АЛГЕБРА

УСТРОЄНА

ЗА

УПОТРЕБЛЕНІЄ

СЛИШАТЕЛЯ ФІЛОСОФІЄ

У

ЛІЦЕУМУ КНЯЖЕСТВА СЕРБІЄ,

ОДЪ

АТАНАСІЯ НІКОЛИЋА,

Професора Маѳематіке у истомъ Ліцеуму и Діпломатическогъ Землѣмѣра.

Ђорђа С. Симића

У БЕОГРАДУ,
ПРИ ТИПОГРАФІИ КНЯЖЕСТВА СЕРБІЄ.
1839.

ВЫСОКОСЯЙНОМУ

НАМѢСТНИЧЕСТВУ

КНЯЖЕСКОГЪ ДОСТОИНСТВА,

и

ВЫСОКОСЛАВНОМУ

СОВѢТУ КНЯЖЕСТВА СЕРБІЄ,

као

САДАШНѢМУ ЗЕМЛѢ ПРАВИТЕЛСТВУ

ПОКОРНѢЙШЕ ПОСВЕЋУЄ

ИЗДАТЕЛЬ.

ВЫСОКОСЯЙНО и ВЫСОКОСЛАВНО

КНЯЖЕСТВА СЕРБІЄ ПРАВИТЕЛСТВО!

Коме бы я праведніє посветити, и съ каквымъ бы именомъ ову кньигу болѣ украсити могао, него ОНОМЕ и съ ОНЫМЪ, ко є причина, да є она на Србскій светъ дошла. Высокославно є Попечителство Просвѣщенія при момъ ў Сербію долазку по познатой ревности предложити изволило, да я до времена школскогъ у Бѣограду останемъ, и међу тимъ да Маѳематику преводећи, исту горехвалномъ Попечителству одобренія, пакъ затимъ и штампаня ради, поднесемъ. Ово, пошто є садашнѣ Правительство, то єсть

ВЫСОКОСЯЙНО НАМѢСТНИЧЕСТВО КНЯЖЕСКОГЪ ДОСТОИНСТВА у согласію са ВЫСОКОСЛАВНЫМЪ СОВѢТОМЪ ЗЕМАЛЬСКИМЪ, увидећи ползу и потребу Маѳематическій наука, бринућисе о напредку Кньижества и Просвѣщенія народнѣгъ, ово предпохвално предложеніє милостивѣйше одобрити благоизволило повода ми є дало, да самь се усудити дрзнуо, ИСТОМЕ садашнѣмъ ВЫСОКОСЯЙНОМЪ и ВЫСОКОСЛАВНОМЪ КНЯЖЕСТВА СЕРБІЄ ПРАВИТЕЛСТВУ, као прву на Србскомъ єзыку Маѳематику, покорнѣйше поднети и посветити. Нека види потомство, нека дозна човечество, теженѣ, благо намѣренѣ, бригу а и успѣхъ ВЫСОКОСЛАВНОГА САДАШНѢГА ЗЕМЛѢ ПРАВИТЕЛСТВА. Нека зна Србска Юность, коме постанѣ на матернѣмъ єзыку ове превиспренне науке, са признателностѣу благодарити има.

Моя ће света и мила дужность быти, како ползу ове дичне науке, тако и признателность, дужно повиновеніє, страхопочитаніє и послушаніє прама садашнѣга ВЫСОКОСЯЙНОГА и ВЫСОКОСЛАВНОГА Землѣ ПРАвителства, у млада учеђесе младежи срца улити. А međутимъ, остаємъ са глубочайшимъ страхопочитаніємъ и повиновеніємъ

ВЫСОКОСЯЙНОГЪ и ВЫСОКОСЛАВНОГЪ

КНЯЖЕСТВА СЕРБІЄ ПРАВИТЕЛСТВА

У Бѣограду,
14. Септемврія 1839.

покорнѣйшій слуга
А. НІКОЛИЂЪ.

СОДРЖАНІЄ.

УВОДЪ.

1.

Маѳесісъ (*Μαϑησις*) є наука количества вообще узеты'.

2.

Количество (quantitas) зовесе све оно, што се умножити, или умалити да; или све оно, чему се што додати, или се одъ нѣга одузети може. Тако н. п. 1, 2, 3, 4 . . . и свако є число количество, єрбо се свако число може са єдномъ или више єдиница, или чрезъ више єдинице частій умножити, или умалити.

3.

Множина стварій или количества єднога рода, одъ коій є свака по себи цѣло, или се као таково узети може, чини *число*. А свака одъ овы' цѣлы' є єдиница. Оваково число или количество сматрати се може вообще безъ означенія (§ 2), или пособъ са означеніємъ. У првомъ' случаю зовесе *количество ненареченно* (quantitas abstracta), а у другомъ *количество* *нареченно* (quantitas concreta), н. п. 8, число безименно, зовесе количество ненареченно; а кадъ бы рекао 8 людій, то бы было количество нареченно.

4.

Свако количество, или оно ненареченно или нареченно было, состоисе, или да се состои, представитисе може, изъ частій или међусобно несоєдинѣны и оддѣлены (као воинство, фать дрва, година у смотренію дана, и проч.), или међусобно союжены и соєдинѣны (као линія, површность, тѣло). Оно, (у смотренію частій своій) зовесе *количество несоєдинѣно* (quantitas discreta, disparata); а ово *количество соєдинѣно*, *продужено*, *просторно* (quantitas continua, extensa.)

5.

Она часть Маѳесіса, коя содржава науку количества несоєдинѣны вообще, зовесе *Рачуница* (Arithmetica). А она друга часть, коя свойства количества соєдинѣны испытує и опредѣлює, зовесе *Землѣмѣріє* (Geometria.)

Примѣчаніє. Рачуница состоисе изъ две части; изъ *Рачунице просте* (Arithmetica vulgaris), и *Рачунице писменне* (Algebra). Рачуница проста учи рачунати са цифрама, а Рачуница писменна, са писменима као свеобщима знацыма количества.

6.

Будући да є свако количество или несоєдинѣно, или соєдинѣно; и почемъ се (§ 5) с' оныма Рачуница, а с' овыма Землѣмѣріє занима: то ясно слѣдує, да се Маѳесісъ состои изъ Рачунице и Землѣмѣрія, тако, да тымъ начиномъ све проче науке, коє подъ разнымъ смотреніяма о различнымъ количествама уче, и зато именомъ Наука Маѳематически' означаваюсе, ништа друго нису, него Рачунице и Землѣмѣрія употребленія на разне и особене предмѣте. И зато се Маѳематика дѣли на две части, на *чисту* (Mathesis pura), и *употреблѣну* (mathesis impura, adplicata, mixta). –

I. ЧАСТЬ.

РАЧУНИЦА ПИСМЕННА (АЛГЕБРА).

ОДДѢЛЕНІЄ ПРВО.

О ЦѢЛЫМЪ АЛГЕБРАИЧЕСКИМЪ КОЛИЧЕСТВАМА.

ГЛАВА ПРВА.

О ПРВЫМЪ ОСНОВИМА РАЧУНИЦЕ ПИСМЕННЕ.

7.

Алгебра, или Рачуница писменна є наука, коя учи са количествама вообште рачунати, или изъ неколико даты и познаты количества неко непознато наћи.

8.

Будући, да се у Рачуницы писменной количества свеобща рачуне, то морамо имати и знаке, съ коима се такова назначаваю, да се међусобно разликовати могу. За ово употребленіє узета су писмена изъ азбуке, са коима се не само свакога рода количество, него и свако множество єдиница представити може. И будући да се у свакомъ рачуну двогуба количества налазе, то єсть позната или задата, и непозната коя се траже, то се она са првима азбуке писменима *а, б, в, г,* и проч., а ова са последньима *є, ю, я, ѳ, ѵ* изражаваю. И тако количество са писменима изражено, зовесе *количество писменно или алгебраическо.* —

9.

Да бы алгебраическа пословања уредніє и совршеніє назначити, и изпословати могли, то су измышлѣни слѣдујући знацы:

I. *Знакъ собранія* (signum additionis) +, кои значи, да се оно количество, коме се предполаже, ко ономе количеству, после кога се находи, додати мора. И тай се знакъ изговара *више* (plus); и тако $а + б$ изговарасе *а* више б; то єсть, *б* ко *а* додатисе има.

II. *Знакъ отятія* (signum subtractionis) —, кои означава, да се оно количество, коме се предполаже, одъ онога, на коє се возноси, отузети или отяти има. И тай се знакъ изговара *манѣ* (minus); и тако $а - б$ значи *а* манѣ *б*; то єсть, да се *б* одъ *а* отузети, отяти има.

III. *Знакъ умноженія* (signum multiplicationis) $\times$ или . (точка), кои значи, да се она количества, међу коима овай знакъ стои, умножити имаю. И тай се знакъ изговара *умножено са*; тако $а \times б$, или $а \cdot б$ значи $а$ умножено са $б$. Овай се знакъ єдинствено само онде употреблює, гди се умноженіє назначити има, иначе ако се множима количества не состоє изъ више членова, то се овай знакъ сасвимъ изоставля, и количества или писмена множима безъ знака се по азбучномъ реду союзно пишу; као $аб$, на мѣсто $а \times б$, или $а \cdot б$. Ако бы се пакъ множима количества изъ више членова состояла, то се она са затворителномъ заключую, и са знакомъ или башъ и безъ знака множеніє се назначава, као $(а + б) \times (в + г)$, или $(а + б) . (в + г)$, или $(а + б)\ (в + г)$.

IV. *Знакъ дѣленія* (signum divisionis) : (две єдна надъ другомъ стоєће точке); кои значи, да се одъ она два количества, међу коима се овай знакъ налази, и то предидуће количество чрезъ послѣдуюће дѣлити има. И овай се знакъ изговара *раздѣлено чрезъ*; тако $а : б$ значи $а$ раздѣлено чрезъ $б$ (или раздѣлити се има чрезъ $б$). Такођеръ, гди се дѣленіє савршити и израдити неможе, назнава се са єдномъ лежећомъ лініомъ н. п. $\frac{аб - г}{а + 1}$ у виду разбієнія.

V. *Знакъ равности или єднакости* (signum aequalitatis) $=$, кои се са двема прекима међусобно єднако одстоєћима чертама назначує, и значи, да су она количества, међу коима се овай знакъ налази, равна и єднака. Тако н. п. $а + б = в$; изговарасе *равно*, и значи да є $а + б$ равно $в$.

VI. *Знакъ већине* (signum majoritatis) $>$, кои значи, да є оно количество, коме су краци окренути, као овде предидуће, веће одъ послѣдуюћега, и изговарасе *веће одъ*. Тако $а > б$ значи $а$ веће одъ $б$.

VII. *Знакъ маньине* (signum minoritatis) $<$ предидућему противанъ, и значи, да є предидуће количество манѣ одъ послѣдуюћега, и изговара се *манѣ одъ*, тако $а < б$ значи, да є $а$ манѣ одъ $б$.

VIII. *Знакъ ничега* (signum nihili) 0, кои се са нулломъ изражава, и значи, да су она количества, коя се са равности знакомъ сравняваю, равна ничему или нулли. Тако $а - а = 0$. значи, да є $а$ манѣ $а$ равно ничему или нулли.

IX. *Знакъ безконечности* (signum infinitatis) ∞ (положено число осамъ), и значи, да є оно количество, предъ коимъ овай знакъ стои, безкрайно, безконечно.

X. *Знакъ корена* (signum radicis) $\sqrt{}$, кои означава коренъ онога количества, коме се предпоставля. $\sqrt{а}$, значи, коренъ одъ $а$.

XI. *Знакъ подобія* (signum similitudinis) $\sim$, кои значи, да су она два количества, међу коима се овай знакъ налази, подобна, то єсть єдно другомъ подобно.

XII. *Знакъ подобія и равности* (signum similitudinis et aequalitatis) ≅, кои као годъ што є составлѣнъ изъ знака подобія и равности, тако и означеніє са собомъ доноси: тако $\triangle_{1} \cong \triangle_{2}$ значи, да є триуглѣ 1. равно и подобно триуглю 2.

10.

Будући да знакъ + означава собраніє, а знакъ — отятіє, а собрати и отяти међусобно противостоє, то ясно слѣдує, да су означенія ова два знака єдно другомъ противна.

11.

Количества єднога рода, коя се међу собомъ сравняваю, тога су свойства, да єдно означава противностъ другоме, и зовусе количества *противна* или *супротна:* као притяжаніє и дугъ; добитакъ и губитакъ; приходъ и расходъ. Оно се количество зове *положително*, *дѣйствително* (quantitas positiva), а ово *отрицателно*, *страдателно* (quantitas negativa). Притяжаніє дѣйствително у призренію притяжателя, дає количество положително; а дугъ, то єсть страдателность, дає количество отрицателно, страдателно. —

12.

Количество положително у смотренію другогъ положителногъ количества, сматратисе може, као количество, коє се ономе причислити или додати има, и зато се са предпоставлѣнымъ знакомъ + као собираємо назначує. Отрицателно количество пакъ у смотренію положителногъ, сматратисе може, као отузетисе имаюће одъ положителногъ. То єсть, отрицателно количество потире, губи, уничтожава и управ' отузима одъ положителногъ количества толико, колико оно у себи само вредности има. И зато се као страдателно, губително, отузимателно са знакомъ — отятія таково количество означава. И отуда слѣдує, да се знакъ собранія зове *знакъ положителный* (signum positivum); а знакъ отятія, *знакъ отрицателный* (signum negativum).

13.

Ако се међу алгебраическимъ количествама само єданъ членъ налази, н. п. a. то се таково количество зове *просто* (quantitas simplex). Ако ли се пакъ више алгебраически' количества то єсть са знацыма + или — изражена налазе, то се таково количество зове *сложено*, *многочленно* (quantitas composita, polynomia). Ове особито изражене части количества зовусе *членови* (termini); и као што се число овы' членова налази, тако се и количество *двочленно*, *тричленно*, *четверочленно* и проч. (quantitas binomia, trinomia, quadrinomia) по числу членова назива. Н. п. $а$ или $вд$, количество є просто єдночленно, али $(а + б + в)$ количество є сложено и то тричленно.

14.

Ако се єдно и то исто алгебраическо количество више пута узети мора, то єсть више пута само себи додати мора, н. п. $а + а + а$ трипутъ; то се онда таково количество само єданпутъ пише, и число, колико се пута оно у собранію показує, ономе предпоставля, овде дакле $3а$. И ово число количеству предпоставлѣнно, зовесе *сочинитель* (coefficiens).

Примѣчаніє 1. Алгебраическа количества не пишусе $1а$, него $а$, єдиница свагда се изоставля: но ако бы тамо была, подразумевасе.

Примѣч. 2. Тако исто и положителный знакъ у почетку не пишесе, но свагда се количество безъ знака стоєће као положително количество сматра и узима, као н. п. $2а$; но отрицателно количество са своимъ знакомъ свагда се изложити мора, н. п. $-2а$.

15.

Ако се єдно и оно исто алгебраическо количество само собомъ множити мора, н. п. $а \times а \times а$; или $а \cdot а \cdot а$, овде у овомъ случаю дакле трипутъ, то се онда количество таково єданпутъ пише, а число, коє означава, колико се пута оно количество множити има, или колико є пута у множенію узето, съ десне стране количества навише поставлясе. Овде дакле у овомъ примѣру $а^3$. И ово число, коє означава количества множеніє, зовесе *изложитель* (exponens).

Примѣч. 1. Дакле у мѣсто $а \times а \times а$; или $а \cdot а \cdot а$; или $а а а$, пише се $а^3$. Тако исто у мѣсто $а + в \times а + в \times а + в = (а + в)^3$.

Примѣч. 2. Сочинитель са изложителѣмъ да се не промѣне; єрбо сочинитель происходи слѣдствомъ собранія, а изложитель слѣдствомъ множенія.

16.

Будући да писмена, ма какво (свако) число означавати могу; то и она ставлюсе на мѣсто изложителя, и то како сама, тако и са числама смешана, као н. п. $а^{н} в^{2м+2}$.

17.

Равноименна количества (quantitates homogeneae) зовусе, коя се са єднакимъ писменима и єднакимъ изложительима изражена находе. А количества са разнымъ писменима, или само са разнымъ изложительима, зовусе *разноименна количества* (quantitates heterogeneae).

Н. п. $$\left.\begin{array}{l} а + 3аб^2 + в^3 - 2ав^4 \\ а + аб^2 + 2в^3 + 3ав^4 \end{array}\right\}\text{равноименна;}$$

напротив' н. п. $$\left.\begin{array}{r} а + б^2 - 3аб^3 \\ а^2 + д - 3аб^2 \end{array}\right\}\text{разноименна.}$$

18.

Ако се у *А* исто оно количество налази коє є у *Б*, то су *А* и *Б* єдно другомъ *равна*, *єднака*. *Равность* є дакле согласіє количества, а *неравность* несогласіє. Ако ли се пакъ у *А* иста она качества, коя се у *Б* налазе, наћи могу: то єсть исте оне белеге и знаци, но се само величиномъ разликовати могу, то су она себи *подобна*; а у противномъ случаю *неподобна*. Подобіє є дакле согласіє, а неподобіє є несогласіє свію знакова.

19.

Изъ овога изясненія теку слѣдуюћа главна и основателна правила:

1. *Свако є количество себи самомъ равно; или пакъ свака є стварь себи самой равна и подобна.*

2. *Равно количество мѣсто равногъ поставитисе може. И подобне ствари мѣсто подобны̀ узетисе могу.*

3. *Ако су два количества некомъ трећемъ и истомъ количеству равна, то су она и међу собомъ равна. Н. п.*

$$\begin{array}{r}
\text{ако є}\quad А = Б \\
\text{и}\quad А = Г \\
\hline
\text{то є и}\quad Б = Г.
\end{array}$$

Ако ли є пакъ єдно количество веће или манѣ, него єдно одъ она два равна количества, то є оно веће или манѣ него друго. Н. п.

1 талиръ $=$ 6 цванц.
2 цванц. $<$ 1 талира

слѣдователно 2 цванц. $<$ 6 цванц.

20.

Ако є *А* равно *БВГ* скупа узетыма, то є *А* *цѣло*, а *БВГ* єсу *части* нѣгове. *Цѣло є дакле свима нѣговымъ частима скупа узетима равно, и слѣдователно веће одъ сваке своє части воособъ узете*, или: *свака є часть маня одъ цѣлога.*

ГЛАВА ДРУГА.

О СОБРАНІЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИ' КОЛИЧЕСТВА.

21.

Собрати (addere), зовесе таково количество наћи и опредѣлити, коє бы свима датима и познатима количествама равно было. (§ 20.) Дата и позната количества зовусе *собираєме части*; а собране части по успѣху собранія зовусе *цѣло*, *збиръ* или *сума*. Збиръ дакле (по § 20) собираємыма частима раванъ быти мора. —

22.

Изъ овога изясненія слѣдуе, да собраніе само онда мѣста имати може, кадъ су собираеме части равноименна количества. Ако ли су пакъ собираеме части количества разноименна, то се такове са знакомъ собранія међусобно соединяваю. И зато се количества као собрана сматраю, кадъ су са знакомъ + скопчана. Н. п. да бы количества $а$, $б$ и $в$ у собранію изяснили, то написати треба само $а + б + в$, то е собраніе со тымъ савршено. Тако, ако се количеству $(а + б)$ $д - м$ додати има, то е $(а + б) + (д - м) = а + б + д - м$.

23.

Ако дакле имамо алгебраическа количества собрати, то по предидућемъ правилу собраніе савршити можемо (ако она само са знакомъ + соединимо). Но ако бы ово собраніе іоштъ болѣ скратити хотѣли, то примѣтити имамо слѣдуюћа правила:

1. *Написати треба све членове собираемы частій са ньіовыма задатима знацыма у едну или више линія.*

2. *Истражити треба равноименне членове, и ако смо такова два нашли, то имаймо позоръ на ньіове знаке.*

3. *Ако су знацы еднаки, то есть ако су знацы у оба равноименна члена + или у оба —; то собираймо ньіове сочинителѣ са задржа-*

нѣмъ общегъ знака, а писмена пишусе само єданпутъ са ньіовыма изложительима.

4. *Ако су знацы противни: то манѣгъ сочинителя одъ веħега отяти треба са задржанимъ веħега сочинителя знакомъ* (§ 12), *а обща писмена пишусе єданпутъ.*

5. *Ако равноименне собираєме части* (оба члена) *имаю єднаке сочинителѣ, а разне знаке, то оба члена сасвимъ изоставити треба.* ($+ а$ и $- а = 0$).

6. *Разноименна количества пишусе у сумми са своима знацыма.* Н. п. имали бы $3аб - бг$ и $2аб - 2бг$ собрати; то ставимо

I. $3аб - бг + 2аб - 2бг$

$= 5аб - 3бг$. Цѣло, збиръ, сумма.

II. $4ав + 3б - 4бд + ав - б + 2бд$, то су собираєме части.

$= 5ав + 2б - 2бд$. Цѣло, збиръ.

III. $2а + д - 3б + а - д + 3б = 3а$.

IV. $$\left.\begin{array}{l} 3аб + 2ав + 3г^2д \\ 2аб - 5ав - 3гд^2 \end{array}\right\}$$ собираєме части

$= 5аб - 3ав + 3г^2д - 3гд^2$. Цѣло.

$$\begin{array}{l} \text{V.}\quad а^3 - 3а^2б + 3аб^2 - б^2 \\ \qquad а^3 + 3а^2б + 3аб^2 + б^2 \\ \hline = \quad 2а^3 + 6аб^2. \end{array}$$

Доказателство. **У** собранію сумма є цѣло, а собираєма количества су части (§ 20); слѣдователно цѣло мора быти равно свима частима совокупно узетима. А ако се међу собираємима частима равноименна количества са противныма знацыма налазе, то манѣ количество одъ већега толико уничтожава или отузима, колико оно само у себи вредности има (§ 12). **И** тако сумма или збиръ состоисе само изъ остатка.

Овде се іоштъ примѣтити и употребити могу основателна правила: єднака или равна количества ко равныма додата даю сумме равне.

$$\begin{array}{r} \text{Н. п.}\quad а = б \\ в = г \\ \hline а + в = б + г \end{array}$$

И напротив'.

ГЛАВА ТРЕЋА.

О ОТЯТІЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИ' КОЛИЧЕСТВА.

24.

Отятіє є начинъ рачуна, съ коимъ се опредѣлити има, у колико є єдиница' єдно дато количество веће одъ другога. Оно количество, одъ кога се отузима, зовесе *Умалимакъ*; а оно количество, коє се отузети или отбити има, зовесе *Отузимакъ*; а изслѣдованіє отятія, то єсть оно число што остане, зове се *Остатакъ* или *Разлика*.

25.

Алгебраическо отятіє смо савршили, ако умалимакъ са своимъ собственнимъ знакомъ, а отузимакъ са промѣнутимъ знакомъ напишемо. Или, написати треба умалимакъ и подъ нѣга отузимакъ са своима задатима знацыма. Пакъ после промѣнути треба кодъ отузимателніи количества знаке то єсть + на —, а такођеръ на мѣсто — поставити +. После овога свршити треба собраніє по правилама собранія (§ 23); тако ћемо добити остатакъ или разлику. — При отятію можеду намъ се догодити слѣдуюћи случаєви.

На примѣръ.

I.	II.	III.	IV.
Одъ a	одъ a	одъ $-a$	одъ $-a$
отузети $б$	отуз. $-б$	отяти $+б$	отяти $-б$
остат. $a - б$;	$a + б$;	$-a - б$;	$-a + б$.

Остатакъ или разлика мора быти тога свойства, да кадъ се ко отузимку дода, свагда умалимакъ произведе. Умалимакъ є цѣло, а нѣгове су части отузимакъ и остатакъ. А цѣло мора быти своима частима равно; слѣдователно умалимка сачинявати мора отузимакъ и остатакъ *Дакле, алгебраически отяти значи, отузимакъ са противнымъ знакомъ ко умалимку додати, то есть отузимакъ са противнымъ знакомъ, и умалимакъ собрати.*

Примѣри.

I.

$$5а - 3б + 4в - м \quad \text{умалимакъ}$$

$$2а + б - 2в - м + г \quad \text{отузимакъ}$$

$$- \quad - \quad + \quad + \quad -$$

$$= 3а - 4б + 6в - г \quad \text{остатакъ.}$$

II.

$$а^2б - 4в \quad \text{умалимакъ}$$

$$5а^2б - дв - 4в \quad \text{отузимакъ}$$

$$- \quad + \quad +$$

$$= -4а^2б + дв. \quad \text{остатакъ.}$$

III.

$$5аг - г^2 - 3а - 9$$

$$3аг + г^2 + 30 - 3а - 5б$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad +$$

$$= 2аг - 2г^2 - 39 + 5б.$$

IV.

$$5а^м x^2 - 20 + 7аб^3x - 4б^м гx^2$$

$$2б^м гx^2 + 5а^м x^2 + 8 - 2а^3бx$$

$$- \quad - \quad - \quad +$$

$$= -28 + 7аб^3x - 6б^м гx^2 + 2а^3бx.$$

V. $аб^2 - 8а^2г + 7бх^2$

$4аб^2 - 4а^2г + 4бх - 3абг$

$- \quad + \quad - \quad +$

$= - 3аб^2 - 4а^2г + 7бх^2 - 4бх + 3абг.$

Основателна правила. 1. Ако равна количества одъ равны' отуземо, то и ньіови остатцы мораю быти равни. — Ако є $а = б$ и $г = д$; то мора быти $а - г = б - д$.

2. Єднака или равна количества одъ неєднаки' отята, даю остатке неравне. Ако є $а > б$ а $в = г$; то мора быти $а - в > б - г$.

3. Неравна количества одъ равны' отята, даю остатке неравне. Ако є $а = б$ али $в > г$; то мора быти $а - в < б - г$.

4. Неравна количества одъ неравны' отята, и то манѣ одъ већега, а веће одъ манѣга, даю неравне остатке, и то ће остатакъ онде быти већій, гди є већій умалимакъ. Ако є $а > б$, али $в > г$; то ће $а - г > б - в$.

5. Може се изъ два уравненія ма коя часть изъ єднога члена уравненія са противнымъ знакомъ, у другій членъ уравненія ставити. Ако є $а + б = мх$; то може $а = мх - б$. Єрбо ако отуземо одъ оба члена $+ б$, то ће опетъ быти $а + б = мх$.

ГЛАВА ЧЕТВРТА.

О УМНОЖЕНІЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИʼ КОЛИЧЕСТВА.

26.

Умножити (multiplicare) зовесе, єдно дато количество толико пута узети, колико пута друго дато количество показує. Количество, коє се умножити има, зовесе *умножимакъ*, а оно количество съ коимъ се умножава, или коє показує, колико пута умножимакъ узетисе има, зовесе *множитель*, а изслѣдованіє множенія зовесе *производъ*. **Умножимакъ и множитель** добиваю іоштъ заєдно обште наименованіє *чинительи*, будући да они оба производъ сочиняваю.

27.

Основателна правила. **1. Свако число или количество са 1 умножено, дає себе само за производъ. Н. п.** $a \times 1 = a$.

2. Свако количество можесе сматрати као производъ изъ себе самога и 1. Тако н. п. $a = a \times 1$; $2mx = 2mx \times 1$.

3. Ако є єданъ чинитель нулла, то є и производъ нулла. Н. п. $a \times 0 = 0$; $0 \times a = 0$.

4. Равни са равнима [illegible] производи дају и равне [illegible]

28.

Правила умноженія алгебраически количества.

1. Написати треба чинителѣ или єданъ подъ другогъ; или оба у єданъ редъ.

2. Ако су чинительи положителни, то є безъ сумнѣ и производъ положителанъ. Н. п. $+ а \times + б = аб$.

3. Ако є єданъ чинитель отрицателанъ, а другій положителанъ, то ће производъ быти отрицателанъ, кое слѣдуе изъ овога:

$$\begin{array}{rl} \text{Ако є} & + а = 2а - а \\ \text{такођеръ} & + б = + б \\ \hline \text{слѣдователно} & + аб = 2\,аб - аб. \text{ (по основ. прав.)} \end{array}$$

4. Ако су оба чинителя отрицателна, то ће производъ быти положителанъ.

$$\begin{array}{rl} \text{Н. п.} & - а \times - б = + аб; \\ \text{єрбо є} & а = 2\,а - а \\ \text{а тако} & - б = - б \\ \hline \text{слѣдоват.} & - аб = - 2аб + аб \text{ (по основ. прав.)} \end{array}$$

И тако: *єднаки знацы даю положителанъ, а неєднаки отрицателанъ производъ.*

5. Ако се при алгебраическимъ количествама сочинительи налазе, то се такови умножавају као и кодъ прости числа. Н. п. $2а \times 3а = 6аа$.

6. Ако чинительи имаю єднака писмена, то се у производу свако обште писмо само єданпутъ

пише, а изложительи се овы писмена собираю. Н. п. $4а^3 \times 5а^2 = 20а^5$; єрбо є $4а^3 \times 5а^2 = 4.\,5.\,ааа.\ аа. = 20\ ааааа. = 20а^5$.

Примѣри.

I.

$$\left.\begin{array}{r} а - б \\ в - г \end{array}\right\} \text{чинительи}$$

$$\overline{}$$

$$= ав - бв - аг + бг \ \text{производъ.}$$

II.

$$\begin{array}{r} 3а + 5б \\ 5а - 2в \\ \hline = 15а^2 + 25аб - 6ав - 10бв. \end{array}$$

III.

$$(2а - 3а^2б + бв^2) \times 6аб^2г$$
$$= 12а^2б^2г - 18а^3б^3г + 6аб^3в^2г.$$

IV.

$$(а^3 - 3а^2б + 4аб^2) \times -2аб^2в$$
$$= -2а^4б^2в + 6а^3б^3в - 8а^2б^4в.$$

V.

$$(3а^2 - 2ах + х^2) \times (2а - 3х)$$
$$= 6а^3 - 4а^2х + 2ах^2 - 9а^2х + 6ах^2 - 3х^3.$$

VI.

$$\begin{array}{l} 2а^{3-2м}бв^{м-2} - 5а^{-2}б^{м+1} \\ 3а^{4м-5}б^{2м}в^{3-4м} - 6 \\ \hline = 6а^{2м-2}б^{2м+1}в^{1-3м} - 15а^{4м-7}б^{3м+1}в^{3-4м} \\ \qquad - 12а^{3-2м}бв^{м-2} + 30а^{-2}б^{м+1}. \end{array}$$

ГЛАВА ПЕТА.

О РАЗДѢЛЕНІЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИ' КОЛИЧЕСТВА.

29.

Дѣлити или раздѣлити (dividere), зовесе изнаћи, колико се пута єдно дато количество у другоме датомъ и познатомъ садржава. Оно количество, коє се раздѣлити има, зовесе *Дѣлимакъ*, а оно количество чрезъ коє се дѣли, зовесе *Дѣлитель*, оно пакъ изнађено количество, коє показує, колико се пута дѣлитель у дѣлимку садржава, зовесе *Количникъ*.

30.

[illegible]

Ако имамо єдно просто єдночленно алгебраическо количество чрезъ такођеръ неко таково дѣлити, то се раздѣленіє само онда савршити може, ако се сва писмена дѣлителя у дѣлимку налазе, по слѣдуюћима правилама:

1. *Єднаки знацы даю положителанъ, а неєднаки отрицателанъ количникъ* (§ 28).

2. *Сочинитель дѣлимка дѣлисе чрезъ сочинителя дѣлителѣва.*

3. *Писмена, коя зе у дѣлимку и у дѣлителю са єднакимъ изложительима налазе, са свимъ се изоставляю; ако су пакъ изложительи различни, то се изложитель дѣлителя одъ изложителя дѣлимка отузима.*

4. *Проча писмена дѣлимка, коя дѣлитель не бы имао, поставляюсе у количнику са своима изложительима; тако є н. п.*

$$12аб : 3а = 4б.$$
$$5а^2б^3вг : -аб^2г = -5абв.$$
$$-8а^мб^3в : -2аб^н = 4а^{м-1}б^{3-н}в.$$
$$-15а^3б : 5а^3б = 3.$$
$$а^мб^{1-н} : а^мб^{1-н} = 1.$$

Доказателство ови' правила осниваce на томъ, што производъ изъ количника и дѣлителя свагда дѣлимку раванъ быти мора.

Ако се небы, сва писмена дѣлителѣва у дѣлимку налазила, то се раздѣленiє дѣйствително савршити не може; у таковомъ случаю назначавасе само раздѣленiє са лежеħомъ линiомъ на подобiє разбiєнiя, изоставляюħи она писмена, коя дѣлимакъ и дѣлитель обшта имаю. Н. п.

$$5аб^2 : 3б^2в = \frac{5а}{3в}.$$
$$6а^2б : -2ав = -\frac{3аб}{в}.$$

31.

Ако се дѣлимакъ изъ више членова состои, а дѣлитель само изъ єднога; то раздѣленiє савршити можемо по предидуħима правилама, дѣлеħи свакiй членъ дѣлимка чрезъ дѣлителя ако се онъ у свакомъ члену дѣлимка налази, у противномъ случаю можесе раздѣленіє само назначити, или одъ части савршити, а одъ части назначити. Н. п.

$$(6a^2б - 10ax): 2a = 3aб - 5x.$$

$$(4a^2б - 2x + 3a): 2б = 2a^2 - \frac{x}{б} + \frac{3a}{2б}.$$

32.

Ако су оба, дѣлимакъ и дѣлитель сложена количества (вишечленна), то поступаймо по слѣдуюћимъ правилама.

1. *Са првымъ членомъ дѣлителя дѣлити треба првый членъ дѣлимка, тако ћемо добити прву часть количника; са овымъ количникомъ умножити треба цѣли дѣлитель, и производъ одтудъ изходећій поставити подъ дѣлимкомъ, и подвући єдномъ лініомъ. Ово свршивше, производъ реченный одъ дѣлимка отяти валя.*

2. *У остатку опетъ изабрати треба єданъ членъ дѣлимка, у коме се првый членъ дѣлителя садржава, и таковый опетъ дѣлећи чрезъ првый членъ дѣлителя, тако ћемо добити другу часть количника, кои се са своимъ знакомъ првой части поставля и додає; са овомъ другомъ частію количника множити треба цѣо дѣлитель, пакъ добієный производъ отяти одъ дѣлимка. Остатакъ опетъ дѣлити треба чрезъ првый членъ дѣлителя, и т. д.*

3. *Ако са оваковымъ дѣленѣмъ раздѣленіє савршимо, да намъ више ништа неостане, то є*

знакъ, да се дѣлитель у дѣлимку точно садржава; у противномъ случаю морамо іоштъ остатакъ ко количнику са подписанимъ дѣлителѣмъ и принадлежеħимъ знакомъ приключити.

Примѣри.

I.

$$
\begin{array}{l}
(б^2в^2x^2 - 3б^2вx^3 - 3б^2вx^4 + 9б^2x^5) : (б^2вx - 3б^2x^2) = вx - 3x^3. \\
б^2в^2x^2 - 3б^2вx^3 \\
- \qquad\quad + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad - 3б^2вx^4 + 9б^2x^5 \\
\qquad\qquad\qquad\quad - 3б^2вx^4 + 9б^2x^5 \\
\qquad\qquad\qquad\quad + \qquad\quad\; - \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0.
\end{array}
$$

II.

$$
\begin{array}{l}
(12a^4б - 24a^3бв - 3a^2бв^2 + 30aбв^3 - 15бв^4) : (3a^2б - 6aбв + 3бв^2) \\
12a^4б - 24a^3бв + 12a^2бв^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 4a^2 - 5в^2. \\
- \qquad\quad + \qquad\quad - \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad - 15a^2бв^2 + 30aбв^3 - 15бв^4 \\
\qquad\qquad\qquad\quad - 15a^2бв^2 + 30aбв^3 - 15бв^4 \\
\qquad\qquad\qquad\quad + \qquad\qquad\quad - \qquad\qquad + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

III. $(a^3 - б^3) : (a - б) = a^2 + aб + б^2.$

$$\begin{array}{rrrr}
a^3 & - a^2б & & \\
- & + & & \\
\hline
 & + a^2б & - б^3 & \\
 & a^2б & - aб^2 & \\
 & - & + & \\
\hline
 & & aб^2 & - б^3 \\
 & & aб^2 & - б^3 \\
 & & - & + \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

IV. $(6a^2 - ax + aб - x^2) : (3a + x) = 2a - x + \frac{aб}{3a+x}.$

$$\begin{array}{rrrr}
6a^2 & + 2ax & & \\
- & - & & \\
\hline
 & - 3ax & - x^2 & + aб \\
 & - 3ax & - x^2 & \\
 & + & + & \\
\hline
 & & & aб.
\end{array}$$

33.

Кодъ раздѣленія алгебраически количества понайвише догађасе, да се дѣлитель у дѣлимку точно не садржава, и зато се алгебраическа раздѣленія врло редко и свршую, него се само по горе наведеномъ начину назначую. Но да бы рачунъ у нешто іоштъ скратити могли, обичествуєсе дѣлитель и дѣлимакъ у ньіове чинителѣ

Збиръ обштегъ чинителя и пакъ, ра-
ванъ е збиру неєднакй чинителя.

расправити; то єсть сматраюсе као производъ, и изтражуюсе чинительи, кои су умноженіємъ они произишли. Ако после дѣлитель и дѣлимакъ єднаке чинителѣ имаю, то можемо такове са свимъ изоставити; єрбо се чрезъ то оба чрезъ єдно исто количество дѣле. Н. п.

I. $$(ax + x^2):(2бx - вx)$$
$$= x(a + x): x(2б - в)$$
$$= \frac{a + x}{2б - в}.$$

II. $$(ax - a):(3бx - 3б) = a(x - 1):3б(x - 1)$$
$$= \frac{a}{3б}.$$

III. $$(6a^2б + 3ax^2):(12ax - 9a^2в)$$
$$= 3a(2aб + x^2): 3a(4x - 3aв)$$
$$= \frac{2aб + x^2}{4x - 3aв}.$$

IV. $$2aбx - 3вгx = x(2aб - 3вг).$$

V. $$6aб^2 - 12aбв - 3aб;$$
$$= 3aб(2б - 4в - 1).$$

VI. $$ax \pm x^2 = x(a \pm x).$$

VII. $$r \pm бr = r(1 \pm б).$$

VIII. $$a^2 + 2aб + б^2 = a^2 + aб + aб + б^2$$
$$= a(a + б) + б(a + б)$$
$$= (a + б)(a + б).$$

IX. $6а^2 + 3аб - 2ав - бв;$

$$= 3а\,(2а + б) - в\,(2а + б).$$

X. $x^2 - 2xr + 2x\epsilon - 4r\epsilon;$

$$= x\,(x - 2r) + 2\epsilon\,(x - 2r).$$

XI. $аг + 2бг - 3вг - 2ае - 4бе + 6ве$

$$+ ад + 2бд - 3вд.$$

$$= г\,(а + 2б - 3в) - 2е\,(а + 2б - 3в)$$

$$+ д\,(а + 2б - 3в)$$

$$= (а + 2б - 3в)\,(г - 2е + д).$$

ОДДѢЛЕНІЄ ДРУГО.

О РАЧУНУ КОЛИЧЕСТВА РАЗБІЄНЫ'.

ГЛАВА ПРВА.

О РАЗБІЄНІЯМА ВООБШТЕ.

34.

Разбієніє (fractio) зовесе количество, коє єдну или више частій одъ єдинице има. Єдиница на части, међусобно равне раздѣлена, у призренію овы' є цѣло, а свака ова часть у смотренію цѣлога єсть разбієніє. Ако фатъ н. п. на шестъ єднаки' частій раздѣлимо, и две такове узмемо, то ће ово число 2 быти разбієніє у смотренію цѣле єдинице.

Да бы разбієніє изразити могли, то су два числа нуждна, одъ кои єдно показує, на колико се равны' частій єдиница дѣли; а друго, колико таковы' равны' частій разбієніє сачиняваю, или колико се таковы' равны' частій у разбієнію узима. Оно се число зове *именитель*, а ово *числитель*.

35.

$a < б$

$\frac{a}{б} < 1$

Ако є при разбієнію числитель маньій одъ именителя, то є знакъ, да се не узимаю све части одъ цѣле єдинице, и таково є разбієніє < 1; тако н. п. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$. Овакова разбієнія зовусе *свойственна*. Свойственна су разбієнія сви остатцы раздѣленія (§ 33).

Ако є при разбієнію числитель раванъ именителю, као $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{a}{a}$, то є знакъ, да се све части одъ цѣле єдинице узети мораю; и такова су разбієнія $= 1$.

Ако є напослѣдку числитель веће при разбієнію одъ именителя, и слѣдователно више се частій узети мора, него што таковы' цѣла єдиница у себи има, то се такова разбієнія зову *несвойственна*. Н. п. $\frac{4}{3}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{5a}{3a}$.

36.

Изъ овога слѣдуе:

1. Будући да се цѣло у несвойственномъ резбієнію єданпутъ или више пута садржава, то се такова наћи могу, или разбієніє се таково *разрѣшити* може, ако се числитель чрезъ именителя раздѣли (то єсть, ако се указано раздѣленіє савріши); и ако после тога што остане, то є таковый остатакъ свойственно разбієніє. Тако є н. п.

$$\frac{24}{7} = 3\ \frac{3}{7}, \text{ и}$$

$$\frac{гбв + а}{б} = гв\ \frac{а}{б}.$$

2. Да бы цѣло у разбієнія преобратити могли, то требамо само оно са датимъ именителѣмъ умножити, за придобити разбієнія числителя: ако се пакъ при томъ іоштъ и разбієніє налази, то се и тога числитель додати мора, а именитель се подпише. Тако є н. п.

$$6\ \frac{3}{4} = \frac{27}{4}.$$

$$a + \frac{a}{б} = \frac{aб + a}{б}$$

$$a - \frac{a}{б} = \frac{aб - a}{б}$$

$$а + \frac{б}{в} = \frac{ав + б}{в}.$$

$$4а + \frac{бх}{2а} = \frac{8а^2 + бх}{2а}$$

Овакова се разбієнія, гди се и цѣла са приключенимъ разбієніємъ налазе, зову *разбієнія нечиста*, иначе разбієнія безъ налазећисе цѣлы' зовусе *чиста*.

37.

Разбієніє є количникъ числителя чрезъ именителя.

У раздѣленію садржавасе дѣлитель у дѣлимку толико пута, колико количникъ єдиница

Разб [illegible]

има. Числитель пакъ садржава толико пута у себи именителя, или толико частій одъ нѣга, колико разбіеніє одъ єдинице или одъ цѣлога има; слѣдователно, можесе у свакомъ разбіенію числитель као дѣлимакъ, а именитель као дѣлитель, разбіеніє пакъ само као количникъ ньіовъ сматрати.

Ясность овога доказателства найболѣ се при несвойственомъ разбіенію увидити може. Н. п. $\frac{20}{4} = 5$, гди є явно числитель 20 дѣлимакъ, именитель 4 дѣлитель, а разбіеніє само или нѣгова *вредность* количникъ. —

38.

Разбіенія су *подобна* или *равноименна*, ако єднаке именителѣ имаю; *неподобна* или *разноименна*, кадъ су имъ именительи различни.

Тако су н. п. $\frac{аб}{вг}$ и $\frac{ав}{вг}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{7}{12}$ равноименна.

$\frac{а}{бв} + \frac{в}{ан}$; $\frac{3}{8} + \frac{5}{6}$ разноименна.

39.

(Будући да се при разбіенію неколико частій одъ цѣлога узимаю (§ 34), то се при разсужденію величине и вредности разбіенія како на множину частій, слѣдователно на величину числителя, тако и на величину частій, на кое се цѣло дѣли, то єсть на именителя позорствовати мора. Слѣдователно) *свако се разбієніє може на двострукій начинъ умножити или увеличати :*

1. (Ако се число частій умножи, а такове опетъ за себе єдну и ону исту величину задрже; слѣдователно) *кадъ се числитель умножи, а именитель непремѣнный остане.*

2. (Ако число частій оно исто и непремѣнно остане, али ако се ове части увеличаю, то єсть веће учине, него пре што су быле. А то ће се учинити, ако се цѣло на манѣ число частица раздѣли; слѣдователно) кадъ числитель непремѣнный остане, а именитель умалисе.

на 4
много
сабира

$\frac{5}{8} <$

$\frac{5}{8} <$

$\frac{5}{8} < \frac{5}{7}$.

Тако є у првомъ случаю $\frac{5}{12} < \frac{7}{12}$,

а у другомъ случаю $\frac{5}{12} < \frac{5}{6}$.

40.

По овомъ истомъ основу можесе свако разбієніє на двогубый начинъ умалити, и мањимъ учинити :

$\frac{6}{8} > \frac{5}{8}$

$\frac{5}{7} > \frac{5}{8}$

1. (Кадъ се манѣ частица узме него пре, а такове опетъ у єдной величини остану; слѣдователно,) *кадъ се числитель умали, а именитель непремѣнный остане.*

2. (Ако число частій остане, али такове се величиномъ манѣ узму него пре што су быле, то єсть, ако се цѣло у више частій раздѣли;

єрбо што се у више частій подѣли, со тымъ ће манѣ части быти. Ово ћемо дакле постићи, *ако числителя непремѣнна оставимо, а именителя умножимо.*

Тако є у првомъ случаю $\frac{16}{30} > \frac{13}{30}$,

а у другомъ — $\frac{2}{3} > \frac{2}{7}$.

41.

Ако се числитель и именитель разбіенія са некимъ трећимъ числомъ или количествомъ умножи, важность разбіенія остає непремѣнна; или производно разбіеніє остає прећашнѣму равно.

Єрбо чрезъ умноженіє числителя (§ 39) разбіеніє постає веће у толико, у колико (§ 40) се чрезъ умноженіє именителя умалява. Слѣдователно остає разбіеніє непремѣнно.

Тако є н. п. $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$;

$$\frac{а}{б} = \frac{а \times в}{б \times в} = \frac{ав}{бв};$$

Такођеръ $\frac{а + б}{в} = \frac{(а \times б) \times (а - б)}{в \times (а - б)}$

$$= \frac{а^2 - б^2}{ав - бв}$$

42.

Ако се числитель и именитель разбієнія чрезъ неко тређе число или количество раздѣли, важность разбієнія остає непремѣнна, или количества одтудъ добієна чине разбієніє, коє є прећашнѣму равно.

Єрбо чрезъ дѣленѣ числителя башъ у толико се разбієніє умалява (§ 40), у колико се оно чрезъ дѣленѣ именителя умножава (§ 39); Слѣдователно разбієніє остає непремѣнно, или прећашнѣму равно. Тако є н. п.

$$\frac{8}{12} = \frac{8 : 4}{12 : 4} = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{5}{10} = \frac{5 : 5}{10 : 5} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{ав + бв}{вв} = \frac{а + б}{в}.$$

$$\frac{4а^2 - 6аб}{2ав + 4аг} = \frac{2а - 3б}{в + 2г}.$$

43.

Разноименна разбієнія у равноименна преобратити.

1. Умножи свакогъ числителя са свима именительима, само не са своимъ собственнымъ, тако ђешъ добити чрезъ то при свакомъ разбієнію нова числителя.

2. После умножи све именителѣ међусобно, тако ће овай производъ быти свеобштій именитель новы' и преобраћены' разбієнія. Н. п.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5} = \frac{1.3.5}{2.3.5}, \frac{2.2.5}{2.3.5}, \frac{4.2.3}{2.3.5} = \frac{15}{30}, \frac{20}{30}, \frac{24}{30}.$$

$$\frac{3}{4}, \frac{а}{б}, \frac{4в}{3а}, \frac{3б}{2} = \frac{18аб}{24аб}, \frac{24а^2}{24аб}, \frac{32бв}{24аб}, \frac{36аб^2}{24аб}.$$

Да є на овай начинъ вредность разбієнія непремѣнна остала, видисе ясно изъ §. 41; ербо є числитель и именитель свакога разбієнія са єднымъ и то онымъ истымъ числомъ умноженъ.

И тако се на овай начинъ извидити може, кое є разбієніє одъ два дата веће, т. є. између два разбієнія, коя бы разне именителѣ имала, кое є веће; кадъ іи на равноименна преобратимо. Тако є н. п.

$$\frac{3}{5} > \frac{4}{7};\ \text{ербо є}\ \frac{3}{5} = \frac{21}{35},\ \text{а}\ \frac{4}{7} = \frac{20}{35}.$$

44.

Ако бы имали многа разбієнія на равноименна преобратити, то бы на овай прописаный начинъ свеобштый именитель врло великій испао. У таковомъ случаю тражити треба таково число одъ найвећега именителя, у коме бы се сви прочи садржавали. Ако се таково нађе, то ће ово число быти свеобштый именитель. *А да бы нове числителѣ добили, то раздѣлити треба свеобштегъ именителя чрезъ стара именителя, и* *умножити треба количника са старимъ числителѣмъ.*

Н. п. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}$ имали бы на равноименна преобратити разбіенія; то є трократно одъ найвећега именителя 8 число 24 тога свойства, да се сви именительи у нѣму садржаваю; зато узети треба 24 за свеобштегъ именителя, пакъ ће нова разбіенія быти

$$\frac{12}{24}, \frac{16}{24}, \frac{18}{24}, \frac{20}{24}, \frac{21}{24}.$$

Да и овде вредности разбіенія непремѣнне остаю, видисе такођеръ одтуда, што се числитель и именитель свакога разбіенія са истимъ числомъ умножава.

45.

Да бы найманѣ вишегубно одъ више именителя, у коме се сви други точно садржаваю, наћи могли, то тражити треба ко двама првима именительима могућно найманѣ число, у коме се оба точно садржаваю, *раздѣляваюћи єднога именителя чрезъ нѣгову найвећу свеобшту меру, а количника са другимъ именителѣмъ умножаваюћи*; ко овомъ произнађеномъ числу и ко слѣдуюћемъ тражити треба на истій начинъ найманѣ число, у коме се оба садржаваю, и тако продужуюћи до последнѣга именителя, докъ тражено число ненађемо. Н. п. найманѣ число наћи у коме се именительи 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, точно садржавaю, то ће

$$\begin{array}{ccccccc} 8, & 7, & 6, & 5, & 4, & 3, & 2, \\ & 56 & 168 & 840 & 840 & 840 & 840 \end{array}$$

то єсть 8 и 7 немаю свеоштегъ числителя, зато є 8 . 7 = 56 найманѣ число, у коме се оба садржавaю. Далѣ 56 и 6 имаю за найвећегъ чинителя 2; 2 у 6 иде 3 пута; 56 пута 3 єсу 168; 5 и 168 немаю свеобштегъ чинителя; зато є 5 . 168 = 840 найманѣ число, у коме се оба точно садржавaю; а и остала 4, 3, 2, садржавaюсе у 840; слѣдователно биће 840 тражено число.

46.

Дато разбіеніє у друго преобратити, коєгъ намъ є именитель задатъ.

друго
числит.
(у како
[illegible]

Умноживше числителя са задатимъ именителѣмъ, раздѣлити треба производъ презъ старогъ именителя, тако ћемо добити новогъ числителя.

Н. п. $\frac{86}{125}$ у друго разбіеніє преобратити, коєгъ бы именитель = 1000 быо. То є новъ числитель = 86 . 1000 : 125 = 688; то єсть $\frac{86}{125} = \frac{688}{1000}$.

Дато разбіеніє у друго преобратити, коєгъ є числитель задатъ:

Умноживше именителя разбієнія са задатимъ числителѣмъ, раздѣлити треба производъ чрезъ старогъ числителя, тако ћемо добити новогъ именителя.

Н. п. Разбієніє $\frac{3}{4}$ преобратити у друго, коєгʼ бы числитель 12 быо, тако є именитель равань $\frac{12 . 4}{3} = 16$, и разбієніє ће быти $= \frac{12}{16}$.

Да и на овай начинъ и у овомъ случаю вредность разбієнія непремѣнна остає, ясно се види изъ § 41.

47.

Ако се ко числителю и именителю разбієнія єднако количество дода, то се вредность нѣгова чрезъ то преиначава, и то увеличава кодъ разбієнія свойственныʼ, а на противʼ умалява кодъ разбієнія несвойственныʼ.

Н. п. $\frac{а}{б} < \frac{а + в}{б + в}$, ако є $а < б$.

Напротивʼ $\frac{а}{б} > \frac{а + в}{б + в}$, ако є $а > б$.

Єрбо є преобративше разбієнія у равноименна, то ће быти $\frac{аб + ав}{б\,(б + в)}$ у мѣсто $\frac{а}{б}$, а $\frac{аб + бв}{б\,(б + в)}$ у мѣсто $\frac{а + в}{б + в}$; гди є $ав < бв$, ако є $а < б$; а $ав > бв$, ако є $а > б$.

Са свимъ противно излази, кадъ се одъ числителя и именителя разбіенія еднако количество отузме:

ербо є $\frac{а}{б} > \frac{а - в}{б - в}$, ако є $а < б$;

напротив' $\frac{а}{б} < \frac{а - в}{б - в}$, ако є $а > б$.

48.

Разбіеніє скратити, зовесе нѣму безъ промѣне нѣгове вредности манѣгъ числителя и именителя дати.

Раздѣливше числителя и именителя чрезъ неко количество, быће количницы ново разбіеніє, коє ће прећашнѣму сасвимъ равно быти. Н. п.

$$\frac{5}{100} = \frac{1}{20};$$

$$\frac{аабх}{абв} = \frac{ах}{в};$$

$$\frac{2аа + 6аб - 4ав}{2ав + 2аг} = \frac{а + 3б - 2в}{в + г}.$$

ГЛАВА ДРУГА.

О СОБРАНІЮ, ОТЯТІЮ, УМНОЖЕНІЮ И РАЗДѢЛЕНІЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИ' РАЗБІЄНІЯ.

49.

При собранію разбієнія примѣтити имамо слѣдуюћа правила.

1. *Ако разбієнія имаю еднаке именителѣ, то собрати треба числителѣ, подписавше имъ свеобштегъ именителя. Н. п.*

$$\frac{2a^2}{5б} - \frac{3a^2}{5б} + \frac{x^2}{5б} = \frac{x^2 - a^2}{5б}.$$

2. Ако су разбієнія разноименна, то іи найпре преобратити треба у равноименна, и по савршенію собранія числителя', подписати имъ обштегъ иминителя. Н. п.

$$\frac{2в}{3aб} + \frac{1}{2} + \frac{5a}{4б} = \frac{8в + 6a^2 + 15a^2}{12aб}.$$

3. *Ако се догоди поредъ разбієнія и цѣла собрати*, то іи можемо или особито собрати, или іи найпре у несвойственна разбієнія преобратити, и ко прочима іи разбієніяма додати. Н. п.

$$a + \frac{б}{3} - \frac{2б}{5} + \frac{в}{x} = \frac{15ax + 5бx - 6бx}{15x} + \frac{15в}{15x}.$$

Примѣри.

I. $$\frac{а}{б}, \frac{в}{г} = \frac{аг}{бг}\,\frac{бв}{бг} = \frac{аг + бв}{бг}.$$

II. $$\frac{2а}{3в}, \frac{б}{2г}, \frac{3ех}{4д} = \frac{16агд}{24вгд}, \frac{12бвд}{24вгд}, \frac{18вгех}{24вгд}$$
$$= \frac{16агд + 12бвд + 18вгех}{24вгд}.$$

III. $$а + \frac{б}{в} = \frac{ав}{в} + \frac{б}{в} = \frac{ав + б}{в}.$$

50.

При отятію разбіенія наблюдавати имамо слѣдуюћа правила:

1. *Ако бы разбіенія разноименна была,* то іи найпре на равноименна преобратити треба (по § 43), и после числителя єдногъ одъ другога отяти, подписуюћи разлики или остатку обштегъ именителя. Н. п.

$$\frac{3а}{б} - \frac{2а}{3б} = \frac{3а - 2а}{3б} = \frac{а}{3б}.$$
$$\frac{а}{б} - \frac{в}{г} = \frac{аг - бв}{бг}.$$

2. *Ако бы имали свойственно разбіеніє одъ цѣлога числа отяти*, то позаймивше єдну єдиницу одъ цѣлога, и преобративше ю у разбіеніє, коє бы са отузимкомъ єднаке именителѣ имало, и тако после отяти треба числителя отузимкова

одъ числителя овога разбієнія, подписавше остатку обштега именителя. Н. п.

$$3a - \frac{2a}{5} = \frac{15a - 2a}{5} = \frac{13a}{5}.$$

3. *Ако цѣло число или количество са приключеннымъ разбієніємъ одъ цѣлога числа са приключеннымъ разбієніємъ отяти имамо*, то отяти треба цѣло одъ цѣлога, а разбієніє одъ разбієнія. Н. п.

$$\left(6a + \frac{б}{в}\right) - \left(5a + \frac{3б}{4в}\right)$$

$$= 6a - 5a + \frac{б}{в} - \frac{3б}{4в}$$

$$= a + \frac{4б - 3б}{4в}$$

$$= a + \frac{б}{4в}.$$

4. *Ако бы разбієніє оно, одъ кога бы отяти требало* (умалимакъ) *манѣ было одъ разбієнія, коє се отузима* (отузимка), то позаймивше одъ цѣла числа умалимкова єдну єдиницу, и преобративше ю у разбієніє равноименно, и собравше найпре числителѣ у єдно, савршити треба отятіє. Н. п.

$$8\frac{1}{4} - 5\frac{3}{4} = 7\frac{5}{4} - 5\frac{3}{4} = 2\frac{2}{4} = 2\frac{1}{2}.$$

51.

При умноженію разбієнія наблюдавати имамо слѣдуюћа правила:

1. *Ако разбієніє имамо са цѣлымъ числомъ или количествомъ умножити*, то умножимо само числителя разбієнія са цѣлымъ числомъ, подписуюћи именителя непремѣнна; єрбо се чрезъ то разбієніє у толико пута умножава, колико цѣло число єдиница има. (§ 39) Н. п.

$$5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3} = 3\,\frac{1}{3}.$$

$$\frac{а}{б} \times в = \frac{ав}{б}.$$

Разбієніє се такођеръ умножити може са цѣлымъ числомъ, ако се именитель чрезъ цѣло число дѣли, єрбо се разбієніє чрезъ то такођеръ у толико увеличава, колико цѣло єдиница има (§ 39. № 2); но будући да се рѣдко именитель чрезъ цѣло число дѣлити дає, то ћемо свагда болѣ учинити, ако по првомъ правилу поступали будемо.

2. *Ако цѣло число поредъ приключеногъ разбієнія са цѣлымъ числомъ множити имамо*, то умножимо найпре са цѣлымъ числомъ разбієніє, пакъ после цѣла, изузимаюћи у првомъ производу находећасе цѣла, и додавше іи ко другомъ производу. Н. п.

$$5\,\frac{3}{4} \times 6 = \frac{3}{4} \times 6 + 5 \times 6 = \frac{18}{4} + 5 \times 6$$

$$= 4 + \frac{2}{4} + 30 = 34\,\frac{1}{2}.$$

$$\left(а + \frac{б}{в}\right) . \, д = ад + \frac{бд}{в}.$$

3. **Разбіеніе са разбіеніемъ умножити.** *То умножити треба числителя са числителѣмъ, а именителя са именителѣмъ, тако ће ово ново разбіеніе быти пожеланый производъ.* Н. п.

$$\frac{а}{б} \times \frac{в}{г} = \frac{ав}{бг}.$$

Примѣч. Истинность овога правила доказатисе може раздѣленіемъ, кое ће се изъ слѣдуюћи' правила ясно увидити.

4. *Ако су оба чинителя цѣла числа поредъ приключены' разбіенія*, то такова преобративше найпре у разбіенія свойственна (по § 36), савршити треба по предидућима правилама умноженіе. — Или множити треба са цѣлымъ и разбіеніемъ едного чинителя, цѣло и разбіеніе другога чинителя. Н. п.

$$\left(а+\frac{б}{в}\right)\cdot\left(д+\frac{в}{а}\right) = ад + \frac{бд}{в} + \frac{ав}{а} + \frac{бв}{ав}$$

$$= ад + \frac{бд}{в} + в + \frac{б}{а}$$

52.

При раздѣленію разбіенія наблюдавати имамо слѣдуюћа правила.

1. *Разбіеніе чрезъ цѣло дѣлити.* То умножити треба именителя са цѣлымъ числомъ, а числителя оставити непремѣнна; ербо се чрезъ то

разбіеніе (по § 40) у толико умалява, колико цѣло число единица у себи има. Н. п.

$$\frac{а}{б} : в = \frac{а}{бв}.$$

2. *Разбіеніе чрезъ разбіеніе дѣлити.* То преокренути треба дѣлителѣва именителя у числителя, а числителя у именителя, и савршити (по правилама § 51) треба множеніе. Н. п.

$$\frac{а}{б} : \frac{в}{г} = \frac{а}{б} \cdot \frac{г}{в} = \frac{аг}{бв}.$$

(Ясность овога правила доказатисе може (изъ § 30), што производъ изъ количника и дѣлителя свагда дѣлимку раванъ быти мора. Тако кадъ бы количника $\frac{аг}{бв}$ са дѣлителѣмъ $\frac{в}{г}$ умножили, то бы добыли $\frac{авг}{бвг} = \frac{а}{б}$, кое е пређашнѣму дѣлимку равно.)

3. *Цѣло число чрезъ разбіеніе дѣлити:*

То преокренути треба такођеръ дѣлителя и савршити множеніе. Н. п.

$$а : \frac{б}{в} = \frac{а}{1} : \frac{б}{в} = \frac{а}{1} \cdot \frac{в}{б} = \frac{ав}{б}.$$

4. *Цѣла числа са приключеньимъ разбіеніемъ опетъ чрезъ такова дѣлити.*

То преобративше іи найпре у несвойственна разбіенія, савршити треба по предидућима правилама раздѣленіе.

Н. п. $$\left(а + \frac{б}{в}\right) : \left(б - \frac{а}{г}\right) = \frac{ав + б}{в} : \frac{бг - а}{г}$$
$$= \frac{ав + б}{в} \cdot \frac{г}{бг - а}$$
$$= \frac{авг + бг}{бвг - ав}.$$

(*Примѣчаніе.* **Ученикъ**, кои небы лако запамтити могао правила умноженія и раздѣленія разны' разбіенія, тай нека ова два правила научи; то есть: *како треба разбіеніе са разбіеніемъ умножити, и како треба разбіеніе чрезъ разбіеніе дѣлити:* ако се при томъ и цѣла числа поредъ разбіенія у рачуну догоде, то се свако цѣло число као разбіеніе, коегъ е именитель = 1, представити може. Н. п.

$$а : \frac{б}{в} = \frac{а}{1} \cdot \frac{б}{в} = \frac{аб}{в}.$$
$$\frac{а}{б} : в = \frac{а}{б} : \frac{в}{1} = \frac{а}{б} \times \frac{1}{в} = \frac{а}{бв}.$$
$$в : \frac{а}{б} = \frac{в}{1} : \frac{а}{б} = \frac{в}{1} \times \frac{б}{а} = \frac{бв}{а}.$$)

ГЛАВА ТРЕЋА.

О ДЕСЕТНЫМЪ РАЗБІЄНІЯМА.

53.

Десетно разбієніє (fractio decimalis) єсть таково разбієніє, у комъ цѣло или єдиница свагда на десетъ частій, а ове опетъ се на десетъ частій дѣле и проч. или, ако при цѣломъ числу изъ десна иза єдиница іоштъ выше цифрій приключимо, кои̓ се вредность по декадическомъ правилу тако као и проче цифре изъ лева на десно десетъ пута умалявају, то неће ове цѣле єдинице, него разбієнія представляти; и то ће прва поредъ єдинице десету часть єдинице, друга стотиниту часть єдинице, трећа тисућну часть єдинице и проч. значити. А да бы се такове части или разбієнія одъ находећи̓ се цѣлы̓ разликовати могле, то се оне одъ цѣлы̓ єдиница са запятомъ (,) оддѣлюю. И тако съ леве стране предъ запятомъ цифре значе цѣле єдинице, а оне одъ десне запяте, десетна мѣста. Н. п.

$$36{,}7859 = 35\,\frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{9}{10000}$$

$$= 35 + \frac{7000}{10000} + \frac{800}{10000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{10000}.$$

$$= 35 + \frac{7859}{10000} = \frac{357859}{10000}$$

Ако не бы было цѣлога числа, то се на мѣсто цѣлога нулла поставля, и са запятомъ раздѣлює, да бы слѣдуюће цифре своє достоинство добиле. Н. п. $\frac{34}{100}$ за изразити моћи, пишесе 0,34.

На мѣсто 5 $\frac{7}{1000}$ = 5,007 и проч.

54.

Изъ овога се види, да се у пожеланомъ случаю у десетномъ разбіенію лако именитель подписати може, будући да се таковый свагда изъ єдне єдинице поредъ толико приключены’ нулла состои, колико разбіеніє десетны’ мѣста има, и зато се казати може: *да є десетно разбіеніє, таково разбіеніє, коє єдну само єдиницу поредъ неколико приключены’ нулла* (єдну декадическу єдиницу) *за своега именителя има.*

И на против’, кадъ бы неко десетно разбіеніє са своимъ именителѣмъ снабдѣно, у свомъ свойственномъ виду, то єсть безъ именителя написати требало, то треба само у числителю одъ десне къ левой толико цифрій са десетны’ мѣста отбити, колико именитель нулла има, гди кадъ числитель не бы доста цифрій имао, онда се недостатакъ съ лева са нуллама подпунити мора. Н. п.

$$\frac{86504}{1000} = 86,504\,; \quad \frac{56}{100} = 0,56$$

$$\frac{4}{10000} = 0,0004.$$

55.

Изъ овога се такођеръ види, да се ко десетномъ разбіенію изъ десна ма колико нулла приключити могу, безъ да бы се чрезъ то вредность разбіенія преиначила. Єрбо є н. п. 7,58 = 7,5800, овде є свака цифра свое мѣсто, кое се одъ єдинице брои, задржала. Тако се исто цѣло число у десетнымъ разбіеніяма представити може, кадъ му се само повольно число нулла приключи, а оно чрезъ запяту оддѣли. Н. п. 12 = 12,000.

И зато є врло лако *десетна разбіенія на равноименна преобратити*, кадъ се ко онима, коя бы манѣ число десетны' мѣста имала, толико нулла приключи, да се свако разбіеніе изъ равногъ числа десетны' мѣста состои. Н. п.

0,6 = 0,600
0,42 = 0,420
0,261 = 0,261.

56.

Доста пута є нуждно просто и обично разбіеніе у разбіеніе десетно преобратити, кое бы ономе или са свымъ или само до некогъ опредѣленогъ десетногъ мѣста у вредности равно было; а то бива на слѣдуюћій начинъ:

1. Ако є разбіеніе несвойственно, то дѣлити треба числителя чрезъ именителя, и тако се добію цѣле єдинице; ако ли є пакъ разбіеніе свой-

ственно, то се мора на мѣсто цѣлы единица нулла поставити.

2. Ко остатку додаесе една нулла, и дѣлисе опетъ чрезъ именителя, тако ће количникъ десетину значити; ова се са числителѣмъ множи, и надлежателно одъ остатка отузима. Ко остатку опетъ се додае една нулла, дѣлисе опетъ чрезъ именителя на предидућiй начинъ, такоћесе добити стотинита часть и проч.

3. Ако на овай начинъ дѣленѣ продужимо, и раздѣленiе се безъ остатка саврши, то е задато разбiенiе нађеномъ десетномъ разбiенiю савршено равно, кое се кодъ свiю оны разбiенiя догађа, коiи е именитель 2, 4, 8, 16, 32 .... 5, 25, 125 ... или производъ одъ овы' чисала.

Примѣри.

$$\frac{23}{4} = 23 : 4 = 5{,}75$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 20 \\ 20 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{76}{125} = 76 : 125 = 0{,}608$$

$$\begin{array}{r} 760 \\ 750 \\ \hline 100 \\ 1000 \\ 1000 \\ \hline 0 \end{array}$$

4. Кодъ прочи' разбiенiя раздѣленiе се никадъ несавршуе, но опетъ се раздѣленiе дотле у толико продужава, докъ по другiй путь еднакiй и онай истый остатакъ добiемо, гди после десет-

на мѣста у познатомъ реду повторително безъ конца слѣдую.

Примѣри.

$$\frac{5}{3} = 5:3 = 1{,}6666\ldots;\quad \frac{7}{11} = 7:11 = 0{,}63636\ldots$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 20 \\ 18 \\ \hline 20 \\ 18 \\ \hline 20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 70 \\ 66 \\ \hline 40 \\ 33 \\ \hline 70 \\ 66 \\ \hline 40 \end{array}$$

$$\frac{6}{7} = 6 : 7 = 0{,}857142857142\ldots.$$

Оваково десетно разбіеніє зовесе *періодическо*, и число повтораваны’ цифрій зовесе *період*. Тако су 6,6385714 періоди нађены’ періодически’ десетны’ разбіенія. Довольно є при періодическимъ десетнымъ разбіеніяма, періодъ само єданпутъ написати и на нѣгову прву и последню цифру, или ако се таковый изъ єдне цифре состои, само надъ овомъ єдну точку поставити. Тако є по горньимъ примѣрима

$$\frac{5}{3} = 1,\ \dot{6};\ \frac{7}{11} = 0{,}\dot{6}\dot{3};\ \frac{6}{7} = 0{,}\dot{8}5714\dot{2}.$$

5. Одъ овы’ десетны’ разбіенія могу се толико десетна мѣста задржати, колико само точность рачуна изискуе, тако да се друга безъ знатне погрешке сасвимъ изоставити могу; само се може, за моћи погрешку іоштъ маню направити, послѣднѣ десетно мѣсто са єданъ умножити, ако є слѣдуюћа цифра већа одъ 5. Н. п. $\frac{6}{7} = 0,\ 85714286\ldots$ на мѣсто 0,85714285; єрбо є слѣдуюћа десетна цифра 7.

57.

При собранію десетны разбієнія пишуее она исто тако као и цѣла числа, ако се она собрати имаю, на тай начинъ єдно подъ друго, да запяте, коє дасетна мѣста одъ цѣлы єдиница оддѣлюю, право єдна подъ другомъ поставесе, и после собрати іи треба као и цѣла числа, само се у збиру запята равнымъ начиномъ на пређашнѣ мѣсто поставля.

Примѣри.

3,04	23,07543	312
26,1735	0,923	25.73
7,5	6,0024	0.364
36,7135	30,00083	338,094

58.

При отятію десетны' рабієнія, поставляюсе она као и при собранію, и отятіє быва обычнымъ начиномъ као и кодъ цѣлы҆ чисала, само се ко ономъ десетномъ разбієнію, одъ кога се друго десетно разбієніє са выше десетны мѣста находећесе отяти има, у памети толико нулла додає, да оба разбієнія равна десетна мѣста имаю.

Примѣри.

$$\begin{array}{r} 12,3257 \\ 4,56 \\ \hline 7,7657 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 60,57 \\ 0,9856 \\ \hline 59,5844 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13, \\ 2,346 \\ \hline 10,654. \end{array}$$

59.

Умноженіє десетны҆ разбієнія тако быва као и цѣлы҆ чисала, само се у производу одъ десна на лево толико десетна мѣста оддѣлюю, колико оба чинителя таковы имаю, гди се недостатакъ, ако не бы доста цифрій было, съ лева са нуллама попунява.

Примѣри.

$$\begin{array}{r} 1,44 \\ 1,2 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1,728 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3,046 \\ 0,32 \\ \hline 6092 \\ 9138 \\ \hline 0,97472 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,337 \\ 0,023 \\ \hline 1011 \\ 674 \\ \hline 0,007751 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,26 \\ 17 \\ \hline 182 \\ 26 \\ \hline 4,42. \end{array}$$

60.

Десетно разбієніє са 10 *умножити:* само помакнути треба запяту у єдно мѣсто далѣ на десно; єрбо чрезъ то добыва свака цифра десетороструку веђу вредность.

Примѣри.

4,587 × 10 = 45,87.
0,5386 × 100 = 053,86.
9,3076 × 1000 = 9307,6.

Ако дакле кодъ десетны' разбіенія запяту, коя десетна мѣста одъ цѣлы' оддѣлює, сасвимъ изоставимо, и сматрамо оно као цѣло число, то се чрезъ то десетно разбіеніє са 1 поредъ толико приключены' нулла умножава, колико оно десетны' мѣста има.

61.

При раздѣленію десетны' разбіенія наблюдавати имамо слѣдуюђа правила: Подписавше дѣлителя подъ дѣлимкомъ по начину и виду обычногъ простогъ разбіенія, додавше числителю или именителю толико нулла, колико єдномъ или другомъ десетны' мѣста оскудѣваю, пакъ изоставивше запяту, коя десетна мѣста оддѣлює сасвымъ, по начину (§ 56) познатомъ преобратити треба ово разбіеніє у разбіеніє десетно, сотымъ ђемо добити количникъ пожеланый.

Примѣри.

$$3,045 : 15 = \frac{3,045}{15,000} = 0,203.$$

$$2,134 : 0,12 = \frac{2,134}{0,120} = 17,7833.$$

$$0,0036 : 4,8 = \frac{0,0036}{4,8000} = 0,00075.$$

$$24 : 0,006 = \frac{24,000}{0,006} = 4000.$$

Ако раздѣлити имамо десетно разбіеніе чрезъ цѣло число, то се на краће и овако савршити може.

Примѣри.

7,356 : 6 = 1,226.

0,06537 . 4,3 = 0,00152.

$$\begin{array}{r} \underline{43} \\ 223 \\ \underline{215} \\ 87 \end{array}$$

Ако се случи, да десетно разбіеніе чрезъ 10, 100, 1000 и проч. дѣлити треба, то само запяту оддѣлююћу цѣла у 1, 2, 3 . . . мѣста на лево помакнути валя, чрезъ то добива свака цифра десетъ, сто, тисућу пута маню вредность.

Примѣри.

53,436 : 10 = 5,3436.

32,43 : 100 = 0,3243.

5,38 : 1000 = 0,00538.

62.

Вредность наименованогъ десетногъ разбієнія наћисе може у єдиницама манѣгъ рода, ако десетно разбієніє са числомъ умножимо, коє показує, колико єдиница манѣгъ рода, у єдиницы, на коє се десетно разбієніє возноси, у себи садржава. Н. п.

4,3 дана = 4 дана 7 сатій 12 минута.

$$\begin{array}{r} 24 \\ \hline 7{,}2 \\ 60 \\ \hline 12{,}0 \end{array}$$

ОДДѢЛЕНІЄ ТРЕЋЕ.

О РАЧУНУ СА ДОСТОИНСТВАМА И КОРЕНИМА.

ГЛАВА ПРВА.

О ДОСТОИНСТВАМА И КОРЕНИМА ВООБЩЕ.

63.

Достоинство или степенъ (potentia, dignitas) зовесе производъ, кои се рађа кадъ се количество неко само собомъ єданпутъ, или више пута умножи. Оно число, или количество, коє се више пута као чинитель у умноженію ставля, и достоинство или степенъ рађа, у смотренію произведенногъ достоинства зовесе *коренъ* (radix); а оно число, коє са своима єдиницама показуе, колико пута коренъ као чинитель у умноженію ставитисе има, за произвести неко достоинство, зовесе *изложитель* овогъ достоинства.

Свако количество, коє се не може сматрати као производъ одъ єднаки' чинителя, у свомъ є првомъ достоинству. Производъ, кои се рађа, кадъ се єдно количество двапутъ као чинитель у умноженію ставля, зовесе *друго достоинство; квадратъ* (quadratum); тако є н. п. 9 квадратъ одъ 3; єрбо є 3 . 3 = 9, а вообште a^2, квадратъ є одъ a; єрбо $a . a = a^2$. *Квадратъ се дакле єдногъ числа или количества наћи може, кадъ ово число или количество са собомъ самымъ умножимо.* Оно пакъ число, коє се са собомъ умножити мора за пожеланный квадратъ произвести, зовесе *коренъ квадратный.* Тако є н. п. 6 коренъ квадратный одъ 36; а тако є a коренъ квадратный одъ a^2.

64.

Кадъ се квадратъ єдногъ числа или количества іоштъ єданпутъ са кореномъ умножи, то ће се производъ одтудъ произходећій *треће достоинство* или *кубусъ* (cubus) оногъ числа или количества звати. Тако є н. п. 8 треће достоинство или кубусъ одъ 2; єрбо є 2 . 2 . 2. = 4 . 2 = 8; тако є a^3 кубусъ одъ a; єрбо є $a . a . a = a^2 . a = a^3$. *Кубусъ се дакле некогъ количества наћи може, кадъ се квадратъ количества іоштъ єданъ путъ са кореномъ умножи.* И тако се опетъ зове 2 *трећій коренъ* или *коренъ кубическій* одъ 8, а a коренъ кубическій одъ a^3.

65.

Ако далѣ кубусъ некогъ колечества іоштъ єданпутъ са кореномъ умножимо, то ћемо добити *четверто достоинство* или *двоквадратъ* овогъ количества; ово опетъ са кореномъ умножено дає *пето достоинство* и проч. Тако се зове $a^4 = a^3 . a$ четврто, $a^5 = a^4 . a$ пето, $a^м$ $м^{то}$ достоинство одъ a; као што се a *четвертый коренъ* одъ a^4, *петый коренъ* одъ a^5 и $м^{тый}$ коренъ одъ $a^м$ зове. —

66.

Неко число или количество на достоинство, н. п. *м подићи*, зовесе, то исто количество или число *м* пута у умноженію ставити, или *м* пута са собомъ самымъ умножити, одъ куда ће производъ $м^{то}$ достоинство истогъ числа или количества быти.

Тако исто $м^{тый}$ коренъ изъ некогъ числа или количества извући, зовесе, ово число или количество у *м* равне чинителѣ расправити, и єдногъ одъ овы чинителя узети; или што є све єдно, неко число наћи, коє бы *м* пута као чинителъ у умноженію ставлѣно, дато число или количество произвело.

67.

Да бы знати могли, кои се коренъ изъ некогъ количества извући има, употреблявасе знакъ $\sqrt{}$, надъ коимъ се число ставля, коє показує, на колико се равны чинителя оно иза овогъ коренногъ знака находећесе количество расправити има; и оно се число зове *корена изложитель*. Тако се пише н. п. $\sqrt[2]{64} = 8$; $\sqrt[3]{64} = 4$; и читасе *квадратный корвнъ* одъ 64 раванъ є 8; *кубическій коренъ* одъ 64 раванъ є 4.

При квадратнымъ коренима не обичествуєсе изложитель корена надъ знакомъ ставляти, него се свагда онде, гди се изложитель надъ коренымъ знакомъ не бы налазіо, квадратный коренъ разумѣва; тако се пише н. п. обично $\sqrt{a}$ на мѣсто $\sqrt[2]{a}$.

Извађеный коренъ изъ некогъ количества мора дакле тога свойства быти, да кадъ бы га на достоинство коренноизложителя подигли, да оно, оно подъ кореннымъ знакомъ находећесе количество опетъ произведе.

68.

Свако достоинство одъ положителногъ корена происходеће, мора быти положително; кое непосредственно изъ (§ 28) прописаны' правила умноженія положителны' и отрицателны' количества происходи. Но ако отрицателно количество н. п. — a, на єдно за другимъ слѣдуюћа достоинства подигнемо, то ће быти:

$$(-a)^2 = -a \times -a = +a^2;$$

$$(-a)^3 = (-a)^2 \times -a = +a^2 \times -a = -a^3;$$

$$(-a)^4 = (-a)^3 \times -a = -a^3 \times -a = +a^4 \text{ и т. д.}$$

Изъ овогъ слѣдує, да су достоинства одъ отрицателна корена паровитогъ числа происходећа, положителна, а одъ безпарногъ числа происходећа, отрицателна.

Зато строго разликовати треба $(-a)^2$ одъ $-a^2$; ербо є $(-a)^2 = -a \times -a = +a^2$. Напротив' $-a^2 = -a \times +a = -a^2$. —

69.

Изъ овога слѣдує, да є:

I. *Свакій безпарный коренъ изъ положителногъ количества извађенъ, положителанъ, а изъ отрицателногъ количества отрицателанъ.* то єсть:

$\sqrt[3]{+a^3} = +a$; напротив' $\sqrt[3]{-a^3} = -a$.

II. *Напротив' може свакій паровитый коренъ изъ положителногъ количества извађенъ како положителанъ, тако и отрицателанъ быти.* Н. п. $\sqrt{+a^2}$ може быти како $+a$, тако и $-a$; ербо свако собомъ умножено дає $+a^2$. И зато се обичествує при извлаченю парна корена свагда оба знака предъ кореномъ предпоставляти, гди после друга обстоятелства рачуна, у комъ они долазе, показати мораю, кои се одъ оба знака узети има. Тако се пише н. п. $\sqrt{a^2} = \pm a$, и то є $\sqrt{a^2} = +a$, кадъ се изъ други' обстоятелства докаже, да є $+a$ на квадратъ подигнуто; напротив' є $\sqrt{a^2} = -a$, кадъ се изясни, да є отрицателно количество $-a$ на квадратъ подигнуто.

III. Ако бы имали изъ отрицателногъ количества паровитый коренъ извлачити, то се ни представити не може, како є чрезъ умноженіе паровитогъ числа отрицателны' количества, отрицателанъ производъ произићи могао, и слѣдователно є невозможно таковый коренъ указати. Таковый коренъ изъ отрицателны' количества, зовесе *воображено*, *невозможно*, число. Тако є н. п. $\sqrt{-a}$, $\sqrt[4]{-a^4}$ воображено число.

Напротив' сва се друга количества зову *возможна* и *истинна*.

70.

Производъ се на неко достоинство подиже, кадъ му се свакій чинитель воособъ на пожелано достоинство подигне, и ова достоинства међусобно умноже.

Єрбо є н. п. $(абв)^3 = абв \,.\, абв \,.\, абв = а^3б^3в^3$ (по § 66); а тако є исто $(абв)^м = а^мб^мв^м$;
$(72)^3 = (6 . 3 . 4)^3 = 6^3 . 3^3 . 4^3 = 216 . 27 . 64 = 373{,}248$.

А тако се исто напротив' може изъ некогъ производа повольный коренъ извадити, кадъ се изъ свакогъ чинителя коренъ воособъ извуче, и ови корени међусобно умноже. Тако є н. п.

$$\sqrt[м]{а^м б^м} = \sqrt[м]{а^м} \,.\, \sqrt[м]{б^м} = аб;$$
$$\sqrt[3]{27а^3} = \sqrt[3]{27} \,.\, \sqrt[3]{а^3} = 3а.$$

71.

Число коє на концу нулле има, можесе на квадратъ подићи, ако се само знамените цифре на квадратъ подигну, и томе се на последку двапутъ толико нулла приключи, колико таковы̀ коренъ има.

Тако є н. п. $(90)^2 = (9 \,.\, 10)^2$
$= 9^2 \,.\, 10^2 = 81 \,.\, 100 = 8100.$

А тако се исто може число, коє на концу нулле има, на кубусъ подићи, кадъ се само знамените цифре на кубусъ подигну, и томе се на концу трипутъ толико нулла приключи, колико ії таковы̀ коренъ има.

Тако є н. п. $(300)^3 = (3 \,.\, 100)^3$
$= 27 \,.\, 1000000 = 27000000.$

Одтудъ слѣдує, да колико се пута єданъ квадратъ са 100 умножава, толико се пута коренъ са 10 множи, а колико се пута кубусъ єднога числа са 1000 умножава, толико се пута томе принадлежећій коренъ са 10 множи. и обра
но и противно, [illegible] е удоба.

72.

Разбіеніє неко на достоинство подигнути: то подићи треба и числителя и именителя на пожелано достоинство.

Тако є н. п. $\left(\frac{а}{б}\right)^3 = \frac{а}{б} \cdot \frac{а}{б} \cdot \frac{а}{б} = \frac{а^3}{б^3}$ (§ 66).

$$\left(\frac{а}{x}\right)^м = \frac{а^м}{x^м};\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4};\ \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27};$$

И тако се напротив' изъ едногъ разбіенія коренъ извлачи, кадъ се изъ числителя и именителя пожеланый коренъ извуче. Тако є н. п.

$$\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} = \frac{7}{5};\ \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3};$$

$$\sqrt[м]{\frac{а^м}{б^м}} = \frac{а}{б}.$$

73.

Налазесе числа и количества, изъ коій се коренъ совршено извући не може, н. п. $\sqrt{6} >$ быти мора одъ 2, а < 3, и опетъ се не може наћи разбіеніє таково; коє бы ко 2 додаваюћи, совршеный квадратный коренъ одъ 6 дало. Но да се ко вредности таковогъ корена чрезъ десетна мѣста у толико приближити може, у колико точность рачуна изискує, то ће се на своімъ мѣсту показати.

74.

Сва тако са коренным знакомъ назначена числа, изъ кои се коренъ совршено точно извући неда, зовусе *несовршена числа*; тако су н. п. $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{9}$ несовршена числа; напротив' она се зову *совршена числа* изъ кои се коренъ точно извући да; тако су $\sqrt{9}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt[3]{64}$ совршева числа.

Тако и алгебраическа количества, изъ кои се коренъ точно извући недає, зовусе *несовршена алгебраическа количества*, тако су н. п. $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt{(a^2 + x^2)}$, $\sqrt[м]{a^н б}$; напротив' су $\sqrt{a^4}$, $\sqrt[3]{a^6 б^5}$, *совршена алгебраическа количества*, што се изъ њи коренъ точно извући дає.

75.

Свако количество, коє нуллу за изложителя има, равно є єдиницы; то єсть $a^0 = 1$.

Єрбо почемъ *м* єдно цѣло положително число означава, то є $a^м : a^м = a^{м-м} = a^0$ (по § 30.); али є $a^м : a^м = \frac{a^м}{a^м} = 1$ (по § 35), слѣдователно $a^0 = 1$ (по основателномъ правилу).

И будући да a свако, како просто тако и сложено количество представити може, то є и свако количество са изложителѣмъ нулломъ равно єдиницы: тако є $\left(\frac{б}{в}\right)^0 = 1$; $(д - x)^0 = 1$.

76.

Свако количество, коє отрицателногъ изложителя има, равно є разбієнію, коєгъ є числи-

[illegible]

тель исто оно количество са положителнымъ изложителѣмъ, то есть $a^{-м} = \frac{1}{a^{м}}$.

Ербо $a^{м} : a^{2м} = a^{м-2м} = a^{-м}$ (по § 30 число 3);

Такођеръ $a^{м} : a^{2м} = \frac{a^{м}}{a^{2м}} = \frac{a^{м} : a^{м}}{a^{2м} : a^{м}} = \frac{1}{a^{м}}$ (по § 41);

слѣдователно $a^{-м} = \frac{1}{a^{-м}}$ (по основателн. правил.).

И тако е напротив' $\frac{1}{a^{-м}} = a^{м}$; ербо $\frac{1}{a^{-м}} = 1 : a^{-м} = 1 : \frac{1}{a^{м}} = a^{м}$, гди a и $м$ ма когъ свойства быти могу.

Ово намъ дае начинъ, свако разбіеніе као цѣло число представити, или свакогъ чинителя изъ числителя у именителя, и изъ именителя у числителя премѣстити, кадъ при премешћенымъ чинительима знаке изложителя промѣнимо. Тако е н. п.

$$\frac{a}{x^{2}} = a \,.\, \frac{1}{x^{2}} = ax^{-2}; \quad \frac{aб^{2}}{вx^{-м}} = \frac{б^{2}x^{м}}{a^{-1}в};$$

$$\frac{x^{3} - ax}{бв^{3}} = \frac{x(x^{2} - a)}{бв^{3}} = \frac{x^{2} - a}{бв^{3}x^{-1}};$$

$$\frac{5}{9} = 5 \,.\, \frac{1}{9} = \frac{5}{3^{2}} = 5 \,.\, 3^{-2} = 5 \,.\, 9^{-1}.$$

77.

Едночленна достоинства могу се опетъ на друга достоинства подићи, коег е изложитель задатъ, кадъ се изложитель достоинства са да-

тымъ изложителѣмъ умножи, то єсть $(a^{м})^{н} = a^{мн}$:

$^{2}.a^{2}. =$

$$єрбо\ (a^{м})^{н} = a^{м} . a^{м} . a^{м} . a^{м} . . . . . = a^{м+м+м+м} \ldots = a^{мн}.$$

$= a^{5} б^{10} в^{15} г^{20}$

Примѣри.

$$(a^{4})^{3} = a^{4} . a^{4} . a^{4} . = a^{4+4+4} = a^{3 \cdot 4} = a^{12}.$$

$$(a^{м} б^{н})^{4} = a^{м} б^{н} . a^{м} б^{н} . a^{м} б^{н} . a^{м} б^{н} = a^{4м} б^{4н}.$$

$аб^{2} в^{\frac{5}{27}})$

И напротив' *тако се изъ єдночленногъ достоинства коренъ извлачи, кадъ се изложитель достоинства чрезъ изложителя корена дѣли*, то єсть $\sqrt[н]{п^{м}} = п^{\frac{м}{н}}$; тако є $\sqrt[2]{a^{2}} = \pm a^{\frac{2}{2}} = \pm a$. $\sqrt[3]{б^{6}} = б^{\frac{6}{3}} = б^{2}$.

78.

Двочленно количество $a + б$ (по § 63) *на квадратъ подићи*, то ће быти

$$(a+б)^{2} = (a+б)\,(a+б) = a^{2} + aб + aб + б^{2}$$

или $(a+б)^{2} = a^{2} + 2aб + б^{2}$;

то єсть: *квадратъ свакогъ двочленногъ количества состоисе*

1. *Изъ квадрата првогъ члена.*
2. *Изъ двогубогъ производа првогъ члена умноженогъ съ другимъ членомъ.*
3. *Изъ квадрата другогъ члена.*

Ставимо садъ $б = -x$, то ће быти $2aб = -2ax$, а $б^{2} = (-x)^{2} = +x^{2}$; дакле

$$(a - x)^{2} = a^{2} - 2ax + x^{2}.$$

Примѣри.

$$(2ax + б)^2 = 4a^2x^2 + 4aбx + б^2.$$

$$(a^2 - 1)^2 = a^4 - 2a^2 + 1\,;\,(1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2;$$

$$\left(x + \frac{б}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{б}{a}\,x + \frac{б^2}{4a^2};$$

$$\left(бв^2 - \frac{a}{б}\right)^2 = б^2в^4 - 2aв^2 + \frac{a^2}{б^2};$$

$$(99)^2 = (90 + 9)^2 = 8100 + 1620 + 81 = 9801.$$

79.

Вишечленно количество на квадратъ подићи: то поступати треба тако као и са двочленнымъ, почемъ будемо све предидуће членове осимъ последнѣга за првый членъ узели, а последньій членъ као другій членъ будемо сматрали. Тако н. п.

$$(a + б + в)^2 = \left[(a + б) + в\right]^2 = (a + б)^2 + 2\,(a + б)\,в + в^2$$
$$= a^2 + 2aб + б^2 + 2aв + 2бв + в^2;$$

$$\left(a - x + \frac{б}{2}\right)^2 = a^2 - 2ax + x^2 + aб - бx + \frac{б^2}{4};$$

$$(2a^2 - 3ax - 4x^2)^2 = 4a^4 - 12a^3x + 9a^2x^2 - 16a^2x^2 + 24ax^3 + 16x^4;$$

тако є исто $\left[(a + б + в) + г\right]^2 = (a + б + в)^2 + 2\,(a + б + в)\,г + г^2$
$= a^2 + 2aб + б^2 + 2aв + 2бв + в^2 + 2aг + 2бг + 2вг + г^2.$

80.

Изъ овога се види, *да се свакогъ вишечленногъ количества квадратъ состои:*

1. *Изъ квадрата свакога члена поособъ.*
2. *Изъ двогубогъ производа свакога члена, умноженогъ са свыма нѣму предстоећима членовыма.* —

81.

Двочленно количество на кубусъ подићи. То ће быти (по § 64)

$$(а+б)^3=(а+б)^2.(а+б)=(а^2+2аб+б^2)(а+б)$$
$$=а^3+2а^2б+аб^2+а^2б+2аб^2+б^3$$
$$=а^3+3а^2б+3аб^2+б^3.$$

Изъ овога се види, *да се кубусъ двочленногъ количества состои:*

1. *Изъ кубуса првога члена,* $а^3$;
2. *Изъ трогубогъ производа квадрата првога члена умноженогъ са другимъ,* $3а^2б$;
3. *Изъ трогубогъ производа квадрата другогъ члена, умноженогъ съ првымъ,* $3аб^2$; и
4. *Изъ кубуса другогъ члени* $б^3$.

82.

Вишечленно алгебраическо количество на кубусъ подићи, то се представити може, као двочленно, узимаюћи све членове до последнѣга за првый членъ, а последный сматраюћи као другій, и тако подићи на кубусъ. Н. п.

$$(а+б+в)^3=\left[(а+б)+в\right]^3$$
$$=(а+б)^3+3(а+б)^2в+3(а+б)в^2+в^3;$$
$$=а^3+3а^2б+3аб^2+б^3+3(а+б)^2в+3(а+б)в^2+в^3.$$

83.

Основателна правила:

I. *Кадъ равна числа на равна достоинства подигнемо, то су достоинства међусобно равна; подигнемо ли неравна положителна числа на равна достоинства, то є достоинство манѣгъ числа манѣ одъ другога.*

Примѣри.

Тако є $8 = 5 + 3$,	ако є $a = б$,
такођеръ $8^2 = (5 + 3)^2$,	то є $a^м = б^м$.
то єсть $64 = 25 + 30 + 9$.	ако є $a > б$
	то є $a^м > б^м$.

II. *Ако изъ равны чисала равне корене извучемо, то су корени међусобно равни. Ако се изъ неравны положителны чисала равни корени извуку, то ће онай коренъ већій бити, кои є изъ већегъ числа извученъ.*

Примѣри.

Тако є $64 = 25 + 30 + 9$,	$a = б$,
то и $\sqrt{64} = \sqrt{(25 + 30 + 9)}$,	$\sqrt[м]{a} = \sqrt[м]{б}$.
то єсть $\sqrt{64} = \sqrt{(5 + 3)^2}$,	али $a > б$.
и $8 = 5 + 3$.	то є $\sqrt[м]{a} > \sqrt[м]{б}$.

ГЛАВА ДРУГА.

О ИЗВЛАЧЕНЮ КВАДРАТНОГЪ И КУБИЧЕСКОГЪ КОРЕНА ИЗЪ СЛОЖЕНЫ КОЛИЧЕСТВА ПООСОБЪ.

84.

Како се изъ єдночленногъ алгебраическогъ количества квадратный и кубическій коренъ извлачи, то є (у § 77) показано.

Но да бы и квадратный и кубическій коренъ изъ єдногъ датогъ числа, кадъ се коренъ изъ єдне само цифре состои, одма знати могли, то є нуждно друга и трећа достоинства свію єдинственны чисала одъ 1 до 9 на память научити.

Слѣдуюћа таблица може за прегледъ служити:

коренъ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
крадратна числа	1	4	9	16	25	36	49	64	81
кубическа числа	1	8	27	64	125	216	343	512	729

85.

Изъ многочленногъ алгебраическогъ количества квадратный коренъ извући. Будући, да се свако многочленно количество као двочленно (§ 79) сматрати може, и као таково на квадратъ подићи, то се и коренъ изъ нѣга извући може.

Ако се оны' частій опоминѣмо, изъ коій се квадратъ двочленногъ количества $(а + б)^2 = а^2$ $2аб + б^2$ состои, то се подаю за извлаченѣ квадратногъ корена изъ многочленногъ алгебраическогъ количества н. п. изъ

$$а^4 + 6а^3б + 5а^2б^2 - 12аб^3 + 4б^4$$

слѣдуюћа свеобща правила:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{}(а^4 + 6а^3б + 5а^2б^2 - 12аб^3 + 4б^4) = \\
+ а^4 \qquad\qquad\qquad\qquad = а^2 + 3аб - 2б^2 \\
- \\
\hline
+ 6а^3б + 5а^2б^2 - 12аб^3 + 4б^4 \,|\, : 2а^2 \\
+ 6а^3б + 9а^2б^2 \\
- \qquad\quad - \\
\hline
\qquad - 4а^2б^2 - 12аб^3 + 4б^4 \,|\, : (2а^2 + 6аб) \\
\qquad - 4а^2б^2 - 12аб^3 + 4б^4 \\
\qquad + \qquad + \qquad - \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

1. Почемъ смо изъ првогъ члена $а^4$ квадратный коренъ $а^2$ извукли, и овай после знака равности као првый членъ поставили; опетъ овай истый коренъ на квадратъ подићи треба, и подъ првымъ членомъ подписуюћи овай квадратъ, савршити треба отятіе.

2. Будући да се іоштъ двогубый производъ изъ првогъ и другогъ члена у остатку садржавати мора, то дѣлити треба првый членъ $(6а^3б)$ остатка чрезъ двогубу нађену прву часть $(2а^2)$ корена, тако ће быти количникъ $(3аб)$ другій членъ траженог' корена. Са овымъ числомъ умножимо дѣлителя $(га^2)$, тако ћемо добыти двогубый

производъ одъ првога члена и другогъ ($6a^{3}б$); далѣ умножимо овай членъ корена са самымъ собомъ, тако ћемо добыти квадратъ другогъ члена ($9a^{2}б^{2}$); садъ отяти треба оба члена одъ задатогъ количества, тако смо совршеный квадратъ нађеногъ количества ($a^{2} + 3aб$) отузели.

3. Ако є іоштъ некій остатакъ заостао, то є знакъ, да траженый коренъ выше него два члена има; и зато сматрати треба већъ нађена два члена као прву часть корена; и будући да є већъ квадратъ ове части отятъ, то дѣлимо опетъ остатакъ чрезъ двогубый већъ нађеный коренъ (овде то єсть чрезъ $2a^{2} + бaб$), то ће быти количникъ ($-2б^{2}$) слѣдующій членъ корена. Са овымъ новымъ членомъ умножимо опетъ дѣлителя, и подигнимо га и на квадратъ, пакъ отяти треба како онай производъ, тако и овай квадратъ одъ дѣлимка, тако смо квадратъ нађеногъ тричленногъ количества ($a^{2} + 3aб - 2б^{2}$) одъ задатогъ количества отузели. И тако бы могли, кадъ бы іоштъ некій остатакъ се нашао, и четвртый членъ корена наћи, почемъ бы све нађене членове као прву часть корена сматрали, а другу бы часть чрезъ дѣленіе двогубы' свію већъ нађены' членова корена нашли. и проч.

4. Ако є задато количество совршеный квадратъ, то ћемо са овыма овде прописаныма правилама извлаченѣ корена изъ задатогъ алгебраическогъ количества ко концу привести; у противномъ пакъ случаю, ако задато количество не

бы совршеный квадратъ у себи садржавало, то и по овомъ пропису и начину не бы до конца дошли, него бы членови корена безъ конца слѣдовали, као што се у III. примѣру видити може.

Примѣри.

$$
\begin{array}{lllll}
\text{I.} & \multicolumn{4}{l}{\sqrt{(4 - 8ю + 4ю^3 + ю^4)} = 2 - 2ю - ю^2} \\
 & +4 & & & \\
 & - & & & \\
\hline
 & & -8ю + 4ю^3 + ю^4 \,|\, : 4 & & \\
 & & -8ю + 4ю^2 & & \\
 & & + \quad - & & \\
\hline
 & & & -4ю^2 + 4ю^3 + ю^4 \,|\, : 4 - 4ю & \\
 & & & -4ю^2 + 4ю^3 + ю^4 & \\
 & & & + \quad - \quad - & \\
\cline{4-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{II.} & \multicolumn{2}{l}{\sqrt{\left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4}\right)} = x - \frac{a}{2}} \\
 & +x^2 & \\
 & - & \\
\hline
 & & -ax + \frac{a^2}{4} \,\Big|\, : 2x \\
 & & -ax + \frac{a^2}{4} \\
 & & + \quad - \\
\hline
 & & 0
\end{array}
$$

III. $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} \dots$

$+ a^2$

$-$

$- x^2 \mid : 2a$

$- x^2 + \frac{x^4}{4a^2}$

$+ \quad -$

$- \frac{x^4}{4a^2} \mid : 2a - \frac{x^2}{a}$

$\frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6}$

$+ \quad - \quad -$

$\frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6} \mid : 2a \dots$

IV. $\sqrt{(9а^2б^2 + 12абв^2 + 4в^4 - 18аб - 12в^2 + 9)} = 3аб + 2в^2 - 3.$

V. $\sqrt{(м^6x^2 - 8м^3x^2 + 16x^2 + 6м^3xю^2 - 24xю^2 + 9ю^4)} = м^3x - 4x + 3ю^2.$

VI. $\sqrt{(ю^4 + 4ю^3 - 8ю + 4)} = ю^2 + 2ю - 2.$

86.

Изъ многочленногъ алгебраическогъ количества кубическій коренъ извући.

За извлаченѣ корена кубическогъ теку изъ већъ познаты' частій, изъ кои се кубусъ двочленногъ количества $(а + б)^3 = а^3 + 3а^2б + 3аб^2 + б^3$ состои (§ 81), слѣдуюћа обшта правила:

1. Изъ првога члена задатогъ количества н. п. $8а^3 + 36а^2б + 54аб^2 + 27б^3$, то єсть изъ ($8а^3$) извући треба коренъ ($2а$), то ће быти ово првый членъ траженногъ корена; и одтудъ происходећій кубусъ отяти валя одъ задатогъ количества.

2. Будући да се садъ іоштъ у остатку трогубый производъ изъ квадрата прве части, умноженногъ са другомъ содржавати мора (§ 81); то дѣлити треба чрезъ трогубый квадратъ већъ нађене прве части ($12а^2$), тако ће быти количникъ ($3б$) друга часть траженногъ корена. Са овымъ количникомъ умножити треба дѣлителя, то ће быти ово ($36а^2б$) трогубый производъ квадрата прве части у другу. Далѣ умножити треба трогубый крадратъ друге части са првомъ (то ће быти $54аб^2$); пакъ после подићи треба іоштъ и другу часть на кубусъ ($27б^3$); и будући да се све ово у остатку садржавати мора (§ 81), то ово одъ остатка и отяти треба.

3. Ако бы іоштъ остатакъ заостао, као у слѣдуюћемъ II. примѣру, то є знакъ, да се коренъ изъ выше него изъ два члена состои. Зато сматрати треба већъ нађена два члена ($2x^2 + x$) као прву часть корена, и тражити треба као пређе другу часть, дѣлећи остатакъ чрезъ трогубый квадратъ већъ нађеногъ корена, тако ће дати количникъ трећій членъ корена. Са овымъ количникомъ умножимо дѣлителя; трогубый квадратъ овога количника множећи са предидућима члено-

вима корена; и почемъ смо напослѣдку и овога количника на кубусъ подигли, отятіє одъ дѣлимка савршити треба. И тако се ово послованћ при свакомъ остатку повторава, почемъ свагда нађене членове корена као прву частъ сматрали и другу частъ тражили будемо.

4. Ако се на овай начинъ послованћ сврши, тако да никаква остатка неостане, то є задато количество совршеный кубусъ, одъ кога є коренъ нађенъ. У противномъ случаю, ако задато количество не бы совршеный кубусъ быо, тако се као у слѣдуюћемъ III. примѣру послованћ никадъ савршити неће.

Примѣри.

$$\text{I. } \sqrt[3]{(8а^3 + 36а^2б + 54аб^2 + 27б^3)} = 2а + 3б.$$

$$\begin{array}{l}
+\ 8а^3 \\
\underline{-} \\
\quad +\ 36а^2б + 54аб^2 + 27б^3 \;|\; : 12а^2 \\
\quad +\ 36а^2б + 54аб^2 + 27б^3 \\
\quad \underline{\ -\qquad\quad -\qquad\quad -\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

II. $\sqrt[3]{(8x^6 + 12x^5 - 30x^4 - 35x^3 + 45x^2 + 27x - 27)} = 2x^2 + x - 3$

$$
\begin{array}{l}
\underline{\overset{+}{-}\, 8x^6} \\
\quad 12x^5 - 30x^4 - 35x^3 + 45x^2 + 27x - 27 \mid : 12x^4 \\
\underline{\overset{+}{-}\, 12x^5 \overset{+}{-} 6x^4 \overset{+}{-} x^3} \\
\quad\quad 36x^4 - 36x^3 + 45x^2 + 27x - 27 \mid : 12x^4 + 12x^3 + 3x^2 \\
\underline{\overset{+}{-}\, 36x^4 \overset{-}{+} 36x^3 \overset{-}{+} 9x^2 \overset{+}{-} 54x^2 \overset{+}{-} 27x \overset{-}{+} 27.} \\
\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

III. $\sqrt[3]{(a^3 + x^3)} = a + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^6}{9a^5} + \frac{5x^9}{81a^8} - \frac{10x^{12}}{243a^{11}} \cdots$

IV. $\sqrt[3]{(8a^3м^3 + 36a^2м^2x^2 + 54aмx^4 + 27x^6}$
$- 48a^2м^2 - 144aмx^2 - 108x^4 + 96aм$
$+ 144x^2 - 64) = 2aм + 3x^2 - 4;$

V. $\sqrt[3]{(а^3 + 6а^2б + 9а^2в + 12аб^2 + 36абв + 27ав^2 + 8б^3 + 36б^2в + 54бв^2 + 27в^3)} = а + 2б + 3в;$

87.

Извлаченѣ квадратногъ корена изъ числа быва на тай истый начинъ, чрезъ расправлянѣ квадрата у све нѣгове єдинствене производе, при чему є врло полезно у свакомъ случаю образацъ $а^2 + 2аб + б^2$ изъ чега се квадратъ состои, предъ очима имати.

88.

Декадическ
есетична
ично
знач
Зато
у десет
345 6

По декадической мѣри числа состоисе квадратъ єдиница изъ 1 или 2 цифре, квадратъ десетина изъ 3 или 4 цифре, квадратъ стотина изъ 5 или 6 цифрій и т. д. Вообще квадратъ нема више него двапутъ толико цифрій, колико іи коренъ има. Тако н. п.

$1^2 = 1.$ и $9^2 = 81.$
$10^2 = 100.$ $99^2 = 9801.$
$100^2 = 10000.$ $999^2 = 998001.$
$1000^2 = 1000000.$ $9999^2 = 99980001.$

Изъ овогъ слѣдуе:

1. Да се при свакомъ квадрату у цифрама, таки познати може, изъ колико се частій коренъ состои, кадъ полу числа цифрій узмемо,

колико іи квадратъ има, при чему безпарно число цифрій са єданъ умножити треба; или) кадъ се квадратъ одъ десна на лево у классе подѣли, даваюћи у сваку классу по две цифре, ма кадкадъ у последньой изъ лева класси само єдна остала; (будући да квадратъ нема свагда двапутъ толико цифрій, колико іи коренъ има, него често у єдну манѣ. Колико класса испадне, толико частій има коренъ.)

2. Ако се квадратъ изъ безпарногъ числа цифрій состои, то є прва частъ корена свагда маня одъ 4.

3. Квадратъ сваке части особенно у нѣму принадлежећой класси тражитисе има, после кога одма двогубый производъ у слѣдуюћой части налазисе.

89.

Изъ єдногъ задатогъ числа квадратный коренъ извући.

1. Задато число подѣлити треба у классе одъ десна на лево, даваюћи у сваку классу по две цифре, а у последньой изъ лева класси може быти и єдна (88).

2. Будући да се у последньой изъ лева класси квадратъ прве части, или a^2 содржава, то потражити треба у коренной таблицы (§ 84) квадратъ, кои бы овой цифри найближій быо, и къ

той припадаюћій коренъ у количникъ ставити валя, кое ће быти прва часть корена = a. Кои опетъ на квадратъ почемъ смо подигли, одъ последнѣ классе отяти валя.

3. У остатку іоштъ налазисе дакле $2аб + б^2$. Зато удвоити треба нађену прву часть (4), и почемъ смо слѣдуюћу классу спустили и ко остатку приключили, ставити треба удвоену прву часть корена на подобіе дѣлителя, са коимъ дѣлећи у прве две (53) цифре, то ће (8) у (53) ићи (6) пута, кое число 6 како у количнику, тако и у дѣлителю ставити валя. Са овомъ нађеномъ другомъ частію корена 6 умножити треба дѣлителя (86) и производъ одтудъ исходећій одъ дѣлимка отяти, то есть (516) одъ (538).

$\sqrt{21 | 38 | 13 | 76} = 4624$
16
538 : 86
516
2213 : 922
1844
36976 : 9244
36976
0

4. Ако се коренъ изъ више цифрій состои, то сматрати треба већъ нађене цифре (46) као прву часть корена, и тражити треба као и пређе, другу часть; зато ставити треба ко остатку (22) слѣдуюћу классу (13), дѣлећи (2213) чрезъ удвоеный већъ нађеный коренъ (92), тако да последня цифра изъ десна (3) одъ деобе изостане; на овай начинъ быће количникъ (2) трећа цифра траженогъ корена. Овай количникъ опетъ приключити треба изъ десна дѣлителю, множећи

умножена дѣлителя (922) са количникомъ (2), и производъ одъ тудъ происходећій одъ дѣлимка отяти треба.

5. И тако се ко остатку свагда слѣдуюћа класса спушћа и додає, и чрезъ удвоенный изнађеный коренъ дѣли, *да свагда последня изъ десна цифра одъ деобе изостане;* количникъ се ко већь нађеннымъ цифрама корена приключує, и равнымъ начиномъ и ко дѣлителю додає, пакъ после умноженный дѣлитель са нађеныма цифрама корена множисе, и производъ одъ дѣлимка отузимасе.

6. Ако бы производъ изъ количника и умноженногъ дѣлителя превеликій испао, и одъ принадлежећегъ дѣлимка не бы се отяти могао, то бы знакъ быо, да є количникъ врло великій узетъ, и да се маньій узети мора. У слѣдуюћему примѣру числу I. при првомъ дѣленю морамо казати 4 у 16 иде 3 путъ, а садржавало бы се при обичномъ дѣленію 4 пута. Но свагда є совѣтно при извлаченю квадратног корена, у почетку свагда већега количника узети, єръ при совршеномъ отятію неможесе тако лако као при обичномъ дознати, єли количникъ премаленъ узетъ.

7. Ако се небы удвоенно већь нађеногъ корена число нигди у дѣлимку садржавало, то се мора у корену на мѣсто количника нулла ставити; пакъ после спустивше ко остатку обе цифре слѣдуюће классе, продужити треба рачунъ по го-

ре већъ прописаномъ начину као што се у примѣру II. видити може.

8. Ако су већъ све классе спуштене, и последнѣ се отятіє губи, то є знакъ, да є задато число совршенный квадратъ, одъ коєгъ є нађено число коренъ. Остане ли пакъ при последнѣмъ отятію, (примѣръ число I) іоштъ некій остатакъ, то є знакъ да задато число ніє совршенный квадратъ, и слѣдователно да є коренъ овога числа несовршено число.

Примѣри.

I.

$\sqrt{5|68|76} = 238$

4

168 : 43

129

3976 : 468

3744

323 остатакъ

II.

$\sqrt{65|48|04|64|00} = 80920$

64

148 : 16

14804 : 1609

14481

32364 : 16182

32364

0

III.

$\sqrt{1|56|25} = 125$

1

56 : 22 ·

44

1225 : 245

1225

0

IV.

$\sqrt{55|95|04} = 748$

49

695 : 144

576

11904 : 1488.

11904

0

90.

Но да бы се вредности несовршенногъ корена чрезъ десетна мѣста по вольи приближити могли, то поступаймо на слѣдуюћiй начинъ:

1. Приключити треба ко задатомъ числу (у овде преставлѣнномъ примѣру ко 1415), или што є свеєдно, приключити треба, кадъ су већъ све классе спуштене, ко последнѣмъ остатку (46) єдну классу, т. є. две нулле, и дѣлимо ово (4600) чрезъ удвоєный већъ нађеный коренъ (74), то ће быти количникъ (6) опетъ єдна цифра корена. Но будући да є овай коренъ десетъ пута већiй одъ траженога; єръ є чрезъ додатка двею нулла квадратъ са 100 умноженъ, то дѣлити треба овай коренъ чрезъ 10, то єсть, одсећи треба одъ овога корена одъ десна єдно десетно мѣсто, то ћемо право добыти траженый коренъ до десетине.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{14|15} = 37{,}61 \\
\underline{9} \\
515 : 67 \\
\underline{469} \\
4600 : 746 \\
\underline{4476} \\
12400 : 752
\end{array}
$$

При одвић[illegible] корен[illegible] десетинто[illegible] и труди [illegible] скопити [illegible] десет иг 46 от[illegible] та са 2 десе[illegible]

2. Ако бы хотели коренъ јоштъ точнiє имати, то опетъ ко остатку приключити (124) треба єдну классу нулла, и почемъ смо ово са удвоєнымъ већъ нађенымъ кореномъ (752) безъ призрѣнiя на десетна мѣста, дѣлили, и количникъ на своє мѣсто поставили, кои ће стотину означавати, и друго мѣсто десетны разбiєнiя быти; и почемъ смо овай количникъ са дѣлителѣмъ умножи-

ли, и производъ подъ дѣлимкомъ ставили, отятіє обычно савршити треба.

3. И тако бы смо се могли, безъ конца, корену све выше и выше приближавати, кадъ бы свагда остатку по єдну классу нулла додавали, и пословань далѣ продуживали, безъ да бы до таковога корена дошли, кои бы, кадъ бы се са самымъ собомъ умножіо, задато количество произвео.

Примѣри.

$\sqrt{3|46|95} = 186,2$
1
246 : 28
224
2295 : 366
2196
9900 : 3722
7444
2456 остатакъ.

$\sqrt{5} = 2,236$
4
100 : 42
84
1600 : 443
1329
27100 : 4466
26796
304 остатакъ.

На овай начинъ є у послѣднѣмъ примѣру $\sqrt{5} > 2,236$, али є и $\sqrt{5} < 2,237$; а ако бы извлаченѣ корена далѣ продужили, то ће се наћи да є $\sqrt{5} > 2,23606797$, и $\sqrt{5} < 2,23606798$ и проч.

91.

Ако бы имали изъ десетногъ разбієнія, или изъ цѣлога числа поредъ приключеногъ десетногъ разбіенія квадратный коренъ извући, то примѣтити треба слѣдуюћа правила.

1. Ако бы десетно разбіеніе безпарно число десетны мѣста имало, то острагу додати валя єдну нуллу, пакъ после непазећи на запятую, извући треба квадратный коренъ, као канда бы изъ цѣлога числа извлачити имали.

[illegible]

2. Но будући да се чрезъ изоставлянѣ запяте, задато число са 1, поредъ толико приключены нулла, колико се десетны' мѣста налази, умножава; то се и коренъ чрезъ то са 1 поредъ полу толико приключены' нулла умножава. *Зато, одцѣпити треба одъ нађенога корена толико десетны' мѣста, колико се у числу десетны' класса налази, то ћемо имати пожеланый коренъ.*

3. Ако бы хотѣли коренъ са выше десетны' мѣста опредѣлити, то приключити треба ко последнѣмъ остатку єдну классу нулла, и поступати треба, као што є (у § 90) показано.

$\sqrt{5|94,|82|33|21} = 24, 389$
4
194 : 44
176
1882 : 483
1449
43333 : 4868
38944
438921 : 48769
438921
0

$\sqrt{0,|94|30} = 0,971$
81
1330 : 187
1309
2100 : 1941
1941
159 остатакъ.

92.

Ако бы имали изъ обычногъ разбіенія квадратный коренъ извлачити, то се мора (§. 72.) изъ числителя и именителя коренъ извуђи. Само можемо себи посао олакшати, ако є именитель несовршенъ, умноженіємъ числителя и именителя са именительмъ, чрезъ коє ђе именитель совршенъ постати; тако є н. п.

$$\sqrt{\frac{2}{5}}=\sqrt{\frac{10}{25}}\,\frac{\sqrt{10}}{5}=\frac{3{,}1622}{5}=0{,}6324$$

Или се може задато разбіеніє у десетно разбіеніє преобратити, пакъ онда коренъ извуђи. (§ 91).

$$\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{0{,}375}=\sqrt{0{,}3750}=0{,}61.$$

Изъ задатогъ числа трећій коренъ или кубусъ извуђи.

За извлаченѣ кубическогъ корена изъ свакогъ са много цифрій написанога числа (н. п. 408518488) примѣтити имамо слѣдуюђа правила:

1. Подѣлити треба задато число одъ десна на лево у классе, даваюђи у сваку классу по тры цифре, гди последня на лево може имати колико іой остане; тако ђесе коренъ изъ толико цифрій состояти, колико се класса налазило буде.

2. Будуђи да се кубусъ найвеђе цифре корена у првой класси изъ лева (у 408) состои, то извуђи треба изъ ове классе коренъ кубиче-

скій; или ако небы совршено кубическо число было, то узети треба найближе мање кубическо число (343), и почемъ смо одтудъ коренъ извукли (7), кои ће дати прву цифру траженога корена; и после овога корена кубусъ отяти треба одъ прве классе; (343 одъ 408 остаю 65).

3. Будући, да се у остатку (65) поредъ леве цифре слѣдуюће классе (5) утроєный производъ изъ квадрата нађены цифрій множенъ са првомъ слѣдуюћомъ цифромъ, садржавати мора; то спустити треба ко остатку прву цифру слѣдуюће классе (655), и дѣлити треба ово число чрезъ утроєный квадратъ већъ нађеногъ корена (147); то ће количникъ быти (4) друга цифра траженогъ корена, после чега се и обе остале цифре (18) слѣдуюће классе спусте. Могу се ове цифре одъ слѣдуюће классе (518) на єданъ путъ ко остатку (65) спустити и приключити, само онда при дѣленю две последнѣ цифре (18) дѣлимка изоставити треба.

$$\sqrt[3]{408|518|488} = 742.$$

343

65518 : 147

588

336

64

3294488 : 16428

32856

888

8

0

После умножити треба са количникомъ (4) дѣлителя ($4.147 = 588$), далѣ умножити треба утроєный квадратъ количника са већъ нађеномъ првомъ частію ($3.\ 4^2.\ 7 = 336$); напослѣдку и количникъ (4) подигнесе на кубусъ (64), поставляюћи ова три производа, кои се у дѣлимку садржавати мораю ($3а^2б + 3аб^2 + б^3$), тако єданъ подъ другій, да се свагда слѣдуюћій производъ са єднымъ мѣстомъ далѣ на десно помакне, пакъ после отятіє савршити треба.

4. Ко остатку (3294) спустити треба слѣдуюћу классу (488), пакъ сматраюћи већъ нађене цифре (74) као прву часть корена, тражити треба као и пре другу часть; зато дѣлити треба остатакъ (3294488) чрезъ утроєный квадратъ већъ нађеногъ корена ($3 . 74^2 = 16428$) тако, да послѣднѣ две цифре (88) одъ дѣленія изостану, тако ће быти количникъ (2) трећа цифра траженога корена; са овымъ количникомъ множисе дѣлитель ($2 . 16428 = 32856$); пакъ после умножити треба утроєнный квадратъ овога количника са предидућима нађенима цифрама корена ($32 . {}^2 . 74 = 888$); напоследку и количникъ подићи треба на кубусъ ($2^3 = 8$); ова тры производа собравше у єданъ збиръ, овай збиръ одъ дѣлимка отяти треба, и проч.

5. Ако бы збиръ одъ она три производа гдѣгодъ великій испао, да се одъ дѣлимка не бы отяти могао, то є знакъ, да є количникъ превеликъ узетъ, и да га умалити валя.

Ако ли се дѣлитель у дѣлимку нигди не бы садржавао, то се у корену на мѣсто количника нулла поставити мора; пакъ после опетъ спустивше єдну классу доле, продужити треба дѣленіє по прописаномъ начину, као што се у примѣру овде 1 видити може.

6. Ако су већъ на овай начинъ све классе спуштене, и последнѣ се отятіє безъ остатка савршило, то є задато число совршено кубическо число; ако пакъ при последнѣмъ отятію іоштъ некій остатакъ остане, као у примѣру 2, то задато число ніє совршенно кубическо число, и траженный кубическій коренъ є совршенно число.

Примѣри.

$\sqrt[3]{131|096|512} = 508$
125
6096 : 75
6096512 : 7500
60000
9600
512
0

$\sqrt[3]{238|368|596} = 620$
216
22368 : 108
216
72
8
40596 : 11532
40596 остатакъ.

94.

Ако бы се хотѣли несовршенномъ кубическомъ корену чрезъ десетна мѣста приближити, то приключити треба ко задатоме числу, или што є све єдно, ко послѣднѣму остатку єдну классу нулла, и тражити треба по прописаномъ начину іоштъ єдну цифру корена. Но будући да се са додаткомъ єдне классе нулла, число са 1000 умножава, слѣдователно чрезъ то и кубическій коренъ десетъ пута веђій постає, него траженый коренъ, то дѣлити треба нађеный коренъ чрезъ 10; то єсть одсѣћи треба изъ десна єдно десетно мѣсто, и тако ће быти коренъ до десетине право нађенъ. И тако се могу по произволенію іошть више десетны̓ мѣста корена пронаћи, почемъ свагда ко остатку по єдну класу нулла додамо.

Примѣри.

$\sqrt[3]{4|827} = 16,9$

1

3827 : 3

18

108

216

731000 : 768

6912

3888

729

191 остатакъ.

$\sqrt[3]{10} = 2,15$

8

2000 : 12

12

6

1

739000 : 1323

6615

1575

125

61625 остатакъ.

95.

Ако бы имали изъ десетногъ разбіенія, или изъ цѣлога числа поредъ приключенногъ десетногъ разбіенія коренъ кубическій извуђи, то додати треба десетномъ разбіенію острагу єдну или две нулле, тако да число десетны̓ мѣста са 3 дѣлимо буде; пакъ после извући треба кубическій коренъ аки бы цѣло число было, оддѣлююћи чрезъ запяту у корену толико десетны' цифрій, колико десетны' класса има, тако ће ово исканый коренъ быти. Єрбо чрезъ изоставлянѣ запяте, число се толико пута са 1000 умножава, колико се десетны' мѣста налази; слѣдователно є кубическій коренъ такођеръ са 10 умноженъ, зато се мора опетъ толико пута чрезъ 10 дѣлити, коє се оддѣленіємъ толики' десетны' цифрій, колико се класса налази, проузрокує.

Иначе може се, ако бы се коренъ са іошть више десетны' мѣста изискивао, по произволенію опредѣлити, почемъ свагда ко остатку по єдну классу нулла додали, и слѣдуюћу десетну цифру тражили будемо.

Примѣри.

$\sqrt[3]{70,|957|944} = 4,14$
64
6957 : 48
48
12
1
2036944 : 5043
20172
1968
64
0

$\sqrt[3]{0,|584|600} = 0,836$
512
72600 : 192
576
216
27
12813000 : 20667
124002
8964
216
322944 остат.

96.

Ако изъ разбіенія, коєгъ є именитель несовршеный кубусъ, кубическій коренъ извући треба, то се може именитель совршенымъ учинити, кадъ числителя и именителя са квадратомъ именителя умножимо. Тако є н. п.

[illegible]

$$\sqrt[3]{\frac{5}{4}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 16}{4 \cdot 16}} = \sqrt[3]{\frac{80}{64}} = \frac{\sqrt[3]{80}}{4} = \frac{4,3088}{4} = 1,0772.$$

Или ако преобратимо разбіеніє найпре у десетно разбіеніє, пакъ после извучемо кубическій коренъ (§ 94).

Примѣчаніє. Ако таблицу квадратны’ и кубически’ чисала имамо, може се извлаченѣ квадратногъ и кубическогъ корена у много олакшати. Будући да такове таблице обычно квадратна и кубическа числа свію корена одъ 1 до 1000 садржаваю, то наћи можемо у ньой свагда три прве цифре одъ траженогъ корена, пакъ предложено число, изъ кога се коренъ извући има, ма се изъ каквогъ числа цифрій состояло, пакъ было оно цѣло число, или поредъ себе и десетна мѣста имало. Н. п. кадъ бы изъ 34,6853 кубическій коренъ извући имали, то додати треба остраг толико нулла, да се десетна мѣста точно у классе подѣлити могу, тако сматраюћи іи као цѣло число, то єсть као 34685300. Садъ се у таблицы найближе манѣ кубическо число

34645976. и нѣговъ коренъ 326 наћи може; зато су три прве цифре траженога корена = 3,26; ако садъ ово кубическо число 34645976 одъ 34685300 отяти будемо, то ће быти остатакъ 39324. Ако бы пакъ желили овай коренъ са іоштъ выше десетнымъ мѣстама имати, то дѣлити треба овай остатакъ, почемъ смо му три нулле додали, чрезъ утроенный квадратъ већъ нађенога корена, и проч.

Крај у IV разреду гимназије.

ГЛАВА ТРЕЋА.

О РАЧУНУ КОРЕННЫ' КОЛИЧЕСТВА.

97.

Сва она количества, коя се са кореннымъ знакомъ означена налазе, зовусе *коренна количества.* И кадъ се изъ єднога количества коренъ извуче, и онда се цѣло изясненіє зове *коренно количество.* Ако є коренъ несовршенъ, тако да се точно извући неда, и само се назначити мора, то се таково количество зове *несовршено коренно количество*, или на краће *несовршено количество.* Тако су н. п. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{аб^2}$, $\sqrt[4]{5в}$ и тако далѣ, количества несовршена.

98.

Коренна количества, при коима се онай істій корена изложитель находи, зовусе *коренна количества равноименна.* Тако су $\sqrt{5}$, $\sqrt{аб^2}$, $\sqrt{7ю}$ коренна количества равноименна; напротивъ су $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{a}$ *разноименна.*

99.

Свако се количество коренно може, у нуждномъ случаю, безъ кореннога знака као достоинство са разбієнымъ изложителѣмъ написати, кадъ се изложителю количества подъ знакомъ, коренный изложитель као именитель подпише.

Єръ є $\sqrt[н]{a^м} = a^{\frac{м}{н}}$, гди *м* и *н* ма коє число представити може; а тако є (по § 76):

$$\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}},\ \sqrt[3]{аб^3} = a^{\frac{1}{3}}б;\ \sqrt[4]{(a^2-x^3)}=(a^2-x^3)^{\frac{1}{4}};$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{a^2-x^2}} = \sqrt[3]{a(a^2-x^2)^{-1}} = a^{\frac{1}{3}}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{3}};$$

И тако се напротив' свако количество, коє за изложителя разбієніє има, може са кореннымъ знакомъ написати, кадъ се именитель као изложитель корена, а числитель као изложитель количества подъ кореннымъ знакомъ постави.

Тако є н. п. $а^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{а^2}$; $б^{\frac{2}{3}}в^{\frac{1}{5}}=\sqrt[8]{(б^2в)}$;

$(а^2-x^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{(а^2-x^2)}$; $(а^2-x^2)^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(а^2-x^2)^{-2}}$

$$=\sqrt[3]{\frac{1}{(а^2--x^2)^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(а^2-x^2)^{-2}}}.$$

100.

Ако се при коренномъ количеству као изложитель корена, тако и изложитель достоинства подъ знакомъ са некимъ истымъ количествомъ умножи, или дѣли, то количество остає непремѣнно. То єстъ $\sqrt[н]{а^м}=\sqrt[нп]{а^{мп}}$.

Єръ $\sqrt[н]{а^м}=а^{\frac{м}{н}}=а^{\frac{мп}{нп}}=\sqrt[нп]{а^{мп}}$ (по § 99);

Или ако є $п=\frac{1}{р}$, то є $\sqrt[н]{а^м}=\sqrt[\frac{н}{р}]{а^{\frac{м}{р}}}$;

Тако є исто $\sqrt[3]{а^2}=\sqrt[6]{а^4}$; $\sqrt{аб^3}=\sqrt[\frac{2}{3}]{а^{\frac{1}{2}}б}$;

$\sqrt[4]{а}=\sqrt{а^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\sqrt{а}}$; $\sqrt[6]{а}=\sqrt{а^{\frac{1}{3}}}=\sqrt{\sqrt[3]{а}}=\sqrt[3]{\sqrt{а}}$.

И тако се може изъ єдногъ количества четвртый коренъ извући, кадъ се найпре другій коренъ, пакъ изъ овога іоштъ єдинпутъ другій коренъ извуче. А тако се може и шестій коренъ извући, кадъ се изъ другогъ корена трећій коренъ, или изъ трећегъ корена другій коренъ извуче, и тако далѣ.

101.

Коренна количества, кодъ кои' се количество подъ знакомъ у такове чинителѣ разправити дає, *да еданъ или више одъ ньи совршена достоинства по изложителю корена постати могу, овымъ се начиномъ одъ части совршенымъ учинити могу, кадъ се изъ количества, коя су совршена достоинства, коренъ извуче, и тай се као чинитель предъ знакомъ постави; н. п.*

$$\sqrt[м]{(а^{м}вг^{2м})} = аг^{2}\sqrt[м]{в}.$$

Еръ $\sqrt[м]{(а^{м}вг^{2м})} = а^{\frac{м}{м}}в^{\frac{1}{м}}г^{\frac{2м}{м}} = аг^{2}в^{\frac{1}{м}}$ (по § 70),

$в^{\frac{1}{м}} = \sqrt[м]{в}$ (по § 99); слѣдователно

$$\sqrt[м]{(а^{м}вг^{2м})} = аг^{2}\sqrt[м]{в}.$$

Примѣри.

$$\sqrt[3]{(16а^{4}б)} = \sqrt[3]{(2\,.\,8\,.\,а^{3}\,.\,а\,.\,б)} = 2а\sqrt[3]{(2аб)};$$

$$3\sqrt{(8а^{3}б^{5})} = 3\sqrt{(2\,.\,4\,.\,а^{2}\,.\,а\,.\,б^{4}\,.\,б)} = 6аб^{2}\sqrt{(2аб)};$$

$$2\sqrt{(а^{2}x^{2} - x^{4})} = 2\sqrt{x^{2}(а^{2} - x^{2})} = 2x\sqrt{(а^{2} - x^{2})};$$

$$\sqrt{(3а^{2}в + 6абв + 3б^{2}в)} = \sqrt{3в(а^{2} + 2аб + б^{2})}$$

$$= (а + б)\sqrt{3в}.$$

102.

Тако се могу количества предъ кореннымъ знакомъ подъ знакъ поставити, кадъ їи на оно одъ коренна изложителя назначено достоинство подигнемо, и количества подъ знакомъ находећасе съ ньима умножимо;

$$a\sqrt[м]{б} = a^{\frac{м}{м}} \cdot б^{\frac{1}{м}} = \sqrt[м]{a^м б};$$

$$3a\sqrt{2a} = \sqrt{18a^3};$$

$$2\sqrt[3]{a^2 - x^2} = \sqrt[3]{(8a - 8x^2)};$$

$$(a - x)\sqrt{(a + x)} = \sqrt{(a - x)^2 (a + x)}$$

$$= \sqrt{(a^2 - x^2)(a + x)}.$$

И на овай начинъ дає се пресудити, коє є одъ два коренна количества равноименна, коя предъ и подъ знакомъ разна количества имаю, веће или манѣ; тако н. п. $2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}$; єръ $2\sqrt{7} = \sqrt{28}$, а $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$.

103.

Разноименна коренна достоинства безъ промѣне ньіове вредности, могу се на равноименна преобратити, кадъ ій као достоинства са разбієннымъ изложителѣмъ представимо (по § 99), *и после ове разбієнне изложителѣ на равноименне доведемо, пакъ ій опетъ такове као коренна количества напишемо.*

Примѣри.

$$\begin{cases} \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8} \\ \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}. \\ \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}. \\ \sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{7^4} = \sqrt[12]{2401}. \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt[н]{аб} = а^{\frac{1}{н}} б^{\frac{1}{н}} = а^{\frac{3м}{3мн}} б^{\frac{3м}{3мн}} = \sqrt[3мн]{а^{3м} б^{3м}} \\ \sqrt[3]{а^{н} в} = а^{\frac{н}{3}} в^{\frac{1}{3}} = а^{\frac{мнн}{3мн}} в^{\frac{мн}{3мн}} = \sqrt[3мн]{а^{мнн} в^{ми}}. \\ \sqrt[м]{а^{3}} = а^{\frac{3}{м}} = а^{\frac{9н}{3мн}} = \sqrt[3мн]{а^{9н}}.\end{array}\right.$$

На овай начинъ дознатисе може, кое е одъ два разноименна алгебраическа количества веће. Тако е н. п. $\sqrt[4]{5} > \sqrt[6]{11}$; еръ е $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{125}$, а напротив' $\sqrt[6]{11} = \sqrt[12]{121}$.

104.

Коренна се количества могу собрати и отяти, кадъ ій са обычнымъ собранія и отятія знакомъ союзимо, и налазеће се равноименне членове (по § 23) *скратимо; а често се текъ онда равноименна количества добію, кадъ се коренна количества* (по § 101) *скрате.*

Примѣри.

$7\sqrt{8} + 5\sqrt{8} = 12\sqrt{8} = 24\sqrt{2}$.

$\sqrt{50} - \sqrt{18} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$$\sqrt[3]{16а^3б} + \sqrt{4а^2б} - \sqrt{а^2б} - \sqrt[3]{54а^3б}$$
$$= 2а\sqrt[3]{2б} + 2а\sqrt{б} - а\sqrt{б} - 3а\sqrt[3]{2б}$$
$$= а\sqrt{б} - а\sqrt[3]{2б}.$$

$$3\sqrt[3]{(8 + 16\sqrt{5})} - 2\sqrt[3]{(1 + \sqrt{20})}$$
$$= 3\sqrt[3]{8(1 + 2\sqrt{5})} - 2\sqrt[3]{(1 + \sqrt{4 \,.\, 5})}$$
$$= 6\sqrt[3]{(1 + 2\sqrt{5})} - 2\sqrt[3]{(1 + 2\sqrt{5})}$$
$$= 4\sqrt[3]{(1 + 2\sqrt{5})}.$$

105.

При умноженію коренны᾽ количества, мораюсе коренна количества найпре на равноименна преобратити, пакъ после умножити треба како количества подъ знакомъ находећасе, тако и чинителѣ предъ знакомъ.

$$а\sqrt[м]{б}\,.\,в\sqrt[н]{д} = аб^{\frac{1}{м}}\,.\,вд^{\frac{1}{н}} = авб^{\frac{н}{мн}}д^{\frac{м}{мн}}$$

$$= ав\sqrt[мн]{б^{н}}\,.\sqrt[мн]{д^{м}} = ав\sqrt[мн]{(б^{н}д^{м})}.$$

Примѣри.

$$3\sqrt{6}\,.\,4\sqrt{2} = 12\sqrt{12} = 24\sqrt{3}.$$

$$5\sqrt[3]{3}\,.\,\sqrt{6} = 5\sqrt[6]{9}\,.\sqrt[6]{216} = 5\sqrt[6]{1944}.$$

$$\sqrt[4]{20}\,.\,6\sqrt{3} = \sqrt{\sqrt{20}}\,.\,6\sqrt{3} = \sqrt{(2\sqrt{5})}\,.\,6\sqrt{3}$$

$$= 6\sqrt{(6\sqrt{5})}.$$

$$2\sqrt{3}\,.(6 - \sqrt{7}) = 12\sqrt{3} - 2\sqrt{21}.$$

$$а\sqrt{бв}\,.(3\sqrt{аб} - \sqrt{в}) = 3а\sqrt{аб^{2}в} - а\sqrt{бв^{2}}$$

$$= 3аб\sqrt{ав} - ав\sqrt{б}.$$

$$(\sqrt{а}+\sqrt{б})\,.(\sqrt{а}-\sqrt{б}) = \sqrt{а^{2}} - \sqrt{аб} + \sqrt{аб} - \sqrt{б^{2}}$$

$$= а - б.$$

106.

При дѣленію коренны᾽ количества треба іи такођеръ найпре на равноименна преобратити, пакъ после подписавше дѣлимку дѣлителя на подобіє разбіенія, скратити треба.

Примѣри.

$$\sqrt{12} : \sqrt{3} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2.$$

$$(\sqrt{72} - \sqrt{32}) : \sqrt{8} = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{72}{8}} - \sqrt{\frac{32}{8}}$$
$$= \sqrt{9} - \sqrt{4} = 1.$$

$$9 : \sqrt[3]{6} = \frac{9}{\sqrt[3]{6}} = \frac{\sqrt[3]{9^3}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\frac{729}{6}} = \sqrt[3]{\frac{243}{2}}$$
$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{36}.$$

$$\sqrt{(a^2 - x^2)} : (a + x) = \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{\sqrt{(a + x)^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{(a + x)^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{(a + x)(a - x)}{(a + x)^2}} = \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}$$
$$= \frac{\sqrt{(a - x)}}{\sqrt{(a + x)}}.$$

107.

Коренна количества могу се на достоинства подићи, кадъ се количество предъ и подъ знакомъ по задатомъ изложителю на достоинство подигне. Н. п.

$$(a\sqrt[м]{б})^{н} = a^{н}\sqrt[м]{б^{н}}.$$

Ерь є $(a\sqrt[м]{б})^{н} = (aб^{\frac{1}{м}})^{н} = a^{н}б^{\frac{н}{м}},$
$$= a^{н}\sqrt[м]{б^{н}}.$$

$$(3\sqrt[3]{2б})^2 = 9\sqrt[3]{4б^2};$$
$$(\sqrt{3a^2})^3 = \sqrt{27a^6};$$
$$(a\sqrt[м]{б})^{м} = a^{м}\sqrt[м]{б^{м}} = a^{м} \cdot б = a^{м}б.$$

ОДДѢЛЕНІЄ ЧЕТВРТО.

О ОТНОШЕНІЯМА И СОРАЗМѢРНОСТИМА.

ГЛАВА ПРВА.

О ОТНОШЕНІЯМА.

108.

Отношеніє зовесе међусобно сравненіє два равноименна количества; а нарочито зовесе слѣдство оногъ сравненія, у коме се изтражуе, *у колико* єдно количество друго превозилази, *Аритметическо отношеніє*; а изслѣдованіє сравненія два количества, гди се изтражуе, *колико се пута* єдно количество у другомъ садржава, зовесе *Геометрическо отношеніє*. У колико єдно количество друго превозилази, дознати се може, кадъ се разлика отятіємъ послѣдуюћегъ количества одъ предходећегʼ опредѣли; напротивʼ наћисе може, колико се пута єдно количество у другомъ садржава, дѣленіємъ првога количества чрезъ друго, то єсть опредѣленіємъ количника. Разлика при єдномъ Аритметическомъ отношенію зовесе иначе *име отношенія*, а количникъ при Геометрическомъ отнощенію зовесе *изложитель отношенія*.

Аритметическо отношеніє два количества, н. п. *а* и *б*, може се са *а* — *б*, а оно одъ 39 и 13 са 39 — 13, а Геометрическо отношеніє овы количества са *а* : *б*, 39 : 13, или са $\frac{а}{б}$, $\frac{39}{13}$ назначити; и изговарасе *а има се к' б*. На првомъ мѣсту находећесе количество зовесе *првый членъ*, а слѣдуюће количество зовесе *другій членъ* отношенія. Ако є другій членъ отношенія већій одъ првога, то се отношеніє зове *растеће;* напротив' *падаюће отношеніє*, кадъ є другій членъ маньій одъ првога. Наравно, да ће у првомъ случаю количникъ быти отрицателанъ, и разлика отрицателна, а количникъ ће свойственно разбіеніє быти.

109.

Равна Аритметическа отношенія она су, коя равне разлике, а *равна Геометрическа* отношенія су она, коя равне количнике имаю; тако су 15 — 8; 10 — 3; 8 — 1 равна Аритметическа отношенія, збогъ равне разлике 7; тако исто су 8 : 1; 80 : 10; 34 : 8 равна Геометрическа отношенія, збогъ равна количника 8. Напротив' ако су разлике и количницы неравни, то се и отношенія зову неравна.

110.

Свако се Аритметическо отношеніє може презъ (*а* + *р*) — *а представити.*

Єръ се свакій другій членъ Аритметическогъ отношенія може чрезъ a, а разлика, была она положителна или отрицателна, чрезъ p представити; но будући да разлика изићи мора, отятіємъ другогъ члена одъ првога, то и првый членъ изићи мора, кадъ се другій членъ ко разлики дода.

111.

Свако се Геометрическо отношеніє може чрезъ $aк : a$ *представити.*

Єръ се другій членъ може чрезъ a, а количникъ свакогъ Геометрическогъ отношенія, быо онъ цѣло число или разбієніє, чрезъ $к$ представити. Количникъ изићи мора дѣленіємъ првога члена чрезъ другій; но и првый членъ изићи мора умноженіємъ другога члена са количникомъ.

112.

Аритметическо отношеніє остає непремѣнно, кадъ се одъ оба члена равно отузме, или се ко оба члена равно дода.

Єръ кадъ се у общемъ образцу $(a + p) - a$ ко оба члена $п$ дода, то ће быти $(a + p + п) - (a + п)$; или кадъ се одъ оба члена $п$ одузме, то ће быти $(a + p - п) - (a - п)$; гди у оба случая разлика p излази, и зато є

$$(a + p) - a = (a + p + п) - (a + п)$$
$$= (a + p - п) - (a - п).$$

Геометрическо отношеніє остає непремѣнно, кадъ се првый и другій членъ са некимъ числомъ умножи, или раздѣли.

Єръ изъ $ак:а$ быва умноженіємъ са $м$, $акм:ам$, а раздѣленіємъ са $н$, быва $\frac{ак}{н}:\frac{а}{н}$; и тако є дакле $ак:а = акм:ам$, као годь и $ак:а = \frac{ак}{н}:\frac{а}{н}$, єр' кодъ свакогъ одъ ова три отношенія онай истый количникъ $к$ излази.

Зато се може Геометрическо отношеніє, коєгъ бы членови велика числа была, простіє представити, кадъ се оба члена чрезъ єдно и оно исто число дѣли. Н. п. у мѣсто отношенія 18 : 63 може се написати 6 : 21, а іоштъ простіє 2 : 7.

Тако се исто и Геометрическо отношеніє, у комъ є єданъ или су оба члена разбієнія, лакшегъ прегледа ради чрезъ цѣла числа представити може, кадъ се са свакимъ именителѣмъ оба члена отношенія умноже. Н. п. на мѣсто отношенія $\frac{2}{3}:5$, може се писати 2 : 15, а на мѣсто $\frac{2}{3}:\frac{5}{4}$, може се писати 8 : 15.

И вообще све промѣне, коє се са разбієніяма предузети могу, имаю мѣста и кодъ Геометрическій отношенія, *єр' се свако Геометрическо отношеніє као разбієніє сматрати може, гди є првый членъ числитель, а другій членъ именитель.*

113.

Отношеніє производа изъ првы' членова к' производу другій членова выше геометрически отношенія зовесе *сложенно отношеніє* овы' отношенія. Тако є н. п. изъ отношенія

$$\begin{array}{cc} 12:3 & \text{а}:\alpha \\ 48:6 & \text{б}:\beta \\ 15:5 & \text{г}:\gamma \\ \hline 12\,.\,48\,.\,15:3.\,6.\,5. & \text{абг}:\alpha\beta\gamma \end{array}$$

или 8640 : 90.

114.

Изъ овога слѣдує, да є количникъ сложен[illegible] отношенія раванъ производу произходећемъ изъ количника єдинственны' сложенны' отношенія. Тако є изъ отношенія 6840 : 90 количникъ 96, кои є производу количника 4, 8, 3 єдинственны' отношенія раванъ.

Ако су єдинственна сложена отношенія єдна другима равна, то є количникъ сложенны' отношенія свагда єдно достоинство количника єднога єдинственногъ отношенія; и то квадратъ, кадъ су два равна отношенія, кубусъ, кадъ су три равна отношенія сложена, и проч.

$$\begin{array}{c} \text{ак}:\text{а} \\ \text{бк}:\text{б} \\ \text{вк}:\text{в} \\ \text{гк}:\text{г} \\ \hline \text{абвгк}^4:\text{абвг}. \end{array}$$

Зато є оно изъ выше равны' отношенія сложенно отношеніє ономе отношенію равно, кое се добыє, кадъ се оба члена єдногъ єдинственногъ отношенія на достоинство изложителя числа сложены' достоинства подигну. Тако є у предидућемъ примѣру отношеніє $абвгк^4 : абвг$ равно отношенію $а^4к^4 : а^4$, єръ свако количника $к^4$ има. И зато се обычествую отношенія изъ *два*, *три* или *четири* равна отношенія состоєћасе, *квадратна*, *кубическа*, *двоквадратна отношенія* звати.

ГЛАВА ДРУГА.

О СОРАЗМѢРНОСТИМА.

115.

Соразмѣрность є равность два отношенія; а особито равность два Аритметическа отношенія зовесе *Аритметическа*, а равность два Геометрическа отношенія *Геометрическа соразмѣрность*. Два равна отношенія союжаваюсе знакомъ равности; тако намъ представля $7 - 2 = 15 - 11$ Аритметическу, а $12 : 4 = 21 : 7$, или $\frac{12}{4} = \frac{21}{7}$ Геометрическу соразмѣрность; оба се изговараю 7 имасе к' 3, као 15 к' 11; 12 имасе к' 4, као

21 к' 7. Прва соразмѣрность изяснює, да 7 превозилази число 3 у толико, у колико 15 число 11; а смысалъ Геометрическе соразмѣрности є овай: 12 садржава у себи число 4 толико пута, колико пута 21 число 7. Ова четири члена соразмѣрности зовусе особито *членови соразмѣрности*, а нарочито првый и четвртый членъ соразмѣрности заєдно зовусе *внѣшньи*, другій и трећій *внутреньи членови*.

внутреня!

Кадъ су у єдной соразмѣрности два внѣшня члена међусобно равна, то се соразмѣрность зове *союжена*, *завысима* или *скопчана*. Тако є н. п. 4 — 7 = 7 — 10 союжена Аритметическа, а 4 : 8 = 8 : 16 союжена Геометрическа соразмѣрность.

При союженой соразмѣрности зовесе четвртый членъ *треће соразмѣрно количество*, єрь се само три разна члена у соразмѣрности налазе; и зато се другій и трећій членъ *среднѣ соразмѣрно* количество зове.

[*Примѣчаніє*. Маѳематическіи списательи обычествую соразмѣрности разнымъ начиномъ представляти и изражавати. Но мы ћемо се у напредакъ, за избећи свако непоразумѣніє, са горе предложенымъ назначеніяма послуживати.]

116.

Чрезъ образацъ $(а + р) - а = (б + р) - б$ *можь се свака Аритметическа соразмѣрность представити.*

Єръ свака два равна Аритметическа отношенія, коя су ко єдной Аритметической соразмѣрности нуждна, могу се чрезъ $(а + р) - а$, и $(б - р) - б$ представити, зато може свагда $(а + р) - а = (б + р) - б$ сваку Аритметическу соразмѣрность представити.

При союженой соразмѣрности мора трећій членъ са другимъ раванъ и онай истій быти, тако да се союжена соразмѣрность Аритметическа особитымъ образцемъ $(а + р) - а = а - (а - р)$ представити може.

117.

У свакой є Аритметической соразмѣрности сумма внѣшньи членова сумми средньи членова равна.

Єръ є у общемъ образцу $(а + р) - а = (б + р) - б$ очевидно сумма внѣшньіи членова сумми средньіи членова равна; єръ є свака овіи сумма $= а + б + р$; слѣдователно є у свакой Аритметической соразмѣрности сумма внѣшньіи членова равна. Тако н. п. у соразмѣрности $7 - 3 = 15 - 11$ быва $3 + 15 = 7 + 11$. А при Аритметической союженой соразмѣрности є сумма внѣшньіи членова удвоенномъ среднѣмъ члену равна; єръ у общемъ образцу $(а + р) - а = а - (а - р)$
быва $(а + р) + (а - р) = а + р + а - р = 2а$.

118.

Лако се дакле може изъ три дата количества єдне Аритметическе соразмѣрности оскудѣвающій четвртій соразмѣрности членъ наћи, кадъ се, ако бы непознатый членъ внѣшньій быо, два средня сaберу, и одъ тудъ се познатый внѣшньій отузме; напротив у ономъ случаю, гди бы єданъ [illegible] средньи членова непознатый быо, одъ сумме оба внѣшня члена, познатый средньій отузимасе. Єръ кадъ назначимо са a датый првый членъ, $б$ другій, $в$ трећій, а четвртый, кои се тражи, x, то ће быти $a - б = в - x$, слѣдователно є (по § 117) $a + x = б + в$, и тако $x = б + в - a$, кадъ се одъ оба a отузме (по основат. прави).

Непозн
тый је т
изоте е н
, ако се
суте єд
члена а
насто- о
те тр
познат

Ако бы имали изъ два дата количества треће Аритметическо соразмѣрности количество тражити, то отяти валя првый членъ одъ двогуба среднѣгъ члена, пакъ ће ова разлика быти траженый трећій соразмѣрности членъ. Назначавајући првый членъ са a, средньій са $б$, и са x тражити се имаюћій четвртый членъ соразмѣрности, то ће быти $a - б = б - x$, тако $2б = a + x$, и $x = 2б - a$.

Ако бы имали између два дата члена средньій Аритметическій соразмѣрности членъ тражити, то собрати треба два задата и позната внѣшня члена и дѣлити ову сумму чрезъ 2. Назначавајући првый задатый членъ са a, и трећій са $б$, — са x непознатый средньій соразмѣрности членъ, то ће быти $а - x = x - б$; отудъ наћи можесе $а + б = 2x$, и $x = \frac{а + б}{2}$ кадъ се оба чрезъ 2 дѣле (по основ. прав). Н. п. између 3 и 9 средньій Аритметіческе соразмѣрности членъ тражити, то ће быти $= \frac{3 + 9}{2} = 6$, и соразмѣрность ће быти $3 - 6 = 6 - 9$. +

[*Примѣчаніє.* Будући да Аритметіческа отношенія и соразмѣрности ни су одъ велике ползе, то се нећемо дуже съ нъима занимати, него ћемо прећи на Геометрическе соразмѣрности, коє су у Маѳематики одъ великогъ употребленія. И тако у будуще при Геометрическимъ соразмѣростима нећемо више ни назначавати да є Геометрическо, по свагда ће се као таково подразумевати.]

119.

Свака соразмѣрность може се са общимъ образцемъ $ак . а = бк : б$ *представити.*

Єръ чрезъ $ак : а$ и $бк : б$ могу се свака два равна отношенія назначити; но садъ два равна отношенія представляю соразмѣрность, и тако се може чрезъ $ак : а = бк : б$ свака соразмѣрность представити. Ставимо садъ $бк = а$, то ће быти $б = \frac{а}{к}$; и тако се може свака союжена соразмѣрность чрезъ $ак : а = а : \frac{а}{к}$ назначити.

120.

У свакой соразмѣрности є производъ внѣшньіи членова производу средньіи членова равнъ.

Єръ є у общемъ образцу $ак : а = бк : б$ како производъ внѣшньіи, тако и производъ средньіи членова $= абк$, слѣдователно мора у свакой соразмѣрности производъ внѣшньіи членова производу средньіи чзенова равнъ быти. Тако н. п. у соразмѣрности $4 : 12 = 7 : 21$ быће $4 . 21 = 12 . 7$; у соразмѣрности $9 : 6 = 12 : 8$ быће $9 . 8 = 12 . 6$;

А у союженой соразмѣрности є квадратъ средньіи членова равнъ производу одъ оба два внѣшня члена; єръ у образцу $ак : а = а : \frac{а}{к}$ быће $ак . \frac{а}{к} = а . а = а^2$.

121.

И садъ смо у станю ко свакимъ три датима членовима соразмѣрности, оскудѣвающій четвртый членъ наћи и опредѣлити. *Непознатый* $\substack{\text{внѣшньй}\\ \text{средньй}}$ *членъ соразмѣрности наћи се може, кадъ се производъ* $\substack{\text{средньй}\\ \text{внѣшньй}}$ *члонова трелъ познате* $\substack{\text{внѣшнѣ}\\ \text{среднѣ}}$ *дѣли.*

Єръ назначавающи датый првый членъ са $а$, другій са $б$, трећій са $в$, а четвртый и непознатый са $г$, то ће быти $а : б = в : г$, и одтудъ

$аг = бв$ (§ 120), слѣдователно $а = \frac{бв}{г}$, $г = \frac{бв}{а}$, $б = \frac{аг}{в}$, $в = \frac{аг}{б}$. Ако се ко 3, 5 й 12 четвртый соразмѣрности членъ тражити има, то ће быти $3 : 5 = 12 : x$, то є $x = \frac{5 \cdot 12}{3} = 20$. Тако є изъ $15 : x = 3 : 7$, $x = \frac{15 \cdot 7}{3} = 5 \cdot 7 = 35$.

изъ $19 : 3 = x : 6$, $x = \frac{6 \cdot 19}{3} = 2 \cdot 19 = 38$.

122.

Изъ два дата количества може се трећій соразмѣрности членъ наћи, кадъ се квадратъ среднѣга члена чрезъ првый дѣли; єръ кадъ є $а$ првый, $б$ другій и трећій, а x четвртый непознатый членъ, то ће быти $а : б = б : x$, пакъ $б^2 = аx$, слѣдователно $x = \frac{б^2}{а}$.

Ако бы пакъ изъ два задата количества средньій соразмѣрности членъ тражити имали, то изъвући треба изъ производа внѣшньи' членова квадратный коренъ, кои ће средньій членъ быти. Єръ назначавајући првый са $а$, трећій са $б$, а средньій членъ са x, то ће быти соразмѣрность $а : x = x : б$, слѣдорателно $x^2 = аб$, а $x = \sqrt{аб}$. Тако н. п. између 4 и 9 средньій соразмѣрности членъ изнаћи, то ће быти соразмѣрность $4 : x = x : 9$, и тако $x^2 = 36$, слѣдователно $x = \sqrt{36}$ и $x = 6$.

123.

Кадъ су два производа, состоећасе изъ два чинителя, равна, то стое ньіови чинительи у таковой соразмѣрности, да она два чинителя єднога производа оба внѣшня, а она два чинителя другога производа оба внутреня члена соразмѣрности сочиняваю.

Ако є $аб = вг$, то є и $\frac{а}{в} = \frac{г}{б}$, кадъ се оба чрезъ $бв$ дѣле (основ. правило), слѣдователно су отношенія $а:в$ и $г:б$ међусобно равна, и $а:в = г:б$ соразмѣрность уредна. Тако є исто и $б:в = г:а$ соразмѣрность уредна: єрбо су количницы $\frac{б}{в}$ и $\frac{г}{а}$, кои се добыю, кадъ се они као равни производи $аб$ и $вг$ чрезъ $ав$ дѣле, међусобно равни.

Изъ тога се види, да се изъ равности производа внѣшньи и средньи членова при четирь на подобіє соразмѣрности ставлѣны количества уредность соразмѣрности дознати може.

Примѣри.

Ако $ах = бвю$, то є $а : бв = ю : х$,
„ $абв = х^2$, то є $аб : х = х : в$,
„ $а = юх$, то є $1 : ю = х : а$,
„ $а^2 + аб = ах - х^2$, то є $а : х = а - х : а + б$.

124.

Имамо два знака, изъ кои уредность соразмѣрности заключити можемо.

1. Изъ равности отношенія, то есть изъ равности количника.

2. Изъ равности производа внѣшньи и средньи членова.

Како дакле у будуще єданъ одъ овы знакова при четиръ количествама примѣтимо, то можемо увѣрени быти, да она у доброй соразмѣрности стоє н. п.

Кадъ є $х = а$ и $ю = б$, то є и $х : ю = а : б$; єръ су и овде количницы $\frac{х}{ю}$ и $\frac{а}{б}$ međусобно равни, кадъ се $х = а$ чрезъ $ю = б$ дѣли.

125.

Са овыма четиръ членовима соразмѣрности могу се разне промѣне предузети, при коима опетъ соразмѣрность уредна остає; и то н. п. будући да є

$$ак : а = бк : б \quad \text{и} \quad 5 : 3 = 10 : 6$$

I. *Чрезъ промѣну равноименны (внѣшньи или средньи) членова.*

$$б : а = бк : ак, \quad 6 : 3 = 10 : 5,$$
$$ак : бк = а : б, \quad 5 : 10 = 3 : 6.$$

II. *Чрезъ преокрећанѣ отношенія.*

$$а : ак = б : бк, \quad 3 : 5 = 6 : 10.$$

III. *Чрезъ собраніе членова.*

$$ак : а + ак = бк : б + бк, \quad 5 : 8 = 10 : 16,$$
$$а : ак + а = б : бк + б, \quad 3 : 8 = 6 : 16.$$

Ако сазбиръ [illegible] одношенія односи се ка каквомъ, члену одношенія истогъ и обратно. —

IV. *Чрезъ отятіе членова.*

$$а : ак - а = б : бк - б, \qquad 3 : 2 = 6 : 4,$$
$$а - ак : а = б - бк : б, \qquad -2 : 3 = -4 : 6.$$
$$ак - а : ак = бк - б : бк, \qquad 2 : 5 = 4 : 10.$$

Соединеніе III. и IV. дае

$$а + ак : а - ак = б + бк : б - бк, \quad 8 : -2 = 16 : -4,$$
$$а + ак : ак = а - б + бк : бк - б, \quad 8 : 2 = 16 : 4.$$

V. *Кадъ се еданъ внѣшньій и еданъ средньій членъ са некимъ числомъ умножи.*

$$амк : ам = бк : б, \qquad 15 : 9 = 10 : 6,$$
$$ак : ам = бк : бм, \qquad 5 : 9 = 10 : 18,$$
$$амк : а = бкм : б, \qquad 15 : 3 = 30 : 6,$$
$$амк : ар = бмк : бр, \qquad 15 : 12 = 30 : 24.$$

VI. *Кадъ се еданъ внѣшньій и еданъ средньій членъ чрезъ неко число дѣли.*

$$\frac{ак}{м} : \frac{а}{м} = бк : б, \qquad \frac{5}{3} : 1 = 10 : 6,$$
$$ак : \frac{а}{м} = бк : \frac{б}{м}, \qquad 5 : 1 = 10 : 2,$$
$$\frac{ак}{р} : а = \frac{бк}{р} : б. \qquad 1 : 3 = 2 : 6,$$
$$\frac{ак}{н} : \frac{а}{м} = \frac{бк}{н} : \frac{б}{м}, \qquad \frac{5}{2} : 1 = 5 : 2.$$

VII. *Ако се сва четири члена на исто достоинство подигну, или се изъ ньи истый коренъ извуче.*

$$а^2к^2 : а^2 = б^2к^2 : б^2, \qquad 25 : 9 = 100 : 36,$$
$$а^мк^м : а^м = б^мк^м : б^м, \qquad 5^м : 3^м = 10^м : 6^м,$$
$$\sqrt[н]{ак} : \sqrt[н]{а} = \sqrt[н]{бк} : \sqrt[н]{б}, \qquad \sqrt[н]{5} : \sqrt[н]{3} = \sqrt[н]{10} : \sqrt[н]{6}.$$

Точность свію овы соразмѣрностій изяснитисе може изъ равности производа средньи' и внѣшньи' членова, или изъ равности количника отношенія.

126.

Ползе, кое намъ све ове промѣне при употребленію често подаю, єсу слѣдуюће.

1. Чрезъ I. и II. можесе свакій членъ соразмѣрности на свако повольно мѣсто поставити; н. п. кадъ бы у соразмѣрности $а : б = в : г$ членъ $а$ на четврто мѣсто ставити хотѣли, то може быти $г : б = в : а$, или $г : в = б : а$.

2. Чрезъ III. може се у соразмѣрности, гди є єданъ внѣшный и єданъ средный членъ непознатъ, али ньіове бы сумме познате были, свакій членъ пообсобъ наћи. Н. п. Ако бы у соразмѣрности $6 : ю = 9 : х$ како $ю$ тако и $х$ непозната была, али ньіова бы сумма 25 была, то єсть $х + ю = 25$, то се може и $х$ и $ю$ пообсобъ наћи. Єрбо будући да є $6 : ю = 9 : х$, то (по I.): $6 : 9 = ю : х$, и (по III.) $(6 + 9) : 9 = (ю + х) : х$,

и $(6+9):6+(x+ю):ю$, то є $15:9=25:x$, и $15:6=25:ю$; одъ куда се (по § 121) $x=\frac{9 \,.\, 25}{15}=15$, а $ю=\frac{6 \,.\, 25}{15}=10$ наћи може.

3. Тако исто чрезъ **IV.** можесе єданъ внѣшный и єданъ средный членъ у соразмѣрности наћи, кадъ є ньіова разлика позната.

4 Чрезъ **V.** могусе у соразмѣрности находећасе разбіенія истребити. Н. п. изъ соразмѣрности $8:13^{\frac{1}{3}}=3:5$, можесе разбіеніє истребити, кадъ се овай членъ, а при томъ и єданъ внѣшный, са 3 умножи; то єсть

$$8:40=3:15, \text{ или } 24:40=3:5.$$

5. Чрезъ **VI.** можесе често єдна соразмѣрность, у коіой се велика числа находе, са маньимъ числама представити, кадъ се єданъ внѣшный чрезъ общегъ чинителя дѣли. Н. п. да бы ко овымъ три числама 320, 256, 480 четврто соразмѣрно число нашли, то ће быти

$$320:256=480:x,$$

а кадъ ес првый и трећій членъ чрезъ 160 дѣли,

$$2:256=480:x;$$

и далѣ $1:128=3:x$; и тако $x=3 \,.\, 128=384$.

6. Чрезъ **VII.** могусе у соразмѣрности находећисе несовршени членови истребити, кадъ се сви членови соразмѣрности на достоинство кореноизложителя подигну, Н. п. кадъ є $а:б=в:\sqrt{2}$, то є и $а^2:б^2=в^2:2$.

Све ће се ове вештине у будуће при употребленію ясно показати.

127.

Кадъ се членови выше соразмѣрностій међусобно умноже, то є и она одтудъ происходећа сложенна соразмѣрность точна; то єсть

$$\begin{array}{ll} \textit{ак}:\textit{а} = \textit{бк}:\textit{б}, & 5:3 = 10:6, \\ \textit{вм}:\textit{в} = \textit{гм}:\textit{г}, & 4:2 = 14:7, \\ \textit{дн}:\textit{д} = \textit{ен}:\textit{е}, & 9:8 = 18:16. \\ \hline \textit{авдмнк}:\textit{авд} = \textit{бгекмн}:\textit{бге}; & 180:48 = 2520:672. \end{array}$$

єръ су количници два сложена отношенія, или производи внѣшньи и средньи членова међусобно равни.

128.

Ако бы у две соразмѣрности єданъ и онай истый членъ долазіо, да се небы у сложеной соразмѣрности опетъ указивао, то предупредити можемо преокретанѣмъ отношенія, и соразмѣрность тако поставити можемо, да онай раванъ членъ у єдной соразмѣрности буде єданъ внѣшный, а у другой внутренный членъ, после можемо слаганѣ соразмѣрности, пакъ напоследку скраћиванѣ нађене сложене соразмѣрности, са изоставлянѣмъ овогъ равногъ члена предузети.

Ако є н. п. $а:б = в:г$, или $3:5 = 6:10$,
и $б:е = г:д$, и $5:7 = 10:14$,

то ће слагањ и скраћивањ непосредственно быти

$$а: = ге:д \quad \text{или} \quad 3:7 = 6:14.$$

Ако ли є напротив'

$$а:б = в:г \quad \text{или} \quad 3:5 = 6:10,$$
$$\text{и} \quad а:е = к:г \quad \text{и} \quad 3:2 = 15:10.$$

то ћемо у соразмѣрности єдной, ма у првой, отношенія преокренути, чрезъ коє ће соразмѣрность

$$б:а = в:г, \text{ или } 5:3 = 10:6$$

быти, у коіой равни членови $а$ и $г$ внутреня мѣста узимаю, гди у другой на вньшньима се налазе. Ставимо ли тако даљ последњ две соразмѣрности уєдно, и ако скраћивајући равне членове изоставимо, то ћемо добыти

$$б:е = к:в, \text{ или } 5:2 = 15:6.$$

И тако се поступати може и кодъ многи' соразмѣрностій, у коима єднаки или равни членови долазе.

129.

При выше равнымъ отношеніяма имасе сумма свію прећашны' членова къ сумми свію дру-

еи̓, као што се првый членъ поособъ к̓ своме другомъ има.

Єръ многа се равна̓ отношенія могу чрезъ $ак : а$, $бк : б$, $вк : в$, $гк : г$, и проч. представити. Но садъ є $(ак + бк + вк + гк \ldots .) : (а + б + в + г \ldots) = ак : а$; тако исто и $(ак + бк + вк + гк \ldots) : (а + б + в + г \ldots) = бк : б$, и проч.; єръ є производъ следньи̓ членова производу внѣшньи̓ членова раванъ; слѣдователно сочинява отношеніє изъ сумме свію првы̓ членова ко сумми свію други̓ членова са свакимъ єдинымъ отношеніємъ соразмѣрность.

ОДДѢЛЕНІЄ ПЕТО.

О УРАВНЕНІЯМА И РАЗРѢШЕНІЯМА РАЗНЫ' ЗАДАТКА.

ГЛАВА ПРВА.

О УРАВНЕНІЯМА И РАЗРѢШЕНІЯМА ВООБЩЕ.

130.

Свако алгебраическо количество можесе на разный начинъ израдити и представити. Н. п. количество $8a - 3a = 5a$; или $7a - 2a = 5a$; или $3a + 2a = 5a$; или $8a - 2a = 9a - 3a$, и проч. Таково назначеніє, коимъ се єдно количество на двострукій начинъ изражава, зовесе *уравненіє* (aequatio). *Слѣдователно подъ именомъ уравненія разумеваюсе два алгебраически количества равна израженія, коя се знакомъ равности скопчаваю, тако да є вредность оба израженія єдна.* Количества, међу коима знакъ равности стои, зовусе *части уравненія*, а она количества, коя су на єдной или другой страни знака равности са знакомъ + или — скопчана, зовусе *членови уравненія*.

131.

Уравненія, коя су тако назначена, да є ньіова точность и уредность при првомъ погледу безъ икаквога скраћиваня и истраживаня ясна, зовусе *истоветна уравненія.* То єсть у коме су обе стране уравненія совршено равне, као н. п. $A = A$;

$\frac{a+x}{m} = \frac{a+x}{m}$, и проч.

Изреченіє, коє изискує, изъ неки' условія вредность непознатогъ количества истраживати, зовесе *задатакъ* (Problema).

Условія нису ништа друго, него изреченія, коя нека качества изражаваю, коя у пытаню стоєћемъ непознатомъ количеству припадаю, или су нека отношенія, у коима или непозната међу собомъ, или са познатыма количествама стоє.

Изречена условія сасвимъ по задатку чрезъ Аритметическе знаке у уравненіє довести, зовесе *задатакъ изяснити*, или *уравненіє сочинити.* Сочиненіє уравненія, т. є. преводъ изясненія речій єдногъ задатка на алгебраическій єзыкъ знакова, єсть дѣло разсужденія, и слѣдователно не можесе учити, него се само упражненіємъ одлакшати може. Зато ће свакога ученика дужность быти, готовость у алгебраическомъ єзыку знакова себи набавити.

При сочиненію уравненія може учиницыма за управленіє слѣдуюћій прописъ служити:

Сматрати треба непознато количество найпре као познато, и тако поступати съ ньиме као што условія задатка изискую, и тражити треба чрезъ то за єдно и оно исто количество да се двогубо израженіє придобыє.

Ако бы имали н. п. задатакъ, єдно число пронаћи, коє бы са собомъ самымъ умножено са додаткомъ три, четиръ пута толико было, колико є оно само, то бы уравненіє овако сочинити морали:

$$x \cdot x + 3 = 4 \cdot x, \text{ или } x^2 + 3 = 4\,x.$$

Свака промена членова єднога уравненія, чрезъ кою се равность сама не квари и не меня, зовесе *преобраћиванѣ*, и то се возноси или на єдну єдиту часть уравненія, или на све части нѣгове. У последнѣмъ случаю оснивасе преобраћиванѣ на основателномъ правилу: *Равна количества равньимъ начиномъ променута, даю изслѣдованія равна.*

Уравненіє разрѣшити, зовесе изъ задаты' условія између познаты' и непознаты' количества єдну равность опредѣлити, и ньіове членове тако уредити, да непознато количество сасвимъ само на єдной страни уравненія, а на другой страни сама позната количества дођу. И овай членъ уравненія, кои се овымъ начиномъ изъ самы' познаты' количества состои, кадъ се на другой страни непознато количество само находи, єсть *вредность* последнѣга, кои такођеръ показує, каквымъ є рачуномъ тражено количество изъ задаты пронађено.

123.

Найважнія свойства и основателна правила к̓ разрѣшенію уравненія єсу слѣдуюћа:

I. По себи є ясно, да, ако є $А = Б$, да и $Б = А$ быти мора, дакле *могу се членови уравненія безъ промене равности променути.*

II. *У свакомъ уравненію може се свака часть уравненія съ єдне стране на другу преместити, безъ промене равности, кадъ се она са променутимъ знакомъ премене* (по основ. прав.) н. п. у уравненію $4а - 5б = м + в$ може се $- 5б$ на другу страну равности знака пренети, писаюћи

$4а = м + в + 5б$, и тако $4а - м = в + 4б$.

Ако се на обадве стране уравненія равна количества са истымъ знакомъ налазе, то се такова изоставити могу. Н. п.

$3х - 2а + б = м - 2а + б - в$, то ће быти

$$3х = м - в.$$

И уравненіє остає постоянно, кадъ се сасвимъ сви знацы промѣну. Н. п.

$$А - В = \quad Б - Г$$
$$- Б + Г = - А + В, \text{ дакле и}$$
$$- А + В = - Б + Г \text{ (число I.)}$$

Ово да
се стане ва-
ља да се цело урав-
нение са -1 помножи-
ти. Єднаки знаци
дају производъ поло-
жителанъ, неєд-
наки одузателанъ.

III. *Ако се сви членови уравненія на єдну страну пренесу, ньіове сумме нестає.* Н. п.

$$А + Б = В - Г$$
$$А + Б - В + Г = 0.$$

IV. *Равность непреиначавасе, кадъ се цѣло уравненіє, т. є. сви членови са єднымъ числомъ умноже.* Н. п.

$$А = Б, \text{ то є и } АВ = БВ.$$

Ово намъ правило на то служи, да разбієнія изъ уравненія избацыти можемо, почемъ са именителѣмъ свакога разбієнія задато уравненіє умножимо. Н. п.

$$\frac{x}{м} - а = б - \frac{x}{н},$$

тако ће быти и кадъ се са $м$ умножи:

$$x - ам = бм - \frac{мx}{н},$$

и кадъ се іоштъ са $н$ умножи:

$$нx - амн = бмн - мx, \text{ или}$$
$$нx + мx = амн + бмн, \text{ или}$$
$$(н + м)\,x = мн\,(а + б).$$

Ако сви членови уравненія истогъ именителя имаю, то се таковый безъ промене равности изоставити може.

V. *Уравненіє остає непремѣнно, кадъ се оба члена на неко достоинство подигну.* Єръ ако є $A = Б$, то и $A^м = Б^м$ быти мора, и $\sqrt[м]{A = Б}$.

Помоћію овога правила може се често єдно уравненіє, у коме бы се несовршенне части налазиле, совршенимъ учинити. Н. п.

$x - \sqrt{ax} = м$, то є и
$x - м = \sqrt{ax}$ (число II.), и
$(x - м)^2 = (\sqrt{ax})^2$, т. є.
$x^2 - 2мx + м^2 = ax$,

кое уравненіє све совршенне части има.

VI. *Уравненіє остає непремѣнно, кадъ се сви членови чрезъ неко число раздѣле.*

$$A = Б, \text{ то и } \frac{A}{В} = \frac{Б}{В}.$$

Ако дакле све части уравненія єдногъ общегъ чинителя имаю, уравненіє ће простіє постати, кадъ се чрезъ оногъ чинителя све части раздѣле. Н. п.

$a^2x - aм = a^2 - aб$; то є и
$ax - м = a - б$.

Помоћію овога правила може се свакій членъ єднога уравненія одъ свога сочинителя опростити, кадъ се цѣло уравненіє съ ньиме раздѣли. Ако бы хотѣли н. п. у уравненію $ax + б = м$ изъ првога члена чинителя a оддѣлити, то

$$x + \frac{б}{a} = \frac{м}{a}$$

VII. *Вредность равности остає непремѣнна, кадъ се изъ обе стране уравненія коренъ истогъ достоинства извуче.* Ако є $А = Б$, то мора $\sqrt[н]{А} = \sqrt[н]{Б}$ быти.

133.

Кадъ количество, коє се у єдномъ уравненію опредѣлити има, само у првомъ достоинству стои, то се таково уравненіє зове *просто*, или уравненіє *првога степена*; уравненіє зовесе *квадратическо* или уравненіє *другога степена*, кадъ є найвышій изложитель непознатогъ количества 2; а свако друго уравненіє, коєга є изложитель непознатогъ количества већій одъ 2, зовесе *уравненіє выше*.

Уравненіє зовесе *чисто*, кадъ се непознато количество само у єдномъ єдиномъ достоинству у уравненію налази. Но ако се непознато количество у уравненію на разна достоинства подигнуто налази, то се таково зове *замршено уравненіє*. Тако є н. п. $а^3б - а^3 = 4б^2$ уравненіє чисто, ако се $а$ тражи; ако ли се $б$ тражи, уравненіє замршено.

Примѣри.

1. Изъ уравненія $x + а + 2в = б - г$ изнаћи x; отятіємъ $а + 2в$ быће $x = б - г - а - 2в$.

2. Изъ уравненія $2аб = б - ав + г$ изнаћи $а$; то ће быти

$2аб + ав = б + г$ (по § 132. ч. II.), и
$а(2б + в) = б + г$ разправлянѣмъ на чинителѣ,

$$а = \frac{б + г}{2б + в}$$ (по § 132. ч. VI.).

3. Изъ уравненія $а^2бв - вг + 5 = г - 2в$ изнаћи $в$; то ће быти

$а^2бв - вг + 2в = г - 5$ премештанѣмъ членова,
$в(а^2б - г + 2) = г - 5$ разправлян. на чинит., и

$$в = \frac{г - 5}{а^2б - г + 2}$$ раздѣленіемъ.

4. Изъ уравненія $\frac{аб}{ю} = бв + г + \frac{1}{ю}$ изнаћи $ю$; то ће быти

$аб = бвю + гю + 1$ умноженіемъ са $ю$, и
$аб - 1 = (бв + г)$ расправ. на чинителѣ, и

$$ю = \frac{аб - 1}{бв + г}$$ раздѣленіемъ.

5. Изъ уравненія $аx + бв = гв + x$ изнаћи x, то ће быти:

$аx - x = гв - бв$ премештанѣмъ членова,
$x(а - 1) = в(г - б)$ разправ. на чинителѣ, и

$$x = \frac{в(г - б)}{а - 1}$$ раздѣленіемъ.

6. Изнаћи x изъ $а^2 - x^2 = \frac{аб + бx}{в}$

$(а + x)(а - x) = \frac{б(а + x)}{в}$ разправ. на чинит.

$a - x = \frac{б}{в}$ раздѣленіємъ чрезъ $(a + x)$, и

$x = a - \frac{б}{в}$ премештанѣмъ членова.

7. Изнаћи изъ $aг^2 - бв + 1 = 35 + бг^2$ само $г$, то ће быти

$$aг^2 - бг^2 = 35 + бв - 1$$
$$г^2\,(a - б) = 34 + бв$$
$$г^2 = \frac{34 + бв}{a - б}.$$
$$г = \pm\sqrt{\frac{34 + бв}{a - б}}.$$

8. Изнаћи x изъ $ax^м + б = бx^м + 18 - x^м$;

$$ax^м - бx^м + x^м = 18 - б,$$
$$x^м\,(a - б + 1) = 18 - б,$$
$$x^м = \frac{18 - б}{a - б + 1}$$
$$x = \sqrt[м]{\frac{18 - б}{a - б + 1}}.$$

134.

Ако бы имали изъ замршеногъ квадратическогъ уравненія непознато количество тражити, то уредити валя уравненіє тако, да непознато количество другога достоинства са положителнымъ знакомъ, безъ именителя и сочинителя, и поредъ нѣга непознато количество првогъ достоинства (коє ма какавъ знакъ, сочинителя и именителя имати може), на єдну страну уравненія, а сви прочи членови, гди се небы више непознато количество налазило, на другу страну дођу. Н. п. изъ уравненія

$аб - бx = г - аx^2$ количество x наћи;

$$x^2 - \frac{бx}{а} = \frac{г - аб}{а}$$

Також ђеръ изъ $бx - аx^2 + г = вx - гx^2 + б$, изнаћи x и опредѣлити:

$гx^2 - аx^2 + бx - вx = б - г$, и

$x^2\,(г - а) + (б - в)\,x = б - г$, напоследку

$$x^2 + \frac{б - в}{г - а}\,x = \frac{б - г}{г - а}.$$

Изнаћи x изъ уравненія $3x^2 - 144 = 6x$, то ће быти:

$3x^2 - 6x = 144.$ премешт.

$x^2 - 2x = 48.$ раздѣл.

$x = 1 \pm \sqrt{49} = 1 \pm 7 = 8$ или $- 6.$

Изнаћи x изъ уравненія $4аx - бx^2 = бx - в$, то ће быти

$- бx^2 + 4аx - бx = - в$ премештанѣмъ.

$бx^2 + бx - 4аx = в$ умноженіємъ са $- 1$,

$бx^2 + (б - 4а)\,x = в$ распр. на чинит.

$x^2 + \dfrac{б - 4а}{б}\,x = \dfrac{в}{б}$ раздѣленіємъ чрезъ $б$,

$$x = \frac{4а - б}{2б} \pm \sqrt{\left[\frac{в}{б} + \left(\frac{б - 4а}{2б}\right)^2\right]}.$$

ГЛАВА ДРУГА.

О АЛГЕБРАИЧЕСКИМЪ ЗАДАТЦЫМА И РАЗРѢШЕНІЯМА ВООБЩЕ.

135.

Алгебраическій є задатакъ исканѣ, изъ неколико већъ познаты̓ количества, друга непозната, коя подъ некимъ условіяма одъ оны̓ зависити морају, рачуномъ изнаћи. Н. п. исканѣ, *неко число наћи, кое бы са своіомъ собственномъ половиномъ умножено, число 12 произвело*, то є задатакъ, гди є число 12 познато, а друго се число одъ закteваногъ свойства текъ тражити мора. И будући да се овде єдно количество иште и истражує, зато се и задатакъ зове са єднымъ непознатимъ количествомъ; а ако се 2, 3, 4 . . . непозната количества истражую, то се и задатакъ зове са 2, 3, 4 . . . непозната количества.

136.

Задатакъ зовесе *опредѣланъ*, кадъ се само єдна єдина вредность за непознато количество наћи може, коя условіяма задатка соотвѣтствує; напротивъ ако се могу више таковы̓ изнаћи, кое бы искана свойства имале, то се таковый задатакъ зове *неопредѣленъ*. Н. п. *Два числа наћи, коя бы međусобно умножена производъ* 12 *произвела*, быо бы задатакъ неопредѣленъ, єрбо су разна числа тога свойства, као 3. 4, 2. 6, 1. 12, 24. $\frac{1}{2}$ и тако безчисленна разбієнія. Напротив' задатакъ, где є невозможно вредность наћи, коя бы задатку удовлетворила, зовесе *невозможный задатакъ*.

137.

Да бы алгебраическій задатакъ разрѣшити могли, обичествую се она количества, коя су іошть непозната, са последньима азбуке писменима назначавати; пакъ после є нуждно, условія добро размишлявати, како непозната количества одъ познати' зависе, да бы потомъ уравненіє добро ставити и непознато количество пронаћи могли. Зато ћемо упражненія ради овде више примѣра навести.

А. РАЗРѢШЕНІЄ ЗАДАТКА СА ЄДНЫМЪ НЕПОЗНАТЫМЪ КОЛИЧЕСТВОМЪ.

138.

1. **Задатакъ.** *Єдно число изнаћи, коє бы са своіомъ половиномъ ~~умножено~~* сабрано, 12 *за сумму дало.*

Разрѣшеніє. Назначаваюћи непознато число са x быће $\frac{x}{2}$ половина, дакле мора быти условіє $x + \frac{x}{2} = 12.$

одкудъ є $x = 8$ (по § 132).

2. Задатакъ. *Некій се скоротеча пре* 3 *дана кренуо, кои свакій данъ* 16 *миля путовати има; данасъ є за ньимъ послатъ другій, кои на данъ* 18 *миля валя да учини, пытасе, кадъ ће овай онога стигнути?*

Разрѣшеніє. Назначаваюћи свакидашнѣ путованѣ, кое првый учинити има 16 миля са. . $= а$
другога одъ 18 миля са. . . . . $= б$
време одъ 3 дана съ коимъ є првый утекао $= в$
а време, када ће га стигнути. . . . . . $= x$
Тако ће быти путъ, кои є првый скоротеча пре полазка другога учиніо $= ав$, а путъ, кои ће онъ одъ овога полазка до времена достизаня учинити іоштъ $= аx$. Цѣо путъ другога скоротече до времена достизаня $= бx$. Будући да обоица єданъ путъ учинити имаю, то ће быти равненіє

$$ав + аx = бx,$$

$$ав = бx - аx \text{ премештанѣмъ,}$$

$$ав = x\,(б - а) \text{ распр. у чинителѣ,}$$

$$\frac{ав}{б - а} = x. \text{ роздѣленіємъ.}$$

Будући да є $ав = 48$, а $б - а = 2$, то є

$$\frac{ав}{б - а} = \frac{48}{2} = 24 = x.$$

3. Задатакъ. *Путникъ некій запытанъ, колико є новаца на путешествіє са собомъ понео, одговори:* $\frac{1}{3}$ *часть понешеныʼ новаца издао самъ на купованѣ разныʼ стварій;* $\frac{2}{5}$ *части на путешествіє, іоштъ заосталыʼ новаца имамъ* 400 *талира. Пытасе, колико є новаца овай путникъ са собомъ понео?*

Разрѣшеніє. Назначаваюћи познато число $400 = a$, количество непознато, т. є. сумма понешеныʼ новаца $= x$, одъ овы новаца $\frac{1}{3}$ быће $\frac{x}{3}$, тіи исты новаца $\frac{2}{5} = \frac{2x}{5}$, то ће изъ условія уравненіє быти

$\frac{x}{3} + \frac{2x}{5} + a = x$,

$x + \frac{6x}{5} + 3a = 3x$, уничтожаваюћи разбієнія и то прво умножен. са 3.

$5x + 6x + 15a = 15x$, после и друго (по § 132. ч. IV.).

$15a = 15x - 11\ x$, непознатa колич. ставля. на єдну страну;

$15a = 4x$, скраћиваюћи изяснiє,

$\frac{15a}{4} = x$, оба уравн. члена чрезъ 4 раздѣляваюћи,

$\frac{15 \times 400}{4} = x$, поставляюћи принадл. вредность,

$\frac{6000}{4} = x$, совршаваюћи назначено умноженіє

$1500 = x$ и раздѣленіє, слѣдує, да є путникъ 1500 талира на путь са собомъ понео.

4. **Задатакъ.** *Некій купи саблю, прстенъ и саатъ скупа за 50 дуката. Прстенъ два дуката выше кошта одъ саблѣ, а саатъ 10 дуката выше кошта одъ прстена. Колико кошта свака стварь поособъ?*

Разрѣшеніє. Назначаваюћи число 50 дуката са $= a$, цѣну саблѣ $= x$, цѣну прстена $= x + 2$, цѣну саата $= x + 2 + 10$, быће по условіяма уравненіє

$x + x + 2 + x + 2 + 10 = a$,

$3x + 14 = a$ скраћиванѣмъ,

$3x = a - 14$ премештанѣмъ,

$x = \frac{a - 14}{3}$ освобожд. одъ сочинителя,

$x = \frac{50 - 14}{3}$ поставляюћи вредность,

$x = \frac{36}{3}$ отятіємъ назначенымъ,

$x = 12$ извршиванѣмъ назнач. раздѣл.

Дакле сабля кошта 12 дуката; прстенъ 14, а саатъ 24 дуката. А то є све скупа 50 дук.

5. **Задатакъ.** *Изъ єдне тврдинѣ изслани буду* 144 *войника, да извиде не далеко стоећу непрiятельску войску. Но текъ што су изишли, вратесе натрагъ са некимъ числомъ робова. Брацо! повиче Iова єднога одъ войника, небы ли се могло знати число робова? А зашто не? Раздѣли наше число войника чрезъ число робова, пакъ ћешъ знати што желишъ, одговори овай.*

Разрѣшенiє, ставляюћи 144 $= a$, а число робова $= x$. То ће быти уравненiє по условiяма

$\frac{a}{x} = x$, уничтоженiємъ именителя,
$a = x^2$
$\sqrt{a} = x$ извлаченѣмъ корена,
$\sqrt{144} = x$ поставляюћи вредность,
$12 = x$, извлаченѣмъ корена.

Дакле было є 12 робова, єръ $\frac{144}{12} = 12$.

6. **Задатакъ.** *Отче! говораше сынъ, после* 20 *година, ако оба будемо живи, ты нећешъ быти више као сада четиръ пута старiи одъ мене, него само двапутъ. Колико є година старъ сынъ? а колико отацъ?*

Разрѣшенiє. $20 = a$, године сына $= x$, године отца $= 4x$. После 20 година быће сынъ старъ $= x + a$, а отацъ $= 4x + a$. Но будући да будуће године отца, двапутъ ће толике быти, колико сыновлѣве, то године сына $= x + a$ са 2 умножаваюћи, да бы уравненіє ставити могли

$2x + 2a = 4x + a$

$2a - a = 4x - 2x$ премештанѣмъ членова,

$a = 2x$ скраћиванѣмъ,

$\frac{a}{2} = x$ освобожденіємъ сочинителя,

$\frac{20}{2} = x$; поставляюћи вредность.

Дакле $x = 10$; слѣдователно сынъ є 10 година, а отацъ 40 година старъ. Єръ после 20 година сынъ ће быти 30, а отацъ 60, дакле године отчине двапутъ ће толике быти, колико су сыновлѣве.

7. **Задатакъ.** *Некій Полковникъ похваляюћи храбрость своій войника, кои су у некомъ сраженію знаменито число непріятеля потукли, овако говораше: ако къ числу потучены' додашъ* $\frac{1}{4}$ *одъ ньіовогъ попаданогъ числа, па изъ ове сумме одбієшъ* $\frac{1}{3}$ *цѣле сумме, слѣдовало бы, да су мои войницы само* 100 *непріятеля побили, али они су много храбріи были. Колико су они непріятеля побили?*

Разрѣшеніє. $100 = a$, число побієны' войника $= x$, $\frac{1}{4}$ истога числа $= \frac{x}{4}$, сумма ова два количества $= x + \frac{x}{4}$, цѣле ове сумме єдна трећина (ову сумму чрезъ 3 раздѣляваюћи) = $\frac{x}{3} + \frac{x}{12}$. Ако се садъ ове сумме трећа часть одъ оне сумме отузме, произићи ће уравненіе:

$$x + \frac{x}{4} - \frac{x}{3} - \frac{x}{12} = a$$

$12x + 3x - 4x - x = 12a$ освобожд. одъ разб.
$10x = 12a$ извршиванѣмъ назнач. скраћ.

$$x = \frac{12a}{10}$$

$$x = \frac{12 \times 100}{10} = 120 \text{ побіени войници.}$$

Потврждавасе, што 120 + 30 (сумма изъ числа побіеныʼ, и одъ овыʼ $\frac{1}{4}$ происходећа) — 50 (една трећина исте сумме) = 100.

8. **Задатакъ.** *Некій буде упытанъ, колико е онъ старъ, и онъ одговори: Кадъ бы быо іоштъ еданпутъ толико старъ, као што самъ, то бы толико година имао преко* 100, *колико ми садъ до стотине оскудѣва. Колико е година овай човекъ имао?*

Разрѣшеніе. Число нѣговыʼ година назначаваюћи = x, дакле му оскудѣваю іоштъ одъ $100 - x$; ако бы іоштъ еданпутъ толико старъ быо, то бы имао $2x$, онда бы имао преко 100 година $2x - 100$; дакле

$$100 - x = 2x - 100,$$
$$100 = 2x + x - 100,$$

$$100 + 100 = 2x + x = 200 = 3x,$$

$$x = \frac{200}{3} = x = 66\,\frac{2}{3}\ \text{година.}$$

+9. **Задатакъ.** *Станко запытанъ, колико є година старъ, одговори: Мати ме є съ концемъ* 24$^{\text{те}}$ *нѣне године родила, кадъ бы садашнѣ нѣне године ко моима додао, быо бы* 60 *година я старъ. Колико є година онъ имао?*

Разрѣшеніє. Назначаваюћи 24 = a, 60 = б, године, коє се траже = x, садашнѣ године материне $a + x$ (єрбо године материне пре рођая = a, године после рођая су оне исте коє су и сыновлѣве што се сада траже = x, и тако цѣле године материне = $a + x$), дакле быће уравненіє:

$$a + x + x = \text{б},$$

$$2x = \text{б} - a$$

$$x = \frac{\text{б} - a}{2},\ x = \frac{60 - 24}{2} = 18!$$ Єръ ако се 18 ко 24 дода, излазе године материне = 42. А 42 + 18 = 60.

+10. **Задатакъ.** *Срећко сретне неке просіяке, и хотяше свакоме по* 3 *гроша дати, но тако даваюћи недостану му* 8 *гроша; а онъ почеше давати по* 2 *гроша свакоме, па му тако* 4 *гроша претекоше. Колико є было просіяка, и колико є гроша имао Срећко?*

Разрѣшеніє. Назначаваюћи число просіяка са x, имао є Срећко по првомъ условію $3x - 8$

гроша, а по другомъ $2x + 4$ гроша; было бы дакле уравненіє

$$3x - 8 = 2x + 4,$$
$$3x - 2x = 8 + 4,$$
$$x = 12.$$

Дакле было є просіяка 12, а Срећко є имао $3 . 12 - 8 = 2 . 12 + 4 = 28$ гроша.

+11. **Задатакъ.** *Карташъ некій запытанъ, коликій му є добитакъ, одговори: да самь іоштъ четиръ пута толико добіо, колико самь добіо, мой бы добитакъ быо 45 талира. Коликій є быо добитакъ?*

Разрѣшеніє. Назначаваюћи добитакъ са $= x$, и іоштъ четиръ пута толико, быће $x + 4x$, и тако уравненіє

$$x + 4x = 45,$$
$$5x = 45,$$
$$x = \frac{45}{5} = 9 \text{ талира!}$$

+12. **Задатакъ.** *Некій Капетанъ запытанъ буде, колико има войника? На кое онъ одговори:* $\frac{1}{3}$ *одъ мой людій одоше по лебацъ,* $\frac{1}{6}$ *на стражи,* $\frac{2}{5}$ *су у касарни, 4 су момка у шпиталю, а 2 у апсу. Пытасе, колико момака има?*

Разрѣшеніє. Назначаваюћи число цѣло момака са $= x$, а оно число што є по лебацъ отишло $\frac{x}{3}$, у касарни наодећесе число $= \frac{2x}{5}$, на стражи $\frac{x}{6}$, у шпиталю четиръ $= a$, а два у апсу $= б$; и тако быће уравненіє:

$$\frac{x}{3} + \frac{2x}{5} + \frac{x}{6} + a + б = x,$$

$$\frac{30x + 36x + 15x}{90} + a + б = x$$

$$\frac{81x}{80} + a + б = x$$

$$81x + 90a + 90б = 90x$$

$$90a + 90б = 90x - 81x = 9x$$

$$10a + 10б = x = 10 \times 4 + 10 \times 2 = 60 \text{ момака.}$$

+13. **Задатакъ.** *Некій полковникъ, кои є тврдиню неку браніо, запытанъ буде, колико има войника? одговори:* $\frac{1}{2}$ *ньй отишли су за непріятелѣмъ у потеру,* $\frac{1}{3}$ *чува градъ, а 200 стоє подъ оружіємъ на бой справни. Колико є дакле имао момака?*

Разрѣшеніє. Изъ уравненія $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + a = x$ ставляюћи 200 войника $= a$, $\frac{1}{2}$ одъ ньи $\frac{x}{2}$, а $\frac{1}{3}$ одъ ньи $\frac{x}{3}$, наћи се може да є $x = 1200$.

+ 14. **Задатакъ.** *Два полка, коя су* $a = 80$ *миля удалѣна, у єдно време кренусе, и ступаю* *на сусретъ; првый полкъ свакій данъ путуе* $б = 4$, *а другій свакій данъ* $в = 3$ *миля; кои ће се данъ сусрести?*

Разрѣшеніе. Число дана $= x$, за ово време путуе првый полкъ $бx$ миля, а другій $вx$ миля. Но будући да се састаю, то су оба заедно путъ учинила, слѣдователно $бx + вx = а$, одкудъ $x = \frac{а}{б + в} = \frac{80}{7} = 11\frac{3}{7}$. Дакле ћесе дванайстій данъ сусрести.

15. **Задатакъ.** *Међу четиръ сиромака А, Б, В и Г буду 63 талира тако подељна, да е Б у еданъ талиръ выше добыо одъ А; В добые у 1 талиръ опетъ выше него што су А и Б заедно добыли; а Г добыо у 1 талиръ выше него сва три прва заедно што су добыли. Колико е добыо свакій?*

Разрѣшеніе. Назначавајући, да е

А добыо x талира, то е
Б добыо $(x + 1)$ талира,
В „ $2x + 1 + 1 = 2x + 2$ и
Г „ $x + x + 1 + 2x + 2 + 1 = (4x + 4)$ тал.

Будући да цѣла подѣлена сумма 63 талира износи, то ясно слѣдуе, да быти мора уравненіе $x + (x + 1) + (2x + 2) + (4x + 4) = 63$, или

$$8x + 7 = 63,$$
$$8x = 63 - 7,$$
$$8x = 56,$$
$$x = \frac{56}{8} = 7.$$

Тако є *А* добыо 7 талира = 7 тал.
„ *Б* „ 7 + 1 = 8 „
„ *В* „ 15 + 1 = 16 „
„ *Г* „ 31 + 1 = 32 „
Сумма = 63 тал.

+ **16. Задатакъ.** *Я самь садъ 46 година старъ, говораше Милованъ, мой старіи сынъ є 11 година, а млађій 9 година старъ. Кадъ ће мои сынови заєдно тако стари быти као я?*

Разрѣшеніє. Назначаваюћи време када ће то быти = x година, то ће онда отацъ $46 + x$, старіи сынъ $11 + x$, а млађій $9 + x$ година старъ быти; и тако быће уравненіє

$$46 + x = 11 + x + 9 + x$$
$$46 + x = 20 + 2x$$
$$46 - 20 = 2x - x$$
$$26 = x.$$

+ **17. Задатакъ.** *Некій отацъ обећа своме сыну, свакій данъ, кадъ нѣговъ пос'о добро уради, по 10 цванцика да ће му поклонити; а ако пос'о буде небрежливо урадіо, да ће одъ нѣга по 18 цванцика отузети. После 30 дана добыє сынъ 132 цванцика. Колико є дана онъ садъ добро, а колико зло радіо!*

Разрѣшеніє. Ако число добро послованы' дана са = x назначимо, то є ясно, да число зло послованы' дана са = $30 - x$ назначити морамо. Сынъ є тако добыо 10 цванцика, а морао є $18\ (30 - x)$ цванц. каштиге платити. Но будући да є са концемъ месеца 132 цванц. добыо, то ће се на горнѣ пытанѣ изъ овогъ уравненія моћи одговорити:

$$10x - 18\ (30 - x) = 132$$
$$10x - 540 + 18x = 132,$$
$$28x = 132 + 540 = 672,$$
$$x = \frac{672}{28} = \frac{168}{7} = 24 \text{ и}$$
$$30 - x = 30 - 24 = 6;$$

т. є. сынъ є 24 дана бьо трудолюбивъ, а 6 дана злочестъ.

\+ 18. **Задатакъ.** *Некій ученикъ говораше своми отцу: Я самь одъ оны новаца, кое сте ми дали, осму часть за препитаніе и конакъ, двадесету часть за кньиге и пральи месечно издавао. После петъ месецій остало ми іошть 50 талира, [а садъ по истеченію године іошть самь 40 талира преко мои новаца дужанъ.] Колико є новаца сынъ одъ отца прiймio?*

Разрѣшеніе. Да назначимо прiймлѣне новце $= x$, то ће месечно издаванѣ новаца быти $\frac{x}{8} + \frac{x}{20} = \frac{7x}{40}$, а оно одъ 5 месецій издаванѣ $5 . \frac{7x}{40} = \frac{7x}{8}$,

$$\frac{7x}{8} + 50 = x;\ 7x + 400 = 8x,$$

$x = 400$ талира.

\+ 19. **Задатакъ.** *Здравко одговори на пытанѣ, колико є година онъ старъ: мой сынъ и* *я имамо управъ 100 година заедно, а пре 20 година быо самь я трипутъ толико старъ као мой сынъ. Колико самь старъ садъ?*

Разрѣшеніе. Да назначимо садашнѣ године отчине $= x$, то ће садашнѣ године сыновлѣве быти $= 100 - x$; године отчине пре 20 година быле су $= x - 20$, а сыновлѣве $=$ $100 - x - 20 = 80 - x$;

$$x - 20 = 3\,(80 - x),$$
$$x - 20 = 240 - 3x,$$
$$x + 3x = 240 + 20$$
$$4x = 260,$$
$$x = \frac{260}{4} = 65 \text{ године отчине,}$$

$$100 - x = 100 - 65 = 35 \text{ год. сыновлѣве,}$$
$$65 + 35 = 100$$
$$65 - 20 = 3\,(35 - 20) = 45. +$$

20. **Задатакъ.** *Живоинъ умре, и остави после себе могућство* $a = 70.000$ *талира, и неко число деце; тако после отчине смрти умру 2 детета, и чрезъ то свако дете добіе у 4000 талира выше, него што бы пре добыло, кадъ небы ни едно умрло. Колико е деце после отчине смрти было?*

Разрѣшеніе. Да назначимо нѣіово число са $= x$, и будући да су 2 одъ нѣи умрла, то су остала іоштъ $x - 2$. У првомъ случаю свако бы добыло $\frac{a}{x}$ талира, но пошто су 2 умрла, то ће свако дете добыти $\frac{a}{x-3}$, но будући да последнѣ наслѣдіє одъ првога у 4000 талира веће быти мора, то ће быти

$$\frac{a}{x-2} - 4000 = \frac{a}{x},$$

$$x = 1 \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2000} + 1\right)} = 1 \pm \sqrt{36} = 7.$$

21. Задатакъ. *Гойко остави после своє смрти 6 деце, и остави имъ наслѣдіє одъ 33330 талира, тако да се међу децомъ подѣли, да свакій сынъ добыє 6666 талира; а свака кћи 3333 талира. И по учинѣной деоби лепо се цѣла сума подѣли, да ништа сувышка неостане. Колико є сынова? колико є кћерій было?*

Разрѣшеніє. Ако назначимо оставлѣно наслѣдіє са $= a$, 6 деце $= б$, число сынова $= x$, быће число девояка $= б - x$; наслѣдіє свію сынова $= 6666x$, наслѣдіє свію дѣвояка $= 3333б - 3333x$; быће уравненіє

$$6666x + 3333б - 3333x = a$$

$$x = 4, \text{ и } 6 - x = 6 - 4 = 2.$$

Дакле 4 сына и 2 кћери є было.

22. Задатакъ. *Ако я теби, говораше Стана Любици, одъ моій новаца* $= x$ *дадемъ* $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{5}$, *а ты мени у мѣсто овы̀ дадешъ* 40 *талира* $= a$, *я бы имала само* 200 *талира* $= б$. *Колико є новаца имала Стана?*

Разрѣшеніе. Изъ уравненія по условіама $x - \frac{2x}{3} - \frac{x}{5} + a = б$, слѣдуе, да е $x =$ 1200 талира!

23. **Задатакъ.** *Некій е оффицирь довео* 119 *момака, кое е число управ' доста, да се три компаніе подпуне. Но будући да е непознато число, колико момака у первой компаніи оскудѣваю, а одъ остале две само се толико зна, да друга компанія толико потребуе момака колико и прва, и іошть выше* 2 *човека, трећа двапутъ толико колико прва, манѣ* 11 *момака, пакъ ће се компаніе попунити. Колико свакой компаніи одъ овы людій треба дати!*

Разрѣшеніе. Назначавајући число доведены момака 119 $= a$, два човека $= б$, 11 момака $= в$. Оскудость прве компаніе $= x$, друге $= x + б$, а треће $2x - в$; то изъ уравненія

$x + x + б + 2x - в = a$ слѣдуе, да е $x = 32$.

Дакле быће $32 = x$ оскудость прве компаніе

$32 + 2 = 34 = x + б$ оскудость друге „

$2 + 32 - 11 = 53 = 2x - в$ „ треће „

сумма $= 119 = a$.

23. **Задатакъ.** *Смилянъ Ненаду да у трговину* 5000 *талира на тай начинъ, да овай предреченный капиталъ сваке године са* 1000 *талира умножи. По истеченіо едне године дође Миленко, па и онъ по прећашнѣму примѣру да Не-*

наду **3000** *талира на тай начинъ, да онъ ову сумму сваке године са* **1200** *талира умножи, и да за толико времена задржи у трговини, докъ ова сумма са своимъ годишньимъ умноженіемъ не буде равна капиталной сумми одъ Смиляна пріймлѣной, заедно са годишньимъ умноженіемъ узетой. Колико година треба да остане ова сумма кодъ Ненада пріймлѣна одъ Миленка? и колика є ова!*

Разрѣшеніе. Назначавајући $5000 = a$, $1000 = б$, $3000 = в$, $1200 = г$, године, на колико она сумма одъ 3000 талира у трговини валя да остане $= x$; изложићесе число година, за кое є пређашня сумма одъ 5000 талира (т. є. пре едне године) у трговини была $x + 1$. Годишнѣ умноженіе быће $б$ умножено са $x + 1$, и овай производъ додавајући ко истой сумми a, быће прва капитална сумма $a + бx + б$; садъ умножавајући годишнѣ умноженіе $г$ друге капиталне сумме са годинама x, и производъ одтудъ произходећій, додати треба ко истой сумми овой $в$, быће друга капитална сумма $в + гx$ пређашньой равна; дакле

$$a + бx + б = в + гx.$$

$$\frac{a + б - в}{г - б} = x = \frac{5000 + 1000 - 3000}{1200 - 1000} = 15.$$

Дакле треба 15 година, ко траженномъ капиталу 21000 талира. Єръ $3000 + 15 \times 1200 = 21000$, а тако $5000 + 16 \times 1000 = 21000$.

Б, РАЗРѢШЕНІЄ ЗАДАТКА’ СА ВИШЕ НЕПОЗНАТЫ’ КОЛИЧЕСТВА.

139.

Кадъ се у єдномъ задатку за више количества пыта, то назначити треба свако непознато количество са особитымъ писмомъ, пакъ после задата условія задатка постаратисе валя чрезъ уравненія изразити. Зато

1. Тражити валя, да се изъ задаты’ условія толико особита уравненія сочине, колико непознаты’ количества има, но тако, да не бы єдно слѣдствомъ другога сочинѣно было, или єдно другоме противословило. И ако то у станю будемо учинити, то є знакъ, да є задатакъ *опредѣланъ*; ако ли пакъ нису условія задатка достаточна, да изъ нъи толико уравненія сочинимо, колико непознаты’ количества има, то є знакъ, да є задатакъ *неопредѣланъ*.

2. Тражити треба по правилама разрѣшенія (§ 132) найпре вредность само єднога непознатогъ количества, безъ призренія други’ непознаты’ количества, пакъ ово после избацити треба изъ свію други’ уравненія; коє на выше начина быва:

а, Кадъ се на мѣсто овога непознатогъ количества у прочимъ уравненіяма само вредность нѣгова постави, и на мѣсто стави, (по основателномъ правилу: равна количества мѣсто равны' поставити се могу) то ће сотимъ оно нестати.

б, Кадъ се вредности овога непознатогъ количества међу собомъ сравне, и одтудъ ново уравненіє сочини (по основ. правилу: ако су два количества некомъ трећемъ и ономъ истомъ равна, то су она и међу собомъ равна), то ће оно чрезъ то изчезнути.

в, *Чрезъ собраніє и отятіє*, кадъ се то єсть єдно одъ замршены' уравненія ко другоме дода, или одъ нѣга одузме (по основ. правилу: равна количества ко равнима додати или равна одъ равны' отузети). И чрезъ то често одма єдно одъ два непозната количества изчезне. Ово се учинити може понайвише онда, кадъ се єдно одъ два непозната количества у оба замршена уравненія са онимъ истимъ сочинителѣмъ или изложителѣмъ скопчана наоде. Нарочито собраніє онда има мѣста, кадъ се непознато количество, коє избацити желимо, у два уравненія са различнимъ знакомъ наоде.

4. Ову изнађену вредность поставити треба у свима другимъ уравненіяма, гди се ово непознато количество наоди. И тако ће се овимъ начиномъ свако непознато количество произнаћи, и задатакъ разрѣшити.

Примѣръ првый.

Имали бы слѣдуюћа два уравненія,

$$2x + y = a,$$

и $5x + 3y = б$,

изъ кои' x и y изнаћи треба.

Првый начинъ. Изъ првогъ уравненія тражити треба найпре вредность одъ x (§ 132)

то єсть $2x + y = a$

и $2x = a - y$

и $x = \frac{a - y}{2}$.

Садъ поставити треба у другомъ уравненію мѣсто x изнађену нѣгову вредность, то ће быти на мѣсто $5x + 3y = б$ слѣдуюће уравненіє

$$\frac{5a - 5y}{2} + 3y = б.$$

Овде є већъ x избачено, и само се іоштъ y налази, коє изнаћи треба (§ 132)

$$5a - 5y + 6y = 2б,$$

или $5a + y = 2б$,

слѣдователно $y = 2б - 5a$.

Да бы садъ и вредность одъ x у познатомъ количеству изнаћи могли, то ставити треба у уравненіє (по основ. прав.)

$x = \frac{a - y}{2}$ вредность одъ y,

то ће быти $x = \frac{a - 2б + 5a}{2}$.

Другій начинъ. Изтражити изъ оба задата уравненія

$2x + y = a$

и $5x + 3y = б$, вредность одъ x особито, то ћемо добити изъ првога $x = \frac{a - y}{2}$,

а изъ другога уравненія $x = \frac{б - 3y}{5}$.

По основателномъ правилу, ако су два количества некомъ трећемъ и ономъ истомъ равна, то су она една другомъ равна; слѣдователно

$\frac{a - y}{2} = \frac{б - 3y}{5}$ быти мора. На овай начинъ x є изчезло, и само се іоштъ y само наоди, коє се обичнимъ начиномъ наћи може,

т. є. $5a - 5y = 2б - 6y$

и $6y - 5y = 2б - 5a$

или $y = 2б - 5a$ као и пре у првомъ начину.

Другій примѣръ.

Изъ два уравненія

$$\frac{4x}{5} - \frac{5y}{6} = a,$$

и $\frac{2x}{3} + \frac{3y}{4} = б$, произнаћи x и y.

Првый начинъ. Изъ $\frac{4x}{5} - \frac{5y}{6} = a$ изнаћи x, то ће быти $4x - \frac{25y}{6} = 5a$,

и $24x - 25y = 30a$,

и $24x = 30a + 25y$

и $x = \frac{30a + 25y}{24}$.

Садъ поставляюћи у другомъ уравненію вредность нађену одъ x,

т. є. $\frac{2x}{3} + \frac{3y}{4} = б$

то ће быти $\frac{60a + 50y}{72} + \frac{3y}{4} = б$,

далѣ $60a + 50y + \frac{216y}{4} = 72б$

и $240a + 200y + 216y = 288б$.

Одтудъ $416y = 288б - 240a$,

и на послѣдку $y = \frac{288б - 240a}{416}$.

Ако бы хотѣли садъ и x наћи, то бы морали у уравненію $x = \frac{30a + 25y}{24}$ изнађену вредность одъ y ставити. Но будући да бы то безнуждно врло обширно послованѣ было, то ћемо само ону изнађену вредность одъ $y = в$ назначити, и са овымъ цѣлу ону вредность изразити, тако

$$x = \frac{30a + 25в}{24}.$$

Другій начинъ. Истраживаюћи изъ два уравненія вредность одъ x, то есть изъ првога као и пре, то ће быти $x = \frac{30a + 25y}{24}$; а изъ другога уравненія опетъ вредность одъ x истраживаюћи

т. є. изъ $\frac{2x}{3} + \frac{3y}{4} = б$

быће $2x + \frac{9у}{4} = 3б$,

далѣ $8x + 9у = 12б$,

и $8x = 12б - 9у$,

напослѣдку $x = \frac{12б - 9у}{8}$.

Дакле садъ имамо две вредности одъ x, т. є.

$$x = \frac{30а + 25у}{24},$$

и $x = \frac{12б - 9у}{8}$,

слѣдователно по основ. правилу и

$$\frac{30а + 25у}{24} = \frac{12б - 9у}{8},$$

$$30а + 25у = \frac{288б - 216у}{8}$$

$$240а + 200у = 288б - 216у$$

$$416у = 288б - 240а$$

$у = \frac{288б - 240а}{416}$, она иста као и на првый начинъ изнаћена вредность.

Трећій примѣръ.

Изъ два уравненія слѣдуюћа

$$аx - бу + ву = м$$

и $гx + ру = н$, два непозната количества x и $у$ изнаћи.

Првый начинъ. **Изтраживаюћи** изъ првога уравненія вредность одъ x, т. є. изъ

$$аx - бу + ву = м,$$

то ће быти $ax = м + бу - ву$

и тако $x = \frac{м + бу - ву}{а}$.

Ставляюћи садъ у другомъ уравненію на мѣсто x изнађену вредность нѣгову, то ће быти

$$\frac{гм + бгу - гву}{а} + ру = н,$$

и $гм + бгу - гву + ару = ан$

$$бгу - гву + ару = ан - гм$$

$$у = \frac{ан - гм}{бг - гв + ар},$$

одъ кудъ є x лако наћи.

Другій начинъ. Изъ првога уравненія задатогъ истраживаюћи вредность одъ x изнаћићемо $x = \frac{м + бу - ву}{а}$. Пакъ садъ истраживати треба опетъ x изъ другога уравненія т. є. изъ

$$гx + ру = н,$$

то є $x = \frac{н - ру}{г}$,

Дакле уравняваюћи ове две вредности, т. є.

$$x = \frac{м + бу - ву}{а}$$

$$x = \frac{н - ру}{г},$$

то и $\frac{м + бу - ву}{а} = \frac{н - ру}{г}$ быти мора;

далѣ $м + бу - ву = \frac{ан - ару}{г}$,

$$и \quad гм + гбу - вгу = ан - ару,$$

$$и \quad гм + гбу - вгу + ару = ан,$$

$$гбу - вгу + ару = ан - гм,$$

и напослѣдку $у = \frac{ан - гм}{бг - вг + ар}$ као и на првый начинъ она иста изнађена вредность одъ $у$.

Четвртый примѣръ.

Ако бы имали у задатку три непозната количества, то на овай истый начинъ сочияваюћи три уравненія, истраживати треба єдно по єдно непознато количество и опредѣлити ньіову вредность. Н. п. имали бы ова три уравненія.

$$\begin{aligned} 2x + 4у + 6ю &= а \\ 7x + 2у - ю &= б \\ 4x - у + 2ю &= в \end{aligned}$$

Првый начинъ. Изъ првога уравненія

$$2x + 4у + 6ю = а$$

тражити треба вредность одъ x, кои ће се наћи

$$x = \frac{а - 4у - 6ю.}{2}.$$

Ову нађену вредность одъ x ставити треба у другомъ уравненію

$7x + 2у - ю = б$ на мѣсто x, то ће быти

$$\frac{7а - 28у - 42ю}{2} + 2у - ю = б,$$

одъ куда тражити треба садъ вредность одъ $у$

$$\frac{7а - 44ю - 2б}{24} = у.$$

Садъ опетъ ставити треба у трећемъ уравненію $4x - y + 2ю = в$, како вредность одъ x, тако и вредность одъ y, пакъ ће быти

$$\frac{4a - 24ю}{2} - \frac{112a + 704ю + 32б}{48}$$

$$- \frac{7a + 44ю + 2б}{24} + 2ю = в.$$

Одкуда ће се изнаћи $\frac{30a + 48в - 36б}{312} = ю$,

и овога є непознатогъ количества вредность садъ у непознатимъ количествама изнађена, коя се ставити може $= м$; ставляюћи садъ у уравненію $\frac{7a - 44ю - 2б}{2} = y$ на мѣсто $ю = м$, то ћемо добыти y у познатимъ количествама изражено т. є. $\frac{7a - 44м - 2б}{2} = y = н$;

и напослѣдку, кадъ се у уравненію $x = \frac{a - 4y - 6ю}{2}$ на мѣсто y и $ю$ ньіове вредности ставе, кое су $н$ и $м$, то ће быти $x = \frac{a - 4н - 6м}{2}$; слѣдователно све су вредности одъ сва три тражена количества изнађена, и задатакъ є разрѣшенъ.

Другій начинъ. Тражити треба изъ сва три уравненія задата, вредность одъ x, то ће быти изъ првога $x = \frac{a - 4y - 6ю,}{2}$

па изъ другога $х = \frac{б - 2у + ю}{7}$,

а изъ трећега $х = \frac{в + у - 2ю}{4}$.

Изъ оба прва уравненія сочинити треба садъ єдно ново уравненіє, и изъ тога тражити вредность одъ $у$, т. є.

$$\frac{а - 4у - 6ю}{2} = \frac{б - 2у + ю}{7};$$

$$7а - 28у - 42ю = 2б - 4у + 2ю$$

$$7а - 42ю - 2б - 2ю = 28у - 4у$$

$$7а - 44ю - 2б = 24у$$

$$\frac{7а - 44ю - 2б}{24} = у.$$

На овай истый начинъ сочинити треба изъ прве и треће вредности одъ $х$ єдно ново уравненіє, и тражити изъ тога такођеръ вредность одъ $у$, т. є.

$$\frac{а - 4у - 6ю}{2} = \frac{в + у - 2ю}{18}$$

$$4а - 16у - 24ю = 2в + 2у - 4ю$$

$$4а - 24ю - 2в + 4ю = 2у + 16у$$

$$4а - 20ю - 2в = 18у$$

$$\frac{4а - 20ю - 2в}{18} = у.$$

Изъ ове обе вредности одъ $у$ опетъ треба єдно ново уравненіє сачинити, и $ю$ тражити,

$$\frac{7а - 44ю - 2б}{24} = \frac{4а - 20ю - 2в}{18};$$

$$126а - 792ю - 36б = 96а - 480ю - 48в,$$
$$126а - 36б - 96а + 48в = 312ю,$$
$$\frac{30а - 36б + 48в}{312} = ю.$$

У коме су уравненію како $х$ тако и $у$ избачена, и вредность одъ $ю$ у познатимъ количествама изнаѣена.

Кадъ бы садъ $ю = м$ ставили, и у вредности одъ $у = \frac{4а - 20ю - 2в}{18}$ на мѣсто $20ю = 20м$ поставили,

то бы онда было $у = \frac{4а - 20м - 2в}{18}$; и на последку кадъ бы $у = н$ ставили, и у уравненію $х = \frac{в + у - 2ю}{4}$ на мѣсто $у$ и $ю$ ньіове вредности $н$ и $м$ поставили, то бы онда было $х = \frac{в + н - 2м}{4}$.

Слѣдователно сва су три непозната количества садъ у познатимъ изнаѣена.

Примѣч. Будуѣи да у таковимъ случаєвима по првомъ начину замѣньиванѣ вредности врло бы обширно и теготно было, то се понайвыше овай другій начинъ предпоставля.

140.

Чрезъ собраніє и отятіє вредности непознаты' количества изнаѣи може се слѣдуюѣимъ начиномъ.

Н. п. имали бы ова два уравненія

$$4x + 2y = a,$$

$$\text{и } 4x - y = б.$$

Отятіємъ последнѣга уравненія одъ првога остаће $3y = a - б$, гди x выше не долази, и вредность одъ y показуєсе $y = \frac{a - б}{3}$ опредѣлена, а x може се наћи, кадъ се у уравненію $4x - y = б$ на мѣсто y нѣгова вредность постави т. є.

$$4x - \frac{a + б}{3} = б.$$

слѣдователно $12x - a + б = 3б$,

$$\text{и } 12x = 3б + a - б = a + 2б,$$

$$\text{дакле є } x = \frac{a + 2б}{12}$$

141.

Као што се задатци са три непозната количества разрѣшити могу, тако се исто поступати може, кадъ бы ій се четиръ или выше у задатку нашло. Само онда позорствовати валя на условія задатка и на сочиненія уравненія̕, да не бы при сочиненію уравненія̕ єдно одъ другога завысило; и да се не бы єдно уравненіє у другоме подразумевало. И као што є горе назначено, да бы толико уравненія было, колико годъ непознаты̕ количества има.

[illegible] **1.** † **Задатакъ.** *У две кесе налазисе непознато число дуката; само толико се зна, да* *кадъ бы се изъ прве кесе у другу* **15** *комада дуката дало, у другой бы кеси двапутъ толико и іоштъ у* **17** *комада выше было него у первой. А извади ли се изъ друге* **12** *комада, и дода у прву, то онда има у првой кеси у два дуката выше одъ друге. Пытасе, колико се комада дуката у свакой кеси налази?*

Разрѣшеніє. Назначаваюћи число дуката наодећисе у првой кеси . . . . $= x$
у другой кеси . . . . $= y$
число 15 . . . . $= а$
„ 17 . . . . $= б$
„ 12 . . . . $= в$
а 2 . . . . $= г$

Изъ условія задатка происходи, да є

$$x - 15 = y + 15,$$

и у овомъ случаю $y + 15 = 2x - 30 + 17.$

Далѣ да є $y - 12 = x + 12 - 2,$
слѣдователно быће ова два уравненія

1) $y + а = 2x - 2а + б$
$y = 2x - 3а + б.$ (вредность одъ y)
2) $y - в = x + в - г$
$y = x + 2в - г$ (друга вредность одъ y)

Сравняваюћи ова два уравненія по основ. прав. вредность прву и другу одъ y, то ће быти

$$2x - 3а + б = x + 2в - г$$
$$2x - x = 3а - б + 2в - г$$
$$x = 3а - б + 2в - г.$$

Ако садъ вредность одъ x у другомъ уравненію на мѣсто x поставимо, то ће быти

$$y = 3а - б + 2в - г + 2в - г$$

т. є. $$y = 3а - б + 4в - 2г$$

слѣдоват. $$\left.\begin{array}{l} x = 45 + 24 - 17 - 2 = 50 \\ y = 45 + 48 - 17 - 4 = 72 \end{array}\right\}$$ комада а дуката.

Єръ $$72 + 15 = 100 - 30 + 17 = 87$$
а $$72 - 12 = 50 + 12 - 2 = 60.$$

Сабраніем + **2. Задатакъ.** *Меянція некій запытанъ, каква віна има? одговори:* 2 *оке одъ првога,* 2 *оке одъ другога, и* 1 *ока одъ трећегъ рода віна коштаю заедно* 3 *цванцигера; после* 2 *оке одъ првога,* 3 *оке одъ другога, и* 4 *оке одъ трећега рода віна коштаю* 6 *цванцигера;* 10 *ока одъ првога,* 4 *оке одъ другога, и* 2 *оке одъ трећега рода віна коштаю* 9 *цванцигера. Шта кошта ока одъ свакога рода?*

Разрѣшеніе. Назначаваюћи цѣну єдне оке одъ првога рода $= x$, одъ другога $= y$, а одъ трећега $= r$ крайцара, то ће быти по условіяма

$$1)\quad 2x + 2y + r = 60,$$
$$2)\quad 2x + 3y + 4r = 120,$$
$$3)\quad 10x + 4y + 2r = 180.$$

У овомъ задатку найлакше ћемо до разрѣшенія дођи, ако чрезъ собраніє или отятіє уравненія, єдно по єдно непознато количество истребимо, и сотимъ га потражимо. А то быти може слѣдуюћимъ начиномъ: Отяти треба уравненіє 1, одъ уравненія 2, сотимъ ће x изчезнути.

$$\begin{array}{ll} 2) & 2x + 3y + 4r = 120 \\ 1) & 2x + 2y + r = 60 \\ & \;\;\, - \quad\;\; - \quad\;\; - \\ \hline A) & \text{„} \quad y + 3r = 60. \end{array}$$

Далѣ умножити треба уравненіє 1, са 5, да бы x чрезъ то истога сочинителя добыло као у уравненію 3, тако

1, $(2x + 2y + r) . 5 = 60 . 5$

$= 10x + 10y + 5r = 300.$ Одъ овога уравненіє
$10x + 4y + 2r = 180$ 3, отяти валя

$$\begin{array}{l} - \quad\;\; - \quad\;\; - \\ \hline Б) \quad \text{„} \quad 6y + 3r = 120. \end{array}$$

Садъ имамо два уравненія $A)\ y + 3r = 60$
и $Б)\ 6y + 3r = 120.$

Будући да ова два уравненія при r єднаке сочинителѣ имаю, то отяти валя $A)$ одъ $Б)$ тако ћемо добыти $5y = 60$, и то є $= y = \frac{60}{5}$ или $y = 12.$

Садъ валя ову изнађену вредность одъ y у уравненію $A)$ вмѣстити, т. є. на мѣсто y ставити, тако ће быти $12 + 3r = 60$

$$\begin{aligned} 3r &= 60 - 12 \\ r &= \frac{48}{3} = 16. \end{aligned}$$

Садъ обе ове изнађене вредности у уравненію 1, на мѣсто y и v ставити треба, пакъ ће быти

уравненіе 1, $2x + гy + v = 60$

вредность одъ y и v $2x + 2 \,.\, 12 + 16 = 60$

$$2x + 24 + 16 = 60.$$

$$2x + 40 = 60 - 40$$

$$2x = 60 - 40 = 20$$

$$x = \frac{20}{2} = 10.$$

Слѣдователно 1$^{\text{вогъ}}$ рода віна коштаће 12 крайц.

другога „ „ „ 16 „

трећега „ „ „ 10 „

Сравњива- њемъ.

3. † **Задатакъ.** *Нѣкій посленикъ радіо є 12 дана, но имао є 9 дана жену и сына кодъ себе, и добыо є са овима заєдно 42 форинта надниче. После радіо є онъ за ону исту надницу 14 дана, и имао є садъ жену и сына 10 дана кодъ себе, и добыо є 48 форинтій наднице. Колико є добыо посленикъ, а колико жена и сынъ заєдно на данъ наднице?*

Разрѣшеніе. Назначавајући 12 дана $= а$, 42 форинта $= м$, 14 дана $= в$, а 9 дана $= б$, 10 дана $= г$, а 48 форинтій $= н$; и назначавајући надницу посленика $= x$, а y надницу жене и сына. Првый є путъ добіо посленикъ $аx$ фор. а жена и сынъ $бy$ фор. Другій є путъ добіо посленикъ $вx$ фор., а жена и сынъ $гy$ фор., быће дакле уравненія слѣдујућа:

$$1)\quad ах + бу = м,$$
$$2)\quad вх + гу = н.$$

Изъ првога уравненія слѣдує:

$$у = \frac{м - ах}{б};$$

И ову вредность у другомъ уравненію ставляюћи, быће:

$$вх + г \cdot \frac{м - ах}{б} = н, \text{ дакле}$$

$$бвх + гм - агх = бн, \text{ или}$$
$$(бв - аг)\, х = бн - гм, \text{ и}$$
$$х = \frac{бн - гм}{бв - аг}.$$

Садъ ову изнађену вредность ставляюћи у горнѣ уравненіє $у = \frac{м - ах}{б} = \frac{м}{б} - \frac{а}{б} \cdot х$, и тако ћемо добыти ново уравненіє

$$у = \frac{м}{б} - \frac{а}{б} \cdot \frac{бн - гм}{бв - аг}, \text{ или}$$

$$у = \frac{мбв - маг - абн + агм}{б\,(бв - аг)},$$

$$у = \frac{мбв - абн}{б\,(бв - аг)}.$$

И садъ поставляюћи изнађены количества вредность, быће

$$х = \frac{9 \cdot 48 - 10 \cdot 42}{9 \cdot 14 - 12 \cdot 10} = \frac{9 \cdot 8 - 10 \cdot 7}{3 \cdot 7 - 2 \cdot 10} = \frac{2}{1} = 2.$$

$$у = \frac{14 \cdot 42 - 12 \cdot 48}{9 \cdot 14 - 12 \cdot 10} = \frac{14 \cdot 7 - 2 \cdot 48}{3 \cdot 7 - 2 \cdot 10} = \frac{98 - 96}{1} = 2.$$

Тако є добыо посленикъ 2 фор. а жена и сынъ заєдно 2 фор. наднице на данъ.

4. + **Задатакъ.** *Три карташа играше картій. У првой игри изгуби А, а Б и В добыю толико, колико су пре игре новаца имали. У другой игри изгуби Б, али А и В добыю толико, колико су при почетку друге игре новаца имали. У трећой игри изгуби В, а А и Б толико добыю, колико су оба у почетку треће игре имали. На последку треће игре имао є свакій 2 форинта, колико є новаца свакій карташъ кадъ су сели играти имао?*

Разрѣшеніє. Да назначимо новце карташа $A = x$, карташа $Б = y$, и карташа $В = v$, то є имао после прве игре

A іоштъ $x - y - v$,
$Б$ „ $2y$,
$В$ „ $2v$.

После друге игре имао є

A) $2x - 2y - 2v$.
$Б$) $2y - (x - y - v) - 2v = 3y - x - v$,
$В$) $4v$.

После треће игре имао є

A напоследку $4x - 4y - 4v$,
$В$ „ $6y - 2x - 2v$,
$Б$ „ $4v - (2x - 2y - 2v) - (3y - x - v)$,
или $7v - x - y$.

Будући да свакій карташъ єднако число, то єсть 2 форинта имати мора, то ће быти

Са[illegible] и А[illegible]

1) $4x - 4y - 4r = 2$ фор. $= 120$ крайц.
2) $- 2x + 6y - 2r = 120$ кр.
3) $- x - y + 7r = 120$ кр.

Уравненiє 1) чрезъ 4 раздѣлявајући, уравненiє 2) чрезъ 2, то ће быти

$a)$ $x - y - r = 30,$
$б)$ $- x + 3y - r = 60,$
$в)$ $- x - y + 7r = 120.$

Собранiє савршавајући у $a)$ и $б)$ уравненiяма, быће

$г)$ $2y - 2r = 90,$

а у уравненiяма $б)$ и $в)$ отятiє савршавајући, быће

$д)$ $- 4y + 8r = 60.$

Ако раздѣлимо $г)$ чрезъ 2, и $д)$ чрезъ 4, то ће быти

$е)$ $y - r = 45$ и
$ж)$ $- y + 2r = 15.$

Кадъ ова два уравненiя саберемо, добыћемо

$з)$ $r = 60.$

Изъ уравненiя $е)$ слѣдує, да є

$y = 45 + r$, чрезъ поставлянѣ вредности одъ r, быће $y = 45 + 60 = 105.$

Изъ $a)$ наћићемо напоследку

$x = 30 + y + r$, поставлявајући вредности быће $x = 30 + 105 + 60$
$x = 195.$

Слѣдователно *А* имао є 195 кр. $=$ 3фор. 15 кр., *Б* имао є 105 кр. $=$ 1 фор. 45 крайц., а *В* имао є 60 $=$ 1 фор.

5. **Задатакъ.** *Ако сте икада, заиста садъ сте прилику добыли, да храбрость вашу покажете, опоминяше нѣкій официръ себи подчинѣне войнике, с' коима є онъ одъ гомиле непріятеля изненада нападнутъ быо. Свака кугла обараюћа непріятеля, донеће вамъ награду* 3 *дуката; а свака кугла, необараюћа, награду ће вашу глобити са* 7 *дуката. По избаченимъ* 60 *куглама, кадъ є непріятель, на приближаваюћусе овима помоћь побѣгао, извидилосе да є награда равна глоби. Колико є куглій обарало? а колико ніє?*

Разрѣшеніє. Да назначимо 60 куглій $= a$, число обараюћи' куглій $= x$, а не обараюћи $= y$; све избачено число куглій заєдно $= x + y$, дакле быће уравненіє

$$A)\quad x + y = a.$$

Будући да се у задатку два непозната количества налазе, то сочинити треба іоштъ єдно уравненіє. Сваке кугле обараюће награда є 3 дуката; дакле, ако се ово число куглій x умножи са 3, быће цѣла награда $= 3x$. А глоба є сваке кугле необараюће 7 дуката, дакле цѣла се глоба изразити може са $7y$; но по условіяма задатка награда є равна глоби, быће дакле друго уравненіє

$$Б)\quad 3x = 7y.$$

Истраживаюћи изъ обадва уравненія вредность одъ x, быће 1, $x = a - y$, а изъ *Б* быће 2, $x = \frac{7y}{3}$. Дакле и

$$a - y = \frac{7y}{3}.$$ И уничтоженіемъ разбіенія быће $3a - 3y = 7y$, далѣ премештан.

$$3a = 10y,$$ чрезъ 10 оба члена раздѣляваюћи, $\frac{3a}{10} = y$; вредности поставляюћи, быће $\frac{3 \times 60}{10} = y = 18$, то су кугле необараюће! Ако садъ 18 на мѣсто y у 1) уравненію поставимо, быће на мѣсто $x = a - y$

$$x = a - 18, \text{ или}$$

$$x = 60 - 18 = 42,$$ то су кугле, кое су обарале! Истинность овога рачуна изъ тога се види, што е $42 + 18 = 60$.

6. **Задатакъ.** *Мой побратиме, говораше Срећко Ранку, ала смо ти при маломъ новцу. Кадъ бы ты мени одъ твои новаца дао еданъ талиръ, обоица бы имали еднако число талира. А Ранко одговори на то, кадъ бы ты мени еданъ талиръ одъ твои новаца дао, я бы двапутъ толико имао, колико ты имашъ. Колико е талира имао Срећко? а колико Ранко?*

Разрѣшеніе. Да назначимо число у Срећка наодећисе талира $= x$, а у Ранка $= y$. Ако Ранко Срећку да еданъ талиръ, Срећко ће имати $x + 1$, а Ранко $y - 1$; и будући да у овомъ случаю обоица еднако число талира имаю, то ће быти *А*) $x + 1 = y - 1$. Ако пакъ Срећко Ранку да еданъ талиръ, то ће онъ имати $x - 1$, а Ранко ће добыти $y + 1$. У овомъ случаю є $y + 1$ двогубо у призренію $x - 1$. Да бы ова два изясненія уравненіє сочинявала, мора се $x - 1$ умножити са 2, или быти $2x - 2$, и тако ће быти уравненіє друго

Б) $2x - 2 = y + 1$.

Изъ *А*) уравненіє слѣдує $x = y - 2$, *а*)

Изъ *Б*) „ „ $x = \frac{y + 3}{2}$; *б*)

или $y - 2 = \frac{y + 3}{2}$, и

$$2y - 4 = y + 3,$$
$$2y - y = 4 + 3,$$
$$y = 7.$$

Ово поставляюћи на мѣсто y у уравненію *а*)

т. є. $x = y - 2$,

быће $x = 7 - 2 = 5$.

Дакле Срећко є имао 5 талира, а Ранко 7. Єръ $5 + 1 = 7 - 1$, и $7 + 1$ двогубо є одъ $5 - 1$.

7. **Задатакъ.** *Нѣки ученици, кои су се у наукама отликовали, побужденія ради обдарени буду некимъ числомъ кньига. Ако бы одъ тіи ученика три више было, свакій бы одъ ньи у две кньиге манѣ добіо; а да су одъ ньи троица манѣ, свакій бы одъ ньи у 6 кньига више добіо. Колико є было ученика? Колико*

є свакоме одъ ньи кньига допало? И колико се кньига вообште раздало?

Разрѣшеніє. Да назначимо число $3 = а$, $2 = б$, $6 = в$, число ученика $х$, число кньига, свакоме ученику опредѣлено $= у$; быће сумма свію кньига $= ху$. Ако се сумма свію кньига раздѣли чрезъ число ученика, количникъ ће изложити єдинственно свакоме ученику принадлежеће число кньига, и тако ће быти по првомъ условію

$$А)\quad \frac{ху}{х + а} = у - б; \text{ а по другомъ}$$

$$\text{условію}\quad Б)\quad \frac{ху}{х - а} = у + в.$$

Изъ *А)* уравненія

$$ху = ху - бх + ау - аб,$$
$$бх + аб = ау + ху - ху,$$
$$бх + аб = ау,$$
$$1)\quad \frac{бх}{а} + б = у;$$

Изъ *Б)* уравненія $\frac{ху}{х - а} = у + в$, равн. начин.

слѣдує $2)\quad у = \frac{вх}{а} - в$. Ово 1) и 2)

уравненіє сравняваюћи $\frac{бх}{а} + б = \frac{вх}{а} - в$,

или $бх + аб = вх - ав$,

и далѣ $аб + ав = вх - бх$,

$$\frac{аб + ав}{в - б} = х = \frac{3 \times 2 + 3 \times 6}{6 - 2} = 6.$$

Садъ у 1, уравненію поставляюћи на мѣсто x вредность ову пронађену

$y = \frac{вx}{a} - в = \frac{6 \times 6}{3} - 6 = 6$. И одтудъ

число подѣлены' кньига $= 6 \times 6 = 36$.

И тако є $\frac{36}{6 + 3} = 4 = 6 - 2$, и $\frac{36}{6 - 3} = 12$ $= 6 + 6$.

8. **Задатакъ.** *Миленко и Вуле у єдномъ сраженію побію скупа 53 непріятеля. Миленко є побіо 17 више одъ Вула. Колико є побіо свакій поособъ.* = Миленко 35 вуле 18.

Разрѣшеніє. Сумма $53 = C$, разлика $17 = P$ (да бы се болѣ разумео образацъ, кои ћемо чрезъ ово разрѣшеніє произнаћи, назначавамо сумму и разлику са првима речій писменима), веће число одъ Миленка побієно $= x$, а манѣ одъ Вула $= y$. И тако ће быти уравненія

$$A)\quad x + y = C,$$
$$Б)\quad x - y = P.$$

Изъ уравненія $A)\quad y = C - x$,

а изъ „ $Б)\quad y = x - P$.

Ова A, и $Б$, уравненія сравняваюћи, по основ. прав.

быће и $x - P = C - x$,

$$2x = C + P,$$

$$x = \frac{C + P}{2} = \frac{53 + 17}{2} = 35.$$

Кадъ бы садъ ову изнађену вредность одъ x, у горнѣмъ уравненію на мѣсто x ставили, нашли бы тако исто вредность одъ y. Но мы ћемо ве-

веће є равно полусуми [illegible] са полуразликом [illegible] дато.

Мане равно полусумми са одузетомъ полуразликомъ.

ће користи наше ради да пронађемо за y као и за x обштый образацъ. И тако изъ уравненія

$$
\begin{array}{l}
А)\ \ x = C - y \\
Б)\ \ x = P + y \\
\hline
P + y = C - y = 2y = C - P, \\
\qquad\qquad\qquad y = \dfrac{C - P}{2} \\
\qquad\qquad\qquad y = \dfrac{53 - 17}{2} = 18.
\end{array}
$$

И ово се разрѣшеніе потврждава: еръ $35 + 18 = 53$; и $35 - 18 = 17$.

Примѣчаніе. У овима изнађенима образцима, кое смо мы овде произвели, (у Тригонометріи имаћемо велико употребленіе) $x = \frac{C - P}{2}$ или $x = \frac{C}{2} + \frac{P}{2}$; а $y = \frac{C - P}{2}$ или $\frac{C}{2} - \frac{P}{2}$ садржаваюсе слѣдуюћа поучителна правила:

1. Одъ два неравна количества, веће є равно ньіовой полусумми, са додатомъ полуразликомъ: манѣ є равно полусумми, са одузетомъ полуразликомъ.

Далѣ изъ овога образца $y = \frac{C - P}{2}$, или $y = \frac{C}{2} - \frac{P}{2}$ (по учинѣномъ разрѣшенію полуразлике) іоштъ се доводи $\frac{P}{2} = \frac{C}{2} - y$, т. е.

2. Полуразлика два неєднака количества равна є полусумми нъіовой, са одузетымъ количествомъ маньимъ.

Како годъ ови наведени, тако и многи други образци алгебраически, кои се изъ рѣшенія разны̀ задатка доводе, могу се у поучителна правила ставити, и као такова сматрати. А овай задатакъ можесе и овако представити: Изнаћи два числа, коѝ бы сумма износила 53, а разлика 17.

9. Задатакъ. *Овце Божине* x *са* $\frac{1}{2}$ *оваца у Крстины̀ износе 20; Овце Крстине са* $\frac{1}{3}$ *оваца Божины̀ такођеръ износе 20. Колико оваца има Божа? и колико Крста.*

Разрѣшеніе. Божа има 12, а Крста има 16. Єръ 12 + 8 = 20; а 12 + 4 = 16.

10. Задатакъ. *Отацъ сыну, кои се како у наукама, тако и добримъ владанѣмъ отликовао, поклони два драгоцѣнна прстена одъ єдне вредности, єданъ цепный саатъ, и златанъ ланацъ; самъ ланацъ вреди 25 дуката* $= a$; *саатъ* x *скупа са ланцемъ износи* $\frac{1}{3}$ *часть вредности у прстеня; прстени са ланцемъ заєдно вреде четиръ пута толико колико саатъ. Пошто є* *саатъ, то єсть коя є нѣгова вредность? а шта вреде прстени?*

Разрѣшеніє. 100, 375 дуката! Єръ $a + x = \frac{y}{3}$, и $a + y = 4x$; одтудъ $\frac{y}{3} - a = \frac{a + y}{4}$ и проч.

11. Задатакъ. *Некіи робови замоле Велька, да бы имъ што даровао, на коє онъ одговори: башъ самь садъ предходећимъ вашима друговима поклоніо 6 форинтій, да сте ми пре єднога мінута дошли, мого самь вамъ свакоме по 24 крайц. дати, и мени бы остало іоштъ 10 крайцара; али садъ немогу више него само свакоме по 10 крайц. дати, а мени башъ ништа да неостане. Колико є робова? Колико има Велько новаца садъ? а колико є пре имао?*

Разрѣшеніє. Да назначимо 10 крайцара $= a$, 24 крайц. $= б$, 6 форинтій или 360 крайц. $= в$, число робова $= x$, число Вельковы' новаца после раздѣлены 6 форинтій іоштъ є остало, или за другу деобу принадлежеће $= y$; быће за другу деобу новци двоструко изражени, $ax = y$, а пре прве деобе на два начина представлѣна $бx + a = y + в$, и одтудъ по избациваню y просто уравненіє быће $бx + a - в = ax$ и проч. Тако по изслѣдованію цѣлога рачуна излази число робова $= 25$, число Вельковы' новаца садъ $= 4$ фор. и 10 крайц., а число прећашньи' новаца 10 фор. и 10 крайцара!

12. Задатакъ. *Піѳагоръ запытанъ, колико нѣговы̀ ученика іошть миръ наблюдавати имаю, колико ньи уче Маѳесісъ, а колико філософію, одговори: мои ученицы, кои миръ наблюдавати имаю са половиномъ прочѝ износе* 66. *Ученицы Маѳесіса са* $\frac{2}{3}$ *прочѝ сачиняваю* 84. *Філософа пакъ са* $\frac{3}{4}$ *прочѝ числимъ* 93. *Колико ньи има поособъ одъ сваке классе?*

Разрѣшеніе. Да назначимо число $66 = a$, $84 = б$, $93 = в$, миръ наблюдаваюће ученике $= x$, Маѳематіке $= y$, а філософіе ученике $= г$; тако ћемо добити ова три уравненія.

А) $x + \frac{y}{2} + \frac{г}{2} = a$, или $2x + y + г = 2a$;

Б) $y + \frac{2x}{3} + \frac{2г}{3} = б$, или $3y + 2x + 2г = 3б$;

В) $г + \frac{3x}{4} + \frac{3y}{4} = в$, или $4г + 3x + 3y = 4в$.

Изъ *А*) слѣдуе $x = a \frac{- y - г}{2}$,

Изъ *В*) „ $x = \frac{4в - 3y - 4г}{3}$.

И тако „ $a \frac{- y - г}{2} = \frac{4в - 3y - 4г}{3}$,

одкудъ „ 1) $y = \frac{8в - 6a - 5г}{3}$.

Изъ *Б*) уравн. $y = \frac{3б - 2x - 2г}{3}$, изъ *B*) уравн. $y = \frac{4в - 3x - 4г}{3}$;

или „ $\frac{3б - 2x - 2г}{3} = \frac{4в - 3x - 4г}{3}$,

одкудъ 2) $x = 4в - 3б - 2г$.

Садъ поставляюћи вредности одъ x и y у *A*) уравненію $2x + y + г = 2а$, добићемо

$$8в - 6б - 4г + \frac{8в - 6а - 5г}{3} + г = 2а,$$

быће $г = \frac{32в - 18б - 12а}{14}$,

$$г = \frac{32 \times 93 - 18 \times 84 - 12 \times 66}{14} = 48.$$

Далѣ ову изнађену вредность $г = 48$ ставляюћи числомъ у уравненію 1) и 2) быће

$x = 4 \times 93 - 3 \times 84 - 2 \times 48 = 24$;

а $y = \frac{8 \times 93 - 6 \times 66 - 5 \times 48}{3} = 36$.

Слѣдователно по условіяма задатка потврждаваюсе изнађене вредности: гди ученика наблюдавајућій миръ има $x = 24$. Маѳематике ученика $y = 36$, а Філософіє $г = 48$. Єръ $24 \times \frac{36}{2} + \frac{48}{2} = 66$: $36 + \frac{2}{3} \times (24 + 48) = 84$; $48 + \frac{3}{4} \times (24 + 36) = 93$.

13. Задатакъ. *Число 47 на три такове части расправити, да кадъ другу часть чрезъ прву раздѣлимо,* **1** *за количника и* **1** *за остатакъ добіємо; а кадъ трећу часть чрезъ другу раз-*

дѣлимо, да **1** *за количника, а* **3** *за остатакъ добыемо.*

Разрѣшеніе. Да назначимо ове три части, кое се траже, са x, y, v; то по задатку быти мора

$$1)\quad \frac{y}{x} = 1 + \frac{1}{x},\ \text{или}\ y = x + 1,$$

$$2)\quad \frac{v}{y} = 1 + \frac{3}{y},\ \text{или}\ v = y + 3.$$

И тако ћемо добыти ова три уравненія

A) $x + y + v = 47$

$Б$) $- x + y = 1$, (изъ 1)

$В$) $- y + v = 3$ (изъ 4). Дакле е и $А + Б = В$) $2y + v = 48$, и $В$ са 2 умножаваюћи дае $- 2y + 2v = 6$; одтудъ чрезъ собраніе

$$3v = 54,\ \text{и}$$

$$v = 18.$$

Садъ слѣдуе изъ $В$):

$y = v - 3$, поставлянѣмъ вредностій одъ v

$y = 18 - 3 = 15$. Ову вредность у уравненію

$x = y - 1$ ($Б$) ставляюћи, быће

$x = 15 - 1 = 14$.

Дакле $x = 14$, $y = 15$, а $v = 18$.

14. Задатакъ. *Умираюћій Спасое остави после себе трудну жену, и остави у готову новцу едну сумму одъ* **9000** *талира. Нѣгова е последня воля была: ако родишъ сына, то онъ да наслѣди три путъ толико, колико ты; а родишъ ли девойку, то узми ты два путъ толико, колико она. Но садъ се догодило, да е жена роди-*

ла и сына и кћерь. Како садъ по последньой вольи Спасоя горня сумма да се раздѣли!

Разрѣшеніє. Трудолюбиви ученици нека сами ове задатке разрѣше. Мы ћемо само овде изслѣдованія назначити: Жена є добыла 2000, сынъ 6000, а кћи 1000 талира!

15. Задатакъ. *Некій трговацъ погоди єдногъ посленика са овыма речма: за свакій данъ, што ты мени радишъ, плати ћу ти* 21 *крайцару, а за свакій данъ, кои ты на твоє послове употребишъ, плати ћешъ ты мени за раану* 9 *крайцара. После* 50 *дана изиђе посленикъ одъ трговца, и искаше одъ свога газде наплату, и кадъ су се прорачунали, изиђе, да посленикъ* 2 *форинта добыти има. Пытасе, колико є дана овай посленикъ за трговца пословао? а колико дана за себе!*

Разрѣшеніє. Посленикъ є радіо за трговца 19, дакле за себе 31 данъ.

16. Задатакъ. *Два су ратара заєдно посеяли* 24 *мерова пшенице; првый вели другоме: ако ми свакій меровъ толико донесе, колико си ты посеяо, я ћу* 135 *мерова добыти. Колико є свакій мерова посеяо?*

Разрѣшеніє. Єданъ є 15, а другій 9 мерова посеяо! +

Довде у V Разреду Гимназіе.

В, РАЗРѢШЕНІЄ НЕОПРЕДѢЛЕНЫ’ ЗАДАТКА.

140.

Ако се изъ условія єднога задатка не могу толико уравненія сачинити, колико се непознаты’ количества налазе, то є знакъ да є задатакъ неопредѣленъ; єръ се за свако непознато количество выше, и често безконечно многе вредности изнаћи могу, коє или положителне или отрицателне, цѣле или разбієнне, условія задатка изпуняваю, и ньима соотвѣтствую. Начинъ є, по комъ се те вредности наћи могу, слѣдуюћій:

Єдно само одъ оны’ непознаты’ количества, коя се у уравненію изъ таковога задатка доведена, наоде, као непознато количество сматрати треба, а съ другима тако поступати, канда бы позната была, и задатакъ тако разрѣшити, аки бы задакатъ простъ быо у призрѣнію оне познате, после почемъ сматрамо количества непозната као позната, поставити треба неку своєвольну вредность на ньіово мѣсто, коя да обстоятелствама задатка соотвѣтствує; чрезъ то ћемо вредность непознатогъ количества изнаћи. Ако изнађена вредность не бы условіяма задатка соотвѣтствовала, то опетъ сматраюћи количества непозната као позната поставити треба другу вредность, и тако нагађаюћи выше пута, докъ небы условіяма задатка изнађена вредность соотвѣтствовала. На тай ћемо начинъ доста пута безчисленне вредности изнаћи, коє ће све условіяма задатка соотвѣтствовати.

1. Задатакъ. *Петаръ и Паво добыю у игри 24 дуката заєдно. Колико є добыо Петаръ, а колико Паво поособъ.*

Разрѣшеніє. Да назначимо $24 = a$, добытакъ Петра $= x$, а добытакъ Павла $= y$; слѣдователно по задатимъ условіяма быће уравненіє $x + y = a$. Но будући да се у овомъ уравненію два непозната количества налазе, а по предложенымъ условіяма задатка друго се уравненіє іоштъ сачинити не може, то слѣдує, да є овай задатакъ неопредѣланъ, и да се само са нагађанѣмъ разрѣшити може. Зато сматрати треба y као количество познато, да се вредность одъ x изразити може, и тако $x = a - y$. Садъ поставити треба неко повольно число на мѣсто y, коє одъ 24 манѣ быти мора (н. п. 1, или 2, или 3, 4, 5 и т. д.), да не бы непознато x изишло отрицателно или манѣ одъ нулле, коє бы было противʼ условія добытка; да узмемо $y = 15$: то ће быти $x = 24 - 15 = 9$. Ако є дакле Паво добыо 15 дуката, то є Петаръ добыо 9; єръ $15 + 9 = 24$. Ако ставимо $y = 7$; то ће быти $x = 24 - 7 = 17$. Єръ $7 + 17 = 24$; и тако далѣ безчисленне се вредности наћи могу.

2. Задатакъ. *Благоє има и сребрныʼ и златныʼ новаца. Ако се число обоєга рода новаца особенно подигне на квадратъ, и друго одъ* *првога одузме; остае* 80. *Колико има онъ новаца сребрны' и колико златны'.*

Разрѣшеніе. Да ставимо $80 = a$, новце златне $= x$, сребрне $= y$, тако $x^2 - y^2 = a$, $x^2 = a + y^2$, $x = \sqrt{(a \pm y^2)}$. Садъ изабрати треба число таково, коега квадратъ ко 80 додато, да износи совршеный квадратъ, да се изъ нѣга исправно коренъ извући може. Да ставимо то число $y = 1$; быће $x = \sqrt{(80 + 1)} = \sqrt{(81)} = 9$. У овомъ случаю има Благое 9 комада златны' новаца, и єданъ новацъ сребрный; єръ $9 \times 9 - 1 \times 1 = 80$. Ако ставимо $y = 8$; быће $x = \sqrt{(80 + 64)} = \sqrt{144} = 12$, и т. д.

3. **Задатакъ.** *Изнаћи два цѣла числа, кои' разлика квадрата' да буде* 56.

Разрѣшеніе. Назначавајући $56 = a$, веће число, коє се тражи $= x$, манѣ $= y$; быће $x^2 - y^2 = a$; пакъ $x^2 = a + y^2$, и $x = \sqrt{(a + y^2)}$. Садъ нагађанѣмъ на мѣсто y да ставимо 5, и овога квадратъ 25 додавајући ко $56 + 25 = 81$, коєга є коренъ 9; дакле $x = 9$, а $y = 5$. Соотвѣтствує захтеваню; єръ $81 - 25 = 56$ и тако далѣ.

4. **Задатакъ.** *Три числа наћи, одъ кои да є сумма* =151, *а сумма првога и трећега да є разлики равна, кадъ се прво одъ другога одузме.*

Разрѣшеніе. Да назначимо прво число са x друго са y, а треће са z, то ће быти по условіяма

$$A)\quad x + y + z = 15,$$
$$Б)\quad x + z = y - x.$$

Изъ уравненія A) слѣдує $x = 15 - y - z$, а
изъ „ $Б$) „ $x = \frac{y - z}{2}$, дакле

$$и\ 15 - y - z = \frac{y - z}{2},\ одкудъ\ є$$

$$В)\quad y = 10 - \frac{1}{3}z,$$ едно уравненіе, у комъ су іоштъ два количества непозната; еръ су изъ условія задатка само 2 на мѣсто 3 уравненія сочинѣна быти могла. Зато узимаюћи у уравненію $В$, за z повольно неко положително или отрицателно количество, и определяваюћи чрезъ то y, и ову пронађену вредность ставляюћи у уравненію A, тако се може и x наћи.

Ако є $z = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\quad \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$

то є $y = 9\frac{2}{3}, 9\frac{1}{8}, 9,\ 8\frac{2}{3}, 8\frac{1}{8}, \ldots 9\frac{5}{6},\ 9\frac{8}{9}$

и $x = 4\frac{1}{3}, 3\frac{2}{3}, 3,\ 2\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}, \ldots 4\frac{1}{2},\ 4\frac{7}{9}$.

Г, О КВАДРАТНИМЪ УРАВНЕНІЯМА, ЗАДАТЦИМА И РАЗРѢШЕНІЯМА.

141.

Будући да є у квадратномъ уравненію непознато количество на друго достоинство или квадратъ узвышено, то садржава оно или *совршеный квадратъ* нѣговъ, у коме ни єданъ производъ, изъ кога се оно состои, неоскудѣва, или несадржава таковый; у овомъ случаю зовесе *квадратъ несовершенный*, кадъ при єдномъ двочленномъ корену квадратъ єдне части оскудѣва. И уравненіє, коє таковый несовршенный квадратъ у себи садржава, зовесе *нечисто квадратно уравненіє* (aequatio quadratica impura, adfecta).

Н. п. уравненіє $x^3 = aб$,

и $x^2 + ax + \frac{a^2}{б} = бв$,

садржаваю совршеный квадратъ корена x и $x + \frac{a}{2}$. Напротивъ ова два уравненія $x^2 + 2ax = вг$ и $x^2 - \frac{2x}{3} = aв$ садржаваю несовршенне квадрате корена $x + a$ и $x - \frac{1}{3}$, єръ у оба квадратъ друге части оскудѣва; и зато се зову нечиста квадратна уравненія, кои' є изложеніє $x^2 \pm ax = \pm б^2$.

142.

Изъ задатогъ квадрата несовршенногъ изнаћи другій членъ корена.

1во Да ставимо овай квадратъ несовршенный $a^2 + 2aб$. Извући треба коренъ изъ првога члена a^2 несовршенногъ квадрата, точно уређеногъ; тако ћемо добыти првый членъ корена $а$ истога квадрата несовршенногъ.

$2^{го}$ Да се умножи изнађеный првый членъ корена $а$ са 2, и чрезъ ово првога члена удвоеніе $2а$ раздѣлити треба све проче членове, кои после првога члена у задатомъ несовршенномъ квадрату слѣдую, и сви садржавају удвоенный производъ изъ првога члена и другога; количникъ добыеный, быће другій членъ корена. **Или**

$3^{ће}$ Будући да после квадрата првога члена у свима другима членовима садржавасе удвоенный производъ првога члена и другога; то се могу сви прочи членови раздѣлити чрезъ изнађеный првый членъ корена $а$, тако ћемо добыти количника $2б$, кога чрезъ 2 дѣлећи, добыћемо другій членъ траженога корена.

Примѣри.

I. Квадратъ несовршенный $у^2 - у$, другій е корена членъ $\left(\frac{-у}{2у}=\right)=\frac{1}{2}$.

II. Квадратъ несоврш. $н^2 - 2н$, другій е корена членъ $\left(\frac{-2н}{2н}=\right)-1$.

III. Квадратъ несоврш. $м^2 - \frac{2м}{3}$, другій е корена членъ $\left(\frac{-2м}{6м}=\right)=\frac{1}{3}$.

Непознато, равно е половини непознатогъ сачинителя $\pm\sqrt{}$ изъ половине непознатогъ сачинителя, на Квадратъ подиг кућоть и осьали гознати Количи-на.

IV. Квадратъ несоврш. $м^2 - м + \frac{2ам}{р}$, другій членъ є корена $\left(\frac{-м}{2м} + \frac{2ам}{2мр} = \right) - \frac{1}{2} + \frac{а}{р}$.

V. Квадратъ несоврш. $x^2 - бx - вx$, другій є членъ корена $\left(\frac{-бx - вx}{2x} = \right) \frac{-б-в}{2}$.

Да бы изъ задатогъ несовршенногъ квадрата коренъ извући могли, то таковый найпре попунити треба. А при томе може се наблюдавати, ако бы н. п. несовршенный овай квадратъ попунявати имали $x^2 - 2аx$. Овде є безсумнѣнно првый членъ x, а другій $а$, другій членъ узвисити треба на квадратъ $а^2$, и овай квадратъ додати треба ко несовршенномъ квадрату, то єсть $x^2 - 2аx + а^2$; кои ће сотымъ попунѣнъ быти.

Примѣри.

Квадрати непопунѣни.	*Квадрати попунѣни.*
I. $у^2 - у$	$у^2 - у + \frac{1}{4}$.
II. $у^2 - 2у$	$у^2 - 2у + 1$.
III. $x^2 + 2аx - 4бx$ . .	$x^2 + 2аx - 4бx + а^2$ $- 4аб + 4б^2$.

IV. $м^2 - м + \frac{2ам}{р}$ . . $м^2 - м + \frac{2ам}{р} + \frac{1}{4} - \frac{а}{р} + \frac{а^2}{р^2}$.

V. $x^2 - бx - вx$ . . $x^2 - бx - вx + \frac{б^2 + 2бв + в^2}{4}$.

143.

У редъ поставити уравненіє квадратно.

1. Ставити треба квадратъ количества непознатогъ на прво мѣсто, и то на оно уравненія мѣсто, гди ће быти положителанъ, ако небы већъ таковый быо. Н. п. $ax^2 + \frac{a}{8} = ax - ax^2$, да се промене (чрезъ премештанѣ и собраніє члена $- ax^2$) у ово : $2ax^2 + \frac{a}{8} = ax$.

2. У истый уравненія членъ одма после квадрата непознатогъ количества, да се поставе сви они членови, у коима се прво достоинство количества непознатогъ налази; а прочи членови, кои само позната количества садржаваю, да се пренесу сви на другу страну уравненія (т. є. свагда са променутимъ знакомъ) н. п. у горнѣмъ примѣру $2ax^2 - ax = - \frac{a}{8}$.

3. Ако є квадратъ количества непознатогъ са некимъ познатимъ количествомъ или умноженъ,

или разделѣнъ, обе стране уравненія чрезъ оно исто познато количество у првомъ случаю да се раздѣли, у другомъ пакъ умножи; да бы се сотимъ квадратъ количества непознатогъ одъ союза количества познатогъ опростіо, кое се ко разрѣшенію овы’ уравненія изискуе. Зато горе ставлѣно уравненіе променуће се у ово: $x^2 - \frac{x}{2} = -\frac{1}{16}$.

Примѣри.

	Неуредни.	*Уредни.*
I.	$x^2 - a = 2вx - в^2$	$x^2 - 2вx = a - в^2$.
II.	$ay - \frac{a^2}{4} = б - y^2$	$y^2 + ay = \frac{a^2}{4} + б$.
III.	$3x^2 + ax = aд + бx$	$x^2 + \frac{ax - бx}{3} = \frac{aд}{3}$.
IV.	$y^2 + бд - ay = вy^2$	$\frac{бд}{в - 1} = y^2 + \frac{ay}{в - 1}$.

144.

Извидити, єли у уравненію наодећійсе квадратъ непознатогъ количества совршенъ, или несовршенъ?

1. Ако є непознато количество на квадратъ узвишено, и иначе се ништа у уравненію ненаоди, то є оно квадратъ єдночленногъ корена, и тако совршенъ.

Н. п. $x^2 + aв = б^2$.

2. Ако є непознато количество не само на квадратъ узвишено, него є іоштъ са єднимъ познатимъ количествомъ двогубо узето умножено, и можда се іоштъ овога познатогъ и квадратъ наоди, то содржава уравненіє све части квадрата двочленнога корена, коє є дакле совршено.

Н. п. $x^2 + 2ax + a^2 = вд$.

А да бы се ове части сотымъ лакше изнаћи могле, можесе уравненіє найболѣ на ништа т. є. на нуллу довести, но тако, да квадратъ непознатогъ количества положителанъ остане.

Н. п. имали бы ово уравненіє
$ад - 2ax + вд = x^2 + a^2$, то ставити треба: $x^2 + 2ax + a^2 - ад - вд = o$. Но іоштъ овде примѣтити треба, да за придобити совршенный квадратъ, како квадратъ прве тако и друге части положителанъ быти мора, иначе ће свагда несовршенъ остати, ако бы се иначе и све нуждне части наодиле; єръ бы само воображенный или невозможный коренъ имао. Н. п. $x^2 + 2бx - б^2$ несовршенный є квадратъ, єръ $x \pm б$ не може быти коренъ, кои бы свагда $x^2 \pm 2бx + б^2$ за квадратъ дао.

3. Ако бы се налазило непознато количество поредъ свога квадрата іоштъ са некимъ познатимъ числомъ умножено, но квадратъ после овога познатога числа неналазисе, то є квадратъ несовршенъ. Н. п. $x^2 + ax = бв$.

4. Ако се непознато количество поредъ свога квадрата іоштъ єданпутъ безъ умноженія са

познатимъ числомъ, и безъ сочинителя налази, то пазити треба, налази ли се одъ половине сочинителя положителанъ квадратъ, у комъ є случаю квадратъ совршенъ.

Н. п. $x^2 - x + \frac{1}{4} = в^2$, то морамо $- x$ сматрати, аки бы $- \frac{1}{2} x$ двапутъ стаяло, и будући да се квадратъ одъ $\frac{1}{2}$ т. є. $\frac{1}{4}$ наоди, тако є квадратъ савршенъ. Тако исто и са

$$x^2 + 4x + 4 = ав.$$

5. Ако бы се наодило непознато количество осимъ свогъ квадрата на подобіє разбієнія, то узети треба половину одъ овога разбієнія, или умноживше именителя са 2, пазити треба, еда ли се квадратъ ове половине наоди.

Н. п. у уравненію $x^2 + \frac{2ax}{3} + \frac{a^2}{9} = аб - бв$, квадратъ є совршенъ, єръ се квадратъ одъ половине єднога чинителя $\frac{2a}{3}$, т. є. $\frac{a}{3} = \frac{a^2}{9}$ наоди. У противномъ случаю $x - \frac{x}{3} = ав$ уравненіє є несовршено, єръ квадратъ одъ $\frac{x}{6}$ оскудѣва.

6. Ако квадратъ непознатогъ количества єднога сочинителя поредъ себе има, кои небы квадратъ быо, то никада неможе совршенный квадратъ у уравненію быти, ако бы се иначе и све

проче части налазиле; у таковомъ бы случаю морали сва друга количества чрезъ овогъ сочинителя дѣлити, и текъ онда гледати по предидућима правилама, еда ли се у уравненію совршенный квадратъ налази.

Н. п. у $6x^2 - 2ax + a^2 = aв$, несовршенный є квадратъ.

145.

У єдномъ уравненію наодећисе несовршенный квадратъ попунити.

1. Пренети треба све у уравненію наодећесе части квадрата у єданъ членъ на само.

2. Изтражити треба по предидућима правилама, коя часть квадрату оскудѣва.

3. Ову после са знакомъ + ставити треба у обе части уравненія, чрезъ коє ће се квадратъ попунити, и опетъ ће се єднакость у уравненію сачувати.

Првый примѣръ.

Ако бы имали уравненіе $x^2 - aв = 2ax$, то ставити треба найпре $x^2 - 2ax = aв$. Но будући да овде іоштъ квадратъ одъ $- a$ оскудѣва, то на обе стране поставити треба, па ће быти

$$x^2 - 2ax + a^2 = aв + a^2;$$

гди є првый членъ совршенный квадратъ, коєга є коренъ $x - a$, или $a - x$.

Другій примѣръ.

Ако бы уравненіє $аб - x = вг - x^2$ попунити имали, то найпре таково довести треба на нуллу, но тако, да x^2 положителанъ буде, т. є.

$$x^2 - x + аб - вг = 0.$$

После тога ставити треба све наодећесе части квадрата у єданъ членъ, тако ће быти $x^2 - x = вг - аб$. Будући да садъ $- x$ тако сматрати морамо, аки бы двогубо одъ $- \frac{1}{2} x$ тамо было, зато сочинити треба одъ сочинителя $\frac{1}{2}$ квадратъ, и додати на обе стране, т. є.

$x^2 - x + \frac{1}{4} = вг - аб + \frac{1}{4}$, тако ће квадратъ попунѣнъ быти.

Трећій примѣръ.

Ако бы имали несовршенный квадратъ у $4x^2 - \frac{2вx}{3} + в^2 = аб$ попунити, то найпре ставити треба $4x^2 - \frac{2вx}{3} = аб - в^2$. Будући да се $- \frac{2вx}{3}$ као удвоєный производъ одъ $аx$ и $- \frac{в}{6}$ сматрати може, и квадратъ чинителя $- \frac{в}{6}$ оскудѣва, то додати треба $+ \frac{в^2}{36}$ на обе стране, пакъ ћемо добыти у уравненію $4x^2 - \frac{2вx}{3} + \frac{в^2}{36} = аб - в^2 + \frac{в^2}{36}$ совршенный квадратъ, одкуда є коренъ $2x - \frac{в}{6}$.

146.

Крадратный задатакъ разрѣшити:

1. Попунити треба по предидућемъ § у уравненію наодећисе несовршенный квадратъ, но тако, да таковый на єдну страну уравненія дође, а на другу сама позната количества.

2. Извући треба изъ оба члена коренъ квадратный (§ 85), коє кодъ првога быти може; а кодъ другога се само кореннимъ знакомъ назначава.

3. Ако є коренъ квадрата двочленный, слѣдователно ако се у томе и єдно познато количество содржава, то пренети треба ово на другу страну уравненія, да се непознато количество само на єдной страни наоди, со тимъ ће задатакъ разрѣшенъ быти.

Н. п. $x^2 - 6x + 9 = аб + 9$: то є

$$x - 3 = \sqrt{аб + 9},$$

и $x = \sqrt{аб + 9} + 3,$

или $3 - x = \sqrt{аб + 9},$

слѣдов. $3 - \sqrt{аб + 9} = x.$

Єръ свакій квадратъ $x^2 - 2ax + a^2$ двоякій коренъ имати може, т. є. $x - a$ или $a - x$, коє ће обстоятелства задатка показати, кое се одъ оба случая узети има.

1. Задатакъ. *Неко число топція заедно су 529 пута пукли, и толико се зна, да є свакій одъ ньи̓ толико пута пуко, колико є ньи на брою было. Изъ овога тражисе число топція, и число, колико су пута пукли?*

Разрѣшеніє. Да назначимо число 529 . . $= a$, а число топція, и число колико є пута свакій пуко $= x$. Будући да цело число, колико су пута пукли, излази, кадъ се оно число, колико є пута свакій одъ ньи̓ пуко, са числомъ топція умножи,

то ће быти $x^2 = a$,

слѣдователно $x = \sqrt{a} = \sqrt{529} = 23$.

2. Задатакъ. *Изъ задате сумме два числа и производа єднога числа са другимъ, числа сама наћи.*

Разрѣшеніє. Да назначимо задату сумму $= a$, производъ $= \text{б}$, прво число само $= x$, а друго $= y$, то ће быти

$$x + y = a,$$

$$x = a - y,$$

$$xy = \text{б}$$

слѣдователно $x = \frac{\text{б}}{y}$;

дакле є $a - y = \frac{\text{б}}{y}$

и $ay - y^2 = \text{б}$.

Будући да є овде $-y^2$ отрицателанъ, то се мора положителнымъ учинити, тако ћемо добыти

$$y^2 - ay = -б$$

$$y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - б$$

$$y - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - б}$$

$$y = \sqrt{\frac{a^2}{4} - б} + \frac{a}{2}.$$

Будући да є $x = a - y$, то є

$$x = a - \sqrt{\frac{a^2}{4} - б} - \frac{a}{2}$$

$$= \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - б}.$$

Да ставимо $a = 60$, $б = 875$, то є

$$y = \sqrt{900 - 875} + 30 = 35$$

$$\text{а } x = 30 - \sqrt{900 - 875} = 25.$$

$$\text{пакъ } 35 + 25 = 60$$

$$\text{и } 35 \times 25 = 875.$$

3. **Задатакъ.** *Драгутина запытаю, колико онъ новаца има? на коє онъ одговори: Кадъ бы число моѝ новаца са собомъ самимъ умножили, и іоштъ 6 пута узели, то бы сумма была = 216. Колико є дакле ово число?*

Разрѣшеніє. Назначаваюћи число новаца $= x$, а сумму $216 = б$, то ће быти

$$x^2 + 6x = б;$$

$$x^2 + 6x + 9 = б + 9,$$

$$x + 3 = \sqrt{б + 9},$$
$$x = \sqrt{б + 9} - 3 = \sqrt{216 + 9} - 3$$
$$x = 15 - 3 = 12.$$

4. **Задатакъ.** *Светиславъ буде запытанъ одъ Владислава, колико бы онъ година старъ быо? на кое онай одговори: ако ко удвоєннимъ годинама моима, додамъ іоштъ квадратъ година моій, превозилазимъ праотца нашегъ Адама (кои є* 930 *година живіо), у* 30 *година. Изъ овога ћешъ мой Владиславе! изнаћи године мое.*

Разрѣшеніє. Да назначимо $930 = а$, $30 = б$, године тражене $= x$, удвоєне године $= 2x$, квадратъ година $= x^2$. Изъ овога слѣдує уравненіє

$2x + x^2 = а + б$

$x^2 + 2x = а + б$, чрезъ ставлянѣ уравненія у редъ,

$x^2 + 2x + 1 = а + б + 1$, чрезъ несовршенногъ квадрата попунянѣ,

$x + 1 = \sqrt{а + б + 1}$, извлаченѣмъ корена,

$x = \sqrt{(а + б + 1)} - 1$; или

$x = \sqrt{(а + б + 1)} - 1$

$x = \sqrt{(930 + 30 + 1)} - 1$

$x = \sqrt{961 - 1}$

$x = 31 - 1 = 30.$

И ово се потврждава, єръ $2 \times 30 + 30^2 = 930 + 30$ $(= 960)$.

5. **Задатакъ.** *Некій, кои є много єзыка говоріо, запытанъ буде, колико онъ єзыка зна.*

Кадъ бы одговори онъ, іоштъ єданпутъ толико умножено самимъ собомъ пута єзыка знао, колико знамъ, знао бы толико єзыка, колико зиданю Вавілонскогъ торня свой почетакъ приписую (т. є. 72). Колико єзыка дакле зна?

Разрѣшеніє. Назначаваюћи 72 = a, число тражены’ година = x, іоштъ єданпутъ умножено самимъ собомъ быће $x \times x = x^2$, дакле быће:

$x + x^2 = a;$

$x^2 + x = a,$ у редъ доводећи,

$x^2 + x + \frac{1}{4} = a + \frac{1}{4},$ попуняванѣмъ,

$x + \frac{1}{2} = \sqrt{a + \frac{1}{4}},$ извлаченѣмъ корена,

$x = \sqrt{\left(a + \frac{1}{4}\right)} - \frac{1}{2},$

$x = \sqrt{\left(72 + \frac{1}{4}\right)} - \frac{1}{2},$

$x = \sqrt{\left(\frac{289}{4}\right)} - \frac{1}{2},$

$x = \frac{17}{2} - \frac{1}{2}$ извлаченѣмъ корена,

$x = \frac{16}{2} = 8.$ Потврждавасе $8 + 8 \times 8 = 72.$

6. Задатакъ. *Изъ две вароши долазе войници. Изъ друге вароши дођу у 68 више него изъ прве. Ако се число войника, коє доћи има изъ друге вароши, умножи са числомъ, коє доћи има изъ прве вароши, изилази толико чи-*

сло войника, колико дана има проста година (т. є. 365). *Колико войника долазе изъ прве? а колико изъ друге вароши?*

Разрѣшеніє. Да назначимо 68 = a, 365 дана = $б$, число войника долазити имаюће изъ прве вароши = x, а изъ друге = $x + a$, ово число умножено са пређашньимъ, быће = $x^2 + ax$, слѣдователно $x^2 + ax = б$;

$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = б + \frac{a^2}{4}$ попуняваюћи квадратъ,

$x + \frac{a}{2} = \sqrt{б + \frac{a2}{4}}$,

$x = \sqrt{\left(б + \frac{a^2}{4}\right)} - \frac{a}{2}$,

$x = \sqrt{\left(365 + \frac{4624}{4}\right)} - \frac{68}{2}$,

$x = \sqrt{(1521} - 34), = 39 - 34$,

$x = 5$.

Дакле изъ прве вароши долазе 5, а изъ друге 5 + 68 = 73; єръ 73 × 5 = 365.

7. **Задатакъ.** *Некій трговацъ дао на три мѣста новце у трговину. На друго є мѣсто дао у* 25 *форинтій више него на прво. На треће є дао* 125 *форинтій. Ако ми, говораше онъ, свака форинта на свакомъ мѣсту толико донесе, колико самь на свакомъ мѣсту уложіо, добытакъ на трећемъ мѣсту раванъ бы быо добытку остала два мѣста. Колико є новаца уложіо на првомъ, а колико на другомъ мѣсту?*

Разрѣшеніе. Ставляюћи $25 = а$, $125 = б$, новци на првомъ мѣсту уложени $= x$, на другомъ мѣсту $= x + a$, добытакъ другога мѣста $= (x + a) \times (x + a)$, или $x^2 + 2ax + x^2$, добытакъ трећега мѣста $= б \times б$ или $б^2$, слѣдователно уравненіе

$$б^2 = x^2 + x^2 + 2ax + a^2$$

$$б^2 - a^2 = 2x^2 + 2ax,$$

$$\frac{б^2 - a^2}{2} = x^2 + ax,$$

$$\frac{б^2 - a^2}{2} + \frac{a^2}{4} = x^2 + ax + \frac{a^2}{4} \text{ попуняв. квад.}$$

$$\sqrt{\left(\frac{б^2 - a^2}{2} + \frac{a^2}{4}\right)} = x + \frac{a}{2},$$

$$\sqrt{\left(\frac{б^2 - a^2}{2} + \frac{a^2}{4}\right)} - \frac{a}{2} = x,$$

$$\sqrt{\left(\frac{15625 - 625}{2} + \frac{625}{4}\right)} - \frac{25}{2} = x,$$

у вмѣстителной наодећасе числа отяти, пакъ разбіенія на равноименна преобративше, собраніе савршити, пакъ после изъ именителя и числителя извући коренъ, быће $\frac{175}{2}$, одъ кога отяти треба $-\frac{25}{2}$, и остатакъ чрезъ 2 раздѣлити, быће

$x = 75$, дакле на првомъ мѣсту уложіо є 75 ф. на другомъ 100 ф. Єръ є $(125)^2 = (75)^2 + (100)^2$.

8. Задатакъ. *Дошавшій изъ рата войникъ своима домородцима хвалећисе говораше:*

не броимъ оне непріятелѣ, коє самь изъ пушке побіо, него да ій є толико пута толико на мою саблю нашло, колико ій є нашло, четиръ пута бы толико побіо, колико самь управ' побіо. Колико є дакле непріятеля побіо?

Разрѣшеніє. Да назначимо мачемъ побієне войнике $= x$, овы' толико пута толико $= x \times x$, четиръ пута толико $= 4x$, быѣе уравненіє

$x + x^2 = 4x$;

$x^2 + x - 4x = 0$, у редъ поставляюђи,

$x^2 - 3x = 0$

$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$ попуняваюђи квадратъ,

$x - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$, извлач. корена,

$x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

Дакле є побіо 3 непріятеля; єръ $3 + 3 \times 3 = 3 \times 4 = 12$.

9. **Задатакъ.** *Башчованъ Мирко своима 18 гостима, коє людма, коє женама изнео две котарчице пуне, у коима се у свакой налазило 36 померанцій, са овима речма: єдну котарчицу люди да подѣле равно међу собомъ, а жене другу. По учинѣной равной деоби, изишло є; да є свака жена у три померанце выше добыла него свакій човекъ. Колико є было людій? Колико жена? колико є померанцій допало свакоме човеку? а колико свакой жени?*

Разрѣшеніє. Да назначимо $18 = а$, $36 = б$, $3 = в$, число людій $= x$, число жена $= а - x$; быти ће припадаюћа єдномъ човеку часть $= \frac{б}{x}$, а жени часть $\frac{б}{а - x}$, коя, кадъ се одъ нѣ одузме 3 или $в$, быће равна оной части одъ людій, дакле быће уравненіє

$\frac{б}{x} = \frac{б}{а - x} - б$; разбієніє уничтожити, и скратити, быће

$\frac{аб}{в} = x^2 - аx + \frac{2бx}{в}$, додаваюћи непознатогъ количества другогъ члена коренъ

$$\frac{а^2}{4} + \frac{б^2}{в^2} = x^2 - аx + \frac{гбx}{в} + \frac{а^2}{4} - \frac{аб}{в} + \frac{б^2}{\,},$$

$$\sqrt{\left(\frac{а^2}{4} + \frac{б^2}{в^2}\right)} + \frac{а}{2} - \frac{б}{в} = x,$$

$$\sqrt{\left(\frac{324}{4} + \frac{1296}{9}\right)} + \frac{18}{2} - \frac{36}{3} = x$$

$\sqrt{(225)} - 3 = x = 15 - 3 = 12 = x$; то єсть, людій є было 12, а жена $18 - 12 = 6$, число поморанцій, коє є свакомъ допало $36 : 12 = 3$; а свакой жени $36 : 6 = 6$.

10. Производъ два числа $= 48$, а разлика ньіовы' квадрата у 144 пута ньіове разлике умалѣна, дає 512. Коя су оба ова числа?

Разрѣшеніе. A) $xy = 48$,

Б) $x^3 - y^3 - 144\ (x - y) = 512$. уравненіе *Б*) быће

$x^3 - y^3 - 3 . 48\ (x - y) = 512$, отятіемъ одъ *A*)

$x^3 - y^3 - 3 . xy\ (x - y) = 512$, быће

$x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = 512$

$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 512$

$(x - y)^3 = 512$, дакле $x - y = \sqrt[3]{512} = 8$.

$xy = 48$.

y = 4
x = 12

ОДДѢЛЕНІЄ ШЕСТО.

О РЕДОВИМА, ПОСТЕПЕННОСТИМА И ЛОГАРИѲМУСИМА.

ГЛАВА ПРВА.

О РЕДОВИМА ВООБЩЕ И ПОСТЕПЕННОСТИМА АРИТМЕТИЧЕСКИМА ПООСОБЪ.

147.

Редъ количества овде (у Маѳематіки) вообще зовесе множество количества, коя по постоянномъ некомъ и опредѣленомъ закону єдна за другимъ слѣдую. Количества сама зовусе *членови реда*. Редъ, у коме членови по назначеномъ начину постояно расту, зовесе *растећій*, као 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. и проч., *падаюћій*, гди членови постояно падаю, као 9, 8, 7, 6, 5, 4 и проч. и 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ . . . . Редъ онай, или растећій или падаюћій, кои изъ количества непресѣчно соразмѣрны' произходи, вообще зовесе *Постепенность* (progressio), коя є по разлики соразмѣрностій поособъ или *Постепенность Аритметическа*, или *Геометрическа*.

148.

Редъ, кои се само до некогъ опредѣленогъ членова числа продужава, *опредѣленый* зовесе: *неопредѣленый* или *безконечный*, кои се представля безъ конца преко свію граница опредѣлены', продуженъ, као 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 . . . . ∞.

149.

Постепенность Аритметическа, зовесе редъ количества непресѣчно аритметическій соразмѣрны', или по єдной разлики редомъ слѣдуюћій, као 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... и 3, 7, 11, 15, 19, 23, ... у првой є обща разлика 2: а у другой 4. Обе су растуће. Падаюћа є 11, 9, 7, 5, 3, 1, коє є разлика — 2. Постепенность Аритметическа можесе почети одъ нулле, као 0, 1, 2, 3, 4, 5, . . ., или горе или доле.

150.

Постепенность или редъ *чисала наравны'* или на кратко *редъ численный* зовесе онай редъ Аритметическій численный, коєга є првый членъ єдиница, а други членови по реду и єдинице разлики слѣдую, као 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . . .

Редъ наравны' чисала *паровиты'* зовесе онай редъ Аритметическій численный, коєга є првый членъ двойственъ, а други су членови сви редомъ паровити, и тако по реду и разликомъ 2 слѣдую, као 2, 4, 6, 8, 10, 12 . . . .

Редъ чисала неравны’ безпарны’, зовесе онай редъ Аритметическій численный, коега є првый членъ єданъ, а други су сви членови редомъ безпарни, кои по истой разлики манѣ или више 2 слѣдую, као 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 . . . .

151.

Свака се постепенность Аритметическа представити може овимъ образцемъ общимъ, $a, a \pm p$, $a \pm 2p$, $a \pm 3p$, $a \pm 4p$, $a \pm 5p$ . . . ; єръ свакій членъ одъ нѣму слѣдуюћегъ отятъ, дає $\pm p$: изъ овога слѣдує, *да є свакій слѣдуюћій членъ равань своме непосредственно предидућем’, кадъ му се дода разлика обшта.*

Свакій членъ, дакле и последный постепенности аритметическе равань є првомъ члену, кадъ му се дода (или одузме) разлика, толико пута, колико є членова, или, свакій є членъ равань сумми, изъ првогъ члена и разлике, умноженой са числомъ членова предходећи, или

Свакій є членъ равань сумми членова одъ почетка реда до вмѣстително узетогъ числѣны’. Н. п. у постепенности Аритметической 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27 . . ., кои’ членова є разлика 4; быће членъ (ма кои) н. п. шестый $23 = 3 + 4 \times 5 = 23$;

152.

Да бы се ма кои членъ постепенности Аритметическе наћи могао, нуждно є само разлику общу умножити са числомъ членова, траженый членъ предходећій, и изводъ одтудъ добієнный ко првоме члену додати.

Будући да се постепенность после свакога члена као опредѣлена сматрати може, кадъ се ма кои членъ као последнѣй назначи $= \omega$, првый членъ $= а$, разлика $= р$, число членова, до траженога вмѣстително узето $= н$; изразићесе число членова, траженогъ последнѣгъ предходећій, са $н - 1$, траженный ма кои растуће постепености Аритметическе назначићесе са $\omega = а + (н - 1)\, р$. Ако се дакле постепенности Аритметическе, кое є членъ првый датъ $= 2$, и разлика $= 3$, тражи членъ седмый; быће $н = 7$, и $н - 1 = 6$; дакле, поставлююћи вредности, быће седмый членъ $\omega = а + (н - 1)\, р = 2 + 6 \times 3 = 20$. кое се потврждава; єръ є првый членъ 2, разлика 3, то ће ова быти постепенность 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 23 . . . где се тражено седмо мѣсто налази са 20.

153.

Ако се у гореназначеномъ овомъ образцу Алгебраическомъ $\omega = а + (н - 1)\, р$ или $\omega + нр - р$ вредность свакогъ количества, у нѣму наодећегсе, поособъ изясни, добыћемо за разрѣшеніє растећій постепенностій Аритметическій задатака, у коима се разлика, а сумма ненаоди, четиръ слѣдуюћа образца, помоћію коій сваку одъ четиръ изражены’ количества вредность наћи можемо, ако се проча три количества даду:

$$1)\quad \omega = a + нр - р. \qquad 3)\quad a = \omega - нр + р.$$

$$2)\quad р = \frac{\omega - a}{н - 1}. \qquad 4)\quad н = \frac{\omega - a}{р} + 1.$$

Примѣри.

I. *Землѣдржацъ некій економическо станѣ добара свои’ за* 10 *година тако є поправіо, да му є оно после сваке године свагда* 1500 *талира више принело. Последнѣ поправляня године прійміо є свега* 16500 *талира. Колико є прійміо по истеченію прве поправляня године?*

Разрѣшеніє. У овомъ задатку тражисе првый постепенности членъ. Зато ако се по трећемъ образцу, у коіой є вредность првога члена a изражена, на мѣсто писмена постави вредность у числама, быће

$$a = 16500 - 1500 \times 10 + 1500 = 3000.$$

II. *Божидаръ купи* 659 *изабраны’ кньига. Прву є купіо за* 2 *крайцаре, а сваку слѣдуюћу свагда са єдномъ крайцаромъ скуплѣ. Пошто є купіо последню кньигу?*

Разрѣшеніє. Овде се тражи последный реда Аритметическог членъ, дакле по образцу последнѣга члена $\omega = 2 + 1 \times 659 - 1 = 660$ крайцара или 11 форинтій.

III. *У нѣкомъ селу намѣстесе войници редомъ по кућами. У прву кућу наредусє само* 3 *войника: у другу и тако редомъ у сваку слѣдуюћу намѣстесв по два више. У последньой кући буду* 31. *У колико су кућа они наметени были?*

Разрѣшеніє. 15. (по четвртомъ образцу; єрбо се тражи число членова).

154.

У свакой постепенности Аритметической сумме су одъ два члена, коя оба одъ внѣшньы равно отстоє, као и сумме внѣшньы членова равне међу собомъ.

Свака се постепенность Аритметическа представля са овымъ главнымъ образцемъ a, $a \pm p$, $a \pm 2p$, $a \pm 3p$, $a \pm 4p$, $a \pm 5p$, $a \pm 6p \ldots$ Ако се дакле 1$^{\text{во}}$, по овомъ образцу внѣшньи членови (првый и последньій) совокупе, быће ньіова сумма $= 2a \pm 6p$; 2$^{\text{го}}$ Ако се членъ другій и предпоследньій совокупи, быће ньіова сумма $a \pm p + a \pm 5p = 2a \pm 6p$, то єсть пређашньой сумми равна. 3$^{\text{ће}}$ Ако се членъ трећій изъ прва и допредпоследньій (трећій одъ края) соберу, и ньіове ће сумме быти $= 2a \pm 6p$.

155.

Ако бы число членова постепенности Аритметическе безъ пара было, онда се онай членъ, кои се у среди налази, тако сматрати мора, аки бы онъ двапутъ ставлѣнъ быо; зато, ако се онъ двапутъ узме, и нѣгова ће сумма такођеръ равна быти сумми внѣшньи' членова, и проч.

156.

Будући да се свака постепенность Аритметическа (растећа) представля са a, $a + p$, $a + 2p$, $a + 3p$, $a + 4p$, $a + 5p$ . . . Ако се ове постепенности сви членови саберу, быће сумма $= 6a + 15p$; но та се иста сумма добыва, ако се членови внѣшньи a и $a + 5p$ саберу, одтудъ добіена сумма преполови, пакъ после са числомъ членова овде са 6 умножи, као $\frac{2a + 5p}{2} \times 6 = \frac{12a + 30p}{2} = 6a + 15p$. Дакле *сумма е цѣле постепенности Аритметическе равна полусумми членова внѣшньи', умноженой са числомъ свію членова.*

157.

Ако назначимо првый членъ $= a$, последньй $= \omega$, число свію членова $= н$, сумма $= C$; то се ово горе доказано свойство овимъ главнимъ образцемъ изразити може: $C=\frac{(a+\omega)\times н}{2}$, и ако се изъ овога, вредность свакогъ количества, коя се у овомъ образцу наоди, изтраживати буде, добыћемо опетъ четиръ образца, по коима задатке, у коима разлике нема, разрѣшити можемо.

1) $a=\frac{2C}{н}-\omega.$ 3) $\omega=\frac{2C}{н}-a.$

2) $н=\frac{2C}{a+\omega}.$ 4) $C=\frac{aн+\omega н}{2}$

Тако се по овомъ образцу выше примѣра разрѣшити могу као н. п.

Колико удараца бывію одъ едногъ саата до заключително 12 *на ономъ сату, кой само часове своимъ ударцемъ показує?*

Разрѣшеніє. $\left(C=\frac{1\times 12+12\times 12}{2}=\right)78.$

158.

Ако се сумма разлике членова постепености Аритметическе дода ко члену првомъ, толико пута узетомъ, колико є членова у постепености, добыћесе равнымъ начиномъ по § 157 сумма цѣле постепености.

Примѣри.

1. *Нѣкій господаръ погоди слугу и обећа му плату на прву годину* 30 *талира, а на сва-*

ку слѣдуюћу по $4^{1}/_{2}$ *талира выше него на предходећу. Колико ће слуга* $17^{\text{те}}$ *године одъ почетка своє службе, и колико за сви* **17** *година вообще добыти?*

Разрѣшеніє. **102 талира и 1122 тал.!**

2. *Нѣкій путникъ, кои є за* **19** *дана на своемъ мѣсту опредѣленія быти желіо, ускори са своимъ путешествіємъ тако, да є свакій данъ* $^{1}/_{4}$ *милѣ выше чиніо, него предидућій. Кадъ є тако онъ последный данъ* $14^{1}/_{2}$ *миля учиніо; колико є миля учиніо првый данъ? И колико миля чини нѣгово цѣло путешествіє?*

Разрѣш. **10 миля и** $232^{3}/_{4}$ **милѣ!**

3. *Нѣкій запыта Милету, колико онъ плаће има, на коє онъ одговори: садъ имамъ* **550** *тал.; у почетку моє службе имао самъ само* **100** *тал., но добыо самъ збогъ трудолюбія мога, сваке године по* **30** *талира выше. Колико є година Милета у служби?*

Разрѣш. **16 година!**

4. *Имамо осамнайстъ членова, кои у Аритметической постепенности стоє. Ако два средня члена саберемо, добыћемо* $31^{1}/_{2}$; *ако првый са последньимъ членомъ умножимо, добыћемо* $85^{1}/_{2}$. *Коликій є првый членъ? и разлика ове постепенности?*

Разрѣш. **3 и** $1^{1}/_{2}$ **!**

5. *Два човека путую, да се састану, и пођу у єдно време и на єдномъ путу са два мѣ-*

ста одъ А и Б, коя 170 *миля єдно одъ другогъ одстоє. Онай, што є изъ Б пошао, путує свакій данъ правилно* 4 *милѣ; а онай другій учиніо є првый данъ само* 2 *милѣ, а свакогъ слѣдуюћегъ дана у полъ милѣ выше него предидућегъ што є учиніо. Гди ће се састати?*

Разрѣш. **На 102 милѣ одъ** *А!*

6. *Дужникъ нѣкій буде одъ судіє осуђенъ да плати* **800** *талира, коє на выше термина учинити да има, и то првога термина да плати* **20** *талира, а свакога слѣдуюћега термина у нешто непромѣнно выше него што є предидућега платіо, тако да у последнѣмъ термину* **80** *талира платити ииа. У колико ће термина тіи новци быти исплаћени? И колико є было оно непромѣнно, што є свакога термина выше плаћао?*

Разрѣш. **16 термина и 4 талира!**

7. *Нѣкій дужникъ тако се погоди са своимъ повѣреникомъ, да ће свой дугъ одъ* **12950** *тал., кои онъ на єданпутъ исплатити ніє у станю, у месечнимъ терминима исплатити, и то првога месеца* **600** *тал., а свакога слѣдуюћега месеца по* **50** *тал. выше. За колико ће онъ месецій цео дугъ исплатити? И колико ће имати последнѣга месеца да плати?*

Разрѣш. **За 14 месецій, а последнѣгъ месеца 1250 талира!**

ГЛАВА ДРУГА.

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИМЪ ПОСТЕПЕННОСТИМА.

159.

Постепенность Геометрическа зовесе редъ или множество количества Геометрически међу собомъ соразмѣрны̓, слѣдователно по реду и по ономъ истомъ изложителю слѣдуюћій, као 2, 4, 8, 16, 32 . . .; или 3, 9, 27, 81, 243 . . . . Гди є законъ или изложитель прве постепенности 2, а друге 3. Тако є постепенность Геометрическа падаюћа 32, 16, 8, 4, 2.

160.

Свака се постепенность Геометрическа представити може са овимъ главнимъ образцемъ $а, ам^1, ам^2, ам^3, ам^4, ам^5, ам^6, ам^7, ам^8$ . . . єръ сви членови поступаю по ономъ истомъ изложителю; и свакій членъ чрезъ непосредственно предидућій раздѣленъ, дає онай истый количникъ или истогъ изложителя *м*.

161.

Какогодъ што свакій постепенности Геометрическе членъ, редомъ чрезъ общегъ изложителя раздѣленъ, дає непосредственный нѣговъ предидућій, тако и напротив' свакій предидућій членъ чрезъ общегъ изложителя умноженъ, дає непосредственно нѣга слѣдуюћій членъ. Зато *ако се да првый членъ, и общій изложитель; постепенность се Геометрическа умноженіємъ предидућега члена са изложителѣмъ по вольи продужити, и ма кои се членъ наћи може.*

162.

Свакій є дакле и последньый постепенности Геометрическе членъ производъ изъ члена првога и изложителя, толико пута узетъ, колико є предидућій членова, или што є све єдно, *свакій постепенности Геометрическе членъ раванъ є производу члена првога са изложителѣмъ постепенности, узвишеному на достоинство онога изложителя, коє показує число членова, узетый членъ предидуће.* Да назначимо постепенности Геометрическе првый членъ = a, изложителя = $м$, членъ ма кои као и последньый = ω, а число свію членова (до траженнога члена заключително) = $н$; быће число членова предидућіи' = $н - 1$, и ма кои постепенности Геометрическе членъ $\omega = aм^{н-1}$. Зато, ако се у постепенности Геометрической, у коіой є првый членъ познатъ = 1, а изложнтель = 2, тражи членъ н. п. осмый; быће $н = 9$, $н - 1 = 8$, и траженый $\omega = 1 = (2)^8 = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$. Уверићемосе, ако оставимо постепенность Геометрическу, у коіой є првый членъ = 1, а изложитель = 2, као 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 . . . ., да є на деветомъ мѣсту траженый членъ 256.

163.

Изъ овога слѣдує, да су у постепенности Геометрической производи внѣшньи’ членова, и ма кои други’ два члена, кои одъ внѣшны’ єднако отстоє, єднаки, или међусобно равни. Ако є число членова безъ пара, то є оно равно квадрату члена среднѣгъ постепенности.

164.

Произвести образце Алгебраическе, по коима се количества у постепенности Геометрической налазећа, изнаћи могу.

Да назначимо првый постепенности Геометрическе членъ = a, последньій = ω, изложитель = $м$, сумма цѣле постепенности = c; быће сумма свію членова последньій предходећи’ = $c - \omega$, а сумма послѣдуюћи’ = $c - a$ (сви су членови послѣдуюћи осимъ првога), дакле будући да се постепенность Геометрическа состои изъ отношенія непресѣчны’ Геометрически’, слѣдователно међусобно равны’, то ће $c - \omega : c - a = a : aм$ (првый предидући a са своимъ послѣдуюћимъ $aм$ сравняваюћи); $caм - \omega aм = ca - a^2$, или (оба члена дѣлећи чрезъ a) $cм - \omega м = c - a$. Ако се изъ овогъ уравненія изложе вредности налазећисе количества, добыћемо четиръ слѣдуюћа образца, по коима ћемо задатке разрѣшити моћи:

1) $а = с - см + \omega м.$ 3) $с = \frac{\omega м - а}{м - 1},$

2) $м = \frac{с - а}{с - \omega}.$ 4) $\omega = с + \frac{а - с}{м}.$

Примѣри.

1. *Каквогъ изложителя има една Геометрическа постепенность одъ* **32** *члена, гди є првый членъ* **5**, *а последный* **80**. *Колика є сумма ове постепенности? и коликій є дванайстый членъ?*

Разрѣшеніє. **Изложитель є 1,0935 . . .; сумма 881,62 . . . .; а дванайстый членъ 27,351 . . . . .**

2. *Има седамъ членова, кои Геометрическу постепенность сочиняваю, и тіи су тога свойства, да кадъ првы шестъ саберемо, сумму* **157** $\frac{1}{2}$, *а кадъ последньи шестъ саберемо, сумму* **315** *добыємо. Каква су то числа?*

Разрѣш. **2** $\frac{1}{2}$, **5, 10, 20, 40, 80, 160!**

3. *Цветко пробаюћи свою срећу у лутріи, метне првый путъ некій новацъ, но другій путъ и слѣдуюћій выше пута све у отношенію трогубомъ. Напоследку метне* **729** *крайцара, го-*

ворећи, да є свега већъ **1093** *крайцара у лутрію метао. Колико є прьвый путъ метао?*

Разрѣш. $a = 1093 - 1093 \times 3 + 729 \times 3 = 1.$

4. *Славко подѣли* **765** *форинтій међу потребнима. Прьвый одъ потребны' добыє* **3** *форинта, другій и свакій слѣдуюћій у отношенію двогубомъ. Колико є добіо последньій?*

Разрѣш. $\omega = \frac{3 - 765}{2} + 765 = 384$ фор.

5. *Милета Миленку, кои є врло радо єо орає, даде прьвый данъ єданъ ора, другій данъ да му три, и тако слѣдуюћи' дана даваше му орая у отношенію трогубомъ. Петнайстый данъ му даде* **4782969** *орая. Колико є орая Миленко одъ Милете пріиміо?*

Разрѣш. $c = \frac{4782969 \times 3 - 1}{3 - 1} = 7174453$

орая.

165.

У свакой постепенности Геометрической имасе прьвый членъ ко свакомъ другомъ члену, као што се имаю међу собомъ прьвый и другій членъ узвышеный на достоинство онога степена, коє отстояніє два прва члена, међу собомъ сравнѣна имаю.

Да бы ясность овога правила болѣ разумѣти могли, то найпре, за моћи отстоянія членова постепенности Геометрическе болѣ примѣтити, да напишемо редъ численный надъ постепенности Геометрической писменой тако, да свакій редъ численный соотвѣтствує подчинѣнномъ реду писменномъ, као

1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, ... $н$
$а, ам^1, ам^2, ам^3, ам^4, ам^5, ам^6, ам^7$ . . . . $г$; после да сравнимо првый постепенности Геометрическе членъ $а$ са членомъ трећимъ $ам^2$, и да подигнемо членъ првый $а$ и другій $а^2$ на достоинство другога степена т. є. на квадратъ; єръ трећій членъ, с' коимъ се првый сравнява отстои отстояніємъ два члена одъ првога, коє отстояніє опредѣлює 2 изложитель другога степена, и тако да сравнимо ова два отношенія међу собомъ, као: $а : ам^2 = а^2 : а^2\,м^3$. Равнымъ начиномъ да сравнимо првый членъ $а$ са четвртымъ $а^3$, по горе назначеномъ начину и узроку, као $а : ам^3 = а^3 : а^3м^3$. и т. д. изъ кога слѣдує, да су два и два отношенія међу собомъ равна, збогъ истога, кога имаю изложителя.

166.

Равнымъ начиномъ збогъ истогъ изложителя доказуєсе, да се не само првый, него ма кои членъ има ко другомъ ма коємъ, као што се имаю вообще ма коя два сосѣдна члена међу собомъ, узвышена на достоинство изложителя, *чрезъ отстояніє прва два међу собомъ сравнѣна, назначено.*

167.

Ако се предидућій образацъ почемъ се првый членъ a стави = 1, преобрати у постепенность Геометрическу започинюћусе одъ єдинице као 1, $м^1$, $м^2$, $м^3$, $м^4$, $м^5$, $м^6$, $м^7$ . . .; и кадъ се ова постепенность преобрати у постепенность численну починюћусе такођеръ одъ єдинице, као 1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7; или 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 . . .; или краткости ради да назначимо ове членове постепенности Геометрическе са єдинственнымъ писменима безъ изложителя т. є. са $А$, $Б$, $В$, $Г$, $Д$, $Е$, $Ж$, $З$ . . .; то и овде доказану истину § 166 употребити можемо $1 : м^2 = 1^2 : м^2$ или $1 : м^2$, $1 : м^3 = 1^3 : м^3$ или $1 : м^3$, и т. д.; а у постепенности Геометрической численной другой $1 : 4 = 1^2 : 2^2$ или $1 : 4$, $1 : 8 = 1^3 : 2^3$ и т. д.; у постепенности трећой $А : В = А^2 : Б^2$, $А : Г = А^3 : Б^3$ и т. д., свака два отношенія имаю єднога изложителя.

Дакле првый се постепенности Геометрическе членъ има к' трећемъ, као што се има квадратъ првога члена къ квадрату другога члена.

ГЛАВА ТРЕЋА.

О РЕДОВИМА ДОСТОИНСТВА, И КОРЕНА ЧИСАЛА НАРАВНЫ̓.

168.

Ако се редъ чисала наравны̓ или редъ численный 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 . . . *н* редомъ подигне на достоинство, или ако се изъ нѣга као достоинства редомъ извуче коренъ, онда постаю *редови достоинства*, и *корени чисала наравны̓*, и то конечны или безконечны. Поособъ, ако се редъ овай (свакій членъ поособъ) подигне на достоинство другогъ степена, добыћесе *редъ квадратный* чисала наравны̓ као 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 . . . *н*. Ако се пакъ онай редъ численный подигне на достоинство трећегъ степена, добыћесе *редъ кубическій* чисала наравны̓, као 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729 . . . *н*; и т. д. Ако се онай истый редъ численный сматра као редъ достоинства ма когъ степена, редомъ растећій, и ако се подъ овымъ видомъ изъ нѣга извуче коренъ квадратный (изъ свакогъ члена поособъ), добыћесе *редъ корена квадратны̓* чисала наравны̓ као $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}$ . . . $\sqrt{н}$; или $1^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{1}{2}}$, $3^{\frac{1}{2}}$, $4^{\frac{1}{2}}$, $5^{\frac{1}{2}}$, $6^{\frac{1}{2}}$, $7^{\frac{1}{2}}$, $8^{\frac{1}{2}}$, $9^{\frac{1}{2}}$ . . . $н^{\frac{1}{1}}$ (§ 99). Ако се изъ нѣга као реда достоинства извуче коренъ кубическій, добыћемо *редъ корена кубическиʼ* числа наравныʼ:

$\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{8} \ldots \sqrt[3]{н}$; или
$1^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}, 3^{\frac{1}{3}}, 4^{\frac{1}{3}}, 5^{\frac{1}{3}}, 6^{\frac{1}{3}}, 7^{\frac{1}{3}}, 8^{\frac{1}{3}} \ldots н$; и т. д.

169.

Редъ конечный числа наравныʼ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 . . . *н* можесе алгебраически представити са *а, б. в, г, д, е, ж . . . н*, у комъ свакій членъ слѣдуюћій раванъ є своме предидућему, са доданомъ єдиницомъ, као $6 = 5 + 1$, $5 = 4 + 1$, слѣдователно $ж = е + 1$, $е = д + 1$ и т. д. Ако се ова уравненія, коя се овде подъ I и II числомъ ставлѣна наоде, на достоинства подигну, добыћемо квадрате членова реда конечнога числа наравны подъ III, а кубусе подъ IV.

I.

$$\overline{\begin{array}{l} е = д + 1 \\ д = г + 1 \\ г = в + 1 \\ в = б + 1 \\ б = а + 1 \end{array}}^{2}$$

II.

$$\overline{\begin{array}{l} е = д + 1 \\ д = г + 1 \\ г = в + 1 \\ в = б + 1 \\ б = а + 1 \end{array}}^{3}$$

III.

$$\begin{array}{rl} & е^2 = д^2 + 2д + 1 \\ \text{дає} & д^2 = г^2 + 2г + 1 \\ & г^2 = в^2 + 2в + 1 \\ & в^2 = б^2 + 2б + 1 \\ & б^2 = а^2 + 2а + 1. \end{array}$$

IV.

$$\begin{array}{l} е^3 = д^3 + 3д^2 + 3д + 1 \\ д^3 = г^3 + 3г^2 + 3г + 1 \\ г^3 = в^3 + 3в^2 + 3в + 1 \\ в^3 = б^3 + 3б^2 + 3б + 1 \\ б^3 = а^3 + 3а^2 + 3а + 1. \end{array}$$

Ако се подъ III. у првой линіи $д^2$ вредность нѣгова $д^2$ у другой линіи: на мѣсто $г^2$ у другой, вредность нѣгова $г^2$ у трећой линіи; на мѣсто $в^2$ у трећой линіи, вредность иста одъ $в^2$ у четвртой линіи: на мѣсто $б^2$ у четвртой линіи, вредность одъ $б^2$ у петой линіи, наодећасе постави, добыћемо тражену вредность квадрата члена последнѣга овога реда подъ **V**: и ако се то исто учини и са $д^3$, $г^3$, $в^3$, $б^3$, добыћемо вредность кубическу члена последнѣга подъ **VI**.

$$\begin{array}{rl} & \textbf{V.} \qquad\qquad\qquad \textbf{VI.} \\ е^2 = \ldots + 2д + 1 & е^3 = \ldots + 3д^2 + 3д + 1 \\ \ldots + 2г + 1 & \ldots + 3г^2 + 3г + 1 \\ \ldots + 2в + 1 & \ldots + 3в^2 + 3в + 1 \\ \ldots + 2б + 1 & \ldots + 3б^2 + 3б + 1 \\ а^2 + 2а + 1 & а^3 + 3а^2 + 3а + 1. \end{array}$$

Дакле квадратъ последнѣга члена реда конечнога чисала наравны̕, раванъ є квадрату првога члена истога реда, выше (са додаткомъ) удвоєной сумми членова предидући̕, выше числу членова предидући̕, као што се види изъ **V**.

А кубусъ последнѣгъ члена чисала наравны̕, состоисе изъ кубуса првогъ члена, выше, изъ утроєне сумме квадрата предидући̕ членова, выше, изъ утроєне сумме членова предидућій, и числа исты̕ предидућій членова, као што се види изъ **VI**.

170.

Ако назначимо првый членъ $= a$, последньій $= \omega$; быће число членова предидућій $= \omega - a$. Ако далѣ назначимо сумму свію членова предидућій $= C$; быће сумма членова предидућій $= C - \omega$, а сумма квадрата членова предидућій быће $= C^2 - \omega^2$, и израженія достоинства' члена последнѣга (по предидуѣ. §), могу се са овыма образцима ставити:

$\omega^2 = a^2 + 2C - 2\omega + \omega - a$, и

$\omega^3 = a^2 + 3C^2 - 3\omega^2 + 3C - 3\omega + \omega - a$; кое

кадъ скратимо, добыћемо ове

$$\omega^2 = a^2 + 2C - \omega - a.$$

$$\omega^3 = a^3 + 3C^2 - 3\omega^2 + 3C - 2\omega - a.$$

171.

Ако у првомъ образцу овде мало пре (§ 179) наведенномъ, вредность одъ С; а у другомъ вредность одъ C^2 изложимо, пакъ после вредность одъ C првога образца на мѣсто C у другомъ образцу постависе, по учинѣномъ скраћиваню добыћемо нова два образца за опредѣленіє сумме реда безконечногъ првогъ и другогъ степена чисала наравны, т. є.

$$C = \frac{\omega^2 + \omega - a^2 + a}{2}.$$

$$C = \frac{\omega^3}{3} + \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega}{6} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} - \frac{a}{6}.$$

172.

Количество безконечно вообще зовесе оно количество, коє све опредѣлене количества границе прелази. На два начина може оно опредѣлене количества границе прелазити, или чрезъ непрестанно додаванѣ или чрезъ одузиманѣ; и зато се двоструко безконечно сматра, т. є. безконечно додаванѣмъ или безконечно велико, и безконечно одузиманѣмъ или безконечно мало количество. *Количество безконечно безъ конца велико* у Маѳематики се као таково представля, коє є са свыма могућныма конечнымъ додатцима безъ конца нагомилано, да се количество безконечно велико са никаквымъ выше могућнымъ конечнымъ додаткомъ умножити и увеличати неможе, слѣдователно безъ конца є веће, него ма какво могуће количество конечно. — *Количество безконечно безъ конца мало*, у Маѳематіки є количество, коє є сваке могућне величине конечне тако лишено, да се нема ни помыслити съ чиме бы се выше умалити могло, и коє є манѣ него ма каква маленкость могућна конечна.

173.

Зато ако є количество конечно или собраніємъ или отятіємъ приключено количеству безконечномъ безконечно великомъ, то є оно спрама овога тако мало, да оно спрама овога сасвимъ изчезава, коє се равно ничему или нулли ставити, и презрети може. Тако $a + \infty = \infty$. А тако исто и количество безконечно мало, собранiємъ или отятiємъ количеству конечномъ приключено, у призренiю количества конечногъ изчезава, и тако се ставити може, да є равно ничему или нулли.

174.

Какогодъ количество безконечно велико чрезъ ∞, тако и безконечно мало чезъ $\frac{1}{\infty}$ представитисе може. У колико є већiй именитель разбiєнiя спрама числителя, толико є маня вредность разбiєнiя: ако є дакле именитель безконечно великiй, а числитель єдиница, вредность є разбiєнiя базконечно мала.

175.

Будући да є у реду безконечномъ последнiй членъ безконечный, да се стави у изнађенимъ образцима сумма реда конечнога на мѣсто ω, ∞; быће

$$1)\quad C = \frac{\infty^2 + \infty - a^2 + a}{2} = \frac{\infty^2}{2} = \frac{\infty \times \infty}{2}.$$

$$2)\ C^2 = \frac{\infty^3}{3} + \frac{\infty^2}{2} + \frac{\infty}{6} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} - \frac{a}{6} = \frac{\infty^3}{3}$$

$$= \frac{\infty^2 \times \infty}{3} = \frac{1}{3}\ \infty^2 \times \infty.$$

Сумма реда безконечногъ чисала наравны' равна є члену последнѣмъ, умноженомъ са числомъ членова, и чрезъ 2 раздѣленомъ; т. є. *она є сумма равна полупроизводу изъ члена последнѣга и числа членова.*

Сумма квадрата, реда безконечногъ чисала наравны', равна є квадрату члена последнѣга, умноженомъ са числомъ членова, раздѣленомъ чрезъ 3; *т. є. она є сумма равна єдной трећини производа изъ квадрата члена последнѣга и числа членова происходећой.*

176.

Изъ наведены' образаца видисе да є $c = \frac{\infty \times \infty}{2}$, или $c^1 = \frac{\infty^1 \times \infty}{2}$; а $c^2 = \frac{\infty^2 \times \infty}{3}$, т. є. изложитель сумме c раванъ є изложителю члена последнѣга ∞, и да изложителя овога дѣлитель свагди єдномъ єдиницомъ превозилази. Ако се дакле дѣлитель на две части, т. є. на изложителя и на єдиницу, као $c^1 = \frac{\infty^1 \times \infty}{1 + 1}$, и $c^2 = \frac{\infty^2 \times \infty}{2 + 1}$ раздѣли, и ако се свагди на мѣсто таковогъ численногъ изложителя постави изложитель общій, добыћемо за свако достоинство главный образацъ $c^{\text{м}} = \frac{\infty^{\text{м}} \times \infty}{\text{м} + 1}$, кои значи, *да є сумма достоинства свакогъ степена чисала наравны' редъ безконечный составляюћы', равна достоинству истогъ степена члена последнѣга, умноженногъ са числомъ членова, а чрезъ изложителя, єдиницомъ умноженногъ, раздѣлена.*

177.

Будући да се овде о числама наравнимъ, редъ безконечный достоинство првогъ степена составляюћимъ говори, *м* у общемъ образцу $c^{м} = \frac{\infty^{м} \times \infty}{м + 1}$ значи свагди изложителя єдиницу. Да поставимо свагди на мѣсто *м* єдиницу, и ова єдиница да се свагди чрезъ 2 раздѣли, добыћемо образацъ за произнаћи сумму корена квадратны' реда безконечногъ чисала наравны', т. є. $c^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \infty^{\frac{1}{2}} \times \infty$. Равнымъ начиномъ, кадъ се иста єдиница раздѣли чрезъ 3; добыћемо образацъ за произнаћи сумму корена кубически', т. є. $c^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} \infty^{\frac{1}{3}} \times \infty$, и т. д.

Слѣдователно: *Сумма корена квадратны' чисала наравны' редъ безконечный составляюћи', равна є двема трећинама производа изъ корена квадратногъ последнѣга члена и чисала членова.*

И сумма корена кубически' чисала наравны', редъ безконечный составляюћи' равна є три-

ма четвртима производа изъ корена кубическогъ члена последнѣга и числа членова.

ГЛАВА ЧЕТВРТА.

О ЛОГАРИѲМИМА.

178.

огаритамъ изло-
тель кои показуе
кои степенъ
каквõ бро основ
и бро или основицу
ти вааз да неки
дати бро изнесе
гаритамъ овогъ последнѣгъ
ъ у односу на ову основицу
логаритам

Логариѳамъ є количество или число, кое показуе число равны' отношенія, изъ кои' є умножено отношеніє составлѣно, или кое показуе, колико пута отношеніє составлѣно умножено, саставителя, или достоинство коренъ у себи садржава. На кратко, Логариѳми су изложительи количества.

чхачи
потега
бор.

Да ставимо две постепенности:

Геометрическ:

1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 и т. д.

Аритметическ:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, и тако далѣ. *)

---

*) Полза и цѣль овы' Логариѳма состоисе у томе, да се чрезъ ньи многи особито у Тригонометріи наодећисе теготни рачуни олакшаваю. Єръ будући да се у Аритметическимъ отношеніяма, соразмѣрностима и постепенностима оно самимъ собраніємъ и отятіємъ савршує, што се у Геометрическимъ умноженіємъ и раздѣленіємъ учинити мора, то ће се наравно и рачунъ са великимъ числама врло скратително савршити, кадъ се на мѣсто ова два последня, два прва рачуна начина употребе.

179.

У таблици содржаваюћисе и заведенни Логариѳми на слѣдуюћій су начинъ уређени.

1. Узета є една Геометрическа постепенность, коє є првый членъ = 1, а изложитель = 10, тако да членови по декадической мѣри числа расту.

Аритметическа постепенность пакъ, коє постепенности членови, Логариѳми прве постепенности быти имаю, починѣ одъ *0*, и разлика є членова = 1, тако да ови по ньіовомъ наравномъ реду расту; то єсть слѣдуюћимъ начиномъ:

Геометрическ:

1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 и т. д.

Логариѳмическ:

0, 1, 2, 3, 4, 5, и тако далѣ.

Кадъ дакле членови прве постепенности са єдномъ цифромъ или нулломъ расту, или се са 10 умножаваю, то Логариѳми само у єдну єдиницу расту; и свакій се Логариѳамъ состои изъ толико єдиница, колико Геометрическа постепенность нулла при себи има.

2. Но будући да бы правой цѣли мало ползовало, кадъ бы само ко горе назначеннимъ членовима Геометрическе постепенности, а не и ко међу ньима наодећимсе числама Логариѳме имали, а ова числа ни у каквой Геометрической соразмѣрности не бы стаяла, зато се при опредѣ-

ленію ньіовы' Логариѳма слѣдуюћимъ средствомъ послужуємо.

Найпре се како ко члановима Геометрическе постепенности, тако и ко ньіовима Логариѳмима 7 нулла приключило, или се ова као десетна разбієнія ставила, да бы се међу нъима наодећасе числа сотимъ точніє добыла, особито што су Логариѳми чисала између 1 и 10, међу 10 и 100, међу 100 и 1000 и т. д. ништа друго него разбієнія, или са разбієніяма скопчана быти могу, чрезъ коє су она слѣдуюћій видъ добила.

Числа соразмѣрности.	*Логариѳми.*
1,0000000	0,0000000
10,0000000	1,0000000
100,0000000	2,0000000
1000,0000000	3,0000000
10000,0000000	4,0000000.

За овимъ се међу числама 1 и 10 дотле Геометрическе соразмѣрности тражиле, докъ се нису такове тако точно, као што само быти може, са наравнымъ числама: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 слагале. Чрезъ коє поступанѣ, за наравна числа одъ 1 до 10 пронашлисе слѣдуюћи Логариѳми:

Наравна числа.	*Логариѳми.*
1	0,0000000
2	0,3010300
3	0,4771213
4	0,6020600

Наравна числа.	*Логариѳми.*
5	0,6989700
6	0,7781512
7	0,8450980
8	0,9030900
9	0,9542425
10	1,0000000.

На истый начинъ су тражилисе рачуномъ Логариѳми и за прочa числа, коя се налазе међу 10 и 100, међу 100 и 1000 и т. д. и одтуда су произишле таблице, коє су подъ именомъ Логариѳми познате, као што се и овде при концу ове кньиге приключена таблица наоди, у коіой се како наравна числа, тако и ньима соотвѣтствующи Логариѳми одъ 1 до 1000 налазе.

180.

Прва цифра Логариѳма, коя се запятомъ (,) одъ прочіи оддѣлює, зовесе *значица* (карактеристика), и ова є управ' Логариѳамъ одъ найближе манѣ десетине, а оне проче после нѣ слѣдуюће цифре показую десетно разбіеніє, съ коимъ логариѳамъ за єдно число међу две десетине іоштъ већій быти мора.

Тако є н. п. у Логариѳму одъ числа 7 = 0,8450980 прва цифра нулла, значица, а проче су десетно разбіеніє, єръ є управъ 0, логариѳамъ одъ 1. Далѣ у логариѳму 446 = 2,6493349 прє цифра 2 значица, т. є. правый логариѳамъ одъ 100. Но будући да число 446 међу 100 и 1000 пада, то се мора ко логариѳму 2 іоштъ єдно десетно разбієніє додати, кои овоме числу соотвѣтствує.

2. По уредби обе постепенности и будући да логариѳми одъ 0 починю, мора значица свакога логариѳма изъ толико єдиница манѣ єдне состоятисе, колико ньой припадаюће наравно число цифрій има; и колико годъ членови Геометрическе постепенности или наравна числа сама у єдну цифру расту, или са 10 умножаваюсе, у толико расте значица ньіовогъ логариѳма у єданъ.

И изъ овогъ узрока зовесе она значицомъ, єръ се одма изъ нѣ познати може, ко коме роду одъ десетина ньой припадаюће число принадлежи; и напротивʼ изъ числа цифрій єдногъ наравногъ числа опредѣлитисе може, изъ колико се єдиница значица ньіовогъ логариѳма состояти мора.

Н. п. ако є значица 0, то пада число међу 1 и 10, ако є она 3, то пада међу 1000 и 10000 и т. д. Има ли напротивʼ наравно число 6 цифрій, то є значица логариѳма = 5, одъ 10 цифрій = 9 и т. д.

3. Изъ овога слѣдує іоштъ, да свако десетъ пута умножено наравно число, оногъ истогъ логариѳма имати мора, коєга є просто число има-

ло, само са томъ разликомъ, да значица при свакомъ десетномъ умноженію у 1 растити мора.

Тако є н. п. логариѳамъ
одъ $9 = 0,9542425$;
одъ $9 \times 10 = 90 = 1,9542425$;
одъ $90 \times 10 = 900 = 2,9542425$;
одъ $900 \times 10 = 9000 = 3,9542425$;
и тако є и са прочима.

УПОТРЕБЛЕНІЄ ТАБЛИЦЕ ЛОГАРИѲМИЧЕСКЕ.

181.

Логариѳамъ свойственногъ разбієнія наћи.

1. Тражити треба логариѳамъ числителя изъ таблице, а тако и логариѳамъ именителя.

1. Отяти треба числителя одъ именителя, то є разлика одтудъ, коя отрицателна быти мора, логариѳамъ разбієнія.

Н. п. иштесе логариѳамъ одъ $^2/_3$, то є
логариѳ. одъ $3 = 0,4771213$
лигариѳ. одъ $2 = \underline{0,3010300}$
логариѳ. одъ $^2/_3 - 0,1760913$.

Узрокъ, што є логариѳамъ свакога разбієнія отрицателанъ, доказати се може

1. Што є свако свойственно разбієніє манѣ одъ єдинице, то мора и логариѳамъ разбієнія маньій быти одъ логариѳма єдинице. А логариѳамъ

є единице = 0, слѣдователно мора лигариѳамъ разбієнія маньій быти одъ 0, т. є. отрицателанъ.

2. Будући да є у првомъ примѣру $^2/_3$ = 1 — $^1/_3$, то морамо за придобыти логариѳма одъ $^2/_3$, логариѳамъ одъ $^1/_3$, одъ логариѳма єдинице отяти, тако ћемо добыти 0,0000000 — 0,1760913, слѣдователно быће отрицателанъ.

Ако такови отрицателни логариѳми у рачунима дођу, то поступати треба съ ньима као са общима количествама отрицателнима, т. є. ако се отяти има, менясе знакъ + на —, а — на +, а при собранію наблюдаваюсе правила собранія количества алгебраически’.

182.

Логариѳамъ цѣлога числа поредъ приключенногъ разбієнія наћи.

1. Ставити треба задато число као несвойственно разбієніє.

2. Отяти логариѳма именителѣвогъ одъ логариѳма числителѣвога, то ће ньіова разлика траженый логариѳамъ задатогъ числа быти.

Н. п. логариѳамъ одъ $12^3/_8$ наћи.
то є $^{99}/_8$.
логариѳ. одъ 99 = 1,9956352
логариѳ. одъ 8 = 0,9030900
логариѳ. одъ $12^3/_8$ = 1,0925452.

Или: Ако бы задато цѣло число тако велико было, да бы при преобраћиваню на несвойственно разбієніє числитель веħій испао, него оно у таблици наодеħесе найвеħе число, слѣдователно и нѣговъ логариѳамъ у ньой небы се наħи могао, то можемо овако задатакъ разрѣшити.

1. Тражити треба логариѳамъ цѣлога числа, а скупа и нѣгову разлику одъ найближегъ веħега.

2. Ставити треба потомъ соразмѣрность: како се има именитель задатога разбієнія ко нѣговомъ числителю, тако се има наħена разлика логариѳма к' четвртомъ числу, коє ħе се потомъ къ логариѳму цѣлога додати.

Н. п. ако бы имали одъ $17342\frac{24}{38}$ логариѳамъ тражити: то є логариѳамъ

одъ $17342 = 4,2390992$, а разлика є међу логариѳ. одъ 17342 и $17343 = 250$; одтудъ

$$38 : 24 = 250 : \frac{250 \times 24}{38} = 157, \text{ и}$$

$4,2390992 + 157 = 4,2391149$ логариѳамъ одъ $17342\frac{24}{38}$.

183.

Логариѳамъ веħега числа изнаħи, него што се оно у таблици налази.

Будуħи да у таблици одъ 1 до 1000 наравны' чисала логариѳме наħи можемо, зато у случаю кадъ се веħе число догоди одъ 1000, то нѣговъ логариѳамъ на слѣдуюħій начинъ наħи можемо:

1. Расправити треба задато число, ако є могуће, на чинителѣ, чрезъ коє се оно безъ остатка раздѣлити може.

2. Изтражити треба логариѳме овы̓ чинителя изъ таблице.

3. Собрати іи уєдно, тако ће ньіова сумма быти логариѳамъ задатога числа.

Н. п. ако бы имали одъ 107724 логариѳамъ тражити, то ће се после неколико покушенія видити, да се ово число чрезъ 12 безъ остатка раздѣлити дає, и да ће онай другій чинитель 8977 быти.

Зато ставивше:

Логариѳ. одъ 8977 = 3,9531312
Логариѳ. одъ 12 = 1,0791812

Логариѳ. одъ 107724 = 5,0323124.

Или. Ако се задато число не бы дало у чинителѣ раздѣлити,

1. Одцѣпити треба изъ десна одъ числа толико цифрій, да се одъ остатка као и одъ найближегъ већегъ числа іоштъ логариѳми у таблици наћи могу.

2. Увеличати треба значицу овогъ логариѳма са толико єдиница, колико смо изъ десна цифрій одцѣпили.

3. Тражити треба ньіову разлику.

4. Отяти треба такођеръ одма наравна числа, к̓ коима ови логариѳми принадлеже, єдно одъ другога, и назначити ньіову разлику.

5. Заключити треба по соразмѣрности: како се има последня разлика к' првой, тако се исто имаю одцѣплѣна числа к' четвртомъ соразмѣрію.

6. Ове собрати и додати ко већъ нађенимъ логариѳмима, тако ћемо добити логариѳамъ задатога числа.

Н. п. Логариѳамъ одъ 357859 наћи, то последнѣ две цифре 59 одцѣпивше, быће логариѳамъ одъ 3578

у таблици 3,5536403

и одъ найближ. 3,5537617 већега числа.

Будући да су две цифре изъ десна одцѣплѣне, то увеличати треба значицу са две єдинице, па ће быти

5,5537617	логариѳ. одъ	357900	
5,5536403	логариѳ. одъ	357800	
1214	разлика логариѳма.	100	разлика чисала.

Зато заключити, $100 : 1214 = 59 : \frac{1214 \times 59}{100}$ $= 716$.

Ово число 716 додати къ 5,5536403, то ће сумма быти 5,5537119 логариѳамъ одъ 357859.

Или: Ако бы се при задатомъ числу, кое се збогъ своє величине неможе у таблици выше наћи, іоштъ єдно разбієніє налазило, то ћемо логариѳамъ на слѣдуюћій начинъ изнаћи.

1 Тражити треба по горепазначеномъ начину логариѳамъ цѣлогъ числа безъ разбієнія, а тако и логариѳамъ одъ найближегъ већега числа.

2. Ове логариѳме єданъ одъ другога отяти треба, за придобити нъіову разлику.

3. Заключити по соразмѣрности, како се има имепитель задатога разбієнія к' своме числителю, тако се има разлика логариѳма к' четвртоме соразмѣрію.

4. Додати ово изнађено число к' логариѳму цѣлога задатога числа, тако ће быти сумма траженый логариѳамъ.

184.

Ко єдномъ логариѳму, коєга се значица и прве цифре у таблици налазе, но проче цифре неудараюсе ни съ каквимъ логариѳмомъ, принадлежеће наравно число изнаћи.

Кадъ се значица и прве цифре одъ некогъ задатогъ логариѳма у таблици наоде, но проче не, то пада припадаюће наравно число међу два, коя къ найближемъ већемъ и найближемъ манѣмъ логариѳму принадлеже, слѣдователно веће одъ првога, а манѣ одъ другога, т. є. ово манѣ число са разбієніємъ быти мора. Да бы ово разбієніє изнаћи могли, поступати треба на слѣдуюћій начинъ:

1. Изтражити треба наравно число одъ найближегъ манѣгъ логариѳма изъ таблице.

2. Узети разлику међу найближимъ маньимъ и найближимъ већимъ логариѳмомъ.

3. Отузети треба найближегъ манѣгъ логариѳма одъ задатога, да бы и нѣгову разлику добили, то ће прво именитель, а друго числитель одъ траженога разбієнія быти.

Н. п. Имали бы задатый логариѳмамъ 3,8695422
то є нѣговъ найближіи маньій логариѳ. 3,8695251
одъ 7405 и ньіова разлика . . 171
числитель разбієнія.

Найближіи већій логариѳамъ . . 3,8695837
и маньій „ . . 3,8695251
и ньіова разлика . . . 586
именитель разбієнія.

Слѣдователно наравно є число задатога логариѳма $= 7405\frac{171}{586}$.

185.

Ако бы хотѣли при наравномъ числу наодећесе разбієніє у десетномъ имати, то поступати треба на слѣдуюћій начинъ.

1. Увеличати треба значицу задатога логариѳма у толико єдиница, колико именитель десетногъ разбієнія нулла добыти има, и тражити нѣгово наравно число у таблици, у колико се ближе наћи може.

2. Одцѣпити треба одъ овога наравногъ числа изъ десна толико цифрій, у колико є єдиница значица увеличана; тако ће оне изъ лева стое-

ће цифре цѣла, а оне изъ десна числитель десетнога разбієнія одъ траженога наравногъ числа задатога логариѳма быти.

Н. п. 2,2753976 быо бы задатый логариѳамъ, кои се у таблици точно ненаоди; иштесе разбієніє, коє принадлежеће число са собомъ носи, у десетнимъ изнаћи, коєга бы именитель 100 быо. Зато увеличати треба значицу са 2, па ће быти логариѳамъ 4,2753976, коєга є у таблици изложено наравно число скоро 18853; садъ одцѣпити треба одъ овога числа изъ десна две цифре, тако ће быти тражено наравно число 188, 53.

186.

Ко єдномъ задатомъ отрицателномъ логариѳму, принадлежеће наравно число или управ' разбієніє наћи.

Тражити треба отрицателногъ логариѳма у таблици, аки бы положителанъ быо, тако є томе принадлежеће наравно число именитель, а 1 числитель траженнога разбієнія.

Н. п. Задатый логариѳамъ — 2,3856243, то ће наравно число, коє овоме као положително сматрано, соотвѣтствує, готово 243; тако со тимъ назначено разбієніє = $\frac{1}{243}$ быти.

187.

1. Умалити значицу у толико єдиница, докле се остале у таблици наћи могу.

2. Ако се проче цифре логариѳма точно у таблици наоде, то ставити треба припадлежећемъ наравномъ числу толико нулла, колико смо одъ значице єдиница узели, тако ћемо добыти и наћи наравно число.

Н. п. Задатый логариѳ. 6,2157169, коєга значица са 2 умалѣна быће 4,2157169, а овога є логариѳма у таблици наравно число = 16433, ако се ово са две нулле умножи, то ће 1643300 тражено число одъ задатога логариѳма быти.

188.

Ако се овай на овай начинъ значицомъ умалѣный логариѳамъ опетъ не бы точно у таблици наодіо, то є онда знакъ, да наравно число нѣгово поредъ себе и разбієніє има, коє найпре по § 186 изтражити, и после како къ цѣломъ числу тако и къ числителю разбієнія толико нулла приключити треба, у колико є значица умалѣна.

УПОТРЕБЛЕНІЄ ЛОГАРИѲМА' У РАЗНИМЪ РАЧУНИМА.

189.

Будући да су лигариѳми по § 180 уређени, то су они изложитељи достоинства, на коє су изложитељи геометрическе постепенности у свакомъ члену подигнути.

Да ставимо геометрическу постепенность

1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 и т. д. одъ кое є изложитель = 10, тако можемо по § 168 поставити:

$$1 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5 : 10^6 : 10^7$$ и т. д.

логариѳамъ.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, и т. д.

гди су логариѳми изложителю достоинства одъ изложителя 10 у свакомъ припадаюћемъ члену геометрическе постепенности равни.

190.

Будући да при умноженію два количества само ньіови изложительи собрани быти морају, и сумма ньіова є изложитель производа (по прав. умноженія), то и при умноженію два члена єдне геометрическе постепенности, само ньіове изложителѣ собрати морамо, за придобыти изложителя производа. Но логариѳми су ови изложительи ньіовы' принадлежећій членова геометрическе постепенности (190 §), или наравни' чисала (§ 180); *слѣдователно за придобыти производъ одъ два наравна числа, можемо само ньіове логариѳме собрати, тако є ньіова сумма логариѳамъ производа. И на овай начинъ умноженіє логариѳма променюєсе у само собраніє.*

Н. п. Иштесе да ова два числа 3725 и 2392 умножимо, то узети треба ньіове логариѳме изъ таблице, и собрати ій, тако ће быти сумма ньіова логариѳамъ производа, кои се опетъ у таблици наћи може: т. є.

логариѳ. одъ 3725 = 3,5711263
логариѳ. одъ 2392 = 3,3787612
логариѳ. одъ 8900200 = 6,9498875.

191.

Будући да при раздѣленію количества изложителѣ отяти имамо, за придобыти изложителя количникова (по правилама раздѣленія алг. колич.), тако и при раздѣленію два члена єдне геометрическе постепенности само ньіове изложителѣ достоинства єдногъ одъ другога отяти морамо, тако ће остатакъ изложитель количника быти. Но логариѳми су изложительи членова єдне геометрическе постепенности или наравны' чисала § 190. 182. *слѣдователно при раздѣленію наравны' чисала можемо само логариѳма дѣлителѣвогъ одъ логариѳма дѣлимковогъ отяти, тако ће остатакъ быти логариѳамъ количника.*

Н. п. ако бы имали 14052 чрезъ 2342 раздѣлити, то изтражити треба одъ оба числа логариѳме у таблици, пакъ ій єданъ одъ другога отяти, тако ће остатакъ быти логариѳамъ количника.

Логариѳ. одъ 14052 = 4,1477381
логариѳ. одъ 2342 = 3,3695869
логариѳ. одъ 6 количнику = 0,7781512

На овай начинъ обычно раздѣленіе чисала, средствомъ логариѳма промѣнюєсе у само отятіє.

192.

Неко число на пожелано достоинство подићи, ништа друго ніє него коренъ собомъ самимъ умножити, коє се толико пута повторава, колико изложитель достоинства показує (§ 66), но будући да умноженіє логариѳма собраніємъ савршитисе може (§ 191), тако се и *подизанѣ некогъ числа на пожелано достоинство учинити може, кадъ се логариѳамъ корена толико пута узме, колико изложитель достоинства показує, или кадъ се са овимъ изложителѣмъ умножи, гди ће производъ быти логариѳамъ пожеланогъ достоинства.*

Ако се дакле неко число на квадратъ, кубусъ, на четврто, и проч. достоинство подићи има, то умножити треба логариѳамъ овога числа са 2, 3, 4, и проч.

Н. п. имали бы 315 на квадратъ подићи то
є логариѳ. одъ 315 = 2,4983106
умножити са . . . 2
логариѳамъ квадрата = 4,9966212,
гди є наравно число или квадратъ самый = 99225.

193.

Тако се може и логариѳамъ некогъ пожеланогъ корена изъ єдногъ задатогъ достоинства наћи, кадъ се логариѳамъ овогъ числа презъ изложителя пожеланогъ корена раздѣли.

Ако дакле имамо изъ некогъ числа квадратный, кубическій и проч. коренъ извлачити, то само логариѳамъ овога числа чрезъ 2, 3, и проч. раздѣлити треба, па ће количникъ быти логариѳамъ корена.

Н. п. Ако бы имали изъ числа 13824 коренъ кубическій извући, то ће быти

Логариѳамъ одъ 13824 = 4,1406337
раздѣлити чрезъ 3
логариѳамъ корена куб. = 1,3802112,

одъ кога є наравно число = 24.

Тако се може извлаченѣ корена изъ велики' чисала олакшати, кадъ се изъ првы' цифрій задатога числа одъ леве у колико таблица садржаваюће логариѳме има, помоћію ове коренъ изнађе, и на то се рачунъ обичнимъ начиномъ продужи.

194.

И тако, будући да се чрезъ логариѳме умноженіє у собраніє, а раздѣленіє у отятіє преобраћує, то се чрезъ то рачуни велики' чисала врло олакшаваю, коє є благодать велика у рачуници.

Край прве части.

ЛОГАРІѲМИ.

ЧИСЛО НАР.	0	100	200	300	400
1	0,0000000	2,0043214	2,3031961	2,4785665	2,6031444
2	0,3010300	2,0086002	2,3053514	2,4800069	2,6042260
3	0,4771212	2,0128372	2,3074960	2,4814426	2,6053050
4	0,6020600	2,0170333	2,3096302	2,4828736	2,6063814
5	0,6989700	2,0211893	2,3117539	2,4842998	2,6074550
6	0,7781512	2,0253059	2,3138672	2,4857214	2,6085260
7	0,8450980	2,0293838	2,3159703	2,4871384	2,6095944
8	0,9030900	2,0334238	2,3180633	2,4885507	2,6106602
9	0,9542425	2,0374265	2,3201463	2,4899585	2,6117233
10	1,0000000	2,0413927	2,3222193	2,4913617	2,6127839
11	1,0413927	2,0453230	2,3242824	2,4927604	2,6138418
12	1,0791812	2,0492180	2,3263359	2,4941546	2,6148972
13	1,1139433	2,0530784	2,3283796	2,4955443	2,6159500
14	1,1461280	2,0569048	2,3304138	2,4969296	2,6170003
15	1,1760913	2,0606978	2,3324385	2,4983105	2,6180481
16	1,2041200	2,0644580	2,3344537	2,4996871	2,6190933
17	1,2304489	2,0681859	2,3364597	2,5010593	2,6201360
18	1,2552725	2,0718820	2,3384565	2,5024271	2,6211763
19	1,2787536	2,0755470	2,3404441	2,5037907	2,6222140
20	1,3010300	2,0791812	2,3424227	2,5051500	2,6232493
21	1,3222193	2,0827854	2,3443923	2,5065050	2,6242821
22	1,3424227	2,0863598	2,3463530	2,5078559	2,6253124
23	1,3617278	2,0899051	2,3483049	2,5092025	2,6263404
24	1,3802112	2,0934217	2,3502480	2,5105450	2,6273659
25	1,3979400	2,0969100	2,3521825	2,5118834	2,6283889
26	1,4149733	2,1003705	2,3541084	2,5132176	2,6294096
27	1,4313638	2,1038037	2,3560259	2,5145477	2,6304279
28	1,4471580	2,1072100	2,3579348	2,5158738	2,6314438
29	1,4623980	2,1105897	2,3598355	2,5171959	2,6324573
30	1,4771212	2,1139433	2,3617278	2,5185139	2,6334685
31	1,4913617	2,1172713	2,3636120	2,5198280	2,6344773
32	1,5051500	2,1205739	2,3654880	2,5211381	2,6354837
33	1,5185139	2,1238516	2,3673559	2,5224442	2,6364879
34	1,5314789	2,1271048	2,3692159	2,5237465	2,6374897
35	1,5440680	2,1303338	2,3710679	2,5250448	2,6384893
36	1,5563025	2,1335389	2,3729120	2,5263393	2,6394865
37	1,5682017	2,1367206	2,3747483	2,5276299	2,6404814
38	1,5797836	2,1398791	2,3765770	2,5289167	2,6414741
39	1,5910646	2,1430148	2,3783979	2,5301997	2,6424645
40	1,6020600	2,1461280	2,3802112	2,5314789	2,6434527
41	1,6127839	2,1492191	2,3820170	2,5327544	2,6444386
42	1,6232493	2,1522883	2,3838154	2,5340261	2,6454223
43	1,6334685	2,1553360	2,3856063	2,5352941	2,6464037
44	1,6434527	2,1583625	2,3873898	2,5365584	2,6473830
45	1,6532125	2,1613680	2,3891661	2,5378191	2,6483600
46	1,6627578	2,1643528	2,3909355	2,5390761	2,6493349
47	1,6720979	2,1673173	2,3926969	2,5403295	2,6503075
48	1,6812412	2,1702617	2,3944517	2,5415792	2,6512780
49	1,6901961	2,1731863	2,3961993	2,5428254	2,6522463
50	1,6989700	2,1760913	2,3979400	2,5440680	2,6532125

ЛОГАРІѲМИ.

ЧИСЛО НАР.	500	600	700	800	900
1	2,6998377	2,7788745	2,8457180	2,9036325	2,9547248
2	2,7007037	2,7795965	2,8463371	2,9041744	2,9552065
3	2,7015680	2,7803173	2,8469553	2,9047155	2,9556877
4	2,7024305	2,7810369	2,8475727	2,9052560	2,9561684
5	2,7032914	2,7817554	2,8481891	2,9057959	2,9566486
6	2,7041505	2,7824726	2,8488047	2,9063350	2,9571282
7	2,7050080	2,7831887	2,8494194	2,9068735	2,9576073
8	2,7058637	2,7839036	2,8500333	2,9074114	2,9580858
9	2,7067178	2,7846173	2,8506462	2,9079485	2,9585639
10	2,7075702	2,7853298	2,8512583	2,9084850	2,9590414
11	2,7084209	2,7860412	2,8518696	2,9090208	2,9595184
12	2,7092700	2,7867514	2,8524800	2,9095560	2,9599948
13	2,7101174	2,7874605	2,8530895	2,9100905	2,9604708
14	2,7109631	2,7881684	2,8536982	2,9106244	2,9609462
15	2,7118072	2,7888751	2,8543060	2,9111576	2,9614211
16	2,7126497	2,7895807	2,8549130	2,9196901	2,9618955
17	2,7134905	2,7902852	2,8555191	2,9122220	2,9623693
18	2,7143298	2,7909885	2,8561244	2,9127533	2,9628427
19	2,7151674	2,7916906	2,8567289	2,9132839	2,9633155
20	2,7160033	2,7923917	2,8573325	2,9138138	2,9637878
21	2,7168377	2,7930916	2,8579353	2,9143431	2,9642596
22	2,7176705	2,7937904	2,8585372	2,9148718	2,9647309
23	2,7185017	2,7944880	2,8591383	2,9153998	2,9652017
24	2,7193313	2,7951846	2,8597386	2,9159272	2,9656720
25	2,7201593	2,7958800	2,8603380	2,9164539	2,9661417
26	2,7209857	2,7965744	2,8609366	2,9169800	2,9666110
27	2,7218106	2,7972675	2,8615344	2,9175055	2,9670797
28	2,7226339	2,7979596	2,8621314	2,9180303	2,9675480
29	2,7234557	2,7986506	2,8627275	2,9185545	2,9680157
30	2,7242759	2,7993405	2,8633229	2,9190781	2,9684829
31	2,7250945	2,8000294	2,8639174	2,9196010	2,9689497
32	2,7259116	2,8007171	2,8645111	2,9201233	2,9694159
33	2,7267272	2,8014037	2,8651040	2,9206450	2,9698815
34	2,7275413	2,8020893	2,8656961	2,9211660	2,9703469
35	2,7283538	2,8027737	2,8662873	2,9216865	2,9708116
36	2,7291648	2,8034571	2,8668778	2,9222063	2,9712758
37	2,7299743	2,8041394	2,8674675	2,9227254	2,9717396
38	2,7307823	2,8048207	2,8680564	2,9232440	2,9722028
39	2,7315888	2,8055009	2,8686444	2,9237620	2,9726656
40	2,7323938	2,8061800	2,8692317	2,9242793	2,9731278
41	2,7331973	2,8068580	2,8698182	2,9247960	2,9735898
42	2,7339993	2,8075350	2,8704039	2,9253121	2,9740509
43	2,7347998	2,8082110	2,8709888	2,9258276	2,9745117
44	2,7355989	2,8088859	2,8715729	2,9263424	2,9749720
45	2,7363965	2,8095597	2,8721563	2,9268567	2,9754318
46	2,7371926	2,8102325	2,8727388	2,9273704	2,9758911
47	2,7379873	2,8109043	2,8733206	2,9278834	2,9763500
48	2,7387806	2,8115750	2,8739016	2,9283958	2,9768083
49	2,7395723	2,8122447	2,8744818	2,9289077	2,9772662
50	2,7403627	2,8129134	2,8750613	2,9294189	2,9777236

ЛОГАРІѲМИ.

числó нар.	0	100	200	300	400
51	1,7075702	2,1789769	2,3996737	2,5453071	2,6541765
52	1,7160033	2,1818436	2,4014005	2,5465427	2,6551384
53	1,7242759	2,1846914	2,4031205	2,5477747	2,6560982
54	1,7323938	2,1875207	2,4048337	2,5490033	2,6570558
55	1,7403627	2,1903317	2,4065402	2,5502283	2,6580114
56	1,7481880	2,1931246	2,4082400	2,5514500	2,6589648
57	1,7558748	2,1958996	2,4099331	2,5526682	2,6599162
58	1,7634280	2,1986571	2,4116197	2,5538830	2,6608655
59	1,7708520	2,2013971	2,4132998	2,5550944	2,6618127
60	1,7781512	2,2041200	2,4149733	2,5563025	2,6627578
61	1,7853298	2,2068259	2,4166405	2,5575072	2,6637009
62	1,7923917	2,2095150	2,4183013	2,5587686	2,6646420
63	1,7993405	2,2121876	2,4199557	2,5599066	2,6655810
64	1,8061800	2,2148438	2,4216039	2,5611014	2,6665180
65	1,8129133	2,2174839	2,4232459	2,5622929	2,6674529
66	1,8195439	2,2201081	2,4248816	2,5634811	2,6683859
67	1,8260748	2,2227165	2,4265113	2,5646661	2,6693169
68	1,8325089	2,2253093	2,4281348	2,5658478	2,6702458
69	1,8388491	2,2278867	2,4297523	2,5670264	2,6711728
70	1,8450980	2,2304489	2,4313638	2,5682017	2,6720979
71	1,8512583	2,2329961	2,4329693	2,5693739	2,6730209
72	1,8573325	2,2355284	2,4345689	2,5705429	2,6739420
73	1,8633229	2,2380461	2,4361626	2,5717088	2,6748611
74	1,8692317	2,2405492	2,4377506	2,5728716	2,6757783
75	1,8750613	2,2430380	2,4393327	2,5740313	2,6766936
76	1,8808136	2,2455127	2,4409091	2,5[illegible]878	2,6776069
77	1,8864907	2,2479733	2,4424798	2,57[illegible]413	2,6785184
78	1,8920946	2,2504200	2,4440448	2,5774918	2,6794279
79	1,8976271	2,2528530	2,4456042	2,5786392	2,6803355
80	1,9030900	2,2552725	2,4471580	2,5797836	2,6812412
81	1,9084850	2,2576786	2,4487063	2,5809250	2,6821451
82	1,9138138	2,2600714	2,4502491	2,5820634	2,6830470
83	1,9190781	2,2624511	2,4517864	2,5831988	2,6839471
84	1,9242793	2,2648178	2,4533183	2,5843312	2,6848454
85	1,9294189	2,2671717	2,4548449	2,5854607	2,6857417
86	1,9344984	2,2695129	2,4563660	2,5865873	2,6866363
87	1,9395192	2,2718416	2,4578819	2,5877110	2,6875290
88	1,9444827	2,2741578	2,4593925	2,5888317	2,6884198
89	1,9493900	2,2764618	2,4608978	1,5899496	2,6893089
90	1,9542425	2,2787536	2,4623980	2,5910646	2,6901961
91	1,9590414	2,2810334	2,4638930	2,5921768	2,6910815
92	1,9637878	2,2833012	2,4653828	2,5932861	2,6919651
93	1,9684829	2,2855573	2,4668676	2,5943925	2,6928469
94	1,9731278	2,2878017	2,4683473	2,5954962	2,6937269
95	1,9777236	2,2900346	2,4698220	2,5965971	2,6946052
96	1,9822712	2,2922561	2,4712917	2,5976952	2,6954817
97	1,9867717	2,2944662	2,4727564	2,5987905	2,6963564
98	1,9912261	2,2966652	2,4742163	2,5998831	2,6972293
99	1,9956352	2,2988531	2,4756712	2,6009729	2,6981005
100	2,0000000	2,3010300	2,4771212	2,6020600	2,6989700

ЛОГАРІѲМИ.

ЧИСЛО НАР.	500	600	700	800	900
51	2,7411516	2,8135810	2,8756399	2,9299296	2,9781805
52	2,7419391	2,8142476	2,8762178	2,9304396	2,9786369
53	2,7427251	2,8149132	2,8767950	2,9309490	2,9790929
54	2,7435098	2,8155777	2,8773713	2,9314570	2,9795484
55	2,7442930	2,8162413	2,8779469	2,9319661	2,9800034
56	2,7450748	2,8169038	2,8785218	2,9324738	2,9804579
57	2,7458552	2,8175654	2,8790959	2,9329808	2,9809119
58	2,7466342	2,8182259	2,8796692	2,9334873	2,9813655
59	2,7474118	2,8188854	2,8802418	2,9339932	2,9818186
60	2,7481880	2,8195439	2,8808136	2 9344984	2,9822712
61	2,7489629	2,8202015	2,8813847	2,9350031	2,9827234
62	2,7497363	2,8208580	2,8819550	2,9355073	2,9831751
63	2,7505084	2,8215135	2,8825245	2,9360108	2,9836263
64	2,7512791	2,8221681	2,8830934	2,9365137	2,9840770
65	2,7520484	2,8228216	2,8836614	2,9370161	2,9845273
66	2,7528164	2,8234742	2,8842288	2,9375179	2,9849771
67	2,7535831	2,8241258	2,8847954	2,9380191	2,9854265
68	2,7543483	2,8247765	2,8853612	2,9385197	2,9858753
69	2,7551123	2,8254261	2,8859263	2,9390198	2,9863238
70	2,7558748	2,8260748	2,8864907	2,9395192	2,9867717
71	2,7566361	2,8267225	2,8870544	2,9400181	2,9872192
72	2,7573960	2,8273693	2,8876173	2,9405165	2,9876663
73	2,7581546	2,8280151	2,8881795	2,9410142	2,9881128
74	2,7589119	2,8286599	2,8887410	2,9415114	2,9885589
75	2,7596678	2,8293038	2,8893017	2,9420080	2,9890046
76	2,7604225	2,8299467	2,8898617	2,9425041	2,9894498
77	2,7611758	2,8305887	2,8904210	2,9429996	2,9898946
78	2,7619278	2,8312297	2,8909796	2,9434945	2,9903388
79	2,7626786	2,8318699	2,8915375	2,9439889	2,9907827
80	2,7634280	2,8325089	2,8920946	2,9444827	2,9912261
81	2,7641761	2,8331471	2,8926510	2,9449759	2,9916690
82	2,7649130	2,8337844	2,8932067	2,9454686	2,9921115
83	2,7656685	2,8344217	2,8937618	2,9459607	2,9925535
84	2,7664128	2,8350561	2,8943161	2,9464523	2,9929951
85	2,7671559	2,8356906	2,8948696	2,9469433	2,9934362
86	2,7678976	2,8363241	2,8954225	2,9474337	2,9938769
87	2,7686381	2,8369567	2,8959747	2,9479236	2,9943171
88	2,7693773	2,8375884	2,8965262	2,9484130	2,9947569
89	2,7701153	2,8382192	2,8970770	2,9489018	2,9951963
90	2,7708520	2,8388491	2,8976271	2,9493900	2,9956352
91	2,7715875	2,8394780	2,8981765	2,9498777	2,9960731
92	2,7723217	2,8401061	2,8987252	2,9503648	2,9965117
93	2,7730547	2,8407332	2,8992732	2,9508514	2,9969492
94	2,7737864	2 8413595	2,8998205	2,9513375	2,9973864
95	2,7745170	2,8419848	2,9003671	2,9518230	2,9978231
96	2,7752463	2,8426092	2,9009131	2,9523080	2,9982593
97	2,7759743	2,8432328	2,9014583	2,9527924	2,9986951
98	2,7767012	2,8438554	2,9020029	2,9532763	2,9991305
99	2,7774268	2,8444772	2,9025468	2,9537597	2,9995655
100	2,7781512	2,8450980	2,9030900	2,9542425	3,0000000