Matematička teorija sprovođenja toplote uživala je od postanka svoga[1] osobitu pažnju matematikâ, te je ubrzo postala zajednička oblast čiste matematike i teorijske fizike. Iz nje se razvila teorija Fourierovih redova i Fourierovih integrala, a znatan dio radova, koji se bave tom teorijom, ima više matematičkoga interesa negoli fizikalnoga. Jedan pogled na prijegled glavnije literature o tome predmetu uvjerava nas o tome[2]. Interesantno je međutim, da se baš u početku razvitka te teorije veoma mnogo očekivalo od njenih praktičnih primjena. Kada je Fourier svoju matematičku teoriju primijenio na geofizikalni problem hlađenja zemaljske kugle[3], ta su njegova ispitivanja, kojih direktna praktična vrijednost nije mogla biti velika zbog nepoznavanja fizikalnih prilika u unutrašnjosti zemlje, dočekali s velikim interesom geofizici[4]. Toga interesa nije ni dandanas sasvim nestalo, i ako se sada bolje uviđaju teškoće ispitivanja gornjega fenomena. *W. Thomson* (Lord *Kelvin*) se uz primjenu Fourierove

---

[1] O počecima njenim, koji datiraju od godine 1804., vidi: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. V. Artikel 4. „Wärmeleitung" von Hobson und Diesselhorst pag. 165. ff.

[2] Važniji radovi o matematičkoj teoriji sprovođenja toplote navedeni su prijegledno u Winkelmann, Handbuch der Physik, zweite Auflage, Bd. III. Leipzig 1906. pag. 444. ff.

[3] Oeuvres de Fourier, Tome II. Paris 1890.

[4] Resal, Traité de Physique mathématique. 2. Éd. Tome II. Paris 1888. navodi (str. 48.), da je slavni geolog ondašnjega doba É. de Beaumont pripisivao veliku važnost ispitivanju Fourierovu.

teorije, no polazeći od drugih pretpostavaka, bavio istim problemom[1]; *Poincaré* je opširno progovorio o Fourieru i o Thomsonovu ispitivanju[2], a *Boussinesq* je dao „slavnoj teoriji Fourierovoj hlađenja zemlje" veoma elegantan matematički oblik[3].

Osim toga se matematička teorija sprovođenja toplote bavila već u prvim počecima svojima još jednim pitanjem geofizike: problemom varijacija temperature u gornjim slojevima zemaljske kore. *Poisson* se u svome klasičnom djelu o matematičkoj teoriji toplote bavio podrobno tim fenomenom[4], a i *W. Thomson* posvetio mu je svoju pažnju[5].

Pri svem tom čini mi se, da se polje primjena matematičke teorije sprovođenja toplote na probleme kosmičke fizike može znatno proširiti. Termičke prilike onih članova našega planetskoga sistema, koji nijesu opkoljeni osjetnim atmosferama, kao što je n. pr. zemljin mjesec, mogu se bez hipotetičkih pretpostavaka ispitivati s pomoću navedene teorije, jer učini li se opravdana pretpostavka, da je površina posmatranoga kosmičkoga tijela kruta i bez vlastite toplote, to će temperatura njena zavisjeti očito o ova tri utjecaja: a) od radijacije sunca, koju ćemo ukratko nazvati insolacijom i po kojoj se za boravka sunca nad horizontom uočenoga mjesta površine dovode na tu površinu određene toplotne množine; — b) od zračenja toplotnih množina sa posmatrane površine u interplanetarni prostor, a taj ćemo utjecaj nazvati ukratko radijacijom; — c) od sprovođenja toplotnih množina sa površine posmatranoga tijela u njegovu unutrašnjost i obratno, a taj ćemo utjecaj zvati kondukcijom.

Kako su zakoni, koji regulišu ta tri utjecaja, dovoljno poznati, to je moguće formirati diferencijalne jednačine, kojih bi integracija dala temperaturu odabranoga mjesta površine kao funkciju vremena.

[1] Lord Kelvin, Mathematical and Physical Papers, Cambridge.
[2] Poincaré, Leçons sur les hypothèses cosmogoniques. Paris 1911. pag. 209. suiv.
[3] Boussinesq, Problème du refroidissement de la croûte terrestre, traité au même point de vue que l' a fait Fourier, mais par une méthode d' intégration beaucoup plus simple; Comptes rendus. Tome 130. (1900.) pag. 1652.
[4] Poisson, Théorie mathématique de la chaleur. Paris 1835.
[5] W. Thomson, Problems relating to underground temperatures; Phil. Mag. (5) 5. (1878.) pag. 370. — Lord Kelvin: Loc. cit.

Zadatak, koji sam sebi pri izradbi ove radnje stavio, ovaj je: da formiram te diferencijalne jednačine; da proučivši matematičko oruđe, koje nam stoji na raspoloženje, ispitam slučajeve, u kojima je integracija tih diferencijalnih jednačina moguća — s jednom riječju: da sistematički sredim i usavršim za specijalnu upotrebu matematički aparat za kasnije konkretno primjene.

Uočimo dakle neko kosmičko tijelo krute površine, a takovih dimenzija, da elemenat njegove površine, kojega termičke prilike ispitujemo, možemo smatrati za ravan, onda mora temperatura u kojegod tačke toga tijela u blizini posmatranoga elementa zadovoljavati Fourierovu parcijalnu diferencijalnu jednačinu[1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

gdje x označuje odstojanje kojegod tačke tijela od granične površine, koja je sada zamijenjena ravninom, u temperaturu tijela u toj tački u vremenu t, a a^2 koeficijenat sprovođenja temperature posmatranoga tijela. Označimo li sa k sposobnost sprovođenja toplote sa s specifičnu toplotu, a sa ρ gustinu supstancije posmatranoga tijela, to postoji relacija:

$$a^2 = \frac{k}{s\rho}. \tag{2}$$

Temperatura granične površine funkcija je navedenih triju utjecaja, pa je naš sada najbliži zadatak, da tim utjecajima dademo matematički oblik.

Po prvom utjecaju, dakle po insolaciji, neka prima jedinica neke površine u jedinici vremena toplotnu množinu $\frac{dq_1}{dt}$. Označimo li sa I onu toplotnu množinu, koju sunce šalje u jedinici vremena na posmatranu jedinicu površine, to postoji jednačina

$$\frac{dq_1}{dt} = A_0 I,$$

[1] Vidi n. pr. Weber H., Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik. 4. Aufl. Bd. II. Braunschweig 1912. pag. 90.

gdje A_0 označuje apsorpcionu sposobnost površine posmatranoga tijela. Veličina I zavisi, — uz pretpostavku, da posmatrano tijelo nije opkoljeno atmosferom — samo o relativnom položaju uočenoga elementa površine prema suncu; pa kako nam zakoni kretanja nebeskih tijela određuju taj položaj, to je veličina I poznata funkcija vremena, a to ću označiti sa:

$$I = I(t),$$

tako da je:

$$\frac{dq_1}{dt} = A_0 I(t). \tag{3}$$

Kako insolacija ne može biti negativna, to je i funkcija $I(t)$ ili pozitivna ili ravna nuli.

Ja sam se u radnji: „О распореду сунчеве радијације на површини земље[1] podrobno bavio ispitivanjem funkcije $I(t)$ uzev, kao što se vidi iz natpisa radnje, zemlju kao objekat insolacije. Ali se moja ispitivanja mogu primijeniti na svako kosmičko tijelo, koje opisuje oko sunca Keplerovu elipsu, a to su, dozvolivši neznatna zanemarenja, svi članovi našega planetskoga sistema. Tako nam citirana radnja daje sredstvo, da odredimo funkciju $I(t)$. Označimo li sa T vrijeme obilaženja (revolucije) posmatranoga kosmičkoga tijela oko sunca, to sljeduje iz navedene radnje, da je funkcija $I(t)$ periodička funkcija sa periodom T.

Po drugom utjecaju, dakle po radijaciji, neka gubi jedinica uočene površine u jedinici vremena toplotnu množinu $\frac{dq_2}{dt}$. Kada bi posmatrano tijelo bilo apsolutno crno ili, kao što je bolje reći, kada bi bio savršen radijator[2], onda bi radijacija njegova bila regulisana Stefanovim zakonom, prema kojem bi bilo:

$$\frac{dq_2}{dt} = \sigma T_0^4, \tag{4}$$

[1] „Глас Српске Краљевске Академије". Први разред 37.

[2] O prijedlogu, da se dosada uobičajeni naziv „apsolutno crno tijelo" zamijeni boljim „savršen radijator", vidi Poynting, Die Strahlung im Sonnensystem; Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik. Bd. II. (1905.) pag. 44.

pri čemu T_0 označuje apsolutnu temperaturu površine, a σ jedan konstantni koeficijenat[1]. Pri tome smo uzeli, da je temperatura interplanetarnoga prostora, u koji tijelo radijira svoju toplotu, jednaka apsolutnoj nuli.

No Stefanov zakon važi, kao što su *Boltzmann* teorijski[2], a *Schnebeli, Lummer, Pringsheim* i *Kurlbaum* eksperimentalno[3] dokazali, samo za savršene radijatore. Za nepotpune radijatore čini se da su zakoni radijacije komplikovaniji. *Paschen*[4] dolazi do zaključka, da je zakon radijacije za takova tijela, bolje negoli Stefanovim zakonom, formulisan jednačinom:

$$\frac{dq_2}{dt} = c\, T_0^{\varepsilon}, \tag{5}$$

gdje su c u ε konstante, koje zavise o prirodi površine posmatranoga tijela. *Siegl*[5] je te konstante odredio za različite zemlje, kamenja, vodu i led, dakle za materije, koje baš u našem slučaju dolaze u obzir. Prema njegovim ispitivanjima varijira eksponenat ε za te materije između vrijednosti 4·083 (za bazaltnu lavu) i vrijednosti 4·382 (za šljunak), a koeficijenat c između vrijednosti $0{\cdot}0389.10^{-12}$ (za šljunak) i vrijednosti $0{\cdot}589.10^{-12}$ (za bazaltnu lavu).

Ja ću u ovom, što sljeduje, uzeti u obzir jednačinu (5), koja za savršen radijator prelazi u jednačinu (4). Označimo li temperaturu površine posmatranoga tijela, mjerenu u Celsiusovim stepenima, sa u_0, to je zakon radijacije predstavljen izrazom:

$$\frac{dq_2}{dt} = c\,(273 + u_0)^{\varepsilon}. \tag{6}$$

[1] Koeficijenat σ je za jedinice: gramkalorija, minuta i cm^2 po ispitivanjima *Kurlbaumovim* $\sigma = 0{\cdot}768 \times 10^{-10}$, a po ispitivanjima *Bauera* i *Moulina* $\sigma = 0{\cdot}763 \times 10^{-10}$, određen je dakle dovoljnom tačnosti. Vidi o tome: Kurlbaum, Ueber eine Methode zur Bestimmung der Strahlung in absolutem Masse. Wied. Annalen *65.* (1898.) pag. 746.; Bauer et Moulin, La constante de la loi de Stephan. Journal de Physique (4) *9.* (1910.) pag. 468.

[2] Wied. Annalen *65.* (1898.) pag. 746.

[3] Vidi Chwolson, Traité de Physique. Tome II. Paris 1906. pag. 72.

[4] Wied. Annalen. *49.* (1893.) pag. 50. — Ibid. *58.* (1896.) pag. 455. — Ibid. *60.* (1897.) pag. 662.

[5] Siegl, Ueber das Emissionsvermögen von Gesteinen, Wasser und Eis. Wiener Sitzungsberichte, Bd. CXVI. Abt. IIa (1907.) pag. 1203.

Po trećem utjecaju, t. j. kondukciji, dobiva jedinica uočene površine u jedinici vremena toplotnu množinu $\frac{dq_3}{dt}$, koja je, prema osnovnim principima matematičke teorije sprovođenja toplote[1], jednaka produktu sposobnosti provođenja toplote k i gradijenta temperature $\frac{\partial u}{\partial x}$ na površini. Zato je:

$$\frac{dq_3}{dt} = k \frac{\partial u}{\partial x}\Big\}_{x=0}. \tag{7}$$

Na površini tijela ukazaće se u uočenom momentu poradi navedena tri utjecaja ona temperatura u_0, kod koje je pridolaženje toplotnih množina ka površini jednako odilaženju. Kako prema pređašnjem pridolaze na površinu toplotne množine $\frac{dq_1}{dt}$ i $\frac{dq_3}{dt}$, a odilazi toplotna množina $\frac{dq_2}{dt}$, to će postojati jednačina:

$$\frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_3}{dt} = \frac{dq_2}{dt} \tag{8}$$

ili, uzevši u obzir jednačine (3), (6) i (7):

$$A_0 I(t) = c\,(273 + u_0)^{\varepsilon} - k \frac{\partial u_0}{\partial x}. \tag{9}$$

Ova jednačina daje nam jedan od graničnih uslova, potrebnih za integraciju jednačine (1). Drugi granični uslov dobije se u problemima ove vrste time, da se zahtijeva, da sa rastućim x ne raste u u beskonačnost. Tako nam isto i inicijalan raspored temperature ne mora biti zadan zbog periodiciteta funkcije $I(t)$, jer će se poradi toga i temperatura površine mijenjati periodički, a mi proučavamo samo ona stanja, koja su toliko udaljena od inicijalnoga momenta, da na njih ne utječe inicijalni raspored.

Ispitivanje termičkih prilika na površinama kosmičkih tjelesa, neopkoljenih atmosferama, redukuje se prema tome na riješenje ovoga matematičkoga zadatka:

Neka se nađe partikularni integral $u = f(x, t)$ parcijalne diferencijalne jednačine:

[1] Vidi n. pr. Weber H.: Loc. cit. pag. 80. Gl. (2).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{10}$$

koji zadovoljava ove granične uslove:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{za } x = 0 \\ A_0 I(t) = c\,(273 + u)^{\varepsilon} - k \frac{\partial u}{\partial x} \end{array}\right. \tag{11}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{za } x = \infty \\ u = \text{konačno} \end{array}\right. \tag{12}$$

Pri tome je $I(t)$ poznata periodična funkcija sa periodom T, koja ne može nikada postati negativna.

Riješivši ovaj zadatak, daje nam izraz $u_0 = f(0, t)$ temperaturu površine posmatranoga tijela kao funkciju vremena.

Do danas nije pošlo za rukom riješiti naprijed izloženi problem u njegovoj potpunosti; ali je moguće, kao što će se vidjeti po onom, što sljeduje, riješiti ga u nekim specijalnim slučajevima. Osim toga je moguće razviti i za općeni njegov slučaj metodu, koja daje aproksimativno riješenje. Te ću slučajeve sada izložiti.

Prvi specijalni slučaj. Insolacija površine je konstantna, t. j.

$$I(t) = C, \tag{13}$$

gdje C označuje jednu konstantu.

U ovom su slučaju jednačina (10) a i granični uslovi (11) i (12) zadovoljeni izrazom:

$$u = \left(A_0 \frac{C}{c}\right)^{-\varepsilon} - 273, \tag{14}$$

koji kazuje, da je temperatura tijela konstantna i u svim posmatranim tačkama jednaka. Ovaj slučaj nastupa, dakako, u stacionarnom stanju, t. j. kada je posmatrano stanje toliko udaljeno od inicijalnoga, da inicijalni raspored temperature u tijelu ne utječe više na posmatrano stanje ili kada inicijalni raspored temperature već zadovoljava jednačinu (14).

Veoma važan slučaj kosmičke fizike, koji odgovara gornjim pretpostavkama, slučaj je srednjih godišnjih temperatura kao posljedice srednjega stanja insolacije. Srednje godišnje stanje insolacije kojih god tačaka površine zemlje ili drugih planeta našega sunčanoga sistema konstantno je, ako se pod godinom razumije vrijeme revolucije posmatrane planete oko sunca. Za takove jedne godine mijenja se doduše gradijenat temperature $\frac{\partial u}{\partial x}$ na površini, ali on osciluje pri tome s podjednakom pozitivnom i negativnom amplitudom oko vrijednosti nule, tako da su toplotne množine, koje za tople polugodine struje sa površine tijela u njegovu unutrašnjost, jednake onim toplotnim množinama, koje za hladne polugodine struje iz unutrašnjosti ka površini. Zato je godišnji efekat kondukcije ravan nuli, i on se može pri ispitivanju godišnjih temperatura zanemariti.

Drugi specijalni slučaj. Član se $k\frac{\partial u}{\partial x}$ jednačine (11) može zanemariti, tako da ona dobije ovaj oblik:

$$(15)\qquad \begin{cases} \text{za } x = 0 \\ A_0 I(t) = c\,(273+u)^{\varepsilon}. \end{cases}$$

To nastupi onda, kada je sposobnost sprovođenja toplote k posmatranoga tijela beskonačno mala, t. j. kada imamo posla sa potpunim izolatorom toplote.

U tom je slučaju jednačinom (15) već određena temperatura površine, pa nam ostaje samo da odredimo temperaturu u koje god tačke u unutrašnjosti tijela kao funkciju vremena.

Riješivši jednačinu (15) po u, dobijemo temperaturu površine kao funkciju vremena:

$$(16)\qquad u = \left[\frac{A_0}{c}\, I(t)\right]^{-\varepsilon} - 273 = f(t).$$

Kako je $I(t)$ bila periodična funkcija sa periodom T, to je i $f(t)$ periodična funkcija iste periode, pa ako funkcija $f(t)$ ne postaje nigdje diskontinuirana, to se posmatrani slučaj svodi na klasički slučaj Poissonov; njegove ćemo rezultate ukratko rekapitulisati, jer će nam oni biti potrebni pri ispitivanju onoga specijalnoga slučaja, koji sljeduje.

Izrazimo li vrijeme t funkcije $f(t)$ u lučnoj mjeri, pomnoživ ga sa $\frac{2\pi}{T}$ tako, da perioda T odgovara luku 2π, onda možemo funkciju $f(t)$ razviti u Fourierov red:

$$(17)\qquad f(t) = \alpha + \sum_m \beta_m \cos\frac{2m\pi}{T}\,t + \sum \gamma_m \sin\frac{2m\pi}{T}\,t,$$

pri čemu je:

$$(18)\qquad \left|\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\,dt \\ \beta_m &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2m\pi}{T}\,t\,dt \\ \gamma_m &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2m\pi}{T}\,t\,dt \end{aligned}\right.$$

i gdje m označuje cijele brojeve 1, 2, 3 . . . i t. d.

Granični uslov (15) našega problema dobije prema tome ovaj oblik:

$$(19)\qquad \begin{cases} \text{za } x = 0 \\ u = \alpha + \sum\limits_m \beta_m \cos\frac{2m\pi}{T}\,t + \sum\limits_m \gamma_m \sin\frac{2m\pi}{T}\,t. \end{cases}$$

Integral jednačine (10), koji zadovoljava granične uslove (19) i (12), predstavljen je, kao što ćemo se odmah uvjeriti, ovim izrazom:

$$(20)\qquad u(x,t)=\alpha+\sum_m \beta_m e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}}\cos\left(\frac{2m\pi}{T}t-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right)+\sum_m \gamma_m e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}}\sin\left(\frac{2m\pi}{T}t-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right).$$

U stvari sljeduje iz gornje jednačine:

$$(21)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{2\pi}{T}\sum_m m\beta_m e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}}\sin\left(\frac{2m\pi}{T}t-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right)+\frac{2\pi}{T}\sum_m m\gamma_m e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}}\cos\left(\frac{2m\pi}{T}t-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right);$$

$$(22)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\left\{\sum_m \sqrt{m}\,(\beta_m-\gamma_m)\,e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}}\sin\left(\frac{2m\pi}{T}t-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_m \sqrt{m}\,(\beta_m+\gamma_m)\,e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}}\cos\left(\frac{2m\pi}{T}-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right)\right\};$$

$$(22^a)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2}{a^2}\frac{\pi}{T}\left\{-\sum_m m\beta_m e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}}\sin\left(\frac{2m\pi}{T}t-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right)+\sum_m m\gamma_m e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}}\cos\left(\frac{2m\pi}{T}t-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right)\right\}.$$

Stavimo li vrijednosti (21) i (22) u jednačinu (10), to vidimo, da je ona zadovoljena. Tako su isto funkcijom (20) zadovoljeni i granični uslovi (19) i (12). Zato nam ona predstavlja riješenje proučavanoga specijalnoga slučaja.

Treći specijalni slučaj. Funkcija $I(t)$ osciluje s malenim amplitudama oko jedne konstantne pozitivne vrijednosti. U ovom će slučaju i temperatura u površine posmatranoga tijela oscilovati s malenim oscilacijama oko jedne srednje vrijednosti u_0, pa zato možemo staviti:

$$(23)\qquad u=u_0+\Delta u,$$

pri čemu je u_0 konstantno, a Δu malo. Veličinu u_0 odredit ćemo kasnije.

Granični uslov (11) dobije sada ovaj oblik:

$$(24)\qquad \begin{cases} \text{za } x=0 \\ A_0 I(t)=c\,(273+u_0+\Delta u)^{\varepsilon}-k\,\frac{\partial u}{\partial x}. \end{cases}$$

U izrazu $c\,(273+u_0+\Delta u)^{\varepsilon}$ je Δu veoma malo, pa zato možemo taj izraz razviti u red i zanemariti sve više potencije od Δu. Na taj način dobijemo:

$$c\,(273+u_0+\Delta u)^{\varepsilon}=c\,[(273+u_0)^{\varepsilon}+\varepsilon\,(273+u_0)^{\varepsilon-1}\Delta u]=$$
$$=c(273+u_0)^{\varepsilon}-c\varepsilon(273+u_0)^{\varepsilon-1}u_0+c\varepsilon\,(273+u_0)^{\varepsilon-1}u.$$

Uvedimo, kratkoće radi, ove oznake:

$$(25)\qquad \begin{cases} c\,(273+u_0)^{\varepsilon}-c\varepsilon\,(273+u_0)^{\varepsilon-1}u_0=-hv_0 \\ c\varepsilon\,(273+u_0)^{\varepsilon-1}=h \end{cases}$$

onda je:

$$(26)\qquad c\,(273+u_0+\Delta u)^{\varepsilon}=h\,(u-v_0),$$

pa granični uslov (24) dobije ovaj oblik:

$$\begin{cases} \text{za } x = 0 \\ A_0 I(t) = h(u - v_0) - k \dfrac{\partial u}{\partial x}. \end{cases}$$

Stavimo:

(27) $$v_0 + \frac{A_0}{h} I(t) = \varphi(t),$$

to je uslov na površini izražen sa:

(28) $$\begin{cases} \text{za } x = 0 \\ \varphi(t) = u - \dfrac{k}{h} \dfrac{\partial u}{\partial x}. \end{cases}$$

Naš se problem sada svodi na ovaj:

Valja naći partikularni integral jednačine (10), koji zadovoljava uslove (12) i (28).

Boussinesq[1] je pokazao, ako jedna funkcija $u(x,t)$ zadovoljava jednačinu (10), da je ista jednačina zadovoljena i funkcijom:

(29) $$\varphi(x,t) = u(x,t) - \frac{k}{h} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

U stvari je:

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{k}{h} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{k}{h} \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3},$$

tako da je:

[1] Boussinesq, Réduction de certains problèmes d' échauffement ou de refroidissement par rayonnement, au cas plus simple de l' échauffement ou du refroidissement des mêmes corps par contact. Comptes Rendus *130.* (1900.) p. 1579.

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{k}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right\};$$

no kako je jednačina (10) zadovoljena funkcijom $u(x,t)$, to sljeduje, da je:

(30) $$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

Ako smo prema tome našli funkciju $\varphi(x,t)$, koja zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednačinu (30) i uslove:

(31) $$\varphi(0,t) = v_0 + \frac{A_0}{h} I(t)$$

(32) $$\varphi(\infty,t) = \text{konačno},$$

to ćemo naći traženu funkciju $u(x,t)$ integrujući diferencijalnu jednačinu (29), a pazeći na uslov (12).

Određenje funkcije $\varphi(x,t)$, koja zadovoljava gornje uslove, riješeno je u predašnjem specijalnom slučaju, u drugom. Razvijemo li dakle zadatu funkciju $\varphi(0,t)$ u Fourierov red, razvivši $I(t)$ u takov red, to dobijemo:

(33) $$\varphi(0,t) = v_0 + \frac{A_0}{h}\alpha + \frac{A_0}{h}\sum_m \beta_m \cos\frac{2m\pi}{T}t + \frac{A_0}{h}\sum_m \gamma_m \sin\frac{2m\pi}{T}t,$$

pri čemu je:

$$
(34)\qquad
\left|\;
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} I(t)\,\mathrm{dt}\\
\beta_m &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} I(t)\cos\frac{2m\pi}{T}\,t\,\mathrm{dt}\\
\gamma_m &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} I(t)\sin\frac{2m\pi}{T}\,t\,\mathrm{dt}
\end{aligned}
\right.
$$

pa je funkcija $\varphi(x,t)$ data izrazom

$$
(35)\qquad
\begin{aligned}
\varphi(x,t) = v_0 + \alpha\frac{A_0}{h} &+ \\
+\frac{A_0}{h}\sum_m \beta_m\, e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}} &\cos\left(\frac{2m\pi}{T}\,t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right) + \\
+\frac{A_0}{h}\sum_m \gamma_m\, e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}} &\sin\left(\frac{2m\pi}{T}\,t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right).
\end{aligned}
$$

Funkcija $u(x,t)$ određena je diferencijalnom jednačinom (29), t. j. jednačinom:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{h}{k}\,u(x,t) = -\frac{h}{k}\,\varphi(x,t).$$

Ovo je linearna diferencijalna jednačina oblika:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + Pu = Q,$$

pri čemu je:

$$P = -\frac{h}{k}$$

$$Q = -\frac{h}{k}\,\varphi(x,t),$$

pa je njen opšti integral predstavljen izrazom:

$$u = C\,e^{-\int P dx} + e^{-\int P dx}\int Q\,e^{\int P dx}\,dx.$$

Po tome možemo veličinu C staviti jednaku kojoj god funkciji od t; no kako se obaziremo na uslov (12), to valja staviti $C = 0$. Na taj način dobijemo:

$$(36)\qquad u(x,t) = -\frac{h}{k}\,e^{\frac{h}{k}x}\int \varphi(x,t)\,e^{-\frac{h}{k}x}\,dx$$

ili, s obzirom na jednačinu (35),

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = &-\frac{h}{k}\left(v_0 + \alpha\frac{A}{h}\right)e^{\frac{h}{k}x}\int e^{-\frac{h}{k}x}\,dx \\
&-\frac{A_0}{k}\,e^{\frac{h}{k}x}\sum_m \beta_m \int e^{-\left(\frac{h}{k}+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right)x}\cos\left(\frac{2m\pi}{T}\,t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right)dx \\
&-\frac{A_0}{k}\,e^{\frac{h}{k}x}\sum_m \gamma_m \int e^{-\left(\frac{h}{k}+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right)x}\sin\left(\frac{2m\pi}{T}\,t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right)dx.
\end{aligned}
$$

Stavimo li, kratkoće radi,

$$
(37)\qquad
\left|\;
\begin{aligned}
\frac{h}{k} + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} &= a_m\\
\frac{2m\pi}{T}\,t &= b_m\\
\frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} &= c_m
\end{aligned}
\right.
$$

to dobijemo:

$$(38)\qquad u(x,t) = v_0 + \varkappa \frac{A_0}{h} - \frac{A_0}{k} e^{\frac{h}{k}x} \sum_m \beta_m \int e^{-a_m x} \cos(b_m - c_m x)\,dx -$$

$$- \frac{A_0}{k} e^{\frac{h}{k}x} \sum_m \gamma_m \int e^{-a_m x} \sin(b_m - c_m x)\,dx.$$

Kako je:

$$\int e^{-a_m x} \cos(b_m - c_m x)\,dx = \cos b_m \int e^{-a_m x} \cos c_m x\,dx +$$

$$+ \sin b_m \int e^{-a_m x} \sin c_m x\,dx$$

$$\int e^{-a_m x} \sin(b_m - c_m x)\,dx = \sin b_m \int e^{-a_m x} \cos c_m x\,dx -$$

$$- \cos b_m \int e^{-a_m x} \sin c_m x\,dx$$

pa kako je:

$$\int e^{-a_m x} \cos c_m x\,dx = - \frac{e^{-a_m x}}{a_m^2 + c_m^2} \left\{ a_m \cos c_m x - c_m \sin c_m x \right\}$$

$$\int e^{-a_m x} \sin c_m x\,dx = - \frac{e^{-a_m x}}{a_m^2 + c_m^2} \left\{ a_m \sin c_m x + c_m \cos c_m x \right\}$$

$$\int e^{-a_m x} \cos(b_m - c_m x)\,dx = - \frac{e^{-a_m x}}{a_m^2 + c_m^2} \Big\{ a_m \cos(b_m - c_m x) +$$

$$+ c_m \sin(b_m - c_m x) \Big\}$$

$$\int e^{-a_m x} \sin(b_m - c_m x)\,dx = - \frac{e^{-a_m x}}{a_m^2 + c_m^2} \Big\{ a_m \sin(b_m - c_m x) -$$

$$- c_m \cos(b_m - c_m x) \Big\}.$$

avimo li gornje vrijednosti u jednačinu (38), to dobijemo:

$$u(x,t) = v_0 + \alpha \frac{A_0}{h} + \frac{A_0}{k} \sum_m \frac{\beta_m}{a_m^2 + c_m^2} e^{\left(\frac{h}{k} - a_m\right)x} \Big\{ a_m \cos(b_m - c_m x) + c_m \sin(b_m - c_m x) \Big\} +$$

$$+ \frac{A_0}{k} \sum_m \frac{\gamma_m}{a_m^2 + c_m^2} e^{\left(\frac{h}{k} - a_m\right)x} \Big\{ a_m \sin(b_m - c_m x) - c_m \cos(b_m - c_m x) \Big\}.$$

evši još u obzir jednačine (37), to dobijemo konačno jednačinu:

$$)\qquad u(x,t) = v_0 + \alpha \frac{A_0}{h} + \frac{A_0}{k} \sum_m \frac{\beta_m e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}}}{\frac{h^2}{k^2} + \frac{2h}{ak}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} + \frac{2}{a^2}\frac{m\pi}{T}} \Bigg\{ \left(\frac{h}{k} + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right) \cos\left(\frac{2m\pi}{T} t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} \sin\left(\frac{2m\pi}{T} t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right) \Bigg\} +$$

$$\frac{A_0}{k} \sum_m \frac{\gamma_m e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}}}{\frac{h^2}{k^2} + \frac{2h}{ak}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} + \frac{2}{a^2}\frac{m\pi}{T}} \Bigg\{ \left(\frac{h}{k} + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right) \sin\left(\frac{2m\pi}{T} t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right) - \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} \cos\left(\frac{2m\pi}{T} t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}}\right) \Bigg\},$$

rješava stavljeni problem.

Temperaturu površine dobijemo, ako u gornjoj jednačini stavimo $x = 0$, pa je zato ona predstavljena izrazom:

$$(40) \qquad u = v_0 + \alpha \frac{A_0}{h} +$$

$$+ \frac{A_0}{k} \sum_m \frac{\beta_m}{\frac{h^2}{k^2} + \frac{2h}{ak}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} + \frac{2}{a^2}\frac{m\pi}{T}} \left\{ \left(\frac{h}{k} + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} \right) \cos \frac{2m\pi}{T} t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} \sin \frac{2m\pi}{T} t \right\} +$$

$$+ \frac{A_0}{k} \sum_m \frac{\gamma_m}{\frac{h^3}{k^2} + \frac{2h}{ak}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} + \frac{2}{a^2}\frac{m\pi}{T}} \left\{ \left(\frac{h}{k} + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} \right) \sin \frac{2m\pi}{T} t - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m\pi}{T}} \cos \frac{2m\pi}{T} t \right\}.$$

Srednja vrijednost u_0 temperature na površini, koju imamo još da odredimo, nastupa onda, kada nestane trigonometrijskih članova gornje jednačine, jer svakoj njihovoj pozitivnoj vrijednosti odgovara i tako ista negativna. Zato se ima u_0 odrediti iz jednačine:

$$u_0 = v_0 + \alpha \frac{A_0}{h}$$

ili

$$h(u_0 - v_0) = \alpha A_0.$$

Stavimo li u jednačini (26) $\Delta u = 0 \quad u = u_0$, to dobijemo

$$c(273 + u_0)^\varepsilon = h(u_0 - v_0).$$

Iz posljednjih dviju jednačina sljeduje jednačina:

$$(41) \qquad c(273 + u_0)^\varepsilon = A_0 \alpha,$$

koja određuje temperaturu u_0.

Veličina α je prvi član Fourierova reda, u koji smo razvili funkciju $I(t)$, pa nam ona zato predstavlja srednju vrijednost insolacije, koja osciluje oko te srednje vrijednosti. Iz jednačine

(41) sljeduje, da je srednja temperatura u_0 površine jednaka onoj temperaturi, koju bi površina imala pri konstantnom srednjem stanju insolacije, u kojem se ne bi pokazao utjecaj kondukcije.

Uzmimo sada — jednostavnosti radi i da bismo slijedeće rezultate mogli lakše pregledati —, da je funkcija $I(t)$ jednostavna oscilacija, t. j. da se Fourierov red redukuje na dva člana, da je dakle:

$$(42) \qquad I(t) = \alpha + \beta_1 \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

U ostalom sve, što sljeduje, moći će se bez teškoća raširiti i na općeni slučaj, kada Fourierov red ima makar koji broj članova.

Valja dakle u jednačini (39) staviti:

$$m = 1 \quad \gamma m = 0.$$

Na taj način dobijemo:

$$(43) \qquad u(x,t) = v_0 + \alpha \frac{A_0}{h} +$$

$$+ \frac{A_0}{k} \frac{\beta_1 e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}}}{\frac{h^2}{k^2} + \frac{2h}{ak}\sqrt{\frac{\pi}{T}} + \frac{1}{a^2}\frac{2\pi}{T}} \left| \left(\frac{h}{k} + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}} \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}} \right) \right|;$$

po toj se jednačini možemo lako uvjeriti o ispravnosti dosadanjih rezultata.

Temperatura površine data je u posljednjem slučaju izrazom:

$$(44) \qquad u = v_0 + x\frac{A_0}{h} +$$

$$+\frac{A_0}{k}\frac{\beta_1}{\frac{h^2}{k^2}+\frac{2h}{ak}\sqrt{\frac{\pi}{T}}+\frac{1}{a^2}\frac{2\pi}{T}}\left\{\left(\frac{h}{k}+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\right)\cos\frac{2\pi}{T}t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\sin\frac{2\pi}{T}\right\}t.$$

Pitajmo, kada nastupaju i koliki su ekstremi u_{max} i u_{min} gornje temperature!

Oni nastupaju za $t = t_1$, pri čemu su t_1 korijeni ove jednačine:

$$(45) \qquad -\left(\frac{h}{k}+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\right)\sin\frac{2\pi}{T}t_1 + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\cos\frac{2\pi}{T}t_1 = 0$$

ili:

$$\operatorname{tang}\frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{1}{1+\frac{ha}{k}\sqrt{\frac{T}{\pi}}};$$

no kako je prema jednačini (2) $\frac{a}{k} = \frac{1}{as\varrho}$, to su vremena ekstrema data jednačinom:

$$(46) \qquad \operatorname{tang}\frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{1}{1+\frac{h}{as\varrho}\sqrt{\frac{T}{\pi}}}.$$

Ekstremi insolacije I nastupaju za vrijednost:

$$t = 0, \quad T, \quad 2T, \quad 3T \ldots$$

i

$$t = \frac{T}{2}, \quad \frac{3}{2}T, \quad \frac{5}{2}T \ldots;$$

ekstremi temperature na površini tijela nastupaju u ista vremena samo kada je $a = 0$; inače zakašnjavaju prema jednačini (45), pa njihovo maksimalno zakašnjavanje (za $a = \infty$) jest $\frac{T}{4}$.

Kvadriramo li jednačinu (45), to dobijemo:

$$\left(\frac{h}{k}+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\right)^2\left(1-\cos^2\frac{2\pi}{T}t_1\right) - 2\left(\frac{h}{k}+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\right)\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\sin\frac{2\pi}{T}t_1\cos\frac{2\pi}{T}t_1 +$$

$$+\frac{1}{a^2}\frac{\pi}{T}\left(1-\sin^2\frac{2\pi}{T}t_1\right) = 0;$$

odatle sljeduje:

$$(47) \qquad \left\{\left(\frac{h}{k}+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\right)\cos\frac{2\pi}{T}t_1 + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\sin^2\frac{\pi}{T}t_1\right\}^2 = \frac{h^2}{k^2}+\frac{2h}{ak}\sqrt{\frac{\pi}{T}}+\frac{1}{a^2}\frac{2\pi}{T}.$$

Kvadriranje jednačine (44) daje:

$$\left(u - v_0 - x\frac{A_0}{h}\right)^2 = \frac{A_0^2}{k^2}\frac{\beta_1^2}{\left(\frac{h^2}{k^2}+\frac{2h}{ak}\sqrt{\frac{\pi}{T}}+\frac{1}{a^2}\frac{2\pi}{T}\right)^2}\left\{\left(\frac{h}{k}+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\right)\cos\frac{2\pi}{T}t + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\sin\frac{2\pi}{T}t\right\}.$$

Ekstremi u_{max} i u_{min} nastupaju za $t = t_1$; pa zato dobijemo njihove vrijednosti, ako u gornjoj jednačini zamijenimo t sa vrijednošću t_1 iz jednačine (47); oni su dakle dati jednačinom:

$$\left(u_{min}^{max} - v_0 - x\frac{A_0}{h}\right)^2 = \frac{A_0^2}{k^2}\frac{\beta_1^2}{\frac{h^2}{k^2}+\frac{2h}{ak}\sqrt{\frac{\pi}{T}}+\frac{1}{a^2}\frac{2\pi}{T}}$$

ili jednačinom:

$$\left({}^{u_{max}}_{u_{min}} - v_0 - \alpha \frac{A_0}{h}\right)^2 = \frac{A_0{}^2}{h^2} \frac{\beta_1{}^2}{1 + \frac{2k}{ah}\sqrt{\frac{\pi}{T} + \frac{k^2}{a^2h^2}\frac{2\pi}{T}}}.$$

Uzmemo li još u obzir, da je $\frac{k}{a} = a s \rho$, to dobijemo:

$$u_{max} = v_0 + \alpha \frac{A_0}{h} + \frac{A_0}{h}\beta_1 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2as\rho}{h}\sqrt{\frac{\pi}{T} + \frac{a^2s^2\rho^2}{h^2}\frac{a\pi}{T}}}}, \tag{48}$$

$$u_{min} = v_0 + \alpha \frac{A_0}{h} + \frac{A_0}{h}\beta_1 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2as\rho}{h}\sqrt{\frac{\pi}{T} + \frac{a^2s^2\rho^2}{h^2}\frac{2\pi}{T}}}}. \tag{49}$$

Kada ne bi bilo kondukcije, t. j. kada bi bilo $a = 0$, onda bi temperatura površine oscilovala oko srednje vrijednosti

$$u_0 = v_0 + \alpha \frac{A_0}{h}$$

amplitudama

$$\pm \frac{A_0}{h}\beta_1.$$

Utjecaj kondukcije umanjuje dakle amplitude u razmjeri:

$$1 : \sqrt{1 + \frac{2as\rho}{h}\sqrt{\frac{\pi}{T} + \frac{a^2s^2\rho^2}{h^2}\frac{2\pi}{T}}}.$$

O p ć e n i s l u č a j može se, kao što smo već spomenuli, riješiti samo sukcesivnim aproksimacijama. Zato valja, služeći se naprijed izloženim rezultatima — n. pr. zanemariv utjecaj kondukcije pa upotrijebiv jednačinu (16) —, odrediti približno tok temperature na površini. To prvo približno riješenje neka bude:

$$u = f(t).$$

Razvijemo li sada funkciju $f(t)$ u Fourierov red jednaačinam (17) i (18), onda nam jednačina (22) daje, ako u nju stavimo $x = 0$, gradijenat temperature na površini:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\}_{x=0} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\left\{\sum_m \sqrt{m}\,(\beta_m - \gamma_m)\sin\frac{2m\pi}{T}t - \sum_m \sqrt{m}\,(\beta_m + \gamma_m)\cos\frac{2m\pi}{T}t\right\}, \tag{50}$$

pa njime i jednačinom (11), t. j.

$$A_0 I(t) = c\,(273 + u)^{\varepsilon} - k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\}_{x=0}, \tag{51}$$

možemo odrediti bolju vrijednost temperature na površini $u = f_1(t)$; njome možemo dosadanji postupak ponoviti, dok ne dobijemo riješenje, kojega nas tačnost zadovoljava.