Nº D'ORDRE

825.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. MICHEL **PETROWITCH**,

Élève de l'École Normale supérieure,
Licencié ès Sciences mathématiques et ès Sciences physiques.

1re THÈSE. — SUR LES ZÉROS ET LES INFINIS DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le juin 1894 devant la Commission d'Examen.

MM. HERMITE, *Président.*

PICARD, PAINLEVÉ, } *Examinateurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1894

Своме поштованом професору
Господину Јов. Жујовићу
у знак поштовања и благодарности
Мих. N. Петровић

N° D'ORDRE

823.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

Par M. Michel PETROWITCH,

Élève de l'École Normale supérieure,
Licencié ès Sciences mathématiques et ès Sciences physiques.

1re THÈSE. — Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations différentielles algébriques.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le juin 1894 devant la Commission d'Examen.

MM. HERMITE, *Président.*
PICARD, PAINLEVÉ, } *Examinateurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1894

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	DARBOUX	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES	PASTEUR.	
	DUCHARTRE	Botanique.
PROFESSEURS	DE LACAZE-DUTHIERS.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	TROOST	Chimie.
	FRIEDEL	Chimie organique.
	TISSERAND	Astronomie.
	LIPPMANN	Physique.
	HAUTEFEUILLE	Minéralogie.
	BOUTY	Physique.
	APPELL	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ	Mécanique physique et expérimentale.
	PICARD	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	POINCARÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	Yves DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	MUNIER-CHALMAS	Géologie.
	GIARD	Zoologie, Évolution des êtres organisés.
	WOLF	Astronomie.
PROFESSEURS ADJOINTS	CHATIN	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	JOLY	Chimie.
	PELLAT	Physique.
SECRÉTAIRE	FOUSSEREAU.	

21022 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

A

MESSIEURS J. TANNERY ET P. PAINLEVÉ.

Hommage reconnaissant.

M. PETROWITCH.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR

LES ZÉROS ET LES INFINIS DES INTÉGRALES

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES.

INTRODUCTION.

Dans ce travail, je traite quelques questions concernant l'étude directe des zéros, des infinis, des maxima, des minima, etc., des intégrales des équations différentielles algébriques, et j'applique les résultats trouvés à l'étude des intégrales en me plaçant au point de vue de la théorie générale des fonctions.

Lorsque dans l'intégrale générale $y(x, C_1, \ldots, C_p)$ d'une équation différentielle d'ordre p, on fait varier les constantes d'intégration $C_1, \ldots, C_p$, les valeurs de x qui annulent cette intégrale, celles qui la rendent infinie, celles qui la rendent maxima ou minima, etc., *varient généralement avec les constantes d'intégration*. D'une manière générale, lorsqu'on fait varier une constante quelconque C_i figurant dans l'expression de l'intégrale générale, les valeurs $x = x_0$ qui annulent une combinaison donnée $\Psi(x, y, y', \ldots, y^{(k)})$ de la variable indépendante x, de l'intégrale y et de plusieurs de ses dérivées, varieront aussi. A une courbe donnée quelconque Γ_i dans le plan de la constante C_i correspondent une ou plusieurs courbes Δ_i dans le plan des x_0, de telle sorte que, si la constante C_i décrit la courbe Γ_i, une valeur x_0 décrira l'une des courbes Δ_i.

On peut se proposer de chercher les conditions pour que ces courbes Δ_i se réduisent à des points isolés, c'est-à-dire les conditions pour que les valeurs x_0 ne varient pas avec les constantes d'intégration, et dans ce cas les calculer toutes.

Ce problème, une fois la combinaison Ψ donnée, se ramène à la recherche des *conditions pour que les zéros ou les infinis de l'intégrale générale d'une équation differentielle ne varient pas avec les constantes d'intégration,* et au calcul direct des zéros ou des infinis de cette intégrale générale, problèmes déjà suffisamment intéressants par eux-mêmes. MM. Fuchs, Poincaré, Picard et Painlevé se sont occupés de problèmes analogues concernant les points critiques algébriques et les singularités transcendantes de l'intégrale générale. Si le fait de la fixité des singularités est d'une importance capitale au point de vue de la théorie des fonctions, il n'en est pas moins vrai que le fait de la fixité des valeurs désignées par x_0, joint à celui de la fixité des singularités transcendantes, peut avoir une grande importance dans les applications des équations différentielles. Dans ces applications, en effet, certaines particularités telles que les maxima, les minima, les zéros, les asymptotes de la courbe qui représente un phénomène physique ou mécanique, sont souvent ce qu'il importe le plus de connaître.

Je donne la solution complète du problème dans le cas des équations algébriques du premier ordre. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les zéros ou les infinis de l'intégrale générale ne varient pas avec la constante d'intégration, sont très simples, et il est toujours facile de vérifier si elles sont remplies pour une équation donnée. Si les zéros (ou les infinis) sont fixes, j'indique le moyen de les calculer tous, et les méthodes de Briot et Bouquet permettent alors de trouver leurs ordres dans le cas où ces ordres existent et d'étudier l'intégrale dans leur voisinage. S'ils sont mobiles, je donne le moyen de trouver leurs ordres, qui sont toujours des nombres commensurables. Ce calcul se fait graphiquement, d'une manière très commode, au moyen d'un certain polygone dont la construction n'exige que la connaissance des exposants de y et y' dans le premier membre de l'équation, mis sous la forme d'un polynome en y et y'. La considération de ce polygone s'introduit d'une façon naturelle dans cette étude, comme on peut s'en rendre compte par les théorèmes suivants :

Pour que l'intégrale ait des zéros mobiles d'ordre λ, il faut et il suffit que ce polygone ait un côté de coefficient angulaire λ; pour qu'elle ait des infinis mobiles d'ordre λ, il faut et il suffit que le polygone ait un côté de coefficient angulaire $-\lambda$.

Dans le cas des équations d'ordre supérieur, il m'a été impossible de donner une solution aussi complète du problème. Néanmoins, je donne des conditions *suffisantes* pour que les zéros ou les infinis de l'intégrale soient fixes, en supposant les singularités transcendantes des intégrales envisagées fixes; les théorèmes ainsi énoncés trouvent, par exemple, leur application dans l'étude des intégrales méromorphes de l'équation, pour lesquelles les difficultés relatives aux singularités transcendantes ne se présenteront pas. Les *conditions suffisantes* ainsi trouvées sont plus compliquées que dans le cas des équations du premier ordre, mais il est toujours facile de vérifier sur l'équation différentielle elle-même si elles sont remplies ou non. Cette vérification se réduit à la construction d'un polygone analogue à celui du cas des équations du premier ordre et à la recherche des racines d'une équation algébrique (dépendant de l'équation différentielle donnée), compris dans un intervalle réel donné ou dans une bande limitée par deux droites dans le plan des imaginaires. Les coefficients angulaires des côtés du polygone et certaines racines de cette équation algébrique représentent les seuls ordres possibles des zéros et des infinis mobiles de l'intégrale [1]. Ces ordres peuvent être invariables (commensurables ou incommensurables), ou même imaginaires, ou dépendre des constantes d'intégration; j'indique des conditions suffisantes pour qu'ils soient tous invariables, comme dans le cas du premier ordre.

Les applications que l'on peut faire des résultats ainsi obtenus sont nombreuses et variées. J'en donne quelques-unes dans ce travail.

Le travail est partagé en deux Parties, la première concernant les

---

[1] Mais on ne sait pas alors en général s'il n'existe pas des points x mobiles où y s'annule, $\frac{dy}{dx}$ étant indéterminée.

équations du premier ordre et la seconde les équations d'ordre supérieur.

Dans le premier Chapitre de la première Partie, j'établis les conditions nécessaires et suffisantes pour que les zéros ou les infinis de l'intégrale générale soient indépendants de la constante d'intégration, et, dans le cas où ils sont mobiles, je donne le moyen de calculer leurs ordres.

Dans le second Chapitre, j'expose quelques applications des principes précédents.

En premier lieu, viennent quelques applications des théorèmes du premier Chapitre aux singularités de l'intégrale générale. Les singularités transcendantes de l'intégrale ne varient jamais avec la constante d'intégration, d'après un théorème de M. Painlevé. M. Fuchs a donné les conditions pour qu'il en soit de même des points critiques algébriques, et il suffit de modifier légèrement les conditions de M. Fuchs pour avoir celles de la fixité de toutes les singularités possibles, y compris les pôles. Lorsque ces conditions sont remplies, l'équation s'intègre par des opérations algébriques ou par deux quadratures au plus.

J'applique ces conditions à certains types généraux d'équations, en cherchant toutes les équations appartenant à ces types, dont les intégrales ont toutes leurs singularités fixes.

Les résultats du premier Chapitre donnent aussi lieu à quelques remarques relatives aux périodes polaires de l'intégrale de l'équation $F(y, y', y'') = 0$, quand elle est définie par l'inversion d'une intégrale abélienne.

Ce second Chapitre se termine par une application à l'étude des intégrales particulières uniformes; je cite notamment des classes étendues d'équations où toute intégrale uniforme doit être une fonction rationnelle. Dans les cas où il y a des intégrales uniformes transcendantes, je détermine la limite supérieure du nombre de telles intégrales *distinctes*, et je signale les relations algébriques qui existent entre deux ou trois quelconques de ces intégrales. Le Chapitre se termine par une remarque relative aux résidus des intégrales correspondant aux pôles simples mobiles.

Dans la seconde Partie, ayant pour objet l'étude des équations d'ordre supérieur, je donne en premier lieu les conditions suffisantes (en supposant les singularités transcendantes des intégrales considérées fixes), pour que les zéros ou les infinis des intégrales soient fixes. Dans le cas où ces conditions sont remplies, j'indique le moyen de calculer ces zéros ou ces infinis. Dans le cas où ils sont mobiles, je détermine leurs ordres possibles.

Je donne en second lieu (dans le second Chapitre de cette Partie) quelques applications à l'étude des intégrales uniformes.

Lorsque le polygone correspondant à l'équation remplit certaines conditions, l'étude des intégrales uniformes se réduit à celle des intégrales holomorphes d'une autre équation. Je signale une généralisation d'une propriété, indiquée par M. Picard, des intégrales méromorphes des équations algébriques du second ordre, où x ne figure pas explicitement. Cette propriété consiste en la possibilité de mettre l'intégrale sous la forme du quotient de deux fonctions entières, satisfaisant à des équations différentielles connues.

Mais l'application la plus importante est la suivante : on peut dans des cas étendus trouver des *intégrales premières relatives aux intégrales uniformes* de l'équation. J'appelle ainsi une fonction de x, de y et de quelques-unes de ses dérivées, qui se réduit à une constante ou à une fraction rationnelle en x, lorsqu'on y remplace y par une intégrale *uniforme* de l'équation différentielle donnée. La connaissance de telles intégrales premières simplifie la recherche des intégrales uniformes, en la ramenant à la considération d'équations d'un ordre moins élevé. Ce fait permet, dans des cas étendus, de reconnaître si l'équation différentielle admet ou non des intégrales uniformes, et de les calculer toutes dans le cas où elles existent. J'ai indiqué le moyen de construire *a priori* des types d'équations où l'on connaîtra ces intégrales premières, et où la détermination de toutes les intégrales uniformes est possible.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

CHAPITRE I.

SUR LES ZÉROS ET LES INFINIS DE L'INTÉGRALE GÉNÉRALE.

1. Soit

$$F = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x)\, y^{m_i} y'^{n_i}$$

un polynome en y et en $y' = \dfrac{dy}{dx}$, où les m_i et n_i sont des entiers positifs tels qu'on n'ait pas à la fois $m_i = m_j$, $n_i = n_j$ pour $i \neq j$, et où les φ_i sont des fonctions quelconques de x.

Formons le double tableau de $2s$ nombres entiers et positifs suivants

$$M_i = m_i + n_i, \qquad N_i = n_i,$$

et traçons dans le plan deux axes : sur l'un, nous compterons les M_i et sur l'autre les N_i, et marquons les s points (M_i, N_i) en ayant soin d'inscrire à côté de chacun d'eux son indice i. Soit (M_α, N_α) le point le plus éloigné de l'axe ON; s'il y en a plusieurs situés à la même distance de ON, on envisagera celui d'entre eux qui est le plus éloigné de l'axe OM. Soit de même (M_β, N_β) le point le plus rapproché de ON; nous ferons la même convention que pour le point (M_α, N_α) dans le cas où il y aurait plusieurs points sur une même parallèle à ON passant par le point (M_β, N_β).

Par le point (M_α, N_α) faisons passer une demi-droite parallèle à ON et de même sens. Faisons-la tourner autour de (M_α, N_α) dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, de droite à gauche, jusqu'à ce qu'elle vienne rencontrer un point quelconque $(M_{\alpha'}, N_{\alpha'})$ et arrêtons-la alors. Soit $(M_{\alpha'}, N_{\alpha'})$ le point où l'on s'est arrêté; s'il y en avait plusieurs sur une même droite, on prendra le plus éloigné de (M_α, N_α). Joignons les points (M_α, N_α) et $(M_{\alpha'}, N_{\alpha'})$ par une portion de droite, prolongeons cette droite indéfiniment dans le sens de (M_α, N_α) vers $(M_{\alpha'}, N_{\alpha'})$ et faisons tourner ce prolongement autour de $(M_{\alpha'}, N_{\alpha'})$ jusqu'au moment où il vient rencontrer un nouveau point $(M_{\alpha''}, N_{\alpha''})$; joignons les deux points $(M_{\alpha'}, N_{\alpha'})$ et $(M_{\alpha''}, N_{\alpha''})$ par une portion de droite et répétons l'opération précédente jusqu'à ce qu'on rencontre le point (M_β, N_β), ce qui arrivera nécessairement. On aura formé alors une ligne polygonale convexe partant de (M_α, N_α) et aboutissant à (M_β, N_β); en la fermant par deux parallèles à ON menées par les sommets (M_α, N_α) et (M_β, N_β), et la portion de OM comprise entre ces deux parallèles, on aura un polygone, que j'appellerai, pour abréger le langage, *le polygone* Π *de* F.

Par la manière même dont il a été construit, ce polygone jouira des propriétés suivantes :

1° Si par un point quelconque parmi les points (M_i, N_i) on mène une parallèle à un des côtés du polygone, ne passant pas par le point (M_i, N_i), l'ordonnée à l'origine de la droite obtenue est toujours plus petite que l'ordonnée à l'origine du côté considéré. De plus, parmi toutes les droites qu'on peut tracer en joignant deux à deux les points (M_i, N_i), les côtés du polygone sont les seules droites jouissant de cette propriété que, si par un quelconque des points (M_i, N_i) on leur mène des parallèles, l'ordonnée à l'origine de chacune de ces parallèles est plus petite que celle du côté;

2° Si par un point quelconque (M_i, N_i) qui ne soit pas un sommet du polygone, on mène une droite D de direction quelconque, il existe toujours au moins un sommet du polygone tel que, si par ce sommet on mène une parallèle Δ à D, l'ordonnée à l'origine de la droite Δ soit plus grande que celle de D. De plus, les sommets du polygone sont les seuls points (M_i, N_i) jouissant de cette propriété.

Faisons, pour abréger le langage, les conventions suivantes :

a. Le point (M_i, N_i) sera désigné par (i);

b. La droite joignant deux points (i) et (j) sera désignée par (i, j);

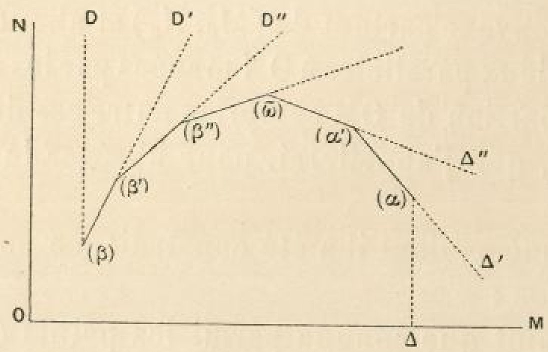
c. L'ordonnée à l'origine de la droite passant par le point (i) et ayant le coefficient angulaire λ sera désignée par $S_{i,\lambda}$;

d. Les sommets (α) et (β) seront appelés *sommets extrêmes*, les autres *sommets intermédiaires;*

e. Le sommet le plus élevé du polygone sera appelé *sommet* ϖ; s'il y en a deux sur une même parallèle à OM, on distinguera les sommets ϖ *en droit* et *gauche;*

f. Enfin, j'appellerai *domaine* d'un point (M_i, N_i) (*fig.* 1) le plus grand intervalle (λ_1, λ_2) tel que, si λ varie dans cet intervalle, la droite

Fig. 1.



de coefficient angulaire λ et passant par le point (M_i, N_i) a son ordonnée à l'origine constamment plus grande que celle d'une droite ayant la même direction et passant par l'un quelconque des autres points (M_i, N_i).

D'après les propriétés du polygone, le domaine d'un point (M_i, N_i), autre qu'un sommet, est nul. Au contraire, on voit facilement que :

1° Le domaine du sommet (β), le plus rapproché de OM, est l'intervalle de

$$\lambda = \frac{N_\beta - N_{\beta'}}{M_\beta - M_{\beta'}} \quad \text{à} \quad \lambda = +\infty.$$

2° Le domaine du sommet (α) le plus éloigné de OM est l'intervalle de

$$\lambda = \frac{N_\alpha - N_{\alpha'}}{M_\alpha - M_{\alpha'}} \quad \text{à} \quad \lambda = -\infty.$$

3° Le domaine d'un sommet intermédiaire (i), compris entre les sommets (i') et (i'') est l'intervalle de

$$\lambda = \frac{N_i - N_{i'}}{M_i - M_{i'}} \quad \text{à} \quad \lambda = \frac{N_i - N_{i''}}{M_i - M_{i''}}.$$

Sur la figure, le domaine du sommet (β) peut être représenté par l'angle $D\beta D'$, celui du sommet (β') par $D'\beta' D''$, ..., enfin celui du sommet (α) par l'angle $\Delta\alpha\Delta'$.

Je dirai qu'un sommet est *à domaine positif* ou *négatif*, suivant que toutes les valeurs de λ comprises dans son domaine sont positives ou négatives. Tous les sommets à gauche du sommet ϖ gauche sont à domaine positif; tous ceux à droite du sommet ϖ droit sont à domaine négatif. Si les deux sommets ϖ coïncident, un tel sommet ϖ a une partie de son domaine positive et une autre négative; c'est le seul cas où le domaine d'un sommet peut être partagé en deux parties de signes différents. Enfin, si le polygone n'a qu'un seul sommet (ce qui arrive quand il se réduit à une parallèle à ON), ce sera le sommet ϖ unique, et son domaine est l'intervalle de $\lambda = +\infty$ à $\lambda = -\infty$.

La construction du polygone relatif à un polynome F donné se fait très facilement au moyen d'un papier quadrillé. Il est facile également de trouver la forme du polynome F correspondant à un système de points (M_i, N_i) donné; il faut seulement, pour que ceci ait du sens, que le système (M_i, N_i) soit tout entier compris dans l'angle formé par la partie positive de OM et la partie de la bissectrice de l'angle NOM qui est comprise dans cet angle.

Tout polynome de degré μ en y' a son polygone situé tout entier dans la bande comprise entre OM et la parallèle à OM située à la distance μ de OM; il est situé en outre dans l'angle formé par la bissectrice de l'angle NOM et l'axe OM, et il y a un sommet au moins sur la parallèle μ à OM. Inversement : à chaque système (M_i, N_i) compris dans l'angle précédent, situé tout entier entre OM et une parallèle à OM à la distance μ de OM, et ayant un sommet sur cette parallèle, correspond un polynome en y et y', de degré μ en y'.

Le polygone d'un polynome F de degré o en y' se réduit à une portion de l'axe OM.

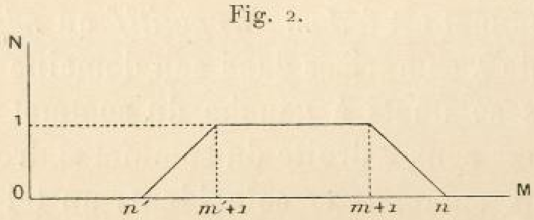
Si $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont deux polynomes en y, les plus grands exposants de y étant m et n, et les plus petits m' et n', la forme générale du polygone de

$$F = P(x, y)y' + Q(x, y)$$

est celle de la *fig.* 2. Pour le polynome

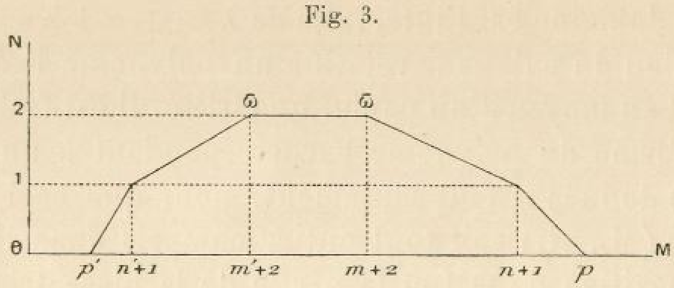
$$F = P(x, y)y'^2 + Q(x, y)y' + R(x, y)$$

Fig. 2.



où le plus grand exposant de R en y est p et le plus petit p', la forme générale du polygone est celle de la *fig.* 3, etc.

Fig. 3.



J'ajoute enfin les deux remarques suivantes, dont j'aurai à faire usage dans la suite.

1° Pour que le polygone Π_P de $P(x, y, y')$ soit en même temps le polygone de $P(x, y, y') + Q(x, y, y')$, il faut et il suffit que le polygone Π_Q de Q n'ait aucun sommet en dehors du polynôme Π_P. Ainsi, lorsque Q ne contient pas y', la condition se réduit à ce que le plus grand et le plus petit exposant de Q en y soient compris dans l'intervalle des abscisses des deux sommets extrêmes de Π_P.

2° En posant $y = \frac{1}{z}$ dans

$$F(x, y, y') = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x) y^{m_i} y'^{n_i},$$

ce polynome deviendra

$$\Phi(x, z, z') = \frac{1}{z^{\delta}} \Psi(x, z, z'),$$

où δ est la plus grande valeur de la somme $M_i + N_i$ relative à F, et où Ψ est un polynome en z et z' de la forme

$$\Psi(x, z, z') = \sum_{i=1}^{i=s} (-1)^{n_i} \varphi_i(x) z^{\delta-(m_i+2n_i)} z'^{n_i}.$$

Chaque point (M'_i, N'_i) relatif à Ψ est symétrique du point (M_i, N_i) correspondant de F par rapport à la droite $M = \delta$, car

$$M'_i = [\delta - (m_i + 2n_i)] + n_i = \delta - M_i, \qquad N'_i = n_i = N_i;$$

par conséquent *le polygone* Π_Ψ *de* Ψ *est symétrique du polygone* Π_F *de* F *par rapport à la droite* $M = \delta$.

2. Ceci posé, envisageons l'équation différentielle

$$(1) \qquad F = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x) y^{m_i} y'^{n_i} = 0;$$

et soit $x = a$ une valeur de x telle que, y étant l'intégrale de (1) et λ une constante finie et différente de zéro, le rapport

$$\frac{y}{(x-a)^{\lambda}}$$

et sa dérivée première par rapport à x tendent vers des limites finies et déterminées, lorsque x tend vers a. Il en sera ainsi toutes les fois que a est une valeur qui annule ou rend infinie l'intégrale y, pourvu que cette valeur ne coïncide pas avec une des singularités transcendantes de l'intégrale, singularités qui sont fixes et connues à l'avance. En posant

$$y = (x-a)^{\lambda} f(x),$$

d'où

$$y' = \lambda(x-a)^{\lambda-1} f(x) + (x-a)^{\lambda} f'(x),$$

le terme général de F deviendra

$$\varphi_i(x)(x-a)^{(m_i+n_i)\lambda-n_i}[\lambda^{n_i}f^{m_i+n_i}(x)+\theta_i(x)],$$

où $\theta_i(x)$ est un polynome en $f(x)$ et $(x-a)f'(x)$ à coefficients constants, mais dans lequel il n'y a pas de terme dépendant uniquement de $f(x)$. On aura donc

$$F=\sum_{i=1}^{i=s}\varphi_i(x)(x-a)^{(m_i+n_i)\lambda-n_i}[\lambda^{n_i}f^{m_i+n_i}(x)+\theta_i(x)].$$

Envisageons dans cette somme l'ensemble T de termes pour lesquels l'exposant $\lambda(m_i+n_i)-n_i$ de la puissance de $(x-a)$ mise en facteur est le plus faible. Suivant les valeurs des m_i, n_i, λ, l'ensemble T sera composé d'un seul terme, de deux ou de plusieurs termes, et je vais chercher les conditions nécessaires et suffisantes correspondant à ces divers cas.

En général, pour que les termes d'indices i', i'', i''', ... fassent partie de T, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies simultanément :

$$(1)\qquad \lambda(m_{i'}+n_{i'})-n_{i'}=\lambda(m_{i''}+n_{i''})-n_{i''}=\ldots,$$

$$(2)\qquad \lambda(m_{i'}+n_{i'})-n_{i'}<\lambda(m_i+n_i)-n_i;$$

lorsqu'on attribue à l'indice i dans le second membre toutes les valeurs entières de 1 à s, autres que i', i'', i''', ...

La condition (1) peut s'écrire

$$(3)\qquad \lambda=\frac{N_{i'}-N_{i''}}{M_{i'}-M_{i''}}=\frac{N_{i''}-N_{i'''}}{M_{i''}-M_{i'''}}=\ldots.$$

On voit donc que λ doit être égal au coefficient angulaire de la droite (i', i''), et que les points correspondant aux divers termes de T doivent être tous sur cette droite.

D'autre part, la quantité λM_i-N_i, lorsqu'on y remplace λ par la valeur (3), représente l'ordonnée à l'origine, changée de signe, de la droite passant par le point (i) et de coefficient angulaire λ, ordonnée que nous avons désignée par $S_{i,\lambda}$.

Par conséquent, pour que les termes d'indice i', i'', i''' fassent partie de T, il faut et il suffit :

1° Que les points d'indice i', i'', i''', ... soient sur une même droite, et que λ soit égal au coefficient angulaire de cette droite ;

2° Que $S_{i',\lambda} > S_{i,\lambda}$ pour tous les indices i de 1 à s autres que i', i'', i''', ..., c'est-à-dire que l'ordonnée à l'origine de la droite (i', i'') soit plus grande que celle d'une quelconque des droites parallèles à (i', i'') et passant par les points (i) non situés sur la droite (i', i'').

Pour que les termes correspondant aux deux points (i') et (i'') fassent partie de T, il faut que le coefficient angulaire λ de la droite (i', i'') ait pour valeur la valeur tirée de la relation (3). Réciproquement, λ étant convenablement choisie, quels que soient les deux points (i'), (i''), on peut toujours satisfaire à la condition (1), pourvu que ces points ne soient pas situés sur une même droite parallèle à OM et ON, car on a supposé la valeur de λ finie et différente de zéro.

Il reste encore à satisfaire à la condition (2). Or, d'après les propriétés du polygone, pour que cette condition soit remplie, il faut et il suffit que la droite (i', i'') soit un côté du polygone non parallèle aux axes. On voit donc que, pour que T soit composé d'au moins deux termes, il faut et il suffit que λ soit égal au coefficient angulaire d'un côté quelconque du polygone, non parallèle aux axes; les indices des termes qui figurent dans T sont ceux des sommets du polygone qui se trouvent sur le côté dont le coefficient angulaire est égal à (3).

On peut maintenant utiliser ce résultat pour donner à T certaines formes qui nous seront utiles dans la suite.

A. Supposons que dans le polygone de F il n'y ait aucun côté non parallèle aux axes, ou, s'il y en a, que le nombre donné λ ne soit égal à aucun des coefficients angulaires de ces côtés. L'ensemble T est alors composé d'un terme unique, et l'indice de ce terme est égal à l'indice du sommet dont le domaine comprend λ.

Soit (h) ce sommet et posons, pour abréger,

$$\varphi_i(x)[\lambda^{n_i} f(x)^{m_i+n_i} + \theta_i(x)] = \Omega_i(x);$$

on peut alors écrire F sous la forme

$$\text{I.} \qquad F = (x-a)^{-S_{h,\lambda}}\left[\Omega_h(x) + \sum (x-a)^{S_{h,\lambda}-S_{i,\lambda}}\Omega_i(x)\right],$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les points (i) autres que le point (h). Tous les exposants $S_{h,\lambda} - S_{i,\lambda}$ figurant dans le second membre sont positifs, car, par suite de définition même du terme d'indice h, on a $S_{h,\lambda} < S_{i,\lambda}$ pour tous les points (i) autres que (h).

B. Supposons que le polygone ait des côtés non parallèles aux axes, et que λ soit égal au coefficient angulaire d'un de ces côtés. T sera alors la somme de tous les termes correspondant aux indices des points situés sur le côté de coefficient angulaire λ.

Convenons de représenter par :

$\sum\limits_{(i,j)}$ la sommation étendue aux indices de tous les points (i) situés sur la droite (i, j);

$\sum\limits_{-(i,j)}$ la sommation étendue aux indices de tous les points (i) non situés sur la droite (i, j).

Soit (γ, δ) un côté quelconque du polygone, non parallèle aux axes ; on a, lorsque λ est égal au coefficient angulaire de ce côté,

$$T = (x - a)^{-S_{\gamma,\lambda}} \sum_{(\gamma,\delta)} \Omega_i(x),$$

et F pourra s'écrire

$$\text{II.} \qquad F = (x - a)^{-S_{\gamma,\lambda}} \left[\sum_{(\gamma,\delta)} \Omega_i(x) + \sum_{-(\gamma,\delta)} (x - a)^{S_{\gamma,\lambda} - S_{i,\lambda}} \Omega_i(x) \right],$$

où tous les exposants $S_{\gamma,\lambda} - S_{i,\lambda}$ sont positifs.

Mais, quelle que soit celle des formes I et II que F prendra, on doit avoir identiquement, dans le voisinage de $x = a$, $F = 0$, quelle que soit la valeur de a; par conséquent, dans ce voisinage, on aura identiquement, soit

$$\Omega_h(x) + \sum (x - a)^{S_{h,\lambda} - S_{i,\lambda}} \Omega_i(x) = 0,$$

soit

$$\sum_{(\gamma,\delta)} \Omega_i(x) + \sum_{-(\gamma,\delta)} (x - a)^{S_{h,\lambda} - S_{i,\lambda}} \Omega_i(x) = 0,$$

suivant que, dans le voisinage de $x = a$, F prend la forme I ou II, c'est-à-dire suivant que la condition remplie est A ou B.

3. Supposons maintenant que x tende vers a; la fonction $f(x)$, qui est le rapport de y à $(x-a)^\lambda$, ainsi que sa dérivée $f'(x)$, tendront vers des limites finies et déterminées, et comme tous les $\theta_i(x)$ sont des polynomes en $f(x)$ et en $(x-a)f'(x)$, dans lesquels les termes dépendant uniquement de $f(x)$ manquent, on aura, pour $x=a$,

$$\lim \theta_i(x) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Donc, pour toutes les valeurs de a, sauf peut-être pour certaines valeurs a' particulières et reconnaissables sur l'équation différentielle elle-même, pour lesquelles les fonctions $\varphi_i(x)$ deviennent infinies, on aura

$$\lim \Omega_i(x) = \lambda^{n_i}\varphi_i(a)\rho \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, s),$$

où ρ est la limite de $f(x)$ pour $x=a$.

En tenant compte de ce que les exposants $S_{h,\lambda} - S_{i,\lambda}$ sont positifs, on voit, par conséquent, que, pour toute valeur de a ne coïncidant avec aucune des valeurs particulières a' :

A. Si le polygone n'a aucun côté non parallèle aux axes, ou (dans le cas contraire) si λ n'est égal à aucun des coefficients angulaires des côtés du polygone, on aura

$$\lambda^{n_h}\varphi_h(a)\rho^{M_h} = 0,$$

et, comme ρ est différent de zéro, a doit être racine de $\varphi_h(a)=0$, ce qui montre que a ne dépend pas de la constante d'intégration. Quant à l'indice h, c'est l'indice du sommet dans le domaine duquel se trouve λ;

B. Si le polygone a des côtés non parallèles aux axes, et si λ est égal au coefficient angulaire d'un tel côté (γ, δ), on aura

$$\sum_{(\gamma,\delta)} \lambda^{n_i}\varphi_i(a)\rho^{M_i} = 0,$$

où la sommation s'étend à tous les points (i) sur le côté (γ, δ). Quelle que soit la valeur attribuée à a, cette équation, que j'appellerai l'*équation en* ρ relative au côté (γ, δ), a au moins une racine ρ finie et différente de zéro, car tous les M_i figurant dans la somme $\sum\limits_{(\gamma,\delta)}$ sont distincts, et la valeur a peut dépendre de la constante d'intégration.

On peut en déduire les conséquences suivantes :

1° Toutes les fois que l'intégrale générale a des infinis mobiles, le polygone de F a un ou plusieurs côtés à coefficient angulaire négatif, et l'ordre d'un quelconque de ces infinis est égal à l'un de ces coefficients angulaires.

2° Toutes les fois que l'intégrale générale a des zéros mobiles, le polygone de F a un ou plusieurs côtés à coefficient angulaire positif, et l'ordre d'un quelconque de ces zéros est égal à l'un de ces coefficients.

Il s'ensuit d'abord que l'ordre d'un infini ou d'un zéro mobile est toujours commensurable, ce qui était à prévoir d'après le théorème de M. Painlevé sur la fixité des singularités transcendantes de l'intégrale.

En second lieu, on en conclut que :

3° Si à droite du sommet ϖ droit le polygone n'a aucun sommet, les infinis de l'intégrale sont fixes et doivent être en même temps, soit singularités transcendantes de l'intégrale, soit zéros de la fonction $\varphi_h(x)$ (h désignant l'indice du sommet ϖ droit), soit enfin infinis d'une fonction φ_i autre que φ_h.

4° Si à gauche du sommet ϖ gauche le polygone n'a aucun sommet, les zéros de l'intégrale sont fixes et se trouvent parmi les valeurs analogues à celles du cas précédent.

4. On a ainsi des conditions suffisantes pour la fixité des infinis et des zéros de l'intégrale générale. Mais je dis que les conditions sont aussi nécessaires, c'est-à-dire, si à droite du sommet ϖ droit il y a d'autres sommets, l'intégrale générale a certainement des infinis mobiles, et si à gauche du sommet ϖ gauche il y a des sommets, l'intégrale a des zéros mobiles.

Démontrons-le, par exemple, pour les infinis. Supposons qu'il y ait à droite du sommet ϖ droit d'autres sommets; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, si l'on écrit l'équation différentielle sous la forme

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{k=\mu} f_k(x, y)\, y'^{\,\mu-k} = 0,$$

où les f_k sont des polynomes en y, il y ait au moins un des polynomes

f_k tel que, si l'on désigne par ν_k le degré de f_k en y, on ait

$$\nu_k - \nu_0 > k.$$

En effet, si l'on écrit l'équation (1) sous la forme

$$\sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x)\, y^{m_i} y'^{n_i} = 0,$$

les points (M_i, N_i) sont définis par les coordonnées

$$M_i = m_i + n_i, \qquad N_i = n_i.$$

Le sommet ϖ droit, ayant l'ordonnée maxima μ, provient du terme du polynome $f_0(x,y)\,y'^{\mu}$ ayant le plus grand exposant en y; il provient donc du terme en $y^{\nu_0} y'^{\mu}$, ν_0 étant le degré de f_0 en y.

Pour qu'il y ait des sommets à droite de ce sommet ϖ, il faut et il suffit qu'au moins une droite Δ joignant ce sommet aux autres points (i) ait son coefficient angulaire négatif; cette droite ne peut passer par aucun des points (i) provenant des termes du polynome $f_0(x,y)\,y'^{\mu}$, car tous ces points sont sur une même droite parallèle à OM et passant par le sommet ϖ droit. Supposons donc qu'elle passe par un des points provenant des termes du polynome $f_k(x,y)\,y'^{\mu-k}$. Si m est l'exposant de y dans le terme considéré de ce polynome, le coefficient angulaire de la droite Δ est

$$\frac{(\nu_0 - \mu) - (m - \mu + k)}{\mu - (\mu + k)} = \frac{\nu_0 - m + k}{k}.$$

Pour qu'il soit négatif, il faut et il suffit que $m - \nu_0 > k$, et, comme on a $m \leqq \nu_k$, il faut, *a fortiori*, que $\nu_k - \nu_0 > k$.

Cette condition est aussi suffisante pour qu'à droite du sommet ϖ droit il y ait d'autres sommets; car, par exemple, le coefficient angulaire de la droite joignant le sommet ϖ droit au point provenant du terme en $y^{\nu_k} y'^{\mu-k}$ est alors négatif.

Supposons donc que, dans le premier membre de l'équation (1), il y ait un ou plusieurs termes $f_h(x,y)\,y'^{\mu-h}$, tels que $\nu_k - \nu_0 > h$, et faisons $y = \frac{1}{z}$; l'équation deviendra

$$(2) \qquad \sum_{i=0}^{i=\mu} \frac{\varphi_i(x, z) z'^{\mu-i}}{z^{2(\mu-i)+\nu_i}} = 0,$$

où les $\varphi_i(x, z)$ sont des polynomes en z ne contenant pas z en facteur. Je dis que l'intégrale générale z de (2) s'annule pour des valeurs finies de x, et que ces valeurs varient avec la constante d'intégration.

Pour le montrer, posons $z' = \frac{z}{t}$; l'équation (2) devient

$$(3) \qquad \sum_{i=0}^{i=\mu} \frac{\varphi_i(x, z)}{t^{\mu-i} z^{\mu-i+\nu_i}} = 0$$

et, en multipliant par $z^{\mu+\nu_0} t^{\mu}$,

$$(4) \qquad \varphi_0(x, z) + \sum_{i=1}^{i=\mu} \varphi_i(x, z) z^{i+\nu_0-\nu_i} t^i = 0.$$

Comme parmi les exposants $i + \nu_0 - \nu_i$ il y en a au moins un de négatif (grâce à ce fait qu'il y a au moins un indice h tel que $\nu_h - \nu_0 > h$), et comme aucune fonction φ_i ne contient z en facteur, cette équation (4), algébrique en t et en z, admet une ou plusieurs racines t s'annulant avec z. Ces racines forment un ou plusieurs systèmes circulaires, et les racines d'un même système circulaire seront, dans le voisinage de $x = x_0$, représentées par un développement de la forme

$$t = A z^{\frac{\alpha}{n}} + B z^{\frac{\alpha+1}{n}} + C z^{\frac{\alpha+2}{n}} + \ldots,$$

où α et n sont des entiers positifs au moins égaux à l'unité; A, B, C, ... sont des fonctions de x, et A n'est pas identiquement nulle.

Envisageons l'une de ces racines. La dernière équation relative à cette racine peut s'écrire

$$\frac{1}{t} = \frac{z'}{z} = \frac{1}{A z^{\frac{\alpha}{n}} + B z^{\frac{\alpha+1}{n}} + C z^{\frac{\alpha+2}{n}} + \ldots},$$

et, en posant $z = u^n$, elle devient

$$(5) \qquad n\frac{du}{dx} = \frac{1}{u^{\alpha-1}(A + Bu + Cu^2 + \ldots)}.$$

Désignons par (P) l'ensemble de singularités (pôles, points critiques algébriques, points transcendants) des fonctions A, B, C, ..., singularités qui, évidemment, ne varient pas avec la constante d'intégration, et distinguons deux cas, suivant que $\alpha = 1$ ou $\alpha > 1$.

Premier cas : $\alpha = 1$. — Alors $\frac{du}{dx}$ est holomorphe dans le voisinage de $x = x_0$, $u = 0$, et cela quelle que soit la valeur x_0, pourvu qu'elle ne coïncide avec aucune des valeurs (P). Par conséquent, l'équation (5) admet une intégrale, et une seule, holomorphe elle-même, qui, pour $x = x_0$, prend la valeur $u = 0$; de plus, cette intégrale ne peut pas être identiquement nulle, car A n'est pas identiquement nulle et reste finie pour $x = x_0$. Donc l'équation (2) elle-même admet une intégrale z s'annulant pour $x = x_0$ et ne se réduisant pas identiquement à zéro. Comme x_0 est arbitraire, les zéros de z varient certainement avec la constante d'intégration, et, par suite, les infinis de y sont mobiles.

L'intégrale u s'annulant pour $x = x_0$ et étant holomorphe dans le voisinage de cette valeur, x_0 est un pôle de l'intégrale y, et, comme $x = x_0$ est un zéro simple de u $\left(\text{car } \frac{du}{dx} \text{ ne s'annule pas}\right)$, c'est un zéro d'ordre n pour z et, par suite, un pôle d'ordre n pour y.

Deuxième cas : $\alpha > 1$. — Alors $\frac{du}{dx}$ devient infinie pour $u = 0$, mais son inverse $\frac{dx}{du}$ est holomorphe dans le voisinage de $x = x_0$, $u = 0$, pourvu que x_0 ne coïncide avec aucune valeur comprise dans l'ensemble (P). Comme toutes les dérivées successives de $\frac{dx}{du}$ par rapport à x jusqu'à celle d'ordre $\alpha - 1$ inclusivement s'annulent pour $x = x_0$, $u = 0$, l'équation (5) admet une intégrale u s'annulant pour $x = x_0$ et ayant cette valeur comme zéro d'ordre $\frac{1}{\alpha}$. Par conséquent $x = x_0$

sera un infini d'ordre $\frac{n}{\alpha}$ pour y, et cet infini varie avec la constante d'intégration.

Par conséquent, pour que les infinis de l'intégrale y soient fixes, il faut que la condition

$$\nu_k - \nu_0 \leq k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, \mu)$$

soit remplie ou encore (comme on l'a vu plus haut), il faut que le polygone, relatif au premier membre de l'équation, n'ait aucun sommet à droite du sommet ϖ droit.

La condition énoncée pour la fixité des infinis est donc nécessaire; nous avons vu d'autre part qu'elle est aussi suffisante. On peut s'en rendre compte d'une autre façon de la manière suivante. Lorsque, à droite du sommet ϖ droit, il n'y a pas d'autres sommets, aucun exposant $i + \nu_i - \nu_0$ dans l'équation (4) n'est négatif, et l'équation n'admet aucune racine t s'annulant avec z. Il en résulte que $\frac{1}{t}$ est une fonction holomorphe, soit en z, soit en $u = z^{\frac{1}{n}}$ (où n est le nombre des racines t de l'équation (4) appartenant à un même système circulaire lorsque z tend vers zéro) dans le voisinage de $z = 0$ (ou $u = 0$) et de toute valeur x_0 ne coïncidant avec aucune valeur comprise dans l'ensemble (P). D'après un théorème connu, la seule intégrale z (ou u) s'annulant pour de telles valeurs x_0 est $z = 0$ ($u = 0$), c'est-à-dire $y = \infty$; l'intégrale générale y de l'équation proposée ne peut donc devenir infinie que pour certaines valeurs fixes de x, appartenant à l'ensemble (P).

On peut, d'après cela, énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Pour que les infinis de l'intégrale générale de l'équation algébrique du premier ordre* $F(x, y, y') = 0$ *ne varient pas avec la constante d'intégration, il faut et il suffit que le polygone de* F *n'ait aucun sommet à droite de son sommet* ϖ *droit.*

Si l'équation $F = 0$ est écrite sous la forme

$$\sum_{i=0}^{=\mu} f_i(x, y)\, y'^{\mu - i} = 0,$$

où les f_i sont des polynomes en y, et où le degré de f_i est ν_i, cette condition devient

$$\nu_i - \nu_0 \leqq i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \mu).$$

5. Il s'agit maintenant, après avoir reconnu que l'intégrale de $F = 0$ admet des infinis mobiles, de trouver les ordres de multiplicité de ces infinis.

Nous avons vu que, lorsqu'il y a des infinis mobiles, on a $\alpha > 0$, et que :

1° Si $\alpha = 1$, $x = x_0$ est un pôle d'ordre n de y;

2° Si $\alpha > 1$, $x = x_0$ est un infini d'ordre $\frac{n}{a}$ de y.

Par conséquent, d'une façon générale, x_0 est un infini d'ordre $\frac{1}{\tau}$ de y, τ désignant l'ordre infinitésimal de la racine t par rapport à z dans l'équation (3). Inversement, à toute valeur τ, représentant l'ordre infinitésimal d'un système circulaire de racines t de l'équation (3) par rapport à z, correspondent des infinis mobiles de y ayant $\frac{1}{\tau}$ comme ordre de multiplicité.

Cherchons donc ces valeurs τ. On peut les obtenir par la construction classique de Puiseux, appliquée à l'équation (3), mais le polygone dont nous nous sommes servi précédemment donne directement ces valeurs. En effet, si l'on met l'équation $F(x, y, y') = 0$ sous la forme

$$\sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x) y^{m_i} y'^{n_i} = 0,$$

et si l'on pose $y = \frac{1}{z}$, $y' = -\frac{1}{zt}$, ce qui revient à effectuer les changements précédents $y = \frac{1}{z}$, $z' = \frac{z}{t}$, on obtient l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=s} (-1)^{n_i} \varphi_i(x) z^{-(m_i+n_i)} t^{-n_i} = 0$$

ou

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{i=s} (-1)^{n_i} \varphi_i(x) z^{-M_i} t^{-N_i} \qquad = 0.$$

Si l'on pose

$$\alpha_i = M_\varpi - M_i, \qquad \beta_i = N_\varpi - N_i,$$

où M_ϖ, N_ϖ sont les coordonnées du sommet ϖ droit du polygone Π de F, l'équation (6) devient

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{i=s} (-1)^{n_i} \varphi_i(x) z^{\alpha_i} t^{\beta_i} = 0,$$

où α_i et β_i sont des entiers positifs.

L'équation (7), d'après sa formation, n'est autre que l'équation (3). En désignant par τ l'ordre infinitésimal de t par rapport à z, le terme général de (7) sera d'ordre infinitésimal $\alpha_i + \beta_i\tau$, et l'on aura toutes les valeurs possibles de τ en égalant $\alpha_i + \beta_i\tau$ à une autre expression analogue $\alpha_j + \beta_j\tau$, et en choisissant parmi toutes les valeurs de τ ainsi obtenues celles qui remplissent les conditions

$$\alpha_i + \beta_i\tau \geqq \alpha_j + \beta_j\tau \qquad (i = 1, 2, \ldots, s, \; j = 1, 2, \ldots, s).$$

Comme l'on a

$$\frac{\alpha_i - \alpha_j}{\beta_i - \beta_j} = \frac{M_i - M_j}{N_i - N_j},$$

les conditions précédentes font voir que les valeurs de τ sont les inverses des coefficients angulaires des côtés à coefficient angulaire négatif du polygone Π de F, changés de signe, et que réciproquement à chaque côté de Π, à coefficient angulaire négatif, correspond une valeur de τ. Par conséquent, l'ordre λ d'un infini mobile de y est égal au coefficient angulaire, changé de signe, d'un côté de Π à droite du sommet ϖ droit, et inversement : à chacun de ces côtés correspondent des infinis mobiles de y ayant le coefficient angulaire de ce côté, changé de signe, comme ordre de multiplicité.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Pour que l'intégrale générale de* $F(x, y, y') = 0$ *ait des infinis mobiles ayant un nombre donné* λ *comme ordre, il faut et il suffit que le polygone* Π *de* F *ait un côté, à droite de son sommet* ϖ *droit, de coefficient angulaire égal à* $-\lambda$.

Toutes les fois que l'ordre d'un infini de y n'est pas égal au coefficient angulaire d'un tel côté, cet infini coïncide, soit avec un point singulier transcendant de y, soit avec un des zéros ou des infinis des fonctions $\varphi_i(x)$. *Ce sera notamment un zéro de* $\varphi_h(x)$ *ou un infini des autres* $\varphi_i(x)$, *h désignant l'indice du sommet du polygone* π *dans le domaine duquel* $-\lambda$ *est compris,* comme il résulte de ce que nous avons vu au commencement de ce Chapitre. Si, en particulier, tous les $\varphi_i(x)$ sont des fonctions holomorphes, x_0 est un zéro de $\varphi_h(x)$, et si $\varphi_h(x)$ est une constante, ou plus généralement une fonction ne s'annulant pour aucune valeur finie de x, l'intégrale y ne peut devenir infinie pour aucune valeur finie de x.

On en déduit aussi le théorème suivant :

Théorème III. — *Toutes les fois que l'intégrale d'une équation* $F(x, y, y') = 0$, *algébrique en* x, y, y' *a ses infinis indépendants de la constante d'intégration, ces infinis sont en nombre fini.*

Enfin, les méthodes de Briot et Bouquet permettront toujours de décider si un zéro de $\varphi_h(x)$ donné est un infini d'une seule intégrale ou un infini commun à un nombre fini ou à une infinité d'intégrales.

6. En appliquant les résultats qui précèdent à la transformée en $\frac{1}{y}$ de $F(x, y, y') = 0$ et en se rappelant que le polygone de cette transformée est symétrique, par rapport à une certaine parallèle à ON, du polygone de F, on a pour les zéros de l'intégrale y des propositions analogues aux propositions précédentes relatives à ses infinis :

Théorème IV. — *Pour que les zéros de l'intégrale de* $F(x, y, y') = 0$ *soient fixes, il faut et il suffit que le sommet* ϖ *gauche du polygone* Π *de* F *soit le sommet extrême gauche de ce polygone.*

Théorème V. — *Pour que l'intégrale ait des zéros mobiles d'un ordre donné* λ, *il faut et il suffit qu'à gauche du sommet* ϖ *gauche le polygone* Π *ait un côté de coefficient angulaire* λ.

Au théorème IV on peut donner différentes formes. Si l'on écrit, par exemple, $F = 0$ sous la forme

$$\sum_{i=0}^{i=\mu} f_i(x, y)\, y'^{\mu-i} = 0,$$

où f_i sont des polynomes en y, *la condition nécessaire et suffisante pour la fixité des zéros de y est, qu'après avoir supprimé tous les facteurs communs aux* $f_i(x, y)$, *chaque* f_i *contienne en facteur* y^h *où* $h \geqq i$.

On arrive d'ailleurs facilement à ce théorème par le raisonnement direct suivant.

Pour que les zéros de y soient fixes, il faut et il suffit que toutes les valeurs de y' s'annulent pour $y = 0$ quel que soit x, et, en outre, que les développements de y' suivant les puissances de y commencent tous par un terme d'ordre au moins égal à 1.

En effet, il faut d'abord que toutes les valeurs de y' s'annulent pour $y = 0$; sinon il y aurait des intégrales coupant la droite $y = 0$ pour x quelconque.

Ceci posé, développons une des branches $y' = f(\bar{x}, y)$ suivant les puissances de y, d'après la règle de Puiseux :

$$y = A(x) y^{\frac{\lambda}{\mu}} + \ldots;$$

si l'on pose $z = y^{\frac{\lambda}{\mu}}$, on trouve

$$\mu z' = A(x) z^{\lambda - \mu + 1} + \ldots.$$

Ce développement montre qu'il y a des intégrales $z(x)$ qui ne sont pas identiquement nulles et qui s'annulent pour une valeur x_0 quelconque de x, à moins que $\lambda - \mu + 1 > 0$, ou bien que $\frac{\lambda}{\mu} \geqq 1$, d'où s'ensuit immédiatement le théorème précédent.

Toutes les fois que l'ordre λ d'un zéro de y n'est pas égal au coefficient angulaire d'un côté du polygone, ce zéro coïncide soit avec un point singulier transcendant de l'intégrale, soit avec un zéro de $\varphi_h(x)$ (h désignant l'indice du sommet dans le domaine duquel est compris λ), soit enfin avec un infini des autres coefficients $\varphi_i(x)$. Il s'ensuit que, si l'intégrale d'une équation $F = 0$ algébrique en x, y, y' a ses zéros indépendants de la constante d'intégration, ces zéros sont en nombre limité.

Je cite, à titre d'exemple où l'on vérifie facilement tout ce qui précède, l'équation

$$[y' + f(x) y]^m + \varphi(x) y^n = 0$$

(où m et n sont des entiers positifs), dont l'intégrale générale est

$$y = e^{-\int f(x)\,dx}\left[C + \frac{m-n}{m}\int \sqrt[m]{-\varphi(x)}\, e^{(m-n)\int f(x)\,dx}\,dx\right]^{\frac{m}{m-n}},$$

C étant la constante d'intégration.

7. Il peut arriver que l'intégrale d'une équation ait à la fois ses zéros et ses infinis fixes. D'après ce qui précède, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème VI. — *Pour que l'intégrale générale de* $F(x, y, y') = 0$ *ait ses zéros et ses infinis fixes à la fois, il faut et il suffit que le polygone* Π *de* F *soit un rectangle ou qu'il se réduise à une droite parallèle à* ON.

Pour que le polygone Π se réduise à une droite parallèle à ON, il faut et il suffit que l'équation soit homogène en y et y' et, par conséquent, réductible aux équations linéaires du premier ordre. Quant au cas où Π est un rectangle, j'en indiquerai quelques exemples.

Dans le cas de l'équation du premier degré

$$P(x, y)\,y' + Q(x, y) = 0$$

(se reporter à la 10 page pour la forme générale du polygone), les conditions nécessaires et suffisantes pour que le polygone se réduise à un rectangle sont

$$n' \leqq m' + 1 \qquad \text{et} \qquad n \geqq m + 1;$$

la première condition est nécessaire et suffisante pour la fixité des zéros, et la seconde pour la fixité des infinis.

Pour l'équation

$$P(x, y)\,y'^2 + Q(x, y)\,y' + R(x, y) = 0,$$

les conditions pour que le polygone soit un rectangle sont les suivantes :

$$p' \leqq n' + 1 \leqq m' + 2 \qquad \text{et} \qquad p \geqq n + 1 \geqq m + 2,$$

comme on le voit d'après la forme générale du polygone de l'équation (*fig.* 3).

Je terminerai par la remarque qu'on ramène facilement aux problèmes précédents le problème de l'étude de l'intersection des courbes intégrales avec une courbe fixe donnée à l'avance, des maxima ou des minima des courbes intégrales, de leurs points d'inflexion, etc,

CHAPITRE II.

QUELQUES APPLICATIONS DES THÉORÈMES PRÉCÉDENTS.

ÉQUATIONS A TOUTES LES SINGULARITÉS FIXES.

1. Les singularités que peut présenter l'intégrale d'une équation algébrique du premier ordre sont :

1° Singularités algébriques (pôles et points critiques algébriques);

2° Singularités transcendantes (points critiques logarithmiques, points essentiels).

Ces dernières ne varient pas avec la constante d'intégration, tandis que les premiers varient généralement. Mais il y a des cas où toutes les singularités possibles de l'intégrale sont fixes, comme cela arrive par exemple pour l'équation linéaire; des théorèmes du Chapitre I et du théorème de M. Fuchs exprimant les conditions pour que les points critiques algébriques de l'intégrale soient fixes, on déduit facilement les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette circonstance se présente.

Pour que les points critiques soient fixes, il faut et il suffit, comme on sait, que :

1° La dérivée y' définie par l'équation différentielle donnée ne devienne infinie pour aucune valeur finie de y, et que cette condition soit aussi remplie pour la transformée en $\frac{1}{y}$ de l'équation;

2° Tout système (x_0, y_0) pour lequel deux valeurs de y' s'échangent correspond à un point ordinaire de l'intégrale qui, pour $x = x_0$, prend la valeur $y = y_0$.

La première condition revient à celle-ci : l'équation différentielle étant mise sous la forme

$$F(x, y, y') = \sum_{i=0}^{i=\mu} f_i(x, y) y'^{\mu-i} = 0,$$

le degré de chaque polynome $f_k(x, y)$ en y ne surpasse pas $2k$.

La seconde condition peut s'exprimer sous différentes formes, par exemple sous la forme suivante, donnée par M. Poincaré :

a. Les équations

$$F = \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

définissent les intégrales singulières de l'équation $F = 0$;

b. On a identiquement

$$\frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial x} = PF + Q \frac{\partial F}{\partial y'},$$

où P et Q sont des polynomes en y et y' à coefficients fonctions quelconques de x.

Il suffit d'ajouter à ces conditions celle du théorème I du Chapitre I pour avoir les conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les singularités de l'intégrale soient fixes. Ces conditions sont les suivantes :

A. *Le degré du polynome $f_k(x, y)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, \mu)$ en y ne surpasse pas k.*

Ceci revient à dire que le sommet ϖ du polygone de F se trouve sur la bissectrice de l'angle NOM et qu'à sa droite il n'y a aucun sommet.

B. *Les conditions* (a) *et* (b) *sont remplies.*

Désignons par p le genre de $F(x, y, y') = 0$ en y, y'. M. Poincaré a montré que si l'équation $F = 0$ est à points critiques fixes :

1° Si $p = 0$, y est une fonction rationnelle [à coefficients fonctions algébriques des coefficients $\varphi_i(x)$ dans $F = 0$] de u, u étant l'intégrale générale d'une équation de Riccati à coefficients fonctions algébriques des $\varphi_i(x)$;

2° Si $p = 1$, y est une fonction rationnelle (à coefficients algébriques en φ_i) de $\lambda[\int\chi(x)\,dx + C]$, λ étant le symbole d'une fonction méromorphe doublement périodique, et $\chi(x)$ une fonction algébrique des φ_i;

3° Si $p > 1$, y est une fonction algébrique des φ_i.

Il s'ensuit que :

1° Si les conditions A et B sont remplies, on a $p \lesseqgtr 1$;

2° Si $p = 0$, l'équation de Riccati à laquelle satisfait u se réduit à une équation linéaire du premier ordre (les conditions A et B étant supposées remplies).

D'où le théorème suivant :

Toutes les fois que les conditions A *et* B *sont remplies, l'équation* $F = 0$ *s'intègre algébriquement ou par deux quadratures au plus.*

Si, par exemple, l'équation $F(x, y, y') = 0$ est algébrique en x, y, y', et les conditions algébriques remplies, l'intégrale générale y est une fonction algébrique de x et rationnelle en

$$e^{\int \varpi(x)\,dx}, \qquad \int \chi(x)\, e^{\int \varpi(x)\,dx} dx,$$

où $\varpi(x)$ et $\chi(x)$ sont des fonctions algébriques de x.

J'ajouterai une remarque relative à ces fonctions algébriques $\varpi(x)$ et $\chi(x)$ en supposant que $F(x, y, y')$ soit un polynome irréductible en x, y, y'. Soit m le degré de ce polynome en y'. Si l'intégrale s'obtient par les deux quadratures précédentes, c'est que le genre de l'équation en y et y' est égal à zéro. Exprimons y et y' en fonction rationnelle d'un paramètre λ

$$y = R_1(x, \lambda), \qquad y' = R_2(x, \lambda),$$

R_1 et R_2 étant des fonctions rationnelles de λ et algébriques en x. On sait, d'après un important théorème de M. Nöther [1], que :

1° Si m est impair, on peut choisir un paramètre λ de telle sorte

---

[1] *Math. Annalen*, t. III.

que la représentation paramétrique précédente n'introduise aucune irrationnalité par rapport aux coefficients $\varphi_i(x)$ dans F, c'est-à-dire que R_1 et R_2 soient des fonctions rationnelles non seulement en λ, mais aussi en x.

2° Si m est pair, il existe toujours une représentation paramétrique n'introduisant des irrationnalités par rapport aux coefficients $\varphi_i(x)$ dans F autres qu'une racine carrée d'un polynome en coefficients $\varphi_i(x)$.

D'autre part, les coefficients en x dans l'équation linéaire du premier ordre à laquelle satisfait λ sont fonctions rationnelles des coefficients en x figurant dans R_1 et R_3. Par conséquent, si m est impair, les deux fonctions $\varpi(x)$ et $\chi(x)$ seront des fractions rationnelles en x; si m est pair, elles sont de la forme

$$S_1(x) + S_2(x)\sqrt{P(x)},$$

où S_1 et S_2 sont des fractions rationnelles et P un polynome en x.

Il s'ensuit que, si m est impair, l'intégrale $\int \varpi(x)\,dx$ s'exprime par des fonctions algébriques et logarithmiques; si m est pair, c'est une intégrale abélienne du genre hyperelliptique.

2. Cherchons maintenant, parmi les équations appartenant à quelques types généraux d'équations, celles dont l'intégrale a toutes ses singularités fixes.

Il est d'abord évident que, parmi toutes les équations de la forme

$$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

l'équation linéaire est la seule jouissant de cette propriété.

Cherchons les conditions pour que l'intégrale générale de l'équation binome

$$y'^m = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{1}$$

ait toutes ses singularités fixes.

D'abord Q ne peut pas renfermer y, et le degré de P en y est au plus égal à m. Soit $y = \eta$ une racine de $P(x,y) = 0$, pour laquelle y' définie par (1) se ramifie. D'après les conditions de M. Fuchs, $y = \eta$ doit être une intégrale de (1), et, de plus, on doit avoir

$$\zeta = \frac{d\eta}{dx},$$

en désignant par ζ la racine commune en y' aux deux équations

$$y'^m - P(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y'}[y'^m - P(x, y)] = 0,$$

et, cette racine commune étant $y' = 0$, on aura

$$\frac{d\eta}{dx} = 0,$$

c'est-à-dire $\eta = \text{const.}$

Par conséquent, toutes les fois que le polynome $P(x, y)$ renferme des facteurs de la forme $y - \eta$, où η est une fonction de x, le point $y = \eta$ (où l'on considère x comme constant) n'est pas un point de ramification de y' définie par (1). Il s'ensuit que, s'il existe de tels facteurs, chacun d'eux doit être élevé à une puissance égale à m ou à un multiple de m; mais, comme le degré de P en y ne peut pas surpasser m, s'il existe un tel facteur, il est unique, et P doit être de la forme

$$P(x, y) = \chi(x)(y - \eta)^m,$$

dans quel cas l'équation (1) se réduit à l'équation linéaire

$$y' = \sqrt[m]{\chi(x)}(y - \eta).$$

Pour qu'il n'en soit pas ainsi, il faut donc que P soit de la forme

$$P(x, y) = \chi(x) S(y),$$

où S est un polynome en y à coefficients constants, dont le degré ne surpasse pas m, et en posant

$$\sqrt[m]{\chi(x)}\, dx = dz,$$

l'équation (1) devient

(2) $$\left(\frac{dy}{dz}\right)^m = S(y).$$

Pour que les points critiques de y, considéré comme fonction de x, soient fixes, il faut et il suffit que l'intégrale générale $y(z)$ de (2) soit uniforme. Or, pour les équations binomes de la forme (2), Briot et Bouquet ont indiqué tous les types intégrables par les fonctions uniformes ([1]). Parmi eux, il y a onze types intégrables par des fonctions méromorphes doublement périodiques, qu'il faut laisser de côté, car l'intégrale y qui leur correspond a des pôles variant avec la constante d'intégration, et alors les types restants sont

I. $$\frac{dy}{dz} = g(y-a)^2,$$

II. $$\left(\frac{dy}{dz}\right)^m = g(y-a)^{m+1}(y-b)^{m-1},$$

III. $$\frac{dy}{dz} = g(y-a)(y-b),$$

IV. $$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = g(y-a)^2(y-b)(y-c)$$

(g étant une constante) et leurs transformées obtenues en posant

$$y = \alpha + \frac{1}{u},$$

où α est une constante. Les deux premières équations, ainsi que leurs transformées, sont intégrables par des fonctions rationnelles, et les deux dernières par des fonctions simplement périodiques. Mais on voit facilement que, parmi toutes ces équations, les seules satisfaisant aux conditions du problème qui nous occupe sont :

1° $$\left(\frac{dy}{dz}\right)^m = g(y-\beta)^{m-1},$$

2° $$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = g(y-\beta)(y-\gamma);$$

la première est déduite de II et la seconde de IV en changeant y en $a + \frac{1}{y}$.

([1]) *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 389; 1875.

On a ainsi le résultat suivant :

Parmi toutes les équations de la forme

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^m = \mathrm{R}(x, y),$$

où R *est une fonction rationnelle en* y *et quelconque en* x, *les seules équations dont les intégrales ont toutes leurs singularités fixes sont l'équation linéaire et les deux équations suivantes :*

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^m = \chi(x)(y-a)^{m-1},$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \chi(x)(y-a)(y-b),$$

où a *et* b *sont des constantes et* $\chi(x)$ *une fonction quelconque de* x.

L'intégrale de la première équation est

$$y = a + \left[\mathrm{C} + \frac{1}{m}\int \sqrt[m]{\chi(x)}\,dx\right]^m,$$

et celle de la seconde

$$y = \frac{1}{2}(a+b) + \mathrm{C}e^{\int\frac{dx}{\sqrt{\chi(x)}}} + \frac{(a-b)^2}{4\mathrm{C}}e^{-\int\frac{dx}{\sqrt{\chi(x)}}}.$$

Envisageons encore l'équation

$$p(x, y)y'^2 + q(x, y)y' + s(x, y) = 0, \tag{3}$$

où p, q, s sont polynomes en y.

Pour que les points critiques de l'intégrale soient fixes, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies :

1° Les degrés respectifs de p, q, s en y sont au plus égaux à 0, 2, 4 ;

2° Le discriminant $\Delta(x,y) = q^2 - 4ps$ de (3) par rapport à y', considéré comme polynome en y, est : soit un carré parfait [et alors l'équation (3) se décompose en deux équations de Riccati], soit tel que l'équation $\Delta(x,y) = 0$ ait une racine double en y et deux autres distinctes [l'équation (3) est du genre 0], soit tel que $\Delta(x, y) = 0$ ait ses quatre racines distinctes [l'équation (3) est du genre 1].

3° Toutes les racines de $\Delta = 0$ sont des intégrales de (3).

Lorsque les pôles de y sont également fixes, les degrés respectifs de q et s sont au plus égaux à 1 et 2; le discriminant $\Delta(x,y)$ est un polynome du second degré en y et l'équation (3) est du genre 0; la condition 2° est alors toujours remplie. Par conséquent, les conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les singularités de l'intégrale soient fixes sont les suivantes :

1° Les degrés respectifs de p, q, s en y sont au plus égaux à 0, 1, 2;

2° La courbe $\Delta(x,y) = 0$ est une intégrale de (3).

Si les deux racines en y de $\Delta = 0$ sont égales, l'équation (3) est décomposable en deux équations linéaires; si ces racines sont distinctes, elle se ramène à une équation linéaire par une transformation de la forme

$$y = R_1(x, \lambda), \qquad y' = R_2(x, \lambda),$$

où R_1 et R_2 sont des fractions rationnelles en λ.

L'équation (3) se rencontre, comme l'on sait, quand on cherche les lignes asymptotiques ou les lignes de courbure des surfaces pour lesquelles les coordonnées s'expriment en fonction rationnelle d'un paramètre u (et d'une façon quelconque d'un autre paramètre v). Si les conditions A et B précédentes sont remplies, ces lignes s'obtiennent donc par deux quadratures au plus.

3. J'ajouterai ici une application des théorèmes du Chapitre I relative aux directions asymptotiques de l'intégrale générale de $F(x, y, y') = 0$, où F est un polynome en x, y, y', qui peut être utile dans l'étude de ces intégrales.

Proposons-nous de chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces directions ne varient pas avec la constante d'intégration, et de calculer dans ce cas leurs coefficients angulaires. Si l'on pose $\lambda = \frac{y}{x}$, les coefficients angulaires des asymptotes non parallèles à l'axe des y sont les valeurs finies de λ pour lesquelles x devient infini, lorsque dans l'équation $y = \lambda x$ on remplace y par l'intégrale générale de $F = 0$. Or, en remplaçant, dans $F = 0$, y par λx et y' par

$$\lambda + \frac{x}{\frac{dx}{d\lambda}},$$

on obtient une équation

$$\Psi\left(\lambda, x, \frac{dx}{d\lambda}\right) = 0,$$

et la condition nécessaire et suffisante cherchée est que les infinis λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots$ de x, considéré comme intégrale générale de $\Psi = 0$, ne varient pas avec la constante d'intégration. Par conséquent :

Pour que les directions asymptotiques de y ne varient pas avec la constante d'intégration, il faut et il suffit que le polygone de $\Psi = 0$ n'ait aucun côté à droite de son sommet ϖ droit. Si l'on désigne par $\varphi(\lambda)$ le coefficient du terme correspondant à ce sommet, les coefficients angulaires des asymptotes non parallèles à Oy sont racines de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$.

Je signale, en passant, une application de ce théorème, relative à l'équation algébrique $F(y, y', y'') = 0$ (où x ne figure pas) dans les cas où son intégrale générale est une fonction algébrique, simplement périodique ou doublement périodique à un nombre fini de valeurs (ce que les méthodes de MM. Picard et Painlevé permettent de reconnaître). Dans ce cas, l'équation du premier ordre

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0 \tag{2}$$

a son intégrale générale $\chi(y, p, C) = 0$ algébrique, et y s'obtient par l'inversion de l'intégrale abélienne

$$x = \int \frac{dy}{p}.$$

Considérons p et y comme l'abscisse et l'ordonnée d'un point; les directions asymptotiques, non parallèles aux axes de la courbe $\chi(y, p, C) = 0$, sont

$$\alpha_i = \lim \frac{y}{p} \qquad \text{pour} \qquad y = \infty;$$

les coefficients angulaires (finis et différents de zéro) des tangentes à cette courbe aux points réels ou imaginaires où elle rencontre l'axe des y sont

$$\beta_i = \lim \frac{dy}{dp} \qquad \text{pour} \qquad p = 0.$$

Il est connu dans la théorie des intégrales abéliennes que les valeurs

$$2\pi i\alpha_i \quad \text{et} \quad 2\pi i\beta_i$$

sont, à un facteur entier près, les périodes polaires de l'intégrale abélienne $x = \int \frac{dp}{p}$, correspondant aux infinis logarithmes simples, c'est-à-dire aux valeurs $y = a$, pour lesquelles x devient infini et sa dérivée est de l'ordre de $\frac{1}{y-a}$. Par conséquent, si l'intégrale y est algébrique ou doublement périodique, il n'y a pas de valeurs α_i et β_i finies et différentes de zéro; si y est simplement périodique, les valeurs α_i et β_i forment une suite de nombres commensurables entre eux, et la période de y est alors, à un facteur entier près, égale au plus grand diviseur commun aux α_i et β_i multiplié par $2\pi i$.

Ceci étant, posons dans (2)

$$p = \lambda y, \qquad \frac{dp}{dy} = \lambda + \frac{y}{\frac{dy}{d\lambda}},$$

et soit

$$\Psi\left(\lambda, y, \frac{dy}{d\lambda}\right) = 0 \tag{3}$$

la transformée ainsi obtenue, Ψ étant mis sous la forme d'un polynome. Si l'on désigne par λ_i les valeurs, finies et différentes de zéro, de λ qui rendent infinie l'intégrale $y(\lambda)$ de (3), on aura

$$\alpha_i = \frac{1}{\lambda_i}.$$

Par conséquent : *pour que l'intégrale y de* $F(y, y', y'') = 0$ *puisse être algébrique ou doublement périodique, il faut que le polygone de* (3) *n'ait aucun sommet à droite de son sommet ϖ droit et que le coefficient du terme correspondant à ce sommet se réduise à une constante.*

Supposons que, le polygone de (3) n'ayant aucun sommet à droite du sommet ϖ droit, le coefficient du terme dans Ψ correspondant à ce sommet soit une fonction $\varphi(\lambda)$ de λ. Alors :

Pour que y puisse être une fonction simplement periodique de x, il *faut que les racines* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *de l'équation* $\varphi(\lambda) = 0$ *forment une suite de nombres commensurables entre eux.*

On obtient des propositions analogues en considérant les valeurs β_i; en écrivant l'équation (2) sous la forme

$$\sum_{k=0}^{k=\mu} f_k\left(y, \frac{dp}{dy}\right) p^{\mu-k} = 0,$$

les β_i sont racines de l'équation

$$(4) \qquad f_\mu\left(y_0, \frac{1}{\beta_i}\right) = 0,$$

où y_0 est un zéro quelconque de l'intégrale générale $p(y)$ de l'équation (2).

Si l'intégrale $y(x)$ *est algébrique ou doublement périodique, l'équation* (4) *ne peut avoir aucune racine* β_i *finie et différente de zéro.*

Supposons que cette équation admette des racines finies β_i, indépendantes de y_0, ou encore, si elles en dépendaient, que le polygone de (2) ait son sommet ϖ gauche comme sommet extrême gauche (dans quel cas y_0 ne varie pas avec la constante d'intégration), et soit $\theta(y)$ le coefficient du terme correspondant à ce sommet. Désignons par (β_i, y_j) les différents systèmes de racines communes aux deux équations

$$f_\mu\left(y, \frac{1}{\beta_i}\right) = 0, \qquad \theta(y) = 0;$$

si l'intégrale $y(x)$ *est simplement périodique, les valeurs* β_i *forment une suite de nombres commensurables entre eux et avec les racines* λ_i *de* $\varphi(\lambda) = 0$; *la période est alors, à un facteur entier près, égale à* $2\pi i \rho$, ρ *étant le plus grand diviseur commun aux* β_i *et* λ_i.

Vérifions tout ceci sur l'exemple simple

$$yy'' + ay'^2 + byy' = 0,$$

où a et b sont des constantes. On a ici

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = y\frac{dp}{dy} + ap + b,$$

$$\Psi\left(\lambda, y, \frac{dy}{d\lambda}\right) = [\lambda(1+a) + b]\frac{dy}{d\lambda} + y,$$

$$\alpha_i = -\frac{1+a}{b}, \qquad \beta_i = -\frac{1}{b}.$$

D'après ce qui précède, si y est algébrique, on a $b = 0$; si y est une fonction simplement périodique, a est nul ou commensurable, et alors la période est égale à $\frac{2\pi i}{b}$, à un facteur entier près.

Ceci se vérifie à la seule inspection de l'intégrale générale qui est, soit

$$y = C(1 + C' e^{bx})^{\frac{1}{1+a}},$$

soit

$$y = C(1 + C' x)^{\frac{1}{1+a}},$$

suivant que $b \neq 0$ ou $b = 0$.

Quelques applications à l'étude des intégrales uniformes.

1. Soit $F(x, y, y') = 0$ une équation du premier ordre, où F est un polynome en y, y', algébrique en x.

Quand on veut reconnaître si l'intégrale générale d'une telle équation est uniforme, on vérifie d'abord si les conditions nécessaires et suffisantes de M. Fuchs, pour que les points critiques algébriques de l'intégrale soient fixes, sont remplies. S'il en est ainsi, l'équation s'intègre algébriquement au moyen de la théorie des transformations birationnelles des courbes algébriques en elles-mêmes, ou par une quadrature, ou se ramène à une équation de Riccati, suivant que $p > 1$, $p = 1$ ou $p = 0$, p étant le genre de $F = 0$ en y, y'. Ceci fait, il ne reste qu'à vérifier si l'intégrale ainsi obtenue n'a réellement pas des points critiques. Quant à la nature analytique des fonctions uniformes qu'engendre l'intégration d'une équation telle que $F = 0$,

1° Si $p > 1$, ce sont des fonctions rationnelles en x;

2° Si $p = 1$, ce sont des fonctions rationnelles en x et en $\lambda(J)$, λ étant le symbole d'une fonction méromorphe doublement périodique et J étant une intégrale abélienne;

3° Si $p = 0$, ce sont les transcendantes définies par une équation de Riccati à coefficients algébriques en x.

Lorsque x ne figure pas explicitement dans l'équation, les fonctions uniformes engendrées par son intégration peuvent être des fonctions rationnelles soit en x, soit en e^{ax}, soit en $\operatorname{sn}(ax)$ et $\operatorname{cn}(ax)\operatorname{dn}(ax)$.

Si l'intégrale générale de $F = 0$ est *holomorphe* dans tout le plan, *le genre p est différent de l'unité* (sans quoi il y aurait des pôles mobiles) et alors :

1° Si $p > 1$, l'intégrale est un polynome en x;

2° Si $p = 0$, c'est un polynome en x, $e^{J(x)}$, $e^{-J(x)}$, $\int x^n e^{J(x)} dx$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, où $J(x)$ est une intégrale abélienne. Et en tenant compte de ce que nous avons dit relativement à la nature de l'intégrale $J(x)$ (*voir* le paragraphe sur les singularités de l'intégrale), on voit facilement que :

a. Si le degré m de $F = 0$ en y' est impair, l'intégrale est un polynome en x, $e^{P(x)}$, $e^{-P(x)}$, $\int x^n e^{P(x)} dx$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, où $P(x)$ est un polynome en x.

b. Si le degré m est pair, l'intégrale abélienne $J(x)$ est du genre hyperelliptique.

2. Mais, même dans le cas où l'intégrale générale n'est pas uniforme, l'équation peut admettre une ou plusieurs intégrales particulières uniformes. Les méthodes servant à reconnaître si l'intégrale générale est uniforme ne s'appliquent point lorsqu'il s'agit de reconnaître si l'équation admet des intégrales particulières uniformes, problème généralement plus compliqué que le premier. De même on sait reconnaître la nature analytique de l'intégrale générale supposée uniforme d'une équation donnée, mais on ne sait pas résoudre le problème analogue pour les intégrales particulières.

De là l'intérêt de chercher des types d'équations ayant une certaine généralité, pour lesquels on peut traiter de pareilles questions. Ainsi, il résulte d'un théorème de M. Painlevé [1] que, si dans l'équation

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

où P et Q sont polynomes en x et y, le dénominateur Q ne renferme aucun facteur de la forme $x - a$, a étant une constante, et si, de plus, le degré de Q en x surpasse d'au moins deux unités le degré correspondant du numérateur P, toute intégrale uniforme de l'équation est une fonction rationnelle de x.

Plus généralement, étant donnée l'équation

$$\sum_{i=0}^{i=\mu} f_i(x, y)\, y'^{\mu-i} = 0,$$

si $f_0(x, y)$ ne contient aucun facteur de la forme $x - a$, a étant une constante, et si, de plus, le degré de $f_6(x, y)$ en x surpasse d'au moins $2k$ unités le degré correspondant du coefficient $f_{\mu-k}(x, y)$ $(k = 1, 2, \ldots, \mu)$, toute intégrale uniforme est rationnelle.

Les intégrales particulières uniformes d'une équation $F(x, y, y') = 0$, algébrique en x, y, y', peuvent être rationnelles ou transcendantes; dans ce dernier cas nous dirons que deux ou plusieurs intégrales uniformes $y_1, y_2, \ldots$ sont *distinctes* s'il n'existe entre elles aucune relation algébrique à coefficients algébriques en x.

Je me propose de montrer, en combinant un procédé employé par M. Painlevé dans l'étude des intégrales rationnelles avec les théorèmes connus de M. Picard sur les zéros des fonctions uniformes et sur le genre des courbes algébriques dont les coordonnées s'expriment en fonction uniforme d'un paramètre, comment on peut, pour des classes étendues d'équation, préciser la *limite supérieure du nombre des intégrales uniformes distinctes* et la forme de l'équation dans le cas où elle admet des intégrales uniformes transcendantes; dans ce dernier cas, je signalerai aussi les relations algébriques qui existent entre telles intégrales non distinctes.

---

(1) *Annales de la Faculté de Toulouse*, p. 43; 1888.

3. Démontrons d'abord un théorème général relatif aux intégrales uniformes des équations $F(x, y, y') = 0$, où F est un polynome irréductible en y et y', à coefficients algébriques en x. On peut toujours écrire une telle équation sous la forme

$$(1) \qquad F(x, X, y, y') = 0,$$

F étant un polynome irréductible en x, X, y, y', et x et X étant liés par une relation algébrique

$$G(x, X) = 0.$$

En mettant en évidence les puissances de X, l'équation (1) peut s'écrire

$$(2) \qquad F_0(x, y, y') + F_1(x, y, y')X + \ldots + F_{m-1}(x, y, y')X^{m-1} = 0,$$

m étant le degré de G en X. Je dis que :

Toute intégrale uniforme de (1) *est commune à m équations différentielle*

$$(3) \qquad F_0 = 0, \qquad F_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_{m-1} = 0.$$

En effet, remplaçons dans (2) y et y' par l'intégrale uniforme considérée et sa dérivée, on obtient ainsi une relation $H(x, X) = 0$, entre X et x, de degré au plus égal à $m - 1$ en X. Si les coefficients de $H = 0$ ne sont pas identiquement nuls, les deux polynomes G et H en X doivent avoir un facteur commun $K(x, X)$, polynome en x et X, puisqu'il divise G. Donc l'équation $G(x, X) = 0$ ne serait pas irréductible. Par conséquent, on doit avoir identiquement les $F_i = 0$.

Comme les F_i n'admettent pas de facteurs communs [sans quoi l'équation (1) serait réductible], les équations (3), ou bien sont incompatibles (dans quel cas il n'y a pas d'intégrales uniformes), ou bien définissent une relation algébrique entre x et y. D'où le théorème suivant :

Étant donnée une équation $F(x, y, y') = 0$, *où* F *est un polynome irréductible en* y *et* y', *et algébrique en* x, *pour qu'elle puisse admettre des intégrales uniformes transcendantes, il faut que* F *soit rationnel en* x.

Si cette condition n'est pas remplie, toute intégrale uniforme de $F = 0$ est rationnelle, et l'on saura toujours calculer ces intégrales, car elles sont communes aux équations (3).

4. Ceci étant, distinguons les deux cas suivants :

1er CAS : *L'équation* $F = 0$ *est à points critiques fixes.* — Désignons par p le genre de $F = 0$ en y et y'. Alors

1° Si $p > 1$, toute intégrale uniforme est rationnelle ;

2° Si $p = 1$, en posant

$$Y = R(y, y', x)$$

(où R est rationnel en y, y' et algébrique en x), $F = 0$ se ramène à la forme

$$\frac{dY}{\sqrt{(1 - Y^2)(1 - k^2 Y^2)}} = H(x)\,dx, \tag{4}$$

où k est une constante et $H(x)$ algébrique en x. Si une intégrale $y_1(x)$ de $F = 0$ est uniforme, l'intégrale $Y_1(x)$ correspondante de (1) n'a qu'un nombre fini de valeurs. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que les périodes de l'intégrale abélienne $\int H(x)\,dx$ soient les périodes de $\operatorname{sn}(x, k^2)$; quand il en est ainsi, l'intégrale générale $Y(x, C)$ de (4) n'aura qu'un nombre fini de valeurs $y(x)$ également, mais il restera à vérifier si, parmi ces intégrales, il y en a qui seront uniformes. S'il en existe plusieurs, elles ne sont pas distinctes : *elles s'expriment algébriquement en fonction de x et de l'une d'entre elles.*

En effet, $Y(x, C)$ s'exprime algébriquement en fonction de $Y_1(x)$ d'après le théorème d'addition des fonctions elliptiques

$$Y = \frac{Y_1\sqrt{\rho(C)} + C\sqrt{\rho(Y_1)}}{1 - k^2 C^2 Y_1^2}$$

avec $\rho(Y) = (1 - Y^2)(1 - k^2 Y^2)$, et, par suite, $y(x)$ s'exprime algébriquement en $y_1(x)$ et en C.

Donc, *si $p = 1$, il ne saurait jamais exister plus d'une intégrale uniforme distincte.*

3° Si $p = 0$, l'équation $F = 0$ se ramène algébriquement à une équation de Riccati en Y, en posant $Y = R(y, y', x)$, où R est rationnel en y, y' et x figurant rationnellement ou par un radical carré. Si $y_1(x)$ est uniforme, l'intégrale correspondante $Y_1(x)$ de l'équation de Riccati est à un nombre fini de valeurs. Pour une équation de Riccati, on sait trouver des intégrales algébriques ou à un nombre donné de valeurs, mais on ne sait pas, en général, reconnaître si elle a des intégrales uniformes, ou si son intégrale générale est uniforme. Quoi qu'il en soit, il peut arriver que l'équation de Riccati ait une, deux ou trois intégrales uniformes (ou à n valeurs); s'il y en a trois, l'intégrale générale $Y(x)$ est uniforme et s'exprime rationnellement en fonction de trois intégrales particulières.

L'équation primitive $F = 0$ *peut donc admettre* 0, 1, 2 *ou* 3 *intégrales uniformes distinctes, mais pas davantage.*

2^e^ CAS : *L'équation* $F = 0$ *est à points critiques mobiles.* Dans ce cas, il existe un certain nombre de valeurs

$$(5) \qquad y_1 = \varphi_1(x), \qquad y_2 = \varphi_2(x), \qquad \ldots, \qquad y_n = \varphi_n(x),$$

telles que l'une au moins des valeurs correspondantes de y' (par exemple y'_1) soit irrégulière (infinie ou critique), et l'intégrale $y(x)$ qui, pour $x = x_0$, prend la valeur $y_1(x_0)$ et admet pour dérivée $y'_1(x)$, admet $x = x_0$ comme point critique. Nous nous bornerons à considérer les équations pour lesquelles toutes les valeurs de y' se comportent comme y'_1 pour certaines des déterminations (5). Autrement dit, nous supposerons qu'il existe des fonctions (5) telles que toute intégrale qui, pour $x = x_0$ prend la valeur $y_1(x_0)$, admet $x = x_0$ comme point critique, sauf pour certains points particuliers, satisfaisant à une certaine condition algébrique. C'est ce qui arrivera toujours pour une équation du premier degré en y' (n'étant pas une équation de Riccati ou linéaire)

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

où P et Q sont polynomes en y, algébriques en x; en effet, toute valeur $y_i = \varphi_i(x)$ annulant Q jouit de la propriété précédente. C'est ce qui arrivera encore pour une équation du second degré en y'

$$y' = \frac{A(x,y) + \sqrt{B(x,y)}}{C(x,y)},$$

A, B, C étant des polynomes en y, algébriques en x. En effet, les valeurs $y_i = \varphi_i(x)$ qui annulent B sans être ni racines doubles ni intégrales singulières, jouissent de la propriété en question. Toutefois, quand toutes les racines d'ordre impair $y_i = \varphi_i(x)$ de $B = 0$ sont solutions singulières, il n'en est plus ainsi, et l'équation ne rentre plus dans la classe considérée, à moins pourtant que des valeurs $y_k = \varphi_k(x)$ racines de $C = 0$ ne rendent infinies les deux valeurs de y'.

De même l'équation binome

$$y'^m = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

jouira des propriétés en question pour toutes les valeurs $y_i = \varphi_i(x)$, racines de $P = 0$ ou de $Q = 0$, dont la multiplicité n'est pas un multiple entier de m.

D'une manière générale, la condition en question sera remplie quand il existera des valeurs $y_i = \varphi_i(x)$ rendant infinies ou critiques *toutes* les déterminations de y' sans être des intégrales singulières de l'équation. Dans tous ces cas, les fonctions $y_i = \varphi_i(x)$ *seront des fonctions algébriques de* x. En effet, elles satisfont à l'équation obtenue en annulant le coefficient de la plus haute puissance de y' dans $F = 0$, ou bien le discriminant de $F = 0$ par rapport à y'.

Traitons d'abord le cas de l'équation du premier degré en y'.

Équation du premier degré.

Soient $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ deux polynomes en y des degrés respectifs m et m' à coefficients algébriques en x, et envisageons l'équation différentielle

$$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}. \tag{6}$$

Pour que l'équation puisse admettre des intégrales uniformes transcendantes, il faut que P et Q soient rationnels en x; on peut les supposer polynomes en x. De plus, par une transformation homographique, on peut toujours ramener l'équation à satisfaire à la condition $m = m' + 2$, que nous supposerons donc remplie. La valeur de $y = \infty$ est alors une valeur ordinaire; c'est-à-dire que, si l'on pose $y = \frac{1}{z}$, l'intégrale $z(x)$ qui pour $x = x_0$ prend la valeur $z = 0$ est holomorphe au voisinage de $x = x_0$ (pris au hasard). Distinguons les quatre cas suivants :

1° $Q = 0$ *admet plus de deux racines* $y_i = \varphi_i(x)$ *distinctes*, et soient

$$y_1 = \varphi_1(x), \qquad y_2 = \varphi_2(x), \qquad y_3 = \varphi_1(x)$$

trois quelconques de ces racines; elles peuvent d'ailleurs être des branches d'une même fonction algébrique.

Je dis que : *toute intégrale uniforme de* (6) *est rationnelle.*

En effet, elle ne peut avoir que certains points essentiels connus à l'avance; soit $x = a$ un tel point. Si $x = a$ est un point critique de φ_1, φ_2 ou φ_3, nous pouvons toujours poser $x - a = \xi^\nu$, de façon que φ_1, φ_2, φ_3 deviennent trois fonctions uniformes de ξ dans le voisinage de $\xi = 0$. Nous pouvons donc toujours supposer φ_1, φ_2, φ_3 uniformes dans le voisinage de $x = a$. Ceci posé, à la variable y substituons la variable z donnée par

$$z = \frac{(\varphi_2 - \varphi_3)(y - \varphi_1)}{(\varphi_2 - \varphi_1)(y - \varphi_3)}.$$

Pour $y = \varphi_1(x)$, on a $z = 0$; pour $y = \varphi_2(x)$, on a $z = 1$, et pour $y = \varphi_3$, on a $z = \infty$. D'autre part, une intégrale y *supposée uniforme* ne peut être égale à φ_1, φ_2 ou φ_3 que pour les valeurs exceptionnelles de x *en nombre fini*. La fonction $z(x)$ serait donc une fonction admettant $x = a$ comme point essentiel, étant uniforme dans le domaine de ce point et ne prenant dans le voisinage de $x = a$ les trois valeurs 0, 1, ∞ qu'un nombre fini de fois. La fonction uniforme $y(x)$ ne peut donc admettre de points essentiels (à distance finie ou infinie) : *c'est donc une fonction rationnelle de x.*

2° $Q = 0$ *admet deux racines* $y_1 = \varphi_1(x)$ et $y_2 = \varphi_2(x)$ *distinctes.* Posons

$$z = \frac{y - \varphi_1}{y - \varphi_2}.$$

La fonction $z(x)$ n'est pas nécessairement uniforme, puisque φ_1 et φ_2 ne sont pas nécessairement algébriques; mais si le point $x = a$ est un point critique de z, c'est que c'est un point critique algébrique de φ_1 ou de φ_2, et, par suite, en posant $x - a = \xi^\nu$ (ν étant un entier), on est sûr que z sera uniforme dans le voisinage de $z = 0$.

Cela supposé, formons l'équation en z, et soient z_1 et z_2 les deux fonctions de x qui correspondent à deux intégrales uniformes de l'équation (6). Je dis que *le rapport* $\frac{z_2}{z_1}$ *est une fonction algébrique de* x. En effet, c'est une fonction à un nombre fini de valeurs n'ayant pas de points essentiels à distance finie ou infinie. Car, si $x = a$ était un point essentiel de $\frac{z_2}{z_1}$, à l'aide du changement $x - a = \xi^\nu$ on peut toujours supposer ce rapport uniforme autour de $x = a$. D'autre part, $\frac{z_2}{z_1}$ ne peut être égal à 0, 1, ∞ que pour un nombre fini de valeurs de x dans le voisinage de $x = a$. Donc $x = a$ n'est pas un point essentiel de $\frac{z_2}{z_1}$, et, par suite, ce rapport est une fonction algébrique de x.

Il s'ensuit que l'équation (6) *ne peut avoir deux intégrales uniformes transcendantes distinctes.*

3° $Q = 0$ *n'a qu'une racine* $y_1 = \varphi_1(x)$. La fonction $\varphi_1(x)$ est alors nécessairement rationnelle. En posant

$$z = \frac{1}{y - \varphi_1},$$

on ramène l'équation (6) à la forme

$$z' = T(x, z), \tag{7}$$

où T est un polynome en z. Dans ce cas l'équation (6) *ne peut admettre plus de deux intégrales uniformes distinctes, et, de plus, si elle admet plus de deux intégrales uniformes, toute intégrale uniforme est rationnelle.*

Pour le montrer, admettons que l'équation (6), et par suite aussi l'équation (7), admette trois intégrales uniformes, et soient z_1, z_2, z_3 les intégrales correspondantes de (7). En formant l'expression

$$v(x) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3},$$

on voit aussitôt que la fonction $\varphi(x)$ est une fonction uniforme sans coupure et telle que les trois équations

$$\varphi(x)=0, \qquad \varphi(x)=1, \qquad \varphi(x)=\infty$$

n'ont qu'un nombre fini de racines; en vertu du théorème de M. Picard, $\varphi(x)$ est donc une fonction rationnelle de x.

On en conclut que *les trois intégrales* z_1, z_2, z_3 *sont liées par une relation de la forme*

$$S_1 z_1 + S_2 z_2 + S_3 z_3 = 0, \tag{8}$$

où S_1, S_2, S_3 *sont des polynomes en* x *liés eux-mêmes par la relation*

$$S_1 + S_2 + S_0 = 0. \tag{8'}$$

Différentions la relation (8) deux fois par rapport à x, en remplaçant $\frac{dz_1}{dx}$, $\frac{dz_2}{dx}$, $\frac{dz_3}{dx}$ respectivement par

$$T(x, z_1), \quad T(x, z_2), \quad T(x, z_3);$$

on aura les deux relations

$$U_1(x, z_1) + U_2(x, z_2) + U_3(x, z_3) = 0, \tag{9}$$

$$V_1(x, z_1) + V_2(x, z_2) + V_3(x, z^3) = 0 \tag{10}$$

avec

$$U_k = \frac{dS_k}{dx} z_k + S_k T(x, z_k),$$

$$V_k(x, z_k) = \frac{d^2 S_k}{dx_k} z_k + 2\frac{dS_k}{dx} T(x, z_k) + S_k\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial z} T\right)_{z=z_k}.$$

Il est facile de voir que les trois relations (8), (9), (10) sont toujours distinctes entre elles. En effet, en posant

$$S_k z_k = \eta_k,$$

on tire des relations (8) et (9)

$$U_1\left(x, -\frac{\eta_2+\eta_3}{S_1}\right) + U_2\left(x, \frac{\eta_2}{S_2}\right) + U_3\left(x, \frac{y_3}{S_3}\right) = 0,$$

relation qui ne peut se réduire à une identité que :

1° Si $U_k(x, z_k)$ est linéaire en z_k, ce qui est impossible si T n'est pas linéaire en z;

2° Si l'un des polynomes S_k était nul identiquement, ce qui est impossible en vertu de deux relations (8) et (8') si les trois intégrales z_1, z_2, z_3 sont distinctes.

On verrait de la même façon que les relations (8) et (10), et ensuite (9) et (10) sont également distinctes entre elles. Il s'ensuit que ces relations définissent z_1, z_2, z_3, et, par suite, les intégrales correspondantes de (6) comme fonctions rationnelles de x.

4° Q *ne contient pas* y. L'équation (6) est alors une équation de Riccati ou linéaire. Pour l'équation de Riccati, il peut exister 1, 2 ou 3 intégrales uniformes distinctes ; pour l'équation linéaire, il peut y en avoir 1 ou 2.

On arrive ainsi à ce théorème :

Toute équation $y' = R(x, y)$, *où* R *est rationnel en* x *et* y, *ne peut admettre plus de trois intégrales uniformes distinctes.*

Si elle en admet 3, *c'est une équation de Riccati.*

Si elle en admet 2, *c'est une équation de Riccati ou linéaire, ou bien se ramène à la forme*

$$y' = \frac{P(x, y)}{[y - \varphi_1(x)]^m},$$

où P *est un polynome en* x *et* y *de degré* $m + 2$ *en* y, *et* φ_1 *une fraction rationnelle en* x.

Si elle en admet 1, *elle se ramène soit à l'une des formes précédentes, soit à la forme*

$$y' = \frac{P(x, y)}{(y - \varphi_1)^k (y - \varphi_2)^{k'}},$$

où φ_1 *et* φ_2 *sont algébriques en* x *et* P *un polynome en* x *et* y, *de degré* $k + k' + 2$ *en* y.

Ce dernier fait est évident en remarquant que, si le degré de P en y était supérieur à $k + k' + 2$, la valeur $y = \infty$ joue le rôle de $y_i = \varphi_i(x)$, c'est-à-dire qu'en posant $y = \frac{1}{z}$ (en supposant φ_1 et φ_2 pas identiquement nuls), on aurait trois valeurs

$$z = 0, \qquad z = \frac{1}{\varphi_1}, \qquad z = \frac{1}{\varphi_2},$$

jouant le rôle de $y_i = \varphi_i$. Si, au contraire, ce degré était inférieur à $k + k' + 2$, $y = \infty$ serait une intégrale, c'est-à-dire dans l'équation en $z = \frac{1}{y}$, $z = 0$ serait une intégrale, et l'intégrale générale z ne peut prendre la valeur $z = 0$ que pour des valeurs exceptionnelles de x en nombre fini; $z = 0$ serait donc encore une troisième valeur jouant le rôle de $y_i = \varphi_i$.

Tout ce que nous venons de dire pour l'équation du premier degré est valable pour toutes les équations $F(x, y, y') = 0$, *où* F *est un polynome irréductible en* x, y, y' *et du genre zéro en* y, y'.

Proposons-nous maintenant un problème plus général que le précédent. Envisageons l'équation

$$(11) \qquad y' = \frac{P(x, X, y)}{Q(x, X, y)},$$

où P et Q sont des polynomes en x, X, y, et x et X étant liés par une relation algébrique $G(x, X) = 0$. Nous avons vu que si le degré de G en X surpasse 1, toute intégrale uniforme (en x) de (11) est rationnelle en x; *mais il peut y avoir des intégrales transcendantes de* (11) *uniformes en x et en* X. C'est de telles intégrales que nous allons nous occuper maintenant.

On peut répéter les raisonnements précédents, en supposant successivement qu'il existe pour chaque couple de valeurs (x, X) 3, 2 ou 1 valeurs $y_i = \varphi_i(x, X)$ jouissant de la propriété indiquée, c'est-à-dire telles que y' devienne infinie pour $y_i = \varphi_i$ et que de plus l'intégrale $y(x, X)$, qui pour (x_0, X_0) est égale à $\varphi_i(x_0, X_0)$, admet x_0 comme point critique, sauf pour certaines valeurs x_0 exceptionnelles et en nombre fini.

Dans ces conditions, s'il existe 3 valeurs $y_i = \varphi_i$, *l'intégrale y est rationnelle en* (x, X), et cela par la même raison que précédemment : elle ne peut admettre de points essentiels $x = a$ à distance finie ou infinie. En posant $x - a = \xi^\nu$, si a était point critique des φ_i ou de $X(x)$, de manière à rendre z uniforme dans le voisinage de $\xi = 0$, où

$$z = \frac{(\varphi_2 - \varphi_3)(y - \varphi_1)}{(\varphi_2 - \varphi_1)(y - \varphi_3)},$$

on achèvera la démonstration comme précédemment.

De même dans le cas où il y a 2 ou 1 valeur $y_i = \varphi_i(x, \mathrm{X})$.

Les conclusions énoncées pour les intégrales uniformes en x peuvent donc se répéter pour les intégrales uniformes en (x, X). *Il n'existe jamais plus de 3 telles intégrales distinctes.* S'il en existe 3, l'équation (11) est une équation de Riccati, etc.

Les mêmes méthodes et conclusions s'appliquent à l'étude des intégrales uniformes en (x, X) *relatives aux équations* $\mathrm{F}(x, \mathrm{X}, y, y') = 0$, *où* F *est un polynome du genre zéro en* y, y', *à coefficients rationnels en* (x, X), x *et* X *étant liés par une relation algébrique* $\mathrm{G}(x, \mathrm{X}) = 0$.

Équation du second degré.

Une telle équation peut toujours être mise sous la forme

$$y' = \frac{\mathrm{A}(x, \mathrm{X}, y) + \mathrm{B}(x, \mathrm{X}, y)\sqrt{\mathrm{R}(x, \mathrm{X}, y)}}{\mathrm{C}(x, \mathrm{X}, y)}, \tag{12}$$

où A, B, C, R sont des polynomes en x, X, y et x et X étant liés par une relation algébrique $\mathrm{G}(x, \mathrm{X}) = 0$. Désignons par λ le degré de R en y, et supposons que l'équation (12) n'admette pas d'intégrales singulières.

Tout d'abord, si $\lambda \leqq 2$, le genre de l'équation en y et y' est nul, et l'on rentre dans le cas précédent.

Si $\lambda > 2$, *toute intégrale uniforme en* (x, X) *est rationnelle en* (x, X). En effet, $\mathrm{R} = 0$ admet alors au moins trois racines $y_i = \varphi_i(x, \mathrm{X})$ telles que toute intégrale qui, pour $x = x_0$ (x_0 étant pris au hasard, sauf certaines valeurs exceptionnelles de x en nombre fini), prend la valeur $\varphi_i(x_0, \mathrm{X}_0)$, admet $x = x_0$ comme point critique. Si donc on forme la combinaison

$$z = \frac{(\varphi_2 - \varphi_3)(y - \varphi_1)}{(\varphi_2 - \varphi_1)(y - \varphi_3)},$$

cette fonction $z(x)$ ne saurait admettre de points essentiels (à distance finie ou infinie), et, par conséquent, y, supposée uniforme en (x, X), est rationnelle (le raisonnement analogue à celui du cas du premier degré).

L'équation (12) (d'un genre plus grand que zéro) ne saurait donc admettre d'intégrales uniformes transcendantes en (x, X) *que si les va-*

leurs $y_i = \varphi_i(x, X)$ *qui annulent* R *sont des intégrales singulières,* à l'exception peut-être de deux au plus.

Au cas de l'équation du second degré se ramènent toutes les équations du genre 1 *ou* 2 *en* y, y' *et, plus généralement, toutes les équations de l'espèce hyperelliptique;* les résultats précédents sont donc valables pour toutes ces équations.

Observons que, quand il existe seulement deux valeurs $y_i = \varphi_i(x, X)$ non singulières, on ne peut plus répéter le raisonnement fait dans le cas du premier degré, car ce dernier raisonnement repose sur ce fait que deux intégrales quelconques ne peuvent devenir égales que pour les x fixes en nombre fini, fait qui ne subsiste pas dans le cas du second degré.

Observons encore que les racines $y_i = \chi_i(x, X)$ de $C = 0$ ne peuvent plus jouer le même rôle, en général, que les racines de $Q = 0$ dans le cas du premier degré, car, généralement, une seule valeur de y' devient infinie pour les racines de $C = 0$. En effet, en écrivant l'équation (12) sous la forme

$$Cy'^2 + Dy' + E = 0$$

(où C, D, E sont des fonctions de x, X, y), pour $C = 0$, D, généralement, est différent de zéro et une seule valeur de y' devient infinie. Toutefois, si C et D ont un facteur commun $K(x, X, y)$, et si ce facteur a trois racines distinctes en y, *toute intégrale uniforme en* (x, X) *est rationnelle.*

Équation binome du second degré.

On peut la mettre sous la forme

$$y' = \frac{B(x, X, y)\sqrt{R(x, X, y)}}{C(x, X, y)}, \tag{13}$$

où B, R et C sont polynomes en x, X, y. Toute intégrale singulière $y_i = \varphi_i(x, X)$, annulant R et, par suite, y', doit être une constante, et réciproquement. Si toutefois $y_i = \varphi_i$ annulait R et C, ce serait un lieu de points critiques des intégrales.

Ceci étant, si le nombre total de valeurs distinctes $y_i = \varphi_i(x, X)$ qui, ou bien annulent C ou bien annulent R sans être des constantes, dépasse 2, *toute intégrale uniforme en* (x, X) *est rationnelle*. En effet, toute intégrale qui, pour $x = x_0$, prend la valeur $\varphi_i(x_0, X_0)$ admet x_0 comme point critique, sauf pour certains points x_0 exceptionnels en nombre fini, et le raisonnement s'achèverait comme dans le cas du premier degré.

Distinguons donc plusieurs cas, en observant qu'on peut toujours supposer le degré λ de R en y pair (à l'aide d'une transformation homographique), $\lambda = 2\mu$.

Si $\mu \leqq 1$, le genre p de l'équation est nul, et l'on est ramené au cas du premier degré.

Si $\mu > 1$, distinguons les racines de R en μ' racines constantes et μ'' racines fonctions de x. Pour que toute intégrale uniforme en (x, X) ne soit pas rationnelle, il faut, d'après ce qui précède, que $\mu'' = 0$, 1 ou 2.

Soit d'abord $\mu'' = 0$, R peut alors être supposé polynome en y à coefficients constants, soit $\rho(y)$. Si y est une intégrale uniforme en (x, X) de (13), le radical

$$\sqrt{\rho(y)} = \frac{C(x, X, y)y'}{B(x, X, y)}$$

l'est également. Ceci n'est possible que si le polynome $\rho(y)$ *est du quatrième degré en* y. En effet, y (supposée non rationnelle) admet, au moins, un point essentiel $x = a$. Si $X(x)$ n'est pas uniforme en x autour de a, on pose $x - a = \xi^\nu$ et alors y et $\sqrt{\rho(y)}$ sont deux fonctions de ξ uniformes autour de $\xi = 0$ et admettent $\xi = 0$ comme point essentiel. Or, d'après un théorème de M. Picard, la relation entre y et $\sqrt{\rho(y)}$ est nécessairement du genre zéro ou un. Donc $\rho(y)$ est du quatrième degré.

L'équation (13), pour qu'elle puisse admettre des intégrales uniformes en (x, X) non rationnelles, doit donc être de la forme

$$y' = \frac{B(x, X, y)\sqrt{\rho(y)}}{(y - \varphi_1)^k (y - \varphi_2)^{k'}},$$

où le degré de B en y est égal à $k + k'$, et où $\rho(y)$ est un polynome du quatrième degré en y à coefficients constants.

Dans le cas où $\mu'' = 1$ ou $\mu'' = 2$, on ne peut plus préciser le degré du polynome sous le radical, mais on aura une relation entre les degrés en y du numérateur et du dénominateur, en tenant compte de la condition que, pour qu'il puisse exister des intégrales uniformes en (x, X) transcendantes, il faut que $z = 0$ ne soit pas une intégrale de l'équation en $z = \frac{1}{y}$, sans quoi (si le genre de l'équation n'est pas nul) il y aura au moins trois valeurs $y_i = \varphi_i(x, X)$ (en comptant $y = \infty$ comme une telle valeur).

On peut compléter ce qui précède dans certains cas particuliers, notamment quand $B = 0$ admet des racines $y_i = \alpha_i$ constantes, car alors une intégrale autre que $y = \alpha_i$ ne peut prendre les valeurs α_i que pour les valeurs exceptionnelles de x, en nombre fini. Une telle valeur α_i joue donc le rôle des φ_i et le raisonnement s'achève sans peine.

J'ajoute, enfin, que *les mêmes méthodes et conclusions s'appliquent à l'équation binome générale, d'un degré quelconque en* y'.

5. Voici maintenant un théorème permettant de construire des types généraux d'équations du premier ordre pour lesquelles toute intégrale uniforme est une fonction rationnelle en x.

Soient $\varphi(x, y, y')$ et $\psi(x, y, y')$ deux polynomes en x, y, y', tels que les sommets ϖ droits de leurs polygones respectifs soient situés sur une même perpendiculaire à OM, et qu'à droite de cette perpendiculaire ni l'un ni l'autre des polygones n'aient de sommets.

Soient ensuite :

$P(x, y, y')$ un polynome quelconque en x, y et y';
$\varpi(a, b)$ un polynome homogène en a et b à coefficients constants;
$\chi(x, a, b)$ un polynome homogène en a, b, de même degré d'homogénéité μ que $\varpi(a, b)$, à coefficients fonctions algébriques de x,

et envisageons l'équation du premier ordre :

$$\varpi(\varphi, \psi)\, P(x, y, y') + \chi(x, \varphi, \psi) = 0. \tag{1}$$

Je me propose de démontrer que :

Si le nombre de racines a *distinctes et différentes de zéro de l'équation* $\varpi(a, 1) = 0$ *surpasse* 2, *toute intégrale uniforme de* (1) *est rationnelle.*

Pour le montrer, écrivons l'équation (1) sous la forme

$$(2)\qquad \left[\varpi\left(\frac{\varphi}{\psi}, 1\right) P(x, y, y') + \chi\left(x, \frac{\varphi}{\psi}, 1\right)\right] \psi^\mu = 0.$$

Si une intégrale uniforme de (1) était commune à (1) et à $\psi = 0$, on l'obtiendrait par l'élimination de y' entre $\psi = 0$ et

$$\varpi(\varphi, 0) P(x, y, y') + \chi(x, \varphi, 0) = 0,$$

et la démonstration serait achevée. Supposons donc que notre intégrale y ne satisfasse pas à $\psi = 0$; elle satisfera alors à

$$(3)\qquad \varpi\left(\frac{\varphi}{\psi}, 1\right) P(x, y, y') + \chi\left(x, \frac{\varphi}{\psi}, 1\right) = 0.$$

Soit a une racine de l'équation $\varpi(a, 1) = 0$; je dis d'abord que les racines $x = \alpha$ de l'équation

$$\frac{\varphi(x, y, y')}{\psi(x, y, y')} - a = 0,$$

lorsqu'on y remplace y par l'intégrale uniforme considéré, sont en nombre fini. Car, d'après (3), les valeurs telles que $x = \alpha$ doivent coïncider : 1° soit avec les pôles de l'intégrale y; 2° soit avec les singularités transcendantes de y; 3° soit avec les infinis des coefficients en x dans P; 4° soit avec les racines en x de l'équation algébrique $\chi(x, a, 1) = 0$. Dans les trois derniers cas leur nombre est certainement fini, mais je vais montrer qu'il en est de même dans le premier cas. Pour cela, il suffit de montrer que l'expression $\frac{\varphi}{\psi}$ ne peut tendre vers la limite a que pour un nombre fini de pôles de y.

Dans le voisinage d'un pôle $x = \alpha$ de y, on aura

$$y = (x - \alpha)^\lambda f(x),$$

où λ est un entier négatif et $f(x)$ une fonction de x ne devenant ni nulle ni infinie pour $x = \alpha$. Si l'on met φ et ψ sous la forme

$$\varphi = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x) y^{m_i} y'^{n_i},$$

$$\psi = \sum_{i=1}^{i=t} \psi_i(x) y^{m'_i} y'^{n'_i},$$

on aura dans le voisinage de $x = \alpha$, d'après les notations du Chapitre I, et en appelant (ϖ') le sommet droit de ψ,

$$\varphi = (x-\alpha)^{S_{\varpi,\lambda}} \left[\Omega_{\varpi}(x) + \sum_{-(\varpi)} (x-\alpha)^{S_{\varpi,\lambda} - S_{i,\lambda}} \Omega_i(x) \right],$$

$$\psi = (x-\alpha)^{S'_{\varpi'}} \left[\Omega'_{\varpi'}(x) + \sum_{-(\varpi')} (x-\alpha)^{S'_{\varpi',\lambda} - S'_{i,\lambda}} \Omega'_i(x) \right].$$

Or, nous avons vu dans le Chapitre I que, lorsque x tend vers α, on a

$$\begin{aligned}
&\lim \Omega_i(x) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s, \text{ sauf } i = \varpi),\\
&\lim \Omega'_i(x) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, t, \text{ sauf } i = \varpi'),\\
&\lim \Omega_{\varpi}(x) = \lambda^{n_\varpi} \varphi_{\varpi}(\alpha) f(\alpha),\\
&\lim \Omega_{\varpi'}(x) = \lambda^{n'_{\varpi'}} \psi_{\varpi'}(\alpha) f(\alpha)
\end{aligned}$$

(où n_{ϖ} et $n'_{\varpi'}$ désignent les exposants de y' dans les termes respectifs de φ et ψ correspondant aux sommets ϖ et ϖ').

Distinguons maintenant les trois cas suivants :

1^er^ cas : *Le sommet ϖ' est au-dessous du sommet ϖ.* — Comme $S_{i,\lambda}$ et $S'_{i,\lambda}$ met les ordonnées à l'origine des droites ayant le coefficient angulaire λ et passant respectivement par les points (M_i, N_i) appartenant à φ et à ψ, on voit que $S_{\varpi,\lambda} > S_{\varpi',\lambda}$ pour tous les λ négatifs. Par conséquent, si λ n'est pas une racine de l'équation algébrique

$$\varphi_{\varpi}(\alpha) = 0$$

(et s'il en était ainsi, le nombre des α serait fini et la démonstration achevée), le rapport $\frac{\varphi}{\psi}$ tend vers zéro, et non pas vers la limite a, lorsque x tend vers α. Ce rapport ne peut donc tendre vers la racine a de $\varpi(a, 1) = 0$ pour un pôle $x = \alpha$ de y, que si ce pôle coïncide avec une racine de l'équation $\psi_{\varpi'}(\alpha) = 0$; donc le nombre de tels pôles est limité.

2^e^ cas : *Le sommet ϖ' est au-dessus du sommet ϖ.* — Alors $S_{\varpi,\lambda} < S_{\varpi',\lambda}$ pour tous les λ négatifs; par conséquent, si α n'est pas une racine de $\varphi_{\varpi}(\alpha) = 0$, le rapport $\frac{\varphi}{\psi}$ augmente indéfiniment lorsque x tend vers α. Ce rapport ne peut donc tendre vers la limite a que si le pôle considéré de y coïncide avec une racine de l'équation algébrique

$$\varphi_\varpi(\alpha) = 0,$$

ce qui montre que le nombre des α est limité.

3^e CAS : *Les sommets ϖ et ϖ' coïncident.* — On a alors $M_\varpi = M'_{\varpi'}$, $N_\varpi = N'_{\varpi'}$, et par conséquent $S_{\varpi,\lambda} = S_{\varpi',\lambda}$ quel que soit λ; donc

$$\lim \frac{\varphi}{\psi} = \lambda^{n_\varpi - n'_\varpi} \frac{\varphi_\varpi(\alpha)}{\psi_\varpi(\alpha)}.$$

Cette limite doit être égale à a, et par suite α doit être une racine de l'équation algébrique

$$\lambda^{n_\varpi - n'_{\varpi'}} \varphi_\varpi(\alpha) - a\,\psi_{\varpi'}(\alpha) = 0;$$

le nombre des α est donc encore limité. Le seul cas où ceci puisse tomber en défaut est le cas exceptionnel où la quantité

$$\sqrt[n_\varpi - n'_{\varpi'}]{\frac{a\,\psi_\varpi(\alpha)}{\varphi_\varpi(\alpha)}}$$

est un nombre indépendant de α et entier, et lorsque λ est égal à ce nombre.

En résumé, l'équation

$$\frac{\varphi(x, y, y')}{\psi(x, y, y')} - a = 0,$$

après y avoir remplacé y par une intégrale uniforme de (1) et a par une racine quelconque non nulle de $\varpi(a, 1) = 0$, ne peut avoir qu'un nombre limité de racines x. Et comme, y étant uniforme, ce rapport $\frac{\varphi}{\psi}$ est aussi une fonction uniforme de x, il s'ensuit que, si le nombre de racines a distinctes et non nulles surpasse deux, $\frac{\varphi}{\psi}$ doit être une fraction rationnelle, ainsi que y [en supposant que le résultant de (1) et de $\frac{\varphi}{\psi} = R(x)$ par rapport à y' n'est pas identiquement nul].

Si, par exemple, φ, ψ et χ ne contiennent pas x explicitement, et si P est un polynome en x, y, y', l'équation $\frac{\varphi}{\psi} - a = 0$ ne peut pas avoir de racines à distance finie, et si le nombre de racines a de l'équation $\varpi(a, 1) = 0$ surpasse deux, on a

$$\frac{\varphi(x, y, y')}{\psi(x, y, y')} = \text{const.} = \text{C}.$$

L'intégrale y, supposée uniforme, ne peut être que rationnelle et s'obtiendrait par l'élimination de y' entre les deux équations

$$\begin{aligned} \varphi(y, y') - \text{C}\,\psi(y, y') &= 0, \\ \text{P}(x, y, y') + \text{C}' \quad &= 0, \end{aligned}$$

où les constantes C et C′ sont liées par la relation

$$\varpi(\text{C}, 1)\,\text{C}' - \chi(\text{C}, 1) = 0.$$

On peut, par exemple, prendre $\varphi = y'$, $\psi = y$, et l'équation (1) aurait la forme

$$\varpi(y, y')\,\text{P}(x, y, y') + \chi(x, y, y') = 0,$$

où ϖ et χ sont des polynomes homogènes en y, y' de même degré d'homogénéité.

6. Dans quelques cas étendus considérés précédemment, les intégrales rationnelles sont les seules intégrales uniformes possibles de l'équation, et, en les calculant, on sera certain d'avoir ainsi toutes les intégrales uniformes de l'équation, ou de constater qu'elle n'admet pas de telles intégrales.

La question de reconnaître si l'intégrale générale d'une équation algébrique du premier ordre est rationnelle se ramène, par la méthode de M. Poincaré, à des opérations algébriques ou à une quadrature ou à la question de reconnaître si l'intégrale d'une équation de Riccati est rationnelle, ce qu'on saura toujours reconnaître.

Mais, quand il s'agit des intégrales particulières rationnelles, le problème est plus difficile et exige des méthodes spéciales. M. Painlevé [1] en a donné une qui permet de déterminer sûrement toutes les intégrales rationnelles pour des classes très générales d'équations du

---

[1] *Annales de l'École Normale*, 1892, p. 305; *Comptes rendus*, t. CX, p. 34.

premier ordre, et qui peut s'appliquer dans tous les cas que nous avons considérés précédemment.

J'ajouterai seulement quelques remarques relatives aux simplifications qu'on peut tirer assez souvent par la considération du polygone II de l'équation donnée.

Supposons que le polygone n'ait aucun côté à coefficient angulaire entier et positif. On connaîtra alors une suite de valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ telles qu'aucune intégrale rationnelle ne puisse avoir de zéros différant des α_i. Si l'on pose

$$\varpi(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n),$$

il existera un nombre entier positif μ tel que la fonction

$$u = \frac{1}{y}[\varpi(x)]^\mu,$$

soit un polynome en x, et, si l'on connaissait une limite supérieure de μ, on ramènerait la recherche de toutes les intégrales rationnelles à celle, relativement plus facile, des polynomes satisfaisant à l'équation différentielle en u. On peut déterminer une limite supérieure de ce nombre par la méthode suivante. On sait reconnaître par les méthodes de Briot et Bouquet si l'équation donnée admet des intégrales holomorphes prenant, par exemple, pour $x = \alpha_i$ la valeur $y = 0$ et déterminer pour ces intégrales le développement de y, suivant les puissances de $(x - a)$; on en déduira l'ordre maximum possible λ_i du zéro a_i de y. En faisant ce calcul pour tous les zéros $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et en désignant par λ_h le plus grand des entiers λ_i, λ_h sera une limite supérieure de μ.

Lorsque la suite $\alpha, \ldots, \alpha_n$ n'existe pas, $\frac{1}{y}$ est un polynome en x.

Si le polygone de l'équation n'a aucun côté à coefficient angulaire entier négatif, on appliquera les calculs précédents à la transformée en $\frac{1}{y}$ de l'équation, et l'on réduira encore la recherche des intégrales rationnelles à celle des intégrales entières.

Si le polygone n'a aucun côté à coefficient angulaire entier, on connaîtra en même temps tous les zéros et tous les pôles possibles des intégrales rationnelles; soient α_i ces zéros et β_i ces pôles. Après avoir formé l'équation $\varphi(x, u, u') = 0$, transformée en $u = \frac{y'}{y}$ de l'équation donnée $F = 0$, on cherchera les intégrales rationnelles de cette équation de la façon suivante. Les pôles de l'une quelconque de ces intégrales u sont toujours des pôles simples et, en posant

$$\varpi(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n),$$
$$\chi(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2)\dots(x - \beta_m),$$

on aura

$$u = \frac{v}{\varpi(x)\chi(x)},$$

v étant un polynome en x. Une fois tous ces polynomes $v_1, v_2, \dots, v_k$ trouvés et après avoir supprimé les facteurs $(x - \alpha_i)$ et $(x - \beta_i)$ communs aux v et à $\varpi(x)\chi(x)$, on aura toutes les intégrales rationnelles $u_1, u_2, \dots, u_k$ de $\varphi(x, u, u') = 0$. Pour que $F = 0$ admette des intégrales rationnelles, il faut et il suffit que, parmi les fractions u_i, il y ait au moins l'une satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Le degré du numérateur de u_i est moindre que celui du dénominateur;

2° Les résidus de u_i relatifs à ses pôles (qui sont évidemment tous des pôles simples) sont tous des entiers.

Ces conditions remplies, toutes les intégrales rationnelles de $F = 0$ sont données par la formule

$$y_i = e^{\int u_i dx}.$$

7. La considération du polygone Π de l'équation peut être utile non seulement dans le calcul des intégrales rationnelles, mais aussi à celui plus général des intégrales transcendantes méromorphes, en permettant de ramener ce calcul à celui, relativement plus facile, des intégrales holomorphes dans tout le plan.

Ainsi, lorsque le polygone n'a aucun côté à coefficient angulaire entier positif, on connaîtra une suite de valeurs $\alpha, \dots, \alpha_n$ telles qu'aucune intégrale *méromorphe* de l'équation ne puisse avoir de zéros différant des α_i. D'après le théorème sur la décomposition des fonctions méromorphes en facteurs primaires, on peut alors écrire

$$y = \frac{[\Pi(x - \alpha_i)]^{\mu} e^{G(x)}}{\Pi(x - \beta_i)},$$

où les β_i désignent les pôles de y et ceux parmi les α_i qui ne sont pas effectivement les zéros d'ordre μ de y; μ est un entier positif, égal ou supérieur au plus grand ordre des zéros α_i de y; $G(x)$ est une fonction holomorphe dans tout le plan.

Par conséquent, en posant

$$u = \frac{1}{y}[\Pi(x - \alpha_i)]^{\mu},$$

u sera une fonction holomorphe dans tout le plan, satisfaisant à une équation différentielle facile à former au moyen de l'équation donnée, et la connaissance de cette fonction u entraînerait celle de y. On peut calculer le nombre μ d'une manière identique à celle indiquée plus haut dans le cas des intégrales rationnelles.

On procédera aussi d'une manière analogue à celle que nous avons indiquée précédemment, lorsque l'une quelconque des conditions suivantes est remplie :

1° Le polygone n'a aucun côté à coefficient angulaire entier négatif;

2° Le polygone n'a aucun côté à coefficient angulaire entier.

8. Je terminerai cette série d'applications par une remarque concernant *les résidus de l'intégrale générale relatifs à ses pôles simples mobiles*.

Lorsque l'intégrale générale de $F(x, y, y') = 0$ admet des pôles simples mobiles, le polygone Π de F a un côté à coefficient angulaire égal à -1. La limite ρ du produit $(x - a)y$, lorsque x tend vers a, est une racine non nulle de l'équation algébrique en ρ, relative au côté à coefficient angulaire -1; par conséquent, les résidus de l'intégrale générale, relatifs aux pôles mobiles simples, sont racines de cette équation en ρ. *Si les coefficients $\varphi_i(x)$ dans les termes de* $F = 0$ *correspondant à ce côté sont constants, ces résidus ne varient pas avec la constante d'intégration.*

Soit $F(x, y, y') = 0$ une équation à points critiques fixes. On sait toujours reconnaître si l'intégrale générale d'une telle équation est ou non méromorphe à l'intérieur d'un contour donné Γ, dans le plan des imaginaires, et supposons qu'il en est ainsi. Si le polygone de $F = 0$ n'a qu'un seul côté à droite de son sommet ϖ droit, et si les conditions de tout à l'heure (relatives à ce côté et à l'équation en ρ qui lui correspond) sont remplies, *l'intégrale*

$$\int y(x, C)\, dx$$

(où y est l'intégrale générale de l'équation), *prise le long d'un tel contour* Γ, *est égale à zéro ou à un multiple de l'une des quantités fixes*

$$2\pi\rho_1 i,\quad 2\pi(\rho_1+\rho_2)i,\quad 2\pi(\rho_1+\rho_2+\rho_3)i,\quad \ldots,$$

$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ *étant les racines non nulles de l'équation en* ρ *relative au côté* $\lambda = -1$.

Si, par exemple, $y(x, C)$ est l'intégrale générale de l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dz} = ay^2 + f(z)y + \varphi(z)$$

(où f et φ sont des polynomes en z et a une constante), l'intégrale $\int y(z, C)\, dz$, prise le long d'un contour quelconque dans le plan des z, est nulle ou égale à un multiple de $\frac{2\pi i}{a}$, ce qu'on vérifie en remarquant que la fonction

$$u = e^{-a\int y\, dx}$$

est l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2u}{dz^2} + f(z)\frac{du}{dz} - a\varphi(z)u = 0,$$

et, par suite, qu'elle est holomorphe dans tout le plan; l'intégrale $\int y\, dz$ ne peut donc avoir d'autres périodes que $\frac{2\pi i}{a}$.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉQUATIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR.

CHAPITRE I.

SUR LES ZÉROS ET LES INFINIS DES INTÉGRALES.

1. Le raisonnement qui nous a servi à trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les zéros et les infinis de l'intégrale d'une équation du premier ordre soient fixes ne s'étend pas dans tout son ensemble aux équations d'ordre supérieur. C'est que, d'une part, pour les équations d'ordre supérieur les singularités transcendantes varient avec les constantes d'intégration, ce qui ne se présente pas pour les équations du premier ordre. D'autre part, dans le cas du premier ordre, toutes les déterminations de la dérivée y' étaient des fonctions algébriques connues de y, pour lesquelles on pouvait trouver les systèmes circulaires de racines s'annulant avec y et étudier la façon dont chacune de ces racines se comportait dans le voisinage de $x = x_0$, $y = y_0$.

Généralement, ceci ne subsiste pas pour les équations d'ordre supérieur. L'intégrale d'une telle équation, ainsi que sa dérivée, peut devenir indéterminée pour des valeurs x_0 quelconques; elle peut avoir aussi des coupures variables avec les constantes d'intégration, ou encore des lignes singulières non analytiques, variables également avec les constantes. Ces difficultés empêchent, comme dans bien d'autres circonstances, l'extension de la méthode qui nous a réussi pour les équations du premier ordre.

Mais la méthode permet une certaine extension dans un quelconque des cas suivants :

1° Lorsqu'on peut reconnaître sur l'équation différentielle donnée elle-même que les points transcendants de l'intégrale et de ses dérivées ne varient pas avec les constantes d'intégration ;

2° Lorsqu'on se borne à étudier les intégrales (particulières ou dépendant des constantes arbitraires) ayant les points essentiels donnés à l'avance, par exemple les intégrales méromorphes ;

3° D'une manière générale, en étudiant les intégrales quelconques, mais en se bornant aux zéros, et les infinis tels que l'intégrale et ses dérivées, jusqu'à l'ordre p, soient d'un ordre infinitésimal déterminé dans leur voisinage (p étant l'ordre de l'équation).

A l'égard de la condition 1°, je rappelle quelques résultats dus à M. Painlevé [1], relativement à l'équation du second ordre

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{1}$$

et qui s'étendent aussi aux équations d'un ordre quelconque.

Une équation (1), prise au hasard, n'a pas de points essentiels mobiles; pour qu'elle puisse en avoir, il faut que certaines conditions soient remplies, dont les plus simples sont les suivantes. Soit $S(x, y, y') = 0$ la condition pour qu'une valeur de y'', définie par (1), soit infinie, ou pour que deux valeurs de y'' se permutent. Si l'intégrale de (1) a des points essentiels mobiles,

1° Le polynome S contient un facteur de la forme $S_1(x, y)$, où y figure certainement;

2° L'équation (1), où l'on regarde x comme la fonction, admet, quel que soit x_0, l'intégrale $x \equiv x_0$.

Si aucune de ces conditions n'est remplie, *les points essentiels de l'intégrale et toutes ses dérivées sont fixes.* On a des résultats analogues pour les équations d'un ordre supérieur à 2.

2. Envisageons un polynome en $y, y', y'', \ldots, y^{(p)}$

$$F = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x) y^{m_{0i}} y'^{\,n_{1i}} y''^{\,m_{2i}} \ldots y^{(p)^{m_{pi}}},$$

[1] *Comptes rendus*, t. CXVI, p. 362-365 et p. 566-569; 1893.

où les m sont des entiers positifs, tels qu'on n'ait pas à la fois pour deux indices i et j différents

$$m_{0i} = m_{0j}, \qquad m_{1,i} = m_{1j} \ldots m_{pi} = m_{pj},$$

et les $\varphi_i(x)$ étant des fonctions quelconques de x.

Formons le double tableau de $2s$ nombres entiers et positifs suivants

$$M_i = m_{0i} + m_{1i} + \ldots + m_{pi} = \sum_{k=0}^{k=p} m_{ki},$$

$$N_i = m_{1i} + 2m_{2i} + \ldots + pm_{pi} = \sum_{k=0}^{k=p} km_{ki}.$$

Traçons dans le plan deux axes, celui des M et des N, et marquons les s points (M_i, F_i) en ayant soin d'inscrire à côté de chacun d'eux son indice. Il peut arriver que deux ou plusieurs points (M_i, N_i) coïncident; on mettra alors à côté d'un tel point multiple les indices de tous les points qui y sont confondus.

Construisons le polygone, concave vers OM et contenant dans son intérieur ou sur sa périphérie tous les points (M_i, N_i), comme nous l'avons fait pour les équations du premier ordre, en adoptant les mêmes conventions et les mêmes définitions, avec la seule différence suivante : il pourra arriver que plusieurs points (M, N) soient confondus en un même sommet du polygone; si le nombre de ces points est h, ce sera un *sommet multiple d'ordre* h.

On voit aisément que le polygone tout entier est compris dans l'angle formé par la partie positive de l'axe OM et la partie de la droite passant par l'origine et ayant le coefficient angulaire égal à p (p étant l'ordre de l'équation différentielle), qui est comprise dans l'angle NOM. Cette droite sera appelée dans la suite *la droite limite*.

J'indiquerai les formes des polygones relatifs à quelques types généraux d'équation.

Premier exemple. — Soit

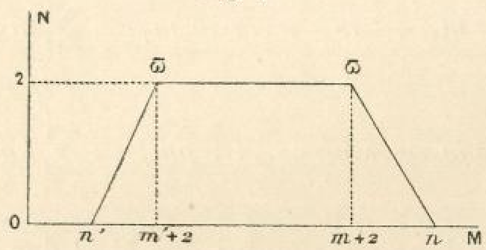
$$F = P(x, y)y'' + Q(x, y),$$

où P et Q sont deux polynomes en y, et soient m et m' le plus grand et le plus petit exposant de y dans P, et n, n' les quantités analogues relatives à Q. Le polynome F présente deux sortes de termes :

1° Les termes de la forme $y^i y''$ ($i = m', m'+1, \ldots, m-1, m$), qui donnent les points $M_i = i+2$, $N_i = 2$, situés sur la droite $N = 2$;

2° Les termes de la forme y^k ($k = n', n'+1, \ldots, n-1, n$), qui donnent les points $M_k = k$, $N_k = 0$, situés sur l'axe OM.

Fig. 4.



Par conséquent, la forme générale du polygone est celle de la *fig.* 4. Sur la droite $N = 2$ il y a au moins un sommet; la disposition, le nombre de sommets et la forme du polygone peuvent d'ailleurs varier. Si $m = m'$, le sommet ϖ sera double; on voit également que le polygone ne peut pas présenter plus d'un sommet multiple.

Deuxième exemple. — Pour obtenir le polygone II de

$$F = y''^{\nu} + P(x, y, y'),$$

on construira le polygone II′ de $P(x, y, y')$; on joindra le sommet ϖ droit de ce polygone au point $S(M = \nu,\ N = 2\nu)$ par une droite D, et l'on abaissera de S une perpendiculaire Δ sur OM. Si le sommet extrême gauche de II′ est à gauche de Δ ou sur Δ, le polygone II est celui composé des droites Δ, D, du côté à domaine négatif de II′ et d'une portion de l'axe OM; si le sommet extrême gauche est à droite de Δ, le côté Δ sera remplacé par la droite joignant le point S à ce sommet extrême. Lorsque, par exemple, $\nu = 1$ et

$$P(x, y, y') = P(x, y)y' + Q(x, y),$$

et en donnant à m, m', n, n' les significations précédentes, on aura l'une ou l'autre forme du polygone (*fig.* 5 et 6) suivant que $n' > 0$ ou $n' = 0$. On voit que le polygone ne peut pas présenter de points multiples. La forme du polygone peut varier, mais le sommet ϖ reste toujours sur la droite $N = 2$.

Fig. 5.

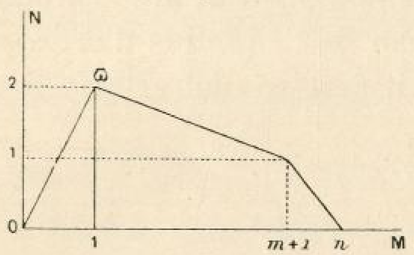
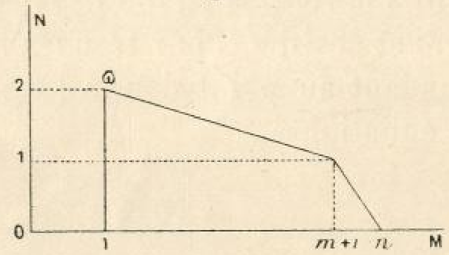


Fig. 6.



Troisième exemple. — Soit

$$F = P(x, y'') + Q(x, y).$$

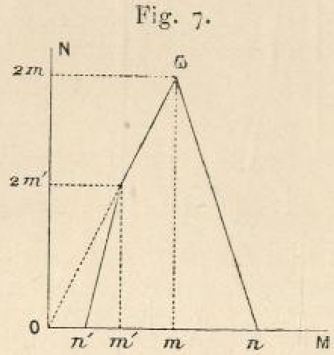
Il y a deux sortes de termes :

1° Les termes en $y''^i (i = m', \ldots, m)$, donnant les points $M_i = i$, $N_i = 2i$ situés sur la droite limite $\lambda = 2$;

2° Les termes en $y^k (k = n', \ldots, n)$, donnant les points $M_k = k$, $N_k = 0$, situés sur l'axe OM.

La forme générale du polygone est celle de la *fig.* 4; elle peut varier, mais le sommet ϖ se trouve toujours sur la droite $N = 2m$.

Fig. 7.



Quatrième exemple. — Le polygone d'une équation linéaire d'ordre p sans second membre se réduit à une droite parallèle à ON, et les coordonnées du sommet ϖ sont (p, p); pour les équations avec le second membre c'est un triangle rectangle, dont les coordonnées des sommets sont $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, p)$.

Pour la construction des exemples (relatifs à ce qui va suivre), il importe de savoir trouver les équations différentielles d'un ordre donné, correspondant à un système de points (M_i, N_i) donné. Ceci revient à la résolution d'un système d'équations linéaires en nombres entiers et positifs. Pour trouver le terme de l'équation d'ordre p correspondant au point donné (M_i, N_i), il faut résoudre le système de deux équations

$$M_i = m_{0i} + m_{1i} + \ldots + m_{pi},$$
$$N_i = m_{1i} + 2m_{2i} + \ldots + p\,m_{pi},$$

en nombres entiers positifs, et, pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que $pM_i - N_i \geqq 0$. Il peut y avoir plusieurs systèmes de solutions correspondant à un même point (M_i, N_i), mais le nombre de ces systèmes est limité et chacun d'eux donne un mode de construction du terme de l'équation correspondant au point donné. En construisant h termes de l'équation correspondant aux différents systèmes de solutions relatifs à un même point (M_i, N_i), ce point sera un point multiple d'ordre h pour l'équation ainsi construite.

Pour faciliter la recherche des exemples, je donne ici le Tableau de ces solutions pour les équations d'un ordre inférieur à 5, et qu'il faut appliquer à chacun des points (M_i, N_i) donnés dans le plan NOM (les indices i sont supprimés).

$p = 2$:

$$N - M \leqq m_2 \leqq \tfrac{1}{2} N,$$
$$m_1 = N - 2m_2, \qquad m_0 = M - N + m_2$$

ou encore

$$M - N \leqq m_0 \leqq M - \tfrac{1}{2} N, \qquad m_1 = 2M - N - 2m_0, \qquad m_2 = N - M + m_0.$$

$p = 3$:

$$N - 2M \leqq m_3 \leqq \tfrac{1}{3} N,$$
$$N - M - 2m_3 \leqq m_2 \leqq \tfrac{1}{2}(N - 3m_3),$$
$$m_1 = N - 2m_2 - 2m_3, \qquad m_0 = M - N + m_2 + 2m_3$$

ou encore

$$M - N \leqq m_0 \leqq M - \tfrac{1}{3} N,$$
$$2M - N - 2m_0 \leqq m_1 \leqq \tfrac{3}{2} M - \tfrac{1}{2} N - \tfrac{3}{2} m_0,$$
$$m_2 = 3M - N - 3m_0 - 2m_1, \qquad m_3 = \tfrac{1}{2}(N - M + m_0 - m_2).$$

$p = 4$:

$$N - 3M \leqq m_4 \leqq \tfrac{1}{4} N,$$
$$N - 2M - 2m_4 \leqq m_3 \leqq \tfrac{1}{3}(N - 4M),$$
$$N - M - 2m_3 - 3m_4 \leqq m_2 \leqq \tfrac{1}{2}(N - 4m_4 - 3m_3),$$
$$m_1 = N - 2m_2 - 3m_3 - 4m_4, \qquad m_0 = M - N + m_2 + 2m_3 + 3m_4.$$

3. Ceci étant, posons dans le polynome précédent F

$$y = (x - a)^{\lambda} f(x),$$

où a et λ sont deux constantes finies et différentes de zéro, et $f(x)$ une fonction de x. Par les différentiations successives on trouve

$$y' = \lambda (x - a)^{\lambda - 1} f + (x - a)^{\lambda} f',$$
$$y'' = \lambda(\lambda - 1)(x - a)^{\lambda - 2} f + 2\lambda (x - a)^{\lambda - 1} f' + (x - a)^{\lambda} f'',$$
$$y''' = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(x - a)^{\lambda - 3} f + 3\lambda(\lambda - 1)(x - a)^{\lambda - 2} f' + 3\lambda (x - a)^{\lambda - 1} f'' + (x - a)^{\lambda} f''',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$\begin{aligned} \gamma_{0i} &= m_{1i} + m_{2i} + \ldots + m_{pi}, \\ \gamma_{1i} &= m_{2i} + m_{3i} + \ldots + m_{pi}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \gamma_{hi} &= m_{h+1,i} \qquad + \ldots + m_{pi}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

le terme général de F prendra la forme

$$\varphi_i(x)(x - a)^{\lambda M_i - N_i}[A_i f(x)^{M_i} + \theta_i(x)],$$

où $\theta_i(x)$ est un polynome en

$$f(x), \quad (x - a) f'(x), \quad (x - a)^2 f''(x) \ldots (x - a)^p f^{(p)}(x),$$

dans lequel il n'y a pas de terme dépendant uniquement de f, ensuite

$$A_i = \lambda^{\gamma_{0i}} (\lambda - 1)^{\gamma_{1i}} (\lambda - 2)^{\gamma_{2i}} \ldots (\lambda - p + 1)^{\gamma_{p-1,i}}.$$

On aura donc

$$F = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x)(x - a)^{\lambda M_i - N_i}[A_i f(x)^{M_i} + \theta_i(x)].$$

Envisageons dans cette somme l'ensemble T de termes pour lesquels l'exposant $\lambda M_i - N_i$ de la puissance $(x-a)$ mise en facteur est le plus faible. Suivant les valeurs des M_i, N_i, λ l'ensemble T sera composé d'un seul terme, de deux ou de plusieurs termes, et je vais chercher les conditions nécessaires et suffisantes correspondant à ces divers cas.

En général, pour que les termes d'indices γ, δ, ε, ... fassent partie de T, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies simultanément :

$$\lambda M_\gamma - N_\gamma = \lambda M_\delta - N_\delta = \lambda M_\varepsilon - N_\varepsilon = \ldots, \tag{1}$$

$$\lambda M_\gamma - N_\gamma < \lambda M_i - N_i, \tag{2}$$

lorsqu'on attribue à l'indice i toutes les valeurs entières de 1 à s autres que celles des indices des termes faisant partie de T.

La condition (1) peut s'écrire

$$\lambda = \frac{N_\gamma - N_\delta}{M_\gamma - M_\delta} = \frac{N_\delta - N_\varepsilon}{M_\delta - M_\varepsilon} = \ldots. \tag{3}$$

On voit donc que λ doit être égal au coefficient angulaire de la droite (γ, δ) et que les points correspondant aux divers termes de T doivent être sur cette droite.

D'autre part, la quantité $\lambda M_i - N_i$ lorsqu'on y remplace λ par la valeur (3), représente l'ordonnée à l'origine $S_{i,\lambda}$, changée de signe, de la droite passant par (i) et de coefficient angulaire λ.

Par conséquent, pour que les termes d'indice γ, δ, ε, ... fassent partie de T, il faut et il suffit :

1° Que les points d'indices γ, δ, ε, ... soient sur une même droite, et que λ soit égal au coefficient angulaire de cette droite;

2° Que $S_{\gamma,\lambda} > S_{i,\lambda}$ pour tous les indices i de 1 à s autres que $\gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$, c'est-à-dire que l'ordonnée à l'origine de la droite (γ, δ) soit plus grande que celle d'une quelconque de droites parallèles à (γ, δ) et passant par les points (i) non situés sur la droite (γ, δ).

Si tous les points (M_i, N_i) sont simples, la direction de toute droite (γ, δ) est bien déterminée, et, par conséquent, pour ces points la condition 1° ne peut être vérifiée que pour une seule valeur de λ. Mais si le point (M_i, N_i) était multiple et correspondait, par exemple, aux indices $i, j, k, \ldots$, la direction des droites (i, j), (j, k), ... serait complètement indéterminée et pourrait être quelconque; par conséquent, pour les points multiples, la condition (1°) est toujours vérifiée, quelle que soit la valeur de λ, réelle ou imaginaire; pour ces points il ne reste que les inégalités 2° à vérifier.

Je distinguerai donc deux cas, suivant que tous les points (M, N) sont simples, ou qu'il y en ait de multiples.

1[er] CAS : *Tous les points* (M_i, N_i) *sont simples.* — Pour que les termes correspondant aux deux points (γ) et (δ) fassent partie de T, il faut que le coefficient angulaire λ de la droite (γ, δ) ait la valeur tirée de (3). Réciproquement, λ étant convenablement choisi, quels que soient les deux points (γ) et (δ), on peut toujours satisfaire à la condition (1), pourvu que ces points ne soient pas situés sur une même droite parallèle à OM ou à ON.

Il reste encore à satisfaire à la condition 2°. Or, pour cela, d'après les propriétés du polygone, il faut et il suffit que la droite (γ, δ) soit un côté du polygone non parallèle aux axes. On voit donc que, pour que T soit composé d'au moins deux termes, il faut et il suffit que λ soit égal au coefficient angulaire d'un côté quelconque du polygone, non parallèle aux axes; les indices des termes qui figurent alors dans T sont ceux des sommets du polygone qui se trouvent sur le côté dont le coefficient angulaire est égal à (3).

2[e] CAS : *Il y a des points* (M_i, N_i) *multiples.* — Pour ces points la condition 1° est satisfaite, quel que soit λ, réel ou imaginaire, et pour que les termes aux indices $\gamma, \delta, \ldots$ du point multiple (M_γ, N_γ) fassent partie de T, il faut et il suffit que l'on donne à λ une valeur qui permette de satisfaire à la condition 2°.

Il est d'abord facile de voir que si un point multiple (M_γ, N_γ) n'est pas un sommet du polygone, quelle que soit la valeur réelle qu'on attribue à λ, on ne peut jamais satisfaire à la condition 2°. En effet, pour que la condition $S_{\gamma,\lambda} > S_{i,\lambda}$ puisse être satisfaite pour tous les indices i autres que ceux qui appartiennent au point multiple (γ), il faut que λ soit compris dans le domaine du point (γ), et, comme le domaine d'un point quelconque qui n'est pas un sommet du polygone est nul, la condition 2° ne peut être satisfaite que pour un sommet du polygone. D'ailleurs chaque sommet du polygone satisfait à 2° si l'on donne à λ une valeur quelconque comprise dans son domaine.

Si maintenant λ était imaginaire, je conviendrais de dire que l'exposant $\lambda M_\gamma - N_\gamma$ est supérieur, égal ou inférieur à l'exposant $\lambda M_i - N_i$, suivant que

$$\operatorname{mod}(x-a)^{(\lambda M_\gamma - N_\gamma)-(\lambda M_i - N_i)}$$

tend vers zéro, vers une limite finie, ou augmente indéfiniment lorsque x tend vers a. D'après cette définition, si l'on désigne par $R(\lambda)$ la partie réelle de λ, pour que l'on ait

$$\lambda M_\gamma - N_\gamma < \lambda M_i - N_i,$$

il faut et il suffit que

$$R(\lambda) M_\gamma - N_\gamma < R(\lambda) M_i - N_i,$$

et nous avons vu que pour qu'une telle équation soit satisfaite pour tous les indices i autres que ceux qui appartiennent au point multiple (γ), il faut et il suffit que ce point γ soit un sommet du polygone et que $R(\lambda)$ soit comprise dans le domaine de ce sommet. Or, ce domaine n'est jamais nul et il est représenté par un intervalle fini si le sommet est un sommet intermédiaire, par un intervalle indéfini dans un sens si c'est un sommet extrême, et par l'intervalle de $\lambda = -\infty$ à $\lambda = +\infty$ si ce sommet est l'unique sommet du polygone.

On peut donc dire d'une façon générale que : pour qu'un terme ayant un indice qui appartient à un point multiple (M_γ, N_γ) fasse partie de T, il faut et il suffit que ce point multiple soit un sommet du polygone, et que la partie réelle de λ soit comprise dans le domaine de ce sommet. Si ces conditions sont remplies, T sera la somme de tous les termes correspondant aux indices du point multiple, lorsque $R(\lambda)$ n'est égale à aucune des valeurs limites de l'intervalle qui définit le domaine du sommet; et à tous ces termes s'ajouteront encore les termes correspondant aux indices du sommet voisin, lorsque $R(\lambda)$ prend une des valeurs limites de cet intervalle ; dans ce cas, d'ailleurs, λ devient égal au coefficient angulaire du côté joignant le sommet multiple considéré au sommet voisin.

On peut résumer ce qui précède en deux lemmes suivants :

Lemme I. — Pour que T se compose d'un seul terme, il faut et il suffit :

1° Que le polygone n'ait aucun côté non parallèle aux axes, ou, s'il en a, que λ ne soit égal à aucun des coefficients angulaires de ces côtés;

2° Que le polygone n'ait aucun sommet multiple, ou, s'il en a, que $R(\lambda)$ ne soit comprise dans le domaine d'aucun de ces sommets.

Lemme II. — Pour que T se compose de deux ou de plusieurs termes, il faut et il suffit que l'une au moins des conditions suivantes soit remplie :

1° Le polygone a des côtés non parallèles aux axes et λ est égal au coefficient angulaire d'un de ces côtés; T sera alors la somme de tous les termes de F correspondant aux indices des points situés sur le côté dont le coefficient angulaire est égal à λ.

2° Le polygone *a* des sommets multiples, et $R(\lambda)$ est comprise dans le domaine d'un de ces sommets; T sera alors la somme de tous les termes correspondant aux indices du sommet considéré.

4. Utilisons maintenant ces deux lemmes pour donner à F certaines formes qui nous seront utiles dans la suite.

A. *Supposons remplies les conditions* 1° *et* 2° *du lemme I.* — L'ensemble T sera alors composé d'un terme unique, et l'indice de ce terme sera celui du sommet simple dans le domaine duquel $R(\lambda)$ est comprise. Soit h cet indice et posons, pour abréger,

$$\varphi_i(x)[A_i f(x)^{M_i} + \theta_i(x)] = \Omega_i(x);$$

on peut alors écrire F sous la forme

$$F = (x-a)^{-S_{h,\lambda}} \left[\Omega_h(x) + \sum (x-a)^{S_{h,\lambda} - S_{i,\lambda}} \Omega_i(x) \right], \tag{I}$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les points (M_i, N_i) autres que (M_h, N_h); il faut encore remarquer que tous les exposants $S_{h,\lambda} - S_{i,\lambda}$ sont positifs, car d'après la définition même du terme d'indice h on a $S_{h,\lambda} > S_{i,\lambda}$ pour tous les points (M_i, N_i) autres que (M_h, N_h).

B. *Supposons remplie la condition* 1° *du lemme II.* — L'ensemble T sera alors la somme de tous les termes correspondant aux indices des points situés sur le côté de coefficient angulaire λ.

Convenons de représenter par

$\sum\limits_{(i,j)}$ la sommation étendue aux indices de tous les points (M_i, N_i) situés sur la droite (i,j); par

$\sum\limits_{-(i,j)}$ la sommation étendue aux indices de tous les points autres que ceux situés sur la droite (i,j).

Soit (γ, δ) un côté quelconque du polygone, non parallèle aux axes; on a, lorsque λ est égal au coefficient angulaire de ce côté,

$$T = (x-a)^{-S_{\gamma,\lambda}} \sum_{(\gamma,\delta)} \Omega_i(x),$$

et F peut s'écrire

$$F = T + \sum_{-(\gamma,\delta)} (x-a)^{-S_{i,\lambda}} \Omega_i(x)$$

ou

$$\text{(II)} \qquad F = (x-a)^{-S_{\gamma,\lambda}} \left[\sum_{(\gamma,\delta)} \Omega_i(x) + \sum_{-(\gamma,\delta)} (x-a)^{S_{\gamma,\lambda}-S_{i,\lambda}} \Omega_i(x) \right],$$

où tous les exposants $S_{\gamma,\lambda} - S_{i,\lambda}$ sont positifs.

C. *Supposons remplie la condition* 2° *du lemme II.* — T sera la somme de tous les termes correspondant aux indices du sommet multiple dans le domaine duquel $R(\lambda)$ est comprise. Convenons de représenter par

$\sum\limits_{(\gamma)}$ la sommation étendue aux indices de tous les points confondus au sommet multiple dont γ est l'un des indices; par

$\sum\limits_{-(\gamma)}$ la sommation étendue à tous les indices i de 1 à s autres que ceux des points confondus au sommet (γ).

On aura donc, lorsque $R(\lambda)$ est comprise dans le domaine du sommet (γ),

$$T = (x-a)^{-S_{\gamma,\lambda}} \sum_{(\gamma)} \Omega_i(x),$$

$$F = T + \sum_{-(\gamma)} (x-a)^{-S_{i,\lambda}} \Omega_i(x)$$

ou

$$\text{(III)} \qquad F = (x-a)^{-S_{\gamma,\lambda}} \left[\sum_{(\gamma)} \Omega_i(x) + \sum_{-(\gamma)} (x-a)^{S_{\gamma,\lambda} - S_{i,\lambda}} \Omega_i(x) \right],$$

avec tous les exposants $S_{\gamma,\lambda} - S_{i,\lambda}$ positifs.

Il est encore à remarquer que, puisque la somme $\sum_{(\gamma)}$ doit être étendue aux indices de tous les points confondus au sommet (γ), et que tous ces points ont les mêmes coordonnées et, en particulier, la même abscisse, si l'on désigne cette abscisse par μ, on aura

$$\sum_{(\gamma)} \Omega_i(x) = f(x)^{\mu} \sum_{(\gamma)} A_i \varphi_i(x) + \sum_{(\gamma)} \varphi_i(x)\, \theta_i(x).$$

5. Supposons maintenant que $x = a$ soit un zéro ou un infini de l'intégrale y de l'équation $F = o$, et tel que, pour une valeur déterminée de λ, le rapport

$$\frac{y}{(x-a)^{\lambda}}$$

tende vers une limite déterminée, finie et différente de zéro, lorsque x tend vers a. Si $R(\lambda)$ est positive, a sera un zéro de l'intégrale d'ordre $R(\lambda)$; si $R(\lambda)$ est négative, a sera un infini de l'intégrale d'ordre $-R(\lambda)$.

Dans le voisinage de $x = a$, on peut écrire

$$y = (x-a)^{\lambda} f(x),$$

où $f(x)$ est une fonction tendant vers une limite déterminée ρ, finie et différente de zéro, lorsque x tend vers a.

Remplaçons y dans F; F prendra l'une des formes (I), (II), (III) suivant que les conditions (A), (B) ou (C) seront remplies. Quelle que soit celle des formes que F prendra, le résultat de la substitution de y dans F doit être identiquement nul quel que soit x dans le voisinage $x = a$, car y est l'intégrale de $F = o$. Par conséquent, dans le voisinage de $x = a$, on aura identiquement, soit

$$\Omega_h(x) + \sum (x-a)^{S_{h,\lambda} - S_{i,\lambda}} \Omega_i(x) = o,$$

soit

$$\sum_{(\gamma,\delta)} \Omega_i(x) + \sum_{-(\gamma,\delta)} (x-a)^{s_{\gamma,\lambda}-s_{i,\lambda}} \Omega_i(x) = 0,$$

soit

$$\sum_{(\gamma)} \Omega_i(x) + \sum_{-(\gamma)} (x-a)^{s_{\gamma,\lambda}-s_{i,\lambda}} \Omega_i(x) = 0,$$

suivant que, dans le voisinage de $x = a$, F prend la forme (I), (II) ou (III).

Supposons que x tende vers a. Dans le cas du premier ordre, nous avons pu affirmer que $f(x)$ tendra vers une limite ρ finie et déterminée, et que l'on aura

$$(\mathrm{E}) \qquad \begin{cases} \lim[(x-a)\ f'(x)] = 0, \\ \lim[(x-a)^2 f''(x)] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

pour toute valeur $x = a$ de x, sauf peut-être pour un certain nombre de valeurs fixes et connues à l'avance, qui coïncident avec les singularités transcendantes de l'intégrale. Il n'en est plus, en général, ainsi dans le cas des équations d'ordre supérieur.

Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons implicitement que les singularités transcendantes de l'intégrale considérée et de ses dérivées jusqu'à l'ordre p soient fixes. Dans le cas où il n'en est pas ainsi, ce que nous dirons s'appliquera seulement aux intégrales particulières (ou dépendant des constantes) n'ayant que des singularités transcendantes données à l'avance, par exemple aux intégrales méromorphes de l'équation ou aux intégrales n'ayant, en fait de singularités mobiles, que des pôles et des points critiques algébriques (ainsi que leurs dérivées), et, d'une façon générale, *aux intégrales qui sont (ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre p) d'un ordre infinitésimal déterminé dans le voisinage d'une valeur de x mobile, qui les annule ou qui les rend infinies*, de telle sorte que, si l'intégrale y est d'ordre infinitésimal λ, sa dérivée d'ordre k est d'ordre $\lambda - k$ ($k = 1, 2, \ldots, p$).

Dans ces cas, les conditions (E) seront remplies sans faire aucune hypothèse de plus, et comme les θ_i sont des polynomes en

$$f, \quad (x-a)f', \quad (x-a)^2 f'', \quad \ldots, \quad (x-a)^p f^{(p)},$$

dans lesquels les termes dépendant uniquement de f manquent, on aura, pour $x = a$,

$$\lim \theta_i(x) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Donc, on aura pour toute valeur de a, sauf pour certaines valeurs particulières a', pour lesquelles les fonctions $\varphi_i(x)$ deviennent infinies et que l'on reconnaîtra toujours d'avance,

$$\lim \Omega_i(x) = A_i\,\varphi_i(a)\,\rho^{M_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Par conséquent, on voit, en tenant compte de ce que tous les exposants $S_{k,\lambda} - S_{i,\lambda}$ et $S_{\gamma,\lambda} - S_{i,\lambda}$ sont positifs, que, pour toute valeur de a, ne coïncidant avec aucune des valeurs particulières a':

A. Si les conditions 1° et 2° du lemme I sont remplies, on aura

$$A_h\,\varphi_h(a)\,\rho^{M_h} = 0.$$

B. Si la condition 1° du lemme II est remplie, on aura

$$\sum_{(\gamma,\delta)} A_i\,\varphi_i(a)\,\rho^{M_i} = 0,$$

où il faut poser

$$A_i = \lambda^{\gamma_{0i}}(\lambda - 1)^{\gamma_{1i}} \ldots (\lambda - p + 1)^{\gamma_{p-1,i}},$$

et remplacer λ par le coefficient angulaire du côté (γ, δ) considéré. J'appellerai cette équation *l'équation en* ρ *relative au côté* (γ, δ).

C. Si la condition 2° du lemme II est remplie, on aura

$$\sum_{(\gamma)} A_i\,\varphi_i(a) = 0.$$

En y remplaçant A_i par son expression en λ, on aura une équation algébrique en λ

$$\theta(\lambda) = \lambda^m + s_1\lambda^{m-1} + s_2\lambda^{m-2} + \ldots + s_{m-1}\lambda + s_m = 0$$

(à coefficients s_i fonctions de a) que j'appellerai : *l'équation en* λ *relative au sommet multiple* (γ).

L'équation en λ relative à un sommet simple (i) se réduit à $A_i = 0$ ou

$$\lambda^{\gamma_{0i}}(\lambda - 1)^{\gamma_{1i}} \ldots (\lambda - p + 1)^{\gamma_{p-1,i}} = 0.$$

6. Jusqu'à présent je n'ai pas spécifié si a était un zéro ou un infini de l'intégrale; distinguons maintenant ces deux cas.

I. — La valeur a est un infini de l'intégrale.

A. Supposons d'abord les deux conditions suivantes remplies :

1° Le polygone n'a aucun côté à coefficient angulaire négatif, ou, s'il en a, λ n'est égal à aucun de ces coefficients.

2° Le polygone n'a aucun sommet multiple à domaine négatif, ou, s'il en a, $R(\lambda)$ n'est pas comprise dans un tel domaine.

Alors, en ayant égard au lemme I et à ce que λ doit être négatif, on voit que l'équation

$$A_h \varphi_h(a) \rho^{M_h} = 0$$

doit avoir lieu pour toutes les valeurs de a qui ne coïncident pas avec les infinis a' des fonctions $\varphi_i(x)$; et, comme ρ est une quantité différente de zéro et que l'équation $A_h = 0$, qui est la suivante

$$\lambda^{\gamma_{0h}}(\lambda - 1)^{\gamma_{1h}} \ldots (\lambda - p + 1)^{\gamma_{p-1,h}} = 0,$$

n'a aucune racine en λ négative, a doit être une racine de l'équation

$$\varphi_h(a) = 0.$$

On en conclut que : si les conditions 1° et 2° sont remplies, a ne dépend pas des constantes d'intégration et annule ou rend infinie au moins l'une des fonctions $\varphi_i(x)$.

B. Supposons ensuite que le polygone ait des côtés à coefficient angulaire négatif, et que λ soit égal à un de ces coefficients.

On aurait alors, si (γ) et (δ) sont les deux sommets qui limitent le côté dont le coefficient angulaire est égal à λ, et si a ne coïncide avec aucune des valeurs a'

$$\sum_{(\gamma,\delta)} A_i \varphi_i(a) \rho^{M_i} = 0.$$

Quelle que soit la valeur attribuée à a, cette équation a au moins une racine en ρ finie et différente de zéro, car tous les M_i figurant dans le premier membre de l'équation sont distincts, et l'infini a peut dépendre des constantes d'intégration. On voit aussi que la limite ρ de $f(x)$, lorsque x tend vers a, est une fonction algébrique des $\varphi_i(a)$. En particulier, lorsque l'équation $F = 0$ est algébrique non seulement par rapport à y et à ses dérivées, mais aussi, par rapport à x, cette limite est une fonction algébrique de a. Enfin, si ces $\varphi_i(x)$ sont des constantes B_i (par exemple si $F = 0$ ne contient pas x explicitement), la limite ρ ne varie pas avec les constantes d'intégration, et elle est une racine de l'équation algébrique

$$\sum_{(\gamma,\delta)} A_i B_i \rho^{M_i} = 0,$$

dans laquelle il faut d'abord supprimer toutes les racines nulles.

C. Supposons enfin que le polygone ait des sommets multiples à domaine négatif et que $R(\lambda)$ soit comprise dans un tel domaine.

Alors, en ayant égard au lemme II, pour toutes les valeurs a ne coïncidant pas avec les a', on aura

$$\sum_{(\gamma)} A_i \varphi(a) = 0,$$

la sommation s'étendant à tous les indices du sommet multiple dont γ est un des indices. Nous avons appelé précédemment cette équation : l'équation en λ relative au sommet multiple (λ); écrivons-la sous la forme

$$\theta(\lambda) = \lambda^m + s_1(a)\lambda^{m-1} + s_2(a)\lambda^{m-2} + \ldots + s_{m-1}(a)\lambda + s_m(a) = 0.$$

Si toutes les racines λ de cette équation dépendent de a, lorsque a varie avec les constantes d'intégration, λ variera aussi; mais il n'en est pas nécessairement ainsi lorsqu'une ou plusieurs racines sont indépendantes de a. Si, en particulier, aucune racine ne dépend de a, l'ordre λ de l'infini a ne varie certainement pas avec les constantes d'intégration. Ceci arrive, par exemple, pour les équations où x ne figure pas explicitement, et pour ces équations (les conditions relatives aux singularités transcendantes étant remplies), l'ordre d'un infini mobile quelconque est égal à une racine, toujours fixe, de l'équation en λ (lorsque cette équation ne se réduit pas à une identité), dont la partie réelle est négative et comprise dans le domaine du sommet multiple (γ).

On peut dire, d'une façon générale, que, pour que l'infini a puisse être mobile et son ordre λ fixe et compris dans le domaine d'un sommet multiple (γ), il faut que l'équation en λ, relative à ce sommet, admette au moins une racine dont la partie réelle soit indépendante de a et comprise dans le domaine de ce sommet; λ est alors égal à la partie réelle d'une de ces racines.

Si le polynome se réduit à un seul sommet multiple (une droite), le domaine de ce sommet est représenté par l'intervalle de $\lambda = -\infty$ à $\lambda = +\infty$; dans ce cas, pour que l'infini a puisse être mobile et son ordre λ fixe, il faut que l'équation en λ relative à ce sommet admette au moins une racine dont la partie réelle soit négative et indépendante de a.

De ce qui précède on déduit les théorèmes suivants [1] :

Théorème I. — *Toutes les fois que l'intégrale de* $F = 0$ *a des infinis mobiles, une au moins des conditions suivantes est remplie :*

1° *Le polygone a un ou plusieurs côtés à coefficient angulaire négatif, et* λ *est égal à un de ces coefficients;*

2° *Le polygone a un ou plusieurs sommets multiples à domaine négatif, et il existe une région* S *du plan des* a, *ne se réduisant pas à des points isolés, limitée ou illimitée et telle que pour toute valeur de* a *comprise dans cette région, l'équation en* λ *relative à un tel sommet admet au moins une racine dont la partie réelle est négative et comprise dans le domaine de ce sommet;* λ *est alors égal à la partie réelle d'une de ces racines, et l'infini* a *appartient à la région* S.

Pour mettre bien évidence le sens de ce théorème, appliquons-le à l'exemple

$$F = y'^5 y''^2 + \varphi_1(x) y y'^3 y''^3 + \varphi_2(x) y^8 + \varphi_3(x) y''^5 + \varphi_4(x) = 0.$$

Le polygone de F (*fig.* 8) est celui de la figure; le sommet B est double et d'indices 1 et 2, et les sommets A et C, d'indices 3 et 4, sont des sommets simples.

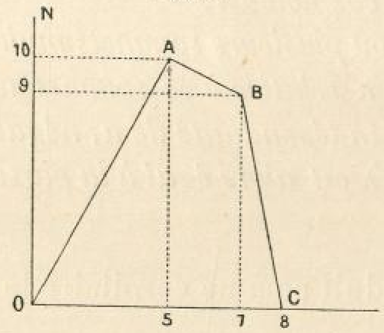
---

[1] Dans tous ces théorèmes il s'agira, bien entendu, des infinis (ou des zéros) tels que l'intégrale considérée (ainsi que ses dérivées d'ordre p) soit d'un ordre infinitésimal déterminé dans leur voisinage.

Le coefficient angulaire du côté AB est $-\frac{1}{2}$, celui de BC est -9.

Le domaine du sommet B est l'intervalle de $\lambda = -9$ à $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Fig. 8.



L'équation en λ relative à ce sommet est

$$\lambda^7(\lambda-1)^2+\varphi_1(a)\lambda^6(\lambda-1)^3=0,$$

ayant pour racines

$$\lambda=0, \qquad \lambda=1, \qquad \lambda=\frac{1}{1+\varphi_1(a)}.$$

Si un infini mobile a de l'intégrale n'est pas d'ordre $-\frac{1}{2}$ ou -9, la partie réelle de $\frac{1}{1+\varphi_1(a)}$ est négative et comprise dans l'intervalle $(-9, -\frac{1}{2})$; s'il n'en est pas ainsi, l'infini a est fixe. Posons

$$a=\xi+\eta i, \qquad \frac{1}{1+\varphi_1(\xi+\eta i)}=\varpi(\xi,\eta)+i\chi(\xi,\eta);$$

l'infini mobile a (s'il n'est pas d'ordre $-\frac{1}{2}$ ou -9) reste constamment compris dans la portion du plan (ξ, η) commune aux deux régions

$$\varpi(\xi,\eta)>-9 \qquad \text{et} \qquad \varpi(\xi,\eta)<-\tfrac{1}{2}.$$

En dehors de cette portion du plan, tout infini de y n'étant pas d'ordre $-\frac{1}{2}$ ou -9 est fixe.

Théorème II. — *Toutes les fois que l'intégrale a des infinis mobiles* *ayant un ordre λ fixe, une au moins des conditions suivantes est remplie :*

1° *Le polygone a un ou plusieurs côtés à coefficient angulaire négatif, et λ est égal à un de ces coefficients;*

2° *Le polygone a un ou plusieurs sommets multiples à domaine négatif et tels que l'équation en λ relative à ce sommet ait au moins une racine dont la partie réelle est indépendante de a, négative et comprise dans le domaine de ce sommet; λ est alors égal à la partie réelle d'une de ces racines.*

Du théorème I on déduit comme corollaire le suivant :

Théorème III. — *Toutes les fois que le sommet ϖ droit du polygone est en même temps le sommet extrême droit, et lorsque ce sommet est simple, ou bien, si lorsqu'il est multiple il ne lui correspond dans le plan des a aucune région* S *définie comme dans le théorème I, les infinis de l'intégrale ne varient pas avec les constantes d'intégration.*

De plus, si h est l'indice du sommet ϖ droit, et si c'est un sommet simple, tout infini de l'intégrale est, soit une racine de l'équation $\varphi_h(x) = 0$, soit un infini des autres fonctions $\varphi_i(x)$; si c'est un sommet multiple, tout infini de l'intégrale est, soit un infini des fonctions $\varphi_i(x)$ autres que celles correspondant à ce sommet, soit un des points isolés auxquels se réduisent les régions S correspondant au sommet, dans le cas où de tels points existent.

On le voit facilement en remarquant que pour une valeur quelconque de λ, ayant sa partie réelle négative, l'ensemble T se réduit au terme d'indice h, si le sommet est simple, et qu'il soit égal à la somme des termes correspondant à tous les indices du sommet, si celui-ci est multiple. Dans ce dernier cas, à part les points isolés auxquels se réduisent les régions S correspondant au sommet, l'équation en λ n'admet aucune racine dont la partie réelle est négative et comprise dans le domaine du sommet, quelle que soit la valeur attribuée à a.

Théorème IV. — *Même lorsque le sommet ϖ droit n'est pas le sommet extrême droit, si λ n'est pas égal au coefficient angulaire d'un des côtés du polygone à droite du sommet ϖ droit, ou si les équations en λ relatives aux sommets à droite de ce sommet ϖ ont leurs racines en λ indépen-*

dantes de a, ne coïncidant pas avec λ *donné de l'infini considéré, cet infini doit annuler* $\varphi_h(x)$ [ou rendre infinie l'une des autres fonctions $\varphi_i(x)$], *h désignant l'indice du sommet dont le domaine comprend* $-\lambda$.

Ce qui précède fait voir que, excepté le seul cas où le polygone se réduit à un seul sommet multiple et tel que le premier membre de l'équation en λ relative à ce sommet est identiquement nul, quels que soient a et λ, *toutes les fois que l'ordre d'un infini mobile est fixe, il est une fonction algébrique des constantes numériques figurant dans le premier membre de l'équation différentielle.* En particulier, lorsque ces constantes sont des nombres algébriques, l'ordre λ est aussi un nombre algébrique. Enfin, toutes les fois que la condition 2° du théorème I n'est pas remplie, l'ordre de tout infini mobile est un nombre ne variant pas avec les constantes d'intégration et, de plus, commensurable.

On peut tirer du théorème I encore la remarque suivante :

Supposons que le sommet ϖ droit du polygone soit en même temps le sommet extrême droit et que ce soit un sommet multiple; supposons de plus que la région S définie dans le théorème I et relative à ce sommet ne comprenne pas le plan des a tout entier, et désignons par — S toute région du plan des a non comprise dans S. Il résulte du théorème I que dans la région — S l'intégrale ne peut avoir que des infinis isolés, ne variant pas avec les constantes d'intégration. Si, en particulier, cette région — S intercepte sur l'axe des réels des portions limitées ou illimitées de cet axe, *dans aucune de ces portions l'intégrale ne peut avoir des infinis réels mobiles.* Et si l'axe des réels se trouve tout entier dans la région — S, tous les infinis réels de l'intégrale sont fixes et coïncident avec un infini des fonctions $\varphi_i(x)$ autres que celles correspondant aux indices du sommet ϖ droit. *On a ainsi des conditions suffisantes pour que les infinis réels de l'intégrale soient fixes et, si ces conditions sont remplies, on peut considérer ces infinis comme donnés.* Dans un grand nombre de cas on pourra disposer des coefficients figurant dans le premier membre de l'équation, de sorte que tous les infinis réels soient fixes. Enfin on peut facilement construire des types généraux d'équations où les circonstances précédentes s'y réalisent.

Appliquons ces résultats *aux équations où x ne figure pas explicitement.*

Pour ces équations, aucune racine de l'équation en λ relative à un sommet multiple quelconque ne dépend de a; par conséquent, l'ordre d'un infini mobile de l'intégrale ne varie pas avec a. D'autre part, comme dans l'intégrale générale il y a toujours une constante additive à x, tout infini de l'intégrale, dans le cas où ces infinis existent, varie certainement avec les constantes d'intégration. Par conséquent, pour ces équations :

Toutes les fois qu'une intégrale devient infinie pour une valeur finie de x, une au moins des conditions 1° *et* 2° *du théorème II est remplie.*

Enfin, excepté le seul cas où le polygone se réduit à un seul sommet multiple et tel que le premier membre de l'équation en λ relative à ce sommet est identiquement nul quel que soit λ, l'ordre d'un infini quelconque de l'intégrale est toujours racine d'une équation algébrique dont les coefficients sont des fonctions linéaires et homogènes des coefficients figurant dans le premier membre de l'équation différentielle, ou bien égal au coefficient angulaire d'un côté du polygone. Lorsque les constantes numériques figurant dans l'équation différentielle sont des nombres algébriques, l'ordre d'un infini quelconque est également un nombre algébrique.

II. — La valeur a est un zéro de l'intégrale.

Il suffit d'appliquer les propositions précédentes à la transformée de $F = 0$ en $\frac{1}{y}$ pour obtenir des propositions concernant les zéros de l'intégrale. Dans toutes ces propositions, les côtés à coefficient angulaire négatif et les sommets à domaine négatif sont seuls à considérer; mais on peut aussi avoir des renseignements sur les zéros par la considération des côtés à coefficient angulaire positif et des sommets à domaine positif du polygone II de $F = 0$ sans être obligé de construire le polygone de la transformée.

Supposons, par exemple, les deux conditions suivantes remplies :

1° Le polygone n'a aucun côté à coefficient angulaire positif, ou, s'il en a, λ n'est égal à aucun de ces coefficients;

2° Le polygone n'a aucun sommet multiple à domaine positif, ou, s'il en a, λ n'est pas compris dans un tel domaine.

Alors, en ayant égard à ce que λ doit être positif et au lemme I, on voit que l'équation

$$A_h \varphi_h(a) \rho^{\gamma_h} = 0$$

doit être satisfaite pour toute valeur de a ne coïncidant pas avec les infinis à des $\varphi_i(x)$. Cette équation est satisfaite soit par les valeurs de a racines de $\varphi_h(a) = 0$, soit par les valeurs de λ racines de l'équation

$$A_h = \lambda^{\gamma_{0h}}(\lambda - 1)^{\gamma_{1h}} \ldots (\lambda - p + 1)^{\gamma_{p-1,h}} = 0.$$

Par conséquent : *Si les conditions* 1° *et* 2° *sont remplies, et si* λ *n'est pas égal à un des entiers* 1, 2, 3, ..., $(p-1)$, *a est fixe et annule ou rend infinie au moins une des fonctions* $\varphi_i(x)$.

A chacune des propositions précédentes relatives aux infinis correspond une proposition relative aux zéros de l'intégrale et dans laquelle interviennent les côtés à coefficient angulaire positif ou les sommets à domaine positif; seulement ces propositions auraient un caractère moins décisif que les premières, car ici les coefficients A_i généralement s'annulent pour des valeurs de λ entières et positives, et l'ordre λ du zéro considéré peut être égal précisément à un de ces entiers, auquel cas on ne peut rien dire sur la fixité d'un tel zéro.

Mais il suffit d'ajouter encore une condition pour que les côtés à coefficient angulaire positif et les sommets à domaine positif donnent des résultats équivalents à ceux que nous avons trouvés dans le cas des infinis.

Soit δ_k l'indice du sommet dont le domaine comprend la direction

$$\lambda = k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, p),$$

p étant l'ordre de l'équation différentielle donnée $F = 0$.

Appelons δ_k ces sommets; il peut arriver qu'un même sommet satisfera à la fois à plusieurs de ces conditions (que son domaine comprend plusieurs entiers 1, ..., p) et même qu'un seul sommet satisfasse à toutes. *Supposons que dans* F *l'ensemble des termes qui correspondent aux indices* $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ *ne contienne que* x, y, y'. Je dis que :

Toutes les fois que les conditions du lemme I (p. 70) *sont remplies, le* *zéro a est fixe et annule une des fonctions*

$$\varphi_{\delta_1}(x), \quad \varphi_{\delta_2}(x), \quad \ldots, \quad \varphi_{\delta_p}(x)$$

ou rend infinie une des autres fonctions $\varphi_i(x)$.

En effet, T se réduit alors à un seul terme et l'on aura, si h est l'indice de ce terme,

$$(1) \qquad A_h \varphi_h(a) \rho^{M_h} = 0.$$

D'abord, il est évident que, si λ ne coïncide avec aucun des entiers positifs $1, 2, \ldots, p$, la dernière équation exige que a annule $\varphi_h(a)$. Mais il en est ainsi même si λ est égal à un de ces entiers; car alors l'indice h est nécessairement égal à un des indices $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ (puisque d'après la définition même des sommets δ_k on a $S_{\delta_k,\lambda} > S_{i,\lambda}$), et comme, dans les termes qui ont ces indices ne figurent que x, y, y', pour ces termes on a

$$A_{\delta_1} = \lambda^{\gamma_{0\delta_1}}, \qquad A_{\delta_2} = \lambda^{\gamma_{0\delta_2}}, \qquad \ldots, \qquad A_{\delta_p} = \lambda^{\gamma_{0\delta_p}},$$

et l'équation $A_h = 0$ ne peut être satisfaite que pour $\lambda = 0$. Donc on a $\varphi_h(a) = 0$.

Il s'ensuit que pour toutes les équations dans lesquelles les termes correspondant aux indices des sommets δ_k ne contiennent que x, y, y', on aura par la considération des sommets à gauche du sommet ϖ des propositions analogues à celles que nous a fournies la considération des sommets à droite du sommet ϖ. Il est inutile d'écrire ici ces propositions, tout à fait analogues à celles relatives aux infinis de l'intégrale et très faciles à énoncer. Pour les obtenir il n'y a qu'à remplacer, dans les propositions concernant les infinis, les coefficients angulaires négatifs par les positifs, les sommets multiples à domaine négatif par ceux à domaine positif, etc.

CHAPITRE II.

QUELQUES APPLICATIONS AUX INTÉGRALES UNIFORMES.

1. Les méthodes de M. Poincaré, permettant de préciser la nature analytique des transcendantes uniformes représentées par l'intégrale générale d'une équation algébrique du premier ordre, ne s'étendent pas immédiatement aux équations d'ordre supérieur. La raison de ce fait, mise en évidence par M. Painlevé, est que pour les équations du premier ordre les singularités transcendantes sont fixes et que, par suite, la transformation biuniforme de la courbe

$$F(\bar{x}, y, y') = 0 \qquad \text{en} \qquad F(\overline{x_0}, y_0, y'_0) = 0$$

est nécessairement birationnelle, fait qui ne subsiste pas pour les équations d'ordre supérieur, ce qui change complètement le caractère de cette théorie. Néanmoins ces méthodes s'étendent au cas du second ordre lorsque la transformation biuniforme correspondante est birationnelle et ceci, joint à d'autres considérations dues à MM. Picard et Painlevé, a fait que la théorie des transcendantes uniformes, engendrées par l'intégration des équations algébriques du second ordre est aujourd'hui complète sur plusieurs points.

Je rappellerai quelques résultats fondamentaux connus, relatifs à l'intégrale générale d'une équation du second ordre, algébrique en x, y, y', y'', lorsque cette intégrale est une fonction uniforme de x.

Ces intégrales peuvent présenter, en fait de singularités, des pôles et des points essentiels fixes ou mobiles, mais elles ne présentent jamais de coupures (¹). C'est là une profonde différence qui sépare le cas du second ordre de celui des ordres supérieurs. Ainsi les intégrales uniformes des équations très simples du troisième ordre présentent

(¹) Painlevé, *Comptes rendus*, t. CXVI, p. 362-365; 1893.

des coupures, et de plus ces coupures varient avec les constantes d'intégration.

Dans ses travaux sur les équations $F(y, y', y'') = 0$, algébriques en y, y', y'' et où x ne figure pas explicitement, M. Picard (1) a montré que quand l'intégrale générale est uniforme et dépend algébriquement de deux constantes d'intégration, la surface algébrique représentée par l'équation admet une transformation birationnelle en elle-même et on peut alors reconnaître la nature de l'intégrale générale. La forme analytique de cette intégrale sera différente suivant la nature de la transformation birationnelle. L'intégrale, supposée uniforme, est rationnelle soit en x, soit en e^{ax}, soit en $\operatorname{sn}(ax)$ et $\operatorname{cn}(ax)$, $\operatorname{dn}(ax)$, ou bien est une fonction quadruplement périodique de deux variables $ax + C_1$, $bx + C_2$, où a et b sont deux constantes convenablement déterminées et C_1, C_2 les deux constantes d'intégration. Dans ce dernier cas l'intégrale peut se réduire à une fonction rationnelle soit de e^{ax} et e^{bx}, soit de x et e^{ax}.

Dans le cas où l'on n'admet pas que l'intégrale, supposée uniforme, dépende algébriquement des constantes d'intégration, la question de reconnaître si l'intégrale générale est uniforme et de préciser sa nature analytique apparaît comme beaucoup plus difficile. M. Picard a formé des conditions nécessaires dans tous les cas (mais non suffisantes), pour que l'intégrale fût uniforme. Il a notamment considéré le cas $y'' = R(y, y')$, où R est rationnel en y, y', et montré que, toutes les fois que l'intégrale générale y est uniforme, on peut la mettre sous la forme d'un quotient de deux fonctions uniformes, mais n'ayant pas de pôles, et satisfaisant à des équations différentielles faciles à former au moyen de l'équation donnée.

Plus récemment M. Painlevé (2) est arrivé à ce résultat, relativement à l'équation $y'' = R(y, y')$, où R est rationnel en y' et algébrique en y, que l'intégrale générale, quand elle est uniforme, est une combinaison de fonctions rationnelles, exponentielles, doublement périodiques ou dépend d'une équation de Riccati à coefficients périodiques. De plus, on peut toujours (lorsque l'intégrale est uniforme) choisir les

(1) *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables*; 1889.

(2) *Comptes rendus*, t. CXVII, p. 211-214; 1893.

constantes d'intégration de façon que l'intégrale dépende algébriquement de l'une au moins de ces constantes. La méthode qui permet d'ailleurs de reconnaître si l'intégrale générale d'une équation donnée est effectivement uniforme est susceptible d'être étendue à toutes les équations algébriques en y, y', y'' et permet de prévoir qu'un théorème analogue au précédent s'applique à ces équations.

Si x figure explicitement dans $F(x, y, y', y'') = 0$, et si l'on suppose que la transformation biuniforme qui transforme la surface

$$F(\bar{x}, y, y', y'') = 0 \qquad \text{en} \qquad F(\bar{x}_0, y_0, y'_0, y''_0) = 0$$

soit en même temps *birationnelle*, M. Picard a montré que les méthodes de M. Poincaré, relatives au cas du premier ordre, se généralisent et permettent de préciser la nature de l'intégrale supposée uniforme (ou plus généralement à points critiques fixes). Cette intégrale se ramène alors aux transcendantes uniformes que définissent les équations algébriques du premier ordre, les équations linéaires et les fonctions de deux variables quadruplement périodiques.

M. Painlevé a montré qu'il en sera ainsi toutes les fois que l'on peut choisir les constantes d'intégration de sorte que l'intégrale uniforme dépende algébriquement d'une constante ou de toutes les deux. Lorsque y est fonction transcendante d'une seule constante d'intégration, l'équation différentielle se ramène, dans le cas le plus défavorable, à une équation de Riccati, dont les coefficients dépendent eux-mêmes d'une équation de Riccati à coefficients algébriques (¹). Si les deux constantes entrent algébriquement dans y, l'équation $F = 0$ s'intègre soit algébriquement, soit par quadrature, ou bien se ramène à une équation linéaire du troisième ordre (²). Les méthodes de M. Painlevé permettent d'ailleurs, étant donnée une équation

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

de reconnaître si l'intégrale générale est une fonction uniforme de x, dépendant algébriquement des constantes d'intégration.

(¹) *Comptes rendus*, t. CXVI, p. 566; 1893.
(²) *Ibid.*, t. CXVI, p. 173; 1893.

On arrive ainsi à cette conclusion générale : tant que y ne renferme pas d'une façon transcendante les deux constantes d'intégration (de quelque manière qu'on les choisisse), l'intégrale générale, quand elle est uniforme, s'exprime au moyen des transcendantes connues, auxquelles conduisent la théorie des équations du premier ordre et celle des équations linéaires. Mais il n'en est plus de même lorsque l'intégrale est fonction transcendante des deux constantes; l'équation $F(x, y, y', y'') = 0$ peut alors définir des transcendantes nouvelles, comme le montrent certains exemples formés récemment par M. Painlevé.

2. Les complications s'accroissent encore quand on passe du second ordre aux ordres supérieurs. C'est ainsi que les fonctions modulaires et fuchsiennes, intégrales d'équations du troisième ordre très simples (où x ne figure pas explicitement) admettent des coupures variables avec les constantes d'intégration. De telles équations du troisième ordre introduisent donc des transcendantes essentiellement nouvelles, ce qui n'a pas lieu dans le cas du second ordre.

La différence est encore bien plus grande lorsque x figure explicitement dans l'équation. Néanmoins, quand on se borne à considérer les équations d'ordre quelconque, où x peut figurer, dont l'intégrale est uniforme et dépend algébriquement des constantes, les théorèmes énoncés plus haut, dans le cas du second ordre, s'étendent sans peine.

Mais tous les résultats que nous avons énumérés jusqu'ici ne concernent que l'intégrale *générale*, et n'indiquent rien sur la recherche des intégrales uniformes *particulières*. La détermination de ces intégrales et de leur nature analytique est un problème plus compliqué que le problème analogue relatif à l'intégrale générale. C'est ce qui donne quelque intérêt aux résultats qui suivent.

Je vais indiquer quelques simplifications que les théorèmes précédents sur les zéros et les pôles des intégrales permettent d'apporter à l'étude des intégrales uniformes (particulières ou générales) de classes étendues des équations différentielles d'un ordre quelconque. A l'aide de ces théorèmes et de quelques théorèmes de la théorie générale des fonctions, nous pourrons réduire, pour des types assez généraux d'équations, l'étude des intégrales uniformes à l'étude analogue relative à des équations d'ordre inférieur, ou à l'étude des intégrales holomorphes des autres équations. J'indiquerai des types généraux d'équations d'ordre quelconque, pour lesquelles on sera certain que les transcendantes uniformes engendrées par l'intégration ne sont pas distinctes des transcendantes connues, et pour lesquelles on saura reconnaître s'il y a des intégrales uniformes ou non.

Dans tout ce qui va suivre, il s'agira des intégrales uniformes n'ayant que des points essentiels donnés à l'avance, isolés et en nombre fini, et en particulier, des intégrales méromorphes.

SUR LES ZÉROS ET LES PÔLES DES INTÉGRALES UNIFORMES.

1. L'ordre d'un infini ou d'un zéro quelconque, mobile ou fixe, d'une intégrale uniforme est toujours fixe et égal à un nombre entier. Par conséquent, en tenant compte des théorèmes précédents, on peut énoncer les propositions suivantes :

I. Si une intégrale uniforme de $F = 0$, contenant une ou plusieurs constantes d'intégration, a des infinis mobiles, une au moins des conditions suivantes est remplie :

1° Le polygone de F a un ou plusieurs côtés à coefficient angulaire égal à un nombre entier négatif, et l'ordre λ est égal à un de ces entiers;

2° Le polygone a au moins un sommet multiple, dont le domaine comprend un ou plusieurs nombres entiers négatifs n_1, n_2, n_3, ..., et tel que l'équation en λ relative à ce sommet admet au moins une racine indépendante de a et égale à un des entiers n_1, n_2, n_3, ...; l'ordre λ est alors égal à un de ces entiers.

II. Si y est une intégrale uniforme de $F = 0$, contenant ou non des constantes d'intégration, et lorsque aucune des conditions 1° et 2° de la proposition I n'est remplie, tout pôle de y est : soit une racine, soit un pôle d'au moins une fonction $\varphi_i(x)$, ou bien une racine d'une certaine équation en λ, et voici comment on peut préciser davantage ces valeurs.

Soient h l'indice du sommet ϖ droit, h_1, h_2, ... les indices de ceux des sommets qui sont à droite du sommet (h) et qui comprennent chacun dans leur domaine au moins un nombre entier négatif, s'il existe de tels sommets. Alors :

1° Toutes les fois que λ est un entier négatif compris dans le domaine d'un des sommets h_1, h_2, ... *simples,* ou du sommet h supposé *simple,* le pôle a annule celle des fonctions $\varphi_i(x)$ dont l'indice est égal à celui du sommet dans le domaine duquel λ est compris, ou rend infinie l'une des autres fonctions $\varphi_i(x)$.

2° Toutes les fois que λ est un entier négatif compris dans le domaine d'un des sommets h_1, h_2, ... *multiples,* ou du sommet h supposé *multiple,* le pôle a est : soit une racine de l'équation en λ relative à ce sommet (dont le domaine comprend λ), lorsque dans cette équation on remplace λ par un des entiers négatifs qui se trouvent compris dans le domaine du sommet, soit un infini des fonctions $\varphi_i(x)$ ne correspondant pas à ce sommet.

Supposons que l'équation $F = 0$ ne contienne pas x explicitement.

Si elle admet une intégrale uniforme, elle en admet alors une infinité, dépendant d'au moins une constante arbitraire. Pour qu'une telle intégrale puisse devenir infinie pour une valeur finie de x, il faut que le polygone ait au moins un côté à coefficient angulaire égal à un entier négatif, et que λ soit égal à un de ces coefficients; ou bien qu'il y ait un ou plusieurs sommets multiples tels que l'équation en λ admette des racines entières négatives et comprises dans le domaine du sommet; alors λ est égal à l'une de ces racines. Si aucune de ces conditions n'est remplie, *toute intégrale méromorphe de l'équation est holomorphe dans tout le plan.*

Enfin, il est facile de transformer toutes ces propositions en propositions analogues concernant les zéros des intégrales uniformes.

2. Posons dans l'équation donnée

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0 \tag{1}$$

$y = \frac{1}{z} + \alpha$, où α est une constante indéterminée; l'équation se transforme en

$$\Phi(x, z, z', \ldots, z^{(p)}) = \sum_{i=1}^{i=t} \Psi_i(x, \alpha) z^{s_{0,i}} z'^{s_{1,i}} \ldots z^{(p) s_{p,i}} = 0,$$

où les $s_{i,j}$ sont des entiers positifs et les $\psi_i(x, \alpha)$ des polynomes en α dont les coefficients sont fonctions de x.

Supposons construit le système (M_i, N_i) de Φ. Dans ce système il y aura au moins un ensemble de points (M_i, N_i) tels, qu'en les supprimant, le polygone Π du système qui reste ne remplisse pas les conditions 1° et 2° de la proposition précédente I (p. 89). Soit

$$(M_{h_1}, N_{h_1}), \qquad (M_{h_2}, N_{h_2}), \qquad \ldots, \qquad (M_{h_k}, N_{h_k})$$

un tel ensemble. *Si les k équations*

$$\text{(A)} \qquad \Psi_{h_1}(x, \alpha) = 0, \qquad \Psi_{h_2}(x, \alpha) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Psi_{h_k}(x, \alpha) = 0$$

ont une racine α, commune et indépendante de x, les valeurs de x racines de l'équation $y(x) - \alpha = 0$ [où y est une intégrale uniforme quelconque], *sont fixes et connues à l'avance.*

Si le nombre de ces racines α surpasse 2, et si x figure algébriquement dans $F = 0$, *toute intégrale méromorphe* (*ou plus généralement à un nombre fini de points essentiels*) *est une fraction rationnelle en x.*

Posons dans l'équation (1) $y = \frac{1}{z} + u$, u étant une fonction de x indéterminée; cette équation deviendra

$$\Psi(x, z, z', \ldots, z^{(p)}) = \sum_{i=1}^{i=t} \Omega_i z^{s_{0,i}} z'^{s_{1,i}} \ldots z^{(p)s_{p,i}} = 0,$$

où les $s_{i,j}$ sont des entiers positifs et les Ω_i des polynomes en u, u', ..., $u^{(p)}$ dont les coefficients sont fonctions de x. Les indices h_1, h_2, ..., h_k étant définis comme tout à l'heure, *si les k équations différentielles*

$$\Omega_{h_1} = 0, \qquad \Omega_{h_2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \Omega_{h_k} = 0$$

ont une intégrale méromorphe $u = \chi(x)$ commune, les racines en x de l'équation $y(x) - \chi(x) = 0$ [où y est une intégrale méromorphe quelconque de (1)] *sont fixes et connues à l'avance.*

3. Soit $F(y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0$ une équation où x ne figure pas explicitement; si elle admet une intégrale méromorphe, elle en admet une infinité. Si le polygone de $F = 0$ n'a aucun côté à coefficient angu-

laire entier négatif, et si l'équation en λ relative au sommet ϖ droit n'a aucune racine entière et négative, *toute intégrale méromorphe est holomorphe dans tout le plan.*

Supposons maintenant que les conditions suivantes soient remplies :

A. *Le polygone a un, et un seul, côté à coefficient angulaire entier et négatif, et ce coefficient est égal à* -1; *de plus, parmi les sommets à domaine négatif, il n'y en a aucun tel que l'équation en* λ *relative à ce sommet ait des racines entières, négatives et comprises dans le domaine de ce sommet.*

Alors, si une intégrale méromorphe y a des pôles, ce sont des pôles simples. La limite ρ du rapport $\frac{y}{x-a}$ pour $x=a$ est le *résidu* de y relatif à un tel pôle, et ce résidu est égal à une des racines ρ non nulles de l'équation en ρ

$$\sum_{(\gamma,\delta)} A_i B_i \rho^{\mu_i} = 0, \tag{1}$$

relative au côté à coefficient angulaire -1, où il faut poser dans les A_i $\lambda = -1$. Par conséquent, *ces résidus sont indépendants des constantes d'intégration et seront toujours connus.*

B. *L'équation en* ρ (*la condition* A *étant supposée remplie*) *n'a qu'une seule racine non nulle, ou, s'il y en a plusieurs, leurs rapports deux à deux sont tous positifs et commensurables.*

Remarquons qu'il est facile de s'assurer s'il en est ainsi sans résoudre l'équation en ρ, car en la mettant sous la forme

$$\rho^m + T_1\rho^{m-1} + T_2\rho^{m-2} + \ldots + T_m = 0,$$

aucun des coefficients $T_1, \ldots, T_m$ ne peut être nul, et si l'on forme la transformée en $\sigma = \frac{\rho}{T_1}$ de cette équation, cette transformée doit avoir toutes ses racines $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ réelles, négatives et commensurables, car si l'on désigne par $\varpi_{i,1}, \varpi_{i,2}, \ldots, \varpi_{i,m}$ les rapports, tous commensurables et positifs, des racines $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ à la racine ρ_i, on aura

$$\sigma_i = \frac{\rho_i}{T_1} = \frac{\rho_i}{-\sum_{k=1}^{k=m} \rho_k} = -\frac{1}{\sum_{k=1}^{k=m} \varpi_{i,k}} = \text{nombre négatif et commensurable.}$$

On calculera donc facilement toutes les racines de l'équation en σ, et par suite celles de l'équation en ρ; ou bien on constatera que la condition B n'est pas remplie.

Les conditions A et B étant remplies, il existera un nombre T (réel ou imaginaire), tel que

$$\rho_1 = \mu_1 T, \qquad \rho_2 = \mu_2 T, \qquad \ldots, \qquad \rho_m = \mu_m T,$$

les μ_i étant des entiers positifs, premiers entre eux. L'intégrale $\frac{1}{T}\int y\,dx$ ne peut alors avoir que des périodes polaires, qui sont des multiples entiers de $2\pi i$, et la fonction

$$G(x) = e^{\frac{1}{T}\int y\,dx}$$

sera une fonction entière de x. L'intégrale méromorphe y peut alors être mise sous la forme

$$y = T\frac{d}{dx}\log G(x),$$

$G(x)$ étant une fonction entière *généralisant* (*dans les cas où l'intégrale est effectivement méromorphe*) *les fonctions* $\mathrm{Al}(x)$ *de M. Weierstrass ou les fonctions* Θ *de la théorie des fonctions elliptiques*. On a ainsi la représentation de y par un quotient de deux fonctions entières, et $G(x)$ satisfait à une équation d'ordre $p+1$ facile à former au moyen de l'équation donnée en y.

Vérifions-le sur l'exemple simple

$$y''^2 - 4y'(1-y')(1-k^2y') = 0;$$

on vérifie facilement que les conditions A et B sont remplies et que l'équation en ρ relative au seul côté à coefficient angulaire négatif, lequel coefficient est égal à -1, a une seule racine $\rho = -\frac{1}{k^2}$. Par conséquent, la fonction

$$G(x) = e^{-k^2 \int y\,dx}$$

est une fonction entière de x, si y est méromorphe, ce qui est ici le cas, car l'intégrale générale de l'équation est

$$y = \int [\operatorname{sn}(x + C_1, k)]^2\,dx + C_2,$$

et la fonction $G(x)$ n'est autre, à un facteur constant près, que la fonction

$$\mathrm{Al}(x) = e^{-k^2 \int_0^x \int_0^x \operatorname{sn}^2 x\,dx^2}$$

de M. Weierstrass, laquelle est bien une fonction entière de x.

4. Il peut arriver que l'équation $F = 0$ ne satisfasse pas aux conditions A et B, mais qu'en posant

$$z = R(y, y', \ldots, y^{(q)}),$$

où R est une fonction rationnelle de y, y', $\ldots$, $y^{(q)}$ à coefficients a_i constants et indéterminés, on puisse disposer de ces coefficients, de sorte que les conditions A et B soient remplies pour l'équation différentielle en z, obtenue par ce changement de fonction. Et comme, y étant méromorphe, z l'est aussi, on pourra trouver une constante T telle que la fonction

$$G(x) = e^{\frac{1}{T}\int R(y, y', \ldots, y^{(q)})\,dx},$$

après y avoir remplacé y par une intégrale méromorphe quelconque de $F = 0$, *devienne une fonction entière de* x, satisfaisant à une équation d'ordre $p + q$ qui se déduit de l'équation proposée en y.

Ces fonctions $G(x)$ *généralisent ainsi celles signalées par M. Picard* [1] *et relatives à l'équation*

$$y'' = R(y, y'),$$

lorsque son intégrale est méromorphe.

---

[1] *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, p. 283-287; 1889.

M. Picard a montré, notamment, que lorsque l'intégrale y de l'équation

$$y'' + ay^3 + by^2 + cy + d + kyy' = 0 \tag{3}$$

(où a, b, ..., k sont des constantes) est méromorphe, on peut déterminer neuf constantes A, B, C, m, n, p, q, r, s, de telle sorte qu'en posant

$$Y = Ay^2 + By + Cy',$$
$$F = mY^3 + nY^2 + pY + (qY + r)Y' + sY'^2,$$

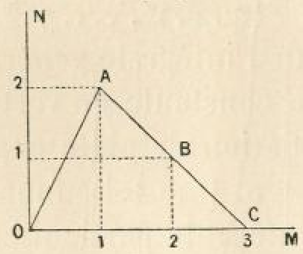
l'expression

$$G(x) = e^{\int F\,dx}$$

soit une fonction entière de x, satisfaisant à une équation du troisième ordre facile à former, et qui doit avoir, dans ce cas, pour intégrale générale, une fonction entière.

On retrouve ce résultat aussi par ce qui précède, et l'on peut, de plus, ajouter la remarque suivante, relativement à l'équation (3). Le polygone de l'équation est celui de la *fig.* 9, où les sommets A, B, C

Fig. 9.



ont pour indices respectifs $i = 1, 6, 2$. La condition A est donc remplie, et l'équation en ρ, relative au côté AC, après la suppression de la racine nulle, est

$$a\rho^2 - k\rho + 2 = 0.$$

Par conséquent, *toutes les fois que la quantité*

$$\frac{k - \sqrt{k^2 - 8a}}{k + \sqrt{k^2 - 8a}}$$

est un nombre réel, positif et commensurable, on peut trouver une con-

stante K *telle que* $G(x) = e^{K\int y\,dx}$ *soit une fonction entière de* x, *quand on* y *remplace* y *par une intégrale méromorphe quelconque de* y.

Considérons l'équation

$$(4) \qquad y'' + P(y)y' + Q(y) = 0,$$

où P et Q sont des polynomes en y de degré m et n. On verra sans peine que si $n = m + 2$, $m > 1$, et en désignant par a_0 et b_0 les coefficients des puissances y^m et y^n dans P et Q, l'expression $e^{\frac{b_0}{a_0}\int y\,dx}$ est une fonction entière de x pour toutes les intégrales y méromorphes de (4).

Si $m = 1$, on aurait l'exemple précédemment cité de M. Picard. Si $m \neq 1$ et $n \neq m + 2$, le polygone de (4) n'a aucun côté à coefficient angulaire entier et négatif; dans ce cas, l'intégrale y, si elle est méromorphe, est entière.

SUR UNE CLASSE D'INTÉGRALES PREMIÈRES.

1. On appelle généralement *intégrale première* relative à une équation différentielle donnée $F(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0$ une fonction de la variable indépendante x, de l'intégrale générale y et de quelques-unes de ses dérivées, qui reste constante en vertu de l'équation $F = 0$ et telle que, par la différentiation de cette expression par rapport à x, on retrouve l'équation $F = 0$. Une telle fonction se réduit à une constante, quelle que soit l'intégrale particulière considérée, et c'est la valeur seule de cette constante qui varie avec cette intégrale particulière. Ces fonctions sont une sorte d'invariants relatifs aux intégrales de l'équation, valables pour toutes ses intégrales, quelle que soit leur nature analytique.

Mais, outre ces intégrales premières, on peut en considérer d'autres *valables seulement pour les intégrales d'une certaine nature analytique*. Ainsi, il y a des classes étendues d'équations d'un ordre quelconque, où l'on peut conclure, en vertu des propriétés générales des fonctions d'une certaine nature analytique, qu'une fonction $\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(k)})$ doit se réduire à une constante, à une fonction algébrique de x, etc., lorsqu'on y remplace y, *non pas par une intégrale quelconque* de l'équation $F = 0$, mais *par les intégrales d'une nature donnée*. Ces intégrales seront, par exemple, les intégrales à n valeurs, les intégrales uniformes ou périodiques, etc., qu'elles soient intégrales particulières ou qu'elles dépendent d'un certain nombre de constantes d'intégration.

Les intégrales premières ordinaires peuvent être considérées comme une sorte d'invariants relatifs à toutes les intégrales de l'équation, quelle que soit leur nature. Les intégrales premières telles que Φ seraient alors des invariants relatifs à une classe déterminée d'intégrales. A ce point de vue, la différence entre ces deux sortes d'invariants rappelle la différence qui existe entre les deux sortes d'invariants dans la théorie des équations linéaires, entre ceux considérés par Halphen, valables *quelle que soit la nature* des fonctions entrant dans la substitution, et les invariants d'une nature plus spéciale, considérés par M. Poincaré, où, au contraire, les fonctions qui entrent dans la substitution ne sont pas quelconques, mais *rationnelles en x*.

Je me propose de montrer brièvement comment les théorèmes exposés précédemment sur les zéros et les pôles des intégrales uniformes joints à quelques propositions de la théorie générale des fonctions permettent, dans des cas étendus, de trouver des intégrales premières relatives aux intégrales uniformes de l'équation (qu'elles soient particulières ou qu'elles dépendent d'un certain nombre de constantes d'intégration), de simplifier la recherche de ces intégrales uniformes, et même de les calculer toutes complètement, dans certains cas particuliers quand il en existe.

Tout ce qui va suivre repose sur les deux lemmes suivants, dont le premier nous permettra la recherche des intégrales méromorphes doublement périodiques, et le second la recherche des intégrales uniformes en général, n'ayant, ainsi que leurs dérivées, qu'un nombre fini de singularités essentielles.

Lemme I. — Soient $F(y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0$ une équation algébrique en $y, y', \ldots, y^{(p)}$ à coefficients constants; y une intégrale méromorphe doublement périodique de $F = 0$ et $R(y, y', \ldots, y^{(q)})$ une fonction rationnelle en $y, y', \ldots, y^{(q)}$ à coefficients constants.

Si la fonction R ne s'annule pour aucune valeur finie de x, ou encore si elle n'a pas de pôles à distance finie, l'intégrale considérée y est commune aux deux équations

$$F(y, y', \dots, y^{(p)}) = 0,$$
$$R(y, y', \dots, y^{(q)}) = C,$$

où C est une constante arbitraire ou convenablement choisie.

Ceci résulte immédiatement du théorème de Liouville sur les zéros et les pôles des fonctions méromorphes doublement périodiques.

Lemme II. — Soient $F(x, y, y', \dots, y^{(p)}) = 0$ une équation algébrique en $x, y, y', \dots, y^{(p)}$; y une intégrale uniforme de $F = 0$ et sans coupures, et $R(x, y, y', \dots, y^{(q)})$ une fonction rationnelle de $x, y, y', \dots, y^{(q)}$. Si l'on peut trouver trois constantes a, b, c telles que les trois équations

$$(1) \qquad R - a = 0, \qquad R - b = 0, \qquad R - c = 0$$

(après avoir remplacé dans R y par l'intégrale considérée) n'aient qu'un nombre fini de racines, l'intégrale y est commune aux deux équations

$$F(x, y, y', \dots, y^{(p)}) = 0,$$
$$R(x, y, y', \dots, y^{(q)}) = r(x),$$

où $r(x)$ est une fonction rationnelle de x.

Si les trois équations (1) n'ont pas de racines, y est commune à

$$F = 0, \qquad R = \text{const.}$$

Ceci résulte du théorème connu de M. Picard sur les zéros des fonctions uniformes sans coupure.

L'application de ces deux lemmes conduira donc aux intégrales premières $R = \text{const.}$ ou $R = r(x)$; une fois ces intégrales premières connues, la recherche des intégrales uniformes de l'équation $F = 0$ se ramène à celle des solutions communes à deux équations différentielles, ce qu'on fera par différentiations et éliminations des dérivées successives de y. Si, par exemple, $p > q$, on différentiera l'équation

$R = r(x)$ [ou $R =$ const.] $p - q$ fois par rapport à x, et en éliminant $y^{(p)}$ entre

$$(1) \qquad F = 0$$

et

$$(2) \qquad \frac{d^{p-q}}{dx^{p-q}}(R - r) = 0,$$

on aura une équation (3) d'un ordre inférieur à p, admettant toutes les solutions communes à (1) et (2). En opérant sur (2) et (3) comme sur (1) et (2), on remplacera l'une de ces équations par une autre d'un ordre moindre, et ainsi de suite. On obtient ainsi une suite

$$(\Delta) \qquad (1), \quad (2), \quad (3), \quad \ldots, \quad (m-2), \quad (m-1), \quad m, \quad \ldots$$

d'équations différentielles, et deux cas peuvent alors se présenter.

Premier cas. — Quelle que soit la fraction rationnelle $r(x)$ (ou C), on finit par tomber sur des équations d'ordre zéro. On est ramené alors au problème élémentaire suivant : Trouver les solutions communes à deux équations algébriques; ces solutions sont alors nécessairement algébriques en x. Pour que $F = 0$ admette des intégrales uniformes, il faut et il suffit que parmi ces solutions algébriques il y en ait au moins une de rationnelle et satisfaisant à $F = 0$. *Toute intégrale uniforme est alors rationnelle.* Si, en particulier, F et R ne contiennent pas x explicitement, il ne peut y avoir d'intégrales uniformes autres que $y =$ const.

Deuxième cas. — On peut choisir la fraction rationnelle indéterminée (ou C) de sorte que les équations de la suite (Δ) à partir d'un certain rang se réduisent à des identités. Soit (m) la première des équations de cette suite se réduisant à une identité. Toute intégrale commune à $F = 0$ et $R = r(x)$ est alors intégrale de l'équation $(m-1)$; par conséquent, $P = 0$ *ne peut avoir d'intégrales uniformes autres que celles définies par* $(m-1)$. *Pour que* $F = 0$ *admette de telles intégrales, il faut et il suffit que l'équation* $(m-1)$ *en admette, et que parmi ces intégrales il y en ait qui satisfassent à* $F = 0$. La recherche des intégrales uniformes de l'équation proposée se trouve donc *ramenée à l'étude d'une équation d'un ordre moindre.*

Si, par exemple, l'équation $(m-1)$ ne contient que x, y, y', l'équation proposée $F=0$ ne peut admettre d'autres transcendantes uniformes comme intégrales que celles définies par le premier ordre.

On saura, par exemple, reconnaître si $F=0$ admet une intégrale uniforme dépendant d'une constante d'intégration, et de calculer cette intégrale dans le cas où elle existe. Une telle intégrale est une fonction rationnelle : soit en x et en $\varphi[J(x)]$ [où φ est une fonction méromorphe doublement périodique, et $J(x)$ une intégrale abélienne], soit en x et en u, u étant intégrale d'une équation de Riccati à coefficients algébriques en x.

Si l'équation $(m-1)$ ne contient que x, y, y', y'', on saura, par exemple, reconnaître, par les méthodes de M. Painlevé relatives aux équations du second ordre, si $F=0$ admet une intégrale uniforme dépendant algébriquement de deux constantes d'intégration; on calculera, dans ce cas, cette intégrale soit algébriquement, soit par quadratures, ou bien par l'intégration d'une équation linéaire du troisième ordre.

D'une manière générale, la connaissance d'une intégrale première, telle que $R=r(x)$ ou $R=$ const., relative aux intégrales d'une certaine nature analytique, simplifie l'étude de ces intégrales et souvent permet de les calculer complètement.

2. Je vais indiquer ici comment on est conduit à considérer de telles intégrales premières et montrer comment on peut former des types généraux d'équations pour lesquelles on connaîtra ces intégrales.

Soit $R(x, y, y', \ldots, y^{(q)})$ une fonction rationnelle donnée de $x, y, y', \ldots, y^{(q)}$ à coefficients constants et indéterminés $a_1, a_2, \ldots, a_k$, et effectuons dans l'équation donnée $F(x, y, y', \ldots, y^{(p)})=0$ le changement

$$z=\frac{1}{R(x, y, y', \ldots, y^{(q)})-\alpha}$$

(où α est une constante indéterminée), en prenant z comme nouvelle fonction.

La nouvelle équation sera

$$(2)\quad \Psi(x, z, z', \ldots, z^{(p+q)}) = \sum_{i=1}^{i=t} \psi_i(x, \alpha, a_1, \ldots, a_k)\, z^{n_{0i}} z'^{n_{1i}} \ldots z^{(p+q)n_{p+q,i}} = 0,$$

où les ψ_i sont des polynomes en x, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Supposons construit le système (M_i, N_i) relatif à (2) et soit

$$(3)\qquad (M_{h_1}, N_{h_1}),\quad (M_{h_2}, N_{h_2}),\quad \ldots,\quad (M_{h_j}, N_{h_j}),$$

un ensemble de points de ce système, tel qu'en les supprimant le polygone Π du système qui reste ne remplisse aucune des conditions 1° et 2° de la proposition I (p. 89). Alors :

Si les j équations

$$(4)\qquad \begin{cases} \psi_{h_1}(x, \alpha, a_1, \ldots, a_k) = 0, \\ \psi_{h_2}(x, \alpha, a_1, \ldots, a_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi_{h_j}(x, \alpha, a_1, \ldots, a_k) = 0, \end{cases}$$

pour trois valeurs α_1, α_2, α_3 *de* α, *admettent un même système de solutions*

$$(5)\qquad a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_k$$

(quelques-uns des a_i pouvant être arbitraires) *indépendantes de* x, *l'équation proposée* $F = 0$ *admet comme intégrale première relative à toutes ses intégrales méromorphes*

$$(6)\qquad R(x, y, y', \ldots, y^{(q)}) = r(x),$$

où $r(x)$ *est une fraction rationnelle en* x.

Car, y étant une intégrale méromorphe de $F = 0$, l'intégrale z de $\Psi = 0$ qui lui correspond est aussi une fonction méromorphe, et si l'on donne à α l'une des valeurs α_1, α_2, α_3 et aux coefficients indéterminés a_i dans R les valeurs (5), les termes de $\Psi = 0$ correspondant à l'ensemble (3) disparaissent. Le polygone Π du système (M_i, N_i) de $\Psi = 0$ ne satisfait pas aux conditions 1° et 2° citées tout à l'heure, ce qui montre que les pôles de l'intégrale z sont fixes et annulent ou rendent infinie l'une au moins des fonctions ψ_i; d'où l'on conclut que ces pôles sont en nombre limité. Il s'ensuit que les trois équations

$$R - \alpha_1 = 0, \qquad R - \alpha_2 = 0, \qquad R - \alpha_3 = 0$$

n'ont qu'un nombre limité de racines. Par conséquent, $R(x, y, \ldots, y^{(q)})$ se réduit à une fraction rationnelle en x lorsqu'on y remplace y par une intégrale méromorphe quelconque de $F = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Si ni F ni R ne contiennent x explicitement, et si le système (5) existe, on a, comme intégrale première,

$$(7) \qquad R(y, y', \ldots, y^{(q)}) = \text{const.}$$

Supposons, en particulier, qu'il s'agisse des intégrales y méromorphes et doublement périodiques. Alors, si les équations (4) ont un système de solutions

$$\alpha, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_k,$$

on aura (7) comme l'intégrale première. La recherche des intégrales y se simplifie alors et souvent s'effectue complètement. Ainsi, par exemple, si l'équation $(m - 1)$ de la suite (Δ) (page 99) ne contient que y et y', cette recherche s'effectue complètement.

J'indiquerai maintenant une des manières de former des types généraux d'équations, pour lesquelles on connaîtra des intégrales premières telles qu'on les a définies précédemment.

3. Soient $\varphi(y, y', y'', \ldots)$ et $\psi(y, y', y'', \ldots)$ deux polynomes tels que les sommets ϖ droits de leurs polygones aient mêmes coordonnées, qu'ils soient des sommets simples, et qu'à droite de ce sommet ni l'un ni l'autre polygone n'aient des sommets.

Soit ensuite $f(z, z', z'', \ldots)$ un polynome tel qu'à gauche de son sommet ϖ gauche il n'y ait aucun sommet, et que l'équation en λ, relative à ce sommet ϖ, n'ait aucune racine entière et positive.

Remplaçons dans f plusieurs ou tous les coefficients constants de $z, z', z'', \ldots$ par des polynomes absolument arbitraires en $y, y', y'', \ldots$, sauf les coefficients des termes correspondant au sommet ϖ droit, qui resteront constants. Soit $F(z, z', z'', \ldots; y, y', y'', \ldots)$ le polynome ainsi obtenu. Je dis que :

Toute intégrale méromorphe doublement périodique du système

$$F(z, z', z'', \ldots; y, y', y'', \ldots) = 0,$$
$$z = \frac{\varphi(y, y', y'', \ldots)}{\psi(y, y', y'', \ldots)},$$

est en même temps commune aux deux équations

$$F(C, 0, 0, 0, \ldots; y, y', y'', \ldots) = 0,$$
$$\frac{\varphi(y, y', y'', \ldots)}{\psi(y, y', y'', \ldots)} = C,$$

où C *est une constante.*

Pour le démontrer, considérons l'équation

$$F(z, z', z'', \ldots; y, y', y'', \ldots) = 0,$$

dans laquelle, par hypothèse, y, y', y'', ... ne figurent pas dans les termes correspondant au sommet ϖ; l'équation en λ relative à ce sommet aura par conséquent tous les coefficients des puissances de λ constants. Comme à gauche du sommet ϖ de f (et par suite de F), il n'y a aucun sommet, et que l'équation en λ relative à ce sommet n'admet aucune racine entière et positive, d'après la proposition II (p. 89), les zéros de $z(x)$ doivent rendre infini au moins un des coefficients de z, z', z'', ... dans F, ne correspondant pas au sommet ϖ ; et, comme ces coefficients sont des polynomes en y, y', y'', ... à coefficients constants, *tout zéro de $z(x)$ est un pôle de $y(x)$.*

Mais on a

$$z = \frac{\varphi(y, y', y'', \ldots)}{\psi(y, y', y'', \ldots)} = \frac{\Sigma a_i y^{m_{0i}} y'^{m_{1i}} \ldots}{\Sigma b_i y^{n_{0i}} y'^{n_{1i}} \ldots},$$

où a_i et b_i sont constants. Posons

$$y = (x - a)^{\lambda} \chi(x),$$

et convenons d'affecter de l'indice (ϖ) toutes les quantités a_i, b_i, M_i, N_i, etc., relatives au sommet ϖ. Comme à droite des sommets ϖ de φ et ψ, qui sont des sommets simples, il n'y a pas d'autres sommets, et comme ces deux sommets ont les mêmes coordonnées (M_ϖ, N_ϖ), on aura, dans le voisinage de $x = a$ et quel que soit λ entier et positif,

$$z = \frac{(x-a)^{-S_{\varpi,\lambda}}\left[\Omega_\varpi(x) + \Sigma(x-a)^{S_{\varpi,\lambda}-S_{i,\lambda}}\Omega_i(x)\right]}{(x-a)^{-S_{\varpi,\lambda}}\left[\Omega'_\varpi(x) + \Sigma(x-a)^{S'_{\varpi,\lambda}-S'_{i,\lambda}}\Omega'_i(x)\right]},$$

d'après les notations du Chapitre II. On sait (Chap. I) que, pour $x = a$,

$$\begin{aligned}
&\lim \Omega_\varpi(x) = A_\varpi\, a_\varpi\, \chi(a)^{M_\varpi},\\
&\lim \Omega'_\varpi(x) = A'_\varpi\, b_\varpi\, \chi(a)^{M_\varpi},\\
&\lim \Omega_i(x) = 0,\\
&\lim \Omega'_i(x) = 0
\end{aligned}$$

pour tous les indices i autres que $i = \varpi$. Par conséquent, on a, pour $x = a$,

$$(1) \qquad \lim z = \frac{A_\varpi\, a_\varpi}{A'_\varpi\, b_\varpi},$$

et, comme cette quantité est différente de zéro, on voit que $z(x)$ ne peut s'annuler pour un pôle de $y(x)$. On doit donc avoir $z = \text{const.}$; la valeur de cette constante est donnée par l'équation (1), ce qui donne l'intégrale première

$$\frac{\varphi(y, y', y'' \ldots)}{\psi(y, y', y'' \ldots)} = \frac{A_\varpi\, a_\varpi}{A'_\varpi\, b_\varpi}.$$

La proposition est ainsi démontrée.

Considérons, par exemple, l'équation

$$F = P\varphi + \psi = 0,$$

où P est un polynome quelconque en $y, y', y'', \ldots$ et φ et ψ les polynomes précédents. On peut écrire

$$F = \psi\left(P\frac{\varphi}{\psi} + 1\right) = 0,$$

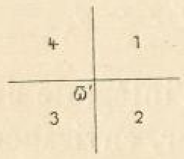
et toute intégrale méromorphe doublement périodique de $F = 0$ est commune soit à $\varphi = 0$, $\psi = 0$, soit à $P = 0$, $\psi = 0$, soit à

$$P + \frac{1}{C} = 0, \qquad \varphi - C\psi = 0,$$

où C est une constante. J'ai indiqué précédemment combien cette circonstance simplifie la recherche de telles intégrales.

4. Soient $\varphi(x, y, y', \ldots)$ et $\psi(x, y, y', \ldots)$ deux polynomes en $x, y, y', \ldots$ tels que leurs polygones respectifs n'aient pas à droite de leurs sommets ϖ droits des côtés à coefficient angulaire entier, et, de plus, que ces deux sommets ϖ et ϖ' coïncident, ou que la droite qui les joint n'ait pas son coefficient angulaire fini, différent de zéro et négatif. Cette dernière condition revient à supposer que si, par exemple, par l'un des sommets ϖ droits (correspondant à φ et à ψ) on mène des parallèles à OM et ON, qui partagent le plan NOM en quatre quadrants, l'autre sommet ϖ droit ne se trouve pas dans les quadrants (2) et (4).

Fig. 10.



Soit $f(z, z', z'', \ldots)$ un polynome en $z, z', z'', \ldots$ à coefficients constant, tel que son polygone n'ait à gauche de son sommet ϖ gauche d'autres sommets, et que l'équation en λ relative à ce sommet ϖ n'ait aucune racine entière et positive.

Remplaçons dans f plusieurs ou tous les coefficients constants de $z, z', \ldots$ par des polynomes absolument arbitraires en $y, y', y'', \ldots$ à coefficients constants ou fonctions algébriques de x, mais en laissant constants les coefficients des termes correspondant au sommet ϖ gauche. Désignons par $F(x, y, y', \ldots, z, z', \ldots)$ le polynome ainsi obtenu.

Soit enfin $\theta(\alpha)$ un polynome quelconque en α, ayant plus de deux racines distinctes et non nulles. On peut énoncer le théorème suivant :

Toute intégrale uniforme y, n'ayant qu'un nombre fini de points essentiels, du système

$$(1) \qquad F(x, y, y' \ldots z, z', z'' \ldots) = 0,$$

$$(2) \qquad z - \theta\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) = 0,$$

est en même temps une intégrale commune aux deux équations

$$(3)\qquad F\left(x, y, y', \ldots, R_1(x), \frac{dR_1}{dx}, \cdots\right) = 0, \qquad \frac{\varphi}{\psi} = R(x),$$

où R_1 *et* R_2 *sont deux fractions rationnelles en* x *liées par la relation*

$$(4)\qquad R_1(x) = \theta[R(x)].$$

Pour le montrer, je dis d'abord que, si α est une racine de $\theta(\alpha) = 0$, les racines $x = a$ de l'équation

$$(5)\qquad \frac{\varphi(x, y, y' \ldots)}{\psi(x, y, y' \ldots)} - \alpha = 0$$

(lorsqu'on y remplace y par l'intégrale définie tout à l'heure) *sont en nombre limité*. Pour le montrer, envisageons l'équation (1), et remarquons que toute racine $x = a$ de (5) est aussi une racine de l'équation $z(x) = 0$, et inversement.

Pour l'équation (1), considérée comme équation en z, le polygone est le même que celui de $f(z, z', z'', \ldots)$, et, de plus, l'équation en λ relative au sommet ϖ gauche pour F est la même que pour f. Comme à gauche du sommet ϖ gauche de f il n'y a aucun sommet, et que cette équation en λ n'admet aucune racine entière et positive, les racines de $z(x) = 0$ doivent (d'après une proposition du Chapitre I) rendre infini au moins un des coefficients de $z, z', \ldots$ dans F, qui sont polynomes en $y, y', \ldots$ à coefficients algébriques en x. Par conséquent, chacune de ces racines doit être soit un infini de ces fonctions algébriques en x, soit un pôle en y. Dans le premier cas, les valeurs $x = a$ sont certainement en nombre limité; je vais montrer qu'il en est de même dans le second cas.

Dans le voisinage d'un pôle $x = a$ de y, on aura

$$y = (x - a)^{\lambda} \chi(x),$$

où λ est un entier négatif et $\chi(x)$ ne devenant ni nulle ni infinie pour

$x = a$. Si l'on met φ et ψ sous la forme

$$\varphi = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x) y^{m_{0i}} y'^{m_{1i}} \ldots y^{(p) m_{pi}},$$

$$\psi = \sum_{i=1}^{i=t} \psi_i(x) y^{n_{0i}} y'^{n_{1i}} \ldots y^{(q) n_{qi}},$$

on aura (d'après les notations du Chapitre I et en appelant ϖ' le sommet ϖ droit de ψ), dans le voisinage de $x = a$,

$$\varphi = (x-a)^{-S_{\varpi,\lambda}} \left[\Omega_\varpi(x) + \sum_{-(\varpi)} (x-a)^{S_{\varpi,\lambda} - S_{i,\lambda}} \Omega_i(x) \right],$$

$$\psi = (x-a)^{-S'_{\varpi',\lambda}} \left[\Omega'_{\varpi'}(x) + \sum_{-(\varpi')} (x-a)^{S'_{\varpi',\lambda} - S'_{i,\lambda}} \Omega'_i(x) \right].$$

Lorsque x tend vers a, on a (*voir* le Chapitre I)

$$\lim \Omega_\varpi(x) = A_\varpi \varphi_\varpi(a) \chi(a)^{M_\varpi},$$
$$\lim \Omega'_{\varpi'}(x) = A'_{\varpi'} \psi_{\varpi'}(a) \chi(a)^{M'_{\varpi'}},$$
$$\lim \Omega_i(x) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s, \text{ sauf } i = \varpi),$$
$$\lim \Omega'_i(x) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, t, \text{ sauf } i = \varpi').$$

Distinguons maintenant les trois cas suivants :

1^er^ CAS : *Le sommet ϖ est, par rapport à ϖ', dans le quadrant* (1) *ou sur les droites qui le limitent.* — On a alors $S_{\varpi,\lambda} > S'_{\varpi',\lambda}$ pour toutes les directions λ négatives; par conséquent, comme l'équation $A_\varpi = 0$ n'a aucune racine λ négative, si $x = a$ n'est pas une racine de $\varphi_\varpi(a) = 0$, le rapport $\frac{\varphi}{\psi}$ augmente indéfiniment lorsque x tend vers a. Ce rapport ne peut donc tendre vers la limite α, que si le pôle a de y coïncide avec une racine de $\varphi_\varpi(a) = 0$: *le nombre de tels pôles est donc limité.*

2^e^ CAS : *Le sommet ϖ est, par rapport à ϖ', dans le quadrant* (3) *ou sur les droites qui le limitent.* — On a alors $S_{\varpi,\lambda} < S'_{\varpi',\lambda}$ pour toutes les directions λ négatives. Comme l'équation $A'_\varpi = 0$ n'a aucune racine λ

négative, le rapport $\frac{\varphi}{\psi}$ ne peut tendre vers la limite α lorsque x tend vers un pôle a de y, que si a coïncide avec une racine de $\psi_{\varpi'}(a) = 0$; *le nombre de tels pôles est donc encore limité.*

3ᵉ cas : *Les sommets ϖ et ϖ' coïncident.* On a alors $M_\varpi = M'_{\varpi'}$, $N_\varpi = N'_{\varpi'}$, et, par conséquent, $S_{\varpi,\lambda} = S_{\varpi',\lambda}$ quel que soit λ; donc

$$\lim \frac{\varphi}{\psi} = \frac{A_\varpi}{A'_{\varpi'}} \frac{\varphi_\varpi(a)}{\psi_{\varpi'}(a)}.$$

Cette limite doit être égale à la racine α de $\theta(\alpha) = 0$; donc a doit être égal à une racine de l'équation algébrique

$$(6) \qquad A_\varpi \varphi_\varpi(a) - \alpha A'_{\varpi'} \psi_{\varpi'}(a) \equiv 0,$$

ce qui montre que *les a sont en nombre limité.* Le seul cas où ceci peut tomber en défaut est celui où l'équation (6), après avoir remplacé A_ϖ et $A'_{\varpi'}$ par les expressions en λ, admet une racine λ_1 indépendante de a, entière et négative, et lorsque l'ordre λ du pôle a de y est égal à cette racine.

En résumé, l'équation (5) ne peut avoir qu'un nombre fini de racines. Par conséquent, si l'équation $\theta(\alpha) = 0$ a plus de deux racines non nulles et distinctes entre elles, on aura comme intégrale première

$$\frac{\varphi(x, y, y', \ldots)}{\psi(x, y, y', \ldots)} = R(x),$$

où $R(x)$ est une fraction rationnelle en x.

Le théorème est donc démontré.

Si φ, ψ et F ne contiennent x explicitement, l'équation (5) n'a pas de racines à distance finie; on aura donc comme intégrale première $\frac{\varphi}{\psi} = \text{const.} = \frac{A_\varpi \varphi_\varpi}{A'_{\varpi'} \psi_{\varpi'}}$, et toute intégrale uniforme n'ayant pas un nombre infini de singularités essentielles du système (1) est une intégrale commune aux deux équations

$$F\left(x, y, y', \ldots, \frac{A_\varpi \varphi_\varpi}{A_{\varpi'} \psi_{\varpi'}}, 0, 0, 0, \ldots\right) = 0,$$

$$\frac{\varphi(x, y, y', \ldots)}{\psi(x, y, y', \ldots)} = \frac{A_\varpi \varphi_\varpi}{A'_{\varpi'} \psi_{\varpi'}}.$$

On peut encore remarquer, dans ce dernier cas, que, si les sommets ϖ et ϖ' ne coïncident pas, *toute intégrale méromorphe de* (1) *est holomorphe dans tout le plan.* Ceci tient à ce fait que, si la différence $S_{\varpi,\lambda} - S_{\varpi',\lambda}$ est différente de zéro, le rapport $\frac{\varphi}{\psi}$, lorsque x tend vers un pôle a de y, tend lui-même soit vers zéro, soit vers l'infini, et jamais vers une limite finie et différente de zéro. Et comme on a l'intégrale première $\frac{\varphi}{\psi} = C$, où C est une constante finie et différente de zéro, y ne peut pas avoir de pôles.

Les principes qui précèdent embrassent un assez grand nombre de résultats qu'il m'est impossible de développer ici. J'ajoute seulement qu'il est facile, d'après les remarques du commencement du premier Chapitre, de former des cas généraux où les théorèmes précédents sont applicables.

Vu et approuvé :

Paris, le 21 mai 1894.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 21 mai 1894.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

GRÉARD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Des travaux récents sur le principe de la moindre action.

Vu et approuvé :
Paris, le 21 mai 1894.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 21 mai 1894.
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
GRÉARD.

21022 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.