O primjeni matematičke teorije sprovođenja toplote na probleme kosmičke fizike.

Napisao

Dr. Milutin Milanković.

(Preštampano iz 200. knjige „Rada“ Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti.)

U ZAGREBU.

TISAK DIONIČKE TISKARE

1913.

10.

O primjeni matematičke teorije sprovođenja toplote na probleme kosmičke fizike. — Über die Anwendung der mathematischen Theorie der Wärmeleitung auf Probleme der kosmischen Physik.

Izvadak iz rasprave, priopćene u „Radu", knj. 200. (1913.), str. 109. Auszug aus der im „Rad" Bd. 200 (1913), S. 109, veröffentlichten Abhandlung.

Napisao Dr. M. Milanković. — Von Dr. M. Milankovitch (Belgrad).

In der Einleitung zur Abhandlung entwirft der Verfasser eine Übersicht jener Arbeiten, welche sich mit der Anwendung der mathematischen Theorie der Wärmeleitung auf Probleme der kosmischen Physik befassen und gelangt zu dem Schlusse, daß das Gebiet solcher Anwendungen erweitert werden kann. So bieten die auf der Theorie der Sonnenstrahlung fußenden Untersuchungen der Temperaturverhältnisse auf den Oberflächen jener Mitglieder unseres Planetensystems, welche von keinen nennenswerten Atmosphären umgeben sind (Erdmond), ein dankbares Gebiet für die Anwendungen der erwähnten Theorie. Die Abhandlung hat den Zweck das mathematische Rüstzeug für solche Anwendungen vorzubereiten.

Die Oberflächentemperatur der kosmischen Körper, welche der Sonnenstrahlung direkt ausgesetzt sind, ist das Ergebnis folgender Einflüsse: a) der Sonnenstrahlung, durch welche der Einheit der Oberfläche in der Zeiteinheit die Wärmemenge $A_0 I(t)$ zugeführt wird[1], b) der Ausstrahlung in den Weltraum, durch welche der Einheit der Oberfläche in der Zeiteinheit die Wärmemenge $c(273+u_0)^\varepsilon$ entzogen wird[2] und c) der Wärmeleitung aus dem Inneren des Körpers, durch welche der Einheit der Oberfläche in der Zeiteinheit die Wärmemenge $k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}$ zugeführt wird.[1]

[1] A_0 = Absorptionsvermögen der Oberfläche; $I(t)$ = Intensität der Sonnenstrahlung für die Zeit t.

[2] c, ε sind Konstanten des Paschen'schen Strahlungsgesetzes, welches für vollkommen schwarze Körper in das Stefan'sche übergeht; u_0 ist die Temperatur der Oberfläche in Celsiusgraden.

Auf der Oberfläche des Körpers wird sich jene Temperatur einstellen, bei welcher die Wärmezufuhr gleich der Wärmeabfuhr ist, d. h. es wird die Gleichung

$$A_0 I(t) = c(273+u_0)^\varepsilon - k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} \tag{1}$$

bestehen.

Nachdem das in Betracht gezogene Element der Oberfläche des kosmischen Körpers als eben betrachtet werden kann, so gehorcht die Wärmeleitung im Inneren des Körpers der Fourierschen partiellen Differentialgleichung[2]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2}$$

wo

$$a^2 = \frac{k}{s\rho} \tag{3}$$

ist.[3]

Das zu lösende mathematische Problem ist somit das folgende: Man soll das partikuläre Integral $u = f(x, t)$ der Differentialgleichung (2) finden, welches für $x = 0$ die Grenzbedingung (1) befriedigt und für $x = \infty$ nicht unendlich wird. Dabei ist $I(t)$ eine bekannte periodische Funktion mit der Periode T.

Es ist nicht möglich eine allgemeine Lösung des soeben formulierten mathematischen Problems zu geben, doch sind wichtige Spezialfälle desselben einer exakten Lösung zugänglich und auch der allgemeine Fall kann durch sukzessive Annäherungen bewältigt werden.

[1] k = Wärmeleitfähigkeit; $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}$ = Temperaturgradient von der Oberfläche gegen das Innere des Körpers.

[2] u = Temperatur, x = Entfernung eines beliebigen Punktes im Inneren des Körpers von der Oberfläche.

[3] a^2 = Temperatur-Leitungskoeffizient, s = spezifische Wärme, ρ = Dichtigkeit der Substanz.

Von den in der Abhandlung untersuchten Fällen sei hier der folgende kurz wiedergegeben:

Die Funktion $I(t)$ oszilliert mit kleinen Amplituden um einen Mittelwert α. Dann oszilliert auch die Temperatur u der Oberfläche um einen Mittelwert u_0 und die Gleichung (1) kann nach Entwicklung des Potenzgliedes in die Binomialreihe und nach Vernachlässigung der höheren Potenzen der Temperaturschwankung auf die folgende Form gebracht werden:

$$A_0 I(t) = h(u - v_0) - k\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{4}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} c(273+u_0) - c\varepsilon(273+u_0)^{\varepsilon-1}u_0 &= -hv_0 \\ c\varepsilon(273+u_0)^{\varepsilon-1} &= h \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ist.

Die Grenzbedingung (4) bekommt, wenn man

$$v_0 + \frac{A_0}{h} I(t) = \varphi(t) \tag{6}$$

setzt, die Form:

$$\varphi(t) = u - \frac{k}{h}\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{7}$$

Es soll demnach das partikuläre Integral der Gleichung (2) gefunden werden, welches für $x = 0$ die Bedingung (7) befriedigt und für $x = \infty$ endlich bleibt.

Wird die Funktion $\varphi(t)$ in die Fourier'sche Reihe:

$$\varphi(t) = v_0 + \frac{A_0}{h}\alpha + \frac{A_0}{h}\sum_m \beta_m \cos\frac{2m\pi}{T}t + \frac{A_0}{h}\sum_m \gamma_m \sin\frac{2m\pi}{T}t \tag{8}$$

entwickelt, so ist das gesuchte Integral das nachstehende:

$$u(x,t) = v_0 + \frac{A_0}{h} + \frac{A_0}{k}\sum_m \frac{\beta_m e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}}}{\frac{h^2}{k^2} + \frac{2h}{ak}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} + \frac{2}{a^2}\frac{m\pi}{T}}$$

$$\times\left\{\left(\frac{h}{k} + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right)\cos\left(\frac{2m\pi}{T}t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\sin\left(\frac{2m\pi}{T}t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{A_0}{k}\sum_m \frac{\gamma_m e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}}}{\frac{h^2}{k^2} + \frac{2h}{ak}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} + \frac{2}{a^2}\frac{m\pi}{T}}\left\{\left(\frac{h}{k} + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right)\sin\left(\frac{2m\pi}{T}t - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right) - \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\cos\left(\frac{2m\pi}{T}t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right)\right\}. \tag{9}$$

Setzt man in die obige Gleichung $x = 0$ ein, so erhält man die Temperatur der Oberfläche als Funktion der Zeit.

Die in den Ausdrücken (5) vorkommende Größe u_0 ist aus der Gleichung

$$c(273+u_0)^\varepsilon = A_0\alpha \tag{10}$$

bestimmbar und stellt demnach jene Temperatur dar, welche sich auf der Oberfläche bei Abwesenheit der Konduktion während des mittleren Bestrahlungszustandes α einstellen würde.

Ist die Bestrahlungsfunktion $I(t)$ eine einfach harmonisch oszillierende, d. h.

$$I(t) = \alpha + \beta_1\cos\frac{2\pi}{T}t, \tag{11}$$

so ist die Temperatur der Oberfläche durch den Ausdruck:

$$u = v_0 + \alpha\frac{A_0}{h} +$$

$$+ \frac{A_0}{k}\frac{\beta_1}{\frac{h^2}{k^2} + \frac{2h}{ak}\sqrt{\frac{\pi}{T}} + \frac{1}{a^2}\frac{2\pi}{T}}\left\{\left(\frac{h}{k} + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\right)\cos\frac{2\pi}{T}t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\sin\frac{2\pi}{T}t\right\}. \tag{12}$$

dargestellt.

Die Extreme der Oberflächentemperatur treten für diejenigen Werte von t ein, welche die Gleichung:

$$\operatorname{tang} \frac{2\pi}{T} t = \frac{1}{1 + \frac{h}{as\rho}\sqrt{\frac{T}{\pi}}} \tag{13}$$

befriedigen, während die Zeitpunkte der Extreme der Insolation durch $t = n\frac{T}{2}$ (wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet) dargestellt sind. Es besteht somit eine Fasenverschiebung zwischen den Insolation- und Temperatur-Schwingungen der Oberfläche; auch werden diese Temperaturschwingungen durch den Einfluß der Konduktion im Verhältnis

$$1 : \sqrt{1 + \frac{2as\rho}{h}\sqrt{\frac{\pi}{T}} + \frac{a^2s^2\rho^2}{h^2}\frac{2\pi}{T}}$$

abgedämpft.