

# O pitanju astronomskih teorija ledenih doba.

NAPISAO

Dr. MILUTIN MILANKOVIĆ.



*(Preštampano iz 204. knjige „Rada“ Jugoslavenske akademije znanosti  
i umjetnosti.)*

U ZAGREBU  
TISAK DIONIČKE TISKARE  
1914.



Топлотне мношине, што их сунце шаље за годишњих доба на земљу, распоређују се на њеној површини по математичким законима, који су били предмет испитивања моје радње: „О распореду сунчеве радијације на површини земље“<sup>2</sup>. Према тим законима зависе сезонске топлотне мношине, одаслане на коју јединицу земалјске површине, о овим величинама:

— о соларној константи,  $I_0$ ; — о дужини године,  $T$ ; — о великој полуоси  $a$  земалјске путање; — о ексцентрицитету  $e$  земалјске путање; — о нагибу  $\varepsilon$  еклипике према екватору; — о географској ширини  $\varphi$  уоченога мјеста земалјске површине.

Секларне промјене соларне константе  $I_0$  јесу — као што већ њен назив казује — незнатне, макар у оном интервалу времена, о којем се ради у теорijама ледених доба; тако исто нијесу величине  $a$  и  $T$  подложене секларним промјенама, тако да се прве три од наведених величина могу држати константнима. Зато су топлотне мношине  $W_e$  и  $W_h$ , што их прима уочена јединица земалјске површине за своје лјетне односно зимске полугодине, функције овога облика:

$$(1) \begin{cases} W_e = W_e(\varphi, e, \varepsilon) \\ W_h = W_h(\varphi, e, \varepsilon) \end{cases}$$

<sup>1</sup> Ова радња била је намијенјена свећаној књизи за седамдесету годишњицу непрежалјенога предсједника Југославенске академије Таd е Sмиčićкласа. Али како је његово преминуће претекло почетак тискања те књиге, одустала је академија од свoga наума, па је објелоданује оvdје. — Југославенска академија.

<sup>2</sup> Глас Српске Краљевске Академије, св. XC (1913.).

Gornje funkcije, kao što je u spomenutoj radnji pokazano, takova su oblika, da iz njih sljeduje: da jedno mjesto južne geografske širine prima za svoje ljetne odnosno zimske polugodine istu toplotnu množinu kao i jedno mjesto iste geografske širine sjeverne hemisfere za svoje ljetne odnosno zimske polugodine. Pri tome valja imati na umu, da je ljetna polugodina južne hemisfere identična sa zimskom sjeverne, a zimska polugodina južne hemisfere identična sa ljetnom sjeverne. Dužine tih polugodina zavise o ekscentricitetu  $e$  zemaljske putanje i o anomaliji  $\nu_0$  sunca u proljetnoj tački ili — što izlazi na isto — o dužini perihela  $\Pi$  prema proljetnoj tački. Označimo li dužinu ljetne, odnosno zimske, polugodine sjeverne hemisfere sa  $T_e$  odnosno sa  $T_h$ , a dužinu ljetne, odnosno zimske, polugodine južne hemisfere sa  $T_e'$ , odnosno sa  $T_h'$ , to su te veličine funkcije ovoga oblika:

$$(2) \begin{cases} T_e = T_h' = T_e(e, \Pi) \\ T_h = T_e' = T_h(e, \Pi) \end{cases}$$

Srednjemu ljetnom, odnosno zimskom, danu sjeverne hemisfere odgovaraju prema tome ove toplotne množine:

$$(3) \begin{cases} q_e = \frac{W_e(\varphi, e, \varepsilon)}{T_e(e, \Pi)} \\ q_h = \frac{W_h(\varphi, e, \varepsilon)}{T_h(e, \Pi)} \end{cases}$$

a srednjemu ljetnom, odnosno zimskom, danu južne hemisfere odgovaraju ove toplotne množine:

$$(4) \begin{cases} q_e' = \frac{W_e(\varphi, e, \varepsilon)}{T_h(e, \Pi)} \\ q_h' = \frac{W_h(\varphi, e, \varepsilon)}{T_e(e, \Pi)} \end{cases}$$

Nejednakost dužina godišnjih doba povlači za sobom, kako to sljeduje iz gornjih jednačina, nejednakost veličina  $q_e$  i  $q_e'$ , odnosno nejednakost veličina  $q_h$  i  $q_h'$ .

Nebesna mehanika uči, da se veličine  $e$ ,  $\varepsilon$  i  $\Pi$  sekularno mijenjaju, pa će zbog toga i veličine  $q$  biti podvrgnute sekularnim promjenama. Te sekularne promjene rasporeda sunčeve radijacije na površini zemlje držali su neki naučenjaci za uzroke ledenih doba, koja su se bez sumnje nekoliko puta pojavila na površini naše zemlje.

Tako su nastale astronomske teorije ledenih doba u svojim raznim oblicima, pa su imale svojih ubijeđenih pristalica i strasnih protivnika, a ni dan danas nijesu definitivno odbačene, a još manje neosporno primljene.

No sve se te teorije počinjaju od neospornih fakata, jer ne samo da su sekularne promjene gornjih toplotnih množina  $q$  astronomski utvrđene, nego se mogu izračunati sa istim onim velikim stepenom tačnosti, sa kojim nebesna mehanika rješava svoje probleme. S jednom riječi: fenomen sekularnih varijacija toplotnih množina  $q$  dade se matematički tačno opisati, pa o njemu ne može biti raznolikosti mišljenja. Te se raznolikosti mišljenja pojavljuju tek onda, kada se zapita, kako li su se te varijacije toplotnih množina  $q$  pokazale u klimatskoj slici naše zemlje.

Od želje, da se na ovo drugo pitanje što prije odgovori, prelazilo se ovlaš preko prvoga pitanja. Tako se u raznim astronomskim teorijama ledenih doba uzimaju nepotpuno u obzir promjene veličina  $q$ , t. j. u njima se uzimaju samo u obzir promjene izazvane mijenjanjem jednoga ili najviše dvaju od spomenutih astronomskih elemenata, a na pitanje, kako li su varijirale veličine  $q$  uslijed mijenjanja svih promjenljivih astronomskih elemenata, nije se do dan danas potpuno odgovorilo. Uzrok toj pojavi po svoj je prilici taj, što ispitivači astronomskih uzroka ledenih doba nijesu po svojoj spremi i po pogledima svojim uvidali važnost, da se prvo potpuno riješi astronomski dio proučavanoga problema, pa tek onda da se pristupi klimatološkom dijelu.

Tek se u novije doba stalo više paziti na taj dio problema. Godine 1896. publikovao je Hargreaves u časopisu Cambridge-skog filozofskog društva matematički elegantnu radnju o tome, kako raspored sunčane radijacije na površini zemlje zavisi o astronomskim elementima. Godine 1901. publikovao je Charlier u izvještajima lundskog opservatorija radnju, koja se bavi ispitivanjem sekularnih promjena veličina  $T_e$  i  $T_h$ . Godine 1905. i 1907. izadoše dvije radnje Hopfnera u Izvještajima bečke akademije, u kojima je dao prijedlog literature astronomskoga

dijela problema, pokušao, da ukaže na nedostatke dosadanih radova, i poduzeo, da ispitivanje toga problema stavi na širu osnovu. No u oba njegova rada potkrale su mu se takove matematičke pogriješke, koje tim radovima oduzimaju svaku naučnu vrijednost. Ja sam u svome već spomenutom radu ukazao na te pogriješke, od kojih neke nijesu ostale neopažene ni Herzu<sup>1</sup>, koji se takođe bavio tim problemom.

No pored svih tih novijih radova nije podato još potpuno riješenje astronomskoga dijela proučavanoga problema. Zato sam se poduhvatio, da, riješivši taj dio problema što potpunije, dadem matematički tačnu sliku sekularnih promjena toplotnih množina  $q$ , ne bi li na taj način bila stvorena solidna baza za dalja ispitivanja u tome pravcu, t. j. za ispitivanja, kako li su se te promjene oličavale u klimatskoj slici naše zemlje.

Dovršivši ta ispitivanja, mislim, da će biti od interesa, da saopštim na ovome mjestu najvažnije kvalitativne rezultate njihove i da se tom prilikom obazrem na glavnije astronomske teorije ledenih doba.

Teorija perturbacija opisuje matematički mijenjanje veličina  $e$ ,  $\varepsilon$ ,  $\Pi$  i predstavlja ih kao funkcije vremena. Stockwell je<sup>2</sup> uzeo u obzir međusobne perturbacije svih glavnih osam planeta, razvio formule za sekularne varijacije veličina  $e$ ,  $\varepsilon$ ,  $\Pi$ , a Pilgrim je<sup>3</sup> vrijednosti tih veličina izračunao i tabelarisao za interval vremena od 10.100 tisuća godina prije Hr., pa sve do 500 tisuća godina poslije godine 1850. po Hr. Zato je moguće, upotrebivši jednačine za  $W_e$ ,  $W_h$ ,  $T_e$  i  $T_h$ , što sam ih za ovu specijalnu svrhu izveo u svojoj spomenutoj radnji, predstaviti ove veličine kao funkcije vremena. Izvede li se ta matematička operacija, to se prije svega dobiju ovi rezultati:

Dužine ljetne, odnosno zimske, polugodine mogu varijirati oko njihove srednje vrijednosti (koja je jednaka polovini tropske godine) za 8.6% u pozitivnom i u negativnom smislu, dakle svega za 17.2%.

Ove varijacije veličina  $T_e$  i  $T_h$  jesu baza svih astronomskih teorija, koje se okupljaju u prvu kategoriju astronomskih teorija ledenih doba (Adhémar, Croll, Wallace, Ball).

<sup>1</sup> Die Eiszeiten und ihre Ursachen; Wien 1904.

<sup>2</sup> Smithsonian Contributions, Vol. XVIII. Washington 1873.

<sup>3</sup> Jahreshefte des Vereins für vaterl. Naturkunde in Württemberg, Bd. 60.

Kod ovih teorija nedolaze u obzir varijacije brojitelja izraza (3) i (4), izazvane mijenjanjem astronomskog elementa  $\varepsilon$ , i to s ovih razloga: Croll i Ball, koji su tim teorijama dali matematičko obrazloženje, ne uzimaju u svojim računima u obzir toplotne množine odaslane nekoj odabranoj paraleli, nego operišu, matematičke jednostavnosti radi, toplotnim množinama  $\mathfrak{B}_e$  i  $\mathfrak{B}_h$ , odaslanima čitavoj sjevernoj ili južnoj hemisferi za njihovih ljetnih odnosno zimskih polugodina — s jednom riječi: oni računaju toplotnim množinama, koje bi, prema našim oznakama, bile predstavljene izrazima:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B}_e = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} W_e(\varphi, e, \varepsilon) \cos \varphi d\varphi \\ \mathfrak{B}_h = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} W_h(\varphi, e, \varepsilon) \cos \varphi d\varphi \end{array} \right.$$

gdje  $r$  predstavlja radius zemlje. Te toplotne množine mijenjaju se sa veličinama  $e$  i  $\varepsilon$ , ali su njihove promjene tako male (veličina  $\mathfrak{B}_e$  varijira oko svoje srednje vrijednosti za 1.1%, a  $\mathfrak{B}_h$  za 1.8%), da ne dolaze u obzir prema varijacijama veličina  $T_e$  i  $T_h$ .

Ekholm i Spitaler ispitivali su u svojim radnjama<sup>1</sup>, koje sačinjavaju drugu kategoriju astronomskih teorija ledenih doba, utjecaj varijacija nagiba ekliptike na raspored toplotnih množina, što ih zemlja prima od sunca, i pokušali su izračunati temperaturne promjene na površini zemlje, izazvane tim varijacijama. Ali je Ekholm ispitivao samo taj utjecaj, a nije uzimao u obzir varijacije veličina  $T_e$  i  $T_h$  i njihov utjecaj na srednje sezonske toplotne množine, a Spitaler je, istina, pokušao uzimati u obzir i te varijacije, ali su njegovi računi žalibože bazirani na rezultatima Hopfnerovim, za koje smo već kazali da su pogriješni.

<sup>1</sup> Publikovanim u Quart. Journ. R. Met. Soc. XXVII. (1901) odnosno u Gerlands Beiträge zur Geophysik VIII. (1907).

Tako prva kategorija teorijâ ledenih doba operiše u glavnom varijacijama imenitelja, a druga varijacijama brojitelja izraza (3) i (4).

Prema stauovištu prve kategorije spomenutih teorija zavise promjene srednjih toplotnih množina:

$$(6) \quad Q_e = \frac{\mathfrak{B}_e}{T_e} \quad \text{i} \quad Q_h = \frac{\mathfrak{B}_h}{T_h},$$

odaslanih za ljetnoga odnosno zimskoga dana sjevernoj hemisferi, i srednjih toplotnih množina:

$$(7) \quad Q_e' = \frac{\mathfrak{B}_e}{T_h} \quad \text{i} \quad Q_h' = \frac{\mathfrak{B}_h}{T_e},$$

odaslanih za vrijeme ljetnoga odnosno zimskoga dana južnoj hemisferi, u glavnom o varijacijama veličinâ  $T_e$  i  $T_h$ .

Veličine  $T_e$  i  $T_h$  zavise, prema predašnjem, samo o veličinama  $e$  i  $\Pi$ . Uslijed mijenjanja veličine  $\Pi$ , koja za nešto 21.000 godina naraste za  $360^\circ$ , oscilovale bi te veličine oko svoje srednje vrijednosti istom periodom, a uslijed mijenjanja veličine  $e$ , koja osciluje sa srednjom periodom od nešto 92.000 godina između svojih granica  $e = 0$  i  $e = 0.0677$ , oscilovale bi one oko svoje srednje vrijednosti ovom dužom periodom. Zajedničko mijenjanje veličina  $\Pi$  i  $e$  čini, da veličine  $T_e$  i  $T_h$  izvode oscilacije periodom od nešto 21.000 godina, no koje sa porastom veličine  $e$  bivaju sve veće i veće i dostizavaju svoje ekstreme, kada i  $e$ . S jednom riječi: obje se komponentalne oscilacije superponiraju. Taj dvostruko oscilatorni značaj veličinâ  $T_e$  i  $T_h$  jasno je izražen u grafičnoj predstavi tih veličina, publikovanoj u već spomenutoj Charlierovoj radnji. Kada veličina  $T_e$  dostigne svoj maksimum, onda imamo na sjevernoj hemisferi dugo ljeto i kratku zimu, a na južnoj dugu zimu i kratko ljeto, pa kako se veličine  $\mathfrak{B}_e$  i  $\mathfrak{B}_h$  ne mijenjaju osjetno, to će srednji zimski dan  $Q_h$  sjeverne hemisfere biti topao, a srednji zimski dan  $Q_h'$  južne hemisfere biti hladan.

Tim varijacijama srednjega zimskoga dana tumače spomenute teorije postanke ledenih doba.

No tim teorijama činjene su ove zamjerke:

1. Prema tim teorijama pojavljivala bi se ledena doba periodično u razmjerno kratkim, dosta pravilnim intervalima vremena; protiv toga govore geološki iskustva.

2. Prema tim teorijama pojavljivala bi se ledena doba, u opreci sa geološkim iskustvima, alternativno na sjevernoj i južnoj hemisferi tako, da kada bi se sjeverna hemisfera nalazila u glacijalnoj periodi, južna bi se nalazila u interglacijalnoj, i obrnuto. Istovremena ledena doba sjeverne i južne hemisfere bila bi nemoguća.

3. Prema tim teorijama odgovaralo bi baš današnjemu dobu glacijalna perioda južne hemisfere, jer je dužina zime južne hemisfere dostigla svoj maksimum, a u stvari ima južna hemisfera zimu topliju od sjeverne.

I klimatologija planete Marsa upotrebljavala se za argumenat protiv spomenutih teorija; no klimatske su nam prilike na Marsu i pored svih pažljivih posmatranja njegovih polarnih sniježnih kalota ipak tako slabo poznate, a i toliko su različite od prilika na zemlji, da mi se ovaj posljednji razlog ne čini tako jak kao prva tri.

Ovi razlozi potresli su do temelja spomenute teorije i bili su uzrokom, da se u novije doba razvila i treća kategorija astronomskih teorija ledenih doba (G. H. Darwin, Schiaparelli), koje računaju sa varijacijom elementa  $\varphi$ , t. j. pretpostavljaju, da zemaljska os rotacije mijenja svoj položaj u geoidu. Ali toj pojavi nije do danas nađeno neosporno mehaničko obrazloženje, pa je kakova veća varijacija elementa  $\varphi$  (u opreci sa varijacijama elemenata  $e$ ,  $\Pi$  i  $\varepsilon$ ) svakako još hipotetična.

No čitav fenomen varijacija toplotnih množina, odaslanih za godišnjih doba na zemlju, dobiva sasvim drugo lice, ako se pripazi na sekularne varijacije toplotnih množina, što ih prima kojegod mjesto zemaljske površine, a ne čitava hemisfera, dakle ako se ispituju varijacije veličina  $q$ , definisanih jednačinama (3) i (4), a ne varijacije veličina  $Q$ , definisanih jednačinama (6) i (7), jer se kod prvo spomenutih veličina osjeća utjecaj varijacije elementa  $\varepsilon$ , koji daje posmatranoj pojavi nov značaj.

Nagib ekliptike varijira, prema Stockwellovim računima, između granica  $21^\circ 58' 36''$  i  $24^\circ 35' 58''$ , dakle za  $2^\circ 37' 22''$ . Promjena nagiba ekliptike ne mijenja, kao što sam već malo čas spomenuo, osjetno toplotne množine, što ih primaju za svojih sezonskih polugodina sjeverna ili južna hemisfera. Ali ta pro-

mjena mijenja osjetno raspored toplotnih množina na svakoj hemisferi; tako povećanje nagiba ekliptike umanjuje toplotne množine, što ih u toku godine primaju mjesta geografske širine od  $\varphi = 0$  pa do  $\varphi = 43^{\circ}20'$ , a uvećava toplotne množine, što ih u toku godine primaju mjesta geografske širine od  $\varphi = 43^{\circ}20'$  pa do  $\varphi = 90^{\circ}$ . To je Hargreaves u svojoj spomenutoj radnji pokazao i odredio, da te promjene godišnjih toplotnih množina čine za totalnu varijaciju od  $2^{\circ}37'22''$  nagiba ekliptike u procentima (zaokružene na jednu decimalu):

$\varphi =$	$0^{\circ}$	$10^{\circ}$	$20^{\circ}$	$30^{\circ}$	$40^{\circ}$	$50^{\circ}$	$60^{\circ}$	$70^{\circ}$	$80^{\circ}$	$90^{\circ}$
Postotna promjena	-0.9	-0.9	-0.8	-0.6	-0.2	+0.5	+2.0	+6.5	+9.6	+10.6

No promjena nagiba ekliptike ima još jedan važniji utjecaj, koji Hargreaves nije ispitivao, a taj je, da ona, pored spomenute promjene duž jednoga meridijana, mijenja na svakom mjestu toga meridijana raspored toplotnih množina u toku godine. Prirast nagiba ekliptike umanjuje zimske toplotne množine svakoga mjesta duž meridijana, a uvećava ljetne toplotne množine svakoga mjesta od  $\varphi = 11^{\circ}23'$  pa do  $\varphi = 90^{\circ}$ ; s jednom riječi: promjena nagiba ekliptike uvećava opreku između ljeta i zime. Prema mojim računima izaziva totalna varijacija od  $2^{\circ}37'22''$  nagiba ekliptike ove postotne promjene veličina  $W_e$  i  $W_h$ , zaokružene na jednu decimalu:

$\varphi =$	$0^{\circ}$	$10^{\circ}$	$20^{\circ}$	$30^{\circ}$	$40^{\circ}$	$50^{\circ}$	$60^{\circ}$	$70^{\circ}$	$80^{\circ}$	$90^{\circ}$	
Postotna promjena od	$W_e$	-0.9	-0.1	+0.7	+1.5	+2.5	+3.7	+5.3	+8.3	+10.1	+10.6
	$W_h$	-0.9	-1.8	-2.8	-4.0	-5.7	-8.2	-12.5	-12.1	-11.2	0

Za velike geografske širine te su promjene znatne, pa se po gornjoj tabeli vidi, da totalna promjena nagiba ekliptike mijenja toplotnu množinu, što ju u vrijeme svoje zime prima  $60^{\circ}$  geografske širine, za punih 12.5%. Na toj geografskoj širini jesu, prema tome, te promjene u opreci zime i ljeta gotovo isto tolike kao i maksimalne promjene tih opreka izazvane mijenjanjem dužine godišnjih doba.

Utjecaj varijacije ekscentriciteta  $e$  na veličine  $W_e$  i  $W_h$  neznatan je i ne mora se uzeti u obzir.

Uzmu li se, prema tome, u obzir varijacije svih promjenljivih astronomskih elemenata  $e$ ,  $\Pi$  i  $\epsilon$ , to se dobiva ova slika: Varijacija prvih dvaju elemenata mijenja dužine ljetne, odnosno zimske, polugodine, dakle mijenja imenitelje  $T_e$  i  $T_h$  izraza (3) i (4), a varijacija elementa  $\epsilon$  mijenja brojitelje tih izraza. To mijenjanje brojitelja nije za geografske širine do  $50^{\circ}$  znatno tako, da je za zemaljski pojas među pedesetom sjevernom i južnom paralelom fenomen varijacija srednjih sezonskih toplotnih množina dominiran varijacijom dužina godišnjih doba, pa za taj pojas vrijede u glavnom računi Crollovi i Ballovi, učinjeni pri edifikaciji njihove teorije ledenih doba. No za više geografske širine, t. j. za polarne kalote nad  $50^{\circ}$ , a specijalno za  $60^{\circ}$  geografske širine, mora se uzeti u obzir i varijacija astronomskoga elementa  $\epsilon$ .

Za te geografske širine srednje su ljetne, odnosno zimske toplotne množine funkcije od tri varijabilne  $e$ ,  $\Pi$  i  $\epsilon$ , koje sve tri podjednako utječu na njihovo mijenjanje. Uslijed varijacije prvoga elementa oscilovale bi veličine  $q_e$  i  $q_h$  oko svoje srednje vrijednosti periodom od 92 tisuće godina, uslijed varijacije drugoga elementa bila bi ta perioda 21 tisuću, a uslijed trećega elementa 40 tisuća godina. Veličine  $q$  izvode sve te tri oscilacije, nejednakih perioda i nejednakih faza, zajedno, pa je njihov pravilno oscilatorni značaj, što su ga imale pri manjim geografskim širinama, perturbiran. Veličine  $q$ , što odgovaraju geografskim širinama, koje pripadaju spomenutim polarnim kalotama, osciluju veoma nepravilno. Tako n. pr. izvodi veličina  $q_h$  za  $60^{\circ}$  sjeverne širine u intervalu vremena od 72.000 pa do 25.000 godina prije god. 1850. po Hr. jednu jedinu oscilaciju, dok bi uslijed varijacije dužine godišnjih doba izvela dvije potpune oscilacije. Prva dakle zamjerka, činjena astronomskim teorijama ledenih doba, gubi svoj značaj, ako se posmatraju varijacije sezonskih toplotnih množina na geografskim širinama nad  $50^{\circ}$  i ako se uzme pravilno u obzir varijacija nagiba ekliptike.

Promjena nagiba ekliptike mijenja veličine  $q_e$  i  $q_e'$ , odnosno  $q_h$  i  $q_h'$ , u istome smislu, t. j. povećanje nagiba ekliptike umanjuje istoimene sezonske toplotne množine u isti mah na sjevernoj i južnoj hemisferi, dok su promjene veličine  $\Pi$  djelovale u protivnom smislu na te toplotne množine, jer kada je zimska

sezona sjeverne hemisfere rasla, onda je zimska sezona južne opadala.

Utjecaj varijacija veličine  $\varepsilon$  perturbira, prema tome, alternativan značaj promjena veličina  $q$  na sjevernoj i južnoj hemisferi. O tome nas potpuno uvjerava grafična predstava veličina  $q$ , pa za visoke geografske širine otpada i druga zamjerka činjena astronomskim teorijama ledenih doba. Taj rezultat postigao je i Spitaler u svojoj naprijed spomenutoj radnji.

Današnji nagib ekliptike od  $23^{\circ}27'5''$  razlikuje se malo od njegove srednje vrijednosti  $23^{\circ}17'5''$ , pa zato je dan danas, i ako je dužina zimske sezone južne hemisfere dostigla jedan od svojih sporednih maksimuma, vrijednost  $q_h'$  za geografske širine, koje pripadaju spomenutoj južnoj polarnoj kaloti, daleko od svojega minimuma. I u stvari je današnji srednji zimski dan  $60^{\circ}$  južne hemisfere hladniji samo za  $4.1\%$  od današnjega srednjeg zimskog dana  $60^{\circ}$  sjeverne hemisfere, dok je njegova toplotna množina bila godine 94.000. prije god. 1850. po Hr. za  $10\%$  manja od toplotne množine današnjega zimskog dana  $60^{\circ}$  sjeverne hemisfere. Ta postotna razlika može, kao što ću odmah pokazati, narasti i do  $14.8\%$ . Današnje termičko stanje polarne kalote južne hemisfere udaljeno je, prema tome, veoma od njena ekstremnoga stanja, pa zato gubi i treća zamjerka, činjena astronomskim teorijama, svoj značaj.

Uz maksimalni ekscentricitet i minimalni nagib ekliptike, a pri dužinama perihela od  $90^{\circ}$  odnosno  $270^{\circ}$ , bio bi srednji zimski dan  $60^{\circ}$  južne širine za  $14.8\%$  hladniji, odnosno za  $14.7\%$  topliji od današnjega srednjeg dana  $60^{\circ}$  sjeverne širine. Totalna amplituda srednjega zimskog dana  $60^{\circ}$  geografske širine (sjeverne ili južne) čini dakle punih  $29.5\%$  njegove sadašnje vrijednosti na sjevernoj hemisferi.

Utjecaj tako velikih promjena toplotnih množina, što ih prima zemlja od sunca, mora se pokazati i u klimatskoj slici naše zemlje. U kakovu se obliku taj utjecaj pokazuje i jesu li ledena doba njegova posljedica, to je pitanje, kojega se riješenju ima tek pristupiti.



## 10.

### O pitanju astronomskih teorija ledenih doba. — Über die Frage der astronomischen Theorien der Eiszeiten.

*Izvadak iz rasprave, priopćene u „Radu“, knj. 204. (1914.), str. 141. Auszug aus der im „Rad“ Bd. 204 (1914), S. 141, veröffentlichten Abhandlung.*

Napisao Dr. M. Milanković. — Von Dr. M. Milanković.<sup>1</sup>

Die Wärmemengen, welche einer Flächeneinheit der Erdoberfläche von der Sonne zugeführt werden, hängen von den folgenden Größen ab: von der Solarkonstante  $I_0$ , der Jahreslänge  $T$ , der großen Halbachse  $a$  und der Exzentrizität  $e$  der Erdbahn, von der Schiefe der Ekliptik  $\varepsilon$  und von der geographischen Breite  $\varphi$  des betreffenden Punktes an der Erdoberfläche.

Die säkularen Schwankungen der Solarkonstante  $I_0$  sind unbedeutend, und man kann dieselbe ebenso wie die Größen  $a$  und  $T$  als konstant ansehen. Daher lassen sich die Wärmemengen  $W_e$  und  $W_h$ , welche eine bestimmte Einheit der Erdoberfläche im Laufe des Sommer- beziehungsweise Winterhalbjahres empfängt, folgendermaßen ausdrücken:

$$(1) \begin{cases} W_e = W_e(\varphi, e, \varepsilon) \\ W_h = W_h(\varphi, e, \varepsilon). \end{cases}$$

Aus der Form dieser Funktionen leitete der Verfasser Dr. M. Milanković in seiner Arbeit „Über die Verteilung der Sonnenstrahlung auf der Erdoberfläche“<sup>2</sup> das Resultat ab, daß ein Ort südlicher geographischer Breite während seines Sommer- beziehungsweise Winterhalbjahres dieselbe Wärmemenge empfängt, wie ein Ort derselben geographischen Breite an der nördlichen Halbkugel während seines Sommer- beziehungsweise Winterhalbjahres. Die Längen dieser Jahreshälften hängen von der Exzentrizität  $e$  der Erdbahn, sowie von der Anomalie  $\nu_0$  der

<sup>1</sup> Den vorliegenden Auszug verfaßte Herr Univ.-Prof. Dr. V. Varićak.

<sup>2</sup> Sitzungsberichte der k. serbischen Akademie, Bd. XC (1913).

sezona sjeverne hemisfere rasla, onda je zimska sezona južne opadala.

Utjecaj varijacija veličine  $\varepsilon$  perturbira, prema tome, alternativan značaj promjena veličina  $q$  na sjevernoj i južnoj hemisferi. O tome nas potpuno uvjerava grafična predstava veličina  $q$ , pa za visoke geografske širine otpada i druga zamjerka činjena astronomskim teorijama ledenih doba. Taj rezultat postigao je i Spitaler u svojoj naprijed spomenutoj radnji.

Današnji nagib ekliptike od  $23^{\circ}27'5''$  razlikuje se malo od njegove srednje vrijednosti  $23^{\circ}17'5''$ , pa zato je dan danas, i ako je dužina zimske sezone južne hemisfere dostigla jedan od svojih sporednih maksimuma, vrijednost  $q_h'$  za geografske širine, koje pripadaju spomenutoj južnoj polarnoj kaloti, daleko od svojega minimuma. I u stvari je današnji srednji zimski dan  $60^{\circ}$  južne hemisfere hladniji samo za  $4.1\%$  od današnjega srednjeg zimskog dana  $60^{\circ}$  sjeverne hemisfere, dok je njegova toplotna množina bila godine 94.000. prije god. 1850. po Hr. za  $10\%$  manja od toplotne množine današnjega zimskog dana  $60^{\circ}$  sjeverne hemisfere. Ta postotna razlika može, kao što ću odmah pokazati, narasti i do  $14.8\%$ . Današnje termičko stanje polarne kalote južne hemisfere udaljeno je, prema tome, veoma od njena ekstremnoga stanja, pa zato gubi i treća zamjerka, činjena astronomskim teorijama, svoj značaj.

Uz maksimalni ekscentricitet i minimalni nagib ekliptike, a pri dužinama perihela od  $90^{\circ}$  odnosno  $270^{\circ}$ , bio bi srednji zimski dan  $60^{\circ}$  južne širine za  $14.8\%$  hladniji, odnosno za  $14.7\%$  topliji od današnjega srednjeg dana  $60^{\circ}$  sjeverne širine. Totalna amplituda srednjega zimskoga dana  $60^{\circ}$  geografske širine (sjeverne ili južne) čini dakle punih  $29.5\%$  njegove sadašnje vrijednosti na sjevernoj hemisferi.

Utjecaj tako velikih promjena toplotnih množina, što ih prima zemlja od sunca, mora se pokazati i u klimatskoj slici naše zemlje. U kakovu se obliku taj utjecaj pokazuje i jesu li ledena doba njegova posljedica, to je pitanje, kojega se riješenju ima tek pristupiti.



## 10.

### O pitanju astronomskih teorija ledenih doba. — Über die Frage der astronomischen Theorien der Eiszeiten.

*Izvadak iz rasprave, priopćene u „Radu“, knj. 204. (1914.), str. 141. Auszug aus der im „Rad“ Bd. 204 (1914), S. 141, veröffentlichten Abhandlung.*

Napisao Dr. M. Milanković. — Von Dr. M. Milanković.<sup>1</sup>

Die Wärmemengen, welche einer Flächeneinheit der Erdoberfläche von der Sonne zugeführt werden, hängen von den folgenden Größen ab: von der Solarkonstante  $I_0$ , der Jahreslänge  $T$ , der großen Halbachse  $a$  und der Exzentrizität  $e$  der Erdbahn, von der Schiefe der Ekliptik  $\varepsilon$  und von der geographischen Breite  $\varphi$  des betreffenden Punktes an der Erdoberfläche.

Die säkularen Schwankungen der Solarkonstante  $I_0$  sind unbedeutend, und man kann dieselbe ebenso wie die Größen  $a$  und  $T$  als konstant ansehen. Daher lassen sich die Wärmemengen  $W_e$  und  $W_h$ , welche eine bestimmte Einheit der Erdoberfläche im Laufe des Sommer- beziehungsweise Winterhalbjahres empfängt, folgendermaßen ausdrücken:

$$(1) \begin{cases} W_e = W_e(\varphi, e, \varepsilon) \\ W_h = W_h(\varphi, e, \varepsilon) \end{cases}$$

Aus der Form dieser Funktionen leitete der Verfasser Dr. M. Milanković in seiner Arbeit „Über die Verteilung der Sonnenstrahlung auf der Erdoberfläche“<sup>2</sup> das Resultat ab, daß ein Ort südlicher geographischer Breite während seines Sommer- beziehungsweise Winterhalbjahres dieselbe Wärmemenge empfängt, wie ein Ort derselben geographischen Breite an der nördlichen Halbkugel während seines Sommer- beziehungsweise Winterhalbjahres. Die Längen dieser Jahreshälften hängen von der Exzentrizität  $e$  der Erdbahn, sowie von der Anomalie  $\nu_0$  der

<sup>1</sup> Den vorliegenden Auszug verfaßte Herr Univ.-Prof. Dr. V. V a r i ć a k.

<sup>2</sup> Sitzungsberichte der k. serbischen Akademie, Bd. XC (1913).



Sonne im Frühlingspunkt, beziehungsweise von der Länge des Perihels  $\Pi$  ab. Bezeichnet man die Länge des Sommer- und Winterhalbjahres an der nördlichen Halbkugel mit  $T_e$  und  $T_h$ , und an der südlichen Halbkugel mit gleichen aber gestrichenen Buchstaben, so wird

$$(2) \begin{cases} T_e = T_h' = T_e(e, \Pi) \\ T_h = T_e' = T_h(e, \Pi) \end{cases}$$

Dem mittleren Sommertage beziehungsweise dem mittleren Wintertage an der nördlichen Halbkugel entsprechen demnach folgende Wärmemengen:

$$(3) \begin{cases} q_e = \frac{W_e(\varphi, e, \varepsilon)}{T_e(e, \Pi)} \\ q_h = \frac{W_h(\varphi, e, \varepsilon)}{T_h(e, \Pi)} \end{cases}$$

An der südlichen Halbkugel sind die betreffenden Wärmemengen durch die Ausdrücke gegeben:

$$(4) \begin{cases} q_e' = \frac{W_e(\varphi, e, \varepsilon)}{T_h(e, \Pi)} \\ q_h' = \frac{W_h(\varphi, e, \varepsilon)}{T_e(e, \Pi)} \end{cases}$$

Die ungleiche Dauer der Jahreszeiten zieht die Ungleichheit der Größen  $q_e$  und  $q_e'$ , sowie der Größen  $q_h$  und  $q_h'$  nach sich.

Wegen der säkularen Schwankungen der Größen  $e$ ,  $\varepsilon$  und  $\Pi$  sind auch die Größen  $q$  säkularen Änderungen unterworfen. Diese Schwankungen in der Verteilung der Sonnenstrahlung auf der Erdoberfläche wurden von einigen Forschern als Ursachen der Eiszeiten angesehen.

Das Phänomen der säkularen Variationen der Wärmemengen  $q$  läßt sich mathematisch genau beschreiben, und es ist darüber nicht weiter zu streiten. Die Sache wird jedoch kontrovers, sobald man sich die Frage vorlegt, wie jene Variationen der Wärmemengen  $q$  sich im klimatischen Bilde unserer Erde offenbart haben.



Vom Wunsche getrieben, je eher auf diese Frage eine Antwort zu geben, nahmen die Begründer verschiedener astronomischer Eiszeitentheorien nicht genügend Rücksicht auf alle jene Elemente, welche bei der Variation der Größen  $q$  von Belang sind; sie beschränkten sich auf die Untersuchung des Einflusses der Änderungen meist eines, höchstens zweier Elemente.

Erst in neueren Zeit fing man an, diesem Teile des Problems eine größere Sorgfalt zu widmen. Im Jahre 1896 veröffentlichte Hargreaves eine elegante Untersuchung über die Abhängigkeit der Sonnenstrahlung an der Erdoberfläche von den astronomischen Elementen. Im J. 1901 erschien eine Arbeit Charliers, die sich mit den säkularen Schwankungen der Größen  $T_e$  und  $T_h$  beschäftigt. In den Sitzungsberichten der k. k. Akademie in Wien erschienen in den Jahren 1905 und 1907 zwei Arbeiten von Hopfner, in denen ein Versuch gemacht wurde, die astronomische Seite des Problems einer weitgehenden Untersuchung zu unterwerfen; leider sind die Resultate durch einige rechnerische Versehen entwertet.

In der vorherzitierten Arbeit unternahm Dr. Milanković ein so gut als möglich vollständiges Bild über die säkularen Schwankungen der Wärmemengen  $q$  zu geben, um dadurch eine solide Basis für weitere Untersuchungen in dieser Richtung zu gewinnen, und auf diese Weise zu ergründen, wie jene Schwankungen in klimatischen Verhältnissen unserer Erde sich geäußert haben. Nachdem Dr. Milanković auch diesen Teil seiner Untersuchungen beendete, teilt er hier seine diesbezüglichen qualitativen Resultate mit, um diese mit den astronomischen Theorien der Eiszeiten zu vergleichen.

In der Theorie der Störungen werden die Variationen der Größen  $e$ ,  $\varepsilon$  und  $\Pi$  als Funktionen der Zeit dargestellt. Stockwell<sup>1</sup> zog die gegenseitigen Störungen der acht Planeten in Betracht und entwickelte die Formeln für die säkularen Schwankungen jener Größen  $e$ ,  $\varepsilon$  und  $\Pi$ , während Pilgrim die Werte dieser Funktionen für den Zeitintervall von 10.100 Jahrtausenden vor Chr. bis 500 Jahrtausende nach Chr. berechnete und tabellarisch zusammenstellte. Man kann daher, von den Gleichungen für  $W_e$ ,  $W_h$ ,  $T_e$  und  $T_h$  ausgehend, welche Dr. Milanković

<sup>1</sup> Smithsonian Contributions, Vol. XVIII, Washington 1873.

<sup>2</sup> Jahreshefte des Vereins für vaterl. Naturkunde in Württemberg, Bd. 60.

in seiner erwähnten Abhandlung abgeleitet hat, jene Größen als Funktionen der Zeit darstellen. Man erhält daraus das folgende Resultat.

Die Längen des Sommer- bzw. Winterhalbjahres können um ihren Mittelwert (welcher der Hälfte des tropischen Jahres gleich ist) um 8,6% in positivem sowie in negativem Sinne, im ganzen also um  $\pm 17,2\%$ , variieren. Diese Variationen der Größen  $T_s$  und  $T_h$  liegen der ersten Kategorie astronomischer Theorien der Eiszeiten (von Adhémar, Croll, Wallace, Ball) zu Grunde.

Bei diesen Theorien kommen die Variationen der Zähler in den Ausdrücken (3) und (4), welche durch die Variation des astronomischen Elementes  $\varepsilon$  hervorgerufen werden, nicht in Betracht, und zwar aus folgendem Grunde. Croll und Ball, welche jenen Theorien die mathematische Begründung gaben, berücksichtigen in ihren Berechnungen nicht die Wärmemengen, welche einem gewissen Parallelkreise zugeführt werden, sondern sie operieren, einer größeren Einfachheit wegen, mit den Wärmemengen  $W_s$  und  $W_h$ , welche der ganzen nördlichen oder südlichen Halbkugel während ihres Sommer- bzw. Winterhalbjahres zugeführt werden. Sie rechnen also mit den Wärmemengen, welche durch die Ausdrücke

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B}_s = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} W_s(\varphi, e, \varepsilon) \cos \varphi d\varphi \\ \mathfrak{B}_h = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} W_h(\varphi, e, \varepsilon) \cos \varphi d\varphi, \end{array} \right.$$

dargestellt sind. Hier bedeutet  $r$  den Radius der Erdkugel. Diese Wärmemengen variieren zusammen mit den Größen  $e$  und  $\varepsilon$ , ihre Änderungen sind jedoch so winzig ( $W_s$  schwankt um seinen Mittelwert um 1,1%, und  $W_h$  um 1,8%), daß dieselben gegenüber den Variationen der Größen  $T_s$  und  $T_h$  gar nicht in Betracht kommen.

Ekholm und Spitaler untersuchten in ihren Arbeiten<sup>1</sup>, welche die zweite Kategorie astronomischer Theorien der Eiszeiten bilden, den Einfluß, den die Variation der Schiefe der Ekliptik auf die Verteilung der Wärmemengen, welche die Erde von der Sonne empfängt, ausübt; sie versuchten auch die durch jene Variation verursachten Temperaturänderungen zu berechnen. Ekholm untersuchte aber nur diesen Einfluß, ohne die Variationen der Größen  $T_s$  und  $T_h$  und deren Einfluß auf die mittleren Saisonwärmern in Betracht zu ziehen. Spitaler versuchte zwar auch diese Variationen in Rechnung zu ziehen, seine Berechnungen basieren aber leider auf falschen Resultaten Hopfners.

Die erste Kategorie astronomischer Theorien der Eiszeiten operiert hauptsächlich mit den Variationen der Nenner, und die zweite mit den Variationen der Zähler in den Ausdrücken (3) und (4).

Nach dem Standpunkte der ersten Kategorie jener Theorien hängen die Änderungen der mittleren Wärmemengen

$$(6) \quad Q_s = \frac{\mathfrak{B}_s}{T_s} \quad \text{und} \quad Q_h = \frac{\mathfrak{B}_h}{T_h},$$

beziehungsweise

$$(7) \quad Q_s' = \frac{\mathfrak{B}_s}{T_h} \quad \text{und} \quad Q_h' = \frac{\mathfrak{B}_h}{T_s},$$

welche während eines Sommer- beziehungsweise Wintertages der nördlichen bzw. der südlichen Halbkugel zugeführt werden, hauptsächlich von den Variationen der Größen  $T_s$  und  $T_h$  ab.

Nach dem Vorhergehenden hängen die Größen  $T_s$  und  $T_h$  nur von  $e$  und  $\Pi$  ab. Infolge der Änderung der Größe  $\Pi$ , welche in etwa 21.000 Jahren auf  $360^\circ$  heranwächst, würden jene Größen mit derselben Periode um ihre Mittelwerte oszillieren. Die Größe  $e$  oszilliert zwischen den Grenzen  $e = 0$  und  $e = 0,0677$  mit der mittleren Periode von beiläufig 92.000 Jahren, daher würden auch jene Größen mit dieser längeren Periode um ihre Mittelwerte oszillieren. Die gleichzeitige Änderung der Größen  $\Pi$  und

<sup>1</sup> Erschienen im Quart. Journ. R. Met. Soc. XXVII (1901) und in Gerlands Beiträgen zur Geophysik, VIII (1907).

$e$  bewirkt aber, daß  $T_s$  und  $T_h$  Oszillationen mit den anfänglichen Perioden von 21.000 Jahren ausführen, welche dann mit wachsendem  $e$  immer länger werden, bis dieselben zugleich mit  $e$  ihren Maximalwert erreichten haben. Die beiden Oszillationen überlagern sich also. Dieser doppelte oszillatorische Charakter der Größen  $T_s$  und  $T_h$  zeigt sich klar in einer graphischen Darstellung dieser Größen, wie sie Charlier gegeben hat. Erreicht die Größe  $T_s$  ihr Maximum, so hat man auf der nördlichen Halbkugel einen langen Sommer und einen kurzen Winter, auf der südlichen dagegen einen langen Winter und einen kurzen Sommer. Da nun die Größen  $W_s$  und  $W_h$  sich nicht merklich ändern, so wird nach den Formeln (6) und (7) der mittlere Wintertag auf der nördlichen Halbkugel warm, auf der südlichen dagegen kalt sein.

Durch diese Variationen des mittleren Wintertages erklären die erwähnten Theorien das Zustandekommen der Eiszeiten. Dagegen hat man Folgendes geltend gemacht:

1. Nach jenen Theorien würden die Eiszeiten in verhältnismäßig kurzen, genug regelmäßigen Intervallen periodisch wiederkehren; dem widerspricht aber die geologische Erfahrung.

2. Im Gegensatz zur geologischen Erfahrung würden die Eiszeiten auf der nördlichen und der südlichen Halbkugel abwechselnd in Erscheinung treten; die gleichzeitige Vereisung beider Halbkugeln wäre unmöglich.

3. Da die Länge des Winters an der südlichen Halbkugel ihr Maximum erreicht hat, hätte man nach jenen Theorien den Eintritt der Eiszeit auf der südlichen Halbkugel jetzt zu erwarten; tatsächlich zeigt jedoch die südliche Halbkugel einen wärmeren Winter als die nördliche.

Diese Einwürfe haben die Grundlagen der angeführten Theorien erschüttert. Daher kam in neuerer Zeit eine dritte Kategorie astronomischer Theorien der Eiszeiten zustande (G. H. Darwin, Schiaparelli), bei welcher die Änderungen des Elementes  $\varphi$  in Rechnung gezogen wird. Da aber die Lagenänderung der Rotationsachse im Geoid eine unbestrittene mechanische Erklärung bis jetzt noch nicht gefunden hat, ist eine größere Variation des Elementes  $\varphi$  (im Gegensatze zu den Variationen der Elemente  $e$ ,  $\Pi$  und  $\varepsilon$ ) allenfalls noch hypothetisch.

Das ganze Phänomen der Variation jener Wärmemengen, welche der Erde während der einzelnen Jahreszeiten zugeführt werden,

ändert sich aber gänzlich, wenn man die säkularen Schwankungen jener Wärmemengen, welche einem gewissen Punkte der Erdoberfläche und nicht der ganzen Halbkugel zugeführt werden, ins Auge faßt, d. h. wenn man die Variationen der durch die Gleichungen (3) und (4) definierten Größen  $q$ , nicht aber die Variationen der durch (6) und (7) definierten Größen  $Q$  einer Untersuchung unterwirft. Bei der Variation jener Größen kommt auch die Variation des Elementes  $\varepsilon$  zur Geltung, und dies gibt der betrachteten Erscheinung einen neuen Charakter.

Nach Stockwells Berechnungen variiert die Schiefe der Ekliptik zwischen den Grenzen von  $21^\circ 58' 36''$  und  $40^\circ 35' 58''$ , also um  $2^\circ 37' 22''$ . Infolge der Schwankung der Schiefe der Ekliptik werden jene Wärmemengen, welche der nördlichen oder der südlichen Halbkugel während ihres Winter- oder Sommerhalbjahres zugeführt werden, nicht merklich geändert; die Verteilung dieser Wärmemengen an beiden Halbkugeln wird aber dadurch eine andere.

Wird die Schiefe der Ekliptik vergrößert, so vermindern sich die Wärmemengen, welche im Laufe eines Jahres den Orten zwischen den geographischen Breiten  $\varphi = 0$  und  $\varphi = 43^\circ 20'$  zugeführt werden; für die Orte von der geographischen Breite  $\varphi = 43^\circ 20'$  bis  $\varphi = 90^\circ$  werden dagegen jene Wärmemengen vergrößert. Bei der totalen Variation von  $2^\circ 37' 22''$  der Schiefe der Ekliptik berechnen sich nach Hargreaves die Variationen der jährlichen Wärmemengen in Prozenten folgendermaßen:

$\varphi =$	$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$	$90^\circ$
Die Variation in %:	-0.9	-0.9	-0.8	-0.6	-0.2	+0.5	+2.0	+6.5	+9.6	+10.6

Die Schwankung der Schiefe der Ekliptik übt aber einen noch wichtigeren Einfluß aus, den Hargreaves nicht untersucht hat. Nebst der erwähnten Änderung längs des Meridians wird im Laufe des Jahres an jedem Orte jenes Meridians auch die Verteilung der Wärmemengen geändert. Die Vergrößerung der Schiefe der Ekliptik vermindert die winterlichen Wärmemengen eines jeden Ortes längs des Meridians, vergrößert dagegen die sommerlichen Wärmemengen der Orte zwischen  $\varphi = 11^\circ 23'$  und  $\varphi = 90^\circ$ . Die Änderung der Schiefe der Ekliptik vergrößert also den Gegensatz zwischen dem Sommer und Winter.

Nach den Berechnungen des Verfassers Dr. Milanković ruft die totale Variation der Schiefe der Ekliptik folgende prozentuelle Änderungen der Größen  $W_s$  und  $W_h$  hervor:

$\epsilon =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	
Prozentuelle Änderung	$W_s$	-0.9	-0.1	+0.7	+1.5	+2.5	+3.7	+5.3	+8.3	+10.1	+10.6
	$W_h$	-0.9	-1.8	-2.8	-4.0	-5.7	-8.2	-12.5	-12.1	-11.2	0

Für hohe geographische Breiten sind diese Änderungen ganz beträchtlich. Aus der obigen Tabelle ersieht man, daß die Wärmemenge, welche einem Orte unter 60° geographischer Breite während seines Winters zugeführt wird, durch die totale Variation der Schiefe der Ekliptik um volle 12.5% geändert wird. Unter dieser Breite sind demnach die Änderungen des Gegensatzes zwischen dem Winter und dem Sommer fast ebenso groß, als die maximalen Änderungen jenes Gegensatzes, hervorgerufen durch die Änderung der Dauer der Jahreszeiten.

Die Variation der Exzentrizität  $e$  beeinflusst nur unbedeutend die Größen  $W_s$  und  $W_h$ , und ist daher nicht in Betracht zu nehmen.

Beachtet man demnach die Variationen aller veränderlicher astronomischer Elemente  $e$ ,  $\Pi$  und  $\epsilon$ , so erhält man das folgende Resultat: Infolge der Variationen der ersten zwei Elemente wird die Dauer des Sommer- beziehungsweise Winterhalbjahres geändert; es ändern sich also die Neuner  $T_s$  und  $T_h$  in den Ausdrücken (3) und (4), während durch die Variation des Elementes  $\epsilon$  in jenen Ausdrücken die Zähler geändert werden. Bis zu 50° geographischer Breite ist diese Änderung in den Zählern nicht beträchtlich, so daß das Phänomen der Variation der mittleren Saisonwärmemengen zwischen dem fünfzigsten nördlichen und demselben südlichen Parallelkreise hauptsächlich durch die Änderung der Dauer der Jahreszeiten beeinflusst wird. Für diese Zone behalten die Rechnungen Crolls und Balls, die bei der Aufstellung ihrer Theorie ausgeführt wurden, ihre Gültigkeit. Für die höheren Breiten jedoch, d. h. für die Polarkalotten oberhalb 50°, insbesondere für den 60. Grad geographischer Breite, muß man auch auf die Variation des astronomischen Elementes  $\epsilon$  Rücksicht nehmen.

In diesen Breiten sind die mittleren Sommer- beziehungsweise Winterwärmemengen Funktionen der Variablen  $e$ ,  $\Pi$  und  $\epsilon$ , welche alle drei die Variationen jener Wärmemengen in demselben Sinne beeinflussen. Infolge der Variation des ersten Elementes würden die Größen  $q_s$  und  $q_h$  um ihre Mittelwerte mit der Periode von 92 Tausend Jahren oszillieren; infolge der Variation des zweiten beziehungsweise dritten Elementes würde jene Periode 21 bzw. 40 Tausend Jahre betragen. Alle diese drei Oszillationen verschiedener Perioden und ungleicher Phasen vollführen die Größen  $q$  gleichzeitig, und dadurch wird der regelmäßige oszillatorische Charakter gestört, welchen dieselben unter kleineren geographischen Breiten aufweisen. Die den Polarkalotten entsprechenden Größen  $q$  oszillieren sehr unregelmäßig. So z. B. vollführt die dem 60. Grade nördlicher Breite entsprechende Größe  $q_h$  im Zeitintervalle von 72.000 bis 25.000 Jahren vor dem Jahre 1850 nach Chr. eine einzige Oszillation, während sie infolge Änderung der Dauer der Jahreszeiten volle zwei Oszillationen vollführt haben würde. Beachtet man also die Variation der Saisonwärmemengen in den geographischen Breiten oberhalb des 50. Grades, und zieht man geziemend auch die Variationen der Schiefe der Ekliptik in Betracht, so verliert der erste Vorwurf, den man gegen astronomische Theorien der Eiszeiten erhoben hat, seine Geltung.

Infolge der Änderung der Schiefe der Ekliptik erleiden auch die Größen  $q_s$  und  $q_s'$ , bzw.  $q_h$  und  $q_h'$  in demselben Sinne eine Änderung. Die Vergrößerung der Schiefe der Ekliptik vermindert nämlich gleichzeitig die gleichnamigen Saisonwärmemengen auf der nördlichen und südlichen Halbkugel, während die Änderungen der Größe  $\Pi$  jene Wärmemengen im entgegengesetzten Sinne beeinflusst haben.

Die Variation der Größe  $\epsilon$  stört demnach das regelmäßige Alternieren der Änderungen der Größen  $q$  auf der nördlichen und südlichen Halbkugel. Die graphische Darstellung der Größen  $q$  liefert den vollen Beweis dafür. Für höhere Breiten entfällt also auch der zweite Vorwurf, den man gegen astronomische Theorien der Eiszeiten erhoben hat. Dieses Resultat erreichte Spitaler in seiner erwähnten Abhandlung.

Die jetzige Schiefe der Ekliptik von 23° 27'5" unterscheidet sich wenig von ihrem Mittelwert, welcher 23° 17'5" beträgt, daher ist heutzutage die Größe  $q_h'$  für die der erwähnten südlichen

Polarkalotte zugehörigen Breiten fern von ihrem Maximum, obwohl jetzt die Länge der Wintersaison an der südlichen Halbkugel ein Nebenmaximum erreicht hat. In der Tat ist der mittlere Wintertag auf dem 60. Grad der südlichen Halbkugel nur um 4.1% kälter, als der mittlere Wintertag unter dem 60. Grad der nördlichen Halbkugel, während 94 Jahrtausende vor dem Jahre 1850 nach Chr. seine Wärmemenge um 10% kleiner war, als die Wärmemenge des heutigen Wintertages auf dem 60. Grad der nördlichen Halbkugel. Dieser Unterschied kann auf 14.8% anwachsen. Der thermische Zustand der Polarkalotte an der südlichen Halbkugel ist demnach fern von seinem Extrem, und so verliert auch der dritte Vorwurf, den man gegen die genannten astronomischen Theorien erhoben hat, seine Bedeutung.

Bei der maximalen Exzentrizität und der minimalen Schiefe der Ekliptik, sowie bei den Längen des Perihels von 90 bzw. 270 Grad, wäre der mittlere Wintertag unter dem 60. Grad der südlichen Breite um 14.8% kälter bzw. um 14.7% wärmer als der heutige mittlere Tag unter dem 60. Grad der nördlichen Breite. Die totale Amplitude des mittleren Wintertages unter dem 60. Grad der nördlichen Breite macht volle 29.5% seines jetzigen Wertes an der nördlichen Halbkugel aus.

Der Einfluß so bedeutender Schwankungen der Wärmemengen, welche der Erde von der Sonne zugeführt werden, muß auch auf das klimatische Bild unserer Erde eine Wirkung ausüben. In welcher Form sich aber ihr Einfluß offenbart, und ob sie die Eiszeiten im Gefolge hat, das ist eine Frage, deren Lösung man erst in Angriff nehmen muß.

