom koordinatnom sistemu. Veza između matrice tensora napona  $\mathcal{N}$ , matrice tensora specifične deformacije  $\mathcal{E}$  i temperature  $T$  u sfernom koordinatnom sistemu matrično izražena je oblika (8) ili (10) što u razvijenom obliku daje:

$$\begin{aligned}\delta_\theta &= 2G \left[ \frac{\partial u}{\partial \theta} + \mu \kappa \varepsilon_v - \frac{1+\mu}{3} \kappa c T \right], \\ \delta_\varphi &= 2G \left[ \frac{1}{\sin \gamma} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sin \gamma} (u - w \operatorname{tg} \gamma) + \mu \kappa \varepsilon_v - \frac{1+\mu}{3} \kappa c T \right], \\ \delta_\gamma &= 2G \left[ \frac{1}{\sin \gamma} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} + u \right) + \mu \kappa \varepsilon_v - \frac{1+\mu}{3} \kappa c T \right], \\ \tilde{\epsilon}_{\theta\varphi} &= G \left[ \frac{1}{\sin \gamma} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{\sin \gamma} \right],\end{aligned}\quad (24)$$

$$\tilde{\epsilon}_{\varphi\psi} = G \left[ \frac{1}{g \cos \psi} \frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{\partial v}{\partial g} - \frac{v}{g} \right] \quad (24*)$$

$$\tilde{\epsilon}_{\varphi\varphi} = G \left[ \frac{1}{g} \left( \frac{\partial v}{\partial \psi} + v \operatorname{tg} \psi \right) + \frac{1}{g \cos \psi} \frac{\partial w}{\partial \psi} \right]$$

Modifikovane Lamé-ove jednačine u termoelastičnosti u sfernom koordinatnom sistemu su:

$$G \left\{ \kappa \frac{\partial \epsilon}{\partial g} + \Delta u + \frac{2}{g^2} \left( w \operatorname{tg} \psi - \frac{1}{g \cos \psi} \frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{\partial w}{\partial \psi} - u \right) - \frac{2}{3} (1+\mu) \kappa c \frac{\partial T}{\partial g} \right\} = 0$$

$$G \left\{ \frac{\kappa}{g \cos \psi} \frac{\partial \epsilon}{\partial \psi} + \Delta v + \frac{2}{g^2 \cos \psi} \left( \frac{\partial u}{\partial \psi} - \operatorname{tg} \psi \frac{\partial w}{\partial \psi} \right) - \frac{v}{g^2 \cos^2 \psi} - \frac{2(1+\mu)}{3g \cos \psi} \kappa c \frac{\partial T}{\partial \psi} \right\} = 0 \quad (25)$$

$$G \left\{ \frac{\kappa}{g} \frac{\partial \epsilon}{\partial \psi} + \Delta w + \frac{2}{g} \left( \frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{\operatorname{tg} \psi}{\cos \psi} \frac{\partial v}{\partial \psi} \right) - \frac{w}{g^2 \cos^2 \psi} - \frac{1}{g} \frac{2}{3} (1+\mu) \kappa c \frac{\partial T}{\partial \psi} \right\} = 0$$

gde je  $\Delta$  Laplace-ov operator u sfernom koordinatnom sistemu:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial g^2} + \frac{1}{g^2 \cos^2 \psi} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{1}{g^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{2}{g} \frac{\partial}{\partial g} - \frac{\operatorname{tg} \psi}{g^2} \frac{\partial}{\partial \psi} \quad (26)$$

#### IX.7. DEFORMACIIONI RAD TERMOMEHANIČKI IZOTROPNOG TELA SA KOMPATIBILNIM DEFORMACIJAMA I ČASTIGLIANO- VE TEOREME

Specifični deformacioni rad termomehanički izotropnog tela sa kompatibilnim deformacijama u linearnoj termoelastičnosti definišemo pomoću istog izraza kao i u teoriji izotermne teorije elastičnosti izrazom oblika:

$$A_d = \frac{1}{2} \left\{ \epsilon_x \delta_x + \epsilon_y \delta_y + \epsilon_z \delta_z + \tilde{\epsilon}_{xy} \delta_{xy} + \tilde{\epsilon}_{yz} \delta_{yz} + \tilde{\epsilon}_{xz} \delta_{xz} \right\} \quad (27)$$

354.

vodeći račina pri tome o vezi (8) odnosno (10) izmedju napona i deformacija, pomoću kojih ga možemo izraziti samo u funkciji komponenata tenzora specifične deformacije i temperature pri čemu dobija oblik:

$$\mathbb{A}'_d = G \left\{ \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \mu K \varepsilon_v^2 + \frac{1}{2} (\delta_{xy}^2 + \delta_{xz}^2 + \delta_{yz}^2) - \frac{1+\mu}{3} K c T \varepsilon_v \right\}, \quad (28)$$

ili

$$\mathbb{A}'_d = \mathbb{A}'_{d\varepsilon} - \frac{G(1+\mu)}{3} K c T \varepsilon_v. \quad (28*)$$

Kada se specifični deformacioni rad izrazi samo u funkciji komponenata tenzora napona i temperature izraz dobija oblik:

$$\mathbb{A}'_d = \frac{1}{2E} \left\{ (1+\mu) [ \delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2 + 2(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2) ] - \mu N_1^2 \right\} + \frac{1}{6} c T \varepsilon_v N_1, \quad (29)$$

$$N_1 = \delta_x + \delta_y + \delta_z,$$

ili

$$\mathbb{A}'_d = \mathbb{A}'_{d\varepsilon} + \frac{1}{6} c T N_1, \quad (29*)$$

pri čemu je u termoelastičnosti  $\mathbb{A}'_{d\varepsilon} \neq \mathbb{A}'_{d\varepsilon}$  gde smo sa  $\mathbb{A}'_{d\varepsilon}$  označili izraz:

$$\mathbb{A}'_{d\varepsilon} = G \left\{ \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \mu K \varepsilon_v^2 + \frac{1}{2} (\delta_{xy}^2 + \delta_{xz}^2 + \delta_{yz}^2) \right\}, \quad (30)$$

dok smo sa  $\mathbb{A}'_{d\varepsilon}$  označili izraz:

$$\mathbb{A}'_{d\varepsilon} = \frac{1}{2E} \left\{ (1+\mu) [ \delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2 + 2(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2) ] - \mu (\delta_x + \delta_y + \delta_z)^2 \right\}, \quad (31)$$

koji u izotomičkoj teoriji elastičnosti odgovaraju specifičnom deformacionom radu izraženom samo u funkciji komponenata tenzora deformacije, odnosno napona. Ova dva izraza u termoelastičnosti nisu međusobom jednaka, već se razlikuju za deo koji odgovara članu:

$$\mathbb{A}'_{d\varepsilon} - \mathbb{A}'_{d\varepsilon} = \frac{cT}{3} \left[ N_1 + \frac{EKT}{2} c \right] = \frac{cT}{3} \left[ \varepsilon_v - \frac{cT}{2} \right] EK. \quad (32)$$

za  $T = 0$  ta razlika se anulira. Castigliano-vi obrasci se mogu izvesti i za deformacioni rad pri termičkim naprezanjima te možemo da napišemo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{A}_d^1}{\partial \varepsilon_x} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_x} \left\{ \bar{A}_{de}^1 - \frac{E_K c}{6} T \varepsilon \right\} = \delta_x, \\ \frac{\partial \bar{A}_d^1}{\partial \varepsilon_y} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_y} \left\{ \bar{A}_{de}^1 - \frac{E_K c}{6} T \varepsilon \right\} = \delta_y, \\ \frac{\partial \bar{A}_d^1}{\partial \varepsilon_z} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_z} \left\{ \bar{A}_{de}^1 - \frac{E_K c}{6} T \varepsilon \right\} = \delta_z, \\ \frac{\partial \bar{A}_d^1}{\partial \delta_{xy}} &= \frac{\partial}{\partial \delta_{xy}} \left\{ \bar{A}_{de}^1 - \frac{E_K c}{6} T \varepsilon \right\} = \gamma_{xy}, \\ \frac{\partial \bar{A}_d^1}{\partial \delta_{xz}} &= \frac{\partial}{\partial \delta_{xz}} \left\{ \bar{A}_{de}^1 - \frac{E_K c}{6} T \varepsilon \right\} = \gamma_{xz}, \\ \frac{\partial \bar{A}_d^1}{\partial \delta_{yz}} &= \frac{\partial}{\partial \delta_{yz}} \left\{ \bar{A}_{de}^1 - \frac{E_K c}{6} T \varepsilon \right\} = \gamma_{yz},\end{aligned}\tag{33}$$

ili u obliku:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{A}_d^1}{\partial \varepsilon_x} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_x} \left\{ \bar{A}_{de}^1 + \frac{1}{6} c T \mathcal{N}_1 \right\} = \varepsilon_x, \\ \frac{\partial \bar{A}_d^1}{\partial \varepsilon_y} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_y} \left\{ \bar{A}_{de}^1 + \frac{1}{6} c T \mathcal{N}_1 \right\} = \varepsilon_y, \\ \frac{\partial \bar{A}_d^1}{\partial \varepsilon_z} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_z} \left\{ \bar{A}_{de}^1 + \frac{1}{6} c T \mathcal{N}_1 \right\} = \varepsilon_z, \\ \frac{\partial \bar{A}_d^1}{\partial \delta_{xy}} &= \frac{\partial}{\partial \delta_{xy}} \left\{ \bar{A}_{de}^1 + \frac{1}{6} c T \mathcal{N}_1 \right\} = \delta_{xy}, \\ \frac{\partial \bar{A}_d^1}{\partial \delta_{xz}} &= \frac{\partial}{\partial \delta_{xz}} \left\{ \bar{A}_{de}^1 + \frac{1}{6} c T \mathcal{N}_1 \right\} = \delta_{xz}, \\ \frac{\partial \bar{A}_d^1}{\partial \delta_{yz}} &= \frac{\partial}{\partial \delta_{yz}} \left\{ \bar{A}_{de}^1 + \frac{1}{6} c T \mathcal{N}_1 \right\} = \delta_{yz}.\end{aligned}\tag{34}$$

### IX.3.8. TERMOELASTIČNI POTENCIJAL

J.N. Goodier je uveo pojam termoelastičnog potencijala  $\bar{U}$ , pomoću koga možemo koordinate vektora pomeranja da izrazimo u obliku:

$$\vec{s}(x, y, z, T) = \text{grad } \bar{U}(x, y, z, T). \tag{35}$$

Kada prethodni izraz za vektor pomeranja  $\vec{s}(x, y, z, T)$  unesemo u modifikovane Lame-ove jednačine termoelastičnosti dobijamo:

$$\mathbb{G} \text{ grad} \left\{ (1+\kappa) \Delta \bar{U} - \frac{2}{3} (1+\mu) \kappa c T \right\} = 0, \tag{36}$$

jer je  $\text{div grad } \bar{U} = \Delta \bar{U}$ . Odavde zaključujemo da će prethodna jednačina

356.

biti zadovoljena ako je termoelastični potencijal  $U$  partikularno rešenje - integral - parcijalne diferencijalne jednačine:

$$(1+\kappa) \Delta U = \frac{2}{3} (1+\mu) \kappa c T. \quad (37)$$

Izrazimo sada koordinate tenzora napona pomoću termoelastičnog potencijala koristeći jednačinu (10) i imajući u vidu da je:  $\varepsilon_v = \varepsilon = \operatorname{div} \vec{S} = \Delta U$ , u razvijenom obliku dobijemo:

$$\begin{aligned} \delta_x &= 2G \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \Delta U \right\}, \\ \delta_y &= 2G \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \Delta U \right\}, \\ \delta_z &= 2G \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \Delta U \right\}, \\ \gamma_{xy} &= 2G \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \\ \gamma_{xz} &= 2G \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, \\ \gamma_{yz} &= 2G \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \end{aligned} \quad (38)$$

Jednačina

$$\Delta U(x, y, z) = \frac{c}{3} T(x, y, z). \quad (39)$$

se može posmatrati kao jednačina za određivanje termoelastičnog potencijala i u slučaju kvazistatičkog tretmana nestacionarne termoelastične deformacije, samo u tom slučaju temperatura je funkcija vremena kao i termoelastični potencijal. Kako se mi ograničavamo na određivanje termoelastičnog potencijala pri statičkom tretmanu stacionarne termoelastične deformacije to je temperatura  $T$  funkcija prostornih koordinata, a i termoelastični potencijal. To znači da je funkcija  $U(x, y, z)$  termoelastičnog potencijala funkcija samo položaja tačke:

$$\Delta U(\vec{r}) = \frac{c}{3} T(\vec{r}), \quad (39*)$$

gde je  $T(r)$  integral diferencijalne jednačine prostiranja toplote dok je prethodna parcijalna diferencijalna jednačina Poisson-ova diferencijalna jednačina čiji je partikularni integral oblika:

$$U(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{c}{3} \int \frac{T(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV, \quad (40)$$

gde je  $V$  zapremina termomehanički izotropnog tela čiju termoelastičnu deformaciju izučavamo.

#### IX.4. NAPREZANJE TANKOG KRUŽNOG DISKA U STACIONARNOM TEMPERATURNOM POLJU

Posmatramo tanak kružni disk u temperaturnom polju, kod koga je temperatura  $T(r)$  funkcija samo radijusa  $r$ , a temperaturno polje je osno simetrično u odnosu na osu kroz središte diska, upravno na disk. Disk neka je poluprečnika  $R$ . Prepostavljamo da se temperatura po debljini diska ne menja, tj. da su geometrijska mesta tačaka konstantnih temperatura koaksijalno omotaci valjaka (koaksijalne cilindričke površi). S obzirom na prepostavljene karakteristike stacionarnog temeperaturnog polja prepostavljamo da se ni naponi, ni deformacije po debljini diska ne menjaju. S obzirom na oblik diska pogodno je koristiti Duhamel-ov (modifikovan Hooke-ov) zakon termoelasticnosti i Navier-ove jednačine ravnoteže za polarno-cilindrički koordinatni sistem. Uslov ravnoteže u radikalnom pravcu je:

$$\frac{d\delta_r}{dr} + \frac{\delta_r - \delta_p}{r} = 0, \quad (41)$$

jer je zbog simetrije naponskog i deformacionog stanja tangencijalni napon  $\sigma_{rp}$  jednak nuli. Kako se ovde radi o generalisanom ravnom stanju naprezanja to možemo uvesti naponsku funkciju  $\phi(r)$  koja je funkcija radijusa  $r$  i normalne napone u radikalnom i cirkularnom pravcu izraziti u obliku:

$$\delta_r = \frac{\phi(r)}{r}; \quad \delta_p = \frac{d\phi(r)}{dr} \quad (42)$$

te će za tako prepostavljenu naponsku funkciju uslov ravnoteže biti identički zadovoljen:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\phi}{r}\right) + \frac{1}{r}\left[\frac{\phi}{r} - \frac{d\phi}{dr}\right] = 0 \quad (43)$$

Zbog osne simetrije naponskog i deformacionog stanja i osnosimetričnog temperaturnog polja vektor termoelastične deformacije je samo u pravcu radijusa:

358.

$$\vec{s} = \mu(r) \vec{r}_0 \quad (44)$$

pa su komponentne deformacije:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}. \quad (45)$$

Eliminisanjem komponentnog pomeranja  $\mu(r)$  iz poslednja dva izraza ili uprošćavanjem uslova kompatibilnosti deformacija u polarno-cilindričkom koordinatnom sistemu imajući u vidu da se klizanja jednaka nuli dobijamo za naš slučaj

$$\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r + r \frac{d\varepsilon_\varphi}{dr} = 0. \quad (46)$$

Veze izmedju napona i dilatacija su sada:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} \left\{ \beta_r - \mu \beta_\varphi \right\} + \alpha T, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E} \left\{ \beta_\varphi - \mu \beta_r \right\} + \alpha T \end{aligned} \quad (47)$$

Uzimajući u obzir uvedenu izrazom (42) naponsku funkciju  $\phi(r)$  i unošenjem u prethodne izraze (47) za dilatacije linijskih elemenata u radijalnom i cirkularnom pravcu dobijamo sledeće izraze:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} \left\{ \frac{\phi}{r} - \mu \frac{d\phi}{dr} \right\} + \alpha T, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E} \left\{ \frac{d\phi}{dr} - \mu \frac{\phi}{r} \right\} + \alpha T. \end{aligned} \quad (47*)$$

Unošenjem izraza za dilatacije linijskih elemenata koje smo odredili izrazima (47\*) u jednačinu kompatibilnosti deformacija (46) dobijamo sledeću jednačinu:

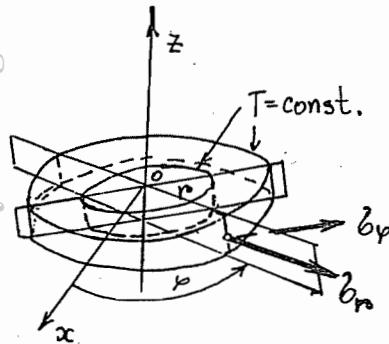
$$\frac{d}{dr} \left( \frac{\phi}{r} \right) + \frac{d^2\phi}{dr^2} = -\alpha E \frac{dT}{dr}; \quad (46*)$$

koju možemo da napišemo u sledećem obliku:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\phi) \right] = -\alpha E \frac{dT}{dr}; \quad (46**)$$

koju možemo direktno da integralimo u rezultatu čega dobijamo:

$$\phi(r) = -\frac{\alpha E}{r} \int_a^r T(r) r dr + \frac{1}{2} cr + \frac{C_2}{r}. \quad (48)$$



Slika br. 1

U rešenju (48) sa  $\alpha$  označili smo donju granicu integrala, za sada proizvoljnu. Kada se proučava disk sa otvorom, tada je  $\alpha$  jednako unutrašnjem prečniku, a kada se radi o punom disku  $\alpha$  je jednako nuli. Kada smo odredili naponsku funkciju  $\phi(r)$  možemo odrediti komponentne normalne napone u radijalnom i cirkularnom pravcu, u sledećem obliku:

$$\sigma_r = \frac{\phi}{r} = -\frac{dE}{r^2} \int_a^r T(r) r dr + \frac{1}{2} C_1 - \frac{C_2}{r^2}, \quad (49)$$

$$\sigma_y = \frac{d\phi}{dr} = dE \left[ -T(r) + \frac{1}{r} \int_a^r T(r) r dr \right] + \frac{1}{2} C_1 - \frac{C_2}{r^2}, \quad (49*)$$

u kojima se integracione konstante  $C_1$  i  $C_2$  određuju iz uslova na konturi diska. Ako posmatramo slučaj punog diska onda su granični uslovi sledeći:

1º U središtu diska komponentni naponi moraju imati konačne vrednosti, te iz tog uslova sledi da je  $C_2 = 0$ ;

2º Ako nema spoljašnjih sila na konturi  $r = R$  normalni napon u radijalnom pravcu mora biti jednak nuli,  $\sigma_r = 0$ , odakle sledi vrednost konstante  $C_1$ :

$$C_1 = \frac{2dE}{R^2} \int_0^R T(r) r dr. \quad (50)$$

Sada izraze za komponentne - normalne napone u radijalnom i cirkularnom pravcu za zadate granične uslove možemo napisati u sledećem obliku:

$$\sigma_r = dE \left[ \frac{1}{R^2} \int_0^R T(r) r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r dr \right],$$

$$\sigma_y = dE \left[ -T(r) + \frac{1}{R^2} \int_0^R T(r) r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r dr \right]. \quad (51)$$

Raspored temperature  $T(r)$  određujemo iz jednačine prostiranja topline, koja za slučaj kada nema izvora topline glasi:

$$\Delta T(r, \psi) = 0, \quad (52)$$

što za osnosimetrično temperaturno polje daje:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (53)$$

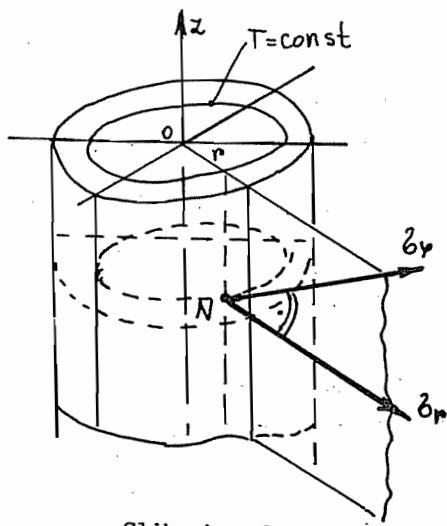
Opšti integral ove jednačine je:

$$T(r) = A + B \ln r \quad (54)$$

gde su  $A$  i  $B$  integracione konstante, koje se određuju iz termičkih graničnih uslova. Kada je disk prstenasti na svakoj od kontura treba da je zadat raspored temperature ili po jedan od uslova koje smo ranije analizirali, da bi polje temperature bilo jednoznačno određeno. Kada se posmatra temperaturno polje punog diska onda je pretpostavka da je u središtu diska temperatura konačna, te sledi da je integraciona konstanta  $B = 0$ . Kada bi  $B$  bilo različito od nule u središtu bi temperatura bila beskonačno velika što je fizički nemoguće. Ako je na konturi punog diska zadata temperatura  $T_0 = \text{const}$ , onda je rešenje jednačine provođenja topline u obliku  $T = T_0 = \text{const}$ , pa je polje konstantne temperature.

#### IX.5. NAPREZANJE DUGAČKOG PUNOG KRUŽNOG CILINDRA U STACIONARNOM OSNOSIMETRIČNOM TEMPERATURNOM POLJU

Posmatramo dugačak pun kružni cilindar u stacionarnom temperaturnom polju. Polje temperature je stacionarno, osnosimetrično u odnosu



Slika br. 2

na podužnu osu cilindra i temperatura  $T(r)$  je funkcija samo radijusa  $r$ . Pretpostavljamo da se temperatura po dužini cilindra ne menja. Rešenje ovog problema je dao J.M.Duhamel 1838.

Uvodimo pretpostavku da je dilatacija linijskih elemenata u pravcu  $z$  ose, dilatacija  $\epsilon_z$  u aksijalnom pravcu ose cilindra jednaka nuli, kao i da je aksijalno pomeranje  $u_z$  u svim tačkama cilindra jednako nuli. U takvom cilindru pri ravnom osnosimetričnom temperaturnom polju  $T(r)$  se

javlja ravna osnosimetrična deformacija. Prepostavljamo da je temperaturno polje  $T(r)$  poznato kao rešenje odgovarajuće jednačine provodjenja toplote, koje zadovoljava odgovarajuće granične uslove. Zbog simetrije stacionarnog temperaturnog polja i osne simetričnosti cilindra, tenzor napona u nekoj posmatranoj tački imaće sva tri komponentna normalna napona  $\delta_r$ ,  $\delta_\varphi$  i  $\delta_z$ , dok su sva tri tangencijalna napona jednaka nuli, što povlači za sebe i jednakost nuli sve tri deformacije klizanja.

Iz Duhamel-ovog zakona termoelastičnosti dilatacije su:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\delta_z - \mu(\delta_r + \delta_\varphi)] + \alpha T, \quad \varepsilon_z = 0, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E} [\delta_\varphi - \mu(\delta_r + \delta_z)] + \alpha T, \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\delta_r - \mu(\delta_\varphi + \delta_z)] + \alpha T,\end{aligned}\tag{55}$$

nakon eliminisanjem napona  $\delta_z$  dobijamo:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1+\mu}{E} [(1-\mu)\delta_r - \mu\delta_\varphi + \alpha ET], \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1+\mu}{E} [(1-\mu)\delta_\varphi - \mu\delta_r + \alpha ET].\end{aligned}\tag{56}$$

jer je:

$$\delta_z = \mu(\delta_r + \delta_\varphi) - \alpha ET\tag{57}$$

Kako se ovde radi o stanju naprezanja analognom generalisanom ravnom stanju naprezanja, to možemo da uvedemo naponsku funkciju  $\phi(r)$  koje je funkcija radiusa i normalne komponentne napone  $\delta_r$ ,  $\delta_\varphi$  i  $\delta_z$  možemo da napišemo u obliku:

$$\delta_r = \frac{\phi}{r}, \quad \delta_\varphi = \frac{d\phi}{dr}, \quad \delta_z = \mu\left(\frac{\phi}{r} + \frac{d\phi}{dr}\right) - \alpha ET, \tag{57}$$

jer će za tako prepostavljenu naponsku funkciju uslovi ravnoteže biti zadovoljeni:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\phi}{r}\right) + \frac{1}{r^2}\phi - \frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr} = 0. \tag{58}$$

Koristeći izraze za komponentne normalne napone izražene u funkciji naponske funkcije  $\phi(r)$  dobijamo komponentne dilatacije u obliku:

$$\varepsilon_r = \frac{1+\mu}{E} \left[ (1-\mu) \frac{\phi}{r} - \mu \frac{d\phi}{dr} + \alpha ET \right] \tag{59}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1-\mu}{E} \left[ (1-\mu) \frac{d\phi}{dr} - \mu \frac{\phi}{r} + \alpha E T \right] \quad (59*)$$

Zamenom izraza (59) za komponentne deformacije u jednačine kompatibilnosti deformacija

$$r \frac{d\varepsilon_y}{dr} + \varepsilon_y - \varepsilon_r = 0, \quad (60)$$

dobijamo:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\phi) \right] = - \frac{\alpha E}{1-\mu} \frac{dT}{dr}, \quad (61)$$

odakle se integraljenjem dobija izraz za funkciju napona  $\phi(r)$  u obliku:

$$\phi(r) = - \frac{\alpha E}{r(1-\mu)} \int_a^r T(r) r dr + \frac{c_1 r}{2} + \frac{c_2}{r} \quad (62)$$

gde smo sa  $a$  označili donju granicu integrala, za sada proizvoljnu. Kada se proučava cilindar sa otvorom  $a$  je jednako unutrašnjem poluprečniku, a kada se radi o punom cilindru  $a$  je jednako nuli.

Po odredjivanju naponske funkcije  $\phi(r)$  komponentne normalne napone dobijamo u sledećem obliku:

$$\beta_r = - \frac{\alpha E}{r^2(1-\mu)} \int_a^r T(r) r dr + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{r^2}, \quad (63)$$

$$\beta_y = - \frac{\alpha E}{1-\mu} \left[ \frac{1}{r^2} \int_a^r T(r) r dr - T(r) \right] + \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{r^2},$$

u kojima se integracione konstante određuju iz uslova na konturi cilindra. Za slučaj punog cilindra  $c_2$  mora biti jednako nuli, da bi izrazi za normalne napone bili konačni, jer su naponi u tačkama ose cilindra konačni. Ako spoljašnjih sila na konturi cilindra onda normalni napon u radijalnom pravcu mora biti jednak nuli,  $\beta_r = 0$ , odakle sledi da je:

$$c_1 = \frac{2\alpha E}{R^2(1-\mu)} \int_0^R T(r) r dr \quad (64)$$

Sada izraze za komponentne normalne napone možemo napisati u obliku:

$$\beta_r = \frac{\alpha E}{1-\mu} \left\{ \frac{1}{R^2} \int_0^R T(r) r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r dr \right\} \quad (65*)$$

$$\beta_y = \frac{\alpha E}{1-\mu} \left\{ -T(r) + \frac{1}{R^2} \int_0^R T(r) r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r dr \right\}$$

$$\delta_z = \frac{\alpha E}{1-\mu} \left\{ \frac{2\mu}{R^2} \int_{R_o}^R T(r) r dr - T(r) \right\} \quad (65**)$$

Raspored temperature  $T(r)$  odredjujemo iz jednačina provođenja topline, koja je ista kao i za osnosimetrično polje u slučaju tankog diska. Da bi svuda bilo  $\omega' = 0$  potrebno je da na krajevima cilindra dejstvuju normalne aksijalne sile, raspodeljene po osnovi cilindra po zakonu raspodele normalnog napona  $\delta_z$ . Ako je cilindar sa koncentričnim kružnim otvorom  $a = R_o$ , integracione konstante  $c_1$  i  $c_2$  odredjujemo iz uslova na unutrašnjoj i spoljašnjoj konturi, a u tačkama u kojima su normalni naponi u radikalnom pravcu jednaki nuli.

Iz uslova na unutrašnjoj i spoljašnjoj konturi dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{R^2} &= \frac{\alpha E}{1-\mu} \frac{1}{R_o^2} \int_{R_o}^R T(r) r dr, \\ \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{R_o^2} &= 0, \end{aligned} \quad (66)$$

odakle rešavanjem po nepoznatim konstantama  $c_1$  i  $c_2$  dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{c_1}{2} &= \frac{\alpha E}{(1-\mu)(R^2-R_o^2)} \int_{R_o}^R T(r) r dr, \\ c_2 &= -\frac{\alpha E R_o^2}{(1-\mu)(R^2-R_o^2)} \int_{R_o}^R T(r) r dr. \end{aligned} \quad (67)$$

Komponentni normalni naponi u tačkama cilindra za površi sa normalama u radialnom, cirkularnom i aksijalnom pravcu, kada cilindar ima spoljašnji poluprečnik  $R$  i unutrašnji  $R_o$  u temperaturnom osnosimetričnom polju su:

$$\begin{aligned} \delta_r &= \frac{\alpha E}{r^2(1-\mu)} \left[ \frac{r^2-R_o^2}{R^2-R_o^2} \int_{R_o}^R T(r) r dr - \int_{R_o}^R T(r) r dr \right], \\ \delta_\varphi &= \frac{\alpha E}{r^2(1-\mu)} \left[ \frac{r^2+R_o^2}{R^2-R_o^2} \int_{R_o}^R T(r) r dr - \int_{R_o}^r T(r) r dr - r^2 T(r) \right], \\ \delta_z &= \frac{\alpha E}{1-\mu} \left[ \frac{2\mu}{R-R_o} \int_{R_o}^R T(r) r dr - T(r) \right] \end{aligned} \quad (68)$$

Iz jednačine prostiranja topline (32) dobijamo raspored temperature (54) kao i u slučaju tankog diska:

$$T(r) = A + B \ln r \quad (69)$$

Ako je  $T_i$  temperatura na unutrašnjoj površi cilindra, a

temperatura na spoljašnjoj površi cilindra jednaka nuli, temperatura na projekcijnom rastojanju  $r$  od ose cilindra biće odredjena izrazom:

$$T(r) = \frac{T_i}{\ln\left(\frac{R}{R_o}\right)} \ln \frac{R}{r} \quad (69*)$$

Kada ovaj izraz unesemo u izraze za komponentne napone dobijemo:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\alpha E T_i}{2(1-\mu) \ln \frac{R}{R_o}} \left[ -\ln \frac{R}{r} - \frac{R_o}{R^2 - R_o^2} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \ln \frac{R}{R_o} \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{\alpha E T_i}{2(1-\mu) \ln \frac{R}{R_o}} \left[ 1 - \ln \frac{R}{r} - \frac{R_o}{R^2 - R_o^2} \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \ln \frac{R}{R_o} \right], \quad (70) \\ \sigma_z &= \frac{\alpha E T_i}{2(1-\mu) \ln \frac{R}{R_o}} \left[ 1 - 2 \ln \frac{R}{r} - \frac{2 R_o^2}{R^2 - R_o^2} \ln \frac{R}{R_o} \right]. \end{aligned}$$

Ako je  $T_i$  pozitivno, radikalni napon je u svim tačkama napon pritiska, dok je u tačkama na unutrašnjoj i spoljašnjoj površi cilindra jednak nuli. Komponentni naponi  $\sigma_z$  i  $\sigma_\theta$  uzimaju svoje najveće vrednosti u tačkama unutrašnje i spoljašnje površine cilindra.

Za  $r = R_o$  naponi u tačkama unutrašnje površi cilindra su

$$(\sigma_\theta)_{r=R_o} = (\sigma_z)_{r=R_o} = \frac{\alpha E T_i}{2(1-\mu) \ln \frac{R}{R_o}} \left[ 1 - \frac{2 R_o^2}{R^2 - R_o^2} \ln \frac{R}{R_o} \right] \quad (71)$$

Za  $r = R$  naponi u tačkama spoljašnje površi cilindra su:

$$(\sigma_\theta)_{r=R} = (\sigma_z)_{r=R} = \frac{\alpha E T_i}{2(1-\mu) \ln \frac{R}{R_o}} \left[ 1 - \frac{2 R_o^2}{R^2 - R_o^2} \ln \frac{R}{R_o} \right] \quad (72)$$

Ako je  $T_i$  pozitivno u tačkama na unutrašnjoj površini su naponi pritiska, dok su u tačkama na spoljašnjoj površini naponi zatezanja. (Ako se radi o materijalima koji slabo podnose istezanje na spoljašnjoj strani bi se pojavile naprslne.)

Ako se radi o cevima onda je debљina zida u poredjenju sa spoljašnjim poluprečnikom mala te se mogu izvršiti uprošćenja izraza za komponentne napone pomoću izraza:

$$\frac{R}{R_o} = 1 + \frac{\delta}{R_o} = 1 + m \quad (73)$$

$$\ln \frac{R}{R_o} = m - \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} + \dots$$

te se za komponentne normalne napone dobijaju sledeći uprošćeni izrazi:

$$\begin{aligned} (\beta_p)_{r=R_0} &= (\beta_z)_{r=R_0} = -\frac{\alpha E T_i}{2(1-\mu)} \left(1 + \frac{m}{3}\right), \\ (\beta_p)_{r=R} &= (\beta_z)_{r=R} = \frac{\alpha E T_i}{2(1-\mu)} \left(1 - \frac{m}{3}\right). \end{aligned} \quad (74)$$

## IX.6. NAPREZANJE LOpte U STACIONARNOM POLJU TEMPERATURE

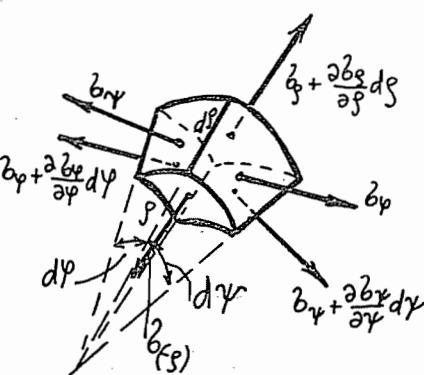
Posmatramo punu ili šuplju sfernu loptu u stacionarnom, centralno simetričnom temperaturnom polju u odnosu na središte lopte. Znači da je raspored temperature zavistan od radijusa  $\xi$  tj.  $T(\xi)$ . Rešenje ovog zadatka se nalazi u radovima Duhamel-a. S obzirom na simetriju tela i

polja temperature u odnosu na središte sfere, naponsko stanje u nekoj tački biće određeno pomoću tri komponente normalna napona  $\beta_\xi$ ,  $\beta_p$  i  $\beta_\gamma$  koji zadovoljavaju uslove ravnoteže u radijalnom pravcu:

$$\frac{d\beta_p}{d\xi} + \frac{1}{\xi} (\beta_\xi - \beta_p - \beta_\gamma) = 0. \quad (75)$$

Zavisnost izmedju komponenta tensora deformatacija i tensora napona u sfernem koordinatnom sistemu data je u obliku:

Slika br. 3



$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{1}{E} [(1+\mu) \beta_\xi - \mu (\beta_\xi + \beta_p + \beta_\gamma)] + \alpha T \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E} [(1+\mu) \beta_\varphi - \mu (\beta_\xi + \beta_p + \beta_\gamma)] + \alpha T \\ \varepsilon_\gamma &= \frac{1}{E} [(1+\mu) \beta_\gamma - \mu (\beta_\xi + \beta_p + \beta_\gamma)] + \alpha T \end{aligned} \quad (76)$$

odnosno zavisnost izmedju deformatacija i pomeranja, koje je u radijalnom pravcu zbog centralne simetrije problema:

$$\varepsilon_\xi = \frac{du}{d\xi}; \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{\xi}; \quad \varepsilon_\gamma = \frac{u}{\xi} \quad (77)$$

366.

Veza izmedju komponenata tenzora napona i vektora pomeranja je sada:

$$\begin{aligned}\delta_\xi &= 2G \left\{ \left[ \frac{du}{ds} + \mu k \left( \frac{du}{ds} + \frac{2u}{s} \right) \right] - \frac{1+\mu}{3} k c T \right\}, \\ \delta_\varphi &= \delta_\gamma = 2G \left\{ \left[ \frac{u}{s} + \mu k \left( \frac{du}{ds} + \frac{2u}{s} \right) \right] - \frac{1+\mu}{3} k c T \right\} \quad (78)\end{aligned}$$

Zamenjujući prethodne izraze u jednačinu (75) ravnoteže dobijamo:

$$\frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{d}{ds} (s^2 u) \right\} = \frac{1+\mu}{1-\mu} d \frac{dT}{ds} \quad (79)$$

Rešenje prethodne diferencijalne jednačine je pomeranje u radijalnom pravcu:

$$u(s) = \frac{1+\mu}{1-\mu} d \int_a^s T(\xi) \xi^2 d\xi + C_1 s + \frac{C_2}{s^2}, \quad (80)$$

u kome su  $i$  inregacione konstante, koje treba odrediti iz konturnih uslova, a je donja granica integrala i odgovara unutrašnjem poluprečniku šuplje lopte. Zamenom odredjenog komponentnog pomeranja u izraze za normalne napone dobijamo sledeće izraze:

$$\begin{aligned}\delta_\xi &= - \frac{2dE}{s^3(1-\mu)} \int_a^s T(\xi) \xi^2 d\xi + \frac{Ec_1}{1-2\mu} - \frac{2Ec_2}{s^3(1+\mu)}, \\ \delta_\varphi &= \delta_\gamma = \frac{dE}{s^3(1-\mu)} \int_a^s T(\xi) \xi^2 d\xi + \frac{Ec_1}{1-2\mu} + \frac{Ec_2}{s^3(1+\mu)} - \frac{dET}{1-\mu}. \quad (81)\end{aligned}$$

Prvi član u izrazu za komponentno pomeranje  $u(s)$  predstavlja partikularni integral, koji zavisi od oblika funkcije  $T(s)$ . drugi i treći član pretstavljaju opšti integral homogene jednačine.

### Specijalni slučajevi

1º Puna lopta. Za slučaj pune lopte donja granica  $a$  jednaka je nuli, pa da bi smo za pomeranje  $u(s)$  tačke u središtu lope dobili vrednost nula, potrebno je da je:  $C_2 = 0$  jer je:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \int_0^s T(\xi) \xi^2 d\xi = 0 \quad (82)$$

Komponentni naponi  $\delta_\rho$ ,  $\delta_\varphi$  i  $\delta_\gamma$  biće u središtu konačni jer je:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^3} \int_0^\rho T(\rho) \rho^2 d\rho = \frac{T_0}{3}, \quad (83)$$

gde je  $T_0$  temperatura u središtu. Konstantu  $c_1$  odredujemo iz uslova da na spoljašnjoj površini kugle nema površinskih sila:  $\rho = R$ ,  $\delta_\rho = 0$ , oda-kle sledi da je:

$$c_1 = \frac{2\alpha(1-2\mu)}{R^3(1-\mu)} \int_0^R T(\rho) \rho^2 d\rho. \quad (84)$$

Izrazi za komponentne napone sada dobijaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned} \delta_\rho &= \frac{2\alpha E}{1-\mu} \left[ \frac{1}{R^3} \int_0^R T(\rho) \rho^2 d\rho - \frac{1}{R^3} \int_0^S T(\rho) \rho^2 d\rho \right], \\ \delta_\varphi = \delta_\gamma &= \frac{\alpha E}{1-\mu} \left[ \frac{2}{R^3} \int_0^R T(\rho) \rho^2 d\rho + \frac{1}{R^3} \int_0^S T(\rho) \rho^2 d\rho - T(S) \right]. \end{aligned} \quad (85)$$

2<sup>o</sup> Lopta sa otvorom u središtu. Ako sa  $R_0$  označimo poluprečnik otvora, a sa  $R$  poluprečnik spoljašnje konture lopte onda integracione konstante  $c_1$  i  $c_2$  odredujemo iz uslova na spoljašnjoj i unutrašnjoj konturi, a to su da je normalni napon u radijalnom pravcu u tačkama unutrašnje i spoljašnje konture jednaki nuli:

$$\begin{aligned} \rho = R_0 &\quad \delta_\rho = 0 \\ \rho = R &\quad \delta_\rho = 0 \end{aligned} \quad (86)$$

odakle sledi da je:

$$\begin{aligned} \frac{E c_1}{1-2\mu} - \frac{2 E c_2}{1+\mu} \frac{1}{R_0^3} &= 0 \\ - \frac{2\alpha E}{1-\mu} \frac{1}{R^3} \int_{R_0}^R T(\rho) \rho^2 d\rho + \frac{E c_1}{1-2\mu} - \frac{2 E c_2}{1+\mu} \frac{1}{R^3} &= 0 \end{aligned} \quad (86*)$$

Rešavanjem prethodnog sistema po  $c_1$  i  $c_2$  i unušenjem dobijenih izraza u jednačine (81) za normalne napone dobijamo:

$$\delta_\rho = \frac{2\alpha E}{1-\mu} \left[ \frac{S^3 - R_0^3}{S^3(R^3 - R_0^3)} \int_{R_0}^R T(\rho) \rho^2 d\rho - \frac{1}{S^3} \int_{R_0}^R T(\rho) \rho^2 d\rho \right], \quad (87)$$

$$\mathcal{E}_\varphi = \mathcal{E}_\gamma = \frac{2 \alpha E}{1-\mu} \left[ \frac{2S^3 + R_o^3}{2(R^3 - R_o^3)S^3} \int_{R_o}^R T(\xi) \xi^2 d\xi + \frac{1}{2S^3} \int_{R_o}^S T(\xi) \xi^2 d\xi - \frac{1}{2} T(S) \right]. \quad (87*)$$

Iz izvedenih jednačina možemo odrediti komponentne normalne napone ako je data raspodela temperature. U stacionarnom slučaju kada odsustvuju zapreminsku topotni izvori diferencijalna jednačina prostiranja toplote je Laplace-ova jednačina te zbog centralne simetrije temperaturnog polja možemo da napišemo:

$$\frac{d^2 T}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{dT}{d\xi} = \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{dT}{d\xi} \right) = 0. \quad (88)$$

Opšti integral ove jednačine je:

$$T(\xi) = A + \frac{B}{\xi}, \quad (89)$$

gde su  $A$  i  $B$  proizvoljne integracione konstante koje treba odrediti iz graničnih uslova za polje temperature.

Posmatramo slučaj stalnog toka toplote. Temperaturu na unutrašnjoj površini označimo sa  $T_i$ , a temperaturu na spoljnjoj površi usvajamo da je jednaka nuli. Tada je zakon raspodele temperature u polju funkcija radijusa  $\xi$ :

$$T(\xi) = \frac{T_i R_o}{R - R_o} \left( \frac{R}{\xi} - 1 \right). \quad (90)$$

Ako poslednji izraz unesemo u izraze za komponentne napone (87) za šuplju loptu dobijamo:

$$\mathcal{E}_\xi = \frac{\alpha ET_i}{1-\mu} \frac{R_o R}{R^3 - R_o^3} \left[ R + R_o - \frac{1}{\xi} (R^2 + RR_o + R_o^2) + \frac{R^2 R_o^2}{\xi^3} \right], \quad (91)$$

$$\mathcal{E}_\varphi = \mathcal{E}_\gamma = \frac{\alpha ET_i}{1-\mu} \frac{R_o R}{R^3 - R_o^3} \left[ R + R_o - \frac{1}{2\xi} (R^2 + RR_o + R_o^2) - \frac{R^2 R_o^2}{2\xi^3} \right].$$

Normalni napon u radikalnom pravcu jednak je nuli za  $\xi = R$  i  $\xi = R_o$ , na spoljašnjoj i unutrašnjoj konturi. Normalni napon u radikalnom pravcu ima maksimum ili minimum za:

$$\xi = \frac{3R_o R^2}{R^2 + R_o R + R_o^2}. \quad (92)$$

Kada je  $T_i > 0$  normalni naponi za ravni sa normalama u međidijalnom i cirkularnom pravcu rastu sa porastom  $\beta$  i njihove vrednosti u tačkama unutrašnje i spoljašnje konture su:

$$\begin{aligned}\beta_{\gamma}|_{\beta=R_0} &= \beta_{\gamma}|_{\beta=R_0} = \frac{\alpha E T_i R(R-R_0)(R+2R_0)}{2(1-\mu)(R^3-R_0^3)}, \\ \beta_{\gamma}|_{\beta=R} &= \beta_{\gamma}|_{\beta=R} = \frac{\alpha E T_i R_0(R-R_0)(R+2R_0)}{2(1-\mu)(R^3-R_0^3)}.\end{aligned}\quad (93)$$

Kada šuplja lopta ima malu debljinu u odnosu na spoljašnji poluprečnik posmatramo je kao sfernu ljušku male debljine i stavljamo da je:  $R = R_0(1+m)$  gde je  $m = \delta/R_0$ , mala veličina u odnosu na 1, pa sa dovoljnom tačnošću zanemarujući više stepene  $m$ , možemo da napišemo:

$$\begin{aligned}\beta_{\gamma}|_{\beta=R_0} &= \beta_{\gamma}|_{\beta=R_0} = -\frac{\alpha E T_i}{2(1-\mu)}\left(1 + \frac{2}{3}m\right), \\ \beta_{\gamma}|_{\beta=R} &= \beta_{\gamma}|_{\beta=R} = \frac{\alpha E T_i}{2(1-\mu)}\left(1 - \frac{2}{3}m\right).\end{aligned}\quad (94)$$

#### IX.7.\* STACIONARNO POLJE TEMPERATURE U PRAVOUGAONOJ PLOČI

U odsustvu topotnih izvora jednačina stacionarnog polja temperature je:

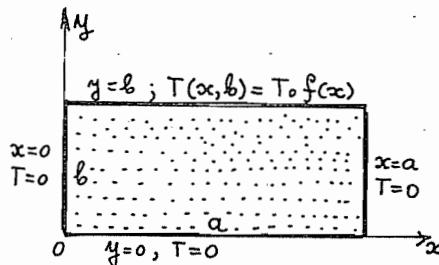
$$\Delta T(x, y, z) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (95)$$

Vidimo da funkcija temperature zadovoljava Laplace-ovu diferencijalnu jednačinu i odgovarajuće temperaturne konturne uslove. Znači da je potrebno odrediti rešenje prethodne Laplace-ove jednačine koje definiše temperaturu u pojedinim tačkama tela, a istovremeno na konturi zadovoljava zadate granične uslove. Posmatramo pravougaonu tanku ploču stranica  $a$  i  $b$  kao što je na slici br. 4 prikazano. Duž ivica  $x=0$ ,  $x=a$  i  $y=0$  neka je nulta temperatura:

$$T(x, y)|_{x=a} = 0, \quad T(x, y)|_{x=0} = 0, \quad T(x, y)|_{y=0} = 0, \quad (96)$$

i neka je duž četvrte ivice  $y=b$  raspodela temperature definisana pomoću funkcije  $f(x)$ :

370.



Slika br. 4

$$T(x, b) = T_0 f(x). \quad (97)$$

Problem se sastoji u rešavanju Laplace-ove diferencijalne jednačine oblika:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (98)$$

pri čemu moraju biti zadovoljeni temperaturni granični uslovi (96) i (97).

Partikularno rešenje prethodne jednačine tražimo u vidu proizvoda dveju funkcija koje zavise od po jedne koordinate:

$$T_p(x, y) = X(x) Y(y) \quad (99)$$

Unošenjem pretpostavljenog rešenja u Laplace-ovu parcijalnu diferencijalnu jednačinu dobijamo:

$$X''(x) Y(y) + Y''(y) X(x) = 0, \quad (100)$$

ili

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \pm k^2, \quad (100*)$$

te se Laplace-ova diferencijalna jednačina raspada na dve obične diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima:

$$X''(x) \pm k^2 X(x) = 0, \quad (100**)$$

$$Y''(y) \mp k^2 Y(y) = 0.$$

Ako se usvoji prvi znak,  $X(x)$  će zadovoljiti prva dva granična uslova (96).

Kako su poslednje dve diferencijalne jednačine linearne, to je i linearna kombinacija rešenja rešenje. Rešenje prve od jednačina je:

$$X(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx, \quad (101)$$

i treba da zadovolji granične uslove:

$$\begin{aligned} x=0 & \quad X(0) = C_1 = 0, \\ x=a & \quad X(a) = C_2 \sin ka = 0, \end{aligned} \quad (102)$$

odakle sledi da je:

$$K_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (102^*)$$

te je za funkciju  $X(x)$  jednaka:

$$X_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad (103)$$

gdje je  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ . Rešenje druge jednačine je:

$$Y(y) = C_3 \operatorname{Sh} \frac{n\pi}{a} y + C_4 \operatorname{Ch} y, \quad (104)$$

treba da zadovolji uslov da je za  $y = 0$ ,  $Y(0) = 0$ , odakle sledi da je:

$$Y(y) = B_n \operatorname{Sh} \frac{n\pi}{a} y. \quad (105)$$

Premda tome bilo koje partikularno rešenje oblika:

$$T_n(x, y) = a_n \sin \frac{n\pi}{a} x \operatorname{Sh} \frac{n\pi}{a} y, \quad (106)$$

za  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednačinu i tri toplotna granična uslova. Iste uslove zadovoljava i rešenje - linearna kombinacija prethodnih partikularnih rešenja:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{a} x \operatorname{Sh} \frac{n\pi}{a} y. \quad (107)$$

Kako rešenje koje odgovara stvarnoj raspodeli temperature mora da zadovolji četvrti granični uslov, a u nadjenom rešenju  $a_n$  koeficijenti su nepoznati, to ćemo ih odrediti iz uslova da red koji aproksimira rešenje zadovoljava taj granični uslov, te sledi da je:

$$T(x, b) = T_0 f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{Sh} \frac{n\pi}{a} b \sin \frac{n\pi}{a} x \quad (108)$$

Pomnozimo celu jednačinu (108) sa  $\sin s\pi x/a \cdot dx$  i integralimo i levu i desnu stranu od 0 do  $a$  i imajući u vidu da je:

$$\int_0^a \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{s\pi}{a} x dx = \begin{cases} 0 & s \neq n \\ \frac{a}{2} & s = n \end{cases}, \quad (109)$$

dobijamo sledeće:

$$a_n \frac{a}{2} \operatorname{Sh} \frac{n\pi}{a} b = T_0 \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi}{a} x dx, \quad (110)$$

372.

odakle odredjujemo koeficijente  $a_n$ :

$$a_n = \frac{2 T_0}{\alpha \operatorname{Sh} \frac{n\pi}{\alpha}} \int_0^\alpha f(x) \sin \frac{n\pi}{\alpha} x dx. \quad (111)$$

Ovo rešenje određuje raspored temperature po površi ploče i prestavlja polje temperature sa definisanim temperaturama na granicama ploče.

### IX.8. NAPREZANJE TANKE PO KONTURI UKLEŠTENE PLOČE U STACIONARNOM TEMPERATURNOM POLJU

Proučićemo naprezanje tanke pravougaone ploče termomehanički izotropne sa ukleštenim ivicama. Neka se temperatura linearno menja po debljini i neka ima istu vrednost u odgovarajućim ravnima paralelnim srednjoj ravni ploče. Kada su ivice ploče potpuno slobodne, a termička deformacija srazmerna rastojanju tačaka od srednje površi, ploča će se saviti u obliku sferne površi i neće se pojaviti nikakvi naponi. Da bi smo ovo tvrdjenje dokazali posmatraćemo savijanje ploče u specijalnom slučaju kada je  $M_x = M_y = M$ , odnosno kada su momenti savijanja oko ose  $x$ , odnosno oko ose  $y$  jednakи što znači u uslovima kada je moment savijanja ravnomerno raspodeljen po konturi ploče, u kom slučaju nema momenata uvijanja:  $M_{xy} = M_{yx} = 0$  ili  $M_{yz} = M_{zy} = 0$ . Ovo dokazujemo koristeći izraze za komponentne napone kod tanke ploče:

$$\begin{aligned}\beta_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_y) = - \frac{Ex}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \beta_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) = - \frac{Ey}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \gamma_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} = - \frac{Ex}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},\end{aligned} \quad (112)$$

jer je:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned} \quad (113)$$

Naponi za ravni sa normalama u pravcima osa i su:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2 \tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi, \\ (114) \end{aligned}$$

$$\sigma_y = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2 \tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi.$$

Komponentne momente savijanja i moment uvijanja tanke ploče određujemo prema obrascima:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ m_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (115)$$

Odredjujemo momente savijanja za proizvoljne uzajamno upravne ose  $\xi$  i  $\eta$ , kao i moment uvijanja koristeći napred navedene formule:

$$\begin{aligned} M_\xi &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\eta z dz = M_y \cos^2 \varphi + M_x \sin^2 \varphi, \\ M_\eta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\xi z dz = M_x \cos^2 \varphi + M_y \sin^2 \varphi, \\ m_{\xi\eta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\xi\eta} z dz = (M_y - M_x) \sin \varphi \cos \varphi, \end{aligned} \quad (116)$$

odakle zaključujemo da je: za  $M_x = M_y$ ;  $m_{\xi\eta} = 0$

Krivina srednje površi ploče je:

1° u ravni paralelnoj xz ravni:

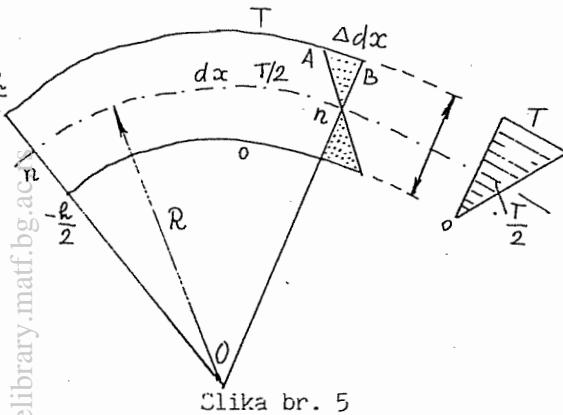
$$\frac{1}{R_x} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad (117)$$

2<sup>o</sup> u ravni paralelnoj yz ravni:

$$\frac{1}{R_y} = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad (117*)$$

3<sup>o</sup> dok je torzija površi:

$$\frac{1}{R_{xy}} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (117**)$$



Slika br. 5

Obeležimo sa  $T$  razliku temperatura gornje i donje površi ploče, pa bi razlika temperatura gornje odnosno donje površi ploče u odnosu na temperaturu srednje površi bila  $T/2$ . Na slici br. 5 prikazan je presek elementa ploče i izduženje linijskog elementa na gornjoj odnosno donjoj površi, pa iz sličnosti krivolinijskih trouglova  $\triangle O\widehat{AB}$  i  $\triangle \widehat{n}\widehat{B}$  sledi da je dilatacija linijskog elementa dužine  $dx$  jednaka:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{h/2}{R} = \alpha \frac{T}{2} \quad (118)$$

jer je dilatacija proporcionalna temperaturskoj razlici, te sledi da je krivina ploče:

$$\frac{1}{R} = \alpha \frac{T}{h} \quad (118*)$$

zde je  $h$  debljina ploče. Imajući u vidu da je  $M_x = M_y = M$ , to zaključujemo da su krivine konstantne i jednake u ravnima yz i xz, tj. da je:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_y} = \frac{M}{D(1+\mu)} \quad (118*)$$

pa zaključujemo da u ovom slučaju nema uvijanja ploče i da se ploča savija u obliku sferne površi, jer je njena krivina u proizvoljnoj ravni konstantna, što je i trebalo dokazati.

Pretpostavimo da se ploča može slobodno pomerati u svojoj srednjoj ravni ali da su ivice ploče pri tome ukleštene, tj. da se ne mogu obratiti, te će se duž ivica pojaviti ravnomerno rasporedjeni momenti savijanja i to usmereni tako da poništavaju deformaciju savijanja ploče na konturi ko-

je bi se javilo pri zagrevanju kroz obrtanje stranica ploče po konturi, kada kontura ne bi bila ukleštena.

Koristeći vezu između krivine i temperature, kao i momenta, dobijamo moment savijanja u posmatranom slučaju:

$$M = \frac{D \alpha T (1+\mu)}{h} \quad (119)$$

Da je najveći normalni napon:

$$\sigma_{max} = \frac{6M}{h^2} = \frac{6D \alpha T (1+\mu)}{h^3} = \frac{\alpha T E}{2(1+\mu)}, \quad (120)$$

jer je cilindrična krutost ploče:  $D = Eh^3 / 12(1-\mu^2)$ .

#### IX.9. NAPREZANJE TANKE SLOBODNO OSLONJENE PLOČE U STACIONARNOM TEMPERATURNOM POLJU

Pretpostavljamo da je temperatura na gornjoj površi ploče za  $T$  veća od temperature na donjoj površi ploče. Ploča će se saviti i duž konture ploče će se javiti izvesne reakcije, a u samoj ploči naponi usled de-

formacije savijanja ploče. Zamislimo da je ploča ukleštena po konturi, pa bi se za zadati raspored temperature javili ravnomerno raspodeljeni momenti savijanja:

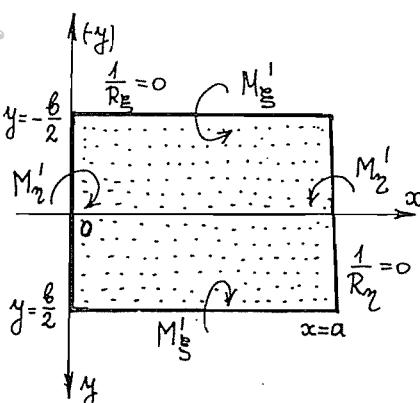
$$M = \frac{\alpha DT (1+\mu)}{h}. \quad (121)$$

Medjutim ako je ploča slobodna po konturi to treba dodati momente:

$$M = -\frac{\alpha DT (1+\mu)}{h}, \quad (122)$$

ravnomerno raspodeljene duž ivica konture čime dobijamo slobodno oslonjenu ploču po konturi, ali opterećenu momentima  $M$ . Diferencijalna jednačina savijene površi ploče je:

$$\Delta^2 w(x,y) = \frac{Q(x,y)}{D} \quad (123)$$



Slika br.6

376.

gde je  $q(x,y)$  poprečno opterećenje ploče, a  $w(x,y)$  ugib ploče. Sabiranjem jednačina (115) za  $M_x$  i  $M_y$  dobijamo:

$$M_x + M_y = -D(1+\mu) \Delta w = M(1+\mu). \quad (124)$$

Jednačine (123) i (124) se sada mogu napisati u obliku:

$$\Delta w = -\frac{M}{D}, \quad \Delta M = -q \quad (125)$$

Ove dve jednačine su analogne i oblika jednačine ugiba membrane izložene normalnom pritisku. Označimo sa  $M_\xi'$  i  $M_\eta'$  momente savijanja po konturi ploče, kao što je na slici br.6 prikazano i pošto je krivina u tačkama ivice ploče jednaka nuli to sledi da je:

$$M_\xi' = D \left( \frac{1}{R_\eta} + \mu \frac{1}{R_\xi} \right) = M \frac{D}{R_\xi} \quad (126)$$

$$M_\eta' = D \left( \frac{1}{R_\xi} + \mu \frac{1}{R_\eta} \right) = M \frac{D}{R_\eta}$$

odnosno

$$M_\xi' = \mu M_\eta'$$

$$M_\xi' + M_\eta' = D \left( \frac{1}{R_\eta} + \mu \frac{1}{R_\xi} \right), \quad \frac{1}{R_\xi} = \frac{1}{R_\eta} = \frac{M}{D(1+\mu)}. \quad (126^*)$$

Sada na konturi važi:

$$\frac{M_x + M_y}{1+\mu} = \frac{M_\xi' + M_\eta'}{1+\mu} = -\frac{\alpha D T(1+\mu)}{h} = M \quad (127)$$

Druga jednačina sistema (125) je zadovoljena jer je:

$$M = \frac{D \alpha T(1+\mu)}{h} \quad (127^*)$$

i konstantno po površini ploče. Prva jednačina sistema (125) daje:

$$\Delta w = -\frac{M}{D} = \frac{\alpha T(1+\mu)}{h} \quad (127^{**})$$

Iz poslednje jednačine zaključujemo da je oblik deformisane srednje površi ploče jednak sa površi membrane deformisane konstantnom silom.

Rešenje jednačine (127\*\*) odredićemo pomoću rešenja homogenog dela jednačine i partikularnog rešenja. Rešenje homogenog dela jedna-

čine tražimo u obliku:

$$w_h(x, y) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \quad m = 2p-1, p = 1, 2, 3, \dots \quad (128)$$

Unošenjem prepostavljenog rešenja u homogeni deo parcijalne diferencijalne jednačine (127) dobijamo:

$$Y_m''(y) - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m(y) = 0, \quad m = 2p-1, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (129)$$

čije je rešenje oblika:

$$Y_m(y) = A_m \operatorname{Sh} \frac{m\pi}{a} y + B_m \operatorname{Ch} \frac{m\pi}{a} y. \quad (130)$$

Prepostavljeno rešenje homogenog dela jednačine treba da bude simetrično u odnosu na x-osu, zbog tako izabranog koordinatnog sistema, te sledi da je  $A_m = 0$ . Sada je rešenje homogenog dela:

$$w_h(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} B_{2p-1} \sin \frac{(2p-1)\pi x}{a} \operatorname{Ch} \frac{(2p-1)\pi y}{a}. \quad (131)$$

Partikularno rešenje tražićemo u obliku:

$$w_p(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\alpha T(1+\mu)}{\pi^3 h} \frac{4a^2 \sin \frac{(2p-1)\pi x}{a}}{(2p-1)^3}, \quad (132)$$

koji zadovoljava jednačinu (127). Rešenje za ugib ploče će biti oblika:

$$w(x, y) = \sum_{p=1,2,\dots}^{\infty} \sin \frac{(2p-1)\pi x}{a} \left[ B_{2p-1} \operatorname{Ch} \frac{(2p-1)\pi y}{a} - \frac{4a^2 \alpha T(1+\mu)}{(2p-1)^3 \pi^3 h} \right]. \quad (133)$$

u kome su koeficijenti  $B_{2p-1}$  nepoznati i treba ih odrediti iz graničnih uslova oslanjanja ploče, da je ugib ploče po konturi jednak nuli. Za ivice ploče odredjene sa  $x = 0$  i  $x = a$  taj uslov je zadovoljen, dok iz uslova za jednakost nuli ugiba na ivicama  $y = b/2$  sledi:

$$B_{2p-1} \operatorname{Ch} \frac{(2p-1)\pi b}{2a} - \frac{4a^2 \alpha T(1+\mu)}{(2p-1)^3 \pi^3 h} = 0, \quad (134)$$

odakle je:

$$B_{2p-1} = \frac{4a^2 \alpha T(1+\mu)}{(2p-1)^3 \pi^3 h \operatorname{Ch} \frac{(2p-1)\pi b}{2a}} \quad (134*)$$

Ugib pravougaone, slobodno oslonjene po konturi ploče, sa konstantnom temperaturom u presecima paralelnim srednjoj površi ploče i razlikom temperature na gornjoj i donjoj površi od  $T$  je:

$$w(x,y) = -\frac{4\alpha^2 \omega T(1+\mu)}{\pi^3 h} \sum_{p=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{(2p-1)^3} \sin \frac{(2p-1)\pi y}{a} x \left[ 1 - \frac{Ch \frac{(2p-1)\pi y}{a}}{Ch \frac{(2p-1)\pi b}{2a}} \right]. \quad (135)$$

Momenti savijanja  $M_x$  i  $M_y$  slobodno oslonjene pravougaone ploče sa konstantnom temperaturom u presecima paralelnim srednjoj površi ploče i razlikom temperature na gornjoj i donjoj površi ploče od  $T$  su odredjeni izrazima:

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{\alpha TD(1+\mu)}{h} - D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_x &= \frac{\alpha TD(1+\mu)}{h} - D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (136)$$

pri čemu izraze  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  i  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  u ovim formulama treba uzimati izračunavanjem izvoda rešenja (135).

## X. OPTIČKA ANALIZA NAPONSKOG STANJA • FOTOMEASTIČNA ANALIZA NAPONSKOG STANJA

### X.1. TEOREMA MORIS-LEVY-JA

Pri rešavanju zadataka teorije elastičnosti za opšti slučaj trodimenzionalnih tela srećemo se sa velikim matematičkim teškoćama što nas primorava da predjemo na rešavanje šire ili uže klase posebnih zadataka. Jedan od takvihzadataka je ravan zadatak teorije elastičnosti, koji je posebno značajan za tehničku praksu i koji smo već obradjivali kroz poglavlje VII. Da se potsetimo da ravan problem teorije elastičnosti razmatra tri slučaja ravnoteže elastičnih tela, koji su od velikog značaja za tehničku primenu: slučaj ravne deformacije, slučaj ravnog stanja napona i slučaj generalisanog ravnog naponskog stanja.

Ravan problem teorije elastičnosti se ograničava na dvodimenzionalni prostor samo da bi se izbegle matematičke teškoće na koje se nai-lazi pri rešavanju problema teorije elastičnosti. Rešenje ovako uoštenog problema često baca svetlost i na složene probleme. Ima takodje mnogo problema u teoriji elastičnosti iz tehničke prakse gde sama priroda postavljenog problema nameće takvo uprošćenje.

U poglavlju VII. pokazali smo, a ovde da ponovimo: U slučaju ravnog stanja deformacija u otsustvu zapreminskih sila naponsko stanje tela u proizvoljnim tačkama, a za ravni jednostruko povezanih poprečnih preseka paralelnim ravni deformacije određuje se zadatim na njegovoj konturi silama, njegovim oblikom i ne zavisi od svojstava materijala. Ako presek predstavlja višestruko-povezanu oblast to nezavisnost stanja napona od svojstava materijala ostvaruje se dopunskim uslovima koji se sastoje u uravnoteža-

vanju spoljašnjih površinskih sila priloženih na svakoj od granica, što ovde nećemo dokazivati. Prethodni zaključak predstavlja teoremu M o r i s - L e v y - ja koja leži u osnovi definicije tenzora napona na modelima od materijala sa drugim elastičnim svojstvima, naprimjer prozračnim materijalima.

Ova teorema se može primeniti i za slučaj uopštenog ravnog naponskog stanja.

## X.2. PRVA ISTRAŽIVANJA EFEKTA FOTOELASTIČNOSTI

Optička analiza naponskog stanja napregnutih providnih tela bazira se na osobini fotoelastičnosti. Fotoelastičnost se javlja kao efekat kada se u nekim providnim materijalima svetlost polarizuje u dvema upravnim ravnima u kojima se svetlosni zraci šire različitim brzinama. Neki providni materijali u "prirodnom stanju" su homogeni i izotropni i ne vrše polarizaciju svetlosnih zraka (ne vrše dvojno prelamanje). Međutim ti isti materijali pod dejstvom opterećenja prelaze u napregnuto stanje i sa pojavom napona u njima postaju optički anizotropni i vrše dvojno prelamanje svetlosnih zraka, polarizujući svetlosne zrake u dvema upravnim ravnima u kojima se zraci šire različitim brzinama i kao posledica toga se javlja fazna razlika između tih zraka. Ti zraci propušteni kroz polaroid daju sliku krivih linija nastalih usled interferencije - fotoelastičnu sliku. Idući od tačke do tačke napregnutog tela materijal se ponaša kao skup kristala sa različito orijentisanim optičkim osama.

Ova metoda se zasniva na otkriću Davida Brewster-a (1811) da se pri posmatranju napregnutog stakla kroz koje je propušteno polarizovano svetlo, zbog naprezanja javljaju "sjajne" slike u boji i koji je predložio da se te slike koriste za merenja napona u inženjerskim konstrukcijama posredstvom staklenih modela, a prema zakonima modelske tehničke. Iako je dvojno prelamanje otkriveno u 17 veku (Erasimo Bartholin 1669), a spoznaje D. Brewster-a datiraju iz 1811 godine optički efekti se nisu praktično koristili sve do kraja 19 veka.

J. Clerk Maxwell je 1853 godine učinio je uporedjenje između fotoelastičnih slika u boji i analitičkih rešenja. Mnogo kasnije (1891) taj predlog je prihvatio C. Wilson pri ispitivanju naponskog stanja u gredi izloženoj dejstvu koncentrisane sile. A. Mesnager je ovu metodu 1901 godine upotrebio pri ispitivanju lučnih mostova. Fotoelastičnu metodu je razvio i mnogo primenjivao E. G. Coker (1920) koji je uveo celuloid kao materijal za modele.

U tumačenju optičkih pojava vezanih za fotoelastični efekat fundamentalni doprinos u svojim radovima su dali Neuman (1841), J.C.Maxwell (1853) i Wartheim (1854).

Bilo je različitih teorija i pokušaja da se pojave vezane za fotoelastični efekat obijasne, kao što su korpuskularna teorija, talasna i elektromagnetna teorija svetlosti. Tridesetih godina ovog veka rezultati vrlo opsežnih istraživanja Coker-a i Filon-a doveli su do zaključka da je šira primena fotoelastičnog efekta na inženjerske probleme ograničena zbog složenos- ti fotoelastičnih uredjaja i ograničene mogućnosti tog postupka. Posle 1940go- dine sa pojavom polarizacijskih filtera većih površina postupci optičke analize naponskog stanja putem fotoelastičnog efekta postaju sastavni deo pra- tečih eksperimentalnih teorije elastičnosti. Postupci optičke analize naponskog i deformacionog stanja tela putem fotoelastičnog efekta prvo su primenjivani pri eksperimentalnom rešavanju ravnih zadataka teorije elastičnosti, što je bilo uslovljeno relativno prostim izradama modela ravnih konstrukcija od plo- ča od fotoelastičnog materijala, a pomoću optičkih slika utvrditi stanje na- pona u modelu odnosno u konstrukciji. U novije vreme ti postupci su prošireni i na prostorne zadatke teorije elastičnosti. Eksperimentalni rezultati su posebno dragoceni kada se radi o zadacima teorije elastičnosti sa veoma slo- ženim graničnim uslovima, posebno kada su konture nepravilne, a granični uslo- vi zadati delimično pomoću površinskih sila, a delimično pomoću pomeranja, ko- je poredimo sa približnim najčešće numeričkim rezultatima dobijenim numerič- kom analizom.

Kako je optička analiza naponskog stanja modela fotoelas- tičnim efektom uz posedovanje aparature srazmerno jeftino, sa aspekta utroš- ka fotoelastičnih materijala (bakelit, fosterit, poliesterske i aralditne smo- le, epoksidne smole) i obavlja se u laboratorijama gde se tokom ispitivanja modela konstrukcije mogu menjati granični uslovi preko oblika konstrukcije, vrste i intenziteta opterećenja (raspodela površinskih sila) kao i uslova oslanjanja i fotoelastičnom analizom naponskog stanja modela konstrukcije izvršiti optimizacije.

### X.3. OSOBINE SVETLOSTI KOJA SE KORIŠTI U OPTIČKOJ ANALIZI NAPONSKOG STANJA

Huygens je krajem 17 veka postavio novu talasnu teoriju prostiranja svetlosti, po kojoj se od svetlosnog izvora svetlost širi sferno, a sledeći talasni front se dobija iz sekundarnih svetlosnih izvora svetlosti,

kojom je uspeo da obijani dobar deo pojava u optici, te se ta teorija obično primenjuje u tumačenju pojava u fotoelastičnim uredajajima i merenjima. U drugoj polovini 19 veka Maxwell proširuje Huygens-ovu teoriju trasverzalnih talasa tumačenjem da je svetlost oscilovanje elektromagnetnih talasa u dve- ma uzajamnim ravnima, čiji električni talas osciluje u jednoj ravni, a magnet- ni talas u upravnoj ravni jednakim frekvencijama.

Da bi se javio fotoelastični efekat, potrebna je optički anizotropna sredina, kao posledica napregnutog stanja fotoelastičnog prvid- nog materijala, kroz koju prolazi elektromagnetni talas, koji je izvor induko- vanih elektromagnetnih oscilacija u fotoelastičnom materijalu posredstvom komponenata tenzora dielektrične propustljivosti, uspostavlja se veza između elektromagnetnih talasa i redukovanih elektromagnetnih talasa. Za fotoelasti- čne materijale promena recipročnih vrednosti komponenata tenzora dielektrične propustljivosti i komponenata  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  i  $\lambda_3$  tenzora napona napregnutog stanja modela, koje izaziva anizotropiju fotoelastičnog materijala je linearna i izražena pomoću naponsko-optičkih koeficijenata  $a_{ik} = a_{ki}$ . Tenzori dielek- tričke propustljivosti i tenzor napona su simetrični:

$$\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_i} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} \lambda_k, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Veza između koeficijenata dielektrične propustljivosti  $\lambda$ , brzine  $c_0$  prostiranja svetlosnog talasa u vakuumu, brzine  $v_i$  prostiranja talasa u odgo- varajućem pravcu i indeksa prelamanja  $n_i$  je:

$$v_i = \frac{c_0}{\sqrt{\lambda_i}} = \frac{c_0}{n_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Za svaki elastični materijal možemo odrediti "naponsko-optički" koeficijent pomoću koga možemo odrediti vezu između indeksa prelamanja u dva pravca i odgovarajućih glavnih napona:

$$n_1 - n_2 = C (\lambda_1 - \lambda_2). \quad (3)$$

Apsolutna brzina svetlosti u vakumu je  $c_0 = 299,793 \cdot 10^6$  [m/sec] (pribli- žno 300 000 [km/sec]). Brzina svetlosti  $v_i$  u nekoj sredini u odgovarajućem pravcu zavisi od talasne dužine svetlosti  $\lambda_i$  i učestanosti  $f_i$  (frekven- cije):

$$v_i = \lambda_i f_i \quad (4)$$

Za jednobojnu monohromatsku svetlost odredjene boje, talas- na dužina je odredjena učestanošću i brzinom prostiranja koja je najveća u

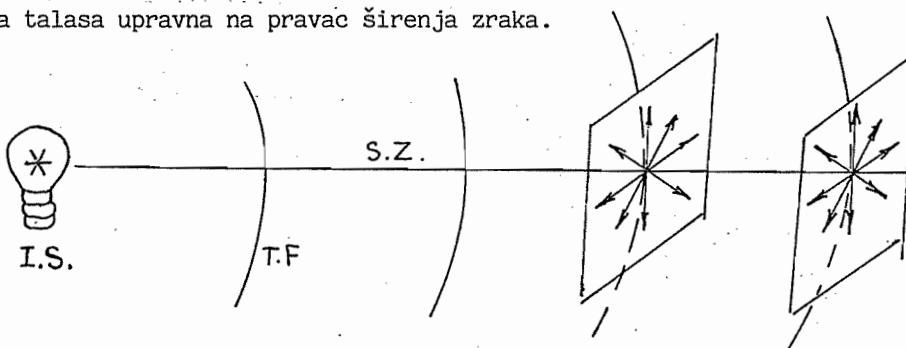
vakumu, a u svakoj drugoj sredini manja. Talasne dužine svetlosti određene boje i odgovarajuće frekvencije u vakumu su date u tablici (za brzinu  $c_0 = 300000 \text{ [km/sec]}$ ).

| Vrste svetlosti<br>Boja | Talasna dužina<br>u vakumu | Učestanost u Hz |
|-------------------------|----------------------------|-----------------|
| Tamno crvena            | $0,77 \cdot 10^3$ mm       | 3,9 Hz          |
| Crvena                  | $0,67 \cdot 10^3$ mm       | 4,46 Hz         |
| Sjajno crvena           | $0,65 \cdot 10^3$ mm       | 4,6 Hz          |
| Narandžasta             | $0,62 \cdot 10^3$ mm       | 4,85 Hz         |
| Žuta Ša                 | $0,6893 \cdot 10^3$ mm     | 5,09 Hz         |
| Svetlo zelena (Hg)      | $0,5461 \cdot 10^3$ mm     | 5,49 Hz         |
| Zelena                  | $0,53 \cdot 10^3$ mm       | 5,6 Hz          |
| Plavozelena             | $0,5 \cdot 10^3$ mm        | 6,0 Hz          |
| Plava                   | $0,45 \cdot 10^3$ mm       | 6,65 Hz         |
| Indigo (Hg)             | $0,4358 \cdot 10^3$ mm     | 6,88 Hz         |
| Ljubičasta              | $0,39 \cdot 10^3$ mm       | 7,7 Hz          |

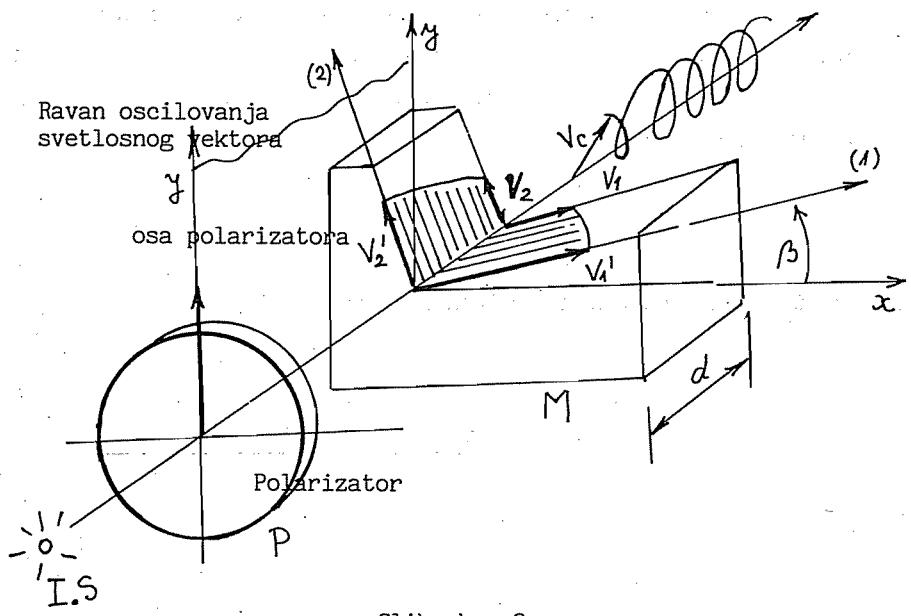
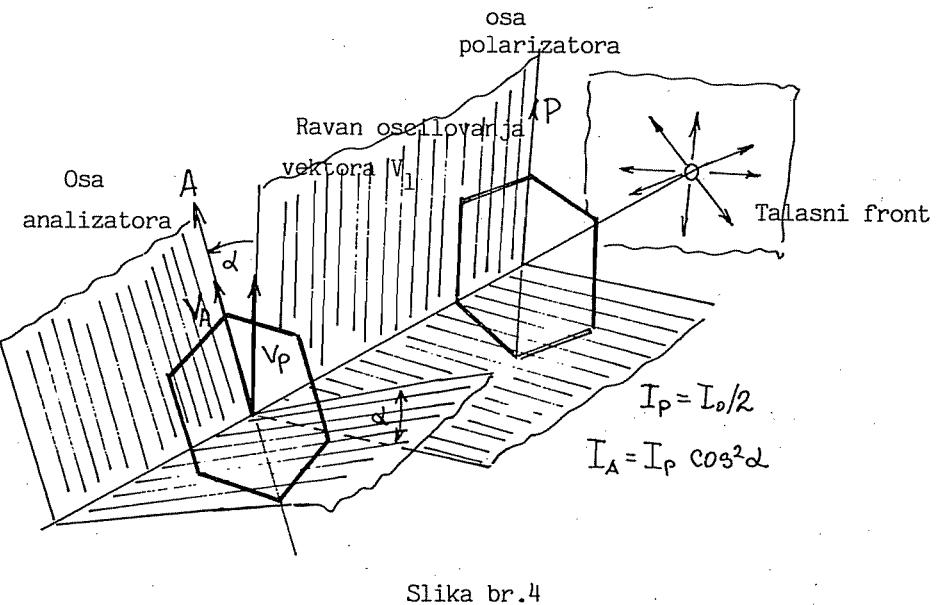
eliburz matf fgg sec

Dokazano je da se frekvencija oscilovanja svetlosti u jednoj određenoj prozirnoj sredini ne menja i ostaje konstantna, a da se talasna dužina menja zavisno od brzine prostiranja talasa u toj sredini. Vrlo dobra monohromatska svetla dobijaju se živinim lampama (električni luk u živinim parama). Natrijumovom lampom dobija se žuta svetlost. Takva monohromatska svetla određenih talasnih dužina sastoje se od svetlosnih zraka koji osciluju u raznim ravnima, ali uvek upravno na smer širenja tog zraka.

Bela svetlost sastoji se od svih spektralnih boja i talasi su sa svim talasnim dužinama, ali je i ovde vektor kojim se predstavlja elongacija talasa upravna na pravac širenja zraka.



Slika br.1 Talasni front i svetlosni zrak



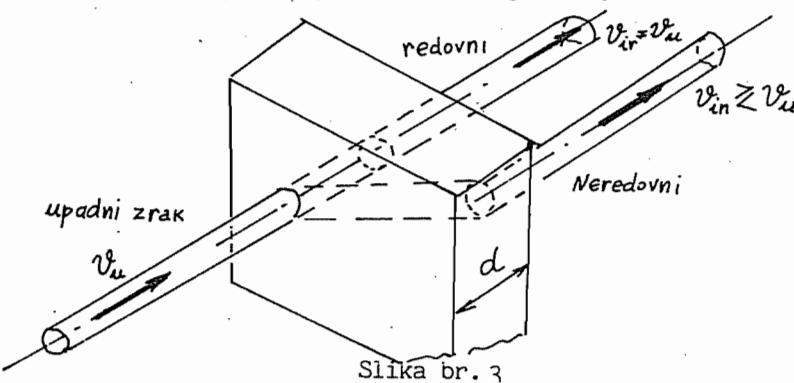
Usijani izvor emituje radikalno energiju koja se prenosi u svim smerovima i sadrži ceo "spektar" vibracija različitih učestanosti i talasnih dužina. Odredjeni deo ovog spektra se koristi unutar ljudskih percep-cija (talasne dužine izmedju  $4000 \text{ \AA}$  i  $8000 \text{ \AA}$ ,  $1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$ ). Uvo-djenjem polarizationog filtra samo jednakomponenta ovih vibracijaće se pre-neti i to ona paralelna sa optičkom osom filtra. Tako organizovan mlaz se nazi-vi polarizovano svetlo i ako se na njegovom putu postavi još jedan polarizu-ći filter onda se potpuno gašenje mlaza svetlosti može da dobije kada su ose oba filtra upravne jedna na drugu.

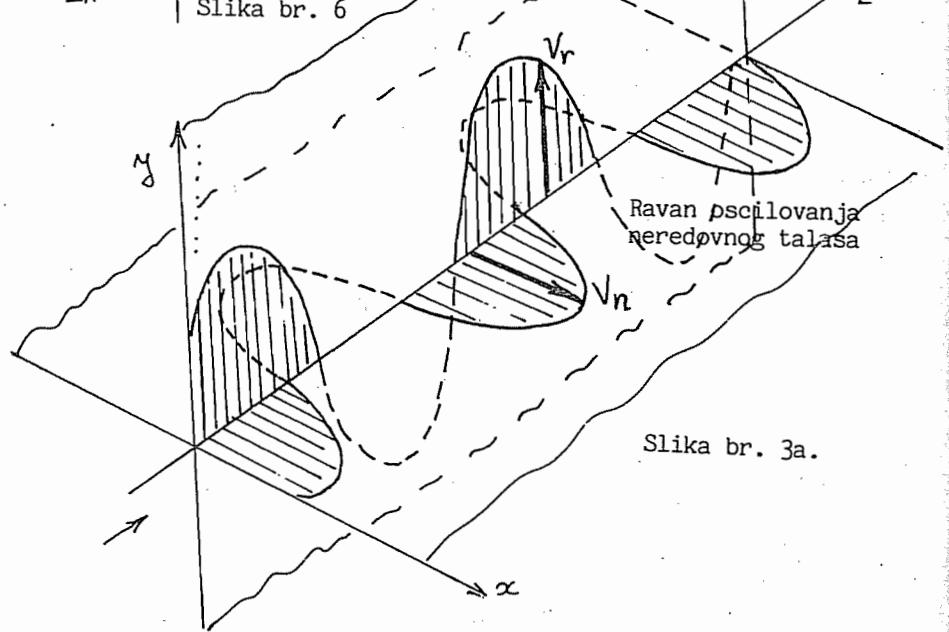
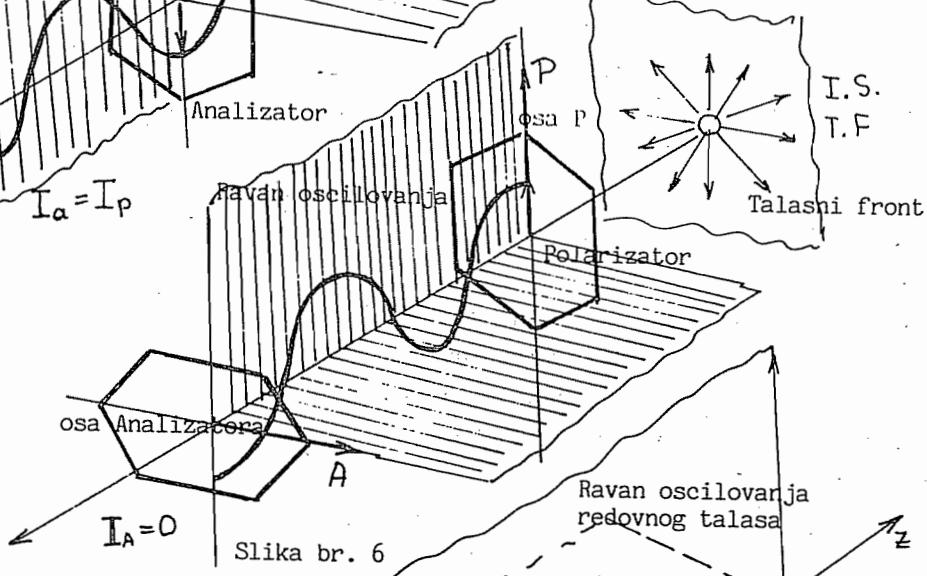
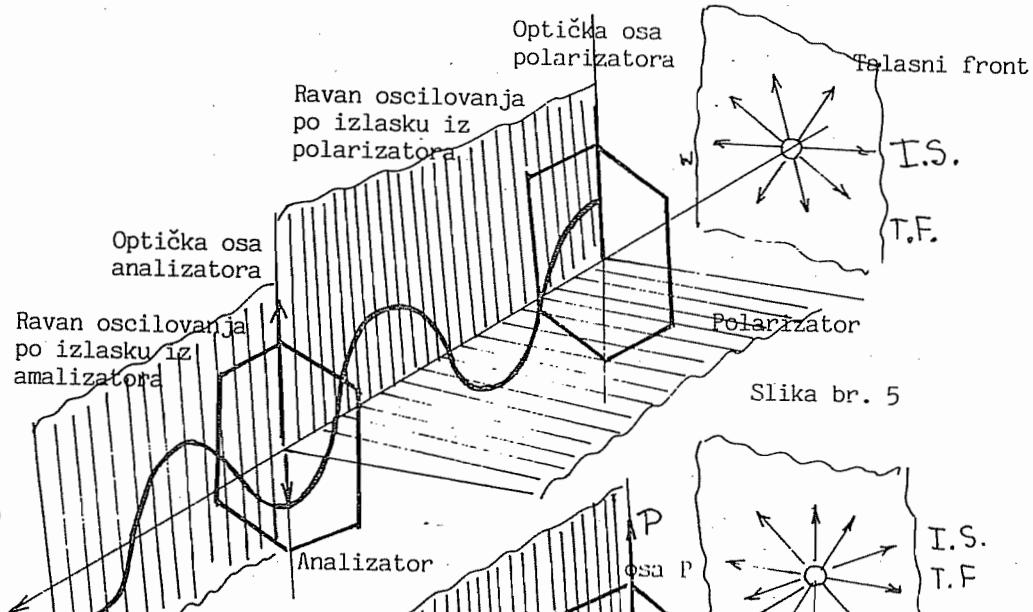
Kada se polarizovani zrak (mlaz)  $P$  prostre kroz providnu plastičnu pločicu debljine  $d$  gde su (1) i (2) smerovi glavnih normalnih napona  $\beta_1$  i  $\beta_2$ , odnosno pravci glavnih dilatacija  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  u posmat-ranoj tački, svetlosni zrak (mlaz) se cepa na dva polarizovana zraka (mlaza)  $P_1$  i  $P_2$  koji se prostiru u ravnima (1) i (2) kao što je prikazano na sli-ci br. 2. Ako su intenziteti glavnih napona  $\beta_1$  i  $\beta_2$ , odnosno glavnih dilatacija  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$ , a brzine prostiranja svetlosnih zraka (svetlosti koja se širi oscilovanje) u ovim smerovima je  $v_1$  i  $v_2$  redom, vreme koje je potre-bno da se predje pločica je  $d/v_1$  odnosno  $d/v_2$  i relativno kašnjenje zra-ka (mlaza) svetlosti jednog u odnosu na drugi je razlika tih vremena.

Osnovni zakon fotoelastičnog efekta pokazuju da je: relati-vna promena indeksa prelamanja (relaksacije) proporcionalna razlici glavnih dilatacija (odnosno razlici glavnih napona):

$$n_1 - n_2 = K(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = C(\beta_1 - \beta_2). \quad (5)$$

Konstanta  $K$  se naziva "koeficijent optičke dilatacije" odnosno "dilatacijsko optički koeficijent", a konstanta  $C$  je "naponsko-optički koeficijent" i ta dva analogna koeficijenta karakterišu fizičko optičke karakteristike materijala. Konstanta  $K$  je bezdimenziona konstanta, koja se obično ustanavljava podešavanjem (calibration), dok naponsko-optička konstanta ima demenzijske recipročne dimenzijsama napona.





#### X.4. POLARIZOVANA SVETLOST

Talasnu prirodu svetlosti možemo predstaviti pomoću svetlosnog vektora - harmonijskog talasanja po zakonu:

$$\mathbf{V} = \alpha \sin(\omega t + \varphi), \quad (6)$$

gde je  $\alpha$  amplituda,  $\varphi$  početna faza,  $\omega [\text{sec}^{-1}]$  kružna frekvencija i jednaka je:  $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ ;  $f [\text{Hz}]$  učestanost - broj oscilacija u sekundi,  $T [\text{sec}]$  period oscilacije (vreme za koje se izvrši jedna oscilacija),  $\lambda_0$  talasna dužina svetlosti u vakumu  $\lambda_0 = c/T = c/f$ ,  $\lambda$  stvarna talasna dužina:

$$\lambda_i = v_i T_i = \frac{c}{n_i} T_i = \frac{\lambda_0}{n_i} \quad (7)$$

Kako je  $\lambda = vT = v \frac{2\pi}{\omega}$  sledi da je  $\omega = \frac{2\pi}{\lambda} v$  te je:

$$\mathbf{V} = \alpha \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} vt - \varphi\right) = \alpha \sin\frac{2\pi}{\lambda}(z - R), \quad (6*)$$

gde je  $R = \frac{\lambda}{2\pi}\varphi$  fazna razlika izražena dužinom, a  $z = vt$  predjeni put za vreme  $t$ . Ako je za  $t = 0$ ,  $z = 0$  i za  $t = T$ ,  $z = z_0 = \lambda$ , fazni ugao je  $\varphi = 2\pi \frac{R}{\lambda} = 2\pi \delta$ , gde je  $\delta = \frac{R}{\lambda}$  zaostajanje izraženo u talasnoj dužini, pa je talasanje:

$$\mathbf{V} = \alpha \sin(\omega t - 2\pi \delta). \quad (6**)$$

Energija oscilovanja svetlosti je:

$$E_k = \frac{m v^2}{2} = \frac{m \omega^2}{2} \alpha^2 \cos^2(\omega t - \varphi) = h \mathbb{I} = h J, \quad (7)$$

gde je  $\mathbb{I}$  intenzitet svetlosti:

$$\mathbb{I} = \alpha^2 \cos^2(\omega t - \varphi). \quad (7*)$$

Maksimalni intenzitet svetlosti je:  $I_{\max} = \alpha^2$ , jednak kvadratu amplitude svetlosnih oscilacija.

Veza izmedju fazne razlike  $\varphi$  i zakašnjenja  $R$  je:

|                      |                |                 |
|----------------------|----------------|-----------------|
| za $\varphi = \pi/4$ | $\delta = 1/8$ | $R = \lambda/8$ |
| za $\varphi = \pi/2$ | $\delta = 1/4$ | $R = \lambda/4$ |
| za $\varphi = \pi$   | $\delta = 1/2$ | $R = \lambda/2$ |
| za $\varphi = 2\pi$  | $\delta = 1$   | $R = \lambda$   |

Dve su osnovne karakteristike svetlosti pri prolasku kroz optički anizotropni kristal (ili po prirodi optički izotropan providan materijal, koji se nalazi pod opterećenjem) polarizacija i dvojno prelamanje.

Postoje tri osnovna stanja polarizovane svetlosti:

1<sup>o</sup> Linearno polarizovana svetlost je ona čije se oscilacije izvode u jednoj ravni;

2<sup>o</sup> Kružno polarizovana svetlost koja može biti predstavljena dvema ortogonalno linearne polarizovanim komponentama. Završetci vektora ove svetlosti svetlosti leže na površi koja predstavlja omotač cilindra;

3<sup>o</sup> Eliptično polarizovana svetlost može se predstaviti dve-ma ortogonalno linearne polarizovanim komponentama (i sobom obuhvata kao specijalan slučaj kružno-polarizovanu svetlost) sa različitim proizvoljnim fazama i amplitudama. Vrhovi svetlosnih vektora leže na površima čije su vodi-lje elipse.

Eliptički polarizovana svetlost se može pretstaviti sa:

$$V_x = a_x \cos(\omega t - \varphi_x), \quad (9)$$

$$V_y = a_y \cos(\omega t - \varphi_y),$$

i za  $a_x = a_y$  i  $\varphi_x - \varphi_y = \pm 90^\circ$  svetlost ima kružnu polarizaciju.

William Nicoll (1828) je pomoću svoje, nazvane Nicoll-sove prizme dobio polarizovanu svetlost. William Bird Herapath (1851) otkrio je sulfat kinina ( $4\text{Qu}, 3\text{H}_2\text{SO}_4, 2\text{HI}, \text{I}_4, 6\text{H}_2\text{O}$ ) nazvan Herapathit. Edwin H. Land (1927) godine je dobio listove celuloze kao nosače orijentisanih kristala Hera-pathita i nazvao ih polaroidima, čija je propustljivost 35 do 40 procenata, dok se teorijski uzima da je intenzitet polarizovane svetlosti  $I_2 = 0,5 I_0$ . Procenat polarizovane svetlosti je 98 za talasne dužine 5500 do 6000 Å.

#### X.5. OSNOVI TEORIJE DVOJNOG PRELAMANJA KOD OPTIČKI IZOTROPNIH MATERIJALA PODVRGNUTIH OPTEREĆENJU

Neka upadni zrak ima brzinu svetlosti  $V_u$  i indeks pre-lamana n<sub>u</sub>. Posle prolaska kroz optički anizotropnu sredinu (izazvanu napre-zanjem homogenog i izotropnog providnog materijala) dobija se:

1<sup>o</sup> "Redovni" svetlosni zrak (mlaz) brzine V<sub>r</sub> = V<sub>u</sub> sa indek-som prelamanja n<sub>u</sub> = n<sub>r</sub> ;

$2^{\circ}$  "Neredovni" svetlosni zrak (mlaz) sa brzinom svetlosti  $v_n \gtrless v_u$  i indeksom prelamanja  $n_r \gtrless n_u$ . To je prikazano na slici br. 2. odnosno na slici br. 3. Na osnovu razlike optičkih puteva dobijamo da je:

$$\delta = \frac{R}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} (n_r - n_n). \quad (10)$$

Kristal kvarca, araldit, VP1527 su optički pozitivne sredine jer je  $v_r > v_n$  i  $n_r < n_n$ , dok su islandski kalcit - spath, pleksiglas optički negativne sredine jer je  $v_r < v_n$  i  $n_r > n_n$ .

Optička osa je osa koja se poklapa sa pravcem u kome su brzine redovnog i neredovnog zraka jednake  $v_r = v_n$  odnosno  $n_r = n_n$ .

Pri prolasku svetlosnog zraka kroz optički izotropna materijal za polarizaciju i dvojno prelamanje važe dva zakona:

$1^{\circ}$  Kvalitati: U nekoj tački opterećenog optički izotropnog materijala u "prirodnom stanju", pravci glavnih normalnih napona se poklapaju sa trasama ravni oscilovanja redovnog i neredovnog svetlosnog talasnog kretanja usled prelamanja u toj tački;

$2^{\circ}$  Kvantitati: U posmatranoj tački opterećenog optički izotropnog materijala u "prirodnom stanju", razlika indeksa prelamanja redovnog i neredovnog svetlosnog talasa je srazmerna razlici glavnih normalnih napona u toj tački:

$$n_1 - n_2 = C(\beta_1 - \beta_2), \quad \tilde{\delta} = \frac{R}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} (n_1 - n_2) = \frac{d}{\lambda} (\beta_1 - \beta_2) \quad (10*)$$

Neka polarizovani svetlosni zrak dolazi na anizotropnu ploču i osciluje po zakonu  $V_p = a_0 \sin \omega t$  u ravni koja zaklapa uglove  $\beta$ ,  $90 - \beta$  sa optičkim osama u posmatranoj tački ploče, onda su komponente vektora polarizovane svetlosti:

$$\begin{aligned} V_1' &= V_p \sin \beta = a_0 \sin \beta \sin \omega t, \\ V_2' &= V_p \cos \beta = a_0 \cos \beta \sin \omega t. \end{aligned} \quad (11)$$

Po prolasku kroz optički anizotropnu ploču debljine  $d$ , dobijamo sledeće komponente:

$$V_1 = a_1 \sin(\omega t - \psi) = a_1 \sin(\omega t - \varphi),$$

$$V_2 = a_2 \cos(\omega t - \psi) = a_2 \sin \omega t, \quad (12)$$

u kojima je fazno kašnjenje:

$$\psi = 2\pi \frac{R}{\lambda} = 2\pi \delta = 2\pi \frac{d}{\lambda} (n_1 - n_2),$$

gde je  $\delta$  zakašnjenje po talasnoj dužini.

Ako se ravan polarizacije poklopi sa jednom od ravni oscilovanja redovnog ili neredovnog zraka jedan od njih se gubi:

$$\begin{aligned} \text{za } \beta = 0 & \quad V_1 = 0 \quad V_2 = a_0 \sin \omega t \\ \text{za } \beta = \frac{\pi}{2} & \quad V_1 = a_0 \sin(\omega t - \varphi) \quad V_2 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Ako iz  $V_1$  i  $V_2$  eliminisemo vreme t dobijamo:

$$\left( \frac{V_1}{a_0} - \frac{V_2}{a_0} \cos 2\pi\delta \right)^2 + \left( \frac{V_2}{a_0} \right)^2 \sin^2 2\pi\delta = \sin^2 2\pi\delta \quad (14)$$

1º Ako je kašnjenje  $\delta = 0, 1, 2, \dots$  k ceo broj, fazno kašnjenje je  $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots 2k\pi$ , za jedan ili više celih talasa, te sledi da je  $V_2 = V_1 \operatorname{ctg} \beta$ . Trajektorija vrha svetlosnog vektora je prava linija te je to pravolinijski polarizovana svetlost, te takva ploča daje celotalasno zakašnjenje  $R = \delta \lambda$ , te se ploča naziva celotalasna.

2º Ako je kašnjenje  $\delta = k + 1/2$ , fazno kašnjenje je  $\varphi = (2k + 1)\pi$ , te opet dobijamo pravolinijski (ravno) polarizovanu svetlost, jer je  $V_2 = V_1 \operatorname{ctg} \beta$ , ali ploča daje polutalasno zakašnjenje te se naziva polutalasnna.

3º Ako je  $\delta = (2k + 1)/4$ , naparan broj četvrtina talasa fazno kašnjenje je  $\varphi = (2k + 1)\pi/2$ , te se pri prolasku svetlosti kroz ploču dobija eliptično polarizovana svetlost, jer je putanja vrha vektora elipsa:

$$\frac{V_1^2}{a_0^2 \sin^2 \beta} + \frac{V_2^2}{a_0^2 \cos^2 \beta} = 1 \quad (15)$$

pa ploča daje kašnjenje za četvrtinu talasa te se ploča naziva četvrttalasnna. Specijalan slučaj je ako je  $\beta = \pi/4$ , onda dobijamo kružno (cirkularno) polarizovanu svetlost.

Ako je ugao  $\beta$  pozitivan, onda imamo desno orijentisanu eliptično polarizovanu svetlost, a za  $\beta$  negativno levo orijentisanu eliptično polarizovanu svetlost.

Na slikama br. 7 su prikazane celotalasna, polutalasna i četvrttalasne ploče.

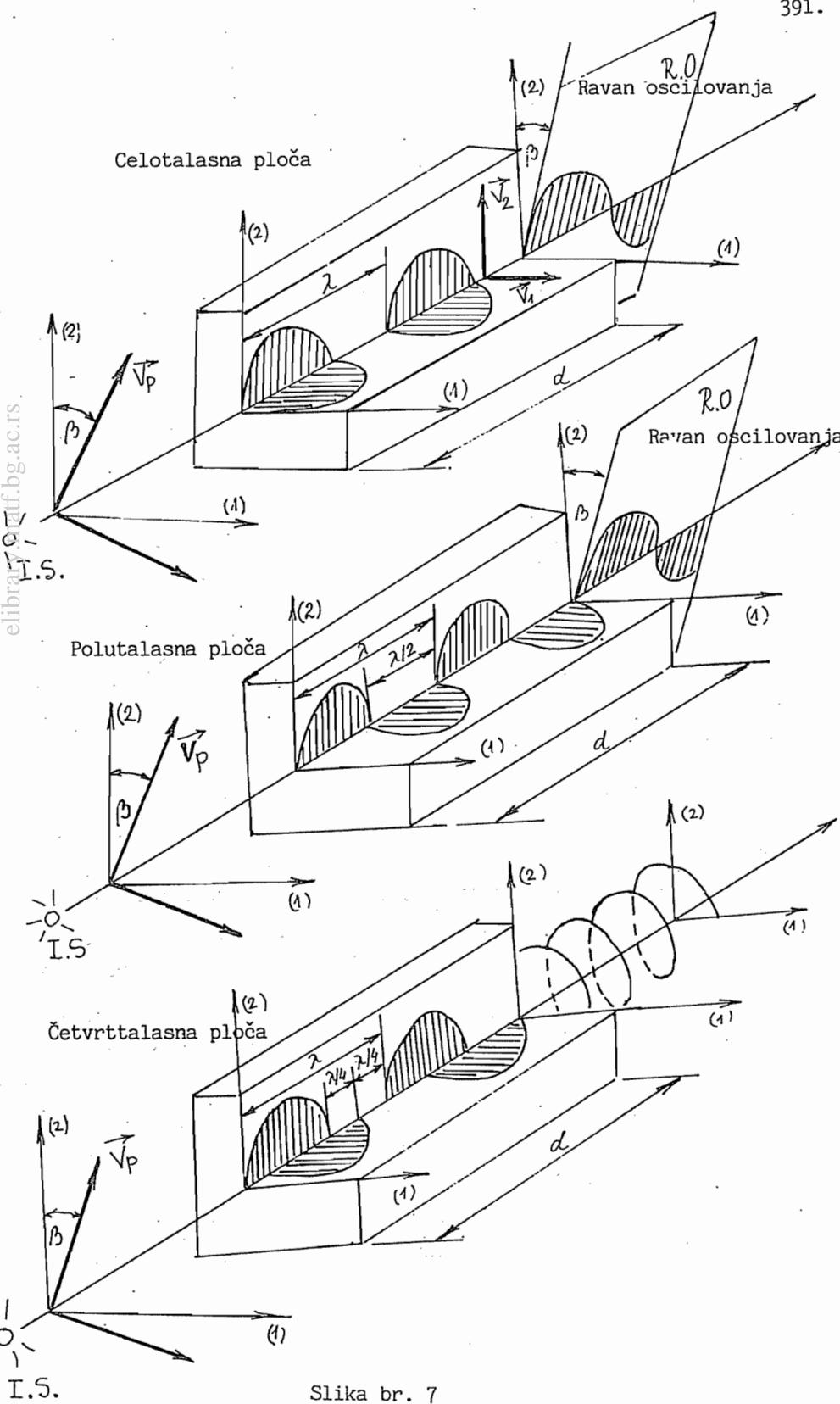
Za kružno polarizovanu svetlost - cirkularno polarizovanu svetlost je:

$$\beta = \frac{\pi}{4}, \quad \delta = \frac{1}{4}(2k+1), \quad \varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{V_1^2}{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2} + \frac{V_2^2}{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2} = 1 \quad (16)$$

$$V_1 = a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = -a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega t, \quad V_2 = a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega t$$

$$I_{\max} = \frac{a_0^2}{2}$$



Slika br. 7

## X.6. POLARISKOPI

Polarizator je telo (materijal) koji prevodi običnu svetlost u polarizovanu. Za posmatranje efekta polarizacije svetlosti, odnosno polarizovane svetlosti koristi se isto takvo telo kao što je polarizator i naziva se analizator.

Ako je  $J_0$  intenzitet izvora svetlosti onda je intenzitet svetlosti  $J_1$  koja prodje polarizator  $J_1 = 0,5 J_0$ , što se u stvarnosti teško postiže, te se uvodi koeficijent  $k_1$  koji je za polaroide 0,7 do 0,8.

Intenzitet  $J_2$  svetlosti koju propušta analizator zavisi od ugla  $\alpha$  koji zaklapaju optičke ose polarizatora i analizatora i iznosi  $J_2 = k_2 J_1 \cos^2 \alpha$ , gde je  $k_2$  koeficijent redukcije. (Vidi slike br. 4 i 5).

Ako su optičke ose analizatora i polarizatora paralelne onda je  $\alpha = 0$ , pa je  $J_2 = k_2 J_1$ , a ako su pod uglom od  $\alpha = 90^\circ$  (ortogonalne)  $J_2 = 0$ , što je poznata osobina polarizovane svetlosti da se svetlo može "ugasiti" prozračnim telom. (Vidi sliku br. 6.).

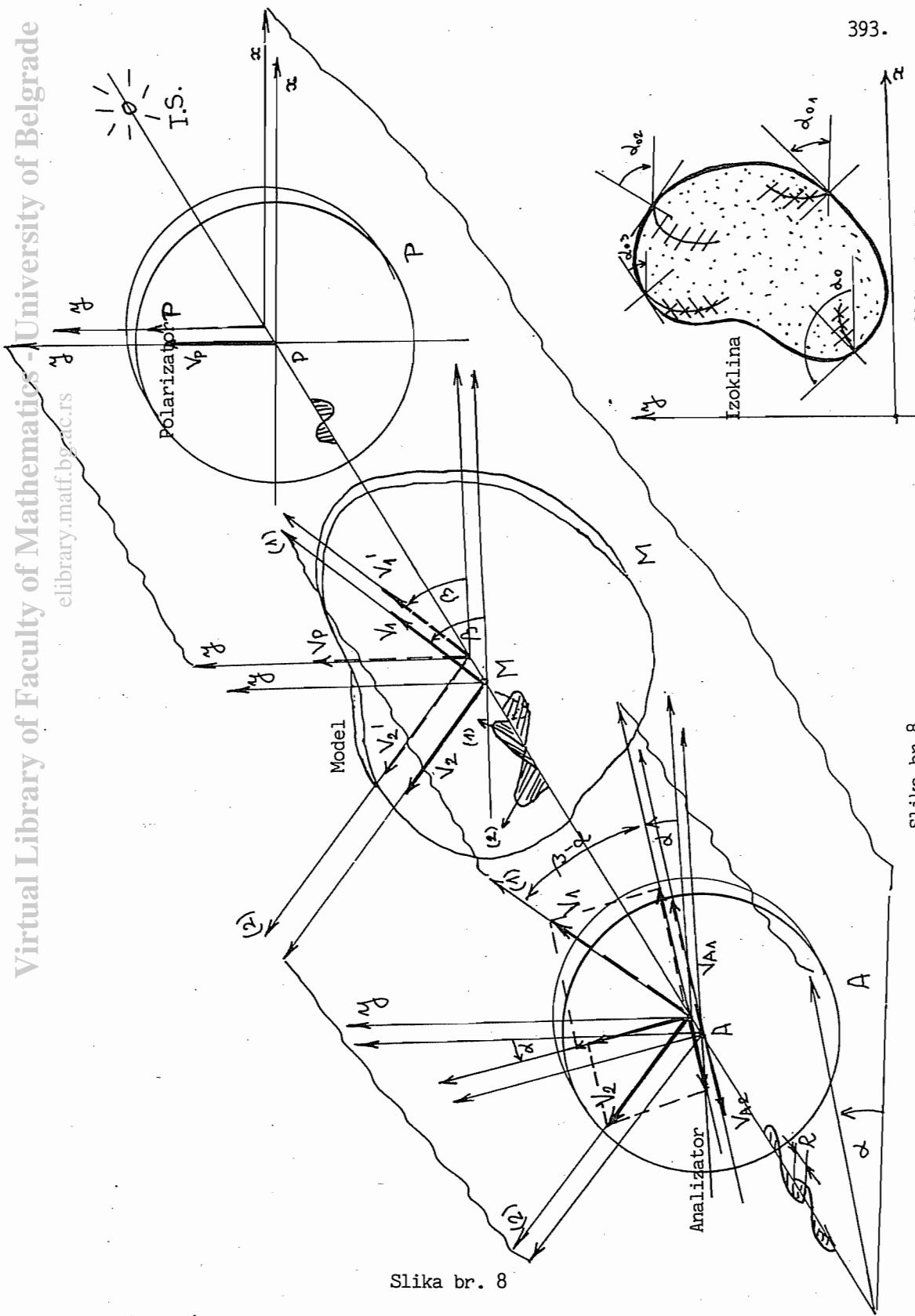
Pod polariskopom podrazumevamo sistem uređaja koji sadrže: izvor svetlosti, polarizator P, analizator A, dve četvrttalasne pločice sa uređajima za okretanje, sočiva za upravljanje paralelnog snopa zraka ravno na model i fokusiranje, uređaje za pomeranje duž ose aparature, fotografskog aparata sa većom žižinom daljinom (da bi se smanjio uticaj aberacije na rezultate) ili naprave za registraciju ili projekciju fotoelastičnog efekta.

Prema vrsti polarizatora imamo dve vrste polariskopa:

1<sup>o</sup> Prolazni polariskop kod koga je model prozračen jednom polarizovanom svetlošću i nalazi se uvek izmedju polarizatora i analizatora;

2<sup>o</sup> Refleksioni polariskopi kod kojih polarizovana svetlost se odbija od ogledala koja se stavlja u iza modela tako da polarizovana svetlost dva puta prolazi kroz model.

Osetljivost refleksionih polariskopa je veća od prolaznih polariskopa, ali se kod njih gubi intenzitet svetlosti prilikom refleksije.



Slika br. 8

Slika br. 12

## X.6.1. LINEARNI POLARISKOP

Na slici br. 8 prikazan je linearни polariskop. Sastoji se od izvora svetlosti, mutne staklene ploče da bi se dobio paralelan snop zrakova, polarizatora, modela, analizatora, sa kombinacijom dveju četvrttalasnih pločica kojima se određuje dispozicija za kružno ili linearно polarizovanu svetlost.

Svetlosni talas po izlasku iz polarizatora je  $V_p = a_0 \sin \omega t$ , a po prolasku kroz materijal modela:

$$\begin{aligned} V_1 &= a_0 \sin \beta \sin(\omega t - \varphi) \\ V_2 &= a_0 \cos \beta \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (17)$$

gde je faza:

$$\varphi = 2\tilde{\delta}\tilde{\delta} = 2\tilde{\delta} \frac{d}{S} (\beta_1 - \beta_2) \quad (17^*)$$

je ugao koji polarizovani vektor svetlosnih oscilacija zaklapa sa pravcima glavnih normalnih napona u odgovarajućoj tački modela. Po izlasku iz polarizatora svetlost je linearno polarizovana, dok je posle prolaska kroz model svetlost eliptično polarizovana.

Po prolasku kroz model komponente  $V_1$  i  $V_2$  nailaze na analizator čija optička osa zaklapa ugao  $(90 - \alpha)$  sa optičkom osom polarizatora i analizatora propušta samo komponente svetlosti  $V_1$  i  $V_2$  koje se poklapaju sa pravcem polarizacije analizatora:

$$V_A = V_1 \cos(\beta - \alpha) - V_2 \sin(\beta - \alpha), \quad (18)$$

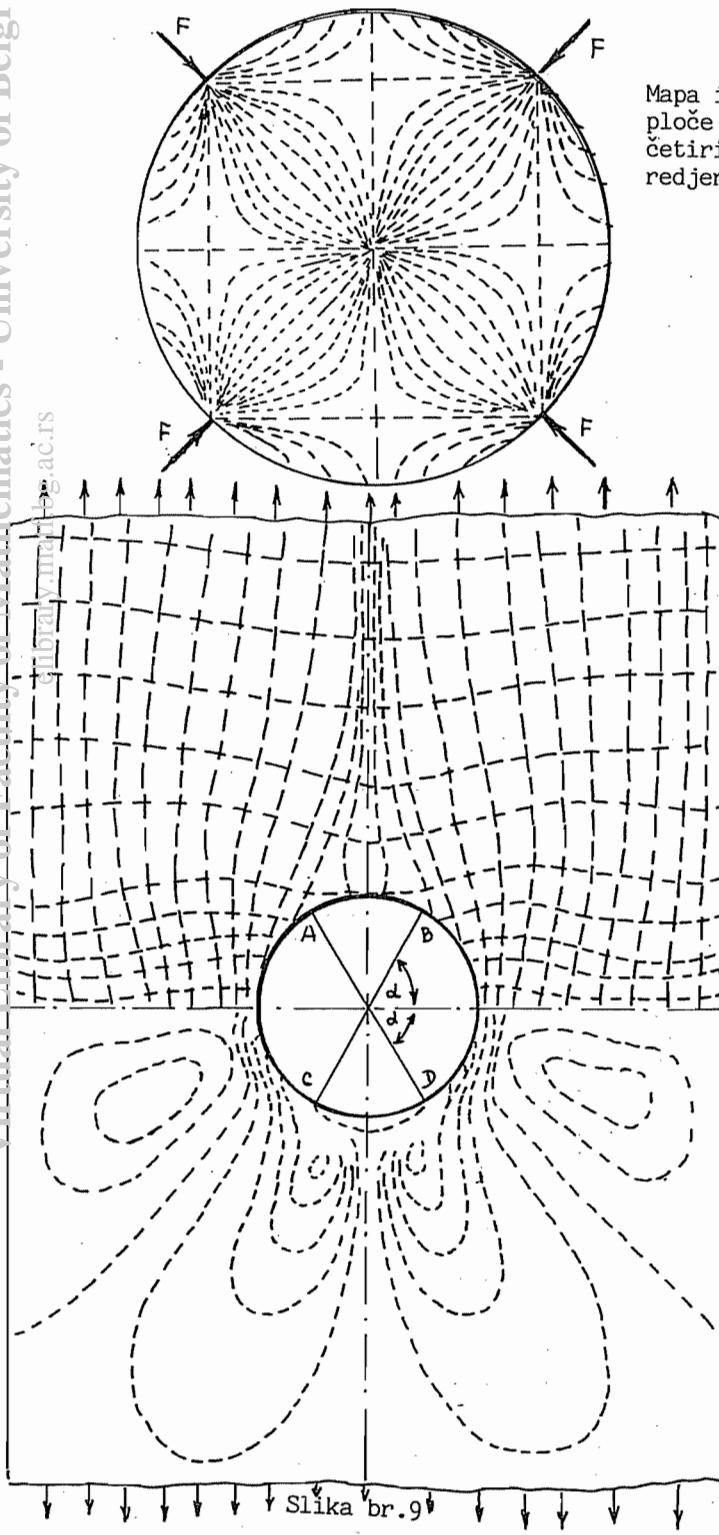
$$\begin{aligned} V_A &= a_0 [\sin \beta \cos(\beta - \alpha) \cos 2\tilde{\delta}\tilde{\delta} - \cos \beta \sin(\beta - \alpha)] \sin \omega t + \\ &\quad + a_0 \sin \beta \cos(\beta - \alpha) \sin 2\tilde{\delta}\tilde{\delta} \cos \omega t. \end{aligned}$$

Intenzitet tako dobijene svetlosti je:

$$\begin{aligned} I_{max} &= a_0^2 [\sin \beta \cos(\beta - \alpha) \cos 2\tilde{\delta}\tilde{\delta} - \cos \beta \sin(\beta - \alpha)]^2 + \\ &\quad + a_0^2 [\sin \beta \cos(\beta - \alpha) \sin 2\tilde{\delta}\tilde{\delta}]^2 \end{aligned} \quad (19)$$

$$I_{max} = a_0^2 [\sin^2 \alpha + \sin 2\beta \sin(2\beta - \alpha) \sin^2 2\tilde{\delta}\tilde{\delta}]. \quad (19^*)$$

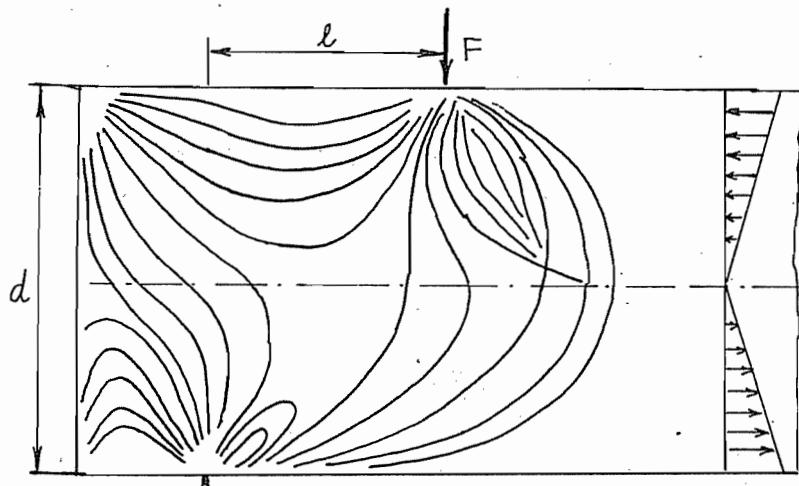
Kako su optičke ose polarizatora i analizatora ukrštene to je  $\alpha = 0$ , pa je maksimalni intenzitet svetlosti:  $J_{max} = a_0^2 \sin^2 \beta \sin^2 2\tilde{\delta}\tilde{\delta}$ . Ako se pravci polarizacije (optičke ose) polarizatora i analizatora poklo-



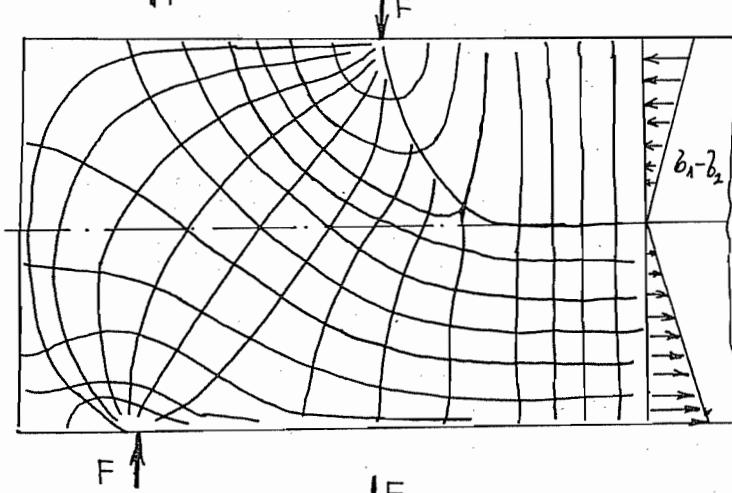
Mapa izoklina kružne ploče opterećene dejstvom četiri simetrično raspoređene pritisne sile.

Mapa izoklina i trajektorije napona za zategnuti štap sa kružnim otvorom

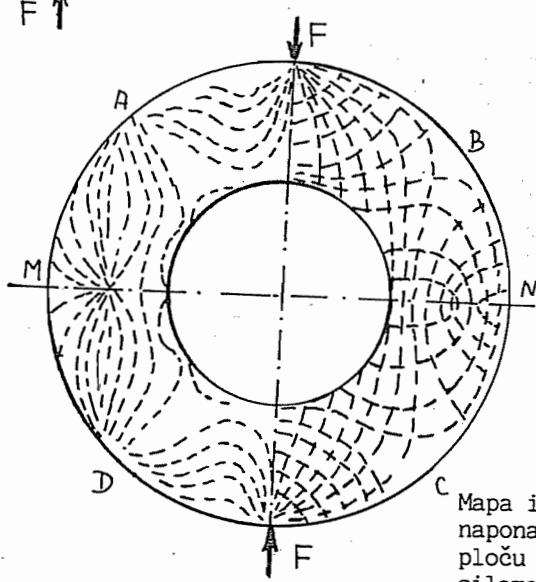
396.



Mapa izoklina za slučaj opterećenja grede na čisto savijanje u delu lokalnih naprezanja izmedju sila i oslonaca.

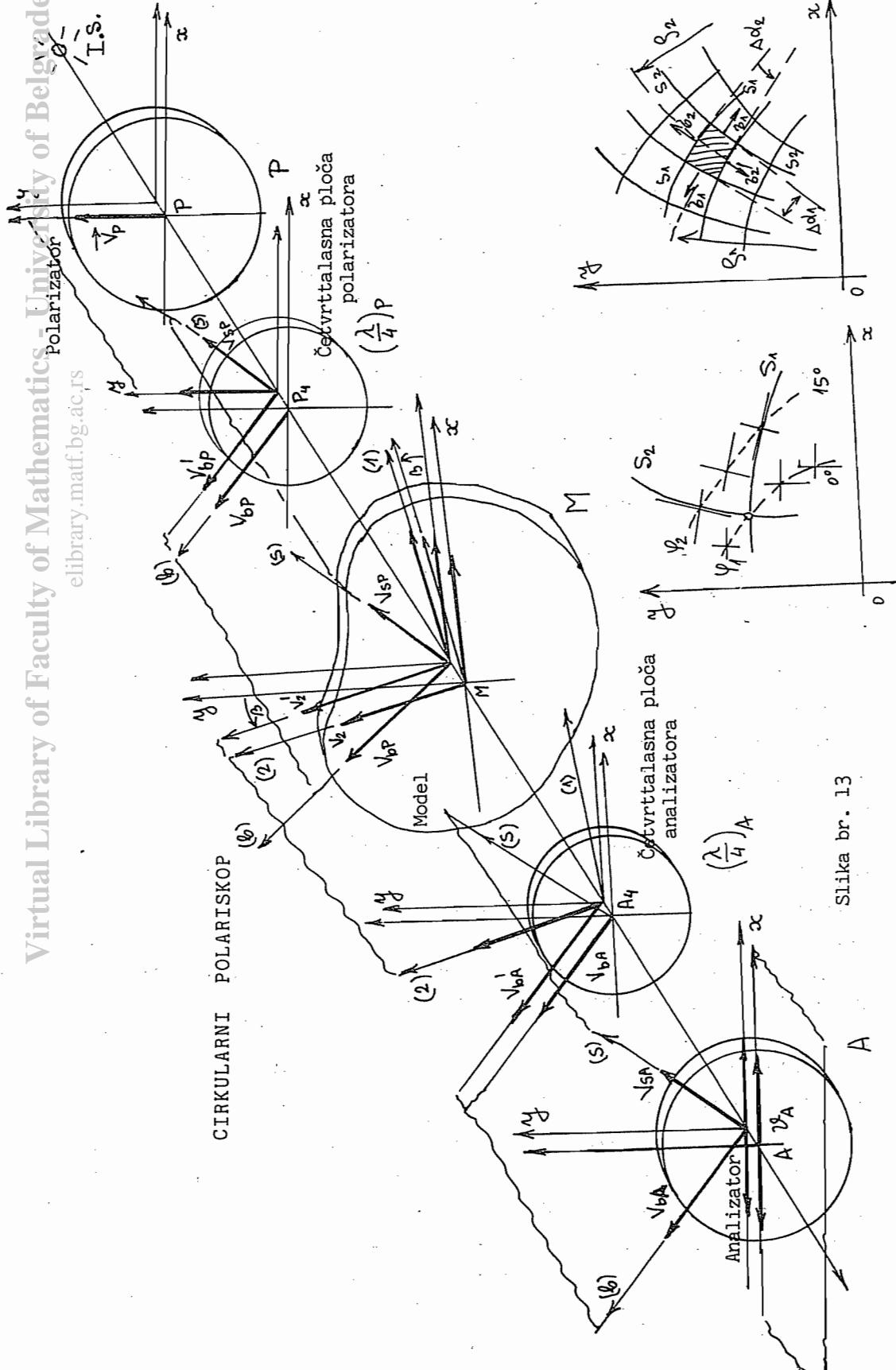


Trajektorije napona za prethodno definisan slučaj opterećenja grede.



Mapa izoklina i trajektorije napona za kružno-prstenastu ploču opterećenu pritisnim silama po prečniku.

Slika br. 10



Slika br. 13

Slika br. 11

398.

pe sa glavnim pravcima naprezanja u posmatranoj tački modela ( $\beta = 0$ ); onda je intenzitet svetlosti jednak nuli:  $J_{\max} \Big|_{\alpha=0, \beta=0} = 0$ .

U svim tačkama modela u kojima se pravci glavnih napona i poklapaju sa optičkim osama polarizatora i analizatora imamo da je intenzitet svetlosti jednak nuli,  $J_{\max} = 0$ , odnosno pojavljuju se tamne linije i polja bez obzira na veličinu zakašnjenja  $\delta$ . Snopove ovih linija nazivamo izokline. Izokline su geometrijsko mesto tačaka modela u kojima glavni pravci napona imaju iste pravce sa osama polarizatora i analizatora. Polarizator i analizator su međusobno spojeni mehaničkim vezama tako da se mogu zajedno okretati ne menjajući međusobni položaj. Kod paralelnog položaja optičkih osa polarizatora i analizatora, intenzitet svetlosti kada se ukloni model se smanjuje samo zbog apsorbcije polaroida. Kod ukrštenih optičkih osa polarizatora i analizatora za  $90^\circ$  apsorpcija svetlosti je potpuna i polje je tamno, ako nema napregnutog modela.

Obrtanjem zajedno polarizatora i analizatora sa ortogonalnim optičkim osama, nastaju nove linije i zatamnjena sa novim poljima odnosno izokline koje se "pomeraju".

Intenzitet svetlosti može biti jednak nuli: u tačkama kada  $\beta$  nije jednako nuli ( $\beta \neq 0$ ) kada je  $\sin \beta \delta = 0$  (pri čemu je  $\delta$  celobrojno) te se na polju analizatora javljaju zatamnjena u svim tačkama. Pri okretanju utvrđene relativne dispozicije analizatora i polarizatora ove tačke ili skup tačaka ostaju uvek tamna, ne pomeraju se i time se razlikuju od izoklina.

Na slikama br. 9 i 10 prikazani su modeli sa snopom izoklina. Familijske (snopovi) izoklina čine mapu izoklina. Iz mape izoklina možemo dobiti dve familije ortogonalnih krivih. Te dve familije krivih dobijamo kao trajektorije glavnih napona u svakoj tački opterećenog modela. Familija trajektorija glavnih napona je pogodnija za korišćenje od izoklina. Jedna familija krivih  $s_1$  daje tok glavnih napona  $\beta_1$ , a druga  $s_2$  daje tok glavnih normalnih napona  $\beta_2$ . U svakoj tački trajektorije napona  $s_1$  glavni normalni napon  $\beta_i$  pada u pravac tangente na istu. Dobijanje trajektorija napona pomoću izoklina prikazano je na slici br. 11.

Na neopterećenoj ivici modela jedan glavni normalni napon je paralelan ivici, dok je drugi upravan na istu jednak nuli. Kada je kontura pločastog modela sastavljena od pravih ivica, koje nisu opterećene one su istovremeno i izokline. Kada je kontura pločastog modela krivolinijska, glavni normalni naponi padaju u pravce tangente i normale na konturu u svakoj tački

konture, te za izokline koje u tim tačkama izlaze na konturu znamo pravce glavnih napona, a sa tim i za sve tačke modela koje se nalaze na toj izoklini. (Vidi sliku br. 12). U unutrašnjosti modela ose simetrije modela i opterećenja su istovremeno i izokline. U tačkama gde izoklina seče pod pravim uglom konturu modela ili osu simetrije konture i opterećenja jedan od glavnih normalnih naponi ima ekstremnu vrednost.

Ako je kontura modela krug neopterećen, onda su glavni pravci napona u tačkama izokline koja izlazi na konturu određeni pravcem radajuša i tangente na krug u tački konture u kojoj izoklina izlazi na konturu.

Kroz izotropne i singularne tačke prolazi veći broj izoklina, jer su glavni pravci naprezanja neodređeni. Singularne tačke su one u kojima glavni normalni naponi  $\delta_1$  i  $\delta_2$  jednaki nuli, i u polju izoklina se može prepoznati po tome što obrtanjem kruto spojenih analizatora i polarizatora sa ortogonalnim optičkim osama izoklina se pomera, ali uvek prolazi kroz singularnu tačku. Singularne tačke su retko u unutrašnjosti modela i obično su na konturi modela.

Izotropne tačke su one u kojima se glavni normalni naponi međusobom jednaki i one su obično u unutrašnjosti modela.

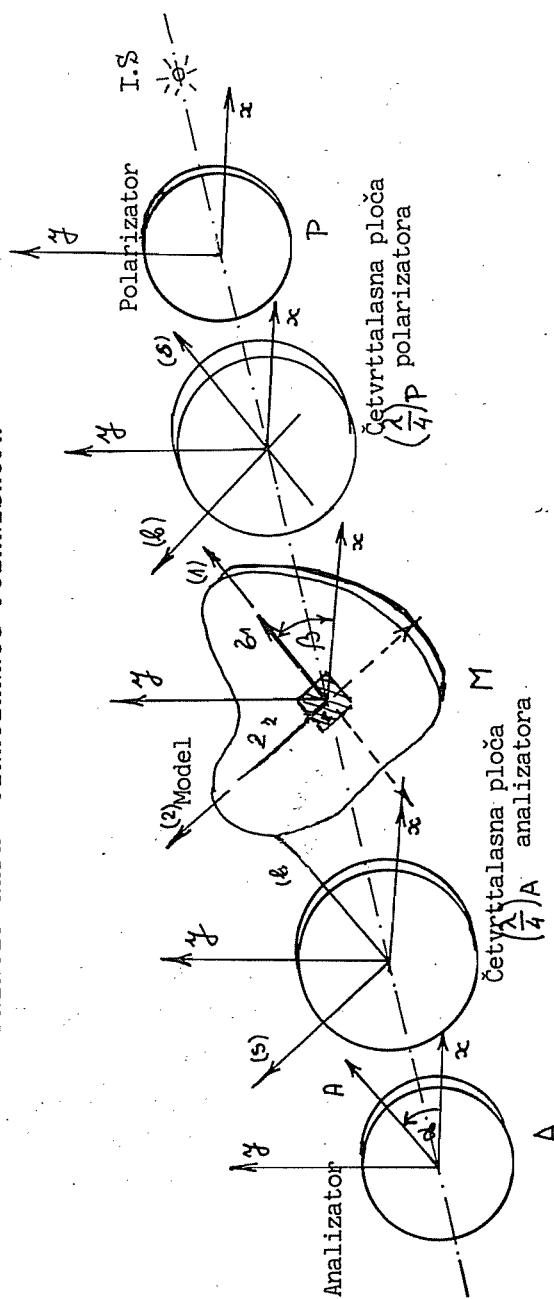
Oblak izokline kroz datu tačku ne zavisi od intenziteta opterećenja, već od vrste opterećenja i oblika modela (konture ploče). Okretanjem sklopa analizator-polarizator sa ukrštenim pod pravim uglom optičkim osama menjaju se slika - mapa izoklina, jer se gube jedne, a pojavljuju nove izokline i tačke u kojima su pravci glavnih normalnih naponi u pravcima optičkih osa analizatora i polarizatora.

**Osobine trajektorija napona:** Ako trajektorija napona ima veliku krivinu (mali poluprečnik) glavni normalni napon upravan na tu trajektoriju u tački koja se kreće po njoj se brzo menja. Ako je na nekom delu trajektorija napona prava linija normalni napon u tim tačkama upravan na nju je konstantan, minimalan ili maksimalan. Ose simetrije opterećenja i modela su istovremeno i trajektorije napona. Prvim trajektorijama odgovaraju prave izokline.

#### X.6.2. CIRKULARNI POLARISKOP

Cirkularni polariskop kao složeniji od linearног, posred polarizatora i analizatora ima i dve ploče od dvolomnog materijala, tj. dve četvrttalasne ploče. Na slici br. 13 prikazana je šema cirkularnog polariskopa.

PRINCIPI RADA CIRKULARNOG POLARISSKOVA



Slika br. 13

Slika br. 13 b.

Svetlost po prolasku kroz polarizator je linearne polarizovane i svetlosni vektor se može predstaviti talasnim kretanjem:

$$V_p = a_0 \sin \omega t. \quad (20)$$

Po dolasku na četvrttalasnu ploču - filter  $(\lambda/4)_p$  on se razlaže u dve komponente:

$$\begin{aligned} V_{p\beta}' &= V_p \cos \frac{\delta}{4} = a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega t, \\ V_{ps}' &= V_p \sin \frac{\delta}{4} = a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega t. \end{aligned} \quad (21)$$

Fazna razlika izmedju ovih oscilovanja je  $\varphi = \delta/2$ , dok je izraženo u talasnim dužinama  $R = \lambda/4$ , odnosno  $\delta = 1/4$ . Po izlasku iz prve četvrttalasne ploče  $(\lambda/4)_p$  komponente svetlosti su:

$$\begin{aligned} V_{p\beta} &= a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega t = a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega t, \\ V_{ps} &= a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\omega t - \varphi) = -a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega t, \end{aligned} \quad (22)$$

te imamo kružno polarizovanu svetlost:

$$\left( \frac{V_{p\beta}}{a_0 \frac{\sqrt{2}}{2}} \right)^2 + \left( \frac{V_{ps}}{a_0 \frac{\sqrt{2}}{2}} \right)^2 = 1, \quad (23)$$

koja pada na jednu od tačaka opterećenog modela u kojoj su pravci glavnih napona  $\beta_1$  i  $\beta_2$  označeni sa (1) i (2).

Svetlosni vektor na ulasku u model se razlaže na dve komponente:

$$\begin{aligned} V_{1M}' &= V_{ps} \cos \left( \frac{\delta}{4} - \beta \right) - V_{p\beta} \sin \left( \frac{\delta}{4} - \beta \right), \\ V_{2M}' &= V_{ps} \sin \left( \frac{\delta}{4} - \beta \right) + V_{p\beta} \cos \left( \frac{\delta}{4} - \beta \right), \end{aligned} \quad (24)$$

koje su na izlasku iz modela komponente eliptički polarizovane svetlosti:

$$\begin{aligned} V_{1M} &= -a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left( \frac{\delta}{4} - \beta \right) \cos(\omega t - 2\delta) - a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left( \frac{\delta}{4} - \beta \right) \sin(\omega t - 2\delta), \\ V_{2M} &= a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left( \frac{\delta}{4} - \beta \right) \cos \omega t + a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left( \frac{\delta}{4} - \beta \right) \sin \omega t, \end{aligned} \quad (25)$$

gde je  $\varphi = 2\delta = 2\delta \frac{d}{S} (\beta_1 - \beta_2)$  fazno kašnjenje neredovnog zraka pri izlasku iz modela debeljine  $d$ ,  $S = \lambda/c_0$ , optičko naponska konstanta. Po izlasku iz modela ova svetlost nailazi na drugu četvrttalasnu ploču  $(\lambda/4)_A$  i razlaže se u pravce osa s i b te ploče:

$$\begin{aligned} V_{As}' &= -V_{1M} \sin \left( \frac{\delta}{4} - \beta \right) + V_{2M} \cos \left( \frac{\delta}{4} - \beta \right), \\ V_{Ab}' &= V_{1M} \cos \left( \frac{\delta}{4} - \beta \right) + V_{2M} \sin \left( \frac{\delta}{4} - \beta \right), \end{aligned} \quad (26)$$

402.

a po prolasku kroz  $(\lambda/4)_A$  četvrttalasnu ploču dolazi do faznog zakašnjenja za  $\varphi = \pi/2$ , izmedju redovnog i neredovnog zraka izraženo u talasnoj dužini za  $\lambda/4$ , te dobivamo za  $V_{As}$  i  $V_{Ab}$ :

$$V_{As} = \alpha_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \sin(\omega t - \frac{\pi}{4}) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \sin(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \right], \quad (27)$$

$$V_{Ab} = \alpha_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos(\omega t - \varphi) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos \omega t + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \sin(\omega t - \varphi) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \sin \omega t \right].$$

Optička osa analizatora zaklapa ugao  $(90 - \alpha)$  sa optičkom osom polarizatora. Nailaskom na analizator prolaze samo komponente u pravcu polarizacije analizatora:

$$V_A = V_{As} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + V_{Ab} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right), \quad (28)$$

$$V_A = -\alpha_0 \left[ \cos(2\beta - \pi\delta) \sin \pi\delta \cos \alpha + \frac{1}{2} (1 + \cos 2\pi\delta) \sin \alpha \right] \cos(\omega t - 2\pi\delta) + \left[ \sin(2\beta - \pi\delta) \sin \pi\delta \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\pi\delta \sin \alpha \right] \sin(\omega t - 2\pi\delta). \quad (28*)$$

Maksimalni intenzitet svetlosti je:

$$I_{max} = \alpha_0^2 \left[ \sin^2 \pi\delta \cos^2 \alpha + \cos^2 \pi\delta \sin^2 \alpha + 2 \cos 2\beta \cos 2\pi\delta \sin \pi\delta \sin 2\alpha \right]. \quad (29)$$

Ako su optičke ose polarizatora i analizatora ukrštene pod pravim uglom ( $\alpha = 0$ ) (tamno polje analizatora) maksimalni intenzitet svetlosti je:

$$I_{max} \Big|_{\alpha=0} = \alpha_0^2 \sin^2 \pi\delta. \quad (30)$$

U svim tačkama modela gde je kašnjenje  $\delta = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

... , m je:

$$\delta = \frac{d}{\lambda} (\lambda_1 - \lambda_2) = m, \quad (31)$$

maksimalni intenzitet svetlosti jednak je nuli:

$$I_{max} \Big|_{\alpha=0, \delta=0, 1, 2, 3, \dots, m} = 0. \quad (32)$$

Ako su optičke ose polarizatora i analizatora paralelne  $\alpha = \pi/2$  (svetlo polje analizatora) maksimalni intenzitet svetlosti po izlasku iz analizatora je:

$$I_{max} \Big|_{\alpha=\pi/2} = \alpha_0^2 \cos^2 \pi\delta. \quad (33)$$

svim tačkama modela u kojima je zakašnjenje  $\delta = 1/2, 3/2, 5/2, \dots (2m+1)/2$

je:

$$\delta = \frac{d}{S} (\beta_1 - \beta_2) = \frac{1}{2} (2m+1), \quad (34)$$

Biće maksimalni intenzitet svetlosti jednak nuli:

$$\left. I_{\max} \right|_{\alpha = \frac{\pi}{2}; \delta = \frac{2m+1}{2}} = 0. \quad (35)$$

Dobivene tamne linije za celobrojno zakašnjenje  $\delta = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, m$  ili za neparan broj polovina  $\delta = 1/2, 3/2, \dots (2m+1)/2$  nazivaju se izohrome.

Izohrome su geometrijsko mesto tačaka istih razlika glavnih napona;  $\beta_1 - \beta_2$  reda  $m$  ili  $(2m+1)/2$ :

$$\beta_1 - \beta_2 = \begin{cases} \frac{S}{d} m & \alpha = 0 \\ \frac{S}{d} (m + \frac{1}{2}) & \alpha = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (36)$$

Ove linije jednakih razlika glavnih napona su dobile naziv izohrome zbog pojave da se pri propuštanju složene bele svetlosti na opterećenom modelu pojavljuju linije iste boje za različite talasne dužine osnovnih svetlosnih vektora.

Ako su u nekoj tački opterećenog modela  $\beta_1 = 0$  i  $\beta_2 = 0$  glavni naponi jednaki nuli  $m = 0$  tu tačku nazivamo singularnom.

Ako su u nekoj tački opterećenog modela  $\beta_1 = \beta_2 \neq 0$ , onda je  $\beta_1 - \beta_2 = 0$ ,  $m = 0$  glavni normalni naponi su jednaki i tu tačku nazivamo izotropnom.

Singularne i izotropne tačke su u cirkularnom polariskopu prek tamne, bilo da se ispitivanje obavlja sa monohromatskom ili složenom belom svetlošću pri ukrštenim polaroidima.

### X.6.3. ODREDJIVANJE REDA IZOHROMA I

#### POSTUPCI KOMPENZACIJE

Razlika glavnih normalnih napona se određuje izrazima:

$$\beta_1 - \beta_2 = \begin{cases} \frac{S}{d} m = Nm & \alpha = 0 \\ \frac{S}{d} (m + \frac{1}{2}) = N(m + \frac{1}{2}) & \alpha = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (37)$$

dok je razlika glavnih dilatacija:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \begin{cases} \frac{S}{d} \frac{1+\mu}{E} m = N_\varepsilon m \\ \frac{S}{d} \frac{1+\mu}{E} (m + \frac{1}{2}) = N_\varepsilon (m + \frac{1}{2}) \end{cases} \quad (38)$$

gde je  $N_\varepsilon = S(1+\mu)/dE$  odnosno  $N = S/d$  "vrednost" jedne izohrome u odnosu na dilatacije, odnosno napone ili konstanta ploče od koje je izradjen model, a  $m$  i  $m + 1/2$  red izohrome.

Kada se za demonstraciju koristi bela svetlost nulta izohroma  $m = 0$ , odnosno  $\beta_1 - \beta_2 = 0$ , odnosno  $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0$  predstavljena je tamnom linijom, a sve ostale su spektralnih boja. Kada se radi sa jednobojnom svetlošću sve su izohrome tamne - crne. Kako se prema jednačinama odbrojavanjem od nulte može odrediti red izohrome startujemo sa nulom - crna izohroma ka žutoj, crvenoj, zelenoj itd. Odredivši red izohrome možemo izračunati razliku glavnih napona i razliku glavnih dilatacija, za što je potrebno poznavati konstantu ploče  $N$  odnosno  $N_\varepsilon$ .

Izohrome dobijene od izvora monohromatske svetlosti su oštro razgraničene tamne linije.

Kada se koristi bela svetlost izohrome - linije jednakih razlika glavnih napona  $\beta_1 - \beta_2$  su različitih boja. Taj raspored boja zavisi od vrste i intenziteta opterećenja, osetljivosti i debljine materijala modela, a ne zavisi od orijentacije para učvršćenih ortogonalnih optičkih osa polarizatora i analizatora u odnosu na model. Bela svetlost je pogodna za određivanje nulte izohrome. Izotropne i singularne tačke su takodje tamne i ne pomeraju se sa pokretanjem polarizacionih filtera.

Izohrome na neopterećenoj ivici: Normalni napon  $\beta_1$  je paralelan tangenti na konturu modela, a  $\beta_2 = 0$ , ako je kontura modela neopterećena te iz reda izohrome koja izlazi na konturu u toj tački možemo odrediti vrednost normalnog napona  $\beta_1 = \frac{S}{d} m$ .

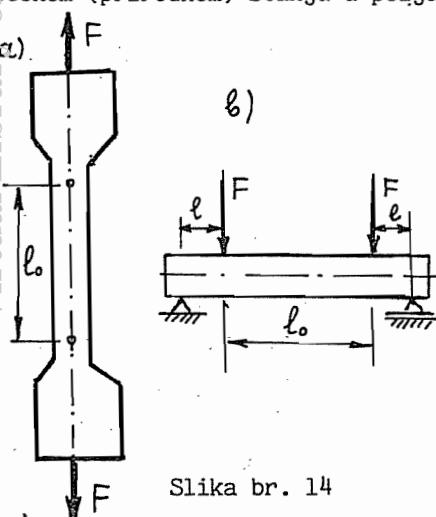
U sledećo tablici su sastavljeni podaci o faznom zaostajanju boje i red izohrome u odnosu na talasnu dužinu žute natrijumove svetlosti:

| Boja pri ukrštenim optičkim osama polarizatora i analizatora | fazno pomeranje $\text{Å}$ | red izohrome $= 5893 \text{ Å}$ |
|--|----------------------------|---------------------------------|
|--|----------------------------|---------------------------------|

|               |      |       |
|---------------|------|-------|
| crna          |      | 0     |
| gvozdeno siva | 400  | 0,068 |
| plavo siva    | 1580 | 0,268 |
| siva          | 2180 | 0,37  |
| čisto belo    | 2590 | 0,44  |

|                        |       |       |
|------------------------|-------|-------|
| slama žuto             | 2810  | 0,48  |
| živo žuto              | 3300  | 0,564 |
| braon žuto             | 4300  | 0,73  |
| crveno narandžasto     | 5050  | 0,857 |
| crveno                 | 5360  | 0,911 |
| purpur                 | 5610  | 0,96  |
| indigo                 | 5830  | 0,99  |
| nebesno plavo          | 6640  | 1,125 |
| zeleno                 | 7470  | 1,27  |
| žuto zeleno            | 8430  | 1,43  |
| cisto žuto             | 9100  | 1,545 |
| narandžasto            | 9480  | 1,610 |
| narandžasto crveno     | 9980  | 1,695 |
| tamnoljubičasto crveno | 11010 | 1,875 |
| indigo                 | 11510 | 1,955 |

elibrar matf fakulteta



Slika br. 14

gde je  $m$  broj ponavljanja jedne spektralne boje, a  $\delta_1 = F/A$  normalni napon. Kod najčešće upotrebljavanih ploča debljine 6 do 10 mm, konstanta ploče se kreće  $N = 1,5$  do  $5 [N/mm^2]$ .

$$N = \frac{\delta_1 - 0}{m_s} \text{ ili } \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{m_s} = N_e \quad (39)$$

postepenom opterećenju povećanjem aksijalne sile  $F$ , kada se koristi bela svetlost štap jednolično dobija redom sve spektralne boje. Sa daljim povećanjem sile  $F$  spektralne boje se dalje ciklički smenjuju, odnosno ponavljaju: crno, žuto, crveno, plavo, žuto, crveno, zeleno, žuto, crveno, zeleno itd. U tačkama poprečnog preseka štapa normalni napon je  $\delta_1$ , a u tačkama uzdučnih preseka  $\delta_2 = 0$ , pa optičko-naponska konstanta ploče je:

Znak i veličina glavnog napona  $\delta_1$  na slobodnim ivicama kod istezanja štapa silom može da se odredi na sledeći način: Dovedemo izohromu u posmatranu tačku i označimo je sa  $m+r$  i identifikujemo izohrome  $m$  i  $m+1$  reda sa obe strane posmatrane tačke, zatim rotiramo analizator u smeru kazaljke na satu, onda ako se izohroma nižeg reda  $m$  kreće prema posmatranoj tački, znak napona je pozitivan i ukupna vrednost izohrome je  $m + r$ ; Ako se izohroma reda  $m+1$  kreće prema posmatranoj tački, znak normalnog napona je negativan - napon pritska i ukupna vrednost izohrome je  $m + 1 - r$ , te je napon :

$$\delta_1 = \frac{F}{A} = \begin{cases} (m+1-r)N \\ (m+r)N \end{cases} \quad (40)$$

Za bolje određivanje reda izohroma nije potrebno mnogo opterećiti model. Povoljnije je da konstanta ploče bude što manja. Prateći cikličko ponavljanje spektralnih boja može se odmah odrediti najveći red izohrome, ako se model ispituje izmedju paralelnih polaroida (polarizatora i analizatora).

Tamne linije koje pokazuju geometrijsko mesto tačaka sa istom razlikom glavnih napona ( $\delta_1 - \delta_2$ ), kod paralelno postavljenih optičkih osa polaroida (polarizatora i analizatora) imaju veći red za  $1/2$  od reda tamnih linija kada su polarizatori (polarizator i analizator) sa ukrštenim optičkim osama. Prema tome zaokretanjem analizatora moguće je snimiti izohrome red  $m + 1/2$  i povećati tačnost procene  $\delta_1 - \delta_2$ . S obzirom da je potrebno često u merenjima i istraživanjima povećati tačnost koriste se kompenzatori i razne metode kompenzacije.

Postupak određivanja reda izohroma može se sprovesti i pomoću naprezanja na čisto savijanje. Na slici br. 14 b prikazana je greda opterećena silama intenziteta  $F$  na rastojanju  $a$  od oslonaca, tako da je deo grede izmedju sila opterećen na čisto savijanje pa je najveći normalni napon

$\delta_1 = F a / W_x = m_s N$ . Pri povećanju opterećenja pojavljuju se u gornjem i donjem delu štapa nove izohrome. Opterećenje se može povećavati tako da se može određivanjem čvrstoće odrediti i najveći red izohrome.

#### X.6.4. TARDY-SENARMONT-OVA METODA KOMPONEZACIJE

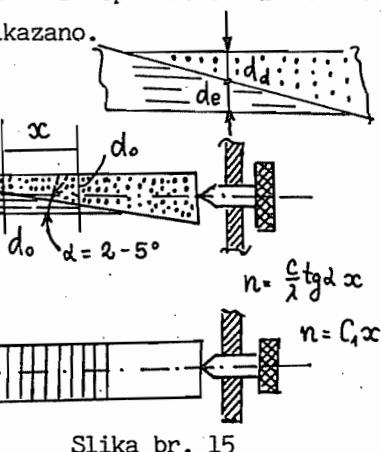
Ova metoda komponezacije spada u metode sa kružnom interpolacijom. Pretpostavka primene ove metode kompenzacije je poznavanje pravaca glavnih normalnih napona i red onih izohroma izmedju kojih se izučavana

tačka nalazi.

Dispozicija analizatora i polarizatora je takva da su im optičke ose ukrštene i poklapaju se sa pravcima glavnih naponu u izabranoj posmatranoj tački u kojoj se hoće da izvrši kompenzacija. Četvrttalasni filtri ploče se postave tako da im se optičke ose okrenu za  $45^\circ$  prema optičkim osama polarizatora i analizatora. Iz te dispozicije sistema okreće se samo analizator za neki ugao  $\theta$  sve dole dok izohroma (crna pruga) ne dodje u izabranu tačku. Red izohrome se određuje sa  $m + r$  gde je  $r = \theta / 180^\circ$ . Pri rotiranju analizatora u smeru kazaljke na časovniku jedna od pruga - izohroma dolazi u posmatranoj tački, kada na skali očitamo razlomak  $r = \theta / 180^\circ$ . Ako je izohroma nižeg reda došla u tačku reda  $m$  očitaćemo  $m + r$ , a ako je izohroma višeg reda  $m + 1$  došla u tačku očitaćemo  $m + 1 - r$ .

#### X.6.5. BBINET - SOLEIL KOMPENZATOR NULTOBALANSNA KOMPENZACIJA

Najviše su u upotrebi kompenzatori koji rade na principu Babinet -Soleil-a. Taj kompenzator se sastoji od dve pločice - tanka klin sa malim nagibom od  $2$  do  $3^\circ$  od kamenog kristala (kvarca) koje su tako napravljene da su im optičke ose ukrštene pod pravim uglom kao što je na slici br. 15 prikazano.



Slika br. 15

Koristeći kose površine klina, kliženjem jednog po drugom može se menjati debljina pomoću mikrometarskog vijka. Kada su debljine ploča  $d_1 = d_d$  jednake stavljanjem kompenzatora iza analizatora da se optičke ose kompenzatora poklope sa glavnim pravcima naprezanja u datoј tački te ne-ma promene na izohromama, jer prolaskom svetlosnog zraka kroz pločicu je-

dan klin izaziva usporavanje, a drugi ubrzavanje zraka. Okretanjem mikrometarskog zavrtnja, možemo menjati debljine klinova iznad posmatrane tačke i izazivati efekat relativnog kašnjenja svetlosti.

Kada pomeranjem klinastih ploča, tj. menjanjem debljine jedne od njih iznad posmatrane tačke kroz koju prolazi tamna izohroma u jednobojnom svetlu postignemo efekat da tamna linija u toj tački nestane, tj. na izo-

408.

hromi se uz pomoć kompenzatora dobije svetli deo, kompenzacija je potpuna, te se na mikrometarskom ili digitalnom brojčaniku određuje red izohrome sa dve decimale, ili posredstvom kalibracionog dijagrama (red izohrome ili odmah razlika glavnih napona). Nezgodna karakteristika ovog postupka je u upotrebi ponavljanja postupka kompenzacije u svakoj tački opterećenog modela.

Promenom opterećenja menja se broj izohroma i one se pojavljaju na "izvorima" izohroma, a to su geometrijska mesta tačaka na konturi modela u kojima dejstvuju spoljašnje površinske sile.

#### X.6.6. ODREDJIVANJE ZNAKA IVIČNOG NAPONA

Ako znak ivičnog napona nije poznat može se izvršiti proba nožem (šiljkom) i izazvati lokalno naprezanje, te se iz pomeranja izohroma u tom lokalnom području u blizini ivice zaključuje:

1<sup>o</sup> Ivični normalni napon je napon zatezanja, ako se izohrome pomeraju od ivice modela prema unutrašnjosti kada i red izohroma raste prema konturi u okolini tačke pritiska, odnosno izohrome se pomeraju od unutrašnjosti modela prema konturi, ako red izohroma opada prema konturi u okolini tačke pritiska;

2<sup>o</sup> Ivični normalni napon je napon pritiska, ako se izohrome pomeraju od ivice modela prema unutrašnjosti, kada red izohroma opada prema konturi u okolini tačke pritiska, odnosno, ako se izohrome pomeraju iz unutrašnjosti ka ivici modela, kada red izohroma raste prema konturi u okolini tačke pritiska šiljkom.

#### X.6.7. ANALIZA NAPONSKOG STANJA MODELA

Fotoelastičnim efektom optičke analize naponskog stanja dobijamo dva podatka u svakoj tački opterećenog modela: pravce glavnih normalnih napona (glavne pravce naprezanja) posredstvom izoklina i položaja optičkih osa polarizatora i analizatora, i razliku glavnih normalnih napona (posredstvom reda izohroma koja prolazi kroz određenu tačku i optičke konstante ploče modela). U ravnim problemima teorije elastičnosti javljaju se tri nepoznata komponentna napona  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  i  $\gamma_{xy}$  ili tri specifične deformacije  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  i  $\gamma_{xy}$  koje treba odrediti, ili pak treba odrediti dva glavna normalna napona i pravac jednog od njih. Za utvrđivanje stanja napona ili stanja deformacija modela pored podataka dobijenih optičkom analizom pomoću izoklina i izohroma potreban je još jedan podatak. Moguća je integracija jednačina ravnote-

že po određenim pravama u datoј oblasti uz poznavanje naponskog stanja u konturnim tačkama. Međutim do sada na odgovarajući način to pitanje nije još riješeno, ali postoje mnogi dodatni uslovi prethodnim analitičkim, numerički ili eksperimentalni da se to utvrdi sa više ili manje tačnosti.

Dilatacija u pravcu debljine ploče modela vezana je sa glavnim normalnim naponima vezom:

$$\beta_1 + \beta_2 = -\frac{E}{\mu} \epsilon_z , \quad (41)$$

sto zajedno sa:

$$\beta_1 - \beta_2 = \begin{cases} \frac{s}{d} m \\ \frac{s}{d} (m + \frac{1}{2}) , \end{cases} \quad (42)$$

rešava problem, ali ostavlja otvorenim pitanje određivanja dilatacije  $\epsilon_z$  za svaki linijski element u tačkama opterećenog modela upravan na ravan ploče modela u neopterećenom stanju.

Drugi mogući način je određivanje invarijante naponskog stanja pomoću zapremske dilatacije.

#### X.6.8. MATERIJALI ZA MODELE I IZRADA MODELAA ZA OPTIČKU ANALIZU NAPONSKOG STANJA KONSTRUKCIJA

Da bi se uspešno izvela optička analiza naponskog stanja konstrukcije upotrebom modela treba izabrati odgovarajući materijal za model koji treba da zadovolji sledeće uslove: da je providan bez obojenosti; da je homogen i izotropan u neopterećenom stanju; da je u "prirodnom stanju" bez sopstvenih napona; da je idealno elastičan sa linearnom vezom napon dilatacija; da je visoko optički osetljiv, da bi se za tanke modele dobio dovoljan broj izohroma pri malim opterećenjima; da ima nizak optički koeficijent: da ima visok modul elastičnosti, kako bi se izbegle velike deformacije; da je malo osetljiv na male promene temperaturnog polja; da je lako obradiv i da nije skup.

Danas još nisu nadjeni materijali koji će istovremeno i potpuno da zadovolje sve prethodne zahteve. Današnji materijali, naročito poliesterske i aralditne smole imaju visok naponsko optički efekat uz zadovoljavajuće ostale karakteristike. Kao nedostaci pojedinih materijala smatraju se sopstveni naponi usled starenja, odstupanje od linearnosti pri višim naponima.

410.

Materijali se na tržištu nalaze obično u obliku ploča, tečne plastike za izливanje modela ili unapred livenih blokova raznih veličina i otlika, koji se mašinski obradjuju.

Kao materijali za modele se upotrebljavaju: mineralno staklo, poliesterska metakrilna smola (pleksiglas), nitrat celuloze i kamfor (celuloid), preradjeni kaučuk, želatin (15 procenata želatina, 25 procenata glicerina i 60 procenata vode), dekorit (fenolformaldehidna smola), trilon VP 1527, epoksidna smola (araldit B, D, F), stirolalkidna smola (MIHM IMAŠ -SSSR), epoksidna smola (ED - 6 SSSR) i druge.

Za dvodimenzionalnu optičku analizu naponskog stanja koriste se ploče koje se obradjuju visokobrzinskim glodanjem.

Za uspešnu obradu modela alat mora da je otar, brzina umerenja i da se skudaju tanki slojevi, a da se noževi ne koriste za obradu metala.

#### X.7. POVRSINSKA FOTOELASTICNOST

U postupku optičke analize napon na površi konture tela efektom površinske fotoelastičnosti kao "modelski" materijal upotrebljava se relativno tanka obloga debljine 1 do 2,5 mm, koja je nalepljena na površ izvedenih konstrukcija, čime je omogućena direktna optička analiza stanja napa na površi realne konstrukcije. Jedan od načina postavljanja tih obloga je da se od fotoelastičnog materijala izliju tankе ploče ili ljske oblika površi konture konstrukcije i u zagrejanom stanju te ploče ili ljske su meke i mogu se prilagoditi obliku konstrukcije, koji po hladjenju i lepljenju se zadrže na konstrukciji. Kao lepak se koristi dvokomponentni lepak u koji je umešan aluminijski prah, koji po očvršćavanju ima funkciju reflektujućeg sloja. U ovom slučaju koriste se refleksioni polariskopi. Kako je obloga relativno tanka i pri deformisanju konstrukcije se deformiše i fotoelastična obloga to se može zanemariti otpor obloge, jer je mali i pretpostaviti da ona ne menja naponsko i deformaciono stanje konstrukcije u odnosu na konstrukciju bez obloge.

### X.8. PROSTORNA FOTOELASTIČNOST

Fotoelastična analiza naponskog i deformacionog stanja se danas koristi i za optičku analizu prostornog stanja naprezanja elastičnih konstrukcija. Jedan od najrasprostranjenijih postupaka je postupak "zamrzava-nja naponskog stanja". Model konstrukcije se pravi po zakonima modelske tehnike od fotoelastičnog materijala. Zatim se takav model na povišenoj temperaturi opterećuje odgovarajućim površinskim silama i dovodi u naponsko stanje koje odgovara naponskom stanju opterećene konstrukcije, te se zatim napregnut model trajno "zamrzava" hladjenjem vrlo sporo do sobne temperature, čime nisu promenjene optičke karakteristike i oblik napregnutog modela. Zatim se model rezne na tanke ploče u kojima se mogu odrediti dve komponente - dva glavna napona, karakteristična za posmatranu isečenu ploču, ali to nisu stvarni glavni naponi, već su to tzv. sekundarni glavni naponi. Postupak se ponavlja i za druge dve ili bar jednu ravan, paralelno kojoj se ispituje treći sekundarni normalni napon.

Polimerni materijali su sastavljeni od lančano vezanih makromolekula i njihovo ponašanje se tumači time da postoje dve strukture vezanih molekula: primarna koja čini prostornu rešetku unutar koje se nalaze molekuli sekundarne mreže. Pri povišenju temperature i opterećenju modela primarna mreža se deformatiše da bi u procesu hladjenja zadržala taj oblik, dok sekundarna mreža ukleštena u rešetki primarne, daje optičke efekte.

Naponsko stanje i struktura i oblik rešetki se ne menjaju ako se model izreže na ploče pri čemu se mora voditi računa da se pri rezanju ne zagreje i promeni stanje napona i stanje deformacija pločice.

Optička analiza naponskog stanja u ovom slučaju je nešto složenija jer komponentni naponi u svakoj tački modela ne moraju da budu upravljeni ili paralelni sa ravnima rezanja pločica, niti su glavni naponi izrezane pločice u svakoj tački pločice u ravni pločice.

Očigledno je da je problem teži ako se radi o heterogenom naponskom stanju gde dva glavna pravca nisu uvek u paralelnim ravnima.

## X.9. P R I L O G

Na priloženim slikama prikazano je sledeće:

Na slici br. 16 prikazan je difuzni polariskop marke Tiedemann sa fotoaparatom za snimanje optičke slike naponskog stanja modela i ramom za opterećivanje modela.

Na slici br. 17 prikazana je sprava za baždarenje fotoelastičnog materijala korišćenjem naprezanja na čisto savijanje grede.

Na slikama br.17 i 18 prikazana su optičke slike naponskog stanja grede opterećene na savijanja u funkciji baždarenja savijanjem,a slike su napravljene u tamnom i svetlom polju respektivno.

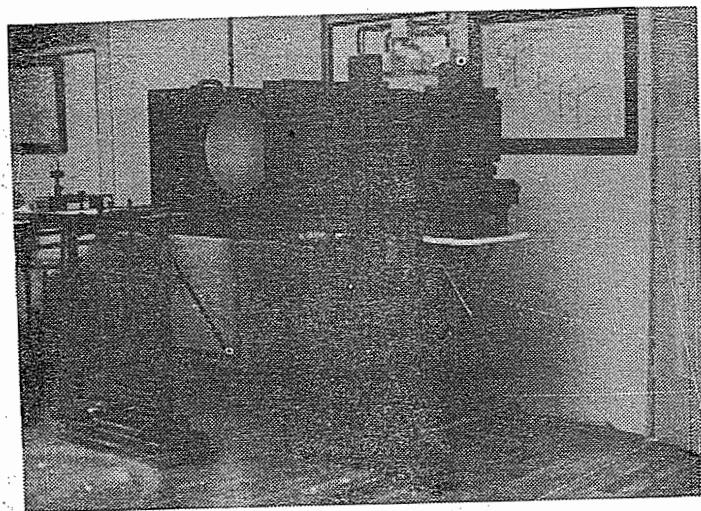
Na slikama br.20 i 21 prikazane su optičke slike naponskog stanja opterećenog diska u tamnom i svetlom polju u funkciji baždarenja diskom.

Na slikama br.22 i 23 prikazane su optičke slike naponskog stanja u tamnom i svetlom polju polariskopa za slučaj pločice u obliku eliptičkog prstena opterećenog spoljašnjim koncentrisanim silama na spoljašnjoj konturi.

Na slikama br. 24 i 25 prikazane su optičke slike naponskog stanja u tamnom i svetlom polju polariskopaza slučaj pločice u obliku eliptičnog prstena opterećenog koncentrisanim silama na unutrašnjoj konturi pločice.

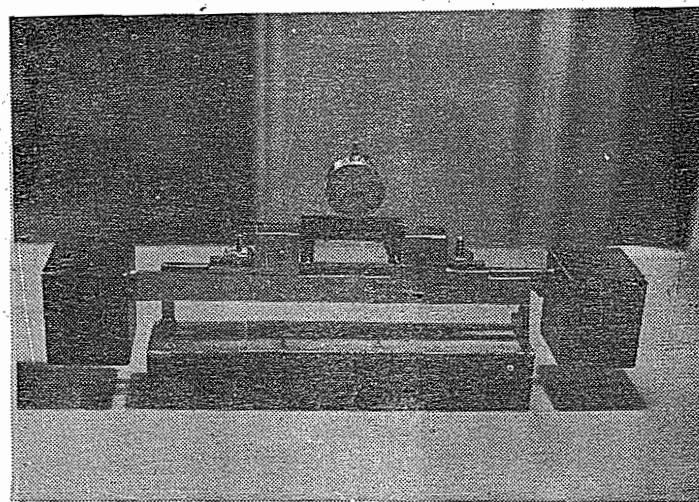
Na slikama br.26 i 27 prikazane su optičke slike naponskog stanja u tamnom i svetlom polju polariskopa za slučaj pločice u obliku eliptičkog prstena opterećenog koncentrisanim silama na spoljašnjoj i unutrašnjoj konturi kao superpozicija stanja napona iz prethodna dva slučaja.

Priložene fotografije su rezultat eksperimenta asistenta Dragana Jovanovića,studenta postdiplomskih studija Tehničke mehanike na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Nišu.Eksperiment je obavljen u Laboratoriji Fakulteta strojarstva i brodogradnje Univerziteta u Zagrebu uz stručnu pomoć profesora dr Stjepana Jecića,koji rukovodi radom ove laboratorijske i njegovih saradnika.



Slika br.16

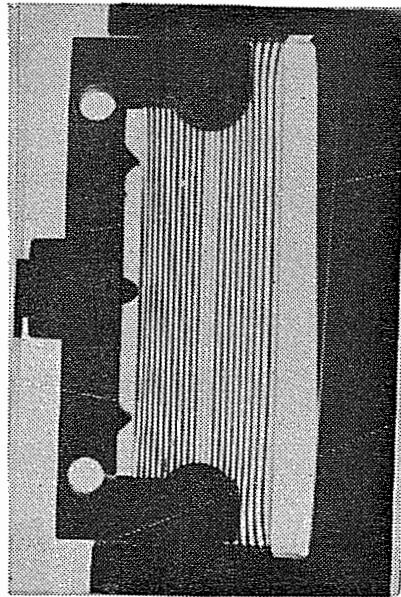
Difuzni polariskop Tiedeman sa foto-aparatom i ramom za opterećivanje



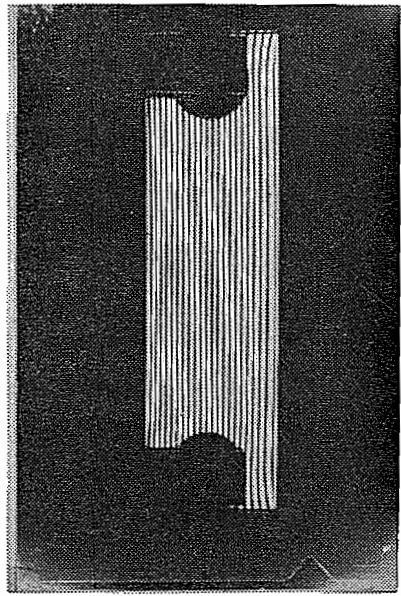
Slika br. 17

Sprava za baždarenje foto-elastičnog materijala korišćenjem savijanja grede

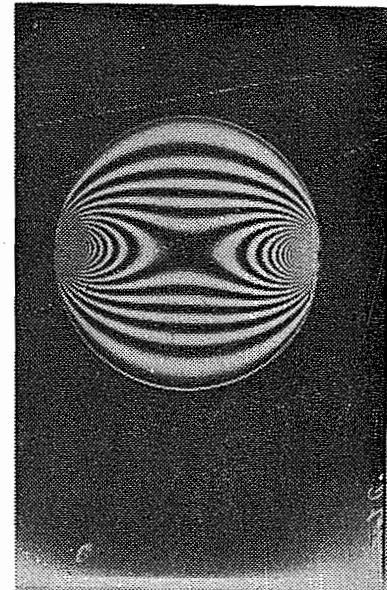
414.



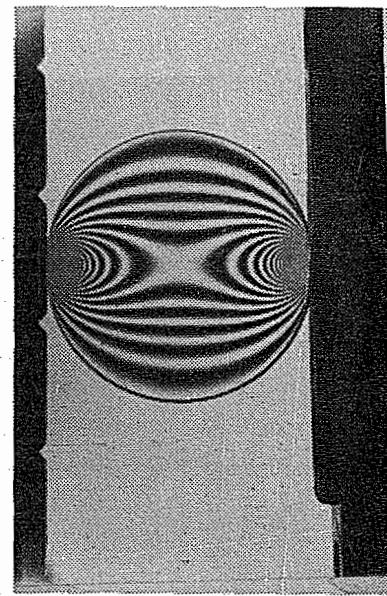
Slika br. 19.



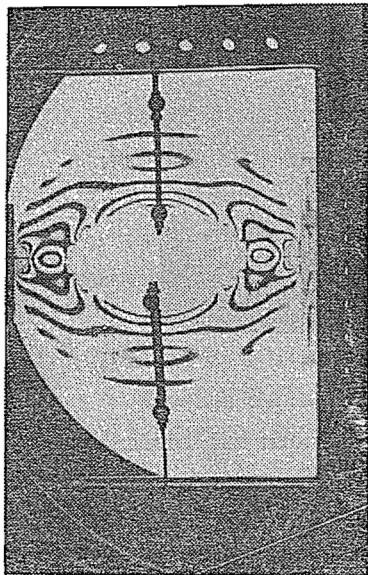
Slika br. 18.



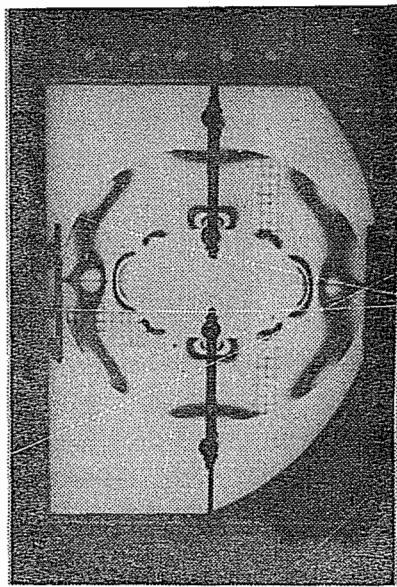
Slika br. 21



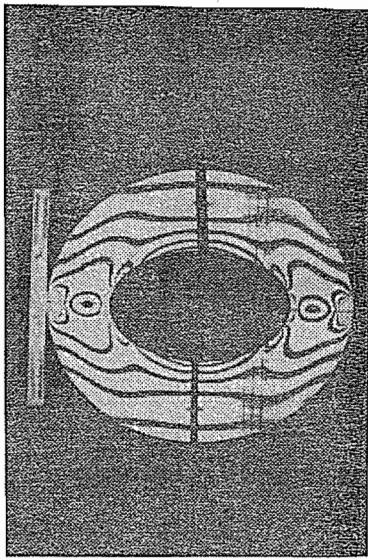
Slika br. 20



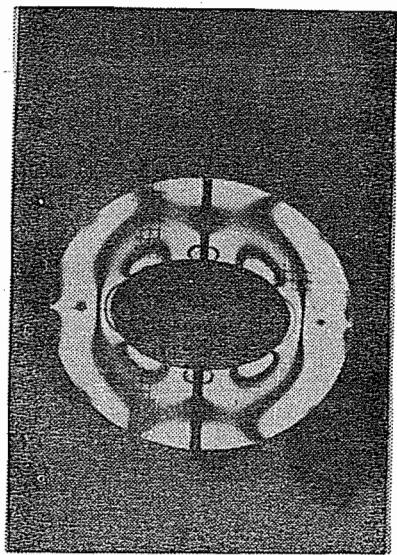
Slika br. 23



Slika br. 25

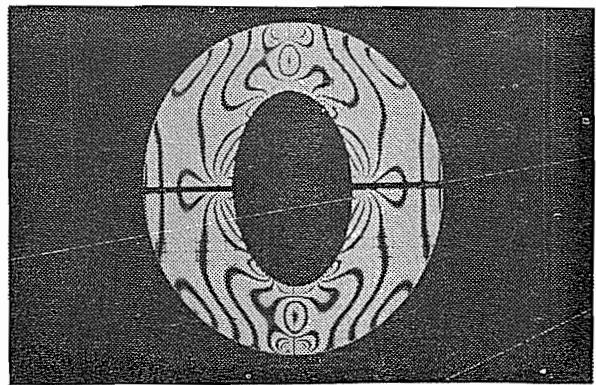


Slika br. 22

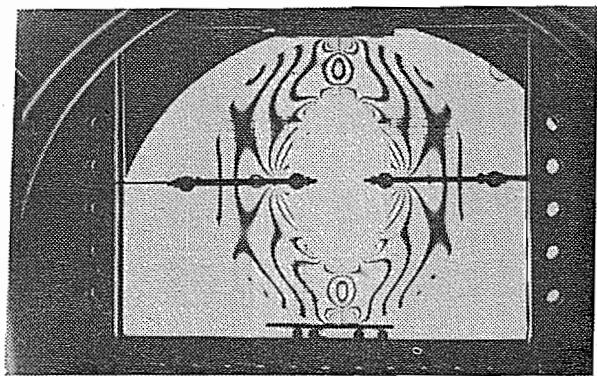


Slika br. 24

416.



Slika br. 26



Slika br. 27

## LITERATURA

1. Andjelić T., Osnovi mehanike neprekidnih sredina, Naučna knjiga, Beograd, 1950.
2. Andjelić T., Tenzorski račun, Naučna knjiga Beograd, 1952, 1973.
3. Andjelić T. i Ogibalov P., Mehanika ljudski i ploča, Naučna knjiga, Beograd, 1975.
4. Amenzade Ju.A., Teorija uprugosti, (ruski), Visšaja škola, Moskva, 1971.
5. Brčić V., Otpornost materijala, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1970.
6. Bezuhov N., Osnovi teorii uprugosti, plastičnosti i polzučesti, (ruski), Moskva, 1968.
7. Bezuhov N.I., Primeri zadači po teorii uprugosti, plastičnosti i polzučesti, Visšaja škola, Moskva, 1968.
8. Banić M., Optička analiza napona, sinopsis predavanja na postdiplomskim studijama, Beograd 1975.
9. Boley B.A. and Weiner J.H., Theory of Thermal Stresses, J.Wiley & SONS, New York, 1960.
10. Bowen R.M. and Wang C.C., Introduction to Vectors and Tensors, 1 and 2, Planum Press, New York, 1976.
11. Brillouin L., Wave propagation in periodic structures, Dover Publications, 1953.
12. Bathe K.J. and Wilson E.L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice - Hall Inc. New Jersey 1975.
13. Vlasov V.V., Tankostenie uprugie steržnji, (ruski) Gosfizmat, Moskva 1959.
14. Vukotić R., Ispitivanje konstrukcija, Naučna knjiga, Beograd, 1982.
15. Green A.E. and Zerna W., Theoretical elasticity, Oxford Univ. Press., 1954.
16. Green A.E. and Adkins J.E., Large Elastic Deformations and Non-linear Continuum Mechanics, Oxford University Press, 1960.
17. Gurtin M.E., The linear Theory of Elasticity, Handbuch der Physik, Bd. VI a/2, Springer Verlag, Berlin, 1972.
18. Gurtin M.E., An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, New York, 1981.
19. Demidov S.P., Teorija uprugosti, (ruski) Visšaja škola, Moskva 1979.
20. Vrabanov H.P., Teorija na elastičnost (bugarski) Tehnika, Sofija, 1976.
21. England A., Complex Variable METHODS in Elasticity, London 1971.
22. Eringen A.C., Mechanics of Continua, John Wiley & Sons, New York, 1967.
23. Zienkiewics O.S., The finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London 1968.

418.

- 24.Ilušin A.,Mehanika splošnij sredi,(ruski) ,Moskva 1971.
- 25.Josifović M.Izabrana poglavlja iz teorije elastičnosti i plastičnosti,  
Beograd 1964.
- 26.Jaunzemis W., Continuum Mechanics,Macmillan Company,New York,1967.
- 27.Jarić J.,Mehanika kontinuma,Gradjevinska knjiga ,Beograd,1988.
- 28.Jecić S.,Fotoelasticimetrija,Strojarski fakultet,Zagreb 1987.
29. Zienkiewicz O.C. and Cheung Y.K.,The Finite Element Method in Structural  
and Continuum Mechanics,London McGraw Hill 1967.
- 30.Kac A.M.,Teorija uprugosti,GITTL,Moskva 1956.
- 31.Karman Th.V., Mathematical Method in Engineering, New York 1940.
- 32.Kojić M.,Teorija elastičnosti,Kragujevac 1975.
- 33.Kojić M., Primena tenzorskog računa u mehanici neprekidnih sredina,Kragu-  
jevac,1972.
- 34.Kostrenić Ž.,Teorija elastičnosti,Školska knjiga,Zagreb 1982.
- 35.Kovaljenko A.D.,Osnovi termouprugosti,Kiev,1970, (ruski).
- 36.Lejbenzon L.S.,Kurs teorii uprugosti,Gostehizdat,Moskva,1947,(ruski).
- 37.Love A.E.H.,A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity,Cambridge,  
at the University Press,1952.
- 38.Lurje A.I., Teorija uprugosti,(ruski),Nauka Moskva 1970.
- 39.Landau L. i Lifšic E.,Mehanika neprekidnih sredina,Beograd 1965..
- 40.Lejbenzon L.S., Kurs teorii uprugosti,Ogiz,Gostehizdat,Moskva,1947 (ruski).
- 41.Little R.W., Elasticity,Prentice Hall,Inc.,New Jersey 1973.
- 42.Mušicki Dj. i Milić B.,Matematičke osnove teorijske fizike,Beograd 1976.
- 43.Malić D.,Termodinamika i termotehnika,Gradjevinska knjiga,Beograd,1975.
- 44.Malvern L.E.,Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium,Prenti-  
ce Hall,1969.
- 45.Mushelišvili N.I.,Same Basic Problems of the Mathematical Theory of Elas-  
ticity, P.Noordhoff Ltd.,Groningen-Holland,1953,
- Nekatorije osnovni zadaći matematičeskoj teoriji uprugosti,  
Moskva, 1968 (ruski).
- 46.Mićunović M., Primenjena mehanika kontinuma,Gradjevinska knjiga, Beograd,  
1983.
- 47.Mitrinović D.S.,Matematički metodi u fizici i tehniči, Kompleksna analiză,  
Gradjevinska knjiga,Beograd,1967.
- 48.Mitrinović D.S. i Kečkić D.J.,Jednačine matematičke fizike,Gradjevinska  
knjiga,Beograd,1972.
- 49.Novožilov V.V.,Teorija uprugosti,Sudstramgiz,Lenjingrad,1958,(ruski).
- 50.Naerlović-Veljković N. i Plavšić M.,Teorija elastičnosti,Naučna knjiga,  
Beograd 1980.

- 51.Naerlović-Veljković N.,Uvod u termoelastičnost,Naučna knjiga Beograd,1977.
- 52.Nowacki W.,Termoelasticity,Pergamon Press,Oxford,1962.
- 53.Nowacki W.,Dinamic problems of thermoelasticity,Warszawa,1970.
- 54.Nadai A., Theory of flow and Fracture of solids,New York 1950.
- 55.Oden J.T. and Raddy J.N.,Variational Methods in Theoretical Mechanics,  
Springer Verlag,berlin 1976.
- 56.Papković P.F., Stroiteljna mehanika kornblja,(ruski) Sudpromgiz,Lenjin-  
grad,1941.
- 57.Pearson C.E.,Theoretical Elasticity,Harvard University Press,cambridge,1959.
- 58.Prelog E.,Elasto in plastomehanika,Ljubljana 1973.
- 59.Prelog E.,Metoda končnih elementov,Ljubljana 1975.
- 60.Parkus H.,Thermoelasticity,Blaisdell Publ.Co.London,1968.
- 61.Rašković D.,Teorija elastičnosti,skripta,Niš,1968.
- 62.Rašković D., Teorija crastičnosti,Naučna knjiga,Beograd,1985.
- 63.Rašković D.,Otpornost materijala,Naučna knjiga,Beograd,1980.
- 64.Rašković D.,Osnovi matričnog računanja,Naučna knjiga,Begrad,1971.
- 65.Rašković D.,Osnovi tenzorskog računa,kratki kurs,skripta,Maš.fak.Kragujevac,1973.
- 66.Radojković M.,Ispitivanje konstrukcija,I i II deo,Beograd,1970.
- 67.Stojanović R.,Uvod u nelinearnu mehaniku kontinuma,Zavod za izdavanje udžbenika,Beograd,1965.
- 68.Sokolnikoff I.S., Mathematical Theory of Elasticity,McGraw Hill Book Company,London,1956.
- 69.Sneddon J.S. and Berry D.S.,The classical theory of elasticity,Handbuch der Physik,C.Flüge, Band VI, Springer-Verlag, Berlin 1958.
- 70.Segel L.A.,Mathematics Applied to ContinuumMechaniks,MacMilann Company, New York,1977.
- 71.Slattery J.C.,Momentum,Energy, and Mass Transfer in Continua McGraw Hill Kogakusha,Tokyo,1972.
- 72.Sekulović M., Metod konačnih elemenata,Gradjevinska knjiga,Beograd,1984.
- 73.Robinson J.,Integrated Theory of Finite Element Methods,John Wiley & Sons, London,1973.
- 74.Timošenko S.P. and Goodier J.N.,Theory of elasticity,2.nd.ed.,New York 1951,  
Teorija elastičnosti,Beograd,1962.
- 75.Truesdell C. and Tou J.,The Classical Field Theories,Encyclopedia of phisics,Edited by S.Flugge,Band III/l,Springer Verlag,1960.
- 76.Trusdell K.,Pervonačalnjij kurs racionalnoj mehaniki splošnih sred,(ruski) Izdateljstvo "Mir" ,Moskva 1975.

- 77.Truesdell C.,The Elements of Continuum Mechanics, Springer Verlag, New York, 1966.
- 78.Truesdell C.,Principles of Continuum Mechanics, Socony Mobil?Dallas, 1960.
- 79.Ugural C. and Fenster S.,Advansed Strength and Applied Elasticity, London 1970.
- 80.Ford H.,Advansed Mechanics of Materials, Longmans, London ,1969.
- 81.Hlitčijev J.,Poglavlja iz teorije elastičnosti sa primenama, Naučna knjiga, Beograd,1950.
- 82.Hemp W.S.,Fundamental Principles and Methods of Thermo-Elasticity,Aircraft Engineering, Vol.XXVI,april,1954, London.
- 83.Hajdin N., Teorija konstrukcija I, Ploče,Gradj.Fak.Bograd,1966.
- 84.Hedrih K.,Izabrana poglavlja teorije elastičnosti,štampana predavanja, Msš.fak.Niš,1976.
- 85.Hedrih K.,Optička analiza naposkog stanja,štampana predavanja,Maš.fak. Niš,1983.
- 86.Hedrih K., Osnovi termoelastičnosti,štampana predavanja,Maš.fak.,Niš,1981.
- 87.Hedrih K.,Osnovi metode konačnih elemenata,štampana predavanja,Maš.fak. Niš,1978.
- 88.Hedrih K., Odnos napona i deformacije u matričnoj interpretaciji,Naučni podmladak,Niš,1973.
- 89.Stokić D., Osnovi tenzorskog računa,Naučni podmladak,Niš,1973.
- 90.Introduction to Stress Analysis by the Photoelastic Coating Technique,Vishay,Technical Bulletin TDg - L.
- 91.Operating and Insruction mahual for model 080 series photoelastic Tesching Polariscope System, i katalozi firme Vishay Intertechnology.
- 92.Chi - Teh Wang,Applied Elasticity, McGraw Hill Book Company,1953.
- 93.Kolosov G.V.,Primenjenije kompleksnoj pewremenoj k teorii uprugosti,Moskva,ONTI,1935 (ruski).
- 94.Kurant R. i Gilbert D.,Metodi matematičeskoj fiziki,(ruski) M0skva,1951.
- 95.Hedrih K. i Mitić S., Ravno naprezanje kružno prstenaste ploče,Zbornik radova 18 kongresa teorijeke i primenjene mehanike,Vrnjačka Banja ,1988.

## REGISTAR IMENA

- Airy G.B. 281,282  
 Argiris 295
- Babinet 407  
 Beltrami E. 173,177,179,180,211  
 Bingham 142  
 Burgers 142  
 Brewster D. 380  
 Bartholin E. 380  
 Boussinesq J. 218  
 Bubnov I.G. 216  
 Voigt 140  
 Viète 58,128
- Galerkin B.G. 216  
 Goodier N. 355  
 Causs C.F. 29,31  
 Green G. 93,204
- D' Alambert J. R. 167  
 Duhamel 340,348,360  
 Descartes 33 itd.
- Jeffreys 142
- Euler L. 89,93  
 Füklid 91
- Kelvin W.T. 140
- Lamé G. 46,70,99,152,166,168,169,211,279,285,349.  
 Levy M. 379, 269  
 Lagrange J.L. 92  
 Lethersich 142  
 Laplace P.S. 285
- Michell J.H. 173,177,176,211 itd.  
 Maxwell J.C. 141,380,381  
 Mesnager A. 380
- Navier L.M. 31,39, itd.  
 Newton I. 136
- Neumann 340,348,381  
 Ostrogradskij 29,31,204
- Prandtl L. 263  
 Poisson S.D. 155,164  
 Poyting 142
- Reimann 109,112,118,285  
 Rankin 142  
 Schwedoff 142  
 Saint Venant B. 123,136,218,235, itd.  
 Senarmont 406  
 Soleil 407  
 Tardy 406  
 Thompson (Kelvin) 142  
 Trouton 142
- Filon 381
- Hooke R. 155,159,164,136,146,147,163  
 Helmholtz 82  
 Hrenikoff 295
- Coker E.G. 380  
 Castigliano A. 145,200,301,353  
 Cauchy L.A. 172,28,29,32,35,85,93,  
 118,211,299
- Ricci 109  
 Cristofelli 47,51,95,109,1.
- Wartheim 381.

## REGISTAR POJMOVA

- Analizator 386, 392  
 Airy-jeva funkcija 280, 282  
 analogija, membranska 263  
 Analitička funkcija 286  
 Biharmonijska funkcija 284  
 Biharmonijska jednačina 285  
 Brzina svetlosti 382  
 Bazisni vektor 26  
 Bingham-ov idealni materijal 142  
 Burgers-ovidelani materijal 142, 144  
 Vektor pomeranja 76  
 Viskozno tečenje 139  
 Voigt-ov materijal 140  
 Vektor deformacije 80  
 Viète-ovi obrasci 58  
 Granični termomehanički uslovi 343  
 Geometrijsko-kinematičke jednačine 185  
 Generalisana matrica krutosti 312  
 Granični uslovi 321, 32, 292  
 Glavni pravci napona 57  
 Gradijent skalarne funkcije 130  
 Glavni naponi 55  
 Glavne dilatacije 126  
 Glavni pravci dilatacija 126  
 Deformator 97  
 Devijator deformacije 130, 158  
 Deformacioni rad 197, 353  
 Dvojno prelamanje 388  
 Dielektrična propustljivost 382  
 Devijator napona 72, , 158  
 Dilatacija 82  
 Elastičnost 16, 139  
 Elastični potencijal 196  
 Euklidski prostor 91  
 Euler-ov tenzor relativne deformacije 93  
 Zapreminska dilatacija 82, 86  
 Izoklina 395, 396, 398  
 Izohroma 396, 396, 403  
 Izotropna tačka 403  
 Idealni materijali 138  
 Interpolaciona matrica 302, 307  
 Invarijante 58  
 Invarijante stanja napona 55  
 Jeffreys-ov materijal 142, 144  
 Jednačina konačnog elementa 297  
 Jednačina konstrukcije 297  
 Jednačina provodjenja topote 343  
 Castigliano-ove teoreme 200, 353  
 Konjugovane funkcije 286  
 Kompleksna promenljiva 286  
 Kompatibilni konačni elementi 307  
 Kondenzovana matrica krutosti 326  
 Konačni elementi 298, 308  
 Kompenzacija 406  
 Kovarijantna koordinata 28, 94, 99, 102, 106  
 Kontravarijantna koordinata 47, 94, 99, 102, 106  
 Kovarijantni izvod 30  
 Konjugovanost tangencijalnih napona 32, 37, 41.  
 Konfiguracija 78  
 Klizanje 85  
 Koordinatni vektor 90, 105  
 Kovarijantni metrički tenzor 90  
 Cristofell-ovi simboli 46, 51, 95, 100, 108, 112  
 Kvadrik 68  
 Cauchy-Reimann-ovi uslovi 118, 121  
 Konstitutivne veze 138  
 Kelvin - ov materijal 140  
 Koeficijent elastičnosti  
 Cauchy-Green-ov tenzor deformacije 93  
 Cauchy-jeve jednačine 85  
 Cauchy-jeva naponska površ 68  
 Cauchy-jevi granični uslovi 35, 36, 172, 193  
 Lamé-ove jednačine 166, 168, 169, 170  
 Linijski element 326, 89, 90  
 Linearni polariskop 394  
 Lethersich-ov materijal 142, 143  
 Lamé-ove konstante elastičnosti 152  
 Laplace-ova diferencijalna jednačina 285

- Lagrange-ov tenzor relativne deformacije 92  
 Lame-ovi koeficijenti 46, 99, 102  
 Lame-ov elipsoid napon 70  
 Metoda-direktna 98  
     -varijaciona 98  
     -reziduumna 98  
     - energije 98  
 Matrica diferencijalnih operatora 299  
 Matrica polja graničnih vrednosti 307  
 Matrica transformacije 45, 313  
 Matrica krutosti konačnog elementa 310  
 Matrički tenzor 101, 105  
 Model 408, 409  
 Metoda konačnih elemenata 295  
 Matrica polja 302, 303  
 Membrana 263  
 Mohr-ovi krugovi napona 60, 61  
 Maxwell-ov materijal 141  
 Modul smicanja 157  
 Materijalni tenzor 147  
 Membranska analogija 263  
 Modifikovane Lameove jednačine 349  
 Morris-Levy-jeva jednačina 379  
 Newton-ov materijal 136, 139  
 Multibalansna kompenzacija 407  
 Naponsko optička konstanta 382, 405  
 Napon 21  
 Napomska površ 67  
 Normalni napon 22  
 Navier-ove jednačine 31  
 Napomska funkcija 247, 290  
 Modul kompresije 158  
 Oktaedarske dilatacije 128  
 Oktaedarski naponi 71  
 Osa polarizatora 384  
 oca analizatora 384  
 Ptenzialna energija 198  
 Površinska fotoelastičnost 410  
 Prostorna fotoelastičnost 411  
 Početni termomehanički uslovi 343  
 Polaroidi 388  
 Polutalasna ploča 391  
 Polje temperature 344, 365, 369, 343  
 Polarizovana svetlost 387  
 Polariskop 292  
 Princip virtualnih pomeranja 300  
 Prirodno stanje tele 139, 128  
 Prinudna konfiguracija 209, 229  
 Prirodna konfiguracija 209, 229  
 Polje 32  
 Poisson-ov koeficijent 155  
 Poynting-ov materijal 142  
 Površ deformacije 129  
 Plastično tečenje 139  
 Reiman-Cristoffell-ov tenzor 109,  
   112  
 Ricci-jev antisimetrični tenzor  
   109  
 Rotacija 82  
 Redukovani vektor deformacije 80  
 Rankin-ov materijal 142  
 Reološki modeli 136  
 Redukovana matrica krutosti 324  
 Red izohrome 403, 404, 405  
 Ravno stanje deformacije 266  
 Ravno srenje napona 273  
 Smicanje 85  
 Sekularna jednačina 56  
 Subdeterminanta 57  
 Skalari 58, 59  
 Struktorna formula 140  
 Schofield-Scot-Blar-ov materijal 142  
 Schwebhoff-ov materijal 142  
 SaintVenant-ovi uslovi kompatibilnosti  
     deformacija 123  
 Saint Venant-ovo telo 136, 140  
 Saint Venant-ov princip 218  
 Sferni tenzor napona 72  
 Stanje napona 21  
 Spoljašnje sile 19  
 Specifična toplota 344  
 Singularna tačka 403  
 Statičke jednačine 188  
 Sferni sud 299  
 Ortogonalnost glavnih pravaca 58  
 Napomske invariante 59  
 Referentna konfiguracija 88  
 Površ deformacije 129  
 Termodinamički sistem 342  
 Toplotni fluks 345  
 Talasni front 383  
 Trajektorija napona 395  
 Tenzor konačne deformacije 88  
 Tenzor specifične deformacije 82, 92  
 Tenzor male deformacije 88, 96  
 Tenzor rotacije 101, 104, 118  
 Termički napon 346  
 Termoelastični potencijal 355  
 Totalni napon 21  
 Tangencijalni napon 22  
 Torzija 221, 247, 255, 258  
 Termoelastičnost 340  
 Transformaciona matrica 124  
 Tečenje čvrstih tela 139  
 Thompsonov materijal 142  
 Tenzor elastičnosti 147  
 Translacija 82  
 Toplotni udar 340  
 Torzija prizmatičnog štapa 221, 247, 255,  
   258

424.

Unutrašnje sile 19

Tenzor napona 23,26

Klizanje 82

Uslovi kompatibilnosti deformacija 108,114,115,123,109

Ugao elementarne rotacije 107

Fizičke jednačine 189

Funkcija sile 272

Fizička diskretizacija 296,297

Funkcionalna matrična 78,103,107

Fizičke koordinate 52,99,100,102

Funkcija kompleksne promenljive 284,291

Fiktivni presek 17

Fotoelastičnost 380,410,411

Hiperboloid 131

Hooke-ovo telo 136

Hooke-ov zakon 155,159,164

Homogena deformacija 87

Cirkularni polariskop 399

Celotalasna ploča 391

Čista deformacija 82

Čvor 302

Čvorni vektor pomeranja 305

Čvorna opterećenja 323

Četvrttalasna ploča 391

Polarizator 386,392

Površ deformacije 129

Sferni tenzor deformacije 130

Reoliška formula 142,143

Nemi indeks 109,110

Napomske invarijante 59

Viskoznost 139

Modul kompresije 158

Specifični deformacioni rad 199

Harmonijska funkcija 285