ALGÈBRE

ALGÈBRE

A L'USAGE

des Écoles normales primaires *(Programmes de 1905)*
des Écoles primaires supérieures
des Aspirants et Aspirantes aux Brevets de l'Enseignement primaire
et des Lycées et Collèges de jeunes Filles

PAR

Émile BOREL
Professeur à la Sorbonne
Sous-directeur
de l'École normale supérieure

ET

Maurice ROYER
Ancien professeur d'École normale
Inspecteur
de l'Enseignement primaire

Librairie Armand Colin
103, Boulevard Saint-Michel, PARIS

1917

(4e Édition)

PRÉFACE

Le présent ouvrage a été rédigé plus particulièrement pour les élèves des Écoles normales primaires, conformément aux nouveaux programmes de 1905. Il convient cependant aussi bien aux élèves des Écoles primaires supérieures ou des Écoles professionnelles, et aux candidats aux Ecoles nationales d'Arts et Métiers.

Nous nous sommes proposé en effet de présenter de la façon la plus simple et la plus pratique la matière d'un *Cours élémentaire d'Algèbre*. Nous avons eu le souci constant d'énoncer les principes et les règles de l'Algèbre comme conséquences d'observations concrètes de faits simples pris dans la réalité quotidienne. Ainsi les règles de calcul sur les nombres positifs et négatifs sont formulées après l'étude des segments, du mouvement uniforme, de problèmes sur les temps, sur les recettes et dépenses, etc.

Cette liaison intime entre les formules de l'Algèbre et la réalité journalière s'aperçoit aussi bien dans les exercices et problèmes que dans la théorie : nous avons divisé la matière en courts chapitres suivis chacun de très nombreux exercices et problèmes gradués. Nous avons pensé que le meilleur moyen pour intéresser et instruire l'élève, tout en lui montrant que l'Algèbre s'applique à un grand nombre de domaines variés, était précisément de choisir les problèmes dans l'arithmétique, dans les questions de la vie usuelle et familiale, dans l'agriculture, le commerce, l'industrie, dans la physique, la chimie, dans la géométrie usuelle.

Nous appelons toute l'attention des maîtres sur ces exercices et problèmes : tous consciencieusement rédigés et vérifiés, bien gradués, sans questions de vaine curiosité ou d'érudition, ils font de l'ouvrage un livre de bon usage. Nous sommes assurés que ce livre facilitera singulièrement la tâche du maître tout en coordonnant les divers enseignements que l'élève reçoit, en organisant et en dirigeant son travail.

Nous avons insisté sur les règles du calcul algébrique et plus particulièrement sur les produits et quotients remarquables, sur le calcul des radicaux. Nous savons en effet par expérience que l'habileté de calcul est indispensable dans toutes les questions auxquelles conduit l'emploi de l'Algèbre.

Tout en restant toujours simples, pratiques, utilitaires dans le meilleur sens du terme, bien à la portée des jeunes esprits pour lesquels nous avons écrit cet ouvrage, nous avons préparé par

notre méthode, nos remarques, nos exercices une véritable culture mathématique, nous avons voulu assurer une sérieuse initiation à ceux qui plus tard pousseront plus loin leurs études.

Dans cet esprit, nous avons étudié en un chapitre spécial les propriétés essentielles du trinome du second degré, très simplement d'ailleurs, et seulement en vue des discussions peu compliquées de problèmes pratiques du second degré. Les élèves des Écoles primaires supérieures pourront laisser cette étude de côté, bien qu'elle ne renferme aucune difficulté; les élèves des Écoles normales en tireront sans effort un grand profit.

Nous avons exposé avec soin l'étude des progressions et des logarithmes; nous avons donné beaucoup d'exemples de calculs logarithmiques afin d'habituer l'élève à une bonne disposition de ces calculs. Nous avons accordé aux questions d'intérêts composés et d'annuités toute l'importance qu'elles méritent et choisi de nombreux problèmes à la fois instructifs et pratiques dans les questions d'épargne, de mutualité, d'emprunts particuliers ou communaux.

Nous avons ajouté à la fin de l'ouvrage, dans une partie complémentaire, des notions sur la représentation graphique, dont les applications deviennent chaque jour plus nombreuses aussi bien dans les sciences que dans la vie usuelle. Ces notions sont présentées sous forme familière et concrète (graphiques du baromètre enregistreur, températures médicales, graphiques des chemins de fer, etc.).

Nous avons l'espoir que MM. les Professeurs apprécieront nos efforts. Nous leur serions très obligés de vouloir bien nous transmettre toutes les critiques que l'expérience de notre petit traité leur suggérera.

ÉMILE BOREL et MAURICE ROYER.

ALGÈBRE

LIVRE I

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

CHAPITRE I

NOTIONS PRÉLIMINAIRES EMPLOI DES LETTRES FORMULES ALGÉBRIQUES

I. — EMPLOI DES LETTRES

1. — **But de l'algèbre.**

Le principal but de l'algèbre élémentaire est de fournir un *langage abrégé* qui permette d'effectuer aisément des raisonnements généraux et d'*énoncer simplement des règles générales*. En ce sens l'algèbre permet de *simplifier* et de *généraliser* la solution des problèmes.

Un exemple va nous permettre d'en saisir les avantages : il arrive fréquemment que l'on demande de résoudre plusieurs problèmes d'arithmétique dont les énoncés ne diffèrent que par les valeurs numériques des données. Soit par exemple, les deux énoncés suivants :

a) **On sait que 2^m de drap coûtent 8^f. Combien coûtent 3^m du même drap?**

b) **On sait que 5^m de drap coûtent 30^f. Combien coûtent 7^m du même drap?**

On peut dire que ces deux énoncés constituent le *même problème* mais avec des données numériques différentes. Pour répondre aux questions posées, on aura à faire les *mêmes raisonnements;* seulement ces raisonnements ne porteront pas sur les mêmes nombres et par suite les calculs et les résultats différeront.

Lorsqu'on a ainsi plusieurs problèmes se résolvant par les mêmes raisonnements, il est fastidieux de recommencer toujours ce même raisonnement pour trouver la solution. Il est plus commode d'avoir une règle qui permette de calculer immédiatement la solution de tous les problèmes d'un même type.

Par exemple les deux énoncés donnés plus haut rentrent dans le type suivant :

Sachant qu'un certain nombre de mètres de drap coûtent un prix donné, combien coûtent tant de mètres du même drap?

On obtient la règle suivante :

Le prix cherché s'obtient en divisant le prix donné par le nombre de mètres qui coûtent ce prix donné et en multipliant le résultat obtenu par le nombre de mètres dont on cherche le prix.

En appliquant cette règle aux deux *énoncés particuliers* que nous avons donnés, on obtient :

pour le premier $\frac{8}{2} \times 3 = 12^f$,

pour le second $\frac{30}{5} \times 7 = 42^f$.

Mais on ne peut pas ne pas être frappé de la complication verbale de la règle; et si nous n'avions pas choisi un problème extrêmement simple, cette complication aurait été encore plus grande. Pour retenir, comprendre et appliquer la règle, il aurait fallu beaucoup plus de peine que pour recommencer le raisonnement direct sur chaque exemple.

2. — Emploi des lettres.

Le principal but de l'algèbre est, comme nous le disions en tête de ce chapitre, de fournir un **langage abrégé** qui permette d'effectuer aisément, c'est-à-dire avec *rapidité* et *sûreté* des raisonnements généraux et d'*énoncer simplement* les *règles générales*.

Dans ce but, au lieu des expressions vagues **un certain nombre de mètres, un prix donné**, etc., on emploie des lettres pour désigner les quantités dont la valeur *n'est pas déterminée* mais peut prendre suivant les cas des *valeurs numériques différentes*.

Reprenant toujours le même exemple, nous énoncerons ainsi le problème général :

Problème. — **Sachant que m mètres de drap coûtent a francs, combien coûtent p mètres du même drap?**

Il est aisé de faire le raisonnement général :

Si m mètres coûtent a f.,

1 mètre coûte a divisé par m, soit $\frac{a}{m}$ f.

p mètres coûtent p fois plus, soit $\frac{a}{m} \times p$ f.

ce que l'on exprime d'une manière plus abrégée :

$$\frac{a}{m}p.$$

Tel est le résultat qui peut remplacer la règle énoncée tout à l'heure.

3. — **Formules. Expressions algébriques.**

Si, pour *abréger*, nous représentons par x le nombre inconnu de francs, la solution du problème est donnée par la *formule* :

$$x = \frac{a}{m}p.$$

Cette formule est une *formule algébrique*. Son *premier membre* est x; son *second membre* est l'*expression algébrique* $\frac{a}{m}p$.

Définition. — **Une expression algébrique est un ensemble de lettres et de nombres reliés entre eux par les signes des opérations arithmétiques élémentaires, de telle manière que, si l'on remplace chaque lettre par un nombre, les règles de l'arithmétique permettent d'effectuer les opérations indiquées. Le résultat final du calcul est dit la** *valeur numérique* **de l'expression pour les** *valeurs particulières* **données aux lettres.**

Par exemple, l'expression algébrique $\frac{a}{m}p$ a pour valeur numérique 12, lorsqu'on remplace a par 8, m par 2, et p par 3, ou plus brièvement *lorsque l'on pose*

$$a = 8, \qquad m = 2, \qquad p = 3,$$

la même expression a pour valeur numérique 42 quand on pose :

$$a = 30, \qquad m = 5, \qquad p = 7.$$

On voit que la valeur numérique d'une expression algébrique dépend en général des valeurs numériques données aux lettres qui y figurent.

4. — **Avantages des formules.**

Nous verrons après avoir appris les règles du calcul algébrique, combien la notation par lettres *abrège* le raisonnement conduisant à la *formule* qui donne la solution d'un problème. Nous venons de montrer que ces formules sont *générales* en ce sens qu'elles donnent les solutions de tous les problèmes qui ne diffèrent que par les données numériques. Mais là ne se bornent pas leurs avantages.

Supposons posé le problème suivant.

Problème. — **Calculer l'intérêt i produit par un capital de a francs placé pendant n jours au taux r.**

Un raisonnement par règle de trois donne aisément la *formule* :

$$i = \frac{arn}{36\,000}.$$

Or l'étude des notions algébriques qui suivent nous montrera que cette formule justifie les suivantes :

$$a = \frac{6\,000\,i}{rn}$$
$$r = \frac{36\,000\,i}{an}$$
$$n = \frac{36\,000\,i}{ar}.$$

La même *formule*, grâce à des transformations que le calcul algébrique nous permet d'appliquer facilement, *contient la solution de plusieurs problèmes distincts.*

Dans le cas qui nous occupe, la formule donne le moyen d'obtenir l'une des quatre grandeurs i, a, r ou n connaissant trois d'entre elles, soit quatre problèmes (calcul de l'intérêt, calcul du capital, calcul du taux, calcul du temps) résolus d'un seul coup.

II. — CALCUL DES EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES

5. — Signes d'opérations.

Les signes employés en algèbre pour les diverses opérations sont les mêmes qu'en arithmétique :

Le signe + (plus) indique l'addition :

$$x + y + z.$$

Le signe — (moins) indique la soustraction :

$$a - b.$$

Le signe × (multiplié par) la multiplication :

$$a \times b \times c.$$

On le remplace quelquefois en algèbre par un point :

$$a.b.c.$$

La multiplication s'indique d'ailleurs presque

toujours en algèbre par la juxtaposition des lettres sans signe :

$$abc$$

Le signe : (divisé par) placé entre deux nombres indique la division :

$$x : y,$$

comme en arithmétique, on l'indique aussi comme suit :

$$\frac{x}{y}.$$

6. — Emploi des parenthèses.

Mais lorsque les expressions algébriques sont compliquées, il pourrait y avoir des doutes sur la marche à suivre pour calculer leur valeur numérique, si l'on ne faisait pas à ce sujet des *conventions très précises.*

Soit, pour fixer les idées, à calculer la valeur numérique de l'expression :

$$a + bc$$

dans laquelle on suppose :

$$a = 2, \qquad b = 3, \qquad c = 4.$$

Si l'on n'avait fait aucune convention, on pourrait hésiter entre les deux modes suivants :

1° ou bien multiplier 3 par 4 et ajouter le produit à 2, ce qui donne :

$$2 + 12 = 14;$$

2° ou bien ajouter 2 à 3 et multiplier la somme par 4, ce qui donne :

$$5 \times 4 = 20.$$

On convient d'adopter le *premier mode;* le second mode, donne par définition la valeur numérique de l'expression :

$$(a+b)\,c$$

qui diffère de l'expression proposée en ce que la somme $a+b$ s'y trouve placée entre parenthèses.

Nous énoncerons donc la règle suivante, conséquence des conventions adoptées pour l'écriture des expressions algébriques.

7. — Règle de calcul des expressions algébriques.

1° Pour calculer la valeur numérique d'une expression algébrique sans parenthèses, on effectue d'abord les multiplications et divisions indiquées, et ensuite les additions et soustractions.

2° Dans le cas où il y a des parenthèses, on commence par calculer chaque parenthèse isolément d'après la règle précédente, et, ensuite, on applique cette règle aux opérations restantes.

8. — Applications.

1) Soit par exemple à calculer la valeur numérique de l'expression :

$$\left(a+\frac{b}{c}\,d\right)\left(b+\frac{c^2}{d}\right)+(a+12)\,(b-3)+\frac{c}{d}\,(a+3)$$

en supposant :

$$a=1, \qquad b=8, \qquad c=4, \qquad d=2.$$

On calculera d'abord les parenthèses d'après la règle :

$$1+\frac{8}{4}\times 2= \; 1+4=5$$

$$\begin{aligned} 8+\frac{4^2}{2} &= 8+8=16 \\ 1+12 &= 13 \\ 8-3 &= 5 \\ 1+3 &= 4 \end{aligned}$$

puis, on effectuera d'après la même règle les opérations restantes, ce qui donne :

$$5\times 16+13\times 5+\frac{4}{2}\times 4=80+65+8=153$$

la valeur numérique cherchée est donc 153.

2) Soit encore l'expression :

$$\left(a+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}\right)\left(a^2+\frac{b}{c}-d\right)+(a+1)\,\frac{b^2}{c^2 d}$$

dans laquelle on donne aux lettres a, b, c, d les mêmes valeurs que dans la précédente; sa valeur numérique est :

$$\left(1+\frac{8}{4}+\frac{4}{2}\right)\left(1^2+\frac{8}{4}-2\right)+(1+1)\frac{8^2}{4^2\times 2}=5\times 1+2\times 2=9.$$

9. — Fractions et radicaux.

On considère quelquefois des expressions plus compliquées, telles que la suivante :

$$\frac{a+b}{c}\,d+\frac{a+c}{b+d}+\sqrt{a^2+21}.$$

Cette expression ne renferme pas de parenthèses; mais, en revanche, elle renferme des fractions telles que $\dfrac{a+c}{b+d}$ dont les deux termes, le numérateur $a+c$ et le dénominateur $b+d$ sont des expressions algébriques; elle renferme aussi un radical portant sur l'expression algébrique a^2+21. Il est donc nécessaire de donner une règle complémentaire :

Règle complémentaire. — **Les expressions numérateurs et dénominateurs des fractions, ainsi que les expressions placées sous des radicaux, doivent être calculées comme si elles étaient entre parenthèses.**

Ainsi l'expression donnée doit être calculée comme si elle était écrite :

$$\frac{(a+b)}{c}d+\frac{(a+c)}{(b+d)}+\sqrt{(a^2+21)}.$$

Seulement, on considère comme plus commode de ne pas écrire les parenthèses, et cette convention ne peut présenter aucun inconvénient une fois qu'elle a été comprise

Si l'on donne aux lettres a, b, c, d les valeurs suivantes :

$$a=10, \qquad b=6, \qquad c=8, \qquad d=3,$$

les parenthèses ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} 10+6&=16\\ 10+8&=18\\ 6+3&=9\\ 100+21&=121. \end{aligned}$$

Et l'expression elle-même a pour valeur numérique :

$$\frac{16}{8}\times 3+\frac{18}{9}+\sqrt{121}=6+2+11=19.$$

10. — Parenthèses superposées.

Dans certaines formules, on se trouve conduit à

superposer les parenthèses, c'est-à-dire, à employer plusieurs sortes de parenthèses de formes différentes, comprises les unes dans les autres. Dans ce cas, on doit d'abord calculer les parenthèses intérieures, puis celles qui comprennent celles-là, etc. Pour donner un exemple concret, traitons la question suivante :

(1 *Problème.* — **Un héritage est partagé également entre n héritiers. La part de chacun d'eux est égale à une somme de a francs, augmentée de ses intérêts pendant un an à p pour cent, plus une somme de b francs. Quel est le montant total de l'héritage?**

Calculons d'abord la part d'un héritier; une somme de a francs placée à intérêts à p pour cent l'an, devient au bout d'un an :

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

On doit ajouter à cette somme b francs, ce qui donne pour part d'un héritier

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)+b.$$

Pour avoir le montant total de l'héritage, nous devons, puisque les parts sont égales, multiplier cette part par le nombre n des héritiers. Pour indiquer cette opération, nous emploierons des parenthèses d'une autre forme, de sorte que le montant x de l'héritage sera donné par la formule [1] :

$$x=n\left[a\left(1+\frac{p}{100}\right)+b\right].$$

1. On pourrait, à la rigueur, n'employer qu'une seule sorte de parenthèses; mais, dans les formules un peu compliquées, il fau-

Si l'on a, par exemple :

$$n=4, \quad a=100, \quad p=3, \quad b=500,$$

on obtient :

$$x=4\,(103+500)=4\times 603=2\,412.$$

Le montant demandé est donc 2 412f.

2) *Autre exemple.* — Comme exercice sur les parenthèses multiples, considérons encore l'expression :

$$\left[(a^2+b)(c-d)+\frac{a+b}{c+d}\right]\left[(a+b)(c^2-d^2)+\frac{a}{c}(b+d)\right]+ab$$

dans laquelle on suppose :

$$a=4, \quad b=8, \quad c=2, \quad d=1,$$

on obtient :

$$\left(24\times 1+\frac{12}{3}\right)\left(12\times 3+\frac{4}{2}\times 9\right)+4\times 8$$
$$=28\times 54+32=1544.$$

Remarque 1. — Nous apprendrons plus loin à transformer les expressions algébriques en expressions *équivalentes*, c'est-à-dire en expressions qui prennent la *même valeur numérique dans tous les cas,* quelle que soit la manière dont on choisit les valeurs numériques des diverses lettres qui y figurent.

drait une très grande attention pour associer correctement le commencement et la fin d'une même parenthèse; il est plus commode d'employer des signes qui diffèrent, soit par la forme, soit tout au moins par les dimensions.

Ainsi, on constate aisément que les deux expressions :

$$(a+b)\ (a-b)$$

et :

$$a^2-b^2$$

sont équivalentes.

On pourra, grâce aux règles du calcul algébrique, *faire disparaître* la plupart des parenthèses : c'est-à-dire remplacer une expression algébrique renfermant des parenthèses par une expression équivalente n'en renfermant plus; il est utile cependant de savoir calculer directement la valeur numérique d'une expression compliquée de parenthèses.

Remarque 2. — Sur le choix des unités. Lorsque l'on applique une formule à un problème concret quelconque, le résultat est généralement un nombre concret; c'est un certain nombre de francs, de mètres, de kilogrammes, etc. De même, les nombres qui figurent dans la formule sont aussi des nombres concrets. Dans ce cas, il est essentiel de remarquer que la *formule n'est exacte que si les divers nombres concrets qui y figurent sont mesurés avec des unités appropriées;* en même temps que l'on donne la formule, *il est indispensable de faire connaître ces unités; sans quoi la formule n'a pas de sens.* Par exemple, considérons un réservoir ayant la forme d'un parallélépipède rectangle et rempli avec de l'eau à son maximum de densité. Si les dimensions des arêtes du parallélépipède sont désignées par a, b, c, le poids P de l'eau est donné par la formule :

$$P=abc.$$

Cette formule n'a un sens que si l'on ajoute que.

a, b, c, désignant des décimètres, P désignera des kilogrammes.

Il serait d'ailleurs possible de dire aussi que a, b, c sont exprimés en mètres et P en tonnes, ou que a, b, c, sont exprimés en centimètres et P en grammes; il y a toujours, pour une même formule, bien des manières différentes de choisir les unités; mais nous n'avons pas à étudier ici les relations qu'ont entre elles ces diverses manières; ce qui est essentiel, c'est de ne pas oublier le principe suivant :

Toute formule renfermant des grandeurs concrètes est démontrée en supposant ces grandeurs mesurées avec certaines unités; pour se servir de la formule, il est aussi nécessaire de connaître ces unités que la formule elle-même.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE I

Calculs des expressions algébriques.

1. — Calculer la valeur de x donnée par la formule :

$$x = a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)$$

en supposant :

$$a = 2, \quad b = 3, \quad c = 4.$$

2. — Calculer la valeur de la même expression en supposant :

$$a = 2{,}135; \quad b = 3{,}125; \quad c = 4{,}005.$$

3. — Calculer la valeur de la même expression en supposant :

$$a = \frac{3}{4}, \quad b = \frac{5}{6}, \quad c = \frac{12}{11}.$$

4. — Calculer la valeur de la même expression en supposant :

$$a = \frac{2}{3}; \quad b = 0{,}0034; \quad c = 3{,}2007.$$

5. — Calculer la valeur de y donnée par la formule :

$$y = a[b(a+c) + c^2] + (b-c)[ab + c(a-b)]$$

en supposant :

$$a = 4, \quad b = 3, \quad c = 2.$$

6. — Calculer la valeur de z donnée par la formule :

$$z = \frac{a(b+c) + c(a+b)}{a[b(a+c) + c(a-b)] + c} + (b+c)\frac{a}{b-c}$$

en supposant :

$$a = 6, \quad b = 5, \quad c = 3.$$

7. — Calculer la valeur de x donnée par la formule :

$$x = (a+b)\sqrt{c} + c\sqrt{a+12} + b\sqrt{a-c},$$

en supposant :

$$a = 13, \quad b = 2, \quad c = 12.$$

8. — Les côtés d'un triangle étant désignés par a, b, c, le demi-périmètre p, la surface S, le rayon du cercle circonscrit R, les rayons des cercles inscrits et ex-inscrits r, r', r'', r''' sont données par les formules :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$R = \frac{abc}{4S}; \quad r = \frac{S}{p}$$

$$r' = \frac{S}{p-a}; \quad r'' = \frac{S}{p-b}; \quad r''' = \frac{S}{p-c}.$$

dans lesquelles on suppose $2p = a + b + c$.

Appliquer ces formules au cas où l'on a :

$$a = 3^{\mathrm{m}}, \quad b = 4^{\mathrm{m}}, \quad c = 5^{\mathrm{m}}$$

et vérifier que l'on a :

$$4R = r' + r'' + r''' - r.$$

9. — Appliquer ces formules en supposant :

1° $a = 3^{\mathrm{cm}}, \quad b = 3^{\mathrm{cm}}, \quad c = 4^{\mathrm{cm}}$

2° $a = 3^{\mathrm{cm}}, \quad b = 4^{\mathrm{cm}}, \quad c = 4^{\mathrm{cm}}$

3° $a = 4^{\mathrm{cm}}, \quad b = 4^{\mathrm{cm}}, \quad c = 4^{\mathrm{cm}}.$

10. — Un champ a la forme d'un triangle dont les côtés ont pour longueurs respectives : 2^{km}, 3^{km}, $1\,200^{\mathrm{m}}$: Quel sera le prix de ce champ, si l'hectare de terrain vaut $3\,000^{\mathrm{f}}$?

CHAPITRE II

NOMBRES POSITIFS ET NÉGATIFS

I. — RÈGLES DE CALCUL SUR CES NOMBRES. APPLICATIONS

11. — Origine et signification.

Il arrive fréquemment que l'on considère des grandeurs susceptibles d'être comptées dans deux sens opposés : par exemple, le temps peut être compté dans le présent ou dans l'avenir; une longueur sur une droite peut être portée dans un sens ou dans l'autre à partir de l'un de ses points; les sommes qu'inscrit un commerçant sur son livre de caisse peuvent être des recettes ou des dépenses, etc.

Dans ces divers cas, il est commode, au lieu d'employer un langage plus ou moins long pour indiquer quel est le sens de la grandeur qui correspond à un nombre donné, de convenir d'une **notation abrégée**; telle est l'origine des nombres négatifs et positifs.

Par exemple, au lieu d'inscrire 50^{f} de *recettes*, nous pourrons écrire $+50^{f}$, et au lieu d'inscrire 35^{f}

de *dépenses*, nous pouvons écrire -35^{f}; au lieu d'écrire que le thermomètre marque $2°$ *au-dessus* de zéro, nous dirons qu'il marque $+2°$, et au lieu de dire qu'il marque 6 degrés *au-dessous* de zéro, nous dirons qu'il marque $-6°$.

Mais cet avantage est loin d'être le seul que présente l'introduction de ces nombres; de plus, ce que nous venons de dire ne suffit pas à faire comprendre pourquoi on emploie, pour les distinguer, les signes + et — de l'addition et de la soustraction plutôt que d'autres signes quelconques.

Nous le comprendrons mieux en résolvant le problème suivant :

Problème. — **Un habitant de Lyon voyage fréquemment sur la ligne Paris-Lyon-Marseille. Chaque jour il note la distance à laquelle il se trouve de Lyon. Il marque aujourd'hui 80^{km}. Sachant que la distance de Paris à Lyon est de 500^{km}, à quelle distance de Paris se trouve aujourd'hui ce voyageur?**

On ne peut pas répondre à cette question, car les données *sont insuffisantes*. Le voyageur peut être à 80^{km} de Lyon entre Lyon et Paris, ou bien à 80^{km} au delà de Lyon, entre Lyon et Marseille. Il est donc nécessaire de connaître *dans quel sens* le voyageur s'est déplacé sur la ligne à partir de Lyon. Pour distinguer ces deux sens, on convient de désigner l'un d'eux sous le nom de *sens positif*, soit par exemple de Lyon vers Marseille, l'autre inverse, sous le nom de *sens négatif*. Si le voyageur s'est éloigné de Lyon de 80^{km} dans le sens positif, on conviendra de dire que sa distance à Lyon est de $+80$ (que l'on énonce : *plus* 80^{km}). S'il s'est éloigné de 80^{km} dans le sens négatif, on conviendra de dire que sa distance à Lyon est de -80^{km} (que l'on énonce : *moins* 80^{km}).

$+80$ et -80 sont des nombres, l'un *positif* et l'autre *négatif*. Cette notation est très avantageuse comme *langage abrégé*. Il est plus court de dire ou d'écrire : **le voyageur est à $+80^{km}$ de Lyon,** que de dire ou d'écrire **le voyageur est à 80^{km} de Lyon dans la direction de Lyon vers Marseille.**

Nous allons voir qu'elle a encore d'autres avantages.

Calculons la distance qui sépare notre voyageur de Paris.

Si le voyageur est à $+80^{km}$ de Lyon, c'est-à-dire à 80^{km} dans la direction de Marseille sa distance de Paris est évidemment :

$$500^{km} + 80^{km} = 580^{km}.$$

Si, au contraire, sa distance de Lyon est -80^{km}, c'est-à-dire s'il est éloigné de 80^{km} dans la direction de Paris, sa distance de Paris n'est plus que :

$$500 - 80 = 420^{km}.$$

On voit que, dans les deux cas, la distance du voyageur à Paris s'obtient en écrivant à la suite de la distance de Paris à Lyon 500^{km}, **la distance dont le voyageur s'est éloigné de Lyon, avec son signe,** et en effectuant l'opération indiquée par ce signe $+$ ou $-$.

Ainsi lorsqu'on dit que la distance du voyageur à Lyon est $+80^{km}$, cela revient à dire que sa distance de Paris *est plus grande* de 80^{km} que la distance qui sépare Lyon de Paris.

Si l'on dit que sa distance de Lyon est -80^{km}, cela revient à dire que sa distance de Paris est **moins grande** de 80^{km} que la distance qui sépare Lyon de Paris. La notation abrégée se trouve ainsi parfaitement justifiée.

Autre exemple. — **Un commerçant avait en caisse au début de la journée 1 200^f. Il vient de recevoir 300^f, puis de payer une première note de 50^f et une deuxième note de 70^f. Quel est son avoir en caisse?**

Convenons d'appeler *positives* les sommes *versées* en caisse et *négatives* les sommes déboursées. Les trois opérations indiquées s'inscriront :

$$+300^f \quad -50^f \quad -70^f.$$

On voit aisément que l'avoir en caisse s'obtient en calculant comme suit :

$$\begin{aligned} 1\,200 + 300 &= 1\,500 \\ 1\,500 - 50 &= 1\,450 \\ 1\,450 - 70 &= 1\,380. \end{aligned}$$

L'avoir en caisse est de $1\,380^f$.

Il a suffi d'écrire les nombres à la suite dans l'ordre où ils se présentent et d'effectuer successivement les opérations indiquées par leurs signes.

II. — RÈGLES DE CALCUL SUR LES NOMBRES POSITIFS ET NÉGATIFS

Nous allons reprendre d'une manière plus précise la définition des nombres positifs ou négatifs, et montrer en même temps comment on peut en déduire les règles des opérations à effectuer sur ces nombres, en commençant par l'addition et la soustraction.

12. — **Segments.**

Considérons d'abord le cas où les nombres positifs et négatifs servent à mesurer des longueurs comptées dans des sens opposés.

Pour avoir une image aussi simple que possible, figurons une droite indéfinie sur laquelle nous aurons choisi un sens de parcours que nous appellerons **sens positif** et que nous indiquerons par une flèche; une telle droite s'appelle un **axe orienté** ou, plus brièvement, un **axe**. Le sens opposé au sens positif est le **sens négatif**.

On peut se figurer un promeneur qui marcherait

Fig. 1.

sur l'axe, allant tantôt en avant, tantôt à reculons, mais en regardant toujours **vers la direction positive.** Pour aller de A en B (fig. 1), le voyageur marcherait en avant; pour aller de B en A, il irait à reculons. Si ce promeneur fait des pas égaux, il peut mesurer les distances en comptant le nombre de ses pas. **Nous considérerons comme positifs les pas faits en avant, et comme négatifs les pas faits à reculons**; de telle sorte que s'il lui faut 50 pas pour parcourir la distance AB, on dira que de A vers B il y a + 50 pas et que de B vers A il y en a — 50.

On donne le nom de **segment** à une portion d'un

axe lorsqu'on porte son attention sur *le sens dans lequel elle est parcourue*, Ainsi lorsque le voyageur va de A vers B, nous dirons qu'il parcourt le segment $\overline{AB}$; lorsqu'il va de B vers A, nous dirons qu'il parcourt le segment $\overline{BA}$. Ainsi $\overline{AB}$ n'est pas la même chose que $\overline{BA}$: ce n'est pas la même chose d'aller de Paris à Lyon ou de Lyon à Paris. Dans les deux cas on parcourt la même distance désignée indifféremment par la notation AB ou BA, mais on ne marche pas dans le même sens.

Équivalents algébriques des segments.

Pour exprimer que notre promeneur fait + 50 pas pour parcourir le segment $\overline{AB}$, nous écrirons :

$$\overline{AB} = +50, \quad \text{ou} \quad \overline{AB} = 50$$

On écrirait au contraire :

$$\overline{BA} = -50$$

puisqu'il faut faire — 50 pas pour parcourir le segment $\overline{BA}$, c'est-à-dire faire 50 pas à reculons pour aller de B vers A.

Les nombres 50 et — 50 s'appellent les **équivalents algébriques** des segments $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$, l'unité choisie étant le pas du promeneur.

Bien entendu, on pourrait choisir toute autre unité; **la seule chose essentielle, c'est de bien préciser quelle unité on choisit et de ne pas en changer dans le cours d'une même question.**

L'équivalent algébrique d'un segment ne dépend pas seulement de l'unité de longueur choisie, il dépend aussi du sens choisi comme positif sur l'axe. Si la figure restant par ailleurs la même, on changeait la direction de la flèche, c'est $\overline{AB}$ qui aurait pour équivalent -50 et $\overline{BA}$ qui aurait $+50$. Il en est de la direction positive comme de l'unité de longueur; on peut la choisir arbitrairement au début d'une question, **mais il est essentiel qu'elle soit bien précisée et qu'elle ne change pas dans le courant de la question.**

13. — Valeur absolue.

La longueur 50 est dite la **valeur absolue** des nombres $+50$ et -50; c'est la longueur commune des segments $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$; ou, si l'on veut, la distance géométrique AB ou BA.

D'une manière générale, **on appelle valeur absolue d'un nombre positif ou négatif le nombre que l'on obtient en supprimant le signe.**

La valeur absolue d'un nombre positif est égale à ce nombre.

14. — Égalité.

Deux segments situés sur un même axe sont dits égaux lorsqu'ils ont même équivalent algébrique; ils doivent avoir même longueur et même sens.

Les segments $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont égaux (fig. 2). Mais le segment $\overline{AB}$ n'est pas égal au segment $\overline{DC}$; ce segment $\overline{DC}$ est égal au segment $\overline{BA}$.

Les segments $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$ sont dit **opposés**; on dira aussi que $\overline{DC}$ et $\overline{AB}$ sont opposés, puisque $\overline{DC}$ est égal à $\overline{BA}$.

Les équivalents algébriques de deux segments

opposés sont deux nombres tels que $+50$ et -50 **égaux en valeur absolue et de signes contraires** (on dit

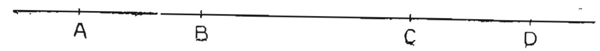


Fig. 2.

quelquefois plus brièvement mais incorrectement, égaux et de signes contraires); nous dirons aussi que ces nombres sont **opposés.**

III. — ADDITION

15. — Somme de deux nombres.

Supposons que notre promeneur fasse 5 pas en avant, et ensuite 2 pas à reculons; il parcourt d'abord (fig. 3), un segment $\overline{AB} = +5$, et ensuite un segment $\overline{BC} = -2$. Il est clair qu'il serait

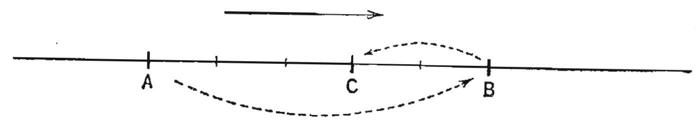


Fig. 3.

arrivé au même point C en faisant simplement 3 pas en avant, c'est-à-dire en parcourant le segment $\overline{AC} = +3$.

Ainsi parcourir successivement les segments $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ revient à parcourir le segment $\overline{AC}$. Nous exprimerons ce fait en disant que le segment $\overline{AC}$

est la somme des segments $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$, et nous écrirons :

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

On voit là quelle différence sépare la notion de segment de la notion de longueur; la longueur AB est de 5 pas, la longueur BC de 2 pas : leur somme est donc 7 pas. Et, de fait, le promeneur qui parcourt successivement ces deux longueurs fait bien 7 pas en tout et non pas 3. Seulement, comme il en fait 2 à reculons, le point où il arrive est le même que s'il avait fait seulement 3 pas en avant.

Lorsqu'on considère les segments au lieu des longueurs, on ne se préoccupe que de ce point final; on ne s'inquiète pas de la fatigue du promeneur qui aurait pu faire 1003 pas en avant et 1000 à reculons; on désire seulement savoir en quel point il arrive.

La valeur algébrique du segment $\overline{AC}$, à savoir $+3$

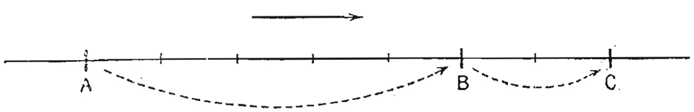


Fig. 4.

(fig. 3) est dite la **somme** des valeurs algébriques des segments $\overline{AC}$ et $\overline{BC}$, c'est-à-dire de 5 et de -2; nous pouvons écrire :

$$5 + (-2) = 3.$$

On vérifierait de même (fig. 4) que :

$$5 + 2 = 7,$$

de même (fig. 5) que :

$$-5 + 2 = -3,$$

de même enfin, que :

$$-5 - 2 = -7,$$

formules qui signifient respectivement dans cet exemple :

5 pas en avant suivis de 2 pas en avant équivalent

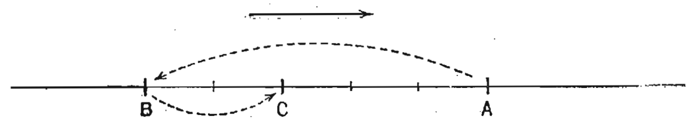


Fig. 5.

à $(5 + 2)$ ou 7 pas en avant; 5 pas à reculons suivis de 2 pas en avant équivalent à $(5 - 2)$ ou 3 pas à reculons, etc.

Nous obtenons ainsi sur un cas particulier la règle d'addition de deux nombres.

16. — Règle d'addition.

Pour obtenir la somme de deux nombres de même signe, on ajoute leurs valeurs absolues et l'on affecte la somme du signe commun.

Pour obtenir la somme de deux nombres de signes contraires, on retranche la plus petite valeur absolue de la plus grande et on affecte la différence du signe de la plus grande.

Exemples : On a d'après cette règle :

$$\begin{aligned} 3 + (-4) &= -1 \\ 125 + (-210) &= -85 \\ -3\,250 + (-3) &= -3\,253 \\ -1\,000 + 2 &= -998 \\ -1\,010 + (2\,000) &= 990 \\ 134 + (-134) &= 0. \end{aligned}$$

On voit qu'il résulte de la règle que la **somme de deux nombres opposés est toujours égale à zéro**; faire un certain nombre de pas en avant, et ensuite le même nombre de pas à reculons, équivaut à ne pas bouger, à ne faire **aucun** pas.

17. — Somme de plusieurs nombres.

Nous avons déjà calculé, dans un exemple, la somme de plusieurs nombres. C'est le résultat que l'on obtient en ajoutant le second au premier, le troisième à la somme ainsi obtenue, le quatrième à cette nouvelle somme, etc.

L'opération se réduit donc à une série d'additions de deux nombres qu'on effectue en appliquant la règle ci-dessus indiquée.

Ainsi, la somme :

$$12 + (-5) + (-28) + 13$$

s'obstiendra comme suit :

$$\begin{aligned} 12 + (-5) &= 7 \\ 7 + (-28) &= -21 \\ -21 + 13 &= -8 \end{aligned}$$

la somme demandée est -8.

18. — Théorèmes relatifs à la somme de plusieurs nombres.

On peut établir quelques propositions qui permettent d'obtenir autrement le même résultat et le plus souvent d'introduire ainsi dans les calculs des simplifications commodes.

Théorème 1. — **La somme de plusieurs nombres ne change pas quand on intervertit leur ordre.**

Par exemple, l'on a :

$$12 + (-5) + (-28) + 13 = -5 + 12 + 13 + (-28).$$

En effet, supposons que Paul ait à recevoir 12^f de Jean et 13^f de Jacques et qu'il ait d'autre part à payer une note de 5^f chez le boulanger et une autre note de 28^f chez le boucher. Il est évident que sa situation finale est la même quel que soit l'ordre dans lequel il règle ces opérations, qu'il recouvre d'abord une créance et pour cela qu'il commence par Jacques ou par Jean; qu'au contraire il paie ses dettes et pour cela qu'il aille d'abord chez le boucher ou chez le boulanger. Cette situation reste toujours qu'il a 8^f de dettes, qu'il possède -8^f.

On trouverait aisément une démonstration analogue pour les théorèmes suivants qui sont d'un usage commode :

Théorème 2. — **On ne change pas la valeur d'une somme en remplaçant plusieurs de ses parties par leur somme effectuée.**

Ainsi :

$$12 + (-5) + (-28) + 13 = 12 - 5 - 15.$$

Théorème 3. — **Pour calculer la somme de plusieurs nombres, on peut procéder comme suit : additionner les valeurs absolues des nombres positifs; additionner les valeurs absolues des nombres négatifs; retrancher la plus petite de ces sommes de la plus grande, et donner au résultat le signe de la plus grande.**

Par exemple, l'on a :

$$12 + (-5) + (-28) + 13 = 25 + (-33) = -8.$$

Suivant les cas, il peut être commode d'utiliser le premier ou le second de ces théorèmes.

Soit par exemple à calculer la somme :

$$2\,357 + (-324) + 325 + (-1\,024) + 1\,004.$$

On remarquera que l'on a :

$$-324 + 325 = 1$$
$$-1\,024 + 1\,004 = -20,$$

de sorte que l'on aura à calculer :

$$2\,357 + 1 - 20 = 2\,338.$$

Soit une autre somme à effectuer :

$$234 + (-27) + 3 + (-33) + 3 + (-300).$$

On écrira d'après le théorème 3 :

$$234 + 3 + 3 = 240,$$
$$27 + 33 + 300 = 360,$$
$$360 - 240 = 120.$$

Le résultat est -120.

IV. — SOUSTRACTION

19. — **Définition.**

La soustraction est l'opération inverse de l'addition. Retrancher un nombre d'un autre, c'est en trouver un troisième qui, ajouté au premier, reproduise le second.

Par exemple, si l'on retranche 3 de 5, on trouve 2, car $2 + 3 = 5$; si l'on retranche -3 de 5, on trouve 8, car $8 + (-3) = 5$; si l'on retranche 5 de -3, on trouve -8, car $-8 + 5 = 3$.

20. — **Règle de la soustraction.**

Pour retrancher un nombre quelconque, il suffit d'ajouter le nombre opposé.

Ainsi, pour retrancher 3, il suffit d'ajouter -3; pour retrancher -3, il suffit d'ajouter 3.

Ce principe peut être regardé comme une conséquence des exemples donnés; on peut le démontrer rigoureusement en remarquant que la somme de deux nombres opposés est nulle, on a :

$$\overline{8+3} + (-3) = 8$$
$$\underline{8 + (-3)} + 3 = 8$$

dans la première égalité $8 + 3$ est le nombre qu'il faut ajouter à (-3) pour avoir 8, c'est donc la différence de 8 et de (-3); dans la deuxième égalité, d'après la définition même de la soustraction $8 + (-3)$ est la différence de 8 et de 3.

La démonstration serait la même si au lieu de 8 on avait un nombre négatif tel que -7.

La soustraction se ramène donc à l'addition; soit par exemple à effectuer le calcul de l'expression

$$4 - (-5) + (-7) - (+4) - (-3) + 12.$$

On pourra l'écrire :

$$4 + 5 + (-7) + (-4) + 3 + 12$$

de manière qu'il n'y ait plus que des additions à effectuer; et l'on appliquera les règles que nous avons données pour l'addition.

Les théorèmes démontrés pour le cas d'additions successives s'appliquent aussi dans le cas de soustractions; en particulier, **on ne change pas le résultat final en intervertissant l'ordre des opérations**; on a par exemple :

$$4-(-3)+(-5)-(-7)=4-(-7)-(-3)+(-5).$$

21. — **Remarque pratique.**

Lorsqu'on désigne les nombres par des lettres, il peut arriver qu'une lettre a représente un nombre négatif tel que (-3); alors le symbole $-a$ signifie qu'on doit retrancher -3, c'est-à-dire que l'on doit ajouter 3; donc :

$$-(-3)=+3.$$

D'une manière générale, $-a$ désigne le nombre opposé au nombre a.

On se trouve amené ainsi parfois à superposer en quelque sorte plusieurs signes $-$; il résulte des explications précédentes que **deux signes $-$ peuvent être supprimés ou, ce qui revient au même, remplacés par un signe $+$.**

Ainsi lorsque a désigne -3,

$$-a=-(-3)=+3.$$

Si l'on a à retrancher $-a$, cela revient à ajouter a, c'est-à-dire à retrancher 3.

$$-[-(-3)]=-3.$$

Dans ce cas, nous avions *trois* signes $-$; si l'on en supprime *deux*, il n'en reste plus qu'un.

Applications. — 1° soit à calculer l'expression :

$$a-b-(-c)+(-d)$$

où l'on suppose :

$$a=10, \quad b=-4, \quad c=3, \quad d=-7.$$

On obtient :

$$10+4+3+7=24.$$

2° Calculer l'expression :

$$-a-(-b)+(-c)-(-d)$$

où l'on suppose :

$$a=4, \quad b=-6, \quad c=-3, \quad d=7.$$

On obtient :

$$-4-6+3+7=0.$$

On trouvera d'autres exemples aux exercices.

22. — **Théorèmes relatifs à la soustraction.**

Théorème 1. — **Pour retrancher une somme d'un nombre, il suffit d'en retrancher successivement les diverses parties de la somme.**

Par exemple :

$$\begin{aligned}4-[5+(-3)+(-7)+2]&=4-5-(-3)-(-7)-2\\&=4-5+3+7-2.\end{aligned}$$

Ce théorème résulte directement de la définition même de la soustraction; car, en ajoutant au second membre la somme qui figure entre crochets au premier membre, on obtient bien 4; il suffit, pour faire cette addition, d'appliquer les théorèmes relatifs à la somme de plusieurs nombres (voir page 26) les termes $+5, -5; -3, +3$, etc., se détruisent deux à deux.

Théorème 2. — **Pour retrancher d'un nombre la diffé-**

rence de deux autres, il suffit d'en retrancher le premier et d'ajouter le second au résultat obtenu.

Ainsi :

$$-5-[6-(-3)]=-5-6+(-3).$$

Car le nombre opposé à $6-(-3)$ ou $6+3$ est $-6+(-3)$.

23. — **Remarque importante, règle pratique.**

On conclut des théorèmes précédents que toute parenthèse précédée du signe + peut être supprimée; tandis que, **si l'on supprime une parenthèse précédée du signe —, il faut changer les signes qui précèdent les nombres placés à son intérieur.**

Dans l'application de cette règle pratique, on doit avoir grand soin d'observer que, dans le cas où plusieurs signes se trouvent superposés devant un même nombre, il ne faut changer que l'un d'eux. Soit, par exemple, à calculer l'expression suivante :

$$5-[2-(-3)].$$

On obtiendra :

$$5-2+(-3).$$

On a eu soin de changer l'un des signes — qui précédaient 3, mais on n'a pas changé les deux. Pratiquement, d'ailleurs, on évitera le plus possible ces superpositions de signes, en effectuant immédiatement les opérations indiquées. Par exemple :

$$5-[2-(-3)]$$

s'écrira de suite :

$$5-[2+3].$$

V. — MULTIPLICATION

La notion concrète d'addition algébrique nous a été donnée par l'examen des *segments* de droite, nous avons pu en déduire aisément la règle de calcul. Nous allons procéder aussi par une étude concrète, celle du *mouvement uniforme* pour bien faire comprendre ce que signifie la multiplication des nombres positifs et négatifs et quelle est l'origine de la règle d'opération.

24. — **Étude du mouvement uniforme.**

Considérons un promeneur, figuré par le point A se déplaçant sur un *axe* dans les conditions indiquées plus haut à propos des segments (voir page 20). On dit que le mouvement du point A est **uniforme** lorsque les *espaces qu'il parcourt dans des temps égaux sont toujours égaux*. Ainsi l'espace parcouru pendant une heure est toujours le même, l'espace parcouru pendant une minute est toujours le même, etc.

Dans cette définition, il ne faut pas perdre de vue que le point A se déplace **sur un axe**, c'est-à-dire que les espaces ne sont considérés comme égaux que s'ils sont **égaux en valeur absolue, et de même signe.**

Un promeneur qui marche d'un pas égal sur une route se déplace à peu près d'un mouvement uniforme, **s'il se dirige toujours dans le même sens**; il n'en est pas de même s'il se promène de long en large dans un corridor.

25. — **Vitesse.**

On appelle **vitesse** d'un mouvement uniforme l'espace parcouru pendant l'**unité de temps.**

Pour déterminer la vitesse, il est donc nécessaire de connaître : 1° le mouvement; 2° le sens choisi comme sens positif; 3° l'unité de longueur; 4° l'unité de temps.

Il résulte de la définition de la **vitesse** que **c'est** un **nombre positif ou négatif**, suivant que le mobile se déplace dans le sens positif ou dans le sens négatif.

Problème. — **Proposons-nous de trouver quel est l'espace parcouru dans un temps** t**, la vitesse étant** v**.**

1er CAS. — Supposons par exemple que notre promeneur fasse 3 pas à la seconde, qu'il se dirige à partir de A dans le sens positif, quel est l'espace parcouru (en pas) au bout de 4 secondes.

La vitesse s'exprime par $+3$, le temps par $+4$.

Le promeneur fait en 4 secondes $3 \times 4 = 12$ pas;

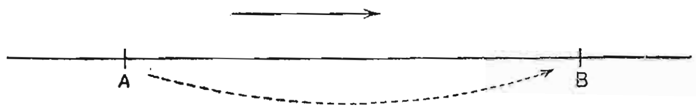


Fig. 6.

il les parcourt dans le sens positif, l'espace parcouru $\overline{AB}$ (fig. 6) — est donc :

$$\overline{AB} = +12.$$

Nous exprimons cela comme il suit :

$$(+3) \times (+4) = +12.$$

$+12$ est appelé **produit algébrique** de $+3$ par $+4$.

2e CAS. — Supposons que le promeneur aille à reculons, sa vitesse est -3.

Il parcourt en 4 secondes $3 \times 4 = 12$ pas, comme tout à l'heure, mais le segment $\overline{AB}$ qu'il parcourt

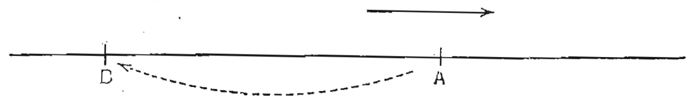


Fig. 7.

est dirigé dans le sens négatif (fig. 7) il est donc exprimé par -12.

On exprimera ce résultat par la formule :

$$(-3) \times (+4) = -12.$$

-12 est le **produit algébrique** de -3 par $+4$.

3e CAS. — Supposons que le promeneur marche en avant, proposons-nous de trouver l'espace parcouru pendant le temps -4 secondes. Que faut-il entendre par l'**espace parcouru pendant un temps négatif?** A l'époque **actuelle** le mobile est en A, au temps -4, c'est-à-dire **il y a** 4 secondes, il était en B; nous disons que le segment $\overline{AB}$ (fig. 8) est

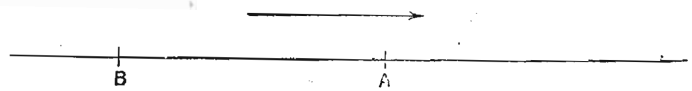


Fig. 8.

l'espace qui correspond au temps -4; c'est le segment qu'il faut parcourir pour aller, de la position actuelle, à la position occupée à l'époque -4. Comme l'espace parcouru pendant le temps $+4$ est le segment qu'il faut parcourir pour, de la position actuelle, aller à la position occupée à l'époque $+4$.

Pendant ces 4 secondes, le promeneur a fait encore $3 \times 4 = 12$ pas, puisqu'il se déplace dans le sens positif; c'est qu'il était il y a 4 secondes *à gauche de A;* le segment $\overline{AB}$ est donc négatif. Nous exprimons cette observation comme il suit :

$$(+3) \times (-4) = -12.$$

Le produit algébrique de $+3$ par -4 est -12.

4ᵉ CAS. — Supposons enfin que la vitesse et le temps soient négatifs le voyageur se déplace à reculons, il est actuellement en A. Où était-il il y a 4 secondes ?

L'examen direct de la question nous montre qu'il

Fig. 9.

était à droite de A à 12 pas; le segment $\overline{AB}$ (fig. 9) est donc positif.

Nous écrivons :

$$(-3) \times (-4) = +12,$$

le produit algébrique des -3 par -4 est $+12$.

L'étude de ces cas particuliers que nous avons tenu à détailler nous permet d'énoncer la règle suivante de la multiplication.

26. — **Règle de la multiplication.**

Le produit de deux nombres positifs ou négatifs est un nombre dont la valeur absolue est égale au produit des valeurs absolues des facteurs.

Ce nombre est positif dans le cas où les deux facteurs sont de même signe. Il est négatif si ces facteurs sont de signes contraires.

Applications :

$$3 \times 5 = 15$$
$$3 \times (-5) = -15$$
$$-3 \times 5 = -15$$
$$-3 \times (-5) = 15.$$

27. — **Produit de plusieurs facteurs.**

Le produit de plusieurs facteurs est, par définition, le résultat final que l'on obtient lorsqu'on multiplie le premier facteur par le second, le produit obtenu par le troisième, le produit obtenu par le quatrième, etc.

Ainsi, soit le produit :

$$-2 \times 4 \times (-5) \times 6 \times (-3) \times 2.$$

Il s'effectue comme suit :

$$-2 \times 4 = -8$$
$$-8 \times (-5) = +40$$
$$40 \times 6 = 240$$
$$240 \times (-3) = -720$$
$$-720 \times 2 = -1\,440.$$

Le produit considéré a pour valeur -1440.

28. — **Signe du produit de plusieurs facteurs.**

Lorsqu'on effectue le produit de plusieurs facteurs d'après la règle précédente, on voit que chaque facteur négatif entraîne un changement de signe, tandis que chaque facteur positif n'en entraîne pas. On en conclut que **le signe du produit ne dépend que du nombre des facteurs négatifs; si ce nombre est pair ou nul, le produit est positif : si ce nombre est impair le produit est négatif.**

Cette remarque permet d'obtenir rapidement le produit : on détermine d'abord son signe, il suffit ensuite d'effectuer le produit des valeurs absolues des facteurs.

29. — Propriétés du produit de plusieurs facteurs.

Théorème. — **La valeur d'un produit de plusieurs facteurs ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre des facteurs.**

Pour démontrer que la valeur du produit ne change pas, il suffit de faire voir que la *valeur absolue* reste la même et que le signe reste aussi le même. Or la valeur absolue du produit est égale au produit des valeurs absolues des facteurs; d'après un théorème d'arithmétique, elle ne dépend pas de leur ordre. Quant au signe, il ne dépend que du nombre des facteurs négatifs; le théorème est donc démontré. Ainsi :

$$3\times(-2)\times(-7)\times4\times(-5)$$
$$=(-2)\times(-5)\times4\times3\times(-7).$$

Corollaire. — **On peut dans un produit de plusieurs facteurs remplacer un certain nombre d'entre eux par leur produit effectué.**

Ainsi :

$$3\times(-2)\times(-7)\times4\times(-5)=12\times10\times(-7)$$
$$=120\times(-7)=-840.$$

30. — Propriété distributive de la multiplication.

Théorème. — **Pour multiplier une somme par un nombre, il suffit de multiplier les parties de la somme par ce nombre et d'ajouter entre eux les résultats obtenus.**

Nous nous bornerons à vérifier l'exactitude de ce théorème sur des exemples.

1er exemple. — Soit :

$$[2+(-3)+(-4)+17]\times10.$$

On a :

$$2\times10=20,\quad(-3)\times10=-30,\quad(-4)\times10=-40,$$
$$17\times10=170.$$
$$2+(-3)+(-4)+17=12$$
$$20+(-30)+(-40)+170=120.$$

Et l'on a bien :

$$12\times10=120.$$

2e exemple. — Soit :

$$[2+(-5)+(-7)+4]\times(-10).$$

On a :

$$2\times(-10)=-20,\quad(-5)\times(-10)=+50,\quad(-7)$$
$$\times(-10)=+70,\quad4\times(-10)=-40,$$
$$2+(-5)+(-7)+4=-6,$$
$$-20+50+70-40=60.$$

Et l'on a bien :

$$(-6)\times(-10)=60.$$

On obtient donc le même résultat, soit en effectuant la somme d'abord, et la multiplication ensuite, soit en multipliant d'abord les diverses parties de la somme et en ajoutant ensuite entre eux les résultats obtenus.

On exprime cette propriété en disant que la multiplication est *distributive* par rapport à l'addition.

Remarque. — La soustraction se ramenant à l'addition, la multiplication est aussi distributive par rapport à la soustraction. En désignant par a, b, c, d, m, des nombres positifs ou négatifs, on a :

$$(a - b - c + d)\, m = am - bm - cm + dm.$$

VI. — DIVISION

31. — **Définition.**

La division est l'opération inverse de la multiplication.

Diviser un nombre par un autre, c'est en trouver un troisième dont le produit par le second soit égal au premier.

Par exemple :

$$12 : (-4) = -3 \quad \text{car} \quad (-3) \times (-4) = 12$$
$$-12 : (-4) = 3 \quad \text{car} \quad 3 \times (-4) = -12$$
$$-12 : 4 = -3 \quad \text{car} \quad -3 \times 4 = -12.$$

La règle de la division est une conséquence immédiate de la règle de la multiplication.

32. — **Règle de la division.**

Le quotient de deux nombres a pour valeur absolue le quotient de leurs valeurs absolues.

Ce quotient est positif ou négatif selon que ces deux nombres sont de même signe ou de signes contraires.

Exemples :

$$(-21) : (-3) = 7$$
$$(-30) : 6 = -5$$
$$30 : (-6) = -5.$$

VII. — FRACTIONS ALGÉBRIQUES

33. — **Définition.**

En algèbre, on appelle fraction le quotient indiqué de deux nombres positifs ou négatifs.

Voici des exemples de fractions :

$$\frac{-3}{4}, \quad \frac{-6}{-5}, \quad \frac{7{,}2}{-4}.$$

Les valeurs de ces fractions sont d'après la règle de la division :

$$-\frac{3}{4}, \quad \frac{6}{5}, \quad -\frac{7{,}2}{4}.$$

34. — **Théorème.**

On ne change pas la valeur d'une fraction algébrique en multipliant ou en divisant ses deux termes par un même nombre.

En effet, on ne change pas la valeur absolue, d'après la proposition analogue de l'arithmétique. Quant au signe, il ne change pas si l'on multiplie ou divise par un nombre positif, car les signes des deux termes restent les mêmes ; et il ne change pas non plus si l'on multiplie ou divise par un nombre négatif, car les signes des deux termes changeant alors tous deux, le signe de leur quotient reste le même.

Réduction au même dénominateur. — De la proposition précédente, on conclut qu'il est possible de réduire plusieurs fractions au même dénominateur par la même règle qu'en arithmétique. Il en résulte que pour étudier l'addition ou la soustraction des fractions, on peut se borner aux fractions qui ont même dénominateur.

35. — **Addition et soustraction des fractions.**

Règle. — **Pour ajouter ou retrancher plusieurs fractions ayant un même dénominateur, il suffit d'ajouter ou retrancher les numérateurs et de donner au résultat le dénominateur commun.**

Ainsi, a, b, c, d, m étant des nombres positifs ou négatifs, on a :

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}-\frac{c}{m}+\frac{d}{m}=\frac{a-b-c+d}{m}.$$

On démontre cette règle en vérifiant que la multiplication par m des deux membres de l'égalité donne des résultats identiques.

36. — **Multiplication des fractions.**

Règle. — **Le produit de deux fractions est une fraction ayant pour numérateur le produit des numérateurs et pour dénominateur le produit des dénominateurs.**

Exemples :

$$\frac{3}{-4}\times\frac{5}{-6}=\frac{15}{24}$$
$$\frac{3}{-4}\times\frac{-5}{6}=\frac{-15}{-24}$$
$$\frac{3}{-4}\times\frac{-5}{-6}=\frac{-15}{24}.$$

On obtiendrait aisément le produit de plusieurs fractions en appliquant la même règle :

$$\frac{3}{-4}\times\frac{-2}{7}\times\frac{-5}{-6}\times\frac{3}{-8}=\frac{90}{-1\,344}.$$

37. — **Division des fractions.**

La division est l'opération inverse de la multiplication ; la règle s'énonce facilement :

Règle. — **Le quotient de deux fractions s'obtient en multipliant la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.**

Exemples :

$$\frac{3}{4}:\frac{-5}{-6}=\frac{3}{4}\times\frac{-6}{-5}=\frac{-18}{-20}$$
$$\frac{3}{-4}:\frac{5}{-6}=\frac{3}{-4}\times\frac{-6}{5}=\frac{-18}{-20}$$
$$\frac{-3}{-4}:\frac{5}{-6}=\frac{-3}{-4}\times\frac{-6}{5}=\frac{-20}{18}$$

La règle se justifie en vérifiant que le produit du quotient par le diviseur reproduit le dividende.

Remarque. — Dans la pratique, on calcule la valeur absolue et le signe de chaque fraction, on fixe le signe du quotient d'après la même règle que pour le quotient de deux nombres entiers ; la valeur absolue est le quotient des valeurs absolues des fractions.

Ainsi :

$$\frac{-3}{-4}:\frac{5}{-6}$$

s'écrit :

$$+\frac{3}{4}:-\frac{5}{6}=-\frac{18}{20}.$$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE II

I. — Addition et soustraction des nombres positifs et négatifs.

11. — Effectuer les opérations suivantes :

$$4 - (-5) + 7$$
$$3 - 6 + 2 - 12$$
$$-5 - 3 - (-15) + (-2).$$

12. — Effectuer les opérations suivantes :

$$3 + 4 - 5 - 2 - 7 + 8 - 4$$
$$3 + 2 - 5 - 7 - 9 + 14$$
$$3 - (2 - 5) - (6 - 3 - 9) + (3 - 6 - 4)$$
$$3 - 5 - 2 - (3 - 9 - 4 + 12).$$

13. — Effectuer les opérations suivantes :

$$3{,}125 - 4{,}375 + 2{,}5$$
$$3{,}15 - (3{,}5 - 8{,}135 - 4{,}5 + 3) + (-3{,}35)$$
$$4{,}15 - (-8{,}75 - 3 - 2{,}5) + (-3 + 4{,}52)$$
$$-(3 + 7) - [-4 + (5 - 2) - 12 + 3 - 5].$$

14. — Un commerçant constate qu'il doit à diverses personnes les sommes suivantes : $323^f,50$; $312^f,50$; $402^f,75$. D'autre part, diverses personnes lui doivent 300^f, 250^f, $417^f,45$. Il a actuellement en caisse $1\,000^f$. Combien aura-t-il après ses comptes tous réglés ?

15. — Un commerçant doient à diverses personnes $3\,640^f$, $2\,350^f$, $4\,500^f$, diverses personnes lui doivent $2\,000^f$, $3\,000^f$, et $1\,500^f$. Il a en caisse $492^f,75$. Quelle est sa situation ?

16. — Jean est plus âgé de 3 mois 6 jours que Jacques et plus jeune de 6 mois 5 jours que Pierre. Quelle différence d'âge y a-t-il entre Pierre et Jacques ?

17. — On considère 4 points A, B, C, D, sur un axe; l'unité de longueur étant le centimètre. Le segment $\overline{AB}$ est égal à $+7$, le segment $\overline{BC}$ à -4, le segment $\overline{CD}$ à $+13$. Calculer les segments $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$. Faire la figure.

18. — On donne 4 points A, B, C, D, sur un axe. L'unité de longueur étant le millimètre, le segment $\overline{BA}$ est égal à $+8$, le segment $\overline{BC}$ est égal à -18 et le segment $\overline{AD}$ est égal à $+35$. Calculer les segments $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$. Faire la figure.

19. — Dans une course de bicyclistes, Pierre est arrivé $2^m 13^s$ après Jean, et $15^m 55^s$ avant Jacques. Quel intervalle de temps sépare l'arrivée de Jean de l'arrivée de Jacques ?

20. — La montre de Pierre retarde de 3^m sur l'horloge de la ville, laquelle avance de 8^m sur l'heure du chemin de fer. Comment va la montre de Pierre par rapport à l'heure du chemin de fer ?

2. — Multiplication et division des nombres positifs et négatifs. — Fractions algébriques.

21. — Effectuer les opérations suivantes :

$$32 \times (-15)$$
$$4 \times (-5) \times 2 \times (-3) \times (-6)$$
$$2{,}5 \times (-3{,}4) \times (-1{,}2)$$
$$-15 \times (-3{,}4) \times (-1).$$

22. — Effectuer les opérations suivantes :

$$(3 - 4 - 5)\,6 + (2 - 6 + 7) \times (-9)$$
$$(3 - 4 - 5) \times (-2) + (6 - 8) \times (-12)$$
$$-(7 - 12)\,[3 - (7 + 2 - 5)].$$

23. — Effectuer les divisions suivantes :

$$4 : (-3)$$
$$42{,}5 : (-3{,}4)$$
$$-3{,}5 : 0{,}7$$
$$-4{,}15 : (-0{,}9)$$
$$-3 : (-1).$$

24. — Effectuer les multiplications suivantes :

$$\frac{-3}{4} \times \frac{5}{6}$$
$$\frac{-5}{7} \times \frac{-4}{2}$$
$$\frac{-6}{4} \times \frac{-3}{2} \times \frac{7}{-8} \times \frac{6}{-4} \times \frac{-3}{-2}.$$

25. — Effectuer les divisions suivantes :

$$\frac{3}{4} : \frac{-5}{6}$$
$$\frac{3}{4} : \frac{-2}{-5}$$
$$\frac{-2}{3} : \frac{-3}{5}.$$

26. — Effectuer les opérations suivantes :

$$\left(2 + \frac{-3}{4} - 5\right) : \frac{-2}{3} + (3+5) \times \frac{-3}{4}$$
$$\left[\left(3 - 5 + \frac{1}{2}\right) : \frac{-3}{-4} + \left(-3 - \frac{2}{3} - 4\right) \times \frac{-2}{3}\right] \times \frac{-1}{2}.$$

27. — Calculer la valeur de l'expression :

$$a(b'c'' - c'b'') + a'(b''c - c''b) + a''(bc' - cb'),$$

lorsqu'on pose :

$$\begin{array}{lll} a = 1 & a' = -1 & a'' = 1 \\ b = 1 & b' = 2 & b'' = 4 \\ c = 1 & c' = -\frac{1}{2} & c'' = \frac{1}{4}. \end{array}$$

28. — Calculer la valeur de x donnée par la formule :

$$x = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

où l'on suppose :

$$\begin{array}{lll} a = \frac{1}{2} & b = -\frac{1}{4} & c = 1 \\ a' = -\frac{2}{3} & b' = 3 & c' = -1. \end{array}$$

CHAPITRE III

APPLICATIONS DES NOMBRES POSITIFS ET NÉGATIFS

---

38. — **Remarque préliminaire.**

Nous avons donné déjà plusieurs exemples d'application des nombres positifs et négatifs à des problèmes concrets. C'est même de ces exemples que nous avons pu dégager les règles de calcul.

Nous avons vérifié que les règles d'opérations sur les nombres positifs et négatifs donnent toujours des résultats corrects, c'est-à-dire *conformes à la réalité*. Ces nombres ne sont donc pas des abstractions pures; ce sont simplement des manières abrégées de représenter des faits très simples, très élémentaires et bien connus de tous. Il faut n'y voir aucun mystère; mais simplement la traduction dans le langage de l'Algèbre de remarques évidentes.

Dans les problèmes où on utilise les nombres affectés de signes, on doit introduire des conventions de signes bien précises, et, une fois ces conventions introduites, s'y conformer avec beaucoup d'attention. Il ne reste plus dès lors qu'à effectuer les opérations suivant les règles que nous avons données et à interpréter le résultat conformément aux conventions faites.

Donnons encore quelques exemples pour illustrer ces observations.

39. — Détermination d'un point sur un axe. Distance de deux points.

Nous avons déjà dit ce qu'on appelle **axe orienté**. Étant donné sur un axe la positiond'un point A, pour connaître la position d'un autre point B, il suffit de connaître la valeur du segment $\overline{AB}$ (et l'unité de longueur). Connaissant les points A et B, pour connaître la position d'un point C, il suffit de connaître ou $\overline{AC}$, ou $\overline{BC}$, etc.

Par exemple, sur la figure 10, on a déterminé B,

Fig. 10.

C, D en supposant le point A connu, ainsi que les segments suivants :

$$\overline{AB} = 5, \qquad BC = 3, \qquad CD = -5.$$

Mais cette manière de procéder présente un inconvénient; il est nécessaire de faire un calcul pour connaître la position respective des points A et D. **Il faut passer par tous les intermédiaires.** Il est plus commode, pour fixer la position d'un point sur un axe, de donner sa distance à un **point fixe**, toujours le même, qu'on appelle **origine des abscisses** et

que l'on désigne généralement par la lettre O. La distance d'un point quelconque A au point O est la valeur algébrique du segment $\overline{OA}$, on dit que c'est **l'abscisse du point A**.

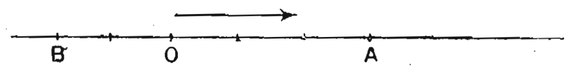


Fig. 11.

Ainsi, sur la figure 11, l'abscisse du point A est 3; l'abscisse du point B est -2. En résumé :

Définition de l'abscisse d'un point. — **L'abscisse d'un point sur un axe est la valeur algébrique du segment allant de l'origine à ce point.**

40. — Distance de deux points.

Problème. — **Étant données les abscisses de deux points, calculer leur distance.**

Soient A et B les deux points donnés; désignons par a, b, leurs abscisses, c'est-à-dire posons :

$$\overline{OA} = a \qquad \overline{OB} = b.$$

Nous voulons calculer le segment $\overline{AB}$. Nous avons établi à propos des segments que l'on a :

$$\underbrace{\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}}$$

ce qui signifie, rappelons-le : aller de A en B, équivaut à aller d'abord de A en O, et puis de O en B.

On a d'ailleurs :

$$AO = -OA = -a$$
$$OB = b.$$

Il en résulte donc :

$$\overline{AB} = -a + b = b - a.$$

Telle est la formule qui donne la distance de deux points. On peut la traduire en langage ordinaire comme il suit.

41. — **Règle.**

La distance de deux points A et B situés sur un axe est égale à l'abscisse du second B diminuée de l'abscisse du premier A.

Bien que cette règle, ayant été démontrée, n'ait pas besoin de vérification, cette vérification sur des exemples n'en est pas moins profitable au commençant.

42. — **Exemples.**

Exemple 1.

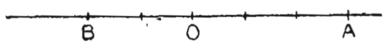


Fig. 12.

$$\overline{OA} = a = 3, \qquad \overline{OB} = b = -2$$
$$\overline{AB} = -2 - 3 = -5.$$

Exemple 2.

Fig. 13.

$$\overline{OA} = a = -3; \qquad \overline{OB} = b = 2$$
$$\overline{AB} = 2 - (-3) = 5.$$

Exemple 3.

Fig. 14.

$$\overline{OA} = a = -6; \qquad \overline{OB} = b = 4$$
$$\overline{AB} = -4 - (-6) = 2$$

Exemple 4.

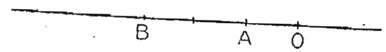


Fig. 15.

$$\overline{OA} = a - 1; \qquad \overline{OB} = b = -3$$
$$\overline{AB} = -3 - (-1) = -2.$$

Il ne faut pas perdre de vue que la distance $\overline{AB}$ est positive ou négative suivant que la direction de A vers B est elle-même positive ou négative.

43. — **Détermination d'un événement dans le temps. Origine des temps. Unité de temps.**

Pour déterminer la position d'un événement dans le temps, on choisit une époque bien déterminée que l'on appelle **origine des temps** et une **unité de temps.**

La date de chaque événement est alors représentée par un nombre positif si l'événement est postérieur à l'origine des temps, négatif s'il est antérieur, et dont la valeur absolue est égale à la mesure de l'intervalle de temps qui sépare cet événement de l'origine.

Prenons, par exemple, comme origine des temps le **12 janvier 1910, à midi**, et comme unité l'**heure.**

Si divers événements se produisent : le 12 janvier à 11 heures du soir, le 13 à 8 heures du matin, le 11 à 9 heures du soir, le 12 à 8 heures du matin, leurs **époques** seront respectivement égales à $+11$, $+20$, -15, -4.

Définition de l'époque. — On appelle **époque d'un événement** l'intervalle de temps qui sépare cet événement de l'origine des temps, affecté du signe $+$, si l'événement est postérieur à cette origine, et du signe — s'il lui est antérieur.

44. — Intervalle qui sépare deux événements.

Lorsqu'on connaît les époques de deux événements, A et B, l'intervalle de temps qui les sépare est égal à l'**époque de B diminuée de l'époque de A.** L'intervalle ainsi obtenu est positif si A est antérieur à B, et négatif si A est postérieur à B, on peut le désigner par $\overline{AB}$.

Ce n'est pas autre chose en somme que l'application au temps de la règle des abscisses pour la distance de deux points.

Par exemple, l'intervalle qui sépare les deux événements dont les époques -15 et $+20$ est :

$$20-(-15)=35.$$

Il s'est écoulé en effet 35 heures entre le 11 janvier à 9 heures du soir et le 13 à 8 heures du matin.

45. — Remarque sur la chronologie.

L'origine du temps communément adoptée pour la chronologie dans les pays chrétiens est l'époque de la naissance de Jésus-Christ; c'est-à-dire que l'on suppose qu'il est né le 1er janvier de l'an 1, à minuit[1]; c'est cette date qui doit être désignée par zéro. Un événement qui se produit au milieu de l'an 1 aura, si l'on prend l'année comme unité, son

1. Nous laissons de côté les petites difficultés qui résultent de l'emploi successif des calendriers julien et grégorien, et des années bissextiles; nous supposons toutes les années égales pour simplifier.

époque désignée par $\frac{1}{2}$ ou 0,5; un événement qui s'est produit au milieu de l'an 10 aura son époque désignée par 9,5. Il ne faut pas voir là une contradiction; l'origine des temps étant le moment de la naissance de J.-C., l'époque 9,5 ou $9\frac{1}{2}$ est celle où il a 9 ans $\frac{1}{2}$; il est dans sa **dixième année** que l'on appelle l'an *10*. C'est ainsi que, en 1910 nous sommes dans le XXe siècle bien qu'il ne se soit écoulé que 19 siècles et une petite fraction de siècle depuis le commencement de l'ère chrétienne.

Quant aux années antérieures à la naissance de J.-C., les chronologistes les désignent par l'an 1 avant J.-C., 2 avant J.-C., etc. Aucune année n'est désignée par zéro. Un événement qui se produit le 1er octobre de l'an 1 avant J.-C. aura son époque désignée par $-\frac{1}{4}$; un événement qui se produit le 1er mai de l'an 34 avant J.-C., c'est-à-dire 33 ans et 7 mois avant la naissance de J.-C., aura son époque désignée par $-33\frac{7}{12}$, l'année étant toujours choisie comme unité.

Il est dès lors très aisé de calculer l'intervalle de temps qui sépare deux événements.

Exemple. — **Un homme est né le 1er mai de l'an 12 avant J.-C., et mort le 1er août de l'an 45 après J.-C. Combien de temps a-t-il vécu?**

En choisissant l'année pour unité, l'époque de sa naissance est $-11\frac{8}{12}$ et l'époque de sa mort $44\frac{7}{12}$;

il a donc vécu :

$$44\frac{7}{12}-\left(-11\frac{8}{12}\right)=44\frac{7}{12}+11\frac{8}{12}=55\frac{15}{12}=56\frac{3}{12}.$$

La réponse est : 56 ans 3 mois.

46. — Équation du mouvement uniforme.

Nous avons étudié, à propos de la multiplication des nombres positifs et négatifs, le mouvement uniforme. Si l'on représente par e, v, t, l'espace parcouru, la vitesse, le temps e, v, t, pouvant être représentés par des nombres positifs ou négatifs, on a l'équation générale du mouvement uniforme

$$e = vt$$

qui se traduit : l'espace est égal au produit de la vitesse par le temps.

47. — Applications.

Appliquons cette notion au problème suivant :

Problème. — **Un train se déplace sur la ligne de Paris à Lille supposée rectiligne, avec une vitesse de 120^{km} à l'heure dans le sens de Lille vers Paris; à midi 12^{m}, il est à 30^{km} de Paris. Où était-il à midi 3^{m}? (On supposera le mouvement uniforme).**

Prenons comme sens positif le sens de Paris à Lille, comme unité de longueur le kilomètre, et comme unité de temps la minute. La vitesse est alors -2, car 120^{km} à l'heure correspondent à 2^{km} à la minute et le mouvement a lieu dans le sens négatif. Nous connaissons la position A du train à midi 12^{m} et nous voulons connaître sa position B à midi 3^{m}; le

segment $\overline{AB}$ est donc le segment parcouru pendant le temps -9.

On a donc d'après la formule générale :

$$\overline{AB} = -9 \times (-2) = 18.$$

La distance de A à Paris étant 30, celle de B à Paris est

$$30 + 18 = 48.$$

La réponse est donc : à *48^{km} de Paris.*

EXERCICES SUR LE CHAPITRE III

Applications des nombres positifs et négatifs.

29. — Un voyageur se déplace d'un mouvement uniforme avec une vitesse de $+15^{km}$, à l'heure, sur la route de Paris à Lyon, le sens positif étant celui de Paris vers Lyon; à 3^{h}, il est à 4^{km}, de Paris; où sera-t-il à 5 heures ? Où était-il à $1^{h}\,30^{m}$?

30. — L'heure de New-York retarde de $5^{h}5^{m}23^{s}$ sur celle de Paris. L'heure de Saint-Pétersbourg avance de $1^{h}51^{m}52^{s}$ sur celle de Paris. Quelle différence y a-t-il entre l'heure de New-York et celle de Saint-Pétersbourg?

31. — L'heure des chemins de fer français retarde de 5 minutes sur l'heure de Paris. Quelle heure marquent les horloges des chemins de fer suisses lorsque les horloges des chemins de fer français marquent midi?

32. — Lorsqu'il est midi à Paris, les horloges des observatoires suivants marquent :

Anvers.	midi	$8^{m}18^{s}$	Milan.	midi	$27^{m}25^{s}$
Bruxelles . . .	—	$8^{m}\ 8^{s}$	Kœnigsberg .		$1^{h}12^{m}38^{s}$
Christiania . .	—	$33^{m}33^{s}$	Rome	midi	$40^{m}25^{s}$
Berne.	—	$20^{m}25^{s}$	Madrid. . . .		$11^{h}35^{m}54^{s}$
Berlin.	—	$44^{m}14^{s}$	Moscou. . . .		$2^{h}20^{m}56^{s}$

On demande quelles heures marquent ces diverses horloges lorsqu'il est midi à Rome?

33. — On donne le nom de période julienne à une période inventée par Joseph Scaliger, chronologiste du XVI^e siècle, dans le but de fixer et de comparer aisément les dates historiques. L'origine de la période julienne est 4713 ans avant l'ère chrétienne de sorte que l'an I de l'ère chrétienne coïncide avec l'an 4714 de la période julienne. Cela posé, on demande de fixer par rapport à l'ère chrétienne les dates suivantes, qui sont rapportées à la période julienne :

Origine de l'ère des Juifs	7 octobre 953
— — des Olympiades. .	vers juillet 3 938
Fondation de Rome	3 961
Origine de l'ère de Nabonassar. . .	26 février 3 967
— de l'hégire	16 juillet 5 335
— du calendrier républicain .	22 septembre 6 505

34. — Deux voyageurs se déplacent d'un mouvement uniforme, l'un avec une vitesse de $+30^{km}$ à l'heure, l'autre avec une vitesse de -15^{km} à l'heure. A $2^h 23^m$, la distance qui les sépare est 3^{km}. Quelle est-elle à $2^h 40^m$? Quelle était-elle à $2^h 12^m$? On devra choisir un sens positif déterminé.

35. — Deux coureurs se déplacent sur une même route, le premier avec une vitesse $+4$, le second avec une vitesse -5, les unités étant le mètre et la seconde. A midi $12^m 13^s$, l'abscisse du premier est -50 et l'abscisse du second est $+300$. Quelle est la distance qui les sépare à midi $13^m 2^s$?

36. — Deux trains vont à la rencontre l'un de l'autre sur une même ligne; la distance qui les sépare à midi est 75^{km}. Quand se recontreront-ils, sachant que la vitesse du premier est $22^m,75$ à la seconde et la vitesse du second $1^{km}\frac{2}{3}$ à la minute?

LIVRE II

CALCUL ALGÉBRIQUE

CHAPITRE IV

GÉNÉRALITÉS ADDITION ET SOUSTRACTION

I. — GÉNÉRALITÉS. MONÔMES. POLYNOMES. TERMES SEMBLABLES

48. — Expressions algébriques rationnelles.

Nous avons vu ce qu'on entend par *expression algébrique* (voir page 4) : c'est un ensemble de nombres, de lettres et de signes d'opérations (signes écrits ou sous-entendus) de telle manière que l'on puisse calculer la valeur de l'expression lorsqu'on attribue aux lettres des valeurs déterminées.

Une expression algébrique est dite **rationnelle** lorsque les seuls signes d'opérations à *effectuer sur les lettres* sont l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'élévation à une puissance, *à l'exclusion de l'extraction des racines.*

Par exemple les expressions :

$$\frac{a}{b}, \quad 3a, \quad \sqrt{3}\,bc + \sqrt{7}\,d, \quad \frac{e}{\sqrt[3]{12}}, \quad \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1).$$

sont des **expressions algébriques rationnelles**, bien que certaines d'entre elles renferment des radicaux ; mais ces radicaux portent sur des nombres. Au contraire :

$$b+3\sqrt{a},\quad \sqrt[3]{a+b},\quad \sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{d},\quad \frac{3a}{\sqrt{c}+1}$$

sont des *expressions algébriques irrationnelles*.

49. — **Monômes.**

On appelle **monôme** une expression algébrique qui ne renferme aucun signe d'addition ou de soustraction entre les divers nombres ou lettres qui la composent. Exemples :

$$-3a^2b,\quad \frac{5x}{3d^2e},\quad \frac{2\sqrt{a}}{7b^2},$$

sont des monômes.

Un monôme est donc le produit de plusieurs nombres et lettres ou de fractions algébriques n'ayant pas de signes d'addition ou de soustraction dans leurs termes. Ainsi :

$$(-3)\times a\times(-15)\times b\times a\times c\times 7\times a\times b$$

est un monôme.

Coefficient d'un monôme.

On peut dans le monôme précédent introduire une simplification, la valeur d'un produit ne changeant pas lorsqu'on remplace plusieurs facteurs par leur produit effectué, le monôme que nous venons de considérer peut s'écrire :

$$(-3)\times(-15)\times 7\times a\times a\times a\times b\times b\times c.$$

On remarquera que l'on a :

$$\begin{aligned}(-3)\times(-15)\times 7 &= 315\\ a\times a\times a &= a^3\\ b\times b &= b^2\end{aligned}$$

de sorte que notre monôme peut finalement s'écrire sous la forme simplifiée

$$315\,a^3b^2c,$$

dans lequel ne figure plus aucun signe opératoire explicite : les signes de multiplication sont sous-entendus ou remplacés par les exposants.

De même :

$$\left(-\frac{3a}{7}\right)\times\frac{5bc^3}{2d}\times\frac{2ab\sqrt{3}}{de}\text{ s'écrirait }-\frac{15\sqrt{3}}{7}\times\frac{a^2b^2c^3}{d^2e}$$

C'est sous cette forme simplifiée que nous écrirons toujours les monômes ; le facteur numérique, ici 315, ou $\frac{-15\sqrt{3}}{7}$ qu'il est d'usage d'écrire à gauche, s'appelle le **coefficient**. Le monôme :

$$-\frac{15}{7}\sqrt{3}\,a^2b$$

a pour coefficient $-\frac{15}{7}\sqrt{3}$. Le coefficient d'un monôme est ainsi un nombre positif ou négatif qui peut être entier, fractionnaire, ou irrationnel. Un monôme dont le coefficient est nul est égal à zéro, car un produit de plusieurs facteurs est nul lorsqu'un de ses facteurs est nul.

51. — **Monômes semblables. Addition et soustraction des monômes semblables.**

On dit que deux monômes sont **semblables** lorsqu'ils ne diffèrent que par leurs coefficients. Par exemple, les monômes :

$$\sqrt{3}a^2bc^3,\quad 15a^2bc^3,\quad 12a^2bc^3$$

sont semblables ; il en est de même des monômes :

$$\frac{3}{4}x^2y^5, \qquad 15x^2y^5, \qquad -14x^2y^5, \qquad x^2y^5.$$

Le dernier de ces monômes doit être regardé comme ayant pour coefficient 1, car le produit d'un nombre quelconque par l'unité est égal à ce nombre lui-même ; $1\,x^2\,y^5$ est donc la même chose que $x^2\,y^5$. De même le monôme $-\,x^2\,y^3$ doit être regardé comme ayant pour coefficient $-\,1$.

52. — Règle d'addition.

La somme de plusieurs monômes semblables est le monôme semblable à chacun d'eux, ayant pour coefficient la somme des coefficients.

Exemple. — Soit à ajouter les monômes semblables :

$$12a^3b^2c^4x, \qquad 15a^3b^2c^4x, \qquad -a^3b^2c^4x, \qquad -35a^3b^2c^4x.$$

Ces monômes semblables ont pour coefficients les nombres 12, 15, — 1 — 35 dont la somme est :

$$12 + 15 - 1 - 35 = -9.$$

La somme cherchée est donc :

$$-9a^3b^2c^4x.$$

Autre exemple. — Soit à ajouter les monômes semblables :

$$15x^2y^3, \qquad x^2y^3, \qquad -14x^2y^3, \qquad x^2y^3, \qquad -3x^2y^3$$

dont les coefficients sont 15, 1, — 14, 1, — 3. La somme de ces coefficients est :

$$15 + 1 - 14 + 1 - 3 = 0.$$

La somme est donc un monôme semblable aux monômes proposés et de coefficient *zéro ;* elle est donc égale à zéro.

Justification de la règle. — La règle se justifie par le principe énoncé dans le chapitre II : pour multiplier une somme par un facteur, il suffit de multiplier par ce facteur les diverses parties de la somme et d'ajouter entre eux les résultats obtenus.

Si nous reprenons le premier exemple, nous voyons, en appliquant ce principe, que — 9 étant égal à la somme des nombres 12, 15, — 1, — 35 le produit de — 9 par $a^3b^2c^4x$ est égal à la somme des produits de 12, 15, 1, 35 par $a^3b^2c^4x$:

De l'expression :

$$-9 = (12 + 15 - 1 - 35)$$

on déduit :

$$-9a^3b^2c^4x = (12 + 15 - 1 - 35)\, a^3b^2c^4x$$

et enfin :

$$-9a^3b^2c^4x = 12a^3b^2c^4x + 15a^3b^2c^4x + (-a^3b^2c^4x) + (-35a^3b^2c^4x).$$

Ce que nous voulions démontrer.

On justifierait de la même manière la règle de la soustraction que nous nous contentons d'énoncer.

53. — Règle de soustraction.

La différence de deux monômes semblables est un monôme semblable à chacun d'eux ayant pour coefficient la différence des coefficients.

Soit, par exemple, à retrancher $5a^2b$ de $8a^2b$ on retranchera 5 de 8, ce qui donne 3, la différence cherchée est $3a^2b$. Si l'on avait proposé de retrancher $8a^2b$ de $5a^2b$, il aurait fallu retrancher 8 de 5, ce qui donne -3; le résultat serait donc $-3a^2b$.

De même :

$$-\frac{2}{5}x^2y-(3x^2y)=\left(-\frac{2}{5}-3\right)x^2y=-\frac{17}{5}x^2y.$$

$$\frac{3}{4}ab^2x-\left(-\frac{5}{8}ab^2x\right)=\left[\frac{3}{4}-\left(-\frac{5}{8}\right)\right]ab^2x=\frac{11}{8}ab^2x.$$

54. — Polynomes.

On appelle polynome **la somme de plusieurs monômes.**

Par exemple, l'expression :

$$a^3b+x^2y+12ax^3+35xy^3$$

est un polynome : c'est la somme des monômes a^3b, x^2y, $12ax^3$, $35xy^3$. L'expression :

$$a^3b-3ab-2xy+5a^3$$

est aussi un polynome, car c'est la somme des monômes :

$$a^3b \quad -3ab \quad -2xy \quad 5a^3.$$

On dit parfois qu'un polynome est une expression formée par une suite de monômes séparés par les signes $+$ et $-$; mais il est préférable de conserver notre première définition, car elle permet de bien comprendre ce que l'on entend par **termes du polynome** : **ce sont les monômes dont ce polynome est la somme.** Ainsi le polynome :

$$5a^2b-8a^3-a^2+x^4$$

a 4 termes :

$$5a^2b \quad -8a^3 \quad -a^2 \quad x^4.$$

Un polynome qui a **deux termes** s'appelle **binome;**
Un polynome qui a **trois termes** s'appelle **trinome.**
Les expressions **quadrinome, quintinome,** etc., ne sont pas usitées.

55. — Réduction des termes semblables.

Lorsque deux termes d'un polynome sont deux monômes semblables, on dit que ce sont **deux termes semblables.** On peut, sans changer la valeur du polynome, remplacer deux ou plusieurs termes semblables par leur somme effectuée; c'est ce qu'on appelle **faire la réduction des termes semblables.** Il suffit d'appliquer la règle de l'addition des monômes.

Exemple 1. — Soit le polynome :

$$35a^2b+15xy-12a^2b+a^3-xy+14a^2b-50a^2b-8a^3$$

On peut l'écrire :

$$(35a^2b-12a^2b+14a^2b-50a^2b)+(15xy-xy)+(a^3-8a^3)$$

soit :

$$-13a^2b+14xy-7a^3.$$

Il est commode pour effectuer la réduction des termes semblables d'écrire le polynome de la manière suivante :

$$\begin{array}{lll} 35a^2b & +15xy & \\ -12a^2b & & +a^3. \\ & -xy & \\ +14a^2b & & \\ -50a^2b & & -8a^3 \end{array}$$

Les termes semblables étant écrits dans des colonnes verticales, on effectue ensuite l'addition des coefficients d'une même colonne

$$\begin{aligned} 35 - 12 + 14 - 50 &= -13 \\ 15 - 1 &= 14 \\ 1 - 8 &= -7 \end{aligned}$$

Le polynome proposé peut donc s'écrire sous la formule plus simple :

$$-13a^2b + 14xy - 7a^3.$$

Exemple 2. — Soit le polynome :

$$x^3 + 5x^2 - 8 - 3x^3 - 2x^2 + 15 + 6x - 2 - 3x.$$

On trouve qu'il est égal à :

$$(1 - 3)\,x^3 + (5 - 2)\,x^2 + (6 - 3)\,x + (-8 + 15 - 2)$$

c'est-à-dire à :

$$-2x^3 + 3x^2 + 3x + 5.$$

56. — Degré d'un monôme et d'un polynome.

On appelle degré d'un monôme par rapport à l'une des lettres, x par exemple, qu'il renferme, l'exposant de cette lettre x dans le monôme.

Ainsi, le monôme :

$$3ab^2c^3x^2y$$

est de degré 2 par rapport à x; de degré 3 par rapport à c; de degré 1 par rapport à y, etc. Il est de degré **zéro** par rapport à z, car il ne renferme **aucun** facteur égal à z.

(On dit aussi : *deuxième degré* par rapport à x, *troisième degré* par rapport à c, etc.)

Le degré d'un monôme *par rapport à l'ensemble de plusieurs lettres* est, par définition, égal à la somme de ses degrés par rapport à chacune de ces lettres. Par exemple, le monôme écrit plus haut est de degré 3 par rapport à l'ensemble des lettres x et y, de degré 6 par rapport à l'ensemble des lettres a, b, c; son *degré total*, c'est-à-dire son degré par rapport à l'ensemble de *toutes les lettres* qu'il renferme, est 9.

On appelle **degré d'un polynome** par rapport à une lettre le degré de celui de ses termes dont le degré est le plus élevé. On définit de même le degré d'un polynome par rapport à l'ensemble de plusieurs lettres. On suppose d'ailleurs que l'on a fait la réduction des termes semblables.

Ainsi le polynome :

$$3a^2x^3 + 6a^4x - a^5x^2$$

est de degré 5 par rapport à a et de degré 3 par rapport à x; son degré total est 7. Il n'est pas égal à la somme des degrés partiels, parce que le terme dont le degré par rapport à a est le plus élevé n'est pas le même que le terme dont le degré par rapport à x est le plus élevé.

Le polynome :

$$x^3 + 3x^2 + 6 - 2x^3 + x + x^3$$

est de degré 2 par rapport à x; on le voit en réduisant les termes semblables, ce qui permet de l'écrire sous la forme :

$$3x^2 + 6 + x.$$

57. — Polynomes ordonnés.

Ordonner un polynome par rapport à une lettre x, c'est grouper ensemble tous les termes de même degré par rapport à cette lettre, et les écrire, soit dans l'ordre des degrés croissants, soit dans l'ordre des degrés décroissants. Soit par exemple le polynome :

$$x^3 + x^4 - 3x^3 - 5x^2 + x^3 - 6 + 7x.$$

Pour l'ordonner, on devra l'écrire :

$$x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x - 6$$

ou bien :

$$-6 + 7x - 5x^2 - x^3 + x^4.$$

Dans le premier cas, il est ordonné **suivant les puissances décroissantes** de x; dans le deuxième cas, **suivant les puissances croissantes.**

Soit maintenant le polynome :

$$ax + 3x^2 + b + cx^2 - a^2x^2 - bx - 8.$$

Pour l'ordonner, suivant les puissances décroissantes, on l'écrira comme il suit :

$$(3 + c - a^2)\,x^2 + (a - b)\,x + b - 8$$

en groupant d'abord tous les termes qui renferment x^2, puis tous les termes qui renferment x, puis tous les termes qui ne contiennent pas la lettre x.

Par une extension du mot **coefficient**, on dit que dans ce polynome ordonné, le coefficient de x^2 est $(3 + c - a^2)$, le coefficient de x est $a - b$, et le terme indépendant de x est $b - 8$; à ce point de vue, ce polynome sera considéré comme n'ayant que 3 termes; c'est **un trinome en** x; c'est-à-dire que c'est un trinome lorsqu'on porte une attention particulière sur la lettre x.

58. — Remarque sur le degré d'un polynome.

Il arrive très fréquemment que l'on distingue les

lettres qui figurent dans un polynome en deux groupes, les unes que l'on appelle **inconnues** ou **variables**, et qui sont généralement les dernières lettres de l'alphabet; $x, y, z, u, v, t, s\ldots$; les autres que l'on regarde comme **connues** et qui sont généralement les premières lettres de l'alphabet : $a, b, c\ldots$

Lorsqu'un polynome renferme des quantités connues et des inconnues et que l'on parle de son degré, sans spécifier davantage, **il s'agit toujours du degré par rapport à l'ensemble des inconnues**; par exemple, on dira que le polynome :

$$(a^2 - b^2)x + c^2y - 3 - x - y$$

est du premier degré (sous-entendu : en x et y).

Dans ce cas, on regarde comme **termes semblables** ceux qui renferment les mêmes inconnues avec les mêmes exposants, sans tenir compte des autres lettres, et on groupe ensemble les termes semblables.

Par exemple, si l'on a le polynome :

$$-a^3x^2y + 3x^2y - bxy^2 + cxy^2 + ax + 3x - y$$

On l'écrira comme il suit :

$$(-a^3 + 3)\,x^2y + (-b + c)\,xy^2 + (a + 3)\,x - y;$$

c'est un polynome du 3e degré en x et y; le coefficient de x^2y est $-a^3 + 3$, etc.

II. — ADDITION DES MONÔMES ET DES POLYNOMES

59. — **Remarque préliminaire.**

Les règles du calcul algébrique permettent de transformer une expression algébrique en une autre équivalente, c'est-à-dire admettant toujours la même valeur numérique pour certaines valeurs particulières données aux lettres, quelles que soient d'ailleurs ces valeurs particulières.

On peut ainsi le plus souvent remplacer une expression compliquée par une autre beaucoup plus simple.

Les règles des opérations sur les monômes et les polynomes sont ainsi une conséquence immédiate des règles et des théorèmes concernant les opérations sur les nombres que nous avons indiquées au chapitre II. Certaines de ces règles sont d'ailleurs à peu près évidentes; pour être complets, nous allons les reprendre ici.

60. — **Addition des monômes.**

Règle. — **Pour ajouter plusieurs monômes, il suffit de les écrire les uns à la suite des autres avec leurs signes.**

Cette règle conduit comme résultat à un polynome dans lequel, s'il y a lieu, on fait la **réduction des termes semblables.**

Exemple 1. — Ajouter les monômes :

$$15a^2x, \quad -3a^2x, \quad 15a^3y, \quad -a^2x-a^3y$$

On obtient le polynome :

$$15a^2x-3a^2x+15a^3y-a^2x-a^3y,$$

qui s'écrit, plus simplement :

$$11a^2x+14^3y.$$

Rappelons que dans le cas particulier où tous les monômes sont semblables, le total est un monôme semblable à chacun d'eux et dont le coefficient est la somme des coefficients des divers monômes.

Exemple 2. — Soit à additionner les monômes :

$$5a^3b^5, \quad -2a^3b^5, \quad -12a^3b^5+7a^3b^5$$

la somme est le monôme :

$$-2a^3b^5$$

car $(5-2-12+7)=-2$.

61. — **Addition des polynomes.**

Règle. — **Pour ajouter un polynome à une expression algébrique, il suffit d'ajouter à cette expression, successivement tous les termes de ce polynome. Dans le résultat ainsi obtenu, on fait, s'il y a lieu, la réduction des termes semblables.**

Exemple. — Additionner les polynomes suivants :

$$\begin{gathered}3a^2x+b^3+6+a^4\\ -b^3-8+2a^4+3a^2x\\ -3b^3-6a^4+15a^2x-9.\end{gathered}$$

On obtient le polynome :

$$3a^2x+b^3+6+a^4-b^3-8+2a^4+3a^2x-3b^3-6a^4 \\ +15a^2x-9$$

Ou en réduisant les termes semblables :

$$21a^2x-3b^3-3a^4-11.$$

Remarque. — Pour faciliter la réduction des termes semblables, il est souvent commode de disposer autrement l'opération. On écrit les uns au-dessous des autres, en colonne verticale, tous les termes semblables entre eux.

Ainsi l'addition précédente s'écrirait :

$$\begin{array}{rrrrr} & 3a^2x + & b^3 + & 6 + & a^4 \\ + & 3a^2x - & b^3 - & 8 + & 2a^4 \\ + & 15a^2x - & 3b^3 - & 9 - & 6a^4 \\ \hline \text{total :} & 21a^2x - & 3b^3 - & 11 - & 3a^4 \end{array}$$

Cette remarque est surtout utile dans le cas où l'on ajoute des polynomes ordonnés.

Exemples. — Faire la somme des polynomes :

$$3x^3 - 5x^2 + 3x - 4$$
$$-2x^3 - x^2 - 6$$
$$9x^2 - 6x - 7$$
$$8 - x^3.$$

On disposera l'opération comme suit :

$$\begin{array}{rrrr} 3x^3 & -5x^2 & +3x & -4 \\ -2x^3 & -x^2 & & -6 \\ & -9x^2 & -6x & -7 \\ -x^3 & & & +8 \\ \hline 0x^3 & +3x^2 & -3x & +9 \end{array}$$

On ajoute entre eux les coefficients des mêmes puissances de x placés les uns au-dessous des autres ; on obtient ainsi le résultat cherché :

$$0x^3 + 3x^2 - 3x - 9$$

c'est-à-dire :

$$3x^2 - 3x - 9$$

puisqu'un monôme à coefficient nul est nul.

III. — SOUSTRACTION DES MONÔMES ET DES POLYNOMES

62. — **Soustraction des monômes.**

Règle. — **Pour retrancher un monôme d'une expression algébrique, il suffit de lui ajouter le monôme opposé.**

Ainsi pour retrancher le monôme $2ab$ du monôme $5x^2y$, il suffira d'ajouter à ce dernier $-2ab$, ce qui donne pour résultat :

$$5x^2y - 2ab$$

de même :

$$5x^2y - (-2ab) = 5x^2y + 2ab.$$

Autre exemple. — Ajouter les monômes :

$$a^3x, \quad -3a^2y, \quad a^3,$$

et retrancher du résultat successivement les monômes :

$$-a^3x, \quad -5a^2y, \quad -a^4, \quad 2a^2y.$$

On obtient :

$$a^3x - 3a^2y + a^3 + a^3x + 5a^2y + a^4 - 2a^2y$$

ou plus simplement :

$$2a^3x + a^3 + a^4.$$

Rappelons que, lorsqu'il s'agit de monômes semblables, la différence de deux monômes est un monôme semblable à chacun d'eux et dont le coefficient est égal à la différence des coefficients des deux monômes proposés :

$$15a^2x - \left(-\frac{3}{7}a^2x\right) = \left(15 + \frac{3}{7}\right)a^2x$$

soit :

$$\frac{108}{7}a^2x.$$

63. — Soustraction des polynomes.

Règle. — **Pour retrancher un polynome d'une expression algébrique, il suffit de retrancher successivement tous les termes du polynome. (Dans le résultat ainsi obtenu, on fait, s'il y a lieu, la réduction des termes semblables).**

Exemple. — Retrancher le polynome :

$$3a^2x - 9a^3x^2 - 6a^2x^2$$

du polynome :

$$9a^2x + 18a^3x^2 - a^2x^2.$$

On obtient :

$$9a^2x + 18a^3x^2 - a^2x^2 - 3a^2x + 9a^3x^2 + 6a^2x^2,$$

ou, plus simplement :

$$6a^2x + 27a^3x^2 + 5a^2x^2.$$

64. — Remarques sur l'emploi des parenthèses.

Règle pratique. — **Lorsqu'une somme ou différence de polynomes est indiquée par des parenthèses, pour l'effectuer, on supprime les parenthèses, en ayant soin de changer les signes de chacun des termes situés à l'intérieur de celles qui sont précédées du signe —.**

Exemple. — Soit à calculer :

$$(a^2 + b^2) - (3a^3 - 2b^2) + (-a^2 + b^2) - (-6a^3 + 4b^2).$$

On obtient :

$$a^2 + b^2 - 3a^3 + 2b^2 - a^2 + b^2 + 6a^3 - 4b^2$$

ou, en réduisant les termes semblables :

$$3a^3.$$

Ainsi la règle de soustraction énoncée plus haut peut se traduire aussi :

Pour retrancher un polynome d'une expression algébrique, il suffit de l'écrire à la suite de cette expression en changeant les signes de chacun de ses termes.

65. — Remarque 1.

Dans le cas où l'on a plusieurs additions ou soustractions successives à effectuer, et surtout lorsqu'il s'agit de polynomes ordonnés, il est avantageux, pour faciliter la réduction des termes semblables, de les disposer en colonnes verticales.

Exemple. — Soit à effectuer les opérations suivantes :

$$(7x^3 + 3x^2 - 5x + 2) - (2x^3 - 4x^2 - 3) - (2x^2 + 11x - 5) + (4x^3 - 4x).$$

On disposera comme suit :

$$\begin{array}{rrrr} 7x^3 & +3x^2 & -5x & +2 \\ -2x^3 & +4x^2 & & +3 \\ & -2x^2 & -11x & +5 \\ +4x^3 & & -4x & \\ \hline 9x^3 & +5x^2 & -20x & +10 \end{array}$$

66. — Remarque 2.

Il arrive parfois que dans un polynome on veuille mettre entre parenthèses un certain nombre de termes c'est l'opération inverse de celle que nous venons d'effectuer et l'on déduit aisément de ce qui précède la règle à suivre :

Pour ouvrir dans un polynome une parenthèse après un

signe — il suffit de changer les signes de chacun des termes que l'on met dans cette parenthèse.

Exemple :

$$a^2 - b^2 + 2bc - c^2 = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2).$$

De même :

Pour ouvrir dans un polynome une parenthèse après un signe +, il suffit d'écrire, sans changer leurs signes, les termes que l'on veut mettre dans cette parenthèse.

Exemple :

$$a^2 + b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + (b^2 + 2bc + c^2).$$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE IV

Addition et soustraction des monômes et des polynomes.

37. — Réduire les termes semblables dans les polynomes suivants :

$$13a^2x - 8a^3 - 25a^2x + a^3 + b^2 - 12a + 35b^2$$
$$x^3 - 5x + 3x^3 - 8x^2 - 12x + \frac{5}{3}x^2 + \frac{3}{4}x + 15$$
$$\frac{3}{2}x + 5x^2 - 12x^2y + \frac{3}{4}x^2 - x - xy^2 - x^2y$$
$$\frac{3}{4}x - 4x - 5x + 12 + \frac{3}{7} + x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}x^2.$$

38. — Ordonner les polynomes suivants :

$$5x - 22x^2 + 12 + 10x^4 - 31x^3 + 8x^5$$
$$7x^5 + 12x - 38 + 11x^2 - 12x^4 + 3x^6 - 3x^3$$
$$a^3x^2 + ax^4 + a^5 - x^5 - a^2b^3 - a^4x.$$

39. — Additionner les polynomes suivants :

$$3x^2 + ax + b$$
$$-5x + 3ax^2 + c + b$$
$$-8ax + 5x^2 + c^2 + b$$

et ordonner le résultat par rapport à x.

40. — Additionner les polynomes suivants :

$$5x^3 - 8ax^2 + 5bx + c$$
$$ax^2 - 3x^3 - 4c - 12bx$$
$$9cx^2 + 12ax^3 + 5bx - 15,$$

et ordonner le résultat par rapport à x.

41. — Effectuer les opérations indiquées par les parenthèses :

$$(5bx + 3b^2x^4 - 7b^3x) + \left(4b^3x - \frac{5}{7}b^2x^4 + \frac{1}{3}bx\right)$$
$$\left(\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} - \frac{z^2}{2}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{5}\right) + \left(-\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3}\right)$$
$$(a^2 + b^2 + 2bc) + (a^2 + b^2 - 2bc)$$
$$(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3).$$

42. — Du polynome :

$$5a^2xy + 3ax^2y - y^2 + a^3 - 7xy^2,$$

retrancher le polynome :

$$4a^3 - \frac{2}{3}a^2xy + 4y^2 - 2xy^2 + 3ax^2y.$$

43. — Effectuer les soustractions suivantes :

$$(a^2 + 2bc + b^2) - (a^2 - 2bc + b^2)$$
$$(m^3 + pm^2 + p^2m + p^3) - (m^3 + p^2m - pm^2 - p^3).$$

44. — Effectuer les opérations indiquées :

$$(x + y + z) + (x + y - z) + (x + z - y) + (y + z - x)$$
$$(a + b + c - d) + (a - b + c + d) - (a + b + c + d) - (a - b - c - d)$$
$$(7a^4 - 4a^2b^2 + 2a^3b - 8ab^3) - (5b^4 - 2a^3b + 11ab^3 - 2a^2b^2).$$

45. — Étant donnés les polynomes :

$$\mathrm{P} = 5x^4 - 3x^3y - 2x^2y^2 + 7xy^3 + 4y^4$$
$$\mathrm{P'} = 18x^4 + 15x^3y - 8x^2y^2 + 13xy3 - 28y^4$$
$$\mathrm{P''} = -2x^4 + 9x^3y + 31x^2y^2 + xy^3 + 45y^4.$$

Calculer :

1° $\mathrm{P} + \mathrm{P'} + \mathrm{P''}$
2° $\mathrm{P} + \mathrm{P'} - \mathrm{P''}$
3° $\mathrm{P} - \mathrm{P'} - \mathrm{P''}$.

46. — Faire disparaître les parenthèses et réduire les termes semblables dans les expressions suivantes :

$$a + (b - c) - (a - b) - [b + a - (c - a + b)]$$
$$(x + y + z) - [x - (y - z) + z - (x - z)]$$
$$(7x + 3y - \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - 1) + 2x - [4 + 2y - 3\sqrt{3}].$$

47. — Mettre en parenthèses précédées du signe — les derniers termes des expressions :

$$4x^4 + 2xy - x^2 - y^2$$
$$c^2 - 16a^2 - 8ab - b^2$$
$$c^2 + 8ab - b^2 - 16a^2.$$

48. — Effectuer :

$$\left(\frac{a+b+c}{2} - a\right) + \left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)$$
$$\left(\frac{a+b-c}{2} + a\right) - \left(\frac{a-b+c}{2} + b\right) - \left(\frac{b+c-a}{2} + c\right).$$

CHAPITRE V

MULTIPLICATION DES MONÔMES ET DES POLYNOMES

Rappelons, bien que notre remarque préliminaire sur les opérations algébriques l'ait indiqué, que le produit de plusieurs expressions est une nouvelle expression algébrique dont la valeur numérique est égale au produit des valeurs numériques de ces diverses expressions pour certaines valeurs particulières données aux lettres, quelles que soient d'ailleurs ces valeurs particulières.

Il est aisé par suite de comprendre que les règles d'opérations se déduisent des règles précédemment données sur les nombres positifs et négatifs et sur les fractions algébriques.

Nous distinguerons plusieurs cas dans la multiplication.

67. — Multiplication des monômes.

Règle. — **Le produit de deux ou de plusieurs monômes est un monôme admettant comme coefficient le produit des coefficients et comme partie littérale le produit des parties littérales.**

Soit, par exemple, à multiplier les deux monômes :

$$\frac{3}{4}x^2y, \qquad -\frac{5}{6}ab^2$$

le produit de $\frac{3}{4}$ par $-\frac{5}{6}$ est $-\frac{5}{8}$; le produit cherché est :

$$-\frac{5}{8}x^2yab^2.$$

De même, le produit des monômes :

$$-\frac{2}{3}ab^3, \qquad -\frac{3}{4}a^2b$$

est :

$$\frac{1}{2}ab^3a^2b.$$

Ce monôme peut d'ailleurs s'écrire plus simplement en groupant les facteurs égaux :

$$\frac{1}{2}a^3b^4.$$

On sait en effet que, dans un produit de plusieurs facteurs, on peut intervertir l'ordre des facteurs, et remplacer plusieurs d'entre eux par leur produit effectué :

$$-\frac{2}{3}ab^3 \times -\frac{3}{4}a^2b$$

aurait pu s'exprimer :

$$-\frac{2}{3} \times a \times b^3 \times \left(-\frac{3}{4}\right) \times a^2 \times b.$$

Le groupement des facteurs numériques et des mêmes lettres conduit au résultat ci-dessus et justifie la règle.

On remarque qu'une lettre, telle que a, admet pour exposant la somme des exposants qu'elle admet dans les deux facteurs (et cela résulte de la règle donnant le produit de deux puissances semblables d'un même nombre [1]). On en déduit la règle pratique suivante.

68. — Règle pratique.

Pour former le produit de deux ou plusieurs monômes on écrit d'abord le produit des coefficients (pris avec leurs signes). On écrit ensuite toutes les lettres distinctes qui figurent dans ces monômes en affectant chacune d'elles d'un exposant égal à la somme des exposants qu'elle a dans les divers facteurs.

Soit, par exemple, à effectuer le produit des monômes suivants :

$$\frac{3}{\sqrt{2}}a^3b^2c, \qquad -\frac{2}{\sqrt{2}}ax^2y^3, \qquad -\frac{5}{3}ab^3x^2.$$

Le produit des coefficients :

$$\frac{3}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{-2}{\sqrt{2}}, \qquad -\frac{5}{3}$$

est :

$$\frac{3 \times 2 \times 5}{2 \times 3} = 5.$$

L'exposant de la lettre a doit être $3 + 1 + 1 = 5$; l'exposant de b : $2 + 3 = 5$; l'exposant de c : 1;

---

1. Nous reprendrons au chapitre VII les calculs sur les puissances et les radicaux; mais nous avons déjà justifié cette règle en considérant une puissance d'un nombre comme un produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre :

$$a^2 \times a^3 = \underline{a \times a} \times \underline{a \times a \times a} = a^5.$$

l'exposant de x : $2+2=4$; l'exposant de y : 3. Le produit est donc :

$$5a^5b^5cx^4y^3.$$

69. — Multiplication d'un polynome par un monôme.

Règle. — **Pour multiplier un polynome par un monôme, il suffit de multiplier chaque terme du polynome par le monôme et d'ajouter entre eux les résultats obtenus.**

Exemple. — Soit à multiplier le polynome :

$$3a^2 - 2b^3 + x + 5y$$

par le monôme :

$$-abx^2.$$

On obtient :

$$-3a^3bx^2 + 2ab^4x^2 - abx^3 - 5abx^2y.$$

Remarque. — Il convient d'apporter son attention au signe de chacun des produits partiels. On peut utiliser cette remarque commode : chaque produit partiel est positif ou négatif, selon que le monôme dont il procède est de même signe que le multiplicateur, ou de signe contraire.

La justification de la règle de multiplication que nous venons de donner est dans la propriété distributive de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction (voir chapitre II, page 16).

70. — Multiplication d'un monôme par un polynome.

Ce cas peut être ramené au précédent. On peut supposer les deux expressions effectuées, il s'agit alors d'un produit de deux facteurs dont on peut intervertir l'ordre sans modifier le résultat.

Soit par exemple à effectuer le produit du monôme $-4a^3x$ par le polynome :

$$5abx^3 + 2a^2x^2 - 3b^2x$$

on écrira :

$$-4a^3x \times (5abx^3 + 2a^2x^2 - 3b^2x)$$
$$= (5abx^3 + 2a^2x^2 - 3b^2x) \times (-4a^3x).$$

En appliquant la règle énoncée plus haut, on obtient le produit demandé :

$$-20a^4bx^4 - 8a^5x^3 + 12a^3b^2x^2.$$

71. — Multiplication de deux polynomes.

Règle. — **Pour obtenir le produit de deux polynomes, il suffit de multiplier l'un d'eux successivement par tous les termes de l'autre et d'ajouter entre eux les résultats obtenus.**

L'opération se ramène ainsi à une série de multiplications d'un polynome par un monôme.

Exemple. — Soit à multiplier le polynome :

$$a^2b - ab + 3b^2$$

par le polynome :

$$a^2 - 2ab + 3b^2.$$

On multiplie d'abord le premier polynome par a^2, ce qui donne :

$$a^4b - a^3b + 3a^2b^2.$$

On le multiplie ensuite par $-2ab$, ce qui donne :

$$-2a^3b^2 + 2a^2b^2 - 6ab^3.$$

Enfin, on le multiplie par $3b^2$, ce qui donne :

$$3a^2b^3 - 3ab^3 + 9b^4.$$

Il ne reste plus qu'à ajouter ces trois **produits partiels**; on obtient :

$$\begin{array}{l} a^4b - a^3b + 3a^2b^2 - 2a^3b^2 + 2a^2b^2 - 6ab^3 \\ \qquad\qquad\qquad + 3a^2b^3 - 3ab^3 + 9b^4 \end{array}$$

ou, en réduisant les termes semblables :

$$a^4b - a^3b + 5a^2b^2 - 9ab^3 + 3a^2b^3 + 9b^4.$$

72. — **Cas des polynomes ordonnés. Disposition pratique.**

Lorsque les deux polynomes peuvent être aisément ordonnés par rapport aux puissances d'une même lettre et dans le même sens, on adopte pour la multiplication de ces polynomes ordonnés une disposition particulière que nous allons indiquer sur un exemple.

Exemple 1. — Soit à multiplier les deux polynomes :

$$\begin{array}{c} 3x^3 - 2x^2 + 6x + 1 \\ 2x^2 + 52 - 7. \end{array}$$

On disposera l'opération comme suit :

$$\begin{array}{rrrrrr} 3x^3 & -\ 2x^2 & +\ 6x & +\ 1 & & \\ & 2x^2 & +\ 5x & -\ 7 & & \\ \hline 6x^5 & -\ 4x^4 & +\ 12x^3 & +\ 2x^2 & & \\ & 15x^4 & -\ 10x^3 & +\ 30x^2 & +\ 5x & \\ & & -\ 21x^3 & +\ 14x^2 & -\ 42x & -\ 7 \\ \hline 6x^5 & +\ 11x^4 & -\ 19x^3 & +\ 46x^2 & -\ 37x & -\ 7 \end{array}$$

On écrit les deux polynomes l'un au-dessous de l'autre, on tire un trait au-dessous duquel sont écrits les produits partiels, ici au nombre de 3, que l'on obtient en multipliant le multiplicande par chacun des termes du multiplicateur. On a soin de

disposer ces produits partiels de telle façon que les termes semblables soient sur une même colonne verticale. On obtient ainsi commodément la somme qui est inscrite au-dessous du second trait.

Exemple 2. — Multiplier $x^4 + x^2 + 2x + 1$ par $x^3 - x^2 - 1$. L'opération se dispose ainsi :

$$\begin{array}{rrrrrrrr} x^4 & & & +\ x^2 & +\ 2x & +\ 1 & & \\ & x^3 & -\ x^2 & & & -\ 1 & & \\ \hline x^7 & & +\ x^5 & +\ 2x^4 & +\ x^3 & & & \\ & -\ x^6 & & -\ x^4 & -\ 2x^3 & -\ x^2 & & \\ & & & -\ x^4 & & -\ x^2 & -\ 2x & -\ 1 \\ \hline x^7 & -\ x^6 & +\ x^5 & & -\ x^3 & -\ 2x^2 & -\ 2x & -\ 1 \end{array}$$

On a eu soin de laisser des blancs correspondants aux degrés pour lesquels il n'y avait pas de termes.

Cette disposition de la multiplication des polynomes, qui présente quelque analogie avec la disposition arithmétique, est surtout avantageuse dans le cas où les polynomes que l'on peut facilement ordonner renferment une seule lettre, x par exemple. Mais on peut aussi l'employer dans le cas où plusieurs lettres interviennent et même dans le cas où les coefficients de la lettre ordonnatrice sont eux-mêmes des polynomes. Nous indiquerons quelques-unes de ces multiplications en exercices.

73. — **Produits remarquables.**

L'égalité qui exprime le résultat des opérations effectuées s'appelle une *identité* : les deux membres deviennent *identiques* lorsqu'on les simplifie. Ainsi, l'égalité :

$$x(x - 1) = 2x^2 - x(x + 1)$$

est une identité.

Nous désignons sous le titre de *produits remarquables* des identités qu'il est très important de retenir afin de simplifier les calculs et qui nous sont données par les règles de la multiplication algébrique.

1° Carré de la somme de deux nombres. Carré de leur différence.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

On peut aisément vérifier cette identité : $(a+b)^2$ est égal à $(a+b)\times(a+b)$. Effectuons comme suit :

$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{a+b} \\ a^2+ab \\ \underline{\quad +ab+b^2} \\ a^2+2ab+b^2. \end{array}$$

Ce résultat peut s'énoncer :

Le carré de la somme de deux nombres est égal à la somme des carrés de chacun de ces nombres, augmentée de leur double produit.

On vérifierait de la même façon l'identité :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

qui peut s'écrire aussi bien : $a^2 + b^2 - 2ab$ et se traduire :

Le carré de la différence de deux nombres est égal à la somme des carrés de chacun de ces nombres diminuée de leur double produit.

2° Carré d'un polynome. — Soit à effectuer :

$$(a+b+c)^2$$

c'est le produit de deux polynomes égaux à

$(a+b+c)$ soit :

$$(a+b+c)\times(a+b+c)$$

en appliquant la règle, on obtient pour résultat :

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

On obtiendrait de même :

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

et encore :

$$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc.$$

La règle de formation de ces carrés peut s'énoncer en généralisant.

Le carré d'un polynome s'obtient en prenant la somme des carrés de chacun des termes et des doubles produits de ces termes pris deux à deux de toutes les façons possibles (en tenant compte dans ces produits des signes des facteurs).

Ainsi le carré du polynome :

$$x - y + z - t$$

s'écrira :

$$(x-y+z-t)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2xy + 2xz - 2xt - 2yz + 2yt - 2zt$$

de même :

$$(2a - 3b - 1)^2 = 4a^2 + 9b^2 + 1 - 12ab - 4a + 6b.$$

On obtient facilement tous les doubles produits en prenant successivement : les doubles produits du premier terme par le second, du premier par le 3e, etc., puis du 2e terme par le 3e, du 2e par le 4e, etc.

3° Cube de la somme de deux nombres. Cube de leur

différence. — En appliquant la règle de multiplication des polynomes, on établit les identités suivantes :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

qui peut s'écrire aussi :

$$a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$$

et se traduire en langage ordinaire.

Le cube de la somme de deux nombres est égal à la somme des cubes de chacun de ces nombres augmentée du triple produit du carré du premier par le second, augmentée encore du triple produit du premier par le carré du second.

On vérifierait d'une façon analogue l'identité :

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2.$$

On peut aussi traduire ce résultat en langage ordinaire. Mais on peut remarquer que l'énoncé relatif au cube de la somme convient encore, à condition de considérer $a - b$ comme égal à $a + (-b)$ et d'appliquer dans les opérations indiquées la règle des signes.

Remarquons que les termes négatifs sont ceux où $-b$ intervient avec un exposant impair.

4° **Autre identité très importante :**

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Le produit de la somme de deux nombres par leur différence est égal à la différence des carrés de ces nombres.

Ainsi :

$$(2xy + 3a)(2xy - 3a) = 4x^2y^2 - 9a^2$$

de même :

$$(a+b+c)(a+b-c) = (a+b)^2 - c^2$$

parce que dans ces deux polynomes on peut considérer la somme $a + b$ comme effectuée. Cette identité est très importante, non seulement parce qu'elle permet d'obtenir rapidement certains produits, mais surtout à cause de sa réciproque :

La différence des carrés de deux nombres est égale au produit de la somme de ces nombres par leur différence.

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

C'est la même identité que la précédente; mais écrite dans l'ordre inverse. Elle permet très fréquemment d'écrire un polynome sous la forme d'un produit de facteurs. Nous aurons dans tout le cours de cet ouvrage à utiliser cette propriété.

Ainsi :

$$2ab + a^2 + b^2 - c^2$$

s'écrira successivement :

$$(2ab + a^2 + b^2) - c^2$$
$$(a+b)^2 - c^2$$
$$(a+b+c)(a+b-c).$$

(Voir, en géométrie, le calcul des hauteurs d'un triangle en fonction de 3 côtés.)

EXERCICES SUR LE CHAPITRE V

Multiplication des monômes et des polynomes.

49. — Faire le produit des monômes :

$$12a^2bc \quad \text{et} \quad 13abc$$
$$4xy \quad \text{et} \quad \frac{2}{3}xy$$

$$16x^2y^3 \quad \text{et} \quad \frac{3}{4}xz$$

$$4abc \quad \text{et} \quad \frac{2}{2}a^2bx.$$

50. — Faire le produit des six monômes :

$$\frac{2}{3}a^3b; \quad 2abx; \quad 4ax; \quad \frac{1}{6}xy; \quad 9y^2; \quad 3xy.$$

51. — Faire le produit des cinq monômes :

$$3ax; \quad -2ax^2; \quad -3a^2x^4; \quad \frac{1}{5}ay; \quad -y^2.$$

52. — Faire le produit des cinq monômes :

$$\frac{1}{4}ax; \quad -3x^2; \quad -2xy; \quad 12ax^3; \quad -ay^2.$$

53. — Multiplier le polynome :

$$13ax - 2y^2 + \frac{1}{4}ay + by^3,$$

par le monôme $-5\,axy$.

54. — Multiplier le polynome :

$$-3x^2 + 12ax + 5 - 3x^4$$

par le monôme $2\,ax$.

55. — Multiplier les polynomes :

$$3x^2 - 5x - 2$$
$$3x - 4.$$

56. — Multiplier les polynomes :

$$3x^2 - 5ax - 4$$
$$2x - 3a.$$

57. — Multiplier :

$$a^2 + ab + b^2 \quad \text{par} \quad a - b.$$

58. — Multiplier :

$$a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 \quad \text{par} \quad a - b.$$

59. — Multiplier :

$$a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 \quad \text{par} \quad a - b.$$

60. — Généraliser les questions précédentes.

61. — Multiplier :

$$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 \quad \text{par} \quad a + b.$$

62. — Généraliser la question précédente.

63. — Calculer les carrés de chacune des expressions suivantes :

$$a + b + c + d$$
$$a - b - c - d$$
$$2x + 3y - ax.$$

64. — Calculer les cubes des expressions suivantes :

$$2a - 3b$$
$$x + 1$$
$$x - 1$$
$$a + b + c$$
$$a - b + c$$
$$a - b - c.$$

65. — Multiplier :

$$x^3 + 2x^2 - x - 1 \quad \text{par} \quad x^2 - x - 4.$$

66. — Multiplier :

$$x^2 - 2 \quad \text{par} \quad x^2 - 3x + 5.$$

67. — Multiplier :

$$x^2 - 2x + 5 \quad \text{par} \quad x^2 - 2x + 5.$$

68. — Effectuer les produits :

$$(4a^2x^2 + y^2)(2ax + y)(2ax - y)$$
$$(25b^4y^2 - 1)(5b^2y - 1)$$
$$(2ab + 3x - 2)(2ab + 3x + 2).$$

69. — Effectuer le produit :

$$(x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z).$$

70. — Vérifier l'identité :

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2.$$

71. — Vérifier l'identité :

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2.$$

72. — Effectuer les opérations suivantes :

$$(x + y)^2 + (x - y)^2$$
$$(x + y)^2 - (x - y)^2$$
$$(x + y)^3 + (x + y)^3$$
$$(x + y)^3 - (x - y)^3.$$

73. — Décomposer en produits de facteurs les expressions suivantes :

$$25a^2 - b^2$$
$$4a^2c^2 - 9b^2y^2$$
$$x^2 - 1$$
$$4a^2 - 1.$$
$$16a^4x^4 - 1$$
$$36x^2 - 4y^2$$
$$c^2 - (a^2 + b^2 + 2ab)$$
$$c^2 + 2ab - a^2 - b^2$$
$$a^2 + 2ab - c^2 + b^2$$
$$4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2.$$

74. — Compléter les expressions suivantes de telle sorte qu'elles expriment le développement du carré d'un binome :

$$x^2 - 2ax$$
$$a^2x^2 + ax$$
$$x^2 - 2x$$
$$m^2 + \frac{1}{4}$$
$$a^2p^2 - 1$$
$$25b^2 - \frac{25b}{3}.$$

Exemple :

$x^2 - 2ax$ est le commencement du carré développé :

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + x^2$$

auquel manquerait le carré du second terme.

CHAPITRE VI

DIVISION DES MONÔMES ET DES POLYNOMES. FRACTIONS

---

74. — **Division d'un monôme par un monôme.**

On dit qu'un monôme est divisible par un autre, lorsqu'il existe un troisième monôme qui mulplié par le second reproduit le premier. La règle de la division est donc ici une conséquence immédiate de la règle de la multiplication.

Règle. — **Le quotient de deux monômes a pour coefficient le quotient des coefficients et renferme chaque lettre du dividende avec un exposant égal à la différence de ses exposants dans le dividende et le diviseur.**

Exemple. — Soit à diviser :

$$35a^3b^2xy \quad \text{par} \quad 7abx;$$

le quotient donné par application de la règle est :

$$5a^2by.$$

On sait en effet que :

$$5a^2by \times 7abx = 35a^3b^2xy.$$

75. — Remarque. Exposant zéro.

Nous exposerons plus loin les opérations relatives aux puissances. Nous avons indiqué à propos de la multiplication des monômes la règle suivante :

Le produit de deux puissances d'un même nombre s'exprime par ce nombre avec pour exposant la somme des exposants des deux facteurs.

$$a^4 \times a^3 = a^7.$$

On en déduit la règle de division :

Le quotient de deux puissances d'un même nombre s'exprime par ce nombre avec pour exposant l'excès de l'exposant du dividende sur celui du diviseur.

$$a^7 : a^3 = a^4.$$

C'est une conséquence directe de la règle de multiplication.

Dans le cas où les deux exposants sont égaux, la règle donne au quotient l'exposant *zéro* :

$$a^4 : a^4 = a^0.$$

Or le quotient de deux nombres égaux est *1*. **La puissance zéro d'un nombre quelconque est l'unité.** D'où cette remarque appliquée plus haut dans la division des monômes :

On peut supprimer dans un produit toute lettre affectée de l'exposant zéro. En d'autres termes, on peut remplacer le facteur x^0 par *1*.

Soit à effectuer la division suivante :

$$28ab^2xy \quad \text{par} \quad -7b^2x$$

le quotient est :

$$-4ay.$$

Il est inutile d'écrire les lettres b et x au résultat puisque leur exposant serait zéro.

76. — Divisions impossibles. Fractions.

Nous avons énoncé la règle de la division en supposant que le dividende était divisible par le diviseur : elle est alors une conséquence de la règle de la multiplication. *Pour qu'il y ait divisibilité, il faut et il suffit que la règle soit applicable, c'est-à-dire que le diviseur ne renferme aucune lettre ne figurant pas dans le dividende et ne renferme les lettres y figurant qu'avec un exposant au plus égal à celui qu'elles ont dans le dividende.*

Lorsque le dividende n'est pas divisible par le diviseur, on se borne à indiquer la division; on a une **fraction rationnelle** ou plus simplement une **fraction.**

Nous énoncerons plus loin quelques propriétés des fractions rationnelles.

77. — Division d'un polynome par un monôme.

Règle. — **Pour diviser un polynome par un monôme, il suffit de diviser successivement tous les termes du polynome par le monôme et d'ajouter entre eux les résultats obtenus.**

Exemple. — Diviser le polynome :

$$3a^2x^4 + 5abx^3 + ax$$

par le monôme $15\,ax$. On obtient :

$$\frac{1}{5}ax^3 + \frac{1}{3}bx^2 + \frac{1}{15}.$$

C'est une conséquence immédiate de la règle de la multiplication. En multipliant en effet :

$$\frac{1}{5}ax^3 + \frac{1}{3}bx^2 + \frac{1}{15}$$

par $15\,ax$, ce qui revient à multiplier chaque terme du polynome par $15\,ax$ et à additionner les produits partiels, on aurait précisément le dividende :

$$3a^2x^4 + 5abx^3 + ax.$$

78. — **Condition de divisibilité.**

Pour qu'un polynome (dans lequel on a réduit les termes semblables) soit divisible par un monôme, il faut et il suffit que chacun de ses termes le soit.

Lorsque la division n'est pas possible, on se borne à l'indiquer en employant la notation des **fractions.**

Ainsi la division du polynome :

$$a^2bxy^2 - b^2x^2y + a^3yz$$

par le monôme ac^2xz, s'écrira :

$$\frac{a^2bxy^2}{ac^2xz} - \frac{b^2x^2y}{ac^2xz} + \frac{a^3yz}{ac^2xz}$$

ou en simplifiant ces fractions comme on le fait pour les fractions arithmétiques :

$$\frac{aby^2}{c^2z} - \frac{b^2xy}{ac^2z} + \frac{a^2y}{c^2x}.$$

79. — **Mise d'un monôme en facteur commun.**

Si nous écrivons dans l'exemple donné au n° 77 (page 93) que le dividende est égal au produit du quotient par le diviseur, on a l'expression :

$$3a^2x^4 + 5abx^3 + ax = \left(\frac{1}{5}ax^3 + \frac{1}{3}bx^2 + \frac{1}{15}\right) \times 15ax.$$

On dit que le deuxième membre représente le polynome $3a^2x^4 + 5\,abx^3 + ax$ dans lequel on a mis le monôme $15\,ax$ **en facteur commun.**

On nous déduit aisément de cet exemple la règle pour mettre dans un polynome donné un monôme en facteur commun :

Règle. — **Pour mettre dans un polynome un monôme en facteur commun, on indique la multiplication de ce monôme par le polynome dont les termes s'obtiennent en divisant chacun des termes du polynome proposé par le monôme mis en facteur commun.**

Ainsi, soit à mettre dans le polynome :

$$-3a^3bx^2 + 2ab^4x^2 - abx^3 - 5abx^2y$$

le monôme $-abx^2$ en facteur commun ; on obtient :

$$-abx^2(3a^2 - 2b^3 + x + 5y).$$

Cela revient à indiquer à l'aide des parenthèses une multiplication dont le produit serait le polynome proposé.

On dit quelquefois que le monôme $-abx^2$ a été *mis en évidence.*

Remarque. — D'une manière plus générale, étant donné un polynome :

$$A + B - C + D$$

on peut écrire l'identité :

$$A + B - C + D = m\left(\frac{A}{m} + \frac{B}{m} - \frac{C}{m} + \frac{D}{m}\right)$$

m étant un monôme quelconque que l'on met en facteur commun. Dans le cas où certains termes du polynome proposé ne seraient pas divisibles par le monôme mis en facteur commun, on indique le quotient partiel par la notation en **fractions algébriques.**

Soit, par exemple, à mettre le monôme $\frac{a}{12R}$ en facteur commun dans l'expression :

$$\pi a R^2 + \frac{a}{4R} - \frac{2aRh}{3}$$

on obtient :

$$\frac{a}{12R}(12\pi R^3 + 3a^3 - 8R^2h).$$

Autre exemple. — Soit à mettre a en facteur commun dans le trinome

$$ax^2 + bx + c.$$

on obtient :

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

80. — **Division d'un polynome par un polynome.**

Nous nous bornerons à donner quelques exemples de divisions d'un polynome par un polynome, et la règle à suivre, sans vouloir la justifier. Nous ne l'appliquerons qu'à des polynomes ordonnés.

Définition. — **Diviser un polynome par un autre polynome, c'est en chercher un troisième qui, multiplié par le second, reproduise le premier**

Soit à diviser le polynome :

$$6x^5 + 11x^4 - 19x^3 + 46x^2 - 37x - 7$$

par le polynome :

$$2x^2 + 5x - 7.$$

On dispose l'opération comme suit :

$$\begin{array}{l|l}
6x^5+11x^4-19x^3+46x^2-37x-7 & 2x^2+5x-7 \\
\hline
-6x^5-15x^4+21x^3 & 3x^3-2x^2+6x+1 \\
\quad -4x^4+2x^3+46x^2 & \\
\quad +4x^4+10x^3-14x^2 & \\
\qquad 12x^3+32x^2-37x & \\
\qquad -12x^3-30x^2+42x & \\
\qquad\qquad 2x^2+5x-7 & \\
\qquad\qquad -2x^2-5x+7 &
\end{array}$$

Le **quotient** est le polynome :

$$3x^3 - 2x^2 + 6x + 1.$$

On pourrait vérifier que le produit de ce polynome par $(2x^2 + 5x - 7)$ donne bien le polynome dividende.

Règle. — Pour diviser un polynome par un autre polynome ordonnés tous deux de la même façon par rapport à la même lettre :

1° On divise le premier terme à gauche du dividende par le premier terme à gauche du diviseur, le quotient partiel est le *premier terme à gauche* du quotient cherché.

2° On multiplie le diviseur tout entier par ce premier terme du quotient, et l'on retranche le produit du dividende. (Dans la pratique, on ramène cette soustraction à une addition en changeant à mesure les signes de ces produits partiels et en les disposant sous les termes semblables du dividende).

3° On divise le premier terme à gauche de ce reste par le premier terme à gauche du diviseur, le résultat est le *second terme à gauche* du quotient cherché.

4° On multiplie le diviseur tout entier par ce deuxième terme du quotient et on retranche le produit du reste précédent.

5° On opère sur le deuxième reste comme on l'a fait sur le premier et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve *zéro* pour reste.

Autre exemple. — $(x^5 - a^5)$ divisé par $x - a$

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - a^5 & x - a \\
\hline
\underline{-x^5 + ax^4} & x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4 \\
\quad + ax^4 & \\
\quad \underline{- ax^4 + a^2x^3} & \\
\qquad\quad a^2x^3 & \\
\qquad\quad \underline{- a^2x^3 + a^3x^2} & \\
\qquad\qquad\quad a^3x^2 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{- a^3x^2 + a^4x} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad a^4x & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{- a^4x} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Le quotient est $x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4$.

Il a fallu ménager la place des termes de degré régulièrement décroissant de x^5 à $-a^5$.

81. — Divisions impossibles.

Il peut arriver qu'il n'existe pas de polynome qui, multiplié par le diviseur, reproduise le dividende. Dans ce cas, la division est impossible. On le reconnaît, par exemple, à ce que le premier terme à gauche du dividende ou de l'un des dividendes partiels n'est pas divisible par le premier

terme à gauche du diviseur, ou bien lorsque l'on obtient un reste de dégré inférieur au diviseur.

Par analogie avec la notion de division arithmétique, on recherche parfois un polynome qui, multiplié par le diviseur, donne un produit contenu dans le dividende et tel que l'excès du dividende sur ce produit soit de degré inférieur au diviseur. On appelle par extension *reste* de la division cet excès et *quotient* le polynome obtenu.

La marche de l'opération est la même que précédemment.

82. — Divisions remarquables [1].

Les produits remarquables que nous avons mentionnés au chapitre précédent permettent d'écrire un certain nombre de quotients sans effectuer la division.

Ainsi :

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a + b} = a + b.$$

$$\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a - b} = a - b.$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b.$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b.$$

Etc.

Nous nous bornerons à indiquer les particularités de la division d'un polynome entier en x par

1. Cette partie du chapitre VI peut être laissée de côté à l'école primaire supérieure et même à l'école normale si le professeur juge que ses élèves ne sont pas suffisamment préparés à en tirer profit. Nous croyons qu'elle peut aisément être suivie et développer l'habileté de calcul.

un diviseur de la forme $x - a$ ou même plus spécialement des binomes de la forme $x^n \pm a^n$ par les binomes $x \pm a$.

On reconnaît qu'un polynome entier en x est divisible par $x - a$ à ce que ce polynome devient nul *quand on y remplace* x par a.

Si le polynome ne devient pas nul, c'est qu'il n'est pas divisible par a ou, si l'on veut, que la *division se fait avec reste*, et le reste de **la division est précisément la valeur que prend le polygone pour** $x = a$. Ce principe est une conséquence immédiate de l'identité de la division.

Ainsi :

$$5x^2 - 3x - 14$$

est divisible par $x - 2$, car l'on a :

$$5x^2 - 3x - 14 = (x - 2)(5x + 7).$$

Les deux membres de cette identité prennent la même valeur pour toute valeur de x et en particulier pour $x = 2$. Or, pour $x = 2$, le second membre est nul, puisque c'est un produit de deux facteurs dont le premier devient nul; le premier membre est donc nul aussi, ce que l'on vérifie aisément. Au contraire le trinome :

$$7x^2 - 5x + 9$$

n'est pas divisible par $x - 5$, et le reste de la division serait 159, valeur numérique du polynome pour $x = 5$. On a, en effet :

$$7x^2 - 5x + 9 = (x - 5)(7x + 30) + 159$$

et les deux membres de cette identité prennent la même valeur pour $x = 5$.

Quotients de la somme ou de la différence des puissances semblables de deux nombres par la somme ou la différence de ces nombres.

1° *$x^n - a^n$ est divisible par $x - a$*, en effet, le reste de la division par $x - a$ s'obtient en y remplaçant x par a, soit :

$$a^n - a^n = 0$$

la différence des puissances semblables de deux nombres est toujours divisible par la différence de ces nombres.

Comme nous l'avons déjà vérifié et comme on s'en assurerait en effectuant la division, le quotient peut s'écrire *a priori* en suivant la règle ci-dessous.

Règle de formation du quotient. — Le quotient est un polynome dont le premier terme à gauche est le premier terme du dividende diminué d'un degré, le second terme s'obtient en diminuant d'un degré la lettre x et en introduisant la lettre a, le troisième terme s'obtient en diminuant encore d'un degré la lettre x et en augmentant d'un degré la lettre a et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne un terme égal au second terme du dividende diminué d'un degré. Tous ces termes sont précédés du signe $+$.

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2a^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}.$$

Ainsi :

$$\frac{x^5 - a^5}{x - a} = x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2.$$

2° $x^n + a^n$ n'est pas divisible par $x - a$ et le reste de la division est $2a^n$.

Mais le quotient de cette division avec reste se forme d'après la même règle que dans le cas précédent. Ainsi la division de :

$$x^6 + y^6 \text{ par } x - y$$

donne pour quotient :

$$x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5$$

et le reste est $2y^6$.

Remarque. — La division de la somme ou de la différence des puissances semblables de deux nombres par *la somme* de ces nombres peut se ramener à l'étude précédente si l'on remarque que $x + a$ peut s'écrire $x - (-a)$.

Pour trouver le reste de la division du polynome par $x + a$, il suffit donc de remplacer x par $-a$ dans ce polynome.

Applications :

3° $x^n + a^n$ est divisible par $x + a$ si *n est impair* le reste de la division par $x + a$ est en effet :

$$(-a)^n + a^n$$

Si n est impair, le produit de plusieurs facteurs $(-a) \times (-a) \times \ldots$ est négatif, le reste est donc :

$$-a^n + a^n = 0$$

La loi de formation des termes du quotient est la même que dans les divisions précédentes; mais **il y a alternance des signes** :

$$\frac{x^n + a^n}{x + a} = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots$$

$$\frac{R^3 + r^3}{R + r} = R^2 - Rr + r^2.$$

Si *n est pair* — la division se fait avec reste — le quotient s'écrit de la même façon, le reste est $2a^n$:

4° $x^n - a^n$ est divisible par $x + a$, si *n est pair;* le reste de la division par $x + a$ est en effet :

$$(-a)^n - a^n = +a^n - a^n = 0$$

le quotient s'écrit comme dans le cas précédent avec alternance des signes :

$$\frac{x^4 - y^4}{x + y} = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3.$$

Si *n est impair*, la division a un reste $-2a^n$.

Remarque. — Il y a alternance des signes quand le diviseur est $x + a$ quel que soit le dividende. On verrait en faisant la division que les changements de signes tiennent au signe + du deuxième terme du diviseur.

83. — Fractions rationnelles.

On donne le nom de **fractions rationnelles** aux fractions dont les deux termes sont des polynomes (ou, comme cas particulier, des monômes).

Voici des exemples de fractions rationnelles :

$$\frac{3a^2b}{5b^2c^3}; \quad \frac{a - b}{c - d}, \quad \frac{a^2 + a^2 - y^3}{a^2x^4 - y^5 + z}.$$

Le calcul des fractions rationnelles est **soumis aux mêmes règles que le calcul des fractions arithmétiques.** C'est une conséquence immédiate du fait que les lettres tenant la place des nombres, les opérations légitimes sur les nombres le sont aussi sur les lettres. C'est une conséquence aussi des règles de calcul sur les fractions que nous avons énoncées dans le chapitre II comme application des nombres positifs et négatifs.

En particulier, on peut **simplifier** les fractions en divisant le numérateur et le dénominateur par un facteur commun. On peut aussi **réduire plusieurs fractions au même dénominateur** en multipliant les deux termes de chacune d'elles par un facteur convenablement choisi.

Dans le cas où les termes des fractions sont des **monômes**, les règles pour la formation du *p. g. c. d.* et du *p. p. c. m.* sont les mêmes qu'en arithmétique pour les produits de facteurs premiers; il est donc très aisé de réduire les fractions **à leur plus simple expression**, et aussi de réduire plusieurs fractions **au plus petit dénominateur commun**.

Il y a lieu de remarquer que l'on regardera une fraction comme plus simple qu'une autre lorsque ses termes seront *de degrés respectivement moins élevés;* cela ne veut pas dire qu'ils sont *plus petits*, car leur grandeur relative dépend évidemment des valeurs données aux lettres qui y figurent; un sens analogue doit être donné aux mots **plus petit dénominateur commun.**

Par exemple, soit la fraction :

$$\frac{3a^2bc}{6abc^2},$$

on la simplifiera en divisant les deux termes par $3\,abc$, ce qui donne :

$$\frac{a}{2c}$$

Si l'on suppose que l'on ait :

$$a = 10, \qquad b = 0{,}001, \qquad c = 20,$$

on a :

$$3a^2bc = 6$$
$$6abc^2 = 24,$$

de telle sorte que la fraction proposée se réduit à $\frac{6}{24}$ et la fraction **simplifiée** à $\frac{10}{40}$. On doit cependant, au point de vue algébrique, considérer la seconde fraction comme plus simple que la première.

Lorsque les termes des fractions sont des polynomes, nous ne pouvons donner ici les règles générales pour trouver leur *p. g. c. d.* et leur *p. p. c. m.*; on doit donc se borner à simplifier les fractions par la suppression d'un facteur commun aux deux termes lorsqu'on aperçoit un tel facteur et, pour la réduction au même dénominateur de plusieurs fractions, se contenter de multiplier les deux termes de chacune d'elles par le produit des dénominateurs des autres, à moins que la pratique du calcul ne suggère quelque simplification.

84. — Remarque sur quelques formes particulières de fractions.

Il peut arriver que, pour certaines valeurs données aux lettres, des fractions prennent des formes difficiles à interpréter à première vue

Ainsi la fraction :

$$\frac{5x}{x-3}$$

pour $x = 3$ devient :

$$\frac{15}{0}$$

expression que l'on désigne parfois sous le nom de **symbole d'impossibilité**.

La fraction

$$\frac{x^2+x-6}{x^2+5x-14}$$

devient pour $x=2$:

$$\frac{0}{0}$$

expression que l'on désigne parfois sous le nom de **symbole d'indétermination**.

On peut dans certains cas, par le raisonnement direct, voir ce que signifient ces formes ou symboles; dans d'autres cas, cela n'est pas possible par des moyens élémentaires.

Ainsi reprenons, par exemple, la fraction :

$$\frac{5x}{x-3}.$$

Si la valeur donnée à x n'est pas égale à 3, mais légèrement supérieure, la valeur numérique du quotient sera un nombre très grand. Supposons qu'on diminue encore cette valeur de x tout en la laissant supérieure à 3 : passons par exemple de :

$$x=3{,}0001 \text{ à } x=3{,}000\,000\,0001$$

le quotient exprimé par la fraction deviendra encore beaucoup plus grand. On démontre qu'en continuant ainsi le quotient peut devenir **plus grand qu'un nombre quelconque donné**. On dit que ce quotient **dépasse toute limite**, ou qu'il **tend vers l'infini** quand x tend vers 3. On traduit donc ce fait ainsi : la fraction tend vers l'infini (que l'on écrit ∞) quand x tend vers 3, c'est-à-dire quand son dénominateur tend vers zéro.

Le même raisonnement peut être répété dans tous les cas où le dénominateur d'une fraction devient égal à zéro, tandis que le numérateur conserve une valeur différente de zéro; on exprime ce fait en écrivant l'égalité :

$$\frac{m}{0}=\infty$$

dans laquelle m désigne un nombre quelconque différent de zéro.

Ainsi $\frac{m}{0}$ doit être considéré, non comme un symbole d'impossibilité, mais comme le symbole de l'infini. Lorsqu'on rencontre une telle expression dans la solution d'un problème, il faut l'*interpréter*, c'est-à-dire chercher quelle peut être la signification de ce résultat par rapport au problème posé. Il peut se faire que cette signification soit que le problème est impossible, ce qui explique la locution *symbole d'impossibilité*.

L'expression $\frac{0}{0}$ ne signifie rien en elle-même. Cela tient parfois à un facteur commun aux deux termes, qui s'annule pour une valeur particulière. Ainsi, la fraction indiquée plus haut :

$$\frac{x^2+x-6}{x^2+5x-14}$$

peut s'écrire :

$$\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+7)}$$

ou en simplifiant :

$$\frac{x+3}{x+7}$$

pour $x=3$, on a :

$$\frac{6}{10}.$$

On dit que l'**indétermination n'était qu'apparente** ou encore qu'on a **levé l'indétermination.** Dans certains cas, nous ne pourrons pas lever l'indétermination, mais on y parvient par des méthodes qui se rattachent au calcul différentiel. Il est très rare que l'indétermination soit réelle, c'est-à-dire ne puisse être levée par aucune méthode.

Il en est de même pour d'autres formes :

$$0 \times \infty, \quad \frac{0}{\infty}, \quad \frac{\infty}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \text{ etc.,}$$

auxquelles on peut être conduit.

Dans tous les cas, lorsque de pareilles expressions se rencontreront comme résultats dans les problèmes, il faudra toujours voir ce que devient le problème dans ce cas particulier et trouver l'interprétation par le simple bon sens et le raisonnement direct. Nous aurons à revenir sur cette question en discutant quelques problèmes du premier degré.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE VI

Division des monômes et des polynomes. Fractions.

75. — Diviser le monôme :

$27a^2bxy^2$ par le monôme $3aby$.

76. — Effectuer les divisions indiquées ci-dessous :

$$8x^2y : \frac{3}{5}axy^2$$
$$25a^3x^2y^5 : 5a^2x^3y^6$$
$$3\pi a^3\sqrt{3} : \frac{1}{4}\pi a^2$$
$$\frac{2}{3}\pi R^2h : \frac{1}{6}\pi h^3.$$

77. — Diviser le polynome :

$$12a^3b^2x - 28a^2bx^3 + 4ay,$$

par le monôme $4a$.

78. — Effectuer les divisions indiquées ci-dessous :

$$(12a^4cx^2 + 30a^3bc^3x - 18a^2bx) : 6a^2x$$
$$(14x^5y^4 - 7x^4y^5 + 42x^3y^2) : -\frac{2}{7}x^3y.$$

Les exercices indiqués ci-dessous et relatifs aux fractions sont d'excellents exercices sur la division des monômes et sur la division d'un polynome par un monôme.

79. — Mettre en évidence les facteurs communs aux termes des polynomes ci-dessous :

$$5a^2bx^3 - 30a^3b^2x + 10a^4b^3x^2$$
$$12xy + 48abx - 30a^3x^2y$$
$$2a^3x + 2a^3y + 2a^3z$$
$$84\pi R^2h - 12\pi Ra^2 + 28\pi R^3.$$

80. — Mettre $\frac{1}{3}h\pi$ en facteur commun dans le polynome :

$$\frac{2}{3}\pi R^2h - a^3 + 4\pi R^2h.$$

81. — Mettre $\frac{1}{12}a^2$ en facteur commun dans l'expression :

$$\pi a^2 - \frac{2}{3}\pi a^3 + 4a^2h.$$

82. — Effectuer les divisions suivantes :

$$7ax^6 - 19a^2x^5 + 41a^3x^4 - 26a^4x^3 + 12a^5x^2$$
divisé par $(7x^3 - 5ax^2 + 3a^2x)$.

$$(3x^4 - 26x^3 + 37x^2 - 14x) : (3x^2 - 5x + 2)$$

$$(6x^5 + 11x^4 - 19x^3 + 46x^2 - 37x - 7)$$

$$\text{divisé par } (2x^2 + 5x - 7)$$

$$(x^7 - x^6 + x^5 - x^3 - 2x^2 - 2x - 1) : (x^3 - x^2 - 1).$$

83. — Écrire sans faire l'opération les quotients des divisions indiquées ci-dessous :

$$\frac{x^4 - 5^4}{x - 5}$$

$$\frac{a^5 - 1}{a - 1}$$

$$\frac{R^3 + R'^3}{R - R'}$$

$$\frac{125x^3 - y^3}{5 - y}.$$

84. — Simplifier les fractions suivantes :

$$\frac{4a^3bcx}{2b^2c^2y^2}, \quad \frac{15a^3bc^2xy}{50abcx^2z}, \quad \frac{15a^4bc^3xyz}{12abc^4y^2}.$$

85. — Simplifier les fractions suivantes :

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}; \quad \frac{a^4 - b^4}{a^3 - b^3}; \quad \frac{a^5 + b^5}{a^3 + b^3}.$$

86. — Faire le produit des fractions suivantes :

$$\frac{a^3bx}{ab^2y} \times \frac{ab^2x^2}{cxz} \times \frac{3ab^4x}{5a^2bx^2y} :$$

simplifier le résultat obtenu.

87. — Faire la somme des fractions suivantes :

$$\frac{ax}{y} + \frac{by}{x} + \frac{ab + a^2 - b^2 + 3a - 5b}{xy}.$$

88. — Effectuer les additions et soustractions suivantes :

$$\frac{a^2x}{y} + \frac{by}{x} - \frac{(a^2 + b^2)\,y^2}{x^2} - \frac{3abx^2}{y^2}.$$

89. — Réduire au même dénominateur les fractions suivantes :

$$\frac{1}{a + b} \quad \frac{2}{a - b} \quad \frac{4a}{a^2 - b^2} \quad \frac{6a^2}{a^2 + b^2}.$$

On remarquera qu'on peut prendre $a^4 - b^4$ comme dénominateur commun.

90. — Effectuer les opérations suivantes :

$$\frac{1}{b - c} + \frac{1}{c - a} + \frac{1}{a - b}$$

$$\frac{a}{b - c} + \frac{b}{c - a} + \frac{c}{a - b}$$

$$\frac{a^2}{b - e} + \frac{b^2}{c - a} + \frac{c^2}{a - b}$$

$$\frac{a^3}{b - c} + \frac{b^3}{c - a} + \frac{c^3}{a - b}.$$

91. — Vérifier l'identité :

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a\,(x - a)} - \frac{1}{2a\,(x + a)}.$$

92. — Vérifier l'identité :

$$\frac{1}{(x - a)\,(x - b)} = \frac{1}{b - a}\left(\frac{1}{x - b} - \frac{1}{x - a}\right).$$

93. — Vérifier l'identité :

$$\frac{1}{(x-a)\,(x-b)(x-c)} = \frac{1}{(x-a)\,(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(x-b)(b-a)(b-c)}$$
$$+ \frac{1}{(x-c)\,(c-a)\,(c-b)}.$$

94. — Vérifier l'identité :

$$\frac{1}{(x - a)\,(x - b)\,(x - c)\,(x - d)} = \frac{1}{(x - a)\,(a - b)\,(a - c)\,(a - d)}$$
$$+ \frac{1}{(x - b)\,(b - a)\,(b - c)\,(b - d)} + \frac{1}{(x - c)\,(c - a)\,(c - b)\,(c - d)}$$
$$+ \frac{1}{(x - d)\,(d - a)\,(d - b)\,(d - c)}.$$

CHAPITRE VII

PUISSANCES ET RACINES
CALCULS SUR LES RADICAUX
EXPOSANTS FRACTIONNAIRES

---

85. — Puissances.

Rappelons quelques définitions déjà connues :

Le produit de plusieurs facteurs égaux :

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

s'appelle **puissance** du nombre 3. On l'indique par la notation :

$$3^5$$

le petit chiffre 5 placé en haut est l'**exposant** de la puissance, il indique le nombre de facteurs égaux qui entrent en produit.

$$a^2 \quad a^3 \quad a^5 \quad a^n$$

sont les *puissances deuxième, troisième, cinquième, n ième* du nombre a.

86. — Puissances des nombres positifs et négatifs.

Toute puissance d'un nombre positif est nécessairement positive. Quant aux puissances des

nombres négatifs, puisqu'elles expriment un produit de plusieurs facteurs négatifs, nous savons que selon que ce nombre de facteurs sera pair ou impair, le produit sera positif ou négatif. D'où cette remarque très importante :

Les puissances d'exposant pair d'un nombre négatif sont positives.

Les puissances d'exposant **impair** d'un nombre négatif sont **négatives.**

On dit encore que les puissances d'ordre impair **conservent le signe.**

Ainsi :

$$(-3)^2 = +3^2 = 9$$

tandis que :

$$(-3)^3 = -3^3 = -27$$

si n est pair :

$$(-a)^n = a^n.$$

si au contraire n est impair :

$$(-a)^n = -a^n.$$

87. — Théorème I.

Le produit de deux puissances d'une même lettre est une puissance de cette lettre dont l'exposant est la somme des exposants des facteurs.

$$a^3 \times a^4 = a^7.$$

Il suffit de se souvenir que a^3 et a^4 sont des produits de plusieurs facteurs égaux, le produit total contiendra donc :

$$\underbrace{a \times a \times a}_{a^3} \times \underbrace{a \times a \times a \times a}_{a^4} = a^7$$

$3 + 4$ soit 7 facteurs égaux à a : c'est donc a^7.

88. — **Théorème II.**

Le quotient de deux puissances d'une même lettre est une puissance dont l'exposant est l'excès de l'exposant du dividende sur celui du diviseur.

$$a^7 : a^3 = a^4.$$

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent.

89. — **Cas particuliers : exposant zéro. — Exposants négatifs.**

Nous avons vu que lorsque les deux exposants sont égaux l'application du théorème donne pour exposant *zéro*. Or le quotient de deux nombres égaux est 1. Donc **la puissance zéro d'un nombre quelconque est l'unité.**

Si l'exposant du dividende est inférieur à celui du diviseur l'application de la règle donnerait un **exposant négatif.**

Ainsi :

$$a^3 : a^5$$

donnerait a^{-2}.

Or $\frac{a^3}{a^5}$ est une fraction que l'on peut simplifier en divisant les deux termes par a^3, on obtient :

$$\frac{1}{a^2}.$$

Il suffit donc de remarquer que lorsque, par extension de la règle de division, on a obtenu une puissance d'exposant négatif, ce qui, pour le moment, n'a pas de sens, le résultat est une fraction dont le numérateur est 1 et le dénominateur la

puissance ayant même exposant, **mais positif.**

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}.$$

C'est le résultat de la simplification d'une fraction dont les deux termes étaient des puissances de a.

90. — **Théorème III.**

Le résultat de l'élévation d'un nombre à deux puissances successives (autrement dit : la puissance d'une puissance d'un nombre) **est une puissance de ce nombre dont l'exposant est le produit des exposants.**

$$(a^3)^4 = a^{12}.$$

En effet, c'est un produit de 4 facteurs égaux à a^3; c'est donc le produit de 4 produits de 3 facteurs égaux à a

$$\underbrace{a \times a \times a}_{a^3} \times \underbrace{a \times a \times a}_{a^3} \times \underbrace{a \times a \times a}_{a^3} \times \underbrace{a \times a \times a}_{a^3} = a^{12}$$

il contient donc 12 facteurs égaux à a c'est a^{12}.

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

91. — **Théorème IV.**

Pour élever un produit de plusieurs facteurs à la puissance n, il suffit d'élever chaque facteur à la puissance n (c'est-à-dire de multiplier les **exposants** de chaque facteur par n).

$$(a^2 \times b \times c^3)^5 = a^{10} \times b^5 \times c^{15}.$$

En effet, le résultat est un produit de 5 facteurs égaux à $a^2 \times b \times c^3$, c'est-à-dire :

$$(a^2 \times b \times c^3)\,(a^2 \times b \times c^3) \ldots\ldots (a^2 \times b \times c^3)$$

ou en intervertissant l'ordre des facteurs :

$$(a^2 \times a^2 \times a^2 \times a^2 \times a^2 \times b \times b \,..... \times c \times c \,.....$$

Soit :

$$(a^2)^5 \times b^5 \times (c^3)^5$$

et enfin :

$$a^{10} \times b^5 \times c^{15}.$$

92. — **Remarque.**

La notion de puissance, qui résulte de la définition d'un produit de plusieurs facteurs, peut être étendue aux fractions.

D'après la règle de multiplication :

$$\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times a \times a}{b \times b \times b}$$

autrement dit :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}.$$

Pour élever une fraction à une puissance n, il suffit d'élever chacun de ses termes à la puissance n.

93. — **Racines.**

On appelle **racine** deuxième, troisième, quatrième, ou n ième d'un nombre donné A, un nombre a dont la puissance deuxième, troisième, quatrième... ou n ième est égale à A.

Ainsi : a est la puissance cinquième de A si l'on a :

$$a^5 = \mathrm{A}.$$

Cela s'exprime aussi :

$$a = \sqrt[5]{\mathrm{A}}$$

le signe $\sqrt{\ }$ est un **radical**; le petit chiffre 5 est l'**indice** de la racine; il marque l'exposant de la puissance de a égale à A. Lorsque l'indice est 2, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit d'une racine carrée, on omet généralement de l'écrire. $\sqrt{4}$ a la signification de $\sqrt[2]{4}$.

Les deux notations :

$$a^5 = \mathrm{A} \text{ et } a = \sqrt[5]{\mathrm{A}}$$

expriment donc la même relation entre a et A.

On a toujours, par définition :

$$(\sqrt[n]{\mathrm{A}})^n = \mathrm{A}.$$

94. — **Remarque.**

Tous les nombres **positifs** admettent une **racine** d'indice quelconque[1], c'est la racine carrée arithmétique. Si l'indice est **pair**, il y a même **deux racines algébriques** ayant même valeur absolue (la racine arithmétique) et des signes contraires.

Ainsi 4 admet deux racines carrées algébriques :

$$+2 \quad \text{et} \quad -2,$$

car :

$$(+2)^2 = 4 \quad \text{et} \quad (-2)^2 = 4.$$

Si l'indice est **impair**, il n'y a qu'une **racine algébrique** positive :

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

1. Cette racine est la *racine arithmétique* de ce nombre. Nous ne voulons pas soulever de difficulté au sujet de l'existence de cette racine arithmétique. On sait que pratiquement il y a des racines de carrés parfaits, les racines carrées à une unité près, les racines à une approximation quelconque, d'où la notion de racine carrée dans tous les cas, et de même la notion de racine cubique ou de racine n ième.

le nombre — 2 ne convient pas, car $(-2)^3 = -8$ et non pas 8.

Quant aux nombres négatifs, ils ne peuvent admettre de racine d'**indice pair**, car il n'existe pas de nombre positif ou négatif qui, élevé à une **puissance paire**, donne un nombre négatif.

$$\sqrt{-4}, \quad \sqrt[4]{-32}$$

sont des expressions qui n'ont aucun sens.

Ils admettent une racine si l'indice est impair, et une seule, négative, dont la valeur absolue est la racine arithmétique de la valeur absolue du nombre proposé :

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

car :

$$(-2)^3 = -8$$

le nombre 2 ne convient pas, car $2^3 = 8$ et non -8.

En résumé, si l'indice est pair, un nombre positif admet deux racines et un nombre négatif n'en admet aucune.

Si l'indice est impair, tout nombre admet une racine et une seule, du même signe que ce nombre.

95. — **Principes sur le calcul des radicaux.**

Théorème I.

Le produit de plusieurs radicaux de même indice est un radical ayant l'indice commun et sous ce radical le produit des nombres figurant sous les radicaux des facteurs.

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}.$$

En effet, élevons le produit :

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c}$$

à la puissance n. Il suffit d'élever chaque facteur du produit à la puissance n. Or la puissance n ième de $\sqrt[n]{a}$ par définition a, de même :

$$(\sqrt[n]{b})^n = b; \ (\sqrt[n]{c})^n = c$$

la puissance n ième du produit est ainsi :

$$abc$$

le produit est donc la racine n ième de abc, on peut l'écrire :

$$\sqrt[n]{abc}.$$

Applications. —

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$$
$$\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6^{1}$$
$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Remarque. — On peut écrire aussi bien d'après le théorème précédent :

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c}.$$

Pour extraire la racine n ième d'un produit de facteurs, il suffit de prendre la racine n ième de chaque facteur et de multiplier les résultats obtenus.

Cette remarque nous conduit aux opérations suivantes si importantes dans le calcul des radicaux.

96. — **Faire sortir un facteur du radical. — Faire entrer un facteur sous un radical.**

$$\sqrt[n]{a^n bc} = a\sqrt[n]{bc}.$$

1. En réalité, il y a deux racines $+6$ et -6. On convient, *sauf indication contraire*, de prendre la racine positive.

Cela revient à considérer $a^n bc$ comme le produit des deux facteurs a^n et (bc) et à prendre la racine n ième de chacun d'eux.

Règle. — **Pour faire sortir une quantité qui entre en facteur sous un radical d'indice n, il suffit d'extraire la racine n ième de ce facteur.**

Exemples. —

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \times 3} = 2\sqrt[3]{3}$$
$$\sqrt{8x^3y} = 2x\sqrt{2xy}$$
$$\sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$$
$$\sqrt{12a^2} = 2a\sqrt{3}$$

Inversement. — **Pour faire entrer un facteur sous un radical, d'indice n, il suffit de l'élever à la puissance n ième et d'introduire en facteur le résultat sous le radical :**

$$10\sqrt{7,25} = \sqrt{725}$$
$$2\sqrt[3]{5R^2h} = \sqrt[3]{40R^2h}.$$

97 — **Théorème II.**

Le quotient de deux radicaux de même indice est un radical ayant l'indice commun et sous le radical le quotient des quantités qui figuraient dans les deux radicaux.

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Élevons en effet la fraction :

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

à la puissance n, il suffit d'élever ses deux termes à la n ième puissance, ce qui donne $\frac{a}{b}$, la puissance

n ième du quotient est ainsi $\frac{a}{b}$, donc le quotient est la racine n ième de $\frac{a}{b}$; on peut l'écrire :

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Exemples. —

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{4} = 2$$
$$\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$$
$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{125}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Remarque. — Pour diviser un radical d'indice n par un facteur donné, il suffit de diviser la quantité sous le radical par la puissance n ième de ce facteur.

Ainsi :

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b^n}}$$

cela revient en effet à introduire le facteur $\frac{1}{b}$ sous le radical.

Exemple 1. —

$$\frac{x^2 + \sqrt{xy} + \sqrt{ax^2}}{x}$$

devient :

$$x + \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{a}.$$

Exemple 2. —

$$\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)}$$

s'écrit :

$$\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

98. — **Théorème III.**

Pour élever un radical à une puissance p, il suffit d'élever à la puissance p la quantité placée sous le radical.

$$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}.$$

Ce n'est qu'un cas particulier du produit de radicaux de même indice. $(\sqrt[n]{a})^p$ est le produit :

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \ldots . \times \sqrt[n]{a}$$

de p facteurs égaux à $\sqrt[n]{a}$.

Il s'écrit :

$$\sqrt[n]{a \times a \ldots . \times a} = \sqrt[n]{a^p}.$$

Ainsi :

$$(\sqrt[n]{2^4})^2 = \sqrt[n]{2^8}.$$

99. — **Théorème IV.**

Pour extraire la racine p ième d'un radical, il suffit de multiplier par p son indice.

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a}.$$

Élevons en effet l'expression :

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$$

successivement aux puissances p et n, on obtient a.

Or, élever un nombre à la puissance p, puis à la puissance n, revient à l'élever à la puissance np. (Voir ci-dessus théorème III).

a est donc la puissance np ième de $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$; cela revient à dire que $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$ est la racine np ième de a; on peut l'écrire :

$$\sqrt[np]{a},$$

ce que nous avions annoncé.

100. — **Remarque I. Extraction de deux racines successives.**

L'expression ci-dessus (Théorème IV) peut s'écrire dans l'ordre inverse :

$$\sqrt[np]{a} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}.$$

Pour extraire une racine np ième d'un nombre, il suffit donc d'extraire successivement les racines n ième et p ième.

Exemples. —

$$\sqrt[6]{A} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{A}}$$

$$\sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{729}} = \sqrt[3]{27} = 3.$$

D'une manière générale, par une succession de racines carrées ou de racines cubiques, on peut extraire une racine d'indice $2^n \times 3^m$, c'est-à-dire ne contenant que les facteurs 2 et 3.

101. — **Remarque 2.**

De même que dans l'élévation à plusieurs puissances successives on peut intervertir l'ordre des exposants, on peut aussi dans l'extraction de plusieurs racines sucessives **intervertir l'ordre des indices.**

Ainsi :

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$$

les deux expressions signifient en effet : $\sqrt[mn]{a}$.

$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{64}}.$$

Cela simplifie souvent les calculs. Ici, par exemple, on aperçoit immédiatement la racine carrée de 64 qui est 8, puis la racine cubique de 8 qui est 2.

102. — **Théorème V.**

On ne change pas la valeur d'un radical en multipliant l'indice de la racine et l'exposant de la quantité sous le radical par un même facteur.

$$\sqrt[m]{a^p} = \sqrt[mq]{a^{pq}}$$

En effet, si l'on élève le premier membre successivement à la puissance m, puis à la puissance q, on obtient :

$$a^{pq}$$

a^{pq} est donc la puissance mq ième de $\sqrt[n]{a^p}$, cela revient à dire que $\sqrt[n]{a^p}$ est la racine mq ième de a^{pq}, ce que l'on peut écrire :

$$\sqrt[mq]{a^{pq}}.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi :

$$\sqrt[2]{a^3} = \sqrt[8]{a^{12}}$$
$$\sqrt[5]{a} = \sqrt[10]{a^2}.$$

Corollaire. — On peut aussi diviser indice et exposant par un même facteur commun :

$$\sqrt[mq]{a^{pq}} = \sqrt[m]{a^p}$$
$$\sqrt[12]{a^4} = \sqrt[3]{a}.$$

103. — **Simplification d'un radical.**

Simplifier un radical c'est :

1° Écrire l'indice et l'exposant sous la forme la plus simple en les divisant par leur plus grand commun diviseur de façon à ce qu'ils soient premiers entre eux.

2° Effectuer dans l'expression sous le radical toutes les simplifications de calcul possibles.

3° Faire sortir du radical toutes les quantités possibles.

Exemple. — Soit à simplifier :

$$\sqrt[4]{a^2b^4x^6}$$

on a successivement :

$$\sqrt{ab^2x^3},$$

et :

$$bx\sqrt{ax}.$$

Autre exemple. —

$$\sqrt{12x^3y^2 + 20x^2y^3 - 32x^5}$$

on obtient :

$$\sqrt{4x^2(3xy^2 + 5y^3 - 8x^3)}$$

et enfin :

$$2x\sqrt{3xy^2 + 5y^3 - 8x^3}.$$

Le théorème V et son corollaire sont très importants pour la multiplication et la division des radicaux d'indices différents en permettant la réduction au même indice.

104. — **Réduction de plusieurs radicaux au même indice.**

On peut faire une théorie de cette réduction présentant dans l'expression une grande analogie avec la réduction des fractions au même dénominateur. On établirait aisément ce qui suit :

Tout multiple commun aux indices peut servir d'indice commun dans un système de réduction.

Il suffit alors, pour réduire au même indice, de diviser ce multiple commun respectivement par chacun des indices, puis de multiplier l'indice et l'exposant dans chaque radical par le quotient correspondant.

Exemple. — Soient les radicaux :

$$\sqrt{3}, \quad \sqrt[4]{5^3}, \quad \sqrt[3]{2}.$$

Si l'on prend 12 pour indice commun, on obtient :

$$\sqrt[12]{3^6}, \quad \sqrt[12]{5^9}, \quad \sqrt[12]{2^4}.$$

On établit de même la notion de **plus petit indice commun**.

Tout indice commun est un multiple commun aux indices, à condition qu'on ait au préalable simplifié les radicaux et veillé à ce que indice et exposant soient premiers entre eux. Cette propriété et sa réciproque énoncée plus haut nous montrent que les indices communs sont les multiples communs aux indices. Donc le *p. p.* indice commun est le *p. p. c. m.* des indices, d'où la règle.

Règle. — **Pour réduire plusieurs radicaux au plus petit indice commun :**

1° On ramène pour chaque radical l'indice et l'exposant à être premiers entre eux.

2° On calcule le *p. p. c. m.* des indices, c'est l'indice commun.

3° On calcule les quotients respectifs de cet indice commun par chacun des indices et l'on multiplie dans

chaque radical l'indice et l'exposant par le quotient correspondant.

105. — Multiplication et division des radicaux.

On ramème ces opérations au cas des radicaux de même indice.

Soit à effectuer le produit :

$$\sqrt{5}\times\sqrt[3]{12}\times\sqrt[6]{2^5}$$

le *p. p. i. c.* est 6, l'opération devient :

$$\sqrt[6]{5^3}\times\sqrt[6]{12^2}\times\sqrt{2^5}$$

puis :

$$\sqrt[6]{5^3\times 2^4\times 3^2\times 2^5}$$

et enfin :

$$2\sqrt{2^3\times 3^2\times 5^3}.$$

De même la division :

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2^4}},$$

devient :

$$\frac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2^4}}=\sqrt[6]{\frac{2^3}{2^4}}$$

et enfin :

$$\sqrt[6]{\frac{1}{2}}.$$

Remarque. — Il ne faudrait pas pousser trop loin l'analogie avec les opérations sur les fractions; pour multiplier ou diviser des fractions, il n'y a pas lieu de les réduire au même dénominateur.

Remarquons aussi que l'on ne peut donner aucune règle de simplification pour l'addition et la soustraction des radicaux de même indice. On est réduit à calculer séparément leurs valeurs numériques.

Notation par exposants fractionnaires.

La notation par radicaux est remplacée quelquefois par une autre notation :

$$\sqrt[3]{4^5}$$

s'exprimera :

$$4^{\frac{5}{3}}$$

Cet **exposant fractionnaire** indique donc par son numérateur l'exposant de la quantité sous le radical et par son dénominateur l'indice de la racine[1].

$$a^{\frac{2}{3}} \text{ a le même sens que } \sqrt[3]{a^2}$$
$$a^{\frac{1}{2}} \quad — \quad — \quad \sqrt{a}$$
$$a^{\frac{1}{3}} \quad — \quad — \quad \sqrt[3]{a}$$
$$a^{\frac{m}{p}} \quad — \quad — \quad \sqrt[p]{a^m}.$$

Grâce à cette nouvelle notation les opérations sur les radicaux se font selon les mêmes règles que les opérations sur les puissances. Nous allons montrer que les règles relatives aux exposants entiers s'appliquent aussi aux exposants fractionnaires.

106. — **Théorème VI.**

On peut, sans changer la valeur d'une puissance fractionnaire, multiplier les deux termes de l'exposant par un même nombre.

$$a^{\frac{m}{p}} = a^{\frac{mq}{pq}}.$$

En effet :

$$a^{\frac{m}{p}} = \sqrt[p]{a^m}$$

et :

$$a^{\frac{mq}{pq}} = \sqrt[pq]{a^{mq}}$$

Or on sait (théorème V) que :

$$\sqrt[p]{a^m} = \sqrt[pq]{a^{mq}}$$

donc :

$$a^{\frac{m}{p}} = a^{\frac{mq}{pq}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

107. — **Théorème VII.**

Le produit de deux puissances d'une même lettre est une puissance de cette lettre ayant pour exposant la somme des exposants.

$$a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{2}{7}} = a^{\frac{3}{4}+\frac{2}{7}}$$

On sait en effet que le premier membre peut se traduire :

$$\sqrt[4]{a^3} \times \sqrt[7]{a^2}.$$

Réduisons au même indice, on obtient :

$$\sqrt[4\times 7]{a^{3\times 7}} \times \sqrt[7\times 4]{a^{2\times 4}}$$

ou en effectuant :

$$\sqrt[4\times 7]{a^{(3\times 7)+(2\times 4)}}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$a^{\frac{(3\times 7)+(2\times 4)}{4\times 7}}$$

ou encore :

$$a^{\frac{3}{4}+\frac{2}{7}}$$

Ce que nous voulions établir.

1. On peut dire : la puissance $\frac{5}{3}$ d'un nombre n'a aucun sens pour le moment : on convient de lui en donner un, c'est une nouvelle façon d'*écrire* la même relation que par les radicaux. Cette convention est justifiée par le fait que les règles de calcul restent les mêmes que pour les exposants entiers.

108. — **Théorème VIII.**

Le quotient de deux puissances d'une même lettre est une puissance dont l'exposant est l'excès de l'exposant du dividende sur celui du diviseur.

$$a^{\frac{3}{4}} : a^{\frac{2}{7}} = a^{\frac{3}{4}-\frac{2}{7}}.$$

La vérification se ferait comme dans le théorème précédent en remontant de cette notation à la notation par radicaux.

On vérifierait comme pour les puissances entières qu'au cas où l'application de la règle donne un **exposant négatif**, il convient de l'interpréter d'une façon analogue :

$$\frac{3^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{2}{5}-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{4-5}{10}}$$

ou enfin :

$$3^{-\frac{1}{10}}.$$

Cela signifie que le résultat de la simplification de la fraction :

$$\frac{\sqrt[5]{3^2}}{\sqrt{3}}$$

est la fraction :

$$\frac{1}{\sqrt[10]{3}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3^{\frac{1}{10}}}.$$

D'ailleurs toutes les règles sur **les exposants** fractionnaires positifs ou négatifs sont les mêmes que pour les exposants entiers et positifs à condition de tenir compte des conventions faites sur ces notations.

Ainsi :

$$\left(3^5 \times 2^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{5}{7}}\right)^{\frac{2}{5}} = 3^2 \times 2^{\frac{1}{10}} \times 3^{\frac{2}{7}}$$

$$\left(\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{5}} = a^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{5}}}.$$

109. — **Applications. Rendre rationnel le dénominateur d'une fraction renfermant des radicaux.**

Nous ne résoudrons que quelques cas simples d'un usage très courant dans les problèmes.

1° Soit la fraction $\frac{a}{\sqrt{b}}$, on peut multiplier ses deux termes par $\sqrt{b}$, on obtient la fraction :

$$\frac{a\sqrt{b}}{b}$$

à dénominateur rationnel. Ainsi :

$$\frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{h\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

2° Soit la fraction :

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}}.$$

Multiplions les 2 termes par $b - \sqrt{c}$ on obtient :

$$\frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2 - c}.$$

On aurait de même pour la fraction :

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$$

$$\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$$

$b - \sqrt{c}$ et $\sqrt{b}+\sqrt{c}$ sont dites expressions **conjuguées** de $b+\sqrt{c}$ et $\sqrt{b}-\sqrt{c}$. (Elles conduisent au produit de la somme de deux nombres par leur différence, identité remarquable.)

Exemples. —

$$\frac{h}{\sqrt{3}-1}=\frac{h(\sqrt{3}+1)}{2}.$$

$$\frac{R}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{R(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}$$

$$\frac{x}{2+\sqrt{3}}=x(2-\sqrt{3}).$$

Les cas que nous venons d'examiner sont les plus simples, et les plus utiles dans les problèmes. Nous n'en donnerons aucun autre.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE VII

Puissances et racines, calculs des radicaux.

95. — Simplifier les expressions suivantes :

$$\sqrt{16x^2y},\quad \sqrt{12a^2c^2}$$
$$\sqrt{25a^2b},\quad \sqrt{36a^2x^4y}$$
$$\sqrt{12a^2-8b^2},\quad \sqrt{50a^3bx^2-75a^2x^2y}.$$

96. — Simplifier les radicaux :

$$\sqrt[3]{8a^3b^6},\quad \sqrt[3]{216x^5}$$
$$\sqrt[4]{x^5yz^4},\quad \sqrt[5]{a^{10}b^5y^7}.$$

97. — Effectuer les radicaux :

$$\sqrt{5\times 30},\quad \sqrt{12\times 15},\quad \sqrt{35\times 21\times 15}.$$

98. — Calculer :

$$\sqrt{\frac{25a^2x^2y^4}{36b^2}},\quad \sqrt{\frac{3a^2b}{27}},$$
$$\sqrt[3]{\frac{27a^5b^4x^3}{125c^4}},\quad \sqrt[4]{\frac{16ab^5x^8}{a^7c^{12}}},$$

99. — Effectuer les additions et soustractions indiquées :

$$4\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{75}-12\sqrt{\frac{3}{16}}$$
$$\sqrt{72}-2\sqrt{2}+\sqrt{50}.$$

100. — Effectuer les multiplications suivantes :

$$(3+\sqrt{5})\sqrt{5}$$
$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{5})$$
$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$$
$$(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$$
$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3$$
$$(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3$$
$$(2+\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$$
$$(12-\sqrt{3}+\sqrt{2})^2.$$

101. —

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+b)$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})$$

102. — Effectuer les divisions indiquées :

$$\sqrt{ab} : \sqrt{a}$$
$$\sqrt{a^3b^2x} : \sqrt{a^2b}$$
$$\sqrt{xy} : \sqrt[3]{xy}$$
$$\sqrt[3]{2} : \sqrt{2}$$
$$\sqrt{5} : \sqrt{3}$$
$$\sqrt[3]{3} : \sqrt{5}$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}} : \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$$

$$\sqrt{\frac{3ax^2}{b}} : \sqrt[3]{5ax}$$

103. — Effectuer les divisions :

$$\frac{B+b}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}$$

$$\frac{B\sqrt{B}-b\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}$$

$$\frac{B\sqrt{B}+b\sqrt{b}}{\sqrt{B}+\sqrt{b}}$$

104. — Effectuer :

$$\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{2}{3}}\right)^2$$

$$(a^2x)^{\frac{2}{3}}$$

$$(ax)^2 \times (a^3bx)^{\frac{1}{2}} \times (ab^2x^3)^{\frac{3}{4}}$$

$$(25a^2b^3x^4)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{(xy)^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{3}}}$$

$$\left[\left(\frac{ax}{by}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{3}{4}}$$

$$\left[\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{4}{5}}\right]^{\frac{7}{12}}$$

105. — Rendre rationnels les dénominateurs des fractions suivantes :

$$\frac{3}{1+\sqrt{3}}, \quad \frac{2}{\sqrt{2}-1}, \quad \frac{5}{\sqrt{5}+1}$$

$$\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}, \quad \frac{4+5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}, \quad \frac{11\sqrt{5}-4}{6-\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}, \quad \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}$$

106. — Sachant que l'aire d'un triangle équilatéral en fonction du côté est :

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Calculer la surface en fonction du rayon R du cercle circonscrit sachant que :

$$a = R\sqrt{3}.$$

107. — Même problème pour le carré, sachant que :

$$a = R\sqrt{2}.$$

108. — Même problème pour l'octogone sachant que :

$$S = 2a^2(1+\sqrt{2})$$

et :

$$a = R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

109. — Même question pour le décagone étant données les formules :

$$S = \frac{5}{2}a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

et :

$$a = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1).$$

110. — Même question pour le dodécagone régulier sachant que :

$$S = 3a^2(2+\sqrt{3})$$

et :

$$a = -\frac{R}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

LIVRE III

EQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

CHAPITRE VIII

GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS. ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

I. — GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS

110. — **Équations.**

On appelle **équation** une égalité renfermant une ou plusieurs lettres appelées **inconnues**, et qui n'est vérifiée que si l'on attribue certaines valeurs particulières à ces lettres. Ces valeurs particulières sont les **solutions** de l'équation.

Par exemple : $2x+3=x+5$

est une équation à **une inconnue** x; cette égalité est vérifiée pour $x=2$, et n'est pas vérifiée pour $x=1$.

De même : $x+4=y+6-3x$

est une équation à **deux inconnues** ou **deux variables** x et y.

Elle est vérifiée par exemple pour $x=2$, $y=6$ ou pour $x=-4$, $y=6$, ou pour $x=1$, $y=2$;

Elle n'est pas vérifiée pour $x=0$, $y=0$. Elle est donc vérifiée pour certains **systèmes de valeurs des variables** et pas par tous.

L'égalité :

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2x-3}+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$$

est aussi une équation; elle est vérifiée pour $x=2$; elle n'est pas vérifiée pour $x=3$ comme on s'en assure aisément.

On considère souvent des équations qui, outre les **variables** ou **inconnues**, renferment d'autres lettres que l'on appelle par opposition **constantes** ou **données**. On emploie d'habitude pour les inconnues les dernières lettres de l'alphabet et pour les **données** les premières.

Ainsi, on peut considérer une équation telle que la suivante

$$x+a-3=5x-6a+3y.$$

Elle est vérifiée pour $x=a$, $y=a-1$, comme on le constate sans peine en **substituant** ces valeurs à x et y, c'est-à-dire en remplaçant x par a et y par $a-1$.

Ces équations sont dites **équations littérales** par opposition aux **équations numériques** qui ne contiennent en lettres que les inconnues.

111. — **Équations et identités.**

Une équation qui serait vérifiée pour **toutes** les valeurs des variables ne serait plus une équation mais une **identité**. Ainsi, l'égalité :

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

est une identité.

L'identité peut donc être regardée comme un cas particulier de l'équation. Lorsqu'on a une équation, on doit d'abord se demander si elle est ou n'est pas **identique**.

Ou, si l'on veut, on peut dire qu'il existe deux sortes d'égalités : 1° celles qui sont toujours vérifiées quelles que soient les valeurs numériques données aux lettres, ce sont les **identités**; 2° celles qui ne sont vérifiées que pour certaines valeurs particulières ou solutions, ce sont les **équations**.

Une équation se compose de deux expressions algébriques séparées par le signe $=$; ce sont les deux **membres** de l'équation. L'expression écrite à gauche est le **premier membre**, l'autre est le **second membre**.

112. — **Équations équivalentes.**

Deux équations sont dites **équivalentes** lorsqu'elles admettent les mêmes solutions :

Ainsi :

$$2x+3=x+5$$

et :

$$x+3=5$$

sont deux équations équivalentes parce qu'elles ont chacune pour solution unique 2.

Pour que deux équations soient **équivalentes**, il est donc nécessaire :

1° Que toute solution de la première équation soit aussi solution de la seconde.

2° Que toute solution de la seconde soit aussi solution de la première.

Nous allons énoncer quelques principes permettant de transformer une équation en une autre équivalente. Ces principes sont très importants, ils conduisent à la **résolution** des équations, c'est-à-dire à la recherche de leurs solutions.

II. — ÉQUATIONS ÉQUIVALENTES PRINCIPES DE TRANSFORMATION[1]

113. — **Principe I.**

On peut ajouter une même quantité aux deux membres d'une équation, sans modifier les solutions de cette équation.

On pourrait dire autrement :

En ajoutant une même quantité aux deux membres d'une équation, on obtient une équation équivalente.

Car si deux quantités sont égales, on obtient d'autres quantités égales en leur ajoutant une troisième quantité quelconque. Or c'est bien ce qui a lieu ici, si l'on songe aux valeurs numériques égales que prendraient les deux membres si l'on substituait aux inconnues leurs valeurs calculées ou solutions.

114. — **Remarque.**

Le principe précédent peut aussi s'énoncer : **On**

1. Nous ne donnerons pas les démonstrations courantes de ces principes qui sont trop subtiles pour avoir ici une utilité quelconque.

ne modifie pas les solutions d'une équation en retranchant une même quantité aux deux membres.

Cela revient, en effet, à ajouter l'expression opposée.

115. — **Applications.**

1° On peut faire passer un terme d'un membre dans l'autre à condition de changer son signe.

Exemple. — Soit l'équation :

$$3x + 5y + 7 = 8a - 9 + x$$

et soit proposé de faire passer le terme x du second membre dans le premier, on aura :

$$3x + 5y + 7 - x = 8a - 9.$$

Cela revient en effet à ajouter $-x$ aux deux membres; or on sait que dans le second $+x - x = 0$ ce qui revient dans ce second membre à supprimer x.

2° **On peut supprimer dans les deux membres deux termes identiques** (c'est-à-dire ayant même valeur absolue et même signe).

Exemple. — L'équation :

$$2x + 4y + 3 = 7x + 4y - 11$$

s'écrira :

$$2x + 3 = 7x - 11.$$

Cela revient en effet à retrancher $4y$ aux deux membres ou, ce qui revient au même, à ajouter $-4y$ aux deux membres en remarquant que $+4y - 4y = 0$.

3° On peut changer tous les signes des termes d'une équation.

Exemple. — L'équation :

$$\frac{3}{14} - 12x + 5 = 4x - \frac{2}{3}$$

deviendra :

$$-\frac{3}{14} + 12x - 5 = -4x + \frac{2}{3}.$$

Cela revient, en effet, à faire passer tous les termes du premier membre dans le second et tous les termes du second membre dans le premier, puis à écrire l'égalité résultante dans l'ordre inverse, ce qui est légitime, car l'égalité $A = B$ implique l'égalité $B = A$.

4° On peut faire passer tous les termes renfermant les inconnues dans le premier membre et, dans le second membre, tous les termes connus.

$$4x - 2a = \frac{2x}{3} + \frac{a}{4}$$

donnera l'équation équivalente :

$$4x - \frac{2x}{3} = \frac{a}{4} + 2a$$

ou en réduisant :

$$\frac{10}{3}x = \frac{9a}{4}$$

5° On peut faire passer tous les termes d'une équation dans le premier membre, le second devenant par suite égal à zéro.

Ainsi toute équation peut prendre la forme :

$$A = 0$$

en désignant par A une certaine expression algébrique plus ou moins compliquée. Nous ne considérerons que les équations telles que A se réduise à un polynome. **On appelle alors degré de l'équation le degré de ce polynome par rapport aux inconnues.**

Toute équation du **premier degré à une inconnue** x pourra donc être mise sous la forme :

$$ax + b = 0$$

a étant le coefficient de x, et b l'expression indépendante de x.

Toute équation du **second degré** à une inconnue x pourra s'écrire sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$ax + b = 0$; $ax^2 + bx + c = 0$ sont appelées *formes générales* des équations du premier degré ou du second degré à une inconnue.

116. — **Principe II.**

On peut, sans modifier les solutions, multiplier les deux membres d'une équation par une même quantité, à condition que cette quantité ne soit pas susceptible de devenir nulle pour certaines valeurs des inconnues.

Exemple. — La multiplication par b des deux membres de l'équation :

$$\frac{3x}{b} + \frac{5b}{3} = 2x + b$$

donne l'équation équivalente :

$$3x + \frac{5b^2}{3} = 2bx + b^2.$$

On sait, en effet, que si deux quantités sont égales, on obtient encore d'autres quantités égales en les multipliant par un même nombre.

L'équation précédente s'écrira donc encore :

$$9x + 5b^2 = 6bx + 3b^2.$$

117. — **Application.**

Chasser les dénominateurs d'une équation.

1. Soit l'équation :

$$\frac{8x}{3} - 5y = \frac{2x}{12} + \frac{3y}{8}.$$

On peut réduire tous les termes au plus petit dénominateur commun, ici 24. On obtient l'équation équivalente :

$$\frac{64x}{24} - \frac{120y}{24} = \frac{4x}{24} + \frac{9y}{24},$$

puis multiplier les deux membres par ce dénominateur commun, ce qui donne :

$$64x - 120y = 4x + 9y,$$

équation encore équivalente à la proposée.

2. *Autre exemple.* — Soit à chasser les dénominateurs de l'équation :

$$\frac{3x}{a-b} + \frac{a}{3} = \frac{11x}{a+b} - \frac{b}{2}$$

le *p. p. d. c.* est ici $6(a-b)(a+b)$ ou $6(a^2-b^2)$. Au lieu de procéder en deux temps comme dans le premier exemple, réduisons tous les termes à ce dénominateur commun sans l'écrire ; on a :

$$18(a+b)x + 2a(a^2-b^2) = 66(a-b)x - 3b(a^2-b^2).$$

118. — **Règle.**

Pour chasser les dénominateurs d'une équation, on

cherche le plus petit dénominateur commun, et l'on réduit tous les termes à ce dénominateur commun que l'on n'écrit pas.

119. — **Remarque. — Solutions étrangères.**

Nous avons fait une réserve au principe 2 : on n'obtient une équation équivalente à une équation proposée en multipliant ses deux membres par une même quantité, qu'au cas où le multiplicateur est déterminé, non susceptible de s'annuler pour certaines valeurs données aux inconnues.

Dans le cas contraire, on n'obtient pas une équation équivalente et l'opération qui consisterait à chasser les dénominateurs d'après la règle ci-dessus n'est plus légitime.

Supposons qu'après réduction au plus petit dénominateur commun on ait fait passer tous les termes dans le premier membre, l'équation se présente sous la forme d'une fraction algébrique égalée à zéro :

$$\frac{M}{N} = 0$$

M et N étant des polynomes :
Considérons l'équation :

$$M = 0$$

c'est-à-dire celle que l'on obtient en n'écrivant pas le dénominateur; et calculons ses solutions. **Si ces valeurs n'annulent pas N**, il est clair que dans la fraction $\frac{M}{N}$ le numérateur étant nul et le dénominateur

différent de zéro, cette fraction est nulle :

$$\frac{M}{N} = 0.$$

Il n'en est pas de même si ces valeurs **annulent N. On ne peut alors rien affirmer, car le quotient de zéro par zéro n'est pas défini.**

Soit, par exemple, l'équation mise sous la forme indiquée plus haut :

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 3} = 0.$$

Si l'on suppose $x = 2$, on a :

$$2^2 - 5 \times 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$$
$$2^2 - 4 \times 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

donc $x = 2$ est une solution de l'équation. Si l'on suppose $x = 3$, on a :

$$3^2 - 3 \times 5 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$$
$$3^2 - 4 \times 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0.$$

Donc $x = 3$ n'est pas une solution.

120. — **Règle pratique.**

Si le dénominateur commun renferme l'inconnue, on chasse les dénominateurs en appliquant la règle énoncée plus haut. Mais il y aura lieu de vérifier que les solutions trouvées n'annulent pas le dénominateur. Si une solution annulait le dénominateur, il y aurait lieu de la rejeter. C'est une solution étrangère.

Dans le cas où le dénominateur renferme des **lettres connues**, est par exemple $3a - 5$, il y a lieu d'observer que, suivant la valeur de ces lettres (ici de a), *ou bien* il est nul quelles que soient les inconnues, *ou bien* il est différent de zéro quelles que soient les inconnues; car il ne dépend pas des valeurs attribuées aux inconnues. Cette remarque est importante dans la **discussion** des problèmes que nous examinerons plus loin.

III. — RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

On reconnaît qu'une équation est du **premier degré** lorsque, ayant fait passer tous les termes dans le premier membre et réduit les termes semblables, le polynome ainsi obtenu est du premier degré par rapport à l'inconnue (ou aux inconnues).

Exemple 1. — Soit l'équation :

$$3 + 5x = 8x - 1.$$

Faisons passer tous les termes dans le premier membre, nous obtenons :

$$5x - 8x + 3 + 1 = 0$$

ou, en réduisant :

$$-3x + 4 = 0.$$

C'est donc une équation du premier degré. En faisant passer le terme connu dans le second membre, nous obtenons :

$$-3x = -4.$$

Divisons les deux membres par -3, on obtient :

$$x = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$\frac{4}{3}$ est une solution de l'équation proposée. Remarquons que cette solution est unique. Pour que l'équation soit vérifiée, il faut et il suffit en effet que x soit tel que son produit par -3 soit égal à -4; x doit donc, d'après la définition même de la division, être égal au quotient de -4 par -3, c'est-à-dire $\frac{-3}{-4}$ ou $\frac{3}{4}$.

121. — **Remarque.**

Dans la pratique, il n'est pas nécessaire de faire passer tous les termes dans le premier membre pour s'assurer que l'équation est du premier degré. Il est préférable de faire passer les termes inconnus dans le premier membre et les termes connus dans le second.

Exemple 2. — Soit l'équation :

$$6x + (x - 3)(x - 1) = x^2 - \frac{3x}{7} + \frac{13}{4}.$$

Effectuons le produit $(x - 3)(x - 1)$

$$6x + x^2 - 3x - x + 3 = x^2 - \frac{3x}{7} + \frac{13}{4}.$$

Réduisons les termes semblables et supprimons les termes identiques dans les deux membres (ici, x^2), on obtient :

$$2x + 3 = \frac{-3x}{7} + \frac{13}{4}.$$

Chassons les dénominateurs :

$$56x + 84 = -12x + 91.$$

Faisons passer les termes inconnus dans le premier membre et les termes connus dans le second, nous obtenons :

$$56x + 12x = 91 - 84$$

ou en réduisant :

$$68x = 7.$$

Divisons les deux membres par 68 :

$$x = \frac{7}{68}.$$

Exemple 3. — Résoudre l'équation :

$$\frac{3}{2}x + 7 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}x - 9.$$

On peut retrancher 7 des deux membres, ce qui donne :

$$\frac{3}{2}x - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}x - 16.$$

On obtient ensuite :

$$\frac{3}{2}x - \frac{5}{4}x = -16 + \frac{7}{4}$$

puis, facilement :

$$\frac{1}{4}x = -\frac{57}{4}$$

et enfin :

$$x = -57.$$

Nous avons effectué les simplifications visibles à première vue et autorisées par les applications des principes de transformation. Il est bon de s'exercer à ces groupements d'opérations partielles qui donnent très rapidement le résultat.

122. — **Équations littérales.**

L'équation, outre l'inconnue x, renferme d'autres lettres données a, b, c.

Exemple 4. — Soit l'équation :

$$3ax + b = cx + 4.$$

On l'écrira comme il suit :

$$(3a - c)x = 4 - b$$

puis :

$$x = \frac{4 - b}{3a - c}$$

la solution est ici une fraction qu'il n'y a pas lieu de simplifier.

Exemple 5. — Soit l'équation :

$$\frac{x + a}{b} - \frac{x - b}{a} = \frac{2a}{b}.$$

Chassons les dénominateurs, on obtient :

$$ax + a^2 - bx + b^2 = 2a^2$$

puis, successivement :

$$ax - bx = a^2 - b^2$$
$$(a - b)x = a^2 - b^2$$
$$x = \frac{a^2 - b^2}{a - b}$$

d'où, après simplification :

$$x = a + b.$$

123. — **Règle de résolution.**

Pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue :

1° On effectue toutes les simplifications visibles à priori (réduction de termes semblables, suppression de termes identiques dans les deux membres, suppression d'un facteur commun à tous les termes, calculs indiqués par des parenthèses, etc...).

2° On chasse les dénominateurs.

3° On fait passer les termes inconnus dans le premier membre et les termes connus dans le second. Dans le premier membre, on met x en facteur commun.

4° On divise le second membre par le coefficient de x, le résultat est la solution cherchée (sous réserve de la vérifier au cas où le dénominateur commun renfermait l'inconnue).

IV. — DISCUSSION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE : $ax = b$

Nous avons vu que toute équation du premier degré peut se mettre sous la forme générale :

$$ax = b$$

en faisant passer tous les termes inconnus dans le premier membre et les quantités indépendantes de x dans le second, a et b étant des nombres donnés quelconques.

Discuter cette équation, c'est étudier les circonstances diverses qui peuvent se présenter suivant les valeurs des nombres a et b. Ces valeurs peuvent être des nombres positifs ou négatifs, ou bien le nombre zéro.

1° Supposons d'abord que a ne soit pas égal à

zéro (a différent de zéro, ce qui s'écrit : $a \neq 0$); i existe alors, quel que soit b, un nombre et un seul qui, multiplié par a donne pour produit b : on désigne ce nombre par la fraction $\frac{b}{a}$. L'équation es donc vérifiée lorsqu'on y remplace x par $\frac{b}{a}$, et seu lement dans ce cas. Elle admet *une seule solutio* bien déterminée. Il est donc permis d'énoncer l théorème suivant.

124. — Théorème.

Lorsque le coefficient a de x n'est pas nul, l'équatio du premier degré $ax = b$ admet une solution unique e bien déterminée.

2° Supposons maintenant que a **soit nul** ($a = 0$) On peut dire alors qu'il n'y a plus d'équation puisque x disparaît. Ce cas ne se présenterait don pas si l'on ne considérait que des équations numé riques, car on n'aurait jamais pensé à regarde comme une équation une égalité ne renfermant pa x; mais, lorsque les coefficients sont des **lettres**, peut arriver que l'on soit conduit, par le problèm posé à donner dans certains cas à ces lettres de valeurs telles que a prenne la valeur zéro (pa exemple; dans certains problèmes relatifs à deu circonférences, on pourra obtenir comme coefficier de x, $R - R'$, R et R' étant les rayons. Au c particulier où les circonférences sont égale $R - R' = 0$, le coefficient de x devient nul). C saisira la portée de cette remarque en étudiant chapitre sur les problèmes du 1er degré. On propose de savoir ce que devient la solution dans ce cas particulier.

Supposons d'abord que a étant égal à zéro, b soit différent de zéro ($b \neq 0$); il n'existe alors aucun nombre qui, multiplié par a, donne pour produit b, l'équation est **impossible**.

On remarquera que si a **est très petit,** sans être nul, $\frac{b}{a}$ est très grand en valeur absolue, et **d'autant plus grand que** a **est plus petit**. Il est donc naturel de dire que la solution disparaît quand a devient nul, en devenant **infiniment grande** et de la représenter par le symbole ∞ (que nous avons d'ailleurs déjà employé). D'ailleurs, bien que l'équation soit impossible, l'examen direct de la question posée par le problème peut parfois permettre de l'interpréter dans ce cas particulier. (Voir au chapitre X le problème n° 9.)

Supposons enfin que a et b soient nuls tous les deux, alors tout nombre vérifie l'équation, puisque tout nombre multiplié par zéro, donne pour produit zéro. On dit alors que l'équation est **indéterminée**. Elle admet pour solution **un nombre quelconque**.

La formule, dans ce cas, se réduit à la forme $\frac{0}{0}$, puisque b et a sont tous deux nuls. Ainsi dit-on quelquefois que $\frac{0}{0}$ est **un symbole d'indétermination**.

On peut résumer la discussion dans le tableau suivant :

RÉSUMÉ DE LA DISCUSSION DE L'ÉQUATION : $ax = b$

HYPOTHÈSES :	LA SOLUTION :	ON DIT QUE L'ÉQUATION EST :	FORMULE OU SYMBOLE
$a \neq 0$	est unique	déterminée	$x = \frac{b}{a}$
$a = 0,\ b \neq 0$	n'existe pas	impossible	$x = \infty$
$a = 0,\ b = 0$	est un nombre quelconque	indéterminée	$x = \frac{0}{0}$

V. — ÉQUATIONS IRRATIONNELLES

On appelle équations irrationnelles celles où l'inconnue figure sous des radicaux. Nous n'examinerons que quelques équations avec des radicaux carrés. Le principe suivant conduit à la résolution.

125. — Principe.

En élevant au carré les deux membres d'une équation on obtient une équation ***plus générale*** **que la proposée, c'est-à-dire ayant pour solutions les solutions de l'équation proposée : mais aussi parfois des** ***solutions étrangères*** **à celle-ci et correspondant au changement de signe de l'un des deux membres de l'équation.**

On sait en effet que :

$$B^2 = (-B)^2.$$

Les égalités :

$$A = B$$
$$A = -B$$

élevées respectivement au carré donnent toutes deux le même résultat :

$$A^2 = B^2.$$

126. — Applications.

Si l'on est conduit, dans la résolution d'une équation irrationnelle, à élever les deux membres au carré, il y aura donc lieu de **vérifier** que les solutions trouvées conviennent bien à l'équation proposée.

Exemple 1. — Soit à résoudre l'équation :

$$\sqrt{x^2+7} + x = 7.$$

Isolons le radical :

$$\sqrt{x^2+7} = 7 - x.$$

Élevons les deux membres de l'équation au carré :

$$x^2 + 7 = 49 + x^2 - 14x$$

ou en réduisant :

$$14x = 42$$
$$x = 3.$$

On vérifie aisément que cette solution $x = 3$ es une solution de l'équation proposée.

Exemple 2. — Soit l'équation :

$$x - \sqrt{x^2-7} = 7.$$

Un calcul analogue au précédent donne successivement :

$$(x-7)^2 = x^2 - 7$$
$$x^2 - 14x + 49 = x^2 - 7$$
$$14x = 56$$
$$x = 4.$$

On vérifie aisément que $x = 4$ *n'est pas* une solution de l'équation proposée, mais est une solution de l'équation :

$$x + \sqrt{x^2-7} = 7$$

L'équation proposée n'a pas de solution.

Exemple 3. — Soit l'équation :

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{x-3} = 1.$$

Isolons le premier radical :

$$\sqrt{x+4} = 1 + \sqrt{x-3}.$$

Élevons les deux membres au carré; on obtient :

$$x + 4 = 1 + x - 3 + 2\sqrt{x-3}$$

et, après réduction :

$$2\sqrt{x-3} = 6$$

ou :

$$\sqrt{x-3} = 3.$$

Élevons au carré :

$$x - 3 = 9$$

et enfin :

$$x = 12$$

12 est la solution de l'équation proposée, ce que l'on peut aisément vérifier.

Exemple 4. — Soit à résoudre :

$$\sqrt{2x+1} + 5 = 3x - 4.$$

On obtient successivement :

$$\sqrt{2x+1} = 3x - 9$$
$$2x + 1 = 9x^2 + 81 - 54x$$
$$9x^2 - 56x + 80 = 0$$

C'est une équation du **second degré** dont les solutions, comme on le verra plus loin, sont 4 et $\frac{20}{9}$. En vérifiant, on se rend compte que $\frac{20}{9}$ est une **solution étrangère** à l'équation proposée. La seule solution est 4.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE VIII

Équations du premier degré à une inconnue.

111. — Résoudre les équations [1] :

$$2x + 5 = 5x - 4$$
$$\frac{5}{2}x - 4 = \frac{5}{3}x - 7$$
$$2x + 6(25 - 2x) = 60$$
$$\frac{2x - 6}{7} + \frac{3x - 4}{4} = \frac{5x - 9}{28}$$
$$\frac{2x - 1}{7} + 10x - 3 = 0$$
$$\frac{15}{16}x - 2(1 - 2x) + 3(1 - 4x) = \frac{3}{5}.$$

112. — Résoudre les équations [1] :

$$(x - 6)15 = 10x + 100$$
$$3x + 5 = x - 4$$
$$\frac{3}{2}x - 4 = \frac{5}{3}x - 2$$
$$\frac{3x - 6}{7} + \frac{2x - 4}{3} = \frac{5x - 9}{21}$$
$$\frac{5}{6}x - 2(1 - x) + 3(1 - 5x) = \frac{3}{4}.$$

1. Les équations qui renferment des dénominateurs devront être résolues de deux manières : en chassant et sans chasser les dénominateurs.

113. — Résoudre les équations :

$$\frac{17}{2}(x - 2) + 14 = \frac{13}{2}x - 11$$
$$1 - \frac{7x}{6} = \frac{3}{8} - 2x$$
$$3(x - 1) + \frac{4}{5}(8x - 1) = 15$$
$$\frac{x}{3} + 2 - \frac{5x}{4} = \frac{2x}{3} + \frac{x}{6} - 19$$
$$\frac{0,2x}{2} + \frac{0,12x}{4} + \frac{0,06x}{8} - \frac{0,1x}{8} = 450$$
$$0,35x + 0,95(100 - x) = 50$$
$$\frac{20}{60}x = \frac{11}{30}x - 3.$$

114. — Résoudre les équations :

$$\frac{3x - 1}{x - 1} = \frac{2}{x - 1} + 1$$
$$\frac{3}{x} - \frac{x}{3} = \frac{x}{3} - 2$$
$$\frac{2x - 3}{x - 1} = \frac{3x - 2}{x + 1} - 1.$$

115. — Résoudre les équations littérales :

$$ax - b = cx - d$$
$$ax + b = cx + d$$
$$(a - bx)c = (a + bx)d$$
$$\frac{a + bx}{c} = \frac{c + dx}{a}$$
$$\frac{a - bx}{c} = \frac{c - dx}{a}$$
$$\frac{ax - b}{cx - d} = \frac{a + b}{c + d}$$
$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a - b}{c - d}$$
$$\frac{ax - b}{cx - d} = \frac{ax - b'}{cx - d'}.$$

116. — Résoudre les équations littérales :

$$\frac{x - a}{2bc} + \frac{x - b}{2ac} + \frac{x - c}{2ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\frac{a-b}{x-1}+\frac{b-c}{x-2}+\frac{c-a}{x-3}=0$$

$$\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=\frac{3x}{a+b+c}$$

$$\frac{a^2+x}{b^2-x}-\frac{a^2-x}{b^2+x}=\frac{4abx+2a^2-2b^2}{b^4-x^2}.$$

117. — Résoudre les équations :

$$\frac{x}{m}-\frac{m}{m+p}=\frac{x}{m-p}-\frac{m^2+mp+p^2}{m^2+mp}$$

$$\frac{a}{x+b}+\frac{a}{x-b}=\frac{a}{x^2-b^2}$$

$$a+x=a+\frac{a-mb}{m-1}$$

$$b+x=b+\frac{a-mb}{m-1}$$

$$\frac{\frac{2x-5}{3}+\frac{3x+3}{5}}{\frac{x+2}{3}-\frac{2x+2}{10}}=4$$

$$\frac{\frac{x}{a-b}+\frac{x}{a+b}}{\frac{x}{a-b}-\frac{x}{a+b}}=1$$

$$\frac{\frac{x}{a}+\frac{x}{b}}{\frac{x}{a}-\frac{x}{b}}=2.$$

118. — Résoudre les équations irrationnelles

$$\sqrt{x^2+15}=x+1$$

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{x-3}=1$$

$$\sqrt{5-x}=\sqrt{x}+1$$

$$\sqrt{3x-a}=\sqrt{a}-\sqrt{3x}$$

$$\sqrt{5+x}-\sqrt{\frac{25}{5+x}}=\sqrt{10+x}.$$

CHAPITRE IX

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A DEUX OU PLUSIEURS INCONNUES

127. — **Systèmes d'équations.**

On dit que plusieurs équations forment un **système** lorsqu'on suppose que les inconnues ou variables qui y sont désignées par les mêmes lettres doivent y être remplacées par les mêmes nombres.

On appelle **solutions du système** les nombres qui vérifient à la fois toutes les équations du système.

Par exemple, le système :

$$x+y=3$$
$$x+3y=5$$

admet la solution : $x=2$, $y=1$.

Le système :

$$x+y+z=13$$
$$2x^2+3y^2-z=4$$

admet la solution : $x=1$, $y=2$, $z=10$.

128. — **Systèmes équivalents.**

On dit que deux systèmes sont **équivalents** lorsqu'ils admettent les mêmes solutions, c'est-à-dire lorsque toute solution du premier est solution du second et que toute solution du second est solution du premier.

La méthode que nous avons suivie pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue revenait au fond à remplacer cette équation par une équation équivalente plus simple; de même, pour résoudre un système d'équations du premier degré à plusieurs inconnues, on cherche à le remplacer par un **système équivalent** plus simple. Nous allons étudier d'abord un système de deux équations à deux inconnues.

I. — SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES

129. — **Méthode de substitution.**

Étant donné un système d'équations du premier degré, on commence par simplifier chacune des équations en opérant comme nous avons fait dans le cas d'une inconnue, c'est-à-dire en réunissant les termes inconnus dans les premiers membres et les termes connus dans les seconds.

Soient, par exemple les équations :

$$\begin{cases} 3 + 2x = 4 - 5y \\ 2 - 2y = 6 - 3x. \end{cases}$$

On peut les écrire :

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x - 2y = 4. \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, nous emploierons la méthode dite de **substitution**.

Il s'agit de déterminer des valeurs de x et de y qui vérifient ces deux équations. Si l'on connaissait la valeur de x, la première équation donnerait la valeur de y par la formule :

$$y = \frac{1 - 2x}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}x$$

dans laquelle x aurait une valeur déterminée.

Cette valeur de y doit vérifier la seconde équation, dans laquelle la lettre x a la **même** valeur, d'après la définition d'un système; si l'on **substitue** cette valeur de y dans cette seconde équation, on obtient :

$$3x - 2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}x\right) = 4.$$

C'est une équation du premier degré à une seule inconnue x; elle donnera pour x une valeur unique et déterminée et, connaissant cette valeur de x, on obtiendra la valeur de y par la formule déjà écrite :

$$y = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}x.$$

Entrons dans le détail des calculs; l'équation en x donne successivement[1] :

$$3x + \frac{4}{5}x = 4 + \frac{2}{5}$$

$$\frac{19}{5}x = \frac{22}{5}$$

1. Nous résolvons sans chasser les dénominateurs, l'élève devra résoudre aussi en chassant les dénominateurs. Il est bon de s'exercer à ces deux modes de calcul.

$$x = \frac{22}{19},$$

et l'on a ensuite :

$$y = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}x = \frac{19 - 44}{5 \times 19} = \frac{-25}{5 \times 19} = \frac{-5}{19}.$$

la solution du système proposé est donc : $x = \frac{22}{19}$, $y = \frac{-5}{19}$.

Autre exemple. — Soit le système :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx - ay = d. \end{cases}$$

La première équation donne pour y :

$$y = \frac{c - ax}{b}.$$

Si l'on **substitue** cette valeur de y dans la deuxième équation, on obtient :

$$bx - \frac{a(c - ax)}{b} = d$$

puis successivement :

$$b^2x - ac + a^2x = bd$$
$$(a^2 + b^2)x = ac + bd$$

et enfin :

$$x = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2}$$

d'où la valeur de y :

$$y = \frac{c}{b} - \frac{ax}{b}$$
$$y = \frac{c}{b} - \frac{a(ac + bd)}{b(a^2 + b^2)}$$

$$y = \frac{a^2c + b^2c - a^2c - abd}{b(a^2 + b^2)}$$
$$y = \frac{bc - ad}{a^2 + b^2}.$$

La solution du système est :

$$x = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{a^2 + b^2}.$$

On déduit de la marche suivie dans ces deux exemples la règle suivante.

130. — **Règle.**

Pour résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y par la méthode de substitution :

1° On résout l'une des équations par rapport à l'une des inconnues, y par exemple, comme si l'autre inconnue x était connue.

2° On substitue l'expression obtenue à y dans l'autre équation qui devient ainsi une équation à une inconnue x que l'on sait résoudre.

3° La valeur de x ayant été obtenue par la résolution de cette équation, on obtient y en remplaçant x par cette valeur dans l'expression de y.

131. — **Remarque. — Cas d'impossibilité et d'indétermination.**

Nous avons ramené la résolution d'un système à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue; suivant que cette équation sera déterminée, impossible ou indéterminée, le système lui-même sera déterminé, impossible ou indéterminé. Nous avons déjà donné un exemple du cas déterminé, c'est-à-dire du cas où la solution existe, et est unique. En voici des cas d'impossibilité et d'indétermination.

Exemple 1. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} 4x + 6y = 15 \\ 6x + 9y = 18. \end{cases}$$

La première équation donne :

$$y = \frac{15 - 4x}{6} = \frac{15}{6} - \frac{4}{6}x = \frac{5}{2} - \frac{2}{3}x.$$

En remplaçant y par cette valeur dans la seconde, on a :

$$6x + 9\left(\frac{5}{2} - \frac{2}{3}x\right) = 18$$

$$(6 - 6)x = 18 - \frac{45}{2} = \frac{-9}{2}.$$

Le coefficient de x est égal à zéro et le terme indépendant de x n'est pas nul : **l'équation est impossible**; le système proposé est donc impossible, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de valeurs de x et de y qui le vérifient.

Exemple 2. — Résoudre le système :

$$4x + 6y = 18$$
$$6x + 9y = 27.$$

On tire de la première équation :

$$y = \frac{18 - 4x}{6} = 3 - \frac{2}{3}x$$

et la seconde devient :

$$6x + 9\left(3 - \frac{2}{3}x\right) = 27$$

$$(6 - 6)x = 27 - 27.$$

Elle se réduit à une identité : le coefficient de x et le terme constant sont tous deux nuls, x est **indéterminé** c'est-à-dire qu'une valeur quelconque de x vérifie cette équation. On pourra donc choisir x arbitrairement; y sera alors donné par la formule que nous avons obtenue :

$$y = 3 - \frac{2}{3}x.$$

Par exemple, on pourra prendre $x = 3$ et l'on aura $y = 1$; ou bien $x = -3$ et l'on aura $y = 5$, etc.

L'indétermination est ici **simple**; on entend par là qu'**une** inconnue et **une seule** peut être prise arbitrairement, et que l'autre inconnue est alors déterminée, sa valeur dépendant d'ailleurs généralement de la valeur choisie pour la première.

On pourrait remarquer que l'indétermination provient ici de ce que, en réalité, les deux équations du système ne sont pas distinctes, mais identiques; simplifiées, elles se réduisent toutes les deux à l'équation : $2x + 3y = 9$.

132. — Méthode d'élimination par addition ou soustraction.

Il est parfois avantageux, pour la résolution des systèmes d'équations, d'utiliser une autre méthode dite d'**élimination par addition ou soustraction**, dont quelques exemples nous montreront le mécanisme.

Exemple 1. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x + 5y = 4 \\ 3x - 2y = 5. \end{cases}$$

Proposons-nous d'éliminer y. Si les coefficients de cette inconnue y étaient égaux en valeur absolue, on conçoit qu'en additionnant ou retranchant membre à membre les deux équations du système selon que ces coefficients seraient de signes contraires ou de même signe, on obtiendrait une équation ne renfermant plus y, c'est-à-dire une équation du premier degré à une seule inconnue x que l'on saurait résoudre. La méthode que nous exposons consiste précisément à multiplier les deux membres de chaque équation par **des multiplicateurs convenablement choisis** pour que les coefficients de l'une des inconnues deviennent égaux en valeur absolue.

Il suffit, par exemple, de multiplier dans notre système les deux membres de la première équation par 2 et les deux membres de la seconde par 5, on obtient le système équivalent[1] :

$$\begin{cases} 4x + 10y = 8 \\ 15x - 10y = 25. \end{cases}$$

En additionnant membre à membre ces deux nouvelles équations on obtient :

$$\begin{array}{r} 4x + 10y = 8 \\ 15x - 10y = 25 \\ \hline 19x \qquad\quad = 33 \end{array}$$

Cette dernière équation ne renferme pas y, on dit que l'inconnue y a été **éliminée**.

On en déduit :

$$x = \frac{33}{19}.$$

1. Il nous paraît inutile de justifier ici les opérations que la méthode d'élimination par addition ou soustraction nous conduit à faire.

Prenons maintenant les multiplicateurs 3 pour la première et 2 pour la seconde, on obtient par une marche analogue :

$$\begin{cases} 6x + 15y = 12 \\ 6x - 4y = 10. \end{cases}$$

Et, en retranchant membre à membre la dernière de ces équations de la précédente, on **élimine** x, et l'on obtient :

$$19y = 2$$

d'où :

$$y = \frac{2}{19}.$$

L'élève vérifiera que les valeurs $\frac{33}{19}$ et $\frac{2}{19}$ obtenues pour x et y donnent bien une solution du système.

Exemple 2. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} 4x + 6y = 9 \\ 2x + 9y = 7. \end{cases}$$

Les coefficients 6 et 9 de y n'étant pas premiers entre eux, leur *p. p. c. m.* 18 est inférieur à leur produit. Il y a donc avantage à prendre pour multiplicateurs non pas 9 et 6, mais 3 et 2, quotients respectifs du *p. p. c. m.* 18 par chacun des coefficients. On obtient :

$$\begin{array}{r} 12x + 18y = 27 \\ 4x + 18y = 14 \\ \hline 8x \qquad\quad = 13 \end{array}$$

d'où :

$$x = \frac{13}{8}.$$

Pour éliminer x, on prendra pour multiplicateurs

1 et 2, ce qui donne :

$$\begin{array}{r} 4x + \ \ 6y = \ 9 \\ 4x + 18y = 14 \\ \hline 12y = \ 5 \end{array}$$

en retranchant membre à membre la première de ces équations de la seconde.

Et enfin :

$$y = \frac{5}{12}.$$

L'élève vérifiera que ces valeurs satisfont aux équations proposées.

La résolution de ces deux systèmes nous conduit à la règle suivante :

133. — **Règle.**

Pour résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y par la méthode d'élimination par addition ou soustraction :

1° On multiplie les deux membres de chaque équation par des multiplicateurs convenablement choisis de manière que les coefficients de l'une des inconnues, y par exemple, deviennent égaux en valeur absolue;

2° On additionne ou retranche membre à membre les deux nouvelles équations, selon que les coefficients de y sont de signes contraires ou de même signe, on obtient ainsi une équation du premier degré à une inconnue x qu'il est aisé de résoudre;

3° Pour obtenir y, on opère sur les coefficients de x comme on vient de le faire pour les coefficients de y.

Les multiplicateurs s'obtiennent en prenant les quotients du p. p. c. m. des coefficients de l'inconnue à éliminer par ces coefficients.

134. — **Remarque pratique.**

Il est aisé de donner aux multiplicateurs obtenus d'après la règle ci-dessus des signes tels que les coefficients de l'inconnue à éliminer soient non seulement égaux en valeur absolue, mais de signes contraires : il suffit en effet de changer le signe de l'un des quotients du *p. p. c. m.* par chacun des coefficients (pris en valeur absolue) lorsque ces coefficients sont de même signe. Il suffit alors **d'additionner** membre à membre dans tous les cas les deux équations obtenues en dernier lieu.

Dans la pratique, on inscrit ces multiplicateurs en regard des équations et l'on n'effectue les multiplications et additions qu'oralement.

Reprenons par exemple le premier système proposé :

Exemple 1.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 4 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

Nous écrivons :

$$\begin{array}{rl} 2x + 5y = \ 4 & \qquad 2 \\ 3x - 2y = \ 5 & \qquad 5 \\ \hline 19x \qquad = 33 & \end{array}$$

et nous disons :

2 fois 2, 4 plus 3 fois 5, 15 = 19 coefficient de x
2 fois 4, 8 plus 5 fois 5, 25 = 33, terme connu;

nous avons donc :

$$x = \frac{33}{19}.$$

Prenons maintenant les multiplicateurs 3 et — 2 :

$$\begin{array}{rl} 2x + 5y = 4 & \quad 3 \\ 3x - 2y = 5 & \quad -2 \\ \hline 19y = 2 & \end{array}$$

Un calcul analogue donne : $y = \dfrac{2}{19}$.

Exemple 2. — Pour éviter de récrire trop souvent les équations, on écrit à gauche les multiplicateurs qui fournissent l'équation ne renfermant plus que x et à droite les multiplicateurs qui fournissent l'équation ne renfermant plus que y;

Soit le deuxième système :

$$\begin{cases} 4x + 6y = 9 \\ 2x + 9y = 7. \end{cases}$$

On aura la disposition suivante :

$$\begin{array}{rcr} 3 & 4x + 6y = 9 & -1 \\ -2 & 2x + 9y = 7 & 2 \\ \hline & 8x = 13 & \\ & 12y = 5 & \end{array}$$

et l'on dira :

$$\begin{aligned} 3 \times 4 - 2 \times 2 &= 12 - 4 = 8 \\ 3 \times 9 - 2 \times 7 &= 27 - 14 = 13. \\ (-1) \times 6 + 2 \times 9 &= -6 + 18 = 12 \\ (-1) \times 9 + 2 \times 7 &= -9 + 14 = 5. \end{aligned}$$

On obtient ainsi la solution :

$$x = \frac{13}{8} \qquad y = \frac{5}{12}.$$

Exemple 3. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a^2x + b^2y = c^2 \end{cases}$$

Pour éliminer y il suffit de prendre les multiplicateurs b et — 1, et pour éliminer x les multiplicateurs — a et 1.

On adoptera la disposition suivante :

$$\begin{array}{rcr} b & ax + by = c & -a \\ -1 & a^2x + b^2y = c^2 & 1 \\ \hline & (ab - a^2)x = bc - c^2 & \\ & (-ab + b^2)y = -ac + c^2 & \end{array}$$

d'où l'on tire :

$$\begin{cases} x = \dfrac{c\,(b - c)}{a\,(b - a)} \\[2ex] y = \dfrac{c(c - a)}{b(b - a)} \end{cases}$$

Telle est la solution du système proposé, sous la réserve que les facteurs a, b, $b - a$ par lesquels on a divisé ne sont pas nuls.

II. — SYSTÈMES DE PLUS DE DEUX ÉQUATIONS

135. — Méthode de substitution.

La méthode de substitution s'applique sans modification essentielle à la résolution d'un système de 3, 4, etc., équations à 3, 4, etc. inconnues. Nous allons le montrer sur quelques exemples.

Exemple 1. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 16 \\ 5x - 8y + 2z = 1 \\ 3x - y - 2z = 5 \end{cases}$$

La première équation donne :

$$z=\frac{16-2x-3y}{4}.$$

En substituant cette valeur dans les deux autres, on obtient :

$$5x-8y+\frac{16-2x-3y}{2}=1$$

$$3x-y-\frac{16-2x-3y}{2}=5.$$

Ou en simplifiant :

$$\begin{cases}8x-19y=-14\\8x+y=26.\end{cases}$$

C'est un système de deux équations à deux inconnues.

La première de ces équations donne :

$$y=\frac{14+8x}{19}$$

en substituant dans la seconde, on obtient :

$$8x+\frac{14+8x}{19}=26$$

puis :

$$152x+14+8x=494$$
$$160x=480$$
$$x=3.$$

On a ensuite :

$$y=\frac{14+8x}{19}=\frac{14+24}{19}=2$$

$$z=\frac{16-2x-3y}{4}=\frac{16-6-6}{4}=1$$

Le système proposé est donc complètement résolu.

136. — **Méthode d'élimination par addition.**

La méthode d'élimination par addition peut aussi être employée et, dans certains cas, son application est très avantageuse.

Reprenons le système précédent et résolvons-le par cette méthode. Il suffit de grouper deux par deux les équations : la première et la seconde, puis la première et la troisième; on peut, par addition, grâce à des multiplicateurs convenablement choisis, éliminer l'une des inconnues, z par exemple, dans chacun de ces deux groupes. On obtient ainsi un système de deux équations à deux inconnues x et y que l'on sait résoudre. On disposera comme il suit :

$$\begin{array}{c|l|c}
1 & 2x+3y+4z=16 & 1\\
 & 5x-8y+2z=1 & -2\\
2 & 3x-y-2z=5 & \\
\hline
 & -8x+19y=14 & \\
 & 8x+y=26 &
\end{array}$$

Le système des deux équations ainsi obtenues se résout aisément en écrivant :

$$\begin{array}{c|l|c}
-19 & -8x+19y=14 & 1\\
1 & 8x+y=26 & 1\\
\hline
 & -160x=-480 & \\
 & 20y=40 &
\end{array}$$

d'où :

$$x=3$$
$$y=2$$

z peut se tirer de la dernière des équations proposées :

$$z=\frac{3x-y-5}{2}=\frac{9-2-5}{2}=1.$$

La solution du système est donc $x=3$, $y=2$, $z=1$.

137. — **Remarque.**

On utilise dans les calculs toutes les simplifications permises; il arrive souvent ainsi que l'on emploie dans le même problème et successivement la méthode de substitution et la méthode d'addition. Par exemple, lorsque, par application de la méthode de substitution, nous avons été conduits dans l'exemple précédent au système :

$$\begin{aligned} 8x - 19y &= -14 \\ 8x + y &= 26 \end{aligned}$$

On avait immédiatement par soustraction :

$$\begin{aligned} 20y &= 40 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

puis en tirant x de la deuxième en fonction de y et en substituant à y sa valeur calculée :

$$x = \frac{26 - y}{8} = \frac{26 - 2}{8} = 3$$

et enfin z comme précédemment.

Exemple 2. — Résoudre le système :

$$\left\{ \begin{aligned} x + y + z + t &= 14 \\ 2y - 4t &= -7 \\ x + z &= 10 \\ z + 2t &= 9. \end{aligned} \right.$$

La première équation donne :

$$t = 14 - x - y - z$$

et, en substituant dans les autres, on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} 2y - 56 + 4x + 4y + 4z &= -7 \\ x + z &= 10 \\ z + 28 - 2x - 2y - 2z &= 9 \end{aligned} \right.$$

ou après simplification :

$$\left\{ \begin{aligned} 4x + 6y + 4z &= 49 \\ x + z &= 10 \\ 2x + 2y + z &= 19. \end{aligned} \right.$$

La première de ces équations donne :

$$z = \frac{49 - 4x - 6y}{4}$$

et en substituant dans les deux autres :

$$x + \frac{49 - 4x - 6y}{4} = 10$$

$$2x + 2y + \frac{49 - 4x - 6y}{4} = 19$$

ou après simplification :

$$\left\{ \begin{aligned} -6y &= -9 \\ 4x + 2y &= 27. \end{aligned} \right.$$

La première de ces équations donne :

$$y = \frac{3}{2}$$

Il se trouve que cette valeur ne renferme pas x; mais cela ne change en rien la méthode; la substitution dans la deuxième équation donne :

$$4x + 3 = 27$$

c'est-à-dire :

$$x = \frac{24}{4}$$

$$x = 6.$$

Connaissant x et y, on a :

$$z = \frac{49 - 4x - 6y}{4} = \frac{49 - 24 - 9}{4}$$
$$z = 4.$$

Connaissant x, y, z, on a :

$$t = 14 - x - y - z = 14 - 6 - \frac{3}{2} - 4$$
$$t = \frac{5}{2}.$$

Le système est résolu.

138. — **Remarque 1.**

On abrège souvent beaucoup les calculs en choisissant convenablement l'équation d'où l'on tire la valeur de l'une des inconnues pour la substituer dans les autres. C'est surtout la pratique des calculs qui guide pour ce choix; d'une manière générale, on peut seulement dire que l'on doit s'arranger pour avoir des expressions aussi simples que possible.

Reprenons, par exemple, le système précédent, que nous récrivons :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 14 \\ 2y - 4t = -7 \\ x + z = 10 \\ z + 2t = 9 \end{cases}$$

On remarquera que la troisième équation donne pour x une expression très simple :

$$x = 10 - z.$$

En substituant cette valeur dans la première (la

seule qui renferme x), on obtient :

$$(10 - z) + y + z + t = 14$$

et après simplification :

$$y + t = 4$$

de sorte que les deux premières équations ne renferment plus que y et t; elles s'écrivent :

$$\begin{cases} y + t = 4 \\ 2y - 4t = -7 \end{cases}$$

La première de ces équations donne :

$$y = 4 - t$$

et la seconde devient alors :

$$-6t = -15$$
$$t = \frac{5}{2}.$$

On obtient ensuite successivement :

$$y = 4 - t = \frac{8}{2} - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$
$$z = 9 - 2t = 9 - 5 = 4$$
$$x = 10 - z = 10 - 4 = 6.$$

Nous jugeons inutile de formuler des règles de résolution d'un système de n équations à n inconnues soit par substitution, soit par addition. L'élève possède dès maintenant le mécanisme de ces méthodes, notre but est atteint.

139. — **Remarque 2.**

Nous n'avons parlé que des systèmes comprenant autant d'équations que d'inconnues. Ces systèmes admettent, en général, une solution unique et déterminée; on dit qu'ils sont **déterminés**. Lorsque **le nombre des équations données est inférieur au nombre des inconnues**, il y a généralement une infinité de solutions, le système est **indéterminé**.

Il suffit de remarquer, en effet, qu'on peut résoudre le système en ne considérant qu'un nombre d'inconnues égal au nombre des équations, en supposant calculées les autres inconnues. On obtient ainsi, sauf dans les cas d'impossibilité, les valeurs des inconnues du premier groupe en fonction des inconnues du second groupe, pour lesquelles on peut prendre des **valeurs arbitraires**.

Lorsque le **nombre des équations est supérieur au nombre des inconnues**, le système est généralement **impossible**.

Il suffit, en effet, de ne considérer qu'un nombre d'équations égal au nombre des inconnues. On a ainsi, en général, un système déterminé. Si les valeurs trouvées pour les inconnues satisfont aux équations en excédent, le système est déterminé, ces équations font double emploi. Si les solutions du premier système ne vérifient pas les équations en excédent, il y a **impossibilité**.

140. — **Systèmes particuliers. Artifices de calcul.**

On peut parfois simplifier beaucoup la résolution des équations lorsqu'elles présentent une certaine symétrie. Il y a alors souvent avantage à introduire une **inconnue auxiliaire** et à employer la méthode d'élimination par addition. Nous allons en donner quelques exemples :

Exemple 1. — Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} x+y-z=4 \\ x+z-y=0 \\ y+z-x=6. \end{cases}$$

Additionnons membre à membre ces trois équations, on obtient :

$$x+y+z=10.$$

Si l'on retranche membre à membre de cette dernière équation la première équation du système, on obtient :

$$2z=6$$
$$z=3.$$

On aurait, d'une façon analogue, en retranchant la seconde ou la troisième :

$$2y=10$$
$$y=5$$

et :

$$2x=4$$

d'où :

$$x=2$$

Exemple 2. — Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} y+z+t=6 \\ z+t+x=4 \\ t+x+y=9 \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

Additionnons membre à membre toutes les équations du système, on obtient :

$$3x+3y+3z+3t=21$$
$$3(x+y+z+t)=21$$

ou en simplifiant :

$$x + y + z + t = 7.$$

Si, de cette dernière équation, on retranche membre à membre la première équation du système, on obtient :

$$x = 7 - 6 = 1.$$

En retranchant d'une façon analogue les autres équations, on aurait :

$$y = 7 - 4 = 3$$
$$z = 7 - 9 = -2$$
$$t = 7 - 2 = 5.$$

Le système est résolu.

Exemple 3. — Inconnues auxiliaires. — Résoudre le système :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x} &= \frac{1}{12} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= \frac{5}{12} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} &= \frac{7}{12}. \end{aligned}\right.$$

On prend pour inconnues auxiliaires :

$$x' = \frac{1}{x}, \qquad y' = \frac{1}{y}, \qquad z' = \frac{1}{z}.$$

Le système peut s'écrire :

$$\left\{\begin{aligned} y' + z' - x' &= \frac{1}{12} \\ z' + x' - y' &= \frac{7}{12} \\ x' + y' - z' &= \frac{5}{12}. \end{aligned}\right.$$

C'est un système analogue à celui que nous avons

résolu dans le premier exemple. On obtient par addition :

$$x' + y' + z' = \frac{13}{12}$$

et en retranchant respectivement chacune des équations proposées de cette dernière :

$$2x' = \frac{13}{12} - \frac{1}{12} = \frac{12}{12} = 1$$
$$x' = \frac{1}{2}$$

de même :

$$2y' = \frac{13}{12} - \frac{7}{12} = \frac{6}{12}$$
$$y' = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

et :

$$2z' = \frac{13}{12} - \frac{5}{12} = \frac{8}{12}$$
$$z' = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Il suffit de prendre les inverses des valeurs de x', y', z' pour obtenir x, y et z :

$$x = 2$$
$$y = 4$$
$$z = 3$$

Exemple 4. — On peut aussi, dans certains cas, utiliser des propriétés arithmétiques, notamment les principes relatifs aux proportions ou aux suites de rapports égaux.

Soit à résoudre le système :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} &= \frac{z}{c} \\ x + y + z &= d \end{aligned}\right.$$

la suite de rapports égaux :

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

permet d'écrire :

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{d}{a+b+c}.$$

Si l'on considère la proportion formée par le premier et le dernier rapport :

$$\frac{x}{a}=\frac{d}{a+b+c}$$

on a :

$$x=\frac{ad}{a+b+c}$$

les diverses proportions formées respectivement avec le dernier rapport et chacun des autres permettent d'écrire :

$$y=\frac{bd}{a+b+c}$$

$$z=\frac{cd}{a+b+c}.$$

L'élève remarquera aisément suivant quelle loi, connaissant la formule de x, on peut obtenir par analogie les formules de y et de z.

Exemple 5. — Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}\\ mx+ny=c.\end{cases}$$

Multiplions les deux termes du premier rapport $\frac{x}{a}$ par m et les deux termes du deuxième rapport $\frac{y}{b}$

par n, on a le système :

$$\frac{mx}{ma}=\frac{ny}{nb}$$

$$mx+ny=c.$$

On peut écrire :

$$\frac{mx}{ma}=\frac{ny}{nb}=\frac{mx+ny}{ma+nb}=\frac{c}{ma+nb}$$

ou :

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{c}{ma+nb}$$

et en considérant les proportions formées avec le dernier rapport respectivement par chacun des deux autres :

$$x=\frac{ac}{ma+nb}$$

$$y=\frac{bc}{ma+nb}.$$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE IX

Systèmes d'équations du premier degré à deux ou plusieurs inconnues.

119. — Résoudre le système :

$$\begin{cases}2x+3y=6\\ 3x-5y=4.\end{cases}$$

120. — Résoudre le système :

$$\begin{cases}2x-y=\dfrac{3}{4}\\ x+y=\dfrac{5}{6}.\end{cases}$$

121. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x - \frac{5}{6}y = 1 \\ \frac{5}{6}x - \frac{3}{4}y = 2. \end{cases}$$

122. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} 4(2x + 3y - 5) = \frac{5}{6}(x + 3) + \frac{2}{3}(y - 4) \\ x + y = 1. \end{cases}$$

123. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x + y = 3\left(x - 5 - \frac{2}{3}y\right) \\ 5x - y = \frac{3}{4}(2 - x - y). \end{cases}$$

124. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x - y = 3\left(x - 5 + \frac{2}{3}y\right) \\ 5x + y = \frac{3}{4}(2 + x - y). \end{cases}$$

Ces systèmes doivent être résolus de deux manières : par substitution et par la méthode d'élimination par addition.

125. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2. \end{cases}$$

126. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} ax - by = c \\ a^2x - b^2y = c^2. \end{cases}$$

127. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ ax + by = d. \end{cases}$$

128. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx - ay = d. \end{cases}$$

129. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{ab - a^2 - b^2}{ab} - 1 \\ x + y = 2a. \end{cases}$$

130. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{c - x - y}{d} = m \\ \frac{x}{b} + \frac{y}{a} + \frac{c - x - y}{d} = n. \end{cases}$$

131. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y = p \\ \frac{x}{a} = \frac{h - y}{h}. \end{cases}$$

132. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} (1 + a)x + (3 + a)y = 3 + a \\ ax + (5 + a)y = 4 + a. \end{cases}$$

133. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} (a + b)x + (b + c)y = d + b \\ (a' + b)x + (b + c')y = d' + b. \end{cases}$$

134. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} (x + a)(y + b) = xy + b^2 + ab \\ (x - b)(y - a) = xy - ab. \end{cases}$$

135. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y - z = 4 \\ x - y - 3z = 12. \end{cases}$$

136. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - 3z = 12. \end{cases}$$

137. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x - y + 2z = \frac{3}{4} \\ x + y + z = 0 \\ x - y - 4z = 2. \end{cases}$$

138. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 3y - z - t = 1 \\ x - y + z + t = 2 \\ x - y - z = 6 \\ x + t = 12. \end{cases}$$

Résoudre soit par substitution, soit par addition, soit par des artifices de calcul les exercices suivants :

139. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} y + z + t = 20 \\ z + t + x = 30 \\ t + x + y = 40 \\ x + y + z = 50. \end{cases}$$

140. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} y + z + t = a \\ z + t + x = b \\ t + x + y = c \\ x + y + z = d. \end{cases}$$

141. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = m \\ a^2x + b^2y + c^2z = m^2. \end{cases}$$

Généraliser.

142. — Résoudre le système :

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{h} = \frac{z-c}{p} = ax + by + cz.$$

143. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} bx - cy = m \\ cz - ax = n \\ ax - by = p. \end{cases}$$

144. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} (a+3)x + (a+2)y = 2a + 1 \\ (a+8)x + (a+6)y = 2a + 6. \end{cases}$$

145. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

146. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d''. \end{cases}$$

147. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} a^3x + b^3y = c^3 \\ a^5x + b^5y = c^5. \end{cases}$$

148. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = m\left(1 + \dfrac{z}{c}\right) \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{m}\left(1 - \dfrac{z}{c}\right) \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = n\left(1 - \dfrac{z}{c}\right). \end{cases}$$

149. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z = m \\ ax + by + cz = 0 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 0. \end{cases}$$

150. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z - u = 15 \\ x + y - z + u = 23 \\ x - y + z + u = 35 \\ -x + y + z + u = 2. \end{cases}$$

L'élève appliquera les diverses méthodes de résolution, notamment celle qui consiste à prendre comme inconnue auxiliaire la somme $x + y + z + u = S$.

151. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 12 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} = 14. \end{cases}$$

Employer successivement la méthode de substitution, la méthode d'addition et une méthode par artifices de calcul en prenant pour inconnues auxiliaires $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$. Procéder d'une façon analogue dans les exercices suivants.

152. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{y-3} = 15 \\ \dfrac{4}{x-1} - \dfrac{5}{y-3} = 8. \end{cases}$$

On prendra comme inconnues auxiliaires $\dfrac{1}{x-1}$ et $\dfrac{1}{y-3}$.

153. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x+3y-5} + \dfrac{7}{5x-8y+12} = 1 \\ \dfrac{4}{2x+3y-5} - \dfrac{14}{5x-8y+12} = 1. \end{cases}$$

On prendra pour inconnues auxiliaires $\dfrac{1}{2x+3y-5}$ et $\dfrac{1}{5x-8y\times 12}$; une fois ces inconnues auxiliaires calculées, on sera ramené à un autre système du premier degré pour calculer x et y. Employer aussi les méthodes générales.

154. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{x+y} = 15 \\ \dfrac{4}{x-y} - \dfrac{5}{x+y} = 17. \end{cases}$$

155. — Résoudre le système :

$$xyz = a(yz - zx - xy) = b(zx - xy - yz) = c(xy - yz - zx).$$

CHAPITRE X

INÉGALITÉS DU PREMIER DEGRÉ

---

141. — Inégalités numériques.

Définitions. — On dit qu'un nombre a est **plus grand** qu'un nombre b (on dit aussi a **supérieur** à b) si la différence $a - b$ est **positive.** On dit alors que b est inférieur à a. Ainsi 4 est **supérieur** à 3 parce que $4 - 3 = 1$ est positif. 4 est **inférieur** à 7 parce que $4 - 7 = -3$ est négatif.

Conséquences. — De ces définitions, on déduit aisément les remarques suivantes :

1° **Un nombre positif est d'autant plus grand que sa valeur absolue est plus grande.**

2° **Un nombre positif quelconque est supérieur à un nombre négatif quelconque.**

4 est supérieur à -7, parce que $4 - (-7) = +11$ est positif.

3° **Un nombre négatif est d'autant plus petit que sa valeur absolue est plus grande.**

-7 est *plus petit* que -3, parce que $-7 - (-3) = -7 + 3 = -4$ est négatif.

142. — Inégalités.

On appelle *inégalité* une formule par laquelle on exprime que de deux quantités, l'une est supérieure à l'autre; ainsi, si l'on veut exprimer que 4 est supérieur à 3, ou est plus grand que 3, on écrit :

$$4 > 3$$

que l'on énonce 4 *supérieur* à 3. On peut écrire aussi :

$$3 < 4$$

que l'on énonce 3 **inférieur** à 4. Ces deux inégalités sont dites **de sens différents.** On voit que l'on **peut permuter les deux membres d'une inégalité à condition d'en changer le sens.**

Grâce aux remarques présentées plus haut, nous pouvons écrire les inégalités suivantes :

$$-4 < -3$$
$$-2 > -7$$
$$-2 < 0$$
$$-5 < 1.$$

143. — Principes relatifs aux inégalités.

Théorème 1. — **On ne modifie pas le sens d'une inégalité en ajoutant ou retranchant un même nombre à ses deux membres.**

Par exemple, l'on a :

$$-4 < -3,$$

l'on a aussi :

$$-4 + 12 < -3 + 12$$
$$-4 - 15 < -3 - 15$$

c'est-à-dire :

$$8 < 9$$
$$19 < -18.$$

D'une manière générale, si l'on a :

$$a > b$$

on a aussi :

$$a + c > b + c$$
$$a - c > b - c$$

c désignant un nombre quelconque.

En effet, par définition, l'inégalité :

$$a > b$$

signifie que la différence $a - b$ est positive, ce que l'on écrit :

$$a - b > 0.$$

Or le calcul algébrique nous a appris que l'on a :

$$a + c - (b + c) = a - b$$

donc si $a - b$ est positif, il en est de même de $a + c - (b + c)$ c'est-à-dire que l'on a :

$$a + c - (b + c) > 0$$

ce qui revient à écrire :

$$a + c > b + c.$$

La démonstration se ferait d'une façon analogue pour le cas de la soustraction.

Théorème 2. — **On ne modifie pas le sens d'une inégalité en multipliant ou divisant les deux membres par un même nombre** ***positif.***

On modifie ce sens en multipliant ou divisant les deux membres par un même nombre ***négatif.***

Par exemple, on a :

$$2 < 4$$

en multipliant les deux membres par 3, on obtient :

$$6 < 12$$

et en les divisant par 8 :

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2},$$

inégalités de même sens que la proposée. Au contraire, en multipliant les deux membres de l'inégalité primitive par -2, on obtient :

$$-4 > -8$$

et en divisant par -2 :

$$-1 > -2,$$

inégalités de sens contraire à la proposée.

Pour démontrer ce théorème 2, il suffit d'observer que le produit d'un nombre par un nombre **positif** est du même signe que le multiplicande, tandis que le produit d'un nombre **négatif**, est de signe contraire à celui du multiplicande; si donc on a :

$$a > b,$$

c'est-à-dire :

$$a - b > 0,$$

et si c est positif, on a aussi :

$$(a - b)\,c > 0$$

c'est-à-dire :

$$ac - bc > 0$$

ou bien :

$$ac > bc,$$

tandis que si c est négatif, on a :

$$(a - b)\,c < 0$$
$$ac - bc < 0$$
$$ac < bc.$$

La démonstration est la même dans le cas de la division.

Théorème 3. — **On ne modifie pas le sens d'une inégalité en élevant au carré les deux membres dans le cas où ils** ***sont positifs tous les deux*** :

Par exemple, on a :

$$3 < 8$$

en élevant les deux membres au carré, on obtient :

$$9 < 64.$$

Remarque 1. — Si les deux membres sont *négatifs*, l'élévation au carré *change le sens* de l'inégalité.

Soit :

$$-5 < -3$$

on obtient :

$$25 > 9.$$

Remarque 2. — Dans le cas où les deux membres sont de signes différents, aucune règle ne peut prévoir si le sens devra être maintenu.

Ainsi :

$$-2 < 3$$

donnera :

$$4 < 9,$$

tandis que l'inégalité :

$$-5 < 2$$

donnera :

$$25 > 4$$

dans le premier exemple, le sens de l'inégalité est resté le même, dans le second cas, le sens a changé.

RÉSOLUTION D'UNE INÉGALITÉ DU PREMIER DEGRÉ

144. — **Inégalités. Inéquations.**

On appelle **inégalité du premier degré**, une inégalité dans laquelle figure, outre les quantités connues, une inconnue (ou variable) x, **au premier degré.** Par exemple, l'inégalité :

$$3x - 7 - 5x > \frac{3}{2}x - 9$$

est une inégalité du premier degré en x.

Remarquons qu'il serait plus correct d'employer, concurremment avec le mot **inégalité**, les termes **inéquation** et **inidentité**, de même qu'on emploie, concurremment avec **égalité**, les termes **équation** et **identité**. Une **inidentité** est une inégalité toujours vérifiée quelles que soient les valeurs numériques données aux lettres qu'elle peut contenir. Une inéquation est une inégalité qui n'est vérifiée que pour certaines **valeurs particulières** données aux lettres et qui sont les **solutions** de cette inégalité. Nous nous conformons à l'usage le plus répandu, ce qui n'a pas d'inconvénient dans les questions élémentaires que nous traitons.

145. — **Résolution.**

Résoudre une inégalité, c'est déterminer pour quelles valeurs de x elle est satisfaite.

Les théorèmes relatifs aux inégalités permettent des transformations analogues à celles que nous avons employées pour les équations. Ainsi, on peut,

pour les inégalités comme pour les équations, faire **passer un terme d'un membre dans l'autre en changeant** son signe, et procéder aux simplifications visibles *a priori* que nous avons indiquées pour les équations : **suppression des termes identiques dans les deux membres, suppression d'un facteur commun à tous les termes** (**à condition que ce facteur soit positif**), etc. On pourra aussi **chasser les dénominateurs.**

Les inégalités du premier degré à une inconnue se résolvent donc par une marche tout à fait semblable à celle que nous avons indiquée pour les équations, et la règle de résolution serait aisée à formuler. Il faut seulement **avoir grand soin de changer le sens de l'inégalité lorsqu'on multiplie ou divise par un nombre négatif.**

Soit, par exemple, à résoudre l'inégalité :

$$3x - 5 > 5x + 8.$$

En faisant passer les termes renfermant x dans le premier membre et les autres dans le second membre, elle devient :

$$-2x > 13,$$

d'où en divisant par -2 :

$$x < \frac{-13}{2}$$

On a changé le sens, puisque -2 est négatif.

On aurait pu utiliser cette remarque : qu'on peut dans une inégalité changer les signes de tous les termes **à condition de changer le sens** de l'inégalité. On aurait eu :

$$-2x > 13$$
$$2x < -13$$

$$x < \frac{-13}{2}$$

146. — **Systèmes d'inégalités.**

On peut proposer un système de deux inégalités. Les solutions du système sont les valeurs de x qui satisfont à la fois aux deux inégalités.

Soit le système :

$$\begin{cases} 2x - \frac{3}{2} < x + \frac{5}{6} \\ 4x + \frac{2}{3} > \frac{3}{2}x + 4. \end{cases}$$

La première inégalité devient successivement

$$x - \frac{3}{2} < \frac{5}{6}$$
$$x < \frac{5}{6} + \frac{3}{2}$$
$$x < \frac{7}{3}.$$

La deuxième inégalité devient :

$$4x - \frac{3}{2}x > 4 - \frac{2}{3}$$
$$\frac{5}{2}x > \frac{10}{3}$$
$$\frac{x}{2} > \frac{2}{3}$$
$$x > \frac{4}{3}.$$

x doit donc d'une part être inférieur à $\frac{7}{3}$, d'autre

1. L'élève devra être habitué à résoudre soit en chassant les dénominateurs, soit sans les chasser.

part supérieur à $\frac{4}{3}$; il n'y a pas contradiction. Les solutions du système sont les nombres compris entre $\frac{4}{3}$ et $\frac{7}{3}$, ce que l'on peut écrire par la double inégalité :

$$\frac{4}{3} < x < \frac{7}{3}.$$

ce qui se lit : x compris entre $\frac{4}{3}$ et $\frac{7}{3}$.

Remarque. — Il peut se faire que les conditions auxquelles x doit satisfaire soient contradictoires; dans ce cas le système est **impossible.**

EXERCICES SUR LE CHAPITRE X

Inégalités du premier degré à une inconnue.

156. — Résoudre les inégalités :

$$3x - 3 > 5x - 5$$
$$3x - 5 > x + 4$$
$$\frac{3}{2}x - 4 < \frac{5}{3}x - 2$$
$$2x - 3 > 3x - 5$$
$$x - 3 > 2x + \frac{3}{7}.$$

157. — Résoudre les inégalités :

$$3x - 8 > 5x - 4$$
$$-\frac{3}{4}x > 5x - \frac{5}{7}$$
$$-2x > -3x + \frac{2}{3}$$
$$\frac{2}{3}x - 3 > 2x + \frac{3}{7}$$
$$-\frac{1}{4}x > 5x - \frac{5}{7}.$$

158. — Résoudre les inégalités :

$$ax - b > cx - d$$
$$\frac{a - bx}{c} > \frac{c - bx}{a}.$$

159. — Lorsqu'une inégalité renferme un dénominateur dont on ne connaît pas le signe, on peut, pour la résoudre, multiplier par le **carré** du dénominateur qui est toujours positif. Appliquer cette remarque à la résolution des inégalités suivantes :

$$\frac{3x - 5}{x - 1} > \frac{3x - 8}{x - 1}$$
$$\frac{(a^2 + b^2)x}{a - b} + (a + b)x > \frac{abx}{b - a} + (3a - b)x.$$

160. — *Résoudre le système d'inégalités :*

$$\begin{cases} -2x > -3x + \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}x - 4 < \frac{5}{3}x - 2. \end{cases}$$

161. — Résoudre le système d'inégalités :

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - 3 > 2x + \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{4}x > 5x - \frac{5}{7}. \end{cases}$$

162. — Démontrer que la moyenne géométrique de deux nombres est toujours inférieure à la moyenne arithmétique de ces nombres.

163. — Démontrer que la moyenne arithmétique de deux nombres est comprise entre ces nombres.

164. — Étant donné la suite de rapports inégaux :

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f} < \frac{g}{h}$$

démontrer que le rapport :

$$\frac{a + c + e + g}{b + d + f + h}$$

est compris entre les rapports extrêmes $\frac{a}{b}$ et $\frac{g}{h}$.

CHAPITRE XI

PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ

I. — GÉNÉRALITÉS

La résolution d'un problème par l'algèbre peut se subdiviser en quatre parties :

1° Choix des inconnues;
2° Mise en équations;
3° Résolution des équations;
4° Discussion du problème.

Nous avons traité la troisième partie : résolution des équations, dans les chapitres précédents. Nous allons dire quelques mots des autres parties; ces généralités seront d'ailleurs surtout éclaircies par les exemples.

147. — Choix des inconnues.

Lorsqu'on veut résoudre un problème par l'algèbre, la première question que l'on doit se poser est relative au choix des inconnues. On peut la subdiviser en plusieurs parties :

1° Quelles quantités prend-on comme inconnues?
2° Comment sont-elles définies en valeur absolue?

3° Comment sont-elles définies en signe?

Examinons successivement ces trois points.

1° Dans les questions élémentaires, l'énoncé indique généralement d'une manière assez claire par elle-même quelles inconnues il faut choisir. C'est surtout l'étude de nombreux exemples qui peut servir de guide pour choisir, dans certains cas, certaines inconnues de préférence à d'autres : il en résulte parfois des simplifications assez grandes (Soit à mener une tangente commune à deux circonférences : on prendra pour inconnue la distance au centre de l'une d'elles, du point de rencontre de la tangente avec la ligne des centres. Soit à placer dans un cercle une corde possédant certaines propriétés particulières exigées par l'énoncé, on choisira pour inconnue sa flèche, etc.).

2° Les quantités que l'on prend pour inconnues étant déterminées, il est essentiel de définir d'une manière précise de quelle manière on les représente par des **nombres**, puisque ce sont des nombres seulement qui figurent directement ou non dans les formules de l'algèbre.

Pour cela, il faut fixer d'une manière précise l'**unité** que l'on choisit. Lorsqu'on aura trouvé la solution, qui sera un certain nombre, on devra se rappeler quelle unité a été choisie afin de connaître la signification de ce nombre (pour une **longueur**, savoir si le résultat est exprimé en mètres, décimètres, centimètres ou millimètres, etc.; pour une **surface**, savoir si l'unité était le mètre carré ou le décimètre carré, etc.; pour un **temps**, savoir si le nombre est exprimé en années, en jours, ou bien en heures, ou en minutes, etc.).

De plus, dans certains cas, il est nécessaire de fixer une **origine** si l'inconnue est un **temps** par exemple.

3° Dans bien des problèmes, les quantités inconnues sont de nature telle qu'on peut les considérer comme positives ou négatives; il est donc nécessaire, en même temps qu'on choisit une unité, de faire une convention précise relative au **signe** de chacune de ces quantités. On devra se rappeler cette convention, lorsqu'on aura obtenu la solution de manière à en connaître la **signification concrète** précise.

Soit, par exemple, le problème suivant :

Jean a 3 ans 6 mois, et Pierre 18 mois; peut-il arriver que l'âge de Jean soit double de celui de Pierre?

Il est assez naturel de prendre pour inconnue le temps qui sépare le moment actuel de l'époque où l'âge de Jean sera (ou a été) double de celui de Pierre. On prend donc comme **origine** des temps l'époque actuelle. De plus, on devra choisir une **unité de temps**; on prendra, soit le mois, soit l'année (ici le mois paraît mieux indiqué). Enfin, on devra indiquer si on compte les temps comme **positifs vers le futur** et **négatifs vers le passé**, ou inversement.

Les conventions ainsi faites permettront de mettre le problème en équation et, cette équation résolue, de discuter le résultat.

148. — Mise en équations.

Mettre un problème en équations, c'est écrire les équations que les inconnues doivent vérifier, d'après l'énoncé. Les conditions non traduisibles par des équations sont étudiées dans la **discussion.** On ne s'occupe ici que des conditions qui s'expriment par des relations entre les inconnues et les quantités données.

Les inconnues étant représentées par des lettres x, y, z, etc., on n'a souvent qu'à écrire les égalités exprimées par l'énoncé en écrivant ces lettres à la place des quantités qu'elles représentent. On procède comme si l'on voulait faire la vérification des relations qu'indique l'énoncé; ces relations dans lesquelles figurent les lettres à la place des nombres inconnus donnent les équations du problème.

Il peut se faire cependant que les relations indiquées par l'énoncé ne suffisent pas à déterminer la question et notamment qu'elles ne conduisent pas à un nombre d'équations aussi grand que le nombre des inconnues. Il faut connaître des propriétés nouvelles conduisant à d'autres relations.

S'il s'agit d'un problème de géométrie il y aura lieu de se demander si l'on connaît des théorèmes s'appliquant aux grandeurs qui interviennent dans le problème. S'il s'agit d'un problème de mécanique, d'arithmétique, de physique, de chimie, etc. il y aura souvent nécessité à connaître une propriété mécanique, arithmétique, physique, ou chimique, etc., que ne donne pas l'énoncé et sans laquelle cependant le problème ne pourra être résolu.

Il convient en tout cas d'avoir grand soin, avant d'écrire toutes les relations, d'exprimer toutes les quantités de même nature avec la même **unité** et, s'il y a lieu, avec la même **origine** et les mêmes **conventions de signes**. Sans cette précaution, les équations écrites ne signifieraient rien et on ferait des erreurs très graves.

Soit, par exemple, le problème suivant :

Problème. — **Deux voyageurs se déplacent sur la route de Paris à Lyon; ils sont tous deux entre Paris et Lyon, le premier est à 25^{km} de Paris, et le second à 50^{km} de Lyon. Le premier se dirige vers Lyon avec une vitesse de 30^{km} à l'heure, et le second se dirige vers Paris avec une vitesse de 3^{m} à la seconde. On demande au bout de combien de temps ils se rencontreront, sachant que la distance de Paris à Lyon est de 500^{km}.**

Nous prendrons comme inconnue le temps x qui s'écoule depuis l'époque actuelle jusqu'au moment de la rencontre; ce temps sera supposé compté positivement vers l'avenir et exprimé en *heures*. Nous avons ainsi choisi une *origine* des temps, un *sens positif* pour les temps et une *unité* de temps. Mais notre énoncé renferme aussi des longueurs; nous choisirons une origine des longueurs, par exemple Paris, un sens positif, par exemple le sens de Paris vers Lyon, et une unité de longueur, par exemple le kilomètre. Avec ces unités, la position du premier voyageur est définie par $+25$ et sa vitesse est $+30$. Quant au second voyageur, sa position est définie par $500 - 50 = 450$ puisque Lyon est 500^{km} de Paris et qu'il est à 50^{km} de Lyon vers Paris; quant à sa vitesse, il faut remarquer que s'il parcourt 3^{m} en une seconde, il parcourt en une minute 3×60, et en une heure $3 \times 60 \times 60 = 10800^{m}$, c'est-à-dire $10^{km}8$; de plus il se dirige de Lyon vers Paris, c'est-à-dire dans le sens négatif; sa vitesse est donc $-10,8$.

Ces calculs préliminaires faits, la **mise en équation** est immédiate; il suffit d'écrire qu'au bout du temps x les deux voyageurs sont au même point, c'est-à-dire que leurs distances à Paris sont égales; or, d'après l'équation du mouvement uniforme, la distance du premier voyageur à Paris au bout du temps x est $25 + 30x$ et la distance du second $450 - 10{,}8x$; **l'équation du problème est donc :**

$$25 + 30x = 450 - 10{,}8\,x$$

La mise en équations d'un problème étant effectuée, il reste à résoudre l'équation ou *les* équations, ce que nous avons appris à faire dans le cas où ces équations sont du premier degré, et enfin à **discuter** les résultats. Nous allons indiquer ce qu'il faut entendre par là.

149. — **Discussion des résultats.**

La résolution de l'équation ou *des* équations d'un problème est *déterminée*, *impossible* ou *indéterminée;* dans le cas où elle est déterminée, elle conduit à des nombres qui peuvent être *positifs* ou *négatifs*, *entiers* ou *fractionnaires*, etc. **Discuter** le problème, **c'est examiner quelles conséquences on peut déduire de ces diverses circonstances au point de vue de la solution du problème.**

Par exemple, supposons que la lettre x représente le nombre d'hommes composant une assemblée et que nous avons trouvé $x = \frac{3}{4}$, ou bien $x = -12$; nous devrons en conclure que, si nous n'avons pas fait d'erreur de calcul, le problème proposé est **impossible**. De même si, pour l'un des chiffres d'un nombre, on trouve 14 par exemple,

nombre supérieur à 9; de même encore si l'on trouve un nombre négatif pour le salaire d'un ouvrier[1], un nombre supérieur au rayon pour la distance d'une corde au centre de la circonférence, etc.

Nous montrerons sur des exemples comment on discute un problème; cette discussion est généralement très aisée dans le cas où les données sont numériques; elle est souvent plus longue lorsque ces données, ou quelques-unes d'entre elles, sont représentées par des lettres dont la valeur numérique n'est pas connue. Pour faire une discussion complète, il est alors nécessaire d'examiner successivement les diverses hypothèses que l'on peut faire sur le signe et la grandeur relative des données. Tout cela sera rendu plus clair par l'étude de quelques exemples.

II. — PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

150. — **Définition.**

On dit qu'un problème est un problème du premier degré à une inconnue lorsque sa résolution se ramène à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue.

---

1. On peut se proposer dans ce cas de trouver un problème dont l'énoncé s'obtiendrait en modifiant l'énoncé du problème proposé et tel qu'il admettrait la même solution mais *positive* : c'est ce qu'on appelle *interpréter* les solutions négatives. Nous n'insisterons pas sur cet exercice sans applications pratiques.

Il importe d'observer que cette définition est moins précise qu'elle ne le paraît. Lorsqu'on donne un problème, en effet, le nombre des inconnues qu'il faut introduire pour le résoudre dépend parfois en partie de la méthode que l'on suit. Par exemple, soit le problème suivant :

Paul a 3 billes de plus que Pierre; mais si Pierre avait deux fois plus de billes, il en aurait 5 de plus que Paul, combien Pierre et Paul ont-ils de billes chacun?

On peut appeler x le nombre de billes de Pierre et y le nombre de billes de Paul, ce qui fait deux inconnues; on peut aussi remarquer que, si l'on appelle x le nombre des billes de Pierre, l'énoncé nous apprend immédiatement que le nombre de celles de Paul est $x + 3$; il est donc possible de n'introduire qu'une inconnue.

Dans le premier cas, on est conduit au système :

$$\begin{cases} x + 3 = y \\ 2x = y + 5 \end{cases}$$

dans le deuxième cas, on n'a qu'une équation à une inconnue :

$$2x = (x + 3) + 5.$$

Soit :

$$2x = x + 8.$$

Une remarque analogue peut être faite pour le *degré;* soit, par exemple, le problème suivant :

Trouver un nombre positif sachant que son carré augmenté de 9 est égal au double de son carré diminué de 7.

Si l'on désigne ce nombre par x, on a l'équation :

$$x^2 + 9 = 2x^2 - 7$$

qui est du second degré. Mais on peut prendre pour inconnue le carré du nombre cherché; si l'on désigne ce carré par y, on a l'équation du premier degré :

$$y + 9 = 2y - 7,$$

qui donne de suite $y = 16$; le nombre cherché a donc 16 pour carré; il est égal à 4.

151. — Exemples de problèmes du premier degré à une inconnue.

Problème 1. — **Une fermière porte au marché un certain nombre d'œufs, qu'elle compte vendre 10 centimes pièce; elle en casse 6, mais elle trouve à vendre les autres 15 centimes pièce et rapporte ainsi chez elle 1fr de plus qu'elle ne comptait en partant. Combien avait-elle d'œufs?**

Désignons par x le nombre d'œufs qu'elle avait au départ; la somme que la fermière comptait rapporter chez elle sera désignée par $10x$, si nous choisissons le centime comme unité. L'énoncé nous apprend qu'elle vend $x - 6$ œufs à 15 centimes, ce qui lui rapporte $(x - 6)15$, et qu'elle obtient ainsi 1fr, c'est-à-dire 100 centimes de plus qu'elle ne comptait; l'équation du problème est donc :

$$(x - 6)\,15 = 10x + 100.$$

On en conclut :

$$5x = 190$$
$$x = 38.$$

La réponse est donc : la fermière avait au départ 38 œufs. Il n'y a pas de discussion, cette solution convenant parfaitement à la question posée. Il est bon de vérifier le résultat; s'il ne satisfaisait pas aux conditions du problème, on devrait en conclure que l'on a fait quelque erreur et chercher à la découvrir.

On voit que 38 œufs à 10 centimes donnent $3^{fr},80$; si l'on a 6 œufs de moins, c'est-à-dire 32, mais qu'on les vende 15 centimes, on obtient $4^{fr},80$; c'est bien 1^{fr} de plus; le résultat trouvé est donc exact.

Problème 2. — **Un marchand de vin désire obtenir 100 litres de vin lui revenant à $0^{fr},50$ le litre en mélangeant du vin qui lui coûte $0^{fr},35$ le litre avec du vin qui lui coûte $0^{fr},95$ le litre. Combien doit-il prendre de vin de chaque espèce?**

Désignons par x le nombre de litres de vin à 0,35; puisqu'il faut 100 litres en tout, le nombre de litres de vin à 0,95 est $100-x$. Le prix total de revient des x litres à 0,35 et des $100-x$ litres à 0,95 doit être égal au prix de 100 litres à 0,50, c'est-à-dire à 50^{f}. On a donc l'équation :

$$0,35x+0,95(100-x)=50,$$

dans laquelle on a eu soin d'exprimer toutes les valeurs en francs.

En réduisant, on obtient :

$$-0,60x=50-95=-45,$$

d'où l'on tire :

$$x=\frac{-45}{-0,60}=\frac{450}{6}=75.$$

Il faut donc prendre 75 litres à $0^{fr},35$ et, par suite, 25 litres à 0,95.

Nous laissons à l'élève le soin de vérifier ce résultat.

Problème 3. — **Un voleur s'est emparé d'une bicyclette et s'enfuit sur une route avec une vitesse de 20^{km} à**

l'heure; on s'en aperçoit 3 minutes après son départ et un bicycliste s'élance à sa poursuite avec une vitesse de 22^{km} à l'heure. Au bout de combien de temps le rattrapera-t-il?

Désignons par x le temps cherché, exprimé en minutes, et compté à partir du moment où le voleur est parti; lorsque le bicycliste le rattrape, ils ont parcouru le même chemin, le premier ayant roulé pendant x minutes avec une vitesse de 20 à l'heure et le deuxième ayant roulé pendant $x-3$ minutes avec une vitesse de 22 à l'heure. Comme le chemin parcouru pendant une minute est 60 fois plus petit que le chemin parcouru pendant une heure, l'équation du problème sera :

$$\frac{20}{60}x=\frac{22}{60}(x-3),$$

ou, en multipliant les deux membres par 30 :

$$10x=11(x-3),$$

d'où :

$$x=33.$$

Le voleur est rattrapé 33 minutes après son départ. L'élève vérifiera ce résultat.

Problème 4. — **Un père a 40 ans et son fils en a 16; quand l'âge du père sera-t-il triple de celui du fils?**

Désignons par x le temps cherché, compté en années à partir de l'époque actuelle, et supposé positif dans l'avenir. A l'époque x, l'âge du père sera $40+x$ et l'âge du fils $16+x$; on doit donc avoir, d'après l'énoncé :

$$40+x=3(16+x),$$

c'est-à-dire :

$$-2x=8$$
$$x=-4.$$

Discussion. — Nous trouvons comme solution un nombre négatif; or nous avons désigné par x un temps compté positivement dans l'avenir; nous devons en conclure que c'est *il y a 4 ans* que l'âge du père *était* triple de celui du fils. En effet, le père avait alors 36 ans et le fils 12.

Problème 5. — **L'âge de Paul est représenté par a et l'âge de Jacques par b; dans combien d'années l'âge de Paul sera-t-il m fois plus grand que celui de Jacques?**

Dans cet énoncé a, b, m désignent des nombres quelconques; a et b sont supposés désigner des années.

Mettons le problème en équations, en suivant la même marche que pour le précédent. Au bout de x années, l'âge de Paul sera $a + x$ et l'âge de Jacques sera $b + x$; on doit donc avoir :

$$a + x = m(b + x)$$

ou bien :

$$(m - 1)\,x = a - mb,$$

d'où l'on tire :

$$x = \frac{a - mb}{m - 1}.$$

Au bout du temps x, l'âge de Paul est :

$$a + x = a + \frac{a - mb}{m - 1} = \frac{m(a - b)}{m - 1}$$

et l'âge de Jacques est :

$$b + x = b + \frac{a - mb}{m - 1} = \frac{a - b}{m - 1}.$$

L'âge de Paul est donc bien égal à l'âge de Jacques, multiplié par m.

Discussion. — Pour que la solution x convienne au problème, il faut d'abord qu'elle existe; de plus il est nécessaire que les valeurs trouvées pour les âges de Paul et de Jacques soient positives.

Pour que la solution x existe, il faut que $m - 1$ ne soit pas nul. Si $m = 1$ et $a - mb \neq 0$, c'est-à-dire $a - b \neq 0$, le problème est impossible. On pouvait le prévoir, car si Paul et Jacques n'ont pas le même âge et si l'on demande à quelle époque ils auront le même âge, le problème est évidemment impossible. Nous avons dit que cette impossibilité se représentait par le symbole ∞ ; on peut interpréter ce symbole en remarquant qu'au bout d'un temps très long, leurs âges ne deviennent pas égaux, mais que cependant leur différence relative diminue; si au lieu de deux personnes, dont la vie est très courte, nous considérons deux fossiles, dont l'un remonterait à cent millions d'années, et l'autre à cent millions d'années plus deux jours, on s'accordera pour dire, en langage ordinaire, qu'ils ont le même âge. Ce n'est pas rigoureusement exact, mais c'est d'autant moins inexact que cet âge est plus grand : telle est la signification de la solution ∞ que l'on trouve.

Si m était égal à 1, et en même temps a égal à b, l'équation serait indéterminée, et le problème aussi. Paul et Jacques ont actuellement le même âge; à quel moment auront-ils encore le même âge? A un moment quelconque, telle est évidemment la réponse.

Écartons maintenant le cas où m serait égal à 1; nous aurons à étudier successivement le cas où m est plus grand que 1 et le cas où m est plus petit que 1.

Si m est plus grand que 1, $m-1$ est positif; pour que les valeurs obtenues pour les âges de Paul et de Jacques soient positives, il faut et il suffit que $a-b$ soit positif, c'est-à-dire que a soit plus grand que b. Quant à la valeur de x, elle est positive ou négative suivant que $a-mb$ est positif ou négatif; c'est-à-dire suivant que a est supérieur ou inférieur à mb. On peut traduire ainsi ces résultats en langage ordinaire : pour qu'il puisse arriver que l'âge de Paul soit m fois plus grand que l'âge de Jacques, m étant plus grand que 1, il est nécessaire que Paul soit plus âgé que Jacques; dans ce cas, suivant que l'âge de Paul est actuellement supérieur ou inférieur à m fois l'âge de Jacques, l'époque que l'on cherche sera future ou passée.

Si $a=b$, on trouve pour les âges de Paul et de Jacques 0; lorsque leur âge à tous deux était nul, on peut dire algébriquement que l'un d'eux était m fois plus âgé que l'autre, quel que soit m; mais cette solution ne présente aucun intérêt; on exprime quelquefois ce fait en disant qu'elle est *illusoire*.

On étudierait de la même manière le cas où m est inférieur à 1; mais on peut s'en dispenser, si l'on fait la remarque suivante : dire que l'âge de Paul doit être la moitié ou les $\frac{3}{4}$ de celui de Jacques, c'est dire que l'âge de Jacques doit être le double ou les $\frac{4}{3}$ de celui de Paul. Donc si m est inférieur à 1, il suffira de permuter dans l'énoncé les noms de Paul et de Jacques et de remplacer m par $\frac{1}{m}$ pour être ramené au cas déjà traité où m est supérieur

à 1. Il est très important de s'habituer à faire des remarques de ce genre, qui souvent abrègent et simplifient beaucoup les discussions.

On peut résumer la discussion dans le tableau suivant :

HYPOTHÈSES SUR m	HYPOTHÈSES SUR a ET b	CONCLUSIONS
$m=1$	$a \neq b$	Problème impossible.
	$a=b$	indéterminé.
$m>1$	$a<b$	impossible.
	$a=b$	solution illusoire.
	$b<a<mb$	$x<0$; 1 sol. dans le passé.
	$a=mb$	$x=0$; 1 sol. au moment présent.
	$a>mb$	$x>0$; 1 sol. dans l'avenir.
$m<1$	$a>b$	impossible.
	$a=b$	solution illusoire.
	$mb<a<b$	$x<0$; 1 sol. dans le passé
	$a=mb$	$x=0$; 1 sol. au moment présent.
	$a<mb$	$x>0$; 1 sol. dans l'avenir.

III. — PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES

152. — **Définition et remarques générales.**

On dit qu'un problème est du premier degré à plusieurs inconnues, lorsque sa résolution se ramène à la résolution d'un système d'équations du premier degré à plusieurs inconnues. Cette définition appelle des remarques analogues à celles que nous avons faites pour les équations à une inconnue. Le nombre des inconnues et le degré des équations dépendent parfois de la marche suivie pour la mise en équation; ils sont donc en partie arbitraires, de sorte que la définition ne doit pas être considérée comme absolument précise. En pratique cependant, il arrive, le plus souvent, que le nombre des inconnues et le degré des équations résultent immédiatement de l'énoncé.

Pour la mise en équations, il y a lieu d'observer que, si le problème proposé est déterminé, ce qui a lieu en général, le nombre des équations devra être égal au nombre des inconnues : **l'énoncé doit permettre d'écrire autant d'équations qu'il y a d'inconnues**[1].

Au sujet du choix des inconnues, c'est surtout la pratique qui guide dans les cas où l'on peut hésiter; d'ailleurs s'il est souvent plus commode de prendre pour inconnues certaines quantités plutôt que d'autres, ce n'est pas essentiel; tout choix d'inconnues qui conduit à des équations du premier degré permet d'obtenir la solution par des calculs plus ou moins longs.

---

1. Il peut arriver qu'il permette d'en écrire davantage; le problème est alors impossible à moins que les équations ne soient pas *distinctes*; nous ne pouvons développer ce point ici; indiquons un exemple : *trouver deux nombres tels que leur somme soit* 8, *leur différence* 2, *et la différence de leurs doubles* 4; on a les équations $x + y = 8$; $x - y = 2$; $2x - 2y = 4$, dont la troisième est équivalente à la seconde; il suffit donc de conserver les deux premières.

153. — Exemples de problèmes du premier degré à plusieurs inconnues.

Problème 6. — **On sait que 6ᵐ de drap et 5ᵐ de doublure coûtent 41fr; 8ᵐ de drap et 6ᵐ de doublure coûtent 54fr; quel est le prix du mètre de drap et du mètre de doublure?**

Soit x le prix du mètre de drap et y le prix du mètre de doublure, ces prix étant exprimés en francs. L'énoncé donne les équations :

$$\begin{cases} 6x + 5y = 41 \\ 8x + 6y = 54. \end{cases}$$

La deuxième équation prend une forme plus simple si l'on divise tous les termes par 2 :

$$4x + 3y = 27.$$

On en tire :

$$y = \frac{27 - 4x}{3} = 9 - \frac{4}{3}x.$$

En portant cette valeur dans la première équation, on obtient :

$$6x + 5\left(9 - \frac{4}{3}x\right) = 41$$

$$\left(6 - \frac{20}{3}\right)x = 41 - 45$$

$$\frac{-2}{3}x = -4$$

$$x = \frac{-12}{-2} = 6.$$

Ayant x, on a :

$$y = 9 - \frac{4}{3}x = 9 - 8 = 1.$$

Le prix du mètre de drap est 6^{fr} et le prix du mètre de doublure est 1^{fr}.

Problème 7. — **On suppose qu'un bicycliste a une vitesse de 25^{km} à l'heure en terrain plat, de 15^{km} à l'heure en montée, et de 30^{km} à l'heure en descente. Combien y a-t-il de plat, de montée et de descente sur une route de 100^{km}, sachant qu'il a mis 4^h24^m pour la parcourir à l'aller et 4^h36^m au retour?**

Soit x le nombre de kilomètres de plat, y le nombre de kilomètres de montée, et z le nombre de kilomètres de descente, à l'*aller;* au retour la descente devient montée, et inversement. On a une première équation en exprimant que la longueur totale de la route est 100^{km} :

$$(1) \qquad x + y + z = 100.$$

On obtiendra deux autres équations en exprimant que le temps employé pour parcourir la route a été 4^h24^m, c'est-à-dire 264^m à l'aller et 276^m au retour. Pour parcourir x kilomètres avec une vitesse de 25^{km} à l'heure, il faut un nombre de minutes égal à $\frac{60x}{25}$; en additionnant les temps partiels obtenus de même, on a les deux équations :

$$\begin{cases} \frac{60x}{25} + \frac{60y}{15} + \frac{60z}{30} = 264 \\ \frac{60x}{25} + \frac{60y}{30} + \frac{60z}{15} = 276 \end{cases}$$

qu'on peut écrire, plus simplement :

$$\begin{cases} (2) \qquad \frac{12}{5}x + 4y + 2z = 264 \\ (3) \qquad \frac{12}{5}x + 2y + 4z = 276. \end{cases}$$

Tirons de l'équation (1) la valeur de z :

$$(4) \qquad z = 100 - x - y$$

et portons-la dans les équations (2) et (3); il vient :

$$\begin{cases} \frac{12}{5}x + 4y + 2(100 - x - y) = 264 \\ \frac{12}{5}x + 2y + 4(100 - x - y) = 276, \end{cases}$$

ou, en simplifiant et changeant les signes de la seconde équation :

$$\begin{cases} (5) \qquad \frac{2}{5}x + 2y = 64 \\ (6) \qquad \frac{8}{5}x + 2y = 124. \end{cases}$$

En retranchant membre à membre l'équation (5) de l'équation (6), on obtient successivement :

$$\frac{6}{5}x = 60$$
$$x = 50.$$

L'équation (5) donne alors :

$$y = 32 - \frac{1}{5}x = 32 - 10 = 22$$

et l'équation (4) :

$$z = 100 - 50 - 22 = 28.$$

Il y a donc, à l'aller, 50^{km} de plat, 22^{km} de montée et 28^{km} de descente.

Problème 8. — **Archimède chargé par le roi Hiéron de Syracuse de reconnaître si la couronne du roi ne contenait pas, avec l'or, de l'argent introduit par fraude dans sa**

composition, constata que cette couronne pesait un poids équivalent à 10^{kg}, et que, pesée dans l'eau, elle perdait en poids l'équivalent de 625^{g}. Calculer les poids d'or et d'argent dont l'alliage composait la couronne sachant que la densité de l'or est 19, et celle de l'argent 10,5.

Désignons par x le poids de l'or contenu dans la couronne et par y le poids de l'argent. L'énoncé donne immédiatement l'équation :

$$x + y = 10,$$

si nous prenons pour unité de poids le kilogramme. Comme il y a deux inconnues, il nous faut une autre équation.

L'énoncé fait allusion à un **principe de physique** dont la connaissance nous est ici indispensable, c'est le principe d'Archimède : **Tout corps plongé dans un liquide reçoit une poussée verticale, de bas en haut, égale au poids du liquide qu'il déplace** (on dit aussi qu'il perd une partie de son poids égale au poids du liquide déplacé). Or le volume de liquide déplacé est le volume de la couronne; nous écrirons que ce volume est la somme des volumes de l'or et de l'argent. **Le volume d'un corps est exprimé par le quotient de son poids par sa densité** (autre notion de physique à connaître). Le volume de l'or est donc $\frac{x}{19}$, et celui de l'argent $\frac{y}{10,5}$, ces volumes sont exprimés en décimètres cubes.

La mise en équation s'obtiendra en écrivant que la somme de ces volumes est égale à 0,625, car un volume d'eau en décimètres cubes s'exprime par le même nombre que son poids en kilogrammes. On

a donc la deuxième équation :

$$\frac{x}{19} + \frac{y}{10,5} = 0,625.$$

Et par suite le système :

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{x}{19} + \frac{y}{10,5} = 0,625. \end{cases}$$

La première équation donne :

$$y = 10 - x$$

et en substituant dans la seconde :

$$\frac{x}{19} + \frac{10 - x}{10,5} = 0,625$$

équation à une seule inconnue x. On obtient successivement :

$$10,5x + 190 - 19x = 0,625 \times 19 \times 10,5$$

$$-8,5x = 124,6875 - 190 = -65,3125$$

$$x = \frac{65,3125}{8,5}$$

$$x = 7,684 \quad \text{par excès}$$

d'où :

$$y = 2,316 \quad \text{par défaut.}$$

La couronne contenait $7^{kg},684$ d'or et $2^{kg},316$ d'argent.

Problème 9. — **Mener une tangente commune extérieure à deux circonférences.**

Soit S le point de rencontre de la tangente commune extérieure avec la ligne des centres; choisissons pour inconnue x la distance SO′. Cette distance étant calculée, le problème sera ramené à une construction simple, par exemple : mener par un point donné une tangente à un cercle (fig. 16).

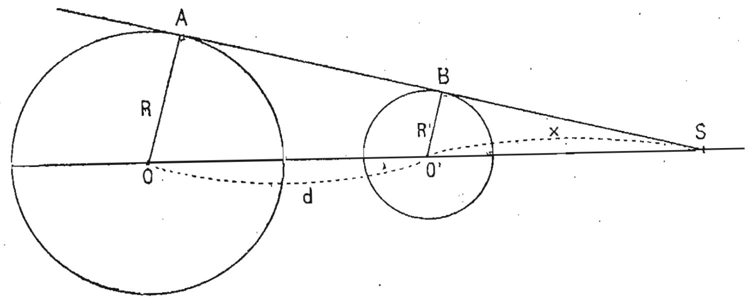


Fig. 16.

La mise en équation ne peut être donnée que par l'examen des propriétés géométriques de la figure : les triangles SO'B et SOA sont semblables, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'B}{OA}.$$

Si l'on désigne par R et R' les deux rayons et par d la distance des centres, la relation précédente s'écrit :

$$\frac{x}{x+d} = \frac{R'}{R}$$

c'est une équation à une inconnue x. On obtient successivement :

$$Rx = R'x + R'd$$
$$x(R - R') = R'd$$

et :

$$x = \frac{R'}{R - R'} d.$$

Le problème est résolu.

Discussion. — Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que la valeur trouvée pour x soit **déterminée, positive**, et **supérieure à R'**, car il faut que le point S soit en dehors du cercle O' pour qu'on puisse achever la construction.

1° **Si R est différent de R'**, ce qui s'écrit : $R \neq R'$, la valeur de x est déterminée. Nous supposerons $R > R'$ pour simplifier la discussion (dans le cas contraire, il suffit d'ailleurs de permuter R et R' pour obtenir la même formule) ; x est alors positif. La seule condition de possibilité est donc que sa valeur soit supérieure ou au moins égale à R', ce qui s'exprime :

$$\frac{R'}{R - R'} d \geqq R'$$

ou en divisant les deux membres par R' nombre positif :

$$\frac{d}{R - R'} \geqq 1$$

ou enfin :

$$d \geqq R - R'.$$

Il faut que la distance des centres soit supérieure ou au moins égale à la différence des rayons, c'est-à-dire que **l'une des deux circonférences ne soit pas intérieure à l'autre**. C'est bien ce que donnerait l'étude purement géométrique du problème.

Au cas où $d = R - R'$,

$$x = R'$$

le point S est sur la circonférence O' ; la tangente commune est perpendiculaire à la ligne des centres au point de contact des deux cercles qui sont alors tangents (fig. 17).

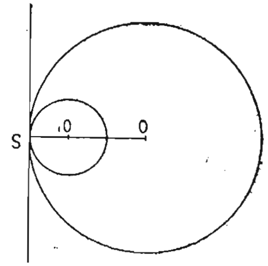


Fig. 17.

2° *Si* $R = R'$, la formule obtenue pour x devient :

$$x = \frac{R'd}{0}.$$

C'est, nous le savons, le symbole de l'infini ∞, ce qui exprime généralement que le problème est impossible. Cependant, si l'on examine directement la question dans ce cas particulier, on voit (fig. 18) que, au cas où les rayons sont égaux, la tangente commune est parallèle à la ligne des centres, ce que l'on exprime parfois en disant que le point d'intersection de ces deux droites a été **rejeté à l'infini**.

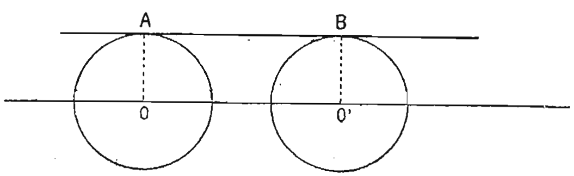


Fig. 18.

En résumé. — Si l'on note que le problème est ramené à mener par un point des tangentes à une

circonférence, on peut résumer la discussion comme suit :

$$R > R' \begin{cases} d > R - R' \ldots\ldots\ldots & 2 \text{ solutions} \\ d = R - R' \ldots\ldots\ldots & 1 \quad — \\ d < R - R' \ldots\ldots\ldots & 0 \quad — \end{cases}$$

$R = R'$ | 2 solutions : parallèles à la ligne des centres.

Problème 10. — **On a déterminé les poids de carbone et d'hydrogène renfermés dans un mélange d'acétylène (C^2H^2) et de méthane (CH^4); ces poids sont c et h; déterminer les poids d'acétylène et de méthane renfermés dans le mélange ($C = 12$; $H = 1$).**

Il faut appliquer ici des notions de nomenclature chimique et des principes sur la notation atomique que l'élève doit posséder. La mise en équation consiste à écrire que les poids de carbone et d'hydrogène du mélange sont égaux respectivement à la somme des poids de carbone et d'hydrogène contenus dans chacun des composants.

Représentons par x le poids de l'acétylène dans le mélange et par y celui du méthane, l'énoncé donne directement l'équation :

$$x + y = c + h.$$

D'autre part, la proportion de carbone dans l'acétylène est :

$$\frac{12 \times 2}{(12 \times 2) + 2} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13} \text{ du poids total;}$$

la proportion de carbone dans le méthane est :

$$\frac{12}{12 + 4} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \text{ du poids total;}$$

On a donc la deuxième équation :

$$\frac{12}{13}x + \frac{3}{4}y = c.$$

Cette deuxième équation constitue avec la précédente le système :

$$\begin{cases} x + y = c + h \\ \frac{12}{13}x + \frac{3}{4}y = c \end{cases}$$

qui suffit à déterminer les solutions. On peut résoudre comme suit :

$$y = c + h - x$$

et en substituant :

$$\frac{12}{13}x + \frac{3c + 3h - 3x}{4} = c$$
$$48x + 39c + 39h - 39x = 52c$$
$$9x = 13c - 39h$$

et :

$$x = \frac{13(c - 3h)}{9}.$$

puis :

$$y = c + h - \frac{13c - 39h}{9}$$
$$9y = 9c + 9h - 13c + 39h$$
$$y = \frac{48h - 4c}{9}$$
$$y = \frac{4(12h - c)}{9}.$$

Nous laissons à l'élève le soin de discuter le problème à l'aide des formules ainsi obtenues.

Nous venons de résoudre un assez grand nombre de problèmes de natures très diverses portant sur

des questions de la vie usuelle, sur l'arithmétique, la géométrie, la physique, la chimie. Nous pensons que l'élève aura compris comment un problème se met en équations et comment on discute les résultats; nous proposons en exercices un très grand nombre de problèmes répartis entre ces divers domaines.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE XI

Problèmes du premier degré.

I. — **Arithmétique et vie usuelle.**

165. — Calculer deux nombres sachant que leur somme est 37 et que leur différence est 13. Généraliser.

166. — La somme des deux nombres est 100 et en retranchant $\frac{1}{6}$ du plus grand pour l'ajouter au plus petit, ils sont égaux. Quels sont ces deux nombres?

167. — Quel est le nombre dont les $\frac{13}{20}$ surpassent le $\frac{1}{4}$ de 7 entiers $\frac{1}{2}$?

168. — Trouver deux nombres dont la somme soit 19 et le produit 60. (On calculera la différence de ces nombres en utilisant l'identité remarquable $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$).

169. — Trouver deux nombres dont la différence soit $4\frac{1}{9}$ et le quotient $\frac{3}{7}$.

170. — Une marchande d'œufs se rendant au marché vend à un passant les $\frac{3}{8}$ de ses œufs; à l'entrée de la ville, elle vend encore les $\frac{2}{5}$ des œufs qui lui restent, et elle arrive au marché avec 360 œufs. Combien en avait-elle en partant?

171. — Partager une somme de 252^f, entre trois personnes, de telle sorte que la seconde ait les $\frac{3}{4}$ de la première et que la part de la troisième soit égale à la demi-somme des parts des deux autres.

172. — Une pompe destinée à élever l'eau pour le service d'une usine met $10^h \frac{5}{11}$ pour remplir le réservoir si elle fonctionne bien. Par suite d'un accident, le rendement est diminué de $\frac{1}{3}$ lorsque le bassin est plein au $\frac{1}{4}$. Combien mettra-t-elle ce jour-là pour le remplir?

173. — 3 compagnies d'ouvriers sont telles que la première aidée de la moitié de chacune des deux autres, exécuterait un certain travail en 27 jours; la deuxième, plus la moitié des deux autres, en 23 jours; la troisième plus la moitié des deux autres en 19 jours. Combien ces 3 compagnies d'ouvriers travaillant ensemble mettraient-elles de jours pour faire le travail?

174. — Un bassin est alimenté par 3 robinets; si l'on ouvre les deux premiers, il se remplit en 3^h; si l'on ouvre le premier et le troisième; il se remplit en 5^h; si l'on ouvre les 3 robinets il se remplit en $1^h,40^m$; sachant que la capacité du bassin est 135^{m3}, on demande combien chaque robinet débite de litres.

175. — Il a été fabriqué en France, pendant l'année 1900, 2 185 858 pièces d'or de 10^f et de 20^f, pour une valeur totale de $28\,012\,830^f$. Combien a-t-on fabriqué de pièces de 10^f et de pièces de 20^f?

176. — Une montre avance de 10^m en 24^h; on l'a mise à l'heure à midi; quelle heure est-il lorsqu'elle marque 6^h?

177. — La capacité totale de trois tonneaux est de $1\,440^l$. Deux de ces tonneaux sont pleins, et le troisième est vide. Pour remplir le tonneau vide, il faut tout le contenu du premier tonneau et $\frac{1}{5}$ du contenu du second, ou tout le contenu du second et $\frac{1}{3}$ du contenu du premier. Quelle est la capacité de chacun des tonneaux?

178. — Trois frères désirent acheter une maison valant $70\,000^f$. Aucun d'eux n'a assez d'argent; si l'aîné donnait au second $\frac{1}{3}$ de ce qu'il possède, ou au troisième $\frac{1}{4}$ de ce qu'il possède, chacun des deux derniers aurait une somme suffisante pour acheter la maison. Mais l'aîné emprunte au troisième la moitié de sa fortune et achète la maison. Combien possédait chaque frère?

179. — Un bateau fait en 10^h 110 milles en suivant le courant et 70 milles en le remontant. Lors d'un autre voyage, il fait dans le même temps 88 milles en suivant le courant et 84 milles en le remontant. Combien de milles ce bateau peut-il faire à l'heure dans une eau calme (vitesse propre du bateau) et quelle est la vitesse du courant?

180. — Un marchand a deux tonneaux renfermant des quantités inégales de vin. Il verse du premier tonneau dans le second une quantité de vin égale à celle que contenait le second tonneau; puis il verse du second tonneau dans le premier une quantité de vin égale à celle qu'il avait laissée dans le premier tonneau. Chaque tonneau se trouve alors contenir 80^l de vin. Combien contenaient-ils au début l'un et l'autre?

181. — Trouver une fraction équivalente à $\frac{8}{11}$ et dont la somme des termes soit 133. Généraliser la question. Condition de possibilité.

182. — Quel nombre faut-il ajouter aux deux termes de la fraction $\frac{13}{24}$ pour qu'elle devienne égale à $\frac{2}{3}$?

183. — Quel nombre faut-il ajouter aux deux termes de la fraction $\frac{8}{15}$ pour qu'elle ne diffère de l'unité que de $\frac{1}{300}$?

184. — Une fraction donnée diffère de l'unité de $\frac{7}{15}$. En ajoutant un même nombre n à ses deux termes, on obtient une nouvelle fraction qui ne diffère plus de l'unité que de $\frac{1}{100}$. Dire quel est le nombre ajouté et quelle était la fraction primitive.

185. — D'un train qui marche à une vitesse de 40^{km} à l'heure, un voyageur voit passer en 3 secondes un train express marchant en sens inverse et ayant 75^m de long; calculer la vitesse à l'heure de ce train express.

186. — Une somme est déposée chez un banquier où elle porte intérêt à 3 o/o l'an. On la retire au bout de 255 jours et l'on touche 2 859f,50 pour le capital et les intérêts. Quelle somme avait-on placée ?

187. — Une personne a placé les $\frac{5}{7}$ de sa fortune à 5 o/o et le reste à 3 o/o. Au bout de l'année, elle retire 92 420f,33, capital et intérêts réunis, on demande quelle était sa fortune.

188. — Trouver un capital tel que si on en place le $\frac{1}{6}$ à 3 o/o, la moitié à 5 o/o et le reste à 6 o/o on obtienne au bout de 4 mois 1 000f d'intérêt.

189. — Une personne partage sa fortune en trois parties égales; elle place l'une au taux de 5 o/o pendant 8 mois, la deuxième au taux de 4,50 o/o pendant un an, la troisième au taux de 3 o/o pendant 5 mois. L'intérêt total rapporté par ces trois placements est de 908f,33. Quelle était la fortune de cette personne ?

190. — L'escompte en dehors d'un billet, au taux de 5 o/o, est égal à 20f,25; l'escompte en dedans du même billet, au même taux, est de 20f. On demande l'échéance du billet et sa valeur nominale.

191. — Un capitaliste place une partie de sa fortune à 5 o/o et l'autre à 3 o/o. Il se fait ainsi un revenu de 1 810f. Si les placements étaient intervertis, ce capitaliste perdrait 180f par an. Quelle est sa fortune?

192. — Un employé disposant de 4^h pour faire une promenade, part dans une voiture qui fait 11^{km} à l'heure. A quelle distance du point de départ doit-il quitter la voiture pour être de retour à l'heure fixée, s'il veut revenir à pied en faisant 5^{km} à l'heure ?

193. — Trois ouvriers ont placé ensemble une somme de 1 200f. Après 8 ans, ils ont retiré pour le capital et les intérêts simples : le 1er 792f; le 2e 528f; et le 3e 264f. Quelle était la mise de chacun et à quel taux a-t-on payé l'intérêt?

194. — Sur des marchandises qu'il a vendues, un marchand a gagné 3 516f,75. S'il eût gagné 83f de plus, il aurait gagné

8,6 o/o du prix d'achat. Combien les marchandises ont-elles été vendues ? Combien coûtaient-elles ?

195. — On fond 258 pièces de 5f en argent auxquelles l'usure a fait perdre $\frac{1}{600}$ de leur poids avec un lingot d'argent au titre de 0,750 pesant 32^{hg} : 1° Combien faudra-t-il ajouter de cuivre à l'alliage obtenu pour fabriquer des pièces divisionnaires ?

196. — Une voiture part avec une vitesse de 11^{km} à l'heure. On envoie à sa poursuite un bicycliste qui fait 297^m par minute et qui rejoint au bout de $2^h,27^m$. Combien de temps s'est-il écoulé entre le départ de la voiture et le départ du bicycliste ?

197. — Un négociant veut composer un mélange de 3 sortes de cafés qu'il vendra 2f,75 le kilogramme, en faisant sur le prix de revient un bénéfice de 25 o/o. Il a en magasin 350^{kg} d'une espèce qu'il a payée, il y a plus d'un an, 175f les 100^{kg} et qu'il estime avoir acquis 12 o/o de plus-value; il les emploiera concurremment avec des poids inconnus des deux autres qualités valant l'une 2f,80 et l'autre 2f,20 le kilogramme, et entrant dans le mélange, la première pour une part et la seconde pour deux. On propose de calculer ces poids.

198. — On sait que le bronze des canons se compose de 9 parties de cuivre et 1 partie d'étain; le laiton de 2 parties de cuivre et 1 de zinc; les monnaies de bronze de 95 parties de cuivre, 4 d'étain et 1 de zinc. Un mélange de ces 3 alliages contient 5 690^g de cuivre, 150^g d'étain et 130^g de zinc; quels sont les poids des divers alliages qui forment le mélange ?

II. — Géométrie.

199. — Trouver les dimensions d'un rectangle sachant que si l'on augmente la base de 8^m et la hauteur de 5^m la surface augmente de 180^{m2}; tandis que si l'on augmente la base de 3^m et que l'on diminue la hauteur de 4^m la surface diminue de 30^{m2}.

200. — Étant donné un triangle ABC, on désigne par P, Q, R les points de contact du cercle inscrit avec les côtés BC, CA, AB; on pose :

$$BC = a,\ CA = b,\ AB = c,\ AQ = AR = x,\ BR = BP = y,$$
$$CP = CQ = z.$$

On demande de calculer x, y, z étant donnés a, b, c. Discuter.

201. — Même question en remplaçant le cercle inscrit par l'un des cercles ex-inscrits.

202. — On considère un cercle de centre O; soit AB un diamètre de ce cercle; on trace deux cercles ayant respectivement pour diamètres AO et BO; calculer le rayon d'un cercle tangent à ces trois cercles.

203. — On donne deux cercles égaux; calculer le rayon d'un cercle tangent à ces deux cercles et à la droite qui joint leurs centres.

204. — On donne un cercle et une tangente à ce cercle. Déterminer sur le cercle deux points A et B tels que, en désignant par AA', BB' les perpendiculaires abaissées de ces points sur la tangente donnée, le quadrilatère ABA'B' soit un carré.

205. — Deux corps se meuvent le long d'une circonférence, dans le même sens, à partir de deux points différents. La plus petite distance qui les sépare, mesurée le long de la circonférence, est de 16^{m}; l'un des corps rattrapera l'autre en $32''$ s'ils se meuvent dans un sens ou en $40''$ s'ils se meuvent dans le sens opposé. Tandis que l'un fait une fois le tour de la circonférence, la distance parcourue par l'autre excède de $4^{m},50$ la longueur de la circonférence. Quelle est cette longueur et avec quelle vitesse se meuvent les corps?

206. — Une roue de voiture a 4^{m} de circonférence; on la photographie pendant la marche, la durée de pose étant $\frac{1}{30}$ de seconde, et l'on constate sur le cliché que, pendant la durée de la pose, chaque rayon de la roue a tourné de la moitié de l'angle que font entre eux deux rayons consécutifs; sachant que la roue a 12 rayons équidistants, on demande quelle était la vitesse de la voiture.

III. — Physique.

207. — Un alliage de plomb et d'étain pèse 20^{kg}; lorsqu'on le plonge dans l'eau, il perd 2^{kg} de son poids. Trouver le poids du plomb et de l'étain contenus dans l'alliage sachant que 5^{kg} d'étain perdent 685^{g} de leur poids si on les plonge dans l'eau et que $2^{kg},5$ de plomb perdent 223^{g}.

208. — Un thermomètre à mercure pèse $27^{g},9$; plongé dans l'eau, il pèse $23^{g},4$, quels sont les volumes du verre et du mercure de l'appareil (on négligera le volume de la tige non occupé par le mercure) les densités du mercure et du verre étant 13,56 et 2,5?

209. — Un siphon dont la petite branche a 12^{cm} de haut et la grande branche 98^{cm} est amorcé avec de l'eau, puis employé à transvaser du mercure. On demande à quelle hauteur le mercure s'élèvera dans la petite branche.

210. — Dans une pompe aspirante, le tuyau d'aspiration a 7^{cm2} de section et une hauteur de $5^{m},16$ au-dessus du niveau de l'eau dans laquelle il plonge. Le corps de pompe a $0^{m},70$ de hauteur. On demande quelle est sa section sachant que l'eau s'élève au premier coup de piston, jusqu'au sommet du tuyau d'aspiration. On suppose que la pression atmosphérique est équilibrée par une colonne d'eau de $10^{m},32$.

211. — On veut déterminer la chaleur de fusion de l'étain par la méthode des mélanges; le calorimètre contient dans une première expérience $443^{g},5$ d'eau à 7°; on mélange à cette eau 100^{g} d'étain à 233°, la température finale du mélange est de 13°. Dans une deuxième expérience, on prend 150^{g} d'étain à 233° qu'on mélange à $781^{g},5$ d'eau à 18°, ce qui donne pour température finale 23°; calculer :

1° La chaleur de fusion de l'étain;

2° La chaleur spécifique de l'étain solide.

(On sait que la chaleur spécifique de l'étain liquide est 0,064, et on suppose nulles les pertes de chaleur par rayonnement et conductibilité; température de fusion de l'étain : 228°).

212. — Dans une machine pneumatique, la capacité du corps de pompe est de $0^{l},5$, celle du récipient de 4^{l}. Quelle est la force élastique de l'air du récipient après 3 coups de piston, la pression initiale étant de 76^{cm}?

213. — La capacité du corps de pompe d'une machine pneumatique est de 500^{cm3}, celle du récipient de 2^{l}; un corps est placé sous le récipient. Trouver le volume de ce corps sachant qu'après un coup de piston la force élastique initiale est ramenée de 76 à 56^{cm}.

214. — On sait qu'en graduant un thermomètre centigrade on marque 0° dans la glace fondante et 100° dans la vapeur d'eau bouillante; avec le thermomètre Fahrenheit, on marque 32° et 212° à ces mêmes points fixes. Deux thermomètres, un centigrade et un Fahrenheit peuvent-ils indiquer le même degré de température dans un même bain? Quelle est cette température?

215. — Dans un récipient vide d'une capacité de $2^l,02$ on introduit d'abord 1^l d'air sec à 760^{mm} et à 30^o, puis de l'eau en quantité telle qu'il en reste après la vaporisation 20^{cm^3} à l'état liquide. 1° Quelle est la pression intérieure en supposant que la température reste de 30° (Tension maximum de l'eau à $30^o = 31^{mm},5$)? — 2° Quel est le poids de l'eau condensée si on refroidit à 10°; on négligera la contraction de l'enveloppe (Tension maximum de l'eau à $10^o = 9^{mm},2$; coefficient de dilatation $\frac{1}{273}$; densité de la vapeur d'eau, $\frac{5}{8}$)?

216. — Pour faire équilibre au poids d'un lingot de platine placé dans un plateau d'une balance, on met dans l'autre plateau un poids de 25^g en cuivre jaune. Quel poids de cuivre aurait-il fallu si la pesée avait été effectuée dans le vide (densité du platine 21,5; densité du cuivre 8,3)? L'air pèse 770 fois moins que l'eau.

IV. — Chimie.

217. — On veut préparer 50^l d'oxygène, quel poids de chlorate de potassium devra-t-on décomposer par la chaleur?

poids atomique du Cl 35,5
— de l'O 16
— du K 39
poids du litre d'oxygène $1^g,43$.

218. — Quel volume d'hydrogène préparerait-on en attaquant 200^g de zinc par l'acide chlorhydrique?

$$Cl = 35,5;\ H = 1;\ Zn = 65$$

Poids du litre d'hydrogène $0^g,089$.

219. — Le charbon suffisamment chauffé et le salpêtre déflagrent en produisant de l'anhydride carbonique et de l'azote; d'après cela, quel est le poids de charbon sec et pur qu'il faut mélanger à 150^g d'azotate de potassium pour obtenir une réaction complète?

$$C = 12;\ Az = 14;\ K = 39;\ O = 8.$$

Quel est le volume gazeux produit, si la température s'élève

à 1 092°? (Coefficient de dilatation des gaz : $\frac{1}{273}$; — poids d'un litre de CO^2 : $1^g,97$; — poids d'un litre d'azote $1^g,25$.

220. — On considère un mélange de trois corps ayant respectivement pour formules H^2O, C^2O^m, $C^4H^nO^p$; ce mélange renferme un poids a d'hydrogène, b de carbone, c d'oxygène. Quels sont les poids des trois corps qui figurent dans le mélange?

LIVRE IV

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

CHAPITRE XII

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

---

154. — **Définitions.**

Nous savons qu'on appelle **équation du second degré à une inconnue** x une équation telle que, tous les termes ayant été transposés dans le premier membre et les termes semblables ayant été réduits, le premier membre est un polynome du second degré en x. Telles sont les équations :

$$3 + 5x^2 - x = 0$$
$$-\frac{3}{2} + \frac{5}{3}x - x^2 = 0$$
$$mx^2 - px + 3x^2 - 4 = 0$$
$$m - nx^2 + 2px - m^2 - p^4 = 0.$$

On a l'habitude d'ordonner le premier membre de l'équation suivant les puissances décroissantes de x, en réunissant en un seul tous les termes qui renferment x au même degré. Les équations pré-

cédentes s'écriront ainsi :

$$5x^2 - x + 3 = 0$$
$$-x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{3}{2} = 0$$
$$(m + 3)x^2 - px - 4 = 0$$
$$-nx^2 + 2px + (m - m^2 - p^4) = 0.$$

Une équation du second degré a donc **trois termes**; son premier membre est un **trinome du second degré**. Le **premier** terme est le terme en x^2; le **second** le terme en x; le **dernier terme** est le terme indépendant de x ou **terme constant**. Par exemple dans l'équation :

$$(m + 3)x^2 - (2 - n + p)x + m - n = 0,$$

le **premier terme** est $(m + 3)x^2$; le **second terme** est $-(2 - n + p)x$; le **dernier terme** est $m - n$.

Dans l'équation :

$$-3x - 1 + x^2 = 0,$$

le premier terme est x^2, le second $-3x$ et le dernier -1; car cette équation ordonnée s'écrirait :

$$x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Dans l'équation :

$$x^2 - 1 = 0,$$

le **premier terme** est x^2; le **second terme** n'existe pas : le *dernier terme* est -1,

155. — **Équation générale du second degré à une inconnue.**

On écrit souvent l'équation **générale** du second degré sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

c'est-à-dire que l'on désigne par a le **coefficient** du premier terme, par b le coefficient du second terme et par c le terme constant.

Ainsi, pour l'équation :

$$(m+3)x^2 - px - 4 = 0,$$

les coefficients a, b, c, de l'équation générale correspondent respectivement à $(m+3)$, $-p$, -4.

Pour que l'équation soit bien du second degré, il est nécessaire de supposer que le coefficient a est différent de zéro; nous ferons cette hypothèse, Les coefficients b et c peuvent être nuls ou différents de zéro; lorsque aucun de ces coefficients n'est nul, on dit que l'équation est **complète**; dans le cas où l'un des coefficients au moins, b ou c devient nul, on dit que l'équation du second degré est **incomplète**.

156. — **Résolution des équations incomplètes du second degré.**

1. — Cas où le terme indépendant de x est nul. — Soit l'équation du second degré :

$$7x^2 - 3x = 0.$$

On peut l'écrire en mettant x en facteur commun, sous la forme :

$$x(7x-3) = 0.$$

Le premier membre est un produit de deux facteurs x et $(7x-3)$. Pour que ce produit soit nul, il faut et il suffit que l'un au moins des deux facteurs soit nul. Les solutions de l'équation ont donc lieu pour $x=0$, et $7x-3=0$; l'équation admet par suite les deux solutions :

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = \frac{3}{7}.$$

D'une manière générale, l'équation incomplète :

$$ax^2 + bx = 0$$

admet pour solutions :

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = \frac{-b}{a}.$$

2. — Cas où le coefficient du second terme est nul $(b=0)$. — Soit l'équation du second degré :

$$2x^2 - 8 = 0.$$

On peut l'écrire successivement sous les formes équivalentes :

$$2x^2 = 8$$
$$x^2 = \frac{8}{2}$$
$$x^2 = 4.$$

Il s'agit donc de trouver un nombre x dont le carré soit égal à 4. Nous savons que 2 est le seul nombre positif dont le carré est égal à 4; nous savons que -2 est le seul nombre négatif dont le carré est égal à 4; en effet, a étant positif, le carré de $-a$ est égal au carré de a ($-$ par $-$ donne $+$); il n'est donc égal à 4 que si $a^2=4$, c'est-à-dire si $a=2$. L'équation proposée admet donc **deux solutions**; ou, comme on dit aussi, **deux racines** : la racine 2 et la racine -2.

Au lieu d'écrire :

$$x = +2$$
$$x = -2$$

on écrit souvent la formule unique :

$$x = \pm 2$$

que l'on énonce : x **égale plus ou moins deux**, c'est-à-dire **l'équation proposée est vérifiée que** x **soit égal à** $+2$ **ou à** -2.

Soit encore l'équation :

$$3x^2 - 5 = 0.$$

On en déduit :

$$x^2 = \frac{5}{3}$$

et l'on voit que x doit être tel que son carré soit égal à $\frac{5}{3}$; il existe un nombre positif et un seul dont le carré est $\frac{5}{3}$; on le représente par $\sqrt{\frac{5}{3}}$ et l'on apprend en arithmétique à le calculer avec autant d'approximation que l'on veut. Le nombre négatif $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ est le seul nombre négatif dont le carré soit égal à $\frac{5}{3}$; l'équation proposée a donc deux racines que l'on peut représenter par la formule unique :

$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Considérons maintenant l'équation :

$$2x^2 + 5 = 0.$$

S'il existe un nombre x vérifiant cette équation, on doit avoir :

$$x^2 = -\frac{5}{2},$$

c'est-à-dire que le carré de x doit être égal au

nombre négatif $-\frac{5}{2}$; or, le carré d'un nombre est toujours positif, que ce nombre soit positif ou négatif; **il n'y a donc aucun nombre dont le carré soit égal à** $-\frac{5}{2}$; on en conclut que **l'équation proposée n'a pas de racines.**

Soit enfin l'équation :

$$3x^2 = 0.$$

Le produit de x^2 par 3 étant nul, on doit avoir :

$$x^2 = 0,$$

et par suite $x = 0$, puisque 0 est le seul nombre dont le carré est égal à zéro. L'équation proposée admet donc la racine unique : $x = 0$.

On convient de dire que cette racine est **double**; nous ne pouvons expliquer complètement, pour l'instant au moins, la raison de cette dénomination; contentons-nous d'observer que, x^2 étant le produit de deux facteurs égaux à x, si x est égal à zéro, ces deux facteurs sont nuls, de sorte que le produit a **une double raison** pour s'annuler.

Nous pouvons résumer cette étude dans la règle suivante.

157. — **Règle.**

Soit :

$$ax^2 + c = 0$$

une équation du second degré sans second terme dans laquelle on suppose essentiellement $a \neq 0$. **Si les coefficients** a **et** c **sont de signes contraires, l'équation admet**

deux racines données par la formule :

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

dans laquelle $\frac{-c}{a}$ est un nombre positif dont l'arithmétique enseigne à extraire la racine carrée. Si les coefficients a et c sont de même signe, l'équation n'a pas de racines. Si le coefficient c est nul, l'équation admet la racine double $x = 0$.

I. — RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE

Considérons maintenant l'équation générale :

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

dans laquelle nous supposerons essentiellement le coefficient a différent de zéro, sans faire aucune autre hypothèse.

L'équation (1) est équivalente à l'équation suivante obtenue en multipliant les deux membres par $4a$:

$$(2) \qquad 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Cette équation peut s'écrire :

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

ou en ajoutant b^2 aux deux membres :

$$(3) \qquad 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac.$$

Le succès de la méthode employée tient à ce que le premier membre de l'équation (2) est le carré de $(2ax + b)$; de telle sorte que cette équation (3) peut s'écrire :

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

On est ainsi conduit à un problème tout à fait analogue à celui que nous avons résolu dans le précédent paragraphe; il s'agit de déterminer x, sachant que le carré de l'expression $2ax + b$ est égal à $b^2 - 4ac$.

Si $b^2 - 4ac$ est positif, $2ax + b$ devra être égal à $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$;

Si $b^2 - 4ac$ est négatif, le problème est **impossible**;

Si $b^2 - 4ac$ est nul, $2ax + b$ doit être nul.

On a donc en supposant $b^2 - 4ac \geqslant 0$:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b - 4ac}$$

d'où :

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

et enfin :

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

qui est la **formule générale de résolution** de l'équation du second degré.

Cette dernière formule fait connaître les deux racines de l'équation du second degré au moyen des coefficients; ces racines sont :

distinctes si $b^2 - 4ac$ est positif
égales si $b^2 - 4ac = 0$.

Il n'y a dans ce dernier cas qu'**une** racine que l'on considère comme **double**. On peut expliquer cette dénomination en faisant remarquer que si $b^2 - 4ac$ est positif et très petit en valeur absolue, la racine carrée est très petite en valeur absolue;

les deux valeurs de x qui diffèrent entre elles du quotient par $2a$ du double de cette racine sont donc très peu distinctes; on conçoit que si $b^2 - 4ac$ tendait vers zéro les deux racines tendraient à se confondre. C'est en considérant le cas où $b^2 - 4ac = 0$ comme ce **cas limite** qu'on est conduit à dire que les racines sont **confondues**, ou encore que la racine dans ce cas est **double**.

Si $b^2 - 4ac$ est négatif, les racines n'existent pas, la formule qui les donne n'a plus de sens, puisque l'on ne peut pas extraire la racine carrée d'un nombre négatif.

Nous donnerons à la quantité $b^2 - 4ac$ le nom de **discriminant** de l'équation [1].

158. — **Applications de la formule générale :**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Exemple 1. — Résoudre l'équation :

$$2x^2 - 5x + 3 = 0.$$

On peut appliquer la formule, en remplaçant a par 2, b par -5 et c par 3; on obtient ainsi :

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 2 \times 3}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4}.$$

1. Dans le cas où c est égal à zéro, on voit immédiatement que l'équation est vérifiée pour $x = 0$ et pour $x = -\frac{b}{a}$; ce sont ces deux racines que donnerait la formule. On appelle aussi parfois discriminant le quart de cette quantité (c'est-à-dire $b^2 - ac$); dans toutes les questions où le signe seul intervient, il est sans importance de préciser si l'on prend $b^2 - 4ac$ ou son quart.

Les deux racines sont donc :

$$\frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

et :

$$\frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

On aurait pu, à titre d'exercice, appliquer à l'équation particulière proposée la méthode générale qui a servi à établir la formule; multiplions par $4a$, c'est-à-dire par 8; il vient :

$$16x^2 - 40x = -24.$$

Ajoutons b^2, c'est-à-dire 25; il vient :

$$16x^2 - 40x + 25 = 25 - 24$$

c'est-à-dire :

$$(4x - 5)^2 = 1.$$

On en conclut :

$$4x - 5 = \pm 1$$

et enfin :

$$x = \frac{5 \pm 1}{4}$$

c'est-à-dire les mêmes valeurs que plus haut.

Exemple 2. — Résoudre l'équation :

$$3x^2 - 8x + \frac{16}{3} = 0.$$

On a ici :

$$b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 3 \times \frac{16}{3} = 0.$$

L'équation a donc une racine double :

$$x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Exemple 3. — Résoudre l'équation :

$$x^2 - 2x + 5 = 0.$$

On a ici :

$$b^2 - 4ac = 4 - 20 = -16;$$

l'équation proposée n'a pas de racines.

Exemple 4. — Résoudre l'équation :

$$a^2x^2 - (a^2 + b^2)x + b^2 = 0.$$

Le discriminant est :

$$(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 - b^2)^2.$$

On a donc :

$$x = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 - b^2)^2}}{2a^2},$$

ce qui donne les deux racines :

$$x' = \frac{a^2 + b^2 + a^2 - b^2}{2a^2} = 1$$

$$x'' = \frac{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)}{2a^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

159. — **Cas où la formule se simplifie.**

1° *Cas où le coefficient de x est pair. — Formule en b'.* — Dans le cas où le coefficient b est le double d'un nombre entier, il est commode de poser $b = 2b'$, b' désignant la moitié de b; la formule devient alors, en remarquant que le carré du double d'un nombre est égal au quadruple du carré de ce nombre :

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a}$$

c'est-à-dire :

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

Exemple. — Soit à résoudre l'équation :

$$3x^2 - 14x + 8 = 0.$$

L'application de la formule en b' donne :

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{3}$$

$$x = \frac{7 \pm 5}{3}$$

ce qui donne les deux racines :

$$x' = \frac{7 + 5}{3} = 4,$$

$$x'' = \frac{7 - 5}{3} = \frac{2}{3}.$$

Autre exemple. — Soit l'équation :

$$(l^2 - R^2)x^2 - 2Rl^2x + R^2l^2 = 0$$

on obtient successivement :

$$x = \frac{Rl^2 \pm \sqrt{R^2l^4 - R^2l^4 + R^4l^2}}{l^2 - R^2}$$

$$x = \frac{Rl^2 \pm R^2l}{l^2 - R^2} = \frac{Rl\,(l \pm R)}{l^2 - R^2}$$

d'où les deux racines :

$$x' = \frac{Rl\,(l + R)}{l^2 - R^2} = \frac{Rl}{l - R},$$

$$x'' = \frac{Rl\,(l - R)}{l^2 - R^2} = \frac{Rl}{l + R}.$$

2° *Cas où le coefficient de x^2 est l'unite* ($a = 1$). — L'équation du second degré étant donnée sous la forme :

$$x^2 + px + q = 0,$$

on l'écrit :

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q=0$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q,$$

d'où l'on tire, en supposant $\frac{p^2}{4}-q>0$:

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

c'est-à-dire :

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

On peut d'ailleurs toujours mettre l'équation sous cette forme réduite, en divisant par a, supposé différent de zéro.

Application. — Soit l'équation :

$$x^2-3x-4=0$$

on obtient successivement :

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+4}$$

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$x=\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2}$$

d'où les deux racines :

$$x'=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4,$$

$$x''=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}=-1.$$

II. — ÉQUATIONS IRRATIONNELLES. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ. ÉQUATIONS BICARRÉES.

160. — Équations irrationnelles.

La méthode de résolution des équations irrationnelles du premier degré, avec radicaux carrés, s'applique encore aux équations du second degré. On isole l'un des radicaux si l'équation en renferme plusieurs, puis on élève les deux membres au carré, ce qui fait disparaître le radical du premier membre; on effectue dans les deux membres toutes les réductions et simplifications possibles, si l'équation renferme encore des radicaux, on isole l'un d'eux, puis on élève les deux membres au carré et ainsi de suite jusqu'à disparition complète de tous les radicaux. On doit ainsi arriver à une équation du second degré que l'on sait résoudre. Il convient de **vérifier** toujours que les racines de cette dernière équation satisfont à l'équation proposée, car les élévations au carré des deux membres des équations ont pu introduire des **solutions étrangères.**

Exemple 1. — Soit à résoudre l'équation :

$$7x-\sqrt{8x+1}=16.$$

Isolons le radical, on obtient :

$$\sqrt{8x+1}=7x-16.$$

Élevons les deux membres au carré :

$$8x+1=49x^2-224x+256,$$

ou, après simplification :

$$49x^2-232x+255=0.$$

Si l'on applique la formule en b' à cette équation, on obtient successivement :

$$x = \frac{116 \pm \sqrt{116^2 - 49 \times 255}}{49}$$
$$x = \frac{116 \pm \sqrt{961}}{49}$$
$$x = \frac{116 \pm 31}{49}$$

d'où les deux racines :

$$x' = \frac{147}{49} = 3$$
$$x'' = \frac{85}{49}.$$

Si l'on substitue $x' = 3$ à x dans l'équation proposée, on a :

$$21 - \sqrt{25} = 16.$$
$$21 - 5 = 16$$

ce qui est une identité : 3 est donc une racine de l'équation proposée. Substituons à x la seconde racine $x'' = \frac{85}{49}$, on obtient :

$$\frac{85}{7} - \sqrt{\frac{680}{49} + 1} = 16$$
$$\frac{85}{7} - \frac{27}{7} = 16$$
$$\frac{58}{7} = 16$$

ce qui est faux. $\frac{85}{49}$ est une **solution étrangère** qui n'appartient pas à l'équation proposée. On vérifierait aisément que c'est une racine de l'équation :

$$7x + \sqrt{8x + 1} = 16.$$

Exemple 2. — Soit à résoudre l'équation :

$$\sqrt{5x + 6} + \sqrt{3x - 5} = 5.$$

Isolons le premier radical :

$$\sqrt{5x + 6} = 5 - \sqrt{3x - 5}.$$

On obtient successivement :

$$5x + 6 = 25 - 10\sqrt{3x - 5} + 3x - 5$$
$$10\sqrt{3x - 5} = 14 - 2x$$
$$5\sqrt{3x - 5} = 7 - x$$
$$25(3x - 5) = 49 - 14x + x^2$$

et enfin :

$$x^2 - 89x + 174 = 0$$

d'où les deux racines :

$$x = \frac{89 \pm \sqrt{7225}}{2}$$
$$x = \frac{89 \pm 85}{2}$$

d'où :

$$x' = \frac{89 + 85}{2} = 87,$$
$$x'' = \frac{89 - 85}{2} = 2.$$

Vérifions ces racines, on obtient pour la première :

$$\sqrt{441} + \sqrt{256} = 5$$
$$21 + 16 = 5$$

ce qui est inexact : 87 n'est donc pas une racine de l'équation proposée. C'est une racine de l'équation :

$$\sqrt{5x+6}-\sqrt{3x-5}=5$$

La seconde racine donne :

$$\sqrt{16}+\sqrt{1}=5$$
$$4+1=5$$

ce qui est une identité, donc 2 est une racine de l'équation proposée.

161. — **Systèmes d'équations.**

Nous allons appliquer la méthode de substitution à la résolution d'un système de deux équations, l'une du second degré, l'autre du premier degré à deux inconnues.

Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} 5x^2 - 2xy = 32 \\ 2x + 7y = -17. \end{cases}$$

Tirons la valeur de y de la deuxième équation :

$$y = \frac{-17-2x}{7} = \frac{-(17+2x)}{7}.$$

Substituons cette valeur dans la première équation, on a successivement :

$$5x^2 + \frac{2x(17+2x)}{7} = 32$$
$$35x^2 + 34x + 4x^2 = 224$$
$$39x^2 + 34x - 224 = 0.$$

Cette dernière équation est une équation du second degré en x, ses racines sont données par la formule en b' comme suit :

$$x = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 + 39 \times 224}}{39}$$
$$x = \frac{-17 \pm \sqrt{9\,025}}{39}$$
$$x = \frac{-17 \pm 95}{39}$$
$$x' = \frac{-17+95}{39} = 2,$$
$$x'' = \frac{-17-95}{39} = -\frac{112}{39}.$$

Les deux valeurs correspondantes de y sont :

$$y' = \frac{-(17+4)}{7} = -3$$

et

$$y'' = \frac{-\left(17 - \frac{224}{39}\right)}{7} = -\frac{439}{273}.$$

Remarque. — La résolution d'un système de deux équations du second degré à deux inconnues conduit généralement à une équation du quatrième degré dont l'étude sort du cadre de cet ouvrage. Nous résoudrons au chapitre suivant quelques **systèmes particuliers** de deux équations du second degré à deux inconnues conduisant seulement à des équations du second degré à une inconnue.

162. — **Équations bicarrées.**

On désigne ainsi les équations du quatrième degré à une inconnue x qui ne renferment ni des termes en x^3 ni des termes en x; leur forme générale est :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

On les résout en les ramenant à des équations du second degré. Posons $x^2 = y$; l'équation peut s'écrire :

$$ay^2 + by + c = 0$$

équation du second degré à une inconnue y que l'on sait résoudre; si $b^2 - 4ac$ est plus grand que zéro, on obtient deux valeurs pour y que nous appellerons y' et y''. Puisque $x^2 = y$, il est nécessaire, pour que l'équation proposée ait des racines, que y soit positif. Si y' et y'' sont tous deux positifs, on obtient pour x quatre valeurs :

$$x = \pm\sqrt{y'}$$
$$x = \pm\sqrt{y''}$$

deux à deux égales en valeur absolue et de signes contraires. Si l'une des deux, y'' par exemple est négative, il n'y a que deux racines :

$$x = \pm\sqrt{y'}.$$

Enfin si les deux valeurs de y sont négatives, il n'y a aucune racine satisfaisant à l'équation proposée.

Application. — Soit proposée l'équation :

$$x^4 + 2x^2 - 3 = 0$$

posons $x^2 = y$, on a successivement :

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$
$$y = 1 \pm \sqrt{1+3}$$
$$y = 1 \pm 2$$

d'où :

$$y' = 3$$
$$y'' = -1$$

y'' étant négatif, l'équation proposée n'admet que

deux solutions :

$$x = \pm\sqrt{3}$$

ou :

$$x' = \sqrt{3}$$
$$x'' = -\sqrt{3}.$$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE XII

Résolution des équations du second degré.

221. — Résoudre les équations incomplètes :

$$2x^2 - 3x = 0$$
$$\frac{5x}{2} + \frac{3x^2}{5} = 0$$
$$ax^2 - a = 0$$
$$4x^2 - 36 = 0$$
$$3x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 - 5 = 0.$$

222. — Résoudre les équations :

$$2x^2 - 3x - 3 = 0$$
$$2x^2 - 5x - 7 = 0$$
$$3x^2 - x - \sqrt{2} = 0$$
$$x^2 - 5x + 1 = 0$$
$$3x^2 - 8x + 4 = 0.$$

223. — Résoudre les équations :

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$
$$2x^2 - 5x - 9 = 0$$
$$x^2 - 5x + 3 = 0$$
$$3x^2 - 8x + 7 = 0$$
$$x^2 + 2x - 35 = 0$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$7x^2 + 5x - 2 = 0$$
$$12x^2 + 17x + 6 = 0.$$

224. — Résoudre les équations :

$$3x^2 + 18x + 27 = 0$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$7x^2 - 2x + 5 = 0$$
$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$
$$3x^2 - x + 1 = 0$$
$$5x^2 - 6x + 1 = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$2x^2 - 6x + 5 = 0$$
$$3 - 4x - 8x^2 = 0.$$

225. — Résoudre les équations :

$$3x^2 - 3x\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2x = 0$$
$$3\sqrt{2}\,x + 2x^2 + 2 = 0$$
$$x^2 - (2 + \sqrt{3})x + \sqrt{12} = 0$$
$$x^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})x - \sqrt{6} = 0$$
$$4x^2 - 2R(\sqrt{5} + 1)x - R^2\sqrt{5} = 0.$$

226. — Résoudre les équations :

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} = 1$$
$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} = 2$$
$$\frac{2x+3}{x-4} = \frac{2x+4}{5x-3}$$
$$\frac{3x-2}{x} = \frac{2x-4}{x+1} + 2$$
$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2} = 1$$
$$\frac{2x+3}{x+4} = \frac{2x+4}{5x-3}.$$

227. — Résoudre les équations :

$$\frac{x-b}{x-a} + \frac{x-a}{x-b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$
$$a + b + x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}$$
$$\frac{(a-x)^3 + (x-b)^3}{(a-x)^2 + (x-b)^2} = a - b.$$

228. — Résoudre les équations :

$$(a+3)x^2 + (2a-3)x + a + 5 = 0$$
$$(a-2)x^2 + 2(a-2)x + 3a + 4 = 0$$

$$(2a+3)x^2 + (a+1)x + 4 = 0$$
$$(a+5)x^2 + (2a-3)x + a - 10 = 0.$$

229. — Résoudre les équations :

$$(a^2 - b^2)x^2 - 2ax^2 + 1 = 0$$
$$x^2 - R\sqrt{5}\,x + R^2 = 0$$
$$bx^2 - (a\sqrt{3} - 2R - bR)x + R(2 - a\sqrt{3}) = 0$$
$$bx^2 - a(b+1)x + a^2 = 0.$$

230. — Résoudre les équations irrationnelles :

$$\sqrt{3x-2} + 2x = 16$$
$$\sqrt{4x-3} - \sqrt{2x+2} = 1$$
$$3\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-2} = 8$$
$$a + b - \sqrt{a^2 - x} = \sqrt{b^2 + x}.$$

231. — Résoudre les équations bicarrées :

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$
$$x^4 - 4x^2 + 4 = 0$$
$$x^4 - 6x^2 + 5 = 0$$
$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$$
$$2x^4 + 5x^2 - 7 = 0$$
$$x^4 - x^2 - 1 = 0$$
$$x^4 + 3x^2 + 1 = 0$$
$$(1+a)x^4 - 3ax^2 + 1 = 0.$$

CHAPITRE XIII

RELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS ET LES RACINES DE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ. APPLICATIONS

163. — **Relations entre les coefficients et les racines.**

Soit l'équation générale du second degré :

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Dans le cas où $b^2 - 4ac$ est plus grand que zéro, cette équation admet deux racines que nous désignerons par x' et x'' et dont les formules sont les suivantes :

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Formons la **somme** $(x' + x'')$ des racines, on obtient :

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a}$$

ou :

$$\boxed{x' + x'' = -\frac{b}{a}}.$$

Ce qui peut se traduire en langage ordinaire par le théorème suivant.

164. — **Théorème 1.**

Lorsqu'une équation du second degré admet des racines, la somme de ces racines est égale au quotient changé de signe du second coefficient par le premier.

Formons le *produit* $x'x''$ des racines, on obtient :

$$x'x'' = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2}$$

ou, en utilisant l'identité remarquable du produit de la somme de deux nombres par leur différence :

$$x'x'' = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$\boxed{x'x'' = \frac{c}{a}}$$

ce qui s'énonce ainsi.

165. — **Théorème 2.**

Lorsqu'une équation du second degré admet des racines, le produit de ces racines est égal au quotient du dernier coefficient par le premier.

166. — **Remarque.**

Si l'on écrit l'équation sous la forme :

$$x^2 + px + q = 0$$

ce qui peut toujours se faire en divisant les deux membres par a, on remarque que la somme des racines est le coefficient de x changé de signe, et le produit des racines le terme indépendant de x.

Ainsi, dans l'équation :

$$6x^2 - 5x + 1 = 0$$

qui admet des racines, la somme de ces racines est $\frac{5}{6}$ et leur produit $\frac{1}{6}$; ce que l'on aperçoit plus rapidement en mettant l'équation proposée sous la forme :

$$x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0.$$

APPLICATIONS

167. — Formation de l'équation du second degré ayant pour racines deux nombres donnés.

Exemple. — Soit à former l'équation ayant pour racines 5 et -2; la somme des racines est 3, et leur produit -10. L'équation à former peut être considérée sous la forme :

$$x^2 + px + q = 0.$$

Or, dans cette équation, la somme des racines est $-p$, et leur produit q; on a donc :

$$-p = 3 \quad \text{et} \quad q = -10$$

p est égal à -3; l'équation demandée est donc :

$$x^2 - 3x - 10 = 0.$$

Autre exemple. — Soit à former l'équation ayant pour racines $\frac{3}{5}$ et $-\frac{1}{3}$; la somme des racines est $\frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$, et leur produit $-\frac{1}{5}$.

On a ainsi dans l'équation $x^2 + px + q = 0$, $-p = \frac{4}{15}$, ou $p = -\frac{4}{15}$ et $q = -\frac{1}{5}$; l'équation demandée s'écrit :

$$x^2 - \frac{4}{15}x - \frac{1}{5} = 0$$

ou en chassant les dénominateurs :

$$15x^2 - 4x - 3 = 0.$$

168. — Règle.

Pour former une équation du second degré admettant pour racines deux nombres donnés, on l'écrit sous la forme : $x^2 + px + q = 0$, dans laquelle le second coefficient p est égal à la somme des racines *changée de signe*, et le dernier coefficient q égal au produit des racines.

169. — Remarque I.

On aurait pu résoudre cette question par une méthode directe qui n'utiliserait pas les relations entre les coefficients et les racines et qui ne supposerait pas, sans la démontrer, la possibilité du problème.

Soit, par exemple, à former une équation du second degré ayant pour racines x' et x''. Nous allons montrer que le problème est possible. Dans ce but, désignons par a un nombre quelconque non nul, et considérons l'équation :

$$a(x - x')(x - x'') = 0.$$

C'est une équation du second degré : d'autre part, pour que le produit des trois facteurs a, $x - x'$, $x - x''$ soit nul, il faut et il suffit que l'un de ces facteurs soit nul ; comme a est différent de zéro, il faut donc que $x - x'$ soit nul, c'est-à-dire que $x = x'$ ou bien que $x - x''$ soit nul, c'est-à-dire que $x = x''$.

L'équation que nous avons formée admet donc pour racines les nombres x' et x'', et n'admet pas d'autres racines (ce que l'on aurait pu prévoir, puisque l'on sait qu'une équation du second degré admet au plus deux racines).

Soit, par exemple, $x' = \frac{1}{2}$, $x'' = \frac{1}{3}$. Prenons $a = 6$, afin de faire disparaître les dénominateurs ; nous formerons l'équation :

$$6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$$

ou, en développant :

$$6x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Soit encore $x' = \frac{1}{2}$, $x'' = -3$; prenons $a = 2$, nous aurons l'équation :

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$2x^2 + 5x - 3 = 0.$$

Reprenons l'équation générale :

$$a(x - x')(x - x'') = 0.$$

Si nous la développons, nous obtenons :

$$ax^2 - a(x' + x'')x + ax'x'' = 0.$$

Les coefficients sont : $a, -a(x' + x'')$, $ax'x''$, d'où la règle suivante qui confirme celle que nous avons déjà énoncée.

170. — Règle.

Pour former une équation du second degré admettant pour racines les nombres x' et x'', on prend arbitrairement le premier coefficient a : le second coefficient est égal au produit de $-a$ par la somme des racines $x' + x''$ et le dernier coefficient est égal au produit de a par le produit des racines $x'x''$.

Dans le cas particulier où $x' = x''$, l'équation que l'on obtient est :

$$a(x - x')^2 = 0$$
$$ax^2 - 2ax'x + ax'^2 = 0,$$

et l'on constate aisément qu'elle admet la racine **double** $x = x'$; cette racine est regardée comme double parce qu'elle annule **doublement** l'expression $a(x - x')^2$, vu qu'elle annule les **deux** facteurs $x - x'$ de cette expression.

171. — Remarque 2.

D'après la règle précédente, le coefficient a étant arbitraire, on peut écrire une infinité d'équations du second degré admettant les mêmes racines. Soient les deux équations :

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0$$

ayant toutes deux pour racines x' et x'', on peut écrire :

$$b = -a(x' + x'')$$
$$c = ax'x''$$

et :

$$b' = -a'(x' + x'')$$
$$c' = a'x'x'',$$

d'où l'on conclut :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

ce qui peut se traduire : **deux équations du second degré ayant les mêmes racines ont leurs coefficients proportionnels.**

Réciproquement, si deux équations ont les coefficients proportionnels, elles ont les mêmes racines.

La possibilité d'écrire rapidement une équation ayant pour racines des nombres donnés permet de résoudre aisément les questions suivantes.

Problème 1. — **Calculer deux nombres connaissant leur somme et leur produit.**

Soit à calculer deux nombres dont la somme est 19 et le produit 70. Si nous désignons par x' et x'' ces deux nombres, on peut écrire :

$$x' + x'' = 19$$
$$x'x'' = 70.$$

On voit d'après la règle du paragraphe précédent que ces deux nombres x' et x'' sont les racines de l'équation du second degré :

$$x^2 - 19x + 70 = 0.$$

Ce que l'on peut aisément vérifier, car les racines de cette équation sont 5 et 14.

D'une manière générale s étant la somme et p le produit donnés, les nombres sont les racines de l'équation :

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Problème 2. — **Calculer deux nombres connaissant leur différence et leur produit.**

On ramène ce problème au précédent de la façon suivante. Soient d la différence et p le produit donnés; désignons par x' et x'' les nombres demandés. On peut écrire :

$$x' - x'' = d$$
$$x'x'' = p$$

choisissons comme inconnue auxiliaire : $y = -x''$. Les équations précédentes peuvent s'écrire :

$$x' + y = d$$
$$-x'y = p$$

ou encore :

$$x'y = -p$$

x' et y sont les racines de l'équation :

$$x^2 - dx - p = 0.$$

Si nous supposons $d > 0$, il conviendra, pour obtenir x'', de changer le signe de la plus petite des racines de l'équation précédente.

Problème 3. — **Calculer deux nombres connaissant leur somme et la somme de leurs carrés.**

Soit à calculer les nombres x' et x'' dont la somme est 9 et la somme de leurs carrés 53. On écrit :

$$(1) \qquad \begin{cases} x' + x'' = 9 \\ x'^2 + x''^2 = 53. \end{cases}$$

Élevons les deux membres de la première de ces équations au carré, on obtient :

$$x'^2 + x''^2 + 2x'x'' = 81.$$

Si de cette dernière équation, on retranche membre à membre la deuxième, on a :

$$2x'x'' = 28$$

ou :

$$x'x'' = 14$$

le système (1), se ramène au suivant :

$$\begin{cases} x' + x'' = 9 \\ x'x'' = 14 \end{cases}$$

résolu dans le *Problème 1*. (Voir page 262).

x' et x'' sont les racines de l'équation :

$$x^2 - 9x + 14 = 0.$$

En résolvant, on obtient les racines :

$$x' = 7; \qquad x'' = 2.$$

Problème 4. — **Calculer deux nombres connaissant leur somme et la somme de leurs cubes.**

Soit s la somme des nombres à calculer x' et x'', soit a^3 la somme de leurs cubes, on a le système :

$$\begin{cases} x' + x'' = s \\ x'^3 + x''^3 = a^3. \end{cases}$$

Élevons au cube les deux membres de la première équation, on obtient :

$$x'^3 + x''^3 + 3x'^2x'' + 3x'x''^2 = s^3$$

ce que l'on peut écrire autrement :

$$x'^3 + x''^3 + 3x'x''(x' + x'') = s^3.$$

De cette dernière équation, retranchons membre à membre la deuxième équation du système, nous obtenons :

$$3x'x''(x' + x'') = s^3 - a^3$$

et si l'on remarque que $x' + x'' = s$, on peut déduire :

$$x'x'' = \frac{s^3 - a^3}{3s}.$$

Le système précédent est donc ramené au système :

$$\begin{cases} x' + x'' = s \\ x'x'' = \dfrac{s^3 - a^3}{3s} \end{cases}$$

dont la résolution se fait par une marche analogue à celle qu'indique le problème 1. x' et x'' sont les racines de l'équation :

$$x^2 - sx + \frac{s^3 - a^3}{3s} = 0.$$

Si l'on a :

$$s = 7; \qquad a^3 = 133$$

on a l'équation :

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

dont les racines sont :

$$x' = 5; \qquad x'' = 2.$$

Nous indiquerons en exercices plusieurs autres problèmes dont la résolution est très rapide grâce à la connaissance des relations entre les coefficients et les racines. On conçoit par exemple que, connaissant *a priori* (c'est-à-dire sans la résoudre), dans une équation, la somme des racines et leur produit, on puisse aussi très rapidement obtenir, sans calculer cependant les racines, la somme des carrés ou la somme des cubes de ces racines [1].

172. — **Signes des racines. — Discussion de l'équation générale.**

Les relations :

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

$$x'x'' = \frac{c}{a}$$

entre les coefficients et les racines de l'équation générale :

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

permettent d'obtenir le **signe des racines** *a priori*, c'est-à-dire sans résoudre l'équation. En effet, si le produit des racines est **négatif**, on peut en conclure que les racines sont de **signes contraires**, l'une est positive et l'autre est négative; si le produit est **positif**, les deux racines sont de **même signe**; elles sont toutes deux positives ou toutes deux négatives suivant que leur somme $-\frac{b}{a}$ est positive ou négative.

1. Plusieurs des problèmes résolus précédemment ayant conduit à des systèmes de deux équations à deux inconnues, on aurait pu pour certains d'entre eux obtenir la solution par la méthode de substitution, l'élève s'y exercera, il se rendra compte que l'application des relations entre les coefficients et les racines est ici très avantageuse.

Mais il ne faut pas oublier, avant de rechercher le signe des racines, de s'assurer d'abord **que ces racines existent**, c'est-à-dire que $b^2 - 4ac$ est positif (ou nul).

173. — **Remarque importante.**

On peut d'ailleurs à ce sujet faire l'importante remarque suivante : dans le cas où $\frac{c}{a}$ est négatif, c et a sont de signes contraires, d'où l'on conclut que $4ac$ est aussi négatif; il en résulte que $b^2 - 4ac$ est forcément positif, puisque b^2 et $-4ac$ sont positifs.

On peut donc affirmer que **toute équation du second degré dont les coefficients des termes extrêmes sont de signes contraires, admet des racines.**

Dans le cas où les racines sont de signes contraires, on est renseigné sur l'ordre de grandeur des valeurs absolues de ces racines par le signe de la somme $-\frac{b}{a}$; si la somme est positive, c'est que la racine positive est la plus grande en valeur absolue. Si l'on désigne par x' la racine positive, on écrit ainsi cette relation entre les valeurs absolues :

$$|x'| > |x''|.$$

Si la somme est négative, c'est la racine négative qui est la plus grande en valeur absolue.

174. — **Résumé de la discussion.**

On peut résumer l'étude précédente dans le tableau suivant :

<table>
<tr><th colspan="4">DISCUSSION DE L'ÉQUATION
$ax^2 + bx + c = 0.$</th></tr>
<tr><td rowspan="6">$a \neq 0$</td><td>$\frac{c}{a} < 0$</td><td colspan="2">2 racines, l'une positive, l'autre négative.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\frac{c}{a} > 0$</td><td rowspan="2">$b^2 - 4ac > 0$</td><td>$-\frac{b}{a} > 0$; 2 racines positives.</td></tr>
<tr><td>$-\frac{b}{a} < 0$; 2 racines négatives.</td></tr>
<tr><td>$b^2 - 4ac = 0$</td><td>1 racine double $x = \frac{-b}{2a}$.</td></tr>
<tr><td>$b^2 - 4ac < 0$</td><td>pas de racines.</td></tr>
<tr><td colspan="3">$c = 0$; 1 racine nulle, 1 racine égale à $\frac{-b}{a}$.</td></tr>
</table>

Applications.

1° *Équations numériques.* — Soit à reconnaître *a priori* la nature et les signes des racines de l'équation :

$$2x^2 - 3x - 5 = 0,$$

les coefficients extrêmes étant de signes contraires, il y a des racines ; le produit $-\frac{5}{2}$ est négatif, l'une des racines est positive, l'autre négative ; la somme $\frac{3}{2}$ est positive, donc la plus grande des racines en

valeur absolue est la racine positive.

Même question pour l'équation :

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

le discriminant $25 - 12 = 13$ est positif, il y a donc deux racines distinctes ; le produit 3 est positif, les racines sont de même signe ; la somme 5 étant positive, les deux racines sont positives.

2° *Équations littérales.* — **Quels sont les signes des racines de l'équation :**

$$(a + 5)x^2 + (2a - 3)x + a - 10 = 0,$$

lorsque a prend toutes les valeurs possibles?

Cherchons tout d'abord pour quelles valeurs de a ces racines existent ; le discriminant est :

$$(2a - 3)^2 - 4(a + 5)(a - 10)$$

ou, après développement et réduction :

$$8a + 209$$

ce discriminant s'annule pour $a = -\frac{209}{8}$; il est positif pour les valeurs de a supérieures à $-\frac{209}{8}$ et négatif pour les valeurs inférieures.

Le produit des racines est $\frac{a - 10}{a + 5}$, le signe de cette fraction change pour les valeurs $a = 10$ et $a = -5$.

La somme des racines est $-\frac{2a - 3}{a + 5}$, son signe change pour les valeurs particulières $a = \frac{3}{2}$ et $a = -5$.

Les nombres $-\frac{209}{8}$, 10, -5, $\frac{3}{2}$ sont appelés **valeurs remarquables de** a ou encore **repères** dans notre discussion. Si nous classons ces repères par ordre de grandeur croissante, on obtient :

$$-\frac{209}{8}, \quad -5, \quad \frac{3}{2}, \quad 10.$$

Pour les valeurs de a inférieures à $-\frac{209}{8}$, il n'y a pas de racines. Il suffit donc d'étudier les signes des racines pour les valeurs de a comprises dans les divers intervalles $-\frac{209}{8}$ et -5 ; -5 et $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{2}$ et 10 ; 10 et $+\infty$.

Pour les valeurs de a comprises dans le premier intervalle de $-\frac{209}{8}$ à -5, il y a deux racines distinctes ; le produit $\frac{a-10}{a+5}$ est positif, puisque ses deux termes sont négatifs, les deux racines sont donc de même signe ; la somme $-\frac{2a-3}{a+5}$ est négative, la fraction $\frac{2a-3}{a+5}$ étant positive puisque ses deux termes sont négatifs, les deux racines sont donc négatives. On procéderait d'une façon analogue pour étudier l'intervalle de -5 à $\frac{3}{2}$; le tableau ci-contre explique suffisamment la discussion. Il convient de remarquer qu'on simplifie beaucoup la question en traçant un trait en regard des repères qui annulent le discriminant, le produit ou la somme et dans les colonnes qui correspondent à ces quan-

tités, si l'on connaît le signe de l'une de ces valeurs dans l'intervalle précédent, il suffit de changer ce signe ou de le conserver selon qu'un trait a été tracé entre ces deux intervalles ou non.

a	DISCRIMINANT — $8a+209 \geqslant 0$	PRODUIT DES RACINES : — $\frac{a-10}{a+5}$	SOMME DES RACINES : — $-\frac{2a-3}{a+5}$	RÉSULTATS
$-\infty$				
	$-$			L'équation n'a pas de racines.
$-\frac{209}{8}$				
	$+$	$+$	$-$	2 racines de même signe, négatives.
-5				
	$+$	$-$	$+$	2 racines de signes contraires. (La plus grande en valeur absolue est la racine positive.)
$\frac{3}{2}$				
	$+$	$-$	$-$	2 racines de signes contraires. (La plus grande en valeur absolue est la racine négative.)
10				
	$+$	$+$	$-$	2 racines de même signe négatives.
$+\infty$				

On pourrait compléter cette discussion en étudiant ce que deviennent les racines pour les valeurs de a égales aux différents repères marqués dans ce tableau. Dans le cas où $a = -\frac{209}{8}$, le discriminant de l'équation proposée est nul; il y a donc une racine double $x = -\frac{2a-3}{2(a+5)}$ ou, en remplaçant a par sa valeur $-\frac{209}{8}$:

$$x = -\frac{221}{378}.$$

Il conviendra de laisser de côté le cas ou $a = -5$, le coefficient de x^2 devenant nul.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE XIII

Relations entre les coefficients et les racines de l'équation du second degré.

232. — Calculer la somme et le produit des racines des équations :

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$7x^2 + 5x - 2 = 0$$
$$12x^2 + 17x + 6 = 0.$$

233. — Même question pour les équations :

$$3x^2 - (3\sqrt{3} + 2)x + 2\sqrt{3} = 0$$
$$x^2 - (2 + \sqrt{3})x + \sqrt{12} = 0$$
$$x^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})x - \sqrt{6} = 0$$
$$4x^2 - 2R(\sqrt{5} + 1)x + R^2\sqrt{5} = 0.$$

234. — Former les équations du second degré ayant pour racines :

$$5 \text{ et } -7 \qquad -2 \text{ et } -3$$
$$\frac{2}{7} \text{ et } -1 \qquad -\frac{3}{4} \text{ et } -\frac{2}{3}.$$

235. — Former les équations ayant pour racines :

$$\sqrt{2} \text{ et } \sqrt{4} \qquad \sqrt{3} \text{ et } \sqrt{4}$$
$$\sqrt{3} \text{ et } -\frac{2}{3} \qquad \sqrt{2} \text{ et } -\sqrt{3}$$
$$-\sqrt{2} \text{ et } -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{R}{2} \text{ et } \frac{R\sqrt{5}}{2}.$$

236. — Former les équations ayant pour racines :

$$3 + 2\sqrt{5} \text{ et } 3 - 2\sqrt{5}$$
$$a \text{ et } \frac{a}{b}$$
$$\frac{R_2}{2}(\sqrt{5} - 1) \text{ et } \frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1)$$
$$\frac{a-b}{a^2 - b^2} \text{ et } \frac{a+b}{a^2 - b^2}$$
$$\frac{a\sqrt{3} - 2R}{2} \text{ et } -R.$$

237. — Calculer deux nombres dont la somme est 26 et le produit 133.

238. — Calculer deux nombres dont la somme est $\frac{3+R}{\sqrt{3}}$ et le produit R^2.

239. — Calculer deux nombres dont la somme est $R\sqrt{5}$ et le produit R^2.

240. — Calculer deux nombres dont la différence est 12 et le produit 160.

241. — Calculer deux nombres dont la différence est R et le produit R^2.

242. — Calculer deux nombres sachant que leur somme est 13 et la différence de leurs carrés 13.

243. — Calculer deux nombres sachant que leur somme est 18 et la somme de leurs carrés 180.

244. — Calculer deux nombres sachant que leur somme est 22 et la somme de leurs cubes 3718.

245. — Calculer deux nombres sachant que leur différence est 3, et la différence de leurs cubes 819.

246. — Calculer deux nombres sachant que leur somme est 49 et leur rapport $\frac{3}{4}$.

247. — Dire *a priori* (c'est-à-dire sans les calculer) la nature et les signes des racines des équations :

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$
$$7x^2 + 5x - 2 = 0$$
$$12x^2 + 17x + 6 = 0$$
$$2x^2 + 3\sqrt{2}\,x + 2 = 0$$
$$x^2 - 2x + b^2 = 0$$
$$9x^2 + 27x + 14 = 0$$
$$x^2 - (2 + \sqrt{3})x + \sqrt{12} = 0$$
$$4x^2 - 2R(\sqrt{5} + 1)x + R^2\sqrt{5} = 0.$$

On prendra soin de vérifier tout d'abord que les équations proposées ont des racines.

248. — Quels sont les signes des racines de l'équation :

$$(a + 3)x^2 + (2a + 3)x + a + 5 = 0,$$

lorsque a prend toutes les valeurs possibles?

On commencera par rechercher pour quelles valeurs de a ces racines existent.

249. — Même question pour l'équation :

$$(a + 5)x^2 + (2a - 3)x + a - 10 = 0.$$

250. — Même question pour l'équation :

$$(a - 2)x^2 + 2(a - 2)x + 3a + 4 = 0.$$

251. — Calculer la somme des carrés et la somme des cubes des racines des équations suivantes sans les résoudre :

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$
$$2x^2 - 5x - 9 = 0$$
$$3x^2 - x - \sqrt{2} = 0$$
$$3x^2 - 8x + 7 = 0.$$

252. — Même question pour les équations :

$$x^2 - (2 + \sqrt{3})x - \sqrt{6} = 0$$
$$bx^2 - a(b + 1)x + a^2 = 0$$
$$(a^2 - b^2)x^2 - 2ax + 1 = 0.$$

CHAPITRE XIV

FORMES REMARQUABLES DU TRINOME : APPLICATIONS. COMPARAISON D'UN NOMBRE DONNÉ AUX RACINES D'UNE ÉQUATION

I. — FORMES REMARQUABLES DU TRINOME DU SECOND DEGRÉ

175. — **Définitions et notations.**

On donne le nom de **trinome du second degré** à l'expression :

$$ax^2 + bx + c$$

les expressions : **premier terme**, etc., ont le même sens que pour l'équation du second degré. On désigne souvent le trinome par y; c'est-à-dire que l'on pose :

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Cette relation dans laquelle a, b, c sont considérés comme des nombres donnés, fait correspondre à chaque valeur de la variable x une valeur de la variable y; lorsque la variable x prend une valeur déterminée, le variable y prend aussi une valeur déterminée. On exprime cette dépendance entre x et y en disant que y est une **fonction** de x.

Aussi désigne-t-on quelquefois le trinome par la notation $F(x)$ (que l'on énonce F de x).

L'avantage principal de cette dernière notation est le suivant. Si l'on pose :

$$F(x) = ax^2 + bx + c,$$

et que l'on remplace dans le trinome x par une autre lettre, ou par un nombre quelconque, le résultat obtenu sera désigné en remplaçant la lettre x dans $F(x)$ par cette lettre ou par ce nombre. Ainsi l'on a :

$$\begin{aligned} F(z) &= az^2 + bz + c \\ F(R) &= aR^2 + bR + c \\ F(10) &= 100a + 10b + c \\ F(-1) &= a - b + c. \end{aligned}$$

Dans l'étude du trinome du second degré, il y a souvent lieu d'introduire les racines de l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

c'est-à-dire les *racines de l'équation obtenue en égalant le trinome à zéro*. Nous dirons, pour abréger, que ces racines sont les *racines du trinome* ou encore les *zéros* du trinome, et nous les désignerons par x' et x''.

Lorsqu'on a :

$$b^2 - 4ac < 0$$

le trinome a deux racines ou deux zéros distincts, si :

$$b^2 - 4ac = 0$$

le trinome a une racine ou un zéro double; enfin si

l'on a :

$$b^2 - 4ac < 0$$

le trinome n'a pas de zéro.

Dans tout ce qui suit, nous supposerons essentiellement que **le coefficient a du premier terme n'est pas nul**, de sorte que les cas précédents sont les seuls qui puissent se présenter.

176. — Formes remarquables du trinome.

Nous donnerons le nom de **formes remarquables du trinome** à des formes particulières que l'on peut donner au trinome et sur lesquelles ses propriétés essentielles sont mises en évidence. Nous obtiendrons une forme remarquable générale, qui donnera trois formes particulières, suivant que le discriminant est négatif, nul ou positif. Nous ne nous appuierons pas sur les résultats obtenus pour l'équation du second degré, de sorte que nous arriverons par une autre voie aux relations entre les coefficients et les racines établies au chapitre précédent.

1° *Forme remarquable générale.* — On a, puisque l'on suppose que a n'est pas nul :

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

c'est-à-dire :

$$(1) \quad ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Telle est la forme remarquable que l'on peut toujours donner au trinome : **le trinome est égal au produit du coefficient a de son premier terme par la somme du carré d'une fonction du premier degré dans** laquelle le coefficient de x est égal à 1, et d'une constante.

Ainsi :

$$7x^2 - 3x + 2 = 7\left[\left(x - \frac{3}{14}\right)^2 - \frac{9-56}{196}\right].$$

2° *Cas où le discriminant est négatif.* ($b^2 - 4ac < 0$). — Supposons que l'on ait :

$$b^2 - 4ac < 0$$

c'est-à-dire :

$$4ac - b^2 > 0,$$

il existe alors un nombre positif m vérifiant la relation :

$$m^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2}$$

et la relation (1) peut s'écrire :

$$(2) \qquad ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + m^2\right].$$

Le trinome est alors égal au produit du coefficient a de son premier terme par la somme de deux carrés.

Il est clair que, dans ce cas, le *trinome ne peut pas s'annuler*, car un carré est toujours positif; la somme de deux nombres positifs ne peut être nulle que s'ils sont nuls tous deux, et ici m^2 ne saurait être nul.

3° *Cas où le discriminant est nul.* ($b^2 - 4ac = 0$). — Lorsqu'on a :

$$b^2 - 4ac = 0,$$

la relation (1) devient :

$$(3) \qquad ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

ou, si l'on pose :

$$-\frac{b}{2a} = x',$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')^2.$$

Remarquons que x' est précisément la solution double du trinome : **Le trinome est égal au produit par a du carré d'un binome du premier degré en x : $x - x'$, x' étant la racine double du trinome.**

Il y a lieu de remarquer que le trinome ne peut s'annuler que pour la seule valeur $x = x' = -\frac{b}{2a}$, car un carré est toujours positif.

4° *Cas où le discriminant est positif.* ($b^2 - 4ac > 0$). — La formule (1) s'écrit alors :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right]$$

$b^2 - 4ac$ étant un nombre positif, il y a toujours en effet un nombre positif dont le carré est égal à $b^2 - 4ac$; c'est sa racine carrée que l'on désigne par $\sqrt{b^2 - 4ac}$.

Nous avons entre crochets la différence de deux carrés; nous pouvons les décomposer en un produit de deux facteurs par la formule :

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B).$$

Nous obtenons ainsi :

$$(4) \qquad ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right).$$

Si l'on pose :

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

cette formule devient :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'').$$

Remarquons que précisément x' et x'' sont les racines du trinome, on peut donc dire : **Le trinome est égal au produit par a de deux facteurs du premier degré en x : $x - x'$ et $x - x''$; x' et x'' étant les deux racines du trinome.**

Il n'est pas inutile de réunir dans un tableau les diverses formes remarquables que nous avons obtenues (page 281).

Remarque. — On déduirait immédiatement des résultats de ce tableau, la résolution et la discussion de l'équation du second degré. On voit, par exemple, que si l'on a : $b^2 - 4ac > 0$, le trinome $ax^2 + bx + c$ n'est jamais nul; l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de racines.

Si $b^2 - 4ac = 0$, le trinome ne peut être nul que pour une seule valeur de x, $x = -\frac{b}{2a}$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a qu'une racine, etc. Nous engageons l'élève à étudier avec soin tous ces cas et à retrouver ainsi par une autre méthode les résultats obtenus au chapitre XII.

177. — Signe du trinome pour des valeurs quelconques de x de $-\infty$ à $+\infty$.

Il est souvent utile de connaître, sans être obligé

de faire aucun calcul, le signe que prend le trinome du second degré pour une valeur quelconque de x. On y parvient aisément par la considération des formes remarquables.

TABLEAU DES FORMES REMARQUABLES DU TRINOME
$ax^2 + bx + c.$

1° Forme générale.	(1) $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$
2° $b^2 - 4ac < 0$	(2) $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + m^2\right].$ en posant : $m^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2}.$
3° $b^2 - 4ac = 0$	(3) $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$ (3)′ $a(x - x')^2$ en posant : $x' = -\frac{b}{2a}$ x' est la racine double du trinome.
4° $b^2 - 4ac > 0$	(4) $a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right).$ (4)′ $a(x - x')(x - x'')$ en posant : $x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ x' et x'' sont les racines du trinome.

1° $b^2 - 4ac < 0$. Dans le cas où le trinome n'a pas de zéros, il se met sous la forme :

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+m^2\right].$$

Quel que soit x, la quantité entre crochets est positive; le trinome est donc **du signe de** a, c'est-à-dire du signe de son premier terme.

2° $b^2 - 4ac = 0$. Dans le cas du zéro double, on voit immédiatement sur la forme

$$a(x-x')^2$$

que le trinome est du **signe de** a, à moins qu'il ne soit nul, ce qui a lieu pour $x = x'$.

3° $b^2 - 4ac > 0$. Supposons enfin qu'il y ait deux zéros distincts x' et x''; nous avons la forme remarquable

$$(4)' \qquad a(x-x')(x-x'').$$

Supposons pour fixer les idées :

$$x'' < x'.$$

On peut alors faire trois hypothèses relativement à x : x est inférieur à x'', ou bien compris entre x'' et x', ou bien supérieur à x'.

1° Si l'on a :

$$x < x'',$$

on a, *à fortiori* :

$$x < x',$$

les facteurs $x - x'$, $x - x''$ sont négatifs tous deux, leur produit est donc positif et le produit $(4)'$ **est du signe de** a.

2° Si l'on a :

$$x'' < x < x'$$

le facteur $x - x'$ est négatif, et le facteur $x - x''$

est positif, le produit $(4)'$ est alors **de signe contraire à celui de** a.

3° Enfin si x est supérieur à x', les facteurs $x - x'$ et $x - x''$ sont tous deux positifs et le produit $(4)'$ est encore *du signe de a*.

Il résulte de cette étude des divers cas possibles le théorème fondamental suivant :

Théorème.

Le trinome du second degré est du même signe que son premier terme, sauf dans un cas unique, à savoir lorsque, le trinome ayant deux zéros distincts x' et x'', la valeur donnée à x est comprise entre x' et x''.

II. — APPLICATIONS

178. — **Mettre le trinome sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.**

Nous ne pouvons résoudre la question que si le trinome admet des racines, c'est-à-dire dans le cas où $b^2 - 4ac \geqslant 0$. Il y aura donc lieu de vérifier tout d'abord que le discriminant n'est pas négatif. Il suffira d'utiliser ensuite les formes remarquables :

$$a(x-x')^2$$
$$a(x-x')(x-x''),$$

selon que $b^2 - 4ac$ est nul ou supérieur à zéro, en remarquant que x' est la racine double du trinome et que x' et x'' sont les deux racines du trinome.

Exemple 1. — Soit le trinome :

$$3x^2 - 6x + 3$$

on peut l'écrire sous la forme :

$$3(x-1)^2$$

parce que le trinome a une racine double égale à 1.

On peut aisément vérifier que les deux formes du trinome sont identiques.

Exemple 2. — Soit le trinome :

$$7x^2+5x-2.$$

Il admet deux racines distinctes $\frac{2}{7}$ et -1, on peut donc l'écrire sous la forme :

$$7\left(x-\frac{2}{7}\right)\left(x+1\right).$$

On peut aisément vérifier l'identité de ces deux formes du trinome.

Exemple 3. — Soit le trinome :

$$-12x^2-17x-6=0.$$

Il admet deux racines distinctes : $-\frac{3}{4}$ et $-\frac{2}{3}$

On peut l'écrire sous la forme :

$$-12\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right).$$

179. — **Résolution des inégalités du second degré.**

Le théorème précédent permet de résoudre aisément l'inégalité du second degré, c'est-à-dire toute inégalité de la forme :

$$ax^2+bx+c>0$$

ou :

$$ax^2+bx+c<0.$$

On peut toujours ramener une inégalité du second degré à l'une de ces deux formes de manière que le coefficient a du premier terme soit *positif*. Il suffit de faire passer tous les termes dans le premier membre, et, au cas où le coefficient de x^2 serait négatif, changer tous les signes, en ayant soin de changer le sens de l'inégalité comme il a été indiqué au chapitre X.

Ainsi l'inégalité :

$$2x-3x^2+5<0$$

s'écrira :

$$3x^2-2x-5>0$$

l'inégalité :

$$7x+2x^2>4x+3+5x^2$$

s'écrira successivement :

$$-3x^2+3x-3>0$$
$$3x^2-3x+3<0$$
$$x^2-x+1<0.$$

Nous supposerons donc essentiellement dans ce qui suit que le coefficient a du premier terme est *positif*.

1° ***Résolution de l'inégalité.***

$$ax^2+bx+c>0.$$

Étant donnée une telle inégalité, nous appellerons **équation correspondante** l'équation :

$$ax^2+bx+c=0,$$

que l'on obtient en remplaçant le signe de l'inégalité $>$ par le signe $=$.

Nous distinguerons trois cas :

1° L'équation correspondante n'a pas de racines

($b^2 - 4ac < 0$). Le trinome est toujours du signe de a, donc toujours positif; l'inégalité proposée est **toujours vérifiée.**

2° L'équation correspondante a une racine double ($b^2 - 4ac = 0$). La conclusion est la même que dans le cas précédent, sauf que, pour la valeur de x égale à la racine, l'inégalité se transforme en égalité.

3° L'équation correspondante a deux racines distinctes ($b^2 - 4ac > 0$), que nous désignerons par x' et x'' en supposant $x'' < x'$.

Dans ce cas, le trinome est positif pour les valeurs de x **extérieures à l'intervalle des racines**, il faut donc que l'on ait *ou bien :*

$$x < x''$$

ou bien :

$$x > x'.$$

2° *Résolution de l'inégalité.*

$$ax^2 + bx + c < 0.$$

On obtient évidemment pour cette inégalité des résultats exactement contraires aux résultats du paragraphe précédent :

1° Si l'équation correspondante n'a pas de racines, le trinome est toujours positif (a étant positif), **l'inégalité n'est jamais vérifiée.**

2° Si l'équation a une racine double, les résultats sont les mêmes que dans le cas précédent, sauf que pour la valeur de x égale à cette racine l'inégalité se transforme en égalité.

3° Enfin, si l'équation correspondante a deux racines distinctes, l'inégalité n'est vérifiée que pour les valeurs de x **comprises dans l'intervalle des racines,** il faut que l'on ait :

$$x'' < x < x'.$$

Remarque. — Dans les deux cas où l'équation correspondante a deux racines distinctes, il est essentiel de remarquer que l'inégalité du second degré est remplacée tantôt par une double inégalité avec alternative, *ou bien :*

$$x < x''$$

ou bien :

$$x > x'$$

tantôt par deux inégalités **simultanées :**

$$x'' < x < x'.$$

On ne doit pas confondre ces deux cas. Par exemple, si $x'' = 1$ et $x' = 2$, dans le premier cas il faut que x soit, ou bien inférieur à 1, ou bien supérieur à 2 (il serait absurde de dire que x doit être *à la fois* inférieur à 1 et supérieur à 2), tandis que, dans le second cas, il faut que x soit compris entre 1 et 2, c'est-à-dire *à la fois* supérieur à 1 et inférieur à 2.

On peut résumer dans le tableau (page 288) la résolution des inégalités du second degré.

180. — Applications numériques.

Exemple 1. — Soit l'inégalité :

$$7x^2 + 5x - 2 > 0.$$

L'équation correspondante admet deux racines distinctes :

$$x' = \frac{2}{7} \quad \text{et} \quad x'' = -1.$$

RÉSOLUTION DES INÉGALITÉS DU SECOND DEGRÉ

(a est supposé essentiellement positif).

	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$b^2 - 4ac < 0$	Inégalité toujours vérifiée.	Inégalité jamais vérifiée.
$b^2 - 4ac = 0$	*Id.*, sauf qu'elle se transforme en égalité pour $x = \frac{-b}{2a}$.	*Id.*, sauf qu'elle se transforme en égalité pour $x = \frac{-b}{2a}$.
$b^2 - 4ac > 0$	Inégalité vérifiée si l'on a *ou bien* : $x < x''$ *ou bien* : $x > x'$ x' et x'' sont les racines de l'équation correspondante $x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et l'on a : $x'' < x'$.	Inégalité vérifiée si l'on a *à la fois :* $x'' < x < x'$ x' et x'' sont les racines de l'équation correspondante $x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et l'on a : $x'' < x'$.

Les solutions de l'inégalité sont tous les nombres inférieurs à -1, et tous les nombres supérieurs à $\frac{2}{7}$; il faut que l'on ait, *ou bien* :

$$x < -1$$

ou bien :

$$x > \frac{2}{7}.$$

Ainsi -3 satisfait à l'inégalité; les nombres 1, 4, etc. aussi; au contraire $\frac{1}{3}$ ne convient pas, ce que l'on vérifie aisément.

Exemple 2. — Soit l'inégalité :

$$2x^2 - 3x + 5 < 0$$

l'équation correspondante n'admet pas de racines, l'inégalité n'est jamais vérifiée, quel que soit x.

Exemple 3. — Soit l'inégalité :

$$x^2 + 2x - 35 < 0$$

L'équation correspondante admet deux racines distinctes : $x' = 5$, $x'' = -7$, l'inégalité est vérifiée par tous les nombres compris entre -7 et 5. Il faut que l'on ait :

$$x'' < x < x'.$$

Ainsi -3, 2 vérifient l'inégalité; au contraire -10, 6, ne la vérifient pas.

181. — Comparaison d'un nombre donné aux racines d'une équation du second degré.

On a souvent, dans la discussion des problèmes, à comparer un nombre donné aux racines d'une équation du second degré sans que cette équation ait été résolue. Cette question peut être regardée comme inverse de celle que nous avons étudiée au nº 177 (Voir p. 280).

Soit, en effet, à comparer le nombre m aux racines de l'équation du second degré :

$$F(x) = ax^2 + bx + c = 0.$$

Si nous substituons m à x dans cette équation, on a :

$$F(m) = am^2 + bm + c$$

le nombre $F(m)$ est ce qu'on appelle **le résultat de la substitution du nombre m dans le premier membre de l'équation proposée.**

Si nous supposons que a est essentiellement positif (ce que l'on peut toujours obtenir en appliquant les principes généraux de transformation des équations en équations équivalentes), nous distinguerons deux cas suivant que ce résultat $F(m)$ est négatif ou positif, c'est-à-dire de signe contraire à celui de a, ou de même signe.

1^er^ CAS. — $F(m)$ **est négatif.** Il suffit de se reporter au théorème de la page 283 pour constater que **ce cas ne peut se présenter que lorsque l'équation proposée a des racines et que m est compris entre ces racines :** car dans tous les autres cas, le trinome prend le signe de son premier terme, ici le signe positif. On a donc le très important théorème suivant.

Théorème.

Lorsque le résultat de la substitution d'un certain nombre m dans le premier membre d'une équation du second degré est négatif (le coefficient a du premier terme étant supposé essentiellement positif), on peut affirmer deux faits :

1° l'équation a des racines distinctes;

2° le nombre m est compris entre ces racines.

2^e^ CAS. — $F(m)$ **est positif.**

Plusieurs hypothèses sont alors possibles : l'équation proposée peut ne pas avoir de racines, ou avoir une racine double différente de m, ou avoir deux racines x' et x''.

Il conviendra donc dans ce cas de former tout d'abord le discriminant pour vérifier que l'équation a des racines.

Si l'équation admet une racine double $x' = \frac{-b}{2a}$, il suffira de calculer $\frac{-b}{2a}$ pour voir l'ordre de grandeur de m par rapport à cette racine.

Si l'équation a deux racines distinctes x' et x'' (x' étant $> x''$), le théorème de la page 283 ne permet d'affirmer qu'un fait, c'est que m est **extérieur à l'intervalle des racines,** c'est-à-dire inférieur à la plus petite x'', ou supérieur à la plus grande x'. Voici comment on distingue entre ces deux alternatives : on applique cette propriété que **la demi-somme de deux nombres est comprise entre ces nombres.**

Ainsi :

$$x'' < \frac{x' + x''}{2} < x'$$

or :

$$\frac{x' + x''}{2} = \frac{-b}{2a}.$$

Tout nombre inférieur à x'' est aussi inférieur à $\frac{-b}{2a}$; tout nombre supérieur à x' est aussi supérieur à $\frac{-b}{2a}$. Donc, lorsque le résultat de la substitution de m est positif et que l'équation a des racines, il y a lieu, pour élucider la position de m par rapport à ces racines, *de comparer m à la demi-somme* de ces racines $-\frac{b}{2a}$. Si m est inférieur à la demi-somme, on peut affirmer que m est inférieur à la plus petite racine, et si m est supérieur à la demi-somme, on peut affirmer que m est supérieur à la plus grande racine.

Nous pouvons résumer la discussion précédente dans le tableau suivant, où nous laissons de côté le cas dans lequel $F(m) = 0$, car m est alors racine et l'étude de l'équation est aisée.

COMPARAISON D'UN NOMBRE m AUX RACINES DE L'ÉQUATION

$$F(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

où l'on suppose essentiellement $a > 0$

HYPOTHÈSES			CONCLUSIONS
$F(m) < 0$			L'équation a des racines, et m est compris entre ces racines : $x' < m < x''$.
$F(m) > 0$	$b^2 - 4ac < 0$		L'équation n'a pas de racines.
	$b^2 - 4ac = 0$		L'équation a une racine double x', et l'on a : $m \neq x'$.
	$b^2 - 4ac > 0$	$m < -\frac{b}{2a}$	L'équation a deux racines x' et x'', et l'on a : $m < x'' < x'$.
		$m > -\frac{b}{2a}$	L'équation a deux racines x' et x'' et l'on a : $x'' < x' < m$.

182. — **Applications numériques.**

Soit à comparer le nombre 2 aux racines de l'équation :

$$F(x) = x^2 - x - 6 = 0$$

on a :

$$F(2) = 4 - 2 - 6 = -4$$

$F(2)$ est négatif, il y a donc des racines et 2 est compris entre ces racines :

$$x'' < 2 < x'.$$

Soit à comparer -2 aux racines de l'équation :

$$7x^2 + 5x - 2 = 0$$

formons $F(2)$, on obtient :

$$F(-2) = 28 - 10 - 2 = 16.$$

$F(2)$ est positif, l'équation a des racines puisque le terme indépendant de x est négatif. -2 est extérieur à l'intervalle des racines; leur demi-somme est $\frac{-5}{14}$; -2 est inférieur à la demi-somme des racines, il est donc inférieur à la plus petite :

$$-2 < x'' < x'.$$

On peut avoir à comparer un nombre littéral aux racines d'une équation littérale; la question se résout par une marche analogue à la précédente, l'élève rencontrera de ces exercices dans la discussion des problèmes proposés au chapitre suivant.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE XIV

Formes remarquables du trinome. Applications, inégalités. Comparaison d'un nombre donné aux racines d'une équation.

253. — Mettre sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré les trinomes suivants

$$x^2 - 5x + 3$$
$$3x^2 - 8x + 7$$
$$2x^2 - 3x - 5$$
$$3x^2 - x - \sqrt{2}.$$

254. — Même question pour les trinomes :

$$12x^2 + 17x + 6$$
$$3x^2 - (3\sqrt{3} + 2)x + 2\sqrt{3}$$
$$2x^2 + 3\sqrt{2}\,x + 2$$
$$4x^2 - 2R(\sqrt{5} + 1)x - R^2\sqrt{5}.$$

255. — Résoudre les inégalités suivantes :

$$x^2 - 5x + 3 > 0$$
$$3x^2 - 8x + 7 < 0$$
$$2x^2 - 3x - 5 < 0$$
$$3x^2 - x - \sqrt{2} > 0.$$

256. — Résoudre les inégalités :

$$x^2 - 2ax - b(2a - b) < 0$$
$$(a^2 - b^2)x^2 - 2ax^2 + 1 > 0$$
$$bx^2 - a(b + 1)x + a^2 > 0.$$

257. — Discuter l'existence et les signes des racines des équations :

$$(m + 3)x^2 + 2(2m + 1)x + m + 5 = 0$$
$$(a - 2)x^2 + 2(a - 2)x + 3a + 4 = 0$$
$$(2a + 3)x^2 + (a + 1)x + 4 = 0$$
$$(a + 5)x^2 + (2a - 3)x + a - 10 = 0.$$

258. — Simplifier les fractions

$$\frac{x^2 + 2x - 35}{3x^2 - 16x + 5}$$
$$\frac{7x^2 + 2x - 5}{7x^2 + 5x - 2}$$
$$\frac{2x^2 + 3\sqrt{2}\,x + 2}{x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}}$$

On met chacun des trinomes sous forme d'un produit de facteurs du premier degré et l'on supprime s'il y a lieu les facteurs communs aux deux termes de la fraction.

259. — Comparer les nombres $-10, -7, -5, 2, 7$ aux racines de l'équation :

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

sans la résoudre.

260. — Comparer les nombres $-3, -1, 0, 1$ aux racines de l'équation :

$$7x^2 + 5x - 2 = 0$$

sans la résoudre.

261. — Comparer -1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ aux racines de l'équation :

$$3x^2 - (3\sqrt{3} + 2)x + 2\sqrt{3} = 0$$

sans la résoudre

262. — Comparer le nombre R aux racines de l'équation :

$$4x^2 - 2R(\sqrt{5} + 1)x - R^2\sqrt{5} = 0$$

sans la résoudre.

263. — Comparer le nombre $\frac{R}{2}$ aux racines de l'équation :

$$x^2 - R\sqrt{5}\,x + R^2 = 0$$

sans la résoudre.

264. — Comparer $\frac{a}{b^2}$ aux racines de l'équation :

$$bx^2 - a(b + 1)x + a^2 = 0.$$

CHAPITRE XV

PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ

183. **Définition.**

On dit qu'un problème est un **problème du second degré** de lorsque sa résolution peut être obtenue par la résolution d'équations du second degré à une inconnue, précédée ou suivie de la résolution de systèmes d'équations du *premier degré*. Nous ne considérons ici que les problèmes pour lesquels il suffira de résoudre *une seule* équation du second degré à une inconnue et, le plus souvent même, il n'y aura pas de système auxiliaire du premier degré.

A propos de cette définition, on pourrait répéter les remarques que nous avons faites sur la définition des problèmes du premier degré.

184. — **Mise en équation. Discussion.**

Au sujet de la mise en équation, nous n'avons rien à ajouter à ce que nous avons dit pour les problèmes du premier degré; mais quelques remarques nouvelles doivent être faites pour la discussion.

Trois circonstances, en effet, se présentent pour le second degré qui ne se présentaient jamais pour le premier :

1° *il peut ne pas y avoir de racines;*

2° il y a fréquemment *deux racines;* l'une peut convenir au problème et non pas l'autre; il peut arriver que ces deux racines donnent deux solutions différentes du problème et il peut arriver aussi que ces racines, quoique différentes, conduisent à la même solution du problème (voir page 299, Problèmes 1, 2 et 3);

3° enfin, il peut y avoir *une racine double;* nous verrons (Problème 4) quelle grande importance peut avoir cette circonstance dans la discussion.

Dans la discussion des problèmes du premier degré, il pouvait arriver que la solution disparaisse en devenant infinie; c'est ce qui se produit lorsque, dans l'équation :

$$ax + b = 0,$$

le coefficient a devient nul. De même, si dans l'équation du second degré :

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

le coefficient a devient nul sans que b le soit, l'équation *s'abaisse* au premier degré et n'admet plus que la racine $\frac{-c}{b}$; qu'est devenue l'autre racine? Comme la somme des racines $\frac{-b}{a}$ est devenue infinie, on peut présumer que la racine qui a disparu est devenue infinie, et c'est ce que confirmerait une étude plus approfondie. De même si les deux coefficients a et b sont nuls, sans que c le soit, l'équation n'est vérifiée pour aucune valeur finie de x;

elle a deux racines infinies (ou une racine double infinie, comme l'on veut). Enfin si a, b, c sont nuls tous les trois, l'équation est vérifiée, quel que soit x; elle est indéterminée. Nous avons tenu à indiquer ces résultats, mais il n'y a pas lieu d'en donner ici la démonstration ni de les étudier plus complètement.

Très souvent, surtout dans les problèmes de géométrie, la discussion de l'équation du second degré comprend trois parties :

1° Étude des conditions d'existence des racines ou **conditions de réalité**. (Quelles relations doivent présenter les données littérales pour que le réalisant ne soit pas négatif?)

2° Étude des **conditions de signes** des racines : il peut être nécessaire que la grandeur cherchée soit positive; elle peut, au contraire, dans certains cas, être portée dans deux directions et la valeur négative être acceptable; l'examen du produit des racines et de leur somme permettra de traiter cette partie de la discussion.

3° Étude des **conditions de grandeur** : l'inconnue dans certains problèmes doit être inférieure ou supérieure à des grandeurs données : par exemple, la flèche d'une corde étant l'inconnue, la racine obtenue ne devra pas être supérieure au diamètre du cercle, etc., la comparaison *a priori* d'un nombre aux racines d'une équation permettra de résoudre cette dernière question.

Nous n'indiquons pas les conditions particulières à chaque problème (condition pour un chiffre d'être entier et inférieur à 10, condition pour un salaire d'être positif, etc.); il conviendra de les rechercher avec soin au début de la discussion.

185. Exemples simples de problèmes du second degré.

Problème 1. — **Un rectangle a des côtés égaux respectivement à 4^m et à 7^m. De combien doit-on augmenter l'un des côtés pour que, en diminuant en même temps l'autre côté de la même longueur, la surface devienne 24 mètres carrés?**

Si l'on désigne par x la longueur cherchée, exprimée en mètres, les côtés deviendront respectivement $4+x$ et $7-x$; si x est positif, on aura augmenté le côté égal primitivement à 4 et diminué l'autre; si x est négatif, ce sera le contraire, mais en tout cas les conditions de l'énoncé sont satisfaites. La surface d'un rectangle exprimée en mètres carrés est égale au produit des côtés exprimés en mètres; on doit donc avoir :

$$(4+x)(7-x)=24,$$

c'est-à-dire :

$$x^2-3x-4=0,$$

d'où l'on tire :

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2}.$$

On a les deux racines :

$$x'=\frac{8}{2}=4$$

$$x''=\frac{-2}{2}=-1.$$

La première donne pour côtés $4+4$ et $7-4$, c'est-à-dire 8 et 3; la seconde donne $4-1$ et $7+1$, c'est-à-dire 3 et 8. On a donc deux solutions du problème proposé, mais ces solutions conduisent à deux rectangles égaux, dont les côtés sont simplement permutés. Cela tient à ce que le problème proposé revient à ceci : puisque l'on diminue l'un des côtés, et qu'on augmente l'autre de la même longueur, leur somme reste constante et égale à 11 ; il s'agit donc de trouver un rectangle connaissant la surface et la moitié du périmètre ; nous allons résoudre ce problème et voir qu'il y a un seul rectangle répondant à la question.

Problème 2. — **Quels sont les côtés d'un rectangle dont la surface est 30 mètres carrés et le périmètre 22m?**

Désignons par x' et x'' ces côtés, exprimés en mètres ; le périmètre est $2x' + 2x''$ et la surface $x'x''$; on a donc :

$$x' + x'' = 11$$
$$x'x'' = 30.$$

Il s'agit donc de trouver deux nombres x' et x'' connaissant leur somme et leur produit. Pour cela, nous remarquerons que nous connaissons les coefficients de l'équation du second degré qui admet pour racines x' et x'' ; cette équation est :

$$x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = 0,$$

c'est-à-dire :

$$x^2 - 11x + 30 = 0.$$

Nous pouvons la résoudre, ce qui donne :

$$x = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - 30} = \frac{11}{2} \pm \frac{1}{2},$$

les deux racines sont 5 et 6 ; on peut donc prendre, ou bien :

$$x' = 5$$
$$x'' = 6$$

ou bien :

$$x' = 6$$
$$x'' = 5.$$

On a deux solutions, mais à ces deux solutions correspondent deux rectangles égaux ; leurs côtés seuls sont intervertis.

Problème 3. — **Trouver deux nombres dont la différence soit 3 et le produit 40.**

Nous allons ramener le problème au précédent ; dans ce but, nous remarquerons que la différence de deux nombres est égale à la somme du premier et d'un nombre opposé au second ; nous sommes ainsi conduits à désigner le premier nombre par x' et le second par $-x''$; leur différence est alors $x' + x''$ et leur produit est $-x'x''$; on a ainsi les deux équations :

$$x' + x'' = 3$$
$$x'x'' = -40.$$

Donc x' et x'' sont les racines de l'équation :

$$x^2 - 3x - 40 = 0,$$

d'où l'on tire :

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 40} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{13}{2}.$$

Les deux racines sont 8 et -5 ; on peut prendre :

$$x' = 8$$
$$x'' = -5,$$

donc les deux nombres x' et $-x''$ sont 8 et 5. On peut prendre aussi :

$$x' = -5$$
$$x'' = +8,$$

donc les deux nombres x' et $-x''$ sont -5 et -8. On a ainsi deux solutions à la question posée.

Problème 4. — **Construire un rectangle, sachant que la somme de sa base et de sa hauteur est 2^m et que sa surface est équivalente à celle d'un carré de côté d. Les longueurs m et d sont supposées mesurées avec la même unité.**

Désignons par x' et x'' les côtés du rectangle, mesurés avec l'unité choisie ; on aura :

$$x' + x'' = 2m$$
$$x'x'' = d^2,$$

de sorte que x et x'' sont les racines de l'équation :

$$x^2 - 2mx + d^2 = 0,$$

d'où l'on tire :

$$x = m \pm \sqrt{m^2 - d^2}.$$

Discussion. — Pour que la formule soit acceptable, il est nécessaire que l'on ait $m^2 - d^2 \geqq 0$, c'est-à-dire $m^2 \geqq d^2$. Comme les nombres m et d sont positifs, cette condition équivaut à $m \geqq d$, car le carré d'un nombre positif est d'autant plus grand que ce nombre lui-même est plus grand. Le problème proposé n'est donc possible que si la somme $2m$ de la base et de la hauteur du rectangle cherché est supérieure à la somme $2d$ de deux côtés du carré; en d'autres termes, si le périmètre $4m$ du rectangle cherché est supérieur au périmètre $4d$ du carré donné.

Nous pouvons exprimer cette condition sous la forme suivante : *pour qu'il soit possible de construire un rectangle de périmètre donné équivalent à un carré donné, il faut et il suffit que le périmètre donné soit supérieur au périmètre du carré.*

Dans le cas où le périmètre donné pour le rectangle est *égal* au périmètre du carré, on trouve $x' = x'' = d$, c'est-à-dire qu'une solution est fournie par le carré lui-même, ce que l'on pouvait prévoir, et que c'est *la seule*. L'équation du second degré a *une racine double;* on peut dire qu'à cette racine correspond *une solution double;* en effet, lorsque m est supérieur à d, nous pouvons dire qu'il y a deux rectangles répondant à la question ; l'un de base x' et de hauteur x'', l'autre de base x'' et de hauteur x' (ces deux rectangles sont d'ailleurs égaux) ; lorsque x devient égal à x'', chacun de ces rectangles devient un carré, qui apparaît ainsi comme *solution double.*

Cette solution double a une propriété très importante, qui appartient très fréquemment aux solutions doubles : elle fait connaître le rectangle dont le périmètre est le plus petit parmi tous les rectangles de même surface. Il résulte en effet de la discussion précédente que, la surface d^2 étant donnée, le périmètre $4m$ ne peut pas être inférieur à $4d$; car si $m < d$, il n'y a pas de solution au problème posé, *la plus petite valeur de $4m$ est donc $4d$;* c'est le périmètre du carré.

On peut se placer à un autre point de vue, en regardant m comme fixe et d comme variable ; alors d doit être inférieur ou au plus égal à m; *sa plus grande valeur est m;* parmi tous les rectangles de même périmètre $4m$, celui dont la surface est la plus grande est le carré de côté m.

Ainsi, si l'on dispose d'un clôture en fil de fer d'une certaine longueur et que l'on veuille s'en servir pour borner un terrain rectangulaire *aussi grand que possible*, on devra donner à ce terrain la forme d'un carré.

186. — Cas où les propriétés du trinome interviennent dans la discussion.

Problème 5. — **Étant donné un demi-cercle (fig. 19) de diamètre $AB = 2R$, déterminer sur ce demi-cercle un point P tel que si on projette ce point P en M sur le diamètre AB, on ait :**

$$AM + PM = l$$

l étant une longueur donnée.

Désignons par x la distance inconnue AM. Si le point M était déterminé, il suffirait d'élever en M

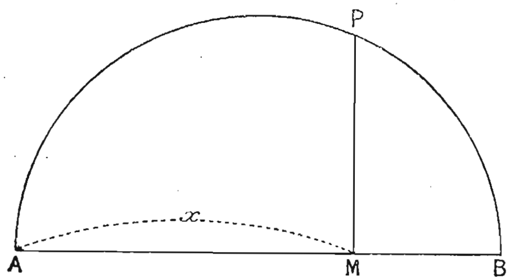


Fig. 19.

une perpendiculaire au diamètre AB pour déterminer par intersection avec le demi-cercle le point P demandé. Tout le problème revient donc à calculer x.

Dans la relation :

$$AM + PM = l.$$

calculons AM et PM en fonction de x et des données R et l : $AM = x$; la demi-corde PM est

moyenne proportionnelle entre les deux segments MA et MB du diamètre AB qui lui est perpendiculaire, donc :

$$\overline{PM}^2 = x(2R - x)$$
$$PM = \sqrt{x(2R - x)}.$$

L'équation du problème est donc :

$$x + \sqrt{x(2R - x)} = l.$$

Résolvons cette équation irrationnelle, on obtient successivement :

$$\sqrt{x(2R - x)} = l - x$$
$$x(2R - x) = l^2 + x^2 - 2lx$$

et en effectuant et simplifiant :

$$(1) \qquad 2x^2 - 2(R + l)x + l^2 = 0.$$

Telle est l'équation qui donne les solutions du problème.

Discussion. Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit :

1° Que l'équation du problème ait des racines,

2° Que ces racines soient positives,

3° Qu'elles soient inférieures à 2R.

Mais l'équation (1) a été obtenue par une élévation au carré. Elle contient avec les solutions du problème proposé, les solutions correspondant à l'équation $-\sqrt{x(2R - x)} = l - x$.

Les solutions qui conviendront au problème donné doivent satisfaire à la condition $x < l$. Les valeurs de $x > l$ correspondent à un problème voisin (solutions étrangères).

Mais si x est réel, positif et inférieur à l, $\sqrt{x(2R - x)}$ qui est égal à $l - x$ est réel, donc $2R - x$ est positif, d'où $x < 2R$ (condition 3).

En résumé, pour que les valeurs de x soient acceptables, il faut et il suffit :

1° *Que l'équation* (1) *ait des racines*,
2° *Que ces racines soient positives*,
3° *Qu'elles soient inférieures à* l.

1° *Réalité*. La condition de réalité est la suivante

$$(R+l)^2-2l^2>0$$

ou

$$l^2-2Rl-R^2<0$$

Le premier membre de cette inégalité peut être considéré comme un trinome du second degré en l. Ce trinome aurait deux racines distinctes : $R(1-\sqrt{2})$; $R(1+\sqrt{2})$.

L'inégalité ne peut être vérifiée que pour les valeurs de l comprises entre les racines, il faut donc que l'on ait :

$$R(1-\sqrt{2})<l<R(1+\sqrt{2})$$

Mais l étant une largeur donnée ne peut être un nombre négatif. Or, $R(1-\sqrt{2})$ est négatif. L'équation (1) du problème admet par suite deux racines distinctes si $l<R(1+\sqrt{2})$, l étant supposé essentiellement positif.

2° *Signe*. Le produit et la somme des racines de l'équation (1) sont positifs : les deux racines quand l'équation en admet, sont positives.

3° *Grandeur*. Comparons l aux racines de l'équation (1) :

$$F(l)=2l^2-2(R+l)\,l+R^2=l^2-2Rl$$
$$F(l)=l(l-2R) \text{ qui est du signe de } (l-2R)$$

Si $l<2R$, $F(l)$ est négatif, l est compris entre les racines, le problème n'admet qu'une solution x''.

Si $l>2R$ $F(l)$ est positif, l est extérieur à l'intervalle des racines. Comparons l à leur demi-somme $\frac{R+l}{2}$;

on a : $$l>R \quad\text{ou}\quad \frac{l}{2}>\frac{R}{2},$$

donc $$\frac{R+l}{2}<\frac{l}{2}+\frac{l}{2} \quad\text{ou}\quad \frac{R+l}{2}<l.$$

Donc $x''<x'<l$. Le problème admet deux solutions.

Résumé de la discussion :

$0<l<2R$, 1 *solution*
$2R<l<R(1+\sqrt{2})$, 2 *solutions*
$l>R(1+\sqrt{2})$, 0 *solution* (racines imaginaires).

Remarque. Au cas particulier où $l=R(1+\sqrt{2})$, l'équation (1) admet une racine double, $x=\frac{R+l}{2}$ $=R+\frac{R\sqrt{2}}{2}$ PM est alors le demi-côté du carré inscrit dans le cercle de diamètre AB.

Problème 6. — **Un triangle et un carré ont leurs bases sur une même droite D ; mener à cette droite une parallèle D' de manière que la somme des surfaces des parties du triangle et du carré non situées entre D et D' soit équivalente à la surface du triangle.**

Soient ABC le triangle et MNPQ le carré donné (fig. 20), AM la hauteur du triangle, P', Q', B', C', H′ les points d'intersection de D′ avec MP, NQ, AB, AC, AH. Nous pouvons regarder comme données [1]

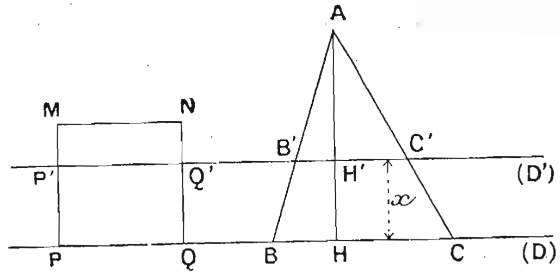


Fig. 20.

les quantités suivantes :

$$BC = a; \quad AH = h; \quad PQ = MP = b.$$

Prenons pour inconnue x la distance des deux parallèles D et D′ :

$$PP' = QQ' = HH' = x.$$

La surface du triangle ABC est $\frac{1}{2}ah$; le rapport des surfaces des triangles semblables AB′C′ et ABC est égal au rapport des carrés de leurs hauteurs, c'est-à-dire à $\frac{(h-x)^2}{h^2}$; quant à la surface du rectangle MNP′Q′ elle est évidemment $b(b-x)$; l'équation du problème est donc :

$$\frac{1}{2}ah\frac{(h-x)^2}{h^2} + b(b-x) = \frac{1}{2}ah,$$

ou, en chassant les dénominateurs (il suffit de mul-

1. Il est clair que si l'on donnait d'autres éléments du triangle, il y aurait lieu, au préalable, de déterminer a et h au moyen de ses données.

tiplier par $2h$) :

$$a(h-x)^2 + 2hb(b-x) = ah^2$$

$$(1) \qquad ax^2 - 2h(a+b)x + 2hb^2 = 0.$$

Telle est l'équation du problème.

Pour que cette équation admette des racines, il faut que son discriminant soit positif; écrivons cette condition :

$$D = h^2(a+b)^2 - 2ahb^2 > 0.$$

Ordonnons D par rapport à b; il vient :

$$D = b^2(h^2 - 2ah) + 2h^2ab + a^2h^2 > 0.$$

Comme h est positif, nous pouvons diviser par h, ce qui donne :

$$b^2(h-2a) + 2\,ahb + a^2h > 0.$$

Pour résoudre cette inégalité du second degré en b, il est utile de calculer le discriminant D′ de son premier membre, on a :

$$D' = a^2h^2 - a^2h(h-2a) = 2a^3h.$$

Ce discriminant est positif, puisque a et h sont positifs; donc l'équation :

$$D = 0$$

admet deux racines distinctes b' et b'', si l'on a :

$$h - 2a > 0,$$

ces racines sont toutes deux négatives; donc il suffit que b soit positif, ce que nous supposons, pour que le trinome en b soit du signe de son premier terme, c'est-à-dire soit positif. Si l'on a :

$$h - 2a < 0,$$

l'une des racines b' est négative et l'autre b'' est positive ; d'ailleurs, dans ce cas, D, pour être positif, doit être de signe contraire à son premier terme, et l'on doit avoir :

$$b' < b < b''$$

ou, puisque b est positif :

$$0 < b < b''.$$

En résumé, si l'on a :

$$h > 2a,$$

l'équation (1) a des racines, quel que soit b ; si l'on a :

$$h < 2a,$$

l'équation (1) n'a de racines que si l'on a :

$$b < b'',$$

c'est-à-dire :

$$b < \frac{ah + a\sqrt{2ah}}{2a}.$$

Remarque. — L'on aurait pu, au lieu de résoudre par rapport à b l'inégalité $D > 0$, la résoudre par rapport à h, ce qui pouvait paraître plus simple, car après division par $h > 0$, elle est du premier degré en h et donne :

$$h > \frac{2ab}{(a+b)^2},$$

mais, si l'on voulait étudier le problème *par rapport à b*, il faudrait étudier cette fraction dont les deux termes sont du second degré en b, ce que nous n'avons pas appris à faire.

Discussion. — Nous avons établi les conditions

d'existence des racines pour l'équation (1) ; il faut maintenant rechercher si les racines, quand elles existent, satisfont bien au problème géométrique posé. En mettant le problème en équation, nous avons implicitement supposé (fig. 20) que x était positif, inférieur à b et inférieur à h ; nous laisserons de côté, pour ne pas allonger indéfiniment, la question d'étudier à quels problèmes, très voisins du problème posé, conviennent les valeurs de x non comprises entre ces limites ; nous allons simplement rechercher combien l'équation (1) a de racines supérieures à 0 et inférieures à la fois à b et à h. Dans ce but désignons par $f(x)$ le premier membre de (1) ; on a :

$$f(0) = 2hb^2$$
$$f(b) = ab^2 - 2h(a+b)b + 2hb^2 = ab(b - 2h)$$
$$f(h) = ah^2 - 2h(a+b)h + 2hb^2 = h(2b^2 - 2bh - ah).$$

Supposons d'abord $b < h$; il faut alors que x soit compris entre 0 et b ; or $f(0)$ est positif et $f(b)$ négatif ; *il y a donc une racine et une seule qui convient.*

Soit maintenant $b > h$; il faut alors que x soit compris entre 0 et h ; ou on a :

$$f(h) = hF(b),$$

en posant :

$$F(b) = 2b^2 - 2bh - ah,$$

pour que $f(h)$ soit > 0 il faut et il suffit que $F(b)$ soit positif ; or on a :

$$F(h) = -ah < 0.$$

Donc $F(b)$ admet une racine b'' supérieure à h ;

on a :

$$b'' = \frac{h + \sqrt{h^2 + 2ah}}{2}.$$

Si l'on a :

$$h < b < b'',$$

la valeur de $f(h)$ est négative; donc il y a une racine x et une seule comprise entre o et h, et qui convient. Supposons enfin :

$$b > b'',$$

c'est-à-dire :

$$b > \frac{h + \sqrt{h^2 + 2ah}}{2}.$$

Dans ce cas, $f(o)$ et $f(h)$ sont tous deux positifs, de sorte que nous ne sommes pas assurés qu'il y a des racines; nous devrons donc supposer que les conditions précédemment trouvées pour que D soit positif sont remplies. Lorsqu'elles le sont, nous pouvons affirmer que les racines sont toutes deux inférieures à o, ou toutes deux comprises entre o et h, ou toutes deux supérieures à h. On distinguera ces trois cas en comparant o et h à la demi-somme qui est $\dfrac{h(a+b)}{a}$; or, a et b étant positifs ainsi que h, cette demi-somme est visiblement supérieure à h, de sorte qu'il n'y a pas de racines qui conviennent.

En résumé, pour que le problème géométrique posé admette une solution, il faut et il suffit que l'on ait :

$$b < \frac{h + \sqrt{h^2 + 2ah}}{2},$$

et cette solution est d'ailleurs unique.

On peut vérifier ce résultat par un raisonnement

géométrique simple; l'énoncé exprime (fig. 21) que les aires MNP'Q' et BCC'B' sont équivalentes; or, lorsque x croît à partir de zéro, la première de ces aires décroît à partir de b^2 et la seconde croît à partir de zéro; ces deux aires ne peuvent donc

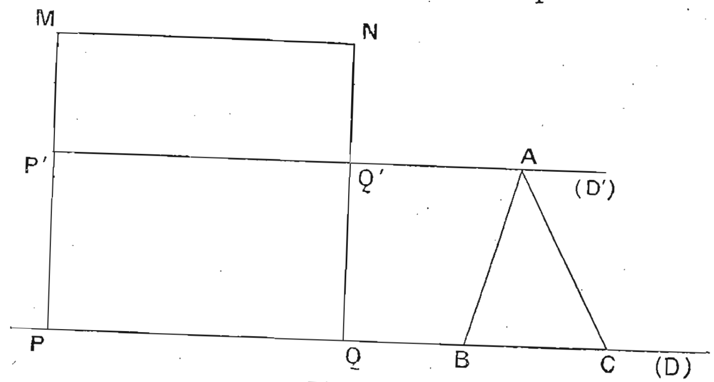


Fig. 21.

devenir égales que pour une position au plus de D'; il existera toujours une telle position, à moins que lorsque la droite D' passe par le sommet A du triangle (ce qui est la position extrême qu'elle peut occuper), l'aire MNQ'P' ne soit encore supérieure à BCB'C' (qui se réduit à ABC pour cette position particulière de D). Or cette condition s'exprime par l'égalité :

$$b(b - h) > \frac{1}{2}ah,$$

qui, résolue par rapport à b, donne, en tenant compte du fait que a et h sont positifs :

$$b > \frac{h + \sqrt{h^2 + 2ah}}{2}.$$

Lorsque l'on a :

$$b = \frac{h + \sqrt{h^2 + 2ah}}{2},$$

la solution est fournie par la droite (D') qui passe par le point A (on a $x = h$).

EXERCICES SUR LE CHAPITRE XV

Problèmes du second degré.

Nous avons déjà donné au chapitre XIII un assez grand nombre de problèmes du second degré, dont la résolution est rapide grâce à la connaissance des relations entre les coefficients et les racines. Nous donnons ci-dessous une série de problèmes gradués.

265. — Trouver la base du système de numération dans lequel le nombre 199 du système décimal s'écrit 531.

266. — Trouver la base du système de numération dans lequel le nombre 3010 correspond au nombre 196 du système décimal.

267. — Dans quel système le nombre 871 du système décimal s'écrit-il 607?

268. — Trouver deux nombres pairs consécutifs dont le produit soit 728.

269. — Calculer deux nombres dont la somme est 13 et dont la somme des cubes est 637.

270. — Calculer deux nombres dont la différence est 8 et dont la différence des cubes est 3032.

271. — Dans une société de 14 personnes, hommes et femmes, les hommes ont dépensé 240^f et les femmes également 240^f. Sachant que chaque homme a dépensé 10^f de plus que chaque femme, on demande de combien d'hommes et de combien de femmes la société était composée?

272. — Un élève a à ajouter un certain nombre à 4, puis à retrancher ce même nombre de 9 et, en fin de compte, à multiplier les résultats. Il se trompe, ajoute le nombre donné à 9 et retranche 4 du nombre donné; puis il multiplie les résultats. Il se trouve obtenir la solution exacte. Quel était le nombre donné?

273. — Un certain nombre de pièces de 1^f peuvent être disposées en carré, chaque côté du carré contenant 51 pièces; si le même nombre de pièces était disposé en deux carrés, le côté de l'un de ces carrés comprendrait 21 pièces de plus que le côté de l'autre. Combien de pièces contiennent les côtés de chacun de ces deux derniers carrés?

274. — Deux corps se meuvent l'un vers l'autre des points respectifs A et B et se rencontrent au bout de 32 secondes : sachant que l'un des corps met 24 secondes de plus que l'autre à parcourir la distance de A à B, combien de temps mettent chacun de ces mobiles à parcourir cette distance?

275. — Un bateau met 4 heures 12 minutes pour descendre une rivière de 12^{km} dans le sens du courant et pour la remonter en allant contre le courant. Sachant que la vitesse du courant est de 3^{km} à l'heure, on demande à quelle vitesse ira le bateau dans une eau calme?

276. — Deux hommes partent en même temps pour aller de A à B, distants de 36^{km} l'un de l'autre. L'un fait 1^{km} à l'heure de plus que l'autre et arrive à B une heure plus tôt que lui. Quelle est la vitesse de chacun de ces deux hommes?

277. — Trouver une fraction sachant qu'en lui ajoutant son inverse, on obtient un nombre surpassant 2 unités de $\frac{25}{104}$.

278. — Un oncle laisse par testament une fortune de $18\,000^f$ à répartir également entre ses neveux. Deux d'entre eux meurent avant lui et la part de chacun des survivants se trouve ainsi augmentée de $1\,400^f$. Quel était le nombre des neveux désignés au testament?

279. — Un marchand vend deux pièces d'étoffe pour 108^f et 70^f. Sachant que la seconde pièce d'étoffe a 4^m de moins que la première et que si l'on avait vendu le mètre de la première au prix du mètre de la seconde et inversement, le prix de vente total eût été de 174^f, on demande le prix du mètre de chaque étoffe.

280. — Un éleveur achète un troupeau de moutons pour la somme de 3174^f. Il en garde 18 et revend le reste 4^f de plus par tête de bétail; de cette façon, il réalise un bénéfice de 66^f plus le prix d'achat des moutons qui lui restent. Calculer le prix d'achat d'un mouton.

281. — Deux associés ont mis dans une entreprise une somme totale de $20\,000^f$. La mise du premier est restée 5 mois dans l'entreprise et celle du second 6 mois. Le premier a reçu $17\,000^f$ pour sa mise et son bénéfice, et le second $12\,000^f$; calculer la mise et le bénéfice de chacun des associés.

282. — Un champ a la forme d'un carré; on demande quel est le côté de ce carré, sachant que si l'on ajoute 2^m à l'un des côtés et que l'on retranche 10^m à l'autre côté, on obtient un rectangle dont la superficie est 88 ares.

283. — Les dimensions d'un rectangle sont a et b; on demande de quelle même quantité il faut réduire ces dimensions pour obtenir un nouveau rectangle qui soit les $\frac{3}{4}$ du précédent.

284. — Trouver les côtés d'un triangle rectangle sachant que l'hypoténuse est égale à 13^m et la surface à 30^{m2}.

285. — On donne un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit ont respectivement pour longueurs 3^m et 4^m; déterminer sur l'hypoténuse un point dont la distance au sommet de l'angle droit soit égale à 6^m. (On prendra pour inconnue x la distance du point cherché au sommet du triangle opposé au côté égal à 4^m.)

286. — Dans un rectangle dont les côtés ont respectivement 70^m et 52^m50, un second rectangle est construit. Les côtés du rectangle intérieur sont également distants des côtés du rectangle extérieur et la surface du rectangle intérieur est égale à la surface restante du rectangle extérieur. Quelles sont les dimensions du rectangle intérieur?

287. — Inscrire dans un triangle un rectangle d'aire donnée. — Discuter.

288. — Inscrire dans une sphère un cylindre de révolution dont la surface latérale ait une valeur donnée. Discuter.

289. — On donne une demi-circonférence de diamètre $AB = 2R$; soit M un point de cette demi-circonférence et P la projection de M sur AB; déterminer la distance $AP = x$, par la condition que l'on ait : $AP + PM = mR$, en désignant un nombre donné. Discuter.

290. — Mener dans un cercle de rayon donné R, une corde telle que si l'on abaisse de ses extrémités des perpendiculaires sur une tangente au cercle parallèle à la corde, on détermine un rectangle de diagonale donnée l.

291. — Calculer la grande base d'un tronc de cône connaissant sa hauteur h, son volume v et sa petite base b.

Application numérique : $h = 0^m,3$; $v = 36\ dm^3$; $d = 6\ dm^2$.

292. — Calculer les côtés d'un triangle rectangle sachant que ce sont 3 nombres entiers consécutifs.

293. — Calculer les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse a et la hauteur h correspondante.

Application numérique : $a = 26^m$; $h = 9^m,23$.

294. — Couper une sphère par un plan détachant deux zones dont la différence des aires soit égale à l'aire du cercle de section.

295. — Partager un cercle en deux parties qui soient entre elles dans un rapport donné $\frac{m}{n}$ par une circonférence concentrique.

Application numérique : $\frac{m}{n} = \frac{3}{4}$.

296. — Partager un triangle en deux parties qui soient entre elles dans un rapport donné $\frac{m}{n}$ par une parallèle à la base.

Application numérique : $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$.

297. — Partager un triangle en moyenne et extrême raison par une parallèle à la base.

298. — Calculer les côtés d'un triangle rectangle dont on donne l'aire m^2 et le rayon du cercle inscrit r.

299. — Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle connaissant le rayon r du cercle inscrit et le périmètre $2p$.

300. — Étant donnée la longueur d'un côté d'un triangle, de la hauteur correspondante, et le rayon du cercle inscrit, calculer les deux autres côtés.

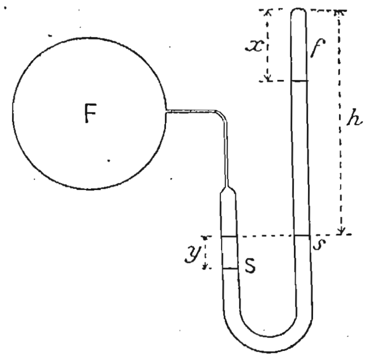


Fig. 22.

301. — On donne le cercle circonscrit à un triangle, un côté et la somme des deux autres : calculer ces deux côtés.

302. — Calculer le côté de base et l'apothème d'une pyramide régulière à base carrée connaissant son volume $\frac{4}{3}b^3$ et sa surface totale $4a^2$.

303. — Calculer les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse a et sachant que l'un des côtés est moyenne arithmétique entre l'autre côté et l'hypoténuse.

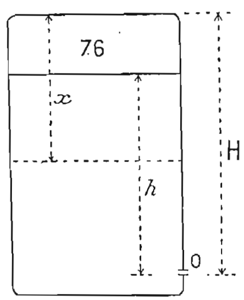


Fig. 23.

304. — Graduation directe du manomètre à air comprimé : un réservoir contenant de l'air est mis en communication avec un manomètre à air comprimé dont les tubes ont des sections S et s. Les niveaux descendent de y et montent de $h-x$. Trouver une relation entre la hauteur x et la pression F du récipient (fig. 22).

305. — Un récipient cylindrique est percé d'un orifice inférieur O et contient de l'eau et de l'air à 76^{cm} de pression. On demande pour quel niveau x, s'arrêtera écoulement par O (on admet que l'orifice O est assez étroit pour ne pas permettre l'entrée de l'air). Pression extérieure : 74^{cm}; hauteur du récipient au-dessus de l'orifice : H; hauteur d'eau : h (fig. 23).

LIVRE V

PROGRESSIONS. — LOGARITHMES

CHAPITRE XVI

PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES

I. — PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES

187. — **Définition.**

On dit que plusieurs nombres, rangés dans un ordre déterminé, forment une progression arithmétique ou sont en progression arithmétique lorsque la différence de deux nombres consécutifs quelconques est constante.

Par exemple, les nombres :

$$3, \quad 5, \quad 7, \quad 9, \quad 11$$

sont en progression arithmétique, car les différences $5-3$, $7-5$, $9-7$, $11-9$ sont toutes égales à 2.

De même les nombres :

$$1, \quad 4, \quad 7, \quad 10, \quad 13$$

sont en progression arithmétique, car les différences

$4 - 1$, $7 - 4$, $10 - 7$, $13 - 10$ sont toutes égales à 3.

De même encore les nombres :

$$92, \quad 82, \quad 72, \quad 62, \quad 52,$$

sont en progression arithmétique puisque les différences $82 - 92$, $72 - 82$, $62 - 72$, $52 - 62$ sont toutes égales à -10. Les différents nombres de ces progressions sont appelés *termes* de la progression; on convient d'appeler *premier terme* le terme le plus à gauche, et de compter les rangs de gauche à droite à partir du premier terme.

Remarque. — On peut donc dire qu'une progression arithmétique est **une suite de termes tels que chacun d'eux est égal au précédent plus une quantité constante.** Cette quantité constante représentant la différence de deux termes consécutifs est appelée **raison** de la progression. Ce fait que la différence de deux termes consécutifs est constante explique la dénomination de **progressions par différence** que l'on donne parfois aux progressions arithmétiques.

Lorsqu'on connaît le premier terme d'une progression et la raison, il est facile d'écrire les autres termes, il suffit d'ajouter successivement la raison à chaque terme pour avoir le terme suivant.

Exemple. — **Former une progression arithmétique composée de 6 termes dont le premier terme soit 7 et la raison 5.**

Les termes successifs sont :

$$7 + 5 = 12; \quad 12 + 5 = 17; \quad 17 + 5 = 22; \quad 22 + 5 = 27,$$

de sorte que la progression demandée est formée des termes suivants :

$$7, \quad 12, \quad 17, \quad 22, \quad 27, \quad 32.$$

Autre exemple. — **Former une progression arithmétique composée de 5 termes dont le premier terme soit 13 et la raison -8.**

On obtient, en procédant de la même manière que dans l'exemple précédent, la progression :

$$13, \quad 5, \quad -3, \quad -11, \quad -19.$$

On peut aisément remarquer que les termes d'une progression arithmétique vont en croissant ou en décroissant à partir du premier terme **selon que la raison est un nombre positif ou un nombre négatif**; dans le premier cas, on dit que la progression est **croissante**, comme par exemple la progression :

$$4, \quad 9, \quad 14, \quad 19, \quad 24$$

dans le cas contraire, la progression est dite **décroissante** ; exemple :

$$12, \quad 9, \quad 6, \quad 3, \quad 0, \quad -3, \quad -6.$$

188. — **Propriétés essentielles des progressions arithmétiques.**

Il arrive souvent que, connaissant le premier terme et la raison, on veuille connaître la valeur d'un terme de rang déterminé sans calculer les termes intermédiaires de la progression. On remarque alors que le **second** terme s'obtient en ajoutant au premier la raison; le **troisième** terme s'obtient en ajoutant au second la raison et, par suite, est égal au premier **plus deux fois la raison** : le quatrième terme s'obtient en ajoutant encore la raison au troisième, et par suite est égal au premier **plus trois fois la raison**; de même le **cinquième** terme est égal au premier **plus quatre fois la raison**, etc. Le **centième** terme serait égal au premier, plus **quatre-vingt-dix-neuf fois la raison.**

Si l'on désigne de la façon suivante, comme il est coutume de le faire, une progression arithmétique à forme générale :

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,\ldots\ldots\, h \,.\, k \,.\, l \,.$$

on voit que la raison étant désignée par r, on peut écrire :

le 2^e terme b est égal à				$a+r$
le 3^e terme c	—	$b+r$	ou	$a+2r$
le 4^e terme d	—	$c+r$	ou	$a+3r$
le n^e terme l	—	$k+r$	ou	$a+(n-1)r$

Ce qui permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 1.

Dans une progression arithmétique, un terme de rang quelconque donné est égal au premier terme, plus le produit de la raison par le nombre de termes qui le précèdent (ou par le rang donné diminué d'une unité).

Ce que l'on peut résumer dans la formule :

$$\boxed{l = a + (n-1)r.}$$

Ainsi le 16^e terme de la progression :

$$17, \quad 21, \quad 25 \ldots.$$

dont la raison est 4, est égal à :

$$17 + (15 \times 4) = 77,$$

ce que l'on peut aisément vérifier.

De même, le 12^e terme de la progression décroissante :

$$8, \quad 5, \quad 2, \quad -1, \ldots$$

dont la raison est -3, est égal à :

$$8 + 11 \times (-3) = 8 - 33 = -25.$$

Théorème 2.

Dans toute progression arithmétique, la somme de deux termes équidistants des extrêmes est constante; la valeur constante de cette somme est égale à la somme des termes extrêmes[1].

La démonstration de ce théorème se déduit du théorème précédent. Soit dans la progression arithmétique :

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,\ldots.\, g .\, h .\, k .\, l$$

deux termes d et g occupant l'un le 4^e rang à partir de la gauche, l'autre le 4^e rang à partir de la droite; le théorème précédent permet d'écrire :

$$d = a + 3r,$$

r, étant la raison de la progression arithmétique.

Si l'on suppose, d'autre part, cette suite de termes écrite dans l'ordre inverse :

$$\div l \,.\, k \,.\, h \,.\, g \,\ldots..\, d \,.\, c \,.\, b \,.\, a$$

on obtient une progression arithmétique de raison égale à $-r$, et le 4^e terme g s'écrit :

$$g = l - 3r$$

d'où :

$$d + g = a + 3r + l - 3r = a + l.$$

189. — **Somme des termes d'une progression arithmétique.**

Il est utile, dans bien des questions, de savoir calculer la somme des termes d'une progression arithmétique; nous allons établir une formule générale.

1. Dans le cas où le nombre est impair, le terme du milieu est la moyenne arithmétique des termes extrêmes.

Soit une progression arithmétique dont le premier terme est a et la raison r. Si nous la désignons sous la forme générale :

$$\div a \,.\, b \,.\, c \ldots\ldots h \,.\, k \,.\, l$$

l étant le n ième terme, la somme des n termes de cette progression S s'exprime comme suit :

$$(1) \qquad S = a + b + c \ldots + h + k + l.$$

On peut aussi intervertir l'ordre des termes, les écrire par exemple dans l'ordre inverse :

$$(2) \qquad S = l + k + h \ldots + c + b + a.$$

Additionnons membre à membre les expressions (1) et (2) en groupant en sommes partielles les termes correspondants équidistants des extrêmes; on obtient :

$$2S = (a + l) + (b + k) + (c + h) \ldots$$
$$+ (h + c) + (k + b) + (l + a).$$

Ces sommes partielles sont toutes égales, d'après le théorème 2 (page 325), comme somme de termes équidistants des extrêmes; or leur nombre est égal au nombre n des termes de la progression; on a donc :

$$2S = (a + l)\, n$$

d'où :

$$\boxed{S = \frac{a + l}{2} \times n}$$

Ce qui peut se traduire en langage ordinaire : **la somme des termes d'une progression arithmétique est égale au produit de la moyenne arithmétique des termes extrêmes par le nombre des termes.**

On peut dans cette formule remplacer l par la

valeur calculée plus haut en fonction de a, n et r :

$$l = a + (n - 1)\, r$$

on obtient :

$$S = \frac{a + a + (n - 1)\, r}{2} \times n,$$

et enfin :

$$\boxed{S = [2a + (n - 1)r]\,\frac{n}{2}.} \qquad (1)$$

Applications numériques. — Soit à calculer la somme des termes de la progression dont le premier terme est 5, la raison 3 et le nombre des termes 30; on a :

$$S = [10 + (29 \times 3)]\; 15,$$
$$S = 1\,455.$$

Soit encore à calculer la somme des 18 premiers termes de la progression :

$$20, \quad 13, \quad 6 \ldots$$

le premier terme est 20, la raison -7, on a :

$$S = [40 + 17 \times (-7)]\; 9 = -79 \times 9$$
$$S = -711.$$

190. — **Cas particuliers.**

1° Somme des n premiers nombres entiers de la suite naturelle. — C'est la somme des termes de la progression arithmétique :

$$\div 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n$$

dont la raison est 1. L'application de la formule précédente donne :

$$S = [2 + n - 1]\,\frac{n}{2}$$

ou, après simplification :

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Telle est la somme des n premiers nombres. Ainsi la somme des 100 premiers nombres est :

$$50 \times 101 = 5050.$$

2° Somme des n premiers nombres impairs. — C'est la somme des termes de la progression :

$$\div 1 . 3 . 5 . 7 .....$$

dont la raison est 2. L'application de la formule générale donne :

$$S = [2 + (n - 1) 2] \frac{n}{2}$$

et, après simplification :

$$S = n^2.$$

Ainsi la somme des 20 premiers nombres impairs est 400.

C'est là un résultat très remarquable par sa simplicité. On peut l'établir directement à l'aide d'une figure très simple (fig. 24).

Considérons deux axes rectangulaires Ox, Oy sur lesquels sont portées des longueurs égales :

$$OA = AD = DG = GL = CP = OC = CF = FK = KN = NR.$$

Traçons en traits forts les carrés OABC, ODEF, OGHK, OLMN, OPQR et en pointillés les lignes qui divisent ces carrés en carrés égaux; il est clair que l'un des grands carrés, par exemple OPQR renferme un nombre de petits carrés égal au carré

de son rang, à $5^2 = 25$ pour l'exemple choisi, d'autre part, pour évaluer ce nombre de petits carrés, nous pouvons remarquer que nous avons le

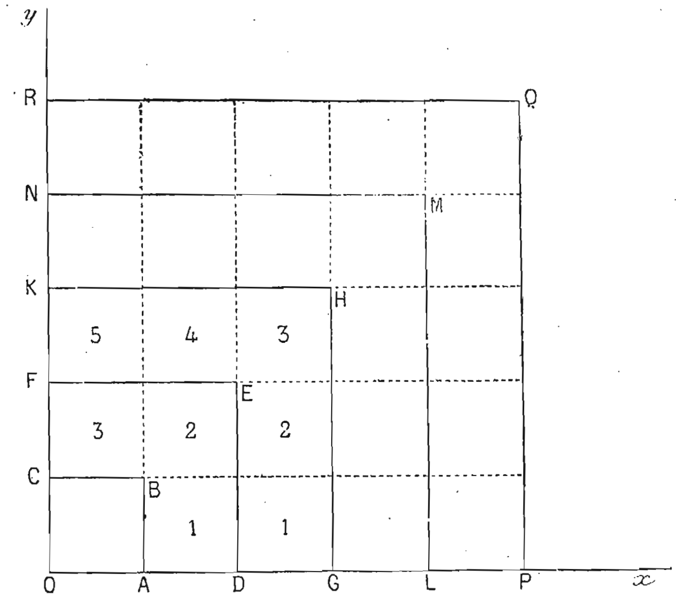


Fig. 24.

carré OABC, c'est-à-dire 1 carré, puis les petits carrés compris dans la figure ABCFEDA, au nombre de 3 (ils sont numérotés 1, 2, 3); puis les 5 petits carrés compris entre DEF et GHK (numérotés 1, 2, 3, 4, 5), etc., c'est-à-dire un nombre total de petits carrés égal à :

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9,$$

c'est-à-dire à la somme des 5 premiers nombres impairs.

On voit ainsi que *la somme des n premiers* *nombres impairs est égale à n^2*, résultat utile à retenir.

3° Somme des carrés des n premiers nombres entiers. — Comme application, proposons-nous d'évaluer la somme des carrés des n premiers nombres entiers. Nous la désignerons par S_2, appelant, pour la symétrie, S_1 la somme des n premiers nombres entiers. On s'appuie sur l'identité :

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

dans laquelle on donnne successivement à x les valeurs 1, 2,..., n; on obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
2^3 - 1^3 &= 3.1^2 + 3.1 + 1\\
3^3 - 2^3 &= 3.2^2 + 3.2 + 1\\
4^3 - 3^3 &= 3.3^2 + 3.3 + 1\\
5^3 - 4^3 &= 3.4^2 + 3.4 + 1\\
&\ldots\ldots\ldots\\
(n+1)^3 - n^3 &= 3n^2 + 3n + 1
\end{aligned}$$

et, en ajoutant, il vient :

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_2 + 3S_1 + n.$$

En remplaçant S_1 par sa valeur $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et en chassant le dénominateur, il vient :

$$\begin{aligned}
6S_2 &= 2(n^3 + 3n^2 + 3n) - 3n^2 - 3n - 2n\\
&= 2n^3 + 3n^2 + n\\
&= n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Telle est la formule demandée. Une méthode analogue donnerait la somme des cubes.

191. — **Insertion de moyens arithmétiques.**

Insérer m moyens arithmétiques entre deux nombres a et b, c'est former une progression arithmétique dont a et b soient les termes extrêmes et renfermant m termes entre a et b.

La progression doit renfermer par suite $m+2$ termes. Le problème se ramène à calculer la *raison* de la progression à former, puisqu'on connaît le premier terme et le nombre des termes. La relation suivante permet aisément ce calcul :

$$b = a + (m+1)r$$

d'où :

$$r = \frac{b-a}{m+1}.$$

Règle.

La raison de la progression obtenue par l'insertion de m moyens arithmétiques entre deux nombres s'obtient en divisant la différence de ces nombres par le nombre des moyens à insérer, plus un.

Soit à insérer 6 moyens arithmétiques entre 10 et 24; la raison de la progression est :

$$r = \frac{24-10}{7} = \frac{14}{7} = 2$$

la progression est la suivante :

10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24.

Théorème.

Si l'on insère le même nombre de moyens entre les termes d'une progression arithmétique, on obtient une nouvelle progression continue renfermant les termes de la première.

Soit, en effet, la progression arithmétique :

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \ldots$$

Si l'on insère m moyens entre a et b, la progression que l'on obtient avec a et b pour termes extrêmes a pour raison :

$$r_1 = \frac{b-a}{m+1}.$$

Si l'on insère m moyens entre b et c, la nouvelle progression dont b et c sont les termes extrêmes a pour raison :

$$r_2 = \frac{c-b}{m+1}$$

or $b - a = c - b$.

Ces deux différences exprimant la même valeur qui est la raison de la progression proposée, donc $r_1 = r_2$. Les diverses progressions partielles ont ainsi la même raison, de plus le dernier terme de l'une est le premier terme de l'autre; si on les considère dans leur ensemble, elles forment une progression continue de raison égale à $\frac{r}{m+1}$, r étant la raison de la progression proposée et m le nombre de moyens insérés entre les termes consécutifs.

II. — PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES[1]

192. — Définition.

On dit que plusieurs nombres rangés dans un ordre déterminé forment une progression géométrique, ou sont en progression géométrique, lorsque le quotient de deux nombres consécutifs quelconques est constant.

1. On remarquera le parallélisme dans l'étude des deux sortes de progressions : arithmétiques et géométriques.

Par exemple, les nombres :

$$3, \quad 6, \quad 12, \quad 24$$

sont en progression géométrique, car l'on a : $6 : 3 = 2$; $12 : 6 = 2$; $24 : 12 = 2$. Ce quotient constant 2 est dit la *raison* de la progression.

De même les nombres :

$$3\,600, \quad 360, \quad 36, \quad 3{,}6 \quad 0{,}36$$

forment une progression géométrique dont la raison est 0,1.

De même encore les nombres :

$$3, \quad \frac{6}{5}, \quad \frac{12}{25}, \quad \frac{24}{125}$$

forment une progression géométrique dont la raison est $\frac{2}{5}$.

On pourrait considérer aussi comme progressions géométriques des suites de termes telles que :

$$2, \quad -3, \quad \frac{9}{2}, \quad \frac{-27}{4}$$

dont la raison serait $\frac{-3}{2}$. Il est d'usage de ne considérer comme progressions géométriques que les suites de nombres *positifs* répondant aux conditions de la définition.

Remarque. — On peut dire qu'une progression géométrique est une **suite de termes tels que chacun d'eux est égal au précédent multiplié par une quantité constante, positive.** Cette quantité constante, représentant le quotient de deux termes consécutifs, est la raison de la progression. Ce quotient constant explique la dénomination de **progressions par quotient** que l'on donne parfois aux progressions géométriques.

Lorsqu'on connaît le premier terme et la raison d'une progression géométrique, il est facile de calculer successivement tous les termes : il suffit de multiplier successivement chaque terme par la raison pour avoir le terme suivant.

Exemple. — **Former une progression géométrique de 5 termes dont le premier terme soit 625 et la raison 1,2.**

On obtient successivement :

$$625 \times 1,2 = 750; \quad 750 \times 1,2 = 900;$$
$$900 \times 1,2 = 1\,080; \quad 1\,080 \times 1,2 = 1\,296.$$

La progression cherchée est donc :

$$625, \quad 750, \quad 900, \quad 1\,080, \quad 1\,296.$$

On peut aisément remarquer que les termes d'une progression géométrique vont en croissant ou en décroissant à partir du premier terme à gauche, **selon que la raison est un nombre plus grand que** *1* **ou inférieur à** *1;* dans le premier cas, on dit que la progression est **croissante**, telle par exemple que la progression :

$$2, \quad 6, \quad 18, \quad 54, \quad 162$$

dans le cas contraire, la progression est dite **décroissante**, comme par exemple la suite :

$$132, \quad 66, \quad 33, \quad 16,5 \quad 8,25$$

dont la raison est $\frac{1}{2}$.

193. — Propriétés essentielles des progressions géométriques.

Il arrive souvent que, connaissant le premier terme et la raison d'une progression géométrique, on veuille connaître la valeur d'un terme de rang déterminé, sans calculer les termes intermédiaires.

Dans ce but, on remarque que le *second* terme est égal au *produit du premier par la raison;* le *troisième* terme est égal au produit du second par la raison, c'est-à-dire au *produit du premier terme par le carré de la raison;* le *quatrième* terme est de même égal au produit du premier par le *cube* de la raison, etc.

Si, d'ailleurs, on écrit, comme il est souvent d'usage de le faire, une progression géométrique à forme générale de la façon suivante :

$$\div\!\div\, a : b : c : d : \ldots\ldots : h : k : l.$$

on voit que la raison étant désignée par q, on peut écrire :

le 2^e terme	b	est égal à			$a \times q$
le 3^e	— c	—	$b \times q$	ou	$a \times q^2$
le 4^e	— d	—	$c \times q$		$a \times q^3$
. . . . .	. . . .	. . . .	. . . .		. . . .
le n^e	— l	....			$a \times q^{n-1}$

Ce qui permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème I.

Dans une progression géométrique, un terme de rang donné est égal au premier terme de la progression multiplié par une puissance de la raison dont l'exposant est le nombre de termes qui le précèdent (ou le rang donné diminué d'une unité).

Ce que l'on peut résumer dans la formule :

$$\boxed{l = a.q^{n-1}}$$

Ainsi le 7[e] terme de la progression :

$$3, \quad 6, \quad 12 \ldots$$

dont la raison est 2 est égal à :

$$l = 3 \times 2^6 = 3 \times 64 = 192.$$

De même le 8[e] terme de la progression décroissante :

$$15, \quad 5, \quad \frac{5}{3} \ldots$$

dont la raison est $\frac{1}{3}$ est égal à :

$$l = 15 \times \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{15}{3^7}.$$

Théorème 2.

Dans toute progression géométrique, le produit de deux termes équidistants des termes extrêmes est constant : la valeur constante de ce produit est égale au produit des extrêmes[1].

Soit en effet la progression géométrique

$$\div\!\div\ a : b : c : d : \ldots\ldots : g : h : k : l$$

de raison q. Considérons les deux termes d et g occupant l'un, le 4[e] rang à partir de la gauche, l'autre le 4[e] rang à partir de la droite; le théorème 1 permet d'écrire :

$$(1) \qquad d = aq^3$$

1. Si le nombre des termes est impair, le terme du milieu est la moyenne géométrique des termes extrêmes.

Si l'on suppose cette suite de termes écrite dans l'ordre inverse :

$$\div\!\div\ l : k : h : g : \ldots\ldots : d : c : b : a.$$

on obtient une progression géométrique dont la raison est $\frac{1}{q}$ et dans laquelle g est le 4[e] terme; on a donc :

$$(2) \qquad g = l \times \left(\frac{1}{q}\right)^3 = l \times \frac{1}{q^3}.$$

Si l'on multiplie membre à membre les expressions (1) et (2), on obtient :

$$dg = al \times \frac{q^3}{q^3} = a.l.$$

Le raisonnement que nous venons de faire est général.

194. — **Somme des termes d'une progression géométrique.**

Comme pour les progressions arithmétiques, nous allons établir une formule générale permettant d'obtenir rapidement la somme des termes d'une progression géométrique.

Soit la progression géométrique à forme générale :

$$\div\!\div\ a : b : c : \ldots\ldots h : k : l$$

dont le premier terme est a, la raison q et le nombre des termes n, la somme à calculer est la suivante :

$$(1) \qquad S = a + b + c + \ldots\ldots + h + k + l.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par q, on obtient :

(2) $Sq = aq + bq + cq + \ldots + hq + kq + lq.$

Retranchons membre à membre de l'égalité (2) l'égalité (1); on peut disposer l'opération comme suit :

$$Sq - S = -a + (aq - b) + (bq - c) \ldots + (kq - l) + lq$$

et si l'on remarque que $aq = b$, $bq = c \ldots kq = l$, on obtient :

$$S(q - 1) = lq - a$$

d'où :

$$S = \frac{lq - a}{q - 1}.$$

On peut trouver une formule donnant la somme en fonction du premier terme, de la raison, et du nombre de termes, il suffit en effet de substituer dans l'expression précédente à l sa valeur :

$$l = aq^{n-1}$$

on obtient[1] :

$$S = \frac{aq^{n-1} \times q - a}{q - 1} = \frac{aq^n - a}{q - 1},$$

et enfin :

$$\boxed{S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.}$$

Telle est la formule générale que l'on utilise le plus couramment.

Remarque. — Nous n'avons fait aucune hypothèse sur la valeur de la raison. Si la progression est

1. Il y a lieu de remarquer que les expressions aq^{n-1} et $a(q^n - 1)$, qui dans un langage trop abrégé s'énoncent de la même façon, sont cependant tout à fait distinctes.

croissante, q est supérieur à 1, il en est de même de q^n, le numérateur et le dénominateur de l'expression de la somme sont tous deux positifs. Si la progression est décroissante, q est inférieur à 1, il en est de même de q^n; les deux termes de la fraction précédente sont négatifs, aussi préfère-t-on dans ce dernier cas utiliser la formule suivante :

$$S = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$$

que l'on aurait obtenue directement en retranchant plus haut non pas S de Sq, mais Sq de S. Il est clair d'ailleurs que ces deux formules sont identiques et qu'elles peuvent par suite être employées indifféremment pour toutes les progressions géométriques.

Applications numériques. — Soit à trouver la somme des 12 premiers termes de la progression :

$$\div\!\div\, 2 : 4 : 8 : \ldots$$

dont la raison est 2, on obtient :

$$S = 2(2^{12} - 1).$$

Soit à trouver la somme des 8 premiers termes de la progression :

$$\div\!\div\, 5 : \frac{10}{3} : \frac{20}{9} : \ldots$$

dont la raison est $\frac{2}{3}$. L'application de la deuxième expression de la somme nous donne :

$$S = \frac{5\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^8\right]}{1 - \frac{2}{3}},$$

$$S = 15\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^8\right].$$

195. — **Cas particuliers : progressions illimitées.**

1° Progressions croissantes. — Dans le cas où la raison q est supérieure à l'unité, la somme S devient évidemment de plus en plus grande à mesure que n devient plus grand et finit par dépasser tout nombre donné d'avance (par *dépasser toute limite*, comme on dit parfois).

2° Progressions décroissantes. — Limite de la somme des termes. — Au contraire, lorsque q est inférieur à 1, la somme grandit bien toujours (a et q étant positifs) puisque l'on ajoute toujours des termes positifs; mais elle ne dépasse pas un certain nombre $\frac{a}{1-q}$; elle diffère d'ailleurs d'autant moins de $\frac{a}{1-q}$ que n est plus grand, on peut calculer n de telle façon que la différence soit inférieure à tout nombre donné; on exprime cela en disant que la somme **tend** vers $\frac{a}{1-q}$, ou encore que $\frac{a}{1-q}$ est la **limite** de la somme quand n croît indéfiniment.

Voici comment on peut trouver cette limite; la formule :

$$S = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

peut s'écrire encore :

$$S = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

la fraction $\frac{a}{1-q}$ est indépendante de n; au contraire, la partie soustractive $\frac{aq^n}{1-q}$ varie avec n; son dénominateur reste constant, or q est inférieur à 1, et l'on peut démontrer que les puissances des nombres inférieurs à 1 diminuent indéfiniment quand l'exposant croît, et même qu'elles *tendent* vers zéro (au sens que nous avons indiqué plus haut); q^n tend donc vers zéro, et son produit par le nombre déterminé $\frac{a}{1-q}$ tend aussi vers zéro, par suite S tend vers la première partie $\frac{a}{1-q}$, puisque la partie soustractive tend vers zéro. On peut résumer cela dans la règle suivante.

Règle. — **La limite de la somme des termes d'une progression géométrique décroissante illimitée, quand n croît indéfiniment, est égale à la fraction $\frac{a}{1-q}$ qui exprime le quotient du premier terme par l'excès de l'unité sur la raison.**

Ainsi la somme des termes de la progression :

$$\div\!\div\, 8 : 4 : 2 : 1 : \frac{1}{2} : \ldots..$$

dont la raison est $\frac{1}{2}$, a pour limite :

$$\frac{8}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16.$$

196. — **Applications : fractions génératrices des fractions décimales périodiques.**

Problème 1. — Trouver la fraction génératrice de la

fraction décimale périodique simple :

$$0{,}737373\ldots$$

On peut écrire cette fraction décimale illimitée sous la forme :

$$\frac{73}{100}+\frac{73}{100^2}+\frac{73}{100^3}+\ldots$$

Les termes de cette somme forment une progression géométrique décroissante dont la raison est $\frac{1}{100}$ et le premier terme $\frac{73}{100}$. La limite de la somme des termes quand le nombre des périodes croît indéfiniment est :

$$\frac{\left(\frac{73}{100}\right)}{1-\frac{1}{100}}=\frac{73\times 100}{100\times 99}=\frac{73}{99}$$

$\frac{73}{99}$ est la fraction ordinaire dont la fraction décimale périodique illimitée diffère de moins en moins quand on prend un plus grand nombre de périodes. On démontre en arithmétique que la division de 73 par 99 à $\frac{1}{10^n}$ près en laissant n indéterminé reproduit bien en effet la fraction décimale périodique.

Problème 2. — **Calculer la fraction génératrice de la fraction décimale périodique mixte :**

$$0{,}35\,427\,427\,427\ldots$$

On peut écrire cette fraction décimale illimitée sous la forme :

$$\frac{35}{100}+\frac{427}{100\times 1000}+\frac{427}{100\times 1000^2}+\frac{427}{100\times 1000^3}+\ldots$$

Si l'on considère les termes de cette somme, sauf le premier :

$$\frac{427}{100\times 1\,000}+\frac{427}{100\times 1\,000^2}+\ldots$$

on voit qu'ils sont en progression géométrique décroissante et que la raison est $\frac{1}{1000}$; leur somme a, par analogie avec le cas précédent, pour limite :

$$\frac{427}{100\times 99}=\frac{427}{9\,900}$$

Si l'on ajoute le premier terme $\frac{35}{100}$, on obtient la limite de la somme des termes :

$$\frac{35}{100}+\frac{427}{9\,900}=\frac{35\times 99+427}{9\,900}$$

et en remarquant que $99=100-1$

$$\frac{35(100-1)+427}{9\,900}$$

ou enfin :

$$\frac{35\,427-35}{9\,900}.$$

C'est bien là l'expression de la fraction génératrice que l'on obtient par une autre méthode en arithmétique.

Nous donnerons en exercices d'autres problèmes d'application, portant plus particulièrement sur des questions de géométrie.

197. — **Insertion de moyens géométriques.**

Insérer m moyens géométriques entre deux nombres a et b, c'est former une progression géométrique dont a et b soient les termes extrêmes et renfermant m termes entre a et b. Si l'on désigne par q la raison de cette progression, on obtient aisément sa valeur comme suit :

$$b = a \times q^{m+1}$$

$$q^{m+1} = \frac{b}{a}$$

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}.$$

Règle. — **La raison de la progression obtenue par l'insertion de m moyens géométriques entre deux nombres s'obtient en prenant la racine du quotient de ces nombres dont l'indice est le nombre des moyens à insérer, plus un.**

On établirait par un raisonnement présentant quelque analogie avec celui du n° 191 le théorème suivant :

Théorème. — **Si l'on insère le même nombre de moyens entre les termes d'une progression géométrique, on obtient une nouvelle progression continue renfermant les termes de la première.**

Remarque. — On peut résumer les propriétés essentielles des progressions arithmétiques et géométriques dans le tableau comparatif suivant :

PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES	PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES
$l = a + (n-1)r$	$l = a \times q^{n-1}$
$d + g = a + l$	$d \times g = a \times l$
$S = (a+l)\frac{n}{2}$	$P = (al)^{\frac{n}{2}}$
$S = \frac{a+l}{2} \cdot n$	$S = \frac{lq - a}{q - 1}$
$S = [2a + (n-1)r]\frac{n}{2}$.	$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$.

On aurait aussi

$S = an + r\frac{(n-1)n}{2}$.	$P = a^n q^{\frac{(n-1)n}{2}}$.

Les dernières formules de chaque groupe expriment une relation entre quatre variables ; elles contiennent donc chacune la résolution de quatre problèmes distincts dans chacun desquels on se propose de calculer l'une des variables en fonction des trois autres supposées connues. Nous donnerons quelques-uns de ces problèmes en exercices.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE XVI

Progressions arithmétiques. — Progressions géométriques.

I. — Progressions arithmétiques.

306. — Trouver le quatrième terme d'une progression arithmétique dont le premier terme est 2 et la raison 5.

307. — Trouver le huitième terme d'une progression arithmétique dont le premier terme est 1 et la raison $\frac{2}{3}$.

308. — Trouver le sixième terme d'une progression arithmétique dont le premier terme est 2 et la raison 4.

309. — Trouver le septième terme d'une progression arithmétique dont le premier terme est 12 et la raison -5.

310. — Calculer le centième terme de la progression :

$$\div\, 3 \,.\, \frac{26}{7} \,.\, \frac{31}{7} \,.\, \ldots$$

311. — Calculer le vingtième terme de la progression :

$$\div -\frac{3}{4} \,.\, -1 \,.\, -\frac{5}{4} \,.\, \ldots$$

312. — Calculer la somme des 15 premiers termes de la progression :

$$\div\, 2 \,.\, 8 \,.\, 14 \,.\, 20 \,.\, \ldots$$

313. — Calculer la somme de 20 premiers termes de la progression :

$$\div\, 15 \,.\, 3 \,.\, \frac{3}{5} \,.\, \ldots$$

314. — Calculer la somme des 18 premiers termes de la progression :

$$\div 14 . 8 . 2 . \ldots$$

315. — Calculer la somme des 100 premiers nombres entiers de la suite naturelle.
316. — Calculer la somme des n premiers nombres pairs.
317. — Calculer la somme des nombres contenus dans une table de multiplication allant jusqu'à 9.
318. — Même problème pour une table de multiplication contenant les produits des 12 premiers nombres.
319. — Calculer la somme des 30 premiers nombres impairs.
320. — Insérer 3 moyens arithmétiques entre 10 et 50.
321. — Insérer 20 moyens arithmétiques entre 1,35 et 2,54.
322. — Insérer 4 moyens arithmétiques entre 15 et — 50.
323. — Calculer le premier terme d'une progression arithmétique dont la raison est 2 et le douzième terme 25.
324. — Calculer la raison d'une progression arithmétique de 50 termes, sachant que le premier terme est 1 et le dernier 148.
325. — Calculer la raison d'une progression arithmétique dont le premier terme est 5, le nombre des termes 20, et la somme des termes 670.

II. — Progressions géométriques [1].

326. — Calculer le cinquième terme d'une progression géométrique dont le premier terme est 4, et la raison 2.
327. — Trouver le huitième terme d'une progression géométrique dont le premier terme est 5 et la raison 2.
328. — Calculer le dixième terme de la progression :

$$\div\div 2 : \frac{6}{5} : \frac{18}{25} : \ldots$$

329. — Calculer le septième terme de la progression :

$$\div\div 3 : 30 : 300 : \ldots$$

330. — Calculer le huitième terme de la progression :

$$\div\div 200 : 2 : 0{,}02 : \ldots$$

1. Certains exercices sur les progressions géométriques, notamment les nos 331 à 339, exigent l'emploi des logarithmes, qui sera exposé dans le chapitre suivant.

331. — Calculer la somme des 6 premiers termes de la progression :

$$\div\div 7 : 14 : \ldots$$

332. — Calculer la somme des 19 premiers termes de la progression :

$$\div\div 2 : \frac{6}{5} : \frac{18}{25}.$$

333. — Calculer la somme des 12 premiers termes de la progression :

$$\div\div \frac{3}{7} : 1 : \frac{7}{3}.$$

334. — On raconte que l'inventeur du jeu des échecs demanda comme récompense : 1 grain de blé pour la première case de l'échiquier, 2 grains pour la seconde, 4 grains pour la troisième, et ainsi de suite en doublant toujours jusqu'à la soixante-quatrième case. Combien de grains de blé aurait-il fallu lui donner pour cette soixante-quatrième case?
335. — Insérer 3 moyens géométriques entre 1 et 10 000.
336. — Insérer 4 moyens géométriques entre 2 et 64.
337. — Insérer 7 moyens géométriques entre 1 et 2.
338. — Insérer 6 moyens géométriques entre 10 et 3.
339. — Calculer le premier terme d'une progression géométrique de 8 termes dont la raison est 2 et la somme des termes 768.
340. — On joint les milieux A'B'C' d'un triangle ABC dont on donne le périmètre $2p$ et l'aire a^2; on opère sur A'B'C' comme sur ABC et sur le nouveau triangle A"B"C" comme sur A'B'C', et cela indéfiniment. Calculer la limite de la somme des périmètres de tous ces triangles; calculer la limite de la somme de leurs aires.
341. — Étant donnée la fraction périodique :

$$0{,}3253253 25\ldots.$$

on demande de l'écrire sous la forme d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{1\,000}$, de faire la somme des n premiers termes de cette progression et d'examiner ce que devient cette somme lorsque n augmente indéfiniment.
342. — Même question pour les fractions :

$$0{,}30343034 3034\ldots..$$
$$0{,}2563173173 17\ldots..$$

343. — Soient ABC un triangle, AH la perpendiculaire abaissée de A sur BC, H_1K_1 la perpendiculaire abaissée de H_1 sur AC, K_1H_2 la perpendiculaire abaissée de K_1 sur BC, H_2K_2 la perpendiculaire abaissée de H_2 sur AC, etc. Calculer la somme de ces perpendiculaires après n opérations. Que devient-elle lorsque n augmente indéfiniment? On fera le calcul en supposant le triangle équilatéral et son côté a égal à 2; on prendra successivement $n = 4$, $n = 10$, $n = 1\,000$, $n = 1\,000\,000$.

344. — Dans un cercle de rayon R on inscrit un triangle équilatéral; dans ce triangle on inscrit un cercle, puis dans ce cercle un nouveau triangle équilatéral, et ainsi de suite indéfiniment.

On demande de calculer la somme des surfaces des triangles, la somme des périmètres des triangles. Application : $R = 1^m$.

345. — On a des objets cylindriques égaux (morceaux de bois, tuyaux en terre cuite, etc.) que l'on empile de la manière suivante. On en place d'abord un certain nombre à côté les uns des autres sur un plan horizontal, puis on forme une seconde couche horizontale en mettant les objets dans les intervalles qui se trouvent entre ceux de la première, et ainsi de suite, de sorte que chaque couche horizontale renferme un objet de moins que la précédente. Combien y a-t-il d'objets dans la pile, sachant qu'il y a 12 couches horizontales et que la couche supérieure renferme 42 objets?

346. — On a des objets sphériques égaux; on les dispose tout d'abord dans un plan horizontal en forme de triangle équilatéral, en en plaçant 5 sur une ligne, puis 4 sur une ligne parallèle, de manière que chacun touche deux des précédents, puis 3 sur une nouvelle ligne parallèle, puis 2, puis 1. On pose ensuite des objets sur les précédents, de manière que chacun d'eux repose sur 3 des précédents; on obtient ainsi un nouveau triangle équilatéral dont chaque côté renferme 4 objets au lieu de 5 et l'on continue de même jusqu'à ce que l'on ait terminé la pyramide triangulaire par un objet unique placé au sommet. Quel sera le nombre total d'objets employés? Quel serait-il si le côté du triangle de base renfermait 45 objets?

CHAPITRE XVII

LOGARITHMES

198. — **Définition.**

Considérons deux progressions croissantes, l'une arithmétique **commençant par zéro**, l'autre géométrique **commençant par 1**; si l'on désigne par r la raison de la progression arithmétique et par q la raison de la progression géométrique, ces deux progressions peuvent s'écrire :

$$\div\ 0\ .\ r\ .\ 2r\ .\ 3r\ .\ 4r\ \ldots\ldots\ nr$$
$$\because\ 1 : q : q^2 : q^3 : q^4\ \ldots\ldots\ q^n.$$

On dit que chaque terme de la progression arithmétique est le **logarithme** du terme de même rang de la progression géométrique. Ainsi :

$3r$ est le logarithme de q^3,
$4r$ est le logarithme de q^4,
nr est le logarithme de q^n.

L'ensemble des deux progressions constitue un **système de logarithmes**. La seule condition à réaliser pour constituer un système de logarithmes est que la progression arithmétique commence par zéro et que la progression géométrique commence par l'unité; on en tire les remarques suivantes :

Remarque 1. — Il existe une infinité de systèmes de logarithmes puisque la raison de chacune des progressions est arbitraire.

Dans le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \div\ 0\ .\ 1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ \ldots \\ \div\div\ 1 : 2 : 2^2 : 2^3 : 2^4 : 2^5 \ldots \end{array}\right.$$

le logarithme de 2^3 ou 8 est 3.

Dans le système :

$$\begin{array}{l} \div\ 0\ .\ 3\ .\ 6\ .\ 9\ .\ 12 \\ \div\div\ 1 : 2 : 2^2 : 2^3 : 2^4 \end{array}$$

le logarithme de 2^3 ou 8 est 9.

Nous étudierons plus loin tout particulièrement les propriétés du système de logarithmes suivant :

$$\begin{array}{l} \div\ 0\ .\ 1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ \ldots \\ \div\div\ 1 : 10 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5 \ldots \end{array}$$

que l'on appelle système des **logarithmes vulgaires** ou logarithmes **décimaux**, ou encore **logarithmes de Briggs** [1].

Remarque 2. — On appelle **base** d'un système de logarithmes le nombre dont le logarithme est égal à l'unité.

Ainsi, dans le premier système que nous avons écrit, la **base** est 2; dans le système des logarithmes vulgaires ou décimaux, la base est 10.

On peut remarquer que, par définition, le logarithme de 1 est dans tous les systèmes égal à zéro.

1. L'invention des logarithmes est due à *Neper*, baron écossais (1550 à 1617). *Briggs*, son contemporain et ami, professeur de mathématiques à Londres, publia en 1624 les premières tables de logarithmes vulgaires.

Remarque 3. — **Propriété remarquable des logarithmes.** — La considération du système général de logarithmes :

$$\begin{array}{l} \div\ 0\ .\ r\ .\ 2r\ .\ 3r\ \ldots hr\ \ldots .\ nr. \\ \div\div\ 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots q^h : \ldots . q^n. \end{array}$$

nous permet d'énoncer cette propriété remarquable :

Chaque terme de la progression géométrique a pour logarithme un nombre égal au produit de son exposant par la raison de la progression arithmétique.

On écrit :

$$\log q^n = nr,$$

ce qui s'énonce logarithme de q^n égale nr.

Cette remarque importante nous permettra d'établir aisément les propriétés essentielles des logarithmes.

199. — **Extension de la définition des logarithmes.**

D'après la définition des logarithmes, seuls les termes de la progression géométrique fondamentale ont des logarithmes. Ainsi dans le système des logarithmes vulgaires :

$$\begin{array}{l} \div\ 0\ .\ 1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4 \\ \div\div\ 1 : 10 : 10^2 : 10^3 : 10^4 \end{array}$$

les puissances de 10 auraient seules des logarithmes. Mais on a étendu la notion de logarithmes à tous les nombres supérieurs à 1 de la façon suivante : Supposons que l'on insère m moyens entre deux termes consécutifs q^n et q^{n+1} de la progression géométrique et le même nombre de moyens entre les termes correspondants nr et $(n + 1)r$ de la progression arithmétique, on forme ainsi deux progressions continues constituant un système de logarithmes dans lequel les logarithmes des termes de la progression géométrique donnée sont les mêmes que dans le premier système et qui contient cependant beaucoup plus de nombres ayant des logarithmes.

On démontre que l'on peut insérer entre les termes de la progression géométrique un nombre de moyens suffisant pour que la différence de deux termes consécutifs soit aussi petite que l'on voudra. Ceci posé, soit N un nombre quelconque supérieur à 1, *ou bien* ce nombre est l'un des termes de la progression géométrique et, dans ce cas, son logarithme est immédiatement connu; *ou bien* N ne figure pas dans la progression et, dans ce cas, on insère un certain nombre de moyens suffisant pour que N soit un des moyens insérés, ou du moins qu'il soit si voisin de l'un de ces moyens q'^k pour qu'on puisse pratiquement le confondre avec lui et prendre pour logarithme de N le logarithme de q'^k [1].

On aurait pu faire observer plus simplement que dans un système de logarithmes, si l'on prend pour r un nombre très petit et pour q un nombre très voisin de 1, les termes consécutifs des deux progressions diffèrent très peu, de telle manière que tout nombre peut, avec une approximation suffisante, être considéré comme compris dans ces deux progressions.

1. Nous préciserons en étudiant les logarithmes vulgaires ce qu'il faut entendre par logarithmes à 2, 3, 4, 5... n décimales.

200. — Logarithmes des nombres inférieurs à 1.

On a étendu encore la notion de logarithmes aux nombres inférieurs à 1 en supposant prolongées vers la gauche les progressions du système de logarithmes :

$$\ldots -3r \;.\; -2r \;.\; -r \;.\; 0 \;.\; r \;.\; 2r \;.\; 3r \;.\; 4r \ldots\ldots nr$$

$$\ldots \quad \frac{1}{q^3} \quad \frac{1}{q^2} \quad \frac{1}{q} \;.\; 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 \ldots\ldots q^n.$$

Ainsi le logarithme de $\frac{1}{q^2}$ est $-2r$; le logarithme de $\frac{1}{q^3}$ est $-3r$; le logarithme de $\frac{1}{q^n}$ est $-nr$.

Ce qui permet d'énoncer la remarque suivante.

Remarque. — **Tous les nombres positifs ont des logarithmes dans un système donné; ces logarithmes sont positifs si le nombre considéré est supérieur à 1; ils sont négatifs si le nombre est inférieur à 1. Les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes.**

I. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES LOGARITHMES

Nous allons établir des propriétés qui appartiennent indifféremment à tous les systèmes de logarithmes; nous établirons dans une partie spéciale les propriétés particulières des logarithmes vulgaires.

Théorème 1.

Le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs.

Soient, en effet, les deux nombres A et B. Si r et

q sont les deux raisons du système de logarithmes employé, A et B peuvent être exprimés sous la forme :

$$A = q^k; \qquad B = q^{k'},$$

et l'on a :

$$\log A = kr \quad \log B = k'r.$$

D'autre part, le produit :

$$AB = q^k \times q^{k'} = q^{k+k'}.$$

Or $q^{k+k'}$ a pour logarithme $(k + k')\,r$, ce que l'on peut exprimer en écrivant :

$$\log AB = (k + k')r.$$

Or, on a :

$$(k + k')r = kr + k'r$$

c'est-à-dire :

$$\log AB = \log A + \log B.$$

On généraliserait aisément cette propriété au cas d'un produit de plusieurs facteurs.

Ainsi :

$$\log 3\pi Rh = \log 3 + \log \pi + \log R + \log h.$$

Théorème 2.

Le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre multiplié par l'exposant de la puissance.

$$\log A^n = \log A \times n = n \log A.$$

En effet, A^n est un produit de n facteurs égaux à A :

$$A^n = \underbrace{A \times A \times A \,\ldots\ldots \times A}_{n}$$

le théorème précédent permet d'écrire :

$$\log A^n = \underbrace{\log A + \log A \,\ldots\ldots + \log A}_{n}.$$

$$\log A^n = \log A \times n = n \log A\,[1].$$

Ainsi :

$$\log 3^5 = 5 \log 3$$
$$\log R^2 = 2 \log R$$
$$\log 4\pi R^2 = \log 4 + \log \pi + 2 \log R.$$

Théorème 3.

Le logarithme du quotient de deux nombres est égal au logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur.

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B.$$

On pourrait obtenir ce théorème comme conséquence du théorème 1 ; l'on peut aussi en donner une démonstration directe. Dans le système de logarithmes considéré, on peut écrire :

$$A = q^k; \qquad B = q^{k'}$$
$$\frac{A}{B} = \frac{q^k}{q^{k'}} = q^{k-k'}.$$

Or $q^{k-k'}$ a pour logarithme $(k - k')\,r$ et :

$$(k - k')r = kr - k'r;$$

si l'on remarque que kr est le logarithme de q^k ou A, et $k'r$ le logarithme de $q^{k'}$ ou B, on a :

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B.$$

1. Il est préférable d'employer la forme $n \log A$ car l'expression $\log A \times n$ pourrait amener des confusions, on pourrait croire parfois que cela veut dire $\log (A \times n)$, ce qui est tout différent.

Ainsi :

$$\log \frac{2}{3} = \log 2 - \log 3$$

$$\log \frac{a^2}{R^2} = 2 \log a - 2 \log R$$

$$\log \frac{\pi R^2 h}{2a} = \log \pi + 2 \log R + \log h - \log 2 - \log a.$$

Théorème 4.

Le logarithme d'une racine d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre divisé par l'indice de la racine.

$$\log \sqrt[n]{A} = \frac{\log A}{n} = \frac{1}{n} \log A$$

En effet, désignons par a la racine n^e de A, on a par définition :

$$A = a^n$$
$$\log A = \log a^n = n \log a$$
$$\log a = \frac{\log A}{n}$$

ce qui s'exprime aussi :

$$\log \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log A.$$

Ainsi :

$$\log \sqrt{15} = \frac{1}{2} \log 15$$

$$\log \sqrt[3]{7} = \frac{1}{3} \log 7$$

$$\log \sqrt{\pi R a} = \frac{1}{2} (\log \pi + \log R + \log a).$$

Remarque. — Les théorèmes précédents permettent d'écrire l'*expression logarithmique* d'une formule donnée.

Si l'on donne :

$$x = \frac{3\pi \times \sqrt[3]{0{,}75 \times 13^5}}{\sqrt{23 \times \frac{1}{76^2}}}$$

on a :

$$\log x = \log 3 + \log \pi + \frac{1}{3}(\log 0{,}75 + 5 \log 13)$$
$$- \frac{1}{2}(\log 23 - 2 \log 76).$$

201. — **Remarque importante : avantages des logarithmes.**

Remarquons que les opérations sur les nombres, si on les ramène aux opérations sur les logarithmes, sont ramenées à des opérations d'un ordre moins élevé :

une *multiplication* est remplacée par une *addition ;*

une *élévation à une puissance* est remplacée par une *multiplication ;*

une *division* est remplacée par une *soustraction ;*

une *extraction de racine* est remplacée par une *division.*

S'il était possible d'obtenir rapidement le logarithme d'un nombre donné, et inversement d'obtenir le nombre dont le logarithme est donné, toutes les opérations seraient diminuées de difficulté grâce aux logarithmes. Nous allons voir comment les *tables de logarithmes* remplissent ce rôle, lorsque l'on connaît les règles permettant de les utiliser.

II. — LOGARITHMES VULGAIRES OU DÉCIMAUX

Le système des logarithmes vulgaires, à base 10, est le suivant :

$$\div\, 0\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots.\, n.$$
$$\div\!\div\, 1 : 10 : 10^2 : 10^3 : 10^4 \ldots.\, 10^n.$$

Propriété fondamentale : les puissances de 10 ont pour logarithme leur exposant.

$$\log 10^2 = 2$$
$$\log 10^4 = 4$$
$$\log 10^n = n.$$

202. — **Caractéristique : partie décimale d'un logarithme.**

Les puissances de 10 sont les seuls nombres ayant pour logarithmes des nombres entiers. Si l'on insère des moyens comme il l'a été indiqué plus haut, et que l'on prenne pour logarithmes des nombres compris entre ces puissances de 10 les termes des nouvelles progressions arithmétiques qui leur correspondent, on ne peut donc obtenir que des *nombres décimaux;* les logarithmes des nombres autres que les puissances de 10 sont donc des nombres décimaux comprenant une *partie entière* que l'on appelle *caractéristique* et une *partie décimale.*

En réalité, l'insertion de moyens entre les puissances de 10 ne donne que des nombres incommensurables : soient q^k et q^{k+1} deux de ces termes successifs et soient kr et $(k+1)r$ leurs logarithmes; si un nombre proposé A est compris entre

q^k et q^{k+1}, on dira que le logarithme de A est compris entre kr et $(k+1)r$. Si l'on suppose que le nombre de moyens insérés soit très grand et que kr et $(k+1)r$ soient deux nombres décimaux tels que :

$$3{,}\underline{75\,234}\,135$$

et :

$$3{,}\underline{75\,234}\,423$$

ayant 5 décimales communes, on dit que 3,75234 est le *logarithme de* A *à 5 décimales.* Nous nous servirons exclusivement de ces logarithmes à 5 décimales[1].

203. — **Recherche du logarithme d'un nombre.**

Cette recherche se fait en deux temps : 1° recherche de la caractéristique; 2° recherche de la partie décimale.

I. **Recherche de la caractéristique.** — 1° **Caractéristiques positives des logarithmes des nombres supérieurs à** 1.

1 a pour logarithme zéro, tous les nombres supérieurs à 1 ont des logarithmes positifs. On voit que les nombres compris entre 1 et 10 ont leurs logarithmes compris entre 0 et 1, la *caractéristique est zéro;* les nombres compris entre 10 et 100 ont

1. Nous n'insistons pas sur ce fait qu'on peut appliquer à ces logarithmes approchés les règles de calcul des logarithmes définis par le système des progressions. Il suffit de savoir que les calculs comportent de ce fait des erreurs qui portent seulement sur la dernière décimale et sont par suite négligeables dans les questions usuelles. Pour les calculs de haute précision, par exemple en astronomie, on emploie des logarithmes à plus de 5 décimales, de manière à avoir toujours le nombre de décimales exactes que comporte la nature de la question.

leurs logarithmes compris entre 1 et 2, la *caractéristique est* 1, on verrait de même que les nombres compris entre 100 et 1000 ont pour caractéristique 2, et d'une manière générale que les nombres compris entre 10^n et 10^{n+1} ont pour caractéristique n. Si l'on remarque que 10^n est le plus petit nombre de $n+1$ chiffres et 10^{n+1} le plus petit nombre de $n+2$ chiffres, on voit que les nombres qui ont n pour caractéristiques sont les nombres de $n+1$ chiffres à leur partie entière, d'où la règle.

Règle. — **La caractéristique positive du logarithme d'un nombre supérieur à 1 contient autant d'unités qu'il y a de chiffres moins un à la partie entière de ce nombre.**

On aurait pu établir cette règle par la démonstration suivante : soit A un nombre de 3 chiffres, il est compris entre 100 et 1000, on a :

$$100 < A < 1\,000$$

ou :

$$10^2 < A < 10^3$$

les logarithmes sont dans le même ordre de grandeur que les nombres :

$$\log 10^2 < \log A < \log 10^3$$
$$2 < \log A < 3$$

le log A étant compris entre 2 et 3 a 2 pour caractéristique.

Ainsi :

$$\log 78 = 1, \ldots.$$
$$\log 3\,075 = 3, \ldots.$$
$$\log 3,45 = 0, \ldots.$$

2° Caractéristiques négatives des logarithmes des nombres inférieurs à 1.

Les logarithmes des nombres inférieurs à 1 sont des nombres négatifs. Les nombres compris entre $\frac{1}{10}$ et 1 ont leurs logarithmes compris entre -1 et 0; les nombres compris entre $\frac{1}{100}$ et $\frac{1}{10}$ ont leurs logarithmes compris entre -2 et -1, etc.

Dans la pratique, on n'emploie pas ces logarithmes sous la forme de nombres négatifs, on les écrit de telle sorte **que la caractéristique seule soit négative, la partie décimale étant toujours positive.** Soit, par exemple, le logarithme :

$$-2,71438$$

on peut l'écrire :

$$-2-0,71438$$

ou encore, en ajoutant d'une part -1 et d'autre part $+1$:

$$-3+(1-0,71438)$$
$$-3+0,28562.$$

Cette dernière forme est notée comme suit :

$$\bar{3},28562$$

le signe — est placé sur la caractéristique pour bien marquer qu'elle seule est négative.

Cette forme du logarithme d'un nombre s'obtient aisément grâce à quelques remarques qu'un exemple nous permettra de préciser.

Soit à rechercher le logarithme du nombre 0,00341 ; nous pouvons écrire :

$$0,00341 = \frac{3,41}{1\,000}.$$

Donc :

$$\log 0{,}00341 = \log 3{,}41 - \log 1\,000$$
$$= \log 3{,}41 - 3$$

or, 3,41 étant compris entre 1 et 10, son logarithme a pour caractéristique zéro, on obtient, en consultait les tables :

$$\log 3{,}41 = 0{,}53275$$

on peut écrire par suite :

$$\log 0{,}00341 = 0{,}53275 - 3$$

ou encore :

$$\bar{3}{,}53275$$

en utilisant la notation indiquée plus haut, et qui signifie :

$$-3 + 0{,}53275$$

la partie décimale étant positive.

Remarquons qu'un nombre inférieur à 1 étant donné, la puissance de 10 par laquelle il faut multiplier ce nombre pour obtenir un nombre compris entre 1 et 10, a pour exposant le rang **du premier chiffre significatif de ce nombre après la virgule**; or l'exposant de cette puissance de 10 est précisément la caractéristique négative du logarithme de ce nombre, d'où la règle.

Règle. — **La caractéristique négative du logarithme d'un nombre inférieur à 1 renferme un nombre d'unités égal au rang du premier chiffre significatif de ce nombre après la virgule.**

Ainsi :

$$\log 0{,}74 = \bar{1}, \ldots.$$
$$\log 0{,}00654 = \bar{3}, \ldots.$$
$$\log 0{,}02 = \bar{2}, \ldots.$$

II. **Recherche de la partie décimale. — Tables de logarithmes.** — Le théorème suivant permet de simplifier cette recherche.

Théorème.

On ne modifie pas la partie décimale du logarithme d'un nombre en multipliant ce nombre par une puissance de 10, la caractéristique seule est augmentée de l'exposant de cette puissance.

Soit en effet un nombre A tel que l'on ait :

$$\log A = 2{,}74248.$$

Si l'on multiplie A par 10^5, on obtient :

$$\log (A \times 10^5) = \log A + \log 10^5$$
$$\log (A \times 10^5) = \log A + 5$$

or 5 exposant de la puissance de 10 est un entier dont l'addition au logarithme de A ne modifie pas la partie décimale :

$$\log (A \times 10^5) = 7{,}\underline{74248}.$$

204. — **Conséquence.**

Les logarithmes de deux nombres composés des mêmes chiffres significatifs se succédant dans le même ordre ont même partie décimale, ils ne diffèrent que par la caractéristique.

Ainsi les logarithmes des nombres :

$$3{,}74;\ 37{,}4;\ 37\,400;\ 0{,}0374$$

ont même partie décimale (leurs caractéristiques sont respectivement 0, 1, 4, $\bar{2}$).

205. — **Tables de logarithmes à 5 décimales.**

La caractéristique du logarithme d'un nombre s'écrit rapidement à la vue de ce nombre : quant à la **partie décimale**, elle est contenue dans des **tables de logarithmes**; nous indiquerons l'usage des tables à 5 décimales en prenant comme exemple les tables à 5 décimales d'après J. de Lalande, par J. Dupuis[1].

Pour trouver la partie décimale du logarithme d'un nombre, on ne s'occupe ni de la virgule si le nombre est décimal, ni des zéros qu'un nombre entier peut avoir à sa droite; on prend le nombre compris entre les chiffres significatifs extrêmes avec ces chiffres. Ainsi

pour 0,704 , on prendra 704
pour 35 000, on prendra 35
pour 0,0037405 on prendra 37 405.

Nous diviserons donc notre recherche en trois cas.

Premier cas. — **Nombres de 1 à 100.** — Une table spéciale donne par simple lecture, en regard du nombre, la partie décimale de son logarithme.

Ainsi, dans le tableau ci-contre (page 363), on voit immédiatement que les parties décimales sont les suivantes :

pour 2 . . . . 30 103
pour 13 . . . . 11 394
pour 96 . . . . 98 227.

Ainsi :

$$\log 2\,000 = 3{,}30103$$
$$\log 0{,}02 = \bar{2}{,}30103$$
$$\log 960 = 2{,}98227$$
$$\log 9{,}6 = 0{,}98227.$$

1. Librairie Hachette et C^ie^.

I. Logarithmes des nombres de 1 à 100.

N	Log.	N	Log.	N	Log.	N	Log.	N	Log.
01	00 000	**21**	32 222	**41**	61 278	**61**	78 533	**81**	90 849
2	30 103	2	34 242	2	62 325	2	79 239	2	91 381
3	47 712	3	36 173	3	63 347	3	79 934	3	91 908
4	60 206	4	38 021	4	64 345	4	80 618	4	92 428
5	69 897	5	39 794	5	65 321	5	81 291	5	92 942
6	77 815	6	41 497	6	66 276	6	81 954	6	93 450
7	84 510	7	43 136	7	67 210	7	82 607	7	93 952
8	90 309	8	44 716	8	68 124	8	83 251	8	94 448
9	95 424	9	46 240	9	69 020	9	83 885	9	94 939
11	04 139	**31**	49 136	**51**	70 757	**71**	85 126	**91**	95 904
2	07 918	2	50 515	2	71 600	2	85 733	2	96 379
3	11 394	3	51 851	3	72 428	3	86 332	3	96 848
4	14 613	4	53 148	4	73 239	4	86 923	4	97 313
5	17 609	5	54 407	5	74 036	5	87 506	5	97 772
6	20 412	6	55 630	6	74 819	6	88 081	6	98 227
7	23 045	7	56 820	7	75 587	7	88 649	7	98 677
8	25 527	8	57 978	8	76 343	8	89 209	8	99 123
9	27 875	9	59 106	9	77 085	9	89 763	9	99 564

Extrait des *Tables de Logarithmes à cinq décimales*, d'après J. de Lalande, par J. Dupuis (Librairie Hachette et C^ie^).

Deuxième cas. — **Nombres de 100 à 10 000.** — Les parties décimales sont contenues dans des tables à double entrée dont le tableau suivant (page 364) montre la disposition.

Soit à trouver le logarithme du nombre 3,827, nous prendrons le nombre 3 827, puis dans la première colonne des *nombres*, intitulée N, nous prendrons 382; la partie décimale se trouve au croisement de la colonne horizontale passant par 382 et de la colonne verticale ayant en tête 7, ou plutôt, on ne trouve au croisement que les 3 derniers

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
370	56 820	832	844	855	867	879	891	902	914	926
1	937	949	961	972	984	996	*008	*019	*031	*043
2	57 054	066	078	089	101	113	124	136	148	159
3	171	183	194	206	217	229	241	252	264	276
4	287	299	310	322	334	345	357	368	380	392
5	403	415	426	438	449	461	473	484	496	507
6	519	530	542	553	565	576	588	600	611	623
7	634	646	657	669	680	692	703	715	726	738
8	749	761	772	784	795	807	818	830	841	852
9	864	875	887	898	910	921	933	944	955	967
380	978	990	*001	*013	*024	*035	*047	*058	*070	*081
1	58 092	104	115	127	138	149	161	172	184	195
2	206	218	229	240	252	263	274	286	297	309
3	320	331	343	354	365	377	388	399	410	422
4	433	444	456	467	478	490	501	512	524	535
5	546	557	569	580	591	602	614	625	636	647
6	659	670	681	692	704	715	726	737	749	760
7	771	782	794	805	816	827	838	850	861	872
8	883	894	906	917	928	939	950	961	973	984
9	995	*006	*017	*028	*040	*051	*062	*073	*084	*095
390	59 106	118	129	140	151	162	173	184	195	207
1	218	229	240	251	262	273	284	295	306	318
2	329	340	351	362	373	384	395	406	417	428
3	439	450	461	472	483	494	506	517	528	539
4	550	561	572	583	594	605	616	627	638	649
5	660	671	682	693	704	715	726	737	748	759
6	770	780	791	802	813	824	835	846	857	868
7	879	890	901	912	923	934	945	956	966	977
8	988	999	*010	*021	*032	*043	*054	*065	*076	*086
9	60 097	108	119	130	141	152	163	173	184	195
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Extrait des *Tables de Logarithmes à cinq décimales*, d'après J. de LALANDE, par J. DUPUIS (Librairie Hachette et Cie).

chiffres de la partie décimale, les deux premiers étant marqués une fois pour toutes dans la colonne ayant en tête o afin d'abréger la table. Nous aurons pour le nombre 3 827 la partie décimale

58 286

On a donc :

$$\log 3{,}827 = 0{,}58286.$$

On aurait de même pour 3 960, en prenant pour colonne horizontale 396 et pour colonne verticale o, la partie décimale 59 770, d'où :

$$\log 0{,}0396 = \bar{2}{,}59770.$$

Remarque. — Certaines rangées sont précédées d'un astérisque. Ainsi les trois derniers chiffres du log de 3 802 s'écrivent *001, les trois derniers chiffres des log de 3,803, 3,804 s'écrivent respectivement *013, *024, cela veut dire que les deux premiers chiffres de la partie décimale ne doivent pas être ceux qu'indique la partie correspondante de la colonne zéro, mais les deux chiffres de la partie suivante. Ainsi :

$$\log 3\,803 = 3{,}58013,$$

et non pas 57 013, comme on l'écrirait sans l'astérisque.

Troisième cas. — **Nombres supérieurs à 10 000.** — Soit à trouver le logarithme du nombre 43,748 : la partie décimale est la même que celle du nombre 4 374,8.

On cherche la partie décimale du log de 4 374 qui est 64 088, puis l'on admet **la proportionnalité des logarithmes aux nombres** en opérant comme suit : la différence entre le log de 4 374 et de 4 375 ou différence tabulaire est $64\,098 - 64\,088 = 10$. Si pour une unité la différence des logarithmes est de 10, pour 0,8, la différence doit être $10 \times 0{,}8 = 8$; la partie décimale du logarithme cherché est donc :

$$64\,088 + 8 = 64\,096.$$

On dispose généralement le calcul comme il suit, en désignant par D la différence tabulaire :

	Pour 4 374		64 088
$D = 10$	Pour 0,8	$10 \times 0{,}8$	8
	Pour 43 748		64 096

donc :

$$\log 43{,}748 = 1{,}64096.$$

Si le nombre à ajouter au logarithme contient une partie décimale, on la supprime en augmentant de 1 ses unités si cette partie décimale atteint ou dépasse 0,5.

206. — **Problème inverse. Étant donné le logarithme d'un nombre, trouver ce nombre.**

La partie décimale renseigne sur les chiffres qui composent ce nombre; la caractéristique indique le nombre des chiffres de la partie entière.

1° Le logarithme est dans la table. — Il suffit de faire sur la table le chemin inverse de celui qui aurait donné ce logarithme en partant du nombre.

Soit, par exemple :

$$\log x = \bar{2},65734.$$

on constate que le nombre 4 543 aurait conduit à ce logarithme, donc :

$$x = 0{,}04543$$

puisque la caractéristique est $\bar{2}$.

2° Le logarithme n'est pas dans la table. — Soit à trouver le nombre x tel que :

$$x = 2{,}82954$$

On cherche dans la table le logarithme le plus voisin, c'est 82 950, puis on admet la **proportionnalité des nombres aux logarithmes** en opérant comme suit : au logarithme 82 950 correspondrait le nombre 6 753, le logarithme suivant est 82 956, la **différence tabulaire** est donc 6; or pour une différence de log de 6, la différence des nombres est de 1 unité pour une différence de logarithmes de 1, elle serait $\frac{1}{6}$, et pour une différence logarithmique de $82\,954 - 82\,950 = 4$ elle est $\frac{4}{6}$, soit 0,66 par défaut; le nombre est donc 6 753,66 ou 675 366, donc

$$x = 675{,}366$$

puisque la caractéristique est 2, c'est qu'en effet le nombre a $2 + 1 = 3$ chiffres à sa partie entière.

On dispose généralement le calcul de la façon suivante :

Pour 82 950	6 753
diff. tab. 6	
diff. log. 4	
Pour 4, $\frac{4}{6}$	0,66
Pour 82 954	675 366
Pour 2,82954	675,366.

207. — **Opérations sur les logarithmes.**

Dans les calculs, les logarithmes interviennent soit comme termes d'une addition, d'une soustraction, soit comme facteurs d'un produit, soit comme dividendes d'une division; nous présenterons quelques remarques sur ces calculs.

1° Addition et multiplication. — Ces opérations se font sans difficulté à condition de ne jamais oublier que, dans le cas des logarithmes à caractéristique négative, **la partie décimale est toujours positive.**

Soit à additionner les logarithmes :

$$0{,}47312,\ \bar{2}{,}14103,\ 3{,}82592,\ \bar{1}{,}07119$$

on dispose comme suit :

$$\begin{array}{r} 0{,}47312 \\ \bar{2}{,}14103 \\ 3{,}82592 \\ \bar{1}{,}07119 \\ \hline 1{,}51126 \end{array}$$

La somme des parties décimales donne 51 126 avec une retenue de 1, l'addition des caractéristiques est la suivante :

$$1 - 2 + 3 - 1 = 1.$$

Soit à effectuer le produit du logarithme $\bar{2}{,}47308$ par 5, on a :

$$\bar{2}{,}47308 \times 5 = \bar{8}{,}36540$$

le produit de la partie décimale donne 36 540 avec une retenue de 2. On achève en disant $-2 \times 5 = -10$; $-10 + 2 = -8$.

2° Soustraction. — Cologarithmes. — La soustraction n'est pas employée dans les calculs logarithmiques, **on la remplace par l'addition**, grâce à la notion de **cologarithme.**

Soit à retrancher d'un nombre A le logarithme 2,47523, du nombre a.

$$\begin{aligned} A - 2{,}47523 &= A - 3 + 0{,}52477 \\ &= A + \bar{3}{,}52477 \end{aligned}$$

le nombre $\bar{3}{,}52477$ est appelé **cologarithme** du nombre a dont 2,47523 est le logarithme. On voit que le cologarithme est au sens algébrique le **nombre opposé** du logarithme; on a en effet :

$$2{,}47523 + \bar{3}{,}52477 = 0.$$

Ainsi se confirme la règle de la soustraction : **pour retrancher un nombre, il suffit d'ajouter le nombre opposé.**

On aurait de même :

$$A - 3{,}56470 = A + 2{,}43530$$

ou encore :

$$A - 0{,}62803 = A + \bar{1}{,}37197.$$

Règle.

Retrancher un logarithme revient à ajouter le cologarithme correspondant. Pratiquement, le cologarithme s'obtient en prenant pour caractéristique la caractéristique du logarithme proposé à laquelle on ajoute algébriquement une unité, changée de signe, et pour partie décimale, le complément de sa partie décimale.

On sait que ce complément s'écrit rapidement en complétant tous les chiffres en 9, sauf le dernier chiffre significatif à droite que l'on complète en 10.

Si l'on a :

$$\log a = \bar{2}{,}72450$$

on a :

$$\text{Colog } a = 1{,}27550.$$

3° *Division*. — Si la caractéristique est positive ou nulle, il n'y a rien de particulier à indiquer, c'est une division de nombres décimaux.

Soit à diviser par 5 le logarithme $\bar{1},87578$.

On écrit :

$$\frac{\bar{1},87578}{5} = \frac{-1-0,87578}{5} = \frac{-5+4,87578}{5}$$

$$\frac{\bar{1},87578}{5} = -1+0,97516 = \bar{1},97516$$

par excès.

Règle.

Pour diviser par un nombre un logarithme à caractéristique négative, on ajoute à la valeur absolue de la caractéristique le nombre d'unités juste suffisant pour obtenir un multiple du diviseur (ce qui revient à retrancher ce nombre d'unités); **mais il y a lieu d'ajouter ce nombre d'unités à gauche de la partie décimale avant d'effectuer la division algébrique par le diviseur de la somme de la nouvelle caractéristique et de la partie décimale modifiée.**

III. — CALCULS LOGARITHMIQUES

Nous allons donner quelques exemples de calculs logarithmiques en vue surtout de donner aux élèves des modèles de bonne disposition des calculs. Nous disposerons les opérations en deux colonnes l'une intitulée calculs définitifs, l'autre, calculs auxiliaires; l'élève comprendra rapidement le sens de ces mots et l'avantage de la disposition.

Exemple 1. — **Calculer la valeur de x donnée par la formule :**

$$x = \frac{(34,2)^2 \times \sqrt[3]{3,5472}}{\sqrt[4]{3,45 \times 872}}$$

on a :

$$\log x = 2 \log 34,2 + \frac{1}{3} \log 3,5472 - \frac{1}{4}(\log 3,45 + \log 872)$$

On disposera les calculs comme suit :

CALCULS DÉFINITIFS

—

$2 \log 34,2 = 3,06806$

$\frac{1}{3} \log 3,5472 = 0,18329$

$\frac{1}{4}$ (colog 3,45 + colog 872) $= \bar{1},13041$

$\log x = 2,38176$

$x = 240,855.$

CALCULS AUXILIAIRES

—

$\log 34,2 = 1,53403$

$2 \log 34,2 = 3,06806$

—

Pour log 3 547		54 986
diff. tab. 12,	0,2	
Pour 12×0,2		2
Pour	35 472	54 988

$\log 3,5472 = 0,54988$

$\frac{1}{3} \log 3,5472 = 0,18329$

—

$\log 3,45 = 0,53782$

$\log 872 = 2,94052$

$\log 3,45 + \log 872 = 3,47834$

$\frac{1}{4}(\log 3,45 + \log 872) = 0,86959$

—

$\frac{1}{4}$ (colog 3,45 + colog 872) $= \bar{1},13041$

Pour	38 166	2 408
diff. tab. 18	10	
Pour $\frac{10}{18}$		0,55
Pour	38 176	240 855

Exemple 2. — **Calculer le rayon du cercle inscrit à un triangle dont les côtés sont respectivement :**

$$a = 345^{m},32\,; \quad b = 420^{m},71\,; \quad c = 147^{m},95.$$

La géométrie nous donne la formule suivante, dans laquelle p désigne le demi-périmètre :

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

d'où : $$\log r = \frac{1}{2}\left[\log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c) + \operatorname{colog} p\right]$$

On obtient successivement :

$$p = \frac{345,32 + 420,71 + 147,95}{2} = 456^{m},99$$

$$p - a = 111^{m},67$$
$$p - b = 36^{m},28$$
$$p - c = 309^{m},04.$$

On dispose comme suit :

CALCULS DÉFINITIFS

log 111,67	= 2,04793
log 36,28	= 1,55967
log 309,74	= 2,44002
Colog 456,99	= $\overline{3}$,34009
2 log r	= 3,43771
log r	= 1,71886
r	= $52^{m},343$

CALCULS AUXILIAIRES

Pour 1 116	04 766
diff. tab. 39	
Pour 0,7,39 × 07	27
Pour 11 167	04 773

Pour 3 090	48 996
diff. tab. 14	
Pour 0,4,14 × 04	6
Pour 30 904	49 002

Pour 4 569	65 982
diff. tab. 10	
Pour 0,9,10 × 0,9	9
Pour 45 699	65 991

log 456,99 = 2,25991

Colog 456,99 = $\overline{3}$;34009

Pour 71 883	5 234
diff. tab. 9	
Pour 3, $\frac{3}{9}$	0,3
Pour 71 886	52 343

EXERCICES SUR LE CHAPITRE XVII

Logarithmes. — Calculs logarithmiques.

347. — Calculer les logarithmes des nombres suivants :

32,5	0,309
3240	82,4
60000	0,008
3,02	0,00345
0,304	320000

348. — Quels sont les cologarithmes des nombres précédents ?

349. — Calculer les logarithmes des nombres :

7483	6,0005
0,32576	3,0002
0,0057482	541,304
3548007	5,7204

350. — Quels sont les cologarithmes des nombres précédents ?

351. — Quel est le cologarithme de 100, de 10 000, de 0,001 ?

352. — Former les produits par 2 et les quotients par 2 des logarithmes suivants :

$2,34825$	$1,85648$
$\bar{2},47312$	$\bar{2},85648$
$3,34205$	$\bar{3},85543$
$\bar{3},34205$	$7,32406.$

353. — Quels sont les nombres correspondant aux logarithmes suivants :

$\bar{3},42057$	$2,40307$
$4,37412$	$\bar{3},00703$
$0,43500$	$8,97792.$

354. — Calculer le logarithme de $\pi = 3,14159$.

355. — Calculer par logarithmes les expressions suivantes :

$$x = \frac{(0,035)^4 \sqrt{875000}}{342 \times 3,46 \times \sqrt[3]{2,34}}.$$

$$x = \frac{\sqrt{35} \times \sqrt[3]{42} \times \sqrt[5]{26400}}{(1,34)^6 \times (3,42)^7}.$$

$$x = \left[\sqrt[3]{85934 \times \frac{7}{8}}\right]^2$$

$$x = \sqrt[5]{\frac{1}{458} \times 0,036749}.$$

356. — Calculer l'aire d'un triangle dont les trois côtés sont :

$$a = 728,40, \qquad b = 407,82, \qquad c = 503,10.$$

On appliquera la formule

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

357. — Calculer la hauteur du triangle précédent tombant sur le côté a.

358. — Calculer dans ce même triangle la médiane et la bissectrice issues de l'angle A.

Les exercices du chapitre suivant sur les problèmes d'intérêts composés et d'annuités sont des problèmes d'applications des logarithmes.

LIVRE VI

INTÉRÊTS COMPOSÉS. — ANNUITÉS

CHAPITRE XVIII

INTÉRÊTS COMPOSÉS. — ANNUITÉS

I. — INTÉRÊTS COMPOSÉS

L'une des questions pratiques dans lesquelles l'usage des logarithmes est le plus utile est le calcul des intérêts composés; c'est pourquoi l'on a l'habitude de les étudier après les logarithmes, bien que ce soient là des théories très dissemblables et qu'il n'est guère logique d'associer.

208. — **Définition.**

On dit qu'une somme d'argent est placée à intérêts composés lorsque les intérêts produits par cette somme au bout d'une **période déterminée**, ne sont pas payés au créancier, **mais s'ajoutent au capital pour porter eux-mêmes intérêts pendant les périodes suivantes.**

La période au bout de laquelle les intérêts sont ainsi capitalisés est généralement de 6 mois ou d'un an; nous ne nous occuperons que du cas où elle est d'un an.

Ainsi, Pierre prête à Paul 10 000^f à intérêts composés, au taux de 5 0/0 l'an : cela signifie qu'au bout d'un an, Paul ne payera pas à Pierre les 500^f d'intérêt annuel que doivent rapporter les 10 000 au taux de 5 0/0, mais que sa dette se trouvera être de 10 500^f, lesquels rapporteront dès lors 5 0/0 d'intérêt, c'est-à-dire 525^f en un an; au bout de la seconde année, la dette de Paul sera donc 10 500 + 525, c'est-à-dire 11 025^f, lesquels rapporteront intérêt à 5 0/0, soit 551^f,25 en un an. Au bout de la troisième année, la dette de Paul sera donc : 11 025 + 551,25 = 11 576^f,25, et ainsi de suite.

Au premier abord, il peut sembler fort naturel que l'intérêt non payé vienne ainsi augmenter la dette et rapporte lui-même intérêt; il ne semble pas qu'il y ait là un problème essentiellement différent de celui des intérêts simples, mais seulement un cas particulier. Mais ce cas particulier est d'une très grande importance dans beaucoup de questions pratiques; de plus, la progression très rapide des intérêts accumulés pendant un grand nombre d'années conduit à des conséquences véritablement effrayantes, qui ont nécessité une réglementation spéciale des prêts à intérêts composés (lois sur la prescription quinquennale des arrérages; surveillance de l'État sur les sociétés d'assurance et de retraites, sur le Crédit foncier, etc.). Nous verrons en effet que la possibilité de placements à intérêts composés sans aucune réglementation entraînerait des conséquences tout à fait inadmissibles.

209. — Formule générale des intérêts composés.

Nous allons établir une formule générale répondant au problème suivant :

Problème. — **Calculer le capital constitué au bout de n années par une somme de a francs placée à intérêts composés au taux de t 0/0 l'an.**

100^f rapportent t francs par an,
la somme a rapporte par suite :

$$\frac{a \times t}{100}$$

et l'intérêt, ajouté au capital, donne au bout d'un an :

$$a + \frac{at}{100} = a\left(1 + \frac{t}{100}\right)$$

Ainsi on a la règle suivante.

Règle. — **Pour obtenir la valeur totale d'une somme a augmentée de ses intérêts, au bout d'un an, on multiplie cette somme par le binome $1 + \frac{t}{100}$, t étant le taux.**

Nous pouvons appliquer cette même règle à la somme $a\left(1 + \frac{t}{100}\right)$ qui se trouve placée pendant une nouvelle année; ainsi, au bout de deux ans, le capital constitué est donné par la formule :

$$a\left(1 + \frac{t}{100}\right)\left(1 + \frac{t}{100}\right) = a\left(1 + \frac{t}{100}\right)^2.$$

On pourra appliquer encore la même règle, et l'on obtiendra pour la valeur du capital constitué au bout de la troisième année :

$$a\left(1 + \frac{t}{100}\right)^2\left(1 + \frac{t}{100}\right) = a\left(1 + \frac{t}{100}\right)^3.$$

Au bout de n années, le capital deviendrait :

$$a\left(1+\frac{t}{100}\right)^n$$

d'où la règle.

Règle.

Pour avoir la valeur totale capital et intérêts d'une somme a placée à intérêts composés pendant n années, on multiplie cette somme a par la n^e puissance du binome $1+\frac{t}{100}$, t étant le taux annuel 0/0.

Remarque. — Si l'on désigne par r la fraction $\frac{t}{100}$, c'est-à-dire *le revenu de* 1^f, la formule précédente devient :

$$a(1+r)^n.$$

Si l'on désigne par A le capital constitué, on a la formule générale :

$$\boxed{A = a(1+r)^n.}$$

210. — **Problèmes généraux.**

Cette formule donnant une relation entre quatre grandeurs, A, a, r, n, permet de calculer l'une quelconque de ces grandeurs connaissant les trois autres; elle contient donc la solution de quatre problèmes distincts :

Calcul du capital constitué A;
Calcul du capital primitif a;
Calcul du temps n;
Calcul du taux, $100\,r$.

L'expression logarithmique de la formule est la suivante :

$$\log A = \log a + n \log(1+r)$$

d'où l'on tire successivement les formules de résolution des trois derniers problèmes :

$$\log a = \log A - n\log(1+r)$$
$$n = \frac{\log A - \log a}{\log(1+r)}$$
$$\log(1+r) = \frac{\log A - \log a}{n}.$$

La valeur obtenue pour n doit être un nombre entier dans les conditions posées par l'énoncé. Quant à la dernière formule, elle permettra d'obtenir $\log(1+r)$; on pourra aisément, en remontant du logarithme au nombre, calculer $1+r$, puis r, puis le taux, égal à $100\,r$.

211. — **Applications numériques.**

Problème 1. — **Une somme de 12 500^f est placée à intérêts composés pendant 15 ans au taux de 3 0/0. Quelle est la somme due par l'emprunteur au bout de 15 ans?**

On a ici :

$$a = 12\,500; \quad r = 0{,}03; \quad n = 15$$

On obtient :

$$A = 12\,500 \times (1{,}03)^{15}$$

ou :

$$\log A = \log 12\,500 + 15 \log 1{,}03$$

On dispose les calculs comme il suit :

$\log 12\,500 = 4{,}09691$	$\log 1{,}03 = 0{,}01284$
$15 \log\ 1{,}03 = 0{,}19260$	$0{,}01284$
$\log A = 4{,}28951$	15
	6420
	1284
	$0{,}19260$
	Pour 28 937 — 1 947
$A = 19\,476^f{,}3$	diff. tab. 22
	Pour 14, $\frac{14}{22}$ — 0,63
	Pour 28 951 — 194 763

Le résultat cherché est $19476^f{,}30$.

Remarque. — On voit que l'en est amené à multiplier par 15 le logarithme de 1,03; l'erreur commise sur ce logarithme par le fait que l'on néglige les décimales qui suivent la 5e se trouve ainsi notablement augmentée; aussi est-il utile pour les problèmes d'intérêts composés d'avoir les valeurs très exactes des logarithmes du binome $1 + r$ pour les valeurs du taux qui sont les plus usitées, nous les donnons ci-dessous avec 10 décimales.

$t = 100\,r$	$1 + r$	$\log(1 + r)$
2	1,02	0,0086001718
2 1/4	1,0225	0,0096633167
2 1/2	1,0250	0,0107238654
2 3/4	1,0275	0,0117818305
3	1,03	0,0128372247
3 1/4	1,0325	0,0138900603
3 1/2	1,035	0,0149403498
3 1/4	1,0375	0,0159881054
4	1,04	0,0170333393

Bien entendu, on ne prendra que le nombre de décimales nécessaires pour avoir 5 décimales exactes après la multiplication; en général, 6 ou 7 décimales suffiront, à moins que le temps ne soit très long.

Problème 2. — Calcul du capital primitif. — **Quel est le capital qui placé à intérêts composés à 3,5 0/0 a produit au bout de 20 ans la somme totale de 10 884f?**

Il convient d'appliquer la formule :

$$\log a = \log A - n \log(1 + r)$$

dans laquelle :

$$A = 10\,864; \quad n = 20; \quad r = 0{,}035.$$

On obtient la disposition suivante :

$\log A = 4{,}03679$	Pour 1 088 — 0 3663
$n\,\text{colog}(1 + r) = \bar{1}{,}70120$	diff. tab. 40
	Pour 0,4, $40 \times 0{,}4$ — 16
$\log a = 3{,}73799$	Pour 10 884 — 03 679
	$\log 1{,}035 = 0{,}01494$
$a = 5470^f$	$\text{colog}\ 1{,}035 = \bar{1}{,}98506$
	$20\ \text{colog}\ 1{,}035 = \bar{1}{,}70120$
	Pour 73 799 — 5 470

Le capital primitivement placé était 5470^f.

Problème 3. — Calcul du temps. — **Une somme de 10 000f placée à intérêts composés au taux de 4 0/0 a produit au bout d'un certain temps une somme totale de 21 911f; calculer la durée du placement.**

$$n = \frac{\log A - \log a}{\log(1 + r)}$$

$$A = 21\,911; \quad a = 10\,000; \quad r = 0{,}04.$$

$\log 21\,911 = 4{,}34066$	Pour 2191 34 064
$\operatorname{colog} 10\,000 = \bar{4}$	diff. tab.
$\log A - \log a = 0{,}34066$	Pour 0,1, 20 × 0,1 2
$\log 1{,}04 = 0{,}01703$	Pour 21 911 34 066
	$34\,066 \,\vert\, 1\,703$; $6 \,\vert\, 20$
$n = 20$ ans.	

Il y a lieu de remarquer que la division de $\log A - \log a$ par $\log 1 + r$ donne sensiblement un nombre entier 20; dans le cas contraire, tel qu'il est posé, le problème est impossible.

Nous donnerons dans la suite un problème portant sur le calcul du taux; nous allons examiner une difficulté qui se présente dans le cas très fréquent où la durée de placement n'est pas un nombre entier d'années.

212. — **Cas où la durée du placement n'est pas un nombre entier d'années.**

Dans le cas où la durée du placement n'est pas un nombre entier d'années, la définition même des intérêts composés ne peut plus s'appliquer; il y a lieu de formuler une convention nouvelle.

1° *Convention des particuliers.* — On convient, comme cela paraît logique, de capitaliser à intérêts composés pendant le nombre entier d'années et de placer à intérêts simples la somme ainsi constituée pendant la fraction d'année qui suit. Si nous conservons les notations précédentes et que nous

appelions $n + \frac{p}{q}$ la durée du placement décomposée en nombre entier d'années n et en fraction d'année $\frac{p}{q}$, on voit aisément que le capital constitué au bout de n années est :

$$a(1 + r)^n$$

Puisque 1 f rapporte r francs en un an, dans la fraction $\frac{p}{q}$ d'année, il rapportera $\frac{p}{q} r$ francs et constituera ainsi un capital de $\left(1 + \frac{p}{q} r\right)$ francs. Le capital $a(1 + 2)^n$ placé à intérêts simples pendant la fraction $\frac{p}{q}$ d'année constituera donc un capital donné par la formule :

$$A = a(1 + r)^n \cdot \left(1 + \frac{p}{q} r\right)$$

dont l'expression logarithmique est :

$$\log A = \log a + n \log(1 + r) + \log\left(1 + \frac{p}{q} r\right).$$

Cette formule donne aisément les valeurs de A et de a en fonction des trois autres grandeurs; mais le calcul du temps et du taux offre quelques difficultés que nous croyons inutile d'aborder. La convention des particuliers, bien que logique, n'est pas adoptée dans la pratique des banques ou des maisons de crédit; on adopte une convention choisie de telle sorte que la formule générale soit la même que dans le cas où n est un nombre entier, et que, par suite, les différents problèmes soient résolus par une marche analogue à celle qu'on suit dans le premier cas.

2° *Convention des banquiers.* — Comme dans la convention précédente, le capital primitif est placé à intérêts composés pendant le nombre entier d'années n; mais dans la fraction $\frac{p}{q}$ d'année qui suit, la *période de capitalisation est changée,* elle est égale à la fraction $\frac{1}{q}$ d'année, le mois si $q=12$, le jour si $q=360$, et le taux pendant cette fraction d'année est choisi de telle sorte que 1^f de capital produise, avec ses intérêts capitalisés d'une année, c'est-à-dire au bout de q périodes égales au $\frac{1}{q}$ de l'année, précisément ce que 1^f aurait produit dans le cas où la période était l'année, c'est-à-dire $1+r$ francs.

Si l'on désigne par r' l'intérêt de 1^f pendant une période, on obtient :

$$(1+r')^q = 1+r$$

ou :

$$1+r' = \sqrt[q]{1+r} = (1+r)^{\frac{1}{q}}.$$

si l'on adopte la notation des racines par exposants fractionnaires. Ceci posé, proposons-nous de calculer la somme totale produite par un capital de a francs placé dans les conditions indiquées ci-dessus.

Au bout de n années, le capital constitué est :

$$a(1+r)^n.$$

Dans la fraction $\frac{p}{q}$ d'année qui suit, 1^f rapporte r' franc par période, le capital qu'il constitue au bout de 1 période est :

$$(1+r')$$

le capital constitué au bout de 2 périodes est :

$$(1+r')(1+r') = (1+r')^2$$

le capital constitué au bout de p périodes est :

$$(1+r')^p$$

ou, si l'on remplace $(1+r')$ par sa valeur en fonction de r :

$$1+r' = (1+r)^{\frac{1}{q}}$$

on obtient comme capital constitué par 1^f :

$$(1+r')^p = (1+r)^{\frac{p}{q}}.$$

Et pour le capital $a(1+r)^n$:

$$a(1+r)^n(1+r)^{\frac{p}{q}}$$

ce qui s'écrit encore :

$$A = a(1+r)^{n+\frac{p}{q}}.$$

Si l'on pose :

$$n' = n + \frac{p}{q}$$

on obtient la formule générale :

$$\boxed{A = a(1+r)^{n'}.}$$

On voit que cette formule est identique à la formule trouvée pour le cas où n est entier, mais en remarquant que n' peut être une expression fractionnaire.

En résumé, si l'on adopte la convention des banquiers, *la formule générale :*

$$\boxed{A = a(1+r)^n}$$

s'applique à tous les cas, à condition de remarquer que n peut être une expression fractionnaire.

Les problèmes généraux indiqués pour le cas où n est entier se résolvent par une marche analogue dans le cas où n est une expression fractionnaire.

213. — **Applications numériques.**

Problème 4. — **Quel est le capital constitué par une somme de 8 600ᶠ placée à intérêts composés au taux de 3 0/0 pendant 5 ans 7 mois?**

Dans ce cas :

$$a = 8\,600; \quad r = 0{,}03; \quad n = 5 + \frac{7}{12} = \frac{67}{12}.$$

$$\log A = \log 8\,600 + \frac{67}{12}\log 1{,}03$$

$$\log 8\,600 = 3{,}93450$$
$$\frac{67}{12}\log 1{,}03 = 0{,}07169$$
$$\log A = 4{,}00619$$

$$A = 10\,143^{f}{,}4$$

$$\log 1{,}03 = 0{,}01284$$
$$\frac{0{,}01284 \times 67}{12} = 0{,}00107 \times 67$$
$$\frac{67}{12}\log 1{,}03 = 0{,}07169$$

Pour 00 604	1 014
diff. tab. 43	
Pour 15, $\frac{15}{43}$	0,34
Pour 00 619	101 434

Problème 5. — **Une somme placée à intérêts composés au taux de 3,5 0/0 pendant 12 ans 4 mois 17 jours a produit une somme totale de 18 500ᶠ; calculer cette somme.**

Dans ce cas :

$$A = 18\,500; \quad r = 0{,}035; \quad n = 12 + \frac{137}{360} = \frac{4\,457}{360}$$

on a donc :

$$\log a = \log 18\,500 - \frac{4\,457}{360}\log 1{,}035$$

$$\log 18\,500 = 4{,}26717$$
$$\frac{4\,457}{360}\operatorname{colog} 1{,}035 = \bar{1}{,}81503 \text{ [1]}$$
$$\log a = 4{,}08220$$

$$a = 12\,073^{f}{,}6$$

$$\log 1{,}035 = 0{,}01494$$
$$\frac{0{,}01494 \times 4\,457}{360} = 0{,}18497$$
$$\frac{4\,457}{360}\operatorname{colog} 1{,}035 = \bar{1}{,}81503$$

Pour 08 207	1 207
diff. tab. 36	
Pour 13, $\frac{13}{36}$	0,36
Pour 08 220	120 736

Problème 6. — **Calculer la durée de placement à intérêts composés au taux de 4 0/0 d'un capital de 5 600ᶠ qui a produit une somme totale de 10 000ᶠ.**

$$n = \frac{\log A - \log a}{\log 1 + r}$$

or :

$$A = 10\,000; \quad a = 5\,600; \quad r = 0{,}04$$

1. Pour calculer $\frac{4\,457}{360}$ colog 1,035, on peut tout aussi bien calculer $\frac{4\,457}{360}$ log 1,035 et prendre le colog de l'expression dont le résultat serait le logarithme.

$\log A = 4$ $\text{Colog } a = \bar{4},25181$ $\log A - \log a = 0,25181$ $\log 1,04 = 0,01703$ $n = 14$ ans 9 mois 13 jours	$\log 5\,600 = 3,74819$ 25 181 | 1 703 8 151 | 14 ans 9 mois 13 jours par défaut. 1 339 $\times$ 12 2 678 13 39 16 068 741 $\times$ 30 22 230 5 200 91

La réponse était $n = \frac{25\,181}{1\,703}$ d'année, la division à 1 près du numérateur par le dénominateur donne 14 ans, le reste est 1 339; le quotient complété est donc 14 ans $\frac{1\,339}{1\,703}$ d'année; on multiplie 1 339 par 12 pour exprimer en mois, ce qui donne 16 068 à diviser par 1 703, soit 9 mois et un complément de $\frac{741}{1\,703}$ de mois; on multiplie 741 par 30 pour exprimer en jours, ce qui donne 22 230 à diviser par 1 703, soit 13 jours par défaut. La durée du placement est ainsi 14 ans 9 mois 13 jours.

Problème 7. — **A quel taux était placé à intérêts composés un capital de 4 500f, sachant qu'il est devenu 5 933f,25 au bout de 5 ans 8 mois?**

$$\log(1+r) = \frac{\log A - \log a}{n}$$

$$A = 5933,25;\quad a = 4\,500;\quad n = 5 + \frac{8}{12} = 5 + \frac{2}{3} = \frac{17}{3}.$$

$\log A = 3,77329$ $\text{colog } a = \bar{4},34679$ $\log A - \log a = 0,12008$ $\log 1 + r = 0,02119$ $1 + r = 1,05$ taux : 5°/o.	Pour 5 933 — 77 327 diff. tab. 8 Pour 0,25, $8 \times 0,25$ — 2 Pour 593 325 — 77 329 $\log 4\,500 = 3,65321$ $\text{colog } 4\,500 = \bar{4},34679$ $\frac{0,12008 \times 3}{17} = 0,02119$ Pour 02 119 — 1 050

II. — ANNUITÉS

214. — **Définition.**

On désigne sous le nom d'**annuites** *des sommes égales* que l'on place à *période fixe* (généralement chaque année, ce qui explique l'usage du mot *annuité*), à intérêts composés, dans le but soit de constituer un capital, soit d'éteindre une dette.

Nous distinguerons donc deux sortes d'annuités :

1° Les annuités pour constitution de capital;

2° Les annuités d'amortissement.

Nous ne nous occuperons que des annuités à période d'une année.

Dans chacun de ces cas, le versement annuel peut être effectué soit au début de chaque année, soit à la fin; il est d'usage cependant que les versements pour constitution de capital (assurances sur la vie, mutuelles, caisses de retraites et de prévoyance, etc.) soient effectués *au début de l'année*, alors que les annuités d'amortissement sont versées *à la fin de l'année*. Nous établirons nos formules dans ces conditions; il serait aisé de les modifier si les données d'un problème précis l'exigeaient.

215. — **Annuités pour constitution de capital.**

Nous allons établir une formule répondant au problème suivant.

Problème. — **Calculer le capital constitué par des versements annuels de a francs pendant n années, le taux étant $t = 100\ r$.**

Nous allons calculer le capital constitué séparément par chacune des annuités, nous n'aurons ensuite qu'à totaliser les résultats. Les annuités étant versées au début de chaque année, la première annuité a reste placée pendant n années et constitue un capital égal à :

$$a\,(1+r)^n$$

la deuxième annuité placée pendant $n - 1$ années constitue un capital égal à :

$$a\,(1+r)^{n-1}$$

On obtiendrait d'une façon analogue :

pour la 3ᵉ annuité, un capital égal $a(1+r)^{n-2}$
pour la 4ᵉ — — $a(1+r)^{n-3}$
. . . .
pour la dernière — $a(1+r)$.

Totalisons en écrivant les termes à partir de $a(1+r)$, le capital total est le suivant :

$$a\,(1+r) + a\,(1+r)^2 \;.....+ a\,(1+r)^{n-1} + a\,(1+r)^n.$$

Ces termes sont en progression géométrique, la

raison étant $(1+r)$, le premier terme $a(1+r)$ et le nombre des termes n. Si l'on applique la formule de la somme des termes :

$$S = \frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

on obtient :

$$\frac{a\,(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}{r}$$

d'où la formule générale :

$$\boxed{A = \frac{a\,(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}{r}}$$

dont l'expression logarithmique est la suivante :

$$\log A = \log a + \log\,(1+r) + \log\,[(1+r)^n - 1] + \operatorname{colog} r.$$

Cette formule contient la résolution de 4 problèmes : calcul du capital constitué A; calcul de l'annuité a ; calcul du temps n ; calcul du taux $100\,r$.

On obtient aisément :

$$\log a = \log A + \operatorname{colog}\,(1+r) + \operatorname{colog}\left[(1+r)^n - 1\right] + \log r.$$

Calcul du temps. — La formule générale peut s'écrire :

$$Ar = a\,(1+r)^{n+1} - a\,(1+r)$$
$$a\,(1+r)^{n+1} = Ar + a\,(1+r)$$

d'où :

$$\log a + (n+1)\log\,(1+r) = \log\left[Ar + a\,(1+r)\right]$$

et enfin :

$$n + 1 = \frac{\log\left[Ar + a\,(1+r)\right] - \log a}{\log\,(1+r)}$$

$n + 1$ étant calculé, il suffira de retrancher 1 pour obtenir n. La valeur obtenue pour $n+1$ doit être un *nombre entier*. Dans le cas contraire, on prend pour n la valeur de la partie entière et l'on calcule le capital A′ constitué dans les conditions de l'énoncé pendant n années. On convient de dire qu'à la fin de la n^e année, le capital sera *complété* par un *versement complémentaire* égal à A — A′.

Remarque. — Dans la formule générale, il convient de remarquer que l'expression :

$$(1+r)^n - 1$$

n'est pas logarithmique, il conviendra de la calculer tout d'abord; on pourrait calculer $(1+r)^n$ par logarithmes et retrancher 1 du résultat; mais on dispose le plus souvent de tables spéciales donnant les puissances de $(1+r)$ couramment utilisées et pour les taux les plus usuels avec un grand nombre de décimales (voir par exemple le tableau figurant à la page 134 des Tables de logarithmes à 5 décimales, de J. Dupuis[1]).

On remarquera de même que l'expression :

$$Ar + a(1+r)$$

figurant dans le calcul de n, n'est pas non plus logarithmique et qu'il faut l'effectuer tout d'abord pour obtenir son logarithme.

Nous n'indiquons pas le calcul du taux, on n'y arrive que par artifice grâce à des tâtonnements, par *essais successifs*.

216. — Applications numériques.

Problème 1. — **On verse au commencement de chaque**

1. Librairie Hachette et C^ie.

année une somme de 560^f; quel sera le capital constitué à intérêts composés au bout de la 20^e année le taux étant 3 0/0?

$$\log A = \log a + \log(1+r) + \log\left[(1+r)^n - 1\right] + \operatorname{colog} r$$

$$a = 560; \quad r = 0{,}03; \quad n = 20.$$

Calculons tout d'abord l'expression :

$$(1+r)^n - 1 = (1{,}03)^{20} - 1.$$

La table spéciale dont nous avons parlé plus haut nous donne :

$$(1{,}03)^{20} = 1{,}806111$$
$$(1{,}03)^{20} - 1 = 0{,}806111$$

avec 6 décimales exactes.

log 560	$= 2{,}74819$	Pour 8 061	90 639
log 1,03	$= 0{,}01284$	diff. tab. 5	
log 0,806111	$= \bar{1}{,}90645$	Pour 0,11, $5 \times 0{,}11$	6
Colog 0,03	$= 1{,}52288$	Pour 806 111	90 645
log A	$= 4{,}19036$		
		log 0,93 $= \bar{2}{,}47712$	
		colog 0,03 $= 1{,}52288$	
A	$= 15501$ f.		
		Pour 19 033	1 550
		diff. tab. 28	
		Pour 3, $\frac{3}{28}$	0,1
		Pour 19 036	15 501

Le capital constitué est égal à 15501 francs.

Problème 2. — **Quelle annuité faut-il verser chaque année pour se constituer un capital de 20 000^f au bout de 30 ans, le taux étant 3 0/0?**

On a la formule :

$$\log a = \log A + \operatorname{colog}(1+r) + \operatorname{colog}\left[(1+r)^n - 1\right] + \log r$$

et :

$$A = 20\,000; \quad n = 30; \quad r = 0{,}03.$$

Calculons d'abord :

$$(1{,}03)^{30} - 1.$$

La table spéciale nous donne :

$$(1{,}03)^{30} = 2{,}42726$$
$$(1{,}03)^{30} - 1 = 1{,}42726$$

On dispose ensuite les calculs comme suit :

$\log 20\,000 = 4{,}30103$	
$\operatorname{colog} 1{,}03 = \bar{1}{,}98716$	
$\operatorname{colog} 1{,}42726 = \bar{1}{,}84550$	
$\log 0{,}03 = \bar{2}{,}47712$	
$\log a = 2{,}61081$	
$a = 408^f{,}14$	

$\log 1{,}03 = 0{,}01284$	
$\operatorname{colog} 1{,}13 = \bar{1}{,}98716$	
Pour 1 427	15 442
diff. tab. 31	
Pour 0,26, $31 \times 0{,}26$	8
Pour 142 726	15 450
$\log 1{,}42726 = 0{,}15450$	
$\operatorname{colog} 1{,}42726 = 1{,}84550$	
Pour 61 077	4 081
diff. tab. 10	
Pour 4, $\frac{4}{10}$	0,4
Pour 61 081	4 0814

L'annuité à verser est égale à $408^f{,}14$.

Problème 3. — **Pendant combien de temps faut-il verser une annuité de 600ᶠ pour se constituer au taux 4 0/0 un capital de 30 000ᶠ?**

La formule est la suivante :

$$n + 1 = \frac{\log\left[Ar + a(1+r)\right] - \log a}{\log 1 + r}$$

Calculons d'abord l'expression :

$$Ar + a(1+r)$$
$$Ar = 30\,000 \times 0{,}04 = 1\,200$$
$$a(1+r) = 600 \times 1{,}04 = 624$$
$$Ar + a(1+r) = 1\,824$$

On dispose les calculs comme suit :

$\log 1\,824 = 3{,}26102$	$\log 600 = 2{,}77815$
$\operatorname{colog} 600 = \bar{3}{,}22185$	$\operatorname{colog} 600 = \bar{3}{,}22185$
$\log[Ar + a(1+r)] - \log a = 0{,}48287$	$48\,287 \mid 1703$
$\log 1 + r = 0{,}01703$	$14\,227 \mid 28$
$n = 27$ années.	603

On compléterait le problème en calculant le capital constitué au bout de la 27ᵉ année par des annuités de 600 francs au taux de 4 0/0.

On trouve par une marche analogue à la marche suivie dans le problème 1 (mais en prenant pour log 1,04 un grand nombre de décimales exactes) la valeur A′ de ce capital :

$$A' = 29\,390^f$$

On convient de dire que le temps cherché est 27 ans, à condition d'ajouter encore

$$30\,000 - 29\,390 = 610 \text{ francs}^{1}$$

1. Ce résultat n'est pas invraisemblable bien que supérieur à une annuité, car une annuité de 600 francs devient au bout d'un an $600 \times 1{,}04 = 624$ fr.

au bout de cette 27^e année, au capital déjà produit.

217. — Annuités d'amortissement.

Le problème général est le suivant :

Problème. — **Quelle annuité a faut-il verser à la fin de chaque année pour éteindre une dette (ou couvrir un emprunt) E, en n années, le taux étant $t = 100\, r$?**

Le problème se résout aisément si l'on remarque que, pour ne léser personne, le capital qu'aurait produit la somme prêtée E jusqu'au règlement définitif, sans aucun versement ultérieur, doit être égal au capital constitué par les annuités que l'emprunteur a versées; le prêteur aurait pu en effet placer son capital à intérêts composés, et l'emprunteur constituer un capital par annuités, de telle sorte qu'à la date fixée, l'avoir puisse compenser la dette.

Le capital constitué par E aurait été :

$$E(1+r)^n$$

puisque l'emprunt a été fait au début de la première année. Calculons le capital constitué par les annuités : la première versée à la fin de la première année porte intérêts pendant $n-1$ années et constitue un capital égal à :

$$a(1+r)^{n-1}$$

la deuxième, placée pendant $n-2$ années, devient :

$$a(1+r)^{n-2}$$

la dernière annuité versée à la fin de la n^e année ne produit rien et reste égale à a; totalisons en commençant par la dernière annuité :

$$a + a(1+r) + a(1+r)^2 \dots + a(1+r)^{n-1}.$$

C'est la somme des termes d'une progression géométrique dont le premier terme est a, la raison $(1+r)$ et le nombre des termes n[1]. Appliquons la formule :

$$S = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$$

on obtient :

$$\frac{a[(1+r)^n-1]}{r}$$

la formule générale cherchée est donc la suivante :

$$E(1+r)^n = \frac{a[(1+r)^n-1]}{r}$$

que l'on écrit quelquefois :

$$\boxed{Er(1+r)^n = a[(1+r)^n-1].}$$

L'expression logarithmique :

$$\log E + \log r + n \log(1+r) = \log a + \log[(1+r)^n-1]$$

donne immédiatement :

$$\log a = \log E + \log r + n \log(1+r) + \operatorname{colog}[(1+r)^n-1]$$

et :

$$\log E = \log a + \log[(1+r)^n-1] + \operatorname{colog} r + n \operatorname{colog}(1+r).$$

Ainsi se trouvent résolus deux des problèmes généraux : calcul de l'annuité; calcul de l'emprunt (ou

1. On remarque en effet que lorsque l'exposant de $(1+r)$ est 1, il y a 2 termes, quand il est 2, il y a 3 termes, etc., le nombre des termes est supérieur d'une unité à l'exposant de $(1+r)$ dans le dernier terme.

de la dette). Pour calculer le temps n, on écrit :

$$\begin{gathered} \mathrm{E}r(1+r)^n = a(1+r)^n - a \\ a = a(1+r)^n - \mathrm{E}r(1+r)^n \\ a = (1+r)^n[a - \mathrm{E}r] \end{gathered}$$

ou, en prenant l'expression logarithmique :

$$\begin{gathered} \log a = n\log(1+r) + \log[a - \mathrm{E}r] \\ n = \frac{\log a - \log[a - \mathrm{E}r]}{\log(1+r)}. \end{gathered}$$

Cette formule ne peut donner de résultat que si $a - \mathrm{E}r$ est un nombre positif, les nombres négatifs n'ayant pas de logarithmes ; on doit donc avoir :

$$a > \mathrm{E}r$$

or $\mathrm{E}r$ est précisément le **revenu de la somme empruntée**. On conçoit qu'il ne puisse y avoir **amortissement** de la dette que si l'annuité est supérieure à l'intérêt annuel de la dette.

La valeur trouvée pour n doit être un nombre entier. Dans la pratique, on prend pour n le quotient entier du numérateur par le dénominateur, et l'on complète le problème comme nous l'avons indiqué dans les problèmes de capitalisation ; on calcule la dette amortie par n versements, cette dette E' est inférieure à E, on convient de dire que la dernière annuité sera augmentée de $\mathrm{E} - \mathrm{E}'$.

218. — Applications numériques.

Problème 1. — **Quelle annuité faut-il verser pendant 30 ans pour amortir un emprunt de 25 000^f, le taux étant 3 0/0?**

Dans ce cas :

$$\mathrm{E} = 25\,000; \quad n = 30; \quad r = 0{,}03.$$

Appliquons la formule :

$$\log a = \log \mathrm{E} + \log r + n\log(1+r) + \operatorname{colog}[(1+r)_n - 1].$$

Il faut tout d'abord calculer :

$$1{,}03^{30} - 1.$$

La table spéciale de J. Dupuis[1] (p. 134) des puissances de $1 + r$ nous donne :

$$\begin{gathered} 1{,}03^{30} = 2{,}427262 \\ 1{,}03^{30} - 1 = 1{,}427262 \end{gathered}$$

$\log 25\,000 = 4{,}39794$	$\log 1{,}04 = 0{,}51090$
$\log 0{,}04 = \bar{2}{,}60206$	$30 \log 1{,}04 = 0{,}01703$
$30 \log 1{,}04 = 0{,}51090$	
$\operatorname{colog} 1{,}42726 = \bar{1}{,}84550$	Pour 1 427 — 15 442
$\log a = 3{,}35640$	diff. tab. 31
	Pour 0,26, $31 \times 0{,}26$ — 8
	Pour 142 726 — 15 450
	$\log 1{,}42726 = 0{,}15450$
	$\operatorname{colog} = \bar{1}{,}84550$
$a = 2\,271^f{,}90$	Pour 35 622 — 2 271
	diff. tab. 19
	Pour 18, $\frac{18}{19}$ — 0,9
	Pour 35 640 — 22 719

L'annuité à verser est égale à 2271^f,90.

Problème 2. — **Quelle somme peut emprunter actuellement une commune qui dispose pendant 20 ans d'une somme annuelle de 3 800^f, le taux de l'intérêt étant 3 0/0?**

$$a = 3\,800; \quad n = 20; \quad r = 0{,}03.$$

1. Librairie Hachette et C^ie.

Appliquons la formule :

$$\log \mathrm{E} = \log a + \log[(1+r)^n - 1] + \operatorname{colog} r + n \operatorname{colog}(1+r).$$

Calculons tout d'abord l'expression :

$$(1+r)^n - 1.$$

La table spéciale des puissances de $1+r$ nous donne :

$$1{,}03^{20} = 1{,}806111$$
$$1{,}03^{20} - 1 = 0{,}806111$$

$\log 3\,800 = 3{,}57978$	
$\log 0{,}806111 = \bar{1}{,}90640$	
$\operatorname{colog} 0{,}03 = 1{,}52288$	
$20 \operatorname{colog} 1{,}03 = \bar{1}{,}74320$	
$\log \mathrm{E} = 4{,}75226$	

$\mathrm{E} = 56\,527$ francs.

Pour 8 061	90 639
diff. tab. 5	
pour 0,11	1
Pour 806 111	90 640

$$\log 0{,}03 = \bar{2}{,}47712$$
$$\operatorname{colog} 0{,}03 = 1{,}52288$$

$$\log 1{,}03 = 0{,}01284$$
$$20 \log 1{,}03 = 0{,}25680$$
$$20 \operatorname{colog} 1{,}03 = \bar{1}{,}70\,324$$

Pour 75 220	5 652
diff. tab. 8	
Pour 6, $\frac{6}{8}$	0,75
Pour 75 226	565 275

La commune peut faire un emprunt de 56 527 francs[1].

1. Il eût été préférable de prendre log 0,03 avec un grand nombre de décimales; nous laissons à l'élève le soin de vérifier la différence des résultats.

Problème 3. — **Une commune fait un emprunt de 100 000^{f} qu'elle veut amortir par des annuités de 6 000^{f}. Pendant combien d'années devra-t-elle s'imposer cette somme, le taux étant 3 0/0?**

$$n = \frac{\log a - \log(a - \mathrm{E}r)}{\log(1+r)}$$

$$\mathrm{E} = 100\,000; \quad a = 6\,000; \quad r = 0{,}03.$$

Calculons d'abord $a - \mathrm{E}r$.

$$\mathrm{E}r = 100\,000 \times 0{,}03 = 3\,000$$
$$a - \mathrm{E}r = 6\,000 - 3\,000 = 3\,000$$

$$\log 6\,000 = 3{,}77815$$
$$\operatorname{colog} 3\,000 = \bar{4}{,}52288$$
$$\log a - \log(a - \mathrm{E}r) = 0{,}30103$$
$$\log 1{,}03 = 0{,}01284$$
$$n = 23 \text{ ans.}$$

$$\log 3\,000 = 3{,}47712$$
$$\operatorname{colog} 3\,000 = \bar{4}{,}52288$$

30 103	1 284
4 423	23
571	

On achèverait le problème en calculant l'emprunt amorti par 23 annuités de 6 000 francs à 3 o/o. En suivant la même marche qu'au problème 2 (page 399), on obtient pour cet emprunt :

$$\mathrm{E}' = 98\,670 \text{ francs.}$$

On convient d'ajouter :

$$\mathrm{E} - \mathrm{E}' = 100\,000 - 98\,670 = 1\,330 \text{ francs.}$$

à la dernière annuité qui sera égale à :

$$6\,000 + 1\,330 = 7\,330 \text{ francs.}$$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE XVIII

Intérêts composés. — Annuités.

I. — **Intérêts composés.**

359. — Quelle est la valeur acquise par une somme de 500^f placée à intérêts composés pendant 8 ans au taux de 3 o/o?

360. — Quelle somme doit-on placer à intérêts composés au taux de 4 o/o pour obtenir $1\,000\,000^f$ au bout de 75 ans?

361. — Pendant combien d'années doivent rester placés $1\,000^f$ à intérêts composés, au taux de 4 o/o, pour que la valeur totale, capital et intérêts, devienne égale à $1\,540^f$?

362. — Pendant combien de temps doit rester placé un capital de $2\,000^f$ au taux de 3 o/o pour que la somme du capital et des intérêts accumulés atteigne $5\,000^f$?

363. — Quelle est la valeur acquise par une somme de $12\,000^f$ placée pendant 6 ans 8 mois à intérêts composés au taux de $3\frac{1}{2}$ o/o?

364. — Une somme de $50\,000^f$ placée à intérêts composés pendant 8 ans 3 mois a produit, capital et intérêts, $70\,000^f$; à quel taux était-elle placée?

365. — Au bout de combien de temps une somme placée à intérêts composés à 5 o/o est-elle doublée?

366. — Au bout de combien de temps une somme placée à intérêts composés à 3 o/o est-elle doublée?

367. — En combien de temps une somme placée à 3 o/o triple-t-elle de valeur?

368. — Quelle est la somme produite par 1^f placé à intérêts composés à 3 o/o pendant 1 000 ans?

369. — Les héritiers d'un fournisseur de la cour de Louis XIV réclament une somme de 234^f qui leur serait due depuis le 15 février 1675 avec les intérêts composés à 4 o/o depuis cette date. Quelle somme aurait dû leur payer le gouvernement français le 15 février 1908 si leur réclamation avait été admise?

(Nous donnons ces deux exercices pour bien montrer la progression effrayante des intérêts accumulés.)

370. — Une personne a 875^f à la Caisse d'épargne postale. Au bout de combien d'années le livret sera-t-il complet à $1\,500^f$, le taux étant 2,5 o/o?

371. — Un père de famille place sur la tête de son fils à sa naissance, dans une assurance dotale, une somme de $10\,000^f$. Quel sera l'avoir total du fils à sa majorité, les intérêts composés étant calculés à 3 o/o?

372. — Un père de famille veut assurer une dot de $30\,000^f$ à sa fille à l'âge de 20 ans, quelle somme doit-il placer à sa naissance à intérêts composés pour obtenir cette capitalisation, le taux étant $3\frac{1}{2}$ o/o?

II. — **Annuités pour constitution de capital.**

373. — Un fumeur dépense en moyenne 1^f80 par semaine en tabac; quelle somme aurait-il obtenue en déposant chaque année ce qu'il dépense en tabac dans une caisse de crédit servant les intérêts composés à 4 o/o, depuis l'âge de 18 ans où il a pris cette habitude, jusqu'à l'âge de 55 ans?

374. — Un père de famille place chaque année 300^f sur la tête de son enfant dans une caisse de dotation de la jeunesse et cela depuis la naissance de l'enfant; quel sera le capital constitué à 21 ans?

375. — Quelle annuité faut-il verser de 20 ans à 55 ans pour se constituer à cet âge un capital de $50\,000^f$?

376. — Pendant combien d'années faut-il verser une annuité de 300^f pour se constituer un capital de $10\,000^f$, les intérêts composés étant calculés à 3 o/o?

377. — Quel avoir se serait constitué un buveur qui dépense en moyenne $1^f,25$ par jour au café, s'il avait économisé cet argent et l'avait déposé chaque année dans une caisse de prévoyance, depuis l'âge de 20 ans jusqu'à 50 ans, le taux étant 4 o/o?

III. — **Annuités d'amortissement.**

378. — Une commune a emprunté $50\,000^f$ à 3 o/o. Elle se propose de rembourser cette somme en 30 ans au moyen d'annuités égales. Quelle sera la valeur de l'annuité?

379. — Une commune dispose d'une somme annuelle de $3\,750^f$ pendant 15 ans. Quel emprunt peut-elle contracter aujourd'hui, de façon à ce que les annuités de 3 750ᶠ l'amortissent en 15 ans?

380. — Une commune emprunte 32 500ᶠ au Crédit foncier pour la construction d'un groupe scolaire, et elle s'engage à rembourser cette somme en 30 payements égaux et annuels. On demande :

1° Quel sera le montant de chaque versement, si l'intérêt est calculé au taux de 3,25 o/o.

2° Quel est le nombre de centimes extraordinaires que le Conseil municipal devra voter pour faire face à cette dépense annuelle, si le centime communal vaut 200ᶠ.

381. — Une commune emprunte 150 000ᶠ pour des travaux de voirie, elle veut amortir cet emprunt par des annuités de 12 000ᶠ. Pour combien d'années doit-elle inscrire cette annuité à son budget, le taux de l'intérêt étant 3,5 o/o?

382. — Un fermier emprunte 25 000ᶠ au Crédit foncier pour l'achat de prairies et de troupeaux. Quelle somme doit-il verser chaque année pour amortir sa dette en 30 ans?

LIVRE VII

PARTIE COMPLÉMENTAIRE

CHAPITRE XIX

NOTIONS SUR LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

219. — **Graphique de la température.**

Supposons que nous désirions nous rendre compte de la température qu'il fait pendant une après-midi du mois d'août, sur la terrasse d'une maison de campagne. Que ferons-nous? Nous y placerons un thermomètre, supposé exact, et de temps en temps nous noterons la température qu'il indique (exprimée en degrés centigrades, si le thermomètre est un thermomètre centigrade). Si nous supposons que nous faisons notre relevé d'heure en heure, nous inscrivons ainsi sur notre carnet les observations suivantes :

Midi.	25°	7ʰ.	18°
1ʰ.	26°	8ʰ.	17°
2ʰ.	26°,5	9ʰ.	16°,5
3ʰ.	26°	10ʰ.	16°
4ʰ.	25°,5	11ʰ.	15°,5
5ʰ.	24°	minuit.	15°
6ʰ.	21°		

La lecture de ces observations permet de se rendre compte de la variation de la température; on peut, en les examinant avec attention, voir, par exemple, que c'est à 2^h que la température a été la plus élevée, qu'elle a peu diminué entre 2^h et 4^h, mais qu'elle a diminué bien plus entre 4^h et 5^h et

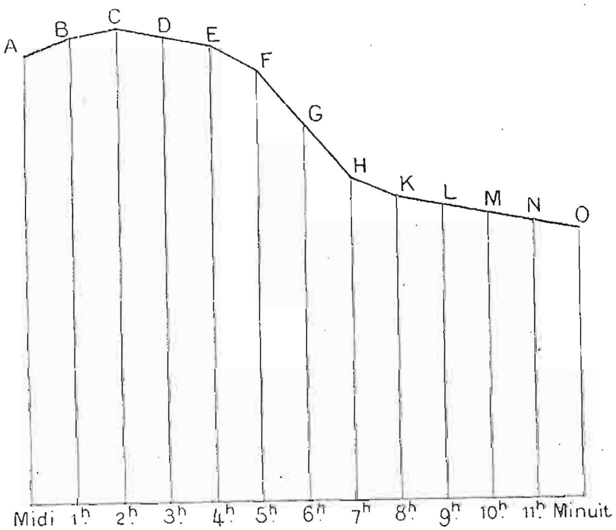


Fig. 25.

surtout entre 5^h et 6^h et entre 6^h et 7^h, etc. Mais ces diverses remarques seront rendues bien plus aisées à faire si l'on construit, à l'aide des nombres relevés sur le carnet, un *graphique de la température*. — Voici ce que l'on entend par là.

Traçons (fig. 25)[1] une ligne horizontale sur laquelle nous marquerons des points équidistants, qui correspondront aux heures successives : midi, 1^h, 2^h, etc., jusqu'à minuit. En chacun de ces points élevons une perpendiculaire sur laquelle nous prendrons une longueur proportionnelle à la température observée à l'heure indiquée. Par exemple, si nous convenons de représenter 1° par 2^{mm}, la perpendiculaire élevée au point marqué midi aura pour longueur $25 \times 2 = 50^{mm}$; la perpendiculaire élevée au point marqué 1^h aura pour longueur $26 \times 2 = 52^{mm}$, etc. Nous obtenons ainsi une suite de points ABCDE... ; nous joindrons chacun d'eux au suivant par une droite et nous obtiendrons ainsi une ligne brisée que l'on appelle *graphique de la température*. Il suffit de jeter un coup d'œil sur cette ligne pour se rendre compte de la manière dont a varié la température pendant l'après-midi. On voit que C est le point le plus élevé; c'est donc à 2^h qu'il a fait le plus chaud; les points D et E sont presque aussi élevés que C; la température a donc peu décru entre 2^h et 3^h et entre 3^h et 4^h. Au contraire les droites FG et GH sont bien plus inclinées, entre 5^h et 6^h, 6^h et 7^h, il y a donc eu une grande variation, une chute de température assez brusque, etc. Tout cela apparaît à la seule inspection du graphique, bien plus simplement qu'à la lecture des nombres inscrits sur le carnet.

Nous avons supposé que, pour obtenir le graphique, on a observé la température d'heure en heure; il est clair que l'on obtiendrait un graphique plus exact en l'observant tous les quarts d'heure, toutes les 5 minutes, toutes les minutes. On aurait ainsi un nombre de points bien plus grand ; la ligne

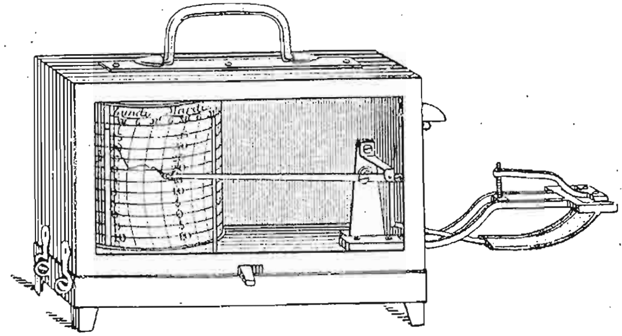


Fig. 26.

brisée aurait un plus grand nombre de côtés et ses angles seraient tous très rapprochés de 180°.

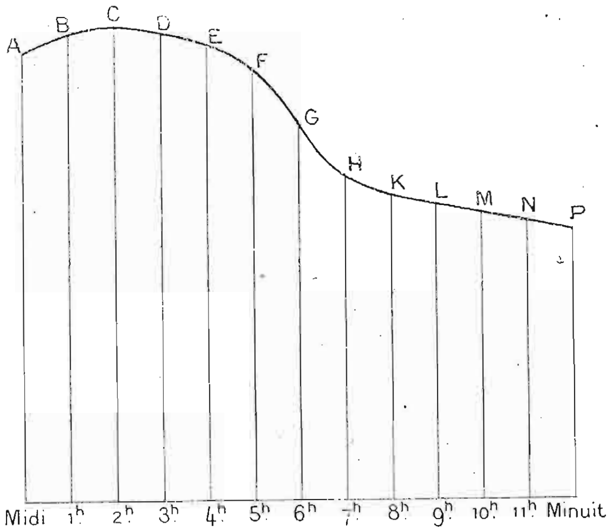


Fig. 27.

On a imaginé des thermomètres, dits *thermomètres enregistreurs* (fig. 26) et qui, au moyen d'un

mécanisme que nous n'avons pas à décrire ici, marquent à chaque instant sur une feuille de papier convenablement disposée le point A qui représente la température à cet instant. La feuille de papier est d'ailleurs entraînée par un mouvement d'horlogerie, de telle manière qu'à midi, c'est le point A qui est marqué, à 1^h c'est le point B, à 2^h le point C, et à chaque instant le point correspondant à cet instant.

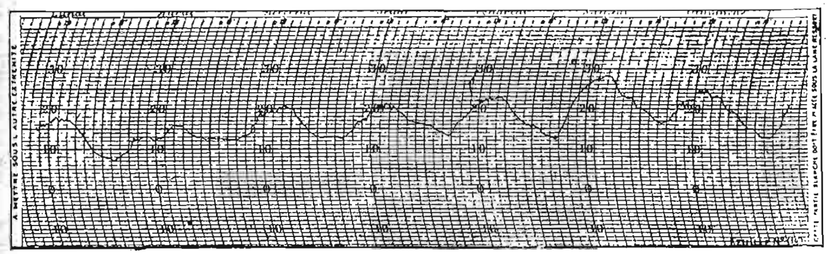


Fig. 28.

La bande de papier figurée correspond à une semaine ; les arcs de cercle de grand rayon correspondent à des intervalles de 2 heures ; les arcs de cercle correspondant à midi et à minuit sont marqués d'un trait fort et ceux qui correspondent à 6 heures du matin ou du soir, d'un trait moyennement fort. Pour plus de simplicité, on n'a figuré que ceux-là sur la fig. 26 représentant le thermomètre en train de fonctionner.

L'ensemble de ces points forme une courbe continue (fig. 27) qui fournit la *représentation graphique complète des variations de la température*.

En fait les thermomètres enregistreurs donnent une courbe un peu différente de celle que nous venons de figurer ; les perpendiculaires que nous avons figurées sont remplacées, par suite de la disposition de l'appareil, par des arcs de cercle d'assez grand rayon ; on obtient ainsi une courbe telle que celle de la figure 28.

On peut résumer la marche suivie par la règle suivante, dans laquelle nous la précisons et définissons quelques termes utiles.

Règle. — **Pour représenter graphiquement les variations de la température, on trace** (fig. 29) **un axe** Ox **sur lequel on représente les temps par des longueurs proportionnelles. Dans ce but, on fixe une unité de longueur et une unité de temps, une origine O des abscisses, et une origine des temps; un instant quelconque est alors représenté par le point dont l'abscisse est égale à l'époque de cet instant. Par exemple, si l'unité de longueur choisie est le centimètre et l'unité de temps l'heure, on représente** $1^h 45^m$ **par un point A tel que** $OA = 1^{cm},75$**, l'origine des temps étant midi.**

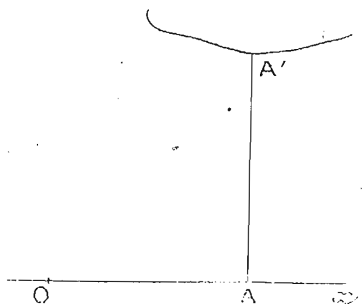


Fig. 29.

Ceci fait, en chaque point A, on élève une perpendiculaire AA′ à l'axe des abscisses et on porte sur cette perpendiculaire une longueur proportionnelle à la température. Pour cela, on fixe une unité de longueur (qui pourrait ne plus être la même que tout à l'heure) et on détermine le point A′ par la condition que la mesure de AA′ soit égale au nombre qui mesure la température avec l'unité choisie.

On n'a plus qu'à joindre par un trait continu tous les points tels que A′ ainsi obtenus, pour avoir le graphique de la température.

Le segment OA s'appelle *abscisse*, et le segment AA′ *ordonnée* du point A′; comme nous l'avons dit, on pourrait prendre, pour mesurer ces deux segments, des unités de longueurs différentes; *pour*

plus de simplicité, on choisit cependant en général la même unité, et c'est ce que nous ferons désormais, quand nous ne préviendrons pas du contraire.

Si cette unité est le centimètre, le segment OA représente un temps dont la mesure est égale au nombre de centimètres qui mesure OA et le segment AA′ représente une température dont la mesure est égale au nombre de centimètres qui mesure AA′.

220. — **Abscisses et ordonnées positives et négatives.**

Supposons que la température soit *au-dessous de zéro*, c'est-à-dire mesurée par un nombre négatif; il sera alors naturel de la représenter par une ordonnée *au-dessous de* Ox et non plus au-dessus. Supposons, par exemple, que les températures relevées pendant une nuit d'hiver soient les suivantes :

6^h soir.	$+3°$	1^h matin.	$-6°,7$
7^h soir.	$+2°,1$	2^h matin.	$-7°,5$
8^h soir.	$+1°$	3^h matin.	$-8°,2$
9^h soir.	$-0°,9$	4^h matin.	$-8°,7$
10^h soir.	$-2°,5$	5^h matin.	$-8°,9$
11^h soir.	$-4°,2$	6^h matin.	$-9°$
minuit.	$-5°,6$		

le graphique de la température sera le suivant (fig. 30), dans lequel on a représenté par une abscisse de 5^{mm} *une heure* et par une ordonnée de 5^{mm} *un degré.*

De même, si l'on suppose que l'origine des temps soit minuit, on voit qu'une époque postérieure à minuit, telle que 3^h du matin, est représentée par une abscisse égale à $+3$, l'origine des abscisses étant le point O qui correspond à minuit, tandis qu'une époque antérieure à minuit, par exemple 10^h du soir, est représentée par une abscisse égale à -2. Nous allons préciser ceci en définissant,

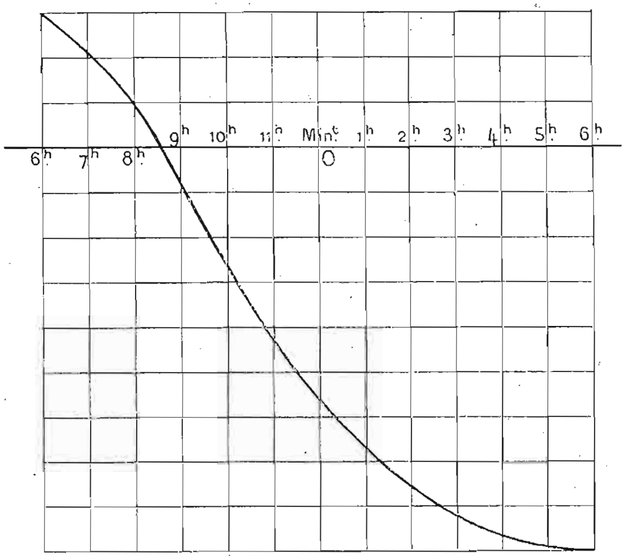


Fig. 30.

d'une manière générale, le système de coordonnées que l'on appelle *cartésiennes*, du nom de leur inventeur Descartes[1] (en latin *Cartesius*).

221. — **Définition générale des coordonnées cartésiennes.**

Considérons deux axes Ox, Oy perpendiculaires l'un à l'autre; ou, comme on dit plus brièvement,

1. Célèbre philosophe et mathématicien français, qui vivait au XVII^e siècle.

deux axes rectangulaires, et soit M un point situé dans l'angle xOy formé par les directions positives des deux axes (fig. 31). Abaissons du point M les perpendiculaires MA et MB sur les axes; le quadrilatère OAMB est un *rectangle*. Mesurons les côtés de ce rectangle avec une unité de longueur préalablement choisie; sur la figure, l'on a :

$$OA = BM = 3$$
$$OB = AM = 4,5.$$

Le nombre 3 sera dit l'*abscisse* de M et le

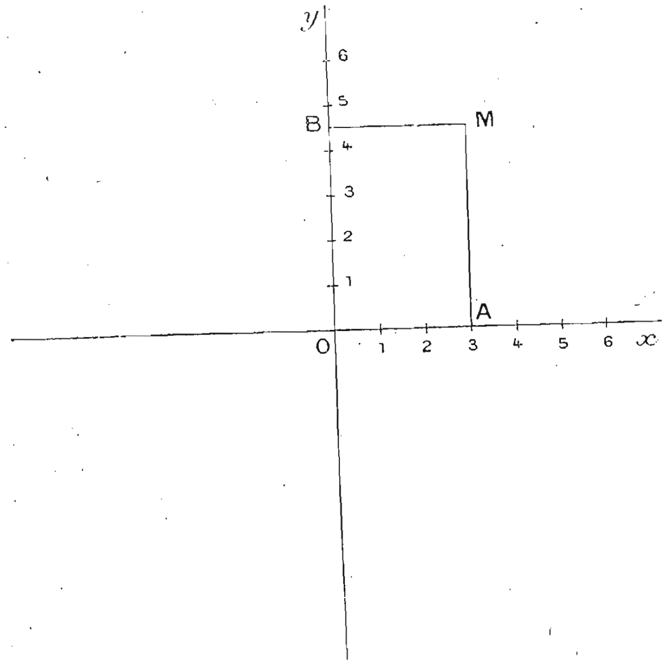


Fig. 31.

nombre 4,5 son *ordonnée;* les deux nombres 3 et 4,5 sont les *deux coordonnées* de M, c'est-à-dire les deux nombres qui servent à fixer la position de M dans le plan, les axes Ox et Oy sont les *axes de coordonnées;* Ox est l'*axe des abscisses* et Oy l'*axe des ordonnées*. Le point O est l'*origine des coordonnées;* c'est à la fois l'origine des abscisses et l'origine des ordonnées.

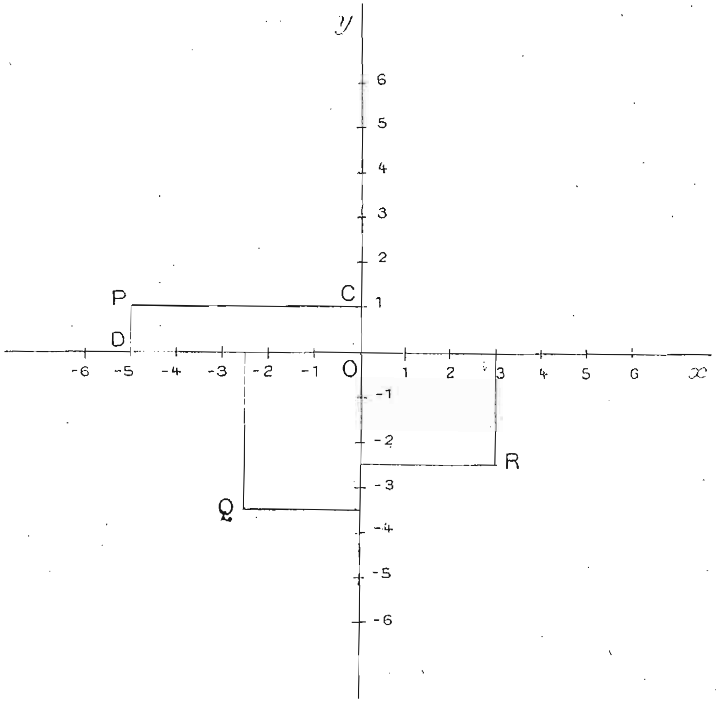


Fig. 32.

Considérons maintenant (fig. 32) des points P, Q, R situés dans les trois autres angles que forment les axes de coordonnées; les coordonnées de l'un de ces points seront définies de la même manière; par exemple, pour le point P, on construira le rectangle OCPD; les coordonnées de P sont égales

aux mesures des segments OD et OC, c'est-à-dire à -5 et à 1, puisque le segment OD est dirigé dans le sens négatif et OC dans le sens positif. De même, on voit sur la figure que le point Q a pour abscisse $-2,5$ et pour ordonnée $-3,5$ et que le point R a pour abscisse 3 et pour ordonnée $-2,5$. En résumé on a la règle suivante.

Règle. — **Étant donnés deux axes rectangulaires Ox et Oy, les coordonnées d'un point M du plan sont définies comme il suit : abaissons du point M la perpendiculaire MA sur Ox et la perpendiculaire MB sur Oy; l'abscisse de M est égale, en grandeur et en signe, au segment OA de l'axe des abscisses Ox, et l'ordonnée de M est égale, en grandeur et en signe, au segment OB de l'axe des ordonnées Oy.**

Nous savons ainsi obtenir les coordonnées d'un point donné; il n'est pas moins important de savoir *construire un point dont les coordonnées sont données;* nous démontrerons à ce sujet le théorème suivant.

Théorème.

Étant donnés deux axes rectangulaires, Ox, Oy, une unité de longueur, et deux nombres quelconques positifs ou négatifs, il existe un point et un seul admettant pour abscisse le premier de ces nombres et pour ordonnée le second; ce point s'obtient par la construction suivante : on prend sur Ox un segment OA équivalent à l'abscisse donnée et sur Oy un segment OB équivalent à l'ordonnée donnée; le point M cherché est le quatrième sommet du rectangle dont trois sommets coïncident avec les points A, O, B.

En effet, le point M ainsi défini (fig. 31) a bien ses coordonnées égales aux nombres donnés, et il est le seul, car tout point dont l'abscisse est égale à OA et l'ordonnée à OB est tel que la perpendiculaire abaissée de ce point sur Ox passe en A, c'est-à-dire coïncide avec MA, tandis que la perpendiculaire abaissée sur Oy coïncide avec MB, le point cherché doit donc coïncider avec M.

On voit sans peine que cette construction est bien identique à celle que nous avons donnée pour les graphiques de la température; nous prenions l'abscisse OA égale à la mesure du temps (positive ou négative) et nous élevions en A une perpendiculaire à Ox située au-dessus ou au-dessous, suivant que la température avait une mesure positive ou négative, et égale à cette mesure. L'égalité déjà remarquée des côtés opposés du rectangle entraîne l'identité des deux constructions.

Cas particuliers. — Si l'abscisse donnée est égale à zéro, le point A coïncide avec le point O et par suite le point M coïncide avec le point B; donc *les points dont l'abscisse est égale à zéro sont les points de l'axe Oy, c'est-à-dire de l'axe des ordonnées.* De même, *les points dont l'ordonnée est égale à zéro sont les points de l'axe des abscisses.* Le point O est le seul point dont les deux coordonnées sont nulles.

On désigne d'habitude l'abscisse par la lettre x, et l'ordonnée par la lettre y. Lorsque l'on a plusieurs points qu'il est nécessaire de distinguer, on affecte ces lettres d'indices : $x_1, x_2, x_3 \dots, y_1, y_2, y_3 \dots$, en ayant soin d'affecter d'un même indice les deux coordonnées d'un même point. On emploie aussi assez souvent la lettre a pour les abscisses et la lettre b pour les ordonnées. Enfin, on se sert aussi quelquefois des lettres grecques α, β (au lieu de a, b) et ξ, η (au lieu de x, y).

Au lieu de dire *le point* M *dont l'abscisse est égale à 2 et dont l'ordonnée est égale à* -3, on dira et écrira plus brièvement : *le point* M ($x = 2$, $y = -3$); ou bien *le point* M $(2, -3)$, en ayant soin d'écrire d'abord l'abscisse et ensuite l'ordonnée, que l'on sépare par une virgule. Si l'on n'a pas jugé utile de désigner ce point par une lettre on pourra dire simplement : *le point* $x = 2$, $y = -3$; ou : *le point* $(2, -3)$.

I. — REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES VARIATIONS DU BINOME DU PREMIER DEGRÉ

Supposons que nous ayons plongé un thermomètre dans un vase rempli d'eau froide et rapproché d'un feu modéré; à chaque minute, nous notons la température indiquée par le thermomètre et nous obtenons ainsi un tableau tel que le suivant[1] :

Époque.	Température.	Époque.	Température.
0.	1°	3m.	7
1m	3°	4m.	9°
2m	5°	5m.	11°

1. Bien entendu, on n'obtiendra en pratique un tel tableau, que si l'on se sert d'un thermomètre peu précis et si l'on fait des observations grossières; si l'on avait un thermomètre divisé en dixièmes de degré et que l'on observe à l'œil le centième de degré, on aurait, par exemple, des températures telles que les suivantes :

Époque.	Température.	Époque.	Température.
0.	1°,01	3m.	7°,02
1m.	2°,98	4m.	9°,01
2m.	4°,99	5m.	10°,97

de sorte que la courbe ne serait qu'approximativement une droite;

Si nous convenons de désigner par x l'époque exprimée en minutes, et par y la température correspondante exprimée en degrés, l'inspection de ce tableau montre que l'on a :

$$y = 2x + 1.$$

lorsque x a l'une des valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5. La température s'élève régulièrement de 2° par minute. Il est donc à présumer qu'en $\frac{1}{5}$ de minute par exemple, la température s'élève de $\frac{1}{5}$ de 2°, c'est-à-dire de $\frac{2}{5}$ de degré. Il en résulte qu'à l'époque $x = 3^{m}\frac{1}{5}$ la température observée aurait été $y = 7^{\circ}\frac{2}{5}$, de sorte que l'on a encore entre l'époque x et la température correspondante y, la relation :

$$y = 2x + 1.$$

Nous sommes ainsi conduits à admettre que cette relation est vérifiée pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 5, c'est-à-dire pour toute époque comprise entre les époques extrêmes où l'on a observé. Nous exprimerons ce fait en disant que cette relation donne la loi des températures pendant l'intervalle de temps étudié.

Effectuons la représentation graphique de la variation de la température. Dans ce but, nous tracerons (fig. 33) deux axes rectangulaires Ox, Oy et

mais elle y ressemblerait assez pour que l'on puisse conjecturer que le phénomène physique est bien représenté par une droite, avec une approximation inférieure aux erreurs d'observation.

nous porterons sur Ox cinq segments consécutifs égaux à l'unité, ce qui nous fournit les points $_1$, $_2$, $_3$, $_4$, $_5$, qui correspondent aux époques 1, 2, 3, 4, 5, l'origine O correspondant à l'époque zéro. Nous élèverons en ces points les ordonnés $oA = 1$, $_1B = 3$, $_2C = 5$, $_3D = 7$, $_4E = 9$, $_5F = 11$. Nous allons démontrer d'abord que les points ABCDEF sont en ligne droite. Dans ce but, menons par A la parallèle à Ox, qui rencontre les ordonnées en B', C', D', E', F'; nous aurons :

$$\begin{array}{lllll} AB' = 1, & AC' = 2, & AD' = 3, & AE' = 4, & AF' = 5. \\ B'B = 2 & C'C = 4 & D'D = 6 & E'E = 8 & F'F = 10 \end{array}$$

Les triangles rectangles AB'B, AC'C, AD'D, AE'E, AF'F sont donc semblables comme ayant les côtés de l'angle droit proportionnels; il en résulte que les droites AB, AC, AD, AE, AF font toutes le même angle avec AF'; donc ces droites coïncident, c'est-à-dire que les points A, B, C, D, E, F sont en ligne droite.

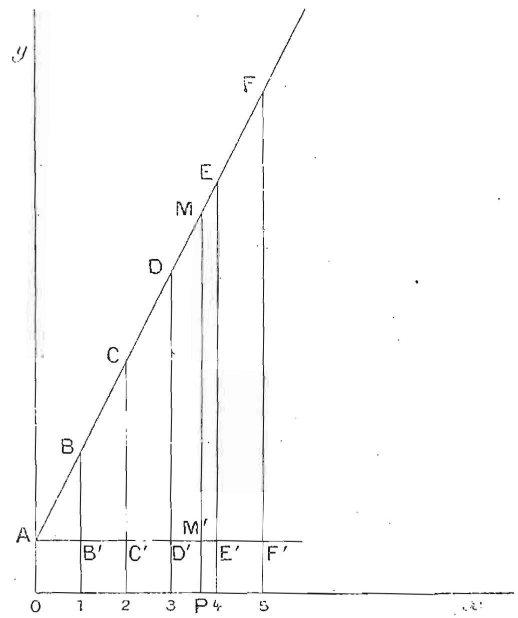


Fig. 33.

Nous allons maintenant faire voir que cette droite AF représente *complètement* la variation de la température dans l'intervalle considéré; c'est-à-dire que *si l'on considère une époque quelconque* x, *correspondant à l'abscisse* OP, *la température* y *à cette époque est égale à l'ordonnée* PM *que l'on obtient en élevant en* P *la perpendiculaire* Ox *et prenant son point d'intersection* M *avec* AF.

Soit, en effet, M′ le point d'intersection de PM avec AF′.

Le triangle AM′M est semblable au triangle AB′B; on a donc :

$$\frac{M'M}{AM'} = \frac{B'B}{AB'} = 2.$$

D'autre part :

$$PM = PM' + M'M$$
$$OP = AM'.$$

Il en résulte :

$$PM = 2OP + 1,$$

c'est-à-dire, si l'on désigne PM par y et OP par x :

$$y = 2x + 1,$$

l'ordonnée PM représente donc bien la température qui correspond à l'abscisse x.

On voit que *lorsque la variation de la température dans un intervalle donné est représentée algébriquement par un binome du premier degré, elle est représentée graphiquement par une ligne droite;* c'est à cause de cette importante propriété que la fonction y définie par la relation $y = ax + b$ est dite une *fonction linéaire* de x; elle est représentée par une *ligne* (droite).

Autres exemples. — I. — *Représenter graphiquement la fonction* y *définie par la relation :*

$$y = 4 - 3x,$$

lorsque x varie de -1 à 2.

On peut former le tableau suivant (fig. 34) :

$x = -1$	$y = 7$	point A
$x = 0$	$y = 4$	— B
$x = 1$	$y = 1$	— C
$x = 2$	$y = -2$	— D.

On démontrera comme tout à l'heure que les points A, B, C, D sont en ligne droite. Cette droite rencontre Ox en un point M. Pour ce point M, on a $y = 0$; on doit donc avoir, en désignant par x l'abscisse de M :

$$4 - 3x = 0$$
$$x = \frac{4}{3},$$

c'est ce que l'on vérifie facilement par la comparaison des triangles semblables MC1, MD2.

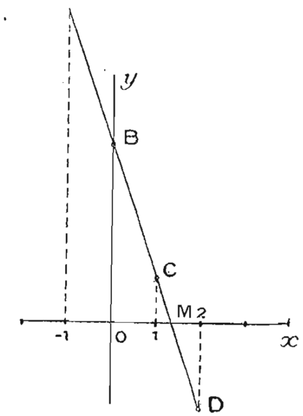


Fig. 34.

II. — *Représenter graphiquement la fonction* y *définie par la relation :*

$$y = -1 - \frac{2}{3}x,$$

lorsque x *varie de* -3 *à* 2.

Nous formerons le tableau suivant :

$x = -3$	$y = -1 + 2 =$	1	point A
$x = -2$	$y = -1 + \frac{4}{3} =$	$\frac{1}{3}$	— B

$$x = -1 \qquad y = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \qquad — \quad C$$
$$x = 0 \qquad y = -1 \qquad — \quad D$$
$$x = 1 \qquad y = -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3} \qquad — \quad E$$
$$x = 2 \qquad y = -1 - \frac{4}{3} = -\frac{7}{3} \qquad — \quad F.$$

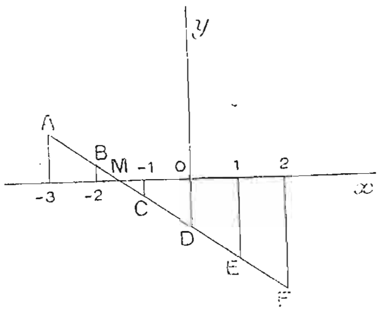


Fig. 35.

Les points ABCDEF sont en ligne droite (fig. 35) et cette droite rencontre Ox en un point M dont l'abscisse est $-\frac{3}{2}$; c'est la valeur de x pour laquelle y est égal à zéro.

222. — Étude générale de la fonction linéaire.

Nous allons maintenant étudier par une méthode un peu différente les variations de la fonction linéaire, *en faisant varier x de $-\infty$ à $+\infty$*, c'est-à-dire en donnant à x toutes les valeurs possibles, négatives et positives.

Soit la fonction linéaire :

$$y = 2x + 3.$$

La représentation graphique complète des variations de cette fonction s'obtiendra en donnant à x toutes les valeurs possibles, calculant la valeur de y qui correspond à chaque valeur de x, construisant tous les points dont les coordonnées sont les valeurs correspondantes de x et de y, et réunissant ces points par une *courbe*. Nous allons montrer

que cette *courbe* est une ligne droite indéfinie[1].

Considérons d'abord la fonction plus simple définie par la relation :

$$y = 2x.$$

Soit OA une abscisse positive (fig. 36); l'ordonnée correspondante AM est positive et égale au double

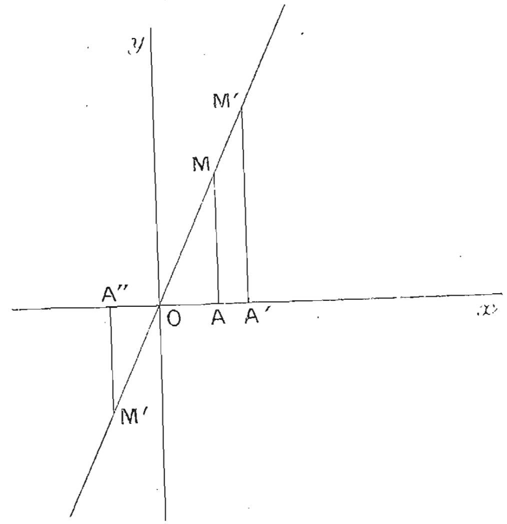


Fig. 36.

de OA; de même à l'abscisse *positive* OA′ correspond une ordonnée *positive* A′M′ égale au double de OA′; à une abscisse *négative* OA″ correspond une ordonnée *négative* A″M″ égale encore au double de OA″. Les triangles rectangles OAM, OA′M′,

1. On oppose quelquefois, en géométrie élémentaire, les mots ligne courbe et ligne droite : une courbe est une ligne qui n'est pas droite. En mathématiques supérieures, on donne le nom de *courbe* à toute ligne; la ligne droite est *un cas particulier* de la ligne courbe.

OA″M″ sont donc semblables comme ayant les côtés de l'angle droit proportionnels :

$$\frac{AM}{OA} = \frac{A'M'}{OA'} = \frac{A''M''}{OA''} = 2.$$

Les angles MOA, M′OA′, M″OA″ sont donc égaux, d'où il résulte que les points MM′M″ sont en ligne droite. Cette droite, supposée prolongée indéfiniment, représente complètement la fonction $y = 2x$; à tout système de valeurs correspondantes, x, y, correspond un point de la droite, et réciproquement les coordonnées d'un point quelconque de la droite vérifient la relation $y = 2x$. On dit que la relation $y = 2x$ est l'*équation de la droite* (au lieu de dire plus longuement : l'équation que vérifient les coordonnées d'un point quelconque de la droite). La droite MM′ est *la droite d'équation* $y = 2x$; on dit aussi, plus brièvement : *la droite :* $y = 2x$.

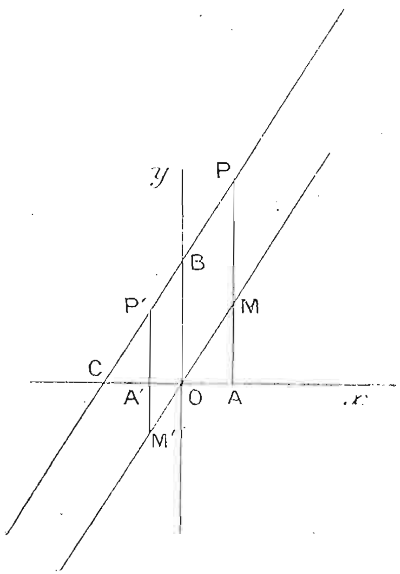


Fig. 37.

Reprenons maintenant la relation plus générale :

$$y = 2x + 3.$$

Soit A un point quelconque de Ox (fig. 37) et AM l'ordonnée de la droite $y = 2x$; l'ordonnée de la

courbe $y = 2x + 3$ s'obtiendra en ajoutant 3 à AM, c'est-à-dire en prenant un segment MP égal à 3 (le sens positif est bien entendu parallèle au sens positif sur Oy). De même à un point A′ correspond un point M′ de la droite $y = 2x$ et un point P′ de la courbe $y = 2x + 3$ tel que M′P′ soit égal à 3. Les segments MP, M′P′ étant égaux, parallèles et de même sens, la figure MPP′M′ est un parallélogramme. *Le point* P′ *se trouve donc sur la parallèle à* MM′ *menée par le point* P. Donc tous les points de la courbe $y = 2x + 3$ sont sur cette parallèle; la courbe cherchée est identique à cette droite.

Remarque. — Pour $x = 0$, la fonction $y = 2x + 3$ se réduit à 3; l'ordonnée correspondante est OB et la figure OBPM est aussi un parallélogramme. La longueur OB est ce qu'on appelle l'*ordonnée à l'origine*. Pour construire la droite $y = 2x + 3$, il est commode en général de construire d'abord le point B; par le point B on mène la parallèle à MM′.

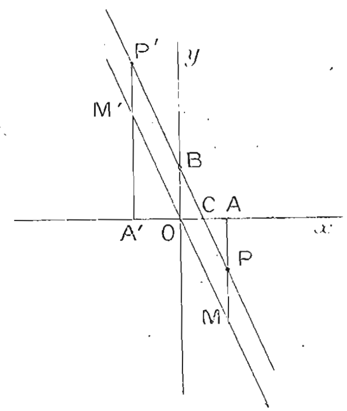


Fig. 38.

On peut aussi construire le point C où la droite rencontre Ox; c'est le point pour lequel on a $2x + 3 = 0$, c'est-à-dire $x = -\frac{3}{2}$. Les points B et C étant construits, il suffit de joindre BC pour avoir la droite cherchée.

Exemple 1. — *Construire la droite :*

$$y = -2x + 1.$$

On construira d'abord la droite $y = -2x$, et l'on remarquera que, pour cette droite, y et x sont constamment de signes contraires; c'est la droite MM′ (fig. 38); la droite $y = -2x + 1$ est alors PP′, si l'on prend MP et M′P′ égaux à l'unité de longueur; l'ordonnée à l'origine OB est aussi égale à l'unité de longueur. Le point C d'intersection de la droite avec Ox a pour abscisse $\frac{1}{2}$, car pour $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$.

Exemple 2. — *Construire la droite représentée par l'équation :*

$$y = -\frac{1}{2}x - 2.$$

La droite parallèle est M′M (fig. 39); l'ordonnée

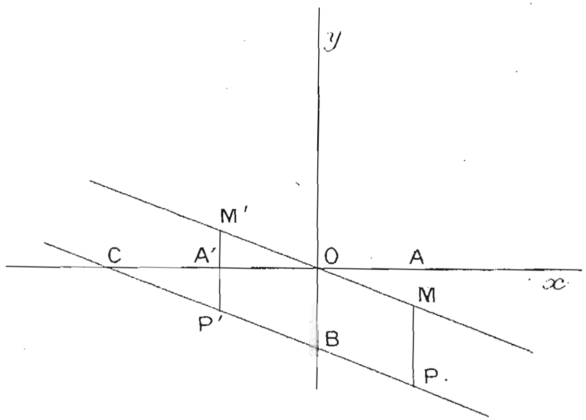


Fig. 39.

à l'origine $OB = -2$; l'abscisse à l'origine $OC = -4$.

Remarque. — On voit que l'inclinaison de la droite sur Ox dépend de la grandeur et du signe du coefficient de x dans l'équation; pour cette raison, on donne à ce coefficient le nom de *pente* de la droite; on l'appelle aussi *coefficient angulaire*. Lorsque ce coefficient est égal à zéro, la droite est parallèle à Ox; car si l'on a $y = 0x + 2$, cela équivaut à $y = 2$; l'ordonnée y a une valeur constante; la droite est telle que BPP′ (fig. 40).

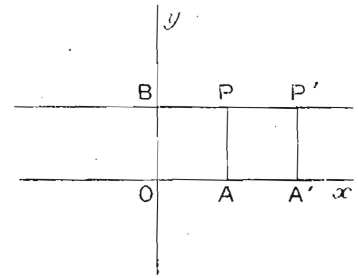


Fig. 40.

Dans le cas où le coefficient angulaire est positif, la fonction y est croissante; elle est décroissante dans le cas où ce coefficient est négatif.

223. — **Détermination du coefficient angulaire de la droite qui joint deux points.**

Considérons une droite, ayant pour équation :

$$y = ax + b$$

et soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), les coordonnées de deux points de cette droite; on a :

$$y_1 = ax_1 + b$$
$$y_2 = ax_2 + b$$

d'où, en retranchant :

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1).$$

On en conclut, en supposant x_2 différent de x_1 :

(1) $$a = \frac{y_2 - y_1}{x - x};$$

telle est la formule qui fait connaître le coefficient angulaire d'une droite, lorsque l'on connaît les coordonnées de deux points de cette droite; on peut l'énoncer sous la forme suivante :

Règle. — **Le coefficient angulaire ou pente d'une droite est égal au quotient de la différence des ordonnées de deux de ses points par la différence des abscisses des deux mêmes points pris dans le même ordre.**

Dans le cas où $x_2 - x_1$ est nul, deux points de la droite ont la même abscisse; tous les points de la droite ont évidemment la même abscisse, c'est-à-dire que l'équation de la droite est :

$$x = x_1$$

cette équation ne renferme pas y.

La droite est parallèle à Oy; son coefficient angulaire est *infini;* le dénominateur de la formule qui le donne est égal à zéro.

Si nous imaginons que l'axe Ox soit horizontal et l'axe Oy vertical, on voit que la pente a est égale au quotient de la différence d'altitude (positive ou négative) $y_2 - y_1$ de deux points par la distance qui sépare les coordonnées de ces deux points, cette distance étant comptée parallèlement à Ox.

224. — **Pente. Application à la topographie.**

Lorsque l'on fait le *plan* d'un pays, d'un champ, d'une maison, on représente chaque point par sa projection sur un plan horizontal, c'est-à-dire par le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan horizontal; l'on inscrit parfois à côté de chaque point son altitude ou cote, c'est-à-dire sa hauteur au-dessus d'un certain plan horizontal fixe.

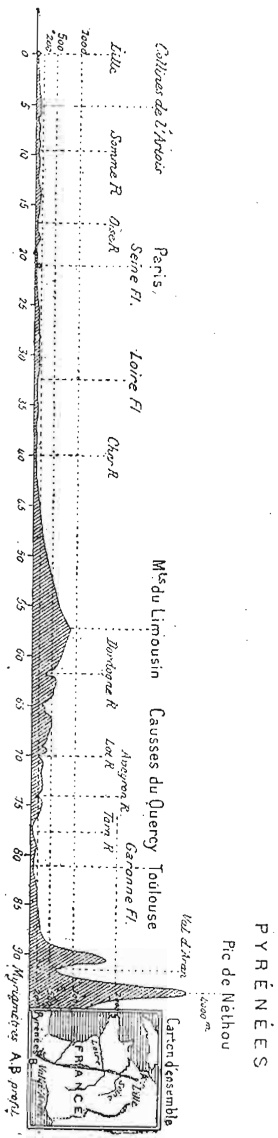
La pente d'une droite est alors égale au quotient de la différence des cotes de deux de ses points par la distance de ses projections horizontales. Si l'on a, par exemple, une route rectiligne dont la longueur est de 3^{km}, dont l'origine est à 250^{m} au-dessus du niveau de la mer et l'extrémité à 310^{m}, sa pente est :

$$\frac{310 - 250}{3\,000} = \frac{60}{3\,000} = \frac{1}{50}.$$

On dira que la pente est $\frac{1}{50}$, ou $\frac{2}{100}$, ou 2 centimètres par mètre, ou 2 p. 100 (2 0/0). Si l'on prend pour origine des coordonnées l'origine O de la route, pour axe Ox la projection de la route sur le plan horizontal qui passe en O et pour axe Oy la verticale du point O, la section de la route par le plan xOy sera représentée par l'équation :

$$y = \frac{1}{50}x.$$

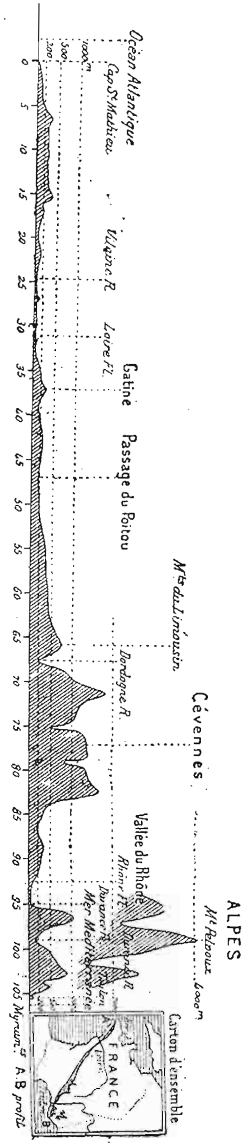
Lorsque l'on fait ainsi des *coupes* par un plan vertical pour représenter les pentes de la section par ce plan vertical d'une certaine région, on choisit souvent deux unités de longueur différentes pour les abscisses et les ordonnées, *afin d'accentuer les pentes* qui seraient presque insensibles à la vue quand le pays n'est pas très accidenté. Par exemple, on peut convenir de représenter par une abscisse de 1^{cm}, 1^{km} de distance horizontale et par une ordonnée de 1^{cm}, 100^{m} d'altitude. L'échelle est alors $\frac{1}{100\,000}$ pour les abscisses et $\frac{1}{10\,000}$ pour les ordonnées. Mais, lorsqu'on procède ainsi, il ne faut



COUPE LONGITUDINALE DE LA FRANCE DU NORD AU SUD

Les hauteurs sont exagérées 40 fois

Fig. 41.



COUPE DIAGONALE DE LA FRANCE DU NORD-OUEST AU SUD-EST

Les hauteurs sont exagérées 45 fois

Fig. 42.

pas oublier que les pentes réelles sont beaucoup plus faibles que les pentes de la représentation schématique.

Voici, par exemple (fig. 41 et 42), deux coupes de la France, empruntées à la *Troisième Année de Géographie*, de P. Foncin (Librairie Armand Colin) : dans l'une (fig. 41) les hauteurs sont exagérées 40 fois, c'est-à-dire qu'à une hauteur de 1^{km} correspond une ordonnée 40 fois plus grande que l'abscisse qui correspond à une longueur de 1^{km}. Dans la seconde (fig. 42), les hauteurs sont exagérées 45 fois; dans cette dernière à une longueur d'*un kilomètre* correspond une abscisse d'*un dixième de millimètre*, tandis qu'à une altitude d'*un kilomètre* correspond une ordonnée de 45 *dixièmes de millimètre*.

On voit ainsi sur un exemple pratique comment il peut être parfois avantageux de prendre des unités différentes pour les abscisses et les ordonnées; mais il faut avoir soin de prévenir expressément; sinon on s'exposerait à de graves erreurs.

225. — Températures médicales.

Dans beaucoup de maladies, l'observation de la température du malade est un renseignement précieux pour le médecin; il lui est aussi fort utile de savoir si les *variations* en sont plus ou moins rapides. Dans ce but les médecins ont l'habitude de construire des diagrammes de la température dont nous reproduisons un spécimen, d'après une feuille réellement remplie dans un hôpital de Paris (fig. 43). Les températures sont observées chaque matin et chaque soir, à des heures aussi régulières que pos-

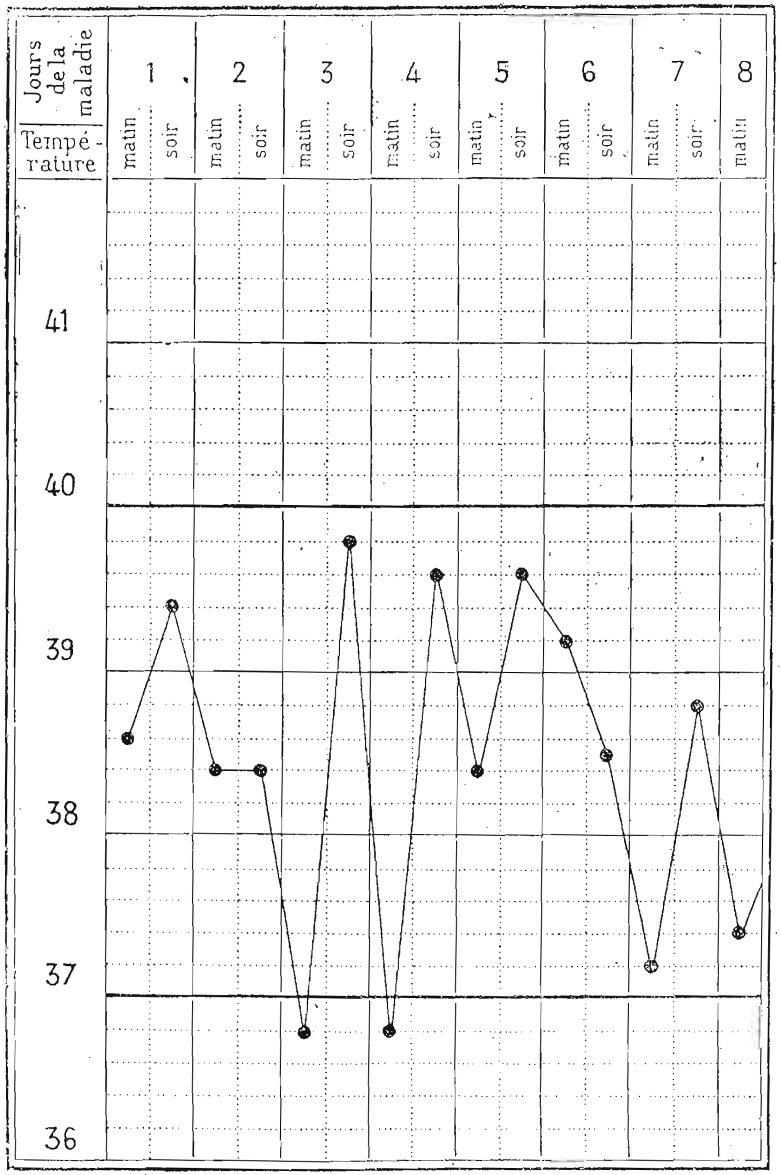


Fig. 43.

sible; on porte les époques en abscisses, un côté du quadrillage correspondant à 12h; on porte les températures en ordonnées; un côté du quadrillage correspond à 2 dixièmes de degré; le point représentatif peut être mis soit sur un des traits horizontaux, soit au centre d'un carré (comme le 6e jour soir dans notre figure); on peut ainsi figurer le dixième de degré, ce qui est l'approximation fournie par les thermomètres médicaux. La pente plus ou moins grande des droites qui joignent les points représentatifs permet de voir d'un coup d'œil si la variation de température a été plus ou moins brusque. Des traits plus forts correspondent aux températures de 37° et de 40°, qui jouent un rôle particulièrement important dans le diagnostic.

Bien entendu, si l'on observait la température du malade à chaque instant, la courbe obtenue différerait notablement de celle qui est figurée; mais cela n'est pas pratiquement possible et la courbe *schématique* que l'on emploie suffit actuellement aux besoins de la médecine.

226. — **Application au mouvement uniforme.**

Désignons par e_0 l'espace parcouru à l'origine des temps par un mobile animé d'un mouvement uniforme, par e l'espace parcouru à l'époque t et par v la vitesse; on aura :

$$e = vt + e_0.$$

Traçons deux axes rectangulaires que nous appellerons Ot et Oe, au lieu de les appeler Ox et Oy; nous porterons les temps en *abscisses* sur l'axe Ot et les espaces en *ordonnées* parallèlement à l'axe Oe. D'une manière plus précise, ayant choisi une unité de longueur, *que nous supposerons être la même pour les abscisses et les ordonnées*, ayant, d'autre part, comme il est nécessaire avant d'écrire l'équation du mouvement uniforme, choisi une origine des temps, une origine des espaces, un sens positif pour les espaces, une unité de temps et une unité d'espace, nous faisons correspondre à une époque donnée un point dont l'abscisse est numériquement égale à cette époque et dont l'ordonnée est numériquement égale à l'espace parcouru, *chacune de ces quantités : abscisse, époque, ordonnée, espace, étant mesurée avec l'unité, l'origine et le sens positif qui lui convient.*

Dès lors, si nous désignons par t et e l'abscisse et l'ordonnée, nous aurons entre ces nombres la relation :

$$e = vt + e_0$$

v étant le nombre qui représente la vitesse et e_0 le nombre qui représente l'espace initial. Si l'on appelait, pour un instant, y l'ordonnée (au lieu de e) et x l'abscisse (au lieu de t) cette équation prendrait la forme :

$$y = vx + e_0$$

et avec ces notations on aperçoit immédiatement qu'elle représente une ligne droite.

Ainsi, *le mouvement uniforme est représenté par une droite.*

De plus, on voit que la pente de cette droite est v; elle est égale à la *vitesse*. Il importe de remarquer que cette égalité est une conséquence du fait que l'on a pris la *même* unité de longueur pour les abscisses et les ordonnées (voir Exercices 404, 405, 406).

Considérons par exemple un mobile qui parcourt 4^{km} à l'heure, qui se déplace dans le sens positif et qui part d'un point dont la distance à l'origine des espaces[1] est 10^{km}.

Nous aurons :

$$e = 4t + 10,$$

les temps t étant exprimés en heures et les espaces en kilomètres. Si nous faisons correspondre une abscisse de 1^{mm} à 1^h et une ordonnée de 1^{mm} à 1^{km}, nous aurons entre les abscisses et les ordonnées la même relation :

$$e = 4t + 10.$$

Nous obtenons ainsi la figure 44.

Pour $t = 5$, nous avons ainsi $e = 30$ et, effectivement, à une abscisse de 5^{mm} correspond une ordonnée de 30^{mm}, pour $t = -6$ nous avons $e = -10$, ce qu'il est aisé de vérifier, soit sur la figure, soit dans le problème de mouvement uniforme.

Si l'on emploie des notations analogues à celles du paragraphe précédent, on a :

$$v = \frac{e_2 - e_1}{t_2 - t_1},$$

Or, $t_2 - t_1$ est l'intervalle de temps qui s'écoule

1. Il importe de remarquer que nous ne disons pas ici l'*abscisse* pour éviter toute confusion, car ici nous mesurons les espaces sur l'axe des ordonnées.

de l'époque t_1 à l'époque t_2 et $e_2 - e_1$ est l'espace parcouru pendant cet intervalle.

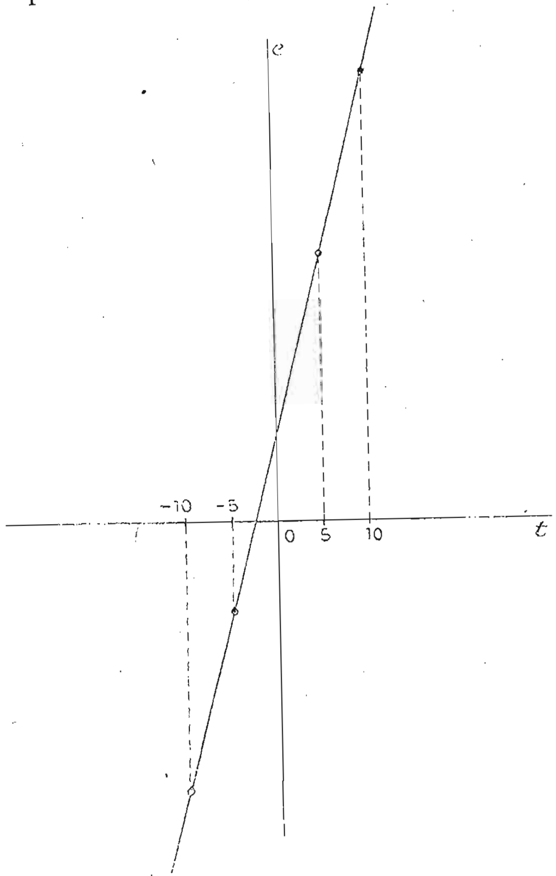


Fig. 44.

La vitesse est égale au quotient de l'espace parcouru pendant un certain intervalle de temps, par cet intervalle de temps. Ce quotient ne dépend pas de l'intervalle de temps choisi : c'est la définition même du mouvement uniforme.

227. — **Graphiques des chemins de fer.**

La représentation graphique du mouvement uniforme est utilisée par l'État et les Compagnies de chemins de fer pour fournir à leurs agents, sous une forme commode, le tableau de la marche des trains sur une ligne. On admet, pour simplifier, qu'entre deux stations, la marche d'un train peut être regardée comme uniforme; pendant les stationnements, l'espace ne varie pas, tandis que le temps augmente d'une quantité égale à la durée du stationnement; un stationnement sera donc représenté par un segment de droite parallèle à l'axe Ot. Supposons, par exemple, que nous fassions correspondre 1^{mm} à 1^{m} et 1^{mm} à 1^{km} (la vitesse évaluée en kilomètres à la minute sera alors égale à la pente).

Nous avons représenté sur la figure 45 la marche de deux trains qui partent en même temps (à l'origine des temps) de la station choisie comme origine des espaces.

La marche du premier, qui est un express, est représentée par la ligne OABCD; il parcourt d'abord 30^{km} en 20^{m}; cette première partie de son trajet est représentée par la droite OA; arrivé à la station qui se trouve à 30^{km} de son point de départ, il y séjourne 5^{m}, ce qui est représenté par le segment AB; car, pendant ces 5^{m}, l'espace ne varie pas; il parcourt ensuite 30 autres kilomètres en 20^{m}; de sorte que 45^{m} après son départ il se trouve à 60^{km} de son point de départ, ce qui est figuré par le point C dont l'abscisse est 45 et l'ordonnée 60; il séjourne ensuite 10^{m} à cette nouvelle station, etc.

Le tracé OMNPQ représente la marche d'un train de marchandises, dont la vitesse est beaucoup plus faible et les stationnements plus longs. La droite EF représente la marche d'un train qui va en sens inverse des précédents; il part à l'origine des

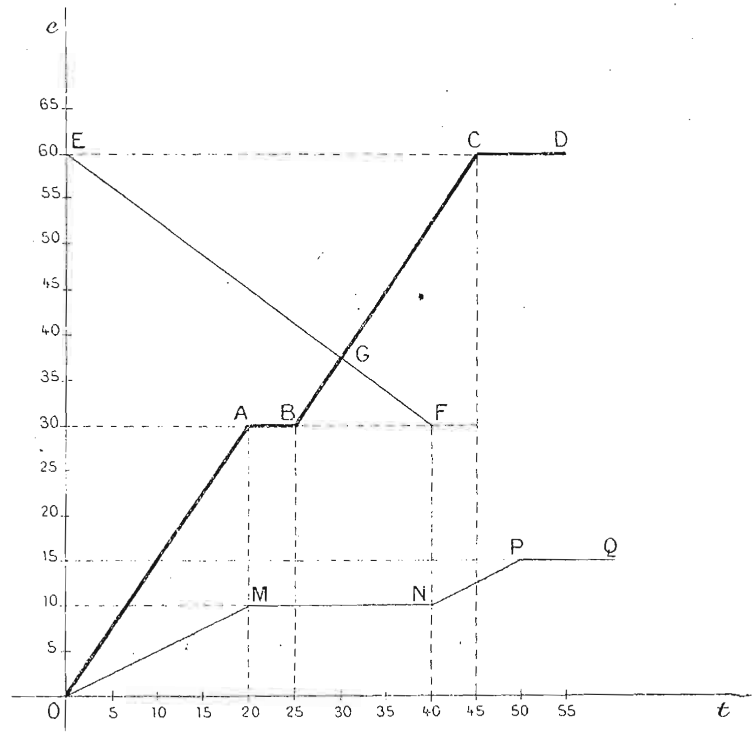


Fig. 45.

temps d'un point situé à 60^{km} de l'origine des espaces (point E) et arrive 40^{m} après à la station située à 30^{km} de cette origine (point F). Ce train croise l'express considéré en premier lieu, car les lignes qui les représentent se coupent en un point G. L'abscisse de ce point fait connaître l'époque de ce

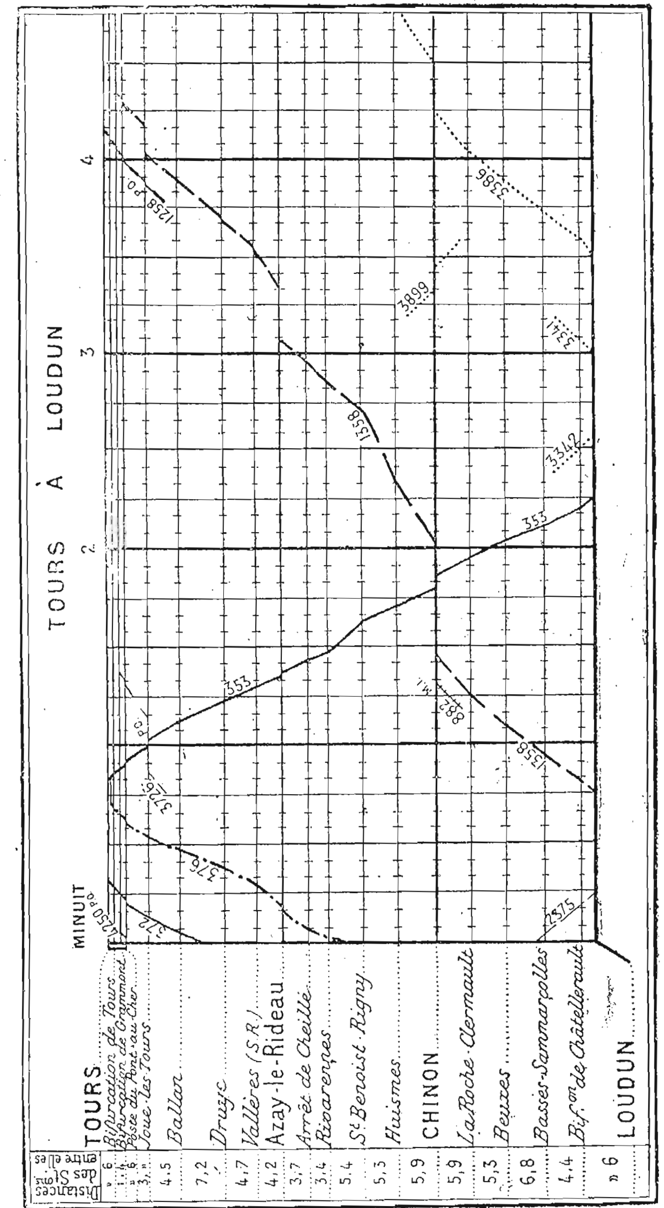


Fig. 46.

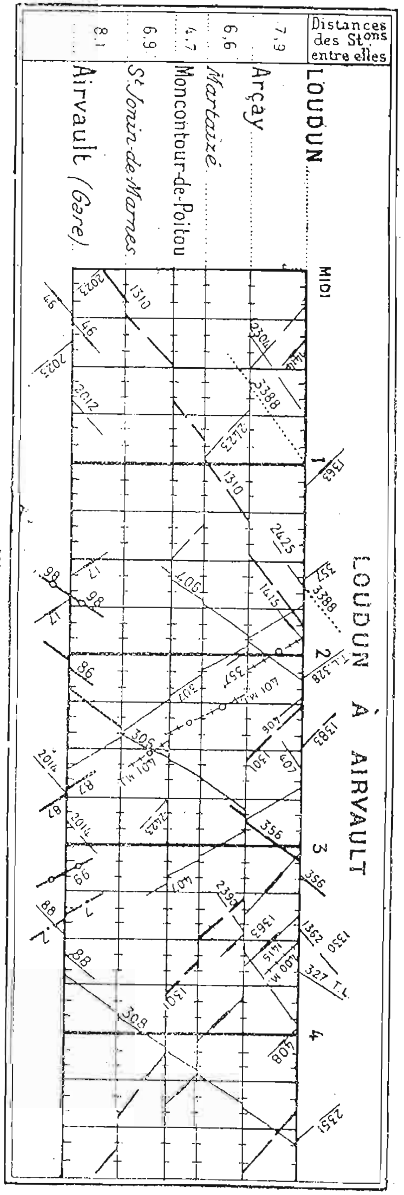


Fig. 47.

croisement et son ordonnée fait connaître la distance à l'origine du point de croisement.

Les figures 46 et 47 représentent les graphiques de chemins de fer tels qu'ils existent réellement; les dimensions de ce livre ne nous ont pas permis de les reproduire intégralement (de minuit à minuit); la figure 46 donne la portion d'un graphique qui s'étend de minuit à 5^h du matin et la figure 47 la portion d'un autre graphique qui s'étend de midi à 5^h du soir. A chaque station correspond une ligne parallèle à l'axe des abscisses; les écartements de ces lignes sont proportionnels aux distances des stations entre elles, distances

qui sont indiquées dans la colonne de gauche. Les parallèles à l'axe des ordonnées correspondent aux époques; ces parallèles équidistantes correspondent aux quarts d'heure, les traits des heures étant plus forts, de plus, de petits traits parallèles aux précédents, mais qui ne sont pas prolongés pour ne pas trop charger la figure, divisent chaque quart d'heure en 3 intervalles égaux (de 5 minutes chacun par conséquent).

La marche de chaque train est représentée par une ligne inclinée; la force du trait et la nature de son pointillé permettent de distinguer les diverses espèces de trains; le numéro de chaque train est inscrit à côté du trait qui le représente. Par exemple, sur la figure 46 on voit que le train 1358 part de Loudun à minuit 45^m, arrive à Chinon vers 1^h28^m, en repart à 2^h, arrive à Azay à 3^h4^m, en repart à 3^h20^m, etc.; pendant qu'il est garé à Chinon, le train 353 (dont la marche est plus rapide et qui va en sens inverse) peut traverser cette station (la ligne étant à voie unique). Nous laissons à l'élève le soin d'étudier lui-même les autres particularités des figures 46 et 47.

II. — VARIATIONS DU TRINOME DU SECOND DEGRÉ. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Nous allons d'abord étudier la fonction ax^2, en commençant même par supposer que le coefficient a est égal à 1.

228. — Variations de $y = x^2$; représentation graphique.

Nous nous proposons d'étudier les variations de la fonction y définie par l'équation :

$$(1) \qquad y = x^2.$$

Supposons d'abord x négatif et très grand; en valeur absolue y est alors très grand et positif; par exemple, si $x = -1\,000$, $y = 1\,00\,000$. Lorsque x croît en restant négatif, c'est-à-dire prend des valeurs négatives dont la valeur absolue est plus petite, y décroît, par exemple pour $x = -10$, $y = 100$; pour $x = -2$, $y = 4$; pour $x = -1$, $y = 1$; pour $x = -\frac{1}{10}$, $y = \frac{1}{100}$.

On voit que y se rapproche de zéro en même temps que x; pour $x = 0$, on a $y = 0$; ensuite, x continuant à croître pour prendre des valeurs positives de plus en plus grandes, y prend aussi des valeurs positives de plus en plus grandes. En résumé, on peut former le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	positif, décroît	0	positif, croît	$+\infty$

La fonction y est décroissante dans l'intervalle $(-\infty, 0)$ *et croissante dans l'intervalle* $(0, +\infty)$.

Pour effectuer la représentation graphique des variations de y, traçons deux axes rectangulaires Ox, Oy (fig. 48) et choisissons une unité de longueur OB. Nous avons construit les points A, B, C, D, A′, B′, C′, D′ dont les abscisses sont :

$$\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ -\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{3}{2},\ -2.$$

Les ordonnées correspondantes doivent être :

$$AM = \frac{1}{4}, \quad BN = 1, \quad CP = \frac{9}{4}, \quad DQ = 4$$

$$A'M' = \frac{1}{4}, \quad B'N' = 1, \quad C'P' = \frac{9}{4}, \quad D'Q' = 4.$$

En réunissant par un trait continu les points Q′, P′, N′, M′, O′, M, N, P, Q, on obtient une courbe telle que nous l'avons figurée; cette courbe devrait être prolongée au delà des points Q et Q′, mais les dimensions forcément limitées de la figure ne nous permettent d'en représenter qu'une portion.

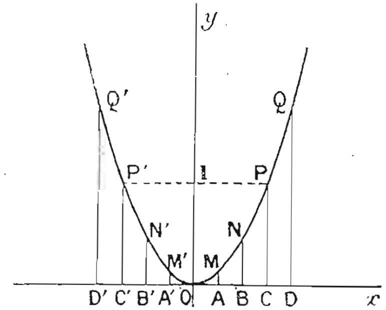


Fig. 48.

On remarque immédiatement que les ordonnées CP, C′P′ qui correspondent à deux abscisses opposées, OC, OC′ sont *égales;* la droite PP′ est donc parallèle à Ox; cette droite PP′ est donc perpendiculaire à Oy et de plus le point I où elle rencontre Oy est le milieu de PP′, puisque O est le milieu de CC′. On peut donc, connaissant P, obtenir P′ en abaissant de P la perpendiculaire PI sur Oy et prolongeant cette perpendiculaire d'une longueur IP′ = PI. On exprime ce fait en disant que P′ est le symétrique de P par rapport à Oy.

Comme ce raisonnement s'applique à tout point P de la branche OMNPQ, on dira que la branche OM′N′P′Q′ est *symétrique* de OMNPQ par rapport à Oy. La courbe est donc formée de deux branches symétriques l'une de l'autre par rapport à Oy : *on dit alors que cette courbe admet* Oy *comme axe de symétrie.*

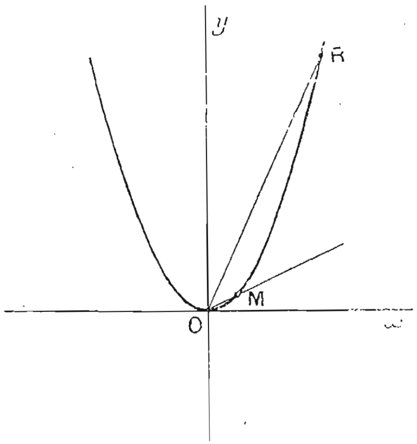


Fig. 49.

Nous allons étudier d'un peu plus près l'allure de la courbe; soit M un point de la courbe (fig. 49); joignons-le au point O. Quelle sera la pente de OM? Si l'abscisse de M est x, son ordonnée est x^2; la pente de OM, égale au quotient de l'ordonnée de M par son abscisse est donc égale à x. On voit que cette pente est très voisine de zéro lorsque x est très petit; donc lorsque M se rapproche de O, OM tend à se confondre avec Ox; de même lorsque x devient très grand, la pente devient très grande et la droite, telle que OR, se rapproche de plus en plus de Oy. Ces remarques permettent de se rendre compte que l'allure générale de la courbe est bien celle que l'on a indiquée.

229. — **Variations de** $y = -x^2$ **et de** $y = ax^2$.

Considérons maintenant la fonction :

$$y = -x^2.$$

Traçons deux axes Ox, Oy, choisissons une unité de longueur OB, et traçons la courbe $y = x^2$ que nous figurerons en pointillé (fig. 50).

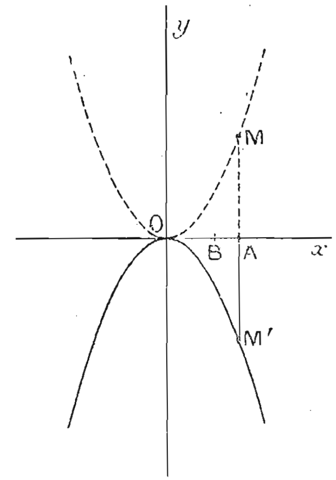


Fig. 50.

Soit A un point quelconque de Ox; à ce point A correspond le point M dont l'ordonnée $AM = \overline{OA}^2$. Quel est le point de la courbe $y = x^2$ qui correspond à la même abscisse? C'est un point M′ dont l'ordonnée AM′ est négative et a pour valeur absolue $\overline{OA}^2$; *donc* M′ *est symétrique de* M *par rapport à* Ox; à une même valeur quelconque de x correspondent dans les courbes $y = x^2$ et $y = -x^2$ *des ordonnées opposées*. On obtiendra donc la seconde courbe en construisant la symétrique de la première par rapport à Ox.

On peut faire le tableau suivant des variations de la fonction $y = -x^2$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	négatif, croît	0	négatif, décroît	$-\infty$

Considérons maintenant la fonction définie par l'équation :

$$y = ax^2,$$

dans laquelle a désigne une constante positive.

Il est facile de voir que la courbe qui représente les variations de y est tout à fait semblable de forme à celle que nous avons étudiée $y = x^2$. On peut même aller plus loin et montrer que ces deux équations seront représentées par *la même* courbe, si l'on choisit convenablement *les unités* de longueur. Proposons-nous, en effet, de construire la courbe représentée par l'équation :

$$y = 10x^2,$$

l'unité de longueur étant le centimètre, on remarquera que l'on peut écrire cette équation :

$$10y = (10x)^2.$$

Si nous faisons $x = \frac{2}{10}$ nous obtenons $10x = 2$; d'où :

$$10y = 2^2 = 4 \qquad y = \frac{4}{10}.$$

Donc au point d'abscisse $\frac{2}{10}$ de centimètre, c'est-à-dire 2^{mm}, correspond une ordonnée égale à $\frac{4}{10}$ de centimètre, c'est-à-dire à 4^{mm}. On verrait de même qu'aux abscisses $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{5}{10}$ correspondent des ordonnées égales à $\frac{9}{10}$, $\frac{16}{10}$, $\frac{25}{10}$. En sorte que, si l'on construisait la courbe correspondant à l'équation :

$$y = x^2$$

en prenant le millimètre comme unité de longueur

on obtiendrait la même courbe que si l'on partait de l'équation :

$$y = 10x^2,$$

et que l'on prenne le centimètre pour unité de longueur.

Les courbes que nous avons obtenues et qui ne diffèrent que par l'*échelle* à laquelle elles sont tracées, ont reçu le nom de *paraboles*.

230. — **Variations de trinomes à coefficients numériques.**

1° Soit le trinome :

$$(1) \qquad y = -2x^2 + 3.$$

Si nous construisons la parabole représentée par l'équation :

$$(2) \qquad y = -2x^2,$$

nous voyons que la courbe (1) diffère de la courbe (2) en ce que, pour chaque valeur de x, l'ordonnée y est augmentée de 3. Sur la figure 51, où l'unité de longueur est OA, nous avons tracé en pointillé la courbe (2); c'est la courbe SRQOMNP; la courbe (1) s'en déduit en augmentant de la même longueur 3 les ordonnées de tous ses points; on obtient ainsi la courbe S'R'P'O'M'N'Q', les segments SS', RR', PP', OO', MM', NN', QQ' étant tous égaux à 3, parallèles et de même sens; la courbe tracée en trait plein, qui est la courbe demandée, se déduit de la courbe auxiliaire en pointillé par une *translation* parallèle à Oy.

On peut suivre une marche un peu différente; prenons $OO' = 3$, et traçons $O'x'$ parallèle à Ox. Si nous prenons les axes $x'O'y$ au lieu des axes xOy, on voit que les abscisses des divers points ne changent pas, mais que les ordonnées sont diminuées de 3 (il faut remarquer que l'on a changé l'axe des *abscisses;* il en résulte un changement d'origine pour les *ordonnées*, car l'origine des ordonnées est le point d'intersection de l'axe des abscisses avec celui des ordonnées). Pour avoir la courbe cherchée, il suffit donc de construire la courbe :

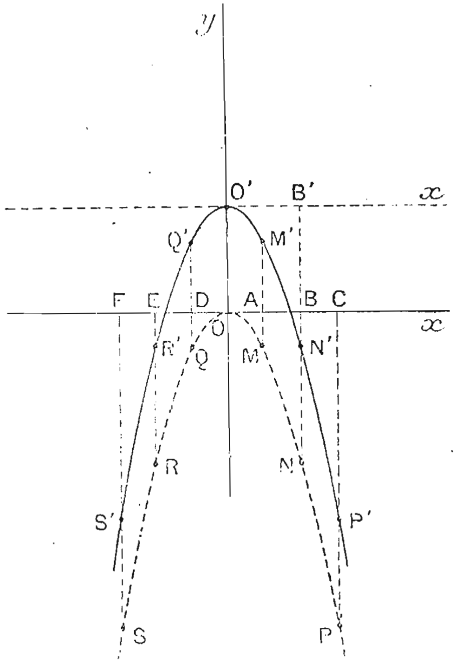


Fig. 51.

$$y = -2x^2,$$

par rapport aux axes $x'O'y$.

Par exemple, si l'on a :

$$O'B' = 2$$
$$B'N' = -4,$$

il en résulte :

$$OB = 2$$
$$BN' = BB' + B'N' = 3 - 4 = -1.$$

2° Considérons maintenant l'équation :

$$y = \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

Nous obtiendrons une courbe qui se déduira de la courbe représentée par l'équation :

$$y = \frac{1}{2}x^2,$$

par une translation parallèle à Ox; pour des abscisses différant de 1, on obtient dans ces deux

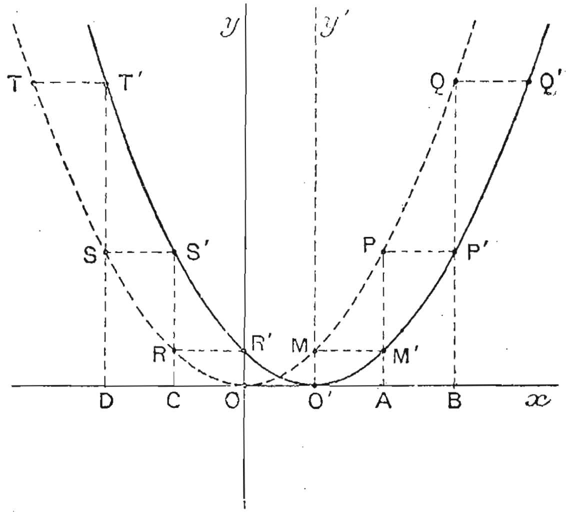


Fig. 52.

courbes la même ordonnée; on peut aussi changer l'axe des ordonnées en prenant pour origine le point O' de Ox dont l'abscisse est égale à 1 et pour axe des ordonnées la perpendiculaire $O'y'$ à Ox.

Sur la figure 52, on a marqué en pointillé la courbe TSROMPQ :

$$y = \frac{1}{2}x^2,$$

l'unité de longueur étant $OO' = O'A = AB$; la courbe cherchée est la courbe T'S'R'O'M'P'Q' qui s'en déduit par translation :

$$TT' = SS' = RR' = OO' = MM' = PP' = QQ' = 1.$$

En effet, pour $x = 2$, par exemple, on a $x - 1 = 1$; on obtient ainsi le point M' de la courbe cherchée, dont l'ordonnée $AM' = \frac{1}{2}$ est égale à l'ordonnée OM qui correspond à l'abscisse $OO' = 1$ de la courbe en pointillé $y = \frac{1}{2}x^2$.

3° Considérons enfin le trinome :

$$y = x^2 + 4x + 3.$$

Nous pouvons écrire ce trinome sous la forme remarquable :

$$y = (x + 2)^2 - 1,$$

et, sous cette forme, on voit que la courbe qui le représente se déduit de la courbe :

$$y = x^2,$$

par une double translation, parallèlement d'abord à Ox et ensuite à Oy.

Soit en effet (fig. 53) O' le point d'abscisse -2 et d'ordonnée -1 et M un point de la courbe cherchée, d'abscisse $x = OA$ et d'ordonnée $y = AM$. On a, sur la figure :

$$O'A' = O'C + CA' = O'C + OA = x + 2$$
$$A'M = A'A + AM = CO + AM = y + 1.$$

La relation :

$$y = (x + 2)^2 - 1,$$

donne donc :

$$A'M = \overline{O'A'}^2,$$

c'est-à-dire que la courbe lieu du point M est bien définie par l'équation :

$$y = x^2,$$

par rapport aux axes $O'x'$, $O'y'$.

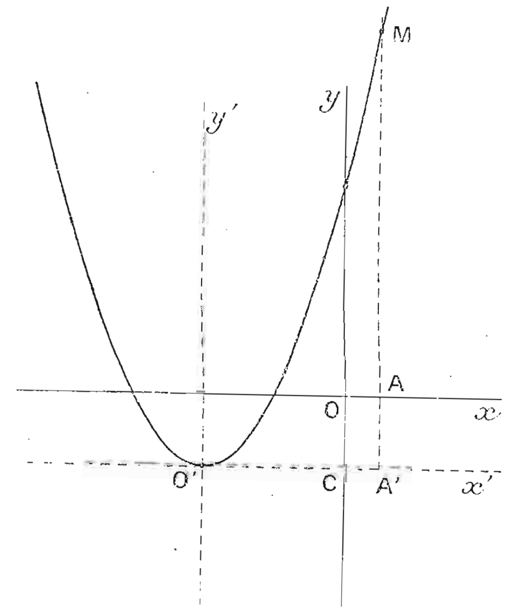


Fig. 53.

Les relations que nous avons écrites sont d'ailleurs des relations entre segments et sont vraies en général, comme nous l'avons vu à propos des changements d'origine.

En résumé, l'étude des trinomes à coefficients numériques conduit *aux mêmes courbes* que l'étude de l'équation $y=ax^2$; la position de ces courbes par rapport aux axes est seule changée et, dans chaque cas particulier, l'étude attentive de la figure fait connaître la position des droites $O'x'$ et $O'y'$. Le point O' est *le sommet de la parabole*; la droite $O'y'$ qui, nous le savons, est un axe de symétrie, est dite l'*axe de la parabole*, la droite $O'x'$ s'appelle la *tangente au sommet*.

231. — **Variations d'un trinome quelconque.**

Pour étudier les variations du trinome

$$(1) \qquad y=ax^2+bx+c$$

et leur représentation graphique, le plus simple est d'utiliser la forme remarquable générale :

$$(2) \qquad y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4ac}.$$

On voit dès lors immédiatement, par des raisonnements analogues aux précédents, que si l'on désigne par O' le point dont les coordonnées sont :

$$-\frac{b}{2a}, \qquad -\frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

par $O'x'$, $O'y'$ les parallèles à Ox, Oy menées par O', par x' et y' les coordonnées d'un point par rapport à ces axes, la courbe représentative du trinome ne différera pas de la parabole :

$$y'=ax'^2,$$

admettant $O'y'$ comme axe et $O'x'$ comme tangente au sommet. Mais nous n'insisterons pas sur cette méthode, préférant développer ici l'étude directe

des variations du trinome (1) en utilisant la forme remarquable (2).

Pour étudier les variations de y d'après la formule (2) nous remarquerons que x ne figure dans le second membre que par l'expression $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, expression toujours positive, sauf pour $x=-\frac{b}{2a}$, valeur qui l'annule. Si a est positif, le produit $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ est donc toujours positif ou nul; il est négatif ou nul lorsque a est négatif. Il en résulte que, lorsque a est positif, y prend *la plus petite valeur possible* ou, comme on dit, atteint un *minimum absolu*, lorsque x est égal à $-\frac{b}{2a}$; au contraire si a est négatif, y atteint un *maximum absolu* pour $x=-\frac{b}{2a}$, c'est-à-dire prend, pour cette valeur de x, une valeur plus grande que pour toute autre valeur de x.

L'expression $x+\frac{b}{2a}$ croît avec x; lorsqu'elle est positive, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ varie dans le même sens, c'est-à-dire croît avec x; lorsque $x+\frac{b}{2a}$ est négatif, sa valeur absolue décroît lorsque sa valeur relative croît; donc $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ décroît lorsque x croît, si $x+\frac{b}{2a}$ est négatif.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$x+\frac{b}{2a}$	$-\infty$;	négatif, croit;	o	positif croit;	$+\infty$
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$;	positif, décroit;	o *minimum absolu*	positif croit;	$+\infty$
$a>0$ $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$;	positif, décroit;	o *minimum absolu*	positif croit :	$+\infty$
$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$	$+\infty$;	décroit;	$\frac{4ac-b^2}{4a}$ *minimum absolu*	croit	$+\infty$
$a<0$ $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	$-\infty$;	négatif, croit;	o *maximum absolu*	négatif décroit;	$-\infty$
$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$,	$-\infty$:	croit;	$\frac{4ac-b^2}{4a}$ *maximum absolu*	décroit;	$+\infty$

Enfin, suivant que a est positif ou négatif, le produit $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ varie dans le même sens que $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, ou en sens contraire.

L'étude de la variation du trinome a été résumée dans le tableau de la page 454.

Quant au signe du trinome, il a été discuté au n° 177; on pourrait retrouver ici les résultats de cette discussion, suivant le signe du *minimum* ou du *maximum;* par exemple, si a est positif, et si $4ac-b^2$ est aussi positif, le minimum absolu est positif, y ne peut donc pas devenir égal à zéro; si, au contraire, $4ac-b^2$ est négatif, y décroît de $+\infty$ jusqu'à ce minimum négatif et par suite s'annule dans l'intervalle; de même y s'annule en croissant de ce minimum négatif jusqu'à $+\infty$.

Les principaux cas qui peuvent se présenter peuvent être représentés sur les figures ci-après 54 à 59 sur lesquelles l'abscisse OA est égale à $-\frac{b}{2a}$, valeur de x qui fournit le minimum, et l'ordonnée AS à $\frac{4ac-b^2}{4a}$, valeur de y pour $x=-\frac{b}{2a}$; S est le sommet de la parabole.

Remarque 1. — La valeur de $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ne dépend que de la valeur absolue de $x+\frac{b}{2a}$; si l'on pose successivement :

$$x+\frac{b}{2a}=t$$

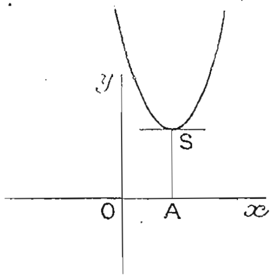


Fig. 54.
$a > 0$; $4ac - b^2 > 0$
$\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$: minimum positif
pas de racines.

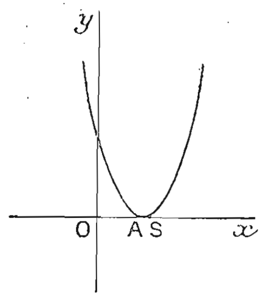


Fig. 55.
$a > 0$ $4ac - b^2 = 0$
minimum nul, racine double.

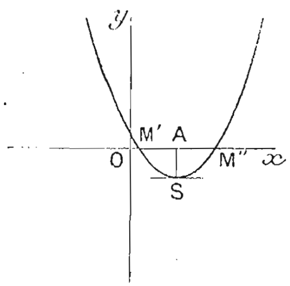


Fig. 56.
$a > 0$ $4ac - b^2 < 0$
$\frac{4ac - b^2}{4a} < 0$; minimum négatif, 2 racines OM′ et OM″.

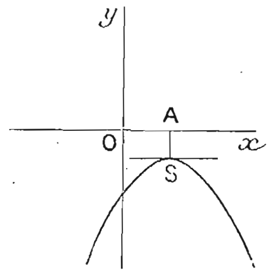


Fig. 57.
$a < 0$ $4ac - b^2 > 0$
$\frac{4ac - b^2}{4a} < 0$; maximum positif,
pas de racines.

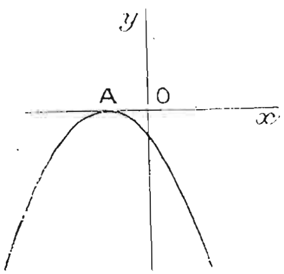


Fig. 58.
$a < 0$; $4ac - b^2 = 0$
maximum nul, racine double.

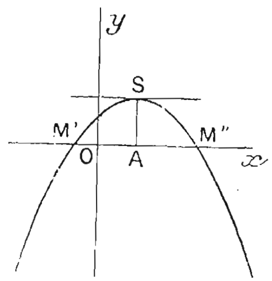


Fig. 59.
$a < 0$; $4ac - b^2 < 0$
$\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$; maximum positif,
2 racines OM′ et OM″.

$$x + \frac{b}{2a} = -t,$$

cette expression reprend la même valeur, et par suite y reprend aussi la même valeur ; on a donc la même ordonnée pour les valeurs suivantes de l'abscisse :

$$x = -\frac{b}{2a} + t$$
$$x = -\frac{b}{2a} - t,$$

c'est-à-dire pour des valeurs situées de part et d'autre du point $A\left(x = -\frac{b}{2a}\right)$, de telle manière que ce point A soit leur milieu. On retrouve ainsi la symétrie déjà démontrée par rapport à la parallèle à Oy passant par le sommet.

Remarque 2. — Les zéros du trinome sont précisément les abscisses des points d'intersection de la parabole avec Ox. Lorsque la parabole est tangente à Ox, il y a un zéro *double* : les deux points d'intersection se sont confondus.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE XIX

Partie complémentaire : Représentation graphique.

383. — On a observé les températures suivantes :

Midi	10°
2^h	11°,5
4^h	8°
6^h	5°

8^h	3°
10^h	0°,5
Minuit	— 0°,5
2^h	— 1°

Représenter graphiquement la variation de la température, en faisant correspondre 1^{cm} à 1^h et 1^{cm} à 1°.

384. — Effectuer la même représentation graphique, en faisant correspondre 2^{mm} à 1^h et 1^{mm} à 1°.

385. — Effectuer la même représentation graphique en faisant usage de papier quadrillé et faisant correspondre un côté du quadrillage à 1^h et un côté à 2°.

386. — Représenter graphiquement la température d'un malade d'après les observations suivantes :

	Matin.	Soir.
28 juin	36°,9	38°
29 —	37°,5	38°,5
30 —	37°,4	39°
1er juillet	39°,1	39°,5
2 —	39°	38°,8
3 —	37°,7	38°
4 —	37°	37°,6

387. — Représenter graphiquement les températures indiquées dans la note au bas de la page 417, en faisant correspondre 5^{cm} à 1^m et 5^{cm} à 1°.

388. — Représenter graphiquement les variations des fonctions.

$$y = 2x - 1$$
$$y = -3x + 2$$
$$y = \frac{x}{3} - 2$$

en prenant comme unité le centimètre.

389. — Même question, en prenant pour unité le millimètre.

390. — Représenter graphiquement les variations des fonctions :

$$y = \frac{3}{5}x - \frac{3}{5}$$
$$y = \frac{2}{7}x - \frac{3}{8}$$

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{2}{5}$$

en prenant pour unité le décimètre.

391. — Même question en prenant pour unité le centimètre.

392. — Représenter graphiquement les variations des fonctions :

$$y = -2x + 400$$
$$y = -3x + 250$$
$$y = 3\frac{x}{4} - 2\,000$$

en prenant pour unité le dixième de millimètre.

393. — Représenter graphiquement les deux droites :

$$y = 2x + 4$$
$$y = -3x + 7$$

en prenant pour unité le centimètre; calculer et mesurer les coordonnées de leur point commun, c'est-à-dire du point dont les coordonnées x, y vérifient les deux équations.

394. — Même question pour les droites :

$$y = \frac{1}{4}x + 15$$
$$y = 2x - 3.$$

On prendra pour unité le millimètre.

395. — Résoudre les deux questions précédentes en faisant usage de papier quadrillé.

396. — Calculer les coordonnées du point commun aux deux droites :

$$y = ax + b$$
$$y = a'x + b'.$$

Discuter.

397. — Construire les droites représentées par les équations :

$$x = 2y + 5$$
$$x = 3y - 4$$
$$x = 2$$
$$x = -\frac{y}{5} + \frac{2}{3}.$$

en prenant pour unité le centimètre.

398. — Construire les droites représentées par les équations :

$$2x + 3y = 5$$
$$4x - 5y - 2 = 0$$
$$3x - 2y + 4 = 0$$
$$3x - 5 = 0$$
$$2y + 3 = 0.$$

en prenant pour unité le demi-centimètre.

399. — Dans quel cas les droites représentées par les équations :

$$ax + by = c$$
$$ax' + b'y = c'$$

sont-elles parallèles ?

400. — Quelle est la pente de la droite :

$$ax + by = c.$$

401. — L'horaire du rapide de jour de Paris à Marseille pendant l'hiver 1907-1908 était le suivant :

Distances de Paris en kilomètres.	Stations.	Arrivée.	Départ.
	Paris		9h20
155	Laroche	11h29	11h34
315	Dijon	1h53	1h59
440	Mâcon	3h38	3h41
512	Lyon	4h41	4h56
618	Valence	6h16	6h20
742	Avignon	7h52	8h3
863	Marseille	9h34	

Représenter graphiquement la marche de ce train en prenant pour unité de temps 5^m, pour unité d'espace le myriamètre et pour unité de longueur le millimètre pour les abscisses et les ordonnées.

402. — Résoudre la question précédente en faisant usage de papier quadrillé.

403. — Résoudre la même question en faisant correspondre une abscisse de 1^{cm} à 1^h et une ordonnée de $\frac{1}{8}$ de millimètre à 1^{km}.

404. — Calculer la vitesse qu'a le train précédent dans

chacune des sections qu'il parcourt et mesurer les pentes des droites correspondantes dans les diverses représentations graphiques.

405. — Calculer, avec l'approximation que comporte la figure, les vitesses des trains représentés sur la figure 46, entre les diverses stations du parcours.

406. — Même question pour la figure 47 ; calculer de plus les époques et les distances aux stations voisines des croisements des trains en dehors des stations.

407. — Construire la parabole :

$$y = \frac{3}{5} x^2$$

en prenant pour unité de longueur le centimètre.

408. — Construire la même courbe en prenant pour unité de longueur : 1° le décimètre ; 2° le millimètre.

409. — Construire la parabole :

$$y = 40\,000\, x^2$$

en prenant pour unité de longueur : 1° le mètre ; 2° le décamètre.

410. — Construire la parabole :

$$y = -0{,}0003\, x^2$$

en prenant pour unité de longueur le dixième de millimètre.

411. — Construire la parabole :

$$y = x^2,$$

et la droite :

$$y = 3x + 4,$$

en prenant pour unité de longueur le centimètre. Mesurer les abscisses de leurs points communs et vérifier qu'elles sont égales aux racines de l'équation :

$$x^2 = 3x + 4.$$

412. — Même question pour la parabole :

$$y = \frac{1}{5} x^2$$

et la droite :

$$y = 2x + 10.$$

On prendra pour unité le millimètre.

413. — Construire la parabole :

$$y = 2x^2 - 5x + 3,$$

en prenant pour unité le centimètre; mesurer les abscisses des points d'intersection de cette courbe avec Ox.

414. — Étudier les variations du trinome :

$$y = \frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{4}x - 1.$$

Courbe représentative, en prenant le centimètre pour unité.

415. — Construire la courbe :

$$x = 2y^2 - 5y + 1,$$

en prenant pour unité le centimètre.

416. — Construire les courbes suivantes :

$$x = 50\,000y^2 + 300y - 3$$
$$y = 0{,}0001x^2 + 0{,}01x - 1,$$

en prenant pour chacune d'elles une unité de longueur commode, que l'élève devra choisir.

TABLE DES MATIÈRES

11-17. — Coulommiers. Imp. PAUL BRODARD. — 4-17.