ZNANJE JE MOĆ

ŠTO SU SKUPOVI I KAKVA IM JE ULOGA

MATERIJA I BROJ

BIBLIOTEKA ZA MATEMATIKU, FIZIKU I KEMIJU

UREDNIK

JOSIP BREČEVIĆ

Izdavačko poduzeće »Školska knjiga«, Zagreb

ŠTO SU SKUPOVI
i
KAKVA IM JE ULOGA

PRIRUČNIK ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

NAPISAO

Dr. ĐURO KUREPA

sveuč. profesor

ZAGREB 1960

Stručni recenzenti
Ignacije Smolec i Branko Pavlović

Opremio
akad. slikar Bojan Stranić

TISAK GRAFIČKOG ZAVODA HRVATSKE

PREDGOVOR

Čini se, bili smo prvi na svijetu, da nastavu matematike svijesno iznosimo i ostvarujemo na skupovnim ili množinskim razmatranjima. Širom svijeta to se gledište danas prihvaća i ostvaruje.

O baziranju nastave matematike na skupovima i organizaciji ili strukturi skupova imao sam prilike pisati i predavati u Jugoslaviji i u inostranstvu.[1] Zaista je čudno, da se množinska razmatranja nisu razvila ranije.

Skupovi ili množine i operacije sa skupovina pojavljuju se svuda. *Za svaku je stvar ili pojavu korisno postaviti pitanje, od čega se ona sastoji, i odrediti njene sastavne dijelove.*

U razmatranjima o skupovima bitno je odrediti članove (elemente) promatrane množine i veze među članovima.

Nadalje, množine su međusobno povezane i prelaze jedne u druge. Iz zadanih množina izvode se razne druge množine. Na pr. iz dviju ili više množina izvodi se nova množina naprosto time, što članstvo zadanih množina tvori novu množinu. To je slično, kao što iz dvije ili više hrpa voća dobivamo novu cjelinu voća, stavljajući na pr. promatrano voće u istu prostoriju.

Rastavljanjem zadane množine dobiva se skup njenih dijelova — nova važna vrsta množina.

Osnovni pojam u čitavoj matematici i ljudskoj spoznaji je pridruživanje (funkcija, preslikavanje . . .).

[1] I nastava drugih predmeta, na pr. fizike, kemije, biologije . . ., također treba počivati na skupovno-strukturnim principima.

Kao vrlo važan slučaj pridruživanja ili funkcije ističemo tolikovanje. Tolikovanje množine A u množinu B je postupak, kojim svakom članu iz A pridružujemo jedan jedini član iz B i to tako, da nejednakim članovima iz A odgovaraju nejednaki članovi iz B. Drugim riječima, tolikovanje je svaka jednoznačna funkcija sa svojstvom, da je pripadna antifunkcija jednoznačna.

Tipičan primjer tolikovanja imamo, kad sparujemo prste jedne ruke s prstima druge ruke (na pr. kad sparujemo istoimene prste lijeve i desne ruke).

Tolikovanje kao pridruživanje izraslo je iz pitanja: Što znači, da su dvije množine istobrojne (t. j. da imaju jednako mnogo članova)?

U ovom djelu obrađeni su osnovni pojmovi o skupovima ili množinama, posebno u vezi s elementarnom matematikom.

U vrijeme kad se skupovna rasuđivanja uvode svuda, držimo, da će knjižica dobro poslužiti nastavnicima, učenicima i drugima.

Pisac

SADRŽAJ

Poglavlje 1. NEKOLIKO OSNOVNIH POJMOVA O SKUPOVIMA . . . . 1—44

§ 1.1. Primjeri skupova . . . . 1—3

§ 1.2. Skup i njegovi elementi. Znak $\in$. 1. Kod svakog skupa je bitno da znamo od čega je on sastavljen. — 2. Pust ili prazan skup / skup $\emptyset$ ili v /. — 3. Znak $\in$, koji povezuje elemente i skupove . . . 3—8

§ 1.3. Predočivanje skupova. Imena skupova . . . . . . 5—6

§ 1.4. Jednakost i nejednakost skupova. Relacije $\subset$ i $\supset$. 1. Jednakost skupova. — 2. Definicija. — 3. Što znači . . . ? — 4. Definicija relacija $\supset$ i $\subset$ među skupovima. — 5. Definicija. — 6. Prema tome . . . — 7. Za prazni skup smatramo . . . — 8. Za svaki neprazni skup S . . . — 9. Primjer . . . . 6—10

§ 1.5. Kako nastaju skupovi? . . . . 10—13

§ 1.6. Udruživanje (unija) ili sastavljanje skupova. Znak $\cup$. 1. Primjer 1. — 2. Slično, unijom ili . . . — 3. Definicija unije. — 4. Oznaka unije skupova. — 5. Nekoliko primjena unije skupova u geometriji. — 5.1. Što je pravac? 5.2. Pojam zrake. 5.3. Što je trokut? 5.4. Što je ravnina? Aksiom o ravnini. 5.5. Što je prostor? . . . . 13—20

§ 1.7. Presjek ili zajednički dio skupova. Znak $\cap$. — 1. Primjeri za presjek skupova. — 2. Definicija presjeka skupova. Znak $\cap$. . . . . 20—24

§ 1.8. Oduzimanje skupova . . . . 24—28

§ 1.9. Razlaganje ili rastavljanje skupa. — 1. Nekoliko primjera i pojmova. — 2. Nazivi i oznake . . . . 28—32

§ 1.10. Algebra skupova: Elementarno računanje sa skupovima. — 1. Naučili smo . . . — 2. Slično je s oduzimanjem skupova. — 3. Zakoni distribucije . . . 32—35

§ 1.11. Kombinirani produkt skupova. — 1. Pojam para i uređenog para. — 2. Kombinirani produkt dvaju skupova. — 3. Kvadrat skupa. — 4. Kombinirano množenje s praznim skupom ∅. — 5. Primjedba o kombiniranom množenju skupova . . . . 35—41

§ 1.12. Veze među osnovnim pojmovima. — 1. Relacija ⊆ i operator ∪. — 2. Relacija ⊆ i operator ∩ za sječenje. — 3. Veza između relacija ∈ i ⊆. Partitivni skup. . . . . 41—42

§ 1.13. Konveksni i nekonveksni skupovi . . . . 42—44

Poglavlje 2. KOLIKO ZADAN SKUP IMA ČLANOVA? GLAVNI ILI KARDINALNI BROJEVI . 45—82

§ 2.1. Primjeri o skupovima s jednakim i nejednakim brojem članova . . . . 45—47

§ 2.2. Što znači da dva skupa imaju jednako mnogo elemenata? Kolikovanje skupova. — 1. Definicija 1. — 2. Kardinalni broj skupa . . . — 3. Cijelih racionalnih brojeva ima . . . — 4. Svih racionalnih brojeva ima . . . — 5. Svake dvije otvorene duži imaju . . . — 6. Svaki pravac ima . . . — 7. Što ima više točaka: kružnica ili pravac? — 8. Što ima više točaka: duž ili pravac? . . . . 47—56

§ 2.3. Što su kardinalni brojevi? Označivanje kardinalnih brojeva. — 1. Broj jedan i znak 1. — 2. Broj nula i znak 0. — 3. Glavni broj „dva“ i njegova oznaka 2, odnosno II. — 4. Na sličan način . . . — 5. Skup N svih prirodnih brojeva i njegov kardinalni broj (broj alef). — 6. Koliko ima točaka na pravcu? Broj c. — 7. Točaka na pravcu ima . . . . 56—61

§ 2.4. Računanje s kardinalnim brojevima. — 1. Dodavanje (zbrajanje) glavnih brojeva. — 2. Množenje kardinalnih brojeva. — 2.1. Množenje skupova odražava se u . . . 2.2. Nekoliko svojstava množenja. 2.3. 0 jednadžbi $xx = x$. 2.4. Koliko točaka ima ravnina? 2.5. 1. Koliko točaka ima prostor? 2.5. 2. Osvrt na pitanje koliko točaka ima u prostoru. — 3. Oduzimanje kardinalnih brojeva. — 4. O skupu I svih iracionalnih realnih brojeva. — 5. Koliko ima transcendentnih brojeva? — 6. Osvrt na računske operacije s kardinalnim brojevima . . . . . 61—80

§ 2.5. Skup N svih prirodnih brojeva. Princip totalne indukcije. — 1. Promatrajmo ne samo pojedine prirodne brojeve . . . — 2. Princip potpune indukcije. — 3. Suma geometrijske progresije . . . . 80—81

§ 2.6. Podjela skupova u konačne, beskonačne i prazne. — Podjela glavnih brojeva u konačne (prirodne), beskonačne i nulu 82

Poglavlje 3. O PRESLIKAVANJIMA SKUPOVA . . 83—131

§ 3.1. Jednostavni primjeri funkcija ili preslikavanja . . . 83—88

§ 3.2. Opća definicija preslikavanja ili funkcije. — 1. Definicija funkcije (preslikavanja, pridruživanja). — 2. Transformat fS skupa S . . . . 88—90

§ 3.3. Funkcija i pripadna protivfunkcija . . . . 90—95

§ 3.4. Jednakost i nejednakost funkcija. O jednom prirodnom sužavanju i proširenju funkcije. — 1. Definicija jednakosti funkcija. — 2. Dio funkcije (sužavanje funkcije). — 3. O jednom proširenju funkcije . 95—98

§ 3.5. Slaganje ili komponiranje funkcija . . . . 98—99

§ 3.6. Jednoznačne funkcije. Skup B^A — nov način formiranja skupova. — 1. Jednoznačna funkcija . . . — 2. Potenciranje kardinalnih brojeva . . . . 100—104

§ 3.7. Nizovi kao funkcije. Dijadski nizovi. Dijadske funkcije . 104—105

§ 3.8. Cantorova nejednakost . . . . 105—108

§ 3.9. Veza između broja kN prirodnih brojeva i broja kR realnih brojeva . . . . 108—109

§ 3.10. O jednom naoko vrlo siromašnom skupu. Trijadski skup . . . . 109—113

§ 3.11. O aksiomu izbora. — 1. Malo prije smo govorili . . . — 2. Primjeri o izboru. — 3. Aksiom izbora i nekoliko drugih tvrdnji . . . . 113—117

§ 3.12. Permutacija skupa. Jedna nova računska operacija. — 1. O permutacijama i faktorijelama. — 2. Jedan nov račun . . . Predigra za grupe . . . . 117—123

§ 3.13. Što je grupa? — 1. Obično se kaže . . . — 2. Definicija polugrupe i grupe. — 3. Definicija grupe . . 123—129

§ 3.14. Što je polje ili tijelo? . . . . 129—131

Poglavlje 4. UREĐENJE SKUPOVA . . . . 132—158

§ 4.1. Nekoliko primjera uređenja. — 1. Rječnik kao uređen skup riječi. — 2. Vrlo se često prave razne rang-liste. — 3. Uređivanje brojeva. — 4. Uređivanje točaka na duži (orijentirana duž, vektor). — 5. Orijentirani pravac ili pravac kao uređen skup. — 6. Razna uređenja jednog te istog skupa. 6.1. Primjer 1. 6.2. Da li skup 0 možemo urediti, . . . 6.3. Koliko potpunih uređenja dopušta . . . — 7. Na posve analogan način . . . — 8. Nekoliko uređenja skupa N prirodnih brojeva. 8.1. Najjednostavnije uređenje je . . . 8.2. Da li se pomoću permutacije može . . . 8.3. Uredimo skup N . . . 8.4. Evo još jednog uređenja prirodnih brojeva . . . — 9. Tipičan način uređivanja . . . . 132—141

§ 4.2. Što znači, da je skup uređen? 141

§ 4.3. Nekoliko vrsta uređenih skupova. — 1. Dobro uređeni skupovi. 1.1. Već na pr. skup D . . . 1.2. Pogotovo skup racionalnih brojeva . . . 1.3. Nijedna uređena duž nije dobro uređena. — 2. Gusti uređeni skupovi. — 3. Mrežasto uređenje skupa N prirodnih brojeva. — 4. Granasta uređenja . . . . 141—148

§ 4.4. Cikličko ili kružno uređenje. — 1. Primjer s danima sedmice. — 2. Orijentacija svih krugova, ravnine, . . . — 4. Kako se obično ravnina ciklički uređuje? — 5. Linearno uređenje ravnine . . . . 148—155

§ 4.5. Orijentacija u prostoru . . . . 155—158

§ 4.6. Jedno nepotpuno uređenje prostora 158

Poglavlje 5. NEKOLIKO VRSTA SKUPOVA I FUNKCIJA . . . . 159—183

§ 5.1. Otvoreni skupovi . . . . 159—162

§ 5.2. Zatvorenje ili prostornost skupa . . . . 162—163

§ 5.3. Zatvoreni skupovi ili F-skupovi . . . . 163—164

§ 5.4. Derivat skupa 165

§ 5.5. Savršeni skupovi . . . . 165—166

§ 5.6. Što znači, da je jedan skup gust na drugom? . . 166—167

§ 5.7. Konvergentni i divergentni nizovi 167

§ 5.8. Granična vrijednost preslikavanja na određenom mjestu . . . . 168—170

§ 5.9. Prekidna i neprekidna preslikavanja. Jedan neobičan primjer. — 1. Neka je S zadan skup; . . . — 2. Jedan neobičan primjer. — 3. Pa da li ima bitne razlike između pravca i ravnine? . . . . 170—174

§ 5.10. Topološka ili homeomorfna preslikavanja. — 1. Što su topološka preslikavanja. — 2. I zatvorena površ svakog trokuta S je homeomorfna sa svakim krugom S'. — 3. Topologija — posebna matematička nauka. 3.1. Cijepanje ravnine. 3.2. Topološka kružnica. — I s topološkog gledišta duž i kvadrat su različiti. — 5. Topologija kao nauka . . . . . . 174—179

§ 5.11. Mjera skupova. — 1. Recimo nekoliko riječi . . . — 2. Kolika je na pr. mjera skupa . . . — 3. Odredimo mjeru skupa N prirodnih brojeva . . . — 4. Odredimo mjeru skupa Q racionalnih brojeva. — 5. Kolika je mjera skupa I (0,1) iracionalnih brojeva položenih između 0 i 1? — 6. Mjera trijadskog skupa T. — 7. Analogna razmatranja . . . — 8. Tako vidimo . . . . 179—18

POGLAVLJE 1.

NEKOLIKO OSNOVNIH POJMOVA O SKUPOVIMA

§ 1.1. PRIMJERI SKUPOVA

Sa skupovima ili množinama radimo svakodnevno i u vrlo različnim prilikama. Stado ovaca, košara jabuka, vreća žita, naselje, skup država, skup kontinenata, sazviježđa, populacije bakterija, skup točaka na kružnici, skop brojki, skup prirodnih brojeva, . . . sve su to primjeri skupova. *Skoro svaka djelatnost čovjekova odnosi se svijesno ili nesvijesno na pojedine skupove (množine)*.

Zato je od važnosti, da se *svijesno zapitamo, što su skupovi i kakva im je uloga.*

Primjer 1. Košarica jabuka je određen *skup*. Kaže se, da je svaka od tih jabuka *član* ili *element* ili *jedinica* ili *jedinka* toga skupa. Kaže se također, da sve te jabuke čine skup. Ako skup tih jabuka označimo s K, pa ako je j neka jabuka iz skupa K, onda se može reći ovako:

jabuka j **je element skupa** K **ili kraće:**

j **je element od** K **ili još kraće:**

j **je iz** K,

ili simbolički:

$$j \in K.$$

Znak „$\in$" stoji mjesto „*jest element u*" ili „*jest element od*"; znak $\in$ može se čitati i „*iz*".

Primjer 2. Govori se o skupu prozora na jednoj kući; o skupu kuća naselja, o skupu dvokatnica u određenom gradu, . . . Svaka obitelj je određeni skup. Knjige u jednoj kući, gradu, državi čine skupove. Slova abecede čine određeni skup. Šuma je skup; članovi toga skupa jesu na pr. stabla. Možemo promatrati kakve predmete ili lica; i ti predmeti čine određen skup. Možemo i crtati predmete; govori se tada o skupu crteža. Pokažite nekoliko skupova iz svoje okoline. Navedite im elemente!

Primjer 3. Govori se o razredu kao skupu đaka. Nastavnici pojedinog razreda, škole jesu određen skup, pa čak i onda, kad na toj školi ima jedan jedini nastavnik. A ako i taj jedini nastavnik bude premješten, a ne bude zamijenjen? Onda je skup nastavnika na toj školi „pust ili prazan"; dakle se i tada govori o skupu nastavnika, samo što je on prazan.

Primjer 4. Promatrajmo jedan autobus i sve osobe, koje su u njemu. Te osobe čine određen skup A. Tokom vremena taj se skup mijenja: autobus je sad krcat, sad prazan, sad polupun, i t. d.

Ako je autobus u pokretu, da li znaš navesti koji član toga skupa A? (vozač, kondukter!) Da li skup A može biti prazan?

Primjer 5. Promatrajmo skup prirodnih brojeva ispod 10; njegovi elementi jesu brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Primjer 6. **(Što je duž?)** Nacrtaj dvije točke i pripadnu duž. Označi na njoj nekoliko točaka. Ako su A, B dvije točke, onda se duž $\overline{AB}$ sastoji od točaka A i B i svih onih točaka, koje leže na najkraćem putu od A do B. Tako na pr. na duži $\overline{AB}$ nalazi se i njeno središte. Nacrtaj i opiši još nekoliko točaka duži $\overline{AB}$.

Primjer 7. Ako su A, B, C tri točke, tada duži $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ čine određen skup; on se označuje s $\{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}\}$.

Primjer 8. Govori se o skupovima jednakosti, relacija i t. d. Na pr. jednakosti

$$1 + 3 = 4$$

$$x + y = 7$$

$$x - y = 5$$

čine tročlan skup S.

Da li je tu 4 element skupa S? Ako je a član toga skupa S, onda a znači, ili jednakost $1 + 3 = 4$, ili jednakost $x + y = 7$, ili jednakost $x - y = 5$.

ZADACI: 1. Pogledaj u kakvu poslovnicu, radionicu, dućan, izlog i. t. d. Kakve skupove vidiš?

2. Reci nekoliko skupova kojima su članovi: 1) ljudska bića, 2) živa bića, 3) biljke, 4) odjevni predmeti 5) kemijski elementi, 6) oblici vode, 7) prirodni zakoni, 8) izumioci, 9) pisci.
3. Reci skup kojemu su članovi: 1) slova, 2) glasovi, 3) riječi, 4) rečenice, 5) riječi koje počinju sa *ma*, 6) riječi koje svršavaju na *ti*.
4. Da li znaš odrediti nekoliko naših riječi, u kojima slovo (glas) r dolazi: 0) 0-puta, 1) 1-put, 2) 2-put, 3) 3-put.
5. Navedi nekoliko skupova kojima su jedinke: 1) brojevi, 2) točke, 3) funkcije, 4) figure, 5) tijela.

§ 1.2. SKUP I NJEGOVI ELEMENTI. ZNAK $\in$

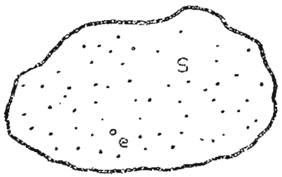
1. Kod svakog skupa je bitno da znamo od čega je on sastavljen. Drugim riječima: kod svakog skupa je važno da znamo njegove elemente (članove, jedinke, točke i t. d.). Tako na pr. ako E označuje skup evropskih država, onda je Jugoslavija član toga skupa; naprotiv, Argentina nije član toga skupa.

Služeći se oznakom $\in$, imamo

Jugoslavija $\in E$,

Argentina non $\in E$.

2. Pust ili prazan skup (skup $\emptyset$ ili v). Može se govoriti o skupu stanovnika jedne države, koji su stariji na pr. od 20 godina, stariji od 30 godina, i t. d. Može se govoriti na pr. i o skupu stanovnika Zagreba, koji su stariji od 150 godina. Takvih ljudi nema (ne bar u godini 1958.). Kraće se kaže i ovako: taj je skup prazan (pust ili vakantan).



Sl. 1.

Prazan skup označuje se s v ili $\emptyset$ (v je početno slovo latinske riječi vacuum — praznina; $\emptyset$ je koso precrtano slovo O, a podsjeća nas na ništicu!). Prazan skup nije ni od čega sastavljen.

3. Znak $\in$, koji povezuje elemente i skupove. Ako je S kakav skup, a e njegov element (sl. 1.), onda se to označuje ovako

$e \in S$ i čita: e iz S, ili e je jedinica ili jedinka iz S e je član (element) skupa S i t. d.

Katkad se mjesto $e \in S$ piše i $S \ni e$, a čita se ovako: S sadrži e kao svoj element (član).

ZADACI: 1. Ako se skup S sastoji od brojeva 0 i 1, što sve može biti a, ako je $a \in S$?

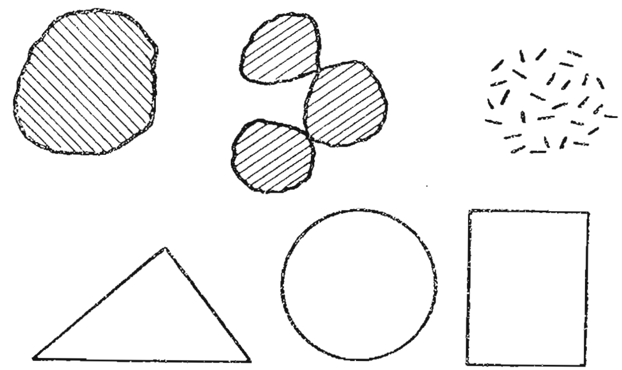
2. Isto pitanje za 1) skup N prirodnih brojeva < 100, 2) zadanu kružnicu k, 3) skup S rješenja jednadžbe $x^3 = 1$.

3. Odredi nekoliko članova skupa 1) racionalnih, 2) iracionalnih, 3) imaginarnih brojeva.
4. Navedi nekoliko skupova i nekoliko njihovih elemenata.
5. Navedi nekoliko predmeta i promatraj njihov skup.
6. Navedi nekoliko slučajeva u kojima se pojavljuje prazan skup.

§ 1.3. PREDOČIVANJE SKUPOVA. IMENA SKUPOVA

1. Jedne skupove gledamo (na pr. skup knjiga na stolu), druge zamišljamo (na pr. skup svih stanovnika Jugoslavije, skup svih prirodnih brojeva), treće crtamo (na pr. kružnica ◯) i t. d.

Ako se češće govori o nekom skupu, korisno je da mu damo ime i oznaku. Tako na pr. krug je ime za određenu vrstu skupova, označuje se s O ili K.[1] N je oznaka za skup svih prirodnih ili naturalnih brojeva.



Sl. 2.

[1]) Krug je svaki skup, sastavljen od svih točaka neke ravnine, kojima udaljenost od neke točke te ravnine ne premašuje neki pozitivan broj.

2. Skupove i članove skupova označujemo slovima, brojevima i drugim raznim prikratama, imenima i t. d. Prazni ili vakantni skup označujemo s $\emptyset$.

3. Shematski, skupovi se prikazuju risanjem i modeliranjem. Tako na pr. evo nekoliko skupova (sl. 2.).

4. Kad se govori o nekom skupu S, može ga se čisto shematski prikazati na pr. slikom ili zrncima pijeska, kuglicama i sl. Lakše je razmišljati, kad se pri mišljenju i govorenju upiremo na kakve konkretne predmete, pa makar ti predmeti bili i obične točke.

5. Tipičan je skup $I\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ i njegovi početni intervali: $I1 = \{0\}$, $I2 = \{0, 1\}$, $I3 = \{0, 1, 2\}$, $I4 = \{0, 1, 2, 3\}, \ldots$.

§ 1.4. JEDNAKOST I NEJEDNAKOST SKUPOVA. RELACIJE $\subset$ i $\supset$

1. Jednakost skupova. Da li su skupovi $\{a, b, c\}$, $\{b, c, a\}$ različiti ili jednaki? Da li se ti skupovi sastoje od istih članova? Zašto da?

2. D e f i n i c i j a. Skupovi su međusobno jednaki, ako se sastoje od istih članova.

Ako A, B označuju skupove, tad jednakost

$$A = B$$

znači, da je skup A jednak skupu B, t. j. da skup A ima iste članove kao i skup B.

Ako nije A jednako B, onda se to označuje

$$A \neq B \text{ (č. } A \text{ nejednako } B)$$

Tako na pr.

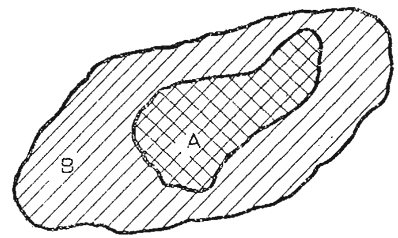
$$\{2, 5, 4\} \neq \{2, 5\}$$

3. Što znači da je jedan skup obuhvatniji, obimniji ili prostraniji od drugoga?

Relacije $\subset$ i $\supset$.

Ako u košaricu jabuka dodamo još koju jabuku ili krušku, dobit ćemo opet skup voća, koji naravno sadrži sve ono, što je već bilo u košarici i još ono, što smo dodali. Novi skup B je obuhvatniji, veći, bogatiji od onog prvog skupa A (sl. 3.). To se iskazuje ovako:

$$B \supset A$$



Sl. 3.

Kaže se, da je skup A siromašniji od skupa B i piše se $A \subset B$.

4. D e f i n i c i j a r e l a c i j a $\supset$ i $\subset$ m e đ u s k u p o v i m a. Oznake $B \supset A$ i $A \subset B$ znače jedno te isto, naime da svaki član skupa A ujedno je i član skupa B, ali da B sadrži bar jedan član, koji nije član skupa A.

Na pr. $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 4\} \subset \{5, 1, 8, 4, 2\}$.

5. D e f i n i c i j a. Ako je $A = B$ ili $A \subset B$, onda se to kraće naznačuje s $A \subseteq B$ i čita: A je uključeno u B, ili A je manje ili jednako B, ili A je dio od B.
Mjesto $A \subseteq B$ piše se $B \supseteq A$ i čita: B obuhvata A, ili B je veće ili jednako A i sl.

6. Prema tome, odnos $A \subseteq B$ za skupove A i B znači, da za **svako** $x \in A$ vrijedi $x \in B$; i obrnuto: ako za **svako** $x \in A$ vrijedi $x \in B$, onda je $A \subseteq B$.

7. Za prazni skup $\emptyset$ smatramo, da je dio svakog skupa A, t. j. $\emptyset \subseteq A$.

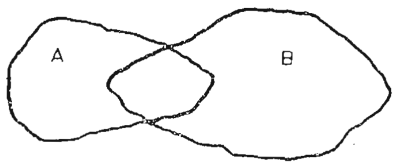
Ako je $\emptyset \subset A$, onda A sadrži bar jedan član.

Na pr. $\{2, 4, 5\} \subseteq \{2, 3, 4, 5\}$, pa čak i $\{2, 4, 5\} \subset \{2, 3, 4, 5\}$, jer su i 2 i 4 i 5 članovi u $\{2, 3, 4, 5\}$, dok na pr. član 3 iz skupa $\{2, 3, 4, 5\}$ nije član u skupu $\{2, 4, 5\}$.

Skup svih parnih brojeva $2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 4, \ldots$ obuhvata skup svih brojeva

$6 \cdot 1, 6 \cdot 2, 6 \cdot 3, 6 \cdot 4, \ldots$ djeljivih sa 6.

8. Za svaki neprazni skup S i svaki član x iz S imamo skup $\{x\}$, kojemu je x jedini član; dakle iz $x \in \{x\}$ slijedi $x \in S$, a to znači da je $\{x\} \subseteq S$.



Sl. 4.

9. Primjer. Promatrajmo dva konkretna skupa A, B iz naše okoline (na pr. A može biti skup stolaca, a B skup pokućstva; tada je naravno $A \subseteq B$, općenito: $A \subset B$). Da li će biti uvijek $A \subseteq B$ ili $B \subseteq A$? Na pr. ako A označuje skup svih slika u sobi, a B skup svih stvarnih stolica, tad ne može biti niti $A \subseteq B$ niti $A \supseteq B$: skupovi A i B su neuporedljivi (sl. 4.). Tako na pr. ova dva skupa ● ● jesu neuporedljiva.

Definicija. Neka su A, B skupovi; ako je $A = B$ ili $A \subset B$ ili $A \supset B$, kaže se, da su skupovi A, B međusobno *uporedljivi*. Ako skupovi A, B nisu međusobno uporedljivi, kaže se, da su oni *neuporedljivi* međusobno. Na pr. $I3 \subset I5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Skupovi $\{1, 2, 3\}$, $\{3, 5, 8\}$ nisu uporedljivi međusobno; skupovi $\{2, 4\}$, $\{5, 9, 4\}$ također.

ZADACI: 1. Ako je N skup prirodnih, a D skup svih cijelih brojeva $0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, da li je $N \subseteq D$ ili čak $N \subset D$?

2. Neka je $2N$ skup svih parnih prirodnih brojeva, a $2N - 1$ skup svih neparnih brojeva; da li je $2N \subseteq 2N - 1$ ili obratno $2N - 1 \subseteq 2N$?

3. Ako je $Č$ skup svih živih ljudskih stvorenja, a B skup svih živih bića, da li je $Č \subseteq B$? Zašto je $Č \subset B$?

4. Za neki broj b i skup S brojeva označimo sa bS odnosno $b + S$ skup svih brojeva oblika bx, odnosno $b + x$ kad x prolazi skupom S, t. j. kad znaku x damo, da znači svaki element iz S. Zašto je $3N \supset 2 \cdot 3N$, $5N \supset 6 \cdot 5N$ i uopće $cN \supset bN$, kad god je c faktor od b i $c < b$, $(b, c \in N)$?

5. Što je 0) $3D$, 1) $3D + 1$, 2) $3D + 2$, 3) $3D + 3$ 4) $3D + 4$? Ima li tu jednakih skupova?
D je skup svih cijelih brojeva.

6. Dokaži jednakosti: $4D + 4D = 4D$, $(4D + 1) + (4D + 3) = 4D$, $(4D + 3) + (4D + 2) = 4D + 1$.

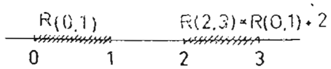
7. Isto tako $4D \cdot 4D = 4D$, $(4D + 3) \cdot (4D + 2) = 4D + 2$, $(5D + 3) \cdot (5D + 4) = 5D + 2$.

8. Dokaži: 1) $2D \cdot 3D = 6D$, 2) $2D + 3D = D$.

9. Može se dokazati ovo: zadani su cijeli brojevi a, b; označimo s $M(a, b)$ najveći prirodni broj, s kojim je djeljivo i a i b; može se dokazati ovo: $aD + bD \subseteq M(a, b) \cdot D$; posebno, ako su a i b međusobno prosti, t. j. $M(a, b) = 1$ onda je $aD + bD = D$.

9* Ako s $v(a\,b)$ označimo najmanji prirodni broj koji je djeljiv i s a i s b, može se pokazati, da je $aD + bD \geq$ $\geq v(a, b) \cdot D$.

10. Neka je R skup svih realnih brojeva; neka su a i b dva broja iz R i $a < b$; označimo s $R(a, b)$ ili $R(b, a)$ skup svih članova iz R, koji su smješteni između a i b. Dokaži da je: 1) $R(0, 1) + 2 = R(2, 3)$ (sl. 5.); 2) $R(-8, 7) +$ $+ 4 = R(-4, 11)$, 3) $R(1, 5) + R(2, 7) = R(3, 12)$; 4) $R(a, b) + R(c, d) = R(a + c, b + d)$, ako je $a < b$, $c < d$. Dokaži, da je $R(a, b) - R(c, d) = R(a - d, b - c)$.



Sl. 5.

§ 1.5. KAKO NASTAJU SKUPOVI?

1. Posmatrajmo kakav skup (na pr. razred učenika, polica knjiga). Kako je on nastao, odnosno kako je mogao nastati? Okupljanjem ili skupljanjem, udruživanjem predmeta, stvorenja, događaja, stanja, . . . i t. d. nastaju skupovi. Na pr. nizanjem događaja, ljudi, predmeta, . . . , nastaju skupovi. Zadruga je određen skup. Skup je kao zadruga svojih članova. Tako na pr. olovka i nož, koje gledam na stolu ili zamišljam, čine određen skup. Ako se radi o olovci o i o nožu n, onda se pripadni skup označuje sa $\{o, n\}$. Slično, skup

$$\{knjiga,\ stol,\ čaša\}$$

ima kao svoje članove ovo:

knjiga, stol, čaša

Članovi ili jedinke skupa $\{5, 6, 8, 15\}$ jesu: $5, 6, 8, 15$.

2. Polazeći od zadanih predmeta, jedinica, . . . , onda se skup, kojemu su to članovi, prikazuje tako, da se svi skupa zatvore u zagradu (kao u kakvu posudu, sobu!). Obično se to skupljanje vrši pomoću vitičaste zagrade.

3. Pa i **od svakog predmeta p nastaje tako određen skup**

$$\{p\} \text{ ili } (p).$$

To je onaj skup, kojemu je p jedini element (član, jedinica).

Primjer: Ako promatramo kakvu olovku o, onda je $\{o\}$ određen skup sastavljen od te olovke o kao svojeg jedinog člana. Sama olovka o je također skup, jer je olovka sastavljena na pr. od dva dijela: onog p, koji piše i onog drugog drvenog dijela d. Tako je $o = \{p, d\}$. Vidimo da olovka o kao skup $\{p, d\}$ i skup $\{o\}$ imaju sasvim različit karakter. Isp. primjer u § 1.5.8.

4. Treba razlikovati svaki predmet, misao, . . . p od skupa $\{p\}$ ili (p), kojemu je p jedini član.

Tako na pr. jasno je, da $\underset{A\quad B}{|\!-\!-\!|}$ nije isto što i $\{\underset{A\quad B}{|\!-\!-\!|}\}$, jer na pr. točka A je član prvog skupa, ali nije član drugog skupa. Drugi primjer: brojevi $10, 20, 30, 40$ čine određen skup S, koji se označuje sa $\{10, 20, 30, 40\}$. A što je $\{S\}$, t. j. $\{\{10, 20, 30, 40\}\}$?

Da li je 10 član toga skupa? Zašto nije?

ZADACI: 1. Što znači $\{$čaša, boca, bačva$\}$? Skup? Navedi mu članove!

2. Ako znak a označuje 1) broj, 2) slovo, 3) bilo kakav predmet, da li je $a \in S$, gdje je $S = \{$čaša, boca, grozd$\}$?

3. Gledaj znak 8; navedi kakav skup S predmeta, koje bismo mogli označiti s 8 (na pr. broj 8, igrač broj 8, čarape broj 8 i t. d.).

4. Ako je N skup svih prirodnih brojeva, što bi bilo
$$\{2N, 3N\},\ \{2N, 3N, 5N, 7N\}?$$

5. Navedi nekoliko skupova sastavljenih od 1) trokuta, 2) krugova, 3) crta. Što su članovi pramena pravih crta (pravaca)?

6. Neka 1 označuje kakav nacrtan pravac: što je $\{1\}$ a što $\{\{1\}\}$? Što znači, da je $x \in 1$? Pokaži na slici nekoliko „rješenja" te relacije $x \in 1$.

7. U kakvoj su vezi ovi skupovi (u vezi jednakosti ili nejednakosti, u vezi $\subset$ ili $\supset$ i t. d.): 1) $\{1, 2, 3\}, \{3, 2, 1\}$; 2) $\{a, b, c, d\}, \{b, c, d, a\}$; 3) {Australija, Evropa, Amerika, Azija}, {Azija, Amerika}; 4) $\{\triangle, \circ, \square\}, \{\circ, +\}$; 5) $\{+, -, ., :\}, \{-, +\}$; 6) $\{\in, \subset, \supset\}, \{\in\}$?

8. Da li je jasno, da je: 1) $\{a, a, a, 1\} = \{a, 1\}$; 2) $\{1, 1, 1, 1\} = \{1\}$?

9. Kako se može označiti skup slova u riječi: 1) *RAD*, 2) *RADINOST*, 3) *OVO*, 4) *OLOVO*?

10. Napravi koju riječ iz skupa: 1) $\{O, K\}$, 2) $\{O, K, L\}$, 3) $\{A, M, U, R\}$

11. Odredi kakav skup riječi, koje se završavaju s *liti* (na pr. izliti, priliti, ...).

12. Snježana voli igru, koja se sastoji u tom, da svaki od suigrača traži riječi s određenim završetkom, na pr. *ro* (*pero-nahero*, ...); u ovom slučaju bi na prvi pogled izgledalo, da takvih riječi ima malo. Naprotiv! (Na pr. 4-ro, 24-ro i t. d.).

13. Navesti još sličnih i drugih zadataka!

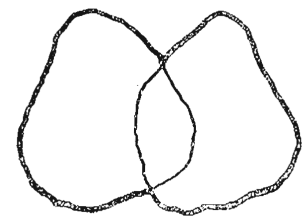
§ 1.6. UDRUŽIVANJE (UNIJA) ili SASTAVLJANJE SKUPOVA. ZNAK $\cup$

1. Primjer 1. Promatrajmo ova dva sastava iz nekog kluba K:

Prvi sastav: 1, 2, 8, 14, 15, 40.

Drugi sastav: 2, 3, 4, 8, 12, 17, 28.

Tu se radi o dva određena skupa, recimo o momčadi A i momčadi B (sl. 6.). U sastav A ulaze članovi (igrači), kojima su upisni redni brojevi 1, 2, 8, 14, 15, 40; drugu ekipu čine igrači (ce) 2, 3, 4, 8, 12, 17, 28.



Sl. 6.

Koji je skup sastavljen od svih tih igrača? To je skup sastavljen od ovih igrača:

1, 2, 3, 4, 8, 12, 14, 15, 17, 28, 40.

Kaže se, da ovaj skup C nastaje sjedinjavanjem ili udruživanjem gornjih dvaju sastava A i B. Da se istakne veza između C s jedne strane i skupova A i B s druge strane, skup C se označuje također sa

$A \cup B$ (č. A unija B, ili A udruženo s B)

Znak $\cup$ podsjeća na početno slovo riječi Unija ili Udruženje.

Piše se

$$A \cup B = C$$

ili iscrpnije $\{1, 2, 8, 14, 15, 40\} \cup \{2, 3, 4, 8, 12, 17, 28\} =$
$= \{1, 2, 3, 4, 8, 12, 14, 15, 17, 28, 40\}$.

2. Slično, unijom ili udruživanjem ovih triju skupova

$$\{2, 5, 4\}, \quad \{2, 5, 7\}, \quad \{1, 5, 4, 7\}$$

nastaje skup

$\{1, 2, 4, 5, 7\}$ ili opširnije $\{2, 5, 4\} \cup \{2, 5, 7\} \cup \{1, 5, 4, 7\}$.
Unija skupova

$$\{1, 2, 3, 5\}, \quad \{1, 3, 4, 5\}, \quad \{2, 3, 4\}, \quad \{1, 5\}$$

jest skup

$\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 5\} \cup \{1, 3, 4, 5\} \cup \{2, 3, 4\} \cup \{1, 5\}$.
Taj se skup dobije i kao unija od $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 3, 4, 5\}$, tako da preostali skupovi $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 5\}$ ne pridonose ništa što već ne bi pridonijela prva dva skupa.

3. Definicija unije. Pod unijom ili sjedinjenjem zadanih skupova razumijevamo skup, koji je sastavljen od svih članova svih tih zadanih skupova.

4. Oznaka unije skupova. Unija zadanih skupova označuje se tako, da se između oznaka tih skupova stavi znak $\cup$.

Primjer 2. Neka su zadani ovi skupovi

$$\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \ldots, \{n, n+1, n+2\}, \ldots$$

Njihova je unija:

$$\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5\} \cup \ldots \cup \{n, n+1, n+2\} \cup \ldots$$

Ta se unija kraće označuje ispisivanjem sprijeda jednog jedinog znaka $\cup$ ispred općeg člana, dakle

$$\bigcup_{n} \{n, n+1, n+2\}$$

Pritom valja znati, što sve tu može biti slovo n. Tu n može biti svaki prirodni broj.

Naravno

$$\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} \cup \ldots = \{1, 2, 3, \ldots\} = N =$$

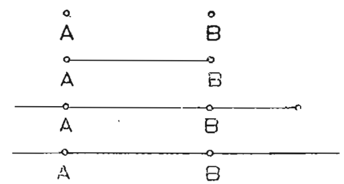
skup svih prirodnih brojeva. Dakle je

$$\bigcup_{n \in N} \{n, n+1, n+2\} = N.$$

Isto tako $\mathrm{I}\omega = \bigcup_{n \in \mathrm{I}\omega} \mathrm{I}n$ (gl. § 1. 3. 5).

5. Nekoliko primjena unije skupova u geometriji

5.1. Što je pravac? Neka su A, B dvije različite točke; promatrajmo razne duži, koje obuhvataju te točke A, B. Sve one obuhvataju i duž $\overline{AB}$. Svaka od njih produžuje duž $\overline{AB}$, ukoliko nije $= \overline{AB}$ (sl. 7.).



Sl. 9.

A čemu je jednaka unija svih tih duži? Da li je i ta unija kakva duž? Gdje bi bili krajevi te unije? Ako promatramo dvije, tri, četiri, ... duži, koje produžuju $\overline{AB}$, svaki put je njihova unija određena duž (crtaj i gledaj!). I svaku dobivenu duž možemo dalje produljiti! Zato unija svih duži, koje produljuju $\overline{AB}$, nije duž nego — pravac ili pravulja. Tako ćemo i definirati pravac imajući pred očima sliku, da pravac nastaje neprestanim produljivanjem zadane duži.

Definicija. Ako su zadane dvije točke A, B tad se pod pravcem AB razumijeva unija svih duži, koje produžuju duž AB. Pravac A, B označivat ćemo sa

$$p(A, B) \quad \text{ili} \quad pAB$$

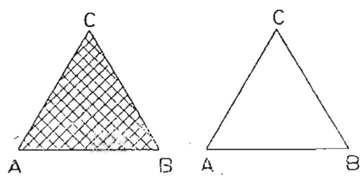
Pravac nema krajeva.

Odmah se može dokazati, da pravac sadrži čitavu duž, čim joj sadrži oba kraja.

Nadalje se može pokazati i ovo: ako su C, D dvije različite točke pravca $p(A, B)$, onda $p(C, D) = p(A, B)$. To se iskazuje riječima, da je pravac određen sa svake svoje dvije točke.

5.2. Pojam zrake. Ako zadanu duž $\overline{AB}$ produžujemo samo preko jednog kraja, recimo preko kraja B, onda se kao unija svih tih duži pojavljuje polupravac ili zraka AB, kojoj je A početak!

Definicija. Ako su zadane točke A, B, tad se pod zrakom AB, kojoj je A početak, razumijeva unija svih duži, koje obuhvataju duž AB, a točku A imaju kao jedan svoj kraj.
Zraka je zatvorena ili otvorena već prema tome, da li joj priključimo početnu točku ili joj tu točku oduzmemo.



Sl. 8.

5.3. Što je trokut? Zadane su 3 točke A, B, C, koje ne leže na istom pravcu (sl. 8.). Time imamo duži $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i pripadnu uniju

(1) $$\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$$

To je jedna zatvorena putanja kroz točke A, B, C. Ta putanja ima 3 vrha, i to baš u točkama A, B i C. Ako spajamo vrh A s točkama duži $\overline{BC}$ i uzmemo uniju svih tih duži, izgleda nam, kao da će taj skup

$$\Delta_A = \bigcup_{X \in \overline{BC}} \overline{AX}$$

ispuniti čitavu ravnu pločicu. Izgleda nam, da ćemo tu istu pločicu dobiti i kao uniju spojnica točke B s točkama na strani $\overline{AC}$.

Drugim riječima, neka je

$$\Delta_B = \bigcup_{Y \in \overline{AC}} \overline{BY}$$

Tu nam izgleda dosta očigledno, da se skupovi Δ_A, Δ_B podudaraju u svim točkama, t. j. da je

$$\Delta_A = \Delta_B$$

Stavimo li

$$\Delta_C = \bigcup_{Z \in \overline{AB}} \overline{CZ},$$

onda nam izgleda, da ćemo i na taj način ispuniti „pločicu" kojoj je rub jednak skupu $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$.

Mi bismo mogli vući i razne druge spojnice EF, gdje su E, F iz skupa (1). I sve one kao da leže u „trokutu ABC". To nam sve izgleda tako jasno, da se ne može svesti na nešto još jednostavnije. Zato postavljamo definiciju trokuta ABC ovako.

Definicija. Zadane su 3 različite točke ABC; trokut određen tim točkama jest unija svih duži, kojima krajevi leže na skupu

$$\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}.$$

Ovaj skup se zove obod trokuta. Trokut A, B, C označujemo s $\Delta\, ABC$. Drugim riječima, po definiciji imamo

$$\Delta\, ABC = \bigcup \overline{XY},$$

pri čemu točke X, Y prolaze unijom $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$; k tome je $X \neq Y$.

Ako se slučajno sve 3 točke A, B, C nalaze na istom pravcu, kao na pr. na ovoj sl. 9., tad je naravno skup (1) jedna duž (na slici $= \overline{AB}$); takoder i $\Delta \overline{ABC}$ u ovom slučaju jednak je $\overline{AB}$. Veli se, da se trokut steže na jednu duž.

Sl. 9.

5.4. Što je ravnina? Aksiom o ravnini. Kao što smo pravac izveli produžavanjem duži, tako ravninu možemo dobiti produžujući trokut „na sve strane".

Neka točke A, B, C ne leže na istom pravcu. Tad promatrajući pravce $p(A, B)$, $p(B, C)$, $p(A, C)$ i uopće pravce $p(X, Y)$, pri čemu X, Y leže u ΔABC, dobit ćemo „ravninu", što je određena točkama A, B, C, odnosno trokutom ΔABC.

Definicija. Ako su A, B, C tri zadane točke, koje ne leže na istom pravcu, tad ćemo pod ravninom ABC razumijevati uniju svih pravaca $p(X, Y)$; pritom su X, Y, točke iz ΔABC i $X \neq Y$, t. j. $\{X, Y\} \subseteq \Delta ABC$ i $X \neq Y$. Ravninu ABC označivat ćemo sa $r\,ABC$ ili ABC ili $r(ABC)$.

Promatrajmo u ravnini ABC dvije točke na pr. R, S; da li je pravac pRS u toj ravnini (sl. 10.). Naravno, ako je presjek zadana trokuta i tog pravca određena duž recimo duž $\overline{AX}$ sa $X \in \overline{BC}$, onda pravac, određen tom duži, upravo je pravac pRS pa je zato $pRS \subset r\,ABC$. No, kako će na pr. biti za ovu sliku, gdje je $R \in p(AR_2)$, $S \in p(A, S_2)$, a točke $R_2 S_2$ leže na duži $\overline{BC}$? Vidi sl. 11.

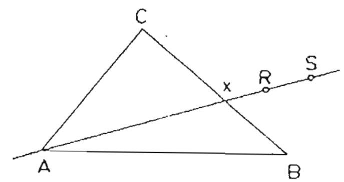
Izgleda nam jasno bez dokaza, da je čitav pravac $p(RS)$ u ravnini trokuta, pa to uzimamo kao aksiom. Prihvaćamo dakle ovaj aksiom:

Aksiom o ravnini. *Ako u ravnini leže dvije točke, onda u njoj leži i čitav pravac, što sadrži te točke.*

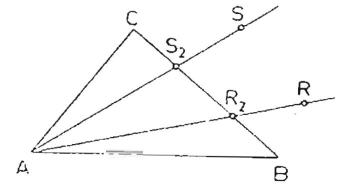
Taj isti aksiom se izriče i ovako: *svaka ravnina je pravast skup*[1].

5.5. Što je prostor? Prostor je sastavljen od točaka. Prostor je unija svih točaka. On je unija i svih duži, svih pravaca, svih ravnina, svih kugala i t. d.

Poslije ćemo dati analitičku definiciju prostora pomoću skupa R realnih brojeva.



Sl. 10.



Sl. 11.

ZADACI: 1. Kako izgleda unija od 2, 3, 4, 5 duži? Crtaj!

2. Isto pitanje za: 1) zrake, 2) pravce.

3. Zadaj točku, duž, zraku i pravac; kako im izgleda unija u najopćenitijem, a kako u najspecijalnijem slučaju?

4. Dokaži, da je $\Delta ABC = \bigcup_{x \in \overline{BC}} \overline{AX}$.

5. Kako izgleda unija od 2, 3, 4 trokuta?

6. Označimo sa $S(x, y)$ skup svih članova iz S, koji su smješteni između x i y; stavimo $S[x, y) = \{x\} \cup S(x, y)$, $S(x, y] = S(x, y) \cup \{y\}$, $S[x, y], = \{x\} \cup S(x, y) \cup \{y\}$. Neka je $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$; nađi $N(1, 10)$, $N[1, 10)$, $N(2, 8) \cup N(3, 15)$, $N[8, 3) \cup N(1, 1]$.
Nađi $N[1,5) \cup N[5,20)$, $N(1,3) \cup N(2,4) \cup N(3,5) \cup \ldots$

7. Dokaži, da je $N = \bigcup_{k \in N} N[5k, 5(k+1)) \cup N[1, 5)$.

[1]) Skup je pravast, ako ima svojstvo da sadrži čitav pravac, čim sadrži dvije točke toga pravca.

Da li se tu broj 5 može zamijeniti brojem 8, 100, $\frac{1}{2}$, $3^{\frac{1}{2}}$ bilo kojim realnim brojem $a > o$?

8. Da li se u zadatku 7 skup N može svuda nadomjestit skupom D, Q, R svih cijelih, odnosno racionalnih, odnosno realnih brojeva?
9. Za zadan geometrijski skup S označimo s $d_\cup S$, uniju *u* svih zatvorenih duži, kojima su krajevi u S. Odredi specijalno $d_\cup S$ ako je $S = A \cup B$, pri čemu: 1) A i B su duži, 2) A i B su pravci, 3) A je duž, B je pravac, 4) A je točka, B je pravac, 5) A i B su trokuti, 6) A i B su krugovi, 7) A je točka, B je trokut.
10. Zadane su geometrijske točke A, B, C, D i duži $\overline{AB}, \overline{CD}$; kad će $d_\cup(\overline{AB} \cup \overline{CD})$ biti površ tetraedra? Šta je tad $d_\cup(d_\cup(\overline{AB} \cup \overline{CD}))$?
11. Zadana je geometrijska točka T i skup sT svih pravaca kroz T; šta je unija tih pravaca? Da li ta unija zavisi od T?
12. Za skup $S = D[-5, 5]$ cijelih brojeva x, za koje je $|x| \leq 5$, nađi skupove $3S$, $4S$, $4S+3$, $3S+5$, $3S \cdot 4S$.

§ 1.7. PRESJEK ILI ZAJEDNIČKI DIO SKUPOVA. ZNAK $\cap$

1. Primjeri za presjek skupova. Primjer 1. Pogledajmo ova dva kruga; njihov najveći zajednički dio na slici je osjenčan (sl. 12.). On se sastoji iz svih točaka, koje su u oba kruga. Označuje se s $k_1 \cap k_2$, a zove se *presjek*, ili *zajednički dio* skupova k_1, k_2.

Primjer 2. Ako su d_1, d_2 dijametri nekog kruga k, onda je $d_1 \cap d_2$ sastavljeno od središta kruga k. Zajednički dio svih dijametara d kruga k sastavljen je od središta O kruga (sl. 13.). Piše se

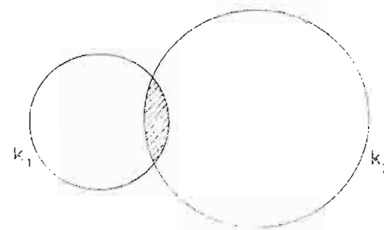
$$\bigcap_d d = \{O\}.$$

Primjer 3. Neka je E zajednička točka dijagonala AC, BD trapeza $ABCD$; vidi sl. 14.; pretpostavljamo da je $AB \parallel CD$. Tad je presjek trokutova ABC, ABD jednak ABE:

$$\Delta ABE = \Delta ABC \cap \Delta ABD.$$

Primjer 4.

$$\{1, 5, 8, 4, 2\} \cap \{8, 2, 7\} = \{2, 8\}.$$

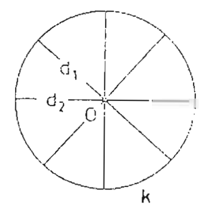


Sl. 12.

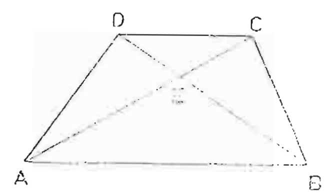
Primjer 5.

Skupovi $\{1, 2, 5\}$, $\{4, 6, 7\}$ nemaju ništa zajedničkog; kaže se, da im je presjek prazan ili pust.

Definicija. Dva se skupa A, B ne sijeku, ako nemaju nijedne točke zajedno, t. j. ako im je presjek $A \cap B$ prazan skup. Tada je $A \cap B = v$.



Sl. 13.



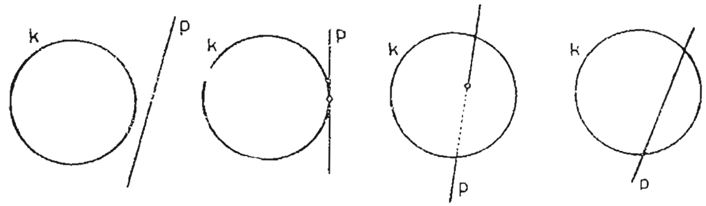
Sl. 14.

Tako na pr. ako su R, R' ravnine, pa ako je $R \cap R' =$ = prazno, ravnine su paralelne. Pa se može definirati, da su ravnine paralelne, ako im je presjek prazan skup ili jedan od tih zadanih skupova.[1] Isto tako pravac i ravnina su međusobno paralelni, ako im je presjek prazan ili jednak s pravcem[1].

Dva pravca su paralelna, ako leže u istoj ravnini, a presjek im je prazan. Dodajmo, da su dva pravca mimosmjerna ili mimohodna, ako ne leže u jednoj te istoj ravnini. Naravno, da im je presjek prazan.

2. Definicija presjeka skupova. Znak $\cap$.

D e f i n i c i j a   p r e s j e k a. Presjek zadanih skupova je skup sastavljen od svih točaka, koje se nalaze u **svakom** od tih zadanih skupova.



Sl. 15.

Označuje se slično kao i unija, samo što mjesto znaka $\cup$ za uniju dolazi znak $\cap$ za presjek[2].

Na pr. $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$.

Uopće, za svaki skup X imamo

$$X \cap X = X.$$

Isto tako

$$X \cup X = X \text{ za svaki skup } X.$$

[1]) U nižoj geometriji ovaj se drugi slučaj obično ne spominje. Međutim zgodno je dopustiti, da svaki pravac bude paralelan sa samim sobom i sa svakom ravninom, u kojoj on leži. Isto tako je zgodno reći, da je svaka ravnina paralelna sa samom sobom.

[2]) Uoči kako su znakovi $\cap$, $\cup$ međusobno povezani: jedan nastaje iz drugog rotacijom za ispružen kut.

Uoči također, da rotacijom za pravi kut znakovi $\cap$, $\cup$ daju znakove $\subset$ odnosno $\supset$.

P r i m j e r 6. Promatrajmo, što sve može biti $k \cap p$ (k je krug, p pravac). Presjek $k \cap p$ može biti prazan — to je najprirodniji slučaj (gl. sl. 15.). To će značiti, da pravac p leži izvan kruga k. Nadalje, skup $k \cap p$ može biti jednočlan; tada će pravac p dodirivati krug k, ako p leži u ravnini, što je određuje krug k; ako pak p ne leži u toj ravnini, pravac će probadati krug, i to bilo kroz obod, ili kroz nutrinu kruga; specijalno gledaj bolje taj slučaj, da p probada krug k u obodu; nacrtaj u isti mah pravac, koji u istoj točki $p \cap k$ dodiruje krug k. Treći je slučaj, da presjek $k \cap p$ ima bar dvije točke i time i čitavu pripadnu duž; tad se kaže, da je p presječnica kruga k.

P r i m j e r 7. Promatrajmo dvije točke A, B. Presjek svih duži, odnosno pravaca, u kojima leže točke A i B, jest duž $\overline{AB}$ odnosno pravac $p(AB)$.

Z A D A C I: 1. Nađi presjek $A \cap B$ ovih skupova A i B: 1) $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{3, 5, 4, 8, 9\}$; 2) A je skup velikih latinskih slova, B je skup velikih ćirilskih slova; 3) A je trokut, B je duž.

2. Navedi nekoliko X-ova, za koje je $\{2, 3, 4\} \subseteq X$; nađi presjek svih takvih skupova.

3. Kakav sve može biti presjek od dva trokuta?

4. A presjek trokuta i kruga?

5. Razmatraj *Paschov aksiom*: zadan je $\triangle$ i takav pravac l u njegovoj ravnini, koji ne sadrži ni jednog vrha trokuta; tad je presjek pravca i trokuta ili prazan skup ili duž.

6. Kako izgleda presjek dvaju elementarnih geometrijskih skupova, uzetih iz skupa duži, trokuta, poligona, krugova, kugala, piramida i t. d.? Navedi na pr. što sve može biti presjek dviju kocaka!

7. Navedi kakav skup S brojeva sa svojstvom da iz $a \in S$ i $b \in S$ slijedi $a + b \in S$. Šta je presjek svih skupova X sa istim svojstvom? A presjek svih takvih X, za koje je $X \supseteq S$?
8. Nađi presjek od dva 1) pramena, 2) snopa pravaca.
9. Nađi presjek od dva 1) pramena, 2) snopa ravnina.
10. Promatraj skupove $S_1 = \{1, 2, 3\}$, $S_2 = \{2, 5\}$, i nekoliko skupova X, kojim su $S_1 S_2$ dijelovi. Dokaži da je presjek svih X-ova, za koje je $X \supseteq S_i$ za $i = 1, 2$ upravo unija $S_1 \cup S_2$, Dokaži, da sličan iskaz vrijedi za svaka dva skupa S_1, S_2 i uopće za *svaki skup* skupova.

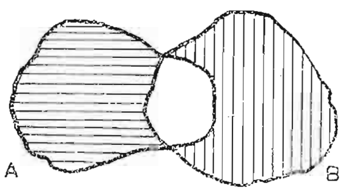
10* Dualno od 10: svuda mjesto $\cup$ odn. $\cap$ govori $\cap$ odn. $\cup$.

11. Dokaži, da je $2D \cap 3D = 6D$, $5D \cap 6D = 30D$, $4D \cap 6D = 12D$, $8D \cap 16D = 16D$.
12. Odredi $6D \cap 8D$; $20D \cap 45D$.
13. Može se dokazati, da je $aD \cap bD = v(a, b) \cdot D$.

§ 1.8. ODUZIMANJE SKUPOVA

Primjer 1. Promatrajmo miješovit razred učenika (sl. 16.) neka je R skup tih učenika; označimo sa $Ž$ skup svih učenica; izađu li iz razreda sve učenice, preostat će samo još učenici; njihov skup M označuje se i ovako

$$R \setminus Ž \text{ (ili } R - Ž).$$



Sl. 16.

Time se hoće da naznači, da taj skup $R \setminus Ž$ nastaje tako, da se iz R ukloni $Ž$.

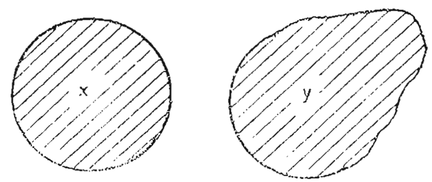
Definicija. Ako su A, B skupovi, pa ako se svaki element iz A, koji je i u B, ukloni, ostatak skupa A označuje se sa

$$A - B \quad \text{ili} \quad A \setminus B$$

i zove se diferencija (razlika) skupova A i B. Može se kraće reći, da se skup $A \setminus B$ dobije iz A tako, da se odstrani skup B.

Primjer 2. Ako P označuje sve pokućstvo u jednoj sobi, a O skup ormara te iste sobe, onda $P \setminus O$ označuje sve pokućstvo promatrane sobe izuzev ormare, što su u njoj.

Ako u sobi nema nijednog ormara, onda je $O = \emptyset$ (prazno), pa je $P \setminus \emptyset = P$.



Sl. 17.

Na isti način, da li vidiš, da za svaki par skupova X, Y, bez zajedničkih točaka, vrijedi $X \setminus Y = X$? Gledaj na sl. 17., ukloni Y (na pr. prekrivajući ga rukom), preostaje čisto X. A to se i iskazuje jednakošću $X \setminus Y = X$.

Prema tome, ako je $X \cap Y = \emptyset$, onda je

$$X \setminus Y = X.$$

Sjeti se pritom, da $X \cap Y$ označuje presjek skupova X, Y. No, odstranjujući skup Y, diramo u X samo ukoliko X i Y imaju zajedničkih točaka. Zato se vidi da je

$$X \setminus Y = X \setminus (X \cap Y).$$

To vrijedi za svaki skup X i svaki skup Y.

Očitaj sa slike, da je

$$(X \setminus Y) \cup (X \cap Y) = X.$$

Uvjeri se, da je

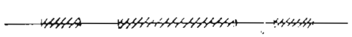
$$(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z).$$

Izgovaraj to riječima (na pr. ovako: odstranimo li od X skup Y pa od preostatka skup Z, onda je to isto, kao da od X uklonimo uniju skupova Y i Z).

Primjer 3.

$$\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{2, 3, 5\} = \{1, 4\}.$$

Primjer 4. Promatraj zadanu duž $\overline{AB}$; razdijeli je u 3 jednake duži; zatim od $\overline{AB}$ odstrani srednju otvorenu duž; ostatak se sastoji od dvije duži (sl. 18.). Sa svakom od tih duži uradi isto. Preostatak se sastoji od 4 zatvorene duži bez zajedničkih točaka. Sa svakom od njih učini isti posao. Što će preostati? Dokaži, da je duljina tog preostatka jednaka

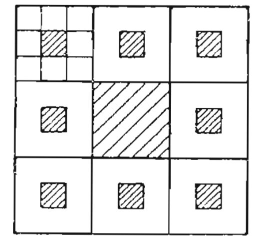


Sl. 18.

$$a - \frac{a}{3} - 2 \cdot \frac{a}{3^2} - \frac{2^2}{3^3} a;$$

pritom je a brojčani razmak krajeva duži AB.

Primjer 5. Zadan je kvadrat K; razdijeli ga u 9 jednakih kvadratića kao na sl. 19., pa odstrani unutrašnjost središnjeg kvadratića. S preostalih 2^3 kvadratića učini isti postupak; time se odstrani 8 novih kvadratića, a još ih preostane 2^6. Ponovi postupak na svakom od tih kvadratića. Kolika je površina svih odstranjenih kradratića?



Sl. 19.

ZADACI: 1. Promatraj skup sastavljen od 5 predmeta (na pr. 4 čaše i jedna boca); ukloni jedan od tih predmeta. Što dobiješ?

2. Promatraj duž $\overline{AB}$; neka je $X \in \overline{AB}$; što je onda $\overline{AB} \setminus \{X\}$? Kad će i to biti duž?
3. Ako je S pravac i $T \in S$. Od čega se sastoji $S \setminus T$?
4. Isto pitanje, ako je S zraka, krug, ravnina, trokut, prostor.
5. Neka je k zadan krug, a Rk njegova ravnina. Što je $Rk \setminus k$?
6. Neka je zadana kružnica k, a Rk njena ravnina; što je $Rk \setminus k$?
7. Sa pravca odstrani jednu, dvije, tri točke. Šta još preostaje?
8. Isto pitanje za obod kruga, trokuta, paralelograma.
9. Nađi $N \setminus 2N$, $N \setminus \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $\{0, 1, 2, 3\} \setminus N$, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{1\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{\{1\}\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{1\}, \{2\} \{3\} \}$.
10. *Komplement zadana skupa.* Zadan je skup M. Promatrajmo njegove dijelove $X \subseteq M$; onda se $M \setminus X$ zove komplement skupa X u odnosu na skup M; može se označiti s CX. Dokaži ove obrasce: 1) ako je $X \subseteq X'$, onda je

$CX \supseteq CX'$; 2) $CCX = X$; 3) $C(A \cap B) = CA \cup CB$ i dualno: $C(A \cup B) = CA \cap CB$[1].

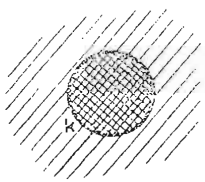
11. Ako od duži AB odstranimo krajeve A i B, da li preostatak ima krajnje točke?

§ 1.9. RAZLAGANJE ILI RASTAVLJANJE SKUPA

Već i dijete rastavlja skupove: iz zadane hrpice kamenčića ili komadića gradi nove hrpice, figure, . . .

1. Nekoliko primjera i pojmova. Primjer 1. Skup učenika u svakoj školi svrstavamo u razrede. Na taj način unija svih tih razreda obuhvata sve učenike.
Sve cijele brojeve rastavljamo u skup parnih i skup neparnih brojeva. Sve realne brojeve dijelimo na pozitivne brojeve, negativne brojeve i nulu.

Primjer 2. Zadana je ravnina S (na pr. ravnina ovog papira) i u njoj kružnica k; ravninu S možemo rastaviti u k i $S \setminus k$; a $S \setminus k$ opet u ono, što je unutar k i ono što je izvan k. Na taj način ravnina se rastavlja u k, u ono što je omotano s k (dvostruko isjenčano) i ono što je „izvan" k (jednostruko isjenčano). Vidi sl. 20.

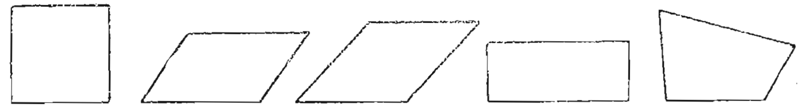


Sl. 20.

Da li sličan zaključak vrijedi, ako se mjesto kružnice promatra obod trokuta, obod elipse, obod pravokutnika, duž?

[1]) Obrasci 3) zovu se *De Morganovi obrasci* (De Morgan, engleski matematičar iz 19. vijeka).

Primjer 3. Promatraj bilo kakav skup S četverokuta; njega možemo rastaviti u skup K svih kvadrata iz S, skup P svih paralelograma iz S, skup R svih romba, pa skup D deltoida i preostatak X; dakle je $S = K \cup P \cup R \cup D \cup X$. Tako na pr. promatraj skup ovih četverokuta: (sl. 21.)



Sl. 21.

Što je tu skup P paralelograma? On obuhvata sva 4 prva člana sa gornje slike.

Definicija. Mjesto da kažemo, da je unija skupova A, B jednaka skupu S, kaže se, da je skup S rastavljen na skupove A i B. Uopće, ako je unija zadanih skupova jednaka nekom skupu S, kaže se također, da smo skup S rastavili na te skupove, pa se govori o rastavu skupa S.

Tako na pr. skup $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ možemo rastaviti recimo na ova 3 dijela:

$$\{1, 3, 4\}, \ \{1, 3, 5\} \ \text{i} \ \{2, 3, 4, 5\}.$$

Primjedba. Prema tome, kad se govori o rastavu skupa S, mogu pojedini sastojci imati i zajedničkih članova. Napose, možemo promatrati rastave skupa u njegove dijelove bez zajedničkih točaka.

Tako na pr. prostor možemo rastaviti u pravac p i ostale pravce, koji su $\parallel p$.

Primjer 4. Svaki skup S, koji nije pust, možemo rastaviti u sve njegove jednočlane dijelove; na pr. za skup $\{a, b, c\}$ radi se tu o ovom rastavu:

$$\{a, b, c\} = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}.$$

Općenito,

$$S = \bigcup_{x \in S} \{x\}.$$

Primjer 5. Svaki skup S možemo rastaviti i u sve njegove dijelove; na pr. za skup $\{1, 2, 3\}$ to bi dalo ovaj rastav:

$$\{1, 2, 3\} = v \cup \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{1, 2\} \cup \{1, 3\} \cup$$
$$\cup \{2, 3\} \cup \{1, 2, 3\}.$$

To je *najbrojniji rastav* skupa $\{1, 2, 3\}$: u tome rastavu pojavljuje se svaki dio polaznog skupa; čak se pojavljuje prazni dio $\emptyset$ i cio skup $\{1, 2, 3\}$.

Primjer 6. Zadan je skup S od ovih predmeta:

pero, knjiga, stolac, ravnalo, čaša.

Odredi sve dvočlane dijelove toga skupa. Evo ih:

Pero, knjiga; pero, stolac; pero, ravnalo; pero, čaša —

— knjiga, stolac; knjiga, ravnalo; knjiga, čaša —

— stolac, ravnalo; stolac, ćaša —

— ravnalo, čaša.

Svih dvočlanih dijelova ima dakle 10; oni čine sastav skupa S.

2. Nazivi i oznake. Zadan je skup S; ako je $X \subseteq S$, onda se X zove dio skupa S ili podskup od S; međutim, veli se također, da je X kombinacija određenih elemenata ili članova skupa S. Specijalno, prazni skup $\emptyset$ zove se još i nulijon. Jednočlani dijelovi skupa zovu se unioni skupa S; dvočlani dijelovi skupa zovu se ambe ili dvojke skupa S; tročlani dijelovi zovu se terne ili trojke. Zatim se govori o kvaternama ili četvorkama, kvinternama ili petorkama, seksternama ili šestorkama i t d.

Skup svih uniona skupa S označuje se sa $\binom{S}{1}$; čitaj: S iznad **1**;

Skup svih dvojki skupa S označuje se sa $\binom{S}{2}$; čitaj: S iznad **2**;

Skup svih trojki skupa S označuje se sa $\binom{S}{3}$; čitaj: S iznad 3;

i t. d.

Primjer 7. Za skup $\{1, 2, 3, 4\}$ imamo:

$$\binom{\{1, 2, 3, 4\}}{3} = \{\{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Prema tome, elementi skupa $\binom{\{1, 2, 3, 4\}}{3}$ su određeni skupovi.

Što je $\binom{\{1, 2, 3, 4\}}{5}$? Naravno, to je pust skup, jer skup $\{1, 2, 3, 4\}$ ne sadrži nikakvog dijela od 5 članova.

ZADACI: 1. Promatraj kakvo slovo (na pr. M, O, S, T); rastavi ga na što prirodniji način; na pr. $M = / \cup \vee \cup \setminus$.

2. U što se raspada pravac, kad mu odstranimo jednu točku? Da li se krug može raspasti, kad mu odstranimo jednu, 2, 3, 4, 5 točaka? A obod kruga?

3. Ako je k krug, a $R(k)$ njegova ravnina, u što se raspada razlika $R(k) \setminus k$? Da li krug presijeca prostor na dva dijela kao što to čini površ kugle, površ piramide, ravnina?

4. Promatraj skup $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; promatraj sve njegove *d-razdiobe*, t. j. takve, u kojima se članovi ne presijecaju dva po dva.

5. Razvrstajmo skup D cijelih brojeva tako, da u istu skupinu stavljamo one i samo one brojeve, koji pri dijeljenju brojem: 1) 2, 2) 3, 3) 7 daju jedan te isti ostatak. Koliko se skupina dobije? Radi li se u svakom slučaju o d-podjeli skupa D?
6. Da li je svaki cijeli broj ili paran ili neparan? Da li isti zaključak važi i za funkcije? Na pr. zašto funkcija $2x+1$ nije ni parna ni neparna u skupu realnih brojeva?
7. Zašto podjela četverokuta u kvadrate i trapeze nije potpuna?
8. Da li je podjela kutova u konveksne, konkavne, oštre i tupe jedna d-podjela?
9. Izrazi u cm visinu učenika; podijeli učenike u skupine tako, da u istu skupinu dođu oni, kojima visina leži u $R[150, 155)$, $R[155, 160)$ i t. d.

§ 1.10. ALGEBRA SKUPOVA: ELEMENTARNO RAČUNANJE SA SKUPOVIMA

1. Naučili smo kako iz dva skupa A, B proizvodimo kao rezultat njihovu uniju $A \cup B$ i njihov presjek $A \cap B$.

Pritom važe izvjesna pravila. Tako na pr.

$A \cup B = B \cup A$ i „dualno": $A \cap B = B \cap A$.
(Zakon komutacije)

$A \cup \emptyset = A$, $\quad A \cap v = \emptyset$

$A \cup A = A$, $\quad A \cap A = A$.

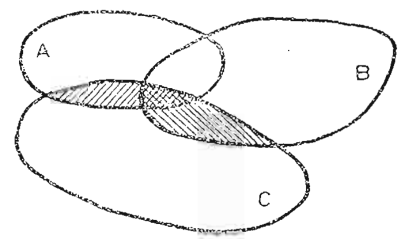
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; dualno $(A \cap B) \cap C =$
$= A \cap (B \cap C)$; (zakon asocijacije).

Ovaj zakon kaže ovo: dodamo li skupu A skup B pa toj uniji dodamo skup C, dobit ćemo isto, kao kad polaznom skupu A dodamo uniju skupova B i C. Dualno je sa sječenjem.

Sve su to očigledne stvari. Ali je isto korisno da ih provjeriš na primjerima iz svakodnevnog života. Na taj se način upoznajemo s čitavim jednim računom sa skupovima: iz zadanih skupova izvodimo druge skupove.

2. Slično je s oduzimanjem skupova. Tako na pr. vidi se, da je

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C).$$
$$A \setminus v = A$$
$$v \setminus A = \emptyset$$
$$A \setminus A = \emptyset.$$



Sl. 22.

3. Zakoni distribucije. Što će biti, ako uniju skupova presiječemo nekim skupom? Na pr. pogledajmo na sl. 22. skupove

$$A, B, C,; \quad A \cup B \text{ i } (A \cup B) \cap C.$$

Vidimo, da je

(1) $\qquad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$

Kaže se da je sječenje skupova distributivno prema udruživanju skupova.

Također je

(2) $\qquad (\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 5\}) \cap \{1, 2, 3, 4\} =$
$= (\{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3, 4\}) \cup (\{2, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4\}).$

Stvarno, prva zagrada je $\{1, 2, 3, 5\}$, pa je zato čitava lijeva strana u (2) jednaka $\{1, 2, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4\}$, t. j. $\{1, 2, 3\}$. Prva zagrada na desnoj strani iznosi $\{1, 2, 3\}$; druga zagrada daje

$$\{2, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{2, 3\}.$$

Na taj način čitava desna strana postaje

$$\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3\}, \quad \text{t. j.} \quad \{1, 2, 3\}.$$

Dakle je jednakost (2) ispravna.

Može se dokazati, da je jednakost (1) ispravna za sve skupove A, B, C.

Također se može dokazati, da je u jednakosti (1) dopušteno svuda mjesto $\cup$ pisati $\cap$, a mjesto $\cap$ znak $\cup$; izlazi:

$$(3) \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Jednakost (1) iskazuje, da je sječenje skupova određena operacija, koja je distributivna ili razdjelna prema udruživanju ili uniji skupova. Jednakost (3) pokazuje, da je spajanje skupova distributivno prema sječenju skupova.

Lako se dokaže, da je i udruživanje i sječenje distributivno prema samom sebi:

$$(A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup (B \cup C).$$

Također se lako vidi i dokazuje, da je sječenje skupova distributivna operacija prema oduzimanju skupova:

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C).$$

Primjedba. Kod množenja i dodavanja brojeva znamo, da je množenje distributivno prema dodavanju:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

ali da dualno ne vrijedi; općenito nije

$$(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c).$$

Niti množenje, niti dodavanje među brojevima nije distributivno prema samom sebi:

nije

$$(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot (b \cdot c)$$

niti

$$(a + b) + c = (a + c) + (b + c).$$

ZADACI: 1. Nađi $(A \cup B) \cap C$ za ove skupove A, B, C: 1) $\{a, b, 1\}$, $\{b, 1, c\}$, $\{a, 1\}$; 2) pozitivni brojevi, negativni brojevi, racionalni brojevi; 3) Baza kocke, baza kocke, površ kocke.

2. Nađi uniju svih pravaca $\perp p$ i njen presjek s pravcem p.

3. Nađi presjek unije težišnica trokuta i oboda istog trokuta.

4. Dokaži ovo:

1) $S_1 \cup S_2 = (S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus S_1) \cup (S_1 \cap S_2)$.

2) $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus S_3) \cup (S_3 \setminus S_1) \cup$
$\cup (S_1 \cap S_2 \cap S_3)$.

3) $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = (S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus S_3) \cup (S_3 \setminus S_4) \cup$
$\cup (S_4 \setminus S_1) \cup (S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4)$.

Kako bi glasio sličan obrazac za 5 skupova $S_1, S_2, \ldots, S_5$? A za n skupova?

5. Zadan je skup $S = \{1, 2, 3\}$. Nađi rastav i sve najobuhvatnije dijelove X iz tog rastava sa svojstvom, da iz $a \in X$, $b \in X$ slijedi: 1) $a \cap b = v$, 2) ili $a \subset b$, ili $a \supseteq b$. Nađi uniju članova iz svakog takvog X.

§ 1.11. KOMBINIRANI PRODUKT SKUPOVA

1. Pojam para i uređenog para. Primjer 1. Imamo 3 olovke: crvenu c, modru m, i zelenu z; zatim imamo 4 knjige, označimo ih 1, 2, 3, 4. Nada treba da za dar odabere od toga jednu olovku i jednu knjigu. Napravi skup svih mogućih darova za Nadu.

Ako izabere olovku c, onda može još samo birati jednu knjigu i uzeti 1 ili 2 ili 3 ili 4, pa će kao dar dobiti skup $\{c, 1\}$ ili $\{c, 2\}$ ili $\{c, 3\}$ ili $\{c, 4\}$.

Ako izabere modru olovku m, onda će nužno izabrati jedan jedini od ovih darova:

$$\{m, 1\}, \{m, 2\}, \{m, 3\}, \{m, 4\}.$$

Ako je Nada izabrala zelenu olovku z, njezin će dar biti

$$\text{ili } \{z, 1\} \text{ ili } \{z, 2\} \text{ ili } \{z, 3\} \text{ ili } \{z, 4\}.$$

Prema tome, Nadin dar je nužno jedan jedini član od ovog skupa:

$$\big\{\{c, 1\}, \{c, 2\}, \{c, 3\}, \{c, 4\}; \{m, 1\}, \{m, 2\}, \{m, 3\}, \{m, 4\}; \{z, 1\}, \{z, 2\}, \{z, 3\}, \{z, 4\}\big\}.$$

Nada svoj dar može birati ili tako, da najprije izabere olovku ili najprije knjigu ili obadvoje zajedno.

Ako ona na pr. bira najprije olovku i izabere c, pa onda bira knjigu i to onu, koja nosi oznaku 3, njezin se dar može označiti $c, 3$ ili $(c, 3)$. Taj dar nije isto, što i dar $(3, c)$, koji kazuje, da je Nada najprije izabrala knjigu 3, pa onda olovku c. I $(c, 3)$ i $(3, c)$ je uređen par; naprotiv skup $\{c, 3\}$ je isto, što i skup $\{3, c\}$ jer se oba sastoje od istih članova c i 3.

Par je uređen, kad znamo, što mu je prvi član, a što drugi član.

2. Kombinirani produkt dvaju skupova. Primjer 2. Neka je A skup od sve tri olovke c, m i z; neka je B skup od sve četiri knjige 1, 2, 3, 4; (sl. 23.) tad imamo ove uređene parove

$$c\,1,\quad c\,2,\quad c\,3,\quad c\,4$$

$$m\,1,\quad m\,2,\quad m\,3,\quad m\,4$$

$$z\,1,\quad z\,2,\quad z\,3,\quad z\,4$$

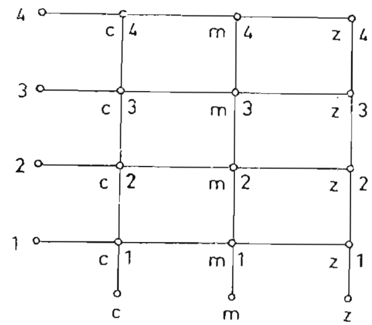
kod kojih je prvi član olovka, a drugi knjiga. Skup svih tih uređenih parova označuje se s $A \times B$ i zove se kombinirani produkt skupa A i skupa B. Kombinirani produkt $B \times A$ skupa B i skupa A je skup, kojemu su elementi ovi uređeni parovi naslagani jedni uz druge:

$$1\ c,\ 2\ c,\ 3\ c,\ 4\ c$$

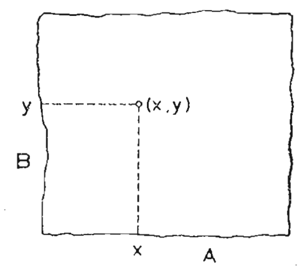
$$1\ m,\ 2\ m,\ 3\ m,\ 4\ m$$

$$1\ z,\ 2\ z,\ 3\ z,\ 4\ z.$$

Da li ta dva produkta $A \times B$ i $B \times A$ imaju ikoji zajednički element?



Sl. 23.



Sl. 24.

Definicija. Kombinirani produkt skupa A i skupa B je skup svih uređenih parova

$$(x, y)$$

pri čemu je prvi član x uzet iz A, a drugi član y iz skupa B. Taj se produkt označuje s $A \times B$. Pritom se A zove prvi, a B drugi faktor produkta $A \times B$. Vidi (sl. 24.).

Napomena. Uoči, da je kombinirani produkt dvaju skupova opet određen skup.

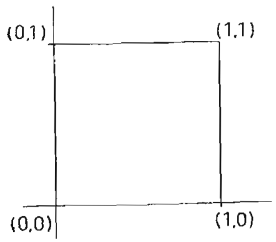
3. Kvadrat skupa. Kubus skupa. Ako je S zadan skup, onda se $S \times S$ označuje sa S^2 i zove (kombinirani) kvadrat skupa S. Prema tome, S^2 je skup svih dvočlanih nizova, kojima su članovi ujedno članovi skupa S. Isto tako S^3 je skup svih tročlanih nizova (x_1, x_2, x_3), kojemu su članovi x_1, x_2, x_3 ujedno članovi skupa S. Skup S^3 zove se kombinirani kubus skupa S.

Slično se određuje S^4, $S^5, \ldots$

Primjer 3. Promatrajmo skup I 2 $= \{0, 1\}$; njegov kvadrat $\{0, 1\}^2$ je sastavljen od ovih nizova:

$$(00), \quad (0, 1)$$
$$(1, 0), \quad (1, 1).$$

Shematski, možemo te nizove predstaviti kao vrhove kvadrata (sl. 25.).



Sl. 25.

Kubus od $\{0, 1\}$ t. j. skup $\{0, 1\}^3$ sastavljen je od ovih 8 nizova:

0 0 0	1 0 0
0 0 1	1 0 1
0 1 0	1 1 0
0 1 1	1 1 1

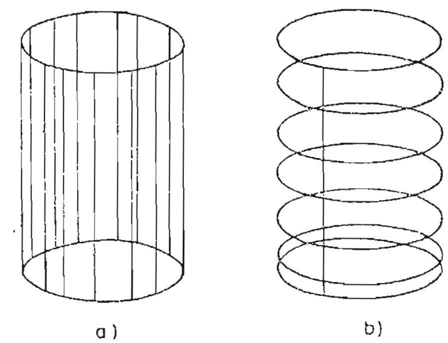
Primjer 4. Ako je R brojevan pravac, onda skup R^2 svih (x, y) iz R^2 možemo shvatiti kao točke ravnine; (x, y) je ime točke, kojoj je apscisa broj x, a ordinata broj y. Prema tome, ako je $z \in R^2$, onda je z nužno oblika $(z_1 z_2)$, gdje je z_1 posve određen element iz R isto kao i z_2.

Analogno se definira R^3 kao skup svih tročlanih nizova (x_1, x_2, x_3) realnih brojeva. Ti nizovi jesu analitičke oznake točaka u prostoru pa čak možemo i reći, da ti nizovi imaju ulogu točaka u prostoru.

Zato se i može govoriti na pr. o točki $(2, 4, 5)$ „prostora" R^3.[1])

Primjer 5. Neka je k zadan krug, d zadana duž. Što bi bilo $k \times d$?

To je svakako skup svih (x, y), gdje je $x \in k$ i $y \in d$. Kad se u (x, y) mijenja samo y prolazeći čitavom duži d, onda se dobije određen skup, kojeg možemo označiti sa (x, d). a kojeg možemo zamisliti kao duž, koja je okomita na k i jednako je velika kao duž d. Na taj način skup (k, d) je unija svih (x, d), kad x prolazi kroz k; dobijemo ispunjen valjak, kojemu je k baza, a izvodnica je duž d (sl. 26.a). Isto tako se za svako $y \in d$ može definirati (k, y) kao $k \times y$, pa je $k \times d$ unija svih tih „krugova" nanizanih okomito na duž d, koja im je zajednička os simetrije (sl. 26.b).



Sl. 26.

4. Kombinirano množenje s praznim skupom $\emptyset$. Prazni skup $\emptyset$ nema nikakva člana; to znači, da ne može biti $x \in \emptyset$. Zato ni za koji skup S ne postoji dvočlan niz sa svoj-

[1]) Velika je zasluga francuskog matematičara Dekarta (Descartes, 17. v.), što je uočio tu vezu među tročlanim nizovima realnih brojeva i točaka prostora. Na analogan se način R^4, $R^5, \ldots$ mogu definirati kao prostori od 4 dimenzije, 5 dimenzija i t. d.

stvom (x, y), $x \in \emptyset$, $y \in S$. A to upravo znači, da produkt $\emptyset \times S$ nema nikakva člana; dakle je $\emptyset \times S = \emptyset$ za svaki skup S. Isto tako $S \times \emptyset = \emptyset$.

Specijalno je $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$.[1]

5. Primjedba o kombiniranom množenju skupova. I prijelaz od skupova A, B na njihov (kombinirani) produkt shvaćamo kao novu mogućnost, kako da iz zadanih skupova A, B obrazujemo nove skupove. Kao što od dva broja na pr. 2, 3 možemo obrazovati razne druge brojeve na pr.

$$2 + 3,\ 2 - 3,\ 2 \cdot 3,\ 2^3,\ 2 \log 3,\ \log_2 3,\ \binom{3}{2},\ \sin 2 + \cos 3 \text{ it.d.}$$

tako i iz skupova A, B možemo formirati razne druge skupove na pr.

$$A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ A \times B,\ A^2 \cup B^2, \quad \text{i t. d.}$$

Na taj način i (kombinirano) množenje skupova je određen „račun sa skupovima". Taj nam „račun" specijalno pokazuje kako je „ravnina" R^2 kvadrat pravca R, a prostor R^3 je kubus od R, pa čak u svojoj suštini i produkt $R^2 \times R$ odnosno $R \times R^2$.

ZADACI: 1. Nađi „kvadrat" $S^2 = S \times S$ za ove skupove S: 1) $\{0, 1\}$, 2) $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, 3) N, 4) D, 5) Q, 6) R, 7) pravac p.

2. Isto pitanje, ako S znači: 1) obod kruga, 2) obod kvadrata, 3) obod trokuta, 4) obod elipse.

3. Nađi $A \times B$ za ove skupove A i B: 1) $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$; 2) $\{1, 2, \ldots, 9\}$, $\{0, 1, 2\}$; 3) duž $\overline{AB}$, duž $\overline{CD}$. 4) duž d, trokut $A\,B\,C$.

4. Ako za skupove A, B vrijedi $A \times B = B \times A$, onda je $A = B$. Dokaži!!

5. Nađi $(\{0, 1\} \times \{0, 1\}) \times \{0, 1\}$ i $\{0, 1\} \times (\{0, 1\} \times \{0, 1\})$.

6. Danas specijalno u logici i u vezi s računskim strojevima promatramo skup $S_1 = \{0, 1\}$ i pripadne skupove $S_2 = S_1 \times S_1$, $S_3 = S_2 \times S_1$, $S_4 = S_3 \times S_2, \ldots$ Skupove ispišite.

[1] Kako glasi slično pravilo za množenje brojeva? Prazan skup ima sličnu ulogu među skupovima, kao broj 0 među brojevima!

§. 1.12. VEZE MEĐU OSNOVNIM POJMOVIMA

1. Relacija $\subseteq$ i operator $\cup$. Znamo što znači $A \subseteq B$. Kako $A \subseteq B$ znači, da iz $x \in A$ slijedi $x \in B$, zaključujemo, da iz

(1) $$A \subseteq B$$

slijedi

(2) $$A \cup B = B.$$

Da li vrijedi obrat, t. j. da li iz (2) slijedi (1)? Naravno da vrijedi, jer iz (2) specijalno slijedi, da je $A \cup B \subseteq B$ pa dakle i $A \subseteq B$.

Prema tome, relacija $A \subseteq B$ i relacija $A \cup B = B$ iskazuje jednu te istu povezanost među skupovima A i B.

2. Relacija $\subseteq$ i operator $\cap$ za sječenje. Na sličan način kao što se dokazuje ekvivalentnost relacija (1) i (2) iz prethodne točke, dokazuje se i ekvivalentnost relacije

(1) $$A \subseteq B$$

i relacije

(2) $$A \cap B = A$$

t. j. da iz (1) slijedi (2) i obrnuto, da iz (2) slijedi (1).

3. Veza između relacija $\in$ i $\subseteq$. Partitivni skup. Neka je S kakav skup, a X njegov neki dio; to znači, da je $X \subseteq S$. Promatrajmo skup svih takovih X-ova; označimo taj skup s

$$PS.$$

Prema tome, PS označuje skup svih rješenja X relacije $X \subseteq S$. Drugim riječima, za svako $X \subseteq S$ vrijedi $X \in PS$; i obrnuto: ako je $X \in PS$, onda je $X \subseteq S$. Kako je specijalno $v \subseteq S$ i $S \subseteq S$, to znači, da će i prazni skup $\emptyset$ i sam zadani skup S biti članovi novog skupa PS. Dakle je $\emptyset \in PS$, $S \in PS$.

Na taj način vidimo, kako su relacije $\in$, $\subseteq$ međusobno povezane.

Skup PS zove se partitivni ili diobeni skup, što pripada zadanu skupu S. Odatle i oznaka PS; slovo P tu dolazi kao početno slovo lat. riječi pars — dio.

Primijetimo, da je PS određena podjela skupa S, jer je unija svih članova iz PS upravo $= S$; tu se radi o najbogatijoj podjeli skupa S; svaki rastav ili podjela skupa S je dio od PS. To znači ovo: ako je R bilo kakav skup skupova s unijom $= S$, onda je $R \subseteq PS$. Tako na pr. ako je $X \subseteq S$, onda ova dva skupa X, $S \setminus X$ čine određeni rastav skupa S; naravno da je $\{X, S \setminus X\} \in PS$.

§ 1.13. KONVEKSNI I NEKONVEKSNI SKUPOVI

Ako su A, B određene dvije točke, tada je pomoću njih posve određena duž $\overline{AB}$, kao onaj skup točaka, koji leži na najkraćem putu od A i B; put $\overline{AB}$ je najkraći. Duž $\overline{AB}$ je *zatvorena*, ako sadrži i krajnje točke A i B. Ako duž ne sadrži niti A niti B, govori se o *otvorenoj duži*. Ako duž $\overline{AB}$ sadrži A, a ne B, ili sadrži B, a ne sadrži A, duž je poluotvorena (može se reći, da je i poluzatvorena). Mi ćemo raditi sa zatvorenim dužima, ukoliko ne kažemo drukčije. Za svaku točku T zatvorena duž $\overline{TT}$ definira se kao jednočlani skup $\{T\}$, koji se sastoji od T kao jedine svoje točke.

Svaka duž ima ovo svojstvo: ako točke C i D leže na duži $\overline{AB}$, onda na njoj leži i čitava duž $\overline{CD}$: simbolički: ako je $C \in \overline{AB}$ i $D \in \overline{AB}$, onda je

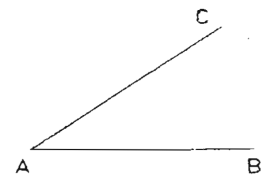
$$\overline{CD} \subseteq \overline{AB}.$$

Kraće se kaže: svaka duž je konveksan skup.

D e f i n i c i j a. Veli se, da je geometrijski skup točaka konveksan, ako on sadrži čitavu duž $\overline{XY}$ čim sadrži točke X i Y. Prazni skup i svaki jednočlani skup smatramo također da su konveksni.

P r i m j e r 1. Promatrajmo tri točke A, B, C, duži $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i njihovu uniju (sl. 27.)

$$S = \overline{AB} \cup \overline{AC}. \tag{1}$$



Sl. 27.

Da li je taj skup konveksan? Onako, kako je nacrtano S n i j e k o n v e k s n o, jer na pr. $B \in S$, $C \in S$, ali nije $\overline{BC} \subseteq S$. Međutim, ako točke A, B, C leže na pravcu, onda je skup (1) konveksan.

P r i m j e r 2. Puni krug je konveksan; kružnica nije konveksan skup. Ako iz nutrine kruga uklonimo jednu točku, ili iskinemo bilo kakav dio, preostatak kruga nije konveksan. Ako od zatvorenog kruga uklonimo bilo koji dio njegovog omeđenja — pa čak i čitavu kružnicu — preostatak je konveksan.

Svaki trokut je konveksan skup [1]. Tetraedar također. Svaki kružni valjak (i stožac) je konveksan.

---

[1]) Trokut s vrhovima A, B, C možemo definirati kao najmanji konveksni skup, koji sadrži sve tri točke A, B, C, t. j. kao onaj konveksni nadskup od $\{A, B, C\}$, koji leži u svakom konveksnom skupu, u kojem je $\{A, B, C\}$

ZADACI: 1. Promatraj krug k i točku T; da li skup $k \cup \{T\}$ može biti konveksan?

2. Za krug k i točku T odredi $d_{\cup}(k \cup \{T\})$. Kad će taj skup biti konveksan, a kad nekonveksan[1]. Odredi $d_{\cup} d_{\cup}(k \cup T)$ i dokaži, da je taj skup uvijek konveksan.

3. Konveksna jezgra zadana geometrijskog skupa S je najmanji konveksni skup $\supseteq S$; označit ćemo taj skup s $k_0 S$. Dokaži: $k_0\{A, B\} = \overline{AB}$, $k_0\{A, B, C\} = \triangle ABC = d_{\cup}(\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{BA})$.

4. Što sve može biti konveksna jezgra od unije dvaju pravaca? Razlikuj slučajeve, da su ti pravci u ravnini i mimohodni. Dokaži, da je u posljednjem slučaju jezgra omeđena dvjema paralelnim ravninama.

5. Odredi $k_0 S$ za $S = \{A, B, C, D\}$.

6. Isto pitanje, ako je $S =$ pravac $\cup\ T$.

7. Isto pitanje, ako je S: 1) unija od pravca i duži, 2) unija od dva pravca, 3) unija kruga i duži; 4) unija od dva kruga; 5) unija od dvije kružnice.

8. Isto pitanje, ako je S: 1) unija od ravnine i točke, 2) unija ravnine i duži, 3) unija ravnine i pravca, 4) unija od dvije ravnine, 5) unija ravnine i kruga.

9. Dokaži, da je konveksna jezgra geometrijskog skupa S isto što i presjek svih konveksnih skupova, u kojima S leži.

10. Promatraj točke A, B, C i skupove $S = \{A, B, C\}$, $d_{\cup} S$, $d_{\cup} d_{\cup} S$, $d_{\cup} d_{\cup} d_{\cup} S$, ...

11. Isto za točke A, B, C, D u prostoru.

12. Može se dokazati ovo: 1) ako je S na pravcu, onda je $d_{\cup} S = k_0 S$; 2) ako je S u ravnini, onda je $k_0 S = d_{\cup} d_{\cup} S$; 3) ako S leži u prostoru, onda je $k_0 S = d_{\cup} d_{\cup} d_{\cup} S$.

[1]) Za skup S stavljamo $d_{\cup} S = \cup\, \overline{XY}$, pri čemu je $X \in S$ i $Y \in S$.

POGLAVLJE 2.

KOLIKO ZADAN SKUP IMA ČLANOVA? GLAVNI ILI KARDINALNI BROJEVI

Ako imamo skupove A, B, postavlja se se pitanje, da li oni imaju ili nemaju jednako mnogo članova. *Što zapravo znači, da dva skupa imaju jednako mnogo elemenata? Što znači, da skup A ima manje elemenata, nego što ih ima skup B?* Na ta i slična pitanja naći ćemo odgovor u ovom poglavlju. Upoznat ćemo se i sa dosta neočekivanim stvarima u tom pogledu i to, kad budemo radili s beskonačnim skupovima.

§ 2.1. PRIMJERI O SKUPOVIMA S JEDNAKIM I NEJEDNAKIM BROJEM ČLANOVA

Primjer 1. Ako imamo dvije košare k_1, k_2 pune jabuka, kako da ustanovimo, da li u njima ima jednako mnogo komada jabuka?

To možemo ustanoviti ovako: sparimo jednu jabuku iz k_1 i jednu jabuku iz k_2 na pr. tako, da jednom rukom izvadimo jabuku iz k_1, a drugom rukom izvadimo istodobno jabuku iz k_2; izvađene jabuke odložimo, pa na preostatku radimo sličan posao: istodobno izvadimo jednom rukom jabuku iz k_1, a drugom iz k_2 i stavimo te jabuke van košare. Tako sparujemo, dok je god moguće. Košare ćemo isprazniti istodobno, ili će jedna košara, recimo k_1, biti prva prazna. Ako se košare isprazne istovremeno, imale su one jednako mnogo komada jabuka; ako se košara k_1 ispraznila prva, sadržavala je ona manje komada jabuka, nego druga košara. Prema tome, košara k_1 i košara k_2 sadrže jednako mnogo komada jabuka, onda i samo onda, ako je moguće jabuke iz k_1 i jabuke iz k_2 međusobno spariti. To znači, da se naprave parovi jabuka, da svaki par sadrži jednu jabuku iz k_1 i jednu jabuku iz k_2 i da svaka jabuka iz svake košare bude pritom sparena.

Koliko je taj postupak jednostavan i na dohvat i djetetu predškolskog doba, toliko je on dalekosežan. I pravo je čudo, da je istom u drugoj polovici prošlog vijeka taj postupak svijesno uveden kao osnovno matematičko rasuđivanje (Cantor, Dedekind).

Gornje sparivanje jabuka možemo ovako konkretizirati nizanjem:

jabuke iz k_1 jesu: ● ● ● ● ● ... ... ● ●
jabuke iz k_2 jesu: ● ● ● ● ● ... ... ● ● ● ● ●

Primjedba. Mi zasad govorimo o tome, da li u jednoj košari ima više komada jabuka, nego u drugoj. Drugo je pitanje, koja od tih jabuka više vrijedi, koja je teža i t. d. Jer, jabuke ne moraju biti iste vrste i mogu se vrlo razlikovati u cijeni, težini, hranljivosti i t. d.

Primjer 2. Sparivanje predmeta iz raznih skupova pojavljuje se vrlo često. Tako na pr. na svakom automobilu pričvršćena je pločica s određenom šifrom, koja se sastoji od slova i brojaka. Tu sparujemo automobile sa pločicama, koje nose šifre. Pogledaj pločice otraga i sprijeda na automobilu; po čemu znadeš, u kojoj je narodnoj republici zapisan automobil, odnosno da li je uopće zapisan u Jugoslaviji?

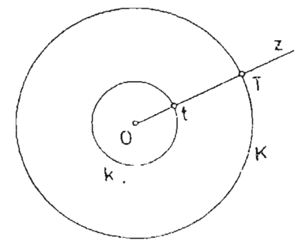
S jedne strane imamo na pr. skup svih automobila (jednog grada, države, kontinenta i t. d.), a s druge strane skup upotrebljenih šifri. Različitim automobilima pripadaju različite šifre, a različitim šiframa pripadaju različiti automobili!

Primjer 3. Ako se članovi nekog skupa mogu spariti sa skupom prstiju jedne ruke, velimo, da je taj skup petorka,

ili da ima pet jedinica (članova). Prvobitno je, izgleda, riječ *pet* označavala pesnicu, šaku kao izrazit skup u vezi s pet elemenata.

Primjer 4. Uzmimo primjer skupa A od stolice, klupe i stola, te skupa B, koji se sastoji od Radana, Tane, Nade i Božene. Tu je sparivanje skupa A i skupa B nemoguće; no lako je spariti skup A sa dijelom skupa B, na pr. tako, da Radan uzme stolicu, Tana klupu, a Nada stol. Zato se kaže, da skup A ima manje elemenata nego skup B.

Primjer 5. Nacrtaj dvije koncentrične kružnice k, K u istoj ravnini (sl. 28.). Da li one imaju jednako mnogo točaka, ili veća kružnica ima više točaka?



Sl. 28.

Na prvi pogled izgleda, kao da veća kružnica ima više točaka.

Međutim, promatraj bilo koju zraku z s početkom O u središtu kruga; ta zraka z siječe i k i K sparujući na taj način određenu točku iz k s određenom točkom iz K. Mijenjajući z mijenja se i točka iz $z \cap k$ i točka iz $z \cap K$. Sparivanje točaka iz k i točaka iz K je moguće; zato te dvije kružnice imaju jednako mnogo elemenata.

Ujedno vidimo ovo: pramen $[O]$ zraka iz O ima isto toliko članova, t. j. zraka koliko kružnica k (ili kružnica K) ima točaka. Treba samo spariti zraku OT i točku T iz K, pa da se vidi, da je pridruživanje

$$OT \longleftrightarrow T$$

jedno sparivanje između pramena $[O]$ i kružnice K.

§ 2.2. ŠTO ZNAČI, DA DVA SKUPA IMAJU JEDNAKO MNOGO ELEMENATA? TOLIKOVANJE SKUPOVA

Što znači, da je jedan skup brojniji od drugoga?

Imajući u vidu postupak sparivanja onako, kako smo ga prikazali na primjerima u § 2.1, prirodno je, da na to pitanje odgovorimo ovako.

1. Definicija 1. Veli se, da skup A ima isto toliko elemenata koliko i skup B, ako je svakom elementu x iz A moguće pridružiti određen element u B, tako, da različitim elementima iz A budu pridruženi različiti elementi iz B i da pritom svaki član skupa B bude pridružen određenom članu skupa A. Takvo pridruživanje između članova skupa A i članova skupa B zove se **tolikovanje** skupa A na skup B. Drugim riječima, tolikovati skup A na skup B znači svakom x iz A odrediti izvjesno fx iz B tako, da iz $x \in A$ i $x' \in A$ i $x \neq x'$ slijedi $fx \neq fx'$ i da za svako $y \in B$ postoji jedno x iz A sa svojstvom $fx = y$. Tolikovanje je vrlo važan pojam. Govorit ćemo također, da je A ekvivalentno s B ili istobrojno s B i pisati $kA = kB$ ili $A \sim B$. Kongruencija i sličnost su vrlo specijalni slučajevi tolikovanja.

Mjesto rečenice

„skup A ima isto toliko elemenata koliko i skup B"

govori se rečenica

„kardinalni ili glavni broj skupa A jednak je kardinalnom ili glavnom broju skupa B",

i obrnuto.

To se isto iskazuje simbolički ovom jednakošću

$$kA = kB$$

i čita „ kardinalni broj od A jednak je . . .", ili također skup A je ekvivalentan ili istobrojan sa skupom B.

Ako nije $kA = kB$, onda se to piše $kA \neq kB$ i veli da kardinalni broj od A nije jednak kB.

Definicija 2. Ako skup A ima isti kardinalni broj kao kakav dio skupa B, veli se, da je kardinalni broj skupa A manji ili jednak, nego što je kardinalni broj skupa B i pišemo

$$kA \leq kB.$$

To drugim riječima znači, da skup A možemo pretolikovati na dio skupa B odnosno **u** skup B. Pritom naravno ne mora svaka jedinka u B biti zauzeta. Zato i razlikujemo tolikovanje skupa A **na** skup B i tolikovanje skupa A **u** skup B.

Reći ćemo, da je kA manje od kB i pisati

$$kA < kB$$

ako je $kA \leq kB$, ali nije $kA = kB$; velimo također, da je skup B **brojniji** od skupa A.

Mjesto da pišemo $kA \leq kB$, možemo pisati $kB \geq kA$ i izražavati se na odgovarajući način.

Primjedba. Može se pokazati, da iz $kA \leq kB$ i $kB \geq kB$ slijedi $kA = kB$. To je jedan od važnih teorema u teoriji skupova. Dokazali su ga Schroeder i Bernstein.

Prema primjeru 5. iz § 2.1 svaka kružnica ima jednako mnogo točaka koliko i svaka druga kružnica, bez obzira kako jedna bila malena, a druga velika.

2. Kardinalni broj skupa svih prirodnih brojeva jednak je kardinalnom broju skupa svih parnih prirodnih brojeva.

Ta se jednakost vidi iz ovog tolikovanja ili pridruživanja:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots, & n, \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ 2\cdot 1, & 2\cdot 2, & 2\cdot 3, & 2\cdot 4, & 2\cdot 5, & \ldots, & 2n, \ldots \end{array}$$

Tako vidimo, da pojedini skup može imati jednako mnogo članova koliko i njegov pravi dio. Na pr. $k\{1, 2, 3, \ldots n, \ldots\} = k\{2, 4, 6, 8, \ldots 2n, \ldots\}$. Pridruživanje $n \longleftrightarrow n+1$, kad n prolazi skupom N prirodnih brojeva, pokazuje, da je

$$k\{1, 2, 3, \ldots\} = k\{2, 3, 4, \ldots\}.$$

3. Cijelih racionalnih brojeva ima koliko i prirodnih brojeva. To pokazuje ovo prikazivanje skupa svih cijelih racionalnih brojeva:

$$(1) \quad 0; -1, +1; -2, +2; -3, +3; -4, +4; -5, +5; \ldots -n, +n; \ldots$$

i pridruživanje po redu članova toga niza i članova niza $1, 2, 3, \ldots$ prirodnih brojeva. To je pridruživanje ovog oblika:

$$0 \longleftrightarrow 1$$
$$-n \longleftrightarrow 2n$$
$$n \longleftrightarrow 2n+1$$

za svako $n \in N$.

Primijetimo, da je nizanje članova u nizu (1) takvo, da idući udesno modul članova ne pada.

4. Svih racionalnih brojeva ima koliko i prirodnih brojeva. Svi racionalni brojevi dobiju se kao kvocijenti cijelih brojeva. Poređajmo te kvocijente ovako:

$$\frac{0}{1};$$
$$\frac{0}{2}, \frac{1}{1};$$
$$\frac{0}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1};$$

$$\frac{0}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1};$$
$$\frac{0}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Vidi se, da suma brojnika i nazivnika u n-tom retku iznosi n za svaki član dotičnog retka.

No, sve te nizove možemo zamisliti skupljene u obliku jednog beskonačnog niza na pr. tako, da nižemo gornje retke jedne iza drugih (a ne jedne ispod drugih).

Tako nastaje ovaj niz:

$$(2) \quad \frac{0}{1}; \frac{0}{2}, \frac{1}{1}; \frac{0}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}; \frac{0}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}; \ldots$$

U tom nizu je 0 i svaki pozitivni racionalni broj; čak se svaki broj ponavlja bezbroj puta, jer na pr. $\frac{1}{2}$ pojavit će se i u oblicima $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \ldots, \frac{n}{2n}, \ldots$

Ako u nizu (2) precrtamo svaki član, koji se prethodno već u nizu pojavio, nastat će iz (2) posve određen niz svih pozitivnih racionalnih brojeva i 0. Ako još u tom nizu neposredno iza svakog člana napišemo i njegovu suprotnu vrijednost, dobit će se niz svih racionalnih brojeva; evo početka toga niza:

$$(3) \quad \frac{0}{1}; \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1};$$
$$\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}; \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \ldots$$

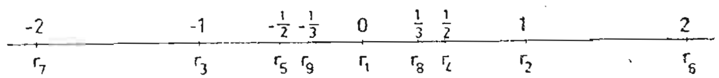
Označimo taj niz i ovako:

$$(4) \quad r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots$$

dakle

$$r_1 = 0,\ r_2 = 1,\ r_3 = -1,\ r_4 = 1/2,\ r_5 = -1/2, \dots .$$

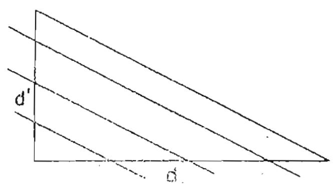
Ako imamo u vidu, kako su racionalni brojevi posijani gusto po brojevnom pravcu, onda nam izgleda neobično, da se svi racionalni brojevi mogu ipak skupiti u jedan niz! Pogledajmo na pr., kako su članovi niza (3) smješteni na brojevnom pravcu (sl. 29.):



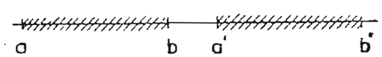
Sl. 29.

Vidimo, da se idući u nizu (4) prema desno, na brojevnom pravcu krećemo vrlo nepravilno.

5. Svake dvije otvorene duži imaju jednako mnogo točaka. Svake dvije zatvorene duži imaju jednako mnogo točaka. Neka su zadane bilo kakve dvije duži, d, d'.



Sl. 30.



Sl. 31.

P r v i d o k a z (geometrijski).

Nacrtajmo bilo kakav trokut, kojemu su d, d' dvije stranice (sl. 30.). Vukući paralelne pravce s trećom stranicom toga trokuta tako, da siječemo obje druge stranice, imat ćemo određeno sparivanje između točaka tih dviju stranica, a time i između točaka zadanih duži d, d'.

D r u g i d o k a z (analitički).

Neka su obje duži smještene na istom brojevnom pravcu (sl. 31.), pa neka su apscise njihovih krajeva brojevi a, b odnosno a', b'. Pokušajmo linearnom transformacijom

$$(5) \qquad y = kx + l$$

uspostaviti traženu vezu sparivanja — tolikovanja — brojeva x iz brojevnog intervala (a, b) i brojeva y iz (a', b'), tako da broju a odgovara a', a broju b broj b'. Dakle

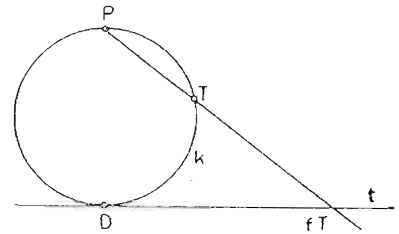
$$a' = ka + l,\ b' = kb + l.$$

Odatle izlazi

$$k = \frac{b' - a'}{b - a},\ l = \frac{a'b - ab'}{b - a}$$

Tražena funkcija (5) glasi

$$(6) \quad y = \frac{(b' - a')x + (a'b - ab')}{b - a}$$



Sl. 32.

Njome se brojevni interval (a, b) preslikava na brojevni interval (a', b').

6. Svaki pravac ima upravo toliko točaka koliko i svaki drugi pravac. To je jasno, jer je svaki pravac kongruentan sa svakim drugim pravcem.

7. Što ima više točaka: kružnica ili pravac? *Svaka kružnica ima bar toliko točaka koliko i svaki pravac.*

Evo kako na to možemo zaključiti. Promatrajmo kružnicu k i jednu njenu tangentu t. Neka je D točka, u kojoj se tangenta t i kružnica dodiruju (sl. 32.). Neka je P dijametralno suprotna točka od D tako, da je $\overline{DP}$ promjer kružnice. Uspostavimo sada vezu f između točaka na k i točaka na pravcu t. Neka je T bilo koja točka iz k, ali $\neq P$; tad pravac PT siječe pravac t u određenoj točki, koju ćemo u zavisnosti od T

nazvati fT. Kad T putuje po desnom otvorenom luku $\widehat{PD}$, ispunit će fT čitav pravac t i to zraku desno od D, a lijevo od D kad T putuje lijevim lukom $\widehat{DP}$. Vidi se, da je $fD = D$. Na taj način, ako prijelaz od T s k na fT na t smatramo kao kakvo klizanje točke T niz zraku PT, ispunit će točke fT čitav pravac t. Čak za preostalu točku P kružnice k više ni nema mjesta na pravcu t, jer je na t svako mjesto već zauzeto. Na taj bi način izgledalo, kao da na kružnici k ima čak više točaka nego na pravcu t! Jer „ispražnjivanje" f točku po točku T s k i istodobno fT s pravca t prije „isprazni" pravac t, nego kružnicu k.

S druge strane, ako kružnicu k zamislimo „razvijenu" na pravac t, ispunit će ona samo jednu duž toga pravca, kojoj je dužina $= 2\pi r$, gdje je r veličina polumjera kružnice. Prema tome, kružnica ima bar toliko točaka koliko i pravac t, ali isto tako t ima bar toliko točaka koliko i k. Odatle se zaključuje, da k i t imaju jednako mnogo jedinki.

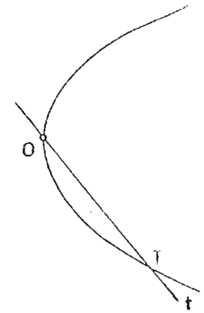
8. Što ima više točaka: duž ili pravac? Na prvi pogled bismo s potpunom sigurnošću rekli, da duž ima kud i kamo manje točaka od pravca. Zato je tim čudnije, što to nije istina.

Svaka ma kako kratka otvorena duž ima isto toliko točaka koliko i čitav pravac.

Da to dokažemo, zamislimo, da je otvorena duž svinuta u kružnicu bez jedne točke P. Iz toga položaja duž se lako pretolikuje na čitav pravac, kao što smo maloprije ustanovili.

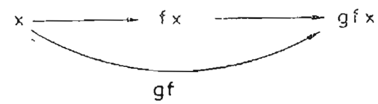
ZADACI: 1. Naznači jedno tolikovanje između skupa N prirodnih brojeva i skupa: 1) nepozitivnih cijelih brojeva, 2) dekadskih jedinica 1, 10, 100, 1000, ..., 3) brojeva $1, 10^{\pm 1}, 10^{\pm 2}, \ldots$

2. Razbiti skup $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ na 2, 4, 10 jednakih dijelova; u svakom od ta tri slučaja naznačiti jedno tolikovanje između tih dijelova.
3. Promatraj brojevne intervale: 1) $R(0;1)$, $R(2;3)$, $R(4;5)$. Udesi među njima tolikovanje. 2) Isto za skupove: $R(0;5)$, $R(0;40)$. Da li veza $x \longleftrightarrow 8x$ to vrši?
4. Zašto je: 1) $cR(0;b) = R(0;cb)$, $d + R(0;b) = R(d; d+b)$; 3) $cR(0;b) + d = R(d, cb + d)$ za svaki broj c i svaki broj d?
5. Pretolikuj $R(3;8)$ na: $R(0,1)$, $R(-5,-12)$, $R(-2,7)$. Pretolikuj kružni luk na koji drugi kružni luk (iste ili druge kružnice).
6. Pretolikuj skup polumjera kružnice na pramen pravaca.
7. Promatrajmo parabolu i u njenoj ravnini pramen pravca $[O]$ sa središtem u vrhu O parabole (sl. 33.). Da li je veza $t \longleftrightarrow T$ (gl. sliku!) tolikovanje između parabole i pramena $[O]$? Koji je član od $[O]$ pritom izuzet?
Kako stvar stoji, ako tu mjesto vrha O promatramo neku drugu točko O' parabole?



Sl. 33.

8. Da li ima više prirodnih brojeva ili koncentričnih kružnica s racionalnim polumjerom?
9. Dokaži ova svojstva tolikovanja: Ako se skup A tolikovanjem f prevodi na skup B, a ovaj tolikovanjem g na skup C, onda se tolikovanjem skupa A može dobiti odmah i skup C po ovoj shemi (sl. 34.)



Sl. 34.

10. Da li je jasno, da se sadržaj zadatka 9. izriče i ovako: ako je $kA = kB$ i $kB = kC$, onda je $kA = kC$?

11. Izreci pojmom tolikovanja ovu rečenicu: „ako je $kA = kB$, onda je $kB = kA$".

12. Isto pitanje za ove rečenice:

Ako je $kA = kA'$, $kB = kB'$, onda je
$$kA + kB = kA' + kB'.$$
Ako je $kA = kA'$, $kB = kB'$, onda je
$$kA \cdot kB = kA' \cdot kB'.$$

§ 2.3. ŠTO SU KARDINALNI BROJEVI? OZNAČIVANJE KARDINALNIH BROJEVA

Kardinalni ili glavni brojevi jesu izvjesna svojstva skupova, iz kojih razabiremo, da li dva skupa imaju jednako mnogo jedinki, odnosno da li jedan ima više jedinki, nego drugi. Kod kardinalnih brojeva važno je **međusobno isporedivanje** *po svojstvu tolikosti.* Naravno da će se pritom za bazu ispoređivanja uzeti što poznatiji skupovi. Tako je čovjek u svojoj dugoj historiji i radio, najprije nesvijesno, a onda svijesno. Tako je čovjek gledao, da li svoj promatrani skup jedinki može pretolikovati na „dva oka", pet prstiju ruke i t. d. Tako su vjerojatno nastala imena za brojeve u pojedinim jezicima.

Kraće se kaže ovako :

Kardinalni broj kS skupa S kazuje **koliko** *taj skup ima jedinki (članova).* Kraće se govori: *skup S ima kS članova, točaka, jedinki . . .* Ipak, treba pritom uvijek pomišljati na *ispoređivanje* skupova tolikovanjem.

1. Broj jedan i znak 1. Ako je p bilo kakav predmet, na pr. knjiga, vasiona, vakuum i t. d., tad je $\{p\}$ određen skup sastavljen jedino od p kao svojeg elementa.

Isto tako za koji drugi predmet p' imamo skup $\{p'\}$. Da li možemo skup $\{p\}$ pretolikovati na skup $\{p'\}$? Naravno! Treba jedinom članu p iz $\{p\}$ pridružiti jedini član p' iz $\{p'\}$ i stvar je gotova.

Dakle je
$$k\{p\} = k\{p'\}.$$
$k\{p\}$ se zove „jedan" i označuje sa 1; brojka ili cifra 1 kao i naziv „jedan" vjerojatno su u vezi s oblikom nazivamo „kolac" ili slično.

Specijalno za svaki skup p imamo $k(p) = 1$; pa tako i za prazni skup $\emptyset$ imamo skup $\{\emptyset\}$ i njegov kardinalni broj.
$$k\{\emptyset\} = 1.$$

Promatrajmo oznaku — upravo predmet — 0 i pripadni skup $\{0\}$; imamo
$$k\{0\} = 1.$$
Imamo $0 < 1$ jer je $0 \leq 1$ a nije $0 \geq 1$. Stvarno, znamo, da je $\emptyset \subseteq S$ za svaki skup S; zato uzimamo, da je $k\emptyset \leq kS$, t. j. $0 \leq kS$. Specijalno, za $S = \{\emptyset\}$ imamo odatle $0 \leq k\{\emptyset\}$, t. j. $0 \leq 1$. Očito je, da ne može biti $0 \geq 1$, jer jedini element $\emptyset$ u $\{\emptyset\}$ nema s čim da se pridruži u $\emptyset$, jer u $\emptyset$ nema ničega.

2. Broj nula i znak 0. Prazni skup $\emptyset$ nema nikakvog elementa; $k\emptyset$ se izgovara „ništa" ili „nula"; $k\emptyset$ se označuje sa 0 i piše
$$k\emptyset = 0,$$
Zato se i kaže: „prazni skup ima 0 elemenata", što znači, da 0 nema baš nikakvog elementa.

3. Glavni broj „dva" i njegova oznaka 2, odnosno II. Promatrajmo predmete 0, 1, pripadni skup $\{0, 1\}$ i pripadni kardinalni broj

$$k\{0, 1\}; \text{ on se naziva „dva'' i označuje: } 2 \text{ i II.}$$

Imamo

$$1 < 2.$$

Stvarno, najprije je $1 \leq 2$, jer skup $\{0\}$ možemo pretolikovati u skup $\{0, 1\}$ — čak je $\{0\} \subseteq \{0, 1\}$. No obrnuto, skup $\{0, 1\}$ ne možemo pretolikovati u $\{0\}$, jer ako članu 0 iz $\{0, 1\}$ pridružimo 0 iz $\{0\}$, onda preostalom članu 1 iz $\{0, 1\}$ nemamo više šta da pridružimo u $\{0\} \setminus \{0\}$ — ovo je prazno.

4. Na sličan način imamo dalje brojeve

$$k\{0, 1, 2\} = 3, \text{ t. j. } k\,\mathrm{I}\,3 = 3, \quad k\{0, 1, 2, 3\} = 4, \text{ t. j. } k\,\mathrm{I}\,4 = 4 \text{ i t. d.}$$

Na taj način imamo brojeve: nulu, jedan, dva, tri, četiri i t. d. Kao i njihove uobičajene oznake:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots, 20, \ldots,$$

Uoči kako se izgovaraju brojevi 20, 30, 40, ..., 90, a kako brojevi 11, 12, 13, ..., 19,

a kako opet brojevi 21, 22, ..., 29.

Vidi se po redu, da je

$$0 < 1 < 2 < 3 \ldots;$$

to je prirodno uređenje tih brojeva ili uređenje po veličini. Specijalno, nula je najmanji od tih brojeva; zatim je 1 pa 2 pa 3 i t. d. Brojevi 1, 2, 3, ... zovu se prirodni brojevi.

5. Skup N svih prirodnih brojeva i njegov kardinalni broj (broj alef).

Promatrajmo i skup **svih** prirodnih brojeva; označimo taj skup s N; dakle je

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

Kardinalni broj toga skupa označuje se osim s kN također s hebrejskim prvim slovom a, kojemu se doda 0 kao indeks; dakle

$$\aleph_0 = kN.$$

Prema § 2.2.2, odnosno § 2.2.3, odnosno § 2.2.4 i parnih brojeva ima kN, isto kao što i cijelih ili racionalnih brojeva ima kN, dakle $\aleph_0$.

Prema tome, ako neki skup S ima kN jedinki, onda to znači, da se skup N može pretolikovati na skup S; ako to tolikovanje označimo s p, onda to znači, da je na pr. $p\,1$ određena točka iz S; isto tako je $p\,2$ i $p\,3$ i t. d. Na taj način dobivamo ove točke iz S:

$$p\,1,\ p\,2,\ p\,3,\ p\,4, \ldots \text{ ili pisano drukčije:}$$

$$p_1,\ p_2,\ p_3.$$

Sve su one međusobno različite. A kako se radi o tolikovanju skupa N ne samo **u** skup S, nego čak **na** skup S, znači to, da je **svaka** točka skupa S smještena negdje u „beskonačnom nizu'' $p\,1$, $p\,2$, $p\,3$; ...

Drugim riječima, skup S je istobrojan sa skupom N onda i samo onda, ako se sve točke skupa S mogu predstaviti kao članovi nekog beskonačnog niza sa sve samim različitim članovima.

Na pr. nizanje

$$0, -1, 1, \quad 2, -2, 3, -3, \ldots$$

pokazuje nedvosmisleno, da skup D svih cijelih brojeva ima upravo kN članova.

Ako je za neki skup S ispunjeno $kS \leq kN$, veli se, da je skup S prebrojiv[1].

---

[1]) U knjigama se često kaže, da je skup S prebrojiv jedino onda, ako ima kN elemenata. Međutim, pravilnije je i skupove na pr. od 10, 20 elemenata nazvati prebrojivima.

Broj kN zove se „beskonačno prebrojivo" ili alef nul; označuje se sa $\aleph_0$ ili $k\omega$.

6. Koliko ima točaka na pravcu? Broj c. Odgovor na to pitanje glasi: Na pravcu ima c točaka; naime, ako je p pravac, tad se kardinalni broj kp toga pravca označuje sa c. Vidjeli smo (§ 2.2.), da na svakoj duži, kružnici ima isto toliko točaka, koliko i na p, dakle ih ima c.

7. Točaka na pravcu ima više nego što ima prirodnih brojeva. Drugim riječima, ne mogu se sve točke na pravcu p iscrpsti pomoću članova nikakva niza $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ točaka iz p.

Drugim riječima: svakom nizu $a_1, a_2, \ldots$ točaka sa pravca p odgovara bar jedna točka pravca p, koja se u tom nizu ne pojavljuje.

Da dokažemo taj osnovni Cantorov poučak, radimo s točkama nekog brojevnog pravca, odnosno radimo s realnim brojevima i njihovim decimalnim prikazivanjem. Ograničimo se na pozitivne brojeve, koji su ≤ 1. Pa neka je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bilo koji niz pozitivnih realnih brojeva ≤ 1. Napišimo svaki član toga niza kao decimalan razlomak i to tako, da u tom prikazu nema posljednje znamenke $\neq 0$; tako na pr. za broj 0,54 ne ćemo uzeti taj prikaz, nego prikaz 0,539999 ...

Recimo, da se radi o ovom nizu brojeva

$$a_1 = 0{,}34054\ldots; \qquad a_2 = 0{,}0843\ldots;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pomoću toga niza $a_1, a_2 \ldots$ sagradimo broj

$$a = 0{,}47\ldots$$

na ovaj način: prva cifra (desetinke) poslije decimalnog poteza broja a dobije se iz cifri desetinki od a_1 tako, da se ovoj doda 1 ili oduzme 1, već prema tome, da li je kod a_1 ta cifra 0, 1, 2, 3, 4 ili 5, 6, 7, 8, 9. Isto se tako određuje druga cifra od a pomoću druge cifre od prikaza za a_2; treća cifra od a se tako formira pomoću treće cifre broja a_3 i t. d., i t. d.

Broj a je posve određen. No, $a \neq a_1$, jer se ti brojevi razlikuju na prvom decimalnom mjestu; isto tako $a \neq a_2$, jer se a i a_2 razlikuju na drugom decimalnom mjestu, slično $a \neq a_3$ i t. d. Ni za koje n ne može biti $a = a_n$, jer se n-ta cifra u a i n-ta cifra u a_n razlikuju; a kad bi bilo $a = a_n$, svaka cifra u a bila bi jednaka odgovarajućoj cifri u a_n. Dakle je broj a zaista različit od svih brojeva iz zadanog niza. A to upravo i tvrdi iskaz osnovnog teorema.

Gornji osnovni teorem pronašao je Cantor 1874. može se reći, da je tim pronalaskom započeta teorija skupova kao matematička nauka.

§ 2.4. RAČUNANJE S KARDINALNIM BROJEVIMA

Računanje sa skupovima: dodavanje, oduzimanje, množenje, odražavat će se i na kardinalnim brojevima. Tako ćemo imati dodavanje (zbrajanje), oduzimanje i množenje kardinalnih brojeva.

1. Dodavanje (zbrajanje) glavnih brojeva. Ako su A, B dva skupa bez ikojeg zajedničkog člana, onda je jasno, da unija $A \cup B$ ima toliko jedinki, koliko ih imaju A i B zajedno. Pa se tako i određuje suma $kA + kB$ glavnih brojeva kA, kB. Vrijedi dakle ova

D e f i n i c i j a. Ako su A, B dva skupa bez zajedničkih elemenata, onda se pod sumom kardinalnih brojeva kA, kB razumijeva kardinalni broj $k(A \cup B)$ unije $A \cup B$. Ta se suma označuje s $kA + kB$; dakle je po definiciji

(1) $\quad kA + kB = k(A \cup B)$ uz uslov, da je $A \cap B = v$.

Ili ovako: ako su a, b kardinalni brojevi, onda se pod njihovom sumom $a + b$ razumijeva kardinalni broj $k(A \cup B)$ unije $A \cup B$, pri čemu je $kA = a$, $kB = B$ i $A \cap B = v$.

Na pr. nađimo $2 + 3$. Nađimo skup A sa 2 jedinke; na pr. A se može sastojati od ova dva štapića ||; B se može sastojati od ova tri štapića ||| (ili 3 zrna i t. d.) Tako imamo

|| $\cup$ ||| = ||||| ; a tu je pet štapića.

Ili ovako: $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ i t. d.

Za dodavanje (zbrajanje) kardinalnih brojeva važe ovi obrasci:

zakon komutacije:

$$a + b = b + a,$$

zakon asocijacije:

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

$$a + 0 = a.$$

Ti zakoni su odraz odgovarajućih očiglednih zakona za dodavanje skupova:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A \cup v = A.$$

Teorem 1.1.

$$1 + kN = kN, \quad 2 + kN = kN, \quad 3 + kN = kN \text{ i t. d.}$$

Drugim riječima, broj kN zadovoljava jednakost

(2) $$1 + x = x.$$

Primijetimo, da nikoji realni broj ne zadovoljava te jednakosti.

Nađimo $1 + kN$. Uzmimo $A = \{1\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$ tad A, B nemaju zajedničkog člana; nadalje je $kA = 1$, $kB = kN$.

No, $$A \cup B = N$$

odatle $$k(A \cup B) = kN$$

$$kA + kB = kN$$

$$1 + kN = kN.$$

Slično se dokazuje, da je $2 + kN = kN$ uzimajući, da je

$$A\{1, 2\}, \quad B = N \setminus \{1, 2\};$$

skupovi naime N i B su istobrojni, kao što to pokazuje ovo tolikovanje:

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots, & n, & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots, & n+2 & \ldots \end{array}$$

Teorem 1.2. $kN + kN = kN$. Drugim riječima, jednakost

(3) $$x + x = x$$

zadovoljava kardinalni broj skupa N svih prirodnih brojeva.

Stvarno, Skup N možemo rastaviti u skup A neparnih brojeva i preostatak B svih parnih brojeva:

$$A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}.$$

Svaki od tih skupova ima kN članova, a zajedničkih članova nemaju.

Dakle je

$$kN + kN = kA + kB = k(A \cup B) = kN \text{ t. j.}$$

$$kN + kN = kN.$$

Primjedba. Ako je x realan broj, onda iz $x + x = x$ izlazi nužno $x = 0$. Specijalno, ni za koji prirodni broj x ne vrijedi jednakost (3).

Što nam kazuju gornja razmatranja? Kazuju nam to, da na pr. za jednakost $1 + x = x$ znamo bar jedno rješenje i to $x = kN$; to rješenje nije nikakav prirodan broj, jer ni za kakav prirodan, pa ni realan broj x, ne može biti $1 + x = x$. Također za jednakost $x + x = x$ dokazasmo, da ona osim jednog jedinog „realnog" rješenja $x = 0$ dopušta i rješenje $x = kN$, koje nije „realan" broj.[1]

2. Množenje kardinalnih brojeva. 2.1. Množenje skupova odražava se u množenju kardinalnih brojeva. Nađimo na pr. produkt $I\,2 \times I\,3$, t. j.

$$\{0, 1\} \times \{0, 1, 2\};$$

njegovi su elementi ovi dvočlani nizovi:

$$(0, 0), (0, 1), (0, 2); (1, 0), (1, 1), (1, 2).$$

Ima ih 6; u svojoj zavisnosti od zadanih kardinalnih brojeva 2 i 3, pišemo $2 \cdot 3 = 6$ ili $2 \times 3 = 6$.

Definicija. Za svaki par skupova A, B produkt $kA \times kB$ kardinalnih brojeva kA, kB definiramo ovako:

$$k(A \times B) = kA \times kB.$$

Ako su a, b kardinalni brojevi, onda produkt $a \cdot b$ ili $a \times b$ brojeva a i b definiramo kao kardinalni broj kombiniranog produkta $A \times B$; pritom su A, B skupovi sa svojstvom $kA = a$, $kB = b$.

Veza množenja sa zbrajanjem. Na gornjem primjeru vidimo ovo:

$$I\,2 \times I\,3 = \{0, 1\} \times \{0, 1, 2\} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2)\} \cup$$
$$\{(1, 0), (1, 1), (1, 2)\} = \{0\} \times \{0, 1, 2\} \cup \{1\} \times \{0, 1, 2\}.$$

No, skupovi

$$\{0\} \times \{0, 1, 2\}, \{1\} \times \{0, 1, 2\}$$

su bez zajedničkog člana; zato je

$$k(\{0, 1\} \times \{0, 1, 2\}) = k(\{0\} \times \{0, 1, 2\}) +$$
$$+ k(\{1\} \times \{0, 1, 2\}) = 3 + 3, \text{ t. j. } 2 \cdot 3 = 3 + 3.$$

[1]) Znajmo, da se decimalni razlomci nazivaju i realnim brojevima.

Sasvim se tako dokazuje općenito, da je

$$A \times B = \bigcup_{a \in A} \{a\} \times B$$

i da su skupovi $\{a\} \times B$ za razne a-ove bez zajedničkih elemenata i da svaki od njih ima kB članova.

Zato se definira, da ta unija ima kao sumu broj kB uzet kA puta kao pribrojnik. To se označuje $\sum\limits_{A} kB$.

Na taj način imamo

$$kA \cdot kB = \sum_{A} kB.$$

Na pr.

$$5 \cdot kN = \sum_{5} kN = kN + kN + kN + kN + kN.$$

2.2. Nekoliko svojstava množenja.

Teorem 2.2.1. $0 \cdot x = 0$ za svaki kardinalni broj x.

Stvarno, ako je $kX = x$, tad znamo, da je $v \times X = v$ (v je prazni skup); odatle proizlazi tražena tvrdnja.

Teorem 2.2.2. $1 \cdot x = x$ za svaki kardinalni broj x.

To je jasno, jer skupovi

$$\{p\} \times X \text{ i } X \text{ jesu istobrojni};$$

da se to vidi, dovoljno je svakom članu a iz X pridružiti član (p, a) iz $\{p\} \times X$; pritom je p bilo kakav predmet. A istobrojnost skupova $\{p\} \times X$ i X upravo se i izražava jednakošću iz tvrdnje 2.2.2.

Teorem 2.2.3. Za množenje brojeva vrijedi zakon komutacije $ab = ba$.

Stvarno, neka je $a = kX$, $b = kY$; dakle je $ab = k(X \times Y)$, $ba = k(Y \times X)$. Jednakost u tvrdnji 2.2.3. znači isto što i istobrojnost skupova $X \times Y$, $Y \times X$.

A da se dokaže istobrojnost ovih skupova, dovoljno je svakom $(x, y) \in X \times Y$ pridružiti element (y, x) iz $Y \times X$. Taj prijelaz p od $X \times Y$ na $Y \times X$ je određeno tolikovanje. Tim je tvrdnja 2.2.3. dokazana.

Teorem 2.2.4. Za množenje brojeva vrijedi zakon distribucije prema dodavanju:

$$(a + b) c = ac + bc.$$

To svojstvo množenja brojeva proizlazi iz činjenice, da je množenje skupova distributivno prema dodavanju (uniji) skupova.

2.3. O jednadžbi $xx = x$. Znamo, da su 0 i 1 jedini realni brojevi, za koje je ispunjeno

$$xx = x. \tag{1}$$

Prema tome, svaki realni broj x, za koji vrijedi veza (1) nužno je cio broj ≥ 0. Prebacimo li se na skupove, tad veza (1) postaje

$$kX \cdot k\,X = kX. \tag{2}$$

I kao što vidimo, tu jednakost zadovoljava prazni skup v i svaki jednočlani skup $\{p\}$.

Međutim, odmah ćemo vidjeti, da tu jednakost (2) zadovoljava i skup N svih prirodnih brojeva. Jer $kN \cdot kN$ je kardinalni broj produkta $N \times N$; a evo svih članova toga produkta:

$$\begin{array}{l}
(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \ldots \\
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \ldots \\
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Tu je nanizan niz nizova; a te je sve nizove lako nanizati u jedan jedini niz na pr. ovako: počne se sa (1, 1) i onda ide

onako kako pokazuju strjelice dakle isrcpljujući po redu sve kose linije. Dobivamo ovaj niz:

$$(1, 1); (2, 1), (1, 2); (3, 1), (2, 2), (1, 3);$$
$$(4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4); \ldots$$

Tu se niže skupina za skupinom; u svakoj skupini je suma napisanih koordinata konstantna i to po redu: 2 pa 3 pa 4 i t. d.

Dakle zaista sve članove skupa $N \times N$ može se svrstati u jedan niz; a to upravo znači, da skup N zadovoljava vezu (2). Na taj način dokazasmo

Teorem 2.3.1. Kardinalni broj skupa prirodnih brojeva zadovoljava jednadžbu

$$xx = x.$$

2.4. Koliko točaka ima ravnina? Sa c označujemo broj točaka na pravcu, t. j. $kp = c$, gdje je p pravac[1] odnosno $kR = c$, gdje nam R naznačuje skup svih realnih brojeva. Već smo vidjeli, da svaka otvorena duž ima isto toliko točaka koliko čitav pravac, odnosno koliko čitavo R. Tako na pr. vidimo, da funkcija $tg\,x$ tolikuje otvoreni interval od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$ na brojevni kontinuum R (sl. 35.).

Funkcija $tg \frac{\pi}{2(b-a)}\left(2x - a - b\right)$

kolikuje otvoreni interval od a do b na čitavo R.

Ravnina ima isto toliko točaka koliko i skup $R \times R$, jer se svaka točka ravnine može analitički označiti pomoću (x, y) iz $R \times R$. Prema tome, ravnina ima $c \cdot c$ točaka.

---

[1]) c je početno slovo latinske riječi *continuum*; pravac se zove i *linearni kontinuum* i to *geometrijski linearni kontinuum;* skup R realnih brojeva zove se *aritmetički linearni kontinuum*.

No, R ima točaka koliko i poluzatvorena brojevna duž $R(0, 1]$ od 0 do 1:

$$kR = kR(0, 1]$$

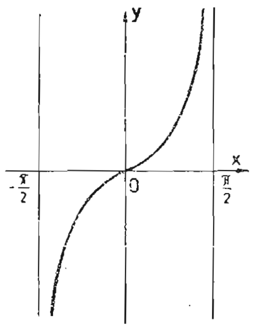
Odatle

$$kR \times kR = kR(0, 1] \times kR(0, 1]$$

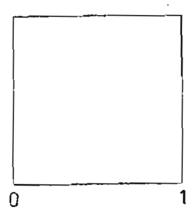
t. j.

$$k(R \times R) = k(R(0, 1] \times R(0, 1]).$$

A šta je $R(0, 1] \times R(0, 1]$? To je kvadrat, kojemu je $R(0, 1]$ jedna stranica, no iz kojega smo uklonili onu stranicu nad ishodištem (sl. 36.).



Sl. 35.



Sl. 36.

Dokažimo, da taj poluzatvoreni kvadrat ima isto toliko točaka, koliko ih ima i poluzatvorena duž $R(0, 1]$. Drugim riječima, moguće je točke iz $R(0, 1]$ tako porazmjestiti, da ispune čitav taj kvadrat.

Taj neobičan rezultat zapravo će odmah izaći kao neposredna posljedica činjenice, da skup N prirodnih brojeva možemo pocijepati u skup $2N$ parnih i skup $2N+1$ neparnih brojeva i da svaki od tih triju skupova ima kN članova. To je s jedne strane. A s druge strane, točke možemo obilježavati analitički.

Prijeđimo sada na dokaz o tolikovanju duži $R(0, 1]$ na gornji kvadrat. Neka je x bilo koji realni broj iz $R(0, 1]$, tad njemu pripada jedan jedini decimalni razvoj

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots x_n \ldots$$

pri čemu su $x_1, x_2 \ldots$ cifre $0, 1, \ldots, 9$, ali tako da se sve te cifre najzad ne svedu na nizanje samih 0; ne smije dakle biti $x_n = 0$ za svaki indeks n počam od nekog mjesta. Tako na pr. decimalni razvoj 0,35 ne odgovara, pa mjesto njega treba upotrebiti razvoj 0,34999 ...

A sada pridružimo broju x točku px iz kvadrata na ovaj način. Prikažimo stvar na broju

$$x = 0{,}001230400540006 \ldots$$

Raskomadajmo to nizanje znamenaka ovako:

$$x = 0,|001|2|3|04|005|4|0006|\ldots$$

To znači da u svakoj skupini ima jedna jedina znamenka, koja je $\neq 0$ i to baš posljednja. A sada odredimo pripadnu točku px u ravnini tako, da joj odredimo apscisu i ordinatu;

apscisa neka bude $\quad 0,|001|3|005|0006|\ldots$

ordinata neka bude $\quad 0,|2|04|4|\ldots$

To znači da se kod apscisa meću gornje skupine: prva, treća, peta, ..., a kod ordinata: druga skupina, četvrta i t. d.

Time gornjoj točki x odgovara posve određena točka px iz kvadrata:

$$p(0{,}001\ 2\ 3\ 04\ 005\ 4\ 0006\ldots = 0{,}00130050006\ldots;\ 0{,}2044\ldots).$$

Radeći tako sa **svakim** brojem x iz $R(0, 1]$ dobivamo, kao što se možemo lako uvjeriti, određeno tolikovanje skupa $R(0, 1]$ na čitav poluzatvoreni kvadrat $R(0, 1] \times R(0, 1]$. A to upravo znači, da je $c = c \times c$. Na taj način dokazali smo

T e o r e m 2.4.1. Za kardinalni broj c pravca odnosno skupa R svih realnih brojeva vrijedi

$$cc = c.$$

Prema tome i broj c zadovoljava vezu[1] $xx = x$, odnosno i linearni kontinuum R zadovoljava vezu $kX \cdot kX = kX$.

No ravnina $R \times R$ ima $c \cdot c$, t. j. c točaka; i svaka duž ima c točaka. Na taj način dolazimo do zaključka da vrijedi

T e o r e m 2.4.2. Čitava ravnina ima isto toliko točaka koliko ih ima i svaka duž, pa ma kakva bila kratka (naravno, duž se ne smije izroditi u jednu jedinu točku).

Z A D A C I: 1. Popločaj ravninu kongruentnim kvadratima. Koliko tu ima kvadrata, a koliko vrhova?

2. Ako zamislimo prostor ispunjen kongruetnim kockama, koliko tu ima kocaka? A vrhova?
3. Koliko skup S ima dvočlanih dijelova, ako je S: 1) $\{1, 2, 3, 4\}$, 2) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 3) $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, 4) N.
4. Ako je Q skup svih racionalnih brojeva, dokaži, da je i $Q^{(2)}$ i $Q^{(3)}$ prebrojivo.
5. Ako je S kakav god skup intervala s nekog pravca, može li biti $kS > kN$? A ako su ti intervali dva po dva bez presjeka? Kako je s tim i u ravnini i u prostoru?
6. Isto pitanje za: 1) krugove u ravnini, 2) kugle u prostoru.
7. U prostoru promatraj skup svih dvočlanih dijelova; koliko ih ima?
8. Dokaži, da svih pravaca u prostoru ima c.
9. Dokaži, da svih kugala ima c.
10. Koliko ima kompleksnih brojeva?

---

[1]) Pitanje da li svaki beskonačni kardinalni broj x zadovoljava $xx = x$ povezano je s t. zv. *aksiomom izbora* (v. § 3.11).

11. Koliko ima polinoma oblika: 1) $a_0 x + a_1 x$, 2, $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, gdje su a-ovi: 1) cijeli, 2) realni brojevi?
12. Isto pitanje za polinome stepena n $(n = 3, 4, 5, \ldots)$.
13. Iz odgovora na prethodna pitanja 11. i 12. može se izvesti, da svih polinoma s 1) cijelim, 2) realnim koeficijentima ima kN, odnosno kR.

2.5.1. Koliko točaka ima prostor? Kao što se točke ravnine mogu pomoću određenog pravokutnog Dekartova koordinatnog sistema označiti analitički u obliku uređenih dvojki (x, y) realnih brojeva, tako će se svaka točka prostora moći označiti kao uređena trojka (x, y, z) realnih brojeva. To možemo učiniti na pr. tako, da u svakoj točki (x, y) ravnine pokročimo okomito na ravninu za broj z prema gore ili dolje već prema tome, da li je $z > 0$ ili $z < 0$; samu bivšu točku (x, y) ravnine možemo u prostoru označiti sa $(x, y, 0)$. No, time se zapravo čitav prostor P prikazuje kao produkt ravnine i pravca, t. j. kao $(R \times R) \times R$:

$$P = (R \times R) \times R$$

Odatle prelazeći na kardinalne brojeve izlazi:

$$kP = k((R \times R) \times R)$$

i dalje

$$kP = k(R \times R) \times kR$$

i dalje zbog $k(R \times R) = kR$:

$$kP = kR \times kR$$

dakle

$$kP = kR.$$

Drugim riječima:

T e o r e m 2.5.1. Čitav prostor ima c točaka, t. j. onoliko koliko i svaka duž pa ma kako ta duž bila kratka (naravno, samo se duž ne smije izroditi u jednu jedinu točku.

Sličan zaključak vrijedi za „prostor R^4 od 4 dimenzije", t. j. za skup svih uređenih četvorki (a_1, a_2, a_3, a_4) realnih brojeva. Isto vrijedi za prostore $R^5, R^6, R^7, \ldots$ od 5 odn. 6 odn. 7... dimenzija.

2.5.2. Osvrt na pitanje koliko točaka ima u prostoru. Cantorova hipoteza o kontinuumu. Upravo smo zapanjeni spoznavši da svaka duž ima toliko točaka koliko i čitav prostor. Jer to znači, da točke duži možemo tako poslagati u prostoru da ispune čitav prostor. Ili obrnuto: sve točke čitavog golemog prostora možemo strpati na jednu duž d pa ma kako kratku njezinu dužinu zadali. Poslije ćemo dokazati još čudnovatiju stvar, da se sve točke prostora mogu smjestiti po duži d tako da ne napune nikakav komadić te duži.

U drugu ruku, dokazali smo, da je $kN \neq kR$ i upravo $kN < kR$.

Također smo dokazali, da kN nije prirodan broj, jer kN zadovoljava $1 + x = x$, a nikoji prirodan broj to ne zadovoljava. Na taj način, prelazeći s pravca odnosno s linearnog kontinuuma R svih realnih brojeva na prostor, ne nailazimo na nove kardinalne brojeve. A dosad smo naišli na ove različite kardinalne brojeve u R:

$$* \qquad 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, n+1, \ldots, kN; kR.$$

Da li je kardinalni broj svakog dijela iz R jedan od tih napisanih brojeva?

Glasovita Cantorova hipoteza o kontinuumu odgovara na to pitanje: **Da!** T. j.

(Hipoteza) Svaki skup iz prostora ima određen kardinalan broj iz skupa $*$.

Danas se u matematici smatra, da se ta hipoteza ne može dokazati, nego se ona može i prihvatiti i negirati.

Na taj način imamo dvije matematike: onu koja Cantorovu hipotezu prihvata i onu, koja prihvata negaciju Cantorove hipoteze. Sjetimo se pritom, da u vezi s Euklidovim postulatom o paralelama imamo dvije geometrije: onu, u kojoj Euklidov postulat vrijedi i onu, u kojoj on ne vrijedi.

3. Oduzimanje kardinalnih brojeva. Za oduzimanje skupova znamo: ako su A, B skupovi, tad se $A \setminus B$ sastoji iz svih točaka skupa A, koje nisu točke skupa B. Na taj način $A \setminus B$ nastaje iz A uklanjanjem svih točaka skupa B. Međutim, pravo uklanjanje će biti, kad je $B \subseteq A$. Pa se tada kardinalni broj diferencije $A \setminus B$ zove razlika kardinalnih brojeva kA i kB.

Dakle: Ako je $B \subseteq A$, tad se postavlja

$$k(A \setminus B) = kA - kB.$$

No, veza $B \subseteq A$ ima za posljedicu $kB \leq kA$. Pa se uopće za kardinalne brojeve x i y, za koje je $x \geq y$ definira razlika $x - y$ kao kardinalni broj razlike $A \setminus B$, pri čemu je $kA = x$, $kB = y$ i $B \subseteq A$.

Tako na pr. ako je $x \geq 1$, dobije se broj

$$x - 1$$

tako, da se odredi kardinalni broj skupa $A \setminus \{a\}$, gdje je A neki skup od x članova te $a \in A$.

Ipak, zgodnije je oduzimanje shvatiti kao obrat dodavanja (zbrajanja):

Mi ćemo dogovorno vezu

$$x + y = z$$

i vezu

$$x = z - y$$

smatrati, kao da kazuju jednu te istu stvar, na dva načina. Tako na pr. imamo $2 = 3 - 1$ naprosto zato, što je

$$(3 - 1) + 1 = 3.$$

Teorem 3.1. Za svaki prirodni broj n vrijedi $n - 1 < n$. Naprotiv, brojevi kN i kR zadovoljavaju vezu $x - 1 = x$.

Teorem 3.2. Broj 0 i svaki prirodni broj zadovoljava jednadžbu $x - x = 0$.

Teorem 3.3. Naprotiv, diferencija $kN - kN$ može biti i 0 i kN i svaki prirodni broj.

Stvarno veza $kN - kN = 1$ znači isto što i

$$1 + kN = kN.$$

A tu vezu poznamo iz teorema 1.1.

Slično je na pr. za vezu $kN - kN = kN$. (gl. teorem 2.2).

4. O skupu I svih iracionalnih realnih brojeva. Kvocijente cijelih brojeva nazivamo racionalnim brojevima. Može se lako pokazati ovo:

Decimalan broj je racionalan onda i samo onda, ako je on periodičan, t. j. ako ima niz znamenaka, koji se neprestano ponavlja.

Na pr. broj $3{,}014\dot{1}58\dot{4}$ je periodičan, jer one točke znače, da se niz znamenaka 1584 ponavlja tako, da gornji broj zapravo znači 3,0141584 1584 1584 . . . Znamo, da je taj broj dalje $= 3\,\frac{0141584 - 014}{9999000} = 3\,\frac{14157}{999900}$.

Evo jednog neperiodskog decimalnog broja

$$0{,}01001000100001\ldots$$

Zato je to iracionalan broj.

Prije smo dokazali, da racionalnih brojeva ima koliko i prirodnih brojeva; ima ih dakle kN (gl. 2.2.4).

Također smo dokazali da realnih brojeva ima više nego kN.

Dokažimo sada da iracionalnih brojeva ima koliko i realnih.

Označimo s Q skup svih *racionalnih* brojeva, a sa I skup svih realnih *iracionalnih* brojeva. Tad je

(1) $\qquad R = Q \cup I \quad$ i $\quad Q \cap I = v$

Dakle je

$$kR = kQ + kI,$$

t. j. $\qquad c = kN + kI, \quad$ ili

(2) $\qquad kI = c - kN.$

Dokažimo međutim, da je

(3) $\qquad c - kN = c.$

Promatrajmo skup N prirodnih brojeva i skup $2N$ svih parnih prirodnih brojeva. Naravno, $kN = k2N$, kao što se vidi iz tolikovanja $n \longleftrightarrow 2n$. No, skupovi R i $R \setminus 2N$ imaju isti kardinalni broj. U stvari, promatrajmo ovo tolikovanje skupa R:

$$x \longleftrightarrow x \text{ za svako } x \in R \setminus N$$

$$x \longleftrightarrow 2x \text{ za svako } x \in N.$$

To tolikovanje prevodi R u $R \setminus 2N$ pa je dakle

$kR = k(R \setminus 2N)$, a ovo je dalje $= kR - k2N$;

dakle $= kR - kN$, t. j.

$$kR = kR - kN$$

A za tim i idemo.

Dakle smo dokazali da vrijedi

Teorem 9.1. $c - kN = c$. Pritom c označuje kardinalni broj kR skupa R svih realnih brojeva.

Prema prethodnom razmatranju, zbog $kQ = kN$ teorem povlači ovaj

Teorem 9.2. Iracionalnih brojeva ima koliko i svih realnih brojeva, dakle ih ima c.

5. Koliko ima transcendentnih brojeva? Najprije da se upoznamo s transcendentnim brojevima. Pođimo ovako.

Osnovni brojevi su prirodni brojevi $1, 2, 3, \ldots$

Rješavajući jednadžbe $x + a = b$ za prirodne brojeve a i b dolazi se do cijelih brojeva, odnosno do skupa D svih cijelih brojeva

$$\ldots, -2, \quad -1, \quad 0, 1, 2, \ldots$$

U tom skupu nema ni najmanjeg ni najvećeg člana[1].

Rješavamo li sve moguće linearne jednadžbe

$$ax = b$$

s cijelim koeficijentima, rješenja su oblika $x = b/a$; tu je $a \neq 0$, a inače su a i b iz D. Skup tih rješenja za sve dopuštene a i b zove se skup Q svih racionalnih brojeva.

Sad bi došle na red algebarske jednadžbe stepena 2:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 0, \quad a_2 \neq 0.$$

Opet s cijelim koeficijentima. Tu već dobivamo i neracionalnih rješenja kao na pr. iz jednadžbe $2 - x^2 = 0$. (Vjerojatno je to bio prvi iracionalni broj, s kojim su se ljudi sreli!). A dobivamo i „imaginarnih" rješenja na pr. iz $1 + x^2 = 0$. Zatim dolaze rješenja algebarskih jednadžbi stepena 3:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0, \quad a_3 \neq 0.$$

Opet s cijelim koeficijentima i t. d.

Rješavajući tako algebarske jednadžbe stepena $1, 2, 3, 4, \ldots$ dobivamo sve opsežnije skupove brojeva:

$$Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, \ldots$$

Unija svih tih skupova jest skup A algebarskih brojeva. Prema tome, imamo ovu definiciju.

[1]) Slovo D nas ima podsjetiti na početno slovo riječi diferencija, zato jer se svaki cijeli broj može predstaviti kao diferencija prirodnih brojeva.

Definicija algebarskih brojeva. Broj je algebarski, ako zadovoljava kakvu algebarsku jednadžbu, kojoj su koeficijenti **cijeli**[1]) brojevi, ali ne svi $= 0$.

Svaki broj, koji nije algebarski, zove se transcendentan. Lako je navesti algebarske brojeve; takvi su na pr. prirodni brojevi, racionalni brojevi, antikvadrati iz racionalnih brojeva, njihove sume i t. d. na pr. broj $3^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{3}}$ je algebarski.

Međutim, dugo se nije znalo ni za jedan transcendentan broj.

Specijalno se hiljadama godina pitalo, da li je broj π algebarski ili transcendentan. Istom u posljednjoj četvrtini 19. vijeka dokazano je, da je broj π transcendentan (Lindemann) i da zato kvadratura kruga nije moguća[2]).

Medjutim, možemo se pitati, koliko ima algebarskih brojeva, a koliko transcendentnih? Kojih ima više?

Pregled u nizanje algebarskih brojeva možemo dobiti ovako:

Nama se tu radi svakako o jednadžbama oblika

$$(*) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

pri čemu su a-ovi cijeli brojevi; k tome je $a_n \neq 0$; n je prirodan broj. Promatrajmo u vezi s tom jednadžbom $(*)$ prirodan broj

$$|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + n.$$

On je bar 2, jer su i $|a_n|$ i n prirodni brojevi. Nazovimo tu sumu *visinom* algebarske jednadžbe.

Rasporedit ćemo algebarske jednadžbe po visini: one, kojima je visina 2 jesu:

$$\pm x = 0; \text{ rješenje je } 0.$$

[1]) Bitan je zahtjev, da su koeficijenti cijeli brojevi i naravno da nisu svi $= 0$.

[2]) Pod kvadraturom kruga se razumijeva ovo pitanje: Da li pomoću ravnala i šestara možemo nacrtati kvadrat, koji ima istu površinu kao i zadani krug. Danas se zna, da to nije moguće točno nacrtati (Lindemann, 1882).

Algebarske jednadžbe, kojima je visina 3, jesu ove i nikoje druge:

$$\begin{aligned} \pm 1 \pm \ x &= 0 \\ \pm 2x &= 0 \\ \pm x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Tih jednadžbi ima 8; među njima ima i ekvivalentnih.

Zatim dolaze jednadžbe, kojima je visina 4; evo ih sviju:

$$\begin{aligned} \pm 1 \pm x^2 &= 0 \\ \pm 1 \pm 2x &= 0 \\ \pm 2 \pm x &= 0 \\ \pm 3x &= 0 \\ \pm x \pm x^2 &= 0 \\ \pm 2x^2 &= 0. \\ \pm x^3 &= 0. \end{aligned}$$

Na taj način vidimo, kako zbilja sve algebarske jednadžbe s cijelim koeficijentima možemo ponizati:

$$j_1, j_2, j_3, j_4, \ldots$$

A svaka od tih jednadžbi ima rješenja najviše onoliko, koliki je stepen jednadžbe! Recimo, neka je stepen jednadžbe j_k upravo s_k; pa neka su $j_k(1), j_k(2), \ldots, j_k(s_k)$ rješenja te jednadžbe; tada imamo ovaj niz, u kojem su svi algebarski brojevi:

$$j_1(1), j_1(2), \ldots, j_1(s_1); \ j_2(1), j_2(2), \ldots, j_2(s_2);$$
$$j_3(1), j_3(2), \ldots, j_3(s_3), \ldots$$

Tako smo dokazali

Teorem 5.1. Algebarskih brojeva ima kN, t. j. isto onoliko, koliko i prirodnih brojeva.

No, time smo dokazali, da transcendentnih brojeva ima c-kN dakle [prema § 2.4.4. jednakost (3)] transcendentnih brojeva ima c:

Teorem 5.2. Transcendentnih brojeva ima koliko i svih realnih brojeva.

Prvi je Liouville sredinom 19. vijeka stvarno sagradio mnogo transcendentnih brojeva; prema njemu na pr. imamo ovaj rezultat:

Ako se u nizu $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, gdje je svaki član 0 ili 1, znak 1 pojavljuje beskonačno mnogo puta, tada je broj

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^{2!}} + \frac{a_3}{10^{3!}} + \cdots$$

transcendentan. To znači da ćemo sigurno dobiti transcendentan broj, ako nižemo cifre 0 i 1 tako, da neprestano jako uvećamo niz nula pa pripišemo samo jednu jedinicu pa opet mnogo nula pa 1 i t. d.

Tako na pr. broj

$$0{,}1\overbrace{\underbrace{1000010000\cdots100}_{24\,=\,4!}\cdots}^{5!\,=\,120}10\cdots$$

je transcendentan.

Danas se zna, da je i broj $2^{\sqrt{2}}$ transcendentan. Za svako racionalno (odn. algebarsko x) brojevi $\log x$, $\sin x$, su transcendentni. Dokazi su dugi.

6. Osvrt na računske operacije s kardinalnim brojevima. Sad znamo tražiti $a + b$, $a - b$ (ako je $a \geq b$) i ab za kardinalne brojeve. Veza između dodavanja i oduzimanja je odmah istaknuta. Poslije ćemo ispitati i vezu između dodavanja i množenja. A još nam ostaje da definiramo i potenciranje i to kao samostalnu operaciju; na pr. kako definirati 2^3 ne svodeći to na množenje. Opći pojam funkcije omogućit će nam, da i to obradimo!

§ 2.5 SKUP N SVIH PRIRODNIH BROJEVA. PRINCIP TOTALNE INDUKCIJE

1. Promatrajmo ne samo pojedine prirodne brojeve, nego i skup svih prirodnih brojeva. Označimo ga s N; dakle je

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 100, 101, \ldots\}.$$

2. Princip potpune indukcije. Za skup N prihvatimo kao očigledan ovaj princip potpune indukcije:

Neka je S kakav skup, za koji znamo, da ispunjava ove zahtjeve:

1) Broj 1 je član u S, t. j. $1 \in S$

2) Ako je prirodan broj n u S, onda je i $n + 1$ u S.

Što možemo zaključiti odatle? Da li je $2 \in S$? Jest, jer prema zahtjevu 1) vrijedi $1 \in S$, a prema 2) iz $1 \in S$ slijedi $1 + 1 \in S$, t. j. $2 \in S$. A odatle? $2 + 1 \in S$, t. j. $3 \in S$, i t. d. Zaključujemo, da je svaki prirodni broj jedinka u S, t. j. $N \subseteq S$.

Ukratko, princip potpune (totalne) indukcije kaže, da za svaki skup S iz uslova 1) i 2) slijedi $N \subseteq S$.

Navedimo jedan dokaz pomoću principa totalne indukcije.

3. Suma geometrijske progresije

Teorem 2.1. Za svaki prirodni broj k i za svaki izraz $q \neq 1$ vrijedi jednakost

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^k = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} \tag{1}$$

Dokaz. Jednakost (1) istinita je za $k = 1$, jer se tada svodi na

$$1 + q = \frac{q^2 - 1}{q - 1}.$$

Pretpostavimo, da jednakost (1) važi za $k = n$, t. j. da je

$$1 + q + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Dodajmo tu na obje strane izraz q^{n+1}; izlazi:

$$(1 + q + \ldots + q^n) + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1}, \text{ t. j.}$$

$$1 + q + \ldots + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1 + (q - 1)\, q^{n+1}}{q - 1};$$

odakle $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n+1} = \dfrac{q^{n+2} - 1}{q - 1}$.

Time smo dokazali, da (1) vrijedi za $k = 1$, nadalje da vrijedi i za $k = n + 1$, ako vrijedi za $k = n$, a time prema principu totalne indukcije vrijedi (1) za svaki prirodni broj.

4. Za male prirodne brojeve $n = 1, 2, 3, 4, 5$ odmah vidimo, da skup $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ne može biti istobrojan s kojim pravim svojim dijelom. Induktivno se može dokazati, da to vrijedi za **svaki** prirodni broj n. Za čitav skup N taj iskaz ne vrijedi, jer na pr. sparivanje

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n & \ldots \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 & 2\cdot 5 & \ldots & 2\cdot n & \ldots \end{matrix}$$

pokazuje, da je N istobrojan s onim svojim dijelom, koji je sastavljen od parnih brojeva.

I za pravac smo ustanovili, da može biti istobrojan sa svojim pravim dijelom na pr. s otvorenom duži.

Na taj način vidimo, da se za svaki neprazan skup može postaviti pitanje: može li skup biti istobrojan sa svojim pravim dijelom, ili ne može. Pa se prema odgovoru na to pitanje skupovi dijele u dvije vrste skupova: na *beskonačne* i *konačne*.

§ 2.6. PODJELA SKUPOVA U KONAČNE, BESKONAČNE I PRAZNE. PODJELA GLAVNIH BROJEVA U KONAČNE (PRIRODNE), BESKONAČNE I NULU

Što znači, da je skup konačan, a što, da je beskonačan? Sad kad smo već izgradili prirodne brojeve možemo reći, da je skup konačan, ako mu je kardinalni broj prirodan broj. A svaki neprazan skup, koji nije konačan, možemo nazvati beskonačnim.

Međutim, možemo definirati prirodne brojeve kao kardinalne brojeve konačnih skupova, uzimajući osnovnu jednakost $1 + kS = kS$ kao nemoguću za konačne skupove S.

Definicija. Neprazan skup je konačan, ako nije istobrojan sa svojim pravim dijelom. Drugim riječima: skup je konačan, ako je neprazan, te ako je svako tolikovanje toga skupa u sama sebe ujedno permutacija toga skupa. Skup je beskonačan, ako je neprazan, i ako ga je moguće pretolikovati u svoj pravi dio.

Izrecimo te dvije definicije služeći se *običnim riječima.*

Skup S je beskonačan, ako ima bar jedan član, te ako je svakom $x \in S$ moguće pridružiti određen član fx iz S tako, da iz $x \neq x'$ slijedi $fx \neq fx'$, te da u S postoji bar jedan element y, koji se razlikuje od fx za svako $x \in S$.

Skup S je konačan, ako je neprazan, te ako je

$$S = \bigcup_{x \in S} \{fx\};$$

pritom za svako x označujemo s fx određen član iz S sa svojstvom, da iz $x \in S$, $x' \in S$ i $x \neq x'$ slijedi $fx \neq fx'$.

Kardinalne brojeve konačnih skupova zovemo *konačni kardinalni brojevi* ili *prirodni brojevi.* Kardinalne brojeve beskonačnih ili transfinitnih skupova zovemo *beskonačnim* ili *transfinitnim kardinalnim brojevima.* Kardinalni broj *prazna skupa* zove se *nula.*

Skup N svih prirodnih brojeva je transfinitan; c također.

POGLAVLJE 3.

O PRESLIKAVANJIMA SKUPOVA

Sve se u prirodi mijenja. I ono što bi nam na prvi pogled izgledalo nepromjenljivo, ipak se mijenja. Upravo je teško zamisliti nešto, što se ne bi mijenjalo. U drugu ruku, u prirodi i društvu događaji su međusobno povezani. Kao odraz svega toga u matematici se razvio pojam *funkcije* ili *preslikavanja* ili *pridruživanja,* koji je zaista fundamentalan. Pojmovi: *skup i funkcija najvažniji su matematički pojmovi.* Ta se dva pojma neprestano isprepliću.

Dosad smo obrađivali jednu specijalnu vrstu preslikavanja: obostrano jednoznačna preslikavanja, a kraće smo ih nazivali tolikovanjima.

§ 3.1. JEDNOSTAVNI PRIMJERI FUNKCIJA ILI PRESLIKAVANJA

Primjer 1. Pogledaj koji automobil; na njemu se nalazi pločica s ispisanim *brojem* i kojim *slovom.* U Jugoslaviji na automobilima ispred broja stoje najčešće početna slova narodnih republika: S (Slovenija), H (Hrvatska), C (Србија), i t. d. Drugim riječima *svakom autu u Jugoslaviji pridružena je određena pločica s ispisanom šifrom.*

Primjer 2. *Davanje imena* ljudima i stvarima je određeno pridruživanje. Tako na pr. svako čeljade ima svoje ime; to znači, da je svakom čeljadetu pridruženo jedno ili dva imena na pr. *Milan, Radan,* i t. d. Isto tako *imenujemo* stvari, predmete, događaje i t. d. na pr. *avion, olovo, prošlost* i t. d. Tako na pr. ako promatramo skup S predmeta u učionici, onda se ti predmeti nazivaju određenim imenom i *popisuju* se kao *inventar* toga razreda, na pr. 24 klupe, 40 stolica, 5 slika i t. d. Danas se često pojedinim bićima, predmetima i t. d. daje *šifra* ili *broj* kao njihova oznaka. Tako na pr. govori se o igraču br. 5 nogometne momčadi, ili o šahovskom igraču br. 8 i t. d.

U pojedinom jeziku učimo nazive i imena iz živog saobraćaja sa stvarnošću, iz knjiga i t. d. Tako na pr. u našem jeziku imamo veliki *Rječnik hrvatskog ili srpskog jezika* — to je djelo s preko 70 knjiga. Započeto je pred skoro 100 godina, a u dogledno vrijeme bit će završeno. Tako na pr. u svesku 69. od 1956. za riječ »*streha*« nalazi se tumačenje na pune dvije stranice.

P r i m j e r 3. *Prevođenje iz jednog jezika u drugi* je vanredno važan primjer *preslikavanja*. Rječnici kazuju veze između raznih riječi raznih jezika. Tako na pr. za našu riječ »*majka*« naći ćemo u jugoslavensko-talijanskom rječniku riječ »*madre*« na talijanskom jeziku. Kao i druge funkcije, tako se i prevođenje iz jednog jezika u drugi može obavljati pomoću mašina[1].

P r i m j e r 4. *Mjerenje predmeta* su specijalna povezivanja; na pr. vagom određujemo težinu predmeta, t. j. pridružujemo predmetima toliko i toliko grama. Svakoj *duži* određujemo *dužinu* ili *duljinu*, t. j. određujemo, koliko se puta u toj duži nalazi izvjesna zadana duž, koju uzimamo za jedinicu mjerenja. S tim je u vezi pojam *brojevna pravca*. To je običan pravac, ali preudešen tako, da se vidi veza između njegovih točaka i realnih brojeva. Na njemu se odabere jedna točka O, kojoj je pridružen broj 0, odabere se druga točka E, kojoj je

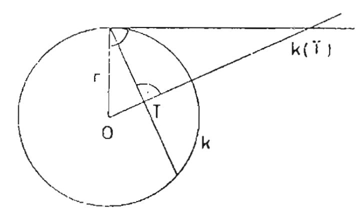
[1]) Danas se mnogo izučava *automatsko prevođenje* s ruskog na engleski i s engleskog na ruski.

pridružen broj 1, a onda se svakoj točki T pravca pridruži broj x po propisu da bude

$$\vec{OT} = x \cdot \vec{OE}.$$

Pritom $\vec{OT}$ označuje usmjerenu duž $\overline{OT}$ tako, da se zna, da je O početak, a T završetak te usmjerene duži. Mjesto naziva „usmjerena duž" govori se češće „vektor".

P r i m j e r 5. (*Simetrije*). Kod simetrije prema zadanoj točki O kao središtu simetrije pridružujemo svakoj točki T točku $O(T)$ tako, da O bude središte duži $\overline{TO(T)}$. Simetrijom prema pravcu p (ravnini R) točki T određujemo točku $p(T)$ odnosno $R(T)$ tako, da taj pravac p (ravnina R) duž $\overline{Tp(T)}'$ raspolavlja i stoji na njoj okomito. Kod simetrije prema kruž-



Sl. 37.

nici k svakoj točki T iz ravnine kružnice — izuzev središta O kružnice — pridružujemo točku $k(T)$ tako, da bude na zraci $\vec{OT}$ i da je $\overline{OT} \cdot \overline{Ok(T)} = r^2$ (r je polumjer kružnice k).

Na sl. 37. se vidi, kako su točke $T, k(T)$ povezane. Ako je T unutar kružnice, podigni okomicu kroz T na OT, na njenom sjecištu s k podigni okomicu na pripadni polumjer; ta okomica i zraka OT sijeku se u traženoj točki $k(T)$. Idući natrag, dolazi se od $k(T)$ na T.

P r i m j e r 6. Obično *dodavanje* (brojeva) je funkcija, kod koje zadanom paru (brojeva) x, y pridjeljujemo $x + y$ kao njihovu sumu. U najspecijalnijim slučajevima za x i y s tom se funkcijom srećemo u predškolsko doba i u početnoj školskoj nastavi; poslije se ta funkcija proširuje na sve obimnije slučajeve za x i y.

Primjer 7. Svakom kompleksnom broju $a + bi$ pripada u brojevnoj ravnini određena točka imena $a + bi$; to je ona točka koordinatne ravnine, kojoj je apscisa $= a$, a ordinata je $= b$; zato njena analitička oznaka glasi (a, b). Udaljenost od ishodišta $(0, 0)$ iznosi

$$+ (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Taj se broj zove modul ili apsolutna vrijednost broja $a + bi$ i označuje se sa $|a + bi|$. Na pr.

$$|-3 + 4i| = + ((-3)^2 + 4^2)^{\frac{1}{2}} = 5.$$

Obrnuto, broju 5 ne odgovara samo broj $-3 + 4i$ kojemu je 5 modul nego svi brojevi $x + iy$ za koje je $x^2 + y^2 = 5^2$; svi oni čine *kružnicu brojeva.*

Svaki taj broj možemo nazvati *antimodul* broja 5 i označiti sa $-|5|$; razlikuj $-|5|$ od -5; ovaj broj je $= -5$.

Primjer 8. Ako se radi o dodavanju $x + y$ za x i y ispod 10, onda na pr. broju $y = 3$ za *svako* promatrano x odgovara broj $x + 3$; to znači da broju $y = 3$ odgovara funkcija $x + 3$ (a ne broj, jer se tu x može mijenjati).

Primjer 9. Kod valjka, kojemu je polumjer baze r cm, visina v cm, a volumen V cm^3, postoji ova *veza* među brojevima r, v, V:

$$V = \pi r^2 v.$$

Specijalno, *svakom uređenom paru* brojeva r, v pripada posve određeno V. Tako na pr. uređenom paru 4 i 5 pripada

$$V(4, 5) = \pi \cdot 4^2 \cdot 5 = 3{,}14 \cdot 80 = 251{,}2.$$

Naprotiv, uređenom paru 5,4 pripada ovo V:

$$V(5, 4) = \pi \cdot 5^2 \cdot 4 = 314.$$

Dakle je

$$V(4, 5) \neq V(5, 4).$$

Primjer 10. Svakom uređenom paru (x, y) prirodnih brojeva određujemo njihovu najveću zajedničku mjeru $M(x, y)$ i njihov najmanji zajednički višekratnik $v(x, y)$. Tu dakle i x i y prolazi skupom N svih prirodnih brojeva.

Primjer 11. (*nizovi*). Osnovni nizovi jesu: niz N svih prirodnih brojeva

$$1, 2, 3, \ldots, n, n + 1, \ldots$$

i dijelovi toga niza.

Ako svakom prirodnom broju n pridijelimo određen predmet p_n (broj, točku, figuru i t. d.) dobivamo niz

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$$

To je *beskonačan niz*. Niz od n članova dobivamo tako, da *svakom* od prvih n prirodnih brojeva pridružimo određen predmet (broj, točku, i t. d.). Tako na pr. dvočlan niz je oblika

$$p_1, p_2$$

Tročlan niz je oblika

$$p_1, p_2, p_3 \quad \text{i t. d.}$$

Primjer 12. Neka je U skup svih učenika jedne škole. Označimo s $R(x)$ čitavo razredno odjeljenje učenika, za koje je $x \in U$. I tu imamo određeno pridruživanje unutar skupa U.

ZADACI: 1. Navedi dalje primjere funkcije odnosno pridruživanja.

§ 3.2. OPĆA DEFINICIJA PRESLIKAVANJA ILI FUNKCIJE

Na osnovi prethodnih primjera možemo izreći ovu definiciju funkcije.

1. Definicija funkcije (preslikavanja, pridruživanja). Ako je S zadan neprazan skup, pa ako svakom članu x toga skupa pridružimo jedan ili više elemenata nekog skupa V, reći ćemo, da imamo posla s određenom funkcijom u skupu S, odnosno s određenim preslikavanjem skupa S s vrijednostima u skupu V. Ako to preslikavanje označimo s f, onda se s $f(x)$ ili fx označuje svaki element, što je pridružen elementu x i zove se vrijednost funkcije f u x ili f-transformat elementa x. Skup S zove se oblast ili domena funkcije (preslikavanja, pridruživanja) f. Može se označiti s Df ili Dof.

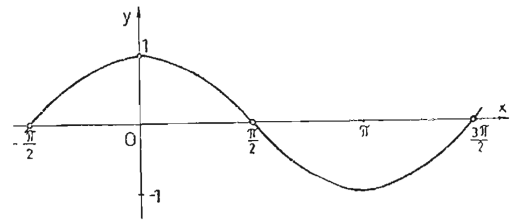
Ako za dano $x \in S$ predstavlja $f(x)$ jedan jedini elemet iz V veli se, da je f jednoznačno (uniformno) preslikavanje skupa S u skup V.

Jasno je, što znači, da f nije jednoznačno, u x odnosno u S. Tako na pr. $x^{1/2}$ nije jednoznačno ni za koji broj $x \neq 0$; na pr. $9^{1/2}$ znači i 3 i -3. Zato je $x^{1/2}$ dvoznačno za svaki broj $x \neq 0$. Izraz $0^{1/2}$ je jednoznačan i znači 0.

Primjer 1. Funkcijom kosinus preslikavamo čitav skup R svih realnih brojeva na jednoznačan način na skup $R[-1, 1]$ svih realnih brojeva, koji su između -1 i 1 uključujući -1 i 1. To se preslikavanje prikazuje grafički na poznat način (sl. 38.):

Skup $R[-1, 1]$ svih vrijednosti $\cos x$ zove se protivoblast (antioblast, antidomena) kosinusa.

Vrlo je zgodno kod grafičkog prikazivanja $y = fx$ varijablu x shvatiti kao vrijeme, a fx kao stanje (visinu) vodostaja u tom trenutku, jer se skala za vodostaj nalazi na istom mjestu: to je y-os.

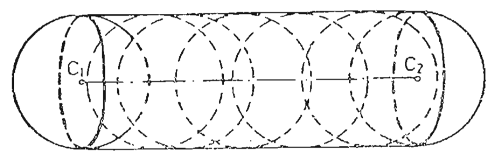


Sl. 38.

2. Transformat fS skupa S. Odredimo f-transformat fS skupa S za svako preslikavanje f skupa S u skup V.

Definicija. Ako je f preslikavanje skupa S u skup V, onda se pod f-transformatom množine S razumijeva skup svih vrijednosti fx, što ih f primi u točkama x skupa S; f-transformat od S označuje se s fS.

Na taj način fS je potpuno određeno.



Sl. 39.

fS se zove antidomena ili protivoblast funkcije f i označuje se s ^{-}Df (znak $^{-}$ se čita „anti" ili „protiv"). Govori se o f-preslikavanju skupa S ne samo **u** fS nego **na** skup fS ističući time, da je svaki element antidomene vrijednost funkcije f.

Primjer 2. Ako je $\overline{C_1C_2}$ zadana duž, pa ako svakom $x \in \overline{C_1C_2}$ pridijelimo točke kugle $k(x; 1)$ sa središtem u x i s polumjerom 1, tad je antidomena jedno tijelo sastavljeno od valjaka kojemu je duž $\overline{C_1C_2}$ os, a baze su krugovi polumjere 1 (sl. 39.); na taj se valjak priljubljuju na krajevima C_1C_2 dvije polukugle radiusa 1.

§ 3.3. FUNKCIJA I PRIPADNA PROTIVFUNKCIJA

Primjer 1. Promatrajmo logaritmiranje i antilogaritmiranje i pripadne grafove

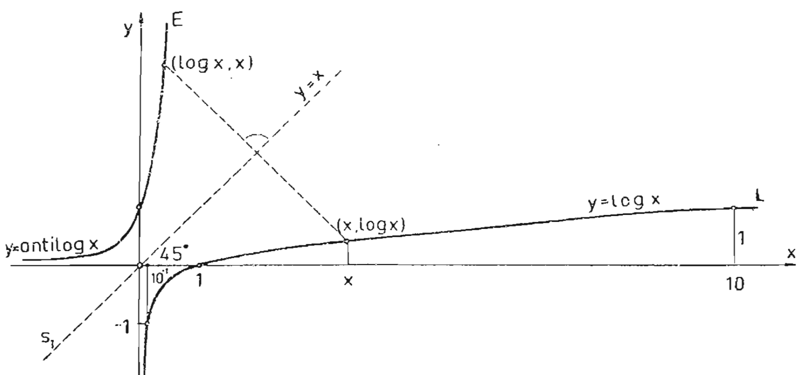
$$y = log\, x$$

$$y = antilog\, x$$

tih računskih radnji. Jedan graf iz drugoga izlazi zrcaljenjem na pravac $y = x$ (os simetrije 1. i 3. kvadranta). Vidi sl. 40.

Pogledaj oblasti i protivoblasti tih funkcija:

Dolog = prva projekcija krivulje $y = log\, x$ jest skup pozitivnih brojeva.



Sl. 40.

$^{-}$Dolog = druga projekcija od $y = log\, x$, t. j. $= R$ (skup svih realnih brojeva).

Doantilog $= R$ (kup svih realnih brojeva)

$^{-}$Doantilog $= R(0, \infty) =$ skup pozitivnih realnih brojeva

Pišemo kraće ^{-}log mjesto *antilog*. Tako imamo funkcije

$$log \quad i \quad {}^{-}log$$

i njihove *oblasti* i *protivoblasti*

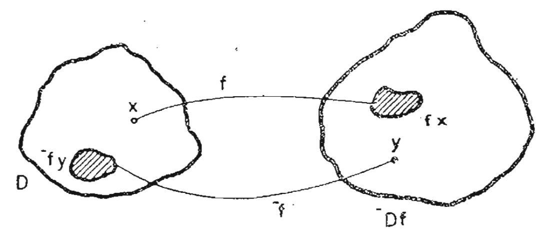
$$Dolog, \quad {}^{-}Dolog, \quad Do^{-}log, \quad {}^{-}Do^{-}log$$

za koje vrijede jednakosti:

$$Dolog = {}^{-}Do^{-}log$$

$$^{-}Dolog = Do^{-}log.$$

Opći slučaj. Promatrajmo neku funkciju f (sl. 41.); neka joj je D oblast a ^{-}D protivoblast. To znači, da za svako $x \in D$ vrijedi $fx \in {}^{-}D$.



Sl. 41.

To znači, da je svako x iz D u vezi sa nekojima članovima iz ^{-}D i da je svako y iz ^{-}D time povezano s bar jednim članom x iz D.

Pa neka je $y \in {}^{-}D$; ako postoji jedno jedino x iz D za koje je $fx = y$, označimo ga sa ^{-}fy (čitaj: antief od y). Ako taj slučaj ne stoji, označimo s ^{-}fy svaki element x iz D, za koji je $y = fx$.

Time se dobije određeno preslikavanje antidomene ^{-}Df na domenu Df; to se preslikavanje zove **protivpreslikavanje** ili protivfunkcija funkciji f; označit ćemo ga sa ^{-}f (nekad f^{-1}).

Upravo kao kod logaritma vidi se ovo: ako je krivulja $y = fx$ graf neke funkcije, kojoj su argumenti x i vrijednosti y realne, tad graf pripadne antifunkcije ima jednadžbu

$$x = fy$$

a dobije se geometrijski tako, da se krivulja $y = fx$ okrene preko pravca $y = x$ za ispružen kut.

Općenitije: Ako realni broj y zavisi od realna broja x preko veze $F(x, y) = 0$, onda tu i x zavisi od y: Ako je $y = fx$, onda je $x = {}^{-}fy$. U istom koordinatnom sistemu graf veze x od y dobije se tako, da se krivulja $F(x, y) = 0$ zrcali na pravac $y = x$; zato jednadžba grafa glasi

$$F(y, x) = 0.$$

Geometrijska operacija zrcaljenja na pravcu $y = x$ znači isto, što aritmetička operacija permutiranja argumenata x, y u izrazu $F(x, y)$ čime nastaje izraz $F(y, x)$.

Upravo kao kod logaritma log i antilogaritma ^{-}log vidi se, da za svako preslikavanje f i pripadno antipreslikavanje ^{-}f vrijede jednakosti

$$D\,{}^{-}f = {}^{-}Df$$

$$^{-}D\,{}^{-}f = Df$$

Primjer 2. Kako izgleda slika *antikosinusa* ^{-}cos? Kosinus se vijuga oko x-osi, a antikosinus oko y-osi po pruzi širine 2. Obrni kosinusoidu preko pravca $y = x$ za ispružen kut. A ako rezultat obrnemo ponovno oko $y = x$ za ispružen kut? Dobije se opet kosinusoida. Simbolički to znači, da je

$$^{-}({}^{-}\cos) = \cos$$

Odredimo na pr. $^{-}\cos 0$. To je svako rješenje x jednadžbe $\cos x = 0$; dakle je

$$x = \pm\frac{\pi}{2};\quad \pm 3\cdot\frac{\pi}{2};\quad \pm 5\cdot\frac{\pi}{2}, \ldots$$

Prema tome je

$$^{-}\cos 0 = \pm\frac{\pi}{2},\quad \pm 3\cdot\frac{\pi}{2},\quad \pm 5\cdot\frac{\pi}{2}, \ldots$$

Primjer 3. Za svako tolikovanje f pripadno antitolikovanje ^{-}f opet je određeno tolikovanje.

Primjer 4. Za svaki realni broj x označimo s $E(x)$ najveći cijeli broj, koji je $\leq x$; na pr. $E(n) = n$ za cijelo n; za svako necijelo n znači $E(x)$ najveći cio broj, koji je $< x$; na pr. $E(3\tfrac{1}{2}) = 3$; $E(-3\tfrac{1}{2}) = -4$. Protivoblast te funkcije je skup D svih cijelih brojeva $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Primjer 5. (*Konstante*). Ako je za **svako** x iz nekog skupa S vrijednost fx uvijek ista, t. j. ako je $fx = fx'$ za svako x iz S i svako x' iz S onda se veli, da je funkcija f **konstantna**. Specijalno se često uzima, da je vrijednost konstante $= 0$ ili 1. Tako na pr. $\frac{2x}{3x}$ je konstanta $\frac{2}{3}$ u skupu svih brojeva, koji su $\neq 0$.

Mnoge se funkcije svode na konstante. Tako na pr. ako je f funkcija od x, onda se kaže, da je f proporcionalno (obrnuto proporcionalno) s x u skupu S brojeva, ako je kvocijent $\frac{fx}{x}$ (produkt $x \cdot fx$) konstanta u skupu S.

Primjer 6. (*Identičko preslikavanje*). Ako je $fx = x$ za svako x iz S, onda se govori o **identičkoj funkciji** u skupu S. Specijalno, identička funkcija u skupu R realnih brojeva predstavljena je pravcem $y = x$, koji je os simetrije prvog i trećeg kvadranta koordinatne ravnine.

P r i m j e r 7. (*Tolikovanje skupa u skup*). Od osobite su važnosti jednoznačna preslikavanja skupa A u skup B, pri čemu različitim jedinkama odgovaraju različite jedinke. Ta smo preslikavanja f zvali tolikovanjima skupa A **u** skup B (odnosno **na** skup B, ukoliko je $fA = B$). Samotolikovanja jesu tolikovanja skupa u same sebe. Samotolikovanja skupa na sama sebe zovu se p e r m u t a c i j a m a toga skupa.

ZADACI: 1. Promatraj poznate funkcije na pr. $y = 3x$, $y = x^2$, $y = \cos x$ i t. d. Odredi njihovu oblast D i protuoblast ^{-}D.

2. Ako je Ix ime osobe x, odredi ID, ako D označuje čeljad jedne porodice, jednog razreda . . .
3. Ako je D skup cijelih brojeva, nacrtaj graf i protuoblast funkcije $y = 10^x$ za $x \in D$.
4. Navedi jednu funkciju f, kojoj je oblast skup trokuta, a protivoblast nekakav skup: 1) brojeva, 2) točaka, 3) krugova, 4) duži, 5) trokutova, 6) piramida.
5. Promatraj jednu stranicu na pr. n-tu stranicu ove knjige; svakom slovu x odredi f r e k v e n c i j u $n(x)$, t. j. nx kazuje koliko se puta slovo x pojavljuje na n-toj stranici. Ako je (x, y) uređena dvojka slova, odredi broj $n(x, y)$, koji kazuje koliko se puta u istoj riječi na toj n-toj strani pojavljuju slova x i y i to najprije x, a onda y, (neposredno ili ne). Odredi oblast i protuoblast tih funkcija.
6. U računu vjerojatnosti pojedinom događaju x pridjeljujemo njegovu vjerojatnost vx. Da li je jasno, da je oblast tog preslikavanja sastavljena od događaja, a da je protuoblast u $R[0, 1]$?
7. Kod dodavanja vektora, oblast je sastavljena od (vektora?), a protuoblast od (brojeva?). Popravi tu rečenicu!
8. Kod skalarnog množenja vektora, oblast je sastavljena od (brojeva?) a protuoblast od (brojeva?). Popravi!

9. Da li je prevođenje brojeva iz baze 10 u bazu 2 jedno preslikavanje?
10. Da li je prelaz s jednog alfabeta na drugi jedna funkcija? Ako tu funkciju označimo sa f, što bi značilo, da je $fx = x$? Kako to izgleda, ako se radi o našoj latinici i našoj ćirilici? Zašto je na pr. $fc = ц$, $^{-}fu = i$?

10a. Ako je znak $+$ u $x + y$ čitamo „i'', da li tu tada mogu x i y značiti rečenice? Reci nekoliko primjera.

11. Da li je deriviranje određeno preslikavanje? Tu je oblast sastavljena od funkcija; a protuoblast?
12. Što je antideriviranje?
13. Kod diferenciranja zadana je funkcija f i oblast Df; traži se izraz $df = f'(x)\,dx$. Što se u ovom sve može mijenjati? Ako je na pr. $x = 2$, da li je onda $d2$ samo jedan jedini broj ili može značiti više brojeva? Promatraj slučaj $f(x) = x^2$, $f'x = 2x$.
14. Što bi bio antidiferencijal od $2x\,dx$? Da li ga možemo označiti s $^{-}d\,2x\,dx$? Zašto je on $x^2 + C$ gdje je C kakav god broj nezavisan od x.
15. Da li je prelaz od funkcije na pripadnu antifunkciju određena funkcija? Što joj je oblast, a što protivuoblast? Da li se ovo dvoje podudara u tom slučaju?

§ 3.4. JEDNAKOST I NEJEDNAKOST FUNKCIJA. O JEDNOM PRIRODNOM SUŽAVANJU I PROŠIRENJU FUNKCIJE

1. Definicija jednakosti funkcija. Transformacija ili funkcija f j e d n a k a je transformaciji ili funkciji g, ako je $Df = Dg$, te ako je nadalje $f(x) = g(x)$ za svako $x \in Df$.

Ako nije $f = g$, pisat ćemo $f \neq g$ i reći, da f nije jednako g.

Tako na pr. funkcija $\cos 2x$ jednaka je funkciji $\cos^2 x - \sin^2 x$. Funkcija $\cos^2 x + \sin^2 x$ jednaka je konstanti 1 u svakom skupu brojeva.

2. Dio funkcije (sužavanje funkcije). Primjer 1. Promatrajmo funkciju $\cos 2\pi x$ i to ne na skupu svih brojeva, nego na skupu N svih prirodnih brojeva. Ta je funkcija jednaka konstanti 1. Da se naznači, da se radi o kosinusu na skupu N, označuje se ta funkcija s

$$\cos \mid N.$$

Na sličan način, ako je X bilo kakav dio skupa realnih brojeva, tad je $\cos \mid X$ posve određena funkcija: njoj je oblast $= X$, a za svako x iz X imamo $\cos x$ kao određen broj. Isto tako $\cos X$ je skup svih brojeva oblika fx, kad x prolazi kroz X. Prema tome, $\cos \mid X$ je funkcija, a $\cos X$ je skup i to baš antioblast funkcije $\cos \mid X$.

Ako je i X' kakav dio skupa R realnih brojeva, onda imamo i funkciju $\cos \mid X'$; ta je funkcija $= \cos \mid X$, jedino onda, ako je $X = X'$.

Sve te funkcije oblika $\cos \mid X$ su dijelovi funkcije $\cos \mid R$, kojoj je oblast čitav skup R realnih brojeva.

Slično se za svaku funkciju f s domenom D može govoriti o partitivnim funkcijama oblika

$$f \mid X, \quad \text{gdje je} \quad X \subseteq D;$$

$f \mid X$ je oznaka za onu funkciju, koja je definirana jedino u skupu X i u njemu se podudara sa zadanom funkcijom f.

3. O jednom proširenju funkcije. Razmotrimo primjer kosinusovanja. Tu svakom broju $x \in R$ određujemo broj $\cos x$; na pr. $\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. A što bi bilo na pr. $\cos\left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$? Što prirodnije nego $\left\{\cos 0, \cos \frac{\pi}{2}\right\}$, t. j. dvočlani skup $\{1, 0\}$? Što bi bilo $\cos R$? (R je skup realnih brojeva). Što prirodnije, nego da stavimo $\cos R =$ *skup* svih $\cos x$ kad $x \in R$, dakle $\cos R = R[-1, 1] =$ zatvoreni interval brojeva od -1 do 1. Pa se tako općenito svaka funkcija f, definirana u oblasti D, prirodno definira i za svaki neprazni dio $X \subseteq D$ kao skup svih vrijednosti fx kad x prolazi kroz X.

Isto tako, ako imamo posla s preslikavanjem

$$f(x, y) \text{ za svako } x \in A \text{ i svako } y \in B,$$

onda to znači, da je oblast ili domena funkcije f upravo produkt $A \times B$, t. j. skup svih parova (x, y), za koje je $x \in A$, $y \in B$. Što bi bilo $f(A, B)$ i uopće $f(X, Y)$ za svako $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$? Što bi bilo na pr. $R + N$? (R skup svih realnih, a N skup svih prirodnih brojeva?).

Definicija: $f(X, Y) = \cup f(x, y)$, pri čemu je $x \in X$, $y \in Y$.
To je jedna vanredno korisna definicija.

Primjer: $R[0, 1] + R[3, 4] = ?$ To je skup svih brojeva oblika $x + y$ pri čemu je $x \in R[0, 1]$, $Y \in R[3, 4]$. Dakle je $R[0, 1] + R[3, 4] = R[3, 5]$.

Zašto je na pr. $R[0, 1] - R[0, 1] = R[-1, 1]$?

Sad je prirodno da s $2N$ odnosno $2N - 1$ označimo skup svih parnih odnosno neparnih prirodnih brojeva.

ZADACI: 1. Nađi nekoliko brojeva iz skupa $\log N$, odnosno $\cos N$.

2. Dokaži: $N + N = N + 1$.
3. $X + X = X$ za $X \in (D, Q, R, K, V)$, t. j. za skup X svih cijelih, odnosno racionalnih, odnosno realnih, odnosno kompleksnih brojeva, odnosno za skup svih vektora.
4. Odredi $X + Y$, $X - Y$, $X \cdot Y$ i X/Y, ako je $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 3, 3, 4\}$.

5. Dokaži ovo: ako je $a < b$, $a' > b'$, onda je:

$$R(a, b) + R(a' b') = R(a + a', b + b')$$
$$R(a, b) - R(a' b') = R(a - b', b - a').$$

Ako je k tome $a > 0$, $a' > 0$, onda je $R(a, b) \cdot R(a', b') = R(aa', bb')$, $R(a, b) : R(a' b') = R\left(\frac{a}{b'}, \frac{b}{a'}\right)$.

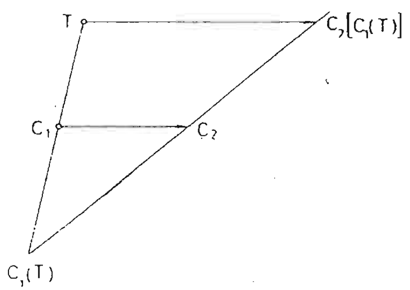
Skiciraj.

6. Zadana je točka O i skupovi A, B; označimo s $\vec{A}$ odnosno $\vec{B}$ skup svih vektora $\overrightarrow{OX}$, za koje je X iz A, odnosno iz B.

Što je $\vec{A} + \vec{B}$? Uzmi specijalno, da je T točka, što je onda $\vec{T} + \vec{B}$? Ako su d, d' dvije duži, što je onda $\vec{d} + \vec{d'}$ u gornjem značenju?

§ 3.5. SLAGANJE ILI KOMPONIRANJE FUNKCIJA

Kao vrlo zanimljiv primjer funkcija imamo simetrije, odnosno simetrična preslikavanja. Što će biti, ako uzastopce izvedemo dva simetrična preslikavanja, najprije jedno, recimo f, a onda drugo, g? Recimo, da se radi o dvjema centralnim simetrijama, i to s obzirom na zadanu točku C_1 i zadanu točku C_2 (sl. 42.).



Sl. 42.

Proizvoljna točka T prelazi prvom simetrijom C_1 ili f u točku $C_1(T)$ ili fT, a ova točka dalje simetrijom C_2 ili g prelazi u točku $C_2[C_1(T)]$ ili $g(fT)$. Na nju možemo ići direktno od T — ta se direktna transformacija zove slog ili predmet od prve i druge transformacije i označuje se s gf (pazi i razlikuj gf od fg)! Kaže se, da je gf složena transformacija od f i g. Zanimljivo je, da je u tom konkretnom slučaju složena funkcija gf (ili $C_2 \cdot C_1$) jednaka translaciji za vektor $2 . \overrightarrow{C_1C_2}$. Dakle: simetrija C_1 (misli se transformacija simetrijom, kojoj je C_1 središte[1]) i simetrija C_2 određuju i složenu transformaciju $C_2 \cdot C_1$ i ona je upravo $= 2\overrightarrow{C_1C_2}$, gdje $2\overrightarrow{C_1C_2}$ znači translaciju za dvostruk vektor $\overrightarrow{C_1C_2}$. Tako imamo jednakost

$$C_2 \cdot C_1 = 2 \cdot \overrightarrow{C_1C_2}.$$

Što će na pr. biti, ako je $C_1 = C_2$? Tad je naravno $C_2C_1T = T$, t. j. $C_2 \cdot C_1$ je upravo identična transformacija.

ZADACI: 1. Neka su, p, p' dva paralelna pravca; promatrajmo simetrična preslikavanja ravnine od p i p', kojima je p odnosno p' os simetrije. Što je složeno preslikavanje od ta dva preslikavanja. Dokaži, da je to translacija i to upravo za $2 \cdot$(razmak od p prema p').

2. Isto kao i zad. 1., ali uz pretpostavku, da se pravci p, p' sijeku.

Dokaži, da se onda radi o rotaciji za $2 \measuredangle(\overrightarrow{p \cdot p'})$. Uzmi specijalan slučaj, da je $p \perp p'$.

3. Gledaj funkcije $x = u^2$, $y = \cos x$ i složenu funkciju $y = \cos x^2$; nacrtaj ih i gledaj njihove oblasti i protivoblasti.

[1]) Ne plaši se oznake, da isti znak znači sad broj, sad točku, sad transformaciju! Važno je, da znamo, što u danoj situaciji znači pojedini znak!

§ 3.6. JEDNOZNAČNE FUNKCIJE. SKUP B^A — NOV NAČIN FORMIRANJA SKUPOVA

1. Jednoznačno preslikavanje skupa A u skup B jest svaki postupak f, kojim svakom $x \in A$ pridružujemo određen element fx iz B.

Primjer 1. Odredimo skup svih jednoznačnih preslikavanja iz $\{0, 1\}$ u $\{0, 1, 2\}$. Takvo je na pr. prevođenje 0 u 2 i 1 u 0

$$\{0, 1\} \quad \{0, 1, 2\}$$

U obliku tablice sva ta preslikavanja možemo predočiti ovako;

x	fx								
0	0	0	0	1	1	1	$\boxed{2}$	2	2
1	0	1	2	0	1	2	$\boxed{0}$	1	2

Gornje promatrano preslikavanje je uokvireno.

Svih tih preslikavanja ima $9 = 3^2$; njihov se skup označuje sa $\{0, 1, 2\}^{(\{0, 1\})}$. To je skup svih uređenih dvojki s elementima iz tročlana skupa $\{0, 1, 2\}$. Pa se uopće može reći, da 3^2 pokazuje, koliko se može napraviti dvočlanih nizova iz tročlana skupa.

Primjer 2. Koliko ima nizova od 5 članova, ako su članovi 0 ili 1?

Ti su nizovi oblika a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

Svako a tu može biti i 0 i 1. Zato svih tih nizova ima $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, dakle 2^5. Evo ih nekoliko:

0	0	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	0	1
.	.	.	.	.
1	1	1	1	0
1	1	1	1	1

Pogledaj, kako se iz svake gradi naredna! Naprosto, dodavanjem jedinice u *dijadskom* brojevnom sistemu.

Njihov se skup može označiti sa

$$\{0, 1\}^{\{0, 1, 2, 3, 4\}}$$

Prema tome

$$k\{0, 1\}^{\{0, 1, 2, 3, 4\}} = k\{0, 1\}^{k\{0, 1, 2, 3, 4\}}$$

Sad možemo postaviti opću definiciju.

Definicija skupa B^A. Ako su A, B skupovi, tad ćemo s

$$B^A$$

označiti skup svih jednoznačnih preslikavanja skupa A u skup B. Specijalno, za svaki skup B stavit ćemo $B^0 = \{\emptyset\}$, gdje je $\emptyset$ prazan skup.

Gradnja skupa B^A na osnovi zadanih skupova A i B vrlo je plodan postupak. Na tom postupku vidimo, kako iz zadanih skupova, pomoću funkcija, gradimo nove skupove. A vrlo je zanimljivo, da je prelaz od skupova A, B na skup B^A vezan uz računsku operaciju sa brojevima i koju nazivamo potenciranje.

Još jedna oznaka:

Mjesto $B^{\{0,1\}}$ piše se $B^{(2)}$ ili nekad B^2

$B^{\{0,1,2\}}$ piše se $B^{(3)}$ ili nekad B^3

— — — — — — — — — — — — —

$B^{\{0,1,2,\ldots,n-1\}}$ piše se $B^{(n)}$ ili nekad B^n

Tako na pr. ako R znači skup svih realnih brojeva, tad $R^{(3)}$ — kubus skupa R — označuje skup svih tročlanih nizova realnih brojeva.

2. Potenciranje kardinalnih brojeva. Kardinalni broj skupa B^A označivat ćemo s kB^{kA} i zvati potencijom, kojoj je kB baza, a kA eksponent. Dakle definiramo

$$k(A^B) = (kA)^{(kB)} \quad \text{ili kraće} \quad kA^B = kA^{kB}.$$

Specijalno

$$x^0 = 1 \text{ za svaki kardinalni broj } x\text{; specijalno}$$

$$0^0 = 1\text{[1]}$$

$$(kN)^0 = 1$$

$$c^0 = 1.$$

[1]) Ovo „kardinalno", „aktualno", „završeno" 0^0 razlikuje se od „nastajućeg", „dinamičkog", „potencijalnog" 0^0 u teoriji funkcija, kad se 0 u bazi i 0 u eksponentu pojavljuje kao granična vrijednost kakvih funkcija. Na pr. ako sa 0^0 označimo ono, što postaje $\sin x^{\sin x}$ kad realan broj x putuje ka 0, onda to 0^0 nema samo jedno značenje; recimo, ako x ide preko pozitivnih brojeva prema 0, tad $\sin x^{\sin x}$ ide prema 0; ako pak x ide preko negativnih brojeva prema 0, tad $\sin x^{\sin x}$ ide prema $-\infty$; ako x ide bilo kako prema 0, tad $\sin x^{\sin x}$ uopće ne konvergira. Prema tome, *dinamičko* ili *potencijalno* 0^0 iz teorije funkcija je druge prirode nego „*aktualno*" 0^0 kardinalnih brojeva. Slično vrijedi za izraz $(kN)^0$ odnosno ∞^0. Tako na pr. ako ∞^0 znači $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$, tad je to ∞^0 jednako 1. Ako pak ∞^0 znači $\lim\limits_{n\to\infty} (n^n)^{\frac{1}{n}}$, onda je to ∞^0 jednako ∞. Upravo je nevjerojatno šta sve može biti „*potencijalno*" 0^0, ∞^0, $\infty\cdot 0$, $\frac{0}{0}$ u višoj matematici!

Za potenciranje kardinalnih brojeva (koje smo tako uveli nezavisno od množenja) vrijede uobičajena pravila:

$$a^b \cdot a^{b'} = a^{b+b'}$$

$$(a^b)^{b'} = a^{bb'}$$

$$(aa')^b = a^b a'^b$$

$$1^b = 1.$$

Ilustriraj ta pravila na posebnim primjerima.

ZADACI: 1. Odredi nekoliko, odnosno sve članove skupa $\{0,1\}^{\{0,1\}}$.

Što taj skup znači? Da li je na pr. $(1,1)$, $(0,1)$ odnosno $\{0,1\}$ član toga skupa?

2. Što je $\{0,1\} \times \{0,1\}$? Zašto je taj skup jednak onom iz zad. 1.?
3. Nađi $\{1,2,3\}^{\{4,5\}}$.
4. Nađi sva jednoznačna preslikavanja skupa $\{0,1\} \times \{0,1\}$ u skup $\{0,1\}$.
   Koliko ih ima? Kako se označuje njihov skup?
5. Što bi bilo R^N, a što N^N? Navesti nekoliko njihovih članova. Zašto je $N^N \subset R^N$.
6. Da li je kosinusovanje član skupa R^R? A logaritmiranje? Tangensovanje? Kvadriranje? Antikvadriranje?
7. Ako je k zadan kvadrat, što bi bilo k^k? Da li je projiciranje kvadrata k na njegovu dijagonalu član od k^k? Navesti još nekoliko članova toga skupa k^k (recimo: rotacija za $\pi/2$ oko središta S kvadrata, konstantno preslikavanje: čitavo k u S i t. d.).
8. Isto ako k znači duž, kružnicu, tetraedar i t. d.
9. Zadane su dvije duži A, B; što je A^B? Odredi nekoliko jednostavnijih članova toga skupa.

10. Odredi 1^2, ako 1 znači pravac a 2 ravninu. Navedi koji član iz skupa 1^2 i to za slučaj da je $1 \subset 2$, $1 \parallel 2$ i da pravac 1 probada ravninu 2.
11. Oslanjajući se na obrazac $(a^b)^c = a^{bc}$ za kardinalne brojeve, dokaži da je $c^{kN} = c$ (znaj, da je $c = 2^{kN}$, $kN \cdot kN = kN$).
12. Šta znači da je $c^{(kN)} = c$? Koliko dakle ima nizova realnih brojeva?
13. Dokaži ovo: Ako su A, B skupovi, pa ako je $kA = k\{0, 1\}$, $kB = k\{0, 1, 2\}$, onda je $kA^{kB} = k\{0, 1\}^{k\{0, 1, 2\}}$ Poopći.
14. Definiciju $kA^B = kA^{kB}$ (A i B su skupovi) ima smisla postaviti samo onda, ako je ispravno ovo zaključivanje: iz jednakosti $kA = kA'$, $kB = kB'$ nužno slijedi $kA^{kB} = kA'^{kB'}$. Dokaži, da je ovaj zaključak ispravan.
15. Pokušaj dokazati, da je $2^x = x^x$ za $x = kN$ i kR. (Uputa: $2 < x < 2^x$ odatle potencirajući s x izlazi $2^x \leq x^x \leq (2^x)^x$, t. j. $2^x \leq x^x \leq 2^x$ i t. d.).
16. Koliko ima jednoznačnih: 1) realnih, 2) dijadskih funkcija?
17. Koliko ima jednoznačnih preslikavanja čitava prostora u prostor?

§ 3.7. NIZOVI KAO FUNKCIJE. DIJADSKI NIZOVI. DIJADSKE FUNKCIJE

Nizovi su funkcije, kojima je oblast skup N prirodnih brojeva. n-člani nizovi jesu preslikavanja skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ od prvih n prirodnih brojeva.

Niz je *dijadski,* ako su mu članovi 0 ili 1. *Funkcija je dijadska,* ako su joj vrijednosti 0 ili 1.

Skup svih dijadskih preslikavanja množine A označuje se s

$$\{0, 1\}^A;$$

to je u suglasnosti s § **3.6.**

Prema tome, ako je A neprazan skup, pa ako je

$$f \in \{0, 1\}^A,$$

onda je f dijadska funkcija u skupu A, t. j. za svako $x \in A$ vrijedi ili $fx = 0$, ili $fx = 1$. Označimo specijalno s f_1 skup svih točaka iz A, u kojima je f jednako 1. Naravno, skup f_1 je potpuno određen dio skupa A, t. j. $f_1 \subseteq A$; drugim riječima $f_1 \in PA$ [1].

Može se dokazati, da je *preslikavanje*

$$f \longleftrightarrow f_1$$

skupa $\{0, 1\}^A$ na skup PA određeno tolikovanje.

To znači, da vrijedi ovaj vrlo karakterističan teorem:

Teorem 3.7.1. Za svaki skup S množina $\{0, 1\}^S$ svih jednoznačnih preslikavanja toga skupa u skup $\{0, 1\}$ ima isti kardinalni broj kao množina PS svih dijelova skupa S:

$$k\{0, 1\}^S = kPS.$$

No, po definiciji, imamo $k\{0, 1\}^S = 2^{kS}$.

Prema tome imamo:

Teorem 3.7.2. $2^{kS} = kPS$ za svaki skup S.

§ 3.8. CANTOROVA NEJEDNAKOST

Da li postoji *najmanji* prirodni broj? A *najveći*? Zašto nema najvećeg prirodnog broja? Naprosto zato, što za svaki prirodni broj n i suma $n + 1$ je opet prirodni broj, koji je k tome veći od n.

[1]) Sjetimo se da PA označuje skup *svih* dijelova skupa A. Zapravo je f_1 skup svih $-f_1$.

A da li ima kardinalnih brojeva, koji su veći od *svih* prirodnih brojeva? Ima! Na pr. broj kN pa $c (= kR)$. Znamo, da je $kN < kR$, (sjeti se, da je N skup svih prirodnih, a R skup svih realnih brojeva). Da li je možda c najveći mogući kardinalni broj? Ili možda nema najvećeg kardinalnog broja? Drugim riječima, da li se pomoću svakog skupa S može sagraditi kakav još brojniji skup? Tako na pr. polazeći od S i gradeći skup PS svih rješenja X veze $X \subseteq S$, dobiva se zacijelo skup vrlo obiman prema S, jer, iz $a \in S$ slijedi $(a) \in PS$, pa je prijelazom $a \longleftrightarrow (a)$ određeno tolikovanje skupa S na neznačajan dio skupa PS. Znamo da PS ima 2^{kS} članova. No, da li je taj broj veći od kS? Sigurno da, ako je kS nula, ili prirodan broj? No, kako je, ako je kS beskonačan broj? Da li je na pr. $2^{kN} > kN$, pa $2^{kR} > kR$? Tu moramo bit oprezni jer na pr. i broj kN i broj kR zadovoljavaju jednakost $x + x = x$, koju ne zadovoljava nikoji prirodan broj. Pa je i $xx = x$ za $x = kN$ i $x = kR$.

Cantorova osnovna nejednakost glasi ovako:

Teorem 3.8.1. $$2^{kS} > kS$$

za svaki skup S; drugim riječima, za svaki kardinalni broj a vrijedi

$$2^a > a.$$

Specijalno $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ (Cantor 1874).

Nema dakle najvećeg kardinalnog broja! Čak i poslije svakog beskonačnog kardinalnog broja a dolaze još veći kardinalni brojevi, ne doduše $a + 1$ jer je $a + 1 = a$, nego brojevi

$$2^a,\ 2^{2^a},\ 2^{2^{2^a}} \text{ i t. d.}$$

Imajući u vidu, da je i $kPS = 2^{kS}$ (gl. teorem 3.7.2.), Cantorova nejednakost daje ovu izreku.

Teorem 3.8.2. Za svaki skup S skup PS je zaista brojniji od skupa S:

$$kPS > kS.$$

Specijalno je

$$kPN > kN.$$

$$kPR > kR.$$

Priznajmo, da smo slutili, da je PS brojnije od S! Jer na pr. evo od čega se sastoji $P\{0, 1, 2\}$:

Dolazi nulion, t. j. prazan skup $\emptyset$; svega na broju 1.

Dolaze unioni,

t. j. jednočlani skupovi $\{0\}, \{1\}, \{2\}$ svega 3

Dolaze dvočlani skupovi (ambe) $\{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}$; svega . 3

Dolazi samo $\{0, 1, 2\}$; svega 1

Ukupno $8 = 2^3$

Pogledajmo PN; u taj skup ulaze kao elementi:

0) Prazan skup $\emptyset$; na broju 1

1) Pa jednočlani dijelovi $\{1\}, \{2\}, \{3\} \cdots$; njih ima kN

2) Dvočlani dijelovi $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \cdots$
$\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \cdots$
$\{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \cdots$
. . . . svega kN

3) Točlani dijelovi $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}$
$\{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 6\}, \cdots$
$\{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\} \cdots$
. . . . svega kN

4) Četveročlani dijelovi . . . . svega kN

. . . .

5) Beskonačni dijelovi na pr. $\{2, 3, 4 \dots\}$, $\{3, 4, 5 \dots\}$

Njih sviju ima 2^{kN}.

Onih konačnih dijelova ima $kN + kN + kN \cdots$; a to je kN. Međutim beskonačnih dijelova u skupu N ima 2^{kN}.

§ 3.9. VEZA IZMEĐU BROJA kN PRIRODNIH BROJEVA I BROJA kR REALNIH BROJEVA

I skup N prirodnih brojeva je beskonačan; i skup realnih brojeva je beskonačan. Znamo, da je $kN < kR$ i da je

(1) $$kR + kN = kR.$$

Također znamo, da je $kN < 2^{kN}$. Dakle: od broja kN su veći i broj kR i broj 2^{kN}, koji kazuje koliko skup

(2) $$\{0, 1\}^N$$

svih dijadskih beskonačnih nizova ima elemenata.

Da slučajno nije

(3) $$kR = 2^{kN}?$$

No, kako dovesti u vezu dijadske nizove, t. j. beskonačne nizove

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

brojki 0, 1 i realne brojeve?

Vrlo lako! Služit ćemo se brojem 2 kao bazom i dijadskim brojevnim sistemom (mjesto brojem 10 i decimalnim brojevnim sistemom) [1] To znači, da ćemo dijadskom nizu

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

pridijeliti broj

$$fx = x_1 \cdot 2^{-1} + x_2 \cdot 2^{-2} + x_3 \cdot 2^{-3} + \dots .$$

[1]) Danas kod elektronskih računskih strojeva služimo se mnogo dijadskim sistemom!

Tako na pr. nizu $x = 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$

odgovara broj

$$fx = 0\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} + 0\cdot 2^{-3} + 1\cdot 2^{-4} + \dots =$$
$$= 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-6} + \dots = \frac{2^{-2}}{1 - 2^{-2}} = \frac{1}{3}.$$

Služeći se tim postupkom može se pokazati, da vrijedi ovaj

Teorem 3.9.1. *Svih realnih brojeva ima upravo koliko i beskonačnih dijadskih nizova:*

$$kR = 2^{kN}.$$

Primjedba. Na sličan se način zaključuje, da je

$$kR = 3^{kN},\ kR = 4^{kN}, \dots,\ kR = n^{kN}$$

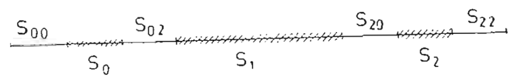
za svaki prirodni broj $n > 1$; pa čak je i

$$kR = kN^{kN}.$$

§ 3.10. O JEDNOM NAOKO VRLO SIROMAŠNOM SKUPU. TRIJADSKI SKUP

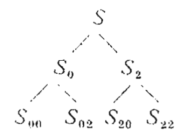
Skup, o kojem je riječ, dobit ćemo iz duži ovako.

Pođimo od neke zatvorene duži S dužine d. Podijelimo je na 3 jednake duži; označimo te duži s S_0, S_1, S_2, tako da je S_0 lijeva, S_1 srednja, a S_2 desna trećina duži. Prema tome duži S_0 i S_1 kao i S_1 sa S_2 imaju po jednu jedinu zajedničku točku. Odstranimo srednju otvorenu duž; preostat će zatvorene duži S_0, S_2. Sa svakom od tih dviju duži učinimo isti postupak: svaku razdijelimo u 3 jednake duži pa izbacimo srednju otvorenu duž; preostale dvije duži od S_0 označimo sa S_{00} i S_{02}, a od S_2 sa S_{20} i S_{22}. Naravno, S_{00} je lijevo od S_{02}, S_{20} je lijevo od S_{22}. Sve to izgleda ovako (sl. 43.):



Sl. 43.

ili shematski:



Ostaju 2^2 neizbačene duži S_{00}, S_{02}, S_{20}, S_{22}.

Svaka je duga $3^{-2}d$; sveukupna im je dakle dužina $2^2 \cdot 3^{-2}d$. Odstranjeno je bilo $3^{-1}d + 2 \cdot 3^{-2}d$.

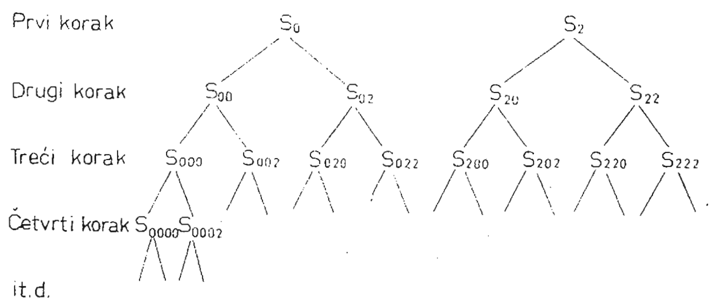
Učinimo treći korak: svaku od tih 2^2 duži podijelimo na 3 jednaka dijela, izbacimo srednji otvoreni dio. Preostat će 2^3 duži, svaka dužine $3^{-3}d$; prema tome neodstranjeni dio polazne duži dugačak je

$2^3 \cdot 3^{-3}d$, a odstranjeni dio je dug $3^{-1}d + 2 \cdot 3^{-2}d + 2^2 \cdot 3^{-3}d$.

Neodstranjene te dužine nose oznake

$$S_{000},\ S_{002},\ S_{020},\ S_{022},\ S_{200},\ S_{202},\ S_{220},\ S_{222}.$$

Shematski to možemo prikazati ovako:



Taj se proces dijeljenja na 3 jednaka dijela svake neodstranje duži nastavlja bez prestanka, pa se uvijek srednji otvoreni dio odstrani.

Time se od polazne duži duljine d odstrani svega

$$\frac{d}{3} + \frac{2}{3^2}d + \frac{2^2}{3^3}d + \frac{2^3}{3^4}d + \ldots .$$

To je beskonačan geometrijski red: kvocijent mu je $\frac{2}{3}$; red konvergira; suma mu je

$$= \frac{d}{3} \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{d}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = d.$$

Drugim riječima, postepenim izbacivanjem izbaci se s duži skup sve manjih duži, a sve zajedno te izbačene duži imaju istu dužinu d kolika je i dužina od same polazne duži. Znači da preostatak duži $\overline{AB}$ ima dužinu $d—d$, t. j. 0. Drugim riječima, u pogledu »*obimnosti*«, duljine, neodstranjeni dio T polazne duži $\overline{AB}$ izgleda neobično malen.

A da pogledamo skup T u pogledu *broja njegovih članova!* Ima li T zapravo članova? Da li djelišne točke[1] uopće izbacujemo? Ne! A ima li osim tih djelišnih točaka još kakvih drugih točaka na skupu T, t. j. neizbačenih točaka na duži $\overline{AB}$? Pogledajmo na pr. prvu neizbačenu točku. Ona leži u ovim silaznim dužima:

$$S_0 \supset S_{00} \supset S_{000} \supset S_{0000} \supset \ldots .$$

Te duži ni nemaju druge zajedničke točke. Prema tome uz tu točku je vezan niz 0000000 ... kojemu svi početni komadi dolaze kao indeksi kod gornjih S-ova- Slično je i s nizom 2 2 2 2 2 2 ... i pripadnim S-ovima:

$$S_2 \supset S_{22} \supset S_{222} \supset S_{2222} \supset \ldots ?$$

Ovi se stežu na posljednju točku duži. A šta bi bilo na pr. s nizom

022200000 ... ?

[1]) Djelišne točke su krajevi svih promatranih duži.

Pripadni S-ovi daju ovaj silazni niz:

$$S_0 \supset S_{02} \supset S_{022} \supset S_{0222} \supset S_{02220} \supset S_{022200} \supset S_{0222000} \supset \cdots$$

Ovi se S-ovi stežu na lijevi kraj duži S_{0222}.

No, svi su ti primjeri nizova građeni tako od 0 i 2, da se jedna od tih cifara u nizu ili ne pojavljuje ili se pojavljuje konačan broj puta.

Promatrajmo jedan niz od 0 i 2, recimo niz

$$02020202\ldots$$

u kojem se *obje te znamenke pojavljuju bezbroj puta*. Pripadni S-ovi daju ovaj niz sve užih neizbačenih zatvorenih duži:

$$S_0 \supset S_{02} \supset S_{020} \supset S_{0202} \supset \cdots$$

Tu odabiremo u svakom intervalu po redu lijevi pa desni kraj. Svi ti intervali daju posve određenu točku preostalog skupa T.

Zaključak je općenit: za *svaki beskonačni niz*

$$(*) \qquad x_1, x_2, x_3, \cdots$$

kojemu su članovi 0 ili 2, imamo pripadni silazni niz zatvorenih duži:

$$(**) \qquad S_{x_1} \supset S_{x_1 x_2} \supset S_{x_1 x_2 x_3} \supset \cdots$$

kao i točku

$$t(x_1 x_2 x_3 \cdots)$$

koja je jedina zajednička točka svih tih neizbačenih S-ova; ta je točka naravno u T.

No svi promatrani nizovi $x_1, x_2, \cdots$ obrazuju skup

$$\{0, 2\}^N$$

koji, kao što znamo, ima 2^{kN} članova. Prema teoremu 3.9.1 ima skup $\{0, 2\}^N$ isto toliko članova koliko i čitavi kontinuum R svih realnih brojeva. No prijelaz od niza (*) na točku (**) je obostrano jednoznačan: radi se o određenom tolikovanju između

skupova $\{0, 2\}^N$ i T. Dakle ta dva skupa imaju jednako mnogo članova; no upravo vidjesmo, da $\{0, 2\}^N$ ima c članova. Dakle ih ima koliko T. Na taj način dokazali smo ovo:

Skup T, koji smo maloprije sagradili, ma da ima duljinu 0, *ipak ima isto toliko članova, koliko ima i svih točaka na pravcu, ravnini pa i u prostoru. Premda je »trijadski« skup T izgledao tako oskudan, sada vidimo, da je on u stanju da svojim točkama napuni čitav prostor: porazmještavanjem točaka iz trijadskog skupa T može se ispuniti čitav prostor.*

Skup T zove se trijadski skup. Ako radimo s jediničnim zatvorenim intervalom na brojevnom pravcu, tad se skup T sastoji od brojeva 0, 1 i od svih realnih brojeva položenih između 0 i 1, a koji se mogu predočiti i bez cifre 1 u pozicionom brojevnom sistemu baze 3 (u ovome sustavu, cifre su 0, 1 i 2, a svaki broj u zatvorenom segmentu $R\,[0, 1]$ je $a_1 3^{-1} + a_2 3^{-2} + \cdots + a_n 3^{-n} + \cdots$; tu su a-ovi članovi skupa $\{0, 1, 2\}$).

§ 3.11. O AKSIOMU IZBORA

1. Maloprije smo govorili o hipotezi kontinuuma. Ne zna se, da li poslije svakog beskonačnog broja a dolazi neposredno broj 2^a, kao onaj koji je neposredno veći. Takvo svojstvo ima na pr. broj 0 pa 1 ali *nijedan prirodan broj* > 1.

Međutim, ima i raznih drugih problema, koje nikom nije pošlo riješiti. Takvo je na pr. pitanje: da li za svaki beskonačni kardinalni broj x vrijedi $x + x = x$? Pa $x \cdot x = x$?

Primijetimo da 0 zadovoljava obje te jednakosti!

Može se pokazati, da su ta i slična pitanja vezana uz *aksiom izbora*. Recimo nešto o njemu.

2. P r i m j e r i o i z b o r u. Svaki neprazan skup sastavljen je od manjeg ili većeg broja jedinki, Da li uvijek možemo odrediti *jednu jedinku* iz takvog skupa?

O poteškoćama izbora postoje i razne priče. Tako na pr. prkosna djevojka, koja je imala vrlo mnogo haljina, nije otišla na ples, jer se nije mogla odlučiti, koju haljinu da obuče. A Buridanov magarac krepao je od gladi, kad mu je i s lijeve i s desne strane ležala jednaka hrana u istoj udaljenosti: nije se mogao odlučiti niti lijevo niti desno. Navedimo nekoliko primjera o izboru.

Primjer 1. Uzmimo na pr. skup S krugova. To znači, da iz $x \in S$ slijedi da je x određen *krug*. Da li znaš svakom x odrediti jednu jedinu točku? Ako da, označimo je s fx! U tom slučaju *da*, jer na pr. možemo s fx označiti središte kruga x. Time možemo promatrati preslikavanje f, koje svakom skupu $x \in S$ pridružuje određenu točku fx iz toga samog x.

Primjer 2. A recimo, da je S proizvoljan skup *pramenova pravaca*. Kako u tom slučaju svakom x iz S (sad je x pramen pravaca) odrediti jedan pravac fx iz x?

Možemo na pr. tako, da povučemo pravac p, pa za svako $x \in S$ označimo s fx onaj element pramena x, koji je $\parallel p$.

Primjer 3. Neka S označuje skup bilo kakvih četverokuta. Kako u svakom x iz S izabrati *jednu jedinu* točku? To jest, kako skup S preslikati tako, da svakom $x \in S$ pridružimo $fx \in x$? To je već teže pitanje! Jer četverokut x može biti vrlo nepravilan. Pa nemamo nikakvog razloga, da jednu točku iz x izaberemo, a ne nekoje druge.

A ipak nam izgleda očigledno, da je takav izbor moguć! Uzmimo još zamršeniji primjer.

Primjer 4. Neka je Q skup racionalnih brojeva; za svaki realni broj x označimo s $fx = Q + x$ skup svih brojeva oblika $r + x$, pri čemu r prolazi kroz Q. Možemo reći, da skup $Q + x$ nastaje iz Q *translacijom duž brojevna pravaca* za x. Tako na pr. $Q + 1 = Q$. Označimo s S skup svih $Q + x$, kad x prolazi kroz R. Naravno, S je sasvim određen *skup skupova*. Svaki član od S je *beskonačan skup kongruentan* s Q; može se lako pokazati, da su članovi iz S dva po dva *bez zajedničkih točaka*. Da li se tu svakom $x \in S$ može pridružiti određena njegova točka $fx \in x$? Ako se može, time možemo promatrati i skup V svih brojeva fx, kad x prolazi kroz S. Time bi V bio određen skup realnih brojeva, odnosno određen skup s brojevnog pravca. Taj je skup vrlo teško zamisliti. Pronađen je početkom ovog vijeka (Vitali). Njega ne možemo »*izmjeriti*«, kao što na pr. svaku duž na brojevnu pravcu lako izmjerimo t. j. odredimo joj dužinu.

3. Aksiom izbora i nekoliko drugih tvrdnji. Sad možemo *formulirati aksiom izbora*.

Ako je S bilo kakav neprazan skup nepraznih skupova, tad postoji postupak f, kojim se svakom $x \in S$ pridružuje (izabire) član fx iz x.

Time je omogućeno i *formiranje množine svih fx kad x prolazi kroz S*.

Može se dokazati, da je aksiom izbora logički ravnopravan[1]) s mnogo raznih iskaza, koji na prvi pogled izgledaju kao bez ikakve veze s aksiomom izbora. Tako na pr. Tarski je pokazao da je on logički ravnopravan s ovom izrekom:

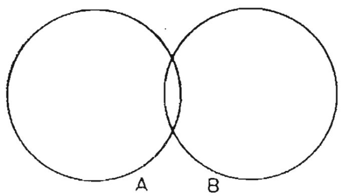
Za svaki beskonačni kardinalni broj x vrijedi $x^2 = x$.

Hartogs je dokazao, da je aksiom izbora logički ekvivalentan s ovom tvrdnjom o mogućnosti *isporedivanja skupova po njihovoj brojnosti*:

Za svaka dva skupa A, B vrijedi $kA \leq kB$ ili $kA > kB$ Drugim riječima, ne postoje skupovi A, B za koje ne bi bilo ni $kA \leq kB$ ni $kA > kB$.

[1]) Za dva iskaza veli se, da su međusobno *logički ekvivalentna* ili *ravnopravna*, ako jedan iz drugoga izlazi kao posljedica.

S tim u vezi primjetimo. Ako skupove ispoređujemo ne prema *brojnosti,* nego prema *obimnosti* (*opsežnosti*), onda je najobičniji slučaj, da se *skupovi ne mogu međusobno upoređivati:* niti je $A \subseteq B$ niti $A \supseteq B$. Evo takvih dvaju krugova (sl. 44.).



Sl. 44.

Opća hipoteza kontinuuma ima za posljedicu aksiom izbora (Lindebaum — Sierpinski). Smatra se, da obrat ne vrijedi.

Aksiom izbora ima za posljedicu ovo: $x + x = x$ za svaki *beskonačni kardinalni broj*. Smatra se da obrat ne vrijedi.

Aksiom izbora formulirao je Zermelo početkom ovog vijeka. O tom aksiomu pisano je vrlo mnogo. Kao jedna od najzanimljivijih posljedica toga aksioma javlja se *mogućnost* (konačnog ili beskonačnog) *nizanja svih elemenata svakog skupa!* Kao *najparadoksalnije posljedice*[1] aksioma izbora smatraju se ove tri:

1. Ako su k, K dvije kugle (jedna proizvoljno malena, a druga proizvoljno velika), onda se one mogu razbiti na jednak broj, n, dijelova:

$$k = k_1 \cup k_2 \cup \cdots \cup k_n$$
$$K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$$

[1]) Sjetimo se jedne *paradoksalne posljedice Euklidova postulata* o paralelama, a koja se sastoji u odgovoru na ovo pitanje: *ako se opsezi dvaju krugova vrlo malog k i vrlo velikog K povećavaju za istu veličinu, čiji se polumjer više poveća: od manjeg ili većeg kruga?*

tako, da je k_1 kongruentno s K_1, k_2 s K_2, $\cdots$, k_n kongruentno s K_n. Pri tom su k-ovi dva po dva bez zajedničke točke. K-ovi također.

To su dokazali poljski matematičari Banach i Tarski.

2. Nedavno je Robinson dokazao, da se svaka kugla K može rastaviti na 5 dijelova, dva po dva bez presjeka, i to tako da se kretanjima i simetrijama iz dva odnosno iz preostala tri dijela mogu složiti dvije nove kugle, svaka iste veličine, koliko je bila i polazna kugla.

3. Poboljšavajući jedan glasovit rezultat Hausdorffa iz 1914. godine, J. F. Adams je 1954. dokazao ovo: kuglina se površ može rastaviti u tri dijela $A, B, C,$ dva po dva bez presjeka i to tako, da su skupovi A, B, C, $A \cup B$, $B \cup C$, $C \cup A$ međusobno kongruentni (to specijalno znači da je „trećina kugle" A konguentna s dvije trećine $A \cup B$ te kugle).

§ 3.12. PERMUTACIJE SKUPA. JEDNA NOVA RAČUNSKA OPERACIJA

1. O permutacijama i faktorijelama. Već smo imali prilike reći, šta je to *permutacija zadana skupa.* Konkretizirajmo na nekom primjeru.

Primjer 1. Odredimo sve permutacije skupa

$$I\,3 = \{0, 1, 2\}.$$

Preslikavanje

x	fx
0	1
1	1
2	0

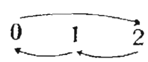
ili shematski

nije permutacija, jer je element 1 uhvaćen dvaput. Doduše, to je preslikavanje jednoznačno, no obratno preslikavanje nije jednoznačno. A kod permutacije se traži *obostrana jednoznačnost* i da je *svaki član* skupa: *i vrijednost argumenta i vrijednost funkcije*.

Preslikavanje

x	fx
0	2
1	0
2	1

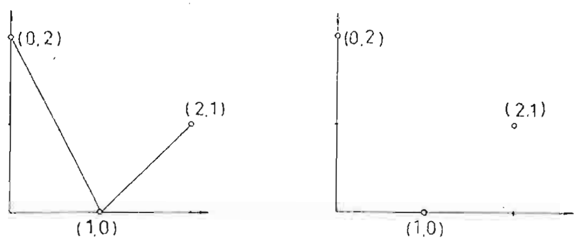
ili shematski



ili još jednostavnije 2 0 1

jest permutacija skupa $\{0, 1, 2\} = I\,3$.

Kao i druge funkcije i ta se permutacija može predstaviti grafički:



Sl. 45.

Kao skup točaka (1, 0), (2, 1), (0, 2). A i tako da se susjedne točke spoje dužima (sl. 45.).

Evo svih permutacija skupa $I\,3 = \{0, 1, 2\}$:

0 1 2	1 0 2	2 0 1
0 2 1	1 2 0	2 1 0

Označimo njihov skup sa $(I\,3)!$ ili $\{0, 1, 2\}!$ Tu se uskličnik čita »*faktorijela*«.

Dakle je

$$\{0, 1, 2\}! = \{012,\ 021,\ 102,\ 120,\ 201,\ 210\}.$$

Taj skup ima 6 članova. Kardinalni broj toga skupa označuje se s $3!$ Dakle je $3! = 6$.

Sve su te permutacije oblika p_0, p_1, p_2, t. j. *tročlani nizovi*; pritom je

$$p_0 \in I\,3,\ p_1 \in I\,3 \setminus \{p_0\},\ p_2 \in \{I\,3\} \setminus \{p_0, p_1\},$$

t. j. p_0 ima 3 vrijednosti, p_1 ima 2 vrijednosti, p_2 ima jednu jedinu vrijednost. Zato svih tih nizova $p_0 \cdot p_1 \cdot p_2$ ima $3 \cdot 2 \cdot 1$, dakle je

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

jer smo s $3!$ označili broj članova u skupu $(I\,3)! = \{0, 1, 2\}!$

Sasvim analogno imamo ovo: *Neka je zadan skup* S, *koji ima bar jedan element. Pod permutacijom skupa* S *razumijevamo svako preslikavanje* p toga skupa S na sama sebe, uz uslov da je to preslikavanje obostrano jednoznačno i da je $pS = S$[1]. Skup svih permutacija skupa S označuje se s

$$S! \text{ (čitaj: } S \textit{ faktorijela}).$$

Kardinalni broj toga skupa zove se kS *faktorijela* i označuje $(kS)!$ Prema tome, ako je n prirodan broj, tad je

$$n! = k(\{1, 2, 3, \cdots n\}!).$$

A dokazuje se kao maloprije za $n = 3$, da je

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) \cdot n.$$

Definira se, da je $0! = 1$.

Primjer 2. Odredimo nekoliko permutacija skupa N prirodnih brojeva. Radi se o svim nizovima prirodnih brojeva, ali da *svaki* broj bude u *svakom* nizu.

[1]) t. j. svaki član iz S je ujedno i jedna vrijednost funkcije p.

Takav je na pr. početni položaj: 1, 2, 3, ... (identička permutacija).

I ovo je permutacija: 2, 1; 4, 3; 6, 5; 8, 7; ...

I ovo je permutacija 5,4,3,2,1; 10,9,8,7,6; 15, 14, 13, 12, 11; ...

Ako ta 3 elementa skupa $N!$ označimo s f, odnosno g, odnosno h, da li je potpuno jasno, da je na pr. $f\,100 = 100$ (i uopće $fn = n$ za svako $n \in N$), $g\,100 = 99$, $h\,100 = 96$? Pokušaj odrediti g_n i h_n za svako n iz N.

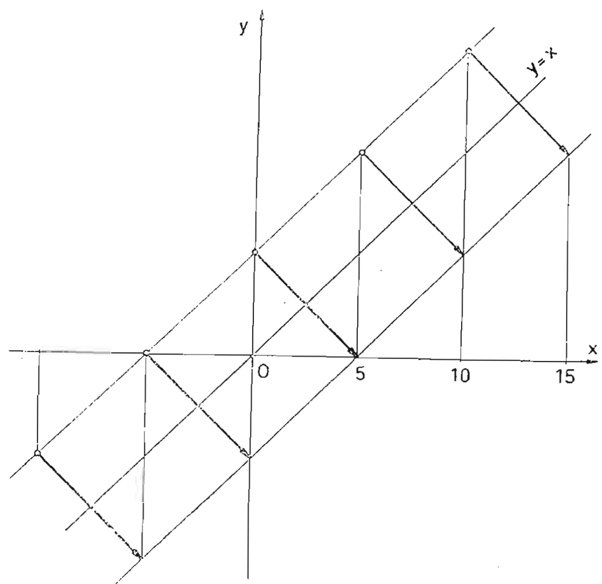
Opća permutacija skupa N je oblika $p_1, p_2, p_3, \ldots$ pri čemu je

$$p_1 \in N,\ p_2 \in \setminus \{p_1\},\ p_3 \in N \setminus \{p_1\ p_2\},\ p_4 \in N \setminus \{p_1, p_2, p_3\}, \ldots$$

Odatle se može zaključiti, da je

$$(kN)! = c.$$

No, u to ne ulazimo.



Sl. 46.

Primjer 3. Nekoliko permutacija skupova R svih realnih brojeva.

Da li je funkcija $y = 3x$ permutacija skupa R? Zašto funkcija $y = tg\,x$ nije permutacija skupa R? Predoči grafički permutaciju $y = 3x + 2$ na primjer. Najjednostavnija je permutacija $y = x$. A iz nje možemo dobiti ovu permutaciju time, da u svakom poluotvorenom intervalu od $R\,[5n, 5(n+1))$ „obrnemo" identičnu permutaciju, poput onog što se radilo kod permutacije h u primjeru 2. Graf se sastoji od beskonačno mnogo paralelnih poluotvorenih duži, kao sto se vidi na sl. 46.

Nije lako pokazati da svih permutacija skupa R ima 2^{kR}.

2. Jedan nov račun. Predigra za grupe. Znamo ovo: dodati nekom broju 3 pa rezultatu dodati 4 znači isto, što polaznom broju dodati broj $3 + 4$ (*zakon asocijacije za dodavanje brojeva*). Isto tako: provesti translaciju za usmjerenu duž $\overrightarrow{AB}$ pa rezultat za usmjerenu duž $\overrightarrow{BC}$ znači isto, što provesti *jednu* translaciju i to $\overrightarrow{AC}$. To je osnov dodavanja (slaganja, zbrajanja) vektora.

Da li će nešto slično vrijediti i za permutacije na pr. skupa $\{1, 2, 3\}$?

Izvedimo uzastopce dvije permutacije, na pr. permutaciju $p = 2\ 1\ 3$ pa permutaciju $q = 3\ 1\ 2$.

1 pomoću p prelazi u 2, što dalje pomoću q prelazi u 1

2 pomoću p prelazi u 1, što dalje pomoću q prelazi u 3

3 pomoću p prelazi u 3, što dalje pomoću q prelazi u 2.

Dakle: *Rezultat slaganja permutacije* 2 1 3 *i permutacije* 3 1 2 *jest opet jedna permutacija i to* 1 3 2.

Piše se $qp = 1\ 3\ 2$, odnosno $3\ 1\ 2 \cdot 2\ 1\ 3 = 1\ 3\ 2$ ili tablično

x	p	q	qp
1	2	3	1
2	1	1	3
3	3	2	2

Faktori p i q se ispisuju *po redu, kako djeluju na argument,* idući od argumenta na *lijevu* stranu. Analogno se dokazuje, da je *rezultat slaganja* **svakog** para permutacija opet jedna permutacija istog skupa S.

Za to slaganje permutacija skupa

$$S! \text{ za } S = \{1, 2, 3\}$$

vrijede ova pravila:

1. Slaganje je asocijativno: ako su f, g, h element od $S!$, tad je

$$(fg)h = f(gh).$$

2. Skup $S!$ sadrži »*neutralni*« član e (identičko preslikavanje) sa svojstvom $fe = f$ za svako $f \in S!$

3. Ako je $f \in S!$, onda je i $^{-}f \in S!$

4. U skupu $S!$ linearna jednadžba

$$ax = b$$

je uvijek moguća; to znači: ako je $a \in S!$ i $b \in S!$, tad postoji $x \in S!$, za koje je $ax = b$.

Kraće se kaže: ***Skup $S!$ je jedna grupa u odnosu na tako definirano „slaganje" ili računanje.*** Evo „tablice toga slaganja" za skup $S! = \{1, 2, 3\}$!

$\frac{gf}{g}$	f 1 2 3	1 3 2	2 1 3	2 3 1	3 1 2	3 2 1
1 2 3	1 2 3	1 3 2	2 1 3	2 3 1	3 1 2	3 2 1
1 3 2	1 3 2	1 2 3	3 1 2	3 2 1	2 1 3	2 3 1
2 1 3	2 1 3	2 3 1	1 2 3	1 3 2	3 2 1	3 1 2
2 3 1	2 3 1	2 1 3	3 2 1	3 1 2	1 2 3	1 3 2
3 1 2	3 1 2	3 2 1	1 3 2	1 2 3	2 3 1	2 1 3
3 2 1	3 2 1	3 1 2	2 3 1	2 1 3	1 3 2	1 2 3

Tablica obuhvata „produkte" gf. Iz tablice se odmah očitava „recipročna vrijednost" (anti f) ^{-}f za svako f kao ono g, za koje je $gf = 123$. Na pr. $^{-}2\ 3\ 1 = 3\ 1\ 2$.

Sasvim se analogno dokazuje stvar za *svaki* skup S.

Teorem 3.12. **Za svaki neprazan skup S, skup $S!$ je određena grupa u odnosu na slaganja permutacija.**

Na taj način, u skupu $S!$ „računamo" po određenim pravilima. I to za *svaki*, baš *svaki* neprazan skup S.

Teorija grupa je vrlo važno matematičko područje; primjenjuje se vrlo mnogo.

§ 3.13. ŠTO JE GRUPA?

1. Obično se kaže, da se *računa samo u brojevima*! Međutim, mi znamo, da se računa i sa skupovima. Pa eto, na pr. kao što računajući s *brojevima*, recimo s 5 i 4, proizvodimo nove *brojeve*, recimo: $5 - 4{,}5^4$, $\sin 5 + \cos 4$ i t. d., tako i iz *zadanih* skupova *proizvodimo nove* skupove, recimo: presjek, produkt i t. d.

Također iz *nizova* možemo proizvoditi opet *nizove*, tako na pr. ako imamo 2 niza jednako dugačka

$$a = 2,\ 5,\quad 7,\ 4,\ 7$$

$$b = 4,\ 3,\ -1,\ 5,\ 9,$$

onda iz njih možemo proizvesti sumu $a + b$ razliku, $a - b$ produkt $a \cdot b$, kvocijent a/b, na pr. tako, da nađemo sume, odnosno produkte odgovarajućih članova. Tako bi na pr. produkt ab gornjih nizova a, b glasio

$$2 \cdot 4,\ 5 \cdot 3,\ 7 \cdot -1,\ 4 \cdot 5,\ 7 \cdot 9.$$

Razvitak matematike i drugih nauka doveo nas je dotle, da se zapitamo, *što zapravo znači računati i gdje se sve računanje pojavljuje.*

Shvatimo na pr., da se kod *oduzimanja* radi o tom, da svakom uređenom paru x, y odredimo značenje i vrijednost od $x - y$.

Uvijek se kod »*računanja*« treba pitati za jedinke, s kojima računamo, odnosno za skup, iz kojeg su jedinke uzete i onda da li će rezultat računanja biti opet u tom skupu ili nas vodi van toga skupa.

Tako na pr. za skup N prirodnih brojeva znamo, da je *suma prirodnih brojeva opet prirodan broj* i da *pritom važi zakon asocijacije*. Zato se i kaže, da je *skup prirodnih brojeva određena* **polugrupa**. *Taj skup ipak nije grupa*, jer protivna operacija od dodavanja vodi nas i van skupa N: tako na pr. ma da su 3 i 5 prirodni brojevi, ipak $3 - 5$ to nije.

Nakon predhodnih razmatranja možemo dati definiciju grupe i polugrupe.

2. Definicija polugrupe i grupe. Neka je S bilo kakav skup[1]; pridružimo svakom uređenom paru (x, y) članova x i y iz S određenu jedinku opet iz S; označimo je recimo sa

$$x \oplus y, \text{ ili } x \odot y, \text{ ili } xfy \text{ i t. d., ili naprosto } x + y.$$

Veli se, da skup S u odnosu na tu „računsku" operaciju $+$ čini polugrupu, ako je ta operacija asocijativna, t. j. ako je

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

za svako $a \in S$, $b \in S$, $c \in S$.

Označimo taj uslov s G_1.

Ne zaboravimo na bitan uslov, da je $a + b \in S$, jer se u tom i sastoji »*grupovnost*« odnosno *polugrupovnost*.

Da se istakne uz skup S i operacija $+$, *govori se o polugrupi* $(S; +)$. Tako na pr. skup N^{13} svih tročlanih nizova prirodnih brojeva je određena polugrupa u odnosu na zbrajanje i u odnosu na množenje tih nizova.

[1] na pr. brojeva, duži, funkcija, i t d.

3. Definicija grupe. *Polugrupa* $(S; +)$ *je grupa, ako se u njoj može vršiti ta osnovna operacija* $+$ *i pripadna protivoperacije tako da vrijedi ovo:*

G_2. *Polugrupa sadrži »neutralni« element — označimo ga s* 0 *— sa svojstvom da je*

$$x + 0 = x \text{ za svako } x \in S;$$

G_3. *Polugrupa dopušta »simetriju« prema* 0: *svakom članu* x *iz* S *pridružen je suprotan član, ozuačimo ga s* $-x$, *sa svojstvom*

$$x + (-x) = 0;$$

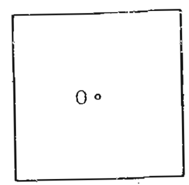
G_4. *U polugrupi je moguće rješavati normirane linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom: za svako* $a \in S$ *i svako* $b \in S$ *ima jednadžba*

$$x + a = b$$

jedno rješenje u grupi.

Primjer 1. Školski primjer grupe je skup D svih cijelih brojeva u odnosu na dodavanje brojeva. I skup $5D$ svih višekratnika broja 5 je grupa u odnosu na zbrajanje. Provjeri to.

Primjer 2. Evo jedne grupe od 4 člana: radi se o svim rotacijama nacrtanog kvadrata u ravnini kvadrata, koje taj kvadrat prevode u sama sebe (sl. 47.). Elementi te grupe jesu: rotacija r_0, r_1, r_2, r_3 oko središta za 0, $\pi/2$, $2 \cdot \pi/2$ i $3 \cdot \pi/2$. Neutralni član je rotacija za 0 mirovanje r_0. Što je na pr. suprotno od r_1?



Sl. 47.

Treba dakle rotaciju r_1 za $\pi/2$ *neutralizirati*: treba rezultat od r_1 još dalje okrenuti za $3 \cdot \pi/2$.

Sveukupni je rezultat: rotacija za $\pi/2$ pa još za $3 \cdot \pi/2$ dakle sveukupna rotacija za $4 \cdot \pi/2$, t. j. za puni kut. Time se postiže upravo polazni položaj! Dakle je $-r_1 = r_3$, jer je $r_1 + r_3 = r_0$.

Ali, evo jednog neobičnijeg primjera: skup kojemu su elementi

Parno, Neparno

je grupa u odnosu na $+$, pri čemu je

$$Parno + Parno = Parno$$

$$Parno + Neparno = Neparno$$

$$Neparno + Neparno = Parno$$

$$Neparno + Parno = Neparno$$

Ako Parno i Neparno označimo kraće s 0,1, tad imamo ovu tablicu dodavanja »*modulo 2*«:

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 0 = 1$$
$$1 + 1 = 0$$

ili tablično

$x + y$	$y \to$ 0	1
x $\downarrow$		
0	0	1
1	1	0

Evo još jednog primjera: »*zbrajanje modulo 3*«.

Primjer 3. Neka je D skup svih cijelih brojeva, $3D$ skup svih trokratnika iz D; neka je $3D + 1$ odnosno $3D + 2$ skup D, pomaknut za 1, odnosno za 2; dakle je na pr. $3D + 2 = \{-1 \cdot 3 + 2,\ 0 + 2,\ 3 + 2,\ 2 \cdot 3 + 2, \ldots\}$.

Promatrajmo sad »*zbrajanje*« tih skupova $3D$, $3D + 1$, $3D + 2$. Mi znamo *računati s brojevima,* ali znamo i sa *skupovima brojeva*. Tako na pr. ako su A, B skupovi brojeva, označit ćemo s $A + B$ skup svih brojeva oblika $a + b$ uz uslov $a \in A$, $b \in B$. Tako na pr. $3D + 3D = 3D$.

Što je dakle $\{3D, 3D + 1, 3D + 2\}$? A što $(\{3D, 3D + 1, 3D + 2\}; +)$? Računaj u tom tročlanom skupu! Zašto je na pr. $(3D + 2) + (3D + 2) = 3D + 1$?

Uistinu, svaki broj iz $(3D + 2) + (3D + 2)$ je oblika $(3x + 2) + (3y + 2)$ — tu je x i y iz D; dakle je to dalje $= 3(x + y + 1) + 1 = 3z + 1$, gdje je $z = x + y + 1$. No,

kad x i y prolaze kroz D, onda to čini i broj $z = x + y + 1$ ne ipuštajući nijednog cijelog broja. A to upravo znači, da vrijedi tražena jednakost.

Uvjeri se, da je skup $\{3D, 3D + 1, 3D + 2\}$ jedna grupa u odnosu na zbrajanje i da pritom vrijedi ova »*radna tablica*«:

$x + y \to$ $\downarrow$	$3D$	$3D + 2$	$3D + 2$
$3D$	$3D$	$3D + 1$	$3D + 2$
$3D + 1$	$3D + 1$	$3D + 2$	$3D$
$3D + 2$	$3D + 2$	$3D$	$3D + 1$

Tu je „nula”, t. j. neutralni član upravo skup $3D$.

Uvjeri se, da preostala *dva člana* $3D + 1$, $3D + 2$ *čine grupu u odnosu na množenje* i da vrijedi ova „radna tablica”:

$x \cdot y \to$ $\downarrow$	$3D + 1$	$3D + 2$
$3D + 1$	$3D + 1$	$3D + 2$
$3D + 2$	$3D + 2$	$3D + 1$

Polazni skup $S = (3D, 3D + 1, 3D + 2)$ nije grupa u odnosu na množenje, ali jest polugrupa. Pa pritom vrijedi i zakon komutacije i zakon distribucije prema zbrajanju:

$$x \cdot y = y \cdot x$$

$$(x + y)z = xz + yz \quad \text{za} \quad x, y \text{ i } z \text{ iz } S.$$

Kraće se kaže, da *imamo posla s određenim poljem* ili *tijelom,* i to u ovom smislu: skup $(S; +; \cdot)$ gdje je $S = \{3D, 3D + 1, 3D + 2\}$ je grupa prema $+$, polugrupa prema $\cdot$, važi zakon distribucije od $\cdot$ prema $+$; k tome skup $S \setminus \{$»*nula*«$\}$ je grupa prema množenju.

Napomena. Bitan napredak u matematici bio je, kad se u 19. vijeku uvidjelo, na kako se raznolik način u matematici i drugim naukama pa i igri nailazi na grupe. Kao tipičan primjer grupa možemo uzeti skupove kretanja i transformacija uopće. Obična operacija dodavanja (zbrajanja) tu poprima mnogo općenitiji oblik i to *slaganje*: *izvesti jednu transformaciju pa na rezultatu drugu transformaciju.*

ZADACI: 1. Promatraj sve rotacije pravilnog trokuta, četverokuta, $\cdots$, n-terokuta oko njegova središta, ali tako da taj skup dođe opet na svoje mjesto. Dokaži, da svih tih n rotacija čini grupu u odnosu na slaganje.

2. Sve translacije sinusoide u samu sebe čine grupu. Navedi nekoliko članova te grupe.

3. Isto pitanje za: 1) kosinusoidu, 2) tangensoidu.

4. Promatraj neku ravninu 2 „popločanu" jednakim kvadratima. Ako tu ravninu 2 translatiramo za dužinu stranice kvadrata, prijeći će ravnina u samu sebe isto kao i čitav njen „pločnik", Neka je S skup svih kretanja ravnine 2, koja prevode čitav pločnik u sama sebe. Dokaži, da je S grupa. Dokaži, da se dobija jedna grupa i od onih translacija ravnine, koje se izvode za cjelobrojan višekratnik vektora jedne stranice jednog kvadrata iz pločnika.

5. Promatraj grupu $\{6D, 6D+1, 6D+2, 6D+3, 6D+4, 6D+5\}$ u odnosu na $+$; ta grupa ima isti broj članova kao i grupa iz zadatka 1. za $n = 6$ ili kao grupa $\{1, 2, 3\}!$ svih permutacija skupa $\{1, 2, 3\}$. Označi u svakoj od tih grupa njene elemente na isti način, recimo šiframa 0, 1, 2, 3, 4, 5: napiši onda u tim šiframa „radnu tablicu" za svaku grupu od te 3 grupe.

6. Dokaži, da je skup Q racionalnih brojeva grupa u odnosu na $+$; dokaži, da je to i skup $(Q + Q\sqrt{x})/(Q + Q\sqrt{x})$ svih brojeva oblika

$(a + b\sqrt{x})/(c + d\sqrt{x})$, pri čemu je $\{a, b, c, d\} \subset Q$.

Tu je x kakav cio broj na pr. -1, 2, -5.

7. Promatraj i nacrtaj funkcije: $y = x$, $y = x^{-1}$, $y = 1 - x$, $y = (1 - x)^{-1}$, $y = 1 - x^{-1}$ i $y = (1 - x^{-1})^{-1}$. Dokaži, da one čine grupu u odnosu na slaganje funkcija. Prikaži „radnu tablicu" u tom slučaju.

§ 3.14. ŠTO JE POLJE ILI TIJELO?

Pođimo od nekog skupa S, njegova kvadrata $S \times S$, jednog „zbrajanja" u S, t. j. preslikavanja $+$ skupa $S \times S$ na S kao i jednog „množenja" u S, t. j. nekog preslikavanja skupa $S \times S$ na S.

Time imamo uređenu trojku

$$(S; +; \cdot) \tag{1}$$

Članovi su te trojke: skup S pa *plus* — preslikavaje „$+$" — i najzad *puta* — preslikavanje".

Ta uređena trojka je polje ili tijelo, ako su ispunjeni ovi uslovi:

I. Skup S je grupa u odnosu na $+$, t. j. $(S; +)$ je grupa:

II. Skup $S \setminus \{0\}$ je grupa u odnosu na $\cdot$, t. j. $(S \setminus \{0\}; \cdot)$ je grupa. Pritom je 0 neutralni element za $+$.

III. Preslikavanje ili operacija $\cdot$ je distributivna prema operaciji $+$, t. j.

$$(x + y)\cdot z = xz + yz$$

za svako x, y i z iz S.

Primjer 4. Upravo smo u primjeru 3. u § 3.13. vidjeli da je

$$(\{3D, 3D+1, 3D+2\}; +; \cdot)$$

jedno polje. To isto polje može se predočiti i tako, da se u skupu D svih cijelih brojeva »*računa modulo 3*«, t. j. da se računa kao obično, *samo što se dopušta, da mjesto svakog broja pišemo i njegov ostatak pri dijeljenju s 3.* Tako na pr. mjesto 9 ili 27 može se pisati 0, mjesto 4 broj 1 i t. d.

Na taj način mjesto $3D$, odnosno $3D+1$, odnosno $3D+2$ možemo pisati 0, odnosno 1, odnosno 2, pa imamo ovu »*tablicu dodavanja i množenja modulo 3*«:

$x+y\to$ ↓	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$x\cdot y\to$ ↓	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Analogno bi tablica zbrajanja modulo 7 bila ovakva:

$x+y\to$ ↓	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

ZADACI: 1. Promatraj $(D;\ +;\ \cdot)$ t. j. skup D cijelih brojeva i u njemu zbrajanje i množenje. Tu se radi o jednom *prstenu* u smislu, da je $(D;\ +)$ grupa, a $(D;\ \cdot)$ polugrupa i da je množenje distributivno prema dodavanju.

2. Dokaži, da je i $(D+D\sqrt{-1};\ +;\ \cdot)$ jedan prsten kompleksnih brojeva. Predoči elemente $x+y\sqrt{-1}$ toga

prstena kao točke (x, y) koordinatne ravnine. Da li sva kretanja te ravnine, koja prevode skup $D+D\sqrt{-1}$ na sama sebe, obrazuju grupu?

3. Da li je skup svih algebarskih polinoma određen prsten prema zbrajanju i množenju?

4. Računaj modulo 4; da li se time dobije prsten? A polje? A ako se računa modulo 3 ili 5 ili 7? Može se pokazati ovo: *Za svaki prost broj* $p=2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$ računanje modulo p u skupu D proizvodi jedno polje poput polja $(\{D, D+1, D+2, \cdots, D+(p-1)\}: +;\cdot)$.

POGLAVLJE 4

UREĐENJE SKUPOVA

Uređenje skupova je odraz činjenice, da tako često ima potrebu i priliku, da govorimo, da je nešto *manje* — *veće*, *ispred* — *iza*, *lijevo* — *desno*, *prije* — *poslije*, da je jedan predmet položen *između* druga dva predmeta, da se radi o *rang-listi* i t. d.

§ 4.1. NEKOLIKO PRIMJERA UREĐENJA

1. Rječnik kao uređen skup riječi. Dva pravila redanja. To je vanredno važan primjer. Kako su riječi poredane u rječniku? Zašto na pr. riječ *POD* dolazi prije nego riječ *PODNE*? Da li na pr. *KUĆA* dolazi prije ili poslije riječi *KREDA*? Tu imamo ova dva pravila uređivanja:

Prvo pravilo: *Ako se jedna riječ dobije iz druge nadopisivanjem jednog ili više slova, onda ona dolazi poslije one kraće riječi.* Zato je na pr. riječ *PODNE* naštampana negdje *poslije*, a ne *prije* riječi *POD*.

Drugo pravilo: *Za poredak dviju riječi odlučuju slova, što se nalaze na prvom mjestu, na kojem se te riječi razlikuju, gledajući slova u riječi onim redom, kako ih u njoj ispisujemo.*

Tako na pr. riječi

KREDA, *KUĆA*

podudaraju se u prvom slovu *K*, no razlikuju se u drugom slovu; tu dolaze slova *R* i *U*. A kako je poredak ovih slova

R, *U* (a ne *U*, *R*), prenosi se on i na riječi. Dakle je *KREDA* ispred *KUĆA*, jer je u latinici *R* ispred *U*. Iz istog razloga je *KUĆA* ispred *ŽELJA*. Naprotiv, u ćirilici je *ЖЕЉА* ispred *КУЋА*, jer je u ćirilici *ж* ispred *к*.

Naša latinica je ovaj *uređeni skup*:

(1) *a*, *b*, *c*, *ć*, *č*, *d*, *dž*, *đ*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *j*, *k*, *l*, *lj*, *m*, *n*, *nj*, *o*, *p*, *r*, *s*, *š*, *t*, *u*, *v*, *z*, *ž*.

Naša ćirilica je ovaj *uređeni skup*:

(2) *а*, *б*, *в*, *г*, *д*, *ђ*, *е*, *ж*, *з*, *и*, *ј*, *к*, *л*, *љ*, *м* *н*, *њ*, *о*, *п*, *р*, *с*, *т*, *ћ*, *у*, *ф*, *х*, *ц*, *ч*, *џ*, *ш*.

To znači, da se radi nažalost o dva različita uređenja istih glasova našeg jezika.

Kao posljedica tih dvaju uređenja glasova i slova imamo različite redosljede naših riječi u rječnicima.

2. Vrlo se često prave razne rang-liste na pr. rang-lista plivača na 100 *m* slobodni stil, rang-lista tenisača, šahista i t. d. A svako takmičenje i ima za cilj, da se odredi najbolji učesnik, t. j. onaj koji će zauzeti *prvo mjesto*, pa onaj koji će doći na *drugo mjesto* i t. d.

Kraće se kaže, da treba vidjeti, u kojem će *poretku* biti učesnici takmičenja na koncu igre.

3. Uređivanje brojeva. Realne brojeve *uređujemo* najobičnije po *veličini* pa pišemo za brojeve x, y, da je $x < y$, odnosno $x > y$, ako je x manje od y. Specijalno, ako je $x < 0$, onda velimo, da je broj x *negativan* ili *odrečan*, a ako je $x > 0$, velimo, daje broj x *pozitivan*. Broj 0 nije niti negativan niti pozitivan.

Na taj način za skup R realnih brojeva imamo podjelu:

$$R = R(\cdot, 0) \cup \{0\} \cup R\{0, \cdot\}$$

I za svaki drugi realni broj x imamo podjelu

$$R = R(\cdot, x) \cup \{x\} \cup R(x, \cdot).$$

Pritom je $R(\cdot, x)$ odnosno $R(x, \cdot)$ skup svih elemenata $y \in R$, za koje je $y < x$, odnosno $y > x$.

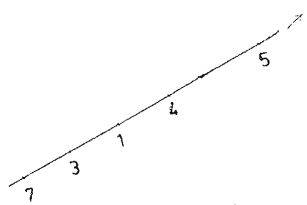
4. Uređivanje točaka na duži (orijentirana duž, vektor). Promatrajmo dvije točke A, B iz prostora: pripadna duž $\overline{AB}$ možemo urediti na pr. tako, da je A početna točka, a B završna točka ili obrnuto. B je početna, a A završna točka. Tako *orijentirana* ili *uređena duž* $\overline{AB}$ označuje se s $\overrightarrow{AB}$ odnosno $\overrightarrow{BA}$ (doda se strijelica).

Uređenje u $\overrightarrow{AB}$ i uređenje u $\overrightarrow{BA}$ su međusobno suprotna, pa se piše

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.$$

Računanje s uređenim dužima ili vektorima je vanredno važno.

5. Orijentirani pravac ili pravac kao uređen skup. To je običan pravac, samo što se još zna, koja točka na njemu dolazi prije, a koja poslije (sl. 48.): strijelica pokazuje, da se ide s *»ranijih«* položaja na *»kasnije«* položaje. Ako su točke A, B na orijentiranom pravcu $\vec{p}$, tad je samo jedan od vektora $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$ suglasan s orijentacijom na $\vec{p}$. Možemo pisati $A < B$ (A ispred B), ako je strijelica u $\overrightarrow{AB}$ istog smisla kao na pravcu $\vec{p}$. Tako na pr. na nacrtanoj orijentaciji pravca točke 7, 3, 1, 4, 5 su poredane baš tim redom, na pr. $3 < 1$.



Sl. 48.

6. Razna uređenja jednog te istog skupa. 6.1. Primjer 1. Promatrajmo jednu obitelj O od 9 članova; kratkoće radi označimo članove te obitelji brojevima

(1) $\qquad 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$

Prema tome

(2) $\qquad O = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$

Taj skup možemo *»urediti«* na razne načine na pr. po *starosti*: da je lice 4 najstarije, pa da od preostalih bude član 9 najstariji i t. d. Ako sa znakom $a \prec b$ označimo izreku *»a je rođeno prije nego b«*, tada je vrlo vjerojatno, da skup O možemo *»urediti«*, idući od najstarijeg člana prema najmlađem: teško je naime zamisliti da bi u obitelji O bila dva člana, koja su rođena u istom trenutku[1]

Recimo da je

(3) $\qquad 4 \prec 9 \prec 7 \prec 1 \prec 2 \prec 6 \prec 5 \prec 8 \prec 3$

To znači: najstariji je 4 pa 9 pa 7 pa 1 pa $\cdots$.

Najmlađi bi član bio 3.

Obrascem (3) imamo jedno *uređenje skupa* O; taj isti skup uređen je i obrascem (1) i to po *rastućim brojevima*, koje koje smo pridružili osobama obitelji O.

6.2. Da li skup O možemo urediti, t. j. poredati na još koji način? Možemo na pr. *po visini, po težini*. A da ih uredimo po broju godina provedenih u školi? Pa neka za svako lice $x \in O$ oznaka gx kazuje koliko je godina to lice x provelo u školama! Pa neka bude $g1 = 7$, $g2 = 8$, $g3 = 4$, $g4 = 16$, $g5 = 17$, $g6 = 12$, $g7 = 12$, $g8 = 12$, $g9 = 16$.

Za lica a i b neka sada oznaka

(4) $\qquad a \prec b \quad$ ili $\quad b \succ a$

znači, da je a provelo manje vremena u školi nego lice b.

[1] Čak i kod blizanaca zna se, da je jedno dijete starije od drugoga.

Drugim riječima, oznaka (4) iskazuje isto, što i oznaka

$$g\,a < g\,b, \quad \text{odnosno} \quad g\,b > ag,$$

u kojoj dolazi znak $<$ i znak $>$ iz aritmetike.

U našem slučaju je na pr. $2 \prec 8$, jer je $g\,2 < g\,8$,
$4 \succ 6$, jer je $g\,4 > g\,6$,

A što je za osobe 6, 7, 8, od kojih je svaka provela 12 godina u školi? Da li je $6 \prec 7$? Nije, jer nije $g6 < g7$. Da li je $6 \succ 7$? Nije, jer nije $g6 > g7$. Dakle nije ni $6 \prec 7$ ni $7 \succ 6$.

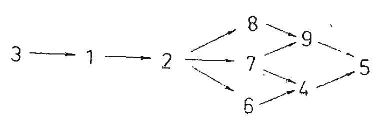
Također vidimo, da je $3 \prec x$ za svako x iz $O - \{3\}$.

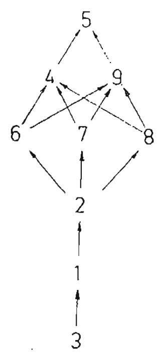
Uostalom imamo ovu tablicu

godine g	osobe iz O
4	3
7	1
8	2
12	6, 7, 8
16	4, 9
17	5

godina g.	4	7	8	12	16	17
osobe, koje pripadaju godini x	3	1	2	6, 7, 8	4, 9	5

Shematski, možemo to još i ovako prikazati:

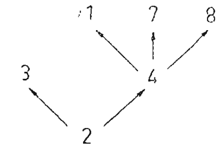




Strijelice idu od lijeva prema desnoj strani idući od manjih godina na veće godine.

Ista se stvar može prikazati tako, da strijelice idu odozdo prema gore — kao kod rodoslovlja. Lica 6, 7 i 8 nisu u međusobnoj vezi prema relaciji $\prec$. Zato uređenje skupa O na taj način nije *potpuno*, nego tek *djelomično*.

Isti skup O možemo urediti i prema *srodstvu* na pr. tako, $x \prec y$ znači, da je x roditelj (otac ili majka), roditelj roditelja i t. d. od y, t. j. da je x jedan od »*direktnih predaka* od y, Tako na pr. ako je 2 otac od 3 i 4, a 1, 7, 8 djeca od 4, tad bi za njih imali ovu shemu:



Prema tome, lice 3 i lice 4, t. j. braća 3, 4 ne bi bila niti u vezi $\prec$ niti u vezi $\succ$. Opet bi se radilo o jednom *nepotpunom uređenju.*

6.3. Koliko potpunih uređenja dopušta gornji skup O od 9 elemenata? Dopušta onoliko, koliko ima i permutacija od tih elemenata dakle 9! Stvarno, neka je $p = p_1, p_2, \cdots, p_9$ jedna permutacija skupa O. To znači da su

$$(5) \qquad p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9$$

upravo svi članovi skupa O, a možemo ih zamisliti uređene baš tim redom, kako su ispisani u nizu (5).

Druga je stvar opet, kad bi se radilo o *nepotpunim uređenjima.*

Nije lako odrediti koliko ima takvih uređenja. Ograničimo se na jedan tročlan skup i obradimo ovaj primjer.

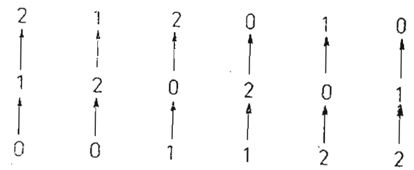
P r i m j e r 2. Na koliko načina možemo urediti tročlan skup $\{0, 1, 2\}$ — označimo g $I(3)$.

Imamo najprije sve permutacije i pripadna potpuna uređenja:

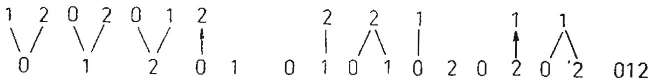
$$0\,1\,2, \quad 0\,2\,1, \quad 1\,0\,2, \quad 1\,2\,0, \quad 2\,0\,1, \quad 2\,1\,0$$

(tako na pr. permutacija 1 2 0 kaže, da je 1 ispred 2, a 2 ispred 0).

Shematski ta uređenja možemo to ovako prikazati:



Ali evo još nepotpunih uređenja



Kod posljednjeg uređenja radi se o *potpunom neuređenju*: nijedan član nije „ranije" od drugog.

Prema tome, tročlan skup možemo urediti (potpuno ili nepotpuno) na 16 načina — tu se nalazi i $3!$ potpunih uređenja t. zv. uređene trojke.

7. Na posve analogan način vidi se ovo: Ako je n prirodan broj, tad se skup od n članova — recimo skup $I(n) = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ može potpuno urediti upravo na na $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ načina: svaka permutacija toga skupa daje jedno potpuno njegovo uređenje i obrnuto: svako potpuno uređenje daje određenu permutaciju.

Ne zna se općenito, koliko ima svih nepotpunih uređenja skupa $I(n)$, za svako n!

8. Nekoliko uređenja skupa N prirodnih brojeva. 8.1. Najjednostavnije uređenje je »*prirodno uređenje*« po veličini; to daje niz $1, 2, 3, 4, \ldots$

I svaka *permutacija* p skupa N daje određeno *potpuno uređenje* i to ovo

$$p_1 \text{ ispred } p_2 \text{ ispred } p_3 \text{ ispred } p_4 \cdots.$$

8.2. Da li se pomoću permutacija može dobiti *svako* potpuno uređenje skupa N? Kako glasi na pr. uređenje, koje je *suprotno prirodnom uređenju*, t. j. ono uređenje, kod kojeg ne idemo od manjih brojeva na veće nego obratno: od većih na manje? Imamo ovo uređenje

$$(6) \qquad \cdots, n+1, n, \cdots, 4, 3, 2, 1.$$

To je sasvim određeno uređenje i to pomoću relacije $>$, koja znači »*biti veće od*«. To uređenje ne možemo dobiti iz nikoje permutacije p skupa N na način da uređujemo po propisu ovo:

$$(7) \qquad p_1 \text{ ispred } p_2 \text{ ispred } p_3 \text{ ispred } p_4 \cdots.$$

Zašto? Naprosto zato što u uređenju (7) imamo početni član i to p_1, t. j. onaj član, koji odgovara broju 1; naprotiv, u uređenju (6) nema početnog, prvog, člana (doduše u (6) ima posljednji član, no to je druga stvar!).

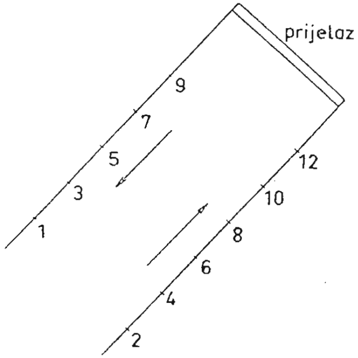
Dakle vidimo ovo: *permutiranjem skupa N prirodnih brojeva ne dobivamo niti sva* **potpuna** *uređenja toga skupa N.*

8.3. Uredimo skup N na pr. tako, da parne brojeve izdvojimo po veličini i smatramo ih, da dolaze poslije svih neparnih brojeva; imamo ovo uređenje:

$$1, 3, 5, 7, \cdots, 2, 4, 6, 8, 10, \cdots.$$

Uredi stvarno tako, recimo, prvih 100 prirodnih brojeva. Ako gledamo brojeve kuća u pojedinoj ulici, pa ako hoćemo da obiđemo *svaku* kuću, a držimo se saobraćajnih propisa, da prelazimo *samo* na raskršćima, tad kuće $1, 2, 3, \cdots, 100$ ne ćemo obilaziti tim redom nego upravo tako, da obiđemo najprije kuće s neparnim (parnim) brojevima, a onda one s parnim (neparnim) brojevima. Ako ne želimo, da se vraćamo pritom na kuće, koje smo već obišli, tad bi najprirodnije bilo obići *sve* kuće na *jednoj* strani ulice u *jednom* smjeru, a onda *sve* brojeva na *drugoj* strani ulice u suprotnom smjeru. Na pr. na slici bi imali ovo „uređenje”:

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 9,\ 7,\ 5,\ 3,\ 1.$$



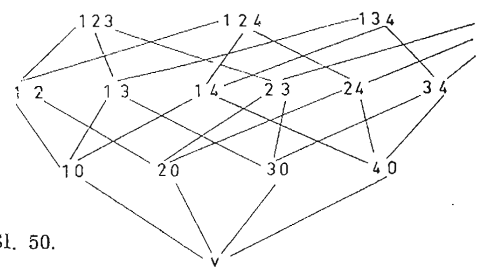
Sl. 49.

8.4. Evo još jednog uređenja prirodnih brojeva i to tako, da najprije promatramo prirodni poredak svih neparnih brojeva, pa prirodni poredak svih brojeva djeljivih s 2, a ne s 2^2, pa prirodni poredak svih brojeva djeljivih s 2^2, a ne s 2^3 i t. d. Tu se radi o ovom »*nizu nizova*« (sl. 49.):

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \cdots;\quad 2\cdot 1,\ 2\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ 2\cdot 7,\ 2\cdot 9,\ \cdots;$$
$$2^2\cdot 1,\ 2^2\cdot 3,\ 2^2\cdot 5,\ 2^2\cdot 7,\ \cdots,\ 2^3\cdot 1,\ 2^3\cdot 3,\ \cdots$$

9. Tipičan način uređivanja. Promatrajmo sada bilo kakav *skup S*, kojemu su *članovi* opet *skupovi*. To znači, da iz $x \in S$ slijedi, da je x određen skup. Znamo, da je najprirodnije dva skupa $x\,y$ urediti po njihovoj opsežnosti ili obimnosti, t. j. pomoću relacije $\subseteq$ ili $\supseteq$.

Primjer 3. Promatrajmo tetraedar 1 2 3 4, t. j. 1, 2, 3 i 4 su vrhovi tetraedra; bridovi su $\overline{1\,2}$, $\overline{1\,3}$, $\overline{1\,4}$, $\overline{2\,3}$, $\overline{2\,4}$, $\overline{3\,4}$; strane su 2 3 4, 1 3 4, 1 2 4, 1 2 3. Ako sve te elemete uredimo po relaciji obimnosti $\subseteq$ i k tome dodamo *prazan skup*, dobivamo ovo uređenje — ovu mrežu (sl. 50.):



Sl. 50.

Svako uređenje može se ostvariti pomoću takvog prirodnog uređenja skupova.

§ 4.2. ŠTO ZNAČI, DA JE SKUP UREĐEN?

Veli se, da je skup S *uređen*, ako za *svaki par* različitih elemenata x, y iz S možemo reći, da li je x ispred y ili nije ispred y; ako je x ispred y, onda se to piše $x < y$ ili $x \prec y$ ili slično.

Nadalje mora biti ispunjen uslov *tranzitivnosti* ili *prelaznosti* »*relacije*« $<$: ako je $x < y$ i $y < z$, onda je $x < z$.

Ne smije biti $x \succ x$.

Kraće se kaže, da je skup S uređen pomoću relacije $\prec$, ili $<$ i slično već prema tome, kako smo označili relaciju uređivanja.

Ako za svaki par različitih članova x, y iz S vrijedi ili $x < y$, ili $y < x$, veli se, da je skup *potpuno uređen*.

Ako izričito ne kažemo drukčije, mi ćemo raditi samo s potpuno uređenim skupovima.

Često se mjesto

$$x < y \quad \text{ili} \quad x = y \quad \text{piše} \quad x \leq y$$

tako da $x \leq y$ znači ili $x < y$ ili $x = y$. Pa se govori o uređenju s obzirom na relaciju $\leq$.

§ 4.3. NEKOLIKO VRSTA UREĐENIH SKUPOVA

1. Dobro uređeni skupovi. Za tu vrstu uređenja uzor je skup N svih prirodnih brojeva, odnosno svaki skup prirodnih brojeva. N i svaki njegov njegov neprazan dio posjeduje svoj početni član.

Definicija. *Uređen skup je dobro uređen, ako on i svaki njegov neprazan dio posjeduje svoj prvi ili početni član.*

1.1. Već na pr. skup D svih cijelih brojeva nije dobro uređen, kad ga uređujemo po veličini, jer vidimo, da ovdje nema *najmanjeg* broja:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

Naravno, taj isti skup D može se dobro urediti na pr. ovako:

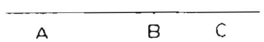
$$0 \text{ ispred } -1 \text{ ispred } 2 \text{ ispred } -3 \text{ ispred } 3 \ldots$$

No, to uređenje nije „prirodno uređenje po veličini" jer na pr. tu dolazi broj 0 ispred -1 ma da je $0 > -1$.

1.2. *Pogotovo skup racionalnih brojeva nije dobro uređen.* Jer na pr. ako je 2 racionalan broj, onda skup $Q(r, \cdot)$ svih racionalnih brojeva $> r$ nema prvog, t. j. najmanjeg člana. Stvarno, za svaki racionalni broj x, za koji je $r < x$ imamo i racionalni broj $\frac{1}{2}(r + x)$, a ovaj je broj između r i x, t. j.

$$r < \frac{1}{2}(r + x) < x.$$

1.3. *Nijedna uređena duž nije dobro uređena.* Neka se radi na pr. o duži AB (sl. 51.). Da li u toj duži neposredno poslije početka A ima kakva točka? Još jedamput ponovite pitanje! Zašto takva prva točka desno od A u duži $\overrightarrow{AB}$ ne postoji? Jer, kad bi takva točka C postojala, onda između A i C ne bi bilo nikakve točke. Pa bi se duž $\overline{AC}$ sastojala samo od dvije točke — krajeva A i C. To ne dopuštamo u matematici. Naime, mi bismo mogli promatrati pravac AB i smatrati ga brojevnim pravcem, kojemu je točka A ishodište koordinata, a točka C jedinična točka. Tad i točka s apscisom 1/2 leži na duži $\overline{AC}$ i to baš na sredini između A i C.



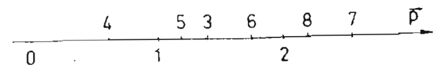
Sl. 51.

2. Gusti uređeni skupovi. Upravo vidjesmo, da *na pravcu nema susjednih točaka.* Kraće se kaže, da je pravac *gust skup.*

Definicija: *Uređen skup je gust, ako za svaki par različitih članova x, y iz skupa, skup sadrži bar još jednu točku, koja je između x i y.* Drugim riječima: *uređen skup je gust, ako nema susjednih članova.*

Na pr. *skup racionalnih brojeva je gust; skup cijelih brojeva nije gust. Pogotovo skup prirodnih brojeva nije gust, kad ga uređujemo po veličini.*

Jedno novo uređenje skupa N prirodnih brojeva. Smjestimo skup N na orijentiranom pravcu $\vec{p}$ ovako: neka točka 1 i 2 ostanu na svojim mjestima; stavimo 3 negdje između 1 i 2, a 4 ispred 1 pa idemo prema desno i položimo na pravcu $\vec{p}$ jednu točku svaki put kad prijeđemo već postavljen koji prirodan broj (sl. 52.); znači 5 dolazi između 1 i 3, 6 između 3 i 2, 7 iza 2; a sada idimo ulijevo, polažući na sličan način dalje prirodne brojeve. U tom novom poređenju vidimo, da je 3 ispred 2, 8 ispred 7 i t. d.

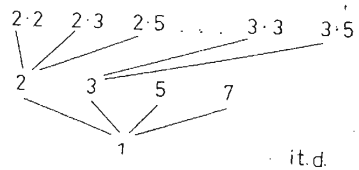


Sl. 52.

Da li je tako uređen skup N gust? Naravno! Ima li sada i početni član? Nema!

3. Mrežasto uređenje skupa N prirodnih brojeva. Uredimo skup N ovom relacijom »$\prec$ *biti pravi divizor od*«; prema tome $a \prec b$ se izgovara sada: »*a je pravi divizor od b*«. Na pr. $1 \prec 2 \prec 4$; nije $2 \prec 2$, ma da je 2 divizor od 2, ali je $2 = 2$. Da li je $2 \prec 3$? A $3 \prec 2$? Dakle se radi o jednom *nepotpunom uređenju* skupa N.

U tom uređenju prvi element je 1. U preostatku $N \setminus \{1\}$ ima bezbroj »*prvih*« članova; to su 2, 3, 5, 7, 11, 13, $\ldots$ (*svi prosti brojevi*); svaki od tih brojeva ima nadalje svoje neposredne sljedbenike; tako na pr. sljedbenici broja 2 čine skup $2P$, koji je sastavljen od svih produkata $2p$ (p primbroj); P označuje skup primbrojeva. Evo *stabla* ili *rodoslovlja* za to uređenje skupa N po »*djeljivosti*«, a ne po veličini:



4. Granasta uređenja. Promatrajmo skup S nizova dužine 1, 2, 3, 4, a sastavljenih od 0 i 1. Evo tih nizova:

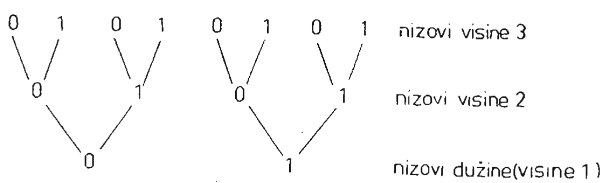
Dijadski nizovi dužina 1 jesu 0 i 1

Dijadski nizovi dužina 2 jesu 00, 01, 10 i 11

Dijadski nizovi dužina 3 jesu 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. i t. d.

Njih možemo urediti po relaciji $<$ koja kazuje »*biti početni komad od*«; tako pr. $010 < 0101$, jer vidimo, da je 010 upravo početni dio od niza 0101 pa se ovaj niz i dobije pripisivanjem znaka 1 u prom nizu 010.

To granasto uređenje možemo shematski predstaviti ovako



Dižući se odozdo duž crtica, polazimo svim mogućim članovima skupa S.

Na taj način vidimo, kako je raznoliko uređivanje skupova. Danas je teorija uređivanja skupova vrlo važna matematička nauka.

Prethodna uređenja se zovu linearna uređenja. Prelazimo na ciklička uređenja.

ZADACI: 1. Uredi po veličini ove brojeve: 3; 0; 5; —8; 4/5; 0,34; 0,341; 3/4; 7/5; 5/6.

2. Uredi alfabetski ove riječi: *Olovka, pero, knjiga, pernica, tinta, aritmetika, broj, brojevan, brojčan.* Učini to i u latinici i u ćirilici.

3. Ako u gornjem uređenju označimo s Lp, odnosno s $Ćp$ redni broj predmeta p u nizanju (uređivanju), odredi na pr. L (broj) i $Ć$ (broj). Da li je jasno, da bi ^{-}L značilo onda onu od gornjih riječi, koja je prva u alfabetskom latinskom uređenju (dakle je ^{-}L = aritmetika). Riješi jednakost $^{-}Lx = {}^{-}Ćx$.

4. Promotrimo ovu „šifru"

L	I	J	E	P	O	R	A	D	I	Š
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10,

kojom se uspostavlja tolikovanje skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = I\,10$ cifara i nekih slova. Cijena predmeta p_1, p_2, p_3, p_4 iznosi 154 Din, 252 Din, 309 Din i 500 Din. Napiši te cijene u gornjoj šifri i poređaj ih: 1) alfabetski, 2) po veličini.

5. Skup $\{0, 1\}^{\{0, 1, 2, 3\}}$ svih dijadskih nizova po 4 člana poređaj: 1) alfabetski, 2) po veličini brojeva, što ih nizovi predstavljaju (tako na pr. niz 0101 predstavlja broj $0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1$, t. j. 5).

6. Neka je $L = \{a, b, \cdots, z, ž\}$ uređen skup naše latinice. Što je $L^{\{0, 1\}}$. Da li je $ON \in L^{\{0, 1\}}$? Da li je $EN \in L^{\{0, 1\}}$. Zašto je $L^{\{0\}} = L$? Što bi bilo $L^{\{0, 1\}}$ $L^{\{0, 1\}}$? Da li je jasno, da su gotovo sve naše riječi vrlo mali dio „rječnika" $L_{21} = L^{I\,1} \cup L^{I\,2} \cup L^{I\,3} \cup L^{I\,20}$? Pritom je $I\,n = \{0, 1, 2, \cdots, n - 1\}$. Koliko riječi ima taj „rječnik" L_{21}? Na pr. $MAJKA \in L_{21}$, jer je $MAJKA \in L^{I\,5}$. Što bi bilo L_{30}, L_{50}, L_{100}?

Zamisli se u činjenicu, da su vjerojatno sve riječi svih jezika tek neznatni dio „rječnika" recimo L_{50} ili bar L_{100} (zaista je teško zamisliti, da bi koja riječ imala preko 50 odnosno preko 100 slova).

7. Promatraj skup $S = \{A, M, O, R\}$ te skupove $S!$ i S^S; uredi ih alfabetski! Navedi nekoliko naših riječi iz tih skupova. (Zašto je na pr. *Mara* $\in S^S \setminus S!$; sjeti se da $S!$ znači skup svih permutacija skupa skupa S).

8. Uredi alfabetski skup $\{0, 1\}^{I\,4}$. Uredi taj isti skup po »*glavnom propisu*«, koji kaže, da je $f < g$, ako je $fx < gx$ za *svako* promatrano x; u našem je slučaju $x \in I\,4$.

9. Niže navedeni naši šahisti br. 1 — 15 imali su u vremenu 01·01·1955 — 01·01·1958 ove rezultate:

	x_1	x_2	x_3	x_4	f
1. Đurašević	16	25	97	54	75,4
2. Fuderer	27	21	18	0	80.9
3. Gligorić	77	63	84	5	102,0
4. Ivkov	51	50	105	1	91.0
5. Janošević	12	22	73	39	74,4
6. Karaklajić	44	50	126	18	81,3
7. Marić	11	17	51	45	70.2
8. Matanović	44	47	78	1	93,4
9. Matulović	13	18	56	36	75,4
10. Milić	37	44	117	13	81,1
11. dr. Nedeljković	16	15	35	18	76,9
12. Pirc	29	34	75	17	72,8
13. Rabar	40	34	63	1	70,3
14. Udovčić	30	36	70	29	70,2
15. Trifunović	37	49	75	10	76,9

Stupci za x_1, x_2, x_3, x_4, označuju broj odigranih partija i to po redu: x_1: protiv velemajstora, x_2: protiv internacionalnih majstora, x_3: protiv nacionalnih majstora, x_4: protiv majstorskih kandidata.

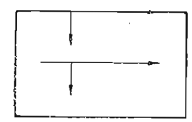
Svakom od tih lica l rednog broja 1 — 15 pripada određen »*velemajstorski rezultat*« $f(l)$ po ovom obrascu:

$$f(l) = \frac{100\,a(l)}{b(l)}, \text{ gdje je } a(l) = \frac{1}{2}x_2(l) + \frac{7}{10}x_2(l) + \frac{8}{10}x_3(l) + x_4(l),\ b(l) = x_1(l) + x_2(l) + x_3(l) + x_4(l).$$

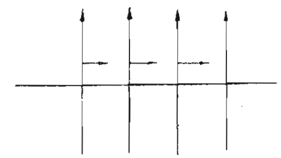
Tako na pr. $f(3) = 102{,}0$. Ako se prema veličini brojeva $f(l)$ određuje rang-lista, dokaži, da je broj 3 prvak, jer je $f(3) = 102{,}0$, a za sve ostale igrače broj f je < 102. Odredi potpunu rang-listu i dokaži, da ona glasi:

$102{,}0 = f3, f8, f4, f6, f2. f10, f15, f11, f1, f9, f5, f12, f13, f14, f7 = 70{,}2$.

10. Opiši kako se određuje rang-lista kod raznih takmičenja na pr. u nogometu (bolja „gol-diferencija"), tenisu, atletici, padobranstvu, šahu i t. d.



Sl. 53.

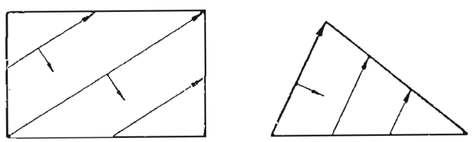


Sl. 54.

11. *Uredi ravninu i prostor alfabetski.* To znači, da u ravnini točka (x, y) bude ispred točke (x', y') onda i samo onda, ako je ili $x < x'$ ili ako je $x = x'$ i $y < y'$. A u prostoru, točka (x_1, x_2, x_3) neka bude ispred točke (x_1', x_2', x_3') onda i samo onda, ako je $x_e < x_e'$, gdje je e prvi indeks, za koji je $x_e \neq x_e'$. Da li vidiš, da geometrijski

(sl. 53.) to znači (za ravninu), da ravninu hvatamo kao uniju pravaca $x = konst.$ i da pravac $x = a$ bude „ispred" pravca $x = a'$, ako je $a < a'$; u drugu ruku svaki pravac orijentiramo »*odozdo*« prema »*gore*«.

12. Opiši riječima shematsko uređenje pravokutnika (sl. 54.). Ima li to uređenje svoju početnu i svoju završnu točku?
13. Isto pitanje za ova uređenja pravokutnika i trokuta (sl. 55.).
14. Uredi točke kocke siječući je potpuno uređenim paralelnim ravninama.



Sl. 55.

§ 4.4. CIKLIČKO ILI KRUŽNO UREĐENJE

1. Primjer s danima sedmice. Dnevni život pokazuje, da imamo i drugih poredaka osim linearnih.

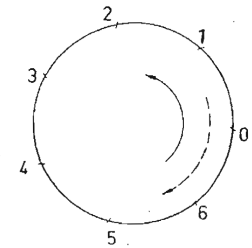
Tako na pr. trajanje od jedne sedmice bilježimo tako, da nižemo dane:

Nedjelja, ponedjeljak, utorak, srijeda, četvrtak, petak, subota ili kraće

	0	1	2	3	4	5	6
ili							
	1	2	3	4	5	6	0
ili							
	2	3	4	5	6	0	1
	3	4	5	6	0	1	2
	4	5	6	0	1	2	3
	5	6	0	1	2	3	4
	6	0	1	2	3	4	5

To kružno redanje možemo predočiti ovako:

Strijelica pokazuje, kako se dani nižu. A možemo početi na svakom mjestu — uvijek ćemo iscrpsti sve članove skupa (sl. 56.).



Sl. 56.

Gornje nizanje je uobičajen i prirodan poredak dana jedne sedmice. Suprotan bi poredak bio:

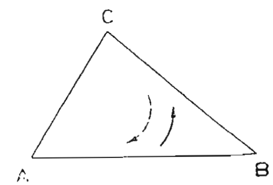
Subota, Petak, Četvrtak, Srijeda,
Utorak, Ponedjeljak, Nedjelja

odnosno šiframa:

6, 5, 4, 3, 2, 1, 0.

Taj je poredak na slici prikazan iscrtkanom strijelicom; ona je poput smjera kretanja kazaljki na satu.

2. Orijentacija kruga. Odmah sa slike očitavamo, kako imamo dva smjera obilaženja po obodu kruga: *u smjeru kazala na uri* (*to je takozvani negativni smisao ili orijentacija* — 1) i *u smjeru obrnutom nego kazalo na uri* (*pozitivni smisao* ili *orijentacija* + 1); kod *pozitivnog* obilaženja ostaje površ kruga na *lijevoj* strani. Sasvim se slično orijentira trokut $A\vec{B}C$ i to ili $A\overset{\leftarrow}{B}C$ Na sl. 57. je prvo pozitivno, a drugo negativno.



Sl. 57.

Svaki konveksni poligon orijentira se na sličan način: na jedan način ili na suprotan način. *Pozitivni smisao* obilaženja je onaj, kod kojeg poligon leži na *lijevoj* strani.

Orijentacija trokuta dolazi do izražaja i kad se radi analitički: ako radimo u pravokutnom Kartezijevom sistemu koordinata, pa ako se radi o trim točkama

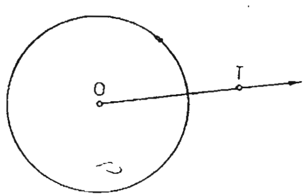
$$A_1 = (x_1, y_1), \quad A_2 = (x_2, y_2), \quad A_3 = (x_3, y_3).$$

Onda znamo, da je dvostruka poršina toga trokuta:

$$\star \quad 2\Delta(x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3) = x_1(y_2 - y_3) + \\ + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

Taj je broj ili > 0 ili 0 ili < 0; ako je on pozitivan (negativan), onda to znači, da je vrh A_3 lijevo (desno) od orijentiranog pravca $\overline{A_1 A_2}$; ako je taj broj $= 0$, onda to znači, da se sve tri točke A_1, A_2, A_3 nalaze na istom pravcu. Prema tome, gornja formula daje ne samo površinu trokuta $A_1 A_2 A_3$, nego i to da li je redoslijed, A_1, A_2, A_3, kao onaj kod kretanja kazala na uri (broj $\star$ je negativan) ili je taj redoslijed obrnut (broj $\star$ je pozitivan).

3. Orijentacije svi krugova, ravnine, ... Time što orijentiramo krug, možemo orijentirati i čitavu ravninu toga kruga. Naime, smisao orijentacije kruga nadaje i smisao rotacije kruga oko njegova središta O, a time i smisao rotacije ravnine oko toga središta O kao i oko svake druge točke T u ravnini (sl. 58.). Jer uz promatranu rotaciju oko O zrake $\overrightarrow{OT}$ u zadanom smislu imamo kao posljedicu i suglasnu rotaciju oko T pripadne zrake s početkom u T.



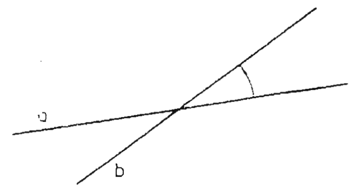
Sl. 58.

Uostalom, primjetimo ovo: ako imamo dva jednaka kruga k, m s istim orijentacijama, onda se jedan može dovesti u prekrivanje s drugim pomičući ih u njihovoj zajedničkoj ravnini! Da li je to moguće, ako su ti krugovi k, m suprotno orijentirati? Nije moguće! No, zrcalenjem na kojem pravcu ravnine, prelazi orijentacija kruga u suprotnu!

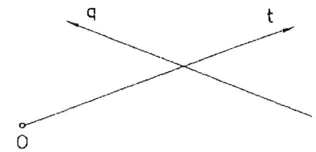
4. Kako se obično ravnina ciklički uređuje? Zapamtimo, da je cilj cikličkog uređivanja u ravnini da znamo pri

putovanju tom ravninom, što je lijevo od putanje, a što desno od putanje.

Kao što uređen par točaka A, B pravca p određuju orijentaciju od A prema B na pravcu p, tako i uređen par dvaju pravaca a, b, koji se sijeku, određuje orijentaciju ravnine tih pravaca, i to ovako: *oko sjecišta tih pravaca rotira jedan pravac u drugi najkraćim putom!* Prema tome, vidimo, da uređeni parovi a, b te b, a daju *suprotne* orijentacije ravnine, u kojoj ti pravci leže (sl. 59.).



Sl. 59.

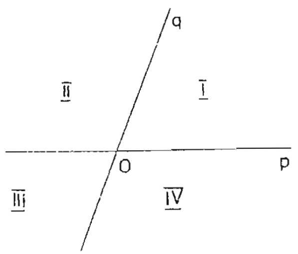


Sl. 60.

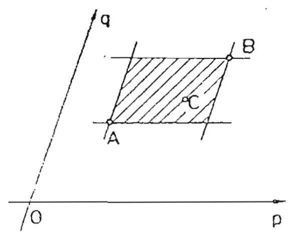
Evo još jednog načina orijentiranja ravnina: svaka zraka Ot prdstavlja nešto orijentirano; ta se orijentacija prenosi i na pravac, koji nosi zraku Ot kao i na svaki paralelni pravac. Svaki pravac q, koji siječe pravac $\overrightarrow{Ot}$ orijentiramo tako, da teče zdesna od pravca $\overrightarrow{Ot}$ na lijevu poluravninu pravca $\overrightarrow{Ot}$. Time je ravnina orijentirana (sl. 60.).

Možemo reći i ovako. Neka je zadana ravnina r; tad svaki pravac p, koji je u r, rastavlja tu ravninu u dvije poluravnine tako, da uklanjanjem pravca p te dvije poluravnine više nemaju zajedničkih točaka. *Orijentacija ravnine sastoji se u mogućnosti da znamo koja je od tih polovina lijeva (pozitivna), a koja desna (negativna).* Ako to znamo, tad je i pravac p orijentiran; i obrnuto: ako je pravac p orijentiran, tad znamo po dogovoru, da mu je pozitivna poluravnina nalijevo.

5. Linearno uređenje ravnine. Kod *linearnog uređenja ravnine* treba znati što se nalazi *lijevo*, a što *desno* od *svake* konkretne točke T, uzete u ravnini. To možemo postići ovako: promatrajmo uređen par pravaca p, q, koji se sijeku (sl. 61.): neka je $2\,(p, q)$ ravnina, što je pravci p, q određuju. Time se ravnina raspada na uniju pravaca p, q i na preostala četiri otvorena kvadranta I, II, III, IV, koji su ciklički smješteni kao na sl. 61. Veli se, da je kvadrant I desno od sjecišta O, kvadrant III lijevo od O, a nijedna preostala točka nije ni lijevo ni desno od O. Kad to znamo, onda i za svaku drugu točku T ravnjne $2\,(p, q)$ možemo odrediti pripadni kvadrant $I(T)$, $II(T)$, $III(T)$ i $IV(T)$ vukući kroz T paralelu s p, odnosno s q.



Sl. 61.



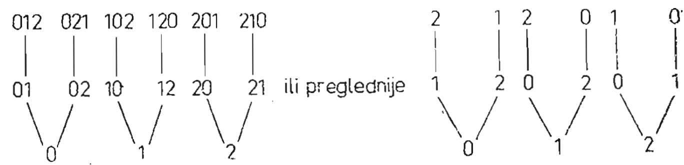
Sl. 62.

Na sl. 62. su naznačene dvije točke A, B; očigledno je A lijevo od B; točka C je desno od A i lijevo od B; interval $A\,B$, t. j. skup svih takvih točaka, koje su desno od A i lijevo od B upravo je osjenčani otvoreni paralelogram, kojemu je duž $\overline{A\,B}$ jedna dijagonala. Obod paralelograma i taj interval nemaju nikoje točke zajedno.

Specijalno, ako se radi o koordinatnoj ravnini i analitičkoj oznaci (x, y) točaka, tad će točka (x, y) biti „lijevo" od točke (x', y') onda i samo onda, ako je $x < x'$, $y < y'$, Naravno, može se uređenje provesti i drukčije.

ZADACI: 1. Promatraj kakav niz, recimo niz $a = 2, 3, 5, 2,4,5$; promatraj njegove početne komade: 2; 2 3; 2 3 5; 2352; 23524; 235245; ovaj skup uređujemo prema relaciji *»biti početni komad od«* Označimo sa $T\,a$ tako uređen skup; naravno, niz a je završni član toga skupa $T\,a$. Za Za svaki skup S nizova možemo s $T\,S$ označiti uniju svih $T\,a$, kad a prolazi kroz S; skup $T\,S$ uređujemo po istoj relaciji kao maloprije naime: „biti početan komad od".

2. Promatraj skup $\{0, 1, 2\}! = \{I\,3\}!$ Svih permutacija brojeva 0,1,2 te njihovo pripadno stablo $T\,\{0, 1, 2\}!$. Shematski, izgleda ovo ovako:



Slično za skup $I\,5$, $I\,6$, $I\,12$, N i bilo koji skup S.

3. Predoči u obliku stabla skup $T\,\{0, 1, 2, 3\}^{\{0,1,2\}}$, a u vezi „varijacija trećeg reda elemenata 0, 1, 2, 3, 4".

4. Preuredi skup N tako da neposredno poslije svakog n dolazi upravo broj: 1) $n + 2$, 2) $n + 3$, 3) $n + 5$, 4) $n + 10$, 5) $n + 50$, a da se inače u poredak ne dira.

5. Formiraj jedno uređenje skupa N prirodnih brojeva po redu ovako: uzmi jedan član iz N, pa jedan član iz preostatka, pa jedan član iz preostaska i t. d. Na pr. uzmi 1 pa 2 pa 2^2 pa 2^3 ... pa 3 pa 3^2 pa 3^3 pa 3^4, ... pa 5 pa 5^2 pa 7 pa 7^2, ... pa 11, pa 11^2, ... Vidimo, da se u tom slučaju skup N silno rastegao. No, još čitavo N nije napisano, jer nema tu još na pr. broja $2 \cdot 3$. Nastaviti ćemo proces ređanja tako da, pomnoži-

mo svaki član svakog ω-niza sa svakim članom svakog prethodnog ω-niza[1]: tako dolaze ovi nizovi:

niz $2 \cdot 3, 2^2 \cdot 3, 2^3 \cdot 3, 2^4 \cdot 3, \cdots$ (kraće: $2^N \cdot 3$)

pa niz $2^N \cdot 3^2$ pa $2^N \cdot 3^3, 2^N \cdot 3^4, \cdots$

Poslije svega toga prelazi se, u onom što je gotovo, na idući ω-niz: 5^N i množimo sve prethodne ω-nizove. I t. d. I. t. d.

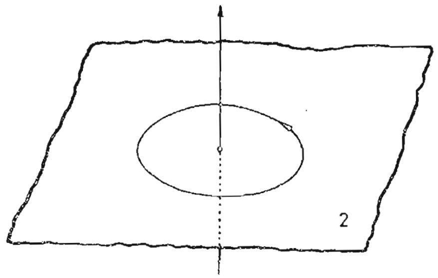
Da li je jasno, da se na taj način može doći do *svakog* prirodnog broja? Da li je jasno, da je taj osebujni poredak skupa prirodnih brojeva ipak jedno »*dobro uređenje*« — njegova je dužina vrlo velika. Da li imaš ikakav pregled o tom uređenju skupa N?

6. Hessenberg je skup N uredio ovako: broj 1 ostavio je na miru; za svaka druga dva različita prirodna broja a, b promatrao je potpuno određen niz primbrojeva $a_1, a_2, \cdots, a_\alpha$, kojima je produkt a te primbrojeve $b_1, b_2, \cdots, b_\beta$, kojim je produkt $= b$: stavimo, da je $a H b$ onda i samo onda, ako je $\alpha < \beta$, odnosno ako je $\alpha = \beta$, te ako niz $a_1, a_2, \cdots, a_\alpha$ leksikografski prethodi nizu $b_1, b_2, \cdots, b_\beta$. Uporedi to Hessenbergovo uređenje skupa N s uređenjem iz zad. 5.
7. Uredi skup N ovako: svakom prirodnom broju n pripada određen skup $P(n)$ primfaktora; taj je skup sastavljen od primbrojeva, s kojima je n djeljivo. Stavimo, da je $n <_p n'$ onda i samo onda, ako broj n ima manje primfaktora od broja n'; ako prirodni brojevi imaju jednako mnogo primfaktora, neka tada $n <_p n'$, znači, da je $n < n'$. Da li je tim propisom skup N dobro uređen? (ukoliko i u tom uređenja broj 1 smatramo početnim njegovim članom)?
8. Promatraj prirodni niz $p = 2, 3, 5, 7, 11, \cdots$ svih *prostih* brojeva; to znači, da je $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, i t. d. Svakom prirodnom broju n odredi niz $f n = n_1, n_2, n_3 \cdot n_{k\,1}$ tako da n bude djeljivo s $p_k^{n_k}$, ali ne s $p_k^{n_{k+1}}$; zašto na pr. broju 2 pripada niz $f\,2 = 1, 0, 0, 0, \cdots$, a broju 12 niz $f\,12 = 2, 1, 0, 0, \cdots$ i isto tako $f\,1 = 0, 0, 0 \cdots$.
Na taj način imamo skup $f N$ nizova $f n$. Uredi $f N$ alfabetski ili leksikografski. Prenesi to uređenje s $f N$ na N; to znači, da ćemo smatrati da je prirodni broj n ispred prirodnog broja n', ako je šifra $f n$ u leksikografskom poretku ispred „šifre” $f n'$. Da li je na taj način skup N dobro uređen?
9. Promatraj skup $R!$ svih permutacija skupa R realnih brojeva. Zanimljivo je, da ne umijemo taj skup $R!$ *potpuno* urediti. Pogotovo ne umijemo urediti skup R^R svih jednoznačnih preslikavanja od R u R.
Tu je glavna poteškoća, što skup R ne umijemo *dobro* urediti. Jer, ako je skup A potpuno uređen, a skup B *dobro* uređen, onda se skup A^B može potpuno urediti i to baš na *leksikografski način* (pokušaj to dokazati).
10. Promatraj nekoliko krivulja na pr. sinusoidu, kosinusoidu, tangensoidu, parabolu, logaritamsku krivulju te pravce $y = a x$. Naznači jedno potpuno uređenje skupa svih tih »*predmeta*«. Ima li na pr. koji razlog, da u početku bude *tg* ispred *cos*? Ili pravac $y = 3x$ ispred krivulje $y = \log x$!

[1] Kratkoće radi možemo svaki beskonačan niz $f_1, f_2, \ldots$ zvati ω-*nizom*.

§ 4.5. ORIJENTACIJA U PROSTORU

Svaka ravnina 2 (recimo ravnina šake) dijeli prostor na dva poluprostora tako, da se iz jednog dijela ne može prijeći u drugi, a da se ne prođe kroz ravninu *2*. *Orijentirati prostor znači odrediti,* koja je polovina nalijevo, a koja nadesno od ravnine *2*, ili govoreći više analitički: *treba odrediti, kojoj ćemo* *polovini pridijeliti broj* + 1 (*lijeva polovina*), *a kojoj* — 1 (desna polovina). Svaki pravac p, koji ide iz jedne polovine u drugu, orijentiramo tako, da ulazi u + 1 — polovinu, t. j. p dolazi zdesna od ravnine i ide u lijevu polovinu.

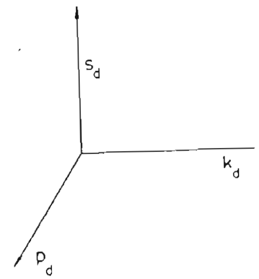


Sl. 63.

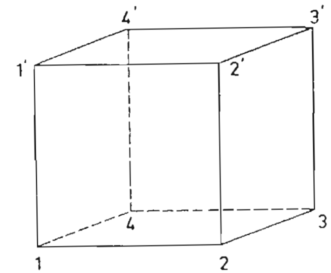
To ujedno znači ovo: ako orijentirani pravac p probada neku ravninu 2, onda je time određena + 1 — polovina kao i — 1 — polovina prostora, što se dobije odstranjujući ravninu 2 (sl. 63.).

Gledajući na samu ravninu 2 iz pripadne + 1 — polovine prostora, može ravnina biti orijentirana s + 1 ili — 1. Tako na pr. ako na lijevoj ruci ispružimo palac p_l, kažiprst k_l i srednji prst s_l tako, da je svaki od tih prsta okomit na preostala dva, tad uređen par p_l, k_l daje orijentaciju, koja se s vrha ispruženog srednjeg prsta s prikazuje kao kretanje kazaljki na satu. Uređena trojka p_l, k_l, s_l na *lijevoj* ruci daje »*lijeva orijentaciju prostora*«. Ista uređena trojka prstiju p_d, k_d, s_d na *desnoj* ruci daje *desnu orijentaciju prostora*. Ako trojku $p_l\, k_l\, s_l$ gledamo u ogledalu, izgleda nam kao desna trojka p_d, k_d, s_d i uopće: lijeva ruka ima za svoju sliku u ogledalu kao premještenu desnu ruku. Gledaj svoju desnu ruku i ogledalnu sliku lijeve ruke — između njih nema razlike.

U matematici se služimo skoro isključivo orijentacijom prostora, što odgovara prstima p_d, k_d, s_d desne ruke ruke. Prema tome dlan desne ruke pokazuje prema + 1 — polovini prostora, što odgovara ravnini dlana. To je + 1 — orijentacija prostora: ako desni svakodnevni šaraf (vijak, svrdao, burgiju) utiskujemo tako, da idemo od prve poluosi u drugu poluos, onda šiljak šarafa pokazuje smjer treće poluosi (sl. 64.). Kod — 1 — orijentacije smjer svrdla pokazuje negativni smjer treće poluosi.



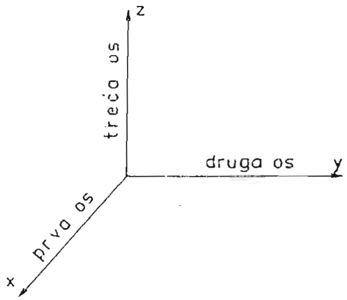
Sl. 64.



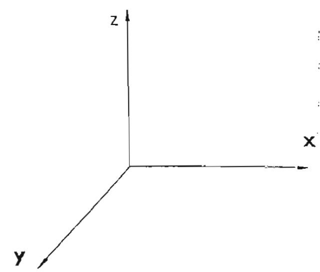
Sl. 65.

Ta dva skupa po tri orijentirane i okomite zrake ili jednake duži ne mogu se dovesti u međusobno prekrivanje. Tako na pr. vrhovi kocke daju povoda da razmotrimo sve pripadne orijentirane trobride (sl. 65.); tako na pr. trobrid 1 (2 4 1′), t. j. trojka $\overrightarrow{1\,2}$, $\overrightarrow{1\,4}$, $\overrightarrow{1\,1'}$ daje + 1 — orijentaciju; trobrid 2 (1 3 2′) daje — 1 — orijentaciju prostora. Svaka druga uređena trojka bridova iz istog vrha kocke kongruentna je ili s 1 (2 4 1′) ili s 2 (1 3 2′).

Desni odnosno lijevi Dekartov koordinatni sistem izgledaju ovako (sl. 66. i 67.):



Sl. 66. (desni)



Sl. 67. (lijevi)

§ 4.6. JEDNO NEPOTPUNO UREĐENJE PROSTORA

Što u prostoru znači biti lijevo ili desno s obzirom na jednu točku? Promatrajmo jedan Dekartov koordinatni sistem u prostoru: radi se o uređenoj trojki od tri brojevna pravca: x — *os*, y — *os*, z — *os* s istim početkom O (sl. 66.). Time su određene i 3 ravnine: $x\,y$ — ravnina, $y\,z$ — ravnina i $z\,x$ — ravnina. One dijele čitav prostor na 8 dijelova; iz jednog dijela se ne može u drugi, ako se ne prođe kroz koju od tih ravnina. *Onaj dio prostora, na koji se naslanjaju sve tri pozitivne poluosi, čini skup točaka, za koji se kaže da je desno od zajedničkog ishodišta.* Simetrično prema O nalazi se skup točaka, za koji se kaže, da je *lijevo* od O. Analogno se određuje i za *svaku* drugu točku T prostora ono, što je desno od T i ono, što je *lijevo* od T: dovoljno je koordinatni sistem $O(x, y, z)$ translatirati za vektor $\overrightarrow{OT}$: ono u što dolaze točke desno od O čini skup točaka, za koji se kaže, da su desno od T.

Ako je točka A lijevo od točke B, možemo pisati $A \prec B$; skup svih točaka T, za koje je $A \prec T \prec B$, zove se interval AB; taj interval je nutrina paralelepipeda, kojemu je $\overline{AB}$ dijagonala, a bridovi su paralelni s koordinatnim osima.

POGLAVLJE 5.

NEKOLIKO VRSTA SKUPOVA I FUNKCIJA

Upoznat ćemo se s nekoliko vrsta skupova i funkcija, što se nadovezuju na prirodan način na ono, što se čuje svakodnevno. Specijalno, promatrani skupovi mogu biti i prostorni.

§ 5.1. OTVORENI SKUPOVI

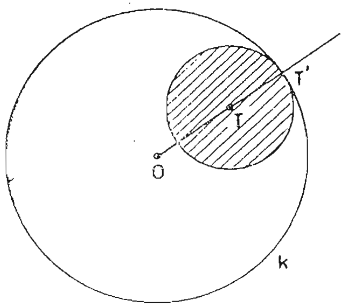
Kod kugle razlikujemo njenu *površ* i preostali tzv. *otvoreni dio kugle*. Slično je kod kruga i duži. Duž ima dva kraja, t. j. obod duži se sastoji od 2 točke. Zanimljivo je ovo svojstvo tih skupova: Svaka točka otvorene duži $\overline{AB}$ je središte jedne duži d', koja čitava leži u d.

Sl. 68.

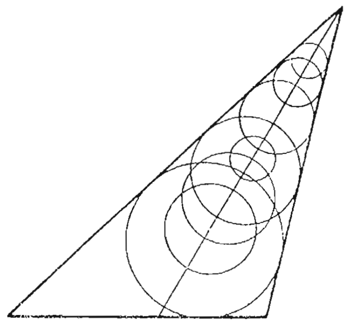
Stvarno, ako je T središte otvorene duži $\dot{A}\dot{B}$, onda se može uzeti $d' = d$. Ako točka T nije u središtu duži $\overline{AB}$, nego je na pr. $|AT| < |TB|$; pa neka je točka A' tako određena, da bude $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{TA'}$; tad je T središte duži $\overline{AA'}$, a čitava je ta otvorena duž smještena u $\overline{AB}$ (sl. 68.).

Analogno svojstvo vrijedi za otvoren krug i otvorenu kuglu. Na pr. za krug: svaka točka T iz otvorena kruga k središte je jednog kruga, koji leži u k.

Ako je T u središtu O kruga k, možemo uzeti $k' \equiv k$; ako T nije u središtu, promatrajmo zraku OT; neka je T' točka, u kojoj taj pravac presijeca k; tad je otvoreni krug sa središtem u T i polumjerom TT' čitav smješten u k (sl. 69.).



Sl. 69.



Sl. 70.

D e f i n i c i j a. *Kaže se, da je interval (krug, kugla) okolina svojeg središta.*

Općenito, veli se, da je skup S s pravca (ravnine, prostora) okolina točke T, ako S sadrži jedan interval (krug, kuglu), kojoj je T središte.

Tako na pr. svaki krug je okolina svake svoje točke, koja ne leži na obodu.

D e f i n i c i j a. *Veli se, da je skup S okolina skupa M, ako je taj skup S okolina svake točke skupa M.*

P r i m j e r. Nutrina svakog trokuta je okolina svake otvorene težišnice toga trokuta. To je otuda, što se oko svake točke težišnice — izuzev njenih krajeva — može opisati čitav kružić sadržan u nutrini trokuta (sl. 70.).

Sada možemo postaviti definicije otvorenih skupova.

D e f i n i c i j a o t v o r e n i h s k u p o v a. *Skup S je otvoren, ako je on okolina svake svoje točke.* Drugim riječima: skup S točaka na pravcu (ravnini, prostoru) *je otvoren, ako ima svojstvo, da svaka točka iz S leži u jednoj svojoj okolini, koja je čitav.. u skupu S. Prazan skup smatramo otvorenim.*

Ako skup nije otvoren, kažemo da je *neotvoren.*

Opća oznaka za otvoren skup je G, pa se govori o *G-skupovima*[1] misleći pritom, da se govori o *otvorenim skupovima.*

Što dakle znači, da jedan ravninski skup S *nije otvoren?* To znači, da za *nekoju* točku $T \in S$ i krug k sa središtem u T vrijedi izreka: k nije u S, t. j. k sadrži bar jednu točku izvan S.

Riječ »*otvoren*« navodi nas i na riječ *zatvoren.* Međutim, u matematici riječ »*zatvoren*« nije isto, što »*neotvoren*«. Tako na pr. zatvorena duž znači, da *oba* njena kraja leže u duži a otvorena duž znači, da *nikoji* kraj ne leži u duži. Isto tako: *zatvoren krug* znači, da *čitav* obod pripada krugu, *otvoren krug* znači da *nijedna* točka s oboda ne pripada krugu. A ako neke točke oboda krugu priklopimo, a druge uklonimo, onda krug nije ni otvoren ni zatvoren.

Da li je presjek od dva otvorena skupa opet otvoren skup?

A od tri otvorena skupa?

Da li je jednočlan skup $\{T\}$ otvoren? Nije! A ipak je $\{T\}$ presjek od otvorenih krugova oko T s radiusom $1, 2^{-1}, 3^{-1}, \cdots$

Kako stvar stoji s unijom otvorenih skupova? Ona je otvorena!

Na taj način imamo

T e o r e m 5.1.1. *Presjek od 2, 3, $\cdots$ otvorenih skupova opet je otvoren skup.*

[1] Početno slovo njemačke riječi *Gebiet* — *oblast.*

Unija od proizvoljno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup.

Presjek od beskonačnog niza G-skupova ne mora biti G-skup.

§ 5.2. ZATVORENJE ILI PROSTORNOST SKUPA

Definicija. Zadan je je skup S na pravcu (u ravnini, u prostoru); zatvorenje (adherencija ili prostornost) skupa S sastoji se od svih točaka x, kojima *svaka* okolina $O(x)$ sadrži nešto iz S, t. j. $O(x) \cap S \neq \emptyset$. Zatvorenje skupa S označuje se sa $\overline{S}$.

Drugim riječima, ako za neki predmet x znamo, da za *svaku* njegovu okolinu Ox vrijedi $Ox \cap S \neq \emptyset$, onda je $x \in \overline{S}$ pa se kaže, da se x *dodiruje* skupa S. I obrnuto, ako je $x \in \overline{S}$, onda to upravo znači, da je $Ox \cap S \neq \emptyset$ za **svaku** okolinu od x. Tu je vanredno važno naglasiti neodređenu zamjenicu ili kvantor »*svaki*«.

Tako na pr. zatvorenje *otvorenog* intervala brojeva od 0 do 1 jest pripadni *zatvoren* interval, jer *svaki* interval oko *svakog* broja b, za koji je $0 \leq b \leq 1$, sadrži bar jedan broj između 0 i 1. Za svaku naime preostalu točku x pravca postoji oko x bar jedan interval, koji nema ništa iz intervala od 0 do 1.

Primjer. Odredimo prostornost ili zatvorenje $\overline{Q}$ skupa Q svih racionalnih brojeva.

$\overline{Q} = R =$ skup svih realnih brojeva, jer za *svaki* realni broj x i za *svaku* okolinu $O(x)$ od x vrijedi $O(x) \cap Q \neq v$.

U vezi s prelazom od X na $\overline{X}$, na pr. u ravnini 2, imajmo na umu, da je i $X \subseteq 2$ i $\overline{X} \subseteq 2$. Podsjetimo se da $P2$ znači skup svih dijelova ravnine 2. Prema tome i $X \in P2$ i $\overline{X} \in P2$. Na taj način imamo, stvarno, *preslikavanje* $^{-}$ *skupa P 2 u sama sebe.*

Slično je sa zatvorenjem skupova s kakvog pravca 1 ili trodimenzionalnog prostora 3: zatvorenje je određeno jednoznačno prestikavanje skupa $P1$ u sama sebe, odnosno skupa $P3$ u sama sebe.

§ 5.3. ZATVORENI SKUPOVI ILI F-SKUPOVI

To su rješenja relacije $X \supseteq \overline{X}$. Drugim riječima: *Veli se, da je skup S zatvoren*, ili *da je F-skup, ako on obuhvata svoje zatvorenje* (naravno, da može biti i $X = \overline{X}$).

Prazan skup smatramo, da je i zatvoren i otvoren.

Tako na pr. *zatvorena duž* $\overline{AB}$ je zatvoren skup i s obzirom na pravac AB, i ravninu kroz AB i čitav prostor. Stvarno, za svaku drugu točku T, koja ne leži u zatvorenoj duži $\overline{AB}$, može se naći jedna A |——·——| B okolina $O(T)$, koja nema ništa od $\overline{AB}$, t. j. $O(T)$ leži u preostalom dijelu pravca (ravnine, prostora), što se dobije uklanjajući duž $\overline{AB}$. A to znači, da je taj preostatak *otvoren skup*. Na isti se način dokazuje:

Teorem 5.3.1. *Komplement zatvorena skupa je otvoren skup; komplement otvorena skupa je zatvoren skup.*

Pa neka je X zatvoren skup, a CX njegov komplement; treba dokazati, da za *svaku* točku $T \in CX$ postoji neka okolina $O(T)$ sa svojstvom $O(T) \cap X = \emptyset$. No, kad to ne bi bilo istina, značilo bi to, da bi *svaka* okolina $O(T)$ od T sadržavala *nešto* i iz X; a to po definiciji zatvorenja $\overline{X}$ značilo bi, da je $T \in \overline{X}$; no $\overline{X} \subseteq X$, jer je X zatvoreno; dakle bi bilo $T \in X$, što je u protivnosti s pretpostavkom $T \in CX$. Dakle je CX otvoren skup.

Slično se dokazuje, da je komplement G-skupa zatvoren skup.

Primjer. Parabola $y = x^2$, hiperbola $y = x^{-1}$, sinusoida, tangensoida su *zatvoreni ravninski skupovi*.

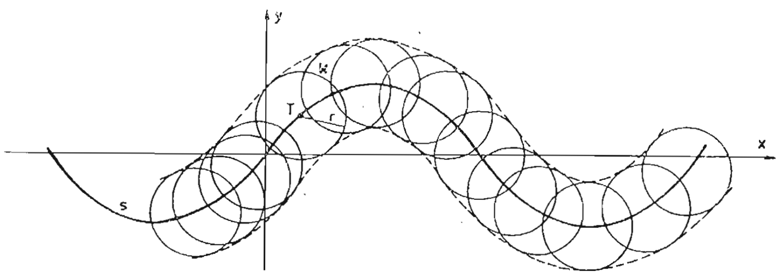
Slično kao kod teorema 5.1.1. imamo ovdje teorem, koji iz 5.1.1. nastaje *dualno*: permutiraju se riječi: *otvoren—zatvoren, unija—presjek*:

Teorem 5.3.1. *Unija od 2, 3, 4, $\cdots$ F-skupova opet je F-skup. Presjek od proizvoljno mnogo F-skupova opet je F-skup. Unija od beskonačnog niza F-skupova ne mora biti F-skup.*

Promatrajmo na pr. sinusoidu s; za zadan broj r, označimo s $k(s; r)$ »*krug kojem je sinusoida središte, a r radius*«: to je unija svih otvorenih krugova sa središtem T na s i radiusom r:

$$k(s, r) = \bigcup_{T \in s} k(T; r).$$

Naravno $k(s, r)$ je otvoren skup: to je otvorena pruga širine $2r$, kojoj je sinusoida srednja linija (sl. 71.). Presjek ovih „krugova" $k(s; n^{-1})$, kad n prolazi skupom N prirodnih brojeva, upravo je sama sinusoida s, a to je zatvoren skup.



Sl. 71.

Sasvim slično stvar vrijedi za svaki *F-skup* S: Svaki *F-skup* S jest presjek niza otvorenih skupova $k(S; n^{-1})$ $(n \in N)$, t. j. svaki F-skup jest određen G_δ-skup.

I dualno: svaki G-skup je određen F_σ-skup.

§ 5.4. DERIVAT SKUPA

Pogledajmo skup N^{-1} svih brojeva oblika n^{-1} $(n \in N)$, t. j. $N^{-1} = \{1^{-1}, 2^{-1}, 3^{-1}, \cdots\}$. Uz taj skup nameće se sam po sebi broj 0, ma da 0 nije u N^{-1}. Stvarno, *svaka okolina* broja 0 *obuhvata bezbroj* članova skupa N^{-1}. Kaže se kraće: 0 *je gomilište* ili *točka nagomilavanja skupa* N^{-1}.

Definicija. *Ako je zadan skup S, tad se svaka točka, kojoj* **svaka** *okolina sadrži beskonačan dio skupa S, zove gomilište* ili *točka (član, jedinka) nagomilavanja skupa S. Svaka točka, koja nije gomilište skupa S, zove se izolirana točka u odnosu na skup S.*

Skup svih gomilišta skupa S zove se derivat ili *izvod skupa S*. Derivat skupa S označuje se s

$$DS \quad \text{ili} \quad D_e S.$$

Primjer 1. Neka Q označuje skup svih racionalnih brojeva. Odredimo DQ. Dokažimo, da je $DQ = R =$ skup svih realnih brojeva.

Pa neka je x bilo koji realan broj; interval od $x - 1/n$ do $x + 1/n$ obuhvata beskonačno mnogo racionalnih brojeva i to za svako $n \in N$. A to upravo znači, da je $x \in DQ$. Dakle je R dio skupa DQ. No, ne može biti ništa u $DQ \setminus R$. Jer, za svaku točku T ravnine ili prostora izvan pravca p, na kojem je R, ima bar jedna okolina od T, koja nema nijedne točke s pravca p pa dakle niti iz Q.

§ 5.5. SAVRŠENI SKUPOVI

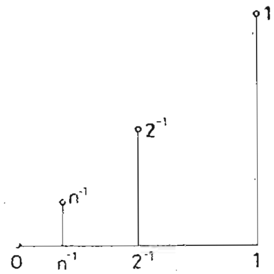
Pogledajmo elementarne skupove, kao što je na pr. obod trokuta, kruga i sl. Da li je koja točka toga kruga *izolirana*? Nije! Dakle je $S \subseteq DS$. A da li vrijedi dualno. t. j. da li je $S \supseteq DS$? T. j. da li skup S sadrži svako svoje gomilište? Sadrži! Dakle je za te skupove S ispunjena jednakost

$$S = DS.$$

Takvi skupovi zovu se *savršeni* ili *perfektni skupovi.*

Definicija. *Skup je savršen, ako se podudara sa svojim derivatom.*

Primjer. Promatraj zatvorene duži okomite na 0 1 kao na sl. 72.; dužina im je po redu 1, 2^{-1} 3^{-1}, . . . neka je S unija svih tih duži. Da li je taj skup S savršen? T. j. da li je $S = DS$, t. j. i $S \subseteq DS$ i dualno $S \supseteq DS$?



Sl. 72.

Relacija $S \subseteq DS$ vrijedi, t. j. iz $x \in S$ slijedi $x \in DS$. Stvarno, ako je $x \in S$, onda je x određena točka neke promatrane duži d, pa je dakle $x \in Dd$, a tim prije $x \in DS$. Da li vrijedi i dualno? T. j. da li je $DS \subseteq S$? Nije! Jer, točka O jest gomilište skupa S, ma da ne leži u S. Zato skup S nije savršen. No, već skup $S \cup \{O\}$ jest savršen.

§ 5.6. ŠTO ZNAČI, DA JE JEDAN SKUP GUST NA DRUGOM?

Ma da skup I *iracionalnih* brojeva ne sadrži nijednog *racionalnog* broja, ipak je skup I vrlo usko povezan sa skupom Q racionalnih brojeva. Naime, *svaki otvoreni interval, koji sadrži iracionalnih brojeva, sadrži i racionalnih* brojeva. Kraće se kaže: Q je *gusto* na I.

Definicija. *Veli se, da je skup S gust na skupu M, ako svaka okolina svakog člana iz M sadrži nešto i iz S.*

Drugim riječima. S je gust na M, ako je $M \subseteq \overline{S}$. Tako na pr. skup $Q \times Q$ svih točaka ravnine, kojima su koordinate racionalni brojevi, gust je na čitavoj ravnini.

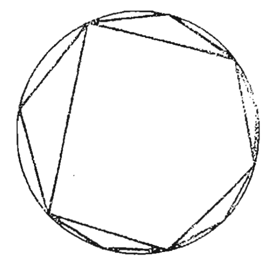
Kako je $X \subseteq \overline{X}$ za svaki skup X, to znači:

Svaki skup je gust na samom sebi.

Dokaži ovo: ako je X gusto na Y, a Y na Z, onda je X gusto na Z.

§ 5.7. KONVERGENTNI I DIVERGENTNI NIZOVI

Pogledajmo niz nacrtanih oboda polinoma P_1, P_2, . . . (sl. 73.); svaki nastaje iz prethodnog tako, da se njegovim vrhovima na središtu pripadnog luka opisane kružnice, doda još novi vrh. Niz tih zatvorenih crta *približava* se prema kružnici pa čak u tom smislu, da **svaki** *pojas oko kružnice obuhvata sve te linije* — izuzev možda njih konačno mnogo. Kaže se kraće: *granična vrijednost skupova p_n jednaka* je kružnici k.


Sl. 73.

Definicija. Veli se, da beskonačni niz brojeva (točaka, skupova) x_n konvergira prema broju (točki) a, ako svaka okolina od a obuhvata gotovo sve članove toga niza. Piše se

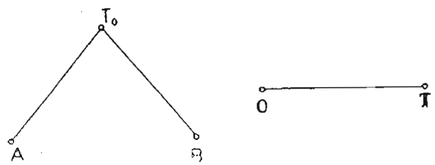
$$\lim_{n \to \infty} x = a.$$

Veli se, da niz skupova S_n konvergira prema zatvorenuskupu X, ako svaka okolina od X obuhvata gotovo sve članove toga niza. Piše se

$$\lim_{n \to \infty} S_n = X.$$

§ 5.8. GRANIČNA VRIJEDNOST PRESLIKAVANJA NA ODREĐENOM MJESTU

Primjer 1. Zadajmo u ravnini 2 dvije točke A, B. Za svaku točku $T \in 2$ promatrajmo kut ATB izražen u radijanima; označimo taj broj s fT. Pa neka je T_0 jedna određena točka ravnine 2, ali tako da ne bude na pravcu AB (sl. 74.).



Sl. 74.

Tad je fT broj između 0 i π. Na taj način skup $2 \setminus 1\,(AB)$ preslikava se u otvoreni interval od 0 do π; tu $1\,(A, B)$ znači pravac AB.

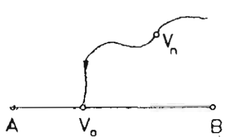
Neka je $T_1, T_2, \cdots$ jedan beskonačan niz točaka ravnine, koji konvergira prema T_0. Što je s pripadnim brojevima

$$fT_1, fT_2, \cdots \text{ i } fT_0?$$

Da li je
$$\lim_n fT_n = fT_0, \text{ t. j.}$$

$$\lim_n fT_n = f \lim_n T_n?$$

Jeste! (kao što se može strogo dokazati). Kaže se zato, da je preslikavanje f *neprekidno* (kontinuirano) u točki T_0.

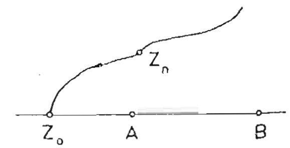


Sl. 75.

Ako točka V_0 leži na otvorenoj duži AB, pa ako sada točke V_n teže prema V_0 dolazeći na pr. odozgo (sl. 75.), onda se vidi, da fV_n ide sve bliže i bliže i sasvim blizu na broj π, t. j. $\lim_n fV_n = \pi$.

Zato možemo staviti, da je $fV_0 = \pi$.

Neka sada točka Z_0 leži negdje na pravcu AB, ali izvan zatvorene duži AB (sl. 76.). Što će biti s veličinom kuta AZ_nB, kad Z_n konvergira prema Z_0 po naznačenom putu?



Sl. 76.

Ta veličina toga kuta konvergira prema 0.

Još ostaje da vidimo, što će biti, kad neki niz točaka konvergira prema kraju A ili kraju B.

Kad na pr. niz točaka dolazi na A po pravcu s lijeve strane, onda će veličina kuta težiti prema 0; a ako točke dolaze na A zdesna po duži $\overline{AB}$, onda veličina kuta teži prema π. A ako točke T dolaze na A po kružnom luku $\widehat{AB} \perp \overline{AB}$, onda brojevi fT konvergiraju prema broju $\pi/2$. Za svaki broj $x \in (0, \pi)$, rješenja T, za koja je $fT = x$, ispunjavaju dva kružna luka razapeta nad duži $\overline{AB}$.

Kad točka T putuje k A po tim lukovima, broj fT se ne mijenja uvijek je $= x$, pa zato tada fT konvergira prema x. Prema tome, kad točka T putuje k A, onda pripadni brojevi fT za kut ATB ne konvergiraju uvijek prema jednom te istom broju — sve zavisi od toga kako T putuje u A. Granična vrijednost funkcije f u točki A može biti svaki broj iz zatvorena intervala $[0 \text{ do } \pi]$. Zato se taj skup brojeva i zove *granična vrijednost* funkcije f u točki A.

Isto je tako i u točki B.

Za svaku točku T_0, koja je različita od A i od B vrijedi ovo: ako je $\lim_n T_n = T_0$, onda je $\lim_n fT_n = fT_0$. Kraće se kaže, da je funkcija f *neprekidna u svakoj točki različitoj* od A i B. Naprotiv, u točki A i u točki B funkcija f nije *neprekidna*, nego je *prekidna*, odnosno *prekida se*.

Prednja razmatranja o zatvorenju skupova i o funkcijama omogućuju, da lako razumijemo ovu definiciju.

D e f i n i c i j a. Skup brojeva S ili skup, koji leži na pravcu, u ravnini ili u prostoru[1], zove se granična vrijednost funkcije f u nekoj točki A.

Neka je f jednoznačno preslikavanje skupa S (na pr. u R ili R^2 ili R^3); neka se a dodiruje skupa S, t. j. neka svaka okolina od a obuhvata nešto iz S; to znači, da je $a \in \overline{S}$; promatrajmo skupove fS, $fS \setminus \{fa\}$ i $\overline{fS}$, $\overline{fS \setminus \{fa\}}$; svaka točka ovog posljednjeg skupa zove se jedna granična vrijednost funkcije f u točki a. Samo $\overline{fS \setminus fa}$ zove se skup graničnih vrijednosti funkcije $f \mid S$ u točki a.

§ 5.9. PREKIDNA I NEPREKIDNA PRESLIKAVANJA. JEDAN NEOBIČAN PRIMJER

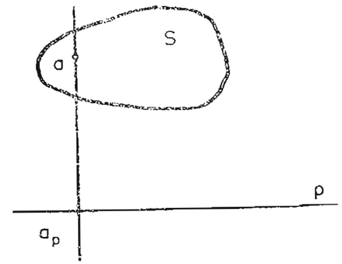
1. Neka je S zadan skup; znamo što znači, da je $x \in \overline{S}$. To znači, da svaka okolina od x sadrži nešto od S. Ako je $x \in \overline{S}$, veli se da x dodiruje skup S, Što će biti, ako S i x podvrgnemo kakvom jednoznačnom preslikavanju f? Da li će dodir ostati sačuvan i poslije preslikavanja f? Može, ali ne mora! Ako dodir u točki x ostaje pri preslikavanju f sačuvan, onda se veli, da je preslikavanje f u odnosu na skup S *neprekidno* ili *kontinuirano* u točki x.

D e f i n i c i j a. Neka je f određeno *jednoznačno preslikavanje* skupa S; neka je $a \in S$; ako za svako $X \subseteq S$, za koje je $a \in \overline{X}$, slijedi $f(a) \in \overline{fX}$, onda se veli, da je preslikavanje f skupa S neprekidno ili kontinuirano u točki a toga skupa. Ako pak postoji bar jedan skup $X \subseteq S$, za koji je $a \in \overline{X}$, ali nije $fa \in \overline{fX}$, onda se veli, da je funkcija f *prekidna* ili *diskontinuirana* u točki a.

[1] Dovoljno je da S leži u nekom skupu M, za koji smo odredili preslikavanje $X \to \overline{X}$ za svako $X \subseteq M$; t. j. $\overline{X}$ je zatvorenje od X.

Veli se da je f *neprekidno u nekom skupu*, ako je neprekidno u *svakoj točki* toga skupa.

P r i m j e r 1. Projiciranje skupa S na pravac p (ravninu) je neprekidno preslikavanje u svakoj točki $a \in S$ (sl. 77.).



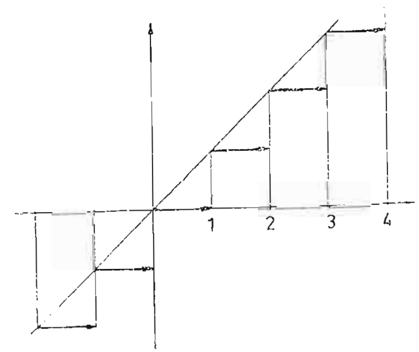
Sl. 77.

Uistinu, neka je $X \subseteq S$ i $a \in \overline{X}$. Dokažimo, da se tada i projekcija a_p dodiruje projekcije X_p na pravac p, t. j. da je $a_p \in \overline{X}_p$. To znači, da treba, pokazati, da *svaki* interval $O\,a_p$ točke a_p sadrži nešto i iz X_p. No, to je istina. Dovoljno je u pruzi, što je određuju krajevi od $O\,a_p$ i zrake projiciranja odabrati jednu okolinu $O\,a$ točke a; ona se *sva* projicira u $O\,a_p$, a s njom i one njene točke iz X, kojih, zbog $a \in \overline{X}$, nužno ima. Dakle uistinu, iz $a \in \overline{X}$, $X \subseteq S$ slijedi $a_p \in \overline{X}_p$, a to upravo znači, da se radi o neprekidnoj funkciji u točki a.

P r i m j e r 2. Za realni broj x označimo s Ex *najveće cijelo*, koje je $\leq x$.

Na pr. $E\,1 = 1$, $E\,3/2 = 1$, $E(-5/2) = -3$.

Graf te funkcije sastoji se od ovakvih stepenica (sl. 78.).



Sl. 78.

Antidomena te funkcije je skup D svih cijelih brojeva. Očigledno je, da se ta krivulja (funkcija) prekida za svako cjelobrojno x, na pr. za $x = 2$.

A to odgovara i našoj definiciji. Jer na pr. broj 2 se dodiruje otvorena intervala $R(1, 2)$, t. j. $2 \in \overline{R(1, 2)}$; a kad se to E — preslika, dobije se $E(2) = 2$ i $E R(1, 2) = \{1\}$. A naravno, broj 2 se ne dodiruje jednočlanog skupa $\overline{\{1\}} = \{1\}$. Dakle iz $2 \in \overline{E R(0, 1)}$: ne slijedi nužno $E 2 \in E R(0, 1)$ preslikavanje E se prekida u točki 2.

Da li se preslikavanje pomoću tangensa prekida gdjegod? Naravno svuda tamo, gdje tangens nije definiran, dakle u skupu $\pm \frac{\pi}{2}, \pm 3\frac{\pi}{2}, \ldots$

2. Jedan neobičan primjer: neprekidno preslikavanje stranice kvadrata na čitav kvadrat. Pa da li je to moguće! Valjda se misli na obrat, t. j. na neprekidno preslikavanje kvadrata na njegovu stranicu (na pr. projiciranjem)? A ipak se može dokazati, *da se stranica kvadrata može jednoznačno i neprekidno preslikati na čitav kvadrat* (Peano)[1]. Drugim riječima, to znači, da se *točka može kretati po kvadratu neprekidno i ispuniti čitav kvadrat.*

3. Pa da li ima bitne razlike između pravca i ravnine? Već smo se upoznali s činjenicom, da na pravcu ima isto toliko točaka koliko i u ravnini, jer se između jednih i drugih može udesiti tolikovanje (obostrano jednoznačno preslikavanje). To je bilo *veliko iznenađenje*, koje nam je priredio Cantor. No, tješili smo se time, da je to preslikavanje vrlo *nepravilno*; specijalno, kad točka putuje po pravcu, onda njoj pridružena točka izvodi bjesomučne skokove u ravnini (ili prostoru) zauzimajući svaki položaj u ravnini (odnosno u prostoru). Preslikavanje nije bilo neprekidno, bez skokova, nego skokasto.

[1] Peano, talijanski matematičar iz 19. vijeka.

A prema Peanu možemo *zatvorenu duž preslikati čak i na neprekidan način na čitav kvadrat*! Time kao da nema smisla govoriti, da su duž i kvadrat različitih dimenzija: Duž dimenzije 1, kvadrat dimenzije 2!

Međutim, to je tako na prvi pogled. Ako preslikavanje na duž i jest jednoznačno i neprekidno, obrnuto preslikavanje nije *i jednoznačno i neprekidno*. A baš s takvim preslikavanjima — *topološkim preslikavanjima* — vezan je pojam dimenzija.

ZADACI: 1. Nacrtaj grafove poznatijih funkcija kao što su: 1) linearna, 2) kvadratna, 3) kosinus, 4) sinus, 5) tangens, 6) kotangens, 7) logaritam, 8) eksponencijalna funkcija, 9) $x = Ex$, gdje je Ex najveće cijelo $\leq x$, 10) modul, 11) $|x| + |y| = 1$.
Odredi oblast i protivoblast tih funkcija. Koje su od tih funkcija neprekidne, a koje prekidne?

2. Da li je preslikavanje intervala $R(-\pi/2, \pi/2)$ na R pomoću tangensa prekidno ili neprekidno?
3. Dokaži, da se svaka otvorena duž može preslikati neprekidno na: 1) svaku drugu otvorenu duž, 2) pravac, 3) svaki otvoren kružni luk, koji ne obuhvata čitav obod kruga.
4. Dokaži, da je projiciranje na ravninu neprekidna operacija.
5. Odredi oblast funkcije $\log \cos x$.
6. Provjeri na poznatijim funkcijama ovaj Bolzanov poučak: Ako je na pravcu zadan kakav konveksan skup S, pa ako je f neprekidno preslikavanje skupa S u kakav pravac, onda je fS također konveksan skup.
7. Dokaži na osnovu Bolzanova teorema, da u iskazu Bolzanova teorema možemo pretpostaviti, da skup S leži u ravnini ili prostoru, na pr. da S može biti kvadrat, kocka, piramida i t. d.

8. Dokaži ovo: Svako preslikavanje skupa N ili skupa D u R ili u ravninu, prostor $\cdots$ je neprekidno preslikavanje. Tako na pr. svaka permutacija skupa N ili kojeg njegova dijela je „neprekidno" preslikavanje. Ma da se graf sam prekida!

§ 5.10. TOPOLOŠKA ILI HOMEOMORFNA PRESLIKAVANJA

Nova matematička nauka: topologija

1. Što su topološka preslikavanja? Preslikavanja, koja su i jednoznačna i neprekidna i kojima je recipročno preslikavanje također jednoznačno i recipročno, zovu se topološka preslikavanja ili homeomorfije.

Drugim riječima, homeomorfije skupa S jesu obostrano jednoznačna i obostrano neprekidna preslikavanja skupa S.

Na pr. preslikavanja $y = 3x$ je homeomorfija skupa („prostora") R realnih brojeva. Preslikavanje $y = x^2$ nije, jer protupreslikavanje nije jednoznačno. Preslikavanje $y = \cos x$ je homeomorfija između intervala 0 do π i intervala 1 do -1. Logaritam vrši topološka preslikavanja skupa pozitivnih brojeva na skup svih realnih brojeva.

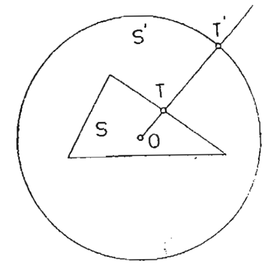
Definicija. Dva skupa S_1, S_2 su homeomorfna, ako postoji topološko preslikavanje skupa S_1 na skup S_2, t. j. ako postoji tolikovanje (obostrano jednoznačno preslikavanje) f skupa S_1 na $fS_1 = S_2$, te ako je f neprekidno u S_1, a ^{-}f neprekidno u $fS = S_2$

Na pr. kongruentni likovi (tijela) su naravno homeomorfni: kretanja su specijalne homeomorfije. I slični skupovi su homeomorfni[1].

1) Što znači, da su dva skupa S, S' međusobobno slična? Znači, da postoji jedno *tolikovanje* f skupa S na skup S' sa svojstvom, da za *svaki* par različitih točaka A, B iz S slijedi $\overline{AB} : \overline{f(A)\, f(B)} =$ konstanta.

Prema tome preslikavanja pomoću sličnosti su specijalna topološka preslikavanja. Svaki krug i svaka elipsa su homeomorfni likovi.

2. *I zatvorena površ svakog trokuta S je homeomorfna sa svakim krugom S'.* Dokažimo to.



Sl. 79.

Uzmimo najjednostavniji slučaj, da je jedan skup unutar drugog, recimo $S \subseteq S'$. Neka je tada O jedna unutrašnja točka manjeg skupa.

Svaka zraka s početkom u O siječe obod od S u jednoj jedinoj točki, recimo T, i obod skupa S' u određenoj točki T' (sl. 79.). Točke T i T' ostavit ćemo u međusobnu vezu. To ćemo povezivanje *proširiti na povezivanje duži $\overline{OT}$ na duž $\overline{OT'}$* i to na vrlo jednostavan način, recimo tako, da svakoj točki $X \in \overline{OT}$ pridijelimo točku $X' \in \overline{OT'}$ tako da bude

$$(1) \qquad \overline{OX'} = \overline{OX}\,\frac{\overline{OT'}}{\overline{OT}}$$

Eto, taj prijelaz od svake točke $X \in S$ na pripadnu točku X' iz S' je određena homeomorfija h skupa S i skupa S'. Pritom je $O = O'$, t. j. $hO = O$; točka O kod te homeomorfije ostaje na mira.

Ako nije niti $S \subseteq S'$ niti $S' \supseteq S$, možemo promatrati kakvu točku O iz S' i jednu njenu okolinu smještenu unutar S'; zatim skup S možemo preslikati po sličnosti tako, da u toj okolini od O odredimo kakav lik M sličan sa S. To je naravno uvijek moguće. A onda skup M preslikati pomoću prethodno definirane homeomorfije na skup S'; tad prevođenje S na M, M na S' određuje i prijelaz od S na S', a taj prijelaz je određena homeomorfija. Time je dokazano, da je S homeomorfno sa S'.

Na *posve isti način dokazuje se ovaj vrlo lijepi i opći teorem, koji pokazuje, koliko su konveksni skupovi prirodni:*

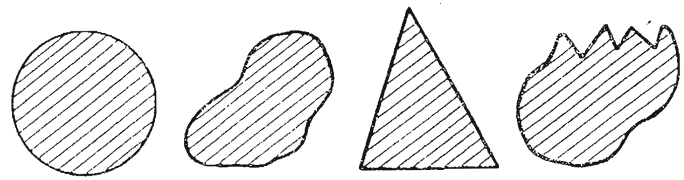
Teorem 5.10.1.: Svaka dva konveksna zatvorena skupa S, S' oba s pravca R, ili iz ravnine R^2, ili prostora R^3 (ili hiperprostora R^n) međusobno su homeomorfni, ukoliko i S i S' sadrže bar po jednu nutrašnju točku. Pritom se rubovi međusobno povezuju homeomorfno isto kao i nutrine tih skupova[1]

Eto takvu vezu između S, S' možemo uspostaviti čak pomoću onako jednostavne funkcije, kao što je funkcija (1) ili nešto, što je s (1) usko povezano.

3. Topologija — posebna matematička nauka. 3.1. Cijepanje ravnine. Vidjeli smo, kako su sukladnost, sličnost i t. d. posebna topološka preslikavanja. Vidjeli smo, kako je kružna linija s topološkog gledišta sasvim isto, što i obod trokuta, elipse ili bilo kojeg ravninskog zatvorenog konveksnog skupa, koji se ne proteže u beskonačnost.

Kao što ima svojstava, koja se ne mijenjaju pomću kretanja[2], sličnosti[3] i t. d., tako ima *svojstava, koja se ne mijenjaju pri topološkim transformacijama. To su tzv. topološka svojstva.*

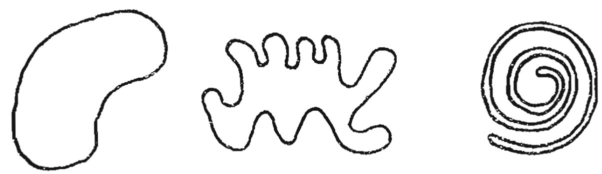
Tako na pr. znamo, da kružnica k dijeli svoju ravninu $2(k)$ na dva dijela: *nutrašnji* dio i *vanjski* dio. Ako kružnicu k podvrgnemo bilo kakvoj topološkoj transformaciji u istoj ravnini $2(k)$, *transformat k' od k imat će isto svojstvo: k' određuje unutarnji dio i spoljašnji dio skupa* $2(k) \setminus k'$. To je *Jordanov teorem.* Prema tome, svojstvo kružnice, da *raskomadava svoju ravninu je svojstvo, koje se čuva pri topološkim transformacijama od k u $2(k)$.* Tu su na sl. 80. predstavljena 4 topološka ravninska transformata kružnice. Nutrine su isjenčane.



Sl. 80.

Naravno, ako topološki kružnicu preslikamo u *prostor,* onda nema govora o nutrini i vanjštini njenog transformata. Na pr. ako kružnicu raspolovimo njenim dijametrom i onda samo jednu polovinu kružnice rotiramo oko toga dijametra za kut, koji nije niti 0 niti ispružen, prelazi time kružnica *topološki* u jednu krivulju k', koja nije ravninska i kod koje nema više smisla govoriti o nutrini i vanjštini. Napravi model od žice!

3.2. Topološka kružnica. S topološkog gledišta kružnica i elipsa je ista stvar. Uostalom, ako zamislimo, da je kružna



Sl. 81.

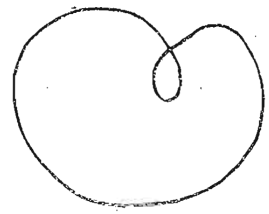
linija rastezljiva, pa ako je bilo kako rastežemo, izvijamo, ali ne trgamo, niti čvorove pravimo, dobit će se opet crta zatvorena; ona je *topološki* govoreći . . . *»kružnica«.*

[1] Čak se tu homeomorfija može proširiti i na čitav „prostor" R, odnosno R^2, odnosno R^3, u kojem se S, S' nalaze.

[2] Na primjer veličina likova.

[3] Na pr. oblik.

Ove tri slike (sl. 81. predstavljaju, topološki, istu stvar: „kružnicu". Naprotiv, ovo nije kružnica (sl. 82.):



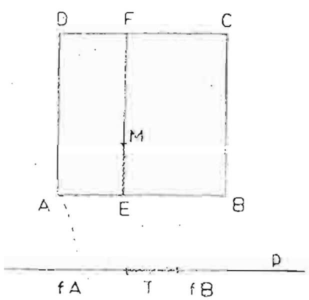
Sl. 82.

Poincaré, jedan od glavnih osnivača topologije, nazvao je topologiju »*geometrija rđava crtača*«, baš zbog toga svojstva, da naizgled vrlo različiti crteži predstavljaju ipak s toga, topološkog, gledišta istu stvar.

3.3. Dimenzija. Dimenzija svake duži je 1, a dimenzija svakog kvadrata je 2. Te su dimenzije različite. To je rezultat činjenice, da se kvadrat ne može *topološki* preslikati na duž.

4. I s topološkog gledišta duž i kvadrat su različiti. *Dokažimo, da se kvadrat k ne može topološki preslikati na duž.*

Pretpostavimo obrnuto! Pa neka je f jedno takvo preslikavanje kvadrata $ABCD$ u neki pravac p. Promatrajmo posebno to preslikavanje f na stranici $\overline{AB}$; na slici su naznačene točke fA, fB, u koje prelaze točke A i B. Naravno, $fA \neq fB$, jer je funkcija f obostrano jednoznačna. No, f je i *neprekidno* na duži $\overline{AB}$; zato f-transformat te duži ne *ispušta nikoje točke* T *iz duži* $\overline{fAfB}$. Promotrimo jednu takvu točku T; onda na stranici AB postoji jedna jedina točka E — upravo točka $\overline{\ }fT$ ili *anti*-T, kojoj je *f-slika* u T (sl. 83.).



Sl. 83.

A sada promatrajmo isto preslikavanje f na okomici EF; ono je naravno neprekidno svuda na EF i specijalno u točki E. A što to znači? Znači, da za svaku okolinu $O(T)$ od T

postoji neka okolina od E na EF, recimo, duž EM sa svojstvom, da je $fEM \subseteq O(T)$. Da li je to moguće? Jer, ako $O(T)$ uzmemo tako maleno, da leži u $\overline{fAfB}$, onda je *svaka* točka iz $O(T)$ već uzeta od funkcije *tolikovanjem stranice* AB. To znači, da u $O(T)$ *nema mjesta za f-sliku od nikoje točke otvorene duži* $\overline{EF}$; zato uistinu nije moguće da bude $fEM \subseteq$ $\subseteq O(T)$. Time je uistinu dokazano, da se kvadrat ne može topološki preslikati na duž. A naravno niti duž na kvadrat! A kocka na duž? Pogotovo ne!

Time smo pokazali ovo.

T e o r e m 5.10.2. Duž se ne može preslikati topološki niti na kvadrat niti na kocku. Ni kvadrat ni kocka ne mogu se topološki preslikati na pravac.

Na sličan način može se dokazati, da se kocka ne može topološki preslikati u ravninu.

5. Topologija kao nauka. Danas, topologija kao nauka u punom je cvatu. Topološka razmatranja isprepliću se s raznovrsnim razmatranjima drugog karaktera, a specijalno algebarskog karaktera. Kao i o cijelim brojevima tako se i o topološkim stvarima može govoriti i laiku pa i o takvim stvarima, koje još nisu riješene. Tako na pr. poznat je ovaj *nerješen problem o 4 boje: da li se* **svako** *parceliranje u ravnini može obojiti sa 4 različite boje tako, da parcele, koje imaju zajedničku stranicu, budu različitih boja?* Mnogobrojne dosjetke o uzlovima i vezivanju primjeri su topoloških razmatranja.

Nauka o dimenzijama jedno je poglavlje topologije.

§ 5.11. MJERA SKUPOVA

Mjesto da se kaže dužina te i te duži, površina te i te površi, zapremina toga i toga skupa, može se govoriti naprosto o *mjeri* duži, površi, tijela i t. d. Ako je potrebno, može se dodati, da li se radi o mjeri *linearnoj, površinskoj* (kvadratura) *ili prostornoj* (trodimenziònalnoj, kubatura).

1. Recimo nekoliko riječi o mjeri skupova s pravca, na pr. iz zadane duži od 0 do 1. Naravno, *svaki* interval I ima svoju mjeru mI, a kazuje *koliko se puta jedinična duž nalazi u duži* I. Ako krajevi intervala I imaju koordinate a i b, tad je *mjera duži* I *jednaka* $|a-b|$, *bez obzira da li je interval* I *zatvoren* ili *otvoren.*

Ako imamo skupove S_1, S_2 s određenom mjerom mS_1, mS_2, pa ako su skupovi S_1, S_2 bez ikoje zajedničke točke ili bar bez zajedničke unutrašnje točke, tad ćemo znati odrediti i mjeru unije $S_1 \cup S_2$ i to tako, da zbrojimo mjeru mS_1 od S_1 i mjeru mS_2 od S_2. Dakle:

$$(1) \qquad m(S_1 \cup S_2) = mS_1 + mS_2.$$

Ako imamo dva, tri, četiri, $\cdots$ intervala ili beskonačan niz intervala $I_1, I_2, \cdots I_n, \cdots$, tako, da se ne preklapaju, onda i *unija tih intervala ima određenu mjeru, koja je jednaka sumi mjera svih tih intervala.*

Uopće, držat ćemo se ovih dvaju pravila:

P r v o p r a v i l o. Ako znamo, da skupovi $S_1, S_2, \cdots$ imaju mjeru i da su ti skupovi dva po dva bez zajedničke unutrašnje točke, onda ćemo znati i uniji

$$S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \cdots$$

odrediti mjeru, i to tako, da sumiramo brojeve $mS_1, mS_2, \cdots$ dakle postupkom

$$(2) \qquad m(S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \cdots) = mS_1 + mS_2 + mS_3 + \cdots$$

D r u g o p r a v i l o. Ako skupovi S_1, S_2 imaju određene mjere, pa ako je $S_1 \subseteq S_2$, tad ćemo odstranjujući S_1 iz S_2 dobiti preostatak $S_2 \setminus S_1$, a broj $mS_2 - mS_1$ smatrat ćemo mjerom skupa $S_2 \setminus S_1$:

$$(3) \qquad m(S_2 \setminus S_1) = mS_2 - mS_1.$$

2. Koliko je na pr. mjera skupa od jedne točke, recimo skupa $\{1/2\}$? Odgovor: nula! T. j. $m\{1/2\} = 0$. Jer imamo ovo:

$$R(0; 1/2] = R(0; 1/2) \cup \{1/2\},$$

a odatle po obrascu (1) odnosno (2):

$$mR(0, 1/2] = mR(0; 1/2) + m\{1/2\}$$

t. j. $1/2 = 1/2 + m\{1/2\}$; odatle $m\{1/2\} = 0$.

3. Odredimo mjeru skupa N prirodnih brojeva, odnosno skupa točaka na brojevnom pravcu, kojima su apscise prirodni brojevi.

Imamo ovo:

$$N = \{1, 2, 3, 4, \cdots\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \cdots$$

Kako su ti skupovi bez zajedničkih članova, to će za mjeru vrijediti po gornjem pravilu:

$$mN = m\{1\} + m\{2\} + m\{3\} = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0 \quad \text{t. j.}$$
$$mN = 0.$$

Prema tome, *skup prirodnih brojeva ima mjeru* 0.

Na isti način se dokazuje, da *svaki niz točaka (brojeva) ima mjeru 0.*

4. Odredimo mjeru skupa Q **racionalnih brojeva.** Znamo, da skup Q leži svuda gusto na skupu R realnih brojeva. No skup Q možemo prikazati kao jedan niz bez jednakih članova:

$$Q = \{r_1, r_2, r_3, \cdots\}, \text{ t. j.}$$
$$Q = \{r_1\} \cup \{r_2\} \cup \cdots.$$

Zato je

$$mQ = m\{r_1\} + m\{r_2\} \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0$$

t. j. $mQ = 0$.

Drugim riječima: *skup racionalnih brojeva ima mjeru 0.*

5. Kolika je mjera skupa $I(0, 1)$ iracionalnih brojeva položenih između 0 i 1?

No, taj skup

$$I = R(0, 1) \setminus Q(0, 1)$$

Kako je $mR(0, 1) = 1, \quad mQ(0, 1) = 0,$

izlazi prema pravilu 2:

$$mI(0, 1) = mR(0, 1) - mQ(0, 1) = 1 - 0 = 1,$$

t. j. $\quad mI(0, 1) = 1.$

Na taj način imamo

Teorem 5.11.1. neka su a i b dva realna broja i to $a < b$; tad su određeni skupovi $R(a, b)$, $Q(a, b)$, $I(a, b)$ svih realnih, odnosno racionalnih, odnosno iracionalnih brojeva x, za koje je $a \leq x \leq b$. Za njihove mjere imamo ove brojeve:

$$mR[a, b] = mI[a, b] = b - a; \quad mQ[a, b] = 0,$$

Specijalno, skup iracionalnih brojeva između 0 i 1 ima mjeru 1, isto toliku i skup $R(0, 1)$ *svih* realnih brojeva između 0 i 1.

6. Mjera trijadskog skupa T. Sjetimo se, kako smo skup T dobili: podijelili smo $R[0, 1]$ na 3 jednaka dijela, izbacili drugu trećinu i s preostalim intervalima vršili neprestano isti postupak. Preostatak u $R[0, 1]$ jest skup T — *trijadski skup* T. Unija izbačenih intervala ima mjeru

$$3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + 2^2 \cdot 3^{-3} + \cdots = 1.$$

Zato je $mT = mR(0, 1) - 1 = 1 - 1 = 0.$

Triadski skup T ima mjeru 0.

A znamo inače, da T ima c članova, t. j. upravo onoliko, koliko i čitav prostor.

7. Analogna razmatranja vrijede za ravninu R^2 i prostor R^3. Tako na pr. skup svih točaka ravnine (prostora), kojima su koordinate racionalni brojevi, čine skup mjere 0.

8. Tako vidimo, kako pojam *mjere skupa* treba razlikovati od pitanja *koliko skup ima elemenata*. Jer, eto na pr. I i $R[0, 1]$ imaju jednako mnogo elemenata, a ipak su im mjere različite. Uostalom, najviše skupova u prostoru ima onih po c točaka; a tek *neznatnom* dijelu njihovu umijemo odrediti mjeru — većina ih je *»neizmjeriva«*.

RJEŠENJA I UPUTE

Str. 9

1. Da. **2.** Nije. **4.** Svako $2 \cdot 3n$ je oblika $3m$, ali svako $3m$ nije oblika $2 \cdot 3n (m, n \in N)$. **5.** $3D = 3D + 3$, $3D + 1 = 3D + 4$. **7.** Posljednji slučaj: $(5m + 3)(5n + 4) = 25mn + 20m + 15n + 12 = 5(5mn + 4m + 3n + 2) + 2$; no, ta zagrada može biti jednaka svakom cijelom broju c, kad m i n prolaze množinom D; dovoljno je uzeti $n = -1$, $m = -c - 1$. **8.** 2) Naime, za svako $m \in D$ postoje cijeli brojevi x, y za koje je $2x + 3y = m$. **9.** Naime prema Euklidu, postoje cijeli brojevi x, y, za koje je $ax + by = M(a, b)$; pomnožimo li tu jednakost proizvoljnim cijelim brojem z, izlazi $a(xz) + b(yz) = M(a, b)z$; to znači da je $aD + bD \supseteq M(a, b)D$. Ta relacija zajedno s dualnom relacijom $aD + bD \subseteq M(a, b)D$ daje traženu jednakost $aD + bD = M(a, b)D$. **10.** 4) Iz $a < x < b$, $c < y < d$ izlazi $a + x < x + y < b + d$; kad se $x + y$ mijenjaju u označenim granicama, ispunja $x + y$ čitav interval između $a + c$, $b + d$.

Str. 19

3. Pravac, u najspecijalnijem slučaju. **6.** Završetak: $\{2, 3, 4, \ldots\}$. **7.** Može! **8.** Može! **9.** 1) Duž, trokut, četverokut, tetraedar, već prema tome da li su zadane duži A, B na pravcu, u ravnini ili su mimohodne. U posljednjem slučaju, zadane duži su mimohodni bridovi tetraedra. 2) Ravnina, pruga ravnine, pruga prostora, već prema tome da li se zadani pravci sijeku ili su paralelni ili su mimohodni. 3) Ako A, B (ne) leže u ravnini, neka je a' pravac (ravnina $\parallel B$ i tako da A, B leže u istoj poluravnini (poluprostoru) što je (ga) određuje a'; tad se $d_{\cup}S$ dobije iz pruge a', B tako da odstranimo $a' \setminus A$. 4) Dobije se iz zatvorene pruge tako da mjesto paralele a' kroz A uzmemo točku A. 5) Slučaj $A \parallel B$. Ako su i odgovarajuće stranice paralelne, dobije se prikraćena prizma. Inače se dobije polijedarsko tijelo. 6) Ako je $A \parallel B$, dobije se prikraćen stožac; inače, u općem slučaju skup je prilično zamršen (na pr. ako se A i B presijecaju). 7) Trokut, četverokut tetraedar, već prema tome da li je točka A smještena na B ili na pravcu, kroz koju njegovu stranicu ili je A u ravnini B isključujući prvi slučaj ili je A van ravnine B. **10.** Nikad! **11.** Čitav prostor. Ne zavisi. **12.** $D[-15, 15]$, $D[-20, 20]$, $D[-10, 20]$, $D[-300, 300]$.

Str. 23

1. 2) $\{A, B, C, E, H, J, K, M, O, P, T, U\}$; to je skup zajedničkih znakova (slova); skup zajedničkih i istoimenih slova je $\{A, E, J, K, M, O, T\}$. 3) Prazno, točka (s oboda Δ), duž. **2.** Presjek je $\{2, 3, 4\}$. **3.** Prazno, točka duž, trokut, četverokut, peterokut i šesterokut. **4.** v,točka, Δ, O, isječak kruga, odsječak kruga. **6.** Radi s modelima. Na pr. presjek dvije kocke može biti prizma, kojoj su baze osmerokuti. **7.** N, D, $\{O\}$, Q, R; presjek je v odnosno S. **8.** Skup, kojem je spojnica vrhova pramena (snopova) jedini član. **9.** 1) Jednočlan skup. 2) Skup svih ravnina kroz vrhove snopa. **12.** 24 D, 180 D.

Str. 27

2. Dvije poluzatvorene duži; odnosno duž, ako $X \in \{A, B\}$. **3.** Dvije otvorene zrake. **5.** Spoljašnost kruga. **6.** Nutrašnjost i spoljašnost kružnice. **11.** Nema.

Str. 32

5. Dobije se 2,3 odnosno 7 skupina. Svaki put se radi o d-podjeli. **8.** Nije.

Str. 35

2. Prostor, p. **3.** Tročlan skup sastavljen od središta stranicâ.

Str. 40

1. 7) Ako uzmemo još jedan pravac $q \perp p$, tad $p \times q$ možemo shvatiti kao ravninu što je određuju p, q. **2.** 2) Pojas koji nastaje nizanjem kružnica okomito na zadanu kružnicu. 2), 3), 4) slično kao 1). **3.** 4) prizma zamišljena slaganjem trokutova jednih na druge.

Str. 44.

2. Skup je uvijek konveksan. No, za kružnicu k i točku T skup $d_{\cup}(k \cup \{r\})$ je konveksan onda i samo onda, ako je T u ravnini kružnice k. **4.** Isp. str. 20 zad. 9. 2). **5.** Tetraedar, ako točke ne leže u istoj ravnini. **6.** Isto kao str. 20 zad. 9. 4). **7.** Isp. str. 20 zad. 9. **8.** 2) Neka je zadana ravnina R; neka je A odn. B ravnina $\parallel R$, koja od zadane duži d sadrži najbližu, odn. najdalju točku u odnosu na R; ako je A između R i B, onda se traženi skup dobije iz zatvorene pruge, što je omeđuju ravnine R i B tako da B nadomjestimo točkom iz $B \cap d$ i t. d. Slično se rješavaju i zadaci 8. 3) — 5).

Str. 54

1. 2) $n \leftrightarrow 10^{n-1}$. **3.** 2) Da! **7.** Izuzeta je os simetrije parabole. **8.** Jednako mnogo.

Str. 70

1. kN. **2.** kN. **3.** Može biti $kS > kN$, ali ne može kad su intervali bez zajedničkih točaka. U prostoru ta nejednakost vrijedi i za disjunktne intervale (na pr. promatraj sve međusobno paralelne pravce i na svakom od njih jedan interval). **6.** Ne može vrijediti nejednakost. **7.** $kR = c$. **8.** U prostoru ima c^3 točaka, t. j. c (isp. § 2.5.1); kroz svaku točku prolazi c^2, t. j. c pravaca. Svih pravaca ima $c^3 \cdot c^2 =$

$= c \cdot c = c$. **9.** Svih točaka ima c^3, a svih kugala $c^3 \cdot c = c \cdot c = c$. **10.** $c \cdot c = c$. **11.** kN, odn. c. **12.** kN, odn. c. **13.** Naime $kN = kN + kN + \ldots$; isto tako $c = c + c^2 + c^3 + \ldots$

Str. 94

4. 1) površina, 2) središte $\triangle$, 3) opisan krug, 4) težišnica, 5) $\triangle$ s vrhovima u krajevima težišnica, 6) uspravna piramida s bazom u zadanom $\triangle$. **7.** Mjesto „brojeva" treba „vektora". **10** a. Na pr. $x \ldots$ „Kiša pada", $y \ldots$ „Mi trčimo". **11.** Od funkcija. **12.** Pridruživanje funkciji f funkcije, kojoj je f derivat. **13.** U $f'(x)\,dx$ mijenja se ne samo x nego i dx i to nezavisno od x. Na pr. u $2x\,dx$ može biti $x = 1$, a dx bilo koji broj na pr. 3, $-5/2$, π i t. d. **14.** $^{-}d\,(2x\,dx) = x^2 + c$, jer je $d\,(x^2 + c) = 2x\,dx$. **15.** Oblast je sastavljena od zadanih funkcija, a protuoblast od pripadnih protufunkcija.

Str. 98

6. $\vec{T} + \vec{B}$ nastaje iz $\vec{B}$ translacijom za vektor $\overrightarrow{OT}$. Skup $\vec{d} + \vec{d'}$ je paralelogram sa susjednim stranicama, koje su paralelne i jednake sa d, d', a sa zajedničkim vrhom O', pri čemu je $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'}$, $d = AB$, $d' = A'B'$.

Str. 99

1. Neka je točka X smještena na pr. između p, p'; neka je X_0 odn. X_1 sjecište okomice kroz X na p sa p odnosno p'; neka je pX simetrična slika od X prema p; slično $p'X$ te $p'(pX)$. Tada je (crtaj!) $Xp'(pX) = Xp'X + p'X(p'pX) = 2XX_1 + 2XX_0 = 2X_0X_1$. Slično za ostale slučajeve. **2.** $OX = Op(X) = Op'(X) = Op'(pX)$, $\sphericalangle XOp'(pX) = \sphericalangle pXOX + \sphericalangle XOp'(pX) = 2 \sphericalangle (p, p')$; to je tako, ako je točka X u četvrtom kvadrantu.

Str. 103

3. $\{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$. **4.** $\{0, 1\}^{\{0,1\} \times \{0,1\}} = \{0000, 0001, 0010, 0011, \ldots, 1111\}$; ima 2^4 članova. **5.** R^N (odnosno N^N) sastoji se od svih beskonačnih nizova racionalnih (odnosno prirodnih brojeva). **6.** Da! Ne! Ne! Da! Ne! **7.** Projiciranje: da! **8.** Za tetraedar k: odaberi na pr. točku O unutar k, pa svakoj točki $X \in k$ pridruži točku X', u kojoj zraka XO probada k; staviti na pr. $O' = O$. **9.** Na pr. ako je $B \leqq A$, nanesi B na A; svakoj točki $X \in B$ pridruži odgovarajuću točku X iz A; ako je B duže nego A, tada svakoj točki X izvan A pridruži bliži kraj od A. Također isp. str. 30. i 32. **10.** Na pr. projiciranje ravnine 2 na pravac 1. **11.** $c^{kN} = (2^{kN})^{kN} = 2^{kN\,kN} = 2^{kN} = c$. **12.** Koliko i realnih brojeva. **16.** 1) c^c. 2) 2^c; **17.** c^c.

Str. 128

1. Rotacije za $0, \frac{2\pi}{n}, 2 \cdot \frac{2\pi}{n} \ldots (n-1)\frac{2\pi}{n}$. **2.** Pomak za $k \cdot 2\pi$ za svako cijelo k, i to pomak u smjeru spojnice središtâ simetrije. **3.** 2) Pomak za $k \cdot \pi$. **5.** U prva dva slučaja prvi red tablice je 012345; svaki naredni red tablice izlazi cikličkom permutacijom. U trećem slučaju tablica se gradi poput one na dnu str. 122. **6.** Treba po redu provjeriti, da su ispunjeni svi zahtjevi za grupu. **7.** Na pr. slaganjem funkcija $y = (1 - x)^{-1}$, $y = 1 - x^{-1}$ dolazi se do funkcije $z = 1 - u^{-1}$, gdje je $u = (1 - x)^{-1}$; dakle je $z = x$.

Str. 130

2. Da! **3.** Da! **4.** Prsten da, tijelo ne!

Str. 145

3. (Mjesto L, što stoji, samo treba pisati $^{-}L\,1$); $x = 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9$. **6.** $kL_{21} = 30 + 30^2 + 30^3 + \ldots + 30^{20}$ (pritom se lj, nj. dž kao slova smatraju različitim od niza l j odnosno n j odnosno dž). **8.** U „glavnom uređenju" niz 0000 je ispred niza 1111; svi drugi parovi su neusporedljivi. **12.** (mjesto sl. 54. treba sl. 53.). Početna točka je lijevi gornji vrh; završna točka je desni donji vrh.

Str. 153

4. 3) $1, 6, 11, 16, \ldots, 2, 5, 12, 17, \ldots, 3, 8, \ldots, 4, 9, \ldots, 5, 10, \ldots$ **7.** N je prema $<_p$ dobro uređen. **8.** Skup nije dobro uređen. Tu dolazi manji broj ispred većeg; na pr. $f2 = 100\ldots$, $f3 = 0100\ldots$, pa je $f2 > f3$. **10.** Pravce $y = ax$ možemo urediti prema broju a; ispred svih pravaca možemo staviti preostale krivulje u onom poretku, kako su nabrojane.

Str. 173

1. 1) R; R ili skup sastavljen od jednog broja; 2) R; zatvorena zraka brojeva; 3) i 4) R; $R[-1, 1]$; 5) $R \setminus \frac{\pi}{2}(2D + 1)$; R; 6) $R \setminus \pi D$; R; 7) $R(0, \infty)$, R; 8) $R, R(0, \infty)$; 9) R; D; 10) $R, R[0, \infty]$, 11) $R[-1, 1]$. Sve funkcije 1) — 13) osim 9) su neprekidne. **2.** Neprekidno. **3.** Isp. str. 52. **5.** $R\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi D$; nastaje iz $R\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ translacijom $2a \cdot 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

ISPRAVCI

Strana	Mjesto	Treba
9 zad. 7	$4D \cdot 4D = 4D$	$4D \cdot 4D = 16D$
9_3	$\subseteq$	$=$
98^1	$a' >$	$a' <$
99^5	predmet	produkt
105_1	$-f_1$	$\overline{}f!$
114_3	pravaca	pravca
122^{12}	element	elementi
127_{11}	.	uz uslov da smatramo $3D$ kao »produkt od $3D$ i $3D$«.
129	II Skup	II Skup S je polugrupa, a
132^3	ima	imamo
133_6	$x > y$	$y > x$
134^6	pripadna	pripadnu
137_6	g	ga
140	u slici ne treba nigdje 0.	
142^{11}	2	r
148^1	hvatamo	shvatamo
148^1	53	54
150^{13}	svi	svih
162^{14}	$x \in S$	$x \in \overline{S}$
167^8	polinoma	poligona
170^9	pod —	precrtati fS,
177	predzadnji pasus dodati **Nauka o topološkim svojstvima skupova zove se topologija.**	

Odobrio Savjet za prosvjetu NRH rješenjem br. 3330/1-59. od 24. IX. 1959. — Izdavačko poduzeće »Školska knjiga«, Zagreb, Prilaz JNA 2. — Za izdavača: *Branko Žutić.* — Tehnički urednik: *Tomislav Jukić.* — Korektor: *Vladimir Benčić.* — Štampanje završeno u travnju 1960. Tiraža 2 000 primjeraka.