

КАЛОРИЧНА ГОДИШЊА ДОБА И ЊИХОВА ПРИМЕНА У ПАЛЕОКЛИМАТСКОМ ПРОБЛЕМУ

од

М. Миланковића

(Приказано на скупу Академије Природних Наука 13. XI. 1922)

Подела године у астрономска годишња доба скоро је толико стара као и астрономска наука. Одређивање оне четири кардиналне тачке привидне Сунчеве путање на небеској сфери које деле време обилажења Сунца по тој сфери у четири годишња доба, било је једно од првих послова астрономије. Већ је око године 2100 пре Христа, дакле пре пуних четири хиљаде година, Чуконг одредио нагиб еклиптике помоћу солстицијалног положаја Сунца, а три столећа пре Христа су Тимохарис и Аристил савњивали положаје звезда са еквинокцијалним тачкама. Ова опажања омогућила су, стопедесет година доцније, Хипарху да опази покретност еквинокцијалних тачака на еклиптици и неједнакост годишњих доба.

И у математској науци о топлотним појавама, изазваним сунчаним зрацима, играју годишња доба важну улогу, већ због тога што је пролетна тачка основна тачка небесних координатних система. Тако, на пример, када се одређују оне топлотне количине које у току произвољног интервала године шаљу сунчани зраци једној ученој географској ширини Земљине површине, онда се добијају врло једноставни математски изрази када се ти интервали времена поклапају са астрономским годишњим добима. Из тих израза изалазе и друге интересантне релације о тима сезонским топлотним количинама. Топлотна количина што је произвољна северна географска ширина прима за време својих астрономских годишњих доба, једнака је топлотној количини што ју иста географска ширина,

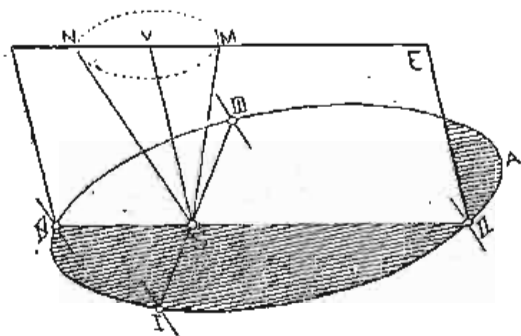


но јужне хемисфере прима за време својих астрономских годишњих доба и ако је трајање ових других годишњих доба различито од трајања оних првих.

Но та подела године на астрономска годишња доба и одређење одговарајућих топлотних количина сасвим је недовољна за егзактно праћење секуларног тока инсолације Земље.

Да то боље оценимо, потребно ја да размотримо механизам тога секуларног тока.

Нека нам у слици 1 тачка S представља центар Сунца, а елипса P I II A III IV P путању Земље око Сунца. Та је елипса ради бољег разумевања онога што следује, навлаш нацртана тако издужено. Оријентација земљине осе у простору остаје за време Земљинога обилажења око Сунца непромењена, боље речено: промене те оријентације су незнатне, па се зато може с правом узети да се та оријентација у току једне године никако не мења. Замислимо у тачки S уздигнуту нормалу SV на раван земљине путање и из те тачке повучену паралелу SN са Земљином осом, то је угао VSN једнак нагибу ϵ Земљине осе према равни путање. Тај је угао, дакле, једнак косини еклиптике, а његова раван E стоји нормално на равни



Слика 1.

Земљине путање и сече ову дуж праве IV II. Положаји II и IV су, као што је лако увидети, солстицијални положаји Земље, а ако повучемо у равни Земљине путање праву I III нормално на праву IV II, онда добијамо екваторијалне положаје I, III Земље у њеној путањи; када ова кроз те положаје пролази,

онда су на њој свугде дани и ноћи једнаке. Интервали времена између пролаза Земље редом кроз положаје I, II, III, IV представљају нам њена астрономска годишња доба. За испитивање топлотних појава на површини Земље корисно је два и два астрономска годишња доба спојити у једно, па годину поделити у летњу и зимску, или у топлу и хладну полугодину. Летња полугодина северне хемисфере је оно време које протече док Земља из пролетнога екваторијалног положаја стигне у јесењи III, а зимска полугодина је време које Земља употребљава да из јесењег екваторијалног положаја стигне у пролетни. Летња полугодина јужне хемисфере поклапа се са зимском полугодином северне хемисфере, а њена зимска са летњом полугодином северне. Како су елиптични сектори I II A III и III IV P I међу собом неједнаки, то су, према другом Кеплеровом закону, и споменуте полугодине међу собом неједнаке. Означимо ли са T дужину тропске године, са e ексцентрицитет Земљине путање, а са Π хелиоцентричну дужину перихела према пролетној тачки, то су дужине летње односно зимске полугодине северне хемисфере представљене изразима¹⁾:

$$(1) \begin{cases} T_c = \frac{1}{2} T \left(1 + \frac{4e}{\pi} \sin \Pi \right) \\ T_h = \frac{1}{2} T \left(1 - \frac{4e}{\pi} \sin \Pi \right) \end{cases}$$

Величина Π је у нашој слици, где је P перихел, представљена углом III S P, јер се Сунце из пролетнога положаја Земље пројцира у правцу S III на небеску сферу.

Летња и зимска полугодина имају, према једначинама (1) разне дужине, па је њихова разлика представљена изразом

$$(2) \quad \Delta T = T_c - T_h = \frac{4e}{\pi} T \sin \Pi$$

Уочимо сада једну произвољну географску ширину φ (северне означавамо позитивно, јужне негативно) која не лежи

¹⁾ Види: *Milankovitch, Théorie mathématique des phénomènes thermiques produits par la radiation solaire. Paris 1920*, на које се дело понавља и због следећућих трију једначина.

у арктичким зонама. Топлотне количине W_e и W_h , што их Сунце шаље у току летње, односно у току зимске полугодине јединици површине на тој географској ширини представљене су изразима:

$$(3) \begin{cases} W_e = \frac{T}{2\pi} \frac{J_0}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} (b_0 + \sin \varphi \sin \epsilon) \\ W_h = \frac{T}{2\pi} \frac{J_0}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} (b_0 - \sin \varphi \sin \epsilon) \end{cases}$$

У предњим једначинама представља J_0 соларну константу, а велику полуосу Земљине путање, и b_0 једну функцију величина φ и ϵ . Та је величина саопштена у споменутом делу за сваки пети степен географске ширине и за садању вредност величине e ; онде су дате и табеле помоћу којих се могу израчунати вредности величина b_0 , W_e и W_h и за друге вредности нагиба еклиптике.

За географске ширине које леже у арктичким зонама, ваља горње изразе заменити другима, нешто компликованијима, но које не морам овде саопштавати, јер сви овде изведени резултати важе за њих исто тако као и за изразе (3).

Величине W_e , W_h , T_e , T_h дају нам прву оријентацију о годишњем току инсолације географске ширине φ , а да не морамо ту инсолацију пратити из дана у дан. За испитивање палеоклиматског проблема важно је знати како се та инсолација мења у току векова. Да на то питање одговоримо вратимо се опет слици 1.

Прецесија еквинокцијалних тачака и међусобне пертурбације планета мењају оријентацију Земљине осе у простору и положај и облик Земљине путање. Услед прецесије мења се оријентација Земљине осе тако да права ON коју смо замислили паралелно Земљиној оси описује за двадесет и шест хиљада година кружни конус NSM којега је оса права SV . Услед тога се раван E обрне за то време потпуно око осе SV , па зато тачке I, II, III, IV мењају без престанка свој положај на путањи Земље. Ове би за двадесет и шест хиљада година обиграле ту путању када би ова била непомицна. Но то није случај. Услед међусобних планетских пертурбација иде велика оса у сусрет тачкама I, II, III, IV због чега ове тачке оутрчавају Земљину путању (од перихела на опет до њега) за

непуних двадесет и једну хиљаду година. За то се време, дакле, дужина перихела II, представљена углом $III SP$, увећа за пуних 360 степени.

Но не само положај велике осе Земљине путање, него и њен облик мења се без престанка; њен ексцентрицитет e расте и опада са средњом периодом од каквих деветдесет и две хиљаде година, али дужина a њене велике полуосе остаје не промењена. И раван земљине путање њише се, услед планетских пертурбација, у простору, па се због тога и земљина оса ротације приклања и уздиже према тој равни. Услед тога мења и права OV своју оријентацију у простору због чега и конус NSM губи своју непомицност и правилност. Последица свега тога је да косина еклиптике ϵ расте и опада са периодом од каквих четрдесет хиљада година.

У изразима (1) до (3) мењају се, дакле, величине Π , e , ϵ секуларно са горе наведеним периодама. Услед тога мења се, наравно, и годишњи ток инсолације по површини Земље. Но како су споменуте периоде неједнаке, а ниједна од њих нема потпуно сталну дужину, то ће вековни ток Земљине инсолације бити веома неправилан. Питајмо како ћемо добити правилну слику тога тока и његових последица.

Ја сам у споменутом делу показао на који се начин могу израчунати вредности величина W_e , W_h , T_e , T_h за коју год годину Земљине прошлости или будућности, ограничавајући се при томе, наравно, на интервал за који важе *Stockwell*-ове једначине. Израчунавши те величине, ваља их сравнити са садашњима на тај начин да бисмо из тога сравањења могли закључивати и о односу ондашњега термичкога стања Земљине површине према данашњем, претпостављајући при томе да се остале прилике, које утичу на то стање, нису промениле. Другим речима, ваља одредити тачно улогу коју су играле секуларне промене инсолације у климатској слици наше Земље.

У нашем случају ваља сравнити са сваке стране по две топлотне количине и по два интервала за време којих те топлотне количине стижу на Земљу. Све те четири величине морају узети у исти мах у обзир јер у термичким појавама не игра само топлотна количина него и време, у којем се она употребљава, своју улогу.

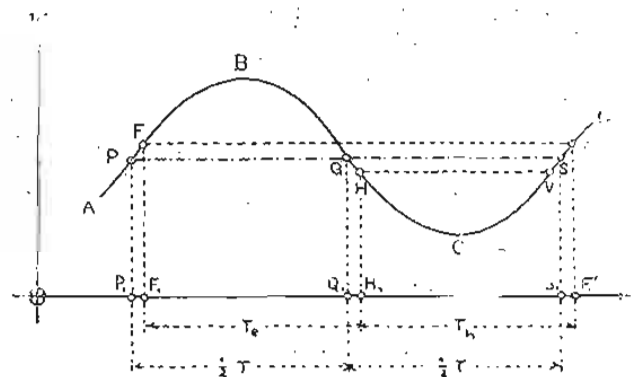
Први закључак који можемо извести из добивених математских величина је овај. Израчунајмо и за садашњост и за уочену годину прошлости вредност ових квоцијената:

$$(4) \begin{cases} w_o = \frac{W_o}{T_o} \\ w_h = \frac{W_h}{T_h} \end{cases}$$

то нам они очито представљају оне топлотне количине што их Сунце у току летње односно зимске астрономске полугодине шаље просечно у јединици времена уоченој географској ширини. Из тих величина можемо дакле расуђивати дали су, у уоченој години прошлости, астрономске полугодине биле просечно топлије или хладније него садање, не узимајући при томе у обзир трајање тих полугодина.

Величине w_o и w_h дају нам само горњи одговор, но он је очито непотпун за просуђивање термичкога стања уочене године. Јер није довољно знати дали је летња полугодина била жарка или блага него и колико је била дуга, а у величинама w_h и w_o не долази до израза дужина временских израза у које је уочена година расчлањена астрономским годишњим добима. Наведимо један нумерички пример који ће све ово јасно илустровати. За $\epsilon = 21^\circ 58' 30''$ и за све могуће вредности од e и Π које задовољавају једначину $e \sin \Pi = -0.0165$ добивају се за седамдесет и седми степен северне ширине за w_o и w_h исте оне вредности које одговарају садашњем стању инсолације Земље. Но у исти мах изалази да је при тој могућој комбинацији астрономских елемената летња астрономска полугодина северне хемисфере за пуних десет дана краћа него сада што је, док је зимска за десет дана дужа од садање. Нема сумње да оваковоме стању инсолације одговара ниже термичко стање него што је садање. Због тога нам величине w_o и w_h које се даду лако и брзо израчунати и графички представити, могу послужити за брзо рекогносцирање прошлости, а не као потпуна слика термичких ефеката секуларних варијација инсолације Земље. За прецизније одређење тога ефекта морамо наћи другу базу.

Нека нам, у то име, крива АВСД (сл. 2) представља годишњи ток инсолације произвољне географске ширине ϕ . При томе условљавамо само да ϕ не припада интервалу од -11° па до $+11^\circ$, јер у тропском појасу који одговара томе интервалу, није изражен феномен годишњих доба. Ординате



Слика 2.

криве АВСД представљају, дакле, средњу инсолацију w уочене паралеле у оном моменту који је представљен одговарајућом тачком абсцисе O_t коју смо узели за скалу времена t . Означимо ли са W_T целокупну топлотну количину, упућену јединици површине на географској ширини ϕ у току онога дана чије подне одговара уоченој тачки апсцисне осе, а са τ интервал времена од 24 сата, то је, као што је то у споменутом делу доказано,

$$(5) \quad w = \frac{W_T}{\tau}$$

Када уочена географска ширина припада поларним зонама, онда се, за време поларне ноћи, ординате криве АВСД редукују на нулу, но то не мења ништа на нашим разматрањима.

Тачка F_1 нека представља моменат пролетног, тачка H_1 моменат јесењег еквinoxа, а тачка F_1' моменат идућег пролетног еквinoxа. Ординате $\overline{F_1 F}$, $\overline{H_1 H}$, $\overline{F_1' F'}$ представљају, дакле еквinoxијалне инсолације, а дужине $\overline{F_1 H_1}$, односно $\overline{H_1 F_1'}$, трајање летње односно зимске полугодине. Од свих тих дужина само су дужине $\overline{F_1 F}$ и $\overline{F_1' F'}$ међусобно једнаке, јер ће ток инсолације у идућој години бити представљен конгруентном кривом, пошто су секуларне варијације у току једне године савршено незнатне. Зато је

$$(6) \quad \overline{F_1 F} \neq \overline{H_1 H}$$

$$(7) \quad \overline{F_1 H_1} \neq \overline{H_1 F_1'}$$

Прва од ових двеју неједнакости потиче отуда што инсолација уочене географске ширине не зависи само од деклинације Сунца која је, додуше, у обима екваторијалним моментима равна нули, него и од одстојања Земље од Сунца, а та одстојања нису, због ексцентрицитета Земљине путање, у обима моментима једнака. Зато је на северној хемисфери пролетна екваторијална инсолација за 13.5 промила већа од јесење. Но та, у ствари мала разлика може секуларним варијацијама астрономских елемената да достигне вредност од пуних 312 промила.

И неједнакост (7), неједнакост дужине годишњих доба, потиче од ексцентрицитета Земљине путање. Сада је северна астрономска летна полугодина дужа од зимске за 7 дана и 16 сати, но та разлика може да достигне вредност од ± 31 дан 20 сати.

Ове две неједнакости повлаче за собом још једну важну последицу. У интервалу времена који је у слици 2 представљен разликом абсциса тачака F' и V , а који интервал припада зимској полугодини, инсолација уочене географске ширине је интензивнија него што је инсолација $H_1 H$ последњег дана летне полугодине. Значи да астрономска зимска полугодина има дана када је инсолација јача него извесних дана летне полугодине.

Из свега овога излази јасно да астрономске полугодине не деле годину у интервал јаче и интервал слабије инсолације него у два неједнака интервала која немају уже везе са инсолацијом Земље. Сем тога се дужине тих интервала и неједнакости инсолације на њиховим крајевима без престанка мењају. Због тога се помоћу њих није могао добити рационалан закључак о годишњем току инсолације Земље и његовим секуларним променама.

Све се те неправилности и недостатци астрономских полугодина у примени на палеоклиматски проблем могу избећи, ако годину поделимо правилно у два дела која одговарају овима двама условима:

1° Оба интервала, у које делимо годину, нека буду међусобно једнака.

2° Минимална инсолација w у првоме од тих двају интервала нека буде једнака максималној инсолацији у другоме интервалу.

Другима речима: годину ваља поделити у две једнаке полугодине тако да прва од њих обухвата све дане у којима је инсолација уочене географске ширине јача но у ма којем дану друге полугодине.

Геометријским начином могу се те две полугодине овако одредити: ваља у слици 2 наћи ону праву PQS , паралелну оси абсциса, која пресеца криву инсолације $ABCD$ тако да су одсеци PQ и QS међусобно једнаки. Пројекције $P_1 Q_1$ и $Q_2 S_2$ тих одсека представљају нам она два интервала године који задовољавају напред стављене услове.

Ти се интервали могу назвати калоричним полугодинама, јер су они одређени према броју калорија што их Сунце шаље у току године уоченој географској ширини. Ону годину која обухвата све дане јаче инсолације назваћемо летном калоричном полугодином, а ону другу зимском.

Када би крива $ABCD$ представљала годишњи ток температуре на уоченој географској ширини, онда бисмо на исти овакав начин могли поделити годину у термичке полугодине. Оне стоје у тесној вези са калоричним полугодинама само су њихови почетци померени према почетцима калоричних година, јер, као што је познато, и у споменутом делу физикално образложено, температурни се екстреми закашњавају иза екстрема инсолације.

Споменуо сам већ да се дужина велике полуосе а Земљине путање не мења у току векова, а из тога следује, по трећем Кеплеровом закону, да се ни дужина сидеричне године секуларно не мења, па према томе, ни дужина тропске године ако не узмемо у обзир њене ситне варијације које су без утецаја на феномен инсолације. Због тога имају калоричне полугодине увек исту дужину од 182 дана 14 сати 15 минута како год се мењали астрономски елементи.

У овој ће радњи бити показано како се израчунавају моменти почетака и свршетака калоричних годишњих доба и биће саопштени нумерички резултати који се тичу садашњости. Но да бих основну идеју овога рада изложио без прекидања у њеној потпуности, ја ћу се већ сада позвати на један део тих резултата.

Калорична годишња доба разних географских ширина нису идентична, т. ј. она не почињу у истој моменту као што је то случај код астрономских годишњих доба, но временска разлика између момената њихових почетака на разним географским ширинама није велика, особито на вишим ширинама. Тако почиње калорична летња полугодина на 45 степену северне ширине у 1923. години 22. марта у 9^h 30^m (гриничко време); тај се почетак сели у току дана према северу и стиже за 15 сати до северног пола, он преваљује дакле за 20 минута један степен ширине. Свршетци тих полугодина падају сви на 21. септембар. Калорична годишња доба садашњости нису знатно померена према астрономским годишњим добима.

Када су једном одређени почетци и свршетци калоричних годишњих доба, онда није тешко израчунати оне топлотне количине Q_e и Q_h што их Сунце шаље у току летње односно у току зимске калоричне полугодине јединици површине на уоченој географској ширини. Те величине нису, наравно, једнаке величинама W_e и W_h и ако се при садањем стању инсолације од ових много не разликују, но то важи само за садашњост.

Услед секуларне варијације астрономских елемената, те су се величине континуирно мењале и ми смо у стању да одредимо њихове вредности за сваку годину Земљине прошлости за коју још важе једначине Небеске Механике. Израчунавши те вредности за једну одабрану годину прошлости, ми их можемо директно сравнити са њиховим садашњим вредностима, јер се све те величине односе на исти распон времена, а не на разне временске интервале као што је то био случај код величина W_e и W_h . Ако, дакле, добијемо за уочену годину Земљине прошлости исте вредности величина Q_e и Q_h као и за садашњост, онда можемо с правом тврдити да је тој години одговарало исто термичко стање као сада што је, претпостављајући, наравно, да се остале прилике нису промениле. Добијемо ли, на против, за коју од тих величина н. пр. Q_e другу вредност него што је садања, онда можемо, према томе дали је она већа или мања од садање, одредити дали је онда летња термичка полугодина била топлија или хладнија но сада што је. Но ми можемо поћи још и један добар корак даље па одредити ону паралелу којој сада одговара иста вредност величине Q_e коју смо добили за уочену географску ширину у

посматраној години прошлости, другим речима, можемо секуларну промену величине Q_e ; па према томе и секуларну варијацију термичкога стања изазвану астрономским узроцима, егзактно изразити помоћу промене географске ширине, а то је за палеоклиматолога од највеће важности.

Тако смо астрономски део палеоклиматскога проблема свели на један тачно одређени геометријски проблем који се даде решити са истом оном прецизношћу којом Небеска Механика решава своје проблеме.

* * *

Инсолација w уочене географске ширине φ дата је, у коначном облику једначинама

$$(8) \quad w = \frac{1}{\pi} \frac{J_0}{\varrho^2} (\psi_0 \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \sin \psi_0)$$

$$(9) \quad \cos \psi_0 = -\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta.$$

При томе представља δ деклинацију Сунца, а ϱ радиус-вектор Сунце—Земља, мерен великом полуосом a Земљине путање. Те две величине представљене су изразима

$$(10) \quad \sin \delta = \sin \epsilon \sin \lambda$$

$$(11) \quad \varrho = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos (\Pi - \lambda)}$$

у којима λ представља праву дужину Сунца. Та је дужина позната функција времена.

Када бисмо величину w имали представљену као функцију времена t :

$$(12) \quad w = w(t),$$

где t бројимо од једнога одређенога момента у години, онда би почетци обеју калоричних полугодина, који следују један за другим у размаку $\frac{T}{2}$, били корени ове једначине

$$(13) \quad w(t) - w\left(t + \frac{T}{2}\right) = 0$$

пошто захтевамо да инсолације w уочене паралеле φ буду у тима моментима међусобно једнаке. При томе је

$$(14) \quad T = 365.2422^d.$$

Представљане величине w као функције од t је, у општем случају, веома тежак посао, а и решење једначине (13) не може се другачије извршити до сукцесивним апроксимацијама. Но када се ради од одређивању калоричних годишњих доба садашњости, онда се можемо послужити астрономским ефемеридима. У њима су величине ϱ , δ и λ представљене табеларно као функције времена t па зато можемо помоћу њих и помоћу образаца (8) и (9) одредити за свако одабрано t нумеричку вредност израза (13). а онда, помоћу познатих метода за решавање трансцендентних једначина, ону вредност t која задовољава једначину (13) траженом тачности.

Ја сам, служећи се регулом фалзи, одредио на тај начин калорична доба садашњости и њихове почетке у години 1923. Пре свега ваљало је одредити нумеричку вредност инсолације w на разним географским ширинама у четири момента у години t_1 , t_2 , $t_1 + \frac{T}{2}$, $t_2 + \frac{T}{2}$. То је најразвученији део рачуна па сам зато и његове резултате саопштио у табlici I, због тога да га уштедим другоме тко би желио да калорична годишња доба одреди још прецизније. Тачност коју сам ја тражио била је ова. Топлотне количине Q_e и Q_n , одређене помоћу калоричних годишњих доба, ваља израчунати истом тачности као и величине W_e и W_n . Ове потоње сам израчунао у споменутом делу на четири децимале одабраних јединица. Како је максимална инсолација једнога сата у тима јединицама $1 : 365.24 \times 24$, дакле једнака 0.0001, то је довољно калорична доба одредити тачно на сате, а дужине Сунца, које одговарају њиховим почетцима, на 2.5', јер се у близини екваторских положаја Сунца мења за ту вредност у току једнога сата. Тој, и још нешто вишој тачности задовољавају таблице II и III у којима су саопштени почетци годишњих доба у години 1923 и дужине Сунца у тима моментима. Таблица III не важи, међутим, само за годину 1923 него и за лужи низ година

Ради ли се о којој години даје прошлости или будућности, онда се не можемо више служити астрономским ефемеридима него се морамо вратити општим једначинама које ћу допунити сада још неким због касније употребе.

Ја сам у споменутом делу, употребивши једначину (10) и развијање у редове, представио величину w , у овом облику:

$$(15) \quad w = \frac{1}{\pi} \frac{J_0}{\varrho^2} (b_0 + a'_1 \sin \lambda - b_1 \cos 2\lambda + b_2 \cos 4\lambda - b_3 \cos 6\lambda + \dots),$$

где је

$$(16) \quad a'_1 = \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \epsilon.$$

На истом су месту саопштене вредности коефицијената $b_0, b_1, b_2, b_3 \dots$ за сваки пети степен географске ширине, а за садање стање инсолације и дате таблице помоћу којих се величине b могу израчунати и за произвољну годину прошлости. Ред (15) корвергира врло брзо.

Једначина (15) важи за неарктичну зону за све вредности λ , а за поларне зоне само за оне интервале године у којима Сунце на уоченој географској ширини дневно излази и залази. За интервал времена када је Сунце цео дан над хоризонтом ваља применити једначину

$$(17) \quad w = \frac{J_0}{\varrho^2} \sin \epsilon \sin \varphi \sin \lambda.$$

У изразима (15) и (17) величина ϱ навлаш није изражавана помоћу λ , а ево зашто.

Када се израчунавају топлотне количине које Сунце шаље уоченој ширини преваљујући интервал λ_1 до λ_2 своје привидне годишње путање, онда ваља образовати интеграл

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda$$

па када се у њега ставе изрази (16) или (17) онда нам део $\frac{1}{\varrho^2} \frac{dt}{d\lambda}$ интегранда представља, према другом Кеплеровом закону, једну константу па се може ставити пред знак интеграла тако да у њему остаје само променљива λ .

Тај Кеплеров закон



$$\frac{1}{2} \varrho^2 \frac{d\lambda}{dt} = \frac{ab\pi}{T}$$

добија у нашем случају, где ϱ меримо са a , овај облик

$$(18) \quad \frac{1}{2} \varrho^2 \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\pi \sqrt{1-e^2}}{T}$$

Питајмо сада како ћемо помоћу горњих једначина одредити дужине Сунца λ_1 и λ_2 при којима почињу летна односно зимска калорична полугодина

Време које протече док Сунце дође из положаја λ_1 у положај λ_2 мора бити једнако $\frac{T}{2}$. Тај услов можемо и овако формулисати. Из (18) слеђује

$$dt = \frac{T}{2} \frac{1}{\pi \sqrt{1-e^2}} \varrho^2 d\lambda$$

Извршимо ли сада интеграцију горњег израза између граница λ_1 и λ_2 , то ће његова лева страна бити према горњем, једнака $\frac{T}{2}$, па тако добивамо

$$(19) \quad \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varrho^2 d\lambda = \pi \sqrt{1-e^2}$$

Из (11) слеђује

$$(20) \quad \varrho^2 = (1-e^2)^2 [1-e \cos(\Pi-\lambda)]^{-2}$$

а како је e малено према јединици, то добивамо применом биномског обрасца и занемаривањем виших потенција од e^2

$$(21) \quad \varrho^2 = (1-e^2)^2 [1+2e \cos(\Pi-\lambda) + 3e^2 \cos^2(\Pi-\lambda)]$$

Ставимо ли ову вредност у (19) и извршимо интеграцију, то добивамо једначину

$$(22) \quad (1 + \frac{3}{2}e^2) (\lambda_2 - \lambda_1) - 2e \sin(\Pi - \lambda_2) + 2e \sin(\Pi - \lambda_1) - \frac{3}{4}e^2 \sin^2(\Pi - \lambda_2) + \frac{3}{4}e^2 \sin^2(\Pi - \lambda_1) = \pi (1 - e^2) - \frac{3}{2} = \pi (1 + \frac{3}{2}e^2)$$

Други услов који морају величине λ_1 и λ_2 задовољити је овај. У граничним моментима калоричних полугодина, морају инсолације w бити међусобно једнаке. Означимо ли, према томе, са ϱ_1 и ϱ_2 вредности од ϱ које одговарају дужинама λ_1 и λ_2 , то мора бити

$$(23) \quad w(\lambda_1, \varrho_1) = w(\lambda_2, \varrho_2)$$

Применом једначина (15) и (11) добивамо

$$(24) \quad [1 - 2e \cos(\Pi - \lambda_1) + e^2 \cos^2(\Pi - \lambda_1)] (b_0 + a'_1 \sin \lambda_1 - b_1 \cos 2\lambda_1 + b_2 \cos 4\lambda_1 - \dots) = [1 - 2e \cos(\Pi - \lambda_2) + e^2 \cos^2(\Pi - \lambda_2)] (b_0 + a'_1 \sin \lambda_2 - b_1 \cos 2\lambda_2 + b_2 \cos 4\lambda_2 - \dots)$$

Једначине (22) и (24) дају тражене дужине λ_1 и λ_2 . Оне се знатно упрошћују ако занемаримо e^2 према јединици. То је дозвољено, јер максимална вредност од e^2 не прекорачује за последњих 600.000 година вредност од 0.0027. Том приликом корисно је извести још субституцију

$$(25) \quad \lambda_1 = \lambda \quad \lambda_2 = \pi - \lambda'$$

па тако добивамо

$$(26) \quad \lambda + \lambda' = 2e [\sin(\Pi - \lambda) + \sin(\Pi + \lambda)']$$

$$(27) \quad [1 - 2e \cos(\Pi - \lambda)] (b_0 + a'_1 \sin \lambda - b_1 \cos 2\lambda + b_2 \cos 4\lambda - \dots) = [1 + 2e \cos(\Pi + \lambda)'] (b_0 + a'_1 \sin \lambda' - b_1 \cos 2\lambda' + b_2 \cos 4\lambda' - \dots)$$

Из (26) слеђује:

$$\lim_{e \rightarrow 0} (\lambda + \lambda') = 0$$

а из (27)

$$\lim_{e \rightarrow 0} (\lambda - \lambda') = 0$$

а то значи да су за мале вредности од e и вредности од λ и λ' малене. Зато можемо једначине (26) и (27) у првој апроксимацији решити тако да у њима заменимо синусе углова λ и λ' са њиховим луковима, и косинусе са јединицама. Са тако добивеним коренима можемо, познатим методама, потражити оне који са већом тачности задовољавају једначине (26) и (27) па и једначине (22) и (24).

У палеоклиматском проблему од нарочитог су интереса они моменти када сезонски контрасти достигну своје екстремне вредности. Како се величине ε и e споро мењају, то ће бити, са великом апроксимацијом, онда случај када величина Π буде равна 90° или 270° . Уочимо прво случај:

$$(28) \quad \Pi = 90^\circ$$

Онда обе стране једначине (27), па и саме једначине (24) постају идентично једнаке па је зато:

$$(29) \quad \lambda = \lambda'$$

Једначина (26) добива услед тога облик

$$(30) \quad \lambda = 2e \cos \lambda$$

па можемо из ње одредити λ . У случају потребе можемо се послужити и тачнијом једначином (22) која у овом случају прелази у:

$$(31) \quad \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right)\lambda = 2e \cos \lambda + \frac{3}{4}e^2 \sin 2\lambda$$

За

$$(32) \quad \Pi = 270^\circ$$

дају једначине (27) и (26)

$$(33) \quad \lambda = \lambda' = -2e \cos \lambda$$

У оба ова случаја: $\Pi = 90^\circ$ и $\Pi = 270^\circ$ важи са потпуном тачности да величине λ и λ' не зависе од географске ширине. Калорична годишња доба почињу у исти мах на свима ширинама уочене хемисфере.

Једначине (30) и (33) могу се још знатно упростити. У интервалу од последњих 600.000 година на који мислим применити горње једначине, величина e не прекорачава број 0.0522.

Са тим бројем добивамо и помоћу једначине (30) и помоћу једначине (31) исту вредност $\lambda = 5^\circ 57'$. Када се ради дакле о томе да се λ одреди тачно на минуте довољно је употребити једначине (30) и (33). Но како је, према саопштеном бројном резултату λ увек малено, то можемо његов косинус заменити са јединицом. Тако добивамо

$$(34) \quad \begin{cases} \Pi = 90^\circ \\ \lambda = \lambda' = 2e \end{cases}$$

$$(35) \quad \begin{cases} \Pi = 270^\circ \\ \lambda = \lambda' = -2e \end{cases}$$

Ове нам једначине дају за $e = 0.0522$, $\lambda = 5^\circ 59'$. Максимално одступање од $2'$ од праве вредности још је увек мање од дозвољене погрешке ако се величине Q_e и Q_h желе одредити тачно на четири децимале у споменутим јединицама.

* * *

Сада, када смо се упознали са методама одређивања величина λ и λ' , односно λ_1 и λ_2 , ваља још да покажемо како се одређују величине Q_e и Q_h , т. ј. оне топлотне количине што их Сунце шаље у току калоричних полугодина уоченој географској ширини.

У споменутом делу је показано како се одређују топлотне количине W_e и W_h које одговарају астрономским годишњим добима и дате су потребне таблице за брзо израчунавање тих величина. Зато се наше питање свађа у главном на ово: како се помоћу величина W_e , W_h , λ , λ' одређују величине Q_e и Q_h .

Пре свега је јасно да је

$$(36) \quad Q_e + Q_h = W_e + W_h$$

У споменутом делу су изведене једначине које дају топлотне количине W што их Сунце шаље уоченој географској ширини док прелази интервал од λ' до λ'' . Те су једначине ове:

$$(37) \quad W = \frac{T}{2\pi^2} \frac{J_0}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ b_0 (\lambda'' - \lambda') - a'_1 (\cos \lambda'' - \cos \lambda') - \right. \\ \left. - \frac{b_1}{2} (\sin 2\lambda'' - \sin 2\lambda') + \frac{b_2}{4} (\sin 4\lambda'' - \sin 4\lambda') - \right. \\ \left. - \frac{b_3}{6} (\sin 6\lambda'' - \sin 6\lambda') + \frac{b_4}{8} (\sin 8\lambda'' - \sin 8\lambda') - + \dots \right\}$$

$$(38) \quad W = \frac{T}{2\pi} \frac{J_0}{a^2} \frac{\sin \varepsilon \sin \varphi}{\sqrt{1-e^2}} (\cos \lambda' - \cos \lambda'')$$

Прва од њих важи за неарктичну зону за све дужине Сунца и за арктичне зоне за дужине λ које леже у интервалу дневнога излаза и залаза Сунца. Друга једначина важи само за арктичне зоне за интервал дугога арктичкога дана. За нас долази у обзир прва једначина, сем ако нису у питању полови Земљини и њихова најближа околина.

$$\begin{aligned} \text{За } W_e \text{ је } \lambda' &= 0 & \lambda'' &= \pi \\ \text{за } W_h \text{ је } \lambda' &= \pi & \lambda'' &= 2\pi \\ \text{за } Q_e \text{ је } \lambda' &= \lambda_1 = \lambda & \lambda'' &= \lambda_2 = \pi - \lambda' \\ \text{за } Q_h \text{ је } \lambda' &= \lambda_2 = \pi - \lambda' & \lambda'' &= 2\pi + \lambda \end{aligned}$$

Означимо функцију (37) симболички са $W(\lambda', \lambda'')$, то је

$$(39) \quad \begin{cases} Q_e = W_e - W(0, \lambda) - W(\pi - \lambda', \pi) \\ Q_h = W_h + W(0, \lambda) + W(\pi - \lambda', \pi). \end{cases}$$

Уведимо јединице времена и топлотних величина тако да је $T = 1$, $J_0 = 1$, а како је још $a = 1$, то добивамо, ако уведемо још ознаку

$$(40) \quad W(0, \lambda) + W(\pi - \lambda', \pi) = K,$$

ове једначине

$$(41) \quad \begin{cases} Q_e = W_e - K \\ Q_h = W_h + K \end{cases}$$

$$(42) \quad K = \frac{1}{2\pi^2 \sqrt{1-e^2}} \left\{ 2a'_1 + b_0 (\lambda + \lambda') - a'_1 (\cos \lambda + \cos \lambda') - \right. \\ \left. - \frac{b_1}{2} (\sin 2\lambda + \sin 2\lambda') + \frac{b_2}{4} (\sin 4\lambda + \sin 4\lambda') - \right. \\ \left. - \frac{b_3}{6} (\sin 6\lambda + \sin 6\lambda') + \frac{b_4}{8} (\sin 8\lambda + \sin 8\lambda') - + \dots \right\}$$

Оне нам одређују величине Q_e и Q_h . Нумеричке вредности тих величина које одговарају садашњим калоричним годинама саопштене су у табlici IV. Ту су саопштене и вредности Q_e и Q_h за јужну хемисферу. Означимо ли са λ_1 дужину Сунца у почетку зимске полугодине уочене географске ширине јужне хемисфере, а са λ_2 ту дужину у почетку летње полугодине, то се мењају горе само једначине (41) у којима величина K мења свој знак.

ТАБЛИЦА I — TABLEAU I

Средње инсолације паралела у четири разна момента 1923. г. које су послужиле за одређивање калоричних годишњих доба; време средње гриничко.

Северна хемисфера — Hémisphère nord

φ	Mars 22·0	Mars 23·0	Sept. 20·6211	Sept. 21·6211
+ 15°	0·310317	0·311023	0·307593	0·306928
+ 20°	0·302157	0·303157	0·300145	0·299192
+ 25°	0·291698	0·292985	0·290412	0·289180
+ 30°	0·279019	0·280584	0·278471	0·276967
+ 35°	0·264216	0·266048	0·264413	0·262647
+ 40°	0·247403	0·249482	0·248343	0·246328
+ 45°	0·228707	0·231030	0·230386	0·228136
+ 50°	0·208270	0·210815	0·210678	0·208209
+ 55°	0·186249	0·188996	0·189353	0·186699
+ 60°	0·162811	0·165742	0·166627	0·163771
+ 65°	0·138134	0·141230	0·142624	0·139599
+ 70°	0·112409	0·115648	0·117548	0·114373
+ 75°	0·085828	0·089197	0·091604	0·088284
+ 80°	0·058600	0·062092	0·065026	0·061553
+ 85°	0·030948	0·034617	0·038202	0·034463
+ 90°	0·005931	0·012859	0·019976	0·013255

ТАБЛИЦА I — TABLEAU I

Moyennes insolutions des parallèles en quatre divers moments de l'année 1923, ayant servi pour la détermination des saisons caloriques; temps moyen de Greenwich.

Јужна хемисфера — Hémisphère sud

φ	Mars 22·0	Mars 23·0	Sept. 20·6211	Sept. 21·6211
— 15°	0·308782	0·307695	0·302423	0·303497
— 20°	0·300129	0·298759	0·293313	0·294659
— 25°	0·289192	0·287551	0·281970	0·283578
— 30°	0·276054	0·274154	0·268483	0·270340
— 35°	0·260814	0·258672	0·252955	0·255044
— 40°	0·243591	0·241216	0·235503	0·237808
— 45°	0·224513	0·221937	0·216261	0·218763
— 50°	0·203727	0·200964	0·195376	0·198055
— 55°	0·181391	0·178462	0·172990	0·175841
— 60°	0·157675	0·154606	0·149328	0·152292
— 65°	0·132759	0·129575	0·124520	0·127586
— 70°	0·106835	0·103564	0·098777	0·101917
— 75°	0·080114	0·076776	0·072309	0·075481
— 80°	0·052760	0·049429	0·045353	0·048500
— 85°	0·025040	0·021807	0·018303	0·021258
— 90°	0	0	0	0

ТАБЛИЦА II — TABLEAU II

Калоричне полугодине за годину 1923; време средње гриничко.
Demi-années caloriques pour l'an 1923; temps moyen de
Greenwich.

Северна хемисфера — Hémisphère nord

φ	Commencement de la saison	
	chaude	froide
+ 15°	20, 0h 20m	18, 15h 10m
+ 20°	20, 23h 20m	19, 14h 10m
+ 25°	21, 11h 40m	20, 2h 40m
+ 30°	21, 19h 40m	20, 10h 40m
+ 35°	22, 1h 20m	20, 16h 10m
+ 40°	22, 5h 30m	20, 20h 30m
+ 45°	22, 9h 50m	20, 23h 40m
+ 50°	22, 11h 30m	21, 2h 30m
+ 55°	22, 13h 50m	21, 4h 40m
+ 60°	22, 15h 50m	21, 6h 40m
+ 65°	22, 17h 40m	21, 8h 30m
+ 70°	22, 19h 10m	21, 10h 10m
+ 75°	22, 20h 50m	21, 11h 40m
+ 80°	22, 22 10m	21, 13h 0m
+ 85°	22, 23h 30m	21, 14h 20m
+ 90°	23, 0h 40m	21, 15h 40m

1923 Mars

1923 Septembre

ТАБЛИЦА II — TABLEAU II

Калоричне полугодине за год. 1923; време средње гриничко.
Demi-années caloriques pour l'an 1923; temps moyen de
Greenwich

Јужна хемисфера — Hémisphère sud

φ	Commencement de la saison	
	chaude	froide
- 15°	23, 13h 30m	24, 22h 40m
- 20°	23, 3h 10m	24, 12h 10m
- 25°	22, 20h 20m	24, 5h 20m
- 30°	22, 15h 20m	24, 0h 20m
- 35°	22, 11h 30m	23, 20h 30m
- 40°	22, 8h 20m	23, 17h 30m
- 45°	22, 5h 50m	23, 15h 0m
- 50°	22, 3h 40m	23, 12h 50m
- 55°	22, 1h 50m	23, 10h 50m
- 60°	22, 0h 10m	23, 9h 10m
- 65°	21, 22h 30m	23, 7h 40m
- 70°	21, 21h 0m	23, 6h 20m
- 75°	21, 19h 40m	23, 4h 40m
- 80°	21, 18h 20m	23, 3h 30m
- 85°	21, 17h 0m	23, 2h 10m
- 90°	21, 15h 40m	23, 0h 40m

1923 Septembre

1923 Mars

ТАБЛИЦА III — TABLEAU III

Дужина Сунца у почетку калоричних полугодина
 Longitude du Soleil au commencement des demi-années
 caloriques

Северна хемисфера — Hémisphère nord

φ	Commencement de la saison	
	chaude	froide
+ 15°	358° 53'	175° 10'
+ 20°	359° 50'	176° 5'
+ 25°	0° 21'	176° 36'
+ 30°	0° 40'	176° 55'
+ 35°	0° 54'	177° 9'
+ 40°	1° 5'	177° 19'
+ 45°	1° 13'	177° 27'
+ 50°	1° 20'	177° 34'
+ 55°	1° 25'	177° 40'
+ 60°	1° 30'	177° 44'
+ 65°	1° 35'	177° 49'
+ 70°	1° 39'	177° 53'
+ 75°	1° 43'	177° 57'
+ 80°	1° 46'	178° 0'
+ 85°	1° 49'	178° 3'
+ 90°	1° 52'	178° 6'

ТАБЛИЦА III — TABLEAU III

Дужина Сунца у почетку калоричних полугодина
 Longitude du Soleil au commencement des demi-années
 caloriques

Јужна хемисфера — Hémisphère sud

φ	Commencement de la saison	
	chaude	froide
— 15°	179° 59'	3° 46'
— 20°	179° 33'	3° 20'
— 25°	179° 16'	3° 3'
— 30°	179° 4'	2° 51'
— 35°	178° 55'	2° 42'
— 40°	178° 47'	2° 34'
— 45°	178° 41'	2° 28'
— 50°	178° 36'	2° 23'
— 55°	178° 31'	2° 18'
— 60°	178° 27'	2° 14'
— 65°	178° 23'	2° 10'
— 70°	178° 20'	2° 6'
— 75°	178° 16'	2° 2'
— 80°	178° 13'	1° 59'
— 85°	178° 10'	1° 56'
— 90°	178° 6'	1° 52'

ТАБЛИЦА IV — TABLEAU IV

Количине сунчане топлоте које стижу на горњу границу атмосфере у току калоричних годишњих доба.

Quantités de radiation atteignant la limite supérieure de l'atmosphère au cours des saisons caloriques

Северна хемисфера — Hémisphère nord

φ	Saison chaude	Saison froide	Année entière
	Q _e	Q _n	Q _T
+ 15°	0·1611	0·1347	0·2959
+ 20°	0·1628	0·1258	0·2886
+ 25°	0·1635	0·1159	0·2794
+ 30°	0·1629	0·1054	0·2683
+ 35°	0·1614	0·0942	0·2556
+ 40°	0·1588	0·0824	0·2412
+ 45°	0·1552	0·0704	0·2255
+ 50°	0·1508	0·0580	0·2088
+ 55°	0·1457	0·0458	0·1915
+ 60°	0·1400	0·0337	0·1737
+ 65°	0·1345	0·0225	0·1570
+ 70°	0·1307	0·0139	0·1446
+ 75°	0·1285	0·0079	0·1364
+ 80°	0·1273	0·0037	0·1310
+ 85°	0·1267	0·0010	0·1277
+ 90°	0·1266	0·0001	0·1267

ТАБЛИЦА IV — TABLEAU IV

Количине сунчане топлоте које стижу на горњу границу атмосфере у току калоричних годишњих доба.

Quantités de radiation atteignant la limite supérieure de l'atmosphère au cours des saisons caloriques.

Јужна хемисфера — Hémisphère sud

φ	Saison chaude	Saison froide	Année entière
	Q _e	Q _n	Q _T
— 15°	0·1675	0·1283	0·2959
— 20°	0·1691	0·1195	0·2886
— 25°	0·1695	0·1099	0·2794
— 30°	0·1687	0·0996	0·2683
— 35°	0·1668	0·0887	0·2556
— 40°	0·1639	0·0773	0·2412
— 45°	0·1599	0·0656	0·2255
— 50°	0·1550	0·0537	0·2088
— 55°	0·1495	0·0419	0·1915
— 60°	0·1434	0·0303	0·1737
— 65°	0·1373	0·0197	0·1570
— 70°	0·1330	0·0117	0·1446
— 75°	0·1303	0·0062	0·1364
— 80°	0·1284	0·0025	0·1310
— 85°	0·1273	0·0004	0·1277
— 90°	0·1267	0·0000	0·1267

LES SAISONS CALORIQUES ET LEURS APPLICATION AU PROBLÈME PALÉOCLIMATIQUE

Par M. MILANKOVITCH

(Résumé)

Après avoir discuté le mécanisme des variations séculaires des éléments astronomiques et leur influence sur la distribution de la radiation solaire à la surface de la Terre, l'auteur se propose d'indiquer les conséquences de ces variations de sorte qu'on puisse les utiliser en paléoclimatologie.

Soit ABCD (fig. 2 pag. 7) la courbe représentant la marche annuelle de l'insolation à la latitude φ , lorsqu'on ne tient pas compte de l'atmosphère. Le point F_1 représente le moment de l'équinoxe de printemps, le point H_1 celui de l'équinoxe d'automne, le point F'_1 celui de l'équinoxe de printemps suivant. Les ordonnées $\overline{F_1 F}$, $\overline{H_1 H}$, $\overline{F'_1 F'}$ représentent, par conséquent, les insolutions équinoxiales, tandis que longueurs $\overline{F_1 H_1}$ et $\overline{H_1 F'_1}$ représentent respectivement les durées de la demi-année estivale et de la demi-année hivernale. Par suite de l'excentricité de l'orbite terrestre, on a

$$\overline{F_1 F} \cong \overline{H_1 H}$$

$$\overline{F_1 H_1} \cong \overline{H_1 F'_1}$$

Ces deux inégalités ont pour conséquence ce qui suit. Dans l'intervalle de temps représenté sur la fig. 2 par la différence des abscisses des points F' et V , et quoique cet intervalle appartient à la demi-année hivernale astronomique, l'insolation de la latitude considérée est plus intense que l'insolation $\overline{H_1 H}$ du dernier jour de la demi-année estivale. Ce qui signifie que

certaines jours de la demi-année hivernale astronomique, l'insolation à la limite supérieure de l'atmosphère est plus forte que certains jours de la demi-année estivale.

Il s'en suit que les demi-années astronomiques (printemps + été et automne + hiver) ne divisent pas l'année en deux intervalles tels que l'insolation dans l'un soit constamment plus forte que celle dans une partie quelconque de l'autre intervalle. En outre, ces demi-années astronomiques sont de longueurs inégales subissant des variations séculaires. C'est pourquoi on ne peut obtenir à l'aide des saisons astronomiques et des valeurs de l'insolation correspondantes aucune conclusion rationnelle concernant la marche séculaire de l'insolation terrestre qui joue, ainsi que l'auteur l'a montré antérieurement¹⁾, un rôle important dans le problème paléoclimatique.

Tous ces inconvénients peuvent être évités en partageant l'année en deux parties égales et telles que l'insolation diurne minima du premier de ces intervalles soit égale à l'insolation maxima de l'autre intervalle. Parlant géométriquement, on peut délimiter ces deux intervalles en déterminant sur la fig. 2 la droite PQS parallèle à l'axe des abscisses et coupant la courbe de l'insolation de telle sorte que les sections \overline{PQ} et \overline{QS} soient égales entre elles. L'auteur désigne ces demi-années par *demi-années caloriques*. Elles ne subissent pas de variations séculaires, car l'année sidérale n'en subit pas, pas plus d'ailleurs l'année tropique si on ne tient pas compte de ses variations insignifiantes qui n'ont aucune influence appréciable sur le phénomène de l'insolation.

Lorsqu'on a déterminé le commencement et la fin des saisons caloriques, il est aisé de calculer les quantités de radiation Q_e et Q_h que le Soleil envoie au cours des saisons caloriques à la latitude considérée.

Par suite des variations séculaires des éléments astronomiques, les valeurs Q_e et Q_h varient également, mais comme elles se rapportent toujours à un même espace de temps, on peut les comparer directement avec leurs valeurs actuelles, ce qui n'est pas le cas avec les quantités de radiation correspondant aux saisons astronomiques dont la durée varie séculaire-

¹⁾ Milankovitch, Théorie mathématique des phénomènes thermiques produits par la radiation solaire. Paris 1920 Gauthier-Villars et Cie.

ment. Mais on peut aller un pas plus loin et déterminer le parallèle auquel correspond actuellement la même quantité de radiation Q_e ou Q_h que nous avons obtenue pour la latitude considérée et pour une certaine année du passé. Autrement dit, on peut exprimer la variation séculaire de l'état de l'insolation à l'aide des variations de la latitude, ce qui est de la plus grande importance pour la paléoclimatologie. De cette manière l'auteur réduit la partie astronomique du problème paléoclimatique à un problème géométrique qu'on peut résoudre avec la même précision que l'on trouve dans les solutions des problèmes de Mécanique céleste.

