ČLANCI

Prof. dr Katice Hedrih o Prof. dr Danilu Raškoviću (sa bibliografijom)

Priredili: Prof dr. Žarko Mijajlović
Dr Slaviša Milisavljević

Beograd, 2014

Одељење за механику Математичког института САНУ

Семинар Математичке методе механике у примени

Matematičke metode mehanike u primeni (MMMP)

Mathematical Methods of Mechanics and Applications (3MA)

Projekat OI 174001 Dinamika hibridnih sistema složenih struktura (2011-2014)

Serija predavanja za istraživače pripravnike i doktorante iz oblasti Kinetike, Elastodinamike, Analitičke mehanike, Primene tenzorskog računa u mehanici, Teorije oscilacija i Nelinearne dinamike

31-vi blok predavanja

(od 11h do 13h) i (od 15 h do 17 h)

Osnovi tenzorskog računa sa primenama u mehanici

Transformacije, ortogonalna, afina i opšta transformacija; invarijante; kovarijantni i kontravarijantni vektori i tenzori; kriterijumi za određivanje tenzorske prirode sistema; kovarijantne, kontravarijantne i fizičke koordinate vektora i tenzora; Christoffel-ovi simboli; kovarijantno diferenciranje tenzora; diferencijalni operatori; bazni vektori tangentnog prostora vektora položaja materijalne tačke i ugaone brzine njihove rotacije; Primene tenzprskog računa u analitičkoj mehanici mehaničkih sistema; primena tenzorskog računa u teoriji elastičnosti;

(Drugi de0)

Predavač

Prof. dr Katica (Stevanović) Hedrih,,

rukovodilac projekta OI 174001

Sreda, 22 februar 2012 u 11 časova

* * * * * *

Predavanja se održavaju svake srede od 11 do 17 časova u Biblioteci Matematičkog instiuta SANU, ul. Knez Muhalova 36, treći sprat

Prijava potencijalnog slušaoca se dostavlja Upravniku Odeljenja za mehaniku na adrsu khedrih@eunet.rs *sa naznakom oblasti interesovanja.*

Dr Srđan Jović
Sekretar Odeljenja za mehaniku

Prof. dr Katica (Stevanović) Hedrih
Upravnik Odeljenja za mehaniku

ЛИТЕРАТУРА

* Татомир П. Анђелић, *Тензорски рачун*, Београд, 1952,

* Данило П. Рашковић, *Основи тензорског рачун*а, Крагујевац1972 и додатак у универзитетском уџбенику Теорија еластичности, Научна књига 1985.

Prof. dr Ing. Dipl. Math. Данило П. Рашковић

ДОДАТАК

D.1. ОСНОВИ ТЕНЗОРСКОГ РАЧУНА*

D.1.1. Системи величина. – Тачки у тродимензионом еуклидском простору (E_3) у коме се раздаљина између двеју тачака одређује према Еуклидовом ставу, одговарају три броја (x, y, z) који су њене *кординате* у односу на триједар референције $Oxyz$. Ове се координате могу обележити и само *једним словом* са индексом, x_i, $i = 1, 2, 3$. Да би се јасније истакла различита природа координата за два система могу се индекси „i" писати и горе (x^i) и доле (x_i). Као што је познато из векторског рачуна може се један вектор ($\vec{r} = \mathbf{r}$) *једнозначно разложити* у три компоненте у правцима оса косоуглог триједра са *основним векторима* $\mathbf{e}_i$ у облику**:

$$\mathbf{r} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x^i \mathbf{e}_1 = x^i \mathbf{e}_i; \;\; \mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}^1 + x_2 \mathbf{e}^2 + x_3 \mathbf{e}^3 = x_i \mathbf{e}^i, \tag{1.1}$$

где су $\mathbf{e}^i$ *основни* (*базни*) *вектори реципрочног триједра*, везани са првим релацијама

$$\mathbf{e}^i = [\mathbf{e}_j \, \mathbf{e}_k]/\Delta; \;\; \mathbf{e}_i = [\mathbf{e}^j \, \mathbf{e}^k]/\Delta^*; \;\; \Delta = (\mathbf{e}_1 \, [\mathbf{e}_2 \, \mathbf{e}_3]); \;\; \Delta^* = (\mathbf{e}^1 \, [\mathbf{e}^2 \, \mathbf{e}^3]) = \Delta^{-1}; \quad i, j, k = 1, 2, 3 \tag{1.2}$$

Ове две врсте координата се називају *контраврijантне* (x^i) и *коваријантне* (x_i). Оне се одређују као скаларни производи $x^i = (\mathbf{r}\,\mathbf{e}^i)$ односно $x_i = (\mathbf{r}\,\mathbf{e}_i)$, па следи да су основни вектори $\mathbf{e}_i = \partial \mathbf{r}/\partial x^i$ и $\mathbf{e}^i = \partial \mathbf{r}/\partial x_i$. С обзиром на ово, горњи индекси се називају *контраваријантни*, а доњи *коваријантни* без обзира на геометријску интрепретацију. Код ортогоналног триједра су основни вектори ортови (јединични вектори) $\mathbf{i}_i$, *па нема разлике између ових двеју врста координата*, што значи да је триједар сам себи реципрочан.

Множина неких величина (на пример x^i) чини њихов *скуп* $S\{x^i\}$, а величине (x^i) су елементи скупа и припадају му, $x^i \subseteq S$. Аналогно скупу координата x^i може се скуп материјалних тачака, скуп коефицијената линеарне форме $\mathfrak{L} = \sum a_i x_i = a_i x^i = a^i x_i$ обележити само сајединим индексом Овакав се скуп назива *систем првог реда*, *вектор* или *тензор првог реда*. Поједини чланови су *елементи* или *координате система*. Овакав се систем

* Детаљније видети Д. Рашковић, Основи тензорског рачуна, (скрипта), Крагујевац, 1974.

** Статика, X. издање, Додатак.

може увек претпоставити *матрицом врстом* (x_i) односно матрицом колоном $\{x_i\}$ елемента уређених по редном броју индекса, $i=1, 2, \ldots, N$.

Билинеарна и квадратна форма могу се написати у облицима

$$\mathfrak{B}=(x)\,\mathsf{A}\,\{y\}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,x_i\,y_k=a_{ik}\,x^i\,y^k;\quad \mathfrak{Q}=(x)\,\mathbf{A}\,(x)=a_{ik}\,x^i\,x^k. \tag{1.3}$$

Елементи ових система су са два индекса (a_{ik}), па је *систем другог реда*. Њему одговара *квадратна матрица*. Када је $a_{ik}=a_{ki}$ тада је систем *симетричан*, $a_{(ik)}$, и одговара му *симетрична квадратна матрица*; ако је, пак, $a_{ki}=-a_{ik}$ за $i\neq k$ систем је *кососиметричан (антисиметричан)*, $a_{[ik]}$. Њему одговара *кососиметрнчна матрица* код које су елементи $a_{ii}=0$. Елементи система другог реда могу се обележити на три начина a^{ik}, a_{ik} и $a^i{}_k$. Овакав систем другог реда назива се *тензор другог реда*.

Скаларна величина (скалар) је одређена само једним податком, без индекса (a), па је *систем нултог реда*. Ова величина не зависи од система референције, па је *скаларна инваријанта* или кратко речено *скалар*. Аналогно системима нултог (скалар), првог (вектор) и другог реда (тензор другог реда) дефинишу се и системи вишег реда односно *тензори вишег реда*. Тако су елементи система трећег реда: a_{ijk}, a^{ijk}, $a^i{}_{jk}$, $a_k{}^{ij}$. Овом систему одговара *просторна матрица* која има *врсте*, *колоне* и *слојеве*. Систем p-ог реда је $a_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ или $a^{i_1 i_2 \ldots i_p}$, док је $p+q$-ог реда $a^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$.

D.1.2. Einstein-ова конвенција о сабирању. – Из изложеног се уочава предност увођења различитих индекса, па је симболика овог рачуна тако постављена да би оператика била што рационалнија. Због тога се користи Einstein-ова конвенција о сабирању: „*У сваком изразу где се исти индекс појављује два пута (једном као горњи а једном као доњи) подразумева се сабирање по томе индексу.*“ Ови се индекси зову неми (*привидни, анонимни, dummy*); они други су *слободни*. Пошто неми индекси не мењају смисао обрасца, могу се *произвољно мењати*. Тако су $\sum a_i\,x_i=a_i\,x^i=a^i\,x_i=a_j\,x^j= =\cdots=a_r\,x^r$; $\sum\sum a_{ik}\,x^i\,x^k=a_{ik}\,x^i\,x^k=a_{rs}\,x^r\,x^s$; $\sum a_{ij}\,b^j=a_{ij}\,b^j=a_{ir}\,b^r=a_{is}\,b^s$. Симбол $\sum_s a_s$ значи „*не сабира се по s*“, док је симбол a_{MM}, a^{MM}, $a_M{}^M$ одређени члан тог израза, те *не претставља сабирање*. У сложнијим изразима треба неми индекс употребити само једанпут, на пример $a^i{}_{jk}\,a_i^{jp}\,a_r{}^{nk}\,b_{np}=c_r$.

1.3. Алгебарске операције са системима. – Елементи a_{ik} и a^{ik} јесу елементи система другог реда, али су различитог типа, са доњим и горњим индексима. Тип, дакле, зависи од броја, распореда и положаја индекса. При извођењу алгебарских операција тип игра важну улогу. Ови су системи *једнаки*. $a^i=b^i$; $a^{ik}=b^{ik}$; $a^{ij}_k=b^{ij}_k$; $a^{12}_3=b^{12}_3$; а ови нису $a^{ij}_k\neq b^k_{ij}$.

Сабрати (одузети) могу се само системи истог реда и типа и са истим размаком вредности целих бројева које узимају индекси; $c^i=a_i{}^i+b^i$, $i=1, 2, 3$; $c^i=a^i-b^i$; $a^i{}_{jk}+b^i{}_{jk}=c^i{}_{jk}$; $a^i{}_k+b_{ih}\neq$. Два се система произвољног реда и типа *множе* тако што се сваки елемент првог система множи по одређеном правилу (поретку) са сваким елементом другог система, па се од тих производа образује нови систем, например, $a^i\,b^k=c^{ik}$, $a_i\,b_k=c_{ik}$; $a^i\,b_k=c^i{}_k$.

а) *Контракција* (*Verjüngung*, *Faltung*, *contraction*) примењује се на систе-
ме који имају бар један пар индекса супротне варијантности, тј. на тензоре
мешовитог типа. Она представља операцију *сажимања индекса*. Изабере се
један горњи и један доњи индекс и означе се истим словом, те постају не-
ми индеси, па се даље изврши сабирање по том индексу, и добије се сис-
тем за 2 степена *нижег реда* од полазног система. Например, када у систему
$a_k^{\ ij}$ трећег реда изједначимо индексе $j=k$ добићемо систем $a_j^{\ ij}=\alpha^i$ првог
реда, јер за $i, j=1, 2, 3$ биће $a_1^{i_1}+a_a^{i_2}+a_3^{i_3}=\alpha^i$. Међутим, контракцијом индек-
са. $i=k$ добија се такође систем првог реда али различит од првог,
$a_k^{\ ij}=a_i^{\ ij}=\beta_i^j\,\alpha^i\pm\alpha^i$. Од система шестог реда a_{rst}^{ijk} контракцијом индекса $j=r$
добија се систем четвртог реда $a_{jst}^{ijk}=a_{st}^{jk}$. Даље ће бити $a_{st}^{ik}=a_{kt}^{ik}=a_i^{\ t}=a_i^{\ i}=\alpha=S$.

b) *Композиција или унутрашње множење система* (Übershiebung) се
састоји у томе да се изврши множење система, а затим се изврши контрак-
ција по једном индексу једног система и једном индексу супротне варијант-
ности другог система. Например, $a^i\,b_j=c_j^{\ i}=c_i^{\ i}=c=a^1\,b_1+a^2\,b_2+a^3\,b_3$. Или,

$$a_j^{\ i}\,b^k=c_j^{\ ik}=a_j^{\ i}\,b^j=p^i;\ a_j^{\ i}\,b_r^{\ k}=c_{jr}^{ik}=a_j^{\ i}\,b_r^{\ j}=a^i\,b_r=c^{\ i},\ a_j^{\ i}\,b_i^{\ k}=a_j\,b^k=e_j^{\ k}.$$

1.4. Kronecker-ов делта симбол и Levi-Civita симболи. — Скаларни про-
изводи јединичних вектора ортогоналног триједра $Ox^1x^2x^3$ односно базних
вектора (1.2) износе

$$(\mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_1)=\delta_{11}=1;\ (\mathbf{i}^1\,\mathbf{i}^1)=\delta^{11}=1;\ (\mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_2)=\delta_{12}=0;\ (\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}^i)=\delta_i^{\ i}=1,\ (\mathbf{e}_j\,\mathbf{e}^2)=\delta_1^{\ 2}=0;$$

$$(\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}^k)=\delta_i^{\ k} \tag{1.4}$$

те се даду означити једним симболом δ_{ik}; δ^{ik}; $\delta_i^{\ k}$ који се зове Kronecker-ов
делта симбол и који има вредност 1 када је $i=k$ и вредност 0 када је
$i\neq k$. Када су $i, k=1, 2, 3$ онда симболу δ_k^i одговара јединична матрица
трећег реда, $\mathbf{I}_3$. Док се симбол $\delta_M^M=1$, то је $\delta_i^i=3$ или N, за $i=1, 2, 3$,
односно $1=1, 2, \ldots, N$. Услов $\delta_{ik}=(\mathbf{i}_i\,\mathbf{i}_k)=0$ или 1, јесте *услов ортонорми-
раности јединичних вектора* Декартовог правоуглог триједра.

Овај се симбол назива и *супституциони оператор*, јер се композици-
јом система са овим симболом добија исти систем али са контрахованим
индексом замењеним слободним индексом делта симбола. Например,

$$\delta^i_{\ k}\,a_i=a_k;\ \delta_i^j\,u_s^{jr}=u_s^{ir};\ \delta_j^r\,V_r^{mn}=V_j^{mn}. \tag{1.5}$$

Јединични вектори $\mathbf{i}_i$ образују правоугли паралепипед запремине $V=$
$(\mathbf{i}_i\,[\mathbf{i}_2,\,\mathbf{i}_3])=1$. Стога је Levi Civita увео тзв. *e-симболе трећег реда* који се
дефинишу на овај начин:

$$\begin{matrix} e_{ijk}=(\mathbf{i}_i\,[\mathbf{i}_j\,\mathbf{i}_k]) \\ e^{ijk}=(\mathbf{i}^i\,[\mathbf{i}^j\,\mathbf{i}^k]) \end{matrix} = \begin{cases} 1 \text{ ако је } ijk \text{ парна пермутација индекса } 1, 2, 3; \\ -1 \text{ ако је } ijk \text{ непарна пермутација од } 1, 2, 3; \\ 0 \text{ ако су два индекса једнака } (i=j;\ i=k;\ j=k). \end{cases} \tag{1.6.5}$$

Они су дефинисани само за индексе $i, j, k=1, 2, 3$, па има их *шест*
различитих од нуле, $e_{123}=e_{231}=e_{312}=1$; $e_{213}=e_{321}=e_{132}=-1$. Због тога се
овај симбол назива и *пермутациони симбол*.

Пошто је векторски производ ортова $[\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3] = \mathbf{i}_1$; $[\mathbf{i}_3 \mathbf{i}_1] = \mathbf{i}_2$; $[\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2] = \mathbf{i}_3$, то је $[\mathbf{i}_j \mathbf{i}_k] = e_{ijk} \mathbf{i}^i$, па је векторски производ два вектора у V_3:

$$\mathbf{V} = [\mathbf{ab}] = a^j b^k [\mathbf{i}_j \mathbf{i}_k] = e_{ijk} a^j b^k \mathbf{i}^i = V_i \mathbf{i}^i; \; V_i = e_{ijk} a^j b^k; \; V_1 = a^2 b^3 - a^3 b^2, \ldots \tag{1.7.a}$$

$$\mathbf{V} = a_j b_k [\mathbf{i}^j \mathbf{i}^k] = e^{ijk} a_j b_k \mathbf{i}_i = V^i \mathbf{i}_i; \; V^i = e^{ijk} a_j b_k;$$

$$V^1 = a_2 b_3 - a_3 b_2; \; V^2 = a_3 b_1 - a_1 b_3; \; V^3 = a_1 b_2 - a_2 b_1. \tag{1.7.b}$$

Пошто је e^{ijk} кососиметрични систем, а $a_j b_k = V_{jk}$ је тензор, то следе

$$V^i = e^{ijk} a_j b_k = \frac{1}{2} e^{ijk} (a_j b_k - a_k b_j) = \frac{1}{2} e^{ijk} \begin{vmatrix} a_j & a_k \\ b_j & b_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2} e^{ijk} [a_j b_k];$$

$$V^i = e^{ijk} a_j b_k = e^{ijk} V_{jk}, \tag{1.8}$$

где је $a_j b_k$ *спољашњи (алтернирајући) производ* два вектора исте коваријантности који се назива *бивектор*. Други образац показује да се тензору може *придружити (асоцирати)* одговарајући вектор. Да би се боље истакла ова повезаност обе су величине обележене истим словом (тензор v_{jk} и вектор v^i).

Три сучељна вектора образују косоугли паралепипед запремине

$$V = (\mathbf{a}[\mathbf{bc}]) = a_i b_j c_k (\mathbf{i}^i [\mathbf{i}^j \mathbf{i}^k]) = e^{ijk} a_i b_j c_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3!} e^{ijk} [a_i b_j c_k], \tag{1.9}$$

где је производ $[a_i b_j c_k]$ тзв. тривектор.

Када су вектори a и c укрштене силе $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, а $\mathbf{b} = \mathbf{r}$ вектор положаја нападне тачке друге силе у односу на прву, онда је тривектор $(\mathbf{F}_1 [\mathbf{r}\, \mathbf{F}_2]) = 6\,V$ *комомент* укрштених сила и једнак је шестострукој запремини тетраедра конструисаног над укрштеним силама.

D.1.5. Афини простор. — Систем вредности a^i, $i = 1, 2, \ldots, N$ неких N променљих x^i назива се „*тачка*" по аналогији са тачком у простору (E_3). Скуп свих тачака за све могуће реалне вредности x^i чини *реални пунктални простор или простор од N димензија* (хиперпростор, многострукост). Вредности a^i су *координате* у том простору (V_N). Под *вектором* у V_N подразумевају се две уређене тачке: *почетак* $A(a^i)$ и *крај* $B(b^i)$ вектора померања $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, са координатама $u^i = b^i - a^i$. Вектор $\mathbf{u}$ је одређен када му се знају координате u^i и почетак $A(a^i)$. Вектор $\mathbf{u}$ одређен само са u^i је *слободан вектор*, јер се може *паралелно померити* у сваку тачку простора V_N. Положај сваке тачке P и V_N може се одредити вектором $OP = p$, тзв. *вектором положаја*; пол $O(x^i = 0)$ зове се *координатни почетак*.

Координатни системи су такви геометријски објекти према којима се одређује положај тачке у простору, па се називају *системи референције*. Положај тачке у простору одређује се *картезијанским координатама* (правоуглим $y^i = x^i$ и косоуглим x^i) односно параметрима q^i који се зову *опште — генералисане — координате*. Код картерзијанских система координатне линије су *праве*, а координатне површи су *равни*; код криволинијских система су *криве линије*, односно површи. Тангентни вектори $\mathbf{e}_i$, односно g_i, дуж тангената на координатне линије, јесу *основни (базни) координатни вектори* простора V_N. Уопште узев они нису јединични вектори, а могу се мерити и различитим јединицама и различитих су дужина.

Рачунске операције са векторима у хиперпростору V_N дефинишу се као и у тродимензионом простору (V_3) те важе операције: 1° $\mathbf{u}=\mathbf{v}$; 2° $\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$, 3° $\mathbf{w}=\mathbf{u}-\mathbf{v}$ и 4° $\mathbf{v}=\lambda\,\mathbf{u}$, где је $\lambda\neq 0$. Ако је дат скуп вектора $\mathbf{v}_k$, где је $k<1, 2, \ldots, M<N$, а постоји λ_k таквих бројева, онда могу бити два случаја: 1° да је $\sum \lambda_k v_k = \lambda^k v_k = 0$ иако сви $\lambda_k \neq 0$, и 2° да је $\lambda^k \mathbf{v}_k = 0$ само када су сви $\lambda_k \equiv 0$. У првом случају су вектори *линеарно зависни*, у другом су *линеарно независни*. У простору V_N може бити највише N линеарно независних вектора, а сви се остали могу изразити њиховим линеарним комбинацијама.

Резултанта $\mathbf{F}_r$ сила $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ је у њиховој равни (V_2) па је линеарно зависна са компонентама, јер је $\lambda_1\,\mathbf{F}_1+\lambda_2\,\mathbf{F}_2+\lambda_r\,\mathbf{F}_r=0$.

Скуп свих вектора одређеног реда (N) са којима се могу вршити предње четири операције образује *линеарни систем вектора* или *линеарни простор* или *векторски простор* односно *афини простор*. Независни основни вектори $\mathbf{e}_i$ доведени на заједнички почетак (O) образују основни N-тоедар или *векторску базу* (*основу*) простора V_N. Стога се вектор положаја тачке ($\mathbf{OP}=\mathbf{r}$) може једнозначно разложити у компоненте у правцима тих вектора, те ће бити:

$$\mathbf{r}=x_i{}^1\,\mathbf{e}_1+x^2\,\mathbf{e}_2+\cdots+x^N\,\mathbf{e}_N=x^i\,\mathbf{e}_i,\ i=1, 2, \ldots, N. \tag{1.10}$$

Координате x^i зову се афине координате;

У афином простору могу се дефинисати $s_i=x^i$ 1° *паралелни* (*или колинеарни*) *вектори* $\mathbf{v}=\lambda\,\mathbf{u}$; 2° *права линија* $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda\,\mathbf{b}$, 3° *раван* $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda\,\mathbf{b}+\mu\,\mathbf{c}$ и 4° *хипрраван* $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda^s\,\mathbf{b}_s$. Ако се мења само једна координата (x^M) а све остале $(N-1)$ су константе, онда је $x^M=\lambda^M$, па из 2° следи да је $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda\,\mathbf{b}=\mathbf{a}+x^M\,\mathbf{e}_M$ те све тачке леже на правој паралелној основном вектору $\mathbf{e}_M$, а ово показује да је афини координатни систем праволинијски, $[\mathbf{r}-\mathbf{a},\ \mathbf{e}_M]=0$. Обратно, ако је $x^M=\mathrm{const}$, а остале $(N-1)$ променљиве тачке леже у хиперавни.

У афином простору се могу упоређивати само дужине паралелних вектора, $\mathbf{v}=\lambda\,\mathbf{u}$, јер је $v^i=\lambda\,u^i$, па је $\lambda=v^i/u^i$ однос њихових дужина. Ово показује да се непаралелни вектори не могу упоређивати, нити мерити, а ништа се не зна ни о углу између таква два вектора, јер су основни вектори $\mathbf{e}_i$ непаралелни.

Опажајни простор од три димензије (E_3) је еуклидски матрички простор, јер је растојање двеју тачака $A\,(x_1, y_1, z_1)$ и $B\,(x_2, y_2, z_2)$ одређује Питагорином и косинусном теоремом по обрасцу $d=\overline{AB}=[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2}$, где се испред квадратног корена подразумева позитивни предзнак. Да би се у афином простору могло из сваке тачке и свим правцима мерити *истом јединицом*, аналогно са простором E_3 уводи се *афини метрички простор* E_N ако се дефинише *скаларни производ два вектора*. Ако су то вектори померања двеју тачака, онда је $(\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_2)=\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2=|\mathbf{r}_1|\cdot|\mathbf{r}_2|\cos\varphi$, где су $|\mathbf{r}_i|$ дужине вектора, а φ угао између њих када су пренети у исту тачку (O). За $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}$ добија се $(\mathbf{r}\,\mathbf{r})=(\mathbf{r})^2$, тј. квадрат растојања између двеју тачака (P и O). С обзиром на (1.2) биће:

$$(\mathbf{a}\,\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=ab\cos\varphi=a^i\,b^j\,(\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j)=g_{ij}\,a^i\,b^j;\ \ r^2=g_{ij}\,x^i\,x^j, \tag{1.11}$$

где је $g_{ij}=g_{ji}=(\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j)=(\mathbf{e}_j\,\mathbf{e}_i)$ *основни метрички тензор*, пошто он одређује *метрику простора*.

Када су базни вектори $\mathbf{e}_i$ јединични ортогонални вектори $\mathbf{i}_i$ онда је систем *Декартов правоугли систем*. Ако су $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ вектори положаја тачака $A(a^i)$ и $B(b^i)$, $i=1,2,\ldots,N$, тада су растојање и скаларни производ:

$$d=\overline{AB}=[(b^1-a^1)^2+(b^2-a^2)^2+\cdots+(b^N-a^N)^2]^{1/2};$$

$$(\mathbf{ab})=a^i b^j(\mathbf{i}_i\,\mathbf{i}_j)=\delta_{ij}\,a^i b^j=a^i b^i;\quad r^2=(x^i)^2=(y^i)^2. \tag{1.12}$$

Вектори $\mathrm{d}\mathbf{s}_i=\mathrm{d}\,\mathbf{r}$ одређен двема блиским тачкама $A(x^i)$ и $B(x^i+\mathrm{d}x^i)$, тј. координатама $\mathrm{d}x^i$, назива се *инфинитезимални вектор померања*. Квадрат његове дужине је *метричка форма*, па ће бити:

$$\mathrm{d}\,\mathbf{s}^2=(\mathrm{d}\,\mathbf{r}\,\mathrm{d}\,\mathbf{r})=(\mathrm{d}\,\mathbf{r})^2=g_{ij}\,\mathrm{d}\,x^i\,\mathrm{d}\,x^j;\quad \mathrm{d}\,s^2=\delta_{ij}\,\mathrm{d}\,x^i\,\mathrm{d}\,x^j=\mathrm{d}\,x^i\,\mathrm{d}\,x^j;\quad x^i=y^i \tag{1.13}$$

где се други израз односи на Декартов правоугли систем.

D. 1.6. Трансформације. — Физичке величине представљају се на разне начине: *скаларом* (маса, густина, рад, енергија, температура), *вектором* (брзина, убрзање, сила, момент силе, спрег сила, количина кретања, замах, електрично поље) и *тензором* (напон, деформација, квадратна форма). Скалар је независан од избора координатног система. У опажајном простору (E_3) могли смо са векторима вршити разне операције , па их и *геометријски представити*. Међутим, уопштавањем појма простора (хиперпростор) геометријска интерпретација је даље немогућа, али се у замену за то прелази на аналитичко представљање координате вектора (v^i) у простору V_N, и на аналитичке операције са њима. Дакле, геометријске интерпретације се замењују *методама алгебре* аналитичка (геометрија) и *методом анализе* (диференцијална геометрија). Да би при овим трансформацијама вектор задржао своје физичко значење морају трансформације његових координата бити *независне* од *избора координатног система*.

Сложеније физичке величине представљају се тензором, кога дефинишимо на *основу понашања његових компоненти при трансформацији координатних система*. Да би тензор задржао и даље своје физичко значење морају му компоненте бити *независне* у односу на те трансформације. Стога, *тензорски рачун представља апарат аналитичке и диференцијалне геометрије при проучавању разних објеката које се класифицирају према понашању у односу на трансформације координата*.

D. 1.6.1. Ортогонална трансформација. — Када се Декартов правоугли триједар $Ox^1x^2x^3$, са основним векторима $\mathbf{i}_i$, заокрене око почетка O и пређе у положај $O\xi^1\xi^2\xi^3=O\bar{x}^1\bar{x}^2\bar{x}^3$, са основним векторима $\mathbf{i}_i'=\bar{\mathbf{i}}$, онда између једних и других координата постоје односи:

$$\begin{array}{c|ccc|c|l}
 & \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 & & \\
 & x^1 & x^2 & x^3 & & \\
\hline
\xi^1=\bar{x}^1 & \alpha_1{}^1 & \alpha^1{}_2 & \alpha^1{}_3 & \bar{\mathbf{i}}_1 & \bar{x}^1=\alpha_1{}^1x+\alpha_2{}^1x^2+\alpha_3{}^1x^3=\alpha_k{}^1x_h{}^k;\ \bar{x}^i=\sum\alpha_k{}^i\,x^k=\alpha_k{}^i\,x^k; \\
\xi^2=\bar{x}^2 & \alpha^2{}_1 & \alpha_2{}^2 & \alpha_3{}^2 & \bar{\mathbf{i}}_2 & \bar{x}^2=\alpha_1{}^2\,x^1+\alpha_2{}^2\,x^2+\alpha_3{}^2\,x^3=\alpha_k{}^2\,x^k;\ \{\bar{x}\}=\mathfrak{A}\{x\};\quad (1.14) \\
\xi^3=\bar{x}^3 & \alpha_1{}^3 & \alpha_2{}^3 & \alpha_3{}^3 & \bar{\mathbf{i}}_3 & \ddot{x}^3=\alpha_1{}^3\,x^1+\alpha_2{}^3\,x^2+\alpha_3{}^3\,x^3=\alpha_k{}^3\,x^k;\ \{x\}=\mathfrak{A}^{-1}\{\bar{x}\},
\end{array}$$

где је $\mathfrak{A}$ *матрица трансформације*. Она је ортогонална матрица, јер је

$$|\mathfrak{A}|=\pm1;\quad |\mathfrak{A}|^2=1;\quad \mathfrak{A}^{-1}=\mathfrak{A}^T=\mathfrak{A}';\quad \mathfrak{A}\,\mathfrak{A}^{-1}=\mathfrak{A}\mathfrak{A}'=\mathbf{I} \tag{1.15}$$

а њени елементи представљају косинусе смера јединичних вектора $\mathbf{i}_1$ нових оса *мерених у старом систему* (α_k^i). Када је $\det \mathfrak{A} = |\mathfrak{A}| = 1$ трансформација је *директна* и представља *ротацију*; у противном, при $|\mathfrak{A}| = -1$ трансформација је *супротна* и представља *ротацију са огледањем*. Пошто је триједар остао и даље ортогонални то се ова трансформација и назива *ортогоналном*. Код ње се не мења дужина вектора нити угао између два вектора, јер је:

$$\{\bar{\mathbf{u}}\} = \mathfrak{A}\{\mathbf{u}\};\ (\bar{\mathbf{u}})\{\bar{\mathbf{u}}\} = |\bar{\mathbf{u}}|^2 = (\mathbf{u})\mathfrak{A}'\mathfrak{A}\{\mathbf{u}\} = (\mathbf{u})\,\mathbf{I}\,\{\mathbf{u}\} = |\mathbf{u}|^2;\ |\bar{\mathbf{u}}| = |\mathbf{u}|;$$
$$\cos\theta = (\bar{\mathbf{u}})\{\bar{\mathbf{v}}\}/|\bar{\mathbf{u}}|\,|\bar{\mathbf{v}}| = (\mathbf{u})\mathfrak{A}'\mathfrak{A}\{\mathbf{v}\}/|\mathfrak{A}|\,|\mathbf{u}|\,|\mathfrak{A}|\,|\mathbf{v}| = (\mathbf{u})\,\mathbf{I}\,\{\mathbf{v}\}/|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| = \cos\varphi;\ \theta = \varphi. \tag{1.16}$$

D. 1.6.2. Афина трансформација. — Линеарна трансформација старих променљивих x^i у нове $\bar{x}^i$, тј. $(\bar{x}^i \leftarrow x^i)$, облика

$$\bar{x}^i = a_k{}^i x^k:\ \{\bar{x}\} = \mathbf{A}\{x\};\ \mathbf{A} = (a_k{}^i);\ a_k{}^i = \text{const.} \tag{1.17}$$

назива се *хомогена линеарна трансформација*. Матрица $\mathbf{A}$ $(a_k{}^i)$ је *матрица трансформације*. Када је $\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = |a_k{}^i| \neq 0$ трансформација је *регуларна (несингуларна)*; при $|\mathbf{A}| = 0$ она је *сингуларна*. Код прве је ранг матрице $r = N$, а код друге је $r < N$. Прва се трансформација може *окренути (инверзна трансформација)* и биће:

$$\{x\} = \mathbf{A}\{x\};\ \{x\} = \mathbf{A}^{-1}\{\bar{x}\} = \mathbf{R}\{\bar{x}\};\ \bar{x}^i = a_k{}^i x^k = r_i^k \bar{x}^i, \tag{1.18}$$

где је $\mathbf{R} = \mathbf{A}^{-1}$ инверзна матрица коефицијента $r_i^k = K_i^k / |\mathbf{A}|$ једнаким кофакторима елемента a^i_k од $\mathbf{A}$ подељеним детерминантом матрице $\mathbf{A}$, јер се, по Cramer-овом правилу, за $N = 3$, из (1.14) када се коефицијенти α_k^i замене са $a_k{}^i$ добија:

$$\bar{x}^1 = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{vmatrix} \bar{x}^1 & a_2{}^1 & a_3{}^1 \\ \bar{x}^2 & a_2{}^2 & a_3{}^2 \\ \bar{x}^3 & a_2{}^2 & a_3{}^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}(K_1{}^1 \bar{x}^1 + K_2{}^1 \bar{x}^2 + K^1{}_3 \bar{x}^3) = r_1{}^1 \bar{x}^1 + r^1{}_2 \bar{x}^2 + r^1{}_3 \bar{x}^3 = r_i{}^1 \bar{x}^i;$$
$$x^2 = r_i{}^2 \bar{x}^i;\ x^3 = r_i{}^3 \bar{x}^i;\ r_i{}^1 = K_i{}^1/|\mathbf{A}|;\ r_i{}^2 = K_i{}^2/|\mathbf{A}|;\ r_i{}^3 = K_i{}^3/|\mathbf{A}| \tag{1.19}$$

Из (1.18) заменом немих индекса i са k добијају се релације:

$$\bar{x}^i = a_k{}^i x^k;\ x^i = r_k{}^i \bar{x}^k;\ r^i{}_k = \frac{K^i{}_k}{|\mathbf{A}|};\ a_k{}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k};\ r_k{}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k};\ \bar{x}^k \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k};\ x^i = \bar{x}^k \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}, \tag{1.20}$$

па се види како се „*премешта црта изнад координата*“ при трансформацији, и да се *индекс* k испод разломачке црте, при парцијалиом диференцирању- сматра, због конвенције о сабирању, *доњим (коваријантним) индексом*.

Афина трансформација се може схватити на два начина: 1° као несингуларно афино пресликавање *(афинитет)* простора одређеног тачкама x^i у простор одређен тачкама $\bar{x}^i$ у односу на исти координатни систем, и 2° као трансформација координата x^i једног N-тоедра у координате $\bar{x}^i$ другог N-тоедра са заједничким почетком (O).

Линеарна хомогена трансформација је специјалан случај *опште линеарне трансформације*

$$\bar{x}^i = a_k{}^i x^k + b^i;\ \{\bar{x}\} = \mathbf{A}\{x\} + \{b\};\ \bar{x}^i = x^i + b^i;\ \{\bar{x}\} = \{x\} + \{\mathbf{b}\};\ \mathbf{A} = \mathbf{I}, \tag{1.21}$$

где је у другом случају матрица $\mathbf{A}$ јединична матрица $\mathbf{I}$. Вектор $\{\mathbf{b}\}$ је *константа*.

Поред трансформације промењљивих (x^k) могу се трансформисати и 0^n основни (базни) вектори. Вектор $\mathbf{r}$ се може изразити у оба система као

$$\mathbf{r}=\bar{x}^i\,\bar{\mathbf{e}}_i=x^k\,\mathbf{e}_k=\mathbf{r}_i^{\,k}\,\bar{x}^i\,\mathbf{e}_k=\bar{x}^i\,(r_i^{\,k}\,\mathbf{e}_k);\quad \bar{\mathbf{e}}_i=r_i^{\,k}\,\mathbf{e}_k;\quad \bar{x}^i=a^i{}_k\,x^k, \tag{1.22}$$

па се види да се координате x^i трансформишу *супротно* („contra") од начина трансформисања базних вектора $\mathbf{e}_i$, те се стога и називају *контраваријантним (обичним) координатама.*

Ова трансформација има особине: 1° да се права пресликава у праву, $\mathbf{x}=\mathbf{a}+\lambda\,\mathbf{b}$; $\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{A}(\mathbf{a}+\lambda\,\mathbf{b})=\bar{\mathbf{a}}+\lambda\,\bar{\mathbf{b}}$; 2° да се раван пресликава у раван, $\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\,\mathbf{x}=\mathbf{A}\,(\mathbf{a}+\lambda\,\mathbf{b}+\mu\,\mathbf{c})=\bar{\mathbf{a}}+\lambda\,\bar{\mathbf{b}}+\mu\,\bar{\mathbf{c}}$; 3° да се паралелни вектори пресликавају у паралелне векторе, $\bar{\mathbf{v}}=\mathbf{A}\,\mathbf{v}=\mathbf{A}\,(\lambda\,\mathbf{u})=\lambda\,\bar{\mathbf{u}}$, очуваних односа дужина, $\lambda=\bar{v}^i/\bar{u}^i=v^i/u^i$; 4° дужине и углови између вектора се мењају, па се геометријски облици *деформишу* у истом односу, једнаком $f=|\mathbf{A}|$. Када је $f=|\mathbf{A}|>0$ деформација је *позитивна (издужење — екстензија)*; при $f=|\mathbf{A}|<0$ она је *негативна (скраћење — компресија).*

D. 1.6.3. Општа функциона (генералисана) трансформација. — Трансформација промењљивих q^i у промењљиве $\bar{q}^i(q^k)$, $i=1, 2, \ldots, N$, није уопште узев линеарна. Функције $q^i=q^i(q^{-k})$ представљају инверзну трансформацију. Да би она постојала, тј. да би скупу q^i одговарао скуп величина q^{-i}, потребно је и довољно: 1° да су функције $\bar{q}^i(q^k)$ једнозначне, континуалне и да имају непрекидне изводе до потребног реда, и 2° да је функционална детерминанта (јакобијан) $J=|\,\partial\,q^i/\partial\,q^k\,|=|\,\partial\,(\bar{q}^i,\ldots,\bar{q}^N)/\partial\,(q^1,\ldots,q^N)\,|\neq 0$. Код афине трансформације, према (1.20), јакобијан је $J=|\,\partial\,\bar{x}^i/\partial\,x^k\,|=|\,a_k{}^i\,|=|\,\mathbf{A}\,|\neq 0$, па је генералисана трансформација општија од афине.

Из (1.20), а аналогно и на горње зависности $\bar{q}^i(q^k)$ и $q^i(q^{-k})$, следи да су тотални диференцијали

$$\mathrm{d}\,\bar{x}^i=(\partial\,\bar{x}^i/\partial\,x^k)\,dx^k;\ \mathrm{d}\,x^i=(\partial\,x^i/\partial\,\bar{x}^k)\,\mathrm{d}\,\bar{x}^k;\ \mathrm{d}\,\bar{q}^i=(\partial\,\bar{q}^i/\partial\,q^k)\,\mathrm{d}\,q^k;$$

$$\mathrm{d}\,\bar{q}^i=(\partial\,q^i/\partial\,\bar{q}^k)\,\mathrm{d}\,\bar{q}^k, \tag{1.23}$$

па се види да се у оба случаја *тотални диференцијали* трансформишу линеарно и хомогено, само се у првом случају коефицијенти трансформације константе, а у другом су функције криволинијских координата.

D. 1.7. Инваријанте — Величина која је дата само једним бројем или функцијом (q^i) чија се вредност при трансформацији $q^i\rightarrow\bar{q}^1$ *не мења*, $\varphi(q^i)=\bar{\varphi}(\bar{q}^i)=S$ назива се *скаларна инваријанта*, или краће *инваријанта* односно *скалар.* Функције φ и $\bar{\varphi}$ су различитог облика, али та промена не утиче на вредност функције која је инваријантна у односу на координатне трансформације (например, елемент лука, кинетичка енергија, итд). Постоје инваријанта код које се при трансформацији не мења ни аналитичка форма, па се таква инваријанта назива *апсолутном.*

Ако свакој тачки неког простора одговара одређен скалар онда се каже да скалари образују *скаларно поље.* Скалар, дакле, зависи од *положаја* (места) одговарајуће тачке простора. Међутим, он може да зависи и од *других физичких параметра* (например, времена) који одређују његова *локална својства.* Стога скалари као инваријанте играју важну улогу, јер представљају унутрашње (природне) особине те величине (например, инваријанте момента инерције, напонска инваријанта).

D.1.8. Контраваријантни и коваријантни вектори. — Контраваријантне и коваријантне координате (компоненте) вектора увели смо из геометријског разматрања у простору E_3. Међутим, та се квалификација може извршити и према понашању координата тих вектора при трансформацији, тј. аналитичком методом. Нека тачке $A(x_a{}^i)$ и $B(x_b{}^i)$ одређују у афином простору (E_N) вектор коначног померања $\mathbf{u}=\mathbf{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$ са координатама $u^i=x_b{}^i-x_a{}^i$. Афином трансформацијом координата $(\bar{x}^i \leftarrow x^i)$ добија се

$$\bar{u}^i=a_k{}^i u^k=a_k{}^i(x_b{}^k-x_a{}^k);\ \ \bar{u}^i=a_k{}^i u^k=u^k\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k};\ \ u^i=\bar{u}^k\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}.$$

Међутим- из (1.23) види се да се диференцијал $\mathrm{d}\,q^i$ трансформише у односу на генералисану трансформацију на исти начин као и вектор коначног померања у односу на афину. Овакви системи првог реда $|u^i|$ који се, дакле. трансформишу у односу на афину трансформацију као координате вектора коначног померања односно као тотални диференцијали у односу на генералисану трансформацију, то јест- по обрасцима

$$\bar{x}^i=a_k{}^i x^k=\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}x^k;\ \bar{u}^i=u^k\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k};\ u^i=\bar{u}^k\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k};\ \bar{u}^i=u^k\frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^k};\ u^i=\bar{u}^k\frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^k},\tag{1.24}$$

одређују *контраваријантни вектор* или *контраваријантни тензор првог реда*. Видимо, дакле, да је *прототип оваквих величина вектор коначног померања односно тотални диференцијал*

Из (1.22) скаларним множењем вектором $\mathbf{v}$ добија се $(\mathbf{v}\,\bar{\mathbf{e}}_i)=r_i{}^k(\mathbf{v}\,\mathbf{e}_k)$ или $\bar{v}_i=r_i{}^k v_k=v_k(\partial x^k/\partial \bar{x}^i)$, па се коваријантне координате вектора $\mathbf{v}$ трансформишу на исти начин као и базни вектори. Извод скаларне функције $\varphi(q^i)$ која је инваријантна, по координати q^i, представља систем првог реда $v_i=\partial\varphi/\partial q^i$. При генералисаној трансформацији добија се $\bar{v}_i=\partial\bar{\varphi}/\partial\bar{q}^i=(\partial\varphi/\partial q^k).\ (\partial q^k/\partial\bar{q}^i)=v_k(\partial q^k/\partial\bar{q}^i)$, јер је због инваријантности $\bar{\varphi}(\bar{q}^i)=\varphi(q^i)$. Види се да је ова трансформација друкчија од (1.24). Величине v_i које се трансформишу у односу на афину трансформацију као базни вектори, а у односу на генералисану као парцијални изводи скаларне инваријанте, тј. по обрасцима:

$$\bar{v}_i=r_i{}^k v_k\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i};\ \ v_i=\bar{v}_k\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i};\ \ \bar{v}_i=v_k\frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i};\ \ v_i=\bar{v}_k\frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^i}\tag{1.25}$$

одређују *коваријантни вектор* или *коваријантни тензор првог реда*. Пошто се трансформише *сагласно основним векторима* то се назива коваријантни (код латинске речи „co“); међутим контраваријантни се трансформише *супротно*, па се назива контраваријантним (по речи „contra“).

Линеарна хомогена форма одређује коваријантни вектор, јер је према (1.18),

$$\mathfrak{L}=a_k x^k=S;\ \mathfrak{L}=a_k x^k=a_k r_i{}^k\bar{x}^i=\bar{\mathfrak{L}}=\bar{a}_i\bar{x}^i=\bar{S};\ \bar{a}_i=r_i{}^k a_k.$$

Вектор $\mathbf{v}$ чије су координате парцијални изводи скаларне функције $\partial\varphi/\partial q^i$ градијент је те скаларне фуикције, $\mathbf{v}=\operatorname{grad}\varphi$, па се *коваријантни вектор* (v_i) *трансформише као градијент скаларне функције*.

D.1.9. Тензори. — С обзиром на број и варијантност индекса системи са два или више индекса називају се тензори. Под тај појам подвукли смо и скаларе и векторе: први су тензори нултог реда, а други првог реда. У техничкој пракси највише се употребљавају тензори другог реда.

а) *Тензори другог реда.* — Систем другог реда од N^2 компонената образован помоћу *тензорског (дијадског) производа вектора* назива се тензор *другог реда*, облика

$$\{\mathbf{u}\}(\mathbf{v})=\{\mathbf{uv}\}=\mathbf{uv};\ w^{ik}=\{u^i\}(v^k)=u^i v^k;\ w_{ik}=u_i v_k;\ w_k{}^i=u^i v_k \tag{1.26}$$

ако се при трансформацији координата x^i (или q^i) трансформишу аналогно трансформацијама вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ (обр. 1.24 и 1.25) по следећим обрасцима:

$$\text{a)}\quad \bar{w}^{ik}=a_m{}^i a_n{}^k w^{mn};\ \bar{w}^{ik}=w^{mn}\frac{\partial\bar{q}^i}{\partial q^m}\frac{\partial\bar{q}^k}{\partial q^n};\ w^{mn}=u^m v^n; \tag{1.27.a}$$

$$\text{b)}\quad \bar{w}_{ik}=r_i{}^m r_k{}^n w_{mn};\ \bar{w}_{ik}=w_{mn}\frac{\partial q^m}{\partial\bar{q}^i}\frac{\partial q^n}{\partial\bar{q}^k};\ w_{mn}=u_m v_n; \tag{1.27.b}$$

$$\text{c)}\quad \bar{w}_k{}^i=a_m{}^i r_k{}^n w_n{}^m;\ \bar{w}_k{}^i=w_n{}^m\frac{\partial\bar{q}^i}{\partial q^m}\frac{\partial q^n}{\partial\bar{q}^k};\ w_u{}^m=u^m v_u. \tag{1.27.c}$$

Први тензор (w^{ik}) је *двапут контраваријантан;* други (w_{ik}) *двапут коваријантан*, а трећи $(w_k{}^i)$ је *мешовит*, једанпут контра- и једанпут ко-варијантан. Тензор другог реда може се добити и помоћу билинеарне форме $\mathfrak{B}=a_{ik}u^i v^k=S$, јер се коефицијенти a_{ik} траисформишу као коваријантни тензори другог реда, $\bar{S}=\bar{a}_{ik}\bar{u}^i\bar{v}^k=S$; $\bar{a}_{ik}=a_{mu}(\partial q^m\,\partial\bar{q}^i)(\partial q^n/\partial\bar{q}^k)$. Симетрични тензор $w^{(ik)}=w^{ik}=w^{ki}$ и кососиметрични тензор другог реда $w^{(ik)}=w^{ik}=-w^{ki}$ задржавају особину симетрије и при трансформацији. Мешовити тензор $w_k{}^i$ задржава симетрију при афиној трансформацији али не и при генералисаној. Тензори који се не мењају при пермутацији индекса називају се *изомери* $w^{ik}=w^{ki}$; $w_{ik}=w_{ki}$.

Тензор другог реда може се разложити на два сабирка: симетрични и кососиметрични део, те је $u^{ik}=u^{(ik)}+u^{[ik]}$, $v_{ik}=v_{(ik)}+v_{[ik]}$, па су

$$u^{(ik)}=\frac{1}{2}(u^{ik}+u^{ki});\qquad v_{(ik)}=\frac{1}{2}(v_{ik}+v_{ki});$$
$$u^{[ik]}=\frac{1}{2}(u^{ik}-u^{ki});\qquad v_{[ik]}=\frac{1}{2}(v_{ik}=v_{ki}). \tag{1.28}$$

Изводи вектора u^i по коодинатама чине мешовити систем другог реда па је

$$\bar{t}_i{}^k=\frac{\partial\bar{u}^i}{\partial\bar{x}^k}=\frac{\partial\bar{u}^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^k}=\frac{\partial}{\partial x^p}(a_j{}^i x^j)\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^k}=a_j{}^i r_k{}^p\frac{\partial u^j}{\partial x^p}=a_j{}^i r_k{}^p t_p{}^j; \tag{1.29.a}$$

$$\bar{t}_k{}^i=\frac{\partial\bar{u}^i}{\partial\bar{q}^k}=\frac{\partial}{\partial\bar{q}^k}\left(u^j\frac{\partial\bar{q}^i}{\partial q^j}\right)=\frac{\partial u^j}{\partial q^p}\frac{\partial q^p}{\partial q^k}\frac{\partial\bar{q}^i}{\partial q^j}+u^j\frac{\partial^2\bar{q}^i}{\partial q^j\,\partial q^p}\frac{\partial q^p}{\partial q^k}=(\bar{t}_k{}^i)'+(\bar{t}_k{}^i)'', \tag{1.29.b}$$

па у првом случају представља тензор, а у другом не, јер постоји допунски члан $(\bar{t}_k{}^i)''$.

Kroonecker-ов *делта симбол* $\delta_k^{\ i}$ је мешовити тензор другог реда, јер се при трансформацији понаша као тензор

$$\delta_k^{\ i} = a_m^{\ i} r_k^{\ n} \delta_n^{\ m} = a_n^{\ i} r_k^{\ n} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^k} = \delta_k^{\ i};\ \delta_k^{\ i} = \delta_n^{\ m} \cdot \frac{\delta \bar{q}^i}{\partial q^m} \frac{\partial q^n}{\partial \bar{q}^k} = \frac{\partial q^i}{\delta q^n} \frac{\partial q^n}{\partial \bar{q}^k} = \delta^{ki}. \tag{1.30}$$

Он је *јединични тензор*, јер се при композицији понаша као јединица при множењу, па је заиста супституциони оператор. Он је метрички тензор за правоугле координате (1.13).

Тензор $p_k^{\ j} = \lambda \delta_k^{\ i}$ зове се *сферни* или *изотропни тензор*, јер му компоненте задржавају вредности у свим координатним системима, пошто је $\bar{p}_k^{\ i} = \lambda \bar{\delta}_k^{\ i} = p_k^{\ i}$.

b) *Тензори вишег реда.* — Свака величина одређена у V_N простору са N^{m+n} компонената атрансформише се по обрасцу

$$\bar{u}_{k_1 \dots k_n}^{i_1 \dots i_m} = u_{s_1 \dots s_n}^{r_1 \dots r_m} \left(\frac{\partial \bar{q}^{i_1}}{\partial q^{r_1}} \cdots \frac{\partial \bar{q}^{im}}{\partial q^{r_m}} \right) \left(\frac{\partial q^{s_1}}{\partial \bar{q}^{k_1}} \cdots \frac{\partial q_s^{s_n}}{\partial \bar{q}^{k_n}} \right) \tag{1.31}$$

тензор је $m+n$-ов реда, m-пута контраваријантан и n-пута коваријантан.

Например, тензори трећег и четвртог реда су:

$$\bar{u}^{ijk} = u^{rst} a_r^{\ i} a_s^{\ j} a_t^{\ k};\ \bar{u}^{ijk} = u^{rst} \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q_s} \frac{\partial \bar{q}^j}{\partial q^s} \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^t};\quad \bar{u}_k^{\ ij} = u_p^{\ mn} a_m^{\ i} a_n^{\ j} r_k^{\ p};$$

$$\bar{u}_{ijkl} = u_{mnps} r_i^{\ m} r_j^{\ n} r_k^{\ p} r_l^{\ s};\ \bar{u}^{ijkl} = u^{mnps} \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^m} \frac{\partial \bar{q}^j}{\partial q^n} \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^p} \frac{\partial \bar{q}^l}{\partial q^s}.$$

c) *Афинори и ортогонални тензори.* — Систем који се јавља као тензор у односу на генералисану трансформацију биће такав и у односу на афину и ортогоналну трансформацију, пошто су ове специјални случајеви прве трансформације. Међутим, обратно не стоји као што је показано за извод вектора (1.29). Системи који се тензорски понашају само у односу на афине трансформације зову се *афини тензори* или *афинори*, а они који се тензорски понашају само у односу на ортогоналне трансформације јесу *картезијански* или *ортогонални тензори*.

Са афинорима и ортогоналним тензорима оперише се као са матрицама. Тако су:

$$\{\bar{x}\} = \mathbf{A}\{x\};\ \bar{x}^i = a_k^{\ i} x^k;\ \{\bar{u}\} = \mathbf{A}\{u\};\ \{u\} = \mathbf{A}^{-1}\{\bar{u}\} = \mathbf{R}\{\bar{u}\};\ u^i = r_k^{\ i} \bar{u}^i;$$

$$\{\bar{x}\} = \mathfrak{A}\{x\};\ \bar{x}^i = \alpha_k^{\ i} x^k;\ \mathfrak{A} = (\alpha_k^{\ i});\ \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}'(\alpha_i^{\ k});\ \{\bar{u}\} = \mathfrak{A}\{u\};\ \{u\} = \mathfrak{A}'\{\bar{u}\}. \tag{1.32}$$

Када се ради са афинорима другог реда могу се користити *дијаде*. Координатна дијада је $\mathfrak{D}_{ik} = \{i_i\}(i_k) = \mathbf{i}_i \mathbf{i}_k$, па је јединични афинор $\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{I} = \mathfrak{D}_{ii}$ једнак збиру трију координатних дијада. Стога се афинор може претставити као збир *девет* дијада, $\hat{\mathbf{T}} = \{u\}(v) = u_i v_k \{\mathbf{i}_i\}(\mathbf{i}_k) = u_i v_k \mathfrak{D}_{ik} = t_{ik} \mathfrak{D}_{ik}$.

Скаларни производ афинора са вектором је вектор; производ *,,здесна"* је вектор колона, а *,,слева"* вектор врста. Производ дијаде векторски је опет дијада, а производ тензора векторски вектором је тензор. Композиција (скаларни производ) два афинора није комутативна. Наведене релације изгледају овако:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{T}\{w\}=\{u\}(v)\{w\}=t_{ik}w^k\,\mathbf{i}_i=a^i\,\mathbf{i}_i=\{a\};\ (w)\,\mathbf{T}=(b);\\
[\mathfrak{D}_{ab}\times\mathbf{c}]=\{a\}(b)\times(c)=\{a\}[\mathbf{bc}];\ \{c\}\times\{a\}(b)=\{[\mathbf{ca}]\}(b);\\
\mathbf{P}=\mathbf{T}\times\mathbf{w}=\{\mathbf{u}\}(\mathbf{v})\times(\mathbf{w})=\{u\}([\mathbf{v\,w}])=e^{rjk}t_{ij}w_k\mathfrak{D}_{ir};\ p_{ir}=e^{rjk}t_{ij}w_k;\\
\mathbf{Q}=\mathbf{w}\times\mathbf{T}=\{\mathbf{w}\}\times\{\mathbf{u}\}(\mathbf{v})=\{[\mathbf{w\,u}]\}(\mathbf{v})=e^{rki}t_{ij}w_k\mathfrak{D}_{rj};\ g_{rj}=e^{rkj}t_{ij}w_k;\\
\mathbf{A}(a_k{}^i);\ \mathbf{B}(b_k{}^i);\ \mathbf{P}=\mathbf{AB}=(a_j{}^i b_k{}^j)\neq\mathbf{Q}=\mathbf{BA}=(b_j{}^i a_k{}^j).
\end{gathered}
\tag{1.33}
$$

D.1.10. Критеријум за одређивање тензорске природе система. — Утврђивање тензорске природе најбоље се врши *помоћу трансформација*. Нека се композицијом два система првог реда u^i и v_i добије скаларна инваријанта $S=u^i v_i$ и нека се зна да је $u_k{}^i$ контраваријантни вектор, онда следи $S=u^k v_k=\bar{S}=\bar{u}^i\bar{v}_i=u^k(\partial\bar{q}^i/\partial q^k)\bar{v}_i$, па је $v_k=\bar{v}_i(\partial\bar{q}^i/\partial q^k)$, те се вектор $\mathbf{v}$ трансформише као коваријантни вектор. Ако је u^{ij} контраваријантни тензор другог реда, а w_{ijk} систем трећег реда па се композицијом добија коваријантни вектор $\mathbf{v}$, $(w_{ijk}u^{ij}=v_k)$, онда систем w_{ijk} мора бити трипут коваријантни тензор, јер се трансформацијом добија:

$$
\begin{aligned}
&\bar{w}_{ijk}\bar{u}^{ij}=\bar{v}_k;\ w_{mnr}u^{mn}(\partial q^m/\partial\bar{q}^i)(\partial q^n/\partial\bar{q}^j)(\partial q^r/\partial\bar{q}^k)(\partial\bar{q}^i/\partial q^m)(\partial\bar{q}^j/\partial q^n)=\\
&\qquad=v_r(\partial q^r/\partial\bar{q}^k);\ w_{mnr}u^{mn}=v_r\,.
\end{aligned}
$$

Тензорска природа може се оценити и помоћу *,,правила количника"* (,,quotient rule"). Ако се композицијом може да оствари скаларна инваријанта (например, производ двају вектора супротне варијантности) онда су елементи те композиције тензори, у противном нису. На пример, када се композицијом система трећег реда t_{ijk} са векторима $u^i v_j w^k$ добије скаларна инваријанта $t_{ijk}u^i v_j w^k=\varphi=S$, онда је $t_{ijk}r_j{}^{ik}=S$, па је систем $t_{ik}{}^j$ мешовити тензор трећег реда, двапут коваријантан и једанпут контраваријантан.

D.1.11. Релативни тензори. — Општији системи од тензора јесу *релативни тензори* који се трансформишу по закону

$$
\bar{t}^{\,i_1\dots i_r}_{k_1\dots k_s}=J^T\left(\frac{\partial\bar{q}^{i_1}}{\partial q^{m_1}}\cdots\frac{\partial\bar{q}^{i_r}}{\partial q^{m_s}}\right)\left(\frac{\partial q^{k_1}}{\partial\bar{q}^{n_1}}\cdots\frac{\partial q^{k_s}}{\partial\bar{q}^{n_s}}\right)t^{m_1\dots m_r}_{n_1\dots n_s};\ J=\left|\frac{\partial q^s}{\partial\bar{q}^n}\right|. \tag{1.34}
$$

где је J јакобијан трансформације старих координата у нове $(q^s\to\bar{q}^n)$, а његов експонент T је *тежина*. — Овакви се тензори називају и *pseudo-тензори*. Када је $T=0$, тј. $J^\circ=|\partial q^s/\partial\bar{q}^n|^\circ=1$, тензор је *апсолутни*. Тензори тежине $T=1$ зову се *тензорске густине*, а када је $T=-1$ онда су *тензорски капацитети*. *Релативни вектор* (*псеудовектор*) је ралативни тензор првог реда, а *псеудоскалар* је релативни тензор нултог реда. Симболи e^{ijk} и e_{ijk} су релативни тензори, и то први тензорска густина $(T=1)$, а други тензорски капацитет). Помоћу ових тензора може се у V_3 дефинисати *векторски* (*спољашњи*) *производ двају вектора* исте варијантности као трећи вектор супротне варијантности, те је

$$
\mathbf{w}=w^i\,\mathbf{i}_i=u_j v_k[\mathbf{i}^j\mathbf{i}^k]=e^{ijk}u_j v_k\,\mathbf{i}_i;\ w^i=e^{ijk}u_j v_k;\ w_i=e_{ijk}u^j v^k. \tag{1.35}
$$

Пошто су *e*-системи релативни тензори то су ови вектори (w^i и w_i) релативни вектори и зову се *аксијални вектори*. Напротив, вектор померања је *поларни вектор* и он је апсолутни.

Делта-симбол је напротив апсолутни тензор. *Генералисани делта*-симбол се дефинише изразом, $e^{ijk}\, e_{rst} = \delta^{ijk}$. Пошто су *e*-симболи тежина 1 и -1, то је, $J^T J^{T'} = J J^{-1} = J^{(1-1)} = J^{\circ} = 1$, па је δ симбол заиста апсолутни тензор што се може утврдити и трансформацијом. Пошто је $\delta_t{}^k\, e^{ijk} \cdot e_{rst} = \delta_t{}^k\, \delta^{ijk}_{rst} = \delta^{ij}_{rs}$ који се такође трансформише као тензор. Даљом композицијом индекса j и s добија се обични делта-симбол $\delta_r{}^i$, па је и он апсолутни тензор.

D. 1.12. Основни метрички тензор. — Обрасцем (1.13) дефинисана је метричка форма као хомогена квадратна форма у односу на Декартове правоугле и афине координате. Овај се појам проширује. Увођењем генералисаних координата (q^i) биће Декартове $x^i = x^i(q^k)$ и обратно $q^i = q^i(x^k)$, па је вектор положаја тачке $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^i) = \mathbf{r}(q^i)$, те је

$$\mathrm{d}x^j = (\partial x^j/\partial q^i)\,\mathrm{d}q^i;\ \mathrm{d}\mathbf{r} = (\partial \mathbf{r}/\partial q^i)\,\mathrm{d}q^i;\ \mathbf{g}_i = \partial \mathbf{r}/\partial q^i;\ g_i = (\partial x_i^j/\partial q^i), \quad (1.36)$$

где је $\mathbf{g}_i$ *основни (координатни) вектор* система генералисаних координата који није јединични вектор али пада у правац тангенте на координатну линију генералисаног система у тој тачки, $\mathbf{g}_i = (\partial \mathbf{r}/\partial q^i)\,\mathbf{t}_i$; вектор $\mathbf{t}_i$ је *јединични вектор тангенте* те координатне линије. Ови вектори, пошто су функције положаја тачке $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_i(M)$, образују *векторско поље*.

Метричка форма биће

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_j (\partial x^j/\partial q^i)(\partial x^j/\partial q^k)\,\mathrm{d}q^i\,\mathrm{d}q^k = (\mathrm{d}\mathbf{r}, \mathrm{d}\mathbf{r}) = (\mathbf{g}_i\,\mathbf{g}_k)\,\mathrm{d}q^i\,\mathrm{d}q^k = g_{ik}\,\mathrm{d}q^i\,\mathrm{d}q^k, \quad (1.37)$$

где су g_{ik} *коефицијенти метричке форме*

$$g_{ik} = g_{ki} = (\mathbf{g}_i\,\mathbf{g}_k) = (\mathbf{g}_k\,\mathbf{g}_i) = \sum_j (\partial x^j/\partial q^i)(\partial x^j/\partial q^k);\ j = 1, 2, \ldots, N. \quad (1.37)$$

Пошто је метричка форма $(\mathrm{d}s^2)$ инваријантна у свим координатним системима то су g_{ik} компоненте двоструког симетричног коваријантног тензора другог реда који се назива *основни (фундаментални) метрички тензор* или кратко *метрички тензор*. Овом тензору одговара симетрична квадратна матрица $\mathbf{G}$ и симетрична детерминанта $|\mathbf{G}| = \det \mathbf{G} = |g_{ik}| = g$. У простору V_3 биће

$$\begin{array}{c|ccc} (\cdot) & \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 \\ \hline \mathbf{g}_1 & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ \mathbf{g}_2 & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ \mathbf{g}_3 & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{array} \quad |\mathbf{G}| = g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = |g_{ik}| = \left|\frac{\partial x^i}{\partial q^k}\right|^2 = J^2 = g_{ik}\,K^{ik} \qquad T = 2. \quad (1.38)$$

$$J = \sqrt{|g_{ik}|} = \sqrt{g}$$

Пошто су $\mathbf{g}_i(M)$ и $\mathbf{g}_k(M)$ функције положаја то је и $g_{ik} = (\mathbf{g}_i\,\mathbf{g}_k) = g_{ik}(M)$, па метрички тензор g_{ik} образује *тензорско поље*.

Нови симетрични тензор $g^{ik} = (\mathbf{g}^i\,\mathbf{g}^k)$ формиран на овај начин

$$g^{ik} = g^{ki} = K^{ik}/|\mathbf{G}|;\ K^{ik} = g\,g^{ik};\ (g^{ik}) = \mathbf{G}^* = \mathbf{G}^{-1};\ |g^{ik}| = 1/|\mathbf{G}| = |\partial q^i/\partial x^k| = J^{-2} \quad (1.39)$$

назива се *основни контраваријантни тензор*. Он је симетричан тензор другог реда, чија је матрица $\mathbf{G}^*$ реципрочна матрица метричког тензора g_{ik}.

Ови се тензори трансформишу на овај начин:

$$\bar{g}_{ik}=g_{mn}(\partial q^m/\partial\bar{q}^i)(\partial q^n/\partial\bar{q}^k);\ \bar{g}^{ik}=g^{mn}(\partial\bar{q}^i/\partial q^m)(\partial\bar{q}^k/\partial q^n);$$
$$\bar{g}_k{}^i=g_n{}^m(\partial\bar{q}^i/\partial q^m)(\partial q^n/\partial\bar{q}^k)=\delta_k{}^i, \tag{1.40}$$

па је мешовити метрички тензор $g_k{}^i=(\mathbf{g}^i\,\mathbf{g}_k)$ генерализација δ-симбола.

D. 1.13. Здруживање тензора. — За разлику од афиног простора у ме- тричком простору могу се тензори различитог типа сводити једини на друге помоћу композиције са основним метричким тензорима g_{ik} и g^{ik}. Овакви се тензори називају *здружени*, јер су један из другог постали ком- позицијом са основним тензорима. Уствари, ово здруживање представља „*правило о подизању и спуштању индекса*".

Код *вектора* ово се врши на овај начин:

$$g_{ik}\,u^k=u_i;\ g^{ik}\,v_k=v^i;$$

$$\bar{u}_i=u_m\frac{\partial q^m}{\partial\bar{q}^i}=\bar{g}_{ik}\,\bar{u}^k=g_{mn}\,u^j\frac{\partial q^m}{\partial\bar{q}^i}\frac{\partial q^n}{\partial\bar{q}^k}\frac{\partial\bar{q}^k}{\partial q^j}=g_{mn}\,u^j\frac{\partial q^m}{\partial\bar{q}^i}\delta_j{}^n=g_{mn}\,u^n\frac{\partial q^m}{\partial\bar{q}^i}, \tag{1.41}$$

па се помоћу коваријантног тензора g_{ik} „*индекс спушта*", а помоћу кон- траваријантног тензора g^{ik} „*индекс се подиже*". Вектор u_i здружен је век- тору u^k помоћу тензора g_{ik}, и обратно, вектор v^i је здружен вектору v_k помоћу g^{ik}. Здружени вектори су реципрочни, јер се множењем u_i са g^{ji} добија $g^{ji}\,u_i=g^{ji}\,g_{ik}\,u^k=g_k{}^j\,u^k=\delta_k{}^j\,u^k=u^j$.

Скаларни производ два вектора и квадрат интензитета вектора су

$$(\mathbf{u}\mathbf{v})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=|\,\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v}\,|\cos\varphi=u^i\,v^k\,(\mathbf{g}_i\,\mathbf{g}_k)=g_{ik}\,u^i\,v^k=u^i\,v_i;\ \ |\,u\,|^2=u^i\,u_i=g_{ik}\,u^i\,u_k{}^k. \tag{1.42}$$

Код *тензора* са g_{ik} односно g^{ik} спушта се односно подиже *један* ин- декс; за подизање два индекса мора се множити са два основна тензора. Место индекса који се подиже или спушта обележава се *тачком*. Тако ће бити:

$$g^{ik}\,u_{kj}=u^i{}_{.j};\ g^{ik}\,u_{jk}=u_j{}^i{}_{.};\ \ u^i{}_{.j}\neq u_j{}^i{}_{.};\ g^{ij}\,g_{jk}=g_k{}^i=\delta_k{}^i;\ g_{ir}\,t_{jk}{}^i=t_{.rjk};$$
$$g^{rk}\,t_{jk}{}^i=t^{ir}_{j.};\ g^{im}\,g^{jn}\,u_{mn}\,u^{ij};\ g_{ik}\,g_{jn}\,u^{mn}=u_{ij};\ g_{ir}\,g_{js}\,g_{kt}\,u^{rst}=u_{ijk}. \tag{1.43}$$

D. 1.14. Алтенатори. — Из (1.38) следи да је Јакобијан $J=|\,\partial x^i/\partial q^k\,|=\sqrt{|\,\mathbf{G}\,|}=\sqrt{|\,g_{ik}\,|}=\sqrt{g}$, па се дефинишу Ricci-јеви *тензори* или *алтернатори* као апсолутни тензори облика:

$$\varepsilon_{ijk}=J\,e_{ijk}=e_{ijk}\sqrt{g};\ \varepsilon^{ijk}=J^*\,e^{ijk}=e^{ijk}/\sqrt{g};\ g=|\,\mathbf{G}\,|=|\,g_{ik}\,|=J^2. \tag{1.44}$$

Помоћу алтернатора дефинише се спољашњи (векторски) производ два вектора:

$$\mathbf{c}=[\mathbf{a}\,\mathbf{b}];\ c_i\,\mathbf{g}^i=a^j\,b^k\,[\mathbf{g}_j\,\mathbf{g}_k]=\varepsilon_{ijk}\,a^j\,b^k\,\mathbf{g}^i;\ c_i=\varepsilon_{ijk}\,a^j\,b^k;\ c^i=\varepsilon^{ijk}\,a_j\,b_k, \tag{1.45}$$

па су

$$[\mathbf{g}_j\,\mathbf{g}_k]=\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{g}^i=e_{ijk}\sqrt{g}\,e_{ijk}\,\mathbf{g}^i;\ [\mathbf{g}^j\,\mathbf{g}^k]=\varepsilon^{ijk}\,\mathbf{g}_i=e^{ijk}\,\mathbf{g}_i/\sqrt{g}; \tag{1.46}$$

D.1.15. Физичке координате тензора. — Контраваријантне и коваријантне координате неког вектора јесу скаларни производи тог вектора са основним (базним) векторима. Ове координате не морају, уопште узев, имати исту физичку димензију (јединицу) као вектор. А да би се задржала и даље природна величина вектора уводи се и трећа врста координата, тзв. *физичка или природна координата*. Она је уствари ортогонална пројекција тог вектора $(\mathbf{v})$ на правац основног вектора, тј. *она је скаларни производ вектора и јединичног вектора правца дотичног основног вектора*. Према томе су координате вектора:

$$v^i=(\mathbf{v}\,\mathbf{g}^i);\ v_k=(\mathbf{v}\,\mathbf{g}_k)=g_{ik}\,v^i;\ v_{(p)}=(\mathbf{v}\,\mathbf{t}_{(p)})=(\mathbf{v}\,\mathbf{g}_{(p)})/|\mathbf{g}_{(p)}|=\mathbf{v}_p/\sqrt{g_{(p\,p)}}=g_{ik}\,\mathbf{v}^k\,t_{(p)}{}^{i} \quad (1.47)$$

Овде је $\mathbf{g}_{(p)}$ основни вектор правца (p), а $\sqrt{g_{(pp)}}$ је његов интензитет.

Аналогно предњем, физичка компонента тензора на *два управна правца* биће

$$w_{(p)(r)}=g_{im}\,u^m\,t_{(r)}{}^i\,g_{kn}\,v^n\,t_{(s)}{}^k=u_i\,v_{(r)}{}^i\,t_{(r)}{}^i\,t_{(s)}{}^k=w_{ik}/\sqrt{g_{(rr)}}\sqrt{g_{(ss)}}. \quad (1.48)$$

D. 1.16. Christoffel-ови симболи. — Извод основног вектора је $\partial\mathbf{g}_i/\partial q^k=\partial[\partial\mathbf{r}/\partial q^i]/\partial q^k=\partial[\partial\mathbf{r}/\partial q^k]/\partial q^i=\partial\mathbf{g}_k/\partial q^i$, где се индекс испод разломачке црте при диференцирању сматра *„доњим“* (коваријантним). С обзиром на предње биће извод $\partial(\mathbf{g}_j,\mathbf{g}_k)/\partial q^i=\partial\,\mathbf{g}_{jk}/\partial q^i=(\partial\,\mathbf{g}_j/\partial q^i,\ \mathbf{g}_k)+(\mathbf{g}_j,\ \partial\,\mathbf{g}_k/\partial q^i)$, $\partial(\mathbf{g}_k\,\mathbf{g}_i)/\partial q^j=\partial\,q_{ki}/\partial q^j=(\partial\,\mathbf{g}_k/\partial q^j,\ \mathbf{g}_i)+(\mathbf{g}_k,\ \partial\,\mathbf{g}_i/\partial q^j)$; $\partial(\mathbf{g}_i\,\mathbf{g}_j)/\partial q^k=(\partial\,\mathbf{g}_i/\partial q^k,\mathbf{g}_j)+(\mathbf{g}_i,\ \partial\,\mathbf{g}_j/\partial q^k)=\partial\,\mathbf{g}_{ij}/\partial q^k$. Релација $(\partial\,\mathbf{g}_{jk}/\partial q^i)+(\partial\,g_{ki}/\partial q^j)-(\partial\,g_{ij}/\partial q^k)$ због горе наведене пермутационе особине, може да се напише у облику:

$$\left(\frac{\partial\,\mathbf{g}_i}{\partial q^j}\,\mathbf{g}_k\right)=\left(\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q^i\,\partial q^j},\frac{\partial\,\mathbf{r}}{\partial q^k}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\,g_{jk}}{\partial q^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j}-\frac{\partial\,g_{ij}}{\partial q^k}\right]=[i\,j,\,k]=\Gamma_{ij,k}=\Gamma_{ji,k} \quad (1.49)$$

који се зове Chistoffel-ов *симбол прве врсте* (*„средња* Chistoffel-ова *заграда*“). Овај је симбол симетричан у односу на леве индексе.

Chrtstoffelov-ов симбол друге врсте („велика Christoffel-ова заграда“) дефинише се на овај начин

$$\frac{\partial\,\mathbf{g}_i}{\partial q^j}=\frac{\partial^2\,\mathbf{r}}{\partial\,q^i\,\partial\,q^j}=\begin{Bmatrix}k\\ ij\end{Bmatrix}\mathbf{g}_k=\Gamma^k_{ij}\,\mathbf{g}_k\,;$$

$$\left(\frac{\partial\,\mathbf{g}_i}{\partial\,q^j}\,\mathbf{g}_l\right)=\Gamma_{ij,\,l}=\Gamma^k_{ij}(\mathbf{g}_k\,\mathbf{g}_l)=g_{kl}\Gamma^k_{ij}$$

$$\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}=g^{kl}\,\Gamma_{ij,l}, \quad (1.50)$$

јер је $g^{kl}\,g_{kl}=1$.

Нека су $M_0(q^i)$ и $M_1\,(q^i+\mathrm{d}q^i)$ две облишње тачке на кривој $q^i=q^i\,(t)$, где је $t_0\leqslant t\leqslant t_1$. Нека је вектор $\mathbf{u}$ промењљив али да не зависи експлицитно од параметра t, $u^i=u^i\,[x^i\,(t)]$, оида је услов његовог *паралелног померања* из тачке M_0 у тачку M_1 те криве.

$$\mathrm{d}\,\mathbf{u}=\mathrm{d}\,(u^i\,\mathbf{g}_i)=\mathrm{d}\,u^i\,\mathbf{g}_i+u^i\,(\partial\,\mathbf{g}_i/\partial\,q^j)\,\mathrm{d}\,q^2=(\mathrm{d}\,u^k+u^i\,\Gamma_{ij}{}^k\,\mathrm{d}\,q^j)\,\mathbf{g}_k=0;$$

$$\mathrm{d}\,u^k=-\Gamma_{ij}{}^k\,u^i\,\mathrm{d}\,q^j, \quad (1.51)$$

пошто су основни вектори $\mathbf{g}_k$ независни. Коефицијенти Γ^k_{ij} повезују паралелне векторе у тачкама криве па се називају и *коефицијенти повезаности*. Пошто се у афином простору вектори могу паралелно преносити из једне тачке у другу то су коефицијенти повезаности једнаки нули.

D. 1.17. Коваријантно диференцирање тензора — Нека је дат контраваријантни *вектор* $\mathbf{u}=u^i\,\mathbf{g}_i$ онда је његов извод по координати q^k:

$$\frac{\partial\,(u^i\,\mathbf{g}_i)}{\partial\,q^k}=\frac{\partial\,u^i}{\partial\,q^k}\,\mathbf{g}_i+u^i\,\frac{\partial\,\mathbf{g}_i}{\partial\,q^k}=\left(\frac{\partial\,u^i}{\partial\,q^k}+u^j\,\Gamma^i_{jk}\right)\mathbf{g}_i=u^i\big|_k\,\mathbf{g}_i;$$

$$u^i\big|_k=\nabla_k\,u^i=u^i_{jk}=\frac{\partial\,u^i}{\partial\,q^k}+u^j\,\Gamma^i_{jk}. \tag{1.52}$$

Израз $u^i\big|_k$ назива се се *коваријантни извод контраваријантног вектора* u^i по координати q^k у односу на основни тензор g_{ik}.

За *коваријантни* вектор $\mathbf{v}=v_i\,\mathbf{g}^i$ биће:

$$\frac{\partial\,(v_i\,\mathbf{g}^i)}{\partial\,q^k}=\frac{\partial\,v_i}{\partial\,q^k}\,\mathbf{g}^i+v_i\,\frac{\partial\mathbf{g}^i}{\partial\,q^k}=\frac{\partial\,v_i}{\partial\,q^k}\,\mathbf{g}^i-v_i\,\Gamma^i_{jk}\,\mathbf{g}^j=\left(\frac{\partial\,v_i}{\partial\,q^k}-v_j\,\Gamma^j_{ik}\right)\mathbf{g}^i=v_{i\,|\,k}\,\mathbf{g}^i;$$

$$v_{i\,|\,k}=\nabla_k\,v_i=\frac{\partial\,v_i}{\partial\,q^k}-v_j\,\Gamma^j_{ik}, \tag{1.53}$$

јер је

$$\frac{\partial}{\partial\,q^k}\,(\mathbf{g}^j\,\mathbf{g}_i)=\frac{\partial}{\partial\,q^k}\,\delta^j{}_i=0;\ \left(\frac{\partial\,\mathbf{g}^j}{\partial\,q^k}\,\mathbf{g}_i\right)=-\left(\mathbf{g}^j\,\frac{\partial\,\mathbf{g}_i}{\partial\,q^k}\right)=-(\mathbf{g}^j\,\mathbf{g}_m)\,\Gamma^m_{ik}=-\delta^j{}_m\,\Gamma^j_{ik};$$

$$\frac{\partial\,\mathbf{g}^j}{\partial\,q^k}=-\Gamma^j_{ik}\,\mathbf{g}^i.$$

где је $v_{i|k}$ коваријантни извод коваријантног вектора v_i по координати q^k.

Оба извода су тензори другог реда, па се коваријантним диференцирањем повишава ред тензора за један. Извод $u^i\big|_k$ је мешовити тензор другог реда, а док је $v_{i|k}$ коваријантни тензор другог реда. *Коваријантно диференцирање може се изводити само у метричком простору.*

За коваријантно диференцирање важе правила као и за обична диференцирања. Нека је контраваријантни тензор $w^{ij}=u^i\,v^j$ онда је извод

$$w^{ij}\big|_k=v^j(u^i\big|_k)+u^i\,(v^j\big|_k)=v^j\,[(\partial\,u^i/\partial\,q^k)+u^m\,\Gamma^i_{mk}]+u^i\,[(\partial\,v^j/\partial\,q^k]+v^m\,\Gamma^j_{mk}].$$

Први и трећи члан дају извод $\partial\,u^i\,v^j\,\partial\,q^k$. На овај начин добијају следећи изводи:

$$u^{ij}\big|_k=\nabla_k\,u^{ij}=(\partial\,u^{ij}/\partial\,q^k)+u^{mj}\,\Gamma^i_{mk}+u^{im}\,\Gamma^j_{mk}, \tag{1.54.a}$$

$$v_{ij|k}=\nabla_k\,v_{ij}=(\partial\,v_{ij}/\partial\,q^k)-v_{mj}\,\Gamma^m_{ik}-v_{im}\,\Gamma^m_{jk}; \tag{1.54.b}$$

$$w_{j|k}=\nabla_k\,w^i_j=(\partial\,w_j/\partial\,q^k)+w^m{}_j\,\Gamma^i_{mk}-w^i{}_m\,\Gamma^m_{jk}. \tag{1.54.c}$$

Коваријантни извод компоненте метричког тензора једнак је нули (тзв. *Ricci-јева теорема*)

$$g^{ij}{}_{|k}=0;\ g_{ij|k}=0;\ g^{i}{}_{j|k}=0. \tag{1.55}$$

Изводи вишег реда добијају се поновним коваријантним диференцирањем па важе релације:

$$u_{i|jk}=\nabla_j\nabla_k u_i=\frac{\partial u_{i|j}}{\partial q^k}-u_{m|j}\Gamma^m_{ik}-u_{i|m}\Gamma^m_{jk}=\frac{\partial^2 u_i}{\partial q^j\,\partial q^k}-\frac{\partial u_m}{\partial q^j}\Gamma^m_{ik}-\frac{\partial u_m}{\partial q^k}\Gamma^m_{ij}-$$

$$-\frac{\partial u_i}{\partial q^m}\Gamma^m_{jk}-u_m\frac{\partial}{\partial q^k}\Gamma^m_{ij}+u_n\left[\Gamma^m_{ik}\Gamma^n_{mj}+\Gamma^m_{jk}\Gamma^n_{im}\right]; \tag{1.56.a}$$

$$u_{ij|\Gamma s}=\nabla_s\nabla_\Gamma u_{ij}=\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial q^\Gamma\,\partial q^s}-u_{mj}\Gamma^m_{irs}-u_{im}\Gamma^m_{jrs}-\frac{\partial u_{mj}}{\partial q^\Gamma}\Gamma^m_{is}-\frac{\partial u_{im}}{\partial q^\Gamma}\Gamma^m_{is}$$

$$-\frac{\partial u_{mj}}{\partial q^s}\Gamma^m_{ir}-\frac{\partial u_{im}}{\partial q^s}\Gamma^m_{jr}-\frac{\partial u_{ij}}{\partial q^m}\Gamma^m_{rs}+g_{mn}\left(\Gamma^m_{ir}\Gamma^n_{js}+\Gamma^m_{is}\Gamma^n_{jr}\right); \tag{1.56.b}$$

$$\Gamma^m_{irs}=\left[\frac{\partial}{\partial q^s}\Gamma^m_{ir}-\Gamma^m_{nr}\Gamma^n_{is}-\Gamma^m_{ir}\Gamma^n_{rs}\right]. \tag{1.56.c}$$

D. 1.18. Bianchi-јев апсолутни извод. — Нека је $q^i(t)$ крива где је t параметар. Ако је $\mathbf{u}=u^i\,\mathbf{g}_i$ контраваријантни вектор онда је његов диференцијал $\mathrm{d}\mathbf{u}=(u^i|_k\,\mathrm{d}q^k)\,\mathbf{g}_i$. Деобом са $\mathrm{d}t$ добија се извод вектора по параметру и он се назива Bianchi-јев *апсолутни извод вектора* u^i *по параметру* t. Аналогно томе добија се апсолутни извод коваријантног вектора, па су:

$$\frac{\mathrm{D}u^i}{\mathrm{D}t}=(\nabla_k u^i)\frac{\mathrm{d}q^k}{\partial t}=\left(\frac{\partial u^i}{\partial q^k}+u^j\Gamma^i_{jk}\right)\frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}t};\quad \frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t}=\left(\frac{\partial v_i}{\partial q^k}-v_j\Gamma^j_{ik}\right)\frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}t}. \tag{1.57.a}$$

Из извода непосредно следе апсолутни диференцијали

$$\mathrm{D}u^i=(u^i|_k)\,\mathrm{d}q^k;\ \mathrm{D}v_i=(v_i|_k)\,\mathrm{d}q^k;\ \mathrm{D}g_{ij}=(g_{ij|k})\,\mathrm{d}q^k=0;\ \mathrm{D}g^{ij}=0. \tag{1.57.b}$$

Ако је коваријантни извод вектора $u^i{}_{|k}=0$, онда је његов диференцијал $\mathrm{d}\mathbf{u}=0$, па је то *услов паралелног померања вектора* („*телепаралелизам*")

Када је параметар (t) лук криве (s), тада извод $\mathrm{D}u^i/\mathrm{D}s$ представља извод вектора $\mathbf{u}$ у правцу криве дуж које се помера.

Појам апсолутног извода проширује се и на тензоре, па је

$$\mathrm{D}u^{ij}/\mathrm{D}t=(\mathrm{d}u^{ij}/\mathrm{d}t)+[u^{mj}\,\Gamma^i_{mk}+u^{im}\,\Gamma^j_{mk}]\,(\mathrm{d}q^k/\mathrm{d}t). \tag{1.57.c}$$

D. 1.19. Диференцијални оператори. — Као и у векторској анализи оператори ∇ (набла) и Δ (лапласијан) разматрају се и у тензорској нотацији.

D. 1.19.1. Градијент. — Нека је $\varphi=\varphi(q^i)$ скаларна функција, онда је $\mathrm{d}\varphi=(\partial\varphi/\partial q^i)\,\mathrm{d}q^i$. Пошто је $\mathrm{d}\varphi$ скаларна инваријанта, а $\mathrm{d}q^i$ контраваријантни вектор морају изводи $\partial\varphi/\partial q^i$ бити компоненте коваријантног вектора. Он се назива *градијент скаларне функције* $\varphi(q^i)$ у односу на систем координата q^i

$$\mathbf{u}=u_i\,\mathbf{g}^i=\operatorname{grad}\varphi=\nabla\varphi;\ u_i=\partial\varphi/\partial q^i;\ \nabla=(\partial/\partial q^i)\,\mathbf{g}^i=\mathbf{g}^i\,(\partial/\partial q^i). \tag{1.58.a}$$

Он је *коваријантни вектор*, али могу му се одредити и друге компоненте, те су:

$$u_i = \partial\varphi/\partial q^i = \varphi/_i = \partial_i;\ u^i = g^{ik}(\partial\varphi/\partial q^k) = \varphi^{|k};\ u_{(p)} = (\partial\varphi/\partial q^i)\, t_{(p)}{}^i. \qquad (1.58.b)$$

Аналогно појму градијента скаларне функције примењује се ова операција и на векторе и на тензоре. Компоненте градијента једнаке су коваријантном изводу. Градијент скалара је вектор, па ће градијент вектора бити тензор. При овој се операцији *повећава ред тензора за један коваријантни индекс*. Тако ће бити:

$$\operatorname{grad} u^i = u^i{}_{|k} = \nabla_k u^i = (\partial u^i/\partial q^k) + u^j\Gamma^i_{jk};\ \operatorname{grad} u_i = u_{i|k};\ \operatorname{grad} u^{ij}_k = u^{ij}{}_{k|r}. \quad (1.59)$$

D. 1.19.2. Дивергенција. — Дивергенција се односи на *контраваријантне векторе*, па је скаларни производ оператора ∇ и тог вектора. Дакле биће:
$\operatorname{div} u^i = \operatorname{div}(u^i\mathbf{g}_i) = (\mathbf{g}^i\nabla_i u^k\,\mathbf{g}_k) = g^i{}_k\nabla_i u^k = \nabla_i u^i = u^i{}_{|i} = (\partial u^i/\partial q^i) + u^j\Gamma^i_{ji} = S.$ (160.a)
Она је скаларна инваријанта. Може се применити и на коваријантне векторе ако му се придружи контраваријантни вектор помоћу метричког тензора:

$$\operatorname{div} v_i = \operatorname{div}(g^{ik}v_i) = (g^{ik}v_i)/k = g^{ik}v_{k|k} = v^k{}_{|k} = v^i{}_{|i};\ g^{ik}{}_{|k} = 0. \qquad (1.60.b)$$

Ова се операција може применити и на тензоре. Треба прво одредити коваријантни извод, а затим извршити контракцију по индексу диференцирања. Стога може бити више различитих дивергенција, што се назначује Тако су

$$\operatorname{div}_{(i)} u^{ij} = u^{ij}{}_{|i} \neq \operatorname{div}_{(j)} u^{ij} = u^{ij}{}_{|j}\ \operatorname{div} u^{(ij)} = u^{(ij)}_{(i)}{}_{|i} = u^{(ij)}_{(j)}{}_{|j};\ \operatorname{div} u^i_{jk} = u^i_{jk|r} = u^r_{jk\,|\,r} = u^i_{jk\,|\,i} \quad (1.61)$$

Дивергенцијом се *смањује* ред тензора за један (од вектора постаје скалар, од тензора другог реда вектор, итд).

D. 1.19.3 Ротор. — Под ротором коваријантног вектора подразумева се у V_3 апсолутни контраваријантни вектор

$$\operatorname{rot} v_i = R^i\,\mathbf{g}_i = [\mathbf{g}^j\nabla_j,\ v_k\,\mathbf{g}^k] = \varepsilon^{ijk}\nabla_j v_k\,\mathbf{g}_i;\ R^i = \varepsilon^{ijk}v_{k|j} = \frac{e^{ijk}}{\sqrt{g}}v_{k|j};\ g = |g_{ik}| \quad (1.62.a)$$

односно

$$R^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial v_3}{\partial q^2} - \frac{\partial v_2}{\partial q^3}\right);\ R^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial v_1}{\partial q^3} - \frac{\partial v_3}{\partial q^1}\right);\ R^3 = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial v_2}{\partial q^1} - \frac{\partial v_1}{\partial q^2}\right). \quad (1.62.b)$$

D. 1.19.4. Лапласијан. — Ако је φ скаларна функција онда је $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{div}\mathbf{u}$, где су $u_i = \partial\varphi/\partial q^i = \varphi|_i$ координате градијента. Да би се извела операција дивергенције мора се одредити компонента $u^j = g^{ij}u_i = g^{ij}(\partial\varphi/\partial q^i) = g^{ij}\varphi_{|i}$ те се добија

$$\Delta\varphi = \nabla\nabla\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = u^j|_j = (g^{ij}\varphi_{|i})|_j = g^{ij}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^i\,\partial q^j} - \frac{\partial\varphi}{q^m}\Gamma^m_{ij}\right). \quad (1.63.a)$$

Градијент вектора u_i је тензор $u_{i|j}$, па се мора узети коваријантни извод коваријантне координате, те ће бити лапласијан вектора

$$\Delta u_i = \operatorname{div} \operatorname{grad} u_i = g^{jk} u_{i|jk}; \; \Delta u^i = g_{jk} u^{i|jk}, \tag{1.63.b}$$

а аналогно се добија и тензор другог реда

$$\Delta u_{ij} = g^{kl} u_{ij|kl}; \; \Delta u^{ij} = g_{kl} u^{ij|kl}; \; \Delta u_j{}^i = g_k{}^l u_j{}^i{}_{|l}{}^k. \tag{1.63.c}$$

D. 1.20. Интегрални обрасци. — Нека је L просто затворена крива, а S површ. чија је контура та крива, $\mathrm{d}\mathbf{r}$, управљени линијски елемент, а $\mathrm{d}S$ и и $\mathrm{d}V$ површински н запремински елемент, онда Stokess-ов и Gauss-ов образац имају облик:

$$\oint_{(L)} v_i \,\mathrm{d} q^i = \iint_{(S)} \sqrt{g}\, R^i \,\mathrm{d} S_i; \quad \oiint_{(S)} v^i \,\mathrm{d} S_i = \iiint_{(V)} v^i{}_{|i} \,\mathrm{d} V. \tag{1.64}$$

D. 1.21. Ортогонални криволинијски систем. — Код овог су система основни вектори ортогонални, па ће бити:

$$g_{ii} = A_i{}^2; \; \mathbf{g}_i = A_i \mathbf{t}_i; \; A_i{}^2 = (\partial x^1/\partial q^i)^2 + (\partial x^2/\partial q^i)^2 + (\partial x^3/\partial q^i)^2; \; \mathrm{d} s_{(i)} = A_i \,\mathrm{d} q^{(i)};$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r}^2 = g_{ii} \,\mathrm{d} q^i \,\mathrm{d} q^i = (A_i \,\mathrm{d} q^i)^2; \; g^{ii} = 1/A_i{}^2; \; g = |\mathbf{G}| = (A_1 A_2 A_3)^2 = |g_{ii}|; \; |g^{ii}| = 1/g;$$

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{g}_i = v_i \mathbf{g}^i = v_{(i)} \mathbf{t}_{(i)} = v_{(M)} \mathbf{t}_{(M)}; \; v^i = (\mathbf{v}\mathbf{g}); \; v_i = g_{ik} v^k = g_{ii} v^i = A_i{}^2 v^i;$$

$$v_{(i)} = (\mathbf{v}\mathbf{t}_{(i)}) = \frac{1}{A_i}(\mathbf{v}\,\mathbf{g}_i) = \frac{v_i}{A_i} = \frac{g_{ii} v^i}{A_i} = A_i v^i; \; v_i = A_i v_{(i)}; \; v^i = v_{(i)}/A_i;$$

$$\Gamma^i_{jk} = 0; \; \Gamma^i_{jj} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(A_i)^2}\frac{\partial (A_j)^2}{\partial q_i}; \; \Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2}\frac{1}{(A_i)^2}\frac{\partial (A_i)^2}{\partial q^k}; \; \Gamma^i_{ii} = \frac{1}{2}\frac{1}{(A_i)^2}\frac{\partial (A_i)^2}{\partial q^i}; \tag{1.65}$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \mathbf{u} = u_i \mathbf{g}^i; \; u_i = A_i^{-1}(\partial \varphi/\partial q^i);$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial}{\partial q^1}[A_2 A_3 v_{(1)}] + \frac{\partial}{\partial q^2}[A_3 A_1 v_{(2)}] + \frac{\partial}{\partial q^3}[A_1 A_2 v_{(3)}]\right.; \; \sqrt{g} = A_1 A_2 A_3;$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = R^i \mathbf{g}_i = R_{(i)} \mathbf{t}_{(i)}; \; R_{(i)} = A_i R^i;$$

$$R_{(1)} = \frac{1}{A_2 A_3}\left\{\frac{\partial [A_3 v_{(3)}]}{\partial q^2} - \frac{\partial [A_2 v_{(2)}]}{\partial q^3}\right\}; \; R_{(2)} = \frac{1}{A_3 A_1}\left\{\frac{\partial [A_1 v_{(1)}]}{\partial q^3} - \frac{\partial [A_3 v_{(3)}]}{\partial q^1}\right\};$$

$$R_{(3)} = \frac{1}{A_1 A_2}\left\{\frac{\partial [A_2 v_{(2)}]}{\partial q^1} - \frac{\partial [A_1 v_{(1)}]}{\partial q^2}\right\}$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial}{\partial q^1}\left[\frac{A_2 A_3}{A_1}\frac{\partial \varphi}{\partial q^1}\right] + \frac{\partial}{\partial q^2}\left[\frac{A_3 A_1}{A_2}\frac{\partial \varphi}{\partial q^2}\right] + \frac{\partial}{\partial q^3}\left[\frac{A_1 A_2}{A_3}\frac{\partial \varphi}{\partial q^3}\right]\right.$$. Стога с

таблице:

Таблица

a) Поларно-цилиндрички систем | b) Сферни систем

q^i	r	φ	z	ρ	φ	ψ
$ds_{(i)}$	dr	$r\,d\varphi$	dz	$d\rho$	$(\rho\cos\psi)\,d\varphi$	$\rho\, d\psi$
A_i	1	r	1	1	$\rho\cos\psi$	ρ
g_{ii}	1	r^2	1	1	$(\rho\cos\psi)^2$	ρ^2
g_{ii}	1	$1/r^2$	1	1	$(\rho\cos\psi)^{-2}$	ρ^{-2}
g	r^2; $g^{-1}=1/r^2$			$\rho^4\cos^2\psi$; $g^{-1}=(\rho^4\cos^2\psi)^{-1}$		
ds^2	$dr^2+(r\,d\varphi)^2+dz^2$			$d\rho^2+(\rho\cos\psi\, d\varphi)^2+(\rho\, d\psi)^2$		
$\mathbf{t}_i$	$\mathbf{r}_0$	$\mathbf{c}_0$	$\mathbf{k}$	$\vec{\rho}_0$	$\vec{\mathbf{c}}_0$	$\vec{\nu}_0$
$\mathbf{g}_i$	$\mathbf{r}_0$	$r\mathbf{c}_0$	$\mathbf{k}$	$\vec{\rho}_0$	$(\rho\cos\psi)\,\vec{\mathbf{c}}_0$	$(\rho\,\psi)\,\vec{\nu}_0$
$\Gamma_{ij,k}$	$\Gamma_{12,2}=\Gamma_{21,2}=-\Gamma_{22,1}=r$			$\Gamma_{12,2}=-\Gamma_{22,1}=\rho\cos^2\psi$; $\Gamma_{13,3}=-\Gamma_{33,1}=-\rho$; $\Gamma_{22,3}=\rho\sin\psi\cos\psi$;		
$\Gamma_{jk}{}^i$	$\Gamma^2{}_{12}=\Gamma^2{}_{21}=\dfrac{1}{r}$; $\Gamma^1{}_{22}=-r$			$\Gamma^1{}_{22}=-\rho\cos^2\psi$; $\Gamma^1{}_{33}=-\rho$; $\Gamma^2{}_{12}=\Gamma^3{}_{13}=\rho^{-1}$; $\Gamma^2{}_{23}=-\operatorname{tg}\psi$; $\Gamma^3{}_{22}=\sin\psi\cos\psi$		
$\Delta\Phi$	$\left(\dfrac{\partial}{\partial r}\mathbf{r}_0+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{c}_0+\dfrac{\partial}{\partial Z}\right)\Phi$			$\left(\dfrac{\partial}{\partial\rho}\vec{\rho}_0+\dfrac{1}{\rho\cos\psi}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\vec{\mathbf{c}}_0+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\psi}\vec{\nu}_0\right)\Phi$		
$\mathbf{v}$	$V_{(r)}\mathbf{r}_0+V_{(c)}\mathbf{c}_0+V_{(z)}\mathbf{k}$			$V_{(\rho)}\vec{\rho}_0+V_{(c)}\vec{\mathbf{c}}_0+V_{(\nu)}\vec{\nu}_0$		
$\operatorname{div}\mathbf{v}$	$\dfrac{V_{(r)}}{r}+\dfrac{\partial V_{(r)}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V_{(c)}}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial V_{(z)}}{\partial z}$			$2\dfrac{V_{(\rho)}}{\rho}+\dfrac{\partial V_{(\rho)}}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho\cos\psi}\dfrac{\partial V_{(z)}}{\partial\varphi}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V_{(\nu)}}{\partial\psi}-\dfrac{V_{(\nu)}}{\rho}\operatorname{tg}\psi$		
$\operatorname{rot}\mathbf{v}$	$\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V_{(z)}}{\partial\varphi}-\dfrac{\partial V_{(c)}}{\partial z}$; $\dfrac{\partial V_{(r)}}{\partial z}-\dfrac{\partial V_{(z)}}{\partial r}$; $\dfrac{V_{(c)}}{r}+\dfrac{\partial V_{(c)}}{\partial r_{(c)}}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V_{(r)}}{\partial\varphi}$			$\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V_{(c)}}{\rho}-\dfrac{v_{(c)}}{\rho}\operatorname{tg}\psi-\dfrac{1}{\rho\cos\psi}\dfrac{\partial V_{(\nu)}}{\partial\varphi}$; $\dfrac{1}{\rho\cos\psi}\dfrac{\partial V_{(\rho)}}{\partial\varphi}-\dfrac{V_{(c)}}{\rho}-\dfrac{\partial V_{(c)}}{\partial\rho}$; $\dfrac{V_{(\nu)}}{\rho}+\dfrac{\partial V_{(\nu)}}{\partial\rho}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V_{(\rho)}}{\partial\psi}$		
$\Delta\Phi$	$\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\right)\Phi$			$\left(\dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho^2\cos^2\psi}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\psi^2}+\dfrac{2}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}-\dfrac{\operatorname{tg}\psi}{\rho^2}\dfrac{\partial}{\partial\psi}\right)\Phi.$		

Пводом 100 година од рођења знаменитог Ужичанина

Цео живот посвећен маеханици, инжењерству и математици

Професор Dr Ing. Dipl. Math. Данило П. Рашковић (28. август 1910 - 29. јануар 1985)

Катица (Стевановић) Хедрих

Данило П. Рашковић
(28. август 1910 - 29. јануар 1985)

ПРЕДГОВОР

"*Природно право се учи у школи, а природна неправда у животу*."

Јован Јовановић Змај

Данило Рашковић доктор техничких наука,дипломирани машински инжењер и дипломирани математчар, утемељивач је првих научно заснованих курсева механике на Машинском факултету у Београду. Исто се односи и на курсеве Отпорности материјала, Теорије еластичности и Теорије осцилација, које је такође предавао. Аутор је многобројних и веома тиражних уџбеника високог научно-наставног нивоа и са добром математичком заснованиошћу. Увео је векторски, матрични и тензопрски рачун у наставу механике на Машинском факултету у Београду, што је касније пренео и на друге машинске факулчтете (Ниш, Крагујевац, Мостар), чиме је дао један од најкрупнијих доприноса да са Машинског факултета у Београду, и других техничких факултета излазе дпломирани машински инжењери високог нивоа теоријских знања и способности да их примене. Написао је и први универзитетски уџбеник из Теорије осцилација код Срба, који садржи и његове оригиналне резултате и доприносе у овој области. Оставио је значајне научне резултате из области Теорије еластичности и Теорије осцилација. Створио је добру кадровску основу на Машинском факултету у Нишу да се утемеље истраживања из области нелинеарне механике. Био је патриота и частан човек. Добитник је Октобарске награде града Ниша за допринос развоју науке и Универзитета у Нишу.

*   *   *

Увод

У препуној сали Народног позоришта у Нишу, једног петка увече, седамдесетих прошлог века, професор Механике и његови сарадници и студенти машинства, су после предавања из Теорије осцилација присуствовали концерту младе талентоване уметнице вилионисткиње Ферн, ученице, широм света познатог Давида Ојстраха. жице виолине су трепериле под прстима и гудалом и у различитим тоновима допирале до срца и духа публике. Уметнички доживљај је био ту, као и у најпознатијим концертним дворанама, широм света.

Само пола сата раније, професор Рашковић је студентима предавао о осцилацијама струне, о парцијалној диференцијалној једначини са граничним и почетним условима, сопственим кружним фреквенцијама, нормалним функцијама и облицима осциловања. Говорио је о механичким осцилацијама и опсегу фреквенција које производе шум, музику, говор. Сада су на реду биле осцилације струне виолине кроз божанствене звуке, из прстију и руку његове талентоване кћери.

Теорија осцилација је била професорова омиљена научна област у којој је радио и стварао, дао свој допринос. Једанаесто дете сиромашне породице Рашковић је остварило свој сан и дало оригиналне доприносе механици, посебно теорији еластичности и теорији осцилација, а његова најмлађа кћер, његова миљеница Ферн, је на свој оригинални начин наставила промоцију његове науке о осцилацијама, кроз музику и универзитетску наставу на Универзитету уметности у Београду.

Рад на Машинском одсеку Техничког факултета у Нишу, за професора Рашковића је био веома *благотворан*, јер је овде стекао сараднике са којима *се слагао* и који су се дивили његовим предавањима, са којима је добро сарађивао, што му је омогућило да настави целу следећу деценију, свој научно-педагошки рад са студентима, додуше уз исцрпљујућа више часовна путовања сваке недеље на релацији од Београда до Ниша. То је уследило после сукоба са појединим члановима Катедре за механику на Машинском факултету у Београду, што је довело до разрешења са функције редовног професора Механике на том факултету. На Машинском факултету у Београду професор Рашковић је био шеф Катедре за механику, а и у два мандата продекан. Тек недавно, ма граници два миленијума, у 2000. години, тридесетак година после, на Семинару Оделења на механику Математичког Института САНУ посвећеном 50. година студијске групе за Механику на Математичком факултету у Београду, смо први пут јавно чули, од једног професора механике Машинског факултета у Београду оцену "*да је професор Рашковић уградио значајне елементе у наставу и науку из области механике*" на том факултету, и да то "не треба да буде занемарено, јер је значајно допринело не само очувању достигнутог квалитета наставе механике, већ и њеног развоја у каснијем периоду". Ту оцену је изговорио проф. др Јозо Вуковић.

За двадесет година рада проф. др Данила Рашковића на Машинском факултету у Београду, на тај факултет се уписало преко 10.000 студената. Сваки од тих студената морао је да код професора Рашковића положи три до пет испита. Машински факултет у Београду, у то време, а и данас, је гигант у српским и југословенским размерама, како по наставном кадру, тако и по квалитету научно-истраживачког и наставног рада у свим техничким дисциплинама. Нажалост одлазак професора Рашковића са Катедре за механику тог факултета је довео је дп промена у односу према механици. За време професоровог рада, на овом факултету су дипломирали многи врсни инжењери, конструктори, професори универзитета и академици. Свима њима је један део себе поклонио професор Рашковић, како надахнуто написаше две редовне професорке Катедре за Механику Машинског факултета у Београду, у пензији. По њиховом мишљењу, али и мишљењу многих истакнутих професора Машинског факултета у Београду, са сигурношћу се може трвдити да је највећи део оформљених универзитетских курсева, написаних и објављених универзитетских уџбеника, студија и научних радова, професор Д. Рашковић остварио у току свог рада на Машинском факултету у Београду.

На отварању XXIII Југословенског конгреса теоријске и примењене механике Југословенског друштва за механику, октобра 2001. године, у сали Грађевинског и Електротехничког факултета у Београду, министар Министарства за науку, технологије и развој Републике Србије, поздрављајући научнике из земље и иностранства евоцирајући успомене из својих студентских дана и сећања на свог професора механике др Данила Рашковића, рекао је како су му још и данас присутне слике динамичних предавања свог професора и при томе је истакао вредност, тада стеченог знања из механике, која је он преносио студентима технике на многим универзитетима и многобројним техничким и машинским факултетима у земљи, као универзитетски наставник.

Професор Данило Рашковић је добитник Октобарске награде града Ниша, за доприносе у науци и Универзитету у Нишу, у то време највећег признања које може доделити један град.

ЖИВОТОПИС

Данило П. Рашковић, син Петра и Љубице из Ужица, рођен је 28. августа 1910. године (10 септембра по новом календару) у Ужицу. Основну школу и шест разреда гимназије завршио је у Ужицу. Године 1927. ступио је у 55-ту класу Ниже школе Војне академије, коју је завршио 1930. године као артиљеријски потпоручник.

Јуна 1931., као и 1932. године положио је приватно седми, одноносно осми разред и испит зрелости у Гимназији у Новом Саду. Као артиљеријски потпоручник завршио је 1932. године противаеропландски курс у Превлаци у Боки Которској.

1933. године био је изабран, после положеног пријемног испита, за војног државног питомца Министарства војске и морнарице и уписао се на Машински одсек Техничког факултета у Београду на коме је дипломирао за машинског инжењера фебруара 1939 године.

Рашковић П. Данило, артиљеријски капетан Друге класе из Београда и Болани Марија, суплент гимназије у Приједору (кћи Срећка и Катарине Болани из Сплита) су се венчали 12. јула (29. јуна по старом календару) 1938. године у Приједору.

Марта 1939. године је уписао Математичку (прву) групу Филозофског факултета у Београду, а 1942. је дипломирао.

Септембра 1940. године изабран је "на редовном конкурсу за асистента Техничког факултета" али му војска "није хтела дати разрешницу с обзиром на тадашње стање у свету", јер је био на служби у Војно-техничком заводу "Чачак" у Чачку, као технички шеф Радионице за обраду метала. Тамо је нарађивана ратна опрема за инжењеријско-техничку, економску и ветеринарску грану. Други светски рат га је затекао на истој дужности.

Јуна 1941. године немајући средстава за живот отишао је у родбинску кућу у Ужице, где га је и затекла Народно-ослободилачка борба. По заробљавању, децембра 1941., Немци су га предали тадашњим војним властима у Београду, и био је распоређен у инжењеријско оделење при Председништву Владе. На овом послу је радио неколико месеци, па је враћен на Универзитет по основу ранијег избора. Мада у то време Универзитет није радио, професори Хлитчијев, Др Кашанин и Вречко држали су докторске курсеве које је Рашковић посећивао и самостално завршио докторску тезу, коју је одбранио 21 јуна 1944. године. Та одбрана му је призната од државне комисије за признавање диплома (бр. 1697/45) и промовисан је за доктора техничких наука.

Одмах по ослобођењу је био мобилисан и радио неколико месеци у фабрици "Рогожарски" као инжењер у конструкционом бироу, а истовремено је радио хонорарно у предузећу "Алат" на конструкцији машина. По тражењу Комитета за радио службу при Влади ФНРЈ радио је хонорарно као сарадник Дирекције за производњу радио апарата.

Д. П. Рашковић је на Машинском факултету у Београду предавао Механику, Отпорност материјала и Теорију осцилација. Сем тога хонорарно је предавао механику на Природно-математичком факултету у Београду и Примењену математику на Филозофском факултету у Новом Саду. Био је шеф Катедре за математичко-физичке науке на Машинском факултету у Београду.

Из документације Машинског факултета у Београду и упитника налазимо и следеће податке: *Знање језика*: непотпуно: француски, немачки, италијански, енглески, као и да се служи руском литературом. Такође тамо постоје подаци да су чланови професорове породице: Марија (1912) супруга и три кћери: Љубица (1940), Мирјана (1944) и Ферн (1946). На питање: "За коју службену делатност има највише способности?" одговорио је: **за *наставничку и конструкције машина***, док је на питање, да ли се бави научним радовима и којим, одговорио је: *Теорија еластичности и механика.*

У 1951 години, Решењем бр. 16578 од **1 августа 1951**. потврђује се постављење др Инг Данила Рашковића на положају продекана Машинског факултета. Из сличног решења од 25 јуна 1958. године се види да је и тада био на положају продекана факултета и шефа Катедре за физичко-математичке науке.

У периоду од школске 1963/64. до 1973/74. године био је шеф Катедре за механику Машинског одсека Техничког факултета у Нишу, а истовремено држао наставу из свих предмета групе за механику. Упоредо, је држао наставу механике и на техничким факултетима у Крагујевцу и Мостару, као и у једном периоду наставу примењене математике на Природно-математичком факултету у Новом Саду. Овај посао у Нишу је прихватио, после разрешења дужности наставника на Машинском факултету у Београду. Поменуто разрешење извршено је на основу решења Машинског факултета у Београду бр. 67/8 од јануара 1964. Суд о тој контраверзној одлуци препуштамо другима. О том предмету упућујемо читаоце на књигу [*].

У 1974/75 години био је ухапшен и неправедно осуђен. После тога је радио на припремама нових издања својих високо тиражних уџбеника, међу којима истичемо десето издање универзитетског уџбеника Механика I, као и петањесто издање приручника Таблице из Отпорности материјала. У последњим месецима живота радио је на припреми за штампу уџбеника Теорија еластичности, који је оштампан 1985. године, али који није доживео да види.

Умро је, неочекивано, 29. јануара 1985. године у Београду.

Професор Данило Рашковић је добитник Октобарске награде града Ниша, за доприносе у науци и Универзитету у Нишу, у то време највећег признања које може доделити један град.


ж

а* б*

Слика 1. Професор Данило Рашковић са колегама (а*) у слободном времену и у дружењу и (б*) на радном састанку (први с десна, док је други с десна Татомир П. Анђелић, птофесор механике Природно-математичког факултета у Београду).

Персонални лист серија: 503 294, број: 47213, садржи сличне податке као и Службенички лист, а и архивска фасцикла службеника Машинског факултета у Београду. Општи упитник, који је др dipl. Math. Данило Рашковић попунио 9. децембра 1946. године у својству *сталног хонорарног наставника пете положајне групе у рангу доцента* садржи следеће податке:

У рублици под бројем 12 на питање: "За коју службену делатност има највише способности?" одговорио је: **за *наставничку и конструкције машина.***

На питање, да ли се бави научним радовима и којим, одговорио је: *Теорија еластичности и механика.*

На питање под 16. Учешће у НОП написао је одговор: 1941 у Ужицу и Чачку као инжењер у фабрици. Одступио са партизанима, али ухваћен од Немаца.

У простору за биографију Д. Рашковић је својеручно уписао следеће:

Родитељи су ми Петар, абаџија из Ужица, и Љубица Перовић, сестра филозофа песника Др Милоша Перовића (Студију о њему дао Др. Д. Ненадовић). Родитељи су ми били врло сиромашни, а ја сам био **једанаесто** дете. И поред тегобног живота, као радознао у стицању нових знања и марљив према својим обавезама, био сам увек скроз одличан ђак. Са одличним успехом завршио сам шести разред гимназије и немајући средстава за даље школовање ступио сам 1927 године у 55 класу војне академије, из које сам изашао 1930. године. Немајући воље за официрским позивом положио сам седми и осми разред гимназије и као војни питомац завршио Технички факултет, а затим продужио студије на Филозофском факултету (математичка група), коју сам апсолвирао 1941. године, јануара. Као инжењер радио сам у Заводу "Чачак" и био сам симпатизер радничког покрета. За време рата био сам на истој дужности и заједно са радницима одступао ка Сарајеву. У циљу да алат не падне у руке Немцима делио сам га радницима, те сам од стране пуковника Шашкијевића ожален као "црвењак" и предат Немцима. За време народног устанка ставио сам се НОП-у на расположење у Чачку и Ужицу и радио као инжењер, те и одступио, али сам ухваћен на Муртеници и био затворен од Немаца. Спроведен сам у Београд. За време окупације мучио сам се, продавао покућство и поред тога жељан науке радио на докторској дисертацији коју сам одбранио са 10 (испит ми је признат). По ослобођењу мобилисан сам као инжењер у фабрици "Рогожарски" ради израде понтона и одмах постављен за асистента Техничког факултета. Радио сам на изради машина за војску и стругова за индустрију. Од 1 октобра 1946 постављен сам за сталног хонорарног наставника Пете положајне групе у рангу доцента за предмет Техничка механика. Сем тога предајем у Средњој техничкој школи и у Стручној занатској школи четвртог реона. Свакодневно радим на научном усавршавању. На факултету предајем четири предмета на машинском одсеку: Механику, Отпорност материјала, Статику и Хидромеханику. Члан сам фронта и секције за радно право синдикалне подружнице."

ПРВА ПРОМОЦИЈА ЗА ДОКТОРА ТЕХНИЧКИХ НАУКА

Чин промоције за доктора техничких наука дипломираног машинског инжењера и дипломираног математичара филозофског факултета Универзитета у Београду, господина Данила Рашковића, асистента Техничког факултета у Београду, 1944. године, отпочео је извештајем испитне комисије о животу и раду г. Рашковића, затим наставио оценама о научној вредности његове докторске дисертације и о усменом испиту - одбрани дисертације коју је дао пред комисијом.

Тада је речено да се 1943. године г. Рашковић уписао на докторски курс техничког факултета при Катедри Техничке механике, који завршава израдом докторске тезе по проблему: "Тангенцијални напони греде нормалног профила". Тезу је бранио и одбранио 21 јуна 1944. године, пред комисијом коју су чинили: редовни професори Техничког факултета господа: *др Иван Арновљевић, Јаков Хлитчијев и др Радивоје Кашанин*, а под председништвом декана Техничког факултета. Господин Рашковић је тада дао примерну одбрану своје дисертације у сваком погледу, што је потврдило његову велику научну и стручну спрему и потпуну самосталност и оригиналност његовог дисертационог рада. Комисија је после овога оценила дисертацију г. Рашковићеву једногласном оценом одличан.

Приликом те, прве, промоције Данила Рашковића за доктора техничких наука, 1944. године, под председништвом декана Велике техничке школе, између осталог, председник комисије је рекао и слеће:

"Из свега сажетог прегледа рада г. Рашковићевог, који углавном обухвата последњих петнаест година његовог живота, од дана ступања у Војну академију, а то је време његова школовања, личног формирања и усавршавања и досадашњег службовања, даду се уочити неколике карактеристичне одлике његове личности, које желим истаћи.

1* Г. Рашковић је жедан сазнања. Он је свршио са успехом једну стручну и две највише школе, нижу школу војне академије и Технички и Филозофски факултет Универзитета. Према томе он се оспособио да постане спреман артиљерац, одличан инжењер и одличан математичар. Г. Рашковић има подобности да постане мајстором.

2* Г. Рашковић за ово време је положио поред наведених, још низ других испита који доказују његову сталну бригу и вољу да допуни и прошири своје лично образовање и да се оспособи за практичан рад на пољу војном и техничком, ако то устреба. Он према томе има смисла за усавршавање и реално стварање.

3* Г. Рашковић је, међутим од ступања на Технички факулет до данас, израдио читав низ стручних и научних радова, од којих је пет објавио. Он је тиме посведочио да се његове поглавите симпатије окрећу према техници и науци, што потврђује и његово опредељење за педагошку универзитетску каријеру. Ови његови радови су скренули пажњу на себе, његових професора, ширих научних и стручних кругова својом темељношћу и обиљем.

Из свега овога, оваквог рада и развитка г. Рашковићевог, обелодањује се његова јака индивидуалност - он очевидно иде својим путем. Његово прво војничко васпитање, које је имало да од њега створи дисциплинованог војника, а не слободног научника, није угушило његову индивидуалност. Оно му је међутим дало оно што је најбоље имало, наиме, систематичност у раду, самодисциплину и преданост послу.... ".

Даље је истакнуто је да је докторску дисертацију господин Д. Рашковића, израдио у потпуности сам, као и да осим постављеног проблема она обухвата још један проблем, који би могао да се издвоји у предмет посебне расправе, наиме, "Једначине равнотеже еластичног тела у векторском облику".

О самој дисертацији господа референти су се изразили на начин који заслужује нарочиту пажњу.

Професор господин др Радивоје Кашанин је рекао да се проблем, који је узео да решава господин Рашковић, своди на једну диференцијалну једначину првог реда, коју је немогуће решити у затвореном облику. Указао је затим, да је могуће аналитичким путем испитати природу њених решења и нумеричким интеграљењем наћи оно решење које испуњава унапред задате почетне и граничне услове. Оценио је да је оба ова посла г. Рашковић са успехом обавио. Наиме, ослањајући се на општу Cauchy-јеву теорему о егзистенцији решења и на теореме Врио-Букеа, г. Рашковић је извео једнозначност решења и испитао природу тог решења у околини есенцијалне сингуларне тачке, која се у решењу појављује. Том приликом г. Рашковић је показао да влада добром и сигурном теоријском спремом у математичкој анализи, коју зна и уме да примени на конкретне проблеме и да ове реши, као и да састави таблице и графиконе. На крају је закључио да је, овом својом дисертацијом, г. Рашковић показао да може самостално и са успехом да ради на науци и да влада за тај посао потребним научним апаратом.

Професор Јаков Хлитчијев, образлажући своје позитивне оцене о дисертацији, рекао да се, за изучавање тангенцијалних напона код греда, инжењери служе приближним обрасцем Журавског, који је изведен из више или мање произвољних претпоставки. Истакао је да се мера тачности тог обрасца може да утврди његовим упоређењем са тачним решењем истог проблема, које би било ослобођено од тих претпоставки. Овакво решење за задати облик пресека греде изискује изналажење т.зв. "*Saint Venant-ове функције напона*" или интеграљење дате парцијалне диференцијалне једначине уз дати услов на контури пресека. Међутим, најважнији за технику облик пресека греде састављен од два појаса и ребра (I) још чека на своје решење, истакао је тада професор Хлитчијев, као да је дисертација г. Рашковића је значајан корак ка решењу тог проблема. Даље је оценио да је докторанд пронашао нумеричким интеграљењем познате диференцијалне једначине низ "линија напона" за правоугаони пресек, и да ће те линије које је он нацртао ући ће у уџбенике Теорије еластичности упоредо са познатим сличним линијама за кружни пресек. Те резултате Хлитчијев је приказао и цитирао у свом објављеном уџбенику из Теорије еластичности. Рашковић полази од основних једначина теорије еластичности, које изводи помоћу рачуна са диадама, затим излаже *Saint Venant*-ов проблем, изводи диференцијалну једначину линија напона и објашњава како би се она могла интегралити помоћу редова.

На основу одредаба чланова 76, 77 и 82. Опште уредбе о Универзитету, која декану "*стављају у дужност и дају му право*" да у име испитне комисије и Савета Техничког факултета приступи чину промоције доктора и проглашења г. Рашковића доктором техничких наука поставио је докторанду неколико питања на која кандидат одговара са: "*Да, господине Декане*".

После позива Декана да кандидат изговори заклетву, кандидат је изговорио следећу заклетву:

" Ја, Данило Рашковић, заклињем се Свемоћним Богом, да ћу као доктор технике чувати углед науке и Универзитета, да ћу живети часним животом и да ћу увек и свуда бранити истину".

Декан Техничког факултета, предајући диплому, између осталог, је упутио и следеће новом доктору техничких наука Данилу Рашковићу: "....изражавам наду, да ће Вас Ваш досадашњи рад и Ваши досадашњи успеси стално бодрити и потстицати на даље усавршавање у будућности која је пред Вама. Ова школа, чији сте чалн има разлога да се поноси Вама и да Вам омогући најпотпунији развитак. На Вама је да дар, којим Вас је провиђење обдарило сачувате, развијете и принесете у виду нових дела као своју жртву своме народу и човечанству. Нека Вас прати срећа на овом путу."

НАУЧНИ РАД

Д. Рашковић је завршио израду докторске тезе са темом: "*Тангенцијални напони греде нормалног профила*". Тезу је одбранио 21 јуна 1944. године, пред комисијом коју су чинили: редовни професори Техничког факултета: *др Иван Арновљевић, Јаков Хлитчијев и др Радивоје Кашанин.* Комисија је тезу оценила једногласном оценом одличан.

Професор Кашанин је истакао да се проблем, који је узео да решава господин Рашковић, своди на једну диференцијалну једначину првог реда, коју је немогуће решити у затвореном облику. Указао је затим, да је могуће аналитичким путем испитати природу њених решења и нумеричким интеграљењем наћи оно решење које испуњава унапред задате почетне и граничне услове. Оценио је да је оба ова посла г. Рашковић са успехом обавио.

a*

б*

Слика 2. Професор Рашковић са колегама на научним конгресима: Немачног друштва за механику ГАММ у Сарбрикену 1958. (а*) и Интернационалној конференцији за нелинеарне осцилације ICNO Киев 1968 (б*).

Професор Хлитчијев је оценио да је докторанд пронашао, нумеричким интеграљењем, познате диференцијалне једначине низ "линија напона" за правоугаони пресек, и да ће те линије које је он нацртао ући у уџбенике Теорије еластичности, упоредо са познатим сличним линијама за кружни пресек. Те резултате Хлитчијев је приказао и цитирао у свом уџбенику из Теорије еластичности.

Области научног рада и доприноси професора Рашковића се могу поделити у неколико целина: *Научно-методолошки доприноси и унапређење наставе механике; Теорја еластичности; Теорија осцилација; Аналогије модела; и Графичке методе. Већина његових радова је приказана у рефералним публикацијама, а посебно у бази ZentralBlatt-a.*

а* *Теорја еластичности.*

Научне доприносе из области теорије еластичности Д. Рашковић је дао кроз своју докторску тезу и радове публиковане 1944, 1947, 1948, 1949. Аналитичким путем је испитао природу решења једне диференцијалне једначине, која се не може решити у затвореном облику и чије је решење нашао нумеричком интеграционом методом. Линије напона штапа правоугаоног попречног пресека, који је оптерећен на савијање, чије се тангенте у свакој тачки поклапају са правцем тангенцијалних напона.

Излажући савремену хипотезу о кидању материјала (Hubert-Hencky) према којој је девијатор стања напона и стања деформација представник специфичних деформација променом облика, Д. Рашковић је извео везу између девијатора и потенцијала еластичног тела у дијадском облику.

Извео је основне једначине еластичности у векторском облику и дао је општи облик разним физичким законима помоћу тензора и дијада и први је извео Beltrami-јеве једначине у оваквом облику.

Дао је допринос изучавањем једног сингуларитета функције савијања греде правоугаоног попречног пресека. Користио је при томе Briot-Bouquet-овом методом, и помоћу три нове смене показао да је тачка пресека x=a , z=0 есенцијални сингуларитет интеграла диференцијалне једначине линија тангенцијалног напона греде правоугаоног попречног пресека, оптерећене на савијање.

б* *Теорија осцилација*.

Највећи број публикованих радова Д. Рашковића је из области теорије осцилација (од 1953., 1954., 1956., затим сваке године по један публикован рад до 1966.).

Примењујући методу једначина коначних разлика на случај торзијских осцилација вратила са више дискова, показао је њену аналогну сличност са Clapeyron-овом "*једначином трију момената*", која се може применити за решавање задатака торзијских осцилација хомогених машина. За различите граничне услове извео је фреквентне једначине у трансцедентном облику и одредио сопствене кружне фреквенције осциловања.

Указао је и на извесне занимљиве особине коефицијената фреквентних полинома. Извео је рекурентне формуле за фреквентне једначине, као и тригонометријске релације и доказао их помоћу Lagrange-ове формуле и мултипликационе формуле Гама функција.

Под насловом *Мале осцилације конзервативног система* са двојним статичким везама, размотио је проблем малих осцилација таквог система у матричном облику. Показао је да се трансформацијама задатак своди на проблем са сопственим вредностима, а помоћу Newton-ове методе одредио границе за сопствене вредности. Извео је низ образаца о збировима комбинација извесних тригонометријских релација.

Проучавајући утицај инерције обртања и смицања попречних пресека на трансверзалне осцилације греде, дао је свој допринос извођењем парцијалне диференцијалне једначине са одговарајућим граничним условима користећи при томе варијациони рачун. Извео је при томе за 25 карактеристичних случајева ослањања греда фреквенте једначине и нормалне функције. Проширио је Крилов-љеву таблицу интеграла потребних за срачунавање решења задатака са принудним осцилацијама. За сложеније граничне услове извео је опште фреквентне једначине и одредио нормалне функције, што је од значаја за одређивањае својстава осцилација брзих учестаности, и за примене у ваздухопловству.

Увео је једну тригонометријску методу за одређивање кружних фреквенција осцилација хомогених машина. Извео је фреквентне једначине и изразе за одређивање сопствених вредности и дао начин за њихово графичко одређивање. Извео је тригонометријске релације и нове односе између биномних коефицијената и показао како се добијају рекурентне формуле и открио својства њихових коефицијената, за случај осцилација једне класе конзервативних система са двојним статичким везама.

Изучавајући трансверзалне осцилације лаких континуалних носача са концентрисаним масама, применио је матричну методу и одредио утицајне коефицијенте континуалног и статички неодређеног носача, не одређујући претходно непознате статичке реактивне параметре.

Увео је један векторски начин за одређивање сферних координата вектора брзине и убрзања методом релативног кретања и показао да контраваријантне и коваријантне координате ових вектора имају физичко значење.

У раду који је саопштио 1956. године на конгресу у Бриселу о проблему осциловања троугаоне плочице уклештене на једном крају у условима отпора сразменог брзини, користио је Галеркин-ову методу и нормалне функције хомогених греда и проучио случјеве осциловања симетричних и кососиметричних троугаоних плоча. Теоријске резултате је упоредио са експерименталним. Ови његови резултати, су имали значај за примене на динамику и осциловање гибњева, те су изазвали пажњу стручњака из General Electric Company, New York, USA, оделења за турбине, који су аутору поводом тога упутили писмо за сарадњу.

Професорови резултати истраживања обухватају и трансверзалне осцилације хомогених греда на еластичним лежиштима, како и константног, тако и промењивог попречног пресека, а исто тако и са различитим граничним условима, који обухватају случајеве еластичних уклештења, од значаја за машинску праксу.

За једну класу специјалних осцилаторних система са динамичким везама извео је рекурентне формуле за фреквентне једначине и протумачио особине фреквентних полинома за случај вишеструких математичких клатна, тако да је проблем свео на Lageur-ов ортогонални полином, који се може сматрати као карактеристичним полиномом једне специјалне Jaccobi-јеве матрице. Извео је одговарајуће рекурентне обрасце за осцилаторни систем вишеструких физичких клатна, и показао да то више нису ортогонални полиноми. Изнео је у овом раду своју оригиналну методу.

ц* *Аналогије модела.*

У оквиру рада *Једна аналогија у механици* доказао је да је динамички проблем одређивања центра удара сличан статичком проблему о одређивању језгра пресека, који је опет аналоган геометријском проблему одређивања пола и антипола елипсе инерције. У овом раду повезује статички проблем са динамичким, ради одређивања кинетичких притисака на лежишта, што је од великог значаја за техничку праксу.

д* *Графичке методе.*

Поставио је један графички начин за одређивање положаја неутралне осе при косом савијању и ексцентричном притиску и показао да инваријанте момената инерције имају своје геомтријско значење. Такође је поставио један начин за одређивање положаја тежишта делова хомогене сфере и обртног елипсоида (рад из 1954.). И ове резултати су од значаја и за наставу механике и за техничке примене.

Видимо да је проф. др Рашковић дошао до оригиналних резултата из области теорије еластичности, почевши истраживања на докторској дисертацији, када се бавио проблемима статике еластичних тела, затим преко резултата везаних за графичке и аналитичке методе и налазећи математичке аналогије проблема у статици, динамици и отпорности материјала о геометријским својствима пресека конструкција, прешао на проблеме осцилација механичких система са дискретним материјалним тачкама и континуалним масама, и са различитим статичким и динамичким везама и граничним условима.

Анализом његових уџбеника, као и уџбеника проф. Ј. Хлитчијева, видимо да је *већина његових резултата*, које је публиковао или саопштавао на међународним конгресима или и седницама Оделења у Математичким институту САН, одмах укључена у његове уџбенике и постала је доступна студентима. То се посебно односи и на његове тезултате из доктората, из теорије еластичности.

Треба истаћи да је у уџбеник Теорије осцилација укључио већину својих ранијих оригиналних резултата истраживања из осцилација конзервативних система са дискретним материјалним тачкама и система везаних крутих тела, као и осцилација еластичних тела са различитим граничним условима. Прикази резултата доведени су до методолошког савршенства и укључени су у градиво наставе и на редовним и на последипломским студијама. Ти резултати се истичу кроз додипломску и последипломску наставу, коју је држао у последњој деценији свог рада, на машинском одсеку Техничког факултета у Нишу.

Д. Рашковић је увек тражио математичку аналогију и феноменолошко пресликавање модела из разних области механике да би то показао студентима, као да је био под идејним утицајем теоријског дела Михајла Петровића - Аласа из феноменолошког пресликавања, дајући му одговарајуће примене у мехници и шире у инжењерству. То је веома значајно јер омогућава спознају *филозофије рационалног размишљања и анализирања проблема*, откривањем вишеслојности примене математичког модела на системе диспаратних природа и области.

Значајан је допринос Д. Рашковића формирању школе нелинеарне механике на Машинском факултету у Нишу, што је постало видљиво тек после две деценије од времена његовог рада утемељења. За период од десет година рада, на Машинском факултету у Нишу, професор Рашковић је покренуо научна истраживања из области нелинеарне механике. Он је покретач увођења последипломских студија на Машинском одсеку Техничког факултета у Нишу. Кроз те последипломске студије и орјентацију младих сарадника на истраживања и њихова усавршавања у иностранству на водећем Институту Математике АН УССР, под менторством истакнутог научника и академика Јурија Алексејевича Митрополског, настављача школе нелинеарне механике и асимптотских метода Крилова и Богољубова, Д. Рашковић је допринео усавршавањз младих и створио кадровску основу за даља истраживања из области нелинеарне механике на Универзитету у Нишу. Професор Рашковић је својим сарадницима остварио и прве научне комуникације са научницима из Пољске и Немачке.

Учешће др Д. Рашковића у раду новооснованог Математичког института САН у Београду је вредно пажње, тим више што је за то време саопштио већи број научних резултата из области механике. Већ на деветој седници Већа Математичког института од 7. фебруара 1947. године, којој је председавао академик Антон Билимовић, др Данило Рашковић је у својству госта Института, саопштио рад под називом: "*Потенцијал еластичних тела у дијадском облику*". У периоду од априла 1947. године до јануара 1964. године одржао је 22. научна саопштења. 8. маја 1963 године Т. Анђелић, Д. Рашковић и В. Саљников су изложили на седници Оделења Извештај са Конгреса немачког друштва за примењену математику и механику GAMM одржаног у Карлсруе Западна Немачка. После низа предавања истичемо и саопштење од 11 маја 1965. под називом: *Гироскопски трзај.* Према докуметацији ово је и његово последње саопштење у Математичком институту САН.

У 1962 години проф. др Данило Рашковић, као управник Оделења за механику Математичког института САНУ, је организовао истраживања у *четири научно-истраживачке групе*: *Групу за проблеме стабилности кретања под* руководством *проф. др Вељка Вујичића, Групу за теорију гарничног слоја* под руководством *др Виктора Саљникова, Групу за проблеме анизотропних инкомпатибилних материјала са коначним деформацијама* којом је руководио *др Растко Стојановић и Групу за оптималне проблеме механике* коју је водио *проф. др. Данило Рашковић.*

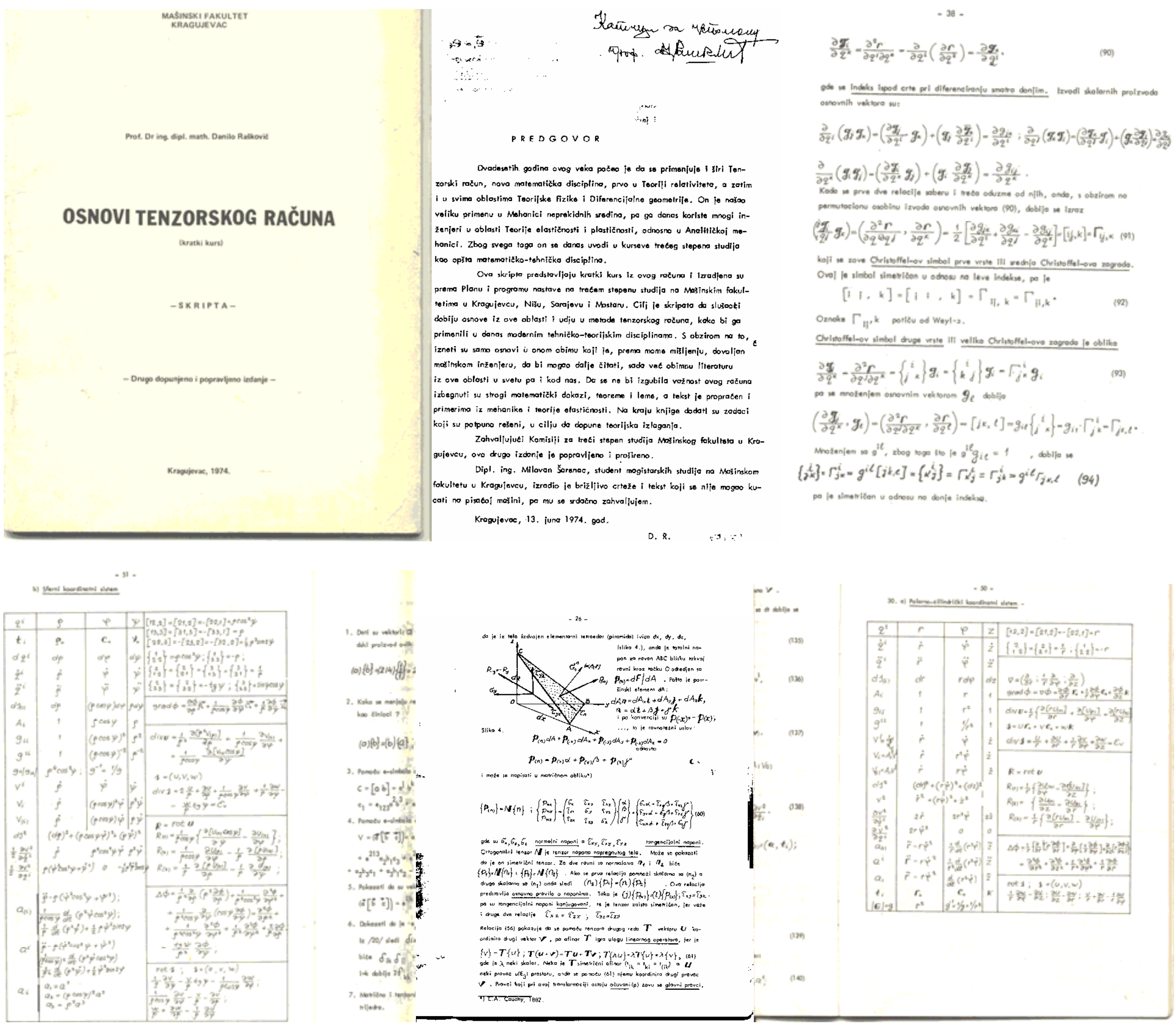
Из документације Машинских факултета у Београду и Нишу, као и из базе података ZentralBlatt-a сазнајемо да је боравио више пута у иностранству ради учешћа у међународним научним скуповима или усавршавању: тако је у 1957. години био у Берлину на стручном усавршавању; са радом који је публикован у Proceedings of XX International Congress of Appled Mechanics; Sept. 1956, у Брисселу је учествовао у раду назначеног конгреса; већи број пута је учестовао са саопштењима у раду међународних конгреса примењене математике и механике немачког друштва GAMM и то: 1957. у Хамбургу; 1958 . у Сарбрикену; затим 1959. , 1961. и 1962. као делегат Југословенског друштва за механику; 1963. у Карлсруе као делегат Математичког института САН; 1966. у Дармштату, где "*даје научно саопштење из области теорије осцилација*"; 1968. у Прагу у Чехословачкој са научним радом "Убрзање другог реда (трзај) релативног кретања тела изражено матричном методом".

Такође већи број пута учествује у раду Интернационалне конференције Нелинеарних осцилација ICNO и то: **1962**, у Варшави, као делегат Савета за научни рад НР Србије; 1969. у Киеву; и 1972 на ICNO Cracow **72** са коауторским радом заједно са К. Стевановић

НАСТАВНО-НАУЧНИ РАД И УНИВЕРЗИТЕТСКИ УЏБЕНИЦИ

Проф. Рашковић је предавао на Машинском факултету у Београду следеће предмете: *Механика, Отпорност материјала и Теорија осцилација*. Поред тога предавао је материју из ових области на Машинским факултетима у Нишу, Крагујевцу и Новом Саду и Мостару, Природно-математичком факултету у Београду, Филозофском факултету у Новом Саду, Електронском факултету у Нишу и на Вишој Војно-техничкој школи у Београду. Детаљни подаци о научно-наставном раду проф. Д. П. Рашковића могу се наћи у Билтену Универзитета у Београду бр. 75 од 1957. године, написаном поводом расписаног конкурса за редовног професора за Механику. Према сећању академика Милеве Првановић, проф. Рашковић је био међу првим хонорарним наставницима на групи за математику Филозофског факултета у Новом Саду и био је ангажован за предмет Примењена математика.

На Машинском одсеку Техничког факултета у Нишу, и касније на Машинском факултету у Нишу, држао је наставу *и на постдипломским студијама и то из предмета: Аналитичка механика, Теорија нелинеарних осцилација и Механика континуума.* Био је први шеф Катедре за механику и аутоматику Машинског факултета у Нишу. Био је изузетно надахнут професор, научник и практичар, који је био омиљен код студената, а уважаван од својих колега овог факултета, као и инжењера из праксе, јер је умео да повеже теорију и праксу у области техничких наука.



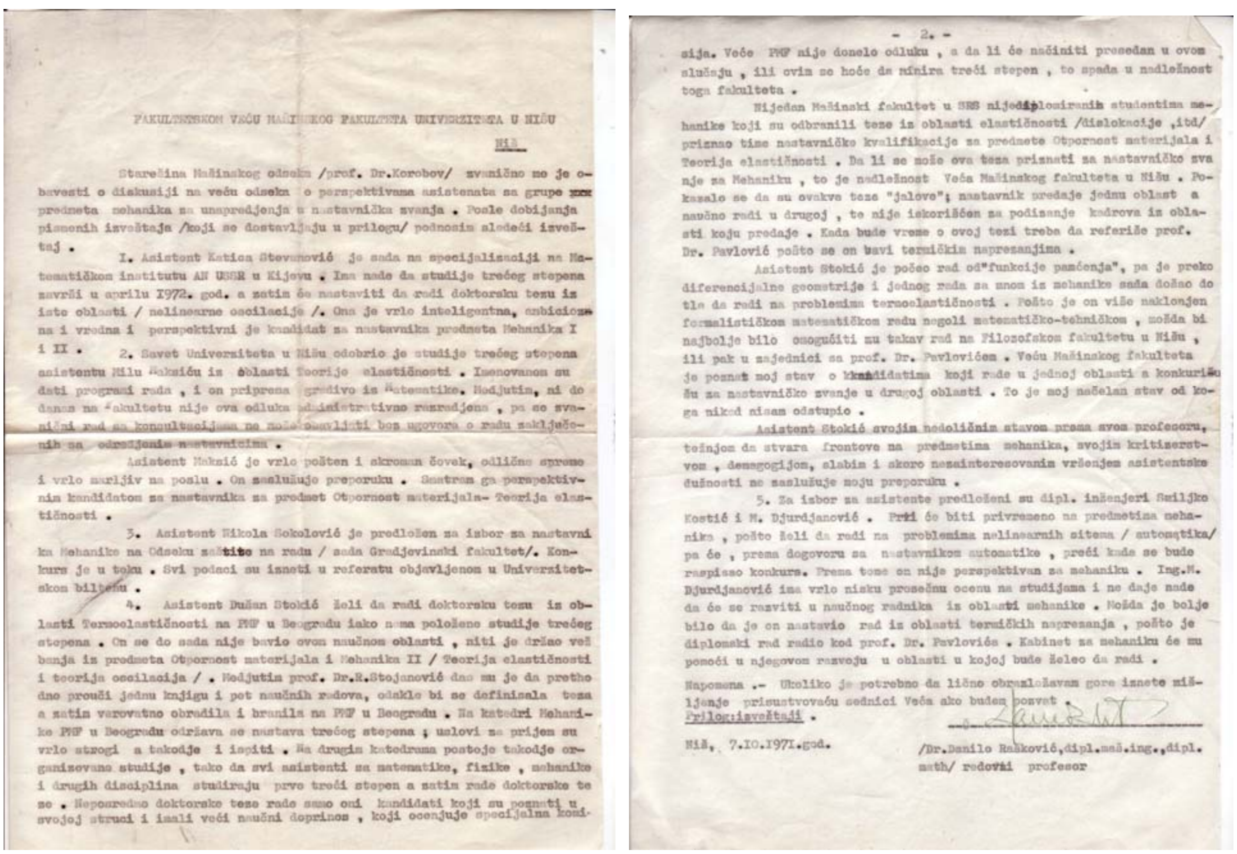
Слика 3. Неколико страница универзитетске публикације професор Данила Рашковића под називом *Основи тензорског рачун*а, коју је написао за студенте последипломских студија механике и која је стилом прилагошена инжењерима за лако разумевање и усвајање основа тензорског рачуна. Формуле је својеручно уисао, а текст откуцао сам на својој писаћој машини.

После избора у звање редовног професора проф. Рашковић је радио интензивно на објављивању универзитетских уџбеника из предмета, које је предавао, као и на допунама универзитетских публикација и уџбеника који су доживљавали поновљена издања. Био је изузетан интелектуалац, широке културе и образовања и познавалац разних области наука. Имао је способност да кроз наставу механике подиже ниво знања студената технике из математике, а да истовремено направи везу са одговарајућим техничким системима. Његова предавања су била "*математика кроз механику*" и "*механика за инжењерске системе*", "*математичко приказивање конструкције*" како су неки његови талентовани студенти описивали његова предавања и уџбенике. Изражавао је изузетну способност да дочара физички модел инжењеријског система и повеже га са математичким моделом, који на логичан и функционалан начин у потпуности описује сва својства инжењерских феномена.

И његови уџбеници личе на његова предавања, јер тако су и писани.

Прва три издања, уџбеника Механика I (Статика) објављена су у издању "Научне књиге" у укупном тиражу од 18.000 примерака. Треће издање садржи додатак: Основи векторског рачунања - векторска алгебра. Може се слободно закључити да је тираж овог уџбеника достигао цифру од око 40.000 примерака.

Прва два издања уџбеника Механика II (Кинематика) изашла су у тиражу од 13.000 примерака. Градиво је поделио на Кинематику тачке и Кинематику крутог тела, чиме је, како пише: "обухватио све кинематичке проблеме, са нешто широм разрадом равног кретања, које ће послужити као основ за проучавање кинематике механизама." У прилогу ова књига садржи векторску анализу, примене вектора у диференцијалној геометрији и теорију поља. У рукопис *другог издања* Кинематике унете су допуне које садрже: 1* Компоненте вектора убрзања у криволинијским координатним системима: поларно-цилиндричком и сферном систему координата, као и генералисаном систему координата, а такође и природне компоненте вектора убрзања, са одговарајућим примерима; 2* *Euler*-ове формуле обртања тела око непомичне осе; 3* Кулисни механизам; 4* Зглоб *Kardana Hook-a*. И у овој књизи остао је доследан *Lorentz*-овом обележавању векторских величина.



FAKULTETSKOM VEĆU MAŠINSKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U NIŠU

NIŠ

Starešina Mašinskog odseka /prof. Dr.Korobov/ zvanično me je obavesti o diskusiji na veću odseka o perspektivama asistenata sa grupe ~~xxx~~ predmeta mehanika za unapredjenja u nastavnička zvanja . Posle dobijanja pismenih izveštaja /koji se dostavljaju u prilogu/ podnosim sledeći izveštaj .

I. Asistent Katica Stevanović je sada na specijalizaciji na Matematičkom institutu AN USSR u Kijevu . Ima nade da studije trećeg stepena završi u aprilu 1972. god. a zatim će nastaviti da radi doktorsku tezu iz iste oblasti / nelinearne oscilacije /. Ona je vrlo inteligentna, ambiciozna i vredna i perspektivni je kandidat za nastavnika predmeta Mehanika I i II .

2. Savet Univerziteta u Nišu odobrio je studije trećeg stepena asistentu Milu Maksiću iz oblasti Teorije elastičnosti . Imenovanom su dati programi rada , i on priprema gradivo iz Matematike. Medjutim, ni do danas na Fakultetu nije ova odluka administrativno razradjena , pa se zvanični rad sa konsultacijama ne može obavljati bez ugovora o radu zaključenih sa odredjenim nastavnicima .

Asistent Maksić je vrlo pošten i skroman čovek, odlično spreme i vrlo marljiv na poslu . On zaslužuje preporuku . Smatram ga perspektivnim kandidatom za nastavnika za predmet Otpornost materijala- Teorija elastičnosti .

3. Asistent Nikola Sokolović je predložen za izbor za nastavnika Mehanike na Odseku zaštite na radu / sada Gradjevinski fakultet/. Konkurs je u toku . Svi podaci su izneti u referatu objavljenom u Univerzitetskom biltenu .

4. Asistent Dušan Stokić želi da radi doktorsku tezu iz oblasti Termoelastičnosti na PMF u Beogradu iako nema položene studije trećeg stepena . On se do sada nije bavio ovom naučnom oblasti , niti je držao vežbanja iz predmeta Otpornost materijala i Mehanika II / Teorija elastičnosti i teorija oscilacija / . Medjutim prof. Dr.R.Stojanović dao mu je da prethodno prouči jednu knjigu i pet naučnih radova, odakle bi se definisala teza a zatim verovatno obradila i branila na PMF u Beogradu . Na katedri Mehanike PMF u Beogradu održava se nastava trećeg stepena ; uslovi za prijem su vrlo strogi a takodje i ispiti . Na drugim katedrama postoje takodje organizovane studije , tako da svi asistenti sa matematike, fizike , mehanike i drugih disciplina studiraju prvo treći stepen a zatim rade doktorske teze . Neposredno doktorske teze rade samo oni kandidati koji su poznati u svojoj struci i imali veći naučni doprinos , koji ocenjuje specijalna komi-

- 2. -

sija. Veće PMF nije donelo odluku , a da li će načiniti presedan u ovom slučaju , ili ovim se hoće da minira treći stepen , to spada u nadležnost toga fakulteta .

Nijedan Mašinski fakultet u SRS nije diplomiranim studentima mehanike koji su odbranili teze iz oblasti elastičnosti /dislokacije ,itd/ priznao time nastavničke kvalifikacije za predmete Otpornost materijala i Teorija elastičnosti . Da li se može ova teza priznati za nastavničko zvanje za Mehaniku , to je nadležnost Veća Mašinskog fakulteta u Nišu . Pokazalo se da su ovakve teze "jalove"; nastavnik predaje jednu oblast a naučno radi u drugoj , te nije iskorišćen za podizanje kadrova iz oblasti koju predaje . Kada bude vreme o ovoj tezi treba da referiše prof. Dr. Pavlović pošto se on bavi termičkim naprezanjima .

Asistent Stokić je počeo rad od"funkcije pamćenja", pa je preko diferencijalne geometrije i jednog rada sa mnom iz mehanike sada došao do tla da radi na problemima termoelastičnosti . Pošto je on više naklonjen formalističkom matematičkom radu negoli matematičko-tehničkom , možda bi najbolje bilo omogućiti mu takav rad na Filozofskom fakultetu u Nišu , ili pak u zajednici sa prof. Dr. Pavlovićem . Veću Mašinskog fakulteta je poznat moj stav o kandidatima koji rade u jednoj oblasti a konkurišu za nastavničko zvanje u drugoj oblasti . To je moj načelan stav od koga nikad nisam odstupio .

Asistent Stokić svojim nedoličnim stavom prema svom profesoru, težnjom da stvara frontove na predmetima mehanika, svojim kritizerstvom , demagogijom, slabim i skoro nezainteresovanim vršenjem asistentske dužnosti ne zaslužuje moju preporuku .

5. Za izbor za asistente predloženi su dipl. inženjeri Smiljko Kostić i M. Djurdjanović . Prvi će biti privremeno na predmetima mehanike , pošto želi da radi na problemima nelinearnih sistema / automatika/ pa će , prema dogovoru sa nastavnikom automatike , preći kada se bude raspisao konkurs. Prema tome on nije perspektivan za mehaniku . Ing.M. Djurdjanović ima vrlo nisku prosečnu ocenu na studijama i ne daje nade da će se razviti u naučnog radnika iz oblasti mehanike . Možda je bolje bilo da je on nastavio rad iz oblasti termičkih naprezanja , pošto je diplomski rad radio kod prof. Dr. Pavlovića . Kabinet za mehaniku će mu pomoći u njegovom razvoju u oblasti u kojoj bude želeo da radi .

Napomena .- Ukoliko je potrebno da lično obrazložavam gore iznete mišljenje prisustvovaću sednici Veća ako budem pozvat .

Prilog:izveštaji .

Niš, 7.10.1971.god.

/Dr.Danilo Rašković,dipl.maš.ing.,dipl. math/ redovni profesor

Слика 4. Писмо професора Данила Рашковића, упућено старешини Машинског одсека професору др Јурију Коробову, на његов захтев, у коме даје своје мишљење о перспективности усавршавања и развоја и способности асистената и сараднука Катедре за механику Машинског одсека Техничког факултета у Нишу да се развију у научнике у области механике и постану компетентни универзитетски наставници у области механике. Протекли период од четрдесетак година после датог мишљења о асистентима, на основу резултата у науци и настави које су оставили у наслеђе показује се да је концепција и критеријуми које је применио да оцени перспективност у науци својих асистената и сарадника исправним.

Прва два издања, из 1947-48. и 1956. године уџбеника Механика III (Динамика) су објављена у укупном тиражу од 10.000 примерака. Следећа издања су излазила из штапме редом у 1962., 1972., 1973. години. Укупан тираж је око 19.000. примерака. Као додатке у овом, трећем делу налазимо: Основи теорије потенцијала, Моменти инерције и Механика сличности. Кроз целу серију од три уџбеника механике у додацима су изабрана поглавља математике, поред поменутих још и Основи варијационог рачуна. Четврто издање из 1972. уџбеника Механика III (Динамика) садржи и "*проблеме сателита и ракета*", и нови члан који се односи на коваријантне и контраваријантне једначине кретања.

Следећи универзитетски уџбеник, Отпорност материјала доживео је десет издања од 1954. до 1984. у укупном тиражу око 25.000 примерака.

Таблице из Отпорности материјала штампају се, 1961. године, као стални уџбеник за студенте Машинског факултета у Београду. Првих 13 издања ове књиге обухвата укупно 40.000 примерака.

Рукопис прерађеног првог издања уџбеника Теорија осцилација је отпочео цитатом из познатог дела: "*Treatise on Natiral Philosophy*" још познатијих научника: *Lord Kelvin*-а и *Peter Gutrie Tatt*-а: "*Neither seeking nor avoiding mathematical exercitations we enter into problems with a view to possible usefulness for physical sciences* ". Наглашавајући, те 1953 године, да се у модерној техници све више истражују еластодинамички проблеми, припремајући рукопис професор је био убеђен да ће објављени уџбеник, *као прва књига на нашем језику са овим садржајима*, брзо добити шири стручни значај и заинтересовати не само студенте којима је намењен, него и студенте других техничких факултета, као и шире нжењере. И заиста, овај уџбеник је добио веома широку примену и стручну афирмацију. Можемо сасвим одговорно да оценимо, да је садржај овог уџбеника и данас, после скоро пола века, савремен, и у употреби, што важи и за тамо употребљени математички апарат.

Књига *Основи матричног рачунања* објављена је у издавачкој кући Научна књига, Београд, 1971. и написана је под мотоом: "*Mathematik ist die Kunst Rechnungen zu vermeiden*". Д. Рашковић у преговору овог уџбеника пише: "*Матрично рачунање све више продире у разне техничке дисциплине: теорију осцилација, теорију механизама, статику конструкција, електротехнику, аутоматику и регулисање. Због тога се на многим техничким факултетима и високим техничким школама уводе основи овог рачунања, које знатно упрошћава проблематику и много олакшава припрему за коришћење рачунских машина*". С обзиром на основне курсеве Више математике за студенте Машинских факултета, а духу његових уџбеника укључио је два додатка: Основи тензорског рачуна и Основи теорије функције комплесне променљиве у сажетом облику довољном за рад са овим математичким апаратом и научним проблемима из теорије еластичности и механике непрекидних средина, што је сматрао да је, а и заиста је, корисно машинским инжењерима.

Уџбеник *Основи теорије механизама*, објавио је Завод за издавање уџбеника СРС, Београд, 1965. у тиражу од 2000. примерака. Овај уџбеник садржи предавања која је држао студентима осмог семестра групе за механику Природно-математичког факултета у Београду, али је по садржају служио и студентима машинских факултета, који су слушали ову област. По нашим сазнањима то је један од првих уџбеника са оваквим садржајем на нашем језику.

Мото књиге *Аналитичка механка*, објављене 1974. године, професор Рашковић је позајмио од Ј. Л. Lagrange-а из његове познате монографије "Mecanique Analytique" 1788. "...*Онај који воли Анализу закључиће са задовољством да је она њен део и биће ми захвалан, што сам на тај начин проширио њен домен...*". Садржај ове књиге је произашао из курса последипломских студија који је професор Рашковић држао на Машинском факултету у Крагујевцу, а исти је проширио тако да су обухваћена и градива садржана у одговарајућим курсевима на последипломским студијама Техничке механике на Машинском одсеку Техничког факултета у Нишу, Крагујевцу, Сарајеву и Мостару, које је на тим студијама држао.

Проф. Рашковић је написао и серију *Збирки задатака из Механике* које су компатибилне са одговарајућим уџбеницима.

Уџбеници професора Данила П. РАШКОВИЋА резултат су програмског постављања курсева додипломске и постдипломске наставе на Машинским факултетима у Србији и Југославији, као и на Природно-математичким факултетима у Београду и Новом Саду.

О утицају универзитеских уџбеника и стручне литературе професора Рашковића најсликовитије говоре следеће реченице једног истакнутог машинског инжењера, који је дипломирао на Машинском факултету у Београду, а запослио се у Нишићкој железари: „Мене колеге сматрају способним инжењером, јер сам решио проблем уношења материјала у топионицу жељеза конструисањем једне просте решеткасте направе; за то ми је било потребно само моје знање које сам научио из књиге Статика и са почетних страница уџбеника Отпорност материјала од аутора и мог професора Данила Рашковића".

Слика 5. Професор Данило Рашковић (стоји) са колегама из комисије за одбрану докторске дисертације докторанта Вљка А. Вујичића ма риродно-математичком факултету у Београду.
На слици (с лева на десно) су професори и: академици: Татомир П. Анђелић, Антоан Билимовић и Константин Вороњец)

УЧЕНИЦИ И КОЛЕГЕ О ПРОФЕСОРУ РАШКОВИЋУ

Референти, уважени професори др Константин Вороњец, др Инж Мирослав Ненадовић и Инж. Никола Обрадовић, касније и академици САНУ, у реферату из 1957. године пишу: "...Написао је многе популарно-техничке чланке, неколико приручника из Механике, Математике, Отпорности материјала за средње техничаре и **одличне уџбенике** из Механике, Отпорности материјала и Теорије осцилација за студенте техничких факултета и инжењере. Неки уџбеници доживели су неколико издања". Затим следи исцрпан списак научних радова са одговарајућим кратким приказом резултата. На крају резимирају: "....Сматрамо излишним да набрајамо популарно-научне чланке, које је кандидат објавио у разним часописима. И овако смо навели 31 рад и 22 књиге. Несумњиво да ови подаци живо сведоче о плодности кандидата као научног радника, стручњака и наставника. У свакој области којом се бавио, постигао је завидан успех. Уствари - ако се пажљиво прочита овај реферат - запазиће се да се кандидат бави научним радом тек десет година. Заиста је тешко наћи у аналима наше школе, па и у аналима иностраних високих техничких школа, да је неко за тако кратко време произвео толики број дела, оригиналних, сваки, у својој врсти. Сигурно је да ту чињеницу треба приписати урођеној склоности кандидата за научним радом, која га гони да као активни официр настави школовање, да самоиницијативно заврши гимназију и матуру, да дипломира на два факултета, да постигне степен доктора наука и преданим радом стекне реноме научника и ван граница наше земље.... Др. инг. Рашковић је одличан наставник и педагог. Већ у првим годинама своје универзитетске службе написао је уџбенике из свих предмета, које је предавао и тиме се одужио универзитету и својим слушаоцима...".

Д. Рашковић је био врло комуникативан човек и оставио је снажан утицај на развој науке и високошколске наставе на Универзитету у Нишу. Његово присуство било је запажено и у Граду. Остварио је бројне контакте у свим слојевима "нишке чаршије" и био радо виђен гост у свим срединама.

Професор Машинског факултета др Душан Симић и један од ректора Универзитета у Крагујевцу у својој књизи *Професор,* о професору Рашковићу, између осталог, пише:

"Каткад, у шали, говорио је да би могао да држи све предмете на факултету изузев социологије и предвојничке обуке. То није било далеко од истине, јер се највећи број предмета који се изучава на машинским факултетима своди на одређене делове физике...уз солидно познавање математике...Од студената је тражио знање. У оцењивању је био праведан...Рашковић је духовит, исприча по неку кратку анегдоту, најчешће из сопственог искуства или студентског живота.

.....Показивао је изузетно стрпљење у испитивању студената. Из њих је извлачио максимално знање, постављајући питање за питањем.... Али већини студената је постављао питање: "Да ли желите да одговарате за већу оцену?"

Опуштеност и ведрина духа, које су красиле човека, који је израстао у личност научног и педагошког интегритета, скоро универзитетску институцију за себе, иако је прошао и путевима успеха, али и голготе и казамата. Пратили су га отпори доказивања и прихватања талента, који се издваја из средине у којој ради, и несхватања и не прихватања друштвене корисности његовог стваралачки раскошног талента, и такорећи непресушне жеђи за новим знањима. Из професора Рашковића је зрачило много стваралачке енергије, којом га је природа обдарила, и то му је доносило поред личног задовољства бављења научно-педагошким радом, снагом неисцрпне креативности и успеха и неколико фаталних непријатности и ничим незаслужених нетрпељивости. Усмерено је много нечасних стерла на личнопст и дела проф. Рашковића у намери да се тај дух, успори, упросечи. Као човек и велики интелектуалац стојички и достојанствено је то поднео на својим плећима и сачувао снагу личности и морални интегритет. Био је и остао, како би наш народ са поштовањем реко господин префињених манира, ведрог духа и пријатељског наступа.

Аутори су мишљења да је то заиста човек који се ретко рађа на овим просторима. Он је био природно обдарен, раду научен и самоконтроли подвгрнут, једном речју човек високих моралних и етичких начела, чојствен и честит, весео и ноншалантан кад се забавља, занимљив наратор, али у професионалном раду до бескрајности десциплинован и посвећен струци и науци. Веома благ и толерантан према студентима, унапред утврђених нивоа знања и познатих критеријума када оцењује студенте, али са високим захтевима према сарадницима да га прате у идејама и замислима, ширином и нивоом знања, брзином деловања и рада.

Данило Рашковић је био члан Друштва инжењера и техничара, Друштва математичара и физичара НРС, *Société mathematique de France, Geselschaft für Angevandte Mathematik und Mechanik (GAMM)* Немачка, сарадник Математичког института САН и Машинског института САН, рецензент часописа *Applied Mechanics Reviews USA*, *Mathematical Reviews USA, Zentralblatt für Mathematik und Grenzgebiete Berlin* и Реферативног Журнала Механика Москва.

Бич неправде погодио је професора Рашковића у периоду 1974-75. године. У возу на путу за предавања, на релацији Београд Мостар, ухапшен је на препад, и тамо био у затвору више од године дана. Чињеница је да после изласка из тог затвора у себи носио мирноћу, човека који је прошао кроз патњу две осуде, и који је неким својим блиским сарадницима после тога, радећи на свом последњем рукопису Теорија еластичности, кратко, мирним гласом рекао: "*Држао сам наставу механике и курсеве технике за образовање затвореника. Слободно сам излазио у град, једино сам носио затворско одело. Схватили су да су се прешли*". Толика мирноћа је била за дивљење. Није га изједала мржња и жеља за осветом, због неправде која му је учињена. Тај чин личног достојанства је за дивљење и учење, како остати усправан и човечан, не из пркоса већ из дубоког веровања у праведност и хуманост упркос неправдама.

Иако је протекло скоро две деценије од одласка проф. Данила Рашковћа, он је присутан међу студентима и нових генерација техничких наука, као и међу инжењерима својим добрим, универзитетским уџбеницима, који речито говоре о његовим заслугама за развој научног подмладка и кадрова техничких наука и струке у области машинства, и формирање многих генерација Универзитетских професора. Многим генерацијама студената, који су од професора РАШКОВИЋА учили, разумели и заволели механику, као базну науку машинске технике, како кроз предавања, тако и кроз више од 140.000 примерака разних уџбеника и збирки задатака, остао је у сећањима свакако као један од најмаркатнијих универзитетских професора.

Рад на Машинском одсеку Техничког факултета у Нишу, за професора Рашковића је био веома *благотворан*, јер је овде стекао сараднике са којима *се слагао*, који су га постовали и волели, што му је омогућило да настави целу следећу деценију, свој научно-педагошки рад са студентима, додуше уз исцрпљујућа више часовна путовања сваке недеље на релацији од Београда до Ниша. Недавно, у 2000. години, тридесетак година после, на Семинару Оделења на механику Математичког Института САНУ посвећеном 50. година студијске групе за Механику на Математичком факултету први пут смо јавно чули, од једног професора механике Машинског факултета у Београду оцену "*да је професор Рашковић уградио значајне елементе у наставу и науку из области механике*" на том факултету, и да то "не треба да буде занемарено, јер је значајно допринело не само очувању достигнутог квалитета наставе механике, већ и њеног развоја у каснијем периоду".

УЧЕШЋЕ ДР ДАНИЛА РАШКОВИЋА
У РАДУ МАТЕМАТИЧКОГ ИНСТИТУТА САН У БЕОГРАДУ

На првом скупу, у 1946 години, целокупне Српске академије наука од 26 априла 1946. године одобрен је Правилник Математичког института САН, чиме је исти основан. Са седницом од 15. маја 1946. године Математички институт САН је почео да ради као званична институција САН-а. Академик Антон Билимовић је био први управник, а дописник Радивој Кашанин секретар института.

Први Савет института су сачињавали академици: мр Милутин Миланковић, др Богдан Гавриловић, др Антон Билимовић, др Војислав Мишковић, др Никола Салтиков и дописници: Јован Карамата и др Радивој Кашанин. Првих седам сталних сарадника Савет је изабрао 8. јуна 1946 године, ато су били: др Иван Арновљевић, Јаков Хлитчијев, др Тадија Пејовић, Милан Вречко, др Милош Радојичић, др Татомир Анђелић и др Војислав Авакумовић.

Скупови Већа Математичког института били су посвећени научним саопштењима и дискусијама о научним проблемима, као и делатности Института. Прво саопштење у новооснованом Математичком институту САН одржао је академик Антон Билимовић, на другој седници Већа одржаној 5. јула 1946. године, те се с правом може тврдити да је рад института почео са радовима и саопштењима из области *механике.* Већ на деветој седници Већа Математичког института од 7. фебруара 1947. године, којој је председавао академик Антон Билимовић, др Данило Рашковић је у својству госта Института, саопштио рад под називом: "*Потенцијал еластичних тела у дијадском облику*" (1). То је било 14-то саопштење од оснивања и почетка рада Института.

Оделење за механику Математичког института САНУ основано је 1961 године.
На седници Научног већа Математичког института САН од 1961 године одлучено је да се оснује Оделење за механику као посебна научна јединица Математичког института. За првог управника Оделења именован је професор Природно-математичког факултета др Татомир Анђелић. Оделење је почело са радом септембра 1961. године. У публикацији Саопштења научних резулатата у Математичком институту САНУ, 1961-1996, Механика, налазимо следеће: "*Већ у 1962. години за управника Оделења именован је редовни професор Машинског факултета у Београду др Данило Рашковић, коју дужност обавља до 1963. године, да би поново руковођење Оделењем предузео професор Анђелић*".

У 1962 години проф. др Данило Рашковић као управник Оделења за механику Математичког института САНУ, је организовао истраживања у *четири научно-истраживачке групе*: *Групу за проблеме стабилности кретања* чији је руководилац био *проф. др Вељко Вујичић, Групу за теорију гарничног слоја* којом је руководио *др Виктор Сaљников, Групу за проблеме анизотропних инкомпатибилних материјала са коначним деформацијама* којом је руководио *др Растко Стојановић* и *Групу за оптималне проблеме механике* коју је водио *проф. др. Данило Рашковић.*

Од 12. седнице, 2. априла 1947. године па до 306. седнице одржане 27. марта 1957. године, др Данило П. Рашковић редовно учествује у седницама Већа Математичког института САН, што се види из списка присутних на седницама на којима су се саопштавали оригинални научни радови сарадника и гостујућих истраживача.

На седамнаестој седници Већа, од 18. септембра 1947. године, одржао је саопштење под називом: "*Основне једначине теорије еластичности у дијадском облику*" (2), као 27. по реду саопштење у Институту.

Саопштење под називом: "*Један сингуларитет функције савијања*" (3), одржао је 23. фебруара 1949. године, као 94. саопштење у Институту. Методом интеграције диференцијалних једначина помоћу редова показао је како се могу испитати сингуларитети функције савијања.

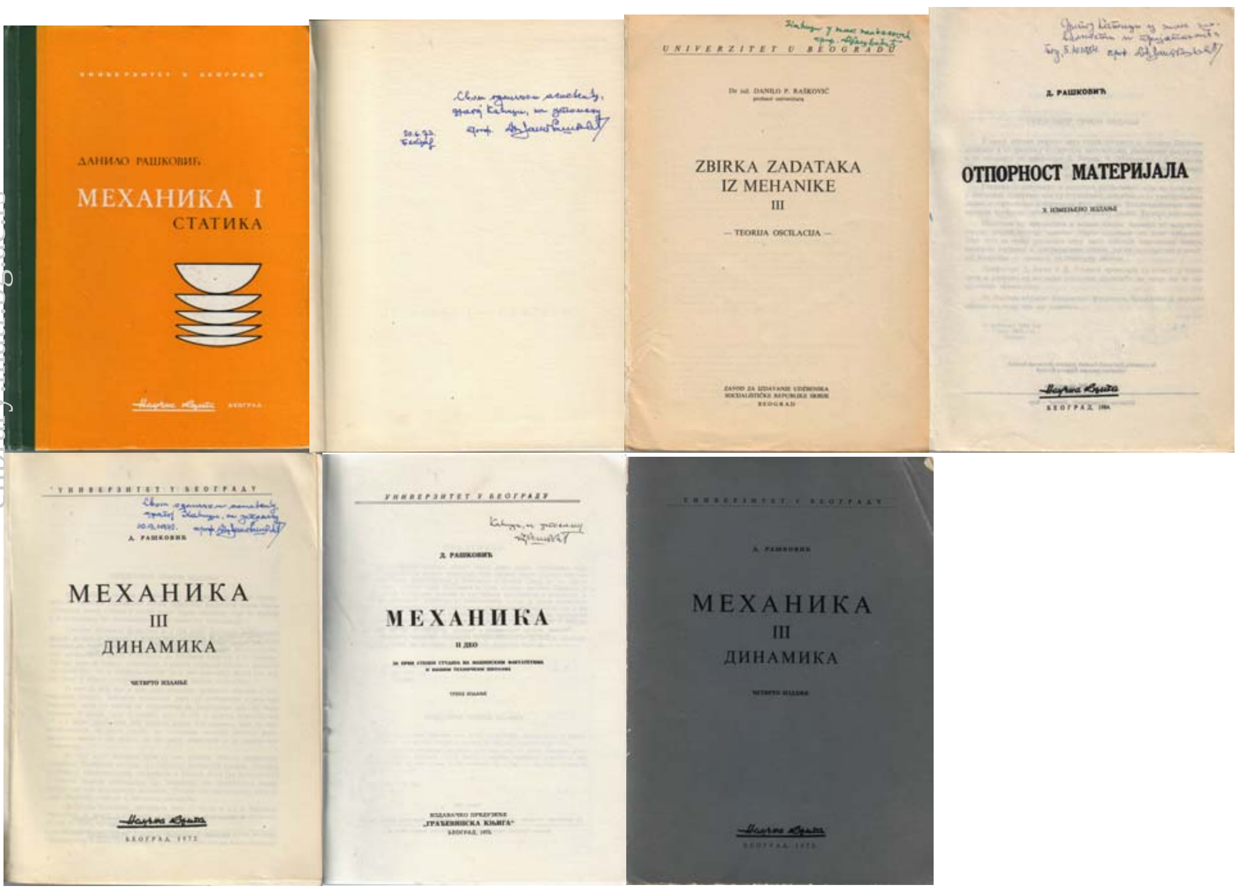
У записнику налазимо да је др Данило Рашковић, ванредни професор Велиикe техничке школе, 21. октобра 1953. године, као 273. саопштење, изложио своје оригиналне научне резултате под називом: "*Неке карактеристике фреквентне једначине малих осцилација холономног конзервативног система са статичким везама*" (4). Истражујући проблем малих осцилација система са статичким везама у матричном облику, аутор је за специјални случај једнаких инерционих коефицијената, користећи Виетте-ове услове између коефицијената и корена фреквентних једначина, извео низ нових тригонометријских образаца. Поред методе коначних разлика показао је како се корени могу одредити методом верижних разломака, као и да коефицијенти фреквентног полинома образују дијагоналне редове сталних разлика.

Следеће оригинална саопштења су била под називима: "*Један графички начин одређивања положаја тежишта делова хомогене сфере и обртног елипсоида*" (5-247-1953.); "*Један графички начин одређивања сопствених вредности фреквентне једначине хомогених машина*" (6-298-1954.); "*Мале осцилације конзервативног система са двојним статичким везама*" (7-319-1954.);"*Један векторски начин за одређивање сферних координата вектора брзине и убрзања*" (8-320-1954.); "*Трансверзалне осцилације лаких континуалних носача са концентрисаним масама*" (9-373-1955); "*Статичке особине Питагорине теореме*" (10-1955.); "*Трансверзалне осцилације греде са еластичним уклештењем*" (11-395-1956.); "*Допунски ставови уз Папос-Гулден*-ове теореме" (12-1956); "*Неке карактеристике фреквентне једначине хомогеног осцилаторног система са динамичким везама*" (13-409-1956.).

На 305. седници Већа МИ, од 20. марта 1957. године, као 427. саопштење по реду било је четрнаесто саопштење др Д. Рашковића под називом: "*Осцилације система физичких клатна*" (14). На истој седници, саопштио је и рад: "*О карактеристикама фреквентне једначине једног осцилаторног система са мешовитим везама*" (15).

На 431. седници већа МИ, од 26. октобра 1960. године, као 578. саопштење, било је Рашковићево шеснаесто саопштење у овом институту, под називом: "*Неке особине једне класе полинома произведених помоћу специјалних Jaccobi-јевих матрица*" (16). Полазећи од једног хомогеног торзијског система са двојним статичким везама и пригушницама, чији је отпор сразмеран првом степену брзине поставља се диференцијална једначина осциловања система у матричном облику. Претпостављајући решење у експоненцијалном облику, извео је карактеристичну једначину овог осцилаторног проблема. Она је изражена помоћу једнаине и специјалне Jaccobi-јеве матрице. Показао је да за све полиноме важе рекурзивни обрасци, те није ни потребно развијати детерминанту. Сем тога коефицијенти полинома образују дијагоналне низове бројева одређених, *n*-тих разлика.

На истој седници, као 579. саопштење МИ, у коаутоству са Б. Јовановићем саопштен је рад под називом: "*О једној класи Lageur-ових полинома*" (17). Проучаван је осцилаторни систем који се састоји од више математичких клатна са пригушницама (кочницама). Помоћу Lageur-ових диференцијалних једначина друге врсте састављен је систем диференцијалних једначина другог реда у матричном облику и одговарајућа карактеристична једначина овог амортизованог осциловања механичког система. Открио је и неке особене карактеристике ових полинома, њихове рекурзивне обрасце и урадио таблице њихових коефицијената.



Слика 6. Неколико наслова универзитетских уџбеника професора ДанилаРашковића од многобројних које је написао

Саопштења проф др. Д. Рашковића на седницама новоснованг Оделења за механику су и следећа: (1962.) *О симпозијуму за нелинеарне осцилације у Варшави* ICNO 17-25. септембра 1962.; (1963.) *Мале осцилације лаких континуалних носача на којима су насађене концентрисане масе везане опругама*; (1963.) *О једном нелинеарном механичком систему*; (1963.) *О убрзању другог реда*; (1963.) Реферат о теоријском делу у књиге: *Optimization technique Edited by G. Leitmann*.

Такође је 27 децембра 1963. изложио рад под називом: “*Прилог примени једне динамичке аналогије на проблеме стабилности аксијално притиснутог носача на еластичним ослонцима*“. На истој седници приказао је садржај двеју књига: Sability by Liapunov's Direct Method with Applications, J. La Salle and S. Lefschetz и Курс теории механизмов и машин од Бич А. Хиновева.

8. маја 1963 године Т. Анђелић, Д. Рашковић и В. Саљников су изложили на седници Оделења Извештај са Конгреса немачког друштва за примењену математику и механику GAMM одржаног од 16 до 21. априла 1963. године у Карлсруе Западна Немачка.

У групи за теорију осцилација изложио је 21. јануара 1964. саопштио је рад: Неке даље техничке примене другог убрзања. Приказао је неке нове резултате у техничкој примени другог убрзања (трзаја) - прелазна кривина возила, трзаји ротополова зглавкастог четвороугла, утицај на мирноћу хода возила и сл. После низа предавања истичемо и саопштење од 11 маја 1965. под називом: Гироскопски трзај.

Према докуметацији ово је и његово последње саопштење у Математичком институту САН.

ДОПРИНОС ДАНИЛА РАШКОВИЋА ФОРМИРАЊУ ШКОЛЕ НЕЛИНЕАРНЕ МЕХАНИКЕ НА МАШИНСКОМ ФАКУЛТЕТУ У НИШУ

За приод од десет година рада на Машинском факултету у Нишу професор Данило Рашковић је покренуо научна истраживања из области нелинеарне механике. О томе сведоче и први публиковани радови сарадника групе за механику и прва саопштења на научним скуповима у иностранству, а посебно на конгресима механике немачког друштва GAMM и Интернационалне конференције за нелинеарне осцилације ICNO у организацији научника из СССР и земаља источног блока.

Професор Рашковић је покретач увођења последипломских студија на Машинском одсеку Техничког факултета у Нишу и аутор првих наставних планова и програма предмета смера Техничка механика за области Нелинеарне механике и Пластомеханике. Те последипломске студије су реализоване по менторском систему и ангажовани су водећи професори из области механике са Природно-математичког и техничких факултета Универзитета у Београду: академик Татомир Анђелић, професори Драгослав Митриновић, Бранко Раковић. Владимир Богуновић, Вељко Вујичић, Растко Стојановић, Мирко Јосифовић, Добривоје Михајловић и други. То су биле и прве последипломске студије на факултетима у Нишу истовремено са последипломским студијама на Електронском одсеку.

Кроз последипломске студије и орјентацију младих сарадника на истраживања и њихова усавршавања у иностранству на водећем Институту Математике АН УССР, чији је руководилац био познати академик Јуриј Алексејевич Митрополскиј, у целом свету науке првак из области нелинеарне механике, настављач школе асимптотских метода Крилова и Богољубова. Тако је један његов, у то време, млади сарадник, по његовој препоруци провео на специјализацији из области нелинеарне механике и математичке физике у екипи под руководством академика Ј. А. Митрополског, где је успешно верификовала рад положивши кандидатски минимум из нелинеарне механике, математичке физике и диференцијалних једначина. Тиме је Д. Рашковић допринео подстицању научног усвршавања младих и створио кадровску основа за даљи развој истраживања из области нелинеарне механике на Универзитету у Нишу. Из те сарадње са школом механике Крилов-Богољубов-Митрополскиј је произашло то да се је већи број истраживача са Машинског факултета у Нишу упознао са асимптотским методом и резултатима те школе, тако да су у наредним истраживањима применом те методе дошли до значајних резултата који су верификовани кроз већи број магистарских и докторских теза, тако да се с правом може рећи да данас на Машинском факултету у Нишу постоји аутентична школа нелинеарне механике, чији је зачетник и инспиратор професор Данило Рашковић. Професор Рашковић је својим сарадницима остварио и прве научне комуникације са научницима из Пољске.

Темељи које је професор Рашковић поставио, и у настави редовних и последипломских студија, осмисливши на прави и студиозан начин наставне планове и програме и усмеривши своје сараднике на научна истраживања и комуникације са научницима из целог света послужили су да се данас на Универзитету у Нишу, поред научних истраживања, публикује и добар међународни часопис Facta Universitatis Mechanics, Automatic Control and Robotics, као и да се организију већ традиционални међународни симпозијуми Nonlinear Mechanics, као и да се одржава периодични научни семинар Теоријске и примењене механике.

Некада је потребно неколико деценија да протекне, па чак и да човек заврши своју професионалну активност и оконча свој животни пут, па да се тек тада сагледају резултати његовог труда и уложених идеја и подстицаја у развој његових сарадника, који најчешће док је човек физички присутан нису могли да реално вреднују свеукупне доприносе дотичног. Стварни живот свакодневно потврђује правило, да се недостатак некога/нечега у правом светлу види и осећа тек након нестанка некога/нечега.

Професор Рашковић је значајно допринео и формирању групе за кинематику машина и механизама, која се трансформисала у Катедру за прецизно машинство на Машинском факултету у Нишу. У време одржавања конгреса GAMM 1967. године у Aachenu проф. др Данило Рашковић се сусрео са Dr. Ing. Walter Meyer zur Capellen-ом професором Fakultät für Maschinenwesen der Rheinisch-Westfälischen Technischen

Hochschule Aachen. Тада се разговарало о правцима развоја научних истраживања у области Механике и у области Теорије машина и механизама, као и о универзитетској настави из ове области. Том приликом договорен је садржај истраживања, за једног сарадника Машинског одсека Техничког факултета у Нишу током његовог докторандског на усавршавању на тој високој школи у Aachenu. Теза под називом "Lagerschwingungen bei sphärischen Getrieben" је урађена и одбрањена, на том факултету, 1970, а потом нострификована на Машинском одсеку Техничког факултета у Нишу. Председник комисије за нострификацију дипломе био је проф. др Данило Рашковић.

Слика 7. Професор Данило Рашковић са својим асистентима мр Катицом Стевановић и Милетом Максић и групом студената треће године Машинског факултета у Нишу, оделења на Радничком универзитета у Параћину (фотографија снимљена 1973 године)

ДОПРИНОС РАЗВОЈУ ИНЖЕЊЕРСКЕ ПРАКСЕ

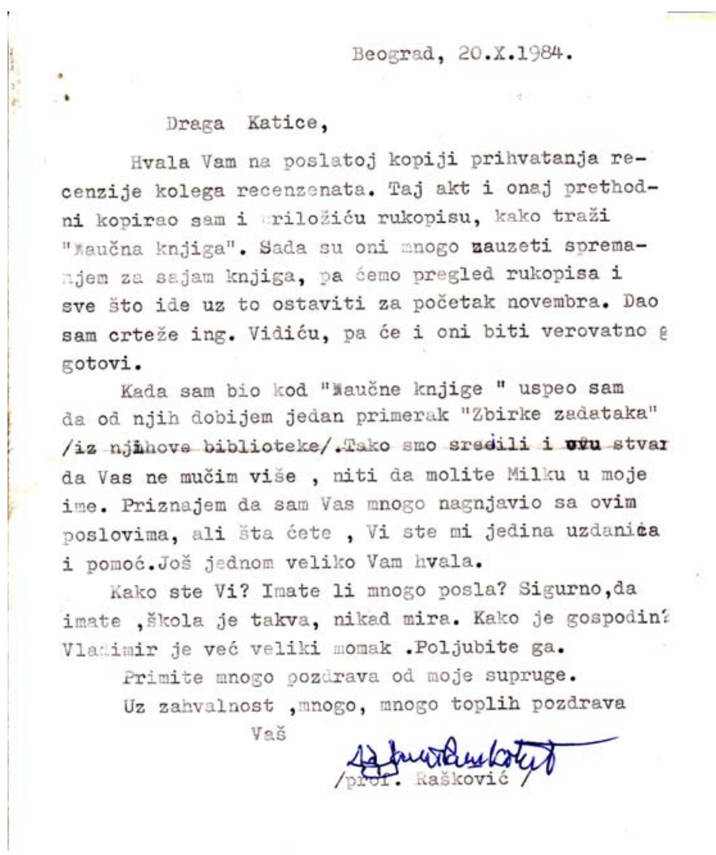
Књига Општа механика у издању "Техничке књиге" штампана је 1950 године, у тиражу од 7.000. примерака, и у списку литературе садржи 79. биобиблиографских једница од чега је 27. домаћих аутора, али само неколико из области механике и то аутора Милутина Миланковића (1935), И. Арновљевића (1947), А. Билимовића (1948), као и три своја универзитетска уџбеника из механике публикована у периоду од 1947 до 1949. године.

Остале референце домаћих аутора су: Н. Обрадовића *Основи науке о струјању* (1937), В. Јанковића *Основни закони електрицитета* (1948), В Фармаковског *Локомотиве* (1936, 1941), Д. Витас *Машински елементи* (1948), С. Каречки *Пелтонова турбина* (1938), Б. Михајловића *Радиотехника* (1946), И. Соколова *Течај Физике* (1947), М. Вујића *Реактивни мотори* (1948), Ј. Верчона *Подмазивање* (1948), М. Јоксимовића *Бране* (191948), Б. Кнежевића *Увођење у хидраулику* (1935), М. Поповића *Експериментална физика*, А. Стевовића *Парне машине* (1933), Ј. Меркса *Механика за рударе* (1949), Пио-Уљског Г. *Парне турбине* (1934). Ову разноликост литературе из области техничких наука домаћих аутора прати и разноликост литературе и од станих аутора.

Мотиви да напише ову књигу су у "осећању потребе за једном популарном елементарном општом техничком Механиком, која би била приступачна нижим и средње стручним кадровима, јер данашњи развој технике захтева поред добре стручне спреме и општу спрему.". По мишљењу Д. Рашковића: "Дисциплине из области Механике чине основне подлоге за стицење целокупног техничког знања, али имају велику улогу и у општем образовању сваког појединца". Садржај књиге је изузетно комплексан, јер обухвата: основне појмове из математике и физике, статику, кинематику, динамику хидромеханику и аеродинамику. Књига је написана "у техничком духу" и "стручно" и са "приступачним математичким апаратом", али је "могу читати и најмлађи кадрови улазећи само у принципе, али не и у математичку обраду образаца". Такође су прорађени извесни примери "у циљу бољег повезивања теоријског излагања са праксом" тако да ће "читалац после читања ове књиге моћи много лакше схватити поједине конструкције механизама". Пишући ову књигу имао је у виду да је писање овакве књиге "тешко и деликатно, јер са једне стране треба избећи забавни карактер популарног техничког текста, а са друге високу стручност у излагању која припада уџбеницима". И он је заиста у томе успео. Нашао је ту "средину", књига је обрађена стручно технички, а веома је занимљива и приступачна и привлачна за читање, иако је намењена усавршавању техничких кадрова. Истичемо и њен илустративни садржај, али и комплексност и свеобухватност теоријских и примењених елемената механике. Заиста је по свом садржају јединствена из ове области.

О утицају универзитеских уџбеника и стручне литературе професора Рашковића најсликовитије говори сећање професора В. Вујичића да је разговарајући са једним машинском инжењером, који је дипломирао на Машинском факултету у Београду, а запослио се у Нишићкој железари чуо следећу оцену: „Мене колеге сматрају способним инжењером, јер сам решио проблем уношења материјала у топионицу жељеза конструисањем једне просте решеткасте направе; за то ми је било потребно само моје знање које сам научио из књиге Статика и са почетних страница уџбеника Отпорност материјала од аутора и мог професора Данила Рашковића".

На основу тога је закључио: Ако је од почетка градива две Рашковићеве књиге једном, просечном дипломираном студенту Машинског факултета било довољно да на ефикасан начин реши проблем у великом металуршком погону, какав ли су тек допринос развоју своје земље остварили бројни талентовани инжењери двадесетак генерација захваљујући знању стеченом од професора Данила Рашковића. Од тога није могао да одвоји и висок професионални морал тог младог инжењера који му не дозвољава да прихвати директорски положај велике фабрике и дилему на питање: Да ли је такаву професионалну етику млади инжењер стекао у породичном кругу или на предавањима Проф. Рашковића, на којима су јасно изложене теоријске основе и ижењерске методе из дисциплина Статика и Отпорност материјала, које је марљив студент не само разумео већ био у стању и да објасни свом професору на строгим испитима, а затим и примени у техничкој пракси железаре.



Beograd, 20.X.1984.

Draga Katice,

Hvala Vam na poslatoj kopiji prihvatanja recenzije kolega recenzenata. Taj akt i onaj prethodni kopirao sam i priložiću rukopisu, kako traži "Naučna knjiga". Sada su oni mnogo zauzeti spremanjem za sajam knjiga, pa ćemo pregled rukopisa i sve što ide uz to ostaviti za početak novembra. Dao sam crteže ing. Vidiću, pa će i oni biti verovatno g gotovi.

Kada sam bio kod "Naučne knjige " uspeo sam da od njih dobijem jedan primerak "Zbirke zadataka" /iz njihove biblioteke/.Tako smo sredili i ovu stvar da Vas ne mučim više , niti da molite Milku u moje ime. Priznajem da sam Vas mnogo nagnjavio sa ovim poslovima, ali šta ćete , Vi ste mi jedina uzdanica i pomoć.Još jednom veliko Vam hvala.

Kako ste Vi? Imate li mnogo posla? Sigurno,da imate ,škola je takva, nikad mira. Kako je gospodin? Vladimir je već veliki momak .Poljubite ga.

Primite mnogo pozdrava od moje supruge.

Uz zahvalnost ,mnogo, mnogo toplih pozdrava

Vaš

/prof. Rašković /

Слика 8. Писмо професора Данила Рашковића некадашњем асистенту, др Катици (Стевановић) Хедрих , написано 20. октобра 1984, деценију после, а поводом припреме публиковања свог последњег универзитетског уџбеника Теорија еластичности, који је оштампан после његове изненадне смрти 29. јануара 1985.

ЕПИЛОГ

Службенички лист: 128450, налепљена фотографија стаситог младића црне косе са бркчићима. Очи оштра, интелигентна погледа. Озбиљност погледа, војничка суздржаност. Када се кроз лупу боље погледа слика и проанализира човек са радошћу примети да испод маске избија скривени осмех и снажан дух.

Они који су проф. Рашковића, упознали тек после његове 55 године са овим ликом не могу наћи скоро ништа заједничко у физичким лику. Једино оштрину интелигентна погледа и тај, са те фотографије скривен осмех и веселост духа, која је у каснијим годинама, нескривено красила човека, неуобичајено високог, са таласастом проседом косом, понекад и разбарушеном косом.

Опуштеност и ведрина духа, која су красиле човека, који је израстао у научног и педагошког горостаса, скоро националну институцију за себе, иако је прошао и путевима успеха, али и голготе и казамата, као и патњи, која прати тешкоће доказивања и прихватања талента, који се издваја из средине у којој ради, и несхватања и не прихватања друштвене корисности његовог стваралачки раскошног талента, и такорећи непресушне жеђи за новим знањима. Из професора Рашковића је зрачило много стваралачке енергије, којом га је природа нештедимице обдарила, и то му је доносило поред личног задовољства бављења научно-педагошким радом, снагом неисцрпне креативности и успеха, признатог не само у нашим научним круговима, већ и шире у светским оквирима, и неколико фаталних непријатности и ничим незаслужених нетрпељивости. Усмерено је много нечасних стерла на личнопст и дела проф. Рашковића у намери да се тај дух, успори, упросечи. А он је раскошни дух и енергију нештедимице употребио на писање својих уџбеника, у држање прекрасних предавања, али и на савладавање многих животних искушења и неправди које су му учињене, и које је као човек и велики интелектуалац стоички и достојанствено поднео на својим плећима и као човек сачувао снагу личности и морални интегритет. Био је и остао, како би наш народ са поштовањем реко господин префињених манира, ведрог духа и пријатељског наступа.

То је заиста човек који се ретко рађа на овим просторима, природно обдарен, раду научен и самоконтроли подвгрнут, једном речју човек високих моралних и етичких начела, чојствен и честит, весео и ноншалантан кад се забавља, занимљив наратор, али у професионалном раду до бескрајности десциплинован и посвећен струци и науци, како док ради са студентима, тако и док пише за њих дивне уџбенике, значи увек док ствара. Веома благ и толерантан према студентима, унапред утврђених нивоа знања и познатих критеријума када оцењује студенте, али са високим захтевима према сарадницима да га прате у идејама и замислима, ширином и нивоом знања, брзином деловања и рада.

Ако си радан, дисциплинован и уз то и талентован сарадник уживаш професорову благонаклоност, отворивши ти врата својих паралелних светова мисли и идеја. Тада професор има времена за свако твоје питање, за сваки разговор, за сваку колегијалну пажњу, има времена за анализу сваке твоје замисли и идеје.

Успео је да се издигне на тако високи интелектуални ниво, где је био толико супериоран, да сваки онај који није био спреман да своје знање обогати, кроз креативно дружење се са њим, по природи најмањег отпора, био је "присељен" пред собом да своју инфериорност брани тиме што ће, проф. Рашковића "промовисати" у надменог човека, а то још и поистоветити и са ароганцијим. Ништа ново, тако се и дан данс решавају текући интелектуални сукоби у земљи Србији. И што је најважније успео је да сачува довољно енергије и воље за даљи рад на својим рукописима и после казамата, и чак и после оне мостарске. Његова стваралачка природа и вера у цивилизацијске вредности били су истиснки извор његове снаге и надахнућа до последих тренутака живота. У томе је и суштина снаге његове личности. Теорија еластичности, последња књига која је изашла из штампе непосредно после његове смрти је речита чињеница о томе. Професор Рашковић остаје, присутан својим духом, својим многобројним уџбеницима, и у живим сећањима, па и анегдотама из периода студија, међу некадашњим својим студентима.

Генерацијама које су училе од њега оставио је мноштво књига. Неке је писао за своје последипломце.

Данило Рашковић је био члан Друштва инжењера и техничара, Друштва математичара и физичара НРС, *Société mathematique de France, Geselschaft für Angevandte Mathematik und Mechanik (GAMM)* Немачка, сарадник Математичког института САН и Машинског института САН, рецензент часописа *Applied Mechanics Reviews USA*, *Mathematical Reviews USA, Zentralblatt für Mathematik und Grenzgebiete Berlin* и Реферативног Журнала Механика Москва.

Аутор овог чланка, је истражујући податке и чињенице, проучавајући разне реферате и карактеристике, а познавајући и живот и рад, из периода када је сарађивао са њим, као и универзитетска дела професора Рашковића из периода после одласка са Машинског факуктета у Београду, као и предавања којима су генерације студената после тога уживале и слушале са радошћу, сматра да је у име истине-најаче снаге цивилизацијског напредка и прогреса треба што пре дати оцену друштвено-политичких догађања на Машинском факултету у Београду и Катедри за механику, који су допринели доношењу неутемељених Одлука о престанку рада проф. Данила Рашковића на Машинском факултету у Београду, после толико плодног рада како на образовању научно-наставног подмлатка тако и на веома успешно и по квалитету наставе образовању бројних инжењера машинства не само на свом матичном факултету већ и шире на подручју читаве бивше СФРЈ. То није био задатак овог текста. Само друштва и средине које имају снагу да се изборе за истину имају шансе за прогрес и напредак. Нека се можда кроз, само једно питање провери наведена цивилизацијска парадигма. Питање је елементарно очигледно: шта је изгубио или добио Машински факултет у Београду и његова Катедра за механику и Отпорност конструкција одласком проф. др Данила Рашковића са тог факултета?

Слободна сам да укажем да су у међувремену у области механике у Србији и изникли снажнији центри механике и на универзитетима ван Београда, а где је професор Данило Рашковић радио после одласка са Машинског факултета у Београду, не само одржавао наставу, већ поново, по бог зна који пут поново се латио деликатног рада на оспособљавању новог и подмлађивању постојећег кадра. Тако су и израсли веома јаки центри механике у Нишу, Новм Саду и Крагујевацу.

Бич неправде погодио је професора Рашковића у периоду 1974-75. године. У возу на путу за предавања, на релацији Београд Мостар, ухапшен је на препад, и тамо био у затвору више од године дана. Чињеница је да после изласка из тог затвора у себи носио мирноћу, човека који је прошао кроз патњу две незаслужене осуде, и који је неким својим блиским сарадницима после тога, радећи на свом последњем рукопису Теорија еластичности, кратко, мирним гласом рекао: "*Држао сам наставу механике и курсеве технике за образовање затвореника. Слободно сам излазио у град, једино сам носио затворско одело. Схватили су да су се прешли*". Толика мирноћа је била за дивљење. Није га изједала мржња и жеља за осветом, због неправде која му је учињена. Тај чин личног достојанства је за дивљење и учење, како остати усправан и човечан, не из пркоса већ из дубоког веровања у хришћанску праведност и хуманост упркос неправдама.

Иако је протекло више од деценије и по од одласка проф. Данила Рашковћа, он је присутан међу студентима и нових генерација техничких наука, као и међу инжењерима својим добрим, универзитетским уџбеницима, који речито говоре о његовим заслугама за развој научног подмладка и кадрова техничких наука и струке у области машинства, и формирања многих генерација Универзитетских професора. Он је пример како дела остају и устају у одбрану својих аутора, много година, после њиховог физичког одласка са универзитета, а протекло је скоро две деценије.

Очигледно је да је Данило П. Рашковић био истакнути универзитетски професор и стваралац, изузетне стваралачке енергије, надахнутог ентузијазма, који је био привржен научном и културном наслеђу и био изванредан педагог високих етичких начела, иако је пролазио кроз тешке неправде, које би многе и мањег потенцијала и талента од њега, одвеле у иностранство, а он је остао овде и све издржао. Многим генерацијама студената, који су од професора РАШКОВИЋА учили, разумели и заволели механику, као базну науку машинске технике, како кроз предавања, тако и кроз више од 140.000 примерака разних уџбеника и збирки задатака, остао је у сећањима свакако као један од најмаркатнијих универзитетских професора.

Аутор овог текста познато је више страствених колекционара књига, који у својим библиотекама чувају и комплетна издања професорових уџбеника и књига. Један од најстраственијих сакупљача професорових књига је свакако радник Електродистрибуције из Приштине, који је једно време провео са породицим као избеглица са Косова у стационару у Врњачкој Бањи и аутору причао о својој комплетној библиотеци Рашковићевих уџбеника и књига, које је успео са собом да понесе и сачува.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hedrih (Stevanović) K. i Studović M., Profesor Danilo P. Rašković (1910-1985), Biobiliografija, poglavlje u knjizi: Život i delo srpskih naučnika, urednik akademik Vladan Djordjević, Srpska Akademija nauka i Umetnosti, Biografije i bibliografije, knjiga X, Beograd 2003, pp. 239-270,..

2. Списак саопштења 1946-1961. Matematika i Mehanika, Beograd 1990. Priredio Milan P. ^av~i}.

3. Referat од 20 маја 1957. године.

4. Referat 1517/2 од 17 фебруара 1956. године.

4. Slu`beni~ki list br. 128450 др Данила Рашковића

5. Personalni list serija: 503 294, број: 47213, др Данила Рашковића

6. Arhivska dokumenta Ma{inskog fakulteta u Beogradu - фасцикла др Данило Рашковић

7. Autobiografija др Данила П. Рашковића из 1952. године.

8. Predgovori из универзитетских уџбеника Данила П. Рашковића из првих и поновљених издања.

9. In Memory of Professor dr ing. Dipl. Math. Danilo P. Ra{kovi}, Professor of the Faculties of Mechanical Engineering in Belgrade, Ni{, Kragujevac, Mostar and Novi Sad, by Katica (Stevanovi}) Hedrih, Facta UNIVERSITATIS, Series Mechanics, Automatic Control and Robotics, University of Ni{, Vol. 1. No. 4, 1994.,pp. VI-IX.

10. Катица (Стевановић) Хедрих, Prof. dr Ing. Dipl. Math **Данило П. Рашковић,** редовни професор Машинских факултета у Београду, Нишу и Крагујевцу, Мостару и Филозофског факултета у Новом Саду, и његов допринос развоју наставе и студија Механике на Универзитетима у Србији и Југославији, Round Table: O.M. History og Mecchanics in Yugoslavia, Proceedings on\f the YUCTAM Vrnja~ka Banjaa '97, XXII Yugoslav Congress of Theoretical and Applid Mechanics, Mathematical Institute SANU, Jugoslovensko dru{tvo za mehaniku, 1997, str. 39-54.

11. Катица (Стевановић) Хедрих, **Akademik Tatomir An|eli},** @ivot i delo srpskih nau~nika - *Lives and work of the Serbin Scientists*, Урденик Милоје Р. Сарић, Биографије и Библиографије, Књига VI, Одбор за проучавање живота и рада научника у Србији и научника српског порекла, Сарпска акдемија наука и уметности, tom 6., 2000., str. 435-486.

Professor dr ing. Dipl. Math. Danilo P. Ra{kovi}, 90 years from the birth, by Katica (Stevanovi}) Hedrih, The Fifth Yugoslav Symposium on Nonlinear Mechanics, Nonlinear Sciences at the Threshold of the Third Millenium, October 2-5, 2000, Ni**{, Abstracts I**, The Symposium is organised under the patronage of the Department of Technical Sciences Serbian Academy of Sciences and Arts, 5th YUSNM Ni{ ' 2000, Faculty of Mechanical Engineering University of Ni{, pp. 84-85.

12. Professor dr ing. Dipl. Math. Danilo P. Ra{kovi}, 90 years from the birth, by Katica (Stevanovi}) Hedrih, The Fifth Yugoslav Symposium on Nonlinear Mechanics, Nonlinear Sciences at the Threshold of the Third Millenium, October 2-5, 2000, Ni{, **Abstracts II**, Part D, Interdisciplinary and Multidisciplinary Problems, 5th YUSNM Ni{ ' 2000, Faculty of Mechanical Engineering University of Ni{, pp. 125-126.

13. Pola veka prirodno-matemati~kih nauka i 30 godina Prirodno-matematri~kog fakulteta u Novom Sadu, Нови Сад, 2000.

14. Katica (Stevanović) Hedrih, *Close Meeting of the Threefold Kind at the Begining of Third Millenium or Tensor Calculus Break-impact in Mechanics*, Invited Plenary Lecture, The 6-th International Conference of Tensor Society on Differential Geometry and it's Applications and Mathematical Foundations of Information Sciences and its Applications on occasion of the Anniversary of Akitsugu KAWAGUCHI's 100 years birth, who is the Founder of Tensor Society, Kawaguchi Inst. Institute of Mathematical Sciences Sengen 1-13-33, Tsukuba, JAPAN, 305-0047., Abstracts, Tensor Society, 2002., pp.8-10.

15. Simić, D. *Profesor*, dSp-mecatronic, Kragujevac, 1999. ID-78968588.

16. Katica (Stevanović) Hedrih, *Tensor Calculus Break-impact in Mechanics-Danilo P. Ra{kovi} (1910-1985), The Sixth International Symposium on Nonlinear Mechanics-Nonlinearn Sciences and Applications, 2003., Booklet of Abstracts,pp. 35-48.*

Prof. Dr. Ing. Dipl. Math. Danilo P. RAŠKOVIĆ, full-professor of the Faculties of Mechanical Engineering in Belgrade, Niš, Kragujevac, Mostar and Faculties of Science in Belgrade and Novi Sad

On January 29th 1995 it was a two decade since our longtime professor and the first head of the Department of Mechanics and Automatics within the Faculty of Mechanical Engineering of the University of Ni{, Prof. Dr. Ing. Dipl. Math. Danilo P. RAŠKOVIĆ has died. He was a full-time professor of the faculties of mechanical engineering in Belgrade, Niš, Kragujevac and Mostar, as well as of the faculties of science in Belgrade and Novi Sad.

This distinguished scientific figure of exquisite creative energy and inspired enthusiasm, a scholar deeply attached to the Yugoslav and Serbian scientific and cultural heritage and an exquisite pedagogist of high ethic principles is in the living memory of many generations of students whom he taught how to learn and love mechanics, as a basic scientific branch of mechanical engineering either directly, through his lectures, or through his various and numerous textbooks and collections of problems which circulate in more than 140,000 copies. His disciples and colleagues are glad that he had the ability to transmit to them his great enthusiasm permeated with his sincere devotion for mechanics and his exquisite scientific eagerness.

Prof. Dr. Ing. Dipl. Math. Danilo P. RAŠKOVIĆ was born in 1910 in U`ice. Upon completing elementary school and six grades of high school, he graduated from the Military Academy in 1930. As an engineering military officer he enrolled in the Department of Mechanical-Electrical Engineering of the Faculty of Engineering in Belgrade in 1933. Having graduated in 1938, he enrolled in the Department of Theoretical Mathematics of the Faculty of Philosophy and graduated in 1941. As a graduate mechanical engineer he was appointed assistant section head of the Military-Technical Institute in ^a~ak. He remained on that position during 1941. In 1942 he was appointed assistant of the Faculty of Engineering in Belgrade where he earned his doctor's degree in 1944 upon the defense of the thesis entitled: "Tangential strains of normally profiled beams".

His university career took the following course: in June 1946 he was appointed assistant professor and lecturer; 1949 - associate professor; assistant professor of mechanics at the Faculty of Engineering; 1951 - associate professor; 1957 - full professor of mechanics.

Prof. Dr. Ing. Dipl. Math. Danilo P. RAŠKOVIĆ lectured mechanics, strainght of materials and oscillation theory at the faculties of mechanical engineering in Belgrade, Ni{, Kragujevac, Novi Sad and Mostar, as well as in the Faculty of Science in Belgrade, Faculty of Philosophy in Novi Sad, Faculty of Electronics in Niš and at the Military-Technical College in Belgrade. More details on the research work of professor RAŠKOVIĆ can be found in the Belgrade University Bulletin no. 75 of 1957, issued on the occasion of his appointment as full professor at the Faculty of Mechanical Engineering in Belgrade. During his university career he was twice elected Vice-Dean of the Faculty of Mechanical Engineering of the Belgrade University. In the Mechanical Engineering Department of the Faculty of Engineering in Ni{, he lectured statistics, kinetics, kinematics, dynamics, oscillation theory, resistance of materials, theory of elasticity, as well as analytical mechanics, theory of nonlinear oscillations and continuum mechanics on the postgraduate level. He was the first head of Department of Mechanics and Automatics of the Faculty of Mechanical Engineering in Ni{. He was an extremely inspired professor, scientist and practitioner much favored among his students, respected by his colleagues both as a professor and an engineer, because he knew to relate engineering theory and practice.

Professor Ra{kovi} was a very fertile writer. While still in military service he wrote five professional papers. In the period before 1957, when he was appointed full professor, he published 26 scholarly papers. As a full professor he wrote 37 scientific works published in the scientific journals of the Serbian Academy of Arts and Sciences, Polish Academy of Science, German Society for Mechanics ZAMM and in other foreign journals. He took part in a number of scientific meetings in the country and abroad. He reviewed papers for four leading referral journals in the world: Applied Mechanics Review (USA), Mathematical Reviews (USA), Zentrablatt (Germany) and Referativnii `urnal (Moscow). Professor Ra{kovi} was a member of several professional and scientific societies/associations in the country and abroad, GAMM being one of them. He initiated the foundation of the Yugoslav Society for Mechanics during 1952.

He wrote a considerable number of university textbooks which ran through numerous editions. Some of them still hold records as for the number of editions and copies printed within the group they belong to. In addition, he wrote a series of textbooks in the field of mechanics for secondary technical schools, as well as a number of chapters in professional technical handbooks, mimeographed course materials and textbooks for post-secondary schools of mechanical engineering. He also wrote several textbooks for postgraduate studies.

We are of the opinion that this occasion should be used to say a few things about professor Ra{kovi}'s four-year-long co-operation with the publishing house "Nau~na knjiga" concerning the publication of his university textbooks, collections of problems and various other handbooks. Follows the review of university textbooks and handbooks written by professor Danilo Ra{kovi} and published by "Nau~na knjiga":

- **MECHANICS I (STATICS)** - a 18,000-copy printing of first three editions; II edition 1949, III edition 1950; subsequent editions 1960 (a 3,000-copy printing), 1962, 1964, 1965, 1968, 1971, 1973, 1978 (a 3,000-4,000-copy printing per edition)
- **MECHANICS II (KINEMATICS)** - first two editions in a 13,000-copy printing. Editions: 1947, 1950, 1966.
- **MECHANICS III (DYNAMICS)** - first two editions in 10,000 copies. Editions: 1947, 1956, 1962, 1973.
- **COLLECTION OF PROBLEMS IN STRAINGHT OF MATERIALS** - first two editions in a 6,000-copy printing. Editions: 1947, 1955, 1965, 1967, 1971, 1975, 1981, 1985 - a 16,000-copy printing approximately.
- **STRAINGHT OF MATERIALS** - editions: 1955, 1961, 1962, 1965, 1967, 1971, 1973, 1977, 1980, 1984 - approximately 25,000 copies.
- **OSCILLATION THEORY** - editions: 1957, 1965 - 6,000 copies.
- **TABLES OF STRAINGHT OF MATERIALS** - (ran through 13 editions) approximately 40,000 copies.
- **ESSENTIAL MATRIX CALCULUS -**1971 edition, 1,500 copies.
- **ELASTICITY THEORY -** 1985 edition, 2,000 copies.

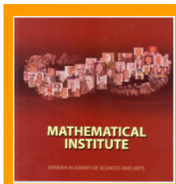
Some of his university textbooks were published by other publishing houses such as "Serbian Textbook Printing Office", "Gra|evinska knjiga", "Tehni~ka knjiga", among which the following ought to be mentioned: **ESSENTIAL THEORY OF MECHANISMS** (1965) 2,000 copies; **MECHANICS II (KINEMATICS),** 1966 edition in 3,000 copies; **COLLECTION OF PROBLEMS IN MECHANICS III - OSCILLATION THEORY** (1969) 2,000 copies.

Among professor Ra{kovi}'s textbooks for secondary technical schools the following deserve to be mentioned: **STATICS** (a 9,000-copy printing), **KINEMATICS** (7,500), **DYNAMICS** (10,000).

Among the publications for postgraduate studies the following should be mentioned: **ANALYTICAL MECHANICS** and **TENSOR CALCULUS**, both edited by the Faculty of Mechanical Engineering in Kragujevac.

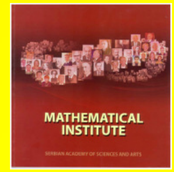
Most of his university textbooks and publications were at the time of their first editions the only professional literature in Serbian language in the field. So, his publications played an important part in spreading the knowledge in the field of technical mechanics among the students and mechanical and other engineers in Serbia and Yugoslavia. It is particularly worth mentioning that he has interpreted all his material by the most modern mathematical apparatus and has illustrated it by numerous examples from the engineering practice. Many of the cited university publications are reprinted even now and are still used by both students of engineering and engineers themselves.

Although he has left us ten years ago, professor Rašković is still present among the new generations of students, as well as among the engineers through his distinguished textbooks bearing memory of his merits which have left an indelible imprint on the development of mechanical engineering science and practice, as well as on the formation of many a generation of university professors. His life and work set an example serving as a creative impulse to the forth-coming generations educated at the University of Nis. He is an everlasting example and proof that one's deeds can outlive one's physical existence by far.



120.000 examples of university books in publishing house „Naučna knjiga“:

Author Prof. Dr. Ing. Dipl. Math. Danilo P. RAŠKOVIĆ (1910-1985)



Serbian Scientific Society

Hedrih (Stevanović) R. Katica

Mathematical Institute SANU Belgrade,
and Faulty of Mechanical Engineering University of Niš, Serbia

9th SEEDI Conference
Belgrade, 15 - 16th May, 2014

Abstract This distinguished scientific figure of exquisite creative energy and inspired enthusiasm, a scholar deeply attached to the Yugoslav and Serbian scientific and cultural heritage and an exquisite pedagogist of high ethic principles is in the living memory of many generations of students whom he taught how to learn and love mechanics, as a basic scientific branch of mechanical engineering either directly, through his lectures, or through his various and numerous textbooks and collections of problems which circulate in more than 140,000 copies. His disciples and colleagues are glad that he had the ability to transmit to them his great enthusiasm permeated with his sincere devotion for mechanics and his exquisite scientific eagerness.

Prof. Dr. Ing. Dipl. Math. Danilo P. RAŠKOVIĆ lectured mechanics, strainght of materials and oscillation theory at the faculties of mechanical engineering in Belgrade, Ni{, Kragujevac, Novi Sad and Mostar, as well as in the Faculty of Science in Belgrade, Faculty of Philosophy in Novi Sad, Faculty of Electronics in Niš and at the Military-Technical College in Belgrade.

Professor RAŠKOVIĆ wrote a considerable number of university textbooks which ran through numerous editions. Some of them still hold records as for the number of editions and copies printed within the group they belong to. In addition, he wrote a series of textbooks in the field of mechanics for secondary technical schools, as well as a number of chapters in professional technical handbooks, mimeographed course materials and textbooks for post-secondary schools of mechanical engineering. He also wrote several textbooks for postgraduate studies.

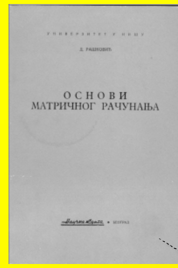
We are of the opinion that this occasion should be used to say a few things about professor Rašković's four-year-long co-operation with the publishing house "Naučna knjiga" concerning the publication of his university textbooks, collections of problems and various other handbooks. Follows the review of university textbooks and handbooks written by professor Danilo Rašković and published by "Naučna knjiga" in total 120.000 exemples:

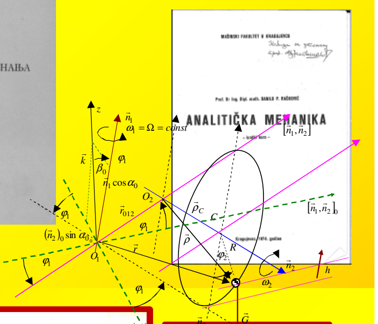
* **MECHANICS I (STATICS)** - a 18,000-copy printing of first three editions; II edition 1949, III edition 1950; subsequent editions 1960 (a 3,000-copy), 1962, 1964, 1965, 1968, 1971, 1973, 1978 (a 3,000-4,000-copy)
* **MECHANICS II (KINEMATICS**) - first two editions in a 13,000-copy printing. Editions: 1947, 1950, 1966
* **MECHANICS III (DYNAMICS) -** first two editions in 10,000 copies. Editions: 1947, 1956, 1962, 1973.
* **STRAINGHT OF MATERIALS** - editions: 1955, 1961, 1962, 1965, 1967, 1971, 1973, 1977, 1980, 1984 - approximately 25,000 copies.
* **OSCILLATION THEORY** - editions: 1957, 1965 - 6,000 copies.
* **TABLES OF STRAINGHT OF MATERIALS** - (ran through 13 editions) approximately 40,000 copies.
* **ESSENTIAL MATRIX CALCULU**S -1971 edition, 1,500 copies.
* **ELASTICITY THEORY** - 1985 edition, 2,000 copies.

and other.

Some of his university textbooks were published by other publishing houses such as "Zavod za izdavanje udžbenika", "Gradjevinska knjiga", "Tehnička knjiga".
Among the publications for postgraduate studies the following should be mentioned: **ANALYTICAL MECHANICS** and TENSOR CALCULUS, both edited by the Faculty of Mechanical Engineering in Kragujevac.

All contents of these pubications are material resources existing as scientific heritage in area of mechanics in Serbia and corresponding presentation in digital form is of great scientific interest and oppen possibilities to disseminate these foundamental books in area on theoretical and applied mechanics to new generations of students, researchers and engineers.





Beograd, 20.X.1984.

Draga Katice,

Hvala Vam na poslatoj kopiji prihvatanja recenzije kolega recenzenata. Taj akt i onaj prethodni kopirao sam i priložiću rukopisu, kako traži "Naučna knjiga". Sada su oni mnogo zauzeti spremanjem za sajam knjiga, pa ćemo pregled rukopisa i sve što ide uz to ostaviti za početak novembra. Dao sam crteže ing. Vidiću, pa će i oni biti verovatno g gotovi.

Kada sam bio kod "Naučne knjige " uspeo sam da od njih dobijem jedan primerak "Zbirke zadataka" /iz njihove biblioteke/. Tako smo sredili i ovu stvar da Vas ne mučim više , niti da molite Milku u moje ime. Priznajem da sam Vas mnogo nagnjavio sa ovim poslovima, ali šta ćete , Vi ste mi jedina uzdanica i pomoć. Još jednom veliko Vam hvala.

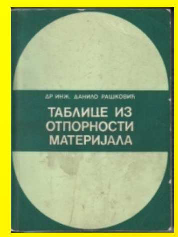
Kako ste Vi? Imate li mnogo posla? Sigurno, da imate ,škola je takva, nikad mira. Kako je gospodin? Vladimir je već veliki momak .Poljubite ga.

Primite mnogo pozdrava od moje supruge.

Uz zahvalnost ,mnogo, mnogo toplih pozdrava

Vaš

/prof. Rašković /



Beograd, 16.08.'84

Draga Katice,

Juče sam bio kod "Naučne knjige", pre nisam mogao, jer su bili na odmoru. Iako su kolege Anđelić i Brčić bili vrlo agilni, referat /recenzija/ je morao da čeka. Kao štp vidite recenzija je perfektna. Rukopis se mnogo sviđa kolegi Brčiću. Prof. Anđelića nisam video , bio je malo bolestan. Sada je sve u redu.

"Naučna knjiga" je zadržala rukopis radi detaljnog pregleda i voljna je da ga štampa u 2000 primeraka /uobičajeni ekonomsko opravdani tiraž/. Litografisanje ne dolazi u obzir zbog vrlo komplikovanog teksta i nerentabilnosti.

Oni smatraju

1. da MF u Nišu treba da plati honorar recenzentima,
2. da pisac preda crteže u tušu na pausu ili hameru radi kliširanja,
3. da novčana pomoć MF iz Niša može da se ostvari na dva načina
   a/ dodeljivanjem NKnjizi bezprovatne sume novca radi smanjena prodajne cene knjige,
   b/ zagarantovanog otkupa izvesne količine knjiga .

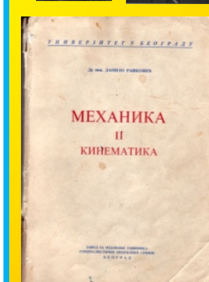
Oni će da izvrše kalkulaciju , pa mole da ih MF izvesti . Obaveštenje je najbolje poslati NK.

Kako ste Vi i Vaši? Jeste li se dobro odmorili? Mnogi se hvale kako im je bilo dobro u Grčkoj.

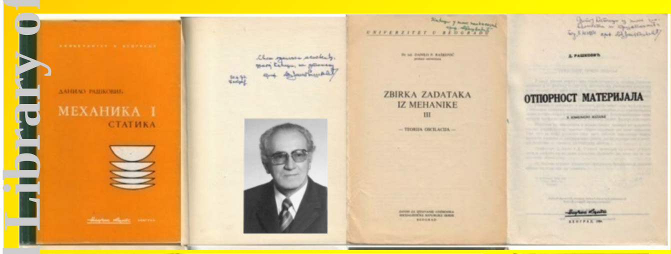
Žurim i izvinjavam se za eventualne greške. Želim da pošaljem dokumenta.

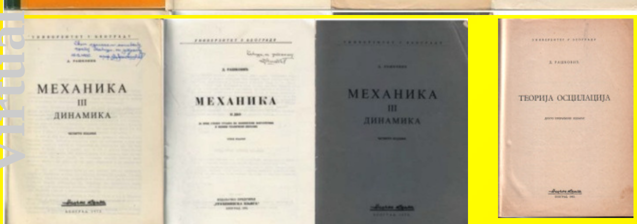
Srdačan pozdrav

/prof. Rašković/



ACKNOWLEDGEMENTS. *Sciences of Republic Serbia trough Mathematical Institute SANU Belgrade Grants ON144002 "Theoretical and Applied Mechanics of Rigid and Solid Body. Mechanics of Materials" and OI 174001" Dynamics of hybrid systems with complex structures. Mechanics of materials".*





Mathematical Institute SANU

9th SEEDI Conference, Belgrade, 15-16th May 2014

Mathematical Institute SANU