UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

OOUR ZA MATEMATIKU, MEHANIKU I ASTRONOMIJU

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА
Број: Dokt. 12/1
Датум: 17. 09. 1987.

STEVO D. ŠEGAN

PRILOG IZUČAVANJU KRETANJA ZEMLJINIH VEŠTAČKIH SATELITA U VISOKOJ ATMOSFERI

(d o k t o r s k a d i s e r t a c i j a)

B E O G R A D 1987. G.

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА
Број:
Датум:

S A D R Ž A J

UVOD

Ne upuštajući se u detaljniju analizu razvoja NEBESKE MEHANIKE treba reći samo da je njen razvoj naglo usporen počev od četrdesetih godina ovog veka, jer su skoro svi klasični zadaci do tada bili ili rešeni ili definisani uslovi njihove rešivosti; osim toga, naučnici su u potpunosti bili koncentrisali pažnju na račun specijalnih putanja - malih planeta, kometa i sl. Pripremom i lansiranjem prvih Zemljinih veštačkih satelita (dalje ZVS) nebeska mehanika je dobila novi istraživački impuls . Pokazalo se da u oblasti analitičkih rešenja osnovnih zadataka nebeska mehanika mora da koristi matematički aparat razvoja u redove koji, u prisustvu moćnih računarskih sistema, omogućavaju dobijanje rešenja sa željenom (zadovoljavajućom) tačnošću.

Teorija kretanja Zemljinih veštačkih satelita ima posebno mesto u Nebeskoj mehanici zbog kinematičkih i dinamičkih posebnosti problema kretanja i zbog izražene potrebe za efektivnošću. Dovoljno je reći da su poremećaji putanje relativno veoma veliki, da centralno telo i satelit ne mogu da se posmatraju kao materijalne tačke, da broj satelita raste sve brže kao i broj i raznovrsnost njihovih korisnika i da zahtevi za tačnošću postaju sve stroži, kako u odnosu na prošlost, tako i u odnosu na budućnost orbite. Pokazalo se da najveći broj zahteva može da se zadovolji samo uvodjenjem računara u praksu.

U smislu izučavanja kretanja satelita ovaj rad pre svega ima za cilj da ostvari astronomske okvire analitičkog rešavanja zadataka nebeske mehanike uz pomoć računara, a i konkretno rešavanje zadataka teorije kretanja ZVS. Kako je račun putanja ZVS morao da uzme u obzir pored konzervativnih (gravitacione sile i poremećaji) i disipativne sile (otpor atmosefere i zračenja) račun se toliko iskomplikovao da je u ovom trenutku korišćenje brzih i visoko tačnih kompjutera neophodno.

Na problemu uticaja konzervativnih sila na kretanje ZVS veoma uspešno je radila veća grupa autora i on nas ovde neće interesovati. Na problemu uticaja disipativnih sila, otpora atmosfere posebno,radila je takodje velika grupa autora, sa manje ili više uspeha, ali se ne može reći da je dostignut kompletan analitički tretman.

Bitno je da su radovi o uticaju otpora atmosfere na kretanje ZVS dali jasnu postavku problema:

prvo, potrebno je definisati model raspodele gustine atmosfere koji će omogućiti analitički tretman poremećaja putanje,

drugo, treba naći analitičke izraze za račun poremećaja putanjskih elemenata satelita, definisati teoriju kretanja ZVS u realnim uslovima uticaja otpora atmosfere i

treće, koristeći tehnički nivo prikupljanjem velikog broja posmatranja popraviti konstante modela atmosfere i teorije kretanja ZVS.

Kako postojeći veoma tačni modeli gustine atmosfere ne omogućavaju rešavanje prvog zadatka, to su u radu korišćeni rezultati koje je poslednjih godina dobio L. Sehnal (1984, 1986).

Drugi deo problema postavljen je i rešen u ovom radu i to u smislu u kojem je gore i naveden tako da rešenja omogućavaju i konačno rešenje problema.

Utvrdivši kompleksnost zadatka , u radu su, pored ostalog, definisani i uslovi za njegovo rešenje u obliku:

- Izbor i aplikacija odgovarajućeg jezičkog procesora koji
- omogućava rešavanje širokog kruga astronomskih problema bez posebnih zahteva za programerskom praksom
- sa rešenjima koja su kvalitativno uporediva sa "običnim" analitičkim
- i dovoljno su otvorena i razvojna u odnosu na dalje zahteve prakse.

O tome kako su definisani gornji uslovi biće reči u sledećoj glavi, dok će ovde još biti definisani konkretni problemi koji će biti rešavani.

Osnovni zadatak teorije kretanja ZVS je nalaženje matematičkog opisa pojava sa konkretnim izrazima za poremećajna ubrzanja, pri čemu je vreme kao argument prisutno najčešće posredno preko neke od polaznih koordinata (ekscentrične, prave anomalije i sl.). Mada se dobijaju zatvoreni izrazi za poremećajna ubrzanja, integraljenje najčešće ne može da se izvrši i pribegava se razvoju u redove, koji su često veoma složeni i glomazni, a time potpuno nepogodni za analitički rad.

Ne zaboravljajući tu činjenicu, u ovom radu je izabrano analitičko rešavanje problema uticaja otpora atmosfere na kretanje ZVS. Problem je detaljno postavljen u II i III Glavi.

Najvažniji rezultati rada dati su u IV i V Glavi i u Prilogu A. Analiza dobijenih rezultata odredjivanja poremećaja putanjskih elemenata satelita usled dejstva otpora atmosfere i konkretno odredjivanje poremećaja za satelite Interkosmos 10 i ANS (The First Netherlands Astronomical Satellite) takodje su dati u IV i V Glavi. Visok stepen slaganja sa posmatračkim rezultatima pokazuje efikasnost novih rešenja datih u radu.

Ovaj rad je započet na Opservatoriji Ondrejov Astronomskog instituta Čehoslovačke akademije nauka pod rukovodstvom Dr L. Sehnala, naučnog savetnika Opservatorije Ondrejov. Ovde se posebno zahvaljujem gospodinu Dr Sehnalu na ukazanoj stručnoj pomoći i veoma korisnim savetima.

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА
Број: ____________
Датум: ____________

I GLAVA

ALGEBARSKI SISTEMI

Ni astronomiju nije mimoišla potreba sve veće efektivnosti bilo u teoriji bilo u primeni; i pored nekih negativnih re - zultata takvog pritiska, pokazuju se sve brojniji pozitivni re - zultati: sa tačnošću koja može da zadovolji ogromnu većinu korisnika, dobar deo klasičnih i neklasičnih astronomskih problema realizovan je modularno (u tehnološkom smislu) uz pomoć specijalizovanih i nespecijalizovanih procesora, uz pomoć kvantitativne i kvalitativne numeričke arhitekture.

Ne zaboravljajući činjenicu da ovakav pristup može da ostavi po strani često značajne elemente fizike problema, napominjemo samo da je pristup "dovoljno" univerzalan, a da objektivni i subjektivni uslovi odredjuju, kao i uvek, značaj rezultata.

Na početku ove glave treba se podsetiti na činjenicu da je danas svakom istraživaču dostupan čitav niz programskih (softverskih) sredina koje su ili vrlo pogodne ili posebno razvijene za programiranje numeričkih rešenja zadataka nauke i tehnike. Pri tome se najčešće govori o klasičnim programskim jezicima (n.pr. PL I, FORTRAN, COBOL i sl.) i njihovim tematski specijalizovanim bibliotekama programa koji su semantički i sintaksički usmereni ka korisniku bez posebnog programerskog iskustva, i o jezicima ALGOL, PASCAL, LISP, LOGO, C čija gradja omogućava visoku matematičku interpretaciju problema i maksimalno, a jednostavno iskoriščenje tehničkih mogućnosti računara; njih posebno karakteriše visok nivo otvorenosti i razvojnosti.

Dok prvi, mogućnost neposrednog rada sa simboličkim promenljivim nemaju, druge je bilo potrebno modifikovati, prepraviti ili dopuniti pa i nove jezike pisati da bi se stvorila nova programska sredina, algebarski sistem koji omogućava analitičko rešavanje zadataka na računarima.

U tom cilju autor je uz pomoć sistem-programera u Računskom centru Zavoda za statistiku SR Srbije na računaru IBM 370 pod operativnim sistemom TSO implementirao jedan od postojećih algebarskih sistema, sistem REDUCE 2 ** (Hearn, 1974,1979,1983). Mogućnosti ovog jezičkog procesora opisane su posebno u Prilogu B. U istom Prilogu dati su i neki dodatni primeri.

Ovde samo ukratko navodimo osnovne mogućnosti REDUCE 2:

1. U ALGEBARSKOM modu
   - razvoj i uredjivanje polinoma i racionalnih funkcija,
   - simboličko diferenciranje i integraljenje,
   - smenjivanje i grupisanje različitih formi,
   - račun najvećeg zajedničkog delioca 2 polinoma,
   - automatsko i kontrolisano uproščavanje izraza,
   - računanje sa simboličkim matricama i tenzorski račun
   - celobrojna aritmetika sa 80 cifara

2. U SIMBOLIČKOM modu

- osim javnih ograničenja većina gornjih algebarskih mogućnosti prisutna je i u simboličkom modu, ali u sintaksi jezika LISP,
- LAMBDA izrazi kao sredstvo za konstrukciju LISP-LAMBDA izraza, a time i (po korisnikovom izboru) za proširenje mogućnosti REDUCE-a, tj. algebarskog moda,
- utvrdjivanje ekvivalencije izmedju 1. i 2., a time dodatne mogućnosti u proširenju sistema komandi.

Radi ilustracije nekih mogućnosti REDUCE-a dati su slede ći primeri bliski astronomskoj praksi, a veoma jednostavni za us vajanje i programiranje u REDUCE-u.

PRIMER 1. Data je diferencijalna jednačina

$$v^2 d^2u/dv^2 + v\, du/dv - (n^2 + v^2)\, u = 0 \qquad (P.1.1)$$

poznata kao Beselova opšta diferencijalna jednačina. Ako potraži mo rešenje u obliku reda, za celobrojno n

$$u = v^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^{k+r},\ a_0 \neq 0,\ a_1 = 0, \qquad (P.1.2)$$

jer je onda $(r+1)^2 = n^2$, tj. Jedno od rešenja je tzv. Beselova funkcija I vrste pozitivnog reda

$$Bn(v) = a_0 v^n \sum_{k=0}^{\infty} ((v/2)^{2k} /k!/(n+k)!) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} ((v/2)^{2k+n} /k!/(n+k)!) \qquad (P.1.3)$$

U slučaju velikih vrednosti argumenta v koristi se asimptotski razvoj

$$Bn(v) = \exp(v)/(\sqrt{2\pi v}) \ (1+(\sum_{l=2}^{\infty} \prod_{m=1}^{l-1} ((-1)(4n^2-(2m-1)^2)/(8mv))))$$

(P.1.4)

Program u REDUCE-u koji definiše razvoj prema (P.1.4) za proizvoljno n i odgovarajući broj članova ima sledeći izgled:

```
(RESTORE (QUOTE REDUCE))
(BEGIN)
OUT FORFIL;
NMAX:=10;
COMMENT PI=3.14159265,
        COEFF=EXP(Z)/SQRT(2*PI*Z);
        FACTOR COEFF;
WRITEĐ       COEFF=EXP(Z)/SQRT(2.*PI*Z)Đ;
ARRAY BP(NMAX);
OFF NAT;ON DIV; ON FORT;
FOR N:=0:10 DO <<
BP(N):=COEFF*(1+FOR L:=1:5 SUM
        (FOR M:=1:L PRODUCT (-(4*N*N-(2*M-1)**2)/(M*8*Z))));
WRITE Đ            BP(Đ,N,Đ)=Đ,BP(N)>>;
SHUT FORFIL;
END;

     BP(0.)=COEFF*(1./8.*Z**(-1)+9./128.*Z**(-2)+75./1024.*Z**(-3)
. +3675./32768.*Z**(-4)+59535./262144.*Z**(-5)+1.)
     BP(1.)=COEFF*(-3./8.*Z**(-1)-15./128.*Z**(-2)-105./1024.*Z**(
. -3)-4725./32768.*Z**(-4)-72765./262144.*Z**(-5)+1.)
     BP(2.)=COEFF*(-15./8.*Z**(-1)+105./128.*Z**(-2)+315./1024.*Z
. **(-3)+10395./32768.*Z**(-4)+135135./262144.*Z**(-5)+1.)
     BP(3.)=COEFF*(-35./8.*Z**(-1)+945./128.*Z**(-2)-3465./1024.*Z
. **(-3)-45045./32768.*Z**(-4)-405405./262144.*Z**(-5)+1.)
     BP(4.)=COEFF*(-63./8.*Z**(-1)+3465./128.*Z**(-2)-45045./1024.
. *Z**(-3)+675675./32768.*Z**(-4)+2297295./262144.*Z**(-5)+1.)
     BP(5.)=COEFF*(-99./8.*Z**(-1)+9009./128.*Z**(-2)-225225./
. 1024.*Z**(-3)+11486475./32768.*Z**(-4)-43648605./262144.*Z**(-5)+
. 1.)
     BP(6.)=COEFF*(-143./8.*Z**(-1)+19305./128.*Z**(-2)-765765./
. 1024.*Z**(-3)+72747675./32768.*Z**(-4)-916620705./262144.*Z**(-5)
. +1.)
     BP(7.)=COEFF*(-195./8.*Z**(-1)+36465./128.*Z**(-2)-2078505./
. 1024.*Z**(-3)+305540235./32768.*Z**(-4)-7027425405./262144.*Z**(
. -5)+1.)
```

PRIMER 2. Rešimo Keplerovu jednačinu:

$$E = M + e \sin E , \qquad (P.2.1)$$

gde je E - ekscentrična, M - srednja anomalija, e - ekscentričnost.

Da se dodje do rešenja u aritmetičkom smislu, poznat je postupak sa sledećim redosledom približnosti:

u prvom koraku $E1 = M + e \sin M$,

u drugom koraku $E2 = M + e \sin E1$, i tako redom dok se ne zadovolji kriterijum završetka

$\Delta E = abs(E_n - E_{n-1}) < \varepsilon$, gde je ε izabrani mali broj.

U analitičkom smislu, kada nam uslovi kretanja nebeskog tela ili satelita daju mogućnost integraljenja, posredstvom razvoja u redove, trenutak prelaza na konkretni račun treba definisati prema uslovima zadatka što je moguće kasnije. A sada jedna zgodna digresija.

Jednačina oblika

$$F(z) = z - t - \alpha f(z) = 0 , \qquad (P.2.2)$$

poznata je pod imenom Lagranževa jednačina, gde su z, t, i parametar α kompleksne veličine, a f(z) je zadata funkcija holomorfna unutar neke konture C koja sadrži tačku t. Ako je u C zadovoljen uslov

$|\alpha f(z)| < |z-t|$,

Lagranževa jednačina u C ima jedinstven koren koji je holomorfna funkcija po α i jednak je t za $\alpha = 0$. Za nalaženje tog korena koristimo Lagranževu formulu

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^n/n!)\ d^{n-1}(f^n(t))/dt^{n-1} \qquad (P.2.3)$$

Ako je $\Pi(z)$ takodje holomorfna u C, Lagranževa formula je

$$\Pi(\eta)/F'(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^n/n!)\ d^n(\Pi(t)\ f^n(t))/dt^n \qquad (P.2.4)$$

Ako je $f(z)$ cela funkcija ili polinom, red (P.2.4) je apsolutno konvergentan za vrednosti

$$\mathrm{abs}(\alpha) < \bar{\alpha}\ , \text{ gde je } \bar{\alpha} = \max\ \rho(r) = r/M(r), \qquad (P.2.5)$$

dok je $M(r)$ neka gornja granica apsolutnih vrednosti funkcije $f(z)$ po krugu poluprečnika r, sa centrom u t. Stavljajući

$$\Pi(\eta) = \phi(\eta)\ F'(\eta) \qquad (P.2.6)$$

i u specijalnom slučaju

$$f(\eta) = \sin\eta \qquad (P.2.7)$$

imamo da jednačina (P.2.2) postaje Keplerova jednačina; za $M(r)=(\exp(r)+\exp(-r))/2$ dobijamo da je

$\bar{\alpha}= 0.6627434193492...$, odnosno, razvoj ekscentrične anomalije u red po e, M za $e< \bar{\alpha}$ dat je formulom

$$\phi(E) = \sum_{n=0}^{\infty} (e^n/n!)\ d^{n-1}(\ \phi'(M)\ \sin^n M)/dM^{n-1} \qquad (P.2.8)$$

ili, polazeći od (P.2.1) imamo

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} e^n E_n(M),\quad E_n(M) = (1/n!)d^{n-1}(\sin^n M)/dM^{n-1} \qquad (P.2.9)$$

što nam daje analitičko rešenje Keplerove jednačine uz uslov da ekscentričnost putanje ne prelazi Laplasovu granicu (Dubošin, 1975).

Algebarsko predstavljanje ovog rešenja uz pomoć kompjutera dato je sledećim programskim segmentom

```
ALGEBRAIC PROCEDURE KEPLER(N,ECC,AM);
EA:=AM+FOR J:=1:N SUM
            ECC**J*DF(SIN(AM)**J,AM,J-1)*
            (FOR L:=1:J PRODUCT (1/L));
```

Ukoliko je ovakav deo prisutan u bilo kom REDUCE programu, pozivom po graničnom argumentu N (red aproksimacije po ekscentričnosti) dobijamo kompletan izraz za ekscentričnu anomaliju, što je sa stanovišta optimizacije aritmetičkih delova programa često izuzetna pogodnost.

Na primer, sada "obična" naredba (deo programa)

```
(RESTORE (QUOTE REDUCE))
(BEGIN)
OUT FORFIL;
OFF NAT; ON DIV; ON FORT;
WRITE ĐCOMMENT N-BOUNDARY, ECC- ECCENTRICITY, AM- MEAN ANOMALYĐ;
ALGEBRAIC PROCEDURE KEPLER(N,ECC,AM);
EA:=AM+
      FOR J:=1:N SUM
            ECC**J*DF(SIN(AM)**J,AM,J-1)*
                  (FOR L:=1:J PRODUCT (1/L));
WRITE Đ       EA(1)=Đ,
               KEPLER(1,ECC,AM);
WRITE Đ       EA(3)=Đ,
      KEPLER(3,ECC,AM);
WRITE Đ       EA(6)=Đ,
KEPLER(6,ECC,AM);
SHUT FORFIL;
END;
```

daje rezultat:

```
COMMENT N-BOUNDARY, ECC- ECCENTRICITY, AM- MEAN ANOMALY

      ANS=KEPLER

      EA(1)=AM+ECC*SIN(AM)

COMMENT CALL FOR N=3

      EA(3)=AM+ECC**3*COS(AM)**2*SIN(AM)-1./2.*ECC**3*SIN(AM)**3+ECC**2
     . *COS(AM)*SIN(AM)+ECC*SIN(AM)

COMMENT CALL FOR N=6

      EA(6)=AM+ECC**6*COS(AM)**5*SIN(AM)-20./3.*ECC**6*COS(AM)**3*SIN(
     . AM)**3+47./15.*ECC**6*COS(AM)*SIN(AM)**5+ECC**5*COS(AM)**4*SIN(
     . AM)-11./3.*ECC**5*COS(AM)**2*SIN(AM)**3+13./24.*ECC**5*SIN(AM)**
     . 5+ECC**4*COS(AM)**3*SIN(AM)-5./3.*ECC**4*COS(AM)*SIN(AM)**3+ECC
     . **3*COS(AM)**2*SIN(AM)-1./2.*ECC**3*SIN(AM)**3+ECC**2*COS(AM)*
     . SIN(AM)+ECC*SIN(AM)

COMMENT THIS IS A FORTRAN OUTPUT
```

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА
Број: ____
Датум: ____

O daljem značaju i mogućnostima algebarskog sistema u odnosu na specijalne funkcije i polinome stalno prisutne u nebesko-mehaničkoj praksi ovde više nećemo govoriti. U daljem tekstu će se podrazumevati da raspolažemo takvim mogućnostima, a o njihovom korišćenju u pojedinim slučajevima biće data posebna objašnjenja. Radi kompletnije informacije ovde navodimo samo nekoliko činjenica o trenutno postojećim primenama algebarskih sistema, da bi se delimično objasnilo opredeljenje za sistem REDUCE.

1. Sistem AL (Algebraic Language) je razvijen u Japanu u laboratoriji za telekomunikacije i veze; koristi mašinski jezik u sintaksi PL/I ima opštu namenu, obavlja i numerički deo posla u granicama kompjuterske mreže. Ima interaktivni oblik rada; pridružen je samo odredjenom tipu kompjutera.

2. Sistem ALITA (ALgebra Instituta Teoretičeskoj Astronomii, Lenjingrad). Zahteva najmanje 72 Kb operativne memorije; sintaksa i kompilacija su FORTRAN-ovske, specijalno namenjen za minimizaciju sa Poasonovim redovima. Nema racionalnu aritmetiku.

3. Sistem ALTRAN (ALgebraic TRANslator) razvijen je u Bel laboratoriji u SAD, zahteva najmanje 260 Kb operativne memorije, sintaksa FORTRAN i PL/I. Namenjen za obradu racionalnih funkcija Nema interaktivni oblik rada.

4. Sistem CAMAL (CAMbridge ALgebra) potiče iz kompjuterske laboratorije u Kembridžu; potrebno najmanje 200 Kb operativne memorije, jezik je BCPL, ima interaktivni način rada i opštu namenu; sintaksa je u suštini FORTRAN- ovska.

5. Sistem FORMAC je razvijen u laboratorijama firme IBM i ima opštu algebarsku namenu; sintaksa je PL/I. Potrebno je najmanje 160 Kb operativne memorije; ima interaktivni oblik rada.

6. Sistem LAM je razvijen na univerzitetu u Stokholmu na osnovi jezika i prevodioca za LISP, nema interativni oblik rada, traži najmanje 150 Kb operativne memorije; namenjen je za rešavanje zadataka opšte relativnosti.

7. Sistem PASSIV je razvijen na Akademiji nauka SSSR, zahteva operativnu memoriju za 23000 instrukcija, sintaksa posebnog jezika EPSILON, namenjen rešavanju diferencijalnih jednačina.

8. Sistem REDUCE je razvijen na univerzitetu Utah,SAD, zahteva najmanje 280 Kb operativne memorije; pisan je u LISP-u, sintaksa je iz ALGOL-a; primenljiv je na više tipova računara, ima opštu namenu i interaktivni oblik rada.

9. Sistem SAC2 je razvijen u saradnji univerziteta iz Viskonsina (SAD) i univerziteta u Karlsrueu (SRN). Zahteva izmedju 100 i 200 Kb operativne memorije,nema interaktivni oblik rada, sintaksa je iz FORTRAN-a; ima opštu namenu.

10. Sistem SIRIUS je razvijen na Akademiji nauka SSSR, ima 40000 instrukcija, razvijen za sovjetske računske mašine, ima interaktivni oblik rada i opštu namenu.

Očigledno je da prema zahtevima za operativnom memorijom REDUCE spada u glomaznije sisteme (REDUCE 3, koji je poboljšana verzija, zahteva čak 375 Kb operativne memorije), ali pri tome zadovoljava sve zahteve iz Uvoda, što je od velikog značaja za ovaj rad. Obzirom na činjenicu da je ovo, po svemu sudeći, jedna od prvih ozbiljnijih primena algebarskih sistema u nas, radu je pridružen Prilog B koji sadrži osnovna uputstva za rad i realizaciju sistema REDUCE.

II GLAVA

ZEMLJINA ATMOSFERA

Ako se razmatra atmosferski model u poznatoj aproksimaciji nerotirajuće Zemlje, bez magnetnog polja, u uslovima stacionarnosti, onda se rešava najjednostavniji slučaj sfernosimetrične atmosfere - sve osnovne termodinamičke veličine su funkcije samo jednog argumenta, r - rastojanja od centra sfere.

Vertikalna struktura atmosfere odredjuje se zavisnošću pritiska, temperature, gustine i hemijskog sastava od rastojanja od centra planete. Kada se navedeni parametri dobiju iz teorijske analize ili se predstave u vidu tablice srednjih ili tipičnih vrednosti, kažemo da raspolažemo modelom atmosfere.

Na slici 2.1 prikazan je profil temperature Zemljine atmosfere (u daljem samo atmosfere) sa stanovišta današnjih informacija. Podela na "sfere" i nazivi jasni su sa slike. Ovde će biti date samo osnovne karakteristike onog dela atmosferskog omotača koji je od značaja za problem koji će kasnije biti razmatran (visine preko 100 km).

Na visini preko 90 km temperatura atmosfere oštro raste jer u toj oblasti dolazi do apsorpcije ekstremnog ultrljubičastog zračenja Sunca. Temperatura raste do neke granice izmedju 600-1200°K na visinama od oko 300 km i ostaje konstantna sve do visina na kojima prestaje da igra važnu ulogu - ponegde već na 500-1000 km, gde se neutralni molekuli retko sudaraju i njihovo slučajno kretanje se postepeno transformiše u haotični plotun minijaturnih projektila.

2.1 OSNOVNE JEDNAČINE

Vertikalna raspodela pritiska, temperature i gustine sferno-simetrične atmosfere zadatog sastava, kada je u hidrostatičkoj ravnoteži, odredjuje se sa tri veze:

Prvo, pri hidrostatičkoj ravnoteži gradijent pritiska se definiše izrazom

$$dp/dr = -(\mu/r^2)\, M\, N = -\, g(r)\, \rho \qquad (2.1.1)$$

gde je za Zemlju $\mu = 398601.3\ km^3/s^2$, M - srednja masa molekula atmosfere, N - njihova koncentracija, ρ - gustina atmosfere i r - rastojanje od centra planete-sfere. U granicama integracije Δr ($<< r$) ubrzanje sile teže $g(r)$=const.

Drugo, za jednačinu stanja možemo da uzmemo izraz za idealni gas

$$p = N\, k\, T = \rho\, R\, T \qquad (2.1.2)$$

gde je $R = k/M$ gasna konstanta koja odgovara sastavu atmosfere. Odatle je uslov hidrostatičke ravnoteže

$$dp/p = -\,(\mu M/kT)\, dr/r^2 \approx -\, g\, M/k/T\, dh = -\, dh/H \qquad (2.1.3)$$

gde je h visina, H je skala visina.

Treće, iz barometarske formule imamo

$$p(r)=p(r_0)\, \exp((-\mu M/kTrr_0)(r-r_0)) =$$
$$= p(r_0)\, \exp(-(r-r_0)/H),$$
$$p(h)=p(h_0)\, \exp(-(h-h_0)/H)\ . \qquad (2.1.4)$$

U opštem slučaju raspodela gustine daje se izrazom

$$dN/N = -dT/T - \mu M/k/T\ dr/r^2 = -dT/T - dh/H^1 =$$
$$= -(1/T\ dT/dh + M\ g/k/T)\ dh = -dh/H^1, \qquad (2.1.5)$$

koji odredjuje skalu visina za gustinu, $\underline{H^1}$. Integralni broj čestica $\underline{N(r)}$ je broj čestica u stubu nad datom visinom pa iz(2.1.1) imamo

$$N(r) = \int_r^\infty N(r)\ dr = \int_0^{p(r)} (r^2/\mu/M)\ dp \approx p(r)/g(r)/M = N(r)\ H.$$

U odsustvu potpunog mešanja molekularna masa $\underline{M=M(h)}$, t.j. na većim visinama proces mešanja je manje značajan pa je koeficijent difuzije veliki.

Gustina atmosfere na datoj visini iznad Zemljine površi, u intervalu 150-300 kilometara, pokazuje malu sistematsku promenu sa latitudom. Površi konstantne gustine na ovim visinama, koje su veoma značajne za dalja razmatranja, teže da budu sferoidne sa istom eliptičnošću kao Zemlja ($\sim$ 0.00335).

Polazeći od relacija (2.1.4) (2.1.2) vidimo da za proizvoljnu geocentričnu latitudu gustina vazduha varira ekponencijalno sa visinom. Izraz za gustinu atmosferskog omotača u proizvoljnoj tački putanje satelita dobijamo iz sledećih relacija.

Uočimo meridijanski presek Zemlje aproksimirane obrtnim elipsoidom (sferoidom, v. sl. 2.2); jednačina meridijanske elipse je

$$(u^2/б^2) + (v^2/б^2) = 1, \tag{2.1.6}$$

a spljoštenost sferoida (meridijanske elipse) je

$$\mathcal{E} = (б_E - б_P)/б_E \,. \tag{2.1.7}$$

Kako je $\underline{u} = б \cos\varphi$, $\underline{v} = б \sin\varphi$, (2.1.8)

smena u (2.1.6) i uvodjenje (2.1.7) daje

$б^2(\cos^2\varphi(1-\mathcal{E})^2 + \sin^2\varphi) = б_E^2(1-\mathcal{E})^2$ ili, posle razvoja u red $б^2 = б_E^2(1-2\mathcal{E}\sin^2\varphi) = б_E^2(1-\mathcal{E}\sin^2\varphi)^2$, odnosno

$$б \approx б_E(1-\mathcal{E}\sin^2\varphi)\,, \tag{2.1.9}$$

gde je $\underline{\varphi}$ geocentrična širina tačke. Za proizvoljni sloj atmosferskog "sferoida" ekvatorskog poluprečnika $\underline{R_E}$ i eliptičnosti $\underline{\mathcal{E}}$ za radijalno rastojanje $\underline{R}$ proizvoljne tačke sferoida imamo:

$$R = R_E(1-\mathcal{E}\sin^2\varphi + o(\mathcal{E}^2)). \tag{2.1.10}$$

Izaberimo $\underline{R_E}$ tako da sferoid definisan sa (2.1.10) prolazi kroz inicijalni perigej putanje satelita:

$$r_{p_0} = R_E^{p_0}(1-\mathcal{E}\sin^2\varphi_{p_0}), \text{ tj. } R_E^{p_0} = r_{p_0}(1+\mathcal{E}\sin^2\varphi_{p_0}),$$

$$R = r_{p_0}(1+\mathcal{E}\sin^2\varphi_{p_0})(1-\mathcal{E}\sin^2\varphi)\,. \tag{2.1.11}$$

Očigledno za tačku na geocentričnom rastojanju $\underline{r}$ i širini $\underline{\varphi}$ imamo iz (2.1.4) i (2.1.2)

$$\rho = \rho_{p_0}\exp(-(r-R)/H)\,. \tag{2.1.12}$$

Kako je

$$\sin\varphi = \sin i \sin u, \tag{2.1.13}$$

gde je $\underline{i}$ nagib putanje, a $\underline{u}$ argument latitude $\underline{u = \omega + \nu}$, gde je ω argument perigeja, a $\underline{\nu}$ je prava anomalija.

U odnosu na jednostavan opis dat jednačinom (2.1.12) u sledećoj tački biće govora o raznim modelima atmosfere i o teškoćama u njihovoj realizaciji, posebno sa gledišta teorije kretanja ZVS.

2.2 MODELI ATMOSFERE

Citirajmo deo iz rada Eljasberga (1965): "Iz izloženog sledi da osnovni faktori,..., i gustina ϱ vazduha, danas ne mogu tačno da se odrede". Slični stavovi mogu da se sretnu i kod King-Hilija (King-Hele, 1964,1974), u radu Aksenova (1977) i dr.

U izučavanju poremećaja u kretanju ZVS, koji su uzrokovani otporom atmosfere, najveći značaj ima izbor odgovarajućeg modela atmosfere. Već iz početnih razmatranja bilo je jasno da Zemljina atmosfera nije stacionarna i nije sferno simetrična.

Česti su bili pokušaji da se nesferičnost Zemljine atmosfere uzme u obzir u teoriji kretanja ZVS. Rezultate na tom polju i polju istraživanja širinskog efekta u raspodeli gustine atmosfere dali su Štern (1959, 1960), Grovz (1959), Kuk i drugi (1961, 1965), Vajat (1961), Kuk i King-Hili (1965), Sehnal i Mils (1966), Fominov (1963,1974), Anrar (1970, 1986) i drugi.

Pokazano je da je nesferičnost atmosfere uslovljena, u glavnom, razlikama gravitacionog polja od centralnog polja i zagrevanjem osvetljenog dela Zemljine atmosfere sunčevim zračenjem. Širinski efekat u raspodeli gustine je onaj deo nesferičnosti atmosfere uslovljen veoma složenom strukturom gravitacionog polja Zemlje. Nesferičnost tog polja dovodi do stvaranja nivoskih površi jednake gustine (izopikne- u ravanskom preseku), tj. do zavisnosti gustine od geografskih koordinata. Dnevnim efektom u raspodeli gustine atmosfere naziva se odstupanje od sferne struk ture izazvano položajem Sunca na nebeskoj sferi.

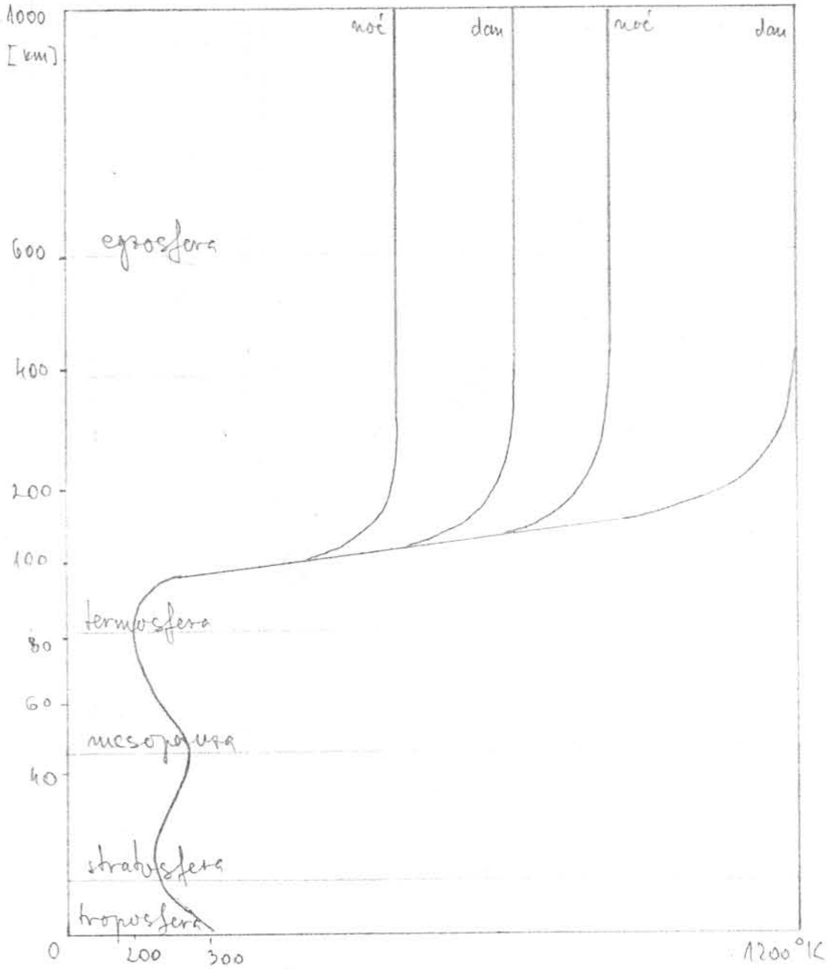
Zagrevanje osvetljenog dela Zemljine atmosfere dovodi do deformacije slojeva jednake gustine u visokoj atmosferi pri čemu se javlja ispupčenje (engleski: buldge) koje ima u položaju odre djeni fazni pomak u odnosu na pravac ka Suncu.

Nestacionarnost atmosfere, tj. promena gustine sa vremenom uzrokovana je najvećim delom promenom u ultraljubičastom i korpuskularnom fluksu Sunca. Smatraćemo da su ove promene relativno spore u intervalu jednog perioda - jednog obilaska satelita oko Zemlje. Značajan deo nestacionarnosti dolazi i od uticaja Zemljinog magnetnog polja na energetske izvore kretanja u atmosferi i odgovarajuće promene u termosferi.

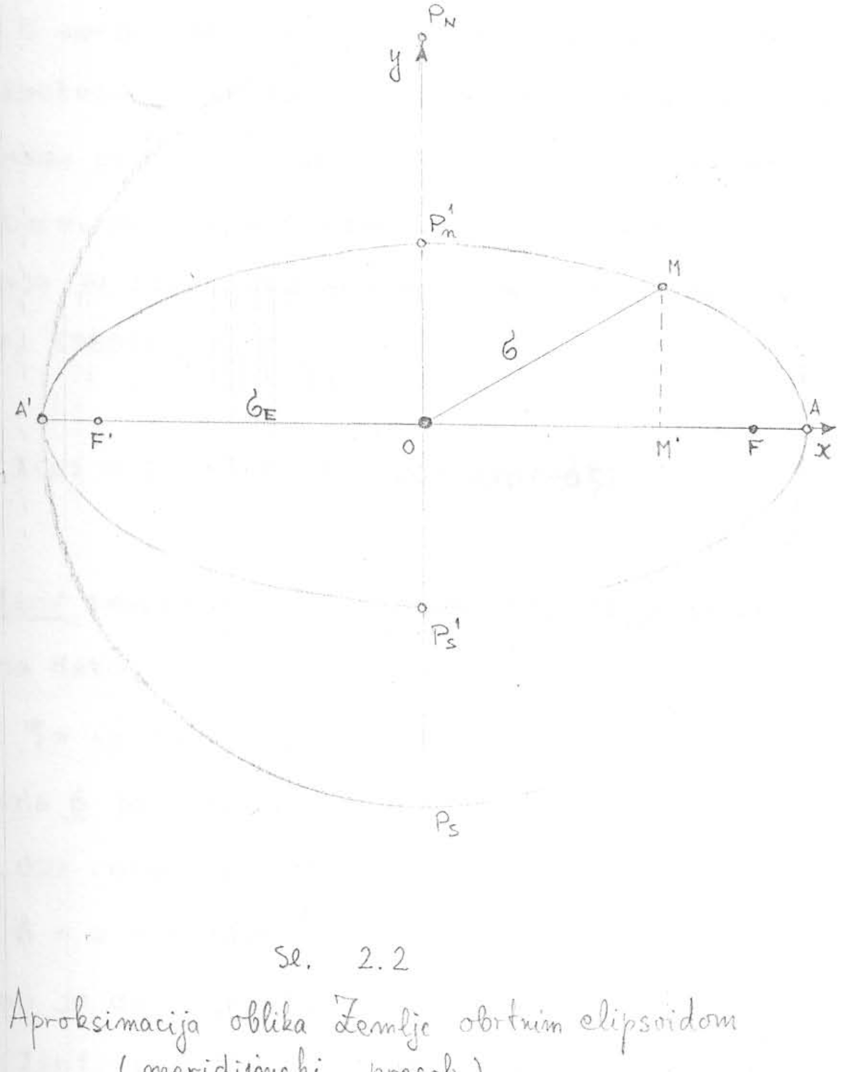
Gornja deskripcija može sa fizičkog stanovišta vrlo lako da se interpretira uvodjenjem odgovarajućih parametara položaja i aktivnosti Sunca (sferne koordinate α, δ; fluks sunčevog zračenja F, srednji fluks $\overline{F}$ i sl.), geomagnetskog indeksa Kp, obrtanja Zemlje i njenog položaja na putanji oko Sunca itd.

2.1 POSTUPCI MODELOVANJA

Najbrojniji satelitski podaci o otporu atmosfere dobijeni su za interval visina 200-1200 km. Totalna gustina u okolini perigeja putanje može da se dobije numeričkom integracijom jednačina poremećenog kretanja (Jacchia and Sloway,1962) ili analitički (King-Hele,1966; Vercheval, 1974). U nedostatku ostalih informacija informacije o gradji i temperaturi atmosfere ne mogu da se dobiju.



Sl. 2.1
Profil temperature Zemljine atmosfere



Sl. 2.2

Aproksimacija oblika Zemlje obrtnim elipsoidom
(meridijanski presek)

U aeronomskim modelima (DTM, CIRA72, CIRA86, C, MSIS) radna hipoteza je vertikalna raspodela atmosferskih komponenti na visinama preko 100 km i vertikalna i horizontalna raspodela temperature. Numerička integracija jednačina difuznog ravnotežnog stanja je izbegnuta ako se temperatura aproksimira izrazom (Walker, 1965):

$$T(z) = Tinf-(Tinf-T120)\ \exp(-\sigma\xi) \qquad (2.3.1)$$

gde je Tinf temperatura u termopauzi, T120 je konstantna temperatura na datoj granici 120 km,

$\xi = (z-120)(R+120)/(R+z)$, R=6356.77 km,

a veličina σ je vezana sa parametrom temperaturskog gradijenta s (s~0.02) relacijom

$$\sigma = s + (R+120)^{-1} \qquad (2.3.2)$$

Očigledno je da za korišćenje jednačine (2.3.1) moraju da se poznaju s, Tinf, i T120. Pri tome je koncentracija različitih konstituenata ukupne gustine prikazana sfernim funkcijama (Hedin i dr., 1974, 1977; Hedin, 1986; Barlije, 1978). Za konstituent i numerička koncentracija data je izrazom

$$n_i(z) = A_i\ \exp(G_i(L) - 1)\ f_i(z) \qquad (2.3.3)$$

gde je (Walker, 1965; Bates, 1959) funkcija $f_i(z)$ dobijena integracijom jednačine difuznog ravnotežnog stanja sa temperaturskim profilima datim sa (2.2.1):

$$f_i(z) = ((1-a)/(1-a\ \exp\ \sigma\zeta))^{1+\alpha_i+\gamma_i} \exp(-\sigma\gamma_i\zeta) \qquad (2.3.4)$$

$$a = (Tinf-T120)/Tinf, \quad \gamma_i = (m_i g120)/(\sigma k Tinf) \qquad (2.3.5)$$

gde je m_i - molekulska masa, k - Bolcmanova konstanta, $g120$ - ubrzanje sile Zemljine teže na visini 120 km; funkcija $G_i(L)$ definiše zavisnost od fizičkih parametara i vremena i data je aproksimacijom sfernim funkcijama:

$$G_i(L) = 1 + f_1(F,\bar{F},K_p) + \beta\left[\sum_{p=1}^{\infty} f_2(p,\delta,d) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} C_n^m f_3(n,m,\omega,t)\right] \qquad (2.3.6)$$

Kod svih navedenih aeronomskih modela, koji inače predstavljaju najnovije rezultate u toj oblasti, funkcija $G_i(L)$, obzirom na broj konstituenata koje uzima u obzir, na broj fizičkih parametara i nestacionarnost, sadrži preko 30 sabiraka vrlo složene strukture tako da je praktično onemogućena linearizacija[1] izraza za gustinu i[2] inverzija[3].

Na drugoj strani, pokušaji analitičkog tretiranja problema uticaja otpora atmosfere na kretanje ZVS doveli su većim delom do hipotetičkih modela, dok se konačni i upotrebljivi modeli ne sreću tako često.

Fominov (1970, 1974) koristi metod analogan metodu aproksimacije gravitacionog i magnetnog polja Zemlje. Kao što je poznato (Lazović,197 ; Dubošin, 1983) svaku neprekidnu i diferencijabilnu funkciju $f(r,\varphi,\lambda)$ sa neprekidnim izvodima možemo da razložimo u red po sfernim funkcijama u okolini sfere radijusa r :

$$f(r,\varphi,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} P_n^m(\varphi)\ (A_{nm}\cos m\lambda + B_{nm}\sin m\lambda), \qquad (2.3.7)$$

gde su $P_n^m(\varphi)$ pridružene Ležandrove funkcije (polinomi), A_{nm} i B_{nm} koeficijenti koji zavise od rastojanja r, r, φ, λ sferne koordinate.

Formalno, gustina atmosfere može da se predstavi izrazom (2.3.7), tj.

$$\varrho = \bar{\varrho}\,(\nabla_r + \nabla_\psi + \nabla_\Theta) \tag{2.3.8}$$

gde je $\bar{\varrho} = \varrho_0 \exp z$, $\quad z = (r_0 - r)\, r_0 / H_0 / r$ (2.3.9)

gde su ϱ_0, H_0, r_0 konstante. Veličina ∇_r opisuje gustinu sferno-simetrične atmosfere, druge dve definišu dnevni i širinski efekat, redom. Veličine ∇_r, ∇_ψ, ∇_Θ se dalje aproksimiraju izrazima

$$\nabla_r = \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^l ,$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla_\psi &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \sum_{l=0}^{\infty} z^l P_n^m(\cos\Psi)\left[\beta_{\psi nml} \cos m\lambda_\psi + \gamma_{\psi nml} \sin m\lambda_\psi\right], \\ \nabla_\Theta &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \sum_{l=0}^{\infty} z^l P_n^m(\cos\Theta)\left[\beta_{\Theta nml} \cos m\lambda_\Theta + \gamma_{\Theta nml} \sin m\lambda_\Theta\right], \end{aligned}\right\} \tag{2.3.10}$$

gde su c_l, $\beta_{\psi nml}$, $\gamma_{\psi nml}$, $\beta_{\Theta nml}$, $\gamma_{\Theta nml}$ parametri modela koji se smatraju konstantnim na kraćim vremenskim intervalima (uporedivim sa periodom obilaska). Ne upuštajući se u detaljno izlaganje daljih transformacija, treba samo reći da rezultat aproksimacije (2.2.9) ulazi u osnovnu jednačinu (v. dalje, (3.2.12)) za izračunavanje otpora atmosfere; dobijaju se konačni izrazi, ali, bez obzira na višegodišnje nastojanje autora, model je ostao u osnovi hipotetični.

Anrar (Henrard, 1974, 1986) u svojim radovima polazi od pretpostavke da gustina atmosfere ima eksponencijalnu raspodelu

$$\varrho = \varrho_0\,((p_0 - s)/(r - s))^{\tau} , \tag{2.3.11}$$

gde je ρ_o gustina na rastojanju p_o (ne mora da bude perigejska daljina), dok su parametri s i τ izabrani u smislu što bolje aproksimacije promene gustine. Da bi pojednostavio neke korake u razvoju teorije pribegava razvoju u red pojedinih delova desne strane jednačine (2.3.11) i uvodi niz aproksimacija da bi došao do konačnog rezultata.

Efektivno uporedjenje sa posmatranjima nije bilo moguće, pa je autor uradio test tačnosti numeričkom integraciojom osnovnih jednačina. I pored svega, možemo i za ovaj model takodje reći da je ostao na nivou hipotetičkog.

Vikutilova (1982) je koristila model vrlo sličan modelu korišćenom u ovom radu, ali zbog nedefinisanosti osnovnih konstanata (koje je, inače,kasnije dobila iz privatne komunikacije sa Sehnalom) nije imala priliku da detaljno proveri neke od svojih rezultata.

Pošto su za ovaj rad od posebnog značaja rezultati raznih analitičkih metoda definisanja uticaja otpora atmosfere na kretanje ZVS, u daljem će najveća pažnja biti posvećena definisanju i analizi rezultata koje su dobili King-Hili (1960-1986) i Sehnal (1966, 1980,1986). Paraleno će ti rezultati biti uporedjeni sa rezultatima iz teorije razvijene u ovom radu.

U svojim radovima odmah posle lansiranja prvog Zemljinog veštačkog satelita (04.10.1957.g.) King-Hili započinje analitički tretman uticaj atmosfere na kretanja satelita. Pri tome je razvio

- veoma upotrebljivu teoriju sa jednostavnim jednačinama
- jednostavna teorija je uspešno opisivala tzv. spljoštenu atmosferu, tj. nesferičnost atmosfere,

- potom je dopunio popravkom za odstupanje gustine od stroge eksponencijalne zavisnosti a

- promenu skale visine je pojednostavio linearnom zavisnošću od visine.

Najneugodnija, sa praktičnog stanovišta, neodredjenost u toj teoriji je nepoznavanje gustine atmosfere u okolini perigeja satelitske putanje. Drugo, uvodjenje u razmatranje daljih osobenosti atmosfere (n.pr. postojanja deformacija u pravcu ka Suncu, efekat senke i sl.) stvara silne teškoće u očuvanju prethodne teorijske osnove. Kvantitativni pokazatelji ove analize dati su u sledećim glavama.

Sehnal je (1966, 1980,1986) u svojim radovima na definisanju modela gustine atmosfere i uticaja otpora atmosfere na kretanje satelita išao obrnutim putem: od posebnog ka opštem. Prvi radovi su se odnosili na odredjivanje nekog od brojnih efekata otpora atmosfere (kratko-periodične promene, odredjivanje gustine iz posmatranja ZVS, promene putanjskih elemenata, uticaj Sunčevog zračenja, efekat senke, itd.), da bi u svojim najnovijim radovima (1982-1986) konačno definisao jedan jednostavan i vrlo upotrebljiv model raspodele gustine atmosfere, koji je nazvao TD (Toatal Density). Osnovne osobenosti definisanja modela TD korišćene su u ovom radu da bi se razvile dodatne analitičke mogućnosti, kako u definisanju sumarnog uticaja otpora atmosfere na putanjske elemente (kretanje) ZVS, tako i u smislu usavršavanja modela TD.

III GLAVA

MATEMATIČKE I DINAMIČKE OSNOVE

U ovoj Glavi biće date matematičke, kinematičke i dinamičke postavke bitne za rešavanje problema definisanog u Uvodu. Neka posebna postupnost u izlaganju neće biti prisutna, već će biti izloženi samo oni pojmovi koji su neophodni u daljem.

3.1 MATEMATIČKA OSNOVA

a) aproksimacije

TEOREMA: Ako je funkcija $f(z)$ analitička u krugu $|z-z_0|<R$, ona se jednostavno izražava u njemu svojim Tejlorovim redom

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad , \quad |z-z_0|<R ,$$

gde su, za $r<R$

$$c_n = f^{(n)}(z_0)/n! = (1/(2\pi i)) \int_{|\eta-z_0|=r<R} (f(\eta)/(\eta-z_0)^{n+1})\, d\eta. \qquad (3.1.1)$$

1) $f(z) = (1+z)^{\alpha}$, α - nije ceo broj.

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)/n!\ z^n , \qquad (3.1.2)$$

za $|z|<1$ dobijamo tzv. binomijalni red

2) $f(z) = \exp(z)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n! \quad , \qquad (3.1.3)$$

što je aproksimacija za eksponencijalnu funkciju.

3) Iz Muavrovih (Jefimov, 1980) teorema sledi:

$$- \quad 2^p \cos^p \varphi = 2\sum_{n=1}^{p/2} \binom{p}{n} \cos[(p-2n)\varphi] \quad , \; p - \text{parno}$$

$$- \quad 2^p \cos^p \varphi = 2\sum_{n=1}^{[p/2]} \binom{p}{n} \cos[(p-2n)\varphi] \quad , \; p - \text{neparno}$$

$$- \quad 2^p \sin^p \varphi = 2\sum_{n=1}^{p/2} \binom{p}{n} \cos[(p-2n)\varphi] \quad , \; p - \text{parno}$$

$$- \quad 2^p \sin^p \varphi = 2\sum_{n=1}^{[p/2]} \binom{p}{n} \sin[(p-2n)\varphi] \quad , \; p - \text{neparno}. \qquad (3.1.4)$$

b) Beselovi polinomi

Videli smo da je rešenje jednačine (P.1.1) dato redovima (P.1.3) i (P.1.4), ali uslove konvergencije i tip konvergencije tih redova nismo ispitivali; isto tako, nije bilo govora o tačnosti aproksimacije. Samo poslednji uslov je dovoljan da se odreknemo obe aproksmacije u efektivnom smislu. Da bi imali efektivne formule za račun Beselovih polinoma različitog reda i širok izbor argumenata treba naći efektivne formule.

U tom cilju je razvijen program u REDUCE-u (kao i za sve prethodne aproksimacije!, v. dalje) čiji rezultati su aproksimacije Beselovih polinoma Čebišovljevim polinomima, koji se lako računaju (Abramovitz i Stegun, 1965; Luke,1975) .

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА
Број:
Датум:

3.2 OTPOR ATMOSFERE

Radi očuvanja jedintstvenosti u notaciji ovde će biti zadržane iste oznake za pojedine veličine kao i u većini klasičnih radova, mada je pokazano da neke od njih mogu da se uvedu na nešto drukčiji način.

Objekat koji se kreće relativnom brzinom $\underline{\vec{V}}$ (u odnosu na okolni vazduh) nalazi se pod dejstvom aerodinamičkih sila koje mogu da se predstave sa dve komponente, otpor (ili kočenje) $\underline{\vec{D}}$ koji deluje nauprot $\underline{\vec{V}}$ i sila u ravni upravnoj na $\underline{\vec{V}}$. Uobičajeno je, u aerodinamici, da se $\underline{D}$ definiše sa

$$D = (1/2)\ \rho\ V^2 S\ C_D, \tag{3.2.1}$$

gde je ρ gustina okolnog vazduha, S - odgovarajuća površina, poznata kao površina efektivnog poprečnog preseka objekta u kretanju, upravna na pravac kretanja i C_D je koeficijent kočenja (bezdimenziona veličina).

Sile upravne na pravac kretanja u opštem slučaju ne prolaze kroz centar masa satelita i mogu da se posmatraju kao aerodinamički potisak, $\underline{P}$ kroz centar masa i rotacioni moment $\underline{R}$ oko centra masa (v. sl. 3.1). Pretpostavljeno je da je satelit u stanju pasivnog kretanja - bez dejstva transportnih i korektivnih sila, tj. da je već "izveden" na putanju. Tada možemo reći da moment $\underline{R}$ potiče od gravitacionog gradijenta, magnetnog polja Zemlje i drugih izvora, nazvanih aerodinamičkim toroidom.

Za nekontrolisane satelite moment R je faktor nestabilnosti koji dovodi do tumbanja satelita, a sila potiska će sa prilično pravilnosti da menja orijentaciju u intervalu od nekoliko sekundi sa rezultantom 0. Pri tome je odnos sile potiska i otpora atmosfere uvek <0.1 .

U konvencionalnoj aerodinamici je odredjivanje koeficijenta otpora atmosfere C_D veoma značajno i obavlja se sa stanovišta teorije neprekidnih struja; u slčaju ZVS gustina vazduha je toliko mala da ta teorija ne važi, već se uvodi pojam slobodnih molekula - uslovi u kojima srednji slobodni put molekula znatno prevazilazi linearne dimenzije satelita. Bez obzira na svu neodredjenost ovakvog pristupa (što je prirodno, jer se parametri atmosfere veoma teško dobijaju) može da se kaže da za male naučne satelite nema bitnih promena u koeficijentu C_D.

Račun koeficijenta C_D čini se pod pretpostavkom da je satelit stacionaran i postoji molekulska struja; molekuli imaju Maksvelovu raspodelu sa uniformnom brzinom V na koju se superponiraju njihove termičke brzine; kolizija izmedju upadnih i odbijenih molekula (pri sudaru sa satelitom) je zanemarljiva. Mehanizam sudara molekula i satelita naziva se difuznom re-emisijom: broj molekula emitovanih u pravcu $(\nu, \nu+d\nu)$ (u odnosu na normalu na površ) proporcionalan je $\cos \nu \, d\nu$. Pri tome ostaje najneodredjenija temperatura re-emisije, jer se ne zna da li molekuli zadržavaju svoju izvornu temperaturu Ti ili primaju temperaturu Ts površi na koju za trenutak prijanjaju; eksperimentalni podaci su protivrečni, pa se usvaja da je temperatura re-emitovanih molekula ista kao u satelita, a za koeficijent akomodacije ca = (Ti-Tr)/(Ti-Ts)

uzima se da je jednak 1. Koeficijent otpora atmosfere za tela raznih oblika i promenljivih uglova, za rotirajuća tela, dao je Kuk (Cook, 1960):

- za satelite sa ca blizu 1, na putanjama ekscentričnosti reda 0.0-0.2, vrednost Cd je
- za loptaste satelite izmedju 2.1 i 2.2,
- za cilindar sa izvodnicom duž vazdušnih struja 2.1-2.5
- za ploču upravnu na vazdušnu struju oko 2.2,
- za cilindar koji se tumba ili rotira srednje Cd=2.15,
- za konus sa izvodnim uglom 15°-20° Cd je oko 2.10.

U radu je usvojena vrednost

$$Cd = 2.2 \qquad (3.2.2)$$

koja od tačne vrednosti neće odstupati za više od 5% (ukoliko koeficijent akomodacije ne unosi veću grešku!).

U ocenjivanju efektivnog preseka satelita, S, polazi se od pretpostavke da je kretanje satelita nekontrolisano. U takvoj situaciji satelit teži rotaciji oko ose maksimalnog momenta inercije, minimumu energije za dati ugaoni moment. Bez obzira na inicijalne uslove kretanja, satelit veoma brzo ostvari rotaciju oko ose bliske sopstvenoj osi (ili nekoj od njih) maksimalnog momenta inercije. Prelaz u ovaj oblik kretanja uzrokovan je malim spoljašnjim impulsima ili disipacijom energije usled ,n.pr., prolaza kroz zakrivljene vazdušne slojeve iste gustine. Pravac ose rotacije malo varira u prostoru u toku jednog obilaska, ali ima sporu precesiju.

Ako pravac rotacije nije poznat (kao za većinu satelita) i ako je satelit cilindrični prečnika $\underline{d}$ i dužine $\underline{\ell}$, površina efektivnog preseka data je jednačinom

$$S = \ell d \, (0.818 + 0.25 \, d/\ell) \, , \qquad (3.2.3)$$

koja od ekstremnih slučajeva

a) rotacije satelita slično avionskom propeleru (osa rotacije i pravac kretanja su kolinearni) sa

$S = \ell d$,

b) tumba se s kraja na kraj (ugao izmedju ose i pravca kretanja je 90°) sa

$S = 2 \, (\ell d + \pi d^2/4)/\pi$

za $\underline{d/\ell = 1/8}$ neće da se razlikuje za više od 15%, ili 6%, za $\underline{d/\ell = 1/2}$.

Ovde je bitno da prava srednja vrednost $\underline{S}$ tokom perigejskih prolaza trpi male oscilacije, u stvarnosti nedeljne i mesečne, sa amplitudom reda 5%. To znači da je pretpostavka o konstantnosti $\underline{S}$ bliska realnosti za cilindrične satelite, dok za loptaste je potpuno tačna.

Situacija je nešto komplikovanija za satelite snabdevene dodatnim uredjajima, koji njihov oblik mogu da promene do oblika bliskog cilindričnom ili bliskog disku (retroreflektori, kolektori sunčeve energije, antene i sl.). Za $\ell/d < 1/2$ ekstremne vrednosti za $\underline{S}$ su $\pi d^2/4$ i $\ell \cdot d$ (za slučajeve a i b, kao gore). Srednja vrednost je

$$S = 0.642 \, d^2 \, , \qquad (3.2.4)$$

sa amplitudom greške reda 10%.

Problemu odredjivanja gustine atmosfere već je posvećena izvesna pažnja, a ovde je potrebno još odrediti otpor atmosfere u funkciji brzine V, brzine satelita u odnosu na okolni vazduh.

Vektor brzine $\vec{v}$ satelita u odnosu na geocentrični koordinatni sistem je vektor suma brzina $\vec{V}$ u odnosu na vazdušni medijum i brzine $\vec{V_A}$ vazduha u odnosu na geocentar. Usvajamo da je $\vec{V_A}$ usmereno sa zapada na istok,

$$\vec{V} = \vec{v} - \vec{V_A}\ , \tag{3.2.5}$$

$$V^2 = v^2 + V_A^2 - 2\ v\ V_A \cos\gamma \tag{3.2.6}$$

gde je γ ugao izmedju $\vec{V}$ i $\vec{V_A}$. Ako atmosfera rotira ugaonom brzinom ω oko ose rotacije Zemlje,

$$V_A = r\ \omega\ \cos\varphi\ , \tag{3.2.7}$$

gde je r geocentrična daljina i φ geocentrčna širina. U okolini perigeja satelit se kreće skoro horizontalno i za $H/r_p < 0.01$ ugao γ skoro je jednak uglu γ' (ugao izmedju $\vec{V_A}$ i $\vec{v_H}$ - horizontalne komponente brzine $\vec{v}$), sa greškom u $\cos\gamma < 1\%$. Ako na sferni trougao $S\Omega S'$ (sl.3.2) primenimo osnovne formule imamo

$$\cos\gamma'\ \cos\varphi = \cos\ i\ , \tag{3.2.8}$$

gde je i nagib putanje, što iz $\gamma = \gamma'$ i sa (3.2.7) daje

$$V_A \cos\gamma = r\ \omega\ \cos\ i\ (1 + o(\ 0.01\ )\ )\ , \tag{3.2.9}$$

odnosno, iz (3.2.6)

$$V^2 = v^2 (1 - r\ \omega\ \cos\ i\ /\ v\ (1 + o(0.01)))^2 + r^2 \omega^2 (\cos^2\varphi - \cos^2 i)\ . \tag{3.2.10}$$

Jednačina (3.2.10) sadrži dve nepoznate, efekat rotacije atmosfere na otpor atmosfere je mali pa se pribegava aproksimacijama:

Kako je $r^2\omega^2 < 0.005\ V^2$, ako je ω istog reda kao zemljina ugaona brzina, član sa $r^2\omega^2$ zanemarujemo. U razlomku $r\omega/v, r/v$ se zamenjuje sa r_{p_o}/v_{p_o}, gde sufiks p_o označava inicijalne vrednosti u perigeju, jer su aerodinamičke sile izvan perigejske okoline praktično zanemarljive. Konačno, nagib putanje varira vrlo malo u toku satelitskog života ($\Delta i < 0\overset{\circ}{.}2$), tako da (3.2.10) postaje

$$V \cong v\ (1 - r_{p_o}\omega \cos i_o / v_{p_o}) \ . \qquad (3.2.11)$$

Tako imamo rezultujuću silu otpora atmosfere

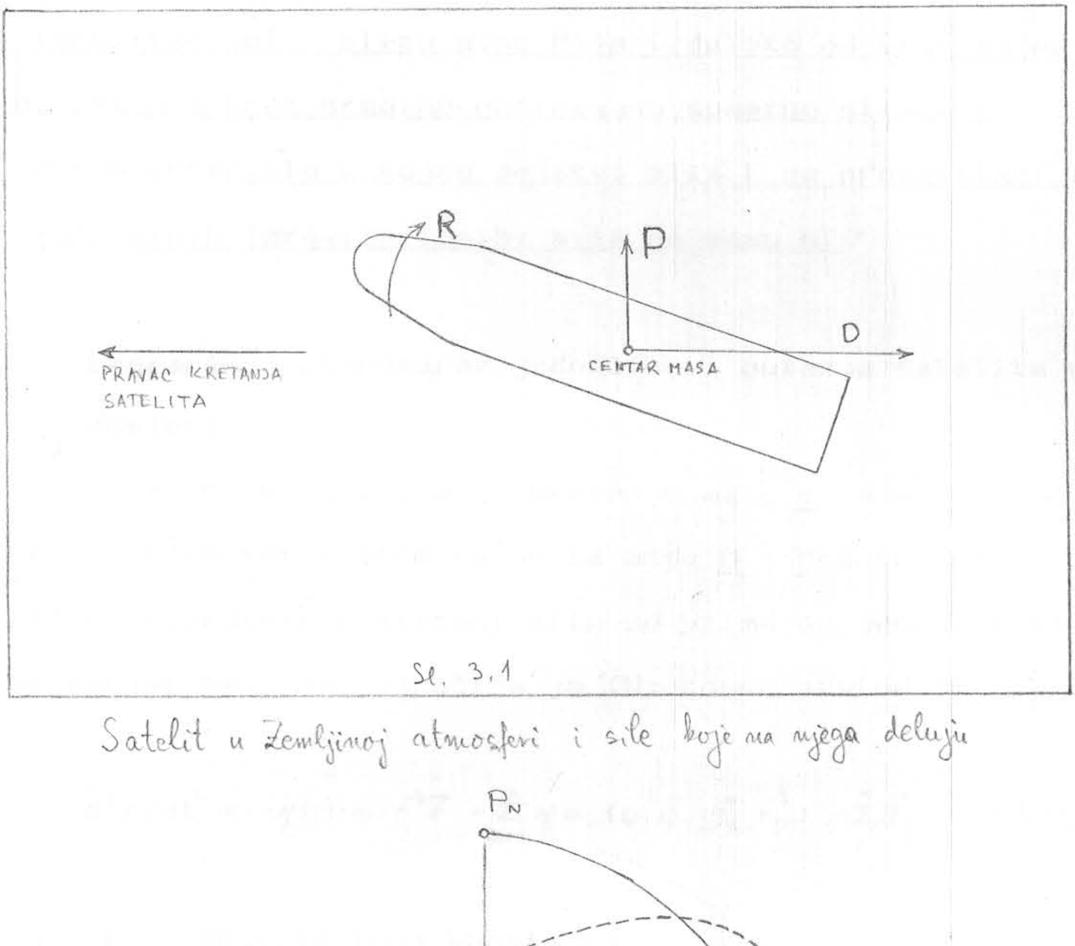
$$D = \rho\ v^2 F\ S\ C_D/2 \qquad (3.2.12)$$

koja deluje paralelno sa V, gde je

$$F = (1 - r\ \omega \cos i_o /\ v_{p_o}) \qquad (3.2.13)$$

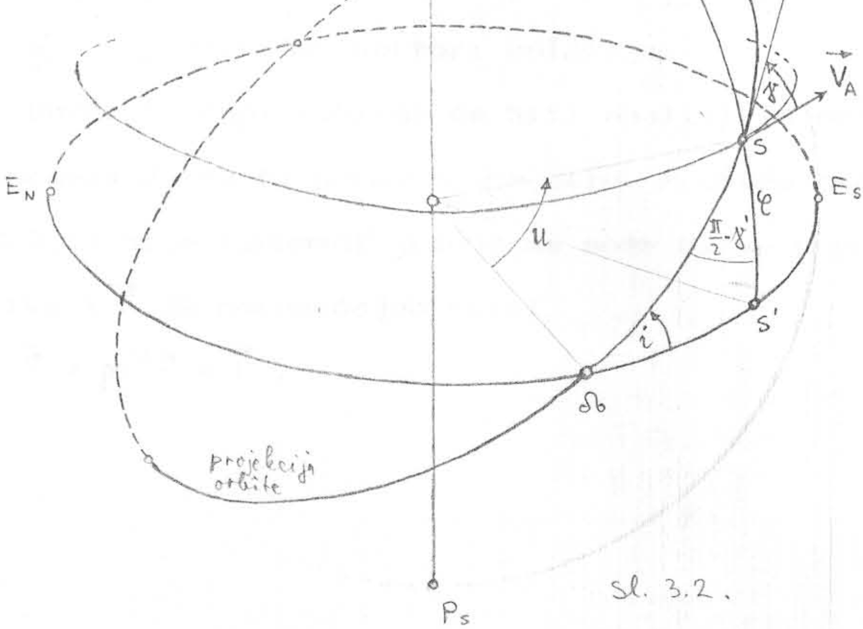
i F može da se smatra konstantom za dati satelit.

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА
Број: ______
Датум: ______



Sl. 3.1

Satelit u Zemljinoj atmosferi i sile koje na njega deluju



Sl. 3.2.

3.3 OSNOVNA TEORIJA

Predmet ovog odeljka je izlaganje u najkraćim crtama osnovnih jednačina teorije satelitskih putanja. Zadatak je sledeći:

Definisati kretanje kretanje mase m u polju centralnih sila (gravitacije) - blizu mase M>>m i daleko od sistema masa m m >>m, i=1,n - kroz sredinu definisanu sumarno silama F , j=1,k u vremenom intervalu u kojem dejstvo sila F ne prevazilazi dejstva centralnih (gravitacionih) sila na masu m.

1) Lagranževe planetarne jednačine i putanja satelita u atmosferi

Posmatrajmo sliku 3.2 Kretanje mase m razmatraćemo u odnosu na koordinatni sistem vezan za masu M - Mcentrični ekvatorski sferni koordinatni sistem; sila se uzima po jedinici mase, tj. ubrzanje; osnovna jednačina je (Njutnova aksioma!)

$$d^2r/dt^2 = -\gamma(M+m)r^{-3}\vec{r} + \sum_{i=1}^{n}\gamma m_i(\rho_i^{-3}\vec{\rho}_i - \vec{r}_i r_i^{-3}) + \sum_{j=1}^{k}\vec{F}_j , \quad (3.3.1)$$

gde su γ - gravitaciona konstanta,

$\vec{r},\vec{r}_i$ - Mcentrični vektori položaja,

$\vec{\rho}_i$ - mcentrični vektori položaja.

Drugi i treći sabirak će biti analiziran posebno, a ovde samo napomena da su to poremećajne sile. Problem rešavanja jednačine (3.3.1) nije razmatran; jednačina može da se prepiše u sledećem obliku ($\vec{F}$ je poremećajna sila)

$$\ddot{\vec{r}} + \mu r^{-3}\vec{r} = \vec{F} . \quad (3.3.2)$$

Ako usvojimo da je oskulatorna ravan definisana centrom atrakcije, masom m i njenom brzinom u nekom trenutku, i ako izaberemo polarni koordinatni sistem kao na sl.3.1, kao generalisani sistem koordinata možemo da usvojimo prirodni diferencijalni (desni) triedar tangente, normale i binormale na oskulatornu putanju. U takvom slučaju poremećajnu silu $\vec{F}$ ćemo razložiti na komponente (fizičke koordinate): F_t, F_r, F_b, gde je

$$\vec{t} = d\vec{r}/|d\vec{r}|, \quad \vec{r}_0 = \vec{r}/|\vec{r}|, \quad \vec{b} = \vec{r}_0 \times \vec{t} = \vec{n} \qquad (3.3.4)$$

Da bismo u daljem imali vezu sa teorijom neporemećenog kretanja mase m u polju gravitacije mase M, redukujmo jednačinu (3.3.2) na oblik koji sledi i nadjimo rešenja (integrale):

$$\ddot{\vec{r}} + \mu r^{-3} \vec{r} = 0 , \quad \mu = \text{const.}$$

Poslednja jednačina predstavlja II Njutnovu aksiomu (diferencijalni oblik) za kretanje materijalne tačke pod dejstvom (jedne) centralne sile koja zavisi samo od rastojanja.

Ako uočimo polarni koordinatni sistem u oskulatornoj ravni sa generalisanim koordinatama $q^1 = r$ i $q^2 = \nu$ (radijus vektor i prava anomalija!) , koordinate sile se dobijaju iz osnovnih relacija:

$$(1/|\vec{g}_i|) \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i}\right) = F_i \qquad (3.3.5)$$

$$2\,T = \vec{V}^2 = \dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\nu}^2 , \qquad (3.3.6)$$

gde je

$$\vec{g}_1 = (\cos \nu, \sin \nu), \quad \vec{g}_2 = (-r \sin \nu, r \cos \nu)$$

i

$$Fr = \ddot{r} - r\,\dot{\nu}^2 = -\mu/r^2; \quad F\nu = 2\,\dot{r}\,\dot{\nu} - r\,\ddot{\nu} = 0$$

(centralne sile), odnosno:

$$\ddot{r} - r\,\dot{\nu}^2 = -\mu/r^2, \; (1/r)\, d(r^2\dot{\nu})/dt = 0 \qquad (3.3.7)$$

$$r^2\dot{\nu} = \text{const} = A. \qquad (3.3.8)$$

Jednačine (3.3.7) i (3.3.8) su opšteg oblika za kretanje u polju centralnih sila, izuzev konkretnog izbora sile $f(r) = -\mu/r^2$. Sada se dobija konačna jednačina kretanja (u diferencijalnom obliku):

$$\ddot{r} - A^2/r^3 = f(r) \;;\; \text{smena } u=1/r \text{ daje}$$

$$\dot{r} = -\dot{u}/u^2 = -A\, du/d\nu, \quad \ddot{r} = -A^2 u^2 d^2u/d\nu^2,$$

$$-A^2u^2d^2u/d\nu^2 - A^2u^3 = f(r), \text{ odnosno}$$

$$d^2(1/r)/d\nu^2 + 1/r = -r^2 f(r)/A^2 = \mu/A^2, \qquad (3.3.9)$$

$$1/r = (1/r)_K + (1/r)_P = C\cos(\nu+\alpha) + \mu/A^2 \qquad (3.3.10)$$

$$r = (A^2/\mu)/(1 + (C\,A^2/\mu)\cos(\nu+\alpha)) \qquad (3.3.11)$$

što predstavlja jednačinu konusnog preseka (trajektorija).

Uvodjenjem smena

$$p=A^2/\mu, \quad e = C\,A^2/\mu, \quad p=a(1-e^2) \qquad (3.3.12)$$

i za tako izabran koordinatni sistem da je $\underline{\alpha}=0$, jednačina (3.3.11) daje

$$r = p/(1+e\cos\nu), \qquad (3.3.13)$$

što predstavlja parametarsku jednačinu konusnog preseka, tj.

$$e\begin{cases} <1 \text{ , elipsa (0-krug)} \\ =1 \text{ , parabola} \\ >1 \text{ , hiperbola.} \end{cases}$$

Bez dodatnih napomena u daljem je razmatrano kretanje po elipsi. Iz (3.3.12) sledi

$$A = \sqrt{\mu p}, \text{ a iz (3.3.7) } \dot\nu = A/r^2 = \sqrt{\mu p}/r^2 \qquad (3.3.14)$$

Diferenciranje (3.3.13) po vremenu daje

$$\dot r\, p/r^2 = e \sin\nu\, \dot\nu = \sqrt{\mu p}/r^2\, e \sin\nu, \text{ ili}$$

$$\dot r = (\mu/p)^{1/2}\, e \sin\nu , \qquad (3.3.15)$$

dok iz (3.3.14) sledi $r\,\dot\nu = (\mu/p)^{1/2}(1 + e\cos\nu)$,ili

$$V^2 = \dot r^2 + (r\,\dot\nu\,)^2 = (\mu/p)\,(1+e^2 + 2\,e\cos\nu), \qquad (3.3.16)$$

$$V^2 = \mu\,(\,2/r - 1/a), \qquad (3.3.17)$$

gde je $\underline{a}$ velika poluosa elipse. Poslednja jednačina je mogla da se dobije neposrednije iz zakona održanja mehaničke energije (v. Prilog A).

Iz dosadašnjeg izlaganja je jasno da su fizičke koordinate (projekcije) vektora brzine $\vec V = \{\dot r, r\,\dot\nu\}$ za definisani koordinatni sistem, gde je $\underline{\dot r}$ radijalna, a $\underline{r\dot\nu}$ transverzalna komponenta brzine. Orijentaciju vektora brzine definišimo uglom Ψ :

$$\cos\Psi = r\,\dot{\nu}\,/\,V = (1/V)\,(\mu/p)^{1/2}(1+e\cos\nu)\ ,$$
$$\sin\Psi = \dot{r}/V \qquad = (1/V)\,(\mu/p)^{1/2}e\sin\nu\ . \qquad (3.3.18)$$

Iz (3.3.7) sledi II Keplerov zakon u obliku

$$r^2\dot{\nu}\,/2 = \sqrt{\mu p}/2,\ \text{ili}$$

$$T = 2\pi a^2\sqrt{1-e^2}\,/\sqrt{\mu p} = 2\pi\sqrt{a^3/\mu}\ , \qquad (3.3.19)$$

jednačina koja daje period obilaska iz poznavanja velike poluose putanje i mase centralnog tela. U drugoj notaciji

$$n = 2\pi/T = \sqrt{\mu/a^3}\ , \qquad (3.3.20)$$

što daje iznos srednjeg dnevnog kretanja. Sa slike 3.3 očigledne su relacije

$$r\cos\nu = a(\cos E - e),\ r\sin\nu = a\sqrt{1-e^2}\sin E \quad (3.3.21)$$
$$r = a\,(\,1 - e\cos E)$$
$$\dot{E} = \sqrt{\mu/a}\,/\,r, \qquad (3.3.22)$$
$$rV^2/\,\mu = 1 + e\cos E\ .$$

Vraćanje jednačini (3.3.2) i vektorskom obliku jednačine (3.3.7) daje

$$\ddot{\vec{r}} + \mu\,r^{-3}\vec{r} = 0\ ,$$
$$r^2\dot{\nu}\,\vec{n} = \sqrt{\mu p}\,\vec{n} = \vec{A} = \text{const.} \qquad (3.3.23)$$

Jednačinu (3.3.17) možemo da prepišemo u obliku:

$\dot{\vec{r}}\,\dot{\vec{r}}\,/2 = \mu(1/|\vec{r}| - 1/2/a)$ odakle diferenciranje daje

$$\dot{\vec{r}}\,\ddot{\vec{r}}/\mu = -\vec{r}\,\dot{\vec{r}}/r^3 + \dot{a}/2/a^2, \text{ ili}$$

$$\dot{a} = 2a^2/\mu\,\dot{\vec{r}}\,(\ddot{\vec{r}} + \mu\vec{r}/r^3) = 2a^2/\mu\,\dot{\vec{r}}\,\vec{F}, \qquad (3.3.24)$$

gde su

$$\dot{\vec{r}} = \{\dot{r}, r\dot{\nu}, 0\} = ((\mu/p)^{1/2} e \sin\nu,\ (\mu/p)^{1/2}(1+e\cos\nu),\ 0)$$

$$\vec{F} = \{f_r,\ f_t,\ f_n\}.$$

Konačno,

$$\dot{a} = 2a^2/\sqrt{\mu p}\,(f_r e \sin\nu + f_t(1+e\cos\nu)), \qquad (3.3.25)$$

što predstavlja I Lagranževu planetarnu jednačinu.

Pre izvodjenja ostalih relacija treba se vratiti sl. 3.2 i definisati putanjske elemente mase m u odnosu na ekvatorski koordinatni sistem mase M. Dva ugla, nagib i putanjske ravni prema ekvatoru i rektascenzija uzlaznog čvora daju orijentaciju putanjske ravni u prostoru. Tri sledeća parametra, velika poluosa a, ekscentričnost putanje e i argument perigeja ω, definišu dimenzije i oblik putanje. Šesti element se definiše različito i odnosi se na položaj mase m (satelita) na putanji (n.pr. prava anomalija).

Druga jednačina (3.3.23) sadrži činjenicu da postoji pravac $(\vec{n})$ u odnosu na koji je skalarni proizvod momenta sile

$(\vec{r}\times\vec{F})\cdot\vec{n} = 0$, tj. $(\vec{r}\times\vec{V})\cdot\vec{n} = \vec{A}\cdot\vec{n} = \text{const.}$, tj. nema promene momenta količine kretanja.

$$\vec{A} = \vec{r}\times\dot{\vec{r}},\quad (\mu/p)^{1/2}\dot{p}\,\vec{n}/2 + (\mu p)^{1/2}\dot{\vec{n}} = \vec{r}\times\ddot{\vec{r}} \quad \text{i iz (3.3.2)}$$

$$\dot{\vec{n}} + \dot{p}/2/p\,\vec{n} = (1/\sqrt{\mu p})\,(\vec{r}\times\vec{F}). \qquad (3.3.26)$$

Hodograf jediničnog vektora je neka sferna kriva; izvod jediničnog vektora je vektor ugaone brzine obrtanja jediničnog vektora oko njegove napadne tačke i ima smer tangente na hodograf. Znači, u opštem slučaju za jedinični vektor $\vec{n}$ važi

$$\dot{\vec{n}} = \vec{B} \times \vec{n} \ , \tag{3.3.27}$$

gde je $\vec{B}$ ugaona brzina . Kako je $\vec{n}$ definicioni za polarnu osu oskulatorne ravni, $\vec{n} \perp C☊$, svaka promena orijentacije $\vec{n}$ menja ☊ i i (v. sl. 3.2). Treba uočiti komponente rotacije vektora $\vec{n}$ oko $\overrightarrow{CP}$ ose, tj. $\dot{☊}$, i oko $\overrightarrow{C☊}$ ose, tj. $\dot{i}$, pa je dalje

$$\dot{\vec{n}} = (\dot{☊}\overrightarrow{CP} + \dot{i}\ \overrightarrow{C☊}) \times \vec{n} \ ,$$

$$\dot{\vec{n}} = \dot{☊} \sin \overrightarrow{C☊} - di/dt\ \overrightarrow{CA} \ , \tag{3.3.28}$$

gde su $\overrightarrow{C☊}$ i $\overrightarrow{CA}$ jedinični vektori pravca ka čvoru i pravca ka apeksu.

$$\vec{r} \times \vec{F} = r f_n \sin u\ \overrightarrow{C☊} - r f_n \cos u\ \overrightarrow{CA} + r f_t \vec{n} \ . \tag{3.3.29}$$

Izjednačavanje komponenti po osama $\overrightarrow{C☊}$, $\overrightarrow{CA}$, $\vec{n}$ daje

$$\dot{☊} \sin i = (1/\sqrt{\mu p})\ r\ f_n \sin u$$

$$\dot{i} = (1/\sqrt{\mu p})\ r\ f_n \cos u \tag{3.3.30}$$

$$\dot{p} = 2\ r\ f_t \sqrt{p/\mu} \ .$$

Prethodne jednačine i parametarska jednačina elipse daju

$$\dot{p} = \dot{a}\,(1-e^2) - 2\ a\ e\ \dot{e},$$

$$a\ e\ \dot{e} = \sqrt{p/\mu}\ (f_r\, a\ e \sin \nu + f_t\,(a\ (1+e \cos \nu) - r\ ))$$

$$\dot{e} = \sqrt{p/\mu}\ (\ f_r \sin \nu + f_t\,(\ \cos \nu + \cos E))\ . \tag{3.3.31}$$

Ukupna ugaona brzina mase m (koja se kreće u oskulatornoj ravni) u pravcu vektora $\vec{n}$ data je sopstvenom ugaonom brzinom $\dot{\nu}$, brzinom pericentra P, $\dot{\omega}$, i brzinom čvora Ω, $\dot{\Omega}\cos i$. Tada je ugaoni moment

$$\vec{A} = \sqrt{\mu p}\,\vec{n} = r^2(\dot{\omega} + \dot{\nu} + \dot{\Omega}\cos i\,)\,\vec{n}\,, \tag{3.3.32}$$

odakle je

$$\dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i = \sqrt{\mu p}/r^2 - \dot{\nu}\,. \tag{3.3.33}$$

Diferenciranje (3.3.12) daje

$$-\sin\nu\,\dot{\nu} = -(\dot{e}/e^2)\,(p/r-1)+(1/e)(\dot{p}/r-\dot{r}p/r^2)$$

što sa ranijim smenama i izrazima za p daje

$$\sqrt{\mu p}/r^2 - \dot{\nu} = (1/e)\sqrt{p/\mu}\,(\,-\,f_r\cos\nu\,+$$

$$+(1+\sin^2\nu-\cos\nu\,\cos E)/\sin\nu\,f_t) \tag{3.3.34}$$

$$\dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i = (1/e)\sqrt{p/\mu}(-f_r\cos\nu + f_t(1+r/p)\sin\nu). \tag{3.3.35}$$

Ovde bi bilo zgodno umesto transverzalne i radijalne komponente poremećajne sile (ubrzanja) imati silu razloženu duž tangente na putanju i unutrašnje normale; neka transverzala zaklapa ugao Ψ sa tangentom. Tada je

$$f_t = f_T\cos\Psi + f_N\sin\Psi = (1/V)\sqrt{\mu/p}(f_T(1+e\cos\nu) + f_N e\sin\nu)$$

$$f_r = f_T\sin\Psi - f_N\cos\Psi = (1/V)\sqrt{\mu/p}(f_T e\sin\nu - f_N(1+e\cos\nu)) \tag{3.3.36}$$

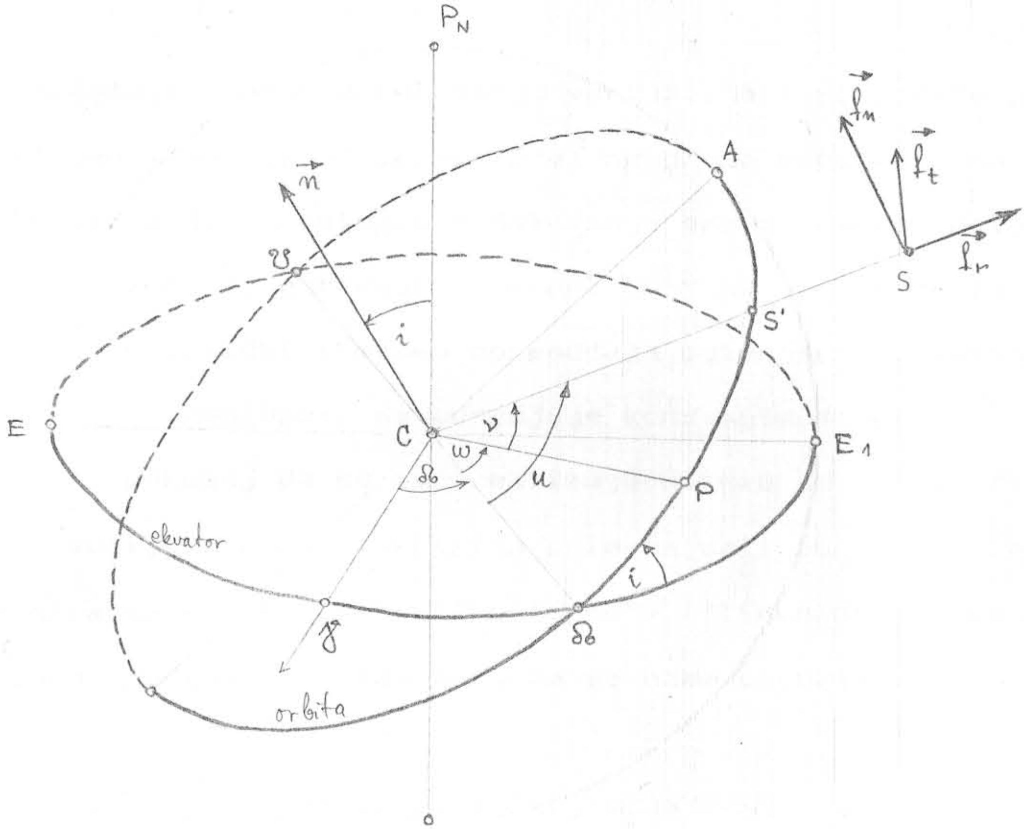
Smena u (3.3.23) daje

$$\dot{a} = 2\,a^2 V/\mu\,f_T, \tag{3.3.37}$$

što je moglo i neposrednije da se dobije iz izraza za $\dot{\vec{r}}\cdot\vec{F}$, koji pokazuje da se a menja samo silama tangencijalnim na putanju. Slično se dobija

$$\dot{e} = (1/V)\ (2f_T(e + \cos \nu) - f_N r/a \sin \nu) \qquad (3.3.38)$$

Time su dobijene osnovne jednačine promene putanjskih elemenata pod dejstvom poremećajne sile $\underline{\vec{F}}$.



sl. 3.3

Komponente sile $\vec{F}$ koja deluje na satelit

IV GLAVA

RAZVOJ TEORIJE

Sadašnje stanje modelovanja varijacija i raspodele gustine Zemljine atmosfere (termosfere) ne pruža mogućnost da se u potpupnosti ponovi postupak modelovanja gravitacionog polja Zemlje. Drugim rečima, potreban je model gustine koji može da se podvede pod analitički tretman poremećaja putanjskih elemenata i, kroz obrnuti postupak, da odredjuje konstante modela.

Prvi pokušaj da se ovo realizuje učinio je Sehnal (1986) a razvoj teorije i njena efektivna primena dati su u ovom radu. Teorija mora da sadrži analitičke formule i linearne izraze po konstantama; poslednji uslov mora da se uzme u obzir u toku modelovanja.

Kako je postupak veoma težak, mada dosta direktan, i zahteva mnogo vremena biće korišćena kompjuterska algebra u ostvarivanju neophodnih transformacija.

4.1 OSNOVNE JEDNAČINE

Iz odeljka 3.2 imamo da je za satelit mase $\underline{M}$ aerodinamička sila (otpor atmosfere) data sa

$$D/M = \rho v^2 \delta / 2, \text{ gde je } \delta = Cd\ A/M \qquad (4.1.1)$$

i da deluje nasuprot brzini $\underline{v}$ relativno u odnosu na okolinu i iz odeljka 3.3

$$fT = -\rho v^2 \delta / 2 . \qquad (1.1.2)$$

Zanemarena je mala komponenta $\underline{fN}$ otpora normalna na putanjsku ravan. Dalje je iz (3.3.37)

$$\dot{a} = - a^2 \rho \delta v^2 / \mu , \qquad (4.1.3)$$

$\dot{e} = - \rho \delta v (e + \cos \nu)$, ili kako je

$e + \cos \nu = a/r\ (1-e^2) \cos E$ poslednja jednačina postaje

$$da/dE = - a^2 \rho \delta (1+e \cos E)^{3/2} (1-e \cos E)^{-1/2} \qquad (4.1.4)$$

i

$$de/dE = - a \rho \delta ((1+e \cos E)/(1-e \cos E))^{1/2} (1-e^2) \cos E, \qquad (4.1.5)$$

$$\Delta a = - a^2 \delta \int_0^{2\pi} ((1+e \cos E)^{3/2} / (1-e \cos E)^{1/2}) \rho\, dE \qquad (4.1.6)$$

$$\Delta e = - a \delta \int_0^{2\pi} ((1+e \cos E)/(1-e \cos E))^{1/2} (1-e^2) \cos E\, \rho\, dE . \qquad (4.1.7)$$

Ovde će biti razmatrane samo promene velike poluose i ekscentričnosti putanje satelita jer su one najpogodnije za eventualni reverzni proces. Gustina ρ je nepoznata i njen izraz u raznim modelima je veoma složen, a proces integracije je praktično nemoguć.

4.2 TEORIJA KING-HILIJA

Na visinama od interesa za ovaj rad, tj. izmedju 150 i 500 kilometara iznad Zemlje, površi konstantne gustine teže da budu sferoidne sa istom eliptičnošću kao Zemlja, $\varepsilon \sim 0.00335$. Neka gustina vazduha za proizvoljnu geocentričnu širinu varira eksponencijalno sa rastojanjem od centra Zemlje:

$$d\rho = - \rho\, dr/H, \text{ ili}$$

$$\rho = \rho_0 \exp(-(r-r_0)/H) , \qquad (4.2.1)$$

gde je H skala visina za gustinu. Uzimajući u obzir formule iz odeljka (2.3) imamo

$$\rho = \rho_{p_0} \exp(-(r-R)/H) \ , \tag{4.2.2}$$

gde je R geocentrično rastojanje neke tačke sferoida konstantne gustine koji prolazi kroz perigej satelitske putanje. Kako je (v. sl. 2.1)

$$\sin \varphi = \sin i \sin u \ , \tag{4.2.3}$$

gde je i nagib putanje prema ekvatoru, u je argument latitude i

$$\exp(-(r-R)/H) = \exp\ (-(r-r_{p_0})/H + \varepsilon r_{p_0} \sin i \cos 2u/(2H) + \\ - \varepsilon r_{p_0} \sin i \cos 2\omega_0/(2H)). \tag{4.2.4}$$

King-Hili (1962,1964) je za ekscentričnosti izmedju 0.02 i 0.2 izveo formule

$$\rho = k \exp\ (-(a(1-e \cos E)/H)) \\ *(1+e \cos 2(\omega+E)+ \\ -2ce \sin 2(\omega+E) \sin E + c^2(1+\cos 4(\omega+E))/4 + \\ -ce^2(\cos 2\omega + 2 \cos 2(\omega+E) - 3 \cos 2(\omega+E) \cos 2E) + \\ -c^2 e \sin 4(\omega+E) \sin E + o(c\varepsilon, ce^3, c^2 e^2)), \tag{4.2.5}$$

gde je

$$k = \rho_{p_0} \exp(r_{p_0}/H - c \cos 2\omega_0), \quad c = \varepsilon\, r_{p_0} \sin^2 i/2/H, \tag{4.2.6}$$

pod pretpostavkom da imamo veličinu ρ_{po} !

Jednačine (4.1.6) i (4.1.7) za Δa i Δe posle razvoja podintegralne funkcije u stepeni red po argumentu e i c, i uvodjenja integralnog predstavljanja Beselovih funkcija daju:

$$\Delta a = -2\pi\delta\, a^2 k \exp(-a/H)\, (B(0) + 2e\, B(1) +$$
$$+ 3e^2 (B(0)+B(2))/4 + e^3 (3B(1)+B(3))/4 +$$
$$+c\ (B(2)+2eB(3)-e^2(3B(0)+2B(2)-17B(4))/8)\ \cos 2\omega +$$
$$+c^2 (B(0)+2eB(1)+(B(4)-e(B(3)-3B(5))\ \cos 4\omega)/4 +$$
$$+ o(e^4, ce^3, c^3 e\ )), \qquad (4.2.7)$$

$$\Delta e = -2\pi\delta\ a\ k\ \exp(-a/H)(B(1)+ e\ (3B(0)+B(2))/2+$$
$$+e^2 (11B(1)+B(3))/8+e^3 (7B(0)+8B(2)+B(4))/16+$$
$$+c\ (B(1)+B(3)-e(B(0)-6B(2)-3B(4))/2+$$
$$-e^2 (16B(1)-29B(3)-11B(5))/8)/2\ \cos 2\omega +$$
$$+c^2 (2B(1)+e(3B(0)+B(2))+(B(3)+B(5)+$$
$$-e^2 (3B(2)-6B(4)-5B(6))/2)\cos 4\omega)/8 +$$
$$-e\Delta a/a + o(e^4, ce^3, c^2 e^2)) \qquad (4.2.8)$$

Iz ovih jednačina može da se izvedu izrazi za perigejsku daljinu, period obilaska i vreme. Koeficijent k u gornjim jednačinama ima faktor ρ_{p_0} koji je nepoznat. Njega odrdjujemo iz nekog od poznatih modela raspodele gustine Zemljine atmosfere (DTM, CIRA, MSIS). Još jedna dodatna teškoća je što nijedan od navedenih modela ne daje eksplicitne izraze za skalu visina. Da ovde ne bi iskomplikovali izlaganje dodavanjem novih transformacija, u Prilogu A je dato originalno izvodjenje analitičkog izraza za skalu visina za model CIRA72 i CIRA86, a analogni izrazi za ostale modele uzeti su iz radova Sehnala (1982,1983).

Ovde treba još dati izraz za poremećaj velike poluose u toku jednog perioda za kružnu orbitu. Smena e=0 u (4.2.7) daje

$$(\Delta a)_{e=0} = -2\pi\delta\, a^2 k\, \exp(-a/H)(B(0)+ \\ +c\, B(2)\cos 2\omega + c^2(B(0)+B(4)\cos 4\omega)/4)\,. \tag{4.2.9}$$

4.3 NOVA TEORIJA - ORIGINALNA REŠENJA

Da se premoste teškoće prisutne u teoriji King-Hilija (a i drugih, koji su imali slične pokušaje) izabrali smo Sehnalov metod (1984) aproksimacije raspodele totalne gustine atmosfere korišćenjem superpozicije sfernih funkcija i njihovom liearizacijom (v. odeljak 2):

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_s^k \exp((r_{p_0}-r)/k/H) = \\ \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{I} Ai^k\, fi\, \exp((r_{p_0}-r)/k/H), \quad K=3, \tag{4.3.1}$$

gde veličine Ai odredjuju geometrijske karakteristike, a fi su funkcije fizičkih parametara. U takvoj notaciji model se definiše na specifičnim površima konstantne gustine pomoću sabiranja sedam članova od kojih svaki ima sopstvenu zavisnost od visine:

$$\rho = k0\ f0\ fx \sum_{n=1}^{7} hn\ gn\,, \tag{4.3.2}$$

gde su

$k0 = 1 + a3(Kp-3)$, $fm = (Fb-60)/160$,

$f0 = a2 + fm$, $fx = 1 + a1(Fx-Fb)$,

Kp - dnevna vrednost geomagnetnog indeksa za trenutak 3 sata pre lokalnog vremena (posmatranja!)

Fx - fluks sunčevog zračenja na 10.7 cm za prethodni dan

Fb - srednji fluks sunčevog zračenja, usrednjen u toku tri rotacije Sunca, a1,a2,... su koeficijenti modela.

Neke od funkcija gn daju vremensku zavisnost (dnevnu, godišnju, itd.), neke kombinovanu zavisnost od vremena i fizičkih parametara

$$g3 = \sin(o-p3) \sin \quad ,$$

$$g4 = (a5\ fm + 1) \sin(o-p4),$$

$$g5 = (a6\ fm + 1) \sin 2(o-p5),$$

$$g6 = (a7\ fm + 1) \sin(t-p6) \cos\varphi ,$$

$$g7 = (a8\ fm + 1) \sin 2(t-p7) \cos^2\varphi ,$$

gde je o - dan u godini, izražen u radijanima po godini,

t - lokalno vreme, u radijanima po danu,

φ - geocentrična širina,

p3,p4,... su faze pojedinih procesa.

Zavisnost od visine opisana je faktorima hn

$$hn = Kn0 + \sum_{j=1}^{3} Knj\ Aj \exp(c_j \cos 2u) \exp(z_j \cos E), \quad (4.3.3)$$

gde je

$$Aj = \exp((120 + Re(1 - \mathcal{E} \sin^2 i) - a)/(40j),$$

$$zj = a \cdot e/(40j) \ , \quad j=1,3 \quad , \qquad (4.3.4)$$

gde je Re ekvatorski poluprečnik Zemlje, $\mathcal{E}$ je spljoštenost Zemlje, i je nagib putanje.

Dalje, treba uzeti u obzir da su geocentrična širina satelita (deklinacija) i lokalno vreme promenljive tokom jednog perioda i uvesti relacije (v. sl. 4.1)

$$\sin t \cos\varphi = \cos u \sin(\Omega-\alpha_\odot) + \sin u \cos(\Omega-\alpha_\odot) \cos i,$$

$$\cos t \cos\varphi = \cos u \cos(\Omega-\alpha_\odot) - \sin u \sin(\Omega-\alpha_\odot) \cos i,$$

i, koristeći formule iz odeljka (2.3),

$$\begin{aligned}\sin u &= (1-e\cos E)^{-1}(-e\sin\omega + \sin\omega\cos E + \sqrt{1-e^2}\cos\omega\sin E)\\ &= \sin\omega\,(-e + \sum_{j=0}^{\infty} e^j (1-e^2)\cos^{j+1}E) +\\ &\quad + \sqrt{1-e^2}\cos\omega\sin E\sum_{j=0}^{\infty} e^j \cos^j E\,, \qquad (4.3.4)\\ \cos u &= (1-e\cos E)^{-1}(-e\cos\omega + \cos\omega\cos E + \sqrt{1-e^2}\sin\omega\sin E)\\ &= \cos\omega\,(-e + \sum_{j=0}^{\infty} e^j (1-e^2)\cos^{j+1}E) +\\ &\quad = + \sqrt{1-e^2}\sin\omega\sin E\sum_{j=0}^{\infty} e^j \cos^j E\,. \qquad (4.3.5)\end{aligned}$$

Mali parametar cj (v. jednačine) omogućava da se izvrši razvoj u red eksponencijalne funkcije:

$$\exp(cj\cos 2u) = \sum_{n=0}^{\infty} (cj^n \cos^n 2u)/n! \qquad (4.3.6)$$

Kako izgledaju kompletni razvoji u red pojedinih faktora jednačine (4.3.2) može da se vidi u Prilogu A. Činjenica je da je rezultujuća analitička forma toliko glomazna da je njeno ručno izvodjenje praktično nemoguće. Korišćenje algobarskog sistema REDUCE 2 omogućilo je da se svi rezultati dobiju za ukupno 12 minuta rada centralnog procesora. Snižavajući red aproksimacije i izvodeći ručno sve izraze i transformacije samo za poremećaj velike poluose putanje, autor je utrošio mesec dana (rad po osam časova dnevno).

U Prilogu A mogu da se vide svi razvoji u red po formulama ovog odeljka, sa graničnom tačnošću (aproksimacijom) do trećeg stepena ekscentričnosti i malog parametra cj. Program pisan u sintaksi jezika REDUCE 2 takodje je dat u Prilogu A.

Smenjivanje svih razvoja u red po elementima satelitske putanje u osnovne formule za poremećaj ekscentričnosti i velike poluose takodje je izvršeno kompjuterski, uz pomoć drugog programa pisanog u REDUCE-u. Rezultat je takodje uz pomoć istog jezičkog procesora automatski preveden u FORTRAN-potprogram za efektivni račun, koji je takodje dat u Prilogu A.

Da bi u ovom delu bilo dovršeno izlaganje, za pomenute razvoje i transformacije uvedene su opšte oznake i dati su konačni izrazi. Pri tome je takodje izvršena integracija svih izraza na intervalu od jednog perioda i iskorišćeno integralno predstav ljanje Beselovih polinoma. Konačno, dobijeni su izrazi

$$\Delta a = - a^2 \delta \ kO \ fO \ fx \ *$$
$$\Big(\sum_{\substack{n=1\\n\neq 3}}^{5} (gn \ KnO \int_0^{2\pi} La \ dE + gn \sum_{j=1}^{3} Knj \ Aj \int_0^{2\pi} Cj \ La \exp(z_j \cos E) \ dE) +$$
$$+ \sum_{n=3,6,7} (KnO \int_0^{2\pi} gn \ La \ dE + \sum_{j=1}^{3} Knj \ Aj \int_0^{2\pi} gn \ Cj \ La \exp(z_j \cos E) \ dE)\Big) \tag{4.3.7}$$

$$\Delta e = - a \ \delta \ kO \ fO \ fx \ *$$
$$\Big(\sum_{\substack{n=1\\n\neq 3}}^{5} (gn \ KnO \int_0^{2\pi} Le \ dE + gn \sum_{j=1}^{3} Knj \ Aj \int_0^{2\pi} Cj \ Le \exp(z_j \cos E) \ dE) +$$
$$+ \sum_{n=3,6,7} (KnO \int_0^{2\pi} gn \ Le \ dE + \sum_{j=1}^{3} Knj \ Aj \int_0^{2\pi} gn \ Cj \ Le \exp(z_j \cos E) \ dE)\Big) \tag{4.3.8}$$

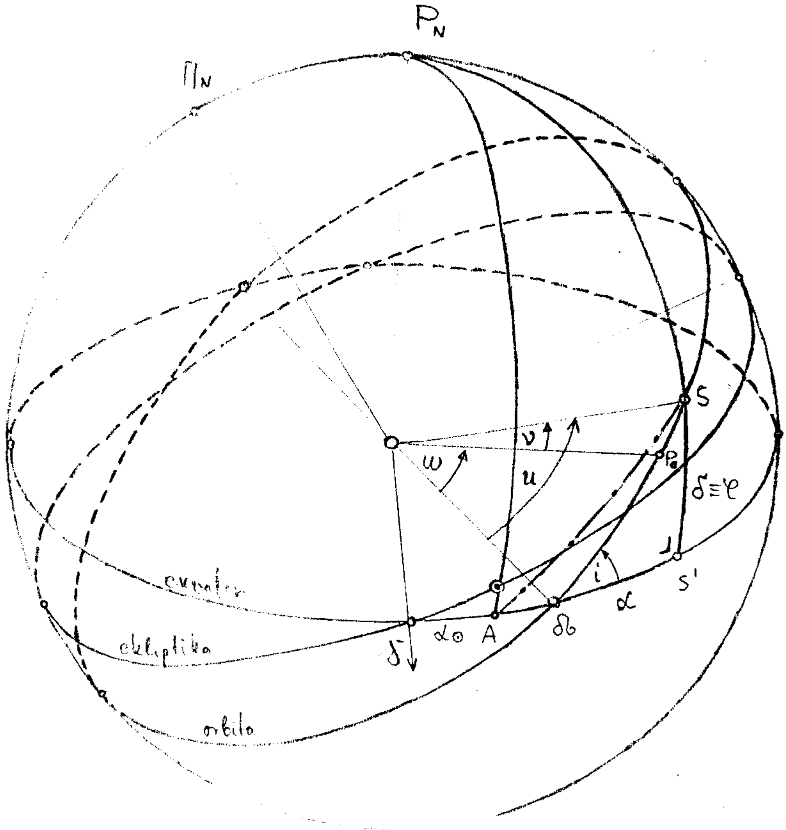
Za kružne orbite iz gornjih jednačina dobijamo

$$(\Delta a)_{e=0} = - a^2 \delta \ kO \ fO \ fx \ *$$
$$\Big(\sum_{\substack{n=1\\n\neq 3}}^{5} (gn \ KnO \int_0^{2\pi} dE + gn \sum_{j=1}^{3} Knj \ Aj \int_0^{2\pi} Cj \ dE) +$$
$$+ \sum_{n=3,6,7} (KnO \int_0^{2\pi} gn \ dE + \sum_{j=1}^{3} Knj \ Aj \int_0^{2\pi} Cj \ gn \ dE)\Big), \tag{4.3.9}$$

gde je $Cj = 1 - cj^2/6(3-2cj) + cj^2(1+cj)(3\cos^2\omega - \cos^4\omega)$. (4.3.10)

Poslednji član, n=7, biće jednak ostalima i

$$(\Delta a)_{e=0} = -2\pi a^2 \delta \ kO \ fO \ fx \sum_{\substack{n=1\\n\neq 3,6}}^{7} (gn \ KnO + \sum_{j=1}^{3} gn \ Knj \ Aj \ Cj) \tag{4.3.11}$$



sl. 4.1.

Putanjski elementi i sferne koordinate satelita i Sunca

4.4 POREDJENJE TEORIJA

Na osnovu konačnih formula teorije King-Hilija (v. odeljak 4.2, formule 4.2.7 i 4.2.8) i konačnih formula iz odeljka 4.3 formirani su odgovarajući fortranski programi KHELE i DRAG (dati u Prilogu A) pomoću kojih su računati poremećaji velike poluose i ekscentričnosti putanje satelita.

Simulirani su različiti uslovi kretanja, počev od različite perigejske daljine, ekscentričnosti putanje i sl., do variranja fizičkih parametara. Rezultati su dati u tablicama T1-T12 i prikazani su na odgovarajućim grafikonima (crteži F1-F10).

Ono što može da se očekuje (na osnovu detaljnije teorijske analize) je da funkcije

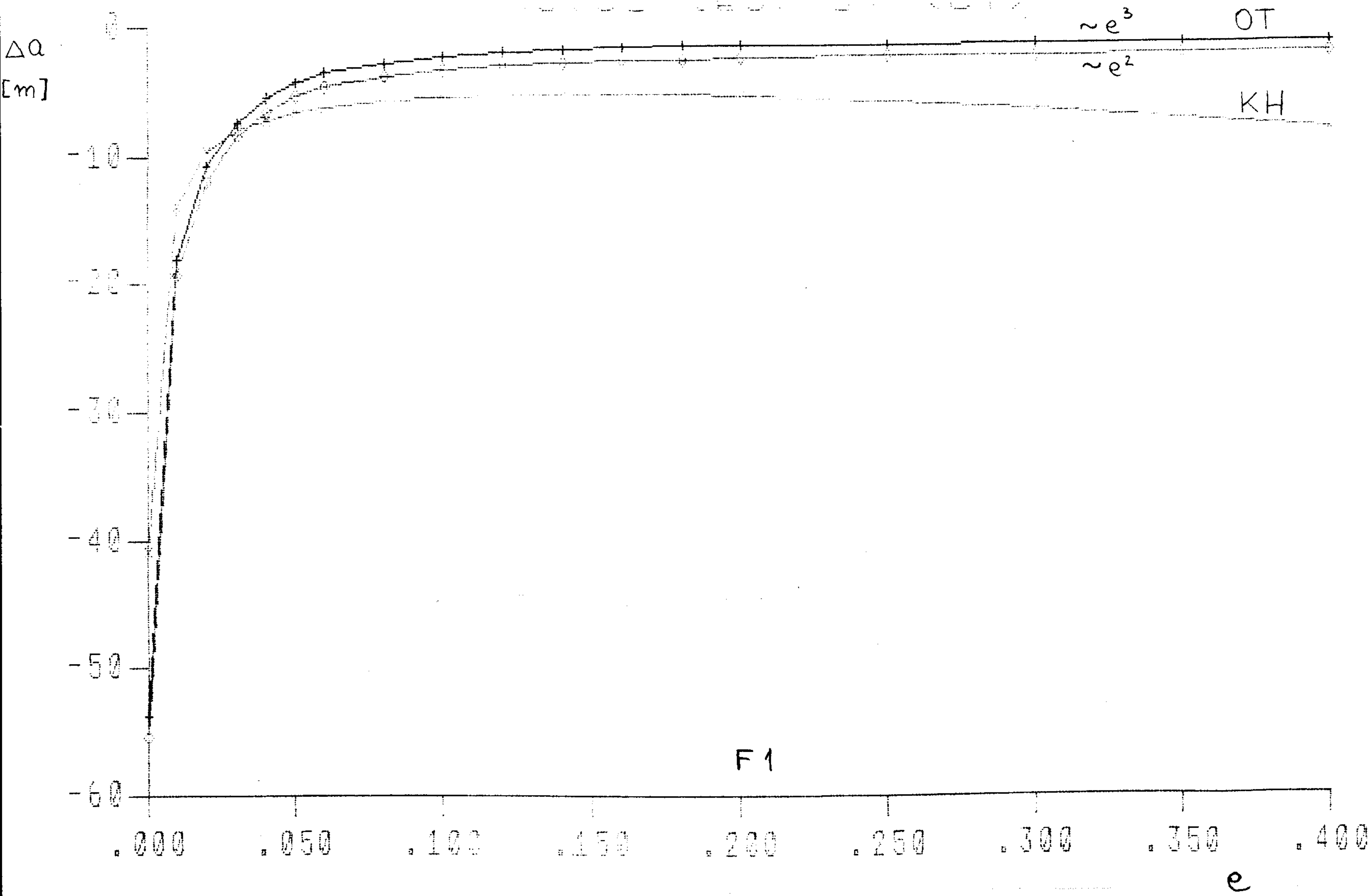
$$\Delta a = \Delta a(e) \ , \qquad \Delta e = \Delta e(e)$$

treba da su monotono neopadajuće po ekscentričnosti, tj. sa rastom ekscentričnosti za iste ostale uslove treba da opada iznos poremećaja. Iz tablica i sa crteža je jasno da taj uslov u teoriji King-Hilija nije zadovoljen izvan intervala ekscentričnosti za koji su obe teorije izvedene (0.02-0.2). Originalna teorija zadovoljava taj uslov na veoma širokom intervalu , sve do e=0.4.

Na drugoj strani, interval perigejskih daljina (visina iznad površi Zemlje) na kojima je zadovoljavajuća tačnost odredjivanja poremećaja usled otpora atmosfere je prilično sužen, do na oko 400 km; iznad te visine vrednosti iz teorije King-Hilija naglo gube na tačnosti, dok su vrednosti iz naše teorije nulte ili pozitivne. Kako model totalne gustine sa datim vrednostima konstanata ima interval primene 150-500 km, rezultati pokazuju da je potrebno popraviti konstante modela. O tome će biti govora u sledećoj glavi.

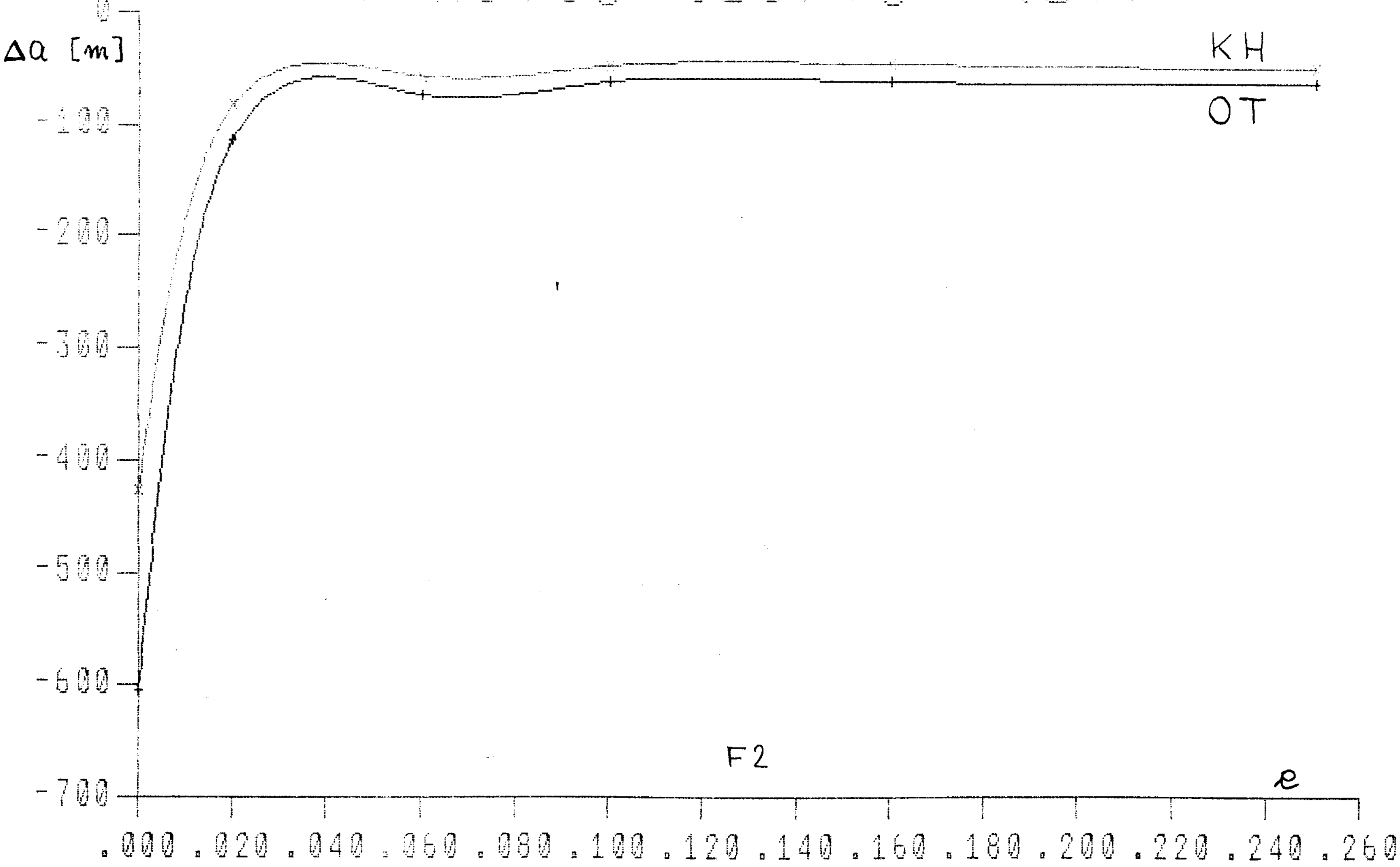
Iz rezultata se takodje jasno vidi da je model konstruisan kao veoma osetljiv na promenu fizičkih parametara i lokalnih uslova.

za razne ekscentricitete
za visinu od 300 km prema
teoriji King-Hellija (KH)
i naše teorije (OT)



F 1

za razne ekscentricitete
za visinu od 200 km prema
teoriji King-Hillija (KH)
i novoj teoriji (OT)



TABLICA 1: POREMEĆAJ VELIKE POLUOSE PUTANJE SATELITA USLED DEJSTVA OTPORA ATMOSFERE ZA RAZNE VELIČINE SUNČEVOG FLUKSA

VISINA:	200 KM			250 KM			300 KM			350 KM		
FLUX	ΔAOT	ΔAKH	RO	ΔAOT	ΔAKH	RO	ΔAOT	ΔAKH	RO	ΔAOT	ΔAKH	RO
$*10^{22} W/m^2Hz$	M	M	$*10^{13} g/cm^3$	M	M	$*10^{13} g/cm^3$	M	M	$*10^{13} g/cm^3$	M	M	$*10^{13} g/cm^3$
50	-105.2	-46.4	106	-30.5	-17.5	32	-9.0	-6.3	10	-2.2	-2.5	4
60	-120.8	-54.1	122	-34.3	-20.4	37	-9.3	-7.3	12	-1.4	-2.9	4
70	-137.4	-61.9	139	-39.0	-23.3	42	-10.6	-8.4	13	-1.6	-3.3	5
80	-153.9	-69.8	156	-43.7	-26.3	47	-11.9	-9.5	15	-1.8	-3.8	6
90	-170.5	-77.8	173	-48.4	-29.3	52	-13.1	-10.6	17	-2.0	-4.2	6
100	-187.1	-85.8	190	-53.1	-32.4	57	-14.4	-11.7	18	-2.2	-4.6	7
110	-203.7	-93.9	206	-57.8	-35.5	62	-15.7	-12.8	20	-2.4	-5.1	7
120	-220.3	-102.1	223	-62.5	-38.6	67	-17.0	-13.9	21	-2.6	-5.5	8
130	-236.8	-110.3	240	-67.2	-41.7	72	-18.3	-15.1	23	-2.8	-6.0	8
140	-253.4	-118.6	257	-71.9	-44.9	77	-19.5	-16.2	25	-3.0	-6.4	9
150	-270.0	-127.0	274	-76.6	-48.0	82	-20.8	-17.4	26	-3.2	-6.9	10
160	-286.6	-135.5	290	-81.4	-51.3	87	-22.1	-18.6	28	-3.4	-7.4	10
170	-303.2	-144.0	307	-86.1	-54.5	92	-23.4	-19.7	30	-3.6	-7.9	11
180	-319.7	-152.5	324	-90.8	-57.8	97	-24.6	-20.9	31	-3.8	-8.3	11
190	-336.3	-161.2	341	-95.5	-61.1	102	-25.9	-22.2	33	-4.0	-8.8	12
200	-352.9	-169.9	358	-100.2	-64.4	107	-27.2	-23.4	34	-4.2	-9.3	13
210	-369.5	-178.6	374	-104.9	-67.8	112	-28.5	-24.6	36	-4.4	-9.8	13
220	-386.1	-187.5	391	-109.6	-71.1	117	-29.8	-25.8	38	-4.6	-10.3	14
230	-402.6	-196.3	408	-114.3	-74.5	122	-31.0	-27.1	39	-4.8	-10.8	14

TABLICA 2: POREMEĆAJ VELIKE POLUOSE PUTANJE SATELITA USLED DEJSTVA OTPORA ATMOSFERE ZA RAZLIČITE VREDNOSTI INDEKSA KP

VISINA:	200 KM			250 KM			300 KM			350		
KP	ΔAOT	ΔAKH	RO	ΔAOT	ΔAKH	RO	ΔAOT	ΔAKH	RO	ΔAOT	ΔAKH	RO
	M	M	$*10^{13} g/cm^3$	M	M	$*10^{13} g/cm^3$	M	M	$*10^{13} g/cm^3$	M	M	$*10^{13} g/cm^3$
0	-221.5	-101.4	223	-64.3	-38.3	66	-19.0	-13.8	21	-4.7	-5.5	8
1	-225.3	-104.4	228	-64.0	-39.4	68	-17.4	-14.2	22	-2.7	-5.6	8
1	-231.1	-107.3	234	-65.6	-40.6	70	-17.8	-14.7	23	-2.8	-5.8	8
2	-236.8	-110.3	240	-67.2	-41.7	72	-18.3	-15.1	23	-2.8	-6.0	8
2	-242.6	-113.3	246	-68.9	-42.8	73	-18.7	-15.5	24	-2.9	-6.2	9
3	-248.4	-116.3	252	-70.5	-44.0	75	-19.1	-15.9	24	-3.0	-6.3	9
3	-254.2	-119.4	258	-72.2	-45.1	77	-19.6	-16.3	25	-3.0	-6.5	9
4	-259.9	-122.4	263	-73.8	-46.3	79	-20.0	-16.7	25	-3.1	-6.7	9
4	-265.7	-125.5	269	-75.4	-47.4	80	-20.5	-17.2	26	-3.2	-6.9	9
5	-271.5	-128.7	275	-77.1	-48.6	82	-20.9	-17.6	26	-3.2	-7.1	10
5	-277.3	-131.9	281	-78.7	-49.8	84	-21.4	-18.1	27	-3.3	-7.3	10
6	-283.1	-135.2	287	-80.4	-51.1	86	-21.8	-18.5	28	-3.4	-7.5	10
6	-288.8	-138.7	293	-82.0	-52.4	87	-22.3	-19.0	28	-3.4	-7.7	10
7	-294.6	-142.5	299	-83.6	-53.8	89	-22.7	-19.6	29	-3.5	-7.9	11
7	-300.4	-146.7	304	-85.3	-55.4	91	-23.2	-20.2	29	-3.6	-8.2	11
8	-306.2	-151.6	310	-86.9	-57.3	93	-23.6	-20.9	30	-3.6	-8.5	11
8	-311.9	-157.6	316	-88.6	-59.6	94	-24.0	-21.8	30	-3.7	-8.9	11
9	-317.7	-165.1	322	-90.2	-62.6	96	-24.5	-22.9	31	-3.8	-9.5	11
9	-323.5	-174.8	328	-91.8	-66.4	98	-24.9	-24.4	32	-3.9	-10.2	12

TABLICA 3: POREMEĆAJ VELIKE POLUOSE PUTANJE SATELITA USLED DEJSTVA OTPORA ATMOSFERE ZA RAZNE GEOCENTRIČNE ŠIRINE

VISINA :	200 KM			250 KM			300 KM			350 KM		
FI	ΔAOT	ΔAKH	RO	ΔAOT	ΔAKH	RO	ΔAOT	ΔAKH	RO	ΔAOT	ΔAKH	RO
[°]	M	M	$\times 10^{13}$ g/cm³	M	M	$\times 10^{13}$ g/cm³	M	M	$\times 10^{13}$ g/cm³	M	M	$\times 10^{13}$ g/cm³
-85	-183.9	-109.2	237	-53.7	-41.7	70	-15.7	-15.0	23	-3.4	-6.0	8
-80	-183.9	-109.3	238	-52.1	-41.7	71	-13.7	-15.1	23	-1.2	-6.0	8
-75	-187.6	-109.4	238	-53.2	-41.7	71	-14.0	-15.1	23	-1.3	-6.0	8
-70	-192.7	-109.4	238	-54.7	-41.7	71	-14.5	-15.1	23	-1.5	-6.0	8
-65	-199.2	-109.5	238	-56.5	-41.7	71	-15.0	-15.1	23	-1.7	-6.0	8
-60	-207.0	-109.5	239	-58.7	-41.7	71	-15.7	-15.1	23	-1.9	-6.0	8
-55	-216.0	-109.7	239	-61.3	-41.6	71	-16.5	-15.0	23	-2.2	-6.0	8
-50	-226.0	-109.9	239	-64.2	-41.7	71	-17.3	-15.1	23	-2.5	-6.0	8
-45	-236.8	-110.3	240	-67.2	-41.7	72	-18.3	-15.1	23	-2.8	-6.0	8
-40	-248.2	-110.9	241	-70.5	-41.8	72	-19.2	-15.1	23	-3.2	-6.0	9
-35	-259.7	-111.8	243	-73.7	-41.9	72	-20.2	-15.1	23	-3.5	-6.0	9
-30	-271.0	-112.9	245	-76.9	-42.2	73	-21.1	-15.2	23	-3.8	-6.0	9
-25	-281.6	-114.3	247	-80.0	-42.5	74	-22.0	-15.3	24	-4.1	-6.1	9
-20	-291.1	-116.1	251	-82.7	-42.9	75	-22.8	-15.4	24	-4.4	-6.1	9
-15	-299.0	-118.3	255	-84.9	-43.4	76	-23.5	-15.6	24	-4.6	-6.2	9
-10	-305.0	-120.8	259	-86.6	-44.1	77	-24.0	-15.8	25	-4.8	-6.3	9
-5	-308.7	-123.8	265	-87.7	-44.8	78	-24.3	-16.0	25	-4.9	-6.4	9
0	-310.0	-127.1	271	-88.0	-45.7	80	-24.4	-16.3	25	-4.9	-6.5	9
5	-308.7	-130.8	278	-87.7	-46.7	81	-24.3	-16.6	26	-4.9	-6.7	10
10	-305.0	-134.8	285	-86.6	-47.7	83	-24.0	-17.0	26	-4.8	-6.8	10
15	-299.0	-139.1	293	-84.9	-48.9	85	-23.5	-17.3	27	-4.6	-7.0	10
20	-291.1	-143.7	302	-82.7	-50.1	87	-22.8	-17.7	28	-4.4	-7.1	10
25	-281.6	-148.5	311	-80.0	-51.4	90	-22.0	-18.1	28	-4.1	-7.3	11
30	-271.0	-153.4	320	-76.9	-52.7	92	-21.1	-18.5	29	-3.8	-7.5	11
35	-259.7	-158.3	329	-73.7	-54.0	94	-20.2	-18.9	29	-3.5	-7.7	11
40	-248.2	-163.2	338	-70.5	-55.3	96	-19.2	-19.3	30	-3.2	-7.9	11
45	-236.8	-168.0	346	-67.2	-56.6	98	-18.3	-19.8	31	-2.8	-8.1	12
50	-226.0	-172.6	354	-64.2	-57.8	100	-17.3	-20.1	31	-2.5	-8.2	12
55	-216.0	-176.8	362	-61.3	-59.0	102	-16.5	-20.5	32	-2.2	-8.4	12
60	-207.0	-180.7	369	-58.7	-60.0	104	-15.7	-20.8	32	-1.9	-8.5	12
65	-199.2	-184.1	374	-56.5	-61.0	105	-15.0	-21.1	33	-1.7	-8.7	12
70	-192.7	-187.0	379	-54.7	-61.7	106	-14.5	-21.4	33	-1.5	-8.8	12
75	-187.6	-189.3	383	-53.2	-62.3	107	-14.0	-21.5	33	-1.3	-8.9	13
80	-183.9	-191.0	386	-52.1	-62.8	108	-13.7	-21.7	33	-1.2	-8.9	13
85	-181.7	-191.9	387	-51.5	-63.0	108	-13.5	-21.7	33	-1.1	-9.0	13
90	-181.0	-192.2	387	-51.3	-63.0	108	-13.4	-21.7	33	-1.1	-9.0	13

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА

Број: ______

Датум: ______

TABLICA 4: POREMEĆAJ VELIKE POLUOSE PUTANJE SATELITA USLED DEJSTVA OTPORA ATMOSFERE ZA RAZNE TRENUTKE (GODIŠNJA PROMENA)

VISINA:	200 KM			250 KM			300 KM			350KM		
DAN	ΔAOT M	ΔAKH M	RO $*10^{13} g/cm^3$	ΔAOT M	ΔAKH M	RO $*10^{13} g/cm^3$	ΔAOT M	ΔAKH M	RO $*10^{13} g/cm^3$	ΔAOT M	ΔAKH M	RO $*10^{13} g/cm^3$
0	-220.9	-110.6	233	-64.1	-40.4	69	-18.5	-14.6	22	-4.1	-5.7	8
10	-206.5	-109.7	231	-58.3	-40.1	69	-14.9	-14.4	22	-1.0	-5.7	8
20	-200.3	-111.6	235	-56.4	-40.8	70	-13.9	-14.7	23	-0.2	-5.8	8
30	-199.5	-115.9	244	-56.0	-42.4	73	-13.3	-15.3	24	0.6	-6.1	9
40	-203.1	-121.9	257	-56.9	-44.6	77	-13.1	-16.2	25	0.4	-6.6	9
50	-209.4	-128.8	271	-58.6	-47.2	81	-13.1	-17.3	26	0.6	-7.1	10
60	-216.6	-135.6	286	-60.5	-49.7	86	-13.3	-18.3	28	0.5	-7.6	11
70	-222.8	-141.2	297	-62.3	-51.8	89	-13.5	-19.1	29	0.9	-8.0	11
80	-226.3	-144.7	305	-63.3	-53.2	92	-13.7	-19.7	30	1.1	-8.3	12
90	-226.0	-145.4	306	-63.4	-53.5	92	-13.7	-19.9	30	1.2	-8.3	12
100	-221.3	-142.9	301	-62.3	-52.6	91	-13.6	-19.5	30	1.0	-8.2	12
110	-212.6	-137.3	289	-60.1	-50.6	87	-13.3	-18.8	29	0.7	-7.9	11
120	-200.6	-128.8	271	-57.0	-47.6	82	-12.9	-17.6	27	0.4	-7.3	10
130	-186.8	-118.4	249	-53.5	-43.8	75	-12.4	-16.2	25	0.4	-6.7	9
140	-173.1	-106.8	225	-50.0	-39.6	68	-12.1	-14.5	22	0.0	-5.9	8
150	-161.7	-95.4	201	-47.1	-35.4	61	-12.0	-12.9	20	-0.4	-5.2	7
160	-154.4	-85.2	180	-45.4	-31.7	55	-12.3	-11.5	18	-1.5	-4.5	6
170	-153.0	-77.4	163	-45.3	-28.8	50	-13.0	-10.4	16	-2.6	-4.0	6
180	-158.7	-72.7	153	-47.1	-27.1	47	-14.1	-9.7	15	-3.7	-3.7	5
190	-171.8	-71.8	151	-51.0	-26.8	46	-15.7	-9.6	15	-4.8	-3.6	5
200	-192.1	-74.7	157	-56.8	-27.8	48	-17.7	-10.0	15	-5.7	-3.8	5
210	-218.3	-81.1	171	-64.2	-30.2	52	-20.1	-10.9	17	-6.6	-4.2	6
220	-248.6	-90.5	191	-72.7	-33.6	58	-22.6	-12.3	19	-7.2	-4.8	7
230	-280.7	-101.9	215	-81.6	-37.8	65	-25.1	-13.9	21	-7.7	-5.6	8
240	-312.0	-114.1	241	-90.3	-42.3	73	-27.5	-15.6	24	-8.1	-6.4	9
250	-339.8	-126.0	266	-98.0	-46.6	80	-29.5	-17.3	27	-8.2	-7.1	10
260	-361.9	-136.4	288	-104.0	-50.4	87	-31.0	-18.7	29	-8.2	-7.8	11
270	-376.3	-144.4	305	-107.9	-53.3	92	-31.8	-19.8	30	-8.0	-8.3	12
280	-382.1	-149.3	315	-109.3	-55.0	95	-31.9	-20.4	31	-7.7	-8.6	12
290	-378.9	-150.8	318	-108.2	-55.5	96	-31.4	-20.6	32	-7.3	-8.7	12
300	-367.4	-149.1	315	-104.8	-54.8	95	-30.2	-20.3	31	-6.8	-8.5	12
310	-348.8	-144.6	305	-99.4	-53.1	92	-28.4	-19.6	30	-6.2	-8.2	12
320	-325.2	-138.0	291	-92.6	-50.6	87	-26.3	-18.6	29	-5.5	-7.7	11
330	-298.8	-130.4	275	-85.0	-47.8	82	-23.9	-17.5	27	-4.7	-7.1	10
340	-272.2	-122.8	259	-77.3	-45.0	78	-21.5	-16.4	25	-3.9	-6.6	9
350	-247.6	-116.3	246	-70.3	-42.5	73	-19.2	-15.4	24	-3.1	-6.1	9

TABLICA 5: POREMEĆAJ VELIKE POLUOSE PUTANJE SATELITA USLED DEJSTVA OTPORA ATMOSFERE ZA RAZLIČITE POLOŽAJE SUNCA (DNEVNA PROMENA)

VISINA:	200 KM			250 KM			300 KM			350 KM		
SAT	ΔAOT M	ΔAKH M	RO $*10^{13}$ g/cm^3	ΔAOT M	ΔAKH M	RO $*10^{13}$ g/cm^3	ΔAOT M	ΔAKH M	RO $*10^{13}$ g/cm^3	ΔAOT M	ΔAKH M	RO $*10^{13}$ g/cm^3
0	-176.8	-114.0	240	-51.2	-41.7	72	-13.1	-15.1	23	-0.5	-6.0	8
1	-168.3	-113.1	238	-45.6	-41.4	71	-8.2	-15.0	23	0.3	-5.9	8
2	-165.9	-110.3	232	-44.8	-40.5	70	-7.8	-14.7	23	0.6	-5.8	8
3	-166.3	-106.3	224	-45.1	-39.3	68	-8.1	-14.3	22	0.3	-5.6	8
4	-170.5	-102.3	215	-46.6	-38.1	65	-9.0	-13.9	21	0.5	-5.5	8
5	-179.5	-99.8	210	-49.7	-37.3	64	-10.6	-13.7	21	0.2	-5.3	8
6	-193.6	-100.5	212	-54.3	-37.5	65	-12.9	-13.7	21	0.6	-5.4	8
7	-212.7	-105.4	222	-60.2	-39.0	67	-15.5	-14.2	22	-1.1	-5.6	8
8	-235.5	-114.6	241	-67.0	-41.9	72	-18.2	-15.1	23	-2.9	-6.0	8
9	-259.9	-127.1	268	-74.0	-45.7	79	-20.9	-16.3	25	-4.4	-6.5	9
10	-283.2	-141.2	297	-80.5	-50.0	86	-23.2	-17.7	27	-5.6	-7.1	10
11	-302.7	-154.4	325	-85.9	-54.1	93	-25.0	-19.0	29	-6.4	-7.7	11
12	-315.9	-164.5	346	-89.3	-57.2	98	-26.0	-20.0	31	-6.7	-8.2	12
13	-321.3	-169.8	357	-90.6	-58.8	101	-26.3	-20.5	31	-6.7	-8.4	12
14	-318.3	-169.4	356	-89.6	-58.7	101	-25.8	-20.5	31	-6.4	-8.4	12
15	-307.8	-163.7	345	-86.7	-57.0	98	-24.7	-19.9	31	-5.8	-8.1	11
16	-291.5	-154.1	324	-82.2	-54.0	93	-23.2	-19.0	29	-5.1	-7.7	11
17	-271.7	-142.6	300	-76.7	-50.5	87	-21.4	-17.8	27	-4.3	-7.2	10
18	-250.7	-131.3	276	-70.9	-47.0	81	-19.4	-16.7	26	-3.3	-6.7	9
19	-230.8	-122.1	257	-65.4	-44.2	76	-17.4	-15.8	24	-2.2	-6.3	9
20	-213.4	-116.0	244	-60.3	-42.3	73	-15.4	-15.2	23	-1.1	-6.0	9
21	-199.1	-113.2	238	-56.0	-41.4	71	-13.6	-15.0	23	0.2	-5.9	8
22	-187.9	-112.8	238	-52.4	-41.3	71	-11.8	-14.9	23	1.4	-5.9	8

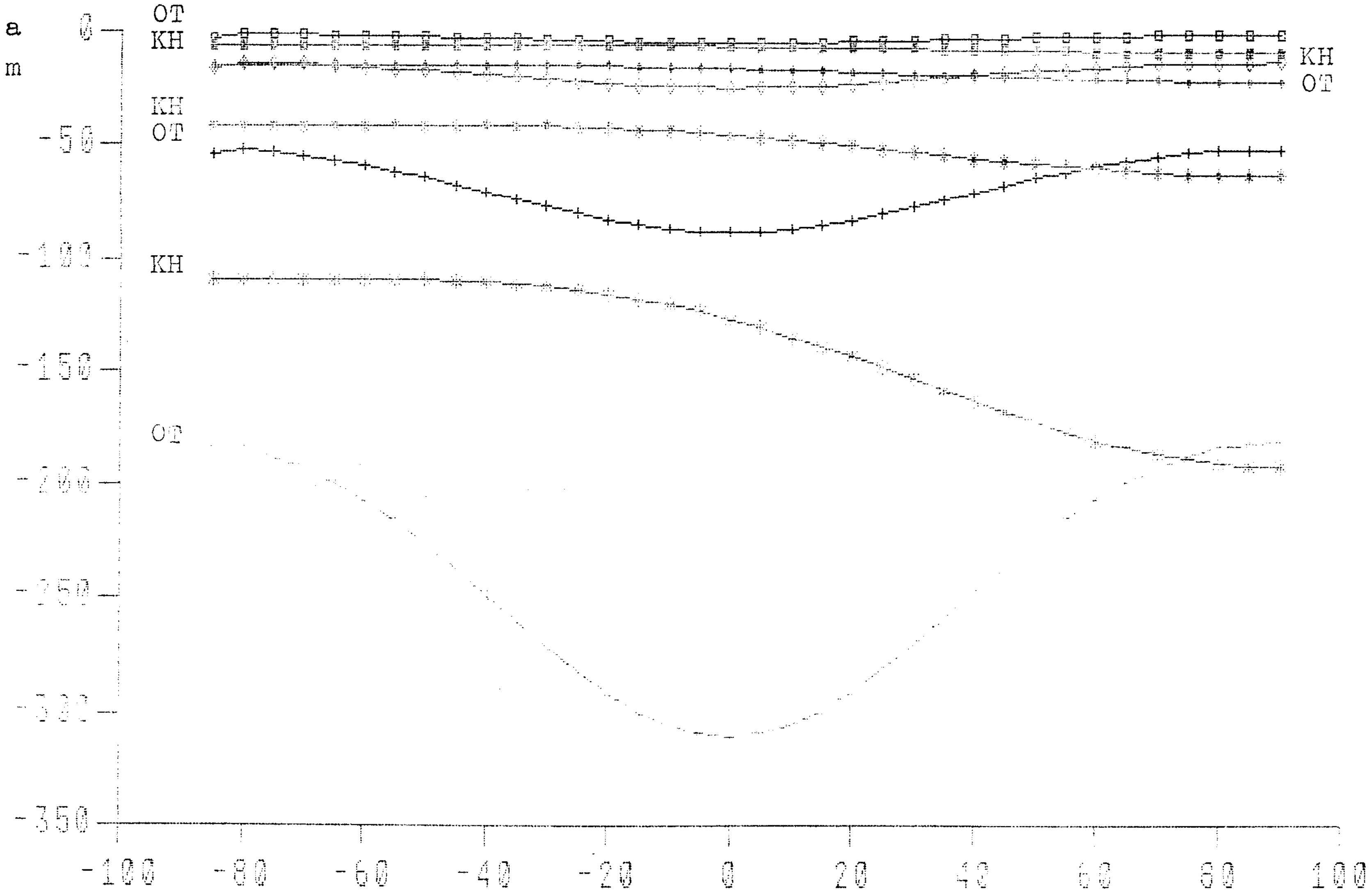
TABLICA 6: POREMEĆAJ VELIKE POLUOSE PUTANJE SATELITA USLED DEJSTVA OTPORA ATMOSFERE ZA RAZNE DF=FX-FB (RAZLIKE FLUKSA)

VISINA:	200 KM			250 KM			300 KM			350 KM		
DF	ΔAOT M	ΔAKH M	RO $*10^{13}$ g/cm^3	ΔAOT M	ΔAKH M	RO $*10^{13}$ g/cm^3	ΔAOT M	ΔAKH M	RO $*10^{13}$ g/cm^3	ΔAOT M	ΔAKH M	RO $*10^{13}$ g/cm^3
-18	-230.4	-105.3	232	-66.5	-39.6	69	-19.3	-14.1	22	-4.5	-5.5	8
-16	-230.0	-106.0	234	-65.2	-39.9	70	-17.6	-14.3	22	-2.7	-5.5	8
-14	-231.2	-106.7	235	-65.5	-40.2	70	-17.7	-14.4	22	-2.7	-5.6	8
-12	-232.3	-107.4	236	-65.9	-40.5	70	-17.8	-14.5	22	-2.8	-5.7	8
-10	-233.3	-108.0	237	-66.2	-40.7	71	-17.9	-14.6	23	-2.8	-5.7	8
-8	-234.2	-108.5	238	-66.4	-40.9	71	-18.0	-14.7	23	-2.8	-5.8	8
-6	-235.0	-109.0	238	-66.7	-41.2	71	-18.1	-14.8	23	-2.8	-5.8	8
-4	-235.7	-109.5	239	-66.9	-41.4	71	-18.2	-14.9	23	-2.8	-5.9	8
-2	-236.4	-109.9	240	-67.1	-41.5	72	-18.2	-15.0	23	-2.9	-5.9	8
0	-236.9	-110.3	240	-67.3	-41.7	72	-18.3	-15.1	23	-2.9	-6.0	8
2	-237.3	-110.6	240	-67.4	-41.8	72	-18.4	-15.1	23	-2.9	-6.0	9
4	-237.7	-110.9	241	-67.5	-42.0	72	-18.4	-15.2	23	-2.9	-6.1	9
6	-237.9	-111.2	241	-67.6	-42.1	72	-18.4	-15.3	23	-2.9	-6.1	9
8	-238.0	-111.4	241	-67.7	-42.2	72	-18.5	-15.3	23	-2.9	-6.1	9
10	-238.1	-111.5	241	-67.7	-42.2	72	-18.5	-15.4	23	-2.9	-6.2	9
12	-238.0	-111.6	241	-67.7	-42.3	72	-18.5	-15.4	23	-2.9	-6.2	9
14	-237.9	-111.7	241	-67.7	-42.3	72	-18.5	-15.4	23	-2.9	-6.2	9
16	-237.6	-111.7	240	-67.6	-42.4	72	-18.5	-15.5	23	-2.9	-6.3	9
18	-237.2	-111.6	240	-67.5	-42.4	72	-18.5	-15.5	23	-2.9	-6.3	9
20	-236.8	-111.5	239	-67.4	-42.3	72	-18.5	-15.5	23	-2.9	-6.3	9

F3

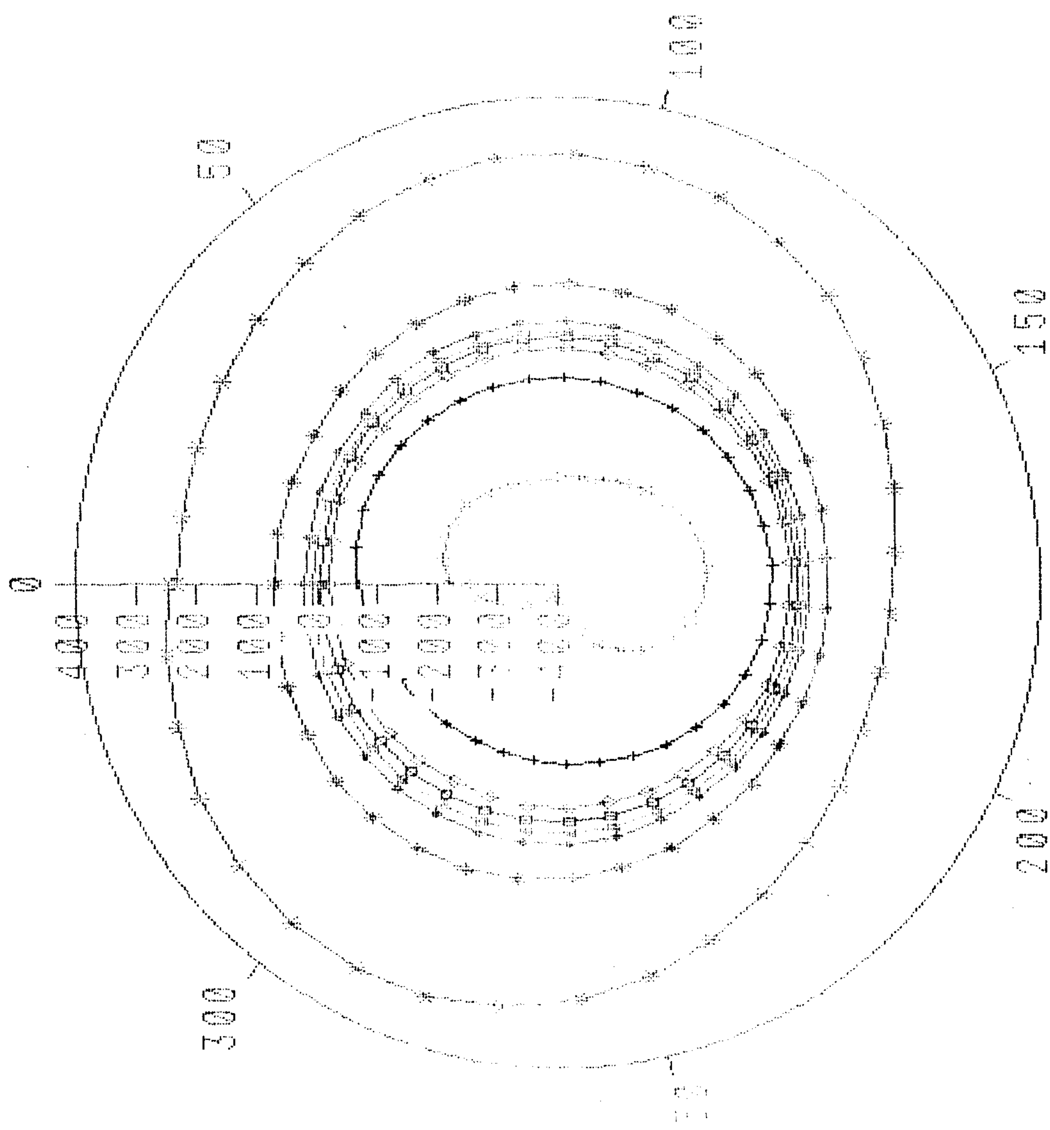
GRAFICS

Poremećaj velike poluose satelita usled dejstva otpora atmosfere na različitim geografskim širinama. Interval perigejskih dajina 200-400 km.
KH - vrednosti iz teorije King-Hilija, OT - teorija prikazana u radu



F4

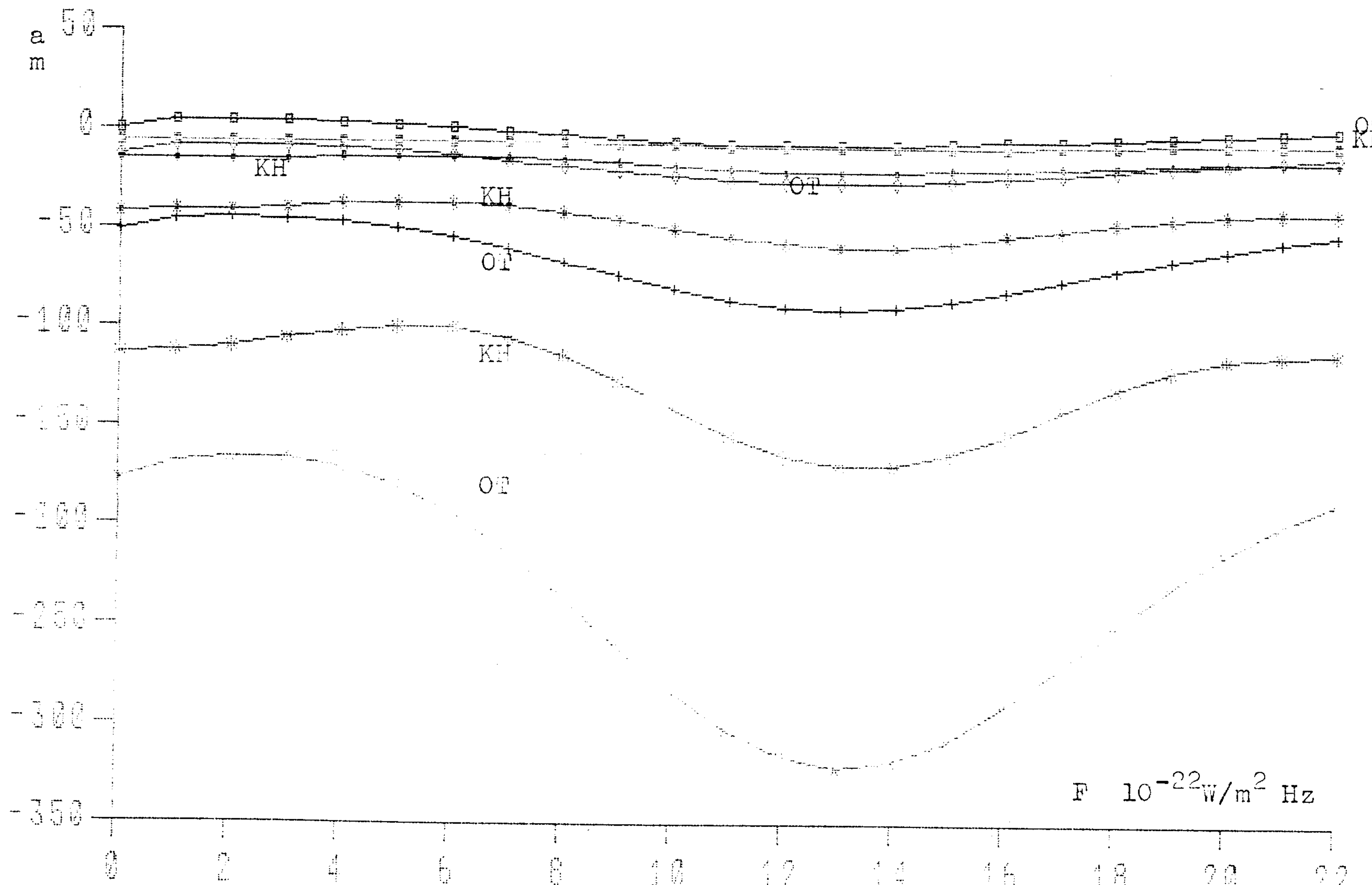
GRAFICS



F5

GRAFIC9

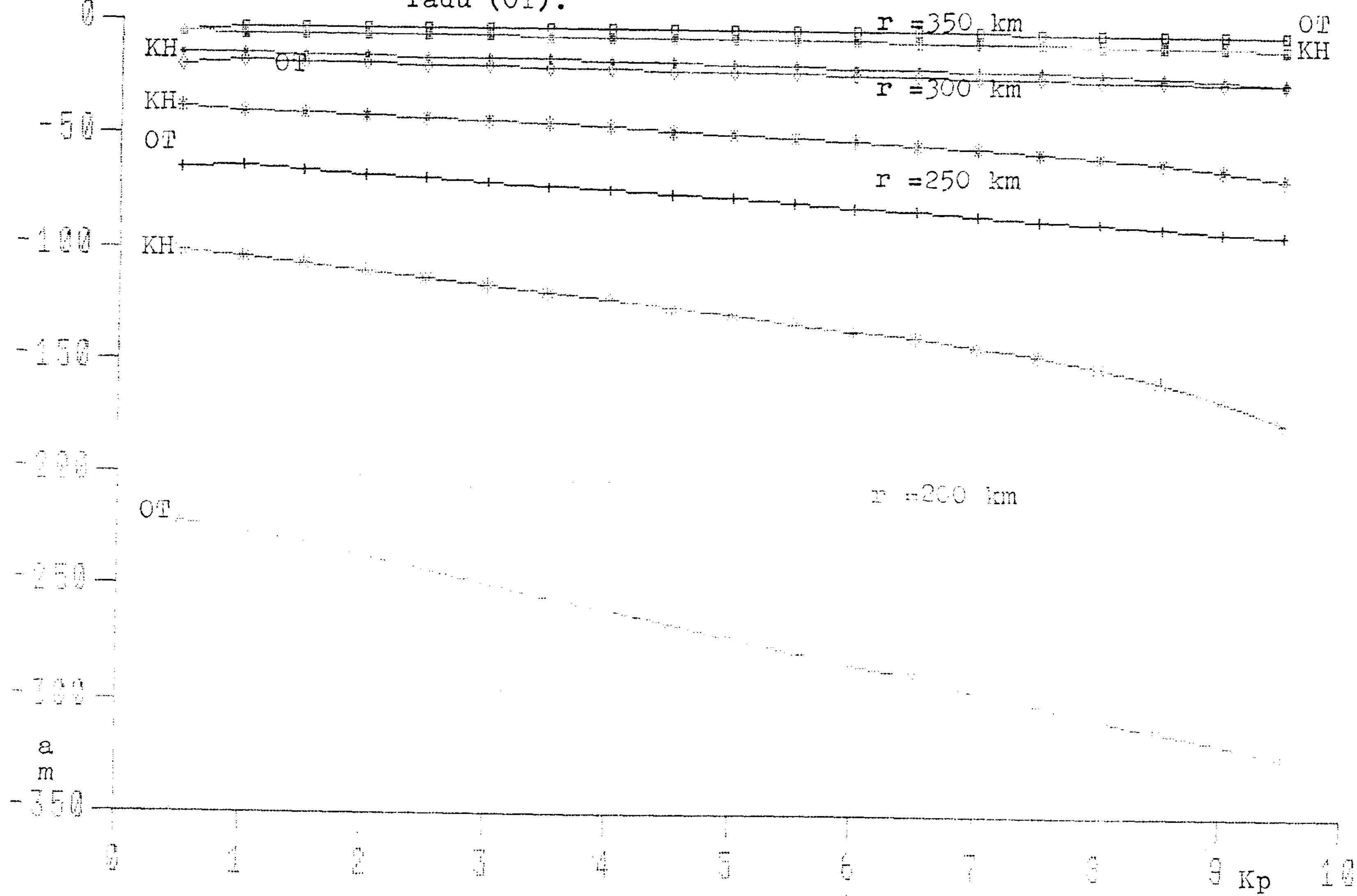
Grafik poremećaja velike poluose putanje satelita usled dejstva otpora atmosfere i promene razlike trenutnog i srednjeg fluksa sunčevog zračenja za interval perigejskih daljina 200-400 km. KH - King Hili, OT - teorija iz rada



F 6

GRAFIC 3

Grafik zavisnosti poremećaja velike poluose satelita od vrednosti geomagnetskog indeksa Kp. Vrednosti su date za visine 200, 250, 300 i 350 km za teoriju King-Hilija (KH) i teoriju izvedenu u radu (OT).



TABLICA 7 : POREMEĆAJ VELIKE POLUOSE PUTANJE SATELITA USLED DEJSTVA OTPORA ATMOSFERE ZA RAZLIČITE EKSCENTRIČNOSTI (0.00-0.40) ZA PERIGEJSKU DALJINU h = 300 Km. PODACI SU DOBIJENI PRIMENOM TEORIJE KING-HILIJA (KH) I TEORIJE RAZVIJENE U RADU (OT). ZA OSNOVNE FIZIČKE PARAMETRE UZETE SU SLEDEĆE VRENOSTI:

GEOMAGNETSKI INDEKS .... Kp = 2.500
FLUKS SUNČEVOG ZRAČENJA .... F = 80.000
SREDNJI FLUKS SUNČEVOG ZRAČENJA .... FB = 80.000
BALISTIČKI KOEFICIJENT .... δ = 0.183
LOKALNO VREME .... LT = 0.000
EKVATORSKI POLUPREČNIK ZEMLJE .... Re =6378.160
SPLJOŠTENOST ZEMLJE .... ε =335*10-5

ekscentričnost stepen	Δa(KH) e^3	Δa(OT) e^2	Δa(OT) e^3
0.00	-40.9	-53.7	-55.4
0.01	-13.8	-18.1	-19.2
0.02	- 9.5	-10.8	-11.9
0.03	- 7.9	- 7.3	- 8.4
0.04	- 7.1	- 5.4	- 6.5
0.05	- 6.5	- 4.3	- 5.3
0.06	- 6.1	- 3.5	- 4.6
0.08	- 5.7	- 2.7	- 3.7
0.10	- 5.4	- 2.2	- 3.2
0.12	- 5.3	- 1.9	- 2.9
0.14	- 5.3	- 1.7	- 2.7
0.16	- 5.3	- 1.5	- 2.6
0.18	- 5.3	- 1.4	- 2.5
0.20	- 5.4	- 1.4	- 2.4
0.25	- 5.8	- 1.3	- 2.3
0.30	- 6.3	- 1.2	- 2.2
0.35	- 7.1	- 1.2	- 2.1
0.40	- 8.1	- 1.2	- 2.1

TABLICA 8 : POREMEĆAJ VELIKE POLUOSE PUTANJE SATELITA USLED DEJSTVA OTPORA ATMOSFERE ZA RAZLIČITE EKSCENTRIČNOSTI (0.00-0.40) ZA PERIGEJSKU DALJINU H = 200 Km. PODACI SU DOBIJENI IZ PRIMENE TEORIJE KING-HILIJA (KH) I TEORIJE RAZVIJENE U RADU (OT). VREDNOSTI OSNOVNIH FIZIČKIH PARAMETARA SU SLEDEĆE:

GEOMAGNETNI INDEKS .... Kp = 2.500
FLUKS SUNČEVOG ZRAČENJA .... F = 80.000
SREDNJI FLUKS SUNČEVOG ZRAČENJA .... FB = 80.000
BALISTIČKI KOEFICIJENT .... δ = 0.183
LOKALNO VREME .... LT = 0.000
EKVATORSKI POLUPREČNIK ZEMLJE .... Re =6378.160
SPLJOŠTENOST ZEMLJE .... ε =335*10-5

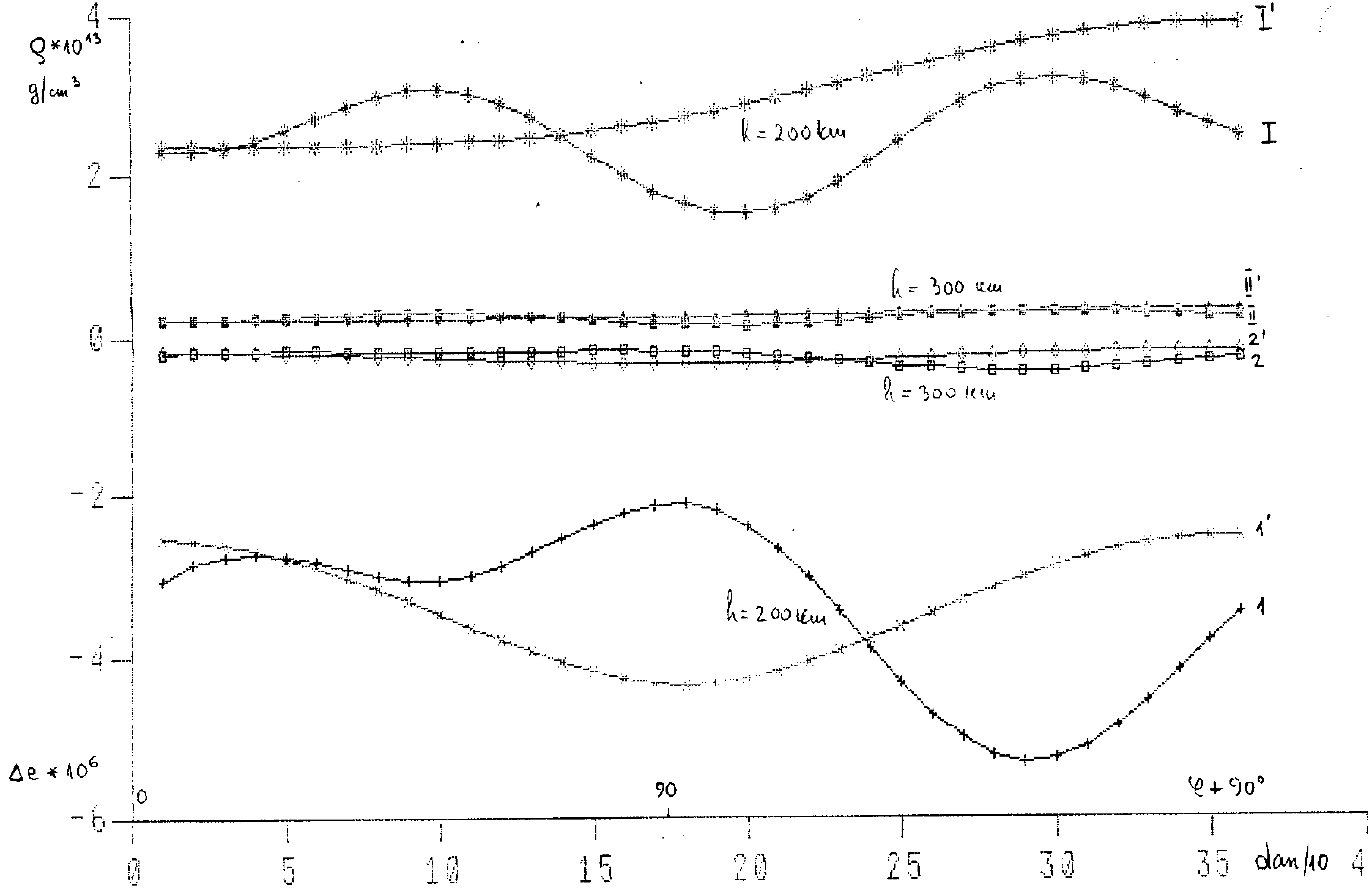
ekscentričnost stepen	Δa(KH) $\sim e^3$ [m]	Δa(OT) $\sim e^3$ [m]
0.00	-427.2	-605.0
0.01		-174.8
0.02	- 83.3	-114.2
0.03		- 92.6
0.04		- 81.2
0.05	- 57.5	- 74.3
0.06		- 69.9
0.08		- 64.9
0.10	- 48.1	- 62.7
0.12		- 61.9
0.14		- 61.9
0.16	- 46.6	- 61.7
0.18		- 61.7
0.20		- 61.7
0.25	- 51.2	- 61.6
0.30		- 61.7
0.35	- 62.6	- 61.9
0.40		- 62.0

у току године (део испод црте); изнад црте су графици одговарајућих вредности густине атмосфере за изабране висине.

GRAFICS

1, 2, I, II → годишња промена
1', 2', I', II' → промена са ширином

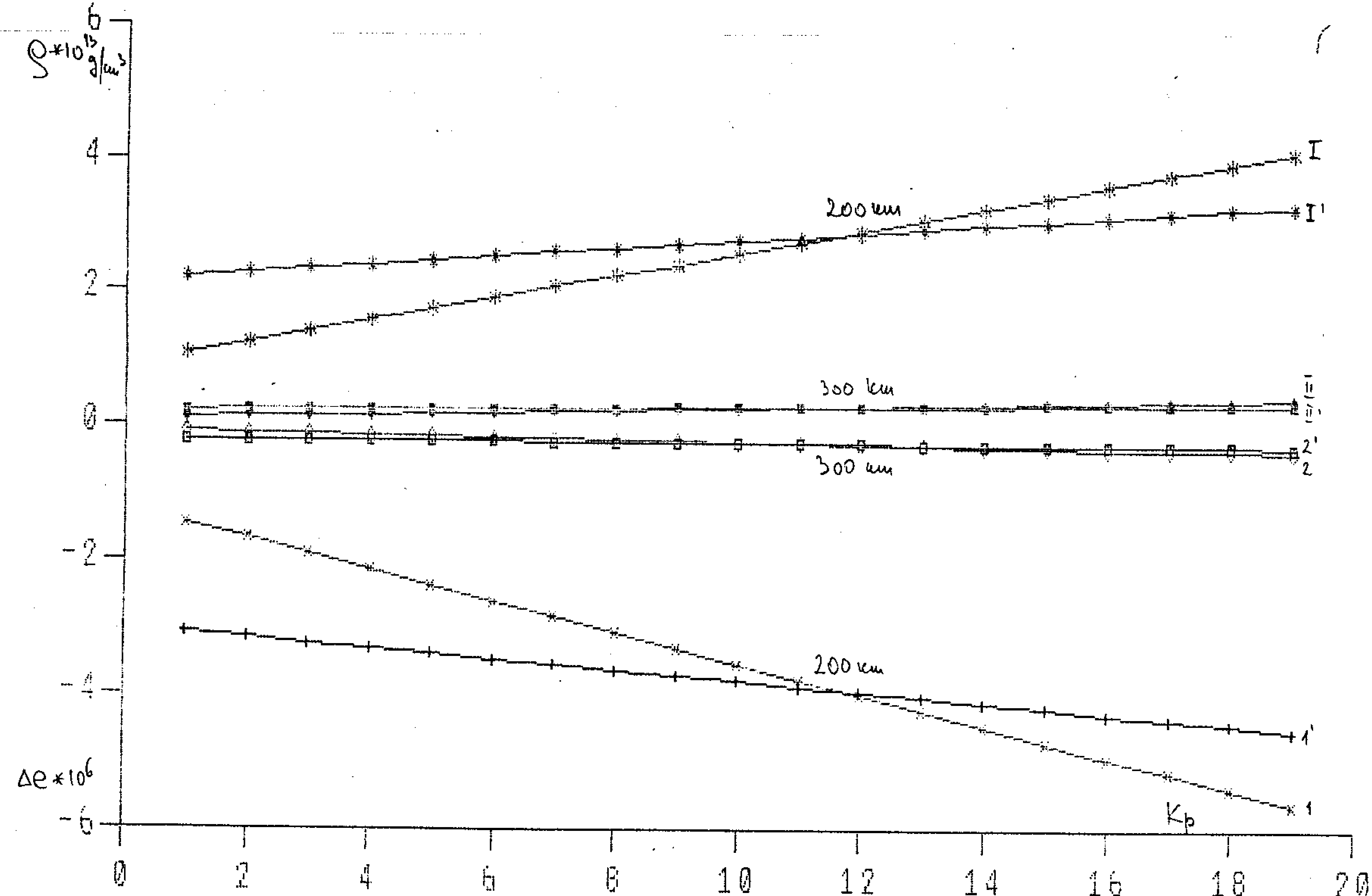
F7



…упање сателита за различите вредности флукса Сунчевог зрачења и за различите вредности геомагнетног индекса Kp за перигејне дужине од 200 и 300 km.

GRAFICS

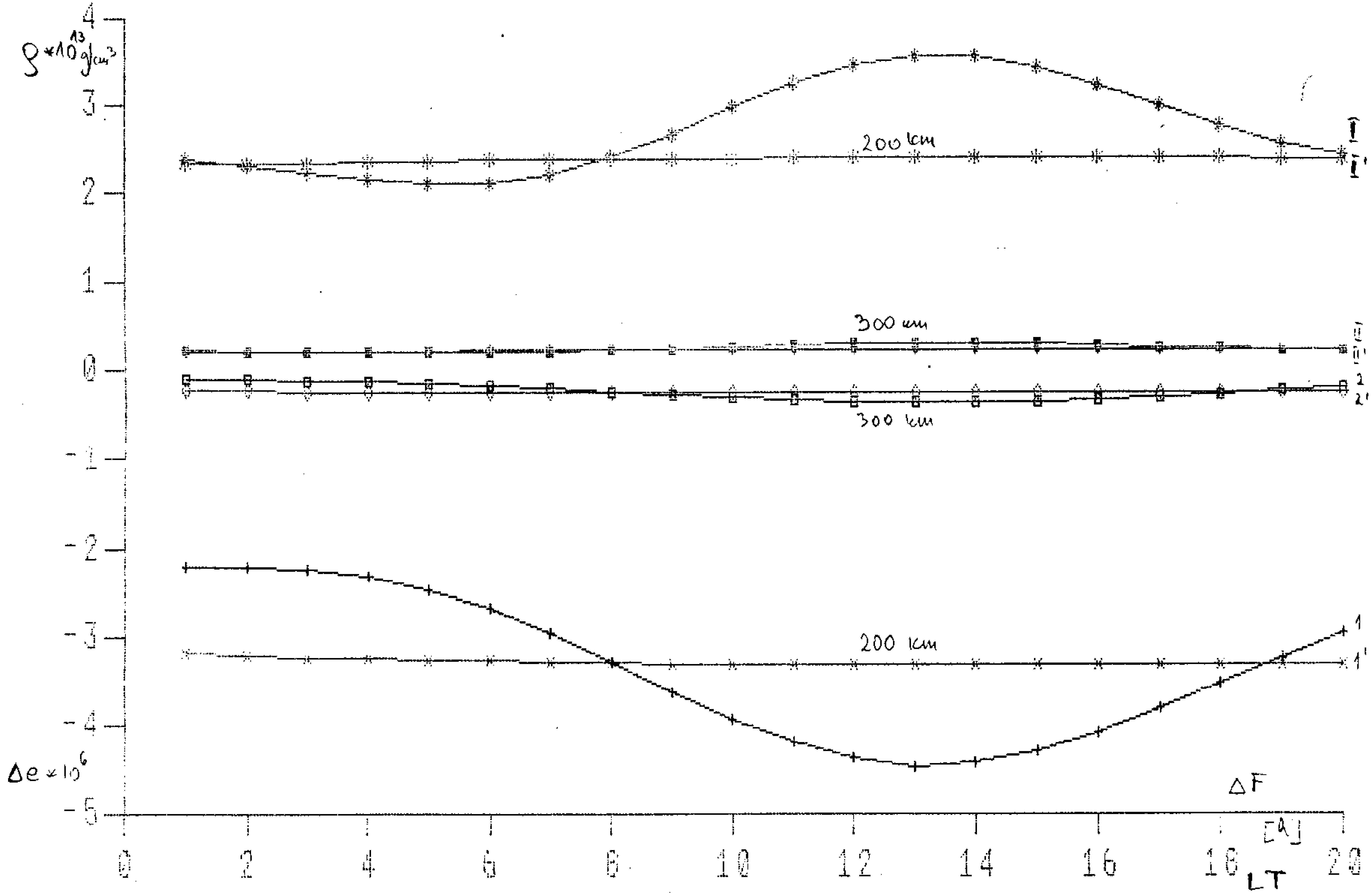
F 8



[illegible] зрачења и δ [illegible] времена

GRAFICS

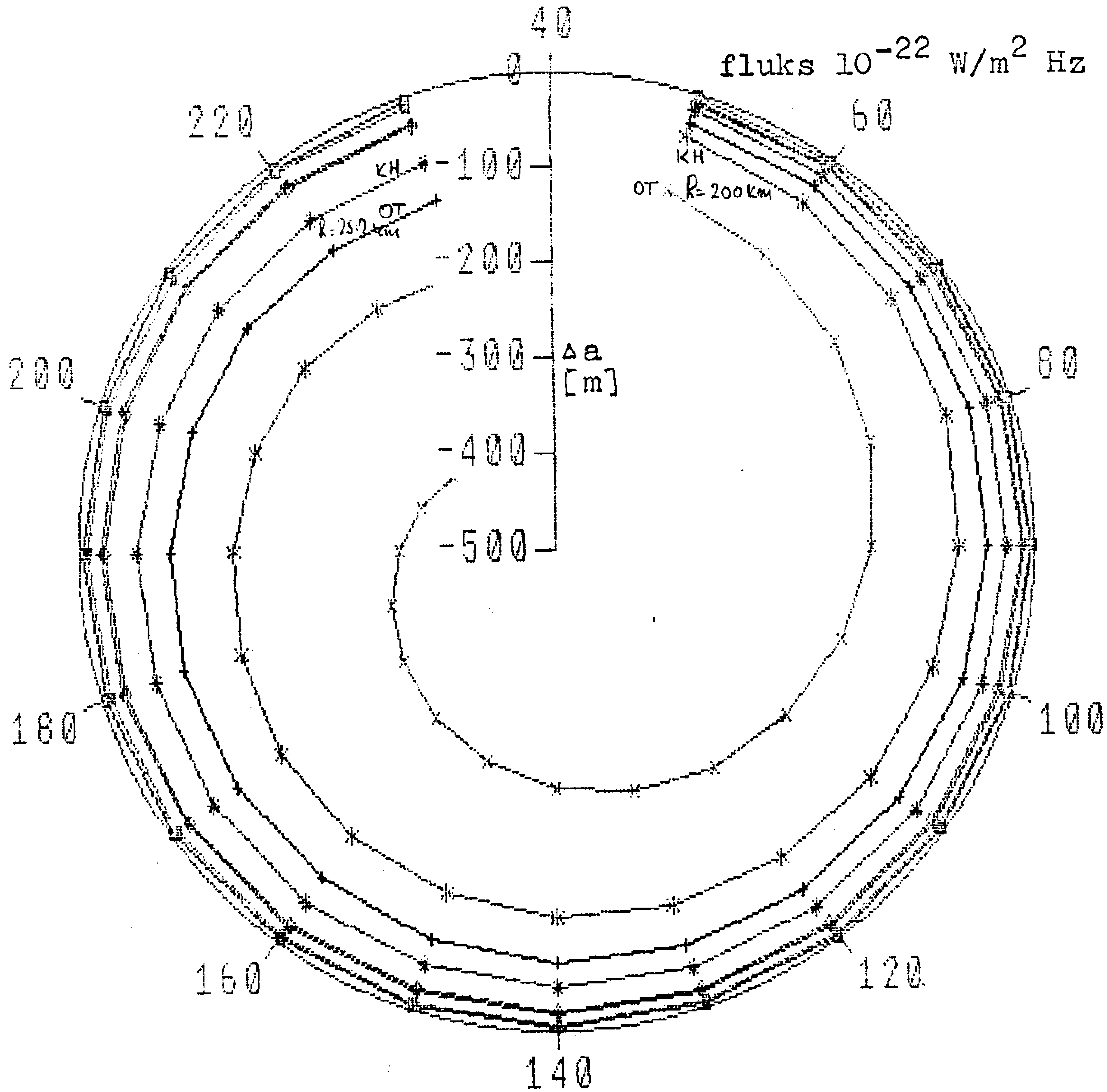
F9



F10

GRAFICS

Grafik zavisnosti promene velike poluose putanje satelita usled promene fluksa sunčevog zračenja. Interval perigejskih daljina 200-400 km.



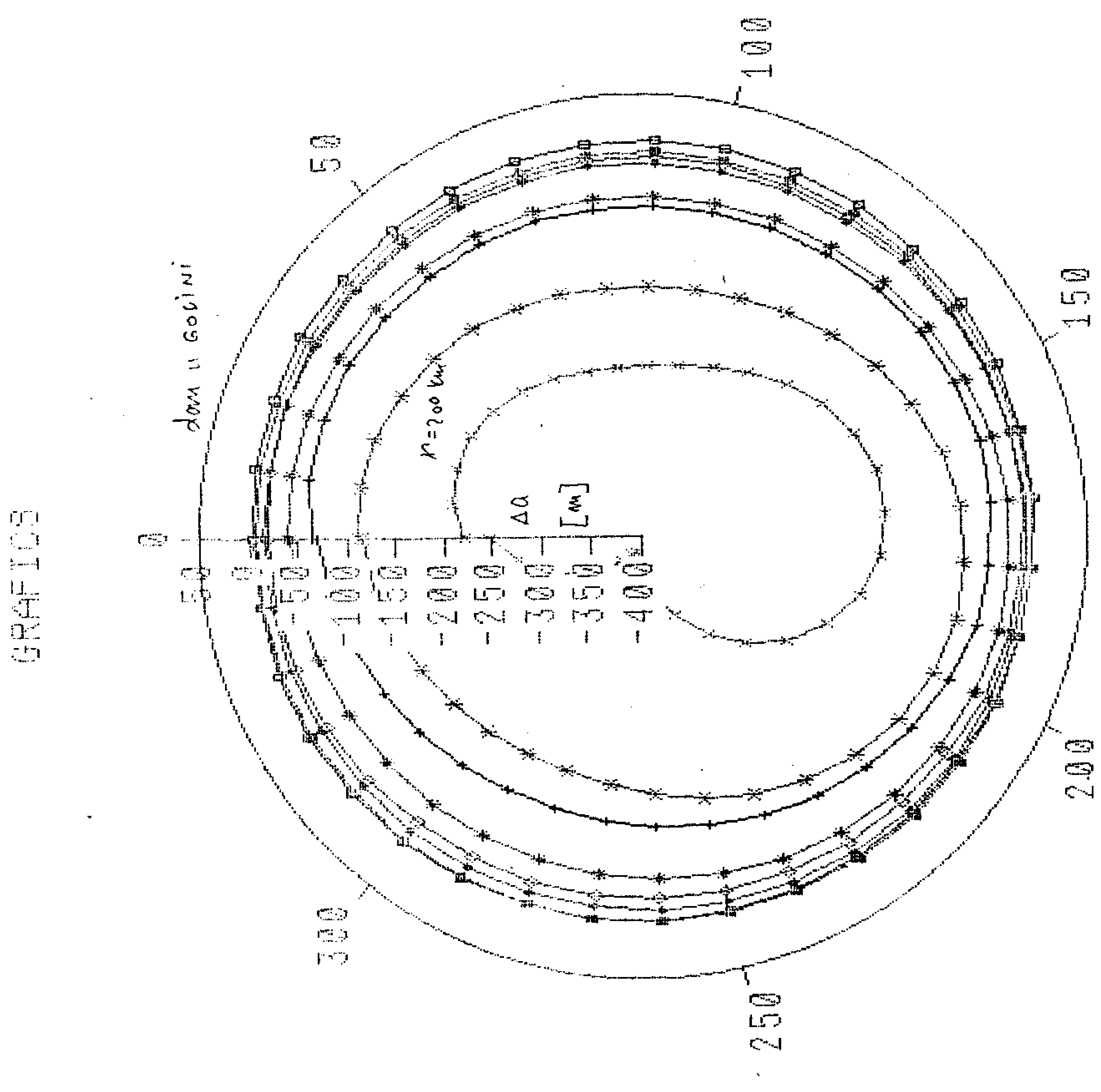


GRAFICO
dan u godini
r=200 km
Δa
[m]
0
50
100
150
200
250
300
-50
-100
-150
-200
-250
-300
-350
-400

TABLICA 9: VREDNOSTI POREMEĆAJA EKSCENTRIČNOSTI PUTANJE SATELITA USLED DEJSTVA OTPORA ATMOSFERE NA VISINAMA OD 200 I 300 KM ZA RAZLIČITE VREDNOSTI POJEDINIH PARAMETARA (OVDE SU TO GEOGRAFSKA ŠIRINA I TRENUTAK U GODINI).

φ	Δe_{200}	Δe_{300}	ρ_{200}	ρ_{300}	Δe_{200}	Δe_{300}	ρ_{200}	ρ_{300}	datum
		$*10^{-6}$		g/cm^3		$*10^{-6}$		g/cm^3	
1	-2.53	-0.18	0.24E-09	0.23E-10	-3.05	-0.21	0.23E-09	0.22E-10	
2	-2.57	-0.18	0.24E-09	0.23E-10	-2.86	-0.19	0.23E-09	0.22E-10	
3	-2.62	-0.18	0.24E-09	0.23E-10	-2.76	-0.18	0.23E-09	0.23E-10	
4	-2.69	-0.19	0.24E-09	0.23E-10	-2.73	-0.17	0.24E-09	0.24E-10	
5	-2.78	-0.20	0.24E-09	0.23E-10	-2.76	-0.16	0.26E-09	0.25E-10	
6	-2.89	-0.21	0.24E-09	0.23E-10	-2.83	-0.16	0.27E-09	0.26E-10	
7	-3.02	-0.22	0.24E-09	0.23E-10	-2.91	-0.16	0.29E-09	0.28E-10	
8	-3.16	-0.23	0.24E-09	0.23E-10	-2.99	-0.17	0.30E-09	0.29E-10	
9	-3.31	-0.24	0.24E-09	0.23E-10	-3.04	-0.17	0.30E-09	0.30E-10	
10	-3.47	-0.25	0.24E-09	0.23E-10	-3.03	-0.17	0.31E-09	0.30E-10	
11	-3.63	-0.27	0.24E-09	0.23E-10	-2.98	-0.17	0.30E-09	0.30E-10	
12	-3.79	-0.28	0.24E-09	0.23E-10	-2.87	-0.17	0.29E-09	0.29E-10	
13	-3.94	-0.29	0.25E-09	0.24E-10	-2.71	-0.17	0.27E-09	0.27E-10	
14	-4.08	-0.31	0.25E-09	0.24E-10	-2.54	-0.16	0.25E-09	0.25E-10	
15	-4.19	-0.31	0.25E-09	0.24E-10	-2.36	-0.16	0.23E-09	0.22E-10	
16	-4.27	-0.32	0.26E-09	0.25E-10	-2.22	-0.16	0.20E-09	0.20E-10	
17	-4.32	-0.33	0.26E-09	0.25E-10	-2.13	-0.16	0.18E-09	0.18E-10	
18	-4.34	-0.33	0.27E-09	0.25E-10	-2.12	-0.17	0.16E-09	0.16E-10	
19	-4.32	-0.33	0.28E-09	0.26E-10	-2.20	-0.19	0.15E-09	0.15E-10	
20	-4.27	-0.32	0.29E-09	0.26E-10	-2.39	-0.21	0.15E-09	0.15E-10	
21	-4.19	-0.31	0.29E-09	0.27E-10	-2.67	-0.23	0.16E-09	0.15E-10	
22	-4.08	-0.31	0.30E-09	0.28E-10	-3.03	-0.26	0.17E-09	0.17E-10	
23	-3.94	-0.29	0.31E-09	0.28E-10	-3.45	-0.30	0.19E-09	0.19E-10	
24	-3.79	-0.28	0.32E-09	0.29E-10	-3.89	-0.33	0.21E-09	0.21E-10	
25	-3.63	-0.27	0.33E-09	0.29E-10	-4.32	-0.36	0.24E-09	0.24E-10	
26	-3.47	-0.25	0.34E-09	0.30E-10	-4.71	-0.39	0.27E-09	0.27E-10	
27	-3.31	-0.24	0.35E-09	0.31E-10	-5.02	-0.41	0.29E-09	0.29E-10	
28	-3.16	-0.23	0.35E-09	0.31E-10	-5.23	-0.43	0.30E-09	0.30E-10	
29	-3.02	-0.22	0.36E-09	0.32E-10	-5.31	-0.43	0.32E-09	0.31E-10	
30	-2.89	-0.21	0.37E-09	0.32E-10	-5.28	-0.42	0.32E-09	0.32E-10	
31	-2.78	-0.20	0.37E-09	0.33E-10	-5.13	-0.41	0.31E-09	0.31E-10	
32	-2.69	-0.19	0.38E-09	0.33E-10	-4.88	-0.38	0.31E-09	0.30E-10	
33	-2.62	-0.18	0.38E-09	0.33E-10	-4.55	-0.36	0.29E-09	0.29E-10	
34	-2.57	-0.18	0.39E-09	0.33E-10	-4.19	-0.32	0.28E-09	0.27E-10	
35	-2.53	-0.18	0.39E-09	0.33E-10	-3.81	-0.29	0.26E-09	0.25E-10	
36	-2.52	-0.18	0.39E-09	0.33E-10	-3.47	-0.26	0.25E-09	0.24E-10	

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА

Број: ______

Датум: ______

TABLICA 10: VREDNOSTI POREMEĆAJA EKSCENTRIČNOSTI PUTANJE SATELITA USLED DEJSTVA OTPORA ATMOSFERE NA VISINAMA OD 200 I 300 KM ZA RAZLIČITE VREDNOSTI POJEDINIH PARAMETARA (OVDE SU TO GEOMAGNETNI INDEX KP I FLUKS SUNČEVOG ZRAČENJA)

K_p	Δe_{200}	Δe_{300}	ρ_{200}	ρ_{300}	Δe_{200}	Δe_{300}	ρ_{200}	ρ_{300} F
	$*10^{-6}$		g/cm^3		$*10^{-6}$		g/cm^3	
1	-1.46	-0.11	0.11E-09	0.10E-10	-3.07	-0.22	0.22E-09	0.21E-10
2	-1.69	-0.12	0.12E-09	0.12E-10	-3.15	-0.23	0.23E-09	0.22E-10
3	-1.92	-0.14	0.14E-09	0.13E-10	-3.23	-0.24	0.23E-09	0.23E-10
4	-2.15	-0.16	0.16E-09	0.15E-10	-3.31	-0.24	0.24E-09	0.23E-10
5	-2.38	-0.17	0.17E-09	0.17E-10	-3.39	-0.25	0.25E-09	0.24E-10
6	-2.62	-0.19	0.19E-09	0.18E-10	-3.47	-0.25	0.25E-09	0.24E-10
7	-2.85	-0.21	0.21E-09	0.20E-10	-3.55	-0.26	0.26E-09	0.25E-10
8	-3.08	-0.23	0.22E-09	0.21E-10	-3.64	-0.26	0.26E-09	0.25E-10
9	-3.31	-0.24	0.24E-09	0.23E-10	-3.72	-0.27	0.27E-09	0.26E-10
10	-3.54	-0.26	0.26E-09	0.25E-10	-3.80	-0.28	0.28E-09	0.26E-10
11	-3.77	-0.27	0.27E-09	0.26E-10	-3.88	-0.28	0.28E-09	0.27E-10
12	-4.01	-0.29	0.29E-09	0.28E-10	-3.96	-0.29	0.29E-09	0.28E-10
13	-4.24	-0.31	0.31E-09	0.30E-10	-4.04	-0.30	0.29E-09	0.28E-10
14	-4.47	-0.33	0.32E-09	0.31E-10	-4.12	-0.30	0.30E-09	0.29E-10
15	-4.70	-0.34	0.34E-09	0.33E-10	-4.20	-0.31	0.30E-09	0.29E-10
16	-4.93	-0.36	0.36E-09	0.34E-10	-4.28	-0.31	0.31E-09	0.30E-10
17	-5.17	-0.38	0.37E-09	0.36E-10	-4.36	-0.32	0.32E-09	0.30E-10
18	-5.40	-0.39	0.39E-09	0.38E-10	-4.44	-0.32	0.32E-09	0.31E-10
19	-5.63	-0.41	0.41E-09	0.39E-10	-4.52	-0.33	0.33E-09	0.32E-10

TABLICA 11: VREDNOSTI POREMEĆAJA EKSCENTRIČNOSTI PUTANJE SATELITA USLED DEJSTVA OTPORA ATMOSFERE NA VISINAMA OD 200 I 300 KM ZA RAZLIČITE VREDNOSTI POJEDINIH PARAMETARA (OVDE SU TO LOKALNO VREME I RAZLIKA SREDNJEG I TRENUTNOG FLUKSA)

ΔF	Δe_{200}	Δe_{300}	ρ_{200}	ρ_{300}	Δe_{200}	Δe_{300}	ρ_{200}	ρ_{300} LT
	$*10^{-6}$		g/cm^3		$*10^{-6}$		g/cm^3	
1	-3.20	-0.23	0.23E-09	0.22E-10	-2.23	-0.10	0.24E-09	0.23E-10
2	-3.22	-0.23	0.23E-09	0.22E-10	-2.20	-0.10	0.23E-09	0.23E-10
3	-3.23	-0.24	0.23E-09	0.22E-10	-2.23	-0.11	0.22E-09	0.22E-10
4	-3.25	-0.24	0.24E-09	0.22E-10	-2.32	-0.12	0.22E-09	0.21E-10
5	-3.26	-0.24	0.24E-09	0.23E-10	-2.47	-0.14	0.21E-09	0.21E-10
6	-3.27	-0.24	0.24E-09	0.23E-10	-2.68	-0.17	0.21E-09	0.21E-10
7	-3.29	-0.24	0.24E-09	0.23E-10	-2.96	-0.20	0.22E-09	0.22E-10
8	-3.30	-0.24	0.24E-09	0.23E-10	-3.28	-0.24	0.24E-09	0.23E-10
9	-3.30	-0.24	0.24E-09	0.23E-10	-3.61	-0.27	0.27E-09	0.25E-10
10	-3.31	-0.24	0.24E-09	0.23E-10	-3.93	-0.30	0.30E-09	0.27E-10
11	-3.32	-0.24	0.24E-09	0.23E-10	-4.19	-0.32	0.32E-09	0.29E-10
12	-3.32	-0.24	0.24E-09	0.23E-10	-4.37	-0.34	0.35E-09	0.31E-10
13	-3.32	-0.24	0.24E-09	0.23E-10	-4.45	-0.35	0.36E-09	0.31E-10
14	-3.33	-0.24	0.24E-09	0.23E-10	-4.43	-0.35	0.36E-09	0.31E-10
15	-3.33	-0.24	0.24E-09	0.23E-10	-4.29	-0.34	0.34E-09	0.31E-10
16	-3.32	-0.24	0.24E-09	0.23E-10	-4.08	-0.32	0.32E-09	0.29E-10
17	-3.32	-0.24	0.24E-09	0.23E-10	-3.81	-0.29	0.30E-09	0.27E-10
18	-3.32	-0.24	0.24E-09	0.23E-10	-3.52	-0.26	0.28E-09	0.26E-10
19	-3.31	-0.24	0.24E-09	0.23E-10	-3.23	-0.23	0.26E-09	0.24E-10
20	-3.31	-0.24	0.24E-09	0.23E-10	-2.96	-0.20	0.24E-09	0.23E-10

V G L A V A

P R A K T I Č N A P R I M E N A T E O R I J E

5.1 UPOREDJENJE SA POSMATRANJIMA

Zahvaljujući privatnoj komunikaciji sa Dr L. Sehnalom bilo je konačno moguće da se izvrši i "eksperimentalna" provera dobijenih izraza. Dobijeni su položaji nekoliko satelita u obliku takozvanih NASA elemenata (dvolinijski NASA elementi, v. Prilog C). Za analizu su iskorišćeni podaci za satelit INTERKOSMOS 10 i ANS.

Satelit INTERKOSMOS 10 (1973-82A) je lansiran 10.10.1973 godine, a u orbiti je proveo 1340 dana; njegova osnovna namena bila je prikupljanje jonosferskih podataka. Za potrebe analize u okvirima ovog rada korišćeni su podaci u periodu 14.02.1975 do 20.02.1977.g.

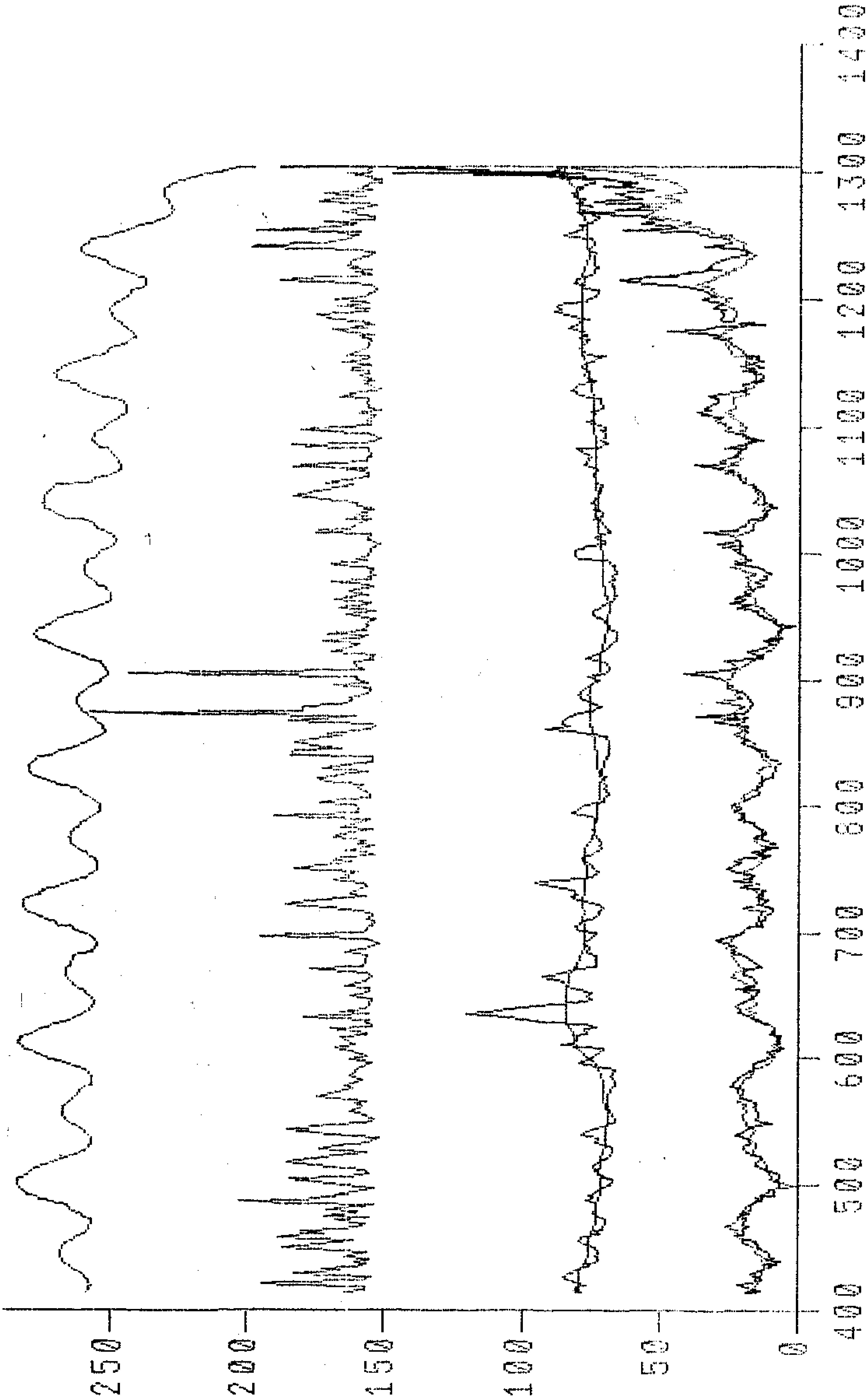
Preliminarna obrada podataka obavljena u je računskom centru Astronomskog Instituta u Pragu (Opservatorija Ondrejov), pri čemu je perigejska daljina izvedena uvodjenjem korekcija za gravitacione poremećaje (parni i neparni zonalni harmonici, luni solarni efekat) i za pritisak sunčevog zračenja. Korigovana vrednost perigejske daljine (tzv. perigejski parametar Q) je omogućila da se ponovo izračuna perigejska daljina, koja je i korišćena u radu.

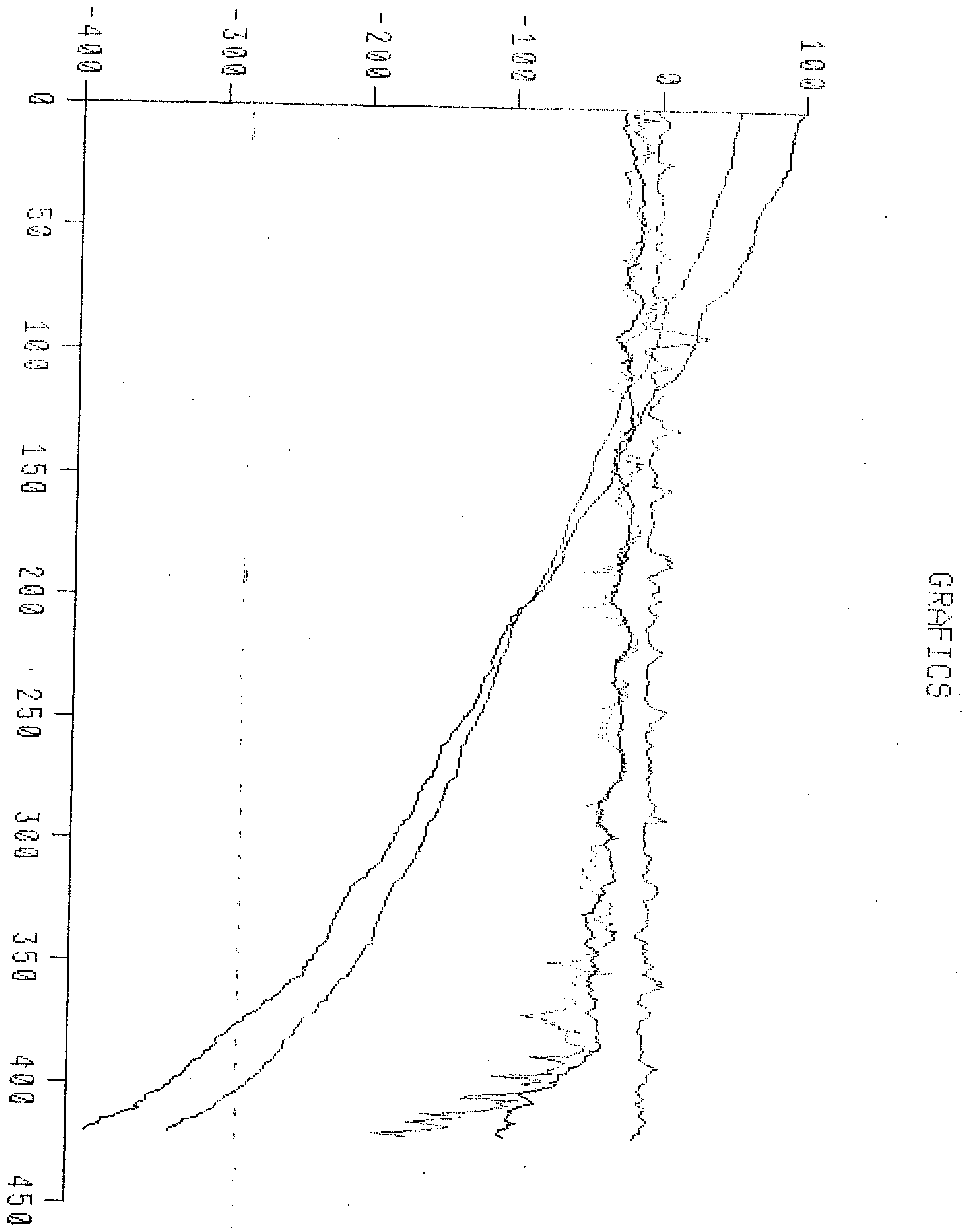
Gustina atmosfere u okolini perigeja za različite trenutke računata je prema postojećim modelima, skala visina se od modela do modela ne razlikuje bitno pa je usvojena jedna vrednost. Balistički koeficijent δ i efektivni presek satelita su uzeti iz rada Sehnala (1983a).

Rezultati za promenu velike poluose i ekscentričnosti putanje za IK10 dati su u Tablici 1a i 2a i na crtežima 5.1, 5.2. Slaganje teorije i posmatranja je veoma dobro. Kao što je moglo da se očekuje, u periodu velikih promena fizičkih parametara i visine registruju se i velike promene putanjskih elemenata.

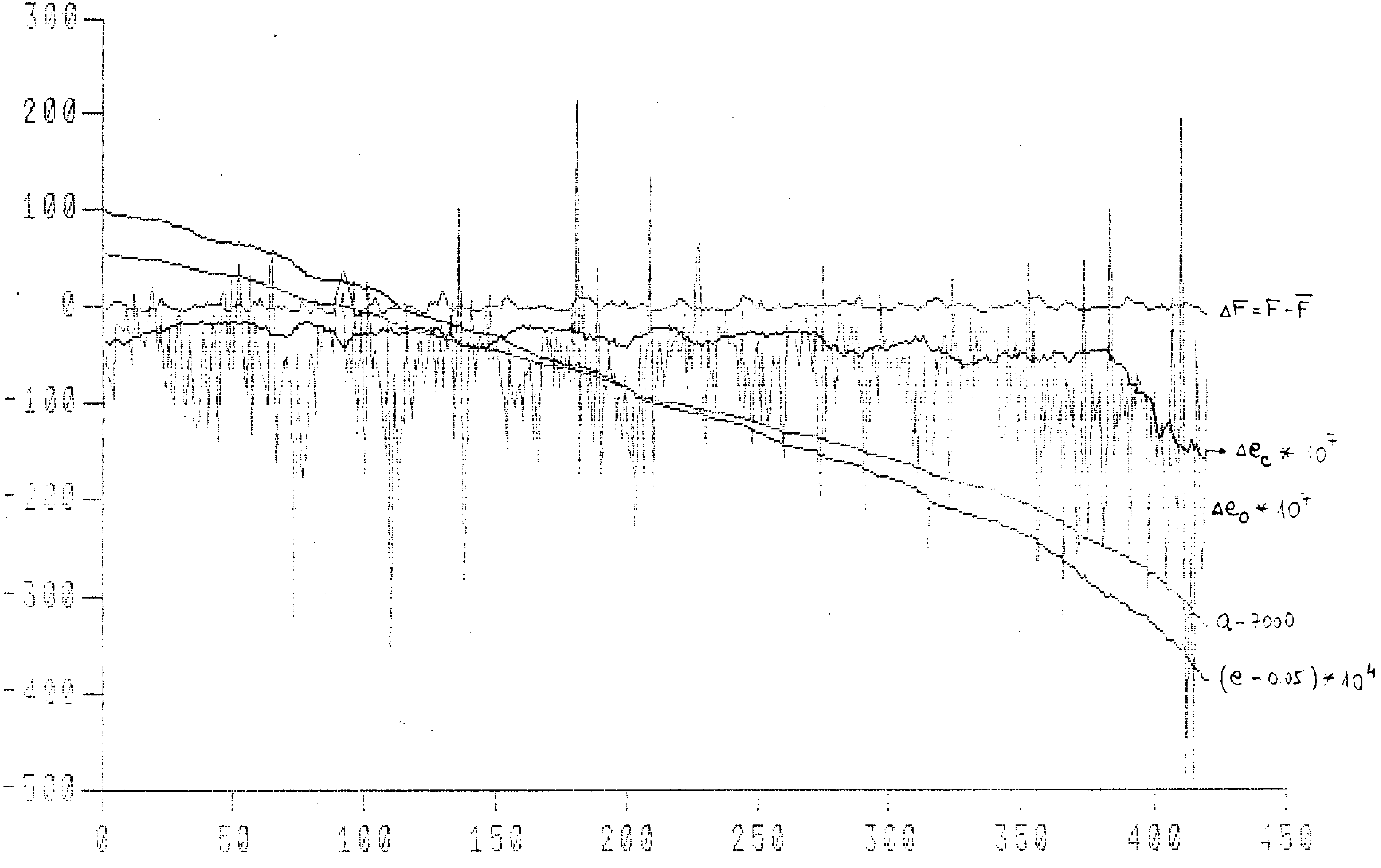
Satelit ANS (First Netherlands Astronomical Satellite, 1974 70A) lansiran je 30.08.1974.g. u orbitu sinhronizovanu sa položajem Sunca, sa orbitalnom ravni upravnom na pravac ka Suncu (tj. orbita je bila velikog retrogradnog nagiba, i=98°). Satelit je imao dve ka Suncu orijentisane kolektorske ploče. Takva orijentacija i oblik uzrokovali su dosta specifične poremećaje u kretanju koje su posebno izučili Vaker (Wakker i dr., 1981) i Sehnal (1981,1982,1983).

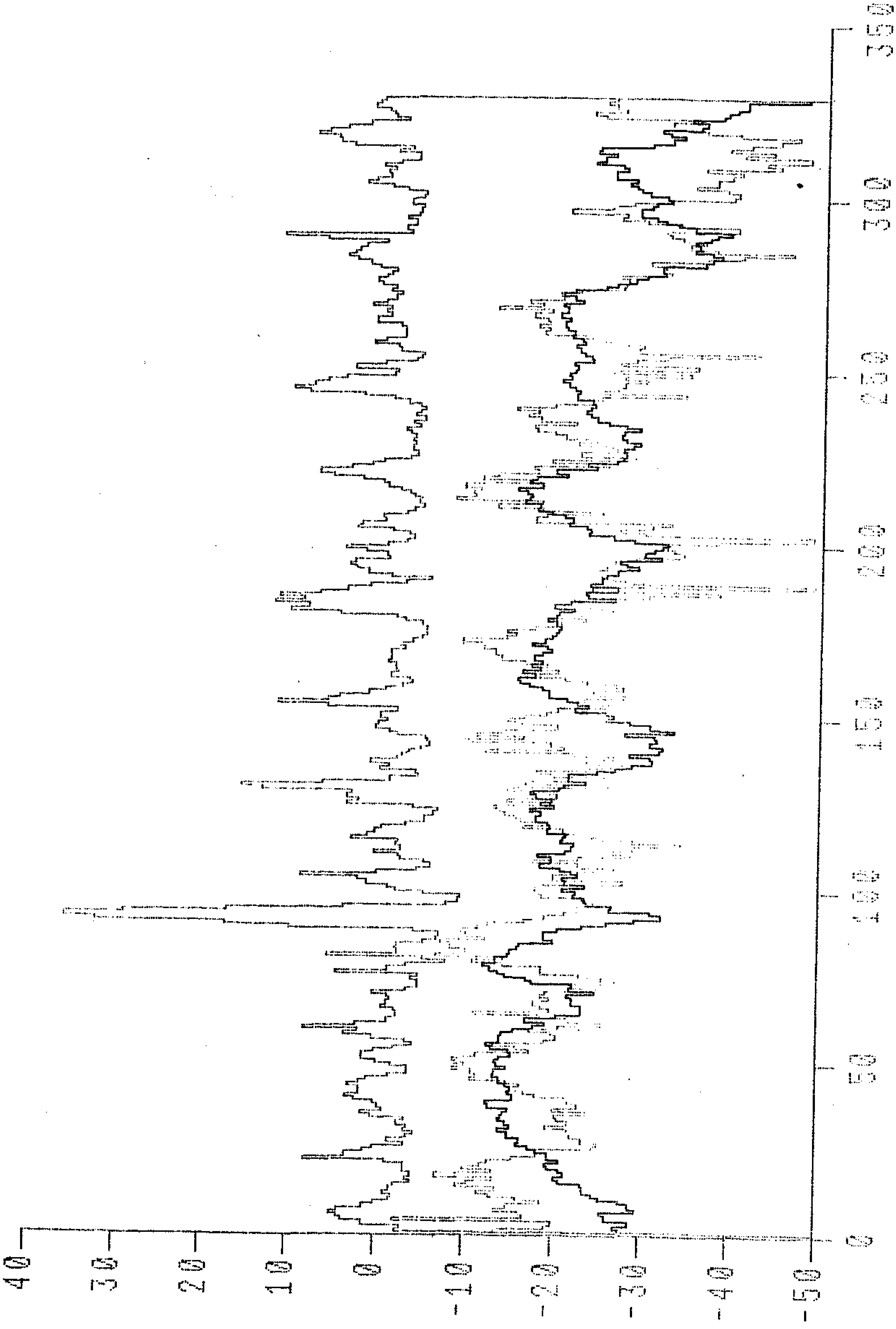
Kako je ovo u nas jedan od prvih radova iz teorije kretanja Zemljinih veštačkih satelita pod dejstvom atmosfere, to je analiza rezultata propraćena brojnim i detaljnim crtežima, tablicama i prilozima.


0
50
100
150
200
250
400
500
600
700
800
900
1000
1100
1200
1300
1400

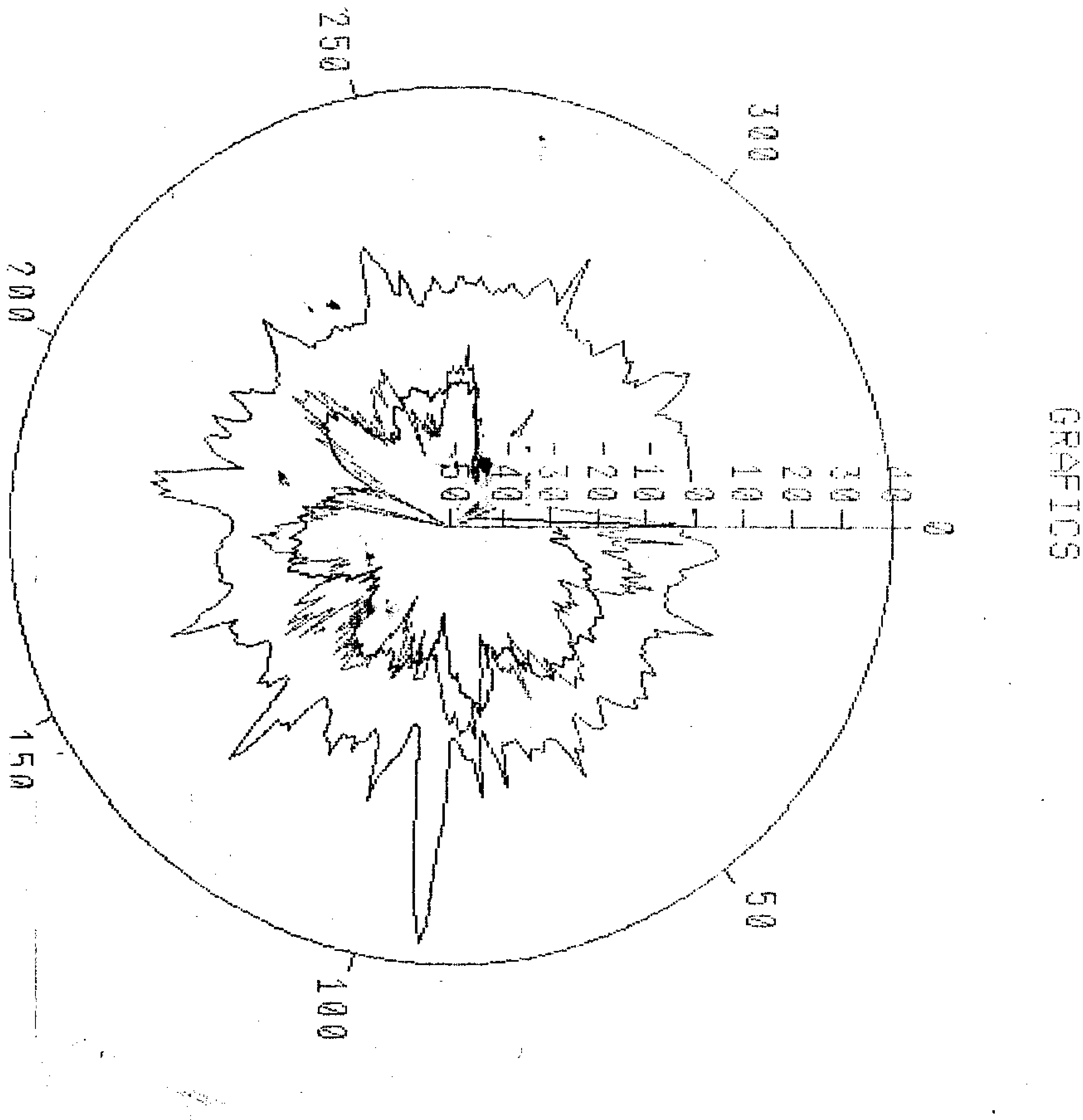

GRAFICS
-400
-300
-200
-100
0
100
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450

grafik promene ekscentriciteta usled dejstva otpora
atmosfere na satelit ANS
crvena linija su analiti$ki dobijene vrednosti





40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
0
50
100
150
200
250
300
350


GRAFICS
0
50
100
150
200
250
300
-50
-40
-30
-20
-10
0
10
20
30
40

Z A K LJ U Č C I

7.1 DOBIJENI REZULTATI I NJIHOV ZNAČAJ

A) Analizirajući rezultate dobijene u IV i V Glavi i znajući da je ovo verovatno prva primena algebarskih sistema u nas u rešavanju problema nebeske mehanike i teorije kretanja ZVS, posebno uticaja otpora atmosfere na kretanje ZVS, u radu je pokazano

- mogućnosti algebarskih sistema su velike i pružaju nove pogodnosti u rešavanju brojnih analitičkih zadataka, posebno onih koji su svedeni na direktne, ali glomazne transformacije;

- razvojnost i otvorenost takvih sistema znači i to da je ovaj rad mogao da bude po obimu nekoliko puta manji, da se nije činilo suviše napadnim , u ovom trenutku, da se sve matematičke i fizičke osnove pretoče u nekoliko programa sa većim obimom komentara

- zadaci nebeske mehanike i kvalitativnog i kvantitativnog tipa mogu da se rešavaju uz pomoć takvih sistema

B) Kada je u pitanju konkretno rešavanje problema uticaja otpora atmosfere Zemlje na kretanje ZVS u radu je pokazano da

- taj uticaj može da se tretira analitički sa željenom tačnošću, pri čemu se za osnovne transformacije mora koristiti algebarski nivo savremenih kompjutera - a to je ovde korišćeno .

- dobijeni su konačni izrazi za račun poremećaja putanjskih elemenata (velike poluose i ekscentričnosti) pod dejstvom otpora atmosfere u kojima se kao nepoznata veličina ne javlja gustina atmosfere, već je ona implicitno prisutna posredstvom definicionih parametara

- izvedeni izrazi i funkcija raspodele gustine atmosfere omogućuju linearizaciju jednačina po fizičkim parametrima i definicionim konstantama, a to znači i račun u oba smera: iz primene izraza i vrednosti poremećaja-dobijanje funkcije i obrnuto, poboljšanje tačnosti izraza iz popravljenog opisa funkcije, što do sada nije bilo moguće

- analiza rezultata iz IV Glave pokazuje da je interval primenljivosti računa uticaja otpora atmosfere za ekscentričnost od 0.0-0.4 i za oblast visina od 150-400 km, posebno u odnosu na konstante koje definišu model raspodele gustine TD (Sehnal, 1986), koji se primenjuje za visine do 500 km.

- isto tako, uporedjenje teorijskih rezultata sa posmatranjima za satelite Interkosmos 10, Interkosmos 14 i ANS pokazuje visok stepen saglasnosti, što u ovom trenutku pokazuje da je prikazani postupak modelovanja atmosfere (TD) efektivan i saglasan sa podacima iz kojih je izveden (naime, osnovne konstante modela TD izvedene su i iz posmatranja pobrojanih satelita) kao i to da je razvijena teorija za račun poremećaja vrlo efektivna

- uporedjujući rezultate originalnog računa sa jednom od retkih upotrebljivih teorija, teorijom King-Hilija, vidimo da javno ograničenje nove teorije predstavlja interval visina dok je u teoriji King-Hilija to ekscentričnost

- pri tome prvo ograničenje se zahvaljujući jednostavnosti opisa (u matematičkom smislu) osnovnih izraza lako prevazilazi prikupljanjem više posmatračkog materijala, dok drugo zahteva promenu teorije

- u razvijenoj teoriji je prisutnost fizičkih parametara takodje javna i time pojednostavljena mogućnost analitičkih izmena u slučaju nesaglasnosti sa posmatranjima.

P R I L O G A

```
(RESTORE(QUOTE REDUCE))
(BEGIN)
COMMENT PROGRAM FROM JANUARY 25. 1987.
OUT FORFIL;
COMMENT EXPRESION (1+EC*COS(EA))**(3/2)/(1-EC*COS(EA))**(1/2);
COMMENT EXPONENTIAL LIMIT EC**3;
COMMENT EC IN RANGE (0.02, 0.2);
OPERATOR X,IME,BRO,SL;
FOR ALL EC,EA LET X(EC,EA)=EC*COS(EA);
FOR ALL X LET       BRO(X)=(1+FOR I:=1:7 SUM (X**I*
                (FOR K:=1:I PRODUCT((3/2-K+1)/K))));
FOR ALL EC LET EC**4=0;
ON DIV;
FOR ALL X LET IME(X)=(1+FOR I:=1:7 SUM
          (FOR K:=2 STEP 2 UNTIL (2*I) PRODUCT ((K-1)/K))*X**I);
FOR ALL X LET SL(X)=BRO(X)*IME(X);
           OFF NAT;
WRITE ÐLEGEN:=Ð,SL(X(EC,EA));
OPERATOR Y,CJOT,CU,SU,CDU,SDU;
FOR ALL CJ,CDU LET Y(CJ,CDU)=CJ*COS(CDU);
FOR ALL Y LET CJOT(Y)=1+FOR I:=1:7 SUM(Y**I/
                          (FOR J:=1:I PRODUCT(J)));
FOR ALL Y LET Y**4=0$
COMMENT                   CJOT(Y);
COMMENT                   CJOT(Y(CJ,CDU));
FOR ALL EC,X,EA,W  LET CU(EC,X,EA,W)=COS(W)*((FOR I:=0:7 SUM ((1-EC*
                    *X**I*COS(EA)))-EC)-
                    (1-EC**2)**(1/2)*SIN(W)*SIN(EA)*(FOR I:=0:7
                    SUM (X**I));
FOR ALL EC,X,EA,W  LET SU(EC,X,EA,W)=SIN(W)*((FOR I:=0:7 SUM ((1-EC*
                    *X**I*COS(EA)))-EC)+
                    (1-EC**2)**(1/2)*COS(W)*SIN(EA)*(FOR I:=0:7
                    SUM(X**I));
WRITE ÐCU:=Ð,CU(EC,X(EC,EA),EA,W);
WRITE ÐSU:=Ð,SU(EC,X(EC,EA),EA,W);
COMMENT IN**2+COS**2=Ð,CU(EC,X(EC,EA),EA,W)**2+
                          SU(EC,X(EC,EA),EA,W)**2;
FOR ALL CU,SU LET CDU(CU,SU)=CU**2-SU**2,
                  SDU(CU,SU)=2*CU*SU;
FOR ALL EA LET SIN(EA)**2=1-COS(EA)**2;
WRITE ÐCDU:=Ð,CDU(CU(EC,X(EC,EA),EA,W),SU(EC,X(EC,EA),EA,W));
WRITE ÐSDU:=Ð,SDU(CU(EC,X(EC,EA),EA,W),SU(EC,X(EC,EA),EA,W));
WRITE ÐCD2U:=Ð,CDU(CU(EC,X(EC,EA),EA,W),SU(EC,X(EC,EA),EA,W))**2;
WRITE ÐCD3U:=Ð,CDU(CU(EC,X(EC,EA),EA,W),SU(EC,X(EC,EA),EA,W))**3;
WRITE ÐSD2U:=Ð,SDU(CU(EC,X(EC,EA),EA,W),SU(EC,X(EC,EA),EA,W))**2;
WRITE ÐG3:=Ð,SIN(DAY-P3)*SIN(ANAG)*SU(EC,X(EC,EA),EA,W);
WRITE ÐG6:=Ð,AA*CU(EC,X(EC,EA),EA,W)+BB*SU(EC,X(EC,EA),EA,W);
WRITE ÐG7:=Ð,(B1+B4)*CU(EC,X(EC,EA),EA,W)**2+
             (B5-B2)*SU(EC,X(EC,EA),EA,W)**2+
             (B3/2)*SDU(CU(EC,X(EC,EA),EA,W),SU(EC,X(EC,EA),EA,W));
SHUT FORFIL;
END;
```

```
 ************************************************************************
 PROGRAM FOR THE CALCULATION ATMOSPHERIC DRAG EFFECTS ANALITICALY..
 INPUT:..................................................................
 1)     SATELLITE   DATA                                    UNITS:
        - AX.......SEMI-MAJOR AXIS.......................KM..........
        - ANAG.....INCLINATION OF THE ORBIT..............DEG..........
        - AN.......RIGHT ASCENSION OF THE NODE...........DEG..........
        - W........ARGUMENT OF THE PERIGEE...............DEG..........
        - EC.......ECCENTRICITY............................  ..........
        - AM.......MEAN ANOMALY..........................DEG..........
        - DMM......DAILY MEAN MOTION.....................R/D..........
        - FI.......GEOCENTRIC LATITUDE...................DEG..........
        - Q........PERIGEE PARAMETER.....................KM...........
        - ADFPUM...ATMOSPHERIC DRAG FORCE PER UNIT MASS...............
 2)     TIME AND PHYSICAL PARAMETERS
        - YEAR.....YEAR IN THE POINT OF QUESTION.....YEAR AC.......
        - DAY......DAY IN THE YEAR.......................DAYS.........
        - F........SOLAR FLUX.............................E-22W/M2(S/C)
        - FB.......MEAN SOLAR FLUX........................            .
        - AP.......GEOMAGNETIC INDEX KP.............      ..........
        - ST.......LOCAL TIME............................HOURS........
        - AS.......RIGHT ASCENSION OF THE SUN.........HOURS.........
 3)     TOTAL DENSITY MODEL PARAMETERS (CONSTANTS AND RELATIONS)
        - HN ......................
        - GN ......................
        - P3,P4,P5,P6,P7 ...........
        - AA, BB, B1,B2,B3,B4,B5 ....
        - AK(7,4) ..................
        - AK0 ......................
        - F0, FM, FX ...............
 - BP(I),I=1,9 ARE THE BESSEL POLINOMS OF THE ORDER I; O=BP(0)...
 OUTPUT..................................................................
 1)     - SUMAHG...CHANGE OF THE SEMI-MAJOR AXIS.....CM..........
 ************************************************************************
 SUBROUTINE DRAG(SUMAHG)
 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
 DIMENSION BP(10),CW(10),GN(5)
 COMMON /CHANGE/ EC,EC2,EC3,CJ,CJ2,CJ3,CINC,SINC,CW,SW,SDP3
 COMMON /BIND/ AA,BB,B1,B2,B3,B4,B5
 COMMON /CONST/ DTOR,RTOD,PI,TWOPI
 COMMON /AKON/ AK(7,4)
 DATA P3/263.D0/,P4/-263.D0/,P5/-29.41D0/,P6/8.0913D0/,P7/10.0813
. D0/
) FORMAT(...............)
 FORMAT(...............)
 CALL CONS
 READ(5,*) IORDER, ADFPUM
ENT IORDER=(2 FOR THE CALCULATION ONLY TO EC**2,CJ**2
 READ(8,900) AX,ANAG,AN,W,FI,EC
 READ(8,901) DAY,F,FB,AP,ST,AS
 P3= P3*TWOPI/365.D0
 P4= P4*TWOPI/365.D0
 P5= P5*TWOPI/365.D0
 P6= P6*TWOPI/24.D0
 P7= P7*TWOPI/24.D0
 FI=FI*DTOR
 DAY=DAY*TWOPI/365.
 W=W*DTOR
```

```
      ANAG=ANAG*DTOR
      AN=AN*DTOR
      AS=AS*15.D0*DTOR
      AK0=1.D0+.04762D0*(AP-3.D0)
      FM=(FB-60.D0)/160.D0
      F0=0.2875D0+FM
      FX=1.D0+.007D0*(F-FB)
         CINC=DCOS(ANAG)
         SINC=DSIN(ANAG)
         ANAS2=2.D0*(AN-AS)
         P72=2.D0*P7
         SDP3=DSIN(DAY-P3)
         EPSINC=.00335*SINC*SINC/2.D0
      SW=DSIN(W)
      CW(1)=DCOS(W)
       DO 9 I=1,8
 9     CW(I+1)=CW(I)*CW(1)
      AA=(FM/3.D0+1.D0)*DSIN(AN-AS-P6)
      BB=(FM/3.D0+1.D0)*CINC*DCOS(AN-AS+P6)
      CB=15.D0*FM+1.D0
      B1=CB*DCOS(P72)*DSIN(ANAS2)
      B2=CB*DCOS(P72)*DSIN(ANAS2)*CINC**2
      B3=2.D0*CB*DCOS(P72)*DCOS(ANAS2)*CINC
      B4=-CB*DSIN(P72)
      B5=-CB*DSIN(P72)*CINC**2
      GN(1)=1.
      GN(2)=FM+471.D0/10000.D0
      GN(5)=DSIN(2.*(DAY-P5))*(7.*FM+1.D0)
      GN(4)=(7.*FM+1.D0)*DSIN(DAY-P4)
      EC2=EC*EC
      EC3=EC*EC2
      PARMC=EPSINC*AX*(1.D0-EC)
      SUMAHG=-TWOPI*AX*AX*ADFPUM*AK0*F0*FX*1.D7
      SUMAA=0.D0
      SUMAB=0.D0
      G3L=SW*SDP3*SINC*EC/2.D0
      G6L=(AA*CW(1)+BB*SW)*EC/2.D0
      G7L=(B1-B2+B4+B5)/2.+3./16.D0*EC2*(3.*B1+5.*B2+3.*B4-5.*B5-
     . 8.*CW(2)*(B1+B2+B4-B5)-8.*B3*SW*CW(1))
      DO 10 I=1,5
      IF(I.EQ.3) GO TO 10
10    SUMAA=SUMAA+GN(I)*(1.D0+3.*EC2/4.D0)*AK(I,1)
      SUMAA=SUMAA+AK(3,1)*G3L+AK(6,1)*G6L+AK(7,1)*G7L
      DO 20 J=1,3
      HEIGHT=40.D0*J
      CJ=PARMC/HEIGHT
      CJ2=CJ*CJ
      CJ3=CJ*CJ2
      ARA=(120.D0+6378.16*(1.D0-EPSINC)-AX)/HEIGHT
      AJ=DEXP(ARA)
      ARZ=AX*EC/HEIGHT
      CALL BPL(ARZ,BP,0)
      CALL GCHL(HNG3L,HNG6L,HNG7L,HNG15L,BP,0,G3L,G6L,G7L,IORDER)
      DO 30 I=1,5
      IF(I.EQ.3) GO TO 30
      SUMAB=SUMAB+GN(I)*AK(I,J+1)*AJ*HNG15L
30    CONTINUE
      SUMAB=SUMAB+AJ*(AK(3,J+1)*HNG3L+AK(6,J+1)*HNG6L+AK(7,J+1)*HNG7L)
```

```fortran
 20 CONTINUE
    SUMAHG=SUMAHG*(SUMAA+SUMAB)
    WRITE(6,*) SUMAHG
 88 CONTINUE
    RETURN
    END
      SUBROUTINE CONS
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON /CONST/ DTOR,RTOD,PI,TWOPI
      PI=3.141592654D0
      TWOPI=2.D0*PI
      DTOR=PI/180.D0
      RTOD=180.D0/PI
      RETURN
      END
    SUBROUTINE GCHL(HNG3L,HNG6L,HNG7L,HNG15L,BP,O,G3L,G6L,G7L,IORDER)
    IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
    DIMENSION BP(10),CW(10)
    COMMON /CHANGE/ EC,EC2,EC3,CJ,CJ2,CJ3,CINC,SINC,CW,SW,SDP3
    COMMON /BIND/ AA,BB,B1,B2,B3,B4,B5
    ANS1=SDP3*EC2*SINC*SW*(3/8.*BP(1)+9./8.*BP(3))+SDP3*SINC*SW*BP
   . (1)
    HNG3L=CJ*EC*SDP3*SINC*SW*CW(2)*(-BP(2)+5.*BP(4))+CJ*EC*SDP3*
   . SINC*SW*(-1./2.*BP(2)-5./4.*BP(4)-1./4.*O)+2.*CJ*SDP3*
   . SINC*SW*CW(2)*BP(3)+CJ*SDP3*SINC*SW*(-1./2.*BP(1)-1./2.*BP(3))
   . +EC*SDP3*SINC*SW*(3/2.*BP(2)+1./2.*O)
   . +SDP3*CJ2*SINC*SW*CW(2)*(5*BP(1)+2.*BP
   . (3)-BP(5))+SDP3*CJ2*SINC*SW*CW(4)*(-BP(1)-1./2.*BP(3)+3./2.
   . *BP(5))+SDP3*CJ2*SINC*SW*(-BP(1)-1./2.*BP(3))+ANS1

    ANS1=AA*CW(1)*BP(1)+BB*CJ*EC*SW*CW(2)*(-BP(2)+5.*BP(4))+BB*
   . CJ*EC*SW*(-1./2.*BP(2)-5./4.*BP(4)-1./4.*O)
   . +2.*BB*CJ*SW*CW(2)*BP(3)+BB*CJ*SW*(-1./2.*BP(1)-1./2.*BP(3))
   . +BB*EC*SW*(3/2.*BP(2)+1./2.*O)+BB*
   . CJ2*SW*CW(2)*(5*BP(1)+2.*BP(3)-BP(5))+BB*CJ2*SW*CW(4)*(-BP
   . (1)-1./2.*BP(3)+3./2.*BP(5))+BB*CJ2*SW*(-BP(1)-1./2.*BP(3))
   . +BB*EC2*SW*(3/8.*BP(1)+9./8.*BP(3))+BB*SW*BP(1)
    HNG6L=AA*CJ*EC*CW(1)*(3/2.*BP(2)-15./4.*BP(4)+1./4.*O)+AA*CJ*EC
   . *CW(3)*(-BP(2)+5.*BP(4))+AA*CJ*CW(1)*(1./2.*BP(1)-3./2.*BP(3))+
   . 2.*AA*CJ*CW(3)*BP(3)+AA*EC*CW(1)*(3./2.*BP(2)+1./2.*O)+
   . +AA*CJ2*CW(3)*(5*BP(1)+3.*BP(3)-2.*BP(5))+AA*
   . CJ2*CW(5)*(-BP(1)-1./2.*BP(3)+3./2.*BP(5))+AA*EC2*CW(1)*(3
   . /8.*BP(1)+9./8.*BP(3))+ANS1

    ANS6=-2.*B5*EC*CW(2)*BP(3)+B5*EC*(BP(1)+BP(3))
   . +B5*CJ2*CW(2)*(17./4.*BP(2)
   . +BP(4)-3./4.*BP(6)+3.*O)+B5*CJ2*CW(4)*(-17./4.*BP(2)-3./2.*BP
   . (4)+9./4.*BP(6)-5./2.*O)+B5*CJ2*CW(6)*(3/2.*BP(2)-3./2.*BP(6
   . ))+B5*CJ2*(-3./4.*BP(2)-1./4.*BP(4)-1./2.*O)+B5*EC2*CW(2)*(7/
   . 4.*BP(2)-7./4.*BP(4)+3./2.*O)+B5*EC2*(-5./4.*BP(2)+11./16.*BP(4
   . )-15./16.*O)-B5*CW(2)*BP(2)+B5*(1/2.*BP(2)+1./2.*O)
    ANS5=B4*CJ2*CW(2)*(-1./4.*
   . BP(2)-2.*BP(4)+3./4.*BP(6))+B4*CJ2*CW(4)*(17./4.*BP(2)+5./
   . 2.*BP(4)-9./4.*BP(6)+3./2.*O)+B4*CJ2*CW(6)*(-3./2.*BP(2)+3./2.*
   . BP(6))+B4*CJ2*(-1./4.*BP(2)+1./4.*BP(4))+B4*EC2*CW(2)*(-7./
   . 4.*BP(2)+7./4.*BP(4)-3./2.*O)+B4*EC2*(1/2.*BP(2)-17./16.*BP(4)
   . +9./16.*O)+
   . B4*CW(2)*BP(2)+B4*(-1./2.*BP(2)+1./2.*O)+6.*B5*CJ*EC*
```

```
     . CW(2)*BP(5)+B5*CJ*EC*CW(4)*(2*BP(3)-6.*BP(5))+B5*CJ*EC*(-
     . 1./2.*BP(1)-3./4.*BP(3)-3./4.*BP(5))+B5*CJ*CW(2)*(BP(2)+2.*BP(4
     . ))-2.*B5*CJ*CW(4)*BP(4)+B5*CJ*(-1./2.*BP(2)-1./4.*BP(4)-1./4.*O)
     . +ANS6
      ANS4=B4*CJ*EC*CW(4)*(-2.*BP(3)+6.*BP(5))+B4*CJ*EC*(1/2.*BP(1
     . )-5./4.*BP(3)+3./4.*BP(5))+B4*CJ*CW(2)*(BP(2)-2.*BP(4))+2.*
     . B4*CJ*CW(4)*BP(4)+B4*CJ*(-1./2.*BP(2)+1./4.*BP(4)+1./4.*O)
     . +2.*B4*EC*CW(2)*BP(3)+B4*EC*(BP(1)-BP(3))+ANS5
      ANS3=-B3*CJ*SW*CW(1)*BP(4)+2.*B3*CJ*SW*CW(3)*BP(4)+2.*B3*EC*SW*
     . CW(1)*BP(3)+B3*CJ2*SW*CW(1)*(-3./4.*BP(2)-1./2.*BP(4)
     . +1./4.*BP(6)-1./2.*O)+B3*CJ2*SW*CW(3)*(7/2.*BP(2)+2.*BP(4)-
     . 3./2.*BP(6)+2.*O)+B3*CJ2*SW*CW(5)*(-3./2.*BP(2)+3./2.*BP(6))+B3
     . *EC2*SW*CW(1)*(-7./4.*BP(2)+7./4.*BP(4)-3./2.*O)+B3*SW*CW(1)*
     . BP(2)+B4*CJ*EC*CW(2)*(4*BP(3)-6.*BP(5))+ANS4
      ANS2=2.*B2*EC*CW(2)*BP(3)+B2*EC*(-BP(1)-BP(3))
     . +B2*CJ2*CW(2)*(-17./4.*BP(2)
     . -BP(4)+3./4.*BP(6)-3.*O)+B2*CJ2*CW(4)*(17./4.*BP(2)+3./2.*BP
     . (4)-9./4.*BP(6)+5./2.*O)+B2*CJ2*CW(6)*(-3./2.*BP(2)+3./2.*BP(
     . 6))+B2*CJ2*(3/4.*BP(2)+1./4.*BP(4)+1./2.*O)+B2*EC2*CW(2)*(-7./
     . 4.*BP(2)+7./4.*BP(4)-3./2.*O)+B2*EC2*(5/4.*BP(2)-11./16.*BP(4)
     . +15./16.*O)
     . +B2*CW(2)*BP(2)+B2*(-1./2.*BP(2)-1./2.*O)+B3*CJ*EC*SW*
     . CW(1)*(BP(3)-3.*BP(5))+B3*CJ*EC*SW*CW(3)*(-2.*BP(3)+6.*BP(
     . 5))+ANS3
      ANS1=B1*CJ2*CW(2)*(-1./4.*
     . BP(2)-2.*BP(4)+3./4.*BP(6))+B1*CJ2*CW(4)*(17./4.*BP(2)+5./
     . 2.*BP(4)-9./4.*BP(6)+3./2.*O)+B1*CJ2*CW(6)*(-3./2.*BP(2)+3./2.*
     . BP(6))+B1*CJ2*(-1./4.*BP(2)+1./4.*BP(4))+B1*EC2*CW(2)*(-7./
     . 4.*BP(2)+7./4.*BP(4)-3./2.*O)+B1*EC2*(1/2.*BP(2)-17./16.*BP(4)
     . +9./16.*O)
     . +B1*CW(2)*BP(2)+B1*(-1./2.*BP(2)+1./2.*O)-6.*B2*CJ*EC*
     . CW(2)*BP(5)+B2*CJ*EC*CW(4)*(-2.*BP(3)+6.*BP(5))+B2*CJ*EC*(
     . 1./2.*BP(1)+3./4.*BP(3)+3./4.*BP(5))+B2*CJ*CW(2)*(-BP
     . (2)-2.*BP(4))+2.*B2*CJ*CW(4)*BP(4)+B2*CJ*(1/2.*BP(2)+1./4.
     . *BP(4)+1./4.*O)+ANS2
      HNG7L=B1*CJ*EC*CW(2)*(4*BP(3)-6.*BP(5))+B1*CJ*EC*CW(4)*(-2.*
     . BP(3)+6.*BP(5))+B1*CJ*EC*(1/2.*BP(1)-5./4.*BP(3)+3./4.*BP(5))
     . +B1*CJ*CW(2)*(BP(2)-2.*BP(4))+2.*B1*CJ*CW(4)*BP(4)+B1*CJ
     . *(-1./2.*BP(2)+1./4.*BP(4)+1./4.*O)
     . +2.*B1*EC*CW(2)*BP(3)+B1*EC*(BP(1)-BP(3))+ANS1

      HNG15L=4.*CJ*EC*CW(2)*BP(3)-2.*CJ*EC*BP(3)+2.*CJ*CW(2)*BP(2)-
     . CJ*BP(2)+2.*EC*BP(1)+CJ2*CW(2)*(4.*BP(2)-BP(4)+3.*O)+CJ2*CW(4)
     . *(BP(4)-1.*O)+CJ2*(-BP(2)-1./2.*O)+EC2*(3/4.*BP(2)+3./4.*O)+O

      IF(IORDER.LE.2) RETURN
      G3L=G3L+SW*SDP3*SINC*(-9.D0*EC3/8.D0)/2.D0
      G6L=G6L+(AA*CW(1)+BB*SW)*(-9.D0*EC3/8.D0)/2.D0
      HNG3L=HNG3L+CJ*SDP3*EC2*SINC*SW*
     . CW(2)*(-9./2.*BP(1)-39./8.*BP(3)+51./8.*BP(5))+CJ*SDP3*EC2*
     . SINC*SW*(15./8.*BP(1)+9./8.*BP(3)-3./2.*BP(5))
     . +EC*SDP3*CJ2*SINC*SW*CW(2)*(43./2.*BP(2)+25./2.*BP(4)-5./2.
     . *BP(6)+25./2.*O)+EC*SDP3*CJ2*SINC*SW*CW(4)*(3/4.*BP(2)-15./2.*
     . BP(4)+13./4.*BP(6)+7./2.*O)+EC*SDP3*CJ2*SINC*SW*(-21./4.*BP(2)-
     . 9./4.*BP(4)-7./2.*O)+SDP3*CJ3
     . *SINC*SW*CW(2)*(5*BP(1)+BP(3)-BP(5))+SDP3*CJ3*SINC*SW*CW(4
     . )*(-7./2.*BP(1)+BP(3)+8./3.*BP(5)-1./6.*BP(7))+SDP3*CJ3*SINC
     . *SW*CW(6)*(1/2.*BP(1)-1./2.*BP(3)-1./6.*BP(5)+1./6.*BP(7))
```

```
     . +SDP3*CJ3*SINC*SW*(-7./12.*BP(1)-1./4.*BP(3))+SDP3*EC3*SINC*SW
     . *(9./16.*BP(4)-9./16.*0)

      ANS1=BB*CJ*EC2*SW*CW(2)*
     . (-9./2.*BP(1)-39./8.*BP(3)+51./8.*BP(5))+BB*CJ*EC2*SW*(15./8.
     . *BP(1)+9./8.*BP(3)-3./2.*BP(5))+BB*EC*CJ2*SW*CW(2)*(43./2.*
     . BP(2)+25./2.*BP(4)-5./2.*BP(6)+25./2.*0)+BB*EC*CJ2*SW*CW(4)*(
     . 3./4.*BP(2)-15./2.*BP(4)+13./4.*BP(6)+7./2.*0)+BB*EC*CJ2*SW*(-
     . 21./4.*BP(2)-9./4.*BP(4)-7./2.*0)
     . BB*CJ3*SW*CW(2)*(5*BP(1)+BP(3)-BP(5))+BB*CJ3*SW*CW(4)*(-7.
     . /2.*BP(1)+BP(3)+8./3.*BP(5)-1./6.*BP(7))+BB*CJ3*SW*CW(6)*(
     . 1./2.*BP(1)-1./2.*BP(3)-1./6.*BP(5)+1./6.*BP(7))+BB*CJ3*SW*(-
     . 7./12.*BP(1)-1./4.*BP(3))+BB*EC3*SW*(9./16.*BP(4)-9./16.*0)
      HNG6L=HNG6L+AA*CJ*EC2*CW(1)*(21./8.*BP(1)+15./
     . 4.*BP(3)-39./8.*BP(5))+AA*CJ*EC2*CW(3)*(-9./2.*BP(1)-39./8.*
     . BP(3)+51./8.*BP(5))+AA*EC*CJ2*CW(1)*(-4.*BP(2)-25./4.*BP(4)
     . +3./4.*BP(6)-3./2.*0)+AA*EC*CJ2*CW(3)*(19.*BP(2)+41./2.*BP(4)-
     . 4.*BP(6)+17./2.*0)+AA*EC*CJ2*CW(5)*(3/4.*BP(2)-15./2.*BP(4)+
     . 13./4.*BP(6)+7./2.*0)+AA*CJ3*CW(1)*
     . (-13./12.*BP(1)-1./4.*BP(3)+1./2.*BP(5))+AA*CJ3*CW(3)*(
     . 15./2.*BP(1)+1./2.*BP(3)-19./6.*BP(5)+1./6.*BP(7))+AA*CJ3*CW(
     . 5)*(-4.*BP(1)+3./2.*BP(3)+17./6.*BP(5)-1./3.*BP(7))+AA*CJ3*
     . CW(7)*(1/2.*BP(1)-1./2.*BP(3)-1./6.*BP(5)+1./6.*BP(7))+AA*
     . EC3*CW(1)*(9./16.*BP(4)-9./16.*0)+AA*CJ2*CW(1)*(-BP(1)-BP(3)+
     . 1./2.*BP(5))+ANS1

      ANS6=B5*EC*CJ2*CW(4)*(-6.*BP(1)-22.*BP(3)-22.*BP(5)+6.*BP(7)
     . )+B5*EC*CJ2*CW(6)*(-10.*BP(1)+5.*BP(3)+9.*BP(5)-4.*BP(7))+
     . B5*EC*CJ2*(-6.*BP(1)-15./4.*BP(3)-5./4.*BP(5))
     . +B5*CJ3*CW(2)*(43./12.*BP(2)-3./4.*BP(6)+3.*0)
     . +B5*CJ3*CW(8)*(2/3.*BP(4)-1./6.*BP(8)-1./2.*0)+
     . B5*CJ3*CW(4)*(-21./4.*BP(2)+13./6.*BP(4)+13./4.*BP(6)-1./6.*
     . BP(8)-5.*0)+B5*CJ3*CW(6)*(5/2.*BP(2)-10./3.*BP(4)-5./2.*BP(6
     . )+1./3.*BP(8)+3.*0)+B5*CJ3*(-5./12.*BP(2)-1./8.*BP(4)-7./24.*0)
     . +B5*EC3*CW(2)*(7*BP(1)+25./8.*BP(3)-9./8.*BP(5))+B5*EC3*(-
     . 25./4.*BP(1)-3.*BP(3)+1./4.*BP(5))
      ANS5=B4*EC3*CW(2)*(-7.*BP(1)-25./8.*BP(3)+9./8.*BP(5))+B4*EC3
     . *(3/4.*BP(1)+1./8.*BP(3)-7./8.*BP(5))+B5*CJ*EC2*CW(2)*(-137./
     . 16.*BP(2)-17./2.*BP(4)+141./16.*BP(6)-21./4.*0)+B5*CJ*EC2*CW(4)
     . *(11./2.*BP(2)+19./2.*BP(4)-9.*BP(6)+3.*0)+B5*CJ*EC2*(43./16.*
     . BP(2)+17./16.*BP(4)-15./16.*BP(6)+27./16.*0)+B5*EC*CJ2*CW(2)*
     . (25.*BP(1)+43./2.*BP(3)+21./2.*BP(5)-2.*BP(7))+ANS6
      ANS4=B4*CJ*EC2*CW(2)*(39./16.*BP(2)+21./2.*
     . BP(4)-147./16.*BP(6)+3./4.*0)+B4*CJ*EC2*CW(4)*(-11./2.*BP(2)
     . -19./2.*BP(4)+9.*BP(6)-3.*0)+B4*CJ*EC2*(3/8.*BP(2)-33./16.
     . *BP(4)+9./8.*BP(6)+9./16.*0)+B4*
     . EC*CJ2*CW(2)*(5*BP(1)-9./2.*BP(3)-27./2.*BP(5)+2.*BP(7))+
     . B4*EC*CJ2*CW(4)*(4*BP(1)+21.*BP(3)+25.*BP(5)-6.*BP(7))+B4*
     . EC*CJ2*CW(6)*(10.*BP(1)-5.*BP(3)-9.*BP(5)+4.*BP(7))+B4*EC*
     . CJ2*(-BP(1)-1./4.*BP(3)+5./4.*BP(5))
     . +B4*CJ3*CW(2)*(-7./12.*BP(2)-BP(4)+3./4.
     . *BP(6))+B4*CJ3*CW(8)*(-2./3.*BP(4)+1./6.*BP(8)+1./2.*0)+B4*
     . CJ3*CW(4)*(21./4.*BP(2)-7./6.*BP(4)-13./4.*BP(6)+1./6.*BP(8
     . )+4.*0)+B4*CJ3*CW(6)*(-5./2.*BP(2)+10./3.*BP(4)+5./2.*BP(6)-1.
     . /3.*BP(8)-3.*0)+B4*CJ3*(-1./12.*BP(2)+1./8.*BP(4)-1./24.*0)
     . +ANS5
      ANS3=B3*CJ*EC2*SW*CW(1)*(11./4.*BP(2)+19./4.*BP(4)-9./2.*BP(6
     . )+3./2.*0)+B3*CJ*EC2*SW*CW(3)*(-11./2.*BP(2)-19./2.*BP(4)+9.*BP
```

```
. (6)-3.*0)+B3*EC*
. CJ2*SW*CW(1)*(-5./2.*BP(1)-9./2.*BP(3)-9./2.*BP(5)+1./2.*BP(
. 7))+B3*EC*CJ2*SW*CW(3)*(10.*BP(1)+19.*BP(3)+19.*BP(5)-4.*BP(
. 7))+B3*EC*CJ2*SW*CW(5)*(10.*BP(1)-5.*BP(3)-9.*BP(5)+4.*BP(7
. ))+B3*CJ3*SW*CW(1)*(-7./12.*BP(2)+1.
. /4.*BP(6)-1./2.*0)+B3*CJ3*SW*CW(3)*(4*BP(2)-1./3.*BP(4)-2.*BP
. (6)+1./12.*BP(8)+13./4.*0)+B3*CJ3*SW*CW(5)*(-5./2.*BP(2)+3.*BP
. (4)+5./2.*BP(6)-1./4.*BP(8)-11./4.*0)+B3*CJ3*SW*CW(7)*(-2./3.*
. BP(4)+1./6.*BP(8)+1./2.*0)+B3*EC3*SW*CW(1)*(-7.*BP(1)-25./8.*
. BP(3)+9./8.*BP(5))+ANS4
 ANS2=B2*EC*CJ2*CW(6)*(10.*BP(1)-5.*BP(3)-9.*BP(5)+4.*BP(7))+
. B2*EC*CJ2*(6*BP(1)+15./4.*BP(3)+5./4.*BP(5))
. +B2*CJ3*CW(2)*(-43./12.*BP(2)+3.
. /4.*BP(6)-3.*0)+B2*CJ3*CW(8)*(-2./3.*BP(4)+1./6.*BP(8)+1./
. 2.*0)+B2*CJ3*CW(4)*(21./4.*BP(2)-13./6.*BP(4)-13./4.*BP(6)+1./
. 6.*BP(8)+5.*0)+B2*CJ3*CW(6)*(-5./2.*BP(2)+10./3.*BP(4)+5./2.*BP
. (6)-1./3.*BP(8)-3.*0)+B2*CJ3*(5/12.*BP(2)+1./8.*BP(4)+7./24.*0)
. +B2*EC3*CW(2)*(-7.*BP(1)-25./8.*BP(3)+9./8.*BP(5))+B2*EC3*(
. 25./4.*BP(1)+3.*BP(3)-1./4.*BP(5))+ANS3
 ANS1=B1*EC3*CW(2)*(-7.*BP(1)-25./8.*BP(3)+9./8.*BP(5))+B1*EC3
. *(3/4.*BP(1)+1./8.*BP(3)-7./8.*BP(5))+B2*CJ*EC2*CW(2)*(137./
. 16.*BP(2)+17./2.*BP(4)-141./16.*BP(6)+21./4.*0)+B2*CJ*EC2*CW(4)
. *(-11./2.*BP(2)-19./2.*BP(4)+9.*BP(6)-3.*0)+B2*CJ*EC2*(-43./16.
. *BP(2)-17./16.*BP(4)+15./16.*BP(6)-27./16.*0)
. +B2*EC*CJ2*CW(2)*(-25.*BP(1)-43./2.*BP(3)-21./
. 2.*BP(5)+2.*BP(7))+B2*EC*CJ2*CW(4)*(6*BP(1)+22.*BP(3)+22.*
. BP(5)-6.*BP(7))+ANS2
 HNG7L=HNG7L+
. B1*CJ*EC2*CW(2)*(39./16.*BP(2)+21./2.*BP(4)-147./16.*BP(
. 6)+3./4.*0)+B1*CJ*EC2*CW(4)*(-11./2.*BP(2)-19./2.*BP(4)+9.*BP(
. 6)-3.*0)+B1*CJ*EC2*(3/8.*BP(2)-33./16.*BP(4)+9./8.*BP(6)+9./
. 16.*0)+B1*EC*CJ2*CW(2)*(5*BP(1)-
. 9./2.*BP(3)-27./2.*BP(5)+2.*BP(7))+B1*EC*CJ2*CW(4)*(4*BP(1)
. +21.*BP(3)+25.*BP(5)-6.*BP(7))+B1*EC*CJ2*CW(6)*(10.*BP(1)-
. 5.*BP(3)-9.*BP(5)+4.*BP(7))+B1*EC*CJ2*(-BP(1)-1./4.*BP(3)+5.
. /4.*BP(5))+B1*CJ3*
. CW(2)*(-7./12.*BP(2)-BP(4)+3./4.*BP(6))+B1*CJ3*CW(8)*(-
. 2./3.*BP(4)+1./6.*BP(8)+1./2.*0)+B1*CJ3*CW(4)*(21./4.*BP(2)-7./
. 6.*BP(4)-13./4.*BP(6)+1./6.*BP(8)+4.*0)+B1*CJ3*CW(6)*(-5./2.*BP
. (2)+10./3.*BP(4)+5./2.*BP(6)-1./3.*BP(8)-3.*0)+B1*CJ3*(-1./12.
. *BP(2)+1./8.*BP(4)-1./24.*0)+ANS1

 HNG15L=HNG15L+CJ*EC2*CW(2)*(-
. 7./2.*BP(2)+7./2.*BP(4)-3.*0)+CJ*EC2*(7/4.*BP(2)-7./4.*BP(4)+
. 3./2.*0)+EC*CJ2*CW(2)*(30.*BP(1)+
. 17.*BP(3)-3.*BP(5))+EC*CJ2*CW(4)*(-2.*BP(1)-BP(3)+3.*BP(5))
. +EC*CJ2*(-7.*BP(1)-4.*BP(3))+CJ3*CW(2)*(3*BP(2)-
. BP(4)+3.*0)+CJ3*CW(4)*(BP(4)-1.*0)+CJ3*(-1./2.*BP(2)
. -1./3.*0)+EC3*(3./4.*BP(1)+1./4.*BP(3))
 RETURN
 END
```

```
      BLOCK DATA AKONS
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON/AKON/ AK(7,4)
      DATA AK /-2.1041D-12,-7.8626D-13, 1.4228D-14, 1.9794D-13,
     .           2.2387D-13,-2.1152D-12,-1.7174D-13,
     .           2.5051D-09, 1.1295D-10, 5.2364D-11,-7.6532D-11,
     .          -1.1571D-10, 9.0702D-10, 7.6048D-11,
     .          -1.5026D-10,-6.8497D-11, 1.3776D-11, 1.5305D-11,
     .           1.6575D-11,-2.2081D-10,-1.8880D-11,
     .           7.9489D-11, 6.3063D-11,-3.2733D-12,-7.6109D-12,
     .          -9.8514D-12, 9.7056D-11, 8.3009D-12/
      END
```

```
.............................................................................
PROGRAM FOR THE CALCULATION ATMOSPHERIC DRAG EFFECTS ANALITICALY..
INPUT:.......................................................................
1)     SATELLITE'S DATA                                   UNITS:
       - AX.......SEMI-MAJOR AXIS.....................KM..........
       - ANAG.....INCLINATION OF THE ORBIT...........DEG..........
       - AN.......RIGHT ASCENSION OF THE NODE........DEG..........
       - W........ARGUMENT OF THE PERIGEE............DEG..........
       - EC.......ECCENTRICITY.....................    ..........
       - AM.......MEAN ANOMALY.........................DEG..........
       - DMM......DAILY MEAN MOTION..................R/D..........
       - FI.......GEOCENTRIC LATITUDE.................DEG..........
       - Q........PERIGEE PARAMETER...................KM...........
       - ADFPUM...ATMOSPHERIC DRAG FORCE PER UNIT MASS...........
2)     TIME AND PHYSICAL PARAMETERS
       - YEAR.....YEAR IN THE POINT OF QUESTION.....YEAR AC......
       - DAY......DAY IN THE YEAR.....................DAYS.........
       - F........SOLAR FLUX..........................E-22W/M2(S/C)
       - FB.......MEAN SOLAR FLUX....................              .
       - AP.......GEOMAGNETIC INDEX KP..............    .........
       - ST.......LOCAL TIME..........................HOURS........
       - AS.......RIGHT ASCENSION OF THE SUN........HOURS........
3)     TOTAL DENSITY MODEL PARAMETERS (CONSTANTS AND RELATIONS)
       - HN ......................
       - GN ......................
       - P3,P4,P5,P6,P7 ............
       - AA, BB, B1,B2,B3,B4,B5 ....
       - AK(7,4) ...................
       - AK0 .......................
       - F0, FM, FX ................
- BP(I),I=1,9 ARE THE BESSEL POLINOMS OF THE ORDER I; 0=BP(0)...
OUTPUT.......................................................................
1)     - SUMAHG...CHANGE OF THE ECCENTRICITY.....................
.............................................................................
SUBROUTINE DRAG(SUMAHG)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION BP(10),CW(10),GN(5)
COMMON /CHANGE/ EC,EC2,EC3,CJ,CJ2,CJ3,CINC,SINC,CW,SW,SDP3
COMMON /BIND/ AA,BB,B1,B2,B3,B4,B5
COMMON /CONST/ DTOR,RTOD,PI,TWOPI
COMMON /AKON/ AK(7,4)
DATA P3/263.D0/,P4/-263.D0/,P5/-29.41D0/,P6/8.0913D0/,P7/10.0813
. D0/
900 FORMAT(................)
901 FORMAT(................)
CALL CONS
READ(5,*) IORDER, ADFPUM
MMENT
READ(8,900) AX,ANAG,AN,W,FI,EC
READ(8,901) DAY,F,FB,AP,ST,AS
P3= P3*TWOPI/365.D0
P4= P4*TWOPI/365.D0
P5= P5*TWOPI/365.D0
P6= P6*TWOPI/24.D0
P7= P7*TWOPI/24.D0
FI=FI*DTOR
DAY=DAY*TWOPI/365.
W=W*DTOR
```

```
      ANAG=ANAG*DTOR
      AN=AN*DTOR
      AS=AS*15.D0*DTOR
      AK0=1.D0+.04762D0*(AP-3.D0)
      FM=(FB-60.D0)/160.D0
      F0=0.2875D0+FM
      FX=1.D0+.007D0*(F-FB)
        CINC=DCOS(ANAG)
        SINC=DSIN(ANAG)
        ANAS2=2.D0*(AN-AS)
        P72=2.D0*P7
        SDP3=DSIN(DAY-P3)
        EPSINC=.00335*SINC*SINC/2.D0
      SW=DSIN(W)
      CW(1)=DCOS(W)
       DO 9 I=1,8
9      CW(I+1)=CW(I)*CW(1)
      AA=(FM/3.D0+1.D0)*DSIN(AN-AS-P6)
      BB=(FM/3.D0+1.D0)*CINC*DCOS(AN-AS+P6)
      CB=15.D0*FM+1.D0
      B1=CB*DCOS(P72)*DSIN(ANAS2)
      B2=CB*DCOS(P72)*DSIN(ANAS2)*CINC**2
      B3=2.D0*CB*DCOS(P72)*DCOS(ANAS2)*CINC
      B4=-CB*DSIN(P72)
      B5=-CB*DSIN(P72)*CINC**2
      GN(1)=1.
      GN(2)=FM+471.D0/10000.D0
      GN(5)=DSIN(2.*(DAY-P5))*(7.*FM+1.D0)
      GN(4)=(7.*FM+1.D0)*DSIN(DAY-P4)
      EC2=EC*EC
      EC3=EC*EC2
      PARMC=EPSINC*AX*(1.D0-EC)
      SUMAHG=-TWOPI*AX*ADFPUM*AK0*F0*FX*1.D7
      SUMAA=0.D0
      SUMAB=0.D0
      G3L=1./2.*EC*SDP3*SINC*SW-9./16.*SDP3*EC3*SINC*SW
      G6L=1./2.*AA*EC*CW(1)-9./16.*AA*EC3*CW(1)+1./2.*BB*EC*SW-9./16.
     . *BB*EC3*SW
      G7L=-3./2.*B1*EC2*CW(2)+9./16.*B1*EC2+1./2.*B1-3./2.*B2*EC2*CW(
     . 2)+15./16.*B2*EC2-1./2.*B2-3./2.*B3*EC2*SW*CW(1)-3./2.*B4*EC2*
     . CW(2)+9./16.*B4*EC2+1./2.*B4+3./2.*B5*EC2*CW(2)-15./16.*B5*EC2
     . +1./2.*B5
      DO 10 I=1,5
      IF(I.EQ.3) GO TO 10
10    SUMAA=SUMAA+GN(I)*(1.D0+3.*EC2/4.D0)*AK(I,1)
      SUMAA=SUMAA+AK(3,1)*G3L+AK(6,1)*G6L+AK(7,1)*G7L
      DO 20 J=1,3
      HEIGHT=40.D0*J
      CJ=PARMC/HEIGHT
      CJ2=CJ*CJ
      CJ3=CJ*CJ2
      ARA=(120.D0+6378.16*(1.D0-EPSINC)-AX)/HEIGHT
      AJ=DEXP(ARA)
      ARZ=AX*EC/HEIGHT
      CALL BPL(ARZ,BP,0)
      CALL GCHL(HNG3L,HNG6L,HNG7L,HNG15L,BP,0,G3L,G6L,G7L,IORDER)
      DO 30 I=1,5
      IF(I.EQ.3) GO TO 30
```

```
      SUMAB=SUMAB+GN(I)*AK(I,J+1)*AJ*HNG15L
   30 CONTINUE
      SUMAB=SUMAB+AJ*(AK(3,J+1)*HNG3L+AK(6,J+1)*HNG6L+AK(7,J+1)*HNG7L)
   20 CONTINUE
      SUMAHG=SUMAHG*(SUMAA+SUMAB)
      WRITE(6,*) SUMAHG
   88 CONTINUE
      RETURN
      END
        SUBROUTINE CONS
        IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
        COMMON /CONST/ DTOR,RTOD,PI,TWOPI
        PI=3.141592654D0
        TWOPI=2.D0*PI
        DTOR=PI/180.D0
        RTOD=180.D0/PI
        RETURN
        END
      SUBROUTINE GCHL(HNG3L,HNG6L,HNG7L,HNG15L,BP,O,G3L,G6L,G7L,IORDER)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION BP(10),CW(10)
      COMMON /CHANGE/ EC,EC2,EC3,CJ,CJ2,CJ3,CINC,SINC,CW,SW,SDP3
      COMMON /BIND/ AA,BB,B1,B2,B3,B4,B5
C     LEGEN=EC**3*(1./4.*COS(3.*EA)+3./4.*COS(EA))+EC**2*(3./4.*COS(2.*
C    . EA)+3./4)+2.*EC*COS(EA)+1.
      HNG3L=CJ*EC*SDP3*SINC*SW*CW(2)*(-2.*BP(2)+4.*BP(4))-CJ*EC*SDP3
     . *SINC*SW*BP(4)+CJ*SDP3*EC2*SINC*SW*CW(2)*(-7./2.*BP(1)-63./8.
     . *BP(3)+35./8.*BP(5))+CJ*SDP3*EC2*SINC*SW*(19./8.*BP(1)+17./8.
     . *BP(3)-BP(5))+2.*CJ*SDP3*SINC*SW*CW(2)*BP(3)+CJ*SDP3*SINC*SW
     . *(-1./2.*BP(1)-1./2.*BP(3))+EC*SDP3*CJ2*SINC*SW*CW(2)*(-2.*BP
     . (6)+18.*BP(2)+12.*BP(4)+10.*O)+EC*SDP3*CJ2*SINC*SW*(-9./2.*BP(
     . 2)-2.*BP(4)-3.*O)+EC*SDP3*SINC*SW*BP(2)+SDP3*CJ3*SINC*SW*CW(2)*
     . (5.*BP(1)+BP(3)-BP(5))+SDP3*CJ3*SINC*SW*(-7./12.*BP(1)-1./4.
     . *BP(3))+SDP3*EC3*SINC*SW*(-5./4.*BP(2)+1./4.*BP(4)-1./2.*O)+
     . SDP3*CJ2*SINC*SW*CW(2)*(5.*BP(1)+2.*BP(3)-BP(5))+SDP3*CJ2*
     . SINC*SW*(-BP(1)-1./2.*BP(3))+SDP3*EC2*SINC*SW*(-9./8.*BP(1)+
     . 5./8.*BP(3))+SDP3*SINC*SW*BP(1)
      ANS1=AA*CJ*EC*CW(1)*(2.*BP(2)-3.*BP(4))+AA*CJ*EC*CW(3)*(-2.*
     . BP(2)+4.*BP(4))+AA*CJ*EC2*CW(1)*(9./8.*BP(1)+23./4.*BP(3)-
     . 27./8.*BP(5))+AA*CJ*EC2*CW(3)*(-7./2.*BP(1)-63./8.*BP(3)+35./
     . 8.*BP(5))+AA*CJ*CW(1)*(1./2.*BP(1)-3./2.*BP(3))+2.*AA*CJ*CW(
     . 3)*BP(3)+AA*EC*CJ2*CW(1)*(1./2.*BP(6)-3.*BP(2)-6.*BP(4)-O)
     . +AA*EC*CJ2*CW(3)*(-3.*BP(6)+15.*BP(2)+20.*BP(4)+6.*O)+AA*EC*CW
     . (1)*BP(2)+AA*CJ3*CW(1)*(-13./12.*BP(1)-1./4.*BP(3)+1./2.*BP
     . (5))+AA*CJ3*CW(3)*(1./6.*BP(7)+15./2.*BP(1)+1./2.*BP(3)-19.
     . /6.*BP(5))+AA*EC3*CW(1)*(-5./4.*BP(2)+1./4.*BP(4)-1./2*O)+AA*
     . CJ2*CW(1)*(-BP(1)-BP(3)+1./2.*BP(5))+AA*CJ2*CW(3)*(5.*BP(1
     . )+3.*BP(3)-2.*BP(5))+AA*EC2*CW(1)*(-9./8.*BP(1)+5./8.*BP(3)
     . )+AA*CW(1)*BP(1)+BB*CJ*EC*SW*CW(2)*(-2.*BP(2)+4.*BP(4))-BB*
     . CJ*EC*SW*BP(4)+BB*CJ*EC2*SW*CW(2)*(-7./2.*BP(1)-63./8.*BP(3)
     . +35./8.*BP(5))+BB*CJ*EC2*SW*(19./8.*BP(1)+17./8.*BP(3)-BP(5)
     . )+2.*BB*CJ*SW*CW(2)*BP(3)+BB*CJ*SW*(-1./2.*BP(1)-1./2.*BP(3)
     . )+BB*EC*CJ2*SW*CW(2)*(-2.*BP(6)+18.*BP(2)+12.*BP(4)+10.*O)+BB*
     . EC*CJ2*SW*(-9./2.*BP(2)-2.*BP(4)-3.*O)+BB*EC*SW*BP(2)
      HNG6L=ANS1+BB*CJ3*SW
     . *CW(2)*(5.*BP(1)+BP(3)-BP(5))+BB*CJ3*SW*(-7./12.*BP(1)-1./
     . 4.*BP(3))+BB*EC3*SW*(-5./4.*BP(2)+1./4.*BP(4)-1./2*O)+BB*CJ2*SW
     . *CW(2)*(5.*BP(1)+2.*BP(3)-BP(5))+BB*CJ2*SW*(-BP(1)-1./2.*BP
```

```
.  (3))+BB*EC2*SW*(-9./8.*BP(1)+5./8.*BP(3))+BB*SW*BP(1)
   ANS3=B1*CJ*EC*CW(2)*(-1./2.*BP(1)+9./2.*BP(3)-5.*BP(5))+B1*
.  CJ*EC*(1./2.*BP(1)-9./8.*BP(3)+5./8.*BP(5))+B1*CJ*EC2*CW(2)*
.  (-107./16.*BP(6)-9./16.*BP(2)+51./4.*BP(4)+0)+B1*CJ*EC2*(13.
.  /16.*BP(6)+19./16.*BP(2)-33./16.*BP(4)+1./16)+B1*CJ*CW(2)*(
.  BP(2)-2.*BP(4))+B1*CJ*(-1./2.*BP(2)+1./4.*BP(4)+1./4)+B1*EC
.  *CJ2*CW(2)*(13./8.*BP(7)+41./8.*BP(1)-27./8.*BP(3)-103./8.*
.  BP(5))+B1*EC*CJ2*(-7./8.*BP(1)-1./4.*BP(3)+9./8.*BP(5))+B1*
.  EC*CW(2)*(-1./2.*BP(1)+3./2.*BP(3))+B1*EC*(3./4.*BP(1)-3./4.
.  *BP(3))+B1*CJ3*CW(2)*(3./4.*BP(6)-7./12.*BP(2)-BP(4))+B1*
.  CJ3*(-1./12.*BP(2)+1./8.*BP(4)-1./24)+B1*EC3*CW(2)*(-33./8.*
.  BP(1)-4.*BP(3)+5./8.*BP(5))+B1*EC3*(-7./16.*BP(1)+31./32.*BP
.  (3)-17./32.*BP(5))+B1*CJ2*CW(2)*(3./4.*BP(6)-1./4.*BP(2)-2.
.  *BP(4))+B1*CJ2*(-1./4.*BP(2)+1./4.*BP(4))+B1*EC2*CW(2)*(-13.
.  /4.*BP(2)+BP(4)-5./4*0)+B1*EC2*(BP(2)-11./16.*BP(4)-5./16*0)+
.  B1*CW(2)*BP(2)+B1*(-1./2.*BP(2)+1./2*0)+B2*CJ*EC*CW(2)*(1./2.
.  *BP(1)+3./2.*BP(3)-5.*BP(5))+B2*CJ*EC*(3./8.*BP(3)+5./8.*BP(
.  5))+B2*CJ*EC2*CW(2)*(-101./16.*BP(6)+137./16.*BP(2)+49./4.*BP
.  (4)+5.*0)+B2*CJ*EC2*(5./8.*BP(6)-27./8.*BP(2)-29./16.*BP(4)-
.  31./16*0)+B2*CJ*CW(2)*(-BP(2)-2.*BP(4))
   ANS2= ANS3+B2*CJ*(1./2.*BP(2)+1./
.  4.*BP(4)+1./4.*0)+B2*EC*CJ2*CW(2)*(13./8.*BP(7)-159./8.*BP(1)-
.  151./8.*BP(3)-83./8.*BP(5))+B2*EC*CJ2*(41./8.*BP(1)+13./4.*BP(
.  3)+9./8.*BP(5))+B2*EC*CW(2)*(-1./2.*BP(1)+3./2.*BP(3))+B2*EC
.  *(-1./4.*BP(1)-3./4.*BP(3))+B2*CJ3*CW(2)*(3./4.*BP(6)-43./
.  12.*BP(2)-3*0)+B2*CJ3*(5./12.*BP(2)+1./8.*BP(4)+7./24*0)+B2*EC3*
.  CW(2)*(-33./8.*BP(1)-4.*BP(3)+5./8.*BP(5))+B2*EC3*(73./16.*
.  BP(1)+97./32.*BP(3)-3./32.*BP(5))+B2*CJ2*CW(2)*(3./4.*BP(6)
.  -17./4.*BP(2)-BP(4)-3.*0)+B2*CJ2*(3./4.*BP(2)+1./4.*BP(4)+1./
.  2.*0)+B2*EC2*CW(2)*(-13./4.*BP(2)+BP(4)-5./4*0)+B2*EC2*(9./4.*
.  BP(2)-5./16.*BP(4)+25./16*0)+B2*CW(2)*BP(2)+B2*(-1./2.*BP(2)-1./
.  2)+B3*CJ*EC*SW*CW(1)*(3./2.*BP(3)-5./2.*BP(5))+B3*CJ*EC*SW*CW
.  (3)*(-3.*BP(3)+5.*BP(5))+B3*CJ*EC2*SW*CW(1)*(-13./4.*BP(6)+
.  2.*BP(2)+25./4.*BP(4)+3./2*0)+B3*CJ*EC2*SW*CW(3)*(13./2.*BP(6)
.  -4.*BP(2)-25./2.*BP(4)-3)-B3*CJ*SW*CW(1)*BP(4)+2.*B3*CJ*SW*
.  CW(3)*BP(4)+B3*EC*CJ2*SW*CW(1)*(3./8.*BP(7)-13./8.*BP(1)-
.  31./8.*BP(3)-35./8.*BP(5))+B3*EC*CJ2*SW*CW(3)*(-13./4.*BP(7)+
.  25./4.*BP(1)+65./4.*BP(3)+75./4.*BP(5))
   ANS1=ANS2+B3*EC*SW*CW(1)*(-1./
.  2.*BP(1)+3./2.*BP(3))+B3*CJ3*SW*CW(1)*(1./4.*BP(6)-7./12.*BP(
.  2)-1./2*0)+B3*CJ3*SW*CW(3)*(1./6.*BP(3)*BP(5)-2.*BP(6)+47./
.  12.*BP(2)-1./3.*BP(4)+13./4*0)+B3*EC3*SW*CW(1)*(-33./8.*BP(1)-
.  4.*BP(3)+5./8.*BP(5))+B3*CJ2*SW*CW(1)*(1./4.*BP(6)-3./4.*BP(
.  2)-1./2.*BP(4)-1./2*0)+B3*CJ2*SW*CW(3)*(-3./2.*BP(6)+7./2.*BP(
.  2)+2.*BP(4)+2.*0)+B3*EC2*SW*CW(1)*(-13./4.*BP(2)+BP(4)-5./4*0)+
.  B3*SW*CW(1)*BP(2)+B4*CJ*EC*CW(2)*(-1./2.*BP(1)+9./2.*BP(3)-
.  5.*BP(5))+B4*CJ*EC*(1./2.*BP(1)-9./8.*BP(3)+5./8.*BP(5))+B4*
.  CJ*EC2*CW(2)*(-107./16.*BP(6)-9./16.*BP(2)+51./4.*BP(4)+0)+
.  B4*CJ*EC2*(13./16.*BP(6)+19./16.*BP(2)-33./16.*BP(4)+1./16.*0)+
.  B4*CJ*CW(2)*(BP(2)-2.*BP(4))+B4*CJ*(-1./2.*BP(2)+1./4.*BP(4
.  )+1./4.*0)+B4*EC*CJ2*CW(2)*(13./8.*BP(7)+41./8.*BP(1)-27./8.*BP
.  (3)-103./8.*BP(5))+B4*EC*CJ2*(-7./8.*BP(1)-1./4.*BP(3)+9./8.
.  *BP(5))+B4*EC*CW(2)*(-1./2.*BP(1)+3./2.*BP(3))+B4*EC*(3./4.*
.  BP(1)-3./4.*BP(3))+B4*CJ3*CW(2)*(3./4.*BP(6)-7./12.*BP(2)-
.  BP(4))+B4*CJ3*(-1./12.*BP(2)+1./8.*BP(4)-1./24.*0)+B4*EC3*CW(2
.  )*(-33./8.*BP(1)-4.*BP(3)+5./8.*BP(5))+B4*EC3*(-7./16.*BP(1)
.  +31./32.*BP(3)-17./32.*BP(5))
   HNG7L=ANS1+B4*CJ2*CW(2)*(3./4.*BP(6)-1./
```

```
.   4.*BP(2)-2.*BP(4))+B4*CJ2*(-1./4.*BP(2)+1./4.*BP(4))+B4*EC2*
.   CW(2)*(-13./4.*BP(2)+BP(4)-5./4.*0)+B4*EC2*(BP(2)-11./16.*BP(
.   4)-5./16*0)+B4*CW(2)*BP(2)+B4*(-1./2.*BP(2)+1./2*0)+B5*CJ*EC*CW
.   (2)*(-1./2.*BP(1)-3./2.*BP(3)+5.*BP(5))+B5*CJ*EC*(-3./8.*BP(
.   3)-5./8.*BP(5))+B5*CJ*EC2*CW(2)*(101./16.*BP(6)-137./16.*BP(
.   2)-49./4.*BP(4)-5.*0)+B5*CJ*EC2*(-5./8.*BP(6)+27./8.*BP(2)+29./
.   16.*BP(4)+31./16*0)+B5*CJ*CW(2)*(BP(2)+2.*BP(4))+B5*CJ*(-1./2.
.   *BP(2)-1./4.*BP(4)-1./4.*0)+B5*EC*CJ2*CW(2)*(-13./8.*BP(7)+
.   159./8.*BP(1)+151./8.*BP(3)+83./8.*BP(5))+B5*EC*CJ2*(-41./8.*
.   BP(1)-13./4.*BP(3)-9./8.*BP(5))+B5*EC*CW(2)*(1./2.*BP(1)-3.
.   /2.*BP(3))+B5*EC*(1./4.*BP(1)+3./4.*BP(3))+B5*CJ3*CW(2)*(-3.
.   /4.*BP(6)+43./12.*BP(2)+3.*0)+B5*CJ3*(-5./12.*BP(2)-1./8.*BP(4
.   )-7./24.*0)+B5*EC3*CW(2)*(33./8.*BP(1)+4.*BP(3)-5./8.*BP(5))+
.   B5*EC3*(-73./16.*BP(1)-97./32.*BP(3)+3./32.*BP(5))+B5*CJ2*CW(
.   2)*(-3./4.*BP(6)+17./4.*BP(2)+BP(4)+3.*0)+B5*CJ2*(-3./4.*BP(2)
.   -1./4.*BP(4)-1./2*0)+B5*EC2*CW(2)*(13./4.*BP(2)-BP(4)+5./4*0)+
.   B5*EC2*(-9./4.*BP(2)+5./16.*BP(4)-25./16.*0)-B5*CW(2)*BP(2)+B5
.   *(1./2.*BP(2)+1./2*0)
    HNG15L=CJ*EC*CW(2)*(-BP(1)+3.*BP(3))+CJ*EC*(1./2.*BP(1)-3./2.
.   *BP(3))+CJ*EC2*CW(2)*(-13./2.*BP(2)+2.*BP(4)-5./2*0)+CJ*EC2*(
.   13./4.*BP(2)-BP(4)+5./4.*0)+2.*CJ*CW(2)*BP(2)-CJ*BP(2)+EC*CJ2*
.   CW(2)*(25.*BP(1)+31./2.*BP(3)-5./2.*BP(5))+EC*CJ2*(-6.*BP(1
.   )-7./2.*BP(3))+EC*BP(1)+CJ3*CW(2)*(3.*BP(2)-BP(4)+3.*0)+CJ3*(
.   -1./2.*BP(2)-1./3*0)+EC3*(-5./8.*BP(1)+1./8.*BP(3))+CJ2*CW(2)
.   *(4.*BP(2)-BP(4)+3.*0)+CJ2*(-BP(2)-1./2*0)+EC2*(1./4.*BP(2)-3./
.   4.*0)+0
    RETURN
    END
    BLOCK DATA AKONS
    IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
    COMMON/AKON/ AK(7,4)
    DATA AK /-2.1041D-12,-7.8626D-13, 1.4228D-14, 1.9794D-13,
.            2.2387D-13,-2.1152D-12,-1.7174D-13,
.            2.5051D-09, 1.1295D-10, 5.2364D-11,-7.6532D-11,
.           -1.1571D-10, 9.0702D-10, 7.6048D-11,
.           -1.5026D-10,-6.8497D-11, 1.3776D-11, 1.5305D-11,
.            1.6575D-11,-2.2081D-10,-1.8880D-11,
.            7.9489D-11, 6.3063D-11,-3.2733D-12,-7.6109D-12,
.           -9.8514D-12, 9.7056D-11, 8.3009D-12/
    END
```

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА

Број: ____________

P R I L O G   B

IZVODI IZ UPUTSTVA ZA REDUCE 2

IZVODI IZ UPUTSTVA ZA KORISCENJE REDUCE-a SA PRIMERIMA

1. UVOD

R E D U C E je program koji je napisan u sintaksi jezika LISP i sadrži operativne intsrukcije interesantne kako za teorijski pristup problemima, tako i za primenu. Njegove osnovne mogućnosti uključuju:

1. Razvoj i uredjenje polinoma i racionalnih f-ja
2. Simboličko diferenciranje i integraljenje
3. Smenjivanje i grupisanje različitih formi
4. Automatsko i od korisnika kontrolisano uprošćavanje izraza
5. Računanje sa simboličkim matricama
6. Kompletan jezik za simboličko programiranje u kojem je i sam REDUCE napisan
7. Tenzorske operacije

2. STRUKTURA PROGRAMA

Program REDUCE se sastoji od skupa komandi koje će kompjuter za realizuje uzastopno.
Komande se sastoje od deklaracija, naredbi i izraza (tj. njih čine kompozicije niza brojeva, varijabli, operatora, iskaza, rezervisanih reči i graničnika-terminatora -takvih kao zarez i zagrade-, koji su redom niz baznih karaktera).

- STANDARDNI KARAKTERI REDUCE-A

Osnovni karakteri koji se koriste u izgradnji REDUCE-ovih komandi i programa su sledeći:

I) 26 velikih slova od A-Z

II) 10 decimalnih cifara od 0-9

III) Specijalni znaci !"$%'()*+,-./:;<>=

Program komponovan od ovog standardnog skupa ka - raktera radiće u svakom dostupnom REDUCE sistemu. Dodajemo, ne - koliko implementacija REDUCE-a (n.pr. na PDP-10) koristi dodatne karaktere za predstavljanje nekih operatora u sistemu. Lako se uvode lokalne operativne instrukcije i karakteri za dati kompju- ter.

- BROJEVI

Brojevi u REDUCE-u mogu biti 2 tipa: celobrojni i realni. Celobrojni se sastoje od označenog ili neoznačenog niza dekadnih cifara pisanih bez decimalne tačke. N.pr.

-5, 4327, +84

Kako je korišćena aritmetika proizvoljne precizno sti to nema praktične granice broja dozvoljenih cifara.

Realni brojevi mogu da se pišu na dva načina:

I) Kao označeni ili neoznačeni niz od 1-9 dekad- nih cifara sa umetnutom decimalnom tačkom.

II) Kao pod I) prosledjeno dekadnim eksponentom koji je napisan kao slovo E praćeno označenim ili neoznačenim celim brojem

Na primer, 84. +84.0 0.84E2 i 840.E-1 sve su to predstav ljanja broja 84.

Ograničenje:

Neoznačeni deo bilo kog broja ne može da počne decimalnom tačkom. N.pr., ne važi

.3   -.52   +.21

- IDENTIFIKATORI (IMENA)

N.pr., A   AZ   P1   Q23P   AVERYLONGVARIABLE

Identifikatori se koriste kao varijable, labele, imena nizova, operatora i procedura. Sastoje se od 1-80 alfanumeričkih karaktera, od kojih prvi mora da bude slovo.

N. pr., A, AS, A123, AVERYLONGVARIABLENAME.

Ograničenja:

Rezervisane reci u REDUCE-u (vidi dalje) ne mogu da se koriste kao identifikatori. Blanko ne može biti unutar identifikatora i jedan identifi kator ne može preći granicu linije teksta.

- PROMENLJIVE

Promenljive su jedan tip identifikatora i speci - fikovane su imenom i tipom. Njihovo ime mora da bude dozvoljeni identifikator. Ima nekoliko dozvoljenih tipova varijabli.

- REZERVISANA IMENA PROMENLJIVIH

I kvadratni koren iz -1. Svi stepeni I su auto - matski zamenjeni odgovarajućim kombinacijama -1 i I.

E osnova prirodnih logaritama

- OPERATORI

Operatori u REDUCE-u su takodje specifikovani imenom i tipom. Postoje dva tipa: INFIX i PREFIX. INFIX operatori se nalaze izmedju svojih argumenata. N.pr., A+B-C, X=Y AND W MEMBER Z. Sledeći INFIX operatori su ugradjeni u sistem:

<INFIX operator>::= := OR AND NOT MEMBER = NEQ EQ >= > <= < + - * / ** .

Podklase ovih operatora su:

<operator dodeljivanja>	::= :=
<logički operator>	::= OR AND NOT MEMBER
<relacioni operator>	::= = EQ NEQ >= > <= <
<aritmetički operator>	::= + - * / **
<simbolički operator>	::= .
<grupni operator>	::= << >>

Radi kompatibilnosti sa korišćenom jezičkom sredinom (LISP) imamo da svaki specijalni karakter INFIX operator ima dodatni alfanumerički identifikator njemu pridružen. Ovi identifikatori mogu biti korišćeni naizmence sa odgovarajućim INFIX karakterima na ulazu. Ova korespondencija je sledeća:

:=	SETQ
=	EQUAL
>=	GEQ
>	GREATERP

<=	LEQ
<	LESSP
+	PLUS
-	DIFFERENCE (unarni MINUS)
*	TIMES
/	QUOTIENT (unarno RECIP)
**	EXPT
.	CONS

Gornji operatori su po pretpostavci binarni, izuzev NOT koji je unarni i + i * koji su "proizvoljni" ; - i / mogu da se koriste u unarnoj poziciji. Svaki drugi operator je smatran binarnim i primenjuje se pravilo grupisanja s leve strane. Tako je A/B/C interpretirano kao (A/B)/C. Postoje dva izuzetka od ovog pravila, naime := i : koji imaju desno pravilo grupisanja. Dakle, A:=B:=C interpretirano je kao A:=(B:=C).

Zagrade mogu da se koriste u odredjivanju poretka kombinacije. Ako su zagrade izostavljene, onda je redosled dat prvenstveno uredjenjem prema gornjoj listi (od operacije najvišeg do operacije najnižeg ranga).

PREFIX operatori se pojavljuju ispred svojih argumenata, koji su napisani kao lista u zagradama i razdvojeni zarezima, kao u normalnim matematičkim funkcijama.

N.pr.,

COS(U)

DF(X**2,X).

Zagrade mogu da se izostave ako je operator unarni. N.pr.

COS Y i COS(Y) su ekvivalentni.

Takav unarni PREFIX operator ima viši prioritet od bilo kog IN -

FIX operatora. INFIX operator može takodje da se koristi u PRE - FIX formatu na ulazu. Na izlazu, medjutim, oni će uvek biti štampani u INFIX obliku. U REDUCE su ugradjeni sledeći PREFIX operatori:

- DF

Operator DF predstavlja zahtev za parcijalno diferenciranje u odnosu na 1 ili više varijabli. Prvi argument je skalarni izraz koji će biti diferenciran. Preostali argumenti su varijable koje će biti diferencirane i red diferenciranja.

DF(<izraz>,<varijabla>,<broj>,...,<var.>,<broj>)

<Broj> može da se izostavi ako je 1. N.pr.,

DF(Y,X)=dY/dX

DF(Y,X,2)=d^2Y/dX^2

DF(Y,X1,2,X2,X3,2)=$d^5Y/(dX1^2\ dX2\ dX3^2)$.

- COS, LOG, SIN

Ove elementarne funkcije su uključene u sistem sa sledećim osobinama:

COS(-X)=COS(X)

SIN(-X)=-SIN(X)

COS(0) = 1

SIN(0) = 0

LOG(E) = 1

LOG(1) = 0

Njihovi izvodi su takodje poznati u sistemu. Korisnik može takodje dodati dalja pravila za redukciju izraza pozivajući ove operatore.

- IZRAZI-ISKAZI

Iskazi su korišćeni samo u izlaznim naredbama. Iskaz se sastoji od nekog broja karaktera smeštenih u dvostruke navodnike. N.pr.,

"IZRAZ - ISKAZ"

- KOMENTARI

Komentari su korisni za uključenje delova sa objašnjenjima u raznim tačkama programa. Oni mogu da se koriste u sledećem obliku:

COMMENT<neki niz karaktera koji ne uključuje terminator><terminator>, gde je

<terminator>::= ; $

N.pr.,

COMMENT OVO JE KOMENTAR;

Takav komentar je ekvivalentan ulazu blanka. Isto tako, niz simbola

END<neki niz simbola bez terminatora ili rezervisanih reči END, ili ELSE ili UNTIL>.

- IZRAZI

REDUCE izrazi mogu biti nekoliko tipova i sastoje se od sintaksno važećeg niza brojeva, varijabli, operatora, leve i desne zagrade i zareza. Uobičajeni tipovi su sledeći:

- NUMERIČKI IZRAZI

Ovi se sastoje od sintaksno dozvoljenih kombinacija celobrojnih ili realnih varijabli, aritmetičkih operatora i zagrada. Oni rezultuju brojevima.

Primeri:

2

J+K-2*J**2 su numerički izrazi ako su J i K celi brojevi

- SKALARNI IZRAZI

Ovi se sastoje od skalarnih varijabli i aritmetičkih operatora i poštuju normalna pravila skalarne algebre.

Primeri:

X

X**3-2*Y/(2*Z**2-DF(X,Z))

(P**2+M**2)**(1/2)*LOG(Y/M)

- JEDNAČINE

U preostalom delu ovih IZVODA razmatraćemo izraze

<izraz> = <izraz> kao jednačinu.

- REZERVISANE REČI

<rezervisane reči>::= BEGIN DO ELSE END FOR FUNCTION GO GOTO IF LAMBDA NIL PRODUCT RETURN STEP TO SUM UNTIL WHILE

- NAREDBE

Naredba je svaka dozvoljena kombinacija rezervisanih reči i izraza i ima sintaksu:

<naredba>::=<izraz>!<sopstvena-pripadna naredba>

Sledeći pod-odeljak opisuje neke sopstvene naredbe u REDUCE-u.

- NAREDBA DODELJIVANJA

Ove naredbe imaju sledeću sintaksu

<naredba dodeljivanja>::=<izraz>:=<naredba>

N.pr., A1:=B+C

H(X,Y):=X-2*Y

Analogno sa numeričkim dodeljivanjem u ALGOL-u, naredba dodeljivanja stavlja u levu stranu naredbe algebarsku vrednost desne strane. Na nesreću, algebarsko izvodjenje izraza nije tako jasno kao odgovarajuće numeričko izvodjenje. Ovaj proces algebarskog izvodjenja je u opštem smatran "uprošćenjem" u smislu da izvodjenje obično ne uzrokuje jednostavniju formu za izraz. U REDUCE-u se podrazumeva da izvodjenje izraza znači razvoj izraza i grupisanje sličnih članova, njihovo uredjenje, od - redjivanje izvoda i drugih funkcija i smenjivanje svakog izraza koji ima dodeljenu ili deklarisanu vrednost.

U mnogim slučajevima ovo je sve što korisniku treba.

Rezultat izvodjenja nekog izraza je štampan ako se koristi tačka-zarez kao graničnik. Zato što obično nije moguće unapred znati kakva će biti veličina nekog izraza, eksplicitna format naredba je nedostupna korisniku. Medjutim, raznolikost izlaznih deklaracija je dostupna (v. dalje).

Takodje je moguće pisati naredbu u obliku

<izraz>:=<izraz>:=...:=<izraz>:=<naredba>

U ovom obliku, svaki <izraz> je skup vrednosti iz <naredba>.

- USLOVNE NAREDBE

Uslovne naredbe imaju sledeću sintaksu:

<uslovna naredba>::=IF<Bulov izraz>THEN<naredba>
ELSE<naredba>

Njeno korišćenje je jasno. Deo ELSE je opcioni.

- NAREDBA FOR

Naredba for je korišćena u definisanju raznih programskih ciklusa. Njena opšta sintaksa je sledeća:

FOR<varijabla>:=<arit.izraz>STEP<arit.izraz>
(DO<naredba>
(UNTIL<arit.izraz>)(
( )(SUM<algebarski izraz>
(WHILE<Bulov izraz)(

DO verzija naredbe FOR je normalna u ALGOL-u ko - rišćena i slična je sa FORTRAN DO naredbom. Njena vrednost je 0. SUM i PRODUCT verzije redom formiraju sumu i proizvod relevant - nog algebarskog izraza u definisanom domenu. Oni rezultuju vred- nošću računate sume ili proizvoda.

<Varijabla> unutar FOR naredbe je po pretpostavci celobrojna. Njena vrednost tokom izvršavanja naredbe je nezavis- na od njene spoljašnje vrednosti, tako I moze da se koristi u ovom kontekstu, sve dok I normalno ostaje koren iz -1.

Primeri:

Pretpostavljamo da je deklaracija ARRAY A(10); bila učinjena u sledećim primerima.

(I) Stavljajući X**I u svaki element niza A(I) možemo da pišemo

```
FOR I:=0 STEP1 UNTIL 10 DO A(I):=X**I$
```

ili

```
FOR I:=0:10 DO A(I):=X**I$
```

(II) Stavljajući da je X jednako faktorijelu 10 možemo pisati

```
X:=FOR I:=1:10 PRODUCT I;
```

Alternativno, možemo staviti u element A(I) I! pomoću naredbi

```
A(0):=1$ FOR I:=1:10 DO A(I):=I*A(I-1)$
```

- NAREDBA GO TO

Naredbe GO TO (ili GOTO) korišćene su za bezuslovni transfer na labelu složene naredbe . Ona ima sintaksu

```
<naredba GO TO>::=GO TO<label>
<label>::=<varijabla>.
```

Ograničenja:

GO TO naredba može da se pojavi samo unutar složene naredbe. Ne može da se stavi na najviši nivo programa. Staviše, ona može pozivati samo labele unutar lokalnog bloka u kojem je definisana.

- SLOŽENE NAREDBE

Složene naredbe su definisane sledećom sintaksom

```
<složena naredba>::=BEGIN<složeni ostatak>
<složeni ostatak>::=<nelabelisani slož.ostatak>!<
                    labela>:<složeni ostatak>
<nelab.slož.ostatak>::=<naredba>END
                    !<naredba><graničnik><sl.ost>
<labela>::=<identifikator>
<graničnik>::= ; $
```

N.pr.,

```
X:=BEGIN INTEGER M;
        M:=1$
    L1:IF N=0 THEN RETURN M;
        M:=M*N$
        N:=N-1$
        GO TO L1
    END OF BLOCK;
```

koja će dodeliti faktorijel prethodno dodeljen celobrojnoj N u X

- NAREDBA RETURN

Naredba RETURN sluzi za izlazak iz složene naredbe na sledeći najviši programski nivo. Ona može da se koristi samostalno, u kojem slučaju naredba vraća 0.

N.pr.,

```
RETURN X+Y;
RETURN M;
RETURN;
```

Ograničenja:

RETURN naredba može postojati samo unutar složene naredbe. Nemaju mesto na najvišem nivou programa.

- DEKLARACIJE

DEKLARACIJE su poseban tip naredbe korišćen za dodeljivanje oznaka, čine ih tip deklaracije i definišuće procedure. Deklaracije PROCEDURE diskutovane su posebno.

- DEKLARACIJA TIPA VARIJABLE

Ove deklaracije govore sistemu koliko će raznih identifikatora biti procesirano. Važeći tipovi uključuju INTEGER REAL i SCALAR.

N.pr.,

```
INTEGER M,N;
REAL M1;
SCALAR X,Y;
```

Deklaracija tipa može da se učini u bilo kom nivou programa i primenjuje se samo na posebni programski blok u kojem se nalazi

Nedeklarisane varijable se usvajaju kao SCALAR. Ovo je osnovni tip simboličke varijable. Sve takve varijable date su inicijal - nom vrednošću 0.

- DEKLARACIJA NIZOVA

Nizovi u REDUCE-u su definisani slično FORTRAN - ovskoj naredbi dimenzija.

N.pr., ARRAY A(10),B(2,3,4);

Njihovi indeksi su iz oblasti 0 do deklarisane vrednosti. Element niza se navodi u standardnoj FORTRAN notaciji N.pr., A(2) . Svi elementi niza su inicijalno 0 u vreme deklaracije.

- DEKLARACIJE off/on

Dve deklaracije su korisniku na raspolaganju za ulaz i izlaz u razne moduse (pod razne "zastave")sistema. Deklaracije ON i OFF kao argumente imaju listu oznaka čije prisustvo u sistemu želimo ili ne želimo:

ON FLOAT, GCD;

OFF LIST;

- KOMANDE

Komanda je poredak kojim sistem treba da uradi nešto. Ona ima sintaksu

<komanda>::=<naredba><terminator>!<sops.komanda>

<sops.komanda>::=<ime komande><blanko><naredba>,.

..,<naredba><terminator>

- SUPSTITUCIONE KOMANDE

Značajna klasa komandi u REDUCE-u su koje definišu zamenu varijabli i izraza koja se čini tokom izvodjenja izraza. Takva zamena može da se deklariše globalno komandom LET ili lokalno operatorom SUB.

LET je korišćeno u obliku

LET<lista zamene>; gde je

<lista zamene> lista jednačina oblika:

<varijabla>=<izraz> ili

<PREFIX operator>(<argument>,...<argument>)=<izr>

N.pr.,

```
LET   X=Y**2+2,
      H(X,Y)=X-Y,
      COS(60)=1/2,
      Y**3=2*Z-3;
```

Ove smene biće sada učinjene za sve takve varijable i izraze koji se pojavljuju u izvodjenju. Svi operatori koji postoje u takvoj jednačini biće automatski deklarisani sa OPERATOR pomoću sistema.

U svakom od ovih primera zamena se čini samo za date eksplicitne izraze; tj. nijedna varijabla ne može biti razmatrana proizvoljno u svakom slučaju. N.pr., komanda

```
LET H(X,Y)=X-Y;
```

zameniće H(X,Y) sa X-Y, ali ne H(X,Z) ili neku drugu funkciju H. Ako je tražena zamena za sve moguće vrednosti datog argumenta nekog operatora, deklaracija FOR ALL (ili FORALL) može biti korišćena. Sintaksa takve komande je

FOR ALL<varijabla>,...,<varijabla><LET komanda><terminator>

N.pr.,

```
FOR ALL X,Y LET H(X,Y)=X-Y;
FOR ALL X LET K(X,Y)=X**Y;
```

U primenjivanju svih zamena setovanih sa LET sistem traži supstitucioni izraz posebno za sve izraze koji mogu sami sebe deklarisati supstitucijama. Tako LET setuje ekvivalenciju izmedju leve i desne strane supstitucije bolje nego dodeljivanje naredbom dodeljivanja. Drugim rečima, smena oblika

```
LET X=X+1;
```

ne važi,

```
LET L=M+N, N=L+R; ne važi.
```

S druge strane, ako korisnik želi jednostavno da zameni svaku postojeću varijablu izrazom bez kontrole da izraz ponavlja za dalje supstitucije, može da se koristi operator SUB. Njegov opšti oblik je

SUB(<supstituciona lista>,<izraz>) kao u

```
SUB(X=X+1,Y=1,X**2+Y**2)
```

Ova supstitucija se čini prvo uprošćenjem <izraz> onda zamenjivanjem svake varijable koja postoji u supstitucionoj listi i, konačno, ponovnim uprošćenjem rezultata. Dakle, u gornjem primeru rezultat će biti

```
X**2+2*X+2.
```

- DODATNA PRAVILA DIFERENCIRANJA OPERATORA DEFI - NISANIH OD KORISNIKA

Jedno proširenje sintakse LET argumenta važi za uvodjenje pravila za diferenciranje operatora definisanih od korisnika. Njegova opšta forma je

```
FOR ALL<var1>,...,<varn>
        LET DF(<operator><varlist>,<vari>)=<izraz>
```

gde je <varlist>::=(<var1>,...,<varn>) i

<var1>,...,<vari>,...,<varn> su fiktivne varijable argumenti <operatora>.

Jedna analogna forma primenjuje INFIX operatore. Ovo ilustrujemo nekim primerima:

```
FOR ALL X LET DF(TAN X,X)=SEC(X)**2;
FOR ALL X,Y LET DF(F(X,Y),X)=2*F(X,Y),
                DF(F(X,Y),Y)=X*F(X,Y);
```

Napominjemo da svi fiktivni argumenti relevantnog operatora moraju biti deklarisani proizvoljno sa FOR ALL komandom i da pravila mogu biti pridružena operatorima sa svakim brojem argumenata. Ako se pravilo diferenciranja ne pojavljuje za neki argument u operatoru, rutina za diferenciranje će vratiti izraz kao rezultat po DF. N.pr., ako nije primenjeno pravilo za diferenciranje drugog argumenta od F, izvodjenje DF(F(X,Z),Z) ostaviće ovaj izzraz nepromenjen.

– PROCEDURE

Često je korisno uvesti naredbu sa mogucnošću ponovljenog korišćenja računa sa raznim parametrima ili definisati kompletnu proceduru izvodjenja za operator. REDUCE raspolaže proceduralnom deklaracijom za ovu svrhu. Njena opšta sintaksa je:

<proceduralni tip>PROCEDURE<ime><varlist>;<nare>;

<varlist>::=(<varijabla>,...,<varijabla>)

Tipovi dozvoljeni u REDUCE-u su REAL, INTEGER i ALGEBRAIC. Podrazumeva se ALGEBRAIC tip. Sve ove procedure su automatski deklarisane iz definicije operatora.

Primeri:

(1) Primer (v. raniji odeljak) želimo da učinimo INTEGER procedurom FAC pomoću deklaracije:

```
INTEGER PROCEDURE FAC(N);
        BEGIN INTEGER M;
                    M:=1$
              L1:   IF N=0 THEN RETURN M;
                    M:=M*N$
                    N:=N-1$
                    GO TO L1
        END
```

Ako sada izvedemo FAC(3) dobijamo rezultat 6.

(2) Kao primer algebarskih procedura definišemo operator P dva argumenta koji izvodi Ležandrov polinom. Definišimo ovaj operator kao pro

ceduru iz generišuće funkcionalne formule

p (x)=(1/n!)*(d /dy)(1/(y -2*x*y+1)) za y=0.

REDUCE verzija ovog je

```
ALGEBRAIC PROCEDURE P(N,X);
  SUB(Y=0,DF((Y**2-2*X*Y+1)**(-1/2),Y,N))/(FOR I
          :=1:N PRODUCT I)$
```

Sa ovom definicijom izvodjenje 2*P(2,sin x) rezultovaće u izlazu

3*sin x -1.

Možemo izostaviti reč ALGEBRAIC u ovoj procedu - ralnoj definiciji, jer je to tip koji se podrazumeva.

- NUMERIČKO IZVODJENJE IZRAZA

Korisnik sa velikom količinom numeričkog računa, posle svih neophodnih algebarskih manipulacija koje su bile učinjene, u daljem će dobro učiniti izvršivši ove račune u FORTRAN-u ili sličnom sistemu. Za ovu svrhu REDUCE raspolaže mogućnošću da korisnik proizvede sa FORTRAN-om kompatibilne fajlove za numeričko procesiranje.

Prvo, kada je uključena oznaka FORT, sistem će štampati izraze u FORTRAN notaciji. Izrazi počinju u koloni 7 . Ako neki izraz prevazilazi jednu liniju, oznaka nastavka (X) pojaviće se na sledećoj kartici. Posle 19 neprekidnih linija, star tuje novi izraz. Ako štampani izraz proističe iz dodeljivanja varijabli, varijabla se štampa kao ime izraza. Inače se izraz imenuje ANS. Drugo, komanda WRITE može biti korišćena da produkuje druge programe.

Primeri: prisutni su u ostalim delovima Priloga

Broj kartica u nastavku jedne naredbe može biti modifikovan naredbom dodeljivanja

I*CARDNO:= <broj>;

gde je <broj> totalni broj kartica usvojenih u naredbi. Inicijalno je onda *CARDNO 20.

(2) NUM i DEN su operatori koji uzimaju jednostavne izraze kao argument i koji vraćaju brojilac i imenilac tog izraza .

N.pr., NUM(X/Y**2) ima vrednost X, a DEN(X/Y**2) vrednost Y**2.

– MATRIČNI RAČUNI

Veoma moćna crta REDUCE sistema je lakoća sa kojom mogu da se obave matrični računi. Da proširimo našu sintaksu na ovu klasu računa potrebno je da dodamo drugi PREFIX operator, MAT, i dalje tip varijable i izraza kako sledi:

Ovaj PREFIX je korišćen za predstavljanje matrice m x n . MAT ima n argumenata interpretiranih kao vrste matrice svaka od kojih je lista od m izraza koji predstavljaju elemente u toj vrsti. N.pr., matrica

(A B C)

( )

(D E F)

može biti napisana kao MAT((A,B,C),(D,E,F))

Identifikator matrične varijable može biti deklarisan deklaracijom MATRIX. Dimenzija matrice može da se deklariše eksplicitno u matričnoj deklaraciji ili se podrazumeva pri dodeljivanju takvoj varijabli matričnog izraza. N.pr.,

MATRIX X(2,1),Y(3,4),Z;

deklariše da je X 2 x 1 (kolona) matrica, Y je(3x4) matrica i Z je matrica čija dimenzija se podrazumeva u kasnijoj deklaraciji. Svi elemnti matrice deklarisanih dimenzija inicijalno su 0. Matrični izrazi se pokoravaju normalnim pravilima matrične algebre kako je definisano sledećom sintaksom:

<matrični izraz>::=MAT<matrični opis>!<mat.vari.>
!<skalarni izraz>*<mat.izraz> !
<matrični izraz>*<mat.izraz> !
<matrični izraz>+<mat.izraz> !
<matrični izraz>**<ceolobro> !
<matrični izraz>/<mat.izraz>

Sume i proizvodi matričnih izraza moraju da budu kompatibilnih dimenzija inače će se javiti greška tokom njihovog izvodjenja. Slično, samo kvadratne matrice mogu da se stepenuju. Negativni stepen se računa kao pozitivni stepen inverzne matrice.

A/B se interpretira kao A*B**(-1).

Primeri:

Neka su X i Y bili deklarisani kao matrice onda su sledeći izrazi matrični

Y

Y**2*X-3*Y**(-2)*X

Y+MAT((1,A),(B,C))/2

Tri dodatna operatora su korisna u matričnom ra - čunu, naime DET, TP i TRACE, definisani kao što sledi:

Operator DET je korišćen za predstavljanje determinante matričnog izraza. N.pr.,

```
DET(Y**2);
```

je skalarni izraz čija vrednost je determinanta kvadrata matrice Y , i

```
DET MAT((A,B,C),(D,E,F),(G,H,J));
```

je skalarni izraz čija vrednost je determinanta matrice

```
(A B C)
(     )
(D E F)
(     )
(G H J).
```

Operator TP - Ovaj operator uzima jedan matrični argument i vraća njegovu transponovanu vrednost. Koristi se uobičajeno.

Operator TRACE-Koristi se za razvoj kvadratne matrice. Koristi se uobičajeno.

Naredba matričnog dodeljivanja može da se koristi za nalaženje rešenja skupa linearnih jednačina. N.pr., za nalaženje rešenja sledećeg skupa jednačina

```
A11*X(1)+A12*X(2)=Y(1)
A21*X(1)+A22*X(2)=Y(2)
```

lako pišemo

```
x:=1/MAT((A11,A12),(A21,A22))*MAT((Y(1),Y(2));
```

APPENDIX AA

SUMMARY O THE REDUCE SYSTEM

A.1 RESERVED IDENTIFIERS

We list here all identifiers which are normally reserved in REDUCE.

Reserved Words	BEGIN DO ELSE END FOR FUNCTION GO GOTO LAMBDA NIL PRODUCT RETURN STEP SUM TO WHILE
Reserved Scalar Variables	E I
Infix Operators	:= = >= > <= < + - * / ** . SETQ AND NOT OR MEMBER EQUAL UNEQ EQ GEQ GREATERP LEQ LESSP PLUS MINUS TIMES QUOTIENT EXPT CONS
Prefix Operators	ARB COEFF COS DEN DET DF EPS G LOG MAT NUM SIN SUB TRACE
Commands	ALGEBRAIC ARRAY CLEAR COMMENT END FACTOR FOR FORALL GO GOTO IF IN INTEGER LET LISP MASS MATCH MATRIX MSHELL NOSPUR OFF ON OPERATOR ORDER OUT PROCEDURE REAL RETURN SAVEAS SCALAR SHUT SPUR SYMBOLIC VECTOR WEIGHT WRITE WTLEVEL

A.2 COMMANDS NORMALLY AVAILABLE IN REDUCE

Notation: E, E1,...,En denote expressions
V, V1,...,Vn denote variables

ALGEBRAIC E;	If E is empty, the system mode is set to algebraic. Otherwise, E is evaluated in algebraic mode and the system mode is not changed
ARRAY V1<size> ,...,Vn<size>;	Declares V1 through Vn as array names. <size> describes the maximum size of the array
CLEAR E1,...,En;	Removes any substitutions declared for E1 through En from system
COMMENT<any>;	Used for including comments in text. <any> is any sequence of characters not including a terminator
CONT;	An interactive command which causes the system to continue the calculation from the point in the input file where the last PAUSE was encountered
END <any>;	Terminates files used for input to REDUCE. <any> is any sequence of symbols not including a terminator or the reserved words END, ELSE or UNTIL
FACTOR E1,...,En;	Declares expressions as factors in output
FOR	Command used to define a variety of program loops

FORALL V1,...,Vn <command>	Declares variables V1 through Vn as arbitrary in the substitution rules given by <command>
GOTO V;	Performs an unconditional transfer to label V. Can only be used in compound statements
IF	Used to define conditional statements
IN V1,...,Vn;	Inputs the external REDUCE files V1 through Vn
INTEGER V1,...,Vn;	Declares V1 through Vn as integer variables
LET E1,...,En;	Declares substitutions for the left hand sides of expresions E1 through En.
LISP E;	If E is empty, the system evaluation mode is set to symbolic. Otherwise, E is evaluated in symbolic mode and the system mode not changed
MATCH E1,...,En;	Declares substitutions for the left hand sides of E1 through En when matcing of explicit powers is required
MATRIX E1,...,En;	Declares matrix variables to the system. The Ei may be matrix variable names, or include details of the size of the matrix
OFF V1,...,Vn;	Turns off the flags V1 through Vn
ON V1,...,Vn;	Turns on the flags V1 through Vn
OPERTATOR V1,...,Vn;	Declares V1 through Vn as algebraic operators
ORDER V1,...,Vn;	Declares an ordering for variables V1 through Vn on output
OUT V;	Declares V as output file
PAUSE;	An interactive command for use in an input file. When it is evaluated, control is transferred to the user's terminal
PROCEDURE;	Names a statement for repeated use in calculations. Type specification of procedure precedes the comand name
REAL V1,...,Vn;	Declares variables V1 through Vn as real
RETURN E;	Causes a transfer out of a compound statement to the next highest program level. Velue of E is returned from compound statement. E may be empty
SAVEAS E;	Assigns E to the current expression in the workspace
SCALAR V1,...,Vn;	Declares variables V1 through Vn as scalar
SHUT V;	Closes the output file V

SYMBOLIC E;	Same as LISP E;
WEIGHT E1,...,En;	Assigns an asymptotics weight to the left hand sides of E1 through En
WRITE E1,...,En;	Causes the values of E1 through En to be Wri- tten on the current output file
WTLEVEL V;	Sets the asymptotics weight level of the sys- tem to V

A.3 MODE FLAGS IN REDUCE

This section lists the flags which may appear as arguments of ON and OFF. The action of the flag if is ON is des- cribed here, unless stated otherwise.

ALLFAC	Causes the system to factor out common products on output of expressions
DEFN	Causes the system to output the LISP equivalent of REDUCE input without evalution
DIV	Causes the system to divide out simple factors on output, so that negative powers or rationale frac tions can be produced
ECHO	Causes echoing of input
EXP	Causes expressions to be expanded during evaluti- on
FLOAT	Prevents conversion of floating point numbers in- to the ratio of two integers during evaluation
FORT	Declares output in a FORTRAN notation
GCD	Causes the system to cancel greatest common divi- sors in rational expressions
INT	Specifies an interactive mode of operation
LIST	Causes output to be listed one term to a line
MCD	Causes denominators to be combined when expressi- ons are added
NAT	Specifies 'natural' style of output
NERO	Inhibits printing of zero assignments
PRI	Specifies fancy printing for output
RAT	An output flag use in conjunction with FACTOR. It causes the overall denominator in an expression to be printed with each factored sub-expression
RESUBS	When RESUBS is OFF, the system does not reexamine an expression for further substitutions after one has be made

L I T E R A T U R A

1. ABRAMOWITZ, M., Stegun I. A. 1965,
Handbook of mathem. functions, ed. "Dower pub. inc.", New York .
2. AKSENOV, E. P. 1977,
Teoria dvizenia I S Z, ed. "Nauka", Moskva.
3. BARLIER F., Falin J.L., Ill M. i Jaeck C., 1973,
Space research XIII.
4. BARLIER F., Berger C., Falin J.L., Kockarts G., i Thuillier G., 1978, Ann. Geophys., 34, 1, 9.
5. BOSANQUET, C. H. 1958,
Nature, 182, 4641, 1010-1011.
6. COOK, G.E. 1964,
Planet. Space Sci., 12, 1009.
7. 1965,
Proc. Roy. Soc. of London, A259, 1096, 33-67.
8. 1961,
Proc. Roy. Soc , A264, 1316, 8-121.
9. DUBOSIN, G. N. 1975,
Nebesnaa mehanika,osnov..., ed. "Nauka", Moskva.
10. 1983,
Nebesnaa mehanika, teoria dvizenia I N T, ed. "Nauka", Moskva.
11. EFIMOV, A. E. 1980,
Matematiceski analiz, spec. razdeli, ed. "Visaa skola", Moskva .
12. ELJASBERG, P. E. 1965,
Vvedenie v teoriu poljota ISZ, ed."Nauka", Moskva
13. FITCH, J. P. 1977,
CAMAL User's manual, ed. Univ. of Cambridge.
14. FOMINOV, A. M. 1963,
Bull. ITA ANSSSR, 9, 3, 185-203.
15. 1974,
Nabl. I. S. Z., 14, 509-537.
16. GRISS, M. L. i drugi 1978,
Standard LISP report, UUCS-78-101.
17. GROVES, G. V. 1959,
Proc. Roy. Soc. , A252, 1268, 16-27.
18. HEDIN, A. E. i drugi 1977,
J. Geophys. Res., 82, 2139.
19. HEDIN, A. E. 1986,
Privatna razmena sa Dr L. Sehnalom.
20. HEARN, A. C. 1973,
REDUCE 2 User's manual, DAHC-15-73-C-0363.
21. 1979,
IMPLEMENTATION GUIDE FOR REDUCE 2.
22. 1983,
REDUCE 3 User's manual.
23. HENRARD, J. 1970,
Celestial mechanics, 3, 107.
24. 1986,
Space dinamics and Cel. mech., 261-272.
25. JACCHIA, L. G., SLOWEY J. W. 1962,
SAO Spec. Report, 100, 177.
26. JACCHIA, L. G. 1977,
SAO Spec. Report, 375.

27. KAULA, W. M. 1966,
Theory of satellite Geodesy, ed. "Blaisdell pub. company", Waltham, Massachusetts,...
28. KING-HELE, D. G. 1959,
Nature, 183, 881-882.
29. 1962,
New Scintist, 14, 352-354.
30. 1964,
Theory of satellite orbits in an atmosphere, ed. "Butterworths", London.
31. 1986,
R. A. O. Technical report.
32. 1966,
Ann. Geophys., 22, 40-52.
33. 1974,
Phil. trans. of the R. S., 278, 1277, 67-109.
34. KING-HELE, D. G. , WALKER D. M. C. 1960,
Nature, 186, 928-931.
35. 1961,
Space Research II, 918-956.
36. 1969,
Planet. Space Sci., 17, 197-215.
37. 1971,
Planet. Space Sci., 19, 297-311.
38. 1977,
ibid., 25, 313.
39. KOHNLEIN, W. 1980,
Planet. Space Sci., 29, 1089.
40. LAZOVIC, J. P. 1976,
Osnovi teorije kretanja ZVS, ed. "Naucna knjiga", Beograd.
41. LUKE, L. Y. 1975,
Math. functions and their approximations, ed.
42. OLIVER, W. L. 1980,
Lincoln lab. tech. note, 20.
43. SEHNAL, L. 1977,
Space Research XVII.
44. 1983a,
Bull. Inst. Czechosl., 34, 178-184.
45. 1983b,
ibid., 34, 54-64.
46. 1986,
Privatna razmena.
47. SEHNAL, L. , MILLS S. B., 1966,
SAO Spec. Report , 223, 1-30.
48. SEHNAL, L. , TUPIKOVA I. 1984,
Bull. Inst. Czechosl.
49. STERNE, T. E. 1959,
ARS Journal, 29, 10, 777-782.
50. 1960,
Celestial Mechanics, ed.
51. VASILJEVA, A. V. 1975,
sistema ALITA, Alg. neb. mehaniki, 7.
52. VERCHEVAL, J. 1974,
Acad. Roy. Bel. Man. Cl. Sci., 41, 6, 183.
53. VIKUTILOVA, M. 1983,
Bull. Inst. Czechosl., 34, 245-251.
54. WALKER, J. C. G., 1965,
Atmosph. sci., 22, 462-463.