

Univerzitet u Beogradu
Prirodnomatemički fakultet

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИЧКИ ПРОГРЕС И АСИМИЛАЦИЈУ
БЕЛОРУСКИХ СТУДЕНАТА

Број: Dokt. 183/1
Датум: 17.03.1986.

Desanka Radunović

ANALIZA TAČNOSTI APROKSIMACIJE DIFERENCIJSKIM
SHEMAMA LAPLACEOVE JEDNAČINE U OBLASTI SA UGLOM

- doktorska disertacija -

Beograd, 1984.

S A D R Ž A J

PREDGOVOR	1
1. APROKSIMACIJE DIFERENCIJSKIM SHEMAMA DIRICHLETOVOG I MEŠOVITOG ZADATAKA ZA JEDNAČINU LAPLACEA U UGLOVIMA $3\pi/2$ i 2π	4
1.1. O graničnom zadatku u oblasti sa uglom	4
1.2. Postavka zadatka	5
1.3. Oznake; diferencijski zadaci	6
1.4. Analitička rešenja diferencijskih zadataka	9
1.5. Asimptotski razvoji rešenja diferencijskih zadataka	10
2. APROKSIMACIJE DIFERENCIJSKIM SHEMAMA MEŠOVITOG ZADATAKA ZA JEDNAČINU LAPLACEA U POLURAVNI	21
2.1. Rešenje diferencijskog zadatka i njegov asimptotski razvoj	21
2.2. Asimptotski razvoj rešenja diferencijskog zadatka definisanog na pomenjenoj mreži	22
2.3. Diferencijska shema na šablonu "kosi krst"	24
2.4. Ocena konvergencije u pravougaoniku	27
3. MODIFIKACIJE KLASIČNE DIFERENCIJSKE SCHEME ZA MEŠOVITI ZADATAK ZA JEDNAČINU LAPLACEA U POLURAVNI	56
3.1. Definisavanje modifikacija	56
3.2. Rešenja modifikovanih diferencijskih zadataka	63
3.3. Asimptotski razvoji rešenja modifikovanih zadataka	67
3.4. Nova modifikacija na pomenjenoj mreži	69
3.5. Numerički rezultati	70
LITERATURA	75

P R E D G O V O R

Konvergencija numeričke aproksimacije, bez obzira da li je ova određena metodom mreža ili metodom konačnog elementa, ka tačnom rešenju diferencijalne jednačine zavisi od glatkosti rešenja. U praksi se često javlja potreba za rešavanjem zadataka u kojima bilo koeficijenti jednačine, bilo funkcije kojima su zadati granični uslovi, imaju tačke prekida prve vrste, ili je, pak, granica oblasti nedovoljno glatka. Rešenja takvih zadataka imaju malu glatkost, u tom smislu da sama rešenja ili njihovi izvodi nižeg reda imaju singularitete u izolovanim tačkama. Stoga su klasične numeričke metode obično nedovoljno efikasne u rešavanju ovih zadataka ([2], [8], [10], [17], [18], [20], [37], [39]).

U poslednje vreme mogu se izdvojiti tri osnovna pravca u razvoju novih, posebnih numeričkih metoda za rešavanje ovakvih zadataka.

Prvu grupu čine metode koje se zasnivaju na klasičnim metodama konačnih razlika (napr. [32], [33]) ili varijacionim metodama (napr. [23], [28], [29]), a u kojima se povećanje tačnosti aproksimacije postiže zgušnjavanjem mreže u okolini singularne tačke. Njima se može postići tačnost približnog rešenja kao za slučaj glatkog rešenja, ali je potrebno uzeti veći broj čvorova.

Drugi način prevazilaženja ovog problema je da se u skup bazisnih funkcija varijacionih metoda, pored standardnih polinomijalnih funkcija sa kompaktnim nosačima, uvedu i funkcije koje imaju iste singularitete kao i rešenje koje se traži (napr. u [1], [28], [31], [34]). Takve funkcije obično nemaju kompaktne nosače, pa matrica sistema jednačina koji se dobija ima složeniju strukturu.

U treću grupu spadaju metode zasnovane na primeni nehomogenih diferencijalnih shema na ravnomernim mrežama (napr. u [4], [9], [11], [12], [14]). Koeficijenti shema se određuju u zavisnosti od tipa singulariteta rešenja koje se aproksimira.

Cilj ovoga rada je da se analiziraju svojstva klasičnih diferencijalnih shema kada se ove koriste za rešavanje zadataka u oblastima sa nedovoljno

glatkom, granicom ili zadatka sa mešovitim graničnim uslovima, i da se na osnovu dobijenih rezultata definišu neke modifikacije tih shema kojima bi se odredjivale tačnije aproksimacije rešenja.

Na početku prve glave se ukazuje na uzroke male glatkosti rešenja ove vrste zadatka i definiše modelni zadatak za jednačinu Laplacea, čije je rešenje poznato - $v(z) = C \operatorname{Im} z^{1/\nu}$, i koji će stoga biti korišćen za analizu aproksimacija diferencijskim shemama ove vrste zadatka. Dalje se definišu pravougaona mreža i jednoparametarska familija diferencijskih operatora na njoj, pri čemu se dokazuje eliptičnost operatora te familije u zavisnosti od vrednosti parametra. Pomenutom familijom diferencijskih operatora za modelni zadatak se formulišu četiri diferencijska zadatka (za granični ugao $3\pi/2$ i 2π za Dirichletov i mešoviti zadatak), čija su analitička rešenja data teoremom 1.1. Teoremom 1.2. je odredjen asimptotski razvoj ovih rešenja po stepenima rastojanja od singularne tačke

$$u(x_m, y_n) = c \operatorname{Im} z^{1/\nu} + O\left(\frac{h^{2/\nu}}{|z|^{1/\nu}}\right)$$

Iz njega se može zaključiti da je tačnost aproksimacije utoliko manja koliko je granični ugao veći (odredjuje ga parametar ν) i da sheme povišenog poretka tačnosti (napr. za $\alpha = -1/6$) ne daju ništa veću tačnost aproksimacije ovih zadataka. Rezultati izloženi u prvoj glavi su uopštenja za pravougaonu mrežu analognih rezultata iz rada [6], u kome su diferencijski zadaci definisani na kvadratnoj mreži.

Pomoću rezultata dobijenih u prvoj glavi, u drugoj glavi se vrši detaljnija analiza mrežnih aproksimacija mešovitog zadatka za jednačinu Laplacea u poluravni. Odredjuje se integralni oblik rešenja diferencijskog zadatka i njegov asimptotski razvoj, na osnovu čega se zaključuje da je greška aproksimacije van okoline singularne tačke (tačka smene tipa graničnog uslova) reda $O(h)$, a u neposrednoj okolini singularne tačke $O(\sqrt{h})$, bez obzira na to koju smo shemu koristili. Da bi se analizirala mogućnost povećanja tačnosti do tačnosti koju sheme obezbeđuju za zadatke sa dovoljno glatkim rešenjima, teoremom 2.1. se odredjuje asimptotski razvoj rešenja mrežnog zadatka definisanog na pomerenom mreži (kada singularna tačka nije u čvoru mreže). Iz dobijenog razvoja se može zaključiti kako treba izabrati parametre mreže u zavisnosti od izabrane sheme, da red greške aproksimacije bude manji. Dalje se u odeljku 2.3. analizira tačnost aproksimacije polaznog zadatka diferencijskom shemom na šablonu od pet tačaka, tzv. "kosi krst", obzirom da asimptotski

razvoj približnog rešenja ukazuje na mogućnost da greška aproksimacije ovom shemom bude $O(h^2)$. Svodjenjem ove sheme na drugu shemu, pokazuje se da je i za nju greška aproksimacije reda $O(h)$.

U poslednjem odeljku druge glave analizira se tačnost aproksimacije diferencijskim shemama mešovitoz zadatka za jednačinu Laplacea u pravougaoniku. U lemi 2.2. se odredjuje analitičko rešenje Dirichletovog zadatka za familiju diferencijskih shema definisanih na pravougaonoj mreži na pravougaoniku. Koristeći rezultate ove leme, u teoremi 2.2. se dobija da je greška aproksimacije mešovitoz zadatka za jednačinu Laplacea na pravougaoniku pomenutom familijom diferencijskih shema reda $O(h)$, bez obzira na to koja se shema koristi. Ova greška se za neke sheme može smanjiti njihovom modifikacijom u okolini singularne tačke ili odgovarajućim izborom mreže (slično zadatku u beskonačnoj oblasti).

U trećoj glavi se pomoću prethodno dobijenih rezultata ocenjuje tačnost jedne modifikacije klasične diferencijske sheme na šablonu od pet tačaka, predložene u radu [12]. Dalje se konstruišu još dve modifikacije istog tipa, ali na pomerenom mreži, i ocenjuje njihova tačnost. Kombinovanjem pomenutih modifikacija dobija se nova, veće tačnosti od prethodnih. I numeričkim primerima su pokazane prednosti analiziranih modifikovanih shema u odnosu na klasičnu shemu, kako van neke okoline tačke smene tipa graničnog uslova, tako i u neposrednoj okolini te tačke.

1. APROKSIMACIJE DIFERENCIJSKIM SHEMAMA DIRICHLETOVOG I MEŠOVITOG ZADATKA ZA JEDNAČINU LAPLACEA U UGLOVIMA

$3\pi/2$ i 2π

1.1. O GRANIČNOM ZADATKU U OBLASTI SA UGLOM

Pri dokazu konvergencije numeričke aproksimacije ka tačnom rešenju diferencijalne jednačine, pretpostavlja se određena glatkost nepoznatog rešenja. Ako taj uslov nije zadovoljen, konvergencija može biti vrlo spora ili se može dogoditi da je uopšte i ne bude, bez obzira na red tačnosti korišćene sheme.

Jedan od uzroka male glatkosti rešenja graničnih zadataka su singularne tačke granice oblasti, pri čemu pod singularnim tačkama granice podrazumevamo one njene tačke koje su temena graničnih uglova većih od π , ili tačke u kojima se menja tip graničnog uslova. Danas se već dosta zna o obliku rešenja graničnih zadataka u okolini tačke tog tipa, i jasno je zašto su upravo ovo singularne tačke granice (napr., videti u [13], [22], [38]). Na primer, u [13] je određeno u najopštijem obliku rešenje jednačine

$$\Delta v = -G(r, \phi)v$$

u uglu $0 \leq \phi \leq \nu\pi$, $0 < r < \infty$, tj. za granične uslove

$$1. \quad v = F(r), \quad \phi=0, \quad v = H(r), \quad \phi=\nu\pi, \quad , \text{ ili}$$

$$2. \quad \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} = F(r), \quad \phi=0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} = H(r), \quad \phi=\nu\pi, \quad , \text{ ili}$$

$$3. \quad v = F(r), \quad \phi=0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} = H(r), \quad \phi=\nu\pi.$$

Za slučaj homogenih graničnih uslova tipa 1. za jednačinu Laplacea u uglu $v\pi$, tj. za

$$\Delta v=0, \quad 0<\phi<v\pi, \quad 0<r<\infty,$$

$$v=0, \quad \phi=0, \quad 0\leq r<\infty, \quad v=0, \quad \phi=v\pi, \quad 0<r<\infty,$$

rešenje je

$$v(r,\phi) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m r^{\frac{m}{v}} \sin\left(m \frac{\phi}{v}\right),$$

i ono, za $C_1 \neq 0$ i $v > 1$, ima integrabilan singularitet prvog izvoda za $r=0$.

1.2. POSTAVKA ZADATKA

Zadatak je da se odredi funkcija v koja nije identički jednaka nuli, harmonijska u uglu $0 < \phi < v\pi$, $0 < r < \infty$ ((r, ϕ) su polarne koordinate), jednaka nuli na pozitivnoj poluosi Ox i zraku $v\pi$, neprekidna u koordinatnom početku i koja ne raste suviše brzo na beskonačnosti, tj.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{v}{r^{2/v}} = 0.$$

Prema onome što je rečeno u prethodnom odeljku, rešenje tog zadatka je funkcija

$$(1) \quad v(x,y) = c \operatorname{Im} Z^{1/v} = cr^{1/v} \sin \frac{\phi}{v}, \quad c = \text{const.}, \quad Z = x + iy = re^{i\phi}.$$

Funkcija (1) je rešenje i mešovitog zadatka za harmonijsku funkciju u uglu $0 < \phi < \frac{v\pi}{2}$, $0 < r < \infty$, koja ima sva gore navedena svojstva, osim što na zraku $v\pi/2$ zadovoljava homogeni granični uslov drugog reda.

U nastavku se diferencijskim shemama aproksimira opisani zadatak za $v=3/2, 2, 3, 4$, što je, obzirom na prethodni zaključak, ekvivalentno rešavanju prvog i mešovitog zadatka za jednačinu Laplacea u uglu $0 < \phi < \frac{3\pi}{2}$, $0 < r < \infty$ i u ravni sa razrezom, tj. $0 < \phi < 2\pi$, $0 < r < \infty$.

1.3. OZNAKE. DIFERENCIJSKI ZADACI.

U ravni Oxy definišimo pravougaonu mrežu

$$\Omega = \{(x, y) \mid x = mh, \quad y = nh', \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad h' \neq \theta h, \quad h, \theta > 0\},$$

gde je \mathbb{Z} skup celih brojeva. Skup čvorova mreže Ω koji pripadaju gornjoj poluravni označimo

$$\Omega^+ = \{(x, y) \mid (x, y) \in \Omega, \quad y > 0\},$$

a skup čvorova mreže Ω koji pripadaju donjoj poluravni označimo

$$\Omega^- = \{(x, y) \mid (x, y) \in \Omega, \quad y < 0\}.$$

Ω^+ , tj. Ω^- , zajedno sa čvorovima mreže Ω koji pripadaju osi Ox označimo

$$\bar{\Omega}^+ = \{(x, y) \mid (x, y) \in \Omega, \quad y \geq 0\}, \text{ tj.}$$

$$\bar{\Omega}^- = \{(x, y) \mid (x, y) \in \Omega, \quad y \leq 0\}.$$

Tačke mreže Ω koje pripadaju uglu $0 < \phi < v\pi$, $0 < r < \infty$, za $0 < v < 2$, označimo

$$\Omega_v = \{(x, y) \mid (x, y) \in \Omega, \quad 0 < \phi < v\pi, \quad 0 < r < \infty\}.$$

Definišimo, dalje, granice ovih oblasti

$$\Gamma_v = \{(x, y) \mid (x, y) \in \Omega, \quad \phi = v\pi, \quad 0 < r < \infty\},$$

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \mid (x, y) \in \Omega, \quad x > 0, \quad y = +0\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \mid (x, y) \in \Omega, \quad x > 0, \quad y = -0\},$$

i neka je

$$\bar{\Gamma}_0 = \Gamma_0 \cup \{(0, 0)\}$$

$$\bar{\Omega}_v = \Omega_v \cup \bar{\Gamma}_0 \cup \Gamma_v.$$

Na pravougaonoj mreži Ω aproksimirajmo operator Laplacea jednoparametarskom familijom diferencijskih operatora (videti [27])

$$(2) \quad \Lambda_{\alpha} u \equiv u_{\bar{x}\bar{x}} + u_{\bar{y}\bar{y}} - \alpha h^2 \frac{1+\theta^2}{2} u_{\bar{x}\bar{x}\bar{y}\bar{y}}, \quad \alpha > -1/2,$$

a operator graničnog uslova drugog reda aproksimirajmo takodje jednoparametarskom familijom diferencijskih operatora, i to

$$(3) \quad \lambda_{3/2} u \equiv u_{\bar{x}} - \frac{h}{2} u_{\bar{y}\bar{y}} - \alpha h^2 \frac{1+\theta^2}{2} u_{\bar{x}\bar{y}\bar{y}} \quad \text{na } \Gamma_{3/2}, \quad i$$

$$(4) \quad \lambda_2 u \equiv u_{\bar{y}} - \frac{\theta h}{2} u_{\bar{x}\bar{x}} - \alpha h^2 \frac{1+\theta^2}{2} u_{\bar{x}\bar{x}\bar{y}} \quad \text{na } \Gamma_2.$$

Ograničenje za parametar α rezultat je sledeće leme:

L e m a 1.1. Uslov $\alpha > -1/2$ je potreban i dovoljan da operator (2) bude eliptički (sm. u [30]).

D o k a z: Karakteristični polinom operatora (2) je

$$P(\xi, \eta) = -4 \left[\sin^2 \frac{\xi}{2} (1 + 2\alpha \sin^2 \frac{\eta}{2}) + \frac{1}{\theta^2} \sin^2 \frac{\eta}{2} (1 + 2\alpha \sin^2 \frac{\xi}{2}) \right].$$

Kada je $\alpha \geq 0$, a $-\pi \leq \xi, \eta \leq \pi$ i $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$, očigledno je da je $P(\xi, \eta) < 0$. Za $\alpha < 0$ je

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} P(\xi, \eta) &= \sin^2 \frac{\xi}{2} (1 - 2|\alpha| \sin^2 \frac{\eta}{2}) + \frac{1}{\theta^2} \sin^2 \frac{\eta}{2} (1 - 2|\alpha| \sin^2 \frac{\xi}{2}) \geq \\ &\geq (1 - 2|\alpha|) \left(\sin^2 \frac{\xi}{2} + \frac{1}{\theta^2} \sin^2 \frac{\eta}{2} \right), \end{aligned}$$

pa je uz iste pretpostavke za (ξ, η) $P(\xi, \eta) < 0$ za $\alpha > -1/2$. Dokažimo još da za $\alpha \leq -1/2$ operator (2) nije eliptički, tj. da postoji tačka $(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \neq (0, 0)$ i $-\pi \leq \bar{\xi}, \bar{\eta} \leq \pi$, takva da je $P(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = 0$. Ta tačka je

$$\bar{\xi} = \pi, \quad \bar{\eta} = \arccos \left[1 + \frac{2\theta^2}{1 + 2\alpha(1 + \theta^2)} \right].$$

$\bar{\eta}$ je definisano samo za $\alpha \leq -1/2$, jer je tada $-1 \leq 1 + \frac{2\theta^2}{1 + 2\alpha(1 + \theta^2)} \leq 1$.

Osim toga je

$$P(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = -4 \left(\sin^2 \frac{\bar{\xi}}{2} [1 + \alpha(1 - \cos \bar{\eta})] + \frac{1}{2\alpha} (1 - \cos \bar{\eta})(1 + 2\alpha \sin^2 \frac{\bar{\xi}}{2}) \right) =$$

$$= -4 \left\{ 1 - \frac{2\alpha\theta^2}{1 + 2\alpha(1 + \theta^2)} - \frac{1 + 2\alpha}{1 + 2\alpha(1 + \theta^2)} \right\} = 0.$$

Time je lema dokazana.

Pomoću eliptičkih operatora (2), (3) i (4) definišimo na mreži Ω sledeće diferencijske zadatke kojima ćemo aproksimirati zadatke formulisane u odeljku 1.2.:

ZADATAK I ($\nu=3/2$)

$$\Lambda_{\alpha} u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_{3/2},$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \bar{\Gamma}_0, \quad u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_{3/2},$$

$$u(-h, 0) = A, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u}{r^{4/3}} = 0.$$

ZADATAK II ($\nu=2$)

$$\Lambda_{\alpha} u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_2,$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \bar{\Gamma}_0, \quad u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_2,$$

$$u(-h, 0) = A, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u}{r} = 0.$$

ZADATAK III ($\nu=3$)

$$\Lambda_{\alpha} u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_{3/2},$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \bar{\Gamma}_0, \quad \lambda_{3/2} u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_{3/2},$$

$$u(-h, 0) = A, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u}{r^{2/3}} = 0$$

ZADATAK IV ($\nu=4$)

$$\Lambda_\alpha u(x,y)=0, \quad (x,y) \in \Omega_2,$$

$$u(x,y)=0 \quad (x,y) \in \bar{\Gamma}_0, \quad \lambda_2 u(x,y)=0, \quad (x,y) \in \Gamma_2,$$

$$u(-h,0)=A, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u}{r^{1/2}} = 0.$$

1.4. ANALITIČKA REŠENJA DIFERENCIJSKIH ZADATAKA

Teorema 1.1. Rešenja zadatka I - IV, za odgovarajuće ν , su

$$(5) \quad u(x_m, y_n) \begin{cases} \frac{A}{2\pi F(-z_1)} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\xi} [q^n(\xi) e^{im\xi} - 1]}{(1-e^{i\xi})^{1+1/\nu} (1-z_1 e^{i\xi})^{1-1/\nu}} F\left(\frac{e^{i\xi}-z_1}{1-z_1 e^{i\xi}}\right) d\xi, & (x_m, y_n) \in \bar{\Omega}^+ \\ u(x_m, y_{|n|}) + 2 \cos \frac{\pi}{\nu} u(x_{-m}, y_{|n|}), & (x_m, y_n) \in \bar{\Omega}^- \end{cases}$$

gde je

$$(6) \quad F(z) = {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\nu}, 1 - \frac{1}{\nu}; \frac{3}{2}; z\right) \quad \text{hipergeometrijska funkcija,}$$

$$(7) \quad z_1 = \frac{\sqrt{(1+\theta^2)(1+2\alpha)} - 1}{\sqrt{(1+\theta^2)(1+2\alpha)} + 1} \quad i$$

$$(8) \quad q(\xi) = \frac{\sqrt{\cos^2 \frac{\xi}{2} + (1+\theta^2)(1+2\alpha) \sin^2 \frac{\xi}{2} - \theta \sin \frac{\xi}{2}}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\xi}{2} + (1+\theta^2)(1+2\alpha) \sin^2 \frac{\xi}{2} + \theta \sin \frac{\xi}{2}}}.$$

Dokaz: Dokaz je analogan dokazu iste teoreme za slučaj kvadratne mreže u [6]. Prvo se odgovarajućim izborom preslikavanja, što zavisi od graničnog uslova na $\Gamma_{3/2}$, zadaci I i III definišu u četvrtom kvadrantu. Primenom diskretne Fourierove transformacije po argumentu x i rešavanjem di-

ferencijske jednačine po argumentu y dobijamo izraz za Fourierov lik rešenja, iz koga se inverznom Fourierovom transformacijom dobija rešenje u obliku

$$(9) \quad u(x_m, y_n) = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \int_0^{2\pi} \tilde{u}_0(\xi) [q^n(\xi) e^{im\xi} - 1] d\xi, & m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ & n=0, 1, 2, \dots \\ \int_0^{2\pi} \tilde{v}_0(\xi) [q^{|n|}(\xi) e^{im\xi} - 1] d\xi, & m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ & n=-0, -1, -2, \dots \end{cases}$$

(Za $n=+0$ i $n=-0$ su različiti oblici rešenja zbog postojanja razreza duž pozitivne poluose Ox). $\tilde{u}_0(\xi)$ i $\tilde{v}_0(\xi)$ su Fourierovi likovi tragova rešenja na pravama $y=+0$ i $y=-0$, a $q(\xi)$ je funkcija data izazom (8) u formulaciji teoreme. Zahtevajući posebno za svaki od formulisanih zadataka da funkcija (9) zadovoljava granične uslove, dobijamo za odredjivanje funkcija $\tilde{u}_0(\xi)$ i $\tilde{v}_0(\xi)$ granične zadatke za analitičke funkcije na jediničnom krugu kompleksne ravni, koji mogu da se svedu na singularnu integralnu jednačinu

$$\int_0^1 \frac{\psi(t)}{t-x} dt + \cos \frac{\pi}{\nu} \int_0^1 \frac{t\psi(t)}{1-xt} dt = 0.$$

Njeno rešenje je

$$\psi(x) = c x^{-1/2} (1-x)^{-1/\nu} {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\nu}, 1 - \frac{1}{\nu}; \frac{3}{2}; x\right), \quad c = \text{const.},$$

odakle se, vraćajući se na stare promenljive nizom smena koje smo uveli i koristeći zadati uslov u tački $(-h, 0)$ za odredjivanje konstante c , dobijaju rešenja (5).

1.5. ASIMPTOTSKI RAZVOJI REŠENJA DIFERENCIJSKIH ZADATAKA

Oblik (5) rešenja diferencijskih zadataka je nepogodan za praktičnu primenu i ocenu tačnosti shema, pa se u ovom odeljku odredjuju asimptotski razvoji ovih rešenja.

T e o r e m a 1.2. Asimptotski razvoji rešenja zadataka I - IV, za

odgovarajuće v , su

$$\begin{aligned}
 u(x_m, y_n) = & - \frac{Av(1+z_1)^{1/v} h^{-1/v}}{4\pi(1-z_1)F(-z_1)} \operatorname{Im} \left\{ 2^{\frac{2}{v}} [(1+\theta^2)(1+2\alpha)]^{-\frac{1}{2v}} \Gamma(-\frac{1}{v}) z^{1/v} - \right. \\
 & - 2^{-\frac{2}{v}} [(1+\theta^2)(1+2\alpha)]^{\frac{1}{2v}} \Gamma(\frac{1}{v}) \frac{h^{\frac{2}{v}}}{z^{1/v}} + 2^{-2(2-\frac{1}{v})} \frac{2-\frac{1}{v}}{3} \Gamma(2-\frac{1}{v}) \cdot \\
 (10) & \cdot [(1+\theta^2)(1+2\alpha)]^{-\frac{1}{2v}} \left[(1+\theta^2)(1+6\alpha) \frac{\bar{\beta}}{\beta} + 2(\theta^2-1) \right] \frac{h^2}{z^{2-1/v}} - 2^{-2(2+\frac{1}{v})} \Gamma(2+\frac{1}{v}) \cdot \\
 & \cdot \frac{2+\frac{1}{v}}{3} \cdot [(1+\theta^2)(1+2\alpha)]^{\frac{1}{2v}} \left[(1+\theta^2)(1+6\alpha) \frac{\bar{\beta}}{\beta} + 2(\theta^2-1) \right] \frac{h^{2+\frac{2}{v}}}{z^{2+1/v}} \left. + O(h^4/|z|^{4-1/v}) \right\},
 \end{aligned}$$

gde su $F(z)$ i z_1 određeni izrazima (6) i (7), a $z=x_m+iy_n$.

D o k a z: Dokaz je analogan dokazu odgovarajuće teoreme za slučaj kvadratne mreže, koji je dat u [6].

Uvodjenjem smena

$$(11) \quad \zeta = e^{i\xi}$$

i

$$(12) \quad z = \frac{\zeta - z_1}{1 - z_1 \zeta}$$

u integralu izraza (5), uz odgovarajuću promenu konture integracije koja je moguća obzirom na svojstva podintegralne funkcije, dobijamo drugi oblik rešenja (5), pogodniji za određivanje asimptotskog razvoja

$$(13) \quad u(x_m, y_n) = - \frac{Av(1+z_1)^{1/v}}{\pi(1-z_1)F(-z_1)} \operatorname{Im} \int_{\substack{|z|=1 \\ \operatorname{Im} z > 0}} (1-z)^{-1/v} d[F(z)q^n(z) \left(\frac{z+z_1}{1+z_1 z}\right)^m],$$

gde je $\check{q}(z) \equiv \hat{q}(\zeta) \equiv q(\xi)$ i $F(z) \equiv F[(e^{i\xi} - z_1)/(1 - z_1 e^{i\xi})]$.

Dokaz se realizuje u dva koraka. U prvom se dokazuje da osnovni doprinos u integralu (13) daje integral po konturi u maloj okolini tačke $z=1$. U drugom koraku se podintegralna funkcija aproksimira parcijalnom sumom asimptotskog reda napisanog u odnosu na tačku $z=1$ i analitički izračunava dobi-

jeni integral.

Definišimo okolinu K_δ tačke $z=1$ na sledeći način

$$K_\delta = \{z \mid |z-1| < \delta, \operatorname{Im} z > 0\}, \quad \delta \in (0, 1 - |z_1|).$$

δ izaberimo dovoljno malo tako da bude $\check{q}(z) \neq 0$ kad $z \in K_\delta$, što je moguće obzirom da je funkcija

$$(14) \quad \check{q}(z) = - \frac{\theta(z-1) - 2i \frac{1+z_1}{1-z_1} \sqrt{z}}{\theta(z-1) + 2i \frac{1+z_1}{1-z_1} \sqrt{z}}$$

neprekidna u okolini tačke $z=1$ i da je $\check{q}(1)=1$. Stoga, pošto K_δ ne sadrži nule funkcije $\check{q}(z)$ i $(z+z_1)/(1+z_1z)$, to je funkcija $v(z)$ definisana u K_δ izrazom

$$(15) \quad e^{-v(z)} = \check{q}^n(z) \left(\frac{z+z_1}{1+z_1z} \right)^m$$

izborom osnovne grane funkcije \ln jednoznačno određena:

$$(16) \quad -v(z) = n \ln |\check{q}(z)| + m \ln \left| \frac{z+z_1}{1+z_1z} \right| + i \left[\operatorname{narg} \check{q}(z) + \operatorname{marg} \frac{z+z_1}{1+z_1z} \right].$$

Pomoću funkcije $v(z)$ definišimo krivu C na sledeći način

$$C = \{z \mid \operatorname{Im} v(z) = 0\}, \quad z \in K_\delta.$$

Jednačina krive C je, na osnovu (16),

$$\operatorname{narg} \check{q}(z) + \operatorname{marg} \frac{z+z_1}{1+z_1z} = 0.$$

Zamenom u poslednjoj relaciji funkcija $\check{q}(z)$ i $(z+z_1)/(1+z_1z)$ njihovim asimptotskim razvojem po stepenima $(z-1)$, dobijamo, vodeći računa da je $z=x+iy$, približnu jednačinu krive C

$$n \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x-1}{\frac{1}{\theta} \frac{1+z_1}{1-z_1} - y} + m \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{\frac{1+z_1}{1-z_1} + x-1} = 0.$$

Jednačina tangente na krivu C u tački $z=1$ je

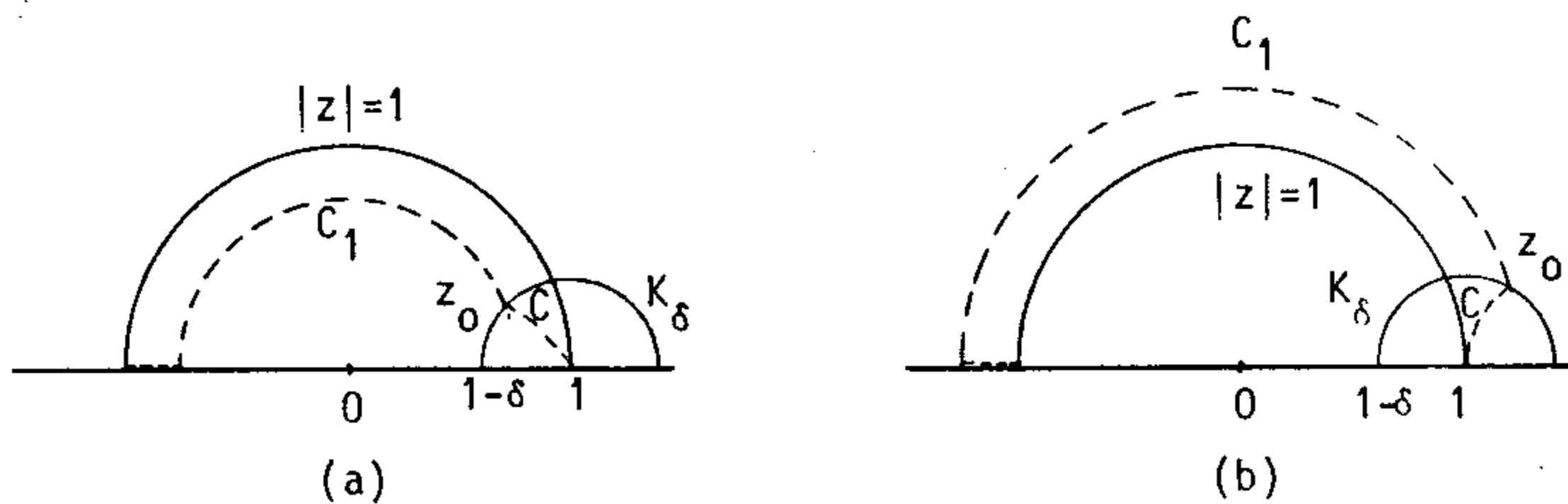
$$n\theta(x-1) + my = 0,$$

pa je za $m>0$ kriva C unutar polukruga $|z|=1$, $\text{Im}z>0$ (sl.1a), a za $m<0$ van tog polukruga (sl.1b).

Neka je z_0 tačka preseka krive C i konture K_δ , a C_1 deo kružnice

$$C_1 = \{z \mid |z|=|z_0|, \text{Im}z > 0, |z-1| \geq \delta\}.$$

Konturu integracije integrala (13) zamenimo konturom koja se sastoji od odsečka na negativnom delu ose Ox i krivih C_1 i C (isprekidane linije na sl.1).



Sl.1.

Na osnovu (14) je

$$\text{Im}q(x) = 0 \quad \text{za} \quad x \leq 0,$$

pa je integral po odsečku na osi Ox jednak nuli. Ocenimo integral u izrazu (13) po konturi C_1 . Na osnovu smene (12) je

$$\frac{z+z_1}{1+z_1z} = \zeta,$$

a tim preslikavanjem se unutrašnjost kruga $|z|=1$ preslikava u unutrašnjost kruga $|\zeta|=1$, i obrnuto. Za $m>0$ je, prema ranijem zaključku, za tačke krive C_1 $|z|<1$, pa je i $|\zeta|<1$, tj. $|(z+z_1)/(1+z_1z)|<1$. Za $m<0$ za tačke krive C_1 je $|z|>1$, pa je i $|\zeta|>1$, tj. $|(z+z_1)/(1+z_1z)|>1$. Stoga je

$$\left| \frac{z+z_1}{1+z_1 z} \right|^{\text{sign } m} < 1.$$

Iz (14) sledi da je na razrezu (osa Ox za $x > 0$)

$$\check{q}(x+io) = - \frac{\theta(x-1) - 2i \frac{1+z_1}{1-z_1} \sqrt{x}}{\theta(x-1) + 2i \frac{1+z_1}{1-z_1} \sqrt{x}} = \check{q}^{-1}(x-io)$$

i $|\check{q}(x)| = 1$ za $x > 0$.

Još je

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \check{q}(z) = -1,$$

pa je na osnovu principa maksimuma u svakoj konačnoj oblasti razrezane ravni $|\check{q}(z)| < 1$. Pošto kriva C_1 nema zajedničkih tačaka sa granicom, to je za tačke krive C_1

$$|\check{q}(z)| < 1.$$

Ako je z_0 blizu razreza ($|m| \gg \theta n$), onda je $|\check{q}(z_0)|$ blisko jedinici; no tada je z_0 relativno daleko od kruga $|z|=1$, pa je $|(z+z_1)/(1+z_1 z)|^{\text{sign } m} < 1$, tj.

$$\left| \frac{z+z_1}{1+z_1 z} \right|^{\text{sign } m} \leq 1-\epsilon, \quad \epsilon > 0.$$

Stoga je

$$|\check{q}(z)|^n \left| \frac{z+z_1}{1+z_1 z} \right|^m \leq (1-\epsilon)^{|m|}$$

Ako je z_0 blizu kruga $|z|=1$ ($n\theta \gg |m|$), onda je $|(z+z_1)/(1+z_1 z)|^{\text{sign } m}$ blisko jedinici, ali je, pošto je z_0 relativno daleko od razreza,

$$|\check{q}(z)| \leq 1-\epsilon,$$

pa je

$$|\check{q}(z)|^n \left| \frac{z+z_1}{1+z_1 z} \right|^m \leq (1-\epsilon)^n.$$

Objedinjujući dobijene ocene, za tačke na krivoj C_1 je

$$|\check{q}(z)|^n \left| \frac{z+z_1}{1+z_1 z} \right|^m \leq (1-\epsilon)^{\frac{|m|+n}{2}}.$$

Početna tačka z_0 krive C_1 je na rastojanju δ od tačke 1, pa je funkcija $(1-z)^{-1/\nu}$ na C_1 ograničena; funkcija $F(z)$ je kao hipergeometrijska funkcija analitička u celoj razrezanoj ravni, pa time i ograničena. Stoga je podintegralna funkcija u integralu po konturi C_1 oblika

$$K(1-\epsilon)^{\frac{|m|+n}{2}} = O(|\beta|^{-N}),$$

gde je $K=\text{const.}$, $N>0$ proizvoljno i $\beta=m+i n\theta$, pa je

$$(17) u(x_m, y_n) = -\frac{A\nu(1+z_1)^{1/\nu}}{\pi(1-z_1)F(-z_1)} \text{Im} \int_C (1-z)^{-1/\nu} d[F(z)e^{-\omega(z)\beta}] + O(|\beta|^{-N}),$$

gde je $\omega(z)\beta=\nu(z)$. Time je prvi korak u dokazu završen.

Analizirajmo funkciju $\omega(z)$ u okolini tačke $z=1$. Kako je $z=h\beta$, to je $\text{arg}\beta=\text{arg}z$, pa je

$$\frac{m}{\sqrt{m^2+\theta^2 n^2}} = \cos(\text{arg}z), \quad \frac{\theta n}{\sqrt{m^2+\theta^2 n^2}} = \sin(\text{arg}z).$$

Obzirom na (15) je onda

$$(18) \omega(z) = -n\beta^{-1} \ln \check{q}(z) - m\beta^{-1} \ln \frac{z+z_1}{1+z_1 z},$$

i

$$\omega(z) = -\frac{n}{\sqrt{m^2+\theta^2 n^2}} [\cos(\text{arg}z) - i \sin(\text{arg}z)] \ln \check{q}(z) -$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{m}{\sqrt{m^2 + \theta^2 n^2}} [\cos(\arg z) - i \sin(\arg z)] \ln \frac{z+z_1}{1+z_1 z} = \\
 &= -\frac{1}{\theta} \sin(\arg z) [\cos(\arg z) - i \sin(\arg z)] \ln \check{q}(z) - \\
 &= \cos(\arg z) [\cos(\arg z) - i \sin(\arg z)] \ln \frac{z+z_1}{1+z_1 z},
 \end{aligned}$$

tj. funkcija $\omega(z)$ ne zavisi od m i n već samo od $\arg z$. Još je, obzirom na (18), $\omega(1)=0$ i $\omega'(1)<0$, pa je $\omega(z)$ u okolini tačke $z=1$ ograničena funkcija bez obzira na veličinu indeksa m i n , tj. $|\omega|<\delta_1$. Kako je $\omega(z)$ i analitička funkcija na razrezanoj ravni, to postoji njena inverzna funkcija

$$z=z(\omega) \quad \text{za} \quad |\omega|<\delta_1.$$

Ako označimo sa $\omega_0=\omega(z_0)$, onda, prelazeći u integralu izraza (17) na novu promenljivu integracije ω , imamo da je

$$(19) \quad u(x_m, y_n) = -\frac{\Lambda v (1+z_1)^{1/v}}{\pi (1-z_1) \Gamma(-z_1)} \operatorname{Im} \int_0^{\omega_0} [1-z(\omega)]^{-1/v} \left[\frac{dF(z)}{d\omega} - \beta F(z) \right] e^{-\omega\beta} d\omega.$$

Za hipergeometrijsku funkciju $F(z)$ važi da je

$$F(z) = F_{-v}(1-z) + (1-z)^{2/v} F_v(1-z),$$

gde je

$$F_v(z) = -2^{-\frac{2}{v}-2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{v}, 1 + \frac{1}{v}; 1 + \frac{2}{v}; z\right).$$

Pretpostavimo sledeće asimptotske razvoje

$$(1-z)^{-1/v} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \omega^{k - \frac{1}{v}}$$

$$(20) \quad F_{-v}(1-z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \omega^k$$

$$(1-z)^{\frac{2}{v}} F_v(1-z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \omega^{k + \frac{2}{v}}.$$

Podintegralna funkcija u izrazu (19) je tada

$$(1-z)^{-1/\nu} \left\{ \frac{dF_{-\nu}(1-z)}{d\omega} + \frac{d}{d\omega} [(1-z)^{2/\nu} F_{\nu}(1-z)]^{-\beta} [F_{-\nu}(1-z) + (1-z)^{2/\nu} F_{\nu}(1-z)] \right\} e^{-\omega\beta} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (e_k \omega^{-1/\nu} + f_k \omega^{-1+1/\nu} - \beta g_k \omega^{-1/\nu} - \beta h_k \omega^{1/\nu}) \omega^k e^{-\omega\beta},$$

gde je

$$e_k = \sum_{j=0}^k b_j c_{k-j+1} (k-j+1), \quad f_k = \sum_{j=0}^k b_j d_{k-j} (k-j + \frac{2}{\nu}),$$

$$g_k = \sum_{j=0}^k b_j c_{k-j}, \quad h_k = \sum_{j=0}^k b_j d_{k-j}.$$

Kao u [6], dobijamo ocene

$$\int_0^{\omega_0} \sum_{k=0}^{\infty} e_k \omega^{k - \frac{1}{\nu}} e^{-\omega\beta} d\omega \sim \sum_{k=0}^{\infty} e_k \Gamma(k+1 - \frac{1}{\nu}) \beta^{-k-1 + \frac{1}{\nu}},$$

$$\int_0^{\omega_0} \sum_{k=0}^{\infty} f_k \omega^{k-1 + \frac{1}{\nu}} e^{-\omega\beta} d\omega \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k \Gamma(k + \frac{1}{\nu}) \beta^{-k - \frac{1}{\nu}},$$

$$\beta \int_0^{\omega_0} \sum_{k=0}^{\infty} g_k \omega^{k - \frac{1}{\nu}} e^{-\omega\beta} d\omega \sim \sum_{k=0}^{\infty} g_k \Gamma(k+1 - \frac{1}{\nu}) \beta^{-k + \frac{1}{\nu}},$$

$$\beta \int_0^{\omega_0} \sum_{k=0}^{\infty} h_k \omega^{k + \frac{1}{\nu}} e^{-\omega\beta} d\omega \sim \sum_{k=0}^{\infty} h_k \Gamma(k+1 + \frac{1}{\nu}) \beta^{-k - \frac{1}{\nu}}.$$

Stavljajući u integral (19) dobijene ocene, imamo da je

$$u(x_m, y_n) \sim \frac{A\nu(1+z_1)^{1/\nu}}{\pi(1-z_1)F(-z_1)} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} [p_k \Gamma(k - \frac{1}{\nu}) \beta^{1/\nu} + q_k \Gamma(k + \frac{1}{\nu}) \beta^{-1/\nu}] \beta^{-k} \right\},$$

za

$$p_k = \sum_{j=0}^k b_j c_{k-j} (j - \frac{1}{\nu}), \quad q_k = \sum_{j=0}^k b_j d_{k-j} (j - \frac{1}{\nu}).$$

Iz (20) je

$$\begin{aligned} \frac{d(1-z)^{-1/\nu}}{d\omega} F_{-\nu}(1-z) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(k - \frac{1}{\nu}\right) \omega^{k - \frac{1}{\nu} - 1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \omega^k = \\ &= \omega^{-1-1/\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^k b_j \left(j - \frac{1}{\nu}\right) c_{k-j} \right] \omega^k = \omega^{-1-1/\nu} \sum_{k=0}^{\infty} p_k \omega^k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(1-z)^{-1/\nu}}{d\omega} (1-z)^{2/\nu} F_{\nu}(1-z) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(k - \frac{1}{\nu}\right) \omega^{k - \frac{1}{\nu} - 1} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \omega^{k + \frac{2}{\nu}} = \\ &= \omega^{\frac{1}{\nu} - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^k b_j \left(j - \frac{1}{\nu}\right) d_{k-j} \right] \omega^k = \omega^{\frac{1}{\nu} - 1} \sum_{k=0}^{\infty} q_k \omega^k. \end{aligned}$$

Kako je na osnovu formula za transformacije hipergeometrijskih funkcija

$$F_{-\nu}(1-z) = \frac{\nu}{4\sqrt{z}} (1+\sqrt{z})^{2/\nu} \quad \text{i} \quad F_{\nu}(1-z) = -\frac{\nu}{4\sqrt{z}} (1+\sqrt{z})^{-2/\nu},$$

to je

$$\begin{aligned} \omega^{-1-1/\nu} \sum_{k=0}^{\infty} p_k \omega^k &= \frac{1}{4\sqrt{z}} \frac{1}{1-z} \left(\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)^{1/\nu} \frac{dz}{d\omega} \\ \omega^{-1+1/\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-q_k) \omega^k &= \frac{1}{4\sqrt{z}} \frac{1}{1-z} \left(\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)^{-1/\nu} \frac{dz}{d\omega}. \end{aligned}$$

Upoređujući poslednje dve relacije imamo da je

$$p_k(\nu) = -q_k(-\nu),$$

te je

$$(21) \quad u(x_m, y_n) \sim \frac{A\nu(1+z_1)^{1/\nu}}{\pi(1-z_1)F(-z_1)} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left[p_k(\nu) \Gamma\left(k - \frac{1}{\nu}\right) \beta^{1/\nu} - p_k(-\nu) \Gamma\left(k + \frac{1}{\nu}\right) \beta^{-1/\nu} \right] \beta^{-k} \right\},$$

gde su koeficijenti $p_k(\nu)$ odredjeni razvojem u red funkcije

$$P(\omega, \nu) = \omega^{1+1/\nu} \frac{1}{4(1-z)\sqrt{z}} \left(\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} \right)^{1/\nu} \frac{dz}{d\omega} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} p_k \omega^k.$$

Pomoću smena (12) i (11) vratimo da se na polaznu promenljivu ξ , i ako uvedemo smenu $x = \sin(\xi/2)$, dobijamo da je

$$(22) \quad P(\omega, \nu) = -\frac{1}{4i} \left(\frac{1-z_1}{1+z_1} \right)^{1/\nu} \left(\frac{i\omega}{x} \right)^{1+1/\nu} \{1 + [\theta^2 + 2\alpha(1+\theta^2)]x^2\}^{-1/2} \cdot \left\{ \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1 + [\theta^2 + 2\alpha(1+\theta^2)]x^2} \right\}^{1/\nu} (1-x^2)^{-1/2} \frac{dx}{d\omega}.$$

Iz smene $\omega(z) = \beta^{-1} v(z)$, relacije (15) i pomenute veze izmedju z i x , dobijamo ω u funkciji od x

$$(23) \quad \omega(x) = -2ix \left\{ 1 + \frac{1}{6\beta} [m + in\theta(2\theta^2 - 3c)]x^2 + \frac{1}{40\beta} [3m + in\theta(8\theta^4 - 20\theta^2 c + 15c^2)]x^4 + \frac{1}{112\beta} [5m + in\theta(16\theta^6 - 56\theta^4 c + 70\theta^2 c^2 - 35c^3)]x^6 + o(x^8) \right\},$$

gde je $c = \theta^2 + 2\alpha(1+\theta^2)$.

Prema [19] (form.(34), p.70) inverzna funkcija funkciji $\omega(x)$ je

$$(24) \quad x(\omega) = \omega \sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega^{2k}, \quad a_k = \frac{1}{(2k+1)!} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} \left(\frac{x}{\omega} \right)^{2k+1}, \quad k=0,1,2,\dots$$

Iz (23) je

$$\frac{x}{\omega} = \frac{i}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{6\beta} [m + in\theta(2\theta^2 - 3c)]x^2 + \left[\frac{1}{36\beta^2} (m + in\theta(2\theta^2 - 3c))^2 - \frac{3m}{40\beta} - \frac{in\theta(8\theta^4 - 20\theta^2 c + 15c^2)}{40\beta} \right] x^4 + o(x^6) \right\},$$

pa je na osnovu (24)

$$x(\omega) = a_0 \omega + a_1 \omega^3 + a_2 \omega^5 + o(\omega^7),$$

$$(25) \quad a_0 = \frac{i}{2}, \quad a_1 = \frac{i}{3!2^3} \left[1 - \frac{in\theta}{\beta} (1+\theta^2)(1+6\alpha) \right],$$

$$a_2 = \frac{i}{5!2^5} \left\{ 10 \left[1 - \frac{in\theta}{\beta} (1+\theta^2)(1+6\alpha) \right]^2 - 9 - \frac{3in\theta}{\beta} (1+\theta^2) [8\alpha((1+\theta^2)(1+6\alpha)-1) + 3((1+\theta^2)(1+2\alpha)-2)(1+2\alpha)] \right\}.$$

Uvrstimo (25) u (22) i aproksimirajmo sve funkcije u tom izrazu parcijalnim sumama njihovih asimptotskih razvoja. Tako dobijamo asimptotski razvoj po stepenima ω funkcije $P(\omega, \nu)$, čime su određeni koeficijenti $p_k(\nu)$

$$p_{2k+1}(\nu) = 0, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$p_0(\nu) = -2^{-2(1-1/\nu)} \left(\frac{1-z_1}{1+z_1} \right)^{1/\nu},$$

$$p_2(\nu) = -2^{-2(3-1/\nu)} \left(\frac{1-z_1}{1+z_1} \right)^{1/\nu} \left(2 - \frac{1}{\nu} \right) \frac{1}{3} \left[(1+\theta^2)(1+6\alpha) \frac{\bar{\beta}}{\beta} + 2(\theta^2-1) \right],$$

.....

Uvrstimo dobijene koeficijente u (21) i, uzimajući u obzir da je $z=\beta h$, dobijamo izraz (10).

Б р о ј: _____

Д а т у м: _____

2. АПРОКСИМАЦИЈЕ ДИФЕРЕНЦИЈСКИМ ШЕМАМА МЕШОВИТОГ ЗАДАТКА ЗА ЈЕДНАЧИНУ ЛАПЛАЦЕА У ПОЛУРАВНИ

2.1. РЕШЕЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈСКОГ ЗАДАТКА И НЈЕГОВ АСИМПТОТСКИ РАЗВОЈ

Од посебног је практичног интереса Дирихлетов задатак за једначину Лапласеа у равни са разрезом, тј. задатак у углу $0 < \phi < 2\pi$, $0 < r < \infty$ са задатим граничним условима првог реда. Овај задатак је еквивалentan мешовитом задатку у полуравни, при чему се под мешовитим задатком подразумева задатак у коме је на једном делу глатке границе задат гранични услов првог реда, а на другом делу - гранични услов другог реда:

$$\Delta_{\alpha} u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega^+,$$

$$(1) \quad u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \bar{\Gamma}_0, \quad \lambda_1 u(x,y) \equiv u_y + \frac{\theta h}{2} u_{xx} - \alpha h^2 \frac{1+\theta^2}{2} u_{xxy} = 0, \quad (x,y) \in \Gamma^-,$$

$$u(-h,0) = A, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u}{r} = 0$$

(oznake su iz odeljka 1.3.)

Stoga, u formuli (1.5) stavimo da je $\nu=2$ i, obzirom da je tada $F(z)=1$, imamo da je traženo rešenje

$$(2) \quad u(x_m, y_n) = \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\xi} [q^n(\xi) e^{im\xi} - 1]}{\sqrt{(1-z_1 e^{i\xi})(1-e^{-i\xi})^3}} d\xi, \quad \begin{matrix} m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{matrix}$$

gde su z_1 i $q(\xi)$ dati izrazima (1.7) i (1.8).

Stavljajući $\nu=2$ i $F(z)=1$ u (1.10), dobijamo asimptotski razvoj rešenja

(2)

$$\begin{aligned}
 u(x_m, y_n) = & \frac{2A}{\sqrt{\pi h(1-z_1)}} \operatorname{Im} \left\{ \sqrt{z} + \frac{\sqrt{(1+\theta^2)(1+2\alpha)}}{8} \frac{h}{z^{1/2}} - \frac{1}{27} [(1+\theta^2)(1+6\alpha)] \frac{\bar{\beta}}{\beta} + \right. \\
 (3) \quad & \left. + 2(\theta^2-1) \right\} \frac{h^2}{z^{3/2}} + \frac{5\sqrt{(1+\theta^2)(1+2\alpha)}}{2^{10}} [(1+\theta^2)(1+6\alpha)] \frac{\bar{\beta}}{\beta} + 2(\theta^2-1) \left\} \frac{h^3}{z^{5/2}} + \right. \\
 & \left. + O\left(\frac{h^4}{|z|^{7/2}}\right), \quad \begin{array}{l} m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{array}
 \end{aligned}$$

Iz izraza (3) se može zaključiti da je greška aproksimacije, bez obzira na vrednost parametra mreže θ i parametra sheme α , reda $O(h)$ van neke okoline tačke smene tipa graničnog uslova, tj. za $|z|=O(1)$. U okolini te tačke, tj. za $|z|=O(h)$, greška se povećava i reda je $O(\sqrt{h})$. Poredjenja radi, u [8] je analizirana tačnost aproksimacije familijom diferencijskih operatora (1.2) Dirichletovog zadatka za jednačinu Laplacea u poluravni kada granična funkcija ima tačku prekida prvog reda. Pokazano je da je van neke okoline tačke prekida granične funkcije greška aproksimacije reda $O(h^2)$ (tj. kao za zadatke sa glatkim rešenjima), a u okolini tačke prekida reda $O(1)$.

2.2. ASIMPTOTSKI RAZVOJ REŠENJA DIFERENCIJSKOG ZADATKA DEFINISANOG NA POMERENOJ MREŽI

U diferencijskoj shemi (1) mi smo u tački $(0,0)$ -tački smene tipa graničnog uslova, prepostavili da važi granični uslov prvog reda. Sa istim pravom možemo prepostaviti da rešenje u toj tački zadovoljava granični uslov drugog reda.

Radi formulisanja nešto opštijeg diferencijskog zadatka, definišimo pomerenu mrežu

$$\bar{\Omega}^\epsilon = \{(x, y) \mid x = (m+\epsilon)h, \quad y = nh', \quad m=0, \pm 1, \dots, n=0, 1, \dots, h' = \theta h, \quad h, \theta > 0\},$$

i njene granice

$$\Gamma_0^\epsilon = \{(x, y) \mid (x, y) \in \bar{\Omega}^\epsilon, \quad m \geq 0, \quad n=0\},$$

$$\Gamma_1^\epsilon = \{(x, y) \mid (x, y) \in \bar{\Omega}^\epsilon, \quad m < 0, \quad n=0\}.$$

Neka je još

$$\Omega^\varepsilon = \bar{\Omega}^\varepsilon \setminus (\Gamma_0^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon).$$

Diferencijski zadatak kojim aproksimiramo polazni zadatak je

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha u(x,y) &= 0, & (x,y) \in \Omega^\varepsilon, \\ (4) \quad u(x,y) &= 0, & (x,y) \in \Gamma_0^\varepsilon, & \lambda_1 u(x,y) = 0, & (x,y) \in \Gamma_1^\varepsilon, \\ u(-h,0) &= A, & \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u}{r} = 0. \end{aligned}$$

Njegovo rešenje je takodje dato izrazom (2), obzirom da vrednost $u(x_m, y_n)$ zavisi samo od položaja čvora u mreži (što je određeno indeksima m i n), a ne zavisi od položaja mreže u odnosu na koordinatni početak. Asimptotski razvoj rešenja se razlikuje od razvoja datog izrazom (3), jer z zavisi i od položaja mreže u odnosu na koordinatni početak.

T e o r e m a 2.1. Asimptotski razvoj rešenja zadatka (4) je

$$\begin{aligned} (5) \quad u(x_m, y_n) &= \frac{2A}{\sqrt{\pi h(1-z_1)}} \operatorname{Im} \left\{ \sqrt{z} - \frac{1}{2} \left[\varepsilon - \frac{\sqrt{(1+\theta^2)(1+2\alpha)}}{4} \right] \right\} \frac{h}{z^{1/2}} - \\ &- \frac{1}{2^6} \left[8\varepsilon^2 - 4\varepsilon \sqrt{(1+\theta^2)(1+2\alpha)} + \frac{1}{2} (1+\theta^2)(1+6\alpha) \frac{\bar{\beta}}{\beta} + \theta^2 - 1 \right] \frac{h^2}{z^{3/2}} - \\ &- \frac{1}{2^8} \left[16\varepsilon^3 - 12\varepsilon^2 \sqrt{(1+\theta^2)(1+2\alpha)} + 3\varepsilon \left((1+\theta^2)(1+6\alpha) \frac{\bar{\beta}}{\beta} + 2(\theta^2 - 1) \right) - \right. \\ &\left. - \frac{5}{4} \sqrt{(1+\theta^2)(1+2\alpha)} \left((1+\theta^2)(1+6\alpha) \frac{\bar{\beta}}{\beta} + 2(\theta^2 - 1) \right) \right] \frac{h^3}{z^{5/2}} \left. \right\} + O\left(\frac{h^4}{|z|^{7/2}}\right). \end{aligned}$$

D o k a z: U razvoju (3) je $z = h\beta = h(m + in\theta)$, a za čvorove pomerene mreže je $z = h\beta_\varepsilon = h(m + \varepsilon + in\theta)$. Stoga izrazimo β pomoću β_ε

$$\beta = \beta_\varepsilon - \varepsilon = \beta_\varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon}{\beta_\varepsilon} \right).$$

Još je

$$\beta^{1/2} = \beta_\epsilon^{1/2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{\beta_\epsilon} - \frac{1}{8} \frac{\epsilon^2}{\beta_\epsilon^2} - \frac{1}{16} \frac{\epsilon^3}{\beta_\epsilon^3} + O(\beta_\epsilon^{-4}) \right],$$

$$\beta^{-1/2} = \beta_\epsilon^{-1/2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{\beta_\epsilon} + \frac{3}{8} \frac{\epsilon^2}{\beta_\epsilon^2} + O(\beta_\epsilon^{-3}) \right], \quad \beta^{-3/2} = \beta_\epsilon^{-3/2} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\epsilon}{\beta_\epsilon} + O(\beta_\epsilon^{-2}) \right],$$

$$\beta^{-5/2} = \beta_\epsilon^{-5/2} [1 + O(\beta_\epsilon^{-1})].$$

Zamenom ovih izraza u (3), dobijemo razvoj (5).

Iz razvoja (5) se može zaključiti da se tačnost aproksimacije može povećati do $O(h^2)$ za svako α za $|z|=O(1)$, ukoliko se mreža izabere tako da je $\epsilon = \sqrt{(1+\theta^2)(1+2\alpha)}/4$. U slučaju primene sheme sa parametrom $\alpha = -1/6$, ako se izabere da je $\theta = \sqrt{2}$ i $\epsilon = 1/(2\sqrt{2})$, greška aproksimacije će biti reda $O(h^3)$ za $|z|=O(1)$.

Ako je tačka smene tipa graničnog uslova u čvoru mreže, tačnost aproksimacije se može povećati modifikacijama sheme u nekim čvorovima iz okoline te tačke. U [4] je pokazano da se može na kvadratnoj mreži postići tačnost aproksimacije reda $O(h^2)$ za $|z|=O(1)$, ako se u tački smene tipa graničnog uslova zada granični uslov troćeg reda

$$\lambda_1 u(x,y) = \frac{\kappa}{h} u(x,y) \Big|_{(0,0)}, \quad \kappa = (3+\sqrt{2})/2.$$

Sličnim modifikovanjem graničnih uslova u pet graničnih čvorova, diferencijaska shema za $\alpha = -1/6$ na kvadratnoj mreži obezbeđuje tačnost aproksimacije reda $O(h^6)$ za $|z|=O(1)$, što odgovara tačnosti kojom se ovom shemom aproksimiraju zadaci sa dovoljno glatkim rešenjima.

2.3. DIFERENCIJSKA SHEMA NA ŠABLONU "KOSI KRST" ($\alpha = -1/2$)

Kada je mreža kvadratna ($\theta=1$), asimptotski razvoj rešenja zadatka (1) (sledi iz (3)) je

$$(6) \quad u(x,y) = C \operatorname{Im} \left(\sqrt{z} + \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \alpha}}{4} \frac{h}{z^{1/2}} \right) + O\left(\frac{h^2}{|z|^{3/2}}\right), \quad C = \text{const.}$$

Ako bi razvoj (6) važio i za $\alpha = -1/2$, onda bi tačnost sheme na šablonu od pet tačaka "kosi krst" (jer toj shemi odgovara vrednost $\alpha = -1/2$) bila reda

$O(h^2)$ za $|z|=O(1)$, što je za red veličine bolje od tačnosti $O(h)$ koja odgovara svim ostalim shemama definisanim familijom (1.2). Stoga analizirajmo pomenutu shemu.

U gornjoj poluravni definišimo kvadratnu mrežu sa korakom $h>0$

$$\bar{\Omega}_h = \{(x,y) | x=mh, y=nh, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, n=0, 1, 2, \dots\},$$

i označimo

$$\Omega_h = \{(x,y) | (x,y) \in \bar{\Omega}_h, y>0\},$$

$$\bar{\Gamma}_h^+ = \{(x,y) | (x,y) \in \bar{\Omega}_h, x \geq 0, y=0\},$$

$$\Gamma_h = \bar{\Omega}_h \setminus \Omega_h, \quad \Gamma_h^- = \Gamma_h \setminus \bar{\Gamma}_h^+.$$

Mešoviti zadatak aproksimirajmo diferencijskim zadatkom

$$\Lambda_\alpha u(x,y) = u_{xx} + u_{yy} - \alpha h^2 u_{xxyy} = 0, \quad (x,y) \in \Omega_h,$$

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \bar{\Gamma}_h^+,$$

(7)

$$\lambda_\alpha u(x,y) = u_y + \frac{h}{2} u_{xx} - \alpha h^2 u_{xxy} = 0, \quad (x,y) \in \Gamma_h^-,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u}{r} = 0.$$

Za $\alpha = -1/2$ zadatak (7) označimo sa (7'). Poznato je da se sistem linearnih jednačina na koji se svodi zadatak (7') raspada na dva međusobno nepovezana sistema - jedan koji sadrži nepoznate $u(m,n)$ samo za $|m+n|=2k$ (sl.2a), i drugi koji sadrži nepoznate $u(m,n)$ samo za $|m+n|=2k+1$ (sl.2b), gde je $k=0, 1, 2, \dots$

Prvi od tih sistema možemo zapisati u obliku

$$u(m+1, n+1) + u(m-1, n+1) + u(m+1, n-1) + u(m-1, n-1) - 4u(m, n) = 0, \quad |m+n|=2k,$$

$$(8) \quad u(m+1, 1) + u(m-1, 1) - 2u(m, 0) = 0, \quad m = -2(k+1),$$

$$u(m, 0) = 0, \quad m = 2k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

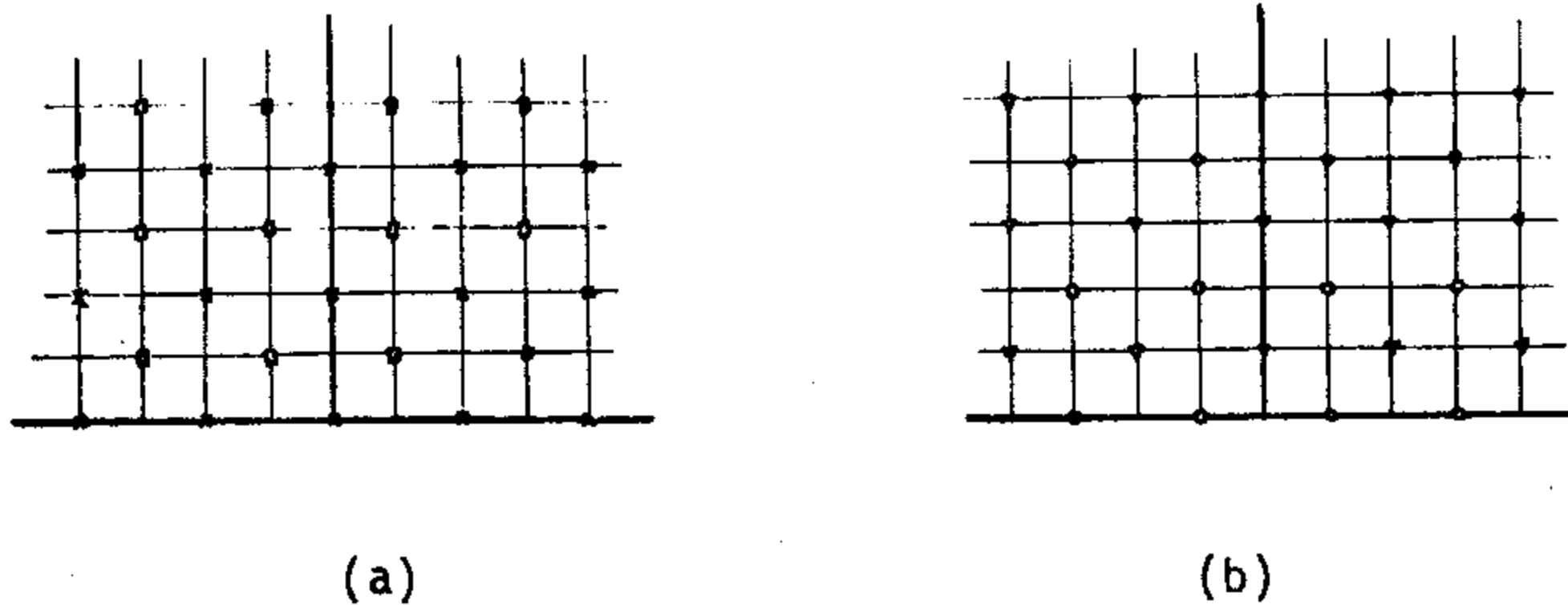
Izrazimo odavde $u(m,n)$ sa neparnim indeksima m i n (kvadrati na sl.2a) pomoću $u(m\pm 1, n\pm 1)$, tj.

$$(9) \quad u(2p+1, 2q+1) = \frac{1}{4} [u(2p+2, 2q+2) + u(2p, 2q+2) + u(2p+2, 2q) + u(2p, 2q)], \quad p=0, \pm 1, \dots, \\ q=0, 1, \dots,$$

i zamenimo dobijene izraze u još ne korišćene jednačine sistema (8). Na mreži sa korakom $H=2h$ (krstići na sl.2a), dobijamo zadatak (7) za $\alpha=-1/4$. Stoga je, obzirom na (3),

$$(10) \quad u(x,y) = A \operatorname{Im}(\sqrt{z} + \frac{1}{8} \frac{H}{z^{1/2}}) + O(\frac{H^2}{|z|^{3/2}}) = A \operatorname{Im}(\sqrt{z} + \frac{1}{4} \frac{h}{z^{1/2}}) + O(\frac{h^2}{|z|^{3/2}}), \quad A = \text{const.}$$

Uvrstimo razvoj (10) u izraz (9), pa neposredno sledi da razvoj (10) važi i za čvorove sa neparnim indeksima m i n .



Sl.2.

Analizirajmo drugi od sistema koji se dobijaju za zadatak (7'). Kao i ranije, na mreži sa korakom $H=2h$ i čvorovima sa parnim n i neparnim m (kružići na sl.2b) dobijamo zadatak (7) za $\alpha=-1/4$. Koordinatni početak nije u čvoru mreže, već je mreža pomerena za $h=\epsilon H$, $\epsilon=1/2$. Stoga, na osnovu formule (5) za $\epsilon=1/2$ i $\alpha=-1/4$ ($\theta=1$) imamo da je

$$(11) \quad u(x,y) = B \operatorname{Im}(\sqrt{z} - \frac{1}{8} \frac{H}{z^{1/2}}) + O(\frac{H^2}{|z|^{3/2}}) = B \operatorname{Im}(\sqrt{z} - \frac{1}{4} \frac{h}{z^{1/2}}) + O(\frac{h^2}{|z|^{3/2}}), \quad B = \text{const.}$$

Kao i ranije, dokazujemo da asimptotski razvoj (11) važi i za čvorove sa parnim m i neparnim n (trouglovi na sl.2b).

Iz (10) i (11) sledi da je tačnost sheme na šablonu "kosi krst" $O(h/|z|^{1/2})$, tj. ista kao i za ostale sheme familije (7).

Ako označimo sa

$$u^*(m,n) = \frac{1}{4}[u(m,n+1)+u(m,n-1)+u(m+1,n)+u(m-1,n)],$$

iz (10) i (11) sledi da je za $A=B$

$$u^{**}(m,n) = \frac{1}{2}[u^*(m,n)+u(m,n)] = A\text{Im}\sqrt{z} + O\left(\frac{h^2}{|z|^{3/2}}\right),$$

tj. $u^{**}(x,y)$ aproksimira tačno rešenje van neke okoline tačke smene tipa graničnog uslova sa greškom reda $O(h^2)$.

U radu [8], pored ostalog, analiziran je Dirichletov zadatak za jednačinu Laplacea u poluravni $y>x$ sa graničnim uslovom $u(x,x)=\text{sign}x$. Taj zadatak je aproksimiran klasičnom shemom na šablonu od pet čvorova na kvadratnoj mreži, obrazovanoj preseccima pravih paralelnih koordinatnim osama. Očigledno je da je navedeni mrežni zadatak ekvivalentan zadatku

$$\Lambda_{-1/2}u(x,y)=0, \quad y>0, \quad u(x,0)=\text{sign}x$$

na mreži sa korakom $h=h/\sqrt{2}$. Prethodno opisanim postupkom, ovaj zadatak se može svesti na zadatak definisan operatorom $\Lambda_{-1/4}$ na mreži $\bar{\Omega}_{2h}$ sa korakom $2h=h/\sqrt{2}$. Stoga za njega važi ([8]) asimptotski razvoj

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi} \left\{ \arctg \frac{y+x}{y-x} - \frac{1}{6} \frac{h^2}{r^2} (\sin 2\ell - \sin \ell \cos 3\ell) + \frac{h^4}{r^4} \left[\frac{1}{30} \sin 4\ell + \frac{1}{3} \sin \ell \cos 5\ell - \frac{1}{24} \sin 2\ell (5 \cos 6\ell - 4 \cos 4\ell + 4 \cos 2\ell - 2) \right] \right\} + O\left(\frac{h^6}{r^6}\right)$$

gde su (r,ℓ) polarne koordinate u odnosu na koordinatni sistem rotiran za $\pi/4$ u odnosu na polazni. Ovom formulom je data ispravka formule (3.15) iz ([8]).

2.4. OCENA KONVERGENCIJE U PRAVOUGAONIKU

Do sada smo analizirali tačnost diferencijalnih shema u rešavanju mešovito g zadataka za jednačinu Laplacea u beskonačnoj oblasti. Analizirajmo tačnost aproksimacije tim shemama istog zadataka u pravougaoniku

$$(12) \quad R = \{(x,y) \mid |x| < a, \quad 0 < y < b\}.$$

Uvedimo sledeće oznake

$$\gamma_1 = \{(x, y) \mid |x| < a, y = 0\},$$

$$\bar{\gamma}_1 = \{(x, y) \mid |x| \leq a, y = 0\},$$

$$\gamma_2 = \{(x, y) \mid x = a, 0 < y < b\},$$

$$\bar{\gamma}_2 = \{(x, y) \mid x = a, 0 \leq y \leq b\},$$

$$\gamma_3 = \{(x, y) \mid |x| < a, y = b\},$$

$$\bar{\gamma}_3 = \{(x, y) \mid |x| \leq a, y = b\},$$

$$\gamma_4 = \{(x, y) \mid x = -a, 0 < y < b\},$$

$$\bar{\gamma}_4 = \{(x, y) \mid x = -a, 0 \leq y \leq b\},$$

$$\gamma = \bigcup_{i=1}^4 \gamma_i, \quad \bar{\gamma} = \bigcup_{i=1}^4 \bar{\gamma}_i, \quad \bar{R} = R \cup \bar{\gamma}.$$

L e m m a 2.1. (videti, napr., [35]) Rešenje zadatka

$$(13) \quad \begin{aligned} \Delta v(x, y) &= 0, & (x, y) \in R, \\ v(x, y) &= f(x), & (x, y) \in \gamma_3, \\ v(x, y) &= 0, & (x, y) \in \bar{\gamma} \setminus \gamma_3, \end{aligned}$$

za $f(x) \in C[-a, a]$, je

$$(14) \quad v(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{2a}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{2a}},$$

$$(15) \quad p_k = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a} dx, \quad k=1, 2, \dots$$

D o k a z: Metodom razdvajanja promenljivih odredjujemo opšte rešenje jednačine Laplacea, iz koga, zbog zadatog homogenog graničnog uslova na $\bar{\gamma} \setminus \gamma_3$, dobijamo

$$(16) \quad v(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{2a}.$$

Kako je

$$f(x) = v(x, b) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sh} \frac{k\pi b}{2a} \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a},$$

to uporedjujući ovaj izraz sa razvojem funkcije $f(x)$ po funkcijama $\sin \frac{k\pi(x+a)}{2a}$, $k=1,2,\dots$, odredjujemo konstante c_k

$$c_k = p_k / (\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{2a}), \quad k=1,2,\dots,$$

gde je p_k odredjeno izrazom (15). Zamenimo dobijeni izraz za c_k u (16) i dobijemo (14).

P o s l e d i c a 1. Rešenje zadatka

$$\Delta v(x,y) = 0, \quad (x,y) \in R,$$

$$v(x,y) = f(y), \quad (x,y) \in \gamma_2, \quad v(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \bar{\gamma} \setminus \gamma_2,$$

za $f \in C[0,b]$, je

$$v(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \sin \frac{k\pi y}{b} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi(a+x)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{2ak\pi}{b}},$$

$$p_k = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy, \quad k=1,2,\dots$$

P o s l e d i c a 2. Rešenje zadatka

$$\Delta v(x,y) = 0, \quad (x,y) \in R,$$

$$v(x,y) = f(y) \quad (x,y) \in \gamma_4, \quad v(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \bar{\gamma} \setminus \gamma_4$$

je

$$v(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \sin \frac{k\pi y}{b} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{2ak\pi}{b}},$$

$$p_k = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy.$$

Radi formulisanja diferencijalnog zadatka, definišimo prvo pravougaonu mrežu na pravougaonoj oblasti (12) i njenu granicu:

$$\bar{\Omega}_R = \{(x, y) | x = mh, y = nh, m = 0, \pm 1, \dots, \pm M, n = 0, 1, \dots, N, h = \frac{a}{M}, h' = \frac{b}{N}, h' = \theta h\},$$

$$\Gamma_i = \bar{\Omega}_R \cap \gamma_i, \quad \bar{\Gamma}_i = \bar{\Omega}_R \cap \bar{\gamma}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i, \quad \bar{\Gamma} = \bigcup_{i=1}^4 \bar{\Gamma}_i, \quad \Omega_R = \bar{\Omega}_R \setminus \bar{\Gamma}.$$

Familija diferencijalnih operatora određena je izrazom (1.2).

L e m a 2.2. (videti [7]) Rešenje zadatka

$$(17) \quad \Delta_{\alpha} u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_R,$$

$$u(x, y) = f(x) \quad (x, y) \in \Gamma_3, \quad u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \bar{\Gamma} \setminus \Gamma_3,$$

za $f \in C[-a, a]$, je

$$(18) \quad u(x, y) = \sum_{k=1}^{k_0-1} q_k \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a} \frac{\text{sh}(\kappa_k y)}{\text{sh}(\kappa_k b)} + (-1)^{\frac{y+b}{\theta h}} \sum_{k=k_1}^{2M-1} q_k \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a} \frac{\text{sh}(\kappa_k y)}{\text{sh}(\kappa_k b)}$$

gde je

$$(19) \quad q_k = \frac{1}{M} \sum_{j=-M}^{M-1} f(x_j) \sin \frac{k\pi(x_j+a)}{2a}, \quad k = 1, 2, \dots, 2M-1,$$

κ_k je konstanta određena uslovima

$$(20) \quad 1 + \frac{2\theta^2 \sin^2 \frac{k\pi h}{4a}}{2\alpha(1+\theta^2) \sin^2 \frac{k\pi h}{4a} + 1} = \begin{cases} \text{ch}(\kappa_k \theta h), & 2\alpha(1+\theta^2) \sin^2 \frac{k\pi h}{4a} + 1 > 0, \\ -\text{ch}(\kappa_k \theta h), & 2\alpha(1+\theta^2) \sin^2 \frac{k\pi h}{4a} + 1 < 0, \end{cases}$$

$$(21) \quad k_1 = \begin{cases} k_0 + 1 & \text{za } 2\alpha(1+\theta^2) \sin^2 \frac{k\pi h}{4a} + 1 = 0 \\ k_0 & \text{za } 2\alpha(1+\theta^2) \sin^2 \frac{k\pi h}{4a} + 1 < 0, \end{cases}$$

a k_0 je prva vrednost indeksa $k = 1, 2, \dots, 2M-1$ za koju nije

$$1 + 2\alpha(1+\theta^2) \sin^2 \frac{k\pi h}{4a} > 0.$$

D o k a z: I u ovom slučaju rešenje tražimo u obliku

$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

Posle zamene u prvoj od jednačina (17), dobijamo diferencijalne jednačine za funkcije $X(x)$ i $Y(y)$

$$(22) \quad \frac{X}{h^2 X_{xx}} = - \frac{1}{h^2 \lambda^2},$$

$$(23) \quad \frac{Y}{h^2 Y_{yy}} = \alpha \frac{1+\theta^2}{2} + \frac{1}{h^2 \lambda^2}.$$

Karakteristična jednačina za diferencijalnu jednačinu (22) je

$$q^2 - 2\left(1 - \frac{h^2 \lambda^2}{2}\right)q + 1 = 0.$$

Uvedimo smenu $1 - \frac{h^2 \lambda^2}{2} = \cos \delta h$, i imamo da je

$$q^2 - 2(\cos \delta h)q + 1 = 0.$$

Rešenja su $q_{1/2} = \cos \delta h \pm \sqrt{\cos^2 \delta h - 1} = \cos \delta h \pm i \sin \delta h$, tj. $q_1 = e^{i \delta h}$, $q_2 = e^{-i \delta h}$. Stoga je opšte rešenje diferencijalne jednačine (22) u tački $x = mh$

$$X(x) = C_1 e^{i \delta h m} + C_2 e^{-i \delta h m} = C_1 \cos \delta x + C_2 \sin \delta x, \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

Iz graničnih uslova je:

$$X(-a) = 0 \quad \text{povlači} \quad C_1 \cos \delta a - C_2 \sin \delta a = 0, \quad \text{i}$$

$$X(a) = 0 \quad \text{povlači} \quad C_1 \cos \delta a + C_2 \sin \delta a = 0.$$

Da bi postojalo netrivialno rešenje mora biti $\delta = k\pi/(2a)$. Zamenimo dobijeno δ u izraz kojim je uveden taj parametar, tj.

$$1 - \frac{h^2 \lambda^2}{2} = \cos \frac{k\pi h}{2a},$$

i dobijamo da su karakteristične vrednosti i karakteristična rešenja

$$(24) \quad \lambda_k^2 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{4a}, \quad \mu_k = \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a}$$

Ima ih $2M-1$ različitih, pa je $k=1,2,\dots,2M-1$ (trivijalno rešenje koje odgovara vrednosti za $k=0$ je isključeno). Stoga je

$$(25) \quad X_k(x) = C_k \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a}, \quad C_k = \text{const.}, \quad k=1,2,\dots,2M-1.$$

Dalje rešavamo diferencijalnu jednačinu (23), koju možemo napisati u obliku

$$(26) \quad Y_k(y+\theta h) - 2 \left[1 + \frac{\theta^2 h^2 \lambda_k^2}{2(\alpha \frac{1+\theta^2}{2} h^2 \lambda_k^2 + 1)} \right] Y_k(y) + Y_k(y-\theta h) = 0, \quad k=1,2,\dots,2M-1.$$

Njena karakteristična jednačina je

$$q^2 - 2 \left[1 + \frac{\theta^2 h^2 \lambda_k^2}{2(\alpha \frac{1+\theta^2}{2} h^2 \lambda_k^2 + 1)} \right] q + 1 = 0,$$

sa koeficijentom uz q

$$(27) \quad \left(\alpha \frac{1+\theta^2}{2} h^2 \lambda_k^2 + 1 + \frac{\theta^2}{2} h^2 \lambda_k^2 \right) / \left(\alpha \frac{1+\theta^2}{2} h^2 \lambda_k^2 + 1 \right).$$

Za brojilac izraza (27), pošto je $\alpha > -1/2$, važi ocena

$$\begin{aligned} \alpha \frac{1+\theta^2}{2} h^2 \lambda_k^2 + 1 + \frac{\theta^2}{2} h^2 \lambda_k^2 &> -\frac{1+\theta^2}{4} h^2 \lambda_k^2 + \frac{\theta^2}{2} h^2 \lambda_k^2 + 1 = \\ &= 1 + (\theta^2 - 1) \frac{h^2 \lambda_k^2}{4} \geq \min\{1, \theta^2\} > 0. \end{aligned}$$

Stoga je znak izraza (27) određen znakom imenioca, koji može biti i negativan za neko $\alpha < 0$ i neko k . Osim toga, ako je imenilac izraza (27) pozitivan, onda je, očigledno, taj izraz veći od 1; ako je negativan, ovaj izraz je manji od -1, jer je za $-1/2 < \alpha < 0$

$$\alpha \frac{1+\theta^2}{2} h^2 \lambda_k^2 + 1 + \frac{\theta^2}{4} h^2 \lambda_k^2 > 1 + \left(-\frac{1+\theta^2}{4} + \frac{\theta^2}{4} \right) h^2 \lambda_k^2 = 1 - \sin^2 \frac{k\pi h}{4a} \geq 0,$$

pa je

$$\alpha \frac{1+\theta^2}{2} h^2 \lambda_k^2 + 1 > -\frac{\theta^2}{4} h^2 \lambda_k^2 \quad / \cdot \frac{2}{\alpha \frac{1+\theta^2}{2} h^2 \lambda_k^2 + 1} \quad (<0)$$

$$2 < -\frac{\theta^2 h^2 \lambda_k^2}{2(\alpha \frac{1+\theta^2}{2} h^2 \lambda_k^2 + 1)}, \quad \text{tj.} \quad 1 + \frac{\theta^2 h^2 \lambda_k^2}{2(\alpha \frac{1+\theta^2}{2} h^2 \lambda_k^2 + 1)} < -1.$$

Znači da je koeficijent (27) veći od 1 za $\alpha(1+\theta^2)h^2\lambda_k^2/2+1 > 0$ i manji od -1 za $\alpha(1+\theta^2)h^2\lambda_k^2/2+1 < 0$, te možemo u jednačini (26) smenu

$$(28) \quad 1 + \frac{\theta^2 h^2 \lambda_k^2}{2(\alpha \frac{1+\theta^2}{2} h^2 \lambda_k^2 + 1)} = \begin{cases} \text{ch}(\kappa_k \theta h), & \alpha \frac{1+\theta^2}{2} h^2 \lambda_k^2 + 1 > 0, \\ -\text{ch}(\kappa_k \theta h), & \alpha \frac{1+\theta^2}{2} h^2 \lambda_k^2 + 1 < 0. \end{cases}$$

Razmotrimo svaku mogućnost posebno.

(a) Za $\alpha(1+\theta^2)h^2\lambda_k^2/2+1 > 0$ karakteristična jednačina jednačine (26) je

$$q^2 - 2\text{ch}(\kappa_k \theta h)q + 1 = 0.$$

Njeni koreni su $q_1 = e^{\kappa_k \theta h}$ i $q_2 = e^{-\kappa_k \theta h}$, pa je u tački $y = nh$

$$Y_k(y) = \hat{C}_1 e^{\kappa_k \theta h n} + \hat{C}_2 e^{-\kappa_k \theta h n} = \hat{C}_1 e^{\kappa_k y} + \hat{C}_2 e^{-\kappa_k y} = C_1 \text{ch}(\kappa_k y) + C_2 \text{sh}(\kappa_k y).$$

Iz graničnog uslova na osi Ox sledi da je $C_1 = 0$, pa je

$$(29) \quad Y_k(y) = D \text{sh}(\kappa_k y), \quad D = \text{const.}$$

(b) Za $\alpha(1+\theta^2)h^2\lambda_k^2/2+1 < 0$ karakteristična jednačina jednačine (26) je

$$q^2 + 2\text{ch}(\kappa_k \theta h)q + 1 = 0.$$

Njeni koreni su $q_1 = -e^{\kappa_k \theta h}$ i $q_2 = -e^{-\kappa_k \theta h}$, pa je u tački $y = nh$

$$Y_k'(y) = C_1(-e^{\kappa_k \theta h})^n + C_2(-e^{-\kappa_k \theta h})^n = (-1)^{\frac{y}{\theta h}} [C_1 \operatorname{ch}(\kappa_k y) + C_2 \operatorname{sh}(\kappa_k y)].$$

Iz graničnog uslova na osi Ox sledi da je $C_1=0$, pa je

$$(30) \quad Y_k(y) = (-1)^{\frac{y}{\theta h}} D \operatorname{sh}(\kappa_k y), \quad D = \text{const.}$$

Objedinjujući rezultate (29) i (30), imamo da je

$$(31) \quad Y_k(y) = \begin{cases} D \operatorname{sh}(\kappa_k y), & k=1, 2, \dots, k_0-1 \\ (-1)^{\frac{y}{\theta h}} D \operatorname{sh}(\kappa_k y), & k=k_1, \dots, 2M-1. \end{cases}$$

(Obzirom da je λ_k^2 rastuća funkcija po k , to će za neko $\alpha < 0$ izraz $\alpha(1+\theta^2)h^2\lambda_k^2/2+1$ postati negativan počev od neke vrednosti k .) k_0 je prva vrednost indeksa k za koju nije $\alpha(1+\theta^2)h^2\lambda_k^2/2+1 > 0$, a

$$k_1 = \begin{cases} k_0+1 & \text{za } \alpha(1+\theta^2)h^2\lambda_k^2/2+1 = 0, \\ k_0 & \text{za } \alpha(1+\theta^2)h^2\lambda_k^2/2+1 < 0. \end{cases}$$

Na osnovu (25) i (30) imamo da je

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{k_0-1} c_k \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a} \operatorname{sh}(\kappa_k y) + (-1)^{\frac{y}{\theta h}} \sum_{k=k_1}^{2M-1} c_k \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a} \operatorname{sh}(\kappa_k y).$$

Konstante c_k odredjujemo iz poslednjeg, još ne korišćenog, graničnog uslova

$$f(x) = u(x, b) = \sum_{k=1}^{k_0-1} c_k \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a} \operatorname{sh}(\kappa_k b) + (-1)^{\frac{b}{\theta h}} \sum_{k=k_1}^{2M-1} c_k \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a} \operatorname{sh}(\kappa_k b).$$

Sa druge strane je

$$f(x) = \sum_{k=1}^{2M-1} q_k \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a}, \quad q_k = \frac{1}{M} \sum_{j=-M}^{M-1} f(x_j) \sin \frac{k\pi(x_j+a)}{2a}, \quad k=1, 2, \dots, 2M-1.$$

Upoređujući dobijene razvoje za funkciju $f(x)$, imamo da je

$$c_k = \begin{cases} q_k / \operatorname{sh}(\kappa_k b), & k=1, 2, \dots, k_0-1 \\ (-1)^{b/0h} q_k / \operatorname{sh}(\kappa_k b), & k=k_1, \dots, 2M-1 \end{cases}$$

odnosno

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{k_0-1} q_k \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a} \frac{\operatorname{sh}(\kappa_k y)}{\operatorname{sh}(\kappa_k b)} + (-1)^{\frac{y+b}{0h}} \sum_{k=k_1}^{2M-1} q_k \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a} \frac{\operatorname{sh}(\kappa_k y)}{\operatorname{sh}(\kappa_k b)}.$$

P o s l e d i c a 3. Rešenje zadatka

$$\Delta_\alpha u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_R,$$

$$u(x, y) = f(y), \quad (x, y) \in \Gamma_2, \quad u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \bar{\Gamma} \setminus \Gamma_2,$$

za $f \in C[0, b]$, je

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{k_0-1} q_k \sin \frac{k\pi y}{b} \frac{\operatorname{sh}[\kappa_k(a+x)]}{\operatorname{sh}(2\kappa_k a)} + (-1)^{\frac{x+a}{h}} \sum_{k=k_1}^{N-1} q_k \sin \frac{k\pi y}{b} \frac{\operatorname{sh}[\kappa_k(a+x)]}{\operatorname{sh}(2\kappa_k a)},$$

gde je

$$q_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(y_j) \sin \frac{k\pi y_j}{b}, \quad k=1, 2, \dots, N-1.$$

P o s l e d i c a 4. Rešenje zadatka

$$\Delta_\alpha u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_R,$$

$$u(x, y) = f(y), \quad (x, y) \in \Gamma_4, \quad u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \bar{\Gamma} \setminus \Gamma_4$$

za $f \in C[0, b]$, je

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{k_0-1} q_k \sin \frac{k\pi y}{b} \frac{\operatorname{sh}[\kappa_k(a-x)]}{\operatorname{sh}(2\kappa_k a)} + (-1)^{\frac{x+a}{h}} \sum_{k=k_1}^{N-1} q_k \sin \frac{k\pi y}{b} \frac{\operatorname{sh}[\kappa_k(a-x)]}{\operatorname{sh}(2\kappa_k a)},$$

gde je,

$$q_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(y_j) \sin \frac{k\pi y_j}{b}, \quad k=1,2,\dots,N-1.$$

Sada možemo da formulišemo i dokažemo glavni rezultat ovog odeljka.

T e o r e m a 2.2. Greška aproksimacije mešovitog zadatka

$$(32) \quad \begin{aligned} \Delta v(x,y) &= 0, & (x,y) \in R, \\ v(x,y) &= 0, & (x,y) \in \bar{\Gamma}_1 \text{ i } x \geq 0, & \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0, & (x,y) \in \bar{\Gamma}_1 \text{ i } x < 0, \\ v(x,y) &= \psi(x,y), & (x,y) \in \bar{\Gamma} \setminus \bar{\Gamma}_1 \end{aligned}$$

diferencijskim zadatkom

$$(33) \quad \begin{aligned} \lambda_\alpha u(x,y) &= 0, & (x,y) \in \Omega_R, \\ u(x,y) &= 0, & (x,y) \in \bar{\Gamma}_1 \text{ i } x \geq 0, & \lambda_\alpha u(x,y) = 0, & (x,y) \in \bar{\Gamma}_1 \text{ i } x < 0, \\ u(x,y) &= \psi(x,y), & (x,y) \in \bar{\Gamma} \setminus \bar{\Gamma}_1, \end{aligned}$$

gde je

$$\lambda_\alpha u(x,y) \equiv u_y + \frac{\theta h}{2} u_{xx} - \alpha h^2 \frac{1+\theta^2}{2} u_{xxy},$$

je reda $O(h)$ za svako $\alpha > -1/2$.

D o k a z: Rešenje zadatka (32) predstavimo u obliku

$$(34) \quad v(x,y) = \sum_{i=1}^4 v_i(x,y) + W_0(x,y).$$

v_1 je rešenje mešovitog zadatka

$$(35) \quad \begin{aligned} \Delta v_1(x,y) &= 0, & (x,y) \in R, \\ v_1(x,y) &= 0, & (x,y) \in \bar{\Gamma}_1 \text{ i } x \geq 0, & \frac{\partial v_1(x,y)}{\partial y} = 0, & (x,y) \in \bar{\Gamma}_1 \text{ i } x < 0, \\ v_1(x,y) &= \psi_1(x,y), & (x,y) \in \bar{\Gamma} \setminus \bar{\Gamma}_1. \end{aligned}$$

Funkcija $\psi_1(x,y)$ je određena tako da bude trag funkcije $r^{1/2} \sin(\ell/2)$, (r,ℓ) - polarne koordinate, na $\bar{\gamma} \setminus \bar{\gamma}_1$, pa je (prema [13]) rešenje zadatka (35)

$$(36_1) \quad v_1(r,\ell) = \operatorname{Im} \sqrt{z} = r^{1/2} \sin \frac{\ell}{2}, \quad z = re^{i\ell}.$$

Stoga je funkcija $v-v_1$ na $\bar{\gamma}_1$ identički jednaka nuli, a na $\bar{\gamma} \setminus \bar{\gamma}_1$ jednaka $\psi - \psi_1$. Izdvojmo iz nje bilinearnu funkciju

$$(37) \quad W_0(x,y) \equiv c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{11}xy,$$

koja je jednaka $\psi - \psi_1$ u temenima pravougaonika \bar{R} . Poslednjim uslovom su određene konstante c_{ij} :

$$c_{00} = c_{10} = 0,$$

$$c_{01} = [\psi(a,b) - \psi_1(a,b) + \psi(-a,b) - \psi_1(-a,b)] / (2b),$$

$$c_{11} = [\psi(a,b) - \psi_1(a,b) - \psi(-a,b) + \psi_1(-a,b)] / (2ab).$$

Funkcija $W_0(x,y)$ je očigledno harmonijska funkcija u R .

Sada je funkcija $v-v_1-W_0$ u temenima pravougaonika R , kao i na granici $\bar{\gamma}_1$, jednaka nuli, a na granici $\bar{\gamma} \setminus \bar{\gamma}_1$ je jednaka funkciji

$$\bar{\psi} = \psi - \psi_1 - W_0 / \bar{\gamma} \setminus \bar{\gamma}_1.$$

Preostale tri funkcije u (34) v_i , $i=2,3,4$, definišimo kao rešenja Dirichletovih zadataka

$$(38) \quad \begin{aligned} \Delta v_i(x,y) &= 0, & (x,y) \in R, \\ v_i(x,y) &= \psi_i(x,y), & (x,y) \in \bar{\gamma}, \end{aligned} \quad i=2,3,4,$$

gde je

$$(39) \quad \psi_i(x,y) = \begin{cases} \bar{\psi}(x,y), & (x,y) \in \bar{\gamma}_i, \\ 0, & (x,y) \in \bar{\gamma} \setminus \bar{\gamma}_i \end{cases} \quad i=2,3,4.$$

Na osnovu leme 2.1 i posledica 1. i 2. je

$$(36_2) \quad v_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^{(2)} \sin \frac{k\pi y}{b} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi(a+x)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{2ak\pi}{b}}, \quad p_k^{(2)} = \frac{2}{b} \int_0^b \psi_2(a,y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy, \\ k=1,2,\dots$$

$$(36_3) \quad v_3(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^{(3)} \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{2a}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{2a}}, \quad p_k^{(3)} = \frac{1}{a} \int_{-a}^a \psi_3(x,b) \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a} dx, \\ k=1,2,\dots$$

$$(36_4) \quad v_4(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^{(4)} \sin \frac{k\pi y}{b} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{2ak\pi}{b}}, \quad p_k^{(4)} = \frac{2}{b} \int_0^b \psi_4(-a,y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy, \\ k=1,2,\dots$$

Rešenje zadatka (33) predstavimo sumom

$$(40) \quad u(x,y) = \sum_{i=1}^4 u_i(x,y) + W_0(x,y) + W(x,y).$$

u_1 je rešenje mešovitog zadatka

$$(41) \quad \begin{aligned} \Delta_{\alpha} u_1(x,y) &= 0, & (x,y) \in \Omega_R, \\ u_1(x,y) &= 0, & (x,y) \in \bar{\Gamma}_1 \text{ i } x \geq 0 \\ \lambda_{\alpha} u_1(x,y) &= 0, & (x,y) \in \bar{\Gamma}_1, x < 0 \\ u_1(x,y) &= \psi_2(x,y), & (x,y) \in \bar{\Gamma} \setminus \bar{\Gamma}_1, \end{aligned}$$

gde je $\psi_2(x,y)$ trag na $\bar{\Gamma} \setminus \bar{\Gamma}_1$ funkcije $F(z)$ date izrazom (2) za $A = \sqrt{\pi h(1-z_1)}/2$. Prema dokazanom u odeljku 1. ove glave, funkcija $F(z)$ je rešenje zadatka (41) i njen asimptotski razvoj je

$$(42_1) \quad u_1(x,y) = \operatorname{Im} \sqrt{z} + O(h/|z|^{1/2}).$$

Funkcija W_0 je određena izrazom (37), a funkcije u_i , $i=2,3,4$, su rešenja diferencijalnih zadataka

$$(43) \quad \begin{aligned} \Delta_{\alpha} u_i(x,y) &= 0, & (x,y) \in \Omega_R, \\ u_i(x,y) &= \psi_i(x,y), & (x,y) \in \bar{\Gamma}, \end{aligned} \quad i=2,3,4,$$

gde su funkcije $\psi_i(x,y)$ definisane relacijama (39). Na osnovu leme 2.2 i posledica 3. i 4. je

$$(42_2) \quad \begin{aligned} u_2(x,y) &= \sum_{k=1}^{k_0-1} q_k^{(2)} \sin \frac{k\pi y}{b} \frac{\text{sh}[\kappa_k(a+x)]}{\text{sh}(2\kappa_k a)} + (-1)^{\frac{x+a}{h}} \sum_{k=k_1}^{N-1} q_k^{(2)} \sin \frac{k\pi y}{b} \frac{\text{sh}[\kappa_k(a+x)]}{\text{sh}(2\kappa_k a)}, \\ q_k^{(2)} &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \psi_2(a, y_j) \sin \frac{k\pi y_j}{b}, \quad k=1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

$$(42_3) \quad \begin{aligned} u_3(x,y) &= \sum_{k=1}^{k_0-1} q_k^{(3)} \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a} \frac{\text{sh}(\kappa_k y)}{\text{sh}(\kappa_k b)} + (-1)^{\frac{y+b}{2h}} \sum_{k=k_1}^{2M-1} q_k^{(3)} \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a} \frac{\text{sh}(\kappa_k y)}{\text{sh}(\kappa_k b)}, \\ q_k^{(3)} &= \frac{1}{M} \sum_{j=-M}^{M-1} \psi_3(x_j, b) \sin \frac{k\pi(x_j+a)}{2a}, \quad k=1, \dots, 2M-1 \end{aligned}$$

$$(42_4) \quad \begin{aligned} u_4(x,y) &= \sum_{k=1}^{k_0-1} q_k^{(4)} \sin \frac{k\pi y}{b} \frac{\text{sh}[\kappa_k(a-x)]}{\text{sh}(2\kappa_k a)} + (-1)^{\frac{x+a}{h}} \sum_{k=k_1}^{N-1} q_k^{(4)} \sin \frac{k\pi y}{b} \frac{\text{sh}[\kappa_k(a-x)]}{\text{sh}(2\kappa_k a)}, \\ q_k^{(4)} &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \psi_4(-a, y_j) \sin \frac{k\pi y_j}{b}, \quad k=1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

I na kraju, funkcija $W(x,y)$ je rešenje Dirichletovog zadatka

$$(44) \quad \begin{aligned} \Delta_{\alpha} W(x,y) &= 0, & (x,y) \in \Omega_R, \\ W(x,y) &= 0, & (x,y) \in \bar{\Gamma}_1, \\ W(x,y) &= \psi_1(x,y) - \psi_2(x,y), & (x,y) \in \bar{\Gamma} \setminus \bar{\Gamma}_1. \end{aligned}$$

Greška aproksimacije zadatka (32) zadatkom (33) je

$$\epsilon(x,y) \equiv v(x,y) - u(x,y),$$

tj., obzirom na (34) i (40), je

$$(45) \quad \varepsilon(x,y) \equiv \sum_{i=1}^4 E_i(x,y) - W(x,y),$$

gde je

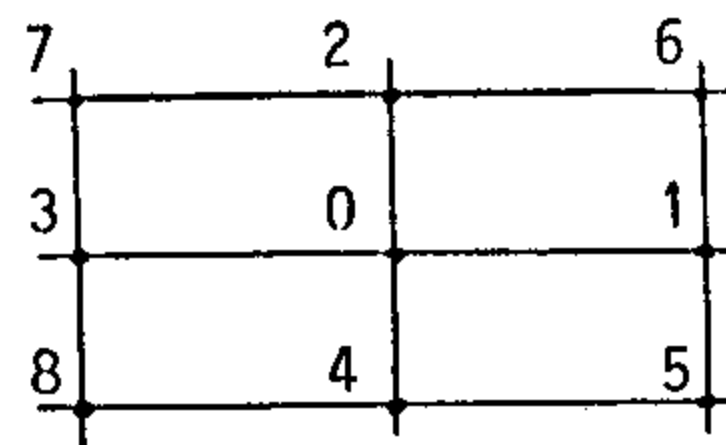
$$(46) \quad E_i(x,y) \equiv v_i(x,y) - u_i(x,y), \quad i=1,2,3,4.$$

Procenimo prvo funkciju $W(x,y)$. Na $\bar{\Gamma}_1$ ona je 0, a na $\bar{\Gamma} \setminus \bar{\Gamma}_1$ je (prema (36₁) i (42₁))

$$(\psi_1 - \psi_2) / \bar{\Gamma} \setminus \bar{\Gamma}_1 = (v_1 - u_1) / \bar{\Gamma} \setminus \bar{\Gamma}_1 = O(h) \quad \text{za } |z| = O(1).$$

Ako za operator Λ_α važi princip maksimuma, onda rešenje zadatka (44) ekstremum dostiže na granici, pa je

$$(47) \quad |W| \leq \max_{\bar{\Gamma}} |W| \leq Mh.$$



Sl.3.

Odredimo još pod kojim uslovima za operator Λ_α važi princip maksimuma. Operator Λ_α u čvoru u_0 (sl.3) ima oblik

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha u_0 \equiv & -\frac{1}{h^2} \left\{ 2(1+\alpha) \frac{1+\theta^2}{\theta^2} u_0 - \left(1 + \alpha \frac{1+\theta^2}{\theta^2} \right) (u_1 + u_3) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{\theta^2} + \alpha \frac{1+\theta^2}{\theta^2} \right) (u_2 + u_4) + \alpha \frac{1+\theta^2}{2\theta^2} (u_5 + u_6 + u_7 + u_8) \right\}. \end{aligned}$$

Prema [27], za Λ_α važi princip maksimuma ako je

1. $2(1+\alpha)(1+\theta^2)/\theta^2 > 0,$
2. $1+\alpha(1+\theta^2)/\theta^2 > 0,$
3. $1/\theta^2 + \alpha(1+\theta^2)/\theta^2 > 0,$
4. $-\alpha(1+\theta^2)/(2\theta^2) > 0,$

$$5. \quad 2(1+\alpha) \frac{1+\theta^2}{\theta^2} - \left(1 + \alpha \frac{1+\theta^2}{\theta^2} \right) - \left(\frac{1}{\theta^2} + \alpha \frac{1+\theta^2}{\theta^2} \right) + \alpha \frac{1+\theta^2}{2\theta^2} \geq 0.$$

Iz uslova 4. sledi da mora biti $\alpha < 0$. Uslov 1. važi za svako $\alpha \neq 0$, jer je po pretpostavci $\alpha > -1/2$. Iz uslova 2. i 3. sledi da treba da je za $\alpha < 0$ $-\alpha/(1+\alpha) < \theta^2 < -(1+\alpha)/\alpha$. I, konačno, uslov 5. je zadovoljen za svako $-1/2 < \alpha < 0$. Za $\alpha = 0$ operator je

$$\Lambda_0 u_0 \equiv -\frac{1}{h^2} \left[2\left(\frac{1}{\theta} + 1\right)u_0 - (u_1 + u_3) - \frac{1}{\theta^2} (u_2 + u_4) \right],$$

pa za njega važi princip maksimuma za svako θ .

Stoga ocena (47) važi za

$$\sqrt{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} < \theta < \sqrt{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}, \quad -1/2 < \alpha < 0.$$

U nastavku ocenjujemo funkcije $E_i(x, y)$, $i=1, 2, 3, 4$, određene relacijama (46). Obzirom na (36₁) i (42₁) je

$$(48) \quad E_1(x, y) \equiv v_1(x, y) - u_1(x, y) = O(h).$$

Dalje, smenom (36₃) i (42₃) u (46) za $i=3$, imamo da je

$$E_3(x, y) \equiv v_3(x, y) - u_3(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^{(3)} \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a} \frac{\text{sh} \frac{k\pi y}{2a}}{\text{sh} \frac{k\pi b}{2a}} -$$

$$- \left[\sum_{k=1}^{k_0-1} q_k^{(3)} \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a} \frac{\text{sh}(\kappa_k y)}{\text{sh}(\kappa_k b)} + (-1)^{\frac{y+b}{\theta h}} \sum_{k=k_1}^{2M-1} q_k^{(3)} \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a} \frac{\text{sh}(\kappa_k y)}{\text{sh}(\kappa_k b)} \right].$$

Stavimo da je

$$(49) \quad E_3 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4,$$

gde je

$$(50_1) \quad S_1(x, y) = \sum_{k=k_0}^{\infty} p_k^{(3)} \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a} \frac{\text{sh} \frac{k\pi y}{2a}}{\text{sh} \frac{k\pi b}{2a}},$$

$$(50_2) \quad S_2(x, y) = \sum_{k=1}^{k_0-1} p_k^{(3)} \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a} \left(\frac{\text{sh} \frac{k\pi y}{2a}}{\text{sh} \frac{k\pi b}{2a}} - \frac{\text{sh}(\kappa_k y)}{\text{sh}(\kappa_k b)} \right),$$

$$(50_3) \quad S_3(x, y) = \sum_{k=1}^{k_0-1} (p_k^{(3)} - q_k^{(3)}) \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a} \frac{\text{sh}(\kappa_k y)}{\text{sh}(\kappa_k b)}.$$

$$(50_4) S_4(x,y) = (-1)^{1 + \frac{y+b}{\theta h}} \sum_{k=k_1}^{2M-1} q_k^{(3)} \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a} \frac{\text{sh}(\kappa_k y)}{\text{sh}(\kappa_k b)}$$

Ocenimo prvo k_0 u funkciji od α . k_0 je, prema lemi 2.2., prva vrednost indeksa k za koju nije

$$\alpha \frac{1+\theta^2}{2} h^2 \lambda_k^2 + 1 > 0,$$

gde su λ_k^2 karakteristične vrednosti zadatka (43) za $i=3$ (prema 24))

$$\lambda_k^2 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{4a}.$$

Stoga je

$$(51) \quad 2\alpha(1+\theta^2) \sin^2 \frac{(k_0-1)\pi h}{4a} + 1 > 0, \quad 2\alpha(1+\theta^2) \sin^2 \frac{k_0 \pi h}{4a} + 1 \leq 0.$$

Druga od ove dve nejednakosti je moguća samo za vrednosti $\alpha < 0$, i pri tome je

$$2\alpha(1+\theta^2) \sin^2 \frac{k\pi h}{4a} + 1 = 1 - 2|\alpha|(1+\theta^2) \sin^2 \frac{k\pi h}{4a} > 1 - 2|\alpha|(1+\theta^2) \geq 0$$

za $|\alpha| \leq 1/(2(1+\theta^2))$ i za svako k . Odavde se zaključuje da je za $\alpha \geq -1/(2(1+\theta^2))$ izraz

$$(52) \quad \alpha \frac{1+\theta^2}{2} h^2 \lambda_k^2 + 1$$

veći od nule za svako k , pa se može uzeti da je $k_0 = 2M$.

Ostaje da se analizira slučaj za

$$-\frac{1}{2} < \alpha < -\frac{1}{2(1+\theta^2)}.$$

Iz prve nejednakosti (51) je

$$-2\alpha(1+\theta^2) \sin^2 \frac{(k_0-1)\pi h}{4a} < 1 \quad / \quad : [-2\alpha(1+\theta^2)] \quad (> 0 \text{ za } \alpha < 0)$$

$$\sin^2 \frac{(k_0 - 1)\pi h}{4a} < \frac{1}{2\alpha(1+\theta^2)}, \quad \text{tj.} \quad \frac{(k_0 - 1)\pi h}{4a} < \arcsin \frac{1}{\sqrt{2|\alpha|(1+\theta^2)}},$$

jer je $\arcsin x$ monotono rastuća funkcija. Odavde je

$$k_0 - 1 < \frac{4a}{\pi h} \arcsin \frac{1}{\sqrt{2|\alpha|(1+\theta^2)}}.$$

Kako je $\arcsin x \leq \frac{\pi}{2}x$ za $x \in (0, 1)$ i $a = Mh$, to je

$$k_0 < 1 + \frac{2M}{\sqrt{2|\alpha|(1+\theta^2)}}.$$

Iz druge nejednakosti (51) je

$$\sin^2 \frac{k_0 \pi h}{4a} \geq \frac{1}{2\alpha(1+\theta^2)}, \quad \text{tj.} \quad \frac{k_0 \pi h}{4a} \geq \arcsin \frac{1}{\sqrt{2|\alpha|(1+\theta^2)}} \geq \frac{1}{\sqrt{2|\alpha|(1+\theta^2)}},$$

što sledi iz asimptotskog razvoja za funkciju $\arcsin x$ za $x \geq 0$.

Objedinjujući dobijene ocene imamo da je

$$(53) \quad \frac{4M}{\pi\sqrt{2|\alpha|(1+\theta^2)}} \leq k_0 < 1 + \frac{2M}{\sqrt{2|\alpha|(1+\theta^2)}} \quad \text{za} \quad -\frac{1}{2} < \alpha < -\frac{1}{2(1+\theta^2)}.$$

Procenjujemo prvo funkciju $S_1(x, y)$. Uvedimo oznaku

$$(54) \quad T(v, y) = \frac{\text{sh}(vy)}{\text{sh}(vb)}, \quad v > 0.$$

Kako je

$$T(v, y) = e^{-v(b-y)} \frac{1 - e^{-2vy}}{1 - e^{-2vb}},$$

a za $y < b$, tj. $vy < vb$ je $e^{-2vy} > e^{-2vb}$, tj. $1 - e^{-2vy} < 1 - e^{-2vb}$, imamo da je

$$(55) \quad T(v, y) < e^{-v(b-y)}.$$

Dalje je, obzirom na (36₃), za $C = \max_{x \in (-a, a)} |\psi_3(x, b)|$

$$(56) \quad |p_k^{(3)}| \leq \frac{1}{a} \int_{-a}^a |\psi_3(x, b)| \left| \sin \frac{k\pi(x+a)}{2a} \right| dx \leq 2c, \quad k=1, 2, \dots$$

Stavljajući dobijene ocene u (50₁), imamo da je

$$|S_1(x,y)| \leq 2c \sum_{k=k_0}^{\infty} e^{-\frac{k\pi}{2a}(b-y)} = 2ce^{-\frac{k_0\pi}{2a}(b-y)} \frac{1}{1-e^{-\frac{\pi}{2a}(b-y)}}.$$

Za svaki ceo broj $\ell > 0$ i $t > 0$ je

$$t^\ell e^{-t} = t^\ell \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^\ell}{\ell!} + \dots\right)^{-1} \leq \frac{t^\ell}{t^\ell} = \ell!,$$

tj.

$$(57) \quad e^{-t} \leq \frac{\ell!}{t^\ell}, \quad \ell > 0, \quad t > 0.$$

Koristeći majorantu (57) za $t = k_0 \pi(b-y)/(2a)$, dobijamo da je za svaki prirodan broj ℓ , obzirom na ocenu (53),

$$|S_1| \leq \frac{2c\ell!}{1-e^{-\frac{\pi}{2a}(b-y)}} \cdot \frac{1}{\left|\frac{k_0\pi(b-y)}{2a}\right|^\ell} \leq$$

$$\leq 2c\ell! \left|1-e^{-\frac{\pi}{2a}(b-y)}\right|^{-1} \left|\frac{\pi(b-y)}{2a}\right|^{-\ell} \left|\frac{\pi\sqrt{2|\alpha|(1+\theta)^2}}{4M}\right|^\ell$$

Kako je još $M=a/h$, to je

$$(58) \quad S_1(x,y) = O(h^\ell), \quad \forall \ell > 0.$$

Ocenimo sada sumu $S_2(x,y)$. Predstavimo funkciju $T(v,y)$, definisanu relacijom (54), u tački $v = \kappa_k$ Taylorovim redom napisanim u odnosu na tačku $v = \frac{k\pi}{2a}$:

$$(59) \quad T(\kappa_k, y) = T\left(\frac{k\pi}{2a}, y\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j T(v,y)}{\partial v^j} \Big|_{v=\frac{k\pi}{2a}} \left(\kappa_k - \frac{k\pi}{2a}\right)^j.$$

Odredimo koeficijente Taylorovog razvoja (59).

$$\frac{\partial T(v,y)}{\partial v} = T(v,y) [y \operatorname{cth}(vy) - b \operatorname{cth}(vb)]$$

Uvedimo oznaku

$$(60) \quad c(v) = y \operatorname{cth}(vy) - b \operatorname{cth}(vb)$$

pa je

$$\frac{\partial T(v,y)}{\partial v} = T(v,y) \cdot c(v).$$

Diferenciranjem poslednjeg izraza po parametru v više puta, dobijamo

$$\frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = \frac{\partial T}{\partial v} c + T \frac{dc}{dv} = T c^2 + T \frac{dc}{dv} = T \left(c^2 + \frac{dc}{dv} \right) = T P_2 \left(c, \frac{dc}{dv} \right),$$

$$\frac{\partial^3 T}{\partial v^3} = T \left(c^3 + 3c \frac{dc}{dv} + \frac{d^2 c}{dv^2} \right) = T \cdot P_3 \left(c, \frac{dc}{dv}, \frac{d^2 c}{dv^2} \right),$$

.....

$$(61) \quad \frac{\partial^j T}{\partial v^j} = T(v,y) \cdot P_j \left(c, \frac{dc}{dv}, \dots, \frac{d^{j-1} c}{dv^{j-1}} \right), \quad j=1,2,\dots$$

gde je P_j polinom po navedenim argumentima, stepena j po c . Iz (60) je

$$\frac{dc}{dv} = -\frac{y^2}{\operatorname{sh}^2(vy)} + \frac{b^2}{\operatorname{sh}^2(vb)} = (2b)^2 \left[\frac{1}{e^{2vb}-1} + \frac{1}{(e^{2vb}-1)^2} \right] - (2y)^2 \left[\frac{1}{e^{2vy}-1} + \frac{1}{(e^{2vy}-1)^2} \right].$$

Kako je

$$(62) \quad \frac{d}{dv} \left[\frac{1}{(e^{2vx}-1)^k} \right] = -2xk \left[\frac{1}{(e^{2vx}-1)^k} + \frac{1}{(e^{2vx}-1)^{k+1}} \right]$$

to je

$$\frac{d^2 c}{dv^2} = (-2b)^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\sigma_{i,2}}{(e^{2vb}-1)^i} - (-2y)^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\sigma_{i,2}}{(e^{2vy}-1)^i}$$

gde je $\sigma_{1,2}=1$, $\sigma_{2,2}=3$, $\sigma_{3,2}=2$.

Ako je,

$$\frac{d^{k-1}c}{dv^{k-1}} = (-2b)^k \sum_{i=1}^k \frac{\sigma_{i,k-1}}{(e^{2vb}-1)^i} - (-2y)^k \sum_{i=1}^k \frac{\sigma_{i,k-1}}{(e^{2vy}-1)^i}$$

onda je, prema (62)

$$\begin{aligned} \frac{d^k c}{dv^k} &= (-2b)^k \sum_{i=1}^k \sigma_{i,k-1} (-2bi) \left[\frac{1}{(e^{2vb}-1)^i} + \frac{1}{(e^{2vb}-1)^{i+1}} \right] - \\ &- (-2y)^k \sum_{i=1}^k \sigma_{i,k-1} (-2yi) \left[\frac{1}{(e^{2vy}-1)^i} + \frac{1}{(e^{2vy}-1)^{i+1}} \right] = \\ &= (-2b)^{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\sigma_{i,k}}{(e^{2vb}-1)^i} - (-2y)^{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\sigma_{i,k}}{(e^{2vy}-1)^i}, \end{aligned}$$

gde je $\sigma_{i,k} = i\sigma_{i,k-1} + (i-1)\sigma_{i-1,k-1}$, $i=1,2,\dots,k$, $\sigma_{k+1,k-1}=0$. Stoga se argumenti polinoma P_j u (61) računaju po formuli

$$\frac{d^j c}{dv^j} = (-2b)^{j+1} \sum_{i=1}^{j+1} \frac{\sigma_{i,j}}{(e^{2vb}-1)^i} - (-2y)^{j+1} \sum_{i=1}^{j+1} \frac{\sigma_{i,j}}{(e^{2vy}-1)^i}, \quad j=1,2,\dots$$

$$(63) \quad \sigma_{1,1} = \sigma_{2,1} = 1$$

$$\sigma_{i,j} = i\sigma_{i,j-1} + (i-1)\sigma_{i-1,j-1}, \quad 1 \leq i \leq j+1, \quad \sigma_{j+1,j-1} = 0, \quad j=2,3,\dots$$

Za odredjivanje razvoja (59) potrebno je još odrediti veličinu $\kappa_k - k\pi/(2a)$. U sumi S_2 (form. (50₂)) je $k=1,2,\dots,k_0-1$, pa je κ_k odredjeno prvom nejedna-košću (28), tj.

$$\operatorname{ch}(\kappa_k \theta h) = 1 + \frac{2\theta^2 \sin^2 \frac{k\pi h}{4a}}{2\alpha(1+\theta^2) \sin^2 \frac{k\pi h}{4a} + 1} \quad \text{za} \quad 2\alpha(1+\theta^2) \sin^2 \frac{k\pi h}{4a} + 1 > 0.$$

Oдавде je

$$\kappa_k \theta h = \ln \left\{ 1 + \frac{2\theta^2 \sin^2 \frac{k\pi h}{4a}}{2\alpha(1+\theta^2) \sin^2 \frac{k\pi h}{4a} + 1} + \sqrt{\left| \frac{2\theta^2 \sin^2 \frac{k\pi h}{4a}}{2\alpha(1+\theta^2) \sin^2 \frac{k\pi h}{4a} + 1} \right|^2 - 1} \right\}$$

$$(64) \quad \kappa_{k\theta h} = \ln \left\{ 1 - \frac{2}{1 - \sqrt{1 + 2\alpha \frac{1+\theta^2}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2 \sin^2 \frac{k\pi h}{4a}}}} \right\}.$$

Odredimo asimptotski razvoj izraza (64)

$$\begin{aligned} (\sin^2 \frac{k\pi h}{4a})^{-1} &= 2(1 - \cos \frac{k\pi h}{2a})^{-1} = 2 \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} (\frac{k\pi h}{2a})^{2n} \right]^{-1} = \\ &= 4 \left(\frac{2a}{k\pi h} \right)^2 \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[2(n+1)]!} (\frac{k\pi h}{2a})^{2n} \right\}^{-1} = \\ &= 4 \left(\frac{2a}{k\pi h} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{k\pi h}{2a} \right)^2 + \frac{1}{240} \left(\frac{k\pi h}{2a} \right)^4 + \frac{1}{6048} \left(\frac{k\pi h}{2a} \right)^6 + o(h^8) \right] \end{aligned}$$

$$\sqrt{1 + 2\alpha \frac{1+\theta^2}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2 \sin^2 \frac{k\pi h}{4a}}} = \left[1 + 2\alpha \frac{1+\theta^2}{\theta^2} + \frac{4}{\theta^2} \left(\frac{2a}{k\pi h} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{k\pi h}{2a} \right)^2 + o(h^4) \right] \right]^{1/2} =$$

$$= \frac{2}{\theta} \frac{2a}{k\pi h} \left[1 + \left(\frac{\theta^2}{4} + \alpha \frac{1+\theta^2}{2} + \frac{1}{12} \right) \left(\frac{k\pi h}{2a} \right)^2 + o(h^4) \right]^{1/2} =$$

$$= \frac{2}{\theta} \frac{2a}{k\pi h} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta^2}{4} + \alpha \frac{1+\theta^2}{2} + \frac{1}{12} \right) \left(\frac{k\pi h}{2a} \right)^2 + o(h^4) \right]$$

$$2 \left[1 - \sqrt{1 + 2\alpha \frac{1+\theta^2}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2 \sin^2 \frac{k\pi h}{4a}}} \right]^{-1} = \theta \frac{k\pi h}{2a} \left[\frac{\theta}{2} \frac{k\pi h}{2a} - 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\theta^2}{4} + \alpha \frac{1+\theta^2}{2} + \frac{1}{12} \right) \left(\frac{k\pi h}{2a} \right)^2 + o(h^4) \right]^{-1} =$$

$$= - \left[\frac{k\pi h}{2a} \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{k\pi h}{2a} \theta \right)^2 - \frac{1}{24} \left(6\alpha \frac{1+\theta^2}{\theta^2} - 3 + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{k\pi h}{2a} \theta \right)^3 + o(h^4) \right]$$

$$\begin{aligned} \ln\left(1 - \frac{2}{1 - \sqrt{1 + 2\alpha \frac{1+\theta^2}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2 \sin^2 \frac{k\pi h}{4a}}}}\right) &= \\ &= \ln\left[1 + \frac{k\pi\theta h}{2a} + \frac{1}{2}\left(\frac{k\pi\theta h}{2a}\right)^2 - \frac{1}{24}\left(6\alpha \frac{1+\theta^2}{\theta^2} - 3 + \frac{1}{\theta^2}\right)\left(\frac{k\pi\theta h}{2a}\right)^3 + O(h^4)\right] = \\ &= \frac{k\pi\theta h}{2a} - \frac{1}{4}\left(\alpha + \frac{1}{6}\right) \frac{1+\theta^2}{\theta^2} \left(\frac{k\pi\theta h}{2a}\right)^3 + O(h^4). \end{aligned}$$

Zamenimo poslednji dobijeni izraz u (64), pa imamo da je

$$(65) \quad \kappa_k - \frac{k\pi}{2a} = -\frac{1}{4}\left(\alpha + \frac{1}{6}\right)(1+\theta^2)\left(\frac{k\pi}{2a}\right)^3 h^2 + O(h^3).$$

Za $\alpha = -1/6$ se dobija

$$(65_1) \quad \kappa_k - \frac{k\pi}{2a} = -\frac{1+119\theta^4}{480}\left(\frac{k\pi}{2a}\right)^5 h^4 + O(h^5).$$

Koristeći izraze (61), (63) i (65), tj. (65₁), dobijamo iz (59) da je

$$(66) \quad \begin{aligned} T(\kappa_k, y) - T\left(\frac{k\pi}{2a}, y\right) &= \\ &= T\left(\frac{k\pi}{2a}, y\right) \left[b \operatorname{cth}\left(\frac{k\pi}{2a} b\right) - y \operatorname{cth}\left(\frac{k\pi}{2a} y\right) \right] \frac{1}{4}\left(\alpha + \frac{1}{6}\right)(1+\theta^2)\left(\frac{k\pi}{2a}\right)^3 h^2 + O(h^3), \end{aligned}$$

i, posebno, za $\alpha = -1/6$

$$(66_1) \quad \begin{aligned} T(\kappa_k, y) - T\left(\frac{k\pi}{2a}, y\right) &= \\ &= T\left(\frac{k\pi}{2a}, y\right) \left[b \operatorname{cth}\left(\frac{k\pi}{2a} b\right) - y \operatorname{cth}\left(\frac{k\pi}{2a} y\right) \right] \frac{1+119\theta^4}{480}\left(\frac{k\pi}{2a}\right)^5 h^4 + O(h^5). \end{aligned}$$

Funkcija $F(v, y) = y \operatorname{cth}(vy)$ je rastuća funkcija po y jer je

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} F(v, y) &= \operatorname{cth}(vy) - \frac{vy}{\operatorname{sh}^2(vy)} = \frac{\frac{1}{2} \operatorname{sh}(2vy) - vy}{\operatorname{sh}^2(vy)} = \\ &= \frac{1}{\operatorname{sh}^2(vy)} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2vy)^{2i+1}}{(2i+1)!} - vy \right] > 0 \end{aligned}$$

i stoga sledi da je $b\text{cth}(vb) - y\text{cth}(vy) \leq 2b\text{cth}(vb)$.
 Funkcija $F(v,y)$ je opadajuća funkcija po v jer je

$$\frac{\partial}{\partial v} F(v,y) = -\frac{y^2}{\text{sh}^2 vy} < 0,$$

pa je $b\text{cth}(\frac{k\pi}{2a}b) \leq b\text{cth}(\frac{\pi}{2a}b)$ za svako $k=1,2,\dots$.
 Odatle sledi da je

$$b\text{cth}(\frac{k\pi}{2a}b) - y\text{cth}(\frac{k\pi}{2a}y) \leq 2b\text{cth}(\frac{\pi}{2a}b), \quad k=1,2,\dots$$

Koristeći i nejednakost (55), iz (66) i (66₁) dobijamo da je

$$|T(\kappa_k, y) - T(\frac{k\pi}{2a}, y)| \leq \begin{cases} C_1 (\frac{k\pi}{2a})^3 e^{-\frac{k\pi}{2a}(b-y)} h^2 + O(h^3), & \alpha \neq -1/6 \\ C_2 (\frac{k\pi}{2a})^5 e^{-\frac{k\pi}{2a}(b-y)} h^4 + O(h^5), & \alpha = -1/6. \end{cases}$$

Ova ocena i ocena (56) daju nam da je za $\alpha \neq -1/6$ (na osnovu (50₂))

$$\begin{aligned} |S_2| &\leq 2C \cdot C_1 \left[\sum_{k=1}^{k_0-1} (\frac{k\pi}{2a})^3 e^{-\frac{k\pi}{2a}(b-y)} \right] h^2 + O(h^3) \leq \\ &\leq 2C \cdot C_1 (\frac{\pi}{2a})^3 \left[\sum_{k=1}^{\infty} k^3 (e^{-\frac{\pi(b-y)}{2a}})^k \right] h^2 + O(h^3). \end{aligned}$$

Na osnovu form. 5.2.2.6 iz [26] je

$$|S_2| \leq 2C \cdot C_1 (\frac{\pi}{2a})^3 \frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4} h^2 + O(h^3) \quad \text{za} \quad x = e^{-\frac{\pi(b-y)}{2a}} < 1.$$

Analogno zaključujemo da je za $\alpha = -1/6$

$$|S_2| \leq C_3 h^4 + O(h^5).$$

$$(67) \quad S_2(x, y) = \begin{cases} O(h^2) & \text{za } \alpha \neq -1/6. \\ O(h^4) & \text{za } \alpha = -1/6. \end{cases}$$

Da bi ocenili sumu $S_4(x, y)$ odredjenu izrazom (50₄), ocenimo funkciju $T(\kappa_k, y)$ za $k \geq k_0$. Na osnovu (20) je κ_k tada odredjeno relacijom

$$\operatorname{ch}(\kappa_k \theta h) = \frac{2\alpha(1+\theta^2)\sin^2 \frac{k\pi h}{4a} + 1 + 2\theta^2 \sin^2 \frac{k\pi h}{4a}}{|2\alpha(1+\theta^2)\sin^2 \frac{k\pi h}{4a} + 1|}$$

pri čemu je $2\alpha(1+\theta^2)\sin^2 \frac{k\pi h}{4a} + 1 < 0$. Odatle je

$$\begin{aligned} \kappa_k &= \frac{1}{\theta h} \operatorname{arct} \frac{2\alpha(1+\theta^2)\sin^2 \frac{k\pi h}{4a} + 1 + 2\theta^2 \sin^2 \frac{k\pi h}{4a}}{|2\alpha(1+\theta^2)\sin^2 \frac{k\pi h}{4a} + 1|} + \\ & \quad \cdot \sqrt{\left| \frac{2\alpha(1+\theta^2)\sin^2 \frac{k\pi h}{4a} + 1 + 2\theta^2 \sin^2 \frac{k\pi h}{4a}}{2\alpha(1+\theta^2)\sin^2 \frac{k\pi h}{4a} + 1} \right|^2 - 1} = \\ &= \frac{1}{\theta h} \operatorname{arct} \frac{\theta \sin \frac{k\pi h}{4a} + \sqrt{2\alpha(1+\theta^2)\sin^2 \frac{k\pi h}{4a} + 1 + \theta^2 \sin^2 \frac{k\pi h}{4a}}}{\theta \sin \frac{k\pi h}{4a} - \sqrt{2\alpha(1+\theta^2)\sin^2 \frac{k\pi h}{4a} + 1 + \theta^2 \sin^2 \frac{k\pi h}{4a}}}, \end{aligned}$$

pa je $\kappa_k \geq 0$ jer je $\sin(k\pi h/(4a)) > 0$ za $k = k_1, \dots, 2M-1$. Pokažimo da je κ_k strogo veće od nule. Bilo bi $\kappa_k = 0$ kada bi bilo

$$2\alpha(1+\theta^2)\sin^2 \frac{k\pi h}{4a} + 1 + \theta^2 \sin^2 \frac{k\pi h}{4a} = 0,$$

tj. za

$$(1+2\alpha)(1+\theta^2)\sin^2 \frac{k\pi h}{4a} + \cos^2 \frac{k\pi h}{4a} = 0,$$

a to nije moguće ni za jedno k jer je $\alpha > -1/2$. Stoga je

$$(68) \quad \kappa_k \geq \epsilon \frac{k\pi}{2a} \quad \text{za } \epsilon > 0.$$

Kako je $\text{sh}\kappa_k y \leq \text{ch}\kappa_k y$, to je

$$T(\kappa_k, y) \leq G(\kappa_k, y) \quad \text{za} \quad G(v, y) = \frac{\text{ch}vy}{\text{sh}vb}$$

$G(v, y)$ je opadajuća funkcija po v , jer je za $y < b$, $\text{sh}vy < \text{ch}vy$ i $\text{sh}vb < \text{ch}vb$, pa je

$$\frac{\partial}{\partial v} G(v, y) = \frac{y \text{sh}vy \text{sh}vb - b \text{ch}vy \text{ch}vb}{(\text{sh}vb)^2} < 0.$$

Obzirom na (68) je onda

$$\begin{aligned} T(\kappa_k, y) \leq G(\kappa_k, y) &\leq G\left(\varepsilon \frac{k\pi}{2a}, y\right) = \frac{e^{\varepsilon \frac{k\pi}{2a} y} + e^{-\varepsilon \frac{k\pi}{2a} y}}{e^{\varepsilon \frac{k\pi}{2a} b} - e^{-\varepsilon \frac{k\pi}{2a} b}} = \\ &= e^{-\varepsilon \frac{k\pi}{2a} (b-y)} \frac{1 + e^{-\varepsilon \frac{k\pi}{a} y}}{1 - e^{-\varepsilon \frac{k\pi}{a} b}} \end{aligned}$$

Za $x > 0$ je $1 + e^{-x} < 2$, i za $\sigma > 0$ i $x > 0$ je $e^{\sigma x} = 1 + \sigma x + \frac{\sigma^2 x^2}{2!} + \dots$, pa je

$$e^{\sigma x} \geq 1 + \sigma x,$$

$$e^{-\sigma x} \leq \frac{1}{1 + \sigma x} = 1 - \frac{\sigma x}{1 + \sigma x},$$

$$1 - e^{-\sigma x} \geq \frac{\sigma x}{1 + \sigma x},$$

$$\frac{1}{1 - e^{-\sigma x}} \leq 1 + \frac{1}{\sigma x}.$$

Koristeći prethodne majoracije, imamo da je

$$T(\kappa_k, y) \leq 2 \left(1 + \frac{a}{\varepsilon k \pi b}\right) e^{-\varepsilon \frac{k\pi}{2a} (b-y)}.$$

Uvrstimo poslednju ocenu u (50₄):

$$\begin{aligned}
|S_4|^2 &\leq \sum_{k=k_1}^{2M-1} |q_k^{(3)}|^2 \sum_{k=k_1}^{2M-1} \frac{\text{sh}^2(\kappa_k y)}{\text{sh}^2(\kappa_k b)} \leq \sum_{k=k_1}^{2M-1} |q_k^{(3)}|^2 \sum_{k=k_1}^{\infty} [T(\kappa_k, y)]^2 \leq \\
&\leq \sum_{k=k_1}^{2M-1} |q_k^{(3)}|^2 \cdot 4 \sum_{k=k_1}^{\infty} \left(1 + \frac{a}{\varepsilon \pi b k}\right)^2 e^{-\varepsilon \frac{k\pi}{a}(b-y)} \leq \\
&\leq \sum_{k=k_1}^{2M-1} |q_k^{(3)}|^2 \cdot 4 \left(1 + \frac{a}{\varepsilon \pi b k_1}\right)^2 \sum_{k=k_1}^{\infty} e^{-\varepsilon \frac{k\pi}{a}(b-y)},
\end{aligned}$$

tj.

$$|S_4|^2 \leq \sum_{k=k_1}^{2M-1} |q_k^{(3)}|^2 \cdot 4 \left(1 + \frac{a}{\varepsilon \pi b k_1}\right)^2 \left[1 - e^{-\varepsilon \frac{\pi}{a}(b-y)}\right]^{-1} e^{-\varepsilon \frac{k_1 \pi}{a}(b-y)}.$$

Na osnovu (57), za svaki ceo broj $\ell > 0$ je

$$|S_4|^2 \leq \sum_{k=k_1}^{2M-1} |q_k^{(3)}|^2 \frac{4\ell!}{1 - e^{-\varepsilon \frac{\pi}{a}(b-y)}} \left[\varepsilon \frac{\pi}{a}(b-y) k_1\right]^{-\ell} \left(1 + \frac{a}{\varepsilon \pi b k_1}\right)^2,$$

s obzirom na (21) i (53) je

$$(69) \quad |S_4|^2 \leq \sum_{k=k_1}^{2M-1} |q_k^{(3)}|^2 \frac{4\ell!}{1 - e^{-\varepsilon \frac{\pi}{a}(b-y)}} \left[e^{\frac{\pi(b-y)}{a}} \frac{4M}{\pi \sqrt{2|\alpha|(1+\theta^2)}} \right]^{-\ell} \left(1 + \frac{a}{\varepsilon \pi b} \frac{\pi \sqrt{2|\alpha|(1+\theta^2)}}{4M}\right)^2.$$

Procenimo još sumu $\sum_{k=k_1}^{2M-1} |q_k^{(3)}|^2$. Iz (42₃) imamo da je

$$\begin{aligned}
\|\psi_3\|_0^2 &= \sum_{j=-M}^{M-1} |\psi_3(x_j, b)|^2 h = h \sum_{j=-M}^{M-1} \left| \sum_{k=1}^{2M-1} q_k^{(3)} \sin \frac{k\pi(x_j+a)}{2a} \right|^2 = \\
&= h \sum_{j=-M}^{M-1} \left[\sum_{k=1}^{2M-1} |q_k^{(3)}|^2 \sin^2 \frac{k\pi(x_j+a)}{2a} + 2 \sum_{k=1}^{2M-1} \sum_{\ell=k+1}^{2M-1} q_k^{(3)} q_\ell^{(3)} \sin \frac{k\pi(x_j+a)}{2a} \right. \\
&\quad \left. \cdot \sin \frac{\ell\pi(x_j+a)}{2a} \right] = h \sum_{j=-M}^{M-1} \left\{ \sum_{k=1}^{2M-1} (q_k^{(3)})^2 \frac{1 - \cos \frac{k\pi(x_j+a)}{a}}{2} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{2M-1} \sum_{\ell=k+1}^{2M-1} q_k^{(3)} q_\ell^{(3)} \left[\cos \frac{(\ell-k)\pi(x_j+a)}{2a} - \cos \frac{(\ell+k)\pi(x_j+a)}{2a} \right] = \\
& = h \sum_{k=1}^{2M-1} \{ (q_k^{(3)})^2 \sum_{j=-M}^{M-1} \frac{1 - \cos \frac{k\pi(x_j+a)}{a}}{2} + \\
& + \sum_{\ell=k+1}^{2M-1} q_k^{(3)} q_\ell^{(3)} \left[\sum_{j=-M}^{M-1} \cos \frac{(\ell-k)\pi(x_j+a)}{2a} - \sum_{j=-M}^{M-1} \cos \frac{(\ell+k)\pi(x_j+a)}{2a} \right] \}.
\end{aligned}$$

Kako je $\frac{m\pi(x_j+a)}{2a} = \frac{m\pi(jh+Mh)}{2Mh} = \frac{m(j+M)}{2M} \pi$, to je prema [26], form. 4.4.1.27

$$\|\psi_3\|_0^2 = h \sum_{k=1}^{2M-1} (q_k^{(3)})^2 M = a \sum_{k=1}^{2M-1} (q_k^{(3)})^2.$$

Stoga je za svaki ceo broj $\ell > 0$

$$(70) \quad S_4(x, y) = O(h^\ell).$$

Ostaje još da se oceni suma $S_3(x, y)$ data formulom (50₃). Kako je funkcija $\psi_3(x, y)$ trag tačnog rešenja (36₃) na granici Γ_3 , to je prema (42₃) za $k=1, 2, \dots, 2M-1$

$$\begin{aligned}
q_k^{(3)} &= \frac{1}{M} \sum_{j=-M}^{M-1} \left[\sum_{i=1}^{\infty} p_i^{(3)} \sin \frac{i\pi(x_j+a)}{2a} \right] \sin \frac{k\pi(x_j+a)}{2a} = \\
&= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\infty} p_i^{(3)} \left[\sum_{j=-M}^{M-1} \sin \frac{i\pi(x_j+a)}{2a} \sin \frac{k\pi(x_j+a)}{2a} \right].
\end{aligned}$$

Prema formuli 4.4.4.1 iz [26] je

$$q_k^{(3)} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\infty} p_i^{(3)} \cdot \begin{cases} M, & i=k \pmod{4M} \\ -M, & i=-k \pmod{4M} \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

Stoga je

$$(71) \quad q_k^{(3)} - p_k^{(3)} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[p_{4M\ell+k}^{(3)} - p_{4M\ell-k}^{(3)} \right].$$

Izvršimo dva puta parcijalnu integraciju u izrazu

$$p_{\ell}^{(3)} = \frac{1}{a} \int_{-a}^a \psi_3(x,b) \sin \frac{\ell\pi(x+a)}{2a} dx.$$

Vodeći računa da je $\psi_3(-a,b) = \psi_3(a,b) = 0$, dobijamo

$$p_{\ell}^{(3)} = -\frac{4a}{(\ell\pi)^2} \int_{-a}^a \psi_3'' \sin \frac{\ell\pi(x+a)}{2a} dx.$$

Ako je $C=2a \max_{x \in (-a,a)} |\psi_3''(x,b)|$, onda je $|p_{\ell}^{(3)}| \leq 4aC/(\ell\pi)^2$ iz čega sledi ocena

$$|p_k^{(3)} - q_k^{(3)}| \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \left| \frac{4aC}{(4M\ell+k)^2 \pi^2} + \frac{4aC}{(4M\ell-k)^2 \pi^2} \right| \leq \frac{8aC}{\pi^2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{(4M\ell-M)^2} \leq \frac{C_1}{M^2}.$$

Još je, obzirom da je $\kappa_k > 0$, $T(\kappa_k, y) e^{\kappa_k(y-b)}$ i za $k < k_0$ je $\kappa_k = \frac{k\pi}{2a} [1 + o(h^2)]$.

Uvrstimo dobijene ocene u (50₃), pa je

$$(72) \quad |S_3| \leq \frac{C}{M^2} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k\pi(b-y)}{2a}} = o(h^2).$$

Zamenjujući ocene za $S_i(x,y)$, $i=1,2,3,4$, date izrazima (58), (67), (72) i (70) u (49), dobijamo da je

$$(73_3) \quad |E_3| \leq M_3 h^2$$

Red greške u sumi S_2 se može smanjiti izborom odgovarajuće sheme (recimo sheme sa parametrom $\alpha = -1/6$), a red greške u sumi S_3 zavisi od karakteristika granične funkcije.

Analognom analizom se zaključuje da je i

$$(73_2) |E_2| \leq M_2 h^2,$$

$$(73_4) |E_4| \leq M_4 h^2.$$

Konačno, uvrstimo dobijene ocene (47), (48), (73₂), (73₃) i (73₄) u (45) i dobijemo da je ukupna greška aproksimacije mešovitog zadatka (32) diferencijskim zatom (33)

$$\epsilon(x,y) \equiv v(x,y) - u(x,y) = O(h).$$

Mala tačnost je posledica loše aproksimacije diferencijskim shemama neglatkog dela rešenja, što se odražava u ocenama za funkcije $W(x,y)$ i $E_1(x,y)$. Ove greške se mogu smanjiti korišćenjem diferencijskih shema koje su modifikovane u nekim čvorovima iz okoline tačke smene tipa graničnog uslova (o čemu je bilo reči u odeljku 2.2.).

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА

Број: _____

Датум: _____

3. MODIFIKACIJE KLASIČNE DIFERENCIJSKE SCHEME ZA MEŠOVITI ZADATAK ZA JEDNAČINU LAPLACEA U POLURAVNI

3.1. DEFINISANJE MODIFIKACIJA

U odeljku 2.2. pomenute su neke modifikacije standardnih diferencijskih shema kojima se povećava tačnost aproksimacije. Do tih modifikacija se došlo minimizacijom greške po uvedenim parametrima u asimptotskom razvoju približnog rešenja.

U radovima [11], [12] predlažu se modifikacije klasične diferencijske sheme definisane operatorom (1.2) za $\alpha=0$, do kojih se dolazi aproksimiranjem rešenja u okolini tačke smene tipa graničnog uslova (singularne tačke) parcijalnom sumom reda. Naime, poznato je (napr. [13]), da se rešenje mešovitog zadatka za jednačinu Laplacea u poluravni u okolini tačke smene tipa homogenog graničnog uslova može predstaviti u obliku

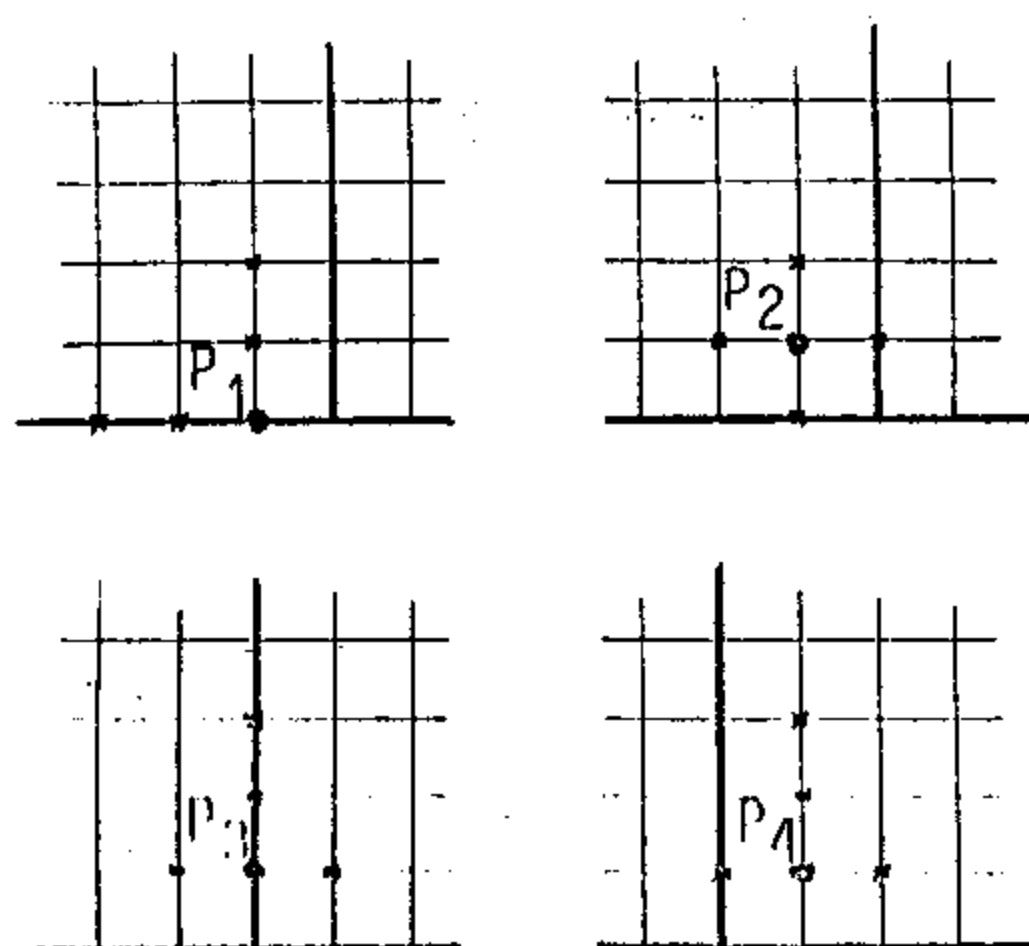
$$(1) \quad v(r, \phi) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j r^{j+\frac{1}{2}} \sin(j+\frac{1}{2})\phi,$$

gde su (r, ϕ) - polarne koordinate, a C_j konstante. U oblasti u kojoj se traži rešenje definišimo kvadratnu mrežu Ω . U čvoru (\bar{x}, \bar{y}) iz okoline singularne tačke, rešenje aproksimirajmo parcijalnom sumom reda (1)

$$(2) \quad u_N(r, \phi) = \sum_{j=0}^N C_j r^{j+\frac{1}{2}} \sin(j+\frac{1}{2})\phi.$$

Diferenciranjem izraza (2) dva puta po x , tj. dva puta po y , dobijamo aproksimaciju parcijalnog izvoda $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, tj. $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, u čvoru (\bar{x}, \bar{y}) . U tim izrazima figurišu još uvek neodredjene konstante C_j . Konstante C_j u interpolantu za $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ se određuju kao rešenja sistema linearnih jednačina koji dobijamo kada

rešenje aproksimiramo izrazima oblika (2) u $N+1$ čvoru (x_n, \bar{y}) iz okoline čvora (\bar{x}, \bar{y}) , medju kojima je i taj čvor. Tako je aproksimacija izvoda $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ određena linearnom kombinacijom približnih vrednosti rešenja u $N+1$ čvoru iz okoline čvora (\bar{x}, \bar{y}) . Slično, izvod $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ aproksimiramo linearnom kombinacijom približnih vrednosti rešenja u $N+1$ u čvoru (\bar{x}, y_n) . Suma ovih aproksimacija je modifikacija sheme u čvoru (\bar{x}, \bar{y}) . U slučaju da je (\bar{x}, \bar{y}) granični čvor ili čvor blizak granici, čvorovi (\bar{x}, y_n) , tj. (x_n, \bar{y}) , pomoću kojih se određuju



Sl.4.

aproksimacije drugih izvoda rešenja, nisu simetrični u odnosu na čvor (\bar{x}, \bar{y}) (sl.4 za $N=2$). Broj čvorova u kojima se shema modifikuje i broj sabiraka N u aproksimaciji (2) zavise od tačnosti sheme primenjene u ostalom delu oblasti.

U radu [12] je određena jedna modifikacija ovog tipa i numeričkim primerom dokazana njena opravdanost. U nastavku će za tu i još tri modifikacije istog tipa,

koje će biti definisane na pomejenoj mreži, biti određen asimptotski razvoj rešenja i time egzaktno ocenjena njihova tačnost.

Modelni zadatak - odrediti neprekidnu funkciju $v(x,y)$ koja zadovoljava uslove

$$(3) \quad \Delta v = 0, \quad y > 0, \quad v(x,0) = 0, \quad x \geq 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} v(x,0) = 0, \quad x < 0,$$

$$v(-1,0) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{v(x,y)}{r} = 0 \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2})$$

aproksimira se klasičnim diferencijskim zadatkom

$$\Delta u(x,y) \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x,y) \in \Omega,$$

$$(4) \quad u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Gamma_0, \quad \lambda u(x,y) \equiv u_y + \frac{h}{2} u_{xx} = 0, \quad (x,y) \in \Gamma_1,$$

$$u(-h,0) = A, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u}{r} = 0$$

na mreži definisanoj u odeljku 2.2 za $\epsilon=0$ i $\theta=1$.

Prema formuli (2.6) (za $\alpha=0$), asimptotski razvoj rešenja zadatka (4) je

$$(5) \quad u(x,y) = \operatorname{Im}(\sqrt{z} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{h}{\sqrt{z}}) + O(\frac{h^2}{|z|^{3/2}}) = \operatorname{Im}(\sqrt{z} + 0.176777 \frac{h}{\sqrt{z}}) + (\frac{h^2}{|z|^{3/2}}).$$

Modifikacija iz [12], nazovimo je MOD1, sastoji se u zameni jednačina (3) u čvorovima $P_1 - P_4$ (sl.4) jednačinama dobijenim na ranije opisani način. Zapišimo modifikovani zadatak u obliku

$$(6) \quad \begin{aligned} \tilde{\lambda} \tilde{u}(P) &= 0, & P \in \Omega \\ \tilde{u}(P) &= 0, & P \in \Gamma_0, \quad \tilde{\lambda} \tilde{u}(P) = 0, & P \in \Gamma_1, \end{aligned}$$

gde je za MOD1

$$(7_1) \quad \tilde{\lambda} \tilde{u}(P) = \lambda \tilde{u}(P) + \sum_{i=2}^4 \delta(P-P_i) \hat{M} \tilde{u}(P_i),$$

$$(8_1) \quad \tilde{\lambda} \tilde{u}(P) = \lambda \tilde{u}(P) + h \delta(P-P_1) \hat{M} \tilde{u}(P_1),$$

i

$$\begin{aligned} \hat{M} \tilde{u}(P_1) &\equiv 0.288675 \tilde{u}(-3,0) + 2.304839 \tilde{u}(-1,1) - 0.320548 \tilde{u}(-1,2) - \\ &- 0.5 \tilde{u}(-2,0) - 1.723231 \tilde{u}(-1,0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{M} \tilde{u}(P_2) &\equiv -0.001406 \tilde{u}(-2,1) + 0.047694 \tilde{u}(-1,2) - 0.022393 \tilde{u}(0,1) + \\ &+ 0.157101 \tilde{u}(-1,0) - 0.218102 \tilde{u}(-1,1), \end{aligned}$$

$$(9_1) \quad \begin{aligned} \hat{M} \tilde{u}(P_3) &\equiv 0.032038 \tilde{u}(-1,1) - \tilde{u}(0,2) + 0.288675 \tilde{u}(0,3) - \\ &- 0.007003 \tilde{u}(1,1) + 1.257359 \tilde{u}(0,1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{M} \tilde{u}(P_4) &\equiv -0.034864 \tilde{u}(0,1) + 0.314208 \tilde{u}(1,2) - 0.076404 \tilde{u}(1,3) - \\ &- 0.033140 \tilde{u}(2,1) - 0.325196 \tilde{u}(1,1). \end{aligned}$$

$$\delta(P-P_i) = \begin{cases} 0, & P \neq P_i \\ \frac{1}{h^2}, & P = P_i \end{cases}$$

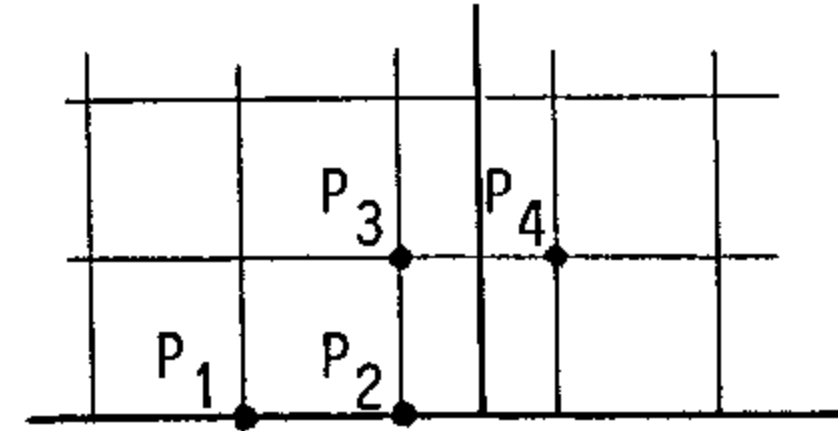
je mrežni analog delta - funkcije u ravni.

Zadatak (4) definisan na mreži iz odeljka 2.2. za $\epsilon=1/2$ i $\theta=1$ označimo sa (4'). Asimptotski razvoj njegovog rešenja je, prema (2.5) za $\alpha=0$, $\theta=1$ i $\epsilon=1/2$,

$$(5_1) \quad \tilde{u}(x,y) = \text{Im} \left[\sqrt{z} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{h}{\sqrt{z}} \right] + O \left(\frac{h^2}{|z|^{3/2}} \right) = \text{Im} \left(\sqrt{z} - 0.073223 \frac{h}{\sqrt{z}} \right) + O \left(\frac{h^2}{|z|^{3/2}} \right).$$

Za taj zadatak odredimo dve modifikacije.

U prvoj modifikaciji, nazovimo je MOD2, modifikujmo shemu (4') u čvorovima P_1, P_2, P_3 i P_4 (sl.5). Pretpostavimo da je aproksimacija rešenja u čvoru iz okoline singularne tačke (iz (2) za $N=2$)



Sl.5.

$$(10) \quad \tilde{u}(m,n) = C_0 r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\phi}{2} + C_1 r^{\frac{3}{2}} \sin \frac{3\phi}{2} + C_2 r^{\frac{5}{2}} \sin \frac{5\phi}{2},$$

gde su (r, ϕ) polarne koordinate čvora (m,n) . Diferenciranjem izraza (10) dva puta po x dobijamo da je

$$(11) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{u}(m,n) = \frac{1}{4} C_0 r^{-\frac{3}{2}} \sin \frac{3\phi}{2} - \frac{3}{4} C_1 r^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\phi}{2} + \frac{15}{4} C_2 r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\phi}{2},$$

i diferenciranjem (10) dva puta po y

$$(12) \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{u}(m,n) = -\frac{1}{4} C_0 r^{-\frac{3}{2}} \sin \frac{3\phi}{2} + \frac{3}{4} C_1 r^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\phi}{2} - \frac{15}{4} C_2 r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\phi}{2}.$$

Da bismo odredili konstante C_i , $i=0,1,2$, u izrazu (11) za $\frac{\partial^2 u(P_1)}{\partial x^2}$ napišimo aproksimaciju (10) u čvorovima $(-3,0)$, $(-2,0)$ i $(-1,0)$

$$\tilde{u}(-3,0) = C_0 (5h/2)^{1/2} - C_1 (5h/2)^{3/2} + C_2 (5h/2)^{5/2},$$

$$\tilde{u}(-2,0) = C_0 (3h/2)^{1/2} - C_1 (3h/2)^{3/2} + C_2 (3h/2)^{5/2},$$

$$\tilde{u}(-1,0) = C_0 (h/2)^{1/2} - C_1 (h/2)^{3/2} + C_2 (h/2)^{5/2}.$$

Rešavanjem ovog sistema po C_i , dobijamo da je

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{h}} \left[\frac{3}{4\sqrt{10}} \tilde{u}(-3,0) - \frac{5}{2\sqrt{6}} \tilde{u}(-2,0) + \frac{15}{4\sqrt{2}} \tilde{u}(-1,0) \right],$$

$$(13) \quad C_1 = \frac{1}{h\sqrt{h}} \left[\frac{2}{\sqrt{10}} \tilde{u}(-3,0) - \sqrt{6} \tilde{u}(-2,0) + \frac{4}{\sqrt{2}} \tilde{u}(-1,0) \right],$$

$$C_2 = \frac{1}{h^2\sqrt{h}} \left[\frac{1}{\sqrt{10}} \tilde{u}(-3,0) - \frac{2}{\sqrt{6}} \tilde{u}(-2,0) + \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{u}(-1,0) \right],$$

pa je

$$(14) \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}(P_1)}{\partial x^2} = \frac{1}{4} C_0 \left(\frac{3}{2}h\right)^{-\frac{3}{2}} \sin \frac{3\pi}{2} - \frac{3}{4} C_1 \left(\frac{3}{2}h\right)^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{15}{4} C_2 \left(\frac{3}{2}h\right)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{1}{h^2} \left[\frac{4}{\sqrt{15}} \tilde{u}(-3,0) - \frac{19}{9} \tilde{u}(-2,0) + \frac{2}{\sqrt{3}} \tilde{u}(-1,0) \right].$$

Da bismo odredili konstante C_i u izrazu (12) za $\frac{\partial^2 \tilde{u}(P_1)}{\partial y^2}$, napišimo aproksimaciju (10) u čvorovima $(-2,2)$, $(-2,1)$ i $(-2,0)$

$$\tilde{u}(-2,2) = C_0 \sqrt{2} h^{\frac{1}{2}} - C_1 \frac{1}{\sqrt{2}} h^{\frac{3}{2}} - C_2 \frac{19}{2\sqrt{2}} h^{\frac{5}{2}},$$

$$\tilde{u}(-2,1) = C_0 \frac{\sqrt{3+\sqrt{13}}}{2} h^{\frac{1}{2}} + C_1 \frac{\sqrt{3+\sqrt{13}}}{4} (\sqrt{13}-6) h^{\frac{3}{2}} + C_2 \frac{\sqrt{3+\sqrt{13}}}{8} (23-6\sqrt{13}) h^{\frac{5}{2}},$$

$$\tilde{u}(-2,0) = C_0 \left(\frac{3}{2}h\right)^{\frac{1}{2}} - C_1 \left(\frac{3}{2}h\right)^{\frac{3}{2}} + C_2 \left(\frac{3}{2}h\right)^{\frac{5}{2}}.$$

Ovaj sistem rešimo po C_i i, zamenjujući dobijene vrednosti u (12), imamo da je

$$(15) \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}(P_1)}{\partial y^2} = -\frac{1}{4} C_0 \left(\frac{3}{2}h\right)^{-\frac{3}{2}} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{3}{4} C_1 \left(\frac{3}{2}h\right)^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{15}{4} C_2 \left(\frac{3}{2}h\right)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{1}{(7-2\sqrt{13})h^2} \left[\frac{11-3\sqrt{13}}{2\sqrt{3}} \tilde{u}(-2,2) - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{3+\sqrt{13}}} \tilde{u}(-2,1) + \frac{7\sqrt{13}-20}{9} \tilde{u}(-2,0) \right]$$

Suma izraza (14) i (15) predstavlja modifikaciju sheme u čvoru $P_1 = (-2,0)$

$$(16) \quad \lambda \hat{u}(P_1) \equiv [1.032796 \hat{u}(-3,0) + 1.154700 \hat{u}(-1,0) - 4.868517 \hat{u}(-2,0) + 3.009791 \hat{u}(-2,1) - 0.250719 \hat{u}(-2,2)] / h^2.$$

Slično, $\frac{\partial^2 u(P_2)}{\partial x^2}$ određujemo kao linearnu kombinaciju vrednosti $\hat{u}(-3,0)$, $\hat{u}(-2,0)$ i $\hat{u}(-1,0)$ (C_i su date izrazima (13), ali se (11) piše u čvoru P_2), a $\frac{\partial^2 u(P_2)}{\partial y^2}$ kao linearnu kombinaciju vrednosti $\hat{u}(-1,2)$, $\hat{u}(-1,1)$ i $\hat{u}(-1,0)$. Suma dobijenih izraza predstavlja modifikaciju sheme u čvoru $P_2 = (-1,0)$

$$(17) \quad \lambda \hat{u}(P_2) \equiv [1.154700 \hat{u}(-2,0) - 6.516844 \hat{u}(-1,0) + 4.210464 \hat{u}(-1,1) - 0.524184 \hat{u}(-1,2)] / h^2.$$

$\frac{\partial^2 u(P_3)}{\partial x^2}$ se predstavlja linearnom kombinacijom vrednosti $\hat{u}(-2,1)$, $\hat{u}(-1,1)$ i $\hat{u}(0,1)$, a $\frac{\partial^2 u(P_3)}{\partial y^2}$ linearnom kombinacijom vrednosti $\hat{u}(-1,2)$, $\hat{u}(-1,1)$ i $\hat{u}(-1,0)$. Suma dobijenih reprezentacija je modifikacija sheme u čvoru $P_3 = (-1,1)$

$$(18) \quad \lambda \hat{u}(P_3) \equiv [0.997371 \hat{u}(-2,1) + 1.271524 \hat{u}(-1,0) + 0.971530 \hat{u}(0,1) + 1.087561 \hat{u}(-1,2) - 4.393403 \hat{u}(-1,1)] / h^2.$$

I konačno, linearnom kombinacijom vrednosti $\hat{u}(-1,1)$, $\hat{u}(0,1)$ i $\hat{u}(1,1)$ predstavljamo $\frac{\partial^2 u(P_4)}{\partial x^2}$, a linearnom kombinacijom vrednosti $\hat{u}(0,3)$, $\hat{u}(0,2)$ i $\hat{u}(0,1)$ ($\hat{u}(0,0) = 0$, pa se ne može koristiti za određivanje konstanti C_i) predstavljamo $\frac{\partial^2 u(P_4)}{\partial y^2}$. Modifikacija sheme u čvoru $P_4 = (0,1)$, određena sumom dobijenih reprezentacija, je

$$(19) \quad \lambda \hat{u}(P_4) \equiv [1.032180 \hat{u}(-1,1) + 0.993488 \hat{u}(1,1) + 0.054926 \hat{u}(0,3) + 0.839526 \hat{u}(0,2) - 3.811316 \hat{u}(0,1)] / h^2.$$

U drugoj modifikaciji, nazovimo je MOD3, modifikujemo shemu (4') u tri čvora - u čvoru P_2 zamenimo je izrazom (17), u čvoru P_3 izrazom (18) i čvoru P_4 izrazom (19).

Obje dobijene modifikacije mogu da se zapišu izrazima (6), pri čemu Ω predstavlja unutrašnjost pomenute pomerene za pola koraka kvadratne mreže, a Γ_0 i Γ_1 njene granice na osi Ox . Pri tome je

$$(7_2) \quad \hat{\lambda}\hat{u}(P) \equiv \lambda\hat{u}(P) + \sum_{i=3}^4 \delta(P-P_i)M\hat{u}(P_i) \quad \text{za MOD2 i MOD3,}$$

$$(8_2) \quad \hat{\lambda}\hat{u}(P) \equiv \lambda\hat{u}(P) + h \sum_{i=1}^2 \delta(P-P_i)M\hat{u}(P_i) \quad \text{za MOD2,}$$

$$(8_3) \quad \hat{\lambda}\hat{u}(P) \equiv \lambda\hat{u}(P) + h\delta(P-P_2)M\hat{u}(P_2) \quad \text{za MOD3,}$$

i

$$M\hat{u}(P_1) \equiv 0.532796\hat{u}(-3,0) + 0.654700\hat{u}(-1,0) - 2.868517\hat{u}(-2,0) + \\ + 2.009791\hat{u}(-2,1) - 0.250719\hat{u}(-2,2),$$

$$M\hat{u}(P_2) \equiv 0.654700\hat{u}(-2,0) - 4.516844\hat{u}(-1,0) + 3.210464\hat{u}(-1,1) - \\ - 0.524118\hat{u}(-1,2),$$

(9₂)

$$M\hat{u}(P_3) \equiv -0.002629\hat{u}(-2,1) + 0.271524\hat{u}(-1,0) - 0.028470\hat{u}(0,1) + \\ + 0.087561\hat{u}(-1,2) - 0.393403\hat{u}(-1,1),$$

$$M\hat{u}(P_4) \equiv 0.032180\hat{u}(-1,1) - 0.006512\hat{u}(1,1) + 0.054926\hat{u}(0,3) - \\ - 0.160474\hat{u}(0,2) + 0.188683\hat{u}(0,1).$$

Time smo za modelni zadatak (3) definisali tri modifikacije sheme (4), tj. (4'): MOD1 opisanu formulama (6), (7₁), (8₁) i (9₁) na kvadratnoj mreži čiji je jedan čvor u singularnoj tački; MOD2 opisanu formulama (6), (7₂), (8₂) i (9₂) na kvadratnoj mreži izabranoj tako da je singularna tačka na sredini između dva čvora; i na istoj mreži MOD3 opisanu formulama (6), (7₂), (8₃) i (9₂).

3.2. REŠENJA MODIFIKOVANIH DIFERENCIJSKIH ZADATAKA

Da bismo ocenili tačnost modifikacija odredjenih u prethodnom odeljku, nadjimo njihova rešenja.

T e o r e m a 3.1. Rešenje modifikovane sheme (6), (7₁), (8₁), (9₁) je

$$(20_1) \quad \tilde{u}(P) = u(P) + A [0.242507G(P, P_1) - 0.049165G(P, P_2) + 0.343042G(P, P_3) - 0.021283G(P, P_4)].$$

Rešenje modifikovane sheme (6), (7₂), (8₂), (9₂) je

$$(20_2) \quad \tilde{u}(P) = u(P) + A [0.026019G(P, P_1) - 0.121231G(P, P_2) - 0.102238G(P, P_3) + 0.064676G(P, P_4)].$$

Rešenje modifikovane sheme (6), (7₂), (8₃), (9₂) je

$$(20_3) \quad \tilde{u}(P) = u(P) + A [-0.118671G(P, P_2) - 0.101851G(P, P_3) + 0.064107G(P, P_4)].$$

Pri tome je $A = \text{const.}$, $u(P)$ je rešenje zadatka (4), tj. (4'), a $G(P, P_i)$ su funkcije tačkastih izvora definisane u čvorovima u kojima se sheme modifikuju, tj. ograničena na beskonačnosti rešenja zadatka

$$(21) \quad \Delta G(P, P_i) = -\delta(P - P_i), \quad P \in \Omega,$$

$$G(P, P_i) = 0, \quad P \in \Gamma_0, \quad \lambda G(P, P_i) = -h\delta(P - P_i), \quad P \in \Gamma_1.$$

D o k a z: Kao u radu [5], predstavimo rešenje modifikovanih zadataka u obliku linearnih kombinacija rešenja $u(P)$ zadatka (4), tj. (4'), i funkcija $G(P, P_i)$ definisanih zadatkom (21)

$$(22_1) \quad \tilde{u}(P) = u(P) + \sum_{i=1}^4 \sigma_i G(P, P_i) \quad \text{za MOD1 i MOD2,}$$

$$(22_2) \quad \tilde{u}(P) = u(P) + \sum_{i=2}^4 \sigma_i G(P, P_i) \quad \text{za MOD3}$$

(za MOD1 i MOD2 čvorovi P_i se razlikuju). Stavimo (22₁) i (22₂) u (6) i dobijemo za odredjivanje nepoznatih parametara σ_i sledeće sisteme jednačina

$$(23_1) \sigma_i - \sum_{j=1}^4 \sigma_j \text{MG}(P_i, P_j) = \text{Mu}(P_i), \quad i=1,2,3,4, \text{ za MOD1 i MOD2,}$$

$$(23_2) \sigma_i - \sum_{j=2}^4 \sigma_j \text{MG}(P_i, P_j) = \text{Mu}(P_i), \quad i=2,3,4, \text{ za MOD3.}$$

Operator M je odredjen formulama (9₁) za MOD1 i (9₂) za MOD2 i MOD3. Izračunavanjem integrala (2.2) nalazimo vrednosti $u(m,n) = A\bar{u}(m,n)$,

$$(24) \quad A = \sqrt{\pi(1-z_1)h}/2, \quad z_1 = 3-2\sqrt{2} \text{ za } \alpha=0,$$

pomoću kojih se računaju desne strane u sistemima (23₁) i (23₂):

$\bar{u}(-3,0) = 3(7-4\sqrt{2})/2,$	$\bar{u}(2,1) = (3-\sqrt{2})/4,$
$\bar{u}(-2,0) = 3-\sqrt{2},$	$\bar{u}(-2,2) = 3(\sqrt{2}+1)/4,$
$\bar{u}(-1,0) = 1,$	$\bar{u}(-1,2) = (2\sqrt{2}+3)/4,$
$\bar{u}(-2,1) = (4\sqrt{2}+1)/4,$	$\bar{u}(0,2) = (3\sqrt{2}-2)/2,$
$\bar{u}(-1,1) = (\sqrt{2}+1)/2,$	$\bar{u}(1,2) = (5-\sqrt{2})/4,$
$\bar{u}(0,1) = \sqrt{2}/2,$	$\bar{u}(0,3) = (21\sqrt{2}-24)/4,$
$\bar{u}(1,1) = 1/2$	$\bar{u}(1,3) = (19-10\sqrt{2})/4.$

Tabela 1

(Integral (2.2) ne zavisi od položaja mreže u odnosu na koordinatni početak, već samo od položaja u mreži čvora u kome se računa rešenje, a koji je odredjen indeksima m i n. Zato su rešenja u čvorovima obe mreže sa istim indeksima jednaka).

Za odredjivanje koeficijenata $\text{MG}(P_i, P_j)$ sistema (23₁) i (23₂), potrebno je izračunati funkciju $G(P_i, P_j)$ u većem broju čvorova iz okoline singularne tačke. Iz [6] imamo da je

$$G(m,n;-2,0) = \frac{1-z_1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^m (\zeta + \frac{1+z_1}{2})}{\sqrt{(1-\zeta)(1-z_1\zeta)}} q^n d\zeta,$$

$$G(m,n;-1,0) = \frac{1-z_1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^m q^n}{\sqrt{(1-\zeta)(1-z_1\zeta)}} d\zeta,$$

$$G(m, n; -1, 1) = \frac{1}{2\pi i} \begin{cases} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^m q^n}{-\alpha(\zeta-z_2)(\zeta-z_2^{-1})} \frac{A+B\zeta+C\zeta^2}{\sqrt{(1-\zeta)(1-z_1\zeta)}} d\zeta, & n=1,2,\dots, \\ \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^m}{-\alpha(\zeta-z_2)(\zeta-z_2^{-1})} \left[\frac{A+B\zeta+C\zeta^2}{\sqrt{(1-\zeta)(1-z_1\zeta)}} - \zeta \right] d\zeta, & n=0 \end{cases}$$

$$(25) \quad G(m, n; 0, 1) = \frac{1}{2\pi i} \begin{cases} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^m q^n}{-\alpha(\zeta-z_2)(\zeta-z_2^{-1})} \frac{D+E\zeta}{\sqrt{(1-\zeta)(1-z_1\zeta)}} d\zeta, & n=1,2,\dots, \\ \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^m}{-\alpha(\zeta-z_2)(\zeta-z_2^{-1})} \left[\frac{D+E\zeta}{\sqrt{(1-\zeta)(1-z_1\zeta)}} - 1 \right] d\zeta, & n=0 \end{cases}$$

$$G(m, n; 1, 1) = \frac{1}{2\pi i} \begin{cases} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^m q^n}{-\alpha(\zeta-z_2)(\zeta-z_2^{-1})} \frac{F+G\zeta+\zeta^{-1}}{\sqrt{(1-\zeta)(1-z_1\zeta)}} d\zeta, & n=1,2,\dots, \\ \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^m}{-\alpha(\zeta-z_2)(\zeta-z_2^{-1})} \left[\frac{F+G\zeta+\zeta^{-1}}{\sqrt{(1-\zeta)(1-z_1\zeta)}} - \frac{1}{\zeta} \right] d\zeta, & n=0, \end{cases}$$

gde je $q(\zeta)$ određeno formulom (1.8) za $\zeta=e^{i\xi}$, z_1 određeno formulom (1.7), $z_2=(1+2\alpha-\sqrt{1+4\alpha})/(2\alpha)$ i

$$A = -(1-z_1) \frac{2\alpha\sqrt{\frac{1}{2}+\alpha}}{2\sqrt{\frac{1}{2}+\alpha}+\sqrt{2}},$$

$$B = (1-z_1) \frac{4(\frac{1}{2}+\alpha)\sqrt{\frac{1}{2}+\alpha} + \sqrt{2}(\frac{1}{2}+\alpha) + (1+\sqrt{2})\sqrt{\frac{1}{2}+\alpha} + 1}{2\sqrt{\frac{1}{2}+\alpha} + \sqrt{2}},$$

$$C = -(1-z_1)(\frac{1}{2}+\alpha), \quad D = (1-z_1) \frac{\sqrt{\frac{1}{2}+\alpha} + 1}{\sqrt{2}}, \quad E = -(1-z_1) \frac{\sqrt{\frac{1}{2}+\alpha}}{\sqrt{2}},$$

$$F = -(1-z_1) \frac{(4-\sqrt{2})(\frac{1}{2}+\alpha) + \sqrt{\frac{1}{2}+\alpha}}{2\sqrt{\frac{1}{2}+\alpha+\sqrt{2}}}, \quad G = (1-z_1) \frac{(2-\sqrt{2})\alpha}{2\sqrt{\frac{1}{2}+\alpha+\sqrt{2}}}$$

Izračunavanjem ovih integrala, određujemo nama potrebne vrednosti $G(P_i, P_j)$ (i ovde, kao i u slučaju tabele 1, veličine koje se računaju zavise samo od položaja u mreži čvora u kome se računaju):

$P_i \backslash P_j$	(-2,0)	(-1,0)	(-1,1)	(0,1)	(1,1)
(-3,0)	$91\sqrt{2}-128$	$5(5\sqrt{2}-7)$	$3(3\sqrt{2}-4)/2$	$(105-74\sqrt{2})/2$	$27(17-12\sqrt{2})/8$
(-2,0)	$2(11\sqrt{2}-15)$	$2(3\sqrt{2}-4)$	$\sqrt{2}-1$	$(23-16\sqrt{2})/2$	$10-7\sqrt{2}$
(-1,0)	$2(3\sqrt{2}-4)$	$2(\sqrt{2}-1)$	$\sqrt{2}-1$	$3-2\sqrt{2}$	$(3-2\sqrt{2})/2$
(-2,1)	$(14-9\sqrt{2})/2$	$(5-3\sqrt{2})/2$	$(6-3\sqrt{2})/4$	$(14\sqrt{2}-19)/4$	$(108\sqrt{2}-151)/16$
(-1,1)	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}-1$	$3(\sqrt{2}-1)/2$	$1/4$	$(3\sqrt{2}-4)/2$
(0,1)	$(23-16\sqrt{2})/2$	$3-2\sqrt{2}$	$1/4$	$\sqrt{2}-1$	$(4\sqrt{2}-5)/4$
(1,1)	$10-7\sqrt{2}$	$(3-2\sqrt{2})/2$	$(3\sqrt{2}-4)/2$	$(4\sqrt{2}-5)/4$	$(5-3\sqrt{2})/2$
(2,1)		$(10-7\sqrt{2})/2$	$(92\sqrt{2}-129)/16$	$(8\sqrt{2}-11)/4$	$(2-\sqrt{2})/4$
(-2,2)	$(397-280\sqrt{2})/2$	$(2-\sqrt{2})/2$	$(17-11\sqrt{2})/4$	$3/16$	
(-1,2)	$(21\sqrt{2}-29)/2$	$(11\sqrt{2}-15)/2$	$(23\sqrt{2}-31)/4$	$5(3-2\sqrt{2})/4$	$(19-12\sqrt{2})/16$
(0,2)	$37-26\sqrt{2}$	$(23-16\sqrt{2})/2$	$(9-6\sqrt{2})/2$	$3\sqrt{2}-4$	$(8\sqrt{2}-11)/2$
(1,2)		$(3\sqrt{2}-4)/2$	$(4\sqrt{2}-3)/16$	$(4\sqrt{2}-5)/4$	$(39-27\sqrt{2})/4$
(0,3)	$(1269-896\sqrt{2})/8$	$(105-74\sqrt{2})/2$	$(411-288\sqrt{2})/16$	$(25\sqrt{2}-35)/2$	$(360\sqrt{2}-507)/16$
(1,3)		$(116\sqrt{2}-163)/8$	$(21\sqrt{2}-29)/4$	$(8\sqrt{2}-9)/16$	$(183-129\sqrt{2})/4$

Tabela 2

Tako su koeficijenti σ_i u formuli (22₁) za MOD1 određeni sistemom

$$\begin{aligned} 1.702107\sigma_1 - 0.493855\sigma_2 - 0.168915\sigma_3 - 0.069563\sigma_4 &= 0.380589 \\ -0.048699\sigma_1 + 1.058448\sigma_2 + 0.026899\sigma_3 + 0.010763\sigma_4 &= -0.054850 \\ -0.092365\sigma_1 - 0.142910\sigma_2 + 0.663677\sigma_3 - 0.089049\sigma_4 &= 0.214191 \\ 0.007441\sigma_1 + 0.011629\sigma_2 + 0.029893\sigma_3 + 1.080426\sigma_4 &= -0.011508, \end{aligned}$$

gde je $\sigma_i = \Lambda \overset{\circ}{\sigma}_i$, pa je

$$(26_1) \quad \overset{\circ}{\sigma}_1 = 0.242507, \quad \overset{\circ}{\sigma}_2 = -0.049165, \quad \overset{\circ}{\sigma}_3 = 0.343042, \quad \overset{\circ}{\sigma}_4 = -0.021283.$$

Koeficijenti σ_i u formuli (22₁) za MOD2 su odredjeni sistemom

$$\begin{aligned} 2.354208\overset{\circ}{\sigma}_1 - 0.027290\overset{\circ}{\sigma}_2 - 0.069417\overset{\circ}{\sigma}_3 - 0.025148\overset{\circ}{\sigma}_4 &= 0.070032 \\ 0.316706\overset{\circ}{\sigma}_1 + 3.240159\overset{\circ}{\sigma}_2 - 0.194878\overset{\circ}{\sigma}_3 - 0.037193\overset{\circ}{\sigma}_4 &= -0.367048 \\ 0.007583\overset{\circ}{\sigma}_1 - 0.080462\overset{\circ}{\sigma}_2 + 1.106808\overset{\circ}{\sigma}_3 + 0.045303\overset{\circ}{\sigma}_4 &= -0.100276 \\ -0.023647\overset{\circ}{\sigma}_1 - 0.024811\overset{\circ}{\sigma}_2 - 0.037800\overset{\circ}{\sigma}_3 + 0.944048\overset{\circ}{\sigma}_4 &= 0.067314 \end{aligned}$$

i njegova rešenja su

$$(26_2) \quad \overset{\circ}{\sigma}_1 = 0.026019, \quad \overset{\circ}{\sigma}_2 = -0.121231, \quad \overset{\circ}{\sigma}_3 = -0.102238, \quad \overset{\circ}{\sigma}_4 = 0.064676.$$

I konačno, koeficijenti σ_i u izrazu (22₂) za MOD3 su odredjeni sistemom

$$\begin{aligned} 3.240159\overset{\circ}{\sigma}_2 - 0.194878\overset{\circ}{\sigma}_3 - 0.037193\overset{\circ}{\sigma}_4 &= -0.367048 \\ -0.080462\overset{\circ}{\sigma}_2 + 1.106808\overset{\circ}{\sigma}_3 + 0.045303\overset{\circ}{\sigma}_4 &= -0.100276 \\ -0.024811\overset{\circ}{\sigma}_2 - 0.037800\overset{\circ}{\sigma}_3 + 0.944048\overset{\circ}{\sigma}_4 &= 0.067314, \end{aligned}$$

i oni su

$$(26_3) \quad \overset{\circ}{\sigma}_2 = -0.118671, \quad \overset{\circ}{\sigma}_3 = -0.101851, \quad \overset{\circ}{\sigma}_4 = 0.064107.$$

Zamenom (26₁) i (26₂) u (22₁) i (26₃) u (22₂), dobijamo rešenja (20₁), (20₂) i (20₃).

3.3. ASIMPTOTSKI RAZVOJI REŠENJA MODIFIKOVANIH ZADATAKA

Izrazi (20₁), (20₂) i (20₃) nisu pogodni za ocenu tačnosti modifikovanih shema. Stoga ćemo odrediti njihove asimptotske razvoje po stepenima rastojanja od singularne tačke.

T e o r e m a 3.2. Asimptotski razvoj rešenja (20₁) je

$$(27_1) \quad \tilde{u}(P) = \text{Im}(\sqrt{z} + 0.004843 \frac{h}{\sqrt{z}}) + O\left(\frac{h^2}{|z|^{3/2}}\right).$$

Asimptotski razvoj rešenja (20₂) je

$$(27_2) \quad \tilde{u}(P) = \text{Im}(\sqrt{z} - 0.007922 \frac{h}{\sqrt{z}}) + O\left(\frac{h^2}{|z|^{3/2}}\right).$$

Asimptotski razvoj rešenja (20₃) je

$$(27_3) \quad \tilde{u}(P) = \text{Im}(\sqrt{z} + 0.008081 \frac{h}{\sqrt{z}}) + O\left(\frac{h^2}{|z|^{3/2}}\right).$$

D o k a z: Asimptotski razvoj rešenja nemodifikovane sheme određen je u opštem slučaju u drugoj glavi, i za zadatak (4), tj. (4'), dat je formulom (5), tj. (5₁). Asimptotski razvoji funkcija $G(P, P_i)$ mogu se iz integralnih izraza (25) dobiti postupkom opisanim u odeljku 1.5. Tako se dobija da je, na mreži konstruisanoj tako da je singularna tačka u čvoru mreže, ovaj asimptotski razvoj (form. (26) iz [5])

$$(28) \quad G(m, n; m', n') = -\sqrt{\frac{1-z_1}{\pi}} \mathring{u}(m', n') \text{Im} \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{z}} + O\left(\frac{h^{3/2}}{|z|^{3/2}}\right), \quad z = h(m+in).$$

Na pomejenoj mreži takodje važi, ako zadržimo samo prvi član razvoja, formula (28). Stoga je na osnovu formula (5), (20₁), (24) i (28) za zadatak MOD1

$$\tilde{u}(P) = \text{Im}\left\{\sqrt{z} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{h}{\sqrt{z}} - (\sqrt{2}-1) [0.242507 \mathring{u}(-1,0) - 0.049165 \mathring{u}(-1,1) + 0.343042 \mathring{u}(0,1) - 0.021283 \mathring{u}(1,1)] \frac{h}{\sqrt{z}}\right\} + O\left(\frac{h^2}{|z|^{3/2}}\right).$$

Uvrstimo odgovarajuće vrednosti za $\mathring{u}(m,n)$ iz tabele 1, i izračunajmo koeficijente uz $\frac{h}{\sqrt{z}}$, pa se dobija razvoj (27₁). Slično, na osnovu formula (5₁), (20₂), (24) i (28), za zadatak MOD2 imamo da je

$$\tilde{u}(P) = \text{Im}\left\{\sqrt{z} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{h}{\sqrt{z}} - (\sqrt{2}-1) [0.026019 \mathring{u}(-2,0) - 0.121231 \mathring{u}(-1,0) - 0.102238 \mathring{u}(-1,1) + 0.064676 \mathring{u}(0,1)] \frac{h}{\sqrt{z}}\right\} + O\left(\frac{h^2}{|z|^{3/2}}\right).$$

Izračunavanjem koeficijenata uz $\frac{h}{\sqrt{z}}$ pomoću vrednosti iz tabele 1, dobijamo izraz (27₂). I na kraju, na osnovu formula (5₁), (20₃), (24) i (28) za zadatak MOD3 je

$$\hat{u}(P) = \text{Im} \left\{ \sqrt{z} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{z}} \right) \frac{h}{\sqrt{z}} - (\sqrt{z}-1) [-0.118671\hat{u}(-1,0) - 0.101851\hat{u}(-1,1) + 0.064107\hat{u}(0,1)] \frac{h}{\sqrt{z}} \right\} + O\left(\frac{h^2}{|z|^{3/2}}\right),$$

odakle se, kao i ranije, dobija izraz (27₃),

Upoređujući rešenja nemodifikovanog i modifikovanih zadataka (5) sa (27₁), a (5₁) sa (27₂) i (27₃), uočavamo da je red greške rešenja ostao isti - i dalje je za $|z|=O(1)$ greška reda $O(h)$. No greška je ipak manja, jer je koeficijent u glavnom članu asimptotskog razvoja za grešku smanjen, i to kod zadatka na mreži sa singularitetom u čvoru za oko 30 puta, a kod zadatka na pomerenom mreži za oko 10 puta.

3.4. NOVA MODIFIKACIJA NA POMERENOJ MREŽI

Koeficijenti u glavnim članovima simptomskih razvoja za greške modifikovanih shema MOD2 i MOD3 su istog reda veličine, a suprotnog znaka (form. (27₂) i (27₃)). Stoga modifikovana shema, čije je rešenje aritmetička sredina rešenja (20₂) i (20₃) aproksimira rešenje zadatka (3) sa znatno većom tačnošću, jer je koeficijent u glavnom članu asimptotskog razvoja za grešku oko 1000 puta manji od istog koeficijenta klasične sheme (4')

$$(27_4) \hat{u}(P) = \text{Im} \left(\sqrt{z} + 0.000079 \frac{h}{\sqrt{z}} \right) + O\left(\frac{h^2}{|z|^{3/2}}\right)$$

Modifikovana shema, čiji je asimptotski razvoj rešenja dat izrazom (27₄) - nazovimo je MOD4, se razlikuje od modifikovane sheme MOD2 samo u jednom koeficijentu operatora M (form. (9₂)), tj. ovde je

$$\hat{M}\hat{u}(P_1) = 0.532796\hat{u}(-3,0) + 0.654700\hat{u}(-1,0) - 2.868517\hat{u}(-2,0) + 2.009791\hat{u}(-2,1) - 0.268170\hat{u}(-2,2).$$

3.5. NUMERIČKI REZULTATI

Da bi se u numeričkom primeru što tačnije simulirali analizirani zadaci u beskonačnoj oblasti, zadatak (3) je rešavan modifikovanom shemom MOD1 u pravougaoniku $R_1 = \{|x| \leq 32, 0 \leq y \leq 32\}$, a modifikovanim shemama MOD2, MOD3 i MOD4 u pravougaoniku $R_2 = \{-31.5 \leq x \leq 32.5, 0 \leq y \leq 32\}$. U svim slučajevima je uzeto je da je korak $h=1$. Na granici pravougaonika su zadati granični uslovi pomoću asimptotskih razvoja rešenja modifikovanih zadataka, pri čemu su ovi računati sa tačnošću $O(h^8/|z|^{7/2})$. Na taj način je omogućena dosta tačna analiza aproksimacija shemama zadatka (3) u okolini singularne tačke, obzirom da nam asimptotski razvoji rešenja o tome ne govore mnogo. Rezultati izračunavanja dati su tabelama 3 - 7.

U tabelama 3, 4 i 5 su date u tačkama $(-32, n)$, $(32, n)$, $n=0, 5, 32$, i $(m, 32)$, $m=-25, -20, \dots, 25$, razlike tačnog rešenja i približnih rešenja dobijenih pomoću svih analiziranih shema. Približna rešenja su izračunata pomoću odgovarajućih asimptotskih razvoja sa tačnošću $O(h^8/|z|^{7/2})$. U tabelama su, da bi se mogla oceniti i relativna greška, date i tačne vrednosti rešenja u tim čvorovima. Prva kolona tih tabela sadrži tačne vrednosti rešenja u čvorovima nepomerene mreže. Druga kolona sadrži razlike tačnog i rešenja dobijenog klasičnom shemom (4), a treća razlike tačnog i rešenja dobijenog shemom MOD1. Ostale četiri kolone sadrže odgovarajuće vrednosti u čvorovima pomerene mreže. U četvrtoj koloni su tačna rešenja u tim čvorovima, u petoj razlike tačnog i rešenja odredjenog shemom MOD2, u šestoj razlike tačnog i rešenja odredjenog shemom MOD3, i u sedmoj razlike tačnog i rešenja odredjenog shemom MOD4.

Tabele 6 i 7 pokazuju tačnost analiziranih shema u okolini singularne tačke. U tabeli 6 u čvorovima (m, n) , $-5 \leq m \leq 5$, $0 \leq n \leq 5$, date su vrednosti tačnog rešenja, razlika tačnog i rešenja dobijenog klasičnom shemom i razlika tačnog i rešenja dobijenog modifikovanom shemom MOD1 na mreži za singularitetom u čvoru. U tabeli 7, u čvorovima sa istim indeksima m i n ali pomerene mreže, date su vrednosti tačnog rešenja i razlike tačnog rešenja i rešenja dobijenih svakom od modifikovanih shema MOD2, MOD3 i MOD4.

Na osnovu rezultata iz tabela 6 i 7 se može zaključiti da sve modifikovane sheme daju veću tačnost približnog rešenja i u neposrednoj okolini singularne tačke.

n	TAČNO RESENJE NA NEPOMERENJ MREZI	TAČNO-KLASIČNO	TAČNO-MOD1	TAČNO RESENJE NA POMERENJ MREZI	TAČNO-MOD2	TAČNO-MOD3	TAČNO-MOD4
0	5.656854	0.031340	0.000796	5.612486	-0.001356	0.001540	0.000092
5	5.673988	0.031044	0.000781	5.630025	-0.001356	0.001511	0.000078
10	5.723902	0.030221	0.000743	5.681074	-0.001351	0.001438	0.000044
15	5.802637	0.029026	0.000697	5.761472	-0.001330	0.001343	0.000007
20	5.904910	0.027635	0.000655	5.865700	-0.001290	0.001249	-0.000021
25	6.025275	0.026187	0.000620	5.988115	-0.001235	0.001164	-0.000035
32	6.215096	0.024229	0.000583	6.180723	-0.001147	0.001066	-0.000040

Tabela 3 (m=32)

0	0	0	0	0	0	0	0
5	0.440607	0.002363	0.000057	0.437245	-0.000140	0.000063	-0.000038
10	0.873530	0.004539	0.000118	0.867086	-0.000256	0.000134	-0.000061
15	1.292516	0.006393	0.000182	1.283464	-0.000338	0.000212	-0.000063
20	1.693506	0.007872	0.000242	1.682386	-0.000391	0.000288	-0.000051
25	2.074594	0.008987	0.000291	2.061922	-0.000422	0.000356	-0.000033
32	2.574377	0.010036	0.000338	2.560250	-0.000446	0.000427	-0.000009

Tabela 4 (m=32)

m	TAČNO RESENJE NA NEPOMERENOM MREZI	TAČNO-KLASIČNO	TAČNO-MOD1	TAČNO RESENJE NA NEPOMERENOM MREZI	TAČNO-MOD2	TAČNO-MOD3	TAČNO-MOD4
-25	5.727472	0.024872	0.000600	5.692137	-0.001185	0.001082	-0.000051
-20	5.372891	0.025107	0.000620	5.337130	-0.001191	0.001090	-0.000051
-15	5.017031	0.025046	0.000652	4.991551	-0.001168	0.001096	-0.000036
-10	4.665089	0.024579	0.000696	4.630355	-0.001106	0.001100	-0.000003
-5	4.323671	0.023622	0.000731	4.290333	-0.001009	0.001092	0.000041
0	4	0.022160	0.000771	3.955373	-0.000894	0.001059	0.000082
5	4.700559	0.020028	0.000759	3.672139	-0.000784	0.000988	0.000102
10	3.429731	0.018160	0.000704	3.404308	-0.000694	0.000883	0.000095
15	3.189137	0.016004	0.000618	3.166725	-0.000624	0.000762	0.000069
20	2.977912	0.013974	0.000524	2.958318	-0.000566	0.000645	0.000039
25	2.793553	0.012162	0.000437	2.776473	-0.000514	0.000541	0.000014

Tabela 5 (n=32)

n \ m	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
5	2.456732 0.060558 0.000482	2.280693 0.061918 0.000375	2.101303 0.062680 0.000399	1.921609 0.062500 0.000726	1.746289 0.060890 0.001430	1.581139 0.057167 0.002204	1.431611 0.051006 0.002406	1.300993 0.043599 0.001942	1.189738 0.036382 0.001238	1.096158 0.030149 0.000632	1.017612 0.025084 0.000223
4	2.387794 0.065101 0.000690	2.197368 0.067434 0.000449	2.000000 0.069190 0.000265	1.798907 0.069881 0.000447	1.600485 0.068769 0.001394	1.414213 0.064440 0.002762	1.249621 0.055349 0.002979	1.111786 0.044695 0.001997	1.000000 0.035274 0.000919	0.910180 0.027933 0.000213	0.837593 0.022465 -0.000143
3	2.327118 0.070048 0.001128	2.121320 0.073867 0.000808	1.902977 0.077321 0.000319	1.674149 0.079681 0.000023	1.442615 0.079950 0.001018	1.224745 0.075609 0.003611	1.039778 0.060158 0.003656	0.895977 0.044004 0.001600	0.788239 0.032027 0.000170	0.707107 0.023983 -0.000414	0.644574 0.018595 -0.000557
2	2.278724 0.075023 0.001850	2.058171 0.081018 0.001689	1.817354 0.087459 0.001103	1.553774 0.093249 -0.000016	1.272020 0.096680 -0.000013	1.000000 0.095514 0.004636	0.786151 0.063054 0.003820	0.643594 0.025228 0.000062	0.550251 0.025288 -0.001042	0.485868 0.017810 -0.001050	0.438842 0.013365 -0.000829
1	2.247111 0.079119 0.002671	2.015329 0.087764 0.003044	1.755317 0.099072 0.003243	1.455347 0.112949 0.002601	1.098684 0.125001 0.001304	0.707107 0.136736 0.001153	0.455090 0.051777 0.000780	0.343561 0.023777 -0.002562	0.284849 0.013995 -0.001802	0.248098 0.009489 -0.001089	0.222508 0.006986 -0.000672
0	2.236068 0.080846 0.003074	2.000000 0.091131 0.003855	1.732051 0.106927 0.005043	1.414213 0.135078 0.006475	1.000000 0.193374 0.001550	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0

Tabela 6

5	-2.369263	2.191264	2.011240	1.833051	1.662069	1.504151	1.363846	1.243014	1.140894	1.055180	0.983116
	-0.001540	-0.001781	-0.001762	-0.001252	-0.000342	0.000423	0.000504	0.000159	-0.000242	-0.000498	-0.000612
	0.000157	0.000157	0.000290	0.000777	0.001466	0.001923	0.001657	0.001017	0.000364	-0.000075	-0.000332
	-0.000787	-0.000901	-0.000825	-0.000319	0.000486	0.001108	0.001023	0.000541	0.000021	-0.000318	-0.000498
4	2.293556	2.099413	1.899604	1.698823	1.505179	1.328745	1.177285	1.052851	0.952647	0.872008	0.806454
	-0.001774	-0.002314	-0.002576	-0.002103	-0.000615	0.000660	0.000506	-0.000217	-0.000733	-0.000934	-0.000921
	0.000498	0.000317	-0.000301	0.000727	0.001858	0.002589	0.001924	0.000771	-0.000054	-0.000485	-0.000626
	-0.000735	-0.001098	-0.001230	-0.000777	0.000545	0.001557	0.001160	0.000230	-0.000430	-0.000478	-0.000798
3	2.225795	2.013675	1.789570	1.557900	1.330673	1.127249	0.962835	0.838190	0.744907	0.673916	0.618459
	-0.001817	-0.002685	-0.003573	-0.003533	-0.001149	0.001207	0.000164	-0.001072	-0.001499	-0.001422	-0.001188
	-0.001117	0.000880	0.000446	0.000522	0.002195	0.003618	0.001779	-0.000011	-0.000818	-0.000984	-0.000914
	-0.000451	-0.001005	-0.001664	-0.001593	0.000445	0.002351	0.000920	-0.000582	-0.001191	-0.001229	-0.001072
2	2.170764	1.940506	1.688426	1.4142136	1.131714	0.883616	0.707107	0.592268	0.515329	0.460667	0.419732
	-0.001469	-0.002538	-0.004180	-0.005703	-0.002307	0.001969	-0.001497	-0.002671	-0.002316	-0.001718	-0.001225
	0.002228	0.002166	0.001526	0.000347	0.002226	0.004742	0.000141	-0.001702	-0.001728	-0.001361	-0.001004
	0.000271	-0.000927	-0.001426	-0.002769	-0.000110	0.003301	-0.000718	-0.002218	-0.002046	-0.001559	-0.001130
1	2.134218	1.889452	1.611301	1.285063	0.899454	0.555893	0.389086	0.310308	0.264627	0.234278	0.212332
	-0.000828	-0.001532	-0.003103	-0.006544	-0.003307	-0.002028	-0.006107	-0.003939	-0.002246	-0.001325	-0.000829
	0.003539	0.004454	0.004976	0.003471	0.002677	0.000549	-0.004903	-0.003309	-0.001894	-0.001118	-0.000707
	0.001240	0.001352	0.000831	-0.001623	-0.000378	-0.000775	-0.005529	-0.003641	-0.002084	-0.001023	-0.000776
0	2.121320	1.870829	1.581139	1.224745	0.707107	0	0	0	0	0	0
	-0.000424	-0.000704	-0.001281	-0.004682	-0.002770	0	0	0	0	0	0
	0.004298	0.006118	0.009450	0.015292	0.004271	0	0	0	0	0	0
	0.001825	0.002593	0.003982	0.005208	0.000702	0	0	0	0	0	0
n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Tabela 7

Број: _____

LITERATURA

Датум: _____

- | 1 | Akin J.E., The generation of elements with singularities, Int.J.Num.Meth.Engng., 10, N6, 1976, 1249-1259.
- | 2 | Андреев В.Б., Асимптотика решения сеточного уравнения Лапласа в угле, Докл. АН СССР 224, N6, 1979, 1289-1293.
- | 3 | Андреев В.Б., Сеточные аппроксимации негладких решений дифференциальных уравнений, Диф.Уравн., 16, N7, 1980, 1172-1184.
- | 4 | Андреев В.Б., Смешанная задача для сеточного уравнения Лапласа в полуплоскости, В кн.: Вычисл. методы и прогр., вып. 35, Изд-во МГУ, 1981, 82-136.
- | 5 | Андреев В.Б., О точности модифицированных разностной и конечно-элементной схем для модельной задачи о трещине, Диф.уравн. 17, N7, 1981, 1184-1192.
- | 6 | Андреев В.Б., Сеточные аппроксимации негладких решений дифференциальных уравнений, Дис.докт.физ.мат.наук, Москва, 1983.
- | 7 | Андреев В.Б., Кряквина С.А., О фундаментальном решении однопараметрического семейства разностных, аппроксимаций оператора Лапласа на плоскости, ЖВМ и МФ, 13, N2, 1973, 343-355.
- | 8 | Архипова Е.Ю., Исследование сеточных аппроксимации задачи Дирихле с разрывными граничными условиями, Дис.канд.физ.-мат. наук, Москва, 1976.
- | 9 | Babuška J., Rosenzweig M.B., A finite element scheme for domains with corners, Numer.Math., 20, N1, 1972, 1-21.
- | 10 | Bramble J.H., Hubbard B.E., Zlamal M., Discrete analogues of the Dirichlet problem with isolated singularities, SIAM J. Numer.Anal., 5, N1, 1968, 1-25.
- | 11 | Crank J., Furzeland R., The treatment of boundary singularities in axially symmetric problems containing discs., J.Inst. Maths. Applics., 20, N3, 1977, 355-370.

- |12| Crank J., Furzeland R., The numerical solution of elliptic and parabolic partial differential equations with boundary singularities, *J.Comp.Phys.*, 26, N3, 1978, 285-296.
- |13| Fox L., Sankar R., Boundary singularities in linear elliptic differential equations, *J.Inst.Maths.Applics.*, 5, N3, 1969, 340-350.
- |14| Фрязинов И.В., Разностные схемы для уравнения Лапласа в ступенчатых областях, *ЖВМ и МФ*, 18, N5, 1978, 1170-1185.
- |15| Гахов Ф.А., Краевые задачи, Наука, Москва, 1977.
- |16| Hofmann P., Asymptotic expansions of the discretization error of boundary value problems of the Laplace equation in rectangular domains, *Numer.Math.*, 9, N4, 1967, 302-322.
- |17| Йованович Б., О методе сеток решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге в случае разрывных граничных условий, *Мат.вешн.* 5, N1, 1981, 69-79.
- |18| Кондратьев В.А., Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками, *Вкн.: Труды Московского матем.о-ова*, 16, 1967, 209-292.
- |19| Лаврентьев М.А., Шабат Б.В., Методы теории функций комплексного переменного, Наука, Москва, 1973.
- |20| Leasonen P., On the discretization error of the Dirichlet problem in a plane region with corners, *Ann.Acad.Sci.Fenn.*, ser.A1, N408, 1967, 1-16.
- |21| Линвинчук Г.С., Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, Наука, Москва, 1977.
- |22| Motz H., The treatment of singularities of parital differential equations by relaxation methods, *Quart.Appl.Math.*, 4, N4, 1947, 371-377.
- |23| Оганесян Л.А., Руховец Л.А., О вариационно-разностных схемах для линейных эллиптических уравнений второго порядка в двумерной области с кусочно-гладкой границей, *ЖВМ и МФ*, 8, N1, 1968, 97-114.

- | 24 | Привалов И.И., Граничные свойства аналитических функции, ГИФМЛ, Москва, 1960.
- | 25 | Привалов И.И., Введение в теорию функций комплексного переменного, Наука, Москва, 1977.
- | 26 | Прудников А.П., Брычков И.А., Маричев О.И., Интегралы и ряды, Наука, Москва, 1981.
- | 27 | Самарский А.А., Андреев В.В., Разностные методы для эллиптических уравнений, Наука, Москва, 1976.
- | 28 | Strang G., Fix G., An analysis of the finite element method, Prentice Hall, Inc., London, 1973.
- | 29 | Thatcher R.W., The use of infinite grid refinements at singularities in the solution of Laplace's equation, Numer. Math., 25, N2, 1976, 163-178.
- | 30 | Thomee V., Westergren B., Elliptic difference equations and interior regularity, Numer.Math., 11, N3, 1968, 196-210.
- | 31 | Tracey D.M., Cook S.T., Analysis of power type singularities using finite elements, Int.J.Num.Meth.Engng., 11, N8, 1977, 1225-1233.
- | 32 | Волков Е.А., Метод сеток для конечных и бесконечных областей с кусочно-гладкой границей, Докл. АН СССР, 168, N5, 1966, 978-981.
- | 33 | Волков Е.А., О методе регулярных составных сеток для уравнения Лапласа на многоугольниках, Труды матем.инст. АН СССР, 140, 1976, 68-102.
- | 34 | Wait R., Mitchell A.R., Corner singularities in elliptic problems by finite element methods, J.Comp.Phys., 8, N1, 1971, 45-52.
- | 35 | Walsh J.L., Young D., On the degree of convergence of solutions of difference equations to the solution of the Dirichlet problems, J.Math.Phys., 33, N1, 1954, 80-93.
- | 36 | Walsh J.L., Approximation to a function by a polynomial in another function, Amer.Math.Monthly, 76, N9, 1969, 1049-1050.

- |37| Wigley N.M., On the convergence of discrete approximations to solutions of mixed boundary value problems, SIAM J.Numer.Anal., 3, N3, 1966, 372-382.
- |38| Wigley N.M., On a method to subtract off a singularity at a corner for the Dirichlet or Neumann problem, Maths.Comput., 23, N106, 1969, 395-401.
- |39| Zengler C., Gietl H., Improved difference schemes for the Dirichlet problem of Poisson's equation in the neighbourhood or corners, Numer.Math.,30, N3, 1978, 315-332.