PRIRODNOMATEMATIČKI FAKULTET U BEOGRADU

20 201

MIROSLAV D. AŠIĆ

O NEKIM SVOJSTVIMA SPEKTARÂ IGARÂ

Doktorska disertacija

Univerzitet u Beogradu 1980.

P R E D G O V O R

Teorija igarâ se grubo može opisati kao matematička teorija konfliktnih situacijâ. Kako treba shvatiti ove reči ? Jedan, dva ili više učesnikâ u igri (igračâ) biraju po jedan element odredjenog skupa (donose odluke, vuku poteze) i kada je to biranje završeno, u zavisnosti od toga u kojoj se završnoj poziciji nalaze, igrači dobijaju odgovarajuće "isplate" (videti npr. [E 2]). Pri tom se, razume se, interesi pojedinih igračâ, uopšte uzev, ne poklapaju ; oni su, dakle, suočeni sa konfliktnom situacijom. Izuzetak čine igre sa jednim igračem - tada se odluke tog (jedinog) igrača usmeravaju naprosto na stizanje u za njega najpovoljniju završnu poziciju. Imajući ovo u vidu, jasno je da se svi ekstremalni zadaci u matematici (dakle problemi linearnog i nelinearnog programiranja, varijacionog računa, optimalnog upravljanja i sl.) mogu shvatiti kao problemi u vezi sa igrama sa jednim igračem. Razume se, za teoriju igarâ, stricto sensu, su od interesa prvenstveno igre sa dva ili više igračâ.

Igre se mogu klasifikovati na razne načine: po broju igračâ koji može biti konačan, ali i beskonačan (razmatraju se čak i igre sa kontinuumom igračâ - videti [R 5]), po prirodi skupovâ iz kojih igrači biraju elemente (tzv. skupovâ strategijâ) - naime, ti skupovi mogu biti konačni i beskonačni, kompaktni ili nekompaktni, diskretni ili ne (videti odeljak 1.1.). Spomenimo samo da se relativno jednostavno (i prirodno) mogu pojaviti igre u kojima je broj strategijâ veći od kontinuuma. Pored toga, od značaja je da li igrači biraju strategije u diskretnim razmacima vremena ili neprekidno (u poslednjem slučaju dobijaju se tzv. diferencijalne igre). Važnu ulogu u igri igra i informacija tj. koliko je igrač upoznat sa delovanjem drugih igračâ. Po ovom osnovu, igre mogu da se podele na igre sa potpunom i igre sa nepotpunom informacijom (videti npr. [A 3])

Važan kriterijum u klasifikaciji je i da li je igračima dozvoljeno da sklapaju tzv. koalicije radi uspešnije igre, te imamo kooperativnu i nekooperativnu teoriju igara. Odredjenu ulogu igra i pitanje da li su dozvoljena tzv. "bočna plaćanja" (side payments) što praktično znači: da li jedan igrač sme drugima da dâ deo svoje dobiti da bi oni uskladili svoju igru sa njegovim željama ? U ovom radu će biti posmatrane samo nekooperativne igre (dobar pregled metodâ i rezultatâ kooperativne teorije igarâ može se naći npr. u [O 4] , [R 5]).

Postoji, medjutim, jedna važna klasa igarâ za koje se pitanje kooperativnosti uopšte ne postavlja - to su igre dva igrača sume nula, ili kako se još nazivaju, antagonističke igre. To su igre dva igrača u kojima je u svakoj završnoj poziciji zbir isplatâ igračima jednak nuli. Intuitivno je jasno da u takvoj igri igrači nemaju zašto da se udružuju u koaliciju - svakom uvećanju isplate jednom od njih odgovara jednako umanjenje isplate drugom. Značajan deo ovog rada je posvećen antagonističkim igrama.

Od primenâ teorije igarâ van matematike pomenućemo samo primene u ekonomiji i vojnim naukama (videti npr. [M 7]), a zadržaćemo se na nekim primenama unutar drugih matematičkih oblastî . Pokazaće se da se raznim matematičkim problemima može dati "igrovna" formulacija, iako na prvi pogled oni sa teorijom igarâ nemaju ničeg zajedničkog. Naravno, time ne tvrdimo da je ovakvo "svodjenje" uvek korisno i opravdano sa praktične tačke gledišta, ali i sama mogućnost svodjenja opravdava interes za teoriju igarâ.

Svaki problem linearnog programiranja se svodi na (matričnu) igru (i obrnuto - videti [D 3] , [V 1]). I više od toga, svaki problem konveksnog programiranja može se formulisati i kao problem iz teorije igarâ, što neposredno sledi iz teoreme Kuhn-a i Tucker-a (videti [P 1]).

Neka $f : R \longrightarrow R$; posmatrajmo sledeću igru: igrač P_1 bira pozitivan broj a, zatim igrač P_2 (znajući šta je P_1 izabrao) bira pozitivan broj b. Posle toga igrač P_1 bira realne brojeve x i y tako da je $|x-y| < b$. Ukoliko je $|f(x)-f(y)| < a$ pobedio je P_2 ; inače pobedjuje P_1. Nije teško videti da igrač P_2 može sigurno da pobedi ako i samo ako je funkcija f uniformno neprekidna na R. Na sličan način se "igrovno" mogu izraziti obična neprekidnost, periodičnost, monotonost funkcijâ.

Neka je S neprazan skup i neka je F neka familija preslikavanjâ skupa S u samog sebe. Igrač P_1 bira $f \in F$, a P_2, znajući šta je izabrao P_1, bira $x \in S$. Pobedjuje P_2 ukoliko je $f(x) = x$, inače je pobednik P_1. Jasno je da P_2 može sigurno da pobedi ako i samo ako sva preslikavanja iz familije F imaju fiksnu tačku. To je npr. slučaj kada je S n-dimenzionalna zatvorena kugla, a F familija neprekidnih preslikavanjâ S u S (videti npr. [K 2]).

Neka je f neprekidna realna funkcija definisana na zatvorenom intervalu I. Igrač P_1 bira n+1 brojevâ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ a igrač P_2, znajući za učinjen izbor, broj x iz intervala I. Tada igrač P_1 plaća igraču P_2 iznos $|f(x) - a_0 - a_1 x - \ldots - a_n x^n|$. Vidi se da je ovde optimalna strategija igrača P_1 ustvari biranje koeficijenatâ polinoma najbolje (ravnomerne) aproksimacije za funkciju f, dok je vrednost igre naprosto norma razlike funkcije f i tog polinoma.

Razmotrimo sada sledeću igru: igrač P_1 bira prirodan broj m. Znajući šta je P_1 izabrao, P_2 bira: prirodne brojeve x i y, prirodan broj $n \geqslant 3$ i cele brojeve $z_1, \ldots, z_m$ Ukoliko je $x^n + y^n - z_1^n - \ldots - z_m^n = 0$ pobedjuje P_2 , a inače P_1. Jasno je da P_1 gubi ako izabere $m \neq 1$: tada će P_2 uzeti npr. $x = y = z_1 = z_2 = 1$, $n = 3$ i $z_3 = \ldots = z_m = 0$. Medjutim, šta ako igrač P_1 izabere $m = 1$? Tada odgovor zavisi od odgovora na čuveni Fermat-ov problem.

Navedimo još samo jedan primer (ovaj primer pripada finskom matematičaru J.Hintikka). Neka je data sledeća formula

$$(\forall x)(\exists y)\, H(x,y)$$

gde je H relacijsko slovo dužine dva. Interpretirajmo ovo slovo kao binarnu relaciju $\hat{H}$ nekog (nepraznog) skupa S i posmatrajmo igru u kojoj igrač P_1 bira $\hat{x} \in S$ a P_2, znajući vrednost $\hat{x}$, bira $\hat{y} \in S$. Ukoliko $\hat{x}$ i $\hat{y}$ jesu u relaciji $\hat{H}$ pobedjuje P_2, inače P_1. Tada je očigledno da igrač P_2 može sigurno da pobedi ako i samo ako je gornja formula istinita pri uočenoj interpretaciji. Nije teško videti da se slična "igrovna" formulacija može dati i za druge formule u preneksnoj normalnoj formi. Neke primene teorije igarâ u matematičkoj logici mogu se naći u članku [E 1].

Istorija teorije igarâ počinje praktično 1943. godine kada je izašla monografija J.von Neumann-a i O.Morgenstern--a [N 4]. Pre tog vremena je bilo objavljeno samo nekoliko radovâ iz ove oblasti (videti npr. [Z 1], [N 3]), dok posle II svetskog rata interes za teoriju igarâ neprestano raste. Već 1959. godine bibliografija teorije igarâ (videti [T 1]) broji preko 1000 naslovâ. Danas izlazi i poseban časopis "International Journal of Game Theory" koji objavljuje isključivo radove iz ove oblasti, pored mnogih drugih u kojima se pojavljuje dosta članakâ iz teorije igarâ.

Prva glava ovog rada ima uvodni karakter i tretira razna osnovna pitanja (egzistencija rešenjâ, nalaženje rešenjâ, karakterizacija rešenjâ) koja se u daljem izlaganju dosta koriste. Uvodi se nelinearni i linearni problem komplementarnosti i dokazuju neka svojstva rešenjâ tog problema (uporediti npr. sa [B 1]). Izloženi materijal se može naći u raznim monografijama iz teorije igarâ. Medjutim, pristup je ovde drukčiji: istovremeno se uvode i antagonističke i neantagonističke (konačne i beskonačne) igre i pojam ravnotežne tačke (odnosno, kako se ponekad kaže, "rešenja") se daje za obe klase igarâ odjednom. Treba spomenuti da se u celom radu razmatraju isključivo igre dva igrača (izuzetak čine odeljci 1.1. i 1.2.). Primer 1.2.3. je originalan.

Druga glava sadrži definicije spektra igre i kratak prikaz ranijih radovâ sa ovom tematikom (odeljak 2.4.). S obzirom da je pojam spektra igre definisan samo za "kvadratne" igre u odeljku 2.2. se pokazuje da se takve igre u odredjenom smislu "često" javljaju kao "podigre" bimatričnih igarâ. Pokazuje se takodje da skup svih bimatričnih igarâ koje imaju konačno mnogo ravnotežnih tačakâ sadrži podskup koji je otvoren i svuda gust u prostoru svih bimatričnih igarâ. Slično tvrdjenje se u odeljku 2.3. dokazuje za klasu matričnih igarâ. Dokazi ovih tvrdjenja su originalni ; jednostavniji su i u izvesnom smislu elementarniji od postojećih (videti npr. [H 2] i [M 1] , gde se za dokaz koristi teorija mnogostrukostî) jer koriste jedino matričnu algebru i teoriju polinomâ. Na kraju glave se formuliše problem čija rešenja izložena u daljim glavama predstavljaju originalne rezultate autora.

Treća glava sadrži rešenje postavljenog problema za klase bimatričnih i matričnih igarâ i predstavlja originalan doprinos autora. Dokazuje se takodje da su zaista nadjene sve veze izmedju spektra igre i njenog "rešenja". Tačan smisao ovih rečî sadržan je u teoremama 3.2.4. i 3.2.5. odnosno 3.3.4. i 3.3.5.

Četvrta, poslednja glava daje rešenje postavljenog problema za klasu igarâ na jediničnom kvadratu i to za neantagonističke (odeljak 4.2.) i antagonističke igre (odeljak 4.3.). U slučaju neantagonističkih igarâ odgovor je potpun (teorema 4.2.2.) dok jedino za antagonističke igre na jediničnom kvadratu nije dokazana potpunost dobijenog odgovora. Kao i u trećoj, rezultati u četvrtoj glavi su originalni.

Na kraju dajemo nekoliko napomenâ o korišćenim oznakama. Radi kratkoće, izostavljamo objašnjenja za široko rasprostranjene oznake (npr. za skup prirodnih ili za skup realnih brojevâ) kao i za oznake uvedene u definicijama ili u tekstu rada.

- Kraj dokaza teoreme i kraj definicije označavamo sa $\square$.
- Matricu dobijenu transponovanjem matrice A označavamo sa A'.
- Strategije (u konačnim igrama) zapisujemo u obliku n-torke realnih brojevâ. Ukoliko strategiju upotrebljavamo u matričnim formulama podrazumevaćemo da je napisana u obliku vektora - kolone. U radu se razmatraju isključivo realne matrice i vektori i to se često ne naglašava posebno.
- Sve matrične nejednakosti se podrazumevaju "pokomponentno" što znači da za matrice $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ istog formata $A \leqslant B$ znači naprosto $a_{ij} \leqslant b_{ij}$ za sve i,j.
- Literatura (na kraju rada) je sredjena abecedno i numerisana po početnim slovima prezimena autorâ. Tako su npr. radovi autorâ čija prezimena počinju slovom H numerisani [H 1], [H 2] itd. Ukoliko ima više koautorâ uzeto je početno slovo prezimena prvog autora.
- Teoreme, definicije i primeri su numerisani po odeljcima. Tako je npr. teorema 3.3.4. četvrta teorema u odeljku 3.3.
- Formule se numerisane u okviru odeljakâ, ali bez

označavanja odeljka. Time je pisanje uprošćeno, a ne gubi se ništa, jer su pozivanja na formule iz drugih odeljakâ veoma retka.

S A D R Ž A J

PREDGOVOR i
SADRŽAJ viii

1. UVOD 1
   1.1. Osnovne definicije 1
   1.2. Konačne igre 4
   1.3. Igre na jediničnom kvadratu 21
   1.4. Antagonističke igre 25

2. SPEKTRI IGARÂ 30
   2.1. Osnovne definicije 30
   2.2. Igre sa konačno mnogo ravnotežnih tačakâ 31
   2.3. Matrične igre sa jedinstvenom ravnotežnom tačkom 39
   2.4. Matrične igre i svojstvene vrednosti . 41

3. KONAČNE IGRE 47
   3.1. Uvodne teoreme 47
   3.2. Bimatrične igre 51
   3.3. Matrične igre 66

4. IGRE NA JEDINIČNOM KVADRATU 78
   4.1. Uvodne teoreme 78
   4.2. Neantagonističke igre na jediničnom kvadratu 87
   4.3. Antagonističke igre na jediničnom kvadratu 94

LITERATURA 99
REGISTAR 104

TEOREME: 1.2.1. (str.6), 1.2.2.(8), 1.2.3.(12), 1.2.4.(14) 1.2.5.(17), 1.3.1.(22), 1.3.2.(24), 1.4.1.(26), 1.4.2.(27) 1.4.3.(27), 1.4.4.(28), 2.2.1.(33), 2.2.2.(36), 2.2.3.(38) 2.2.4.(39), 2.3.1.(39), 2.3.2.(40), 2.3.3.(40), 2.4.1.(41) 2.4.2.(43), 3.1.1.(47), 3.1.2.(48), 3.1.3.(50), 3.1.4.(50) 3.2.1.(52), 3.2.2.(53), 3.2.3.(53), 3.2.4.(54), 3.2.5.(59) 3.3.1.(67), 3.3.2.(67), 3.3.3.(68), 3.3.4.(69), 3.3.5.(74)

4.1.1.(79), 4.1.2.(79), 4.1.3.(82), 4.1.4.(82), 4.1.5.(84)
4.1.6.(87), 4.2.1.(88), 4.2.2.(89), 4.3.1.(95), 4.3.2.(96)

DEFINICIJE: 1.1.1.(1), 1.1.2.(1), 1.2.2.(7), 1.2.3.(14)
1.4.1.(26), 1.4.2.(27), 2.1.1.(30), 2.2.1.(32), 2.2.2.(38)
3.2.1.(52), 3.2.2.(52), 3.3.1.(66), 4.1.1.(84), 4.2.1.(87)
4.3.1.(95).

1 U V O D

1.1. Osnovne definicije

Mada će u najvećem delu rada biti reči o igrama dva igrača, u ovom i narednom odeljku ćemo se baviti i igrama više igračâ, kako bismo ukazali na sličnosti i istakli razlike koje medju njima postoje. Sem toga, u daljem izlaganju definisaćemo i razmatraćemo samo igre u normalnoj formi. Svodjenje igarâ datih u pozicionoj formi na normalnu formu izloženo je na primer u [A 3] , [K 7] , [N 4] .

DEFINICIJA 1.1.1. Igra n igračâ $P_1,\dots,P_n$ $(n\geq 2)$ je uredjena 2n-torka $(A_1,\dots,A_n,K_1,\dots,K_n)$ gde su $A_1,\dots,A_n$ neprazni skupovi a $K_1,\dots,K_n$ funkcije koje preslikavaju $A_1\times\dots\times A_n$ u skup realnih brojeva. Elemente skupa A_i nazivamo čistim strategijama igrača P_i, a funkciju K_i funkcijom isplate igrača P_i. $\square$

Smisao ove definicije je u sledećem: igrači P_i , $i=1,\dots,n$ biraju (nezavisno jedan od drugog i neznajući šta su drugi igrači izabrali) po jedan element iz skupa A_i. Neka su izabrani elementi $a_1,\dots,a_n$. Tada isplata igraču P_i iznosi $K_i(a_1,\dots,a_n)$, $i=1,\dots,n$.

U predgovoru je rečeno da je predmet ovoga rada nekooperativna teorija igarâ. Drugim rečima, igračima nije dozvoljeno da sklapaju tzv. koalicije radi uspešnije igre. Nekooperativnu teoriju igarâ osnovao je J.Nash 1951. [N 1] .

Neka je na svakom od skupova A_i dat neki σ-prsten R_i sa svojstvima: $A_i\in R_i$ i R_i sadrži sve jednočlane podskupove skupa A_i. Ovo omogućuje da se na skupovima A_i posmatraju razne mere (videti [A 2] , [L 3] , [H 1] , [N 2] , [I 1]).

DEFINICIJA 1.1.2. Mešovita strategija igrača P_i je verovatnosna mera na skupu A_i. □

Neka je, dakle, R_i neki σ-prsten na A_i $(i=1,\dots,n)$ sa navedenim svojstvima, i neka su $\mu_1,\dots,\mu_n$ mešovite strategije igračâ $P_1,\dots,P_n$. Primetimo najpre da se čiste strategije mogu shvatiti kao specijalan slučaj mešovitih. Naime, čistoj strategiji $a_i \in A_i$ odgovara mešovita strategija $\overline{\mu}_i$ definisana na sledeći način: Za $S \subseteq A_i$ je $\overline{\mu}_i(S)=0$ ako $a_i \notin S$; $\overline{\mu}_i(S)=1$ ako $a_i \in S$. Jasno je da je na ovaj način definisana jedna verovatnosna mera, dakle mešovita strategija. Da bismo izbegli usložnjavanje zapisa ubuduće nećemo praviti razliku izmedju čistih strategijâ i mešovitih strategijâ definisanih na opisani način, jer će iz konteksta uvek biti jasno o čemu je reč.

Pretpostavimo dalje da su funkcije K_i , $i=1,\dots,n$, ograničene i merljive u odnosu na Descartes-ov proizvod σ-prstena $R_1,\dots,R_n$ (videti [H 3], [L 3]). Tada ima smisla govoriti o matematičkom očekivanju slučajne veličine K_i u odnosu na verovatnosnu meru $\mu=\mu_1\times\dots\times\mu_n$. Označimo ovo očekivanje sa $\overline{K}_i(\mu_1,\dots,\mu_n)$. Na ovaj način su funkcije $\overline{K}_i$ $(i=1,\dots,n)$ definisane na skupu $\widetilde{A}_1\times\dots\times\widetilde{A}_n$, gde je sa $\widetilde{A}_i$ $(i=1,\dots,n)$ označen skup svih mešovitih strategijâ igrača P_i. Ako se specijalno za sve igrače uzmu čiste strategije (npr. $a_1,\dots,a_n$) očekivanje isplate igraču P_i jednako je, očigledno, upravo $K_i(a_1,\dots,a_n)$.

U daljem ćemo se zadržati isključivo na sledeća dva slučaja:

1^o Svi skupovi $A_1,\dots,A_n$, su konačni (ovakve igre nazivamo konačnim igrama).

2^o $n=2$, $A_1=A_2=[0,1]$ (tzv. igre na jediničnom kvadratu).

U prvom slučaju mešovite strategije su potpuno odredjene ako se znaju verovatnoće pojedinih čistih strategijâ. Na primer, ako je $A_1 = \{a_1,\dots,a_k\}$ onda je mešovita strategija igrača P_1 odredjena sa $(p_1,\dots,p_k)$, $p_j = \mu(\{a_j\})$; $j = 1,\dots,k$. Stoga se skup njegovih mešovitih strategijâ može opisati i kao skup $S_k = \{(p_1,\dots,p_k) \mid p_1 \geqslant 0,\dots,p_k \geqslant 0 , p_1 + \dots + p_k = 1\}$. Geometrijski, S_k je pravilan simpleks dimenzije $k-1$. Vrhovi tog simpleksa su tačke $(1,0,\dots,0)$, $(0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1)$ koje odgovaraju redom čistim strategijama $a_1,a_2,\dots,a_k$. U daljem ćemo redovno koristiti ovaj način zapisivanja mešovitih strategijâ u konačnim igrama. Sem toga, strategije ćemo u matričnim formulama zapisivati kao $[p_1 \dots p_k]'$ umesto $(p_1,\dots,p_k)$.

U drugom slučaju mešovite strategije su verovatnosne mere na $[0,1]$. S obzirom da ćemo se u daljem uglavnom baviti slučajevima kada su K_i neprekidne funkcije (dakle Borel-merljive) možemo uzeti da se σ-prsteni R_1 i R_2 poklapaju sa σ-prstenom Borel-ovih podskupova intervala $[0,1]$. Mešovita strategija μ je onda odredjena svojom funkcijom raspodele $F : R \rightarrow R$ definisanom sa

$$F(t) = \mu(\{x \mid x \leqslant t\})$$

(uporediti [I 1] , [C 3] , [D 2]). Važi, razume se, i obrnuto: svaka funkcija raspodele koja je konstanta na $(-\infty,0)$ i na $(1,+\infty)$ definiše jednu odredjenu mešovitu strategiju. S toga ćemo (slično prethodnom slučaju) često govoriti "strategija F(t)" mesto "strategija čija je funkcija raspodele F(t)" i sl. Ako igrači P_1 i P_2 odaberu redom mešovite strategije μ i ν čije su funkcije raspodelâ redom F i G onda će očekivanje isplate biti dato formulama

$$\overline{K}_1(\mu, \nu) = \int_0^1 \int_0^1 K_1(s,t)\, dF(s)dG(t)$$

$$\overline{K}_2(\mu, \nu) = \int_0^1 \int_0^1 K_2(s,t)dF(s)dG(t)$$

Napominjemo da jednočlani skupovi $\{0\}$ i/ili $\{1\}$ mogu imati pozitivnu meru. Da bismo izbegli komplikacije sa tim u vezi u gornjim formulama i u daljem uvek uzimamo da integral

$$\int_0^1 f(t)dF(t)$$

ima smisao

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dF(t)$$

gdje je stavljeno $f(x) = f(0)$ za x negativno i $f(x) = f(1)$ za $x > 1$.

1.2. Konačne igre

Zadržaćemo se najpre na slučaju konačnih igarâ. S obzirom da su skupovi $A_1, \dots, A_n$ konačni, bez umanjenja opštosti uzećemo da je $A_1 = \{1, \dots, k_1\}$, ..., $A_n = \{1, \dots, k_n\}$. Ukoliko igrač P_i izabere strategiju $\mu_i = (p_{i1}, \dots, p_{ik_i})$, $i = 1, \dots, n$ onda je očekivanje isplate igraču P_j, $j = 1, \dots, n$ dato sa

$$(1) \quad \overline{K}_j(\mu_1, \dots, \mu_n) = \sum_{s_1=1}^{k_1} \dots \sum_{s_n=1}^{k_n} K_j(s_1, \dots, s_n) p_{1s_1} \dots p_{ns_n}$$

Odavde je jasno da je konačna igra odredjena sa $nk_1 \dots k_n$

realnih brojeva $K_j(s_1,\ldots,s_n)$. Specijalno, konačna igra dva igrača je odredjena sa $2k_1k_2$ realna broja. Ove brojeve možemo "razmestiti" u dve matrice $P=[p_{ij}]$, $Q=[q_{ij}]$ formata $k_1\times k_2$ tako da je $p_{ij}=K_1(i,j)$; $q_{ij}=K_2(i,j)$; $i=1,\ldots,k_1$; $j=1,\ldots,k_2$. Stoga se obično konačne igre dva igrača nazivaju "bimatrične igre".

S obzirom na rečeno, bimatrična igra se može i ovako opisati: date su dve matrice istog formata $k_1\times k_2$, igrač P_1 bira jedan broj iz skupa $\{1,\ldots,k_1\}$, a igrač P_2 iz skupa $\{1,\ldots,k_2\}$. Pretpostavimo da su P_1 i P_2 redom izabrali s odnosno t. Isplata igraču P_i $(i=1,2)$ jednaka je elementu na mestu (s,t) "njegove" matrice. Matrice P i Q se stoga obično nazivaju matricama isplate.

DEFINICIJA 1.2.1. Neka je data igra n igračâ $(A_1,\ldots,A_n,$ $,K_1,\ldots,K_n)$. Uredjenu n-torku $(\hat\mu_1,\ldots,\hat\mu_n)$ mešovitih strategijâ nazivamo ravnotežnom tačkom ako i samo ako za svaki $i=1,\ldots,n$ i svaku mešovitu strategiju μ_i igrača P_i važi:

$$\overline{K}_i(\hat\mu_1,\ldots,\hat\mu_{i-1},\mu_i,\hat\mu_{i+1},\ldots,\hat\mu_n)\leqslant$$
$$\leqslant \overline{K}_i(\hat\mu_1,\ldots,\hat\mu_{i-1},\hat\mu_i,\hat\mu_{i+1},\ldots,\hat\mu_n) \quad \square$$

Ovo znači da nijedan igrač P_i nema interesa da odstupi od strategije $\hat\mu_i$ ukoliko se svi ostali igrači pridržavaju strategijâ $\hat\mu_1,\ldots,\hat\mu_{i-1},\ \hat\mu_{i+1},\ldots,\hat\mu_n$. Naravno, može se desiti da bi promena strategijâ dvaju igrača (ili više igračâ) dovela do uvećanja isplate za te igrače. Podsećamo, medjutim, da je ovde reč o nekooperativnoj teoriji igarâ te da svaki igrač samostalno donosi odluku o izboru svoje strategije. Iz gornje definicije dakle sledi da je za igrače jedino razumno (uz odsustvo kooperacije) da odaberu mešovite strategije $\hat\mu_1,\ldots,\hat\mu_n$ tako da $(\hat\mu_1,\ldots,\hat\mu_n)$ bude ravnotežna tačka.

P r i m e r 1.2.1. Posmatrajmo bimatričnu igru definisanu matricama

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ova igra ima tri ravnotežne tačke: to su ((1,0),(1,0)), , ((0,1),(0,1)),((1/2,1/2),(1/2,1/2)). U prva dva slučaja isplata je jednaka 1(za oba igrača), dok u trećem slučaju prvi igrač dobija -2 a drugi -1.

Sledeća teorema potiče od J.Nash-a [N 1].

TEOREMA 1.2.1. Svaka konačna igra $(A_1,\dots,A_n,K_1,\dots,K_n)$ ima barem jednu ravnotežnu tačku.

D o k a z : Neka je $A_i = \{1,\dots,k_i\}$, $i=1,\dots,n$ i neka je sa $\bar{A}_i = S_{k_i}$ označen skup mešovitih strategijâ igrača P_i. Neka je $(\mu_1,\dots,\mu_n)$ proizvoljna n-torka mešovitih strategijâ pri čemu je $\mu_i \in S_{k_i}$, $i=1,\dots,n$ i neka je skup $M(\mu_1,\dots,\mu_n)$ podskup skupa $S_{k_1}\times\dots\times S_{k_n}$ definisan sa:

$$M(\mu_1,\dots,\mu_n) =$$
$$= \{(\nu_1,\dots,\nu_n) \,|\, \bar{K}_i(\mu_1,\dots,\mu_{i-1},\nu_i,\mu_{i+1},\dots,\mu_n) =$$
$$= \max_{\xi\in S_{k_i}} \bar{K}_i(\mu_1,\dots,\mu_{i-1},\xi,\mu_{i+1},\dots,\mu_n),\ i=1,\dots,n\}$$

S obzirom na neprekidnost $\bar{K}_i$, $i=1,\dots,n$ na kompaktnom skupu $S_{k_1}\times\dots\times S_{k_n}$ skup $M(\mu_1,\dots,\mu_n)$ je dobro definisan i uvek je neprazan. Imajući u vidu da je funkcija $\bar{K}_i$ linearna po svakoj promenljivoj ponaosob i da su skupovi S_{k_i} konveksni zaključujemo da je $M(\mu_1,\dots,\mu_n)$ takodje konveksan i zatvoren skup. Pridružujući tački $(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ skup $M(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ dobijamo višeznačno preslikavanje skupa $S_{k_1}\times\ldots\times S_{k_n}$ u sebe (odnosno, "obično" preslikavanje tog skupa u njegov partitivni skup). Pored pobrojanih osobinâ, ovo preslikavanje je i polunеprekidno odozgo, što neposredno sledi iz neprekidnosti funkcijâ $\overline{K}_i$, $i=1,\ldots,n$. Po Kakutani-evoj teoremi o nepokretnoj tački (videti [K 1], [P 1]) postoji tačka $(\hat{\mu}_1,\ldots,\hat{\mu}_n)$ takva da $(\hat{\mu}_1,\ldots,\hat{\mu}_n)\in$ $\in M(\hat{\mu}_1,\ldots,\hat{\mu}_n)$. No tada za $i=1,\ldots,n$ važi:

$$\overline{K}_i(\hat{\mu}_1,\ldots,\hat{\mu}_n)=\max_{\xi\in S_{k_i}}\overline{K}_i(\hat{\mu}_1,\ldots,\hat{\mu}_{i-1},\xi,\hat{\mu}_{i+1},\ldots,\hat{\mu}_n)$$

što znači da je $(\hat{\mu}_1,\ldots,\hat{\mu}_n)$ ravnotežna tačka. □

Prethodna teorema (i njen dokaz) ne daju nikakav način za (makar i približno) nalaženje ravnotežnih tačakâ. Iz nje se takodje ne može ništa zaključiti o strukturi skupa ravnotežnih tačakâ. Sledeće teoreme posvećene su ovim pitanjima.

DEFINICIJA 1.2.2. Neka $f_i : R^m \to R$, $i=1,\ldots,m$. Pod nelinearnim problemom komplementarnosti podrazumevamo sledeći problem:

Naći realne brojeve $x_1,\ldots,x_m$ tako da važi:

$$x_1\geq 0,\ldots,x_m\geq 0 ,$$
$$f_1(x_1,\ldots,x_m)\geq 0,\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_m)\geq 0 ,$$
$$x_i f_i(x_1,\ldots,x_m)=0 , \quad i=1,\ldots,m .$$

U slučaju da su sve funkcije f_i linearne, tj. $f_i(x_1,\ldots,x_m)=c_{i1}x_1+\ldots+c_{im}x_m+d_i$, $i=1,\ldots,m$ problem se naziva linearni problem komplementarnosti. Skup $\{(x_1,\ldots,x_m)\mid x_i\geq 0,\ f_i(x_1,\ldots,x_m)\geq 0,\ i=1,\ldots,m\}$ se naziva skup dopustivih tačakâ posmatranog problema. □

Naredna teorema pokazuje da se problem nalaženja ravnotežne tačke može svesti na nelinearni problem komplementarnosti. Mi ćemo je formulisati i dokazati za slučaj igre tri igrača ; dokaz u opštem slučaju je sasvim sličan, ali se i inače složeno pisanje veoma mnogo usložnjava.

TEOREMA 1.2.2. Neka je data konačna igra tri igrača $\Gamma = (A_1, A_2, A_3, K_1, K_2, K_3)$ gde je $A_1 = \{1,\dots,U\}$, $A_2 = \{1,\dots,V\}$ i $A_3 = \{1,\dots,W\}$ i nelinearni problem komplementarnosti

(P) Naći realne brojeve $p_1,\dots,p_U, q_1,\dots,q_V, r_1,\dots,r_W, x, y, z, v$ tako da važi:

$$p_1 \geq 0, \dots, r_W \geq 0, \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; z \geq 0, \; v \geq 0 \;,$$

$$(2) \quad f_i = z - \sum_{j=1}^{V} \sum_{k=1}^{W} K_1(i,j,k) q_j r_k - v \geq 0 \;, \quad i = 1,\dots,U$$

$$(3) \quad g_j = y - \sum_{i=1}^{U} \sum_{k=1}^{W} K_2(i,j,k) p_i r_k - v \geq 0 \;, \quad j = 1,\dots,V$$

$$(4) \quad h_k = x - \sum_{i=1}^{U} \sum_{j=1}^{V} K_3(i,j,k) p_i q_j - v \geq 0 \;, \quad k = 1,\dots,W$$

$$(5) \quad \begin{aligned} E &= p_1 + \dots + p_U - 1 \geq 0 \;, \\ F &= q_1 + \dots + q_V - 1 \geq 0 \;, \\ G &= r_1 + \dots + r_W - 1 \geq 0 \;, \end{aligned}$$

$$H = 3 - p_1 - \dots - p_U - q_1 - \dots - q_V - r_1 - \dots - r_W \geq 0 \;,$$

$$p_i f_i = 0 \;, \quad i = 1,\dots,U$$

$$q_j g_j = 0 \;, \quad j = 1,\dots,V$$

$$r_k h_k = 0 \;, \quad k = 1,\dots,W$$

$xE = 0$, $yF = 0$, $zG = 0$, $vH = 0$.

Tada imamo:

(i) Neka je $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3)$ ma koja ravnotežna tačka u igri Γ, neka je $\hat{\mu}_1 = (\hat{p}_1,\dots,\hat{p}_U)$, $\hat{\mu}_2 = (\hat{q}_1,\dots,\hat{q}_V)$, $\hat{\mu}_3 = (\hat{r}_1,\dots,\hat{r}_W)$. Tada su brojevi $\hat{p}_1,\dots,\hat{p}_U,\hat{q}_1,\dots,\hat{q}_V,\hat{r}_1,\dots,\hat{r}_W,\hat{x},\hat{y},\hat{z},\hat{v}$ rešenje problema (P) gde su $\hat{v},\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ definisani sa:

$$\hat{v} = \max_s \left| \sum_{i=1}^{U} \sum_{j=1}^{V} \sum_{k=1}^{W} K_s(i,j,k)\hat{p}_i\hat{q}_j\hat{r}_k \right| , \tag{6}$$

$$\hat{x} = \hat{v} + \sum_{i=1}^{U} \sum_{j=1}^{V} \sum_{k=1}^{W} K_3(i,j,k)\hat{p}_i\hat{q}_j\hat{r}_k , \tag{7}$$

$$\hat{y} = \hat{v} + \sum_{i=1}^{U} \sum_{j=1}^{V} \sum_{k=1}^{W} K_2(i,j,k)\hat{p}_i\hat{q}_j\hat{r}_k , \tag{8}$$

$$\hat{z} = \hat{v} + \sum_{i=1}^{U} \sum_{j=1}^{V} \sum_{k=1}^{W} K_1(i,j,k)\hat{p}_i\hat{q}_j\hat{r}_k . \tag{9}$$

(ii) Neka je $\hat{p}_1,\dots,\hat{p}_U,\hat{q}_1,\dots,\hat{q}_V,\hat{r}_1,\dots,\hat{r}_W,\hat{x},\hat{y},\hat{z},\hat{v}$ ma koje rešenje nelinearnog problema komplementarnosti (P). Tada je $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3)$ gde je $\hat{\mu}_1 = (\hat{p}_1,\dots,\hat{p}_U)$, $\hat{\mu}_2 = (\hat{q}_1,\dots,\hat{q}_V)$, $\hat{\mu}_3 = (\hat{r}_1,\dots,\hat{r}_W)$ ravnotežna tačka u igri Γ .

D o k a z : (i) Nenegativnost brojeva $\hat{p}_1,\dots,\hat{r}_W,\hat{x},\hat{y},\hat{z},\hat{v}$, trivijalno sledi iz formulâ (6),(7),(8),(9) i osobinâ mešovitih strategijâ (videti kraj odeljka 1.1.). Uzimajući u definiciji ravnotežne tačke za igrača P_1 redom sve njegove čiste strategije dobijamo, za $i = 1,\dots,U$

$$\sum_{j=1}^{V} \sum_{k=1}^{W} K_1(i,j,k)\hat{q}_j\hat{r}_k \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{U} \sum_{j=1}^{V} \sum_{k=1}^{W} K_1(i,j,k)\hat{p}_i\hat{q}_j\hat{r}_k = \hat{z} - \hat{v}$$

tj. važi:

$$\hat{z} - \sum_{j=1}^{V} \sum_{k=1}^{W} K_1(i,j,k)\hat{q}_j\hat{r}_k - \hat{v} \geqslant 0$$

te je ispunjen uslov (2). Analogno se dokazuje da su ispunjeni uslovi (3) i (4).

S obzirom da je $\hat{p}_1 + \dots + \hat{p}_U = 1$, $\hat{q}_1 + \dots + \hat{q}_V = 1$, $\hat{r}_1 + \dots + \hat{r}_W = 1$ vidimo da je $E = F = G = H = 0$ te su i uslovi (5) ispunjeni, a važi, razume se, i $\hat{x}E = \hat{y}F = \hat{z}G = \hat{v}H = 0$. Pokažimo da je $\hat{p}_i f_i = 0$, $i = 1,\dots,U$. Zaista, ukoliko bi za neko i bilo $\hat{p}_i f_i > 0$, onda bismo, množeći nejednakosti (2) (za koje smo već dokazali da su ispunjene) redom sa $\hat{p}_1,\dots,\hat{p}_U$ i sabirajući dobili

$$\hat{z} - \sum_{i=1}^{U} \sum_{j=1}^{V} \sum_{k=1}^{W} K_1(i,j,k)\hat{p}_i\hat{q}_j\hat{r}_k - \hat{v} > 0$$

što protivreči (9). Slično se dokazuje da je

$$\hat{q}_j g_j = 0 \quad , \quad j = 1,\dots,V \quad i$$

$$\hat{r}_k h_k = 0 \quad , \quad k = 1,\dots,W \ .$$

Time je dokazano da je $\hat{x},\hat{y},\hat{z},\hat{v},\hat{p}_1,\dots,\hat{r}_W$ rešenje problema (P).

(ii) Sabiranjem uslovâ (5) nalazimo $E + F + G + H = 0$ te je zbog nenegativnosti sabirakâ $E = F = G = H = 0$. Kako su, sem toga, $\hat{p}_1,\dots,\hat{p}_U,\hat{q}_1,\dots,\hat{q}_V,\hat{r}_1,\dots,\hat{r}_W$ nenegativni brojevi vidimo da su $\hat{\mu}_1 = (\hat{p}_1,\dots,\hat{p}_U)$, $\hat{\mu}_2 = (\hat{q}_1,\dots,\hat{q}_V)$, $\hat{\mu}_3 = (\hat{r}_1,\dots,\hat{r}_W)$ mešovite strategije igračâ P_1,P_2,P_3 u igri Γ

Dokažimo da je $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3)$ ravnotežna tačka. Množeći nejednakosti (2) redom sa $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_U$ i sabirajući nalazimo, zbog $\hat{p}_i f_i = 0$, $i = 1, \dots, U$ da važi

$$\hat{z} - \sum_{i=1}^{U} \sum_{j=1}^{V} \sum_{k=1}^{W} K_1(i,j,k)\hat{p}_i \hat{q}_j \hat{r}_k - \hat{v} = 0$$

te je

$$(10) \quad \sum_{j=1}^{V} \sum_{k=1}^{W} K_1(i,j,k)\hat{q}_j \hat{r}_k \leqslant \hat{z} - \hat{v} =$$

$$= \sum_{i=1}^{U} \sum_{j=1}^{V} \sum_{k=1}^{W} K_1(i,j,k)\hat{p}_i \hat{q}_j \hat{r}_k \quad , \ i = 1, \dots, U \ .$$

Neka je sada $\mu_1 = (p_1, \dots, p_U)$ proizvoljna mešovita strategija igrača P_1. Množeći nejednakosti (10) redom sa $p_1, \dots, p_U$ i sabirajući dobijamo

$$\sum_{i=1}^{U} \sum_{j=1}^{V} \sum_{k=1}^{W} K_1(i,j,k) p_i \hat{q}_j \hat{r}_k \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{U} \sum_{j=1}^{V} \sum_{k=1}^{W} K_1(i,j,k)\hat{p}_i \hat{q}_j \hat{r}_k$$

ili,

$$\bar{K}_1(\mu_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3) \leqslant \bar{K}_1(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3)$$

za ma koju mešovitu strategiju μ_1 igrača P_1. Slično se dokazuje da je

$$\bar{K}_2(\hat{\mu}_1, \mu_2, \hat{\mu}_3) \leqslant \bar{K}_2(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3)$$

odnosno,

$$\bar{K}_3(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \mu_3) \leq \bar{K}_3(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3)$$

za ma koju mešovitu strategiju μ_2, odnosno μ_3. No to znači da je $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3)$ ravnotežna tačka u igri Γ. □

Ako se dokaz prethodne teoreme pažljivo razmotri vidi se da bi se u slučaju igre n igračâ $(A_1,\ldots,A_n,K_1,\ldots,K_n)$ nalaženje ravnotežnih tačakâ svelo na nelinearni problem komplementarnosti sa $n+1+k_1+\ldots+k_n$ promenljivih. To znači da bi već odredjivanje ravnotežnih tačakâ u igri tri igrača u kojoj svaki igrač ima samo po dve čiste strategije iziskivalo rešavanje nelinearnog problema komplementarnosti sa 10 promenljivih.

Izučavanje nelinearnog problema komplementarnosti, po svemu sudeći, započeo je R.W.Cottle (videti [C 2]). Linearni problem komplementarnosti se susreće i ranije [D 4] , [L 2] . Značaj ovog problema se vidi iz činjenice da se već na linearni problem komplementarnosti mogu svesti problem linearnog programiranja, problem kvadratnog programiranja, rešavanje sistema linearnih nejednačinâ (videti [K 4]). Sedmi tom Mathematical Programming Study (godina 1978.) je posvećen isključivo problemima komplementarnosti. Ovde nećemo ulaziti u direktne metode rešavanja nelinearnog problema komplementarnosti nego ćemo samo izložiti kako se on može svesti na problem rešavanja sistema nelinearnih jednačinâ za koji postoji mnogo numeričkih metodâ (videti npr. [O 1], [O 2]). Izlaganje je zasnovano na članku [M 2] . Videti i [M 4] .

TEOREMA 1.2.3. Neka je $g: R \to R$ strogo rastuća funkcija i neka je $g(0)=0$. Tada je m-torka $(x_1,\ldots,x_m)$ rešenje nelinearnog problema komplementarnosti:

Naći $x_1,\ldots,x_m$ tako da važi

$$x_1 \geq 0,\ldots,x_m \geq 0$$

$$f_1(x_1,\dots,x_m) \geq 0 \ ,\dots,\ f_m(x_1,\dots,x_m) \geq 0$$

$$x_i f_i(x_1,\dots,x_m) = 0 \ ,\ i = 1,\dots,m$$

ako i samo ako je ta m-torka rešenje sistema jednačinâ $g(|f_i(x_1,\dots,x_m) - x_i|) - g(f_i(x_1,\dots,x_m)) - g(x_i) = 0$ gde $i = 1,\dots,m$.

D o k a z : Neka je $(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m)$ rešenje nelinearnog problema komplementarnosti. Za svako $i = 1,\dots,m$ je $\hat{x}_i = 0$ ili $f_i(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m) = 0$. U prvom slučaju je

$$g(|f_i(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m) - \hat{x}_i|) - g(f_i(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m)) - g(\hat{x}_i) =$$
$$= g(f_i(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m)) - g(f_i(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m)) = 0 \ .$$

U drugom slučaju je

$$g(|f_i(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m) - \hat{x}_i|) - g(f_i(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m)) - g(\hat{x}_i) =$$
$$= g(\hat{x}_i) - g(\hat{x}_i) = 0$$

te stoga $(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m)$ zadovoljava i sistem jednačinâ.

Neka je sada $(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m)$ rešenje sistema jednačinâ. Dokažimo najpre da je $\hat{x}_i \geq 0$ za $i = 1,\dots,m$. Zaista, ukoliko bi za neko i bilo $\hat{x}_i < 0$ imali bismo

$$0 \leq g(|\hat{x}_i - f_i(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m)|) = g(\hat{x}_i) + g(f_i(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m)) <$$
$$< g(f_i(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m)),$$

jer je g strogo rastuća funkcija. Stoga je $f_i(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m) > 0$ i takodje $f_i(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m) > |\hat{x}_i - f_i(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m)|$ što protivreči pretpostavci $\hat{x}_i < 0$. Dakle, $\hat{x}_i \geq 0$, $i = 1,\dots,m$. Dokažimo najzad da je $\hat{x}_i f_i(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m) = 0$. U suprotnom bi za neko i bilo $\hat{x}_i > 0$ i $f_i(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m) > 0$. No tada bismo imali

$$g(|\hat{x}_i - f_i(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m)|) < g(\max\{\hat{x}_i, f_i(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m)\}) <$$
$$< g(\hat{x}_i) + g(f_i(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m))$$

i stoga

$$g(|\hat{x}_i - f_i(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m)|) - g(\hat{x}_i) - g(f_i(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m)) < 0$$

tj. brojevi $\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m$ ne bi zadovoljavali i-tu jednačinu. □

Primetimo da se u slučaju kada su funkcije f_i i g diferencijabilne ipak može desiti da je dobijena funkcija nediferencijabilna zbog znaka apsolutne vrednosti. Ovu je neprijatnost, medjutim, lako izbeći: dovoljno je da se g izabere tako da bude $g'(0)=0$ (može se npr. uzeti $g(t) = t^3$) .

Iz dokaza teoreme 1.2.2. jasno je da se nalaženje ravnotežnih tačaka u konačnim igrama dva igrača (bimatričnim igrama) svodi na linearni problem komplementarnosti. S obzirom da u daljem bimatrične igre igraju važnu ulogu pozabavićemo se nekim osnovnim osobinama ovog problema. Kako je već rečeno u definiciji 1.2.2. linearni problem komplementarnosti se može formulisati na sledeći način:

Naći realne brojeve $x_1,\dots,x_m$ tako da važi

$$x_1 \geq 0,\dots,x_m \geq 0$$

$$c_{i1}x_1 + \dots + c_{im}x_m + d_i \geq 0\,, \quad i=1,\dots,m$$

$$x_i(c_{i1}x_1 + \dots + c_{im}x_m + d_i) = 0\,, \quad i=1,\dots,m$$

Uvodeći $m \times m$ matricu C i $m \times 1$ vektor d ovaj se problem matrično zapisuje u obliku:

Naći $x \in R^m$ tako da važi

$$(11) \qquad x \geq 0\,, \quad Cx+d \geq 0 \quad \text{i} \quad x'(Cx+d)=0$$

DEFINICIJA 1.2.3. Neka je V vektorski prostor nad poljem realnih brojeva i neka je $K \subseteq V$. Za tačku z kažemo da je ekstremna tačka skupa K ako i samo ako $z \in K$ i ne postoje tačke u,v iz skupa K tako da je $z=(u+v)/2$. □

TEOREMA 1.2.4. Ukoliko linearni problem komplementarnosti uopšte ima rešenjâ, onda on ima i rešenje koje je ekstremna tačka njegovog skupa dopustivih tačakâ.

D o k a z : Neka je dat linearni problem komplementarnosti (11) i označimo sa X skup dopustivih tačakâ tog problema. S obzirom da problem (11) po pretpostavci ima rešenje zaključujemo $X \neq \emptyset$. Pretpostavimo najpre da je skup X kompaktan. Tada je svaka njegova tačka konveksna kombinacija ekstremnih tačakâ skupa X (videti [K 5], [O 4]) . Neka je $\hat{x}$ rešenje problema komplementarnosti (11) i neka je

$$(12) \quad \hat{x} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j z_j \quad , \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_p = 1 \ , \ \lambda_j > 0 \ ,$$

$$j = 1, \dots, p$$

gde su $z_1, \dots, z_p$ ekstremne tačke skupa X . Pokažimo da je z_1 takodje rešenje problema (11) . S obzirom da $z_1 \in X$ imamo $z_1 \geq 0$ i $Cz_1 + d \geq 0$. Za proizvoljno $i = 1, \dots, n$ je $\hat{x}_i = 0$ ili $c_{i1}x_1 + \dots + c_{im}x_m + d_i = 0$. U prvom slučaju je i $(z_1)_i = 0$ (sa $(z_1)_i$ označavamo i-tu komponentu vektora z_1) jer bi u slučaju $(z_1)_i > 0$ zbog (12) bilo $\hat{x}_i \geq \lambda_1 (z_1)_i > 0$, što je kontradikcija. U drugom slučaju je $(Cz_1 + d)_i = 0$, što se dokazuje na sličan način. Stoga je za $i = 1, \dots, m$ ispunjeno

$$(z_1)_i (Cz_1 + d)_i = 0$$

te je

$$z_1'(Cz_1 + d) = 0$$

što znači da je ekstremna tačka z_1 zaista rešenje linearnog problema komplementarnosti (11).

Preostaje slučaj kada skup X nije kompaktan. Uvedimo novu promenljivu x_{m+1} i novu linearnu funkciju

$$\hat{x}_1 + \dots + \hat{x}_m + 1 - x_1 - \dots - x_m - x_{m+1} \ ,$$

gde je $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)$ rešenje problema (11).

Pomoćni linearni problem komplementarnosti formulišemo na sledeći način:

(13) Naći realne brojeve $x_1,\ldots,x_m,x_{m+1}$ tako da važi

$$x_1\geq 0,\ \ldots\ ,x_m\geq 0,\ x_{m+1}\geq 0$$
$$c_{i1}x_1+\ldots+c_{im}x_m+d_i\geq 0\ ,\quad i=1,\ldots,m$$
$$-x_1-\ldots-x_m-x_{m+1}+\hat{x}_1+\ldots+\hat{x}_m+1\geq 0$$
$$x_i(c_{i1}x_1+\ldots+c_{im}x_m+d_i)=0\ ,\quad i=1,\ldots,m$$
$$x_{m+1}(-x_1-\ldots-x_m-x_{m+1}+\hat{x}_1+\ldots+\hat{x}_m+1)=0$$

Ovaj problem takodje ima rešenjâ, npr. $(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_m,0)$ je rešenje. Skup dopustivih tačaka Y ovog problema je ograničen (zbog $-x_1-\ldots-x_m-x_{m+1}+\hat{x}_1+\ldots+\hat{x}_m+1\geq 0$) i zatvoren, dakle kompaktan. Kao u prethodnom slučaju dokazuje se da problem (13) ima rešenje $w=(w_1,\ldots,w_m,0)$ koje je ekstremna tačka skupa Y i za koje je $w_1+\ldots+w_m < \hat{x}_1+\ldots+\hat{x}_m+1$. No tada je $v=(w_1,\ldots,w_m)$ rešenje problema (11) što sledi iz (13). Dokažimo da je v ekstremna tačka skupa X. Pretpostavimo da nije tako, nego da je $v=(y+u)/2$, $y\in X$, $u\in X$, $u=(u_1,\ldots,u_m)\neq(y_1,\ldots,y_m)=y$. S obzirom na konveksnost X možemo pretpostaviti da su tačke u i y toliko bliske tački v da važi

$$u_1+\ldots+u_m<\hat{x}_1+\ldots+\hat{x}_m+1$$

i

$$y_1+\ldots+y_m<\hat{x}_1+\ldots+\hat{x}_m+1$$

No tada su $(u_1,\ldots,u_m,0)$ i $(y_1,\ldots,y_m,0)$ rešenja problema (13), i stoga pripadaju skupu Y . Pošto je takodje

$$w=((u_1,\ldots,u_m,0)+(y_1,\ldots,y_m,0))/2$$

zaključujemo da w nije ekstremna tačka skupa Y . Dobijena kontradikcija dovršava dokaz. $\square$

Prethodna teorema daje način za nalaženje ravnotežnih tačaka u bimatričnim igrama: najpre se na osnovu date bimatrične igre formuliše odgovarajući linearni problem komplementarnosti, zatim se odrede sve ekstremne tačke skupa dopustivih tačakâ dobijenog problema. Bar jedna od tih tačaka mora biti ravnotežna tačka. (Opisani postupak je efektivan jer ekstremnih tačakâ u slučaju linearnog problema komplementarnosti ima uvek konačno mnogo, a njihovo odredjivanje se može svesti na rešavanje sistema linearnih jednačinâ). Znatno efikasnije metode mogu se naći u [P 1] ,[M 5] .

Ovde treba spomenuti da tvrdjenje analogno teoremi 1.2.4. ne važi za nelinearni problem komplementarnosti kao što pokazuje sledeći primer.

P r i m e r 1.2.2. Naći realne brojeve x i y tako da važi

$$x\geqq 0, y\geqq 0 \ , \ (y-2)^2\geqq 0 \ , \ (3-x)(x-1)\geqq 0$$

i $$x(y-2)^2=0 \ , \ y(3-x)(x-1)=0$$

Lako se vidi da su jedina rešenja (1,2) i (3,2). Medjutim, nijedna od ovih tačakâ nije ekstremna tačka skupa dopustivih tačaka. (U ovom slučaju taj skup je $[1,3]\times[0,+\infty)$).

U daljem ćemo često koristiti sledeću teoremu, koja, izmedju ostalog, daje još jedan način za efektivno nalaženje ravnotežnih tačakâ.

TEOREMA 1.2.5. Neka je bimatrična igra Γ definisana matricama $P=[p_{ij}]$ i $Q=[q_{ij}]$ formata m n. Par mešovitih strategija $(\hat{\mu}, \hat{\nu})$, $\hat{\mu}=(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m)$, $\hat{\nu}=(\hat{y}_1,\dots,\hat{y}_n)$ je ravnotežna tačka u ovoj igri ako i samo ako postoje brojevi a i b takvi da važi:

$$(14) \qquad \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\hat{y}_j\leqq a \quad , \qquad i=1,\dots,m$$

$$(15) \qquad \sum_{i=1}^{m} q_{ij}\hat{x}_i \leq b \quad , \qquad j = 1,\dots,n$$

$$(16) \qquad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (p_{ij} + q_{ij})\hat{x}_i\hat{y}_j = a + b$$

D o k a z : Ukoliko je ($\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$) ravnotežna tačka dovoljno je uzeti

$$a = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\hat{x}_i\hat{y}_j$$

$$b = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} q_{ij}\hat{x}_i\hat{y}_j$$

pa će važiti (16). Ako u definiciji ravnotežne tačke uzimamo redom sve čiste strategije igrača P_1 (igrača P_2) dobićemo (14) (odnosno (15)).

Pretpostavimo da važi (14) , (15) i (16). Množenjem nejednakosti (14) sa $\hat{x}_i$ i sabiranjem po i i množenjem (15) sa $\hat{y}_j$ i sabiranjem po j, zaključujemo, s obzirom na (16), da važi

$$a = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\hat{x}_i\hat{y}_j$$

$$b = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} q_{ij}\hat{x}_i\hat{y}_j$$

Neka su $(x_1,\dots,x_m)$ i $(y_1,\dots,y_n)$ proizvoljne mešovite strategije igračâ P_1 i P_2 . Množenjem (14) sa x_i i sabiranjem po i i množenjem (15) sa y_j i sabiranjem po j dobijamo nejednakosti

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_i\hat{y}_j \leq a$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}\hat{x}_i y_j \leq b$$

što zbog prethodnih jednakosti znači da je $(\hat{\mu}, \hat{\nu})$ zaista ravnotežna tačka u posmatranoj igri. □

Iz gornjeg dokaza se vidi i sledeće: ukoliko za neko i važi

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\hat{y}_j < a$$

onda je za to i ispunjeno i $\hat{x}_i = 0$ (inače bi bila narušena jednakost (16)). Razume se, slična primedba važi i za nejednakosti (15).

Korišćenjem ove primedbe i teoreme 1.2.5. mogu se, u principu, odrediti ravnotežne tačke u svim bimatričnim igrama. Npr., za igru iz primera 1.2.1. imamo

$$x_1 - 5x_2 \leq a \qquad y_1 - 3y_2 \leq b$$

$$-5x_1 + x_2 \leq a \qquad -3y_1 + y_2 \leq b$$

$$x_1 + x_2 = 1\ ,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ y_1 + y_2 = 1, y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$$

$$2x_1y_1 - 8x_1y_2 - 8x_2y_1 + 2x_2y_2 = a + b$$

Uzimajući u obzir razne mogućnosti za pozitivnost brojeva x_1, x_2, y_1, y_2 i imajući u vidu gornju primedbu dobijamo sisteme

$$(x_1 = 0,\ y_1 = 0)$$

$$-5x_1 + x_2 = a \qquad -3y_1 + y_2 = b$$

$$x_1 + x_2 = 1 \qquad y_1 + y_2 = 1$$

$$(x_2 = 0\ ,\ y_2 = 0)$$

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= a & y_1 - 3y_2 &= b \\ x_1 + x_2 &= 1 & y_1 + y_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$(x_1, x_2, y_1, y_2 \text{ su pozitivni})$$

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= a & y_1 - 3y_2 &= b \\ -5x_1 + x_2 &= a & -3y_1 + y_2 &= b \\ x_1 + x_2 &= 1 & y_1 + y_2 &= 1 \end{aligned}$$

Rešenja ova tri sistema su redom : $x_1 = 0, x_2 = 1, y_1 = 0, y_2 = 1$, $a = b = 1$, zatim $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $a = b = 1$ i $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 1/2$, $a = -2$, $b = -1$. Primenom teoreme 1.2.5. uveravamo se da su ovo zaista ravnotežne tačke u posmatranoj igri. Preostali sistemi koji odgovaraju mogućnostima $(x_1 = 0,\ y_2 = 0)$, $(x_2 = 0,\ y_1 = 0)$, $(x_1 = 0)$, $(x_2 = 0)$, $(y_1 = 0)$, $(y_2 = 0)$ ili daju rešenja koja ne zadovoljavaju uslove teoreme 1.2.5. ili su protivrečni, te su nadjene tri ravnotežne tačke i jedine u ovoj igri. Ovakav način nalaženja ravnotežnih tačakâ ima, medjutim, ozbiljan nedostatak: broj sistemâ koje treba rešavati raste eksponencijalno sa formatom matricâ.

Opisana metoda nalaženja ravnotežnih tačakâ bimatričnih igarâ omogućuje da se ove tačke (čije je postojanje dokazano topološkim metodama) nadju rešavanjem sistemâ linearnih jednačinâ. Nameće se pitanje: nije li moguće egzistenciju ravnotežnih tačakâ dokazati "algebarski" tj. bez korišćenja topoloških svojstavâ polja realnih brojeva? Prvi takav dokaz dali su tek 1964. godine C.E.Lemke i J.T. Howson, Jr. (videti [L 2]). Dokaz je "algebarski" u smislu da bez izmenâ ostaje da važi u slučaju kada isplatne funkcije uzimaju vrednosti u proizvoljnom uredjenom polju. Sem toga, ovaj dokaz daje i način za efektivno nalaženje ravnotežnih tačakâ. Videti takodje [H 2], [W 2] , [S 2] .

Treba napomenuti da se ovakav "algebarski" dokaz ne može izvesti za igre sa tri i više igrača, što pokazuje sledeći primer.

P r i m e r 1.2.3. Posmatrajmo igru $(A_1,A_2,A_3,K_1,K_2,K_3)$ gde je $A_1 = A_2 = A_3 = \{1,2\}$ a funkcije K_1, K_2 i K_3 su date tablicom:

			K_1	K_2	K_3
1	1	1	4	0	2
1	1	2	0	0	0
1	2	1	1	1	0
1	2	2	0	2	1
2	1	1	0	2	1
2	1	2	1	1	0
2	2	1	0	0	0
2	2	2	1	0	2

Iako su svih osam vrednosti isplatnih funkcijâ racionalne, jedina ravnotežna tačka je (μ_1,μ_2,μ_3) gde su μ_i redom

$$\left(\frac{13-\sqrt{109}}{6}, \frac{\sqrt{109}-7}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{109}-1}{18}, \frac{19-\sqrt{109}}{18}\right),$$

$$\left(\frac{11-\sqrt{109}}{2}, \frac{\sqrt{109}-9}{2}\right)$$

što nije teško proveriti računom. Razume se, ovaj primer se može "dograditi" tako da se dobije igra sa n igračâ, za proizvoljan $n \geqslant 3$. Verovatno je da "privilegovan" položaj igarâ dva igrača potiče prosto iz linearnosti problema komplementarnosti pridruženog tim igrama.

1.3. Igre na jediničnom kvadratu

Kao što je rečeno u 1.1. pod igrama na jediničnom kvadratu podrazumevaćemo igre (A_1,A_2,K_1,K_2) gde je $A_1 = A_2 = [0,1]$. Zadržaćemo se na slučaju kada su funkcije K_1 i K_2 neprekidne jer nam to, kao što pokazuje sledeća teorema, garantuje postojanje ravnotežnih tačakâ.

TEOREMA 1.3.1. Svaka igra na jediničnom kvadratu sa neprekidnim funkcijama isplate ima barem jednu ravnotežnu tačku.

D o k a z : Neka su isplatne funkcije K_1 i K_2 neprekidne na jediničnom kvadratu $[0,1] \times [0,1]$. Posmatrajmo pomoćnu bimatričnu igru Γ_n sa matricama isplate P_n i Q_n definisanim sa

$$P_n = [K_1((i-1)/n, (j-1)/n)] \ , \quad Q_n = [K_2((i-1)/n,(j-1)/n)]$$

$$i = 1,\dots,n+1 \ ; \ j = 1,\dots,n+1 \ ; n \in N \ .$$

Po teoremi 1.2.1. za svako n igra Γ_n ima bar jednu ravnotežnu tačku. Neka strategija $\mu_n = (c_o,\dots,c_n)$ i $\nu_n = (d_o,\dots,d_n)$ obrazuju ravnotežnu tačku u Γ_n i neka su F_n i G_n funkcije raspodele takve da su verovatnosne mere koje one definišu koncentrisane u tačkama $0,1/n,\dots,1$ sa verovatnoćama jednakim redom $c_o,\dots,c_n$ odnosno $d_o,\dots,d_n$. Prema Helly-evoj teoremi ([C 3], [L 3] , [G 2]) nizovi (F_n) i (G_n) sadrže konvergentne podnizove funkcijâ. Neka npr. $F_n \to \hat{F}$, $G_n \to \hat{G}$, $n \to \infty$, $n \in L$, $L \subseteq N$ gde su $\hat{F}$ i $\hat{G}$ takodje funkcije raspodele, jer je $F_n(x) = 1$ za $x > 1$, $F_n(x) = 0$ za x negativno (i slično za G_n) . Naravno, ovi podnizovi konvergiraju ka $\hat{F}$, odnosno $\hat{G}$ u svakoj njihovoj tački neprekidnosti (videti [C 3] , [L 3]) .

Dokažimo da strategije $\hat{F}$ i $\hat{G}$ obrazuju ravnotežnu tačku tj. da je za proizvoljne mešovite strategije F i G ispunjeno

$$(1) \qquad \int_o^1\int_o^1 K_1(s,t)d\hat{F}(s)d\hat{G}(t) \geq \int_o^1\int_o^1 K_1(s,t)dF(s)d\hat{G}(t)$$

i

$$(2) \qquad \int_o^1\int_o^1 K_2(s,t)d\hat{F}(s)d\hat{G}(t) \geq \int_o^1\int_o^1 K_2(s,t)d\hat{F}(s)dG(t)$$

Neka je (H_n) niz funkcijâ raspodele takav da su ispunjeni uslovi:

1° $H_n(s) \longrightarrow F(s)$, $n \longrightarrow \infty$ u svakoj tački neprekidnosti F ;

2° H_n je deo po deo konstantna funkcija, sa skokovima u tačkama $0, 1/n, \ldots, 1$.

Lako je videti da ovakav niz funkcijâ postoji. Neka su vrednosti skoka funkcije H_n u tačkama $0, 1/n, \ldots, n$ redom označene sa $h_{on}, h_{1n}, \ldots, h_{nn}$. Jasno je da je tada $(h_{on}, \ldots, h_{nn})$ mešovita strategija u igri Γ_n ; pošto je (μ_n, ν_n) ravnotežna tačka imamo

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} K_1\, ((i-1)/n,\ (j-1)/n) c_{i-1} d_{i-1} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} K_1\, ((i-1)/n,\ (j-1)/n) h_{i-1\, n} d_{i-1}$$

ili, zapisano pomoću Stieltjes-ovog integrala:

$$(3) \int_0^1 \int_0^1 K_1(s,t) dF_n(s) dG_n(t) \geqslant \int_0^1 \int_0^1 K_1(s,t) dH_n(s) dG_n(t)$$

Ako u (3) stavimo $n \longrightarrow \infty$ uz $n \in L$ dobijamo, koristeći drugu Helly-evu teoremu (videti [A 2] , [L 3] , [C 3]) , upravo nejednakost (1). Slično se dokazuje da važi i (2), te $\hat{F}$ i $\hat{G}$ zaista obrazuju ravnotežnu tačku. □

Nije teško videti da se gornji dokaz može uz odgovarajuće (nebitne) izmene preneti i na slučaj igarâ sa više igračâ. Uporediti [O 3] , [B 4] .

Ukoliko je bar jedna od funkcijâ K_1 i K_2 prekidna, može se desiti da odgovarajuća igra nema ravnotežnu tačku, što se vidi iz sledećeg primera.

P r i m e r 1.3.1. Neka je $K_1(s,t)=s$ za $s<1$, $K_1(1,t)=0$ i neka je $K_2(s,t)=s+t$. Ova igra nema ravnotežnu tačku jer funkcija K_1 ne dostiže najveću vrednost na jediničnom kvadratu.

Što se tiče efektivnog nalaženja ravnotežnih tačakâ u igrama na jediničnom kvadratu, metode postoje samo za pojedine klase igarâ (videti [K 5]) . Dokaz teoreme 1.3.1. takodje sugeriše jedan način približnog odredjivanja ravnotežnih tačakâ: pomoću aproksimacije konačnim igrama. R.G. Underwood [U 1] je 1978. predložio jedan metod "direktnog" rešavanja ovih igarâ ; medjutim, taj metod zahteva rešavanje Cauchy-evog problema za nelinearnu diferencijalnu jednačinu u Hilbert-ovom prostoru, te u praksi jedva da je upotrebljiv.

Navodimo sada jednu teoremu koja će se u daljem često koristiti. Ona je analogna teoremi 1.2.5.

TEOREMA 1.3.2. Neka je data igra ($[0,1]$, $[0,1]$, K_1, K_2) sa neprekidnim funkcijama isplate K_1 i K_2 . Funkcije raspodele $\hat{F}$ i $\hat{G}$ obrazuju ravnotežnu tačku ako i samo ako postoje brojevi a i b takvi da važi:

$$(4) \qquad u(s)=\int_0^1 K_1(s,t)d\hat{G}(t)\leqslant a \quad , \quad s\in[0,1]$$

$$(5) \qquad v(t)=\int_0^1 K_2(s,t)d\hat{F}(s)\leqslant b \quad , \quad t\in[0,1]$$

$$(6) \qquad \int_0^1 (a-u(s))d\hat{F}(s)=\int_0^1 (b-v(t))d\hat{G}(t)=0$$

D o k a z : Ukoliko $\hat{F}$ i $\hat{G}$ obrazuju ravnotežnu tačku dovoljno je uzeti

$$(7) \qquad a = \int_0^1\int_0^1 K_1(s,t)d\hat{F}(s)d\hat{G}(t)$$

i

$$(8) \qquad b = \int_0^1\int_0^1 K_2(s,t)d\hat{F}(s)d\hat{G}(t)$$

pa će važiti (4) i (5). Ako nejednakost (4) integralimo po funkciji $\hat{F}(s)$ od 0 do 1 , a (5) po $\hat{G}(t)$ od 0 do 1 dobijamo (6).

Neka sada važi (4), (5) i (6) ; dokažimo da $\hat{F}$ i $\hat{G}$ obrazuju ravnotežnu tačku. Integracijom (4) po $\hat{F}$ i (5) po $\hat{G}$ i uzimajući u obzir (6) dobijamo jednakosti (7) i (8). Neka su F i G proizvoljne mešovite strategije. Integracijom (4) po F(s) i (5) po G(t) dobijamo

$$\int_0^1\int_0^1 K_1(s,t)dF(s)d\hat{G}(t) \leqslant a$$

odnosno

$$\int_0^1\int_0^1 K_2(s,t)d\hat{F}(s)dG(t) \leqslant b$$

što, s obzirom na jednakosti (7) i (8) znači da $\hat{F}$ i $\hat{G}$ zaista obrazuju ravnotežnu tačku. □

Iz gornjeg dokaza se vidi i sledeće: ukoliko je za neko s_o $u(s_o) < a$ onda je u nekoj okolini tačke s_o funkcija raspodele $\hat{F}$ konstantna (inače bi jednakost (6) bila narušena). Naravno, slična primedba važi i za funkciju v .

1.4. Antagonističke igre

U ovom odeljku ćemo se baviti jednom značajnom klasom igarâ dva igrača - tzv. antagonističkim igrama, ili igrama zbira nula. Istorijski, ova klasa igarâ je prvo bila razmatrana [N 4] te i danas predstavlja najbolje izučenu klasu igarâ .

DEFINICIJA 1.4.1. Igru dva igrača (A_1,A_2,K_1,K_2) nazivamo antagonističkom igrom ukoliko je $K_1 = -K_2$. Konačne antagonističke igre nazivamo matričnim igrama. □

Imajući u vidu gornju definiciju, antagonistička igra se može definisati i kao uredjena trojka (A_1,A_2,K) (umesto $(A_1,A_2,K,-K)$). Specijalno, matrična igra je potpuno definisana matricom isplate P za igrača P_1, jer je tada matrica isplate Q za igrača P_2 data sa $Q = -P$. Ubuduće će se uvek podrazumevati da je matrična igra definisana matricom isplate za igrača P_1 .

TEOREMA 1.4.1. Da bi mešovite strategije $\hat{\mu}$ i $\hat{\nu}$ obrazovale ravnotežnu tačku u antagonističkoj igri (A_1,A_2,K) potrebno je i dovoljno da za svaku mešovitu strategiju μ igrača P_1 i svaku mešovitu strategiju ν igrača P_2 važi

(1) $$\overline{K}(\mu,\hat{\nu})\leq\overline{K}(\hat{\mu},\hat{\nu})\leq\overline{K}(\hat{\mu},\nu)$$

D o k a z : Pretpostavimo da važi (1) i dokažimo da je $(\hat{\mu},\hat{\nu})$ ravnotežna tačka. Zaista, imamo

$$\overline{K}(\mu,\hat{\nu})\leq\overline{K}(\hat{\mu},\hat{\nu})$$

i

$$\overline{K}(\hat{\mu},\hat{\nu})\leq\overline{K}(\hat{\mu},\nu)$$

odnosno

$$-\overline{K}(\hat{\mu},\nu)\leq-\overline{K}(\hat{\mu},\hat{\nu})$$

te je $(\hat{\mu},\hat{\nu})$ ravnotežna tačka.

Ukoliko je $(\hat{\mu},\hat{\nu})$ ravnotežna tačka imamo:

$$\overline{K}(\mu,\hat{\nu})\leq\overline{K}(\hat{\mu},\hat{\nu})$$

i

$$-\overline{K}(\hat{\mu},\nu)\leq-\overline{K}(\hat{\mu},\hat{\nu})$$

Množeći sa -1 dobijamo

$$\overline{K}(\hat{\mu},\hat{\nu})\leq\overline{K}(\hat{\mu},\nu)$$

te sledi (1) . □

TEOREMA 1.4.2. Neka su $(\hat{\mu}, \hat{\nu})$ i $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$ dve ravnotežne tačke u antagonističkoj igri (A_1, A_2, K) . Tada je

$$\bar{K}(\hat{\mu}, \hat{\nu}) = \bar{K}(\bar{\mu}, \bar{\nu})$$

Dokaz: Pošto je $(\hat{\mu}, \hat{\nu})$ ravnotežna tačka važi

$$\bar{K}(\hat{\mu}, \hat{\nu}) \leq \bar{K}(\hat{\mu}, \bar{\nu})$$

No kako je i $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$ ravnotežna tačka imamo

$$\bar{K}(\hat{\mu}, \bar{\nu}) \leq \bar{K}(\bar{\mu}, \bar{\nu})$$

te je

$$\bar{K}(\hat{\mu}, \hat{\nu}) \leq \bar{K}(\bar{\mu}, \bar{\nu})$$

Na analogan način se dokazuje i obrnuta nejednakost. □

Prethodna teorema opravdava sledeću definiciju:

DEFINICIJA 1.4.2. Neka je $\Gamma = (A_1, A_2, K)$ antagonistička igra i neka je $(\hat{\mu}, \hat{\nu})$ ravnotežna tačka u toj igri. Realan broj

$$v = \bar{K}(\hat{\mu}, \hat{\nu})$$

naziva se vrednost igre i označava sa val Γ . Strategije $\hat{\mu}$ i $\hat{\nu}$ se, redom, nazivaju optimalnim strategijama igračâ P_1 i P_2 . □

Treba napomenuti da vrednosti isplatnih funkcija u različitim ravnotežnim tačkama mogu biti različite ukoliko igra nije antagonistička (videti primer 1.2.1.).

TEOREMA 1.4.3. Neka je matrična igra Γ definisana matricom $P = [p_{ij}]$ formata $m \times n$. Broj v je vrednost igre Γ , a mešovite strategije $\hat{\mu} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_m)$ i $\hat{\nu} = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n)$ su optimalne u toj igri ako i samo ako je

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij} \hat{x}_i \geq v \quad , \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\hat{y}_j \leq v \quad , \quad i=1,\ldots,m$$

D o k a z : Dovoljno je u teoremi 1.2.5. staviti $a=v$, $b=-v$ i uzeti u obzir da je $P=-Q$. □

Ova teorema omogućuje da se u svakoj matričnoj igri odrede optimalne strategije i vrednost igre jednostavnim rešavanjem sistema nejednačinâ

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij}x_i \geq v \quad , \quad x_i \geq 0, \; j=1,\ldots,n$$

$$x_1+\ldots+x_m=1$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}y_j \leq v \quad , \quad y_j \geq 0 \quad , \quad i=1,\ldots,m$$

$$y_1+\ldots+y_n=1$$

Sem toga, nalaženje optimalnih strategijâ i vrednosti igre može se svesti na problem linearnog programiranja (videti [D 1] , [P 1] , [V 1]) . Videti takodje [B 4] , [R 5] . Iz rečenog je jasno da je nalaženje ravnotežnih tačaka u matričnim igrama daleko jednostavniji problem nego u bimatričnim igrama ; naime, linearni problem komplementarnosti se samo u specijalnim slučajevima može (dovoljno jednostavno) svesti na problem linearnog programiranja [M 4] .

TEOREMA 1.4.4. Neka je data antagonistička igra na jediničnom kvadratu sa neprekidnom funkcijom isplate (prvom igraču) K . Broj v je vrednost ove igre, a funkcije raspodele $\hat{F}$ i $\hat{G}$ su optimalne strategije igračâ P_1 i P_2 ako i samo ako važi:

$$\int_0^1 K(s,t)d\hat{F}(s) \geq v \quad , \quad t \in [0,1]$$

$$\int_0^1 K(s,t)d\hat{G}(t) \leqslant v \quad , \quad s \in [0,1]$$

D o k a z : Dovoljno je u teoremi 1.3.2. staviti $a = v$, $b = -v$ i uzeti u obzir da je $K_1 = K = -K_2$. □

Problem nalaženja optimalnih strategijâ i vrednosti igre u igrama na jediničnom kvadratu se, uopšte uzev, može samo približno rešavati. Izuzetak čine neke posebne klase isplatnih funkcijâ (npr. polinomi po s i t). Videti [K 5] , [G 1] .

2 SPEKTRI IGARÂ

2.1. Osnovne definicije

U ovoj glavi ćemo dati osnovne definicije i navesti neke osobine spektarâ igârâ. S obzirom da je spektar konačne igre definisan samo za igre u kojima oba igrača imaju isti broj čistih strategijâ, u odeljku 2.2. ćemo razmotriti jednu dovoljno široku klasu igarâ u kojima se prirodno izdvajaju ovakve podigre (videti primedbe na kraju odeljakâ 2.2. i 2.3.).

Prvi rad u kome se razmatraju veze izmedju igarâ, sopstvenih vrednostî i sopstvenih vektorâ je, po svemu sudeći, [R 1] (videti takodje [P 1]). Kratak pregled rezultatâ pomenutog rada i radova drugih autorâ biće dat u odeljku 2.4.

Pod spektrom kvadratne matrice A reda n podrazumevamo, kao što je poznato, neuredjenu n-torku sopstvenih vrednostî te matrice, pri čemu se sopstvene vrednosti čija je višestrukost k pojavljuju k puta u toj n-torci. (uporediti [B 2], [K 8] , [L 1]).

Neka je $K(s,t)$ realna funkcija definisana i neprekidna na jediničnom kvadratu. Tada se može posmatrati integralni operator $\hat{K}$ čije je jezgro funkcija K :

$$(\hat{K}f)(s)=\int_0^1 K(s,t)f(t)dt$$

U daljem ćemo pod spektrom funkcije K podrazumevati spektar operatora $\hat{K}$, tj. (konačan ili beskonačan) niz sopstvenih vrednosti tog operatora. Pritom ćemo ovakve nizove koji se razlikuju samo redosledom članovâ smatrati jednakim (uporediti [R 3] , [T 3]) .

DEFINICIJA 2.1.1. (i) Neka je bimatrična igra Δ definisana matricama isplate P i Q . Uredjeni par spektarâ matricâ P i Q nazivamo spektrom igre Δ .

(ii) Neka je igra na jediničnom kvadratu Δ definisana funkcijama isplate K_1 i K_2 . Uredjeni par spektarâ funkcijâ K_1 i K_2 nazivamo spektrom igre Δ .

(iii) Neka je matrična igra Δ definisana matricom isplate P . Spektar matrice P nazivamo spektrom igre Δ.

(iv) Neka je antagonistička igra na jediničnom kvadratu Δ definisana funkcijom isplate (prvom igraču) K . Spektar funkcije K nazivamo spektrom igre Δ . $\square$

Iz ove definicije se vidi da je spektar igre definisan samo za igre dva igrača, i to (u konačnom slučaju) jedino pod uslovom da oba igrača imaju isti broj čistih strategijâ (naime, tada će matrice isplate biti kvadratne). Jasno je da bi proučavanje spektarâ igarâ više igračâ zahtevalo razmatranje tzv. "prostornih" ili "višedimenzionih" matricâ (videti [S 3]) za koje postoji više različitih definicijâ karakterističnog polinoma ([S 3], glava V) .

Drugi uslov (jednak broj čistih strategijâ igračâ P_1 i P_2) ne predstavlja ozbiljno ograničenje : uvek je mogućno igraču koji ima manji broj čistih strategijâ "dodati" nove čiste strategije (i na taj način učiniti matrice isplate kvadratnim) tako da pritom sve "stare" ravnotežne tačke, i samo one, budu ravnotežne i u "proširenoj" igri. Osim toga, teoreme 2.2.4. i 2.3.3. pokazuju značaj "podigarâ" sa jednakim brojem čistih strategijâ za oba igrača.

2.2. Igre sa konačno mnogo ravnotežnih tačakâ

U ovom odeljku razmatramo bimatrične igre sa beskonačno mnogo ravnotežnih tačakâ i pokazujemo da se takve igre "retko" sreću (tačan smisao ovih rečî sadržan je u teoremi 2.2.4.). Videti [L 2] , [H 2] , [R 4] , [M 1] . Dokazi teorema 2.2.4. i 2.3.3. su "elementarniji" od dokazâ datih u navedenim radovima jer ne koriste ni konveksnu analizu ni teoriju mnogostrukosti, nego samo aparat matrične algebre i teorije polinomâ (videti npr. [B 3] , [C 1] , [K 8] , [L 1] , [R 2]).

DEFINICIJA 2.2.1. Neka je A matrica formata $m \times n$. Kažemo da je A F - matrica ako i samo ako su ispunjeni uslovi :

1° Za svaku njenu podmatricu B formata $r \times (r+1)$, $r = 1, \ldots$ je

$$\det \begin{bmatrix} B \\ U \end{bmatrix} \neq 0$$

gde je $U' = [1 \ldots 1]' \in R^{r+1}$

2° Za svaku njenu kvadratnu podmatricu C reda r , $r = 1, \ldots$ je

$$\det \begin{bmatrix} C & V \\ V' & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

gde je $V' = [1 \ldots 1] \in R^r$. □

P r i m e r 2.2.1. Matrica

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

iz primera 1.2.1. je F-matrica. Zaista, nijedna od matricâ

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

nije singularna. Nije teško proveriti da je i matrica Q (takodje iz primera 1.2.1.) F-matrica.

Sledeća teorema opravdava uvodjenje F-matricâ.

TEOREMA 2.2.1. Neka je bimatrična igra Γ definisana matricama isplate $P = [p_{ij}]$ i $Q = [q_{ij}]$ formata $m \times n$ i neka su matrice P' i Q F-matrice. Tada u igri Γ postoji samo konačno mnogo ravnotežnih tačakâ. Ukoliko je $(\hat{\mu}, \hat{\nu})$ ravnotežna tačka u toj igri onda mešovite strategije $\hat{\mu}$ i $\hat{\nu}$ imaju isti broj pozitivnih komponenatâ.

D o k a z : Najpre ćemo da dokažemo drugi deo tvrdjenja. Neka je $(\hat{\mu}, \hat{\nu})$ ma koja ravnotežna tačka u igri Γ i neka je $\hat{\mu} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)$, $\hat{\nu} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)$. Neka strategija $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)$ ima r, a $(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)$ s pozitivnih komponenatâ. Pretpostavimo da su $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_r$ odnosno $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_s$ pozitivni. Stoga je $\hat{x}_{r+1} = \dots = \hat{x}_m = 0$, $\hat{y}_{s+1} = \dots = \hat{y}_n = 0$. Pretpostavimo da je $r > s$. Prema teoremi 1.2.5. (i primedbi datoj posle njenog dokaza, str.19) imamo :

(1)
$$\sum_{j=1}^{s} p_{ij}\hat{y}_j = a , \quad i = 1, \dots, r$$

$$\sum_{j=1}^{s} p_{ij}\hat{y}_j \leq a , \quad i = r+1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{r} q_{ij}\hat{x}_i = b , \quad j = 1, \dots, s$$

$$\sum_{i=1}^{r} q_{ij}\hat{x}_i \leq b , \quad j = s+1, \dots, n$$

Ako izdvojimo prvih $s+1$ jednakostî (1) dobijamo

$$\sum_{j=1}^{s} p_{ij}\hat{y}_j - a = 0 , \quad i = 1, \dots, s+1 .$$

tj. $\hat{y}_1,\dots,\hat{y}_s, -a$ zadovoljavaju homogen sistem čija je determinanta

$$\begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1s} & 1 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ p_{s+1\,1} & \cdots & p_{s+1\,s} & 1 \end{vmatrix}$$

po pretpostavci različita od nule (matrica P' je F-matrica). No to bi značilo da je $\hat{y}_1 = \dots = \hat{y}_s = -a = 0$, što protivreči pozitivnosti brojevâ $\hat{y}_1,\dots,\hat{y}_s$.

Razume se, dokaz ostaje sličan (uz usložnjavanje pisanja) ukoliko pozitivne komponente zauzimaju nekih drugih r, odnosno s mestâ u mešovitim strategijama. Ulogu matrice

$$\begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1s} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ p_{s+1\,1} & \cdots & p_{s+1\,s} \end{bmatrix}$$

će tada igrati neka druga podmatrica matrice P . Na taj način je dokazano da ne može biti $r > s$. Slično se dokazuje (korišćenjem činjenice da je Q takodje F-matrica) da ne može biti $s > r$. Dakle, $s = r$, što znači da u svakoj ravnotežnoj tački u igri Γ obe mešovite strategije imaju jednak broj pozitivnih komponenatâ.

Ostaje da se dokaže prvi deo tvrdjenja. Pretpostavimo da ono nije tačno nego da postoji beskonačno mnogo ravnotežnih tačakâ. Tada postoje dve različite ravnotežne tačke $(\hat{\mu}, \hat{\nu})$ i $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$ takve da mešovite strategije $\hat{\mu}$ i $\bar{\mu}$ a takodje i strategije $\hat{\nu}$ i $\bar{\nu}$ imaju pozitivne komponente na istim mestima. Osim toga, prema već dokazanom delu teoreme, strategije $\hat{\mu}$ i $\hat{\nu}$ odnosno $\bar{\mu}$ i $\bar{\nu}$ imaju jednak broj pozitivnih komponenatâ. Pretpostavimo dakle da sve četiri strategije imaju po r pozitivnih komponenatâ i još da su to baš prvih r komponenatâ, tj. da važi

$$\hat{\mu} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_r, 0, \ldots, 0) \quad , \quad \bar{\mu} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r, 0, \ldots, 0)$$

$$\hat{\nu} = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_r, 0, \ldots, 0) \quad , \quad \bar{\nu} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r, 0, \ldots, 0)$$

(u slučaju drukčijeg rasporeda pozitivnih komponenatâ u strategiji $\hat{\mu}$ odnosno u strategiji $\hat{\nu}$ dokaz ostaje sličan uz očigledne izmene i neizbežno usložnjenje pisanja.). Koristeći opet teoremu 1.2.5. i primedbu posle nje imamo:

$$\sum_{j=1}^{r} p_{ij}\hat{y}_j - \hat{a} = 0 \ , \ i = 1, \ldots, r$$

$$\sum_{j=1}^{r} \hat{y}_j = 1$$

i takodje

$$\sum_{j=1}^{r} p_{ij}\bar{y}_j - \bar{a} = 0 \ , \ i = 1, \ldots, r$$

$$\sum_{j=1}^{r} \bar{y}_j = 1$$

Ovo znači da brojevi $\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_r, -\hat{a}$ odnosno $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r, -\bar{a}$ zadovoljavaju isti linearni sistem jednačinâ čija je determinanta

$$\begin{vmatrix} p_{11} & \ldots & p_{1r} & 1 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ p_{r1} & \ldots & p_{rr} & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} .$$

(s obzirom da je P' F-matrica) po pretpostavci različita od nule (uslov 2^o u definiciji F-matrice). Stoga je $\hat{y}_1 = \bar{y}_1, \ldots, \hat{y}_r = \bar{y}_r$, $-\hat{a} = -\bar{a}$. Slično se dokazuje (korišćenjem činjenice da je i Q F-matrica) da je $\hat{x}_1 = \bar{x}_1, \ldots, \hat{x}_r = \bar{x}_r$. Medjutim, ovo protivreči pretpostavci da su $(\hat{\mu}, \hat{\nu})$ i $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$ različite ravnotežne tačke. Stoga igra Γ ne može imati beskonačno mnogo ravnotežnih tačakâ. □

TEOREMA 2.2.2. Za ma koje prirodne brojeve m i n postoji F-matrica formata $m \times n$.

Dokaz: (indukcijom po broju vrstâ). F-matrica $1 \times n$ postoji za ma koje n. Zaista, dovoljno je uzeti sledeću matricu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \end{bmatrix}$$

Pretpostavimo da imamo F-matricu A sa k vrstâ:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} \end{bmatrix}$$

Posmatrajmo matricu D datu sa:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ x & x^2 & \ldots & x^n \end{bmatrix}$$

i pokažimo da se x može izabrati tako da D bude F-matrica.

Uzmimo ma koju podmatricu B formata $r \times (r+1)$ matrice D. Ukoliko B ne sadrži elemente iz $(k+1)$-ve vrste onda je, po induktivnoj pretpostavci

$$\det \begin{bmatrix} B \\ U \end{bmatrix} \neq 0$$

gde je $U = [1 \ldots 1]$. Neka B sadrži elemente iz $(k+1)$-ve vrste matrice D . Razvijmo determinantu

$$\begin{vmatrix} B \\ U \end{vmatrix}$$

po pretposlednjoj vrsti (tj. onoj koja sadrži stepene x) . Dobija se polinom po x čiji su koeficijenti kofaktori elemenatâ pretposlednje vrste determinante

$$\begin{vmatrix} B \\ U \end{vmatrix}$$

i stoga oblika

$$\begin{vmatrix} B_1 \\ U_1 \end{vmatrix}$$

gde je B_1 podmatrica matrice A, a $U_1 = [1 \ldots 1]$. Prema tome, nijedan od ovih koeficijenatâ nije jednak nuli (zbog induktivne pretpostavke), te ni polinom nije identički jednak nuli. Razume se, ovakvih polinomâ ima konačno mnogo, i to upravo onoliko koliko ima podmatricâ traženog formata matrice D koje sadrže elemente iz njene $(k+1)$-ve vrste.

Na potpuno analogan način se dokazuje da su determinante oblika

$$\det \begin{bmatrix} C & V \\ V' & O \end{bmatrix}$$

(gde je C kvadratna podmatrica matrice D) ili konstante različite od nule (na osnovu induktivne pretpostavke) ili polinomi koji nisu identički jednaki nuli. Tih polinomâ takodje ima konačno mnogo. Birajući realan broj x tako da ne bude jednak ni jednom korenu ni jednog od svih ovih polinomâ dobijamo, očigledno, F-matricu D . Time je dokaz ove teoreme završen. □

U daljem će biti dokazano da bimatrične igre definisane matricama isplate P i Q , gde su P′ i Q F-matrice obrazuju svuda gust skup. Da bi ove reči imale smisla u skup svih bimatričnih igarâ definisanih matricama isplate P i Q formata $m \times n$ uvodimo normu. Najpre uvodimo jednu matričnu normu (videti [B 2] , [B 3] , [C 1] ,[L 1] .).

DEFINICIJA 2.2.2. Pod normom matrice $P = [p_{ij}]$ formata $m \times n$ podrazumevamo broj

$$\|P\| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |p_{ij}|$$

Norma bimatrične igre Γ definisane matricama isplate P i Q je

$$\|\Gamma\| = \|P\| + \|Q\| \quad . \quad \square$$

TEOREMA 2.2.3. Skup F-matricâ formata $m \times n$ je otvoren i svuda gust u prostoru svih matricâ formata $m \times n$.

D o k a z : S obzirom da je determinanta neprekidna funkcija svojih elemenatâ, prvi deo tvrdjenja je trivijalan. Neka je A proizvoljna realna matrica formata $m \times n$ i neka je ε ma koji pozitivan broj. Po teoremi 2.2.2. postoji F-matrica D istog formata. Posmatrajmo matrice A_t definisane sa

$$A_t = tD + (1-t)A$$

gde je t pozitivan broj. Neka je t_o pozitivan broj takav da se za $t \in (0,t_o)$ matrica A_t nalazi u ε- okolini matrice A . Ako za matricu A_t izračunamo sve determinante koje učestvuju u definiciji F-matrice dobićemo neke polinome po t i pritom nijedan neće biti identički jednak nuli. (Naime, za $t = 1$ sve ove determinante su različite od nule) . Sada je dovoljno izabrati pozitivan broj s tako da bude manji od t_o i uz to različit od svih korenâ svih ovih polinomâ (što je moguće, jer ih ima konačno mnogo) i dobićemo F-matricu A_s u ε-okolini matrice A. Time je dokazan i drugi deo tvrdjenja. □

TEOREMA 2.2.4. Skup bimatričnih igarâ sa konačno mnogo ravnotežnih tačakâ sadrži otvoren podskup koji je svuda gust u prostoru svih igarâ datog formata.

D o k a z : Skup bimatričnih igarâ sa konačno mnogo ravnotežnih tačakâ sadrži kao podskup skup svih igarâ čije su matrice P' i Q F-matrice (teorema 2.2.1.), a taj skup je otvoren i svuda gust (neposredno sledi iz teoreme 2.2.3.). □

Prethodna teorema intuitivno kazuje da se "najčešće" srećemo sa bimatričnim igrama sa konačno mnogo ravnotežnih tačakâ, i to (videti drugi deo tvrdjenja teoreme 2.2.1.) takvim da strategije koje obrazuju ravnotežnu tačku imaju isti broj pozitivnih komponenatâ. Drugim rečima, ravnotežne tačke u takvim igrama mogu se dobiti razmatranjem "kvadratnih podigarâ" posmatrane igre.

2.3. Matrične igre sa jedinstvenom ravnotežnom tačkom

Razmotrimo sada slučaj matričnih igarâ. S obzirom da se ravnotežne tačke u ovim igrama mogu odrediti kao rešenja nekog sistema linearnih nejednačinâ (videti teoremu 1.4.3., str.28) jasno je da je skup ravnotežnih tačakâ konveksan skup. Prema tome, matrična igra može imati ili jednu jedinu ravnotežnu tačku ili beskonačno mnogo. U ovom odeljku ćemo pokazati da se prvi slučaj "najčešće" javlja, u smislu koji će biti preciziran u teoremi 2.3.3.

TEOREMA 2.3.1. Neka je matrična igra Δ definisana matricom isplate P i neka su P i P' F-matrice. Tada igra Δ ima jedinstvenu ravnotežnu tačku $(\hat{\mu}, \hat{\nu})$ i pritom strategije $\hat{\mu}$ i $\hat{\nu}$ imaju isti broj pozitivnih komponenatâ.

D o k a z : S obzirom da je matrica P F-matrica i matrica $-P$ je F-matrica. Stoga u bimatričnoj igri definisanoj matricama isplate P i $-P$ ima samo konačno mnogo ravnotežnih tačakâ (teorema 2.2.1.). No kako je u matričnoj igri skup ravnotežnih tačakâ konveksan skup zaključujemo da igra Δ ima jedinstvenu ravnotežnu tačku ($\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$). Prema teoremi 2.2.1. strategije $\hat{\mu}$ i $\hat{\nu}$ imaju isti broj pozitivnih komponenatâ. □

TEOREMA 2.3.2. Skup matricâ P formata $m \times n$ takvih da su i P i P′ F-matrice je otvoren i svuda gust u prostoru svih matricâ formata $m \times n$.

D o k a z : Otvorenost ovog skupa opet sledi iz neprekidnosti determinante. Neka je A proizvoljna realna matrica formata $m \times n$ i neka je ε proizvoljan pozitivan broj. U $\varepsilon/2$ - okolini matrice A nalazi se, po teoremi 2.2.3. F-matrica B . S obzirom da je, opet prema teoremi 2.2.3., skup F-matricâ otvoren, postoji broj $\eta > 0$ takav da su sve matrice u η--okolini matrice B takodje F-matrice. Bez umanjenja opštosti možemo uzeti da je $\eta < \varepsilon/2$. U η-okolini matrice B′ postoji F-matrica C′. No kako je

$$\|B' - C'\| = \|B - C\| < \eta$$

to vidimo da se matrica C nalazi u η- okolini matrice B, pa je i C F-matrica. Dakle, i C i C′ su F-matrice i sem toga je

$$\|A - C\| \leqslant \|A - B\| + \|B - C\| < \varepsilon/2 + \eta < \varepsilon . \square$$

TEOREMA 2.3.3. Skup matričnih igarâ sa jedinstvenom ravnotežnom tačkom sadrži otvoren podskup koji je svuda gust u prostoru svih matričnih igarâ datog formata.

D o k a z : Tvrdjenje neposredno sledi iz teoremâ 2.3.1. i 2.3.2. na isti način na koji teorema 2.2.4. sledi iz teoremâ 2.2.1. i 2.2.3. □

Na prvi pogled izgleda da je teorema 2.3.3. specijalan slučaj teoreme 2.2.4. Medjutim, nije tako: naime, matrične igre se izdvajaju uslovom $P = -Q$ (definicija 1.4.1. i primedba posle nje, str.26) kojim se u 2mn - dimenzionalnom prostoru bimatričnih igarâ izdvaja podprostor dimenzije mn. Presek tog podprostora sa otvorenim svuda gustim skupom ne mora biti svuda gust (taj presek bi mogao biti i prazan!) Stoga teorema 2.3.3. zahteva poseban dokaz (makar i veoma sličan dokazu teoreme 2.2.4.)

Teorema 2.3.3. pokazuje da se "najčešće" srećemo sa matričnim igrama u kojima oba igrača imaju jedinstvenu optimalnu strategiju i pritom njihove optimalne strategije imaju isti broj pozitivnih komponenatâ. Stoga se i u ovim igrama ravnotežne tačke mogu dobiti razmatranjem "kvadratnih podigara" posmatrane igre. Može se dokazati (videti [K 3], [S 1]) da jedinstvenost optimalnih strategijâ za oba igrača u matričnoj igri povlači da obe optimalne strategije imaju isti broj pozitivnih komponenatâ. Pomenuti rezultat je na slučaj bimatričnih igarâ preneo V.L. Kreps [K 6].

2.4. Matrične igre i svojstvene vrednosti

Kao što je već rečeno (str.30) ovaj odeljak je posvećen prikazu radova [R 1], [T 2], kojima je počelo izučavanje vezâ izmedju spektarâ matricâ i matričnih igarâ koje one definišu. Izlaganje je zasnovano na pomenutim radovima (videti, sem toga, [P 1], [W 1]).

Pod Perron-ovom sopstvenom vrednošću kvadratne matrice A sa pozitivnim elementima podrazumevamo njenu najveću (po apsolutnoj vrednosti) sopstvenu vrednost $\lambda(A)$. Prema Perron-ovoj teoremi, ta sopstvena vrednost je jedinstvena, realna i pozitivna, a sopstveni vektor koji joj odgovara ima pozitivne komponente i jedinstven je sa tačnošću do skalarnog faktora (videti [B 2], [C 1], [K 8], [L 1]). Radi kraćeg pisanja ubuduće sa val A označavamo vrednost igre definisane matricom A.

TEOREMA 2.4.1. Neka je $\{A_t \mid t \in T\}$ familija kvadratnih matricâ reda n sa pozitivnim elementima koja zadovoljava sledeće uslove :

1° $A_sA_t = A_tA_s$, za ma koje s i t iz skupa T;

2° Za proizvoljnih $n+1$ matricâ iz ove familije postoji mešovita strategija igrača P_1 koja je optimalna za svih $n+1$ igarâ definisanih ovim matricama;

3° Postoji mešovita strategija igrača P_2 čije su sve komponente pozitivne a koja je optimalna za sve igre definisane matricama iz ove familije.

Tada za proizvoljne s i t iz skupa T važi

$$\mathrm{val}\, A_t/\mathrm{val}\, A_s = \lambda(A_t)/\lambda(A_s) .$$

D o k a z: Primetimo najpre da obe strane ove jednakosti imaju smisla: desna s obzirom na Perron-ovu teoremu, a leva zbog (trivijalne) činjenice da igra definisana matricom sa pozitivnim elementima ima pozitivnu vrednost.

Prema Helly-evoj teoremi i zbog kompaktnosti skupa svih mešovitih strategijâ igrača P_1 postoji mešovita strategija $\hat{\mu}$ koja je optimalna za igrača P_1 u svim igrama iz posmatrane familije. Dokažimo da sve matrice A_t, $t \in T$ imaju zajednički (desni) sopstveni vektor sa pozitivnim komponentama koji odgovara Perron-ovim sopstvenim vrednostima ovih matricâ. Zaista, fiksirajmo proizvoljno $s \in T$ i neka je z desni sopstveni vektor sa pozitivnim komponentama matrice A_s koji odgovara sopstvenoj vrednosti $\lambda(A_s)$. Tada za proizvoljno $t \in T$ imamo:

$$A_s(A_tz) = A_t(A_sz) = A_t\,\lambda(A_s)z = \lambda(A_s)A_tz$$

tj. A_tz je takodje sopstveni vektor matrice A_s koji odgovara istoj sopstvenoj vrednosti $\lambda(A_s)$. Stoga je

$$A_tz = kz$$

gde je k pozitivan broj. No to znači da je k pozitivna sopstvena vrednost matrice A_t. Dokažimo da je $k = \lambda(A_t)$. Zaista, neka je u levi sopstveni vektor sa pozitivnim komponentama matrice A_t koji odgovara sopstvenoj vrednosti $\lambda(A_t)$. Tada imamo:

$$k\, u'z = u'A_t z = \lambda(A_t)u'z$$

No kako je $u'z \neq 0$ zbog pozitivnosti komponenatâ vektorâ u i z imamo $k = \lambda(A_t)$. Prema tome, za svako $t \in T$ važi

$$A_t z = \lambda(A_t)z$$

tj. z je zajednički sopstveni vektor svih matricâ A_t, $t \in T$. S obzirom na uslov 3^o imamo:

$$\lambda(A_t)\ \hat{\mu}'z = \hat{\mu}' A_t z = w \operatorname{val} A_t$$

gde je sa w označen zbir komponenatâ vektora z. Iz ove jednakosti sledi da je količnik $\operatorname{val} A_t / \lambda(A_t)$ konstantan, što završava dokaz teoreme. □

U radu [R 1] je ovaj rezultat prenesen (uz odgovarajuće izmene) i na slučaj antagonističkih igarâ na jediničnom kvadratu.

U narednoj teoremi ćemo koristiti sledeće oznake: $e' = [1 \ldots 1]$, $e \in R^n$. I označava, kao obično, jediničnu matricu reda n.

TEOREMA 2.4.2. Neka je A realna matrica reda n. Realni broj λ je sopstvena vrednost matrice A ako i samo ako u matričnoj igri Γ definisanoj matricom

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} A - \lambda I & (\lambda I - A)e \\ e'(\lambda I - A) & e'(A - \lambda I)e \end{bmatrix}$$

postoje optimalne strategije $\hat{\mu}$ i $\hat{\nu}$ igračâ P_1 i P_2 takve da barem jedna od njih ima neku komponentu jednaku nuli.

D o k a z : Primetimo najpre da za svaki realan broj λ važi $\operatorname{val} M(\lambda) = 0$, što sledi iz teoreme 1.4.3., uzimajući za oba igrača strategiju $(1/(n+1),\dots,1/(n+1))$. Neka je λ realna sopstvena vrednost matrice A i neka je $x = [x_1 \dots x_n]'$, $y = [y_1 \dots y_n]'$ levi (odnosno desni) sopstveni vektor koji joj odgovara. Stoga je

$$x'(A-\lambda I) = 0 \qquad i \qquad (A-\lambda I)y = 0$$

Ukoliko ni x ni y nemaju negativnih komponenatâ dovoljno je uzeti $\hat{\mu}' = [x_1/s \dots x_n/s \quad 0]$ i $\hat{\nu}' = [y_1/t \dots y_n/t \quad 0]$ gde je $s = x_1 + \dots + x_n \neq 0$ i $t = y_1 + \dots + y_n \neq 0$ i pozvati se na teoremu 1.4.3. Pretpostavimo stoga da x ili y (ili oba) imaju negativnih komponenatâ. Neka je

$$x_{n+1} = -\min \{0, x_1, \dots, x_n\}$$
$$y_{n+1} = -\min \{0, y_1, \dots, y_n\}$$

Neka je dalje

$$\bar{x}_i = x_i + x_{n+1} \quad , \quad i = 1,\dots,n$$
$$\bar{y}_i = y_i + y_{n+1} \quad , \quad i = 1,\dots,n$$

i još $\bar{x}_{n+1} = x_{n+1}$ i $\bar{y}_{n+1} = y_{n+1}$

Jasno je da su brojevi $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_{n+1},\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_{n+1}$ nenegativni i da je bar jedan od njih jednak nuli. Sem toga imamo $\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_n > 0$ (inače bismo imali $x = 0$) i takodje $\bar{y}_1 + \dots + \bar{y}_n > 0$. Stavljajući $\bar{x}' = [\bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n+1}]$ i $\bar{y}' = [\bar{y}_1 \dots \bar{y}_{n+1}]$ i vodeći računa da je $\bar{x}' = [x' + x_{n+1} e' \quad x_{n+1}]$ $\bar{y}' = [y' + y_{n+1} e' \quad y_{n+1}]$ dobijamo

$$M(\lambda)\bar{y} = \begin{bmatrix} (A-\lambda I)y + (A-\lambda I)\, y_{n+1} e + (\lambda I - A) y_{n+1} e \\ e'(\lambda I - A)\, y + e'(\lambda I - A)\, y_{n+1} e + e'(A - \lambda I) y_{n+1} e \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (A-\lambda I)y \\ e'(\lambda I - A)y \end{bmatrix} = [0 \ \dots \ 0 \ \ 0]'$$

Slično se dokazuje da je $\bar{x}'M(\lambda) = 0$. Sada je dovoljno uzeti $\hat{\mu} = \bar{x}/c$, $\hat{\nu} = \bar{y}/d$ gde je $c = \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_{n+1}$, $d = \bar{y}_1 + \dots + \bar{y}_{n+1}$ i pozvati se na teoremu 1.4.3.

Pretpostavimo sada da su za neko realno λ strategije $\hat{\mu}' = [\hat{x}_1 \ \dots \ \hat{x}_{n+1}]$ i $\hat{\nu}' = [\hat{y}_1 \ \dots \ \hat{y}_{n+1}]$ optimalne i neka npr. $\hat{\nu}$ ima (bar jednu) komponentu jednaku nuli. S obzirom da je val $M(\lambda) = 0$ i da je strategija $\bar{\mu}' = [1/(n+1) \ \dots \ 1/(n+1)]$ takodje optimalna strategija igrača P_1 zaključujemo na osnovu teoreme 1.4.3. i primedbe na str.19 da važi

$$M(\lambda) \cdot \hat{\nu} = 0$$

Neka je $\bar{y} \in R^n$ definisan sa

$$\bar{y}' = [\hat{y}_1 - \hat{y}_{n+1} \ \dots \ \hat{y}_n - \hat{y}_{n+1}]$$

tada je $\hat{\nu}' = [\bar{y}' + e'\hat{y}_{n+1} \quad \hat{y}_{n+1}]$ te je $0 = M(\lambda)\,\hat{\nu} =$

$$= \begin{bmatrix} (A-\lambda I)\bar{y} + (A-\lambda I)e\,\hat{y}_{n+1} + (\lambda I - A)e\,\hat{y}_{n+1} \\ e'(\lambda I - A)\bar{y} + e'(\lambda I - A)e\,\hat{y}_{n+1} + e'(A-\lambda I)e\,\hat{y}_{n+1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (A-\lambda I)\bar{y} \\ e'(\lambda I - A)\bar{y} \end{bmatrix}$$

te je, dakle, $(A-\lambda I)\bar{y} = 0$. Ostaje da se dokaže da je $\bar{y} \neq 0$. Zaista, ukoliko je $\hat{y}_{n+1} = 0$ onda je $\hat{y}_1 + \dots + \hat{y}_n = 1$ te $\bar{y}' = [\hat{y}_1 \ \dots \ \hat{y}_n] \neq 0$. Ukoliko je pak $\hat{y}_{n+1} \neq 0$, a $\hat{y}_j = 0$ za neko $j \neq n+1$ onda je j-ta komponenta vektora $\bar{y}$ jednaka $-\hat{y}_{n+1} \neq 0$. Stoga ne može biti $\bar{y} = 0$, te je λ sopstvena vrednost kojoj odgovara (desni) sopstveni vektor $\bar{y}$. □

3 K O N A Č N E   I G R E

3.1. Uvodne teoreme

Kao što je već rečeno, ova glava je posvećena izlaganju rešenja problema postavljenog na kraju prethodne glave. Slučaj bimatričnih igarâ obradjen je u odeljku 3.2., dok se matrične igre razmatraju u odeljku 3.3. Izlaganje počinjemo pomoćnim teoremama koje sadrže jednostavne činjenice iz matrične algebre a koje ćemo u daljem često koristiti. Prve dve teoreme su i same po sebi zanimljive dok su treća i četvrta (teoreme 3.1.3. i 3.1.4.) izdvojene samo zato da bi se dokazi teoremâ 3.2.5. i 3.3.5. oslobodili od glomaznih računanja.

TEOREMA 3.1.1. Sistem

(1) $$p'X = u' \quad , \quad Xq = w$$

gde su $p' = [p_1 \ \dots \ p_n]$, $q' = [q_1 \ \dots \ q_n]$, $u' = [u_1 \ \dots \ u_n]$ $w' = [w_1 \ \dots \ w_n]$ dati vektori i $p_1 \neq 0, \ \dots \ , p_n \neq 0$; $q_1 \neq 0$, ... , $q_n \neq 0$ a $X = [x_{ij}]$ nepoznata kvadratna matrica reda n , ima rešenje ako i samo ako važi

(2) $$u'q = p'w$$

D o k a z : Množeći jednačine sistema (1) redom sa q (sa desne strane), odnosno sa p'(sa leve strane) i oduzimajući dobijamo uslov (2).

Pokažimo da je uslov (2) i dovoljan za postojanje rešenja sistema (1). Stavimo $\bar{x}_{ij} = 0$, $i = 1, \ \dots \ , n-1$; $j = 1 , \ \dots \ , n-1$ i $\bar{x}_{n1} = u_1/p_n, \ \dots \ , \bar{x}_{n\,n-1} = u_{n-1}/p_n$; $\bar{x}_{1n} = w_1/q_n, \ \dots \ , \bar{x}_{n-1\,n} = w_{n-1}/q_n$ i

$\bar{x}_{nn} = (u_n - p_1 w_1/q_n - \dots - p_{n-1}w_{n-1}/q_n)/p_n$ i pokažimo da je $\bar{X} = [\bar{x}_{ij}]$ rešenje sistema (1). Zaista imamo

$$p_1\bar{x}_{1j} + \dots + p_n\bar{x}_{nj} = p_n\bar{x}_{nj} = u_j \quad , \ j = 1 , \ \dots \ , n-1$$

$q_1\bar{x}_{i1} + \dots + q_n\bar{x}_{in} = q_n\bar{x}_{in} = w_i \ , \ i = 1 \ , \ \dots \ , \ n-1$

zatim

$p_1\bar{x}_{1n} + \dots + p_n\bar{x}_{nn} = p_1w_1/q_n + \dots + p_{n-1}w_{n-1}/q_n +$

$+ \ u_n - p_1w_1/q_n - \dots - p_{n-1}w_{n-1}/q_n = u_n$

i najzad, imajući u vidu uslov (2),

$q_1\bar{x}_{n1} + \dots + q_n\bar{x}_{nn} =$

$= q_1u_1/p_n + \dots + q_{n-1}u_{n-1}/p_n + \ (q_nu_n - p_1w_1 - \dots - p_{n-1}w_{n-1})/p_n =$

$= (q_1u_1 + \dots + q_nu_n)/p_n - (p_1w_1 + \dots + p_{n-1}w_{n-1})/p_n =$

$= (p_1w_1 + \dots + p_nw_n)/p_n - (p_1w_1 + \dots + p_{n-1}w_{n-1})/p_n = w_n$

što znači da su sve jednačine sistema (1) zadovoljene.□

TEOREMA 3.1.2. Neka su $x = [x_1 \ \dots \ x_n]'$, $y = [y_1 \ \dots \ y_n]'$ $u = [u_1 \ \dots \ u_n]'$, $v = [v_1 \ \dots \ v_n]'$, $n \geqq 2$ dati vektori takvi da je x linearno nezavisan sa y a u linearno nezavisan sa v. Tada postoji nesingularna kvadratna matrica S takva da parovi vektorâ

$Su = [p_1 \ \dots \ p_n]'$ i $Sv = [q_1 \dots q_n]'$

odnosno

$x'S^{-1} = [r_1 \dots r_n]$ i $y'S^{-1} = [s_1 \dots s_n]$

imaju sledeće osobine:

1° Svi brojevi $p_1, \ \dots \ , s_n$ su različiti od nule

2° Sve determinante $a_{ij} = p_iq_j - p_jq_i$ i $b_{ij} = r_is_j - r_js_i \ ; \ i \neq j \ ; i = 1 \ , \ \dots \ , n \ ; \ j = 1 \ , \ \dots \ , n$ su različite od nule.

D o k a z : Neka je B matrica čije su prve dve kolone u i v a ostale su izabrane tako da bude det B $\neq$ 0. Neka je V matrica data sa

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2^2 & \dots & n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^n & \dots & n^n \end{bmatrix}$$

Neka je $S_o = VB^{-1}$; imamo (uzimajući u obzir da su prve dve kolone matrice B baš u i v),

$$S_o u = [1\ 1\ \dots\ 1]'$$
$$S_o v = [2\ 2^2 \dots\ 2^n]'$$

S obzirom da su matrice V i B nesingularne svakako je i $\det S_o \neq 0$.

Neka je, dalje, C nesingularna matrica čije su prve dve vrste x' i y' i neka je $S_1 = V^{-1}C$. Imamo

$$x'S_1^{-1} = [1\ 2\ \dots\ n]$$
$$y'S_1^{-1} = [1\ 2^2 \dots\ n^2]$$

Posmatrajmo matricu $S_t = (1-t)S_o + tS_1$ i odgovarajuće funkcije $p_1(t), \dots, s_n(t), a_{ij}(t), b_{ij}(t)$; $i \neq j$; $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$. Sve determinante $a_{ij}(t)$ i sve komponente vektorâ $S_t u$ i $S_t v$ su polinomi po t i nijedan od njih nije nula-polinom (dovoljno je uzeti $t = 0$). Determinanta $\det S_t$ je takodje polinom po t koji nije uvek jednak nuli (može se opet uzeti $t = 0$). Stoga je za sve realne vrednosti t, osim za njih najviše n, matrica S_t nesingularna. Komponente vektorâ $x'S_t^{-1}$, $y'S_t^{-1}$, kao i sve determinante $b_{ij}(t)$ su racionalne funkcije od t definisane za one vrednosti t za koje je matrica S_t nesingularna, pri čemu nijedna od tih funkcijâ nije identički jednaka nuli (dovoljno je uzeti $t=1$). Sada je dovoljno izabrati takvo realno t_o da sve funkcije $p_1(t), \dots, s_n(t)$, $\det S_t$, $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$ budu definisane i različite od nule. Dobijena matrica $S=S_{t_o}$ zadovoljavaće sve uslove teoreme. □

TEOREMA 3.1.3. Neka su a,b,c,d,u,v proizvoljni realni brojevi koji zadovoljavaju uslov

$$av-bu\neq 0 .$$

Tada sistem jednačinâ

$$\begin{aligned} ux+vy&=a\\ uz+vt&=b\\ x+t&=c\\ xt-yz&=d \end{aligned}$$

ima rešenje.

D o k a z : Lako se proverava da je pri navedenom uslovu rešenje dato sa

$$x=\frac{duv+ab-acv}{bu-av} \qquad y=\frac{acu-a^2-du^2}{bu-av}$$

$$z=\frac{b^2-bcv+dv^2}{bu-av} \qquad t=\frac{bcu-ab-duv}{bu-av}$$

te je teorema dokazana. □

TEOREMA 3.1.4. (i) Neka je $x=(x_1, \dots, x_n)$, $n\geq 2$ proizvoljan realan vektor čije su barem dve komponente različite od nule, i neka je $y=(y_1, \dots, y_n)$ proizvoljan realan vektor. Za svako $i=1, \dots, n$ postoji realan broj $\bar{y}_i\leq y_i$ takav da su vektori x i $(y_1, \dots, y_{i-1}, \bar{y}_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$ linearno nezavisni.

(ii) Neka je $z=(z_1, \dots, z_n)$, $n\geq 2$ proizvoljan rea-

lan vektor različit od nula-vektora i neka je $y=(y_1,\dots$
$\dots,y_n)$ proizvoljan vektor. Za svaka dva prirodna broja i,j takva da je $i<j\leq n$ postoje realni brojevi $\bar{y}_i\leq y_i$ i $\bar{y}_j\leq y_j$ takvi da su vektori z i $(y_1,\dots,y_{i-1},\bar{y}_i,y_{i+1},\dots,y_{j-1},\bar{y}_j,y_{j+1},\dots,y_n)$ linearno nezavisni.

D o k a z : (i) S obzirom da se istovremenim permutovanjem komponenatâ vektorâ x i y ne menja linearna zavisnost odnosno nezavisnost, dovoljno je izvesti dokaz za $i=1$. Neka je $x_j\neq 0$, $j\neq 1$ (takav j postoji zbog uslova da su bar dve komponente x različite od nule) ; tada je determinanta

$$a(t)=\begin{vmatrix} x_1 & x_j \\ t & y_j \end{vmatrix}$$

nekonstantna linearna funkcija od t. Dovoljno je izabrati $\bar{y}_1$ tako da bude $\bar{y}_1\leq y_1$ i $a(\bar{y}_1)\neq 0$ i tvrdjenje je dokazano.

(ii) Kao i u prethodnom slučaju, možemo se ograničiti na slučaj $i=1$, $j=2$. Ukoliko je $z_1=z_2=0$ dovoljno je za $\bar{y}_1$ i $\bar{y}_2$ uzeti realne brojeve različite od nule i manje od y_1 odnosno y_2. Neka je npr. $z_1\neq 0$; tada je determinanta

$$b(t)=\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ y_1 & t \end{vmatrix}$$

nekonstantna linearna funkcija od t te je dovoljno uzeti $\bar{y}_1=y_1$ a $\bar{y}_2$ izabrati tako da bude $\bar{y}_2\leq y_2$ i $b(\bar{y}_2)\neq 0$. □

3.2. Bimatrične igre

Neka su date dve mešovite strategije $\hat{\mu}=(\hat{x}_1,\dots$

$\ldots, \hat{x}_n)$, $\hat{\nu} = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n)$ i dva realna broja a i b . Šta se može reći o spektru bimatrične igre Δ (videti definiciju 2.1.1. na str.30) ukoliko je ($\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$) ravnotežna tačka u Δ kojoj odgovaraju isplate a i b redom igračima P_1 i P_2? Odgovor na ovo pitanje je sadržan u teoremama 3.2.1., 3.2.2. i 3.2.3. dok teoreme 3.2.4. i 3.2.5. pokazuju da je u izvesnom smislu dat potpun odgovor. Radi jednostavnijeg izražavanja najpre dajemo dve definicije.

DEFINICIJA 3.2.1. Neka su $\mu = (x_1, \ldots, x_n)$, $\nu = (y_1, \ldots, y_n)$ mešovite strategije i neka su a i b realni brojevi. Kažemo da uredjena četvorka (μ, ν, a, b) rešava bimatričnu igru Ω ukoliko je u toj igri (μ, ν) ravnotežna tačka kojoj odgovaraju isplate a i b redom igračima P_1 i P_2. □

S obzirom na teoremu 1.2.5. jasno je da (μ, ν, a,b) rešava bimatričnu igru Ω definisanu matricama P i Q ako i samo ako brojevi $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, a,b zadovoljavaju sistem nejednačinâ iz te teoreme (str.17 i 18).

DEFINICIJA 3.2.2. Neka su $\mu = (x_1, \ldots, x_n)$ i $\nu = (y_1, \ldots, y_n)$, $n \geq 2$ mešovite strategije. Kažemo da je strategija μ unikomplementarna strategiji ν ako i samo ako strategija μ ima jednu jedinu komponentu različitu od nule (i stoga jednaku jedan) i važi

$$x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = 0 \quad , \quad x_i + y_i > 0 \; ; \; i = 1, \ldots, n . \square$$

Primetimo još da relacija unikomplementarnosti nije simetrična (osim, razume se, za $n = 2$). Stoga će se u slučaju $n = 2$ javiti izvesne osobenosti (videti teoreme 3.2.4. (iv) i 3.2.5. (vii) i (viii)).

TEOREMA 3.2.1. Neka je bimatrična igra Δ definisana matricama isplate P i Q i neka ($\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$, a,b) gde je $\hat{\mu} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$, $\hat{\nu} = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n)$ rešava igru Δ.

Ukoliko je $a=0$ a $\hat{\mu}$ nema komponenatâ jednakih nuli onda je $\det P=0$; ukoliko je pak $b=0$ a $\hat{\nu}$ nema komponenatâ jednakih nuli onda je $\det Q=0$.

D o k a z : Neka je npr. $b=0$ i neka su svi brojevi $\hat{y}_1, \ldots$ $\ldots, \hat{y}_n$ pozitivni. Tada je, prema teoremi 1.2.5. i primedbi posle dokaza te teoreme (str.19)

$$[\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n] \cdot Q = [0 \ldots 0]$$

Medjutim, ova jednakost je zbog $\hat{x}_1 + \ldots + \hat{x}_n = 1$ moguća jedino ako je $\det Q = 0$. Slično se dokazuje i deo tvrdjenja koji se odnosi na matricu P. □

TEOREMA 3.2.2. Neka je bimatrična igra Ω definisana matricama isplate P i Q i neka $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, a, b)$ gde je $\hat{\mu} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$, $\hat{\nu} = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n)$ rešava igru Ω. Ukoliko je $\hat{\nu} = (1/n, \ldots, 1/n)$ a $\hat{\mu}$ nema komponenatâ jednakih nuli onda je na sopstvena vrednost matrice P ; ukoliko je pak $\hat{\mu} = (1/n, \ldots, 1/n)$ a $\hat{\nu}$ nema komponenatâ jednakih nuli onda je nb sopstvena vrednost matrice Q.

D o k a z : Neka je npr. $\hat{\mu} = (1/n, \ldots, 1/n)$ i neka su brojevi $\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n$ svi pozitivni. Tada, opet prema teoremi 1.2.5., imamo

$$[1/n \ldots 1/n] \; Q = [b \ldots b]$$

te je nb sopstvena vrednost matrice Q a $\hat{\mu}$ sopstveni vektor koji joj odgovara. Slično se dokazuje i deo tvrdjenja koji se odnosi na matricu P. □

TEOREMA 3.2.3. Neka je bimatrična igra Λ definisana matricama isplate $P = [p_{ij}]$ i $Q = [q_{ij}]$ i neka $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, a, b)$ gde je $\hat{\mu} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$, $\hat{\nu} = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n)$ rešava igru Λ. Ako je $\hat{\mu}$ unikomplementarna strategiji $\hat{\nu}$ i $b=0$ onda matrica Q ima nepozitivnu realnu sopstvenu vrednost. Ako je pak $\hat{\nu}$ unikomplementarna strategiji $\hat{\mu}$ i $a=0$ onda matrica P ima nepozitivnu realnu sopstvenu vrednost.

D o k a z : Neka je npr. $\hat{\mu} = (1,0, \dots ,0)$, $\hat{\nu} = (0,\hat{y}_2, \dots ,\hat{y}_n)$ (dokaz je sličan i u drugim slučajevima). Prema teoremi 1.2.5. i primedbi na str.19 imamo

$$q_{11} \leq 0 \ , \ q_{1j} = 0 \ , \ j = 2, \dots ,n$$

tj. matrica Q ima oblik

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & Q_o \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix}$$

gde je $Q_o = [q_{12} \dots q_{1n}]$ a Q_1 je kvadratna matrica reda $n-1$. Jasno je da je tada q_{11} sopstvena vrednost matrice Q i uz to je q_{11} nepozitivan realan broj.□

U daljem ćemo posmatrati karakteristične polinome raznih matricâ. Da bi realni polinom stepena n bio karakteristični polinom neke realne kvadratne matrice reda n potrebno je i dovoljno da koeficijent uz n-ti stepen promenljive bude $(-1)^n$. Ovakve polinome dalje kratko zovemo standardnim polinomima.

TEOREMA 3.2.4. Neka su a i b realni brojevi a $\hat{\mu} = (\hat{x}_1, \dots ,\hat{x}_n)$ i $\hat{\nu} = (\hat{y}_1, \dots ,y_n)$ mešovite strategije.

(i) Ako ni jedna od strategijâ $\hat{\mu}$ i $\hat{\nu}$ nije unikomplementarna drugoj i pritom i strategija $\hat{\mu}$ i strategija $\hat{\nu}$ imaju barem po jednu komponentu jednaku nuli onda za proizvoljne standardne polinome c i d stepena n postoje kvadratne matrice P i Q reda n takve da $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, a,b)$ rešava bimatričnu igru definisanu matricama P i Q i da uz to važi

(1) $\det(P-\lambda I) = c(\lambda)$, $\det(Q-\lambda I) = d(\lambda)$.

(ii) Ako je $b \neq 0$ a $\hat{\mu}$ ima komponenatâ jednakih nuli i $\hat{\nu}$ nije unikomplementarna $\hat{\mu}$ (ili $a \neq 0$ a $\hat{\nu}$ ima komponenatâ jednakih nuli i $\hat{\mu}$ nije unikomplementarna $\hat{\nu}$)

onda za proizvoljne standardne polinome c i d stepena n postoje kvadratne matrice P i Q reda n takve da ($\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$, a,b) rešava bimatričnu igru definisanu matricama P i Q i da uz to važi (1).

(iii) Ako je $a \neq 0$, $b \neq 0$ i $\hat{\mu} \neq (1/n, \ldots, 1/n) \neq \hat{\nu}$ onda za proizvoljne standardne polinome c i d stepena n postoje kvadratne matrice P i Q reda n takve da ($\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$, a,b) rešava bimatričnu igru definisanu matricama P i Q i da uz to važi (1).

(iv) Neka je, u slučaju $n \geq 3$, $\hat{\mu}$ unikomplementarna $\hat{\nu}$ i $b \neq 0$ (ili $\hat{\nu}$ unikomplementarna $\hat{\mu}$ i $a \neq 0$). U slučaju $n = 2$ neka je $\hat{\mu}$ unikomplementarna $\hat{\nu}$ i $a \neq 0$ i $b \neq 0$. Tada za proizvoljne standardne polinome c i d stepena n postoje kvadratne matrice P i Q reda n takve da ($\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$, a,b) rešava bimatričnu igru definisanu matricama P i Q i da uz to važi (1).

D o k a z : Uslovi koji se spominju u (i), (ii), (iii) i (iv) ne mogu biti ispunjeni ukoliko je $n = 1$ (što znači da su tada tvrdjenja trivijalno istinita). Pretpostavimo stoga $n \geq 2$. Prema teoremi 1.2.5. ako ($\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$, a,b) rešava bimatričnu igru definisanu matricama P i Q onda važi:

(2) $\quad P\hat{\nu} = u \quad , \qquad \hat{\mu}'Q = v'$

gde je

(3) $\quad u' = [u_1 \ \ldots \ u_n] \ ; \quad u_1 \leq a, \ \ldots \ , u_n \leq a$

(4) $\quad v' = [v_1 \ \ldots \ v_n] \ ; \quad v_1 \leq b, \ \ldots \ , v_n \leq b$

Sem toga, vodeći računa o primedbi na str.19, stroga nejednakost $u_i < a$ ($v_i < b$) je moguća jedino ako je $\hat{x}_i = 0$ ($\hat{y}_i = 0$).

Imajući u vidu primenu teoreme 3.1.2. biraćemo vektor u tako da bude linearno nezavisan sa $\hat{\nu}$ (vektor v tako da bude linearno nezavisan sa $\hat{\mu}$). Razmotrimo u kojim situacijama takav izbor vektora u nije mogućan (rasudjivanje koje se odnosi na vektor v je potpuno analogno).

Ako je $a \neq 0$ onda se pri $\hat{\nu} \neq (1/n, \dots ,1/n)$ može uzeti $u = (a, \dots ,a)$. Ako je $\hat{\nu} = (1/n, \dots ,1/n)$ a $\hat{\mu}$ ima komponenatâ jednakih nuli (neka je npr. j-ta komponenta jednaka nuli) onda je dovoljno u vektoru $(a, \dots ,a)$ "smanjiti" j-tu komponentu (teorema 3.1.4. (i)). Dakle, ako je $a \neq 0$ ovakav izbor nije mogućan jedino ako je $\hat{\nu} = (1/n, \dots ,1/n)$, $\hat{\mu} > 0$.

Neka je $a = 0$. Ako $\hat{\mu}$ ima barem dve komponente jednake nuli (neka su to i-ta i j-ta) onda se "smanjivanjem" i-te i j-te komponente vektora $(a, \dots ,a)$ može postići tražena linearna nezavisnost (teorema 3.1.4. (ii)). Ukoliko su sve komponente vektora $\hat{\mu}$ pozitivne traženi izbor, očigledno, nije moguć. Neka je $\hat{x}_k = 0$ i $\hat{x}_j \neq 0$ za $j \neq k$. Ako je $\hat{y}_s \neq 0$ za neko $s \neq k$ onda je dovoljno uzeti $u_k = -1$, $u_j = 0$ za $j \neq k$. Preostaje slučaj kada je $\hat{y}_k$ jedina od nule različita komponenta vektora $\hat{\nu}$, tj. kada je $\hat{\nu}$ unikomplementaran vektoru $\hat{\mu}$ - tada traženi izbor opet nije mogućan.

Lako se vidi da su svi ovi slučajevi isključeni pretpostavkama u (i), (ii), (iii), (iv), te u preostalom delu dokaza (koji je dalje zajednički za sva četiri tvrdjenja) pretpostavljamo da je $\hat{\nu}$ linearno nezavisan sa u, a $\hat{\mu}$ sa v. Sem toga, zbog načina biranja u i v imamo i

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{n} (a - u_i)\hat{x}_i = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} (b - v_i)\hat{y}_i = 0$$

Neka je S nesingularna kvadratna matrica reda n takva da vektori

$$S\hat{\nu} = z = [z_1 \dots z_n]' \qquad Su = w = [w_1 \dots w_n]'$$

odnosno

$$\hat{\mu}' S^{-1} = p' = [p_1 \dots p_n] \quad v' S^{-1} = q' = [q_1 \dots q_n]$$

imaju osobine 1° i 2° iz teoreme 3.1.2. (str.48).

Pokažimo sada da postoje kvadratne matrice G i H takve da je $Gz = w$ i $p'H = q'$ i da uz to važi

$$\det(G - \lambda I) = c(\lambda) \quad , \quad \det(H - \lambda I) = d(\lambda)$$

Dokaz ćemo izvesti za matricu H ; dokaz za matricu G je sasvim sličan.

Izdvojmo jedan realan kvadratni faktor polinoma d tj. napišimo ga u obliku

(6) $$d(\lambda) = (\lambda^2 + r\lambda + s)\, d_1(\lambda)$$

gde je d_1 neki standardan polinom stepena n-2 . (U slučaju $n = 2$ polinom d_1 će se, razume se, svesti na konstantu 1) .

Neka je

$$H_o = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{bmatrix}$$

gde brojevi h_1, h_2, h_3, h_4 zadovoljavaju uslove

(7) $$\begin{aligned} p_1h_1 + p_2h_3 &= q_1 \\ p_1h_2 + p_2h_4 &= q_2 \\ h_1 + h_4 &= -r \\ h_1h_4 - h_2h_3 &= s \end{aligned}$$

Ti brojevi postoje po teoremi 3.1.3. jer je $p_1q_2 - p_2q_1 \neq 0$ (osobina 2^o iz teoreme 3.1.2.) U slučaju $n = 2$ dovoljno je uzeti $H = H_o$. Pretpostavimo stoga da je $n > 2$. Neka je H_1 ma koja realna kvadratna matrica reda $n - 2$ čiji je karakteristični polinom d_1 . Matricu H ćemo uzeti u obliku

(8) $$H = \begin{bmatrix} H_o & H_2 \\ 0 & H_1 \end{bmatrix}$$

gde je sa 0 označena nula-matrica, a $2 \times (n-2)$ matrica H_2 se bira tako da bude $p'H = q'$. U tom cilju vektore p i q napišimo u obliku

$$p' = [\bar{p}', \bar{\bar{p}}'] \quad , \quad q' = [\bar{q}', \bar{\bar{q}}']$$

gde je

$$\bar{p}' = [p_1 \; p_2] \quad , \; \bar{\bar{p}}' = [p_3 \dots p_n], \; \bar{q}' = [q_1 \; q_2] \; , \; \bar{\bar{q}}' = [q_3 \dots q_n]$$

S obzirom na (7) imamo

$$\bar{p}' H_o = \bar{q}'$$

te ćemo H_2 izabrati tako da bude

(9) $$\bar{p}' H_2 + \bar{\bar{p}}' H_1 = \bar{\bar{q}}'$$

Ovo je lako postići ; možemo na primer, za prvu vrstu matrice H_1 uzeti $(1/p_1)(\bar{\bar{q}}' - \bar{\bar{p}}' H_1)$ ($p_1 \neq 0$ zbog 1^o, teorema 3.1.2.), a drugu vrstu ispuniti nulama. Tada će važiti (9) te iz (7) sledi da je $p'H = q'$.

Iz (8) je jasno da je karakteristični polinom matrice H jednak proizvodu karakterističnih polinomâ matricâ H_o i H_1 , odnosno, imajući u vidu (6),

$$\det(H - \lambda I) = d(\lambda)$$

Slično se dokazuje postojanje matrice G sa traženim osobinama. (Ovakva konstrukcija će se, uz odgovarajuće izmene, primenjivati i u narednoj teoremi, str.62).

Uzmimo sada $P = S^{-1}GS$, $Q = S^{-1}HS$. Poznato je da su karakteristični polinomi matricâ P i Q jednaki redom karakterističnim polinomima matricâ G i H, tj. to su (redom) baš c i d . Ostaje da se pokaže da $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, a, b)$ rešava bimatričnu igru definisanu matricama P i Q . Zaista, imamo

$$P\hat{\nu} = S^{-1}GSS^{-1}z = S^{-1}Gz = S^{-1}w = u$$

$$\hat{\mu}' Q = p'SS^{-1}HS = p'HS = q'S = v'$$

tj. važi (2). Sem toga je, zbog (5)

$$\hat{\mu}'(P+Q)\hat{\nu} = \sum_{i=1}^{n} (\hat{x}_i u_i + v_i \hat{y}_i) = \sum_{i=1}^{n} (a\hat{x}_i + b\hat{y}_i) = a + b$$

Imajući u vidu nejednakosti (3) i (4) ovo, prema teoremi

1.2.5. znači da $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, a, b)$ rešava bimatričnu igru definisanu matricama P i Q, čime je teorema dokazana.□

Prethodna teorema pokazuje da se u slučajevima koji nisu obuhvaćeni teoremama 3.2.1., 3.2.2. i 3.2.3. ne može ništa reći o spektru igre Γ ako se zna samo da data četvorka $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, a, b)$ rešava tu igru. Ostaje, medjutim, otvoreno pitanje: da li je u slučajevima pomenutim u teoremama 3.2.1., 3.2.2. i 3.2.3. tim teoremama rečeno sve što se može reći o spektru igre o kojoj je reč ? Da je to zaista tako pokazuje teorema 3.2.5. U njoj su svi iskazi formulisani za igrača P_2 i "njegovu" matricu isplate Q . Razume se, "simetrični" iskazi koji se odnose na igrača P_1 su takodje istiniti (i mogu se dokazati na vrlo sličan način) .

TEOREMA 3.2.5. Neka su a i b realni brojevi a $\hat{\mu} = (\hat{x}_1, \ldots \ldots, \hat{x}_n)$ i $\hat{\nu} = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n)$ mešovite strategije.

(i) Ako je $b = 0$, brojevi $\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n$ pozitivni a $\hat{\mu}$ ima komponenatâ jednakih nuli onda za proizvoljan standardni polinom c stepena n i proizvoljan standardni polinom d istog stepena koji zadovoljava uslov $d(0) = 0$ postoje kvadratne matrice P i Q reda n takve da $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, a, b)$ rešava bimatričnu igru definisanu tim matricama i da uz to važi

$$\det(P - \lambda I) = c(\lambda) \quad , \quad \det(Q - \lambda I) = d(\lambda) \tag{10}$$

(ii) Ako je $b = 0$, brojevi $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n$ pozitivni, $a \neq 0$ i $\hat{\nu} \neq (1/n, \ldots, 1/n)$ onda za proizvoljan standardni polinom c stepena n i proizvoljan standardni polinom d istog stepena koji zadovoljava uslov $d(0) = 0$ postoje kvadratne matrice P i Q reda n takve da $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, a, b)$ rešava bimatričnu igru definisanu tim matricama i da uz to važi (10) .

(iii) Ako je $a = b = 0$ a brojevi $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n, \hat{y}_1, \ldots$

... $,\hat{y}_n$ pozitivni onda za proizvoljne standardne polinome c i d stepena n koji zadovoljavaju uslov $c(0) = d(0) = 0$ postoje kvadratne matrice P i Q reda n takve da $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, a, b)$ rešava bimatričnu igru definisanu tim matricama i da uz to važi (10).

(iv) Ako je $\hat{\mu} = (1/n, \ldots, 1/n) \neq \hat{\nu}$, brojevi $\hat{y}_1, \ldots$ ... $,\hat{y}_n$ pozitivni i $a \neq 0$, onda za proizvoljan standardni polinom c stepena n i proizvoljan standardni polinom d istog stepena koji zadovoljava uslov $d(nb) = 0$ postoje kvadratne matrice P i Q reda n takve da $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, a, b)$ rešava bimatričnu igru definisanu tim matricama i da uz to važi (10).

(v) Ako je $\hat{\mu} = (1/n, \ldots, 1/n) \neq \hat{\nu}$, brojevi $\hat{y}_1, \ldots$ ... $,\hat{y}_n$ pozitivni i $a = 0$ onda za proizvoljne standardne polinome c i d stepena n koji zadovoljavaju uslove $c(0) = 0$ i $d(nb) = 0$ postoje kvadratne matrice P i Q reda n takve da $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, a, b)$ rešava bimatričnu igru definisanu tim matricama i da uz to važi (10).

(vi) Ako je $\hat{\mu} = \hat{\nu} = (1/n, \ldots, 1/n)$ onda za proizvoljne standardne polinome c i d stepena n koji zadovoljavaju uslove $c(na) = 0$ i $d(nb) = 0$ postoje kvadratne matrice P i Q reda n takve da $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, a, b)$ rešava bimatričnu igru definisanu tim matricama i da uz to važi (10).

(vii) Ako je $n \geq 3$, $\hat{\mu}$ unikomplementarna $\hat{\nu}$ i $b = 0$ ili $n = 2$, $\hat{\mu}$ unikomplementarna $\hat{\nu}$, $b = 0$ i $a \neq 0$ onda za proizvoljan standardni polinom c stepena n i proizvoljan standardni polinom d istog stepena koji ima nepozitivan realan koren postoje kvadratne matrice P i Q reda n takve da $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, a, b)$ rešava bimatričnu igru definisanu tim matricama i da uz to važi (10).

(viii) Ako je $n = 2$, $\hat{\mu}$ unikomplementarna $\hat{\nu}$ i $a = b = 0$ onda za proizvoljne standardne polinome stepena

2 c i d koji imaju barem po jedan nepozitivan koren postoje kvadratne matrice reda 2 takve da ($\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$, a,b) rešava bimatričnu igru definisanu tim matricama i da uz to važi (10) .

D o k a z : Slučaj $n = 1$ je opet trivijalan, pa ćemo pretpostaviti $n \geq 2$. Uvešćemo najpre oznake slične oznakama iz prethodne teoreme.

Prema teoremi 1.2.5. ako ($\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$, a,b) rešava bimatričnu igru definisanu matricama P i Q onda važi

(11) $$P\hat{\nu} = u \quad , \quad \hat{\mu}' Q = v'$$

gde je

(12) $$u' = [u_1 \dots u_n] \quad ; \quad u_1 \leq a, \ \dots \ , u_n \leq a$$

(13) $$v' = [v_1 \dots v_n] \quad ; \quad v_1 \leq b, \ \dots \ , v_n \leq b$$

U slučajevima (i) i (ii) vektor u biramo tako da bude linearno nezavisan sa $\hat{\nu}$. Takav izbor je mogućan (videti diskusiju u dokazu prethodne teoreme str.56 i teoremu 3.1.4.) .

Primetimo da su u oba slučaja nejednakosti (12) i (13) zadovoljene i da sem toga važi:

(14) $$\sum_{i=1}^{n}(a - u_i)\hat{x}_i = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{n}(b - v_i)\hat{y}_i = 0$$

Po teoremi 3.1.2. postoji nesingularna matrica S takva da vektori

$\hat{\mu}' S^{-1} = p' = [p_1 \dots p_n]$, $S\hat{\nu} = z = [z_1 \dots z_n]'$ i

$Su = w = [w_1 \dots w_n]'$ imaju osobine

$p_1 \neq 0 , \dots , p_n \neq 0 , z_1 \neq 0 , \dots , z_n \neq 0 , w_1 \neq 0 , \dots , w_n \neq 0 ,$
$z_1 w_2 - z_2 w_1 \neq 0 .$

S obzirom da je $d(\lambda) = -\lambda \cdot d_1(\lambda)$ gde je d_1 standardni polinom stepena $n - 1$ pomoćnu matricu H ćemo uzeti u obliku :

$$H = \begin{bmatrix} 0 & H_o \\ 0 & H_1 \end{bmatrix}$$

gde je H_1 ma koja kvadratna matrica reda n-1 čiji je karakteristični polinom d_1, $H_o = [h_2 \dots h_n]$. Brojevi $h_2, \dots, h_n$ se biraju tako da bude $p'H = [0 \dots 0]$ - to je uvek mogućno zbog $p_1 \neq 0$.

Izdvojmo jedan realni kvadratni faktor polinoma c tj. napišimo ga u obliku :

$$c(\lambda) = (\lambda^2 + r\lambda + s)c_1(\lambda)$$

Neka je sada

$$G_o = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}$$

gde g_1, g_2, g_3, g_4 zadovoljavaju uslove:

$$z_1 g_1 + z_2 g_3 = w_1$$
$$z_1 g_2 + z_2 g_4 = w_2$$
$$g_1 + g_4 = -r$$
$$g_1 g_4 - g_2 g_3 = s$$

Dalja konstrukcija matrice G je slična konstrukciji matrice H iz dokaza prethodne teoreme (str.57) ; dobija se matrica G takva da je $Gz = w$ i da je karakteristični polinom matrice G upravo c . Dalje uzimamo $P = S^{-1}GS$, $Q = S^{-1}HS$ te je

$$P\hat{v} = S^{-1}GSS^{-1}z = S^{-1}Gz = S^{-1}w = u$$

$$\hat{\mu}'Q = p'SS^{-1}HS = p'HS = [0 \dots 0]S = [0 \dots 0] = v'$$

$$\hat{\mu}'(P+Q)\hat{v} = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i u_i = a \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i = a = a + b$$

Pošto zbog sličnosti matricâ P i G odnosno Q i H važi (10) dokaz je završen za slučajeve (i) i (ii).

U slučaju (iii) polinomi c i d se mogu napisati u obliku

$$c(\lambda) = -\lambda\, c_1(\lambda), \quad d(\lambda) = -\lambda\, d_1(\lambda)$$

te matrice P i Q možemo izabrati na sledeći način :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ P_o & P_1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & Q_o \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix}$$

gde su P_1 odnosno Q_1 proizvoljne kvadratne matrice reda $n-1$ čiji su karakteristični polinomi redom c_1 i d_1, a matrice

$$P_o = [\bar{p}_2 \ldots \bar{p}_n]', \quad Q_o = [\bar{q}_2 \ldots \bar{q}_n]$$

se biraju tako da bude $P\hat{\nu} = [0 \ldots 0]'$, $\hat{\mu}'Q = [0 \ldots 0]$ što je mogućno jer je $\hat{x}_1 \neq 0$ i $\hat{y}_1 \neq 0$. Tako konstruisanim matricama P i Q su redom karakteristični polinomi c i d, a pošto imamo i

$$\hat{\mu}'(P+Q)\hat{\nu} = 0 = a + b$$

to je jasno da $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, a, b)$ rešava bimatričnu igru definisanu matricama P i Q.

U slučaju (iv) uzimamo $v' = [b \ldots b]$, $u' = [a \ldots a]$; vektori $\hat{\nu}$ i u su linearno nezavisni, te se matrica G, a zatim i P može konstruisati kao i u tački (i) - (ii). Polinom d se može napisati u obliku

$$d(\lambda) = (nb - \lambda)\, d_1(\lambda)$$

gde je d_1 standardni polinom stepena $n-1$. Neka je Q_1 ma koja kvadratna matrica reda $n-1$ čiji je karakteristični polinom d_1. Matricu Q uzimamo u obliku

$$Q = \begin{bmatrix} nb & Q_o \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix}$$

gde je $Q_o = [\bar{q}_2 \ldots \bar{q}_n]$. Brojevi $\bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_n$ se biraju tako

da bude $\hat{\mu}' Q = [b \dots b]$, što je moguéno jer je $\hat{x}_1 = 1/n \neq 0$
Lako se proverava da dobijene matrice P i Q zadovoljavaju sve uslove (11), (12), (13) i (14) i da su njihovi karakteristični polinomi baš c i d.

U slučaju (v) ćemo polinome c i d napisati u obliku

$$c(\lambda) = -\lambda c_1(\lambda) \ , \ d(\lambda) = (nb - \lambda) d_1(\lambda)$$

a matrice P i Q uzimamo u obliku

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ P_o & P_1 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} nb & Q_o \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix}$$

gde su P_o i Q_o kvadratne matrice reda n-1 čiji su karakteristični polinomi redom c_1 i d_1 , $P_o = [\bar{p}_2 \dots \bar{p}_n]'$ $Q_o = [\bar{q}_2 \dots \bar{q}_n]$. Brojevi $\bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n$ odnosno $\bar{q}_2, \dots$ $\dots, \bar{q}_n$ se biraju tako da bude

$P\hat{\nu} = [a \dots a]' = [0 \dots 0]'$, $\hat{\mu}' Q = [b \dots b]$,

što je moguéno zbog $\hat{x}_1 \neq 0$, $\hat{y}_1 \neq 0$. No to znači da četvorka $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, a, b)$ rešava bimatričnu igru definisanu matricama P i Q, te je dokaz za slučaj (v) završen.

U slučaju (vi) polinomi c i d se mogu napisati u obliku:

$$c(\lambda) = (na - \lambda) c_1(\lambda) \ , \ d(\lambda) = (nb - \lambda) d_1(\lambda)$$

gde su c_1 i d_1 standardni polinomi stepena n-1. Matrice P i Q uzimamo u obliku

$$P = \begin{bmatrix} na & 0 \\ P_o & P_1 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} nb & Q_o \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix}$$

gde su P_1 i Q_1 kvadratne matrice reda n-1 čiji su karakteristični polinomi redom c_1 i d_1; $P_o = [\bar{p}_2 \dots \bar{p}_n]'$, $Q_o = [\bar{q}_2 \dots \bar{q}_n]$. Brojevi $\bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n$ odnosno $\bar{q}_2, \dots$ $\dots, \bar{q}_n$ se biraju tako da bude

$$P\hat{v} = [a \ldots a]' \quad , \quad \hat{\mu}' Q = [b \ldots b]$$

što je mogućno zbog $\hat{x}_1 \neq 0$, $\hat{y}_1 \neq 0$.

U slučaju (vii) se vektor u može izabrati tako da bude linearno nezavisan sa $\hat{v}$ (teorema 3.1.4.) pa se matrica G a zatim i P može konstruisati kao u tačkama (i) - (ii) . Neka je npr. $\hat{\mu} = (1,0, \ldots ,0)$ (dokaz je sličan i u drugim slučajevima) i neka je k nepozitivan realan koren polinoma d ; tada je

$$d(\lambda) = (k - \lambda) d_1(\lambda)$$

gde je d_1 standardni polinom stepena n-1 . Matricu Q ćemo uzeti u obliku

$$Q = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix}$$

gde je Q_1 ma koja kvadratna matrica reda n-1 čiji je karakteristični polinom d_1 .

U slučaju (viii) se polinomi c i d mogu napisati u obliku

$$c(\lambda) = (k_1 - \lambda)(k_2 - \lambda)$$
$$d(\lambda) = (k_3 - \lambda)(k_4 - \lambda)$$

gde su, recimo, k_1 i k_3 nepozitivni realni brojevi. Tada su, razume se, i k_2 i k_4 realni brojevi pa se matrice P i Q mogu uzeti u obliku

$$P = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} k_4 & 0 \\ 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

ukoliko je $\hat{\mu} = (1,0)$, $\hat{v} = (0,1)$, odnosno u obliku

$$P = \begin{bmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} k_3 & 0 \\ 0 & k_4 \end{bmatrix}$$

u obrnutom slučaju . Ovim je dokaz teoreme završen. □

Nije teško videti da četiri slučaja iz teoreme 3.2.4. i osam slučajevâ iz teoreme 3.2.5. (uz njima "simetrične") "pokrivaju" sve moguće slučajeve te da stoga teoreme 3.2.1., 3.2.2., 3.2.3., 3.2.4. i 3.2.5. daju potpun odgovor na postavljeni problem za klasu bimatričnih igarâ. Naredni odeljak je posvećen rešavanju istog problema u klasi matričnih igarâ. Ovde je umesno napomenuti da, iako se matrične igre mogu tretirati kao specijalan slučaj bimatričnih (izdvajaju se uslovom $P = -Q$), teoreme 3.3.4. i 3.3.5. nisu specijalan slučaj teoremâ 3.2.4. i 3.2.5. jer igre čije postojanje ove poslednje teoreme tvrde ne moraju biti antagonističke. Razlika je posebno uočljiva u slučaju $n = 2$ (videti primedbu na str. 73). I pored toga, iz narednog odeljka će se uočiti i mnogo sličnosti kako u samim rezultatima, tako i u načinu dokazivanja odgovarajućih teoremâ.

Iz izloženog se vidi da se na osnovu poznavanja jedne četvorke koja rešava bimatričnu igru može vrlo malo reći o spektru te igre: u najboljem slučaju se može odrediti po jedna sopstvena vrednost matricâ P i Q, dok sve ostale ostaju potpuno nepoznate (jedino što o njima možemo da kažemo je da se, ukoliko nisu realne, javljaju u konjugovano-kompleksnim parovima, što je tačno za proizvoljne realne matrice !).

3.3. Matrične igre

Prelazimo sada na slučaj matričnih igarâ. Izlaganju dajemo strukturu sličnu izlaganju u prethodnom odeljku-razume se, uz neophodne izmene.

DEFINICIJA 3.3.1. Neka su $\mu = (x_1, \ldots, x_n)$, $\nu = (y_1, \ldots, y_n)$ mešovite strategije i neka je v realan broj. Kažemo da uredjena trojka (μ, ν, v) rešava matričnu igru Γ ukoliko su u toj igri μ i ν optimalne strategije i $v = \mathrm{val}\,\Gamma$.□

S obzirom na teoremu 1.4.3. trojka (μ, ν, v) rešava igru Γ definisanu matricom P ako i samo ako brojevi $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, v zadovoljavaju sistem linearnih nejednačinâ iz te teoreme (str. 28).

Sledeća teorema je analogna teoremi 3.2.1.

TEOREMA 3.3.1. Neka je matrična igra Γ definisana matricom isplate $P = [p_{ij}]$ i neka $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, v)$ gde je $\hat{\mu} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$, $\hat{\nu} = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n)$ rešava igru Γ. Ako je $v = 0$ a barem jedna od strategijâ $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$ nema komponenatâ jednakih nuli onda je $\det P = 0$.

D o k a z : Neka su npr. brojevi $\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n$ svi pozitivni. Tada u sistemu nejednačinâ (str. 28) koji, prema teoremi 1.4.3., brojevi $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n$, v zadovoljavaju mora važiti :

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\hat{x}_i = 0 \quad ; \quad j = 1, \ldots, n .$$

No kako je zbog $\hat{x}_1 + \ldots + \hat{x}_n = 1$ za barem jedan i je $\hat{x}_i \neq 0$ te mora biti $\det P = 0$. Dokaz je sličan i u slučaju kada su brojevi $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$ svi pozitivni. □

TEOREMA 3.3.2. Neka je matrična igra Δ definisana matricom isplate $P = [p_{ij}]$ i neka $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, v)$ gde je $\hat{\mu} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$, $\hat{\nu} = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n)$ rešava igru Δ. Ako je $\hat{\mu} = (1/n, \ldots, 1/n)$, a brojevi $\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n$ su pozitivni ili $\hat{\nu} = (1/n, \ldots, 1/n)$, a brojevi $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$ su pozitivni onda je nv sopstvena vrednost matrice P.

D o k a z : Neka su npr. brojevi $\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n$ pozitivni a $\hat{x}_i = 1/n$, $i = 1, \ldots, n$. Tada prema teoremi 1.4.3. imamo :

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = nv \quad ; \quad j = 1, \ldots, n$$

te je nv sopstvena vrednost matrice P a (1, ... ,1) odgovarajući sopstveni vektor. Dokaz je sličan i u drugom slučaju. □

TEOREMA 3.3.3. Neka je matrična igra Ω definisana matricom isplate $P = [p_{ij}]$ i neka $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, v)$ gde je $\hat{\mu} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$, $\hat{\nu} = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n)$ rešava igru Ω. Ako je $v = 0$ a strategija $\hat{\mu}$ unikomplementarna strategiji $\hat{\nu}$ onda matrica P ima nenegativnu realnu sopstvenu vrednost. Ako je $v = 0$ a $\hat{\nu}$ je unikomplementarna $\hat{\mu}$ onda P ima nepozitivnu realnu sopstvenu vrednost.

D o k a z : Neka je npr. $\hat{\mu} = (1,0, \ldots, 0)$, $\hat{\nu} = (0, \hat{y}_2, \ldots$ $\ldots, \hat{y}_n)$ gde su brojevi $\hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n$ pozitivni (dokaz je sličan i u drugim mogućim slučajevima). Tada je, opet prema teoremi 1.4.3.,

$$p_{11} \geqslant 0, \ p_{12} = 0, \ldots, p_{1n} = 0$$

te matrica P ima oblik

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 \\ P_o & P_1 \end{bmatrix}$$

gde je P_1 kvadratna matrica reda $n-1$. No tada je p_{11} sopstvena vrednost matrice P i uz to je $p_{11} \geqslant 0$. □

Naredne dve teoreme pokazuju da je u teoremama 3.3.1., 3.3.2. i 3.3.3. sadržan potpun odgovor na postavljeni problem u slučaju matričnih igarâ. Teorema 3.3.4. pokazuje da se u slučajevima koji nisu obuhvaćeni u prethodnim teoremama o spektru matrice ne može ništa reći ako se zna samo neka trojka koja rešava odgovarajuću igru, dok teorema 3.3.5. pokazuje da se teoreme 3.3.1., 3.3.2. i 3.3.3. ne mogu "pojačati"

TEOREMA 3.3.4. Neka je v realan broj, $\hat{\mu} = (\hat{x}_1, \dots ,\hat{x}_n)$ i $\hat{\nu} = (\hat{y}_1, \dots ,\hat{y}_n)$ mešovite strategije i $n \geqslant 4$.

(i) Ako je $v \neq 0$ i barem jedna od strategijâ $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$ ima komponenatâ jednakih nuli onda za proizvoljan standardni polinom c stepena n postoji kvadratna matrica P reda n takva da $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, v)$ rešava matričnu igru definisanu matricom P i da uz to važi

$$\det(P - \lambda I) = c(\lambda) \tag{1}$$

(ii) Ako je $v \neq 0$ i $\hat{\mu} \neq (1/n, \dots ,1/n) \neq \hat{\nu}$ onda za proizvoljan standardni polinom c stepena n postoji kvadratna matrica P reda n takva da $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, v)$ rešava matričnu igru definisanu matricom P i da uz to važi (1).

(iii) Ako je $v = 0$ a strategije $\hat{\mu}$ i $\hat{\nu}$ imaju svaka barem po jednu komponentu jednaku nuli i nijedna od njih nije unikomplementarna drugoj onda za svaki polinom c stepena n postoji kvadratna matrica P reda n takva da $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, v)$ rešava matričnu igru definisanu matricom P i da uz to važi (1).

D o k a z : Prema teoremi 1.4.3. ako trojka $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, v)$ rešava matričnu igru definisanu matricom P onda važi:

$$P\hat{\nu} = u \quad , \quad \hat{\mu}'P = w' \tag{2}$$

gde je

$$u' = [u_1 \dots u_n] \quad ; \quad u_1 \leqslant v, \dots ,u_n \leqslant v \tag{3}$$

$$w' = [w_1 \dots w_n] \quad ; \quad w_1 \geqslant v, \dots ,w_n \geqslant v \tag{4}$$

Kao i ranije, stroga nejednakost $u_i < v$ $(w_i > v)$ je moguća jedino ako je $\hat{x}_i = 0$ $(\hat{y}_i = 0)$. Stoga imamo jednakost $\hat{\mu}'u = v = w'\hat{\nu}$.

Na osnovu diskusije izvedene u dokazu teoreme 3.2.4. (str. 56) je jasno da se u sva tri slučaja (i), (ii), i

(iii) vektori u i w mogu izabrati tako da u bude linearno nezavisan sa $\hat{v}$ a w sa $\hat{\mu}$. Neka je S nesingularna kvadratna matrica reda n takva da vektori

$$S\cdot\hat{v} = z = [z_1 \dots z_n]' \quad , \quad Su = r = [r_1 \dots r_n]'$$

$$\hat{\mu}'S^{-1} = p' = [p_1 \dots p_n] \quad , \quad w'S^{-1} = q' = [q_1 \dots q_n]$$

imaju osobine 1^o i 2^o iz teoreme 3.1.2. (str.48) . Osim toga, imamo

$$v = \hat{\mu}'u = \hat{\mu}'S^{-1}Su = p'r \quad i$$

$$v = w'\hat{v} = w'S^{-1}S\hat{v} = q'z \quad \text{te je } p'r - q'z = 0 .$$

Pokažimo sada da postoji kvadratna matrica G reda n takva da je

$$Gz = r \quad , \quad p'G = q'$$

i da je karakteristični polinom matrice G baš c. U tom cilju ćemo polinom c napisati u obliku

(5) $$c(\lambda) = (\lambda^2 + a\lambda + b)(\lambda^2 + a_1\lambda + b_1)d(\lambda)$$

gde su a, b, a_1 i b_1 realni brojevi, a d neki standardni polinom stepena n-4.

Razmotrimo najpre slučaj $n \geq 5$. Matricu G ćemo uzeti u obliku

(6) $$G = \begin{bmatrix} G_o & G_1 & G_2 \\ 0 & G_3 & G_4 \\ 0 & 0 & G_5 \end{bmatrix}$$

gde je G_3 ma koja kvadratna matrica reda n-4 čiji je karakteristični polinom d, dok su G_o i G_5 kvadratne matrice reda 2 date sa :

$$G_o = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \quad , \quad G_5 = \begin{bmatrix} g_5 & g_6 \\ g_7 & g_8 \end{bmatrix}$$

gde brojevi g_1 , ... , g_8 zadovoljavaju uslove:

$$(7)\qquad \begin{aligned} p_1g_1 + p_2g_3 &= q_1 \\ p_1g_2 + p_2g_4 &= q_2 \\ g_1 + g_4 &= -a \\ g_1g_4 - g_2g_3 &= b \end{aligned}$$

odnosno

$$(8)\qquad \begin{aligned} z_{n-1}g_5 + z_ng_6 &= r_{n-1} \\ z_{n-1}g_7 + z_ng_8 &= r_n \\ g_5 + g_8 &= -a_1 \\ g_5g_8 - g_6g_7 &= b_1 \end{aligned}$$

Ovi brojevi postoje po teoremi 3.1.3. jer je

$p_1q_2 - p_2q_1 \neq 0$ i $z_{n-1}r_n - z_nr_{n-1} \neq 0$ (2^o, teorema 3.1.2.)

Vektor z možemo napisati u obliku
$z = [z_1\ z_2\ \bar{z}'\ z_{n-1}\ z_n]'$ gde je $\bar{z}' = [z_3\ \ldots\ z_{n-2}]$.
Analogne oznake ćemo koristiti i u slučaju vektorâ r,p i q . Matrica G_1 se bira tako da bude zadovoljen uslov

$$(9)\qquad [p_1\ \ p_2]\ G_1 + \bar{p}'G_3 = \bar{q}'$$

što je moguóno jer je $p_1 \neq 0$ (1^o, teorema 3.1.2.) . Slično, matricu G_4 biramo tako da važi jednakost

$$(10)\qquad G_3\bar{z} + G_4\ [z_{n-1}\ \ z_n]' = \bar{r}$$

što je, opet zbog 1^o, teorema 3.1.2., moguóno. Na kraju, izaberimo matricu G_2 tako da budu ispunjena sledeća dva uslova:

$$(11)\qquad G_o\,[z_1\ z_2]' + G_1\bar{z} + G_2\,[z_{n-1}\ z_n]' = [r_1\ r_2]'$$

$$(12)\qquad [p_1\ p_2]\,G_2 + \bar{p}'\,G_4 + [p_{n-1}\ p_n]\ G_5 = [q_{n-1}\ q_n]$$

Ovo će, prema teoremi 3.1.1., biti moguóno ukoliko važi jednakost

$$[p_1\ p_2]\ (\ [r_1\ r_2]' - G_1\bar{z} - G_o\ [z_1\ z_2]'\ ) =$$
$$= (\ [q_{n-1}\ q_n] - \bar{p}'G_4 - [p_{n-1}\ p_n]\ G_5\ )\,[z_{n-1}z_n]'$$

ili, što je isto, ako važi

$$(13) \quad [p_1\ p_2]\left([r_1\ r_2]' - G_1\bar{z} - G_o[z_1\ z_2]'\right) - \left([q_{n-1}\ q_n] - \bar{p}'G_4 - [p_{n-1}\ p_n]G_5\right)[z_{n-1}\ z_n]' = 0$$

Uzimajući u obzir jednakosti (9), (7),(10) leva strana (13) postaje

$$p_1r_1 + p_2r_2 + \bar{p}'G_3\bar{z} - \bar{q}'\bar{z} - q_1z_1 - q_2z_2 - q_{n-1}z_{n-1} - q_nz_n + \bar{p}'\bar{r} - \bar{p}'G_3\bar{z} + p_{n-1}r_{n-1} + p_nr_n = p_1r_1 + p_2r_2 + \bar{p}'\bar{r} + p_{n-1}r_{n-1} + p_nr_n - q_1z_1 - q_2z_2 - \bar{q}'\bar{z} - q_{n-1}z_{n-1} - q_nz_n = p'r - q'z\ .$$

Jednakost $p'r - q'z = 0$ je ranije dokazana, te važi jednakost (13). Stoga je mogućno izabrati matricu G_2 tako da važi (11) i (12).

S obzirom da matrica G ima oblik (6) i imajući u vidu (5), (7) i (8) zaključujemo da je c karakteristični polinom matrice G. Iz (8), (10) i (11) sledi da je $Gz = r$, a iz (7), (9) i (12) da je $p'G = q'$.

Uzmimo sada $P = S^{-1}GS$. Karakteristični polinom matrice P je takodje c ; sem toga važi

$$P\cdot\hat{\nu} = S^{-1}GSS^{-1}z = S^{-1}Gz = S^{-1}r = u\ ,$$

$$\hat{\mu}'\cdot P = p'SS^{-1}GS = p'GS = q'S = w'$$

te imajući u vidu (3) i (4) na osnovu teoreme 1.4.3. zaključujemo da $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, v)$ rešava igru definisanu matricom P.

Preostaje slučaj $n = 4$. Tada se matrica G može uzeti u obliku

$$G = \begin{bmatrix} G_o & G_2 \\ 0 & G_5 \end{bmatrix}$$

gde se G_o i G_5 biraju na isti način kao u (6),(7) i (8). Matrica G_2 se bira tako da budu zadovoljeni uslovi

$$G_o[z_1\ z_2]' + G_2[z_3\ z_4]' = [r_1\ r_2]'\ ,$$

$$[p_1\ p_2]G_2 + [p_3\ p_4]G_5 = [q_3\ q_4]$$

što je mogućno (na osnovu teoreme 3.1.1.) jer je

$[p_1 \ \ p_2]\,(\,[r_1 \ \ r_2]' - G_0\,[z_1 \ \ z_2]'\,) - (\,[q_3 \ \ q_4] - [p_3 \ \ p_4]\,G_5)$
$[z_3 \ \ z_4]' =$

$= p_1r_1 + p_2r_2 - q_1z_1 - q_2z_2 - q_3z_3 - q_4z_4 + p_3r_3 + p_4r_4 =$
$= p'r - q'z = 0\,.$

Dalje dokaz teče isto kao i u slučaju $n \geqq 5$. □

Sledeći primer pokazuje da se u teoremi 3.3.4. uslov $n \geqq 4$ ne može izostaviti :

P r i m e r 3.3.1. Neka je $\hat{\mu} = (1/3\,,\,2/3)$, $\hat{\nu} = (1/4\,,\,3/4)$, $v = 1$ i $c(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$. Ukoliko bi postojala kvadratna matrica P reda 2 takva da $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, v)$ rešava igru definisanu matricom P i da je c karakteristični polinom matrice P imali bismo, stavljajući

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ \bar{c} & d \end{bmatrix}$$

sledeće jednakosti:

$$\begin{array}{lcl} a + 2\bar{c} = 3 & , & a + 3b = 4 \\ b + 2d = 3 & , & \bar{c} + 3d = 4 \\ a + d = 2 & , & ad - b\bar{c} = 5 \end{array}$$

Medjutim, ovaj sistem je protivrečan pa tražena matrica P ne postoji.

Ovaj primer pokazuje, pored ostalog, da se problem u slučaju matričnih igarâ bitno razlikuje od istog problema za bimatrične igre: podsećamo, naime, da je teorema 3.2.4. dokazana za sve prirodne brojeve bez izuzetka.

Izučavanje postavljenog problema za slučajeve $n = 2$ i $n = 3$ ne predstavlja, u principu, veliku teškoću: za $n = 2$ se problem svodi na rešavanje sistema od nekoliko linearnih i jedne kvadratne jednačine (videti gornji primer !), dok se za $n = 3$ problem može svesti na sistem od nekoliko linearnih jednačinâ i dve kvadratne jednačine sa istim nelinearnim delom te je rešavanje mogućno (mada i veoma dugačko i glomazno !). Diskusiju ova dva slučaja ćemo stoga ovde izostaviti. Pa ipak, primetimo da su neki mogući podslučajevi slučaja $n=3$ sadržani u teoremi 3.3.5.

TEOREMA 3.3.5. Neka je v realan broj, $\hat{\mu}=(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ i $\hat{\nu}=(\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n)$ mešovite strategije i $n \geqslant 3$.

(i) Ako je $v=0$ a svi brojevi $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$ (ili svi brojevi $\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n$) pozitivni onda za proizvoljni standardni polinom c stepena n koji zadovoljava uslov $c(0)=0$ postoji kvadratna matrica P reda n takva da $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, v)$ rešava matričnu igru definisanu matricom P i da uz to važi

(14) $$\det(P-\lambda I)=c(\lambda)$$

(ii) Ako je $v=0$ a strategija $\hat{\mu}$ je unikomplementarna strategiji $\hat{\nu}$ (ili je strategija $\hat{\nu}$ unikomplementarna strategiji $\hat{\mu}$) onda za proizvoljni standardni polinom c stepena n koji ima nenegativan realan koren (nepozitivan realan koren) postoji matrica P takva da $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, v)$ rešava matričnu igru definisanu matricom P i da uz to važi (14).

(iii) Ako je $\hat{\mu}=(1/n, \ldots, 1/n)$ a svi brojevi $\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n$ pozitivni (ili $\hat{\nu}=(1/n, \ldots, 1/n)$ a svi brojevi $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$ pozitivni) onda za proizvoljan standardni polinom c stepena n koji zadovoljava uslov $c(nv)=0$ postoji kvadratna matrica P reda n takva da $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, v)$ rešava matričnu igru definisanu matricom P i da uz to važi (14).

D o k a z : (i) Neka je S ma koja nesingularna matrica reda n takva da je

$$S^{-1}\hat{\nu}=[1\ 0 \ldots 0]' \quad \text{i} \quad \hat{\mu}'S=[p_1 \ldots p_n]$$

gde je $p_1 \neq 0$. Takva matrica postoji; dovoljno je npr. uzeti $\hat{\nu}$ za prvu kolonu matrice S a ostale elemente matrice S izabrati tako da bude $\det S \neq 0$. Prvi uslov je tada trivijalno ispunjen a sem toga je $p_1 = \hat{\mu}' \hat{v} \neq 0$.

Neka je $c(\lambda) = -\lambda d(\lambda)$ gde je d neki standardni polinom stepena n-1, neka je G ma koja kvadratna matrica reda n-1 čiji je karakteristični polinom d i neka je H kvadratna matrica oblika

$$H = \begin{bmatrix} 0 & G_o \\ 0 & G \end{bmatrix}$$

gde je $G_o = [g_2 \ \dots \ g_n]$. Karakteristični polinom matrice H je c; brojeve $g_2, \dots, g_n$ biramo tako da bude

$$[p_1 \dots p_n]\ H = [0 \dots 0]$$

što je mogućno jer je $p_1 \neq 0$. Sem toga je

$$HS^{-1}\ \hat{v} = H\ [1\ \ 0 \dots 0]' = [0 \dots 0]'$$

Neka je $P = SHS^{-1}$; karakteristični polinom matrice P je c i imamo

$$\hat{\mu}' P = \hat{\mu}' SHS^{-1} = [p_1 \dots p_n]\ HS^{-1} = [0 \dots 0]\ S^{-1} = [0 \dots 0]$$
$$P \cdot \hat{v} = SHS^{-1}\ \hat{v} = S\ [0 \dots 0]' = [0 \dots 0]'$$

te $(\hat{\mu}, \hat{v}, 0)$ rešava matričnu igru definisanu matricom P.

(ii) Neka je npr. $\hat{\mu} = (1, 0, \dots, 0)$, $\hat{v} = (0, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n)$ gde su svi brojevi $\hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n$ pozitivni (dokaz je sličan i u drugim mogućim slučajevima). Neka je k nenegativan realan koren polinoma c; imamo

$$c(\lambda) = (k - \lambda)\ d(\lambda)$$

gde je d standardni polinom stepena n-1 i neka je P_1 ma koja kvadratna matrica reda n-1 čiji je karakteristični polinom d a koja još zadovoljava uslov

$$P_1\ [\hat{y}_2 \dots \hat{y}_n]' < [0 \dots 0]'.$$ Postojanje takve matrice lako je dokazati: takva matrica reda 2 postoji po teoremi 3.1.3. Matrica reda 3 sa takvim osobinama se može uzeti u obliku

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_6 & a_7 \end{bmatrix}$$

gdje je a_1 realan koren odgovarajućeg polinoma, a brojevi a_4, a_5, a_6 i a_7 se opet odredjuju po teoremi 3.1.3., dok se brojevi a_2 i a_3 biraju tako da budu negativni i dovoljno veliki po apsolutnoj vrednosti. Najzad, takve matrice reda s, $s \geqslant 4$ se mogu dobiti kao blok-dijagonalne matrice gde su na dijagonali blokovi reda 2 i 3 opisanog tipa.

Matricu P ćemo uzeti u obliku:

$$P = \begin{bmatrix} k & 0 \\ P_o & P_1 \end{bmatrix}$$

gde je P_o proizvoljna kolona dužine $n-1$. Imamo

$$\hat{\mu}' P = [k \ \ 0 \ \dots \ 0] \geqslant [0 \ \ 0 \ \dots \ 0]$$

$$P \cdot \hat{v} \leqslant [0 \ \dots \ 0]'$$

zbog načina biranja matrice P_1. Dakle, $(\hat{\mu}, \hat{v}, 0)$ rešava matričnu igru definisanu matricom P, a karakteristični polinom matrice P je očigledno c.

(iii) Neka je npr. $\hat{v} = (1/n, \dots, 1/n)$, a brojevi $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ svi pozitivni. Polinom c se može predstaviti u obliku

$$c(\lambda) = (nv - \lambda)\, d(\lambda)$$

gde je d standardni polinom stepena $n-1$. Neka je S ma koja nesingularna matrica reda n čija je prva kolona $\hat{v}$; tada imamo:

$$S^{-1} \hat{v} = [1 \ \ 0 \ \dots \ 0]' \quad \text{i} \quad \hat{\mu}' S = [p_1 \dots p_n]$$

gde je $p_1 = 1/n$. Neka je

$$H = \begin{bmatrix} nv & G_o \\ 0 & G \end{bmatrix}$$

gde je G ma koja kvadratna matrica reda $n-1$ čiji je karakteristični polinom d, $G_o = [g_2 \ldots g_n]$ gde se brojevi $g_2, \ldots, g_n$ biraju tako da bude ispunjen uslov

$$\hat{\mu}' SH = [v \ \ldots \ v] \, S,$$

ovo je mogućno jer je $p_1 = 1/n \neq 0$. Karakteristični polinom matrice H je c; stavimo $P = SHS^{-1}$ i imaćemo

$$\hat{\mu}' P = \hat{\mu}' SHS^{-1} = [v \ldots v] \, SS^{-1} = [v \ \ldots \ v] \quad ,$$

$$P \hat{\nu} = SHS^{-1} \hat{\nu} = SH \, [1 \ \ 0 \ldots 0]' = S \, [nv \ \ 0 \ldots \ 0]' =$$
$$= nv \, S \, [1 \ \ 0 \ldots 0]' = nv \ \hat{\nu} = [v \ \ldots \ v]'$$

što znači da $(\hat{\mu}, \hat{\nu}, v)$ rešava matričnu igru definisanu matricom P. Sem toga je c karakteristični polinom matrice P, te je time tvrdjenje dokazano. $\square$

Na kraju ove glave moglo bi se još dodati da zaključak sa strane 66 ostaje na snazi: znajući samo jednu trojku koja rešava matričnu igru o spektru te igre se može vrlo malo reći - u najboljem slučaju može se odrediti jedna sopstvena vrednost.

4 IGRE NA JEDINIČNOM KVADRATU

4.1. Uvodne teoreme

Prelazimo sada na slučaj igarâ na jediničnom kvadratu. U ovom odeljku ćemo dati nekoliko definicijâ i teoremâ koje će dalje izlaganje učiniti jednostavnijim i preglednijim. Odeljci 4.2. i 4.3. posvećeni su rešavanju problema postavljenog na str.46 .

Kao što je poznato, broj λ se naziva sopstvenom vrednošću linearnog operatora K ukoliko jednačina

$$Kx = \lambda x$$

ima rešenje različito od nula-vektora ; pri tom se broj linearno nezavisnih rešenjâ naziva rangom sopstvene vrednosti. Mi ćemo ovde posmatrati isključivo integralne operatore čije je jezgro neprekidna funkcija. Razume se, takvi operatori su potpuno neprekidni i spektar im se sastoji od nule i konačnog ili beskonačnog niza sopstvenih vrednosti (videti [A 2] , [K 2] , [L 4] , [R 3]), pri čemu svaka sopstvena vrednost različita od nule ima konačan rang. Stoga ćemo u daljem razmatrati isključivo nenulte sopstvene vrednosti . Smatraćemo, sem toga, da se u nizu sopstvenih vrednostî različitih od nule svaka od njih pojavljuje onoliko puta koliko iznosi njen rang.

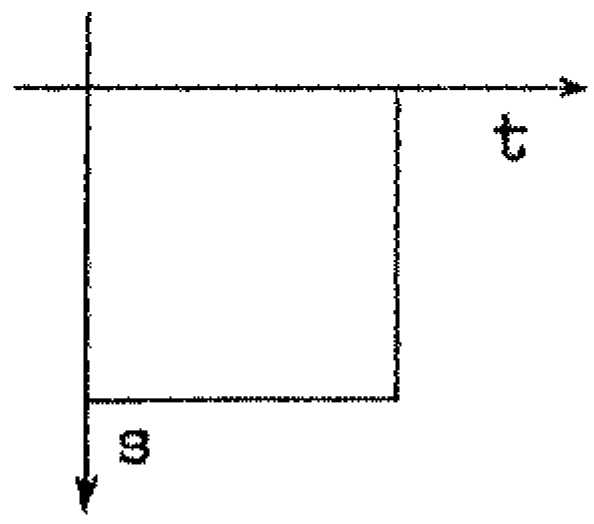
U daljem izlaganju ćemo često biti u situaciji da razmatramo funkcije definisane različitim formulama u različitim delovima jediničnog kvadrata. Radi lakšeg izražavanja i jednostavnijeg pisanja koristićemo sledeće konvencije:

Neka je interval $I = [0,1]$ podeljen na npr. tri podintervala $I_1 = [0, c]$, $I_2 = [c,d]$, $I_3 = [d,1]$ i neka $f : I \longrightarrow R$. Tada zapis $f = (f_1, f_2, f_3)$ znači da su funkcije f_1, f_2 i f_3 restrikcije funkcije f redom na intervale I_1, I_2 i I_3 . Analogno tome, zapis

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \\ K_4 & K_5 & K_6 \\ K_7 & K_8 & K_9 \end{bmatrix}$$

i

gde $K : I^2 \longrightarrow R$, označava da su funkcije $K_1, K_2, K_3, K_4, \ldots$ $\ldots, K_9$ restrikcije funkcije K redom na pravougaonike I_1^2, $I_1 \times I_2, I_1 \times I_3, I_2 \times I_1, \ldots, I_3^2$. (Podrazumevaćemo uvek da je jedinični interval I za obe promenljive podeljen na isti način). Ovaj način pisanja podvlači sličnost sa matričnom algebrom i stoga olakšava "čitanje" složenijih formulâ (videti npr. dokaz teoreme 4.1.2. str. 80). Jedina neugodna strana ovakve notacije je u tome što ona odgovara pomalo "neuobičajenom" položaju koordinatnih osâ:



TEOREMA 4.1.1. Funkcija K definisana i neprekidna na $I^2 = [0,1]^2$ i funkcija L definisana na $[a,b]^2$, $a < b$ formulom

$$K(s,t) = (b-a)\, L((b-a)s + a, (b-a)t + a)$$

imaju iste sopstvene vrednosti i to istog ranga.

D o k a z : Dovoljno je upotrebiti smenu $t = (b-a)u + a$ u integralnoj jednačini

$$\int_a^b L(s,t)\, f_i(t)\, dt = \lambda\, f_i(s) \quad , i = 1, \ldots, k$$

pa se vidi da će sopstvene funkcije g_i jezgra K koje odgovaraju istoj sopstvenoj vrednosti biti date sa

$$g_i(s) = f_i((b-a)s + a) \quad , i = 1, \ldots, k$$

odakle je jasno da λ ima isti rang i za K i za L. $\square$

TEOREMA 4.1.2. Za svaku neprekidnu funkciju definisanu na jediničnom kvadratu I^2 postoji neprekidna funkcija L definisana na istom kvadratu takva da je $L(s,1) = 0 = L(1,t)$

i da uz to K i L imaju iste sopstvene vrednosti i to istog ranga.

D o k a z : Podelimo interval I na dva podintervala $I_1 = [0, 1/2]$ i $I_2 = [1/2, 1]$. Na osnovu prethodne teoreme postoji neprekidna funkcija A definisana na I_1^2 koja ima iste sopstvene vrednosti (i to istog ranga) kao i K . Neka je q neprekidna funkcija definisana na I_2 koja ima osobine $q(1) = 0$, $q(1/2) = 1$,

$$\int_{I_2} q(t)\,dt = 0 \quad , \quad \int_{I_2} t\,q(t)\,dt = 0$$

(za q se može uzeti pogodno odabran polinom trećeg stepena) . Neka su, dalje, funkcije $B(s,t) = A(s,1/2)\,q(t)$, $C(s,t) = A(1/2,t)(2-2s)$, $D(s,t) = A(1/2,1/2)\,q(t)\,(2-2s)$ definisane redom na kvadratima $I_1 \times I_2$, $I_2 \times I_1$, I_2^2 i neka je, najzad, L funkcija data sa :

$$L = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Lako se vidi da je funkcija L dobro definisana i neprekidna na I^2, kao i da važi $L(s,1) = L(1,t) = 0$. Preostaje da se dokaže da A i L imaju iste sopstvene vrednosti.

Neka je

$$\int_{I_1} A(s,t)\,f_1(t)\,dt = \lambda f_1(s) \quad ;$$

definišimo f_2 sa $f_2(t) = f_1(1/2)(2-2t)$ i neka je $f = (f_1, f_2)$. Pokažimo da je f sopstvena funkcija od L koja odgovara istoj sopstvenoj vrednosti λ . Zaista, za $s \in I_1$ je

$$\int_I L(s,t)\,f(t)\,dt = \int_{I_1} A(s,t)\,f_1(t)\,dt + \int_{I_2} B(s,t)\,f_2(t)\,dt =$$

$$= \int_{I_1} A(s,t)\, f_1(t)\, dt = \lambda f_1(s)$$

(korišćena je ortogonalnost (na I_2) funkcije q na sve linearne funkcije) ; za $s \in I_2$ imamo :

$$\int_I L(s,t)\, f(t) dt = \int_{I_1} C(s,t)\, f_1(t)\, dt + \int_{I_2} D(s,t) f_2(t)\, dt =$$

$$= \lambda f_1(1/2)(2-2s) = \lambda f_2(s)$$

što je i trebalo dokazati.

Neka je sada

$$\int_I L(s,t)\, f(t)\, dt = \lambda f(s)$$

i neka je $f = (f_1, f_2)$; dokažimo da je f_1 sopstvena funkcija funkcije A koja odgovara istoj sopstvenoj vrednosti. Zaista, imamo pri $s \in I_2$:

$$\lambda f_2(s) = \int_{I_1} C(s,t)\, f_1(t)\, dt + \int_{I_2} D(s,t)\, f_2(t)\, dt = a\,(2-2s)$$

gde je a konstanta. Prema tome, f_2 je linearna funkcija. Za $s \in I_1$ imamo:

$$\lambda f_1(s) = \int_{I_1} A(s,t)\; f_1(t)\, dt + \int_{I_2} B(s,t)\; f_2\,(t)\, dt =$$

$$= \int_{I_1} A(s,t)\, f_1(t)\, dt$$

to je i trebalo dokazati,(f_1 nije identički jednaka nuli) . □

Pažljivim razmatranjem ovog dokaza vidi se da se (nebitnim) usložnjenjem postupka može dobiti i jači rezultat : za svaku funkciju K definisanu na jediničnom kvadratu i neprekidnu postoji neprekidna funkcija L definisana i neprekidna na istom kvadratu takva da je $L(0,t) = L(s,0) = L(1,t) = L(s,1) = 0$ i da K i L imaju isti spektar.

Iz dokaza je jasno da sve sopstvene vrednosti obeju funkcijâ imaju isti rang.

Narednu teoremu navodimo bez dokaza, jer se dokaz (i to u opštijoj formulaciji) može naći u skoro svakoj monografiji o integralnim jednačinama. Videti npr. [K 2] , [M 6] , [R 3] .

TEOREMA 4.1.3. Neka je $K : I^2 \longrightarrow R$ neprekidna funkcija i neka je λ realna sopstvena vrednost funkcije K i $\lambda \neq 0$. Tada postoje realne funkcije K_1 i K_2 definisane i neprekidne na jediničnom kvadratu I^2 takve da su ispunjeni uslovi

1° λ je jedina sopstvena vrednost K_2 različita od nule ;

2° Niz sopstvenih vrednosti funkcije K_1 se dobija tako što se iz niza sopstvenih vrednostî funkcije K odstrane članovi jednaki λ .

3° $\int_I K_1(s,u)K_2(u,t)\,du = 0$, $\int_I K_2(s,u)K_1(u,t)\,du = 0$

4° Funkcija K_2 je degenerisana, tj. može se napisati u obliku

$$K_2(s,t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(s)\,h_i(t)$$

za neki prirodan broj n. □

Sledeća teorema je unekoliko analogna teoremi 3.1.1. (str.47) .

TEOREMA 4.1.4. Neka je $I_1 = [a,b]$, $I_2 = [c,d]$ i neka su f i g neprekidne realne funkcije definisane na I_1, h i k neprekidne realne funkcije definisane na I_2 takve da su zadovoljeni uslovi:

(1) $f(a) = h(c)$, $f(b) = k(c)$, $g(a) = h(d)$, $g(b) = k(d)$.

Neka su, dalje, F i G nerastuće realne funkcije definisane redom na I_1 i I_2 koje unutar tih intervalâ imaju barem po jednu tačku rasta, neka su, najzad, u i v neprekidne realne funkcije definisane redom na I_2 i I_1 takve da važe

(2) $\int_{I_1} f(t)\,dF(t) = u(c)\ ,\quad \int_{I_1} g(t)\,dF(t) = u(d)\ ,$

(3) $\int_{I_2} h(s)\,dG(s) = v(a)\ ,\quad \int_{I_2} k(s)\,dG(s) = v(b)\ ,$

(4) $\int_{I_2} u(s)\,dG(s) = \int_{I_1} v(t)\,dF(t)$

Tada postoji neprekidna realna funkcija K definisana na $I_1 \times I_2$ takva da važi

(5) $K(s,a) = h(s)\ ,\quad K(s,b) = k(s)\ ,\quad K(c,t) = f(t)\ ,$
$K(d,t) = g(t)\ ,$

(6) $\int_{I_1} K(s,t)\,dF(t) = u(s)\ ,\quad \int_{I_2} K(s,t)\,dG(s) = v(t)\ .$

D o k a z : Označimo sa A zajedničku vrednost integralâ u formuli (4). Uvedimo zatim neprekidne funkcije i_1, i_2 i i_3 definisane na intervalu I_1 i neprekidne funkcije j_1, j_2 i j_3 definisane na intervalu I_2 koje zadovoljavaju uslove

$i_1(a) = i_2(b) = 1\ ,\quad i_1(b) = i_2(a) = i_3(a) = i_3(b) = 0\ ,$
$j_1(c) = j_2(d) = 1\ ,\quad j_1(d) = j_2(c) = j_3(c) = j_3(d) = 0\ ,$
$\int_{I_1} i_1(t)\,dF(t) = \int_{I_1} i_2(t)\,dF(t) = 0\ ,\quad \int_{I_1} i_3(t)\,dF(t) = 1\ ,$

$$\int_{I_2} j_1(s)\,dG(s) = \int_{I_2} j_2(s)\,dG(s) = 0 \;, \quad \int_{I_2} j_3(s)\,dG(s) = 1 \,.$$

Ovakve funkcije postoje jer F i G imaju tačakâ rasta unutar intervala I_1 odnosno I_2 - dovoljno je uzeti pogodno odabrane kvadratne trinome po s, odnosno t. Neka je dalje

$$\begin{aligned} K(s,t) &= h(s)\,i_1(t) + k(s)\,i_2(t) + f(t)\,j_1(s) + g(t)\,j_2(s) - \\ &- f(a)\,i_1(t)\,j_1(s) - f(b)\,i_2(t)\,j_1(s) - g(a)\,i_1(t)\,j_2(s) - \\ &- g(b)\,i_2(t)\,j_2(s) - v(a)\,i_1(t)\,j_3(s) - v(b)\,i_2(t)\,j_3(s) - \\ &- u(c)\,i_3(t)\,j_1(s) - u(d)\,i_3(t)\,j_2(s) + v(t)\,j_3(s) + \\ &+ u(s)\,i_3(t) - A\,i_3(t)\,j_3(s)\,. \end{aligned}$$

S obzirom na jednakosti (1) i osobine funkcijâ $i_1, \ldots$ $\ldots, j_3$ neposredno sledi da K zadovoljava granične uslove (5). Integracijom po $F(t)$, odnosno po $G(s)$ i uzimajući u obzir (4) lako se proverava da važi i (6). Sem toga, funkcija K je očigledno neprekidna. □

Prethodnu teoremu je, kao što se vidi, teže iskazati nego dokazati. Ona naprosto kazuje da se funkcija definisana i neprekidna na rubu pravougaonika može, pod odredjenim uslovima, dodefinisati unutar pravougaonika tako da važi (6). Napomenimo još da se ova teorema od svog diskretnog analogona (teoreme 3.1.1.) razlikuje i prisustvom graničnih uslovâ (5).

DEFINICIJA 4.1.1. Neprekidnu funkciju $K : I^2 \longrightarrow R$ čiji se spektar sastoji samo od nule nazivamo U-funkcijom. □

Drugim rečima, U-funkcija nema sopstvenih vrednosti različitih od nule. Kao primer U-funkcijâ mogu da posluže npr. jezgra tipa Volterra.

TEOREMA 4.1.5. Neka je F neopadajuća nelinearna funkcija definisana na intervalu $J = [a,b]$. Tada za svaki realni broj c postoji U-funkcija K definisana na J^2 takva da je

$$\int_J K(s,t)\,dF(s) = c \quad \text{za svako } t \in J.$$

D o k a z : Postoji pozitivan broj h i tačka s_o takva da tačke $s_o - h$ i $s_o + h$ pripadaju intervalu J i da sem toga važi $F(s_o + h) - F(s_o) \neq F(s_o) - F(s_o - h)$. (U protivnom bi funkcija F bila linearna ; videti npr. [A 1]). Pokažimo da postoji neprekidna funkcija g definisana na intervalu J takva da je

$$(7) \quad \int_J g(s)\,ds = 0 \ , \quad \int_J g(s)\,dF(s) \neq 0 .$$

Neka je najpre funkcija F neprekidna ; posmatrajmo funkciju $\bar{g}$ definisanu na J sa

$$\bar{g}(s) = \begin{cases} 1 \ , & s \in (s_o - h, s_o) \\ -1 \ , & s \in (s_o, s_o + h) \\ 0 \ , & \text{inače} \end{cases}$$

Funkcija $\bar{g}$ ima tražena svojstva (7) ali nije neprekidna ; jasno je, medjutim, da se za funkciju g može uzeti "dovoljno bliska" neprekidna funkcija.

Pretpostavimo sada da funkcija F ima skokovâ u unutrašnjosti intervala J. Neka je $\bar{s}$ jedna tačka iz (a,b) u kojoj ova funkcija ima skok i neka je k veličina tog skoka. Tada za svaki pozitivan broj p važi $F(\bar{s} + p) - F(\bar{s} - p) \geq k$. S druge strane, ako je $\bar{\bar{s}}$ tačka u kojoj je F neprekidna sa obe strane onda se može izabrati pozitivan broj p tako da bude $F(\bar{\bar{s}} + p) - F(\bar{\bar{s}} - p) < k$. Pretpostavimo još da je p izabran tako da je funkcija F neprekidna u $\bar{s} + p$, $\bar{s} - p$, $\bar{\bar{s}} + p$, $\bar{\bar{s}} - p$ (ovo je trivijalno mogućno) i neka je $\bar{g}$ definisana na J sa

$$\bar{g}(s) = \begin{cases} 1 & , \quad s \in (\bar{s} - p, \bar{s} + p) \\ -1 & , \quad s \in (\bar{\bar{s}} - p, \bar{\bar{s}} + p) \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

Funkcija $\bar{g}$ ima tražena svojstva, ali nije neprekidna ; medjutim, kao i pre, za g se može uzeti neka "dovoljno bliska" neprekidna funkcija. Ova konstrukcija se lako može "doterati" i za slučaj kada je a (ili b) tačka skoka.

Neka je, dakle, g proizvoljna neprekidna funkcija definisana na J koja zadovoljava (7) ; tada se može uzeti $K(s,t) = q\,g(s)$ gde je q odabrano tako da bude

$$\int_J K(s,t)\,dF(s) = c$$

Pokažimo da je K zaista U-funkcija. Pretpostavimo da je λ neka sopstvena vrednost funkcije K različita od nule ; imamo

$$\int_J K(s,t)\,f(t)\,dt = \lambda f(s)$$

za neku funkciju f koja nije identički jednaka nuli. Medjutim, iz ove jednakosti dobijamo

$$q\,g(s)\int_J f(t)\,dt = \lambda f(s) \tag{8}$$

što znači da su funkcije g i f proporcionalne. No tada bismo imali

$$\int_J f(t)\,dt = 0$$

što je u kontradikciji sa (8) jer desna strana (8) nije identički jednaka nuli. □

Iz prethodnog dokaza se uočavaju i sledeće dve činjenice: Prvo, funkcija $g(s)$ (a stoga i K) se može izabrati tako da se anulira za $s = a$ i $s = b$ ukoliko je F neprekidna u tim tačkama. Drugo, ukoliko su funkcije g_1 i g_2 ortogonalne na J, tj. ukoliko važi

$$\int_J g_1(u)\,g_2(u)\,du = 0$$

onda je funkcija $K(s,t) = g_1(s)\,g_2(t)$ U-funkcija - dokaz se u suštini ne razlikuje mnogo od završnog dela dokaza prethodne teoreme (gde je $g_1(s) = g(s)$, $g_2(t) = q$). U daljem izlaganju će ove primedbe često biti od koristi.

TEOREMA 4.1.6. Neka je F neopadajuća funkcija definisana na intervalu $J = [a,b]$ i neprekidna u tački a, $F(a) \neq F(b)$, a c realan broj. Neka je J_1 otvoren podinterval intervala J. Tada postoji U-funkcija K definisana na J^2 i funkcija v definisana na J tako da je $K(a,t) = 0$ i

$$\int_J K(s,t)\,dF(s) = v(t)\,,\quad s \in J$$

i sem toga, $v(t) = c$ za $t \in J \setminus J_1$, $v(t) \leqslant c$ za $t \in J_1$.

D o k a z : Ako je funkcija F nelinearna na J onda možemo uzeti $v(t) = c$ za svako $t \in J$ i pozvati se na prethodnu teoremu. Pretpostavimo stoga da je funkcija F linearna na J, tj. da je $F(s) = ds + e$. No tada se problem nalaženja funkcije K svodi na nalaženje funkcijâ v i r definisanih na J takvih da v zadovoljava gornje nejednakosti i da je

$$d\int_J r(s)\,ds = 1\quad,\quad \int_J r(u)\,v(u)\,du = 0\ ,\ r(a) = 0$$

jer je dovoljno uzeti $K(s,t) = r(s)\,v(t)$. (S obzirom na malopredjašnju primedbu K će biti U-funkcija). Ovakve funkcije r i v postoje - možemo se čak ograničiti na razmatranje deo po deo linearnih funkcijâ.□

4.2. Neantagonističke igre na jediničnom kvadratu

DEFINICIJA 4.2.1. Neka su F i G mešovite strategije, a i b realni brojevi. Kažemo da uredjena četvorka (F,G,a,b) rešava neantagonističku igru Ω na jediničnom kvadratu ukoliko je u toj igri (F,G) ravnotežna tačka kojoj odgo-

Iz dokaza teoreme 2.4.2. se vidi da se na isti način može dokazati i "jače" tvrdjenje: realan broj λ je sopstvena vrednost matrice A ako i samo ako barem jedan igrač ima optimalnu strategiju različitu od $[1/(n+1) \ \dots \ 1/(n+1)]'$ u igri definisanoj matricom $M(\lambda)$. U radu [T 2] je razmatran i slučaj kompleksnih matricâ i to tako što je najpre matrica $A = B + iC$, gde su B i C realne matrice zamenjena sa

$$\begin{bmatrix} B & C \\ -C & B \end{bmatrix}$$

a potom je primenjena konstrukcija slična prikazanoj u teoremi 2.4.2.

Prirodno je postaviti pitanje: šta se na osnovu poznavanja jednog rešenja matrične igre Γ može reči o spektru matrice koja tu igru definiše? Preciznije, ako su date mešovite strategije $\hat{\mu}$ i $\hat{\nu}$ i realan broj v, kakav sve može biti spektar matrice A pod uslovima da strategije $\hat{\mu}$ i $\hat{\nu}$ budu optimalne u igri definisanoj matricom A i da važi $v = \mathrm{val}\, A$? Jasno je da se ovo pitanje, mutatis mutandis, može postaviti i u slučaju bimatričnih igarâ, kao i igarâ na jediničnom kvadratu. Naredne dve glave su posvećene ovom pitanju: u trećoj se razmatraju konačne igre, a u četvrtoj igre na jediničnom kvadratu.

i za teoremu 3.2.3. jer pojam unikomplementarnosti nema smisla u slučaju funkcijâ raspodele na I.

Sledeća teorema pokazuje da je teoremom 4.2.1. rečeno sve što se može reći o spektru neantagonističke igre na jediničnom kvadratu kad je poznata samo jedna četvorka koja rešava tu igru.

TEOREMA 4.2.2. Neka su a i b realni brojevi, a $\hat{F}$ i $\hat{G}$ mešovite strategije, $I = [0,1]$.

(i) Ako barem jedna od funkcijâ $\hat{F}$ i $\hat{G}$ nije strogo rastuća, ili ako su obe strogo rastuće ali obe nelinearne onda za proizvoljne dve neprekidne funkcije L_1 i L_2 definisane na I^2 postoje neprekidne funkcije K_1 i K_2 definisane na I^2 takve da $(\hat{F},\hat{G},a,b)$ rešava igru (I,I,K_1,K_2) i da uz to funkcija K_1 ima isti spektar kao L_1, a funkcija K_2 kao L_2.

(ii) Ako je $\hat{F}(s) = s$ a funkcija $\hat{G}$ je strogo rastuća nelinearna funkcija onda za proizvoljnu neprekidnu funkciju L_1 definisanu na I^2 i proizvoljnu neprekidnu funkciju L_2 definisanu na I^2 koja ima sopstvenu vrednost b postoje neprekidne funkcije K_1 i K_2 definisane na I^2 takve da $(\hat{F},\hat{G},a,b)$ rešava igru (I,I,K_1,K_2) i da uz to funkcija K_1 ima isti spektar kao L_1, a funkcija K_2 kao L_2.

(iii) Ako je $\hat{F}(s) = s$, $\hat{G}(t) = t$ onda za proizvoljne neprekidne funkcije L_1 i L_2 definisane na I^2 koje imaju sopstvenu vrednost redom a odnosno b postoje neprekidne funkcije K_1 i K_2 takve da $(\hat{F},\hat{G},a,b)$ rešava igru (I,I,K_1,K_2) i da uz to funkcija K_1 ima isti spektar kao L_1, a funkcija K_2 kao L_2 .

D o k a z : (i) Pretpostavimo najpre da barem jedna od funkcijâ $\hat{F},\hat{G}$ nije strogo rastuća ; neka je to npr. $\hat{G}$. To znači da je $\hat{G}$ konstantna na nekom podintervalu intervala I. Bar jedan od intervalâ $[0,1/2]$, $[1/2,1]$ sadrži tačke rasta funkcije $\hat{F}$; neka je to npr. $[1/2,1]$. Izaberimo broj c ($0 < c < 1/2$) tako da interval $[c,1]$ sadrži podinterval na kome je funkcija $\hat{G}$ konstantna i da uz to funkcija $\hat{F}$ bude neprekidna u c. Interval I podelimo na dva intervala $I_1 = [0,c]$ i $I_2 = [c,1]$. Neka je M neprekidna funkcija definisana na I_1^2 takva da je $M(s,c) = M(c,t) = 0$ i da joj je spektar jednak spektru funkcije L_2. (Takva funkcija postoji na osnovu teoremâ 4.1.1. i 4.1.2.). Neka je V U-funkcija definisana na I_2^2 takva da je $V(c,t) = 0$ i

$$\int_{I_2} V(s,t)\, d\hat{F}(s) = v(t)$$

gde je $v(t) \leqslant b$ (Postojanje v i V garantuje nam teorema 4.1.6. ; za podinterval J_1 može se uzeti neki podinterval na kome je funkcija $\hat{G}$ konstantna). Dodefinišimo funkciju v na intervalu I_1 na proizvoljan način tako da bude neprekidna na I i da važi $v(t) \leqslant b$, $v(t) = b$ ukoliko je t tačka rasta funkcije $\hat{G}$.

Neka je

$$z(t) = v(t) - \int_{I_1} M(s,t)\, d\hat{F}(s) - v(c) \quad , \ t \in I_1$$

i neka je j funkcija definisana na I_2 koja ima osobine:

$$j(c) = 0 \quad i \quad \int_{I_2} j(s)\, d\hat{F}(s) = 1$$

Neka je $L(s,t) = V(s,c) + z(t)\, j(s)$ funkcija definisana na $I_2 \times I_1$ i neka je najzad

$$K_2 = \begin{bmatrix} M & 0 \\ L & V \end{bmatrix}$$

gde je sa O označena funkcija identički jednaka nuli. Lako se proverava da je K_2 dobro definisana i neprekidna. Osim toga je, za $t \in I_1$

$$\int_I K_2(s,t)\, d\hat{F}(s) = \int_{I_1} M(s,t)\, d\hat{F}(s) + \int_{I_2} L(s,t)\, d\hat{F}(s) =$$

$$= v(t) - z(t) - v(c) + v(c) + z(t) = v(t) ;$$

za $t \in I_2$ je

$$\int_I K_2(s,t)\, d\hat{F}(s) = \int_{I_2} V(s,t)\, d\hat{F}(s) = v(t)$$

S obzirom da je $v(t) = b$ u svim tačkama rasta funkcije $\hat{G}$ imamo

$$\int_I (b - v(t))\, d\hat{G}(t) = 0$$

Pokažimo sada da funkcije M i K_2 imaju isti spektar. Neka je f_1 sopstvena funkcija od M koja odgovara sopstvenoj vrednosti $\lambda \neq 0$, i neka je f_2 (jedinstveno, jer je V U-funkcija) rešenje integralne jednačine:

$$\int_{I_1} L(s,t)\, f_1(t)\, dt + \int_{I_2} V(s,t)\, f_2(t)\, dt = \lambda f_2(t)$$

tada je $f = (f_1, f_2)$ sopstvena funkcija od K_2 koja odgovara istoj sopstvenoj vrednosti.

Obrnuto, ako je f sopstvena funkcija od K_2 onda je jasno da će f_1 (restrikcija funkcije f na I_1) biti sopstvena funkcija od M. Jasno je da ovakva korespondencija čuva linearnu nezavisnost sopstvenih funkcijâ te sopstvene vrednosti različite od nule imaju isti rang.

Razmotrimo slučaj kada su funkcije $\hat{F}$ i $\hat{G}$ obe strogo rastuće i nelinearne. Tada je barem na jednom od podintervalâ $I_1 = [0, \bar{c}]$ i $I_2 = [\bar{c}, 1]$ funkcija $\hat{F}$ nelinearna ;

neka je to npr. I_2. Možemo bez umanjenja opštosti pretpostaviti da je $\hat{F}$ neprekidna u $\bar{c}$. Uzimamo $v(t) = b$ za svako $t \in I$ i funkcije M,V i L kao i ranije (postojanje funkcije V nam sada garantuje teorema 4.1.5.) . Ostatak dokaza isti je kao i u upravo razmotrenom slučaju.

Ukoliko funkcija $\hat{F}$ nije strogo rastuća onda je na jednom od intervalâ I_1 ili I_2 ona nelinearna ; neka je to I_2 tada se opet uzima $v(t) = b$ i funkcija V konstruiše na osnovu teoreme 4.1.5. Ostatak dokaza je isti kao i ranije.

Opisali smo konstrukciju funkcije K_2 ; jasno je da se i funkcija K_1 može konstruisati na sličan način.

(ii) Funkcija K_1 se konstruiše kao u slučaju (i) ; opisaćemo samo konstrukciju funkcije K_2. Podelimo interval I na $I_1 = [0,1/2]$ i $I_2 = [1/2,1]$. Neka je M neprekidna funkcija definisana na I_1^2 koja zadovoljava uslov $M(1/2,t) = 0$, $M(s,1/2) = 0$ i čiji se spektar dobija tako što se iz spektra funkcije L_2 izbace članovi jednaki b . (Ovde pretpostavljamo $b \neq 0$). Postojanje funkcije M obezbedjuju teoreme 4.1.3. i 4.1.2. Neka je b sopstvena vrednost ranga n . Neka su dalje $h_1, \dots ,h_n$ neprekidne funkcije definisane na I_2 koje zadovoljavaju uslove:

$$h_1(1) = \dots = h_n(1) = h_1(1/2) = \dots = h_n(1/2) = 0 \quad ,$$

$$\int_{I_2} h_1(s)\,ds = 1, \quad \int_{I_2} h_i(s)\,ds = 0 \,, \quad \int_{I_2} h_i^2(s)\,ds = b \,, \quad i = 2,\dots,n$$

i h_i , $i = 1, \dots ,n$ su medjusobno ortogonalne na intervalu I_2 . Ovakve funkcije postoje ; zaista, dovoljno je ograničiti se na razmatranje deo po deo linearnih funkcijâ. Stavimo

$$V(s,t) = b\,h_1(s) + h_2(s)\,h_2(t) + \dots + h_n(s)\,h_n(t) \quad ,$$

$L(s,t) = z(t)\, h_1(s)$ gde je

$$z(t) = b - \int_{I_1} M(s,t)\, d\hat{F}(s) = b - \int_{I_1} M(s,t)\, ds$$

Funkcija $V(s,t)$ je degenerisana ; b joj je jedina sopstvena vrednost (ranga n) kojoj odgovaraju sopstvene funkcije $h_1, \dots, h_n$. Neka je K_2 definisana sa

$$K_2 = \begin{bmatrix} M & O \\ & \\ L & V \end{bmatrix}$$

gde je sa O opet označena funkcija identički jednaka nuli. Bez truda se proverava da je funkcija K_2 dobro definisana i neprekidna. Imamo dalje, za $t \in I_1$

$$\int_I K_2(s,t)\, d\hat{F}(s) = \int_{I_1} M(s,t)\, ds + \int_{I_2} L(s,t)\, ds = b$$

a za $t \in I_2$

$$\int_I K_2(s,t)\, d\hat{F}(s) = \int_{I_2} V(s,t)\, ds = b$$

Što se tiče spektra K_2, jasno je da sopstvenoj vrednosti b odgovaraju funkcije $f_i = (O, h_i)$, $i = 1, \dots, n$, (i samo one, jer b nije sopstvena vrednost od M). Ukoliko je λ neka sopstvena vrednost od M (a stoga ne od V) kojoj odgovara funkcija g definisana na I_1, onda je $(g, \bar{g})$ sopstvena funkcija koja odgovara λ za funkciju K_2, gde je $\bar{g}$ jedinstveno rešenje integralne jednačine

$$\int_{I_1} L(s,t)\, g(t)\, dt + \int_{I_2} V(s,t)\, \bar{g}(t)\, dt = \bar{g}(s)$$

Stoga će spektar funkcije K_2 biti jednak spektru funkcije L_2.

U slučaju $b = O$ konstrukcija je još jednostavnija:

za M ćemo uzeti funkciju koja zadovoljava uslove $M(1/2,t)=0$ i $M(s,1/2)=0$ a ima isti spektar kao L_2 (teorema 4.1.2.). Zatim uzimamo $V=0$ (identički) i $L(s,t)=-M(1-s,t)$. Sve neophodne jednakosti se onda lako proveravaju.

(iii) U ovom slučaju se i K_1 i K_2 mogu konstruisati kao funkcija K_2 u slučaju (ii), te je time dokaz teoreme završen. □

Nije teško videti da slučajevi (i),(ii) i (iii) u prethodnoj teoremi (kao i slučaj "simetričan" slučaju (ii)) "pokrivaju" sve mogućne slučajeve, te da tako teoreme 4.2.1. i 4.2.2. daju potpun odgovor na postavljeni problem u klasi neantagonističkih igarâ na jediničnom kvadratu.

Spomenimo još da su konstrukcije isplatnih funkcijâ date relativno detaljno samo u (i), dok su dalje samo skicirane. Ovo je uradjeno stoga što bi zbog sličnosti konstrukcijâ detaljan dokaz bio u velikoj meri ponavljanje ranije rečenog. Tako bi se npr. u slučaju (i), ukoliko bi I_1 sadržao tačke rasta funkcije $\hat{F}$ (umesto, kako smo pretpostavili, I_2) konstrukcija izmenila utoliko što bi funkcije M i V, a takodje L i O izmenila mesta. U daljem izlaganju ćemo se pridržavati tog principa: detaljno će biti izložene samo pojedinosti koje se bitno razlikuju od ranijih (videti npr. dokaz teoreme 4.3.2.).

4.3. Antagonističke igre na jediničnom kvadratu

Prelazimo na slučaj antagonističkih igarâ na jediničnom kvadratu. Za razliku od prethodne tri klase igarâ postavljeni problem je ovde, kao što je napomenuto i u predgovoru, samo delimično rešen. Po svemu sudeći, izgleda da teorema 4.3.1. daje najviše što se može reći o spektru igre - medjutim, to ostaje otvoreno pitanje sve dok se ne dobije dokaz odgovarajućeg tvrdjenja (ili ne nadje kontraprimer !). Moguóno je, naravno, dokazati niz parcijalnih tvrdjenjâ, ali sva ona zajedno ne "pokrivaju" sve mogućne slučajeve (kao što je to bio slučaj npr. sa teoremama 4.2.1. i 4.2.2.). Teorema 4.3.2. je u tom smislu analogna teoremi 4.2.2. (ii).

DEFINICIJA 4.3.1. Neka su F i G mešovite strategije a v realan broj. Kažemo da uredjena trojka (F,G,v) rešava antagonističku igru Δ na jediničnom kvadratu I^2 ukoliko su u toj igri F i G optimalne strategije redom igračâ P_1 i P_2 i $v = \mathrm{val}\,\Delta$. □

S obzirom na teoremu 1.4.4. (str.28 i 29) jasno je da (F,G,v) rešava igru (I,I,K) ako i samo ako strategije F i G i broj v zadovoljavaju uslove

$$(1) \qquad \int_I K(s,t)\,dF(s) \geqq v \quad , \quad t \in I$$

$$(2) \qquad \int_I K(s,t)\,dG(t) \leqq v \quad , \quad s \in I$$

TEOREMA 4.3.1. Neka je antagonistička igra na jediničnom kvadratu I^2 definisana neprekidnom funkcijom isplate K i neka $(\hat{F},\hat{G},v)$ rešava tu igru. Ako je $\hat{F}(s) = s$ a funkcija $\hat{G}$ strogo rastuća ili $\hat{G}(t) = t$ a $\hat{F}$ strogo rastuća onda je v sopstvena vrednost funkcije K.

D o k a z : Neka je npr. $\hat{F}(s) = s$, a $\hat{G}$ strogo rastuća funkcija. Tada u (1) imamo znak jednakosti te se vidi da je v sopstvena vrednost funkcije K kojoj odgovara sopstvena funkcija identički jednaka 1. Ukoliko je pak $\hat{G}(t) = t$ a $\hat{F}$ strogo rastuća onda na isti način zaključujemo iz (2) da je v sopstvena vrednost funkcije K_o definisane sa $K_o(s,t) = K(t,s)$. Medjutim, kako se radi o realnim funkcijama spektri funkcijâ K i K_o se poklapaju (videti npr. [T 3]). □

TEOREMA 4.3.2. Neka su $\hat{F}$ i $\hat{G}$ mešovite strategije, v realan broj i $I = [0,1]$.

Ako je $\hat{F}(s) = s$ a $\hat{G}$ strogo rastuća nelinearna funkcija ili $\hat{G}(t) = t$ a $\hat{F}$ strogo rastuća nelinearna funkcija onda za proizvoljnu neprekidnu funkciju L definisanu na I^2 koja ima sopstvenu vrednost v postoji neprekidna funkcija K definisana na I^2 takva da $(\hat{F},\hat{G},v)$ rešava igru (I,I,K) i da uz to funkcije K i L imaju isti spektar.

D o k a z : Pretpostavimo npr. da je $\hat{F}(s) = s$ i da funkcija $\hat{G}$ strogo raste. Na barem jednom od intervalâ $[0,1/2]$ i $[1/2,1]$ je funkcija $\hat{G}$ strogo rastuća i nelinearna ; neka je to npr. $[1/2,1]$. Izaberimo pozitivan broj $c < 1/2$ tako da funkcija $\hat{G}$ bude neprekidna u c ; neka je $I_1 = [0,c]$ $I_2 = [c,1]$. Neka je M neprekidna funkcija definisana na I_1^2 takva da funkcije M i L imaju isti spektar i da uz to važi, za $t \in I_1$

$$\int_{I_1} M(s,t)\,ds = v$$

i $M(c,t) = 0$. (Ova funkcija se može konstruisati kao funkcija K_2 u teoremi 4.2.2. (ii)). Neka je V U-funkcija definisana na I_2^2 koja zadovoljava uslove $V(s,c) = 0$ i

$$\int_{I_2} V(s,t)\,d\hat{G}(t) = v \quad , \quad s \in I_2$$

Postojanje ovakve funkcije V obezbedjuje teorema 4.1.5. Funkciju K ćemo uzeti u obliku

$$K = \begin{bmatrix} M & S \\ 0 & V \end{bmatrix} \tag{3}$$

gde funkcija S, definisana i neprekidna na $I_1 \times I_2$, zadovoljava uslove: $S(s,c) = M(s,c)$; $S(c,t) = V(c,t)$;

$$(4) \quad \int_{I_1} M(s,t)\, d\hat{G}(t) + \int_{I_2} S(s,t)\, d\hat{G}(t) = v \quad , \quad s \in I_1$$

$$(5) \quad \int_{I_1} S(s,t)\, ds + \int_{I_2} V(s,t)\, ds = v \quad , \quad t \in I_2$$

Postojanje ovakve funkcije S obezbedjuje teorema 4.1.4. ; proverimo da li su ispunjeni uslovi za njenu primenu.

Funkcije $\hat{F}(s) = s$ i $\hat{G}(t)$ su strogo rastuće i stoga unutar intervalâ I_1 odnosno I_2 imaju tačakâ rasta. Označimo sa x odnosno y funkcije

$$(6) \quad x(s) = v - \int_{I_1} M(s,t)\, d\hat{G}(t)$$

$$(7) \quad y(t) = v - \int_{I_2} V(s,t)\, ds$$

Integracijom (6) po s na I_1, a (7) po $\hat{G}(t)$ na I_2 dobijamo, koristeći Fubini-evu teoremu

$$\int_{I_1} x(s)\, ds = cv - v\,\hat{G}(c)$$

$$\int_{I_2} y(t)\, d\hat{G}(t) = v\,(1 - \hat{G}(c)) - v\,(1 - c) = cv - v\,\hat{G}(c)$$

Sem toga je $M(c,c) = 0 = V(c,c)$ i

$$\int_{I_1} M(s,c)\, ds = v = y(c)$$

$$\int_{I_2} V(c,t)\, d\hat{G}(t) = v = x(c)$$

pa tražena funkcija S postoji. Sem toga, funkcije K i M (dakle i K i L) imaju isti spektar, što se dokazuje kao u teoremi 4.2.2. $\square$

Na kraju, spomenimo da se problem analogan problemu razmatranom u ovom radu može postaviti i za druge klase igarâ, te da se stoga u ovom pravcu može još raditi.

L I T E R A T U R A

[A 1] Aczél,J.: Lectures on Functional Equations and Their Applications, Academic Press, New York, London 1966.

[A 2] Aljančić,S.: Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Gradjevinska knjiga, Beograd 1968.

[A 3] Ašić,M.: Karakteristična svojstva matricâ igarâ sa potpunom informacijom, magistarski rad, PMF Beograd 1971.

[B 1] Bazaraa,M.S.; Shetty,C.M.: Nonlinear Programming, John Wiley& Sons, New York, 1979.

[B 2] Bellman,R.: Introduction to Matrix Analysis, McGraw--Hill Book Co., New York, Toronto, London 1960.

[B 3] Bellman,R.: Stability Theory of Differential Equations, Dover Publications, Inc. New York, 1953.

[B 4] Burger,E.: Einführung in die Theorie der Spiele, Walter de Gruyter & Co. Berlin 1959.

[C 1] Cherubino,S.: Calcolo delle matrici, Edizioni Cremonese, Roma 1957.

[C 2] Cottle,R.W.: Note on a Fundamental Theorem in Quadratic Programming, J.Soc.Indust.Appl.Math. 12(1964), 663-665

[C 3] Cramér,H.: Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press, Princeton,1946.

[D 1] Dantzig,G.B.: Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton, 1963.

[D 2] Давыдов,Э.Г.: Методы и модели теории антагонистических игр, изд-во Московского ун-та , Москва 1978.

[D 3] Diego,A.: Lecciones de Programación Lineal, Notas de Álgebra y Análisis, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1977.

[D 4] Dorn,W.S.: Self-dual Quadratic Programs, J.SIAM Appl. Math. 9 (1961) 51-54.

[E 1] Ehrenfeucht,A.: An Application of Games to the Completeness Problem for Formalized Theories, Fund.Math.,49 (1961), 129-141.

[E 2] Evans,R.J.: Silverman's Game on Intervals, The American Mathematical Monthly 86 (1979),277-281.

[G 1] Glicksberg,I.; Gross,O.: Notes on Games over the Square, Contr. to the Theory of Games II, ed.by Kuhn, H. W. and Tucker, A.W. Princeton Univ.Press, Princeton 1953 (173-182).

[G 2] Гнеденко,Б.В.: Курс теории вероятностей, пятое издание, "Наука" , Москва 1969.

[H 1] Halmos,P.R.: Measure Theory, Van Nostrand Reinhold Co. New York 1950.

[H 2] Harsanyi,J.C.: Oddness of the Number of Equilibrium Points: A New Proof, Int.J.Game Theory, 2(1973) 235-250.

[H 3] Hewitt,E.; Stromberg,K.: Real and Abstract Analysis, Springer-Verlag, Berlin,Heidelberg, New York 1965.

[I 1] Ivković,Z.: Teorija verovatnoće sa matematičkom statistikom, Gradjevinska knjiga, Beograd 1976.

[K 1] Kakutani,S.: A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem, Duke Mathematical Journal 8 (1941) 457-459.

[K 2] Канторович,Л.В.; Акилов,Г.П.: Функциональный анализ второе издание, "Наука" , Москва 1977.

[K 3] Kaplanski,I.: A Contribution to von Neumann's Theory of Games, Annals of Math. 46 (1945) 474-479.

[K 4] Karamardian,S.: The Nonlinear Complementarity Problem with Applications I & II, J.Opt.Theory Appl.4 (1969) 87-88 i 167-181.

[K 5] Karlin,S.: Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics, Pergamon Press, London 1959.

[K 6] Kreps, V.L.: Bimatrix Games with Unique Equilibrium Points, Int.J.Game Theory 3 (1974) 115-118.

[K 7] Kuhn,H.W.: Extensive Games, Proc.Nat.Acad.Sci.36 (1950)

[K 8] Kurepa,Đ.: Viša algebra (I i II) Zavod za izdavanje udžbenikâ SRS, Beograd 1971.

[L 1] Lankaster,P.: Theory of Matrices, Academic Press, New York, London, 1969.

[L 2] Lemke,C.E. ; Howson,J.T.: Equilibrium Points of Bimatrix Games, J.Soc.Indust. Appl. Math. 12 (1964) 413-423.

[L 3] Łojasiewicz,S.: Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych (Wydanie drugie), PWN, Warszawa 1976.

[L 4] Lovitt,W.V.: Linear Integral Equations, Dover Publications, New York 1950.

[M 1] Малафеев,О.А.: Конечность множества равновесных ситуаций в бескоалиционных играх, Вопросы механики и процессов управления, выпуск 2, Ленинград 1978.

[M 2] Mangasarian,O.L.: Equivalence of the Complementarity Problem to a System of Nonlinear Equations, SIAM J. Appl.Math. 31 (1976) 89-91.

[M 3] Mangasarian,O.L.: Linear Complementarity Problems Solvable by a Single Linear Program, Math.Programming 10 (1976) 263-270.

[M 4] Mangasarian,O.L.: Characterization of Linear Complementarity Problems as Linear Programs, Math.Programming Study 7 (1978) 74-87.

[M 5] Mathematical Programming Study 7 (1978)(Zbornik članakâ posvećenih problemima komplementarnosti).

[M 6] Михлин, С.Г.: Лекции по линейным интегральным уравнениям Физматгиз, Москва 1959.

[M 7] Morgenstern, O.: Spieltheorie und Wirtschaftswissenschaft, R.Oldenbourg, Wien 1963.

[N 1] Nash, J.: Non-cooperative Games, Annals of Math. 54 (1951) 286-295.

[N 2] Натансон, И.П.: Теория функций вещественной переменной, "Наука", Москва 1974.

[N 3] Neumann, J.von : Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, Math.Annalen 100 (1928) 295-320.

[N 4] Neumann, J.von ; Morgenstern, O.: Theory of Games and Economic Behavior, Princeton Univ.Press, Princeton 1944.

[O 1] Ortega, J.M.; Rheinboldt, W.C.: Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, New York 1970.

[O 2] Ostrowski, A.M.: Solution of Equations and Systems of Equations, Acad. Press, New York 1960.

[O 3] Owen, G.: Existence of Equilibrium Pairs in Continuous Games, Int.J.Game Theory 5 (1976) 97-105.

[O 4] Owen, G.: Game Theory, W.B.Saunders Co. Philadelphia 1968.

[P 1] Parthasarathy, T.; Raghavan, T.: Some Topics in Two-Person Games, American Elsevier, New York 1971.

[R 1] Raghavan, T.: On Positive Game Matrices and Their Extensions, J.London Math. Soc. 40 (1965) 467-477.

[R 2] Rédei, L.: Algebra (Vol.I), Pergamon Press, Oxford 1967.

[R 3] Riesz, F.; Nagy, B.Sz.-: Leçons d'analyse fonctionnelle, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.

[R 4] Rosenmüller,D.: On a Generalization of the Lemke - - Howson algorithm to Noncooperative N-person Games, SIAM J. Appl.Math. 21 (1971), 73-79.

[R 5] Rosenmüller,J.: Kooperative Spiele und Märkte, Springer-Verlag, Berlin,Heidelberg, New York 1971.

[S 1] Shapley,L.S.; Snow,R.N.: Basic Solutions of Discrete Games, Contr. to the Theory of Games I, Princeton University Press, Princeton 1950.

[S 2] Skala,H.J.: Nonstandard Utilities and the Foundation of Game Theory, Int.J.Game Theory, 3 (1974) 67-81.

[S 3] Соколов,Н.П.: Введение в теорию многомерных матриц, "Наукова думка" Киев 1972.

[T 1] Thompson,G.L.;Thompson,D.M.: A Bibliography of Game Theory, Annals of Mathematics Study 40, 1959.

[T 2] Thompson,G.L.; Weil,R.L.: Further Relations Between Game Theory and Eigensystems, SIAM Rev.11 (1969) 597-602.

[T 3] Tricomi,F.G.: Integral Equations, Interscience Publ. New York, London 1957.

[U 1] Underwood,R.G.: A Functional Differential Equation Approach to Solving Infinite Games, SIAM J. Control 14 (1976) 251-267.

[V 1] Vajda,S.: An Introduction to Linear Programming and the Theory of Games, Methuen & Co. London 1960.

[W 1] Weil,R.L.: Game Theory and Eigensystems, SIAM Rev. 10 (1968), 360-367.

[W 2] Wilson,P.: Computing Equilibria in N-person Games, SIAM J. Appl. Math. 21 (1971) 80-87.

[Z 1] Zermelo,E.: Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels, Proceedings of the Fifth Intern. Congress of Math.,Cambridge 1913.

R E G I S T A R

B

Borel 3

F

Fermat iv
F-matrica 32
Forma, preneksna
 normalna iv
Fubini 97
Funkcija, degenerisana 82
 - isplate 1
 - sopstvena 80
 - U - 84
Funkcije, spektar 30

H

Helly 22,23,42
Howson 20
Hintikka iv

I

Igra, antagonistička 26
 - beskonačna i, 2
 - bimatrična 5
 - diferencijalna i
 - dva igrača i
 - konačna 2
 - "kvadratna" 39
 - matrična 26
 - na jediničnom kvadratu 2
 - neantagonistička 26
 - n igračâ 1
 - sa nepotpunom informacijom i
Igra, sa potpunom informacijom i
 - u normalnoj formi 1
 - u pozicionoj formi 1
 - zbira nula ii
Igrač i
Igre, norma 38
 - spektar 30
 - vrednost 27
Isplata i
Isplate, matrica 5
 - funkcija 1

K

Kakutani 7
Koalicija ii
Komplementarnosti, problem 7

L

Lemke 20
Logika, matematička iv

M

Matrica, F- 32
- isplate 5
Matrica, prostorna 31
Matrice, norma 38

N

Nash 1
Neumann, von iv
Norma igre 38
Norma matrice 38

O

Operator, integralni 78
Operator, potpuno neprekidni 78

P

Perron 41
Podigra 30,39
Polinom, standardni 54
Problem komplementarnosti 7

R

Raghavan 41
Rang sopstvene vrednosti 78
Rešenje v

S

Skup dopustivih tačaka 8
Spektar igre 30
- funkcije 30
Stieltjes 23
Strategija i
- čista 1
- mešovita 1
- optimalna 27

T

Tačka, dopustiva 8
- ekstremna 14
- ravnotežna 5
Teorema, Fubini-eva 97
- Helly-eva 22,23,42
- Kakutani-eva 7
- Perron-ova 41
Teorija igarâ i
- - kooperativna ii
- - nekooperativna ii
Thompson 46

U

U - funkcija 84

Unikomplementarnost 52

V

Vektor sopstveni 41
Volterra 84
Vrednost igre 27
- Perronova-
sopstvena 41

Vrednost sopstvena 78
- - , rang 78
- svojstvena 41