БИБЛИОТЕКА ГЕШЕН

Проф. Г. ЕГЕР

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

## IV

## МАГНЕТИЗМ. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.

С 21 чертежом

ИЗДАТЕЛЬСТВО
„НАУКА И ЖИЗНЬ“

Яковъ Васильевичъ

Кулинъ

16/XII 21-I-C5

Русское издание „БИБЛИОТЕКИ ГЕШЕН“

Проф. Г. ЕГЕР

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

## IV

## МАГНЕТИЗМ — ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

С 21 чертежом.

Авторизованный перевод с последнего немецкого издания инженера В. И. ДОНЦОВА.

Под редакцией проф. Д. Н. АРТЕМЬЕВА.

КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО
„НАУКА и ЖИЗНЬ“
Берлин — Рига
1923

Набор: Типография Книгоиздательства „Наука и Жизнь"

Печатано в Типографии Karl Hansen, Berlin N., Chausseestr. 59.

Яковъ В. Кулик

# Оглавление.

## Магнетизм.



## Электромагнетизм.

Оглавление.



# Магнетизм.

## § 1. Основные явления. — Закон Кулона.

Мы замечаем магнитные силы по их притягивающему действию на железо. Два места в магните действуют обыкновенно с особенной силою; мы называем их полюсами, так как они обладают прямо противоположными свойствами. Подвесим магнит таким образом, чтобы он мог свободно двигаться; в таком случае линия, соединяющая оба полюса, всегда устанавливается в направлении север—юг, причем мы называем полюс, указывающий на север—северным, а другой—южным. Северный полюс магнита отталкивает северный полюс другого магнита, но притягивает южный; равным образом, южный полюс одного магнита отталкивает южный полюс другого. Одноименные полюсы отталкиваются, а разноименные притягиваются.

Длинную стальную стрелку можно намагнитить таким образом, что магнетизм будет обнаруживаться только на ее концах. С помощью таких стрелок Кулон открыл закон, на основании которого два одноименные магнитные полюса отталкиваются с силою, обратно пропорциональною квадрату их расстояния и прямо пропорциональною произведению магнитных масс обоих полюсов. Этот закон, вполне аналогичен тому, который имеет место при электрическом действии сил. В виду этого, мы можем представить такой закон в виде:

$$K = \frac{m\,m'}{r^2}.$$

Этой формулой определяется единица для измерения количества магнетизма. В виду того, что такая мера находит также применение при магнитных действиях электрического тока, она называется, в том случае, если все величины выражены в мерах системы $CGS$, абсолютной электромагнитной мерой.

## § 2. Магнитное поле. — Земной магнетизм. — Наклонение. — Склонение. — Магнитный момент.

В виду совпадения закона действия сил между двумя магнитными массами с аналогичным законом для статического электричества — многие понятия электростатики могут быть непосредственно применены для магнетизма. Каждая магнитная масса образует поле сил, которое мы можем представить при помощи магнитных силовых линий. Число силовых линий на единице поверхности дает величину магнитной силы. Из каждой магнитной массы исходит $4\pi m$ силовых линий. Положительные магнитные массы стремятся двигаться по направлению силовых линий, а отрицательные — в противоположном направлении.

Так как всякий магнит имеет стремление установиться в направлении с севера на юг, то мы должны окружающее нас пространство рассматривать как магнитное поле. Оказывается, что после возможно более тщательного удаления из такого поля железа и других веществ, сильно притягиваемых магнитом, мы имеем дело с однородным магнитным полем. Существование такого большого магнитного поля мы приписываем земному магнетизму. Вертикальную плоскость, в которой устанавливается движущаяся свободно во всех направлениях и подвешенная в центре тяжести магнитная стрелка, — мы называем магнитным меридианом, а угол, который



этот меридиан образует с астрономическим меридианом — склонением. Угол наклона магнитной стрелки к горизонту называется наклонением.

Так как в каждом магнитном поле положительный и отрицательный магнетизм стремятся двигаться в противоположных направлениях, то всякое тело, имеющее один род магнетизма в избытке, должно бы двигаться в соответствующем направлении. Однако, подобное движение не было до сих пор обнаружено у магнитов. Мы должны, поэтому, допустить, что в каждом магните находятся одинаковые количества положительного и отрицательного магнетизма.

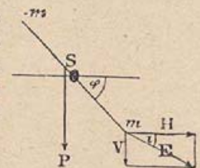
Обозначим теперь силу магнитного поля земли через $E$. Мы можем разложить $E$ на вертикальную и горизонтальную слагающие. Первая будет:

$$V = E \sin i,$$

а вторая:

$$H = E \cos i,$$

если под $i$ мы будем подразумевать угол наклонения. На магнитный полюс $m$ (черт. 1) действует, поэтому, вертикально направленная сила $mV$, и горизонтальная $mH$. Такие же силы, но имеющие противоположные направления, действуют в $-m$. Если магнит может вращаться в точке $O$, то силы производят момент вращения



Черт. 1.

$$m V l \cos\varphi - m H l \sin\varphi,$$

причем $l$—расстояние обоих магнитных полюсов друг от друга. Пусть центр тяжести магнита будет находиться в точке $S$, на расстоянии $d$ от $O$, причем $P$ — вес магнита. Этот последний обусловливает момент вращения $-Pd\cos\varphi$, если $\varphi$ есть угол, образуемый с горизонтом магнитною осью, т. е. прямой $mm'$. Если магнит находится в равновесии, то должно быть:

$$mVl\cos\varphi - mHl\sin\varphi - Pd\cos\varphi = 0.$$

При этом предполагается, что ось вращения магнита расположена перпендикулярно к магнитному меридиану. Величина

$$ml = M$$

называется моментом магнита или магнитным моментом. Из последнего равенства мы получаем:

$$tg\,\varphi = \frac{MV - Pd}{MH}$$

или:

$$tg\,\varphi = \frac{V}{H} - \frac{Pd}{MH} = \frac{E\sin i}{E\cos i} - \frac{Pd}{MH} = tg\,i - \frac{Pd}{MH}.$$

Если мы теперь перемагнитим стрелку, то полюсы поменяются местами. В таком случае момент центра тяжести будет действовать в обратном направлении и мы получим:

$$tg\,\varphi' = tg\,i + \frac{Pd}{MH},$$

откуда:

$$tg\,i = \frac{tg\,\varphi + tg\,\varphi'}{2}.$$

Таким способом определяется с помощью стрелки наклонения направление силы земного магнетизма.



Положим, ось вращения не перпендикулярна к магнитному меридиану, и плоскость колебаний стрелки образует с меридианом угол $\psi$. В таком случае, если ось расположена горизонтально, уже не может более действовать горизонтальная сила $H$, но только составляющая $H\cos\psi$, и условие равновесия будет:

$$MV\cos\varphi - MH\cos\psi\sin\varphi - Pd\cos\varphi = 0$$

или

$$tg\,\varphi = \frac{MV - Pd}{MH\cos\psi}.$$

При $\psi = \frac{\pi}{2}$ будет $\cos\psi = 0$, откуда: $tg\,\varphi = \infty$ или $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, магнитная стрелка устанавливается вертикально, если плоскость колебаний магнита перпендикулярна к меридиану. В виду этого можно, следовательно, найти направление магнитного меридиана и без стрелки наклонения.

### § 3. Потенциал магнита.

До сих пор мы постоянно принимали, что магнит состоит из магнитных масс, сосредоточенных в двух точках. В однородном, магнитном поле это всегда допустимо, так как в нем все массы могут быть представлены находящимися в центр масс (ч. I, § 21). Мы можем, поэтому, всегда заменить магнит двумя сосредоточенными в двух точках массами, которые равны между собой, но имеют противоположные знаки. Положим такие массы $+m$ и $-m$ (черт. 2) находятся от точки $P$ на расстояниях $r_1$ и $r_2$. Так же, как и при электрических массах, мы можем


Черт. 2.

теперь говорить о **потенциале магнитных масс** в точке $P$. Тогда:

$$V = \frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2}$$

потому что, сила, с которой $m$ действует на положительную магнитную единицу в точке $P$, равна $\frac{m}{r_1^2}$ и точно так же сила, с которой действует $-m$, равняется $-\frac{m}{r_2^2}$, а сумма обоих этих выражений будет представлять собою потенциал $V$ магнита в точке $P$.

Разделим отрезок $AB = \lambda$ в точке $O$ пополам и положим, что $OP = r$; тогда:

$$r_1^2 = r^2 + \frac{\lambda^2}{4} - r\lambda \cos\varepsilon,$$

$$r_2^2 = r^2 + \frac{\lambda^2}{4} + r\lambda \cos\varepsilon.$$

Кроме того:

$$\frac{1}{r_1} = \left(r^2 - \lambda r \cos\varepsilon + \frac{\lambda^2}{4}\right)^{-1/2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\lambda}{r}\cos\varepsilon + \frac{\lambda^2}{4r^2}\right)^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\lambda}{2r}\cos\varepsilon\right),$$

если предположить, что $\lambda$, по сравнению с $r$, — очень малая величина, причем мы должны принимать во внимание только первую степень от $\frac{\lambda}{r}$. Равным образом мы получим:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\lambda}{2r}\cos\varepsilon\right),$$



откуда:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{\lambda \cos\varepsilon}{r^2}$$

и

$$V = \frac{m\lambda \cos\varepsilon}{r^2} = \frac{M \cos\varepsilon}{r^2}.$$

Пусть точка $P$ имеет теперь координаты $x, y, z$, а точка $O$ — координаты $a, b, c$. Пусть далее прямая $AB$ образует с осями системы координат углы — $f, g, h$. Тогда

$$\cos\varepsilon = \frac{x-a}{r}\cos f + \frac{y-b}{r}\cos g + \frac{z-c}{r}\cos h,$$

и отсюда

$$V = \frac{M(x-a)\cos f + M(y-b)\cos g + M(z-c)\cos h}{r^3}.$$

Величину $AB = \lambda$ мы можем теперь спроектировать на три координатные оси и получим, таким образом, длины $\lambda\cos f$, $\lambda\cos g$, $\lambda\cos h$. Поэтому:

$$m\lambda\cos f = M\cos f = A,$$

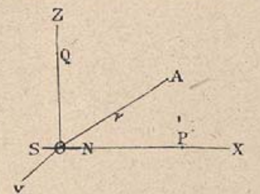
$$m\lambda\cos g = M\cos g = B,$$

$$m\lambda\cos h = M\cos h = C$$

мы можем назвать **составляющими магнитного момента** по отношению к трем осям, и таким образом, потенциал будет равен:

$$V = \frac{A(x-a) + B(y-b) + C(z-c)}{r^3}. \tag{1}$$

Воспользуемся теперь этим выражением для потенциала, чтобы вычислить те магнитные силы, которые




Черт. 3.

обнаруживает в точке $A$ магнит, находящийся в начале координат (черт. 3), и расположенные так, что его оба полюса лежат на оси $x$-ов на одинаковом расстоянии от начала координат. В таком случае, моменты магнита $B=C=0$, в то время как $A=M$ представляет собою общий магнитный момент. Кроме того, $a=b=c=0$, откуда:

$$V=\frac{M x}{r^3}.$$

Для магнитных сил мы получаем:

$$X=-\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{M}{r^3}+\frac{3 M x^2}{r^5},$$

$$Y=-\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{3 M x y}{r^5},$$

$$Z=-\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{3 M x z}{r^5},$$

что понятно без дальнейших раз'яснений, если мы примем в соображение, что

$$r^2=x^2+y^2+z^2,$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}.$$



Если точка находится на оси $x$-ов, напр., в $P$, то $x=r$; следовательно:

$$X=\frac{2 M}{r^3}, \quad Y=Z=0.$$

Для точки на оси $z$-ов $z=r$, следовательно:

$$X=-\frac{M}{r^3}$$

и опять

$$Y=Z=0.$$

## § 4. Определение интенсивности земного магнетизма и магнитного момента.

Расположим магнит (черт. 4) так, чтобы он находился перпендикулярно к магнитному меридиану $MN$. При


Черт. 4.

этом, в точке $P$, на расстоянии $r$ от центра $O$ магнита, образуется магнитное поле силы $\frac{2M}{r^3}$. Это поле вместе с горизонтальной слагаемой интенсивности $H$ земного поля дает одно равнодействующее поле, величина и направление которого определяется по правилу параллелограмма сил. Магнитная стрелка устанавливается в направлении поля; она образует с магнитным меридианом угол $\varphi$, причем:

$$tg\,\varphi = \frac{2\,M}{r^3 H}$$

или

$$\frac{M}{H} = \frac{r^3}{2}\,tg\,\varphi\,.$$

Мы можем, следовательно, определить частное $\frac{M}{H}$, но не получим никакого указания относительно истинных размеров величин $M$ и $H$, которые могут быть определены только с помощью, так называемого, исследования колебаний. С этой целью магнит подвешивается на длинной нити так, чтобы он легко мог колебаться в горизонтальной плоскости. Если магнит образует с магнитным меридианом угол $\varphi$, то земной магнетизм сообщает магниту момент вращения $-M\,H\,sin\,\varphi$, причем для его вращения мы получим равенство:

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -M\,H\,sin\,\varphi$$

(ч. I, § 28), если под $K$ мы будем подразумевать момент инерции магнита. Если колебания не велики, то мы можем допустить, что $sin\,\varphi = \varphi$, причем уравнение движения будет

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{M\,H}{K}\,\varphi\,.$$

Это уравнение аналогично тому, которое мы вывели для колебательных движений маятника (ч. I, § 9). В виду этого, для продолжительности колебаний мы получим:

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{K}{M\,H}},$$



откуда следует, что:

$$M\,H = \frac{\pi^2 K}{\tau^2}\,.$$

Мы можем, следовательно, по методу указанному Гауссом, определить экспериментально частное $\frac{M}{H}$, и произведение $M\,H$. Зная эти величины, мы можем легко определить как величину магнитного момента $M$, так и горизонтальную слагающую земного магнетизма.

## § 5. Магнитная индукция. — Потенциал магнитно-индуцированного тела.

Если мы поместим железо вблизи магнита, то оно само сделается магнитным. Мы можем рассматривать это явление, как аналогичное электризации диэлектрика, помещенного в электрическом поле. Мы можем принять, что в каждой молекуле выделяется одинаковое количество положительного и отрицательного магнетизма и т. д., и мы называем это явление „магнитной индукцией". Мы получим для магнитного момента единицы об'ема

$$\mu = k\,P\,,$$

если под $P$ мы будем подразумевать силу намагничивания, в то время как $k$ называется теперь числом намагничиваний. Составляющими момента $\mu$ будут:

$$\alpha = k\,X,\quad \beta = k\,Y,\quad \gamma = k\,Z,$$

в то время как $X$, $Y$ $Z$ означают составляющие $F$. Потенциал всего тела мы найдем, если определим потенциал элемента об'ема и затем проинтегрируем его по всему об'ему тела. Потенциал одного элемента об'ема $da\,db\,dc$ мы получаем на основании равенства (1). Для магнитного момента одного элемента об'ема по отношению к трем осям мы будем иметь:

$$A = \alpha\, da\, db\, dc,$$

$$B = \beta\, da\, db\, dc,$$

$$C = \gamma\, da\, db\, dc,$$

следовательно потенциал

$$(2)\quad dV = \frac{\alpha(x-a) + \beta(y-b) + \gamma(z-c)}{r^3}\, da\, db\, dc.$$

При этом

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

Продифференцируем это равенство по $a$; тогда мы найдем, что

$$\frac{\partial r}{\partial a} = -\frac{x-a}{r},$$

чем мы можем воспользоваться, чтобы составить следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{x-a}{r^3}.$$

Совершенно таким же образом мы получим:

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{y-b}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{z-c}{r^3}.$$



Эти величины мы можем теперь вставить в равенство (2), причем получим после интегрирования потенциал всего тела

$$V = \iiint\left[\alpha\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right) + \beta\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right) + \gamma\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right)\right] da\, db\, dc.$$

Далее следует, что

$$\iiint \alpha\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right) da\, db\, dc = \iint db\, dc\left[\frac{\alpha}{r} - \int\frac{1}{r}\frac{\partial\alpha}{\partial a}da\right].$$

Если мы будем рассматривать элемент поверхности нашего тела — $dO$, нормаль которого образует с координатными осями углы $f, g, h$, то мы можем допустить, что

$$dO\cos f = db\, dc,$$

а также:

$$dO\cos g = da\, dc, \quad dO\cos h = da\, db.$$

Это позволяет нам видоизменить наш потенциал следующим образом:

$$V = \iint\frac{\alpha\cos f + \beta\cos g + \gamma\cos h}{r}\, dO - \iiint\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial a} + \frac{\partial\beta}{\partial b} + \frac{\partial\gamma}{\partial c}\right) da\, db\, dc.$$

Таким образом, **потенциал состоит в общем из двух частей, из которых одна зависит от поверхности, а другая относится к об'ему тела.** Ясно, что

$$\alpha\cos f + \beta\cos g + \gamma\cos h = \sigma,$$

если под $\sigma$ мы будем подразумевать поверхностную плотность магнетизма, в то время как

$$-\left(\frac{\partial \alpha}{\partial a}+\frac{\partial \beta}{\partial b}+\frac{\partial \gamma}{\partial c}\right)=\rho$$

представляет собою плотность свободного магнетизма внутри тела. Наш потенциал будет поэтому:

$$V=\iint\frac{\sigma\, dO}{r}+\iiint\frac{\rho}{r}\,da\,db\,dc.$$

Это выражение мы могли бы получить сразу, если бы мы с самого начала установили понятия свободного магнетизма на поверхности и внутри тела. Эта последняя формула выражает ничто иное, как обычное определение потенциала, а именно: потенциал равен сумме всех наличных масс, разделенных соответственно на их расстояния от той точки, для которой определяется потенциал.

## § 6. Однородно намагниченный шар.

Если шар намагничен однородно, то это значит, что магнитный момент единицы об'ема во всех его точках имеет одинаковую величину и направление. Положим, что магнитный момент совпадает с направлением оси $x$-ов системы координат. Для магнитного момента единицы об'ема будет, следовательно, иметь место:

$$\alpha=konst.,\quad \beta=\gamma=0.$$

В силу предыдущих параграфов:

$$V=\iiint\frac{\alpha(x-a)}{r^3}\,da\,db\,dc,$$



причем мы можем допустить, что

$$\frac{x-a}{r^3}=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right),$$

а также

$$\frac{x-a}{r^3}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Откуда:

$$V=-\iiint\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)da\,db\,dc=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x}\iiint\frac{\alpha}{r}\,da\,db\,dc.$$

Это вполне допустимо, так как по переменной $x$ не происходит интегрирования. Для сплошного шара мы будем иметь теперь, если точка, по отношению которой определяется потенциал, лежит вне шара

$$\iiint\frac{\alpha}{r}\,da\,db\,dc=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{p^3\alpha}{R},$$

где $p$ — радиус шара и $R$ — расстояние центра шара от внешней точки. Таким образом, мы находим, что

$$V=-\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{4\pi\alpha p^3}{3R}=\frac{4\pi\alpha p^3}{3}\cdot\frac{x}{R^3}.$$

Если центр шара мы перенесем в начало системы координат, то получим:

$$R^2=x^2+y^2+z^2,$$

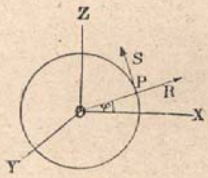
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{1}{R^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial x}=-\frac{x}{R^3}$$

Так как $\alpha$—магнитный момент единицы об'ема, а $\frac{4\pi p^3}{3}$ — об'ем шара, то

$$\frac{4\pi p^3 \alpha}{3} = M$$

представляет собою магнитный момент шара. Следовательно, потенциал будет:

$$V = \frac{M x}{R^3}.$$




Черт. 5

Тот же самый результат мы получим для небольшого магнита $M$ (§ 3), полюсы которого находятся на оси $x$-ов, по обе стороны от начала координат. Поэтому действие однородно намагниченного шара может быть заменено действием небольшого магнита, имеющего тот же магнитный момент.

Для определения магнитной силы в точке $P$ (черт. 5) поверхности шара, необходимо допустить, что

$$x = R \cos \varphi;$$

следовательно, потенциал будет:

$$V = \frac{M}{R^2} \cos \varphi.$$

Разложим силу $P$ на составляющую в направлении радиуса и составляющую перпендикулярную к этому последнему. Первая составляющая будет выражаться:

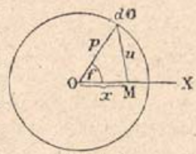
$$-\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{2M}{R^3} \cos \varphi,$$



а вторая:

$$-\frac{\partial V}{K \partial \varphi} = \frac{M \sin \varphi}{R^3}.$$

Для оси $x$-ов $\varphi = 0$. Мы имеем, поэтому, только одну силу в направлении радиуса. Магнитная стрелка установится, в этом случае, перпендикулярно к поверхности шара. Напротив в плоскости $yz$-ов $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Здесь мы будем иметь, следовательно, только одну силу, параллельную поверхности шара. Подобное отношение мы имеем в земном магнетизме, если линию, соединяющую, оба полюса земли, мы будем рассматривать как ось $x$-ов. На обоих магнитных полюсах земли магнитная стрелка стоит, действительно, почти перпендикулярно, а на экваторе — приблизительно горизонтальнс. Из наблюдений, производимых на земной поверхности, мы не можем непосредственно вывести заключения о распределении земного магнетизма внутри земли, хотя небольшой сильный магнит и может совершенно заменить однороано намагниченный шар.




Черт. 6.

Вычислим теперь потенциал нашего однородно намагниченного шара по отношению к находящейся внутри его точке $M$ (черт. 6), лежащей на оси $x$-ов. Так как внутри шара мы не имеем свободного магнетизма, то $\rho = 0$ и

$$V = \iint \frac{\sigma \, d O}{u}.$$

Далее

$$\sigma = \alpha \cos f,$$

поэтому

$$V = \alpha \int\int \frac{\cos f}{u}\, d\,O.$$

Так как по отношению к оси $x$-ов все элементы симметричны, то мы можем допустить, что

$$d\,O = p\,d\,f \cdot 2\,\pi\,p \sin f = 2\,\pi\,p^2 \sin f\,d\,f.$$

Поэтому:

$$V = 2\,\pi\,p^2\,\alpha \int_0^\pi \frac{\cos f \sin f\,d\,f}{u}. \tag{3}$$

Мы имеем далее:

$$u^2 = p^2 + x^2 - 2\,p\,x \cos f$$

и после дифференцирования:

$$u\,d\,u = p\,x \sin f\,d\,f,$$

в то время как из равенства для $u^2$ следует:

$$\cos f = \frac{p^2 + x^2 - u^2}{2\,p\,x}.$$

Введем эти величины для $\cos f$ и $\sin f\,d\,f$ в равенство (3); тогда у нас останется:

$$V = \frac{2\,\pi\,p^2\,\alpha}{2\,p^2\,x^2} \int_{p-x}^{p+x} (p^2 + x^2 - u^2)\,d\,u =$$

$$= \frac{\pi\,\alpha}{x^2} \left[ (p^2 + x^2)\,u - \frac{u^3}{3} \right]_{p-x}^{p+x} = \frac{4\,\pi\,\alpha\,x}{3},$$



что легко может быть найдено путем подстановки пределов $(p - x)$ и $(p + x)$. Эти последние являются значениями $u$ для углов $f = 0$ и $f = \pi$. Таким образом, рассматриваемый потенциал пропорционален абсциссе $x$. Сила, параллельная оси $x$-ов будет поэтому:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4\,\pi\,\alpha}{3},$$

в то время как сила, перпендикулярная к оси $x$-ов равна нулю. Если мы имеем постоянную силу в направлении оси $x$-ов, но не имеем никакой силы, перпендикулярной к этой оси, то это значит: силовые линии параллельны. Выражение для рассматриваемого нами потенциала применимо, поэтому, не только для точек на оси $x$-ов, но вообще для всякой точки внутри шара. Для точки на поверхности:

$$x = p \cos f.$$

Мы знаем по предыдущему, что

$$\frac{4\,\pi\,p^3\,\alpha}{3} = M$$

представляет собою магнитный момент шара. Мы можем, поэтому, допустить, что:

$$4\,\pi\,\alpha = \frac{3\,M}{p^3}$$

и получить равенство:

$$V = \frac{4\,\pi\,\alpha\,x}{3} = \frac{M\,p \cos f}{p^3} = \frac{M \cos f}{p^2}.$$

Эту формулу мы уже нашли выше, только мы заменили в ней $p$ через $R$ и $f$ через $\varphi$. Величины обоих выражений для потенциала в точке, находящейся внутри и вне шара, будут, следовательно, равны друг другу на поверхности шара.

## § 7. Магнитные индукционные линии. — Потенциал шара в однородном магнитном поле.

Если мы поместим в магнитном поле какое-нибудь тело, то в этом теле индуцируется магнетизм, причем на поверхности тела образуется свободный магнетизм. Кроме того, этот свободный магнетизм действует теперь индуцирующим образом на тело и изменяет положение магнитных силовых линий как внутри, так и вне тела. Эти новые силовые линии образовавшиеся вследствие индукции называются магнитными индукционными линиями.

Если мы поместим шар в однородное магнитное поле, то получается однородное намагничивание шара. Как мы уже видели, внутри шара силовые линии идут параллельно. Следовательно, образовавшийся свободный магнетизм может изменить только силу однородного магнитного поля внутри шара.

Пусть $P$ — первоначальная сила поля. Эта сила производит магнитный момент единицы об'ема

$$\alpha = kP, \tag{4}$$

благодаря чему потенциал

$$V = \frac{4\pi\alpha x}{3}$$

и сила

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4\pi\alpha}{3}$$



для точки внутри шара. Истинную величину $\alpha$ мы найдем не из равенства (4), но из формулы:

$$\alpha = k(F + X),$$

где $X$ — магнитная сила, происходящая от индуцированного свободного магнетизма. Отсюда следует, что

$$\frac{\alpha}{k} = P - \frac{4\pi\alpha}{3}.$$

Это выражение мы можем преобразовать в

$$\alpha\left(\frac{1}{k} + \frac{4\pi}{3}\right) = F,$$

$$\alpha = \frac{P}{\frac{1}{k} + \frac{4\pi}{3}}.$$

Для таких веществ, как железо, никель и т. п. $k$ настолько велико, что мы можем пренебречь величиной $\frac{1}{k}$ по сравнению с $\frac{4\pi}{3}$. В виду этого:

$$\alpha = \frac{3P}{4\pi}.$$

Магнитный момент шара радиуса $p$ будет:

$$M = \frac{4\pi}{3}p^3\alpha = p^3 P.$$

Он равен, следовательно, произведению длины радиуса в 3-ей степени на силу поля, если только тело имеет большое число намагничиваний. Если же число намагничиваний, как у большинства тел, очень мало, то можно пренебречь $\frac{4\pi}{3}$ по сравнению с $\frac{1}{k}$ и мы получим:

$$\alpha = kP.$$

## § 8. Теорема Томсона. — Постоянная магнитной индукции. — Формальные аналогии.

Если мы обозначим потенциал внутри тела через $V_-$, вне тела через $V_+$, плотность свободного магнетизма на поверхности через $\sigma$, то по отношению к поверхности будет иметь место равенство:

$$\frac{\partial V_+}{\partial n} - \frac{\partial V_-}{\partial n} = -4\pi\sigma. \tag{5}$$

Для составляющих магнитного момента единицы об'ема мы имеем:

$$\alpha = -k\frac{\partial V_-}{\partial x}, \quad \beta = -k\frac{\partial V_-}{\partial y}, \quad \gamma = -k\frac{\partial V_-}{\partial z}.$$

Далее

$$\sigma = -k\frac{\partial V_-}{\partial n}.$$

В виду этого, равенство (5) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial V_+}{\partial n} - \frac{\partial V_-}{\partial n} = 4\pi k \cdot \frac{\partial V_-}{\partial n}$$

или

$$(1 + 4\pi k)\frac{\partial V_-}{\partial n} = \frac{\partial V_+}{\partial n}.$$



Это последнее выражение было впервые получено Томсоном. Оно аналогично выражению, найденному нами, при рассмотрении теории диэлектриков, для поверхности диэлектрика, находящегося в соприкосновении со свободным пространством, причем в случае диэлектрика величина $1 + 4\pi k$ представляет собою диэлектрическую постоянную, в то время как для магнитных явлений $1 + 4\pi k$ называется постоянной магнитной индукции или магнитной проницаемостью $\mu$.

По аналогии явлений (ч. III, § 54) мы можем также принять следующую форму выражения. Если интенсивность индуктированного магнитного поля $R$, плотность индукционных линий тела, помещенного в поле $B$, то

$$B = \mu R,$$

причем $B$ называется магнитной индукцией или магнитным возбуждением.

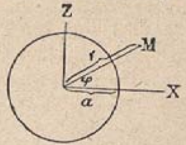
Если два тела с числами намагничиваний $k$ и $k'$ соприкасаются между собой, то по аналогии:

$$(1 + 4\pi k)\frac{\partial V}{\partial n} = (1 + 4\pi k')\frac{\partial V'}{\partial n}.$$

Это уравнение снова приводит нас к аналогии с теплопроводностью и с истечением жидкостей (ч. III, § 55).

## § 9. Поперечно намагниченный цилиндр в однородном магнитном поле.

Пусть мы имеем бесконечно длинный круговой цилиндр из железа (черт. 7). Положим, ось такого цилиндра является осью $y$-ов системы координат. Допустим далее, что цилиндр находится в первоначально однородном магнитном поле, силовые линии которого идут параллельно оси $x$-ов. В таком случае, однородность магнитного поля нарушается под влиянием свободных магнитных масс, образующихся на цилиндре. Познакомимся ближе с образующимися, таким образом, магнитными индукционными линиями. По форме фигуры мы можем заключить, что вдоль прямой параллельной оси $y$-ов потенциал должен иметь постоянную величину. Назовем потенциал внутри цилиндра через $V_i$, а вне цилиндра через $V_e$. Тогда:



Черт. 7.

$$\frac{\partial V_i}{\partial y} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} = \frac{\partial V_e}{\partial y} = \frac{\partial^2 V_e}{\partial y^2} = 0 .$$

Вне и внутри цилиндра

$$\Delta V = 0 ,$$

так как, только на его поверхности находятся свободные магнитные массы. Это обстоятельство приводит к уравнениям

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_e}{\partial z^2} = 0$$

и

$$\frac{\partial^2 V_i}{e x^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2} = 0 .$$

Всякая функция от $x + zi$ является решением этого уравнения. Мы увидим в последующем, что уравнения:

$$V_e = A (x + zi) + \frac{B}{x + zi},$$

$$V_i = A'(x + zi, + \frac{B'}{x + zi}$$



удовлетворяют поставленным нами условиям, и могут быть рассматриваемы как решения нашей задачи. Действительная часть такого решения должна, в свою очередь, также быть решением задачи, и мы, поэтому получим

$$V_e = A x + \frac{B x}{x^2 + z^2},$$

$$V_i = A' x + \frac{B' x}{x^2 + z^2}.$$

Рассмотрим потенциал в точке, находящейся на очень большом расстоянии от нашего цилиндра; в этом случае $x^2 + z^2$ будет очень велико, а $\frac{B x}{x^2 + z^2}$ — очень мало. Поэтому

$$V_e = A x$$

и сила

$$-\frac{\partial V_e}{\partial x} = - A .$$

Мы имеем, следовательно, на очень большом расстоянии от цилиндра однородное магнитное поле. Для оси цилиндра: $x^2 + z^2 = 0$. Так как $V_i$ не может сделаться бесконечно большой величиной, то $B'$ должно быть равно 0, и у нас остается:

$$V_i = A' x , \quad -\frac{\partial V_i}{\partial x} = - A' .$$

Таким образом, внутри цилиндра также находится однородное магнитное поле. Цилиндр намагничен поперечно, а именно магнитные индукционные линии идут параллельно оси $x$-ов.

Положим теперь, что

$$x = r \cos \varphi ,$$

тогда

$$V_e = \left(A\,r + \frac{B}{r}\right) \cos\varphi\,, \quad V_i = A' r \cos\varphi\,.$$

Для поверхности цилиндра должно быть:

$$V_e = V_i$$

и

(6) $$A\,a + \frac{B}{a} = A'\,a\,,$$

если $a$ — радиус цилиндра. Далее должно быть:

$$(1 + 4\,\pi\,k)\,\frac{\partial V_i}{\partial n} = \frac{\partial V_e}{\partial n},$$

откуда следует, что

(7) $$(1 + 4\,\pi\,k)\,A' = A - \frac{B}{a^2}.$$

Уравнение (6) мы можем теперь также представить в виде:

$$A + \frac{B}{a^2} = A'.$$

Исключив из обоих последних уравнений $\frac{B}{a^2}$, мы получаем:

$$A' = \frac{A}{1 + 2\,\pi\,k}\,, \quad \frac{B}{a^2} = -\frac{2\,\pi\,k}{1 + 2\,\pi\,k}\,A.$$

Магнитный момент единицы об'ема цилиндра будет:

$$\alpha = -k\,\frac{\partial V_i}{\partial x} = -k\,A' = -\frac{k\,A}{1 + 2\,\pi\,k} = -\frac{A}{\frac{1}{k} + 2\,\pi}\,.$$



Таким образом, мы получаем формулу, аналогичную той, которую мы вывели для шара (§ 7)

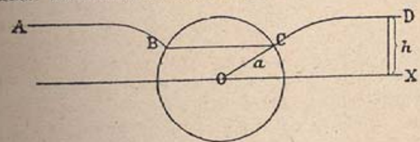
Если переменная дана уравнением с комплексными числами, и если мы разложим это уравнение на два, из которых одно содержит только действительную часть, а другое — только мнимую, то этим уравнениям будут соответствовать системы кривых, из которых одна представляет собою ортогональные траэктории других. Следовательно, в то время как:

$$V_i = A'\,x\,, \quad V_e = A\,x + \frac{B\,x}{r^2}$$

дадут нам поверхности уровня потенциала, мнимые части:

$$U_i = A'\,z\,, \quad U_e = A\,z - \frac{B\,z}{r^2}$$

определят магнитные силовые линии.




Черт. 8.

На большом расстоянии от цилиндра силовые линии идут параллельно оси $x$-ов. Выделим одну из таких линий (черт. 8), для которой $z \doteq h$. В таком случае мы будем иметь: $U_e = Ah$, так как $\frac{B\,h}{r^2}$ можно рассматривать как весьма малую величину.

Общее уравнение индукционных линий вне цилиндра будет, поэтому,

$$A\,h = A\,z - \frac{B\,z}{r^2} = A\,z + \frac{2\,\pi\,k\,a^2}{(1 + 2\,\pi\,k)\,r^2}\,A\,z\,,$$

если величину $B$ мы заимствуем из предыдущего. После сокращения получается:

$$h = z + \frac{2\pi k a^2}{1+2\pi k} \cdot \frac{z}{x^2+z^2}.$$

Это — магнитные индукционные линии и вместе с тем кривые третьего порядка. Точка $C$, в которой индукционная линия пересекает поверхность цилиндра, имеет ординату $z_1$. Для этой точки $x^2+z^2=a^2$ и выведенное нами уравнение превращается в:

$$h = z_1 + \frac{2\pi k}{1+2\pi k} z_1.$$

Для железного цилиндра $k$ настолько велико, что мы можем пренебречь единицей по сравнению с $2\pi k$, и будем иметь:

$$z_1 = \frac{h}{2}.$$

Таким образом, все силовые линии, которые имеют в бесконечности ординату, меньшую $2a$, проходят через цилиндр. Железо, так сказать, стягивает на себя силовые линии.

Совершенно таким же образом могли бы мы найти линии истечения теплоты, если бы мы поместили цилиндр в пространстве с постоянным падением температуры. Если бы теплопроводность цилиндра была очень велика, по сравнению с теплопроводностью окружающего пространства, то линии истечения располагались бы точно так же, как магнитные индукционные линии железа.

Подобно тому, как мы это сделали по отношению к массивному цилиндру, можно также произвести вычисление по отношению к полому цилиндру. В таком случае оказывается, что внутри пустого пространства цилиндра имеется однородное магнитное поле, которое становится тем слабее, чем толще стенки цилиндра. Мы называем это явление **действием железа в качестве магнитного экрана.**

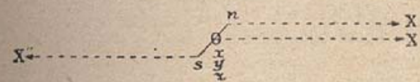


## § 10. Тела с очень малым числом намагничиваний в магнитном поле.

У тел с очень малым числом намагничиваний мы можем совершенно пренебречь противодействием индуктированных магнитных масс по сравнению с индуктированными силами. В таком случае, силами $X$, $Y$, $Z$ будут образованы магнитные моменты:

$$\alpha = kX = -k\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \beta = kY = -k\frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\gamma = kZ = -k\frac{\partial V}{\partial z}$$




Черт. 9.

Действие силы $X$ на малый магнит $ns$ (черт. 9) можно представить следующим образом. Если в точке $O$ с координатами $x$, $y$, $z$ мы имеем силу $X$, то в $n$ мы найдем силу:

$$X' = X + \frac{\partial X}{\partial x}\xi + \frac{\partial X}{\partial y}\eta + \frac{\partial X}{\partial z}\zeta,$$

причем

$$\xi = \frac{\lambda}{2}\cos f, \quad \eta = \frac{\lambda}{2}\cos g, \quad \zeta = \frac{\lambda}{2}\cos h$$

Под $\lambda$ нужно, следовательно, подразумевать длину магнита, а под $f, g, h$ — углы, которые он образует с осями. В $s$ мы будем иметь, по аналогии, силу:

$$X'' = X - \frac{\partial X}{\partial x}\xi - \frac{\partial X}{\partial y}\eta - \frac{\partial X}{\partial z}\zeta.$$

Наш магнит имеет в $n$ магнитную массу $+m$, в $s$ — массу $-m$. В качестве силы, действующей на магнит, мы будем иметь:

$$m X' - m X'' = 2m\left(\frac{\partial X}{\partial x}\xi + \frac{\partial X}{\partial y}\eta + \frac{\partial X}{\partial z}\zeta\right) =$$

$$= m\lambda\left(\frac{\partial X}{\partial x}\cos f + \frac{\partial X}{\partial y}\cos g + \frac{\partial X}{\partial z}\cos h\right).$$

Представим себе об'емный элемент $dx\,dy\,dz$ данного тела в магнитном поле. Его магнитный момент будет $\mu\,dx\,dy\,dz$. Магнитная сила должна действовать на такой элемент так же как на маленький магнит, магнитный момент которого $m\lambda$. Поэтому в качестве силы, действующей на элемент об'ема, мы можем принять:

$$dk = \mu\,dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial X}{\partial x}\cos f + \frac{\partial X}{\partial y}\cos g + \frac{\partial X}{\partial z}\cos h\right) =$$

$$= dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial X}{\partial x}\alpha + \frac{\partial X}{\partial y}\beta + \frac{\partial X}{\partial z}\gamma\right),$$

так как

$$\alpha = \mu\cos f$$

и т. д.



Если мы представим теперь вместо $X$ величину $-\frac{\partial V}{\partial x}$ и т. д., а также вместо $\alpha, \beta, \gamma$ — их значения из уравнений указанных в начале, то мы найдем для силы:

$$k\,dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\right) =$$

$$= \frac{k}{2}\,dx\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{k}{2}\,dx\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial x}(X^2 + Y^2 + Z^2) =$$

$$= dx\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k R^2}{2}\right).$$

Подобным же образом мы найдем для сил, действующих по оси $y$ ов и $z$-ов

$$dx\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k R^2}{2}\right)$$

и

$$dx\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k R^2}{2}\right).$$

## § 11. Магнитная сила, действующая на длинный цилиндр, один конец которого находится в магнитном поле.

Положим, что один конец цилиндра находится в магнитном поле, напр. между двумя полюсами подковообразного магнита (черт. 10). Для силы, с которой действует магнит на наш цилиндр параллельно оси $x$-ов, мы получим по уравнениям предыдущего параграфа

$$\iiint dx\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k R^2}{2}\right) = \iint dy\,dz\left(\frac{k R_1^2}{2} - \frac{k R_0^2}{2}\right).$$

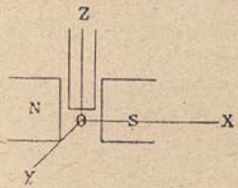
Так как по отношению к плоскости $yz$ мы имеем полную симметрию, то магнитные силы $R_0$ и $R_1$, также равны друг другу. Поэтому в направлении оси $x$-ов и $y$-ов на цилиндр не действует никакой механической силы. Для силы, действующей в направлении оси $z$-ов, мы будем, однако, иметь:

$$\int\int dx\,dy\left(\frac{kR''^2}{2}-\frac{kR'^2}{2}\right).$$

При этом $R'$ — магнитная сила, т. е. сила поля, на конце цилиндра между магнитными полюсами, $R''$ — сила на противоположном конце. Эта последняя равна нулю. В таком случае, остается только:

$$-\int\int\frac{kR'^2}{2}\,dx\,dy=-\frac{qkR'^2}{2},$$

где $q$ — поперечное сечение цилиндра. Мы предполагаем здесь, что магнитное поле на конце цилиндра имеет во всех точках постоянную величину $R'$, причем $\frac{qkR'^2}{2}$ — механическая сила, с которой цилиндр втягивается в поле. Эту силу можно определить с помощью весов, и в этом случае мы имеем метод, позволяющий при данной магнитной силе $R'$ — определять число намагничиваний $k$, или при данном числе намагничиваний определять силу поля $R'$.



Черт. 10.



## § 12. Силовая функция и потенциал магнитных сил.

В (§ 10) мы нашли для составляющих сил, с которыми магнитное поле действует на элемент об'ема, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kR^2}{2}\,dx\,dy\,dz\right)$ и т. д. Мы можем поэтому, рассматривать $\frac{kR^2}{2}\,dx\,dy\,dz$ как силовую функцию (ч. I, § 14) для элемента об'ема. Подобным же образом можем определить и потенциал. Определим его сначала опять таки для элементарного магнита $sn$ (черт. 9). Пусть потенциал в точке $O$ будет $V$; тогда мы будем иметь в $n$

$$V'=V+\frac{\partial V}{\partial x}\xi+\frac{\partial V}{\partial y}\eta+\frac{\partial V}{\partial z}\zeta,$$

в $s$

$$V''=V-\frac{\partial V}{\partial x}\xi-\frac{\partial V}{\partial y}\eta-\frac{\partial V}{\partial z}\zeta.$$

Потенциал в элементарном магните будет, следовательно,

$$mV'-mV''=\frac{\partial V}{\partial x}m\lambda\cos f+\frac{\partial V}{\partial y}m\lambda\cos g+\frac{\partial V}{\partial z}m\lambda\cos h.$$

Для магнитного момента $m\lambda$ мы можем теперь опять представить момент об'емного элемента $\mu\,dx\,dy\,dz$, причем получается:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mu\cos f+\frac{\partial V}{\partial y}\mu\cos g+\frac{\partial V}{\partial z}\mu\cos h\right)dx\,dy\,dz=$$

$$=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\alpha+\frac{\partial V}{\partial y}\beta+\frac{\partial V}{\partial z}\gamma\right)dx\,dy\,dz=$$

$$=-k\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz=$$

$$=-kR^2\,dx\,dy\,dz.$$

Таким образом мы получим парадоксальный результат, а именно, что **потенциал вдвое больше силовой функции**. Это происходит потому, что при образовании силовой функции мы рассматриваем массы как постоянные, что, однако, в действительности не имеет места, так как магнитный момент обусловливается величиной силы и изменяется вместе с ней. В то время как **изменение силовой функции определяет величину механической силы, изменение потенциала определяет изменение всей энергии**. Эта последняя состоит в нашем случае не только из **кинетической энергии**, — но одновременно производится работа для образования магнитного момента в индуктированном теле. Эта работа, как мы увидим в следующем параграфе, имеет величину равную изменению кинетической энергии в теле. В виду этого, потенциал может оказаться вдвое больше силовой функции.

## § 13. Магнитная молекулярная сила.

Если в каком-нибудь теле первоначально соединенные магнитные массы $+m$ и $-m$ разделяются магнитной силою $R$, то на $+m$ действует сила $+mR$, а на $-m$ сила $-mR$. Если расстояние, которое благодаря этому установилось между массами, есть $\lambda$, то $m\lambda R$ есть работа, которая должна быть произведена для разделения масс. Дифференциал работы при постоянной силе будет, следовательно, $Rd\,(m\lambda)$. Для элемента об'ема это дает (§ 5)

$$R\,d(m\lambda) = K\,d\mu\,dx\,dy\,dz.$$

Так как

$$R = \frac{\mu}{k},$$

то

$$R\,d\mu\,dx\,dy\,dz = \frac{\mu\,d\mu}{k}\,dx\,dy\,dz.$$



Поэтому, работа, необходимая для преодоления магнитной молекулярной силы единицы об'ема, будет:

$$\int_0^\mu \frac{\mu\,d\mu}{k} = \frac{\mu^2}{2k}$$

и для элемента об'ема

$$\frac{\mu^2}{2k}\,dx\,dy\,dz = \frac{kR^2}{2}\,dx\,dy\,dz,$$

так как $\mu = kR$. Таким образом, мы получаем величину **работы, для преодоления магнитной молекулярной силы, равную силовой функции**.

## § 14. Магнитная энергия.

Мы нашли для величины работы $A$ системы электрических точек (ч. III, § 49) равенство:

$$A = \Sigma\frac{mV}{2},$$

причем под $m$ мы подразумеваем электрическую массу, а под $V$ — ее потенциал. Это выражение мы можем непосредственно перенести на магнетизм и определить таким образом величину работы или энергии магнитной системы. Мы предполагаем, что мы имеем дело с системою **постоянных магнитов** и различными другими телами, в которых магниты образуют **свободные магнитные массы**. **Постоянными магнитами** мы называем при этом **магнитные массы, которые не изменяют своей величины при** изменении системы, как это напр., приблизительно имеет место у стальных магнитов. Мы можем всю магнитную энергию разложить на три части. Первую дает действие неподвижных магнитов на свободные магнитные массы тела. Вторая часть состоит из действий свободных масс самих на себя. Третья — та работа, которая необходима для преодоления магнитной молекулярной силы в телах.

Свободные магнитные массы мы имеем только на поверхности тел. Плотность этих масс мы обозначим через $\sigma$. Если потенциал, который производят неподвижные магниты, есть $V$, то

$$\iint V \sigma \, d O = \iiint \left( \frac{\partial V}{\partial x} \alpha + \frac{\partial V}{\partial y} \beta + \frac{\partial V}{\partial z} \gamma \right) dx\, dy\, dz$$

дает нам первую часть величины магнитной работы. Мы можем легко доказать, что это равенство действительно имеет место. Частное интегрирование дает:

$$\iiint \left( \frac{\partial V}{\partial x} \alpha + \frac{\partial V}{\partial y} \beta + \frac{\partial V}{\partial z} \gamma \right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint (V \alpha\, dy\, dz + V \beta\, dx\, dz + V \gamma\, dx\, dy) -$$

$$- \iiint V \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz .$$

При условии, что мы имеем магнитные массы только на поверхности:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0 .$$



Второй член нашего интегрального выражения отпадает, и у нас остается только

$$\iint (V \alpha\, dy\, dz + V \beta\, dx\, dz + V \gamma\, dx\, dy) =$$

$$= \iint V (\alpha \cos f + \beta \cos g + \gamma \cos h)\, dO = \iint V \sigma\, dO$$

(§ 5), чем наше утверждение доказано.

В качестве второй части магнитной энергии нам нужно теперь взять потенциал свободных магнитных масс по отношению к ним самим, умноженный на свободную массу. Пусть этот потенциал будет $U$. Мы получим тогда для энергии

$$\frac{1}{2} \iint U \sigma\, dO = \frac{1}{2} \iiint \left( \frac{\partial U}{\partial x} \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \gamma \right) dx\, dy\, dz .$$

Здесь должен быть введен множитель $^1/_2$, так как при определении величины работы системы мы берем каждую массу два раза. В первой части коэффициент $^1/_2$ не был обязателен, так как мы ввели там потенциал неподвижных масс по отношению к свободным, а не наоборот.

Работа необходимая для преодоления магнитной молекулярной силы, на основании предыдущего параграфа выражается:

$$\iiint \frac{\mu^2}{2k}\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{2k} \iiint (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, dx\, dy\, dz .$$

При этом:

$$\frac{\alpha}{k} = - \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x}$$

где $-\frac{\partial V}{\partial x}$ — сила неподвижных магнитов, $-\frac{\partial U}{\partial x}$ — противодействующая сила свободного магнетизма. Сумма трех определяющих составных частей дает нам теперь общую энергию:

$$E=\iiint\Big[\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\alpha}{2k}\right)\alpha+$$
$$+\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\beta}{2k}\right)\beta+$$
$$+\left(\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\gamma}{2k}\right)\gamma\Big]\,dx\,dy\,dz=$$
$$=\iiint\Big[\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}\right)\alpha+\ldots\Big]\,dx\,dy\,dz=$$
$$=\frac{1}{2}\iiint\left(\frac{\partial V}{\partial x}\alpha+\frac{\partial V}{\partial y}\beta+\frac{\partial V}{\partial z}\gamma\right)dx\,dy\,dz.$$

Общая энергия есть, поэтому, не что иное, как половина энергии, которую производит действие неподвижных магнитов на свободные магнитные массы.

При образовании моментов $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ определяющими являются, в первую очередь, силы $-\frac{\partial V}{\partial x}$, $-\frac{\partial V}{\partial y}$, $-\frac{\partial V}{\partial z}$. Момент и производящая его сила имеют всегда один и тот же знак, следовательно величина $\frac{\partial V}{\partial x}\alpha+\frac{\partial V}{\partial y}\beta+\frac{\partial V}{\partial z}\gamma$, а вместе с ней и вся энергия — отрицательны. Перенесем тела на бесконечно далекое расстояние



от постоянных магнитов; тогда потенциал и вместе с тем величина магнитной работы $E$ будут равны нулю. Если тела будут приближаться к магнитам, то энергия должна увеличиваться. Это и будет той кинетической энергией, которую приобретают тела при притяжении магнитами. Дифференциальное выражение для энергии

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\alpha+\frac{\partial V}{\partial y}\beta+\frac{\partial V}{\partial z}\gamma\right)dx\,dy\,dz$$

в действительности есть не что иное, как найденная уже раньше (§ 10, 12) силовая функция.

Если теперь все то, что мы нашли для электрических явлений в непрбводниках мы перенесем на магнитные явления, то магнитную энергию в пространстве можно представить через

$$A=\frac{1}{8\pi}\int\mu R^2\,dv,$$

где $\mu$ — постоянная магнитной индукции, а $R$ — магнитная сила поля (§ 8).

---

## Электромагнетизм.

### § 15. Электрический ток. — Открытие Эрштедта. — Правило Ампера. — Закон Био и Савара.

Если две точки проводника мы будем поддерживать при постоянном потенциале, то электричество будет течь постоянно от точки с более высоким потенциалом к точке с более низким потенциалом; мы будем иметь постоянный электрический ток.

Эрштедт сделал открытие, что магнитная стрелка отклоняется проходящим вблизи от нее электрическим током. Отклонение происходит по правилу, данному Ампером: представим себе, что мы плывем вдоль тока с лицом, обращенным к стрелке; в таком случае северный полюс стрелки мы увидим отклоненным влево.

Если под бесконечно длинным прямолинейным током находится магнитная стрелка, то она отклоняется с силою, которая обратно пропорциональна ее расстоянию от тока. Этот закон нашли Био и Савар. Ближайшее исследование показывает, что магнитное поле, образуемое прямолинейным током, обладает силовыми линиями, имеющими форму круга; плоскость силовых линий перпендикулярна к току, в то время, как их центр лежит на самом токе. Два тока равной силы, проходящие бесконечно близко друг к другу, и имеющие противоположные направления, — не будут оказывать на магнитную стрелку никакого действия, так как их действия взаимно уничтожаются.

## § 16. Магнитное поле элемента тока.

Сделаем допущение, что действие тока может быть вычислено по действию отдельных его элементов. Представим себе течение тока в виде кривой; другими словами, если мы имеем линейный проводник тока, то мы можем рассматривать каждый элемент кривой, как место, занятое одним элементом тока. Представим себе круговой ток. Магнитая сила $dR$ поля, образуемого элементом тока в центре круга, будет пропорциональна



длине $ds$ элемента и будет функцией радиуса круга $r$. Эту функцию мы можем представить в виде $f(r)$. Так как все элементы тока находятся на одинаковых расстояниях от центра круга, то $f(r)$ есть постоянная величина, и общая сила поля $R$ будет $2\pi r f(r)$, в виду того, что $2\pi r$ есть окружность круга. Измерение дает для интенсивности поля:

$$2\pi r f(r) = \frac{k}{r},$$

где $k$ — константа. Таким образом:

$$f(r) = \frac{k}{2\pi} \frac{1}{r^2}.$$

В рассматриваемом нами случае каждый элемент тока расположен перпендикулярно к линии, соединяющей точку поля с данным элементом тока. Если это не так, если эта прямая образует с элементом тока угол $\vartheta$, то должно быть принято в соображение только действие перпендикулярной составляющей тока $ds \sin \vartheta$. Сила тока, которая производится элементом тока в точке, — будет прямо пропорциональна длине перпендикулярной составляющей элемента тока $ds \sin \vartheta$, а также силе тока $i$ и обратно пропорциональна квадрату расстояния $r$ элемента от данной точки поля. Сила тока будет, поэтому:

$$dR = K \frac{ds \sin \vartheta}{r^2} i,$$

где $k$ — соответствующий коэффициент пропорциональности.

Сила тока определяется количеством электричества, проходящего в единицу времени через поперечное сечение проводника.

## § 17. Тангенс-буссоль. — Мера силы тока.

Поместим проводник тока, имеющий форму круга, на магнитный меридиан; в середину круга поместим магнитную стрелку, вращающуюся в горизонтальной плоскости. Если по проводнику не проходит тока, то стрелка устанавливается в направлении магнитного меридиана $AB$ (черт. 11). Если по проводнику проходит ток, то он производит внутри круга магнитное поле, перпендикулярное к магнитному меридиану. Это поле вместе с горизонтальной составляющей $H$ земного магнетизма слагается по правилу параллелограмма сил в одно равнодействующее поле, в направлении которого устанавливается магнитная стрелка. Для угла отклонения $\varphi$ мы получим, поэтому, отношение

Черт. 11.

$$tg\,\varphi = \frac{R}{H}.$$

На основании изложенного в предыдущих параграфах

$$R = Ki\int\frac{\sin\vartheta}{r^2}\,ds.$$

В рассматриваемом нами случае для всех элементов тока $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, и следовательно, $\sin\vartheta = 1$. Точно так же радиус круга $k$ представляет собою постоянную величину; таким образом, у нас остается:

$$R = \frac{Ki}{r^2}\int ds,$$



причем

$$\int ds = 2\pi r$$

представляет собою окружность круга. Поэтому

$$R = K\frac{2\pi i}{r}$$

и

$$tg\,\varphi = \frac{2\pi K i}{rH}$$

или

$$i = \frac{Hr}{2\pi K}\,tg\,\varphi.$$

Если мы условимся относительно значения постоянной $K$, то мы имеем в данном случае метод — для определения величины силы точка $i$. Если мы примем $K = 1$, то мы будем определять силу точка в абсолютных мерах. Для практических целей эта единица слишком велика, а поэтому за единицу принимается 0,1 абсолютной меры и такая единица называется ампером. Таким образом, ток в 10 амперов, соответствует абсолютной единице тока и для того чтобы выразить силу тока в амперах, мы должны принять $K = \frac{1}{10}$.

Прибор, употребляемый для определения силы тока, состоит из проволочного круга, в середине которого находится маленькая магнитная стрелка.

$$\frac{Hr}{2\pi K} = A$$

есть постоянная величина. Сила тока определяется, поэтому, формулой

$$i = A\,tg\,\varphi,$$

т. е. сила тока **пропорциональна тангенсу угла отклонения** стрелки. В виду этого такой прибор называется **тангенс-буссолью**, причем $A$ называется коэффициентом приведения. Обведем ток по окружности два раза; тогда отклоняющая сила будет вдвое больше, а при числе оборотов $n$ — в $n$ раз больше. При этом, коэффициент пропорциональности будет $\frac{A}{n}$. Следовательно, увеличивая число оборотов, мы можем повышать чувствительность тангенс-буссоли.

## § 18. Потенциал электрического тока. — Векторный потенциал.

Мы нашли для силы поля, которое образует элемент тока (§ 16) величину.

$$dR = \frac{i \sin \vartheta \, ds}{r^2}.$$

Направление поля перпендикулярно к плоскости, в которой находится элемент тока и данная точка поля. Оно образует с осями системы координат углы $\lambda$, $\mu$, $\nu$. Тогда составляющие силы поля $dR$ будут:

$$d\alpha = \frac{i \sin \vartheta \, ds}{r^2} \cos \lambda,$$

$$d\beta = \frac{i \sin \vartheta \, ds}{r^2} \cos \mu,$$

$$d\gamma = \frac{i \sin \vartheta \, ds}{r^2} \cos \nu.$$



Если мы соединим конечные пункты элемента тока с точкой поля, то мы получим треугольник с основанием $r$ и высотою $ds \sin \vartheta$. Поэтому

$$r \, ds \sin \vartheta = 2 \Delta$$

представляет собою, двойную площадь этого треугольника. Мы можем, поэтому, также написать

$$d\alpha = \frac{i}{r^3} \cdot 2 \Delta \cos \lambda,$$

где $2 \Delta \cos \lambda$ — двойная площадь проекции треугольника на плоскость $yz$-ов. Назовем координаты точки поля — через $a$, $b$, $c$, координаты начальной точки данного элемента — через $x$, $y$, $z$; координаты конечной точки будут, поэтому, $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. Двойная площадь проекции треугольника на плоскость $yz$-ов будет, поэтому,

$$2 \Delta \cos \lambda = (b - y) \, dz - (c - z) \, dy,$$

и

$$d\alpha = \frac{i}{r^3} [(b - y) \, dz - (c - z) \, dy].$$

Путем перестановки букв мы найдем далее:

$$d\beta = \frac{i}{r^3} [(c - z) \, dx - (a - x) \, dz],$$

$$d\gamma = \frac{i}{r^3} [(a - x) \, dy - (b - y) \, dx].$$

Так как:

(8) $$r^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2,$$

то

$$\frac{b - y}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{1}{r} \right)$$

и т. д. Вышеприведенные уравнения примут, поэтому, вид:

$$d\alpha = -i\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right)dz + i\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right)dy$$

и т. д. Путем интегрирования мы получим

$$\alpha = -i\int\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right)dz + i\int\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right)dy =$$

$$= -i\frac{\partial}{\partial b}\int\frac{dz}{r} + i\frac{\partial}{\partial c}\int\frac{dy}{r}.$$

Введем теперь:

(9) $$i\int\frac{dx}{r} = A, \quad i\int\frac{dy}{r} = B, \quad i\int\frac{dz}{r} = C.$$

Тогда мы получим равенства

(10) $$\alpha = \frac{\partial B}{\partial c} - \frac{\partial C}{\partial b}, \ \beta = \frac{\partial C}{\partial a} - \frac{\partial A}{\partial c}, \ \gamma = \frac{\partial A}{\partial b} - \frac{\partial B}{\partial a}.$$

Если существует потенциал $V$, так что $\alpha = -\frac{\partial V}{\partial a}$ и т. д., то:

(11) $$\frac{\partial\beta}{\partial a} - \frac{\partial\alpha}{\partial b} = 0$$

и. д. Мы имеем теперь:

$$\frac{\partial\beta}{\partial a} - \frac{\partial\alpha}{\partial b} = \frac{\partial^2 C}{\partial a^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial a\,\partial c} - \frac{\partial^2 B}{\partial b\,\partial c} + \frac{\partial^2 C}{\partial b^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 C}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial c^2} - \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial B}{\partial b} + \frac{\partial C}{\partial c}\right)$$



Так как $C = i\int\frac{dz}{r}$, то сумма

$$\frac{\partial^2 C}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial c^2} = 0,$$

если данная точка поля не находится в самом токе, то

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial b^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial c^2}\left(\frac{1}{r}\right) = 0.$$

Сумма:

$$\frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial B}{\partial b} + \frac{\partial C}{\partial c} =$$

$$= i\int\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right)dx + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right)\partial y + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right)dz\right] =$$

$$= -i\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)dy + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)dz\right] =$$

$$= -i\int d\left(\frac{1}{r}\right) = i\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Равенство (11) будет иметь место только в том случае, если

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \text{константе}.$$

Из опыта известно, что всякий постоянный ток представляет собою замкнутый ток, для которого в виду совпадения начальной с конечной величины $r$,

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = 0.$$

Таким образом для постоянного тока осуществляется указанное выше условие и в этом случае всегда будет существовать определенный потенциал.

Если точка поля лежит в самом токе, то мы уже не можем больше рассматривать данный проводник как линейный. Сила тока будет тогда

$$i = q\,D,$$

где $D$ — плотность тока, $q$ — поперечное сечение проводника. Далее будет

$$C = i\int\frac{dz}{r} = \int\frac{Dq\,dz}{r} = \int\frac{Dq}{r}\cdot\frac{dz}{ds}\,ds.$$

Мы можем

$$D\frac{dz}{ds} = w$$

назвать составляющей плотности тока, параллельной оси $z$-ов. Точно так же, мы будем иметь составляющие плотности тока, параллельные оси $x$-ов и $y$-ов

$$u = D\frac{dx}{ds}, \quad v = D\frac{dy}{ds}.$$

Кроме того, элемент об'ема $qds$ может быть заменен через $dx\,dy\,dz$. В виду этого:

$$C = \iiint\frac{w}{r}\,dx\,dy\,dz.$$

Это выражение имеет форму потенциала для сил, которые действуют обратно пропорционально квадрату расстояния, и мы знаем (ч. III, § 38), что в таком случае:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial c^2} = -4\pi w.$$



Таким образом, для этого случая приведенные выше уравнения примут вид

$$\begin{aligned} 4\pi u &= \frac{\partial\beta}{\partial c} - \frac{\partial\gamma}{\partial b}, \\ 4\pi v &= \frac{\partial\gamma}{\partial a} - \frac{\partial\alpha}{\partial c}, \qquad (12) \\ 4\pi w &= \frac{\partial\alpha}{\partial b} - \frac{\partial\beta}{\partial a}. \end{aligned}$$

Эти уравнения определяют взаимоотношения между составляющими тока и составляющими магнитного поля.

Следует еще отметить, что выражения $A$, $B$, $C$ можно рассматривать как составляющие той величины, которая имеет название векторного потенциала.

## § 19. Замена замкнутого тока магнитной пластинкой.

Положим, что вокруг начальной точки $O$ системы координат, в плоскости $yz$-ов, проходит слабый замкнутый ток. Пусть его координаты будут $x$, $y$, $z$. Если координаты данной точки поля будут $a$, $b$, $c$, то

$$r^2 = a^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2,$$

так как $x = 0$. Пусть расстояние данной точки поля от начала $O$ координат будет $R$, причем

$$R^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Составим теперь выражения для $A$, $B$, $C$ по равенствам (9). Мы в этом случае имеем то преимущество, что мы можем по теореме Тайлора разложить $\frac{1}{r}$ в ряд, причем мы можем принять во внимание только первые члены ряда, так как, по нашему предположению, $y$ и $z$ очень малы. Мы будем иметь, поэтому,

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right)y+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right)z=$$

$$=\frac{1}{R}-\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{R}\right)y-\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{R}\right)z.$$

Всеми высшими членами этого ряда мы можем пренебречь. Отсюда следует:

$$A=i\int\frac{dx}{r}=0,$$

так как $x=0$; кроме того:

$$B=\frac{i}{R}\int dy-i\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{R}\right)\int y\,dy-i\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{R}\right)\int z\,dy.$$

Так как мы интегрировали по замкнутому току, то

$$\int dy=\int y\,dy=0;$$

но

$$\int z\,dy=-f,$$

если $f$ — плоскость, вокруг которой проходит ток, причем ток идущий по движению часовой стрелки (если его рассматривать со стороны положительного конца оси $x$-ов) мы будем считать положительным.

В виду этого мы имеем:

$$B=if\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{R}\right),\quad C=-if\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{R}\right),$$



причем $C$ получается точно так же как и $B$. Вставив теперь эти выражения в равенство (10), находим:

$$\alpha=\frac{\partial B}{\partial c}-\frac{\partial C}{\partial b}=if\left[\frac{\partial^2}{\partial c^2}\left(\frac{1}{R}\right)+\frac{\partial^2}{\partial b^2}\left(\frac{1}{R}\right)\right]=$$

$$=-if\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{1}{R}\right),$$

так как

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{1}{R}\right)+\frac{\partial^2}{\partial b^2}\left(\frac{1}{R}\right)+\frac{\partial^2}{\partial c^2}\left(\frac{1}{R}\right)=0.$$

Равным образом мы получим:

$$\beta=-if\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial b}\left(\frac{1}{R}\right),\quad \gamma=-if\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial c}\left(\frac{1}{R}\right).$$

Положим теперь, что

$$if\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{R}\right)=V,$$

тогда

$$\alpha=-\frac{\partial V}{\partial a},\quad \beta=-\frac{\partial V}{\partial b},\quad \gamma=-\frac{\partial V}{\partial c}.$$

Мы можем, поэтому, рассматривать $V$ как потенциал замкнутого тока. Но

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{a}{R^3},$$

а потому

$$V=-\frac{ifa}{R^3}.$$

Такую же формулу мы получим и для потенциала небольшого магнита (§ 3), находящегося на оси $x$-ов в начале координат $O$.

Мы предположили, что

$$-if=M.$$

Если, следовательно, мы заменим слабый замкнутый ток магнитной пластинкой с магнитным моментом $M = -if$, то мы будем иметь точно такое же магнитное поле. Отрицательный знак обусловливается диаметрально противоположным расположением полюсов. Если пластинка имеет толщину $\delta$ и поверхностную плотность $\sigma$, то не обращая внимания на знак, мы получим для магнитного момента следующее выражение:

$$\sigma \delta f = i f,$$

откуда:

$$i = \sigma \delta .$$

Это выражение может быть применено к любому замкнутому току, а именно мы можем, представить себе, что поверхность, вокруг которой проходит ток, разделена на очень большое количество маленьких участков. Все такие элементарные поверхности должны быть окружены током $i$, идущим в том же самом направлении. При этом внутри поверхности токи уничтожаются, так как по границе двух соседних элементов поверхности проходят два тока, имеющие противоположные направления. Остается, следовательно, только ток, проходящий по внешней границе поверхности. Все те элементарные поверхности, по которым проходит ток, мы можем заменить магнитными пластинками с поверхностной плотностью $\sigma$ и с толщиною $\delta$, которые должны быть подобраны так, чтобы $\sigma\delta = i$. При этом совершенно безразлично, какой вид мы придадим той поверхности, вокруг которой проходит ток.

## § 20. Действие на магнитный полюс магнитной пластинки, имеющей форму круга.

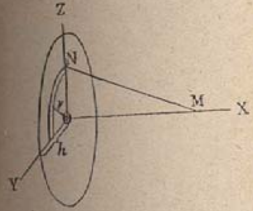
Представим себе диск (черт. 12) в плоскости $yz$-ов с центром в начале системы координат. Пусть его поверх-



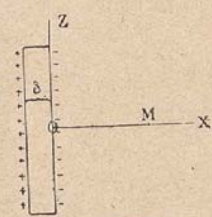
ностная плотность будет $\sigma$, а радиус $h$. Потенциал в точке $M$ оси $x$-ов будет (ч. III, § 40)

$$V = \int_0^h \frac{2\pi\sigma r\,dr}{\sqrt{x^2+r^2}} = \Big[2\pi\sigma\sqrt{x^2+r^2}\Big]_0^h =$$

$$= 2\pi\sigma(\sqrt{x^2+h^2} - x).$$




Черт. 12.




Черт. 13.

Применим теперь это выражение к магнитной пластинке толщиною в $\delta$; эту пластинку мы расположим так, чтобы своей отрицательной стороной она находилась бы в плоскости $yz$-ов (черт. 13), а положительной стороной — налево от этой плоскости. Потенциал правой стороны пластинки в точке $M$ будет:

$$V_- = -2\pi\sigma[\sqrt{h^2+x^2} - x],$$

потенциал левой стороны:

$$V_+ = 2\pi\sigma[\sqrt{h^2+(x+\delta)^2} - (x+\delta)],$$

и, следовательно, общий потенциал:

$$V = V_+ + V_- =$$

$$= 2\pi\sigma\left[\sqrt{h^2+(x+\delta)^2} - x - \delta - \sqrt{h^2+x^2} + x\right] =$$

$$= 2\pi\sigma\delta\left[\frac{\sqrt{h^2+(x+\delta)^2} - \sqrt{h^2+x^2}}{\delta} - 1\right].$$

Так как $\delta$ бесконечно мало, то мы можем рассматривать первую часть выражения, заключенного в скобки, как дифференциальное частное:

$$\frac{d\sqrt{h^2+x^2}}{dx} = \frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}.$$

Мы получим тогда

$$V = 2\pi\sigma\delta\left(\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} - 1\right).$$

Если мы примем, $\sigma\delta = i$, то получим потенциал кругового тока в точке $M$. Сила будет теперь

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi i\left[\frac{1}{\sqrt{h^2+x^2}} - \frac{x^2}{(h^2+x^2)^{3/2}}\right] =$$

$$= -\frac{2\pi i h^2}{(h^2+x^2)^{3/2}}.$$

Положим теперь $x = 0$, в таком случае:

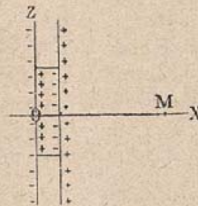
$$X = -\frac{dV}{dx} = -\frac{2\pi i}{h}.$$

Это именно та самая формула, которую мы уже нашли раньше для действия кругового тока на находящийся в его середине полюс (§ 17).



## § 21. Замена ограниченной магнитной пластинки бесконечной пластинкой. — Магнитная работа.

На основании § 20 сила, с которой действует на единицу массы бесконечная плоскость с поверхностной плотностью $\sigma$ не зависит от расстояния точки от плоскости и равна $2\pi\sigma$. Если, поэтому, мы имеем бесконечную плоскую магнитную пластинку покрытую магнитными слоями $+\sigma$ и $-\sigma$, то действие такой пластинки на одну точку магнитной массы равно нулю. Покроем эту пластинку другой пластинкой конечных размеров и имеющей ту же магнитную плотность. Вторую пластинку мы расположим на первой так, чтобы противоположные магнетизмы пластинок совпадали друг с другом (черт. 14). Действие такой магнитной системы на точку $M$ будет точно такое же, как и действие одной ограниченной пластинки, так как бесконечная пластинка не оказывает никакого действия. Сама же система представляет теперь бесконечную магнитную пластинку с дырой, имеющей величину и форму пластинки конечных размеров, так как при совмещении положительный и отрицательный магнетизм взаимно уничтожаются. Поэтому, магнитная пластинка конечных размеров может быть заменена бесконечной с дырой, причем эта последняя должна иметь форму, величину и поверхностную плотность $\sigma$ конечной пластинки, — если одновременно знак магнитных слоев, покрывающих поверхность будет изменен на обратный.



Черт. 14.

Благодаря этому мы можем заменить замкнутый ток магнитной пластинкой также и в том случае, если мы хотим знать действие на точку, которая находится на самой пластинке. В этом случае, достаточно заменить пластинку конечных размеров бесконечной пластинкой с дырой, в которой и должна быть помещена данная точка.

Пусть магнитная масса перемещается в магнитном поле; в таком случае магнитные силы должны совершать работу. Если магнитная масса описывает замкнутую траэкторию, то общая работа равна нулю, так как масса при этом опять приводится к начальному пункту ее потенциальной энергии (ч. III, § 49). Если мы разделим какую-нибудь замкнутую траэкторию на две части, то работа магнитных сил в одной части будет равна работе в другой части, но будет иметь противоположный знак.

Приведем теперь в непосредственную близость с положительной поверхностью нашей магнитной пластинки, которой мы заменили замкнутый ток, единицу магнитной массы и проведем эту массу через край пластинки до отрицательной стороны. При этом магнитные силы совершат ту же самую работу, как если бы мы прошли с единицей массы непосредственно сквозь пластинку от ее положительной к отрицательной стороне. Такую работу легко можно определить. Из положительной единицы поверхности будет исходить, в общем, $4\pi\sigma$ силовых линий. Благодаря симметрии $2\pi\sigma$ силовых линий будет направлено во внешнюю среду и столько же внутрь. Последнее будет иметь место у отрицательной стороны пластинки. Так как на этой стороне силовые линии должны считаться отрицательными, то они слагаются с положительными внутри пластинки и дают линейную плотность, или, что то же самое, силу $4\pi\sigma$, направленную от положительной к отрицательной поверхности. Расстояние между обоими поверх-



ностями будет $\delta$. Если, поэтому, мы переместим единицу магнитной массы от положительной к отрицательной стороне пластинки, то магнитные силы совершат работу $4\pi\sigma\delta$. Такую же работу они должны совершить и в том случае, если мы переместим единицу магнитной массы с одной стороны на другую через край пластинки.

## § 22. Соленоид.

Ряд параллельных, равных по величине и находящихся на одинаковом расстоянии друг от друга круговых токов, — подобно тому, как это мы имеем, приблизительно, в проволочной обмотке — называется **соленоидом**. Если мы хотим изучить действие соленоида на внешнюю точку, то нам нужно только заменить каждый оборот проволоки магнитной пластинкой, имеющей форму круга. Если на единицу длины приходится $n$ оборотов, то такая пластинка будет иметь плотность $\delta = \frac{1}{n}$ и поэтому, на основании § 19, поверхностная плотность будет:

$$\sigma = \frac{i}{\delta} = n\,i\,.$$

Так как внутри соленоида совпадающие положительный и отрицательный магнетизм взаимно уничтожаются, то соленоид будет действовать на внешнюю точку, как равной величины большой цилиндр, конечные грани которого покрыты магнитной массой $+ni$ и $-ni$.

Если мы хотим узнать действие на точку, находящуюся внутри соленоида, то согласно § 21, нам нужно только заменить каждый круговой ток бесконечной плоской магнитной пластинкой с дырой, имеющей форму круга. На той стороне, с которой ток представляется идущим по направлению часовой стрелки, — положительный слой должен быть равен $\sigma = ni$. В этом случае, опять взаимно уничтожаются все магнитные массы, за исключением тех, которые находятся на обоих конечных гранях. Если ось соленоида совпадает с осью $x$-ов системы координат, то при рассматривании справа, ток идет по направлению часовой стрелки. В таком случае бесконечные поверхности будут иметь направо положительный, а налево отрицательный магнетизм. Действие подобной бесконечной пластинки на точку, лежащую на оси соленоида, можно заменить бесконечной пластинкой без дыры, которая действует с силою $2\pi\sigma$, и диском, который совпадает с дырой и покрыт магнитной массой такой же плотности, но имеющей обратный знак.

Представим себе очень длинный соленоид; тогда можно пренебречь действием дисков на точку, находящуюся внутри соленоида, на одинаковом расстоянии от конечных граней. В таком случае у нас останутся только силы обоих бесконечных поверхностей. Эти последние будут стремиться двигать положительную единицу массы влево, каждая с силою $2\pi\sigma$. Таким образом сила соленоида будет

$$X = -4\pi\sigma = -4\pi n i.$$

Эта сила независима от положения точки, причем силовые линии должны итти параллельно оси $x$-ов. Соленоид является, поэтому, удобным средством, для того, чтобы получать однородное магнитное поле, сила которого прямо пропорциональна числу оборотов на единицу длины и силе тока.

## § 23. Закон Ома. — Работа тока. — Закон Джоуля.

Согласно § 15 мы получим постоянный электрический ток, если две точки проводника имеют постоянную разность потенциалов. Ом нашел, что сила тока $i$ пропорциональна разности потенциалов, называемой обыкновенно электровозбудительной силой. Кроме того, сила тока находится также в зависимости от формы и материала проводника. Ом выразил отношение силы тока к электровозбудительной силе формулой:



$$i = \frac{e}{w},$$

где постоянная $w$ называется сопротивлением. Работа, которую совершают электрические силы, если электрическая масса $m$ движется по некоторому пути от точки с потенциалом $V_1$ к точке с потенциалом $V_2$, будет $m(V_1 - V_2)$. Силой тока называется количество электричества, проходящее в секунду через проводник (§ 16). Работа электрических сил или, как говорят обыкновенно, работа тока в секунду, будет:

$$i(V_1 - V_2) = e i.$$

Произведение из силы тока на электровозбудительную силу представляет собою работу, приведенную к единице времени, т. е. так называемый, эффект.

Если ток не совершает никакой другой работы, то он имеет эквивалент в нагревании проводника, и количество тепла, даваемого током в одну секунду:

$$W = e i,$$

или, если мы, согласно закону Ома, положим $e = wi$,

$$W = w i^2.$$

В этой форме Джоуль и выразил найденный им закон теплового действия тока.

Если мы поставим на пути тока электролитическую ванну, то ток будет совершать химическую работу. Эта последняя, согласно опыту, пропорциональна силе тока. Весь эффект может, поэтому, быть представлен в виде:

$$e i = w i^2 + p i,$$

где $p$ — соответствующий коэффициент пропорциональности. Отсюда следует, что

$$e - p = w i.$$

Таким образом, $p$ измеряется теми же единицами, как и электровозбудительная сила. Величина $p$ называется электровозбудительным противодействием электролитической ванны или гальванической поляризацией.

Электрическая энергия $e i$ получается путем превращения энергии другого рода, так, напр., в гальванических элементах путем затраты химической энергии. Все эти случаи также подчиняются закону сохранения энергии.

## § 24. Действие магнитного поля на элемент тока.

Согласно § 16 и § 18 элемент тока образует в определенной точке магнитное поле

$$d R = \frac{i\, ds \sin \vartheta}{r^2}.$$

Если в этой точке находится магнитный полюс $m$, то элемент действует на него с силою

$$d K = \frac{m i\, ds \sin \vartheta}{r^2},$$



направление которой определяется по правилу Ампера (§ 15). С точно такою же силою действует магнитный полюс $m$ на элемент $ids$, но в противоположном направлении.

Мы можем представить дело таким образом, что элемент тока, находящийся в магнитном поле, испытывает действие силы. Сила магнитного поля, образуемого $m$, будет:

$$R = \frac{m}{r^2}.$$

В дальнейшем мы будем принимать, что элемент тока расположен перпендикулярно к магнитным силовым линиям, причем $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. В таком случае:

$$d K = R i\, ds.$$

Для направления силы мы имеем следующее правило: представим себе что мы плывем вдоль тока и смотрим по направлению силовых линий; ток будет отклоняться в левую сторону. Направления элемента тока, магнитных силовых линий и действие силы на элемент тока — взаимно перпендикулярны.

Если элемент тока проходит в направлении электровозбудительной силы путь $dl$, то ток совершает работу

$$R i\, ds\, dl = R i\, df = i\, dN.$$

При этом

$$df = ds\, dl$$

представляет собою поверхность, пройденную элементом тока, а

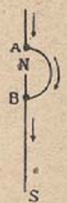
$$dN = R\, df$$

—число силовых линий, пересеченных элементом. Работа тока равна, следов., произведению из силы тока на число пересечённых силовых линий. Это положение справедливо вообще, вне зависимости от направления тока по отношению к силовым линиям.

С другой стороны, произведенная работа равна уменьшению потенциальной энергии системы, так что изменение потенциальной энергии системы равно произведению числа пересеченных им силовых линий и силы тока. Потенциальная энергия относится всегда к системе ток—магнитное поле. Часто говорят о потенциале тока в магнитном полюсе или о потенциале магнитного полюса под током. Это одно и то же и означает всегда потенциальную энергию, которую имеет система ток—магнитный полюс.

## § 25. Маятник Фарадея.

Проводник $AB$ (черт. 15), имеющий форму полукруга, может свободно вращаться вокруг точек $A$ и $B$. Пусть $NS$ — магнитный стержень, свободная северная магнитная масса $+m$ которого сосредоточена в $N$, а южная магнитная масса $-m$ в $S$. Положим, что $S$ настолько удалена от $AB$, что мы можем пренебречь ее магнитным полем внутри $AB$. От $N$, как центра полукруга $AB$, исходит $4\pi m$ силовых линий (ч. III, § 48), которые все пересекаются полукругом при его одном полном обороте вокруг точек $A$ и $B$. На основании изложенного выше, ток производит работу $4\pi mi$.



Черт. 15.

Предположим теперь, что дуга $AB$ вращается с постоянною угловою скоростью $\omega$, причем количество оборотов в секунду будет $\frac{\omega}{2\pi}$ и ток производит в секунду работу:

$$4\pi mi\frac{\omega}{2\pi} = 2mi\omega.$$



Для произведенной работы, согласно § 23, имеет место равенство

$$ei = wi^2 + 2mi\omega$$

или

$$(13)\qquad e = wi + 2m\omega.$$

В выражении

$$e - 2m\omega = wi$$

$2m\omega$ представляет собою противоэлектродвижущую силу, или электровозбудительное противодействие.

Рассмотренное здесь явление движения воспроизведено в одном из различных вращательных аппаратов Фарадея, называемом, обыкновенно, маятником Фарадея.

## § 26. Индукционный ток.

Равенство (13) предыдущего параграфа остается, как показывает опыт, справедливым, если первоначально не было в наличности никакой электродвижущей силы, причем $e = 0$, и если, путем какого-нибудь механического момента вращения, мы сообщили проводнику некоторую угловую скорость $\omega$. В таком случае:

$$i = -\frac{2m\omega}{w}$$

и в первоначально лишенном тока проводнике будет проходить ток, который называется индукционным.

Вообще, мы можем сказать следующее: всякий раз, как замкнутый проводник пересекает магнитные силовые линии, в нем индуктируется ток, направление которого определяется правилом Ленца. Это правило следующее: если проводник, через который проходит ток, находится в магнитном поле, то появляющиеся силы стремятся придать ему определенное направление Если проводник, лишенный тока, приводится в движение механической силою, то в нем появляется индукционный ток, направленный обратно первоначальному току.

Индукционные токи изменяются, в общем, с течением времени. В уравнении работы (§ 23) мы это можем учесть, взяв такое уравнение для бесконечно малого времени $dt$ и представив его в форме:

$$ei\,dt = wi^2\,dt + dA,$$

где $dA$ — произведенная в течение $dt$ работа тока.

По закону сохранения энергии

$$dA + dP = 0,$$

если под $P$ мы будем подразумевать величину работы или потенциальную энергию системы. Отнесенное к индукционному току, $dA$ а также $dP$ всегда пропорционально имеющейся в наличности силе тока $i$. Мы можем, поэтому, написать:

$$P = iV$$

и получим, таким образом, уравнение

$$ei\,dt = wi^2\,dt - i\,dV$$

или

$$e + \frac{dV}{dt} = wi,$$

где $\frac{dV}{dt}$ число силовых линий магнитного поля, пересекаемых проводником тока в единицу времени. Таким образом, $V$ можно рассматривать как число магнитных силовых



линий, которое окружает ток, причем $\frac{dV}{dt}$ есть не что иное, как электродвижущая сила, производимая изменением взаимного положения тока и магнита. Если в нашем проводнике первоначально не было никакой электродвижущей силы, то в равенстве (13) $e = 0$ и

$$\frac{dV}{dt} = wi.$$

Интегрируя это выражение, находим:

$$V_1 - V_0 = w\int_0^t i\,dt.$$

Это выражение применимо ко всем случаям индукции, все равно получена ли она от движущихся магнитов, или от проводников.

### § 27. Баллистический гальванометр.

Интеграл тока по времени $\int_0^t i\,dt$ для кратковременных индукционных токов измеряется гальванометрами, имеющими незначительное затухание и большую продолжительность колебаний, а именно, так наз., баллистическими гальванометрами. На магнитную стрелку, имеющую магнитный момент $M$, действуют земной магнетизм и ток. Первый дает момент вращения $-HM\sin\varphi$, если $H$—горизонтальная слагающая (§§ 2 и 4); ток производит момент $GMi\cos\varphi$, где $G$ — постоянная гальванометра. Угол вращения $\varphi$ дается уравнением:

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -HM\sin\varphi + GMi\cos\varphi,$$

причем $K$ — момент инерции стрелки (ч. I, § 28).

Положим, индукционный ток настолько непродолжителен, что стрелка в течение этого времени почти не изменяет своего положения равновесия. В таком случае мы можем допустить, что $\varphi = 0$, и выведенное уравнение принимает вид:

$$K \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = G M i .$$

Путем интегрирования мы получим:

$$K \left[\frac{d\varphi}{d t}\right]_0^T = G M \int_0^T i\, d t .$$

Для времени $t = 0$ скорость стрелки также равна нулю; в таком случае $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = 0$. Напротив, по истечении времени $T$, после которого ток прекращается, стрелка должна иметь угловую скорость $\left(\frac{d\varphi}{d t}\right)_T = \alpha$. Поэтому:

$$K \alpha = G M \int_0^T i\, d t .$$

Если размахи стрелки невелики, то для ее движения, после прохождения индукционного тока, будет иметь место уравнение:

$$K \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = - M H \varphi .$$

С этим уравнением можно поступать точно так же, как с уравнением маятника (ч. I. § 9). Следовательно, в качестве решения мы получим:

$$\varphi = A \sin \gamma t ,$$



откуда

$$\frac{d\varphi}{d t} = A \gamma \cos \gamma t .$$

При этом

$$\gamma = \frac{2 \pi}{\tau} = \sqrt{\frac{M H}{K}} .$$

Для $t = 0$ $\frac{d\varphi}{d t} = \alpha$, а следовательно:

$$\alpha = \gamma A$$

и

$$\varphi = \frac{\alpha}{\gamma} \sin \gamma t .$$

Таким образом, самое большое отклонение стрелки будет:

$$\varphi_1 = \frac{1}{\gamma} \frac{G M}{K} \int_0^T i\, d t .$$

Эти выражения дают все величины, необходимые для вычисления интеграла $\int_0^T i\, d t$.

## § 28. Земной индуктор. — Абсолютное сопротивление.

Земной индуктор состоит из имеющей форму круга проволочной катушки, которая может вращаться вокруг диаметра. Во время вращения катушки магнитное поле земли будет индуктировать токи, которые при быстром и кратковременном вращении мы можем измерить по методу, указанному в предыдущем параграфе. Положим $R$ — интенсивность однородного магнитного поля, $f$ — поверхность имеющего форму круга проводника тока, $\alpha$ — угол между направлением силовых линий магнитного поля и нормалями к пути тока. В таком случае, ток окружит $fR\cos\alpha$ силовых линий. Мы можем, поэтому, принять что (§ 26)

$$V = fR\ \cos\alpha .$$

Эту формулу можно применить к земному индуктору. Пусть этот последний может вращаться вокруг вертикальной оси. Положим поверхность индуктора будет $F$ и $\psi$ — угол, который образует нормаль к поверхности $F$ с направлением горизонтальной слагающей $H$. В таком случае:

$$V = F H \cos\psi ,$$

следовательно:

$$\frac{dV}{dt} = wi = -F H \sin\psi \frac{d\psi}{dt},$$

где $w$ — сопротивление индукционной катушки. Это равенство дает после интегрирования:

$$V_1 - V_0 = w\int i\,dt = F H (\cos\psi_1 - \cos\psi_0) .$$

Выберем теперь $\psi_1$ и $\psi_0$ так, чтобы индуктор делал половину оборота и чтобы в начале и в конце движения плоскость индуктора была расположена перпендикулярно к магнитному меридиану. В таком случае $\psi_1 = 0$ и $\psi_0 = \pi$, а следовательно, $\cos\psi_1 - \cos\psi_0 = 2$ и

$$w\int i\,dt = 2 F H .$$

Если мы расположим ось вращения индуктора горизонтально, то получим подобным же способом:

$$w\int i'\,dt = 2 F V' ,$$



где $V'$ — вертикальная составляющая всего магнитного напряжения. Мы найдем теперь при помощи баллистического гальванометра отклонения, пропорциональные значениям $\int i dt$ и $\int i' dt$. Пусть эти отклонения будут $\varphi_1$ и $\varphi_2$. В таком случае:

$$2 F H = C\varphi_1, \quad 2 F V' = C\varphi_2$$

и

$$\frac{V'}{H} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = tg\, J' ,$$

если $J'$ мы обозначим наклонение (§ 2).

На основании изложенного в предыдущих параграфах наибольшее отклонение баллистического гальванометра

$$\varphi_1 = \frac{G M}{\gamma K}\int i\,dt = \frac{2\pi G}{H\tau}\int i\,dt ,$$

так как

$$\gamma = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{H M}{K}} .$$

Мы будем иметь, следовательно:

$$\int i\,dt = \frac{H\tau}{2\pi G}\varphi_1 .$$

Кроме того:

$$\int i\,dt = \frac{2 F H}{w} ,$$

а следовательно:

$$\frac{2 F H}{w} = \frac{H\tau}{2\pi G}\varphi_1 ,$$

$$w = \frac{4\pi F G}{\varphi_1 \tau} .$$

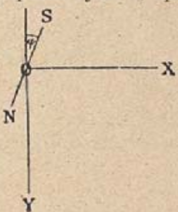
Все величины, находящиеся в правой части этой формулы, мы можем определить в абсолютных мерах. Таким образом, мы получаем возможность выражать электрическое сопротивление проводника в абсолютных мерах.

### § 29. Затухание гальванометра.

Движение магнитной стрелки представляет собою вращение вокруг ее точки подвеса. Следовательно, момент инерции стрелки $K$, умноженный на угловое ускорение $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, должен быть равен сумме всех моментов вращения (ч I, § 28). Земной магнетизм вызывает в магнитной стрелке момент вращения $-HM\sin\varphi$ (§ 2). Допустим, что магнитная стрелка будет подвешена в середине кольцеобразного замкнутого проводника. Для системы, состоящей из такого проводника с током и магнитной стрелки, мы нашли потенциальную энергию (§§ 20 и 24)

$$U = 2\pi i\left(\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} - 1\right).$$

Положим, расстояние обоих полюсов $+m$ и $-m$ данной стрелки будет $\lambda$, причем оно будет настолько мало, что мы можем принять действие тока на полюс таким же, как в том случае, если бы оба полюса лежали на оси $x$-ов (черт. 16). Ось $y$-ов имеет направление магнитного меридиана. Для южного полюса $S$ абсцисса будет:



Черт. 16.

$$x = \frac{\lambda}{2}\sin\varphi,$$



а для северного полюса:

$$x = -\frac{\lambda}{2}\sin\varphi.$$

Потенциал тока по отношению к магниту составится из потенциала $U_+$ в северном полюсе и $U_-$ в южном полюсе. На основании изложенного выше, мы получаем:

$$U_+ = 2\pi i\left(\frac{-\frac{\lambda}{2}\sin\varphi}{h} - 1\right)m,$$

$$U_- = 2\pi i\left(\frac{\frac{\lambda}{2}\sin\varphi}{h} - 1\right)\cdot - m,$$

следовательно

$$W = U_+ + U_- = -\frac{2\pi i M}{h}\sin\varphi,$$

так как

$$m\lambda = M$$

представляет собою магнитный момент стрелки.

Работа тока $dA$ при повороте стрелки на угол $d\varphi$ будет:

$$dA = D\,d\varphi,$$

если $D$—момент вращения пары сил (ч. I § 28). По закону сохранения энергии:

$$dA = -dW,$$

а поэтому:

$$D = \frac{dA}{d\varphi} = -\frac{dW}{d\varphi} = \frac{2\pi i M}{h}\cos\varphi.$$

Это мы могли бы найти также непосредственно из выражения для силы кругового тока, действующей на магнитный полюс, находящийся в ее центре (§ 17). Величина силы будет $\frac{2\pi m i}{h}$. Силы, действующие на северный и южный полюс образуют момент вращения:

$$D = \frac{2\pi m i}{h} \lambda \cos\varphi = \frac{2\pi i M}{h} \cos\varphi .$$

Таким образом, для уравнения движения мы получим:

$$K \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -H M \sin\varphi + \frac{2\pi i M}{h} \cos\varphi . \tag{14}$$

Положим $W = Vi$, тогда:

$$V = -\frac{2\pi M}{h} \sin\varphi ,$$

в таком случае для проводника, в котором помимо этого не действует никакая электрическая сила (§ 26), будет иметь место равенство:

$$O = w i - \frac{dV}{dt} = w i + \frac{2\pi M}{h} \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} .$$

Отсюда следует:

$$i = -\frac{2\pi M}{h w} \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} .$$

Введем это значение в уравнение (14); тогда мы получим:

$$K \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -H M \sin\varphi - \frac{4\pi^2 M^2}{h^2 w} \cos^2\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} .$$



Легко показать, что также и в этом случае $V$ есть не что иное, как число магнитных силовых линий, которые окружают проводник. Пусть в точке $M$ (черт. 12) находится магнитный полюс $m$. Из этого полюса исходит $4\pi m$ силовых линий. Опишем вокруг $M$ сферу радиуса $p$. Плоскость $yz$ отрезает сегмент, поверхность которого равна $2\pi p^2 (1 - \cos\alpha)$, если под $\alpha$ мы будем подразумевать угол, который образует с $OM$ луч, идущий от $M$ к периферии сегмента. Далее:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} .$$

Так как через единицу поверхности шара проходит

$$\frac{4\pi m}{4\pi p^2} = \frac{m}{p^2}$$

силовых линий, то через весь сегмент проходит:

$$2\pi m (1 - \cos\alpha) = 2\pi m \left(1 - \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}\right) .$$

Эту величину мы должны, однако, считать отрицательной, так как мы условились принимать за положительные те силовые линии, которые проходят плоскость $yz$-ов слева направо.

Мы предполагаем, что углы отклонения $\varphi$ стрелки могут быть только очень малыми. В виду этого, мы можем принять, что $\sin\varphi = \varphi$, $\cos\varphi = 1$, и

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{HM}{K} \varphi - \frac{4\pi^2 M^2}{h^2 w K} \cdot \frac{d\varphi}{dt} .$$

Это выражение представляет собою уравнение затухающего колебательного движения, совершаемого, например, маятником в сопротивляющейся среде (ч. I, § 10). Так как величины $H$, $M$, $K$ — могут быть найдены по известным методам, то мы получаем возможность по уменьшению размаха колебания, определять в абсолютных мерах сопротивление $w$ данного проводника.

## § 30. Экстра-ток.

Замкнутый ток мы всегда можем заменить магнитной пластинкой (§ 19). Отсюда вытекает, что число магнитных силовых линий, которые окружены проводником, пропорционально силе тока. Эта последняя и число силовых линий должны изменяться в одном и том же отношении. Такое соотношение мы можем также представить себе, предположив, что проводник при изменении силы тока пересекается силовыми линиями. Но в этом случае должна появиться электродвижущая сила, которую можно определить совершенно аналогично тому, как это мы видели в § 26. Согласно уравнению (13) должно иметь место равенство:

$$e + \frac{dV}{dt} = w\,i.$$

Если ток усиливается, то он совершает магнитную работу, причем магнетизм окружающего пространства усиливается. Вызванная электродвижущая сила должна, следовательно, быть противодействием. Мы можем, следовательно, допустить, что

$$V = -Li,$$

где $L$ определяется исключительно формой проводника и природой окружающей среды, т. е. $L$ — постоянная величина, поскольку проводник и окружающие его тела находятся в относительном покое.



Так как величина $L$ зависит не только от формы пути, по которому проходит ток, но также и от окружающей среды, то, обыкновенно, эта величина может быть определена математически только с большим трудом; а в большинстве случаев она совершенно не поддается математическому определению. Существует однако возможность определить ее опытным путем с помощью приведенного выше уравнения.

Так как в последующем изложении мы будем пользоваться основанием натуральных логарифмов $l$, то, чтобы избежать недоразумений, будем обозначать электродвижущую силу через $E$. Вышеприведенное уравнение примет тогда вид:

$$E = w\,i + L\frac{di}{dt}.$$

В качестве решения этого уравнения мы получим:

$$i = A + Be^{\alpha t}, \tag{15}$$

если под $A$, $B$ и $\alpha$ мы будем подразумевать постоянные величины. Мы найдем тогда

$$E = w\,A + w\,Be^{\alpha t} + LB\alpha e^{\alpha t}.$$

Представим себе, напр., что мы имеем постоянный гальванический элемент с электродвижущей силой $E$, то $E$ в таком случае независимо от времени. На основании выведенного уравнения это возможно только в том случае, если

$$wB + LB\alpha = 0,$$

откуда следует, что

$$\alpha = -\frac{w}{L}.$$

Кроме того, $E = wA$ или $A = \frac{E}{w}$. Поэтому, согласно уравнению (15), сила тока:

$$i = \frac{E}{w} + Be^{-\frac{w}{L}t}.$$

Замкнем теперь ток в определенный момент $t = 0$. При $t = 0$ также и $i = 0$, а следовательно: $\frac{E}{w} + B = 0$, т. е. $B = -\frac{E}{w}$. Откуда следует, что

$$i = \frac{E}{w}\left(1 - e^{-\frac{w}{L}t}\right).$$

В тот момент, когда мы замыкаем ток, сила тока равна нулю, причем она затем возрастает вместе с временем. Так как $\frac{w}{L}$ почти всегда является очень большим числом, причем член $e^{-\frac{w}{L}t}$ делается быстро равным нулю, то увеличение силы тока происходит очень быстро.. В таком случае ток будет постоянным $i = \frac{E}{w}$. Поэтому, при замыкании тока мы будем иметь встречный ток $-\frac{E}{w}e^{-\frac{w}{L}t}$, который мы называем экстра-током.

Если мы разомкнем теперь ток, то непосредственно после прекращения тока не будет больше в наличности электровозбудительной силы. Следовательно:

$$0 = wi + L\frac{di}{di}.$$



Мы будем иметь теперь в качестве решения:

$$i = Be^{-\frac{w}{L}t}.$$

При $t = 0$, $i = \frac{E}{w}$ и $B = \frac{E}{w}$. Следовательно:

$$i = \frac{E}{w}e^{-\frac{w}{L}t}.$$

Таким образом, при размыкании тока мы также получаем экстра-ток, который имеет одинаковое направление с первоначальным током.

При размыкании мы имеем в проводнике полную силу тока, при замыкании она равна нулю. Мы получим, поэтому, при размыкании интенсивную электрическую искру, при замыкании, наоборот, только очень слабую. Величина $L$ называется коэффициентом самоиндукции.

## § 31. Переменный ток.

Предположим, что электровозбудительная сила $E$ есть периодическая функция времени. В таком случае в проводнике появляется ток, который называется переменным. Положим, например:

$$E = E_0 \sin \alpha t.$$

В качестве решения уравнения

$$E = wi + L\frac{di}{dt}$$

мы будем иметь:

$$i = i_0 \sin \alpha (t - \delta) = i_0 \sin \alpha t \cos \alpha \delta - i_0 \cos \alpha t \sin \alpha \delta,$$

$$\frac{di}{dt} = i_0 \alpha \cos \alpha (t - \delta) = i_0 \alpha \cos \alpha t \cos \alpha \delta + i_0 \alpha \sin \alpha t \sin \alpha \delta.$$

Если мы подставим эти значения в приведенное выше уравнение, то получим после сокращения:

$$E_0 - w i_0 \cos\alpha\delta - L i_0 \sin\alpha\delta) \sin\alpha t -$$

$$- (L i_0 \alpha \cos\alpha\delta - w i_0 \sin\alpha\delta) \cos\alpha t = 0.$$

Это уравнение будет справедливо для всякого значения $\alpha t$ только в том случае, если каждое из выражений, заключенных в скобки, равно нулю. Мы получим, поэтому,

$$E_0 = w i_0 \cos\alpha\delta + L i_0 \alpha \sin\alpha\delta$$

и

$$L i_0 \alpha \cos\alpha\delta = w i_0 \sin\alpha\delta.$$

Из последнего уравнения можно вычислить $\delta$ и вслед затем из предпоследнего $i_0$. Мы легко найдем, что

$$\sin\alpha\delta = \frac{L\alpha}{w}\cos\alpha\delta,$$

$$\sin^2\alpha\delta = \frac{L^2\alpha^2}{w^2}(1 - \sin^2\alpha\delta),$$

откуда следует, что

$$\sin\alpha\delta = \frac{L\alpha}{\sqrt{w^2 + L^2\alpha^2}}.$$

Аналогично мы получим:

$$\cos\alpha\delta = \frac{w}{\sqrt{w^2 + L^2\alpha^2}}.$$

Из уравнения для $E_0$ мы найдем теперь

$$i_0 = \frac{E_0}{w\cos\alpha\delta + L\alpha\sin\alpha\delta}$$



или, после подстановки значений $\sin\alpha\delta$ и $\cos\alpha\delta$,

$$i_0 = \frac{E_0}{\sqrt{w^2 + L^2\alpha^2}}$$

и наконец

$$i = \frac{E_0}{\sqrt{w^2 + L^2\alpha^2}} \sin\alpha(t - \delta).$$

Ток имеет, следовательно, изменение фазы $\delta$ (ч. II, §§ 8 и 9), и он слабее, чем это следовало бы по закону Ома. $L\alpha$ измеряется единицами сопротивления (§ 38). Эту величину называют индуктивным сопротивлением или „индуктансом". Величина $\sqrt{w^2 + L^2\alpha^2}$ имеет название „кажущегося сопротивления" или „импеданса".

Если $L\alpha$ делается исчезающе малой величиной, то переменный ток следует закону Ома. Это будет иметь место при очень малой самоиндукции или при соответственно малом числе колебаний.

## § 32. Теорема Стокса — *rot, curl.*

В последующем нам необходимо будет пользоваться уравнением, найденным Стоксом:

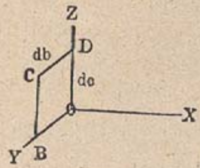
$$\int\left(X\frac{da}{ds} + Y\frac{db}{ds} + Z\frac{dc}{ds}\right)ds = \iint\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial c}\right)\cos\alpha + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial X}{\partial c} - \frac{\partial Z}{\partial a}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial a} - \frac{\partial X}{\partial b}\right)\cos\gamma\right]dS.$$

Составляющие $X$, $Y$, $Z$ векторной величины $K$ являются функциями координат $a$, $b$, $c$ поверхности, ограниченной кривой $s$, в то время как $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — углы, которые образует нормаль к элементу поверхности с тремя осями. Докажем это положение с помощью механики. $X, Y, Z$ представляют собою составляющие силы, действующие на данную точку. Если точка описывает замкнутую кривую, то работа, которую совершают при этом силы,

$$\int K \cos \vartheta \, ds = \int (X\,da + Y\,db + Z\,dc).$$

Составим сначала формулу для работы, которую совершают силы, если точка движется по периферии малого четыреугольника $OBCD$ в плоскости $yz$-ов (черт. 17). В некоторой точке, имеющей ординату $b$, бесконечно-малого отрезка $OB = db$ сила $Y = Y_0 + \frac{\partial Y}{\partial b} b$, если в начале координат она имеет величину $BC = Y_0$. На отрезке $BC = dc$ мы будем иметь по аналогии $Z = Z'_0 + \frac{\partial Z}{\partial c} c$. Но силу $Z'_0$ в точке $B$ можно также представить в виде $Z'_0 = Z_0 + \frac{\partial Z}{\partial b} db$; следов. $Z = Z_0 + \frac{\partial Z}{\partial b} db + \frac{\partial Z}{\partial c} c$, причем совершенно безразлично вводим ли мы $\frac{\partial Z}{\partial c}$, принадлежащий отрезку $BC$ или отрезку $OD$, так как в виду того, что $c$ бесконечно мало, мы пренебрегаем только бесконечно-малой величиной высшего порядка. Подобным образом, мы найдем, что на отрезке между $D$ и $C$ действует сила $Y = Y_0 + \frac{\partial Y}{\partial c} dc + \frac{\partial Y}{\partial b} b$, а на отрезке $OD$—сила $Z_0 + \frac{\partial Z}{\partial c} c$. Если



Черт. 17.



точка описывает путь $OBCDO$, то силы приложенные в ней совершают работу:

$$dA = \int_0^{db} \left(Y_0 + \frac{\partial Y}{\partial b} b\right) db + \int_0^{dc} \left(Z_0 + \frac{\partial Z}{\partial b} db + \frac{\partial Z}{\partial c} c\right) dc -$$
$$- \int_0^{db} \left(Y_0 + \frac{\partial Y}{\partial c} dc + \frac{\partial Y}{\partial b} b\right) db - \int_0^{dc} \left(Z_0 + \frac{\partial Z}{\partial c} c\right) dc.$$

Простое вычисление интегралов дает в результате

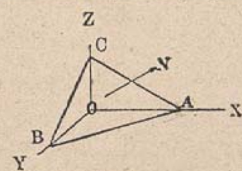
$$dA = \left(\frac{\partial Z}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial c}\right) db\,dc = \left(\frac{\partial Z}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial c}\right) dS_x = F \cdot dS_x.$$

Аналогично мы получаем:

$$G \cdot dS_y = \left(\frac{\partial X}{\partial c} - \frac{\partial Z}{\partial a}\right) dS_y,$$

$$H \cdot dS_z = \left(\frac{\partial Y}{\partial a} - \frac{\partial X}{\partial b}\right) dS_z,$$

если мы будем подразумевать под $dS_x$, $dS_y$, $dS_z$ элементы поверхности, расположенные соответственно перпендикулярно к осям $x$-ов, $y$-ов и $z$-ов, в то время как $F$, $G$, $H$—работы, необходимые для ограничения единицы поверхности плоскости, которая расположена перпендикулярно к соответственным осям $x$-ов, $y$-ов или $z$-ов.



Черт. 18.

Пусть теперь $OABC$ (черт. 18) будет элементом тетраэдра, и пусть точка двигается поочередно по сторонам треугольников $OAB$, $OBC$, $OCA$. В таком случае, она опишет отрезки $OA$, $OB$ и $OC$ два раза, причем каждый раз направление движения точки будет меняться на противоположное. Работа, совершенная при этом будет равна нулю, так что остается только работа, происшедшая от движения по периферии треугольника $ABC$, которая может быть выражена следующим образом:

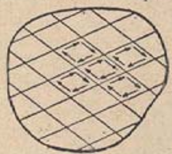
$$F\,dS_x + G\,dS_y + H\,dS_z =$$
$$= F\,dS\cos\alpha + G\,dS\cos\beta + H\,dS\cos\gamma =$$
$$= (F\cos\alpha + G\cos\beta + H\cos\gamma)\,dS = J\,dS,$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$—углы, которые образует нормаль $N$ к поверхности $ABC$ с осями координат.

$$J = F\cos\alpha + G\cos\beta + H\cos\gamma$$

выражает работу, совершаемую при прохождении периферии единицы поверхности $ABC = dS$.

Пусть замкнутая кривая будет одновременно ограничивающей кривой некоторой плоскости (черт. 19), которую представим себе разложенной на ее элементы. Пусть точка описывает в одном и том же направлении каждый элемент. В таком случае точка проходит каждую из пограничных линий внутреннего плоскостного элемента два раза в двух противоположных направлениях, так что общая работа, произведенная при этом, равна нулю. Остается, поэтому, только работа, которая совершается при прохождении внешней кривой. Эта работа будет:



Черт. 19.

$$\iint J\,dS = \iint (F\cos\alpha + G\cos\beta + H\cos\gamma)\,dS =$$
$$= \int (X\,da + Y\,db + Z\,dc),$$



и на основании предыдущего мы можем преобразовать это равенство в:

$$\int (X\,da + Y\,db + Z\,dc) = \iint\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial c}\right)\cos\alpha + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial X}{\partial c} - \frac{\partial Z}{\partial a}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial a} - \frac{\partial X}{\partial b}\right)\cos\gamma\right] dS.$$

Это и есть формула Стокса, которую мы, таким образом, доказали. При помощи принятых нами обозначений мы можем выразить это уравнение в более простой форме, а именно:

$$\int K\cos\vartheta\,ds = \iint J\,dS.$$

Величина $J$ вместе с своими составляющими $F$, $G$, $H$ есть функция составляющих $X$, $Y$, $Z$ величины $K$ и, следовательно, в конце концов, функция этой величины $K$. В виду этого, функция $J$ называется *rot* $K$ (от слова *Rotation*) или *curl* $K$ (английское слово *curl* означает: „локон" и „букля").

## § 33. Различие между замкнутым током и магнитной пластинкой. — Магнитная работа при прохождении тока по периферии.

Ту же самую работу, которую производят магнитные силы, если единица массы движется от положительной к отрицательной стороне магнитной пластинки, производят также магнитные силы замкнутого тока. Однако, в то время как при прохождении пластинки работа совершенно уничтожается, это не имеет места в магнитном поле проводника. Мы должны именно принять во внимание, что замкнутый ток только в том случае может быть заменен магнитной пластинкой, если мы примем в соображение пространство вне пластинки. Если мы сообразно с этим, проведем магнитную единицу массы один раз вокруг проводника тока, то магнитные силы тока произведут при этом работу $4\pi\sigma\delta$. Так как в этом случае мы можем допустить: $\sigma\delta = i$ (§ 19), то работа при одном обходе током периферии будет всегда равна $4\pi i$. Само собою разумеется, обход периферии должен быть сделан током в том направлении, в котором силовые линии окружают проводник. Если мы представим себе, что ток идет нам навстречу, и мы смотрим на магнитные силовые линии, то эти последние будут окружать ток в направлении противоположном часовой стрелке. Форма замкнутого пути, по которому мы проводим вокруг тока магнитную единицу массы, является в силу предыдущего, разумеется, совершенно безразличной.

Назовем силу магнитного поля через $R$; тогда на основании § 23 работа тока при одном обходе периферии будет:

$$\int R \cos\vartheta\, ds = \iint rot\, R \cdot dS\,.$$

Для нашего специального случая получается, следовательно, равенство

$$-4\pi i = \iint rot\, R \cdot dS\,.$$

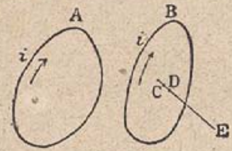
Мы вводим отрицательный знак, так как мы считаем ток положительным, если он идет нам навстречу, а обход периферии принимаем положительным, если он совершается в направлении часовой стрелки.

### § 34. Действие электрических токов друг на друга. — Электродинамический потенциал.

Два замкнутые тока $A$ и $B$ (черт. 20) мы можем рассматривать как две магнитные пластинки (§ 19). Ток $A$ образует



магнитное поле, а ток $B$ окружает определенное число исходящих от $A$ силовых линий. Пусть интенсивность тока $A$ будет $i$, а $B$ — $i'$. Потенциальная энергия системы будет, поэтому $i'N$ (§ 26), если $N$ есть число окруженных проводником $B$ силовых линий. $N$ мы можем представить следующим образом. Рассмотрим в какой-нибудь точке



Черт. 20.

пластинки $B$ поверхностный элемент $dS'$. Если исходящая от $A$ составляющая магнитных сил, проходящая через элемент $dS'$ и имеющая, перпендикулярное к нему направление, равна $R_n$, то $R_n dS'$ будет представлять собою число проходящих через $dS'$ силовых линий. В виду этого:

$$N = \iint R_n\, dS'$$

и потенциальная энергия системы

$$W = i' \iint R_n\, dS'\,,$$

причем этот двойной интеграл дает значения для всей поверхности пластинки $B$. Если мы введем $X$, $Y$, $Z$ как составляющие $R_n$, то мы можем также написать:

$$W = i' \iint (X \cos\alpha + Y \cos\beta + Z \cos\gamma)\, dS'\,,$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$—углы, которые составляет $R_n$ с соответствующими осями.

На основании § 18 мы имеем:

$$X = i\left[\frac{\partial}{\partial c}\int\frac{dy}{r} - \frac{\partial}{\partial b}\int\frac{dz}{r}\right],$$

$$Y = i\left[\frac{\partial}{\partial a}\int\frac{dz}{r} - \frac{\partial}{\partial c}\int\frac{dx}{r}\right],$$

$$Z = i\left[\frac{\partial}{\partial b}\int\frac{dx}{r} - \frac{\partial}{\partial a}\int\frac{dy}{r}\right],$$

и в конце концов получаем:

$$W = -ii'\iiint\left\{\left[\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dz}{ds} - \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dy}{ds}\right]\cos\alpha + \right.$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dx}{ds} - \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dz}{ds}\right]\cos\beta +$$

$$\left.+\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dy}{ds} - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dx}{ds}\right]\cos\gamma\right\} ds\, dS'.$$

Кроме того, на основании теоремы Стокса (§ 32) мы можем преобразовать это равенство в:

$$W = -ii'\iint\frac{1}{r}\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{da}{ds'} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{db}{ds'} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{dc}{ds'}\right) ds\, ds'.$$

Если мы будем подразумевать под $\varepsilon$ угол, который образуют друг с другом $ds$ и $ds'$, то мы получим в конце концов, равенство:

$$W = -ii'\iint\frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds',$$

причем $W$ называется электродинамическим потенциалом обоих замкнутых токов $i$ и $i'$ по отношению друг к другу.



Можно составить также этот потенциал для действия тока на самого себя. Он будет тогда иметь значение:

$$U = -\frac{i^2}{2}\iint\frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds'.$$

В этом выражении $ds$ и $ds'$ — два произвольных элемента замкнутого тока $i$. При интегрировании каждый элемент тока исчисляется два раза; поэтому мы должны вместо полученной формулы потенциала взять ее половину.

## § 35. Индукционное действие двух проводников друг на друга.

Пусть два проводника тока действуют друг на друга аналогично тому, что было рассмотрено нами в предыдущих параграфах. Если число силовых линий, окружаемых током $i$, изменяется, то в проводнике $A$ (§ 34), должна появиться электровозбудительная сила, как это мы нашли в § 30.

Это изменение силовых линий может теперь происходить благодаря изменению самого тока $i$. В этом случае справедливо взаимоотношение

$$e = wi + \frac{d}{dt}(Li),$$

причем мы полагаем (§ 30), что:

$$V = -Li.$$

Число силовых линий, окружаемых током $i$, будет также изменяться, если изменяется ток $i$. Число силовых линий, исходящих от тока $i$, как мы уже знаем из предыдущих параграфов, будет:

$$-i' \int\int \frac{\cos \varepsilon}{r} \, d s \, d s' = - M i'.$$

Общее число силовых линий, окруженных током, будет, следовательно, $-(Li + Mi')$ и уравнение для прохождения тока $i$ будет:

$$(16) \qquad e = w i + \frac{d}{d t}(L i + M i').$$

Аналогично мы получим для тока $i'$ уравнение:

$$(16) \qquad e' = w i' + \frac{d}{d t}(L' i' + M i).$$

Мы можем эти уравнения назвать **основными равенствами электродинамической индукции**, причем $L$, $L'$ и $M$ представляют собой **индукционные коэффициенты**, $L$ и $L'$ — коэффициенты **самоиндукции**, $M$ — коэффициент **взаимной индукции**.

Мы вывели уравнения (16) в предположении, что окружающее пространство свободно от магнитных тел и проводников электричества. Если это не так, то хотя выведенные уравнения и не меняются по форме, но значения индукционных коэффициентов будут другие. Если мы изменим форму и взаимное расположение проводников тока или изменим окружающую среду, приводя по отношению к проводникам в движение магнитные тела или же постоянные магниты, то $L$, $L'$ и $M$ будут функциями времени, что не должно забывать при применении уравнений (16), которые сохраняют свою форму.



## § 36. Индукционные приборы. — Трансформаторы.

Представим себе две находящиеся друг в друге проволочные обмотки, взаимное расположение которых не изменяется. Их самоиндукция, равно как и их взаимная индукция будет, в таком случае, зависеть от времени. В обмотке действует изменяющаяся электровозбудительная сила $e$. Равенства (16) представятся, поэтому, в таком виде:

$$(17) \qquad \begin{aligned} e &= w i + L \frac{d i}{d t} + M \frac{d i'}{d t}, \\ 0 &= w' i' + L' \frac{d i'}{d t} + M \frac{d i}{d t}. \end{aligned}$$

Индуцированный ток $i$ будет, поэтому, определяться исключительно изменением первичного тока $i$. Если $\frac{di}{dt} = 0$, то $i' = 0$.

Положим теперь, что $i$ претерпевает быстрое изменение и вслед затем вновь остается постоянным. Следовательно, $\frac{di}{dt}$ получает на короткое время положительное или отрицательное значение; до этого и вслед за этим $i$ — постоянно и $\frac{di}{dt} = 0$. Проинтегрируем наше уравнение по времени изменения тока $\tau$; мы получим тогда

$$\int_0^\tau w' i' \, dt + L' \int_0^\tau \frac{d i'}{d t} \, dt = - M \int_0^\tau \frac{d i}{d t} \, d t,$$

или

$$w' \int_0^\tau i' \, d t + L' (i'_\tau - i'_0) = - M (i_\tau - i_0).$$

В начале и в конце времени $\tau$ мы не имеем никакого индукционного тока, а потому $i'_\tau = i'_0 = 0$ и, следовательно,

$$w' \int_0^\tau i'\, dt = -M(i_\tau - i_0).$$

Если ток $i$ усиливается, т. е. $i_\tau > i_0$, то индукционный ток будет отрицательным; если $i$, наоборот, ослабевает, то $i'$ — положительно. $i'$ будет тем больше, чем меньше $\tau$, т. е. чем быстрее изменяется и чем больше взаимная индукция $V$. Теперь также легко определить экспериментальным путем коэффициент взаимной индукции, так как мы легко можем измерить все остальные величины нашего уравнения.

Положим теперь, что в первичном проводнике имеется в наличности периодическая электровозбудительная сила:

$$e = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t.$$

Другими словами, по первичному проводнику протекает переменный ток. Уравнениям (17) будет в таком случае удовлетворять следующее решение:

$$i = a \sin \alpha t + b \cos \alpha t,$$
$$i' = a' \sin \alpha t + b' \cos \alpha t.$$

Если мы подставим теперь эти значения в уравнения, то мы получим:

$$A \sin \alpha t + B \cos \alpha t = w\, a \sin \alpha t + w\, b \cos \alpha t + \\ + L\, a\, \alpha \cos \alpha t - L\, b\, \alpha \sin \alpha t + M\, a'\, \alpha \cos \alpha t + \\ - M\, b'\, \alpha \sin \alpha t$$

и

$$0 = w'\, a' \sin \alpha t + w'\, b' \cos \alpha t + L'\, a'\, \alpha \cos \alpha t - \\ - L'\, b'\, \alpha \sin \alpha t + M\, a\, \alpha \cos \alpha t - M\, b\, \alpha \sin \alpha t.$$



Эти уравнения будут осуществлены, если члены с $\sin \alpha t$ и члены с $\cos \alpha t$ (§ 31) будут равны между собою. Мы можем тогда исключить $\sin \alpha t$ и $\cos \alpha t$ и мы получим четыре уравнения:

$$A = w\, a - L\, b\, \alpha - M\, b'\, \alpha,$$
$$B = w\, b + L\, a\, \alpha + M\, a'\, \alpha,$$
$$0 = w'\, a' - L'\, b'\, \alpha - M\, b\, a,$$
$$0 = w'\, b' + L'\, a'\, \alpha + M\, a\, \alpha.$$

На основании этих уравнений можно определить величины $a$, $b$, $a'$, $b'$, чем, в свою очередь, будет определено направление первичного и вторичного тока.

Отсюда следуют многочисленные важные выводы. Так как $A$, $B$, $a$, $b$, $a'$, $b'$ в общем отличаются друг от друга, то как первичный, так и вторичный ток имеют по отношению к электровозбудительной силе перемещение фаз, в то время как сила обоих токов определяется также еще числом колебаний, сопротивлениями и коэффициентами индукции. Все это должно быть принято во внимание при конструировании индукционных приборов и трансформаторов.

## § 37. Колебательное разряжение конденсатора.

Соединим обе обкладки конденсатора с искровым промежутком, к которому электричество отводится через очень большое сопротивление, напр., через мокрый шнур. Мы увидим тогда при разряде только одну единственную искру. Если сопротивление провода мало, то вращающееся зеркало, показывает, что несколько искр следуют друг за другом. Таким образом, в этом случае мы имеем дело со многими следующими друг за другом разрядами.

Предположим теперь, что одна обкладка конденсатора соединена с землей, а другая до разряда имеет потенциал $P_0$ и содержит количество электричества $Q_0$. Пусть в некоторый произвольный момент времени $t$ эти две величины были соответственно $P$ и $Q$. Если имеет место разряд, то в проводнике возникает ток $i$, и изменение количества электричества $Q$ в течение времени $dt$ будет (§ 16)

$$dQ = -i\,dt.$$

Далее на основании § 30 электровозбудительная сила или, что то же самое, разность потенциалов будет:

$$P = wi + L\frac{di}{dt},$$

где $L$—коэффициент самоиндукции проводника. Между $P$ и $Q$ существует (ч. III, § 45) отношение:

$$Q = CP,$$

где $C$ представляет емкость конденсатора. Следовательно:

$$\frac{Q}{C} = wi + L\frac{di}{dt},$$

откуда, после дифференцирования по времени, получается:

$$\frac{1}{C}\cdot\frac{dQ}{dt} = w\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2}.$$

На основании предыдущего:

$$\frac{dQ}{dt} = -i,$$

откуда вытекает равенство:

(18) $$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{w}{L}\cdot\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0.$$



Это то же самое равенство, которое мы имели для маятника в сопротивляющейся среде (ч. I, § 10). Мы можем, следовательно, принять в этом случае силу тока равной

$$i = Ae^{\alpha t},$$

откуда следует для $\alpha$:

$$\alpha = -\frac{w}{2L} \pm \sqrt{\frac{w^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Если вместе с тем $\frac{w^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$, то мы не будем иметь никакого периодического движения. Появится лишь одна единственная искра. Если же, наоборот, $\frac{w^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, то корень делается мнимым, или будет иметь периодическое движение, т. е. будет иметь место колебательный разряд.

Если сопротивление проводника будет очень мало, то мы можем в равенстве (18) пренебречь членом $\frac{w}{L}\cdot\frac{di}{dt}$, причем мы получаем:

$$\frac{d^2i}{dt^2} = -\frac{i}{LC}.$$

Этому равенству соответствует колебательное движение продолжительности:

$$\tau = 2\pi\sqrt{LC}.$$

## § 38. Электростатическая и электромагнитная система мер.

Все определяемые нами физические величины мы можем выразить в абсолютных единицах длины $[L]$, массы $[M]$ и времени $[T]$. Полученные при этом новые единицы мер мы называем производными от основных абсолютных единиц. Формула, определяющая соотношение основных единиц в выражении данной производной единицы называется размером этой последней. Например, размер силы изображается произведением массы $[M]$ на ускорение. Ускорение, в свою очередь, будет представлять собою скорость, деленную на время $[T]$. Наконец, скорость равна длине $[L]$, деленной на время $[T]$. Таким образом, размер абсолютной единицы силы будет $\frac{[LM]}{[T^2]}$, или, как это обыкновенно принято изображать: $[LMT^{-2}]$.

Сила, с которою притягиваются друг к другу два количества электричества $e$ и $e'$, определяется по формуле:

$$K = \frac{ee'}{r^2}.$$

Представим это в форме равенства, выражающего размер данной производной единицы. Мы получаем:

$$[MLT^{-2}] = \frac{[e^2]}{[L^2]}$$

или

$$[e] = [L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}].$$

Электростатический потенциал $\Psi$ имеет величину $\frac{e}{r}$ следовательно:

$$[\Psi] = [L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}].$$

Емкость $[C]$ имеет величину $\frac{e}{\Psi}$, а потому

$$[C] = [L].$$



Мы вывели эти величины из электростатического закона сил; мы говорим: мы измерили величины в электростатической мере.

Две магнитные массы притягиваются по тому же самому закону, как и электрические. Мы имеем для силы притяжения:

$$K = \frac{mm'}{r^2}.$$

Следовательно, для величины магнитной массы мы также получим выражение

$$[m] = [L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}].$$

Мы нашли для действия элемента тока на магнитный полюс (§ 16) силу:

$$dS = \frac{m\,ds \sin\vartheta}{r^2} i,$$

или

$$i = \frac{dS\, r^2}{m\,ds \sin\vartheta},$$

а поэтому

$$[i] = \frac{[LMT^{-2} L^2]}{[L^{3/2} M^{1/2} T^{-1} L]} = [L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}],$$

так как $\sin\vartheta$ есть отвлеченное число.

Сила тока есть не что иное, как количество электричества, проходящее в единицу времени через поперечное сечение проводника. Произведение силы тока на время дает нам, поэтому, количество электричества, и мы находим для выражения его величины:

$$[e] = [M^{1/2} L^{1/2}].$$

Количество тепла, развитое током в единицу времени, $wi^2$ (§ 23) равно отношению энергии к времени; другими словами, размер $wi$ будет произведением силы на путь, разделенным на время. Таким образом:

$$[w i^2] = [L^2 M T^{-3}],$$

откуда:

$$[w] = \frac{[L^2 M T^{-3}]}{[L M T^{-2}]} = [L T^{-1}].$$

Для размера электровозбудительной силы $E$ мы имеем (§ 23), следовательно:

$$[E] = [w i] = [L^{3/2} M^{1/2} T^{-2}].$$

Если мы сравним величины, измеренные в электростатических и в электромагнитных мерах, то обнаруживается замечательное обстоятельство, именно — одна и та же величина, измеренная в различных мерах, имеет различные выражения. Например, мы нашли в электромагнитных мерах для размера количества электричества:

$$[e] = [L^{1/2} M^{1/2}],$$

а в электростатических мерах:

$$[e] = [L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}].$$

Отношение последней к первой будет:

$$V = [L T^{-1}],$$

причем это отношение равнозначно размеру скорости. Измерим количество электричества один раз при помощи крутильных весов Кулона, а второй раз гальванометром; мы



получим тогда его размеры в двух различных системах. При этом оказывается, что отношение этих размеров

$$V = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см.}}{\text{сек.}}$$

равно скорости света.

Подобно количествам электричества прочие электрические величины, кроме энергии, также не согласуются в обоих системах мер, в смысле выражения их размеров, и отношение этих последних всегда представляет собою некоторую степень скорости света $V$.

## § 39. Абсолютные и практические единицы мер.

Для практических целей абсолютные единицы мер являются обыкновенно неудобными, так как они дают или слишком большие, или слишком маленькие числа. Поэтому, для потребности практики избирают другие единицы. Нам уже известна практическая мера силы тока, ампер (§ 17), являющийся $1/_{10}$ абсолютной силы тока. Абсолютная единица сопротивления настолько мала, что в качестве практической единицы избрали в $10^9$ раз большую и дали ей название — ом. Аналогичным образом, величина в $10^8$ раз большая размера электровозбудительной силы называется вольтом. Ампер, ом и вольт находятся в таком отношении друг к другу, что для них вполне применим закон Ома:

$$i = \frac{e}{w}.$$

Для энергии в секунду

$$e i = w i^2$$

мы имеем в качестве практической меры ватт или вольт — ампер, который, следовательно, равен $10^7$ абсолютных единиц. Количество электричества, проходящее в секунду через поперечное сечение проводника силою тока в один ампер, мы называем кулоном.

Соединим одну обкладку конденсатора с землею. Если теперь под влиянием заряда в 1 кулон мы получим на другой обкладке напряжение в один вольт, то конденсатор будет иметь емкость одной фарады. Этот последний будет иметь, следовательно, $\frac{10^{-1}}{10^8} = 10^{-9}$ абсолютных единиц. Отношение единиц мер в обоих системах будет для количества электричества $V$ (§ 38), для потенциала $\frac{1}{V}$, для емкости $V^2$. Фарада имеет, следов., $\frac{V^2}{10^9}$ электростатических единиц. Это настолько большая единица, что на практике, обыкновенно, пользуются миллионной долей, а именно микрофарадой.

## § 40. Электрические токи в диэлектрике.

Если мы соединим с землею одну обкладку конденсатора, состоящего из двух пластинок (ч. III, § 47) и если между обоими пластинками находится только воздух, то другая пластинка заряжается электричеством, имеющим плотность:

$$\sigma = \frac{P}{4\pi\delta},$$

где $P$ — потенциал обкладки. Если между двумя пластинками находится диэлектрик, то мы получим другую плотность электричества (ч. III, § 54)

$$\sigma = \frac{\varepsilon P}{4\pi\delta},$$



причем через $\varepsilon$ мы обозначаем диэлектрическую постоянную. Поверхностную плотность $\sigma$ мы можем представить себе образовавшейся в результате разделения положительного и отрицательного электричества внутри молекул, вследствие влияния падения потенциала, т. е. вследствие действия электродвижущей силы (на единицу длины)

$$C_1 = \frac{P}{\delta}.$$

Если мы проведем плоскость перпендикулярно к направлению силы $C_1$, то через единицу площади, под влиянием $C_1$, будет проходить количество электричества $\sigma$. Если мы разложим электродвижущую силу на три составляющие $X$, $Y$, $Z$, то количества электричества, которые проходят через единицу площади параллельно трем осям, будут:

$$f = \frac{\varepsilon}{4\pi} X, \quad g = \frac{\varepsilon}{4\pi} Y, \quad h = \frac{\varepsilon}{4\pi} Z.$$

Величины $f$, $g$, $h$ принято также называть составляющими электрического перемещения.

Мы определяем силу тока (§ 16), как количество электричества, протекающее в единицу времени через поперечное сечение проводника, а плотность тока, как отношение силы тока к поперечному сечению, т. е. как количество электричества, протекающее через единицу поверхности в единицу времени. Таким образом, для плотностей тока, параллельных трем осям, мы будем иметь:

$$(19) \qquad \begin{aligned} u &= \frac{df}{dt} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t}, \\ v &= \frac{dg}{dt} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial Y}{\partial t}, \\ w &= \frac{dh}{dt} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial Z}{\partial t}, \end{aligned}$$

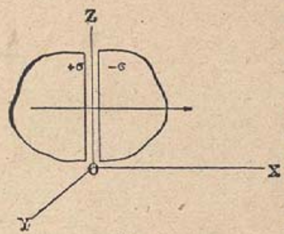
в то время как равнодействующая плотность тока может быть принята:

$$\frac{1}{4\pi}\frac{dD_1}{dt}=\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{dC_1}{dt}.$$

где $\frac{dD_1}{dt}$ также может быть названо диэлектрическим перемещением, хотя это обозначение знакомо нам также по отношению к $D_1$. Ток, происшедший от изменения $D_1$ называется током перемещения.

## § 41. Общие уравнения индукции.

Выведем отношение, существующее между составляющими магнитной индукции $a$, $b$, $c$ и составляющими магнитных сил $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Подобно тому, как электрическая сила производит перемещение электричества, магнитная сила производит перемещение магнетизма. Если поэтому, находящееся в магнитном поле тело (черт. 21) будет пересечено плоскостью ($y\ z$), то на левой стороне освободится магнетизм плотности:



Черт. 21.

$$\sigma = k\alpha,$$

а на правой

$$\sigma = -k\alpha.$$

Представим себе вместо плоскости ($yz$) очень узкое пространство. В таком случае на точку, имеющую магнитную массу равную единице, будет действовать слева сила $2\pi\sigma$, которая будет стремиться переместить точку в направлении оси $x$-ов. Такая же, по величине и направлению, сила будет действовать на точку и с правой стороны. Точка будет, следовательно, находиться под действием общей силы $4\pi\sigma$. Эта величина есть также число индуктированных силовых линий, на единице, поверхности, которые присоединяются к $\alpha$, существовавшим первоначально. Таким образом, мы будем иметь число силовых линий параллельных оси $x$-ов

$$a=\alpha+4\pi\sigma=\alpha+4\pi k\alpha=(1+4\pi k)\alpha=\mu\alpha,$$

где

$$\mu=1+4\pi k$$

есть не что иное, как магнитная постоянная индукции. Точно такой же ход рассуждений мы можем применить к остальным составляющим индукции, причем мы получим три равенства.

$$a=\mu\alpha,\quad b=\mu\beta,\quad c=\mu\gamma. \tag{20}$$

Назовем через $\lambda$, $\mu$, $\nu$ углы, образуемые нормалями поверхностного элемента $dS$ с координатными осями; мы можем тогда число силовых линий $N$, проходящих через $S$, изобразить в виде:

$$N=\iint(a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu)\,dS. \tag{21}$$

На основании изложенного в § 26, электровозбудительная сила $E$, появляющаяся в проводнике, определяется изменением потенциала или числа силовых линий с течением времени; следовательно:

$$E=\frac{dN}{dt}. \tag{22}$$

Эта электродвижущая сила имеется всегда в наличности в кривой, окружающей площадь, даже и в том случае, если проводимость бесконечно мала. Таким образом, это выражение может быть применено также и к изолятору.

Если мы разделим электродвижущую силу $E$ на длину окружающей кривой, то мы получим электродвижущую силу на единицу длины или электрическую интенсивность поля $C_1$. Если ее координаты будут $X, Y, Z$, то ее можно представить в виде

$$X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds};$$

для элемента кривой $ds$ эта сила будет

$$\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)ds = X\,dx+Y\,dy+Z\,dz.$$

Общая электровозбудительная сила в окружающей кривой может быть, поэтому, представлена в виде:

$$(23)\quad E=\int(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)=\iint\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos\lambda+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos\mu+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos\nu\right]dS,$$

если мы обратимся к помощи теоремы Стокса (§ 32). Из равенств (21) и (22) следует теперь:

$$E=\frac{dN}{dt}=\iint\left(\frac{da}{dt}\cos\lambda+\frac{db}{dt}\cos\mu+\frac{dc}{dt}\cos\nu\right)dS.$$



Если мы согласуем теперь это равенство с равенством (23), и примем во внимание, что в силу равенств (20)

$$a=\mu\alpha,\quad b=\mu\beta,\quad c=\mu\gamma,$$

то получим:

$$(24)\quad \begin{aligned}\mu\frac{\partial a}{\partial t}&=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z},\\ \mu\frac{\partial \beta}{\partial t}&=\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x},\\ \mu\frac{\partial y}{\partial t}&=\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}.\end{aligned}$$

Если вместо плотности силовых линий мы введем магнитную интенсивность поля $R$, то на основании § 32 мы можем рассматривать равенства (24) как слагающие равенства:

$$\mu\frac{dR}{dt}=rot\ C_1.$$

## § 42. Основные уравнения движения электричества в изоляторах.

Теперь нам уже известны уравнения, выражающие взаимоотношение между составляющими плотности тока и соответствующими им магнитными силами, которые мы нашли в § 18. Если мы обозначим координаты вместо $a, b, c$ через $x, y, z$, то этим уравнениям легко придать форму:

$$(25)\quad \begin{aligned}-4\pi u&=\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z},\\ -4\pi v&=\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x},\\ -4\pi w&=\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}.\end{aligned}$$

Эти выражения вместе с уравнениями (19) дают:

$$
\begin{aligned}
-\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t}&=\frac{\partial \gamma}{\partial y}-\frac{\partial \beta}{\partial z},\\
-\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial t}&=\frac{\partial \alpha}{\partial z}-\frac{\partial \gamma}{\partial x},\\
-\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial t}&=\frac{\partial \beta}{\partial x}-\frac{\partial \alpha}{\partial y}.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

В виду важности этих равенств укажем на то, что они легко могут быть выведены из заключительного равенства § 33

$$4\pi i=-\iint rot\,R\cdot dS.$$

Если мы назовем плотность тока через $D$ и поперечное сечение тока через $S$, то

$$i=\iint D\,dS$$

или

$$di=D\,dS.$$

Дифференцирование приведенного выше равенства дает:

$$4\pi\,di=4\pi D\,dS=-rot\,R\cdot dS$$

или

$$4\pi D=-rot\,R,$$

что тождественно с равенствами (25).

Так как на основании изложенного в § 40 мы можем принять, что

$$D=\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{dC_1}{dt},$$



то будет справедливо также равенство

$$\varepsilon\frac{dC_1}{dt}=-rot\,R\,,$$

что для отдельных составляющих дает систему уравнений (26). Путем аналогичных рассуждений мы могли бы получить также заключительное равенство § 41

$$\mu\frac{dR}{dt}=rot\,C_1.$$

Из § 38 мы знаем, что сила тока, измеренная в электростатических мерах, в $V$ раз больше, чем в электромагнитных. Выразим теперь электрические силы $X$, $Y$, $Z$, а также составляющие $u$, $v$, $w$ плотности тока в электростатических мерах. Магнитные силы $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ мы измеряем в электромагнитных единицах. Уравнения (25) примут тогда вид

$$
\begin{aligned}
-\frac{4\pi u}{V}&=\frac{\partial \gamma}{\partial y}-\frac{\partial \beta}{\partial z},\\
-\frac{4\pi v}{V}&=\frac{\partial \alpha}{\partial z}-\frac{\partial \gamma}{\partial x},\\
-\frac{4\pi w}{V}&=\frac{\partial \beta}{\partial x}-\frac{\partial \alpha}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

Подобным же образом преобразуем уравнение (24) в

$$
\begin{aligned}
V\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)&=\mu\frac{\partial \alpha}{\partial t},\\
V\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)&=\mu\frac{\partial \beta}{\partial t},\\
V\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)&=\mu\frac{\partial \gamma}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

Из вышеизложенного ясно, что шесть последних уравнений мы можем расположить в двух симметричных группах следующим образом:

$$-\frac{\varepsilon}{V}\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial \gamma}{\partial y}-\frac{\partial \beta}{\partial z}, \qquad \frac{\mu}{V}\frac{\partial \alpha}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}.$$

$$-\frac{\varepsilon}{V}\frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{\partial \alpha}{\partial z}-\frac{\partial \gamma}{\partial x}, \qquad \frac{\mu}{V}\frac{\partial \beta}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x},$$

$$-\frac{\varepsilon}{V}\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial \beta}{\partial x}-\frac{\partial \alpha}{\partial y}; \qquad \frac{\mu}{V}\frac{\partial \gamma}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}.$$

При другом способе изображения эта система уравнений может быть выражена двумя уравнениями

$$\frac{\varepsilon}{V}\frac{d C_1}{d t}=-rot\, R$$

и

$$\frac{\mu}{V}\frac{d R}{dt}=rot\, C_1.$$

Эти выражения представляют собою *основные уравнения для движения электричества и магнетизма в изоляторах*; уравнения эти были впервые формулированы Д. К. *Максвеллем* и ими он воспользовался для изображения *электромагнитных и световых явлений в непроводниках* электричества.