

Naučni radovi
Prof. Dr Milutina Milankovića
u časopisu
Sonderabdruck aus Zeitschrift f.
Mathematik u. Physik
1907 - 1913

Priredili: Dr Žarko Mijajlović
Dr Slaviša Milisavljević

Beograd, 2014

Theorie der Druckkurven.

Von Dr. M. MILANKOVITCH in Wien.

Erstes Kapitel.

Die Druckkurve, ihre Gleichung und ihre Eigenschaften.

Definition der Druckkurve.

1. Es stelle $ABCD$ (Fig. 2, S. 5) einen Teil eines festen Tragkörpers dar, der sich unter dem Einflusse äußerer Kräfte — Lasten und Stützenwiderstände — und des eigenen Gewichtes im Gleichgewichte befindet.

Wir setzen voraus:

Der Tragkörper sei prismatisch, seine Erzeugenden seien senkrecht zur Bildebene, die Leitlinien $CN_1N'B$ und DN_1NA stetige Kurven (Begrenzungskurven), der Tragkörper sei homogen und sein spezifisches Gewicht sei g .

Die Tiefe des betrachteten Teiles des Tragkörpers, — senkrecht zur Bildebene gemessen — den wir zwischen zwei zur Bildebene parallelen Ebenen eingeschlossen denken, sei β .

Von den Lasten setzen wir voraus, daß sie alle in der Bildebene wirken, über die Begrenzungskurven kontinuierlich verteilt sind und sich von Punkt zu Punkt stetig ändern.

Anmerkung 1. Ist die Belastung des Tragkörpers keine stetige, so kann derselbe in solche Teile getrennt werden, für welche die gemachten Voraussetzungen gelten.

Denkt man sich nun einen ebenen, zur Bildebene senkrechten Fugenschnitt NN' durch den Tragkörper geführt, entfernt den rechten Teil des so zerschnittenen Tragkörpers und stellt das zerstörte Gleichgewicht durch die Kraft R wieder her, so nennt man die Kraft R die Druckkraft des Fugenschnittes NN' und ihren Angriffspunkt E an dem geführten Fugenschnitte den Druckmittelpunkt des Fugenschnittes NN' .

Werden nun nach einem bestimmten Gesetze — nehmen wir an senkrecht zu einer gegebenen Kurve der Bildebene — unendlich viele unendlich nahe ebene Fugenschnitte durch den Tragkörper geführt

gedacht, so stellt der geometrische Ort der Druckmittelpunkte dieser Fugenschnitte die Druckkurve im Tragkörper für den gegebenen Belastungsfall und für die gewählte Art der geführten Fugenschnitte dar. Ändert sich das eine oder das andere, so ändert sich damit auch die Druckkurve.

Anmerkung 2. Bei den Stein- und Erdkonstruktionen ruft die Kraft R immer einen Druck hervor und daher die Bezeichnungen: Druckkraft, Druckmittelpunkt und Druckkurve. Ruft die Kraft R einen Zug hervor, so wären die Bezeichnungen: Zugkraft, Zugmittelpunkt und Zugkurve zutreffender. Um aber nicht fortwährend Doppelbezeichnungen anwenden zu müssen, so werden wir nur von Druckkräften, Druckmittelpunkten und Druckkurven sprechen und bemerken hier nur, daß die folgenden Ableitungen Gültigkeit haben auch für den Fall, wo R eine Zugkraft ist.

Allgemeine Gleichung der Druckkurve.

2. *Einleitung.* Wie schon gesagt worden ist und was aus der Definition der Druckkurve durch einfache Überlegungen gefolgert werden kann¹⁾, ist die Druckkurve abhängig von der Art, wie die Fugenschnitte geführt werden. Als Charakteristik für die Führung der Fugenschnitte diene eine Kurve, zu welcher senkrecht die Fugenschnitte geführt werden. Für horizontale Fugenschnitte geht diese Kurve in eine vertikale Gerade über, für vertikale Fugenschnitte in eine horizontale Gerade. Bei Gewölben, wo die Fugenschnitte senkrecht zur Gewölbsachse gelegt werden sollen, wird diese Kurve mit der Gewölbsachse selbst zusammenfallen.

Die Evolute dieser Kurve hat die Eigenschaft, daß sich in ihr je zwei unendlich nahe benachbarte Fugenschnitte schneiden.

Für die vollständige Erfassung des Wesens der Druckkurven erscheint es uns notwendig, noch folgende neue Begriffe einzuführen.

Seien NN' und $N_n N'_n$ (Fig. 1) zwei beliebige Fugenschnitte des Tragkörpers. Der Schwerpunkt des zwischen denselben eingeschlossenen Tragkörperteiles $NN'N'_nN_n$ sei S .

Rückt nun der Fugenschnitt $N_n N'_n$ in unendliche Nähe zu NN' , so nähert sich auch S einer Grenzlage \mathcal{S} und diese Grenzlage nennen wir den Schwerpunkt der Fuge NN' .

1) Siehe Föppl, Theorie der Gewölbe § 7.

Die Lage von \mathcal{S} wird wie folgt bestimmt:

Stellt $N_1 N'_1$ den zu NN' unendlich nahen Nachbar-Fugenschnitt, der sich mit NN' in Ω schneidet, M den Mittelpunkt der Länge NN' dar und bezeichnet man

$$\overline{NN'} = \delta \quad (\overline{NM} = \frac{\delta}{2}) \quad \overline{\Omega M} = \rho,$$

so kann \mathcal{S} aufgefaßt werden als der Schwerpunkt des unendlich kleinen Viereckes $NN'N'_1N_1$, welches als die Differenz der unendlich kleinen Dreiecke $\Omega N'N'_1$ und ΩNN_1 betrachtet werden kann, deren Flächen wir mit df_1 und df_2 bezeichnen. Es ist klar, daß die Schwerpunkte dieser Dreiecke um $\frac{2}{3}(\rho + \frac{\delta}{2})$ bzw. um $\frac{2}{3}(\rho - \frac{\delta}{2})$ von Ω entfernt sind und da die Differenz ihrer statischen Momente bezüglich Ω gleich dem statischen Momente des unendlich kleinen Viereckes $NN'N'_1N_1$ bezüglich Ω sein muß, so ist:

$$(df_1 - df_2)\overline{\Omega\mathcal{S}} = \frac{2}{3}(\rho + \frac{\delta}{2})df_1 - \frac{2}{3}(\rho - \frac{\delta}{2})df_2.$$

Man hat ferner

$$df_1 : df_2 = (\rho + \frac{\delta}{2})^2 : (\rho - \frac{\delta}{2})^2,$$

und es folgt aus diesen zwei Gleichungen:

$$\overline{\Omega\mathcal{S}} = \rho + \frac{1}{12} \frac{\delta^2}{\rho}$$

$$\overline{M\mathcal{S}} = \frac{1}{12} \frac{\delta^2}{\rho}.$$

Der Schwerpunkt der Fuge hat also im allgemeinen eine endliche Entfernung von der Fugenmitte und nur für die Fälle wo $\rho = 0$, d. h. die Fugenschnitte zueinander parallel gezogen werden, oder wo $\delta = 0$, d. h. der Tragkörper unendlich dünn ist, fällt der Schwerpunkt der Fuge mit der Fugenmitte zusammen.

3. *Bezeichnungen.* Fixieren wir in der Bildebene, jetzt auch Kraftebene, ein orthogonales Koordinatensystem (Fig. 2, Seite 5), dessen Ursprung beliebig gewählt sei und dessen positive Ordinatenrichtung mit der Richtung der Schwerkraft zusammenfalle. Es bezeichne dann: x, y die Koordinaten des Druckmittelpunktes E des beliebig gewählten Fugenschnittes NN' ,

φ den Winkel, den der Fugenschnitt NN' mit der Vertikalen einschließt (gemessen wie in der Figur).

Wird φ als veränderlich angenommen, so sind auch x und y und die folgenden mit φ in Zusammenhang stehenden Größen veränderlich:

- R die Druckkraft des Fugenschnittes NN' ,
 V die Vertikalkomponente von R ,
 H die Horizontalkomponente von R ,
 δ die Länge NN' ,
 M der Mittelpunkt des Fugenschnittes NN' ($\overline{NM} = \frac{\delta}{2}$),
 ξ die Entfernung des Druckmittelpunktes E von der Mitte des Fugenschnittes NN' ($\xi = \overline{ME}$),
 \mathcal{S} der Schwerpunkt der Fuge NN' ,
 p die spezifische Druckbelastung der oberen Begrenzungslinien im Punkte N' ,
 ε der Winkel, den diese Krafrichtung mit der Vertikalen einschließt (gemessen wie in der Figur),
 q die spezifische Druckbelastung der unteren Begrenzungslinie im Punkte N ,
 η der Winkel, den diese Krafrichtung mit der Vertikalen einschließt (gemessen wie in der Figur).

Den früheren Voraussetzungen zufolge sind p , ε , q , η stetige Funktionen der unabhängigen Veränderlichen φ .

Sei $N_1N'_1$ der in unendlicher Nähe zu NN' geführte benachbarte Fugenschnitt, der sich mit dem letzteren im Punkte \mathcal{Q} schneidet und ferner:

- ρ die Länge $\overline{M\mathcal{Q}}$,
 $d\varphi$ der zwischen den Fugenschnitten NN' und $N_1N'_1$ eingeschlossene unendlich kleine Winkel $N'\mathcal{Q}N'_1$,
 E_1 der Druckmittelpunkt des Fugenschnittes $N_1N'_1$

$$\overline{E_1F} = dx \quad \overline{FE} = dy,$$

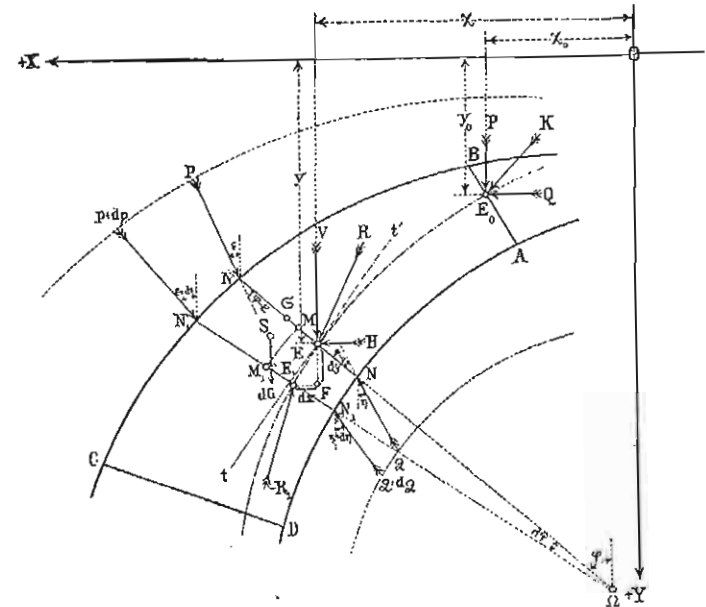
- R_1 die Druckkraft des Fugenschnittes $N_1N'_1$,
 M_1 der Mittelpunkt des Fugenschnittes $N_1N'_1$,
 de das Bogendifferential $N'N'_1$,
 $d\sigma$ das Bogendifferential MM_1 ,
 di das Bogendifferential NN_1 .

4. Gleichung der Druckkurve. Denken wir uns nun den links von N, N'_1 liegenden Teil des Tragkörpers entfernt, so stellt die Kraft $-R_1$ angreifend im Punkte E_1 das gestörte Gleichgewicht wieder her. An dem unendlich kleinen Elemente $NN'N'_1N_1$ des Tragkörpers halten sich somit folgende Kräfte im Gleichgewicht:

1. die Druckkraft R des Fugenschnittes NN' angreifend im Punkte E , welche wir in die Komponenten V und H zerlegen,
2. die negativ genommene Druckkraft R_1 des Fugenschnittes $N_1N'_1$ angreifend im Punkte E_1 ,

3. das Gewicht dG des Tragkörperelementes $NN'N'_1N_1$, welches wegen der unendlichen Annäherung von $N_1N'_1$ an NN' und gemäß den früheren Ableitungen im Schwerpunkte \mathcal{S} der Fuge NN' wirkend anzunehmen ist,
4. die Belastung des Begrenzungselementes $N'N'_1$, die wegen der unendlichen Kleinheit desselben gleich $p \cdot de$ und im Punkte N' angreifend zu nehmen ist,
5. die Belastung des Begrenzungselementes NN_1 gleich $q \cdot di$ und angreifend im Punkte N .

Fig. 2.



Die ersten zwei dieser Kräfte sind im allgemeinen endlich, die übrigen drei dagegen verschwinden mit dx und sind von derselben Kleinheitsordnung wie dx und dy .

Die Summe der statischen Momente dieser fünf Kräfte bezüglich eines beliebigen Punktes der Kräfteebene muß wegen des Gleichgewichtes gleich Null sein. Wählt man somit den Punkt E_1 zum Momentenpunkt und bezeichnet die Momente der Kräfte dG , $p \cdot de$, $q \cdot di$ bezüglich dieses Punktes mit M_g , M_p , M_i (positiv, wenn im Sinne des Uhrzeigers drehend), so besteht die Gleichung:

$$(1) \quad Vdx - Hdy + M_g + M_p + M_i = 0.$$

In dieser Gleichung sind alle fünf Glieder von derselben Kleinheitsordnung. Bei den ersten zwei Gliedern ist die Kraft endlich, der Arm unendlich klein, bei den übrigen Gliedern ist die Kraft unendlich klein, der Arm dagegen endlich, und alle unendlich kleinen Größen sind von derselben Kleinheitsordnung.

Wegen der unendlichen Annäherung des Punktes E_1 an den Punkt E und der endlichen Entfernung der Kräfte dG , $p \cdot de$ und $q \cdot di$ von diesen Punkten sind die Entfernungen dieser Kräfte vom Punkte E_1 ihren Entfernungen vom Punkt E gleichzusetzen.

Es ist dann, wie leicht einzusehen:

$$M_p = -dG(\overline{\mathfrak{M}} + \xi) \sin \varphi,$$

wo

$$dG = g\beta \cdot \delta \cdot \rho \cdot d\varphi.$$

Werden die Fugenschnitte zueinander parallel geführt, so ist $\rho = \infty$, $\rho d\varphi$ dagegen gleich der unendlich kleinen Entfernung der beiden Fugenschnitte zu setzen.

Es ist, wie im Punkt 2 abgeleitet wurde:

$$\overline{\mathfrak{M}} = \frac{1}{12} \frac{\delta^2}{\rho},$$

so daß:

$$(2) \quad M_p = -g \cdot \beta \cdot \delta \left(\frac{1}{12} \frac{\delta^2}{\rho} + \xi \right) \sin \varphi \cdot \rho d\varphi.$$

Es ist ferner

$$(3) \quad M_e = -(pde) \overline{N'E} \sin(\varphi - \epsilon) = -p \left(\frac{\delta}{2} + \xi \right) \sin(\varphi - \epsilon) de,$$

$$(4) \quad M_i = -(qdi) \overline{N'E} \sin(\varphi - \eta) = -q \left(\frac{\delta}{2} - \xi \right) \sin(\varphi - \eta) di.$$

Die Substitution der Gleichungen (2), (3), (4) in (1) liefert:

$$(5) \quad Vdx - Hdy - g\beta\delta\rho \left(\frac{1}{12} \frac{\delta^2}{\rho} + \xi \right) \sin \varphi d\varphi - p \left(\frac{\delta}{2} + \xi \right) \sin(\varphi - \epsilon) de - q \left(\frac{\delta}{2} - \xi \right) \sin(\varphi - \eta) di = 0.$$

Ist für einen Fugenschnitt AB der Druckmittelpunkt E_0 — dessen Koordinaten x_0 und y_0 sind — und die Druckkraft K — dessen orthogonale Komponenten P und Q sind — gegeben, d. h. ist für

$$(6) \quad \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0, \quad V = P \quad \text{und} \quad H = Q, \end{cases}$$

so ist, wie leicht einzusehen:

$$(7) \quad V = P + g\beta \int_{x_0}^x \delta \cdot \rho d\varphi + \int_{x_0}^x p \cos \epsilon de - \int_{x_0}^x q \cos \eta di,$$

$$(8) \quad H = Q - \int_{x_0}^x p \sin \epsilon de + \int_{x_0}^x q \sin \eta di.$$

Ist die Form des Tragkörpers, die Art der Belastung und der Führung der Fugenschnitte mathematisch angegeben, so lassen sich alle in den Gleichungen (5), (7) und (8) vorkommenden Veränderlichen durch φ und ξ ausdrücken. Die Substitution der Gleichungen (7) und (8) in die Gleichung (5) und zweimalige Differentiation nach φ liefert eine Differentialgleichung zwischen φ und ξ allein, und dies ist die Differentialgleichung der Druckkurve, welche auch auf die Koordinaten x und y transformiert werden kann.

Ist dieselbe integrierbar, so dienen die drei Beziehungen (6) zur Bestimmung der drei Integrationskonstanten.

Aus Gleichung (5) folgt:

$$(9) \quad \frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} \left\{ g\beta\delta\rho \left(\frac{1}{12} \frac{\delta^2}{\rho} + \xi \right) \sin \varphi \frac{d\varphi}{dx} + p \left(\frac{\delta}{2} + \xi \right) \sin(\varphi - \epsilon) \frac{de}{dx} + q \left(\frac{\delta}{2} - \xi \right) \sin(\varphi - \eta) \frac{di}{dx} \right\}.$$

Bezeichnet

ψ den Neigungswinkel der Druckkraft R zur X -Achse,
 α den Neigungswinkel der Tangente tt' an die Druckkurve im Punkte E zur X -Achse, so ist offenbar:

$$(10) \quad \frac{V}{H} = \tan \psi \quad \frac{dy}{dx} = \tan \alpha.$$

Aus den Gleichungen (9) und (10) folgt, daß im allgemeinen

$$\psi \geq \alpha,$$

d. h. die Druckkraft schneidet die Druckkurve.

Gewölbe-Druckkurven.

5. Die Gewölbe tragen nur eine obere Belastung, welche als vertikal wirkend angenommen wird. Es ist hier also

$$q = 0 \quad \epsilon = 0.$$

Außerdem führt man die Fugenschnitte senkrecht zur Gewölbsachse, entsprechend der Art der Ausführung, und um die Gesetze der

Elastizitätslehre anwenden zu können. Die Gewölbsachse ist auch der geometrische Ort der Fugensmittelpunkte. Deshalb ist hier

ρ gleichbedeutend mit dem Krümmungsradius der Gewölbsachse,
 φ gleich dem Neigungswinkel der Tangente der Gewölbsachse (im Punkte M) zur X -Achse,
 $d\sigma$ gleich dem Bogendifferential der Gewölbsachse, so daß

$$\rho \cdot d\varphi = d\sigma.$$

Die Gleichungen (9), (7) und (8) gehen deshalb für diesen Fall über in:

$$(11) \quad \frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} \left\{ g\beta\delta \left(\frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\rho} + \xi \right) \sin \varphi \frac{d\sigma}{dx} + p \left(\frac{\delta}{2} + \xi \right) \sin \varphi \frac{d\varepsilon}{dx} \right\},$$

$$(12) \quad V = P + g\beta \int_{x_0}^x \delta d\sigma + \int_{x_0}^x p d\varepsilon,$$

$$(13) \quad H = Q.$$

Gleichung (13) besagt, daß die Horizontalkomponente der Druckkraft für alle Fugenschnitte eine und dieselbe ist.

Nach der Substitution der Gleichungen (12) und (13) in die Gleichung (11) genügt eine einmalige Differentiation, um die Integralzeichen zu eliminieren. Die Differentialgleichung der Gewölbe-Druckkurve wird somit von der zweiten Ordnung sein. Dieselbe enthält schon eine Konstante Q . Ihr vollständiges Integral enthält demnach drei Konstanten und stellt — sofern diese nicht bestimmt sind — ein System von unendlich vielen Druckkurven dar. Die Bestimmung des partikularen Integrals, welches die in Wirklichkeit auftretende Druckkurve darstellt, kann bei Gewölben nicht auf rein statischem Wege erfolgen. Wir werden uns deshalb mit dieser Frage nicht befassen, zumal für die in dieser Abhandlung behandelten Fragen die Bestimmung der in Wirklichkeit auftretenden Druckkurve nicht notwendig ist.

6. *Gewölbe gleichen Widerstandes.* Unter einem Gewölbe gleichen Widerstandes versteht man ein Gewölbe, welches so geformt ist, daß für den gegebenen Belastungsfall:

1. die Gleichung der Gewölbsachse ein partikulares Integral der Differentialgleichung der Druckkurve ist,
2. die Breite δ der Fugenschnitte proportional ist der zu denselben normalen Komponente N der Druckkraft R .

Ist die Forderung 1 erfüllt, so fällt eine der Druckkurven mit der Gewölbsachse zusammen, wird diese als die in Wirklichkeit auftretende angenommen — was übrigens aus der neuen Theorie der

Gewölbe folgt und bei Gewölben mit Gelenken ohne Zweifel der Fall ist —, so greift die Druckkraft in jedem Querschnitt zentrisch an. Die Verteilung der Normalspannung ist also in jedem Querschnitt eine gleichmäßige. Ist die Forderung 2 erfüllt, so sind die Normalspannungen in allen Querschnitten einander gleich. Das Gewölbe weist dann überall denselben Widerstand gegen Normalspannungen auf.

Die Forderung 1 wird analytisch ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\xi = 0,$$

und indem man x und y auch als die Koordinaten des Punktes M der Gewölbsachse auffaßt. Es ist deshalb:

$$\tan \varphi = \frac{dy}{dx} = \tan \alpha \quad \varphi = \alpha \quad d\sigma = ds = \frac{dx}{\cos \varphi}.$$

Die Gleichung (11) geht dann über in:

$$(14) \quad \frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} \left\{ \frac{1}{2} g\beta \frac{\delta^2}{\rho} \tan \varphi + \frac{1}{2} p \delta \sin \varphi \frac{d\varepsilon}{dx} \right\}.$$

Die Gleichungen (12) und (13) bleiben ungeändert.

Es ist noch δ derart zu bestimmen, daß es der Forderung 2 entspricht. Wird die rechte Seite der Gleichung (14), welche als eine Funktion von x , y und δ darstellbar ist, mit $F(x, y, \delta)$ bezeichnet, so ist bei Berücksichtigung der Gleichung (10)

$$(15) \quad \tan \psi - \tan \varphi = F(x, y, \delta).$$

Die zu dem Fugenschnitt NN' normale Komponente \bar{N} der Druckkraft R ist, wie aus Fig. 3 zu ersehen:

$$\bar{N} = R \cos(\psi - \varphi),$$

und da

$$R = \frac{H}{\cos \psi},$$

so wird

$$(16) \quad \bar{N} = H \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\cos \psi}.$$

Die Forderung 2 wird analytisch ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\delta = k \cdot \bar{N},$$

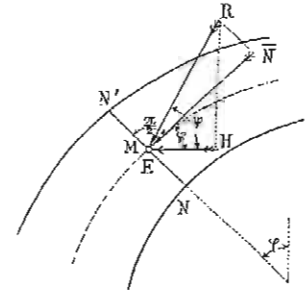
wo k eine Konstante bedeutet. Es ist demnach:

$$\begin{aligned} \delta &= k \cdot H \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\cos \psi} = k \cdot H \{ \cos \varphi + \sin \varphi \tan \psi \} \\ &= k \cdot H \{ \cos \varphi + \sin \varphi [\tan \varphi + F(x, y, \delta)] \}, \end{aligned}$$

so daß

$$(17) \quad \delta = kH \left\{ \frac{1}{\cos \varphi} + \sin \varphi \cdot F(x, y, \delta) \right\}.$$

Fig. 3.



Die Gleichungen (14), (17), (12) und (13) führen auf zwei Differentialgleichungen zwischen den Variablen x, y, δ . Ihre Integration liefert die Gleichung der Achse des Gewölbes gleichen Widerstandes und das Gesetz, nach welchem der Fugenschnitt δ variiert.

Für den Fall, wo das Gewölbe nicht überschüttet ist und nur sein Eigengewicht zu tragen hat, gehen die vier Gleichungen über in:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} \frac{1}{12} \cdot g\beta \frac{\delta^3}{Q} \tan \varphi = F_1(x, y, \delta) \\ \delta = RH \left\{ \frac{1}{\cos \varphi} + \sin \varphi F_1(x, y, \delta) \right\} \\ V = P + g\beta \int_{x_0}^x \delta \cdot ds \quad H = Q. \end{array} \right.$$

Selbst für diesen einfachen Fall ist an eine Integration der vorstehenden Gleichungen nicht zu denken. Dieselben sind jedoch für uns wichtig, weil wir im zweiten Kapitel die Lösung des von anderen Autoren versuchten Problems der Gewölbe gleichen Widerstandes besprechen wollen.

Stützzlinien und Kettenlinien.

7. Hat der Tragkörper nur vertikale Lasten zu tragen und werden die zur Erzeugung der Druckkurve geführten Fugenschnitte auch vertikal angenommen, wird also gesetzt:

$$\varphi = 0 \quad \varepsilon = 0 \quad \eta = 0,$$

so geht die allgemeine Gleichung (9) über in

$$(19) \quad \frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (10) ist deshalb

$$(20) \quad \psi = \alpha,$$

d. h. die Druckkraft berührt die Druckkurve, welche wir in diesem Falle Stützzlinie nennen wollen.

Da alle Lasten vertikal wirken, so braucht nicht zwischen der oberen und unteren Belastung und dem Eigengewichte des Tragkörpers unterschieden zu werden. Es bezeichne daher $\omega = f(x)$ die spezifische Belastung der Horizontalprojektion des Tragkörpers und ω sei als Funktion von x gegeben. Es ist dann:

$$(21) \quad V = P + \int_{x_0}^x \omega dx, \quad H = Q,$$

deshalb

$$(22) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{Q} \left\{ P + \int_{x_0}^x \omega dx \right\}.$$

Die Differentiation der vorstehenden Gleichung nach x liefert:

$$(23) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\omega}{Q}.$$

Dies ist die Differentialgleichung der Stützzlinie.

Die Integration der Gleichung (22) liefert, wenn man berücksichtigt, daß für $x = x_0, y = y_0$,

$$(24) \quad y = y_0 + \frac{1}{Q} \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x \omega dx + \frac{P}{Q} (x - x_0).$$

Dies ist die Gleichung der Stützzlinie.

8. Für eine unbelastete Strecke, wo also

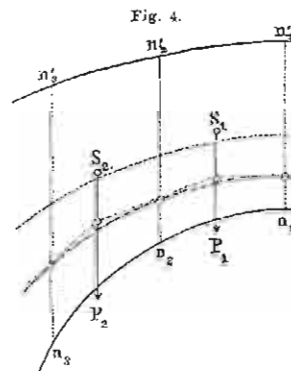
$$w = 0,$$

lautet die Gleichung der Stützzlinie

$$(25) \quad y = y_0 + \frac{P}{Q} (x - x_0).$$

Die Stützzlinie ist hier also eine Gerade. Wird demnach die kontinuierliche Belastung des Tragkörpers, die nach dem durch die Figur

$n_1 n_2 n_3 \dots n'_1 n'_2 n'_3 \dots$ veranschaulichten Gesetze über den Tragkörper verteilt ist, durch die vertikalen Schnitte $n_1 n'_1, n_2 n'_2, n_3 n'_3 \dots$ in Lamellen geteilt und durch das System der Einzellasten $P_1, P_2 \dots$ ersetzt, welche in den Schwerpunkten $S_1, S_2 \dots$ dieser Lamellen wirken und den Gewichten der Lamellen gleich sind, so wird die Stützzlinie für diesen zweiten Fall der Belastung in ein Polygon (Stützpolygon) übergehen, dessen Eckpunkte in den Richtungslinien der Lasten $P_1, P_2 \dots$ liegen. In den einzelnen Schnitten $n_1 n'_1, n_2 n'_2 \dots$ wird das Stützpolygon



die Stützzlinie für die ursprüngliche Art der Belastung berühren, weil sich an diesen Stellen durch die Teilung der kontinuierlichen Last in Lamellen weder der Druckmittelpunkt noch die Druckkraft geändert hat. Das Stützpolygon ist also der ursprünglichen Stützzlinie umgeschrieben.

9. Geht der Tragkörper in eine dünne, absolut biegsame Kette über, so ist nur dann Gleichgewicht möglich, wenn die Druckkurve mit der Kette zusammenfällt. Um also die Gleichung der Kettenlinie zu bekommen, hat man in der Gleichung (9) zu setzen:

$$\xi = 0;$$

und da

$$\delta = 0,$$

so ist:

$$de = di = d\sigma = ds,$$

mithin

$$(26) \quad \frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = 0.$$

Setzen wir die Kette — obwohl sie unendlich dünn ist — schwer voraus und bezeichnen mit

g_x das spezifische Gewicht der Kette an der Stelle x, y , so ist

$$(27) \quad V = P + \int_{x_0}^x g_x ds + \int_{x_0}^x p \cos \varepsilon ds - \int_{x_0}^x q \cos \eta ds$$

$$(28) \quad H = Q - \int_{x_0}^x p \sin \varepsilon ds + \int_{x_0}^x q \sin \eta ds.$$

Die Gleichungen (26), (27) und (28) bestimmen die Gleichung der Kettenlinie. Werden die Lasten vertikal angenommen, so sind die Gleichungen für die Kettenlinie und die Stützzlinie einander gleich. Es kann demnach die Stützzlinie aufgefaßt werden als labile Gleichgewichtsform einer unendlich dünnen Kette, deren spezifische Belastung über die Horizontalprojektion derselben dargestellt ist durch:

$$\omega = f(x).$$

10. Unsere Bezeichnung „Stützzlinie“ nur für den speziellen Fall der Druckkurve, wo die Lasten und Fugenschnitte vertikal sind, ist nicht die allgemein übliche. Sind doch in der technischen Mechanik die Begriffe: Stützzlinie für Wasserdruck, für Erddruck usw. eingeführt, also für Lasten, die nicht vertikal wirken. In diesen Fällen muß aber der Tragkörper absolut biegsam und unendlich dünn angenommen werden, so daß sich dann diese Stützzlinien auch ihrer mechanischen Entstehungsweise nach nicht von den Kettenlinien unterscheiden. Wir stellen sie deshalb unter dieselben.

Die Definition der Stützzlinie, wie wir sie hier entwickelt haben, als den geometrischen Ort der Druckmittelpunkte vertikaler Fugen-

schnitte eines Tragkörpers, welcher nur vertikale Lasten trägt, ist auch in A. Ritter, Ingenieur-Mechanik 1899, § 119 entwickelt worden. Wenn dann in demselben Buche von Stützzlinien für Erddruck, für Wasserdruck usw. die Rede ist, so entsprechen diese Stützzlinien der vorher aufgestellten Definition der Stützzlinie nicht.

Zweites Kapitel.

Die in den verschiedenen bestehenden Theorien der Druckkurven auftretenden Irrtümer.

11. Das dritte Kapitel wird einige Anwendungen der im ersten Kapitel entwickelten Theorie bringen. Wenn dieselbe Anspruch auf Würdigung erheben kann, so ist es hauptsächlich deshalb, weil sie einige irrthümliche Anschauungen, die in der Fachliteratur über die Eigenschaften der Druckkurven vorhanden sind, aufzuklären und zu beseitigen vermag.

Der Ausdruck „irrthümliche Anschauungen“ dürfte vielleicht übertrieben erscheinen. Um nun dem Vorurteil des Lesers vorzubeugen, daß wir in diesem kritischen Teile unserer Abhandlung kleinlich und mit übertriebener Pedanterie vorgehen werden, wollen wir zuerst auseinanderzusetzen, was wir unter Irrtum verstehen.

In der angewandten Mechanik ist nicht jene mathematische Schärfe erforderlich wie in der reinen Mechanik. Um die Probleme der angewandten Mechanik in der mathematischen Sprache ausdrücken und um dieselben mit Hilfe der Mathematik aufzuklären und lösen zu können, müssen hinsichtlich des Materiales, der Art der Ausführung usw. Voraussetzungen gemacht werden, welche nicht vollkommen der Wirklichkeit entsprechen. Dies muß geschehen, will man nicht auf die Hilfe der Mathematik verzichten.

Die Zuverlässigkeit der Lösung des so auf das Gebiet der Mathematik übertragenen Problems ist demgemäß der Zulässigkeit der gemachten Voraussetzungen angemessen. Je weniger diese Voraussetzungen der Wirklichkeit entsprechen, umso weniger Vertrauen verdient die Lösung des gestellten Problems, welche dann nur eine annähernde ist. Deshalb ist es zulässig, bei dem mathematischen Teile der Behandlung des Problems nicht mit absoluter mathematischer Schärfe vorzugehen und Vernachlässigungen erscheinen berechtigt, wenn man sich ihrer bewußt ist und wenn sie im Einklang stehen mit der Unvollständigkeit der gemachten Voraussetzungen und mit der praktischen Bedeutung des Problems. Deshalb sind bewußte Vernachlässigungen in der mathematischen Behandlung des Problems nicht zu den Irrtümern zu zählen.

Direkte Irrtümer entstehen unserer Ansicht nach

erstens: wenn man bei der Übertragung des Problems auf das mathematische Gebiet nicht alle Umstände richtig und mit der Wirklichkeit zusammenhängend erfaßt hat, d. h. wenn die mathematische Stilisierung des Problems unrichtig ist,

zweitens: wenn die mathematische Lösung des richtig stilisierten Problems unbewußt fehlerhaft ist. Diese Art der Irrtümer, die also rein theoretischer Natur sind und in der fehlerhaften Anwendung der Theorie bestehen, sind, unserer Ansicht nach, als schwerwiegende zu betrachten, ohne Rücksicht darauf, ob der gemachte Fehler die praktische Anwendbarkeit der Lösung des Problems in Frage stellt oder nicht. Deshalb glauben wir die praktische Zulässigkeit dieser Fehler nicht untersuchen zu müssen, denn diese kann bei einem unbewußten Fehler nur die Folge des blinden Zufalls sein; und dieselbe als Rechtfertigung für den begangenen Fehler zu betrachten, hieße die Wissenschaft profanieren; außerdem bewegen sich unsere Untersuchungen auf rein theoretischem Gebiete und berühren nicht ihre praktische Anwendung.

12. Alle in den verschiedenen Theorien der Gewölbe auftretenden Irrtümer, auf die wir hier verweisen wollen, können auf zwei verschiedene Fehler in der mathematischen Behandlung des Problems zurückgeführt werden:

erstens: das Gewicht dG des unendlich dünnen Elementes $NN'N_1N_1'$ des Tragkörpers (Fig. 2, Seite 5) wird in der Mitte M der Fuge NN' wirkend angenommen und nicht im Schwerpunkt G der Fuge, wie dies nach unseren Auseinandersetzungen im Punkte 2 zu geschehen hat,

zweitens: das statische Moment M_e dieses Gewichtes bezüglich des Punktes E_1 der Druckkurve, mitunter auch die statischen Momente M_e, M_i der Belastungen der Begrenzungselemente $N'N_1'$ und NN_1 bezüglich desselben Punktes, werden als Größen zweiter Kleinheitsordnung angenommen, was nach unseren Ableitungen im Punkte 4 falsch ist.

Die erste dieser Annahmen ist kein Fehler, wenn die Fugenschnitte parallel zu einander geführt werden, d. h. wenn $\rho = \infty$, oder wenn die Fugenbreite δ im Verhältnis zu ρ als verschwindend klein angenommen werden kann. Dies trifft z. B. bei Ketten zu, doch darf diese Voraussetzung in keinem Buche, das Anspruch auf wissenschaftliche Strenge erheben will, verschwiegen werden.

Die zweite Annahme ist nur dann kein Fehler, wenn alle Lasten vertikal sind und die Fugenschnitte auch vertikal geführt werden, oder wenn der Tragkörper in eine unendlich dünne absolut biegsame Kette

übergeht. Wenn man diesen Fehler begeht, d. h. in der Gleichung (1) des ersten Kapitels setzt:

$$M_e = M_i = M_1 = 0,$$

so folgt daraus

$$\frac{V}{H} = \frac{dy}{dx}$$

oder unter Berücksichtigung der Gleichung (10)

$$\psi = \alpha,$$

was besagt, daß die Druckkraft die Druckkurve berührt. In diesen falschen Schluß, der auf die größten Absurditäten führen kann, klingen fast alle Irrtümer der Theorie der Druckkurven aus.

13. Die Erscheinungen dieser Irrtümer in allen Einzelheiten zu verfolgen, hieße einen historischen Überblick über die schon über 70 Jahre alte Theorie der Druckkurven geben, was aber weit über den Rahmen dieser Abhandlung hinausginge.¹⁾ Wir werden deshalb nur die wichtigsten Momente dieser merkwürdigen Erscheinung besprechen und nur jene Werke in Betracht ziehen, in welchen diese Irrtümer am deutlichsten hervortreten und von welchen als rein theoretischen Werken die wissenschaftliche Strenge gefordert werden muß.

Hagen behandelte in einer der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlung²⁾ das Problem des Gewölbes gleichen Widerstandes, welches wir im Punkte 6 ausführlich behandelt haben. Im mathematischen Teile der Behandlung dieses Problems nimmt Hagen als selbstverständlich an, daß die Druckkraft die Druckkurve berührt.³⁾ Dies ist nur dann richtig, wenn das Gewölbe unendlich dünn ist und mit einer Kette verglichen werden kann. Da aber das Problem der Kette gleichen Widerstandes schon im Jahre 1826 vollständig gelöst worden ist, so kann der Abhandlung von Hagen entweder Mangel an wissenschaftlicher Strenge oder Mangel an Originalität vorgeworfen werden. In der umgearbeiteten und er-

1) Über einige Irrtümer, die vor dem Jahre 1857 begangen worden sind und insofern sie als Irrtümer erkannt worden sind, siehe Scheffler: Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken. Braunschweig 1857.

2) Hagen: Über Form und Stärke der gewölbten Bogen. Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin (Mathematische Abhandlungen) 1844.

3) Bei Anwendung der von uns gewählten Bezeichnungen heißt es dort (S. 63): „Der Winkel ψ , den die Druckkraft mit der Horizontalen einschließt, bezeichnet schon die Richtung der an den Punkt E der Druckkurve gezogenen Tangente.“

weiteren zweiten Auflage dieser Abhandlung wiederholen sich dieselben Fehler.¹⁾

Résal unternahm es, die Differentialgleichung der Druckkurve aufzustellen²⁾, beging aber dabei den groben Fehler, daß er ausdrücklich behauptete, das Glied Mg der Gleichung (1) (Punkt 4) sei eine Größe zweiter Kleinheitsordnung und somit zu vernachlässigen.³⁾ Nachdem es ihm infolge dieses Irrtums nicht gelungen ist, die Gleichung der Druckkurve des kreisförmigen Gewölbes von konstanter Stärke abzuleiten, schließt er daraus, daß die Gleichungen der Druckkurven auf höhere Transzendenten führen.⁴⁾

Einen so ausgesprochenen Fehler, wie den soeben angeführten, wird man schwerlich anderswo finden, doch kehren dieselben Fehler in der Fachliteratur immer wieder, sind aber durch die daraus abgeleiteten Folgerungen mehr oder weniger verdeckt. Selbst so einfache Beziehungen, wie die im Punkte 8 abgeleiteten, sind nicht immer richtig erfaßt worden. Wir verweisen diesbezüglich auf eine Stelle in

1) Hagen: Über Form und Stärke gewölbter Bogen. Berlin 1862. Wenn wir unsere Bezeichnungen beibehalten, so finden sich dort die Gleichungen (S. 42 ff. und S. 50 ff.)

$$\frac{V}{H} = \tan \varphi, \quad \frac{dy}{dx} = \tan \varphi.$$

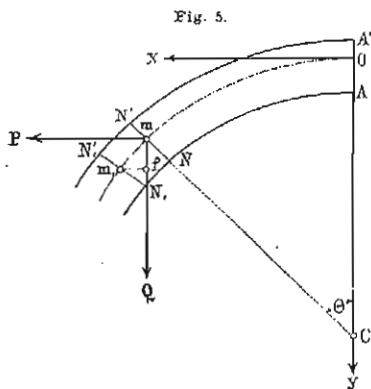
2) Résal: Traité de mécanique générale. Paris 1878—1889 (Tome 6, § 238).

3) Die Ableitung von Résal ist die folgende: Soient NN' , $N_1N'_1$ deux joints consécutifs, mm , les points correspondants d'une courbe des pressions, O l'intersection de cette courbe avec la direction $A'Ay$ du joint de la clef, Ox l'horizontale de ce point, f la projection de m , sur la direction de Q . — Conservons d'ailleurs les notations précédentes; on a $m_1f = dx$, $mf = dy$. La pression exercée sur NN' est la résultante de P et du poids Q de $NN'AA'$ ces deux forces étant censées appliquées en m . — Pour trouver la position m_1 il suffit d'exprimer que la somme des moments de P et Q et du poids de $NN'N_1N'_1$ par rapport à ce point est nulle. Or

$$Pdy = Qdx,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}.$$

4) Siehe die Fußnote auf S. 20.



le moment de ce dernier poids étant du second ordre, on a simplement:

Föppls Theorie der Gewölbe.¹⁾ Auch in einem ganz modernen Werke²⁾ können Fehler in der analytischen Behandlung der Druckkurven nachgewiesen werden.

Wir glauben, daß die angeführten Belege genügen, um unsere Behauptung zu rechtfertigen, daß in der Fachliteratur die Beziehung der Druckkraft zur Druckkurve nicht vollständig ergründet war.

14. Es soll noch hervorgehoben werden, daß die fehlerhafte Annahme, daß die Druckkraft die Druckkurve berühre, nicht von dem Begründer der Theorie der Druckkurven Moseley herrührt, der in dieser Frage klar geseheu hat³⁾, und es hat auch später nicht an Stimmen gefehlt, die auf die Irrtümlichkeit dieser Annahme hingewiesen haben. Hauptsächlich war es Scheffler, der — offenbar beeinflusst von dem Werk Moseleys, welches er ins Deutsche übersetzte — die Irrtümlichkeit dieser Annahme zu beweisen suchte.⁴⁾ Wenn trotzdem diese Irrtümer aus der Theorie der Druckkurven nicht verschwunden sind und noch heute wiederkehren, so hat diese Erscheinung, unserer Ansicht nach, folgende Erklärung: Scheffler und alle, welche seine Einwendungen wiederholt haben⁵⁾, haben doch nicht das Wesen des in Rede stehenden Irrtums vollständig klar erfaßt und weisen nur auf das Absurde der gemachten Annahme hin. Der

1) Föppl: Theorie der Gewölbe. Leipzig 1881. S. 10. — „Bei der analytischen Behandlung der Gewölbe nimmt man gewöhnlich an, das Gewölbe bestehe aus unendlich vielen unendlich dünnen Wölbsteinen. Die Druckkurve geht dadurch in eine stetig gekrümmte Linie über. Die einer endlichen Fugeneinteilung zugehörige, der vorigen entsprechende Drucklinie ist ein derselben eingeschriebenes Polygon.“ — Hier steckt ein doppelter Fehler. Das Polygon ist ein umgeschriebenes und zwar nur dann, wenn vertikale Fugenschnitte vorausgesetzt werden.

2) Résal: Stabilité des constructions. Paris 1901. — Dort heißt es, unter Beibehaltung unserer Bezeichnungen und obwohl die Fugenschnitte nicht parallel zueinander geführt werden (S. 549 ff.): „La condition de coincidence de la courbe des pressions et de la fibre moyenne nous fournit la relation:

$$\frac{V}{dy} = \frac{H}{dx}.$$

3) Siehe z. B. H. Moseley: Die mechanischen Prinzipien der Ingenieurkunst und Architektur, übers. v. H. Scheffler. Braunschweig 1846. — In diesem Werke wird hervorgehoben, daß die Druckkraft die Druckkurve (line of resistance) schneidet und der Begriff der Enveloppe der Druckkraftrichtungen (line of pressure) wird eingeführt.

4) Scheffler: Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken. Braunschweig 1857.

5) z. B. Herrmann bei der Bearbeitung der Ingenieur- und Maschinenmechanik von Weisbach; Föppl in seinen Vorlesungen über technische Mechanik.

Schefflersche Beweis, daß die Druckkraft die Druckkurve schneidet, drückt sich in der Behauptung aus, daß die Druckkurve (er nennt sie Stützlinie) nicht mit der Enveloppe der Druckkräfte-Richtungen (welche er Kettenlinie nennt) zusammenfällt¹⁾, was übrigens schon Moseley klar ausgesprochen hat. Diesen Beweis liefert Scheffler nur für den Fall, wo das Gewölbe überschüttet ist, und man ist fast verleitet zu glauben, daß er bei einem unüberschütteten Gewölbe, insbesondere bei einem solchen, welches nach der Druckkurve gekrümmt ist, die Richtigkeit der Annahme, daß die Druckkraft die Druckkurve berühre, schweigend zugibt. Daß man seine Ableitung in diesem Sinne verstanden hat, zeigt die Wiedergabe des Schefflerschen Beweises in der von Herrmann umgearbeiteten Ingenieur- und Maschinenmechanik von Weisbach²⁾, wo das Gewölbe notwendig überschüttet vorausgesetzt wird, damit der Beweis geliefert werden kann. Scheffler hat auch die von uns im Punkte 13 als irrtümlich bezeichnete Behauptung von Hagen nicht bestritten, obwohl er dessen Abhandlung einer eingehenden Kritik unterzogen hat.

Die korrekteste von den bestehenden Theorien der Druckkurven ist wohl die von Dupuit³⁾, welche sich aber auf ganz spezielle Fälle beschränkt. Die von Dupuit abgeleitete Differentialgleichung der

1) Scheffler: Theorie der Gewölbe. S. 216: Stellt man sich das auf die Fuge EF folgende Element $EFfe$ des Gewölbobogens mit seiner Belastung vor, und ist gp die durch den Schwerpunkt dieses Elementes vom Gewichte p gezogene Vertikale, welche doch nicht gerade durch den Punkt M zu gehen braucht, ferner n der Durchschnittspunkt dieser Vertikalen mit der Richtung RM der gegen die Fuge EF wirkenden Pressung R , endlich rn die von RM unendlich wenig verschiedene Resultante der beiden Kräfte R und p , welche die Fuge ef in dem Punkte m durchschneiden mag; so werden M und m zwei aufeinanderfolgende Punkte der in eine stetige Kurve übergehenden Stützlinie $Mm \dots$ sein; dagegen wird der den Punkten M und m entsprechende Anfangspunkt des in eine stetige Kettenlinie übergehenden Seilpolygons der Punkt n sein, welcher keineswegs zwischen M und m fällt und von beiden einen endlichen Abstand hat. Demnach wird die stetige

Stützlinie nicht allein eine von der Kettenlinie endlich verschiedene Form haben, sondern die korrespondierenden Punkte der letzteren werden auch um endliche Abstände aus den betreffenden Fugenschnitten herausrücken.

2) Vergleiche Weisbach, Ingenieur- und Maschinenmechanik, 5. Auflage, bearbeitet von Herrmann, Statik der Bauwerke, S. 102.

3) Dupuit: Traité de l'équilibre des voûtes et de la construction des ponts en maçonnerie. 1870.

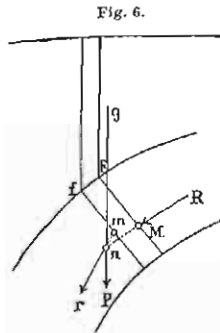


Fig. 6.

Druckkurve entspricht dem speziellen Fall eines Gewölbes, welches nur sein Eigengewicht trägt, und ist auf allgemeinere Fälle nicht anzuwenden. Ohne infinitesimale Betrachtungen über den Schwerpunkt des unendlich dünnen Tragkörperteiles war der Kern der ganzen Frage: die mathematischen Eigenschaften der Druckkurven, welche allein die Frage vollständig beleuchten können, nicht zu erfassen. Deshalb kehren die Fehler in der Theorie der Druckkurven immer wieder.

Drittes Kapitel.

Anwendungen und Beispiele.

Druckkurve im unbelasteten Kreisgewölbe von konstanter Stärke.

15. Wir wollen hier die Gleichung der Druckkurve des unbelasteten Kreisgewölbes von konstanter Gewölbstärke ableiten. Zu diesem Behufe bezeichne:

r den Radius der Bogenachse,
 a die konstante Gewölbstärke.

Der Ursprung des Koordinatensystems sei in den Druckmittelpunkt O der Scheitelfuge AB gelegt, dessen Entfernung vom Zentrum Ω der Bogenachse wir mit ϱ_0 bezeichnen. Sonst sollen die Bezeichnungen wie im Punkte 3 beibehalten werden und es sei angenommen: $\beta = 1$, $g = 1$.

Wegen der Symmetrie des Gewölbes wird die Druckkraft

der Scheitelfuge AB nur die horizontale Kraft Q sein, so daß für $x = 0$:

$$y' = 0 \quad V = P = 0 \quad H = Q.$$

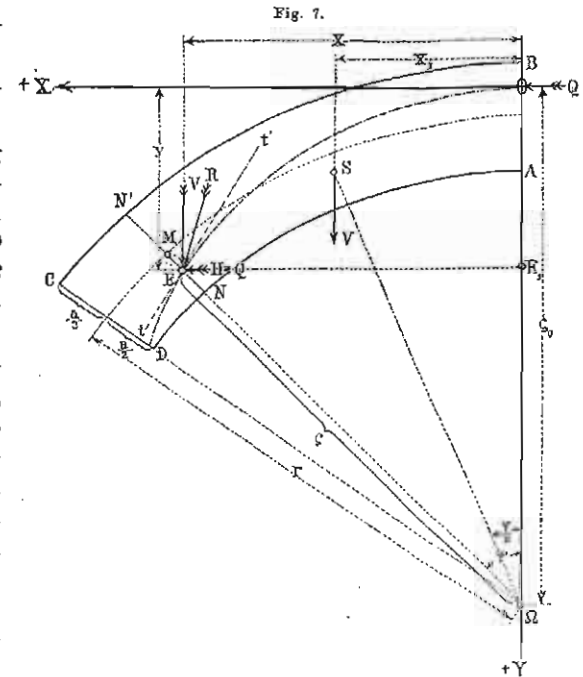


Fig. 7.

Man hat also in die Gleichungen (11), (12) und (13) des Punktes 5 einzusetzen:

$$g = 1 \quad \beta = 1 \quad \delta = a \quad \rho = r \quad p = 0 \quad d\sigma = rd\varphi \quad P = 0,$$

welche dann übergehen in:

$$(1) \quad \frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} ar \left(\frac{1}{12} \frac{a^2}{r} + \xi \right) \sin \varphi \frac{d\varphi}{dx},$$

$$(2) \quad V = ar \int_0^\varphi d\varphi = arc \varphi,$$

$$(3) \quad H = Q.$$

Geht man zu Polarkoordinaten über und wählt den Mittelpunkt Ω der Bogenachse zum Pol, die ($-Y$)-Achse zur Polachse und bezeichnet die Polarkoordinaten des Punktes E durch:

$$\overline{\Omega E} = \rho \quad \sphericalangle O\Omega E = \varphi,$$

so ist:

$$y = \rho_0 - \rho \cos \varphi \quad x = \rho \sin \varphi,$$

$$(4) \quad dy = -\cos \varphi d\rho + \rho \sin \varphi d\varphi,$$

$$(5) \quad dx = \sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi.$$

Auch hat man:

$$\xi = r - \rho.$$

Werden die Gleichungen (2), (3), (4), (5) und (6) in die Gleichung

(1) eingesetzt, so gelangt man zu der Gleichung:

$$(7) \quad \rho(ar\varphi \cos \varphi d\varphi + ar \sin \varphi d\varphi - Q \sin \varphi d\varphi) + (ar\varphi \sin \varphi + Q \cos \varphi) d\rho = -\frac{1}{12} a(a^2 + 12r^2) \sin \varphi d\varphi.$$

Diese Differentialgleichung ist eine exakte¹⁾; beiderseits stehen vollständige Differentiale, und ihre Integration liefert:

$$(8) \quad \rho(ar\varphi \sin \varphi + Q \cos \varphi) = -\frac{1}{12} a(a^2 + 12r^2) \cos \varphi + C$$

1) Die von Résal fehlerhaft abgeleitete Differentialgleichung der Druckkurve lautet, wenn wir unsere Bezeichnungen anwenden (Résal: Traité de mécanique générale, Tome 6, § 288)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{ar\varphi \cos \varphi - Q \sin \varphi}{ar\varphi \sin \varphi + Q \cos \varphi}$$

Dann heißt es weiter:

„Si l'on remarque que

$$ar\varphi \cos \varphi - Q \sin \varphi = \frac{d}{d\varphi} (ar\varphi \sin \varphi + Q \cos \varphi) - ar \sin \varphi$$

für $\varphi = 0$ ist $\rho = \rho_0$, so daß:

$$(9) \quad \rho_0 Q = -\frac{1}{12} a(a^2 + 12r^2) + C, \\ \rho(ar\varphi \sin \varphi + Q \cos \varphi) = \rho_0 Q + \frac{1}{12} a(a^2 + 12r^2)(1 - \cos \varphi) = \\ = \rho_0 Q + \frac{1}{6} a(a^2 + 12r^2) \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Es lautet demnach die Polargleichung der Druckkurve:

$$(10) \quad \rho = \frac{\rho_0 Q + \frac{1}{6} a(a^2 + 12r^2) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{Q \cos \varphi + ar\varphi \sin \varphi}.$$

16. Die gewonnene Gleichung der Druckkurve kann man benutzen, um die *mathematische Stärke* des behandelten Gewölbes zu bestimmen. Unter *mathematischer Stärke* versteht man jene minimale Stärke, bei welcher das Gewölbe noch stabil sein kann, d. h. bei welcher gerade noch eine Druckkurve ganz innerhalb des Gewölbequerschnittes verläuft.

A. Ritter²⁾, Pilgrim³⁾ und andere haben sich mit dieser Frage befaßt, deren Lösung wir hier als Anwendung der entwickelten Theorie anführen, um zu zeigen, daß die Frage ohne Schwierigkeit direkt gelöst werden kann.

Wir werden die *mathematische Stärke* eines Halbkreisgewölbes bestimmen und bemerken, daß die *mathematische Stärke* eines Segmentgewölbes nach demselben Vorgang bestimmt wird.

Nach den Untersuchungen der beiden genannten Autoren geht die der *mathematischen Stärke* entsprechende Druckkurve durch die äußeren Punkte B und C der Scheitel- und Kämpferfuge, und da sie die einzige sein soll, die ganz innerhalb des Gewölbequerschnittes verläuft, so hat man dem Gewölbe jene *Stärke* a zu geben, daß die Druckkurve den Intradoskreis berührt. Ist K der Berührungspunkt, so nennt man den Winkel $\angle A\Omega K$ den *Bruchwinkel*.

la formule précédente peut se mettre sous la forme suivante:

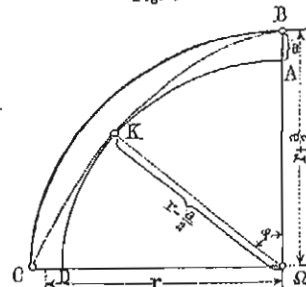
$$\log_a \frac{\rho}{\rho_0} (ar\varphi \sin \varphi + Q \cos \varphi) = ar \int \frac{\sin \varphi d\varphi}{ar\varphi \sin \varphi + Q \cos \varphi}.$$

Comme cette intégrale paraît irréductible, on voit que les courbes des pressions seront généralement transcendentes dont le tracé, si facile par la géométrie, présentera des complications sérieuses en ayant égard à leurs équations dont la considération devient pour ainsi dire complètement inutile⁴⁾.

2) A. Ritter, Lehrbuch der Ingenieurmechanik. Leipzig 1899.

3) Pilgrim, Theorie der kreisförmigen symmetrischen Tonnengewölbe von konstanter Dicke, die nur ihr eigenes Gewicht tragen. Stuttgart 1877.

Fig. 8.



Um also für diesen Fall die Stärke a und den Bruchwinkel $A\Omega K$ zu bestimmen, wird man folgendermaßen vorgehen:

Die Gleichung der Druckkurve ist nach früherem

$$(10) \quad \varrho = \frac{\varrho_0 Q + \frac{1}{2} a(a^2 + 12r^2) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{Q \cos \varphi + ar \varphi \sin \varphi},$$

und da die Druckkurve durch die Punkte B und C gehen soll, so wird für $\varphi = 0$

$$(11) \quad \varrho = r + \frac{a}{2}, \quad \text{d. h.} \quad \varrho_0 = r + \frac{a}{2},$$

für $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$(12) \quad \varrho = r + \frac{a}{2}, \quad \text{d. h.} \quad Q = \frac{3\pi ar(a+2r) - a(a^2 + 12r^2)}{3a + 12r}.$$

Die Werte für ϱ_0 und Q aus (11) und (12) in (10) eingesetzt:

$$\varrho = \frac{3\pi r(a+2r)^2 - (a+2r)(a^2 + 12r^2) \cos \varphi}{6\pi r(a+2r) \cos \varphi - 2(a^2 + 12r^2) \cos \varphi + 12r(a+2r) \varphi \sin \varphi}.$$

Setzt man:

$$(13) \quad \frac{a}{r} = n,$$

so ist

$$\varrho = \frac{r}{2} (n+2) \frac{3\pi(n+2) - (n^2 + 12) \cos \varphi}{3\pi(n+2) \cos \varphi - (n^2 + 12) \cos \varphi + 6(n^2 + 2) \varphi \sin \varphi}.$$

Setzt man außerdem:

$$(14) \quad 3\pi(n+2) - (n^2 + 12) \cos \varphi = Z,$$

$$(15) \quad 3\pi(n+2) \cos \varphi - (n^2 + 12) \cos \varphi + 6(n^2 + 2) \varphi \sin \varphi = N,$$

so ist:

$$(16) \quad \varrho = \frac{r}{2} (n+2) \frac{Z}{N}.$$

Die mathematische Stärke a ist derart zu bestimmen, daß das Minimum von ϱ gleich ist dem Radius des Intradoskreises, d. h.

$$(17) \quad \text{für } \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{soll} \quad \varrho = r - \frac{a}{2} = -\frac{r}{2} (n-2)$$

sein. Diese zwei Gleichungen bestimmen die mathematische Stärke des Gewölbes:

$$a = nr$$

und den Bruchwinkel φ .

Die beiden Gleichungen (17) lauten mit Rücksicht auf (16)

$$(18) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} = \frac{r}{2} (n+2) \frac{N \frac{\partial Z}{\partial \varphi} - Z \frac{\partial N}{\partial \varphi}}{N^2} = 0 \quad \text{oder} \quad N \frac{\partial Z}{\partial \varphi} - Z \frac{\partial N}{\partial \varphi} = 0,$$

$$(19) \quad \varrho = -\frac{r}{2} (n-2) = \frac{r}{2} (n+2) \frac{Z}{N} \quad \text{oder} \quad -(n-2)N = (n+2)Z.$$

Die Gleichungen (18) und (19) können ersetzt werden durch die Gleichungen:

$$(n+2) \frac{\partial Z}{\partial \varphi} + (n-2) \frac{\partial N}{\partial \varphi} = 0,$$

$$(n+2)Z + (n-2)N = 0.$$

Durch Einsetzung der Werte für Z und N aus (14) und (15) gelangt man zu den Gleichungen:

$$(20) \quad 3\pi(n+2)^2 - (2n^2 - 3\pi n^2 + 24n + 12\pi) \cos \varphi + 6(n^2 - 4) \varphi \sin \varphi = 0,$$

$$(21) \quad 6(n^2 - 4) \sin \varphi + (2n^2 - 3\pi n^2 + 24n + 12\pi) \sin \varphi + 6(n^2 - 4) \varphi \cos \varphi = 0.$$

Wird die Gleichung (20) mit $\sin \varphi$, Gleichung (21) mit $\cos \varphi$ multipliziert und werden beide Gleichungen addiert, so folgt:

$$\pi(n+2) \sin \varphi + (n-2) \sin 2\varphi + 2(n-2) \varphi = 0,$$

woraus:

$$(22) \quad n = 2 \frac{2\varphi + \sin 2\varphi - \pi \sin \varphi}{2\varphi + \sin 2\varphi + \pi \sin \varphi}.$$

Aus der Gleichung (21) folgt:

$$(23) \quad 2n \frac{n^2 + 12}{n^2 - 4} - 3(\pi - 2) + 6\varphi \cotg \varphi = 0.$$

Substituiert man den Wert für n aus (22) in die Gleichung (23), so bekommt man eine Gleichung mit der einen Unbekannten φ , woraus man bestimmt:

$$\varphi = 54^\circ 29' .1)$$

Dann folgt aus (22)

$$n = \frac{a}{r} = 0,1075.$$

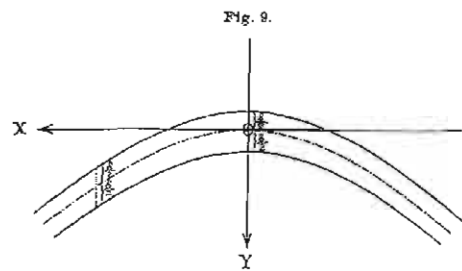
Beispiele.

17. Man konstruiere ein unbelastetes Gewölbe, welches den Forderungen genügt: 1. eine seiner Stützlinien falle mit der Gewölbsachse zusammen, 2. die Breite δ der vertikal zu führenden Fugenschnitte sei

1) Ritter gibt an $\varphi = 54^\circ 10'$, Pilgrim gibt an $\varphi = 54^\circ 27'$. Die Werte für n stimmen bei beiden Autoren mit den unserigen überein.

proportional der zu denselben senkrecht gerichteten Komponente N der Druckkraft R .

Wählt man die Scheitelmittle des Gewölbes zum Ursprung des Koordinatensystems, so ist für $x = 0$



$$y = 0, \quad P = 0, \quad H = Q$$

und mit Rücksicht auf die Gleichungen (19) und (21) des Punktes 7 ist:

$$\frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = 0, \quad V = \int_{x_0}^x \delta dx,$$

$$H = Q = N,$$

also

$$\delta = kN = k \cdot Q,$$

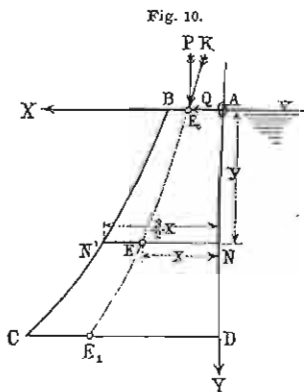
wo k eine Konstante bedeutet. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$k \int_{x_0}^x dx = kx = \frac{dy}{dx}.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert, wenn man berücksichtigt, daß für $x = 0, y = 0$:

$$y = kx^2.$$

Die Gewölbsachse ist also eine Parabel. Die Begrenzungskurven sind kongruente Parabeln, welche gegen die Gewölbsachse vertikal verschoben sind (Asymptotische Parabeln).



18. Es stelle $ABCD$ das Profil einer Talsperre dar. Deren hintere Begrenzungslinie AD ist eine vertikale Gerade. Man bestimme die vordere Begrenzungslinie $BN'C$ derart, daß bei gefülltem Becken und Belastung der Krone durch die Last K die Druckkurve durch die linksseitigen Drittelpunkte (Kernpunkte) der horizontal zu führenden Fugenschnitte hindurchgehe.

Legen wir den Ursprung des Koordinatensystems in den Punkt A . Ist dann:

$$x = f(y)$$

die Gleichung der Druckkurve, so ist

$$x' = \frac{3}{2} f(y)$$

die Gleichung der vorderen Begrenzungslinie.

Das spezifische Gewicht des Talsperre-Materialies sei g ; das spezifische Gewicht des Wassers und die Tiefe β des betrachteten Teiles der Talsperre gleich eins. Der spezifische horizontalgerichtete Wasserdruck im Punkte N ist gleich y . Es ist also in den Gleichungen (5), (7) und (8) des Punktes 4 zu setzen:

$$\beta = 1, \quad \delta = \frac{3}{2}x, \quad \rho = \infty, \quad \rho d\rho = dy, \quad \xi = \frac{3}{4}x - x = -\frac{1}{4}x,$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad p = 0, \quad q = y, \quad \eta = \frac{\pi}{2}, \quad di = dy, \quad y_0 = 0$$

Diese Gleichungen lauten dann:

$$V dx - H dy + \frac{3}{8} g x^2 dy = 0.$$

$$V = P + \frac{3}{8} g \int_0^y x dy,$$

$$H = Q + \int_0^y y dy = Q + \frac{1}{2} y^2.$$

Werden die Werte für V und H aus den zwei letzten Gleichungen in die vorhergehende eingesetzt und wird diese nach x differenziert, so gelangt man zur Differentialgleichung der Druckkurve:

$$(8Q - 3gx^2 + 4y^2) \frac{d^2y}{dx^2} + 8y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 18gx \frac{dy}{dx} = 0.$$

Es gelang uns nicht, das vollständige Integral dieser Gleichung zu bestimmen. Eines ihrer partikularen Integrale und zwar für die Werte:

$$x_0 = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0$$

lautet:

$$y = \frac{2}{3} \sqrt{gx}.$$

Es lautet also die Gleichung der vorderen Begrenzungslinie:

$$y = \sqrt{gx}.$$

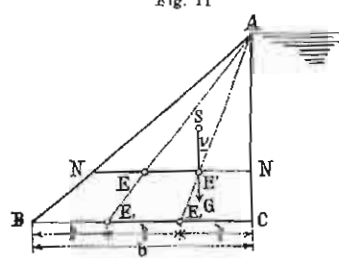
19. Die soeben gewonnene partikulare Lösung der behandelten Aufgabe zeigt folgende Eigentümlichkeiten:

Das Profil der Talsperre ist in diesem Falle ein rechtwinkliges Dreieck ADC , für welches:

$$\text{tang } \sphericalangle CAD = \frac{1}{\sqrt{g}}.$$

Die Druckkurve ist bei gefülltem Becken die Gerade AE_1 , wo E_1 im linken Drittelpunkte der Basis DC liegt.

Ist das Becken nicht gefüllt, so daß die Talsperre nur ihrem Eigengewichte unterworfen ist, so geht die Druckkraft G des beliebigen Fugenschnittes NN' , d. h. das Gewicht des Dreieckes $NN'A$ durch den rechten Drittelpunkt E' dieses Fugenschnittes. In diesem Falle ist also die Gerade AE'_1 die Druckkurve, wobei E'_1 im rechten Drittelpunkte der Basis DC liegt.



Der Winkel ν , den die Druckkraft G eines beliebigen Fugenschnittes mit der Druckkurve einschließt, ist in diesem Falle konstant und gleich:

$$\nu = \sphericalangle CAE'_1.$$

Dieser Winkel kann (unter der Einschränkung $-\frac{\pi}{2} < \nu < \frac{\pi}{2}$) mit der Vergrößerung der Basis CD beliebig

groß gemacht werden, was deutlich zeigt, wie fehlerhaft die Annahme ist, daß die Druckkraft die Druckkurve berühre.

20. Hat der Tragkörper solch eine Form, daß der Schwerpunkt des zwischen zwei beliebigen Fugenschnitten eingeschlossenen Teiles und die Mittelpunkte der Belastungen desselben bestimmt werden können, so läßt sich die Gleichung der Druckkurve direkt aufstellen und die Aufstellung ihrer Differentialgleichung kann umgangen werden.

So könnte die Gleichung der Druckkurve des im Punkte 15 behandelten Gewölbes auch wie folgt aufgestellt werden:

Ist (Fig. 7, S. 19) S der Schwerpunkt von $ABN'N$ (x_1 dessen Abszisse), in welchem Punkte man sich das Gewicht V von $ABN'N$ wirkend denken kann, so folgt wegen des Gleichgewichtes des Tragkörperteiles $ABN'N$ die Momentengleichung bezüglich E :

$$V(x - x_1) - Q \cdot y = 0.$$

Nach der Lehre vom Schwerpunkte ist

$$\overline{QS} = \frac{1}{6} \frac{a^2 + 12r^2}{r} \cdot \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\varphi},$$

und es ist deshalb

$$x_1 = \overline{QS} \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{6} \frac{a^2 + 12r^2}{r} \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\varphi}.$$

Nach den Ableitungen im Punkte 15 ist noch

$$V = ar \varphi, \quad x = r \sin \varphi, \quad y = e_0 - r \cos \varphi.$$

Werden diese Werte in die erste Gleichung eingesetzt, so bekommt man die Gleichung der Druckkurve:

$$e = \frac{e_0 Q + \frac{1}{6} a (a^2 + 12r^2) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{Q \cos \varphi + ar \varphi \sin \varphi}$$

in Übereinstimmung mit der Gleichung im Punkte 15.

Eine graphische Darstellung der geometrischen Progressionen.

Von Dr. M. MILANKOVITICH in Wien.

Mit 2 Figuren im Text.

Im nachstehenden wollen wir eine einfache und anschauliche graphische Darstellung der geometrischen Progression:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

geben. Zu diesem Ende mache man:

$$\overline{AB} = a \quad \sphericalangle CBA = 90^\circ$$

und ziehe die Geraden AS und BS' , daß:

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBD = \alpha = \arctang q.$$

Zeichnet man nun zwischen diesen zwei Geraden den Polygonalzug $ABCDEF\dots$, wo je zwei benachbarte Seiten den rechten Winkel einschließen, dann ist:

$$\overline{BC} = \overline{AB} \tan \alpha = aq$$

$$\overline{CD} = \overline{BC} \tan \alpha = aq^2$$

$$\overline{DE} = \overline{CD} \tan \alpha = aq^3$$

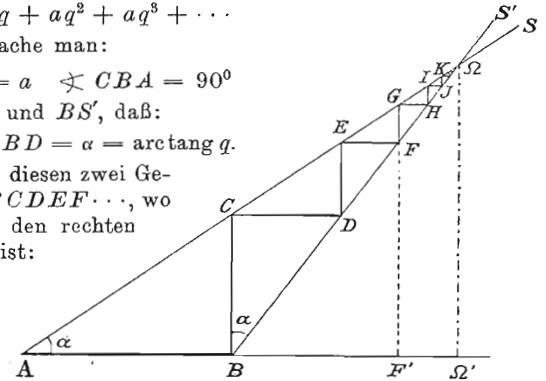


Fig. 1.

Die einzelnen Seiten des rechtwinkligen Polygonalzuges $ABCDEF\dots$ stellen demnach die entsprechenden Glieder der geometrischen Progression dar und die Summe einer beliebigen Anzahl Glieder, d. h. die Länge des dieselben darstellenden Polygons ist auch dargestellt durch die Summe seiner Horizontal- und Vertikal-Projektion. So ist z. B. die Summe der ersten fünf Glieder dargestellt durch die Länge $\overline{AF'} + \overline{F'F}$. Wenn $q < 1$, d. h. die Reihe konvergent ist, so konvergieren auch die Geraden AS und BS' — wie in Figur 1 dargestellt — und schneiden sich im Punkte Ω . Es ist sofort einzusehen, daß die Summe der unendlichen Anzahl Glieder gleich ist:

$$S = \overline{A\Omega'} + \overline{\Omega'\Omega}.$$

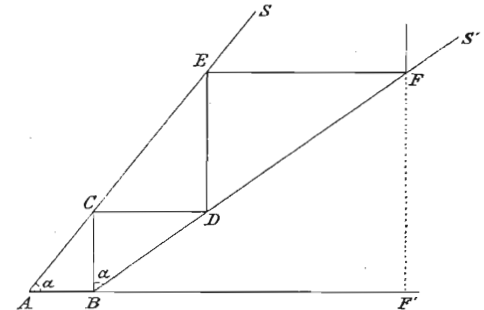


Fig. 2.

Der Begriff der Konvergenz ist hiermit geometrisch sehr klar veranschaulicht und kann diese Darstellung bei der Erklärung des Begriffes der Konvergenz und der Grenze im Unterricht gut verwendet werden.

Ist $q > 1$, d. h. ist die Reihe nicht konvergent, dann divergieren die zwei Geraden AS und BS' — wie in Figur 2 dargestellt — und die Progression ist wiederum veranschaulicht durch den Polygonalzug $ABCDEF$.

Zur Statik der massiven Widerlager.

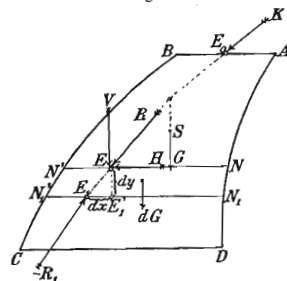
Von Dr. M. MILANKOVITCH in Wien.

Wir wollen in dieser Abhandlung drei verschiedene Formen der massiven Widerlager entwickeln, die gewissen, von vornherein gestellten Forderungen in allen ihren Teilen vollkommen entsprechen und als die *theoretisch günstigsten Formen* bezeichnet werden können.

Bevor wir zur Behandlung dieser drei Probleme schreiten, wollen wir folgende allgemeinere Betrachtungen vorausschicken:

Es sei in der Fig. 1 ein Widerlager $ABCD$ dargestellt. Dasselbe habe eine prismatische Form, seine Erzeugenden seien senkrecht zur Bildebene, die Leitlinien AND und $BN'C$ stetige Kurven (Begrenzungskurven). Die Tiefe des betrachteten Teiles

Fig. 1.



des Widerlagers — senkrecht zur Bildebene gemessen — sei gleich der Einheit. Auf diesen Teil des Widerlagers wirke im Punkte E_0 der schief gerichtete Druck K . Auf den durch eine etwaige Hinterfüllung des Rückens BC des Widerlagers hervorgerufenen Erddruck soll hier keine Rücksicht genommen werden, da derselbe vom Feuchtigkeitsgrad der Hinterfüllung abhängig ist und bei Vornahme von Reparaturen am Widerlager gänzlich verschwinden kann.

Dann wirken auf das Widerlager zwei Arten von Kräften: der schief gerichtete Druck K und das vertikal wirkende Eigengewicht des Widerlagers selbst. Die Fugen des Mauerwerks nehmen wir horizontal an, da dieselben bei den praktischen Ausführungen in Ziegel und Stein tatsächlich so ausgeführt werden und bei Ausführungen in Beton die Arbeitsgrenzen eine horizontale Lage besitzen. So wirkt dann auf eine beliebige horizontale Fuge NN' die Druckkraft R , welche sich als die Resultante des Druckes K und des Eigengewichtes G des oberhalb dieser Fuge befindlichen Widerlager-teiles $NABN'$ darstellt. Der Angriffspunkt E dieser Kraft wird der Druckmittelpunkt der Fuge NN' und der geometrische Ort der Druckmittelpunkte der horizontalen Fugen die Druckkurve genannt. Die der Fuge NN' unendlich benachbarte Fuge sei $N_1N'_1$, ihr Druckmittelpunkt sei E_1 und ihre Druckkraft R_1 . Legen wir in der Kraftebene ein orthogonales Koordinatensystem mit einer horizontalen Abszissenachse

und einer vertikalen Ordinatenachse und bezeichnen wir die Koordinaten des Punktes E mit x und y , so ist:

$$\overline{E_1E_1} = dx \quad \overline{EE_1} = dy.$$

Bezeichnen wir noch das spezifische Gewicht des Widerlagermaterials mit g , so können folgende Erwägungen angestellt werden:

Auf das unendlich schmale Körperelement $NN'N'_1N_1$ wirken folgende Kräfte:

1. die Druckkraft R der Fuge NN' , welche aus den Kräften K und G hervorgeht und welche wir in die orthogonalen Komponenten V und H zerlegt denken;
2. die negativ genommene Druckkraft R_1 der Fuge $N_1N'_1$;
3. das Eigengewicht dG des unendlich schmalen Körperelementes $NN'N'_1N_1$, welches in der Halbierungslinie der Länge NN' wirkend anzunehmen ist.

Die ersten drei dieser Kräfte sind endlich, die dritte Kraft dG verschwindet mit dx und ist von derselben Kleinheitsordnung wie dx .

Die Summe der statischen Momente dieser drei Kräfte bezüglich eines beliebigen Punktes der Kraftebene muß, wegen des notwendigen Gleichgewichtes, gleich Null sein. Wählt man somit den Punkt E_1 zum Momentenpunkt und bezeichnet das Moment der Kraft dG bezüglich dieses Punktes mit M_g (positiv, wenn im Sinne des Uhrzeigers drehend), so besteht die Gleichung:

$$(1) \quad Vdx - Hdy + M_g = 0.$$

In dieser Gleichung sind alle drei Glieder von derselben Kleinheitsordnung. In den ersten zwei Gliedern ist die Kraft endlich, der Arm unendlich klein, im dritten Glied ist die Kraft unendlich klein, der Arm dagegen endlich.

Die Momentengleichung (1) wird der Ausgangspunkt unserer Untersuchungen sein. Vorher sei jedoch der praktische Zweck der zu behandelnden Probleme in Kürze erläutert.

Von der Lage des Druckmittelpunktes in der Fuge hängt auch die Normalspannungsverteilung längs der Fuge ab. Fällt der Druckmittelpunkt mit der Mitte der Fuge zusammen, so wird die Fuge in allen ihren Punkten gleiche Normalspannungen aufweisen; im anderen Falle erfolgt die Spannungsverteilung entsprechend der Navierschen Annahme nach einer zur Fuge geneigten Geraden. Liegt der Druckmittelpunkt im mittleren Drittel der Fuge, so wird dieselbe nur Druckspannungen aufzunehmen haben, fällt dagegen der Druckmittelpunkt

außerhalb des mittleren Drittels der Fuge, so ist dieselbe auch auf Zug beansprucht. Die Materialien, aus welchen die Widerlager hergestellt werden, sind in der Regel gegen Zug nicht widerstandsfähig, und es ist die Aufgabe der Konstrukteure, das Auftreten der Zugspannungen zu verhindern. Zu diesem Ende genügt es — wie aus dem Vorhergehenden folgt — daß der Druckmittelpunkt im mittleren Drittel — Kern — der Fuge liege. Die Sonderfälle jedoch, wo der Druckmittelpunkt mit dem Mittelpunkte der Fuge oder ihrem Drittelpunkte — Kernpunkte — zusammenfällt, sind, da der erste Fall eine gleichmäßige Beanspruchung der Fuge, der zweite eine größtmögliche Ersparnis an Material ergibt, von besonderer Wichtigkeit, und mit diesen wollen wir uns hier beschäftigen.

Unsere Aufgabe wird demnach vor allem sein, die Form des Widerlagers abzuleiten, welches die Eigenschaft hat, daß es in allen seinen Teilen gleich gedrückt ist und in die Kategorie der *Körper gleichen Widerstandes* gehört, welche als die vollkommensten Konstruktionen bezeichnet werden können. Es wird sich zeigen, daß ein solches Widerlager gekrümmte Begrenzungskurven AD und BC besitzt. In der Praxis wird jedoch oft die Forderung gestellt, daß die vordere Begrenzungskurve AD eine vertikale Gerade sei und diese Forderung berücksichtigend, werden wir auch die Form des Widerlagers ableiten, dessen vordere Begrenzungslinie eine vertikale Gerade ist, dessen Druckkurve aber auch durch die Fugenmitten hindurchgeht und auf diese Weise eine gleichmäßige Spannungsverteilung längs der Fuge hervorruft. Dieser zweite Fall hat mehr ein theoretisches Interesse als praktische Bedeutung, weil diese Form des Widerlagers unökonomisch ist. Für den Fall einer vertikalen vorderen Begrenzungslinie bekommt man — falls keine Zugspannungen zugelassen werden sollen — die ökonomischste Form des Widerlagers, wenn man die Druckkurve mit den Drittelpunkten der Fugen zusammenfallen läßt, da in diesem Falle gerade noch keine Zugspannungen im Widerlager auftreten. Mit diesem Falle werden wir uns deshalb auch befassen und die betreffende Form des Widerlagers ableiten.

Das Profil des Widerlagers gleichen Widerstandes.

Es sei in Fig. 2 das Widerlagerprofil $ABCD$ dargestellt. Dasselbe sei im Mittelpunkte E_0 der Krone AB mit dem schiefen Druck K belastet, dessen wagerechte und senkrechte Komponenten die Kräfte Q und P sind. Wenn das Widerlager in allen Punkten seiner horizontalen Fugenschnitte gleich stark gedrückt sein soll, so muß offenbar seine

Druckkurve E_0EE_1 mit dem geometrischen Ort der Fugen zusammenfallen, und es muß außerdem die Breite δ einer beliebigen Fuge proportional sein der Normalkraft V derselben.

Die eingangs entwickelte Momentengleichung (1) wird demnach in diesem Falle lauten:

$$(2) \quad Vdx - Hdy = 0,$$

da das Glied M_0 als eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung verschwindet.

Es soll aber außerdem die Beziehung bestehen:

$$(3) \quad \delta = kV,$$

wo k eine Konstante bedeutet.

Die horizontale Komponente H der Druckkraft R ist offenbar gleich der horizontalen Komponente der Kraft K , da auf den Widerlagerteil ABN_1N sonst keine weitere horizontale Kraft wirkt.

$$(4) \quad H = Q.$$

Die vertikale Komponente V der Druckkraft R ist, wie leicht einzusehen:

$$(5) \quad V = P + g \int_0^y \delta dy,$$

und es ist mit Rücksicht auf (3)

$$\frac{\delta}{k} = P + g \int_0^y \delta dy.$$

Die Differentiation der vorstehenden Gleichung nach y ergibt:

$$\frac{1}{k} \frac{d\delta}{dy} = g\delta$$

oder

$$\frac{d\delta}{\delta} = kg dy,$$

woraus durch Integration — unter Berücksichtigung, daß für $y = 0$, $\delta = b$ — die Gleichung folgt:

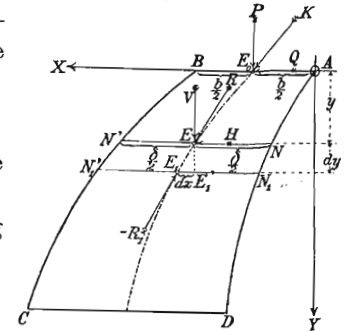
$$(6) \quad \delta = be^{kgy}.$$

Diese Gleichung gibt uns das Gesetz an, nach welchem die Fugenbreite δ nach unten hin zunehmen soll.

Die Gleichungen (2), (4), (5) und (6) ergeben die Beziehung:

$$P + gb \int_0^y e^{kgy} dy = Q \frac{dy}{dx}$$

Fig. 2.



oder

$$P + \frac{b}{k} e^{kgy} = Q \frac{dy}{dx},$$

woraus:

$$(7) \quad x = kQ \int \frac{dy}{kP + be^{kgy}} + C.$$

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen kann wie folgt transformiert werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{kP + be^{kgy}} &= \frac{1}{kP} \cdot \frac{kP + be^{kgy} - be^{kgy}}{kP + be^{kgy}} = \frac{1}{kP} \left\{ 1 - \frac{be^{kgy}}{kP + be^{kgy}} \right\} = \\ &= \frac{1}{k^2 g P} \left\{ kg - \frac{kg be^{kgy}}{kP + be^{kgy}} \right\}. \end{aligned}$$

Das unbestimmte Integral der Gleichung (7) lautet also:

$$(7) \quad x = \frac{Q}{kgP} \left\{ kgy - \log_{\text{nat}}(kP + be^{kgy}) \right\} + C.$$

Da jedoch für $y = 0$ $x = \frac{b}{2}$, so ist:

$$C = \frac{b}{2} + \frac{Q}{kgP} \log_{\text{nat}}(kP + b),$$

worauf aus (7) folgt:

$$(8) \quad x = \frac{b}{2} + \frac{Q}{kgP} \left\{ kgy - \log_{\text{nat}} \frac{kP + be^{kgy}}{kP + b} \right\}.$$

Dies ist die Gleichung der Mittellinie des Widerlagerprofils. Durch die Gleichungen (6) und (8) ist das Profil des Widerlagers gleichen Widerstandes vollkommen bestimmt.¹⁾

Wenn $Q = 0$, so lautet die Gleichung der Mittellinie der Profils $x = \frac{b}{2}$, während das Gesetz der Zunahme der Fugenbreite unverändert bleibt. Diese spezielle Form des Widerlagers ist in der technischen Mechanik unter der Bezeichnung „logistischer Körper“ bekannt.

Das Profil des Widerlagers, dessen vordere Begrenzungslinie eine Gerade ist und dessen Druckkurve durch die Fugenmittelpunkte hindurchgeht.

In der Fig. 3 sei dieser Fall dargestellt. Es ist nun unsere Aufgabe, die Form des Profils zu bestimmen. Zu diesem Ende wollen

1) Mit dem soeben behandelten Problem befaßte sich auch Resal in seiner *Stabilité des constructions*, Paris 1901 (S. 548 ff.), doch sind seine Ableitungen fehlerhaft, wie wir dies in unserer Abhandlung „Theorie der Druckkurven“, diese Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 55, nachgewiesen haben. Um Wiederholungen zu vermeiden, verweisen wir auf diese Abhandlung.

wir die Gleichung der Druckkurve ableiten, welche als die Mittellinie des Profils dasselbe vollkommen bestimmt. Die Momentengleichung (1) lautet im vorliegenden Falle:

$$V dx - Q dy = 0,$$

da wie früher $H = Q$ und das Glied M_0 eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung ist. Es ist auch, wie leicht einzusehen:

$$(9) \quad V = P + 2g \int_0^y dx,$$

so daß:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q} + \frac{2g}{Q} \int_0^y x dy.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach x bekommt man:

$$(10) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2g}{Q} x \frac{dy}{dx}.$$

Eine einmalige Integration dieser Gleichung ergibt die Beziehung:

$$(11) \quad \frac{dy}{dx} = C e^{\frac{g}{Q} x^2},$$

wo C noch eine willkürliche Konstante bedeutet, welche wie folgt bestimmt wird: Die Beziehung $\frac{dy}{dx} = \frac{V}{Q}$ besagt, daß die Druckkraft R die Druckkurve berührt, und es ist deshalb:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{y=0} = \frac{P}{Q}.$$

Es ist somit:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=b \\ y=0}} = \frac{P}{Q} = C e^{\frac{g}{Q} \cdot \frac{b^2}{4}},$$

woraus

$$C = \frac{P}{Q} e^{-\frac{g}{Q} \cdot \frac{b^2}{4}}.$$

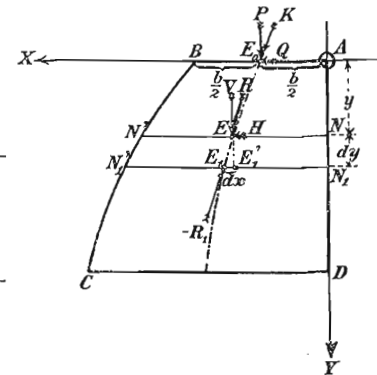
Es ist also

$$(12) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q} \cdot e^{-\frac{g}{Q} \cdot \frac{b^2}{4}} \cdot e^{\frac{g}{Q} x^2}$$

und

$$(13) \quad y = \frac{P}{Q} e^{-\frac{g}{Q} \cdot \frac{b^2}{4}} \int e^{\frac{g}{Q} x^2} \cdot dx.$$

Fig. 3.



Dies ist die Gleichung der Druckkurve. Das vorstehende Integral kann nicht in endlicher Form entwickelt werden, doch hat Stieltjes Methoden angegeben, wie dasselbe berechnet werden kann.¹⁾

Das Profil des Widerlagers, dessen vordere Begrenzungslinie eine vertikale Gerade ist und dessen Druckkurve durch die Drittelpunkte der Fugen hindurchgeht.

Dieser Fall, bei welchem also gerade noch keine Zugspannungen auftreten, sei in der Fig. 4 dargestellt. Es ist auch hier wie früher $H = Q$. Das Glied M_y der Momentengleichung (1) wird gegen die anderen Glieder der Gleichung nicht mehr verschwinden, da die Entfernung der Kraft dG vom Momentenpunkte E_1 endlich ist. Wegen der unendlichen Annäherung des Punktes E_1 an den Punkt E und der endlichen Entfernung der Kraft dG von diesen Punkten ist die Entfernung der Kraft dG von E_1 gleich ihrer Entfernung vom Punkte E und diese ist, wie sofort einzusehen, gleich $\frac{x}{4}$.

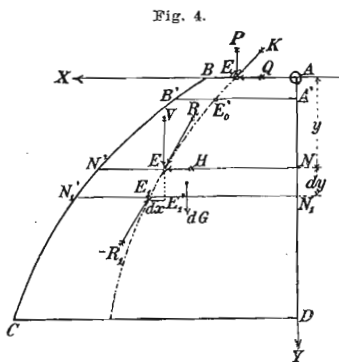


Fig. 4.

Es ist demnach

$$(14) \quad Mg = \frac{x}{4} dG = \frac{x}{4} \frac{3}{2} xg dy = \frac{3}{8} gx^2 dy,$$

und die Momentengleichung (1) lautet im vorliegenden Falle

$$(15) \quad V dx - Q dy + \frac{3}{8} gx^2 dy = 0,$$

und da

$$V = P + \frac{3}{2} g \int_0^x x dy,$$

so ist

$$(16) \quad P + \frac{3}{2} g \int_0^x x dy - Q \frac{dy}{dx} + \frac{3}{8} gx^2 \frac{dy}{dx} = 0.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach x gelangt man zur Gleichung:

$$(17) \quad \left(\frac{3}{8} gx^2 - Q\right) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{3}{4} gx \frac{dy}{dx} = 0$$

oder

$$(18) \quad \frac{\frac{d^2 y}{dx^2} dx}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{18gx}{3gx^2 - 8Q} dx,$$

1) Siehe Acta mathematica Bd. 9, 1886.

woraus durch Integration die Gleichung folgt:

$$(19) \quad \frac{dy}{dx} = C(3gx^2 - 8Q)^{-3}.$$

Für das Gleichgewicht des obersten Elementes gilt die Momentengleichung bezüglich E_0 :

$$P dx - Q dy + \frac{3}{8} gx_0^2 dy = 0,$$

woraus:

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} = -\frac{8P}{3gx_0^2 - 8Q}.$$

Es ist mit Rücksicht auf die Gleichung (19):

$$-\frac{8P}{3gx_0^2 - 8Q} = C(3gx_0^2 - 8Q)^{-3},$$

woraus:

$$C = -8P(3gx_0^2 - 8Q)^2.$$

Es ist also:

$$(20) \quad \frac{dy}{dx} = -8P(3gx_0^2 - 8Q)^2(3gx^2 - 8Q)^{-3}.$$

Wird nun der Einfachheit halber gesetzt:

$$(21) \quad \frac{8Q}{3g} = k^2,$$

so ist:

$$(22) \quad y = -\frac{8P}{3g} (x_0^2 - k^2)^2 \int \frac{dx}{(x^2 - k^2)^3}.$$

Die zu integrierende Funktion kann in folgende Partialbrüche zerlegt werden:

$$\frac{1}{(x^2 - k^2)^3} = \frac{1}{8k^3} \cdot \frac{1}{(x-k)^3} - \frac{3}{16k^4} \cdot \frac{1}{(x-k)^2} + \frac{3}{16k^5} \cdot \frac{1}{x-k} - \frac{1}{8k^3} \cdot \frac{1}{(x+k)^3} - \frac{3}{16k^4} \cdot \frac{1}{(x+k)^2} - \frac{3}{16k^5} \cdot \frac{1}{x+k}.$$

Berücksichtigt man, daß für $x = x_0$, $y = 0$, so folgt durch Integration der Gleichung (22):

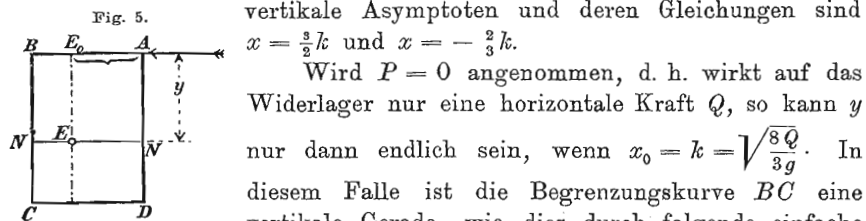
$$(23) \quad y = \frac{8P}{3g} (x_0^2 - k^2)^2 \left\{ \frac{x}{(x^2 - k^2)^2} - \frac{x_0}{(x_0^2 - k^2)^2} - \frac{3}{2k^2} \left[\frac{x}{x^2 - k^2} - \frac{x_0}{x_0^2 - k^2} \right] - \frac{3}{4k^3} \log_{\text{nat}} \frac{(x-k)(x_0+k)}{(x+k)(x_0-k)} \right\}.$$

Dies ist die Gleichung der Druckkurve $E_0EE_1E'_1$ und ist durch dieselbe das Widerlagerprofil vollkommen bestimmt.

Für $x = \pm k$ wird $y = \pm \infty$.

Es sind somit die Geraden $x = k$ und $x = -k$ Asymptoten dieser Kurve.

Die Begrenzungskurve $BN'N'_1C$ entsteht aus der Druckkurve, wenn man deren Abszissen um die Hälfte vergrößert; sie hat demnach auch vertikale Asymptoten und deren Gleichungen sind



Wird $P = 0$ angenommen, d. h. wirkt auf das Widerlager nur eine horizontale Kraft Q , so kann y nur dann endlich sein, wenn $x_0 = k = \sqrt{\frac{8Q}{3g}}$. In

diesem Falle ist die Begrenzungskurve BC eine vertikale Gerade, wie dies durch folgende einfache Überlegungen bewiesen werden soll. In der nebenstehenden Figur sei dieses Profil dargestellt, wo also

$$\overline{AE_0} = \sqrt{\frac{8Q}{3g}}$$

und

$$\overline{AB} = \frac{3}{2} \overline{AE_0} = \sqrt{\frac{6Q}{g}}$$

ist.

Das Kippmoment bezüglich des Kernpunktes E einer beliebigen Fuge ist dann:

$$M = Q \cdot y - G \cdot \frac{\overline{AB}}{6} = Q \cdot y - \frac{g}{6} \cdot \overline{AB}^3 \cdot y = 0.$$

Diese Gleichung ist das Kriterium, daß die Druckkurve durch die Kernpunkte hindurchgeht und das Profil den gestellten Bedingungen entspricht. Eine bemerkenswerte Eigenschaft dieses Spezialfalles ist, daß die Druckkraft der obersten Fuge die Druckkurve unter einem rechten Winkel schneidet.

Über ein Problem der Wärmeleitung und dessen Anwendung auf die Theorie des solaren Klimas.

Von M. MILANKOVITCH in Belgrad.

Inhaltsangabe.

In der vorliegenden Abhandlung wird zuerst das folgende Problem der Wärmeleitung behandelt:

Eine der beiden Begrenzungsebenen einer unendlich ausgebreiteten Platte endlicher Dicke wird auf einer konstanten Temperatur gehalten, während die andere periodischen Temperaturänderungen unterworfen ist, welche sich als Superposition zweier harmonischer Änderungen von verschiedener Periode darstellen lassen. Man soll die Temperaturschwankungen im Innern der Platte bestimmen.

Nach Erledigung dieses Problems werden die gewonnenen Ergebnisse auf die Theorie des solaren Klimas angewendet, unter welchem bekanntlich jenes hypothetische Klima verstanden wird, welches sich auf der überall fest gedachten Erdoberfläche einstellen würde, wenn diese von keiner Atmosphäre umgeben wäre.

Der zweite Teil der Abhandlung befaßt sich mit der Bestimmung der Temperaturänderungen, welche sich unter den vorher angegebenen Voraussetzungen auf einer beliebig gewählten Stelle der Erdoberfläche einstellen würden.

Trabert¹⁾ hat eine diesbezügliche Berechnung angestellt unter der Annahme, daß die Temperatur der Erdoberfläche das Ergebnis folgender zweier Wärmebewegungen ist: der Wärmezufuhr durch die Sonnenstrahlung und der Wärmeabfuhr infolge der Ausstrahlung in den interplanetarischen Raum. Die Bedingung, daß sich die Einstrahlung und die Ausstrahlung das Gleichgewicht halten müssen, ergibt die mittlere Temperatur des in Betracht gezogenen Zeitraumes.²⁾ Die Bewegung der Wärmemengen von der Oberfläche der Erde gegen das Innere und umgekehrt als eine Folge der Wärmeleitung hat Trabert bei seinen Berechnungen nicht in Betracht gezogen. Indessen ist der Einfluß der Wärmeleitung nicht zu vernachlässigen, und es ist leicht zu ersehen, in welchem Sinne sich dieser geltend machen wird.

Es ist eine bekannte Tatsache, und sie folgt auch aus der Fourierschen Theorie der Wärmeleitung, daß die Temperaturschwankungen der Erdoberfläche in einer ziemlich geringen Tiefe nicht mehr wahrnehmbar sind. So kann man nach Trabert³⁾ annehmen, daß sie im festen Lande in einer Tiefe von 10 m verschwindend klein werden. Es braucht demnach bei der Untersuchung der Bewegung der Wärmemengen infolge der Leitung nur die oberste Schichte der Erdkruste mit einer Dicke von 10 m in Betracht gezogen zu werden. Die untere Fläche dieser Schichte hat auf einer beliebig gewählten Stelle der Erde eine konstante Temperatur, welche sich wenig von der mittleren Jahrestemperatur der Oberfläche unterscheidet. Die Temperaturänderungen der Oberfläche haben einen doppelt oszillatorischen Charakter, indem sie die Superposition der täglichen und der jährlichen Änderungen darstellen. Im Sommer wird die mittlere tägliche Temperatur der Oberfläche höher sein als die Temperatur, auf welcher die untere Begrenzungsfläche der betrachteten Schichte konstant gehalten wird, und es

1) Trabert, Das „solare“ Klima. Meteor. Zeitschr. 1894, S. 425.

2) Siehe auch: Trabert, Lehrbuch der kosmischen Physik, Leipzig 1911, S. 487.

3) Ebenda S. 502.

wird sich demnach in dieser Jahreszeit ein Wärmefluß von der Oberfläche gegen das Innere der Erde einstellen, was zur Folge haben wird, daß die Temperatur der Erdoberfläche niedriger sein wird als sie ohne Berücksichtigung der Wärmeleitung wäre. Das Umgekehrte wird im Winter eintreten.

Die Wärmeleitung vermindert demnach die Amplitude der Temperaturschwankungen und ihr Einfluß kann unter Umständen sehr bedeutend sein. Trabert, der diesen Einfluß nicht berücksichtigte, gibt z. B. in der vorher erwähnten Abhandlung die mittleren Temperaturen des kältesten bzw. des wärmsten Monats am Pole mit -273°C , bzw. $+82^{\circ}\text{C}$ an. Wird die Wärmeleitung berücksichtigt, so ergeben sich bedeutend kleinere Temperaturschwankungen und es erweist sich die Notwendigkeit, bei der Bestimmung der Temperaturen des solaren Klimas auch den Einfluß der Wärmeleitung in Betracht zu ziehen. Das Endziel dieser Abhandlung ist die quantitative Bestimmung dieses Einflusses und der Entwurf einer Theorie des solaren Klimas, welche diesen Einfluß berücksichtigt.

Das Problem der Wärmeleitung.

Um das eingangs formulierte Problem der Wärmeleitung zu lösen, wird vor allem die Fouriersche Gleichung

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

heranzuziehen sein. In derselben bedeutet x die Entfernung eines beliebigen Punktes im Inneren der Platte von jener Begrenzungsebene, welche periodischen Temperaturänderungen unterworfen ist, u die Temperatur dieses Punktes zur Zeit t und K^2 den Temperatur-Leistungskoeffizienten der Platte. Bezeichnen wir mit k die Wärmeleitfähigkeit, mit c die spezifische Wärme und mit ρ die Dichtigkeit der Substanz der Platte, so besteht die Beziehung:

$$K^2 = \frac{k}{c\rho}$$

Die Begrenzungsebene $x = 0$ der Platte sei periodischen Temperaturänderungen unterworfen, welche durch den Ausdruck:

$$u = u_0 + A \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_0) + a \cos \frac{2\pi}{\tau} t$$

darstellbar sind, worin u_0 , A , T , τ und t_0 Konstanten bezeichnen. Diese Temperaturveränderungen sind also eine Superposition zweier harmonischer Oszillationen, und wir nehmen an, daß die Periode T der lang-

sameren Oszillation bedeutend größer ist als die Periode τ der schnelleren Oszillation, so zwar, daß der Quotient

$$\frac{\tau}{T}$$

eine sehr kleine Zahl ist.

Die Amplitude A der langsamen Oszillation ist konstant, die Amplitude a der schnelleren Oszillation kann sich mit der Zeit langsam ändern, doch so, daß der Differentialquotient

$$\frac{da}{dt}$$

immer eine sehr kleine Zahl bleibt.

Die Dicke der Platte sei h . Diese Größe soll der Bedingung genügen, daß der Ausdruck

$$e^{-\frac{h}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$$

ebenfalls eine sehr kleine Zahl ist.

Die andere Begrenzungsebene $x = h$ der Platte soll auf der konstanten Temperatur v_0 gehalten werden. Unsere Aufgabe ist demnach die folgende:

Man finde das Integral der Gleichung (1), welches folgenden Grenzbedingungen Genüge leistet:

$$(2) \begin{cases} \text{für } x = 0 \\ u = u_0 + A \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_0) + a \cos \frac{2\pi}{\tau} t \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \text{für } x = h \\ u = v_0. \end{cases}$$

Dabei sind die Größen:

$$\frac{\tau}{T}, \quad \frac{da}{dt}, \quad e^{-\frac{h}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$$

gegenüber den übrigen sehr klein.

Setzen wir:

$$(4) \quad u = u_0 + A \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_0) + \frac{x}{h} \left[v_0 - u_0 - A \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_0) \right] + a e^{\alpha t + \beta x}.$$

Diese Funktion genügt bei entsprechender Wahl der Konstanten α und β der Gleichung (1), denn es ist:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2\pi}{T} A \left(\frac{x}{h} - 1 \right) \sin \frac{2\pi}{T}(t - t_0) + e^{\alpha t + \beta x} \frac{da}{dt} + a \alpha e^{\alpha t + \beta x}.$$

Da jedoch sowohl $\frac{A}{T}$ als auch $\frac{da}{dt}$ sehr klein sind, so können die ersten zwei Glieder der rechten Seite vernachlässigt werden, so daß:

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a \alpha e^{\alpha t + \beta x}.$$

Es ist weiter:

$$(6) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a \beta^2 e^{\alpha t + \beta x}.$$

Setzen wir die Ausdrücke (5) und (6) in die Gleichung (1) ein, so sehen wir, daß diese befriedigt sein wird, wenn die Beziehung besteht:

$$\alpha = K^2 \beta^2.$$

Nehmen wir an, β sei komplex, d. h. setzen wir statt β die Ausdrücke:

$$p + i\beta, \quad p - i\beta$$

und statt α :

$$K^2(p + i\beta)^2 = K^2(p^2 - \beta^2) + 2i\beta p K^2$$

$$K^2(p - i\beta)^2 = K^2(p^2 - \beta^2) - 2i\beta p K^2.$$

Dann können wir die Größe:

$$e^{\alpha t + \beta x}$$

durch eine der folgenden zwei ersetzen:

$$e^{K^2(p^2 - \beta^2)t + 2i\beta p K^2 t + p x + i\beta x}$$

$$e^{K^2(p^2 - \beta^2)t - 2i\beta p K^2 t + p x - i\beta x},$$

oder, noch allgemeiner, durch deren Summe, nachdem wir die erste mit einer willkürlichen Konstanten C' , die zweite mit C'' multipliziert haben. Infolgedessen kann dem letzten Gliede der Gleichung (4) folgende Form gegeben werden:

$$a e^{K^2(p^2 - \beta^2)t + p x} \{ C' e^{i\beta(x + 2pK^2t)} + C'' e^{-i\beta(x + 2pK^2t)} \},$$

oder mit Rücksicht auf die Eulerschen Formeln:

$$a e^{K^2(p^2 - \beta^2)t + p x} \{ (C' + C'') \cos \beta(x + 2pK^2t) + i(C' - C'') \sin \beta(x + 2pK^2t) \}$$

Setzen wir

$$C' + C'' = C_1, \quad i(C' - C'') = C_2,$$

wo demnach C_1 und C_2 wieder zwei willkürliche Konstanten bedeuten, und außerdem:

$$p = \beta,$$

so kann der durch die Gleichung (4) dargestellten Funktion folgende Form gegeben werden:

$$(7) \quad u = u_0 + A \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_0) + \frac{x}{h} \left[v_0 - u_0 - A \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_0) \right] + a e^{p x} \{ C_1 \cos(p x + 2p^2 K^2 t) + C_2 \sin(p x + 2p^2 K^2 t) \}.$$

Diese Funktion befriedigt die Differentialgleichung (1) und hat eine solche Form, daß sie bei entsprechender Wahl der Konstanten auch den Grenzbedingungen (2) und (3) Genüge leistet; denn setzen wir:

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad p = -\frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}},$$

so erhalten wir:

$$(8) \quad u = u_0 + A \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_0) + \frac{x}{h} [v_0 - u_0 - A \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_0)] + a e^{-\frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}} \cos \left(\frac{2\pi}{\tau} t - \frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \right).$$

Setzen wir in dieser Gleichung $x = 0$, so erhalten wir:

$$u = u_0 + A \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_0) + a \cos \frac{2\pi}{\tau} t,$$

d. h. die Funktion (8) befriedigt die Grenzbedingung (2). Setzen wir in (8) $x = h$, so erhalten wir:

$$u = v_0 + a e^{-\frac{h}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}} \cos \left(\frac{2\pi}{\tau} t - \frac{h}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \right).$$

Da aber

$$e^{-\frac{h}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$$

sehr klein ist, so ist mit großer Annäherung:

$$u = v_0,$$

und die Grenzbedingung (3) ist somit auch befriedigt.

Es stellt demnach die Gleichung (8) das gesuchte Integral der partiellen Differentialgleichung (1) dar und gibt das Gesetz an, nach welchem die Temperaturen in der Platte mit der Tiefe x und der Zeit t variieren.

Ziehen wir die Temperaturänderungen in Betracht, welche während des kurzen Zeitintervalles τ in der Tiefe x stattfinden, so können während dieses Intervalles die Größen:

$$(9) \quad A \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_0) = m$$

und a als konstant angenommen werden, da sich m und a mit der Zeit langsam ändern. Die mittlere Temperatur u_x des Intervalles τ ist dann:

$$u_x = \frac{1}{\tau} \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} u dt$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (8) und die vorstehenden Bezeichnungen:

$$u_x = u_0 + m + \frac{x}{h} [v_0 - u_0 - m] + \frac{a}{\tau} e^{-\frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}} \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} \cos \left(\frac{2\pi}{\tau} t - \frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \right) dt.$$

Da aber

$$\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} \cos \left(\frac{2\pi}{\tau} t - \frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \right) dt = 0$$

ist, so ist die mittlere Temperatur des Intervalles τ in der Tiefe x gegeben durch die Gleichung:

$$(10) \quad u_x = u_0 + m + \frac{v_0 - u_0 - m}{h} x,$$

welche besagt, daß sich die mittleren Temperaturen u_x mit der Tiefe x linear ändern.

Tragen wir demnach in einem orthogonalen Koordinatensystem als Abszissen die Tiefen x und als Ordinaten die entsprechenden mittleren Temperaturen u_x auf, so stellt uns die Gerade ML die Abhängigkeit der mittleren Temperaturen von der Tiefe x während eines gewählten Intervalles τ dar. Die Ordinate des Punktes M ist $(u_0 + m)$, die Abszisse des Punktes L ist h und seine Ordinate v_0 .

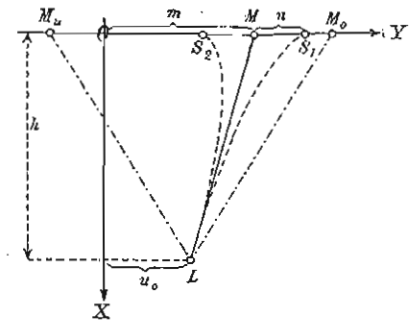
Der Gleichung (8) kann mit Rücksicht auf die Gleichungen (9) und (10) folgende Form gegeben werden:

$$(11) \quad u = u_x + a e^{-\frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}} \cos \left(\frac{2\pi}{\tau} t - \frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \right).$$

Während des betrachteten Intervalles τ oszillieren demnach die Temperaturen u um ihre Mittelwerte u_x , welche durch die Ordinaten der Geraden ML dargestellt sind. Die Amplituden dieser Oszillationen sind:

$$\pm a e^{-\frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$$

sie nehmen also mit der Tiefe x ab. Auf der oberen Begrenzungsebene der Platte ist der Wert der Amplitude gleich a , auf der unteren ist diese Amplitude verschwindend klein.



Die Kurven $S_1 L$ und $S_2 L$, deren Entfernungen in der Richtung Y von der Geraden ML gleich

$$+ ae^{-\frac{x}{k}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$$

$$- ae^{-\frac{x}{k}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$$

sind und welche sich dem Punkte L unendlich nähern, geben die Grenzen an, zwischen welchen die Temperaturen während des Intervalles τ schwanken. Während des großen Zeitintervalles T oszilliert der Punkt M langsam zwischen den Lagen M_u und M_0 , welche den mittleren Temperaturen des kältesten, bzw. des wärmsten Zeitintervalles τ entspricht. Der Punkt L ist unbeweglich.

Zur Theorie des solaren Klimas.

Denken wir uns die Atmosphäre der Erde weggeschafft und die Oberfläche der Erde überall erstarrt, so wird die Temperatur eines beliebigen Punktes der Oberfläche die Funktion folgender dreier Einflüsse sein: 1. der Sonnenstrahlung, die wir kurz Insolation nennen werden, und durch welche täglich gewisse Wärmemengen der in Betracht gezogenen Stelle zugeführt werden, 2. der Ausstrahlung in den interplanetarischen Raum, welche wir kurz Radiation nennen werden, und durch welche fortwährend eine Abfuhr der Wärmemengen von der Erdoberfläche gegen den interplanetarischen Raum bewirkt wird, 3. der Wärmeleitung, welche wir kurz Konduktion nennen werden, und durch welche nach dem Vorhergehenden eine Wärmeabfuhr von der Erdoberfläche gegen das Erdinnere oder auch umgekehrt hervorgerufen wird.

Untersuchen wir diese Einflüsse gesondert und bestimmen wir jene Wärmemengen, welche infolge dieser Einflüsse innerhalb eines Zeitintervalles τ von 24 Stunden der Erdoberfläche zu-, bzw. abgeführt werden.

Durch die Insolation wird in der Zeiteinheit der Einheit der Erdoberfläche eine Wärmemenge zugeführt, welche — wenn die Exzentrizität der Erdbahn nicht berücksichtigt wird — durch den Ausdruck:

$$(12) \quad \frac{dq_1}{dt} = A_0 J \cos z$$

dargestellt ist.

Dabei bedeutet z die Zenitdistanz der Sonne, A_0 das Absorptionsvermögen der Erdoberfläche und J die Solarkonstante.

A_0 hängt von der Beschaffenheit der Erdoberfläche an der in Betracht gezogenen Stelle ab. Wenn die Erdkruste ein vollkommen schwarzer Körper wäre, so würde $A_0 = 1$ betragen. In Wirklichkeit ist A_0 kleiner als Eins.

I ist eine Wärmemenge, welche der Einheit der vollkommen schwarzen Oberfläche in der Zeiteinheit zugeführt wird, wenn die Sonnenstrahlen auf diese Fläche senkrecht auffallen und wenn sich die Sonne in der mittleren Entfernung befindet. Diese Konstante beträgt nach den neuesten Untersuchungen¹⁾ 2 Grammkalorien für cm^2 und Minute.

Die Zenitdistanz z der Sonne ist gegeben durch die Gleichung:

$$(13) \quad \cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega,$$

wo φ die geographische Breite der in Betracht gezogenen Stelle der Erdoberfläche, δ die Deklination der Sonne und ω deren Stundenwinkel bedeutet.

Bezeichnen wir mit t die Sonnenzeit — gezählt von Mittag bis Mittag — und mit τ das Zeitintervall des Sonnentages, so ist:

$$(14) \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau} t$$

und

$$(15) \quad \cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \frac{2\pi}{\tau} t.$$

In der obigen Gleichung ist τ streng genommen nicht konstant, weil die Sonnentage nicht vollkommen gleiche Länge haben, doch ist diese Abweichung geringfügig und kann vernachlässigt werden. Auch kann $\tau = 24^h$ der mittleren Zeit gesetzt werden.

Die Gleichung (12) gilt nur für jene Zeitintervalle, wo sich die Sonne oberhalb des Horizontes befindet, d. h. nur für

$$z \leq \frac{\pi}{2}.$$

Sobald die Sonne untergeht, hört die Insolation vollkommen auf. Infolgedessen wird die Wärmemenge Δq_1 , welche während des Zeitintervalles τ der in Betracht gezogenen Stelle der Erdoberfläche zugeführt wird, gleich sein:

$$(16) \quad \Delta q_1 = \int_{-\frac{\Theta}{2}}^{+\frac{\Theta}{2}} dq_1,$$

wo Θ die Länge des Tagbogens der Sonne oder die Länge des Tages bedeutet. Diese Größe wird aus der Gleichung (15) bestimmt, wenn man in dieselbe einsetzt:

$$t = \frac{\Theta}{2}, \quad z = \frac{\pi}{2}.$$

1) Siehe Trabert, Lehrbuch der kosmischen Physik, Leipzig 1911, S. 444

Auf diese Weise erhalten wir

$$\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \frac{\pi}{\tau} \Theta = 0,$$

woraus

$$(17) \quad \cos \frac{\pi}{\tau} \Theta = -\tan \varphi \tan \delta.$$

Aus den Gleichungen (12), (15) und (16) folgt dann:

$$\Delta q_1 = A_0 I \int_{-\frac{\Theta}{\tau}}^{+\frac{\Theta}{\tau}} \left(\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \frac{2\pi}{\tau} t \right) dt.$$

Die Größe φ ist, da wir eine bestimmte Stelle der Erdoberfläche ins Auge fassen, konstant; auch kann die Deklination δ der Sonne während des Intervalles τ als konstant angesehen werden, da ihre maximale Änderung während dieses Intervalles nur 0.0064 beträgt. Es ist deshalb:

$$(18) \quad \Delta q_1 = A_0 I \left\{ \Theta \sin \varphi \sin \delta + \frac{\tau}{\pi} \cos \varphi \cos \delta \sin \frac{\pi}{\tau} \Theta \right\}.$$

Die Größe Δq_1 ist also als Funktion der Deklination der Sonne und der Tageslänge somit auch als Funktion des Datums dargestellt.

Wenden wir uns nun der Bestimmung der Wärmemenge Δq_1 zu, welche innerhalb des Zeitintervalles τ infolge der Radiation von der Erdoberfläche abgeführt wird.

Nach den Untersuchungen von Paschen¹⁾ ist die in der Zeiteinheit ausgestrahlte Wärmemenge gegeben durch den Ausdruck:

$$\frac{dq_2}{dt} = cT^\epsilon,$$

wo T die absolute Temperatur des ausstrahlenden Körpers, c und ϵ zwei Konstanten bezeichnen, welche von der Natur dieses Körpers und dessen Oberfläche abhängen. Wenn dieser Körper vollkommen schwarz wäre und wir die Zeit in Minuten, die Flächen in cm^2 messen würden, so hätte man für $\epsilon = 4$ und für $c = 0.768 \times 10^{-10}$, d. h. die Ausstrahlung wäre durch das Stefansche Gesetz geregelt. Für einen nicht vollkommen schwarzen Körper ist c stets kleiner als der oben angegebene Wert, während sich ϵ um so mehr der Zahl 5 nähert, je mehr sich der strahlende Körper von dem absolut schwarzen unterscheidet.

Siegl²⁾ hat sowohl für eine Reihe von Gesteinen, als auch für Wasser und Eis die Konstanten c und ϵ bestimmt, so daß gerade für

1) Paschen, Über die Gesamtemission glühenden Platins, Wied. Ann. 49. Über die Gesetzmäßigkeiten in den Spektren fester Körper, ebenda 58 und 60.

2) Siegl, Über das Emissionsvermögen von Gesteinen, Wasser und Eis, Wiener Sitzungsber. Math.-naturw. Klasse Bd. CXVI.

den behandelten Fall ausreichendes Beobachtungsmaterial zur Verfügung steht.

Um die Wärmemenge Δq_2 zu bestimmen, nehmen wir — dem Beispiel Traberts folgend — die Temperatur der in Betracht gezogenen Stelle der Erdoberfläche während des Zeitintervalles τ als konstant und gleich der mittleren täglichen Temperatur u_x des betreffenden Tages an. Dann ist:

$$(19) \quad \Delta q_2 = c(273 + u_x)^\epsilon \tau,$$

wo u_x in Celsiusgraden zu nehmen ist:

Es erübrigt uns noch jene Wärmemenge Δq_3 zu bestimmen, welche während des Zeitintervalles τ der Erdoberfläche durch Konduktion aus der Erdkruste zugeführt wird. Wie wir bereits in der Einleitung dargelegt haben, braucht bei dieser Untersuchung nur eine Schichte der Erdkruste von der Dicke h gleich rund 10 m in Betracht gezogen zu werden, da deren untere Begrenzungsfläche eine von der Zeit unabhängige Temperatur v_0 aufweist, welche sich wenig von der mittleren Jahrestemperatur der Oberfläche unterscheidet. Die Oberfläche dieser Schichte ist periodischen Temperaturänderungen unterworfen, welche einen doppelt oszillatorischen Charakter haben, indem sie durch Superposition der täglichen und jährlichen Änderungen entstehen. Die Periode T der jährlichen Änderungen, das Jahr, ist viel größer als die Periode τ der täglichen Änderungen, so daß der Quotient $\frac{\tau}{T} = 0.0027$ eine kleine Zahl ist. Es kann — wie dies öfters geschehen ist — angenommen werden, daß diese Änderungen harmonisch sind, d. h. es kann die Temperatur u der Erdoberfläche an einer gegebenen Stelle als eine Funktion der Zeit t von folgender Form dargestellt werden:

$$(20) \quad u = u_0 + A \cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0) + a \cos \frac{2\pi}{\tau} t.$$

A ist die Amplitude der jährlichen, a die Amplitude der täglichen Schwankungen. A ist konstant, weil nach einem Jahre dieselben die Temperatur der Oberfläche bestimmenden Verhältnisse wiederkehren; a ändert sich im allgemeinen von Tag zu Tag, doch erfolgen diese Änderungen so langsam, daß der Quotient $\frac{da}{dt}$ eine kleine Zahl ist.

Hinsichtlich der Größe u_0 ist folgendes zu bemerken: Die mittlere Jahrestemperatur u_x der Oberfläche ist gleich

$$u_x = \frac{1}{T} \int_0^T u dt = u_0 + \frac{A}{T} \int_0^T \cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0) dt + \frac{a}{T} \int_0^T \cos \frac{2\pi}{\tau} t dt.$$

Da aber

$$\int_0^{\tau} \cos \frac{2\pi}{\tau} (t - t_0) dt = 0$$

und

$$\tau = \frac{\tau}{n},$$

wo n eine ganze Zahl (365 oder 366) ist, so ist auch

$$\int_0^{\tau} \cos \frac{2\pi}{\tau} t dt = \int_0^{\tau} \cos \frac{\alpha n \pi}{T} t dt = 0,$$

und demnach

$$u_{\tau} = u_0,$$

u_0 bedeutet also die mittlere Jahrestemperatur der Erdoberfläche, an der in Betracht gezogenen Stelle.

Der betrachtete Teil der sphäroidischen Schichte der Erdkruste hat einen sehr großen Radius und kann deshalb durch eine Platte ersetzt werden, so daß die Wärmebewegung in diesem Teile der Fourierschen Gleichung:

$$(21) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

gehoren wird. Die Dicke h der betrachteten Schicht ist so gewählt, daß in der Tiefe $x = h$ die Temperaturänderungen der Oberfläche nicht

fühlbar sind, und es ist deshalb $e^{-\frac{h}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$ eine kleine Zahl. Die Temperaturänderungen in der betrachteten Schicht werden durch das partikuläre Integral der Gleichung (21) dargestellt sein, welches folgenden Grenzbedingungen Genüge leistet.

Für $x = 0$

$$u = u_0 + A \cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0) + a \cos \frac{2\pi}{\tau} t$$

und für $x = h$

$$u = u_0.$$

Dabei sind die Größen

$$\frac{\tau}{T}, \quad \frac{da}{dt}, \quad e^{-\frac{h}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$$

sehr klein.

Das zu lösende Problem ist identisch mit dem eingangs behandelten Problem der Wärmeleitung, und es wird demnach die Temperatur u in der Tiefe x und zur Zeit t durch die Gleichung (8) dargestellt sein, welche wir hier wiedergeben:

$$(22) \quad u = u_0 + A \cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0) + \frac{a}{h} \left[v_0 - u_0 - A \cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0) \right] + a e^{\frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}} \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{T}} \right).$$

Die Wärmemenge $\frac{dq_s}{dt}$, welche in der Zeiteinheit der Flächeneinheit der Oberfläche durch Konduktion zugeführt wird, ist nach den Grundannahmen der Fourierschen Theorie proportional dem Temperaturgefälle und gleich:

$$(23) \quad \frac{dq_s}{dt} = K \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0}.$$

Aus der Gleichung (22) folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v_0 - u_0}{h} - \frac{A}{h} \cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0) + \frac{a}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} e^{-\frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}} \left\{ \sin \left(\frac{2\pi}{\tau} t - \frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \right) - \cos \left(\frac{2\pi}{\tau} t - \frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \right) \right\}.$$

Es ist also

$$(24) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{v_0 - u_0}{h} - \frac{A}{h} \cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0) + \frac{a}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \left\{ \sin \frac{2\pi}{\tau} t - \cos \frac{2\pi}{\tau} t \right\}.$$

Im Zeitintervalle t bis $t + \tau$ wird der Oberfläche die Wärmemenge Δq_s zugeführt, welche gleich ist:

$$(25) \quad \Delta q_s = \int_t^{t+\tau} dq_s$$

und mit Rücksicht auf die Gleichungen (23) und (24):

$$\Delta q_s = K \frac{v_0 - u_0}{h} \tau - K \frac{A}{h} \int_t^{t+\tau} \cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0) dt + a \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_t^{t+\tau} \sin \frac{2\pi}{\tau} t dt - \int_t^{t+\tau} \cos \frac{2\pi}{\tau} t dt.$$

Die letzten zwei Integrale der vorstehenden Gleichung verschwinden und es ist

$$(26) \quad \Delta q_s = K \frac{v_0 - u_0}{h} \tau - K \frac{A}{h} \int_t^{t+\tau} \cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0) dt.$$

Bezeichnen wir wie früher mit u_{τ} die mittlere Temperatur an der Oberfläche während des in Betracht gezogenen Tages, so ist:

$$u_{\tau} \tau = \int_t^{t+\tau} u dt$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung (20)

$$u_x \tau = u_0 \tau + A \int_0^{\tau} \cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0) dt + a \int_0^{\tau} \cos \frac{2\pi}{\tau} (t - t_0) dt.$$

Das letzte Integral der vorstehenden Gleichung verschwindet, und es kann demnach der Gleichung (26) folgende Form gegeben werden:

$$(27) \quad \Delta q_3 = K \frac{v_0 - u_x}{h} \tau.$$

Nachdem nun die Wärmemengen Δq_1 , Δq_2 und Δq_3 berechnet worden sind, kann zur Bestimmung der mittleren Temperatur des Zeitintervalles τ , d. h. der mittleren Temperatur eines beliebigen Tages, geschritten werden. Auf der Oberfläche der Erde wird sich jene Temperatur einstellen, für welche die zugeführten Wärmemengen gleich den abgeführten sind. Zugeführt wurden die Wärmemengen Δq_1 und Δq_3 , abgeführt die Wärmemenge Δq_2 . Die Temperatur u_x wird man demnach aus der folgenden Gleichung bestimmen:

$$(28) \quad \Delta q_1 + \Delta q_3 = \Delta q_2.$$

Setzen wir in die obige Gleichung die Werte für Δq_1 , Δq_2 und Δq_3 aus den Gleichungen (18), (19) und (27) ein, so erhalten wir:

$$A_0 I \left\{ \Theta \sin \varphi \sin \delta + \frac{\tau}{\pi} \cos \varphi \cos \delta \sin \frac{\pi}{\tau} \Theta \right\} - c(273 + u_x) \tau + \frac{K}{h} (v_0 - u_x) \tau = 0.$$

Bezeichnen wir

$$(29) \quad \frac{\Theta}{\tau} = \lambda,$$

wo demnach λ das Verhältnis des Tagbogens der Sonne zum Bogen von 360° bedeutet, so bekommt die vorstehende Gleichung die Form

$$(30) \quad c(273 + u_x) \tau + \frac{K}{h} (u_x - v_0) \tau = A_0 I \left\{ \lambda \sin \varphi \sin \delta + \frac{1}{\pi} \cos \varphi \cos \delta \sin \lambda \pi \right\}.$$

In dieser Gleichung sind für einen gegebenen Tag alle Größen bis auf die Größen u_x und v_0 bekannt. Hinsichtlich der Größe v_0 kann folgendes bemerkt werden. Diese kann mit großer Annäherung der mittleren Jahrestemperatur u_0 gleichgesetzt werden.

Die Temperatur u_0 wird auf folgende Art berechnet: Der wärmste Tag der Oberfläche ist nach Gleichung (20) der Tag, für welchen:

$$\cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0) = 1$$

d. h.

$$t = t_0 = n_1 \tau.$$

Während dieses Tages kann die Temperatur der Oberfläche durch die Gleichung dargestellt werden:

$$u_1 = u_0 + A + a \cos \frac{2\pi}{\tau} t.$$

und es ist die mittlere Temperatur des wärmsten Tages

$$\max u_x = \frac{1}{\tau} \int_{n_1 \tau - \frac{\tau}{2}}^{n_1 \tau + \frac{\tau}{2}} u_1 dt = u_0 + A.$$

Auf dieselbe Art bekommt man die mittlere Temperatur des kältesten Tages:

$$\min u_x = u_0 - A,$$

und es ist demnach in erster Annäherung:

$$u_0 = \frac{1}{2} (\max u_x + \min u_x).$$

Mit einem angenommenen Werte für $v_0 = u_0$ werden mit Hilfe der Gleichung (30) die mittleren Temperaturen des wärmsten und des kältesten Tages an der in Betracht gezogenen Stelle der Erdoberfläche bestimmt. Diese Tage treten an der nördlichen Hemisphäre für Orte, wo $\varphi > 23^\circ 30'$ ein, wenn $\delta = 23^\circ 30'$ bzw. $\delta = -23^\circ 30'$ beträgt. Das arithmetische Mittel der berechneten Temperaturen gibt einen besseren Wert für u_0 , mit welchem die Rechnung wiederholt werden kann. Dann kann man mit Hilfe der Gleichung (30) die mittleren Temperaturen für eine größere Anzahl der über das Jahr gleichmäßig verteilten Tage berechnen, um daraus mit einer noch größeren Genauigkeit die mittlere Jahrestemperatur u_0 zu bestimmen.

Nachdem diese Berechnung durchgeführt worden ist, sind in der Gleichung (30) alle Größen bis auf die Größe u_x bekannt. Diese Gleichung gestattet uns demnach die mittlere Temperatur u_x eines beliebigen Tages im Jahre zu bestimmen, löst somit die Aufgabe, welche wir uns gestellt haben.

Belgrad, 20. März 1912.