V. BURCOV
D. KONSTANTINOVIĆ
Mr D. KRGOVIĆ
Ž. MIJAJLOVIĆ
Dr S. MILIĆ
J. VUKMIROVIĆ

# Matematika

## ZA SREDNJE VOJNE ŠKOLE JUGOSLOVENSKE NARODNE ARMIJE

Izdavač
VOJNOIZDAVAČKI
ZAVOD

Beograd 1973.

Ovaj udžbenik je izrađen na osnovu Naređenja državnog sekretara za narodnu odbranu (Naređenje pov. br. 578, od 18. juna 1970. god.) o školovanju srednjeg vojno-stručnog kadra i odobrenih nastavnih planova i programa iz opšteobrazovnih predmeta u srednjim vojnim školama JNA.

Biblioteka
PRAVILA I UDŽBENICI
KNJIGA DRUGA

*

*Odgovorni urednik*
peš. pukovnik
STANKO ŠTETIĆ

*

*Urednik*
art. potpukovnik
DRAGOMIR DELIBAŠIĆ

*

*Recenzenti*
Dr ĐORĐE M. KARAPANDŽIĆ
MIHAILO RADIČEVIĆ, profesor

# SADRŽAJ

## DRUGA GODINA

Strana





*Pripremajući ovaj udžbenik želelo se da se odgovori zahtevu da dvogodišnji kurs matematike pruži slušaocima potrebno znanje za uspešno savlađivanje programa iz oblasti matematike na nivou srednjoškolskog obrazovanja, a samim tim i za nastavljanje studija na višim i visokim školama.*

*Knjiga čini kontinualnu celinu i odgovara potrebi za savremenim izlaganjem gradiva*

*Program obuhvata nastavno gradivo iz MATEMATIČKE LOGIKE, TEORIJE SKUPOVA, ARITMETIKE, ALGEBRE, GEOMETRIJE U RAVNI I PROSTORU I TRIGONOMETRIJE.*

*Treba napomenuti da su primeri obrađenih zadataka birani tako da zadovolje specifičnosti škole kojoj je udžbenik namenjen.*

*AUTORI*

# PRVA GODINA

## ELEMENTI MATEMATIČKE LOGIKE

### 1. REČENICA, ISKAZ

Misao se može izraziti usmeno ili pismeno. Osnovna govorna jedinica je rečenica. Kada u matematici hoćemo da iskažemo neku misao, osim slova ili brojeva, upotrebljavamo i mnoge simbole (ugovorene znake). Na primer, ako želimo da izrazimo misao da su brojevi $a$ i $b$ jednaki, pišemo to ovako: $a = b$. Dakle, znak $=$ izražava misao da su veličine između kojih on stoji — jednake.

Misao koja se jezikom matematike izražava veoma kratko i, prema tome, jasno: $a + b = c - d$, u prevodu na srpskohrvatski jezik glasi ne baš tako jednostavno: zbir brojeva $a$ i $b$ jednak je razlici brojeva $c$ i $d$. Svaki učenik osnovne škole zna šta znače simboli $+$ ili $-$, $\sqrt{}$, razlomačka crta, zagrade, i drugi znaci. Tvrđenje da su trouglovi $ABC$ i $MNP$ podudarni (kongruentni) možemo pomoću simbola da napišemo ovako: $\triangle ABC \cong \triangle MNP$. Osim ovih znakova u matematici postoji vrlo mnogo simbola pomoću kojih se matematička misao može izraziti kratko, jasno i precizno.

U ljudskom mišljenju postoji izvesna zakonitost. Nauka koja izučava zakone ljudskog mišljenja zove se logika. Često se misli da svaki čovek ume da logički misli. To je zaista tako. Sposobnost logičkog mišljenja je osnovna osobina ljudske svesti. U onoj meri koju tu osobinu poseduje neobrazovan čovek, ona je dovoljna za vršenje elementarnih logičkih operacija sa kojima se ima posla u svakidašnjem životu. Međutim, pri izučavanju matematike često se ima posla sa mnogo finijim momentima logike i onda se ne možemo pouzadati u logičke mogućnosti kojima, bez prethodnog obrazovanja, raspolaže svaki normalan čovek,

Zato ćemo se prvo upoznati sa osnovnim zakonima matematičke logike koji su neophodni za izučavanje te nauke. Iako čovek svoju misao iskazuje nekom rečenicom ili sa više rečenica, to još ne znači da svaka rečenica predstavlja neku misao. Na primer: „Koliko je sati?" ili

„Srećan put!". Ali, rečenicom: „Triglav je visoka planina" daje se sud ili iskazuje se mišljenje o visini Triglava. U matematici poseban značaj imaju rečenice za koje se može reći ili da su *istinite* ili da su *neistinite*. Kao što smo već ranije videli te rečenice se mogu iskazati ili rečima ili simbolima. Svaka takva rečenica zove se *iskaz*. Ako je iskaz istinit, takvu rečenicu zovemo *tvrđenje*.

Primeri istinitih ili tačnih iskaza:

a) Beograd je glavni grad Jugoslavije.

b) $7 > 3$

c) Dijagonale pravougaonika su jednake.

d) $3 + 2 = 5$

Primeri neistinitih iskaza:

e) Broj 7 je paran.

f) Zagreb je u Makedoniji.

g) Broj 13 je deljiv sa 5.

h) Dunav je jezero u Africi.

Ako želimo da neki iskaz ocenimo sa stanovišta njegove tačnosti, odnosno istinitosti, koristimo simbol $\tau$ (grčko slovo, čita se „tau"). Na primer $\tau(c) = ?$ znači da se postavlja pitanje da li je iskaz: „Dijagonale pravougaonika su jednake" istinit ili neistinit. Ako je iskaz tačan, tj. istinit, upotrebljavamo znak $\top$, ako je neistinit, stavimo znak $\perp$.

Drugim rečima: $\tau(c) = \top$ značilo bi, da je iskaz, „*Dijagonale pravougaonika su jednake*" tačan. Ako pak želimo da konstatujemo da je iskaz: „Zagreb je u Makedoniji" neistinit, to pišemo ovako: $\tau(f) = \perp$.

Kao što za računske operacije postoje specijalni simboli: za sabiranje $+$, za oduzimanje $-$, za korenovanje $\sqrt{}$ itd., isto tako, za logičke operacije postoje znaci koji ukazuju na to koja se naime logička operacija vrši.

## 2. LOGIČKE OPERACIJE

### 1. Negacija

Kao što se u algebri vrše operacije brojevima (posebnim ili opštim), u matematičkoj logici operacije se vrše iskazima. Ovde ćemo koristiti samo takve iskaze koji mogu biti ili istiniti ili neistiniti. Uzmimo, na primer, uzajamni položaj tačke $M$ i prave $p$. Postoje samo dve mogućnosti: a) tačka $M$ pripada pravoj $p$, i b) tačka $M$ ne pripada pravoj $p$. Treća mogućnost ne postoji.



Ako je $\tau(a) = \top$, znači $\tau(b) = \perp$ i, obrnuto: ako je $\tau(a) = \perp$, onda je $\tau(b) = \top$.

Ako uporedimo iskaze $a$ i $b$, vidimo da je iskaz $b$ negacija iskaza $a$.

Zaista: tačka $M$ a) pripada pravoj $p$,

b) *ne* pripada pravoj $p$.

Ovo se može napisati ovako: $b = \urcorner a$. Prema tome simbol $\urcorner$ znači *ne, nije, nije tačno*. Iz ovog se vidi da je negacija nekog iskaza $a$ je takav iskaz $b$ koji je istinit ako je $a$ neistinit i neistinit ako je $a$ istinit.

Ovo se preglednije vidi iz tabele:

| $a$ | $\urcorner a$ |
|---|---|
| $\top$ | $\perp$ |
| $\perp$ | $\top$ |

### 2. Konjukcija

Ako su dva iskaza vezana svezom *i*, dobija se nov iskaz koji može biti istinit ili neistinit. Proučimo to na primerima.

Iskaz a: Broj 2 je prost

Iskaz b: Broj 2 je paran.

Iskaz: Broj 2 je prost i (broj 2 je) paran je nov iskaz koji se zove konjukcija iskaza $a$ i $b$ i obeležava $a \wedge b$ .Iskaz $a \wedge b$ je istinit samo zato što su oba iskaza i $a$ i $b$ istiniti. To se može reći i ovako: ako je $\tau(a) = \top$ i $\tau(b) = \top$, onda je $\tau(a \wedge b) = \top$. Ako je, pak, bar jedan od iskaza neistinit, njihova konjukcija je neistiniti iskaz.

Iskaz $a$: Dijagonale jednakokrakog trapeza su jednake (istinit).

Iskaz $b$: Dijagonale jednakokrakog trapeza se polove (neistinit).

Iskaz $(a \wedge b)$: Dijagonale jednakokrakog trapeza su jednake i polove se (neistinit).

To bi se moglo napisati ovako:

Ako je $\tau(a) = \top$, a $\tau(b) = \perp$, onda je $\tau(a \wedge b) = \perp$.

Isto ako je $\tau(a) = \perp$, a $\tau(b) = \top$, onda je $\tau(a \wedge b) = \perp$.

Definicija konjukcije mogla bi se prikazati tabelom:

| $\tau(a)$ | $\tau(b)$ | $\tau(a \wedge b)$ |
|---|---|---|
| $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\perp$ | $\perp$ |
| $\perp$ | $\top$ | $\perp$ |
| $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ |

Prema tome, konjukcija dva iskaza $a$ i $b$ je takav iskaz koji je istinit onda (i samo onda) ako su oba iskaza $a$ i $b$ istinita.

### 3. **Disjunkcija**

Dva (ili više) iskaza vezanih svezom „ili" čine iskaz koji se zove disjunkcija. Disjunkcija iskaza $a$ i $b$ označava se simbolom $\vee$ tj. $a \vee b$. Ovde treba naglasiti da u matematici znak $\vee$ (ili) ima nešto drukčije značenje nego u svakidašnjem govoru.

U običnom govoru svezu *ili* često označava razdvajanje. Naročito ako se upotrebi dva puta: ili $a$, ili $b$. U matematici pak disjunkcija je istinita ako je istinit *bar* jedan iskaz. To znači da je ona istinita ako su istinita i oba iskaza — i $a$ i $b$.

Uzmimo primere:

1) $a$: $5 = 5$ $\quad$ $b$: $3 = 3$
$\tau(a) = \top$ $\quad$ $\tau(b) = \top$
$\tau(a \vee b) = \top$

2) $a$: $5 = 5$ $\quad$ $b$: $2 > 7$
$\tau(a) = \top$ $\quad$ $\tau(b) = \perp$
$\tau(a \vee b) = \top$

3) $a$: $3 < 1$ $\quad$ $b$: $2 = 2$
$\tau(a) = \perp$ $\quad$ $\tau(b) = \top$
$\tau(a \vee b) = \top$

4) $a$: $3 < 1$ $\quad$ $b$: $2 > 7$
$\tau(a) = \perp$ $\quad$ $\tau(b) = \perp$
$\tau(a \vee b) = \perp$

Prema tome: disjunkcija je neistinita ako nijedan iskaz nije istinit.



Istinitosna vrednost disjunkcije mogla bi se prikazati tabelom:

| $\tau(a)$ | $\tau(b)$ | $\tau(a \vee b)$ |
|---|---|---|
| $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\perp$ | $\top$ |
| $\perp$ | $\top$ | $\top$ |
| $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ |

### 4. **Implikacija**

U matematici se često dva iskaza vezuju rečima ako . . . , onda . . .

*Ako* je neki broj deljiv sa 6,

*onda* je taj broj deljiv sa 3;

*Ako* je četvorougao deltoid, *onda* su mu dijagonale normalne.

*Ako* je trougao jednakostranični, *onda* je njegova visina simetrala ugla.

Ako su $a$ i $b$ dva bilo kakva iskaza, onda se iskaz: ako $a$, onda $b$, zove implikacija i obeležava $a \Rightarrow b$. Često se umesto ako . . . , onda . . . kaže: $a$ implicira $b$, ili $a$ povlači $b$, ili $b$ sledi iz $a$.

Da vidimo kako istinitost implikacije zavisi od istinitosti iskaza $a$ i $b$. Pođimo od primera. Iskaz $a$: svaki sabirak je deljiv sa 3. (Na primer $15 + 6$). Iskaz $b$: zbir je deljiv sa 3.
Implikacija: Ako je svaki sabirak deljiv sa 3, onda je zbir deljiv sa 3.

Ako je $\tau(a) = \top$ i $\tau(b) = \top$, onda je očigledno da implikacija istinita, tj. $\tau(a \Rightarrow b) = \top$.

Implikaciju smatramo istinitom i onda ako je $\tau(b) = \top$, pa makar bilo $\tau(a) = \perp$, jer zbir može biti deljiv sa 3, iako sabirci nisu deljivi sa 3. Ako su, naprimer, 5 i 4.

Ako $\tau(a) = \perp$, sabirci su, na primer, 5 i 2, povlači $\tau(b) = \perp$ implikacija je istinita, tj. zbir nije deljiv sa 3.

Znači, samo u jednom slučaju implikacija je neistinita i to ako je $\tau(a) = \top$, a $\tau(b) = \perp$. Zaista je nemoguće naći takve brojeve da svaki od njih bude deljiv sa 3, a da njihov zbir nije deljiv sa 3.

Prema tome implikacija $a \Rightarrow b$ je takav iskaz koji je neistinit onda (i samo onda) ako je $a$ istinito, a $b$ neistinito.

Iskaz $a$ zove se *pretpostavka* (premisa), $b$ — *posledica* (konsekvenca)

Tablica istinitosti za implikaciju:

| $\tau(a)$ | $\tau(b)$ | $\tau(a \Rightarrow b)$ |
|---|---|---|
| $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $\bot$ | $\top$ | $\top$ |
| $\bot$ | $\bot$ | $\top$ |

Na prvi pogled može se učiniti čudnovatim: kako to da u 4. redu ove tabelice od dva neistinita iskaza, implikacija ispada istinita. Ako se pak malo udubimo u to, postaje sve jasno.

Uzmimo još jedan primer:

Iskaz $a$: Ćićevac je najveći grad u Jugoslaviji (neistinit),
Iskaz $b$: Ćićeva je veći od Zagreba (neistinit).
Implikacija je, međutim, istinita:

Ako je Ćićevac najveći grad u Jugoslaviji, onda je Ćićevac veći od Zagreba.

Istinitost implikacije bila bi još ubedljivija ako bi se upotrebio kao u svakidašnjem govoru, kondicional:

Ako bi Ćićevac bio najveći grad u Jugoslaviji, onda bi Ćićevac bio veći od Zagreba.

Ovde nije suvišno učiniti jednu napomenu. Na početku je rečeno da $a$ i $b$ mogu biti dva bilo kakva iskaza. Uzmimo, na primer, dva istinita iskaza:

iskaz $a$: $2 + 3 = 5$

iskaz $b$: mačka je sisar

Implikacija: ako je $2 + 3 = 5$, onda je mačka sisar.

Formalno uzeto, implikacija je istinita, ali je iskaz besmislen. Ovo dolazi otuda što iskazi $a$ i $b$, i ako su oba istinita, imaju sasvim različite sadržaje. Takva implikacija se ne koristi u matematici.

## 5. Ekvivalencija

Od svih četvorouglova jedino kod paralelograma dijagonale se polove, Zato je moguć iskaz: „Dijagonale četvorougla se polove *onda i — samo onda* — ako je četvorougao paralelogram". Ovaj složeni iskaz sastoji se iz dva iskaza, $a$ i $b$, i to:

$a$: Dijagonale četvorougla se polove, i

$b$: četvorougao je paralelogram.



Dakle, moglo bi se reći, $a$ je onda (i samo onda) ako je $b$. Na prvi pogled se vidi da je isto tako ispravno reći: $b$ je onda (i samo onda) ako je $a$. To znači da $a$ implicira $b$ i $b$ implicira $a$.

Koristeći već poznatu simboliku matematičke logike, to možemo napisati i ovako

$$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a).$$

Takav iskaz zove se *ekvivalencija* i obeležava se $a \Leftrightarrow b$.

Ekvivalencija je istinita ako oba iskaza $a$ i $b$ imaju istu istinitosnu vrednost (oba istinita, ili oba neistinita), a neistinita je ako $a$ i $b$ imaju različite istinitosne vrednosti (jedan istinit, a drugi neistinit).

Tablica istinitosti ekvivalencije:

| $a$ | $b$ | $a \Leftrightarrow b$ |
|---|---|---|
| $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $\bot$ | $\top$ | $\bot$ |
| $\bot$ | $\bot$ | $\top$ |

## 6. Uslov „potreban", „dovoljan", „potreban i dovoljan"

Ovi izrazi se veoma često upotrebljavaju u matematici. Zato ćemo ovde precizirati smisao ovih izraza. Uslov „potrebno" često se iskazuje i u drugom obliku: „*nužno*", „*neophodno*".

Kaže se, na primer: „Proporcionalnost stranica je *neophodan uslov* za sličnost trouglova". To treba razumeti ovako. Ako su stranice dva trougla proporcionalne, onda (i samo onda) su ti trouglovi slični. Ako, pak, taj uslov nije ispunjen, tj. stranice trouglova nisu proporcionalne, trouglovi nisu slični. Ako je iskaz $a$: proporcionalnost stranica, iskaz $b$: sličnost trouglova, onda bi se moglo napisati:

$$a \Rightarrow b.$$

Lako je zapaziti da važi i obrnuto, tj. ako su trouglovi slični, njihove stranice su proporcionalne i, ako trouglovi nisu slični, njihove stranice nisu proporcionalne.

$$b \Rightarrow a.$$

Kaže se i ovako: Proporcionalnost stranica je *dovoljan* uslov za sličnost trouglova. Znači da je „proporcionalnost stranica" „potrebna i dovoljan" uslov za sličnost trouglova.

Kako je $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$, potreban i dovoljan uslov je izražen ekvivalencijom izkaza $a$ i $b$ tj. $a \Leftrightarrow b$.

Očigledno je da važi i $\urcorner a \Leftrightarrow \urcorner b$.

Uzmimo još jedan primer.

Jednakost dijagonala je *potreban i dovoljan* uslov da bi paralelogram bio pravougaoni.

Zaista ne postoji paralelogram čije su dijagonale jednake a da on nije pravougaonik. Isto tako, ne postoji pravougaonik čije dijagonale ne bi bile jednake.

Da bi broj $n$ bio deljiv sa 4, da li je potrebno (i dovoljno) da je on deljiv sa 2? Potrebno je. Jer, ako broj nije deljiv sa 2, nije deljiv ni sa 4. Ali, to nije i dovoljno, jer, na primer, broj 6 je deljiv sa 2, ali sa 4 nije deljiv. Može biti i obrnuto, tj. ako neki uslov bude dovoljan, ali ne i neophodan. Da bi broj $m$ bio deljiv sa 2 da li je potrebno (i dovoljno) da on bude deljiv sa 4?

Dovoljno svakako jeste, jer ako je broj deljiv sa 4, samim tim deljiv je i sa 2. To, međutim, nije neophodno, jer ima brojeva koji nisu deljivi sa 4, ali su sa 2 deljivi, na primer broj 6.

Da li je pravilnost poligona potreban i dovoljan uslov da bi se oko tog poligona mogla opisati kružnica?

Oko svakog pravilnog poligona može se opisati kružnica. Prema tome, taj uslov je dovoljan. Kružnicu međutim, može opisati i oko nepravilnog poligona na primer, oko jednakokrakog trapeza ili oko bilo kojeg tetivnog četvorougla. Znači, pravilnost poligona je dovoljan, ali nije neophodan uslov da se oko tog poligona može opisati kružnica.

Prema tome, ako su iskazi $a$ i $b$ ekvivalentni $a \Leftrightarrow b$, onda je $a$ potreban i dovoljan uslov za $b$ i $b$ je potreban i dovoljan uslov za $a$. Ako su, pak, $a$ i $b$ vezani implikacijom $a \Rightarrow b$, onda je $a$ dovoljan uslov za $b$, a $b$ je potreban uslov za $a$.

Sa nekim složenijim logičkim operacijama upoznaćemo se kasnije.

## ZADACI

*Zad. 1.* Ispisati navedene iskaze sa stanovišta istinitosti:

a: Nula je najmanji broj.
b: Kvadrat je romb.
c: Prav razlomak je veći od nepravog.
d: Najlepša pesma Branka Radičevića je „Tri hajduka".
e: Verdi je francuski pisac.
f: Jednakostranični trougao je jednakokraki.
g: $\pi = 3,14$.

*Zad. 2.* Obrazovati negaciju datog iskaza. Ispitati zatim istinitost tog iskaza i istinitost njegove negacije.

a: Broj 7 je paran broj.
b: Svaki pravougaonik je paralelogram.
c: Broj 39 je prost broj.
d: Dijagonale romba se polove.
e: Ortocentar trougla je presek njegovih težišnih linija.
f: $x < 5$

*Zad. 3.* Od dva iskaza $a$ i $b$ obrazovati konjukciju $(a \wedge b)$ i ispitati njenu tačnost (istinitost) $\tau(a \wedge b)$.

1) a: Kvadrat je paralelogram.
   b: Kvadrat je romb.
2) a: Broj 6 je ceo broj.
   b: Broj 6 je paran broj.
3) a: Dijagonale pravougaonika su jednake.
   b: Dijagonale pravougaonika su uzajamno normalne.
4) a: Dunav je najveća reka u Evropi.
   b: Dunav se uliva u Crno more.
5) a: Beograd je najveći grad u Evropi.
   b: Pored Beograda protiče reka Volga

*Zad. 4.* Od dva iskaza $a$ i $b$ obrazovati disjunkciju $(a \vee b)$ i ispitati njenu istinitost.

1) a: Broj 17 je ceo broj.
   b: Broj 17 je paran broj.
2) a: Dijagonale trapeza su jednake.
   b: Dijagonale trapeza se polove.
3) a: Žabe su sisari.
   b: Mars je planeta.
4) a: Zbir unutrašnjih uglova u trouglu je 180°.
   b: Stranice romba su jednake.

*Zad. 5.* Od dva iskaza $a$ i $b$ obrazovati implikaciju $(a \Rightarrow b)$ i ispitati njenu istinitost.

1) a: Broj $n$ je deljiv sa 12.
   b: Broj $n$ je deljiv sa 6.
2) a: $x = y$ i $y = z$
   b: $x = z$
3) a: Četvorougao je kvadrat.
   b: Četvorougao je paralelogram.

4) a: $2x + 3 = 7$
b: $x = 2$

5) a: Zbir dva ugla u trouglu $\alpha + \beta = 120°$
b: Treći ugao $\gamma$ je tup.

6) a: U četvorouglu se mogu povući 4 dijagonale.
b: U petouglu se može povući 10 dijagonala.

*Zad. 6.* Ispitati istinitost ekvivalencije iskaza $a$ i $b$ $(a \Leftrightarrow b)$

1) a: Broj $n$ je deljiv sa 2 i sa 3.
b: Broj $n$ je deljiv sa 6.

2) a: $xy$
b: $yx$

3) a: Parelelogram je pravougaonik.
b: Dijagonale paralelograma su jednake.

4) a: $2 + 3 = 7$
b: $3 + 2 = 7$

*Zad. 7.* Navedene rečenice napisati simbolima matematičke logike.

1) Uglovi $\alpha$ i $\beta$ su suplementni i $\alpha$ je oštar ugao povlači da je $\beta$ tup.
2) $m$ je manje od $n$ ili $m$ je veće od $n$.
3) Ako je $a$ veće od $c$ i $b$ veće od $c$, onda je $a + b$ veće od $2c$.
4) 3 je pozitivan broj i 3 je veće od 2.

*Zad. 8.* Složene rečenice raščlaniti na proste iskaze. Odrediti zatim logičku operaciju i ispitati njenu istinitost.

1) Ako je trougao pravougli, onda su mu dva unutrašnja ugla komplementna.
2) Broj 13 je prost i broj 13 je deljiv sa 3.
3) Dve prave su paralelne ili dve prave se seku.
4) Ako je $x + 2 = 5$, onda je $x = 1$, .
5) Tri tačke određuju kružnicu i tri tačke određuju ravan.
6) Ako je poligon četvorougao, onda zbir njegovih spoljašnjih uglova iznosi 360°.
7) Nije $\frac{5}{12}$ manje od $\frac{7}{18}$.
8) $2 + 1 = 3$ ili je broj 7 paran.
9) Ako su dva trougla slična, stranice su im proporcionalne.
10) Ako su dva romba slična, stranice su im proporcionalne.



*Zad. 9.* Od osnovnih iskaza:

a: Broj $n$ je ceo broj;
b: Broj $n$ je pozitivan broj;
c: Broj $n$ je prost broj;
d: Broj $n$ je deljiv sa 3;

formirati rečenice koje su napisane simbolima matematičke logike:

1) $a \vee b$ 2) $a \wedge b$ 3) $a \vee \rceil a$
4) $b \wedge \rceil b$ 5) $d \Rightarrow \rceil c$ 6) $(a \wedge c) \Rightarrow \rceil d$
7) $(a \wedge d) \Rightarrow \rceil c$ 8) $(a \vee b) \wedge (c \vee d)$ 9) $\rceil a \vee \rceil d$
10) $(a \wedge b \wedge c) \vee d$

*Zad. 10.* U navedenim rečenicama na mesto tačaka staviti jedan od izraza „potrebno", „dovoljno", „potrebno i dovolnjo" tako da rečenica bude istinita.

1) Da bi se poligon mogao upisati u kružnicu .......... da je pravilan
2) Da bi broj $n$ bio deljiv sa 5 .......... da mu je poslednja sifra $0 \vee 5$.
3) Da bi četvorougao bio kvadrat .......... da su mu stranice jednake.
4) Da bi četvorougao bio romb .......... da su mu stranice jednake.
5) Da bi $\rceil(\rceil a)$ bilo istinito .......... da je $a$ istinito.
6) Da bi četvorostrana piramida bila pravilna .......... da je u njenoj osnovi kvadrat.
7) Da bi romb bio kvadrat .......... da mu je jedan ugao prav.
8) Da bi $a + b$ bilo deljivo sa $c$ .......... da je $a$ deljivo sa $c$ i $b$ deljivo sa $c$.
9) Da bi prizma bila pravilna .......... da je prava.
10) Da bi bilo $\tau(a \Rightarrow b) = \top$ ako je $\tau(a) = \top$ .......... da $\tau(b) = \top$.

# SKUPOVI

## 1. POJAM SKUPA

Skup je jedan od osnovnih pojmova savremene matematike. Osnovni pojmovi se ne objašnjavaju (ne definišu) pomoću drugih pojmova, nego se mogu objasniti na primerima.

Kažemo da svi učenici neke škole obrazuju jedan skup učenika te škole. Svaki pojedini učenik je jedan element tog skupa. Svi stanovnici nekog grada čine jedan skup. Elemenat tog skupa je svaki građanin tog grada. Kao primeri skupova mogli bi se uzeti jato ptica, stado ovaca itd. Kako svaki od navedenih skupova sadrži ograničen broj elemenata, takvi skupovi zovu se *konačni*. Skup je beskonačan ako sadrži beskonačno mnogo elemenata. Kao primeri beskonačnih skupova mogli bi se uzeti skup svih brojeva, skup tačaka koje pripadaju nekoj pravoj, ili nekoj ravni.

Skupovi se obično obeležavaju velikim slovima: $A, B, C, \ldots P, Q, S, \ldots$ Elementi skupa obeležavaju se obično malim slovima $a, b, c \ldots x, y, z \ldots$ Kaže se da elementi pripadaju skupu ili skup sadrži elemente. Ako elemenat *a pripada skupu S* to se obeležava simbolom $a \in S$ i čita se *a pripada skupu S*, ili *a je elemenat skupa S*. Ako se, pak, želi konstatovati da neki elemenat *x ne pripada skupu Q*, to se piše ovako $x \notin Q$ i čita se *x ne pripada* skupu $Q$, ili *x nije elemenat* skupa $Q$.

Dakle skup (*a* kaže se i množina ili mnoštvo) može da bude konačan ili beskonačan. U običnom govoru reč množina označava mnogo predmeta. U matematici pak pojam skup ili množina ne mora da se veže sa velikim brojem elemenata. Ako neki skup sadrži $n$ elemenata, to znači da broj $n$ može biti 3, 2, 1 pa i 0.

Takav skup koji sadrži 0, tj. ne sadrži nijedan elemenat zove se *prazan* skup i obeležava se $\emptyset$. Broj elemenata skupa zove se *kardinalni broj* skupa $k$.

## 2. ODNOS ELEMENATA SKUPA

Elementi skupa mogu biti brojevi, slova, ljudi, tačke, atomi, reči, jednačine itd. Otuda se teorija skupova koristi ne samo u matematici nego i mnogim drugim naukama. Skup se može dati na više načina. Ako je skup konačan, najjednostavnije je prikazati ga prosto nabrajanjem njegovih elemenata. Na primer: ako je poznato da skup $S$ sadrži četiri elementa $a, b, c$ i $d$. To se može napisati ovako $S = \{a, b, c, d\} \cdot kS = 4$.

Skup sifara dekadnog sistema napisali bi ovako: $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cdot kM = 10$. Ako su elementi skupa raspoređeni na neki određeni način (u skupu $S$ — po azbučnom redu, u skupu $M$ — po značenju cifara), skup je *uređen*. Inače elementi skupa mogu se navesti bilo kojim redom.



Trebalo bi razlikovati simbol $a$ — znači elemenat skupa i simbol $\{a\}$ — znači skup koji se sastoji od jednog elementa.

Nabrajanjem elemenata može se prikazati samo konačan skup. Uzmimo da skup sadrži sve prirodne brojeve, ili sve pozitivne brojeve. U tom slučaju ne mogu se navesti svi elementi skupa — prosto zato što ih je beskonačno mnogo.

Zato postoji drugi način kojim se može odrediti skup. To je univerzalan način, tj. takav koji važi kako za konačan tako i za beskonačan skup. Ovaj način sastoji se u tome, što se odredi zajednička osobina svih članova tog skupa. Pretpostavimo da skup sadrži sve pozitivne brojeve. To znači: ako je $x$ bilo koji član tog skupa, za njega znamo da je pozitivan broj. Ovo se simbolički piše ovako:

$$A = \{x \mid x > 0\} \quad \text{ili} \quad A = \{x : x > 0\}$$

To znači da je $A$ skup svih elemenata $x$ takvih da je svaki od njih pozitivan broj.

Uzmimo skup prirodnih brojeva. Taj skup se obeležava sa $N$ (od latinske reči naturalis što znači prirodan).

Ako je $x$ elemenat tog skupa tj. $x \in N$, onda $x$ mora zadovoljavati tri uslova:

1. $x$ je broj.
2. $x$ je ceo broj.
3. $x$ je pozitivan broj.

Neka su te karakteristične osobine elementa $x$ simbolički izražene sa $P(x)$. U tom slučaju imala bi mesta ekvivalencija

$$N \Leftrightarrow \{x \mid P(x)\}$$

## 3. SKUPOVI BROJEVA

Razumljivo je da u matematici poseban značaj imaju takvi skupovi čiji su elementi brojevi. Osim prirodnih brojeva, postoje još celi negativni brojevi. Skup svih celih brojeva (pozitivni, negativni i nula) obeležićemo sa $E$ (od francuske reči entier — ceo). Svi celi brojevi i razlomci čine skup *racionalnih brojeva*.

Obeležimo taj skup sa $R$.

$$7 \in N; \qquad -3 \in E; \qquad \frac{1}{9} \in R$$

Uzmimo nekoliko primera.

1) Skup je dat karakterističnom osobinom njegovih elemenata. Napisati sve elemente tog skupa.

a) $\underset{x\in N}{M} = \{x|x<5\}$*). Iz $\underset{x\in N}{M}$ vidimo da su elementi skupa prirodni brojevi: Kako je $x<5$ znači $x$ može imati vrednost 1, 2, 3 i 4.

Prema tome $\underset{x\in N}{M} = \{x|x<5\} = \{1, 2, 3, 4\}$

b) $\underset{x\in E}{M} = \{x|0<x<5\} = \{1, 2, 3, 4\}$

c) $\underset{x\in N}{M} = \{x|x<0\} = \emptyset$

d) $\underset{x\in E}{M} = \{x|-2<x<2\} = \{-1, 0, 1\}$

e) $\underset{x>0}{M} = \{x|P(x)\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24\}$

$P(x)$ znači delitelj broja 48.

2) Dat je skup $\underset{x\in E}{M} = \{x|-3<x\leqslant 5\}$. Formirati skupa $A = \{x|P(x)\}$ koji se sastoji od elemenata datog skupa ako $P(x)$ znači da $x \in N$
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

3) Od brojeva prve stotine formirati skup
$M = \{x|P(x)\}$, $P(x)$ — deljivi sa 13
$A = \{13, 26, 39, 52, 65, 78, 91\}$

## 4. OPERACIJE SA SKUPOVIMA

### 1. Inkluzija

Posmatrajmo dva skupa: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{2, 3, 4\}$

Na prvi pogled se vidi da svi elementi skupa $B$ se sadrže u skupu $A$. Drugim rečima: skup $A$ sadrži u sebi ceo skup $B$. U takvom slučaju se kaže da je skup $B$ *uključen* u skup $A$, ili, što je isto, skup $A$ *uključuje* skup $B$ ili skup $B$ je *deo* skupa $A$.

Ovakvo uključivanje zove se *inkluzija* i obeležava se $B \subset A$.

Za skup $B$ u tom slučaju kažemo da je *podskup* skupa $A$. To znači da *svaki* elemnat skupa $B$ pripada skupu $A$ i da samo *neki* elementi skupa $A$ pripadaju skupu $B$.

* Moglo bi se napisati i ovako $M = (x: x\in N, x<5)$ ili $M = (x : x<5, x\in N)$



Ovde su upotrebljeni izrazi „*svaki elemenat*" i „*neki elemenat*". Za ove izraze postoje u matematici specijalni simboli: Simbol $\forall x$ znači svako $x$ i zove se *univerzalni kvantifikator*.

Simbol $\exists x$ znači „neko $x$", „postoji bar jedno $x$", i zove se *kvantifikator egzistencije*. Ako je $x$ elemenat skupa $B$, onda izraz $(\forall x)\ (x \in B)$ značilo bi svako $x$, koje pripada skupu $B$, a izraz $(\exists x)\ (x \in A)$ bi značio neko $x$ koje pripada skupu $A$.
Koristeći ove simbole uslov za inkluziju skupova $A$ i $B$ mogli bi napisati ovako:

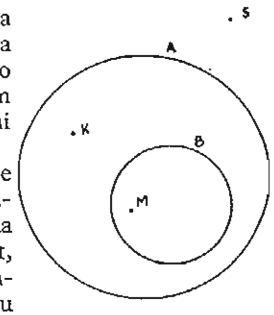
$$(\forall x)\ (x \in B) \in A$$

$$(\exists x)\ (x \in A) \in B$$

Pogledajmo još jedan primer. Neka svi insekti obrazuju skup $A$. Neka su muve elementi skupa $B$. Očigledno je da nema nijedne muve koja ne bi bila insekt. Znači svi elementi skupa $B$ pripadaju skupu $A$. S druge strane, postoji vrlo mnogo insekata (na primer komarci) koji nisu muve. Prema tome ne svi, nego samo neki, elementi skupa $A$, pripadaju skupu $B$. Iz ovog sledi da je skup $B$ podskup skupa $A$, tj. $B \subset A$.

Veoma pregledno ovaj odnos (kao i drugi, mnogo složeniji odnosi) među skupovima, može predstaviti pomoću skupova tačaka ravni unutar zatvorenih krivih linija. Takav način prikazivanja odnosa skupa zove se dijagram Vena*.

Pretpostavimo da svaki insekt predstavlja neku tačku unutar kruga $A$ (sl. 1) i da nijedna tačka izvan tog kruga nije insekt. Predpostavimo zatim da je svaka muva predstavljena jednom tačkom koja pripada krugu $B$. Isto tako da ni jedna tačka izvan kruga $B$ nije muva.



Sl. 1

Posmatrajmo sada tri tačke. Tačka $S$ je izvan kruga $A$. To znači da ona može biti svašta (pertla, furuna itd.), ali nikako insekt. Tačka $K$ je unutar kruga $A$, znači to je neki insekt, ali, pošto je ona izvan kruga $B$, taj insekt nikako ne može biti muva. Tačka $M$ pripada krugu $A$, zato je to insekt. Osim toga, tačka $M$ pripada krugu $B$ pa prema tome, taj insekt je muva.

Iz sl. 1. se vidi da se ceo krug $B$ nalazi u krugu $A$, tj. da je skup $B$ podskup skupa $A$.

U ovom primeru skup $A$ ima samo jedan podskup $B$. Međutim, skup može imati više podskupova. Na primer: ako bi se od svih koma-

* Džon Ven, engleski matematičar (1834—1923. g.). Uostalom, mnogo pre Vena, L. Euler (čita se Ojler) u svojim naučnim radovima još 1768. g. koristio je krugove za prikazivanje odnosa između skupova.

raca obrazovao skup C, od svih mrava skup $D$ itd., svi ti skupovi bili bi podskupovi skupa $A$.

Posmatrajmo jedan drugi slučaj. Neka su elementi skupa $A$ četvorouglovi sa jednakim stranicama, a elementi skupa $B$ neka su svi paralelogrami čije su dijagonale normalne.

Nije teško zapaziti da su elementi oba skupa isti. Zaista, četvorouglovi čije su stranice jednake su rombovi. Paralelogram čije su dijagonale normalne ne može biti ništa drugo takođe nego romb. Moglo bi se reći da svaki element skupa $B$ pripada skupu $A$. Ali i da svaki elemenat skupa $A$ pripada skupu $B$. tj. $B \subset A \land A \subset B$.

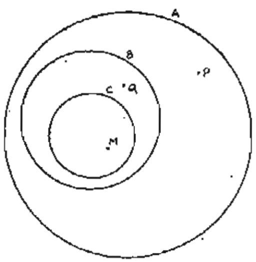
Ako bismo ovaj slučaj prikazali pomoću Enlerovih krugova, videli bismo da bi se ti krugovi poklapali. U tom slučaju kažemo da su skupovi $A$ i $B$ *jednaki*. Jednakost skupova je specijalni slučaj inkluzije. Opšti slučaj inkluzije obeležava se $B \subseteq A$.

Simbolikom matematičke logike jednakosti skupova bi se mogla izraziti ovako:

$$A = B \Leftrightarrow (B \subseteq A) \land (A \subseteq B)$$

Ovde bi trebalo dodati još i to da, ako je skup $B$ podskup skupa $A$, on isto može da sadrži jedan ili više podskupova.

Ako imamo tri skupa: $A$ — životinje, skup $B$ — sisari i skup $C$ — mačke.




Sl. 2

Na sl. 2 vidi se odnos tih skupova. Tačka $P$ je životinja, ali nije sisar. Tačka $Q$ znači životinja, sisar, ali nije mačka. Tačka $M$ znači životinja, sisar, i — taj sisar je mačka.

## 2. Presek skupova

Imamo dva skupa:

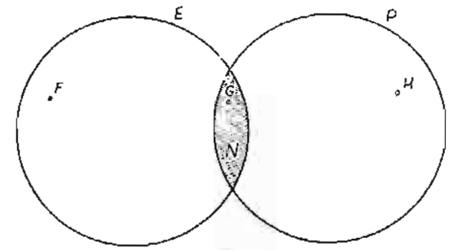
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Na prvi pogled se vidi da su elementi 3, 4, 5, zastupljeni u oba skupa. Ti elementi obrazuju poseban skup $P = \{3, 4, 5\}$ koji se zove *presek* skupova $A$ i $B$ i obeležava se $A \cap B$.

U tom odnosu se nalaze skupovi $E$ — skup celih brojeva i $P$ — skup pozitivnih brojeva.



Presek ta dva skupa (na sl. 3. šrafirani deo) je skup $N$ prirodnih brojeva. Tačka $F$, pošto pripada krugu $E$, predstavlja ceo broj. Taj broj ne može biti pozitivan jer $F$ ne pripada krugu $P$. Drugim rečima tačka $F$ može da predstavlja bilo koji ceo negativan broj ili nulu. Tačka




Sl. 3

$H$ je pozitivan broj, jer pripada krugu $P$, ali taj broj ne može biti ceo jer ne pripada krugu $E$. Tačka $G$ pripada krugu $E$ — ona je ceo broj, ali ona pripada i krugu $P$, prema tome taj ceo broj je pozitivan. Znači tačka $G$ predstavlja neki prirodan broj. Sve bi se to moglo napisati kratko:

$$E \cap P = N$$

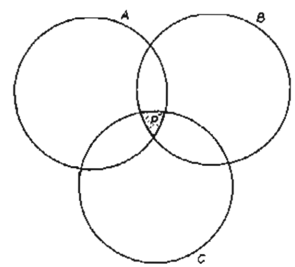
**Definicija.** Presek dva skupa $A$ i $B$ je skup $A \cap B$ koji se sastoji od onih (i samo onih) elemenata koji pripadaju i skupu $A$ i skupu $B$ (tj. njihov zajednički deo). Ova definicija mogla bi se napisati kratko:

$$x \in (A \cap B) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x \in A) \land (x \in B)$$

(Simbol $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ čita se „ekvivalentno po definiciji")

Iz definicije preseka skupova može se zaključiti da za presek dva skupa važi komutativan zakon tj. $A \cap B = B \cap A$.

Na isti način, kao kod dva skupa, može se dobiti presek tri ili više skupova. Na sl. 4 vidimo (šrafirani deo) skup $P$ koji je presek skupova $A$, $B$ i $C$.




Sl. 4

$$P = (A \cap B) \cap C$$

Očigledno je da bismo dobili isto.

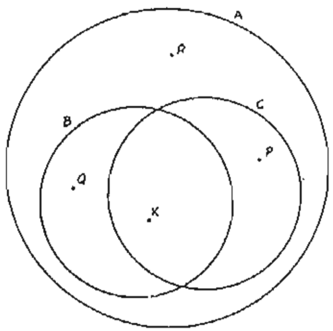
$$P = (A \cap C) \cap B \quad \text{ili} \quad P = (B \cap C) \cap A$$

Znači i asocijativan zakon kod preseka skupova važi.

Rešimo sada jedan nešto teži zadatak:

Odrediti uzajamni odnos tri skupa. Skup $A$ — paralelogrami, skup $B$ — rombovi, skup $C$ — pravougaonici.

**Rešenje.** Sva tri skupa imaju jednu zajedničku karakterističnu osobinu elemenata. Elementi sva tri skupa su četvorouglovi. Paralelogram je četvorougao čije su suprotne stranice paralelne. Romb, pored te osobine, mora imati jednake stranice. Znači, neki paralelogram je romb, ali svaki romb je paralelogram. Dakle slučaj inkluzije. Elementi skupa $C$ su isto paralelogrami čiji su uglovi pravi. Odnos skupova $A$ i $C$ je isto jasan — inkluzija. Da vidimo sada u kojem se odnosu nalaze skupovi $B$ i $C$. Pitamo se da li neki pravougaonici skupa mogu imati jednake stranice (osobine elemenata skupa $B$). Očigledno je da mogu. Ovi zaključci su dovoljni da se odnos ova tri skupa prikaže pomoću Euherovih krugova (sl. 5)




Sl. 5

$R$ — romboid $\qquad$ $P$ — pravougaonik

$Q$ — romb $\qquad$ $K$ — kvadrat.

Prema tome za kvadrat bi se moglo reći da je ili pravougaonik sa jednakim stranicama, ili da je romb sa pravim uglovima.

### 3. **Unija skupova**

Unija dva ili više skupova je u stvari zbir tih skupova. Ako imamo dva skupa $A = \{a, b, c, d\}$ i $B = \{e, f\}$, onda je unija ta dva skupa skup koji se obeležava $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$. Vidimo da su u uniji uključeni svi elementi skupa $A$ i svi elementi skupa $B$. To je tako u slučaju ako skupovi $A$ i $B$ nemaju zajedničkih elemenata.



Ako, pak, skupovi $A$ i $B$ imaju zajedničke elemente, onda ti elementi ulaze u uniju samo po jedanput, jer se u matematici smatra da nijedan element ne može da se sadrži u skupu dva ili više puta.

Neka je potrebno formirati uniju skupova

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{i} \quad B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

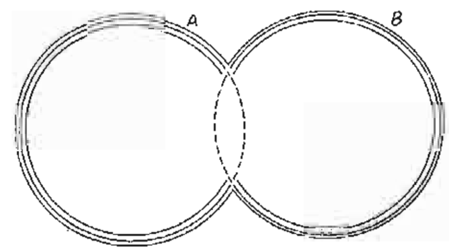
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Da bismo dobili uniju skupova $A$ i $B$, formiramo skup tako što navedemo sve elemente skupa $A$, a iz skupa $B$ samo 6 i 7, pošto su elementi 3, 4, 5 već zastupljeni u skupu $A$. Jasno je da bi se moglo postupiti i obrnutim redom, tj. prvo napisati elemente skupa $B$, a, zatim, dodati još elemente 1, 2, iz skupa $A$, jer ovi u skupu $B$ nisu zastupljeni.

**Definicija.** Unija $A \cup B$ dva skupa $A$ i $B$ je skup koji se sastoji od onih (i samo onih) elemenata koji pripadaju skupu $A$ *ili* skupu $B$.

Ovu definiciju možemo formulisati kraće:

$$x \in (A \cup B) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad (x \in A) \vee (x \in B)$$



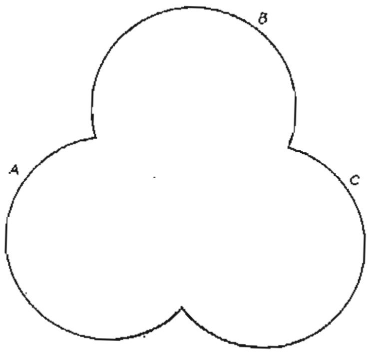

Sl. 6

Na sl. 6. vidimo uniju skupova $A$ i $B$. Prema definiciji unije skupova može se zaključiti — a to se vidi i iz slike — da kod ove operacije važi komutativan zakon, tj.

$$A \cup B = B \cup A$$

Unija od tri skupa $A$, $B$ i $C$ dobila bi se tako što bi se obrazovala unija od $(A \cup B)$ i skupa $C$, tj. $(A \cup B) \cup C$.

Iz sl. 7. se vidi da kod operacije važi i zakon asocijacije $(A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup B = (B \cup C) \cup A$.




Sl. 7

U to se, uostalom, lako uveriti i na bilo kom primeru. Uzmimo da je

$$A = \{a, e, f, g\}$$
$$B = \{a, b, c\}$$
$$C = \{b, d, e, f\}$$
$$A \cup B = \{a, b, c, e, f, g\}$$
$$A \cup C = \{a, b, d, e, f, g\}$$
$$B \cup C = \{a, b, c, d, e, f\}$$
$$(A \cup B) \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

Skupovi $(A \cup C) \cup B$ i $(B \cup C) \cup A$ sastoje se od istih elemenata.

### 4. Diferencija skupova

Diferencija ili razlika dva skupa $A$ i $B$ je takav skup koji se sastoji od onih (i samo onih) elemenata skupa $A$ koji ne prapadaju skupu $B$.

Diferencije skupova $A$ i $B$ obeležava se $A \setminus B$.

Na primer:

Skup $A = \{a, b, c, d\}$

$B = \{c, d, e, f, g\}$

$A \setminus B = \{a, b\}; \qquad B \setminus A = \{e, f, g\}$

Definiciju diferencije skupova $A$ i $B$ odnosno $B$ i $A$ mogli bi napisati ovako:

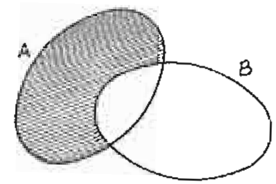
$$x \in (A \setminus B) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x \in A) \wedge (x \notin B)$$

$$x \in (B \setminus A) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x \in B) \wedge (x \notin A)$$

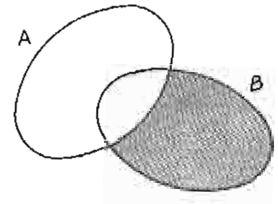
Razlika dva skupa može se jednostavno prikazati pomoću Venovog dijagrama.



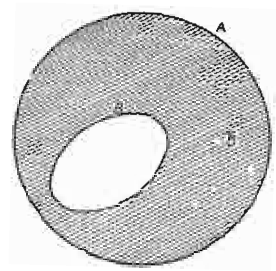
Na sl. 8. šrafirani deo predstavlja skup $A \setminus B$, a šrafirani deo na sl. 9. je skup $B \setminus A$.




Sl. 8




Sl. 9




Sl. 10

Ako, pak, imamo slučaj inkluzije $B \subset A$ (sl. 10), onda skup elemenata skupa $A$ koji ne pripadaju skupu $B$ obeležava se sa $\overline{B}$ i zove *komplement* (dopuna) skupa $B$ do $A$ tj.

$$B \cup \overline{B} = A \Rightarrow \overline{B} = A - B, \text{ ili}$$

$$\overline{B} = A \setminus B.$$

### 5. Uređeni skupovi

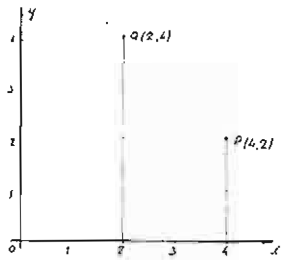
Za dva skupa kažemo da su jednaki ako sadrže iste elemente bez obzira na način kako su ti elementi raspoređeni tj.

$$\{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{b, a, c\} \ldots\ldots$$

Međutim, sasvim je drugo *uređeni skup*. Kod uređenog skupa, kao što je to naglašeno u § 2, elementi su raspoređeni na neki određini način. Dva *uređena skupa* smatramo da su jednaki onda (i samo onda) ako sadrže iste elemente i ako su ti elementi raspoređeni na isti način. Da bi se naglasilo da je skup uređen, upotrebljavaju se obične zagrade. Uređeni skup od dva elementa zove se *uređeni par* ili *uređena dvojka* i obeležava se: $(a, b)$, $(m, n)$, $(3, 2)$... Tako može biti uređeni skup od tri, četiri, $n$ elemenata: uređena trojka, četvorka, $n$-ka.

$$(a, b) = (a, b); \qquad (a, b) \neq (b, a)$$

To je lako shvatiti ako se elementi uređene dvojke uzmu kao koordinate tačke u koordinatnom sistemu (sl. 11).




Sl. 11

Tačka $M(x, y)$ u koordinatnom sistemu je određena svojim koordinatama.

$x$ — apcisa $y$ — ordinata.

$P(4, 2)$ i $Q(2, 4)$ su dve različite tačke, i zato $(4, 2) \neq (2, 4)$

Ako imamo $(x, y, z) = (a, b, c)$ to znači $x = a$; $y = b$; $z = c$.

## 6. Proizvod skupova

**Definicija.** Proizvod $A \times B$ dva skupa $A$ i $B$ je skup čiji su elementi svi mogući uređeni parovi, kod kojih prvi elementi pripadaju skupu $A$, a drugi elementi skupu $B$.

Neka je $x$ element skupa $A$ tj. $A = \{x \mid x \in A\}$ i neka je $y$ element skupa $B$: $B = \{y \mid y \in B\}$, onda $A \times B = \{(y, x) \mid x \in A, y \in B\}$

Da vidimo to na primerima:

$A = \{a, b, c\} \qquad B = \{p, q\}$

$A \times B = \{(a, p), (a, q), (b, p), (b, q), (c, p), (c, q)\}$

$B \times A = \{(p, a), (p, b), (p, c), (q, a), (q, b), (q, c)\}$

Kao što se vidi kod množenja skupova zakon komutacije *ne važi* jer

$$A \times B \neq B \times A$$

Ako je $A = B$, onda imamo $A \times A = A^2$

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$

$A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$



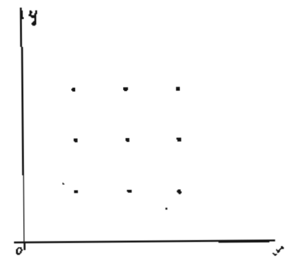
Ako svaki elemenat tog skupa uzmemo kao koordinate tačke, dobićemo u koordinatnom sistemu devet tačaka (sl. 12).

Uzmimo još jedan primer:

Data su dva skupa

$A = \{2, 4, 6\}$ i $B = \{3, 5\}$

Obrazovati proizvode tih skupova $A \times B$ i $B \times A$ i predstaviti njihove članove tačkama na koordinatnom sistemu $x$ o $y$.

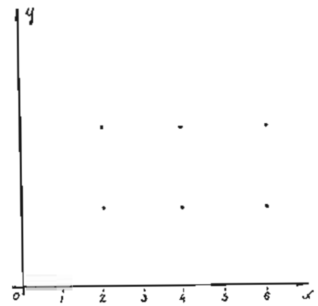


Sl. 12

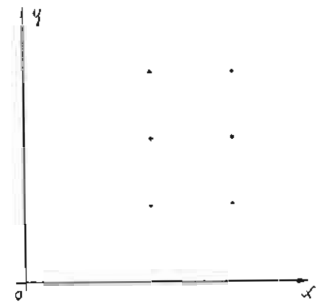
Rešenje:

$A \times B = \{(2, 3), (2, 5), (4, 3), (4, 5), (6, 3), (6, 5)\}$ (sl. 13)

$B \times A = \{(3, 2), (3, 4), (3, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6)\}$ (sl. 14)

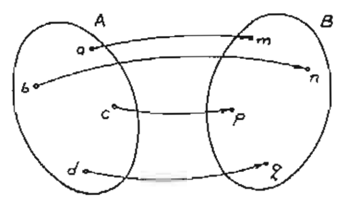


Sl. 13



Sl. 14

## 7. Preslikavanje




Sl. 15

Ako imamo dva skupa $A = \{a, b, c, d\}$ i $B = \{m, n, p, q\}$ i da svakom elementu skupa $A$ odgovara element skupa $B$, onda prelaz sa elementa skupa $A$ na elemente skupa $B$ definiše preslikavanje skupa $A$ u skup $B$. (sl. 15)

Može se desiti da između elemenata skupa $A$ i elemenata skupa $B$ postoji neka zavisnost. Neka je $x \in A$, a $y \in B$ i neka je $A = N$ $A = \{1, 2, 3, 4 \ldots n\}$ ako na primer, znamo da je $y = \frac{1}{x}$ onda je

$$B = \left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots \frac{1}{n}\right].$$

Ako bismo svaki par odgovarajućih elemenata skupova $A$ i $B$ uzeli kao koordinate tačke $M(x, y)$, dobili bismo beskonačno mnogo tačaka:

$$M_1(1, 1);\ M_2\left(2, \frac{1}{2}\right),\ M_3\left(3, \frac{1}{3}\right) \ldots$$

Jasno je da zavisnost između $x$ i $y$ može biti veoma različita: $y = 2x$; $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$ itd.

Ako znamo samo toliko da $y$ zavisi od $x$, onda kažemo da je $y$ *funkcija* od $x$ i to se piše ovako: $y = f(x)$.

Skup svih vrednosti $x, x \in A$ za koje dobijamo $y$ tako da u koordinatnom sistemu postoji tačka $M(x, y)$ zove se oblast definisanosti funkcije. Skup svih vrednosti $y, y \in B$ zove se oblast vrednosti funkcije.

*Napomena.* U funkciji $y = 2x$ za svako $x$ dobijamo određenu tačku u koordinatnom sistemu: $M_1(1, 2)$; $M_2(2, 4)$; $M_3\left(3\frac{1}{2}, 7\right)$ itd., ali to nije slučaj kod svake funkcije.

Uzmimo, na primer, funkciju $y = \sqrt{x - 3}$

Ako je $x = 3$, imamo tačku $M(3, 0)$. Ali ako je $x = 2$, onda ne postoji u koordinatnom sistemu takva tačka čija bi ordinata bila $y = \sqrt{-1}$. Zato kažemo da za sve vrednosti $x < 3$ funkcija nije definisana. Znači, oblast definisanosti ove funkcije je $A = \{x | x \geqslant 3\}$.

Isto tako: kažemo da funkcija nije definisana za one vrednosti $x$ za koje je $y = \infty$ ili $y = \frac{0}{0}$.

O tome će biti reči kasnije.

Još veću primenu preslikavanja skupova ima u geometriji, ali i o tome će biti reči na odgovarajućem mestu.



## ZADACI

*Zad. 11.* Napisati sve elemente skupova:

1) $A = \{x / x \in N,\ x < 7\}$;
2) $B = \{x / x \in E,\ -3 \leqslant x < 5\}$
3) $C = \{x / x \in E,\ -5 < x \leqslant 2\}$

*Zad. 12.* Odrediti karakterističnu osobinu $P(x)$ elemenata skupova:

1) $A = \{x / P(x)\} = \{2, 4, 6, 8 \ldots\}$
2) $B = \{x / P(x)\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots\right\}$
3) $C = \{x / P(x)\} = \{9, 4, 1, 0\}$

*Zad. 13.* Odrediti kardinalni broj skupa:

$A = \{a + 1,\ a,\ b - 1,\ b,\ c + 1\}$

*Zad. 14.* Dat je skup: $A = \{3, 5, 7\}$. Koje vrednosti može da ima $x$ ako $x \in A$?

*Zad. 15.* Odrediti presek skupova $A$ i $B$:

1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
2) $A = \{x : x \in E,\ -5 < x < 3\}$; $B = \{x : x \in N,\ x < 5\}$
3) $A = \{x / P(x)\}$; $B = \{x | Q(x)\}$

$P(x) : x$ je deljitelj broja 36; $Q(x) : x$ je broj deljiv sa 4

*Zad. 16.* Prikazati pomoću Eulerovih krugova date skupove:

$A$ — skup pravougaonika
$B$ — skup četvorouglova
$C$ — skup kvadrata
$D$ — skup poligona (mnogouglova)
$F$ — skup paralelograma

*Zad. 17.* Data su tri skupa:

$A$ — Ljudi
$B$ — Ljudi koji žive u Africi
$C$ — Crnci

Prikazati njihov odnos pomoću Eulerovih krugova i naznačiti šta predstavlja tačka svake oblasti.

*Zad. 18.* Napisati uniju skupova $A$ i $B$:

1) $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
2) $A = E$; $B = N$ 3) $A = E$; $B = R$

*Zad. 19.* Odrediti: 1) $A \cup \varnothing$ 2) $A \cap \varnothing$

*Zad. 20.* Ćirilica je skup $A$ od 30 znakova za velika slova, a latinica — skup $B$ ima 27 elemenata.

1) Odrediti kardinalni broj unije skupova $A$ i $B$.
2) Napisati sve elemente njihovog preseka.

*Zad. 21.* Ispitati pomoću Eulerovih krugova odnos skupova:

$E$ — skup celih brojeva
$R$ — skup racionalnih brojeva
$P$ — skup pozitivnih brojeva
$N$ — skup prirodnih brojeva.

*Zad. 22.* Data su dva skupa $A = \{a, b, c, d\}$ i $B = \{a, b, c\}$ Naći skup $C = A \setminus B$.

*Zad. 23.* Data su dva skupa:

$A$ — skup četvorouglova čije su stranice normalne
$B$ — skup paralelograma čije su dijagonale normalne

Šta je presek tih skupova?

*Zad. 24.* Data je prava $p$ i na njoj tačke $M$ i $N$. Neka je $A$ skup tačaka poluprave $M$ ($N$) sa početkom u tački $M$ i koja prolazi kroz tačku $N$. Skup tačaka poluprave $N$ ($M$) neka je $B$. Odrediti uniju i presek skupova $A$ i $B$.

*Zad. 25.* Data su dva skupa:

$A$ — skup jednakokrakih trapeza
$B$ — skup trapeza čije su dijagonale jednake.

Naći skup $A \setminus B$.

*Zad. 26.* Dati su skupovi:

$M$ — skup četvorouglova, $A$ — skup paralelograma
$B$ — skup trapeza, $C$ — skup deltoida.

Šta je komplement skupa $(A \cup B) \cup C$ do skupa $M$?

*Zad. 27.* Dat asu dva skupa $A = \{x, y, z\}$ i $B = \{a, b\}$. Odrediti skupove $A \times B$ i $B \times A$.



*Zad. 28.* Odrediti potreban i dovoljan uslov da proizvod skupova $A \times B = B \times A$.

*Zad. 29.* Obrazovati proizvode skupova $A \times B$ i $B \times A$ i predstaviti njihove članove tačkama na koordinatnom sistemu $xoy$.

$$A = \{x \mid x \in N,\ x \leqslant 3\}; \qquad B = \{x \mid x \in E,\ -2 \leqslant x \leqslant 0\}$$

*Zad. 30.* Predstaviti na koordinatnom sistemu sve članove skupa.

$$A = \{(x, y) \mid (x, y) \in N^2,\ x \leqslant 5\}$$

# BROJ

Broj je jedan od osnovnih pojmova matematike. Kao i svaka druga nauka, matematika se javila, razvila i danas se razvija u saglasnosti sa potrebama i uslovima života. Gledano istorijski, još u prastaro doba, živeći primitivnim životom, čovek nije mogao izbeći potrebu za prebrojavanjem. Trebalo je, na primer, prebrojiti ovce, konje itd. Tako se javila potreba za pojmom *broj*. Potreba za razlomcima se ukazala već mnogo kasnije. Nula kao broj nije pobuđivala veliko interesovanje. Nula — znači ništa i nema šta da se broji. Razumljivo je da je broj ušao u ljudsku svest preko pojma prirodnog broja. Pa i danas se dete u I raz. osn. škole sa pojmom broja upoznaje preko prirodnih brojeva. Zato, kada bismo takvo dete upitali: „Koliko ćemo dobiti ako se od broja 2 oduzme broj 5?" Dete bi bez kolebanja odgovorilo: „To se ne može". Dete je, sigurno, u pravu sa svoje tačke gledišta, jer se taj zadatak zaista ne može rešiti u oblasti prirodnih brojeva, tj. u oblasti koja mu je jedino poznata.

## 1. SKUP PRIRODNIH BROJEVA (N)

### 1. Brojna osa

Videli smo ranije da se skup prirodnih brojeva koji smo obeležili sa $N$ sastoji od celih i pozitivnih brojeva.

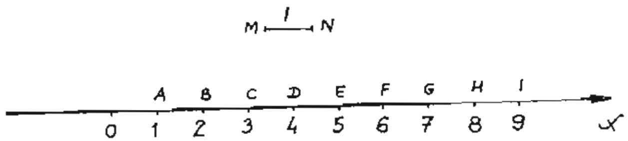
$$N = \{1, 2, 3 \ldots\ n \ldots\}$$

Najmanji ceo pozitivan broj je 1. Svakom broju $n$ može se dodati 1 tako da dobijamo broj $n + 1$, kojem se takođe može dodati 1. Znači — najveći broj ne postoji.

Skup prirodnih brojeva je uređen ako su oni raspoređeni tako da je svaki naredni za 1 veći od prethodnog

$$1 < 2 < 3 < 4 \ldots (n - 1) < n < (n + 1) \ldots$$

Skup prirodnih brojeva možemo preslikati na pravu liniju. Ako se na toj pravoj odredi bilo gde tačka 0 (od latinske reči origo — izvor, početak), i zatim uzmemo proizvoljnu duž $\overline{MN}$ (sl. 16) kao jedinicu dužine i odredimo na toj pravoj jedan od dva smera kao pozitivan (tj. smer na kojem se vrši dodavanje), na sl. 16. taj smer je naznačen strelicom, takva orijentisana prava zove se osa.




Sl. 16

Ako sada nanesemo od tačke $O$ na osu $Ox$ duž $\overline{MN}$ dobićemo tačku $A$ koja odgovara broju 1. Pošto smo se dogovorili da se dodavanje vrši u smeru koji je naznačen strelicom (tj. na desno), nanesemo sada duž $\overline{MN} = 1$ od tačke $A$, dobićemo tačku $B$ koja odgovara broju 2. Na taj način mogli bismo na osi $Ox$ (koja se zove brojna osa) dobiti proizvoljan broj tačaka $A, B, C, D\ldots$ koje odgovaraju brojevima $1, 2, 3, 4\ldots$ Kaže se još i da su tačke $A, B, C, D\ldots$ *koresondentne* sa brojevima 1, 2, 3, 4... Tako, na primer, tačka $C$ koresondenta je sa brojem 3.

### 2. Operacije se prirodnim brojevima

Brojna osa pomaže da se dublje shvati suština operacija koje se vrše sa brojevima. Pođimo od sabiranja. Pretpostavimo da treba sabrati dva prirodna broja $3 + 2$. Broju 3 odgovara tačka $C$. Ako sada od tačke $C$ prenesemo dva puta duž $\overline{MN} = 1$, dobićemo tačku $E$ koja je koresondentna sa brojem 5. Pada u oči još nešto. Duž $\overline{OC} = 3\overline{MN} = 3$. Duž $\overline{CE} = 2\,\overline{MN} = 2$. Znači sabiranje brojeva je isto to što i sabiranje duži (nadovezivanje) u smeru koji smo odabrali za dodavanje, tj. na desno.

Ovde nije teško zapaziti još i to da bismo isto dobili broj 5, odnosno tačku $E$, ako bismo brojeve 3 i 2 sabrali obrnutim redom $2 + 3 = 5$, odnosno $\overline{OB} + \overline{BE} = \overline{OE}$.

Brojevi koji se sabiraju zovu se sabirci, a rezulatat sabiranja *zbir*.



Zaključke do kojih smo upravo došli možemo formulisati ovako: ako su $a$ i $b$ dva bilo koja broja, a $S$ njihov zbir, onda je $a + b = S \wedge b + a = S \Rightarrow a + b \Leftrightarrow b + a$ ili zbir ne zavisi od reda sabiraka. Time se izražava *komutativni zakon* sabiranja.

Osim toga kod sabiranja važi i *asocijativni* zakon:

$$(a + b) + c = (a + c) + b = (b + c) + a$$

Ovde treba podvući još i to da, ako su $a, b, c\ldots$ prirodni brojevi, onda je njihov zbir $a + b + c\ldots = s$ prirodan broj. Drugim rečima: sabiranje u oblasti prirodnih brojeva može vršiti neograničeno.

To, međutim, nije slučaj sa svakom operacijom. Rezultat oduzimanja na primer, tj. razlike prirodnih brojeva može, ali ne mora biti prirodan broj. ($2 - 5$ nije prirodan broj).

Množenje je, u stvari, skraćeno sabiranje. Umesto da pišemo $2 + 2 + 2$, možemo napisati $3 \cdot 2$. Brojevi koji se množe $a$ i $b$ zovu se faktori ili činioci, a rezultat množenja $a \cdot b$ je proizvod ili produkt.

Iz prethodnog izlaganja sledi da, ako su faktori prirodni brojevi, proizvod je prirodan broj.

Nije se teško takođe uveriti da kod množenja važi *komutativni* zakon

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Kod množenja važi i *asocijativni* zakon:

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b = (b \cdot c) \cdot a$$

To znači da ako proizvod brojeva $a$ i $b$ treba pomnožiti brojem $c$, dovoljno je jedan od ta dva faktora (ili $a$, ili $b$) pomnožiti sa $c$, tj.

$$ab \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$$

$$ab \cdot c = (b \cdot c) \cdot a$$

Kod množenja važi još zakon, koji se zove *distributivni* a koji se sastoji u tome da, ako se zbir brojeva $a$ i $b$ množi sa brojem $c$, onda je proizvod jednak zbiru proizvoda svakog od tih sabiraka sa brojem $c$:

$$(a + b) \cdot c = ac + bc$$

## 2. SKUP CELIH BROJEVA (E)

### 1. Proširivanje skupa prirodnih brojeva

Videli smo da se operacije sabiranja i množenja mogu neograničeno vršiti u oblasti prirodnih brojeva. To znači da ako sabiramo bilo koliko prirodnih brojeva, zbir je prirodan broj. Isto tako je proizvod prirodnih brojeva prirodan broj.

Oduzimanje se pak ne može neograničeno vršiti u oblasti prirodnih brojeva. Uzmimo da je $s$ zbir dva prirodana broja $a$ i $b$ tj. $a + b = s$. Iz ovog sledi: $a = s - b$ i $b = s - a$

$$5 + 3 = 8; \quad 5 = 8 - 3; \quad 3 = 8 - 5$$

Ako je $s > a$ i $s > b$ (kao što je to slučaj u uzetom primeru) onda je oduzimanje u oblasti prirodnih brojeva izvodljivo. Ali je nemoguće rešiti u oblasti prirodnih brojeva, na primer, ovakvu jednačinu $x + 5 = 3$, prosto zato što njeno rešenje $x = -2$ ne pripada skupu prirodnih brojeva. Niko danas ne misli da, ako živa u termometru pokazuje $+3°C$, temperature ne može spasti za 5 stepeni, nego je svakom jasno da će se živa zaustaviti na dva stepena ispod nule, tj. da će termometar pokazati $-2°C$.

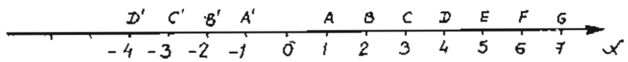
Kao što se vidi, zbog potrebe života kao i zbog potrebe teorijske prirode, oblast prirodnih brojeva morala se proširiti uvođenjem negativnih brojeva. Elementi tog tako proširenog skupa su svi celi negativni brojevi, nula i svi celi pozitivni brojevi. Kao što smo ranije videli taj skup se obeležava sa $E$.

$$-n \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots n \ldots$$

Skup celih brojeva može se neograničeno produžiti na obe strane. Vidimo da su prirodni brojevi podskup skupa $E$. Znači imamo slučaj inkluzije:

$$N \subset E$$

U skupu $E$ računske radnje sabiranje, oduzimanje i množenje mogu se vršiti neograničeno. Jasnoće radi poslužimo se brojnom osom. (sl. 17).




Sl. 17

Uzmimo istu jedinicu dužine kao i na sl. 16. Ako zadržimo i isti smer ose, onda vidimo da se skup celih brojeva

$$-n < \ldots < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \ldots \ldots < n$$

može urediti na isti način kao što je na sl. 16. uređen skup prirodnih brojeva. Kao što smo već videli dodavanje se vrši prenošenjem odgovarajućeg broja dužinskih jedinica u pozitivnom smeru, tj. *na desno*.

Oduzimanje je operacija suprotna sabiranju. Stoga oduzimanje se vrši prenošenjem odgovarajućeg broja jedinica, ali u *suprotnom* smeru tj. *na levo*. Da vidimo to na konkretnom primeru:



1) Treba sabrati brojeve 4 i 3.

Sa brojem 4 je koresondentna tačka $D$ (sl. 17). Prenošenjem tri jedinice *na desno* dobijamo tačku $G$, koja odgovara broju 7.

Znači $4 + 3 = 7$

2) Treba od broja 4 oduzeti broj 3. Prenošenjem tri jedinice od tačke $D$ *na levo*, dobijamo tčku $A$. Znači: $4 - 3 = 1$.

Oduzimanjem broja $b$ od broja $a$ dobijamo njihovu *razliku* ili *diferenciju* $d$: $a - b = d$. U uzetom primeru (2) razlika dva prirodna broja je isto prirodan broj. To se delilo samo zato što je $4 > 3$. To će se uvek desiti ako je $a > b$ i $(a \wedge b) \in N$. Ako je, pak, $a \leqslant b$, razlika nije prirodan broj.

Uzmimo još primera. 1) Neka od broja 2 treba oduzeti broj 5. Sa brojem 2 je korespondentna tačka $B$. Prenošenjem 5 jedinica od tačke $B$ na levo dobijamo tačku $C'$ koja odgovara broju $-3$. 2) Treba oduzeti dva jednaka broja, na primer $6 - 6$. Šest jedinica preneti na levo od tačke $F$ (sl. 17) određuju tačku $O$ koja je korespondentna sa brojem 0. Broj 0 (nula) nije ni pozitivan ni negativan. Prema tome kako je na brojnoj osi uređen skup celih brojeva vidimo da brojevi rastu s leva na desno. Uzmimo bilo koji broj, na primer, 3. Svi brojevi koji su sa desne strane od tačke $C$ veći su od 3, a svi brojevi koji su sa leve strane od tačke $C$, manji su od 3. Vidimo da su svi pozitivni brojevi s desne strane od tačke $O$. Zato ako želimo naglasiti da je broj $x$ pozitivan pišemo $x > 0$. Ako, pak, imamo $x < 0$, to znači da je broj $x$ negativan.

## 2. Apsolutna vrednost broja

Položaj tačke na brojnoj osi koja odgovara datom broju određuje se tako što se odgovarajući broj dužinskih jedinica prenese od tačke $O$ na desno ili na levo prema tome kakav je znak (+ ili −) ispred datog broja.

Da bismo dobili tačku koja odgovara broju $+3$, moramo jediničnu duž preneti od tačke $O$ na desno. Dobili smo tako tačku $C$. Ako istu duž prenesemo od tačke $O$ na levo, dobićemo tačku $C'$ koja odgovara broju $-3$. To znači da su duži $\overline{OC}$ i $\overline{OC'}$ jednake jer svaka sadrži po 3 jedinice.

Dva broja koji se međusobno razlikuju jedino znakom (+ ili −) koji ispred njih stoji zovu se suprotni. Na primer, suprotni su brojevi: $-5$ i $+5$; $+7$ i $-7$; $+4$ i $-4$.

Broj dužinskih jedinica duži $\overline{OC}$, $\overline{OC'}$, $\overline{OF}$, $\overline{OF'}$ itd. kojom je određena tačka na brojnoj osi koja je korespondentna sa datim brojem zove se *apsolutna vrednost* ili *moduo* tog boja.

To znači da suprotni brojevi imaju istu apsolutnu vrednost. Apsolutna vrednost broja $a$ obeležava se tako što se taj broj stavi između dve vertikalne crte $|a|$. Prema tome $|+4| = |-4|$; $|-7| = |+7|$. Ako ispred broja ne stoji nikakav znak, smatramo da je pozitivan.

Apsolutna vrednost broja je pozitivan broj, pa bio taj broj pozitivan ili negativan. Treba, dakle, dobro razlikovati dva pojma: *vrednost broja* i *apsolutnu vrednost broja*. Na primer broj $-5$ je manji od 3 (i to za 8 jedinica) $-5 < 3$, ali $|-5| > 3$, jer je $|-5| = 5$.

### 3. SKUP RACIONALNIH BROJEVA (R)

Proširivanje oblasti prirodnih brojeva, uvođenjem negativnih brojeva i nule, postavilo je pitanje znaka rezultata operacije sa takvim brojevima.

**Sabiranje.** Kod sabiranja mogu nastupiti tri slučaja.

1) Ako su oba sabirka pozitivna — zbir je pozitivan:

$$(+5) + (+3) = +8$$

2) Ako su oba sabirka negativna — zbir je negativan:

$$(-3) + (-2) = -5$$

3) Ako su znaci sabiraka različiti, onda zbir ima znak onog sabirka koji je po apsolutnoj vrednosti veći. A apsolutna vrednost zbira jednaka je razlici apsolutnih vrednosti sabiraka.

a) $(+7) + (-3) = +4$, kako je $|+7| > |-3|$, zato je znak zbira $+$; $7 - 3 = 4$. Zato je zbir $+4$.

b) $(+2) + (-5) = -3$

$|+2| < |-5|$, znak zbira je $-$; $5 - 2 = 3$. Zbir je $-3$.

Ako imamo više sabiraka čiji su znaci različiti, onda je najednostavnije koristiti (1) i (2): sabrati prvo sve pozitivne, zatim sve negativne i, zatim, koristeći (3) naći njihov zbir.

$$(-2) + (+5) + (-7) + (+1) = (+6) + (-9) = -3$$

**Oduzimanje.** Oduzimanje se svodi na sabiranje tako što se umanjeniku doda umanjilac sa suprotnim znakom

$$(+5) - (+7) = (+5) + (-7) = -2$$
$$(+3) - (-5) = (+3) + (+5) = +8$$
$$(-2) - (+4) = (-2) + (-4) = -6$$
$$(-7) - (-3) = (-7) + (+3) = -4$$



**Množenje.** Proizvod od dva faktora je pozitivan ako su oba faktora istog znaka, tj. ako su oba pozitivna ili ako su oba negativna. Apsolutna vrednost proizvoda jednaka je proizvodu apsolutnih vrednosti faktora. Proizvod je negativan ako su faktori različitog (suprotnog) znaka.

$$(+3)\cdot(+5) = +15$$
$$(-7)\cdot(-4) = +28$$
$$(+6)\cdot(-2) = -12$$
$$(-5)\cdot(+4) = -20$$

Ako treba izračunati proizvod od više faktora, njegov znak možemo odrediti primenom asocijativnog zakona:

$$(-6)\cdot(+3)\cdot(-2)\cdot(+4)\cdot(-5) = [(-6)\cdot(+3)]\cdot[(-2)\cdot(+4)]\cdot$$
$$\cdot(-5) = (-18)\cdot(-8)\cdot(-5) = [(-18)\cdot(-8)]\cdot(-5) =$$
$$= (+144)\cdot(-5) = -720$$

Nije se teško uveriti da, ako su u proizvodu zastupljeni negativni faktori, taj proizvod je pozitivan onda (i samo onda) ako je broj negativnih faktora paran. Treba još napomenuti da proizvod bilo kojeg broja sa nulom je nula. Prema tome, proizvod je 0 od bilo koliko faktora ako je među njima bar jedan 0.

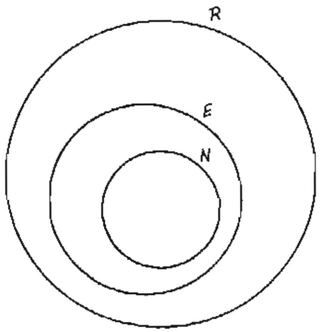
Pored navedenih operacija (sabiranje, oduzimanje, množenje) koja se mogu neograničeno vršiti u oblasti brojeva koji pripadaju skupu $E$, postoji operacija koja se ne može neograničeno vršiti u toj oblasti. Ta operacija je deljenje. Broj koji se deli zove se deljenik. Broj kojim se deli zove se delilac, a rezultat deljenja je količnik. U izrazu $\frac{p}{q} = k$ ili $p : q = k$; $p$ je deljenik, $q$ — delilac a $k$ je količnik.

Može se desiti da $p \in E \wedge q \in E$ i da $k \in E$. Na primer $\frac{8}{2} = 4$. Ali, ako sa 2 treba podeliti, na primer broj 7, količnik $k = \frac{7}{2}$, tj. $k \notin E$. Broj $\frac{p}{q}$ gde su $p$ i $q$ celi brojevi ($q \neq 0$) zove se *racionalan broj*.

Kako je deljenje operacija suprotna sa množenjem, to iz $\frac{p}{q} = k$ sledi $p = q\cdot k$. Otuda $q$ ne može da bude 0, jer $0\cdot k = 0$, a ne $p \neq 0$. Ako je $p > 0$ i $q > 0$, onda je $k > 0$. Količnik je takođe pozitivan ako je $p < 0$ i $q < 0$. Ako pak $p$ i $q$ imaju suprotne znake $p > 0$; $q < 0$ ili $p < 0$; $q > 0$, $k < 0$.

Pošto je $\frac{p}{-q} = \frac{-p}{q}$, svaki racionalan broj se može predstaviti kao količnik dva cela broja $p$ i $q$ ($p \in E$, $q \in N$). Da bi se i operacija deljenja mogla vršiti neograničeno, oblast celih brojeva se morala proširiti pridruživanjem razlomaka. Tako prošireni skup zove se skup racionalnih brojeva i obeležava se sa $R$. Jasno je da i bilo koji ceo broj može predstaviti u obliku $\frac{p}{q}$, gde je $q = 1$. Isto i $0 = \frac{0}{q}$, gde je $q$ bilo koji broj osim 0. U oblasti racionalnih brojeva izvodljive su operacije sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja. Zbog toga se te operacije često zovu *racionalne operacije*. Vidimo da je skup $E$ podskup skupa $R$.

Sada možemo pomoću Eulerovih krugova prikazati odnos u kojem stoje skupovi do sada proučenih brojeva.

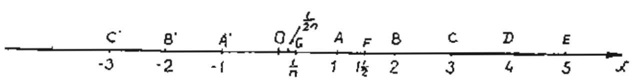


Sl. 18

**4. GUSTINA SKUPA RACIONALNIH BROJEVA**

Videli smo da svakom broju koji prapada skupu $N$ ili skupu $E$ odgovara jedna tačka na brojnoj osi i da je rastojanje dve bilo koje susedne tačke jednako jedinici ose (tačke su ekvidistantne).

Ako imamo dva broja $a$ i $b$ onda se broj $m = \frac{a+b}{2}$ zove *aritmetička* sredina brojeva $a$ i $b$. Broj $m \in E$ samo jedino u tom slučaju ako su brojevi $a$ i $b$ oba parna ili oba neparna. Ako su, pak, brojevi $a$ i $b$ dva uzastopna (sukcesivna) broja, $m \notin E$. Da vidimo šta to znači geometrijski. Neka je broj $a = 1$ i $b = 5$. Broj $m$ bi u tom slučaju bio $m = \frac{1+5}{2} \Rightarrow m = 3$. Brojevi $a$ i $b$ su korespondentni sa tačkama $A$, odnosno, $E$, a broj $m$ sa tačkom $C$ (sl. 19). Vidimo da je tačka $C$



Sl. 19



u sredini duži $\overline{AE}$. Ako sada nađemo aritmetičku sredinu brojeva $a$ i $m$: $m_1 = \frac{1+3}{2} \Rightarrow m_1 = 2$. Broj 2 odgovara tački $B$ i, kao što je to trebalo očekivati, tačka $B$ je u sredini duži $AC$. Tačka koja odgovara aritmetičkoj sredini brojeva $a$ i $m$ treba da polovi duž $\overline{AB}$.

$$m_2 = \frac{1+2}{2} \Rightarrow m_2 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Broj $1\frac{1}{2}$ odgovara tački $F$. Iako $m_2 \notin E$, postoji na brojnoj osi tačka koja odgovara tom broju. Da bi se dobila jasnija predstava o gustini tačaka brojne ose koje odgovaraju elementima skupa racionalnih brojeva, podelimo duž $\overline{OA} = 1$ na $n$ jednakih delova. Broj $n \in N$ i može biti proizvoljno velik. Tačka $G$ odgovara onda broju $\frac{1}{n}$. Na taj način dobili bi smo tačke koje odgovaraju brojevija

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots \frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}$$

Pitamo se da li su brojevi, na primer $\frac{2}{n}, \frac{3}{n}$ susedni, tj. da li između njih nema brojeva. Očigledno je da se između tih brojeva može umetnuti još broj, na primer, $\frac{5}{2n}$ i ne jedino taj nego i $\frac{7}{3n}$ i $\frac{8}{3n}$ jer je svaki od njih veći od $\frac{2}{n}$ a manji od $\frac{3}{n}$. Isto tako, između tačaka $O$ i $G$ koji odgovaraju brojevima 0 i $\frac{1}{n}$ može umetnuti proizvoljno mnogo racionalnih brojeva:

$$\frac{1}{3n}, \frac{2}{5n}, \frac{1}{2n}, \frac{3}{4n}, \frac{5}{6n}, \ldots\ldots$$

Pošto je svaka duž skup tačaka, pa ma kako je ta duž bila mala, skup tačaka koji pripadaju toj duži je beskonačan, to znači u skupu racionalanih brojeva ne mogu postojati dva susedna broja.

Između dva broja, ma kako razlika između njih bila mala, uvek se može umetnuti neograničeno mnogo racionalnih brojeva. Uzmimo, na primer, brojeve $\frac{1}{2n}$ i $\frac{3}{4n}$. Njihova aritmetička sredina je:

$$m = \frac{\frac{1}{2n} + \frac{3}{4n}}{2} = \frac{5}{8n}$$

Videli smo kako su raspoređene tačke na brojnoj osi koje odgovaraju brojevima koji pripadaju skupu $N$ (sl. 16) i skupu $E$ (sl. 17). To su tačke raspoređene na istom rastojanju jedna od druge (ekvidistantne). Ovde postoje susedni brojevi $n$, $n+1$. Brojevi koji pripadaju skupu $R$ raspoređeni su gusto duž cele brojne ose.

## 5. INTERVAL

U matematici ima mnogo takvih problema u kojima treba odrediti vrednost neke veličine (nepoznate), tj. broj i da je skup brojeva kojim taj broj pripada ograničen.

Pođimo od analize nekih zadataka. Na građevini je zaposleno 10 majstora: zidari, stolari itd. Uz neke uslove treba odrediti koliko je tamo zidara. Neka je broj zidara $x$. Šta se može reći o broju $x$? Prvo: $x$ je pozitivan broj, tj. $x > 0$. Drugo $x$ je ceo broj. Znači $x \in N$. To je već ograničenje za broj $x$. Osim toga kako je svih majstora bilo 10, $x$ ne može biti 11. Sve ovo moglo bi se formulisati ovako:

$$x \in N, \qquad 0 < x < 10$$

Brojevi 0 i 10 su granice skupa brojeva kojim može da pripada broj $x$.

Uzmimo još jedan primer. Neka je potrebno odrediti broj stranica pravilnog poligona uz uslov da njegova stranica ne bude manja od poluprečnika kružnice opisane oko njega.

Neka je broj stranice poligona $n$. Poligon sa najmanjim brojem stranica je trougao. Znači $n$ ne može biti manje od 3. Ali može da bude jednako 3. Ovo se može napisati ovako $n \geqslant 3$ i čita se: en je veće ili jednako 3. Poznato je da je stranica pravilnog šestougla jednaka poluprečniku kružnice opisane oko njega. Znači $n \leqslant 6$. Ovo se čita: en je manje ili jednako 6. Upotrebljeni znaci imaju ovo značenje: $n \geqslant 3$ — ne manje od 3, i $n \leqslant 6$ — ne veće od 6.

Vodeći računa o tom da $n \in N$, imamo

$$3 \leqslant n \leqslant 6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$



U navedenim primerima brojevi (u prvom $x$, a u drugom $n$) pripadaju skupovima brojeva koji su sa dve strane ograničeni. Osim toga, kako $x$, tako i $n$ moraju pripadati skupu $N$. Usled toga ti skupovi sadrže konačan broj elemenata. Kardinalni broj skupa kojem pripada $x$, $k = 9$, a kardinalni broj skupa kojem pripada $n$, $k = 4$.

Uzmimo dva racionalna broja $a$ i $b$ i neka je $a < b$.

Ako je $z$ broj koji zadovoljava uslov

$$a < z < b,$$

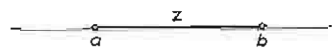
onda, kao što smo to videli u prethodnom paragrafu, skup brojeva $z$ je beskonačan.

Skup svih brojeva $z$ zove se *interval*, a brojevi $a$ i $b$ su *granice intervala*

Razmotrićemo to pitanje podrobnije. Neka broj $z$ zadovoljava navedeni uslov

$$a < z < b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

to znači da $z$ ne može biti jednako ni sa $a$ ni sa $b$. Drugim rečima brojevi $a$ i $b$ ne pripadaju tom intervalu. To se vidi na sl. 20. Takav se interval zove *otvoren* i obeležava se $(a, b)$.




Sl. 20

Zato se uslov (1) obično piše $z \in (a, b)$.

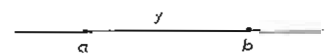
Ako broj $y$ zadovoljava uslov

$$a \leqslant y \leqslant b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Ovo znači da granice intervala: brojevi $a$ i $b$ pripadaju tom intervalu (sl. 21). Za takav interval se kaže da je *zatvoren* i obeležava se $[a, b]$.

Prema tome uslov (2) mogao bi se napisati ovako:

$$y \in [a, b]$$




Sl. 21

Broj $x$ može zadovljavati i takav uslov

$$a < x \leqslant b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

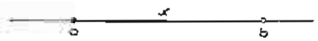
$$\text{ili} \quad a \leqslant x < b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

U tom slučaju kažemo da je interval *poluotvoren*.

Uslov (3) bi se mogao napisati $x \in (a, b]$ (sl. 22).

Uslov (4) piše se ovako: $x \in [a, b)$ (sl. 23).

Sl. 22



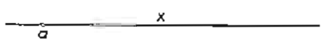
Sl. 23

Za granice intervala kaže se da je $a$ leva ili donja granica, a $b$ desna ili gornja granica intervala. Može se međutim, desiti da jedna ili obe granice ne postoje.

$$x > a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Ovo znači da je $x$ bilo koji broj veći od $a$. Kao što je poznato, najveći broj ne postoji. Zato se uslov (5) piše ovako:

$$x \in (a, +\infty) \qquad \text{(Sl. 24)}$$



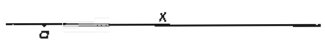
Sl. 24

Simbol $+\infty$ čita se „plus beskonačnost”. Beskonačnost nije broj i, prema tome, ne pripada skupu brojeva. Uslov (5) koji bi se mogao napisati i ovako:

$$a < x < +\infty$$

ukazuje samo na to kod ovog intervala gornja granica ne postoji.

Slučaj $x \in (a, +\infty)$ prikazan je na sl. 25.

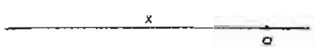


Sl. 25

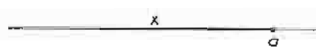
Ako kod intervala ne postoji donja granica, onda se to piše ovako:

$$x \in (-\infty, a) \qquad \text{(sl. 26)}$$

$$x \in (-\infty, a] \qquad \text{(sl. 27)}$$



Sl. 26



Sl. 27



Ako $x$ može da bude bilo koji broj, odnosno bilo koja tačka brojne ose, to pišemo ovako:

$$-\infty < x < +\infty \qquad \text{ili} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

Pošto $\infty$ ne može pripadati intervalu, stoga je interval sa strane $\infty$ uvek otvoren.

*Napomena*. Interval je odsečak brojne ose i sadrži ne samo racionalne brojeve, nego i takve brojeve koji nisu niti celi niti razlomci, koji se zovu iracionalni brojevi, a o kojima će biti reči u II delu ove knjige. Zato uslov ($a$) treba razumeti tako da se i brojevi $x \in N$ nalaze unutar tog intervala.

— · —

Sada možemo dati strožu definicju pojma apsolutne vrednosti broja.

$$|x| = \begin{cases} x \text{ ako } x \in (0, \infty) \\ 0 \text{ ako } x = 0 \\ -x \text{ ako } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Lako je dokazati da je

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

1) Ako su brojevi $a$ i $b$ pozitivni: $a > 0$, i $b > 0$ onda je $a = |a|$; $b = |b|$. Isto i $|a + b| = a + b$.

Prema tome $|a + b|| = |a| + |b|$

2) Ako su oba broja $a$ i $b$ negativna; $a < 0$ i $b < 0$, onda je $|a| = -a$ i $|b| = -b$, pa i njihov zbir je negativan

$$|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b)$$

tj. $$|a + b| = |a| + |b|$$

Ako je jedan od brojeva $a$ i $b$ ili oba jednaki nuli slučaj je jasan on je $|a| = |-a|$

$$|a| \geqslant 0 \quad \text{i} \quad |0| = 0$$

$$|a + 0| = |a| + |0|$$

3) Ako je jedan od ta dva broja pozitivan, a drugi negativan. Onda ako je

$$|a| \geqslant |b|$$

$$|a + b| = |a| - |b|$$

ako je $$|a| \leqslant |b|$$

onda je

$$|a + b| = |b| - |a|$$

Očigledno je da je zbir dva pozitivna broja

$$|a| + |b|$$

veći od njihove razlike. Ako su, dakle, znaci brojeva $a$ i $b$ različiti onda je

$$|a + b| < |a| + |b|$$

Na primer: $a = 5$; $b = -3$

$$|a + b| = |5 - 3| = 2$$

$$|a| + |b| = |5| + |-3| = 5 + 3 = 8$$

$$2 < 8.$$

Apsolutna vrednost proizvoda jednaka je proizvodu apsolutnih vrednosti faktora za bilo koje vrednosti tih faktora.

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

1) Ako su oba broja $a$ i $b$ jednaki nuli ili je bar jedan od njih 0, onda je očigledno: $|0| = 0 \cdot |b|$.

2) Ako su oba broja $a$ i $b$ istog znaka

$$a > 0; \quad b > 0$$

$$|a \cdot b| = ab; \quad |a| \cdot |b| = ab$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

ili $a < 0$, $b < 0$

$$|a \cdot b| = ab \qquad |a| \cdot |b| = (-a) \cdot (-b) = ab$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

3) Ako su znaci brojeva $a$ i $b$ različiti

$$|a \cdot b| = -ab \qquad |a| \cdot |b| = -ab$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Na isti način se može dokazati da je

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$



# 6. BROJNI SISTEMI

## 1. Pozicioni i neprozicioni sistemi

Da bi se vršile operacije sa brojevima treba utvrditi način njihovog pisanja. Način pisanja brojeva zove se brojni sistem. Brojni sistemi dele se na *pozicione* i *nepozicione*.

U pozicionom sistemu isti znak (cifra) može označavati razne brojeve u zavisnosti od mesta (pozicije) gde stoji. Na primer: od jedne jedinice i tri nule mogu se napisati 4 broja — 0001; 0010; 0100; 1000. Pomeranje jedinice za jedno mesto u levo udesetostručuje vrednost broja. Od tri različite cifre može se napisati 6 brojeva i da se pri tome nijedna cifra ne ponavlja

| | | |
|---|---|---|
| 123 | 231 | 312 |
| 132 | 213 | 321 |

Od nepozicionih sistema najpoznatiji je rimski sistem. U tom sistemu za pisanje brojeva koriste se slova. Slovo I — znači 1, slovo *V* znači 5, slovo *X* znači 10, slovo *L* znači 50, slovo *C* znači 100, slovo *D* znači 500, slovo *M* znači 1000. Vrednost broja dobija se sabiranjem vrednosti svih slova. Tako broj MDCCLXI znači 1761. Rimljani su nešto uprostili pisanje brojeva time što su uveli pravilo da se manji broj oduzima od većeg ako se stavi ispred njega. Ali, i pored toga, sa 6 različitih znakova koji su upotrebljeni za pisanje broja 1761 mogla bi se napisati još samo dva broja, dok u sistemu kojim se mi danas služimo sa 6 različitih znakova može se napisati 720 različitih brojeva i to tako da se nijedna cifra ne ponovi.

Prednost pozicionog sistema ne sastoji se jedino u jednostavnijem pisanju brojeva. U nepozicionom sistemu računske operacije sa brojevima do te mere su otežane da ga čine neupotrebljivim.

## 2. Dekadni brojni sistem

Dekadni sistem danas se upotrebljava u celom svetu. On potiče iz Indije i, preko Arabljana, stigao je u Evropu. U ovom sistemu da bi se napisao bilo koji broj koriste se 10 cifara:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .

Svaki broj u dekadnom sistemu može se predstaviti kao polinom u kojem je glavna količina 10

$$325724 = 3 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 4.$$

To znači da, ako se bilo kojem broju zdesna dopiše 0, on se time povećava 10 puta.

1; 10; 100; 1000; itd.

Zato, na primer, broj 345 predstavlja 5 jedinica
4 desetice
3 stotine

Taj odnos značenja dve susedne cifre broja zove se *osnova brojnog sistema.*

### 3. Binarni brojni sistem

Binarni brojni sistem je pozicioni sistem sa osnovom 2. Da bi se napisao bilo koji broj u ovom sistemu potrebne su svega dve cifre: 0 i 1. Broj 1 u binarnom sistemu piše se kao i u dekadnom 1. Kako je osnova brojnog sistema 2, dopisivanjem nule broj se povećava dva puta tj. 10 značilo bi isto što u dekadno sistemu 2, 100 bi značilo 4, 1000 bi predstavljala 8 itd. Princip pisanja brojeva u svim pozicionim sistemima je isti. U binarnom sistemu pomeranjem jedinice za jedno mesto ulevo njena vrednost se povećava *dva* puta. Tako, na primer, da bi se napisao broj 5 treba broju 4 tj. 100 dodati 1 i dobićemo 101. Pomeranjem te jedinice za jedno mesto ulevo njena vrednost postaje 2 puta veća, tj. 110 predstavlja 6 itd.

Da bi se naznačilo kojem brojnom sistemu pripada dati broj upotrebljavaju se indeksi:

$$6_{10} = 110_2$$

To se čita: 6 u dekadnom sistemu isto je što i 110 u binarnom sistemu.

U navedenoj tablici dati su u binarnom sistemu prvih 16 brojeva prirodnog niza brojeva.

| Dekadni brojevi | Binarni brojevi |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 10 |
| 3 | 11 |
| 4 | 100 |
| 5 | 101 |
| 6 | 110 |
| 7 | 111 |
| 8 | 1000 |
| 9 | 1001 |



| Dekadni brojevi | Binarni brojevi |
|---|---|
| 10 | 1010 |
| 11 | 1011 |
| 12 | 1100 |
| 13 | 1101 |
| 14 | 1110 |
| 15 | 1111 |
| 16 | 10000 |

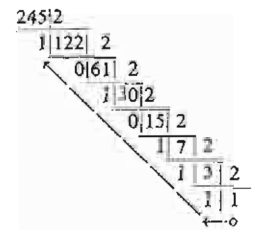
Lako je bilo koji broj napisati u binarnom sistemu. Zato ga treba napisati u obliku polinoma uređenog po stepenima broja 2. Uzmimo da broj 245, treba napisati u binarnom sistemu.

$$245 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$$

Prema tome

$$245_{10} = 11110101_2$$

Ovo se može najjednostavnije postići uzastopnim deljenjem broja 245 sa 2:




Uzmimo obrnuti zadatak. Dati broj u binarnom sistemu 11011011 napisati u dekadnom brojnom sistemu.

$$11011011_2 = 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2 + 1 = 128 + 64 + 16 + 8 + + 2 + 1 = 219_{10}$$

Kao što se vidi pisanje brojeva u binarnom sistemu je komplikovanije zbog velikog broja cifara. Dvocifren broj $17_{10}$ je petocifren u binarnom:

$$17_{10} = 10001_2,$$

a trocifren broj $245_{10}$ u binarnom sistemu je osmocifren. Ali, i pored toga, binarni sistem ima velika preimućstva zbog kojih se on upotrebljava kod elektronskih računara. U ovom slučaju broj cifara nije važan, bitno je to da se svaki broj može izraziti pomoću svega dva različita znaka 0 i 1. Stanje u električnom kolu je isto dvojako: ili struja protiče ili ne protiče. Ne upuštajući se u ustrojstvo tih mašina, odmah se vidi prednost binarnog sistema. Upaljena neonska sijalica znači 1, ugašena 0. Podatke mašina dobija pomoću trake sa prethodno izbušenim rupicama (perforacija). Prisustvo na odgovarajućem mestu rupice znači 1, a njeno odsustvo 0.

## ZADACI

*Zad. 31.* Izračunati:

1) $x = 4a + a^4$, ako je $a = \frac{1}{3}$
2) $y = 3a - a^3 - 10a^4$, ako je $a = 0{,}4$
3) $z = a^n - b^n$, ako je $a = 5$; $b = 2$; $n = a - b$

*Zad. 32.* Izračunati:

$x = 3c^3 + 5c^5d + 7c^7d^2$, ako je $c = 10$; $d = 0{,}02$

*Zad. 33.* Izračunati:

$x = (a + b)(c - d)$
$y = (a + b) \cdot c - d$
$z = a + b(c - d)$
$v = a + bc - d$

ako je $a = 5$; $b = 3$; $c = 6$; $d = 4$.

*Zad. 34.* Izračunati:

$x = (a - b + c) \cdot d$
$y = a - (b + c) d$
$z = a - (b + cd)$
$v = a - b + cd$

ako je $a = 30$; $b = 4$; $c = 2$; $d = 5$.

*Zad. 35.* Izračunati:

$x = (a + b)(c - ab)$; $y = a + b(c - ab)$
$z = (a + b) c - ab$; $v = a + bc - ab$

ako je $a = 12$; $b = 0{,}5$; $c = 15$.

*Zad. 36.* Odrediti sve elemente skupa $N$ koji pripadaju intervalu:

1) $n \in (3, 7)$ 2) $n \in [3, 7)$
3) $n \in (3, 7]$ 4) $n \in [3, 7]$



*Zad. 37.* Odrediti uniju intervala:

1) $(1, 5) \cup (3, 9)$ 2) $[3, 5) \cup [5, 7)$
3) $[2, 6] \cup (6, 8]$

*Zad. 38.* Odrediti presek intervala:

1) $(2, 7) \cap (5, 9)$ 2) $[3, 15) \cap (-4, 7)$
3) $[3, +\infty) \cap (-\infty, 5]$

*Zad.* 39. Odrediti razliku intervala:

$[1, 3] \setminus (1, 3)$

*Zad. 40.* Data su dva broja $a$ i $b$ .Izračunati njihov zbir $s$ i njihovu razliku $d$ u dekadnom i binarnom brojnom sistemu.

$a = 321$ $b = 110001$

*Zad. 41.* Da li je tačno tvrđenje:

1) $a < b \Rightarrow |a| < |b|$; 2) $|a| = |b| \Rightarrow a = b$;
3) $a = b \Rightarrow |a| = |b|$

## STEPENOVANJE

### 1. DEFINICIJA STEPENA

Stepenovanje je množenje kod kojega su činioci jednaki.

$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$ (čita se a na peti stepen)

$b^7 = b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$

$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \, \ldots\ldots\ldots \, a \cdot a}_{n \text{ puta}} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a^n$$

— $n$ : eksponent stepena
— $a$ : osnova stepena
— $a^n$: stepen

Eksponent (izložilac) stepena je broj koji pokazuje koliko je puta osnova uzeta kao činilac.

Za dva stepena kažemo da su slični ako su im iste osnove i isti eksponenti. Kod takvih stepena je moguće izvršiti svođenje (redukcija).

$$3a^n + 2a^n = 5a^n$$
$$7x^k - 4x^k = 3x^k$$

Treba napomenuti da se između dva faktora, ako su ti faktori opšti brojevi, tačka (znak množenja) može staviti, ali ne mora.

$$a \cdot b = ab$$

Ako su pak činioci posebni brojevi, između njih se tačka staviti *mora.*

$$2 \cdot 3 \neq 23$$

$$4 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n = 7 \cdot 2^n$$

## 2. RAČUNSKE OPERACIJE SA STEPENIMA

### 1. Množenje stepena

Neka je potrebno izvršiti množenje dva stepena čije su osnove iste.

$$a^3 \cdot a^2$$

Prema definiciji stepena $a^3 = a \cdot a \cdot a$

isto $a^2 = a \cdot a$

Prema tome

$$a^3 \cdot a^2 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3} \cdot \underbrace{a \cdot a}_{2} = a^{3+2} = a^5$$

Ovo možemo napisati

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a \cdot a}_{m \text{ puta}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a \cdot a}_{n \text{ puta}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a \cdot a}_{(m+n) \text{ puta}}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Svakako važi i obrnuto:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

Primeri:

1) $3^{n+2} = 3^n \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^n$

2) $5 \cdot 2^k + 3 \cdot 2^k = 8 \cdot 2^k = 2^3 \cdot 2^k = 2^{k+3}$

3) $11 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^x = 9 \cdot 3^x = 3^2 \cdot 3^x = 3^{x+2}$

4) $5^{3-k} \cdot 5^{2k-1} \cdot 5^{k-1} \cdot 5^{k-2} \cdot 2^5 \cdot 5^{1-k} = 2^5 \cdot 5^{3-k+2k-1+k-2+1-k} =$
$= 32 \cdot 5^{k+1} = 32 \cdot 5 \cdot 5^k = 160 \cdot 5^k$



Kod stepenovanja polinoma prvo se mora izvršiti množenje polinoma, a zatim redukcija:

$$(a + b - c)^2 = (a + b - c)(a + b - c) = a^2 + b^2 + c^2 +$$
$$+ 2ab - 2ac - 2bc$$

### 2. Stepenovanje proizvoda

Na množenje stepena svodi se i stepenovanje proizvoda.

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \ldots ab \cdot ab}_{n \text{ puta}}$$

Kako kod množenja važi komutativni zakon, može se napisati

$$(ab)^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n\text{—puta}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots b}_{n\text{—puta}} = a^n \cdot b^n$$

Očigledno je da bi se na isti način stepenovao proizvod od proizvoljnog broja činilaca.

$$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

Važi, razume se, i obrnuto:

$$a^n \cdot b^n \cdot c^n = (abc)^n$$

Primeri:

1) $(2x)^5 = 32x^5$

2) $2^n \cdot 3^n = (2 \cdot 3)^n = 6^n$

### 3. Stepenovanje količnika (razlomak)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a \ldots a}{b \cdot b \cdot b \ldots b} = \frac{a^n}{b^n}$$

Znači $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ili $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Primer:

$$\frac{3^{p+2}-2(3^{p+1}+3^p)}{5^{p+2}-4(5^{p+1}+5^p)}=\frac{3^p\cdot 3^2-2(3^p\cdot 3+3^p)}{5^p\cdot 5^2-4(5^p\cdot 5+5^p)}=$$

$$=\frac{9\cdot 3^p-2\cdot 4\cdot 3^p}{25\cdot 5^p-4\cdot 6\cdot 5^p}=\frac{9\cdot 3^p-8\cdot 3^p}{25\cdot 5^p-24\cdot 5^p}=\frac{3^p}{5^p}=\left(\frac{3}{5}\right)^p$$

### 4. Deljenje stepena

Pođimo od konkretnog primera:

$$\frac{a^5}{a^3}=\frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a\cdot a}=a\cdot a=a^2$$

Pošto se $a^m$ može napisati u oboliku $a^n\cdot a^{m-n}$, jer $a^n\cdot a^{m-n}=$ $=a^{n+m-n}=a^m$, onda

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^n\cdot a^{m-n}}{a^n}=\frac{a^n}{a^n}\cdot a^{m-n}$$

Kako je količnik dva jednaka broja jednak 1 tj. $\frac{a^n}{a^n}=1$, imamo

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n} \quad \text{ili} \quad a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n}$$

Primeri:

1) $0{,}125\cdot 2^n=\frac{125}{1000}\cdot 2^n=\frac{1}{8}\cdot 2^n=\frac{2^n}{2^3}=2^{n-3}$

2) $(3^{x+2}-3^{x+1}-2\cdot 3^{x-1}):6^{x-1}=$

$$=\left(9\cdot 3^x-3\cdot 3^x-2\cdot\frac{3^x}{3}\right):\frac{6^x}{6}=$$

$$=\frac{27\cdot 3^x-9\cdot 3^x-2\cdot 3^x}{3}:\frac{6^x}{6}=\frac{16\cdot 3^x}{3}\cdot\frac{6}{6^x}=$$

$$=\frac{32\cdot 3^x}{2^x\cdot 3^x}=\frac{32}{2^x}=2^{5-x}$$



### 5. Stepeni čiji je eksponent 0

$\frac{a^n}{a^n}=a^{n-n}$ i kako je $n-n=0$, imamo $\frac{a^n}{a^n}=a^0$

Ali $\frac{a^n}{a^n}=1$ i, prema tome,

$$a^0=1.$$

To znači da bilo koji broj (osim 0) stepenovan sa nulom daje 1.

$$17^0=1; \quad (-3)^0=1; \quad \left(-\frac{7}{3}\right)^0=1$$

$0^0$ je neodređeno, jer $0^0=\frac{0}{0}$

Jasno je da se i 1 može napisati kao bilo koji broj na stepen 0.

$$1=a^0 \quad (a\neq 0)$$

### 6. Stepen čiji je eksponent ceo negativan broj

$$\frac{1}{a^n}=\frac{a^0}{a^n}=a^{0-n}$$

Pošto je $0-n=-n$, imamo:

$$\frac{1}{a^n}=a^{-n} \text{ ili } a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{-n}=\frac{p^{-n}}{q^{-n}}=\frac{1}{p^n}:\frac{1}{q^n}=\frac{q^n}{p^n}$$

$$\text{ili} \quad \left(\frac{p}{q}\right)^{-n}=\left(\frac{q}{p}\right)^n$$

To znači da se bilo koji razlomak može napisati u obliku celog broja:

$$\frac{2ab^2}{c^3}=2ab^2c^{-3} \quad \text{ili} \quad 0{,}25=2^{-2}$$

I, obrnuto: izraz u kojem su zastupljeni negativni eksponenti može se napisati u obliku razlomka:

$$2^{-3}ab^{-2} = \frac{a}{8b^2}$$

Primer:

$$6^{-x}\cdot(0{,}2)^2\cdot 3^{x+1}\cdot(0{,}12)^{-1}\cdot 2^x =$$

$$= \frac{1}{6^x}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot 3^x\cdot 3\cdot\left(\frac{12}{100}\right)^{-1}\cdot 2^x =$$

$$= \frac{1}{6^x}\cdot\frac{1}{25}\cdot 3\cdot 3^x\cdot\frac{100}{12}\cdot 2^x =$$

$$= \frac{3\cdot 3^x\cdot 25\cdot 2^x}{2^x\cdot 3^x\cdot 25\cdot 3} = 1$$

### 7. Stepenovanje stepena

Da pođemo od konkretnog primera

$$(a^2)^3 = a^2\cdot a^2\cdot a^2 = a^{2+2+2}$$

U eksponentu imamo zbir tri jednaka sabirka. Sabiranjem jednakih brojeva definisano je množenje, tj.

$$2+2+2 = 3\cdot 2$$

Uzmimo sada opšti slučaj:

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n\cdot a^n\cdot a^n\ \ldots\ a^n}_{m \text{ puta}} = a^{n+n+n+n+\ldots n}$$

U eksponentu imamo $m$ jednakih sabiraka znači:

$$(a^n)^m = a^{m\cdot n}$$

Važi i obrnuto:

$$a^{mn} = (a^n)^m = (a^m)^n$$

$$a^{12} = (a^2)^6 = (a^3)^4 = (a^4)^3 = (a^6)^2$$



Primeri:

$$(3^{2x}\cdot 9^{1-2x} + 9^{-x})^{-2}$$

Kako je $3^{2x} = (3^2)^x = 9^x$ i $9^{1-2x} = \frac{9}{9^{2x}} = \frac{9}{(9^x)^2}$

možemo napisati:

$$(3^{2x}\cdot 9^{1-2x}+9^{-x})^{-2} = \left[9^x\cdot\frac{9}{(9^x)^2}+\frac{1}{9^x}\right]^{-2} = \left(\frac{9}{9^x}+\frac{1}{9^x}\right)^{-2} =$$

$$= \left(\frac{10}{9^x}\right)^{-2} = \frac{81^x}{100}$$

U dosadašnjim razmatranjima osnova stepena uzimala se kao pozitivan broj. Međutim, to ne mora da bude i zato će se to pitanje posebno proučiti. Kao što je na početku rečeno stepenovanje je množenje. Proizvod od dva faktora je pozitivan ako su oba faktora istog znaka, a negativan je ako znaci činioca su različiti (suprotni):

$$(+a)\cdot(+a) = +a^2$$
$$(-a)\cdot(-a) = +a^2$$

To znači da, bilo koji broj, *pozitivan* ili *negativan*, njegov kvadrat je *pozitivan*.

$$(+a)^2 = +a^2;\quad (-a)^2 = +a^2$$

Ovo možemo proširiti

$$(\pm a)^{2n} = +a^{2n} \quad \text{za} \quad a \neq 0 \quad \text{i} \quad n \in E$$

Zaista $(-a)^{2n} = (a^2)^n$ i kako je $a^2 > 0$ $a \neq 0$

$$(a^2)^n > 0$$

Prema tome, ako je eksponent stepena *paran* brojna vrednost stepena je *pozitivna* nezavisno od znaka osnove.

Ako je, pak, eksponent stepena neparan broj $2n+1$*, onda

$$(-a)^{2n+1} = (-a)^{2n}\cdot(-a)^1 = (+a^{2n})\cdot(-a) = -a^{2n+1}$$

$$(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = +16$$

$$-2^4 = -16$$

$$(-2)^5 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = (+16)\cdot(-2) = -32$$

Za $a > 0$ $a^n > 0$ za bilo koje $n$ $n \in E$

* $2n+1$ je neparno za svako $n \in E$.

## ZADACI

*Zad. 42.* $a^3 \cdot a^{m-n} \cdot a^2 \cdot a^{n-m}$

*Zad. 43.* $x^{3p+q} \cdot x^{1-p} \cdot x^{3-q} \cdot x^{p-4}$

*Zad. 44.* $2^x \cdot 2^{3y-2x} \cdot 2^{3-2y} \cdot 2^{x-y}$

*Zad. 45.* $3^{2n+3} \cdot 3^{2-n} \cdot 3^{3n-4} \cdot 3^{1-4n}$

*Zad. 46.* $a^{2m-n} \cdot b^{m-n} \cdot a^{n-m} \cdot b^{2n-m}$

*Zad. 47.* $(ab)^{x+1} \cdot a^{x+1} \cdot b^{x-1}$

*Zad. 48.* $\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^n$

*Zad. 49.* $(x - y - z)^2$

*Zad. 50.* $(a + b)^2 \cdot (a - b)^2$

*Zad. 51.* $a^k : a^{k-1}$

*Zad. 52.* $a^{2n+3} : a^{3n+2}$

*Zad. 53.* $\frac{a^{3m-2n} \cdot b^{5m-3n}}{a^{3(m-n)} \cdot b^{5m-4n}}$

*Zad. 54.* $(a^{2k} + a^{2k-1}) : a^{k-1}$

*Zad. 55.* $(a^{2n} - a^{3n}) : a^{2n-1}$

*Zad. 56.* $(pq^{1-n} + p^{1-m}q) : p^{1-m} \cdot q^{1-n}$

*Zad. 57.* $(2^{x+3} + 2^{x-2} + 3 \cdot 2^{x+2}) : 3^{4-x}$

*Zad. 58.* $\frac{5^{k+3} - 4 \cdot (5^{k+2} - 6 \cdot 5^k)}{7^{k+3} - 6 \cdot (7^{k+2} + 4 \cdot 7^k)}$

*Zad. 59.* $\frac{3a^n b^{2-m}}{4x^p y^{q-1}} : \frac{9\,(xy)^{p-1}}{8a^{1-n}\, b^{m-1}}$

*Zad. 60.* Sledeće izraze napisati u takvom obliku da eksponenti stepena budu pozitivni.

1) $3^{-2}\, ab^{-3}$ 2) $3x^{-1}\, y^2$ 3) $2mst^{-2}$

4) $\frac{6^{-2}\, ay^{-3}}{3^{-1}\, bx^{-2}}$ 5) $\frac{12 \cdot 2^{-3}\, ax^{-2}\, y^{-3}}{a^{-1}\, b^{-2} y}$

*Zad. 61.* Razlomke napisati u obliku celog izraza:

1) $\frac{3a^2\, b}{c^3}$; 2) $\frac{3m^3\, n}{p^4\, q}$; 3) $\frac{a^7\, b^3\, c^2}{a^2\, c^5\, x^2}$



*Zad. 62.* $\left(\frac{a^3\, b^{-2}}{3cd^{-3}}\right)^3 \cdot \left(\frac{3b^3\, c^{-2}}{a^5\, d}\right)^2$

*Zad. 63.* $\left(\frac{x^3\, y^{-2}}{z^4}\right)^{-3} : \left(\frac{yz^2}{x}\right)^6$

*Zad. 64.* $\left(\frac{w^3}{u^{-2}\, v}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{v^{-2}\, w^6}{u^{-3}}\right)^2$

*Zad. 65.* $\left(\frac{a^{-2}\, b}{c^{-1}}\right)^{-3} : \left(\frac{b^2\, c^{-1}}{a^3}\right)^{-2}$

*Zad. 66.* $\frac{9^{x-1} \cdot 2^{x-2}}{6^{x-2}}$

*Zad. 67.* $7^{n-1} \cdot 2^{n-3} \cdot (0{,}5)^{-2} \cdot 14^{n+1}$

*Zad. 68.* $\frac{8^{k-2} \cdot (0{,}5)^{-2}}{2^{k-2} \cdot 4^{k-1}}$

*Zad. 69.* $5^{k-2} \cdot (0{,}12)^{-1} \cdot 3^{k+1}$

*Zad. 70.* $(81^{x+1} - 3^{4x+3} - 9^{2x+1}) \cdot 5^{-1}$

*Zad. 71.* $(5^x \cdot 5^{1-2x} + 5^{1-x}) \cdot 5^{x-1}$

*Zad. 72.* $(-a)^{k+3} \cdot (-a)^{2k-1} \cdot (-a)^{2-k}$ $k \in E$

*Zad. 73.* $(-a)^{2k} \cdot (-b^{2k})$ $k \in E$

*Zad. 74.* $(-a)^{1-n} \cdot (-a)^{2n+1} \cdot (-a)^{n+1}$ $n \in E$

*Zad. 75.* $(-a)^{2k+1} \cdot (-b^{2k})$ $k \in E$

*Zad. 76.* $(-a)^k \cdot (-b)^{k+1}$ $k \in E$

*Zad. 77.* $(-2)^{2k+1} \cdot 6^{1-k} \cdot (-3)^{2k-1}$ $k \in E$

## RACIONALNI IZRAZI

### 1. MONOM, POLINOM

Monom je matematički izraz koji predstavlja jednu celinu. Najjednostavniji oblik monoma je broj — poseban ili opšti: 3, $\sim a, x, m, z \ldots$ Proizvod dva ili više monoma je takođe monom. Dovoljno je da ih napišemo jedan do drugoga: $3a$, $ax$, $mz$, $3mx$, $amxz\ldots$ U monomu mogu biti zastupljene i druge računske operacije, ali *priozvod*, *razlomak*, *stepen* i *koren* uvek predstavljaju jednu celinu.*

$$m(p+q); \qquad \frac{a^2+b^2}{2c}; \qquad (m+n)\,x^2; \qquad \sqrt{2a-b}$$

Pošto svaki od ovih izraza predstavlja jednu celinu, dovoljno je pored njega napisati, recimo 3, da bi se znalo da je ceo taj izraz pomnožen sa 3.

$$3m(p+q); \qquad 3\,\frac{a^2+b^2}{2c}; \qquad 3(m+n)\,x^2; \qquad 3\sqrt{2a-b}$$

Algebarski zbir od dva ili više monoma zove se *polinom*. Pod algebarskim zbirom podrazumeva se zbir brojeva koji pripadaju skupu $R$

$$3+(-1)=3-1=2$$

Znači, razlika $3-1$ može se smatrati kao *zbir* broja tri i negativne jedinice.

$$a-b=a+(-b)$$

Polinom od dva člana zove se *binom*. Polinom od tri člana zove se *trinom*. Nekad se za polinom od četiri člana kaže *katrinom*.

### 2. RACIONALNE OPERACIJE S POLINOMIMA

#### 1. Sabiranje polinoma

Sabrati dva polinoma $P$ i $Q$ znači članovima polinoma $P$ dopisati članove polinoma $Q$ i zatim, ukoliko postoje slični članovi, izvršit njihovu redukciju.

Neka je polinom $P = 2a^3b - 5a^2b^2$ i $Q = a^2b^2 + 2ab^3$

$$P+Q = 2a^3b - 5a^2b^2 + a^2b^2 + 2ab^3$$

Posle svođenja zbir ta dva polinoma je

$$2a^3b - 4a^2b^2 + 2ab^3$$

* Ovde se radi o algebarskim izrazima.



#### 2. Oduzimanje polinoma

Oduzeti od polinoma $P$ polinom $Q$ znači od $P$ treba oduzeti *sve članove* polinoma $Q$, tj. ispred *svakog* člana polinoma $Q$ treba promeniti znak na suprotni i tako ih dopisati polinomu $P$, a zatim izvršiti redukciju

$$P-Q = 2a^3b - 5a^2b^2 - a^2b^2 - 2ab^3$$

Prema tome razlika polinoma je

$$2a^3b - 6a^2b^2 - 2ab^3$$

#### 3. Množenje polinoma

Množenje polinoma sastoji se u primeni distributivnog zakona i, zatim, redukciji polinoma. Proizvod $P\cdot Q$ možemo napisati $(2a^3b - 5a^2b^2)\cdot Q = 2a^3b\cdot Q - 5a^2b^2\cdot Q$ ili zamenom $Q = a^2b^2+2ab^3$

$$\begin{aligned} &2a^3b\,(a^2b^2+2ab^3) - 5a^2b^2\,(a^2b^2+2ab^3) = \\ &= 2a^5b^3 + 4a^4b^4 - 5a^4b^4 - 10a^3b^5 = \\ &= 2a^5b^3 - a^4b^4 - 10a^3b^5 \end{aligned}$$

Drugim rečima: proizvod dva polinoma dobija se tako što se svaki član jednog od njih pomnoži svakim članom drugog i zatim izvrši redukcija.

#### 4. Deljenje polinoma

Pri deljenju polinoma prvo oba polinoma, tj. i deljenik i delitelj moraju urediti na isti način. Svaki polinom se može koristeći komutativan zakon pri sabiranju, urediti na dva načina: ili po opadajućim ili po rastućim stepenima promenljive.

Uzmimo primer. Neka imamo polinome:

$$A = 2x - 11x^2 + 6x^3 + 8$$

$$B = 2x^2 - 5x + 4$$

Treba naći njihov količnik, tj. $A : B$. Za polinom $B$ kažemo da je uređen po opadajućim stepenima promenljive $x$. Zaista u tom polinomu je najviši stepen broja $x$ je drugi i taj član je na prvom mestu. Na drugom mestu je član koji sadrži $x$ čiji je stepen za 1 niži i, na poslednjem mestu, je slobodan član.

Taj polinom mogao bi se urediti po rastućim stepenima $x$. U tom slučaju njega bi trebalo napisati ovako: $B = 4 - 5x + 2x^2$.

Pošto je polinom $B$ dat kao uređen po opadajućim stepenima, uredimo na isti način i polinom $A$ i, tek onda, prelazimo na deljenje:

$$
\begin{array}{l}
(6x^3 - 11x^2 + 2x + 8) : (2x^2 - 5x + 4) = 3x + 2 \\
\underline{\mp 6x^3 \pm 15x^2 \mp 12x} \\
\quad 4x^2 - 10x + 8 \\
\underline{\mp 4x^2 \pm 10x \mp 8} \\
\quad = \quad = \quad =
\end{array}
$$

Deljenje se izvodi ovako: Prvi član deljenika se deli sa prvim članom deljitelja i tako se dobija prvi član količnika ($6x^3 : 2x^2 = 3x$). Zatim se tako dobijeni prvi član količnika množi sa deliteljem i taj se proizvod oduzima od deljenika. Dobijena razlika je prvi ostatak ($4x^2 - 10x + 8$). Prvi član ostatka deli se sa prvim članom delitelja što daje drugi član količnika. ($4x^2 : 2x^2 = 2$)

U uzetom primeru polinom $A$ deljiv je sa polinomom $B$. Inače, ako se dobije ostatak čiji je stepen niži od stepena deljitelja,* ili broj članova ostatka je manji od broja članova delitelja, onda se količnik tog ostatka i deljitelja dodaje količniku.

Može se desiti da deljenik ili oba polinoma sadrže dve ili više promenljivih (opštih brojeva). U tom slučaju oba polinoma se uređuju na isti način po bilo kojoj od tih promenljivih.

Uzmimo još jedan primer.

Podeliti polinome $P$ i $Q$.

$P = 19a^2b^3 - 18a^3b^2 + 8a^4b - 14ab^4$

$Q = 2a - 3b$

$$
\begin{array}{l}
(8a^4b - 18a^3b^2 + 19a^2b^3 - 14ab^4) : (2a - 3b) = \\
\qquad = 4a.b - 3a^2b^2 + 5ab^3 + \dfrac{ab^4}{2a - 3b} \\
\underline{\mp 8a^4b \pm 12a^3b^2} \\
= \quad - 6a^3b^2 + 19a^2b^3 - 14ab^4 \\
\qquad \underline{\pm 6a^3b^2 \mp 9a^2b^3} \\
\qquad = \quad 10a^2b^3 - 14ab^4 \\
\qquad \quad \underline{\mp 10a^2b^3 \mp 15ab^4} \\
\qquad \quad = \qquad ab^4
\end{array}
$$

* Stepen polinoma uređenog po opadajućim stepenima je stepen njegovog prvog člana. Polinom A je trećeg, B — drugog stepena.



### 3. NAJVEĆI ZAJEDNIČKI DELITELJ MONOMA

Za broj kažemo da je *prost* ako nije deljiv ni sa jednim drugim brojem sem sa samim sobom i sa 1. Analogno tome, za algebarski izraz kažemo da je prost ako nije deljiv ni sa jednim brojem ili algebarskim izrazom osim sa samim sobom ili sa 1. Izrazi $a$; $2a + b$; $a^2 + b^2$; $a^3 + 2b$ itd. su prosti. Treba ipak ralikovati *prost broj* i *prost izraz*. Za neke vrednosti $a$ i $b$ navedeni brojevi nisu prosti, ali su izrazi prosti. Može biti i obrnuto: izraz $5a$ nije prost jer je deljiv sa 5 i sa $a$, ali može da bude prost broj, na primer za $a = 1$. Ako je neki broj ili izraz deljiv sa nekim brojem, osim sa samim sobom i sa 1,* onda je on sigurno deljiv bar sa još jednim brojem. Na primer $ab$ deljivo je sa $a$, ali deljivo je i sa $b$. Kako su izrazi $a$ i $b$ prosti kažemo da su oni *prosti faktori* ili prosti činioci izraza $ab$. Ako je neki broj deljiv sa nekim drugim brojem, to znači da se taj broj može napisati u obliku proizvoda, tj. rastaviti na faktore. Broj 30 je paran. Znači, on se može napisati u obliku proizvoda od dva faktora $2 \cdot 15$, od kojih je 2 prost, a 15 nije prost faktor. Rastaviti broj 30 na proste faktore znači napisati $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Ako su dva ili više monoma deljivi sa istim brojem, onda se za taj broj kaže da im je on zajednički delitelj.
Uzmimo tri neka monoma. Na primer:

$$72a^3b^4x^2; \qquad 48a^5b^2y; \qquad 60a^7b^3c^4$$

Vidimo da su koeficijenti kod sva tri monoma parni. Prema tome, svi su oni deljivi sa 2. Znači 2 je njihov zajednički deljitelj. Pada u oči i to da svaki od tih monoma sadrži faktor $a$. Drugim rečima: njihov zajednički delitelj je i monom $2a$. Često je potrebno odrediti zajednički deljitelj tako da on bude *najveći*. Za ta tri monoma *najveći zajednički deljitelj* (N.z.d.) je $12a^3b^2$. Nameće se pitanje: kako se dolazi do tog izraza? U tom cilju potrebno je prvo rastaviti na proste faktore koeficijente svih monoma:

$$2^3 \cdot 3^2a^3b^4x^2; \qquad 2^4 \cdot 3a^5b^2y; \qquad 2^2 \cdot 3 \cdot 5a^7b^3c^4$$

Zatim napišemo samo one faktore počev od koeficijenata, koji su zastupljeni u sva tri monoma, to su:

$$2 \cdot 3 \cdot a \cdot b,$$

$x$, $y$ i $c$ ne dolaze u obzir jer nisu zastupljeni u sva tri monoma. Vidimo da je prvi monom deljiv ne samo sa 2 nego i sa 8, drugi sa 16, a treći sa 4. Znači sa 8 bi se mogao podeliti prvi i drugi monom, ali ne i *treći*. Sa

* U daljem izlaganju deljivost broja sa samim sobom i sa 1 neće se naglašavati jer tu osobinu poseduju svi brojevi.

16 bi se mogao podeliti samo drugi monom, a sa 4 sva tri. U N.z.d. ulazi prema tome broj 2 na drugi stepen, tj. na onaj stepen koji je *najniži* za taj faktor u sva tri monoma. Na isti način određujemo eksponente stepena za ostale faktore koji obrazuju N.z.d.

$$\text{N.z.d.} = 2^2 \cdot 3a^3b^2 = 12a^3b^2$$

Lako se uveriti da su sa navedenim monomom deljivi sva tri monoma:

$$\frac{72a^3b^4x^2}{12a^3b^2} = 6b^2x^2; \quad \frac{48a^5b^2y}{12a^3b^2} = 4a^2y; \quad \frac{60a^7b^3c^4}{12a^3b^2} = 5a^4bc^4;$$

Kako dobijeni količnici nemaju nijedan zajednički faktor (uzajamno su prosti), zaključujemo da je nađeni deljitelj zaista najveći.

## 4. RASTAVLJANJE POLINOMA NA PROSTE FAKTORE

### 1. Rastavljanje polinoma čiji svi članovi sadrže zajednički činilac

Podimo od zakona distribucije kod množenja:

$$a \cdot (m + n) = am + an$$

Kao što vidimo binom $am + an$ nije prost algebarski izraz, nego je proizvod od dva prosta faktora: $a$ i $m + n$. Vidi se i to da je $a$ zajednički deljitelj članova binoma $am + an$, a drugi faktor $m + n$ je količnik tog binoma i zajedničkog delitelja $a$.

Neka treba rastaviti na proste faktore trinom:

$$2a^2bx - 2a^2by + 2a^2bz.$$

N.z.d. članova ovog trinoma je $2a^2b$. Prema tome dati trinom može se rastaviti ovako:

$$2a^2bx - 2a^2by + 2a^2bz = 2a^2b \quad (x - y + z)$$

Uzmimo još jedan primer. Neka su članovi polinoma monomi za koje je N.z.d. već nađen:

$$72a^3b^4x^2 + 48a^5b^2y - 60a^7b^3c^4 =$$
$$= 12a^3b^2 \cdot (6b^2x^2 + 4a^2y - 5a^4bc^4)$$

Ako svi članovi polinoma imaju zajednički deljitelj, onda se taj polinom može predstaviti kao proizvod tog zajedničkog delitelja i polinoma koji je količnik datog polinoma i zajedničkog delitelja njegovih članova.



Zajednički deljitelj ne mora biti baš monom. On može biti binom, trinom, ili polinom. Na primer:

$$(m + n) \cdot x^2 + (m + n) \cdot y^2 + (m + n) \cdot z^2 = (m + n)(x^2 + y^2 + z^2)$$

### 2. Razlika kvadrata

Za broj $a^2$ kaže se da je kvadrat broja $a$. Izraz $a^2 - b^2$ je prema toma *razlika kvadrata* broja $a$ i $b$. Razlika kvadrata nije prost izraz, nego se može napisati kao proizvod prostih faktora.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Zaista, ako se izvrši množenje razlike i zbira dva broja, dobija se razlika njihovih kvadrata.

$$(a - b)(a + b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Pogledajmo nekoliko primera:

1) Rastaviti na proste faktore $9a^2 - 4b^2$. Na prvi pogled se vidi da je $9a^2$ kvadrat od $3a$, tj. $9a^2 = (3a)^2$, a $4b^2 = (2b)^2$. Dakle, $9a^2 - 4b^2$ je razlika kvadrata brojeva $3a$; $2b$.

$$9a^2 - 4b^2 = (3a)^2 - (2b)^2 = (3a - 2b)(3a + 2b)$$

Može se desiti da članovi datog binoma imaju zajednički faktor:

2) $50a^2bx^2 - 32a^2by^2 = 2a^2b\,(25x^2 - 16y^2) =$
$= 2a^2b\,(5x - 4y)(5x + 4y)$

3) $5m^3 - 5m = 5m\,(m^2 - 1) = 5m\,(m - 1)(m + 1)$

Zajednički faktor mogao bi da bude i binom.

4) $(a + b)\,x^2 - 4\,(a + b)\,y^2 = (a + b)\,(x^2 - 4y^2) =$
$= (a + b)(x - 2y)(x + 2y)$

5) $a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) =$
$= (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$

## 3. Zbir i razlika kubova

Izraz $a^3 + b^3$ je zbir, a $a^3 - b^3$ je razlika kubova brojeva $a$ i $b$. Ovi izrazi nisu prosti jer se i jedan i drugi mogu predstaviti kao proizvod od dva faktora i to:

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

To je najjednostavnije dokazati množenjem

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + a^2b - a^2b - ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - a^2b + a^2b - ab^2 + ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$$

Na taj način može se rastaviti na proste faktore bilo koji binom čiji su članovi kubovi nekih izraza. Naravno, treba prvo ispitati da li članovi tog binoma imaju zajednički deljitelj i ukoliko imaju treba taj zajednički faktor staviti ispred zagrada.

P r i m e r i :

1) Rastaviti na proste faktore $24pq^2x^3 - 81pq^2y^2$.

Prvo treba staviti ispred zagrade zajednički faktor $3pq^2$:

$$24pq^2x^3 - 81pq^2y^3 = 3pq^2 \cdot (8x^3 - 27y^3)$$

Nije teško zapaziti da u zagradama nije prost faktor nego je razlika kubova brojeva $2x$ i $3y$. Zaista $(2x)^3 = 8x^3$, a $(3y)^3 = 27y^3$. Kako zadatak glasi: rastaviti na *proste* faktore, izraz u zagradama mora se rastaviti na proste faktore:

$$24pq^2x^3 - 81pq^2y^3 = 3pq^2 (2x - 3y) (4x^2 + 6xy + 9y^2)$$

2) Rastaviti na proste faktore $5m^8n^7 + 5m^2n^4$

$$5m^8n^7 + 5m^2n^4 = 5m^2n^4 (m^6n^3 + 1)$$

Kako je u zagradama zbir kubova broja $m^2n$ i broja 1, to možemo napisati:

$$5m^8n^7 + 5m^2n^4 = 5m^2n^4 (m^2n + 1) (m^4n^2 - m^2n + 1)$$



## 4. Kvadrat zbira i razlike

Trinom $a^2 + 2ab + b^2$ je kvadrat zbira brojeva $a$ i $b$. To je lako dokazati:

$$(a + b)^2 = (a + b) (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Na isti način se može dokazati da je

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Prema tome trinom je kvadrat zbira ili razlike neka dva broja ako su dva njegova člana kvadrati tih brojeva, a treći član je njihov dvostruki proizvod. Ako je taj dvostruki proizvod pozitivan, onda je to kvadrat zbira, ako je, pak, negativan, onda je taj trinom kvadrat razlike.

P r i m e r i :

1) Rastaviti na proste faktore trinom

$$8x^3y^2 + 18xy^4 + 24x^2y^3$$

Kada stavimo pred zagradu zajednički faktor $2xy^2$, u zagradama ostaje kvadrat zbira brojeva $2x$ i $3y$. Pošto kod sabiranja važi komutativni zakon, red sabiraka može da bude proizvoljan.

$$8x^3y^2 + 18xy^4 + 24x^2y^3 = 2xy^2 (4x^2 + 9y^2 + 12xy) = \\ = 2xy^2 (2x + 3y)^2$$

2) $$45m^7n^{10} - 30m^5n^7 = 5m^3n^4 (9m^4n^6 - 6m^2n^3 + 1) = \\ = 5m^3n^4 (3m^2n^3 - 1)^2$$

## 5. Rastavljanje polinoma na proste faktore grupisanjem članova

Polinom $am + an + bm + bn + cm + cn$ može se rastaviti na dva prosta faktora ako se njegovi članovi vežu u grupe koje imaju zajedničke faktore. To bi se moglo postići ovako: Prvi i drugi član imaju zajednički faktor $a$; treći i četvrti član imaju zajednički faktor $b$, a peti i šesti $c$

$$am + an + bm + bn + cm + cn =$$

$$= a(m + n) + b(m + n) + c(m + n) = (m + n)(a + b + c)$$

Ovo bi se moglo postići i na drugi način: ako bi se formirale dve grupe članova, jedna koja sadrži faktor $m$, a druga koja sadrži faktor $n$. Koristeći komutativni zakon kod sabiranja dati polinom možemo napisati ovako:

$$am + bm + cm + an + bn + cn = m(a + b + c) + n(a+b+c) =$$
$$= (a + b + c)(m + n)$$

Primer:

Rastaviti na proste faktore $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$. Ako se formira grupa od prvog, drugog i četvrtog člana dobija se razlika kvadrata brojeva brojeva $a + b$ i $c$:

$$(a + b)^2 - c^2 = (a + b - c)(a + b + c)$$

Ima slučajeva kada datom polinomu treba dodati i oduzeti isti član pa onda izvršiti grupisanje članova. Na primer: treba rastaviti na proste faktore $x^4 + 4y^4$.

Ako se tom binomu doda i oduzme $4x^2y^2$, dobija se $x^4 + 4x^2y^2 + + 4y^4 - 4x^2y^2$. Dobijeni polinom može se napisati u obliku razlike kvadrata:

$$(x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$$

Da bi se u polinomu izvelo grupisanje članova, često je potrebno neki njegov član predstaviti kao zbir ili kao razliku dva monoma. To je naročito važno kod rastavljanja na proste faktore kvadratnog trinoma.

Uzmimo nekoliko primera.

1) Rastaviti na proste faktore trinom

$$x^2 + 5x + 6$$

Ovde treba srednji član $5x$ napisati kao zbir dva monoma $5x = 2x + 3x$

$$x^2 + 2x + 3x + 6 = x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x + 3)$$

Srednji član, dakle, treba napisati kao zbir tako da proizvod koeficijenta bude jednak slobodnom članu:

$$2x + 3x; \quad 2 \cdot 3 = 6$$

2) Uzmimo slučaj sada kada je slobodan član negativan:

$$a^2 - a - 12$$



Da vidimo prvo kako se može broj $-12$ predstaviti kao proizvod od dva faktora, a zatim odabraćemo one čiji je zbir $-1$.

$-12 = -1 \cdot 12$

$-12 = -2 \cdot 6$

$-12 = -3 \cdot 4$

$-12 = -4 \cdot 3$

$-12 = -6 \cdot 2$

$-12 = -12 \cdot 1$

Vidimo da zbir faktora $-4$ i $3$ daje $-1$.

Prema tome, možemo napisati:

$$a^2 - a - 12 = a^2 - 4a + 3a - 12 =$$
$$= a(a - 4) + 3(a - 4) = (a - 4)(a + 3)$$

## ZADACI

*Zad. 78.* Data su dva polinoma $A$ i $B$; naći polinome $A + B$ i $A - B$.

$$A = 2a^3 + 3a^2b - 5ab^2 + 4b^3; \quad B = 2a^3 - 3a^2b + 5ab^2 + 4b^3$$

*Zad. 79.* Izvršiti množenje polinoma:

1) $(2a + 3b - c)(2a + 3b + c)$
2) $(4x - 2y + 5z)(4x + 2y - 5z)$
3) $(a^n - b^n)(a^n + b^n)$
4) $(x^{10m} + x^{5m}y^{4n} + y^{8n}) \cdot (x^{5m} - y^{4n})$

*Zad. 80.* Podeliti polinome:

1) $(45a^3b^4 - 21a^5b^3 + 6a^7b^2 - 18ab^5) : (6a^3b - 3ab^2)$
2) $(18x^2 - 9x^3 - 8x + x^4) : (x^2 - 7x + 4)$
3) $(25cy^{14} + 6cy^2 - 19c^3y^6) : (5c^3y^6 - 3cy^2)$
4) $(5a^4x^2 + 4ax^5 - 27a^3x^3) : (2x^3 - 5ax^2)$
5) $(21a^6b + 20b^4 - 22a^2b^3 - 29a^4b^2) : (3a^2b - 5b^2)$
6) $(5x^2 + 13x + 2x^3 + 2) : (x^2 + 2x + 3)$
7) $(m^{12x} + n^{3y}) : (m^{4x} + n^y)$
8) $(2x^{2n} + 6a^2 + 7ax^n) : (2x^n + 3a)$
9) $(z^{6p} + 1) : (z^{2p} + 1)$
10) $(a^{4n} - 16) : (a^n - 2)$

*Zad. 81.* Za date monome naći najveći zajednički delitelj:

1) $a^6x^3z$; $a^5bx^2$; $a^7x^4$; $a^8x^5y$

2) $90a^4x^3z^2$; $54a^5b^2x^7$; $36a^2x^5y$

3) $60m^6n^5y^3$; $24a^2m^7n^3$; $36m^5n^4x^2$

*Zad. 82.* Rastaviti na proste faktore:

1) $5a^5b^2 + 5a^3b^4$

2) $3m^3n^4 - 6m^2n^5$

3) $48p^4x^5 + 72p^5x^3y$

*Zad. 83.* Rastaviti na proste faktore:

| | |
|---|---|
| 1) $4a^2 - 9b^2$ | 6) $a^3 - ab^2$ |
| 2) $a^2x^2 - n^2$ | 7) $k^3 - 4k$ |
| 3) $m^4n^2 - p^2$ | 8) $9x^5 - x^3y^2$ |
| 4) $a^2x^4 - 9y^2$ | 9) $18x^7y^4u^3 - 50x^5u^7v^6$ |
| 5) $a^4b^2 - 25$ | 10) $2a^3b^2 - 98a^{13}b^{10}$ |

U sledećim zadacima dati polinom rastaviti na proste faktore.

*Zad. 84.* $80a^6x^5y^2 + 125xy^8 - 200a^3x^3y^5$

*Zad. 85.* $56m^9n^7x^2 + 7n^4x^2$

*Zad. 86.* $75a^9p^5 - 147a^3pq^8$

*Zad. 87.** $3a^4b^3 - 36a^3b^3 + 105a^2b^3$

*Zad. 88.* $250a^7b^5 + 16ab^2c^9$

*Zad. 89.* $28v^3w^8 - 63u^6v^5w^4$

*Zad. 90.* $90a^2x^5 - 108a^2x^3 - 9a^2x^4$

*Zad. 91.* $75m^9p + 120m^6p^3q + 48m^3p^5q^2$

*Zad. 92.* $ax^2 + by^2 - bx^2 - ay^2$

*Zad. 93.* $81a^8b^3c - 3a^2c^{10}$

*Zad. 94.** $2x^2 + 7xy + 6y^2$

*Zad. 95.* $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$

*Zad. 96.* $a^{2n+1} - ab^{2n}$

*Zad. 97.* $16a^{6n+1}b^2 + 2ab^{3n+2}$

* Za zadatke obeležene zvezdicom data su uputstva.



## 5. ALGEBARSKI RAZLOMCI

### 1. Definicija i osnovne osobine algebarskih razlomaka

Razlomak, kod kojega su brojilac ili imenilac ili, pak, i jedno i drugo opšti brojevi ili racionalni algebarski izrazi, zove se algebarski ili opšti razlomak.

Na primer algebarski razlomci su izrazi:

$$\frac{5}{a^2 + b^2}; \quad \frac{p^3 + q^2}{7}; \quad \frac{3a^2b}{4c}; \quad \frac{2a - 3b}{a - 2}$$

pod pretpostavkom da su imenioci različiti od nule.

Algebarski razlomak je, dakle, izraz $\frac{A}{B}$ gde su $A$ i $B$ algebarski izrazi u kojima mogu biti zastupljene racionalne operacije. Ovde treba odmah podvući da *imenilac mora biti različit od nule.* To je neophodno zbog toga što jedino u tom slučaju izraz $\frac{A}{B}$ može imati neku određenu vrednost.

Zaista, ako je $B \neq 0$, razlomak ima određenu vrednost za bilo koju vrednost $A$. Ako je, na primer, $B = 3$. U slučaju da je i $A \neq 0$, na primer $A = 2$, imamo $\frac{A}{B} = \frac{2}{3}$. Ako je $A = 0$, i onda razlomak ima određenu vrednost $\frac{A}{B} = \frac{0}{3} = 0$. Ako je pak $B = 0$, $\frac{A}{B}$ nema smisla. Za $A = 0$, $\frac{A}{B} = \frac{0}{0}$ neodređeno. Za $A \neq 0$, $\frac{A}{B} = \frac{2}{0}$ uopšte nije broj. U opštem slučaju opšti broj na primer $a$ može pripadati intervalu $a \in (-\infty, +\infty)$ ili $-\infty < a < +\infty$.

Međutim, u navedenom razlomku $\frac{2a - 3b}{a - 2}$ ne može da bude $a = 2$, jer je u tom slučaju imenilac $a - 2 = 0$.

U ovom slučaju $a$ mora zadovoljavati uslov $-\infty < a < 2$ ili $2 < a < +\infty$, što se može napisati i ovako:

$$a \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

To se obično piše jednostavnije:

$$a \neq 2$$

Uzmimo još jedan primer:

Razlomak $\frac{7}{m^2 - 9}$ ima smisla jedino ako $m \neq 3$ i $m \neq -3$, što bi se moglo napisati i ovako:

$$|m| \neq 3$$

U razlomku $\frac{5}{a^2 + b^2}$ mora biti zadovoljen uslov $a \neq 0$ i $b \neq 0$. U toku daljeg izlaganja operacije sa razlomcima to se neće uvek naglašavati, ali će se uvek podrazumevati da je imenilac razlomka različit od 0.

## 2. Proširivanje i skraćivanje razlomka

Videli smo ranije da je količnik dva jednaka broja različitih od nule jednak jedinici, tj. $\frac{m}{m} = 1$ za svako $m \neq 0$.

Prema tome:

$$\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{m}$$

ili $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} \quad m \neq 0$

Ovo znači da se vrednost razlomka neće promeniti ako mu se i brojilac i imenilac pomnože sa bilo kojim istim brojem koji je različit od nule.

Ta operacija se često koristi i zove se *proširivanje* razlomka.

Očigledno je da važi i obrnuto:

$$\frac{am}{am} = \frac{a}{b}$$

Kako je $am : m = a$ i $bm : m = b$, znači da se vrednost razlomka neće promeniti ako mu se i brojilac i imenilac podele sa bilo kojim istim brojem koji je različit od nule. Ta operacija se često koristi u matematici i zove se *skraćivanje* razlomaka.



Ako su i brojilac i imenilac razlomka monomi, skraćivanje se može pristupiti odmah deljenjem i brojioca i imenioca sa njihovim najvećim zajedničkim deliteljem.

Primer:

1) $\frac{4a^2b^3}{6a^3b^2} = \frac{2b}{3a}$,

razlomak je skraćen sa $2a^2b^2$ uz pretpostavku da je $ab \neq 0$.

2) $\frac{45m^5n^2x}{30m^3n^3x} = \frac{3m^2}{2n}$

razlomak je skraćen sa $15m^3n^2x$ uz pretpostavku da je $mnx \neq 0$. Da je izraz sa kojim se razlomak krati različit od nule neće se uvek naglašavati, ali se to uvek pretpostavlja.

Ako se u razlomku $\frac{A}{B}$, $A$ i $B$ polinomi ili je, pak jedno od njih polinom, onda se *ne može* odmah pristupiti skraćivanju, nego se mora prvo polinom rastaviti na proste faktore i ukoliko u brojiocu i u imeniocu ima zajedničkih faktora, onda ti faktori, uz pretpostavku da su različiti od nule, mogu skratiti.

Primer:

1) $\frac{a^2 + ab}{ab + b^2} = \frac{a(a + b)}{b(a + b)} = \frac{a}{b}$ skraćeno sa $a+b$

2) $\frac{a^2 - ab}{b^2 - ab} = \frac{a(a - b)}{b(b - a)} = \frac{-a(b - a)}{b(b - a)} = -\frac{a}{b}$

Kako $a - b$ i $b - a$ (po pretpostavci $a \neq b$) nije isto trebalo je izvršiti transformaciju $a(a - b) = -a(b - a)$. Mogla bi se ista transformacija izvršiti u imeniocu $b(b - a) = -b(a - b)$.

3) $\frac{ap - am}{m^2 - p^2} = \frac{a(p - m)}{(m - p)(m + p)} = -\frac{a(m - p)}{(m - p)(m + p)} = -\frac{a}{m + p}$

4) $\frac{2am}{6am^2 - 4an^2} = \frac{2am}{2a(3m^2 - 2n^2)} = \frac{m}{3m^2 - 2n^2}$

5) $\dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + xy + xz + yz} = \dfrac{(x + y)^2}{x(x + y) + z(x + y)} =$

$= \dfrac{(x + y)^2}{(x + y)(x + z)} = \dfrac{x + y}{x + z}$

## ZADACI

*Zad. 98.* Skratiti razlomke:

1) $\dfrac{10a^6b^3}{15a^5b^4}$ 4) $\dfrac{51ax^3y^4}{34axy^3}$

2) $\dfrac{28m^3nx}{21m^2n^3x}$ 5) $\dfrac{72a^3p^2}{90a^4p^2}$

3) $\dfrac{13pq^2}{91p^2q^2}$ 6) $\dfrac{23ax^3y^2}{92ax^4y^2}$

*Zad. 99.* Skrati razlomke:

1) $\dfrac{x^2}{x^2 + ax}$ 2) $\dfrac{5p^4x^3}{5p^4x^3 + 35p^2x^3}$

3) $\dfrac{a^3b - a^2b^2}{a^3b + a^2b^2}$ 4) $\dfrac{m + m^2}{mn + n}$

5) $\dfrac{x^2 - x}{y - xy}$ 6) $\dfrac{ax + bx}{a^2 - b^2}$

7) $\dfrac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2 - 2uv}$ 8) $\dfrac{a^2 + 4a + 3}{a^2 + 5a + 6}$

9) $\dfrac{m^2 - 9n^2}{m^2 + 8mn + 15n^2}$ 10) $\dfrac{u + v + w}{u^2 + v^2 - w^2 + 2uv}$

11) $\dfrac{a^{k+1} - ab^k}{a^{2k+1} - ab^{2k}}$ 12) $\dfrac{x^{2n+1}y + xy^{2n+1} + (xy)^{n+1}}{x^{3n} + y^{3n}}$



### 3. Najmanji zajednički sadržilac

Sabiranje i oduzimanje razlomaka kod kojih je imenilac isti svodi se na sabiranje, odnosno oduzimanje njihovih brojilaca dok je imenilac zbira ili razlike njihov zajednički imenilac, na primer:

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3 + 2}{7} = \frac{5}{7} \quad \text{ili}$$

$$\frac{3}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3 - 2}{7} = \frac{1}{7}.$$

Isto je i kod algebarskih razlomaka. Ako su $A$, $B$ i $C$ bilo kakvi racionalni algebarski izrazi, onda

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A + B}{C} \quad \text{ili} \quad \frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A - B}{C}.$$

Ako je, pak, potrebno sabrati dva razlomka kod kojih su imenioci različiti. U tom slučaju, proširivanjem oba razlomka, ili samo jednog od njih, postiže se to da im imenioci budu isti. Moramo, dakle, prethodno te razlomke dovesti na zajednički imenilac.

Treba, na primer, sabrati dva razlomka $\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{6}$. Dovoljno je prvi razlomak proširiti sa 3, a drugi sa 2, pa da im imenioci budu isti:

$$\frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{9 + 2}{12} = \frac{11}{12}.$$

Postavlja se pitanje: kako se određuju brojevi kojima treba proširiti razlomke da bi im imenioci postali jednaki.

U posmatranom primeru imamo $4 \cdot 3 = 12$ i $6 \cdot 2 = 12$. To znači da zajednički imenilac mora biti deljiv sa imeniocima datih razlomaka $\frac{12}{4} = 3$; $\frac{12}{6} = 2$. Broj koji je deljiv sa dva ili više brojeva odnosno koji sadrži dva ili više brojeva, zove se zajednički sadržalac tih brojeva. Očigledno je da broj 12 nije jedini broj koji sadrži brojeve 4 i 6. Jasno je da takvih brojeva ima beskonačno mnogo: 24, 36, 48, 60 itd. Svaki od njih je, dakle, zajednički sadržalac brojeva 4 i 6, ali 12 je među njima najmanji. Najmanji broj koji sadrži dva ili više datih brojeva zove se *najmanji zajednički sadržalac* (Nzs) tih brojeva.

Da vidimo sada kako se nalazi Nzs za monome. Uzmimo konkretan primer. Treba naći Nzs za tri monoma:

$$15b^5; \quad 12a^4c^3; \quad 20b^4c$$

Prvo se koeficijenti rastave na proste faktore:

$$3 \cdot 5b^5; \quad 2^2 \cdot 3a^4c^3; \quad 2^2 \cdot 5b^4c.$$

Pre svega, da bi traženi monom bio deljiv sa svakim od datih monoma u njemu moraju biti zastupljeni svi faktori koje sadrže dati monomi. Osim toga, svaki faktor ulazi u Nzs na onaj stepen koji je za njega u datim monomima *najviši*.

To znači da za date monome

$$\text{Nzs} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^4b^5c^3 = 60a^4b^5c^3$$

Da bi se našao Nzs za polinome, moraju se prethodno dati polinomi rastaviti na proste faktore od kojih se na isti način kao i za monome formira Nzs. Kako su prosti faktori polinoma polinomi, to Nzs polinoma je polinom koji je deljiv sa svim datim polinomima.

P r i m e r i :

Naći Nzs za polinome

1) $2ab^2m^2 - 2ab^2n^2$ i $3a^3m^3 + 6a^3m^2n + 3a^3mn^2$

$$2ab^2m^2 - 2ab^2n^2 = 2ab^2(m - n)(m + n)$$

$$3a^3m^3 + 6a^3m^2n + 3a^3mn^2 = 3a^3m(m + n)^2$$

$$\text{Nzs} = 6a^3b^2m(m - n)(m + n)$$

2) $a^4 - b^4; \quad a^2 - ab^5 \quad a^2 + b^2 + 2ab$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

$$a^2 - ab = a(a + b)$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$

Nzs $= a(a - b)(a + b)^2(a^2 + b^2)$, što bi se moglo napisati i u obliku $a(a + b)(a^4 - b^4)$



**Z A D A C I**

*Zad. 100.* Naći Nzs za date monome

1) $ax;\ bx;$ 2) $6a^3b;\ 4ab^2;$ 3) $8n^5v^3;\ 18n^2v^4$

4) $3m^5nx^2;\ m^3n^4;$ 5) $25pq^5;\ 35ap^4;\ 15a^2q^3$

6) $15ab^5;\ 9a^3c^4;\ 12b^2c;\ 20$

*Zad. 101.* Naći Nzs za date polinome

1) $a^2 - ab;\ ab - b^2;$ 2) $am + an;\ bm + bn$

3) $a^2x^2 - a^2x;\ ab^3x - ab^3;$ 4) $a^2m + a^2n;\ b^3n + b^3m$

5) $4ax - 4ay;\ 6by - 6bx;$ 6) $4ax + 4ay;\ 6x^2 - 6y^2$

7) $4a^2 + 4b^2 - 8ab;\ 6a^2 - 6b^2$

8) $16a^2x^4 + 9a^2y^2 + 24a^2x^2y;\ 16ab^3x^4 - 9ab^3y^2$

9) $ax^2 + 5ax + 6a;\ b^2x^2 + 6b^2x + 9b^2$

10) $2a^2 + 6ab + 4b^2;\ 3a^2 + 12ab + 12b^2$

11) $a^2n + 4an + 3n;\ a^2p^3 + 5ap^3 + 6p^3;\ a^2m^2 + 3am^2 + 2m^2$

12) $a^3 - b^3;\ a^2 - b^2$

## 4. Sabiranje i oduzimanje algebarskih razlomaka

Da bi se razlomci sabrali ili oduzeli, ukoliko im imenioci nisu jednaki, moraju se prethodno dovesti na zajednički imenilac. Zajednički imenilac razlomka je najmanji zajednički sadržatelj imenilaca tih razlomaka. Ovde treba razlikovati dva slučaja. Prvo, ako su imenioci razlomka monomi i, drugo, ako su imenioci polinomi.

Razmotrimo prvo slučaj kada su imenioci monomi. U tom slučaju može se odmah ispod razlomačke crte napisati zajednički imenilac tih razlomaka. Da bi se odredio brojilac zbira odnosno razlike datih razlomaka, postupa se ovako: iznad, brojilaca datih razlomaka nacrtaju lukovi i u svaki se upiše proizvod onih faktora koji nedostaju imeniocu tog razlomka do zajedničkog imenioca. To su, u stvari, izrazi kojima treba proširiti taj razlomak da bi mu imenilac bio jednak sa imeniocima ostalih razlomaka. Taj izraz se dobija, dakle, deljenjem nađenog zajedničkog imenioca sa imeniocem dotičnog razlomka.

Algebarski zbir proizvoda tako dobijenih izraza sa brojiocima datih razlomaka je brojilac njihovog zbira, odnosno razlike.

Pogledajmo primer u kojem je zastupljeno sabiranje i oduzimanje algebarskih razlomaka čiji su imenitelji monomi.

$$\frac{\overset{\diagdown 2ab}{5a+3c}}{9c}-\frac{\overset{\diagdown 18ac}{2a}}{b}-\frac{\overset{\diagdown 9b}{a^2-bc}}{2ac}+\frac{\overset{\diagdown 9ac}{4a-b}}{2b}-\frac{\overset{\diagdown 3bc}{3b-a}}{6a}=$$

$$=\frac{2ab\,(5a+3c)-36a^2c-9b\,(a^2-bc)+9ac\,(4a-b)-3bc\,(3b-a)}{18abc}=$$

$$=\frac{10a^2b+6abc-36a^2c-9a^2b+9b^2c+36a^2c-9abc-9b^2c+3abc}{18abc}$$

U tako dobijenom brojiocu treba izvršiti redukciju i posle toga, ako je moguće, skratiti razlomak. Posle redukcije imamo:

$\frac{a^2b}{18abc}$ a, posle skraćivanja sa $ab$, dobijamo rezultat $\frac{a}{18c}$

Ako su, pak, imenioci datih razlomaka polinomi, onda prepisujemo sve razlomke rastavljajući njihove imenioce, gde je to moguće, na proste faktore. Ako su imenioci svih razlomaka prosti izrazi, onda je zajednički imenilac tih razlomaka proizvod njihovih imenilaca. Pogledajmo nekoliko primera.

1) $$\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}-\frac{2ab}{a^2-b^2}=\frac{\overset{\diagdown a+b}{a}}{a-b}-\frac{\overset{\diagdown a-b}{b}}{a+b}-\frac{\overset{\diagdown 1}{2ab}}{(a-b)(a+b)}=$$

$$=\frac{a(a+b)-b(a-b)-2ab}{(a-b)\,(a+b)}=\frac{a^2+ab-ab+b^2-2ab}{(a-b)\,(a+b)}=$$

$$=\frac{a^2+b^2-2ab}{(a-b)(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}$$

i posle skraćivanja sa $a-b$ pod pretpostavkom da $a \neq b$ dobijemo rezultat $\frac{a-b}{a+b}$

2) $$\frac{2}{a}+\frac{3}{b-2a}-\frac{2a-3b}{4a^2-b^2}$$



Ovde vidimo da se imenilac trećeg razlomka može napisati $4a^2-b^2=(2a-b)(2a+b)$, ali, kako u drugom razlomku imamo imenilac $b-2a$, potrebno je izvršiti transformaciju:

$$\frac{2}{a}+\frac{3}{b-2a}+\frac{2a-3b}{b^2-4a^2}=$$

$$=\frac{\overset{\diagdown b^2-4a^2}{2}}{a}+\frac{\overset{\diagdown a(b+2a)}{3}}{b-2a}+\frac{\overset{\diagdown a}{2a-3b}}{(b-2a)\,(b+2a)}=$$

$$=\frac{2(b^2-4a^2)+3a(b+2a)+a(2a-3b)}{a(b-2a)(b+2a)}=$$

$$=\frac{2b^2-8a^2+3ab+6a^2+2a^2-3ab}{a(b-2a)(b+2a)}=\frac{2b^2}{a(b^2-4a^2)}$$

3) $$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$$

Kako su u sva tri imenilaca zastupljena svega tri različita binoma faktora, to treba prethodno u tom smislu izvršiti njihovu transformaciju:

$$b(b-a)(b-c)=-b(a-b)(b-c)$$

$$c(c-a)(c-b)=c(a-c)(b-c)$$

Posle ove transformacije imamo:

$$\frac{\overset{\diagdown bc(b-c)}{1}}{a(a-b)(a-c)}-\frac{\overset{\diagdown ac(a-c)}{1}}{b(a-b)(b-c)}+\frac{\overset{\diagdown ab(a-b)}{1}}{c(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{bc(b-c)-ac(a-c)+ab(a-b)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(a-b)(ab-ac-bc+c^2)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=$$

$$=\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{1}{abc}$$

## ZADACI

U sledećim zadacima izvršiti naznačene operacije.

*Zad. 102.*

1) $\frac{3x}{m}+\frac{2x}{m}+\frac{x}{m}$ 2) $\frac{3z}{2m}-\frac{7z}{2m}$

3) $\frac{5}{3a}+\frac{2}{3a}-\frac{4}{3a}$ 4) $\frac{a}{3x}+\frac{4a}{3x}-\frac{5a}{3x}$

5) $\frac{a+b}{b}+\frac{a-b}{b}$ 6) $\frac{a+b}{b}-\frac{a-b}{b}$

*Zad. 103.*

1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{3a}$ 2) $\frac{x}{4a}-\frac{x}{3a}+\frac{x}{6a}$

3) $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}$ 4) $\frac{5a}{12x^3y}-\frac{7a}{18xy^2}$

5) $\frac{3a+2b}{a}+\frac{2a^2-2b^2}{ab}$ 6) $\frac{2a^2-2b}{ab}-\frac{2a-3b}{b}$

*Zad. 104.* $\frac{2xy}{x^2-y^2}-\frac{y}{x+y}+\frac{x}{x-y}$

*Zad. 105.* $\frac{a}{a-b}+\frac{3a}{a+b}-\frac{2ab}{a^2-b^2}$

*Zad. 106.* $\frac{3x^2+2y^2}{x^2-y^2}-\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}$

*Zad. 107.* $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+\frac{a-b}{a+b}$

*Zad. 108.* $\frac{2a+3x}{2a-3x}-\frac{2a-3x}{3x-2a}$

*Zad. 109.* $\frac{2}{2a+3}+\frac{3}{3-2a}+\frac{2a+15}{4a^2-9}$



*Zad. 110.* $\frac{a(16-a)}{a^2-4}+\frac{2a+3}{2-a}-\frac{2-3a}{a+2}$

*Zad. 111.* $\frac{2}{x^2-7x+10}-\frac{1}{5-x}-\frac{x}{x^2-4}$

*Zad. 112.* $\frac{3a-2a^2}{a^3-27}-\frac{1}{3-a}+\frac{a-3}{a^2+3a+9}$

*Zad. 113.* $\frac{2}{(x-a)(b-a)}-\frac{2}{(b-x)(a-b)}+\frac{3}{(x-a)(x-b)}$

### 5. **Množenje algebarskih razlomaka**

Kod množenja razlomaka sa celim izrazom ili celog izraza sa razlomkom treba brojilac razlomka pomnožiti sa tim celim izrazom: tako se dobija brojilac proizvoda dok imenilac ostaje isti.

Dakle $\frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b}$ ili $a\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$.

Ako celi izraz sadrži zajedničke faktore sa imeniocem razlomka, skraćivanje treba izvršiti pre množenja: $\frac{a}{b^2}\cdot b=\frac{a}{b}$ ili $\frac{a}{b}\cdot bc=ac$.

Kada se razlomak množi sa razlomkom, onda je proizvod razlomak u kojem je brojilac proizvod brojilaca, a imenilac proizvod imenilaca datih razlomaka: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}$. Ako broioci i imenioci datih razlomaka imaju zajedničke faktore, skraćivanje treba izvršiti pre množenja, a zatim množenjem preostalih faktora formirati brojilac i imenilac rezultata. U praksi skraćivanje se obično vrši prevlačenjem zajedničkih faktora.

$$\frac{a^3}{b^2c}\cdot\frac{b^3}{a^2c}\cdot\frac{c^3}{a^2b}=\frac{c}{a}$$

Ako su broioci i imenioci razlomka, koji se množe, polinomi, onda ih treba prvo rastaviti na proste faktore i izvršiti skraćivanje ako je moguće.

Primeri:

$$\frac{am^2-an^2}{a^2m-b^2m}\cdot\frac{a^2+ab}{m^2+mn}\cdot\frac{am-bm}{am-an}=$$

$$=\frac{a(m-n)(m+n)}{m(a-b)(a+b)}\cdot\frac{a(a+b)}{m(m+n)}\cdot\frac{m(a-b)}{a(m-n)}$$

Lako je zapaziti da je ovde mogućno skratiti sa $am(a-b)(a+b)\cdot(m-n)\cdot(m+n)\neq 0$ tako da se dobija rezultat $\frac{a}{m}$. Ako bi se pak izvršilo prvo množenje brojilaca i imenilaca, dobili bi se polinomi čije rastavljanje na proste faktore, a time i skraćivanje dobijenog razlomka, bilo znatno otežano.

## ZADACI

U sledećim zadacima izvršiti množenje algebarskih razlomaka.

*Zad. 114.*

1) $\frac{x^2y}{z^3}\cdot\frac{x^2z}{y^3}\cdot\frac{y^2z}{x^3}$

2) $\frac{2p^2q}{3r^3}\cdot\frac{6pr}{5q^2}\cdot\frac{15qr}{4p}$

3) $\frac{16n^2}{a^3m}\cdot\frac{3a^2}{2mn}\cdot\frac{a^2m^2}{12n}$

4) $2a^3b\cdot\frac{15b^2d}{14ac^5}\cdot\frac{4c^2d^3}{a^3b^2}\cdot\frac{21ac^3}{20d^4}$

5) $\frac{14a^2b}{45n^4}\cdot\frac{75a^2n}{4b^7}\cdot\frac{2b^3n^2}{35a^5}\cdot 3ab^2$

6) $-\frac{5}{9x^2}\cdot\frac{7m}{2}\cdot\left(\frac{4x}{5m}-\frac{2x}{7m}\right)$

*Zad. 115.* $\frac{a^2+ab}{c^2+bc}\cdot\frac{ab+ac}{b^2+ab}$



*Zad. 116.* $\frac{x-y}{x+y}\cdot\frac{x^2-y^2}{xy-y^2}$

*Zad. 117.* $\frac{a^2-ab}{a^2-b^2}\cdot\frac{a+b}{a-b}$

*Zad. 118.* $\frac{x^2-2xy+y^2}{xy-y^2}\cdot\frac{y^2}{x^2-y^2}$

*Zad. 119.* $\frac{p^2+q^2}{q^4-p^4}\cdot(p-q)$

*Zad. 120.* $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab+b^2}\cdot\frac{a^3+b^3}{a-b}$

*Zad. 121.* $\frac{a^2x+abx+b^2x}{a^2-2ac+c^2}\cdot\frac{a^2+bc-ab-ac}{a^3-b^3}$

*Zad. 122.* $\left(\frac{a}{a-b}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)^{-1}$

*Zad. 123.* $\frac{(a+b)^{-1}}{(x-y)^{-2}}\cdot\frac{a^2+b^2+2ab}{x^2-y^2}$

*Zad. 124.* $\left(\frac{a^{2n}-b^{2n}}{m}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{m}{a^n-b^n}\right)^{-1}$

### 6. **Deljenje algebarskih razlomaka**

Deljenje je operacija suprotna množenju. Zato, dabi se podelila dva izraza, potrebno je deljenik pomnožiti sa recipročnom vrednošću delitelja. Recipročna vrednost celog izraza $a$ je $\frac{1}{a}$, a recipročna vrednost razlomka $\frac{a}{b}$ je razlomak $\frac{b}{a}$. Tako da se deljenje razlomka svodi na množenje. Ovde treba napomenuti da, ako je deljitelj ceo izraz i ako je brojilac deljenika deljiv sa tim izrazom, onda je jednostavnije podeliti broilac sa deliteljem:

$$\frac{ab}{c}:b=\frac{a}{c}$$

## ZADACI

U sledećim zadacima izvršiti naznačene operacije.

Zad. 125. $\dfrac{27x^3y^2}{20a^2b^3} : \dfrac{18x^2y^3}{5a^3b^2}$

Zad. 126. $\dfrac{7a^2b^3}{m} : \dfrac{21a^3b^3}{m}$

Zad. 127. $\dfrac{28a^5b^3}{15m^2n^3} : \dfrac{21a^4b^5}{10m^3n^2}$

Zad. 128. $15k^5l^3 : \dfrac{20k^3l^5}{3a}$

Zad. 129. $13p^3q^2 : \dfrac{52ap^5}{5q}$

Zad. 130. $35a^2b^3c : \left(\dfrac{a^2b}{2c} + \dfrac{2a^2b}{3c}\right)$

Zad. 131. $\dfrac{39a^3x^5}{4b^3} : 13a^2x^3$

Zad. 132. $\left(\dfrac{3a^5b^2}{4c^2} + \dfrac{4a^5b^2}{3c^2}\right) : 5a^3b^2$

Zad. 133. $\dfrac{a^2 + a}{ab - b} : \dfrac{a^2b^2 + ab^2}{a - 1}$

Zad. 134. $\dfrac{m^4 - m^3n}{mn + n^2} : \dfrac{m^3n - m^2n^2}{mn^2 + n^3}$

Zad. 135. $\left(\dfrac{a}{a + b} + \dfrac{b}{a - b} - \dfrac{ab}{a^2 - b^2}\right) : \dfrac{a^3 + b^3}{a^2 + 2ab + b^2}$

Zad. 136. $\left(\dfrac{m}{am + an} + \dfrac{3}{2m + 2n}\right) : \dfrac{2mn + 3an}{m^2 + mn}$



Zad. 137. $\left(\dfrac{2}{9a^2 - 4} + \dfrac{1}{6a + 4}\right) : \left(\dfrac{3}{3a - 2} - \dfrac{1}{a}\right)$

Zad. 138. $\left(\dfrac{1}{4m^2 - 1} + \dfrac{1}{4m + 2}\right) : \left(\dfrac{4}{2m - 1} - \dfrac{2}{m}\right)$

### 7. **Dvojni razlomci**

Dvojni razlomak je takav razlomak kod njega su brojilac i imenilac, ili pak samo broilac, ili samo imenilac razlomci:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}; \qquad \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{m}; \qquad \frac{n}{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}; \qquad \frac{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}$$

Lako je dvojni razlomak transformirati u običan. Ako su i brojilac imenilac monomi, onda se može izvršiti prosto deljenje brojioca sa imeniocem

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Ako se, pak, u dvojnom razlomku javljaju polinomi, onda je najjednostavnije postupiti ovako: prvo se nađe Nzs svih imenioca i sa tim izrazom se proširi razlomak čime je on transformisan u običan.

Primeri:

1) $\dfrac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}$ Nzs za brojeve 3, 4 i 6 je 12. Proširivanjem razlomka sa 12 dobija se $\dfrac{4 - 3}{3 + 2} = \dfrac{1}{5}$

2) $\dfrac{\frac{a - b}{ab}}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}$ Za izraze $ab$, $a^2$ i $b^2$ Nzs $= a^2b^2$. Ako se dati razlomak proširi sa $a^2b^2$, dobija se običan razlomak $\dfrac{ab(a - b)}{a^2 - b^2}$ ili, posle skraćivanja, $\dfrac{ab}{a + b}$.

## ZADACI

Dvojne razlomke transformisati u obične.

*Zad. 139.* 1) $\dfrac{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}}{\dfrac{z}{a}}$ 2) $\dfrac{\dfrac{a}{m}}{\dfrac{b}{m}+\dfrac{c}{m}}$

*Zad. 140.* 1) $\dfrac{\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{xy}{m}}{\dfrac{xy^2}{m}}$ 2) $\dfrac{\dfrac{pq^2}{n}}{\dfrac{p}{n}-\dfrac{pq}{n}}$

*Zad. 141.* 1) $\dfrac{\dfrac{a}{4}+\dfrac{a}{3}}{\dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{3}}$ 2) $\dfrac{\dfrac{5}{2a}-\dfrac{7}{6a}}{\dfrac{1}{3a}+\dfrac{1}{a}}$

*Zad. 142.* 1) $\dfrac{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{v^2}}{\dfrac{n^2+nv}{n^2v^2}}$ 2) $\dfrac{1-\dfrac{1}{a+1}}{1+\dfrac{1}{a-1}}$

*Zad. 143.* $\dfrac{p+\dfrac{pq}{p-q}}{p-\dfrac{pq}{p+q}}$

*Zad. 144.* $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}}$

*Zad. 145.* $\dfrac{1+\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2ac}}{\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+1}:\dfrac{\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}-\dfrac{1}{ac}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{c}{ab}}$



# JEDNAČINE

Jednakost koja sadrži poznate i nepoznate veličine može da bude *identičnost* ili *jednačina*. Ako to nije posebno naznačeno, onda kao nepoznate smatraju se obično poslednja slova latinske abecede: $x$, $y$, $z$, $u$, $v$, $t$. . . . a kao poznate smatraju se prva slova $a$, $b$, $c$,. . . . $m$, $n$,. . . $p$, $q$,. . . .

Identičnost (ili identitet) je takva jednakost kod koje je leva strana jednaka desnoj za bilo koje vrednosti opštih brojeva:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b); \qquad x + 1 = 1 + x$$

$$2(x+1) + 3 = 2x + 5$$

Ako je pak leva strana jednaka desnoj za neku (ili samo za neke određene vrednosti nepoznatih), takva jednakost se zove *jednačina*.

Kao primer, jasnoće radi, uzmimo jednačinu sa jednom nepoznatom: $2x - 3 = 5$. Leva strana ove jednačine jednaka je desnoj onda (i samo onda) ako je $x = 4$. Za broj 4 kažemo da *zadovoljava* jednačinu, jer, ako se na mesto $x$ stavi 4, jednakost je zadovoljena, tj. njena leva strana jednaka je desnoj. Vrednost nepoznate koja zadovoljava jednačinu zove se *koren* jednačine ili njeno *rešenje*. Ova jednačina ima samo jedno rešenje. Međutim, jednačina može imati dva, tri ili više rešenja. Jednačina $x^2 + 6 = 5x$ ima na primer dva korena: $x = 2$ i $x = 3$ jer za obe ove vrednosti $x$ jednačina je zadovoljena. Ova jednačina je drugog stepena jer je najviši stepen nepoznate koji je u njoj zastupljen — drugi. Ta jednačina mogla bi se napisati ovako $x^2 - 5x + 6 = 0$ ili, ako se njena leva strana rastavi na proste faktore, $(x-2)\cdot(x-3) = 0$. Odmah se vidi da za $x = 2$ prvi faktor je 0, a za $x = 3$, nula je drugi faktor. Dovoljno je da jedan faktor bude nula da bi vrednost proizvoda bila nula.

Najviši stepen nepoznate je stepen jednačine. Tako, na primer, jednačina $2x^5 + 3x^2 - 2x + 7 = 0$ je petog stepena. Jednačina ima onoliko rešenja kojeg je ona stepena.

Jednačina prvog stepena zove se *linearna*.

### 1. LINEARNA JEDNAČINA SA JEDNOM NEPOZNATOM

Rešiti jednačinu znači naći njen koren, tj. vrednost nepoznate koja zadovoljava tu jednačinu. Rešavanje jednačine sastoji se u transformacijama algebarskih izraza dok se ne dođe do oblika $x = a$, gde je $a$ rešenje jednačine. Ove transformacije oslanjaju se na ove postavke: 1. Jednakost se neće narušiti ako se i levoj i desnoj strani doda ili oduzme ista veličina. Zaista, ako imamo, na primer $5 = 5$; $5 + 3 = 5 + 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow 8 = 8$; ili $5 - 2 = 5 - 2$ $3=3$. Ako imamo jednačinu $2x - 3 = 5$. Dodamo li i levoj i desnoj strani 3, dobijamo $2x - 3 + 3 = 5 + 3$ ili $2x = 8$. To znači da se bilo koji član jednačine može preneti sa jedne strane na drugu uz promenu znaka.

To omogućuje da se na jednoj strani jednačine skupe svi članovi koji sadrže nepoznatu, a drugoj samo poznate veličine. 2. Jednakost se neće narušiti ako se i leva i desna strana pomnože ili podele sa istim brojem *različitim od nule*. U to se lako možemo uveriti: uzmimo, na primer, $10 = 10$. Ako pomnožimo obe strane, recimo sa 2, dobićemo opet jednakost $20 = 20$. Ako podelimo obe strane, na primer, sa 5, ni onda jednakost se neće narušiti: $2 = 2$.

Jednačine se mogu podeliti na *numeričke* ili *brojne* u kojima, osim nepoznate, sve ostale veličine su posebni brojevi i opšte koje, pored nepoznate i posebnih brojeva, mogu sadržati opšte brojeve koje se smatraju kao poznate veličine. Te poznate veličine zovu se parametri. Za dve jednačine koje imaju isto rešenje kažemo da su *ekvivalentne*. Rešavanje jednačine, dakle, sastoji se u tome da se od date jednačine transformacijom dobije druga jednačina koja je ekvivalentna sa datom, ali koja je od date jednostavnija. Taj se postupak nastavlja sve dotle dok se ne dobije najjednostavniji oblik $x = a$, koja je ekvivalentna sa datom i koja je njeno rešenje.

Rešimo jednu brojnu jednačinu:

$$8x - 7 = 5x + 8$$

Prenesimo prvo član koji sadrži nepoznatu ($5x$) sa desne strane na levu:

$$8x - 5x - 7 = 8$$

Za ovu jednačinu kažemo da je ekvivalentna sa datom. Prenesimo sada $-7$ na desnu stranu:

$$8x - 5x = 8 + 7$$

Posle svođenja imamo:

$$3x = 15$$

Deljenjem obe strane jednačine sa 3, dobija se rešenje date jednačine:

$$x = 5.$$

Opšti oblik linearne jednačine sa jednom nepoznatom je

$$ax + b = 0$$



Njeno rešenje je, pod pretpostavkom da je $a \neq 0$, $x = -\dfrac{b}{a}$.

Pri rešavanju linearne jednačine sa jednom nepoznatom može nastupiti jedan od četiri slučaja:

1. $a \neq 0$. u tom slučaju jednačina ima jedno određeno rešenje $x = -\dfrac{b}{a}$ za $b \neq 0$. Ako je pak $b = 0$, onda je $x = 0$.

2. Ako je $a = 0$ i $b = 0$, onda njeno rešenje $x = \dfrac{0}{0}$ je neodređeno i takva jednačina se zove *neodređena*.

3. Ako je $a = 0$, a $b \neq 0$, onda je rešenje jednačine $x = \dfrac{b}{0}$ nije broj, tj. njeno rešenje je nemogućno naći u oblasti brojeva i zbog toga se jednačina zove *nemoguća*.

4. Ako se u toku rešavanja jednačina morala množiti ili deliti sa izrazom koji sadrži nepoznatu i ako za nađeno rešenje taj izraz postaje 0, to znači da dobijena jednačina nije ekvivalentna sa datom. Nađeno rešenje prema tome ne pripada datoj jednačini. U tom slučaju jednačina *nema rešenja*.

P r i m e r i :

1) $$\overset{14}{\frac{3z + 4}{5}} - \overset{10}{\frac{2(2z - 7)}{7}} = \overset{70}{3z} - \overset{35}{\frac{5z + 1}{2}} \,/70$$

$$14(3z + 4) - 20(2z - 7) = 210z - 35(5z + 1)$$

$$42z + 56 - 40z + 140 = 210z - 175z - 35$$

$$42z - 40z - 2107 + 175z = -35 - 56 - 140$$

$$-33z = -231 \mid \cdot (-1)$$

$$33z = 231 \mid : 33$$

$$z = 7$$

2) $$\frac{1}{x^2 + 7x + 12} + \frac{1}{x^2 + 9x + 20} = \frac{2}{x^2 + 8x + 15}$$

$$\overset{x+5}{\frac{1}{(x + 3)(x + 4)}} + \overset{x+3}{\frac{1}{(x + 4)(x + 5)}} = \overset{x+4}{\frac{2}{(x + 3)(x + 5)}} \,/ \cdot (x + 3)(x + 4)(x + 5)$$

$$x + 5 + x + 3 = 2(x + 4)$$

$$2x + 8 = 2x + 8$$

$$2x - 2x = 8 - 8$$

$$x(2 - 2) = 0 \Rightarrow x \cdot 0 = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{0}$$

Jednačina je neodređena.

Kako se u toku rešavanja i leva i desna strana jednačine morala množiti sa Nzs imenioca (da bi se dobili celi izrazi), $(x + 3)(x + 4)(x + 5) \neq 0$. Da taj ne bude 0, nijedan faktor ne može biti tj. $x \neq -3$; $x \neq 4$; $x \neq -5$. To znači u datoj jednačini nepoznata $x$ može imati sve vrednosti osim navedenih tj.

$$x \in (-\infty\ -5) \cup (-5, -4) \cup (-4, -3) \cup (-3, +\infty)$$

3) $$\frac{2y}{y^3 - 8} + \frac{y}{y^2 - 4} + \frac{1}{2 - y} = 0$$

$$\overset{x + 2}{\frac{2y}{(y - 2)(y^2 + 2y + 4)}} + \overset{y^2 + 2y + 4}{\frac{y}{(y - 2)(y + 2)}} =$$

$$= \overset{(y + 2)(y^2 + 2y + 4)}{\frac{1}{y - 2}} \; / \, (y - 2)(y + 2)(y^2 + 2y + 4)$$

$$2y^2 + 4y + y^3 + 2y^2 + 4y = y^3 + 2y^2 + 2y^2 + 4y + 4y + 8$$

$$y^3 - y^3 + 4y^2 - 4y^2 + 8y - 8y = 8$$

$$y(8 - 8) = 8 \Rightarrow y \cdot 0 = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{0}$$

Jednačina je nemoguća.

4) $$\frac{5}{x - 1} + \frac{2}{x + 1} = \frac{10}{x^2 - 1}$$

$$\overset{x+1}{\frac{5}{x - 1}} + \overset{x - 1}{\frac{2}{x + 1}} = \overset{1}{\frac{10}{(x - 1)(x + 1)}} \; / \cdot (x-1)(x+1)$$



Da bi $(x - 1)(x + 1) \neq 0$ mora biti $x \neq 1$ i $x \neq -1$, što bi se moglo napisati jednostvanije $|x| \neq 1$.

$$5x + 5 + 2x - 2 = 10 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

$$7x = 10 - 5 + 2 \Rightarrow 7x = 7 \text{ ili } x = 1$$

Kako je za nađeno $x = 1$ izraz $(x - 1)(x + 1) = 0$, ta jednačina (a) nije ekvivalentna sa datom jednačinom. Stoga $x = 1$ *nije* rešenje date jednačine. Prema tome data jednačina *nema* rešenja.

5) $$a^2(y - 1) - b(by - 2a) = b^2$$

$$a^2y - a^2 - b^2y + 2ab = b^2$$

$$y(a^2 - b^2) = a^2 - 2ab + b^2$$

$$y = \frac{(a - b)^2}{(a - b)(a + b)}$$

Posle skraćivanja, pod pretpostavkom da $a - b \neq 0$, dobija se rešenje

$$y = \frac{a - b}{a + b}$$

6) $$\frac{18ac}{9c^2 - z^2} + \frac{z}{z - 3c} = \frac{z}{3c + z}$$

$$\overset{1}{\frac{18ac}{(3c - z)(3c + z)}} - \overset{3c+z}{\frac{z}{3c - z}} = \overset{3c-z}{\frac{z}{3c + z}} \; / \, (3c - z)(3c + z)$$

$$|z| \neq 3c$$

$$18ac - 3cz - z^2 = 3cz - z^2$$

$$18ac = 6cz \Rightarrow z = 3a$$

## ZADACI

Rešiti jednačine:

*Zad. 146.* $$\frac{2(3x + 1)}{7} - \frac{4x - 5}{3} = \frac{5x + 2}{2} - 5$$

*Zad. 147.* $$\frac{3n + 1}{5} - \frac{3(5n - 3)}{4} = n - \frac{5(3n - 5)}{2}$$

Zad. 148. $\frac{z+4}{z+1}+\frac{3z}{2z^2-2}+\frac{z+1}{1-z}=0$

Zad. 149. $\frac{x-3}{x+1}-\frac{2x+1}{2+2x}=0$

Zad. 150. $\frac{y+2}{2y^2+y}+\frac{1}{1-2y}+\frac{1}{4y^2-1}=0$

Zad. 151. $\frac{k^2}{k^4-1}+\frac{k}{k^2+1}=\frac{1}{k-1}$

Zad. 152. $\frac{3x+4}{x+1}=\frac{x}{x+x^2}+3$

Zad. 153. $\frac{\frac{x-1}{2}+1}{\frac{x+1}{2}-1}-\frac{\frac{x+1}{2}-1}{\frac{x-1}{2}+1}=\frac{x+15}{x^2-1}$

Zad. 154. $ax+b=c$; Zad. 155. $n=k+mx$

Zad. 156. $ab-bx=bc$; Zad. 157. $ax+bx-c=0$

Zad. 158. $mz+n(n-z)=m^2$

Zad. 159. $\frac{mx-1}{n^2}-\frac{nx+1}{m^2}=\frac{1}{mn}$

Zad. 160. $ab+ac-bc=0$

Rešiti 1) po $a$; 2) po $b$; 3) po $c$

Zad. 161. $\frac{z}{z-4m}-\frac{z}{4m+z}=\frac{16m}{z^2-16m^2}$

Zad. 162. $\frac{4x}{4x^2-a^2}+\frac{1}{a-2x}-\frac{1}{2x+a}=0$

Zad. 163. $\frac{z^2+3a^2}{z^2-az-bz+ab}-\frac{z-b}{z-a}+\frac{2a}{z-b}=0$



Zad. 164. $\frac{\frac{1}{t}+\frac{1}{a}}{\frac{1}{t}-\frac{1}{a}}-\frac{\frac{1}{t}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{t}+\frac{1}{a}}=\frac{a^2}{a^2-t^2}$

## 2. SISTEM LINEARNIH JEDNAČINA SA DVE NEPOZNATE

Opšti oblik linearne jednačine sa dve nepoznate je

$$ax+by+c=0$$

gde su nepoznate $x$ i $y$, a $a$, $b$, i $c$ su parametri ili $a$ i $b$ koeficijenti uz nepoznate, a $c$ slobodni član.

Postoji beskonačno mnogo parova brojeva koji zadovoljavaju tu jednačinu.

Razmotrićemo neku jednačinu sa dve nepoznate, na primer:

$$3x-2y-4=0$$

$$x=2;\quad x=4;\quad x=6;\quad x=-2;\quad x=\frac{5}{3}$$

$$y=1;\quad y=4;\quad y=1;\quad y=-5\quad y=\frac{1}{2}$$

Bilo koji od ovih parova brojeva zadovoljava tu jednačinu i, prema tome, je njeno rešenje. Jasno je da osim ovih rešenja postoji još beskonačno mnogo. Ako se ta jednačina reši po $y$

$$y=\frac{3x-4}{2}$$

onda za bilo koju vrednost $x$ može se izračunati vrednost $y$ i tako dobijeni par je rešenje posmatrane jednačine.

$$\text{Za } x=0 \quad y=\frac{3\cdot 0-4}{2}\Rightarrow y=-2$$

Znači i par $x=0$; $y=-2$ zadovoljava posmatranu jednačinu.

Jednačina bi se mogla rešiti i po $x$

$$x=\frac{2y+4}{3}$$

$$\text{Za } y=10 \quad x=\frac{2\cdot 10+4}{3}\Rightarrow x=8$$

Par $x = 8$; $y = 10$ isto zadovoljava posmatranu jednačinu. Neka su nam date dve linearne jednačine sa dve nepoznate:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

Kao što smo videli postoji beskonačno mnogo parova brojeva koji zadovoljavaju jednačinu (1). Jednačina (2) ima tako isto beskonačno mnogo rešenja. Postavlja se pitanje: da li u skupu rešenja jednačine (1) i jednačine (2) postoje zajednička. Takva rešenja mogu postojati, a mogu i da ne postoje.

Na primer jednačine

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ 4x - y &= 7 \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

Imaju zajedničko rešenje: $x = 2$; $y = 1$. Međutim, jednačine

$$x + y = 3$$

$$x + y = 8$$

nemaju zajedničko rešenje. Zaista ne postoje takva dva broja čiji bi zbir bio i 3 i 8.

Ako dve ili više jednačina sa istim nepoznatim imaju zajedničko rešenje, otuda se kaže da te jednačine obrazuju jedan sistem.

Rešiti sistem od dve linearne jednačine sa dve nepoznate znači naći vrednosti nepoznatih koje zadovoljavaju i jednu i drugu jednačinu. Kasnije ćemo videti da sistem linearnih jednačina ne može imati više od jednog rešenja.

Dva ili više sistema jednačina koji imaju isto rešenje zovu se *ekvivalentni*.

## 1. Rešavanje sistema linearnih jednačina sa dve nepoznate

Ukoliko obe jednačine sistema nisu date u obliku $ax + by + c = 0$, one se prvo dovedu transformacijama na taj oblik ili na oblik $ax + by = c$.

Rešavanje sistema jednačina

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

sastoji se u tome što iz dve jednačine sistema isključi (eliminiše) jedna — bilo koja — nepoznata tako da se dobije jedna jednačina koja sadrži



samo jednu nepoznatu. Time se rešavanje sistema jednačina sa dve nepoznate svodi na rešavanje jedne jednačine sa jednom nepoznatom. Za isključivanje jedne nepoznate postoji više načina koji se zovu metode eliminacije.

a) Metoda supstitucije (zamene)

Ako imamo sistem jednačina:

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

Bilo koja od ove dve jednačine reši se po jednoj nepoznatoj (bilo po $x$, bilo po $y$).

Rešenjem, recimo, jednačine (2) po $y$ imamo

$$y = \frac{c_2 - a_2x}{b_2} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

Kako u jednačinama (1) i (2) nepoznate moraju imati istu vrednost, to nađenu vrednost $y$ iz jednačine (2) možemo uvrstiti u jednačinu (1):

$$a_1x + \frac{b_1(c_2 - a_2x)}{b_2} = c_1 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

na taj način dobije se jednačina (4) koja sadrži samo jednu nepoznatu $x$. Jednačina (4), koja je rezultat eliminacije $y$ — na iz datog sistema, zove se *eliminaciona jednačina*.

Rešenjem te jednačine imamo:

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1},$$

a zamenom nađene vrednosti $x$ u (3) imamo

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Primer. Rešiti sistem jednačina.

$$2x + 3y = 12$$

$$3x - 2y = 5$$

Rešimo prvu jednačinu po $x$

$$x = \frac{12 - 3y}{2} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (a)$$

Zamenom u drugoj jednačini dobijamo eliminacionu jednačinu po $y$

$$\frac{3(12-3y)}{2}-2y=5$$

$$36-9y-4y=10 \Rightarrow 13y=26$$

ili $$y=2$$

zamenom nađene vrednosti u (a) dobijamo $x$:

$$x=\frac{12-3\cdot 2}{2} \Rightarrow x=3$$

Lako se uveriti da nađene vrednosti $x=3$; $y=2$ zadovoljavaju obe jednačine datog sistema.

b) Metoda jednakih koeficijenata

Ovde se ima u vidu jednakost koeficijenta uz neku nepoznatu i to na jednakost po apsolutnoj vrednosti.

Pođimo od primera:

1) Treba rešiti sistem jednačina

$$5x-3y=17$$
$$2x+3y=11$$

Ovde vidimo da su koeficijenti uz $y$ u tim jednačinama suprotni. Znači eliminisati $y$ iz ove dve jednačine možemo tako što ih saberemo. Eliminaciona jednačina je, dakle $7x=28$ iz koje se dobija $x=4$.

Zamenom te vrednosti u bilo koju jednačinu datog sistema, recimo u drugu, dobijamo:

$$2\cdot 4+3y=11 \Rightarrow 3y=3 \Rightarrow y=1$$

2) $4x+5y=14$

$6x+7y=20$

Ovde koeficijenti uz istu nepoznatu nisu jednaki, ali se može uvek postići to da budu po apsolutnoj vrednosti jednaki. U ovom slučaju lakše je postići da budu jednaki koeficijenti uz $x$. Za to je potrebno prvu jednačinu pomnožiti sa 3, a drugu sa 2, jer je Nzs za brojeve 4 i 6 je 12.

Posle množenja prve jednačine sa 3, a druge sa 2, imamo

$$12x+15y=42$$
$$12x+14y=40$$



U ovom slučaju da bi se poništio član koji sadrži $x$ (eliminisao $x$) moramo od jedne jednačine oduzeti drugu. Obično se oduzima tako da koeficijent uz nepoznatu u eliminacionoj jednačini bude pozitivan. Oduzimanjem druge jednačine od prve imamo $y=2$, a zamenom dobijamo $x$:

$$4x+5\cdot 2=14 \Rightarrow x=1.$$

Sistem jednačina u opštem obliku metodom jednakih koeficijenata rešili bismo ovako:

$$\begin{array}{ll|l} a_1x+b_1y=c_1 & \cdot b_2 & a_1b_2x+b_1b_2y=b_2c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 & \cdot b_1 & a_2b_1x+b_1b_2y=b_1c_2 \\ & & \hline x(a_1b_2-a_2b_1)=b_2c_1-b_1c_2 \end{array}$$

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$$

Zamenom u bilo koju od datih jednačina dobijamo

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

c) Metoda komparacije (upoređivanje)

Ova metoda se oslanja na aksiomu algebre:

$\left.\begin{array}{l} a=b \\ c=b \end{array}\right\} \Rightarrow a=c$, tj ako su dve veličine jednake trećoj, onda su one jednake međusobno.

Kako iste nepoznate u sistemu jednačina moraju imati istu vrednost, to se obe jednačine rešavaju po istoj nepoznatoj i jednakost dva tako dobijena izraza daje eliminacionu jednačinu.

$$a_1x+b_1y=c_1 \Rightarrow y=\frac{c_1-a_1x}{b_1}$$

$$a_2x+b_2y=c_2 \Rightarrow y=\frac{c_2-a_2x}{b_2}$$

Eliminaciona jednačina je, dakle,

$$\frac{c_1-a_1x}{b_1}=\frac{c_2-a_2x}{b_2}$$

Njeno rešenje je

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Zamenom u bilo koju jednačinu koja je već rešena po $y$ dobijamo:

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

d) Rešavanje sistema linearnih jednačina primenom determinante drugog reda

Tri različite metode primenjene na sistem linearnih jednačina sa dve nepoznate daju rešenje:

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}; \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Vrednost nepoznatih izražene su pomoću koeficijenta jednačina datog sistema. Pada u oči to da su imenioci u tim izrazima isti:

$$a_1b_2 - a_2b_1$$

Ta razlika proizvoda zove se *determinanta* i obeležava se simbolički

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Brojevi koji obrazuju determinantu zovu se njeni elementi. Elementi determinante su raspoređeni u *vrste*: $a_1$, $b_1$; $a_2$, $b_2$ i u *kolone* $a_1$, $a_2$; $b_1$, $b_2$. Ova determinanta ima dve vrste i dve kolone i zbog toga se zove determinanta drugog reda. Vrednost determinante drugog reda je razlika proizvoda elemenata koji pripadaju njenim dijagonalama.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

P r i m e r i :

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 6 \cdot 2 = 15 - 12 = 3$$

$$\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = -8 + 3 = -5$$



$$\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 3 - 0 \cdot 9 = 21$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = kab - kab - 0$$

Vrednost determinante često se obeležava grčkim slovom $\Delta$ (čita se delta). Dederminanta čiji su elementi koeficijenti uz nepoznate zove se glavna determinanta sistema

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta$$

Prema tome, može se napisati

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{\Delta}; \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{\Delta}$$

Nije teško zapaziti da su i brojioci tih izraza isto determinante. Ako stavimo

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad \text{i} \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta},$$

onda je

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = b_2c_1 - b_1c_2$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Ako se napiše sistem jednačina

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ — glavna determinanta sistema}$$

$\Delta\, x$ se dobija ako se u glavnoj determinanti sistema na mesto koeficijenta uz $x$ stave slobodni članovi. Ako se, pak, slodobni članovi stave na mesto koeficijenta uz $y$, dobija se $\Delta\, y$.

P r i m e r i :

1) Rešiti sistem jednačina:

$$5x + 2y = 12$$
$$6x + 3y = 15$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 6 \cdot 2 = 15 - 12 = 3$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 15 & 3 \end{vmatrix} = 12 \cdot 3 - 15 \cdot 2 = 36 - 30 = 6$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = 5 \cdot 15 - 6 \cdot 12 = 75 - 72 = 3$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1$$

2) Rešiti sistem jednačina:

$$ax + bz = a^3b + ab^3$$
$$bx + az = 2a^2b^2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} a^3b+ab^3 & b \\ 2a^2b^2 & a \end{vmatrix} = a^4b+a^2b^3 - 2a^2b^3 = a^4b - a^2b^3 = a^2b(a^2 - b^2)$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{a^2b(a^2 - b^2)}{a^2 - b^2} \qquad x = a^2b$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} a & a^3b+ab^3 \\ b & 2a^2b^2 \end{vmatrix} = 2a^3b^2 - a^3b^2 - ab^4 = a^3b^2 - ab^4$$

$$\Delta z = ab^2(a^2 - b^2)$$

$$\Delta z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{ab^2(a^2 - b^2)}{a^2 - b^2} \qquad z = ab^2$$



## Z A D A C I

Rešiti sistem jednačina:

*Zad.* 165. $2x + 3y = 19$
$3x - y = 12$

*Zad.* 166. $\frac{x-3}{2} + \frac{z+3}{4} = 2$
$x - z = 1$

*Zad.* 167. $\frac{13}{x^2 - y^2} + \frac{1}{x+y} = \frac{2}{x-y}$
$\frac{2x+7}{3y+4} = \frac{4x-1}{6y-5}$

*Zad.* 168.* $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} = \frac{5}{8}$
$\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = \frac{3}{8}$

*Zad.* 169. $x + y = a; \quad x - y = b$

*Zad.* 170. $x + y = 4m; \quad y - x = 2m$

*Zad.* 171. $ax - by = a + b; \quad x - y = 2$

*Zad.* 172. $mx + ny = a; \quad x + y = 1$

*Zad.* 173. $px + qy = a; \quad qx + py = b$

*Zad.* 174. $mx + ny = m^2; \quad x + y = n$

*Zad.* 175. $\frac{x}{a} + 2y = 5a; \quad x + ay = 3a^2$

*Zad.* 176. $qx + py = 3p^2q; \quad \frac{x}{p} - \frac{y}{q} = p$

*Zad.* 177. $\frac{x}{m} - \frac{y}{n} = 1; \quad \frac{x}{2m} + \frac{y}{3n} = 3$

Zad. 178. $p\left(1+\frac{x}{m}\right) - z = p$

$$m(z+1) - x(p+1) = 0$$

Zad. 179. $\frac{x+a}{a} + \frac{y+b}{b} = 10$

$$\frac{x-5a}{5} + \frac{y}{3} = b$$

Zad. 180. $\frac{x-ac}{a} + \frac{z}{b} = b$

$$\frac{x}{b} + \frac{z-bc}{c} = a$$

## PROBLEMI

### 1. PROBLEMI SA JEDNOM NEPOZNATOM

Svaki problem sadrži određene podatke i zahteve ili pitanja na koja treba dati odgovor u saglasnosti sa uslovom zadatka. Odaberimo jednu nepoznatu veličinu i označimo je nekim slovom, recimo sa $x$. Zavisnost te veličine od drugih nepoznatih i od datih veličina izrazimo jednačinom. Neko određeno pravilo za to ne postoji, jer uslovi zadatka mogu biti veoma različiti, ali se mogu ipak utvrditi neke osnovne odnose između nepoznatih veličina. Neka je, na primer, poznato da je zbir dva broja 10. Ako stavimo da je jedan od njih $x$, onda je drugi $10 - x$.

Uzmimo nekoliko primera.

1) Zbir dva broja iznosi 51. Jedan od njih je dva puta veći nego drugi. Naći te brojeve.

*I način.* Odmah vidimo da se u zadatku traže dva broja, ali oni su vezani uslovom: jedan je dva puta veći nego drugi. Neka je manji $x$, onda je veći $2x$. Kako njihov zbir treba da bude 51, imamo jednačinu:

$$x + 2x = 51$$

Njeno rešenje je $x = 17$. Uzeli smo da je $x$ manji broj, onda je veći 34.

Za tražene brojeve u zadatku su postavljena dva uslova:

1) da njihov zbir bude 51 i

2) da jedan od njih bude dva puta veći nego drugi.

Kako nađeni brojevi zadovoljavaju oba uslova — oni su traženi.



*II način.* Mogli smo $x$ uzeti kao veći broj, onda je manji $\frac{x}{2}$ i jednačina u tom slučaju izgledala bi drukčije:

$$\frac{x}{2} + x = 51.$$

Njeno rešenje je $x = 34$. Ali $x$ nam je sada veći broj, onda je manji 17.

U oba razmatrana načina prvo se realizovao drugi uslov, a zatim prvi. Moglo se, međutim, poći i obrnutim redom.

*III način.* Ako stavimo da je jedan broj $x$, onda, s obzirom na prvi uslov, drugi broj je $51 - x$. Neka je $x$ veći broj, onda je $51 - x$ broj koji je $x$ dva puta manji. To znači: ako se taj manji broj pomnoži sa 2, on će postati jednak sa $x$ tj.

$$x = 2(51 - x)$$

Rešenje ove jednačine $x = 34$.

*IV način.* Mogli smo uzeti da je $x$ manji broj. Iz ove postavke sledi jednačina: $2x = 51 - x$ čije je rešenje $x = 17$.

Svaki od ovih načina je ispravan zato što su u svakom ostvareni uslovi zadatka.

Treba napomenuti da uslovi ovog zadatka pružaju mogućnost da se postavi sistem od dve jednačine sa dve nepoznate. Neka je manji broj $x$, a veći $y$, onda imamo:

$$x + y = 51 \quad \text{— prvi uslov}$$

$$y = 2x \quad \text{— drugi uslov}$$

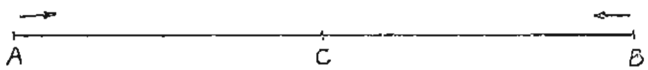
Rešenje ovog sistema $x = 17$ $y = 34$.

Ako su u problemu podaci opšti brojevi, onda isto, na osnovu uslova zadatka, moramo postaviti vezu između traženih veličina kao i između traženih i datih i, na osnovu uslova zadatka, postaviti jednačinu.

2) Iz mesta $A$ polazi putnik prema $B$, koje je od $A$ udaljeno $d$ km., a prelazi svakog sata $a$ km. Nakon $t$ sati iz $B$ prema $A$ polazi drugi putnik i prelazi svakog sata $b$ km. Kada i na kojem rastojanju od $A$ putnici će se sresti.

Prvo treba odabrati onu nepoznatu veličinu koju ćemo označiti, recimo, sa $x$. To bi moglo da bude rastojanje mesta susreta putnika ($C$) od mesta $A$ — dužina puta $\overline{AC}$ (sl. 28).

Mogli bismo sa $x$ obeležiti broj kilometara koji je do susreta prešao drugi putnik, dužina puta $\overline{BC}$. Kao nepoznata $x$ moglo bi se uzeti vreme (broj sati) koje je proteklo od polaska prvog (ili drugog) putnika do momenta njihovog susreta.




Sl. 28

Ako uzmemo da rastojanje $\overline{AC} = x$ km., onda je $\overline{BC} = d - x$ km. Pošto prvi putnik prelazi za 1 sat $a$ km. i da bi prešao put $x$ km njemu je potrebno $\frac{x}{a}$ sati. Drugom putniku je potrebno $\frac{d-x}{b}$ sati da pređe put $\overline{BC}$. Kako je drugi putnik pošao $t$ sati kanijse, broj $\frac{d-x}{b}$ manji je od $\frac{x}{a}$ za $t$. Zato, ako se broju $\frac{d-x}{b}$ doda $t$, on postaje jednak sa $\frac{x}{a}$. Imamo jednačinu:

$$\frac{x}{a} = \frac{d-x}{b} + t$$

Njeno rešenje je $x = \frac{a(d+bt)}{a+b}$ km

Vreme od polaska prvog putnika do susreta je

$$\frac{x}{a} = \frac{d+bt}{a+b}.$$

Možda je jednostavnije uzeti kao nepoznatu $x$ broj sati koji je proveo u putu prvi putnik. Tada je drugi putnik bio u putu $x - t$ sati. Kako je prvi putnik prelazio svakog sata $a$ km, on je prešao put $\overline{AC} = ax$ km. Drugi putnik je prešao $\overline{BC} = b(x - t)$. Pošto je $\overline{AC} + \overline{BC} = d$, možemo napisati jednačinu:

$$ax + b(x - t) = d$$



Njeno rešenje je

$$x = \frac{d+bt}{a+b} \text{ sati}$$

Rastojanje $\overline{AC}$ je onda $\frac{a(d+bt)}{a+b}$ km.

## ZADACI

*Zad. 181.* Zbir dva broja je $s$. Jedan od njih je $n$ puta veći od drugog. Naći te brojeve.

*Zad. 182.* Zbir dva broja je $s$. Jedna od njih je za $a$ veći od drugog. Naći te brojeve.

*Zad. 183.* Naći broj koji podeljen sa $a$ daje količnik $n$ i u ostatku $r$.

*Zad. 184.* Neko je kupio štof i platio $a$ din. Da je kupio $n$ metara manje platio bi $b$ dinara. Koliko je matara štofa kupljeno?

*Zad. 185.* Obim prednjeg točka kola je $a$ **m**. Obim zadnjeg točka je $b$ **m**. Koliki put treba da pređu kola da bi prednji točak izvršio $n$ obrataja više od zadnjeg?

*Zad. 186.* Obim zadnjeg točka kola je $a$ puta veći od obima prednjeg točka, Kola su prešla $m$ metara i na tom putu prednji točak je izvršio $k$ obrataja više od zadnjeg. Koliki je obim prednjeg točka, a koliki zadnjeg?

*Zad. 187.* Dva radnika obave neki posao za $a$ časova. Kada svaki od njih radi sam, onda prvi radnik obavi taj posao $m$ puta brže od drugog. Za koje vreme obavi taj posao prvi radnik, a za koje drugi?

*Zad. 188.* Dva putnika polaze istovremeno iz mesta $A$ i $B$, udaljenih međusobno $d$ km i kreću se u istom smeru. Prvi, koji polazi iz $A$ prema $B$, prelazi svakog sata $a$ km, a drugi $b$ km. Kada i na kojem rastojanju od $A$ prvi putnik stiže drugog?

## 2. PROBLEMI SA DVE NEPOZNATE

Ako smo u problemu dve nepoznate veličine označili nekim slovima, na primer, sa $x$ i $y$, to znači da na osnovu uslova zadatka moramo formirati sistem od dve jednačine u koje ulaze te nepoznate i ono što je u zadatku dato. Rešenje postavljenog sistema jednačina daje rešenje problema.

Uzmimo jedan primer.

Za 13 časova brod je prešao 140 km nizvodno i 24 km uzvodno. Drugi put za 11 časova je prešao 120 km nizvodno i 20 km uzvodno. Kolika je brzina broda u stajaćoj vodi, a kolika brzina reke.

Ako stavimo da je brzina broda u stajaćoj vodi $x \frac{\text{km}}{h}$, a brzina reke $y \frac{\text{km}}{h}$, onda se brod kreće brzinom $x + y$, kada ide nizvodno. Kada ide uzvodno njegova je brzina $x - y$. To znači da bi prešao nizvodno 140 km njemu je potrebno $\frac{140}{x+y}$ časova. Da bi prešao 24 km uzvodno potrebno mu je $\frac{24}{x-y}$ časova. Kako mu je za ceo taj put potrebno 13 časova, to znači da je

$$\frac{140}{x+y} + \frac{24}{x-y} = 13$$

Tako smo dobili jednu jednačinu sistema. Istim rasudivanjem dolazimo do druge jednačine sistema:

$$\frac{120}{x-y} + \frac{20}{x-y} = 11$$

Rešavanjem tog sistema jednačina (vidi zad. 168) dobijamo rešenje problema: brzina broda u stajaćoj vodi je $12 \frac{\text{km}}{h}$, a brzina reke je $8 \frac{\text{km}}{h}$.

### ZADACI

*Zad. 189.* Ako cifre dvocifrenog broja razmene mesta dobija se broj koji je za 3 veći od njegove polovine. Ako se, pak, taj broj podeli sa zbirom njegovih cifara, dobija se količnik 7. Naći taj broj.

*Zad. 190.* Zbir godina oca, sina i kćeri je 65. Otac je 4 puta stariji od kćeri. Pre pet godina sin je bio dva puta stariji od svoje sestre. Koliko je godina ocu, koliko sinu, a koliko kćeri?

*Zad. 191.* Dva biciklista kreću se po kružnoj putanji dužine $s$ metara. Kada se kreću u istom smeru prvi stiže drugoga svakih $a$ minuta, a kada se kreću u suprotnom smeru susreću se svakih $b$ minuta. Kolika je brzina prvog bicikliste, a kolika drugog?



*Zad. 192.* Knjige su raspoređene u dva ormana. Ako se iz prvog ormana premesti u drugi $a$ knjiga, u oba ormana biće isti broj knjiga. Ako se, pak, iz drugog premesti u prvi $b$ knjiga, u prvom će biti $n$ puta više nego u drugom. Koliko je knjiga u prvom ormanu, a koliko u drugom?

*Zad. 193.* Za $a$ metara štofa i $b$ metara postave plaćeno je $m$ din. Ako bi se kupilo $c$ m štofa i $d$ m postave, trebalo bi platiti $n$ din. Koliko je plaćeno za 1 m štofa i šta staje 1 m postave?

*Zad. 194.* Od dva broja jedan je za $d$ veći od drugog. Kada se veći podeli sa manjim dobija se količnik $q$ i u ostatku $r$. Naći te brojeve.

## NEJEDNAČINE

### 1. NEJEDNAKOST. NEJEDNAČINA

Brojevi $a$ i $b$ mogu biti jednaki. To se piše $a = b$.

Ako su, pak, brojevi $a$ i $b$ nejednaki, onda imamo *nejednakost*. Ovde mogu biti dva slučaja:

1) Broj $a$ je *veći* od broja $b$; $a > b$

2) Broj $a$ je *manji* od broja $b$; $a < b$

Ako su brojevi $a$ i $b$ posebni brojevi, nejednakost je numerička ili brojna:

$$5 > 2; \quad -3 < 0; \quad 7 > 4 + 1$$

Nejednakosti koje sadrže jedan ili više opštih brojeva mogu se podeliti na dve vrste. Nejednakosti koje su zadovoljene za bilo koje vrednosti opštih brojeva zovu se *identične* ili bezuslovne nejednakosti:

$$x + 2 > x + 1; \quad a^2 + b^2 > 0; \quad x^2 > x - 5$$

Nejednakost koja je zadovoljena ne za sve, nego za neke vrednosti opštih brojeva zove se *nejednačina*.

$$2x - 5 > x + 1; \quad x^2 + y^2 < 25; \quad x + a > 2x - b$$

Ako nije specijalno naglašeno, onda prva slova latinske abecede smatraju kao poznate veličine: $a, b, c, \ldots m, n, \ldots p, q$ a poslednja slova: $x, y, z, \ldots u, v, \ldots t \ldots$ smatraju kao nepoznate.

Nejednačina sa jednom nepoznatom je *linearna* ili *prvog stepena,* ako se u njoj javlja nepoznata samo na prvi stepen.

$$3x - 2 > x + 4; \quad ax - b < cx$$

Uopšte, najviši stepen nepoznate, koji je u nejednačini zastupljen je stepen te nejednačine. Tako nejednačina:

$$x^2 + 8 < 6x$$

je drugog stepena.

## 2. REŠAVANJE LINEARNE NEJEDNAČINE SA JEDNOM NEPOZNATOM

Skup svih vrednosti nepoznate koje zadovoljavaju datu nejednačinu je njeno rešenje. Tako, na primer, rešenje nejednačine $x - 1 > 2$ je $x > 3$, jer za bilo koju vrednost $x$ koja je veća od 3 leva strana date nejednačine je veća od 2. Nejednačine koje imaju isto rešenje su ekvivalentne.

Rešavanje nejednačine sastoji se u transformacijama a s ciljem da se dobije jednostavnija nejednačina, koja je ekvivalentna sa datom. Taj postupak vodi do rešenja, tj. dok se ne dođe do $x > a$ ili $x < a$.

Pri rešavanju nejednačina služimo se postavkama od kojih su neke iste kao i kod rešavanja jednačina. Na primer: i levoj i desnoj strani nejednačine može se dodati ili od njih oduzeti ista veličina a da se znak nejednakosti pri tome ne menja.

$$5 > 3 \qquad 5 + 2 > 3 + 2 \Rightarrow 7 > 5$$

$$3 < 8 \qquad 3 - 2 < 8 - 2 \Rightarrow 1 < 6$$

To znači da se bilo koji član nejednačine može uz promenu znaka preneti sa jedne strane nejednačine na drugu:

$$x - 1 > 2$$

Ako se i levoj i desnoj strani doda 1; levoj strani jedinica se poništava tako da se dobija

$$x > 2 + 1$$

Obe strane nejednačine mogu se pomnožiti ili podeliti sa istim *pozitivnim* brojem. Znak nejednakosti pri tome se ne menja

$$4 > 2 \mid \cdot 2 \Rightarrow 8 > 4 \qquad 4 < 6 \mid : 2 \Rightarrow 2 < 3$$

Obe strane nejednačine mogu se pomnožiti ili podeliti sa istim negativnim brojem, ali *znak nejednakosti* se u tom slučaju, *menja na suprotni.*

$$-5 < -3 \mid \cdot (-1) \Rightarrow 5 > 3$$

$$2 > 1 \mid (-2) \Rightarrow -4 < -2$$

$$-8 < -4 \mid : (-4) \Rightarrow 2 > 1$$



Trebalo bi napomenuti da se nejednačina ne sme množiti niti deliti sa nepoznatom niti sa izrazom koji sadrži nepoznatu. To je zato što se ne može unapred znati da li je nepoznata, odnosno izraz koji nju sadrži, pozitivan ili negativan i takvim operacijama mogla bi se dobiti nejednačina koja nije ekvivalentna sa datom. Valja dodati još i to da između dva broja istog znaka i recipročnih vrednosti tih brojeva znaci nejednakosti su suprotni, tj.

$$\text{ako je } a > b \text{ onda je } \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$\text{ili } m < n \Rightarrow \frac{1}{m} > \frac{1}{n}$$

$$5 > 2 \Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{2}; \qquad 3 < 7 \Rightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{7}$$

Ako između leve i desne strane nejednačine stoji znak $>$ ili $<$, njeno rešenje ima oblik $x > a$ ili $x < b$, što se može napisati i ovako:

$$x \in (a, \infty), \text{ odnosno } x \in (-\infty, b)$$

Ako su, pak, dve strane nejednačine vezane znakom $\geqslant$ ili $\leqslant$, njeno rešenje se izražava poluotvorenom intervalu:

$$x \in [a, \infty), \text{ odnosno } x \in (-\infty, b]$$

P r i m e r i :

1) Rešiti nejednačinu:

$$3x - \frac{7x - 6}{4} > \frac{4(x + 1)}{3} \mid \cdot 12$$

$$36x - 3(7x - 6) > 16(x + 1)$$

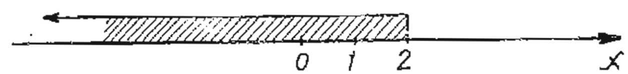
$$36x - 21x + 18 > 16x + 16$$

$$36x - 21x - 16x > 16 - 18$$

$$-x > -2 \mid \cdot (-1)$$

$$x < 2 \qquad \text{ili} \qquad x \in (-\infty, 2)$$

Ovo rešenje bi se moglo prikazati na brojnoj osi (sl. 29).




Sl. 29

2) Naći najveći ceo broj koji za pozitivnu vrednost $a$ predstavlja izraz

$$\frac{17-a}{4}-\frac{a-2}{3}$$

Koliko mora biti u tom slučaju $a$?

Rešenje:

Stavimo da je

$$\frac{17-a}{4}-\frac{a-2}{3}=k \qquad (k \in E)$$

$$51-3a-4a+8=12k$$

$a=\dfrac{59-12k}{7}$ kako je $a>0$, imamo,

$$59-12k>0 \Rightarrow k<\frac{59}{12} \quad \text{ili} \quad k \in \left(-\infty, \frac{59}{12}\right)$$

Najveći ceo broj u tom intervalu je 4.

3) Rešiti jednačinu:

$$|x+1|+|x-2|=3$$

$$|x+1|=\begin{cases} x+1 & \text{za } x \geqslant -1 \\ -x-1 & \text{za } x<1 \end{cases} \qquad |x-2|=\begin{cases} x-2 & \text{za } x \geqslant 2 \\ -x+2 & \text{za } x<2 \end{cases}$$

Na osnovu ovoga možemo napisati tri jednačine:

1) Za $x<-1$ $\qquad -x-1-x+2=3 \Rightarrow x=-1$

2) za $-1 \leqslant x<2$ $\qquad x+1-x+2=3 \Rightarrow x=\dfrac{0}{0}$ bilo koji broj

3) za $x \geqslant 2$ $\qquad x+1+x-2=3 \Rightarrow x=2$

Iz ovoga se vidi da u prvom intervalu data jednačina nema rešenja, jer $x=-1$ ne pripada intervalu $x<-1$.

Bilo koji broj koji pripada intervalu (2) $-1 \leqslant x<2$ zadovoljava datu jednačinu. A, pošto je jednačina zadovoljena i sa $x=2$, njeno rešenje može se napisati

$$-1 \leqslant x \leqslant 2 \quad \text{ili} \quad x \in[-1,2]$$



## ZADACI

*Zad. 195.* Rešiti nejednačine i svako rešenje prikazati na brojnoj osi.

1) $2x-1>x+2$

2) $6x-1<4(x+1)$

3) $\dfrac{2x-3}{5} \geqslant \dfrac{3x-5}{7}$

4) $\dfrac{2x+3}{3}-\dfrac{5-x}{2}<\dfrac{3x-1}{4}$

5) $\dfrac{3-x}{2}+x \leqslant \dfrac{5x+3}{7}$

*Zad. 196.* Za koje vrednosti $m$ izraz

$$\frac{5(m-1)}{4}+\frac{5-4m}{3}$$

je nenegativan.

*Zad. 197.* Koje vrednosti $a$ zadovoljavaju sledeće nejednačine:

1) $a>-a$; $\qquad$ 2) $a-3<a$;

3) $a<2a$; $\qquad$ 4) $a^3>a^2$;

5) $a>\dfrac{1}{a}$; $\qquad$ 6) $a<\dfrac{1}{a}$

*Zad. 198.** Koji je najveći dvocifren broj koji pri deljenju sa 17 daje u ostatku 5.

*Zad. 199.* Za koje vrednosti $a$ izraz

$$\frac{a^2+3a+7}{a^2+a+13}$$

je pozitivan broj i to:

1) Prav razlomak

2) Jedinica

3) Neprav razlomak

*Zad. 200.* Rešiti jednačine:

1) $|x-1|+|x+1|=2$

2) $|5-2x|+|x+3|=2-3x$

3) $|x|+|x+2|+|2-x|=x+1$

### 3. SIMULTANE LINEARNE NEJEDNAČINE

Skup od dve ili više nejednačina koje sadrže istu nepoznatu obrazuje sistem simultanih nejednačina. Rešenje sistema simultanih nejednačina je skup vrednosti nepoznate koja zadovoljavaju sve nejednačine tog sistema.

Neka imamo dve nejednačine:

1) $x-2>0$ . . . . . . . . . . . . . (1)

$x-5<0$ . . . . . . . . . . . . . (2)

Uzmimo, na primer, $x=7$. Nejednačina (1) je zadovoljena, ali nejednačina (2) nije. Prema tome $x=7$ nije rešenje tog sistema simultanih nejednačina. Ni $x=1$ nije rešenje tog sistema jer je sada nejednačina (1) nije zadovoljena, dok nejednačina (2) jeste. Vrednost $x=3$ zadovoljava i nejednačinu (1) i nejednačinu (2). Isto bi se moglo reći i za $x=4$. To znači da i broj 3 i broj 4 pripadaju skupu brojeva koji predstavlja rešenje datog sistema. Odrediti skup brojeva to, drugim rečima, znači odrediti granice intervala kojem pripadaju ti brojevi.

Neka je $A$ skup brojeva koji zadovoljava nejednačinu (1). Tom skupu pripadaju svi brojevi veći od 2, tj. $A=(2,\infty)$.

Neka je $B$ skup brojeva koji zadovoljavaju nejednačinu (2). Možemo, dakle, napisati $B=(-\infty,5)$. Kako je rešenje sistema nejednačina skup brojeva koji zadovoljavaju i jednu i drugu nejednačinu, tj. koji pripadaju i skup $A$ i skupu $B$, to znači da je rešenje sistema nejednačina određeno presekom tih skupova

$$x=A\cap B$$

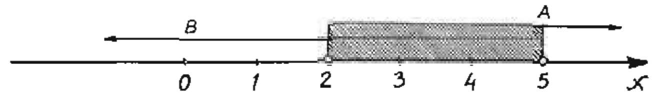
Ovo se jasno može videti na brojnoj osi.

Iz nejednačine (1) imamo

$$x>2$$



Svi brojevi koji su veći od 2 nalaze se zdesna od tačke koja odgovara broju 2 (sl. 30).



Sl. 30

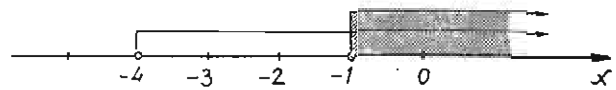
Iz nejednačine (2) sledi $x<5$. Svi brojevi manji od 5 nalaze se sleva od tačke koja odgovara broju 5.

Oblast u kojoj se nalaze obe poluprave $A$ i $B$ (na sl. 30 šrafirana) je presek skupova $A$ i $B$. Prema tome, rešenje datog sistema simultanih nejednačina je

$$2<x<5 \quad \text{ili} \quad x\in(2,5)$$

2) $$x+1\geqslant 0$$
$$x+4>0$$

Iz prve nejednačine imamo $x\geqslant -1$, a iz druge $x>-4$. Isto kao i u prethodnom zadatku odredimo na brojnoj osi onu oblast kojoj mogu pripadati vrednosti nepoznate da obe nejednačine sistema budu zadovoljene (sl. 31).



Sl. 31

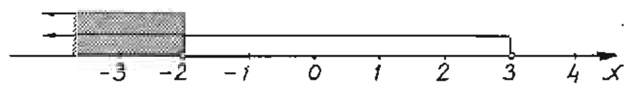
Kao što se iz sl. 31 vidi u ovom slučaju interval je ograničen samo sa donje strane, i to tako da broj $-1$ pripada tom intervalu, što znači da je interval poluotvoren

$$-1\leqslant x<+\infty \quad \text{ili} \quad x\in[-1,+\infty)$$

3) $$x+2<0\Rightarrow x<-2$$
$$x-3<0\Rightarrow x<3$$

Ovaj sistem razlikuje se od prethodnog jedino po tome što je rešenje ovog sistema interval ograničen zdesna i da je taj interval otvoren. Ovo se vidi na sl. 32.

$$-\infty<x<-2 \quad \text{ili} \quad x\in(-\infty,-2)$$



Sl. 32

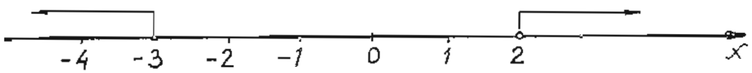
4) $$x + 3 < 0$$

$$x - 2 > 0$$

Kao i u prethodnim zadacima odredimo prvo sve vrednosti nepoznate koje zadovoljavaju prvu nejednačinu i one vrednosti nepoznate koje zadovoljavaju drugu nejednačinu.

$$x < -3; \qquad x > 2$$

Na sl. 33. prikazane su ova dva skupa na brojnoj osi.




Sl. 33

Vidimo da je presek ova dva skupa prazan skup, nema nijedne vrednosti $x$ — sa koja bi pripadala i jednom i drugom skupu. Prema tome sistem nejednačina nema rešenja. Za takav sistem se kaže da je *kontradiktoran* ili protivurečan. To bi se, uostalom, moglo videti na prvi pogled, jer je $x + 3$ veće od $x - 2$ za svako $x$. Onda je jasno da ne može od dva broja veći da bude negativan, a manji pozitivan.

5) Za koje vrednosti $m$

$$\frac{2m - 13}{m - 5} > 3$$

Kako se nejednačina ne može množiti sa izrazom koji sadrži nepoznatu, prenesemo prvo 3 na levu stranu nejednačine i posle oduzimanja imamo:

$$\frac{2 - m}{m - 5} > 0$$

Razlomak je pozitivan ako su brojilac i imenilac istog znaka, tj. ako je

1) $2 - m > 0$ ili 2) $2 - m < 0$

$m - 5 > 0$ $\qquad$ $m - 5 < 0$



Dobili smo, dakle, dva sistema simultanih nejednačina. Prvi sistem je kontradiktoran, a drugi, koji se može napisati u obliku

$$m - 2 > 0$$

$$m - 5 < 0$$

već je rešen u prvom primeru. Njegovo rešenje $m \in (2, 5)$ je rešenje zadatka.

6) Na sistem simultanih nejednačina svodi se i zadatak: naći vrednost $x$ za koje je $x^2 + 10 < 7x$.

Prenošenjem $7x$ na levu stranu nejednačine i rastavljanjem na proste faktore imamo:

$$(x - 2)(x - 5) < 0$$

Proizvod od dva faktora je negativan ako su faktori raznoznačni.

$$x - 2 < 0 \qquad x - 2 > 0$$

$$x - 5 > 0 \qquad x - 5 < 0$$

Kao i u prethodnom zadatku dobije se dva sistema simultanih nejednačina od kojih je prvi kontradiktoran, a drugi je već ranije rešen.

$$x \in (2, 5)$$

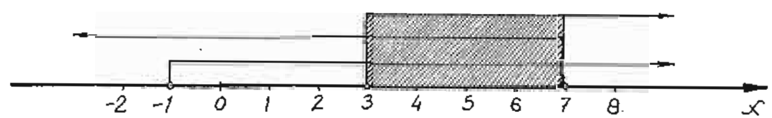
Na isti način se rešava sistem simultanih nejednačina od tri ili više nejednačina.

7) Rešiti sistem simultanih nejednačina:

$$x + 1 > 0; \qquad x - 7 < 0; \qquad x - 3 > 0$$

$$x > -1; \qquad x < 7; \qquad x > 3$$

Ovo je prikazano na brojnoj osi (sl. 34).




Sl. 34

Iz slike 34. vidi se da su sve tri nejednačine zadovoljene, a $x$ pripada intervalu.

$$x \in (3, 7)$$

## ZADACI

*Zad. 201.* Rešiti sistem simultanih nejednačina

1) $5x - 8 < 3(x + 2)$; $\quad 7(x - 1) > 2(2x + 1)$

2) $3(x + 5) > 3 - x$; $\quad 2(2x + 1) > (5x + 3)$

3) $2(1 - x) < 3x + 2$; $\quad x < 3(x + 2)$

4) $\dfrac{x+4}{3} - \dfrac{x+3}{2} > 0$ $\quad \dfrac{x+4}{4} - \dfrac{x+5}{5} > 0$

5) $\dfrac{x+2}{5} - \dfrac{2x+1}{6} < 0$ $\quad \dfrac{x+2}{3} + \dfrac{x-4}{2} > 0$

6) $3x + \dfrac{x+17}{4} < 6(x + 1)$

$$\frac{x+9}{11} < 1 + \frac{2-x}{17}$$

$$\frac{4x-1}{15} - \frac{x-1}{7} > 0$$

*Zad. 202.* Za koje vrednosti $m$ razlomak je negativan:

1) $\dfrac{5-m}{6m+3}$; $\quad$ 2) $\dfrac{m(m+3)}{m^2+5}$

## DISKUSIJA LINEARNIH JEDNAČINA

### 1. JEDNAČINA SA JEDNOM NEPOZNATOM

Diskutovati jednačinu znači ispitati njeno rešenje. Pri rešavanju jednačina videli smo da koren jednačine može da bude pozitivan, negativan, može da bude neodređen, a može i da ne pripada skupu brojeva.

Kako se rešenje svake jednačine izražava preko njenih koeficijenata, to znači da diskusija jednačine sastoji se u iznalaženju veze između njenih koeficijenata uz određene uslove.



Evo na primer:

1) Postaviti uslove koji moraju zadovoljavati koeficijente jednačine:

$$\frac{ax-2b}{4ab^3} - \frac{1}{a^2b} = \frac{2(x+1)}{a^3} \qquad (ab \neq 0)$$

da ta jednačina bude nemoguća.

Pošto je jednačina nemoguća onda kada se nepoznata javlja u obliku $\dfrac{m}{0}$, gde je $m \neq 0$, datu jednačinu treba prvo rešiti. Njeno rešenje je

$$x = \frac{2b}{a-2b};$$

Imenilac ovog razlomka je 0 ako je $a = 2b$. Time je izražen uslov koji moraju zadovoljavati koeficijenti date jednačine.

2) Za koje vrednosti parametra $m$ i $n$ jednačina:

$$\frac{m}{2x+6} = \frac{x-12}{x^2-9} + \frac{n}{2x-6} \text{ je neodređena.}$$

Kod neodređene jednačine rešenje ima oblik $\dfrac{0}{0}$. Rešenje date jednačine je $x = \dfrac{3(m+n-8)}{m-n-2}$.

To znači da i brojilac i imenilac ovog razlomka mora biti nula. tj,

$$\left.\begin{aligned} m+n-8 &= 0 \\ m-n-2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow m = 5; \quad n = 3;$$

3) Za koje vrednosti parametra $m$ koren jednačine

$$\frac{x+1}{m-1} - \frac{3}{2m} - \frac{2x}{m} = 0 \text{ je pozitivan}$$

Rešenje ove jednačine je $x = \dfrac{m-3}{4-2m}$.

Pošto treba da bude $x > 0$ imamo:

$$\frac{m-3}{4-2m} > 0, \text{ ili } \begin{matrix} m-3 > 0 \\ 4-2m > 0 \end{matrix} \quad \text{ovaj sistem je kontradiktoran}$$

$$\text{a drugi} \quad \left.\begin{matrix} m-3 < 0 \\ 4-2m < 0 \end{matrix}\right\} \text{ daje rešenje } \quad 2 < m < 3$$

ZADACI

*Zad. 203.* Za koje vrednost parametra $a$ jednačina:

$$\frac{ax+1}{3} + \frac{x(1-2a)}{5} = 0$$

je nemoguća?

*Zad. 204.* Za koje vrednosti parametara $m$ i $n$ data jednačina je neodređena?

1) $\dfrac{m}{x+1} = \dfrac{x-5}{x^2-1} + \dfrac{n}{x-1}$

2) $\dfrac{4(n+2)}{x^2-4} + \dfrac{3n}{x+2} = \dfrac{5x-3m}{x^2-4} + \dfrac{2m}{x-2}$

*Zad. 205.* Za koje vrednosti parametra $m$ koren iste jednačine je pozitivan?

1) $\dfrac{1}{mx^2-m} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{m-5}{mx-m}$

2) $1 - \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{m-3}{x}$

*Zad. 206.* Odrediti granice intervala kojem mora pripadati parametar $m$ da koren jednačine.

$$\frac{x+3}{x} = \frac{m+1}{x^2+x} + 1$$

bude pozitivan broj manji od 3.



## 2. DISKUSIJA SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA

Rešenje sistema linearnih jednačina sa dve nepoznate

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

je $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$; $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$, gde je

$\Delta$ — glavna determinanta sistema, a

$\Delta x$ i $\Delta y$ sporedne.

Ako je glavna determinanta sistema $\Delta = 0$, onda je sistem jednačina ili *nemoguć* ili *neodređen*.

*Nemoguć* je ako su sporedne determinante različite od nule, a *neodređen* ako su i sporedne determinante jednake nuli.

Primer:

Dat je sistem jednačina:

$$mx - 2y - 1 = 0$$
$$8x - my - 2 = 0$$

Odrediti parametar $m$ tako:

a) Da sistem jednačina bude nemoguć,

b) Da taj sistem bude neodređen.

Rešenje ovog sistema je

$$x = \frac{m-4}{m^2-16} \qquad y = \frac{8-2m}{m^2-16}$$

što se može napisati:

$$x = \frac{m-4}{(m-4)(m+4)} \qquad y = -\frac{2(m-4)}{(m-4)(m+4)}$$

Za $m \neq 4$ imamo:

$$x = \frac{1}{m+4} \qquad y = -\frac{2}{m+4}$$

Iz ovoga sledi da je sistem nemoguć za $m = -4$
Za $m = 4$ imamo:

$$x = \frac{0}{0}; \qquad y = \frac{0}{0}$$

Prema tome, u tom slučaju sistem jednačina je neodređen.

### ZADACI

*Zad. 207.* Za koju vrednost parametra $a$ sistem jednačina je nemoguć

$$2x - y - 7 = 0$$
$$6x - ay - 9 = 0$$

*Zad. 208.* Odrediti parametar $m$ tako da sistem jednačina

$$\frac{my}{x-2} + 6 = 0; \qquad \frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 1$$

bude nemoguć.

*Zad. 209.* Odrediti parametre $m$ i $n$ tako da sistem jednačina

$$3mx + 2y = mn$$
$$(m+1)x + y = 3$$

bude neodređen.

*Zad. 210.* Postaviti uslov koji moraju zadovoljavati koeficijenti sistema jednačina

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

da taj sistem bude:
a) nemoguć
b) neodređen

*Zad. 211.* Za koje vrednosti parametra $m$ obe nepoznate sistema jednačine

$$2x + 3y = m$$
$$5x - 4y = 15$$

su pozitivni brojevi.



*Zad. 212.* Za koje vrednosti parametara $\alpha$ i $\beta$ dati sistem jednačina je neodređen?

1) $\alpha x + 6y = 3; \qquad 4x + \beta y = 2$

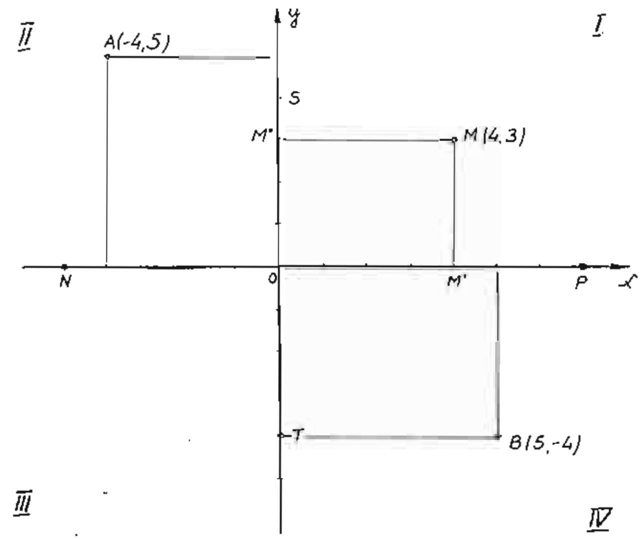
2) $\dfrac{\alpha x - 1}{18} + \dfrac{\beta y - 1}{10} = \dfrac{3\alpha x + 5\beta y}{45}; \qquad \dfrac{x+4}{5} + \dfrac{y+2}{3} = 1$

3) $\alpha(x+1) + 4y = 1; \qquad \beta(x+2) + 4(x+2y) = 0$

## ELEMENTI ANALITIČKE GEOMETRIJE

### 1. PRAVOUGLI KOORDINATNI SISTEM

Dve uzajamno normalne ose $Ox$ i $Oy$ (sl. 35) obrazuju pravougli koordinatni sistem. Tačka $O$ (od latinske reči origo — izvor, početak)



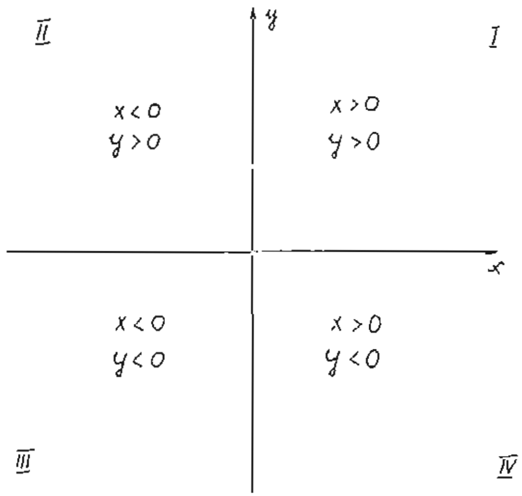

Sl. 35

u kojoj se ose seku je početak koordinatnog sistema. Obično se uzima kao pozitivan smer za $x$-osu smer *nadesno*, a za $y$-osu smer *naviše*. Koordinatnim sistemom ravan je podeljena na četiri kvadranta.

Položaj bilo koje tačke ravni, u kojoj je postavljen koordinatni sistem, može se odrediti pomoću dva broja koji se zovu koordinate tačke. Tako, na primer, koordinate tačke $M$ (sl. 35) su brojevi 4 i 3 što se piše ovako $M(4, 3)$. Prvi broj u zagradama (4) pokazuje koliko je tačka $M$ udaljena od $y$-ose i taj broj zove se apscisa tačke $M$. Drugi broj (3) pokazuje koliko je tačka $M$ udaljena od $x$-ose. Taj broj zove se ordinata tačke $M$.

Apscisa tačke $M$, $M''M = OM' = 4$ meri se duž x-ose nadesno ili nalevo prema njenom znaku, u opštem slučaju obeležava se obično sa $x$. Ordinata tačka koja se meri duž $y$-ose obično se obeležava sa $y$. Tačke $P$ ili $N$, koje pripadaju $x$-osi imaju ordinatu 0. $P(7,0)$, $N(-5,0)$. Sve tačke koje pripadaju $y$-osi imaju apscisu 0; $S(0,4)$, $T(0, -4)$. Sve tačke ravni koje se nalaze sa desne strane $y$-ose, tj. koje pripadaju I i IV kvadrantu imaju pozitivnu apscisu ($x > 0$). Sve tačke koje su sa leve strane $y$-ose imaju negativnu apscisu ($x < 0$) — II i III kvadrant. Tačke koje su iznad $x$-ose (I i II kvadrant) imaju pozitivnu ordinatu ($y > 0$), a za tačke ispod $x$-ose (III i IV kvadrant) ordinate su negativne ($y < 0$).

Znaci koordinata tačaka po kvadrantima vide se na sl. 36.




Sl. 36

Ako koordinate tačke razmene mesta, dobijemo drugu tačku (osim ako koordinate imaju istu vrednost). Tačka $A(-4, 5)$ i tačka $B(5, -4)$ (sl. 35). To znači da su koordinate tačke dva broja koji su



uređeni tako da prvi predstavlja apscisu, a drugi ordinatu tačke. Isto se koordinate tačke često zovu uređeni par brojeva ili uređena dvojka. Očigledno je da između uređenog para i tačke postiji biunivoka korespondencija, tj. svakom uređenom paru odgovara jedna (i samo jedna) tačka i, obrnuto: svakoj tački koordinatne ravni odgovara jedan uređeni par brojeva.

## 2. RASTOJANJE DVEJU TAČAKA

Položaj tačke u koordinatnom sistemu je određen ako su poznate njene koordinate.

Duž je određena svojim krajnjim tačkama. To znači da, ako su poznate koordinate krajnjih tačaka duži, određen je i njen položaj u koordinatnom sistemu i njena veličina.

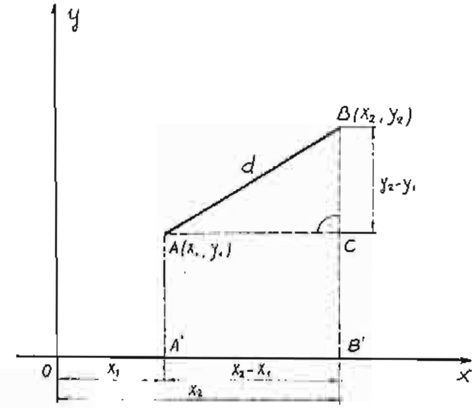
Neka su $x_1$, $y_1$ i $x_2$, $y_2$ koordinate krajnjih tačaka duži $\overline{AB}$, tj. $A(x_1\, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ (sl. 37).

Ako stavimo da je veličina duži $\overline{AB}$, tj. rastojanje njenih krajnjih tačaka $d$, onda iz pravouglog trougla $ABC$ (sl. 37) imamo:

$$d^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

Kako je $\overline{AC} = \overline{A'B'} = x_2 - x_1$ a $\overline{BC} = y_2 - y_1$, možemo napisati

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$




Sl. 37

ili

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

P r i m e r i :

1) Izračunati rastojanje tačaka $P(2, -1)$ i $Q(-4, 7)$.

Kako je $(x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2$, svejedno je koje ćemo koordinate uzeti kao $x_1$, $y_1$ odnosno $x_2$, $y_2$.

$$d = \sqrt{(2+4)^2 + (-1-7)^2}$$

$$d = \sqrt{36+64} \Rightarrow d = 10$$

Rastojanje tačaka je izraženo u jedinicama koordinatnog sistema. Treba napomenuti da su jedinice $x$-ose i $y$-ose dužinski jednake.

2) Izračunati stranice trougla ako su koordinate njegovih temena:

$A(-9, -5)$, $\quad B(15, 2)$, $\quad C(3, 11)$

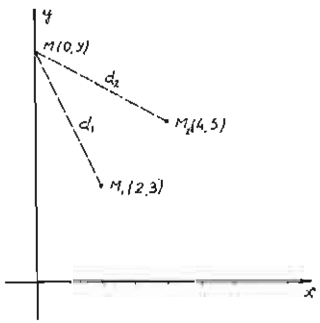
$$\overline{AB} = \sqrt{576+49} = \sqrt{625} \Rightarrow \overline{AB} = 25$$

$$\overline{AC} = \sqrt{144+256} = \sqrt{400} \Rightarrow \overline{AC} = 20$$

$$\overline{BC} = \sqrt{144+81} = \sqrt{225} \Rightarrow \overline{BC} = 15$$

3) Naći na $y$-osi tačku koja je jednako udaljena od tačaka $M_1(2, 3)$ i $M_2(4, 5)$.

Naći tačku, to znači odrediti njene koordinate. Kako je tražena tačka na $y$-osi, njena apscisa $x = 0$.




Sl. 38

Neka je tražena tačka $M(0, y)$ (sl. 38) i neka je njeno rastojanje od tačke $M_1$, $d_1$, a od tačke $M_2$, $d_2$.

$$d_1 = \sqrt{4 + (y-3)^2}$$

$$d_2 = \sqrt{16 + (y-5)^2}$$

Kako je $d_1 = d_2$ imamo:

$$\sqrt{4+(y-3)^2} = \sqrt{16+(y-5)^2}$$

Kvadriranjem dobijamo:

$$4 + y^2 - 6y + 9 = 16 + y^2 - 10y + 25$$

Rešenje ove jednačine $y = 7$ daje ordinatu tražene tačke $M(0, 7)$.

4) Date su koordinate temena trougla $ABC$: $A(-2, -3)$, $B(10, 1)$, $C(2, 9)$. Odrediti koordinate središta kružnice opisane oko tog trougla.



Da bi kružnica prolazila kroz tačke $A$, $B$ i $C$, njeno središte $S(x, y)$ mora biti jednako udaljeno od tih tačaka (sl. 39).

$$\overline{SA} = \sqrt{(x+2)^2 + (y+3)^2}$$

$$\overline{SB} = \sqrt{(x-10)^2 + (y-1)^2}$$

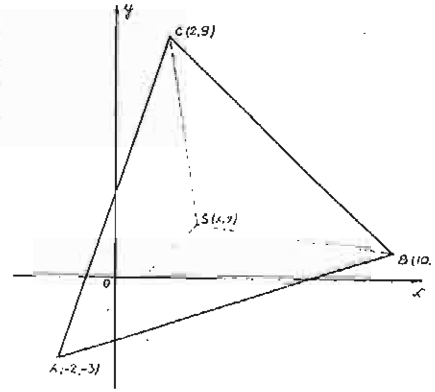
$$\overline{SC} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-9)^2}$$

Kako je

$$\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC}$$

imamo sistem jednačina:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 20x + 100 + y^2 - 2y + 1$$




Sl. 39

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 18y + 81$$

ili posle sređivanja:

$$3x + y = 11$$

$$x + 3y = 9$$

Rešenje ovog sistema jednačina daje koordinate traženog središta $S(3; 2)$.

## ZADACI

*Zad. 213.* Izračunati rastojanje dveju tačaka:

1) $M_1(-2, 3)$ i $M_2(1, 7)$

2) $A(-5, -3)$ i $B(7, 2)$

3) $S(-8, 6)$ i $T(7, -2)$

*Zad. 214.* Date su koordinate temena četvorugla: $A(-3, 4)$, $B(9, -1)$, $C(3, 7)$, $D(1, 7)$. Konstruisati četvorougao i izračunati njegove stranice.

*Zad. 215.* Date su koordinate temena četvorougla: $A(-8, 1)$, $B(9, 3)$, $C(7, 9)$, $D(-3, 8)$. Konstruisati četvorugao i izračunati njegove dijagonale.

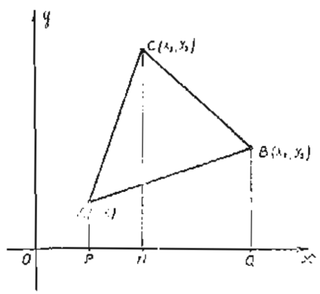
*Zad. 216.* Naći na $x$-osi tačku koja je jednaka udaljena od koordinatnog početka i od tačke $M(1, 3)$.

*Zad. 217,* Date su koordinate temena trougla $ABC$. Konstruisati trougao i naći koordinate središta kružnice opisane oko njega.

1) $A(-4, 3)$, $B(4, -1)$, $C(5, 6)$
2) $A(-7, 1)$, $B(8, -2)$, $C(2, 10)$

### 3. POVRŠINA TROUGLA

Ako su poznate koordinate temena trougla: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, trougao se može konstruisati, tj. određen je njegov oblik, veličina i položaj u koordinatnom sistemu $xOy$ (sl. 40).



Sl. 40

To znači da postoji dovoljno podataka da se izračuna njegova površina. Iz slike 40. vidi se da se površina trougla $ABC$ može izračunati pomoću površina pravouglih trapeza $APNC$, $CNQB$ i $APQB$. Zaista,

$$P_\Delta = P_{APNC} + P_{CNQB} - P_{APQB}$$

Kako je površina trapeza u kojem su paralelne stranica $a$ i $b$ i njihovo rastojanje, tj. visina trapeza $h$

$$P = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$$

površine trapeza $APNC$, $CNQB$ i $APQB$ izračunati je lako. Njihove paralelne stranice su ordinate temena trougla, tj. $AP = y_1$; $CN = y_3$; $BQ = y_2$. Visine tih trapeza $PN$, $NQ$ i $PQ$ mogu se izračunati pomoću apscisa temena datog trougla:

$$PN = x_3 - x_1; \qquad NQ = x_2 - x_3; \qquad PQ = x_2 - x_1$$



Zato možemo napisati:

$$P_\Delta = \frac{(y_1 + y_3)(x_3 - x_1)}{2} + \frac{(y_3 + y_2)(x_2 - x_3)}{2} - \frac{(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)}{2}$$

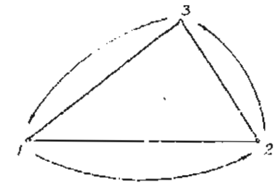
Ili

$$2P_\Delta = x_3y_1 + x_3y_3 - x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_3 + x_2y_2 - x_3y_3 - x_3y_2 - x_2y_1 - x_2y_2 + x_1y_1 + x_1y_2$$

U polinomu na desnoj strani poništavaju se članovi $x_1y_1$, $x_2y_2$, $x_3y_3$. Grupisanjem preostalih članova dobijamo:

$$2P = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

Ovaj obrazac lako se može upamtiti ako se temena trougla obeleže: 1, 2, 3 (sl. 41).



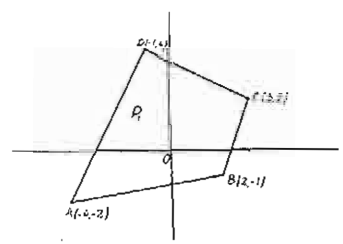
Sl. 41

Indeksi kod apscisa dolaze redom $x_1, x_2, x_3$, a u odgovarajućim zagradama indeksi kod ordinata uzimaju se oni koji dolaze po redu, tj. ako je ispred zagrada, recimo, $x$ sa indeksom 2, onda je u zagradi razlika ordinate sa indeksima koji dolaze po redu: 3, 1.

Napomena: Da bi površina bila pozitivan broj, kao $x_1$, $y_1$ treba uzeti koordinate onog temena trougla čija je apscisa najmanja.

P r i m e r.

Izračunati površinu četvorougla čija su temena: $A(-4, -2)$, $B(2, -1)$, $C(3, 2)$, $D(-1, 4)$.



Sl. 42

Površina traženog četvorougla $ABCD$ je zbir površina dva trougla $ACD$ i $ABC$ (sl. 42).

$$P = P_1 + P_2$$

$$2P_1 = -4(2-4) + 3(4+2) - 1(-2-2)$$

$$2P_1 = 30$$

$$2P_2 = -4(-1-2) + 2(2+2) + 3(-2+1)$$

$$2P_2 = 17$$

$$P = \frac{47}{2}$$

### ZADACI

*Zad. 218.* Date su koordinate temena trougla $ABC$. Izračunati njegovu površinu.

1) $A(-5, 2)$  $B(6, -1)$  $C(3, 11)$

2) $A(-7, -3)$  $B(5, 2)$  $C(-4, 9)$

3) $A(-3, 3)$  $B(3, -1)$  $C(9, 8)$

*Zad. 219.* Dva temena jednakokrakog trougla su $A(2, -3)$ i $B(10, 3)$. Vrh mu je na $y$-osi. Izračunati površinu trougla.

## FUNKCIJA

### 1. STALNE I PROMENLJIVE VELČINE

Izučavanje veličina i njihovih odnosa je jedan od osnovnih zadataka matematike. Sve veličine mogu se podeliti u dve grupe. Prvo: *stalne* veličine ili *konstante,* i drugo: *promenljive* ili *varijabilne.*

Stalnim veličinama se smatraju one veličine koje ne menjaju svoju vrednost barem dok traje računanje. Na primer — težina nekog predmeta (pretpostavlja se da se merenje vrši u istom mestu), ili dužina neke metalne šipke (temperatura je ista). Postoje i apsolutno stalne veličine: zbir unutrašnjih ili spoljašnjih uglova u trouglu ili u četvorouglu, odnos dužine kružne linije i prečnika te kružnice — broj $\pi$ itd.

Promenljive veličine su takve veličine koje mogu menjati svoju vrednost. Ako se vrednost promenljive veličine može menjati proizvoljno, onda se ona zove *nezavisno promenljiva* ili *argument.* Ako, pak, vrednosti promenljive veličine zavise od neke druge promenljive veličine (argumenta), onda se ta promenljiva veličina zove funkcija. Pogledajmo neke primere.



Ako je $a$ stranica kvadrata, onda je njegova površina $P = a^2$. To znači da površina kvadrata zavisi od većine njegove stranice. Isto to moglo bi se reći: površina kvadrata je funkcija njegove stranice. Obim kvadrata je isto funkcija stranice.

Dužina kružne linije je funkcija poluprečnika te kružnice, jer se za bilo koji poluprečnik može izračunati odgovarajuća dužina kružne linije.

Ako se neko telo kreće stalnom brzinom $c$, onda je put koji to telo pređe funkcija vremena kretanja $s = ct$.

### 2. NAČIN PREDSTAVLJANJA FUNKCIJE

Pri izučavanju funkcije obično se nezavisno promenljiva obeležava sa $x$, a funkcija sa $y$. Ako su pri tome naznačene i sve operacije koje treba izvršiti sa svakom vrednošću argumenta da bi se dobila odgovarajuća vrednost funkcije, onda se kaže da je funkcija predstavljena analitički. Na primer:

$$y = 2x + 3; \qquad y = \sqrt{x^2 + 1}; \qquad y = x^2 + 6x + 11.$$

U tom slučaju za svaku vrednost argumenta može se izračunati odgovarajuća vrednost funkcije.

Ako se, pak, zna samo toliko da $y$ zavisi od $x$, to se u opštem obliku piše $y = f(x)$ i čita se: $y$ je funkcija od $x$, ili, prosto, $y$ je ef od $x$.

Funkcija se može predstaviti pomoću tablice u kojoj se za navedene vrednosti argumenta već izračunate odgovarajuće vrednosti funkcije.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-1$ | $-2$ |
| $-\frac{1}{2}$ | $-1$ |
| $0$ | $0$ |
| $\frac{1}{2}$ | $1$ |
| $1$ | $2$ |
| $1\frac{1}{2}$ | $3$ |
| $2$ | $4$ |
| $2\frac{1}{2}$ | $5$ |
| $3$ | $6$ |

U ovoj tablici su izračunate vrednosti funkcije za vrednosti argumenta od $-1$ do 3.

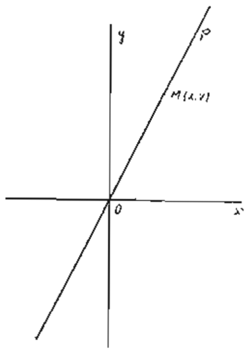
Nije teško zapaziti da bi ta funkcija analitički značila

$$y = 2x.$$

Funkcija se može predstaviti grafički. To se postiže na taj način što se svaki par vrednosti argumenta $x$ i odgovarajuće vrednosti funkcije $y$ smatra kao uređeni par brojeva, odnosno kao koordinate tačke u koordinatnom sistemu $xOy$. Tako dobijene tačke obrazuju neku liniju koja se zove dijagram ili grafik posmatrane funkcije.

Uzmimo nekoliko primera:

1) Predstaviti grafički funkciju $y = 2x$. Geometrijski ova jednačina predstavlja skup svih tačaka $M(x, y)$ u koordinatnom sistemu $x0y$ kod kojih je ordinata $y$ dva puta veća od apscise $x$ (po apsolutnoj vrednosti).




Sl. 43

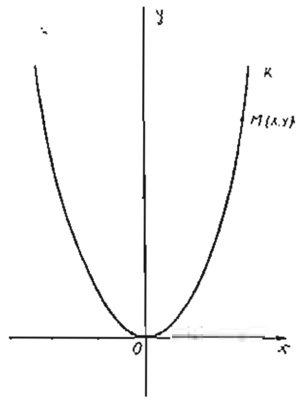
Pošto svaka tačka kod koje je ordinata dva puta veća od apscise pripada pravoj $p$ (sl. 43), prava $p$ je dijagram funkcije $y = 2x$. Kako svaka tačka $M(x, y)$ čije se koordinate dobijaju iz jednačine $y = 2x$ pripada pravoj $p$, kažemo da je $y = 2x$ jednačina prave $p$.

2) Uzmimo funkciju $y = x^2$.

Geometrijski ova jednačina predstavlja skup tačaka $M(x, y)$ kod kojih je ordinata $y$ jednaka kvadratu apscise $x$. Očigledno je da je takvih tačaka beskonačno mnogo. Skup tih tačaka isto obrazuje jedna linija, ali ta linija nije prava već kriva linija koja se zove parabola.

Da bi se ta funkcija pretstavila grafički treba je prvo predstaviti na tablični način. Ako se argumentu $x$ da više vrednosti, dobiće se više vrednosti funkcije, tj. dobiće se više tačaka i sve te tačke pripadaće paraboli $k$ (sl. 44).

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-3$ | 9 |
| $-2$ | 4 |
| $-1$ | 1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |



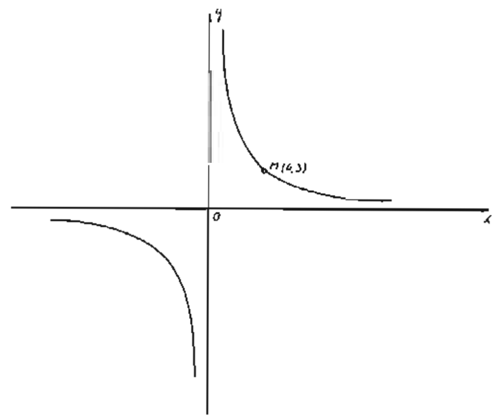

Sl. 44



Zato se kaže da je i $y = x^2$ jednačina te parabole. Može se reći i da je parabola $k$ dijagram ili grafik funkcije $y = x^2$.

3) Predstaviti grafički funkciju $y = \frac{12}{x}$. Sastavimo prvo tablicu koja odgovara datoj funkciji. Tako se može dobiti proizvoljno mnogo tačaka koje obrazuju krivu liniju (sl. 45) koja se sastoji iz dve grane u I i u III kvadrantu i koja se zove hiperbola. Vidi se da, kada $x$ po apsolutnoj vrednosti raste, $y$ se smanjuje, tj. grane krive približavaju se $x$-osi. Kada se pak $x$ smanjuje, $y$ raste, a grane krive približavaju $y$-osi. Prava linija, kojoj se približava grana krive i u beskonačnosti je dodiruje, zove asimptota krive. Kod ove hiperbole, koordinatne ose su, dakle, asimptote.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-12$ | $-1$ |
| $-6$ | $-2$ |
| $-4$ | $-3$ |
| 3 | $-4$ |
| 2 | $-6$ |
| 1 | $-12$ |
| 1 | 12 |
| 2 | 6 |
| 3 | 4 |
| 4 | 3 |
| 6 | 2 |
| 12 | 1 |




Sl. 45

Ovde treba još podvući to da u prvom primeru, kada se vrednosti argumenta povećavaju, povećava se i vrednost funkcije i to uvek u istom odnosu jer se funkcija može napisati u obliku $\frac{y}{x} = 2$. To se, uostalom, odmah vidi i iz dijagrama funkcija. Zato se kaže da ta funkcija predstavlja direktnu ili pravu proporcionalnost promenljivih veličina $y$ i $x$.

U primeru 3 je obrnut slučaj: povećanje $x$ povlači smanjenje $y$ i to u istom odnosu, tj. ako se $x$ *poveća*, recimo 2 puta, $y$ se *smanjuje* takođe dva puta. Zato ta funkcija predstavlja indirektnu ili obrnutu proporcionalnost.

### 3. DEFINISANOST FUNKCIJE

Uređeni par brojeva $x_1, y_1$, koji zadovoljavaju jednačinu $y = f(x)$, određuju u koordinatnom sistemu tačku $M(x_1, y_1)$ koja pripada dijagramu te funkcije. Tako, na primer, u funkciji $y = \frac{12}{x}$ za vrednost argumenta $x = 4$, vrednost funkcije je $y = 3$. Uređeni par brojeva $(4, 3)$ određuje tačku $M$ (sl. 45).

Može se, međutim, desiti da za neku (ili neke) vrednosti argumenta vrednost funkcije postaje $y = \frac{m}{0}$, $m \neq 0$, ili $y = \frac{0}{0}$, tj. da funkcija postaje beskonačna, ili neodređena. Onda se kaže da za te vrednosti argumenta funkcije nije definisana. Na primer: za vrednost argumenta $x = 3$ funkcija $y = \frac{5}{x - 3}$ nije definisana. Funkcija $y = \frac{x^2 - 5x}{x - 5}$ nije definisana za $x = 5$, jer za tu vrednost argumenta postaje $y = \frac{0}{0}$.

Skup vrednosti argumenta za koje je funkcija definisana zove se oblast ili domen definisanosti funkcije.

Funkcija čija je desna strana polinom zove se cela $f$-ja. Cela funkcija je definisana za sve vrednosti argumenta, tj. za $x \in (-\infty, +\infty)$.

Ako je polinom prvog stepena $y = ax + b$, takva funkcija se zove linearna.

Funkcija $y = ax^2 + bx + c$ je kvadratna i, uopšte, onog stepena kojeg je stepena polinom.

Osim ovih, postoji još mnogo drugih funkcija. O definisanosti tih funkcija biće reči na odgovarajućem mestu.



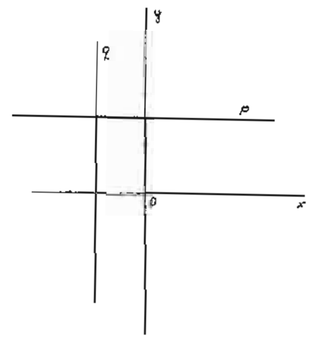
## PRAVA

### 1. SPECIJALNI OBLICI JEDNAČINE PRAVE

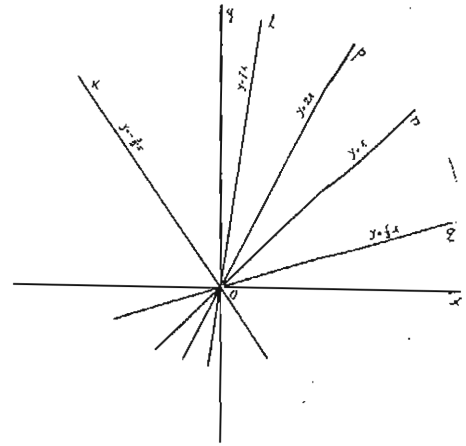
Skup tačaka u koordinatnom sistemu $xOy$ koje imaju istu ordinatu, na primer $y = 3$, obrazuju pravu liniju koje je paralelna sa $x$-osom i za 3 jedinice udaljena od nje.

Stoga je $y = 3$ ili $y - 3 = 0$ jednačina prave $p$ (sl. 46). Skup tačaka kod kojih je apscisa na primer $x = -2$ je prava $q$ (sl. 46) koja je paralelna sa $y$-osom i udaljena od nje za 2 jedinice ulevo. Njena jednačina je, dakle,

$$x = -2 \quad \text{ili} \quad x + 2 = 0$$




Sl. 46




Sl. 47

Uopšte, $x = m$ je jednačina prave koja je paralelna sa $y$-osom i udaljena od nje za $m$ jedinica. Da li ta prava seče $x$-osu sa desne ili sa leve strane od koordinatnog početka to zavisi od znaka $m$.

Isto tako, $y = n$ je jednačina prave koja je paralelna $x$-osi.

Skup tačaka u koordinatnom sistemu $xOy$ kod kojih su apscisa i ordinata jednake, tj. $y = x$ je prava $s$ koja je simetrala ugla $xOy$ jer je svaka njena tačka jednako udaljena od krakova tog ugla (sl. 47). Videli smo (sl. 43) da jednačina $y = 2x$ predstavlja pravu $p$.

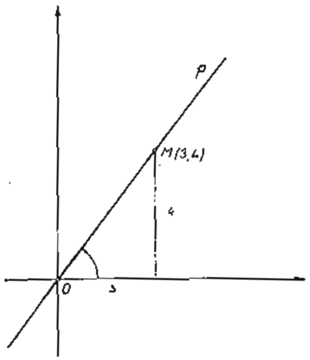
Konstruišimo još dijagram funkcije $y = \frac{1}{3}x$. Dajući argumentu vrednosti, recimo 3, 6, 9, dobijamo tačke koje pripadaju pravoj $q$ (sl. 47).

Jednačina $y = 7x$ predstavlja pravu $l$. Padaju u oči dve stvari. Prvo — sve prave $q, s, p, l$ prolaze kroz koordinatni početak $O(o, o)$ i, drugo, da ugao pod kojim svaka od njih seče $x$-osu zavisi od koeficijenta uz $x$.

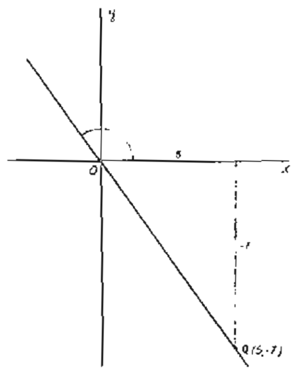
Uzmimo još slučaj kada je koeficijent uz $x$ negativan: $y = -\frac{3}{2}x$.

Kako je za $x = 0, y = 0$ to znači da i ta prava prolazi kroz koordinatni početak. Za $x = 2$, $y = -3$. Vidimo da prava $t$, koja predstavlja tu funkciju seče $x$-osu pod tupim uglom.

Prema tome jednačina $y = ax$ predstavlja skup pravih koje prolaze kroz koordinatni početak*. Osim toga, parametar $a$ određuje ugao koji pravu obrazuje sa $x$ osom, tj. određuje pravac prave. Stoga se taj parametar zove koeficijent pravca prave.




Sl. 48




Sl. 49

Da vidimo sada kako se može povući prava $y = ax$ ako je poznat koeficijent pravca $a$. Kako ta prava prolazi kroz koordinatni početak, dovoljno je odrediti još jednu tačku koja pripada toj pravoj. Neka je $a = \frac{4}{3}$, tj. $y = \frac{4}{3}x$. Za $x = 3$. $y = 4$. Koordinatni početak i tačka $M$ određuju pravu $p$. (sl. 48).

Ako je $a = -\frac{7}{5}$, tj. $y = -\frac{7}{5}x$ za $x = 5$ $y = -7$

Koordinatni početak i tačke $Q$ određuju pravu $l$. (sl. 49).

* Skup pravih koje prolaze kroz istu tačku zove se pramen pravih.



## 2. EKSPLICITNI OBLIK JEDNAČINE PRAVE

Jednačina $2x - 3y + 12 = 0$ .... (1) izražava funkcionalnu zavisnost $y$-na od $x$. Za takvu funkciju kažemo da je data u *implicitnom* obliku. Implicitni oblik funkcije je $f(x, y) = 0$.

Ako se jednačina (1) reši po $y$, dobijamo:

$$y = \frac{2}{3}x + 4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ili, u opštem slučaju, $y = f(x)$. Takav oblik funkcije zove se *eksplicitni*.

Zato jednačina (2), koja predstavlja eksplicitni oblik linearne funkcije, je *eksplicitni oblik jednačine prave*.

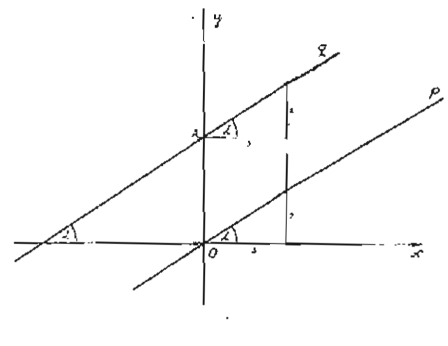
Svaka linearna funkcija $y = ax + b$ je eksplicitni oblik jednačine prave. Vidimo da ta jednačina sadrži, pored promenljivih veličina $x$ i $y$ koje se zovu *tekuće koordinate*, tj. koordinate bilo koje tačke koja pripada toj pravoj, dva parametra $a$ i $b$. Videli smo da parametar $a$ određuje ugao koji prava obrazuje sa $x$-osom. Da vidimo sada kako zavisi položaj prave u koordinatnom sistemu od parametra $b$.

Pođimo od konkretnog primera:

$$y = \frac{2}{3}x + 4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2')$$

$$y = \frac{2}{3}x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Prave (2') i (3) imaju isti koeficijent pravca $\left(a = \frac{2}{3}\right)$ i, zbog toga, pravac im je isti. Drugim rečima — one su paralelne. Međutim, kako je za bilo koju vrednost $x$ ordinata iz (2') za 4 jedinice veća, to znači da — ako sve tačke prave $p$ (sl. 50) pomera za 4 jedinice naviše — dobija se prava $q$ koja predstavlja jednačinu (2').




Sl. 50

Najlakše je odrediti na $y$-osi tačku $A$, jer za $x = 0$ njena ordinata se može pročitati iz jednačine.

Zaista, za $x = 0$ u jednačini

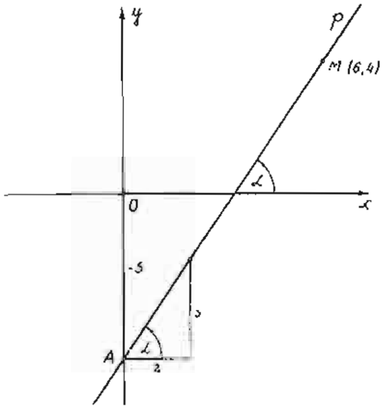
$$y = ax + b, \qquad y = b$$

Parametar $b$ određuje tačku $A$ u kojoj prava seče $y$-osu i zove se ordinata u početku.

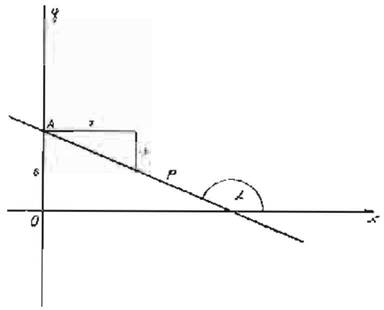
P r i m e r i :

1) Konstruisati pravu $y = \frac{3}{2}x - 5$

Prvo se na $y$-osi odredi tačka gde je seče data prava, a zatim se odredi pravac date prave.




Sl. 51




Sl. 52

U datoj jednačini

$$a = \frac{3}{2}; \quad b = -5$$

Tačka $A(0, -5)$.

Lako se uveriti da prava $p$ (sl. 51) zaista odgovara datoj jednačini, jer koordinate bilo koje tačke koja pripada toj pravoj, na primer tačka $M$, zadovoljavaju tu jednačinu.

2) Konstruisati pravu $y = -\frac{3}{7}x + 6$.

Ovde je $a = -\frac{3}{7} \qquad b = 6$.

Pošto je koeficijent pravca u ovom slučaju negativan, prava $p$ (sl. 52) obrazuje sa pozitivnim smerom $x$-ose tup ugao.



## ZADACI

*Zad. 220*. Na istom koordinatnom sistemu konstruisati prave:

1) $y = \frac{2}{11}x + 3$; 2) $y = \frac{1}{3}x + 3$

3) $y = \frac{2}{5}x + 3$; 4) $y = \frac{3}{4}x + 3$

5) $y = \frac{9}{7}x + 3$; 6) $y = \frac{7}{2}x + 3$

7) $y = -7x + 3$; 8) $y = -2x + 3$

9) $y = -\frac{2}{3}x + 3$; 10) $y = -\frac{1}{5}x + 3$

*Zad. 221*. Na istom koordinatnom sistemu konstruisati prave:

1) $y = \frac{5}{3}x - 7$; 2) $y = \frac{5}{3}x - 4$

3) $y = \frac{5}{3}x$ 4) $y = \frac{5}{3}x + 2$

5) $y = \frac{5}{3}x + 5$ 6) $y = \frac{5}{3}x + 8$

*Zad. 222*. Naći jednačinu prave koja seče $y$-osu u tački $A(0, 3)$ i koja je pralelna sa pravom $y = \frac{3}{5}x - 2$. Konstruisati zatim tu pravu.

*Zad. 223*. Odrediti koordinate tačke u kojoj prava $y = -\frac{7}{2}x + 7$ seče $x$-osu.

### 3. OPŠTI OBLIK JEDNAČINE PRAVE

Opšti oblik jednačine prave je

$$Ax + By + C = 0$$

gde su koeficijenti $A$, $B$ i $C$ brojevi koji pripadaju skupu celih brojeva: $A \geqslant 0$.

U opštem obliku prava se najčešće daje. Lako je, međutim, napisati tu jednačinu u eksplicitnom obliku:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Ako je prava data u eksplicitnom obliku, takođe nije teško napisati je u opštem obliku. Data je, na primer, jednačina $y = \frac{3}{5}x + 2$. Treba tu jednačinu napisati u opštem obliku. Množenjem sa 5 i prenošenjem svih članova na jednu stranu, dobijamo njen opšti oblik:

$$3x - 5y + 10 = 0$$

Da bi se konstruisala prava koja je data u opštem obliku može se, prvo, ta jednačina napisati u eksplicitnom obliku, tj. rešiti po $y$, a, zatim, postupiti kao što je to pokazano u prethodnom paragrafu.

Primer. Date su dve jednačine:

$$(m+1)x - my + 3m = 0$$

$$(m+4)x - (m+2)y - 2m = 0$$

Odrediti parametar $m$ tako da te prave budu paralelne. Napisati u tom slučaju njihove jednačine i konstruisati te preave.

Rešenje: Da bi prave bile paralelne njihovi koeficijenti pravca moraju biti jednaki, tj.

$$\frac{m+1}{m} = \frac{m+4}{m+2}$$

Rešenje ove jednačine je $m = 2$.

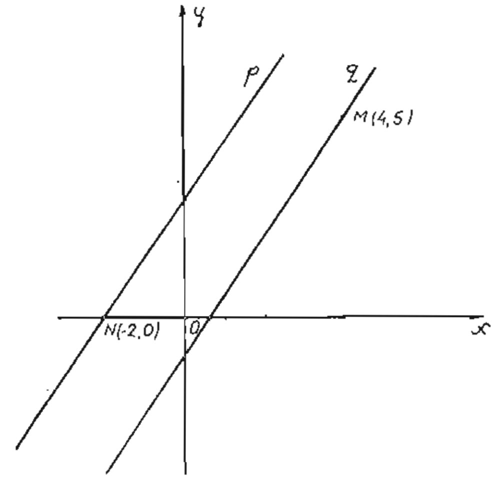
Za nađenu vrednost $m$ date jednačine su:

$$p: 3x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 3$$

$$q: 3x - 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 1$$



Na slici 53. povučene su prave $p$ i $q$ koje odgovaraju dobijenim jednačinama.




Sl. 53

**Z A D A C I**

*Zad. 224.* Date jednačine napisati u eksplicitnom obliku i konstruisati prave.

1) $x - y + 3 = 0$ 2) $x + y - 2 = 0$
3) $5x - y + 3 = 0$ 4) $9x - 2y - 8 = 0$
5) $x + 3y + 3 = 0$ 6) $4x - 3y - 9 = 0$
7) $5x + 2y - 10 = 0$ 8) $3x - 2y = 0$

*Zad. 225.* Odrediti parametar $m$ tako da prave:

$$(m-2)x + (m-3)y - m = 2$$

i

$$(m+1)x + (m-1)y - m = 0$$

budu paralelne i za nađenu vrednost $m$ napisati njihove jednačine.

*Zad. 226.* Naći jednačine pravih koje su paralelne sa koordinatnim osama i koje prolaze kroz središte kružnice opisane oko trougla čija su temena

$$A(-3, -4), \quad B(9, 2), \quad C(1, 8).$$

## 4. OSNOVNI PRINCIPI ANALITIČKE GEOMETRIJE

Neka imamo jednačinu $y = f(x)$. Za bilo koju vrednost $x_1$ argumenta $x$, u oblasti definisanosti funkcije, može se izračunati odgovarajuća vrednost funkcije $y_1$. Tačka $M(x_1, y_1)$ pripada dijagramu te funkcije. Skup svih tako dobijenih tačaka obrazuje pravu ili krivu liniju koja, geometrijski, predstavlja datu jednačinu.

Iz ovoga sledi prvi, osnovni princip analitičke geometrije:

*Ako tačka pripada nekoj liniji (pravoj ili krivoj), njene koordinate zadovoljavaju jednačinu te linije.*

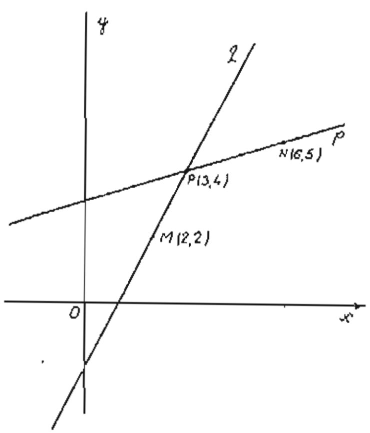
Važi, razume se, i obrnuto, tj. ako koordinate neke tačke zadovoljavaju jednačinu neke linije, tačka pripada toj liniji.

Na primer, tačka $M(4, 5)$ pripada pravoj $q$ (sl. 53) i njene koordinate zadovoljavaju jednačinu te prave.

Iz ovoga sledi i drugi osnovni princip analitičke geometrije:

*Koordinate presečne tačke dveju linija je rešenje sistema jednačina tih linija.*

Neka imamo dve prave:



Sl. 54

$$p:\quad x - 3y + 9 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + 3$$

$$q:\quad 2x - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2x - 2$$

Tačka $M$ pripada pravoj $q$ (sl. 54) i zbog toga njene koordinate zadovoljavaju jednačinu te prave. Ali, kako tačka $M$ ne pripada pravoj $p$, njene koordinate ne zadovoljavaju jednačinu te prave.

Isto se može reći i za tačku $N$. Njene koordinate zadovoljavaju jednačinu prave $p$ jer ona leži na toj pravoj, ali jednačinu prave $q$ ne zadovoljavaju. Tačka $P$ (presek prave $p$ i $q$) pripada i pravoj $p$ i pravoj $q$. Zbog toga njene koordinate zadovoljavaju ove jednačine. Drugim rečima: $x = 3$; $y = 4$ je rešenje sistema jednačina pravih $p$ i $q$.



## 5. GRAFIČKO REŠAVANJE JEDNAČINA

Grafičko rešavanje jednačina je takav postupak pomoću kojeg se rešenje jednačine može pročitati sa koordinatnog sistema. Uzmimo jednostavniji primer.

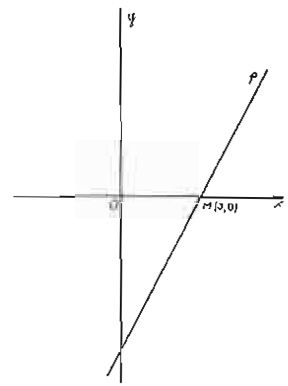
Neka treba grafički rešiti jednačinu

$$2x - 6 = 0$$

Očigledno je leva strana ove jednačine jednaka nuli samo za $x = 3$. Inače $2x - 6$ ili je veće ili je manje od nule tj. vrednost tog izraza zavisi od $x$. Drugim rečima izraz $2x - 6$ je funkcija od $x$ i može se napisati

$$y = 2x - 6$$

Dijagram te funkcije je prava $p$ (sl. 55). Pošto svaka tačka na $x$-osi ima ordinatu 0, a prava $p$ seče $x$-osu u tački $M(3, 0)$, znači $y$ tj. $2x - 6 = 0$ kada je $x = 3$. Prema tome $x = 3$ je rešenje date jednačine i to rešenje se može pročitati sa koordinatnog sistema kao apscisa tačke u kojoj prava $p$ seče $x$-osu.



Sl. 55

Treba napomenuti da vrednost argumenta, za koju funkcija postaje jednaka nuli, zove nula funkcije. Tako 3 je nula funkcije $y = 2x - 6$. Nula funkcije $3x - 2y + 6 = 0$ je $-2$ (sl. 53).

Rešavanje sistema linearnih jednačina sa dve nepoznate svodi se na konstrukciju pravih linija koje predstavljaju date jednačine i, onda — koordinate presečne tačke je rešenje datog sistema (sl. 54).

Treba još dodati samo to da ako jednačine datog sistema određuju prave koje imaju isti koeficijent pravca (sl. 53), tj. ako su prave paralelne, onda je njihova presečna tačka u beskonačnosti, pa takav sistem jednačina nema rešenje (nemoguć je).

Ako, pored istog koeficijenta pravca u jednačinama datog sistema jednake su i ordinate u početku, prave se u tom slučaju poklapaju i imaju beskonačno mnogo zajedničkih tačaka. Određeno rešenje prema tome ne postoji (sistem je neodređen).

### Z A D A C I

*Zad. 227.* U jednačini prave $p$ odrediti parametar $m$ tako da ta prava prolazi kroz tačku $M(x_1, y_1)$. Za nađeno $m$ konstruisati pravu.

1) $p\colon mx + 3y - 27 = 0$ $\quad M(3, 4)$

2) $p\colon mx - y - 1 = 0$ $\quad M(2, 3)$

3) $p\colon 3x - my - 2m = 0$ $\quad M(2, 1)$

*Zad. 228.* U jednačini prave

$$p\colon 2x - 3y + m = 0$$

odrediti parametar $m$ tako da ta prava seče pravu $x + 2y - 11 = 0$ u tački čija je apscisa $x = 3$. Konstruisati zatim pravu $p$.

*Zad. 229.* Data je funkcija:

$$(m - 3)\,x + (m - 2)\,y - 2m = 2$$

gde je $m$ — parametar.

Odrediti $m$ tako da ta prava prolazi kroz tačku $M(3, 2)$. Naći u tom slučaju nulu funkcije.

*Zad. 230.* Data je funkcija:

$$(m - 1)\,x + my - 2m = 0;$$

odrediti parametar $m$ tako da dijagram te funkcije bude prava koja je paralelna sa pravom $2x + 3y + 9 = 0$. Za nađeno $m$ naći nulu date funkcije.

*Zad. 231.* Koordinate temena trougla su $A(-4, 3)$, $B(4, -1)$, $C(x, 6)$. Površina trougla $ABC$ je $P = 30$. Naći jednačinu prave koja prolazi kroz koordinatni početak i središte kružnice opisane oko trougla $ABC$.

*Zad. 232.* Izračunati površinu trougla ako su mu temena $A(-2, -3)$, $B(12, 2)$, a teme $C$ mu je u preseku pravih

$$x + 2y - 24 = 0$$
$$2x - y + 2 = 0.$$

*Zad. 233.** Date su koordinate tačaka $A(-3, -2)$ i $B(7, 10)$. Odrediti ordinatu tačke $C(2, 7)$ tako da sve tri tačke pripadaju istoj pravoj.



*Zad. 234.** Naći jednačinu prave koja prolazi kroz tačke $A(2, 1)$ i $B(4, 5)$.

*Zad. 235.* Rešiti grafički sistem jednačina:

1) $x + 3y - 9 = 0$, $\quad 2x - y - 4 = 0$

2) $2x + y - 1 = 0$, $\quad 3x - y + 6 = 0$

3) $9x - 4y + 24 = 0$, $\quad 3x - 2y + 6 = 0$

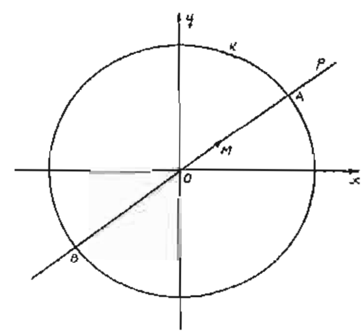
4) $7x + 6y - 18 = 0$, $\quad x - 3y - 18 = 0$

## VEKTORI

### 1. SKALARNE I VEKTORSKE VELIČINE

Veličine koje se izučavaju u matematici su različite. Ima ih takvih koje su potpuno određene jednim brojem. Na primer: odnos stranica u pravougaoniku može da bude 2; 3; $\frac{7}{3}$ ili bilo koji broj $m \neq 0$; broj učenika u razredu, itd. Takvi brojevi se zovu neimenovani. Postoje imenovani brojevi koji određuju posmatranu veličinu. Na primer — rastojanje dva grada je 100 km. Zapremina neke piramide je 70 cm$^3$. Trajanje školskog časa 45 minuta, itd. Takve veličine zovu se *skalarne veličine* ili prosto *skalari*.

Ima i drugih veličina, koje se ne mogu odrediti samo brojem. Na primer, postavlja se pitanje gde će biti tačka $M$ nakon 5 sekundi ako se ona kreće pravolinijski, polazi iz 0 (sl. 56) a svake sekunde pređe 1 cm?



Sl. 56

Na ovo pitanje moglo bi se odgovoriti: da će ta tačka biti na kružnici $k$ jer je svaka tačka te kružnice od tačke 0 udaljena za 5 cm. To, međutim, nije odgovor na postavljeno pitanje, jer na kružnici $k$ postoji beskonačno mnogo tačaka. Moglo bi se dodati da se tačka $M$ kreće duž prave $p$. To bi bio još jedan podatak. Međutim, ni to nije dovoljno, jer, u tom slučaju, ona bi mogla biti ili u tački $A$ ili u $B$. Znači: da bi nakon 5 sekundi kretanja položaj te tačke bio određen (recimo da bude u tački $A$), neophodno je naznačiti još smer kretanja. Na slici 56. smer je naznačen strelicom.

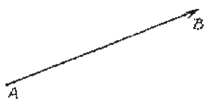
Takve veličine koje su određene ako im je poznat pravac, smer i brojna vrednost, zovu se *vektorske veličine* ili *vektori*.

Osim brzine, vektorske veličine su, na primer, ubrzanje, sila, količina kretanja...

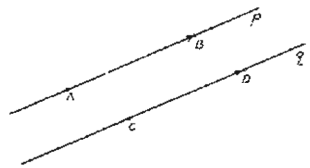
Grafički se vektor predstavlja kao orijentisana duž, tj. duž na kojoj je naznačen smer od početne tačke na krajnjoj. Smer se obeležava strelicom, piše se $\overrightarrow{AB}$ (sl. 57) Za dve duži kažemo da su jednake ako se one premeštanjem mogu dovesti do poklapanja, tj. ako su im dužine jednake.

Za dva vektora se može reći da su jednaki ako ispunjavaju tri uslova:

1) Prave $p$ i $q$, kojima pripadaju ti vektori, moraju biti paralelne ili da se poklapaju (sl. 58).



Sl. 57



Sl. 58

2) Smer od tačke $A$ prema tački $B$ mora biti istovetan sa smerom od tačke $C$ prema tački $D$.

3) Duži $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ moraju biti jednake.

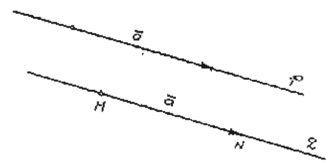
U tom (i jedino u tom slučaju) možemo tvrditi da su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ jednaki, a to pišemo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Prave $p$ i $q$ su *nosači* vektora $\overrightarrow{AB}$, odnosno $\overrightarrow{CD}$. Ako je dužina duži $\overline{AB} = a$, onda se piše vektor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{a}$. Brojna vrednost vektora koja odgovara njegovoj dužini zove se *moduo* vektora, a obeležava se $|\overrightarrow{AB}|$ ili $|\vec{a}|$.

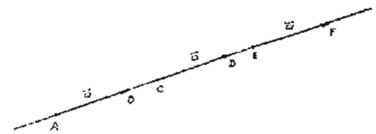
Za dva vektora, čiji su nosači paralelni ili se poklapaju, kažemo da su kolinearni. Svi kolinearni vektori su dakle, međusobno jednaki ako imaju isti smer i isti moduo. To znači da postoji samo jedan vektor $\vec{a}$ čiji je početak u nekoj određenoj tački $M$. Taj vektor se konstruiše tako što se kroz tačku $M$ (sl. 59) povuče prava $q$ paralelno sa nosačem datog vektora $\vec{a}$ i odredi duž $\overline{MN} = |\vec{a}|$.



Vektor $\overrightarrow{MN}$ je kolinearan sa $\vec{a}$, ima isti smer i moduli su im jednaki. Prema tome, $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$. Za vektor $\overrightarrow{MN}$ kažemo da je *vezan za tačku*.



Sl. 59



Sl. 60

Ako je data prava $p$ kojoj pripada vektor $\vec{a}$ (sl. 60) onda se za svaku tačku te prave može vezati vektor

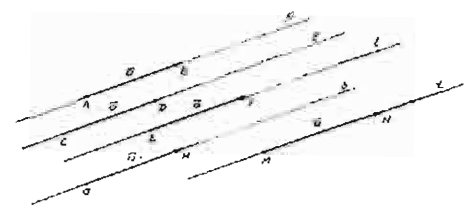
$$\vec{a},\ \text{tj.}\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \vec{a}.$$

Svi ti vektori imaju isti nosač (prava $p$).

Za vektor $\vec{a}$ se kaže da je vezan za pravu.

Za vektor koji se može vezati za bilo koju tačku prostora ili ravni kažemo da je *slobodan vektor*.

Ako su prave $p$, $q$, $l$, $s$ i $t$ paralelne, onda su vektori $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{MN} = \vec{a}$ (sl. 61) ako imaju isti moduo i isti smer.



Sl. 61

Prema tome, ako je dat vektor $\vec{a}$, on se može vezati za bilo koju tačku prostora tako da je time određen skup vektora određenog pravca, smera i modula, a dati vektor, na primer $\overrightarrow{CD'}$, je jedan od vektora koji pripadaju tome skupu.

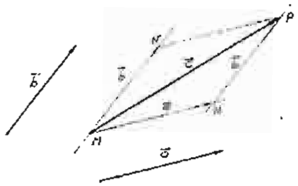
Vidimo da se po svojoj prirodi vektori bitno razlikuju od skalara, otuda i u operacijama sa vektorima postoje posebna pravila. Danas se vektori široko korsite ne samo u matematici, nego i u fizici, tehnici i u drugim naučnim disciplinama. Postoji posebna grana više matematike koja se zove Teorija vektora. Mi ćemo ovde proučiti samo one operacije sa vektorima koje su neophodne u daljem izlaganju.

## 2. OPERACIJE SA VEKTORIMA

a) *Sabiranje vektora*

Neka su data dva vektora, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (sl. 62). Treba naći vektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ i da je vektor $\vec{c}$ vezan za datu tačku $M$.

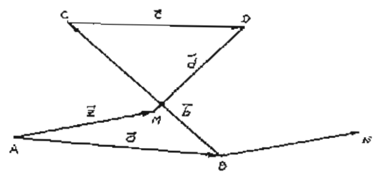
Konstruišimo prvo vektor $\vec{a}$ koji je vezan za tačku $M$, $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$ kao što je to pokazano u prethodnom paragrafu.



Sl. 62

Time je određena tačka $N$ (sl. 62) vežemo sada za tačku $N$ vektor $\vec{b}$. Njegova krajnja tačka $P$ određuje vektor $\overrightarrow{MP} = \vec{c}$. Ako bi prvo preneli u tačku $M$ vektor $\vec{b}$, a zatim u tačku $N'$ vektor $\vec{a}$, dobili bismo isti vektor, $MP$. To je očigledno jer je četvorougao $MNPN'$ paralelogram, a $MP$ je njegova dijagonala. Iz ovoga zaključujemo da kod sabiranja vektora važi komutativan zakon.

Ovo možemo proširiti na sabiranje proizvoljnog broja vektora. Potrebno je, dakle, nadovezati te vektore jedan na drugi i to proizvoljnim redom i onda početak prvog i kraj poslednjeg određuju početak, odnosno krajnju tačku vektora, koji predstavlja zbir datih vektora.



Sl. 63

Na slici 63. vektor $\vec{z} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$. Njegov početak je u tački $A$ — početak vektora $\vec{a}$, koji je uzet kao prvi, a kraj u tački $M$ — krajnja tačka vektora $\vec{d}$ koji je uzet kao poslednji. Ako bismo uzeli kao prvi sabirak neki drugi vektor na primer $\vec{b}$, onda bi zbir tih vektora bio vektor $\overrightarrow{BN}$ koji je kolinearan sa $\overrightarrow{AM}$ i ima isti smer i isti moduo, tj. $\overrightarrow{BN} = \vec{z}$. Ako se tačke $A$ i $M$ poklapaju, onda je zbir datih vektora jednak nuli, a vektor $\vec{z}$ bi u tom slučaju bio nula-vektor.

Ako je zbir dva vektora $\vec{a} + \vec{b} = 0$, vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su suprotni, tj. imaju isti pravac i isti moduo, a smer im je suprotan.

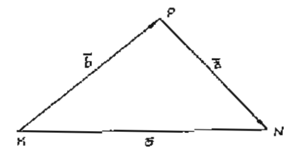


Iz ovoga sledi tzv. pravilo tri tačke. Ako se uzmu bilo gde tri tačke $A$, $B$ i $C$, onda postoji jednakost:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$$

b) *Oduzimanje vektora*

Razlika vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, vektor $\vec{z} = \vec{a} - \vec{b}$, definiše $\vec{z}$ koji treba dodati vektoru $\vec{b}$ da bi se dobio vektor $\vec{a}$, tj. $\vec{b} + \vec{z} = \vec{a}$.



Sl. 64

Iz sl. 64. se vidi da zbir vektora $\vec{b}$ i $\vec{z}$ daje vektor $\vec{a}$. Znači, da bismo dobili razliku dva vektora potrebno je vezati te vektore za istu tačku ($M$) i vektor određen njihovim krajnjim tačkama sa smerom prema krajnjoj tački umanjenika je razlika datih vektora:

$$\overrightarrow{PN} = \vec{z} = \vec{a} - \vec{b}.$$

Jasno je da je $\vec{b} - \vec{a} = -\vec{z} = \overrightarrow{NP}$.

c) *Množenje vektora brojem (skalarom).*

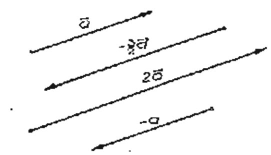
Proizvod vektora $\vec{a}$ i broja $n$ je vektor

$$\vec{z} = n \cdot \vec{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

1) Vektor $\vec{z}$ je kolinearan sa vektorom $\vec{a}$. Jednakost (1) je uslov kolinearnosti vektora $\vec{a}$ i $\vec{z}$.

2) Za $n > 0$, vektor $\vec{z}$ je istog smera kao i vektor $\vec{a}$.

Za $n < 0$, smer vektora $\vec{z}$ je suprotan smeru vektora $\vec{a}$.



Sl. 65

Za $n = 0$, vektor $\vec{z} = 0$.

3) Moduo vektora $\vec{z}$ je

$$|\vec{z}| = |n| \cdot |\vec{a}|,$$

tj. jednak je proizvodu modula vektora $\vec{a}$ i apsolutne vrednosti broja $n$.

Na slici 65. imamo vektor $\vec{a}$ i vektor $\vec{z}$ za vrednosti $n = -\frac{3}{2}$; $n = 2$; $n = -1$.

d) *Odnos dva kolinearna vektora*

Upoređivati po veličini mogu se jedino takvi vektori koji imaju isti pravac, tj. ako su kolinearni.

Neka imamo dva kolinearna vektora, $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Uvek se može odrediti takav broj $k$ tako da se uslov kolinearnosti ta dva vektora napiše

$$\vec{a} = k \cdot \vec{b} \qquad (\vec{b} \neq 0).$$

Broj $k$ je, dakle, vrednost odnosa ta dva vektora, tj.

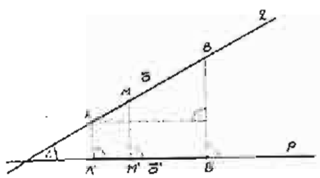
$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = k$$

Apsolutna vrednost broja $k$ daje odnos modula vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a znak broja $k$ ukazuje na to da li su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ istog smera ili suprotnog.

### 3. PROJEKCIJE VEKTORA NA PRAVU

Neka imamo pravu $p$ i, u istoj ravni, vektor $\vec{a} = \overline{AB}$.

Normala spuštena iz tačke $A$ na pravu $p$ određuje na toj pravoj tačku $A'$. Za tačku $A'$ kažemo da je *normalna projekcija* tačke $A$ na pravu $p$. Na isti način se dobija tačka $B'$ — projekcija tačke $B$ na pravu $p$ (sl. 66). Geometrijski vektor je orijentisana duž $\overline{AB}$ i, kao i svaka geometrijska figura, predstavlja skup tačaka prave $q$ (nosača vektora $\vec{a}$) između tačaka $A$ i $B$. Očigledno je da svakoj tački $M$ vektora $\overrightarrow{AB}$ odgovara i na pravoj $p$ $M'$. Skup svih tačaka $M'$ obrazuje vektor $\overrightarrow{A'B'} = \vec{a}'$, za koji kažemo da je normalna projekcija vektora $\overrightarrow{AB}$ na pravu $p$.



Sl. 66

Prema tome, može se reći:

1) Pravac vektora $\vec{a}'$ je prava $p$.

2) Smer od projekcije početka vektora $\vec{a}$ na pravu $p$ ka projekciji njegove krajnje tačke od $A'$ ka $B'$.



3) Moduo vektora $\vec{a}'$ je $0 \leq \vec{a}' \leq \vec{a}$, što zavisi od ugla $\alpha$ koji je nosač vektora $\vec{a}$ obrazuje sa pravom $p$.

Ako je $\alpha = 90°$ tj. $q \perp p$ ($q$ normalno na $p$) $|\vec{a}'| = 0$.

Ako je $q \parallel p$ ($q$ paralelno sa $p$) $|\vec{a}'| = |\vec{a}|$ tj. $\vec{a}' = \vec{a}$.

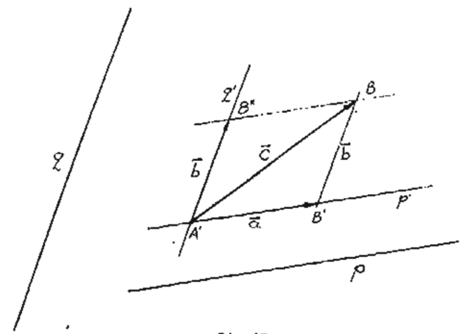
Moduo vektora $\vec{a}'$ može se izračunati ako se znaju rastojanja krajnjih tačaka vektora $\vec{a}$ od prave $p$: $\overline{AA'} = d_1$ i $\overline{BB'} = d_2$, onda je

$$|\vec{a}'| = \sqrt{|\vec{a}|^2 - (d_2 - d_1)^2}$$

### 4. RAZLAGANJE VEKTORA NA KOMPONENTE

Kod sabiranja vektora $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, sabirci $\vec{a}$ i $\vec{b}$ često se zovu komponente vektora $\vec{c}$, a vektor $\vec{c}$ zove se rezultanta vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Videli smo kako se dobija vektor $\vec{c}$ ako su dati vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Zadatak može biti i obrnut, tj. treba naći komponente $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako je dat vektor $\vec{c}$. Da bi zadatak bio određen, mora se znati ili pravci vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ili njihove module.

Uzmimo da prvo treba dati vektor $\vec{c}$ razložiti na dve komponente datog pravca $p$ i $q$.



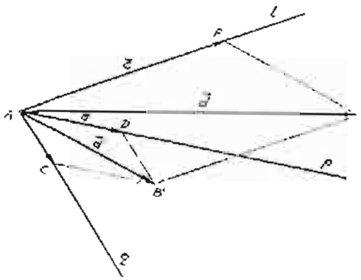
Sl. 67

Povučemo prvo kroz početak datog vektora $\vec{c}$ tačku $A$, prave $p' \parallel p$ i $q' \parallel q$ (sl. 67). Zatim kroz tačku $B$ povučemo pravu paralelno sa $q'$. Ta prava određuje na pravoj $p'$ tačku $B'$ koja je *kosa projekcija* tačke $B$ na pravu $p'$ i koja određuje vektor $\overrightarrow{AB'} = \vec{a}$. Istim postupkom određujemo tačku $B''$ na pravoj $q'$ tako da je $\overrightarrow{AB''} = \vec{b}$.

Zadatak bi se mogao rešiti i jednostavnije ako bi se kroz krajnje tačke datog vektora povukle prave koje su paralelne sa datim pravima $p$ i $q$. Njihov presek odredio bi tačku $B'$ (ili $B''$). Onda je $\overrightarrow{AB'} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{B'B} = \vec{b}$

Da bi se dati vektor razložio na komponente u tri ili više pravaca treba konstruisati poligon kojem je dati vektor stranica, a ostale stranice da su mu paralelne sa datim pravima. Ako nema drugih podataka, taj zadatak je neodređen jer takvih poligona, čije stranice treba da odrede tražene vektore, možemo konstruisati beskonačno mnogo.

Razložiti vektor u tri pravca koji ne pripadaju istoj ravni znači rastaviti vektor na tri komponente u prostoru. Taj zadatak je određen.



Sl. 68

Neka imamo vektor $\vec{d}$ koji treba razložiti na tri komponente u prostoru i da pravci tih komponenata budu prave $p$, $q$, $l$ (sl.68).

Prave $p$ i $q$ određuju ravan $pAq$. Prava $BB' \parallel l$ određuje u toj ravni tačku $B'$. Za vektor $\overrightarrow{AB'} = \vec{d'}$ kažemo da je projekcija vektora $\vec{a}$ na ravan $pAq$. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su komponente vektora $\vec{d'}$ u pravcu $p$ i $q$. Prava $BF \parallel AB'$ određuje vektor $\overrightarrow{AF} = \vec{c}$.

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

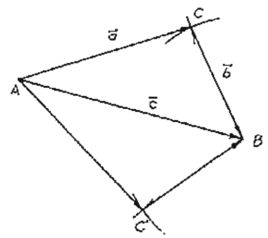
Vektor se može razložiti na dve komponente i onda ako su dati moduli tih komponenata.

Dati su nam, dakle, moduli $|\vec{a}|$ i $|\vec{b}|$.

Iz krajnjih tačaka $A$ i $B$ datog vektora $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ (sl. 69) kružnim lucima poluprečnika $|a|$, odnosno $|b|$, odredimo tačke $C$ i $C'$. Zadatak, prema tome, ima dva rešenja.

$$\vec{a} = \overrightarrow{AC} \quad \text{ili} \quad \vec{a} = \overrightarrow{AC'}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} \quad \text{ili} \quad \vec{b} = \overrightarrow{C'B}$$

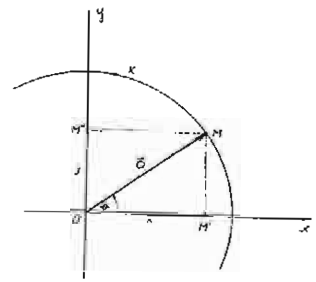


Sl. 69



## 5. PROJEKCIJA VEKTORA NA OSU

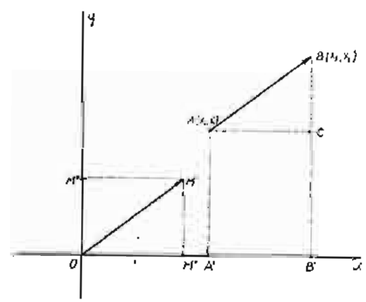
Dok je projekcija vektora na pravu — vektor (sl. 66), projekcija vektora $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ (sl. 70) na osu $Ox$ je apscisa njegove krajnje tačke — broj $x$. Projekcija vektora $\overrightarrow{OM}$ na $y$-osu je ordinata tačke $M$ — broj $y$. Na slici 70 $x = 6$; $y = 5$. Projekcija $x$ i $y$ vektora $\vec{a}$ na koordinatne ose zovu se koordinate vektora $\vec{a}$. Stoga se vektor čije su projekcije na koordinatne ose $x$ i $y$ često obeležava simbolom $\{x, y\}$. Vektor $\overrightarrow{OM}$ (sl. 70) bi obeležili $\vec{a} = \{6, 5\}$. Koordinatama $x$ i $y$ određen je u koordinatnom sistemu $xOy$ pravac, smer i moduo vektora.



Sl. 70

Neka su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{OM}$ jednaki $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$ (sl. 71). Kako je projekcija vektora $\overrightarrow{AB}$ na $x$-osu $x_2 - x_1$, a na $y$-osu $y_2 - y_1$ i pošto je $x_2 - x_1 = x$; $y_2 - y_1 = y$ (sl. 71), koordinate vektora $\overrightarrow{AB}$ su

$$\{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}.$$



Sl. 71

Ako je $x_2 < x_1$, projekcija vektora na $x$-osu je negativan broj. Takođe je negativan broj projekcija vektora na $y$-osu ako je $y_2 < y_1$.

Koordinatama vektora određen je koeficijent pravca $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ nosača i smer vektora. Njegov moduo je

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

rastojanje krajnjih tačaka vektora.

## 6. VEKTOR POLOŽAJA

Vektor, koji je vezan za koordinatni početak (sl. 70), svojom krajnjom tačkom određuje položaj tačke $M$ u koordinatnom sistemu $xOy$. Zato se vektor $\overrightarrow{OM}$ zove vektor položaja ili radius — vektor tačke $M$. Zaista, i vektor $\overrightarrow{OM}$ i tačka $M$ imaju iste koordinate $(x, y)$.

Ali, vektor $\overrightarrow{OM}$, a time i tačka $M$, može odrediti ne samo pomoću njegovih koordinata $\{x, y\}$, nego i pomoću, recimo, njegovog modula $|\vec{a}|$ i ugla $\theta$ (grčko slovo, čita se „teta") koji vektor obrazuje sa osom.

Na primer: ako je $r$ poluprečnik kružnice $k$ (sl. 70), za $|\vec{a}| = 2$ ugao $\theta$ određuje tačku na kružnici $k$.

Za svaku tačku ravni postoji odgovarajuće $|\vec{a}|$ $(0, \infty)$ i $\theta$ od $0°$ do $360°$. To znači da funkcionalna zavisnost između $x$ i $y$ može se izraziti zavisnošću između $|\vec{a}|$ i $\theta$ što često, u znatnoj meri, olakšava rešavanje mnogih problema matematike.



# ELEMENTI EUKLIDOVE GEOMETRIJE

## UVOD

### 1. OSNOVNI POJMOVI. DEFINICIJE

Geometrija izučava prostorne geometrijske oblike i njihov uzajamni odnos, tj. veličinu, oblik i položaj. Svaki novi pojam objašnjava se pomoću poznatih pojmova. To objašnjenje vrši se pomoću naročitih iskaza koji se zovu *definicije*. Definicija je, dakle, takav stav kojim se objašnjava neki pojam pomoću već poznatih pojmova. Ali, i ti poznati pojmovi morali su se prethodno definisati. Pri tome od nečega se moralo poći. Pojmovi koji se ne definišu su *osnovni* pojmovi. U savremenoj geometriji kao osnovni pojmovi uzeti su —

tačka, prava i ravan

Pomoću ta tri pojma mogu se izvesti definicije svih ostalih pojmova koji se stoga zovu *izvedeni pojmovi*. Pri formiranju definicije prvo se naznači rod (genus) kojem pripada predmet definicija, a zatim se navedu osobine koje ga izdvajaju od ostalih pojmova tog roda, specifično obeležje (differentia specifica). Na primer:

Romb je paralelogram (genus), čije su stranice jednačke (differentia specifica).

### 2. UZAJAMNI POLOŽAJ TAČKE, PRAVE I RAVNI

Tačke se obično obeležavaju velikim latinskim slovima $A$, $B$, $C$... $M$, $N$, $P$, $Q$... Prave se obeležavaju malim latinskim slovima, $a$, $b$ ... $l$, $n$,... $p$, $q$,... $s$, $t$..., a ravni malim grčkim slovima $\alpha$, $\beta$, $\gamma$... $\pi$.

Ako se želi naglasiti da se dve tačke, $A$ i $B$, poklapaju, to se može napisati ovako:

$$A \equiv B$$

Prava, kao i svaka linija, je skup tačaka. Za neku tačku $M$ postoje samo dve mogućnosti: ili tačka $M$ pripada nekoj pravoj $p$, ili ne pripada.

Ako $M$ pripada $p$, onda pišemo:

$$M \in p,$$

ako, pak, $M$ ne pripada $p$, onda pišemo:

$$M \notin p$$

Isto tako, tačka $M$ može pripadati ili ne pripadati ravni $\pi$.

$$(M \in \pi) \vee (M \notin \pi)$$

Dve prave, $p$ i $q$ mogu se poklapati —

$$p \equiv q.$$

Dve prave mogu biti paralelne —

$$p \parallel q.$$

Prave se mogu seći —

$$p \times q.$$

Ako prave $p$ i $q$ ne pripadaju istoj ravni, tj. dve prave mogu u prostoru i da se mimoilaze —

$$p \dot{\times} q.$$

Prava $p$ može pripadati ravni $\pi$ —

$$p \in \pi.$$

Ili da bude paralelna sa tom ravni —

$$p \parallel \pi.$$

Ili, pak, da seče ravan (u tom slučaju se kaže da pravu $p$ prodire ravan $\pi$) —

$$p \times \pi$$

Dve ravni, $\alpha$ i $\beta$, ili se poklapaju, ili su paralelne, ili se, pak, seku —

$$(\alpha \equiv \beta) \vee (\alpha \parallel \beta) \vee (\alpha \times \beta).$$



## 2. AKSIOME. TEOREME

Proučavanje geometrijskih oblika, njihovih osobina i uzajamnih odnosa vrši se pomoću naročitih iskaza (stavova) koji se zovu *teoreme*. Svaki od tih stavova postaje istinit ako se može obrazložiti (dokazati) pomoću već dokazanih istina. I ovde se moralo od nečega poći, tj. moraju se prihvatiti neke istine bez obrazloženja. Takve osnovne geometrijske istine zovu se aksiome.

Navešćemo ovde sedam aksioma na koje ćemo se u daljem izlaganju oslanjati i koje postoje u čuvenom naučnom radu „Elementi" koji je napisao grčki matematičar Euklid (IV v pre n.e.).

*Aksioma I.* Kroz dve tačke u prostoru može se povući samo jedna prava.

*Aksioma II.* Na svakoj pravoj postoje bar dve tačke; a bar tri tačke postoje u ravni što ne pripadaju istoj pravoj.

*Aksioma III.* Tri tačke koje nisu na istoj pravoj određuju samo jednu ravan.

*Aksioma IV.* Ako neka prava ima dve zajedničke tačke sa nekom ravni, sve njene tačke pripadaju toj ravni.

*Aksioma V.* Kroz datu tačku van date prave prolazi samo jedna prava koja je paralelna sa datom pravom.

*Aksioma VI.* Ako dve ravni imaju zajedničku tačku, one imaju bar još jednu zajedničku tačku.

*Aksioma VII.* Postoje bar četiri tačke koje ne pripadaju istoj ravni.

Nemački matematičar D. Hilbert (1862—1943. g.) i njegova škola podigli su izučavanje geometrije na jedan viši stepen i predložili su sistem od dvadeset aksioma.

Ruski matematičar N. J. Lobočevski nije prihvatio *V* aksiom (kod Euklida — V postulat) i postavio je osnove nove geometrije koje se zovu „Geometrija Lobočevskog" ili „Neeuklidova geometrija". Ove discipline su veoma složene i izučavaju se na visokim školama.

Izlaganje geometrije se u velikoj meri uprošćuje, a time i olakšava, uvođenjem još dva aksioma.

*Aksioma VIII.* Svaki geometrijski oblik može se u prostoru premeštati a da pri tom ne menja ni svoj oblik i ni veličinu.

*Aksioma IX.* Kao podudarni smatraju se oni oblici koji se premeštanjem mogu dovesti do poklapanja.

Teorema se sastoji iz dva dela: *pretpostavke* i *tvrđenja*. Svaka teorema može se iskazati u obliku implikacije: „ako. . . ., onda". . . . Pretpostavka se počinje rečju „ako", a tvrđenje sa „onda".

Treba dokazati ono, što se u teoremi tvrdi. Pri dokazivanju oslanjamo se na aksiome, definicije i na teoreme koje su već dokazane. Često se koriste i aksiomi algebre, na primer: ako je $a = b$ i $b = c$, onda je $a = c$. U samom procesu dokazivanja pored onih logičkih operacija o kojima je bilo reči na početku ove knjige, služimo se i složenijim logičkim operacijama, na primer i takvima koje se zovu silogizmi. Silogizam je takva logička operacija na osnovu koje iz dva tačna izkaza (premise) dobijamo treći (zaključak) za koji možemo tvrditi da je tačan. Ovde treba podvući da obe premise moraju da sadrže jedan zajednički termin. Na primer: „Svaki čovek je smrtan" — (jedna premisa). „Sokrat je čovek" (druga premisa). „Čovek" je zajednički termin. „Sokrat je smrtan" (zaključak).

Ako je, pak, taj zajednički termin (srednji član) odsutan, nikakav se zaključak ne može napraviti pa makar oba iskaza bili tačni. Na primer: „Sve krave su preživari" — iskaz je tačan. „Dijagonale romba su normalne" — isto tačan iskaz, ali iz ova dva iskaza ne sledi nikakav zaključak. Ali iz primera: „Sve krave su preživari" i „svi preživari imaju rogove", sledi zaključak: „krave imaju rogove", jer ovde postoji srednji član reč „preživari".

Postoji više načina da se neka teorema dokaže. Najčešće, polazeći od pretpostavke, logičnim zaključivanjem dolazimo do tačnosti tvrđenja, tj. služimo se direktnim dokazom.

Ima takvih teorema koje je lakše dokazati ako se učini pretpostavka da je tvrđenje teoreme netačno. Ukoliko nas ova pretpostavka dovede do protivurečnosti sa nekom aksiomom ili su nekim tvrđenjem koje je tačno, što se već dokazalo, onda to znači da je naša pretpostavka (da je tvrđenje teoreme netačno) neosnovano, a to znači da je tvrđenje teoreme tačno. Taj način dokaza zove se ad absurdum.

Kao primer tog načina dokaza uzmimo:

**Teorema 1.** Ako su dve prave različite, one ne mogu imati dve zajedničke tačke.

*Dokaz*: Pretpostavimo da je tvrđenje netačno. To bi značilo da se kroz dve tačke mogu provući dve različite prave, što je u protivrečnosti sa aksiomom I. Dakle, dve različite prave mogu imati samo jednu zajedničku tačku. Time je teorema dokazana.

Zajednička tačka dveju pravih je presečna tačka. Dve prave koje se seku određuju samo jednu ravan, jer, osim njihove presečne tačke, na svakoj pravoj postoji još bar po jedna tačka (aksioma II), a to su tri tačke koje određuju ravan (aksioma III).

**Definicija 1.** Dve prave, koje pripadaju istoj ravni i nemaju nijednu zajedničku tačku, zovu se paralelne.

Ako su prave $p$ i $q$ paralelne, to se piše $p \parallel q$.



## 3. POLUPRAVA. ZRAK. DUŽ. POLU RAVAN

**Definicija 2.** Poluprava je skup tačaka prave sa iste strane određene tačke na njoj, uključujući i tu tačku.

Sve tačke $M$ prave $p$ koje su sa desne strane tačke $A$ (sl. 72a) obrazuju polupravu $A|M$. Skup tačaka $M'$, koje su sa leve strane od tačke $A$, obrazuju polupravu $A|M'$. Tačka $A$, dakle, deli pravu $p$ na dve poluprave.

Sl. 72

**Definicija 3.** Zrak je orjentisana poluprava.

Ako je na polupravoj naznačen smer, kažemo da je poluprava orijentisana. Smer može da bude od granične tačke $A$ (sl. 72b) ili na graničnoj tački (sl. 72c).

**Definicija 4.** Duž je skup svih tačaka jedne prave ograničen dvema tačkama, uključujući i te tačke.

Sve tačke prave $p$ između tačaka $A$ i $M$ (sl. 72a) obrazuju duž $\overline{AM}$. Duž $\overline{AM}$ može se predstaviti kao presek dve poluprave.

$$\overline{AM} = A|M \cup M|A.$$

Unija tih polupravih $A|M \cup M|A$ je prava $p$. Duž $\overline{AM}$ je rastojanje tačaka $A$ i $M$. Tačke $A$ i $M$ su krajnje tačke duži.

Ako se dve duži $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ mogu dovesti u takav položaj da im se krajnje tačke poklapaju, kažemo da su te duži jednake.

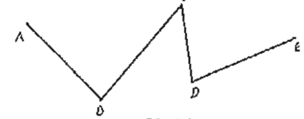
Duž $\overline{AB} = a$ znači da duž $\overline{AB}$ sadrži $a$ nekih jedinica dužine.

**Definicija 5.** Poluravan je skup svih tačaka ravni ograničen pravom, uključujući i tačke te prave. Prava koja pripada nekoj ravni deli tu ravan na dve poluravni.

## 4. IZLOMLJENA LINIJA. POLIGON

Niz duži koje su u ravni raspoređene tako da se početak svake naredne poklapa sa krajem prethodne obrazuje *ravnu izlomljenu liniju* ili *ravnu poligonalnu liniju*. (sl. 73).

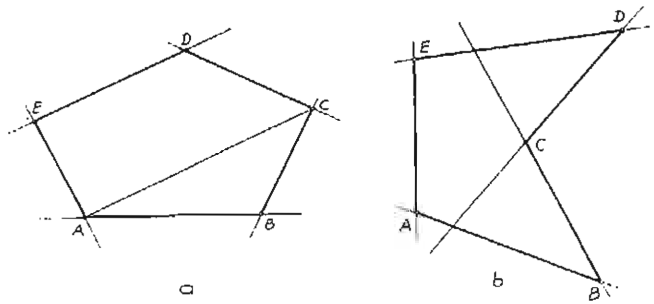
Ako se kraj poslednje duži ne poklapa sa početkom prve — izlomljena linija je otvorena (sl. 73).



Sl. 73

Ako se, pak, kraj poslednje duži poklapa sa početkom prve — izlomljena linija je zatvorena.

**Definicija 6.** Zatvorena izlomljena linija zove se poligon ili mnogougao. Zajedničke tačke duži zovu se *temena* poligona, a pojedine duži koje ga obrazuju su stranice poligona.




Sl. 74

Ako je ceo poligon sa iste strane bilo koje produžene stranice, onda kažemo da je poligon konveksan ili ispupčen, (sl. 74a). Ako to nije slučaj (sl. 74b), poligon je konkaran ili izdubljen. Duž koja spaja spaja dva nesusedna temena poligona $\overline{AC}$ (sl. 74a) zove se dijagonala poligona.

### 5. GEOMETRIJSKO MESTO TAČAKA. KRUŽNICA

Skup tačaka koje zadovoljavaju neki određeni uslov zove se *geometrijsko mesto tačaka.* (u daljem tekstu gmt).

Gmt u prostoru predstavlja neku površ. Na primer gmt koje su jednako udaljene od jedne utvrđene tačke je sfera. To znači da sve tačke gm tačaka imaju neku zajedničku osobinu. U navedenom primeru sve tačke koje se nalaze na površini lopte imaju zajedničku osobinu koja se sastoji u tome da je svaka od njih od središta lopte udaljena za poluprečnik te lopte.

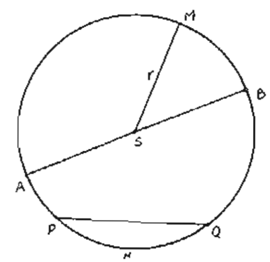
Geometrijsko mesto tačaka u ravni je skup tačaka koje pripadaju istoj ravni i koje imaju neku zajedničku osobinu. Gmt često se zove i uređeni skup tačaka. Gmt u ravni predstavlja neku liniju. Važno je imati u vidu da, ako tačka pripada nekom gmt. ona mora imati osobinu kao i sve ostale tačke tog gmt. Važi i obrnuto: ako se za neku tačku



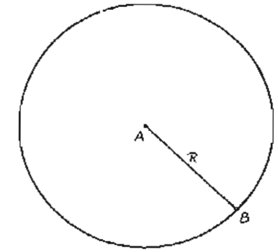
utvrdi da ima istu osobinu koju moraju imati sve tačke nekog gmt to znači da ta tačka pripada tom gmt. odnosno toj liniji.

**Definicija 7.** Kružnica je gmt u ravni koje su jednako udaljene od jedne utvrđene tačke. Ta tačka zove se središte kružnice.

Neka je središte kružnice tačka $S$ (sl. 75). Rastojanje bilo koje tačke $M$ koja pripada kružnici od njenog središta duž $\overline{SM} = r$ je poluprečnik kružnice. Kružnica je određena ako je poznato njeno središte (položaj tačke $S$) i njen *poluprečnik* $r$ ili, što je isto, položaj bilo koje tačke $M$ koja pripada toj kružnici. Zato se kružnica obeležava $(S, r)$ ili $(S, M)$. Prvo slovo označava središte kružnice, a drugo tačku kroz koju ta kružnica prolazi. Tako $(A, B)$ značilo bi da je središte kružnice u tački $A$ i da ta kružnica prolazi kroz tačku $B$ (sl. 76).




Sl. 75




Sl. 76

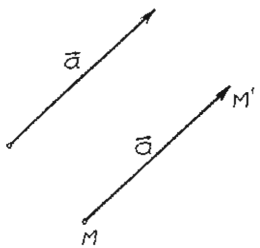
Poluprečnik kružnice $\overline{AB} = r$ zove se i radius. Duž $\overline{PQ}$ čije krajnje tačke pripadaju kružnici (sl. 75) zove se *tetiva* kružnice. Tetiva koja prolazi kroz središte kružnice $\overline{AB}$ (sl. 75) zove se prečnik kružnice, $\overline{AB} = 2r$. Dve bilo koje tačke na kružnici dele kružni liniju na dva kružna luka. Kružni luk se obeležava $\widehat{PNQ}$, odnosno $\widehat{PMQ}$ (sl. 75).

Kružnica deli ravan na dve oblasti; unutrašnju, kojoj pripadaju sve tetive kružnice, i spoljašnju. Unutrašnja oblast zove se krug. Deo kruga između dva poluprečnika zove se sektor ili isečak. Svaka tetiva deli krug na dva kružna segmenta ili odsečka. Prečnik deli krug na dva polukruga.

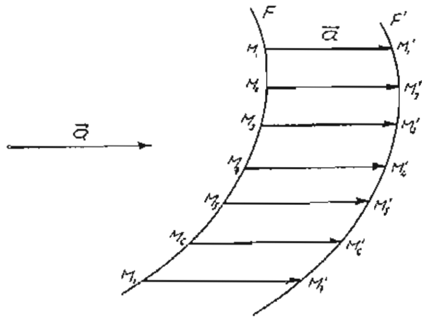
### TRANSLACIJA

Neka je dat vektor $\vec{a}$. Za proizvoljnu tačku $M$ odredimo tačku $M'$ tako da vektor $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ (sl. 77). Prelaz od tačke $M$ ka tački $M'$ definiše *translaciju* tačke $M$ za vektor $\vec{a}$.

Ako imamo ravnu figuru $F$ i, u istoj ravni, vektor $\vec{a}$ (sl. 78) i ako svaku tačku ($M, M_1, M_2 \ldots$) figure, $F$ translatorno pomerimo za vektor $\vec{a}$, dobijamo skup tačaka $M', M_1', M_2', \ldots$ koje obrazuju figuru $F'$.



Sl. 77



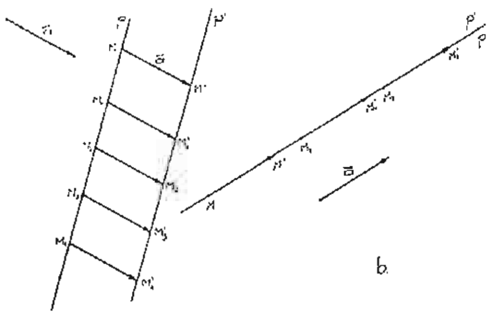
Sl. 78

Za figuru $F'$ kažemo da je transformisana figura $F$ translacijom za vektor $\vec{a}$. Vektor $\vec{a}$ se zove *vektor translacije*. Očigledno je da bi se i figura $F'$ mogla transformisati u figuru $F$ translacijom za vektor $-\vec{a}$.

Translacija je, dakle, premeštanje date figure za određeni vektor. Prema tome, figura $F$ se translacijom preslikava u novu figuru $F'$ koja je podudarna sa figurom $F$. (aksioma IX).

Translacijom za određeni vektor $\vec{a}$ data prava $p$ preslikava se u pravu $p'$ koja je ili paralelna sa pravom $p$, ili se, pak, poklapa sa njom —

$$(p' \parallel p) \vee (p' \equiv p).$$



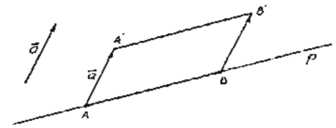
a. b.

Sl. 79

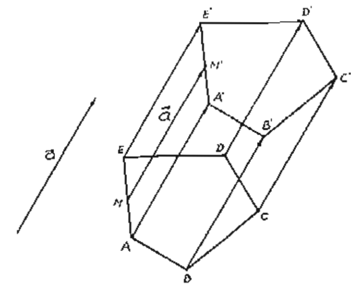


Ako su pravci prave $p$ i vektora $\vec{a}$ različiti, onda tačke $M, M_1, M_2 \ldots$ translacijom prelaze u $M'_1\ M'_1, M'_2 \ldots$ i obrazuju pravu $p'$ (sl. 79a). Ako su pak pravci prave $p$ i vektora translacije $\vec{a}$ isti (sl. 79b) onda sve tačke $M', M'_1, M'_2 \ldots$ prave $p'$ pripadaju pravoj $p$, tj. prava $p'$ poklapa se sa pravom $p$.

Duž $\overline{AB}$ (sl. 80) translacijom za vektor $\vec{a}$ preslikava se u duž $\overline{A'B'}$ koja je jednaka duži $\overline{AB}$ i, ili je paralelna sa njome, ili pripada istoj pravoj $p$.



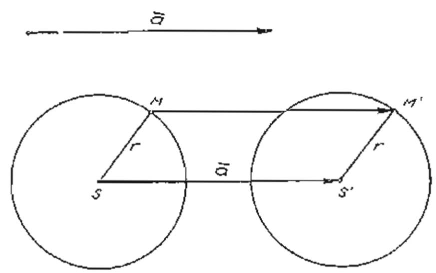
Sl. 80



Sl. 81

Poligon $ABCDE$ translacijom za vektor $\vec{a}$ (sl. 81) preslikava se u poligon $A'B'C'D'E'$, koji je podudaran sa poligonom $ABCDE$. Stranice tih poligona $\overline{A'B'} = \overline{AB}$; $\overline{B'C'} = \overline{BC} \ldots \overline{E'A'} = \overline{EA}$ zovu se homologne ili odgovarajuće. Isto tačke $M$ i $M'$ su homologne tačke, jer se $M$ preslikava u $M'$ translacijom za vektor $\vec{a}$ i $M'$ se preslikava u $M$ translacijom za vektor $-\vec{a}$.

Translacija je, u stvari, paralelno premeštanje.



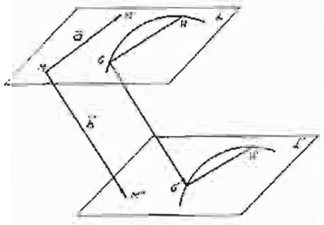
Sl. 82

Kružnica $(S, r)$ translacijom za vektor $\vec{a}$ preslikava se u kružnicu $(S', r)$ tako da vektor $\overrightarrow{SS'} = \vec{a}$.

Ako se na kružnici $(S, r)$ odredi bilo koja tačka $M$ (sl. 82), onda je duž $\overline{SM} = r$ poluprečnik te kružnice. Translacijom *te duži* za vektor $\vec{a}$ imamo duž $\overline{S'M'}$. Duž $\overline{S'M'}$ paralelna je sa $SM$ i $\overline{S'M'} = \overline{SM} = r$. Tačka $M'$ homologna je sa tačkom $M$. Prema tome, kružnica $(S, r)$ je transformisana kružnica $(S, r)$ translacijom za vektor $\vec{a}$.

Ako vektor translacije $\vec{a}$ pripada nekoj ravni $\alpha$, onda svaka tačka $M$ ravni $\alpha$ translacijom za taj vektor prelazi u tačku $M'$ koja pripada ravni $\alpha$ (sl. 83).

$$(M \in \alpha) \wedge (\vec{a} \in \alpha) \Rightarrow (M \in \alpha) \wedge (\overrightarrow{MM'} \in \alpha) \Rightarrow (M' \in \alpha)$$



Sl. 83

Ako, pak, vektor translacije $b$ ne pripada ravni $\alpha$ (sl. 83), onda sve tačke $M$ ravni $\alpha$ prelaze u tačke $M''$ i obrazuju ravan $\alpha'$ koja je paralelna sa ravni $\alpha'$. Sve tačke $G$ figure $F$ koja pripada ravni $\alpha$ prelaze u tačke $G'$ figure $F'$ koja pripada ravni $\alpha'$. Duži $GM$ i $C'M'$, koje spajaju homologne tačke na figurama $F$ i $F'$, su paralelne.

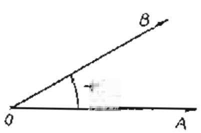
Translacija u prostoru je, dakle, isto kao i ravni, paralelno premeštanje za određeni vektor.

## UGAO. OPERACIJE SA UGLOVIMA

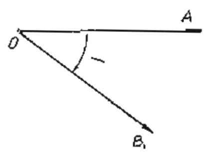
### MERENJE UGLOVA

**Definicija 8.** Ugao je skup od dva znaka sa zajedničkom graničnom tačkom.

Zajednička granična tačka $O$ (sl. 84) je teme ugla. Znaci $OA$ i $OB$ su kraci ugla. Ugao se obeležava $\sphericalangle AOB$. Tačke $A$ i $B$ su bilo koje tačke koje pripadaju kracima ugla u sredini tačka $O$ je teme ugla. Za dva ugla kažemo da su jednaka ako se mogu dovesti do poklapanja njihova temena i oba kraka.




Sl. 84




Sl. 85

Veličina ugla je veličina obrta koji treba da izvrši jedan krak oko temena da bi se poklopio sa drugim. Obrtanje kraka u smeru koji obrnut kretanju kazaljke na časovniku uzeto je kao pozitivno. Ako je krak $OA$ nepomičan, onda je ugao $AOB > 0$ (sl. 84), a ugao $AOB < 0$ (sl. 85).

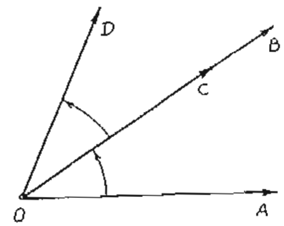


Sabrati dva ugla znači nadovezati ih jedan na drugi u pozitivnom smeru (sl. 86).

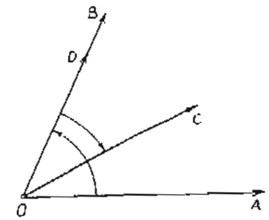
$$\sphericalangle AOC + \sphericalangle COD = \sphericalangle AOD.$$

Oduzeti od ugla $AOB$ ugao $COD$ znači nadovezati na ugao $AOB$ ugao $COD$ u suprotnom smeru kako je to prikazano na slici 87.

Množenje ugla sa brojem $k \in N$ svodi se na nadovezivanje u pozitivnom smeru $k$ puta datog ugla.



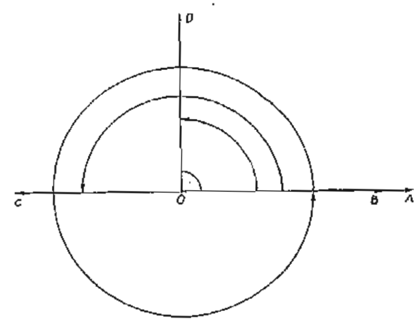

Sl. 86




Sl. 87

Ako znak $OB$ izvrši pun obrt oko tačke $O$, onda se dobija ugao $AOB$ (sl. 88) koji se zove *pun* ugao. Ugao $AOC$ je *ravan* ugao ako je krak od poklapanja sa $OA$ izvršio oko tačke $O$ polovinu obrta. Krak $OD$ izvršio je četvrtinu obrta oko tačke $O$ i tako se dobija ugao $AOD$ koji se zove *prav*. Ako se želi naglasiti da je ugao prav, napravi se luk i stavi u sredinu tačka (sl. 88). Često se prav ugao uzima kao mera uglova i onda se obeležava sa $d$ (od francuske reči droit — pravi):

$$\sphericalangle AOD = d.$$




Sl. 88

Postoje i druge jedinice za merenje uglova. Devedeseti deo pravog ugla zove se stepen (°). Šezdeseti deo stepena je minut ('), a šezdeseti deo minuta je sekunda (").

Za merenje uglova upotrebljava se i dekadni sistem mera. On se najviše koristi u Astronomiji. Stoti deo pravog ugla zove se *grad* ($^g$).

Grad se deli na 100 centezimalnih minuta $(^{c})$. Minut se deli na 100 centezimalnih sekundi $(^{cc})$.

$$1^\circ = \frac{10^g}{9}; \qquad 1^g = \frac{9^\circ}{10}$$

Na primer $72^\circ = 72 \cdot \frac{10^g}{9} = 80^g$

$$70^g = 70 \cdot \frac{9^\circ}{10} = 63^\circ$$

Prav ugao $\alpha = 90^\circ$ ili $\alpha = 100^g$

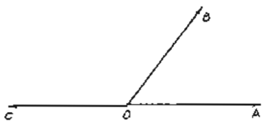
Ravan ugao je $2d = 180^\circ$ ili $200^g$.

Pun ugao $4d = 360^\circ$ ili $400^g$

Veličina ugla obeležava se obično grčkim slovima ($\alpha, \beta, \gamma \ldots . \varphi, \psi, \ldots .$)

Ugao $O < \alpha < d$ zove se *oštar*. Ako je $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, ugao $\alpha$ je *tup*. Ako je $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ ili, što je isto $2d < \alpha < 3d$, ugao je tupo ispupčen i, ako je $3d < \alpha < 4d$, ugao je oštro ispupčen.

Uglovi koji imaju jedan krak zajednički, $\measuredangle AOC$ i $\measuredangle COD$, zovu se *susedni* (sl. 86).



Sl. 89

Dva susedna ugla čiji je zbir ravan ugao zovu se uporedni (sl. 89) $\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = 2d$. Ako je jedna od njih oštar, onda je drugi tup. Prav ugao mogao bi se definisati i kao jedan od dva jednaka uporedna ugla.

Dva ugla čiji je zbir $2d$, bez obzira na njihov uzajamni položaj, zovu se *suplementni*.

Dva ugla čiji zbir jednak pravom uglu zovu se *komplementni*.

## ROTACIJA

a) *Rotacija oko tačke*.

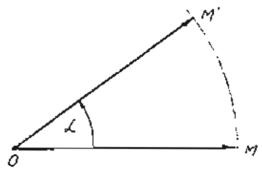
Neka je data tačka $O$ i vektor $\overrightarrow{OM}$ kojim je određen položaj tačke $M$ prema tački $O$. Obrtanjem vektora $\overrightarrow{OM}$ oko tačke $O$ za ugao $\alpha$ (sl. 90), tačka $M$ prelazi u tačku $M'$. Taj prelaz tačke $M$ u $M'$ definiše rotaciju tačke $M$ oko tačke $O$ za ugao $\alpha$. Tačka $O$ je centar rotacije.



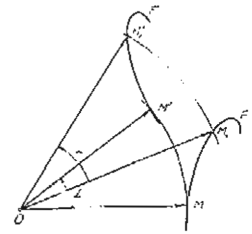
Ugao $\alpha$ je ugao rotacije. Ako se rotacija vrši u smeru koji je obrnut kretanju kazaljke na časovniku, kažemo da je ugao rotacije pozitivan.

Ako sve tačke figure $F$ (sl. 91) rotiramo oko tačke $O$ za isti ugao $\alpha$, njene tačke $M$, $M_1 \ldots$ preći će u tačke $M'$, $M'_1 \ldots$ Skup svih tako preslikanih tačaka figure $F$ obrazovaće novu figuru $F'$, za koju kažemo da je transformisana figure $F$ rotacijom oko tačke $O$ za ugao $\alpha$.

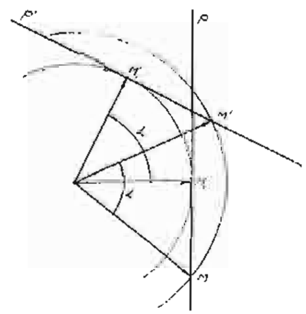
Očigledno je da se figura $F'$ preslikava u figuru $F$ rotacijom oko tačke $O$ za ugao $-\alpha$.

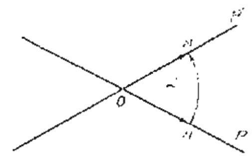


Sl. 90


Sl. 91

To znači da je rotacija premeštanje figura u njenoj ravni. Kako je prava određena sa dve tačke dovoljno je odrediti dve tačke prave $p'$ u koju se preslikava prava $p$ rotacijom oko tačke $O$ za ugao $\alpha$ (sl. 92). Zato se na datoj pravoj prvo odrede dve bilo koje tačke, $M$ i $M_1$. Rotacijom svake za dati ugao $\alpha$ odrede se tačke $M'$ i $M'_1$ koje pripadaju $p'$ u koju se preslikava prava $p$ rotacijom oko tačke $O$ za dati ugao $\alpha$. Tačke $M$ i $M'$, odnosno $M_1$ i $M'_1$ su homologne tačke u toj transformaciji.


Sl. 92

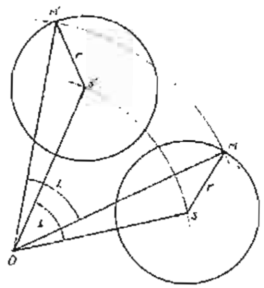

Sl. 93

Ako centar rotacije tačka $O$ pripada pravoj $p$, onda je dovoljno izvršiti rotaciju za dati ugao $\alpha$ samo jedne bilo koje tačke $M$ te prave. Dobijena tačka $M'$ sa tačkom $O$ određuju pravu $p'$ (sl. 93) u koju se, rotacijom za ugao $\alpha$, preslikava prava $p$.

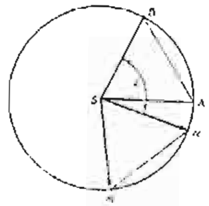
Rotacijom oko tačke $O$ duži $\overline{AB}$ dobijamo duž $\overline{A'B'}$ koja je podudarna sa duži $\overline{AB}$ tako što izvršimo rotaciju njenih krajnjih tačkak oko centra rotacije za dati ugao.

Rotacijom oko tačke $O$ kružnica $(S, r)$ preslikava se u podudarnu kružnicu $(S', r)$ (sl. 94). Ako je središte $S$ kružnice centar rotacije, onda se kružnica $(S, r)$ preslikava sama u sebe (sl. 95).

Da bi se dati ugao mogao preneti tako da mu teme bude u određenoj tački ravni, upotrebom šestara i lenjira treba prvo dokazati teoremu.



Sl. 94



Sl. 95

**Teorema 2.** U istoj ili u jednakim kružnicama jednakim lucima odgovaraju jednake tetive.

Pretpostavka: $\widehat{MN} = \widehat{AB}$.

Tvrđenje: $\overline{MN} = \overline{AB}$ (sl. 95).

Dokaz: Rotacijom luka $\widehat{MN}$ oko središta $S$ za ugao $NSB = \alpha$ tačka $N$ prelazi u tačku $B$, a tačka $M$, usled jednakosti lukova $\widehat{MN}$ i $\widehat{AB}$, prelazi u tačku $A$. Stoga je tetiva $\overline{MN} = \overline{AB}$.

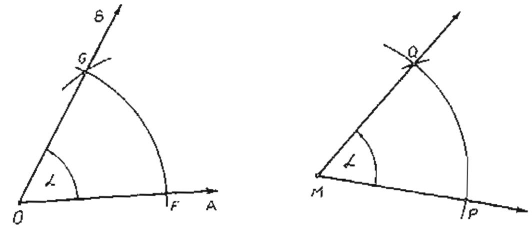
Posledica: Kako se rotacijom oko tačke $S$ za ugao $\alpha$ krajnje tačke lukova $\widehat{AB}$ i $\widehat{MN}$ poklapaju, poklapaju se i kraci uglova $ASB$ i $MSN$. Prema tome,

$$\sphericalangle MSN = \sphericalangle ASB$$

Neka je dat ugao $AOB$ (sl. 96). Taj ugao treba premestiti tako da mu teme bude u tački $M$. Opišemo prvo kružni luk proizvoljnog poluprečnika, $\overline{OF} = r$, koji seče krak $OB$ u tački $G$. Istim poluprečnikom $r$ opišemo kružni luk koji seče proizvoljan krak, povučen iz tačke $M$, u tački $P$. Presečemo zatim taj luk kružnim lukom $(P, Q)$ tako da je $\overline{PQ} = \overline{FG}$. Na osnovu malo pre dokazane teoreme sledi:

$$\sphericalangle PMQ = \sphericalangle AOB$$





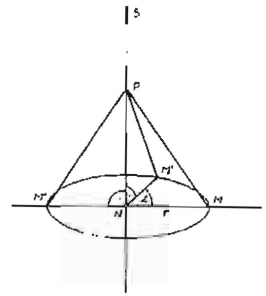
Sl. 96

b) *Rotacija oko ose*

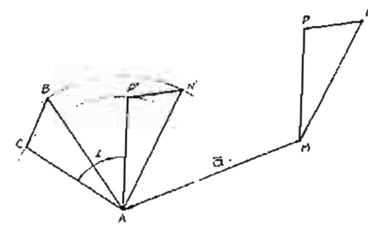
Rotacijom oko ose $s$ koja pripada ravni crteža tačka $M$ opisuje kružnicu $(N, r)$ (sl. 97). Ako je ugao rotacije $\alpha = 180°$, tačka $M$ preslikava se u tačku $M''$. Ako se kroz te tačke povuče prava $MM''$ koja seče osu $s$ u tački $N$, vidimo da rotacijom za $180°$ duži $\overline{MN}$ i $\overline{M''N}$ poklapaju.

Prema tome, $\sphericalangle M''NP = \sphericalangle MNP$. Kako su ti uglovi uporedni, oni su pravi. Znači, prava $MM''$ i osa $s$ su uzajamno normalne. To znači da ravan kružnice $(N, r)$ je normalna na osu rotacije.

Rotacijom za ugao $\alpha = 360°$ tačka $M$ preslikava se u samu sebe.



Sl. 97



Sl. 98

Za dve figure koje se mogu dovesti do poklapanja pomeranjem u istoj ravni (tj. translacijom i rotacijom) kažemo da su *direktno* podudarne. $(\cong)$.

Trougao $MNP$ translacijom za vektor $\overline{MA} = \vec{a}$ i, zatim rotacijom oko $A$ za $\alpha$ prelazi u trougao $ABC$ (sl. 98) $\triangle MNP \cong \triangle ABC$

Za dve figure koje se mogu dovesti do poklapanja rotacijom oko ose kažemo da su *indirektno* podudarne. To su, na primer, trouglovi $MNP$ i $M''NP$ (sl. 97).

## SIMETRIJA

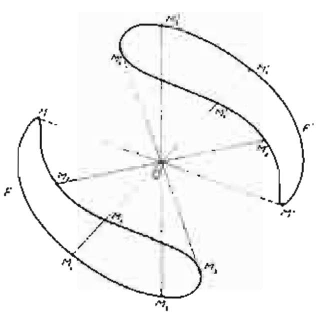
### 1. CENTRALNA SIMETRIJA

Tačke $M$ i $M'$ su simetrične u odnosu na tačku $O$ ako tačka $O$ polovi duž $\overline{MM'}$.

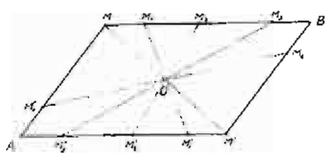
Tačka $O$ je centar simetrija, a za tačku $M$ kažemo da se preslikava u tačku $M'$ simetrijom u odnosu na centar simetrije $O$.

Ako imamo figuru $F$ i tačku $O$ (sl. 99), onda sve tačke koje su simetrične sa tačkama figure $F$ u odnosu na tačku $O$, obrazuju novu figuru $F'$. Zato se kaže da je figura $F'$ simetrična sa figurom $F$ u odnosu na tačku $O$. Takođe se može reći da je figura $F$ simetrična sa figurom $F'$. Ako centar simetrije pripada istoj ravni sa tačkama figure $F$, onda su figure $F$ i $F'$ direktno podudarne jer se rotacijom za ugao 180° oko tačke $O$ preslikavaju jedna i druga.

Figure koje se sastoje od tačaka $M$ i od tačaka koje su simetrične sa tim tačkama u odnosu na neku tačku $O$ (sl. 100) su *centralno simetrična* Tačka $O$ je centar simetrije te figure. Rotacijom oko centra simetrije za ugao $\alpha = 180°$ centralno simetrična figura preslikava se sama u sebe.



Sl. 99



Sl. 100

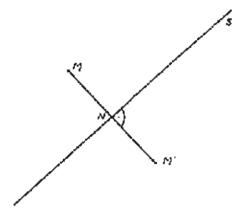
Za bilo koje dve figure, ravne ili prostorne, kažemo da su centralno simetrične prema nekoj tački $O$ ako su sve njene tačke, dve po dve, simetrične prema tački $O$. Tačka $O$ je centar simetrije te figure. Centralno simetrično prostorne figure su, na primer, kocka, lopta, valjak.



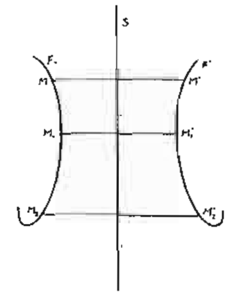
### 2. OSNA SIMETRIJA

Prava $s$ koja je normalna na duž $\overline{MM'}$ i prolazi kroz njenu sredinu je simetrala te duži. Za tačke $M$ i $M'$ kažemo onda da su simetrične prema pravoj $s$. (sl. 101)

Prava $p$ je osa simetrije, a tačke $M$ i $M'$ su odgovarajuće ili homologne tačke. Dužina normale od tačke $M$ do njenog preseka sa pravom $s$ $\overline{MN}$ je rastojanje tačke $M$ od prave $s$.



Sl. 101



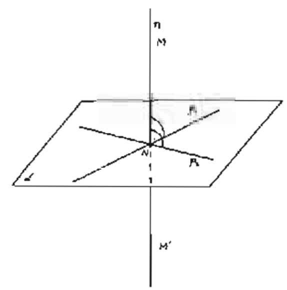
Sl. 102

Kako je $\overline{MN} = \overline{M'N}$, tačka $M$ i $M'$ su jednako udaljene od prave $s$.

Ako svaku tačku $M$, $M_1$, $M_2$ ... figure $F$ (sl. 102) preslikamo simetrijom prema pravoj $s$ dobijamo tačke $M'$, $M'_1$, $M'_2$ ... koje obrazuju figuru $F'$ za koju kažemo da je simetrična sa $F$ prema pravoj $s$.

Za bilo koje dve figure (ravne ili prostorne) kažemo da su simetrične prema pravoj ako se rotacijom oko te prave za ugao od 180° dovode do poklapanja.

### 3. RAVANSKA SIMETRIJA



Sl. 103

Neka prava $n$ prodire ravan $\alpha$ u tački $N$ (sl. 103).

Prava $n$ je normalna na ravan $\alpha$ ako je normalna na sve prave $p_1$, $p_2$ ... koje pripadaju ravni $\alpha$ i koje prolaze kroz tačku $N$.

Podnožje normale povučene iz tačke $M$ na ravan $\alpha$, tačka $N$, je projekcija tačke $M$ na ravan $\alpha$, a dužina $\overline{MN}$ je rastojanje tačke $M$ od ravni $\alpha$.

Ako se na pravoj $n$ odredi tačka $M'$ tako da $\overline{M'N} = \overline{MN}$, onda kažemo da su tačke $M$ i $M'$ simetrične prema ravni $\alpha$.

Ravan $\alpha$ koja prolazi kroz sredinu duži $\overline{M'M}$ i normalna je na tu duž, je *simetrijska ravan* duži $\overline{MM'}$.

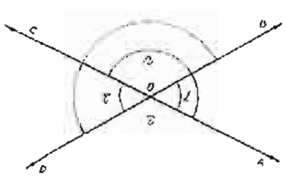
Figura u kojoj se može postaviti simetrijska ravan zove se ravanski simetrična.

Svaka ravan koja prolazi kroz središte sfere je simetrijska ravan sfere. Prema tome sfera, a znači i lopta, ima beskonačno mnogo simetrijskih ravni. Kvadar ima tri, kocka devet simetrijskih ravni.

## UGLOVI

### 1. UNAKRSNI UGLOVI

**Definicija 9.** Uglovi koji imaju zajedničko teme, a kraci im imaju isti pravac i suprotni smer zovu se *unakrsni*.



Sl. 104

Dve prave koje se seku obrazuju četiri ugla sa zajedničkim temenom u tački $O$ (sl. 104).

Prema definiciji 9. uglovi $\alpha$ i $\gamma$, odnosno $\beta$ i $\delta$, unakrsni su.

Uglovi $\alpha$ i $\beta$; $\beta$ i $\gamma$; $\gamma$ i $\delta$; $\delta$ i $\alpha$; su uporedni.

**Teorema 3.** Unakrsni uglovi su jednaki.

Pretpostavka: uglovi $\alpha$ i $\gamma$ su unakrsni (sl. 104).

Tvrđenje: $\alpha = \gamma$.

Dokaz: Rotacijom oko tačke $O$ za ugao $180°$ krak ugla $\alpha$ $OA$ preslikava se u $OC$, a krak $OB$ u $OD$. Prema tome: $\alpha = \gamma$.

### 2. UGLOVI SA PARALELNIM KRACIMA

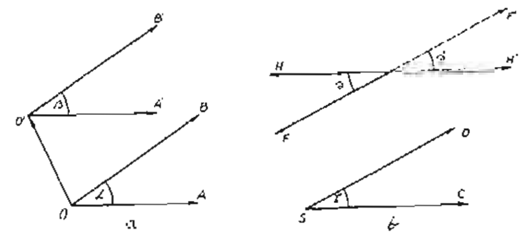
**Teorema 4.** Uglovi sa paralelnim kracima su jednaki ako su im oba kraka istog smera ili suprotnog, a suplementni ako su im dva kraka istog smera, a dva suprotnog.

*Dokaz*: 1) Oba kraka su istog smera (sl. 105a). Translacijom za vektor $\overrightarrow{OO'}$ krak ugla $\alpha$ $OA$ preslikava se u $O'A'$, a krak $OB$ u $O'B'$. Kako se kraci uglovi $\alpha$ i $\beta$ mogu dovesti do poklapanja, to znači $\alpha = \beta$.



2) Oba kraka su suprotnog smera (sl. 105b). Rotacijom za $180°$ ugao $\delta$ se preslikava u $\delta' = \delta$. Kako su kraci uglova $\gamma$ i $\delta'$ paralelni i istog smera, imamo

$$\left.\begin{aligned}\delta' &= \gamma\\ \delta &= \delta'\end{aligned}\right\} \Rightarrow \gamma = \delta$$



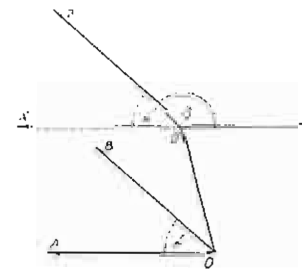
Sl. 105

3) Dva kraka istog smera, a dva suprotnog (sl. 106).

*Dokaz*: Neka su kraci uglova $AOB = \alpha$ i $CO'D = \beta$ paralelni i to $OB$ i $O'D$ su istog smera, a $OA$ i $O'C$ suprotnog (sl. 106).

Translacijom za vektor $\overline{OO'}$ ugao $AOB = \alpha$ preslikava se u $\sphericalangle A'O'D = \alpha'$ tako da je $\alpha' = \alpha$. Uglovi $\alpha'$ i $\beta$ su uporedni i, stoga, $\alpha' + \beta = 180°$. Kako je $\alpha_1 = \alpha$ imamo

$$\alpha + \beta = 180°.$$



Sl. 106

### 3. UGLOVI SA NORMALNIM KRACIMA

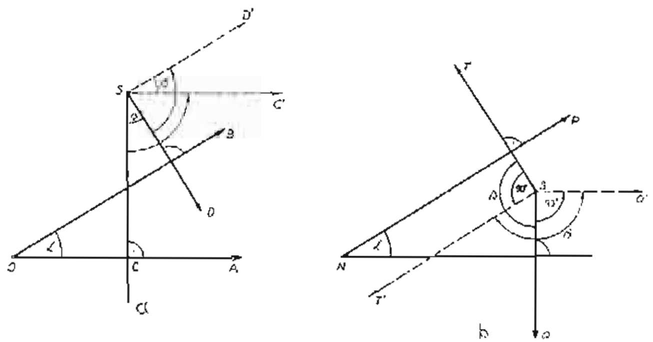
**Teorema 5.** Uglovi sa normalnim kracima su jednaki ako su oba oštra, a suplementni ako je jedan od njih oštar, a drugi tup.

*Dokaz*: 1) Oba su ugla oštra (sl. 107a).

Neka je $SC \perp OA$ i $SD \perp OB$. Rotacijom ugla $\beta$, tj. njegovih krakova oko temena $S$ za ugao $90°$, dobijamo ugao $C'SD' = \beta' = \beta$. Kako je sada $SC' \parallel OA$ i $SD' \parallel OB$, s obzirom na ($T$.4, 1) — Teorema 4, pod 1 $\beta' = \alpha$. Pošto je $\beta' = \beta$, to znači da je $\beta = \alpha$.

2) Jedan je ugao oštar ($\alpha$), a drugi tup ($\beta$) (sl. 107b). Rotacijom ugla $QST = \beta$ za 90° oko tačke $S$ on prelazi u $\measuredangle\, Q'ST' = \beta_1 = \beta$. Prema (T. 4, 3) imamo

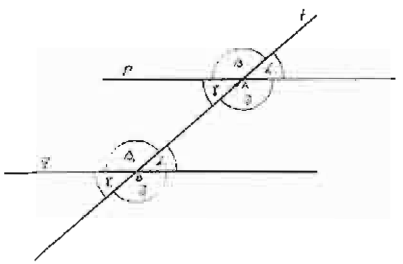
$$\alpha + \beta = 180°$$



Sl. 107

### 4. TRANSVERZALNI UGLOVI NA PARALELNIM PRAVIMA

Neka imamo dve paralelne prave $p$ i $q$ (sl. 108). Prava $t$ koja seče te prave zove se transverzala, a uglovi koje ona obrazuje sa pravima $p$ i $q$ zovu se transverzalni uglovi.



Sl. 108

Uglovi koji su između paralela su unutrašnji. To su:

$$\gamma,\ \delta,\ \beta_1 \text{ i } \alpha_1$$

Uglovi izvan paralela su spoljašnji, to su:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma_1 \text{ i } \delta_1$$

Sa leve strane transverzale su uglovi:

$$\beta,\ \gamma,\ \beta_1 \text{ i } \gamma_1$$

Sa desne strane transverzale su uglovi:

$$\alpha,\ \delta,\ \alpha_1 \text{ i } \delta_1$$



**Definicija 10.** Saglasni uglovi su jedan spoljašnji i jedan unutrašnji sa iste strane transverzale (temena su im u tačkama $A$ i $B$).

**Definicija 11.** Naizmenični uglovi su — dva unutrašnja ili dva spoljašnja sa raznih strana transverzale.

**Definicija 12.** Suprotni uglovi su dva unutrašnja, ili dva spoljašnja sa iste strane transverzale.

Prema tome, saglasni uglovi su:

$$\alpha \text{ i } \alpha_1;\quad \beta \text{ i } \beta_1;\quad \gamma \text{ i } \gamma_1;\quad \delta \text{ i } \delta_1$$

Naizmenični:

$$\alpha \text{ i } \gamma_1;\quad \beta \text{ i } \delta_1;\quad \gamma \text{ i } \alpha_1;\quad \delta \text{ i } \beta_1$$

Suprotni:

$$\alpha \text{ i } \delta_1;\quad \beta \text{ i } \gamma_1;\quad \gamma \text{ i } \beta_1;\quad \delta \text{ i } \alpha_1$$

**Teorema 6.** Ako se dve paralelne prave preseku transverzalom onda su: saglasni i naizmenični uglovi jednaki, suprotni uglovi su suplementni.

*Dokaz*: Translacijom za vektor $\overrightarrow{BA}$ prava $q$ preslikava se u pravu $p$ (sl. 108). Pri tom se saglasni uglovi poklapaju. Prema tome, jednaki su.

U toj transformaciji naizmenični uglovi postaju unakrsni i, stoga, jednaki su (T. 3).

Translacijom prave $q$ za vektor $\overrightarrow{BA}$ suprotni uglovi postaju uporedni. Prema tome, oni su suplementni.

**Teorema 7.** Ako dve prave presečene transverzalom obrazuju sa njom jednake saglasne uglove, ili jednake naizmenične uglove, ili suplementne suprotne uglove, prave su paralelne.

Ovo je obrnuta teorema teoremi 6.

U teoremi 6. jednakost saglasnih uglova $\alpha_1 = \alpha$ je tvrđenje.

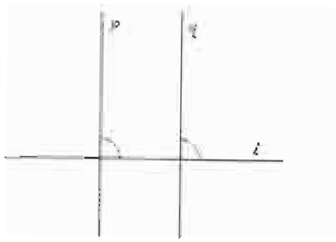
U teoremi 7. je to pretpostavka. Paralelnost pravih $p$ i $q$ u (T. 6) je pretpostavka a u (T. 7) je tvrđenje.

*Dokaz*:

$$\text{Pr.: } \alpha_1 = \alpha$$

$$\text{Tv.: } p \parallel q.$$

Translacijom prave $q$ za vektor $\overrightarrow{BA}$, (sl. 108) usled jednakosti uglova $\alpha_1$ i $\alpha_2$, prava $q$ će se poklopiti sa pravom $p$. A kako se translacijom




Sl. 109

dovode do poklapanja prave jedino u tom slučaju ako su paralelne, znači $q \parallel p$.

*Posledica.* Dve prave u istoj ravni, koje su normalne na treću, pravu paralelne su. Zaista, prave $p$ i $q$ (sl. 109) koje su normalne na pravu $l$ obrazuju sa njom jednake saglasne uglove i zbog toga su paralelne.

## KONSTRUKTIVNI ZADACI U RAVNI

Rešiti konstruktivni zadatak znači, na osnovu onoga što je u njemu dato, konstruisati figuru koja se traži. Pri rešavanju sme se upotrebiti jedino šestar i lenjir sa jednom ivicom. Taj zahtev je postavio još stari grčki filozof Platon.

Kod lakog zadatka veza između podataka i onoga što se u zadatku traži uočava se na prvi pogled, i, primena odgovarajućeg geometrijskog stava, daje rešenje zadatka. Kod težih zadataka te veze su, ponekad, skrivene, veoma duboko. Takvi zadaci zahtevaju, pored dobrog poznavanja geomertije, izvesno iskustvo, pa i snalažljivost.

Rešavanje počinje time što se prvo odrede podaci. „Data je prava" znači da je prava negde već povučena. Jasno je da se prilikom izbora podataka mora voditi računa o tome da oni unapred ne isključuju mogućnost rešenja. Ako su, na primer, u trouglu data dva ugla, treba te uglove uzeti tako da njihov zbir bude manji od 180°.

Sam proces rešavanja konstruktivnog zadatka sastoji se u određivanju potrebnih tačaka. Da bismo povukli neku određenu pravu moramo imati za to dve određene tačke. Da bi se povukla kružnica treba imati već određeno središte te kružnice i još jadnu tačku za koju znamo da pripada toj kružnici.

Tačke određujemo presekom dve linije. To mogu biti dve prave, ili dve kružnice ili, pak, prava i kružnica. Imajući na raspolaganju šestar i lenjir, možemo povlačiti jedino prave i kružnice.

Pošto su konstruktivni zadaci po svojoj sadržini veoma različiti, postoje više načina ili metoda za njihovo rešavanje. Neki se rešavaju uz primenu dve ili više metoda.

Osnovna metoda, bez koje se ne može rešiti nijedan konstruktivni zadatak, je metoda koja se zove *metoda geometrijskih mesta tačaka* (gmt) ili metoda uređenih skupova.



Pošto ćemo se ovde baviti rešavanjem konstruktivnih zadataka isključivo u ravni, nećemo zato svaki put naglašavati gmt u ravni, nego samo gmt.

Videli smo da se položaj tačke određuje presekom dve linije od kojih svaka predstavlja neko gmt. To znači da zahteve zadatka prema traženoj tački moramo raščlaniti na dva posebna uslova. Svaki od tih uslova treba da određuje neko gmt kojem tražena tačka mora da pripada.

Nijedno od ova dva gmt uzeto odvojeno ne određuje traženu tačku, nego predstavlja jedan skup tačaka među kojima je i tražena.

U preseku ta dva gmt je tačka koja pripada i jednom i drugom skupu, znači — ona zadovoljava oba ulsova. Drugim rečima — ta tačka je tražena.

Uzmimo jedan primer:

Date su dve tačke $M$ i $N$. Naći tačku koja je za dužinu $a$ udaljena od $M$ i za dužinu $b$ od $N$.

Prvo ćemo naneti podatke zadatka. To znači da ćemo bilo gde obeležiti dve tačke $M$ i $N$ i nacrtati dve proizvoljne duži, $a$ i $b$. Svakako da moramo voditi računa da $a + b$ ne bude manje od $\overline{MN}$.

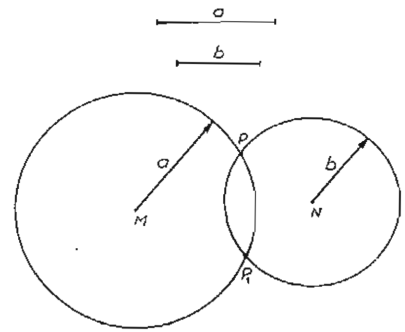
Postavimo zatim uslove koje mora zadovojavati tražene tačke:

1) ona mora biti za $a$ udaljena od $M$,

2) ona mora biti za $b$ udaljena od $N$.

Svaka tačka kružnice $(M, a)$ sl. 110. je za $a$ udaljena od tačke $M$. Zato uzimamo na šestar datu dužinu $a$ i opišemo iz tačke $M$ kao centra kružnicu $(M, a)$.

Na isti način realizujemo drugi uslov — opišemo kružnicu $(N, b)$.




Sl. 110

U njihovom preseku se dobija ne jedna nego dve tačke $P$ i $P_1$. Pošto svaka od njih zadovoljava uslove zadatka, tj. za $a$ je udaljena od $M$, a za $b$ od $N$, zadatak ima dva rešenja.

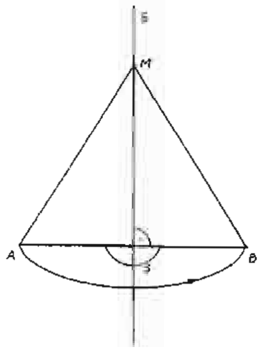
Pre nego što pređemo na složenije zadatke, rešićemo nekoliko osnovnih. Da bi se konstruisale simetrale date duži treba dokazati prvo teoremu na koju se ta konstrukcija oslanja.

**Teorema 8.** Svaka tačka simetrale duži jednako je udaljena od krajnjih tačka te duži.

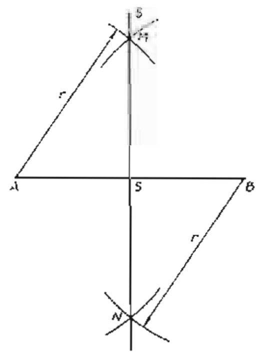
Simetralu duži smo definisali kao pravu koja je normalna na duž i prolazi kroz njenu sredinu.

*Dokaz:* Neka je tačka $M$ (sl. 111) proizvoljna tačka simetrale $s$ duži $\overline{AB}$. Kako je $S \perp \overline{AB}$ i $\overline{AS} = \overline{SB}$, tačka $A$ rotacijom oko prave $S$ prelazi u $B$, a duž $\overline{AM}$ se preslika u duž $\overline{BM}$. Stoga je $\overline{AM} = \overline{BM}$. Pošto je tačka $M$ proizvoljna, to znači da bi se ovaj dokaz mogao primeniti na bilo koju tačku simetrale $S$.

1) Data je duž $\overline{AB}$. Konstruisati simetralu te duži. Kako je prava određena sa dve tačke, potrebno je odrediti dve tačke koje pripadaju traženoj simetrali. Te tačke moraju biti jednako udaljene od krajnjih tačaka date duži.




Sl. 111




Sl. 112

Zato opišemo iz tačaka $A$ i $B$ kružnice (dovoljno i kružne lukove) istog poluprečnika $(A, r)$ i $(B, r)$ koji se seku u tačkama $M$ i $N$. Te tačke su jednako udaljene (za $r$) od krajnjih tačaka duži, prema tome one pripadaju simetrali te duži. Tačka $S$ polovi duž $\overline{AB}$. Na isti način konstruisanom simetralom duži $\overline{AS}$, duž $\overline{AB}$ bila bi podeljena na 4 jednaka dela. Da bi se data duž podelila na $2n$ jednakih delova, taj postupak treba ponoviti $n$ puta.

Da bismo konstruisali simetralu datog ugla, pođimo od definicije.

**Definicija 13.** Simetrala ugla je poluprava koja polovi ugao. Za izvođenje konstrukcije potrebno je još dokazati teoremu.

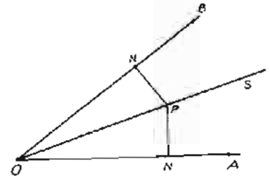
**Teorema 9.** Svaka tačka simetrale ugla jednako je udaljena od krakova tog ugla. Neka je poluprava $s$ (sl. 113) simetrala ugla $AOB$ i neka je tačka $P$ proizvoljna tačka te simetrale.

Rastojanje tačke $P$ od kraka $OA$ je dužina normale $\overline{PN}$.

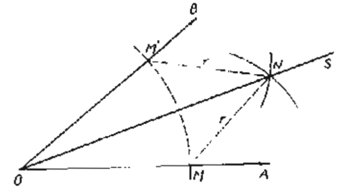


Kako je $\sphericalangle AOP = \sphericalangle POB$, krak $OA$ rotacijom oko $s$ za ugao 180° preslikava u $OB$, a tačka $N$ prelazi u $N'$, tako da je $\overline{PN} = \overline{PN'}$.

2) Konstruisati simetralu datog ugla. Odredimo prvo proizvoljnim otvorom šestara tačke $M$ i $M'$ tako da je $\overline{OM'} = \overline{OM}$. Rotacijom kraka $OA$ oko $s$ za ugao 180° tačka $M$ se preslikava u $M'$ (sl. 114) a duž $\overline{MN}$ u $\overline{M'N}$.




Sl. 113



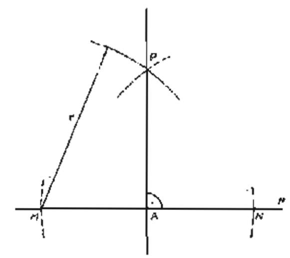

Sl. 114

Stoga je $\overline{M'N} = \overline{MN} = r$. Presekom dva kružna luka proizvoljnog poluprečnika $(M, r)$ i $(M', r)$ određena je tačka $N$. Poluprava $ON$ je tražena simetrala datog ugla.

3) Data je prava i naj tačka. Konstruisati normalu na tu pravu u datoj tački.

Ovaj zadatak se oslanja na osobinu simetrale duži da je normalna na tu duž.

Zato na datoj pravoj $p$ (sl. 115) odredimo proizvoljnu duž $\overline{MN}$, tako da data tačka $A$ pripada njenoj simetrali. To postižemo tako što presečemo pravu $p$ kružnim lucima $(A, M)$ proizvoljnog poluprečnika u tačkama $M$ i $N$. Da bismo odredili još jednu tačku koja pripada traženoj simetrali (pored tačke $A$), opišemo dva kružna luka $(M, r)$ i $(N, r)$, $r > \overline{AM}$ koji svojim presekom određuju tačku $P$. Prava $PA$ je tražena.



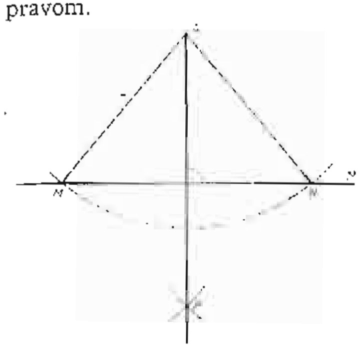

Sl. 115

4) Iz date tačke van date prave povući normalu na tu pravu.

U ovom zadataku, kao i u prethodnom, oslanjamo se na osobinu simetrale duži da je normalna na tu duž. Zato na datoj pravoj $p$ (sl. 116) odredimo duž $\overline{MN}$ tako da data tačka $A$ pripada njenoj simetrali. To znači da $\overline{AM} = \overline{AN}$ ili da tačke $M$ i $N$ pripadaju kružnici $(A, r)$ proizvoljnog poluprečnika $r$ koja seče pravu $p$ u tim tačkama. Zatim, na već poznati način, određujemo još jednu tačku simetrale duži $\overline{MN}$, tačku $P$.

Prava $AP$ je tražena.

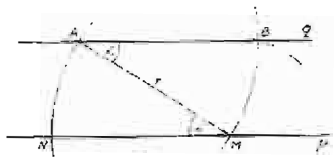
5) Kroz datu tačku povući pravu koja je paralelna sa datom pravom.



Sl. 116

Neka je data prava $p$ i tačka $A$. Treba konstruisati pravu $q \parallel p$ (sl. 117).

Rešenje se najjednostavnije dobija ako se oslonimo na (T. 7) i konstruišemo uglove $\alpha_1 = \alpha_2$.



Sl. 117

Proizvoljnim otvorom šestara opišemo kružni luk $(A, r)$ koji seče pravu $p$ u tački $M$. Zatim istim otvorom šestara opišemo luk $(M, r)$ koji prolazi kroz tačku $A$ i seče pravu $p$ u tački $N$.

Presecimo luk $(A, r)$ u tački $B$ kružnim lukom $(M, \overline{NA})$. Prava $q$, koja je određena datom tačkom $A$ i nađenom $B$, je tražena.

Složeniji konstruktivni zadaci rešavaju se pomoću ovih, osnovnih. Osim toga, rešenje konstruktivnog zadatka sastoji se iz četiri dela:

1) analize
2) konstrukcije
3) dokaz
4) diskusije ili determinacije.

1) **Analiza.** Analiza je ispitivanje zadatka, tj. traženje puta kojim treba ići, polazeći od podataka, da bi se došlo do rešenja. Pretpostavi se da je zadatak već rešen i nacrta se cela slika (često slobodnom rukom) u koju ulaze podaci i tražena figura. Ispitujući ovu sliku, nastojimo da nađemo način kako ćemo pomoću podataka doći do tražene figure, ili bar do nekog njenog dela koji će nam omogućiti da konstruišemo celu figuru. Vršeći analizu, treba nastojati da se nađe najkraći put ka rešenju. Izbor metode koji najbolje odgovara datom zadatku spada takođe u zadatak analize.

2) **Konstrukcija.** Konstrukcija se izvodi na osnovu izvršene analize. Polazeći od podataka, primenom šestara i lenjira, precizno nalazimo potrebne tačke kroz koje povlačimo prave i kružnice (ili pak samo kružne lukove) dok ne dođemo do tražene figure.



3) **Dokaz.** Posle izvršene analize i konstrukcije treba dokazati da konstruisana figura zaista zadovoljava uslove koje su u zadatku postavljeni. Pri dokazivanju služimo se stavovima geometrije koji se odnose na dotični zadatak. Često se dokaz može izvesti na osnovu analize zadatka, jer, pri vršenju analize, moralo se voditi računa o geometrijskim osobinama tražene figure.

4) **Diskusija.** Često se misli da je izvedenom konstrukcijom zadatak završen. To je i zaista tako ako su podaci posebne veličine i to — tako izabrane da zadatak ima određen broj rešenja.

Podaci, međutim, daju se u opštem obliku i diskusija se sastoji u tome da se odredi uslov koji moraju zadovoljavati ti podaci da bi zadatak imao jedno, dva ili više rešenja. Može se desiti da, uz izvesne uslove, zadatak uopšte nema rešenja ili, pak, ima beskonačno mnogo rešenja (neodređen je). Zadatak diskusije sastoji se, dakle, u tome da se formulišu uslovi pod kojima će se realizovati svaki od navedenih slučajeva.

Navešćemo nekoliko gmt koja se najčešće koriste pri rešavanju konstruktivnih zadataka:

*Gmt 1.* Geometrijsko mesto tačaka jednako udaljenih od date tačke je kružnica određenog poluprečnika.

*Gmt 2.* Geometrijsko mesto tačaka jednako udaljenih od krajnjih tačaka date duži je simetrala te duži.

*Gmt 3.* Geometrijsko mesto tačaka jednako udaljenih od krakova datog ugla je simetrala tog ugla.

*Gmt 4.* Geometrijsko mesto tačaka jednako udaljnih od date prave su dve prave, koje su paralelne sa datom pravom, povučene sa različitih strana na datom rastojanju od date prave.

*Gmt 5.* Geometrijsko mesto sredina duži čije krajnje tačke pripadaju dvema paralelnim pravima je prava paralelna sa datim pravima i jednako udaljena od njih.

Ima još, više gmt i sa njima ćemo se upoznati u toku daljeg izlaganja.

Primeri:

1) **Gmt.** Na datoj pravoj $p$ naći tačku koja je za datu dužinu $a$ udaljena od date tačke $M$.

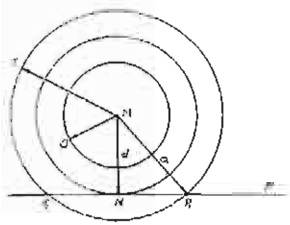
Podaci: prava $p$, tačka $M$, duž $a$

*Analiza*: Prema traženoj tački u zadatku postavljena su dva zahteva:

1) Ona mora biti na pravoj $p$ (sl. 118).

2) Ona mora biti za dužinu $a$ udaljena od tačke $M$.

Pošto je prava $p$ data, znači tražena tačka je određena presekom te prave i nekog gmt. Zato prelazimo na drugi uslov. Sve tačke koje su za $a$ udaljene od tačke $M$ obrazuju kružnicu $(M, a)$ — gmt I.



Sl. 118

*Konstrukcija*: Iz tačke $M$ kao centra opišemo kružnicu $(M, a)$. Ta kružnica seče datu pravu $p$ u tačkama $P_1$ i $P_2$. Tačke $P_1$ i $P_2$ su tražene.

*Dokaz*: Tačke $P_1$ i $P_2$ pripadaju pravoj $p$ — prvi zahtev je zadovoljen. Tačke $P_1$ i $P_2$ pripadaju kružnici $(M, a)$ i, zbog toga su, kao i svaka druga tačka, za $a$ udaljene od tačke $M$. Drugi zahtev je zadovoljen. Prema tome tačke $P_1$ i $P_2$ su tražene tačke.

*Diskusija*: Pošto su prava $p$ i tačka $M$ date, znači dato je i rastojanje tačke $M$ od prave $p$, $\overline{MN} = d$ (sl. 118). To rastojanje $d$ predstavlja opšti broj — isto kao i dužina $a$ i ti podaci ne moraju biti baš takvi kakvi su uzeti na sl. 118. Oni mogu imati različite vrednosti. Veličine tih duži ne utiču na rezonovanje u analizi, niti na postupak kod konstrukcije. Ali, te veličine su presudne za rezultat konstrukcije. Uzmimo da je $d$ ostalo isto, a duž $a$ se povećala. Kružnica $(M, a)$ bi i u tom slučaju sekla pravu $p$ u dvema tačkama. Ako je, pak, duž $a$ manja od one što je uzeta, na primer $a = d$. U tom slučaju kružnica $(M, a)$ ne bi sekla pravu $p$, nego bi je dodirivala u tački $N$. U tom slučaju bila bi samo jedna tačka koja zadovoljava uslove zadatka. Za taj slučaj kažemo: zadatak ima jedno rešenje. Ako bi duž $a$ bila manja od $d$, na primer $a = \overline{MQ}$, kružnice $(M, a)$ uopšte ne bi sekla pravu $p$. Za takvu vrednost $a$ reklo bi se: zadatak nema rešenja. Dakle, da li će zadatak imati dva rešenja, jedno, ili nijedno, to zavisi od odnosa veličina $a$ i $d$. Zato bi se diskusija ovog zadatka mogla formulisati ovako:

Ako je $a > d$, 2 rešenja (tačke $P_1$ i $P_2$)

Ako je $a = d$, 1 rešenje (tačka $N$)

Ako je $a < d$, nema rešenja.

Uzmimo nekoliko primera dge ćemo se poslužiti metodama transformacije u geometriji.

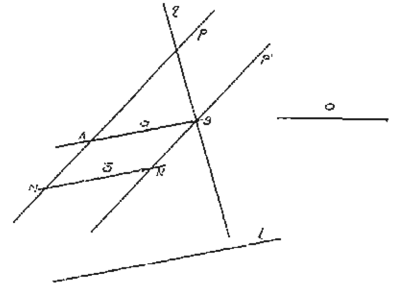
2) **Translacija.** Konstruisati duž $\overline{AB} = a$ tako da njene krajnje tačke pripadaju dvema datim pravima $p$ i $q$ i da ta duž bude paralelna sa trećom pravom $l$.

Podaci: Duž $a$

Prave $p$, $q$ i $l$



*Analiza*: Pretpostavimo da je zadatak rešen: duž $\overline{AB}$ je paralelna sa pravom $l$ i njene krajnje tačke pripadaju pravima $p$ i $q$ (sl. 119). Iz slike 119. vidi se da translacijom za vektor $\overrightarrow{MN}$ prava $p$ preslikava se u $p'$ a tačka $A$ u toj transformaciji prelazi u tačku $B$. Ali, tačka $B$ treba da pripada pravoj $q$. Znači, ona je određena presekom pravih $p'$ i $q$.



Sl. 119

Pravac vektora translacije određen je pravom $l$ a njegov moduo $|\overrightarrow{MN}| = a$.

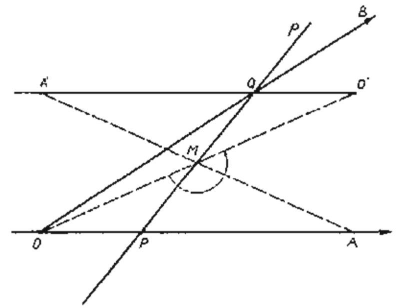
*Konstrukcija*: Kroz bilo koju tačku $M$ prave $p$ povučemo pravu koja je paralelna sa datom pravom $l$. Na tu pravu prenesemo datu duž $\overline{MN} = a$. Kroz tačku $N$ povučemo pravu $p' \parallel p$. Kroz presek $p' \times q$ tačku $B$ povučemo pravu koja je paralelna sa $l$ koja na pravoj $p$ određuje tačku $A$.

*Dokaz*: Sledi iz analize i konstrukcije.

*Diskusija*: Ako se date prave $p$ i $q$ seku translacijom za vektor $\vec{a}$, imamo jedno rešenje, a translacijom za vektor $-\vec{a}$, drugo.

Ako je $p \parallel q$ i $p' \parallel q$ — zadatak nema rešenja.

Ako je $p \parallel q$ i $p' \equiv q$ — zadatak ima beskonačno mnogo rešenja — neodređen je.



Sl. 120

3) **Rotacija oko tačke.** Data je tačka $M$ u oblasti datog ugla. Kroz tu takču povući pravu tako da tačka $M$ polovi duž koja pripada toj pravoj i da krajnje tačke te duži budu na kracima datog ugla.

Podaci: sl. 120.

*Analiza*: Pretpostavimo da je prava $p$ već povučena i da je $\overline{PM} = \overline{MQ}$ (sl. 120).

Pošto tačka $P$ pripada kraku $OA$ datog ugla $AOB$, ona se, rotacijom za ugao $180°$ oko tačke $M$ kraka $OA$, preslikava u tačku $Q$. Ali kako tačka $Q$ treba da pripada kraku $OB$, ona je određena presekom $OB$ i $O'A'$.

*Konstrukcija.* Izvršimo rotaciju kraka $OA$ oko tačke $M$ za ugao $180°$. Zato rotiramo bilo koje dve tačke koje pripadaju tom kraku, na primer tačke $O$ i $A$ (sl. 120). Odredimo zatim u preseku $OB$ i $O'A'$ tačku $Q$ i povučemo kroz tačke $M$ i $Q$ pravu $p$. Prava $p$ je tražena.

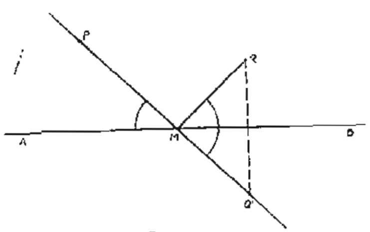
*Dokaz.* Rotacijom oko tačke $M$ za ugao $180°$ tačka $P$ (sl. 120) preslikava se u tačku $Q$. Prema tome $\overline{PM} = \overline{MQ}$. Znači, tačka $M$ polovi duž $PQ$ koja pripada pravoj $p$.

*Diskusija.* Pošto krak $OB$ i $O'A'$ mogu imati samo jednu zajedničku tačku ($Q$), zadatak može imati samo jedno rešenje.

Ako je dati ugao $180° \leqslant AOB \leqslant 360°$, zadatak nema rešenja.

4) **Rotacija oko prave.** Data je prava $AB$ i dve tačke $P$ i $Q$ su iste strane te prave. Na datoj pravoj naći tačku $M$ tako da uglovi $AMP$ i $QMB$ budu jednaki.

Podaci naneseni (sl. 121).



Sl. 121

*Analiza*: Pođimo od pretpostavke da je tačka $M$ nađena i da su uglovi $AMP$ i $QMB$ jednaki (sl. 121). Međutim, uglovi $AMP$ i $Q'MB$ su isto jednaki kao unakrsni. To znači da rotacijom za $180°$ oko prave $AB$ $MQ$ preslikava se u $MQ'$.

*Konstrukcija*: Preslikamo, prvo rotacijom za ugao $180°$ oko date prave, tačku $Q$ (a može i $P$) u tačku $Q'$ (sl. 121). Prava $PQ'$ određuje na datoj pravoj traženu tačku $M$.

*Dokaz*: Pošto rotacijom oko $AB$ $MQ$ se preslikava u $MQ'$,

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle\, QMB = \measuredangle\, Q'MB \\ \measuredangle\, Q'MB = \measuredangle\, AMP \end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle\, QMB = \measuredangle\, AMP$$

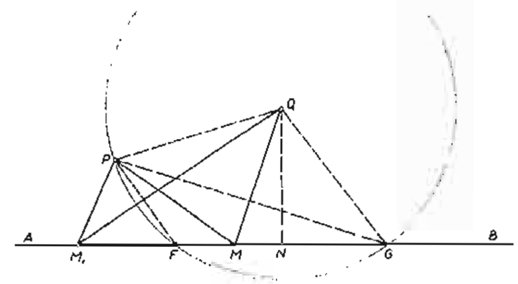
*Diskusija*: Pošto prave $AB$ i $PQ'$ ne mogu biti paralelne, niti se mogu poklapati, zadatak uvek ima jedno rešenje.

5) **Simetrija.** Data je prava $AB$ i dve tačke $P$ i $Q$ sa iste strane te prave. Odrediti na datoj pravoj tačku $M$ tako da $\measuredangle\, PMB$ bude dva puta veći od $\measuredangle\, QMB$.

Podaci su na sl. 122.



*Analiza*: Ako je tačka $M$ tražena, onda je $MQ$ simetrala ugla $PMB$ (sl. 122). To znači da tačka $G$ koja je simetrična sa tačkom $P$ prema $MQ$, pripada pravoj $AB$. Prema tome: $\overline{QG} = \overline{QP}$.



Sl. 122

*Konstrukcija*: Opišemo kružni luk ($Q$, $P$) koji seče pravu $AB$ u tačkama $G$ i $F$. Simetrala duži $\overline{PG}$ seče pravu $AB$ u tački $M$. Simetralom duži $\overline{PF}$ određena je tačka $M_1$ — drugo rešenje zadatka.

*Dokaz*: Kako je $MQ$ simetrala ugla $PMB$, to znači da je $\measuredangle\, PMB$ dva puta veći od ugla $QMB$. Isto važi i za tačku $M_1$.

*Diskusija*: Ako je tačka $P$ u oblasti ugla $ANQ$; $PF$ nije normalno na $AB$ i $\overline{QP} > \overline{QN}$ — zadatak ima dva rešenja (sl. 122). Ako je $\overline{QP} = \overline{QN}$ zadatak ima jedno rešenje. Ako je, pak $\overline{QP} < \overline{QN}$ nema rešenja.

## ZADACI

*Zad. 236.* Na datoj pravoj $p$ naći tačku koje je jednako udaljena od dve date tačke $A$ i $B$.

*Zad. 237.* Kroz datu tačku $M$ povući pravu tako da njen odsečak između dve date paralelne prave bude data dužina $a$.

*Zad. 238.* Date su dve prave, $p$ i $q$. Naći tačku koja je za $a$ udaljena od prave $p$ i za $b$ od prave $q$.

*Zad. 239.* Naći tačku koja je za $a$ udaljena od date tačke $F$ i za $b$ od date prave $p$.

*Zad. 240.* Date su dve kružnice ($S_1$, $r_1$) i ($S_2$, $r_2$). Konstruisati duž $\overline{MN} = a$ tako da ona bude paralelna sa datom pravom $p$ i da njene krajnje tačke pripadaju datim kružnicama.

*Zad. 241.* Date su dve duži, $\overline{AB} = a$ i $\overline{CD} = b$. Kroz datu tačku $M$ povući pravu tako da projekcije datih duži na tu pravu budu jednake.

*Zad. 242.* Date su dve jednake duži $\overline{AB} = a$ i $\overline{CD} = a$. Odrediti centar i ugao rotacije tako da se duž $\overline{AB}$ preslika u duž $\overline{CD}$.

*Zad. 243.* Date su dve prave: prava $p$ i na njoj tačka $A$ i prava $q$ i na njoj tačka $B$. Odrediti centar rotacije tako da se prava $p$ preslika u pravu $q$ i da u toj transformaciji tačke $A$ i $B$ budu homologne.

*Zad. 244.* Date su dve kružnice i, među, njima tačka. Konstruisati duž čije krajnje tačke pripadaju datim kružnicama i koju data tačka polovi.

*Zad. 245.* Date su tri tačke, $A$, $B$ i $C$. Kroz te tačke povući tri paralelne prave tako da im rastojanje bude jednako.

*Zad. 246.* Date su dve tačke $A$ i $B$ i prava $p$. Kroz date tačke povući paralelne prave tako da odsečak prave $p$ između tih paralela bude data dužina $a$.

*Zad. 247.* Kroz datu tačku $M$ povući pravu koja seče datu pravu $p$ pod datim uglom $\alpha$.

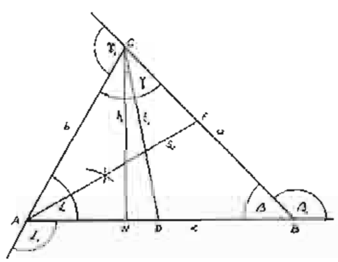
*Zad. 248.* Kroz datu tačku $M$ povući pravu koja je jednako udaljena od dve date tačke $A$ i $B$.

*Zad. 249.* Naći tačku koja je za dužinu $a$ udaljena od date tačke i od date prave.

# TROUGAO

## 1. DEFINICIJA I PODELA TROUGLOVA

**Definicija 14.** Trougao je zatvorena izlomljena linija od tri duži.



Sl. 123

Te duži su stranice trougla. Obično se obeležavaju $\overline{AB} = c$; $\overline{AC} = b$; $\overline{BC} = a$ (sl. 123). Njihove krajnje tačke su temena trougla $A$, $B$ i $C$. Uglovi koje obrazuju stranice trougla su unutrašnji uglovi trougla. Obično se obeležavaju $\measuredangle CAB = \alpha$; $\measuredangle ABC = \beta$; $\measuredangle BCA = \gamma$. Njihova oblast je unutar trougla. Uglovi koji obrazuju stranice trougla sa produžetkom susedne stranice su spoljašnji uglovi trougla: $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$. To su uporedni uglovi sa odgovarajućim unutrašnjim uglovima. Njihova oblast je izvan trougla. Normalna povučena iz temena trougla do preseka sa suprotnom stranicom $\overline{CN}$ ili sa njenim produžetkom je visina trougla. U trouglu, dakle, ima tri visine: $h_a$, $h_b$ i $h_c$; odsečak simetrale unutrašnjeg ugla do preseka sa suprotnom stranicom $\overline{AF}$ je simetrala ugla trougla. Simetrale uglova trougla obeležavaju se: $s_\alpha$, $s_\beta$ i $s_\gamma$.

Duž koja spaja teme trougla sa sredinom suprotne stranice zove se težišna linija ili medijana trougla. U trouglu ima tri težišne linije: $t_a$, $t_b$ i $t_c$.

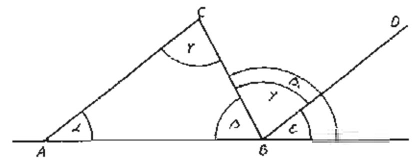
S obzirom na uglove trouglovi se dele na pravougle i kosougle.

Kosougli trouglovi mogu biti oštrougli ili tupougli.

Prema stranicama trouglove delimo na raznostrane, jednakokrake i jednakostranične.

## 2. UGLOVI TROUGLA

**Teorema 10.** Zbir unutrašnjih uglova u trouglu iznosi $2d$. Neka su $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ unutrašnji uglovi trougla $ABC$ (sl. 124). Povučemo



Sl. 124

iz temena $B$ polupravu $BD \parallel AC$. Iz slike 124. vidi se da uglovi $\beta$, $\varphi$ i $\varepsilon$ (grčko slovo, čita se epsilon) obrazuju ravan ugao, tj.

$$\beta + \varphi + \varepsilon = 2d \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Kako je $BD \parallel AC$ i uglovi $\varepsilon$ i $\alpha$ su saglasni, to znači

$$\varepsilon = \alpha \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Uglovi $\varphi$ i $\gamma$ su naizmenični i, stoga, jednaki su

$$\varphi = \gamma \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Zamenom (2) i (3) u (1) imamo:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2d.$$

**Teorema 11.** Spoljašnji ugao trougla jednak je zbiru dva unutrašnja nesusedna ugla.

Iz slike 124. vidi se da je ugao $\beta_1$ spoljašnji ugao trougla $ABC$. Ovom spoljašnjem uglu nesusedni unutrašnji uglovi su $\alpha$ i $\gamma$. Prema tome, treba dokazati da je $\beta_1 = \alpha + \gamma$.

Kako je $\beta_1 = \varepsilon + \varphi$ .... (Vid. sl. 124) i s obzirom na (2) i (3), imamo

$$\beta_1 = \alpha + \gamma.$$

**Teorema 12.** Zbir spoljašnjih uglova u trouglu iznosi $4d$.

Na osnovu (T. 11) imamo

$$\alpha_1 = \beta + \gamma$$
$$\beta_1 = \alpha + \gamma > +$$
$$\gamma_1 = \alpha + \beta$$
$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2(\alpha + \beta + \gamma)$$

A kako je prema (T. 10) $\alpha + \beta + \gamma = 2d$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 4d$$

## VEŽBANJA

1) Dat je zbir dva spoljašnja ugla trougla $\alpha_1 + \beta_1 = \varphi$. Dokazati da je $\gamma = \varphi - 2d$.
2) U trouglu je dat ugao $\gamma$. Odrediti ugao pod kojim se seku $s\alpha$ i $s\beta$.
3) Visina i simetrala ugla povučeni iz istog temena trougla obrazuju ugao koji je jednak polurazlici ostala dva ugla. Dokazati.
4) Visina pravouglog trougla deli pravi ugao na dva dela koji su jednaki oštrim uglovima trougla. Dokazati.

### 3. ODNOS STRANICA I UGLOVA U TROUGLU

**Teorema 13.** U trouglu naspram jednakih stranica leže jednaki uglovi.

Neka su u trouglu $ABC$ (sl. 125) dve stranice jednake:

$$\overline{AC} = \overline{BC}.$$

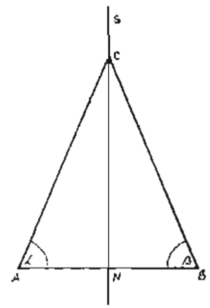


Treba dokazati da su uglovi koji su naspram tih stranica, jednaki:

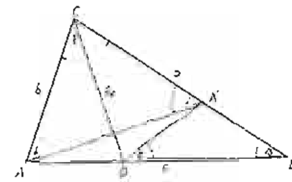
$$\alpha = \beta.$$

Konstruišemo simetralu stranice $\overline{AB}$, pravu $s$. Pošto je teme $C$ jednako udaljeno od $A$ i $B$, ono pripada toj simetrali. Rotacijom oko prave $s$ za ugao 180°, $\overline{NB}$ se preslikava u $\overline{AN}$, a $\overline{BC}$ u $\overline{AC}$ stoga je

$$\alpha = \beta$$



Sl. 125



Sl. 126

**Teorema 14.** U trouglu naspram veće stranice leži veći ugao. Treba dokazati da je

$$\alpha > \beta$$

ako je $a > b$. (sl. 126). Povučemo simetralu ugla $\gamma$ — $CD$.

Rotacijom oko povučene simetrale za ugao 180° trougao $ADC$ preslikava se u trougao $DA'C$ tako da je $\sphericalangle DA'C = \alpha$. Ugao $\alpha$ je, međutim, u $\triangle DBA'$ spoljašnji ugao i, prema (T. 11),

$$\alpha = \beta + \varepsilon \quad \beta = \varepsilon \Rightarrow \alpha > \beta.$$

**Teorema 15.** U trouglu naspram većeg ugla leži veća stranica.

Ova teorema je suprotna prethodnoj (T. 14). Ona se najlakše može dokazati ako se primeni način dokaza ad absurdum.

Pretpostavimo da je tvrđenje teoreme netačno. To znači da, na osnovu predpostavke $\alpha > \beta$ (sl. 126), sledi tvrdenje: ili $a = b$ ili $a < b$.

Ako je $a = b$, onda je $\alpha = \beta$, što je dokazano (T. 13).

Tvrđenje $a < b$ nije takođe osnovano, jer bi u tom slučaju $\beta > \alpha$, kao što je to već dokazano u T. 14.

Znači, tvrđenje teoreme da je $a > b$, ako je $\alpha > \beta$ je tačno.

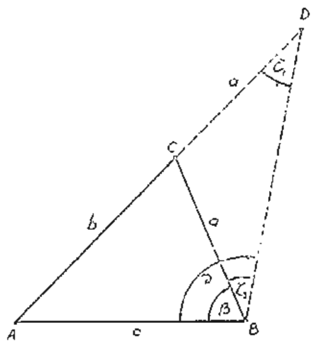
Posledica 1. U tupouglom trouglu stranica koja leži naspram tupog ugla je najveća.

Posledica 2. U pravouglom trouglu hipotenuza je najveća stranica.

Posledica 3. Normala je najkraće rastojanje tačke od prave.

### 4. ODNOS STRANICA U TROUGLU

**Teorema 16.** Zbir dve stranice u trouglu veći je od treće, razlika dve stranice manja je od treće stranice.



Sl. 127

Dokazati da je zbir dve stranice u trouglu veći od treće stranice, značilo bi dokazati da je

$$a + b > c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$a + c > b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$b + c > a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Ako se bilo koja stranica srougla, na primer $c$ (sl. 127), uzme kao najveća, tj. $c > a$ i $c > b$, onda od tri nejednakosti, preostaje da se dokaže samo (1), jer su (2) i (3) očigledne.

Da bismo dokazali da je $a + b > c$ produžimo $\overline{AC}$ i prenesemo $\overline{CD} = a$ (sl. 127). Dobijeni trougao $BDC$ je jednakokraki i stoga je

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

u trouglu $ABD$

$$\delta = \varepsilon_2 + \beta \Rightarrow \delta > \varepsilon_2$$

ili, s obzirom na (4),

$$\delta > \varepsilon_1$$

Na osnovu (T. 15) imamo

$$\overline{AD} > \overline{AB} \quad \text{ili} \quad a + b > c$$

Ako se $b$, odnosno $a$ prinese na drugu stranu nejednakosti, dobijamo

$$c - b < a, \quad \text{osnodno} \quad c - a < b.$$

Iz (2) imamo $b - a < c$.

Posledica. Duž koja spaja dve tačke manja je od bilo koje izlomljene linije koja spaja iste tačke.



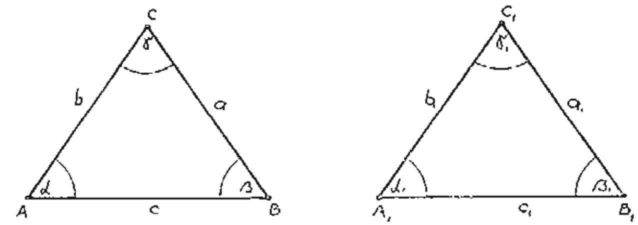
### 5. PODUDARNOST TROUGLOVA

Za dva trougla kažemo da su *podudarni* ili *kongruentni* ako se nekim pomeranjem mogu dovesti do poklapanja.

To znači da su im odgovarajući ili homologni elementi jednaki.

Prema tome, ako je

$$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1 \quad \text{(sl. 128)},$$



Sl. 128

onda moraju imati mesta jednakosti:

$$a = a_1; \quad b = b_1 \quad \text{i} \quad c = c_1$$

$$\alpha = \alpha_1; \quad \beta = \beta_1 \quad \text{i} \quad \gamma = \gamma_1$$

**Teorema 17.** Dva trougla su podudarna ako su im jednake po dve stranice i uglovi koje te stranice obrazuju (prvi uslov o podudarnosti trouglova).

Pretpostavimo: $b = b_1$; $c = c_1$; $\alpha = \alpha_1$

Tvrdenje $a = a_1$; $\beta = \beta_1$; $\gamma = \gamma_1$.

Ako se trougao $A_1B_1C_1$ stavi na trougao $ABC$ tako da se jednaki uglovi $\alpha$ i $\alpha_1$ poklope, onda, usled jednakosti $b = b_1$ i $c = c_1$, poklopiće se i temena $C$ i $C_1$, odnosno $B$ i $B_1$ tj.

$$a = a_1; \quad \beta = \beta_1; \quad \gamma = \gamma_1$$

Posledica. Pravougli trouglovi su podudarni ako su im jednake katete.

**Teorema 18.** Dva trougla su podudarna ako imaju po dva jednaka ugla i stranice na kojima leže ti uglovi, (drugi stav o podudarnosti trouglova).

Neka je u trouglovima $ABC$ i $A_1B_1C_1$ (sl. 128) $\alpha = \alpha_1$; $\beta = \beta_1$ i $c = c_1$. Treba dokazati da je $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

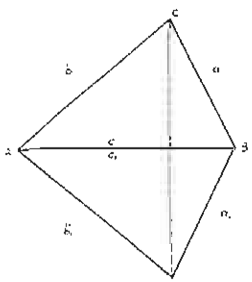
Pošto je $c = c_1$, stranice $\overline{AB}$ i $\overline{A_1B_1}$ mogu se dovesti do poklapanja (sl. 128). A kako $\alpha = \alpha_1$ i $\beta = \beta_1$, dolazi do poklapanja krakova tih uglova $AC$ i $A_1C_1$ odnosno $BC$ i $B_1C_1$, pa se njihove presečne tačke $C$ i $C_1$ poklapaju.

Kako na osnovu (T. 10) dva unutrašnja ugla trougla određuju treći, ovaj stav o podudarnosti trouglova mogao bi se formiralsti ovako:

Dva trougla su podudarna ako imaju jednake po jednu stranicu i po dva ma koja ugla.

**Teorema 19.** Dva trougla su podudarna ako su sve tri stranice jednog trougla jednake sa odgovarajućim stranicama drugog trougla (treći stav o podudarnosti trouglova).

Neka je $a = a_1$; $b = b_1$; $c = c_1$ (sl. 129).

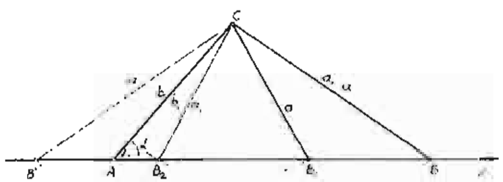


Sl. 129

Usled jednakosti stranica $c$ i $c_1$ trougao $A_1B_1C_1$ može se dovesti u položaj $ABC'$. Pošto $b = b_1$, tačka $A$ je jednako udaljena od tačke $C$ i $C'$. Isto se može reći i za tačku $B$ jer je $a = a_1$. Prema tome $AB$ je simetrala duži $\overline{CC'}$. A to znači da rotacijom oko $AB$ za ugao 180° tačka $C$ se preslikava u $C'$, pa se trouglovi $ABC$ i $ABC'$ poklapaju.

**Teorema 20.** Dva trougla su podudarna ako imaju jednake po dve stranice i ugao naspram veće stranice (četvrti stav o podudarnosti trouglova).

Posmatrajmo prvo slučaj da dva trougla imaju po dve jednake stranice, $\overline{CB_1} = a$ i $\overline{CB_2} = a_1$, gde je $a = a_1$ i $b = b_1 = \overline{AC}$ (sl. 130) i da je $a < b$.



Sl. 130



Vidimo da, iako trouglovi $AB_1C$ i $AB_2C$ imaju po dve jednake stranice i uglovi $\alpha$ i $\alpha_1$ koji su naspram manjih stranica jednaki, ti trouglovi nisu podudarni.

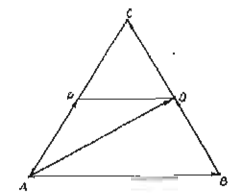
Ako je, pak, ugao $\alpha$ naspram veće stranice, tj $a > b$, onda je $b = b_1 = \overline{AC}$ i stranice $a = a_1$ određuju na kraku $Ax$ ugla $\alpha$ istu tačku $B$. Tačka $B'$ ne dolazi u obzir jer u trouglu $ACB'$ nije zastupljen ugao $\alpha$.

Znači, ako je kod trougla $b = b_1$ i $\alpha = \alpha_1$ poklapaju se njihova temena $A$ i $C$ i uglovi $CAB$, ako je pri tom i $a = a_1$ uz uslov $a > b$, treće teme im je u istoj tački ($B$). Prema tome trouglovi su podudarni.

### 6. SREDNJA LINIJA TROUGLA

**Definicija 15.** Srednja linija trougla je duž koja spaja sredine dve stranice trougla.

**Teorema 21.** Srednja linija trougla paralelna je sa trećom stranicom trougla i jednaka je njenoj polovini.



Sl. 131

Neka su tačke $P$ i $Q$ u sredini stranice $\overline{AC}$, odnosno $\overline{BC}$. Treba dokazati da je $PQ \parallel AB$ i da je $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. (sl. 131). Iz slike se vidi da je

$$\left.\begin{array}{l}\vec{AP} + \vec{PQ} = \vec{AQ} \\ \vec{AB} + \vec{BQ} = \vec{AQ}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{AP} + \vec{PQ} = \vec{AB} + \vec{BQ}$$

i

Pošto je $\vec{AP} = -\vec{PA} = -\frac{1}{2}\vec{CA}$ i

$$\vec{BQ} = \frac{1}{2}\vec{BC}.$$

jednakost (1) može se napisati

$$\vec{PQ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CA} \text{ ili}$$

$$\vec{PQ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA})$$

Kako je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$, imamo

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

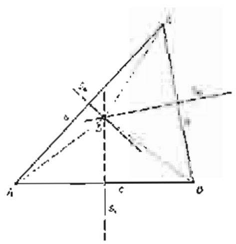
Prema tome, vektori $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{AB}$ su kolinearni, tj. $PQ \parallel AB$.

Osim toga, $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|$, a to znači

$$\overline{PQ} = \frac{1}{2} \overline{AB}$$

### 7. ZNAČAJNE TAČKE TROUGLA

**Teorema 22.** Simetrale stranica trougla seku se u jednoj tački. Ta tačka je središte kružnice opisane oko trougla (Cirkumcentar).



Sl. 132

Neka su $s_a$, $s_b$ i $s_c$ simetrale $a$, $b$ i $c$ stranica trougla $ABC$ (sl. 132). Povučemo prvo dve, bilo koje, simetrale stranica trougla, na primer $s_a$ i $s_c$, i neka se one seku u tački $S$. Treba dokazati da i simetrala treće stranice prolazi kroz tu tačku, tj. da tačka $S$ pripada simetrali $s_b$.

Kako tačka $S$ pripada simetrali $s_a$, onda je, kao i svaka druga tačka te simetrale, jednako udaljena od tačaka $A$ i $B$

$$\overline{SA} = \overline{SB} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Ali, tačka $S$ pripada i simetrali $s_a$. Stoga je

$$\overline{SB} = \overline{SC} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

Iz (1) i (2) sledi

$$\overline{SA} = \overline{SC},$$

a to znači da je tačka $S$ jednako udaljena od krajnjih tačaka stranice $\overline{AC}$. Drugim rečima, tačka $S$ pripada simetrali $s_b$.

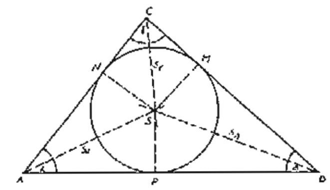
Iz (1) i (2) sledi

$$\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC}.$$



Prema tome, tačke $A$, $B$ i $C$ su jednako udaljene od tačke $S$. Znači: tačka $S$ je središte kružnice opisane oko trougla $ABC$.

**Teorema 23.** Simetrale unutrašnjih uglova trougla seku se u jednoj tački. Ta tačka je središte kružnice upisane u trougao (Incentar).



Sl. 133

Povučemo simetrale bilo koja dva ugla, recimo $s_\alpha$ i $s_\beta$ i neka se one seku u tački $S$.

Pošto tačka $S$ pripada simetrali ugla $\alpha$, ona je jednako udaljena od krakova tog ugla

$$\overline{SP} = \overline{SN} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

Tačka $S$ pripada i simetrali ugla $\beta$ i, stoga, je

$$\overline{SP} = \overline{SM} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

Iz (3) i (4) sledi —

$$\overline{SN} = \overline{SM} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

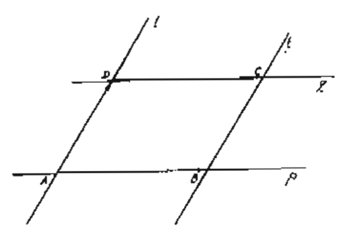
Kraci ugla $\gamma$ su $CA$ i $CB$ i iz (5) vidimo da tačka $S$ je jednako udaljena od krakova ugla $\gamma$, prema tome — tačka $S$ pripada $s_\gamma$. A to znači da se $s_\alpha$, $s_\beta$ i $s_\gamma$ seku u tački $S$.

Osim toga, iz (3) i (5) imamo

$$\overline{SP} = \overline{SN} = \overline{SM}.$$

Tačka $S$ je, dakle, jednako udaljena od stranica trougla $ABC$, pa je zato središte kružnice upisane u njega.

**Teorema 24.** Odsečci paralela između dve paralelne prave su jednaki.



Sl. 134

Pretpostavimo: $p \parallel q$ i $l \parallel t$

Tvrđenje: $\overline{AB} = \overline{DC}$ i $\overline{AD} = \overline{BC}$

Translacijom za vektor $\overrightarrow{AD}$ tačka $A$ prelazi u tačku $D$, a $B$ u $C$, tako da se duž $\overline{AB}$ ovom transformacijom preslikava u duž $\overline{DC}$.

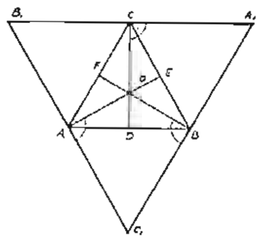
Prema tome $\overline{AB} = \overline{DC}$.

Translacijom za vektor $\overrightarrow{AB}$ duž $\overline{AD}$ preslikava se u $\overline{BC}$. Stoga su te duži jednake $\overline{AD} = \overline{BC}$.

## VEŽBANJE

1) Dokazati ovu teoremu pomoću rotacije oko sredine duži $\overline{AC}$ ili $\overline{BD}$.
2) Dokazati ovu teoremu pomoću podudarnosti trouglova.

**Teorema 25.** Visine trougla seku se u jednoj tački. Ta tačka je ortocentar trougla.



Sl. 135

Kroz temena trougla $ABC$ (sl. 135) povučemo prave koje su paralelne sa njegovim stranicama i koje se seku u tačkama $A_1B_1C_1$. Onda je

$$A_1B_1 \parallel AB; \quad A_1C_1 \parallel AC;$$

$$B_1C \parallel BC$$

Dokazaćemo prvo da visine trugla $ABC$, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ i $\overline{CD}$, pripadaju simetralama stranica trougla $A_1B_1C_1$. Simetrala duži prolazi kroz sredinu te duži i normalna je na nju. Posmtarajmo visinu $\overline{CD}$. Tačka $C$ je zaista u sredini stranice $\overline{A_1B_1}$.

Na osnovu (T. 24) imamo:

$$\left.\begin{aligned} \overline{B_1C} &= \overline{AB} \\ \overline{CA_1} &= \overline{AB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overline{B_1C} = \overline{CA_1} \qquad \text{(sl. 135).}$$

Tačka $C$, dakle, polovi duž $\overline{A_1B_1}$. Osim toga, $CD \perp AB$ i, kako je $A_1B_1 \parallel AB \Rightarrow CD \perp A_1B_1$. Znači $CD$ pripada simetrali stranice $A_1B_1$ trougla $A_1B_1C_1$.

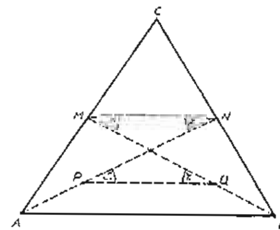
Na isti način možemo dokazati da i visine $\overline{AE}$ i $\overline{BF}$ pripadaju simetralama stranica $\overline{B_1C_1}$, odnosno $\overline{A_1C_1}$ trougla $A_1B_1C_1$.

Pošto se simetrale stranica trougla seku u jednoj tački (T. 22), znači i visine trougla $ABC$, koje pripadaju simetralama stranica trougla $A_1B_1C_1$ seku u jednoj tački.



**Teorema 26.** Težišne linije (medijane) trougla seku se u jednoj tački. Ta tačka je težište trougla (Baricentar).

Povučemo u trouglu $ABC$ (sl. 136) dve, bilo koje, težišne linije, recimo, $\overline{AN}$ i $\overline{BN}$ i neka se one seku u tački $T$.



Sl. 136

Dokazaćemo prvo da tačka $T$ deli svaku od njih u odnosu $2 : 1$, tj. da je $\overline{AT} = 2\overline{TN}$ i $\overline{BT} = 2\overline{TM}$.

U tom cilju spojimo tačke $M$ i $N$ koje su u sredini stranice $\overline{AC}$, odnosno $\overline{BC}$ i tačke $P$ i $Q$ koje su u sredini duži $\overline{AT}$, odnosno $\overline{BT}$. Tako dobijeni trouglovi $MTN$ i $PQT$ su podudarni. Zaista, duž $\overline{MN}$ je srednja linija u trouglu $ABC$ i, stoga, je (T. 21)

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB} \text{ i } MN \parallel AB \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Duž $\overline{PQ}$ je srednja linija u trouglu $ABT$, i to znači da je

$$\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AB} \text{ i } PQ \parallel AB \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Iz (6) i (7) sledi

$$\overline{PQ} = \overline{MN} \text{ i } PQ \parallel MN$$

Osim toga uglovi $\varphi = \varphi_1$ i $\varepsilon = \varepsilon_1$ kao naizmenični, pa je $\triangle MTN \cong \triangle PQT$.

Rotacijom oko tačke $T$, za ugao 180°, tačka $M$ prelazi u $Q$, u $N$ i $P$ tako da je

$$\overline{AP} = \overline{PT} = \overline{TN}$$

i

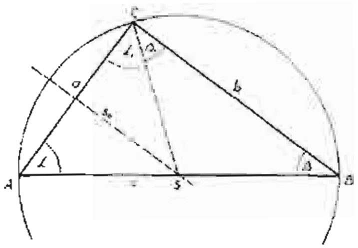
$$\overline{BQ} = \overline{QT} = \overline{TM}$$

Time smo dokazali da presečna tačka (T) dve bilo koje težišne linije deli svaku od njih u odnosu kao $2 : 1$. Ako bismo povukli treću težišnu liniju, ona bi podelila već povučene težišne linije u istom odnosu $2 : 1$, a to znači da ona mora proći kroz tačku $T$.

— · —

Presek simetrale stranica trougla, presek simetrala uglova, presek visina i presek težišnih linija, tj. središte opisane kružnice oko trougla, središte kružnice upisane u njega, ortocentar i težište zovu se značajne tačke trougla. Ako je trougao tupougli onda su ortocentar i središte opisane kružnice van oblasti trougla.

**Teorema 27**. Hipotenuza pravouglog trougla je prečnik kružnice opisane oko njega.



Sl. 137

Neka simetrala katete $a$ seče hipotenuzu trougla $ABC$ u tački $S$ (sl. 137). Onda je $\overline{SA} = \overline{SC}$. Kako je $\triangle ASC$ jednakokraki,

$$\alpha_1 = \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

U pravouglom trouglu zbir oštrih uglova

$$\alpha + \beta = d \Rightarrow \beta = d - \alpha \quad (9)$$

Ugao $\beta_1 = d - \alpha_1$ ili, s obzirom na (8),

$$\beta_1 = d - \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

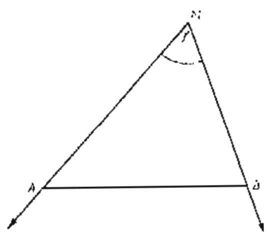
Iz (9) i (10) sledi

$$\beta_1 = \beta.$$

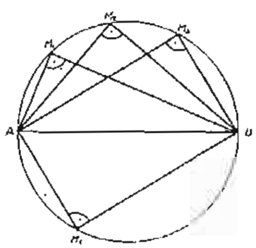
To znači da je $\triangle CBS$ jednakokraki. Prema tome,

$$\overline{SB} = \overline{SC} = \overline{SA}.$$

Tačka $S$ koja pripada hipotenuzi trougla i koja je jednako udaljena od njegovih temena, je središte kružnice opisane oko tog trougla.



Sl. 138



Sl. 139



**Definicija 16**. Ako imamo neku duž $AB$ i tačku $M$ (sl. 138). Ugao $\varphi$ koji obrazuju kraci $MA$ i $MB$ je ugao pod kojim se duž $\overline{AB}$ vidi iz tačke $M$. Na osnovu (T. 27) može se formulisati *Gmt 6*. Geometrijsko mesto tačaka iz kojih se data duž vidi pod pravim uglom je kružnica kojoj je data duž prečnik (sl. 139).

## 8. GEOMETRIJSKA KONSTRUKCIJA TROUGLA

Izvesti geometrijsku konstrukciju trougla znači na osnovu datih elemenata, upotrebom šestara i lenjira, konstruisati trougao u kojem su zastupljeni ti elementi.

Za konstrukciju trougla u opštem slučaju, tj. kod kosouglog trougla, potrebno je tri podatka. Ti podaci moraju biti nevezani tj. takvi da se pomoću dva ne može odrediti treći.

Kod jednakokrakog trougla dovoljno je dva podatka, jer, ako mu je dat jedan krak, time je dat i drugi, ili, ako mu se zna jedan ugao, poznata su mu sva tri ugla.

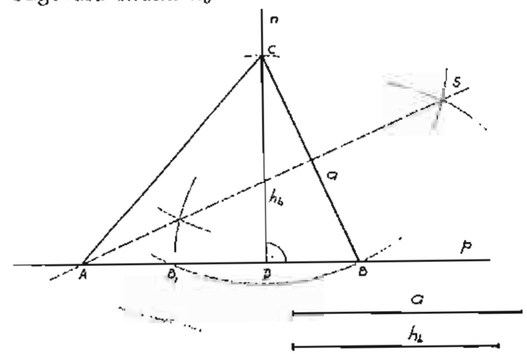
Pravougli trouglao je određen i sa dva podatka, jer, ako se zna da je trougao pravougli, dat mu je jedan ugao — prav. Jednakostranični trougao je određen sa jednim podatkom.

Ako se pomoću datih elemenata mogu konstruisati dva ili više trougla, zadatak u tom slučaju ima dva ili više rešenja. Ispitivanje broja rešenja u zavisnosti od podataka — što je stvar diskusije zadatka.

Ako konstrukcijom dobijemo dva podudarna trougla, smatramo da zadatak ima jedno rešenje.

P r i m e r i :

1) Konstruisati jednakokraki trougao ako mu je data osnova $a$ i visina koja odgovara kraku $h_b$.



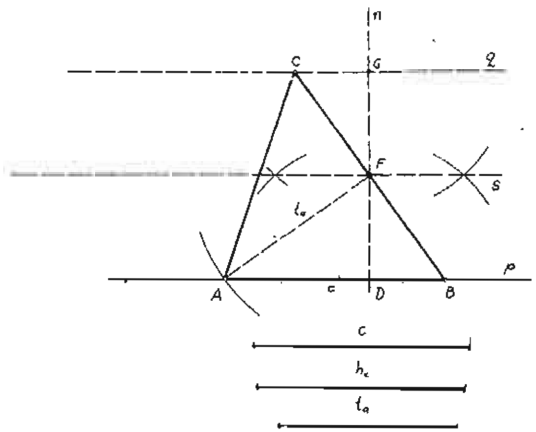
Sl. 140

*Analiza*: Pošto je traženi trougao jednakokraki, znači, osim podataka $a$ i $h_b$, znamo da je u njemu $\overline{AB} = \overline{AC}$. Pomoću date visine $h_b$ nije teško odrediti položaj temena $C$ (sl. 140). Kako je teme $B$ od temena $C$ udaljeno za $a$, ono pripada kružnici $(C, a)$. Teme $A$ određeno je na pravoj $p$, kojoj pripada krak $\overline{AB}$, simetralom osnove $\overline{BC}$ (gmt. 2).

*Konstrukcija*: Prvo se povuče proizvoljna prava $p$ (sl. 140). U bilo kojoj tački $D$ te prave konstruiše se normala $n$ na tu pravu i prenese na nju duž $\overline{DC} = h_b$. Iz dobivenog temena $C$ opišemo kružni luk $(C, a)$ koji seče pravu $p$ u tačkama $B$ i $B_1$. Konstruišemo zatim simetralu $s$ stranice $\overline{BC}$, koja na pravoj $p$ određuje treće teme traženog trougla.

*Dokaz*: U konstruisanom trouglu su zastupljeni podaci zadatka. Osim toga, teme $A$ pripada simetrali stranice $\overline{BC}$ i, kao i svaka tačka simetrale duži, ono je jednako udaljeno od $B$ i $C$. Znači konstruisani trougao $ABC$ je traženi.

*Diskusija*: Zadatak ima rešenje jedino ako kružni luk $(C, a)$ seče pravu $p$, a to ako je $a > h_c$. Ako bi se za konstrukciju iskoristila druga presečna tačka $B_1$, dobio bi se drugi trougao koji je podudaran sa konstruisanim. Zato kažemo: Zadatak ima jedno rešenje.




Sl. 141

2) Konstruisati trougao ako mu je data stranica $c$, visina $h_c$ i težišna linija $t_a$.

*Analiza*: Pretpostavimo da je zadatak rešen: trougao $ABC$ (sl. 141) je traženi. Ako stranica $\overline{AB}$ pripada proizvoljnoj pravoj $p$,



onda teme $C$ pripada pravoj $q$ (gmt. 4), a tačka $F$, sredina stranice $\overline{BC}$, pravoj $s$ (gmt. 5). Teme $A$ se može odrediti presekom $(F, t_a)$ gmt. 1 i prave $p$.

*Konstrukcija*: Povučemo proizvoljnu pravu $p$ i, u bilo kojoj tački $D$ te prave, konstruišemo normalu $n$. Prenesemo na tu normalu duž $\overline{DG} = h_c$. Kroz tačku $G$ povučemo pravu $q \parallel p$. Konstruišemo zatim simetralu duži $\overline{DG}$ — (gmt. 5) kojom je određena tačka $F$. Kružnim lukom $(F, t_a)$ odredimo na pravoj $p$ teme $A$ i nanesemo $\overline{AB} = c$. Prava $BF$ određuje na pravoj $q$ teme $C$. Trougao $ABC$ je traženi.

*Dokaz*: sledi iz analize i konstrukcije. Trougao $ABC$ je traženi jer sadrži date elemente.

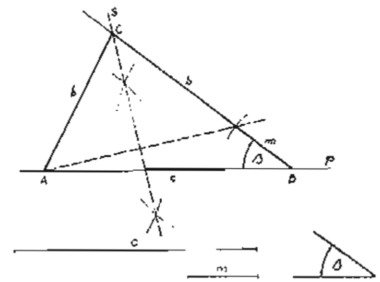
*Diskusija*: Ako je $t_a < \frac{h_c}{2}$ zadatak nema rešenja. Ako je $t_a = \frac{h_c}{2}$ moguće je konstruisati samo jedan trougao, ako je pak $t_a > \frac{h_c}{2}$, $(F, t_a)$ seče pravu $p$ u dvema tačkama i dobijamo dva podudarna trougla.

Može se desiti da su podaci u zadatku tako odabrani da ne omogućuju neposrednu konstrukciju trougla, kao što je to bio slučaj u navedenim primerima. U tom slučaju treba pokušati konstruisati neku pomoćnu figuru, koja može da bude jedan deo traženog trougla ili, pak, da sadrži u sebi traženi trougao i, preko te pomoćne figure, doći do rešenja.

Evo, uzmimo primer.

3) Konstruisati trougao ako mu je data stranica $c$, razlika ostale dve stranice $a - b = m$ i ugao $\beta$.

*Analiza*: Pretpostavimo da je trougao $ABC$ (sl. 142) traženi. Iz slike se vidi da se traženi trougao sastoji iz trougla $ABD$ i jednakokrakog trougla $ADC$. Pomoćna figura u ovom slučaju bio bi trougao $ABD$. Njega je lako konstruisati jer imamo dve stranice $c$ i $m$ i ugao $\beta$ koji one obrazuju.




Sl. 142

Zadatak se, dakle, sveo na to da se odredi treće teme traženog trougla. Kako je $\overline{AC} = \overline{DC}$, teme $C$ je određeno presekom prave $BD$ i simetrale $s$ duži $\overline{AD}$.

*Konstrukcija*: Konstruišemo prvo pomoćnu figuru: trougao $ABD$. Zatim konstruišemo simetralu $s$ kojom određujemo treće teme trougla.

*Dokaz*: Tačka $C$ pripada simetrali duži $\overline{AD}$. Prema tome $\overline{AC} = \overline{BC} = b$. Kako je $\overline{BC} = b + m \Rightarrow \overline{BC} = a$.

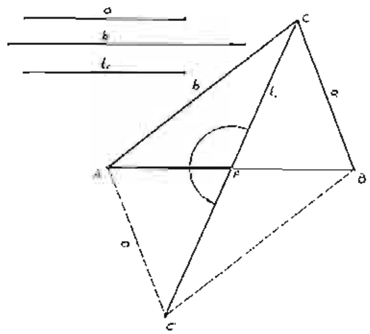
*Diskusija*: Zadatak ima jedno rešenje ako je pomoćni trougao tupougli, tj. ako je $\sphericalangle ADB > d$. Ako je, pak, taj ugao prav ili oštar, zadatak nema rešenja.

Rešenje zadatka je često olakšano primenom transformacija u geometriji.

Evo primera:

4) U trouglu su date stranice $a$, $b$ i težišna linija $T_c$. Konstruisati trougao.

Podaci:

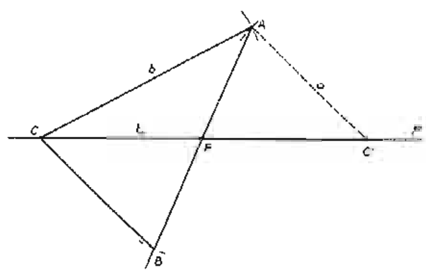


Sl. 143

*Analiza*: Pođimo od pretpostavke da je zadatak rešen. Trougao $ABC$ sadrži podatke postavljenog zadatka (sl. 143). Rotacijom oko tačke $F$ za ugao 180° teme $C$ prelazi u $C'$ i trougao $ABC$ tom rotacijom preslikava se u $\triangle AC'B$. U ovoj tranformaciji stranica $\overline{BC} = a$ preslikava se u $\overline{AC'} = a$. Lako je sada konstruisati pomoćnu figuru $\triangle CC'A$ jer su u tom trouglu poznate sve tri stranice.

*Konstrukcija*: Konstruišemo prvo pomoćni trougao $CC'A$ (sl. 144). Na proizvoljnu pravu $p$ nanesemo duž $CC' = 2t_c$. Zatim kružnim lucima $(C, b)$ i $(C', a)$ odredimo teme $A$ traženog trougla. Povučemo polupravu $AF$ i nanesemo na nju $\overline{FB} = \overline{AF}$. Time je određeno i teme traženog trougla.

*Dokaz*: Analiza potvrduje ispravnost konstrukcije, kojom je realizovan zahtev zadatka.



Sl. 144



*Diskusija*: Zadatak ima jedno rešenje ako je pomoću podataka zadataka moguće konstruisati pomoćni trougao $CC'A$, tj. ako je

$$2t_c < a + b \Rightarrow t_c < \frac{a+b}{2} \quad \text{i} \quad t_c > \frac{a-b}{2}$$

što se može napisati

$$\frac{a-b}{2} < t_c < \frac{a+b}{2}$$

## ZADACI

*Zad. 250.* Konstruisati trougao ako su mu dati uglovi $\alpha$, $\beta$ i visina $h_c$.

*Zad. 251.* U trouglu su data dva temena $A$ i $B$ i težište $T$. Konstruisati trougao.

*Zad. 252.* Konstruisati trougao ako su mu data dva temena $A$ i $B$ i ortocentar $O_c$.

*Zad. 253.* Konstruisati trougao ako su mu data dva temena $A$ i $B$ i središte kružnice upisane u njega — tačka $S$.

*Zad. 254.* U trouglu je dato: stranice $a$, $b$ i visina $h_c$. Konstruisati trougao.

*Zad. 255.* Konstruisati trougao ako su mu date stranice $b$, $c$ i visina $h_c$.

*Zad. 256.* Konstruisati pravougli trougao ako mu je dat ugao $\alpha$ i zbir kateta $a + b = m$.

*Zad. 257.* Konstruisati pravougli trougao ako mu je dat ugao $\alpha$ i zbir katete i hipotenuze $a + c = m$.

*Zad. 258.* Konstruisati trougao ako mu je data stranica $c$, razlika ostale dve stranice $a - b = m$ i ugao $\alpha$.

*Zad. 259.* U trouglu su date težišne linije $t_a$, $t_b$ i ugao koji one obrazuju $\varphi$. Konstruisati trougao.

*Zad. 260.* Konstruisati pravougli trougao ako mu je data hipotenuza $c$ i težišna linija $t_a$.

*Zad. 261.* Konstruisati trougao ako mu je data visina $h_c$, težišna linija $t_a$ i ugao $\alpha$.

*Zad. 262.* Konstruisati jednakokraki trougao ako mu je dat ugao $\alpha$ i zbir osnove i kraka $a + b = m$.

*Zad. 263.* Konstruisati jednakostranični trougao ako mu je dat zbir stranice i visine $a + h = m$.

## ČETVOROUGAO

### 1. PARALELOGRAM

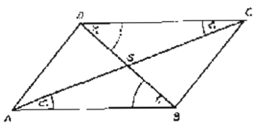
**Definicija 17.** Paralelogram je četvorougao sa dva para paralelnih stranica.

**Teorema 28.** Suprotne stranice paralelograma su jednake.

Suprotne stranice paralelograma su jednake kao odsečci paralela između dve paralelne prave (T. 24).

**Teorema 29.** Suprotni uglovi paralelograma su jednaki.

Suprotni uglovi paralelograma su jednaki kao uglovi sa paralelnim kracima (T. 4, sl. 105b).




Sl. 145

**Teorema 30.** Dijagonale paralelograma se polove.

Neka se dijagonale paralelograma $ABCD$ (sl. 145) seku u tački $S$. Lako je dokazati da trouglovi $ABS$ i $CSD$ podudarni. Prema (T. 28) $\overline{AB} = \overline{CD}$ i uglovi $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ i $\varphi_1 = \varphi_2$ kao neizmenični.

Pa, prema tome,

$$\overline{AS} = \overline{SC} \quad \text{i} \quad \overline{BS} = \overline{SD}.$$

*Posledica*: Paralelogram je centralno simetrična figura sa centrom simetrije u preseku dijagonala.

### VEŽBANJA

1) Ako su u četvorouglu dve suprotne stranice jednake, četvorougao je paralelogram.
   Dokazati.
2) Četvorougao je paralelogram, ako mu se dijagonale polove.
   Dokazati.



3) Ako se u bilo kojem četvorouglu spoje sredine stranica, tako dobijeni četvorougao je paralelogram.
   Dokazati.

**Definicija 18.** Pravougaonik je pravougli paralelogram.

**Teorema 31.** Dijagonale pravougaonika su jednake.

Kod pravouglih trouglova $ABC$ i $ABD$ jednake su katete: $\overline{AB}$ zajednička i $AD = BC$ (sl. 146).

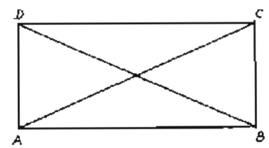
Prema tome, ti trouglovi su podudarni, pa su im i hipotenuze jednake

$$\overline{AC} = \overline{BD}$$

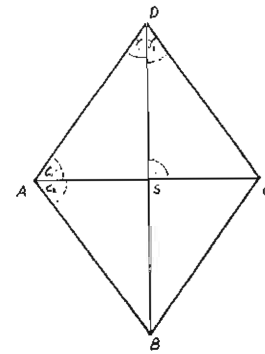
Nije teško dokazati da provougaonik osim centra simetrije, kao i svaki paralelogram, ima dve ose simetrije (simetrale njegovih stranica).

**Definicija 19.** Romb je paralelogram čije su sve stranice jednake.

**Teorema 32.** Dijagonale romba su uzajamno normalne i polove njegove uglove.




Sl. 146




Sl. 147

Pošto je $\overline{AD}=\overline{CD}$ i $\overline{AB}=\overline{CB}$ (sl. 147) tačke $B$ i $D$ su jednako udaljene od krajnjih tačaka dijagonale $\overline{AC}$, znači $BD$ je simetrala dijagonale $\overline{AC}$ i $AC$ je simetrala $\overline{BD}$. Prema tome $AC$ i $BD$ su uzajamno normalne. Osim toga, uglovi $\varphi_1 = \varphi_2$, jer rotacijom oko $BD$ za ugao 180° ti uglovi se poklapaju.

Na isti način se može dokazati da je $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

*Posledica.* Dijagonale su ose simetrije romba.

## VEŽBANJE

1) Dokazati T. 32. pomoću podudarnosti trouglova $ASD$, $DSC$, $ABS$ i $BSC$.
2) Visine romba (rastojanje suprotnih stranica) su jednake. Dokazati.

**Definicija 20.** Kvadrat je jednakostranični pravougaonik. Kvadrat bi se mogao definisati i kao pravougli romb.

*Posledice*

1) Dijagonale kvadrata su jednake.
2) Dijagonale kvadrata su uzajamno normalne.
3) Kvadrat ima centar simetrije i četiri ose simetrije.

### 2. TRAPEZ. TRAPEZOID. DELTOID

**Definicija 20.** Trapez je četvorougao koji ima jedan par paralelnih stranica.

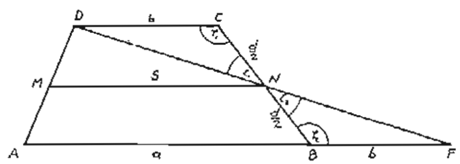
Paralelne stranice zovu se osnovice, a ostale dve — kraci trapeza.

Trapez je jednakokraki ako su mu kraci jednaki.

Rastojanje osnovica je visina trapeza.

Duž koja spaja sredine krakova je srednja linija trapeza.

**Teorema 33.** Srednja linija trapeza je paralelna sa osnovicama i jednaka je njihovom poluzbiru.




Sl. 148

Neka je $\overline{MN} = s$ srednja linija trapeza $ABCD$ (sl. 148). Prava $DN$ seče $AB$ u tački $F$. Iz slike 148. vidi se da je $\triangle BFN \cong \triangle DNC$. Zaista, $\overline{NB} = \overline{CN} = \dfrac{d}{2}$ jer tačka $N$ polovi krak $\overline{BC} = d$. Uglovi $\varphi_1 = \varphi_2$ kao naizmenični, a $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ kao unakrsni. Prema tome, $\overline{BF} =$

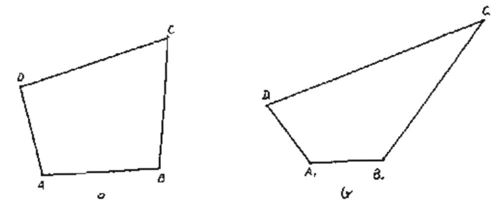


$= \overline{CD} = b$; tako da je $AF = a + b$. Kako je $\overline{MN}$ srednja linija u trouglu $AED$, to znači da je $MN \parallel AF$ u $\overline{MN} = \dfrac{1}{2}\,\overline{AF}$ (T. 21).

Srednja linija trapeza, dakle

$$s = \frac{a + b}{2}$$

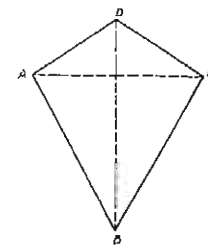
**Definicija 21.** Trapezoid je četvorougao koji nema nijedan par paralelnih stranica niti mu stranice moraju biti jednake.



Sl. 149

U trapezoidu može da bude jedan par jednakih stranica (sl. 149b), $\overline{A_1D_1} = \overline{A_1B_1}$, ali, ako to nije specijalno naglašeno, uzima se da su mu sve stranice različite dužine.

**Definicija 22.** Deltoid je četvorougao koji ima dva para jednakih stranica.




Sl. 150

## VEŽBANJA

1) Dijagonale deltoida su uzajamno normalne (sl. 150).
   Dokazati.
2) Deltoid ima dva jednaka ugla.
   Dokazati.
3) Deltoid ima osu simetrije.
   Dokazati.

### 3. GEOMETRIJSKA KONSTRUKCIJA ČETVOROUGLA

Dijagonala deli četvorougao na dva trougla sa zajedničkom stranicom. Tako, u opštem slučaju (trapezoid), za konstrukciju četvorougla potrebno je pet podataka. Broj podataka za specijalne slučajeve četvorougla može da bude i manji.

Paralelnost stranica trapeza je već jedan podatak i, prema tome, za konstrukciju raznokrakog trapeza potrebno je četiri podatka, a za jednakokraki dovoljno je tri.

Za paralelogram dovoljno je tri podatka jer ga dijagonala deli na dva podudarna trougla.

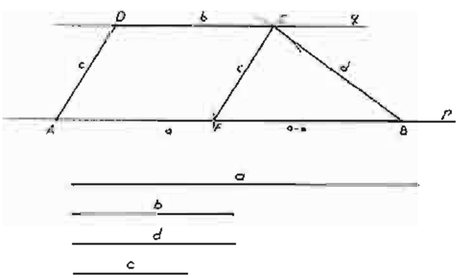
Jednakost stranica romba smanjuje broj podataka. Romb je dakle određen sa dva podatka.

Kvadrat je određen sa jednim podatkom. Pošto je deltoid osno simetrična figura, tri podatka su dovoljna da bi se deltoid mogao konstruisati.

Način na koji se izvode konstrukcije četvorougla pokazaćemo na nekoliko primera.

Primeri:

1) Konstruisati trapez ako su mu date paralelne stranice $a$ i $b$ i kraci $c$ i $d$.




Sl. 151

*Analiza*: Translacijom za vektor $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$ krak $\overline{AD}$ preslikava se u $\overline{FC} = c$, tako da je $\overline{FB} = a - b$ (sl. 151). Pri konstrukciji trougla $FBC$ ne nailazimo na poteškoće jer imamo sve tri njegove stranice.

*Konstrukcija*: Na proizvoljnoj pravoj $p$ konstruišemo trougao $FBC$ i kroz teme $C$ povučemo pravu $q \parallel p$ (sl. 151). Odredimo zatim na pravoj $q$ tačku $D$ kružnim lukom $(C, b)$ i kroz tu tačku povučemo pravu paralelno sa $CF$ koja na pravoj $p$ određuje četvrto teme trapeza.

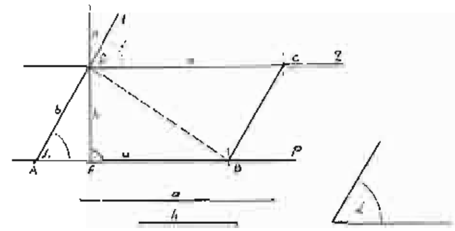
*Dokaz*: sledi iz analize i konstrukcije.

*Diskusija*. Zadatak ima rešenje ako se može konstruisati pomoćni trougao $FBC$, tj. ako je $b + c - d < a < b + c + d$.



2) Konstruisati paralelogram ako mu je data stranica $a$, ugao $\alpha$ i visina, koja odogovara datoj stranici, $h$.

Podaci:



Sl. 152

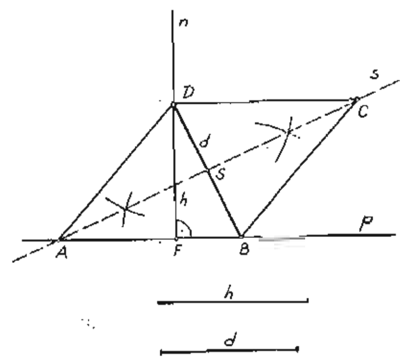
*Analiza*: Pretpostavimo da je zadatak rešen. Visinom $h$ određeno je rastojanje paralela $p$ i $q$, kojima pripadaju stranice paralelograma $\overline{AB} = \overline{DC}$ (sl. 152). Uglovi $\alpha_1 = \alpha$, kao saglasni.

*Konstrukcija*: Povučemo proizvoljnu pravu $p$ (sl. 152) i, u bilo kojoj tački $F$, konstruišemo normalu $n$. Visina $\overline{FD} = h$ određuje na toj normali teme $D$ traženog paralelograma. Kroz tačku $D$ povučemo pravu $q \parallel p$ i prenesemo na nju u tački $D$ dati ugao $\alpha$. Transverzala $t$ određuje na pravoj $p$ teme $A$ paralelograma, a time i stranicu $\overline{AD} = b$. Odredimo zatim na pravoj $p$ teme $B$, $\overline{AB} = a$ i na pravoj $q$ teme $C$, $\overline{DC} = a$. Zadatak uvek ima jedno rešenje. Podaci:

3) Konstruisati romb ako mu je data visina $h$ i dijagonala $d$.

*Analiza*: Pomoćni pravougli trougao $FBD$ određuje teme $B$ i $D$ kao i položaj dijagonale $AC$, a time i ostala dva temena romba (sl. 153).

*Konstrukcija*: Konstruišemo prvo pomoćni pravougli trougao $FBD$ tako da mu kateta bude na proizvoljnoj pravoj $p$ (sl. 153). Konstruišemo zatim simetralu $s$ dijagonale




Sl. 153

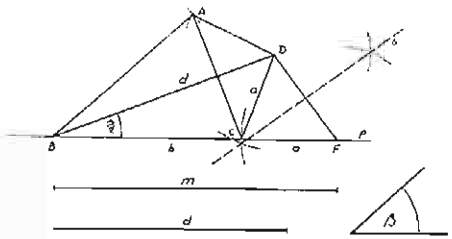
$\overline{BD}$ koja seče pravu $p$ u temenu $A$ traženog romba. Kružnim lukom $(S, A)$ odredimo na simetrali $s$ teme $C$ romba.

*Dokaz*: Tačke $A$ i $C$ pripadaju simetrali dijagonale $\overline{BD}$. Prema tome $\overline{AD} = \overline{AB}$ i, kako je $\overline{AS} = \overline{SC} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{BC}$, tj. stranice konstruisanog paralelograma su jednake. Prema tome, paralelogram je romb.

*Diskusija*: Zadatak ima rešenje ako je $d > h$. Ako je, pak, $d \leqslant h$ — zadatak nema rešenja.

4) Konstruisati deltoid ako mu je dat zbir stranica $a + b = m$, dijagonala koja spaja temena nejednakih uglova $\alpha$ i jedan od tih uglova $\beta$.

Podaci:




Sl. 154

*Analiza*: Za konstrukciju pomoćnog trougla $BFD$ imamo dovoljno podataka: $\overline{BF} = m$; $\overline{BD} = d$ i ugao $DBF = \frac{\beta}{2}$, jer je $BD$ osa simetrije deltoida. Simetrala $s$ stranice $\overline{FD}$ određuje teme $C$ traženog deltoida (sl. 154).

*Konstrukcija*: Konstruišemo prvo pomoćni trougao $BFD$ (sl. 154) i odredimo na njegovoj stranici $\overline{BF}$ teme $C$ tako da je $\overline{BC} = b$ i $\overline{CF} = a$. Zatim kružnim lucima, $(B, b)$ i $(D, a)$, odredimo četvrto teme traženog deltoida.

*Dokaz*: Deltoid je osno simetrična figura. Prema tome,

$$< ABD = < DBC = \frac{\beta}{2} \Rightarrow < ABC = \beta.$$

Osim toga, $\overline{CF} = \overline{CD} = a$, tako da je $a + b = m$. Pošto su u konstruisanom deltoidu zastupljeni svi podaci zadatka, on je traženi.

*Diskusija*: Zadatak ima rešenje — i to samo jedno — ako je zadovoljen uslov $m > d$ (zbir dve stranice trougla veći je od treće).



## Z A D A C I

*Zad. 264*. Konstruisati četvorougao ako su mu date sve četiri strane $a$, $b$, $c$ i $d$ i dijagonala $f$.

*Zad. 265*. Konstruisati paralelogram $ABCD$ ako mu je data stranica $\overline{AB} = a$, dijagonala $\overline{BD} = d$ i visina $h$ povučena iz temena $D$.

*Zad. 266*. Date su tri tačke, $P$, $Q$ i $R$. Konstruisati paralelogram tako da sredine tri njegove stranice budu u tim tačkama.

*Zad. 267*. Konstruisati paralelogram ako su mu date stranice $a$, $b$ i visina $h$.

*Zad. 268*. Konstruisati paralelogram $ABCD$ ako mu je dato: zbir stranica $a + b = m$; dijagonala $AC = d$ i $\sphericalangle DAB = \alpha$.

*Zad. 269*. Konstruisati romb tako da mu dva suprotna temena budu u dvema datim tačkama, a treće teme da pripada datoj kružnici.

*Zad. 270*. Konstruisati romb u kojem je dato: zbir stranice i visine $a + b = m$ i ugao $\alpha$.

*Zad. 271*. Konstruisati trapez $ABCD$ ako mu je dato: stranica $\overline{AB} = a$; $\sphericalangle DAB = \alpha$ visina $h$ i dijagonala $AC = d$.

*Zad. 272*. Konstruisati trapez ako mu je data paralelna stranica $a$, obe dijagonale $d_1$ i $d_2$ i visina $h$.

*Zad. 273*. Konstruisati jednakokraki trapez u kojem je data stranica $a$, dijagonala $d$ i ugao $\alpha$.

*Zad. 274*. U deltoidu je data stranica $a$ i obe dijagonale $d_1$ i $d_2$. Konstruisati deltoid.

*Zad. 275*. Konstruisati kvadrat ako mu je dat zbir stranice i dijagonale $a + d = m$.

# MERENJE DUŽI. RAZMERA. PRODUKCIJA

## 1. MERENJE. MERNI BROJ

Merenje je upoređivanje. Upoređivati se mogu samo istoimene veličine (zapremine, duži, brzine, površine itd.) i to na dva načina. Upoređenjem se može ustanoviti *za koliko* je jedna veličina veća ili manja od druge, ili *koliko je puta* jedna veličina veća ili manja od druge.

U prvom slučaju kao rezultat upoređenja dobijamo imenovani broj, a u drugom neimenovani ili apstraktan broj. Na primer, treba uporediti dve duži $a = 12$ cm i $b = 4$ cm

1) $a - b = 8$ cm

2) $\frac{a}{b} = 3$

Broj 3 pokazuje koliko puta duž $a$ je veća od duži $b$ ili, što je isto, koliko puta duž $a$ sadrži duž $b$.

Izmeriti duž znači ustanoviti koliko puta ta duž sadrži neku osnovnu dužinsku jedinicu, na primer, *mm* cm, m, itd. tj.

$$\frac{a}{1\text{ cm}} = n \Rightarrow a = n\,\text{cm}$$

Broj $n$, dakle, pokazuje koliko navedenih dužinskih jedinica sadrži duž $a$, a zove se merni broj duži $a$.

## 2. RAZMERA. MODUO RAZMERE DUŽI

Količnik dve duži $\frac{a}{b} = k$ zove se *razmera* ili *relacija*, a broj $k$ zove se *moduo* razmere.

Broj $k$ je ceo broj jedino onda ako se duž $b$ sadrži u duži $a$ ceo broj puta. Prenošenjem manje duži na veću dobijamo moduo njihove razmere.

Broj $k$, međutim, ne mora biti ceo broj. U tom slučaju, pri prenošenju manje duži na veću, dobija se ostatak.

Da bi se našao moduo razmere dve duži $a$ i $b$ ako duž $a$ ne sadrži duž $b$ ceo broj puta, mora se odrediti neka duž $c$ koja se ceo broj puta sadrži i u duži $a$ i u duži $b$. Neka duž $a$ sadrži duž $c$ $m$ puta, a duž $b$ sadrži tu duž $n$ puta. Onda imamo:

$$a = m \cdot c$$

$$b = n \cdot c$$

i moduo razmere je kada $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

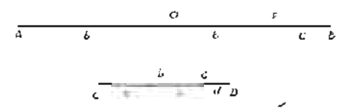
Duž koja se sadrži ceo broj puta i u duži $a$ i u duži $b$ zove se *zajednička mera* duži $a$ i $b$. Jasno je da u tom slučaju postoji beskonačno



mnogo takvih duži koje se ceo broj puta sadrže i u duži $a$ i u duži $b$. Na primer, duž $1/2c$, $1/3\,c$ itd. Ako je među svim dužinama koje se sadrže u dve duži ceo broj puta, duž $c$ najveća, onda se ta duž zove *najveća zajednička mera* (n z m) tih duži.

Konstruktivno nzm određuje se Euklidovom metodom verižnog deljenja.

Neka treba naći moduo razmere dve duži $\overline{AB} = a$ i $\overline{CD} = b$ (slika 155). Prvo treba odrediti nzm tih duži. Prenesemo manju duž $b$ na veću $a$. Vidimo da je $a = 2b + c$. Duž $\overline{FB} = c$ je prvi ostatak. Prenesemo taj prvi ostatak na duž $b$. Dobijamo $b = 2c + d$. Duž $\overline{GD} = d$ je drugi ostatak. Prenesemo drugi ostatak na prvi. Imamo $c = 2d$. Duž $d$, dakle, ceo broj puta se sadrži u duži $c$. Ta duž ($d$) koja se u prethodnom ostatku sadrži ceo broj puta je nzm datih duži.



Sl. 155

Kada je nađena nzm treba obe duži izraziti pomoću te duži:

$$a = 2b + c$$

$$b = 2c + d$$

$$c = 2d$$

Iz ovoga dobijamo:

$$b = 4d \quad d \qquad b = 5d$$

$$a = 10d + 2d \qquad a = 12d$$

Moduo razmere tih duži je dakle,

$$\frac{a}{b} = \frac{12d}{5d}$$

ili, posle skraćivanja sa $d$, imamo:

$$\frac{a}{b} = \frac{12}{5}$$

Ako se posle konačnog broja prenošenja poslednji ostatak ceo broj puta sadrži u prethodnom, to znači da takve duži imaju zajedničku meru, kažemo da su one *samerljive* ili *komensurabilne*. Moduo razmere takvih duži je ili prirodan broj ili razlomak, tj. racionalan broj.

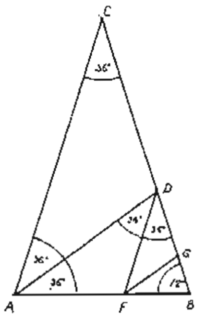
Postoje, međutim, i takve duži koje nemaju zajedničku meru. Takve se duži zovu *nesamerljive* ili *inkomensurabilne*.

### 3. NESAMERLJIVE DUŽI

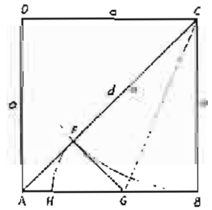
**Teorema 34.** Ako je ugao pri vrhu jednakokrakog trougla 36°, onda su njegova osnovica i krak nesamerljive duži.

Neka je u jednakokrakom trouglu $ABC$ (slika 156) ugao pri vrhu $\sphericalangle BCA = 36°$. Tada su mu uglovi na osnovi $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = 72°$. Treba dokazati da su osnovica $\overline{AB}$ i krak $\overline{BC}$ dve nesamerljive duži.

Primenimo Euklidovu metodu verižnog delenja. Prenesimo $\overline{AB} = \overline{CD}$ na $\overline{BC}$ i dobijemo prvi ostatak duž $\overline{DB}$. Zatim duž $\overline{DB} = \overline{AF}$ treba preneti na $\overline{AB}$. Ali, duž $\overline{DB}$ je isto osnovica jednakokrakog trougla sa uglom pri vrhu od 36°, a duž $\overline{AB}$ mu je krak. Zaista, ako povučemo simetralu ugla $CAB = 72°$ ona prolazi baš kroz tačku $D$. Ugao $DAB = 36°$; $\sphericalangle ABD = 72°$. Prema tome trougao $ABD$ je jednakokraki, znači $\overline{AD} = \overline{AB}$. Trougao $ADC$ je isto jednakokraki: $\overline{AD} = \overline{CD}$. A to znači da je $\overline{CD} = \overline{AB}$.




Sl. 156




Sl. 157

Drugi ostatak je duž $\overline{FB}$, koja je isto osnovica jednakokrakog trougla sa uglom pri vrhu 36°, u kojem je prvi ostatak krak. Očigledno je da, ma koliko produžili ovaj postupak, osnovica takvog trougla neće sadržati ceo broj puta u njegovom kraku. To znači da zajedničke mere za te dve duži ne postoji.

**Teorema 35.** Dijagonala i stranica kvadrata su nesamerljive duži.

Neka je $a$ stranica kvadrata $ABCD$ i $d$ njegova dijagonala. (sl. 157). Dijagonala deli kvadrat na dva podudarna jednakokrako pravougla trougla. Treba, dakle, dokazati da su kateta i hipotenuza tog trougla nesamerljive. Ako se njegova kateta prenese na hipotenuzu $\overline{CF} = a$, dobija se prvi ostatak $\overline{FA}$. Ako se sada u tački $F$ povuče normala na $\overline{AC}$, trougao $AGF$ je isto jednakokrako-pravougli.



Kako su pravougli trouglivi $FGC$ i $GBC$ podudarni, imamo $\overline{GB} = \overline{FG} = \overline{FA}$. To znači da bi drugi ostatak ($\overline{AH}$) isto bi bio razlika hipotenuze ($\overline{AG}$) i katete ($\overline{FG} = \overline{FA}$) jednakokrako-pravouglog trougla. Ma koliko puta ponovili taj postupak neće se desiti da se kateta jednakokrako-pravouglog trougla sadrži ceo broj puta u njegovoj hipotenuzi. Znači, te duži nemaju zajedničku meru. Drugim rečima, te duži su nesamerljive.

Možemo, pak, odrediti odnos dijagonale kvadrata i njegove stranice računskim putem. Iz pravouglog trougla $ABC$ imamo:

$$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2}$$

Razmera:

$$\frac{d}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

Nije teško dokazati da broj $\sqrt{2}$ niti je ceo broj, niti je razlomak, tj. ne pripada skupu racionalnih brojeva.

Zaista, $1 < \sqrt{2} < 2$, jer $1^2 = 1$, a $2^2 = 4$. Pošto između 1 i 2 nema celih brojeva, $\sqrt{2}$ nije ceo broj.

Isto je lako dokazati da $\sqrt{2}$ nije ni razlomak.

Pođimo od pretpostavke da je $\sqrt{2}$ neki razlomak $\frac{p}{q}$ i da brojevi $p$ i $q$ nemaju zajednički faktor, tj. da se taj razlomak ne može skratiti.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Kvadriranjem dobijamo:

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

Ako se $\frac{p}{q}$ ne može skratiti, onda se ni $\frac{p^2}{q^2}$ ne može skratiti, niti može da ima vrednost 2. To dovodi u protivurečnost sa pretpostavkom da je $\sqrt{2}$ razlomak. Stoga se ta pretpostavka mora odbaciti kao neosnovana. A to znači da $\sqrt{2}$ nije razlomak.

Broj koji nije ni ceo, a ni razlomak zove se *iracionalan broj*. Svi racionalni i svi iracionalni brojevi predstavljaju skup *realnih brojeva*.

Prema tome, ako su dve duži nesamerljive, moduo njihove razmere je iracionalan broj. Važi, razume se, i obrnuto: ako je moduo razmere dve duži iracionalan broj, duži su nesamerljive.

## 4. GEOMETRIJSKA PROPORCIJA

Ako dve razmere imaju isti moduo, onda su one jednake:

$$\frac{a}{b} = k \quad \text{i} \quad \frac{c}{d} = k$$

to znači da je:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ili } a : b = c : d \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Jednakost dve razmere zove se *geometrijska proporcija ili srazmera.*

Za duži $a$, $b$, $c$ i $d$ kažemo da su članovi proporcije i to: $a$ i $d$ spoljašnji, a $b$ i $c$ unutrašnji.

Ako četiri duži ili, uopšte, bilo koje veličine, obrazuju geometrijsku proporciju, kažemo da su proporcionalne. Očigledno je da se jednakost (1) može napisati i ovako:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

Osnovno pravilo kod geometrijske proporcije je: proizvod krajnjih članova jednak je proizvodu srednjih članova. To se odmah vidi ako se jednakost (1) pomnoži sa $db$ ili jednakost (2) sa $ac$, dobijamo: $ad = bc$.

Ako su nam u proporciji poznata tri člana, četvrti se može izračunati:

$$\frac{x}{c} = \frac{b}{c} \Rightarrow x = \frac{a \cdot b}{c} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

Svaki član proporcije zove se četvrta geometrijska proporcionala za ostala tri. Tako je $x$ u proporciji (3) četvrta geometrijska proporcionala za $a$, $b$ i $c$.

U proporciji u kojoj su dva člana jednaka:

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow x = \frac{a^2}{b}$$

$x$ je treća proporcionala za $a$ i $b$.

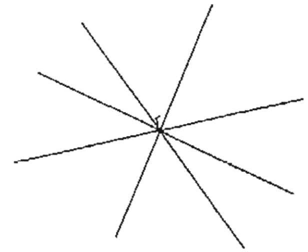
Proporcija $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ ili $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$ zove se neprekidna, a njen član $x$ je geometrijska sredina članova $a$ i $b$

$$x^2 = ab \Rightarrow x = \sqrt{ab}$$



## 5. PRAMEN PRAVIH

**Definicija 23.** Pramen pravih je skup pravih koje pripadaju istoj ravni i koje se seku u istoj tački. Ta tačka se zove *teme* ili *centar* pramena (slika 158).



Sl. 158

**Teorema 36.** (Talesova teorema) Ako se prave pramena preseku sa dve paralelne prave onda su:

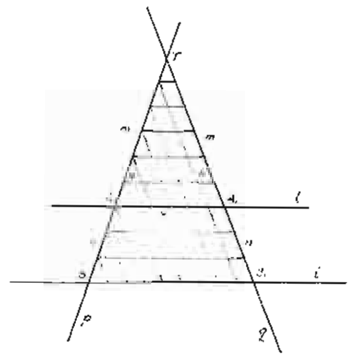
1) Odgovarajući (homologni) odsečci na tim pravima proporcionalni.

2) Odsečci na paralelama proporcionalni su sa odgovarajućim odsečcima na tim pravima.

Uzmimo da su dve prave pramena $p$ i $q$ presečene sa dve paralelne prave $l$ i $t$ u tačkama $A$, $A_1$ i $B$, $B_1$. Te tačke i tačka $T$ određuju osam duži (slika 159).

Na pravoj $p$: $\overline{TA}$, $\overline{TB}$ i $\overline{AB}$

Na pravoj $q$: $\overline{TA_1}$, $\overline{TB_1}$ i $\overline{A_1B_1}$




Sl. 159

Na paralelama: $\overline{AA_1}$ (na $l$) i $\overline{BB_1}$ (na $t$)

Odgovarajuće ili homologne duži na pravima $p$ i $q$ su:

$\overline{TA}$ i $\overline{TA_1}$; $\overline{TB}$ i $\overline{TB_1}$; $\overline{AB}$ i $\overline{A_1B_1}$

Duži $\overline{AA_1}$ na pravoj $l$, odgovara duž $\overline{TA}$ na pravoj $p$, ili duž $\overline{TA_1}$ na pravoj $q$. Duži $\overline{BB_1}$ na pravoj $t$ odgovara duž $\overline{TB}$ na pravoj $p$ ili duž $\overline{TB_1}$ na pravoj $q$.

Dokazaćemo prvo da su odgovarajući odsečci na pravima $p$ i $q$ proporcionalni, tj.:

$$\frac{\overline{TA}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{TA_1}}{\overline{TB_1}}; \quad \frac{\overline{TA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{TA_1}}{\overline{A_1B_1}}; \quad \frac{\overline{TB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{TB_1}}{\overline{A_1B_1}}$$

Neka je $a$ nzm duži $\overline{TA}$ i $\overline{AB}$ i neka se ona sadrži u duži $\overline{TA}$ $m$ puta, a u duži $\overline{AB}$ $n$ puta.

Ako se sada kroz deone tačke povuku prave paralelne sa $l$, one će podeliti duž $\overline{TA_1}$ na $m$, a duž $\overline{A_1B_1}$ na $n$ jednakih odsečaka i neka je taj odsečak $b$. Onda možemo napisati:

$$\overline{TA} = m \cdot a \qquad \overline{TA_1} = m \cdot b$$
$$\overline{TB} = (m+n) \cdot a \qquad \overline{TB_1} = (m+n) \cdot b$$

Razmera duži $\overline{TA}$ i $\overline{TB}$ je:

$$\frac{\overline{TA}}{\overline{TB}} = \frac{m \cdot a}{(m+n) \cdot a} = \frac{m}{m+n}$$

Razmera duži $\overline{TA_1}$ i $\overline{TB_1}$ je:

$$\frac{\overline{TA_1}}{\overline{TB_1}} = \frac{m \cdot b}{(m+n)\, b} = \frac{m}{m+n}$$

Vidimo da je moduo tih razmera isti $\frac{m}{m+n}$:

Prema tome, imamo proporciju:

$$\frac{\overline{TA}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{TA_1}}{\overline{TB_1}}$$

Kako je $\overline{AB} = na$ i $\overline{A_1B_1} = nb$, možemo napisati:

$$\frac{\overline{TA}}{\overline{AB}} = \frac{m \cdot a}{n \cdot a} = \frac{m}{n} \qquad \frac{\overline{TA_1}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{m \cdot b}{n \cdot b} = \frac{m}{n}$$

Ove razmere imaju takođe isti moduo $\frac{m}{n}$, stoga je:

$$\frac{\overline{TA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{TA_1}}{\overline{A_1B_1}}$$

$$\frac{\overline{TB}}{\overline{AB}} = \frac{(m+n)\, a}{n \cdot a} = \frac{m+n}{n};$$

$$\frac{\overline{TB_1}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{(m+n)\, b}{n \cdot b} = \frac{m+n}{n}$$

$$\frac{\overline{TB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{TB_1}}{\overline{A_1B_1}}$$



Dokazaćemo sada da su odsečci na paralelama $l$ i $t$ proporcionalni sa odgovarajućim odsečcima na pravima $p$ i $q$, tj.

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}} = \frac{\overline{TA}}{\overline{TB}} \quad \text{i} \quad \frac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}} = \frac{\overline{TA_1}}{\overline{TB_1}}$$

Kroz deone tačke duži $TB$ (slika 159) povučemo prave paralelne sa pravom $q$. Te prave podeliće duž $\overline{AA_1}$ na $m$, a duž $\overline{BB_1}$ na $m+n$ jednakih odsečaka i neka je taj odsečak $c$. To znači da je:

$$\overline{AA_1} = mc \qquad \overline{BB_1} = (m+n)\, c$$

Razmera tih duži je:

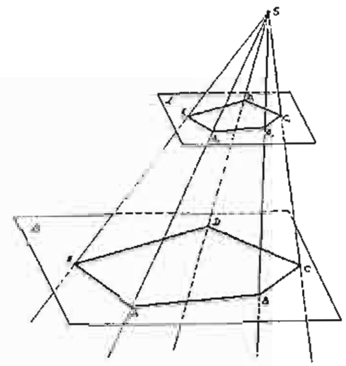
$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}} = \frac{mc}{(m+n)\, c} = \frac{m}{m+n}$$

A, kao što smo već videli, i

$$\frac{\overline{TA}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{TA_1}}{\overline{TB_1}} = \frac{m}{m+n}$$

to znači da je:

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}} = \frac{\overline{TA}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{TA_1}}{\overline{TB_1}}$$



Sl. 159

## VEŽBANJA

1) Dokazati da teorema 36 važi i za tri prave pramena.

2) Dokazati da je: $\frac{\overline{TA}}{\overline{TA_1}} = \frac{\overline{TB}}{\overline{TB_1}}$ (slika 159).

3) Dokazati da Talesova teorema važi i za snop pravih presečenih sa dve paralelne ravni. (Snop pravih je skup pravih u prostoru koje prolaze kroz istu tačku) (slika 159').

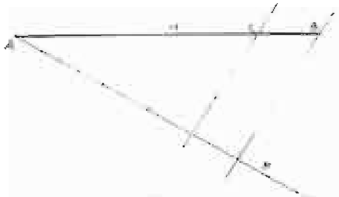
Uputstvo:

$$\overline{AB} \parallel \overline{A_1B_1}; \qquad \overline{BC} \parallel \overline{B_1C_1}$$
$$\overline{DE} \parallel \overline{D_1E_1}; \qquad \overline{CD} \parallel \overline{C_1D_1}$$

## 6. PRIMENA TALESOVE TEOREME

Kod rešavanja konstruktivnih zadataka često je trebalo sabirati ili oduzimati date duži. Primenom Talesove teoreme moguće je vršiti i druge operacije sa dužima na koje se često nailazi u rešavanju konstruktivnih zadataka.

Uzećemo nekoliko primera:



Sl. 160

1) Datu duž $\overline{AB} = a$ podeliti na $n$ jednakih delova. (specijalan slučaj $n = 5$).

Iz bilo koje krajnje tačke date duži $\overline{AB}$ povučemo polupravu $p$ pod proizvoljnim uglom (slika 160). Od tačke $A$ nanesemo na tu polupravu $n$ (na slici 160. $n = 5$) jednakih, proizvoljne dužine odsečaka. Krajnju tačku $D$ spojimo sa $B$ i kroz tačku $F$ povučemo pravu $FC \parallel DB$. Duž $\overline{CB} = \dfrac{1}{5}a$.

*Dokaz*: Na osnovu Talesove teoreme, imamo: $\overline{CB} : \overline{AB} = \overline{FD} : \overline{AD}$; a, kako je prema konstrukciji:

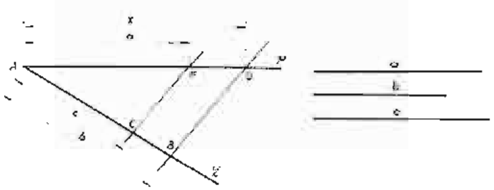
$$\overline{FD} : \overline{DA} = 1 : 5$$

to je $\overline{CB} : \overline{AB} = 1 : 5$ ili $\overline{CB} = \dfrac{1}{5}\overline{AB}$,

2) Date su tri duži $a$, $b$ i $c$. Konstruisati duž $x = \dfrac{a\,b}{c}$ (konstruisati četvrtu geometrijsku proporcionalu).

Primenom Talesove teoreme ovaj zadatak se može rešiti na dva načina:

*I način* $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{c}$



Sl. 161

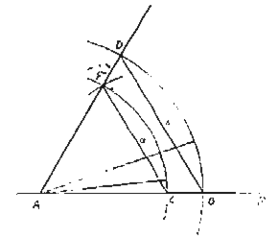


*Konstrukcija*: Iz tačke $A$ povučemo dve poluprave $p$ i $q$ pod proizvoljnim uglom (slika 161). Na jednu od njih, recimo na $q$, prenesemo duži $\overline{AB} = b$ i $\overline{AC} = c$, a na pravu $p$ duž $\overline{AF} = a$ i povučemo pravu $CF$. Prava $BD \parallel CF$ određuje na polupravoj $p$ tačku $D$ a time i traženu duž $\overline{AD} = x$.

*Dokaz*: Talesova teoreme (tačka 1)

U izvedenoj konstrukciji tražena duž $x$ je na jednoj pravoj pramena. Konstrukcija se može izvesti i tako da tražena duž bude na jednoj od paralela.

*II način*. Napišemo dati izraz u obliku: $\dfrac{x}{a} = \dfrac{b}{c}$.



Sl. 162

*Konstrukcija*: Na proizvoljnoj pravoj $p$ uzmemo bilo gde tačku $A$ (slika 162) i opišemo 2 kružna luka $(A, b)$ i $(A, c)$. Kroz presečnu tačku $F$ luka $(A, c)$ i luka $(C, a)$ i tačku $A$ povučemo pravu $q$, koja seče luk $(A, b)$ u tački $D$. Duž $\overline{BD} = x$ je tražena.

*Dokaz*: Talesova teorema (tačka 2).

Na isti način se konstruiše i treća proporcionala $x = \dfrac{a^2}{b}$. Potrebno je taj izraz napisati u obliku $\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{b}$.

Na konstrukciju 4. proporcionale svodi se i konstrukcija duži:

$$x = \frac{abc}{de}$$

Taj se izraz napiše prvo u obliku:

$$x = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{e} \text{ i stavi:}$$

$$z = \frac{ab}{d}; \qquad x = \frac{zc}{e}$$

## Proizvod i količnik dve duži

Ako je duž $\overline{AB} = a$, to znači da duž $\overline{AB}$ sadrži $a$ nekih dužinskih jedinica. Ako je u istom zadatku duž $\overline{CD} = b$ i, pritom, nisu učinjene nikakve specijalne napomene, to znači da duž $\overline{CD}$ sadrži $b$ *istih* dužinskih jedinica. Ako je $x = ab$, onda duž $\overline{MN} = x$ sadrži $ab$ dužinskih jedinica kojim su izražene duži $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Da bi smo dobili duž $u = 1$ (jediničnu duž) treba ili duž $\overline{AB}$ podeliti na $a$ jednakih delova, ili, pak, duž $\overline{CD}$ podeliti na $b$ jednakih delova.

3) Date su duži $a$ i $b$. Konstruisati duž $x = ab$. Prvo se taj izraz napiše u obliku:

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{1}$$

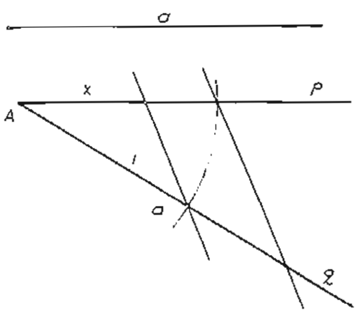
Zatim se odredi jedinična duž, pa se konstruiše $x$ kao četvrta proporcionala duži $a$, $b$ i 1.

Konstrukcija količnika dve duži:

$$x = \frac{a}{b}$$

može se svesti na konstrukciju četvrte geometrijske proporcionale ako se taj izraz napiše u obliku:

$$\frac{x}{1} = \frac{a}{b}$$




Sl. 163

Na konstrukciju treće geometrijske proporcionale svodi se konstrukcija duži koja je recipročna datoj.

$$x = \frac{1}{a}$$

Prvo se dati izraz napiše u obliku $\frac{x}{1} = \frac{1}{a}$. Zatim se na poluprave $p$ i $q$ (slika 163) nanese jedinična duž i na jednu od njih, nanese duž $a$. Pomoću dve paralelne prave određuje se duž $x$.

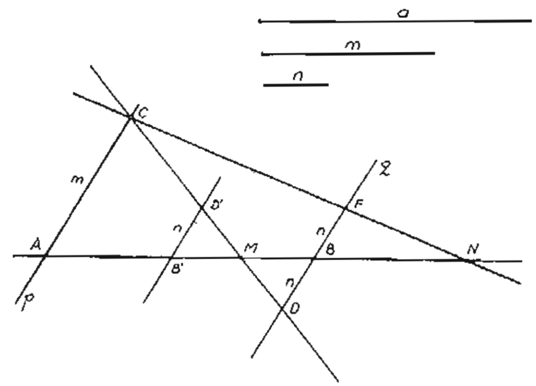


## Harmonijska podela duži

4) Datu duž $AB = a$ podeliti harmonijski u datom odnosu $\frac{m}{n}$.

Za tačku $M$ kažemo da deli duž $\overline{AB}$ u odnosu kao $m : n$ ako ona zadovoljava uslov $\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{m}{n}$. Ali postoji i tačka $N$ (slika 164), koja zadovoljava taj uslov $\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}} = \frac{m}{n}$. Za tačku $M$ kažemo da deli duž $\overline{AB}$ *unutrašnjom* podelom u razmeri $m : n$, a tačka $N$ deli tu duž u istoj razmeri *spoljašnjom* podelom. Kako je:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{m}{n} \text{ i } \frac{\overline{AN}}{\overline{BN}} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{BN}}$$




Sl. 164

Četiri tačke $A$, $B$, $M$ i $N$ koje pripadaju istoj pravoj i koje zadovoljavaju uslov:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{BN}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

zovu se *harmonijske* tačke. Tačke $M$ i $N$ dele duž $\overline{AB}$ harmonijskom podelom u datoj razmeri. Za tačke $M$ i $N$ kažemo da su *harmonijski konjugovane* prema tačkama $A$ i $B$.

Nije teško dokazati da su i tačke $A$ i $B$ harmonijski konjugovane prema tačkama $M$ i $N$, tj. da i tačke $A$ i $B$ dele duž $MN$ u nekoj razmeri. Zaista, proporciju (1) možemo napisati u obliku:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BN}}$$

čime je gornje tvrđenje dokazano.

*Konstrukcija*: Kroz tačke $A$ i $B$ povučemo dve paralelne prave $p$ i $q$ (pod proizvoljnim uglom). Na pravu $p$ prenesemo duž $m$ (ili, ako je $m$ broj, $m$ nekih jednakih duži) a na $q$ duž $n$ (ili $n$ istih duži). Dobijamo tačke $C$, $D$ i $F$ (slika 164). Prave $CD$ i $CF$ određuju na pravoj $p$ tačke $M$ i $N$.

*Dokaz*: Talesova teorema potvrđuje ispravnost konstrukcije.

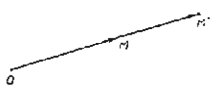
## HOMOTETIJA

Neka imamo tačku $O$ i realan broj $k$. Za tačku $M$ kažemo da prelazi u tačku $M'$ *homotetijom* $(O, k)$, ako je zadovoljen uslov:

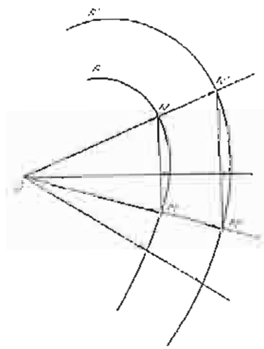
$$\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$$

$\left(\text{Na slici 165 } k = \frac{3}{2}\right)$

Tačka $O$ je centar homotetije, a broj $k$ je njen moduo. Očigledno je da, ako je $k > O$, tačke $M$ i $M'$ su sa iste strane centra homotetije.



Sl. 165



Sl. 166

Ako je, pak, $k < O$, vektori $\overrightarrow{OM'}$ i $\overrightarrow{OM}$ imaju suprotan smer i centar homotetije je između tačaka $M$ i $M'$. Ako je $k = 1$, tačka $M$ se preslikava sama u sebe.

Tačka $O$ se preslikava sama u sebe za bilo koje $k$. Skup svih tačaka figure $F$ preslikanih homotetijom $(O, k)$ obrazuje novu figuru $F'$ (slika 166) za koju se kaže da je preslikana iz figure $F$ homotetijom

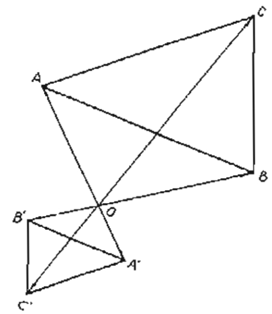


$(O, k)$. Na slici 166 uzeto je da je $k = 2$. Tačke $M$ i $M'$ su homologne tačke u toj homotetiji. Vektori $\overrightarrow{MN}$ i $\overrightarrow{M'N'}$, koji su određeni sa bilo koje dve tačke figure $F$ i tačkama koje su sa njima homologne, su kolinearni i moduo njihove razmere jednak je modulu homotetije.

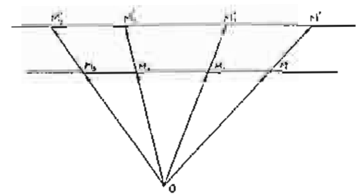
$\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$ (vidi Talesovu teoremu)

Prema tome, duž $\overline{AB}$ homotetijom $(O, k)$ preslikava se u duž $\overline{A'B'}$ koja je paralelna sa $\overline{AB}$. Razmera tih duži jednaka je apsolutnoj vrednosti modula homotetije

$\overline{A'B'} = |k| \cdot \overline{AB}$



Sl. 167



Sl. 168

Na slici 167. trougao $ABC$ preslikan je homotetijom $\left(O, -\frac{1}{2}\right)$ u trougao $A'B'C'$. Razmera odgovarajućih stranica tih trouglova:

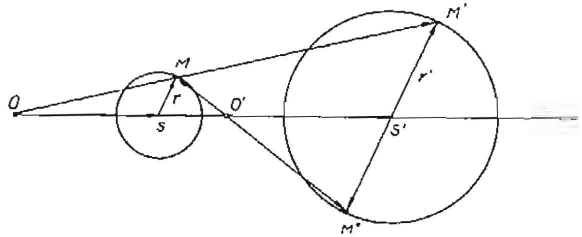
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}; \quad \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}; \quad \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2}$$

Prava $p$ homotetijom $(O, k)$ preslikava se u pravu $p'$ koja je paralelna sa $p$ (slika 168) ili se poklapa sa $p$ ukoliko centar homotetije pripada pravoj $p$. Na slici 168. moduo homotetije uzeto $k = \frac{8}{5}$.

Kružnica $(S, r)$ homotetijom $(O, k)$ preslikava se u kružnicu $(S', r')$ tako što je $\frac{r'}{r} = |k|$, a njeno središte $S'$ dobija se iz središta $S$ istom homotetijeom. Na slici 169. moduo homotetije je $k = \frac{5}{2}$.

To znači da bi se kružnica $(S, r)$ preslikala homotetijom $(O, k)$, dovoljno je bilo koji njen poluprečnik $\overline{SM}$ preslikati u $\overline{S'M'}$, čime je određeno i središte $S'$ i poluprečnik $r'$ transformisane kružnice.

Očigledno je da se u istu kružnicu $(S', r')$ preslikava kružnica $(S, r)$ i homotetijom $(O', -k)$. Tačka $O$ je spoljašnji, a tačka $O'$ unutrašnji centar homotetije kružnica $(S, r)$ i $(S', r')$.




Sl. 169

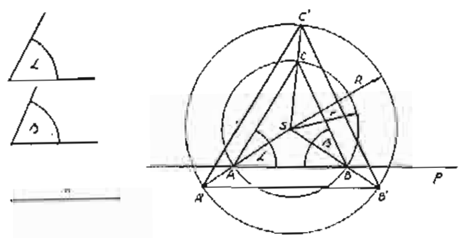
Ako je centar homotetije u središtu kružnice $(S, r)$, ona se preslikava u kružnicu $(S, R)$. Moduo homotetije je $k = \frac{R}{r}$ (slika 170).

Homotetija, kao transformacija, često se u geometriji veoma efikasno koristi pri rešavanju konstruktivnih zadataka. Uzmimo nekoliko primera.

1) Konstruisati trougao ako su mu dati uglovi $\alpha$ i $\beta$ i poluprečnik opisane kružnice $R$.

Rešenje:

Bilo gde na pravoj $p$ odredimo tačke $A$ i $B$ i prenesemo uglove $\alpha$ i $\beta$ tako da dobijemo trougao $ABC$ i oko njega opišemo kružnicu $(S, r)$ (slika 170). Opišemo zatim kružnicu $(S, R)$ čiji je poluprečnik dat i koja je koncentrična sa kružnicom $(S, r)$.



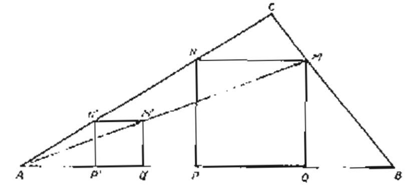
Sl. 170

Ako sada uzmemo tačku $S$ kao centar homotetije, a kao moduo homotetije uzmemo $k = \frac{R}{r}$, onda se sve tačke kružnice $(S, r)$ tom



homotetijom preslikavaju u tačke kružnice $(S, R)$. Tako se tačka $A$ preslikava u tačku $A'$, tačka $B$ u tačku $B'$ i tačka $C$ u tačku $C'$. Kako je $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ i $\overline{A'C'} \parallel \overline{AC}$, $\measuredangle C'A'B' = \alpha$ kao uglovi sa paralelnim kracima. Iz tih razloga $\measuredangle A'B'C' = \beta$. To znači da trougao $A'B'C'$ odgovara uslovima zadatka. Drugim rečima: on je traženi.

2) U dati trougao $ABC$ upisati kvadrat tako da mu dva temena budu na stranici $\overline{AB}$, a ostala dva temena da pripadaju stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$.



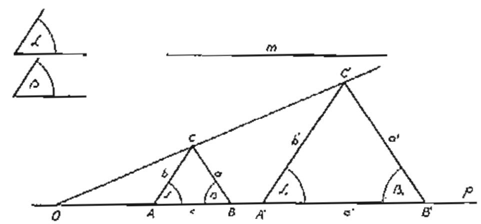
Sl. 171

*Analiza*: Pretpostavimo da je zadatak rešen: kvadrat $PQMN$ (slika 171) je traženi. Ako povučemo polupravu $AM$, onda se traženi kvadrat homotetijom $\left(A, \frac{AM'}{AM}\right)$ preslikava u kvadrat $P'Q'M'N'$. To znači da se i kvadrat $P'Q'M'N'$ homotetijom $\left(A, \frac{AM}{AM'}\right)$ preslikava u traženi.

*Konstrukcija*: Uzmimo bilo gde na stranici $AB$ datog trougla tačku $P'$ i konstruišimo kvadrat $P'Q'M'N'$. Povučemo zatim polupravu $AM'$, koja na stranici $\overline{BC}$ određuje teme $M$ traženog kvadrata.

3) Konstruisati trougao ako mu je dat obim $m$ i uglovi $\alpha$ i $\beta$.

Podaci:



Sl. 172

*Analiza*: Neka je trougao $ABC$ traženi i neka je $\overline{OB} = m$ (sl. 172). Iz slike vidi se da se taj trougao homotetijom $\left(O, \frac{OB'}{OB}\right)$ preslikava u trougao $A'B'C'$. To znači da se i trougao $A'B'C'$ može preslikati u trougao $ABC$ homotetijom $\left(O, \dfrac{OB}{OB'}\right)$. S obzirom da se duž homotetijom preslikava u duž koja je sa njom paralelna, uglovi $\alpha = \alpha_1$, i $\beta = \beta_1$. Osim toga, $a' = ka$; $b' = kb$ i $c' = kc$. Ako stavimo da je $m'$ obim trougla $A'B'C'$, onda imamo:

$$a' + b' + c' = k(a + b + c)$$

$$m' = km \qquad k = \frac{m'}{m}$$

*Konstrukcija*: Nanesimo na pravu $p$ proizvoljnu duž $\overline{A'B'} = c'$ i uglove $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$. Tako smo dobili trougao $A'B'C'$ (sl. 172). Od temena $B'$ prenesimo na pravu $p$ obim konstruisanog trougla, čime smo odredili tačku $O$, $\overline{OB'} = m'$. Prenesemo zatim od tačke $O$ duž $\overline{OB} = m$. Prava koja prelazi kroz tačku $B$ i koja je paralelna sa $B'C'$ određuje na pravoj $OC'$ teme $C$, a prava $CA$ paralelna sa $A'C'$ određuje na pravoj $p$ teme $A$ traženog trougla.

*Dokaz*: Homotetijom $\left(O, \dfrac{m}{m'}\right)$ konstruisani trougao $A'B'C'$ preslikava se u traženi. U toj transformaciji $BC \parallel B'C'$ i $AC \parallel A'C'$.

*Diskusija*: Zadatak ima jedno rešenje ako je zadovoljen uslov $\alpha + \beta < 180°$.

## VEŽBANJE

1) U dati polukrug upisati kvadrat tako da mu dva temena budu na prečniku polukruga.

   Uputstvo. Središte polukruga polovi stranicu kvadrata.

2) U dati trougao $ABC$ upisati trougao $A_1B_1C_1$ tako da temena traženog trougla budu na stranicama datog i da je $A_1B_1 \perp AB$ $A_1C_1 \perp BC$ i $B_1C_1 \perp AC$.

   Uputstvo. Konstruiše se bilo koji trougao $A'B'C'$ da mu temena budu na $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ i da je $A'B' \perp AB$; $B'C' \perp AC$ i $A'C' \perp BC$.

3) Dva jednakostranična trougla su homotetična ako su im stranice paralelne. Dokazati.

4) Dokazati da su poligoni $ABCDE$ i $A_1B_1C_1D_1E_1$ homotetični sa centrom homotetije u tački $S$ (sl. 159').

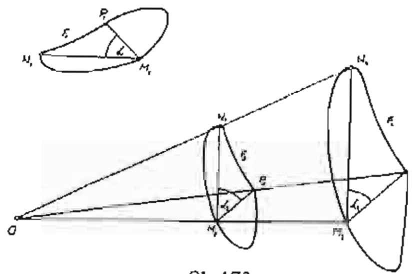


# SLIČNOST

## 1. OSOBINE SLIČNIH FIGURA

**Definicija 24.** Dve figure su slične ako postoji treća figura, koja je podudarna sa jednom od njih i homotetična sa drugom.

Neka su figure $F_1$ i $F_3$ podudarne (sl. 173), tj. mogu se nekim pomeranjem dovesti do poklapanja i neka su figure $F_3$ i $F_2$ homotetične sa centrom homotetije u tački $O$ i modulom homotetije $k$. Onda su figure $F_1$ i $F_2$ *slične* i moduo sličnosti im je $|k|$. Znak za sličnost je $\sim$.



Sl. 173

Kada se figure $F_1$ i $F_3$ dovedu do poklapanja, poklopiće se i tačka $M_1$ sa $M_3$, koja je homologna sa tačkom $M_2$ u homotetiji $(O, k)$. Zato su tačke $M_1$ i $M_2$ u sličnim figurama *homologne*. Duži $\overline{M_1N_1}$ i $\overline{M_2N_2}$, koje u sličnim figurama spajaju homologne tačke, su *homologne duži*. Uglovi koje obrazuju homologne duži su homologni.

**Teorema 37.** U sličnim figurama homologne duži su proporcionalne; homologni uglovi su jednaki.

Neka su u sličnim figurama $F_1$ i $F_2$ tačke $M_1$ i $M_2$; $N_1$ i $N_2$; $P_1$ i $P_2$ homologne, onda su duži $\overline{M_1N_1}$ i $\overline{M_2N_2}$ homologne. Isto tako homologne su i duži $\overline{M_1P_1}$ i $\overline{M_2P_2}$ (sl. 173).

Treba dokazati da su te duži proporcionalne, tj.:

$$\frac{\overline{M_2N_2}}{\overline{M_1N_1}} = \frac{\overline{M_2P_2}}{\overline{M_1P_1}}$$

Duži $\overline{M_3N_3}$ i $\overline{M_2N_2}$ su homotetične u homotetiji $(O, k)$, stoga je:

$$\overline{M_2N_2} = k\,\overline{M_3N_3} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Istom homotetijom se duž $\overline{M_3P_3}$ preslikava u $\overline{M_2P_2}$, prema tome:

$$\overline{M_2P_2} = k\,\overline{M_3P_3} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

Kako su u podudarnim figurama homologne duži jednake, to je:

$$\overline{M_3N_3} = \overline{M_1N_1} \qquad \text{i} \qquad \overline{M_3N_3} = \overline{M_1P_1}$$

Zamenom u (1) i (2) imamo:

$$\overline{M_2N_2} = k\,\overline{M_1N_1} \qquad \text{i} \qquad \overline{M_2P_2} = k\,\overline{M_1P_1}$$

što se može napisati u obliku:

$$\frac{\overline{M_2N_2}}{\overline{M_1N_1}} = k \qquad \text{i} \qquad \frac{\overline{M_2P_2}}{\overline{M_1P_1}} = k \qquad \text{ili}$$

$$\frac{\overline{M_2N_2}}{\overline{M_1N_1}} = \frac{\overline{M_2P_2}}{\overline{M_1P_1}}$$

Uglovi koje u figurama $F_1$ i $F_2$ obrazuju homologne duži su $\sphericalangle N_1M_1P_1 = \alpha_1$ i $\sphericalangle N_2M_2P_2 = \alpha_2$. Treba dokazati da su ti uglovi jednaki. Kako se homotetijom duž preslikava u duž koja je s njom paralelna, to je:

$$M_2N_2 \parallel M_3N_3 \qquad \text{i} \qquad M_2P_2 \parallel M_3P_3$$

pa je $\alpha_2 = \alpha_3$ kao uglovi sa paralelnim kracima. Pošto se pri poklapanju podudarnih figura $F_1$ i $F_3$ poklapaju i kraci uglova $\alpha_1 = \alpha_3$, znači:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_3 \\ \text{i, s obzirom da je} \quad \alpha_3 &= \alpha_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$$

Slične figure su, dakle, takve koje imaju isti oblik i zbog toga se mogu premeštanjem dovesti u takav uzajamni položaj da budu homotetične. Ako su slične figure i po veličini jednake, onda su one podudarne (kongurentne). Centar homotetije sličnih figura zove se i centar sličnosti, a moduo homotetije zove se često koeficijenat ili faktor sličnosti.

## 2. SLIČNOST TROUGLOVA

Osnovni elementi trouglova su uglovi: $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, i dužinski elementi, stranice $a$, $b$, $c$, (sl. 174).

Kod sličnih trouglova (prema teoremi 37) homologni uglovi su jednaki, a homologne stranice su proporcionalne. Homologne stranice su one koje su naspram jednakih uglova. Ako je trougao $ABC$ sličan trouglu $A_1B_1C_1$, moraju imati mesta šest jednakosti:

$$\alpha = \alpha_1 \quad \beta = \beta_1 \quad \gamma = \gamma_1 \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \quad \frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1} \quad \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$



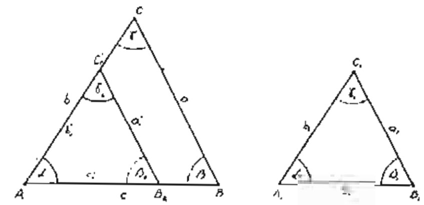
Lako je, međutim, dokazati da je dovoljno da su od tih šest uslova zadovoljena dva, pa da ti trouglovi budu slični, tj. da u tom slučaju moraju postojati i ostala četiri uslova.

**Teorema 38.** Dva trougla su slična ako imaju po dva jednaka ugla.

Neka trouglovi $A_1B_1C_1$ i $ABC$ (sl. 174) imaju po dva jednaka ugla.

$$\alpha_1 = \alpha \quad \text{i} \quad \beta_1 = \beta$$

Treba dokazati da su i $\gamma_1 = \gamma$ i da su stranice tih trouglova proporcionalne.



Sl. 174

Prenesemo trougao $A_1B_1C_1$ na trougao $ABC$ tako da im se temena $A$ i $A_1$ poklope. Usled jednakosti uglova $\alpha$ i $\alpha_1$, poklopiće se i njihovi kraci tako da stranica $\overline{A_1B_1}$ prelazi u $\overline{AB_2} = c_1$, stranica $\overline{A_1C_1}$ u $\overline{AC_2} = b_1$, a stranica $\overline{B_1C_1}$ u $\overline{B_2C_2} = a_1$. Uglovi $AB_2C_2 = \beta_1$ i $\sphericalangle ABC = \beta$ su saglasni i, kako su oni jednaki: $\beta_1 = \beta \Rightarrow B_2C_2 \parallel BC$. Ako je, pak, $B_2C_2 \parallel BC$ uglovi $\gamma$ i $\gamma_1$ su saglasni i zbog toga je $\gamma_1 = \gamma$. Osim toga, pošto su kraci ugla $CAB$ presečeni sa dve paralele onda, na osnovu Talesove teoreme, (T. 36) imamo:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}; \qquad \frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1}; \qquad \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Prema tome, trouglovi $A_1B_1C_1$ i $ABC$ su slični.

*Posledica 1.* Ako se u trouglu $ABC$ povuče prava paralelna bilo kojoj njegovoj stranici, dobija se novi trougao koji je sličan sa trouglom $ABC$

*Posledica 2.* Dva pravougla trougla su slični ako imaju po jedan oštar ugao jednak.

**Teorema 39.** Dva trougla su slična ako imaju po jedan ugao jednak i stranice koje obrazuju taj ugao proporcionalne.

Pr. $\alpha_1 = \alpha$; $\dfrac{b}{b_1} = \dfrac{c}{c_1}$ (sl. 174)

Tv. $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC \Rightarrow \beta = \beta_1;\ \gamma = \gamma_1;\ \dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = \dfrac{c}{c_1}$

Prenesemo $\triangle A_1B_1C_1$ na trougao $ABC$ (vidi T. 38) Iz:

$$\frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} \Rightarrow B_2C_2 \parallel BC \text{ (vidi T. 36)}$$

Ako je, pak, $B_2C_2 \parallel BC$, onda je:

$$\beta_1 = \beta \quad \text{i} \quad \gamma_1 = \gamma \quad \text{(saglasni uglovi) i}$$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}; \qquad \frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1} \quad \text{(T. 36)}$$

Prema tome, trouglovi $A_1B_1C_1$ i $ABC$ su slični.

*Posledica.* Dva pravougla trougla su slična ako su im katete proporcionalne.

VEŽBANJE

1) Dva trougla su slična ako su im dve stranice proporcionalne, a uglovi naspram većih stranica jednaki. Dokazati.
2) Dva trougla su slična ako su im sve stranice proporcionalne. Dokazati.
3) Dva trougla su slična ako su im stranice paralelne. Dokazati.
4) Ako su dva trougla slična, onda su im homologne visine, težišne linije, simetrale uglova proporcionalne sa odgovarajućim stranicama. Dokazati.

### 3. KONSTRUKCIJA TROUGLOVA PO METODI SLIČNIH FIGURA

Ova metoda kod konstrukcije trouglova može se primeniti onda kada uslov zadatka sadrži elemente pomoću kojih se može konstruisati trougao sličan sa traženim. Uzimajući u obzir ostale podatke, vrši se prelaz od konstruisanog trougla na traženi.

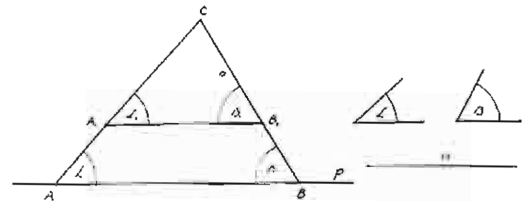
Primeri:

1) Konstruisati trougao ako su mu dati uglovi $\alpha$ i $\beta$ stranica $a$.

*Analiza.* Bilo koji trougao u kojem su zastupljeni uglovi $\alpha$ i $\beta$ sličan je sa traženim (T. 38). Ako se u trouglu $ABC$ povuče prava $A_1B_1 \parallel AB$, trougao $A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$. (posledica 1. T. 38) Ako je uz to $CB_1 = a$, onda je trougao $A_1B_1C$ traženi. (sl. 175).



*Konstrukcija.* Konstruiše se bilo koji trougao $ABC$ kod kojeg su $\sphericalangle CAB = \alpha$ i $\sphericalangle ABC = \beta$. Na stranicu $BC$ tog trougla koja je homologna sa datom stranicom prenesemo datu stranicu $\overline{B_1C} = a$. Kroz tačku $B_1$ povučemo $B_1A_1 \parallel AB$. Trougao $A_1B_1C_1$ je traženi.

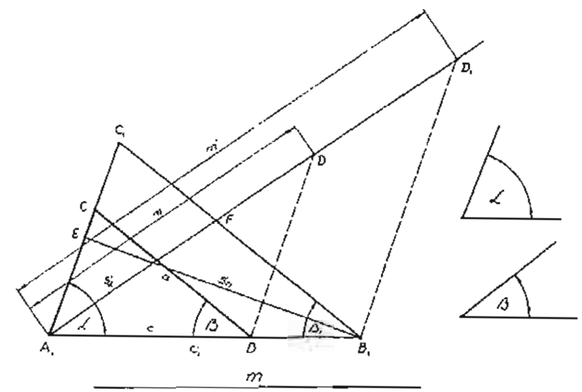


Sl. 175

*Dokaz.* U konstruisanom trouglu je $\overline{B_1C} = a$ i uglovi $\alpha_1 = \alpha$ i $\beta_1 = \beta$ (kao saglasni). Prema tome, trougao $A_1B_1C$ je traženi.

*Diskusija.* Zadatak ima jedno rešenje ako je $\alpha + \beta < 180°$.

2) Konstruisati trougao ako su mu dati uglovi $\alpha$ i $\beta$ i zbir simetrala tih uglova $s_\alpha + s_\beta = m$.



Sl. 176

*Analiza.* Pretpostavimo da je zadatak rešen: trougao $A_1BC$ je traženi (sl. 176). U trouglu $A_1B_1C_1$ ugao $C_1B_1A_1 = \alpha$ i $\sphericalangle A_1B_1C_1 = \beta$. To znači da je trougao $A_1BC \sim A_1B_1C_1$. Prema tome, homologni dužinski elementi tih trouglova su proporcionalni. Ako je $k$ faktor sličnosti, onda je:

$$\begin{array}{l} s'_\alpha = ks_\alpha \\ s'_\beta = ks_\beta \quad + \\ \hline s'_\alpha + s'_\beta = k(s_\alpha + s_\beta) \end{array}$$

Stavimo da je: $s'_\alpha + s'_\beta = m'$ imamo $m' = km$ ili $\frac{m'}{m} = k$

Kako je i $\frac{c_1}{c} = k$, možemo napisati proporciju:

$$\frac{c_1}{c} = \frac{m'}{m}$$

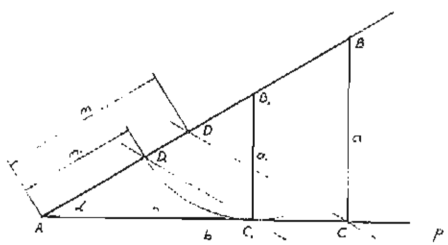
koja određuje $c = \overline{A_1B}$ kao četvrtu proporcionalu.

*Konstrukcija.* Uzmemo proizvoljnu duž $\overline{A_1B_1} = c_1$ i konstruišemo trougao $A_1B_1C_1$, tako da su u njemu dva ugla data $\alpha$ i $\beta$ (sl. 176). Konstruišemo duž $m'$ koja je homologna sa datom duži. Zato na simetralu ugla $\alpha$, $s'_\alpha$ nadovežemo $s'_\beta = \overline{BE}$. Tako dobijemo duž $\overline{A_1D_1} = m'$. Prenesemo na nju datu duž $\overline{A_1D} = m$. Prava $DB \parallel D_1B_1$ određuje tačku $B$, a time i stranicu $c = A_1B$ kao četvrtu proporcionalu poznatih duži. Prava $BC \parallel B_1C_1$ daje traženi trougao $A_1BC$.

*Dokaz* je obuhvaćen analizom.

*Diskusija.* Zadatak ima rešenje pod uslovom $\alpha + \beta < 2d$.

3) Konstruisati pravougli trougao ako mu je dat ugao $\alpha$ i razlika hipotenuze i katete $c - a = m$.



Sl. 177

*Analiza.* Pravougli trouglovi $AC_1B_1$ i $ABC$ su slični jer im je ugao $\alpha$ zajednički (sl. 177. Posledica 2. T. 38). Prema tome imamo proporciju:

$$\frac{b}{b_1} = \frac{m}{m_1}$$

kojom je određena kateta traženog trougla.

*Konstrukcija.* Na pravu $p$ nanesemo proizvoljnu duž $\overline{AC_1} = b_1$ i konstruišemo pravougli trougao $AC_1B_1$ u kojem je $\sphericalangle B_1AC_1 = \alpha$.

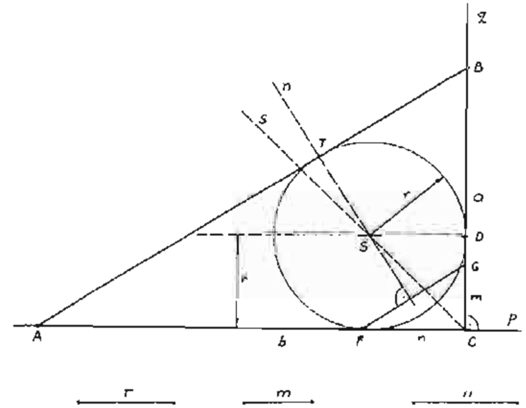


Odredimo u njemu duž $\overline{AD_1} = m_1$ koja je homologna sa datom. Nanesemo duž $\overline{AD} = m$ (sl. 177). Odredimo zatim katetu $\overline{AC} = b$ traženog trougla kao četvrtu proporcionalu poznatih duži.

*Dokaz.* (Vidi teoremu 36. i T. 38).

*Diskusija.* Zadatak ima rešenje ako je $\alpha < d$.

4) Konstruisati pravougli trougao ako mu je dat poluprečnik upisane kružnice $r$ i odnos kateta $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.




Sl. 178

*Analiza.* Pretpostavimo da je trougao $ABC$ traženi. U njega je upisana kružnica $(S, r)$ i njegove katete stoje u odnosu $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ (sl. 178). To je zaista tako ako je $AB \parallel FG$ (T. 36). Ako je $n \perp AB$, onda je $n \perp FG$.

*Konstrukcija.* Povučemo prvo dve prave $p \perp q$ koje se seku u tački $C$ (sl. 178) i nanesemo date duži $\overline{CG} = m$ i $\overline{CF} = n$ (ako su $m$ i $n$ brojevi, onda na pravu $q$ nanesemo $m$ nekih duži, a na $p$ $n$ istih duži). Trougao $FCG$ je sličan sa traženim (T. 39), prema tome $AB \parallel FG$. Odredimo zatim tačku $S$, središte kružnice $(S, r)$. Presekom simetrale pravog ugla $s$ i prave $l \parallel p$, koja prolazi kroz tačku $D$, $\overline{CD} = r$. Prava $n \perp FG$ koja prolazi kroz tačku $S$ seče kružnicu $(S, r)$ u tački $T$. Prava, koja prolazi kroz tačku $T$ i koja je paralelna sa $FG$, određuje na pravima $p$ i $q$ temena $A$ i $B$ traženog trougla.

*Dokaz.* Kako je trougao $ABC \sim \triangle FCG$ (T. 39), njegove katete stoje u odnosu $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$. Osim toga, u trouglu $ACF$ je upisana kružnica $(S, r)$. Prema tome, trougao $ACF$ je traženi.

*Diskusija.* Zadatak ima jedno rešenje za bilo koje vrednosti podataka.

## ZADACI

*Zad. 276.* Konstruisati trougao ako su mu dati uglovi $\beta$ i $\gamma$ i simetrala ugla $\alpha$, $s\alpha$.

*Zad. 277.* U trouglu su dati uglovi $\alpha$, $\beta$ i težišna linija $t_c$. Konstruisati trougao.

*Zad. 278.* U trouglu su dati uglovi $\alpha$, $\beta$ i visina $h_c$. Konstruisati trougao.

*Zad. 279.* Konstruisati trougao ako mu je dat ugao $\gamma$, odnos stranica $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ i poluprečnik upisane kružnice $r$.

*Zad. 280.* Konstruisati trougao ako su mu dati uglovi $\alpha$ i $\beta$ i
1) Zbir težišnih linija $t_a + t_b = m$,
2) Zbir visina $h_a + h_b = m$.

*Zad. 281.* Konstruisati pravougli trougao ako mu je dat ugao $\alpha$ i zbir katete i hipotenuze $a + c = m$.

*Zad. 282.* Konstruisati pravougli trogao ako mu je dat ugao $\beta$ i razlika kateta $a - b = m$.

*Zad. 283.* Konstruisati jednakostranični trougao ako mu je dat zbir stranice i visine $a + h = m$.

## 4. PRIMENA SLIČNOSTI KOD PRAVOUGLOG TROUGLA

### 1. Euklidov stav

**Teorema 40.**

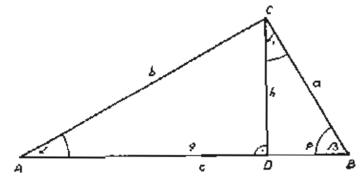
1) Kateta pravouglog trougla je geometrijska sredina hipotenuze i svoje projekcije na hipotenuzu.

2) Visina pravouglog trougla je geometriska sredina projekcija kateta na hipotenuzu.



*Napomena.* Kada se u planimetriji upotrebljava termin „projekcija'' obično se misli na „ortogonalnu projekciju''. Pod visinom pravouglog trougla se obično takođe podrazumeva visina povučena iz temena pravog ugla na hipotenuzu, jer su ostale dve visine katete trougla.

Kako je visina $\overline{CD} = h$ normalna na hipotenuzu $\overline{AB} = c$ pravouglog trougla $ABC$ (sl. 179), duž $\overline{DB} = p$ je ortogonalna (normalna) projekcija katete $\overline{BC} = a$ na hipotenuzu. Duž $\overline{AD} = q$ je projekcija katete $\overline{AC} = b$ na hipotenuzu.




Sl. 179

1) Treba dokazati da je $a = \sqrt{cp}$ $(X, 4)$. Prvo treba dokazati da su trouglovi $CDB$ i $ABC$ slični. Oba su pravougli i imaju zajednički oštar ugao $\sphericalangle ABC = \beta$. To znači da su mu homologne stranice proporcionalne:

$$\frac{a}{p} = \frac{c}{a} \Rightarrow a^2 = cp \Rightarrow a = \sqrt{cp} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Isto tako, na prvi pogled se vidi da je $\triangle ADC \sim \triangle ABC$. Oba su pravougla i imaju zajednički ugao $\alpha$ (posledica 2. T. 38). Prema tome:

$$\frac{b}{q} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = cq \Rightarrow b = \sqrt{cq} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

2) Ovde treba dokazati da je $h = \sqrt{pq}$. Treba prvo dokazati da su trouglovi u kojima je $h$ zajednička kateta, tj. trougao $ADC$ i $\triangle CDB$ slični. Prvo — oba su pravougli. Osim toga, uglovi $\alpha$ i $\alpha_1$ su uglovi sa normalnim kracima ($AC \perp CB$ i $AD \perp CD$) i stoga su jednaki $\alpha_1 = \alpha$.

Iz sličnosti tih trouglova sledi:

$$\frac{h}{q} = \frac{p}{h} \Rightarrow h^2 = qp \Rightarrow h = \sqrt{qp}$$

## 2. **Pitagorina teorema**

**Teorema 41.** Zbir kvadrata kateta jednak je kvadratu hipotenuze.

Sabiranjem jednakosti (1) i (2) dobijamo:

$$\begin{array}{c} a^2 = cp \\ b^2 = cq \\ \hline a^2 + b^2 = c(p+q) \end{array}$$

Iz sl. 179. vidi se da je $p + q = c$, pa je prema tome $a^2 + b^2 = c^2$.

Mnogi računski zadaci, kao i mnoge geometrijske konstrukcije, rešavaju se primenom Euklidovog stava i Pitagorine teoreme.

Između šest veličina $a, b, c, p, q, h$, u pravouglom trouglu postoje četiri nezavisne jednakosti:

$$a^2 = cp \quad b^2 = cq \quad h^2 = qp \quad p + q = c.$$

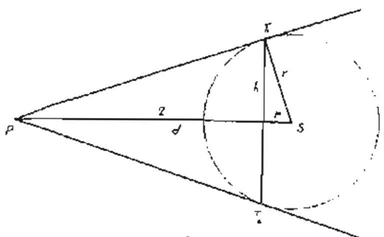
To znači da, pomoću dve bilo koje veličine od tih šest, mogu se izračunati ostale četiri.

P r i m e r :

1) U pravouglom trouglu je dato $p = 16$ cm i $q = 9$ cm. Izračunati stranice trougla.

$$\begin{array}{lll} c = p + q & c = 25 \text{ cm} & \\ a^2 = cp & a = \sqrt{25 \cdot 16} & a = 20 \text{ cm} \\ b^2 = cq & b = \sqrt{25 \cdot 9} & b = 15 \text{ cm} \\ h^2 = pq & h = \sqrt{16 \cdot 9} & h = 9 \text{ cm} \end{array}$$

2) Iz tačke koja je na rastojanju $d = 25$ cm od središta kružnice poluprečnika $r = 15$ cm povučene su na kružnicu tangente. Izračunati dužinu tetive koja spaja dodirne tačke tih tangenta.



Sl. 180

$\overline{T_1T_2} = t \quad t = 2h$ (sl. 180)

$h = \sqrt{pq} \quad r^2 = dp$

$p = \dfrac{r^2}{d} \quad p = \dfrac{225}{25}$

$p = 9$ cm $\quad q = d - p = 16$ cm

$h = \sqrt{16 \cdot 9} = 12$ cm

$t = 24$ cm



## Z A D A C I

*Zad. 284.* Stranice trougla su $a = 15$ cm, $b = 12$ cm, $c = 18$ cm. Izračunati stranice trougla koji je sličan sa datim, ako je najmanja stranica traženog trougla 28 cm.

*Zad. 285.* Osnovica jednakokrakog trougla je $a = 24$ cm. Krak mu je $b = 20$ cm. Izračunati stranicu trougla koji je sličan sa datim ako je visina povučena na osnovicu kod traženog trougla $h = 52$ cm.

*Zad. 286.* Data je stranica trougla $c = 30$ cm. Visina mu je $h_c = 20$ cm. Izračunati stranicu kvadrata ispisanog u taj trougao tako da su mu dva temena na stranici $c$, a ostala dva na stranicama $a$ i $b$.

*Zad. 287.* Data je stranica trougla $c = 18$ cm. Visina mu je $h_c = 15$ cm. Na kojem rastojanju od temena $C$ treba povući pravu paralelnu datoj stranici da njen odsečak između stranica trougla bude 12 cm?

*Zad. 288.* *Najmanja težišna linija trougla $A_1B_1C_1$ je $t'_c = 57$ cm. Izračunati stranice trougla ako je on sličan sa trouglom $ABC$ čije su stranice $a = 22$ cm, $b = 24$ cm i $c = 26$ cm.

*Zad. 289.* Drvo visoko 12 m baca senku dužine 21 m. Koliko je visok toranj ako je njegova senka u istom trenutku 35 m.

*Zad. 290.* Letva visoka 3 m udaljena je od podnožja tornja 74 m. Njen vrh i vrh tornja vide se na istoj pravoj iz tačke, koja je 1 m iznad zemlje i udaljena od letve 4 m. Izračunati visinu tornja.

*Zad. 291.* Posmatrač sa balkona jedne zgrade vidi vrh spomenika visokog 8 m i udaljenog od te zgrade 50 m na istoj pravoj sa podnožjem stuba koji je udaljen od spomenika 25 m. Na kojoj visini se nalazi posmatrač?

*Zad. 292.* Posmratač, udaljen od obale reke 15 m, vidi dva drveta koja se nalaze na njenoj obali i koja su međusobno udaljena 3 m, na istim pravima sa dva stuba na suprotnoj obali, a koji su udaljeni jedan od drugog 20 m. Kolika je širina reke?

*Zad. 293.* Od šest elemenata pravouglog trougla: $a, b, c, p, q, h$, data su dva; izračunati ostala četiri:

1) $a = 45$ cm $\quad p = 27$ cm
2) $b = 40$ cm $\quad h = 24$ cm
3) $p = 18$ cm $\quad q = 32$ cm

*Zad. 294.** Projekcija jedne katete na hipotenuzu za 7 cm je veća od projekcije druge katete. Izračunati stranice trougla ako mu je visina $h = 12$ cm.

*Zad. 295.* Data je hipotenuza pravouglog trougla $c = 75$ cm. Projekcija njegovih kateta na hipotenuzu stoje u odnosu kao 9 : 16. Izračunati katete i visinu trougla.

## 5. PRIMENA EUKLIDOVOG STAVA I PITAGORINE TEOREME NA GEOMETRIJSKE KONSTRUKCIJE

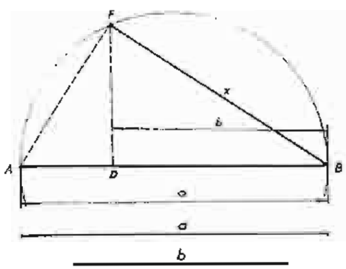
1) Konstruisati geometrijsku sredinu datih duži $a$ i $b$. Ovaj se zadatak, primenom Euklidovog stava, može rešiti na dva načina (vidi T. 40 1. i 2. deo).

*I način*:

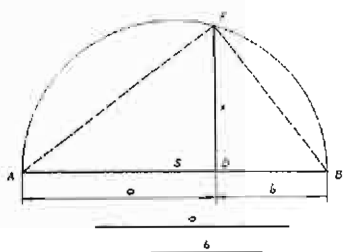
Konstruišemo pravougli trougao $ABF$ (sl. 181) tako da mu hipotenuza bude data duž $a$ i da je $\overline{DB} = b$ (gmt 6). Onda je kateta $x = \sqrt{ab}$ (T. 40. 1).

*II način*:

Nad duži $\overline{AB} = a + b$ kao prečnikom opišemo polukrug (gmt 6). Normalom $\overline{DF}$ određena je duž $x = \sqrt{ab}$ (T. 40. 2).




Sl. 181



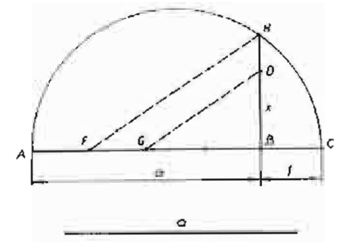

Sl. 182

Na isti način može se konstruisati kvadratni koren iz bilo koje duži, odnosno iz bilo kojeg broja. Treba, u tom slučaju, umesto jedne od dve duži, uzeti jediničnu duž, na primer: ako se uzme $b = 1$, onda je duž $x = \sqrt{a}$ (sl. 181 ili 182).



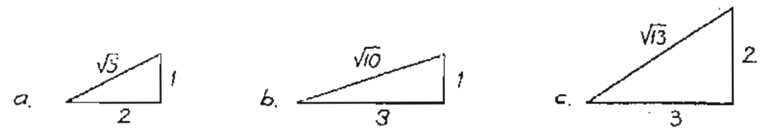
2) Data je duž $a$. Konstruisati duž $x = \frac{2\sqrt{a}}{3}$.

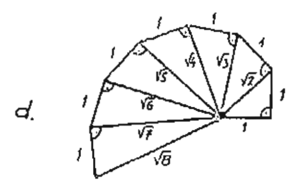
Nad duži $\overline{AC} = a + 1$ konstruiše se polukrug. Duž $\overline{BH} = \sqrt{a}$ (sl. 183)
$\overline{BD} = x = \frac{2\sqrt{a}}{3}$.




Sl. 183

3) Kvadratni koren iz bilo kojeg broja može se konstruisati i primenom Pitagorine teoreme: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$



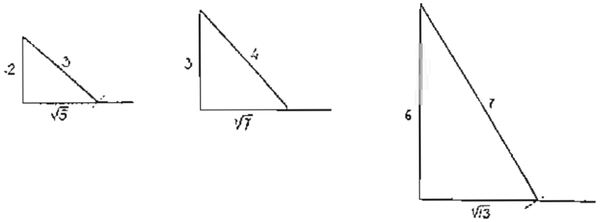

Sl. 184

Na sl. 184. pokazano je kako se može konstruisati kvadratni koren iz broja koji se može predstaviti kao zbir kvadrata nekih brojeva.

Primenom Pitagorine teoreme lako je konstruisati i kvadratni koren iz broja koji se može predstaviti i kao razlika kvadrata dva broja:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Tako da bi se, na primer $\sqrt{5}$ ili $\sqrt{13}$, mogao konstruisati i na drugi način (slika 185).




Sl. 185

4) Konstruisati duž $x = \dfrac{a^2 + b^2}{c}$ ako su duži $a$, $b$, $c$, date.

Stavimo $a^2 + b^2 = z^2$

$$x = \frac{z^2}{c} \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{z}{c}$$

Prvo se konstruiše duž $z$, kao hipotenuza pravouglog trougla (i kojem su katete $a$ i $b$), a zatim $x$ kao treća proporcionala duži $z$ i $c$.

5) Konstruisati kvadrat čija je površina jednaka zbiru površina tri data kvadrata.

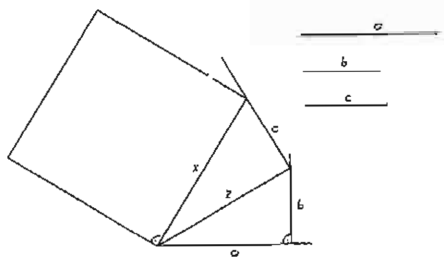
Neka su stranice datih kvadrata $a$, $b$, $c$, a stranica traženog kvadrata neka je $x$.

Onda je $x^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ili $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Ako stavimo:

$$a^2 + b^2 = z^2$$

onda je $x = \sqrt{z^2 + c^2}$ (sl. 186).




Sl. 186



# TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

## 1. DEFINICIJA TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA NA PRAVOUGLOM TROUGLU

Ako u pravouglom trouglu $ACB$ (sl. 187) povučemo prave koje su paralelne sa katetom $BC$, dobićemo nove trouglove $AC_1B_1$, $AC_2B_2$, $AC_3B_3$. Ti trouglovi su slični, tj. $\triangle AC_3B_3 \sim \triangle AC_2B_2 \sim \triangle AC_1B_1 \sim \triangle ACB$. (Posledica 1, T. 38).

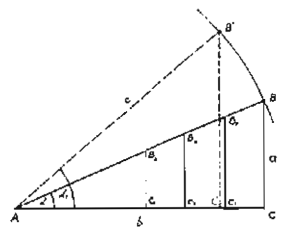
Ako su trouglovi slični, to znači da su im odgovarajuće stranice proporcionalne:

$$\frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AB_3}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}}\ \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = k$$

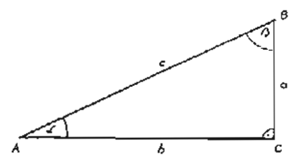
Ako se ugao trougla $BAC = \alpha$ promeni (poveća), tako da je $\sphericalangle B'AC' = \alpha_1$, promeniće se i odnos suprotne katete $(\overline{B'C'})$ prema hipotenuzi $\overline{AB'}$

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}} = k'$$

Videli smo da vrednost tog odnosa zavisi od ugla trougla, tj. odnos njegovih stranica je funkcija ugla.




Sl. 187




Sl. 188

Funkcije u kojima je argument ugao, zovu se *goniometrijske* ili *trigonometrijske* funkcije (od grčke reči trigonom — trougao).

Vrednost odnosa katete pravouglog trougla prema njegovoj hipotenuzi zove se sinus ugla koji je nasuprot te katete.

To se piše ovako:

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha \text{ ili } \frac{b}{c} = \sin\beta \quad \text{(sl. 188)}$$

Iz ovog zaključujemo:

1) Sinus je apstraktan (neimenovani) broj — jer je moduo razmera dve duži.

2) Sinus oštrog ugla je broj manji od 1 — jer je kateta pravouglog trougla manja od hipotenuze.

Ako je $\qquad 0° < \alpha < 90° \qquad 0 < \sin\alpha < 1.$

Odnos nalegle katete pravouglog trougla prema hipotenuzi isto je funkcija ugla trougla. Ta funkcija se zove kosinus i piše se:

$$\frac{b}{c} = \cos\alpha \text{ ili } \frac{a}{c} = \cos\beta \quad \text{(sl. 188).}$$

Ako se u pravouglom trouglu menja ugao $\alpha$ (a time i $\beta$), menja se i odnos njegovih kateta. Znači: odnos kateta isto tako je funkcija ugla trougla.

Odnos suprotne katete prema nalegloj je tangens odgovarajućeg ugla

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha \quad \text{ili} \quad \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\beta \quad \text{(sl. 188).}$$

Odnos nalegle katete prema suprotnoj — zove se kotangens odgovarajućeg ugla

$$\frac{a}{b} = \operatorname{ctg}\beta \qquad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha \qquad \text{(sl. 188).}$$

## 2. PROMENE TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA KAD SE UGAO MENJAO OD 0°—90°

Videli smo da vrednost trigonometrijskih funkcija zavisi od ugla i da se može izraziti odnosom stranica pravouglog trougla. Proučićemo sada kako se menja svaka od njih kada se argument menja od 0°—90°.

1) *Promena sinusa*

Sinus oštrog ugla u pravouglom trouglu je odnos *suprotne* katete prema hipotenuzi

$$\sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \qquad \text{(sl. 189).}$$



Uzmimo da se ugao $\alpha$ menja, a da hipotenuza trougla zadržava stalnu vrednost:

$$\overline{AB} = \overline{AB_1} = \overline{AB_2} = \overline{AB_3} = c$$

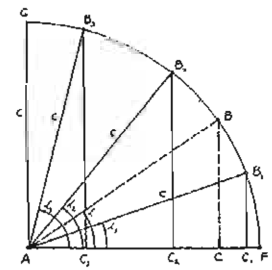
Onda imamo

$$\operatorname{Sin}\alpha_1 = \frac{\overline{B_1C_1}}{c} \qquad \operatorname{Sin}\alpha_2 = \frac{\overline{B_2C_2}}{c} \qquad \operatorname{Sin}\alpha_3 = \frac{\overline{B_3C_3}}{c}.$$

Kako je $\overline{B_1C_1} < \overline{B_2C_2} < \overline{B_3C_3}$, znači $\operatorname{Sin}\alpha_1 < \operatorname{Sin}\alpha_2 < \operatorname{Sin}\alpha_3$.

Prema tome, ako ugao $\alpha$ raste, raste i njegov sinus, Kada se ugao približava 90°, njegov se sinus približava vrednosti 1, jer za $\alpha = 90°$. Tačka $B$ se poklapa sa tačkom $G$ (sl. 189) i, kako je $\overline{BG} = c$,

$$\operatorname{Sin} 90° = \frac{c}{c} = 1.$$



Sl. 189

Ako se, pak, ugao $\alpha$ smanjuje, smanjuje se i njegov sinus. Tačka $B$ se približava tački $F$ (sl. 189) i, za $\alpha = 0°$, one će se poklopiti, tako da je u tom slučaju $\overline{BC} = 0$, prema tome, $\sin 0° = \frac{0}{c} = 0.$

Zato kažemo: kada ugao *raste* od 0° do 90°, njegov sinus *raste* od 0 do 1.

2) *Promena kosinusa*

Kosinus oštrog ugla u pravouglom trouglu je odnos *nalegle* katete prema hipotenuzi

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \qquad \text{(sl. 189).}$$

Ako ugao $\alpha$ raste, kateta $\overline{AC}$ se smanjuje: $\overline{AC_1} > \overline{AC_2} > \overline{AC_3}$ i, kako je, $\overline{AB_1} = \overline{AB_2} = \overline{AB_3} = \overline{AB} = c \quad \operatorname{Cos}\alpha_1 > \operatorname{Cos}\alpha_2 > \operatorname{Cos}\alpha_3$.

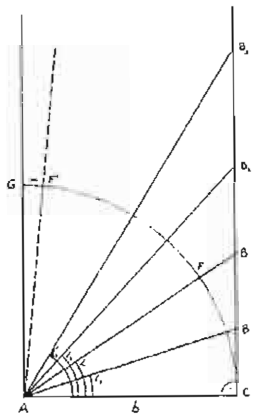
Kada je ugao $\alpha = 0°$, onda je $\overline{AC} = \overline{AF} = \overline{AB} = c$. Prema tome, $\operatorname{Cos} 0° = \frac{c}{c} = 1$. Za $\alpha = 90°$, kada se tačke $B$ i $G$ poklapaju, $\overline{AC} = 0$ i stoga je

$$\operatorname{Cos} 90° = \frac{0}{c} = 0$$

Zato se može reći: kada ugao *raste* od 0° do 90°, njegov kosinus opada od 1 do 0.

3) *Promena tangensa*

Tangens oštrog ugla u pravouglom trouglu je odnos suprotne katete prema nalegloj $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{BC}}{b}$ (sl. 190). Neka nalegla kateta ima stalnu dužinu $\overline{AC} = b$. Kateta $\overline{BC}$, pak, (prema tome i vrednost tangensa) zavisi od ugla $\alpha$. Iz slike 190. vidi se



Sl. 190

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \qquad \overline{B_1C} < \overline{B_2C} < \overline{B_3C},$$

prema tome,

$$\operatorname{tg}\alpha_1 < \operatorname{tg}\alpha_2 < \operatorname{tg}\alpha_3.$$

Za $\alpha = 0°$ tačka $B$ prelazi u $C$ tako da je $\overline{BC} = 0$, pa, prema tome, $\operatorname{tg} 0° = 0$.

Ako ugao raste, raste i tangens $\alpha$. Prava $AF'$ seče pravu $BC$ sve dok je $\alpha = \sphericalangle F'AC < 90°$. Ako je, pak, $\alpha = 90°$, onda tačka $F'$ prelazi u tačku $G$ i, pošto su prave $AG$ i $BC$ paralelne, ne postoji tačka $(B)$ u kojoj se one seku. Zato kažemo da za ugao od 90° tangens *nije definisan*.

4) *Promena kotangensa*

Kotangens oštrog ugla u pravouglom trouglu je odnos njegove nalegle katete prema suprotnoj.

Iz slike 188. vidimo da je

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

Drugim rečima: vrednosti kotangensa i tangensa istog ugla su recipročne, tj.

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \implies \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1).$$

To znači: kada ugao $\alpha$ raste, njegov kotangens opada i, obrnuto — kada ugao $\alpha$ opada, kotangens raste.

Iz (1) se vidi da, kada je $\alpha = 0°$, kotangens nije definisan, a za $\alpha = 90°$

$$\operatorname{Ctg} 90° \quad 0..$$

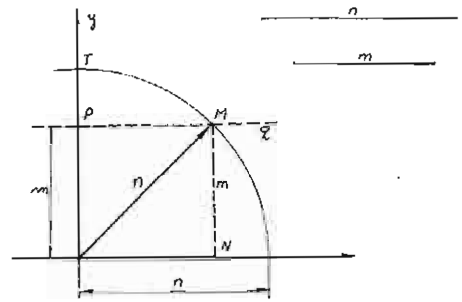


## 3. KONSTRUKCIJA UGLA KADA JE DATA VREDNOST TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

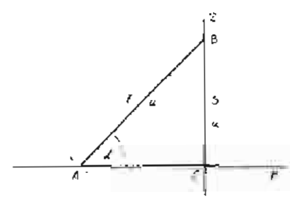
1) Konstruisati ugao $0° < \alpha < 90°$ ako je $\sin\alpha = \frac{m}{n}$.

Povučemo dva uzajamno normalna zraka $Ox$ i $Oy$ (sl. 191) i opišemo kružni luk $(O, n)$. Prenesimo na $Oy$ $OP = m$ i, kroz tačku $P$, povučemo pravu $q \parallel Ox$ koja seče kružni luk u tački $M$. Ugao $MON = \alpha$ je traženi. Zaista, u pravouglom trouglu $ONM$ $\operatorname{Sin}\alpha = \frac{\overline{MN}}{\overline{OM}}$.

Kako je $\overline{MN} = \overline{OP} = m$, a $\overline{OM} = n$, $\sin\alpha = \frac{m}{n}$.



Sl. 191



Sl. 192

Iz slike 191. vidi se da zadatak ima rešenje ako prava $q$ seče kružni luk $(O, n)$ ,tj. ako je $m$ manje od $n$, tj. ako je $\sin\alpha < 1$. Ako je, pak, $m = n$, tačka $M$ se poklapa sa $T$ i ugao $\alpha = 90°$.

Ovaj zadatak bi se mogao rešiti i drukčije. Da se konstruiše pravougli trougao u kojem je kateta nasuprot traženog ugla $m$, a hipotenuza $n$. Uzmimo da su $m$ i $n$ dati brojevi. Na primer $m = 5$, $n = 7$

$$\sin\alpha = \frac{5}{7}$$

Na pravu $p$ podignemo normalu $q$ u proizvoljnoj tački $C$ (sl. 192). Uzmimo proizvoljnu duž $u$ i nanesemo je 5 puta na konstruisanu normalu $q$, $\overline{BC} = 5u$. Kružnim lukom $(B, 7u)$ odredimo na pravoj $p$ tačku $A$. Ugao $BAC = \alpha$ je traženi.

*Dokaz:*

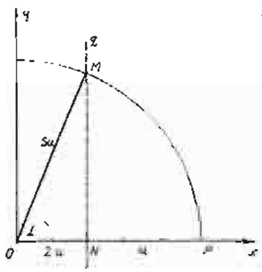
$$\text{Sin } \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{5\,u}{7\,u} \qquad \text{Sin } \alpha = \frac{5}{7}.$$

2) Konstruisati ugao $\alpha$ ako je $\cos \alpha = \frac{2}{5}$.

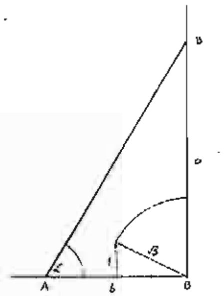
Konstrukcija se izvodi kao i na sl. 191, ali ovde je $\text{Cos } \alpha = \frac{\overline{ON}}{\overline{OM}}$.

Zato treba na $Ox$ naneti $\overline{ON} = 2u$ i $q$ paralelno $Oy$. (sl. 193).

$$\text{Cos } \alpha = \frac{2\,u}{5\,u} = \frac{2}{5}.$$



Sl. 193



Sl. 194

Stranice pravouglog trougla mogu biti nesamerljive duži; onda su njihove razmere, tj. vrednosti trigonometrijskih funkcija izražene iracionalnim brojevima.

3) Konstruisati ugao $\alpha$ ako je

$$\text{tg } \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{4}$$

Ugao $\alpha$ je ugao u pravouglom trouglu u kojem je suprotna kateta $a = 3\sqrt{5}$, a nalegla kateta $b = 4$. Kao jedinica dužine može se uzeti proizvoljna duž. Konstruišemo prvo duž $\sqrt{5}$ (vidi sl. 184), a zatim pravougli trougao $ACB$ (sl. 194) u kojem su katete $\overline{AC}=4$ i $\overline{BC}=3\sqrt{5}$.

$$\text{tg } \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$$

Prema tome, konstruisani ugao $\alpha$ je traženi.

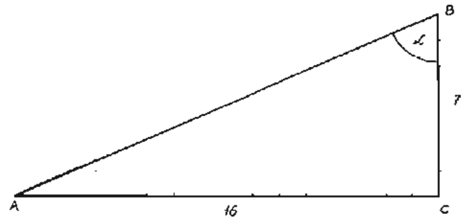


4) Konstruisati ugao ako je dat ctg $\alpha = 0{,}4375$.

Pošto je $\qquad 0{,}4375 = \frac{4375}{10000}$

ili, posle skraćivanja sa 625, možemo napisati

$$\text{ctg } \alpha = \frac{7}{16}.$$




Sl. 195

Da bi konstruisali ugao, dovoljno je konstruisati pravougli trougao u kojem su katete $\overline{AC} = 16$ i $\overline{BC} = 7$ nekih dužnih jedinica (sl. 195). U tom trouglu $\sphericalangle ABC = \alpha$

## VEŽBANJA

1) Izračunati u pravouglom trouglu sin $\alpha$ ako su mu katete $a = 9$ cm i $b = 40$ cm..

$$\left(\text{Rez. Sin } \alpha = \frac{9}{41}\right).$$

2) Katete pravouglog trougla su $a = 12$ cm i $b = 35$ cm. Izračunati Sin i Cos njegovih uglova $\alpha$ i $\beta$.

$$\left(\text{Rez. Sin } \alpha = \frac{12}{37},\ \text{Cos } \alpha = \frac{35}{37},\ \text{Sin } \beta = \frac{35}{37},\ \text{Cos } \beta = \frac{12}{37}\right).$$

3) U pravouglom trouglu data je kateta $a = 36$ cm i hipotenuza $c = 85$ cm. Izračunati tg i ctg njegovih uglova $\alpha$ i $\beta$.

4) Konstruisati ugao $\alpha$ ako je Sin $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

5) Konstruisati ugao $\alpha$ ako je $\text{Cos}\,\alpha = \frac{\sqrt{13}}{7}$.

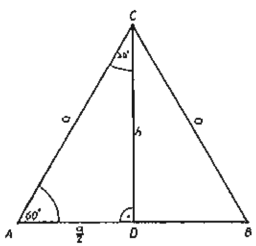
6) Dato je $\text{tg}\,\alpha = 0{,}375$. Konstruisati ugao $\alpha$.

7) Konstruisati ugao $\alpha$ ako je $\text{Ctg}\,\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

8) Oštri uglovi pravouglog trougla su $\alpha$ i $\beta$. Konstruisati ugao $\beta$ ako je $\text{Sin}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

### 4. TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE UGLOVA OD 30°, 45°, 60°

Visina jednakostraničnog trougla $ABC$ (sl. 196) polovi ugao $ACB$ tako da je $\sphericalangle ACD = 30°$. Podnožje visine, tačka $D$ polovi stranicu $\overline{AB}$, tako da je $\overline{AD} = \frac{1}{2}a$. U pravouglom trouglu $ADC$ hipotenuza je $\overline{AC} = a$ i katete $\overline{AD} = a/2$ i $DC = h$. Lako je izraziti $h$ pomoću $a$ primenom Pitagorine teoreme.



Sl. 196

$$\overline{CD} = h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a$$

Iz pravouglog trougla $ADC$ imamo:

$$\sin 30° = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} \Rightarrow \sin 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} \Rightarrow \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\text{tg}\,30° = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ili} \quad \text{tg}\,30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

*Napomena*: $(\sqrt{3})^2 = 3$; $\quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\text{cotg}\,30° = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} \Rightarrow \text{cotg}\,30° = \sqrt{3}$$

Pomoću istog trougla $ADC$ (sl. 196) mogu se izračunati i vrednosti trigonometrijskih funkcija ugla od 60°.

$$\sin 60° = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} \Rightarrow \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} \Rightarrow \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\,60° = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} \Rightarrow \text{tg}\,60° = \sqrt{3}$$

$$\text{cotg}\,60° = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ili} \quad \text{cotg}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Kod jednakokrakog pravouglog trougla uglovi na hipotenuzi su po 45°. Neka su katete trougla $ACB$ (sl. 197) $\overline{AC} = \overline{BC} = a$, hipotenuza mu je onda $\overline{AB} = a\sqrt{2}$.

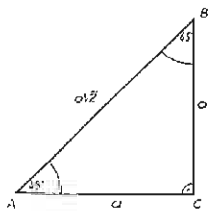
$$\sin 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{a}{a} = 1, \qquad \text{cotg } 45° = \frac{a}{a} = 1$$

Tablica vrednosnih trig. funkcija od 30°, 45° i 60°.

| | 30° | 45° | 60° |
|---|---|---|---|
| sin | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| cos | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| tg | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
| cotg | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |



Sl. 197

Pada u oči da je $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Isto tg 60° i cotg 30° imaju istu vrednost. To, svakako, nije slučajnost. Objašnjenje leži u tome što su oštri uglovi u pravouglom trouglu komplementni.

$$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \beta = 90° - \alpha$$

Iz slike 188. vidi se da je:

$$\sin \beta = \frac{b}{c} \qquad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Prema tome, $\sin \beta = \cos \alpha$, a, kako je $\beta = 90° - \alpha$, $\sin (90° - \alpha) = \cos \alpha$ i $\sin 60° = \sin (90° - 30°) = \cos 30°$.



Lako je zaključiti da je:

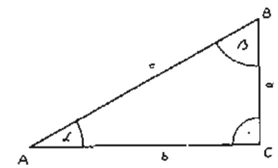
$$\cos (90° - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\text{tg } (90° - \alpha) = \text{cotg } \alpha$$

$$\text{cotg } (90° - \alpha) = \text{tg } \alpha$$

## 5. REŠENJE PRAVOUGLOG TROUGLA

Za trougao kažemo da je rešen ako su poznate sve tri njegove stranice, tri ugla i površina. Videli smo (prilikom rešavanja konstruktivnih zadataka) da je trougao određen sa tri nezavisna podatka. Kod pravouglog trougla dovoljna su dva podatka, jer je jedan poznat (pravi ugao). Od ta dva podatka jedan mora biti dužinski. Osnovni elementi trougla su stranice i uglovi. Odnos između stranica i uglova pravouglog trougla na osnovu definicije trigonometrijskih funkcija (1), kojima se služimo pri rešavanju pravouglog trougla su sledeći:



Sl. 198

1) $\frac{a}{c} = \sin \alpha \Rightarrow a = c \cdot \sin \alpha$ ili $c = \frac{a}{\sin \alpha}$ (sl. 198)

2) $\frac{b}{c} = \cos \alpha \Rightarrow b = c \cdot \cos \alpha$ ili $c = \frac{b}{\cos \alpha}$

3) $\frac{a}{b} = \text{tg } \alpha \Rightarrow a = b \cdot \text{tg } \alpha$ ili $b = \frac{a}{\text{tg } \alpha}$

4) $\frac{b}{a} = \text{cotg } \alpha \Rightarrow b = a \cdot \text{cotg } \alpha$ ili $a = \frac{b}{\text{cotg } \alpha}$

5) $\frac{b}{c} = \sin \beta \Rightarrow b = c \cdot \sin \beta$ ili $c = \frac{b}{\sin \beta}$

6) $\frac{a}{c} = \cos \beta \Rightarrow a = c \cdot \cos \beta$ ili $c = \frac{a}{\cos \beta}$

7) $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\beta \Rightarrow b = a \cdot \operatorname{tg}\beta$ ili $a = \frac{b}{\operatorname{tg}\beta}$

8) $\frac{a}{b} = 1\operatorname{cotg}\beta \Rightarrow a = b \cdot \operatorname{cotg}\beta$ ili $b = \frac{a}{\operatorname{cotg}\beta}$

Ako su podaci osnovni elementi, onda mogu biti dva slučaja.

1) Data je stranica i ugao. U tom slučaju možemo izračunati drugi ugao na osnovu jednakosti $\alpha + \beta = 90°$, a, zatim, izračunati ostale stranice pomoću odgovarajućih odnosa.

2) Date su dve stranice. Ako su date stranice izražene brojevima sa malim brojem cifri, možemo prvo, primenom Pitagorine teoreme, izračunati treću stranicu. Ako, pak, to nije slučaj — pomoću odnosa datih stranica nađemo prvo odgovarajući ugao i, time, je zadatak sveden na prethodni slučaj.

Primeri:

1) U pravouglom trouglu data je hipotenuza $c = 50$ cm i ugao $\alpha = 25°41°$ Rešiti trougao.

Izračunamo prvo ugao $\beta = 90° - \alpha$

$\beta = 64°19'$ $\qquad a = c \cdot \sin\alpha$

Postoje tablice u kojim nalazimo vrednosti trigonometrijskih funkcija za bilo koji ugao. Ovde su uzete „logaritamske i numeričke tablice" od V. V. Miškovića.

U tablici III na strani 134, u koloni sin nalazimo vrednost sinusa datog ugla

$\sin 25°41' = 0{,}43340$

kateta $a = 50 \cdot 0{,}43340$

$a = 21{,}67$ cm.

Katetu $b$ možemo izračunati na dva načina:

ili $b = c \cdot \sin\beta$, ili $b = c \cdot \cos\alpha$.

Ovde treba napomenuti da je kod sastavljanja tablice uzeto u obzir da je

$$\sin\beta = \cos\alpha,$$

jer je $\qquad \sin\beta = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha.$



Ako, dakle, tražimo vrednost trigonometrijske funkcije ugla većeg od 45°, onda stepene ugla gledamo dole 64°, a minute sa desne strane. Kolone u kojoj su vrednosti sinusa su onda sa desne strane.

$$\text{Sin } 64°19' = 0{,}90120$$

Kada bismo tražili kosinus 25°41', dobili bismo isti broj, jer, gledajući odozgo 25°, kolona u kojoj su vrednosti kosinusa je sa desne strane, a minute onda gledamo sa leve strane. U svakim tablicama postoji uputstvo za njihovu upotrebu pa to uputstvo treba pročitati pre upotrebe tablica. Ovde je izneseno samo ono što je kod svih tablica zajedničko.

$$b = 50 \cdot 0{,}90120$$

$$b = 45{,}06 \text{ cm}$$

$$P = \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow P = 488{,}2251 \text{ cm}^2$$

U zadatku može biti postavljen zahtev da se rezultat zaokruži na određen broj decimala, na pr., na dve. U tom slučaju, ako je treća decimala manja od 5, zadrže se dve decimale, a ostale se jednostavno odbace. Na primer: $3{,}27359 \approx 3{,}27$. Znak $\approx$ čita se „približno-jednako". Ako je, pak, treća decimala 5 ili broj veći od 5, druga se decimala poveća za 1. Na primer: $2{,}345731 \approx 2{,}35$ ili $1{,}59874 \approx 1{,}6$.

Nađena površina trougla zaokružena na dve decimale bila bi

$$P = 488{,}23 \text{ cm}^2$$

2) Rešiti pravougli trougao ako mu je data kateta $a = 34{,}2$ cm i ugao $\alpha = 34°45'$

$$\beta = 89°60' - 34°45'$$

$$\beta = 55°15'$$

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} \qquad c = \frac{34{,}2}{0{,}57} \Rightarrow c = 60 \text{ cm.}$$

$$b = c \cdot \cos\alpha \qquad b = 60 \cdot 0{,}82165$$

$$\cos\alpha = 0{,}82165 \qquad b = 49{,}299 \text{ 1m}$$

Treba uvek proceniti mogućnost dobijenog rezultata: hipotenuza $c > a$ i $c > b$,

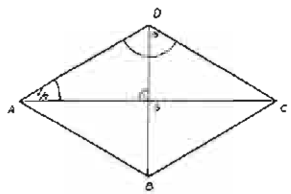
kako je $\beta > \alpha \Rightarrow b > a$.

3) U pravouglom trouglu data je kateta $a = 4$ cm i hipotenuza $c = 7$ cm. Rešiti trougao.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \qquad 4 : 7 = 0{,}571428 \approx 0{,}57143$$

Ako je $\sin \alpha = 0{,}57143$ $\alpha = 34°51'$ (Tablice str. 143)

4) Izračunati uglove romba ako su mu dijagonale $d_1 = 11$ cm i $d_2 = 4$ cm. Neka je $\overline{AC} = d_1$ i $\overline{BD} = d_2$ (sl. 199).




Sl. 199

Iz pravouglog trougla $ASD$ imamo

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{d_2}{2}}{\frac{d_1}{2}} = \frac{d_2}{d_1}$$

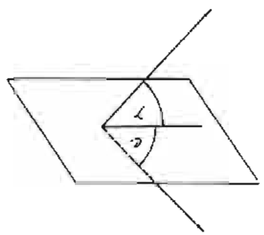
$$4 : 11 = 0{,}363636 \approx 0{,}36364$$

U tablicama, na strani 128 nalazimo $\operatorname{tg} 19°59' = 0{,}36364$

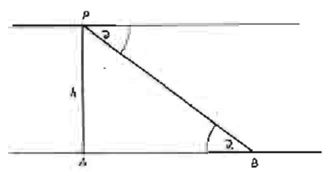
Prema tome, $\frac{\alpha}{2} = 19°59'$,

ili $\alpha = 39°58'$; $\beta = 140°2'$.

Ugao koji vidni zrak obrazuje sa ravni horizonta zove se *elevacioni* ($\alpha$) (ako je njegova oblast iznad ravni horizonta) i *depresioni* ($\delta$) (ako je njegova oblast ispod horizontalne ravni (sl. 200).



Sl. 200




Sl. 201

5) Posmatrač iz aviona koji se nalazi iznad mesta $A$ na visini $h = 5000$ m. vidi mesto $B$ pod depresionim uglom $\delta = 37°47'$. Koliko je udaljeno mesto $B$ od mesta $A$?



Uglovi $\delta_1$ i $\delta$ su naizmenični. Stoga je $\delta_1 = \delta$ (sl. 201).

$\overline{AB} = h \cdot \operatorname{cotg} \delta_1$

$\overline{AB} = 5000 \cdot \operatorname{cotg} 37°47'$ (Tabl. str. 146)

$\operatorname{cotg} 37°47' = 1{,}2900$

$\overline{AB} = 5000 \cdot 1{,}29$

$\overline{AB} = 6450$ m.

## ZADACI

*Zad. 296.* Rešiti pravougli trougao ako mu je dato:

1) $c = 9{,}35$ cm i $\alpha = 65°10'$; 4) $a = 10$ cm $\beta = 58°30'$;
2) $c - 3{,}643$ cm; $\beta = 39°50'$; 5) $c = 20$ cm $\beta = 71°30'$;
3) $a = 6{,}37$ cm $\alpha = 4°20'$;

*Zad. 297.* U pravouglom trouglu data je kateta i hipotenuza. Rešiti trougao.

1) $a = 528$ m $c = 697$ m;
2) $b = 15$ m $c = 113$ m

*Zad. 298.* Sa brda visokog 1000 m na obali mora vidi se brod na pučini pod uglom depresije, $\delta = 12°19'$. Koliko je brod udaljen od obale.

*Zad. 299.* Iz tačke na zemlji koja je od podnožja tornja udaljena 100 m vidi se njegov vrh pod uglom elevacije $\alpha = 31°23'$. Koliko je visok toranj.

*Zad. 300.* Izračunati ugao pod kojim se vidi kružnica poluprečnika $r = 7$ cm iz tačke $P$ koja je od središta udaljena 14 cm.

*Zad. 301* Jedna stranica pravougaonika za 41 cm je veća nego druga. Obim pravougaonika iznosi 168 cm. Izračunati ugao pod kojim se seku dijagonale pravougaonika.

*Zad. 303.* Prave $p$ i $q$ seku se pod uglom $\alpha = 9°36'$. Izračunati ortogonalnu projekciju na pravu $p$ duži $\overline{AB} = 5$ cm koja pripada pravoj $q$.

*Zad. 303.* Izračunati ugao koji sa pozitivnim smerom $x$-ose obrazuje radius-vektor tačke $M\,(4, 11)$.

# REŠENJA

## I DEO

*Zad. 1.* $\tau(a) = \perp$; $\tau(b) = \top$; $\tau(c) = \perp$; $\tau(d) = \perp$; $\tau(e) = \perp$; $\tau(f) = \top$; $\tau(g) = \perp$.

*Zad. 2.* $\neg$a: Broj 7 nije paran broj: $\tau(a) = \perp$ $\tau(\neg a) = \top$

$\neg$b: Nije svaki pravougaonik paralelogram; $\tau(b) = \top$; $\tau(\neg b) = \perp$

$\neg$c: Broj 39 nije prost broj; $\tau(c) = \perp$; $\tau(\neg c) = \top$

$\neg$d: Dijagonale romba se ne polove; $\tau(d) = \top$, $\tau(\neg d) = \perp$

$\neg$e: Ortocentar trougla nije presek njegove težišne linije. $\tau(c) = \perp$; $\tau(e) = \top$

$\neg$f: $x \geqslant 5$ (ne manje)

$x < 5$ nije iskaz, jer je njegova istinitost neodređena. Ona zavisi od vrednosti $x$.

*Zad. 3.* 1) $(a \wedge b)$: Kvadrat je paralelogram i kvadrat je romb. $\tau(a) = \top$; $\tau(b) = \top$; $\tau(a \wedge b) = \top$

2) Broj 6 je ceo broj i broj 6 je paran broj $\tau(a) = \top$; $\tau(b) = \top$; $\tau(a \wedge b) = \top$

3) Dijagonale paralelograma su jednake i dijagonale pravougaonika su uzajamno normalne $\tau(a) = \top$; $\tau(b) = \perp$; $\tau(a \wedge b) = \perp$

4) Dunav je najveća reka u Evropi i Dunav se uliva u Crno More. $\tau(a) = \perp$; $\tau(b) = \top$; $\tau(a \wedge b) = \perp$

*Zad. 4.* 1) $(a \vee b)$: Broj 17 je ceo broj ili broj 17 je paran broj.
$\tau(a) = \top$; $\tau(b) = \bot$; $\tau(a \wedge b) = \top$

2) Dijagonale trapeza su jednake ili dijagonale trapeza se polove. $\tau(a) = \bot$; $\tau(b) = \bot$; $\tau(a \vee b) = \bot$

3) Žabe su sisari ili Mars je planeta.
$\tau(a) = \bot$; $\tau(b) = \top$; $\tau(a \vee b) = \top$

4) Zbir unutrašnjih uglova u trouglu je 180° ili su stranice romba jednake.
$\tau(a) = \top$; $\tau(b) = \bot$; $\tau(a \vee b) = \top$

*Zad. 5.* 1) $(a \Rightarrow b)$: Ako je $n$ deljiv sa 12, onda je broj $n$ deljiv sa 6.
$\tau(a) = \top$; $\tau(b) = \top$; $\tau(a \Rightarrow b) = \top$.

2) Ako je $x = y$ i $y = z$, onda je $x = z$
$\tau(a) = \top$; $\tau(b) = \top$; $\tau(a \Rightarrow b) = \top$

3) Ako je četvorugao kvadrat, onda je četvorugao paralelogram.
$\tau(a) = \top$; $\tau(b) = \top$; $\tau(a \Rightarrow b) = \top$

4) Ako je $2x + 3 = 7$, onda je $x = 2$, a nije iskaz, $\tau(a)$ neodređeno.
$\tau(b) = \top$; $\tau(a \Rightarrow b) = \top$.

5) Ako je zbir dva ugla u trouglu $\alpha + \beta = 120°$, onda je treći ugao $\gamma$ — tup.
$\tau(a) = \top$; $\tau(b) = \bot$; $\tau(a \Rightarrow b) = \bot$.

6) Ako se u četvorouglu može povući 4 dijagonale, onda se u petouglu može povući 10 dijagonala.
$\tau(a) = \bot$; $\tau(b) = \bot$; $\tau(a \Rightarrow b) = \top$

*Zad. 6.* 1) Ako je broj $n$ deljiv sa 2 ili sa 3 onda i samo onda broj $n$ je deljiv sa 6.
$a \Rightarrow b$; $b \Rightarrow a$; $\tau(a \Leftrightarrow b) = \top$

2) $a \Rightarrow b$; $b \Rightarrow a$; $(a \Leftrightarrow b) = \top$

3) Ako je paralelogram pravougaonik, onda (i samo onda) dijagonale su mu jednake.
$a \Rightarrow b$; $b \Rightarrow a$; $\tau(a \Leftrightarrow b) = \top$

4) Ako je $2 + 3 = 7$, onda (i samo onda) $3 + 2 = 7$.
$\tau(a) = \bot$; $\tau(b) = \bot$; $a \Rightarrow b$; $b \Rightarrow a$; $\tau(a \Leftrightarrow b) = \top$



*Zad. 7.* 1) $\{(\alpha + \beta = 180°) \wedge (\alpha < 90°)\} \Rightarrow (\beta > 90°)$

2) $(m < n) \vee (m > n)$; 3) $(3 > 0) \wedge (3 > 2)$

4) $\{(a > c) \wedge (b > c)\} \Rightarrow (a + b > 2c)$

*Zad. 8.* 1) a: Trougao pravougli.
b: Dva unutrašnja ugla su komplementarna.
Ekvivalencija. $\tau(a \Leftrightarrow b) = \top$

2) a: Broj 13 je prost.
b: Broj 13 je deljiv sa 3.
Konjunkcija. $\tau(a \wedge b) = \bot$

3) a: Dve prave su paralelne.
b: Dve prave se seku.
Disjunkcija. $\tau(a \vee b) = \top$

4) a: $x + 2 = 5$
b: $x = 1$
Implikacija. $\tau(a \Rightarrow b) = \bot$

5) a: Tri tačke određuju kružnicu.
b: Tri tačke određuju ravan.
Konjunkcija. $\tau(a \wedge b) = \top$

6) a: Poligon je četvorougao.
b: Zbir spoljašnjih uglova iznosi 360°.
Implikacija. $\tau(a \Rightarrow b) = \top$

7) a: $\frac{5}{12}$ je manje $\frac{7}{18}$
Negacija. $\tau(7a) = \top$

8) a: $2 + 1 = 3$
b: Broj 7 je paran.
Disjukcija. $\tau(a \vee b) = \top$

9) a: Dva trougla slična.
b: Stranice proporcionalne.
Ekvivalencija. $\tau(a \Leftrightarrow b) = \top$

10) a: Dva romba slična.
b: Stranice proporcionalne.
Implikacija. $\tau(a \Rightarrow b) = \top$

*Zad. 9.* 1) Broj $n$ je ceo ili pozitivan broj.
2) Broj $n$ je ceo i pozitivan broj.
3) Broj $n$ je ceo ili neceo broj.
4) Broj $n$ je pozitivan ili nepozitivan broj $(-\infty < n < +\infty)$.
5) Ako je broj $n$ deljiv sa 3, onda taj broj nije prost.
6) Ako je broj $n$ ceo broj i prost broj onda on nije deljiv sa 3.
7) Ako je broj $n$ ceo i deljiv sa 3, onda on nije prost.
8) Broj $n$ je ceo ili pozitivan broj i prost ili je deljiv sa 3.
9) Broj $n$ nije ceo broj ili nije deljiv sa 3.
10) Broj $n$ je ceo, pozitivan i prost, ili je deljiv sa 3.

*Zad. 10.* 1) Dovoljno. 2) Potrebno i dovoljno. 3)Potrebno.
4) Potrebno i dovoljno. 5) Potrebno i dovoljno.
6) Potrebno. 7) Potrebno i dovoljno. 8) Dovoljno.
9) Potrebno. 10) Potrebno i dovoljno.

*Zad. 11.* 1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 2) $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
3) $C = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

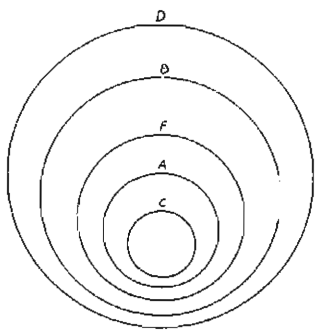
*Zad. 12.* 1) $P(x) : x = 2n,\ n \in N$
2) $P(x) : x = \frac{1}{n},\ n \in N$
3) $P(x) : x = n^3,\ -3 \leqslant n \leqslant 0,\ n \in E$

*Zad. 13.* $kA = 5$

*Zad. 14.* $x = 3;\ x = 5;\ x = 7$

*Zad. 15.* 1) $A \cap B = \{3, 4, 5\}$ 2) $A \cap B = \{1, 2\}$
3) $A \cap B = \{4, 12, 36\}$

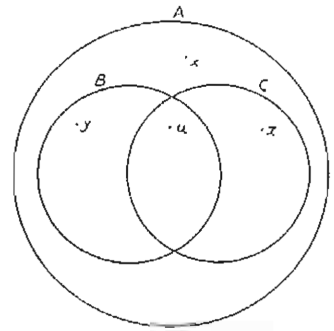
*Zad. 16.* Inkluzija
$C \subset A \subset F \subset B \subset D$ (sl. 202)



Sl. 202



*Zad. 17.* Inkluzija i presek (sl. 203)
$x$ — čovek koji ne živi u Africi niti je Crnac.
$y$ — čovek koji živi u Africi, ali nije Crnac.
$z$ — Crnac koji ne živi u Africi.
$n$ — Crnaca koji živi u Africi.



Sl. 203

*Zad. 18.* 1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
2) $A \cup B = E$; 3) $A \cup B = R$

*Zad. 19.* 1) $A \cup \varnothing = A$; 2) $A \cap \varnothing = \varnothing$

*Zad. 20.* 1) $k(A \cup B) = 46$
$A \cap B = \{A, B, C, E, H, J, K, M, O, P, T\}$

*Zad. 21.* vidite zad. 17.

*Zad. 22.* $C = \{d\}$

*Zad. 23.* $A \cap B$ — skup kvadrata

*Zad. 24.* $A \cup B =$ prava $p$; $A \cap B = \overline{MN}$ (duž $\overline{MN}$)

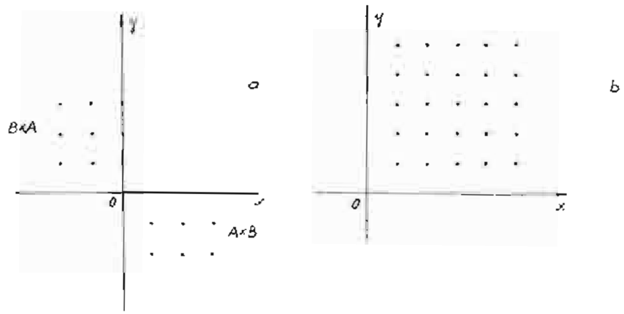
*Zad. 25.* $A \mid B = \varnothing$

*Zad. 26.* Skup trapezoida

*Zad. 27.* $A \times B = \{(x, a), (x, b), (y, a), y, b), (z, a), (z, b)\}$
$B \times A = \{(a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z)\}$

*Zad. 28.* $A = B$

*Zad. 29.* (sl. 30) *Zad. 30.*




Sl. 204

*Zad. 31.* 1) $x = \dfrac{128}{81}$ 2) $y = 0{,}88$ $z = 117$

*Zad. 32.* $x = 41000$ *Zad. 33.* $x = 16$; $y = 11$; $z = 44$; $v = 19$

*Zad. 34.* $x = 140$; $y = 0$; $z = 16$; $v = 36$

*Zad. 35.* $x = 112{,}5$; $y = 16{,}5$; $z = 181{,}5$; $v = 13{,}5$

*Zad. 36.* 1) $A = \{4, 5, 6\}$ 2) $B = \{3, 4, 5, 6\}$
3) $C = \{4, 5, 6, 7\}$ 4) $D = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

*Zad. 37.* 1) $(1, 9)$ 2) $[3, 7)$ 3) $[2, 8]$

*Zad. 38.* 1) $(5, 7)$ 2) $[3, 7)$ 3) $[3, 5]$

*Zad. 39.* Brojevi 1 i 3

*Zad. 40.* $S_{10} = 370$; $S_2 = 101110010$
$d_{10} = 272$; $d_2 = 100010000$

*Zad. 41.* 1) Nije. Na pr.: $a = -7$; $b = 2$
2) Nije. Na pr.: $a = 3$; $b = -3$; 3) Jeste

*Zad. 42.* $a^5$. *Zad. 43.* $x^{3p}$; *Zad. 44.* 8 *Zad. 45.* 9.

*Zad. 46.* $a^m b^n$; *Zad. 47.* $a^2 \cdot (ab)^{2x}$ *Zad. 48.* $\dfrac{a}{b}$

*Zad. 49.* $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz$ *Zad. 50.* $a^4 + b^4 - 2a^2b^2$

*Zad. 51.* $a$. *Zad. 52.* $a^{1-n}$; *Zad. 53.* $(ab)^n$

*Zad. 54.* $a^k(a+1)$ *Zad. 55.* $a(1 - a^n)$ *Zad. 56.* $p^m + q^n$

*Zad. 57.* $\dfrac{6^x}{4}$ *Zad. 58.* $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{k-2}$ *Zad. 59.* $\dfrac{2ab}{3x^{2p+1}y^{p+q}}$



*Zad. 60.* 1) $\dfrac{a}{9b^3}$; 2) $\dfrac{3y^2}{x}$; 3) $2\dfrac{ms}{t^2}$
4) $\dfrac{ax^2}{12by^3}$; 5) $\dfrac{3a^2b^2}{2x^2y^4}$

*Zad. 61.* 1) $3a^2bc^{-3}$; 2) $3m^2np^{-4}q^{-1}$; 3) $a^5b^3c^{-3}x^{-2}$

*Zad. 62.* $\dfrac{d^7}{3ac^7}$ *Zad. 63.* $\dfrac{1}{x^3}$ ili $x^{-3}$

*Zad. 64.* $n^{-2}$ *Zad. 65.* $bc^{-5}$ *Zad. 66.* $3^x$ *Zad. 67.* $14^{2n}$

*Zad. 68.* 1. *Zad. 69.* $15^k$. *Zad. 70.* $9^{2x+1}$ *Zad. 71.* 2.

*Zad. 72.* $a^4a^{2k}$. *Zad. 73.* $-(ab)^{2k}$ *Zad. 74.* $-a^3a^{2n}$.

*Zad. 75.* $a(ab)^{2k}$

*Zad. 76.* $-b(ab)^k$. Proizvod je negativan
I ako je $k$ parno: $(-a)^k > 0$; $(-b)^{k+1} < 0$
II ako je $k$ neparno: $(-a)^k < 0$; $(-b)^{k+1} > 0$

*Zad. 77.* $4 \cdot 6^k$

*Zad. 78.* $A + B = 4a^3 + 8b^3$; $A - B = 6a^2b - 10ab^2$

*Zad. 79.* 1) $4a^2 + 9b^2 - c^2 + 12ab$ 2) $16x^2 - 4y^2 - 25z^2 + 20yz$
3) $a^{2n} - b^{2n}$ 4) $x^{15m} - y^{12n}$

*Zad. 80.* 1) $a^4b - 3a^2b^2 + 6b^3$ 2) $x^3 - 2x$
3) $5c^4y^8 + 3c^2y^4 - 2$ 4) $2ax^2 + 5a^2x - a^3$
5) $7a^4 + 2a^2b - 4b^2$; 6) $2x + 1 + \dfrac{5x - 1}{x^2 + 2x + 3}$
7) $m^{8x} - m^{4x}n^y + n^{2y}$; 8) $x^n + 2a$;
9) $z^{4p} - z^{2p} + 1$; 10) $a^{3n} + 2a^{2n} + 4a^n + 8$

*Zad. 81.* 1) $a^5x^2$; 2) $18a^2x^3$; 3) $12m^5n^3$

*Zad. 82.* 1) $5a^3b^2(a^2 + b^2)$; 2) $3m^2n^4(m - 2n)$;
3) $24p^4x^3(2x^2 + 3py)$

*Zad. 83.* 1) $(2a - 3b)(2a + 3b)$ 2) $(ax - n)(ax + n)$
3) $(m^2n - p)(m^2n + p)$ 4) $(ax^2 - 3y)(ax^2 + 3y)$
5) $(a^2b - 5)(a^2b + 5)$ 6) $a(a - b)(a + b)$
7) $k(k - 2)(k + 2)$ 8) $x^3(3x - y)(3x + y)$
9) $2x^5u^3(3xy^2 - 5u^2v^3)(3xy^2 + 5u^2v^3)$
10) $2a^3b^2(1 - 7a^5b^4)(1 + 7a^5b^4)$

*Zad. 84.* $5xy^2(4a^3x^2 - 5y^3)^2$

Zad. 85. $7n^4x^2(2m^3n + 1)(4m^6n^2 - 2m^3n + 1)$

Zad. 86. $3a^3p(5a^3p^2 - 7q^4)(5a^3p^2 + 7q^4)$

Zad. 87. $3a^4b^3 - 36a^3b^3 + 105a^2b^3 = 3a^2b^3(a^2 - 12a + 35) =$
$= 3a^2b^3(a^2 - 5a - 7a + 35) = 3a^2b^3[a(a-5) -$
$- 7(a-5)] = 3a^2b^3(a-5)(a-7)$

Zad. 88. $2ab^2(5a^2b + 2c^3)(25a^4b^2 - 10a^2bc^3 + 4c^6)$

Zad. 89. $7v^3w^4(2w^2 - 3u^3v)(2w^2 + 3u^3v)$

Zad. 90. $9a^2x^3(x-4)(x+3)$

Zad. 91. $3m^3p(5m^3 + 4p^2q)^2$

Zad. 92. $(a-b)(x-y)(x+y)$

Zad. 93. $3a^2c(3a^2b - c^3)(9a^4b^2 + 3a^2bc^3 + c^6)$

Zad. 94. $2x^2 + 3xy + 4xy + 6y^2 = x(2x+3y) + 2y(2x+3y) =$
$= (2x+3y)(x+2y)$

Zad. 95. $(a - b + c)(a + b - c)$

Zad. 96. $a(a^n - b^n)(a^n + b^n)$

Zad. 97. $2ab^2(2a^{2n} + b^n)(4a^{4n} - 2a^{2n}b^n + b^{2n})$

Zad. 98. 1) $\frac{2a}{3b}$; 2) $\frac{4m}{3n^2}$; 3) $\frac{1}{7p}$;
4) $\frac{3x^2y}{2}$; 5) $\frac{4}{5a}$; 6) $\frac{1}{4x}$

Zad. 99. 1) $\frac{x}{x+a}$; 2) $\frac{p^2}{p^2+7}$; 3) $\frac{a-b}{a+b}$;
4) $\frac{m}{n}$; 5) $-\frac{x}{y}$; 6) $\frac{x}{a-b}$;
7) $\frac{u+v}{u-v}$; 8) $\frac{a+1}{a+2}$; 9) $\frac{m-3n}{m+5n}$;
10) $\frac{1}{u+v-w}$; 11) $\frac{1}{a^k+b^k}$; 12) $\frac{xy}{x^n-y^n}$

Zad. 100. 1) $abx$; 2) $12a^3b^2$; 3) $72\,n^5v^4$
4) $3m^5n^4x^2$; 5) $525\,a^2p^4q^5$; 6) $180\,a^3b^5c^4$.

Zad. 101. 1) $ab(a-b)$; 2) $ab(m+n)$; 3) $a^2b^3x(x-1)$;
4) $a^2b^3(m+n)$; 5) $12ab(x-y)$; $6by - 6bx = -6b(x-y)$
6) $12a(x^2-y^2)$; 7) $12(a-b)^2(a+b)$;
8) $a^2b^3(4x^2+3y)^2(4x^2-3y)$
9) $ab^2(x+3)^2(x+2)$; 10) $6(a+b)(a+2b)^2$
11) $m^2np^3(a+1)(a+2)(a+3)$; 12) $(a+b)(a^3-b^3)$

Zad. 102. 1) $\frac{6x}{m}$; 2) $\frac{-2z}{m}$; 3) $\frac{1}{a}$; 4) 0 5) $\frac{2a}{b}$; 6) 2

Zad. 103. 1) $\frac{4}{3a}$; 2) $\frac{x}{12a}$; 3) $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$;
4) $\frac{a(15y-14x^2)}{36x^3y^2}$; 5) $\frac{2a+3b}{b}$; 6) $\frac{3a-2}{a}$

Zad. 104. $\frac{x+y}{x-y}$ Zad. 105. $\frac{4a}{a+b}$ Zad. 106. $\frac{x^2}{x^2-y^2}$

Zad. 107. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

Zad. 108. $\frac{2a+3x}{2a-3x} - \frac{2a-3x}{3x-2a} = \frac{2a+3x}{2a-3x} + \frac{2a-3x}{2a-3x} = \frac{4a}{2a-3x}$

Zad. 109. 0 Zad. 110. $\frac{1}{a+2}$ Zad. 111. $\frac{7x}{(x^2-4)(x-5)}$

Zad. 112. $\frac{18}{a^3-27}$ Zad. 113. $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$

Zad. 114. 1) $\frac{x}{z}$; 2) $\frac{3p^2}{r}$; 3) $2a$; 4) $3b$; 5) $\frac{1}{bn}$; 6) $\frac{1}{x}$

Zad. 115. $\frac{a^2}{bc}$ Zad. 116. $\frac{x-y}{y}$ Zad. 117. $\frac{a}{a-b}$

Zad. 118. $\frac{y}{x+y}$ Zad. 119. $-\frac{1}{p+q}$ Zad. 120. $a^2 - b^2$

Zad. 121. $\frac{x}{a-c}$; Zad. 122. $\frac{a-b}{a+b}$

Zad. 123. $\frac{(a+b)(x-y)}{x+y}$; Zad. 124. $\frac{1}{a^n+b^n}$

*Zad. 125.* $\frac{3ax}{8by}$ *Zad. 126.* $\frac{1}{3a}$ *Zad. 127.* $\frac{8am}{9b^2n}$

*Zad. 128.* $\frac{9ak^2}{4l^2}$ *Zad. 129.* $\frac{5q^3}{4ap^2}$ *Zad. 130.* $30\,b^2c^2$

*Zad. 131.* $\frac{3ax^2}{4b^3}$ *Zad. 132.* $\frac{5a^2}{12c^2}$ *Zad. 133.* $\frac{1}{b^3}$

*Zad. 134.* $m$ *Zad. 135.* $\frac{1}{a-b}$ *Zad. 136.* $\frac{m}{2an}$

*Zad. 137.* $\frac{a}{4}$ *Zad. 138.* $\frac{m}{4}$

*Zad. 139.* 1) $\frac{x+y}{z}$; 2) $\frac{a}{b+c}$

*Zad. 140.* 1) $\frac{x+y}{y^2}$; 2) $\frac{q^2}{p-q}$

*Zad. 141.* 1) $\frac{7}{2}$; 2) 1.

*Zad. 142.* 1) $\frac{v-n}{n}$; 2) $\frac{a-1}{a+1}$

*Zad. 143.* $\frac{p+q}{p-q}$; *Zad. 144.* $\frac{2ab}{a^2+b^2}$ *Zad. 145.* $b$

*Zad. 146.* $x = 2$ *Zad. 147.* $n = 3$ *Zad. 148.* $z = 2$

*Zad. 149.* Jednačina je nemoguća

*Zad. 150.* $y = \frac{2}{3}$ *Zad. 151.* $k = -\frac{1}{2}$

*Zad. 152.* Jednačina je neodredena $x \neq 0$; $x \neq -1$

*Zad. 153.* $x = 5$ *Zad. 154.* $x = \frac{c-b}{a}$

*Zad. 155.* $x = \frac{n-k}{m}$ *Zad. 156.* $x = a - c$



*Zad. 157.* $x = \frac{c}{a+b}$ *Zad. 158.* $z = m + n$

*Zad. 159.* $x = \frac{1}{m-n}$

*Zad. 160.* 1) $a = \frac{bc}{b+c}$; 2) $b = \frac{ac}{c-a}$; 3) $c = \frac{ab}{b-a}$

*Zad. 161.* $z = 2$ *Zad. 162.* Jednačina je neodrđena.

*Zad. 163.* $z = \frac{b-a}{2}$ *Zad. 164.* $t = \frac{a}{4}$

*Zad. 165.* $x = 5$; $y = 3$ *Zad. 166.* $x = 4$; $z = 3$

*Zad. 167.* $x = 4$; $y = 3$

*Zad. 168.* $x = 5$; $y = 3$; treba prvo izvršiti smenu:

$$\frac{1}{x-y} = n; \quad \frac{1}{x+y} = v \qquad \left.\begin{aligned} n + v &= \frac{5}{8} \\ n - v &= \frac{3}{8} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} n &= \frac{1}{2} \\ v &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$x + y = 8$$
$$x - y = 2$$

*Zad. 169.* $x = \frac{a+b}{2}$; $y = \frac{a-b}{2}$

*Zad. 170* $x = m$; $y = 3m$ *Zad. 171.* $x = 1$; $y = -1$

*Zad. 172.* $x = \frac{a-n}{m-n}$; $y = \frac{a-m}{n-m}$

*Zad. 173.* $x = \frac{ap-bq}{p^2-q^2}$; $y = \frac{bp-aq}{p^2-q^2}$

*Zad. 174.* $x = m + n$; $y = -m$ *Zad. 175.* $x = a^2$; $y = 2a$

*Zad. 176.* $x = 2p^2$; $y = pq$ *Zad. 177.* $x = 15a$; $y = 10b$

*Zad. 178.* $x = m$; $z = p$ *Zad. 179.* $x = 5a$; $y = 3b$

*Zad. 180.* $x = ab$; $z = bc$ *Zad. 181.* $\frac{s}{n+1}$ i $\frac{ns}{n+1}$

*Zad. 182.* $\frac{s-a}{2}$ i $\frac{s+a}{2}$

*Zad. 183.* $an + r$ Ako se od traženog broja oduzme $r$, on će se podeliti sa $a$ bez ostatka.

*Zad. 184.* $\frac{an}{a-b}$ zadatak ima smisla ako je $a > b$.

*Zad. 185.* $\frac{abn}{b-a}$ $b > a$ *Zad. 186.* $\frac{m(a-1)}{ak}$; $\frac{m(a-1)}{k}$

*Zad. 187.* $\frac{a(m+1)}{m}$; $a(m+1)$ *Zad. 188.* $\frac{d}{a-b}$; $\frac{ad}{a-b}$

*Zad. 189.* 42 *Zad. 190.* 40; 15; 10

*Zad. 191.* $\frac{s(a+b)}{2ab}$; $\frac{s(a-b)}{2ab}$

*Zad. 192.* $\frac{2an+b(n+1)}{n-1}$; $\frac{2a+b(n+1)}{n-1}$

*Zad. 193.* $\frac{dm-bn}{ad-bc}$; $\frac{an-cm}{ad-bc}$ *Zad. 194.* $\frac{dq-r}{q-1}$; $\frac{d-r}{q-1}$

*Zad. 195.* 1) $x > 3$; 2) $x < \frac{5}{2}$ 3) $x \leqslant 4$ 4) $x < 3$; 5) $x \geqslant 5$

*Zad. 196.* $m \leqslant 5$

*Zad. 197.* 1) $a > 0$; 2) Svako $a$ $a \in (-\infty, \infty)$
3) $a > 0$; 4) $a > 1$; 5) $-1 < a < 0$ i $a > 1$;
6) $a < -1$ i $0 < a < 1$

*Zad. 198.* 90: $x < 100$; $\frac{x-5}{17} = k \Rightarrow x = 17k + 5$

$17k + 5 < 100$ $k < \frac{95}{17}$ $k \in N$

*Zad. 199.* 1) $a < 3$; 2) $a = 3$; 3) $a > 3$



*Zad. 200.* 1) $x \in [-1, 1]$; 2) $x \leqslant -3$; 3) Nema rešenja

*Zad. 201.* 1) $x \in (3, 7)$; 2) $x \in (-3, -1)$;
3) $x \in (0, \infty)$; 4) nema rešenja;
5) $x \in \left(\frac{7}{4}, \infty\right)$; 6) $x \in \left(-\frac{8}{13}, 2\right)$.

*Zad. 202.* 1) $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (5, \infty)$; 2) $m \in (-3, 0)$

*Zad. 203.* $a = 3$ *Zad. 204.* 1) $m = 3$; $n = 2$; 2) $m = 2$; $n = 3$

*Zad. 205.* 1) $m > 3$; 2) $3 < m < 5$

*Zad. 206.* $m \in (2, 11)$ *Zad. 207.* $a = 3$

*Zad. 208.* $m = 14$ *Zad. 209.* $m = 2$; $n = 3$

*Zad. 210.* a) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$; b) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

*Zad. 211.* $m > 6$

*Zad. 212.* 1) $\alpha = 6$; $\beta = 4$; 2) $\alpha = 6$; $\beta = 10$;
3) $\alpha = 3$; $\beta = 2$

*Zad. 213.* 1) $d = 5$; 2) $d = 13$; 3) $d = 17$

*Zad. 214.* $\overline{AB} = 13$; $\overline{BC} = 10$; $\overline{CD} = 2$; $\overline{AD} = 5$

*Zad. 215.* $\overline{AC} = 17$; $\overline{BD} = 13$ *Zad. 216.* $M(5, 0)$

*Zad. 217.* 1) $S(1, 3)$; 2) $S(1, 2)$

*Zad. 218.* 1) $P = \frac{123}{2}$; 2) $P = \frac{129}{2}$; 3) $P = 39$

*Zad. 219.* $P = 50$ *Zad. 222.* $y = \frac{3}{5}x + 3$

*Zad. 223.* $M(2, 0)$

*Zad. 224.* 1) $y = x + 3$; 2) $y = -x + 2$; 3) $y = 5x + 3$;
4) $y = \frac{9}{2}x - 4$; 5) $y = -\frac{1}{3}x - 1$ 6) $y = \frac{4}{3}x - 3$;
7) $y = -\frac{5}{2}x + 5$; 8) $y = \frac{3}{2}x$

Zad. 225. $m = 5$; $p_1$: $3x + 2y - 7 = 0$; $p_2$: $6x + 4y - 5 = 0$

Zad. 226. $x - 2 = 0$; $y - 1 = 0$ (Vidi zad. 217)

Zad. 227. 1) $m = 5$; 2) $m = 2$; 3) $m = 2$

Zad. 228. $m = 6$ Zad. 229. $m = 5$; $x = 6$

Zad. 230. $m = 3$; $x = 3$.

Zad. 231. $C(5, 6)$; $S(1, 3)$ $p: 3x - y = 0$

Zad. 232. $C(4, 10)$ $P = 76$

Zad. 233. Ako tačke $A$, $B$ i $C$ pripadaju istoj pravoj, onda je površina trougla $ABC = 0$, tj. $-3(10 - y) + 7(y + 2) + 2(-2-10) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = 4$; $C(2, 4)$

Zad. 234. Koordinate tačaka $A$ i $B$ zadovoljavaju jednačinu

$$y = ax + b: \qquad \left.\begin{array}{l} 1 = 2a + b \\ 5 = 4a + b \end{array}\right\} \Rightarrow a = 2;\ b = -3$$

Jedn. prave: $y = 2x - 3$

Zad. 235. 1) $x = 3$; $y = 2$ 2) $x = -1$; $y = 3$
3) $x = -4$; $y = -3$ 4) $x = 6$; $y = -4$

Zad. 236. Tražena tačka je u preseku prave $p$ i simetrale duži $\overline{AB}$. Zadatak može imati beskonačno mnogo rešenja, jedno ili nijedno.

Zad. 237. Iz bilo koje tačke $S$ jedne od datih paralela opišemo kružni luk $(S, a)$ koji seče drugu paralelu u tačkama $P$ i $P_1$. Prava koja prolazi kroz tačku $M$ i paralelna je sa $SP$, odnosno $SP_1$ je tražena. Zadatak može imati dva rešenja $(a > d)$, ($d$ je rastojanje datih paralela), jedno $(a = d)$ i nijedno $(a < d)$.

Zad. 238. Primenom gmt 4 imamo 4 tačke, tj. 4 rešenja ukoliko prave $p$ i $q$ nisu paralelne niti se poklapaju.

Zad. 239. Data tačka je odredena presekom gmt 1 i gmt 4. Zadatak može imati 4 rešenja 3, 2, 1 ili nijedno.

Zad. 240. Translacijom jedne kružnice za vektor $\vec{a}$, koji je paralelan sa $p$, dobijemo krajnju tačku tražene duži. Zadatak može imati beskonačno mnogo rešenja 4, 3, 2, 1 ili nijedno rešenje.

Zad. 241. Translacijom duži $\overline{AB}$ za vektor $\overrightarrow{AF}$ ($F$ proizvoljna tačka ravni), a duži $\overline{CD}$ za vektor $\overrightarrow{CF}$ one se preslikavaju u duži $\overline{FG}$ odnosno $\overline{FE}$. Prava koja prolazi kroz tačku $M$ i koja je normalna na $EG$ je tražena. Zadatak ima dva rešenja.

Zad. 242. Centra rotacije je u preseku duži $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.



Zad. 243. Centar rotacije je u preseku simetrale duži $\overline{AB}$ i simetrale ugla koji obrazuju prave $p$ i $q$.

Zad. 244. Treba jednu od datih kružnica rotirati oko date tačke za ugao od 180°.

Zad. 245. Primeniti gmt 5. Prava koja prolazi kroz tačku $A$ i sredinu duži $\overline{BC}$ i dve prave koje su sa njom paralelne i prolaze kroz tačke $B$ i $C$ su tri tražene prave. Ukoliko date tačke ne pripadaju istoj pravoj, zadatak ima tri rešenja.

Zad. 246. Kroz jednu od datih tačaka (na primer kroz $A$) povuče se prava paralelna sa $p$ i na tu pravu nanese duž $\overline{AN} = a$. Prava $BN$ je jedna od traženih. Zadatak ima dva rešenja.

Zad. 247. Kroz datu tačku $M$ povuče se prava koja je paralelna sa pravom $p$. Rotacijom te prave oko tačke $M$ za ugao $\pm\alpha$ dobijamo dva rešenja zadatka.

Zad. 248. Tražena prava odredena je tačkom $M$ i sredinom duži $\overline{AB}$ (gmt 5).

Zad. 249. Treba primeniti gmt 1 i gmt 4. Zadatak ima dva rešenja.

Zad. 250. Povuku se dve paralelne prave čije je rastojanje $h_c$. Kroz bilo koju tačku $C$ jedne od njih povuku se dve prave koje seku tu pravu pod uglom $\alpha$, odnosno $\beta$.

Zad. 251. Kroz sredinu $S$ stranice $\overline{AB}$ i $T$ povuče se poluprava i na nju nanese duž $\overline{TC} = 2\overline{ST}$.

Zad. 252. Kroz tačku $A$ se povuče poluprava normalno na $BO_c$, a kroz $B$ poluprava normalna na $AO_c$.

Zad. 253. $\sphericalangle SAB = \dfrac{\alpha}{2}$; $\sphericalangle SBA = \dfrac{\beta}{2}$; $\alpha = \sphericalangle CAB$.

Zad. 254. Neka je traženi trougao $ABC$. Pomoću visine $h_c$ odredimo teme $C$. Kružnim lukom $(C, a)$ i $(C, b)$ odredimo na pravoj $AB$ temena $B$ i $A$. Zadatak može imati dva, jedno ili nijedno rešenje.

Zad. 256. Konstruisati pomoćni trougao sa stranicom $m$ i nalеglim uglovima 45° i $\alpha$.

Zad. 257. Treba konstruisati pomoćni pravougli trougao $ANM$ sa datim uglom $\alpha$ i hipotenuzom $\overline{AM} = m$. Simetrala ugla $AMN$ određuje na kateti $AN$ teme pravog ugla traženog trougla.

*Zad. 258.* Treba konstruisati pomoćni trougao u kojem su poznate stranice $c$, $m$ i ugao koji one obrazuju $180° - \alpha$.

*Zad. 259.* Treba konstruisati pomoćni trougao čije su stranice $\frac{2}{3} t_a$; $\frac{2}{3} t_c$ i ugao koji one obrazuju $\varphi$.

*Zad. 260.* Neka je traženi trougao $ABC$ i težište mu je u tački $T$. Prvo se nad hipotenuzom $\overline{AB} = c$ kao prečnikom konstruiše kružnica $\left(S, \frac{c}{2}\right)$ (gmt 6). Zatim se konstruiše pomoćni trougao $AST$: $AS = \frac{c}{2}$; $\overline{AT} = \frac{2}{3} t_a$; $\overline{ST} = \frac{c}{6}$. Poluprava $ST$ određuje na kružnom luku $\left(S, \frac{c}{2}\right)$ teme $C$.

*Zad. 261.* Prvo se konstruiše pomoćni pravougli trougao $ADC$; $\sphericalangle CDA = \alpha$; $\overline{CD} = h_c$. Kružni luk $(A, t_a)$ određuje na simetrali katete $\overline{CD}$ (gmt 5) sredinu stranice $BC$.

*Zad. 262.* Treba konstruisati pomoćni trougao $ADC$; $\overline{AD} = m$ i uglovi $CAD = \alpha$ i $\sphericalangle ADC = \frac{\alpha}{2}$. Simetrala stranice $\overline{CD}$ određuje na stranici $\overline{AD}$ teme $B$ traženog trougala $ABC$.

*Zad. 263.* Vidi zad. 257.

*Zad. 264.* Treba konstruisati dva trougla sa zajedničkom stranicom $f$. Ostale stranice tih trouglova su $a$ i $b$ odnosno $c$ i $d$.

*Zad. 265.* Konstruišemo trougao $ABD$.

*Zad. 266.* Neka su $P$ i $R$ sredine suprotnih stranica paralelograma. Odredimo sredinu duži $\overline{PR}$, tačku $S$. Stranice $\overline{AB}$ i $\overline{DC}$ su paralelne sa $\overline{QS}$ i jednake $2\overline{QS}$.

*Zad. 267.* Dijagonala deli paralelogram na dva podudarna trougla. Konstruiše se jedan od njih (vidi zadatak 255).

*Zad. 268.* Konstruiše se pomoćni trougao $AFC$. $\overline{AF} = m$; $\overline{AC} = d$; $\sphericalangle AFC = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Simetrala stranice $\overline{FC}$ određuje teme $B$.



*Zad. 269.* Treće teme romba je u preseku simetrale duži određene datim tačkama i date kružnice. Mogu da budu dva rešenja, jedno ili nijedno.

*Zad. 270.* (Vidi zadatak 257).

*Zad. 271.* Prvo se konstruiše trougao $ABD$ (vidi primer 2). Zatim se na pravoj $q$ odredi teme $C$ kružnim lukom $(A, d)$.

*Zad. 272.* Na pravu $p$ nanesemo stranicu $\overline{AB} = a$. Konstruišemo zatim pravu $q \| p$ na rastojanju $h$. Kružni luci $(A, d_1)$ i $(B, d_2)$ određuju na pravoj $q$ temena traženog trapeza.

*Zad. 273.* Neka je traženi trapez $ABCD$. Treba konstruisati pomoćni trougao $ABD$: $\overline{AB} = a$; $BD = d$ i $\sphericalangle DAB = \alpha$. Dalja konstrukcija je očigledna. Zadatak može imati dva rešenja, jedno ili nijedno.

*Zad. 274.* Neka je traženi deltoid $ABCD$ (sl. 154). Prvo se konstruiše jednakokraki trougao $ACD$: $\overline{AC} = d_2$. Zatim na simetralu stranice $\overline{AC}$ nanese $\overline{DB} = d_1$.

*Zad. 275.* Treba konstruisati pomoćnu figuru: pravougli trougao u kojem data hipotenuza $m$ i ugao od 45°. (Vidi zad. 257.).

*Zad. 276., 277., 278.* Primeniti (T. 37)

*Zad. 279.* Vidi: XII, 3 primer 4.

*Zad. 280.* Vidi: XII, 3, primer 2.

*Zad. 281., 282.* Vidi: XII, 3, primer 3.

*Zad. 283.* U bilo kojem jednostraničnom trouglu konstruiše se duž koja je homologna sa $a_1 + h_1 = m_1$, pa se onda odredi stranica $a$ traženog trougla kao četvrta geometrijska proporcionala iz uslova $\frac{a}{a_1} = \frac{m}{m_1}$.

*Zad. 284.* Faktor sličnosti $k = \frac{7}{3}$ $a_1 = 35$ cm; $b_1 = 28$ cm; $c_1 = 42$ cm

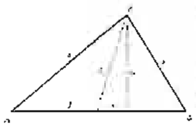
*Zad. 285.* $a_1 = 78$ cm; $b_1 = 65$ cm.

*Zad. 286.* $x = 12$ cm.

*Zad. 287.* $d = 10$ cm.

*Zad. 288.* $a_1 = 66$ cm; $b_1 = 72$ cm; $c_1 = 78$ cm.

Najmanja težišna linija odgovara najvećoj stranici.



Sl. 205

$$\left(\frac{c}{2}+x\right)^2+h^2=b^2 \Rightarrow \frac{c^2}{4}+cx+x^2+h^2=b^2$$

$$\left(\frac{c}{2}-x\right)^2+h^2=a^2 \Rightarrow \frac{c^2}{4}-cx+x^2+h^2=a^2$$

$$+$$

$$x^2+h^2=t_c^2 \qquad \frac{c^2}{2}+2(x^2+1)=a^2+b^2$$

$$t_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2} \qquad t_c=19$$

faktor sličnosti $k=3$

*Zad. 289.* $h=20$ m. *Zad. 290.* $k=40$ m.

*Zad. 291.* $h=24$ m. *Zad. 292.* $x=85$ m.

*Zad. 293.* 1) $b=60$ cm; $c=75$ cm; $q=48$ cm; $h=36$ cm
2) $a=30$ cm; $c=50$ cm; $p=18$ cm; $q=32$ cm
3) $a=30$ cm; $b=40$ cm; $c=50$ cm; $h=24$ cm

*Zad. 294.* $a=15$ cm; $b=20$ cm; $c=25$ cm.

$$\left.\begin{array}{l} p+q=c \\ p-q=7 \end{array}\right\} \Rightarrow p=\frac{c+7}{2}; \qquad q=\frac{c-7}{2};$$

$$\frac{c^2-49}{4}=144 \Rightarrow c=25$$

*Zad. 295.* $a=45$ cm; $b=60$ cm; $h=36$ cm.

*Zad. 296.* 1) $a=8{,}49$ cm; $b=3{,}93$ cm; $\beta=24°50'$; $P=16{,}7$ cm²
2) $a=2{,}798$ cm; $b=2{,}334$ cm; $\alpha=50°10'$; $P=3{,}265$ cm²
3) $b=84{,}07$ cm; $c=84{,}29$ cm; $\beta=85°40'$; $P=268$ cm²
4) $b=16{,}319$ cm; $c=19{,}14$ cm; $\alpha=31°30'$
5) $a=6{,}346$ cm; $b=18{,}9664$ cm; $\alpha=18°30'$

*Zad. 297.* 1) $b=455$ m; $\alpha=49°15'$; $\beta=40°45'$
2) $a=112$ m; $\alpha=82°22'$; $\beta=7°38'$; $P=840$ m²

*Zad. 298.* $d=4580$ m *Zad. 299.* $h=61$ m

*Zad. 300.* $\varphi=60°$ *Zad. 301.* $\varphi=37°58'$

*Zad. 302.* $A'B'=4{,}93$ cm *Zad. 303.* $\varphi=70'1'$



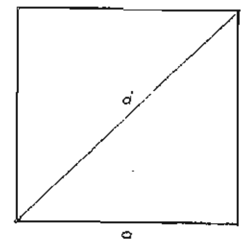
# DRUGA GODINA

## POLJE REALNIH BROJEVA

### 1. UVOD U POJAM REALNOG BROJA

1. Pretpostavimo da poznajemo jedino racionalne brojeve i želimo da rešimo jedan vrlo jednostavan problem elementarne geometrije. Reč je o sledećem problemu:

Odrediti merni broj dijagonale $d$ kvadrata, kada se za jedinicu mere uzme stranica $a$ tog kvadrata.



Sl. 1

Drugim rečima, postavlja se pitanje da li postoji neka duž $l$ koja bi se ceo broj puta sadržavala u dijagonali $d$ i u stranici $a$ kvadrata, tj. da bude

$$d=m\cdot l \quad \text{i} \quad a=n\cdot l$$

(gde su $m$ i $n$ neki prirodni brojevi).

Još su stari Grci znali da takav treći broj ne postoji (Pitagorejska škola V i IV vek pre nove ere). Mi ćemo se ovde lako uveriti u to.

Pretpostavimo da takva duž $l$ postoji. Tada, je, na osnovu Pitagorine teoreme,

$$d^2=a^2+a^2, \quad \text{tj.} \quad d^2=2a^2.$$

Iz ove i gornjih jednakosti, imamo

$$m^2\cdot l^2=2\cdot n^2\cdot l^2$$

ili, posle skraćivanja i deljenja sa $n^2$,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=2.$$

Znači, kvadrat broja $\frac{m}{n}$ mora biti 2. A to ćemo baš dokazati da je nemoguće. Dokažimo da kvadrat ni jednog racionalnog broja ne može biti jednak 2.

Uzmimo proizvoljan racionalna broj $\frac{m}{n}$ i pretpostavimo da smo taj razlomak skratili, tj. da je bar jedan od brojeva $m$, $n$ *neparan* broj. Ova pretpostavka je osnovna u daljem rasudivanju.

Iz $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ dobijamo $m^2 = 2n^2$. Dakle, broj $m^2$ je paran broj, odakle zaključujemo da je i $m$ *paran* broj (jer je kvadrat parnog broja paran, a neparnog broja neparan broj). Ako stavimo $m = 2k$, iz jednakosti $m^2 = 2n^2$, dobijamo

$$(2k)^2 = 2n^2 \quad \text{tj.} \quad 4k^2 = 2n^2$$

odakle je $n^2 = 2k^2$. Dakle, i $n^2$ je paran broj, pa je i broj $n$ *paran*.

Došli smo do kontradikcije sa pretpostavkom da je bar jedan od brojeva $m$, $n$ neparan broj. To znači, da kvadrat nijednog racionalnog broja ne može biti jedank broju 2.

Prema tome, ni jedan racionalan broj ne može biti dužina dijagonale kvadrata u odnosu na njegovu stranicu.

Ako bi se zadržali samo na racionalnim brojevima, morali bismo se pomiriti s tim da se dužine odsečaka, koje se tako prosto javljaju u geometriji, mogu da ne izražavaju nikakvim brojevima. Jasno je da se na takvoj osnovi ne može razvijati metrička geometrija. Znači, primorani smo da prihvatimo i takve brojeve kojih i nema među racionalnim brojevima. Te brojeve, koji nisu racionalni, zvaćemo tzv. *iracionalni brojevi*. Racionalni i iracionlani brojevi obrazuju skup tzv. *realnih brojeva*. Označavamo ga sa $R$.

Problem u vezi sa dijagonalom kvadrata, i ne samo taj, dovode nas do novih brojeva (iracionalnih). Nije baš jednostavno da se strogo definišu ti brojevi i da se izloži kako se osnovne operacije skupa $Q$ racionalnih brojeva produžuju u operacije skupa $R$.

Jedan od načina da se upoznamo sa realnim brojevima je — pomoću decimalnih razvitaka. Poznato nam je da svakom racionalnom broju odgovara konačan ili beskonačan, ali periodičan, decimalan razvitak. Na pr.

$$\frac{1}{5} = 0{,}2; \qquad -\frac{17}{4} = -4{,}25; \qquad \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3}.$$



Izuzev periodičnih decimalnih razvitaka, možemo razmatrati i one beskonačne decimalne razvitke koji nisu periodični. Takav je, na primer,

$$1{,}01001000100001\ldots \quad \text{(broj nula se uvećava za jedan)}$$

Tada, bilo koji konačan, periodičan ili neperiodičan decimalan razvitak, zovemo realan broj.

2. Za izgradnju realnih brojeva velike zasluge je imao nemački matematičar prošlog veka R. Dedekind. Ovde ćemo ukratko, izneti njegove ideje zasnivanja realnih brojeva preko tzv. dedekindovih preseka.

Pre nego što izložimo tu ideju, uvešćemo neke pojmove.

Neka je $S$ skup izvesnih brojeva, ali takav da postoji bar jedan broj $a$ od koga ni jedan broj skupa $S$ nije veći, tj.

$$x \leqslant a \quad \text{za svako } x \in S.$$

Tada, za skup $S$ kažemo da je ograničen sa gornje strane, a broj $a$ zovemo gornje ograničenje skupa $S$. Na primer, skup $\{-5, 1, 3, 7\}$ je ograničen sa gornje strane. recimo brojem 9. Gornja ograničenja tog skupa su takođe, i brojevi 7,2; 13; 7 i drugi.

Najmanje gornje ograničenje, ukoliko postoji, zovemo *gornja međa* ili supremum skupa $S$. Označavamo $\sup S$.

Uvedimo sada jednu značajnu karakteristiku koju mogu imati neki brojni skupovi.

**Definicija.** Neka je $S$ skup izvesnih brojeva. Ako svaki njegov podskup koji je ograničen sa gornje strane ima supremum, onda skup $S$ zovemo *potpun* skup.

Nije teško dokazati da su skupovi $N$ prirodnih brojeva i skup $Z$ celih brojeva potpuni skupovi. Skup $Q$ racionalnih brojeva nije potpun. Prihvatajući to kao činjenicu koju ćemo, nešto kasnije, dokazati, vidimo da se proširenjem skupa celih brojeva $Z$ u skup racionalnih brojeva $Q$, svojstvo potpunosti skupa $Z$ ne prenosi na skup $Q$. Osnovna ideja Dedekinda sastoji se u tome, da se skup racionalnih brojeva $Q$ proširi u širi skup koji će biti potpun skup. Taj skup je skup realnih brojeva i označavamo ga sa $R$.

U tom cilju razmotrimo nešto podrobnije činjenicu da kvadrat ni jednog racionalnog broja nije jednak broju 2. To znači, da ćemo imati za ma koji racionalan broj $r$ ili $r^2 < 2$ ili $r^2 > 2$.

Neka je $A$ skup svih pozitivnih racionalnih brojeva $p$ takvih da je $p^2 < 2$. Neka je $B$ skup svih pozitivnih racionalnih brojeva $q$ takvih da je $q^2 > 2$. Uočili smo dakle skupove

$$A = \{p \mid p \in Q, p > 0, p^2 < 2\}$$
$$B = \{q \mid q \in Q, q > 0, q^2 > 2\}.$$

Kako su $p$ i $q$ pozitivni, iz $p^2 < 2 < q^2$ sleduje $p < q$, tj. svaki iz skupa $A$ je manji od ma kojeg broja skupa $B$. U ovom poslednjem zaključku neće se ništa izmeniti ako skupu $A$ uniramo (priključimo) nulu i sve negativne racionalne brojeve. Ali, tada ćemo imati razdvajanje celog skupa $Q$ racionalnih brojeva na dve klase (podskupa) $A$ i $B$, pri čemu je svaki broj klase $A$ manji od proizvoljnog broja klase $B$. Ovakvo razdvajanje skupa $Q$ zovemo *presek*.

Dokažimo da skup $A$ nema najveći, ni skup $B$ najmanji racionalan broj. U stvari, dokazaćemo da za proizvoljan broj $p \in A$ postoji broj $\bar{p} \in A$, takav da je $p < \bar{p}$. Slično: za proizvoljan broj $q \in B$ postoji broj $\bar{q} \in B$ da je $q > \bar{q}$.

Pretpostavimo da je $p$ najveći u $A$. Kako je $p \in A$, onda $p^2 < 2$ ili $2 - p^2 > 0$. Izaberimo racionalan broj $h$, takav da je

$$0 < h < 1, \qquad h < \frac{2 - p^2}{2p + 1}$$

Sada stavimo $\bar{p} = p + h$. Tada imamo da je $p < \bar{p}$ i

$$\begin{aligned} \bar{p}^2 = (p + h)^2 = p^2 + (2p + h)\,h &< p^2 + (2p+1)h \quad (\text{jer je } h < 1)\\ &< p^2 + 2 - p^2 \qquad\quad (\text{jer je } (2p + 1)h < 2 - p^2)\\ &= 2. \end{aligned}$$

Dakle, $\bar{p}^2 < 2$, pa $\bar{p} \in A$. Znači $p$ nije najveći u $A$. Ovim smo dokazali da skup $A$ nema najveći racionalan broj.

Pretpostavimo da je $q$ najmanji u $B$. Kako je $q \in B$, onda $q^2 > 2$, ili $q^2 - 2 > 0$. Stavimo

$$\bar{q} = q - \frac{q^2 - 2}{2q} = \frac{q}{2} + \frac{1}{q},$$

pa je $\bar{q} > 0$ i $\bar{q} < q$. Dokažimo da je $\bar{q} \in B$. Zaista, iz gornje jednakosti kvadriranjem dobijamo

$$\begin{aligned} \bar{q}^2 = \left(q - \frac{q^2 - 2}{2q}\right)^2 &= q^2 - (q^2 - 2) + \left(\frac{q^2 - 2}{2q}\right)^2\\ &> q^2 - (q^2 - 2) \qquad \left(\text{jer je} \left(\frac{q^2 - 2}{2q}\right)^2 \text{ veće od nule}\right)\\ &= 2. \end{aligned}$$

Dakle, $\bar{q}^2 > 2$, pa je $\bar{q} \in B$. Znači, racionalan broj $q$ nije najmanji u $B$.



Ovim smo, ujedno, dokazali da skup $Q$ nije potpun skup. Jer, skup $A$ je ograničen sa gornje strane ma kojim brojem skupa $B$, a skup $B$ nema najmanji racionalan broj.

Slično, kao u ovom primeru, uvode se proizvoljni preseci. Naime, svako razdvajanje skupa $Q$ racionalnih brojeva na dve neprazne klase $A$ i $B$, takve da je njihova unija ceo skup $Q$, i, pritom, svaki broj iz klase $A$ je manji od svakog broja iz klase $B$, zovemo *presek*. Presek označavamo $(A \mid B)$.

Navodimo još jedan primer preseka. Neka je $A$ skup svih racionalnih brojeva manjih od broja 5, a $B$ skup svih ostalih racionalnih brojeva. Tada je $(A \mid B)$ presek, što nije teško dokazati. Kod ovog preseka skup $B$ ima najmanji broj, a to je baš broj 5.

Uopšte, za proizvoljan presek $(A \mid B)$ može biti ispunjena jedna od sledećih mogućnosti:

1° klasa $A$ ima najveći broj, a klasa $B$ nema najmanji broj.

2° klasa $A$ nema najveći broj, a klasa $B$ ima najmanji broj.

3° niti klasa $A$ ima najveći, niti klasa $B$ ima najmanji broj.

Mogućnost da i klasa $A$ ima najveći broj i klasa $B$ ima najmanji broj je nemoguća. U tom slučaju, taj bi broj pripadao i klasi $A$ i klasi $B$ ili ne bi pripadao ni jednoj od klasa. Lako se u tom slučaju utvrđuje da klase $A$ i $B$ tada ne definišu presek.

Dakle, svi preseci skupa $Q$ dele se na dva tipa, i to: one kod kojih bar jedna klasa sadrži najveći, odnosno najmanji broj i — one kod kojih niti klasa $A$ sadrži najveći, niti klasa $B$ sadrži najmanji broj. Ta deoba preseka skupa $Q$ na dva tipa preseka je, očigledno, unutrašnja struktura skupa racionalnih brojeva $Q$ i, ta činjenica, potpuno bi ostala i u slučaju da ne pomišljamo na uvođenje bilo kakvih novih brojeva.

Da bi i u mogućnosti 3° imali, da klasa $A$ sadrži najveći broj ili klasa $B$ najmanji broj, primorani smo da uvedemo nove brojeve, tzv. *iracionalne*, koji će — po definiciji — biti ili najveći u klasi $A$ ili najmanji u klasi $B$.

Na taj način, pomoću tog principa, odmah definišemo ceo skup iracionalnih brojeva. Zajedno sa racionalnim brojevima, koje smo ranije upoznali, oni obrazuju skup svih realnih brojeva.

Drugim rečima, *realan broj* je presek (racionalnim brojevima zovemo preseke kod kojih su ispunjene mogućnosti 1° ili 2°, a iracionalnim brojevima one preseke kod kojih je ispunjena mogućnost 3°).

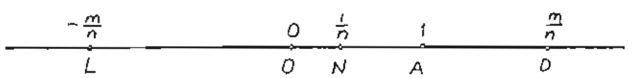
Iz ovih razmatranja nije teško utvrditi da je skup $R$ realnih brojeva potpun skup, tj. da svaki podskup skupa $R$ koji je ograničen odozgo ima supremum. Taj supremum može biti racionalan ili iracionalan broj.

Sada, kada smo izgradili skup realnih brojeva, treba da definišemo aritmetičke operacije sa realnim brojevima, jer, do sada, nemamo ni približnu predstavu šta znači, recimo, sabrati jedan racionalan i jedan iracionalan broj. Zatim, koji su zakoni ispunjeni za uvedene operacije u skupu $R$. Isto tako, treba da uredimo skup realnih brojeva, tj. da tačno definišemo kada ćemo smatrati jedan realan broj većim ili manjim od drugog. Kada bismo na sva ova pitanja odgovorili — to bi bilo vrlo zamašan posao. Zato prelazimo na savremenu definciju realnog broja, kojom se, između ostalog, sva ta pitanja tretiraju

Prethodno ćemo se upoznati sa uobičajenim predstavljanjem realnih brojeva na tzv. brojnoj pravoj.

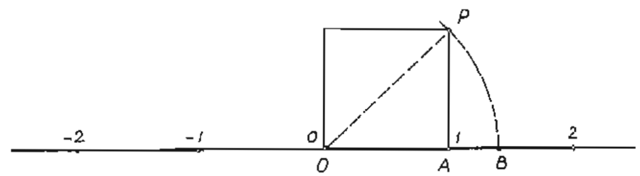
## 2. BROJNA PRAVA. (BROJEVNA OSA)

Uočimo pravu $l$. Odaberimo na toj pravoj dve različite tačke, $O$ i $A$, i pridružimo tački $O$ broj 0, a tački $A$ broj 1. Kažemo: tačke $O$ i $A$ su tačke brojeva redom 0 i 1. Izborom tih tačaka, pravu $l$ zovemo




Sl. 2

brojna prava ili brojna osa. Sada pokažimo da na brojnoj osi svakom racionalnom broju odgovara tačno po jedna tačka. Na primer, broju $\frac{1}{2}$ odgovara središte duži $OA$. Uopšte, racionalnom broju $\frac{1}{n}$ ($n$ je neki prirodan broj) odgovara tačka $N$ duži $OA$, takva da se duž $ON$ odnosi prema duži $OA$ kao 1 prema $n$. Racionalnom broju $\frac{m}{n}$, gde su $m$ i $n$ prirodni brojevi, odgovara neka tačka $D$, takva da se duž $ON$ odnosi prema duži $OD$ kao $1 : m$. Racionalnom broju $-\frac{m}{n}$, koji je suprotan broj broja $\frac{m}{n}$, odgovara tačka $L$ koja je simetrična sa tačkom $D$ u odnosu na tačku $O$. Tačke na pravoj $l$ koje odgovaraju racionalnim brojevima zovemo racionalne tačke. Na ovaj način svakom racionalnom broju možemo jednoznačno pridružiti racionalnu tačku prave $l$. Pozitivnim brojevima odgovaraju tačke brojevne ose koje se nalaze desno od tačke broja 0, a negativnim one koje su levo od tačke broja 0. Poznato nam je da se, između svaka dva racionalna broja nalazi treći, recimo između racionalnih brojeva $p$ i $q$ je racionalan broj $\frac{p+q}{2}$. Odatle imamo, da se između svaka dva različita racionalna broja nalazi beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Postavlja se pitanje: da li brojevna osa ima i drugih tačaka koje nisu racionalne tačke. Prema dokazanom, da merni broj dijagonale kvadrata nije racionalan broj, nije teško zaključiti da brojevna osa ima i tačaka koje nisu racionalne tačke. Tako




Sl. 3

tački $B$, gde je $\overline{OB} = \overline{OP}$ ($\overline{OP}$ je dijagonala kvadrata čija je stranica $\overline{OA}$), ne odgovara ni jedan racionalan broj. Takve tačke brojevne ose zovu se iracionalne tačke. Skupom racionalnih i skupom iracionalnih tačaka iscrpljene su sve tačke brojevne ose. Prema tome, svakom realnom broju odgovara samo jedna tačka brojevne ose i, obratno — svakoj tački brojevne ose odgovara samo jedan realan broj.

Prirodno nameće se pitanje: kojih tačaka na brojnoj osi ima više — racionalnih ili iracionalnih, što je ekvivalentno sa tim da li ima više racionalnih ili iracionalnih brojeva. Na to pitanje precizno je dala odgovor Teorija skupova (koja zauzima centralno mesto među matematičkim teorijama). Taj odgovor glasi: iracionalnih brojeva ima više.

## 3. AKSIOMI SKUPA REALNIH BROJEVA

Ovde ćemo pokazati kako se skup $R$ realnih brojeva može strogo definisati. Taj metod je aksiomatski, a sastoji se u sledećem: izdvoje se neke osobine realnih brojeva, neke formule koje zovemo aksiome, ali takve, da sve ostale osobine realnih brojeva možemo izvesti polazeći iz tako odabranih osobina (aksioma).

Pođimo od skupa $R$ na kome su definisane dve binarne operacije, sabiranje u oznaci $+$ i množenje u oznaci $\cdot$, kao i jedna binarna relacija u oznaci $\leqslant$. Sledeće osobine (formule) uzimamo za aksiome:

I osobine operacije $+$:

1. $(x+y)+z=x+(y+z)$ (za sve $x, y, z \in R$; asocijativnost)
2. Postoji element $0 \in R$, takav da je
   $x+0=0+x=x$ (za svaki $x \in R$; neutralni element)
3. Za svaki $x \in R$ postoji element $-x \in R$, takav da je
   $x+(-x)=0$ (suprotan element)
4. $x+y=y+x$ (za sve $x, y \in R$; komutativnost)

Svojstva 1—4 su svojstva da je $R$ u odnosu na operaciju $+$ *komutativna grupa*.

II osobine operacije $\cdot$:

5. $(x \cdot y) z=x \cdot(y \cdot z)$ (za sve $x, y, z \in R$; asocijativnost)
6. Postoji element $1 \neq 0$, takav da je
   $x \cdot 1=1 \cdot x=x$ (za svaki $x \in R$; jedinični element)
7. Za $x \neq 0$ postoji element $x^{-1}=\dfrac{1}{x} \in R$, takav da je
   $x \cdot \dfrac{1}{x}=1$ (inverzni (recipročan) element)
8. $x \cdot y=y \cdot x$ (za sve $x, y \in R$; komutativnost)

Svojstva 5—8 su svojstva da je $R \setminus \{0\}$ u odnosu na operaciju $\cdot$ *komutativna grupa*.

III veza između operacija $+$ i $\cdot$:

9. $x(y+z)=x \cdot y+x \cdot z$ (za sve $x, y, z \in R$; distributivnost)

Svojstva 1—9 su svojstva da je $R$ u odnosu na operacije $+$ i $\cdot$ *polje*.

IV osobine relacije $\leqslant$:

10. $x \leqslant x$ (za svaki $x \in R$; refleksivnost)
11. $x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x=y$ (antisimetričnost)



12. $x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$ (tranzitivnost)
13. $x \leqslant y \Rightarrow x+z \leqslant y+z$ (za svaki $z \in R$; monotonost)
14. $0 \leqslant x \wedge 0 \leqslant y \Rightarrow 0 \leqslant x \cdot y$

Svojstva 10—12 su svojstva da je $R$ *uređen skup* relacijom poretka.

Svojstva 1—14 su svojstva da je $R$ *uređeno polje*.

V osobina potpunosti:

15. Svaki podskup skupa $R$ ograničen odozgo ima supremum.

Svojstvo 15. je svojstvo da je $R$ *potpun skup*.

Sada možemo da definišemo realne brojeve.

**Definicija.** Skup $R$ zove se *skup realnih brojeva*, a njegovi elementi realni brojevi, ako $R$ ima sledeća svojstva:

(a) $R$ je uređeno polje,

(b) $R$ je potpun skup.

## UOPŠTENJE POJMA STEPEN. KORENOVANJE

Za stepene čiji su izložioci celi brojevi

$$a^1 \stackrel{\text{def}}{=} a, \quad a^{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} a^n \cdot a \quad (n \in N)$$

$$a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1 \quad (a \neq 0), \quad a^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a} \quad (a \neq 0)$$

znamo da su ispunjeni sledeći zakoni

$$a^p \cdot a^q=a^{p+q}, \qquad a^p : a^q=a^{p-q} \ (a \neq 0)$$

$$(a^p)^q=a^{pq}, \qquad (a \cdot b)^p=a^p \cdot a^p,$$

gde su $p$ i $q$ celi brojevi, i pritom, ako je izložilac negativan, onda je osnova $a \neq 0$.

Kako su ti zakoni posledice aksioma polja, oni tada važe i u polju realnih brojeva, tj. ispunjeni su i kada su $a$ i $b$ realni brojevi.

Sada ćemo se upoznati sa stepenima čiji su izložioci racionalni brojevi.

U problemu dijagonale kvadrata koji se, inače, svodi na razmatranje rešivosti jednačine

$$x^2 = 2$$

videli smo da postoji realan broj $x$ koji je rešenje te jednačine. Dokazuje se da postoji samo jedan takav pozitivan broj i taj pozitivan broj označavamo $2^{\frac{1}{2}}$, ili $\sqrt{2}$ (Čitati: dva na jednu polovinu, odnosno, kvadratni koren iz dva). Znači

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2 \quad \text{tj.} \quad (\sqrt{2})^2 = 2.$$

Uopšte, slično se dokazuje da za proizvoljan realan broj $a > 0$ i proizvoljan prirodan broj $n$ i ceo broj $m$, postoji jedan i samo jedan pozitivar realan broj $x$ takav, da je

$$x^n = a^m.$$

Taj broj $x$ označavamo $a^{\frac{m}{n}}$ ili $\sqrt[n]{a^m}$.

Dakle, ispunjeno je

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m \quad \text{tj.} \quad (\sqrt[n]{a^m})^n = a^m,$$

jer je broj $a^{\frac{m}{n}}$ tj. $\sqrt[n]{a^m}$ rešenje jednačine $x^n = a^m$.

Pošto smo ovde za jedan isti broj upotrebili dve oznake, to uvodimo defniciju

**Definicija.** Neka je $m$ ceo broj a $n$ prirodan broj i neka je $a > 0$, tada

$$a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}.$$

Postavlja se pitanje: da li se sa tim novim stepenima, tj. sa stepenima čiji su izložioci racionalni brojevi, računa kao i sa starim. Da li je, recimo,

$$3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}, \quad \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{7}} = 2^{\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}} \quad \text{i sl.}$$

Na to pitanje potvrdan odgovor daje sledeća teorema



**Teorema.** Neka su $a$ i $b$ pozitivni realni brojevi, $p$ i $r$ celi brojevi, a $q$ i $s$ prirodni brojevi. Tada

(a) $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Rightarrow a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{r}{s}}$; (b) $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$; (c) $a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$

(d) $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}$; (e) $(ab)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$; (f) $(a:b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} : b^{\frac{p}{q}}$

*Dokaz.* U dokazu se koristi formula $A = B \Leftrightarrow A^n = B^n$ $(n \in N)$, $A > 0$, $B > 0$, kao i jednakost oblika $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$ koja sleduje iz definicije broja $a^{\frac{m}{n}}$.

(a) Neka je $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ tada je $ps = rq$. Tada

$$\begin{aligned}
a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{r}{s}} &\Leftrightarrow \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qs} = \left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{qs} \\
&\Leftrightarrow \left(\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q\right)^s = \left(\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^s\right)^q \\
&\Leftrightarrow (a^p)^s = (a^r)^q \\
&\Leftrightarrow a^{ps} = a^{rq} \\
&\Leftrightarrow a^{ps} = a^{ps} \qquad (\text{jer je } ps = rq)
\end{aligned}$$

Kako je desna strana ove ekvivalencije tačna, to je i leva tačna, pa je time dokaz završen.

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \quad a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} &\Leftrightarrow a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps+rq}{qs}} \\
&\Leftrightarrow \left(a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}}\right)^{qs} = \left(a^{\frac{ps+rq}{qs}}\right)^{qs} \\
&\Leftrightarrow \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qs} \cdot \left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{qs} = a^{ps+rq} \qquad (\text{jer je } qs \in N) \\
&\Leftrightarrow a^{ps} \cdot a^{rq} = a^{ps+rq}
\end{aligned}$$

Kako je desna strana ove ekvivalencije tačna formula, jer su izložioci u njoj celi brojevi, to je i leva strana ekvivalencije tačna. Time je dokaz završen.

Dokazi formula pod (c), (d), (e), (f) su slični prethodnim, pa čitalac može i sam dokazati. Ideja dokaza je: obrazovati $qs$-ti stepen, odnosno $q$-ti.

Vratimo se ponovo definiciji stepena sa racionalnim izložiocem. Znamo da jednačina, recimo,

$$x^n = a \quad (n \in N)$$

za $a > 0$ ima rešenje i to:

1° za $n$ *neparan* broj, samo jedno pozitivno rešenje $\sqrt[n]{a}$, jer, ako bi neko rešenje bilo negativno, tada taj negativan broj, stepenovan neparnim prirodnim brojem, ostaje negativan broj, pa bi leva strana jednačine $x^n = a$ bila negativan broj, a desna pozitivan, što je nemoguće.

2° za $n$ *paran* broj, dva rešenja, jedno pozitivno $\sqrt[n]{a}$ i jedno negativno $-\sqrt[n]{a}$. Zaista,

$$(-\sqrt[n]{a})^n = (-1)^n \cdot (\sqrt[n]{a})^n = (\sqrt[n]{a})^n = a,$$

jer je $(-1)^n = 1$ zbog toga što je $n$ paran broj.

Na primer, jednačina $x^3 = 5$ ima jedinstveno rešenje $\sqrt[3]{5}$. Jednačina $x^2 = 3$ ima dva rešenja i to $\sqrt{3}$ i $-\sqrt{3}$. Takođe, jednačina

$$x^4 = \frac{3}{2} \text{ ima dva rešenja } \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \text{ i } -\sqrt[4]{\frac{3}{2}}.$$

Ako je $a < 0$, onda jednačina

$$x^n = a \quad (n \in N)$$

ima rešenja i to jedinstveno negativno rešenje, samo ako je $n$ *neparan* broj. Zaista, množeći sa $-1$ obe strane te jednačine, dobijamo

$$-x^n = -a \Leftrightarrow (-x)^n = -a.$$

Kako je sada $-a > 0$, to ta jednačina ima samo jedno pozitivno rešenje, po $-x$ a to je $-x = \sqrt[n]{-a}$ tj. $x = -\sqrt[n]{-a}$.



Na primer, jedinstveno rešenje jednačine

$$x^3 = -8$$

je $$x = -\sqrt[3]{-(-8)} = -\sqrt[3]{8}.$$

Najzad, ako je $a = 0$, jednačina

$$x^n = a \quad (n \in N)$$

postaje

$$x^n = 0$$

i broj 0 je njeno jedinstveno rešenje.

Ako radimo sa realnim brojevima u oznaci $\sqrt[n]{a}$ $(a > 0,\ n \in N)$, tj. sa tzv. korenima, onda su osnovne formule za operisanje sa takvim brojevima sledeće:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

(gde su $a > 0$, $b > 0$ i $m$, $n$, $p$ prirodni brojevi)

Ove formule se neposredno izvode korišćenjem definicije i teoreme o stepenima sa racionalnim izložiocima. Na primer, dokažimo tačnost prve i četvrte formule.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab},$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = (\sqrt[m]{a})^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[nm]{a}.$$

Ostale formule se slično izvode.

## NEKI REŠENI ZADACI

1. Broj $\sqrt[3]{8}$ je jedino rešenje jednačine $x^3 = 8$. Kako je $2^3 = 8$, to je

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

zbog toga što jednačina $x^3 = 8$ ima samo jedno rešenje. Da je to tačno, vidimo i iz sledećeg rasuđivanja

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2.$$

Uopšte,

$$\sqrt[n]{a^n} = a \qquad (a > 0).$$

Recimo, $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt{64} = 8$, $\sqrt[3]{3^6} = 3^2 = 9$, $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$.

2. Izračunati:

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{3}$$

Iz osnovnih formula za korene kako se množe koreni istih izložioca. Koristeći poslednju formulu od tih osnovnih, dobijamo

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3\cdot5]{2^5} = \sqrt[15]{2^5}, \qquad \sqrt[5]{3} = \sqrt[5\cdot3]{3^3} = \sqrt[15]{3^3},$$

pa je

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{3^3} = \sqrt[15]{2^5 \cdot 3^3} = \sqrt[15]{32 \cdot 27} = \sqrt[15]{864}.$$

Uopšte:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[mn]{a^m} \cdot \sqrt[mn]{b^n} = \sqrt[mn]{a^m \cdot b^n}.$$

Specijalno,

$$2 \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}.$$



3. Uprostiti izraz:

$$1 + \sqrt{8} + 3\sqrt{50} - \sqrt{18} + 2\sqrt{32}.$$

*Rešenje*

$$\begin{aligned}1 + \sqrt{8} + 3\sqrt{50} - \sqrt{18} + 2\sqrt{32} &= 1 + \sqrt{2^2 \cdot 2} + 3\sqrt{5^2 \cdot 2} - \sqrt{3^2 \cdot 2} + 2\sqrt{4^2 \cdot 2}\\ &= 1 + 2\sqrt{2} + 3 \cdot 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2 \cdot 4\sqrt{2}\\ &= 1 + 2\sqrt{2} + 15\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2}\\ &= 1 + (2 + 15 - 3 + 8)\sqrt{2}\\ &= 1 + 22\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Koristili smo formulu $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a\sqrt[n]{b}$, kao i komutativan zakon

$$p\sqrt{2} + q\sqrt{2} = (p+q)\sqrt{2}.$$

4. Obaviti naznačene operacije:

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}} : \sqrt[12]{a} \qquad (a > 0)$$

*Rešenje*

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}} : \sqrt[12]{a} &= \sqrt[5]{\sqrt[3\cdot4]{a^{2\cdot4}} \cdot \sqrt[4\cdot3]{a^{3\cdot3}}} : \sqrt[12]{a}\\ &= \sqrt[5]{\sqrt[12]{a^8} \cdot \sqrt[12]{a^9}} : \sqrt[12]{a}\\ &= \sqrt[5]{\sqrt[12]{a^8 \cdot a^9}} : \sqrt[12]{a}\\ &= \sqrt[5]{\sqrt[12]{a^{17}}} : \sqrt[12]{a}\\ &= \sqrt[60]{a^{17}} : \sqrt[12]{a}\end{aligned}$$

$$= \sqrt[60]{a^{17}} : \sqrt[12 \cdot 5]{a^5}$$

$$= \sqrt[60]{a^{17}} : \sqrt[60]{a^5}$$

$$= \sqrt[60]{a^{17} : a^5}$$

$$= \sqrt[60]{a^{12}}$$

$$= \sqrt[5 \cdot 12]{a^{12}}$$

$$= \sqrt[5]{a}.$$

5. Poznato je da je $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ (iracionalan broj, decimalan razvitak mu je beskonačan i neperiodičan).

Ako imamo

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 : 1{,}4142\ldots,$$

tada je deljenje prilično teško obaviti. Da li se može izbeći takvo deljenje, na taj način što bi našli novi razlomak jednak sa $1/\sqrt{2}$, ali da u imeniocu bude racionalan broj? Može ako se koristi jedno važno svojstvo razlomaka

$$a, b, c \in R,\ c \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

Dakle,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Prema tome,

$$1 : 1{,}4142\ldots = 1{,}4142\ldots : 2.$$

Problemi takve vrste zovu se problemi *racionaljenja imenioca.* Na primer, racionaliti imenioce kod sledećih razlomaka

$$\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}},\quad \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}},\quad \frac{1}{2\sqrt{3} + 3}.$$



*Rešenje*

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$$

Uopšte,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{1 \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a} \quad (a > 0,\ n \in N)$$

Kod ostala dva razlomka koristimo se razlikom kvadrata

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})\,(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b.$$

Prema tome,

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})\,(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{1} = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3} + 3} = \frac{1 \cdot (2\sqrt{3} - 3)}{(2\sqrt{3} + 3) \cdot (2\sqrt{3} - 3)} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{(2\sqrt{3})^2 - 3^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} - 3}{4 \cdot 3 - 9} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3}.$$

# ELEMENTI NUMERIČKE ANALIZE

## 1. UVOD

Osnovni cilj numeričke analize razrada metoda koje dovode matematička ispitivanja do numeričkih rezultata. U primenama matematičkih dostignuća baš ta, numerička izražavanja, igraju jednu od najznačajnijih uloga. Napomenimo da se sredstva kojima se numerička analiza služi razvijaju u drugim matematičkim disciplinama: aritmetici, algebri, metamtičkoj analizi i dr. (uključujući mehaničke i elektronske računske mašine).

U ovoj glavi izložićemo samo neke elemente ove teorije, tako važne za praktičnu primenu.

Osnovni skup numeričke analize jeste skup realnih brojeva, s tim što se ne koriste svi članovi tog skupa već samo neki. To dolazi iz prirode praktičnih problema. U primenama matematike retko se srećemo sa tačnim brojnim vrednostima kao mere neke veličine, već samo sa približnim vrednostima. Verovatno ste zapazili (a sigurno i posumnjali u apsolutnu tačnost ovakvih izreka): „Brzina svetlosti je 300000 km/sec", „Poluprečnik zemlje je 6378 km" itd.

Merenjem raznih veličina utvrđujemo njihov merni broj. Ta merenja, bez obzira što ih možemo izvoditi i sa najpreciznijim spravama, ne mogu biti apsolutno tačna. Dakle, merenjem dolazimo do brojeva koji su samo približni merni brojevi tačnih mernih brojeva tih veličina. U primenama matematike radimo sa ovakvim približnim brojevima, pa se sa „strogim" jednakostima operiše vrlo retko. U velikoj meri koriste se nejednakosti, tj. umesto tačnih formula upotrebljavamo približne formule. Ta činjenica, sa svoje strane, ukazuje na potrebu logičkog rasuđivanja.

U procesu približnih izračunavanja sa brojevima zaokrugljenim do određenog broja cifara, narušavaju se i takvi zakoni aritmetike kao što su $(x+y)z = xz + yz$, $(xy)z = x(yz)$ i dr.



*Primer.* Neka je

$$A = (3 - 2\sqrt{2})^2 = 17 - 12\sqrt{2}.$$

Izračunati broj $A$ na dva načina — uzimajući za tačan broj $\sqrt{2} = 1,21241..$ redom njegove približne vrednosti 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142.

*Rešenje.* Rezultati izračunavanja pregledno su dati sledećom tablicom

| $\sqrt{2}$ | $(3-2\sqrt{2})^2$ | $17-12\sqrt{2}$ |
|---|---|---|
| 1,4 | 0,04 | 0,2 |
| 1,41 | 0,0324 | 0,08 |
| 1,414 | 0,029584 | 0,032 |
| 1,4142 | 0,02944656 | 0,0296 |

Iz tablice vidimo da se rezultati po kolonama razlikuju i da je najmanja razlika kod približnog broja sa najvećim brojem decimalnih mesta. Ipak, nije nam jasno koji od tih rezultata je „bliži" tačnoj vrednosti. S tim ćemo se upoznati kasnije.

## 2. PRIBLIŽNE VREDNOSTI BROJEVA

Merenjem nekih veličina dolazimo do približnih brojeva. S druge strane mi, i umesto tačnih brojeva, uzimamo njihove približne brojeve ukoliko postavljeni problem to zahteva. Na primer, ako hoćemo da izračunamo obim kruga poluprečnika $r = 4$ m u decimalnom brojnom sistemu, moramo se zadovoljiti približnom vrednošću broja $\pi$. Znamo da broj $\pi$ ima beskonačno mnogo decimalnih mesta, tj. $\pi = 3,1415926536\ldots$ Kako je $O = 2r\pi$, gde je $O$ oznaka za obim kruga čiji je poluprečnik $r$, ako za $\pi$ uzmemo $\pi \approx 3,14$ (čitati: $\pi$ približno jednako 3,14), dobijamo $O \approx 2 \cdot 4 \cdot 3,14 = 25,12$ m. Da smo za broj $\pi$ uzeli $\pi \approx 3,1415$, imali bismo $O = 25,1320$ m. Dobijeni rezultat, i u jednom i u drugom slučaju, približna je vrednost obima kruga, bez obzira da li je broj $r$ približna ili tačna vrednost.

## 3. GREŠKA — APSOLUTNA, RELATIVNA, PROCENTUALNA

1. **Pojam greške.** Za tačan broj $a$ nije jednoznačno određen njegov približan broj. Slobodno možemo reći da je svaki realan broj približan broj broja $a$. Na primer, broju $\sqrt{3} = 1,7321\ldots$ su približni

brojevi 1,7; 1,73; 1,732; 534; — 7843; itd. S obzirom na tu činjenicu, nameće se potreba za uvođenjem matematičke karakteristike približnog broja, kao što su: apsolutna i relativna greška, gornja granica apsolutne i relativne greške, procentualna greška.

Ako sa $a$ označimo tačan broj, a sa $a'$ njegov približan broj, tada razliku $a - a'$ zovemo *greška* približnog broja $a'$.

Ako je $a' < a$, greška je pozitivna i kažemo da smo brojem $a'$ *podbacili* broj $a$. Ako je $a < a'$, greška je negativna i kažemo da smo brojem $a'$ *prebacili* broj $a$.

*Primer.* Neka je $a = 3{,}452$ tačan broj, $a' = 3{,}45$ njegov približan broj, tada je $a - a' = 3{,}452 - 3{,}45 = 0{,}002$, pa broj 3,45 podbacuje broj $a$. Ako je $a' = 3{,}46$ približan broj broja $a$, onda je u ovom slučaju greška $a - a' = 3{,}452 - 3{,}46 = -0{,}012$, pa broj 3,46 prebacuje tačan broj $a$.

U mnogim slučajevima neće biti od praktičnog značaja poznavanje znaka greške, zato se uvodi apsolutna greška.

**Definicija apsolutne greške.** Pod apsolutnom greškom podrazumevamo apsolutnu vrednost razlike tačnog broja $a$ i njemu približnog broja $a'$. Označavamo je $\Delta a'$ (čitati: delta a prim)*. Kraći prevod:

$$\Delta a' \overset{\text{def}}{=} |a - a'|.$$

Na primer, neka je $a = 4{,}563$, $a' = 4{,}57$, tada

$$\Delta a' = |a - a'| = |4{,}563 - 4{,}57| = |-0{,}007| = 0{,}007.$$

Pojam apsoltne greške ima uglavnom teorijski značaj, jer se, praktično, apsolutna greška ne može odrediti s obzirom da nećemo poznavati tačnu vrednost broja $a$. Zato, umesto apsolutne greške, praktično je moguće odrediti granice u kojima se apsolutna greška nalazi. Za praktičan slučaj još je bolje odrediti gornju granicu apsolutne greške (koju ćemo označiti sa $Aa'$).

**Definicija gornje granice apsolutne greške.** Gornja granica apsolutne greške je svaki broj od koga nije veća apsolutna greška približnog broja $a'$, tj.

$$|a - a'| \leqslant Aa'.$$

*) Pazite: simbol $\Delta a'$ ne znači proizvod simbola $\Delta$ i $a'$, već zajedno čini jedan simbol!



Kada znamo gornju granicu apsolutne greške $Aa'$ približnog broja $a'$, tada se tačan broj $a$ nalazi između približnih brojeva $a' - Aa'$ i $a' + Aa'$, tj.

$$a' - Aa' \leqslant a \leqslant a' + Aa'.$$

Imamo: da približan broj $a' - Aa'$ podbacuje broj $a$, a približan broj $a' + Aa'$ prebacuje tačan broj $a$.

Jasno, gornja granica apsolutne greške nije jedinstvena. Ako je određena jedna $Aa'$, tada je i svaki broj veći od $Aa'$ takođe gornja granica apsolutne greške. Podsetimo se da je skup realnih brojeva *potpun* skup. Prema tome, postoji najmanja gornja granica apsolutne greške, ali je i njeno određivanje (nalaženje) praktično u većini slučajeva, vrlo teško.

Ostaje nam da odredimo što je moguće manju gornju granicu apsolutne greške. Način određivanja takve gornje granice zovemo *procena* greške.

*Primer 1.* Neka je $a = \sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$ i $a' = 1{,}414$, tada je

$$|a - a'| = |1{,}4142135\ldots - 1{,}414| = 0{,}0002135\ldots < 0{,}001.$$

Možemo uzeti $Aa' = 0{,}001$, pa je $1{,}413 < \sqrt{2} < 1{,}415$.

*Primer 2.* Neka je $a = 3{,}42785\ldots$ i $a' = 3{,}4$. Imamo

$$|a-a'| = |3{,}42785\ldots - 3{,}4| = 0{,}02785\ldots < 0{,}028 < 0{,}03 < 0{,}04 < 0{,}05, \text{itd.}$$

Prema tome, možemo uzeti bilo koji od brojeva 0,028; 0,03; 0,04; 0,05; za gornju granicu apsolutne greške približnog broja 3,4. Očigledno je da broj 0,028, od svih pomenutih kandidata za gornju granicu apsolutne greške, najbolje karakteriše bliskost približnog broja 3,4 i tačnog broja 3,42785... Prema tome, uzimamo $Aa' = 0{,}028$.

Da bismo jasno istakli gornju granicu apsolutne greške $Aa'$ približnog broja $a'$, označavaćemo uslovno tačan broj $a$ sa

$$a = a' \pm Aa'.$$

Čitamo: broj $a'$ je dat sa tačnošću do $Aa'$.

*Napomena.* Ako nam je dat neki broj i za njega znamo da je približan broj dobijen nekim merenjem ili sl. i znamo samo tu informaciju, od takve informacije nećemo imati mnogo koristi. Od bitnog značaja je uvek kada znamo i neku matematičku karakteristiku (bliskosti) toga broja sa tačnim brojem, kao, na primer, gornju granicu apsolutne greške.

2. Postavlja se pitanje: Da li je dovoljno za rad sa približnim brojevima poznavanje samo gornje granice apsolutne greške?

U rasuđivanju koje ćemo sada navesti jasno se vidi da samo poznavanje gornje granice apsolutne greške nije dovoljno. Ako merimo jednu istu veličinu više puta, a za svako merenje je utvrdena gornja granica apsolutne greške, onda je ono merenje bolje za koje je najmanja gornja granica apsolutne greške. Ali, ako merimo *različite veličine*, stvari stoje drugačije. Na primer, ako smo merenjem dužina $a$ i $b$ dobili

$$a = 1\text{ m} \pm 0{,}5\text{ sm}, \quad b = 100\text{ m} \pm 1\text{ sm},$$

to ne znači da smo dužinu $a$ merili tačnije i ako je gornja granica apsolutne greške dva puta manja od gornje granice apsolutne greške merene dužine $b$. U stvari, greška učinjena po jedinici merenja u slučaju za $a$ mnogo puta je veća nego u slučaju merenja za $b$. Po jednom metru greška je, u slučaju za $a$, jednaka 0,5 sm, a, u slučaju za $b$, $\frac{1\text{ sm}}{100} = 0{,}01$ sm. Dakle, merenje dužine $b$ je 50 puta tačnije od merenja dužine $a$. Zato se uvodi *relativna greška* približnog broja $a'$.

**Definicija relativne greške.** Relativna greška približnog broja $a'$ je količnik apsolutne greške približnog broja $a'$ i njegove apsolutne vrednosti. Označavamo je $\delta a'$ (čitati: delta a prim)*.

Kraći prevod: $$\delta a' \overset{\text{def}}{=} \frac{|a - a'|}{|a'|} = \frac{\Delta a'}{|a'|}.$$

Iz definicije relativne greške vidimo da je ona neimenovan broj. Dakle, pomoću relativne greške mogu se upoređivati po kvalitetu merenja i veličine različite vrste (recimo — jedne dužine, jedne težine, jedne zapremine i dr.)

Iz istih razloga (kao i kod apsolutne greške) uvodimo *gornju granicu relativne greške* približnog broja, koju označavamo sa $Ra'$.

**Definicija gornje granice relativne greške.** Gornja granica relativne greške je svaki broj od koga nije veća relativna greška približnog broja $a'$, tj.

$$\delta a' = \frac{|a - a'|}{|a'|} \leqslant Ra'.$$

Kako iz definicije gornje granice relativne greške sleduje $|a - a'| \leqslant |a'|\, Ra'$, to, slično kao i kod gornje granice apsolutne

*) I ovde, kao za apsolutnu grešku simbol $\delta a'$ ne označava proizvod simbola $\delta$ i simbola $a'$.



greške, imamo: da se tačan broj $a$ nalazi između približnih brojeva $a' - |a'|\, Ra'$ i $a' + |a'|\, Ra'$, tj.

$$a' - |a'|\, Ra' \leqslant a \leqslant a' + |a'|\, Ra',$$

što uslovno, možemo označavati tačan broj $a$ na sledeći način

$$a = a' \pm |a'|\, Ra'.$$

Gornja granica relativne greške takođe, nije jedinstven broj, pa sve što smo rekli o tome za gornju granicu apsolutne greške važi i ovde.

*Primer.* Izračunajmo gornje granice relativnih grešaka za prethodno pomenuti slučaj merenja veličina

$$a = 1\text{ m} \pm 0{,}5\text{ sm}, \quad b = 100\text{ m} \pm 1\text{ sm}.$$

*Rešenje.* Za veličinu $a$ imamo

$$Ra' = \frac{0{,}5\text{ sm}}{1\text{ m}} = \frac{0{,}005}{1} = 0{,}005.$$

Za drugu merenu veličinu, biće

$$Rb' = \frac{1\text{ sm}}{100\text{ m}} = \frac{0{,}01}{100} = 0{,}0001.$$

Prema tome, vidimo da je za merenu veličinu $b$ gornja granica relativne greške manja. Ranije smo utvrdili da je to merenje bilo bolje.

Možemo izvesti zaključak: da je gornja granica relativne greške merilo (karakteristika) kvaliteta merenja više različitih veličina; što je ona manja, kvalitet merenja je bolji.

3. U praktičnim primenama obično ćemo imati posla sa malom apsolutnom greškom (gornjom granicom apsolutne greške). Kako se relativna greška (gornja granica relativne greške) dobija, što se apsolutna greška (gornja granica apsolutne greške) podeli sa apsolutnom vrednošću približnog broja, to će relativna greška (gornja granica relativne greške) biti još manja. Radi preglednosti uvodi se procentualna greška. Označavamo je $p\%$ (Čitati: pe posto).

**Definicija procentualne greške.** Relativnu grešku (gornju granicu relativne greške) približnog broja pomnoženu sa 100 zovemo procentualna greška (gornja granica procentualne greške) približnog broja.

Kraći prevod:

$$p\% \overset{\text{def}}{=} 100 \cdot \delta a'\%, \quad \text{odnosno} \quad 100 \cdot Ra'\%.$$

Na primer, gornje granice relativnih grešaka iz prethodnog primera su bile $Ra' = 0{,}005$; $Rb' = 0{,}0001$, to su približnih brojeva $a'$, $b'$ gornje granice procentualnih grešaka redom

$$100 \cdot 0{,}005\% = 0{,}5\%, \quad 100 \cdot 0{,}0001\% = 0{,}01\%.$$

Prednost procentualne greške je u tome što se zapisuje sa manje cifara (decimalnih mesta). Inače, ima sve osobine relativne greške.

*Rezime*

— Matematičke karakteristike približnog broja su: apsolutna, relativna i procentualna greška, kao i njihove gornje granice greške.
— Apsolutna greška, gornja granica apsolutne greške je merilo kvaliteta merenja iste veličine.
— Relativna greška, gornja granica relativne greške je merilo kvaliteta merenja više različitih veličina.

## REŠENI ZADACI

1. Odrediti gornje granice apsolutne, relativne i procentualne greške, ako umesto broja $\pi = 3{,}14159265\ldots$ uzmemo njemu približan broj $\frac{22}{7}$.

*Rešenje.* Označimo redom sa $A$, $R$ i $p\%$ gornje granice apsolutne, relativne i procentualne greške približnog broja $\frac{22}{7}$. Tada

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| = |3{,}14159256\ldots - 3{,}142857\ldots|$$
$$= |-0{,}001264\ldots| < 0{,}001265.$$

Možemo staviti $A = 0{,}001265$.

Kako je

$$\frac{0{,}001264\ldots}{3{,}142857} < \frac{0{,}001265}{3{,}142857} < 0{,}00041,$$

možemo staviti $R = 0{,}00041$. Gornja granica procentualne greške je $p\% = 0{,}041\%$.

2. Merenjem veličina $a$, $b$, $c$ dobili smo $a = 54\text{ m} \pm 1\text{ sm}$, $b = 86384\text{ m} \pm 12\text{ sm}$, $c = 0{,}2\text{ m} \pm 0{,}001\text{ sm}$. Utvrditi koja je veličina najbolje merena.



*Rešenje.* Približni brojevi i njihove gornje granice apsolutneh grešaka su: $a' = 54$ m, $Aa' = 0{,}01$ m; $b' = 86384$ m, $Ab' = 0{,}12$ m; $c' = 0{,}2$ m; $Ac' = 0{,}00001$ m. Za njihove gornje granice relativnih grešaka dobijamo $Ra' = 0{,}00012$, $Rb' = 0{,}000002$, $Rc' = 0{,}00005$, odakle zaključujemo da je veličina $b = 86384\text{ m} + 12\text{ sm}$ najbolje merena, jer je gornja granica relativne greške za tu veličinu najmanja.

## 4. ZNAČAJNE CIFRE PRIBLIŽNOG BROJA. ZAOKRUGLJIVANJE BROJEVA

1. U numeričkoj analizi, kao što smo već rekli, ne radimo sa svim članovima skupa realnih brojeva, već samo sa nekim. Postavlja se pitanje: koji je taj podskup?

Da bi odgovorili na to pitanje, upoznajmo se sa jednim načinom predstavljanja realnog broja u nekom brojnom sistemu. Odlučujemo se za dekadni* brojni sistem.

Poznato nam je da svakom realnom broju $a$ odgovara konačan ili beskonačan decimalni razvitak. Na primer,

$$\frac{25}{2} = 14{,}5 = 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1};$$
$$-508 = -(5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0)$$
$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots = 1 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4} + \ldots$$
$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3} = 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + \ldots$$

Uopšte, svaki realan broj $a$ može se predstaviti u obliku:

$$a = \pm(\alpha_1 10^n + \alpha_2 10^{n-1} + \ldots + \alpha_k 10^{n-k+1} + \ldots + \alpha_m 10^{n-m+1} + \ldots),$$

(gde su $\alpha_i$ — celi nenegativni brojevi, $0 \leqslant \alpha_i < 10$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, $n$, $m$ i $k$ su celi brojevi).

Brojeve $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ zovemo cifre broja $a$. Ako broj $a$ ima konačan (beskonačan) broj cifara, to je gornji zbir koji odgovara broju $a$ konačan (beskonačan).

Ako je $a \neq 0$, onda je $\alpha_1 \neq 0$.

*) Za osnovu brojnog sistema može se uzeti bilo koji prirodan broj $p$. Ako je $p = 10$, onda se takav brojni sistem zove *dekadni*. Ako je $p = 2$, zove se *dijadski*. Za $p = 3$, *trijadski* itd. Računske mašine, uglavnom, koriste predstavljanje brojeva u dijadskom brojnom sistemu.

U navedenim primerima, za broj 14,5 je $\alpha_1 = 1$, $n = 1$; za broj $-508$ je $\alpha_1 = 5$, $n = 2$; za broj $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ je $\alpha_1 = 1$, $n = 0$; za broj 0,3 je $\alpha_1 = 3$, $n = -1$.

Sada možemo odgovoriti na postavljeno pitanje. Smatraćemo za članove (brojeve) tog podskupa samo one koji imaju **konačan** broj cifara, tj. one koji se mogu predstaviti u obliku konačnog zbira

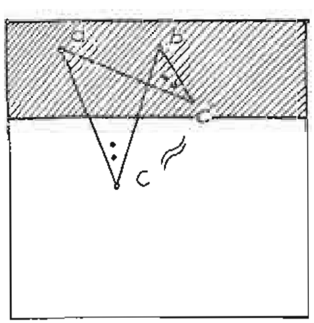
$$\pm(\alpha_1 10^n + \alpha_2 10^{n-1} + \ldots + \alpha_k 10^{n-k+1} + \ldots + \alpha_m 10^{n-m+1}).$$

Ovakvo predstavljanje brojeva sa konačnim brojem cifara je jednoznačno. Prema tome, brojevi traženog podskupa (zvaćemo ga *osnovni podskup*) su samo oni racionalni brojevi koji imaju konačan broj cifara.

Može se dogoditi da rezultati računanja sa brojevima iz osnovnog podskupa imaju beskonačan ili vrlo veliki broj cifara. U tom slučaju, rezultat zamenjujemo nekim brojem iz našeg osnovnog podkupa. Prirodno je izabrati „najbliži" broj tog podskupa.

*Primer*. Neka su $a = 2{,}071$ i $b = 3$ brojevi osnovnog podskupa. Broj koji je rezultat deljenja broja $a$ sa brojem $b$ neka je broj $c$, tj.

$$\frac{a}{b} = \frac{2{,}071}{3} = 0{,}690333\ldots = 0{,}6903 = 6\cdot 10^{-1} + 9\cdot 10^{-2} + $$
$$+ 0\cdot 10^{-3} + 3\cdot 10^{-4} + \ldots = c.$$




Sl. 4

Iz dobijenog rezultata vidimo da broj $c$ nije član osnovnog podskupa. (Na slici osnovni podskup nacrtan je izšrafirano). Sada treba uzeti umesto broja $c$ neki broj iz osnovnog podskupa. Praktično, uzima se broj koji je predstavljen konačnim zbirom i koji je „najbliži" broju $c$. Recimo, ako želimo da broj kojim zamenjujemo broj $c$ ima četiri sabirka (cifara), onda uzimamo broj

$$c \approx c' = 6\cdot 10^{-1} + 9\cdot 10^{-2} + 0\cdot$$
$$\cdot 10^{-3} + 3\cdot 10^{-4} = 0{,}6903.$$

2. Iz navedenog primera nije jasno koliki broj cifara treba uzeti u zamenjenom približnom broju, kao ni to, da li se te cifre poklapaju sa ciframa broja $c$. Ovde ćemo i na ta pitanja dati odgovor. Prethodno uvedimo pojam značajne cifre.



Neka je dat približan broj $x' \neq 0$

$$x' = \pm(\alpha_1 10^n + \alpha_2 10^{n-1} + \ldots + \alpha_k 10^{n-k+1} + \ldots +$$
$$+ \alpha_m 10^{n-m+1}) \qquad (\alpha_1 \neq 0)$$

koji odgovara tačnom broju $x$.

**Definicija značajne cifre**. Za cifru $\alpha_k$ približnog broja $x'$ kažemo da je značajna cifra ako je ispunjeno

$$|x - x'| \leqslant \frac{1}{2}\cdot 10^{n-k+1}, \quad \text{odnosno} \quad Ax' \leqslant \frac{1}{2}\cdot 10^{n-k+1}.$$

Ako je $\alpha_k$ značajna cifra, tada su i sve cifre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ približnog broja $x'$ značajne cifre.

Značajne cifre približnog broja $x'$ služe nam za preciziranje (bliskosti) tačnosti sa kojom tačan broj $x$ zamenjujemo približnim brojem $x'$.

*Primer 1*. Neka je $x = \pi = 3{,}14159265\ldots$ Ako je $x' = 3{,}1415$, onda je $|x - x'| = |3{,}14159265\ldots - 3{,}1415| = 0{,}00009265 < 0{,}0005 = 0{,}5\cdot 10^{-3} = \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$. Možemo staviti $Ax' = \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$, pa je $n - k + 1 = -3$. Kako je $n = 0$ za približan broj $x'$, to je $k = 4$, tj. približan broj 3,1415 ima četiri značajne cifre, a to su 3, 1, 4, 1. Poslednja cifra 5 nije značajna (ma da je to tačna cifra broja $\pi$).

Ako je $x' = 3{,}14159$, onda je

$$|x - x'| = 0{,}00000265 < 0{,}000005 = 0{,}5\cdot 10^{-5} = \frac{1}{2}\cdot 10^{-5}$$

Odakle, $n - k + 1 = -5$ i, kako je $n = 0$, dobijamo $k = 6$, tj. približan broj 3,14159 ima šest značajnih cifara.

*Primer 2*. Neka je $x = 55237$. Ako je $x' = 55000$, onda je

$$|x - x'| = |55237 - 55000| = 237 < 500 = 0{,}5\cdot 10^3 = \frac{1}{2}\cdot 10^3$$

Možemo staviti $Ax' = \frac{1}{2}\cdot 10^3$, pa je $n - k + 1 = 3$ i, kako je za približan broj $x'$ $n = 4$, dobijamo $k = 2$, tj. približan broj 55000 ima dve značajne cifre, a to su 5, 5 (poslednje tri nule nisu značajne cifre).

Cifra za koju znamo da nije značajna zove se *sumnjiva* cifra. Kod približnih brojeva sumnjive cifre se često javljaju.

Interpretirajmo Primer 2. na sledeći način: Na nekoj fudbalskoj utakmici bilo je 55237 gledalaca. Izveštač sa utakmice napiše da ih je bilo oko 55000. Tada će pažljivi čitalac sumnjati u tačnost poslednje tri cifre (nule). To pokazuje i Primer 2. da su poslednje tri cifre sumnjive, ali ih moramo pisati, jer određuju dekadna mesta približnog broja. Inače, značajne cifre približnog broja treba istaći.

Jedan od načina zapisivanja da su cifre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ približnog broja $x'$ značajne koristi se tzv. *normalni oblik* pisanja brojeva.

$$x' = \alpha_1, \alpha_2\, \alpha_3 \ldots \alpha_k \cdot 10^m \quad (\alpha_1 \neq 0)$$

gde je $m$ neki ceo broj.

Tako, na primer, broj 52000 ima dve značajne cifre ako ga napišemo u obliku $5{,}2 \cdot 10^4$, a ima četiri, ako je zapisan u obliku $5{,}200 \cdot 10^4$.

Prema tome, ako su dva približna broja brojno jednaka, to ne znači da su oni jednaki i kao približni brojevi. Brojevi, $5{,}2 \cdot 10^4$ i $5{,}200 \cdot 10^4$ su brojno jednaki, ali se, kao približni brojevi, razlikuju. Prvi broj ima dve značajne cifre, a drugi četiri. Prvi broj aproksimira tačan broj sa gornjom granicom apsolutne greške manjom od 0,005, a drugi sa gornjom granicom apsolutne greške manjom od 0,00005.

*Primedba.* Ako je neki približan broj $x'$ dat u obliku

$$x' = 0{,}00\ldots0\, \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_k \quad (\alpha_1 \neq 0),$$

onda smatramo da su sve cifre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ značajne cifre. Nule ispred prve decimale, koja je različita od nule ($\alpha_1 \neq 0$), nisu nikada značajne cifre. Tako broj 0,0032 ima dve značajne cifre, a to su 3, 2. Broj 15,040 ima pet značajnih cifara.

3. Broj značajnih cifara približnog broja je, kao i gornja granica relativne greške, merilo tačnosti broja. Nije teško utvrditi da približan broj sa četiri značajne cifre ima veću tačnost, tj. bolje aproksimira tačan broj, od približnog broja sa tri ili manjim brojem značajnih cifara

Značajne cifre igraju veliku ulogu, kada želimo da broj sa beskonačno mnogo cifara ili broj sa velikim brojem cifara zamenimo brojem od konačno značajnih cifara, a da pri tome napravimo što manju grešku. Drugim rečima, da dati broj zamenimo „najbližim" njemu približnim brojem sa određenim brojem značajnih cifara. Ovaj postupak zovemo *zaokrugljivanje* tačnog ili približnog broja na određen broj značajnih cifara. Napomenimo da zaokrugljeni broj može imati i više značajnih cifara od traženog broja.

Postupak zaokrugljivanja brojeva opisaćemo na primerima*.

*) Opšti postupak zahteva „glomazno" pisanje brojeva, pa ga ovde izostavljamo.



*Primer 1.* Neka je dat broj $a = 9{,}6384$. Zaorkugliti dati broj na četiri značajne cifre.

*Rešenje.* Kako broj $a$ ima pet cifara, a treba da ga zaokruglimo na četiri značajne cifre, to radimo na sledeći način: nađemo najveći od petocifrenih brojeva ali takvih petocifrenih brojeva kod kojih je peta cifra 0, koji podbacuje broj $a$, zatim najmanji od brojeva čija poslednja cifra 0, koji prebacuje broj $a$. Lako se utvrđuje da su to brojevi 9,6380 i 9,6390. Dakle,

$$9{,}6380 < 9{,}6384 < 9{,}6390$$

Za zaokrugljeni (približan) broj broja $a$ možemo uzeti broj 9,6380 ili 9,6390. Kako uslove zadatka ispunjava onaj od ta dva broja, čija je apsolutna greška manja, to ćemo taj broj uzeti za zaokrugljeni broj broja $a$.

Apsolutna greška za broj koji podbacuje broj $a$ je

$$|9{,}6384 - 9{,}6380| = 0{,}0004,$$

a za broj koji prebacuje broj $a$

$$|9{,}6384 - 9{,}6390| = 0{,}0006.$$

Vidimo da je apsolutna greška broja 9,6380 manja, pa njega uzimamo za zaokrugljeni broj broja $a$. Sada proverimo značajne cifre izabranog broja. Kako je

$$|9{,}6384 - 9{,}6380| = 0{,}0004 < 0{,}0005 = 0{,}5 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$$

to je $n - k + 1 = -3$ i, kako je za izabrani zaokrugljen broj $n = 0$ $9{,}6380 = 9 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} + 0 \cdot 10^{-4}$, imamo $0 - k + 1 = -3$, tj. broj značajnih cifara izabranog broja je $k = 4$.

Dakle, zaokrugljeni broj sa četiri značajne cifre broja $a = 9{,}6384$ je broj 9,6380. U ovom slučaju zaokrugljeni broj pišemo bez poslednje nule, tj. 9,638, jer cifra 0 je sumnjiva i ne određuje dekadno mesto.

*Primer 2.* Neka je dat broj $a = 14{,}7683$. Zaokrugliti dati broj na tri značajne cifre.

*Rešenje.* Kako broj $a$ ima šest cifara, a treba da ga zaokruglimo na tri značajne cifre, to odredimo najveći od šestocifrenih brojeva, ali takvih kod kojih su tri poslednje cifre nule, koji podbacuje broj $a$. Zatim, najmanji od brojeva kod kojih su tri poslednje cifre nule, koji prebacuje broj $a$. Tako dolazimo do sledećih nejednakosti

$$14{,}7000 < 14{,}7683 < 14{,}8000.$$

Kako su za brojeve 14,7000; 14,8000 redom, apsolutne greške

$$|14{,}7683 - 14{,}7000| = 0{,}0683, \quad |14{,}7683 - 14{,}8000| = 0{,}0317$$

to ćemo za zaokrugljeni broj broja $a$, koji ima najmanje tri značajne cifre, uzeti broj 14,8000. Nije teško utvrditi da zaokrugljeni broj ima tačno tri značajne cifre, pa zaokruženi broj pišemo 14,8.

*Primer 3.* Neka je dat broj $a = 2071$. Zaokrugliti dati broj na dve značajne cifre.

*Rešenje.* Slično kao i ranije dolazimo do sledećih nejednakosti

$$2000 < 2071 < 2100$$

gde je zaokrugljeni broj sa dve značajne cifre datog broja $a$, jedan od brojeva 2000, 2100. Kako su, redom, njihove apsolutne greške

$$|2071 - 2000| = 71, \quad |2071 - 2100| = 29$$

to ćemo za zaokrugljeni broj broja $a$ sa dve značajne cifre uzeti broj 2100. Izabrani broj ima tačno dve značajne cifre, jer

$$|2071 - 2100| = 29 < 50 = 0{,}5 \cdot 10^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^2,$$

pa je $n - k + 1 = 2$ i, kako je za zaokrugljeni broj $n = 3$, imamo $3 - k + 1 = 2$, tj. broj značajnih cifara zaokrugljenog broja je $k = 2$.

Dakle, zaokrugljeni broj broja $a$ je 2100 čije su značajne cifre 2 i 1. Poslednje dve nule su sumnjive cifre, ali ih ovde ne možemo izostaviti (odbaciti), jer one određuju dekadna mesta zaokrugljenog broja.

Ako hoćemo da istaknemo njegove značajne cifre onda umesto 2100 pišemo $21 \cdot 10^2$ ili $0{,}21 \cdot 10^4$.

*Primer 4.* Neka je dat broj $a = 0{,}365$. Zaokrugliti dati broj na dve značajne cifre.

*Rešenje.* Kako za dati broj $a$, cifra 0 koja se nalazi ispred svih ostalih cifara, nije značajna cifra broja $a$, to ukoliko bude na tom mestu i u zaokrugljenom broju neće biti značajna cifra. Prema tome, da bi zaokrugljeni broj imao dve značajne cifre, dolazimo do sledećih nejednakosti

$$0{,}360 < 0{,}365 < 0{,}370$$

Apsolutne greške, redom, broja 0,360 koji podbacuje broj $a$ i broja 0,370 koji prebacuje broj $a$, su

$$|0{,}365 - 0{,}360| = 0{,}05, \quad |0{,}365 - 0{,}370| = 0{,}05.$$



U ovom slučaju, apsolutne greške jedinih kandidata za zaokrugljeni broj su jednake. I broj značajnih cifara tih brojeva je takođe isti. Znači, za zaokrugljeni broj broja $a$ možemo uzeti bilo koji od brojeva 0,360; 0,370, jer, i jedan i drugi, ispunjavaju uslove zadatka. Ipak, radi jednoznačnosti određivanja zaokrugljenog broja, treba da se odlučimo za jedan od tih brojeva. Koji? Pošto ovde otkazuje osnovna karakteristika — apsolutna greška, pomoću koje smo se do sada koristili za izbor zaokrugljenog broja, to nam jedino ostaje da se dogovorimo kako u ovom slučaju postupiti. Prihvata se, dogovorno, pravilo parne cifre, koje glasi:

Za zaokrugljeni broj datog broja $a$ uzima se onaj, od dva moguća kandidata kod kojih je ista apsolutna greška, čija je prva cifra s desna ulevo različita od nule, paran broj.

U našem slučaju je to broj 0,360. Kako taj broj ima samo dve značajne cifre, pišemo ga 0,36.

*Primer 5.* Neka je dat broj $a = 99{,}9$. Zaokrugliti dati broj na jednu značajnu cifru.

*Rešenje.* Ovde je

$$90{,}0 < 99{,}9 < 100{,}0.$$

Za brojeve 90,0 i 100,0 apsolutne greške su redom

$$|99{,}9 - 90{,}0| = 9{,}9, \quad |99{,}9 - 100{,}0| = 0{,}1.$$

Prema tome, uzimamo za zaokrugljeni broj 100,0. Kako je

$$|99{,}9 - 100{,}0| = 0{,}1 < 0{,}5 = 0{,}5 \cdot 10^0 = \frac{1}{2} \cdot 10^0$$

to je $n - k + 1 = 0$ i, kako je za zaokrugljeni broj $n = 2$ $(100{,}0 = 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1})$, imamo $2 - k + 1 = 0$, odakle dobijamo da je broj značajnih cifara zaokrugljenog broja $k = 3$. Nula posle desetne zapete nije značajna cifra, pa je zaokrugljeni broj 100.

Da smo zahtevali da broj 99,9 zaokružimo na dve ili na tri značajne cifre, kao zaokruženi broj dobili bismo broj 100, jer bismo u svim slučajevima imali da je njegova apsolutna greška manja. S druge strane, zaokrugljeni broj 100 ima jednu (bar jednu), dve (bar dve), tri značajne cifre, pa bi i u tim slučajevima ispunjavao uslove zadatka.

*Napomena.* Ako se zahteva da zaokrugljeni broj datog broja ima $k$ značajnih cifara, to znači da ih ima najmanje $k$. Značajnih cifra zaokrugljeni broj može imati i više nego što se traži prilikom zaokrugljivanja datog broja (primer 4). Zaokrugljeni broj može imati sve cifre jednake sa datim brojem (primer 1). ali ne mora (primer 2). Može se desiti da se ni jedna cifra zaokrugljenog broja ne poklapa sa datim brojem (primer 4).

Pravilo zaokrugljivanja datog broja možemo primeniti samo ako se traži da zaokrugljeni broj ima broj značajnih cifara manji ili jednak broju značajnih cifara datog broja. Na primer, broj $a = 0{,}5803$ ima četiri značajne cifre, pa se može zaokrugliti na jednu, dve tri ili četiri značajne cifre. Broj se može zaokrugliti i na nula značajnih cifara, ako tako dobijeni zaokrugljeni broj ima bar jednu značajnu cifru (zaokrugljeni broj može imati i više značajnih cifara od broja značajnih cifara traženih pri zaokrugljivanju). Tako broj $a = 0{,}5803$, zaokrugljen na nula sigurnih cifara, je broj 1,0000, tj. broj 1 i taj broj ima jednu sigurnu cifru.

Iz navedenog postupka (opisanog na primerima) vidimo da, pri zaokrugljivanju datog broja na $k$ značajnih cifara, ili se prvih $k$ cifara zaokrugljenog broja poklapaju sa datim brojem, ili se $k$-ta uvećava za jedan. Cifre posle $k$-te zaokrugljenog broja su sve nule, koje odbacujemo ako se nalaze posle desetne zapete. U prvom slučaju, kada su prvih $k$ cifara datog i zaokrugljenog broja iste, kažemo da se *popravka ne vrši.* U drugom, kada se $k$-ta cifra uvećava za jedan, kažemo *popravka se vrši.*

Na osnovu izloženog, možemo formulisati pravila zaokrugljivanja datog broja na $k$ značajnih cifara:

— Ako je sledeća $k + 1$ cifra datog broja manja od 5, popravka se ne vrši.

— Ako je sledeća $k + 1$ cifra datog broja veća od 5, popravka se vrši.

— Ako je sledeća $k + 1$ cifra datog broja 5, a posle nje ima još bar jedna cifra različita od nule, popravka se vrši.

— Ako je sledeća $k + 1$ cifra datog broja 5, a posle nje drugih cifara nema ili nema drugih cifara različitih od nule, popravka se vrši ili ne vrši, prema tome da li je $k$-ta cifra neparna ili parna (pravilo parne cifre).

Na osnovu ovih pravila zaokrugljivanja neposredno dolazimo do zaokruženih brojeva. Na primer, za date brojeve

5,51 4,02 34603 45,321 0,00475 25000 3,0501 99,71 10,5

zaokrugljene na dve značajne cifre, su redom brojevi

5,5 4,0 35000 45 0,0048 25000 3,1 100 10.

Upoznali smo se sa postupkom zaokrugljivanja datog broja. Znači, ako je dat neki broj, znamo da ga zaokruglimo na određen broj značajnih cifara i, pri tome, ovo zaokrugljivanje je jednoznačno.



Razmotrimo sada problem obrnuto. Ako nam je dat približan broj, za koji znamo jedino da je zaokrugljen na određen broj značajnih cifara, šta možemo reći o tačnom broju?

Na primer, neka je $a' = 3{,}42$ približan broj dat zaokrugljeno*. Tada je njegova gornja granica apsolutne greške $Aa' \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = 0{,}005$ (jer je $k = 3$, $n = 0$, pa je $n - k + 1 = 0 - 3 + 1 = -2$). Znamo da za tačan broj $a$ važi $a' - Aa' \leqslant a \leqslant a' + Aa'$, pa je, u našem slučaju,

$$3{,}42 - 0{,}005 \leqslant a \leqslant 3{,}42 + 0{,}005$$

tj.

$$3{,}415 \leqslant a \leqslant 3{,}425.$$

Uopšte, ako je $a$ zaokrugljen na $k$ značajnih cifara, tada za tačan broj $a$ važi

$$a' - \frac{1}{2} \cdot 10^{n-k+1} \leqslant a \leqslant a' + \frac{1}{2} \cdot 10^{n-k+1}.$$

*Rezime*

— U numeričkoj analizi radimo samo sa približnim brojevima koji imaju konačno mnogo cifara.

— Gornja granica apsolutne greške zaokrugljenog broja na $k$ značajnih cifara je $\frac{1}{2} \cdot 10^{n-k+1}$.

## 5. GREŠKE REZULTATA OSNOVNIH ARITMETIČKIH OPERACIJA

Ranije smo naglasili da, u radu sa približnim brojevima, nisu ispunjeni i takvi zakoni (aksiome) skupa realnih brojeva, kao što su $(x + y) z = xz + yz$ i dr. (Videti primer u uvodu).

Navedimo još jedan primer. Jednakost $(x + y) z = xz + yz$ za $x = 4$, $y = \sqrt{2}$, $z = \sqrt{2}$ postaje

$$(4 + \sqrt{2})\sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 2.$$

*) Kod zaokrugljenog broja sve cifre su značajne, ukoliko nema nula na kraju, prema tome broj 3,24 je zaokrugljen na tri značajne cifre. Za zaokrugljen broj, na primer 600, moramo znati i broj značajnih cifara, jer poslednje dve ili jedna mogu biti sumnjive.

Ako u ovoj brojnoj jednakosti (brojnom identitetu) umesto $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ uzmemo njegovu približnu vrednost, recimo $\sqrt{2} \approx 1{,}4$, tada za levu stranu dobijamo

$$L = (4 + \sqrt{2})\sqrt{2} \approx (4 + 1{,}4) \cdot 1.4 = 5{,}4 \cdot 1{,}4 = 7{,}56$$

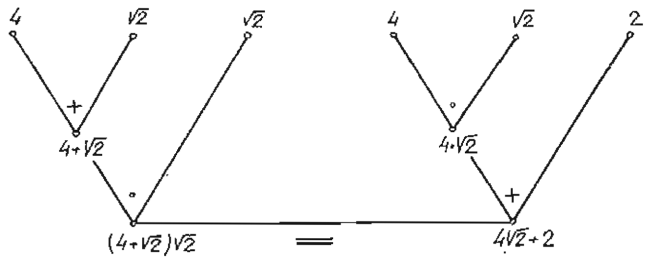
a za desnu

$$D = 4\sqrt{2} + 2 \approx 4 \cdot 1{,}4 + 2 = 5{,}6 + 2 = 7{,}6$$

Odakle imamo da gornji brojni identitet za $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ postaje

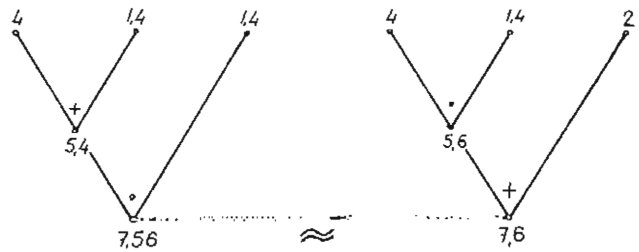
$$7{,}56 \approx 7{,}6.$$

Ovo možemo prikazati i sledećim shemama. Navedenom brojnom identitetu odgovara shema*




Sl. 5

Za $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ ova shema postaje




Sl. 6

*) Svakoj formuli $A = B$, gde su $A$ i $B$ neki izrazi (termi), odgovara shema koja se dobija na taj način što korene drveta koji odgovaraju izrazima $A$ i $B$ spojimo linijom ——. (Koren je najniža tačka drveta). Približnim formulama $A \approx B'$ takođe prideljujemo shemu koju dobijamo kada korene drveta izraza $A$ i $B$ spojimo linijom $\sim\sim$.



Dakle, greška nekog izraza ne zavisi samo od grešaka približnih brojeva koji učestvuju u tom izrazu, već i od operacija pomoću kojih je „sagrađen" taj izraz.

Prelazimo na određivanje grešaka sledećih elementarnih izraza $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$, $x : y$ koje dobijamo, ako umesto tačnih vrednosti $x$ i $y$, zamenimo njihove približne vrednosti $x'$ i $y'$. Pri tome, znamo apsolutne greške $\Delta x'$ i $\Delta y'$ ili gornja granica apsolutnih grešaka $Ax'$ i $Ay'$ približnih brojeva $x'$ i $y'$.

(I) **Sabiranje.** Neka je

$$S = x + y.$$

Odredimo grešku približne vrednosti sume $S$, ako znamo greške približnih vrednosti sabiraka $x$ i $y$.

**Teorema o apsolutnoj, gornjoj granici apsolutne greške zbira.** Apsolutna greška zbira nije veća od zbira apsolutnih grešaka sabiraka. Gornja granica apsolutne greške zbira nije veća od gornjih granica apsolutnih grešaka sabiraka. Kraći prevod:

$$\text{(a)}\ \Delta(x' + y') \leqslant \Delta x' + \Delta y', \qquad \text{(b)}\ A(x' + y') \leqslant Ax' + Ay'.$$

*Dokaz.*

| | |
|---|---|
| (a) $\Delta(x' + y') = \lvert (x + y) - (x' + y') \rvert$ | (definicija apsolutne greške približnog broja $x' + y'$) |
| $= \lvert (x - x') + (y - y') \rvert$ | (teorema o suprotnom broju i komutativni zakon) |
| $\leqslant \lvert x - x' \rvert + \lvert y - y' \rvert$ | (koristili smo formulu $\lvert a+b \rvert \leqslant \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$, gde je $a = x - x'$ i $b = y - y'$) |
| $= \Delta x' + \Delta y'$ | (definicija apsolutne greške približnih brojeva $x'$ i $y'$) |

Odakle

$$\Delta(x' + y') \leqslant \Delta x' + \Delta y'.$$

(b) Jedan način je sledeći

(1) $x' - Ax' \leqslant x \leqslant x' + Ax'$ (hipoteza)

(2) $y' - Ay' \leqslant y \leqslant y' + Ay'$ (hipoteza)

(3) $x' + y' - (Ax' + Ay') \leqslant x + y \leqslant$ (iz (1) i (2) sabiranjem)
$\leqslant x' + y' + (Ax' + Ay')$

(4) $A(x' + y') \leqslant Ax' + Ay'$ (iz (3) i definicije gornje granice apsolutne greške za $A(x' + y')$)

Očigledno da teorema važi za bilo koliko (konačno) sabiraka.

Za gornju granicu apsolutne greške se uzima

$$A(x' + y') = Ax' + Ay'.$$

*Primer.* Sabrati približne brojeve 3,21 i 4,3356 znajući da su oni dati zaokrugljeno. Naći gornju granicu apsolutne greške zbira i broj značajnih cifara dobijenog zbira.

*Rešenje*: Dati zbir je

$$S = 3{,}21 + 4{,}3356 = 7{,}5456.$$

Gornja granica apsolutne greške

$$As = 0{,}005 + 0{,}00005 = 0{,}00505 < 0{,}05 = 0{,}5 \cdot 10^{-1}.$$

Kako je odatle, $n - k + 1 = -1$ i $n = 0$ (jer je $S = 7{,}5456 = 7 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + \ldots$), imamo

$$0 - k + 1 = -1 \quad \text{tj.} \quad k = 2.$$

Dakle, dobijeni zbir ima samo dve sigurne cifre 7 i 5. Ostale cifre su nesigurne. Zbir napisan pomoću sigurnih cifara glasi

$$S = 7{,}5.$$

Vidimo iz ovog primera da je u rezultatu broj nesigurnih cifara tri, koje odbacujemo (odbacujemo ih ukoliko ne određuju dekadno mesto, inače, umesto nesigurnih cifara, pišemo nule). Postavlja se pitanje: da li smo mogli i kraće da izvedemo sabiranje, koristeći činjenicu da zbir može imati i manje cifara, ali samo onih koje su nesigurne, jer ih, inače, u krajnjem rezultatu odbacujemo.

Na osnovu dokazane teoreme, očigledno je da gornja granica apsolutne greške zbira približnih brojeva ne može biti manja od gornje granice apsolutne greške onog sabirka čija je gornja granica apsolutna greške najveća. Prema tome, ma sa kojom tačnošću da su dati ostali sabirci, tačnost zbira ne može biti veća od tačnosti onog sabirka kome je gornja granica apsolutne greške najveća. To znači, da ćemo kod sabiraka, kod kojih je gornja granica apsolutne greške manja od onog sa takvom najvećom greškom, naići na cifre čije uzimanje pri sabiranju



ne može povećati tačnost zbira preko tačnosti onog sabirka sa najvećom gornjom granicom apsolutne greške. Zato, praktično, takve cifre ne zadržavamo, jer ne utiču na tačnost rezultata.

U našem primeru postupamo na sledeći način: od sabiraka 3,21 i 4,3356 uočimo onaj čija je gornja granica apsolutne greške veća, a to je broj 3,21 (kako su brojevi dati zaokrugljeno, onda uočimo onaj koji ima manje decimalnih mesta). Drugi sabirak zatim, zaokruglimo na jednu decimalu više od broja decimala uočenog broja 3,21. Dobijamo 4,336 i sada saberemo tako dobijene brojeve

$$S^* = 3{,}21 + 4{,}336 = 7{,}546$$

a gornja granica apsolutne greške je

$$As^* = 0{,}005 + 0{,}0005 = 0{,}0055 < 0{,}05 = 0{,}5 \cdot 10^{-1}.$$

Dakle broj sigurnih cifara $k = 2$ je isti kao i kada smo radili sa svima ciframa datih približnih brojeva. Sigurne cifre su 7 i 5, pa je $S = 7{,}5$.

Praktičnost ovog skraćenog postupka dolazi do izražaja kada je broj sabiraka veći od dva.

Na primer, izračunajmo zbir

$$S = 0{,}367 + 4{,}3 + 42{,}035896566 + 754{,}88734 + 0{,}15$$

znajući da su svi sabirci dati zaokrugljeno.

Prvo uočimo sabirak sa najmanjim brojem decimalnih mesta, to je broj 4,3. Zatim sve ostale brojeve zaokruglimo na dve decimale (za jednu decimalu više od uočenog sabirka), tada imamo

$$S^* = 0{,}37 + 4{,}3 + 42{,}04 + 754{,}89 + 0{,}15 = 801{,}75$$

dok je gornja granica apsolutne greške

$$As^* = 0{,}005 + 0{,}05 + 0{,}005 + 0{,}005 + 0{,}005 =$$
$$= 0{,}05 + 4 \cdot 0{,}005 = 0{,}07 < 0{,}5 = 0{,}5 \cdot 10^0$$

odakle $n - k + 1 = 0$ i, kako je $n = 2$, imamo za broj sigurnih cifara $k = 3$. Dakle,

$$S \approx 801{,}75 \approx 801.$$

Ako bi broj sabiraka bio veći ili jednak 100 a manji od 1000, onda se zaokruživanje ostalih sabiraka vrši na dve decimale više od broja decimala uočenog sabirka čija je gornja granica apsolutne graške najveća. Zatim, na tri decimale više, ako je broj sabiraka veći ili jednak 1000, a manji od 10000, itd.

(II) **Oduzimanje.** Neka je

$$D = x - y$$

Odredimo grešku približne vrednosti razlike $D$, ako znamo greške približnih vrednosti brojeva $x$ i $y$.

**Teorema o apsolutnoj, gornjoj granici apsolutne greške razlike.** Apsolutna greška razlike nije veća od zbira umanjenika i umanjioca. Gornja granica apsolutne greške razlike nije veća od gornjih granica apsolutnih grešaka umanjenika i umanjioca. Kraći prevod:

(a) $\Delta(x' - y') \leqslant \Delta x' + \Delta y'$, (b) $A(x' - y') \leqslant Ax' + Ay'$.

*Dokaz*:

(a) $\Delta(x' - y') = |(x - y) - (x' - y')|$ (definicija apsolutne greške približnog broja $x' - y'$)

$= |(x - x') - (y - y')|$

$\leqslant |x - x'| + |y - y'|$ (koristili smo formulu $|a - b| \leqslant |a| + |b|$, gde je $a = x - x'$, $b = y - y'$)

$= \Delta x' + \Delta y'$ (definicija apsolutne greške)

Odakle,

$$\Delta(x' - y') \leqslant \Delta x' + \Delta y'.$$

(b) Jedan način je sledeći:

Kako je $\Delta x' \leqslant Ax'$, $\Delta y \leqslant Ay'$, to iz dokazane relacije imamo

$$\Delta(x' - y') \leqslant \Delta x' + \Delta y' \leqslant Ax' + Ay'$$

pa za gornju granicu apsolutne greške približnog broja $x' - y'$ možemo da uzmemo $Ax' + Ay'$ ili manji od te veličine, ali veći od $\Delta(x' - y')$. Kako je $\Delta(x' - y') \leqslant A(x' - y')$, to, na osnovu poslednje nejednakosti, možemo staviti

$$A(x' - y') \leqslant Ax' + Ay'.$$

Obično se uzima

$$A(x' - y') = Ax' + Ay'.$$

(III) **Množenje.** Neka je

$$P = x \cdot y$$

Odrediti grešku približne vrednosti proizvoda $P$, ako znamo greške približnih brojeva $x$ i $y$.



**Teorema o apsolutnoj, gornjoj granici apsolutne greške proizvoda.** Apsolutna greška proizvoda (gornja granica apsolutne greške proizvoda) nije veća od zbira proizvoda jednog činioca i apsolutne greške (gornje granice apsolutne greške) drugog činioca i proizvoda drugog činioca i apsolutne greške (gornje granice apsolutne greške) prvog činioca. Kraći prevod:

(a) $\Delta(x' \cdot y') \leqslant |x'|\,\Delta y' + |y'|\,\Delta x'$,

(b) $A(x' \cdot y') \leqslant |x'|\,Ay' + |y'|\,Ax'$.

*Dokaz*:

(a) $\Delta(x' \cdot y') = |x \cdot y - x' \cdot y'|$ (definicija)

$= |x \cdot y - x \cdot y' + x \cdot y' - x' \cdot y'|$ (jer je $-x \cdot y' + x \cdot y' = 0$)

$= |x(y - y') + y'(x - x')|$

$\leqslant |x|\,|y - y'| + |y'|\,|x - x'|$ (koristili smo formule $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ i $|ab| = |a|\,|b|$)

$= |x|\,\Delta y' + |y'|\,\Delta x'$.

Dakle,

$$\Delta(x' \cdot y') \leqslant |x|\,\Delta y' + |y'|\,\Delta x'.$$

Ovim još nismo dokazali pod (a), jer se na desnoj strani pojavljuje $|x|$. Sa $x$ je označena tačna vrednost približnog broja $x'$, a ta tačna vrednost u većini slučajeva nije poznata. Kako je $|x - x'| = \Delta x'$, to će biti $x = x' + \Delta x'$ ili $x = x' - \Delta x'$ zavisno od toga da li je tačan broj $x$ veći ili manji od približnog broja $x'$. U oba slučaja će biti

$$|x| = |x' \pm \Delta x'| \leqslant |x'| + \Delta x'.$$

Zamenom $|x|$ u gornju nejednakost, dobijamo

$$\Delta(x' \cdot y') \leqslant (|x'| + \Delta x')\,\Delta y' + |y'|\,\Delta x'$$

tj.

$$\Delta(x' \cdot y') \leqslant |x'|\,\Delta y' + |y'|\,\Delta x' + \Delta x'\,\Delta y'.$$

Kako su $\Delta x'$ i $\Delta y'$ vrlo male veličine, to je njihov proizvod $\Delta x'\,\Delta y'$ još manja veličina (obično se kaže i manja veličina višega reda), pa je možemo zanemariti. Prema tome

$$\Delta(x' \cdot y') \leqslant |x'|\,\Delta y' + |y'|\,\Delta x'.$$

(b) Zbog $\Delta x' \leqslant Ax'$, $\Delta y' \leqslant Ay'$, dobijamo iz dokazane formule pod (a)

$$\Delta (x' \cdot y') \leqslant |x'|\, Ay' + |y'|\, Ax',$$

pa, na osnovu definicije gornje granice apsolutne greške, možemo staviti

$$A (x' \cdot y') \leqslant |x'|\, Ay' + |y'|\, Ax'.$$

Obično se uzima

$$A (x' \cdot y') = |x'|\, Ay' + |y'|\, Ax'.$$

Ocenu greške proizvoda je vrlo praktično izvoditi preko relativne greške. Tako, za gornju granicu relativne greške proizvoda, imamo

$$R (x' \cdot y') = \frac{A (x' \cdot y')}{|x' \cdot y'|} = \frac{|x'|\, Ay' + |y'|\, Ax'}{|x'| \cdot |y'|} = \frac{Ax'}{|x'|} + \frac{Ay'}{|y'|}$$

tj.

$$R(x' \cdot y') = Rx' + Ry'$$

Znači, *gornja granica relativne greške proizvoda jednaka je zbiru gornjih granica relativnih grešaka činioca.*

*Primer.* Odrediti gornju granicu apsolutne greške i broj značajnih cifara proizvoda

$$P = 3{,}5 \cdot 0{,}47$$

ako su činioci dati zaokrugljeno.

*Rešenje*: Neka je $x' = 3{,}5$ i $y' = 0{,}47$. Onda $Ax' = 0{,}05$, $Ay' = 0{,}005$. Koristeći formulu pod (b) imamo

$$Ap = 3{,}5 \cdot 0{,}005 + 0{,}47 \cdot 0{,}05 = 0{,}2525 \leqslant 0{,}5 = 0{,}5 \cdot 10^0,$$

pa je $n - k + 1 = 0$ i, kako je $P = 1{,}645$, to je $n = 0$. Prema tome, $0 - k + 1 = 0$ tj. $k = 1$. Znači, u rezultatu proizvoda imamo samo jednu značajnu cifru. Ako rezultat napišemo samo preko značajnih cifara, imamo

$$P = 1{,}645 \approx 1.$$

(IV) **Deljenje.** Neka je

$$Q = \frac{x}{y}$$

Odrediti grešku približne vrednosti količnika $Q$, ako su date greške približnih brojeva $x$ i $y$.



**Teorema o apsolutnoj, gornjoj granici apsolutne greške količnika**

$$\text{(a)}\quad \Delta\left(\frac{x'}{y'}\right) \leqslant \frac{|x'|\, \Delta y' + |y'|\, \Delta x'}{y'^2},$$

$$\text{(b)}\quad A\, \frac{x'}{y'} = \frac{|x'|\, Ay' + |y'|\, Ax'}{y'^2}$$

*Dokaz*:

(a) $\Delta\left(\frac{x'}{y'}\right) = \left|\frac{x}{y} - \frac{x'}{y'}\right|$ (definicija)

$$= \left|\frac{x \cdot y' - x' \cdot y}{yy'}\right|$$

$$= \frac{|x \cdot y' - x' \cdot y' + x' \cdot y' - x' \cdot y|}{|yy'|}$$ (koristili smo $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ i $-x' \cdot y' + x' \cdot y' = 0$)

$$= \frac{|y' (x - x') + x' (y' - y)|}{|yy'|}$$

$$\leqslant \frac{|y'|\, |x - x'| + |x'|\, |y' - y|}{|yy'|}$$ (koristili smo formule $|a+b| \leqslant |a|+|b|$, $|uv| = |u| \cdot |v|$)

$$= \frac{|y'|\, \Delta x' + |x'|\, \Delta y'}{|yy'|}$$

Sada, kao i u dokazu teoreme za proizvod, uzmimo $y = y' \pm \Delta y'$, pa je

$$|y \cdot y'| = |y'^2 \pm y'\, \Delta y'| \leqslant y'^2 + |y'|\, \Delta y'$$

Tada

$$\Delta\left(\frac{x'}{y'}\right) \leqslant \frac{|y'|\, \Delta x' + |x'|\, \Delta y'}{y'^2 + |y'|\, \Delta y'} \leqslant \frac{|y'|\, \Delta x' + |x'|\, \Delta y'}{y'^2},$$

jer je $y'^2 + |y'|\, \Delta y' > 0.$

(b) Slično se dokazuje kao i za proizvod. Takođe, lako se izvodi

$$R\left(\frac{x'}{y'}\right) = Rx' + Ry'$$

tj. *gornja granica relativne greške količnika jednaka je zbiru gornjih granica relativnih grešaka broioca i imenioca.*

## POLJE KOMPLEKSNIH BROJEVA

U skupu $R$ realnih brojeva jednačina $x^2 + 1 = 0$ nema rešenja (nije moguća), tj. ne postoji realan broj $x$ koji zadovoljava tu jednačinu. Drugim rečima, ne postoji ni jedan realan broj $x$ čiji je kvadrat jednak $-1$. Ta činjenica sleduje na osnovu nama poznatog rezultata: kvadrat svakog realnog broja je nenegativan broj, kraće zapisano $(\forall x)(x \in R \Rightarrow x^2 \geqslant 0)$.

Ako želimo da jednačina $x^2 + 1 = 0$, (pa, prema tome i svaka algebarska jednačina, na pr. $x^2 + x + 1 = 0$, $x^4 + 2x^2 + 2 = 0$ i dr) ima rešenja: tada skup $R$ realnih brojeva moramo proširiti u širi skup u kome će biti rešenja. Ovakvim proširenjem skupa realnih brojeva dolazimo do skupa $C$ tzv. kompleksnih brojeva.

Jedan način uvođenja kompleksnih brojeva je sledeći: uočimo skup $R \times R = \{(a, b) \mid a, b \in R\}$ svih uređenih dvojki realnih brojeva. U tom skupu možemo na razne načine definisati dve binarne operacije, sabiranje i množenje. Osnovni princip kojim ćemo se rukovoditi prilikom definisanja operacija $+$ i $\cdot$ u skupu $R \times R$ biće tzv. princip permanencije (nemačkog matematičara Hankela, 1814—1899). Pri proširenju jedne strukture u novu strukturu traži se da nova, šira struktura sačuva što više značajnih zakonitosti stare strukture.

Definišimo sada kada uređenu dvojku realnih brojeva zovemo kompleksan broj.

**Definicija.** Elemente skupa $C = R \times R = \{(a, b) \mid a, b \in R\}$ zovemo kompleksnim brojevima, ako su u skupu $C$ definisane operacije sabiranje i množenje na sledeći način:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Kompleksne brojeve pisaćemo sa $x, y, z, \ldots$, a, za sada, realne brojeve sa $a, b, c, \ldots$ Neka je

$$n = (0, 0), \quad u = (1, 0).$$

Napomenimo da su dva kompleksna broja, $x = (a, b)$, $y = (c, d)$, jednaka, ako i samo ako je $a = c$ i $b = d$, tj.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \land b = d.$$

Dokažimo da je ovako uvedena struktura $(C, +, .)$ polje.



Neka su $x = (a, b)$, $y = (c, d)$, $z = (e, f)$ tri proizvoljna kompleksna broja. Tada, na osnovu definicije za sabiranje i množenje kompleksnih brojeva, važe sledeće tvrđenja:

1. $x + y = y + x \qquad x \cdot y = y \cdot x$

$$(x + y) + z = y + (x + z) \qquad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Dokažimo asocijativan zakon za operaciju $+$.

$$(x + y) + z = (a + c, b + d) + (e, f) = (a + c + e, b + d + f)$$
$$= (a, b) + (c + e, d + f) = x + (y + z).$$

Ovde smo koristili asocijativan zakon za realne brojeve. Slično se dokazuju i ostale formule.

2. Za proizvoljan kompleksan broj $x = (a, b)$ je

$$x + n = x, \quad x \cdot u = x.$$

Zaista,

$$x + n = (a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b) = x$$

što znači da je $n = (0, 0)$ neutralan element operacije $+$.

$$x \cdot u = (a, b)(1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b) = x$$

pa je element $u$ jedinični element operacije.

3. Za svaki kompleksan broj $x = (a, b)$ postoji jedan i samo jedan kompleksan broj $y$ takav da je

$$x + y = n.$$

Taj broj $y$ označavamo sa $-x = (-a, -b)$ i zovemo ga suprotan broj broja $x$.

Stavimo $y = -x$, tada je

$$x + y = x + (-x) = (a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0) = n.$$

Ovim smo dokazali da takav broj postoji, Sada dokažimo jedinstvenost. Ukoliko bi postojao i neki drugi broj, recimo $y_1 = (p, q)$ takav da je $x + y_1 = n$, imali bi $(a + p, b + q) = (0, 0)$, odakle $a + p = 0$ i $b + q = 0$, ili $p = -a$, $q = -b$ tj. $y_1 = -x$. Time je jedinstvenost suprotnog broja dokazana.

4. Za svaki kompleksan broj $x = (a, b) \neq (0, 0) = n$ postoji jedan i samo jedan kompleksan broj $y$ takva da je

$$x \cdot y = u.$$

Taj broj $y$ označavamo sa $\frac{u}{x}$ i zovemo ga inverzan (recipročan) broj broja $x$.

Stavimo $y = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$, tada je

$$x \cdot y = (a, b)\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = (1, 0) = u.$$

Jedinstvenost se slično dokazuje kao i u osobini 3.

Iz dokazanih osobina 1—4. imamo da je i nova struktura $(C, +, .)$ polje. Kako je stara struktura realnih brojeva polje, vidimo da se svi zakoni polja prenose i u novu strukturu kompleksnih brojeva. Ostaje još da pokažemo da je struktura kompleksnih brojeva zaista proširenje strukture realnih brojeva. U tom cilju, uočimo skup svih kompleksnih brojeva oblika $(a, 0)$, tj. sledeći podskup $\{(a, 0) \mid a \in R\}$ skupa $C$. Za elemente tog podskupa važi

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$$

$$\frac{(a, 0)}{(b, 0)} = \left(\frac{a}{b}, 0\right), \text{ uz uslov } b \neq 0.$$

Znači: aritmetika tog skupa je ista kao i skupa $R$ realnih brojeva, pa možemo da ne pravimo razliku između tih brojeva i realnih brojeva (Preciznije: polje realnih brojeva i podpolje kompleksnih brojeva oblika $(a, 0)$ su izomorfna).

Koristeći tu činjenicu, dogovorno ćemo označavati $(a, 0)$ sa $a$. Specijalno umesto $n = (0, 0)$ pišemo 0, umesto $u = (1, 0)$ pišemo 1.

Tako imamo, na primer $(-1, 0) = -1$, $(2, 0) = 2$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2}$, $(3, 0) = 3$, itd.



Sada dokažimo da jednačina $x^2 + 1 = 0$ u skupu kompleksnih brojeva ima rešenje. Kako je $1 = (1, 0)$, $0 = (0, 0)$ to se posmatrana jednačina na skupu kompleksnih brojeva prevodi u jednačinu

$$x^2 + (1, 0) = (0, 0).$$

Neposredno se proverava da je $x = (0, 1)$ jedno rešenje te jednačine.

Zaista,

$$(0, 1)^2 + (1, 0) = (0, 1) \cdot (0, 1) + (1, 0) = (-1, 0) + (1, 0) = (0, 0).$$

Isto tako je kompleksan broj $(0, -1)$ rešenje te jednačine.

*Rezime*:

— Kompleksan broj je uređena dvojka realnih brojeva, ako je ta uređena dvojka element polja $(C, +, .)$.
— Svaki realan broj je oblika $(a, 0) \in C$, kraće ga označavamo $a$.
— Polje $(C, +, .)$ kompleksnih brojeva je proširenje polja $(R, +, .)$ realnih brojeva.

## ALGEBARSKI OBLIK KOMPLEKSNOG BROJA

Uočimo kompleksan broj $(0, 1)$ koji je jedno rešenje jednačine $x^2 + 1 = 0$. Videli smo da je za njega

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Definišimo

$$i \overset{\text{def}}{=} (0, 1)$$

tada je $i^2 = -1$. Kompleksan broj $i$ zovemo *imaginarna jedinica*.

Sada ćemo dokazati da se svaki kompleksan broj može napisati u obliku polinoma po $i$ oblika $a + bi$, gde su $a$, $b$ realni brojevi. Neka je $(a, b)$ proizvoljan kompleksan broj. Tada

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi.$$

Ovaj oblik kompleksnog broja, zapisanog preko polinoma po $i$, zovemo algebarski oblik kompleksnog broja.

*Napomena*. Može se poći od kompleksnog broja oblika $a + bi$, gde se $i$ uvodi sledećom definicijom $i^2 = -1$, pa zatim doći do kompleksnog broja kao uređene dvojke realnih brojeva.

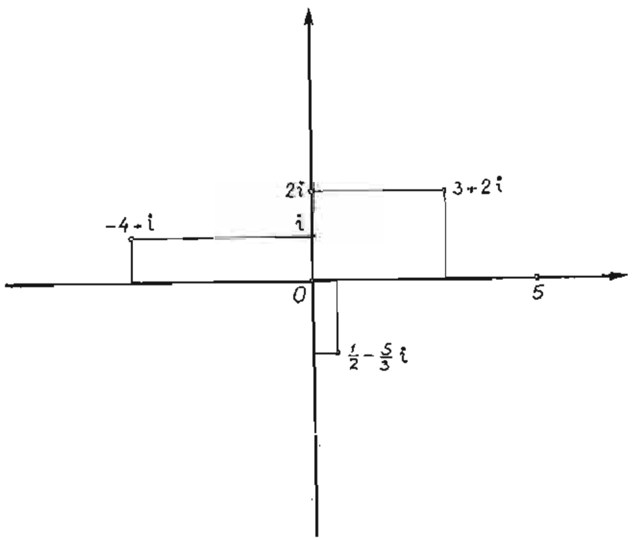
Kod kompleksnog broja $a + bi$ broj $a$ zovemo *realni deo* i označavamo $Re\,(a + bi) = a$, dok broj $b$ zovemo *imaginarni deo* i označavamo $Im\,(a + bi) = b$. Na primer, za broj $-2 + 3i$ realan deo je broj $-2$, imaginaran deo je 3.

*Primeri*:

1. $Re\,(1 - i) = 1$, $Im\,(1 - i) = -1$ (jer je $1 - i = 1 + (-1)i$)
2. $Re\,(i) = 0$, $Im\,(i) = 1$ (jer je $i = 0 + 1 \cdot i$)
3. $Re\,(0) = 0$, $Im\,(0) = 0$ (jer je $0 = 0 + 0 \cdot i$)
4. $Re\,(4) = 4$, $Im\,(4) = 0$ (jer je $4 = 4 + 0 \cdot i$)

Koristeći se algebarskim oblikom kompleksnog broja, vidimo da je svaki kompleksan broj određen svojim realnim i imaginarnim delom, odnosno uređenom dvojkom (gde je prva komponenta realan, a druga komponenta imaginaran deo).

U Dekartovom koordinatnom sistemu na slici prikazani su kompleksni brojevi $0$, $i$, $2i$, $3 + 2i$, $5$, $-4 + i$, $\frac{1}{2} - \frac{5}{3}\,i$.




Sl. 7



Oblik $a + bi$ kompleksnog broja je vrlo pogodan za računanje. Sa takvim oblikom se operiše slično kao i sa polinomima. Tako, kompleksne brojeve sabiramo, oduzimamo, množimo kao da su polinomi po $i$, s tim što uvek, gde se pojavi $i^2$, pišemo $-1$.

Na primer:

$$\begin{aligned}(2 + i)\cdot(3 - 4i) &= 2\cdot(3 - 4i) + i\cdot(3 - 4i)\\ &= 6 - 8i + 3i - 4i^2\\ &= 6 - 5i - 4(-1) \quad (\text{koristili smo } i^2 = -1)\\ &= 10 - 5i.\end{aligned}$$

Uopšte, obrasci za sabiranje i množenje kompleksnih brojeva su

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i$$

$$(a + bi)\cdot(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i.$$

Proizvod kompleksnog broja $a + bi$ sa brojem $a - bi$ je realan broj. Zaista,

$$(a + bi)\cdot(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2.$$

Koristeći ovo svojstvo za proizvod brojeva $a + bi$ i $a - bi$, uvodimo sledeće nazive: kompleksan broj $a - bi$ zovemo *konjugovan* broj, za broj $a + bi$. Dalje, nenegativan realan broj $\sqrt{a^2+b^2}$ zovemo *moduo* (ili apsolutna vrednost) kompleksnog broja $a + bi$.

Ako sa $z$ označimo proizvoljan kompleksan broj, onda njegov konjugovan broj označavamo sa $\bar{z}$, a moduo sa $|z|$. Na primer, za kompleksan broj $z = -6 + 8i$ biće $\bar{z} = -6 - 8i$, $|z| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2}$, odnosno $|z| = 10$.

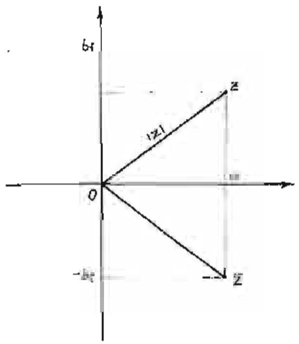
Na osnovu uvedenih oznaka, gornja jednakost glasi

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

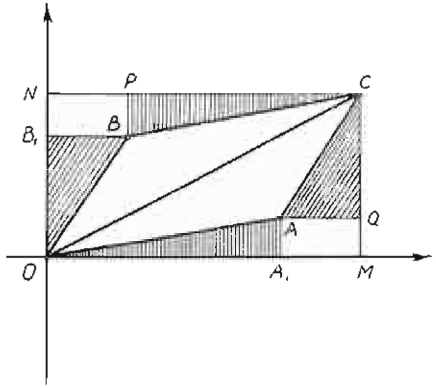
U Dekartovom koordinatnom sistemu kompleksnom broju $\bar{z}$ odgovara tačka simetrična tački $z$ u odnosu na $Ox$ osu. Na osnovu Pitagorine teoreme $|z|$ odgovara brojna vrednost duži $Oz$.

Upoznajmo se još sa jednom konstrukcijom predstavljanja kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravni. Neka su $A$ i $B$ tačke u Dekartovom koordinatnom sistemu koje odgovaraju kompleksnim brojevima $z_1 = a + bi$ i $z_2 = c + di$. Kako je $z_1 + z_2$ potpuno određen kompleksan broj, to postavljamo pitanje — koja tačka odgovara kompleksnom broju $z_1 + z_2$?

Neka su tačke $A$ i $B$ u prvom kvadratu koordinatnog sistema (kao na slici). Pokazaćemo da kompleksnom broju $z_1 + z_2$ odgovara tačka $C$, gde je $C$ takva da je četvorougao $OACB$ paralelogram. To izvodimo koristeći se slikom. Trougao $OBB_1$ podudaran je sa trouglom $AQC$. Takođe, trougao $OAA_1$ podudaran je sa trouglom $CPB$. Ova

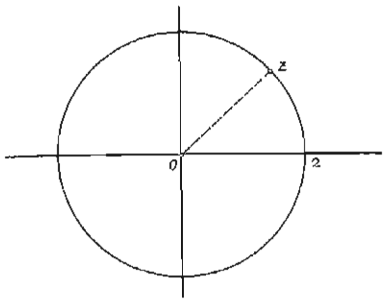



Sl. 8




Sl. 9

podudarnost se lako utvrđuje na osnovu uslova da je četvorougao $OACB$ paralelogram. Na osnovu podudarnosti odgovarajućih trouglova, imamo $\overline{AQ} = \overline{BB_1} = c$, $\overline{AA_1} = \overline{PB} = b$, $\overline{CP} = \overline{OA_1} = a$, $\overline{CQ} = \overline{OB_1} = d$. Kako je $\overline{CN} = \overline{CP} + \overline{PN} = \overline{CP} + \overline{BB_1} = a + c$, $\overline{CM} = \overline{MQ} + \overline{CQ} = \overline{AA_1} + \overline{CQ} = b + d$, to za tačku $C$ dobijamo da su joj koordinate $a + c$ i $b + d$, odnosno kompleksan broj koji odgovara tački $C$ je $a + c + (b + d)\,i$, a to je baš broj $z_1 + z_2$.




Sl. 10

Neka je $z$ proizvoljan kompleksan broj. Razmotrimo sledeći problem: gde leže svi kompleksni brojevi u kompleksnoj ravni ako je ispunjeno

$$|z| = 2.$$

Neposredno se zaključuje da su sve te tačke, koje odgovaraju tim kompleksnim brojevima, na krugu sa centrom u koordinatnom početku, a poluprečnik tog kruga



je 2, jer je moduo svih kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju datu jednakost (a znamo da je moduo rastojanje od tačke $O$ do tačke $z$ stalan i jednak broju 2).

Uopšte, jednačina kruga sa centrom u koordinatnom početku poluprečnika $r$ je

$$|z| = r,$$

ili, ako stavimo $z = x + yi$ $(x, y \in R)$, onda ta jednačina ima oblik

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

tj.

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Slično, imamo da je jednačina kruga sa centrom u tački $z_0$ poluprečnika $r$

$$|z - z_0| = r$$

ili ako stavimo $z = x + yi$, $z_0 = a + bi$ biće

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

## RAZNI REŠENI ZADACI

1. Za kompleksan broj $z = 3 + 2i$ konjugovan je $\bar{z} = 3 - 2i$. Ako sada uzmemo konjugovan broj za $\bar{z}$, biće

$$\overline{3 - 2i} = 3 - (-2)\,i = 3 + 2i.$$

Dakle,

$$\bar{\bar{z}} = z.$$

Ova jednakost važi za svaki kompleksan broj $z \in C$.

2. Ako je $z = 5$ onda je $\bar{z} = 5$, jer je

$$z = 5 + 0i = 5, \quad \bar{z} = 5 - 0i = 5.$$

Uopšte, kompleksan broj $z$ je jednak svom konjugovanom $\bar{z}$, ako i samo ako je $z$ realan broj.

Kraći zapis:

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in R.$$

3. Ako je $z = 0$ onda je $Re(z) = 0$ i $Im(z) = 0$. Važi i obratno. Kraći zapis:

$$z = 0 \Leftrightarrow Re(z) = 0 \wedge Im(z) = 0.$$

Koristeći ovu formulu, lako se dokazuje da je ispunjeno

$$z \neq 0 \Leftrightarrow \bar{z} \neq 0.$$

4. Sa kompleksnim brojevima oblika $a + bi$ radimo kao i sa polinomima pa, ako imamo da podelimo kompleksan broj, recimo $6 + 2i$ sa realnim brojem 3, biće

$$\frac{6 + 2i}{3} = 2 + \frac{2i}{3}.$$

Nije odmah jasno čemu je jednako

$$\frac{3 - 7i}{4 + 5i}.$$

Znamo da je količnik dva kompleksna broja, gde je imenilac različit od nule, kompleksan broj jer je $(C,+,.)$ polje. Zato stavimo

$$z = \frac{3 - 7i}{4 + 5i} \qquad (z \in C),$$

ili

$$(4 + 5i)z = 3 - 7i.$$

Pomnožimo levu i desnu stranu ove jednakosti sa konjugovanim brojem broja $4 + 5i$, znači sa brojem $4 - 5i$, tada imamo

$$(4 - 5i)(4 + 5i)z = (4 - 5i)(3 - 7i).$$

Koristeći jednakost $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, dobijamo

$$(4^2 + 5^2)z = (4 - 5i)(3 - 7i)$$

ili

$$41z = -23 - 43i$$

pa je

$$z = \frac{-23 - 43i}{41} = -\frac{23}{41} - \frac{43}{41}i.$$



Dakle,

$$\frac{3 - 7i}{4 + 5i} = -\frac{23}{41} - \frac{43}{41}i.$$

Iz ovog primera vidimo da se deljenje može izvoditi i kraće, na sledeći način: pomnožimo brojilac i imenilac sa brojem koji je konjugovan broju koji se nalazi u imeniocu (ako je $z \neq 0$ u imeniocu, onda je i njegov konjugovani $\bar{z} \neq 0$), tako dobijamo da je u novodobijenom količniku imenilac realan broj, sa kojim delimo kao u primeru 4.

Na primer:

$$\frac{3 - 2i}{1 + 3i} = \frac{(3 - 2i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} = \frac{-3 - 11i}{10} = -\frac{3}{10} - \frac{11}{10}i.$$

Uopšte,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} \quad (\text{uz uslov } z_2 \neq 0),$$

ili

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} =$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i,$$

uz uslov da je $c + di \neq 0$, tj. $c^2 + d^2 \neq 0$.

5. Kako je $i^2 = -1$, to je

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = (-i)i = -i^2 = -(-1) = 1.$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i.$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1.$$

Uopšte, ako je $k \in Z$, tada

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i,$$

što se lako dokazuje, na primer

$$i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = (i^4)^k \cdot i^3 = (1)^k \cdot i^3 = i^3 = -i.$$

Recimo, za jedno određeno $k$

$$i^{131} = i^{4\cdot 32+3} = i^{4\cdot 32}\cdot i^3 = (i^4)^{32}\cdot i^3 = 1^{32}\cdot i^3 = i^3 = -i.$$

6. Čemu je jednako $\frac{1}{i}$, $\frac{1}{i^3}$.

$$\frac{1}{i} = \frac{1\cdot i}{i\cdot i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

Isto bi dobili i da smo množili sa konjugovanim brojem broja $i$, tj. sa $-i$.

$$\frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{1\cdot i}{(-i)\,i} = \frac{i}{-i^2} = \frac{i}{-(-1)} = \frac{i}{1} = i.$$

Jednakost $\frac{1}{i^3} = i$ mogli smo izvesti i ovako

$$\frac{1}{i^3} = \left(\frac{1}{i}\right)^3 = (-i)^3 = -i^3 = -(-i) = i.$$

7. Dokazati jednakosti

a) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, b) $\overline{z_1\cdot z_2} = \bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$

c) $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$

Stavimo $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, tada

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{a + bi + c + di} = \overline{a + c + (b + d)\,i} = a + c - (b + d)\,i$

$= a - bi + c - di = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

Slično se dokazuje i jednakost pod b).

c) $|z_1\cdot z_2| = \sqrt{(z_1\cdot z_2)^2} = \sqrt{(z_1\cdot z_2)\overline{(z_1\cdot z_2)}} = \sqrt{z_1\cdot z_2\cdot\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2}$

$= \sqrt{z_1\cdot\bar{z}_1\cdot z_2\cdot\bar{z}_2} = \sqrt{|z_1|^2\cdot|z_2|^2} = |z_1|\cdot|z_2|$.

### ZADACI

1. Izračunati: $i^{77}$, $\frac{1}{i^{53}}$, $\frac{1}{i^{48}}$,

$$1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 - i^6 - i^8.$$



2. Odrediti recipročne vrednosti kompleksnih brojeva

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i,\ -2i,\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

3. Odrediti količnike

$$\frac{1-i}{2+i},\ \frac{3-i}{2+i},\ \frac{5+i}{2-6i}$$

4. Dokazati $\overline{z + \bar{z}} - \overline{z - 1} = z + 1$.

*Napomena.* Skup kompleksnih brojeva se ne može urediti da $(C,+,.)$ bude uređeno polje. Jer, ako hoćemo da uvedemo takvu relaciju, onda treba da znamo koje brojeve ćemo uzeti za pozitivne, a koje za negativne. Za broj $i$ ne možemo uzeti niti da je pozitivan, niti da je negativan, a znamo da broj $i$ nije 0. To je razlog zašto ne možemo urediti polje kompleksnih brojeva. Zaista, ako uzmemo da je broj $i$ pozitivan, tj. $i > 0$, onda mora biti $i^2 > 0$, odakle, $-1 > 0$ što je kontradikcija. Ako uzmemo $i < 0$, onda $-i > 0$, pa mora biti $(-i)(-i) > 0$, tj. $i^2 > 0$ ili $-1 > 0$ kontradikcija.

## JEDNAČINE DRUGOG STEPANA SA JEDNOM NEPOZNATOM

Jednačinu drugog stepena sa jednom nepoznatom zovemo još i kvadratnom jednačinom. Opšti oblik kvadratne jednačine glasi:

I $$ax^2 + bx + c = 0$$

Na primer: $5x^2 + 3x - 1{,}5 = 0$, gde su $a$, $b$ i $c$ ma koji realni brojevi, pri čemu je $a \neq 0$ (ako je $a = 0$ jednačina je linearna) i $x$ je nepoznata veličina. Član $ax^2$ zovemo kvadratni član, $bx$ — linearni i $c$ — slobodan član. Brojeve $a$, $b$ i $c$ zovemo i koeficijentima kvadratne jednačine.

Ukoliko su koeficijenti $b$ ili $c$ ili oba jednaka nuli, onda kažemo da je kvadratna jednačina nepotpuna. Prema tome, nepotpuna kvadratna jednačina može biti oblika:

II $$ax^2 = 0$$

III $$ax^2 + bx = 0$$

IV $$ax^2 + c = 0$$

Nepotpune kvadratne jednačine su, na primer:

$$-3x^2 = 0, \quad 2x^2 - 0{,}5x = 0, \quad -7x^2 + 1 = 0$$

Ma koja kvadratna jednačina može se svesti na jedan od oblika I, II, III i IV.

*Primer 1.*

$$\frac{x-2}{3} - \frac{x(x+1)}{4} = 5x$$

Jednačinu transformišemo tako da se oslobodimo razlomaka, zagrada, prebacimo sve članove na levu stranu i grupišemo slične članove. Na taj način prelazimo na ekvivalentne jednačine datoj jednačini:

$$4(x-2) - 3x(x+1) = 60x$$

$$4x - 8 - 3x^2 - 3x - 60x = 0$$

$$-3x^2 - 59x - 8 = 0$$

*Primer 2.*

$$\frac{x-5}{3} = \frac{8-x}{x}, \quad x \neq 0$$

$$x(x-5) = 3(8-x)$$

$$x^2 - 5x + 3x - 24 = 0$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0.$$

## REŠAVANJE KVADRATNE JEDNAČINE

Rešiti kvadratnu jednačinu znači naći sve vrednosti nepoznate veličine $x$ za koje je numerička vrednost leve strane jednačine jednaka numeričkoj vrednosti desne strane jednačine. Takve vrednosti nepoznate veličine $x$ zovemo rešenjima ili korenima kvadratne jednačine. Kvadratna jednačina ima uvek dva korena, koji mogu biti i međusobno jednaki. Ako su koreni međusobno jednaki, kažemo da jednačina ima jedno dvostruko rešenje (koren).

*Primer 1.* Vrednosti nepoznate $x$, koje ćemo označiti sa $x_1 = 1$ i $x_2 = \frac{1}{2}$, su rešenje jednačine $2x^2 - 3x + 1 = 0$. Proveriti.



Zamenjujući nepoznatu $x$ date jednačine brojem $x_1 = 1$, dobijamo

$$2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 0$$

$$0 = 0$$

i, slično za $x_2 = \frac{1}{2}$

$$2 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = 0$$

$$0 = 0,$$

tj. numeričke vrednosti leve i desne strane jednačine su jednake.

### 1. **Jednačina oblika** $ax^2 = 0$

Pošto je $a \neq 0$, proizvod $ax^2$ je jedank nuli, ako je $x^2 = 0$, a to je ispunjeno jedino ako je $x = 0$. Odnosno, ako je $x^2 = 0$ napišemo kao $x \cdot x = 0$, tada je ta jednačina ekvivalentna disjunkciji jednačina $x = 0$, $x = 0$, što znači da jednačina $ax^2 = 0$ ima dva međusobno jednaka rešenja $x_1 = 0$ i $x_2 = 0$, tj. ima jedno dvostruko rešenje i pišemo $x_{1/2} = 0$.

### 2. **Jednačina oblika** $ax^2 + bx = 0$

Rastavljanjem binoma $ax^2 + bx$ na činioce dobijamo ekvivalentnu jednačinu datoj

$$x(ax + b) = 0,$$

koja je ekvivalentna disjunkciji jednačina

$$x = 0 \lor ax + b = 0,$$

odnosno, disjunkciji jednačina

$$x = 0 \lor x = -\frac{b}{a}.$$

Pošto ekvivalentne jednačine imaju iste korene, to su $x_1 = 0$ i $x_2 = -\frac{b}{a}$ koreni jednačine $ax^2 + bx = 0$.

*Primer 1.*

$$-x^2 + 3x = 7x^2 - x$$
$$-8x^2 + 4x = 0$$
$$-4x(x-1) = 0$$
$$-4x \lor x - 1 = 0$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

### 3. **Jednačina oblika** $ax^2 + c = 0$

*Primer 1.*

$$x^2 - 9 = 0$$

Prebacivanjem slobodnog člana na desnu stranu dobijamo ekvivalentnu jednačinu

$$x^2 = 9$$

Korenovanjem leve i desne strane dobija se disjunkcija jednačina $x = 3 \lor x = -3$ ili $x = \pm 3$, što znači da su $x_1 = 3$ i $x_2 = -3$ koreni jednačine $x^2 - 9 = 0$.

Do istih korena dolazimo i na sledeći način: Binom $x^2 - 9$ rastavimo na činioce, kao razliku kvadrata, te dobijemo ekvivalentnu jednačinu

$$(x-3)(x+3) = 0,$$

koja je ekvivalentna disjunkciji

$$x - 3 = 0 \lor x + 3 = 0 \quad \text{ili} \quad x = \pm 3$$

Znači, $x_1 = 3$ i $x_2 = -3$ su koreni jednačine $x^2 - 9 = 0$.

*Primer 2.*

$$-3x^2 + 2 = 0$$
$$x^2 = \frac{2}{3}$$



$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases} \quad \text{znači koreni su } x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

*Primer 3.*

$$2x^2 + 5 = 0$$
$$x^2 = -\frac{5}{2}$$
$$\begin{cases} x = \sqrt{-\frac{5}{2}} \\ x = -\sqrt{-\frac{5}{2}} \end{cases} \quad \text{koreni su } x_{1/2} = \pm i\sqrt{\frac{5}{2}}$$

*Primer 4.*

$$2(x-3)^2 - 4 = 0$$
$$2(x-3)^2 = 4$$
$$(x-3)^2 = 2$$
$$\begin{cases} x - 3 = \sqrt{2} \\ x - 3 = -\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{koreni su } x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{2}$$

*Primer 5.*

$$-x^2 - 2 = 0$$
$$x^2 + 2 = 0$$
$$x^2 = -2$$
$$\begin{cases} x = \sqrt{-2} \\ x = -\sqrt{-2} \end{cases} \quad \text{koreni su } x_{1/2} = \pm i\sqrt{2}$$

Uopšteno, jednačina $ax^2 + c = 0$ ekvivalentna je jednačini $x^2 = -\frac{c}{a}$ odnosno disjunkciji

$$x = \sqrt{-\frac{c}{a}} \lor x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad \text{ili} \quad x_{1/2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Prema tome su $x_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ koreni jednačine $ax^2 + c = 0$.

Ako su koeficijenti $a$ i $c$ suprotnog znaka, tada je $-c/a$ pozitivan broj, pa su koreni jednačine realni brojevi.

Ako su koeficijenti $a$ i $c$ istog znaka, tada je $-c/a$ negativan broj, te su koreni kompleksni brojevi.

### 4. **Opšta kvadratna jednačina** $ax^2 + bx + c = 0$

Jednačinu $ax^2 + bx + c = 0$ deljenjem sa $a\,(a \neq 0)$ svodimo na ekvivalentan oblik

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a} = 0$$

i tražimo korene te jednačine.

*Primer 1.*

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Da bismo rešili ovu jednačinu, dopunimo binom, koji se sastoji od kvadratnog i linearnog člana, tj. binom $x^2 - 2x$, do potpunog kvadrata. To postižemo dodajući mu kvadrat polovine koeficijenta uz $x$, u ovom slučaju broj 1. Poznato je da se jednačina ne menja ako jednoj strani jednačine dodamo i oduzmemo jedan isti broj. Prema tome, ako na desnoj strani gornje jednačine dodamo jedinicu, moramo je i oduzeti, te dobijamo

$$x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = 0.$$

Prva tri člana čine potpun kvadrat, te je

$$(x - 1)^2 - 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 4.$$

Ova jednačina ekvivalentna je sa

$$\begin{cases} x - 1 = 2 \\ x - 1 = -2 \end{cases}, \text{ ili } \quad x = 1 \pm 2.$$

Znači $x_1 = 3$ i $x_2 = -1$ su koreni jednačine $x^2 - 2x - 3 = 0$.



*Primer 2.*

$$3x^2 - 9x + 6 = 0$$

Deljenjem jednačine sa 3 i dopunjavanjem do potpunog kvadrata, dobijamo ekvivalentne jednačine

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 2 = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \qquad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Ova jednačina ekvivalentna je sa

$$\begin{cases} x - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2} \\ x - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}, \text{ odnosno } \quad x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2},$$

tj. $x_1 = 2$ i $x_2 = 1$ su koreni date jednačine.

*Primer 3.*

$$x^2 - \frac{2}{3}\,x + 3 = 0$$

$$x^2 - \frac{2}{3}\,x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + 3 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{26}{9} = 0 \qquad \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{26}{9}$$

$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{3} = \sqrt{-\dfrac{26}{9}} \\ x - \dfrac{1}{3} = -\sqrt{-\dfrac{26}{9}} \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{3} \pm i\sqrt{\frac{26}{9}} \quad \text{tj.} \quad x_{1/2} = \frac{1}{3} \pm i\sqrt{\frac{26}{9}}$$

*Primer 4.*

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$(x-2)^2 = 0$$
$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$$
$$x_{1/2} = 2$$

Zaključujemo da potpuna kvadratna jednačina može da ima dva realna različita korena, ili dva konjugovana kompleksna korena, ili jedan realan dvostruki koren.

Jednačinu $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ rešavamo na isti način kao i jednačine u datim primerima, tj. svodimo je na ekvivalentne jednačine:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + \dfrac{b}{2a} = \sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ x + \dfrac{b}{2a} = -\sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \end{array}\right. \quad \text{ili} \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Prema tome, koreni kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ su

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ili

(1) $$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Izraz (1) je formula za korene opšte kvadratne jednačine.



*Primer 5.* Rešiti jednačinu $x^2 - 3x - 4 = 0$ koristeći formulu za korene jednačine.

$$a = 1, \quad b = -3, \quad c = -4$$

$$x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -1$$

Ako je koeficijenat $b$ kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ paran broj, tj. $b = 2k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), tada se koreni mogu izraziti na sledeći način

$$x_{1/2} = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a},$$

ili, pošto je $k = \frac{b}{2}$,

$$x_{1/2} = \frac{-\dfrac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}.$$

*Primer 6.*

$$-3x^2 + 14x + 5 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 15}}{-3} = \frac{-7 \pm 8}{-3}$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = 5.$$

## DISKRIMINANTA

U prethodnim primerima videli smo da su rešenja kvadratne jednačine realni ili kompleksni brojevi. Sada ćemo, na osnovu formule za korene kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$, dati opšti zaključak o prirodi korena.

S obzirom da su

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

zaključujemo da priroda korena zavisi od znaka potkorene veličine $b^2 - 4ac$ koju ćemo označiti sa $D$ i zvati diskriminantom kvadratne jednačine, tj. $D = b^2 - 4ac$. Razlikovaćemo tri slučaja:

I — Ako je $D > 0$, onda su koreni jednačine realni brojevi, jer je kvadratni koren pozitivnog broja pozitivan broj.

II — Ako je $D = 0$, jednačina ima jedno realno dvostruko rešenje

$$x_{1/2} = -\frac{b}{2a}.$$

III — Ako je $D < 0$, onda su koreni konjugovano kompleksni brojevi, jer je kvadratni koren negativnog broja imaginaran broj.

Prema tome, izračunavajući vrednost diskriminante, određujemo prirodu korena jednačine ne rešavajući je.

*Primer 1.* Odrediti prirodu korena kvadratne jednačine

$-2x^2 + x - 4 = 0$; $a = -2$; $b = 1$, $c = -4$, $D = 1 - 32 = -31$.

Koreni su konjugovano kompleksni brojevi.

*Primer 2.* $7x^2 - 2x - 3 = 0$, $a = 7$, $b = -2$, $c = -3$, $D = 4 + 84 = 88$. Koreni jednačine su realni i različiti brojevi.

*Primer 3.*

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$D = 16 - 16 = 0$$

Koreni su realni i, međusobom, jednaki.

*Primer 4.* Za koje vrednosti parametra $m$ jednačina $3x^2 - x - 4m = 0$ ima realna i različita rešenja (korene).

$$a = 3, \quad b = -1, \quad c = -4m, \quad D > 0, \quad 1 + 48m > 0, \; m > -\frac{1}{48}$$

Koreni su realni i različiti, ako je $m > -\dfrac{1}{48}$.



## VIETOVE VEZE

Koreni jednačine $x^2 - 5x + 4 = 0$ su $x_1 = 4$ i $x_2 = 1$. Sabirajući i množeći korene, dobijamo

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$x_1 \cdot x_2 = 4$$

Uočavamo da je zbir korena broj suprotan koeficijentu linearnog člana, a da je proizvod korena jednak slobodnom članu.

Ako imamo jednačinu $3x^2 + 12x + 5 = 0$, čija su rešenja

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{21}}{3}$$

tada je $x_1 + x_2 = -4$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{5}{3}$, odnosno zbir korena je broj suprotan koeficijentu linearnog člana, a proizvod slobodnom članu jednačine

$$x^2 + 4x + \frac{5}{3} = 0,$$

koja je ekvivalentna datoj jednačini, a koja se dobija deljenjem date jednačine koeficijentom kvadratnog člana, tj. brojem 3.

Do ovog zaključka došao je francuski matematičar Viete (1540—1603).

U opštem slučaju, za kvadratnu jednačinu $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, koja je ekvivalentna jednačini $ax^2 + bx + c = 0$, važi:

**Teorema (Viete).** Zbir korena kvadratne jednačine $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ jednak je koeficijentu linearnog člana sa suprotnim znakom, a proizvod korena je jednak slobodnom članu.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{i} \quad x' \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

*Dokaz.* Rešenja jednačine $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ su

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Sledi

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

i $$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$= \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Obrasce $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ zovemo Vietove veze između korena i koeficijenata kvadratne jednačine.

Koristeći Vietove veze, lako rešavamo zadatke.

*Primer 1.* Napisati kvadratnu jednačinu čija su rešenja $x_1 = -4$ i $x_2 = \frac{3}{4}$

$$x_1 + x_2 = -4 + \frac{3}{4} = -\frac{13}{4} = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = -3 = \frac{c}{a}$$



Tražena jednačina glasi

$$x^2 + \frac{13}{4}x - 3 = 0 \quad \text{ili} \quad 4x^2 + 13x - 12 = 0.$$

*Primer 2.* Ne rešavajući kvadratnu jednačinu

$$x^2 - 4x + 1 = 0,$$

naći

a) Zbir i proizvod korena
b) Kvadrat zbira korena
c) Zbir kvadrata korena
d) Zbir brojeva inverznih korenima

*Rešenje*:

a) $x_1 + x_2 = 4 \qquad x_1 \cdot x_2 = 1$

b) $(x_1 + x_2)^2 = 16$

c) $$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 =$$
$$= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 16 - 2 = 14$$

d) $$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1x_2} = \frac{4}{1} = 4$$

*Primer 3.* Sastaviti kvadratnu jednačinu čiji su koreni tri puta veći od korena jednačine

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Rešenja date jednačine su $x_{1/2} = \frac{5 \pm 1}{2}$ tj. $x_1 = 3$ i $x_2 = 2$.

Koreni tražene jednačine su

$$x'_1 = 9 \text{ i } x'_2 = 6;\ x'_1 + x'_2 = 15 = -\frac{b}{a}\ x'_1x'_2 = 54 = \frac{c}{a}.$$

Prema tome, tražena jednačina glasi

$$x^2 - 15x + 54 = 0.$$

*Primer 4.* Za koje vrednosti parametra $m$ jednačina $x^2 + mx + +15 = 0$ ima jedan koren jednak $-5$.

*Rešenje*

$$x_1 + x_2 = -m$$
$$x_1 \cdot x_2 = 15$$

Ako uzmemo da je $x_2 = -5$, imamo

$$x_1 - 5 = -m$$
$$-5x_1 = 15$$

Ovo je sistem od dve linearne jednačine. Iz prve jednačine je $x_1 = 5-m$ i, zamenjujući vrednost $x_1$ u drugu jednačinu, dobijamo

$$-5(5-m) = 15$$
$$m = 8.$$

## DISKUSIJA REŠENJA KVADRATNE JEDNAČINE

U ovom odeljku ispitujemo kakva su rešenja kvadratne jednačine

$$ax^2 + bx + c = 0$$

u zavisnosti od znaka koeficijenata $a$, $b$ i $c$.

I slučaj

Neka je $a > 0$, $c < 0$ i $b$ proizvoljan realan broj. Tada je $D = b^2 - 4ac > 0$, jer je $b^2 \geqslant 0$ i $-4ac > 0$, te su koreni jednačine realni i različiti.

Kako je $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$, to su koreni suprotnih znakova; jedan je pozitivan, a drugi negativan.

Posebno:

1) ako je $a > 0$, $c < 0$ i $b < 0$, tada je, uz gornje zaključke, još i $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$, što znači da je pozitivan koren veći od apsolutne vrednosti negativnog korena.

2) ako je $a > 0$, $c < 0$ i $b > 0$, tada je $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$, što znači da je apsolutna vrednost negativnog korena veća od pozitivnog korena.



*Primer 1.* U jednačini $x^2 - 3x - 14 = 0$ $a = 1$, $b = -3$, $c = -14$. Zaključujemo: da su koreni realni i različiti, suprotnih znakova i da je pozitivan koren veći od apsolutne vrednosti negativnog korena, jer je $D = 9 + 56 = 65 > 0$, $x_1x_2 = -14$ $x_1 + x_2 = 3$.

II slučaj

Neka je $a > 0$, $c > 0$ i $b$ ma kakav realan broj, tada je $D = b^2 - 4ac$ ili negativan broj, ili pozitivan broj, ili broj jednak nuli.

Ako je $b^2 - 4ac < 0$, znamo da su koreni konjugovano kompleksni brojevi i ne mogu se upoređivati.

Ako je $b^2 - 4ac \geqslant 0$, koreni su realni i, kako je $x_1x_2 = \frac{c}{a} > 0$, koreni su istog znaka, tj. oba su pozitivna ili oba negativna.

Posebno:

1) ako je $a > 0$, $c > 0$, $b > 0$ i $D \geqslant 0$, gornjem zaključku (da su koreni realni i istog znaka) dodajemo da su oba korena negativna, jer je $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$.

2) ako je $a > 0$, $c > 0$, $b < 0$ i $D \geqslant 0$, tada je $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$, što znači da su oba korena pozitivna.

*Primer 2.* Diskutovati korene kvadratne jednačine

$$5x^2 + 7x + 2 = 0$$

Kako je $a = 5$, $b = 7$, $c = 2$ i $D = 49 - 40 = 9 > 0$, koreni su realni i različiti, istog su znaka i to — negativna, jer je $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{5}$ i $x_1 + x_2 = -\frac{7}{2}$.

U slučajevima I i II pretpostavka je da je $a > 0$. Ako je u kvadratnoj jednačini $a < 0$, tada je množenjem sa $-1$ svodimo na ekvivalentnu jednačinu u kojoj je $a > 0$ i diskutujemo rešenja (korene) te jednačine.

*Primer 3.* Diskutovati rešenja jednačine

$$-4x^2 + x - 2 = 0$$

Diskutujemo rešenja jednačine ekvivalentne datoj:

$$4x^2 - x + 2 = 0$$

Kako je $a = 4$, $b = -1$, $c = 2$ i $D = -31$, koreni su konjugovano kompleksni brojevi.

Zaključak: diskusiju rešenja kvadratne jednačine vršimo ne rešavajući jednačinu.

*Primer 4.* Ispitati za koje vrednosti parametra $m$ jednačina

$$3x^2 - 4x + 2m = 0$$

ima realne i različite korene i istog znaka.

Koreni ispunjavaju date uslove ako je:

$$b^2 - 4ac > 0 \wedge x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0,$$

odnosno

$$16 - 24m > 0 \wedge \frac{2m}{3} > 0.$$

Ovo je sistem linearnih nejednačina sa jednom nepoznatom. Sledi:

$$m < \frac{2}{3} \wedge m > 0,$$

tj.

$$0 < m < \frac{2}{3}$$

*Primer 5.* Odrediti parametar $m$ da jednačina

$$x^2 + 5x + 2(3 - m) = 0$$

ima realne različite korene i to suprotnog znaka.

Koreni ispunjavaju date uslove ako je

$$b^2 - 4ac > 0 \wedge \frac{c}{a} < 0.$$

Za $a = 1$, $b = 5$, $c = 2(3 - m)$ dobijamo

$$25 - 8(3 - m) > 0 \wedge 2(3 - m) < 0$$

Rešenje ovog sistema je skup brojeva $m, 3 < m < +\infty$, što znači da su za te vrednosti $m$ koreni realni, različiti i suprotnog znaka.



*Primer 6.* Ispitati za koje vrednosti parametra $m$ jednačina

$$mx^2 - (2m - 1)x + m - 3 = 0, \quad m \neq 0$$

ima realne različite korene, suprotnog znaka i pozitivan koren veći od apsolutne vrednosti negativnog korena.

U ovom slučaju mora biti:

$$b^2 - 4ac > 0 \wedge \frac{c}{a} < 0 \wedge -\frac{b}{a} > 0,$$

ili za $\quad a = m, \; b = -(2m - 1), \; c = m - 3$

$$8m + 1 > 0 \wedge \frac{m-3}{m} < 0 \wedge \frac{2m-1}{m} > 0$$

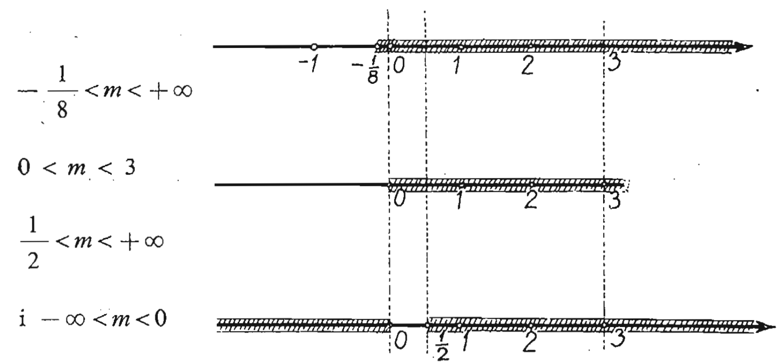
Tražimo vrednost $m$, koje zadovoljavaju sve tri nejednakosti, tj. sistem.

Rešenje prve nejednačine je skup brojeva $m$, $-\frac{1}{8} < m < +\infty$.

Rešenje druge nejednačine je skup: $0 < m < 3$.

Rešenje treće nejednačine je skup: $\frac{1}{2} < m < +\infty$ i $-\infty < m < 0$.

Radi preglednosti predstavimo ove skupove na brojnoj osi




Sl. 11

Zajedničko rešenje za sistem nejednačina je skup vrednosti $m$,

$$\frac{1}{2} < m < 3$$

i, za te vrednosti, koreni ispunjavaju uslove zadatka.

## PROBLEMI

Mnogo zadataka iz matematike, fizike i drugih nauka rešavamo tako da formiramo kvadratnu jednačinu, na osnovu uslova zadatka, u kojoj nepoznata $x$ predstavlja veličinu koja se zadatkom traži.

*Primer 1.* Naći dvocifreni broj čija je cifra jedinica za 3 veća od cifre desetica, ako je proizvod tog broja i zbira njegovih cifara jednak 175.

Označimo sa:

$x$ cifru desetica

$x+3$ cifru jedinica

$10x + x + 3$ dvocifreni broj sa gornjim ciframa (jer, na primer, broj 27 možemo napisati kao $2.10 + 7$).

Iz uslova zadatka sledi:

$$(10x + x + 3) \cdot (x + x + 3) = 175$$

$$22x^2 + 39x - 166 = 0$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{83}{22}$$

Traženi dvocifreni broj je 25 za $x_1 = 2$. Koren $x_2$ nema smisla za postavljeni zadatak.

*Primer 2.* Radnik mora da izradi 240 istih alatki. Po završetku izrade 140 alatki, usavršio je metod izrade i izrađivao je za 1 sat 3 alatke više nego ranije. Da je novim metodom izradio sve alatke, završio bi posao 6 sati ranije. Koliko je alatki radnik izrađivao za jedan sat novim metodom?

Neka je:

$x$ broj alatki koje radnik izrađuje za 1 sat novim metodom,

$x-3$ broj alatki, koje on izrađuje za jedan sat starim, metodom

$\frac{140}{x-3}$ vreme utrošeno za izradu 140 alatki,

$\frac{100}{x}$ vreme utrošeno za izradu preostalih 100 alatki,

$\frac{240}{x}$ vreme, koje bi utrošio da je sve alatke izrađivao novim metodom.



Sledi:

$$\frac{240}{x} = \frac{140}{x} + \frac{100}{x-3} - 6, \quad x \neq 0, \; x \neq 3$$

$$x^2 - 3x - 70 = 0$$

$$x_1 = 10 \quad x_2 = -7$$

Koren $x_2$ nema smisla. Radnik je novim metodom izrađivao 10 alatki na sat.

*Primer 3.* Rastojanje između dva grada $A$ i $B$ od 270 km automobil je prešao nekom srednjom brzinom. Vozač je zaključio da je mogao to rastojanje preći za 1 sat manje da je povećao brzinu za 9 km/sat. Za koje vreme je vozač stigao iz grada $A$ u grad $B$.

Neka je:

$x$ vreme za koje je vozač prešao 270 km,

$x - 1$ vreme za koje bi vozač prešao 270 km da je vozio brže za 9km/sat,

$\frac{270}{x}$ brzina kretanja automobila,

$\frac{270}{x-1}$ brzina kretanja automobila da je išao brže.

Sledi:

$$\frac{270}{x} + 9 = \frac{270}{x-1} \quad x \neq 0, \; x \neq 1$$

$$x^2 - x - 30 = 0$$

$$x_1 = 6, \quad x_2 = -5$$

Vozač je prešao rastojanje od 270 km za 6 sati.

# POLINOMI DRUGOG STEPENA

## 1. KANONIČKI OBLIK, LINEARNI ČINITELJI

Neka su $x, y, y, \ldots, a, b, c, \ldots$ simboli za brojeve (promenljive) i $1, 3, 2, 0, -\frac{1}{2}, \sqrt{2}, \pi, \ldots$ itd; simboli određenih brojeva. Ove navedene simbole, kao i algebarske izraze oblika

$$x + y,\ x \cdot y - 3z,\ 2y^2 + 4x,\ xyz, \ldots \text{ itd.}$$

nazivamo polinomima. Ako je polinom samo po jednoj promenljivoj, onda ćemo reći:

**Definicija 1.** Ako su $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi i $x$ promenljiva, tada algebarski izraz

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

nazivamo *polinomom* po promenljivoj $x$.

Ako je $a_0 \neq 0$, kažemo da je polinom *stepena n.* Brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ su *koeficijenti polinoma.*

Svi brojevi $x$ za koje je

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots. + a_{n-1}x + a_n = 0$$

su *koreni (nule)* polinoma.

Naš cilj je da proučimo polinome stepena 2, tzv. kvadratne polinome koje pišemo u obliku

$$ax^2 + bx + c$$

(gde $a, b, c \in R$ i $a \neq 0$).

Kako, odrediti nule polinoma $ax^2 + bx + c$ znači rešiti kvadratnu jednačinu $ax^2 + bx + c = 0$, to se na tome nećemo zadržavati jer je rešavanje kvadratne jednačine dato.

Kvadratni polinom $ax^2 + bx + c$ transformišemo na sledeći način:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$



Dakle,

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \ldots\ldots\ldots. (1)$$

što se može napisati i:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \ldots\ldots\ldots. (2)$$

Ovaj oblik nazivamo *kanonički oblik* polinoma $ax^2 + bx + c$.

*Primer 1.* Napisati polinom $2x^2 - 3x + 1$ u kanoničkom obliku.

*Rešenje.* I način:

$$2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 2\left[x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} - \frac{9}{16}\right] = 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right] = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$$

II način: Kako je za polinom $2x^2 - 3x + 1$, $a = 2$, $b = -3$, $c = 1$, to je

$$\frac{b}{2a} = \frac{-3}{2 \cdot 2} = \frac{-3}{4};$$

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 1 - (-3)^2}{4 \cdot 2} = \frac{8 - 9}{8} = -\frac{1}{8}$$

te, primenom (2), dobijamo

$$2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}.$$

Neka su $x_1$ i $x_2$ koreni kvadratnog polinoma $ax^2 + bx + c$. Prema formulama Vijeta je

$$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2) \qquad \frac{c}{a} = x_1x_2,$$

pa je

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 \ldots\ldots\ldots (3).$$

Izraz na desnoj strani u (3) pišemo:

$$x^2 - (x_1 + x_2) x + x_1x_2 = x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 =$$
$$= x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = (x - x_1)(x - x_2).$$

Prema (3) je

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - x_1)(x - x_2).$$

Tada je

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Dakle, ako su $x_1$ i $x_2$ koreni polinoma $ax^2 + bx + c$, tada je

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

i kažemo da je polinom razložen na linearne činitelje (faktore).

*Primer 2.* Razložiti na linaerne faktore polinom $3x^2 - 10x + 3$.

Rešenje. Koreni polinoma $3x^2 - 10x + 3$ su $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

Kako je $a = 3$, to je, prema (4),

$$3x^2 - 10x + 3 = 3(x - 3)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

## 2. ZNAK KVADRATNOG POLINOMA

Ako u polinomu $ax^2 + bx + c$, simbol $x$ zamenimo određenim realnim brojem, recimo $\alpha$, tada broj $a\alpha^2 + b\alpha + c$ je vrednost polinoma za $x = \alpha$. Ako je broj $a\alpha^2 + b\alpha + c$ pozitivan (negativan), tada kažemo da je polinom pozitivan (negativan) za $x = \alpha$ ili da je pozitivnog (negativnog) znaka za $x = \alpha$.

Cilj ovog izlaganja je da za dati polinom odredimo sve realne brojeve za koje je on pozitivan odnosno negativan. Radi toga, proučićemo polinom u zavisnosti od njegove *diskriminante.* Ako je $ax^2 + bx + c$ kvadratni polinom, tada broj $D = b^2 - 4ac$ je diskriminanta tog polinoma.



Kako nam je — radi daljeg proučavanja — potrebna relacija (1), navodimo je ponovo

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Uveli smo oznaku $D$ za diskriminantu $b^2 - 4ac$. Proučićemo redom sledeće slučajeve:

$$1^0\ D < 0 \qquad 2^0\ D = 0 \qquad 3^0\ D > 0.$$

$1^0$ $D < 0$. Tada je $-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$. Kako je i $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$ za sve realne brojeve $x$, to je

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$$

za sve realne brojeve $x$. Dakle, prema (5) je polinom $ax^2 + bx + c$ istog znaka kao i koeficijent $a$, za sve realne brojeve $x$.

$2^0$ $D = 0$. Tada (5) je oblika

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

pa je $ax^2 + bx + c = 0$ za $x = -\frac{b}{2a}$. Dakle, za sve realne brojeve $x$, osim za $x = -\frac{b}{2a}$ polinom $ax^2 + bx + c$ je istog znaka kao i koeficijent $a$.

$3^0$ $D > 0$. Znamo, prema (4) da je

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

gde su $x_1$ i $x_2$ koreni poinoma $ax^2 + bx + c$. Kako je $D > 0$ to je $x_1 \neq x_2$.

Neka je $x_1 < x_2$. Određujemo znak polinoma za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$*. Tada ili $x \in (-\infty, x_1)$, ili $x \in (x_2, +\infty)$. Treba proučiti oba slučaja. Ako $x \in (-\infty, x_1)$. tada je $x < x_1$, pa — kako je $x_1 < x_2$ to je $x < x_2$ — dakle, $(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Tada, prema (6), polinom $ax^2 + bx + c$ je istog znaka kao $a$. Ako $x \in (x_2, +\infty)$ tada

*) Ovo su oznake intervala (zamislite realnu pravu).

je $x > x_2$, pa, prema $x_1 < x_2$, je $x > x_1$. Tada je $(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Prema (6), $ax^2 + bx + c$ j e istog znaka kao $a$.

Dakle, ako $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, tada je $ax^2 + bx + c$ istog znaka kao i $a$.

Ostaje da odredimo znak polinoma za $x \in (x_1, x_2)$. Neka $x \in (x_1, x_2)$. (opet je ovo oznaka za interval realne prave). Tada je $x_1 < x < x_2$, pa je $x - x_1 > 0$ i $x - x_2 < 0$. Tada je $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ i, prema (6), polinom $ax^2 + bx + c$ je suprotnog znaka od znaka broja $a$. Dakle, za $x \in (x_1, x_2)$ polinom $ax^2 + bx + c$ je suprotnog znaka od znaka broja $a$.

Navedimo ukratko dobijene zaključke:

*Rezime.* Neka je $ax^2 + bx + c$ kvadratni polinom. Tada za znak tog polinoma važi tačno jedan od sledeća tri slučaja:

$1^0$ Ako je $D < 0$, tada za sve $x \in R$, polinom $ax^2 + bx + c$ je istog znaka kao i broj $a$.

$2^0$ Ako je $D = 0$, tada za sve $x \in R \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ polinom $ax^2 + bx + c$ je istog znaka kao i broj $a$.

$3^0$ Ako je $D > 0$, tada polinom $ax^2 + bx + c$ ima dva realna različita korena $x_1$ i $x_2$ i za sve $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ polinom je istog znaka kao i broj $a$, dok za sve $x \in (x_1, x_2)$ polinom je suprotnog znaka od znaka broja $a$.

*Primer.* Ispitati znak sledećih polinoma:

a) $-2x^2 + 3x - 1$; b) $4x^2 - 4x + 1$; c) $-3x^2 + x - 1$

*Rešenje.* a) Diskriminanta polinoma $-2x^2 + 3x - 1$ je $D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1) = 9 - 8 = 1$. Dakle $D > 0$, pa polinom ima dva realna i različita korena. To su

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1$$

Prema $3^0$, za $x \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ je $-2x^2+3x-1<0$. (istog znaka kao i $-2$), a za $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ je $-2x^2 + 3x - 1 > 0$ (suprotnog znaka od znaka broja $-2$).



b) Diskriminanta polinoma $4x^2 - 4x + 1$ je $D = 0$ pa on ima jedan dvostruki koren $x = \frac{1}{2}$. (Lako se uočava da je $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$). Prema $2^0$, za $x \in R \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ je $4x^2 - 4x + 1 > 0$ (isti znak kao broj 4).

c) Za polinom $-3x^2 + x - 1$ je $D = -1 - 12 = -13$. Dakle, $D < 0$ pa, prema $1^0$ za $x \in R$, je $-3x^2 + x - 1 < 0$ (istog znaka kao i broj $-3$).

### 3. REŠAVANJE NEJEDNAČINA DRUGOG STEPENA JEDNE NEPOZNATE

Nejednačina drugog stepena jedne nepoznate je oblika

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

ili

$$ax^2 + bx + c < 0,$$

(gde je $a \neq 0$).

Rešavanje tih nejednačina svodi se na ispitivanje znaka polinoma $ax^2 + bx + c$ što je dato u 2. Zato ćemo odmah raditi zadatke.

*Primer 1.* Rešiti nejednačinu:

$$3x^2 - (3\sqrt{2} + 1)\, x + \sqrt{2} > 0.$$

*Rešenje*: Za polinom $3x^2 - (3\sqrt{2} + 1)\, x + \sqrt{2}$ je

$$D = (3\sqrt{2} + 1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = (3\sqrt{2})^2 + 6\sqrt{2} + 1 - 12\sqrt{2} =$$
$$= (3\sqrt{2})^2 - 6\sqrt{2} + 1 = (3\sqrt{2} - 1)^2 > 0$$

Dakle, $D > 0$ pa polinom ima dva realna i različita korena

$$x_{1,2} = \frac{3\sqrt{2} + 1 \pm \sqrt{(3\sqrt{2} - 1)^2}}{6} = \frac{3\sqrt{2} + 1 \pm (3\sqrt{2} - 1)}{6}$$

$$x_1 = \frac{3\sqrt{2} + 1 + 3\sqrt{2} - 1}{6} = \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{3\sqrt{2} + 1 - 3\sqrt{2} + 1}{6} = \frac{1}{3}$$

Koreni su $x_1 = \sqrt{2}$ i $x_2 = \frac{1}{3}$.

Prema $3^0$ iz 2, za $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ je $3x^2 - (3\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} > 0$.

Dakle, sva rešenja date nejednačine su realni brojevi skupa,

$$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

*Primer 2.* Rešiti nejednačinu:

$$-x^2 + 3x - 4 < 0$$

*Rešenje.* Za polinom $-x^2 + 3x - 4$ je $D = 9 - 16 = -7 < 0$

Dakle, $D < 0$ pa prema $1^0$ iz 2. za $x \in R$ je $-x^2 + 3x - 4 < 0$ te ma koji realan broj je rešenje date nejednačine. Možemo reći: skup rešenja date nejednačine je skup realnih brojeva.

Primedba uz Primer 2. Nejednačina

$$-x^2 + 3x - 4 > 0$$

nema rešenja. Dokazati koristeći primer 2.

*Primer 3.* Rešiti nejednačinu:

$$9x^2 - 6x + 1 > 0$$

*Rešenje.* Za polinom $9x^2 - 6x + 1$ je $D = 36 - 36 = 0$. Tada polinom ima jedan dvostruki koren $x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ pa, prema $2^0$ iz 2 za $x \in R \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ je $9x^2 - 6x + 1 > 0$. Dakle, skup svih rešenja date nejednačine je $R \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

*Napomena.* Kvadratna nejednačina može biti data i u obliku

$$ax^2 + bx + c \geqslant 0,$$

ili

$$ax^2 + bx + c \leqslant 0.$$

Tada i nule polinoma $ax^2 + bx + c$ jesu rešenja tih nejednačina.



## 4. FUNKCIJE (PRESLIKAVANJA)

Uočimo skup svih učenika jedne škole i skup svih imena lica (Janko, Ljiljana, Džon,... itd). Neka svakom učeniku odgovara njegovo ime. Ovim je rečeno da razmatramo parove

učenik — njegovo ime.

Šta možemo reći o svim tim parovima?

Više učenika mogu imati isto ime, ali je bitno to da *jednom učeniku odgovara tačno jedno ime.* Zato, kažemo da je tim parovima određena funkcija skupa učenika u skup svih imena lica.

Navodimo i često pominjan primer kvadrata. Kažemo: površina kvadrata je funkcija njegove stranice. Jer, ako označimo stranicu sa $x$, tada je površina $x^2$. Znači, uočili smo skup parova $(x, x^2)$. Taj skup je funkcija skupa $R$ u skup $R$.

Skup $\{(x, 2x) \mid (x \in R)\}$ je poskup skupa $R \times R$. Svakom realnom broju $x$ odgovara tačno jedan realan broj $2x$. Ovaj skup je funkcija skupa $R$ u skup $R$ čija je slika (grafik) u koordinatnom sistemu prava. Ovu funkciju kraće pišemo $y = 2x$.

Definišemo sada funkciju za slučaj bilo kakvih skupova.

**Definicija 2.** Neka su $A$ i $B$ neki skupovi. Neka je $f$ podskup skupa $A \times B$ koji zadovoljava sledeće uslove:

1) Skup svih prvih komponenti skupa $f$ jednak je skupu $A$.

2) Ako su parovi $(x, y_1)$ i $(x, y_2)$ elementi skupa $f$, onda važi jednakost $y_1 = y_2$.

Svaki takav skup zovemo *funckija* (preslikavanje) skupa $A$ u skup $B$.

Rečenica: $f$ *je funkcija skupa* $A$ *u skup* $B$ kratko se označava $f: A \to B$. Skup $A$ zovemo *domen,* a skup $B$ *antidomen* funkcije $f$. Neka je $f: A \to B$ i neka $(x, y) \in f$. Tada obično pišemo: $y = f(x)$. Element $x$ zovemo *original,* a $y$ *slika* (tog originala).

U daljem izlaganju mi ćemo se ograničiti na tzv. *realne* funkcije. To su funkcije skupa $R$ (ili nekog njegovog podskupa) u skup $R$. Za te funkcije navodimo neke definicije.

Neka je $f$ realna funkcija (dalje ćemo govoriti samo funkcija); ako je $a$ ma koji broj domena funkcije $f$, tada kažemo da je $f(a)$ vred *nost* funkcije $f$ za $x = a$.

— Realni broj $b$ je *nula* funkcije $f$ ako je $f(b) = 0$.

— Kažemo da funkcija $f$ *raste* ako je $f(x_1) < f(x_2)$ za $x_1 < x_2$ a *opada,* ako je $f(x_1) > f(x_2)$ za $x_1 < x_2$.

— Ako je $f(a) > 0$ za broj $a$ domena funkcije $f$, tada kažemo da je $f$ *pozitivna* za broj $a$.

— Ako je $f(a) < 0$ za broj $a$ domena funkcije $f$, tada kažemo da je $f$ *negativna* za broj $a$.

— Ako je realan broj $c$ (iz domena funkcije $f$) takav da za $x < c$ funkcija $\rho$ opada, a za $x > c$ funkcija $\rho$ raste, tada kažemo da je $\rho(c)$ *minimum* funkcije $f$.

— Ako je broj $c$ (iz domena funkcije $f$) takav da za $x < c$ funkcija $f$ raste, a za $x > c$ opada tada kažemo da je $f(c)$ *maximum* funkcije $f$.

— Minimum i maximum funkcije $f$ nazivamo *ekstremne* vrednosti funkcije $f$.

Znamo da skupu svih uređenih parova realnih brojeva, tj. skupu $R \times R$, odgovara koordinatni sistem. Tako i funkciji kao podskupu iz $R \times R$ odgovara u koordinatnom sistemu tzv. *grafik* funkcije.

Ako je grafik oblika $\smile$, onda kažemo da je *konkavan*, a ako je oblika $\frown$, onda kažemo da je *konveksan*.

*Napomena*: Mi ćemo za one realne funkcije koje ovde proučavamo crtati odgovarajuće grafike. Ali, treba istaći da nam grafik funkcije *ne sme* služiti za dokaz određenih tvrđenja, već samo da ta tvrđenja „pročitamo" sa slike (grafika).

### 5. KVADRATNE FUNKCIJE

Ako je $a \neq 0$ i $a, b, c \in R$, tada skup

$$\{(x, ax^2 + bx + c) \mid x \in R\}$$

nazivamo *kvadratna* funkcija skupa $R$ u skup $R$. Kraće, pišemo

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Kako je za $a \neq 0$, $ax^2 + bx + c$ polinom drugog stepena, to možemo reći da je polinom $ax^2 + bx + c$ funkcija promenljive $x$.

Cilj nam je da nacrtamo grafik funkcije $y = ax^2 + bx + c$ i da mnoga tvrđenja (recimo o znaku polinoma) lako „pročitamo" i zapamtimo preko grafika.

Prvo crtamo grafik „jednostavnijih" funkcija. Počinjemo sa funkcijom $y = x^2$ $(a = 1,\ b = c = 0)$.

**Funkcija** $y = x^2$. Funckija $y = x^2$ je sledeći skup

$$\{(x, x^2) \mid x \in R\}.$$



Uočimo neke elemente tog skupa, tj. skup

$$\left\{(-3,9), (-2,4), (-1,1), \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}\right), (0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), (1,1), (2,4), (3,9)\right\}$$

Grafik crtamo spajanjem tih tačaka neprekinutom linijom* i taj grafik nazivamo *parabola* (sl. 12).

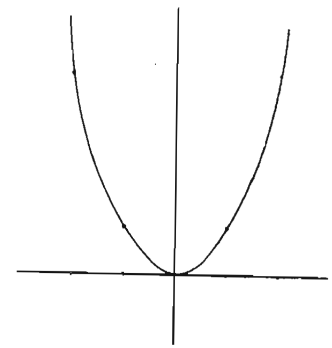
Kako je za sve realne brojeve $x$, $(-x)^2 = x^2$, to je grafik simetričan u odnosu na $y$ osu ($y$-osa je osa simetrije te parabole).

Kako je za sve $x$, $x^2 \geqslant 0$, grafik je iznad $x$ ose (sa izuzetkom tačke $(0, 0)$,) te je za sve $x$, $x \neq 0$ funkcija pozitivna.

Nula funkcije je $x = 0$.

Za $x_1 < x_2 < 0$ je $x_1^2 > x_2^2$, pa za $x < 0$ funkcija opada, dok za $0 < x_1 < x_2$ važi $x_1^2 < x_2^2$ te za $x > 0$ funkcija raste.

Kako za $x < 0$ funkcija opada, a za $x > 0$ funkcija raste, to $y(0) = 0$ je minimum funkcije $y = x^2$.



Sl. 12

Grafik je konkavan. Tačka $(0, 0)$ je *teme parabole.*

**Funkcija** $y = ax^2$ **za** $a > 0$

Crtamo grafike sledećih funkcija:

$$y = x^2; \quad y = 2x^2; \quad y = \frac{1}{2}x^2$$

i, radi upoređenja, crtamo ih u istom koordinatnom sistemu.

Pored funkcije pišemo skup tačaka pomoću kojih crtamo grafik.

$$y = 2x^2 \quad \{(-2, 8), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 8)\}$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 \quad \left\{(-2, 2), \left(-1, \frac{1}{2}\right), (0, 0), \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 2)\right\}$$

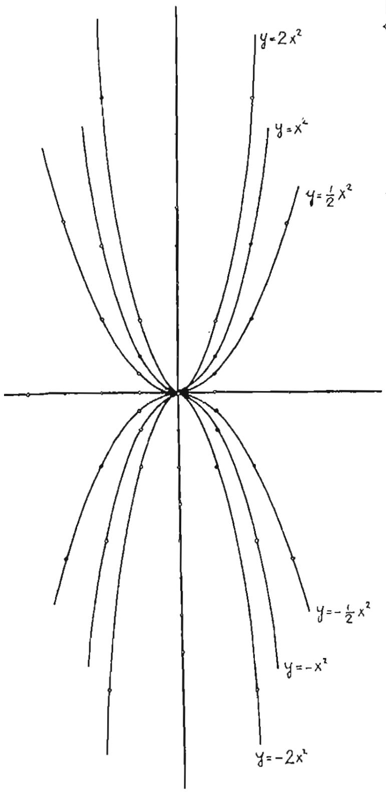
Prema graficima na sl. 13. „vidimo" da je parabola „uža" za $a > 1$ i „šira" za $0 < a < 1$.

Osobine navedene za $y = x^2$ važe za $y = ax^2$, $a > 0$.

*) O tome da funkciji $y = x^2$ odgovara tzv. neprekidna kriva učićete kasnije.

**Funkcija** $y = -x^2$

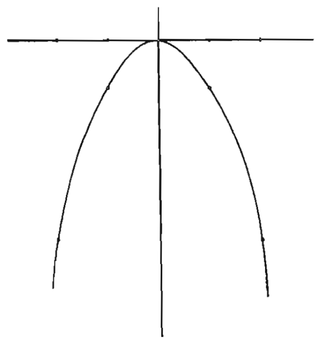
Crtamo grafik spajanjem tačaka sledećeg skupa:




Sl. 13

$$\left\{(-2, -4), (-1, -1), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right),\right.$$
$$\left.(0, 0), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right), (1, -1), (2, -4)\right\}$$

Za $x_1 < x_2 < 0$ je $-x_1^2 < -x_2^2$ te za $x < 0$ funkcija raste. Za $0 < x_1 < x_2$ je $-x_1^2 > -x_2^2$ te za $x > 0$ funkcija opada. Kako za $x < 0$ funkcija raste, a za $x > 0$ opada, to je $y(0) = 0$ maximum funkcije. Tačka $(0, 0)$ je teme parabole, a osa simetrije je $y$ osa. Za sve $x$, $x \neq 0$ funkcija je negativna. Grafik funkcije $y = -x^2$ je konveksan.



Sl. 14

**Funkcija** $y = ax^2$ **za** $a < 0$

Crtamo grafike sledećih funkcija:

$$y = -x^2, \quad y = -\frac{1}{2}x^2, \quad y = -2x^2$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 \left\{(-2, -2), \left(-1, -\frac{1}{2}\right), (0, 0), \left(1, -\frac{1}{2}\right), (2, -2)\right\}$$



$$y = -2x^2 \quad \{(-2, -8), (-1, -2), (0, 0), (1, -2), (2, -8)\}$$

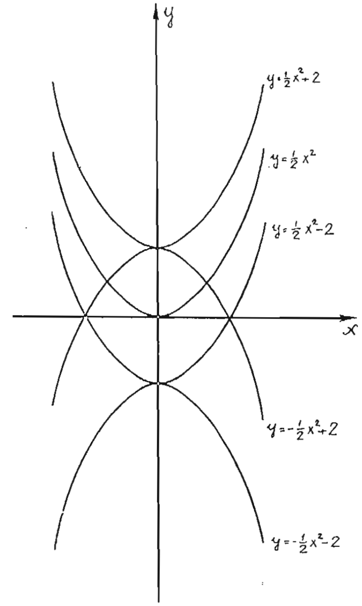
Osobine navedene za $y = -x^2$ važe za $y = ax^2$, $a < 0$.

**Funkcija** $y = ax^2 + d$, $a \neq 0$

Radi crtanja grafika funkcije $y = ax^2 + d$ uporedimo tu funkciju sa funkcijom $y = ax^2$. Za svaki broj $x$, vrednost funkcije $y = ax^2 + d$ jednaka je zbiru odgovarajuće vrednosti funkcije $y = ax^2$ i broja $d$.

Geometrijski, to znači da se svaka tačka grafika dobija „pomeranjem" odgovarajuće tačke grafika $y = ax^2$ za $|d|$ jedinica naviše ili naniže u zavisnosti od znaka broja $d$.

Grafik funkcije $y = ax^2 + d$ je parabola istog oblika kao za funkciju $y = ax^2$ samo „pomerena" duž $y$ ose za $|d|$ jedinica. Osa simetrije je $y$ osa. Teme parabole je tačka $(0, d)$. Ako je $a > 0$, $d > 0$, tada je za sve $x$ funkcija pozitivna. Ako je $a < 0$, $d < 0$, tada je za sve $x$ funkcija negativna. Ako su $a$ i $d$ suprotnog znaka, tada funkcija ima dve nule i to $-x_1$, $x_1$ $(x_1 > 0)$. Ako je $a > 0$ funkcija $y = ax^2 + d$ za $x < 0$ opada a za $x > 0$ raste. Ako je $a < 0$ funkcija $y = ax^2 + d$ za $x < 0$ raste a za $x > 0$ opada.




Sl. 15

Za $a > 0$ funkcija ima min $y = d$, a za $a < 0$ funkcija ima max $y = d$.

Navedene osobine se mogu dokazati, a mogu se i „pročitati" sa slike 15.

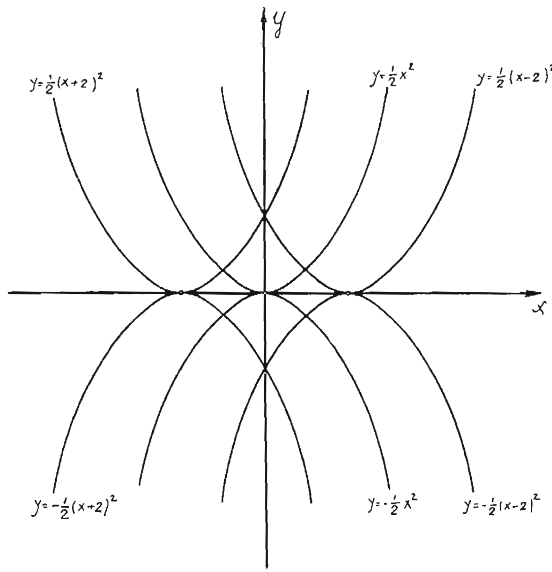
**Funkcija** $y = a(x - m)^2$

Vrednost funkcije $y = a(x - m)^2$ za $x = x_0 + m$ jednaka je vrednosti funkcije $y = ax^2$ za $x = x_0$. Znači, tačka grafika funkcije $y = a(x - m)^2$ sa apscisom $x = x_0 + m$ ima istu ordinatu kao tačka grafika funkcije $y = ax^2$ koja ima apscisu $x = x_0$.

Dakle, grafik funkcije $y = a(x - m)^2$ dobijamo „pomeranjem" grafika funkcije $y = ax^2$ za $|m|$ jedinica duž $x$-ose (desno — ako je $m > 0$ i levo ako je $m < 0$).

Teme parabole je tačka $(m, 0)$ a osa simetrije je prava $x = m$.

Ako je $a > 0$ funkcija je za sve $x$, $x \neq m$ pozitivna, a, ako je $a < 0$, tada je funkcija negativna za sve $x$, $x \neq m$.




Sl. 16

Ako je $a > 0$ tada funkcija $y = a(x - m)^2$ ima min $y = 0$ za $x = m$ i grafik je konkavan.

Ako je $a < 0$, tada $y = a(x - m)^2$ ima max $y = 0$ za $x = m$ i grafik je konveksan.

Na slici 16. nacrtano je nekoliko grafika funkcija oblika $y = a(x - m)^2$.

**Funkcija** $y = a(x - m)^2 + d$

Grafik ove funkcije dobijamo tako što grafik funkcije $y = a(x - m)^2$ „pomeramo" duž ordinatne ose za $|d|$ jedinica.

Dakle, grafik funkcije $y = a(x - m)^2 + d$ je parabola istog oblika kao i $y = ax^2$, ali „pomerena" duž apscisne ose za $|m|$ jedinica i duž ordinatne ose za $|d|$ jedinica.

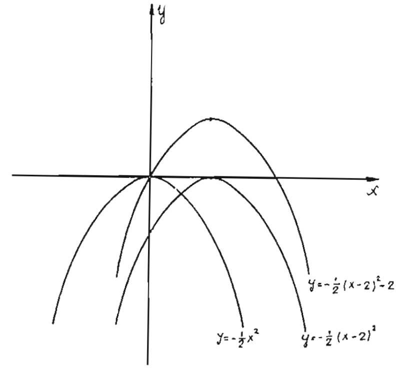


Teme parabole je tačka $(m, d)$ a osa simetrije prava $x = m$.

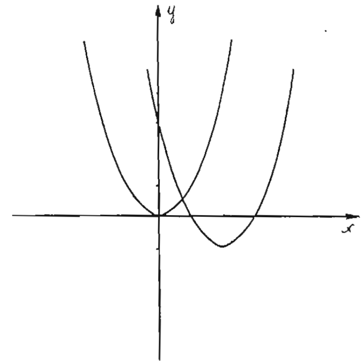
Ako je $a > 0$, tada funkcija $y = a(x - m)^2 + d$ ima za $x = m$ min $y = d$ i grafik je konkavan.

Ako je $a < 0$, tada funkcija ima za $x = m$ max $y = d$ i grafik je konveksan.

Na slici 17. je nacrtan grafik funkcije $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$.




Sl. 17




Sl. 18

**Funkcija** $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Znamo prema (2) iz 1. da se polinom može predstaviti u kanoničkom obliku. Dakle, kvadratnu funkciju možemo izraziti sa:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

što znači da je ona funkcija oblika

$$y = a(x - m)^2 + d \text{ za } m = \frac{-b}{2a}, \quad d = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Na slici 18. je nacrtana parabola $y = x^2 - 4x + 3$, a, radi upoređenja, i parabola $y = x^2$.

Teme parabole $y = ax^2 + bx + c$ je

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

## ISPITIVANJE GRAFIKA KVADRATNE FUNKCIJE

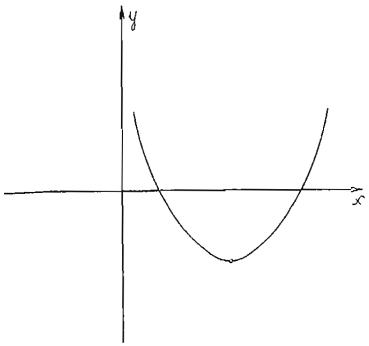
Neka je $y = ax^2 + bx + c$ kvadratna funkcija. Tada, ili je $a > 0$, ili je $a < 0$. Razmotrićemo redom oba slučaja.

Neka je $a > 0$. Tada je parabola konkavna.

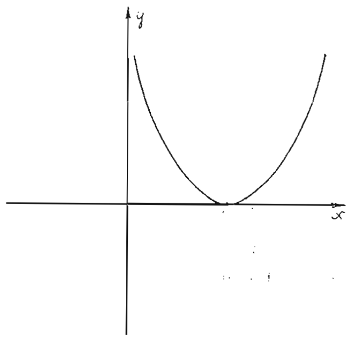
$1^0$ Ako je $b^2 - 4ac > 0$, tada je ordinata temena

$$d = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0,$$

pa je teme ispod apscisne ose. Kako je parabola konkavna, to grafik seče $x$ osu u dve tačke. Apscise tih tačaka su koreni polinoma $ax^2 + bx + c$ (sl. 19).




Sl. 19




Sl. 20

$2^0$ $b^2 - 4ac = 0$. Tada je ordinata temena jednaka 0, tj. teme je na apscisnoj osi, polinom $ax^2 + bx + c$ ima jedan (dvostruki) koren (sl. 20).

$3^0$ $b^2 - 4ac < 0$. Tada je ordinata temena parabole

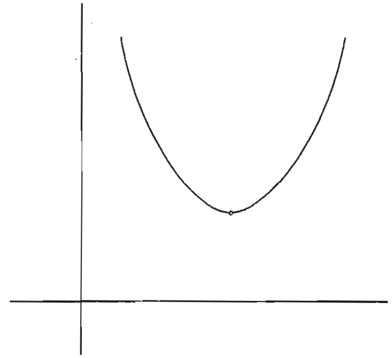
$$d = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0,$$

pa je cela parabola iznad ose $Ox$ te $ax^2 + bx + c$ nema realnih nula (sl. 21).

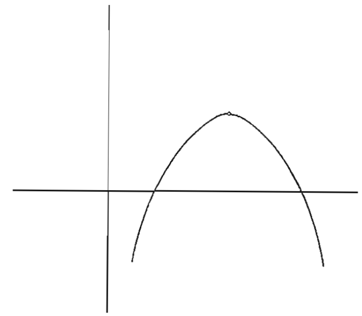


Neka je $a < 0$, tada je parabola konveksna.

$1^0$ $b^2 - 4ac > 0$. Tada je $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$, pa je teme iznad $x$ ose i — kako je grafik konveksan — to grafik seče osu $Ox$ u dve tačke, te $ax^2 + bx + c$ ima dva realna korena (sl. 22).



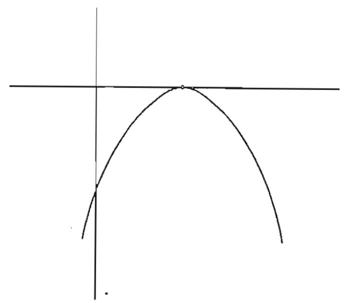
Sl. 21



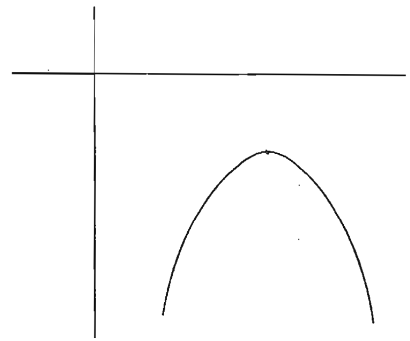
Sl. 22

$2^0$ $b^2 - 4ac = 0$. Tada je teme tačka apscise. Grafik dodiruje $x$ osu sa donje strane. Polinom $ax^2 + bx + c$ ima jedan realan (dvostruki) koren (sl. 23).

$3^0$ $b^2 - 4ac < 0$. Tada je $d = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0$ te je teme ispod apscisne ose. Kako je parabola konveksna, to polinom nema realnih nula (sl. 24).

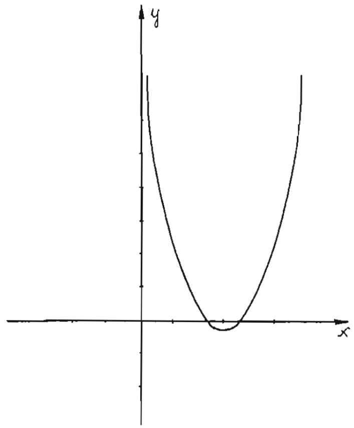


Sl. 23



Sl. 24

Na osnovu ove diskusije vidimo da možemo „čitati" znak polinoma $ax^2 + bx + c$ sa grafika funkcije $y = ax^2 + bx + c$, i to nam često olakšava da rešimo, recimo, kvadratnu nejednačinu.



Sl. 25

*Primer 1.* Rešiti nejednačinu

$$x^2 - 5x + 6 < 0$$

Crtamo grafik funkcije $y = x^2 - 5x + 6$. Kako je $a = 1 > 0$, parabola je konkavna, a teme ima koordinate $\frac{-b}{2a} = \frac{5}{2} = m$

$$d = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{24 - 25}{4} = \frac{-1}{4}$$

$$T\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

Nule funkcije su $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Sa slike (grafika) „čitamo" da je za sve $x$, $2 < x < 3$, $y < 0$. Dakle, skup rešenja nejednačine $x^2 - 5x + 6 < 0$ je skup $(2, 3)$ (interval realne prave).

*Primer 2.* Uočimo skup svih pravougaonika čiji je obim 20. Odrediti stranice onog koji ima najveću površinu.

*Rešenje.* Neka je $x$ jedna stranica, tada je druga $10-x$. Površina je

$$y = x(10 - x),$$

odnosno

$$y = -x^2 + 10x.$$

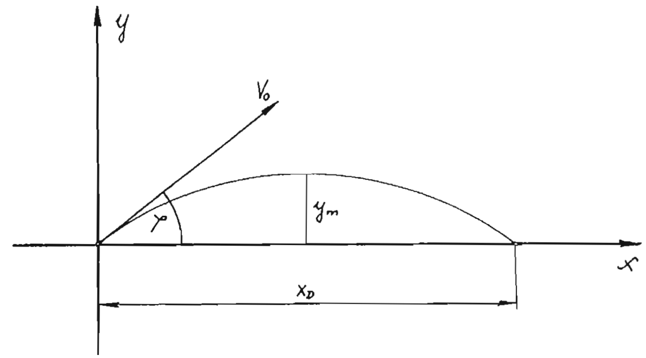
Dakle, $y$ je kvadratna funkcija, pa se zadatak svodi na određivanje max te funkcije. Kako je $a = -1$, $b = 10$, to je

$$-\frac{b}{2a} = \frac{-10}{2(-1)} = 5; \quad \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)\,0 - 100}{4 \cdot (-1)} = 25.$$

Dakle, teme je $(5, 25)$, odnosno najveća površina je 25 za $x = 5$. Traženi pravougaonik je kvadrat stranice 5.



*Primer 3.* Odrediti obrazac za najveću visinu kod kosog hica, koristeći osobine kvadratne funkcije.



Sl. 26

Nacrtali smo grafik funkcije

$$y = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \varphi} x^2 + x \operatorname{tg} \varphi,$$

gde je $V_0$ početna brzina gađanja, $\varphi$ ugao pod kojim se izvrši gađanje, $g = 9{,}81 \frac{m}{\sec^2}$ je ubrzanje zem. teže. Na grafiku je predstavljena daljina dometa $x_D$ i najveća visina $y_m$. Ta visina je ordinata temena parabole i kako je za datu funkciju

$$a = \frac{-g}{2V_0^2 \cos^2 \varphi}, \; b = \operatorname{tg} \varphi, \; c = 0 \text{ to je}$$

$$y_m = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-\operatorname{tg}^2 \varphi}{4 \cdot \frac{-g}{2V_0^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{\frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}}{\frac{2g}{V_0^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{V_0 \sin^2 \varphi}{2g}$$

# TRANSCENDENTNE FUNKCIJE

## 1. EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA

U glavi 1. dato je stepenovanje racionalnim brojem. Recimo, znamo da je $5^{\alpha}$ realan broj (gde je $\alpha$ ma koji racionalan broj).

Ali, ako je $a$ ma koji pozitivan broj i $\alpha$ iracionalan broj, šta je $a^{\alpha}$? Da bismo donekle objasnili da je $a^{\alpha}$ realan broj (dokaz nećemo ovde navoditi), poslužimo se primerom. Neka je

$$a = 2, \quad \alpha = 1{,}624121121112\dots$$

Broj $\alpha$ je beskonačni decimalni razvitak za koji se broj cifara 1 uveća stalno za jednu (ima ih beskonačno). Dakle, $\alpha$ je neperiodičan razvitak, te je $\alpha$ iracionalan broj.

Pitamo se: Da li je

$$2^{1{,}624121121112\dots}$$

realan broj?

Broj $\alpha$ se nalazi (u smislu $r_1 < \alpha < r_2$) između dva odgovarajuća broja koji pripadaju nizovima

$$1{,}6; \quad 1{,}62; \quad 1{,}624; \quad 1{,}6241; \dots$$

$$1{,}7; \quad 1{,}63; \quad 1{,}625; \quad 1{,}6242; \dots$$

Napišimo odgovarajuće nizove

$$2^{1{,}6}; \quad 2^{1{,}62}; \quad 2^{1{,}624}; \quad 2^{1{,}6241}; \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

$$2^{1{,}7}; \quad 2^{1{,}63}; \quad 2^{1{,}625}; \quad 2^{1{,}6242}; \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

Niz (1) je rastući (sledeći član je veći od prethodnog), a niz (2) opadajući (sledeći član je manji od prethodnog). Može se dokazati da ti nizovi imaju istu granicu — jedinstven realan broj koji je veći od svakog člana niza (1), a manji od svakog člana niza (2). Taj broj smatramo tačnom vrednošću broja $2^{\alpha}$.

I, uopšte, može se dokazati da za $a > 0$ svakom realnom broju $x$ odgovara tačno jedan realan broj $a^x$.

Dakle, za $a > 0$ skup

$$\{(x, a^x) \mid x \in R\}$$

je funkcija skupa $R$ u skup $R$ i za $a \neq 1$ naziva se *eksponencijalna funkcija*.



Navodimo, bez dokaza, sledeće osobine eksponencijalne funkcije:

1) Funkcija $y = a^x$, $a > 0$, pozitivna je za svaki realan broj $x$.

2) Ako je $a > 1$, funkcija $y = a^x$ raste, dok za $0 < a < 1$ funkcija $y = a^x$ opada.

3) Ako je $a > 1$, onda je $a^x > 1$ za sve pozitivne brojeve $x$, dok za sve negativne brojeve $x$ je $a^x < 1$.

Ako je $a < 1$, tada za sve $x$, $x > 0$ je $a^x < 1$, dok za sve $x$, $x < 0$ je $a^x > 1$.

4) Ako $x$ stalno raste, onda pišemo $x \to +\infty$ (čitamo: $x$ teži + beskonačnosti). Tada za eksponencijalnu funkciju važi:

Ako je $0 < a < 1$, tada

$$a^x \to 0 \quad \text{za} \quad x \to +\infty$$

$$a^x \to +\infty \quad \text{za} \quad x \to -\infty.$$

Ako je $a > 1$, tada

$$a^x \to +\infty \quad \text{za} \quad x \to +\infty$$

$$a^x \to 0 \quad \text{za} \quad x \to -\infty.$$

Navedene osobine možemo „pročitati" sa grafika nekih određenih funkcija.

Crtamo grafik funkcije $y = 2^x$ spajanjem neprekinutom linijom sledeći skup tačaka

$$\left\{\left(-3, \frac{1}{8}\right), \left(-2, \frac{1}{4}\right), \left(-1, \frac{1}{2}\right), (0, 1), (1, 2), (2, 4)\right\}.$$

Ovaj skup je podskup skupa $\{(x, 2^x) \mid x \in R\}$.

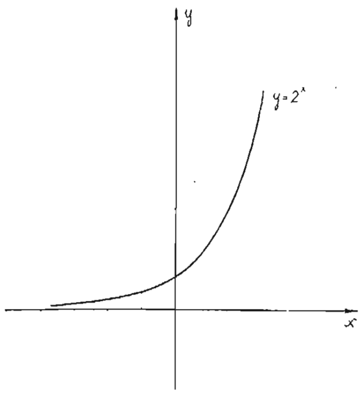
Na slici 27 je grafik funkcije $y = 2^x$ a na sl. 28 grafik funkcije $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \left\{(-3, 8), (-2, 4), (-1, 2), (0, 1), \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(2, \frac{1}{4}\right), \left(3, \frac{1}{8}\right)\right\}$$

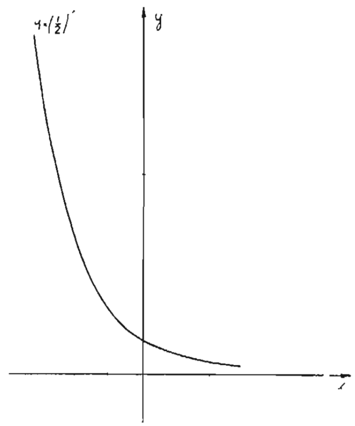
Prema osobini 2) funkcija $y = 2^x$ raste, a funkcija $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ opada (videti grafike).

Kako je $a^0 = 1$ za svako $a$, $a > 0$ to $(0, 1)$ pripada svakoj funkciji $y = a^x$ te grafik svake eksponencijalne funkcije „prolazi" kroz tačku $(0, 1)$.

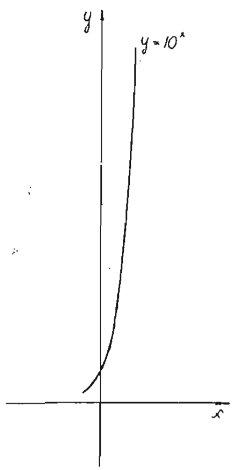
Kako je $a^x \neq 0$ za sve realne brojeve $x$, to funkcija $y = a^x$ nema nula.




Sl. 27




Sl. 28




Sl. 29

Crtamo i grafik funkcije $y=10^x$ (sl. 29).

$$y = 10^x \quad \left\{(-1; 0, 1), \left(-\frac{3}{4}; 0, 17\right), \left(-\frac{1}{2}; 0, 32\right), \left(\frac{1}{4}; 0, 51\right), \left(\frac{1}{4}; 0, 71\right), (1, 10)\right\}$$

**2. LOGARITAMSKA FUNKCIJA**

Eksponencijalnom funkcijom $y = 2^x$ svakom realnom broju $x$ odgovara tačno jedan *pozitivan* realan broj $y$ i, obratno: svakom pozitivnom broju $N$ odgovara tačno jedan realan broj $l$ takav da je

$$2^l = N.$$



Broj $l$ nazivamo logaritam broja $N$ za osnovu 2 i pišemo

$$l = \log_2 N.$$

Dakle,

$$2^{\log_2 N} = N$$

Uopšte, ako je $a > 0$ i $a \neq 1$, tada svakom pozitivnom broju $N$ odgovara tačno jedan realan broj $l$, takav da je

$$a^l = N$$

Broj $l$ zovemo logaritam broja $N$ za osnovu $a$ i pišemo $l = \log_a N$. Prema $a^l = N$ je $a^{\log_a N} = N$. Ovim smo uveli sledeću definiciju:

**Definicija.** Ako su $a$ i $N$ pozitivni brojevi i $a \neq 1$, tada broj $\log_a N$ za koji je

$$a^{\log_a N} = N$$

zovemo *logaritam broja N za osnovu a.*

Za rešavanje zadataka često ćemo koristiti sledeće tvrđenje:

Ako su $a$, $N$, i $M$ pozitivni brojevi i $a \neq 1$, tada

$N = M$, ako i samo ako $\log_a N = \log_a M$.

*Primeri*:

1) $\log_3 9 = 2$, jer je $3^2 = 9$.
2) $\log_2 16 = 4$, jer je $2^4 = 16$.
3) Odrediti $\log_5 125$. Po definiciji je

$$5^{\log_5 125} = 125 \text{ tj. } 5^{\log_5 125} = 5^3,$$

a, odavde, je $\log_5 125 = 3$.

Prema definiciji logaritma neposredno slede osobine:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a a^n = n.$$

Dokazujemo sledeća tvrđenja:

Ako je $n$ prirodan broj, $\alpha$, $M$ i $N$ realni brojevi, pri čemu je $M > 0$, $N > 0$, tada je

1) $\log MN = \log M + \log N$

2) $\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$

3) $\log M^{\alpha} = \alpha \log M$

4) $\log \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log M$

*Dokaz.* Kod navedenih tvrđenja ne pišemo osnovu $a$ jer važi za ma koju osnovu $a$, $a \neq 1$, $a > 0$.

Neka je $a$ osnova logaritma. Tada, prema definiciji, je

$$a^{\log_a M} = M; \quad a^{\log_a N} = N \quad \dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

1) Prema (3) je

$$MN = a^{\log_a M} \cdot a^{\log_a N},$$

a odavde je

$$MN = a^{\log_a M + \log_a N} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

Prema definiciji logaritma je

$$MN = a^{\log_a MN} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

Na osnovu (4) i (5) je

$$a^{\log_a M + \log_a N} = a^{\log_a MN}$$

a odavde

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

2) Prema (3) je

$$\frac{M}{N} = \frac{a^{\log_a M}}{a^{\log_a N}},$$

odnosno

$$\frac{M}{N} = a^{\log_a M - \log_a N}; \quad \dots\dots\dots\dots\dots (6)$$



Po definiciji logaritma je

$$\frac{M}{N} = a^{\log_a \frac{M}{N}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (7)$$

Prema (6) i (7) je

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

3) Iz $\quad M = a^{\log_a M}$ sledi

$$M^{\alpha} = (a^{\log_a M})^{\alpha}$$

$$M^{\alpha} = a^{\alpha \log_a M} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (8)$$

Po definiciji logar. je

$$M^{\alpha} = a^{\log_a M^{\alpha}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

Iz (8) i (9) sledi

$$\log_a M^{\alpha} = \alpha \log_a M.$$

4) Znamo da je $\sqrt[n]{M} = M^{\frac{1}{n}}$. Tada je

$$\log \sqrt[n]{M} = \log M^{\frac{1}{n}}.$$

Prema 3) je dalje

$$\log \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log M.$$

*Primer 1.* Izraziti $\log \frac{a^2 \sqrt[5]{b^3}}{c\sqrt{de^3}}$ preko logaritama brojeva $a, b, c, d, e$.

*Rešenje.* Neka je

$$A = \frac{a^2 \sqrt[5]{b^3}}{c\sqrt{de^3}}$$

tada je

$$\log A = \log a^2 \sqrt[5]{b^3} - \log c \sqrt{de^3}$$

$$\log A = \log a^2 + \log \sqrt[5]{b^3} - (\log c + \log \sqrt{de^3})$$

$$\log A = 2 \log a + \frac{3}{5} \log b - \log c - \frac{1}{2} \log d - \frac{3}{2} \log e$$

*Primer 2.* Odrediti $A$ ako je

$$\log A = \frac{2}{3}\log(a+b) - \frac{1}{3}\log(a-b) + \frac{2}{3}\log a - \frac{1}{3}\log b$$

*Rešenje.*

$$\log A = \log\sqrt[3]{(a+b)^2} - \log\sqrt[3]{a-b} + \log\sqrt[3]{a^2} - \log\sqrt[3]{b}$$

$$\log A = \log\sqrt[3]{a^2(a+b)^2} - \log\sqrt[3]{b(a-b)}$$

$$\log A = \log\sqrt[3]{\frac{a^2(a+b)^2}{b(a-b)}}$$

dakle
$$A = \sqrt[3]{\frac{a^2(a+b)^2}{b(a-b)}}.$$

*Primer 3.* Odrediti $A$ ako je

$$\log_a A = \log_a c + b$$

*Rešenje.*

$$\log_a A = \log_a c + \log_a a^b$$

$$\log_a A = \log_a ca^b$$

Odakle je

$$A = ca^b .$$

Prema definiciji logaritma broja zaključujemo da ima smisla sledeća

**Definicija.** Skup uređenih parova

$$\{(x, \log_a x) \mid x \in R^+\}$$

(gde smo sa $R^+$ označili pozitivne realne brojeve) je funkcija skupa $R^+$ u skup $R$. Ovu funkciju nazivamo *logaritamska funkcija.*

Navodimo, bez dokaza, neke osobine logaritamske funkcije.

I) Ako je $a > 1$, tada funkcija $y = \log_a x$ raste; ako je $0 < a < 1$ tada funkcija $y = \log_a x$, opada.

II) Ako je $a > 1$, tada

$$\log_a x \to -\infty \quad \text{za} \quad x \to 0$$
$$\log_a x \to +\infty \quad \text{za} \quad x \to +\infty.$$

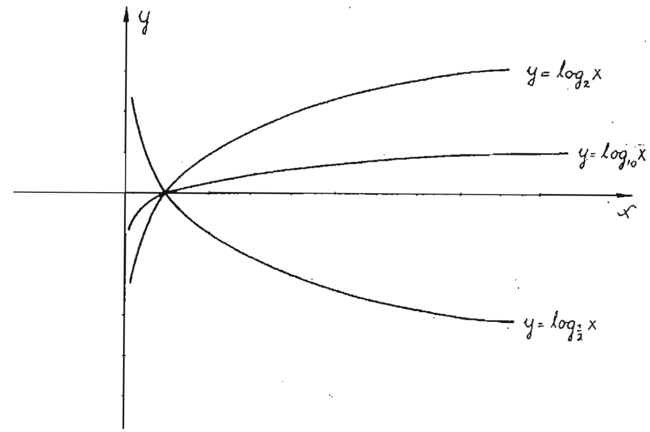


Ako je $0 < a < 1$, tada

$$\log_a x \to +\infty \quad \text{za} \quad x \to 0$$
$$\log_a x \to -\infty \quad \text{za} \quad x \to +\infty$$

Kako je $\log_a 1 = 1$, to tačka $(1, 0)$ pripada grafiku svake logaritamske funkcije.

Crtamo grafike funkcija: $y=\log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_{10} x$




Sl. 30

$$y = \log_2 x \quad \left\{(1, 0), (2, 1), (4, 2), (8, 3), \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{4}, -2\right)\right\}$$

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x \quad \left\{(1, 0), \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{4}, 2\right), (2. -1), (4, -2)\right\}$$

Napominjemo da se ove tačke određuju prema definiciji logaritma, odnosno

$$y = \log_2 x \quad \text{ako i samo ako} \quad 2^y = x$$

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x \quad \text{ako i samo ako} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^y = x.$$

## 3. REČ — DVE O INVERZNOJ FUNKCIJI

Ako je $f$ funkcija skupa $A$ u skup $B$, tada skup svih slika označavamo sa $f(A)$.

**Definicija.** Neka je $f : A \to B$. Svaku funkciju $g : f(A) \to A$, koja ima osobinu $g(f(x)) = x$ za sve $y = f(x) \in f(A)$ zovemo inverzna grana funkcije $f$. Ako postoji samo jedna inverzna grana $g$ funkcije $f$, onda takvu funkciju zovemo *inverzna funkcija* funkcije $f$ i obeležavamo sa $f^{-1}$.

*Primer 1.* Neka je $f : R \to R$ data sa $f = \{(x, x^2) \mid x \in R\}$. Tada je $f(R) = R^+ \cup \{0\}$ i postoji beskonačno mnogo inverznih grana $g : R^+ \cup \{0\} \to R$ funkcije $f$. Neke od njih su

$$g_1 = \{(x, \sqrt{x}) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\} \cup \{(x, -\sqrt{x}) \mid 1 < x < +\infty\}$$

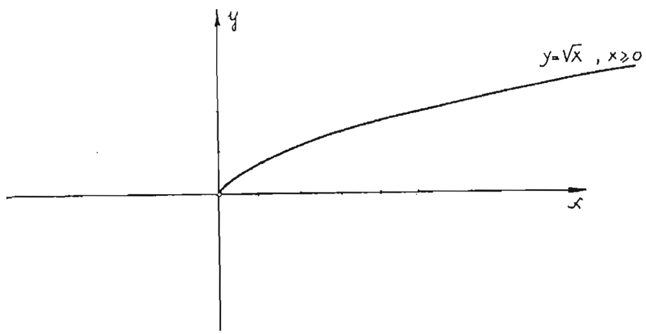
$$g_2 = \{(x, \sqrt{x}) \mid x \in R^+ \cup \{0\}\}$$

$$g_3 = \{(x, -\sqrt{x}) \mid x \in R^+ \cup \{0\}\}$$

Od svih inverznih grana ove funkcije jedine dve neprekidne su $g_2$ i $g_3$.

Crtamo grafik funkcije

$$g_2 = \{(x, \sqrt{x}) \mid x \in R^+ \cup \{0\}\}$$




Sl. 31

$$y = \sqrt{x},\ x \geqslant 0 \left\{(0, 0),\ (1, 1),\ (4, 2),\ \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right),\ (9, 3)\right\}$$



*Primer 2.* Logaritamska funkcija $g(x) = \log_a x$

$g : R^+ \to R$ je inverzna funkcija eksponencijalne funkcije $f(x) = a^x$, $f : R \to R^+$

*Rešenje.*

$$f = \{(x, a^x) \mid x \in R\}$$

$$g = \{(x, \log_a x) \mid a \in R^+\}$$

$$f(R) = R^+$$

Tada je

$$g(f(x)) = g(a^x) = \log_a a^x = x$$

funkcija $g$ je jedina inverzna grana funkcije $f$ te je $g = f^{-1}$ (inverzna funkcija funkcije $f$).

## 4. DEKADNI LOGARITMI

Razmatramo detaljnije logaritam za osnovu 10. Ovi logaritmi nazivaju se *dekadni*. Umesto oznake $\log_{10} N$ pišemo $\lg N$.

Dekadni logaritmi imaju sve osobine logaritama za osnovu $a > 1$. Osim tih osobina, imaju i sledeće:

1. Ako je $k$ ma koji ceo broj, tada je

$$\lg 10^k = K.$$

Sledi, neposredno prema definiciji logaritma.

Npr.
$$\lg 1000 = \lg 10^3 = 3$$

$$\lg 0{,}0001 = \lg \frac{1}{10^4} = \lg 10^{-4} = -4$$

$$\lg 0{,}001 = \lg \frac{1}{10^3} = \lg 10^{-3} = -3$$

2. Ako broj pomnožimo sa $10^n$, tada se njegov logaritam uvećava za $n$. $(n \in N)$

Jer, ako je $\lg N = x$, tada

$$\lg 10^n \cdot N = \lg 10^n + \lg N = x + n.$$

3. Ako broj podelimo sa $10^n$, logaritam se smanjuje za $n$. ($n \in N$)

Jer, ako je $\lg N = x$, tada

$$\lg \frac{N}{10^n} = \lg N - \lg 10^n = x - n.$$

Ako realan broj nije ceo, tada ga možemo napisati kao zbir celog broja i pozitivnog broja manjeg od 1. Na primer,

$$2{,}5 = 2 + 0{,}5; \qquad -3{,}8 = -4 + 0{,}2.$$

Kako je logaritam pozitivnog broja $N$ takođe realan broj, to je

$$\lg N = A + \alpha,$$

gde je $A$ ceo broj i $0 \leqslant \alpha < 1$. Ceo deo logaritma, odnosno $A$ nazivamo *karakteristika,* a broj $\alpha$ *mantisa* lograitma.

*Primer 1.* Naći karakteristiku lg 279,8.

*Rešenje*: Kako je $100 < 279{,}8 < 1000$,

to je

$$\lg 100 < \lg 279{,}8 < \lg 1000,$$

odnosno

$$\lg 10^2 < \lg 279{,}8 < \lg 10^3,$$

a, odavde

$$2 < \lg 279{,}8 < 3.$$

Dakle

$$\lg 279{,}8 = 2 + \alpha,$$

gde je $0 < \alpha < 1$. Karakteristika lg 279,8 je 2.

*Primer 2.* Naći karakteristiku lg 0,0045

*Rešenje*: Kako je

$$0{,}001 < 0{,}0045 < 0{,}01,$$

to je

$$\lg 0{,}001 < \lg 0{,}0045 < \lg 0{,}01$$

$$-3 < \lg 0{,}0045 < -2.$$

Dakle

$$\lg 0{,}0045 = -3 + \alpha,$$

gde je $0 < \alpha < 1$. Karakteristika lg 0,0045 je $-3$.



Dokazujemo važna tvrđenja o karakteristici logaritma.

I) Ako je $N > 1$, tada karakteristika $\lg N$ je za 1 manja od broja cifara celog dela broja $N$.

*Dokaz*: Neka ceo deo broja $N$ ima $n$ cifara.

Tada je

$$10^{n-1} \leqslant N < 10^n,$$

jer $10^{n-1}$ je najmanji ceo $n$-cifreni broj, a $10^n$ je $(n + 1)$ cifreni broj.

Dakle

$$n - 1 \leqslant \lg N < n,$$

odnosno

$$\lg N = (n - 1) + \alpha,$$

gde je $0 \leqslant \alpha < 1$. Karakteristika $\lg N$ je $n - 1$.

II) Neka je $0 < N < 1$ i $n$ broj nula u decimalnom razvitku broja $N$ (počev od nule celog dela do prve cifre različite od nule).

Tada je karakteristika $\lg N$ jednaka $-n$.

*Dokaz*: Možemo pisati

$$N = \underbrace{0{,}00\ldots 0}_{n \text{ cifara}}\, a$$

Cifra $a$ je različita od nule, tada je

$$(0{,}1)^n \leqslant N < (0{,}1)^{n-1}$$

$$\lg (0{,}1)^n \leqslant \lg N < \lg (0{,}1)^{n-1}$$

$$-n \leqslant \lg N < -(n - 1),$$

sledi

$$\lg N = -n + \alpha,$$

gde je $0 \leqslant \alpha < 1$. Karakteristika $\lg N$ je $-n$.

*Primeri.* Karakteristika lg 2845 je 3,

karakt. lg 18,5 je 1, karakt. lg 0,0056 je $-3$.

## 5. LOGARITAMSKE TABLICE I UPOTREBA

Karakteristika logaritma određuje se neposredno na osnovu izloženih pravila.

Mantise su izračunate za logaritme svih celih brojeva od 1 do 9999 i složene u obliku tablica, koje se nazivaju logaritamske tablice.

U tablicama koje se upotrebljavaju u školi mantisa je izračunata sa 5 decimala.

a) *Određivanje mantise.* Pri određivanju mantise ne vodi se računa o položaju decimalnog zareza u numerusu, niti o nulama koje se eventualno javljaju kao prve ili poslednje cifre numerusa (jer ovo ne utiče na mantisu). (Broj čiji logaritam tražimo zovemo numerus).

Pritom se javljaju dva slučaja.

1) Numerus ima četiri ili manje od četiri cifre.

Recimo, treba odrediti mantisu za log 52,37. Prve tri cifre, tj. 523 nalaze se u stupcu koji pri vrhu nosi oznaku $N$ (numerus). U vodoravnom redu koji odgovara broju 523, treba ići udesno do stupca koji pri vrhu nosi broj 7 (brojevi 0, 1, 2, ..., 9 na gornjem delu tablica označavaju četvrtu cifru numerusa). Na tom mestu je broj 908 koji, sa prve dve odvojene cifre (71), daje traženu mantisu 0,71908. Prema tome je

$$\lg 52{,}37 = 1{,}71908.$$

Na isti način se nalazi

$$\lg 5290 = 3{,}72346; \quad \lg 0{,}005274 = \bar{3}{,}72214$$

($\bar{3}{,}72214 = -3 + 0{,}72214$ koja će se oznaka za mantisu i dalje upotrebljavati)

Ako numerus ima manje od četiri cifre, treba tražiti mantisu za broj sa dopisanim nulama. Tako je, na primer, mantisa za lg 52 ista kao i za lg 5200, a za lg 4,21 ista kao za lg 4210.

Određujemo lg 5249. Uz poslednje tri cifre mantise (008) nalazi se jedna zvezdica. Ona označava da se kao prve cifre mantisa uzima 72, dakle iz iduće grupe mantisa, a ne 71 kao što je trebalo.

Tako je traženi logaritam: lg 5249 = 3,72008.

2) Numerus ima više od četiri cifre.

Recimo da treba odrediti mantisu za lg 52476. Najpre tražimo mantisu za lg 5247 i iz tablica se nalazi 0,71992. Broju 5248, dakle broju za 1 većem od numerusa, odgovara mantisa 0,71999. Razlika između ovih mantisa, odnosno razlika između susednih mantisa naziva



se *tablična razlika* (u ovom slučaju 8), a broj 4,8 (odnosno, posle zaokrugljivanja, 5) *popravka (korektura)* za petu cifru numerusa (u ovom slučaju cifre 6).

Tada je

$$\begin{array}{r} \lg 52476 = 4{,}71991 \\ + \quad 5 \\ \hline 4{,}71996 \end{array}$$

Popravke su izračunate za sve tablične razlike i za svaku moguću petu cifru numerusa i složene u posebne tablice, koje se nalaze u stupcu sa oznakom P.P.

Tako se u navedenim tablicama, u rubici P.P., nalazi stubac sa brojem 8 (tablična razlika), a ispod njega, sa leve strane, brojevi 1, 2, 3, ..., 9 koji predstavljaju petu cifru numerusa. Decimalni brojevi s desne strane daju tražene popravke (izražene u stohiljaditima), koje se odmah dodaju nađenoj mantisi četvorocifrenog broja.

Ako numerus ima šest cifara, na primer, lg 526,437, prvo odredimo mantisu za lg 5264, zatim popravku za petu cifru (u rubrici P.P. pod 8, uz 3 se nalazi 2,4) i, najzad, popravku za šestu cifru (7). Ovoj cifri odgovara u istom stupcu popravka 5,6, no — kako se ova popravka odnosi na petu cifru numerusa to će popravka za šestu cifru biti 10 puta manja, tj. 0,56.

Tada je

$$\begin{array}{rl} \lg 526{,}437 = 2{,}72132 & \\ 2{,}4 & \text{(popravka za petu cifru, 3)} \\ 0{,}56 & \text{( „ \quad „ šestu „ \quad 7)} \\ \hline 2{,}72134{,}96 & \end{array}$$

ili, posle zaokrugljivanja,

$$\lg 526{,}437 = 2{,}72135$$

Isti postupak se primenjuje i kad numerus ima više od šest cifara.

b) *Određivanje numerusa za dati logaritam (antilogaritmovanje).* Tu su moguća dva slučaja:

1° Mantisa datog logaritma nalazi se u tablicama. Dato je, na primer, $\lg x = 0{,}72222$.

U grupu mantisa, čije su prve dve cifre 72, nalaze se i ostale tri cifre (222) i to na mestu gde se sastaje vodoravan red, na čijem je početku broj 527, i vertikalan stubac sa brojem 5 na vrhu. To znači da je $x$ $x = 5{,}275$.

$2^0$ Mantisa datog logaritma ne nalazi se tačno u tablicama, na primer, $\lg x = 1{,}71663$.

U grupi mantisa koje počinju sa 71 nema broja 663, nego se nalazi približno manji broj 659 i neposredno veći 667. Ovim logaritmima odgovaraju numerusi 52,07 i 52,08, što znači da je

$$52{,}07 < x < 52{,}08.$$

Prema tome je

$$x \approx 52{,}07.$$

Peta cifra numerusa (pa i više, ako je potrebno) nalazi se opet iz rubrike P.P., samo što je sada tok operacija obrnut.

Najpre se odredi tablična razlika, oduzimajući poslednje tri cifre približnih mantisa, $667 - 659 = 8$. Razlika između mantise datog logaritma i približno manje mantise je $0{,}71663 - 0{,}71659 = 4$ (stohiljadita).

Pošto je ova razlika, u stvari, proizvod tablične razlike (8) i pete cifre numerusa, to u stupcu P.P. sa oznakom 8 treba sdesna potražiti broj 4. Ovom broju odgovara cifra 5, koja predstavlja petu cifru numerusa, pa je približno $x = 52{,}075$.

*Primer.* Odrediti broj $x$ čiji je logaritam 1,72217.

Približno manjoj mantisi (72214) odgovara 5274, a tablična razlika je $222-214 = 8$ (stohiljaditih). Razlika između date mantise i približno manje je $0{,}72217 - 0{,}72214 = 3$ (stohiljadita).

U stupcu 8 rubrike P.P. ne nalazi se s desne strane broj 3, nego približan manji broj 2,4, kome (s leve strane) odgovara 3, kao peta cifra numerusa. Tako je za sada $x \approx 0{,}52743$.

Međutim, učinjena je greška jer je (s desna u stupcu 8) uzeto 2,4 umesto 3 i to greška $3 - 2{,}4 = 0{,}6$. Desetostrukoj vrednosti ove greške, tj. broju 6 odgovara u istom stupcu (s leve strane) približan broj 7, a to je šesta cifra numerusa, pa je $x \approx 0{,}527437$, itd.

Osnovna primena logaritamskog računa je u izračunavanju vrednosti brojnih izraza.

*Primeri*:

1. Odrediti vrednost izraza

$$A = \frac{356{,}4 \cdot 127{,}46}{564{,}8}.$$



*Rešenje.*

$$\lg A = \lg 356{,}4 + \lg 127{,}46 - \lg 564{,}8$$

$$\begin{array}{rll} \lg 127{,}4 = 2{,}10571 & (D = 34) & \lg 356{,}4 = 2{,}55194 \\ 20{,}4 & & \lg 127{,}46 = 2{,}10537 \\ \hline 2{,}10537{,}4 & & \lg 564{,}8 = 2{,}75189 \end{array}$$

$$\lg x = 1{,}30542 \qquad x = 80{,}4$$

Sa $D$ je označena tablična razlika.

2. Izračunati $B = -3{,}25^3 \sqrt[5]{54{,}24}$

*Rešenje.* Umesto datog negativnog izraza izračunavamo

$$C = 3{,}24^3 \sqrt[5]{54{,}24},$$

odakle je

$$\lg C = 3 \lg 3{,}25 + \frac{1}{5} \lg 54{,}24 = 3 \cdot 0{,}51188 + \frac{1}{5} \cdot 1{,}73432,$$

pa je

$$\lg C = 1{,}88250 \qquad C = 76{,}296.$$

Dakle

$$B = -76{,}296.$$

3. Rešiti jednačinu $2^x = 3$

*Rešənje.* Tada je $\quad x \lg 2 = \lg 3$

$$x = \frac{\lg 3}{\lg 2} = \frac{0{,}47712}{0{,}30103} = \frac{47712}{30103}$$

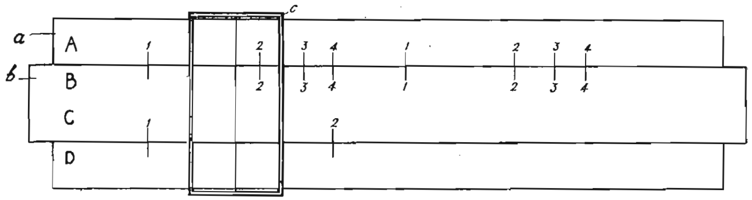
$$\lg x = \lg 47712 - \lg 30103 = 4{,}67863 - 4{,}47861$$

pa je

$$\lg x = 0{,}20002 \qquad x = 1{,}585$$

**Rad sa logaritmarom.** Logaritmar je jednostavan i praktičan instrument za računanje, pomoću koga se vrše razne operacije (množenje, deljenje, stepenovanje, korenovanje, logaritmovanje) i to veoma brzo. Međutim, rezultati operacija izvedeni pomoću logaritmara su približni, s ograničenom tačnošću (obično do tri vrednosne cifre).

Logaritmar se sastoji iz tri dela (sl. 32).




Sl. 32

a) Nepokretni lenjir sa skalama;

b) pokretni lenjir koji klizi u žljebu nepokretnog lenjira;

c) stakleni klizač sa vizirnom linijom (vizir).

Osnova logaritmara je tzv. logaritmaska skala, koja se konstruiše na sledeći način: na jednoj pravoj (sl. 33) postavljena je jedinična duž $AB$ (obično se uzima $AB = 25$ cm), na kojoj su nanesene duži $\lg 2 = 0{,}301$, $\lg 3 = 0{,}477$, $\lg 4 = 0{,}602$, itd. Pritom su krajnje tačke tih duži označene odgovarajućim numerusima, dakle sa 1, 2, 3,... 10-


Sl. 33

Na nepokretnom lenjiru logaritmara nalaze se dve logaritamske skale označene sa $A$ i $D$. Podele $A$ i $D$ se, inače, razlikuju po tome što je niz brojeva na skali $D$ raspoređen u dvaput većoj razmeri (sl. 32).

Na isti način su postavljeni nizovi brojeva na skalama $B$ i $C$ pokretnog lenjira.

Crta s oznakom $l$ na levoj strani skale naziva se leva glavna crta, a crta $l$ na desnoj strani — desna glavna crta,. Kada se glavne crte postave tačno jedna ispod druge kao na sl. 32, vidi se da se skale $A$ i $B$ poklapaju, a, isto tako, i skale $C$ i $D$.

Stakleni klizač sa vizirom služi za tačnije čitanje rezultata.

Pri računanju sa logaritmarom primenjuju se osnovna pravila logaritmovanja.

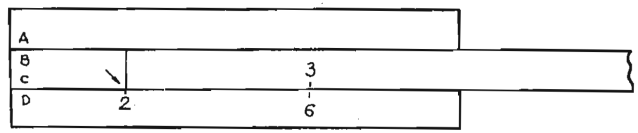
Ovde, na jednostavnim primerima, iznosimo samo osnovne principe rada sa logaritmarom, ne upoštajući se u razne detalje koji se, inače, javljaju u praksi.



**Množenje.** Množenje se na osnovu pravila logaritmovanja svodi na sabiranje. Tako se, na primer, pri izračunavanju proizvoda $2\cdot 3$ koristi pravilo

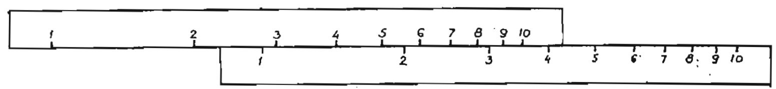
$$\log 2\cdot 3 = \lg 2 + \lg 3.$$

Radi toga se leva glavna crta niza $B$ postavi na crtu 2 niza $A$ (sl. 34), pa se kod crte 3 niza $B$ čita odgovarajući podeljak na nizu $A$, tj. broj 6.



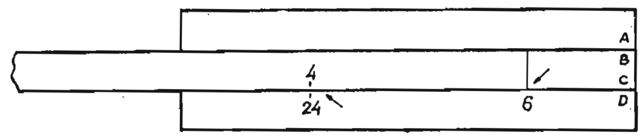

Sl. 34

Množenje se, obično, vrši pomoću nizova $C$ i $D$. Postavljanje pokretnog lenjira, u tom slučaju, prikazano je na sl. 35. Pri množenju većih brojeva, ovi se najpre zaokrugljuju.




Sl. 35

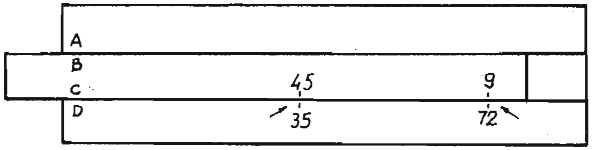
**Deljenje.** Treba izračunati $\frac{24}{4}$. Polazeći od jednakosti $24 = 4\cdot 6$, postupa se na sledeći način. Crta 4 niza $C$, koja označava delilac, postavi se iznad crte 24 niza $D$, tj. iznad crte koja označava deljenik. U tom slučaju se ispod desne glavne crte niza $C$ pročita na nizu $D$ rezultat 6.




Sl. 36

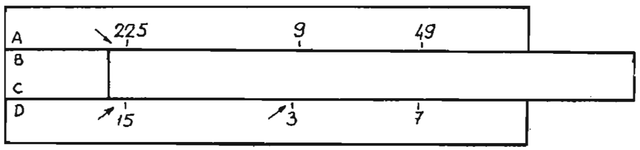
**Kombinovano množenje i deljenje.** Treba, na primer, izračunati $\frac{72\cdot 45}{9}$. Zadatak se može shvatiti i ovako: $\frac{72}{9}\cdot 45$, a rešava se na sledeći način:

Crta 9 niza $C$ (sl. 37) postavi se iznad crte 72 niza $D$, pa se ispod crte 45 niza $C$ pročita, na nizu $D$, 36. Pritom, cifre broja 36 predstavljaju samo vrednosne cifre rezultata, a sam rezultat se nalazi procenjivanjem : 360.




Sl. 37

**Kvadrat i kvadratni koren.** Sa slika 32 i 38 vidi se da su crtama niza $A$ označeni kvadrati brojeva koji se nalaze u nizu $D$.

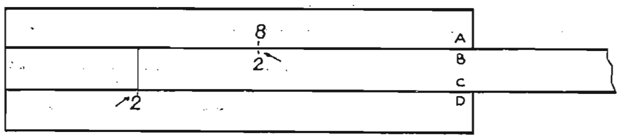



Sl. 38

Na osnovu toga se, pri izračunavanju kvadrata nekog broja, vizir klizača postavi na onaj broj niza $D$ koji treba kvadrirati, a rezultat se zatim neposredno čita na nizu $A$, na mestu koje označava vizir klizača.

Pri izračunavanju kvadratnog korena vizir se postavi na onaj broj niza $A$ iz koga treba izvući kvadratni koren, a rezultat se čita na nizu $D$.

**Kub i kubni koren.** Na slici 39. pokazano je izračunavanje stepena $2^3$. Leva glavna crta niza $C$ postavi se na crtu 2 niza $D$, a zatim se iznad crte 2 niza $B$ pročita na nizu $A$ rezultat 8.




Sl. 39

Pri izračunavanju kubnog korena najpre se proceni vrednost rezultata, koristeći pritom brojne vrednosti:

$$\sqrt[3]{1000} = 10; \quad \sqrt[3]{100} \approx 4{,}6; \quad \sqrt[3]{10} \approx 2{,}2.$$



# ODNOS NORMALNOSTI I PARALELNOSTI U PROSTORU

## 1. PRAVA I RAVAN

Osnovna svojstva prave i ravni — njihovih međusobnih odnosa — iskazuje se ovim aksiomama:

1) Ako dve tačke prave pripadaju ravni, onda svaka tačka prave pripada ravni.

2) Ako dve ravni imaju zajedničku tačku, onda je presek tih ravni prava, koja sadrži tu tačku.

3) Bilo koje tri tačke prostora koje leže na jednoj pravoj jednoznačno određuju ravan koja ih sadrži.

**Teorema 1.** potreban i dovojjan uslov da postoji tačno jedna ravan koja sadrži datu pravu $p$ jeste da tačka $P$ ne pripada pravoj $p$.

Iskaz „Postoji tačno jedna ravan koja sadrži pravu $p$ i tačku $P$" označimo sa $A$, a iskaz „tačka $P$ ne pripada pravoj $p$" označimo sa $B$. Treba da dokažemo da je $A \Leftrightarrow B$.

Dokažimo najpre deo tvrđenja $B \Rightarrow A$.

Izaberimo na pravoj $p$ dve (različite) tačke, $M$ i $N$. Pretpostavljajući da je iskaz $B$ tačan, zaključujemo da su tačke $M$, $N$, $P$ u takvom položaju da sve tri ne pripadaju jednoj pravoj i da, prema tome, postoji tačno jedna ravan koja ih sadrži. Označimo tu ravan sa $\alpha$. Prava $p$ pripada ravni $\alpha$ s obzirom da dve tačke prave $p$ pripadaju ravni $\alpha$. Dokažimo da je ravan $\alpha$ jedina ravan sa svojstvom da sadrži tačku $P$ i pravu $p$. Ako bi postojala neka druga ravan $\beta$ sa tim svojstvom, onda bi to značilo da postoje dve različite ravni $\alpha$ i $\beta$ koje sadrže tačke $M$, $N$, $P$, što nije u skladu sa navedenom trećom aksiomom.

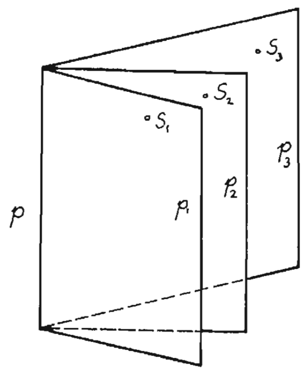
Dokažimo sada deo tvrđenja $A \Rightarrow B$. S obzirom da važi ekvivalencija $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$, možemo dokazu pristupiti tako što ćemo pretpostaviti da iskaz $B$ nije tačan, a da iz toga izvedemo zaključak da neće ni iskaz $A$ biti tačan. Dakle, pretpostavljamo da $P$ pripada $p$. Svaka ravan koja sadrži pravu $p$ sadržavaće i tačku $P$. Izaberimo bilo kakvu $S_1$ van prave $p$. $p$ i $S_1$ određuju jednu ravan ($p_1$). Izaberimo tačku $S_2$ van ravni $p_1$. $p$ i $S_2$ određuju ravan $p_2$ različitu od $p_1$. Ovim postupkom mogli bismo konstruisati beksonačno mnogo ravni (sl. 40) jer po pretpostavci $P$ pripada $p$. Iskaz $A$ nije tačan, što je trebalo dokazati.

**Teorema 2.** Kroz dve prave koje se seku moguće je postaviti tačno j ednu ravan.

*Dokaz.* Označimo presečnu tačku sa $A$. Na svakoj pravoj izaberimo još po jednu tačku. Označimo ih sa $B$, odnosno $C$. Tačke $A$, $B$, $C$ određuju ravan koja sadrži obe prave. Svaka ravan koja sadrži date dve prave, sadrži i tačke $A$, $B$, $C$, na osnovu čega zaključujemo da ne postoje dve različite ravni koje sadrže dve date prave.

**Teorema 3.** Kroz dve paralelne prave moguće je postaviti tačno jednu ravan.

*Dokaz.* Dve paralene prave po definiciji pripadaju jednoj ravni. Da ne postoje dve različite ravni koje sadrže dve date paralene prave dokazujemo tako što izaberemo dve tačke na jednoj pravoj i jednu tačku na drugoj pravoj. Tako izabrane tri tačke određuju jednu ravan.




Sl. 40

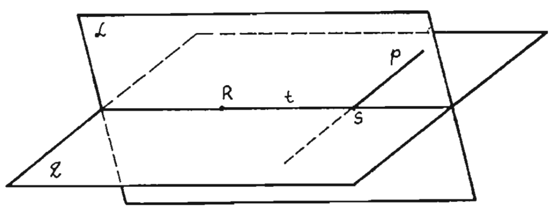
U prostoru se ne mogu vršiti konstrukcije prostornih figura kao u ravni na istovetan način — crtanjem uz korišćenje šestara i lenjira. Neophodno je precizirati šta znači izvršiti konstrukciju u prostoru.

Pretpostavljaćemo da ravan može biti konstruisana ako zadani ili nađeni elementi potpuno određuju njen položaj u prostoru.

Položaj ravni je potpuno određen ako sadrži tri date tačke, pravu i tačku van te prave, dve paralene prave ili dve prave koje se seku.

Pretpostavljamo takođe da za dve date ravni koje se seku možemo izvršiti konstrukciju prave po kojoj se seku.

Ako je u prostoru data ravan, pretpostavljamo da možemo u toj ravni vršiti sve konstrukcije kao u planimetriji.




Sl. 41

Konstrukcija u prostoru se sastoji od konačno mnogo ovakvih elementarnih konstrukcija.

*Primer.* Odredimo tačku preseka date prave $p$ i date ravni $q$ (na slici 41), izabraćemo u ravni $q$ neku tačku $R$ i odredićemo ravan $\alpha$



koja sadrži tačku $R$ i pravu $p$. Za poznate ravni $q$ i $\alpha$ pretpostavlja se da je moguće odrediti presečnu pravu $t$. Prave $p$ i $t$ određuju ravan u kojoj se seku. Pretpostavlja se da je moguće naći presek $S$ pravih $p$ i $t$. Presečna tačka je tačka koju je trebalo konstruisati.

## ZADACI

1. Data je prava $a$ i tačka $A$ koja ne leži na njoj. Dokazati da sve prave koje prolaze kroz tačku $A$ i seku pravu $a$ leže u jednoj ravni.
2. Date su prave $a_1, a_2, \ldots$ Ako se svake dve prave od tih pravih seku, tada sve imaju jednu zajedničku tačku ili sve pripadaju jednoj ravni.
3. Ako svake 4 različite tačke neke figure $F$ pripadaju nekoj ravni, figura $F$ leži sva u istoj ravni.

## 2. PARALELNOST PRAVIH I RAVNI

**Def.** Dve različite prave u prostoru mogu da budu paralelne, da se seku ili da se mimoilaze. Paralelne su ako se ne seku a pripadaju jednoj ravni; seku se ako imaju jednu zajedničku tačku; mimoilaze se ako ne postoji ravan kojoj bi obe pripadale.

Za dve različite ravni kažemo da su paralelne, ako nemaju zajedničkih tačaka, a seku se ako postoji tačka prostora koja pripada obema ravnima.

Kažemo da je prava paralelna ravni ako nema nijednu zajedničku tačku sa ravni, seče ravan ako ima jednu zajedničku tačku sa ravni, a pripada ravni ako dve različite tačke te prave pripadaju ravni.

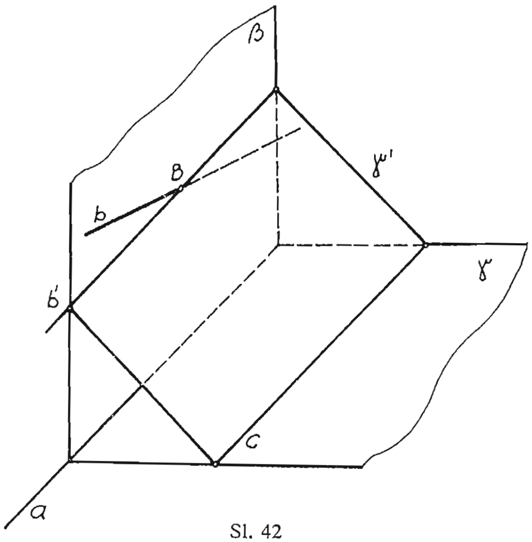
**Teorema.** Ravan $\alpha$ i prava $p$ koja joj ne pripada biće paralene ako i samo ako u ravni $\alpha$ postoji prava $q$ koja je paralelna pravoj $p$.

*Dokaz.* Pretpostavimo najpre da postoji u ravni $\alpha$ prava $q$ koja je paralelna pravoj $p$. Prave $p$ i $q$ određuju jednoznačno ravan koja ih sadrži. Označimo tu ravan sa $\beta$. Ravni $\alpha$ i $\beta$, s obzirom da su različite a imaju zajedničku pravu $q$, imaće tu pravu $q$ za svoj presek. Ako bi prava $p$ sekla ravan $\alpha$, tačka preseka bi pripadala pravoj $q$. To bi značilo da prave $p$ i $q$ imaju zajedničku tačku a paralelne su. Zaključujemo da mora biti $p \parallel \alpha$.

Pretpostavimo sada da je prava $p$ paralelna ravni $\alpha$. Kroz neku tačku $A$ ravni $\alpha$ i pravu $p$ moguće je konstruisati ravan $\beta$. Presek ravni $\alpha$ i $\beta$ je prava koja pripada ravni $\beta$, a paralelna je pravoj $p$.

**Teorema.** Ako je prava $a$ paralelna pravim $b$ i $c$, onda su prave $b$ i $c$ paralelne.

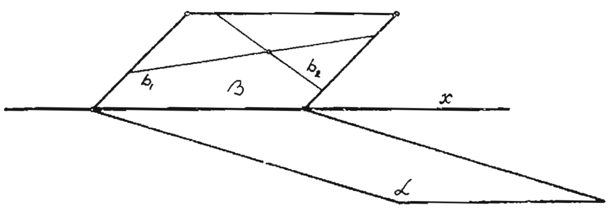
*Dokaz.* Pretpostavimo da prave $a$, $b$, $c$ ne pripadaju jednoj ravni. Označimo sa $\beta$ ravan u kojoj leže prave $a$ i $b$, a sa $\gamma$ ravan u kojoj leže prave $a$ i $c$. Prava $b$ biće paralelna ravni $\gamma$, a prava $c$ paralelna ravni $\beta$. Izaberimo na pravoj $b$ tačku $B$ i postavimo kroz $B$ i $c$ ravan $\gamma$.




Sl. 42

Presečnu pravu ravni $\gamma'$ i ravni $\beta$ označimo sa $b'$.

Dokažimo da se $b$ i $b'$ poklapaju. Prava $b'$ ne seče $c$ jer sve tačke preseka prave $b'$ i ravni $\gamma$ — ako postoje — pripadaju pravoj $a$ koja je paralelna pravoj $C$. Prava $b'$ neće seći ravan $\gamma$ s obzirom da je presečna prava ravni $\gamma$ i $\gamma'$ prava $C$, a $b'$ pripada $\gamma'$. Po aksiomi paralenih pravih $b'$ će se poklapati sa $b$. Time je dokaz završen za slučaj kad prave $a$, $b$, $c$, ne pripadaju jednoj ravni. Neposredno zaključujemo da je tvrđenje teoreme tačno i u slučaju kad prave $a$, $b$, $c$ pripadaju jednoj ravni.




. 43

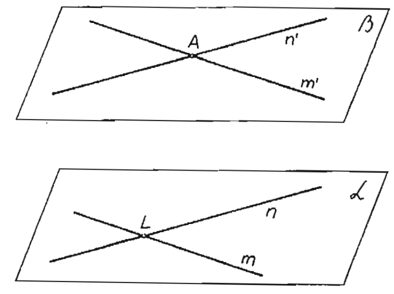


**Teorema.** Ako je ravan $\alpha$ paralelna pravama $b_1$ i $b_2$ koje se seku, onda je paralelna i ravni određenoj pravama $b_1$ i $b_2$.

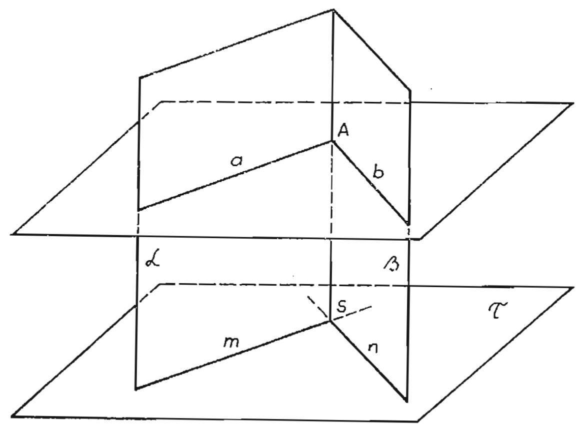
*Dokaz.* Označimo ravan koja sadrži prave $b_1$ i $b_2$ sa $\beta$. Treba da dokažemo da su ravni $\alpha$ i $\beta$ paralelne. Pretpostavimo suprotno: da se $\alpha$ i $\beta$ seku. Presečnu pravu označimo sa $x$. Prave $b_1$, $b_2$, $x$ pripadaju istoj ravni i $b_1$ i $b_2$ su paralelne pravoj $x$ iz razloga što su paralelne ravni $\alpha$. Dolazimo do zaključka da moraju biti prave $b_1$ i $b_2$ istovetne, a to je suprotno pretpostavci.

*Primer 1.* Dokazati da je kroz tačku $A$ van ravni $\alpha$ moguće postaviti ravan $\beta$ koja je paralelna ravan $\alpha$.

*Rešenje.* Konstruišimo dve prave u ravni $\alpha$ koje se seku. Označimo ih sa $m$ i $n$, a njihov presek sa $L$. Postavimo, zatim, kroz tačku $A$ prave $m'$ i $n'$ koje su paralelne redom pravim $m$ i $n$. Primećujemo da takve prave $m'$ i $n'$ postoje i da su jednoznačno određene. Ravan $\beta$, koja je određena pravama $m'$ i $n'$, paralelna je ravni $\alpha$.




Sl. 44




Sl. 45

*Primer 2.* Kroz datu tačku $A$ konstruisati ravan paralelnu datoj ravni $\tau$ koja ne sadrži tačku $A$.

*Rešenje.* Konstruišimo u ravni $\tau$ dve prave $m$ i $n$ koje se seku u tački $S$. Konstruišimo zatim ravni $\alpha$ i $\beta$ koje su određene tačkom $A$ i pravom $m$, odnosno tačkom $A$ i pravom $n$. Tražena ravan seče ravni $\alpha$ i $\beta$ po pravim $a$ i $b$ koje su paralelne pravim $m$, odnosno $n$. Konstrukcijom pravih $a$ i $b$ odredili smo ravan koja je paralelna ravni, a sadrži tačku $A$.

## ZADACI

1. Dokazati da ne postoje dve različite ravni koje sadrže tačku $A$ i paralelne su datoj ravni $\alpha$.
2. Ako su $\alpha$ i $\beta$ dve paralelne ravni i $q$ prava, koja ne pripada ni jednoj od tih ravni i paralelna ravni $\beta$, dokazati da je prava $q$ paralelna ravni $\alpha$.
3. Kroz pravu $a$ paralelnu ravni $\alpha$ može se postaviti tačno jedna ravan paralelna $\alpha$.
4. Ako su $\alpha$ i $\beta$ dve različite ravni koje se seku, $s$ presečna prava, $t$ prava paralelna ravnima $\alpha$ i $\beta$, tada su prave $s$ i $t$ paralelne. Dokazati!
5. Dokazati da su odsečci paralelnih pravih između paralelnih ravni jednaki.
6. Ako tri različite ravni imaju zajednički presek, onda je taj presek tačka ili prava. Ako ne postoji tačka koja je zajednička za sve tri ravni, postoji prava koja je svim tim ravnima paralelna. Dokazati!
7. Dokazati da sve prave koje imaju zajedničku tačku, a paralelne su datoj ravni pripadaju jednoj ravni.
8. Date su četiri tačke $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ koje ne leže u jednoj ravni. Dokazati da ravan koja je paralelna pravim $A_1A_2$ i $A_3A_4$ seče ostale četiri prave u tačkama koje su temena paralelograma.
9. Date su četiri tačke $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ koje ne leže u jednoj ravni. Sredine odsečaka $A_1A_2$, $A_1A_3, \ldots, A_3A_4$ označimo redom sa $A_{12}, A_{13}, \ldots, A_{34}$. Prave, određene dužima $A_{12}$, $A_{34}$, $A_{13}$, $A_{24}$, $A_{14}$ $A_{24}$, seku se u jednoj tački. Dokazati!
10. Kroz datu pravu konstruisati ravan koja je paralelna drugoj datoj pravoj. Pretpostavlja se da su date prave mimoilazne.
11. Date su dve mimoilazne prave i tačka van njih. Konstruisati pravu koja sadrži datu tačku i seče dve date prave.

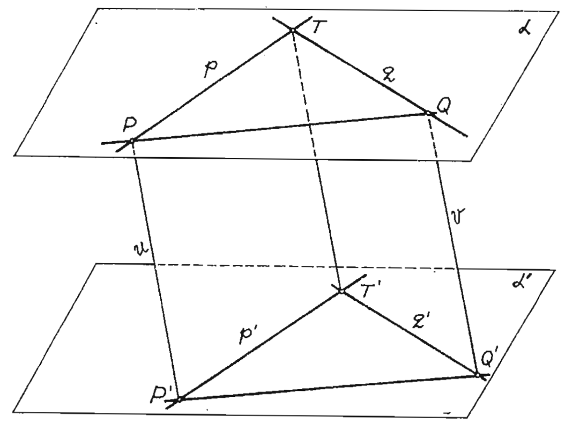


### 3. NORMALNOST PRAVIH I RAVNI

Definicija normalnosti dveju pravih koje pripadaju jednoj ravni poznata je iz planimetrije. Da bismo mogli uvesti pojam normalnosti dveju pravih u prostoru, potrebno je prethodno dokazati tvrđenje formulisano u sledećoj teoremi:

**Teorema.** Ako se prave $p$ i $q$ seku i normalne su jedna na drugu, prava $p'$ paralelna pravoj $p$, prava $q'$ paralelna pravoj $q$ i prave $p'$ i $q'$ se seku, onda su $p'$ i $q'$ takođe normalne jedna na drugu.

*Dokaz.* Razmotrimo posebno slučaj kad se ravan $\alpha$ određena pravim $p$ i $q$ ne poklapa sa ravni $\alpha'$ koja je određena pravim $p'$ i $q'$. Presečne tačke pravih $p$ i $q$ odnosno $p'$ i $q'$ označimo sa $T$ odnosno $T'$. Na pravim $p$ i $q$ odredimo tačke $P$ i $Q$ koje su različite od $T$ i konstruišimo prave $u$ i $v$ koje sadrže tačku $P$, odnosno $Q$, i paralelne su pravoj $TT'$. Prave $u$ i $v$ seku prave $p'$ i $q'$ u tačkama $p'$ odnosno $Q$. Četvorougaonici $PTT'P'$ $TQQ'T'$, $PQQ'P'$ su paralelogrami i, zato, $PQ = P'Q'$, $PT = P'T'$, $TQ = T'Q'$, što znači da su trougli $PTQ$ i $P'T'Q'$ podudarni. Ugao između pravih $p'$ i $q'$ je odgovarajući uglu između pravih $p$ i $q$ i jednak njemu što je i trebalo dokazati.

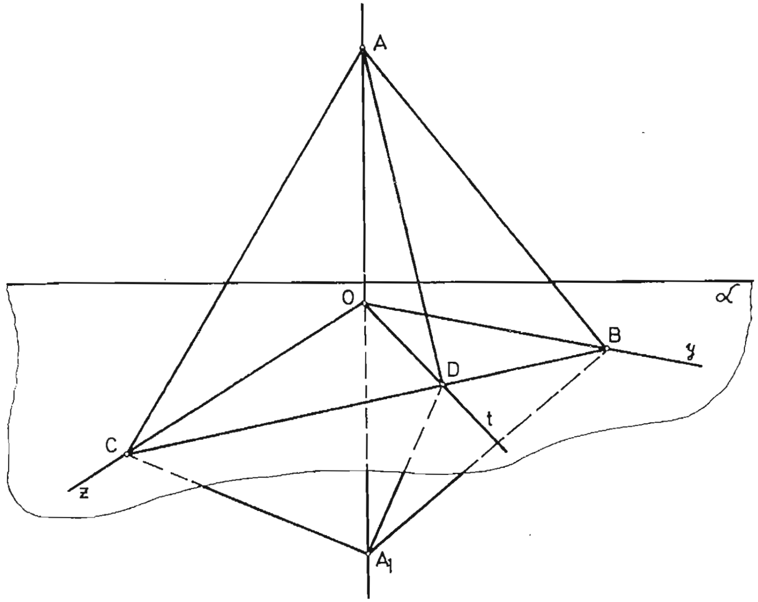



Sl. 46

**Definicija.** Dve mimoilazne prave su uzajamno normalne ako (i samo ako) su im paralelne prave koje se seku normalne.

Može se lako zaključiti da ova definicija ne bi imala smisla da tvrđenje poslednje teoreme nije tačno.

**Teorema.** Ako prava $AA_1$ seče ravan $\alpha$ u tački $O$ i ako je pri tom prava $AA_1$ normalna na neke 2 različite prave $Oy$, $Oz$ ravni $\alpha$, tada je prava $AA_1$ normalna i na svaku pravu $Ot$ koja pripada ravni $\alpha$, a prolazi kroz tačku $O$.




Sl. 47

*Dokaz.* Ne umanjujući opštost dokaza možemo pretpostaviti da su tačke $A$ i $A_1$ na pravoj $AA_1$ u takvom položaju da je tačka $O$ između tačaka $A$ i $A_1$ i $AO = OA_1$. Konstruišimo u ravni $\alpha$ pravu koja seče sve tri prave $Oy$, $Oz$, $Ot$. Presečne tačke označimo sa $B$, $C$, $D$. Po pretpostavci je $AA_1 \perp OB$, $AA_1 \perp OC$. Treba da se dokaže da je $AA_1 \perp OD$. Iz podudarnosti trouglova $AOC$ i $A_1OC$ (dve strane i zahvaćeni prvougao svi jednaki) sledi da je $AC = A_1C$. Analogno, možemo zaključiti da je $AB = A_1B$ pa, iz podudarnosti trouglova $ABC$ i $A_1BC$, dobijamo jednakost uglova $ABC$ i $A_1BC$. Sada možemo da tvrdimo da su trouglovi $ABD$ i $A_1BD$ podudarni i zato $AD = A_1D$.

Konačno, trouglovi $AOD$ i $A_1OD$ imaju sve strane jednake pa su podudarni. Uglovi $AOD$ i $A_1OD$ su odgovarajući, a zbir im je



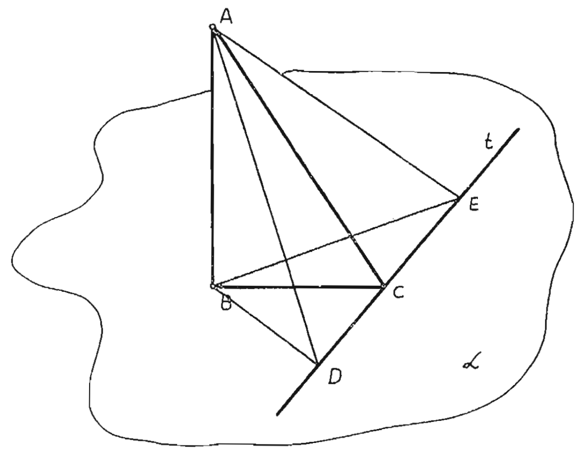
opružen ugao. Znači, svaki od uglova $AOD$, $A_1OD$ je prav (što je trebalo dokazati).

Sada možemo takođe definisati normalnost prave na ravan.

**Definicija.** Reći ćemo da je prava normalna na ravan ako je normalna na svaku pravu te ravni koja prolazi kroz prodor prave i ravni. Na osnovu prethodno dokazanog možemo zaključiti da će prava biti normalna na ravan ako je normalna na dve prave te ravni koje se seku.

**Definicija.** Ako su dati ravan $\alpha$ i prava $l$ koja nije paralelna ravni $\alpha$ reći ćemo za duž $A'B'$ iz ravni $\alpha$ da je nastala projektovanjem duži $AB$, ako je $AA' \parallel l$, $BB \parallel l$. Pravu $l$ nazivamo zrakom projektovanja, a duž $A'B'$ normalnom, odnosno kosom projekcijom duži $AB$ (zavisno od toga da li je prava $l$ normalna na ravan $\alpha$ ili je u kosom položaju prema ravni $\alpha$). Oštar ugao kojeg obrazuju prave $AB$ i $A'B'$ — pri čemu je $A'B'$ normalna projekcija — nazivamo nagibnim uglom prave i ravni. Ako je $AB$ normalno na ravan nagibni ugao je prav.

**Teorema.** Ako je $AC$ duž takva da je prava $AC$ u kosom položaju prema ravni $\alpha$ i tačka $C$ u ravni $\alpha$, prava $t$ ravni $\alpha$ koja prolazi kroz tačku $C$ će biti normalna na pravu $AC$ ako i samo ako je normalna na pravu određenu normalnom projekcijom duži $AC$ na ravan $\alpha$.




Sl. 48

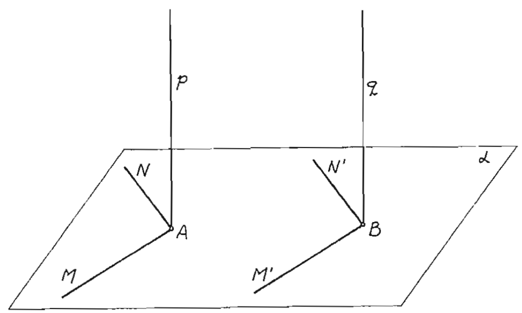
*Dokaz.* Odredimo na pravoj $t$ takve tačke $D$, $C$ i $E$ da je $DC = CE$ i $D - C - E$. Sa $B$ označimo presek normale iz tačke $A$ na ravan $\alpha$. Konstruišimo zatim sve duži koje su određene tačkama $A$,

$B$, $C$, $D$, $E$. Pretpostavimo najpre da je prava $t$ normalna na pravu $BC$. Iz podudarnosti trouglova $BCE$ i $BCD$ zaključujemo da je $BD = BE$. Sada zaključujemo da je trougao $ABD$ podudaran trouglu $ABE$ pa je $AD = AE$. Konačno, trouglovi $ACE$ i $ACD$ su podudarni i pri tom je $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ACD = 90°$. Dokaz u obrnutom smeru izvodi se analogno. Naime, pretpostavljamo opet da su tačke $E$ i $D$ takve da je $CE = CD$ i tačka $C$ između tačaka $D$ i $E$. Pretpostavljamo takođe da je prava $AC$ normalna na pravu $t$. Nalazimo redom da je $AE = AD$, $BE = BD$, $\sphericalangle BCE = \sphericalangle BCD = 90°$.

Ova teorema je poznata pod imenom „Teorema tri normale". Kada je $AC$ normalno na $t$, tada je $Bc$ zajednička normala dveju mimoilaznih pravih $t$ i $AB$.

*Primer 1.* Ako je ravan $\alpha$ normalna na jednu od dveju paralelnih pravih, normalna je i na drugu.

Pretpostavimo da je prava $p$ normalna na ravan $\alpha$, a prava $q$ paralelna pravoj $p$. Presečene tačke pravih $p$ i $q$ sa ravni $\alpha$ označimo sa $A$ odnosno $B$. Konstruišimo zatim u ravni $\alpha$ četiri tačke $M$, $N$, $M'$, $N'$, takve da je $AM \parallel BM'$, $AN \parallel BN'$. Uglovi $MAp$ i $M'Bq$ su uglovi sa paralelnim kracima i zato su jednaki. S obzirom da je ugao $AMp$ prav, i ugao $M'Bq$ biće prav. Analogno zaključujemo da je ugao $N'Bq$ prav. Prava $q$ je normalna na dve prave ravni $\alpha$ koje se seku pa je $q \perp \alpha$.




Sl. 49

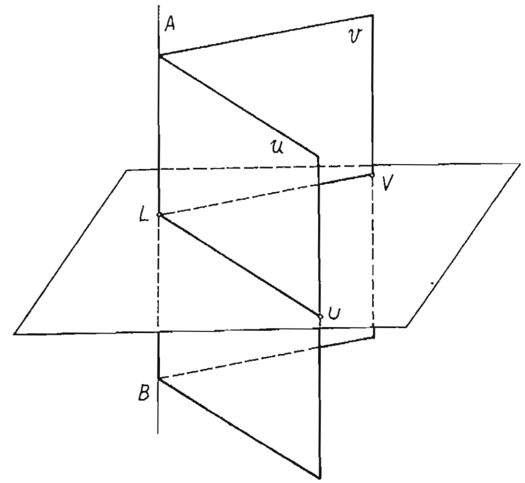
*Primer 2.* Kroz datu tačku $L$ prostora konstruisati ravan normalnu na datu pravu $AB$.

*Rešenje*. Pretpostavimo najpre da tačka $L$ leži na pravoj $AB$.

Konstruišimo dve ravni $u$ i $v$ koje se seku po pravoj $AB$. Tražena ravan će biti normalna na te ravni i zato će seći ravni $u$ i $v$ po pravim



$LU$ i $LV$, koje su ortogonalne na pravu $AB$. Prave $LU$ i $LV$ jednoznačno određuju traženu ravan. Prilikom izvođenja konstrukcije, najpre konstruišemo ravni $u$ i $v$ a zatim prave $UL$ i $VL$.




Sl. 50

Pretpostavimo sada da tačke $A$, $B$ i $L$ nisu kolinarne. U ovom slučaju tačke $A$, $B$ i $L$ određuju jednu ravan u kojoj možemo izvršiti konstrukciju normale $LL_1$ na pravu $AB$. Pritom tačku $L'$ možemo da izaberemo tako da pripada pravoj $AB$. Tražena normalna ravan će sadržavati i tačku $L'$. Dalja konstrukcija ravni bila bi kao u prvom slučaju.

## ZADACI

1. Ako su dve prave normalne na istu ravan, onda su međusobno paralelne. Dokazati!
2. Ako je prava normalna na jednoj od paralelnih ravni, normalna je i na drugoj. Ako su dve ravni normalne na istu pravu, one su paralelne. Dokazati!
3. Kroz datu tačku prostora konstruisati pravu normalnu da datu ravan.
4. Date su dve mimoilazne prave. Konstruisati pravu koja je normalna na obe te prave i seče ih.

### 4. TRANSFORMACIJE U PROSTORU

**Definicija.** Pod kretanjem u prostoru podrazumevamo jedno jednoznačno preslikavanje prostora na sama sebe koje čuva rastojanje među tačkama, tj. da je rastojanje nekih dveju tačaka prostora jednako rastojanju slika tih tačaka.

Kretanje u prostoru ima analogna svojstva kretanja u ravni. Tako, na primer, prava mora da se preslikava u pravu i, pritom, raspored tačaka na pravoj je očuvan.

**Teorema.** Pri kretanju u prostoru ravan prelazi u ravan.

*Dokaz.* Neka je $\alpha$ neka ravan i $A$, $B$, $C$ tri nekolinearne tačke te ravni. Tačke $A'$, $B'$, $C'$, koje su slike tačaka $A$, $B$, $C$, takođe su nekolinearne i zato jednoznačno određuju ravan. Označimo tu ravan sa $\beta$. Dokažimo da pri ovakvom kretanju ravan $\alpha$ prelazi u ravan $\beta$. Neka je $M$ neka tačka ravni $\alpha$. Konstrušimo pravu kroz $M$ koja seče trougao $A$, $B$, $C$ u dvema tačkama $U$ i $V$. Tačke $U'$ i $V'$, odgovarajuće tačkama $U$ i $V$, pripadaju trouglu $A'B'C'$, što znači da će tačka $M'$, kao slika tačke $M$, pripadati ravni $\beta$ trougla $A'B'C'$. Time je utvrđeno da se svaka tačka ravni $\alpha$ preslikava u neku tačku ravni $\beta$. Dokažimo još da je svaka tačka ravni $\beta$ slika neke tačke, ravni $\alpha$. Neka je $X'$ tačka ravni $\beta$. Konstruišimo kroz $X'$ neku pravu koja seče ravan trougla $A'B'C'$ u dvema tačkama, $S'$ i $T'$. Tačke $S'$ i $T'$ su slike nekih tačaka $S$ i $T$ koje pripadaju trouglu $ABC$. Prava $ST$ se preslikava na pravu $S'T'$ pa mora $X'$, kao tačka prave $S'T'$, biti slika neke tačke.

**Definicija.** Dve figure, $F$ i $F'$, nazivamo jednakim ako postoji kretanje koje prevodi figuru $F$ u figuru $F'$.

**Definicija.** Preslikavanje prostora na sebe pri kojem se nekoj tački prostora $X$ korespondira tačka prostora $X'$, takva da je duž $XX'$ normalna na ravan $\alpha$ i $XM = MX'$ — gde je $M$ tačka preseka duži $XX'$ i ravni — nazivamo transformacijom simetrije u odnosu na ravan $\alpha$. U definiciji je takođe neophodno precizirati da je tačka $M$ između tačaka $X$ i $X'$ ako $X$ ne pripada ravni $\alpha$, a $X = X' = M$ ako je $X$ tačka ravni $\alpha$.

Transformacija simetrije u odnosu na ravan je jedno kretanje. Analogno se definiše simetrija u odnosu na tačku, rotacija i translacija u prostoru koji su, takođe, kretanja u prostoru.

**Definicija.** Kretanje nazivamo translacijom ako je ispunjen sledeći uslov:

1. Ako su $X$, $Y$ neke tčke prostora, a $X'$ i $Y'$ njima odgovarajuće tačke, tada su tačke $X$, $Y$, $X'$, $Y'$ ili temena paralelograma kod kojeg je $XY \parallel X'Y'$, $XX' \parallel YY'$ ili se mogu dobiti projektovanjem nekog paralelograma $X$, $Y$, $X'$, $Y'$ na pravu (za slučaj kad su kolinearne).

**Definicija.** Kretanje nazivamo rotacijom oko prave $a$ ako pri kretanju tačke prave $a$ ostaju nepokretne.



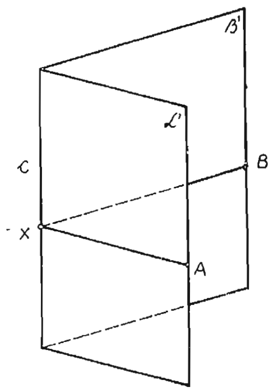
### ZADACI

1. Ispitati u kom slučaju je projekcija ravni na ravan kretanje!
2. Dokazati da je preslikavanje složeno od dva kretanja takođe kretanje!
3. Dokazati da je preslikavanje složeno od simetrije u odnosu na tačku $O_1$ i simetrije u odnosu na tačku $O_2$ translacija u pravcu prave $O_1O_2$ pri čemu je pomak u translaciji $2O_1O_2$.

### DIEDAR

**Definicija.** Neka su $\alpha$ i $\beta$ dve ravni koje se seku po pravoj $c$. Skup tačaka $\alpha'$ ravni $\alpha$ koje leže s jedne strane prave $c$ zajedno sa pravom $c$ i skupom tačaka $\beta'$ ravni $\beta$ koje leže s jedne strane prave $c$ nazivamo diedrom. Pravu $c$ nazivamo rubom (ivicom), a polupravni $\alpha'$ i $\beta'$ stranama diedra.

Ako kroz neku tačku $X$ prave $c$ postavimo ravan $t$ normalnu na pravu $c$, presek ravni $t$ i diedra će biti ugao kojeg ćemo obeležiti sa $AXB$. $A$ je neka tačka kraka ugla koji pripada poluravni $\alpha'$, a $B$ tačka kraka ugla koja pripada poluravni $\beta'$. Veličina ugla $BXA$ neće zavisiti od položaja tačke $X$ na pravoj $c$ što nam omogućava da definišemo nagibni ugao diedra.



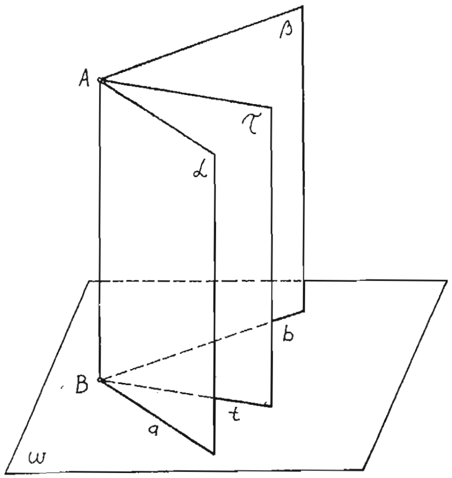
Sl. 51

**Definicija.** Ugao koji dobijamo kao presek diedra i neke ravni koja je normalna na ivici diedra nazivamo nagibnim uglom diedra.

**Definicija.** Dva diedra nazivamo jednakim ako se premeštanjem (translacijom i rotacijom) u prostoru mogu dovesti do poklapanja. Ako se dva diedra premeštanjem u prostoru mogu dovesti u položaj da im se ivice poklapaju, a oblast prostora zahvaćenog stranama jednog diedra sadrži oblast prostora zahvaćenog stranama drugog diedra, i, pritom, ta se dva diedra ne poklapaju, onda kežemo da je prvi diedar veći od drugog.

**Teorema.** Jednakim diedrima odgovaraju jednaki nagibni uglovi. Ako dva diedra nisu jednaka, većem diedru odgovara veći nagibni ugao.

*Dokaz.* Neka su $\alpha\, AB\, \beta$ i $\gamma\, CD\, \delta$ dva diedra. Dovedimo diedar $\gamma\, CD\, \delta$ u položaj da se prave $CD$ i $AB$ poklapaju, poluravni $\beta$ i $\delta$ poklapaju i da je oblast prostora jednog od tih diedara sadržana u oblasti prostora drugog diedra. Ako je, na primer, diedar $\gamma\, CD\, \delta$ manji od diedra $\alpha\, AB\, \beta$, poluravan $\gamma$ će poprimiti neki položaj $\tau$ (videti sliku). Postavimo ravan $\omega$ normalno na pravu $AB$ koja sadrži tačku $B$. Ravan $\omega$ će seći poluravni $\alpha$, $\tau$ i $\beta$ po polupravama $a$, $t$, $b$. Sada neposredno možemo zaključiti da je tvrđenje teoreme tačno jer je — ugao $tBb$ manji od ugla $aBb$, odnosno jednak njemu ako je diedar $\gamma\, CD\, \delta$ manji, odnosno jednak diedru $\alpha\, AB\, \delta$. Takođe, zaključujemo da će važiti i tvrđenje koje će biti formulisano u obliku teoreme.



Sl. 52

**Teorema.** Jednakim nagibnim uglovima diedra odgovaraju jednaki diedri. Ako dva diedra imaju nejednake nagibne uglove, onda većem nagibnom uglu odgovara veći diedar.

**Teorema.** Ako dva diedra imaju paralelne i jednako ili suprotno orijentisane strane, oni su jednaki.

*Dokaz* teoreme zasniva se na tvrđenju o jednakosti uglova s paralelnim kracima. Naime, treba postaviti ravan koja je normalna na strane jednog diedra. Ona je normalna i na strane drugog diedra. U preseku te ravni sa diedrima dobijamo uglove sa paralelnim kracima. Jednakost nagibnih uglova diedra povlači jednakost diedara.

**Teorema.** Ako su dva diedra sa normalnim stranama i ako su im nagibni uglovi oba oštra ili oba prava ili tupa, oni su jednaki.

Treba napomenuti da se podrazumeva za nagibne uglove diedara da su manji ili jednaki od 180°.

*Dokaz* je potpuno analogan dokazu prethodne teoreme. Postavljanjem ravni normalne na strane diedara, dobijamo u preseku uglove sa normalnim kracima koji su jednaki.



## ZADACI

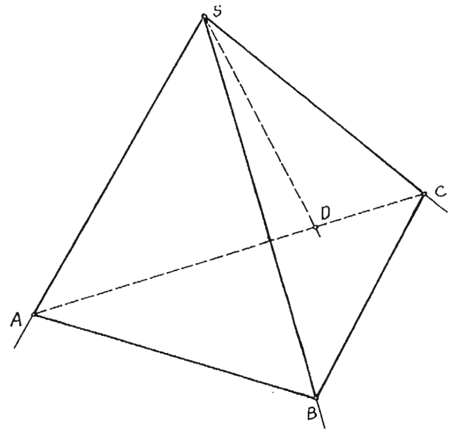
1. Date su dve prave, $p$ i $q$. Konstruisati diedar sa najvećim nagibnim uglom, takav da neka poluprava prave $p$ pripada jednoj strani diedra, a neka poluprava prave pripada drugoj strani diedra.
2. Ispitati da li presečni ugao ravni i diedra može biti veći, odnosno manji od nagibnog ugla diedra.
3. Da li dva diedra mogu biti ujedno i sa paralelnim i sa normalnim stranama. Ako postoje takvi diedri, ispitati kakvi su im nagibni uglovi.

# ROGLJEVI I ROGLJASTA TELA

## 1. OSNOVNE TEOREME O ROGLJEVIMA

**Definicija.** Neka su $a_1, a_2, \ldots a_n$ $(n \geqslant 3)$ poluprave koje polaze iz sistog temena $A$ i u takvom su položaju da u nizu uglova $a_1Aa_2$, $a_2Aa_3, \ldots a_{n-1}\, Aa_n, a_n\, Aa_1$ svaka dva susedna imaju kao zajednički presek samo po jednu polupravu, a svaka druga dva para uglova imaju za presek teme $A$. Tako raspoređeni uglovi obrazuju $n$-tostranu rogljastu površ. Ukupnost rogljaste površi i jednog od dva dela prostora na koje je prostor podeljen rogljastom površi nazivamo rogljem. Uglove $a_1Aa_2, a_2Aa_3, \ldots, a_nAa_1$ nazivamo stranama roglja, poluprave $a_1a_2, \ldots a_n$ ivicama, a tačku $A$ temenom ili vrhom roglja.

Rogalj čiji je vrh $A$, a ivice $a_1, a_2, \ldots a_n$ obeležavaćemo sa $A\, a_1\, a_2 \ldots a_n$. Biti će takođe upotrebljavana i oznaka $A\, A_1A_2 \ldots A_n$ (gde su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tačke na ivicama roglja, a $A$ teme roglja).



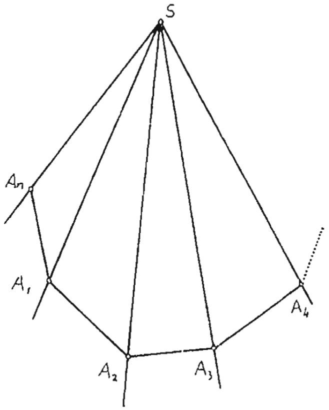
Sl. 53

**Teorema.** U trostranom roglju (triedru) svaka strana je manja od zbira dveju drugih strana.

*Dokaz.* Neka je u trostranom roglju $SABC$ najveća strana $ASC$. Na duži $AC$ odredimo tačku $P$ takvu da je $\sphericalangle ASD = \sphericalangle ASB$. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo pretpostaviti da je tačka $B$ na ivici roglja tako izabrana da bude $SB = SD$. Trouglovi $SAD$ i $SAB$ će biti podudarni jer imaju jednake po dve strane i zahvaćeni ugao. Iz podudarnosti tih trouglova proizilazi jednakost $AD = AB$. S obzirom da je $AD + DC = AC < AB + BC$, biće $DC < BC$. Trouglovi $SBC$ i $SDC$ imaju po dve strane jednake: $SB = SD$, $SC = SC$. Pošto je $DC < BC$, mora biti $\sphericalangle DSC < \sphericalangle BSC$, odnosno $\sphericalangle ASC. < < \sphericalangle ASB + BSC$.

**Teorema.** U konveksnom roglju zbir svih strana je manji od četiri prava ugla (360°).

*Dokaz.* Koristeći pretpostavku da je rogalj konveksan i da nikoje tri ivice roglja ne pripadaju istoj ravni, zaključujemo da je moguće postaviti ravan koja ne sadrži vrh roglja i seče sve ivice roglja po konveksnom $n$ — trouglu. Označimo temena $n$ — trougla sa $A_1$, $A_2$.... $A_n$, a vrh sa $S$, biće



Sl. 54

$$\sphericalangle A_nA_1S + \sphericalangle SA_1A_2 > \sphericalangle A_nA_1A_2$$
$$\sphericalangle A_1A_2S + \sphericalangle SA_2A_3 > \sphericalangle A_1A_2A_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sphericalangle A_{n-1}A_nS + \sphericalangle SA_nA_1 \sphericalangle A_{n-1}A_nA_1$$

Sabiranjem ovih nejednakosti, dobijamo procenu

$$2nR - (\sphericalangle A_1SA_2 + \sphericalangle A_2SA_3 + \dots . + . A_nSA_1) > 2(n-2)R$$

(gde je sa $R$ označen prav ugao). Iz poslednje nejednakosti zaključujemo da će tvrđenje teoreme biti tačno.

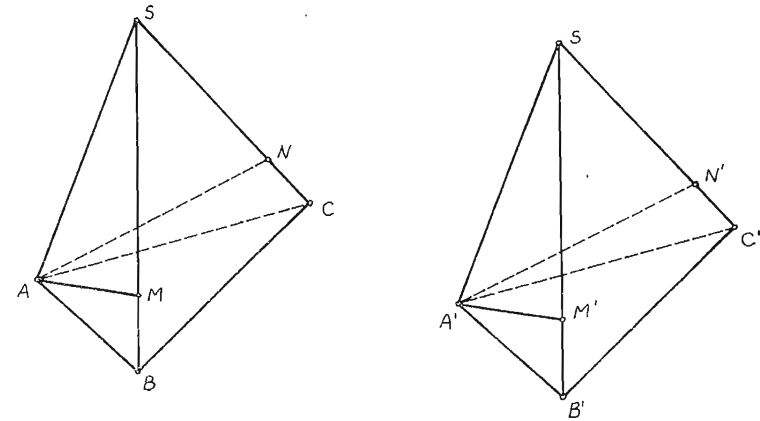
S obzirom da se $n$-tostrani rogalj može predstaviti kao unija $n$-2 triedra, posebno ćemo ispitati neka svojstva triedra. Pre svega, ispitajmo neke dovoljne uslove podudarnosti triedara.

**Teorema 1.** Dokazati da su dva triedra podudarna ako su im jednaki odgovarajući ivični uglovi.

*Dokaz.* Da bismo dokazali da su triedri $Sabc$ i $S'a'b'c'$ sa jednakim odgovarajućim ivičnim uglovima bili podudarni, potrebno je da dokažemo da su im jednaki i odgovarajući diedri. Neka su $A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$, $C'$, tačke polupravih $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$ takve da su duži $SA$, $SB$, $SC$, $S'A'$, $S'B'$, $S'C'$ među sobom jednake. Jednakokraki trouglovi $ASB$, $BSC$, $CSA$ podudarni su odgovarajućim trouglovima $A'S'B'$,



$B'S'C'$, $C'S'A'$, pa su duži $AB$, $BC$, $SA$ jednake dužima $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ i uglovi $BAC$ i $B'A'C'$ međusobno jednaki. Konstruišimo ravni kroz tačke $A$, odnosno $A'$ normalno na $SA$ odnosno $SA'$, Označimo prvu ravan sa $\tau$, a drugu sa $\tau'$. Ravan $\tau$ seče poluprave $SB$ i $SC$ u tačkama $M$, odnosno $N$ a ravan $\tau'$, poluprave $S'B'$, $S'C'$ u tačkama $M'$, odnosno $N'$.



Sl. 55

Redom zaključujemo da je $\triangle ASM \cong A'S'M'$, $\triangle ASN \cong \cong \triangle A'S'N'$, $\triangle MSN \cong \triangle M'S'N'$ i $AM = A'M'$, $AN = A'N'$, $MN = M'N'$. Iz podudarnosti trouglova $AMN'$ i $A'M'N'$ proizilazi jednakost uglova $NAM$ i $N'A'M'$. Na analogan način dokazujemo da su i ostali odgovarajući nagibni uglovi diedara jednaki.

**Teorema 2.** Ako su dva ivična ugla i njima zahvaćeni diedar jednog triedra jednaki odgovarajućem diedru drugog triedra, dokazati da su pomenuti triedri podudarni.

*Dokaz.* Neka su ivični uglovi $aSb$, $aSc$, triedra $Sabc$ jednaki ivičnim uglovima $a'S'b'$, $a'S'c'$ i diedri zahvaćeni tim uglovima takođe jednaki. Kao u prethodnoj teoremi, uvedimo (odredimo) tačke $A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$, $C'$, $M$, $N$, $M'$, $N'$,.

Biće

$$AM = A'M', \quad AN = A'N', \quad \sphericalangle NAM = \sphericalangle N'A'M'.$$

Pa i $MN = M'N'$. Važe takođe jednakosti $SM = S'M'$, $SN = S'N'$. Iz podudarnosti trouglova $SMN$ i $S'M'N'$ konačno zaključujemo da je $\sphericalangle MSN = \sphericalangle M'S'N'$. Na osnovu prethodne teoreme sada zaključujemo da su triedri $SABC$ i $S'A'B'C'$ podudarni.

Poslednje dve teoreme su poznate kao stavovi podudarnosti triedara i predstavljaju uopštavanje odgovarajućih stavova podudarnosti dva trougla. Naime, prvu od ovih teorema možemo shvatiti kao uopštenje stava da su dva trougla podudarna kad imaju sve odgovarajuće strane jednake, a drugu kao uopštenje stava da su trougli podudarni ako imaju po dve strane i odgovarajuće zahvaćene uglove tim stranama jednake. Pored ovih stavova podudarnosti trijedara, postoje i stavovi podudarnosti triedara analogni ostalim stavovima podudarnosti trouglova.

### ZADACI

1. Ako su dva diedra i ivični ugao naspram jednog od njih nekog triedra jednaki odgovarajućim diedrima i odgovarajućem ivičnom uglu drugog triedra, a oba ivična ugla naspram drugog para pomenutih diedara oštra, prava ili tupa, dokazati da su ti triedri podudarni (IV stav podudarnosti triedara).
2. Ako su dva diedra jednog triedra jednaka odgovarajućim diedrima drugog triedra, a ivični uglovi na kojima naležu ti diedri nejednaki, dokazati da je naspram većeg od tih uglova veći diedar, a naspram manjeg manji diedar.
3. Ako su svi ivični uglovi četvorostranog roglja međusobom jednaki, dokazati da su naspramni diedri tog roglja među sobom jednaki.
4. Dokazati da se ravni, od kojih svaka sadrži jednu ivicu triedra i simetralu naspramnog ivičnog ugla, seku po jednoj pravoj.
5. Dokazati da se ravni od kojih svaka sadrži jednu ivicu triedra i upravna je na naspramnoj ravni seku po jednoj pravoj.

## POLIEDAR

**Definicija.** Pod poliedrom podrazumevamo telo koje je ograničeno ravnim poligonima. Zajedničke strane dva poligona nazivamo ivicama poliedra. Poligone koji ograničavaju poliedar nazivamo stranama poliedra. Temena poligona nazivamo temenima poliedra.

**Definicija.** Poliedar je konveksan ako uvek, kad sadrži neke dve tačke, sadrži i čitavu duž koja je određena tim dvema tačkama.

Treba napomenuti da se konveksan poliedar mogao definisati kao poliedar koji se nalazi sa jedne strane ravni svake svoje strane. Nadalje ćemo izučavati isključivo konveksne poliedre.



**Ojler — Poenkareova teorema.** Ako sa $t$ obeležimo broj temena, sa $i$ broj ivica, a sa $p$ broj strana (pljosni) poliedra, tada je $t - i + p = 2$.

*Primer*. Primenom Ojler-Poenkareove teoreme dokazati da poliedar ne može imati za sve strane šestougaonike. Dokaz. U svakom temenu se sustiču makar tri ivice, a, kako svaka ivica povezuje dva temena, možemo zaključiti da je $t \geqslant \frac{3i}{2}$, pa je $t - i + p \geqslant \frac{i}{2} + p > 2$.

**Definicija.** Pravilnim poliedrom nazivamo onaj poliedar čije su sve strane pravilni poligoni i svi diedri jednaki.

Iz definicije pravilnog poliedra neposredno sledi da su mu svi ivični uglovi jednaki, sve ivice jednake i svi rogljevi jednaki. Postoji pet vrsta pravilnih poliedara. Dokaz, koji će ovde biti izostavljen, bazira se na tvrđenju Ojler-Poinkareove teoreme.

Pravilne poliedre možemo dobiti u sledećim slučajevima za $i$, $t$ i $p$:

$i = 6,\quad t = 4,\quad p = 4$ (tetraedar)

$i = 12,\quad t = 6,\quad p = 8$ (oktaedar)

$i = 30,\quad t = 12,\quad p = 20$ (ikosaedar)

$i = 12,\quad t = 8,\quad p = 6$ (kocka, heksaedar)

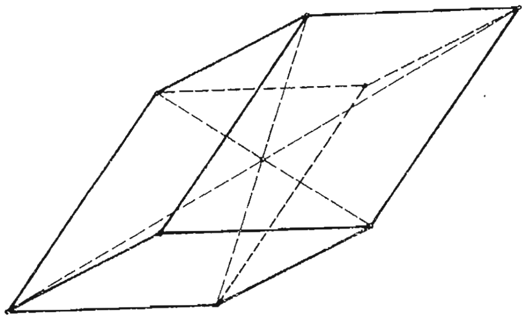
$i = 30,\quad t = 20,\quad p = 12$ (dodekaedar)

Prostije vrste poliedara su svakako prizma i piramida.

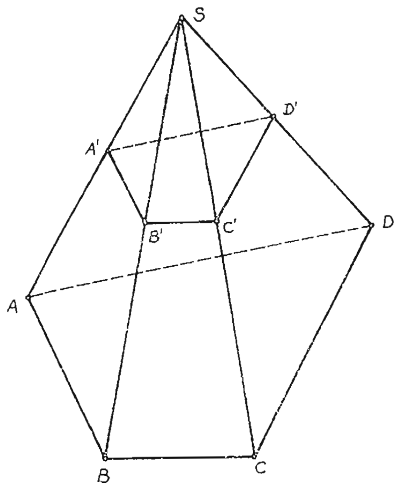
**Definicija.** Neka su $\alpha$ i $\alpha'$ dve paralelne ravni i $h$ prava koja seče te ravni. Neka je $P$ konveksan poligon u ravni $\alpha$ i njegova temena $A_1, A_2, \ldots A_n$. Postavimo kroz tačku $X$ poligona $P$ pravu paralelnu pravoj $h$. Označimo sa $X'$ tačku preseka prave i ravni $\alpha'$. Ukupnost svih tačaka duži $XX'$ — pri čemu $X$ može biti ma koja tačka poligona $P$ — nazivamo prizmom. Poligone $P$ i $P'$ nazivamo osnovama prizme, a ostale strane prizme bočnionim stranama. Duži $A_1A'_1$, $A_2A'_2, \ldots$ nazivamo bočnim ivicama prizme. Prizma je prava ako su bočne ivice normalne na osnovu prizme.

Ako je osnova prizme paralelogram, takvu prizmu obično nazivamo paralelepipedom. Kao primer paralelopipeda možemo navesti kocku.

Na slici je prikazan paralelepiped. Paralelepiped je centralno simetrična figura. Dijagonale paralelepipeda (duži koje spajaju temena paralelepipeda, ali ne pripadaju stranama paralelepipeda) seku se u jednoj tački i polove. Suprotne strane paralelepipeda su podudarne. Ova (nabrojana) svojstva paralelepipeda analogna su svojstvima paralelograma u ravni i lako se dokazuju.



Sl. 56




Sl. 57

**Definicija.** Pod piramidom podrazumevamo poliedar kod kojeg je jedna strana (osnova piramide) bilo kakav poligon, a sve ostale strane (bočne strane piramide) su trouglovi koji sa osnovom piramide imaju jednu zajedničku ivicu. Piramida je pravilna ako je osnova piramide pravilan $n$-trougao i duž koja spaja centar osnove i vrh piramide normalna na osnovu.

Kod pravilne piramide sve bočne ivice imaju isti nagib prema osnovi. I sve bočne strane sa osnovom zahvataju takođe jednake diedre. Ako postavimo ravan paralelno ravni osnove koja seče piramidu po nekom poligonu, ta ravan će deliti piramidu na dva dela. Deo piramide sa one strane te ravni gde se nalazi osnova piramide nazivamo zarubljenom piramidom.



## ZADACI

1. Opisati konstrukciju kocke.
2. Da li se na kocki mogu odrediti neke četiri tačke tako da budu temena pravilnog tetraedra? (Uputstvo: Te četiri tačke se mogu izabrati tako da skup te četiri tačke bude poskup skupa temena kocke).
3. Dokazati da se može polazeći od konstrukcije kocke izvesti konstrukcija pravilnog oktaedra.
4. Kakavi sve poliedri mogu imati 5 temena?
5. Dokazati da su sredine ivica pravilnog tetraedra temena oktaedra.
6. Koliko simetrijskih ravni i osa simetrije ima kocka?
7. Date su tri mimoilazne prave na kojima leže tri ivice paralelepipeda. Konstruisati paralelepiped.
8. Odrediti potreban i dovoljan uslov da postoji tačka u prostoru koja je jednako udaljena od svih temena prizme.
9. Izračunati zbir svih ivičnih uglova $n$-tostrane piramide.
10. Ako dva tetraedra $ABCD$ i $ABCD'$ imaju zajedničku osnovu $ABC$, a teme $D'$ se nalazi unutar tetraedra $ABCD$, dokazati da je zbir ivičnih uglova kod temena $D'$ veći od zbira ivičnih uglova kod temena $D$.

    (Uputstvo: Postaviti ravni $ABD'$ i $ACD'$, konstruisati zatim tačku $D''$ preseka ovih ravni sa ravni $BCD$ itd).

## PRESECI ROGLJASTIH TELA

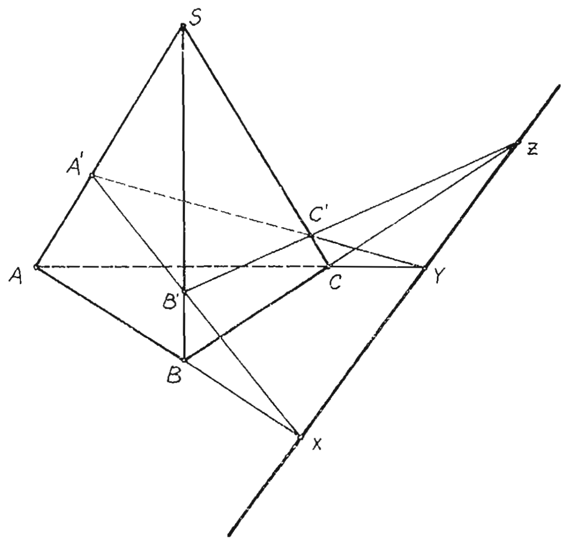
Pre prelaska na ispitivanje ravnih preseka rogljastih tela daćemo definiciju i neka svojstva određenih preslikavanja u prostoru koja preslikavaju ravan (ravno polje tačaka) u ravan.

**Definicija.** Kolinearni (projektivni) odnos među likovima dveju ravni ili jedne iste ravni je obostrano jednoznačni odnos (preslikvanje) u kome, tačkama jednog lika koje pripadaju jednoj pravoj, odgovaraju tačke drugog lika koje takođe pripadaju jednoj pravoj.

**Definicija.** Kolinearni odnos dvaju polja tačaka, u kojemu dvema paralelnim pravama odgovaraju dve paralelne prave, nazivamo drugačije afinim odnosom.

Sličnost i podudarnost ravnih likova možemo smatrati afinim odnosnom jer i u sličnim (podudarnim) likovima odgovaraju obostrano jednoznačno tačkama tačke, pravim prave, a paralelnim pravim paralelne prave.

**Dezargova teorema.** Ako su dva trougla, koja pripadaju jednoj ili dvema ravnima, u takvom uzajamnom položaju i odnosu da prave koje spajaju odgovarajuća temena prolaze kroz jednu tačku, tada se odgovarajuće strane tih trouglova ili njihova produženja seku u tačkama jedne prave. Važi i obratno: ako se odgovarajuće strane dvaju trouglova ili njihova produženja seku u tačkama jedne prave, tada prave, koje spajaju odgovarajuća temena, prolaze kroz jednu tačku (sl. 58).




Sl. 58

*Dokaz* ove teoreme je izostavljen jer po težini prevazilazi okvire ove knjige.

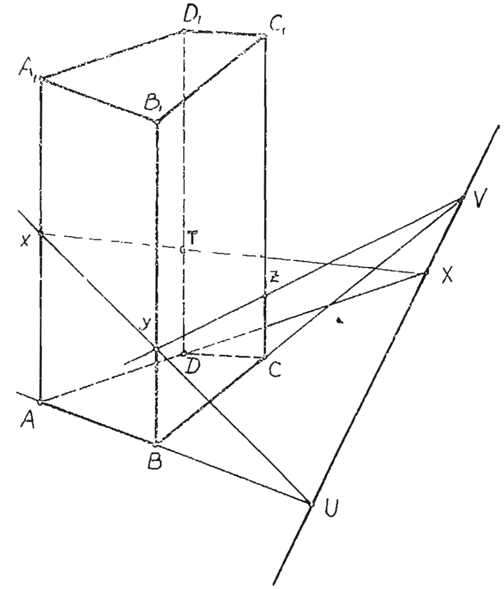
**Definicija.** Preslikavanje tačaka jednog lika $A, B, C, \ldots$ u tačke drugog (ravnog) lika $A', B', Z', \ldots$ naziva se perspektivno ako se sve prave $AA', BB', CC', \ldots$ seku u jednoj tački. Tačka preseka tih zraka naziva se centar perspektive.

Preslikavanje na ravan lika čije su sve prave $XX', YY', ZZ', \ldots$ paralelne (projektovanje) možemo smatrati specijalnim slučajem perspektivnog preslikavanja kod kojeg je centar perspektive beskonačno daleka tačka.

*Primer.* Naći kosi presek četvorostrane prizme ako su zadane tačke preseka $X$, $Y$, $Z$ tri bočne ivice i ravni preseka.



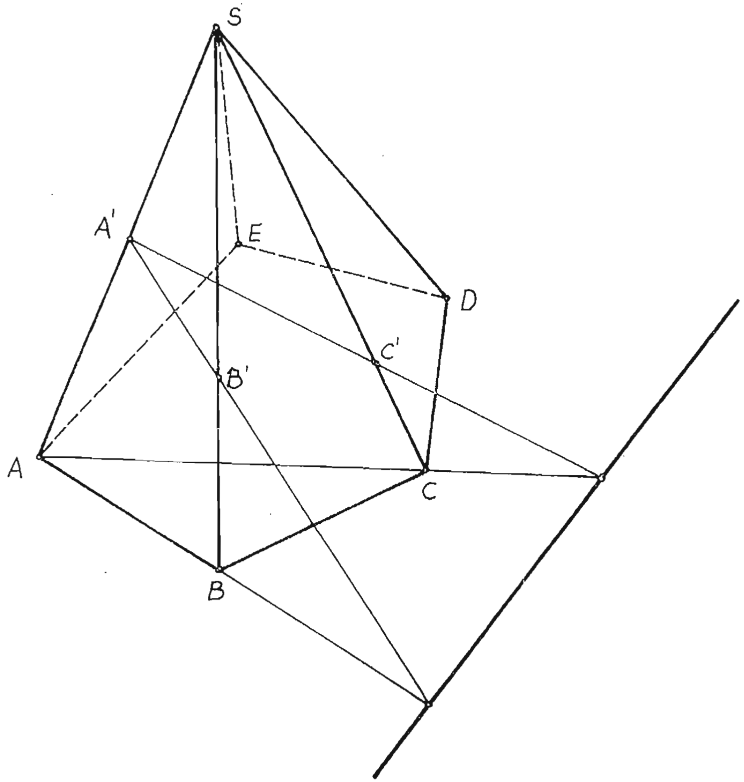
*Rešenje.* Temena osnova prizme označimo sa $A$, $B$, $C$, $D$, odnosno $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$. Neka su tačke $X$. $Y$. $Z$ zadate tačke na ivicama $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, Konstruišimo tačku $T$ ivice $DD_1$ koja pripada presečnoj ravni. Sečenjem piramide sa ravni $XYZ$ definišemo preslikavanje ravni osnove prizme $ABCD$ i ravni $XYZ$ pri kojem tački $A$ odgovara tačka $X$, tački $B$ odgovara tačka $Y$ i, uopšte, nekoj tački $Q$ ravni osnove odgovara takva tačka $V$ ravni $XYZ$ da je $VQ$ paralelna prava bočnim ivicama piramide. Ovo preslikavanje je afino, a, u širem smislu, i perspektivno (s centrom perspektive beskonačne dalekom tačkom). Prave $AB$ i $XY$ se seku u nekoj tački $U$, prave $BC$ i $YZ$ u nekoj tački $V$. Prava $UV$ je presek ravni $XYZ$ i $ABCD$. Odredimo tačku $L$ preseka pravih $AD$ i $UV$. Tražena tačka $T$ će biti presek pravih $AD$ i $XL$.




Sl. 59

*Primer 2.* Naći presek petostrane piramide $SABCDE$ i ravni $\alpha$ ako je zadata presečna prava ravni osnove piramide i ravni $\alpha$ i tačka $A'$ izvodnice $SA$ koja pripada ravni $\alpha$.

*Rešenje.* U osnovi rešenja ovog zadatka je perspektivno afino preslikavanje ravni osnove piramide na ravan $\alpha$. Centar perspektive je tačka $S$. Treba da konstruišemo tačke preseka $B'$, $C'$, $D'$, $E'$, ravni $\alpha$ i izvodnica $SB$, $SC$, $SD$, $SE$. Primenom Dezargove teoreme, zaključujemo da se prave $AB$ i $A'B'$, $AC$ i $A'C'$,..., $AE$ i $A'E'$ seku u tačkama zadate presečne prave ravni $\alpha$ i osnove piramide.




Sl. 60

### Z A D A C I

1. Konstruisati presek paralelepipeda i ravni $\alpha$ ako je zadan presek ravni osnove paralelepipeda i ravni i presečna tačka ravni $\alpha$ i prave koja je određena jednom ivicom gornje osnove paralelepipeda.



2. Ravan prelazi kroz jednu osnovnu ivicu kvadra (pravouglog paralelepipeda) i prolazi kroz središte jedne bočne ivice kvadra. Odrediti presek.
3. Kakavi se preseci dobijaju kad se kocka seče ravnima ortogonalnim na jednu njenu dijagonalu.
4. Četvorostrana piramida presečena je koso prema osnovi jednom ravni koja prolazi kroz tri date tačke, $P_1$, $P_2$, $P_3$, na trima bočnim ivicama. Konstruisati presek.

## KRUŽNICA I SFERA, OBLA TELA

### 1. ODNOS TAČKE I KRUGA, PRAVE I KRUGA, DVA KRUGA

Krug koji je određen centrom $O$ i poluprečnikom $r$ deli sve tačke ravni u kojoj se nalazi na dva skupa. Skup tačaka koje su na rastojanju od centra kruga $O$ manjem ili jednakom $r$ čini oblast kruga. Ako je tačka $X$ na većem rastojanju od poluprečnika kruga, nalazi se izvan kruga.

**Definicija.** Centralnim rastojanjem prave nazivamo normalnu duž spuštenu iz centra kruga na pravu.

Prava neće seći krug ako je njeno centralno rastojanje od datog kruga veće od poluprečnika kruga, (dodirivaće — seći u jednoj tački krug ako je centralno rastojanje jednako poluprečniku), a seći će krug u dve tačke, odnosno oblast kruga po duži određenom tim dvema tačkama — ako je centralno rastojanje manje od poluprečnika.

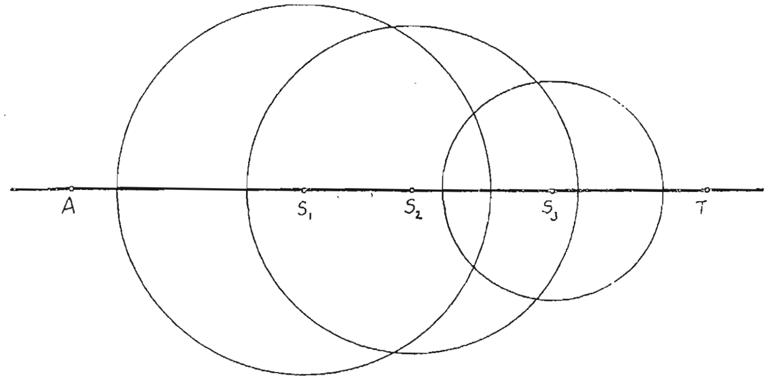
**Definicija.** Pravu koja dodiruje krug nazivamo tangentom kruga. Presek oblasti kruga i neke prave koja seče krug nazivamo tetivom kruga.

Dva kruga $(O_1, r_1)$ i $(O_2, r_2)$ će se seći u dve tačke, dodirivati ili se neće seći zavisno od toga da li je rastojanje $O_1O_2$ manje, jednako ili veće od zbira $r_1 + r_2$.

*Primer.* Kroz polje prolazi prav put. Na putu, na mestu $A$, se nalazi vojnik, a u polju, na mestu $B$, stražarsko mesto vojnika. Vojnik može da ide putem najbrže 8 km/h, a, ako ide kroz polje (izvan puta), može zbog nepogodnog terena da se kreće maksimalnom brzinom 4 km/h. Ispitati, u zavisnosti od položaja stražarskog mesta, da li vojnik može da stigne do njega u roku od jednog sata?

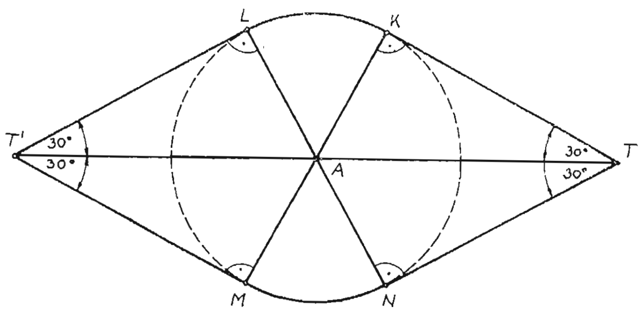
*Rešenje.* Odredimo „geometrijsko mesto tačaka" (mesta) u polju do kojih bi vojnik mogao stići za jedan sat. Pre svega, može se zaključiti da strategija vojnika ne bi bila optimalna ako bi išao izvesno vreme poljem, a zatim se opet vratio na put, ili presekao put u nekoj tački $M$, jer će rastojanje $AM$ najpre preći ako stalno ide putem zbog toga što je put prav i što — kad ide putem — može ići najvećom brzinom. pretpostavimo zato da vojnik, kad jednom napusti put, dalje ide poljem.

Neka je $T$ tačka na putu koja je na rastojanju 8 km od tačke $A$. Pretpostavimo da se vojnik kreće putem u pravcu tačke $T$ brzinom 8 km na sat, a zatim skrene u tački $S_k$ u polje. Opišimo oko tačke $S_k$ krug prečnika $S_kT$.




Sl. 61

Jasno je da oblast kruga čine tačke do kojih vojnik može stići. Sve kružnice za razne položaje tačke $S_k$ su homotetične sa centrom homotetije, tačkom $T$. Skup svih tačaka koje pripadaju oblasti neke ovakve kružnice — ili njoj centralno simetrične u odnosu na tačku $A$ — određuje traženo geometrijsko mesto. Videti sliku.




Sl. 62

Ako se stražarsko mesto ne nalazi u polju u oblasti ovog geometrijskog mesta, stražar neće moći da dođe na vreme.



## ZADACI

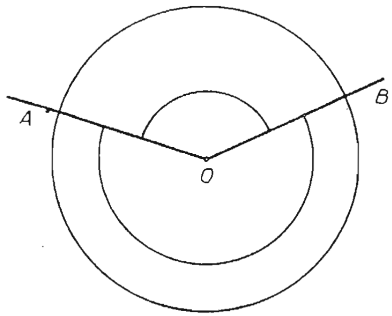
1. Jednakim tetivama istog kruga ili jednakih krugova odgovaraju jednaka centralna rastojanja.
2. Jednakim centralnim rastojanjima u istom krugu ili jednakim krugovima odgovaraju jednake tetive. Dokazati!
3. Polazeći od definicije (da je tangenta kruga prava koja s krugom ima samo jednu zajedničku tačku), dokazati da je ugao između dodirnog poluprečnika i tangente prav.
4. Šta predstavlja geometrijsko mesto sredina paralelnih tetiva datog kruga?
5. Konstruisati krug datog poluprečnika koji datu pravu dodiruje u datoj tački, Koliko zadatak ima rešenja?
6. Šta predstavlja u ravni geometrijsko mesto centara svih krugova koji datu pravu dodiruju u datoj tački?
7. Van datog kruga povučena je prava $a$. Odrediti na krugu tačku najbližu pravoj $a$ i tačku čije je odstojanje od prave $a$ najveće. Izvršiti konstrukciju.
8. Dokazati da je od svih tetiva koje prolaze korz datu tačku $A$ u krugu najmanja ona koja je ortogonalna na prečnik kome pripada tačka $P$.
9. Konstruisati krug datog poluprečnika koji prolazi kroz dve date tačke. Koliko rešenja ima zadatak?
10. Dokazati da je krug određen trima svojim tačkama.
11. Konstruisati krug datog poluprečnika koji dodiruje datu pravu i sadržati datu tačku.
12. Konstruisati krug koji od dveju datih pravih odseca jednake odsečke date dužine.
13. Konstruisati krug koji dodiruje dve date paralelne prave i prolazi kroz datu tačku.
14. Šta je geometrijsko mesto centara koji od krakova datog ugla odsecaju po dva jednaka odsečka date dužine.
15. Dokazati da oblasti dva kruga poluprečnika ne mogu prekriti oblast kruga poluprečnika $r$ ako je $r < R$.
16. Data je zatvorena kriva dužina $l$. Dokazati da postoji krug poluprečnika 1/4 u čijoj je oblasti sadržana čitava kriva.

## UGLOVI U KRUGU, TETIVNI I TANGENTNI ČETVOROUGAO

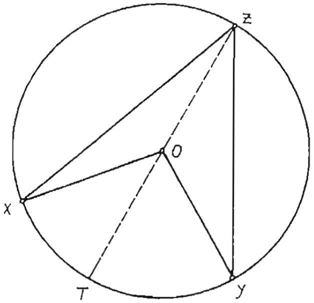
**Definicija.** Ako su $A$ i $B$ dve tačke na krugu kojem je centar tačaka $O$, tačke $A$, $B$ i $O$ određuju dva ugla čije je teme tačka $O$, a kraci $OA$ i $OB$. Ove uglove nazivamo centralnim uglovima nad onim lukom $AB$ koji pripada oblasti ugla.

**Definicija.** Ako su $X$, $Y$, $Z$ tri tačke nekog kruga, ugao $XZY$ nazivamo periferijskim nad onim lukom $XY$ koji ne sadrži tačku $Z$.

**Teorema.** Periferijski ugao jednak je polovini centralnog ugla nad istim ili lukom.




Sl. 63




Sl. 64

*Dokaz.* Neka periferijskom uglu $XZY$ odgovara centralni ugao $XOY$. Konstruišimo drugu presečnu tačku $T$ kruga i prave $OZ$. Pretpostavimo najpre da tačka $O$ pripada oblasti ugla $XZY$. Biće:

$$\sphericalangle XOT = \sphericalangle OXZ + \sphericalangle XZO = 2 \sphericalangle XZO.$$

$\sphericalangle TOY = \sphericalangle OYZ + \sphericalangle YZO = 2 \sphericalangle OZY$ odakle, sabiranjem ovih jednakosti, dobijamo da je $\sphericalangle XOY = 2 \sphericalangle XZY$. Pretpostavimo da tačka $O$ ne pripada oblasti ugla $XZY$. Pretpostavimo da je $O$ sa one strane prave $XZ$ sa koje nije tačka $Y$. Sada će biti:

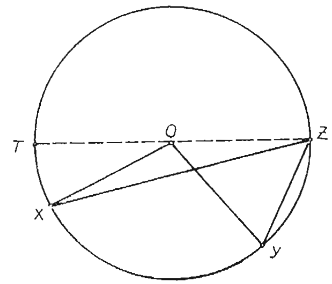
$$\sphericalangle TOY = 2 \sphericalangle OZY$$

$$\sphericalangle TOX = 2 \sphericalangle OZX,$$

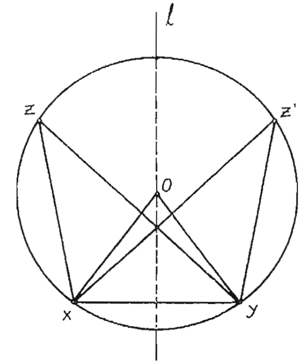
a odavde, oduzimanjem, nalazimo da je $\sphericalangle XOY = 2 \sphericalangle XZY$. Preostao je još slučaj kad oblast ugla $XZY$ ne sadrži tačku $O$, a tačka $O$ se nalazi sa one strane prave $XZ$ sa koje je i tačka $Y$.



Konstruišimo simetralu tačaka $X$ i $Y$, zatim nađimo tačku $Z'$ koja je simetrična tački $Z$, u odnosu na pravu. Tačka $Z'$ će biti na krugu $l$ i biće $2 \sphericalangle XZ'Y = \sphericalangle XOY$ prema dokazanom u drugom slučaju.




Sl. 65




Sl. 66

Biće, takođe, $\sphericalangle XZY = \sphericalangle XZ'Y$, pa i $\sphericalangle XOY = 2 \sphericalangle XZY$. Ovim je dokazana teorema. Ujedno, dokazano je da su svi periferijski uglovi nad istim lukom jednaki.

Periferijski ugao je uvek manji od 180°, jer je centralni ugao manji od 360°. Periferijski ugao na polukrugu je prav. Ako neku tetivu kruga $AB$ posmatramo iz neke dve tačke kruga $X$ i $Y$, takve da se parovi tačaka $A$, $B$ i $X$, $Y$ međusobno razdvajaju, biće zbir uglova pod kojima se vidi duž $AB$ iz tačaka $A$ odnosno $B$ jednak 180°.

**Teorema.** Neophodan i dovoljan uslov da se oko konvesnog četvorougla može opisati krug jeste da su njegovi suprotni uglovi suplementni.

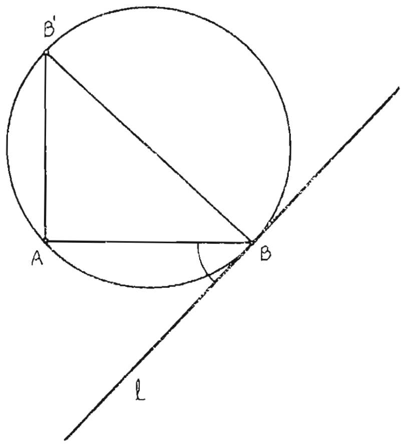
Ovu teoremu zbog težine nećemo dokazivati.

Posledica ove teoreme je — da se krug može opisati oko jednakokrakog trapeza, kvadrata, pravougaonika.

**Teorema.** Oštar ugao između tetive kruga i tangente u jednom kraju tetive jednak je periferijskom uglu nad tom tetivom koji nije tup.

*Dokaz.* Neka su $A$ i $B$ tačke tetive koje pripadaju krugu, a tangenta u tački $B$. Konstruišimo na krugu tačku $B'$ dijametralno suprotnu tački $B$.

Ako se tačka $A$ poklapa sa tačkom, $B'$ biće ugao između tangente i tetive prav, a, isto tako, i svaki periferijski ugao nad tetivom $AB$ kao prečnikom. Ako se $A$ i $B'$ ne poklapaju, oštar ugao između tangente i tetive $ABl$ će biti ugao sa normalnim kracima na oštar periferijski ugao $AB'B$ i zato jednaki. Time je dokaz završen.




Sl. 67

**Definicija.** Četvorougao čije su sve stranice tangente jednog kruga nazivamo tangentnim.

**Teorema.** Zbirovi suprotnih stranica konveksnog tangentnog četvorougla su jednaki.

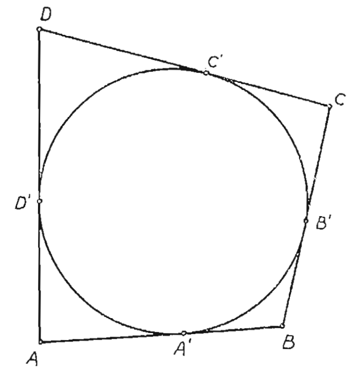
*Dokaz.* Označimo sa $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, tačke dodira duži $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ sa krugom. Duži $AA'$ i $AD'$ će biti jednake kao tangentne duži povučene iz iste tačke. Dalje je $A'B = BB'$, $B'C = CC'$, $C'D = DD'$. Imajući u vidu ove jednakosti, lako dokazujemo da je $AB + DC = BC + AD$ (sl. 68).

**Teorema.** Ako su zbirovi suprotnih stranica konveksnog četvorougla jednaki, u njega se može upisati krug.

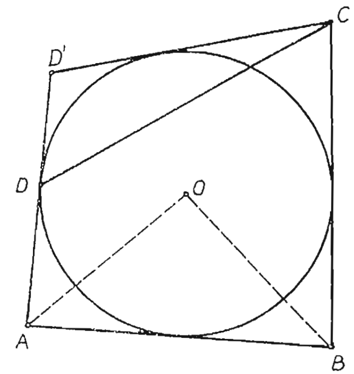
*Dokaz.* Konstruišimo krug koji dodiruje tri stranice ($DA$, $AB$, $BC$) konveksnog četvorougla $ABCD$. Ako je $AB + CD = AC + BD$ dokažimo da tada mora biti i strana $DC$ tangenta kruga. Pretpostavimo suprotno — da strana $DC$ ili seče krug ili ga ne dodiruje. Ispitajmo najpre slučaj kad strana $DC$ seče krug. Konstruišimo tačku $D'$ na pravoj $AD$, takvu da je duž $D'C$ tangenta kruga. Na osnovu prethodne teoreme bi bilo $AB + D'C = BC + AD'$, a po pretpostavci, je $AB + DC = BC + AD$. Oduzimanjem ovih jednakosti dobijamo jednakost $D'C - DC = DD'$, tj. $D'C = DC + DD'$ koja bi značila da je jedna strana trougla jednaka zbiru druge dve. Time smo došli



do kontradikcije i, prema tome, nije moguće da duž $DC$ seče kružnicu (u dve tačke). Na analogan način dokazujemo da nije moguće da duž $DC$ nema zajedničkih tačaka sa kružnicom (sl. 69).



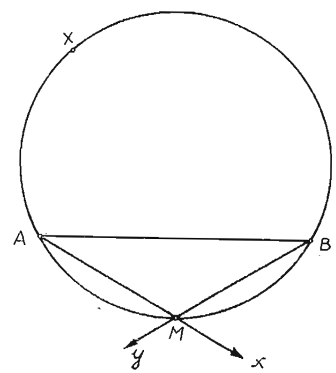

Sl. 68




Sl. 69

*Primer.* Odrediti geometrijsko mesto tačaka iz kojih se data duž vidi pod datim uglom.

*Rešenje.* Neka je data duž $AB$ i ugao $\alpha$. Pretpostavimo, što je neophodno da bi zadatak imao rešenja, da je ugao $\alpha$ manji od 180°.




Sl. 70

Konstruišimo poluprave $Ax$ i $By$ sa iste strane prave $AB$ takve, da su uglovi $BAx$ i $ABy$ jednaki $\frac{\alpha}{2}$. Te dve poluprave se seku u nekoj tački $M$. Biće $\sphericalangle AMB = 180° - \alpha$. Konstruišimo krug koji sadrži tačke $A$, $M$ i $B$. Po teoremi o tetivnim četvorouglima geometrijsko mesto tačaka je $X$ (sa one strane prave $AB$ sa koje nije tačka $M$) takvih da je $\sphericalangle AGB = \alpha$ upravo luk kružnice $AB$ koji ne sadrži tačku $M$. Luk simetričan ovom luku u odnosu na pravu $AB$ takođe će pripadati traženom geometrijskom mestu tačaka (sl. 70).

## Z A D A C I

1. Data su dva kruga jednakih poluprečnika koja nemaju zajedničkih tačaka. Konstruisati sve zajedničke tangente ta dva kruga.
2. Ugao između dveju tetiva koje se seku u krugu jednak je polovini zbira centralnog ugla nad lukom između krakova ugla i centralnog ugla nad lukom između produžetka krakova ugla. Dokazati!
3. Ugao između dveju sečica koje se seku van kruga jednak je polovini razlike centralnih uglova nad lucima između krakova tog ugla.
4. Odrediti geometrijsko mesto tačaka u ravni od kojih je svaka tačka datog kvadrata na udaljenju većem od date duži $l$.
5. Odrediti skup svih tačaka iz kojih se data kružnica vidi pod uglom od 90°.
6. Šta je geometrijsko mesto tačaka iz kojih se dve date duži vide pod datim uglom.
7. Koristeći osobine tangentnih duži, dokazati da je $r = (b + c - a) : 2$, gde su $b$ i $c$ katete, $a$ — hipotenuza i $r$ — poluprečnik kružnice upisane u pravougaonom trouglu.
8. Ako je krak jednakokrakog trapeza aritmetička sredina osnovica, u njega se može upisati kružnica.
9. Dokazati da dodirne tačke upisane kružnice dele stranice trougla $ABC$ na odsečke $S - a$, $S - b$, $S - c$, gde su $a$, $b$, $c$ stranice, a $S$ poluobim trougla.
10. Konstruisati trougao ako je data osnovica i visina koje odgovaraju dvema drugim stranicama.
11. Konstruisati kružnicu datog poluprečnika kojoj pripada data tačka $A$ i koja dodiruje datu pravu $p$.
12. Konstruisati kružnicu koja dodiruje dve date prave koje se seku i to jednu u datoj tački.
13. Konstruisati jednakostranični trougao čija temena leže na trima datim paralelnim pravama.
14. Konstruisati trougao ako je dat jedan njegov ugao, visine koja odgovara jednoj stranici na koju je nalegao dati ugao i poluprečnik upisane kružnice.
15. Kroz datu tačku $P$ povući pravu tako da tačka $P$ polovi odsečak te prave između dva data kruga $K_1$ i $K_2$.



## PRIMENA SLIČNOSTI NA KRUG

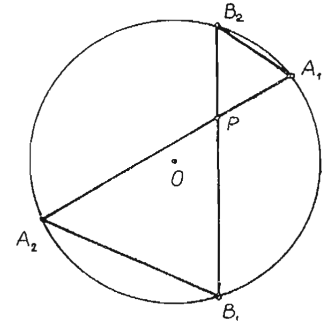
**Teorema.** Ako dve sečice datog kruga prolaze kroz istu tačku, tada je proizvod dužina njihovih odsečaka od te tačke do presečnih tačaka sa krugom konstantan za datu tačku.

*Dokaz.* Pretpostavimo prvo da se sečice seku u tačku $P$ unutar kruga. Obeležimo sa $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ njihove presečne tačke sa krugom. Na osnovu teoreme o periferijskim uglovima zaključujemo da je

$$\measuredangle A_2A_1B_2 = \measuredangle A_2B_1B_2,$$

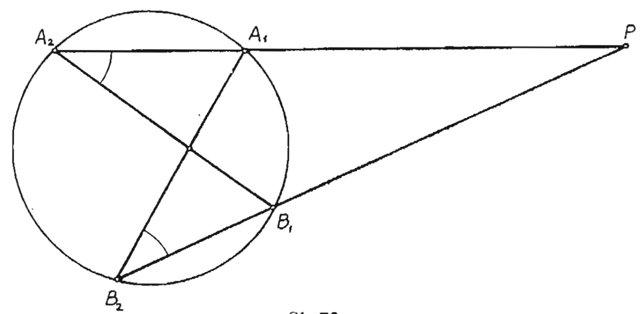
$$\measuredangle B_1B_2A_1 = \measuredangle B_1A_2A_1,$$

pa su trouglovi $PA_1B_2$ i $PA_2B_1$ slični.



Sl. 71

Posledica sličnosti trouglova je da su odgovarajuće strane proporcionalne: $PA_1 : PB_2 = PB_1 : PA_2$, tj. $PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_2$. Specijalno, ako postavimo sečicu kroz tačku $P$ i centar kruga $O$, možemo pisati $PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_2 = (r + d)(r - d) = r^2 - d^2$, gde je sa $r$ obeležen poluprečnik kruga a, sa $d$ odstojanje tačke $P$ od centra kruga. Dakle, proizvod odsečaka sečice zavisiće samo od odstojanja tačke $P$ u kružnici do centra kružnice, a neće zavisiti od pravca sečice.

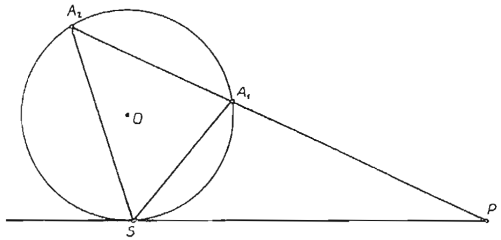


Sl. 72

Pretpostavimo sada da se tačka $P$ nalazi izvan kruga. Presečne tačke dveju sečica sa krugom označimo opet sa $A_1A_2$, $B_1B_2$ (na slici).

Trouglovi $PA_2B_1$ i $PA_1B_2$ će biti slični, jer su periferijski uglovi $A_1A_2B_1$ i $A_1B_2B_1$ jednaki, a ugao $A_2PB_2$ je zajednički za oba trougla. Iz sličnosti ovih trouglova nalazimo da je $PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_2$.

**Teorema.** Ako su iz date tačke van kruga povučene tangenta i sečica, tangentna duž je geometrijska sredina između odsečaka sečice od date tačke do prosečnih tačaka s krugom.




Sl. 73

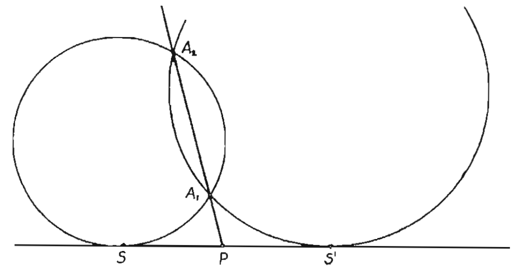
*Dokaz.* Prosečne tačke sečice i kruga označimo sa $A_1$ i $A_2$, a tačku dodira tangente s krugom sa $S$. Trougao $SA_1P$ je sličan s trouglom $SA_2P$ jer je ugao $SA_2P$ kao periferijski nad lukom $SA_1$ jednak uglu $A_1SP$ između tangente $SP$ i tetive $SA_1$ i ugao $A_1PS$ zajednički za oba trougla. Iz sličnosti nalazimo da je $SP : PA_1 = PA_2 : SP$, odnosno $SP^2 = PA_1 \cdot PA_2$. Možemo još pisati da je $SP^2 = d^2 - r^2$ gde je $d$ rastojanje tačke $P$ do centra kruga, a $r$ poluprečnik kruga.

**Definicija.** Neka je kroz tačku $P$ povučena sečica na dati krug poluprečnika $r$. Potencijom tačke $P$ u odnosu na krug nazivamo proizvod odsečaka te sečice od tačke $P$ do presečnih tačaka s krugom. Ovaj proizvod uzimamo sa znakom $+$ ako je tačka $P$ van kruga, a sa znakom $-$ ako je $P$ unutar kruga.

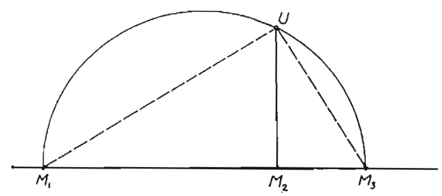
Potencija tačke u odnosu na krug je jednaka razlici kvadrata centralnog rastojanja te tačke i poluprečnika kruga.

*Primer.* Konstruisati krug koji sadrži dve date tačke $A_1$ i $A_2$, a dodiruje datu pravu $p$.

*Rešenje.* Odredimo presek pravih $p$ i $A_1A_2$ i označimo ga sa $P$. Na osnovu teoreme o potenciji tačke, sledi da je $PA_1\ PA_2$ jednako kvadratu tangentne duži $l$ povučene iz tačke $P$ na kružnicu. Da bismo odredili konstruktivno dužinu $l$, odredimo na nekoj pravoj tri tačke $M_1$, $M_2$, $M_3$, takve da je $M_2$ između $M_1$ i $M_3$ i $M_1M_2 = A_2P$, $M_2M_3 = A_1P$. Opišimo zatim polukrug nad prečnikom $M_1M_3$ i odredimo prosečnu tačku $U$ polukruga i prave koja sadrži tačku $M_2$ a normalna je na duži $M_1M_3$. Na osnovu sličnosti trouglova $M_1M_2U$ i $M_3M_2U$, zaključujemo da je $UM^2{}_2 \cdot M_1M_2 \cdot M_2M_3 = PA_1PA_2$. Ako sa $S$, odnosno $S'$ označimo dodirnu tačku kruga (kojeg treba konstruisati) i prave $l$ zaključili smo da će biti $PS = PS' = M_2U$. Tačke $A_1$, $A_2$, $S$, odnosno $A_1$, $A_2$, $S'$ određuju dva rešenja. Opisana konstrukcija je u važnosti ako su $A_1$ i $A_2$ tačka s jedne strane prave $p$ i ako nije $A_1A_2 \parallel p$. U prvom od ovih slučajeva zadatak neće imati rešenja, a, u drugom, imaće jedno rešenje.




Sl. 74




Sl. 75

U ovom slučaju je konstrukciju jednostavno izvesti. Dokaz zadatka neposredno sledi iz konstrukcije.

## ZADACI

1. Iz date tačke van datog kruga konstruisati sečicu tako da je njen odsečak u krugu jednak spoljašnjem odsečku.
2. Konstruisati krug koji sadrži dve date tačke i na datoj pravoj odseca duž jednaku datoj duži $l$.
3. Konstruisati krug koji dodiruje spolja dva data kruga jednakih poluprečnika i datu pravu.

4. Pokazati da je geometrijsko mesto tačaka, koje imaju jednaku potenciju u odnosu na dva kruga, prava ortogonalna na liniju centara tih krugova.
5. Pokazati da je geometrijsko mesto tačaka, koje imaju jednaku potenciju u odnosu na dva kruga, koji se dodiruju (spolja ili iznutra) ili se seku, prava ortogonalna na liniju centara tih krugova.

## SFERA, VALJAK, KUPA

Slično, kao što je to bio slučaj s tačkom i krugom, tačka — zavisno da li je njeno rastojanje od centra svere manje, jednako ili veće od poluprečnika sfere — pripada unutrašnjosti sfere, sferi ili je izvan sfere. Ravan će seći sferu, dodirivati je ili neće seći zavisno od toga da li je rastojanje od centra sfere do ravni (centralno rastojanje ravni) manje, jednako ili veće od poluprečnika sfere.

**Teorema.** Ako je centralno rastojanje ravni manje od poluprečnika sfere, presek ravni i sfere je krug.

*Dokaz.* Iz centra sfere $O$ postavimo normalu na ravan. Presek te normale i ravni označimo sa $L$. Neka su $A_1$ i $A_2$ dve tačke preseka sfere i date ravni. Trouglovi $OLA_1$ i $OLA_2$ su podudarni pa je $LA_1 = = LA_2 \cdot$ $A_1$ i $A_2$ su dve proizvoljne tačke preseka, što znači da su sve tačke preseka ravni i sfere na konstantnom (istom) rastojanju od tačke $L$. Osim toga, sve te tačke pripadaju jednoj ravni pa zato sve pripadaju jednom krugu. Lako ćemo se uveriti da svaka tačka tog kruga pripada geometrijskom mestu, pa je traženo geometrijsko mesto krug. Ako ravan preseka sfera sadrži centar sfere, takav krug nazivamo velikim krugom sfere.

Dve sfere seku se ako je rastojanje centara tih sfera manje od zbira poluprečnika sfera. Zajednički presek takvih dveju sfera je krug.

**Definicija.** Neka su $\alpha$ i $\alpha'$ dve paralelne ravni i $h$ prava koja seče te ravni. Neka je $(O, r)$ krug koji pripada ravni $\alpha$. Postavimo kroz neku tačku $X$ kruga $(O, r)$ pravu koja je paralelna ravni $\alpha$. Njen presek sa ravni $\alpha'$ označimo sa $X'$. Geometrisjko mesto svih duži $XX'$ kad tačka $X$ prođe sve tačke kruga $(O, r)$ ograničava zajedno sa ravnima $\alpha$ i $\alpha'$ prostorno telo koje nazivamo valjak.

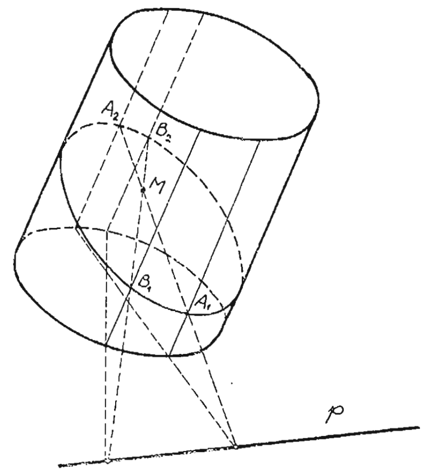
**Definicija.** Ako je dat krug $(O, r)$ i tačka $S$ van ravni kruga prostorno telo ograničeno sa ravni kruga $(O, r)$ i geometrijskim mestom duži $OX$ kad $X$ prolazi sve tačke kruga $(O, r)$ nazivamo kupom.

Presek valjka i ravni koja je paralelna ravni osnove valjka je krug podudaran krugu osnove valjka. Presek kupe i ravni paralelne osnovi kupe je takođe krug.



Ako ravan ne seče osnove valjka i u kosom je položaju prema ravni osnove valjka, onda je presek te ravni i valjka zatvorena kriva koju nazivamo elipsom. Pri konstrukciji ravnog preseka valjka koristimo činjenicu da je presek afina slika osnove valjka ukoliko ravan ne seče ni jednu osnovu valjka.

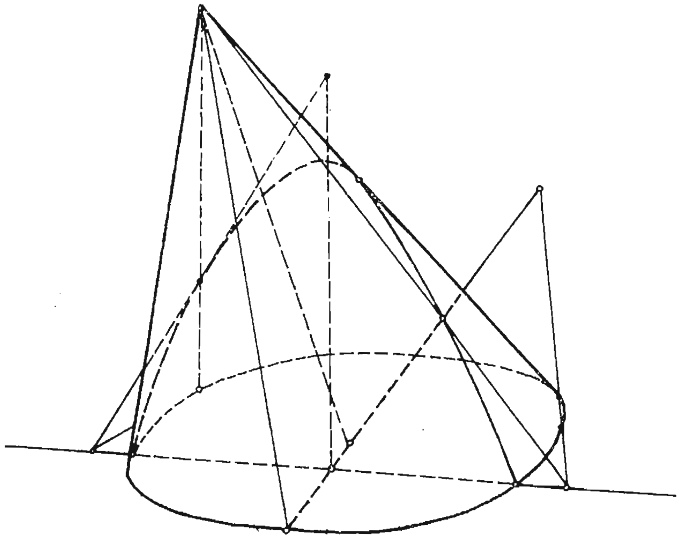
Na slici je prikazana konstrukcija nekoliko tačaka ($A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$) preseka valjka sa ravni gde je zadana projekcija valjka, prava $p$ po kojoj se seku ravan osnove i ravan preseka i tačka $M$ preseka koja pripada duži što spaja centre osnova.



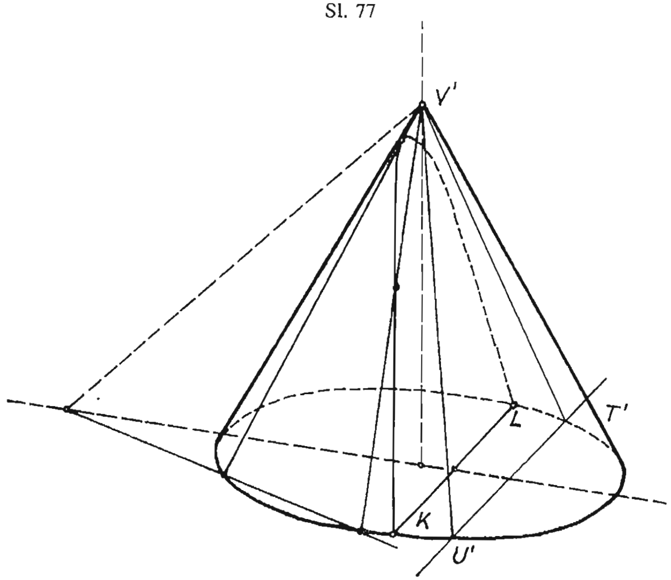

Sl. 76

Pri konstrukciji ravnog preseka kupe koristimo svojstvo perspektivno afinog preslikavanja. Centar perspektive je tačka $S$ (vrh kupe), a afini odnos je uspostavljen između ravni osnove kupe i ravni preseka kupe. Kao presek kupe i ravni možemo dobiti tri vrste krivih. Ako ravan nije paralelna ni jednoj izvodnici kupe, presek je elipsa, ako je paralelna jednoj izvodnici kupe presek ravni i kupaste površi je kriva koju nazivamo parabolom, a ako je ravan paralelna dvema izvodnicama kupe presek je kriva — hiperbola.

Na slikama 77 i 78 je data konstrukcija nekoliko tačaka preseka kupe i ravni kad se dobije hiperbola, odnosno parabola.



Sl. 77




Sl. 78



# METRIČKA GEOMETRIJA

Da bi odredili (ustanovili) funkciju koja nekoj konačnoj krivoj, površi, odnosno telu dodeljuje određen nenegativan realan broj — takozvanu meru veličine krive, površi, odnosno tela potrebno je uvesti aksiome merenja u geometriju. S obzirom da je pojam dužine dovoljno izučen i usvojen u osmogodišnjoj školi, daćemo samo aksiomatsko uvođenje pojmova površine i zapremine.

## 1. OBIMI I POVRŠINE POLIGONA

**Definicija.** Pod obimom poligona podrazumevamo zbir dužina svih strana poligona.

Aksiomatski uvodeći pojam površine kao mernog broja veličine date površi, pretpostavljaćemo da površina poligona ima sledeće osobine:

1) Površina podudarnih poligona su međusobno jednake.

2) Površina poligona $P$, sastavljenog iz dva poligona $P_1$ i $P_2$ koji leže jedan izvan drugog, jednaka je zbiru površina poligona $P_1$ i $P_2$.*

Za jedinicu površine uzimamo kvadrat čija je strana jednaka jedinici dužine.

**Teorema.** Merni broj površine (površina) pravougaonika je jednak proizvodu dužina dveju njegovih susednih stranica.

U dokazu treba razlikovati tri slučaja.

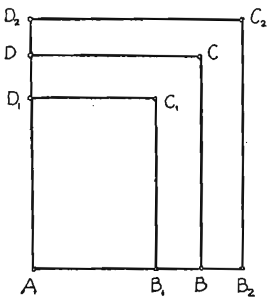
1. Dužine $a$ i $b$ stranica pravougaonika su celi brojevi. — U ovom slučaju je moguće, konstruisanjem pravih paralelnih osnovici, razdeliti dati pravougaonik $K$ na $a$, $b$ jednakih kvadrata $K_1, K_2, \ldots, Kab$. Imajući u vidu drugu aksiomu, nalazimo da je $P(K_1 U K_2) = P(K_1) + P(K_2) = 2$, $P(K_1 U K_2 U K_3) = P(K_1 U K_2) U P(K_3) = 2 + 1 = 3, \ldots$, $P(K_1 U K_2 U \ldots U Kab) = P(K) = ab$.

2. Brojevi $a$ i $b$ su racionalni. — Svaki od dva broja je količnik dva cela broja. Ako je, na primer, $\frac{P_1}{q_1} = a$, $b = \frac{P_2}{q_2}$, možemo pisati da je $a = \frac{P_1 q_2}{q_1 q_2} = \frac{m}{k}$, $b = \frac{P_2 q_1}{q_2 q_1} = \frac{n}{k}$. Dati pravougaonik izdelimo pravim paralelnim stranicama na $m$ $n$ kvadrata dimenzije $\frac{1}{k}$. Površina

* U aksiomatskom zasnivanju merenja u geomtriji aksiome1), 2) se daju u nešto opštijem obliku naime — ne za poligone već za površi. Mi ćemo samo u daljem izlaganju koristiti bez posebnog aksiomatskog zasnivanja, da je površina površi $P_1$ manja ili jednaka od površine površi $P_2$ ukoliko je površ $P_1$ deo površi $P_2$.

svakog od ovih kvadrata je jednaka $\frac{1}{k^2}$, pa je površina pravougaonika jednaka $mn \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{m}{k} \cdot \frac{n}{k} = a \cdot b$.

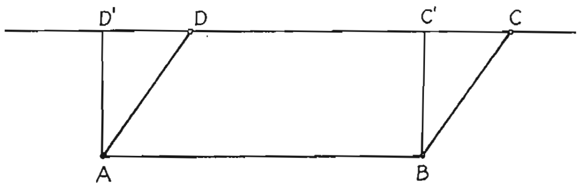
3. Od brojeva $a$, $b$ makar jedan je iracionalan. — Obeležimo temena pravougaonika sa $A$, $B$, $C$. $D$. Konstruišimo na pravooj $AD$ tačke $D_1$ i $D_2$ takve da je njihov raspored $A - D_1 - D - D_2$ i da su dužine $AD_1$ i $AD_2$ racionalni brojevi. Tačke $A$, $B_1$ i $D_1$ određuju pravougaonik $AB_1C_1D_1$, a tačke $A$, $B_2$, $D_2$ pravougaonik $AB_2C_2D_2$. Na osnovu aksiome 2. je: $P(AB_1C_1D_1) \leqslant P(ABCD) \leqslant P(AB_2C_2D_2)$.



Sl. 79

Konstruišimo nizove racionalnih brojeva $\{r_n\}$, $\{S_n\}$, $\{t_n\}$, $\{u_n\}$ takve da je $O < r_1 \leqslant r_2 \ldots \leqslant a$, $O < S_1 \leqslant S_2 \ldots \leqslant b$, $t_1 \geqslant t_2 \ldots \geqslant a$, $u_1 \geqslant u_2 \ldots \geqslant b$ i da se brojevi nizova $\{r_n\}$ i $\{t_n\}$ približavaju broju $a$, a brojevi nizova $\{S_n\}$ i $\{u_n\}$ broju $b$ kad $n$ odlazi u beskonačnost. Površina pravougaonika $L$ čije stranice imaju dimenzije $r_n$ i $S_n$ je $r_n \cdot s_n$, a pravougaonika $Q$ sa dimenzijama $t_n$ i $u_n$ jednaka $t_n \cdot u_n$. Pravougaonici $L$, $Q$ i $K$ se mogu tako postaviti u ravni da je pravougaonik $L$ sadržan u pravougaoniku $K$, a pravougaonik $K$ u pravougaoniku $Q$, pa je $P(L) \leqslant P(K) \leqslant P(Q)$, tj. $r_n \cdot S_n \leqslant P(K) \leqslant t_n \cdot u_n$. Poslednja nejednakost je ispunjena za svaki prirodan broj $n$. S obzirom da se broj $r_n \cdot s_n$ približava broju $a \cdot b$ kad $n$ neograničeno raste neće moći biti $P(K) < a \cdot b$ jer nejednakost $r_n \cdot s_n \geqslant P(K)$ ne bi bila ispunjena za sve brojeve $u$. Mora biti $P(K) \geqslant ab$, a, iz nejednakosti $P(K) \leqslant \leqslant t_n \cdot u_n$, zaključujemo da mora biti $P(K) \leqslant a \cdot b$. Znači, jedino je moguće da bude $P(K) = ab$. Time je teorema dokazana.

**Teorema.** Površina paralelograma je jednaka proizvodu mernog broja (dužine) osnovice i mernog broja visine $C$ paralelograma.



Sl. 80



*Dokaz*. Obeležimo temena paralelograma sa $A$, $B$, $C$, $D$ (na slici). Konstruišimo pravougaonik $ABC'D'$ kojemu su temena $C'$ i $D'$ na pravoj $DC$. Predpostavimo da je raspored tačaka na pravoj $DC$, tj. obeležavanje takvo da je $D' - D - C' - D$.

Na osnovu aksiome 2. je $P(ABCD') = P(ABCD) + P(ADD')$, odnosno $P(ABCD') = P(ABC'D') + P(BCC')$. Po aksiomi 1. je $P(BCC') = P(ADD')$, pa je $P(ABCD) = P(ABC'D') = a \cdot h$; $a$ je osnova, a $h$ visina paralelograma.

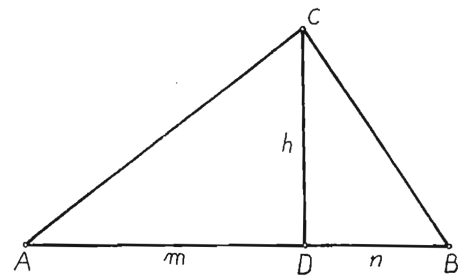
**Teorema.** Merni broj površine trougla jednak je polovini proizvoda mernih brojeva njegove osnovice i visine.

*Dokaz*. Označimo temena trougla sa $A$, $B$, $C$, konstruišimo tačku $D$ takvu da je četvorougao $ABCD$ paralelogram. Paralelogram $ABCD$ je sastavljen od trougla $ABC$ i jednog njemu podudarnog trougla. Po aksiomi 2. biće $P(\triangle\, ABC) = \frac{1}{2} P(ABCD) = \frac{1}{2} a \cdot h$.

**Teorema.** Površina trougla čije su (merni brojevi) dužine strana $a$, $b$ i $c$ je jednaka

$$P = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

(Heronov obrazac).



Sl. 81

*Dokaz*. Odredimo na pravoj $AB$ tačku $D$ takvu da je $CD$ normalno na $AB$. Duž $CD$ (visinu trougla) označimo sa $h$. Pretpostavimo da je tačka $D$ između tačaka $A$ i $B$. Duž $AD$ označimo sa $m$, a $DB$ sa $n$. Po Pitagorinoj teoremi je $h^2 = b^2 - m^2$, $h^2 = a^2 - n^2$. Osim toga je $m + n = c$. Iz ove tri jednakosti nalazimo da je $b^2 - m^2 = a^2 -$

$-(c-m)^2$ tj. $m = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}$. Dalje je $h^2 = b^2 - m^2 = (b - m)$
$(b + m) = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{a^2 - (b-c)^2}{2c} = \frac{1}{4c^2} \cdot (a + b + c)(b +$
$+ c - a)(c + a - b)(a + b - c)$.

$$P = \frac{C \cdot h}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} =$$
$$= \sqrt{s(S-a)(S-b)(S-c)}$$

(gde je sa $s$ označen poluobim trougla: $s = \frac{1}{2}(a + b - c)$).

Analogno dokazujemo slučaj kada je trougao tup.

**Teorema.** Ako je $p$ merni broj dužine poluprečnika upisanog kruga trougla $ABC$, a $s$ poluobim trougla onda je $P = s \cdot p$.

*Dokaz.* Označimo sa $A$, $B$, $C$ temena trougla, a sa $U$ centar upisanog kruga. Neposredno zaključujemo da je $P(\triangle ABC) =$
$= P(\triangle ABU) + P(\triangle BCU) + P(\triangle ACU) = \frac{1}{2} cp + \frac{1}{2} ap +$
$+ \frac{1}{2} bp = sp$.

**Teorema.** Površinu trougla možemo pretpostaviti sledećom jednakosti: $P = \frac{abc}{4R}$ gde su $a$, $b$, $c$ stranice a $R$ poluprečnik opisanog kruga trougla.

*Dokaz.* Visinu $H$ trougla koja odgovara stranici $a$ možemo predstaviti u obliku $h = b \sin\gamma$. Po sinusnoj teoremi je $\sin\gamma \cdot \frac{C}{R}$ pa je, konačno, $P = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \frac{c}{2R} =$
$= \frac{abc}{4R}$.

Ako su poznate dužine svih strana $n$-tougla i uglovi $n$-tougla, njegovu površinu možemo izračunati razlaganjem $n$-tougla na trouglove konstruisanjem izvesnih njegovih dijagonala. Tako je, na primer, površina trapeza, čije su osnovice $a$ i $b$ a $h$, visina odgovarajuća osnovicama, jednaka $\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot h$ u šta se uveravamo razlažući trapez dijagonalom na dva dela.



**Teorema.** Površina proizvoljnog poligona opisanog oko datog kruga jednaka je polovini proizvoda obima poligona i poluprečnika kruga.

*Dokaz.* Konstruišimo duži koje spajaju temena trougla sa centrom kruga $U$. Na taj način, poligon je razložen na trouglove kojima je visina iz temena $U$ svima jednaka poluprečniku kruga. Sabirajući površine svih trouglova na koje je ovako razložen poligon, dobijamo da je površina poligona jednaka poluproizvodu obima poligona i poluprečnika kruga.

**Teorema.**

1° Obim pravilnog $n$-tougla poluprečnika upisanog kruga $\rho n$ jednak je

$$2n \cdot \rho_n \operatorname{tg} \frac{180°}{n}$$

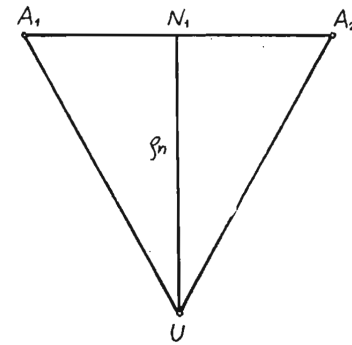
2° Površina pravilnog $n$-tougla poluprečnika upisanog kruga $\rho n$ jednaka je

$$n \rho_n^2 \operatorname{tg} \frac{180°}{n}$$

*Dokaz.* Označimo centar upisanog kruga sa $U$, a sa $A_1$, $A_2$, ... $A_n$ temena $n$-tougla.

Dužina $UA_1$, $UA_2$, ... $UA_n$ možemo razložiti $n$-tougao na $n$ podudarnih trouglova.

Izračunajmo dužinu $A_1A_2$ stranice trougla $A_1UA_2$ u funkciji $\rho n$. Ugao $A_1UA_2$ koji je jednak $\frac{360°}{n}$ podeljen je visinom $UN_1$ na dva jednaka ugla. Iz trougla $UN_1A_1$ nalazimo da je $\operatorname{tg}\frac{180°}{n} = \frac{1}{2}\frac{an}{\rho n}$ odakle izražavamo stranicu $n$-trougla: $an = a\,\rho n \cdot \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$.



Sl. 82

Obim poligona $On$ je jednak $n \cdot an$ pa je $O_n = 2n\,\rho n \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$.

Prema prethodnoj teoremi površina trougla je jednaka $\frac{1}{2}$ $On \cdot \rho n$ odnosno $n\,\rho n^2 \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$.

**Teorema.** Površine dva slična trougla odnose se kao kvadrati dužina dveju odgovarajućih stranica.

*Dokaz.* Ako trougao $ABC$ ima dužine stranica $a$, $b$, $c$, a trougao $A'B'C'$ dužine stranica $a'$, $b'$, $c'$, pri čemu je $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$ biće i visina $h$ i $h'$ odgovarajuće stranicama $a$, odnosno $a'$ u srazmeri $k$, pa pošto je $P(\triangle ABC) = \frac{a \cdot h}{2}$ $P(\triangle A'B'C') = \frac{a' \cdot h'}{2}$ biće

$$\frac{P(\triangle ABC)}{P(\triangle A'B'C')} = \frac{a\,h}{a'\,h'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{h}{h'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{a}{a'} = \frac{a^2}{a'^2} = k^2.$$

**Teorema.** Površine dva slična poligona odnose se kao kvadrati dužina dveju odgovarajućih stranica.

*Dokaz.* Izvršimo razlaganje poligona $S$ njegovim dijagonalama koje polaze iz jednog temena na trouglove $T_1, T_2, \ldots T_n$. Izvršimo, takođe, razlaganje drugog poligona $S'$ dijagonalama iz odgovarajućeg temena na trouglove $T'_1, T'_2, \ldots T'_n$.

Biće

$$\frac{P(T_1)}{P(T'_1)} = \frac{P(T_2)}{P(T'_2)} = \ldots = \frac{P(T_n)}{P(T'_n)} = \frac{a^2}{a'^2}$$

(gde su $a$ i $a^2$ dve odgovarajuće stranice).

$$\frac{P(S)}{P(S')} = \frac{P(T_1) + \ldots + P(T_n)}{P(T'_1) + \ldots + P(T'_n)} =$$

$$= \frac{\frac{a^2}{a'^2}[P(T_1) + \ldots + P(T_n)]}{P(T'_1) + \ldots + P(T'_n)} = \frac{a^2}{a'^2}.$$

## ZADACI

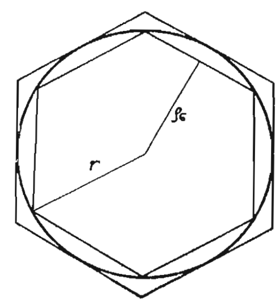
1. Odrediti merni broj dužine stranice pravilnog šestougla ako je površina šestougla jednaka površini jednakostraničnog trougla stranice $a$.
2. Odrediti merni broj dužine (dužinu) stranice pravilnog osmougla, ako je njegova površina $k$ puta veća od površine kvadrata stranice $a$.
3. Odrediti odnos dužina strana pravougaonika ako je obim pravougaonika jednak obimu kvadrata koji ima dva puta veću površinu od pravougaonika.



4. Dokazati da od svih četvoruglova datog obima $p$ kvadrat ima najveću površinu.
5. Odrediti stranicu romba ako je razmera nejgovih dijagonala $m : n$, a površina $P$.
6. Izračunati površinu trougla ako su date dve njegove stranice, $b$ i $c$, i ugao između njih 45°.
7. Trougao $ABC$ podeliti na dva jednaka dela pravom paralelnom datoj pravoj.
8. Dodirne tačke kruga opisanog u datom trouglu obrazuju na stranicama trougla odsečke $m$, $n$, $p$. Dokazati da je površina trougla jednaka $\sqrt{mnp\,(m + n + p)}$.
9. Izračunati površinu četvorougla ako su mu dijagonale 8 sm i 5 sm, a ugao između dijagonala 30°.
10. Dokazati da su dva pravougla trougla slična ako se njihove površine odnose kao kvadrati hipotenuza.
11. Upoređujući površine trouglova na koje simetrala ugla $A$ trougla $ABC$ deli trougao dokazuju da je simetralom stranica $a$ podeljena na odsečke proporcionalne dužinama drugih dveju stranica.

### OBIM I POVRŠINA KRUGA I DELOVA

U dati krug $(O, r)$ upišimo pravilan $n$-tougao $P_n$ i opišimo oko njega pravilan $n$-tougao $Q_n$. Intuitivno je jasno da je obim poligona $Q_n$ veći od obima kruga $(O, r)$. Obim kruga poligona $P_n$ je manji od obima kruga, što se neposredno dokazuje. Obim kruga $(O, r)$ nalazi se znači uvek između brojeva $2n\,\rho_n\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}$ i $2nr\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}$, bez obzira kakvo je $n$. Uzimanjem sve većeg broja $n$ dolazimo do sve bolje ocene obima kruga. Uzimajući da $n$ — teži beskonačnosti, ustanovili bismo da obim pravilnog upisanog $n$-tougla i obim pravilnog opisanog $n$-tougla teže istoj konstanti — obimu kruga. Obim će biti jednak $2r\pi$, gde je konstanta — $\pi$ iracionalan broj 3,14125...



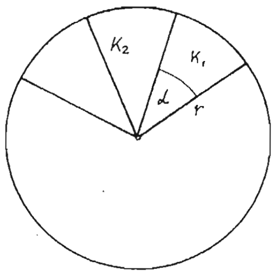
Sl. 83

Kad $n$ neograničeno raste, ne samo da obimi upisanog i opisanog $n$-tougla teže obimu kruga, nego i površine tih poligona teže istom broju — površini kruga. Kako je odnos površine i obima pravilnog poligona jednak polovini poluprečnika upisanog kruga, površina kruga biće jednaka $\frac{r}{2} \cdot 2r\pi$ tj. $P = r^2\pi$.

**Definicija.** Oblast kruga koja se nalazi u oblasti ma kakvog datog centralnog ugla kruga nazivamo kružnim isečkom. Deo ravni koji pripada oblasti većeg od dva koncentrična kruga, a ne pripada oblasti manjeg kruga nazivamo kružnim prstenom. Deo ravni ograničen tetivom datog kruga i lukom kojem odgovara ta tetiva nazivamo kružnim odsečkom.

**Teorema.** Površina kružnog isečka, kruga poluprečnika $r$, koja odgovara uglu $\alpha$ jednaka je $\frac{\alpha}{360°} \cdot r^2\pi$.

*Dokaz.* Ako je ugao izražen u stepenima, onda je $\frac{360°}{\alpha}$ neimenovan broj. Označimo ga $l$.



Sl. 84

Razmotrimo tri slučaja.

1) $l$ je prirodan broj. U ovom slučaju je moguće čitav krug razdeliti na $l$ podudarnih kružnih isečaka $K_1, K_2, \ldots K_l$ tako da je jedan od tih isečaka, na primer $K_1$, dati isečak. Slično kao što smo zaključivali pri izvođenju obrasca za površi $P(K_1 + K_2) = P(K_1) + P(K_2), \ldots P(K_l + K_2 + \ldots + K_2) = P(K_1) + P(K_2) + \ldots + P(K_l) = P$, gde je sa $P$ obeležena površina kruga. Iz poslednje jednakosti je $l \cdot P(K_l) = P$, tj. $P(K_l) = \frac{1}{l} \cdot P = \frac{\alpha}{360} \cdot P = \frac{\alpha}{360} \cdot P = \frac{\alpha}{360} \cdot r^2\pi$.

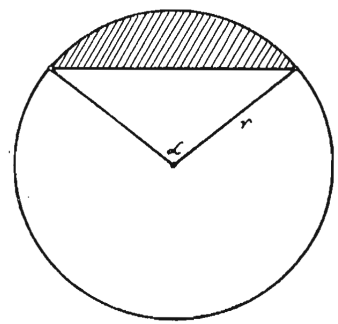
2) $l$ je racionalan broj. U ovom slučaju moguće je predstaviti u obliku $m/n$ gde su $m$ i $n$ celi brojevi. Podelimo ukupan luk kruga na $m$ delova. Prema prethodno dokazanom slučaju površina kružnog isečka koji odgovara svakom od tih delova je jednaka $\frac{1}{m} \cdot P$. Dati kružni isečak odgovara luku koji se može rastaviti na $n$ takvih kružnih isečaka, pa je površina datog kružnog isečka jednaka $\frac{n}{m}\, r^2\pi = \frac{\alpha}{360°}\, r^2\pi$.



3) $l$ je iracionalan broj. Konstruišimo nizove racionalnih brojeva $\{r_n\}$, odnosno $\{S_n\}$ takve da je $O < r_1 < r_2 \ldots < r_n \ldots < l$, $S_1 \geqslant S_2 \geqslant \ldots \geqslant S_n \geqslant \ldots > l$ i da brojevi $r_n$ i $S_n$ teže broju kad $n$ teži beskonačno. Odredimo uglove $\varphi_n$ i $\psi_n$ takve da je $\frac{360°}{\varphi_n} = r_n$, a $\frac{360°}{\psi_n} = s_n$. Ugao $\alpha$, koji odgovara datom kružnom isečku, veći je od ugla $\psi_n$, a manji od ugla $\varphi_n$ i zato je površina datog kružnog isečka veća od $\frac{\psi_n}{360°}\, r^2\pi$, a manja od $\frac{\varphi_n}{360°}\, r^2\pi$ za svaki broj $n$. S obzirom da se brojevi $\psi_n$ i $\varphi_n$ približavaju broju $\alpha$ površina datog kružnog isečka biće jednaka $\frac{\alpha}{360°}\, r^2\pi$.

**Teorema.** Ako je $t$ tetiva kruga poluprečnika $r$, kojoj odgovara centralni ugao $\alpha\, (\alpha \leqslant 180°)$ kružni odsečak $Q$ koji odgovara uglu $\alpha$ ima površinu $P(Q) = \frac{\alpha}{360°}\, r^2\pi - r^2 \frac{\sin \alpha}{2}$.

*Dokaz.* Površinu kružnog odsečka $Q$ možemo predstaviti kao razliku površine kružnog isečka koji odgovara uglu $\alpha$ i površine trougla čiji je jedan ugao $\alpha$, a stranice trougla na koje naleže ugao $\alpha$ jednake $r$, tj. $P(Q) = \frac{\alpha}{360°}\, r^2 - r^2\, \frac{\sin \alpha}{2}$.



Sl. 85

**Teorema.** Površina kružnog prstena određenog koncentričnim krugovima poluprečnika $r_1$ i $r_2$ je jednaka $|r^2_2 - r_1^2|\, \pi$.

*Dokaz* se bazira na činjenici da je površina kružnog prstena jednaka razlici površina datih krugova, tj. jednaka $r_1^2\, \pi - r_1^2\, \pi$, odnosno $r_1^2\, \pi - r_2^2\, \pi$ zavisno od toga da li je $r_1 \geqslant r_2$ ili $r_2 < r_1$.

## ZADACI

1. Koliki je obim kružnog isečka ako je poluprečnik kruga jednak $r$, a ugao isečka $\alpha$?
2. Odrediti obim kružnog odsečka definisanog uglom $\alpha\, (\alpha < 180°)$ i poluprečnikom kružnice $r$.

3. Dokazati da kružni prsten nije konveksan lik.

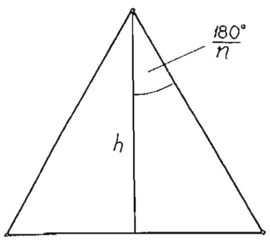
4. Kakav je odnos poluprečnika krugova koji definišu kružni prsten ako je površina kružnog isečka jednaka površini manjeg kruga. (Uputstvo: Dokaz se zasniva na činjenici da je odnos površina dva slična lika jednak $h^2$, gde je $h$ koeficient sličnosti. Da bi se dokazalo to svojstvo dva slična lika, dovoljno je posmatrati niz upisanih, odnosno opisanih poligona toga lika čija će površina težiti istom broju — površini lika).

5. Dvema paralelnim pravama podeliti krug na 3 jednaka dela.

## POVRŠINA I ZAPREMINA PRIZME I PIRAMIDE I ZARUBLJENE PIRAMIDE

Površina poliedra je jednaka zbiru površina svih strana poliedra. Površina prizme je jednaka zbiru površina dveju osnova i površine omotača — površi koja se sastoji od ostalih strana prizme. Površina piramide je jednaka zbiru površine osnove i omotača.

*Primer 1.* Odrediti površinu $P$ prave prizme čija je osnova pravilan $n$-tougao stranice $a$, a visina prizme $H$.



Sl. 86

*Rešenje.* Bazu prizme možemo razložiti na $n$ jednakokrakih trouglova čije su osnovice strane $n$-tougla, a vrh centar $n$-tougla. Svaki od tih trouglova ima osnovicu $a$, a ugao pri vrhu jednak $\frac{360°}{n}$, pa je površina svakog od njih jednaka $\frac{1}{4}\cdot a^2 \operatorname{ctg}\frac{180°}{n}$, jer im je visina jednaka $\frac{1}{2}\, a \operatorname{ctg}\frac{180°}{n}$. Ukupna površina prizme je jednaka $P = \frac{1}{2}\, na^2 \operatorname{ctg}\frac{180°}{n} + naH$.

*Primer 2.* Odrediti površinu pravilne piramide čija je osnova pravilan $n$-tougao stranice, a bočna visina piramide $h$.

Odgovor: $\frac{1}{4}\, na^2 \operatorname{ctg}\frac{180°}{n} + \frac{1}{2}\, nah.$

*Primer 3.* Pravilna piramida, čija je osnova pravilan $n$-tougao stranice $a$, bočna visina $h$, presečena je ravni paralelnom ravni osnove koja polovi visinu piramide. Odredi površinu $P$ tako dobijene zarubljene piramide.



*Rešenje.* Svaka bočna strana zarubljene piramide ima površinu $\frac{3}{8}\, ah$, a gornja osnova ima četiri puta manju površinu od donje osnove. Nalazimo da je $P = \frac{5}{16}\, na^2 \operatorname{ctg}\frac{180°}{n} + \frac{3}{8}\, nah.$

Da bismo mogli govoriti o zapremini tela, kao meri veličine tela, potrebno je uvesti aksiomatski pojam zapremine.

1) Dva jednaka (podudarna) tela imaju jednake zapremine.

2) Zapremina tela koje se sastoji od neka dva tela jednaka je zbiru zapremina svojih delova.

**Definicija.** Dva tela jednakih zapremina nazivaćemo jednakim.

Kao što je to bio slučaj sa merenjem ravni, mora se i u prostoru izabrati jedinično telo.

Za jedinično telo uzimamo kocku čija je stranica jedinična duž.

**Teorema.** Zapremina pravouglog paralelepipeda (kvadra) je jednaka proizvodu dužina triju njegovih, uzajamno ortogonalnih ivica (dimenzija kvadra).

*Dokaz.* Pretpostavimo najpre da su dimenzije kvadra celi brojevi $a$, $b$ i $c$. Kvadar možemo podeliti ravnima paralelnim stranama na jedinične kocke kojih će biti $a\cdot b\cdot c$. Podrazumevajući tačnost iskaza datog u aksiomi 2., izvodimo da je zapremina kocke $a\cdot b\cdot c$.

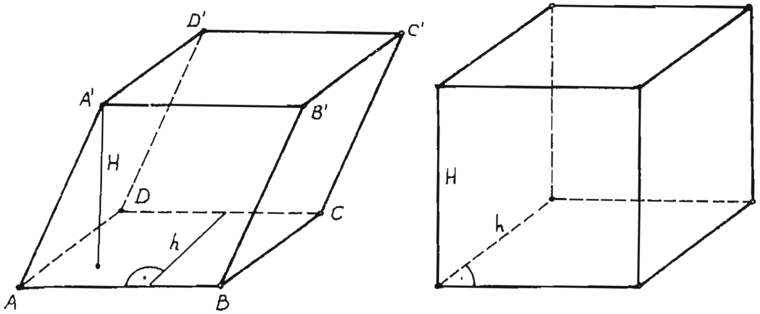
Pretpostavimo sada da su dimenzije kvadra $a$, $b$, $c$ racionalni brojevi. Možemo ih redom predstaviti u obliku količnika celih brojeva $a = \frac{K}{n}$, $b = \frac{l}{n}$, $c = \frac{m}{n}$. Deljenjem kvadra ravnima paralelnim stranama na kocke dimenzije $\frac{l}{n}$ nalazimo da tih kocki ima $k\cdot l\cdot m$, a zapremina svake od njih jednaka je $\frac{1}{n^3}$, jer se $n^3$ kocki dimenzije 1 sadrži u kocki dimenzije 1, pri čemu je potpuno ispunjavaju. Prema tome, zapremina kvadra je jednaka $K\cdot l\cdot m\cdot \frac{1}{u^3} = abc.$

Prestao je slučaj kad je od dimenzija kvadra $a$, $b$, $c$ makar jedan broj iracionalan. Potpuno analognim postupkom kao pri izvođenju površine pravougaonika nalazimo da je i u ovom slučaju zapremina jednaka $abc$.

**Kavaljerijev princip.** Ako dva tela mogu biti postavljena u takav položaj da svaka ravan, paralelna datoj ravni seče oba tela po površima iste površine, onda su ta tela jednaka po zapremini.

*Dokaz* ćemo izostaviti jer izlazi izvan okvira elementarne matematike.

**Teorema.** Zapremina paralelepipeda je jednak proizvodu osnove paralelepipeda i njegove visine.




Sl. 87

*Dokaz.* Obeležimo temena paralelepipeda sa $A$, $B$, $C$, $D$, $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ (na slici). Stranicu $AB$ osnove označimo sa $a$, visinu paralelograma osnove koja odgovara stranici $a$ označimo sa $h$, a visinu paralelepipeda sa $H$. Dokažimo da dati paralelepiped ima zapreminu jednaku zapremini kvadra čija osnova ima dimenzije $a$ i $h$, a visina kvadra je $H$. Pretpostavimo da osnove kvadra i paralelepipeda pripadaju istoj ravni i da se oba tela nalaze sa iste strane ravni osnova. Svaka ravan paralelna ravni osnove tela, ako seče jedno telo, seći će i drugo i preseci su jednakih površina. Po Kavaljerijevom principu zapremine tih tela su jednake, pa je, na osnovu prethodne teoreme, i zapremina paralelepipeda jednaka proizvodu površine osnove i visine paralelpipeda.

**Teorema.** Zapremina $V$ prizme, čija površina baze je jednaka $B$, a visina (prizme) jednaka $H$, je jednaka $B \cdot H$.

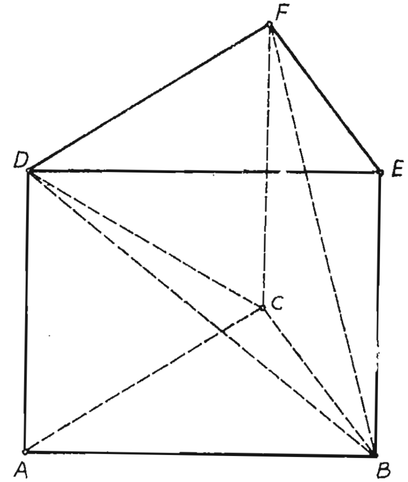
*Dokaz.* Kao i u dokazu prethodne teoreme, možemo pretpostaviti da se ravni donjih osnova prizme i nekog kvadra baze $B$ i visine $H$ poklapaju i da se oba tela nalaze sa iste strane te ravni. Neposredno zaključujemo (na osnovu Kavaljerijevog principa) da ova dva tela imaju jednake zapremine: $V = B \cdot H$.

**Teorema.** Zapremina piramide je jednaka trećini prizovoda osnove i visine piramide.

*Dokaz.* Pretpostavimo najpre da je piramida trostrana. Obeležimo temena piramide sa $A$, $B$, $C$ i $D$. Konstruišimo prizmu čija je



osnova trougao $ABC$, jedno teme gornje osnove $D$, a ostala dva temena gornje osnove $E$ i $F$ u takvom položaju da je $BE \parallel AD$, $CF \parallel AD$. Prizmu $ABCDEF$ možemo razdeliti na tri piramide: $ABCD$, $FDEB$ i $CDFB$. Strane $ADC$ i $DFC$ piramida $ADCB$ i $DCFB$ leže u istoj ravni i jednake su. Visine tih piramida na strane $ADC$, odnosno $DFC$, takođe su jednake i zato će svaki presek tih piramida sa ravni paralelnom ravni osnova biti jednak po površini, što može da se obrazloži na osnovu



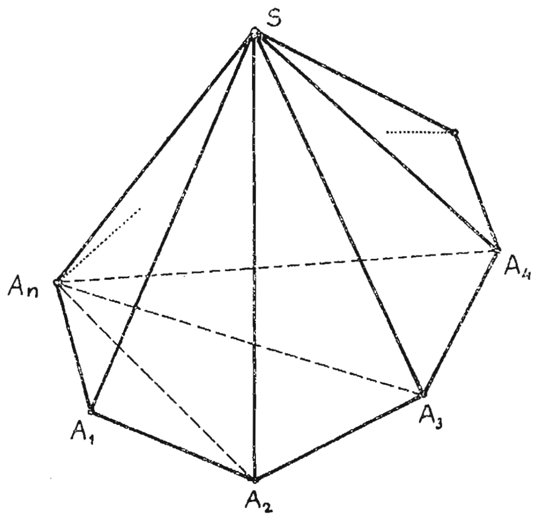

Sl. 88

teoreme o proporcijalnim odsečcima. Na osnovu Kavaljerijevog principa zapremine tih piramida su jednake. Analognim postupkom dokazujemo da su zapremine piramida $FEDB$ i $FBCD$ jednake. Znači, prizma se sastoji od tri piramide jednakih zapremina, što znači da je $V(ABCD) = \frac{1}{3} V(ABCDEF) = \frac{1}{3} B \cdot H$; sa $H$ je obeležena visina piramide, a sa $B$ površina osnove $ABC$.

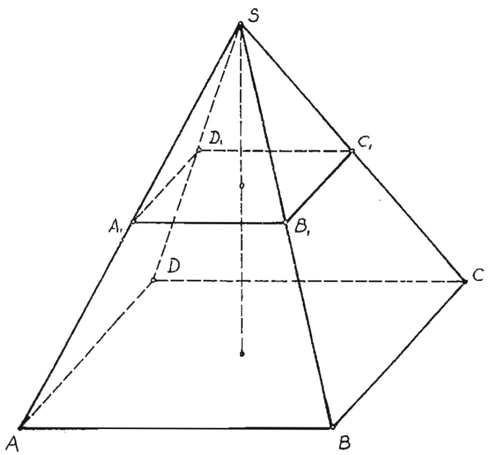
Izvedimo dokaz za $n$-tostranu piramidu ($n > 3$). Obeležimo temena osnove te piramide sa $A_1, A_2, \ldots A_n$, vrh piramide sa $S$, visinu piramide sa $H$ i osnovu piramide sa $B$.

Ravnima $SA_nA_2$, $SA_nA_3, \ldots SA_nA_{n-1}$ možemo razdeliti datu piramidu na trostrane piramide:

$$SA_1A_2A_n,\ SA_2A_3A_n, \ldots\ SA_{n-2}A_{n-1}A_n.$$




Sl. 89




Sl. 90



Zapremina $V$ date piramide jednaka je zbiru zapremina ovih piramida:

$$V = \frac{1}{3} P(A_n A_1 A_2) \cdot H + \frac{1}{3} P(A_n A_2 A_3) \cdot H + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{3} P(A_{n-2} A_{n-1} A_n) = \frac{1}{3} B \cdot H.$$

**Teorema.** Zapremina $V$ zarubljene piramide, čija je visina $h$, a površine osnova $B_1$ i $B_2$ $(B > B_1)$ je jednaka $\frac{h}{3}(B + \sqrt{BB_1} + B_1)$.

*Dokaz.* Dopunimo zarubljenu piramidu do piramide i njenu visinu označimo sa $H$.

Biće $\sqrt{B_1} : \sqrt{B} = (H - h) : H$, a zapremina zarubljene piramide: $V = \frac{1}{3} B \cdot H - \frac{1}{3} B_1 (H - h)$. Iz poslednjih dveju jednačina, eliminisanjem nepoznate, $H$ dobijamo obrazac za zapreminu: $V = \frac{h}{3}(B + \sqrt{BB_1} + B_1)$.

## ZADACI

1. Osnova prave prizme je paralelogram stranice 3 i 4 i dijagonale jednake 5. Odrediti visinu i zapreminu prizme ako je njena površina 100 sm².
2. Kolika je ivica kocke ako je odnos zapremine i površine kocke jednak 6.
3. Izračunati površinu piramide kojoj je osnova trougao stranica 3, 8 i 9, visina 16, a podnožje visine centar upisanog kruga.
4. Naći zapreminu pravilne trostrane zarubljene piramide ako su bočne strane nagnute pod uglom prema ravni osnove, a površine osnova $B_1$ i $B_2$.

## POVŠIRNA I ZAPREMINA VALJKA, KUPE, ZARUBLJENE KUPE, OBRTNIH TELA, LOPTE

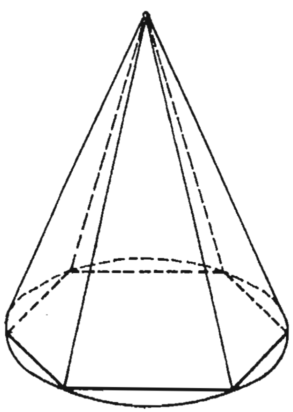
Kod valjka, kupe, zarubljene kupe,... nije moguće izračunati površinu razlaganjem površi tela na delove koji bi bili sadržani u jednoj ravni. Zato je potrebno definisati (uvesti), šta znači površina neke takve površi.

Valjak možemo smatrati granicom u nizu prizmi čije su gornja i donja osnova pravilni $n$-tougli upisani u gornju i donju osnovu valjka kad $n$ neograničeno raste. Isto tako; i pod površinom valjka ćemo smatrati granicu (broj) kojem se približava niz vrednosti površina tih prizmi kad $n$ neograničeno raste. Analogno, kao i kod prizme, i kod valjka ćemo razlikovati površinu osnova valjka i površinu preostalog dela površi valjka (omotača).

**Teorema.** Površina pravog valjka poluprečnika osnove $r$ i visine $H$ je jednaka $2r\pi(r + H)$.

*Dokaz.* Osnove valjka su krugovi poluprečnika $r$ i svaka ima površinu $r^2\pi$, obe ukupno $2r^2\pi$. Da bismo zaključili čemu je jednaka površina omotača valjka, primetimo da je površina omotača upisane pravilne $n$-tostrane prizme u valjak jednaka proizvodu obima osnove prizme i visine valjka. Obim pravilnog $n$-tougla upisanog u krug teži obimu kruga kad $n$ neograničeno raste i zato je površina omotača valjka jednaka $2r\pi H$. Ukupna površina valjka je $2r\pi(r + H)$.

Pod površinom kupe ćemo podrazumevati granicu kojoj se približava niz vrednosti površina upisanih pravilnih piramida kad $n$ neograničeno raste.



Sl. 91

S obzirom da je kod pravilne piramide površina omotača jednaka poluproizvodu obima osnove i bočne visine valjka, neposredno zaključujemo da je tvrđenje teoreme, koja će biti upravo navedena, tačno.

**Teorema.** Površina prave kupe, čija je izvodnica (duž koja spaja vrh kupe sa nekom tačkom kruga osnove kupe) jednaka $l$, a poluprečnik osnove kupe jednak $r$, je jednaka $r\pi(l + r)$.

**Teorema.** Površina zarubljene kupe poluprečnika osnove $R$ i $r$, $(R > r)$ i izvodnice $l$ jednaka je $(R + r)l\pi + r^2\pi + R^2\pi$.

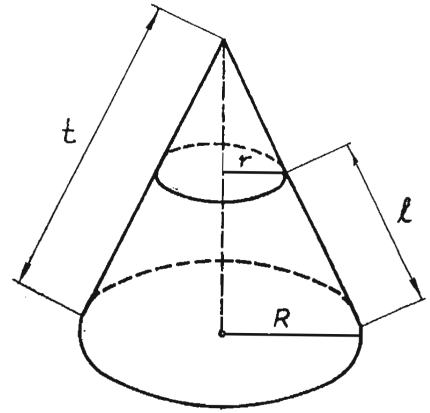
*Dokaz.* Dopunimo zarubljenu kupu do kupe. Izvodnicu tako dobijene kupe označimo sa $t$. Površina omotača $M$ zarubljene kupe biće jednaka razlici $(Rt\pi - rs\pi)$ površina omotača dveju kupa, gde je



$t - s = l$. Osim toga, na osnovu teoreme o proporcionalnim odsečcima je: $r : R = s : t$. Eliminisanjem $s$ i $t$ iz jednakosti

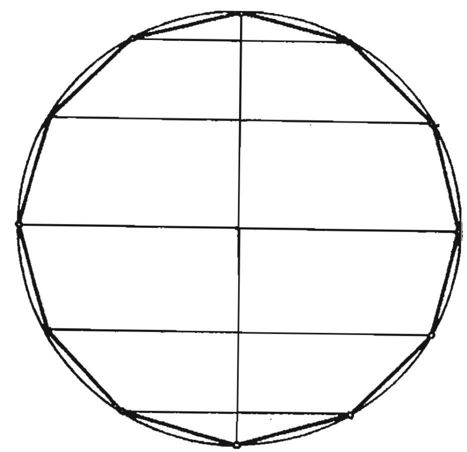
$$M = Rt - rs$$
$$t - s = l$$
$$r : R = s : t$$

nalazimo da je $M = Rt\pi - rs\pi$, a ukupna površina $(R + r)l\pi + r^2\pi + R^2\pi$. Rotacijom kruga oko jednog prečnika dobijamo u prostoru sferu. Njenu površinu možemo izračunati kao granicu površina rotacionih tela nastalih obrtanjem u prostoru pravilnih $n$-touglova upisanih u krug. Bez dokaza navodimo da je površina lopte jednaka $4r^2\pi$, gde je $r$ poluprečnik lopte.




Sl. 92

Upisane prizme, piramide, odnosno zarubljene piramide koje smo koristili prilikom izvođenja površina valjka, kupe (odnosno zarubljene kupe) uvodimo i prilikom izvođenja zapremina tih tela. Zapreminu



Sl. 93

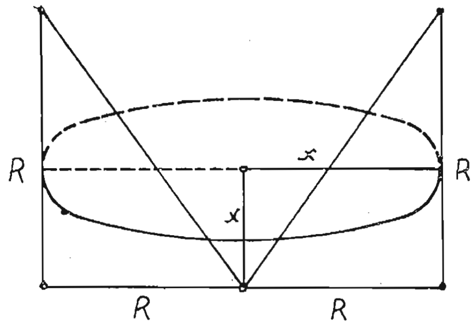
valjka, kupe (odnosno zarubljene kupe) možemo smatrati granicom zapremina na pomenuti način upisanih tela.

Neposredno nalazimo da je:

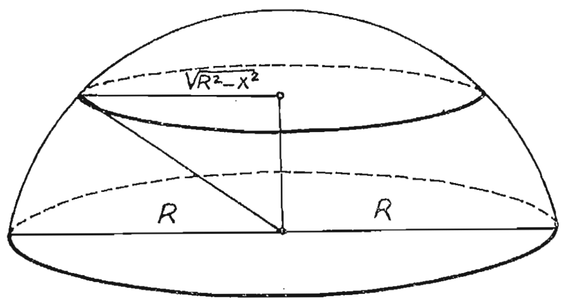
— zapremina valjka jednaka proizvodu površine osnove valjka i visine valjka,

— zapremina kupe jednaka trećini proizvoda osnove kupe i visine kupe,

— zapremina zarubljene kupe, data obrascima $V = \frac{h}{3}(B + \sqrt{BB_1} + B_1)$ (gde je $h$ visina, $B$ jedna, a $B_1$ druga) osnova zarubljene kupe.




Sl. 94a




Sl. 94b

**Teorema.** Zapremina lopte poluprečnika $R$ je jednaka $\frac{4}{3} R^2\pi$.

*Dokaz.* Iz pravog valjka, čija je visina jednaka poluprečniku $R$ osnove, isecimo kupu čija se osnova poklapa sa gornjom osnovom



valjka, a vrh kupe je centar osnove valjka. Tako dobijeno telo označimo sa $Q$. Neka je lopta poluprečnika $R$ data u takvom položaju da centar lopte pripada ravni donje osnove valjka. Ta ravan će seći loptu na 2 polulopte. Označimo sa $L$ onu od tih polulopti koja se nalazi sa iste strane ravni donje osnove valjka sa koje se nalazi i telo $Q$. Ako postavimo ravan paralelnu ravni osnove valjka koja seče tela $Q$ i $L$ i na odstojanju je $x$ od ravni osnove valjka, dobićemo preseke te ravni sa $Q$ i $L$ iste površine jednake $(R^2 - x^2)\,\pi$. Po Kavaljerijevom principu tela $Q$ i $L$ će imati istu zapreminu. Telo $Q$ ima zapreminu $R^3\pi - \frac{1}{3} R^3\pi = \frac{2}{3} R^3\pi$, pa je zapremina čitave lopte jednaka $\frac{4}{3} R^3\pi$.

### ZADACI

1. Odrediti visinu pravog valjka ako je njegova površina jednaka 10, a zapremina 8.
2. Trougao stranica $a$, $b$ i $c$ rotira se u prostoru oko prave određene stranicama. Odrediti površinu i zapreminu tako dobijenog rotacionog tela.
3. Data je stranica $a$ pravilnog osmougla upisanog u krug. Izračunati visinu pravog valjka čija je osnova dati krug, ako je razlika površina tog valjka i površine pravilne prizme upisane u taj valjak, čija je osnova osmougao, jednaka $m$.

# TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

## 1

### 1. RADIJAN. VEZA IZMEĐU RADIJANA I STEPENA

Neka promenljiva veličina može da se meri na više načina. U svakom merenju mora biti određena *jednica* za merenje. Kao što znamo, u geometriji jedinica merenja ugla je stepen (1°). Svaki ugao ima određen broj stepeni, na primer prav ugao ima 90°, opružen 180°, pun 360°.

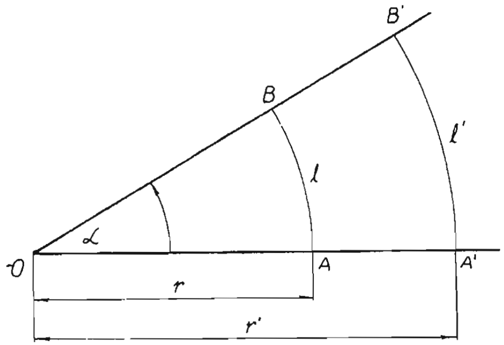
Međutim, ugao može da se meri i *radijanima*. Da bismo ga definisali, načinimo kružni isečak kruga poluprečnika $r$ i, neka je dužina

$l$ kružnog luka $AB$ jednaka poluprečniku, to jest $l = r$. Označimo sa $\alpha$ veličinu centralnog ugla $\sphericalangle AOB$. Iz formule za dužinu kružnog luka $l = \frac{\alpha r \pi}{180^\circ}$, nalazimo:

$$(1) \qquad \alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{l}{r} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{r}{r} = \frac{180^\circ}{\pi}.$$

Odatle zaključujemo da veličina $\alpha$ ne zavisi od izbora poluprečnika $r$, a to znači da ni centralni ugao $\sphericalangle AOB$ ne zavisi od poluprečnika $r$. Otuda, ako je $l = r$, $l' = r'$, onda $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'OB'$, što znači da gornjom konstrukcijom (kada uzimamo da je dužina $l$ kružnog luka jednaka poluprečniku $r$) dobijamo uvek isti ugao.

*Za taj ugao kažemo da ima jedan radijan.*




Sl. 95

Ugao koji ima jedan radijan uzimamo za jedinicu merenja ugla. Prema tome, ugao $\alpha$ ima $x$ radijana, ako se ugao od 1 radijana sadrži $x$ puta u tom uglu.

Iz formule (1) nalazimo da je:

$$(2) \qquad 1 \text{ radijan} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57{,}29578^\circ = 57^\circ 17' 44{,}8''$$

$$(3) \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ radijana} = 0{,}017455 \text{ radijana}.$$

Ovo su približne vrednosti, pošto je za $\pi$ uzeta približna vrednost 3,14159.



Neka ugao $\alpha$ ima $x$ radijana. Tada iz formule (2) nalazimo: $x$ radijana $= x \cdot 1$ radijan $= x \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$. Prema tome, ako neki ugao $\alpha$ ima $x$ radijana, tada je negova veličina (mera) u stepenima $\frac{x \cdot 180^\circ}{\pi}$, tj.

$$(4) \qquad \alpha = \frac{x\, 180^\circ}{\pi} \text{ i, obrnuto, } x = \frac{\pi\alpha}{180^\circ}.$$

*Primedba*. Iz druge jednakosti vidimo da je radijan neimenovan *broj*.

*Primer* 1°. Odrediti radijansku meru ugla od a) 60°, b) 180°, c) 360°.

*Rešenje*: a) $x = \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$,

b) $x = \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot 180^\circ}{180^\circ} = \pi \approx 3{,}14$,

c) $x = \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot 360^\circ}{180^\circ} = 2\pi$.

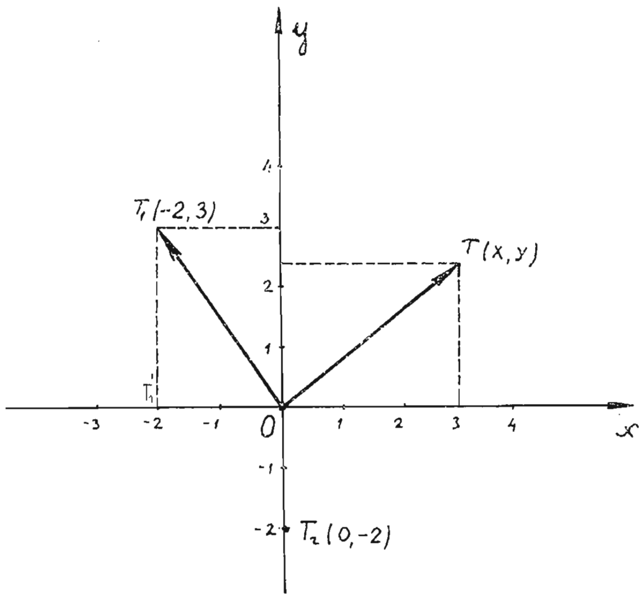
*Primer* 2°. Neka centralni ugao u krugu poluprečnika $r$ ima $x$ radijana. Odrediti dužinu $l$ odgovarajućeg luka.

*Rešenje*: Neka je $\alpha$ veličina datog centralnog ugla. Prema formuli (4), $\alpha = \frac{x \cdot 180^\circ}{\pi}$. Dalje nalazimo $l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ} = \frac{\pi r \frac{x \cdot 180^\circ}{\pi}}{180^\circ} = rx$, tj. $l = rx$.

## 2. RADIUS VEKTOR

Znamo da svaka tačka $T$ u ravni pravouglog koordinatnog sistema $XOY$ ima potpuno određene koordinate $x$ i $y$. Na primer, tačka $T_1$ ima prvu koordinatu $-2$ i drugu koordinatu 3, a tačka $T_2$ ima koordinate 0 i $-2$. Prema tome, tačka $T_1$ je određena parom $(-2, 3)$, a tačka $T_2$ parom $(0, -2)$. U opštem slučaju, bilo koja tačka $T$ određena je nekim parom $(x, y)$.

Vektor $\overrightarrow{OT}$ zove se radijus vektor tačke $T$. Primetimo da je za zadatu tačku $T$ sasvim određen njen radijus vektor. Zbog toga uzimamo da su koordinate tačke $T$ istovremeno koordinate i njenog radijus vektora. Na primer, koordinate radijus vektora $\overrightarrow{OT_1}$ su $-2$ i $3$. Neka je sa $r$ označena sužina (intenzitet) vektora $\overrightarrow{OT}$, a sa $\alpha$ ugao koji obrazuju $\overrightarrow{OT}$ i $x$-osa. Primetimo da je $r$ u stvari odstojanje tačke $T$ od koordinatnog početka. Dužina $r$ i ugao $\alpha$ određuju položaj tačke $T$ u ravni $XOY$, te, zbog toga, radijus vektor $\overrightarrow{OT}$ često zovemo i vektrorom položaja tačke $T$. Vektor položaja takođe obeležavamo i sa $\vec{r}$, tj. $\overrightarrow{OT} = \vec{r}$.




Sl. 96

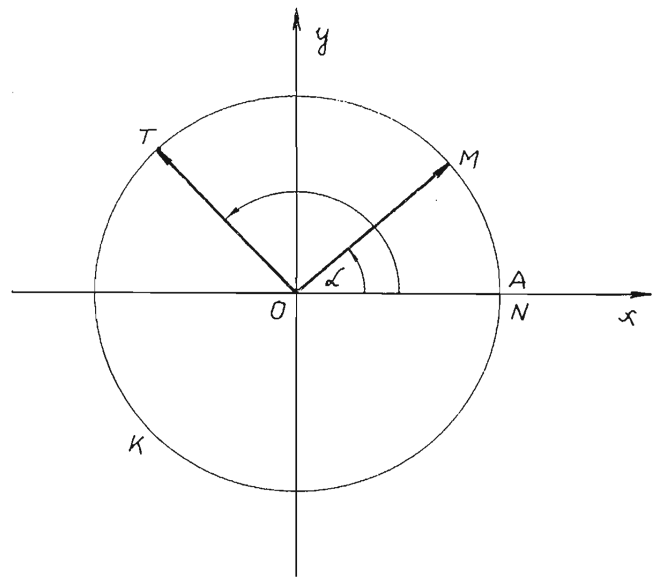
*Primer*. Naći intenzitet $r_1$ radijus vektora $\overrightarrow{OT_1}$.

*Rešenje*. Neka je $T'_1$ normalna projekcija tačke $T_1$ na $x$-osu. Tada je $\triangle\, OT_1T'_1$ pravougli, sa katetama čije su dužine $a = 2$, $b = 3$. Ako primenimo Pitagorinu teoremu, dobija se $r_1^2 = a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 13$, odakle $r_1 = \sqrt{13}$.



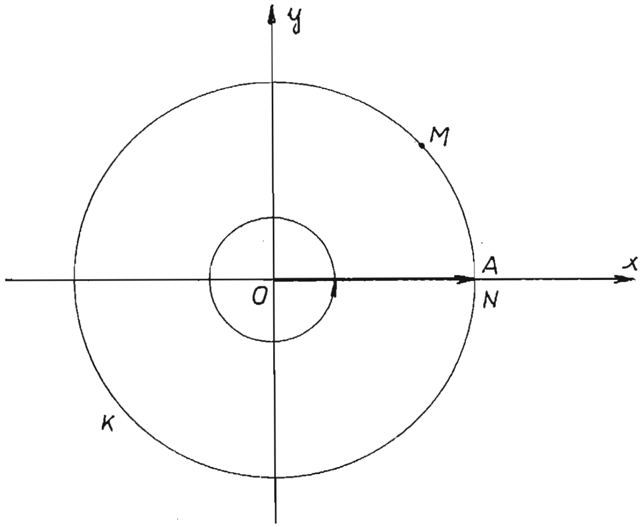
## 3. PROŠIRENJE POJMA UGLA. ORIJENTISANI UGLOVI

Neka se tačka $T$ kreće po krugu $K$, čiji centar leži u koordinatnom početku. Kažemo da se tačka $T$ kreće u *pozitivnom smeru*, ako se kreće obrnuto smeru kretanja kazaljke na satu. Ako se kreće u smeru kretanja kazaljke na satu, tada kažemo da se tačka $T$ kreće u *negativnom smeru*.

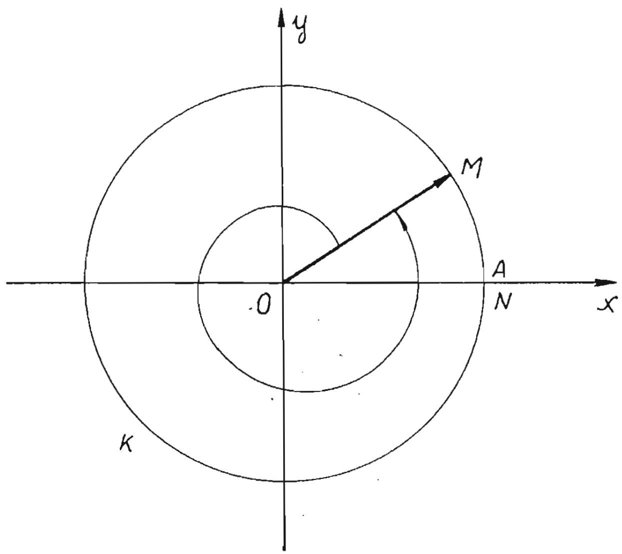



Sl. 97

Pretpostavljajući da se tačka $T$ nalazila u početnom položaju $A$ i da se kreće u pozitivnom smeru, njen radijus vektor $OT$ opisuje ugao $\sphericalangle AOT$. U položaju $M$, taj ugao je $\alpha = \sphericalangle AOM$. Kada tačka $T$ ponovo dođe u položaj $N$, ona je opisala pun krug, tj. $\sphericalangle AON = 360°$. Pretpostavljajući da se i dalje kreće, kada ponovo dođe u položaj $M$, tačka $T$ je opisala uglove $\sphericalangle AON = 360°$ i $\sphericalangle AOM = \alpha$. Tada smatramo da je tačka prešla ukupan ugao $\beta = 360° + \alpha$. Tako dolazimo do ugla $\beta$ koji je veći od punog ugla. Ako se tačka $T$ obrne $k$ puta u pozitivnom smeru i ponovo dođe u položaj $M$, tada je njen radijus vektor opisao ugao $k\,360° + \alpha$. Na taj način dobijene uglove smatramo uopštenim.



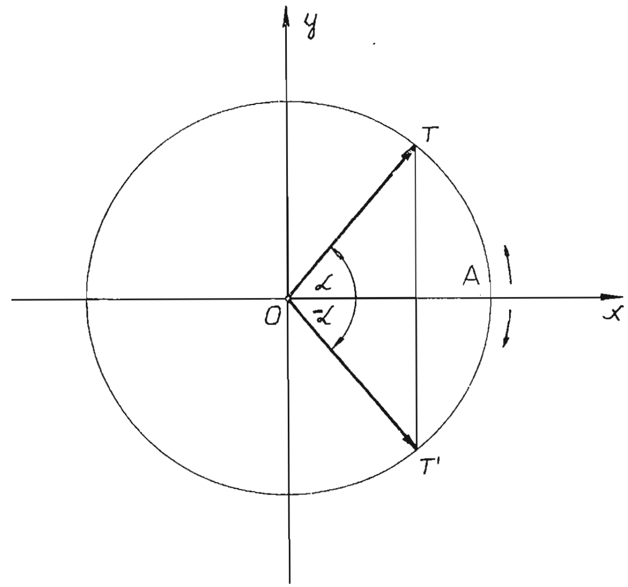

Sl. 98




Sl. 99



Za ugao koji je nastao obrtanjem radijus vektora u pozitivnom smeru, kažemo da je pozitivno orijentisan (ili samo pozitivan). Ako je nastao obrtanjem radijus vektora u negativnom smeru, tada kažemo da je negativno orijentisan (ili samo negativan). Tako, ako je $\alpha = \sphericalangle AOT$, tada sa $-\alpha$ obeležavamo $\sphericalangle TOA$. Na sl. 100 takođe je $-\alpha = \sphericalangle AOT'$.




Sl. 100

*Primer* 1°. Neka ugao $\alpha$ ima a) 720°, b) 1000°. Koliko ima onda rad ana?

*Rešenje*: a) $x = \dfrac{\pi \cdot \alpha}{180°} = \dfrac{\pi \cdot 720°}{180°} = 4\pi$ radijana.

b) $x = \dfrac{\pi \cdot \alpha}{180°} = \dfrac{\pi \cdot 1000°}{180°} \approx 16{,}43.$

*Primer* 2°. Neka ugao ima a) $5\pi$ radijana, b) $20\,\pi$ radijana. Ko ko ima stepeni?

*Rešenje*: a) $\alpha = \dfrac{180^\circ x}{\pi} = \dfrac{180^\circ \cdot 5\pi}{\pi} = 900^\circ$,

b) $\alpha = \dfrac{180^\circ x}{\pi} = \dfrac{180^\circ \cdot 20\pi}{\pi} = 3600^\circ$.

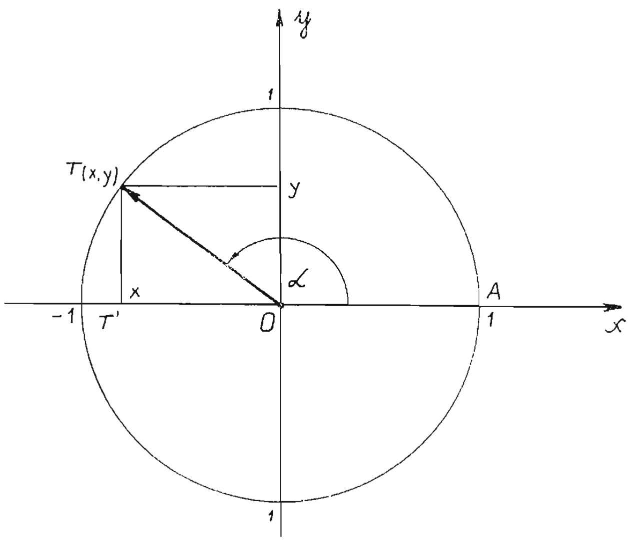
*Primer* 3°. Sabrati uglove $\alpha$ i $\beta$ ako je a) $\alpha = 350^\circ$, $\beta = 400^\circ$, b) $\alpha = \pi$ radijana, $\beta = 7\pi$ radijana.

*Rešenje*: a) $\alpha + \beta = 350^\circ + 400^\circ = 750^\circ$, b) $\alpha + \beta = \pi + 7\pi = 8\pi$. Izvršiti u oba slučaja geometrijsku konstrukciju.

## 2

### 1. DEFINICIJA TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Neka je u ravni $XOY$ dat krug $K$ poluprečnika 1, čiji centar leži u koordinatnom početku. Uočimo ugao $\alpha$ koji je nastao obrtanjem radijus vektora pokretne tačke $T$ po krugu $K$, iz početnog položaja $A$.




Sl. 101

Radijus vektor $\overrightarrow{OT}$ ima koordinate $(x, y)$ (koje su istovremeno i koordinate tačke $T$).



1° *Kosinus* ugla $\alpha$ definišemo kao prvu koordinatu radijus vektora $\overrightarrow{OT}$. Kosinus ugla $\alpha$ obeležavamo sa *cos* $\alpha$.

2° *Sinus* ugla $\alpha$ definišemo kao drugu koordinatu radijus vektora $\overrightarrow{OT}$. Sinus ugla $\alpha$ obeležavamo sa *sin* $\alpha$.

Prema uvedenim oznakama je:

(1) $\cos\alpha = x, \quad \sin\alpha = y.$

3° Ako je prva koordinata različita od 0 za *tangens* ugla $\alpha$, uzimamo količnik druge i prve koordinate. Tangens ugla $\alpha$ obeležavamo sa tg $\alpha$.

4° Ako je druga koordinata različita od 0 za *kotangens* ugla $\alpha$, uzimamo količnik prve i druge koordinate. Kotangens ugla $\alpha$ obeležavamo sa ctg $\alpha$.

Prema uvedenim oznakama imamo:

(2) $\text{tg}\,\alpha = y/x, \quad \text{ctg}\,\alpha = x/y.$

Iz definicije vidimo da svakom *uglu* $\alpha$ možemo da *pridružimo* određen *broj cos* $\alpha$. Takvo pridruživanje je jedna *funkcija*. Ovu funkciju zovemo *kosinusnom funkcijom*, ili samo *kosinus*. To pridruživanje obeležavamo sa:

$$\alpha \to \cos\alpha$$

Na sličan način uvodimo *sinusnu funkciju*, odnosno sinus, zatim *tangens* i *kotangens*. Funkcije često obeležavamo slovima (kao što promenljive veličine označavamo sa $x, y, z, \ldots$). Ako je, na primer, neka funkcija $f$ sinusna funkcija, tada pišemo $f(\alpha) = \sin\alpha$. Slično je ako su u pitanju ostale funkcije. Sinus, kosinus, tangens, kotangens zovemo *trigonometrijskim* funkcijama.

### 2. OSNOVNE VEZE IZMEĐU TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Uočimo trougao $\triangle OTT'$ na sl. 101. Kako je $T'$ normalna projekcija tačke $T$ na $x$-osu, to je taj trougao pravougli. Kateta $OT'$ ima dužinu $|x|$, a druga kateta $TT'$ dužinu $|y|$ (zašto uzimamo apsolutne vrednosti $|x|$ i $|y|$ umesto samih brojeva $x, y$?). Hipotenuza $OT$ jednaka je poluprečniku kruga $K$, a ovaj je poluprečnika 1, te je $\overline{OT} = 1$. Primenom Pitagorine teoreme, dobijamo:

$$1 = \overline{OT}^2 = \overline{OT'}^2 + \overline{TT'}^2 = |x|^2 + |y|^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha, \text{ odakle}$$

1° $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$

Ova identičnost važi za proizvoljan ugao $\alpha$. Dalje imamo:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{y}{x}} =$$

$= \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, te imamo sledeće identitete koji važe za proizvoljni ugao $\alpha$:

2° $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$

Identičnosti 1° i 2° smatramo *osnovnim trigonometrijskim identičnosti* i one prikazuju veze između trigonometrijskih funkcija.

### 3. DALJE O TRIGONOMETRIJSKIM FUNKCIJAMA. VREDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA OŠTRIH UGLOVA U PRAVOUGLOM TROUGLU

Uočimo zrak $l$ određen radijus vektorom $\overrightarrow{OT}$ i dve tačke $M$, $N$ na tom zraku. Tada su trouglovi $\triangle ONN'$, $\triangle OTT'$, $\triangle OMM'$ međusobno slični, te su njihove stranice proporcionalne. Neka je $\varphi$ ugao određen radijus vektorom $\overrightarrow{OT}$. Ako sa $R$ označimo intenzitet vektora $\overrightarrow{OM}$, sa $r$ intenzitet vektora $\overrightarrow{ON}$, imamo sledeće proporcije (uzimajući u obzir da je $\overrightarrow{OT} = 1$):

$$\overline{OT'} : \overline{OT} = x : 1 = \overline{OM'} : \overline{OM} = \overline{ON'} : \overline{ON} \text{ odakle}$$

$$x = \frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{ON'}}{\overline{ON}}. \text{ Otuda je}$$

(1) $$\cos\varphi = \frac{\overline{OM'}}{R} = \frac{\overline{ON'}}{r}$$

S ično nalazimo:

$$\overline{TT'} : \overline{OT} = y : 1 = \overline{MM'} : \overline{OM} = \overline{NN'} : \overline{ON}$$



odakle je

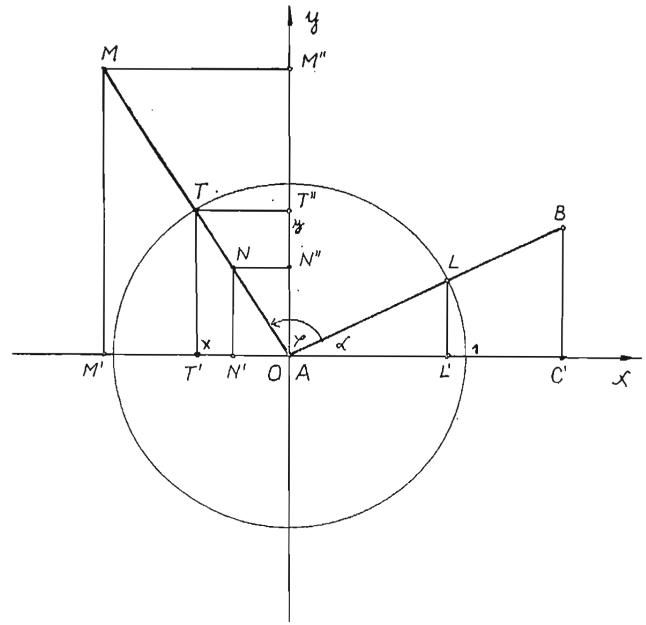
$$y = \frac{\overline{MM'}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{NN'}}{\overline{ON}}.$$

Kako je $\quad \overline{OM''} = \overline{M'M}, \quad \overline{NN'} = \overline{ON''}$

imamo:

(2) $$\sin\varphi = \frac{\overline{OM''}}{R} = \frac{\overline{ON''}}{r}. \text{ Slično je}$$

(3) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\overline{OM''}}{\overline{OM'}}, \quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{\overline{OM'}}{\overline{OM''}}$$




Sl. 102

Ako uočimo pravougli trougao $\triangle ABC$, gde je $\alpha = \measuredangle CAB$, $\beta = \measuredangle ABC$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AB} = c$, sa temenom $A$ u koordinatnom početku i pravim uglom u temenu $C$, tada zaključumjeo, kao malopre, da je:

(1) $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, (2) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, (3) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ (4) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$,

što možemo iskazati rečima:

1° Sinus oštrog ugla jednak je količniku mernih brojeva dužina naspramne katete i hipotenuze.

2° Kosinus oštrog ugla jednak je količniku mernih brojeva dužina nalegle katete i hipotenuze.

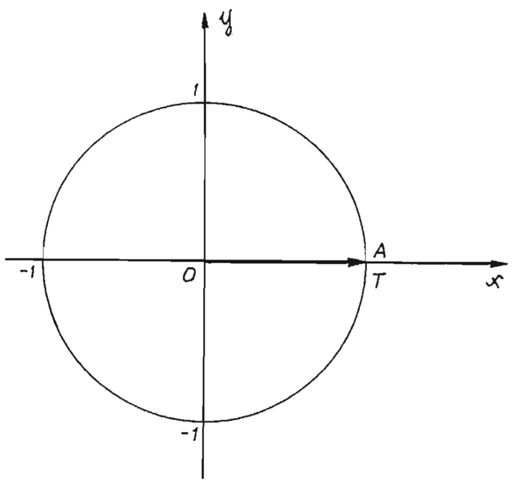
3° Tangens oštrog ugla jednak je količniku mernih brojeva dužina naspramne i nalegle katete.

4° Kotangens oštrog ugla jednak je količniku mernih brojeva dužina nalegle i naspramne katete.

## 4. VREDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA UGLOVA OD 0°, 30°, 45°. 60°, 90°, 180°, 360°.

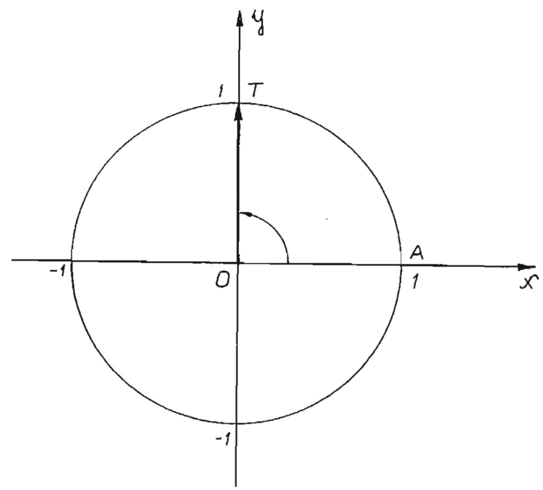
Sa slike 103. nalazimo redom koordinate pokretne tačke $T$ i to za uglove:

1° $\sphericalangle AOT = 0°$, tačka $T$ ima koordinate $(1, 0)$, pa je $\cos 0 = 1$, $\sin 0° = 0$, $\operatorname{tg} 0° = 0$, $\operatorname{ctg} 0°$ nije definisan.

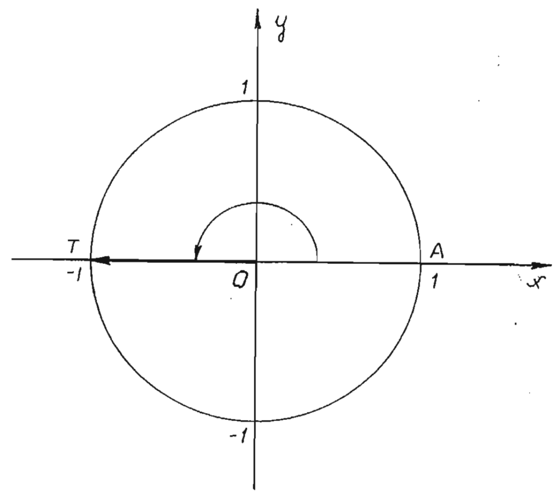



Sl. 103 a

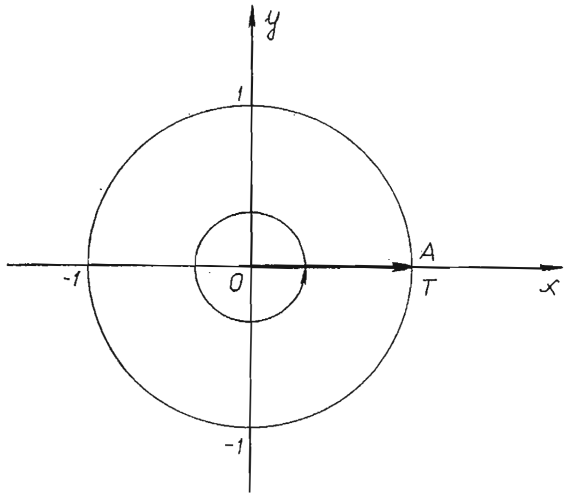





Sl. 103 b




Sl. 103 c




Sl. 103 d

2° $\measuredangle\ AOT = 90°$, tačka $T$ ima koordinate $(0, 1)$, pa je $\cos 90° = 0$, $\sin 90° = 1$, tg 90° nije definisan, ctg 90° = 0.

3° $\measuredangle\ AOT = 180°$, tačka $T$ ima koordinate $(-1, 0)$, pa je $\cos 180° = -1$, $\sin 180° = 0$, tg 180° = 0, ctg 180° nije definisan.

4° $\measuredangle\ AOT = 360°$, tačka $T$ ima koordinate $(1, 0)$, pa je $\cos 360° = 1$, $\sin 360° = 0$, tg 360° = 0, ctg 360° nije definisan.

Ako je $\measuredangle\ AOT = 30°$ tada je trougao $\triangle\ OTB$ jednakostraničan (sl. 104). Pošto je $OT = 1$, imamo $OM = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $ON = \frac{1}{2}$, te je

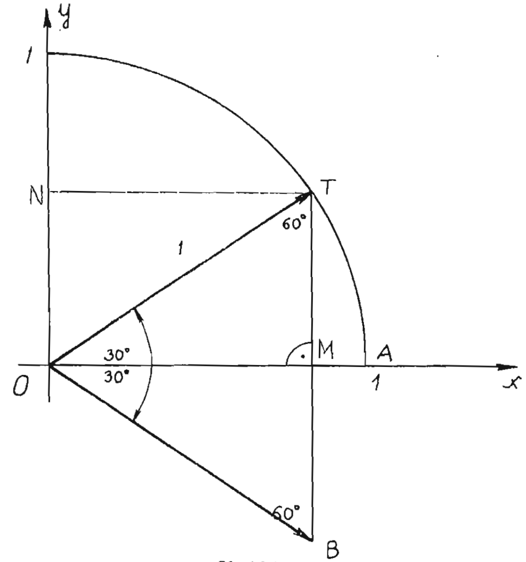
$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin 30° = \frac{1}{2},\quad \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3},\quad \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}.$$

Sa slika 105. i 106. na sličan način nalazimo:

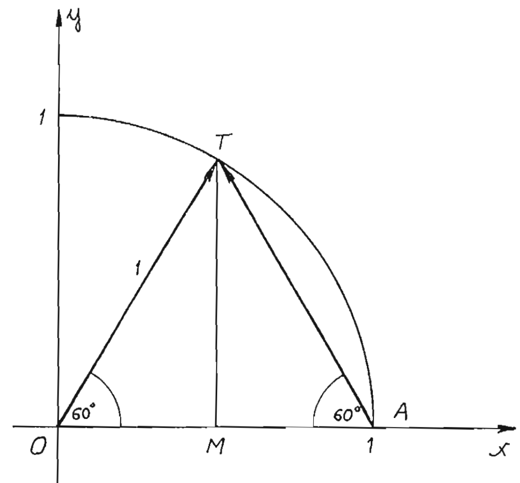
$$\cos 60° = \frac{1}{2},\quad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3},\quad \operatorname{ctg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \operatorname{tg} 45° = 1,\quad \operatorname{ctg} 45° = 1.$$

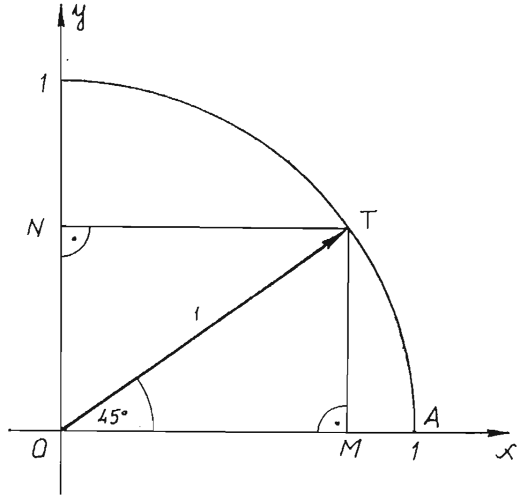





Sl. 104




Sl. 105




Sl. 106

Sve dobijene vrednosti možemo prikazati u obliku tabele:

Tablica 1

| $\alpha$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | 0 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | −1 | 1 |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | — | 0 | 0 |
| $\operatorname{ctg}\alpha$ | — | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | — | — |

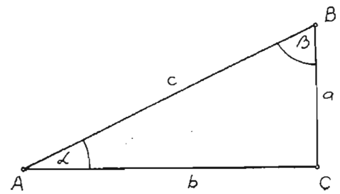
Mi smo izračunali samo neke vrednosti trigonometrijskih funkcija. Međutim, zbog njihove važnosti napravljene su tablice u kojima su prikazane (približne) vredosti trigonometrijskih funkcija i to — bilo da se ugao meri stepenima bilo radijanima. Uputstva za čitanje tih vrednosti data su u odgovarajućim tablicama.

*Primer* 1° Odrediti ostale elemente pravouglog trougla ako je data kateta $(a = 2)$ i suprotan ugao $(\alpha = 25°34')$

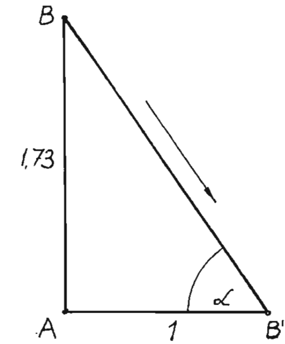


*Rešenje*: Nalazimo da je $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, odakle je $c = \frac{a}{\sin\alpha}$.

Iz tablica nalazimo $\sin 25°34' \approx 0.4316$. Otuda je $c = 2/0.4316 \approx 4.615$, tj. $c \approx 4.62$. Iz Pitagorine teoreme $c^2 = a^2 + b^2$, dobijamo $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4.62^2 - 2^2} \approx 4.15$, tj. $b = 4.15$. Kako je $\alpha + \beta = 90°$, to je $\beta = 90° - \alpha = 64°26'$.




Sl. 107




Sl. 108

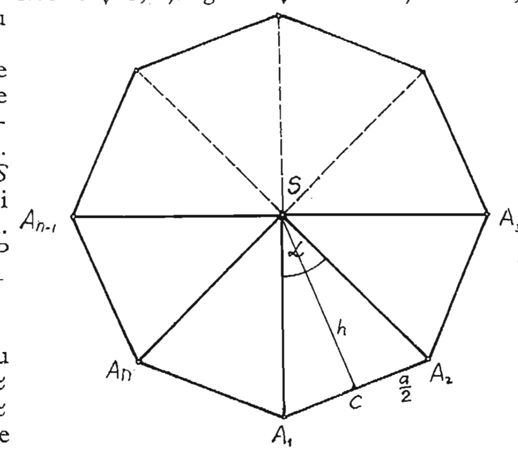
*Primer* 2° Štap $AB$ dužine 1.73 m poboden je u zemljište pod pravim uglom, a njegova senka $AB'$ je dužine 1 m. Odrediti pod kojim uglom padaju sunčevi zraci na zemljinu površinu.

*Rešenje*: Iz pravouglog trougla $\triangle ABB'$ nalazimo da je $\operatorname{tg}\alpha = \overline{AB}/\overline{AB'} = 1.73/1 = 1.73 \approx \sqrt{3}$, tj. $\operatorname{tg}\alpha \approx \sqrt{3}$. Otuda je $\alpha = 60°$, tj. sunčevi zraci padaju pod uglom od 60°.

*Primer* 3° Neka je data dužina $a$ stranice pravilnog $n$-tougla. Odrediti njegovu površinu.

*Rešenje*: Neka je $S$ centar tog $n$-tougla i $A_1, A_2, \ldots, A_n$ temena. Tada je površina $P$ $n$-tougla $P = P_{\triangle SA_1A_2} + P_{\triangle SA_2\ldots} \ldots + P_{\triangle SA_{n-1}A_n}$.

Međutim, kako su trouglovi $\triangle SA_1A_1 \approx \triangle SA_2A_3 \approx \ldots \approx \triangle SA_{n-1}A_n$, to je $P = n \cdot P_{\triangle SA_1A_2}$. S druge



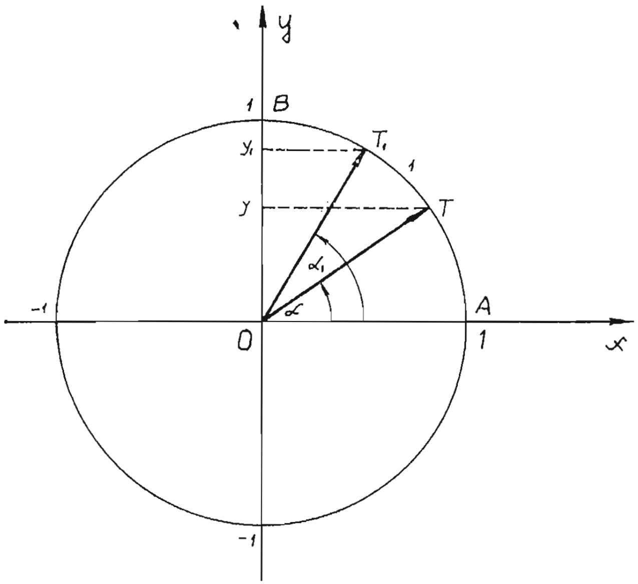

Sl. 109

strane $\alpha = \sphericalangle A_1SA_2 = \frac{360°}{n} = \frac{2\pi}{n}$. Iz pravouglog trougla $\triangle SCA_1$ nalazimo da je $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{a/2}$ odakle je $h = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Pošto je $P_{\triangle SA_1A_2} = \frac{ah}{2}$ dobijamo $P_{\triangle SA_1A_2} = \frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{360°}{2n} = \frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$. Otuda je $P = \frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$.

## 5. PROMENE TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Neka se tačka $T$ kreće u pozitivnom smeru iz početnog položja $A$. Tada se odgovarajući $\alpha = \sphericalangle AOT$ menja i to raste. Posmatrajmo šta se tada dešava sa funkcijom $f(\alpha) = \sin\alpha$.

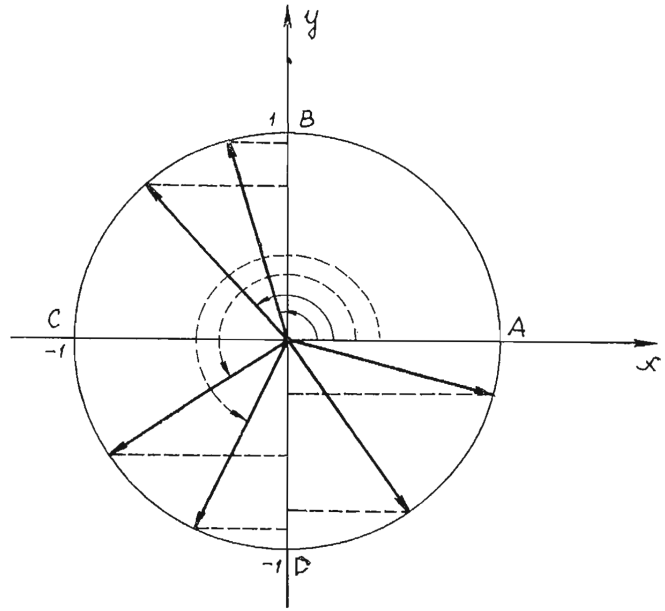
1° Kada se tačka $T$ kreće od položaja $A$ do položaja $B$, ugao $\alpha$ *raste* od 0° do 90° (od 0 radijana do $\frac{\pi}{2}$ radijana).




Sl. 110



Neka je $\alpha < \alpha_1 \leqslant 90°$ i $y, y_1$ druge koordinate tačaka $T$ i $T_1$. Tada je $y < y_1$. Kako je $y = \sin\alpha$, $y_1 = \sin\alpha_1$, imamo $\sin\alpha < \sin\alpha_1$. Znači da u prvom kvadrantu sinusa funkcija raste od 0 do 1. Osim toga, vidimo da je $\sin\alpha$ *pozitivan* i *manji* od 1.




Sl. 111

Slično zaključujemo:

2° Kada se tačka $T$ kreće od $B$ do $C$, tada ugao $\alpha$ raste od 90° do 180° $\left(\text{od } \frac{\pi}{2} \text{ do } \pi\right)$. Istovremeno $\sin\alpha$ opada od 1 do 0.

3° U trećem kvadrantu, kada se tačka $T$ kreće od $C$ do $D$ tada ugao raste od 180° do 270° $\left(\text{od } \pi \text{ do } \frac{3\pi}{2}\right)$. $\sin\alpha$ opada od 0 do $-1$.

4° U četvrtom kvadrantu ugao $\alpha$ menja se od 270° do 360° $\left(\text{od } \frac{3\pi}{2} \text{ do } 2\pi\right)$, $\sin\alpha$ raste od $-1$ do 0.

Sličnu analizu možemo uraditi i za ostale trigonometrijske funkcije. Ako nam simbol ↗ znači da funkcija raste, a ↘ da opada, imali bismo sledeću tabelu (gde su uglovi izraženi u radijanima):

Tablica 2

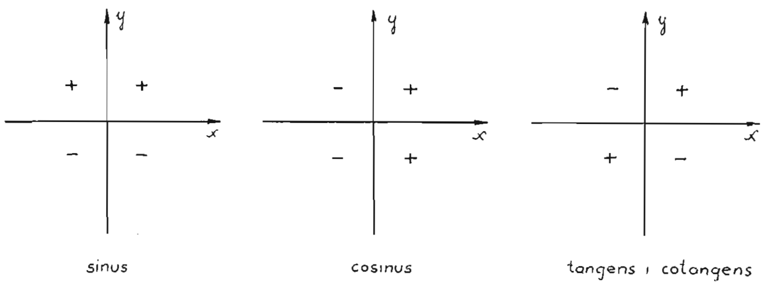
| $\alpha$ | 0 | ↗ | $\frac{\pi}{2}$ | ↗ | $\pi$ | ↗ | $\frac{3\pi}{2}$ | ↗ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | 0 | ↗ | 1 | ↘ | 0 | ↘ | —1 | ↗ | 0 |
| $\cos\alpha$ | 1 | ↘ | 0 | ↘ | —1 | ↗ | 0 | ↗ | 1 |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | 0 | ↗ | — | ↗ | 0 | ↗ | — | ↗ | 0 |
| $\operatorname{ctg}\alpha$ | — | ↘ | 0 | ↘ | — | ↘ | 0 | ↘ | — |

Za funkcije kosinus, tangens i kotangens sprovedite analizu rasta. Takođe, napravite ovu tablicu ako se ugao izražava u stepenima.

Primetimo da smo za funkciju $\sin\alpha$ usput pokazali da je $|\sin\alpha| \leqslant 1$. Slično je $|\cos\alpha| \leqslant 1$. Funkcije $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$ su neograničene.

## 6. ZNAK TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Na osnovu analize sinusne funkcije i tab. 2. zaključujemo da ako je $\alpha$ u *prvom* ili *drugom* kvadrantu, da je onda $\sin\alpha$ *pozitivan*. Ako je $\alpha$ u *trećem* ili *četvrtom* kvadrantu, onda je $\sin\alpha$ *negativan*. Dobijene rezultate možemo prikazati u obliku slike:




Sl. 112



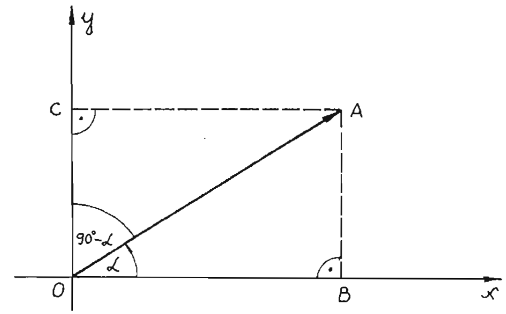
## 3

Ovde ćemo pokazati da se vrednost trigonometrijske funkcije ma kog ugla može svesti na vrednost trigonometrijske funkcije oštrog ugla. To nam omogućuju sledeći identiteti (ovde ćemo koristiti i osobine trigonometrijskih funkcija oštrih uglova u pravouglom trouglu § 2.3., a, takođe, i osnovne veze između trigonometrijskih funkcija):

Neka je $\alpha$ oštar ugao, tj. $0° < \alpha < 90°$.

### 1. VREDNOST TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA OD $90° - \alpha$

Uočimo pravougle trouglove $\triangle AOB$ i $\triangle AOC$ u koordinatnom sistemu $XOY$ i neka je $\alpha = \sphericalangle AOB$ (sl. 113). Tada imamo:




Sl. 113

$$\text{U trouglu } \triangle AOB\text{:}\quad \cos\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}},\quad \sin\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$$

$$\text{U trouglu } \triangle AOC\text{: } \sin(90°-\alpha) = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}},\quad \cos(90°-\alpha) = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$$

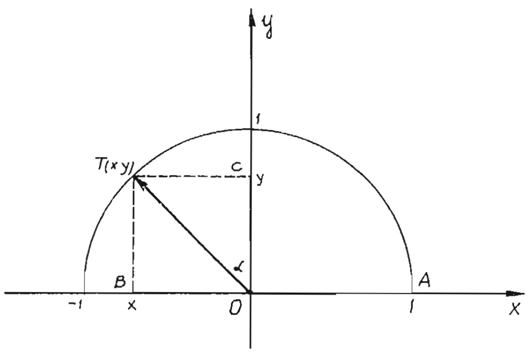
Kako je $\overline{AC} = \overline{OB}$, $\overline{AB} = \overline{OC}$ imamo: $\sin(90°-\alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90°-\alpha) = \sin\alpha$. Dalje je $\operatorname{tg}(90°-\alpha) = \dfrac{\sin(90°-\alpha)}{\cos(90°-\alpha)} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} =$ $= \operatorname{ctg}\alpha$, tj. $\operatorname{tg}(90°-\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$.

Slično $\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \dfrac{\cos(90°-\alpha)}{\sin(90°-\alpha)} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$, tj. $\operatorname{ctg}(90°-\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$.

*Primer.* $\sin 70° = \sin(90° - 20°) = \cos 20°$, $\operatorname{tg} 89° = \operatorname{tg}(90° - 1°) = \operatorname{ctg} 1°$, $\cos\dfrac{\pi}{3} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\pi/6$.

## 2. VREDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA UGLOVA OD $90° + \alpha$.

Neka je $\alpha = \sphericalangle\, COT$ (sl. 114). Tada je $\sphericalangle\, AOT = 90° + \alpha$ te je $\sin(90° + \alpha) = y = \overline{OC}$. S druge strane, iz pravouglog trougla $\triangle\, OCT$ imamo $\cos\alpha = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{OT}} = \dfrac{\overline{OC}}{1} = \overline{OC}$, te je $\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$. Dalje, $\cos(90° + \alpha) = x = -\overline{OB}$. S druge strane je $\sin\alpha = \dfrac{\overline{TC}}{\overline{OT}} = \dfrac{\overline{OB}}{1} = \overline{OB}$, te je $\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$. Otuda imamo i ove identičnosti:




Sl. 114

$\operatorname{tg}(90° + \alpha) = \dfrac{\sin(90° + \alpha)}{\cos(90° + \alpha)} = \dfrac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha$ tj. $\operatorname{tg}(90° + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$. Slično nalazimo: $\operatorname{ctg}(90° + \alpha) = \dfrac{\cos(90° + \alpha)}{\sin(90° + \alpha)} = \dfrac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$, tj. $\operatorname{ctg}(90° + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

*Primer.*

1° $\sin 120° = \sin(90° + 30°) = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, tj. $\sin 120° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2° $\cos 150° = \cos(90° + 60°) = -\sin 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, tj. $\cos 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3° $\operatorname{tg} 135° = \operatorname{tg}(90° + 45°) = -\operatorname{ctg} 45° = -1$, tj. $\operatorname{tg} 135° = -1$.



*Zadatak.* Naći ostale vrednosti trigonometrijskih funkcija od 120°, 135°, 150°.

*Primedba.* Umesto $\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$ možemo pisati i ovako: $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$, ako se ugao izražava u radijanima. Slično važi i za ostale trigonometrijske funkcije.

## 3. VREDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA UGLOVA OD $180° - \alpha$

Primetimo, pre svega, da ako je $\alpha$ oštar ugao, onda je $\beta = 90° - \alpha$ isto oštar ugao. Otuda, na osnovu prethodnih identiteta, imamo:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin[(90° + 90°) - \alpha] = \sin[90° + (90° - \alpha)] =$$
$$= \sin(90° + \beta) = \cos\beta = \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha.$$

Otuda je

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha.$$

Slično nalazimo da je $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

*Primer.* $\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

## 4. VREDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA UGLOVA OD $180° + \alpha$

Ponavljajući postupak kao u 1. i 2. (Uradite to!) dobili bismo

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha,\quad \cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(180° + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}(180° + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Poslednje dve formule možemo pisati u obliku $\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(\pi + x) = \operatorname{ctg} x$. Za datu funkciju $f$ kažemo da je *periodična* sa *periodom* $T\,(T \neq 0)$ ako je za *svaki* $x$ ispunjeno $f(T + x) = f(x)$. Prema tome, $\pi \approx 3{,}14$ je perioda funkcija tangens i kotangens.

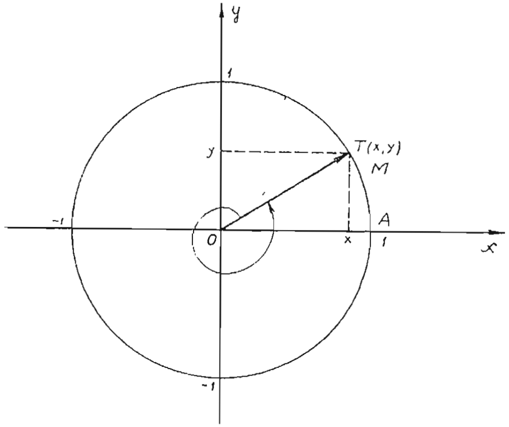
*Primer.* $\sin 210° = \sin(180° + 30°) = -\sin 30° = -\dfrac{1}{2}$,

$$\operatorname{tg} 240° = \operatorname{tg}(180° + 60°) = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}.$$

## 5. VREDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA UGLOVA OD $360° + \alpha$

Kad je pokretna tačka $T$ u položaju $M$, tada je $\sphericalangle AOT = \sphericalangle AOM = \alpha$ i:

(1) $x = \cos\alpha, \quad y = \sin\alpha.$




Sl. 115

Ako se tačka $T$ obrne za pun krug i ponovo dođe u položaj $M$, tada je tačka $T$ opisala ukupan ugao $360° + \alpha$, tj. tada je $\sphericalangle AOT = 360° + \sphericalangle AOM = 360° + \alpha$. Međutim, sada tačka $T$ ima ponovo koordinate $x$ i $y$, te je $x = \cos(360° + \alpha)$, $y = \sin(360° + \alpha)$, pa, na osnovu (1) imamo

$$\sin(360° + \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(360° + \alpha) = \cos\alpha.$$

Ovo možemo pisati i u obliku $\sin(2\pi + x) = \sin x$, $\cos(2\pi + x) = \cos x$. Slično dobijamo $\operatorname{tg}(2\pi + x) = \operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg}(2\pi + x) = \operatorname{ctg} x$.

Gornje formule nam govore da, ako se na ugao $\alpha$ doda pun ugao ($2\pi$ radijana), da se onda vrednost trigonometrijskih funkcija ne menja, odnosno da se vrednost trigonometrijskih funkcija *periodično ponavlja* posle obrta od $2\pi$ radijana. Zbog toga broj $2\pi \approx 6{,}28$ zovemo *periodom* funkcija sinus i kosinus. Slično bi pokazali da je za ma koji *ceo* broj $k$ $\sin(k \cdot 360° + \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(k \cdot 360° + \alpha) = \cos\alpha$, tj. $\sin(2k\pi + x) = \sin x$, $\cos(2k\pi + x) = \cos x$.

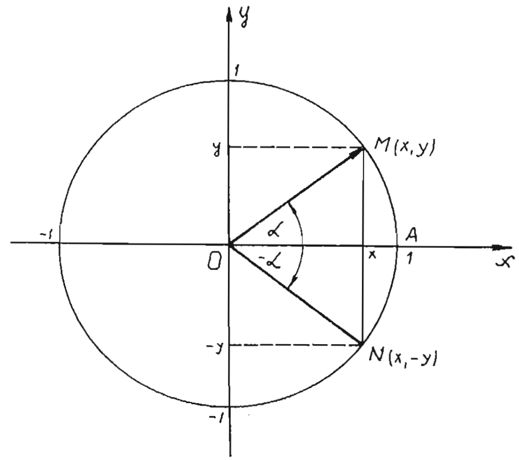
*Primer.* $\sin 390° = \sin(360° + 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 359° = \cos(-360° + 359°) = \cos(-1°)$.



## 6. VREDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA UGLOVA $-\alpha$

Neka je $\alpha = \sphericalangle AOM$ i tačka $M$ ima koordinate $(x, y)$. Taj ugao je pozitivno orijentisan i $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$. Tada, njemu simetričan ugao u odnosu na $x$-osu, određuje tačka $N$ sa koordinatama $(x, -y)$, te je $x = \cos(-\alpha)$, $-y = \sin(-\alpha)$. Upoređivanjem sa prethodnim formulama dobijamo:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$




Sl. 116

Funkcija $f$ za koju je ispunjeno *za svaki* $x$ $f(-x) = f(x)$, zove se *parna*, a, ako je za svaki $x$ $f(-x) = -f(x)$, zove se *neparna*.

Može se pokazati da je ne samo za oštre uglove, već i za bilo koji $\alpha$ važi $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. Prema tome, funkcija sinus je neparna, a kosinus parna.

*Primer.* $\sin(-60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Mi smo u prethodnim razmatranjima pretpostavljali da je ugao $\alpha$ oštar. Međutim, sve navedene relacije važe sa *svaki* ugao $\alpha$. Na primer, $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ važi za svaki $\alpha$. Neka je $\alpha = 300°$. Tada $\sin(180° - 300°) = \sin 300°$, odakle $\sin(-120°) = \sin 300°$. Otuda $-\sin 120° = \sin 300°$, tj. $\sin 300° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

# 4

Do sada smo proučavali trigonometrijske funkcije ugla. Možemo se pitati da li je moguće govoriti o, na primer, sinusu *broja* 1. Na osnovu primedbe u § 1.1. možemo uzeti da je sin 1 upravo jednak sinusu ugla od jednog radijana. U opštem slučaju za bilo koji broj $x$, $\sin x$ biće sinus ugla od $x$ radijana. Tako, na primer, u tablicama bi našli $\sin 1 = \sin 57°17' = 0{,}84$, $\cos 3{,}14 \approx \cos \pi = -1$.

Mnoge osobine trigonometrijskih funkcija već smo proučili. Međutim, pomoću grafika možemo na očigledan način predočiti tok (promenu funkcije).

## 1. GRAFIK FUNKCIJE $y = \sin x$

Konstruišimo grafik ove funkcije prvo na intervalu $[0, 2\pi]$. Na osnovu tabele 1, a, takođe, koristeći tablice vrednosti trigonometrijskih funkcija, možemo konstruisati sledeću tabelu vrednosti funkcije $\sin x$ zaokružene na dve decimale:

Tablica 3

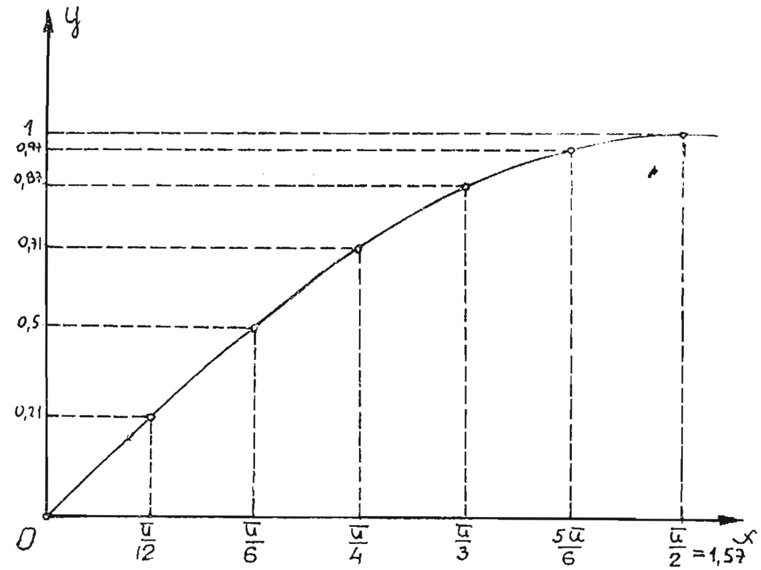
| $x$ | 0 | $\pi/12$ | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $5\pi/6$ | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | 0 | 0,21 | 0,50 | 0,71 | 0,87 | 0,97 | 1 |

Na osnovu ove tabele možemo konstruisati tačke sa koordinatama: apscisom $x$ i ordinatom $\sin x$. Pritom, stalno vodimo računa da je $\pi \approx 3{,}14$. Spajajući ove tačke (sl. 117), dobijamo grafik funkcije $y = \sin x$ na intervalu $[0, \pi/2]$.

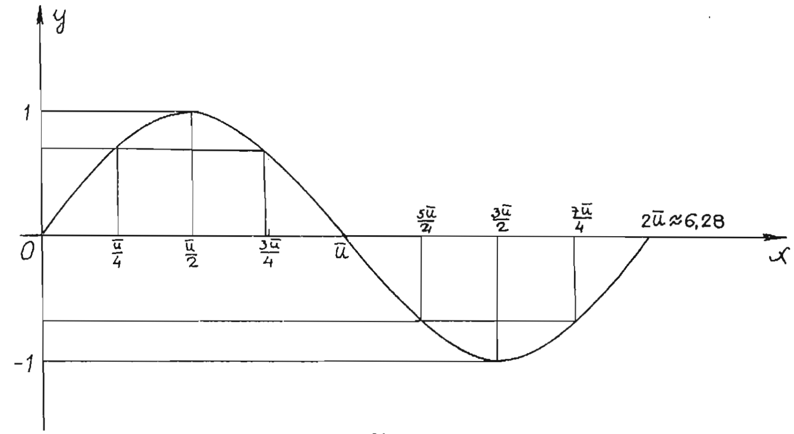
Na sličan način dobili bismo grafik sinusne funkcije kada se $x$ kreće u intervalu $[\pi/2, \pi]$, odnosno $[\pi, 2\pi]$. Pritom koristimo identitete $\sin(\pi/2 + x) = \cos x = \sin(\pi/2 - x)$, odnosno $\sin(\pi + x) = -\sin$. Tako bismo dobili grafik funkcije $y = \sin x$ na intervalu $[0, 2\pi]$ (sl. 118).

Ranije smo rekli da je $2\pi$ perioda funkcije $y = \sin x$, što znači da će se vrednosti ove funkcije ponavljati kada $x$ pređe vrednost $2\pi$. Znači, na intervalu $[2\pi, 4\pi]$ grafik će se ponoviti, a slično važi i za intervale $[4\pi, 6\pi]$, $[6\pi, 8\pi]$, ..., $[-2\pi, 0]$, $[-4\pi, -2\pi]$, ... Zato je dovoljno konstruisati grafik nad $[0, 2\pi]$, prenesemo ga nad svaki od pomenutih intervala i dobićemo grafik funkcije $y = \sin x$ (sl. 119).



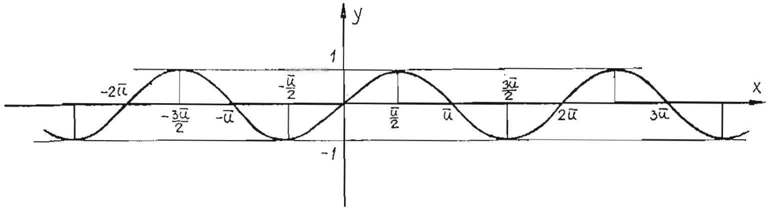


Sl. 117




Sl. 118

Vidimo da je grafik funkcije $y = \sin x$ predstavljen neprekidnom talasastom krivom. Ovu krivu zovemo *sinusoida*.




Sl. 119

2. Prikažimo sažeto dosadašnje rezultate o funkciji $y = \sin x$. (Pritom treba stalno gledati u grafik).

$1^0$ $\sin x$ je definisan za *svaki* realan broj $x$.

$2^0$ Sinus je *periodična* funkcija sa periodom $2\pi$ tj. $\sin(x+2\pi) = \sin x$.

$3^0$ Sinus je *neparna* funkcija, tj. $\sin(-x) = -\sin x$. (Pokažite da je ova osobina ekvivalentna s tim da je grafik simetričan u odnosu na koordinatni početak).

$4^0$ $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, što znači da je sinus *ograničena* funkcija.

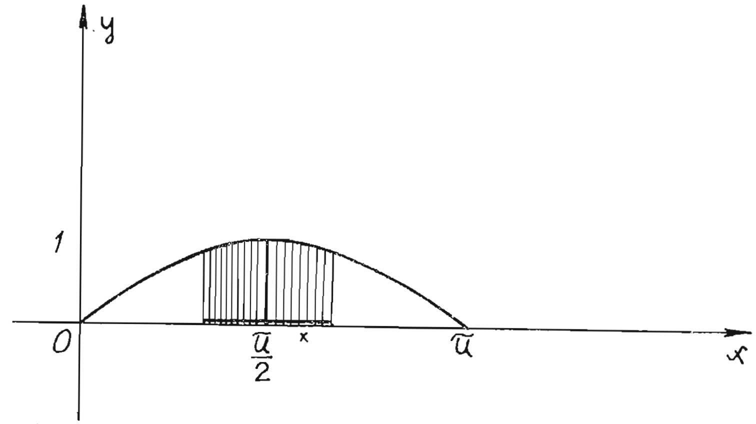
$5^0$ Kako je $0 = \sin 0 = \sin \pi = \sin(-\pi) = \sin 2\pi = \sin(-2\pi)$ ili, u opštem slučaju, $\sin k\pi = 0$, $k$ je ceo broj, to su *nule* sinusne funkcije brojevi oblika $k\pi$.

$6^0$ Za $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ vrednost sinusne funkcije rastu od $-1$ do $1$. Zbog periodičnosti, sinusna funkcija raste na intervalu $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, gde se $k$ ceo broj (to označavamo i sa $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), isto od $-1$ do $1$.

Slično, pošto sinusna funkcija opada za vrednosti $x$ za koje je $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, to će sinus opadati i za one vrednosti $x$ za koje je $2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ i to od $1$ do $-1$.

$7^0$ Ako izaberemo tačke $x$ bliske tački $\frac{\pi}{2}$, vidimo da je $\sin x < \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Zato kažemo da sinusna funkcija dostiže *maksimum* u tački $\frac{\pi}{2}$. Zbog periodičnosti biće $\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ za $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Prema tome, sinusna funkcija dostiže maksimum (najveću vrednost) u tačkama oblika $2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k$ je ceo broj.





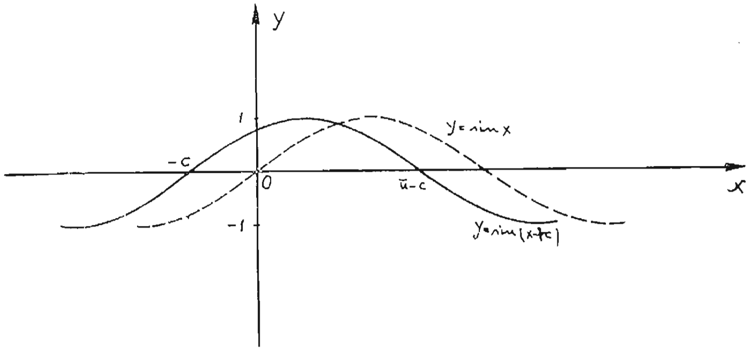

Sl. 120

Slično, pošto je $\sin\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1$, sinusna funkcija dostiže *minimum* (najmanju vrednost) u tačkama oblika $2k\pi - \frac{\pi}{2}$, $k$ je ceo broj.

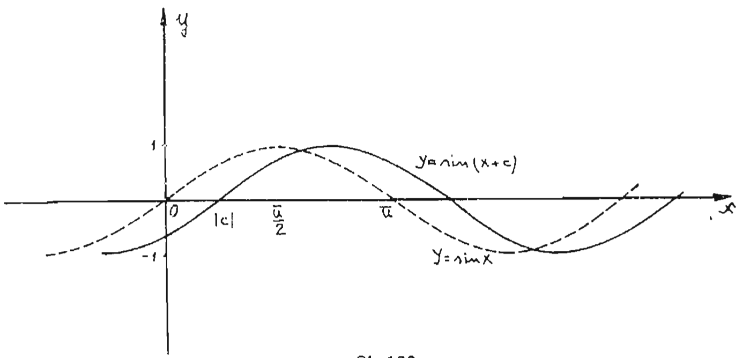
$8^0$ Ako je $0 < x < \pi$, tada je $\sin x > 0$. U opštem slučaju za $2k\pi < x < 2k\pi + \pi$, $\sin x > 0$ ($\sin x$ je *pozitivan*). Slično, za $2k\pi - \pi < x < 2k\pi$, biće $\sin x < 0$ ($\sin x$ je *negativan*). Ovde je $k$ ceo broj.

### 2. GRAFIK FUNKCIJE $y = \sin(x + c)$

U ovom slučaju pretpostavljamo da je $c$ konstanta. Razlikovaćemo dva slučaja: $1^0$ kada je $c$ pozitivno, tj. $c > 0$, i $2^0$ kada je $c < 0$, tj. $c$ je negativno. Grafik funkcije $\sin(x + c)$ dobijamo onda pomeranjem grafika funkcije $y = \sin x$ i to: $1^0$ ulevo za $c$, kada je $c > 0$ (sl. 121), $2^0$ udesno za $|c|$ ako je $c < 0$ (sl. 122).




Sl. 121




Sl. 122

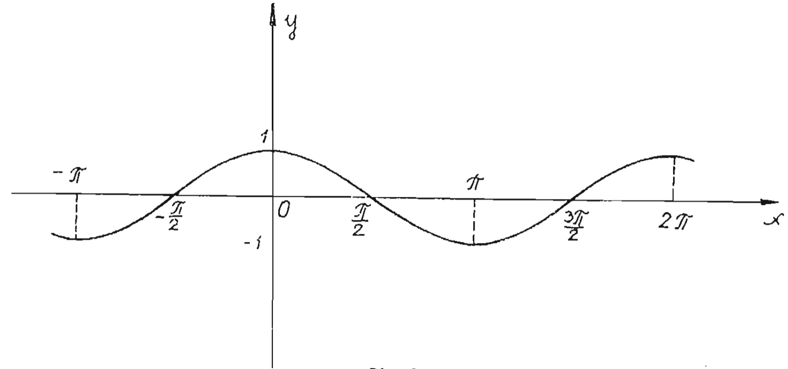
Odavde vidimo da se nule i ekstremumi pomeraju za istu vrenost $c$.

### 3. GRAFIK FUNKCIJE $y = \cos x$

Prema identitetu $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, onda je $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ Prema tački 3. možemo odmah konstruisati grafik, treba samo pomeriti grafik funkcije $y = \sin x$ za $\frac{\pi}{2}$. Odavde zaključujemo da je:



$1^0$ $\cos x$ je definisan za svaki realan broj $x$.
$2^0$ $\cos(2\pi + x) = \cos x$, $2\pi$ je perioda kosinusne funkcije.
$3^0$ $\cos(-x) = \cos x$, kosinus je parna funkcija.
$4^0$ $-1 \geqslant \cos x \geqslant 1$.




Sl. 123

$5^0$ $\cos\left(2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$, $k$ je ceo broj. Brojevi oblika $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ su nule kosinusne funkcije.

$6^0$ Kosinusna funkcija dostiže maksimum u brojevima oblika $2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, tj. $\cos 2k\pi = 1$. Slično $\cos(2k\pi + \pi) = -1$, te kosinus dostiže minimum u brojevima oblika $2k\pi + \pi$.

$7^0$ Kosinus monotono raste na intervalima oblika $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$, a opada na intervalima oblika $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

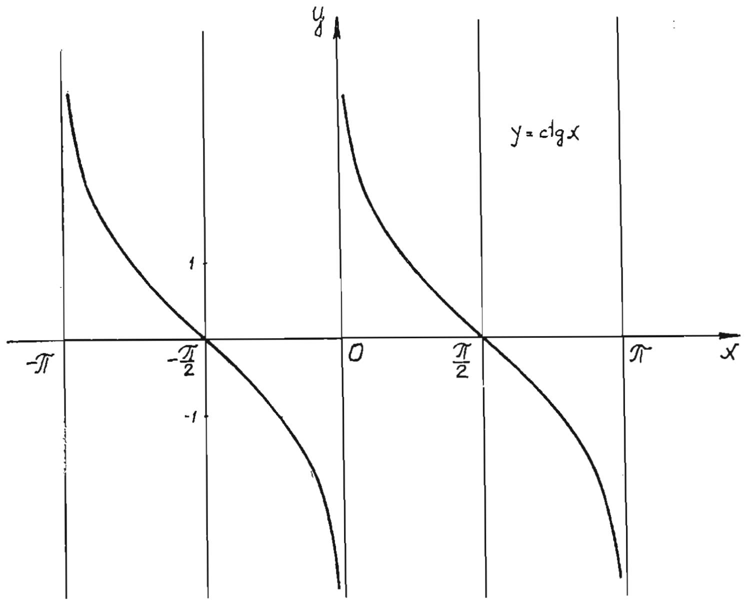
$8^0$ Ako je $2k\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ tada je $\cos x > 0$. Ako je $2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ tada je $\cos x < 0$. Ovde je $k$ ceo broj.

### 4. GRAFICI FUNKCIJE $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{ctg} x$

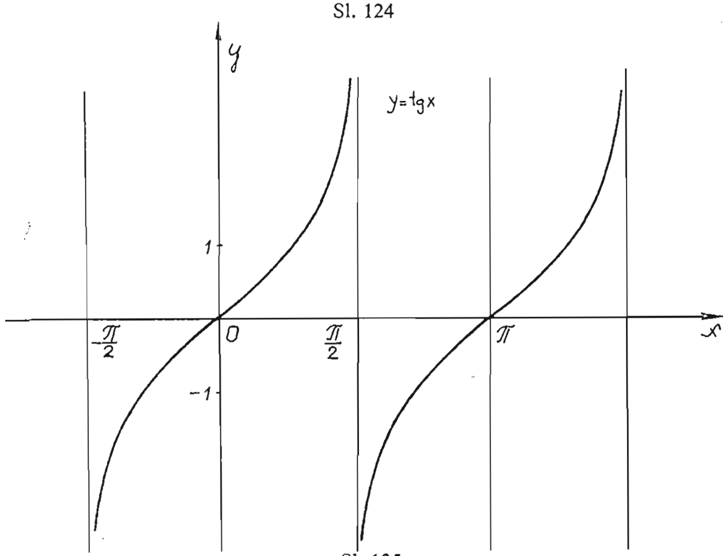
$1^0$ $\operatorname{tg} x$ je definisan za svaki $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $1'$ $\operatorname{ctg} x$ je definisan za $x \neq k\pi$.

$2^0$ $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ $\quad$ $2'$ $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$

$\pi$ je osnovna perioda obe funkcije.




Sl. 124




Sl. 125



3⁰ Obe funkcije su neograničene.

4⁰ $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ 4′ $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$

Obe funkcije su nerapne.

5⁰ $\operatorname{tg} k\pi = 0$ 5′ $\operatorname{ctg}\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

6⁰ Tangens stalno raste. 6′ Kotangens stalno opada.

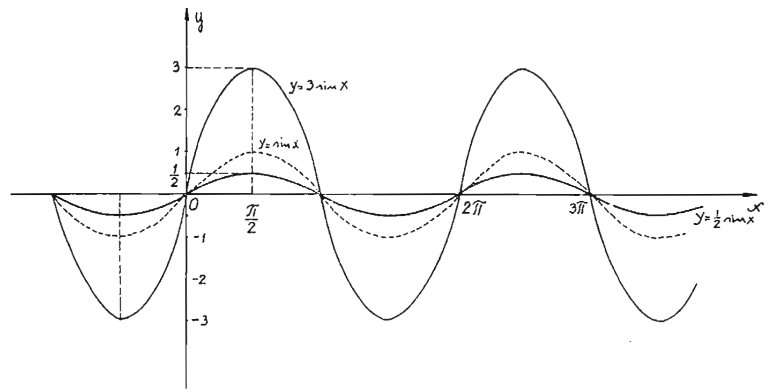
7⁰ Prave $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ su *asimptote* tangensne funkcije. 7′ Prave $x = k\pi$ su *asimptote* kotangesne funkcije.

## 5

U ovom delu proučićemo grafike nekih složenijih trigonometrijskih funkcija.

### 1. FUNKCIJA $y = a \sin x$, $a \neq 0$

Grafik ove funkcije dobija se tako, što se ordinata svake tačke na sinusoidi pomnoži sa brojem $a$. Inače, i dalje važe mnogobrojne




Sl. 126

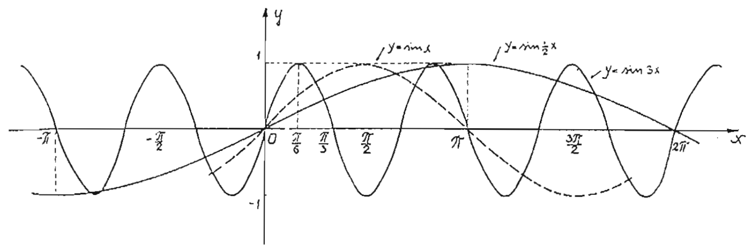
osobine kao i za sinusnu funkciju. Ako je $f(x) = a \sin x$ biće $f(x+2\pi) = a \sin(x + 2\pi) = a \sin x$, te je $2\pi$ perioda i ove funkcije. Dalje,

$|a \sin x| = |a|\,|\sin x| \leqslant |a| \cdot 1 = |a|$, što znači da je funkcija ograničena. Broj $|a|$ zovemo *amplitudom*. *Nule* su iste kao kod sinusa, tj. to su brojevi $x = k\pi$, $k$ je ceo broj. Ekstremne vrednosti zavise od znaka broja $a$. Ako je $a > 0$, funkcija $f$ dostiže maksimum i minimum kao i sinus. Ako je $a < 0$, uloge se menjaju, tj. u $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ funkcija dostiže minimum, a u $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ dostiže maksimum.

*Primer*. Odrediti grafik funkcije a) $y = 3 \sin x$, b) $y = \frac{1}{2} \sin x$.

## 2. FUNKCIJA $y = \sin bx$

Ovde pretpostavljamo da je $b \neq 0$ (šta biva ako je $b = 0$?) Označimo sa $f$ ovu funkciju. Tada je $f(x) = \sin bx$. Kako je $f\left(\frac{2\pi}{b} + x\right) = \sin b\left(\frac{2\pi}{b} + x\right) = \sin(2\pi + bx) = \sin bx = f(x)$, to je $f\left(\frac{2\pi}{b} + x\right) = f(x)$. Znači, broj $T = \frac{2\pi}{b}$ je perioda ove funkcije. Broj $b$ nam pokazuje koliko ima talasa sinusoide na intervalu dužine $2\pi$. Zbog toga se broj $b$ zove frekvencija (učestanost).




Sl. 127

Odredimo nule ove funkcije. Treba da bude $\sin bx = 0$, a to će biti za $bx = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Otuda nule funkcije $y = \sin bx$ su $\frac{k\pi}{b}$, $k$ je ceo broj. Slično nalazimo, da u brojevima oblika $\frac{1}{b}\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ funkcija dostiže maksimum, a u $\frac{1}{b}\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right)$ minimum.



Kako je $f(-x) = \sin[b(-x)] = \sin(-bx) = -\sin bx = -f(x)$, ova funkcija je neparna.

*Primer*. Odrediti grafik funkcije a) $y = \sin 3x$, b) $y = \sin \frac{1}{2} x$.

Neke karakteristike funkcije na slici: Perioda funkcije $y = \sin x3$ je $T = \frac{2\pi}{3}$. Nule su oblika $\frac{k\pi}{3}$, $k$ je ceo broj. U intervalu $[0, 2\pi]$ to su $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$. Maksimume dostiže u brojevima oblika $\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)/3 = \frac{(4k+1)\pi}{6}$, k je ceo broj. Slična analiza može se sprovesti i za funkciju $y = \sin \frac{1}{2} x$ (uradite to).

## 3. FUNKCIJA $y = a \sin(bx + c)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$

U ovom slučaju možemo koristiti osobine funkcija $y = a \sin x$, $y = \sin bx$ i $y = \sin(x + c)$, koje smo do sada proučili. Vidimo da funkcija zavisi od tri parametra: $a$, $b$, $c$. Za ovu funkciju važi:

$1^0$ Ova funkcija je definisana za svaki realan broj $x$. Zaista, $bx + c$ jednak je nekom broju $x'$, a $\sin x'$ je definisanno.

$2^0$ Perioda ove funkcije je $T = \frac{2\pi}{b}$, što se pokazuje kao u 2.

$3^0$ Amplituda ove funkcije je $|a|$, a frekvencija je $b$. Broj $-\frac{c}{b}$ zovemo *pomeranje faze* (pomeranjem za $-\frac{c}{b}$ grafika funkcije $y = a \sin bx$ dobija se grafik funkcije $y = a \sin(bx + c)$). Broj $c$ zove se početna faza.

$4^0$ Nule funkcije nalazimo iz jednačine $\sin(bx + c) = 0$, a to će biti za $bx + c = k\pi$, $k$ je ceo broj, tj. $x = (k\pi - c)/b$.

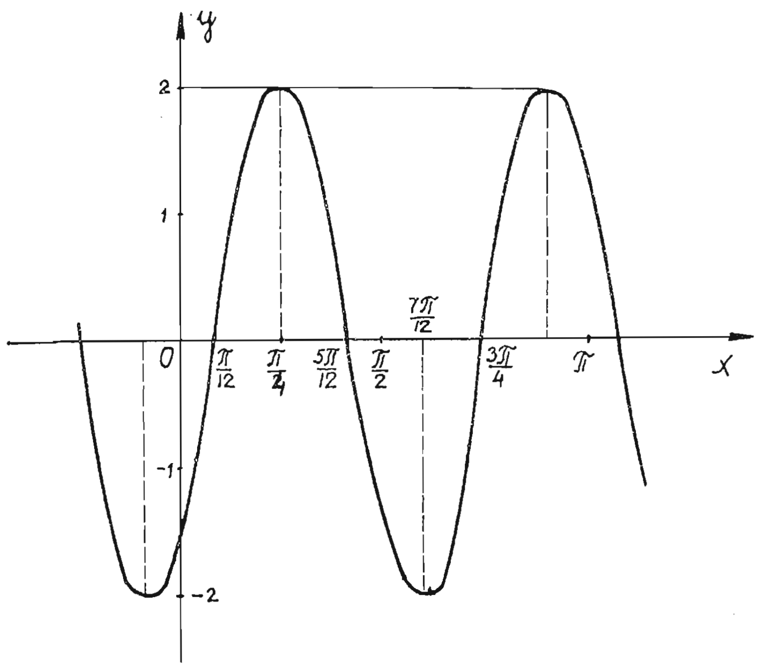
$5^0$ Pretpostavimo da je $a > 0$. Maksimume funkcije nalazimo iz jednačine $\sin(bx + c) = 1$, a to će biti za $bx + c = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k$ je ceo broj. Tada je $y = a$. Slično, minimume određujemo iz jednačine $bx + c = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$. Tada je $y = -a$.

$6^0$ Ako je $a > 0$ funkcija je pozitivna ako je $2k\pi < bx + c < 2k\pi + \pi$, a negativna za $2k\pi - \pi < bx + c < 2k\pi$, $k$ je ceo broj.
Neka je $a < 0$. Funkcija je negativna ako je $2k\pi < bx + c < 2k\pi + \pi$, a pozitivna za $2k\pi - \pi < bx + c < 2k\pi$.

*Važna napomena*: Pošto je funkcija periodična sa periodom $T = \frac{2\pi}{b}$, to je dovoljno ispitati ovu funkciju na intervalu $\left[0, \frac{2\pi}{b}\right]$. Osobine ove funkcije u ostalim tačkama dobijaju se iz jednakosti $f(x + T) = f(x)$, a grafik pomeranjem za $T$.

*Primer*. Odrediti grafik funkcije $y = 2\cos\left(3x - 3\frac{\pi}{4}\right)$.

*Rešenje*: Kako je $\cos\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(3x - \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$, to je $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.




Sl. 128



$1^0$ Perioda je $T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3}$.

$2^0$ Amplituda je 2, frekvencija 3, pomeranje faze je $-\frac{\pi}{12}$, a početna faza je $-\frac{\pi}{4}$.

$3^0$ Nule funkcije su rešenje jednačine $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, a to će biti za $3x - \frac{\pi}{4} = k\pi$. Odavde je $x = \frac{\pi}{3}(k + 1/4)$. Nule su, na primer, $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}$.

$4^0$ Maksimum funkcije dostignut je za $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, a to će biti za $3x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, odakle je $x = \frac{\pi}{3}(2k + 3/4)$, na pr. za $k = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$. Tada je $y = 2$. Minimum funkcije dostignut je za $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$, a to će biti za $3x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, odakle je $x = \frac{\pi}{3}(2k - 1/4)$, na pr. za $k = 1$ $x = \frac{7\pi}{12}$. Tada je $y = -2$. Ovde je $k$ bio ceo broj.

$5^0$ Za $\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$ je $y > 0$, za $\frac{5\pi}{12} < x < \frac{3\pi}{4}$ je $y < 0$.

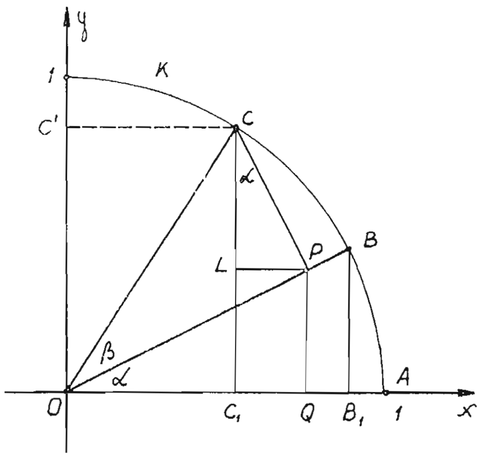
Na osnovu ovih podataka možemo nacrtati grafik, prvo na intervalu $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}\right]$, a zatim, prenošenjem, ceo grafik zadate funkcije.

## 6

Pretpostavimo da su nam poznate vrednosti trigonometrijskih funkcija uglova $\alpha$ i $\beta$. Možemo se pitati da li je onda moguće odrediti vrednosti trigonometrijskih funkcija ugla $\alpha + \beta$, na pr. $\sin(\alpha + \beta)$. Videćemo da je odgovor pozitivan.

## 1. ADICIONA TEOREMA ZA SINUS

Uočimo dva nadovezana ugla $\alpha = \sphericalangle AOB$, $\beta = \sphericalangle BOC$ u jediničnom krugu $K$, tako da je $\alpha + \beta \leqslant 90°$. Očigledno je $\alpha + \beta = \sphericalangle AOC$ i $\sin(\alpha + \beta) = \overline{CC_1}$. Neka je $CP \perp OB$, $C_1$ normalna projekcija tačke $C$ na $x$-osu, $PL \perp CC_1$, $Q$ normalna projekcija tačke $P$ na $x$-osu. Nalazimo da je $\overline{CC_1} = \overline{CL} + \overline{LC_1}$, tj. $\sin(\alpha + \beta) = \overline{CL} + \overline{LC_1}$.




Sl. 129

$1^0$ Nađimo vrednost za $\overline{LC_1}$.

Iz pravougaonika $LPQC_1$ nalazimo $\overline{LC_1} = \overline{PQ}$. Iz pravouglog trougla $\triangle\, OPQ$ je $\overline{PQ}/\overline{OP} = \sin\alpha$, odakle $\overline{PQ} = \sin\alpha \cdot \overline{OP}$. Iz pravouglog trougla $\triangle\, OPC$ imamo $\cos\beta = \overline{OP}/\overline{OC} = \overline{OP}/1 = \overline{OP}$, $\overline{OP} = \cos\beta$. Otuda je $\overline{LC_1} = \sin\alpha\cos\beta$.

$2^0$ Nađimo vrednost za $\overline{CL}$.

Kako su $\sphericalangle LCP$ i $\sphericalangle AOB$ uglovi sa uzajamno normalnim kracima, to su oni jednaki, tj. $\alpha = \sphericalangle LCP$. Iz pravouglog trougla $\triangle\, LPC$ nalazimo $\overline{CL}/\overline{CP} = \cos\alpha$, tj $\overline{CL} = \cos\alpha \cdot \overline{CP}$. Iz pravouglog trougla $\triangle\, OPC$ imamo $\sin\beta = \overline{CP}/\overline{OP} = \overline{CP}/1 = \overline{CP}$, $\overline{CP} = \sin\beta$. Otuda je $\overline{CL} = \cos\alpha\sin\beta$.



Sada nalazimo vrednost za $\sin(\alpha + \beta)$:

$$\sin(\alpha+\beta) = \overline{LC_1} + \overline{CL} = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \text{ tj.}$$

$$(1)\qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

*Napomena.* Navedena formula važi za *proizvoljne* uglove $\alpha$ i $\beta$, ne samo pri uslovu $\alpha + \beta < 90°$, što ovde nećemo dokazivati.

Nađimo sada $\sin(\alpha - \beta)$. Ovde ćemo koristiti prethodnu napomenu, neparnost sinusne funkcije i parnost kosinusa.

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin[\alpha + (-\beta)] = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha(-\sin\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \text{ tj.}$$

$$(2)\qquad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

## 2. ADICIONE FORMULE ZA OSTALE TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

Ovde koristimo poznate osobine trigonometrijskih funkcija i već dokazane adicione formule za sinus.

$$1^0\quad \cos(\alpha+\beta) = \sin\left[\frac{\pi}{2} + (\alpha+\beta)\right] = \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \beta\right] =$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cos\beta + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin\beta =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \text{ tj.}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

$$2^0\quad \cos(\alpha-\beta) = \cos[\alpha + (-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) -$$
$$- \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \text{ tj.}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

$$3^0\quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} =$$
$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} =$$
$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \text{ tj. } \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$4^0\ \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}-1}{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}=$$

$$=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta},\ \text{tj. } \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}.$$

*Primer* 1⁰ Ako znamo $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{tg}\beta$, gde su $\alpha$ i $\beta$ uglovi u trouglu, odrediti $\operatorname{tg}\gamma$.

*Rešenje.* Kako je $\alpha+\beta+\gamma=180°$, to je $\gamma=180-(\alpha+\beta)$. Otuda:

$$\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}[180°-(\alpha+\beta)]=\operatorname{tg}[-(\alpha+\beta)]=-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=$$

$$=-\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

*Primer* 2⁰ Odrediti $\sin 75°$.

*Rešenje.* $\sin 75°=\sin(30°+45°)=\sin 30°\cos 45°+$

$$+\cos 30°\sin 45°=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Otuda $\sin 75°=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$.

*Primer* 3⁰ $\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=$
$=2\sin\alpha\cos\alpha$, tj.

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$

tj. $$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$



### 3. VREDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA OD POLOVINE UGLA

Ako u identičnostima $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$, $\cos 2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\beta$ stavimo $\beta=\alpha/2$, dobijamo:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1,\quad \cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha.$$

Kad saberemo ove dve jednakosti, dobijamo $2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha$. Ako od prve identičnosti oduzmemo drugu, dobijamo $2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$. Otuda je:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Pošto je $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha/2}{\cos\alpha/2}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\cos\alpha/2}{\sin\alpha/2}$, imamo:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},\quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

Znak biramo prema tome u kom se kvadrantu nalazi drugi krak ugla $\dfrac{\alpha}{2}$ (§ 2.6.)

*Primer.* Naći $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

*Rešenje.* $\sin\dfrac{\pi}{12}=\sin\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{\dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{6}}{2}}=$

$$=\sqrt{\frac{1-\sqrt{\dfrac{3}{2}}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{6}}}{2}.$$

## 4. PRETVARANJE ZBIRA I RAZLIKE TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA U PROIZVOD

Pođimo od identiteta:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

Ako ove identitete saberemo, dobija se:

(*) $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cdot \cos y.$

Stavimo $\alpha = x + y$, $\beta = x - y$. Tada je $x = (\alpha+\beta)/2$, $y = (\alpha-\beta)/2$. Zamenom u poslednji identitet dobijamo:

(1) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$

Primenom ovog identiteta i ranijih veza imamo:

$$\sin\alpha - \sin\beta = \sin\alpha + \sin(-\beta) = 2\sin\frac{\alpha+(-\beta)}{2}\cos\frac{\alpha-(-\beta)}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \text{ tj.}$$

(2) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$

Dalje: $\cos\alpha + \cos\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) =$

$$= 2\sin\frac{\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{2}\cos\frac{\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{2} =$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \text{tj.}$$

(3) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$



Slično: $\cos\alpha - \cos\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) =$

$$= 2\sin\frac{\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{2}\cos\frac{\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \text{ tj.}$$

(4) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$

*Zadatak*: Pokažite da je:

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

Primetimo da smo u (*) pokazali da je i $\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$. Kako glase analogne formule?

## 5. TRIGONOMETRIJSKE JEDNAČINE

$1^0$ Jednačina $\sin x = c$. Kako je $|\sin x| \leqslant 1$, to, da bi ova jednačina imala rešenje, mora biti $-1 \leqslant c \leqslant 1$. Pretpostavimo da je ispunjen taj uslov. Iz tablica nađemo ugao $\varphi$ (da li je on jednoznačno određen?) za koji je $\sin\varphi = c$. Tada imamo $\sin x = \sin\varphi$, odakle $\sin x - \sin\varphi = 0$.

Ako levu stranu pretvorimo u proizvod, dobija se $2\sin\frac{x-\varphi}{2}$ $\cos\frac{x+\varphi}{2} = 0$. Tada je $\sin\frac{x-\varphi}{2} = 0$ *ili* $\cos\frac{x+\varphi}{2} = 0$. Otuda su sva rešenja:

a) $\frac{x-\varphi}{2} = k\pi$, odnosno $x = \varphi + 2k\pi$

$k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots,$

b) $\frac{x+\varphi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}$, odnosno $x = -\varphi + (2k+1)\pi$

*Primer*: Rešiti jednačinu $2\sin x = 1$. *Rešenje*: Navedena jednačina ekvivalentna je sa $\sin x = 1/2$. Kako je $\sin \pi/6 = 1/2$ imamo $\sin x = \sin \pi/6$ tj. $\sin x - \sin \pi/6 = 0$. Otuda $2\sin\dfrac{x-\dfrac{\pi}{6}}{2}\cos\dfrac{x+\dfrac{\pi}{6}}{2} = 0$. Prema tome, rešenja su:

a) $\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = k\pi$ tj. $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6}$  $\quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

b) $\dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ tj. $x = (2k+1)\pi - \dfrac{\pi}{6}$

$2^0$ Jednačina $a\sin x + b\cos x = c$, $a, b \neq 0$.

Izaberimo $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$. Otuda je $r^2 = r^2 \cdot 1 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = a^2 + b^2$, odakle $r = \sqrt{a^2+b^2}$. Dalje, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \dfrac{b}{a}$. Iz tablica nalazimo ugao $\varphi$ za koji je $\operatorname{tg}\varphi = b/a$. Kada zamenimo $a$ i $b$, preko dobijenih veza imamo: $a\sin x + b\cos x = r\cos\varphi\sin x + r\sin\varphi\cos x = r\sin(x+\varphi)$. Prema tome, dobijena jednačine ekvivalentna je sa jednačinom $\sin(x+\varphi) = c/r$, a ovu znamo da rešimo. Pokažite da, ako ova jednačina *ima* rešenje, onda *mora* da bude ispunjen uslov

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leqslant c \leqslant \sqrt{a^2+b^2}.$$

*Primer*: Rešiti jednačinu $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$. *Rešenje*: Ovde je $a = 1$, $b = \sqrt{3}$. Nalazimo $r^2 = a^2 + b^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 1+3 = 4$, odakle $r = 2$. Dalje, $\operatorname{tg}\varphi = b/a = \sqrt{3}/1 = \sqrt{3}$. Kako je $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ možemo uzeti da je $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Otuda data jednačina ekvivalentna je sa $2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$, odnosno $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1/2$. Prema tome, opšte rešenje naše jednačine biće:

a) $x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{6}$  b) $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Za $k = 0$ imamo $x = -\pi/6$ *ili* $x = \pi/2$.



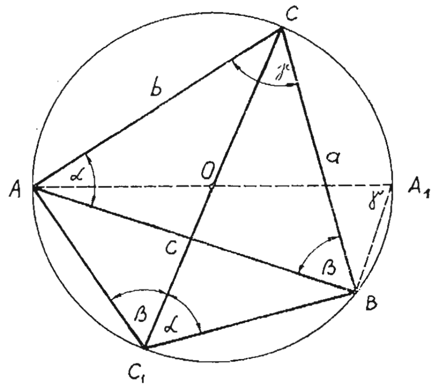
$3^0$ Jednačina $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$. Ovde stavljamo $\sin x = z$ te dobijamo kvadratnu jednačinu $az^2 + bz + c = 0$. Neka su $z_1$ i $z_2$ rešenja ove kvadratne jednačine. Tada je $\sin x = z_1$ *ili* $\sin x = z_2$, a ovaj tip jednačine znamo da rešimo.

# 7

U ovom delu prikazaćemo uzajamnu povezanost između vrednosti trigonometrijskih funkcija uglova i stranica u bilo kom trouglu.

## 1. SINUSNA TEOREMA

Uočimo $\triangle ABC$ čiji su svi uglovi oštri i opišimo oko njega krug $K$ sa centrom $O$ i prečnikom $2R$. Neka su $\alpha, \beta, \gamma$ uglovi i $a, b, c$ stranice tog trougla. Neka je $C_1$ simetrična tačka tački $C$ u odnosu na centar $O$.



Sl. 130

Tada je $\alpha = \measuredangle CAB = \measuredangle CC_1B$ kao periferijski uglovi nad istim lukom. Iz istog razloga je $\beta = \measuredangle ABC = \measuredangle AC_1C$. Kako su uglovi $\measuredangle C_1AC$ i $\measuredangle C_1BC$ pravi, kao periferijski uglovi nad prečnikom, iz pravouglih trouglova $\triangle C_1AC$ i $\triangle C_1BC$ nalazimo: $\sin\alpha = a/C_1C = a/2R$, $\sin\beta = b/C_1C = b/2R$ odnosno $a/\sin\alpha = 2R$, $b/\sin\beta = 2R$.

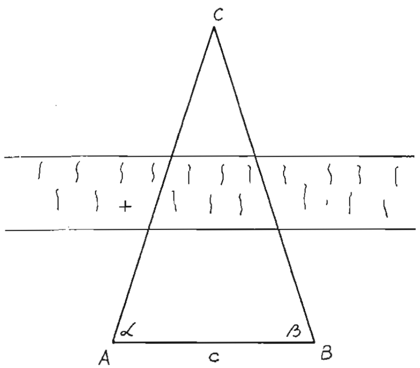
Ako uzmemo tačku $A_1$ simetričnu tački $A$ u odnosu na centar 0 i ponovimo prethodni postupak, dobili bismo: $c/\sin\gamma = 2R$. Prema tome je: $a/\sin\alpha = b/\sin\beta = c/\sin\gamma = 2R$. To je, upravo, tvrđenje sinusne teoreme: Stranice trougla proporcionalne su sinusima naspramnih uglova i taj odnos jednak je prečniku.

Sličan postupak može da se primeni (Uradite to) ako je jedan ugao, na primer $\alpha$, tup i u tom slučaju sinusna teorema takođe važi.

Sinusna teorema može se primeniti za rešavanje trougla ako je dato:

$1^0$ Dva ugla i jedna stranica,
$2^0$ Dve stranice i jedan ugao naspram njih,
$3^0$ Dva ugla i poluprečnik opisanog kruga,
$4^0$ Dve stranice i poluprečnik opisanog kruga.

*Primer*: Neki objekt $C$ nalazi se na suprotnoj obali reke. Treba odrediti rastojanje $x$ tog objekta od tačke $A$ ne prelazeći reku. *Rešenje*: Uočimo još jednu tačku $B$ na istoj obali reke gde je tačka $A$. Rastojanje $c = \overline{AB}$ i uglove $\alpha$, $\beta$ možemo izmeriti (za to postoje instrumenti). Prema tome, imamo dva poznata ugla $\alpha$, $\beta$ i stranu $c$ trougla $\triangle ABC$. Dalje je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, odakle $\gamma = 180° - (\alpha - + \beta)$, te, prema sinusnoj teoremi, $x/\sin\beta = c/\sin\gamma$. Otuda je $x = c \sin\beta / \sin[180° - (\alpha + \beta)] = c \sin\beta / \sin(\alpha + \beta)$.



Sl. 131

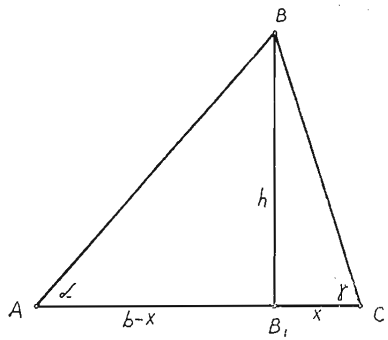
## 2. KOSINUSNA TEOREMA

Uočimo trougao $\triangle ABC$ čiji su uglovi oštri. Neka su $a, b, c$ stranice, a $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ uglovi trougla. Neka je $B_1$ podnožje normale iz tačke $B$ na stranicu $AC$ i $x = \overline{B_1C}$. Tada je $\overline{AB_1} = b - x$. Neka je $h = BB_1$. Iz pravouglih trouglova $\triangle AB_1B$, $\triangle CB_1B$ nalazimo, primenom Pitagorine teoreme: $h^2 = c^2 - (b - x)^2$, $h^2 = a^2 - x^2$. Pošto su leve strane jednake, imamo $a^2 - x^2 = c^2 - (b - x)^2$, odakle sređivanjem dobijamo

(1) $c^2 = a^2 + b^2 - 2bx$

Iz pravouglog trougla $\triangle CB_1B$ nalazimo $\cos\gamma = x/a$, odakle $x = a\cos\gamma$. Zamenom $u$ (1), dobijamo

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab\cos\gamma.$$



Sl. 132

Navedena relacija upravo predstavlja tvrđenje kosinusne teoreme. Sličan postupak može da se ponovi ako je ugao tup (uradite to) i kosinusna teorema, takođe, važi.

*Primedba*. Važe i simetrične relacije:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

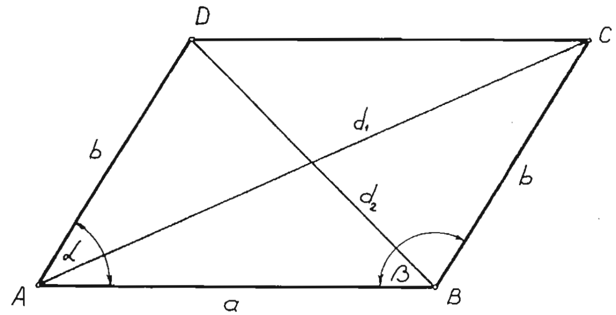


Kosinusnu teoremu primenjujemo na rešavanje trougla ako je dato:

1° Tri stranice.

2° Dve stranice i zahvaćeni ugao.

*Primer*: Neka su date stranice $a$, $b$ romboida i ugao $\alpha$. Odrediti njegove dijagonale. *Rešenje*: Ako označimo sa $\alpha$ ugao $\sphericalangle DAB$, tada je $\beta = 180° - \alpha = \sphericalangle ABC$. Neka je $d_1$ veća, a $d_2$ manja dijagonala.



Sl. 127

Primenom kosinusne teoreme na trougao $\triangle ABC$, imamo: $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha)$, odakle je $d_1^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$.

Slično, iz trougla $\triangle ADB$ neposrednom primenom kosinusne teoreme nalazimo $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$.

Sabiranjem dobijamo ovaj identitet: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

## ZADACI IZ TRIGONOMETRIJE

1. Izraziti uglove od a) $1°$, $30°$, $90°$, $150°$, $180°$, $270°$, $360°$, $1000°$, b) $27{,}3°$, $35°15'20''$ radijanima.

2. Izraziti ugao od a) $\pi$, $4\pi$, $3/2\pi$, $100\pi$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ b) 1, 5, 2,7 radijana stepenima.

3. Neka je dat centralni ugao od $\pi$ radijana u krugu poluprečnika 2. Odrediti dužinu odgovarajućeg luka i površinu kružnog isečka.

4. Predstaviti radijus vektore u ravni $XOY$ ako imaju koordinate $(2, 1)$, $(-1, 3)$, $(-3, -1)$. Naći intenzitete ovih vektora i uglove koje zaklapaju sa $x$-osom.

5. Neki promenljivi radijus vektor sa koordinatama a) $(x, x+1)$, b) $(x, x^2)$ kreće se u ravni $XOY$. Odrediti u oba slučaja skup vrhova tih vektora i njihove intenzitete.

6. U kojim kvadrantima leže uglovi od $2°$, 2 radijana, $500°$, $10\pi$ radijana $-130°$, $-600°$?

7. Ponoviti definiciju trigonometrijskih funkcija.

8. Zna se da je a) $\sin x = 12/13$, b) $\cos y = 1/2$, c) $\operatorname{tg} z = 1$ i da su svi uglovi oštri. Naći ostale vrednosti trigonometrijskih funkcija.

9. Transformisati $(1+\cos x)\cdot(1-\cos x)+\operatorname{tg} x(\operatorname{ctg}^2 x - 1)$ u izraz u kojem će učestvovati samo $\operatorname{tg} x$.

10. Uprostiti izraz $\dfrac{\sin^2\alpha\cos\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}+\cos\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\beta<\frac{\pi}{2}$.

11. Naći vrednost trigonometrijskih funkcija od ugla: $150°$, $270°$, $330°$.

12. Odrediti ostale elemente pravouglog trougla ako je dato: a) katete $a=2$, $b=3$, b) kateta $a=1$ i hipotenuza $c=2$, c) ugao $\alpha=15°$ i hipotenuza $c=10$, d) visina $h=3$ iz temena $C$ i $\alpha=25°$ e) zbir kateta $a+b=10$ i ugao $\alpha=75°$.

13. Izraziti zadate vrednosti trigonometrijskih funkcija preko oštrih uglova:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $\sin 130°$, | 2. $\cos 170°$, | 3. $\operatorname{tg} 92°$, | 4. $\sin 210°$, |
| 5. $\cos 230°$, | 6. $\operatorname{tg} 189°$, | 7. $\operatorname{ctg} 179°$, | 8. $\sin 320°$, |
| 9. $\cos 285°$, | 10. $\operatorname{tg} 355°$, | 11. $\operatorname{ctg} 345°$, | 12. $\sin 400°$, |
| 13. $\cos 660°$, | 14. $\operatorname{tg} 1000°$, | 15. $\operatorname{ctg} 1500°$, | 16. $\sin -1°$, |
| 17. $\cos -91°$, | 18. $\operatorname{tg} 10\pi$ | 19. $\operatorname{ctg} 21\pi/4$ | |



14. Uprostiti sledeće izraze:

1. $\dfrac{\sin\alpha\operatorname{tg}(180°-\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha\cos(90°-\alpha)}$ 2. $\sin^2 ax+\cos^2 ax$

3. $\dfrac{\operatorname{tg}(90°+\alpha)\cos(360°-\alpha)\cos(180°-\alpha)}{\operatorname{ctg}(360°+\alpha)\sin(180°+\alpha)}$ 4. $(a\operatorname{sos}\varphi+a\sin\varphi)^2$

15. Konstruisati grafike sledećih funkcija:

1. $y=\sin(x+30°)$, 2. $y=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, 3. $y=\operatorname{tg}(x-45°)$

4. $y=2\sin(-x)$, 5. $y=\cos(3x+1)$, 6. $y=\operatorname{tg} 2x$

7. $y=\cos^2 x$, 8. $y=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x$, 9. $y=\sin x\cdot\cos x$

Izvršiti takođe analizu zadatih funkcija.

16. Naći: $\sin 2\alpha$, ako je $\cos\alpha=\sqrt{2}/2$.

17. Naći vrednosti trigonometrijskih funkcija uglova $15°$, $22{,}5°$, $105°$, $375°$, $165°$.

18. Naći vrednosti trigonometrijskih funkcija od $18°$, $36°$, $3°$.

19. Naći $\sin 3x$, $\cos(x+y+z)$, $\sin(x+y-z)$.

20. Neka su $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ uglovi u trouglu, dokazati da je

1. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$

2. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

3. $\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$

21. Dokazati sledeće identitete:

1. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$,

2. $\operatorname{tg}(\alpha\pm 45°)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\pm 1}{1\pm\operatorname{tg}\alpha}$ 3. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg} 2\alpha$

4. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}=\operatorname{tg}\alpha$

5. $\cos 15^\circ-\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6. $\operatorname{tg}(\alpha+45^\circ)+\operatorname{tg}(\alpha-45^\circ)=2\operatorname{tg}2\alpha$

22. Rešiti sledeće trigonometrijske jednačine:

$1^0$ $\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ $\quad$ $2^0$ $\operatorname{tg}\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

$3^0$ $\sin x=\cos x$ $\quad$ $4^0$ $\operatorname{tg}3x=\operatorname{ctg}x$

$5^0$ $\sin x+\cos x=1$ $\quad$ $6^0$ $\sin 2x=-\dfrac{1}{2}$

$7^0$ $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$ $\quad$ $8^0$ $\sin^2 x+\cos^2 x=0$

$9^0$ $\sin x\sin 2x\sin 3x=0$

23. Rešiti trougao ako je dato:

1. $a=15,\ b=14,\ c=13$ $\quad$ 2. $b=130,\ c=150,\ \alpha=42^\circ50'$

3. $a=45$ m, $b=30$ m $P=400$ m$^2$

4. $h=100,\ \alpha=65^\circ,\ \beta=45^\circ$ $\quad$ 5. $a,\ b,\ hc$

6. $a+b,\ ha,\ \beta$ $\quad$ 7. $P,\ 2s,\ \alpha$ $\quad$ 8. $R,\ \alpha,\ ha$

24. Tetiva jednog luka je 2/3 od prečnika. Naći broj stepeni, minuta i sekundi tog luka.

25. Poznat je poluprečnik kruga $r=1$, na koji su iz neke tačke u istoj ravni povučene dve tangente koje između sebe zahvataju ugao od 40°. Izračunati površinu obuhvaćenu tangentama do dodirnih tačaka $B$ i $C$ i lukom $BC$.

26. Dva druma seku se pod uglom od 135°. U tom uglu leži selo koje je od jednog druma udaljeno 5 km, a od drugog 3 km. Koliko je selo udaljeno od raskršća?



Lektor
*Miodrag Ignjatović*

*

Korektor
*Ing Slavoljub Mihailović*

*

Naslovna strana
*Milan Bojer*

*

Ilustrator
*David Paljić*