ПРЕДАВАЊА НА ВЕЛИКОЈ ШКОЛИ

ОСНОВЕ РАЧУНА ВЕРОВАТНОЋЕ

И

ТЕОРИЈА

НАЈМАЊИХ КВАДРАТА

ОД

М. Ј. АНДОНОВИЋА

ПРОФЕСОРА НИЖЕ И ВИШЕ ГЕОДЕЗИЈЕ.

У БЕОГРАДУ

ШТАМПАНО У КРАЉЕВСКО-СРПСКОЈ ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ

1886.

Реч у напред.

Дело ово, које предајем јавности, потекло је из мојих предавања, која поред ниже и више Геодезије на нашој великој школи држим и оно је намењено поглавито мојим слушаоцима, те да им олакша студију овога важнога и за свако егзактно испитивање веома потребнога предмета.

Теорија најмањих квадрата рачун изравњавања учи нас, како ћемо да нађемо *највероватније* или *најбоље вредности* опажане, мерене количине, а из низа повећега броја извршених опажања, — учи нас дакле, како ћемо да се *приближимо* што је могуће више *апсолутној, правој* вредности оне количине, коју хоћемо да сазнамо. Осем тога теорија најмањих квадрата учи нас, како ћемо да дођемо и до сазнања *тачности* са којом смо наша опажања вршили, по она нас учи и томе, како ћемо да одредимо и *грешке*, којима су наша опажања подложна, па најзад и то, *колико* опажања извесне врсте у опште треба при одређивању ма какве количине да извршимо, те да оно стекне за се ову или ону одређену тачност, сигурност.

Било је времена, а то је минула половина овога века, кад се теорија најмањ. квадрата употребљавала готово искључиво у *Астрономији и вишој Геодезији*, што је за тада и основано било, јер у томе добу, у нижој Геодезији, превлађиваху поборници графијскога снимања и ова теорија није тада још ни налазила своју примену и ван оних двеју поменутих наука.

Међу тим, напредовање егзактнога испитивања на
и *тежња, да се наше све колико знање у опште о-личи и представи што је могуће више бројевима.*
раширише применљивост рачуна изравњавања готово на све гране научнога рада и унесоше га и у нижу Геодезију, у којој се такође од неколико деценија све више и више траже резултати мерења у бројевима. Нижа Геодезија својим разноврсним питањима и задацима подесна је и за овај део примењене математике и то тако, да у њој налази теорија најмањ. квадрата још и обилатију применљивост него ма у којој другој науци из огромне заплаве техничких наука у опште.

Следујући савременом правцу који влада у свима егзактним наукама, па и у нижој и вишој Геодезији а и да би свој целокупан и даљи рад поставио на поменуту модерну и по све рационалну основу, ја сам ево покушао, да у крупнијим потезима изложим све оно, што је за темељно разумевање теорије најмањ. квадрата неизоставно потребно, а како се ова теорија оснива на извесним ставовима рачуна вероватноће, то сам се дотакао и њега и то у толико, у колико је преко потребно било. Да се не би учинило, да сам при изради основа рачуна вероватноће био сувише опширан, помињем, да се на нашој великој школи није досада рачун вероватноће никако ни предавао, и по томе је, нешто мало дубље улажење и у овај део примењене математике са свим основано и корисно.

Изложивши теорију најмањ. квадрата, ја сам се на саму теорију и ограничио и намерно сам практичну примену њезину оставио, те да јој у својим предавањима а према потреби нужну пажњу поклањам; но осем овога у оваквоме раду руководили су ме и ови разлози: 1; да не би дело задацима из праксе сувише повећао. 2; да не би једностранијом применом ове теорије на геодетску праксу, општију употребљивост овога дела можда у питање довео и најзад 3; да не би дело од своје прегледности сувишним повећавањем изгубило.

При изради овога дела користио сам се осем оне г.г. аутора, које сам у делу већ поменуо и делима ових: *Helmert*, *Meyer*, *Sawitch*, *Weich*, *Büdiger*, *Cournot*, *Brünnow*, *Gerling*, но и предавањима мога бившег професора г. Бауернфајнда (*Bauernfeind*) директора и професора ниже и више Геодезије на минхенској политехници.

Дајући ово дело омладини ја држим, да ће она у њему наћи једно сретство више за своје напредовање на путу егзактнога испитивања и надам се, да ће се њиме осем мојих техничких слушалаца, користити нарочито и слушаоци природно математичкога одсека, као и слушаоци војне академије вишега курса; а потпуно свесан тога, да ћу на овоме делу још много што шта даљим радом имати да усавршим и на боље изведем, ја га *опет* скромно препоручујем речима славнога Lagrange-а: *писац каквога дела, које је намењено за наставу не треба да жели да присвоји себи назив проналазача; оно за чим он треба да тежи то је: да постигне што боље јединство у схватању целине; да нађе најподеснији ред при излагању појединих делова, да изабере најпростије па и најјасније начине за излагање самога предмета. Срећан је онај, који је био у стању, да стекне бар неке од ових особина.*

10 Маја 1886.
Београд.

М. Ј. Андоновић.

ГДЕ ЈЕ ШТА.

УВОД.

НАЈКРАЋЕ ИСТОРИЈСКЕ НАПОМЕНЕ О РАЧУНУ ВЕРОВАТНОЋЕ И ТЕОРИЈИ НАЈМАЊИХ КВАДРАТА.

ПРВИ ДЕО.

Теориска вероватноћа или вероватноћа à priori.

I.

ПОЈАМ О [illegible] ВЕРОВАТНОЋИ. КОМБИНАЦИЈЕ НЕПОБИТНА ОСНОВА РАЧУНА ВЕРОВАТНОЋЕ

II.

О КОМБИНАЦИЈАМА БЕЗ ПОНАВЉАЊА.

III.

О КОМБИНАЦИЈАМА СА ПОНАВЉАЊЕМ.

IV

БИНОМНИ ОБРАЗАЦ.

НАЈПОТРЕБНИЈИ СТАВОВИ ИЗ РАЧУНА ВЕРОВАТНОЋЕ.

V.

ПРОСТА ВЕРОВАТНОЋА (АПСОЛУТНА И РЕЛАТИВНА).

СЛОЖЕНА ВЕРОВАТНОЋА ЗА ДОГАЂАЈЕ, КОЈИ СЕ УЗАЈАМНО ИСКЉУЧУЈУ И ДОГАЂАЈЕ КОЈИ СЕ НЕ ИСКЉУЧУЈУ.

СЛОЖЕНА ВЕРОВАТНОЋА ПОНОВЉЕНИХ ДОГАЂАЈА, ПРИ ПОНАВЉАЊУ ОПАЖАЊА.

ДРУГИ ДЕО.

ФИЗИЧКА ВЕРОВАТНОЋА ИЛИ ВЕРОВАТНОЋА à posteriori

I.

ВЕРОВАТНОЋА ПРОСТОГА ДОГАЂАЈА à posteriori А НА ОСНОВУ ОПРЕДЕЉЕНОГА БРОЈА ПРЕТПОСТАВАКА.

II.

ВЕРОВАТНОЋА à posteriori СЛОЖЕНОГА ДОГАЂАЈА А НА ОСНОВУ ∞ ВЕЛИКОГ БРОЈА ПРЕТПОСТАВАКА

ТРЕЋИ ДЕО.

ОСНИВАЊЕ ТЕОРИЈЕ НАЈМАЊИХ КВАДРАТА.

I.

II.

ЧЕТВРТИ ДЕО.

ПРИМЕНА ТЕОРИЈЕ НАЈМАЊИХ КВАДРАТА

I.

ИЗРАВЊАВАЊА НЕПОСРЕДНИХ ОПАЖАЊА.

II.

ИЗРАВЊАВАЊЕ ПОСРЕДНИХ ОПАЖАЊА.

III.

ИЗРАВЊАВАЊЕ УСЛОВНИХ ОПАЖАЊА.

ЧЕТВРТИ ДЕО.

Примена теорије најмањих квадрата.

I.

Изравњавања непосредних опажања.

II.

Изравњавање посредних опажања.

III.

Изравњавање условних опажања.

УВОД

О догађају и вероватноћи у опште.

»Tous ces efforts dans la recherche de la vérité, tendent à le rapprocher sans cesse de l'intelligence que nous venons de concevoir, mais dont il restera toujours infiniment éioigné. Cette tendance, propre à l'espèce humaine, est ce qui la rend supérieure aux animaux; et ses progrès en ce genre, distinguent les nations et les siècles, et font leur véritable gloire.»

Laplace, Essai philosophique sur les Probabilités p. 4.

«Да има на свету таквога ума, који би познавао свеколике силе што дејствују у природи у неком тренутку времена, који би поред тога познавао и свеколике узајамне положаје и односе појединих створова у њој и који би најзад био још и у стању, — да све што год познаје (да све количине) и бројно представи, онда би тај ум једним и истим аналитичким изразом обухватио, одлично, како кретања највећих небеских тела, тако и кретања најпростијега и најлакшега прашнога атома. Таквоме уму не би било ништа на овоме свету непознато и неизвесно; — пред очима његовим била би како сва прошлост, тако и сва будућност разастрта, била би са свим јасна и знана. У астрономији, којој је човечји ум толику меру прецизности, тачности умео да стече и осигура, приближио се он у неколико таквоме уму».[1])

Овим речима од прилике оснива славни писац дела «Mécanique céleste» моћ и силну снагу математичке анализе, показује високи ступањ усавршаности њене и наговешћује, шта би нам требало, па да дођемо до таквога ума, до таквога ступња интелигентности, те да се све, што год се у свету збива, у свако доба разуме; да се све може да објасни; једном речи и да се све што у свету бива потпуно и зна.

Горња изрека Лапласова односи се истина поглавито на сва кретања и стања тела анорганске природе, али та изрека може са свим разложно, да се однесе и на сва тела органска, па чак и на највише и најсавршеније створове овога света, она вреди према томе дакле и за она тела у природи, која могу и умеју да мисле; све, што год је у овој големој природи почевши од маленога атома, који за наше очи ишчезава, па до најогромнијих како блиских тако и далеких небеских тела у васколикој васиони, *све што год се у најопширнијем смислу телом зове, подлежи по својој суштини горњој изреци — јер се све креће па и руководи дејством сила.*

Свака помисао, сваки покрет, свако дело, резултат је или боље да речемо, производ је било каквих унутрашњих, било каквих спољних утицаја (утицаја) или подстака и према томе, све што на овоме свету бива, схваћено у горњем смислу, могло би се рачуном тачно одредити, — *наше знање о свему, било би дакле без приговора и несумњиво*; оно би било потпуно извесно, јер основано на горњем схватању ствари, имало би оно све особине, које би биле кадре, да нам улију ону убед-

[1]) Laplace, Essai philosopuique sur les Probabilites.

љивост, коју ми с погледом на наш здрав разум у опште, још желети можемо.

Али наша знања нису сва основана на овако прецизном схватању ствари, она немају дакле ону потребну убедљивост, коју би разложно могли да тражимо; ми и ако знамо ово или оно, ми то не знамо поуздано, извесно, већ *мислимо, држимо, верујемо* да је то тако и то разуме се један са мање а други са више разлога или основа; — у таквим су приликама дакле наша знања тек само *веровања*, и то више или мање основана; она су тада само до неке мере извесна, т. ј. она имају за се само неки *ступањ извесности* (degré de certitude).

Колики ће ступањ извесности имати за се ово или оно наше држање, мишљење или веровање, то зависи понајпре од тога, у којој мери познајемо ми узроке, који су утицали при некоме догађају, као и прилике и услове у којима се догађај дешавао; али то зависи у велико и од ступња наше образованости, наше увиђавности па и наше судиње (моћи суђења), а кад је тако, онда је по све појамно, да једна и иста ствар може дакле, за разне личности и у разним приликама имати и разне ступње извесности.

Све што год се у овоме свету догађа или краће да речемо, сваки *догађај* (l'évènement, Ereigniss) у опште има свога узрока.

На основу ове аксиоме, коју Французи називљу *«principe de la raison suffisante»* поједини догађај је дакле производ или дејство ма каквога узрока.

Исти узрок производи у једнаким приликама и исти догађај.

Прост узрок производи и прост догађај. Ако се исти узроци понављају или комбинију међу собом, онда је са свим природно и увиђавно, да ће они тада произвести и сложене или комбиноване догађаје; — сложени су догађаји дакле свакад неминовна последица сложених узрока.

Догађаји се недогађају никад случајно. Случаја у правом смислу ове речи и нема. Ако се каткад по штогод и деси утицајем таквих узрока, који су нам посве непознати, или чију узајамну везу па и дејство ни смо у стању у први мах потпуно да појмимо, те да би могли овај или онај догађај у напред и да одредимо, па да га у напред као неминовну последицу и ишчекујемо, онда је он за нас тако необјашњив и загонетан, као кад би заиста зависио од случаја, и ми онда кажемо, да се нешто *случајно* догодило.

Примера ради да наведемо овај прости, свакоме познати појав, који може сваки и сам да произведе.

Кад бацимо какву коцку на сто и то са свим како нам је воља, онда положај, који она при томе заузима или боље да речемо, страна, која је горе окренута, зависи једино од потиска и снаге, којом смо ми коцку на сто бацили. Кад би ми сад могли да израчунамо тај потисак и то разуме се с погледом на само падање коцке на сто, и кад би могли тачно да одмеримо покрет наше руке, па да ни више ни мање, но што треба руком замахнемо, онда би очевидно могли врло лако да бацимо коцку сваки пут тако, да по нашој вољи испадне ова или она страна горе окренута.

Али ми не можемо ни једно ни друго. Механичке су прилике при поменутоме бацању веома компликоване и посве заплетене и ми не можемо тако лако да их пратимо и посматрамо, а поред тога ни потисак па ни правац у коме коцку бацамо, не можемо у напред да одмеримо нити довољно тачно, нити онако, како би баш желели. Ми сваки пут дакле бацамо коцку све другом и другом снагом, а најмањи прираштај снаге, који не

можемо како ваља ни да осетимо, може у велико да измени стање целокупнога кретања и да произведе са свим други, посве неочекивани резултат.

У овоме примеру ми смо сами узрок, што коцка у опште овако или онако на сто пада, или другим речима, ми сами овде производимо догађај (да ова или она страна испадне горе окренута), али, не могући по нашој вољи да је бацимо и руководимо тако, да неизоставно испадне горе окренута увек она страна, коју смо у напред означили, и коју ми желимо, ми онда кажемо, да је ова или она страна *случајно* испала горе окренута. Из овога сад поменутога јасно је и то, за што се у обичном животу појам о догађају идентификује са појмом о случају или боље, за што се догађај и случај сматрају за синониме изразе.

Анализа догађаја и појам о рачуну вероватноће.

Према разним ступњима извесности може поједини догађај у опште да нам изгледа, да нам се чини као: *известан*, *вероватан*, *сумњив*, *невероватан* или најзад *немогућан*.

Несумњиви критеријум за дефиницију ових разних ступања извесности можемо ми очевидно да добијемо тек само на основу тачне анализе самих *узрока*, *разлога* или *основа*. Но и незнајући потанко природу тих појединих узрока, ми можемо без сумње а без икаквог приговора све узроке у опште у напред да поделимо у две врсте и то у узроке такве, који самим својим постојањем неки догађај као неминовну последицу своју у изглед стављају, и узроке, који опет самим својим постојањем тај исти догађај искључују или га немогућним чине.

Они први зову се догађају *повољни*, а ови други догађају *неповољни узроци*.

На основу овога јасно је, да можемо да кажемо:

Догађај је *известан* (certain, gewiss) за нас, ако према нашем знању нема никаквог разлога, основа или боље узрока, који би био противан томе догађају, т. ј. који би тај догађај немогућним чинио; идентично са стањем, у коме су сви узроци догађају повољни.

Догађај је *вероватан* (probable, wahrscheinlich) ако према нашем знању има више разлога да се он деси и да се ишчекује, него ли противних, т. ј. догађај је вероватан, ако има више повољних него ли неповољних узрока.

Догађај је *сумњив* (douteux, zweifelhaft) ако према нашем знању има колико повољних, толико и неповољних узрока.

Догађај је *невероватан* (improbable, unwahrscheinlich) ако према нашем знању има више неповољних него повољних узрока.

Најзад је догађај *немогућан* (impossible, unmöglich) ако према нашем знању нема ни једнога основа, који би му био повољан; идентично са стањем, у коме су сви узроци догађају неповољни.

Од потпуне извесности каквога догађаја, па до његове немогућности, има небројено много ступања извесности, који сви представљају мање или веће *вероватноће* истога догађаја. Вероватноћа ће бити већа, што год је број повољних основа већи него неповољних; она ће опет бити мања, што год је број повољних основа мањи него неповољних. Кад већ сваки догађај зависи од узрока (основа), и кад са њима као што видимо стоји у чврстој вези и ступањ извесности, дакле оно, што ми у обичном животу и зовемо вероватноћом, то се из свега овога разуме, да ако су нам познати сви основи, сви узроци, који су неком догађају повољни, а тако исто, ако су нам познати и сви они, који су истоме догађају неповољни, то онда можемо лако да одредимо вероватноћу тога догађаја, на тај прост начин, да повољне и неповољне основе избројимо и поредимо. Вероватноћа или поједини ступањ извесности каквога догађаја, може дакле да се мери и као мерљива количина, она може да се представља и изражава бројевима и онај део математичких наука, који се бави одређивањем вероватноћа за разне догађаје, зове се *рачун вероватноће* (Calcul des Probabilites; Geometrie du hasard или Theorie des Chances; Wahrscheinlichkeitsrechnung).

Приближност у рачуну вероватноће и његова апсолутна важност.

Да би могли одредити вероватноћу каквога догађаја, треба као што је већ поменуто, да знамо како све његове повољне тако и све његове неповољне узроке.

Али у многим питањима је број тих узрока тако велики и они су такве особите природе, да их ми неможемо све да сазнамо и означимо *à priori*, и према томе, на први поглед изгледа, да ми баш у оним приликама, у којима није лако наћи вероватноћу, нисмо у стању ни да је одредимо.

Али то не треба тако схватити.

Ни једна грана математичких наука, у којој је математика примењена, па ни она, чији су резултати у високој мери тачни, не може, а да се у неким приликама не послужи искуством или покушајима и да се не задовољи и само приближним вредностима појединих резултата, које баш тим покушајима и добија.

Исто је тако и са рачуном вероватноће.

Прелазећи са теоријског гледишта на примену, ваља и при рачуну вероватноће да се прођемо наше и ако узвишене жеље, да дођемо до *апсолутне истине* (la verité absolue), но морамо да се задовољимо и овде тек, неким делом њеним, оним што је *приближна истина*

Догађај је *известан* (certain, gewiss) за нас, ако према нашем знању нема никаквог разлога, основа или боље узрока, који би био противан томе догађају, т. ј. који би тај догађај немогућним чинио; идентично са стањем, у коме су сви узроци догађају повољни.

Догађај је *вероватан* (probable, wahrscheinlich) ако према нашем знању има више разлога да се он деси и да се ишчекује, него ли противних, т. ј. догађај је вероватан, ако има више повољних него ли неповољних узрока.

Догађај је *сумњив* (douteux, zweifelhaft) ако према нашем знању има колико повољних, толико и неповољних узрока.

Догађај је *невероватан* (improbable, unwahrscheinlich) ако према нашем знању има више неповољних него повољних узрока.

Најзад је догађај *немогућан* (impossible, unmöglich) ако према нашем знању нема ни једнога основа, који би му био повољан; идентично са стањем, у коме су сви узроци догађају неповољни.

Од потпуне извесности каквога догађаја, па до његове немогућности, има небројено много ступања извесности, који сви представљају мање или веће *вероватноће* истога догађаја. Вероватноћа ће бити већа, што год је број повољних основа већи него неповољних; она ће опет бити мања, што год је број повољних основа мањи него неповољних. Кад већ сваки догађај зависи од узрока (основа), и кад са њима као што видимо стоји у чврстој вези и ступањ извесности, дакле оно, што ми у обичном животу и зовемо вероватноћом, то се из свега овога разуме, да ако су нам познати сви основи, сви узроци, који су неком догађају повољни, а тако исто, ако су нам познати и сви они, који су истоме догађају неповољни, то онда можемо лако да одредимо вероватно-

ћу тога догађаја, на тај прост начин, да повољне и неповољне основе избројимо и поредимо. Вероватноћа или поједини ступањ извесности каквога догађаја, може дакле да се мери и као мерљива количина, она може да се представља и изражава бројевима и онај део математичких наука, који се бави одређивањем вероватноћа за разне догађаје, зове се *рачун вероватноће* (Calcul des Probabilites; Geometrie du hasard или Theorie des Chances; Wahrscheinlichkeitsrechnung).

Приближност у рачуну вероватноће и његова апсолутна важност.

Да би могли одредити вероватноћу каквога догађаја, треба као што је већ поменуто, да знамо како све његове повољне тако и све његове неповољне узроке.

Али у многим питањима је број тих узрока тако велики и они су такве особите природе, да их ми неможемо све да сазнамо и означимо *à priori*, и према томе, на први поглед изгледа, да ми баш у оним приликама, у којима није лако наћи вероватноћу, нисмо у стању ни да је одредимо.

Али то не треба тако схватити.

Ни једна грана математичких наука, у којој је математика примењена, па ни она, чији су резултати у високој мери тачни, не може, а да се у неким приликама не послужи искуством или покушајима и да се не задовољи и само приближним вредностима појединих резултата, које баш тим покушајима и добија.

Исто је тако и са рачуном вероватноће.

Прелазећи са теоријског гледишта на примену, ваља и при рачуну вероватноће да се прођемо наше и ако узвишене жеље, да дођемо до *апсолутне истине* (la verité absolue), но морамо да се задовољимо и овде тек, неким делом њеним, оним што је *приближна истина* што је фактичком стању ствари најближе — дакле оним, што је *највероватније*.

Али и ако рачуном вероватноће не можемо да дођемо до апсолутне истине, опет изучавањем овога дела примењене математике, ми вежбамо свој ум, оружамо га проницавањем и јачамо у велико своју моћ суђења; студијом рачуна вероватноће учимо се да анализмемо свеколике узроке каквоме догађају, учимо се да их комбинујемо па и да важност и утицај свакога од њих сводимо на његову праву меру. Помоћу резултата, стечених у овоме делу примењене математике, ми се осигуравамо против заблуда, које су се затекле било услед погрешних каквих одлука, било услед непотпуних и нетачних набрајања, анализања, свију дотичних прилика, у којима су се поједини појави у природи дешавали. Најзад примењујући рачун вероватноће на многобројна и разна питања и у обичном животу, ми утврђујемо и богатимо свој практички поглед и присвајамо себи све више и више ону високу коректност (исправност) у мишљењу и ону мудру строгост при оценама, коју смо навикнути да налазимо код славних научника и философа минулих времена, који су се готово сви претопили били у изучавање природе и њезиних закона. Ово и сам Лаплас потврђује признајући у своме делу: Essai Philosophique sur les Probabilités (Application du Calcul des Probabilités à la Philosophie naturelle), да је своје најлепше и највеће проналаске у астрономији учинио, тек применом рачуна вероватноће, на сматрања и кретање небеских тела, на сматрања егзактнога стања ствари.

Најкраће историјске напомене о рачуну вероватноће и теорији најмањих квадрата.

Паскал и Ферма оснаваоци рачуна вероватноће.

Паскал (Blaise Pascal) је први почео да се бави теоријом о вероватноћи и то тек кад му друг и играч *Ферма* (Chevalier de Méré Fermat) 1654. године даде да реши ову проблему: «Од два играча сваки је добио неки број поена; они хоће да престану играти не чекајући крај игре, пита се: како ће да се подели улог међу њима.» — Паскал је решио самим разложитим размишљањем ову проблему, па и резултат саопштио Фермату.

Решивши ту проблему Паскал виде у исти мах, да је он тим решењем засновао једну са свим нову науку, али не сањаше ни из далека, да ће будућност те науке бити овако сјајна и овако велика. Овај славан научник писаше писмо још 1656. године француској академији за науке, у коме између осталога вели: «et sic matheseos demonstrationes cum aleae incertitudine jungendo, et quae contraria videntur conciliando, ab utraque nominationem suam accipiens stupendum hunc titulum jure sibi arrogat: «aleae geometria»[1]) — и тиме управо заснова примену математике на теорију вероватноће.

С тога изложив основе те науке, он јој и даде напред поменуто име: «aleae geometria» или *геометрија коцке* (случаја). Сличним питањима наведен је Паскал и на науку о комбинацијама, коју је он на сваки начин још у години 1653. већ и довршио био, али која је тек после смрти његове штампана у делу: «Traité du triangle arithmétique». Paris 1665.

---

[1]) Ово значи: «и тако доводећи у свезу математичке доказе са варљивом коцком, и спајајући ствари које изгледају посве супротне, па називајући се и по једноме и по другоме чудан назив с правом себи присваја: «*Геометрија коцке*

Међу тим је и Ферма[1]) исту горњу проблему био решио, ослањајући се на теорију о комбинацијама. Он је при томе, овако резоновао: «Кад два играча играју на 3 поена, то у опште при томе могу бити 8 разних варајација и то: или ће добити један играч сва три поена, или ће добити само два а изгубити трећи, или ће добити први и трећи, а изгубити други поен и т. д. — Изгледи дакле за добит између обадва играча могу да се представе (изразе) бројем варијација писмена a и b и то варијација треће класе, јер ако означимо са a добит првога, а са b добит другога играча онда имамо:

1-ву варијацију	:	a.	a.	a.
2-гу «	:	a.	a.	b.
3-ћу «	:	a.	b.	a.
4-ту «	:	a.	b.	b.
5-ту «	:	b.	a.	a.
6-ту «	:	b.	a.	b.
7-му «	:	b.	b.	a.
8-му «	:	b.	b.	b.

Свега могу бити дакле осам варијација или осам случајева, ни више ни мање.

Сад ако игра тако стоји, да је први играч добио већ 2 поена, а други није добио ни један, па хоће да престану играти, не чекајући краја игре, то су очевидно првом играчу као што се из горњих варијација види, од оних 8 разних случајева 7 случајева повољни, јер у 7 случајева налази се a бар по једанпут и у свима тима случајевима, може први играч да добије и онај заостали трећи поен, а другом играчу само је један једини случај повољан, те да може сву игру добити и то само онај заостали 8-ми случај: b. b. b, у коме би други играч добијо на једанпут сва три поена.

При растанку дакле, према овоме напред реченоме има да узме први играч $\frac{7}{8}$, а други само $\frac{1}{8}$ од улога.»

[1]) Suter, Geschichte der mathem. Wissenschaften. p. 346.

Из овога досад укратко поменутога види се јасно, да је примена математике на законе вероватноће непобитно један од најувиђавнијих доказа за то, како је математика, најапстрактнија међу свима наукама, примењива и у онима сферама нашега живота, за које нам се привидно и на први поглед чини, да у њима нема ничега, што би и издалека на какав закон или ма какву уређену поступност, узрочну везу наличило, — за које нам се дакле чини, да су за строге математичке норме веома мало или ни мало прилагодне. Ми ћемо се о коректности овога тврђења доцније још боље уверити.

Први напретци и стање рачуна вероватноће до краја XVI. века.

Науку о комбинацијама, која као што смо у пређашњем решењу видели, стоји у тако чврстој вези са рачуном вероватноће, после Паскала нарочито су обрађивали и унапредили: *Лајбниц* (Leibnitz) са његовим делима: «De complexionibus Lipsiae 1666» и «Ars Combinatoria Lipsiae 1668», *Валис* (John Wallis) и *Јаков Бернуљи* (Jacob Bernoulli), о коме ћемо да поменемо само нешто.

Бернуљи је написао о вероватноћи епохално дело:
«Ars conjectandi, opus posthumum. Accedit Tractatus de
seriebus infinitis et epistola de ludo pilae reticularis. Ba-
sileae», које је 1713. штампано, и то тек на 8 година
после смрти његове. У овоме се делу као најважније
налази поменуто и ово правило:

«Ако је:

$\frac{b}{a}$ вероватноћа, да ће се какав догађа десити, а

$\frac{c}{a}$ вероватноћа, да се он неће десити и то

при једном покушају, и ако је осем тога:

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 1;$$

то онда представља збир свију чланова развијенога бинома:

$$\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)^n$$

и то узев тај збир од првога члана, па до члана у коме се чиниоци

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{n-m}$$

налазе, вероватноћу, да ће се исти догађај у n покушаја m пута десити». Дело «Ars conjectandi» садржи у главноме готово све оно, што и данас наука о комбинацијама, разуме се у њеним главним потезима обухвата.

Али и *Хајенс* (Huyghens) се готово у исто доба кад и Паскал и Ферма, бавио теоријом о вероватноћи.

Он је у своме делу: «De ratiociniis in ludo aleae», које је 1657. штампано, први у систему довео и аналитички формулисао основе науке о вероватноћи. У том његовом делу најважније је ово правило: «Ако какав играч има:

p изгледа да добије суму a,
q « « « « b,

то онда има он права на суму:

$$\frac{pa + qb}{p + q};$$

али, ако тај исти играч има за обадве суме једнаке изгледе, онда је:

$$p = q$$

и он тада има права на суму:

$$\frac{pa + pb}{p + p} = \frac{p\,(a + b)}{2\,p} \text{ или:}$$

$$\frac{1}{2}\left(a + b\right).»$$

Из досадашњега види се, да су сви ови до сад поменути научници, бавећи се теоријом о вероватноћи, имали сви поглавито пред очима то, како ће да одговоре само на питања и спекулације чисто *алеатоерне природе.*

Први који је почео да размишља о употреби рачуна вероватноће и у економским наукама, беше *Јован Вит* (Jean de Witt) ученик Декартов. Он је 1671. изложио начине, како да се одреде улози за ренте досмртне (за целога живота и то по изгледима за живот, основаним на једној таблици о морталитету (о смртности) становништва. Не зна се на сигурно, којом се таблицом при томе раду служио, јер је најстарија позната таблица о морталитету она, коју је Халеј (Halley) 1693. у «Transactions philosophiques» објавио, дакле много доцније од списа Витовог.

Осем ових писаца при крају XVII-ог века, имамо да поменемо као чувене и *Данила* и *Николу Бернуље* (рођаци J. Бернуља) и то првога са његовог новог и оригиналног појимања хазардних игара, а нарочито са употребе назива «*морално ишчекивање* (emolumentum),» а другога са познате проблеме, која је чувена под именом: «*Петроградске проблеме*». Али понајвише су унапредили теорију о вероватноћи француски математичари као: *Моавр* (Abr. de Moivre) и *Монмор* (Pierre Rémond de Montmort) и то применом редова на решавање разних проблема из рачуна вероватноће. Моавр је написао о томе дела: «De mensura sortis 1711». — затим: «The doctrine of chances» 1718. и најзад: «Duration of play 1730». Монмор је написао дело: «Essai d'analyse sur les jeux de hazard 1708», у коме он третира (расправља) код Француза веома омиљену игру «Treize».

Даланбер-ов напад на рачун вероватноће.

Велики проналасци у природним наукама, који карактеришу крај XVII-ога и почетак XVIII-ога века, куда иде и почетак дела «Mécanique céleste», но и напредак у оптици, проналазак инфинитезималног (диференцијалног рачуна и други веома важни проналасци, учинише, те се занеко време нови рачун о вероватноћи занемари.

Поред тога изиђе *Даланбер* (d'Alembert) у својим списима «Opuscules mathematiques, Tom II. 1761. Paris» — као противник науке о вероватноћи и поче да критикује до тога времена ни од кога не оспораване основе те нове теорије.

Он је своју критику «Croix ou Pile» окомио против већ напред поменуте петроградске проблеме, коју је Никола Бернуљи поставио и решио, и која у главноме овако гласи:

«Два лица $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ играју се бацања новца. Лице $\boldsymbol{A}$ баца у вис новац; ако глава (avers) при првом бацању испадне горе окренута, онда лице $\boldsymbol{B}$ даје лицу $\boldsymbol{A}$, 1 талир; ако глава и при другом бацању испадне опет горе окренута, онда лице $\boldsymbol{A}$ добија 2 талира; ако и при трећем бацању испадне опет глава горе окренута, онда добија лице $\boldsymbol{A}$, 4 талира; ако и при четвртом бацању испадне глава горе, онда добија лице $\boldsymbol{A}$, 8 талира и т. д. — лице $\boldsymbol{A}$ добија дакле по реду:

1, 2, 4, 8, 16, ... и т. д. талира».

По решењу Данила Бернуља, *математичко ишчекивање* било би представљено редом:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\frac{8}{2^4}+\frac{16}{2^5}+\ldots\ldots \text{ до } \infty,$$

или:

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots\ldots=\infty.$$

Према овоме би лице $\boldsymbol{A}$ морало дакле лицу $\boldsymbol{B}$ *без краја велику суму* дати, те да ово пристане да игра с њиме на горњи начин. Због парадокса овога (јер нико не може да положи без краја велику суму) послужио се Бернуљи називом па и појмом о «моралном ишчекивању».

Даланбер је нападао Бернуљево оснивање горњега математичког ишчекивања и тврдио, да вероватноћа, да се једним новцем у једном бацању баци глава (т. ј. да испадне глава горе окренута), није свакад $=\frac{1}{2}$, већ да је она све то мања, што год је чешће при бацању једно за другим глава горе испадала.

Осем тога он беше противан и другом једном правилу из рачуна вероватноће, за које вели:

«Вероватноћа $\frac{1}{m}$ каквога играча, да он добије p талира, има се према вероватноћи $\frac{1}{n}$ другога играча, као np талира према mp талира, дакле

$$\frac{1}{m}:\frac{1}{n}=np:mp \text{ или } \frac{1}{m}\cdot mp=\frac{1}{n}\cdot np$$

талира и с овим се слаже. Али не слаже се с тим, да је ишчекивање играча, који има вероватноћу $\frac{1}{m}$ да добије mp талира, равно ишчекивању другога играча, који има вероватноћу $\frac{1}{n}$ да добије np талира. Па зато Даланбер вели: «Ишчекивање је онога играча веће, који има већу вероватноћу, па и ако је сума, коју он ишчекује да добије, мања. Према томе не треба никако мислити, да није ишчекивање каквога играча, чија је вероватноћа $=\frac{1}{2}$ да добије само 1000 талира, *боља* од ишчекивања другога играча, чија је вероватноћа само $\frac{1}{2000}$ да добије 1 000 000 талира».

Поред све високе убедљивости Даланберових разлога, који обелодањују оштрину критичкога духа његова, он нам није оставио ништа, што би ову теорију боље разјаснило и унапредило, јер и сам се о њој изражава овим речима: «Vous me demanderez peut-être quels sont les principes qu'il faut, selon moi substituer à ceux dont je révoque en doute l'exactitude? Je n'en sais rien, et je suis meme trés porté à croire, que la matiére dont il s'agit, ne peut être soumise au moins à plusieurs égards, à un calcul exact et précis, également net dans ses principes et dans ses résultats»[1])».

Преображај рачуна вероватноће *Euler*-ом и *Condorcet*-ом.

Све до половине XVIII-ога века или тачније, до 1760. године, не беше се рачун вероватноће издигао из ниске сфере хазардних игара. Тек *Euler* (Leonh. Euler), применом тога рачуна на осигурања живота и рената, даде му угледније место у политичкој аритметици.

Он је списима својим: «Recherches generales sur la mortalité et la multiplication du genre humain,» — затим «Sur les rentes viagéres». 1760. и најзад «Sur la Probabilité des sequences dans la lotterie Genoise 1765.» засновао са свим други правац, који је на скоро рачуну вероватноће стекао ону високу важност, коју према садржини својој и треба да има.

Осем те услуге, коју је *Euler* учинио рачуну вероватноће, те тиме везао своје и онако славно име и са

---

[1]) «Ви би ме питали можда, па које принципе треба узети место ових, којима ја основаност одричем? Ја их не знам и склон сам да верујем, да предмет о коме је реч, не може ни да се подвргне из више узрока егзактном и прецизном рачуну, који би исто тако (подједнако) био основан у својим принципима као и у својим резултатима.«

овим делом примењене математике, он је у своме спису «Solutio quarandam quaestionum difficiliorum in calculo probabilium» opus anal. Tom III. 1785. одбио непријатељске нападе Даланберове на теорију о рачуну вероватноће, где између осталога вели: «Neque me deterrent objectiones J. [illegible] calculum suspectum reddere est conatus»[1].)

У овом бољем периоду, рачун вероватноће све је више и више примењиван на важнија питања и у обичном животу. Ђенијални *Кондорсе* (Marquis de Condorcet) који је тако темељито схватао многа друштвена и политичка питања јавнога живота, заузимао је и у примени рачуна вероватноће одлично место и својим класичним делима: «Eloge et Pensées de Pascal 1776», за тим: «Ess... sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix« Paris 1784, али нарочито делом: «Esquisse d'un tableau historique des progrés de l'esprit humain 1795». — осигурао је одржање правца, који је Euler засновао, те тиме осигурао овако обилату примењивост и употребљивост рачуна вероватноће, који је данас обухватио све гране науке и који служи нарочито егзактним наукама, као кажипут при истраживању и налажењу природних закона и непобитних истина.

Свестран напредак рачуна вероватноће, појам о теорији најмањих квадрата.

Почетком XVIII-ога века, дакле после класичних дела Euler-ових и Кондорсетових, почеше и шири научнички кругови, да се интересују за рачун вероватноће и преставши да га сматрају само као оштроумну и испреплетану игру чисто математичких истраживања, по-

---

[1]) «нити ме одвраћају приговори светлога Даланбера, који је покушавао да представи овај рачун као сумњив«

чеше да схватају, почеше да увиђају превелику важност његову.

У ово доба стече рачун вероватноће доста и много ревноснијих пријатеља, који удвострученим снагама почеше да раде на усавршавању његовом и то поглавито с погледом на његову практичку примену у обичном животу и на испитивања егзактних наука, те корак по корак с њиме заједно напредујући, узвисише и његов и свој углед у научноме свету.

Обрађивање рачуна вероватноће у овоме времену може се рећи, било је у главноме у два различна правца и то:

Једни су научници обрађивали и усавршавали теорије за изналажење вероватноћа у оним приликама, кад су познати сви у опште могућни узроци, који какав догађај производе. Ова се врста вероватноћа примењује у статистици и политичкој рачуници у којима се, с погледом на познате податке о морталитету (смртности) становништва, на растење капитала, на несрећне случајеве у животу и т. д. — оснивају израчунавања: народног намножавања, пореске моћи државне, осигурања рената за целога живота, осигурања живота, осигурања имања покретних и непокретних, лутријских зајмова и томе слично.

Овим делом теорије рачуна вероватноће нарочито су се бавили: Моавр, Халеј (Halley), Кондорсе, Лаплас, Кетле (Quetelet), Цилмер (Zillmer), Лакроа (Lacroix), Депарсије (Deparcieux), Литров (Littrow) и други.

Други се опет научници бавише обрађивањем и усавршавањем онога дела теорије о рачуну вероватноће, који учи, како се вероватноћа налази у оним приликама кад су непознати у опште сви могућни узроци, који какав догађај производе. Овај део теорије о вероватноћи учи нас, како се изналази највероватнија вредност какве му драго непознате количине у астрономији, геодезији и природним наукама и то нарочито с погледом на неизбежне грешке, којима су сва наша сматрања (опажања) подложна, и о којима ћемо доцније говорити. Ова су рачунања позната под именом: *Теорије о најмањим квадратима* (Theorie des moindres carrés; Theorie der kleinsten Quadrate), или друкчије: *Изравњавање грешака сматрања* или *свођење* (редуковање) *свију грешака сматрања на најмању меру* (minimum).

Овим делом теорије о вероватноћи бавили су се: *Лежандр* (Legendre), *Гаус* (Gauss), *Лагранж* (Lagrange), *Данило Бернуљи*, *Лакаљ* (Lacaille), *Деламбр* (Delambre), *Био* (Biots); за тим *Бесел* (Bessel), *Енке* (Enke), *Шумахер* (Schumacher), *Ханзен* (Hansen), *Хаген* (Hagen) и други.

Далеко би нас одвело, кад би хтели од свију побројаних писаца а из обеју група, ма и најпотребније а карактернога у изводу да напоменемо, те да тиме добијемо што бољи преглед целокупнога развитка ове науке у ово напредно доба. Смер овога дела, које је намењено слушаоцима математичких и природних наука, не допушта да се упуштамо у још опширније излагање, тим пре, што је овоме делу поглавити задатак, да се њиме задовољи прека потреба слушалаца наше велике школе, како би се научили примени рачуна вероватноће у егзактним наукама и то с нарочитим погледом на геодетска и астрономска мерења, — да се дакле науче само примени теорије најмањих квадрата. С тога задовољавајући се са оним, што је о првој врсти вероватноћа већ казано и што је с погледом на напред речено и потпуно довољно, ми ћемо сад да пропратимо још само развитак теорије оне друге врсте вероватноћа и то разуме се опет само у његовим главним карактерним моментима.

Први ступањ у развитку теорије најмањих квадрата, Лагранж, Лаплас и Лежандр.

И ако може да се сматра *Гаус* (Carl Friedrich Gauss) као прави творац теорије најмањих квадрата, опет мора се признати, да је Гаус затекао био идеју о употреби рачуна вероватноће на изравњавање грешака, којима су наша сматрања подложна.

Први, који је на ту идеју дошао и који је почео теоријски да испитује грешке сматрања, био је *Лагранж* (Lagrange). Најважније је његово дело о овоме: «Memoire sur l'utilité de la methode de prendre le milieu entre les resultats de plusieurs observations», — које је штампано још 1772. године и у коме он овако саветује, да се ради, те да се добије највероватнија средња грешка из n сматрања.[1])

«Ако су:

a, b, c, d, дотични случајеви, у којима су сматрања подложна грешкама: p, q, r, s, и ако је M сачинилац члана, у коме се налази x^{μ} у реду чланова:

$$(ax^p + bx^q + cx^r + dx^s + \ldots\ldots)^n,$$

то је вероватноћа, да је збир грешака $= \mu$, дакле да је средња грешка

$$m = \frac{\mu}{n},$$

представљена изразом:

$$B = \frac{M}{(a + b + c + d + \ldots\ldots)^n}$$

Према оваквој дефиницији средње грешке и вероватноће њене, треба да се нађе само она вредност од μ за коју је M maximum (највеће) и то предпостављајући да *најмања грешка има највећу вероватноћу.*»

[1]) Suter, Geschichte der Mathem. Wissensch.

Лагранж није овај свој метод даље обрађивао и го нарочито с тога не, што немађаше честога повода и честе потребе, да се њиме служи. То и јест узрок, зашто је теорија Лагранжова, која је иначе правилно схватила законе о вероватноћи и учила, како треба ове применити и на грешке сматрања, на скоро предана забораву.

Неколико година после Лагранжова дела и то 1777. године издаде *Данило Бернули* свој спис: «Dijudicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium atque verisimillima inductio inde formanda» — у коме је и он покушао, да на основу рачуна вероватноће изведе теорију најмањих квадрата.

За вероватноћу једне грешке наводи он израз:

$$\sqrt{r^2 - e^2},$$

где је r стална количина, а e представља грешку сматрања.

«*Из неког броја сматрања, добила би се по њему најбоља вредност непознате, кад би се она одредила из највећег производа вероватноћа*».

Осем напред поменутих, бавили су се многим интересантним и поучним испитивањима о најбољем методу за изравнавање геодетских и астрономских сматрања и: *Лакаљ*, *Деламбр* и *Био*, али најважнији је онај метод, који је о томе изложио *Лаплас*, у делу «Mecanique celeste, Tom III. Chap. V. Paris 1800 — 1806. Лаплас је нашао овај метод при испитивањима облика и величине земљиног меридијана.

Овај Лапласов метод поставља за изналажење најбољих вредности из већег броја сматрања ова два услова:

1., *Збир грешака узетих са њихним дотичним знаком, треба да је раван нули, и*
2., *Збир грешака, кад се оне узму све са положним знаком, треба да је минимум.*

Кад се нарочито овај други услов дубље испита, онда се понајлак увиђа, да он као посве неоснован, не може математички ни у колико да се одржи, а осем тога управо се и не зна, како га је и сам Лаплас у опште и замишљао. Увиђајући ваљда и сам неоснованост свога метода, Лаплас га је у своме делу: «Theorie analytique des Probabilites I. Edit. Paris 1812. Tom II. изоставио и придружио се Гаусу, узев за основу ону поставку, коју је Гаус о грешкама и критеријуму за изналажење најбољих вредности изложио усвоме делу: «Disquisitiones arithmeticae. Lipsiae 1801» и о којој ће мо ниже још говорити.

Лаплас, је у своме напред поменутом делу, расправљао у Cap. IV. задатак изравњавања на тој основи, да из *без краја великог* броја линеарних и сматрањем добивених једначина, одреди тако две непознате, да оне имају за се највећу вероватноћу. Тим путем долази он истина на нормалне једначине теорије најмањих квадрата, али његово теоријско оснивање има тај недостатак, што претпоставља без краја велики број сматрања.

Теорију најмањих квадрата овакву каква је данас од свију научника призната, и која се у свима егзактним наукама употребљава, први је објавио 1850. године *Лежандр* (Legendre) у своме делу: «Nouvells méthodes pour la détermination des orbites des comètes», appendice стр. 72—80— «sur la méthode des moindres carrés.»

Као пример за примену метода најмањих квадрата наводи Лежандр одређивање земљиних димензија и то из 5 половских висина и 4 меридијанска лука, који леже међу оним висинама и који су сви у Француској мерени. Али и тај метод Лежандров и ако је у опште употребљив и лак, морао је уступити место много применљивијем, који је Гаус изнашао и распрострањеном применом дотле усавршио, да се данас у свима егзактним наукама употребљавао као једини и најбољи.

Гаусова теорија најмањих квадрата и потпуна рехабилитација рачуна вероватноће.

Независно од Лагранжа и Лажандра још 1795. године, као слушалац математике на гетингенском университету нашао је и Гаус метод најмањих квадрата, па га наштампао тек године 1809. у делу: «Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium».

И ако је, према ономе што смо напред рекли, Лежандр био први, који је обзнанио метод најмањих квадрата, опет је Гаус прави изналазач његов и први, који је тај метод применио (на планету Церес), па и највећи део онога створио, што се данас и разуме под теоријом најмањих квадрата. У колико је Лежандр био несрећан, што није имао прилике, да своје идеје даље обрађује, у толико је опет Гаус и са те стране био у веома повољним приликама, јер као астрономски опсерватор имађаше и сувише широко поље за примену рачуна вероватноће и тиме се је својски и користио.

Још као младић, беше Гаус тако обилат идејама и тако вичан проналажењу нових и нових истина и метода, да је много штошта по читаву деценију времена па и неколико деценија морало да чека, те да дође на ред, да се напише, у систему доведе па и обзнани. То и јест прави узрок, што је и теорија најмањих квадрата тек доцније (четрнаест година доцније) предана јавности.

«Али и ако су», — као што вели *Сарторије* (Sartorius von Waltershausen) у својој биографији о Гаусу, — «проналасци Гаусови у математици били веома важни, опет су они дуже времена остали само као својина неколицине научника и ваљало је тим проналасцима да се придружи и други проналазак из астрономије, те да тек тако у друштву пронесу и прославе Гаусово име у целом научном свету и по свој Европи».

И заиста тако и би.

$\frac{1}{13}$ Јануара 1801. године пронађе *Пијаци* (Piazzi) у Палерму нову планету Церес (прва мала планета између Марса и Јупитера), посматраше је 41 дан, па саопшти то и другим астрономима. Ови добише вест од Пијација тек на неколико месеци доцније, и то у времену кад се поменута планета није више могла посматрати због свога незгодног положаја према сунцу; све што се дакле као материјал за изучавање те планете и њене путање у опште имало, беше оно, што је Пијаци прибавио својим посматрањем за 41 дан.

Већина астронома почеше да се баве изналажењем елемената за ту нову планету, те да одреде све што је потребно, како би ту исту планету и до године опет несумњиво нашли, и Гаусу је међу свима астрономима испало за руком да реши тај задатак. Он је помоћу теорије најмањих квадрата за ту загонетну планету израчунао ефемериду, која се с погледом на сва поједина посматрања Пијацијева (која су обухватала само 9° од планетине путање) што је могуће боље слагала са свима сматрањима, која је дакле с погледом на материјал, који се при руци имао, *понајвероватнија* била.

Гаус се овим својим решењем толико приближио правој истини — фактичкоме стању ствари, да је *Цах* (Zach), који први после тога ту исту планету опет нађе, рекао: «*да се елипса Гаусова* (за израчунату планету) *за дивно чудо* («zur Bewunderung genau») *са свим тачно слаже са положајем планетиним*».

Слагање резултата који су теоријским путем добивени, са самом фактичком природом ствари, са непосредним посматрањем у природи, било је од превелике важности за сва наша научна испитивања. Из апстрактних граница, у којима се тако дуго бавио рачун вероватноће, из области, у којима се поједина питања па

и решења не дају тако лако поредити са непобитном истином, ми видимо да рачун вероватноће на једанпут у овим срећним приликама за њ, прелази на поље егзактности, остављајући далеко за собом ону своју некадашњу, споредниију, — алеатоарну природу; видимо да се резултати на њему основани, потпуно слажу са непобитном истином у природи; у кратко видимо: *да је рачун вероватноће постао поуздано средство за изналажење праве истине — за одређивање егзактног стања ствари.*

Даље напредовање теорије најмањих квадрата од Гауса па до најновијих времена.

Изналаском елемената за путању напред поменуте планете и слагањем тих израчунатих елемената са фактичким положајем планетиним, одржао је Гаусов метод за изравнавање сигурну победу над свима другима; али опет зато не хтеде Гаус, тај свој метод и поред многога навањивања од стране астронома, одмах да обзнани што и сам помиње у своме делу: «Theoria motus».[1])

Он је тај свој метод усавршивао за пуних 8 година, па га је тек тада пустио у свет, кад се дугом применом уверио, да му је прибавио (осигурао) велики ступањ простоте и еленанције.

Гаус је поглавито устао против познатога начела (другога услова који је Лаплас поставио), по коме је збир заосталих грешака, кад се оне узму са положним знаком, требао да буде минимум, и уклонио оно од воље, дакле не математичко мењање знака. Поред тога он се

---

[1]) „Више астронома желело је, да ја одмах како је Церес поново нађена, све методе по којима сам рачунао и обзнаним; међу тим мене је више узрока спречавало да по молби мојих пријатеља учиним, прво што сам и других послова имао (Dispuisitiones arithmeticae) а друго моја жеља, да целу ствар доцније што опширније израдим а нарочито пак нада, да ће продужено бављење са овим предметом бити како по општу употребљивост, тако и по простоту па и елеганцију самих решавања од користи. Како ме нада моја није преварила то држим, да не морам да се кајем, што дело доцније на свет изилази.“

обазрео и на то: «*да грешке смарања нису невероватне у простом, него у крадратном односу својих величина*». По њему није вероватноћа, да се каква грешка н. пр. од 0·10 секунде учини, према грешци од 0·05 секунде, равна $\frac{1}{2}$, већ је равна $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, јер је и из искуства познато, да су неке величине грешака управо немогућне, па да према томе морају у истом смислу веће грешке да буду и невероватније од мањих грешака.

Према томе, да би рачун био тачнији, могли би се у рачун увести и виши ступњи грешака посматрања, дакле трећи, четврти и т. д., али то би увођење виших ступања, много отежало рачунање, а не би тачности много допринело, па зато је Гаус остао само при употреби *другога ступња* грешака за све рачуне по теорији најмањих квадрата.

Гаусова дела у којима се налази теорија најмањих квадрата ово су:

1809. Theoria motus corporum coelestium.
1810. Disquisitio de elementis ellipticis Palladis ex oppositionibus annorum: 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809.
1816. Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen. Zeitschrift für Astronomie von Lindenau und Bohnenberger.
1821. Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars prior.
1823. Theoria combinationis observationum etc, pars posterior, и
1826. Supplementum theoriae combinationis erroribus minimis obnoxiae.

У делу «Theoria motus corporum coelestium» а на страни 260-ој издања од 1877. године оснива Гаус теорију најмањих квадрата рачуном вероватноће и то функцијом:

$$\varphi\triangle = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hh\triangle\triangle} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\triangle^2},$$

која представља закон вероватноћа за грешке смарања. Он под бројем 179, поменутога дела доказује и изводи као принцип рачуна изравњавања:

«Es wird (daher) das wahrscheinlichste System der Werthe der Unbekannten p, q, r, s, etc. dasjenige sein in welchem die Quadrate der Unterschiede zwischen den beobachteten und berechneten Functionenwerthen V, V', V'', etc. die kleinste Summe geben» — што значи: *онај систем вредности непознатих количина* p, q, r, s *и т. д. биће највероватнији, у коме квадрати разлика, између опажаних и израчунатих вредности функција* V, V', V'' *и т. д. дају најмањи збир* (minimum). У истом делу потпуно је обрађено и изравњавање и одређивање тежина (важина) за посредна посматрања, а у делу «Disquisitio de elementis ellipticis Palladis» одређује Гаус уводећи у рачун *алгоритме* облика:

$$[bb.\ 1],\quad [cc.\ 2],\quad [dd.\ 3]\quad \text{и т. д.}$$

и минимум збира квадрата заосталих грешака. У спису «Über die Genauigkeit der Beobachtungen» одредио је он и *вероватну грешку* (Den wahrcheinlichen Fehler) за једну непознату и то из разних збирова грешака, које је добио подижући *праве грешке* смарања на разне ступње.

Осем свега овога у делу: «Theoria Combinationis» после неких општих посматрања закона вероватноће за грешке смарања, прелази Гаус на самосталну дефиницију (одредбу) *средње грешке*, па поставља као услов: *да непознате или функције непознатих, које хоћемо да одредимо, ваља да су подложне што може бити мањим средњим грешкама*. Најзад се у «Supplementum theoriae combinationis etc.» — овај услов примењује на изравњавање условних смарања, а поглавито на изравњавања троугаоних мрежа, у којима су углови или правци сматрањем одређени.

Све те напред поменуте Гаусове теорије заједно са додацима Беселовим, прерадио је Енке у један «Compendium über die Methode der kleinsten Quadrate», који је као додатак штампан уз «Berliner astronomisches Jahrbuch» — и то у годинама: 1834, 1835 и 1836. Овај Енкеов рад може у многим приликама потпуно да замени и оригинална Гаусова дела, па се с тога место њих често и цитира (наводи).

После Гауса обрађивали су и допуњавали његове теорије *Бесэл* (Bessel), *Ханзен* (Hansen), *Хаген* (Hagen), *Герлинг* (Gerling), *Хелмерт* (Helmert), *Јордан*, (Jordan) и други, али литература о овоме предмету толико је нарасла, да се не можемо и даље упуштати у прегледање њезино.

Ово што је до сад речено, довољно је да се види, како се ова наука у њеним главним моментима, дакле у опште развијала; а докле је она усавршена до оних дана, кад сам ово дело писао, то ће се видети из даљих излагања у току мојих предавања.

ПРВИ ДЕО.

Теоријска вероватноћа или вероватноћа á priori.

I

Појам о апсолутној вероватноћи, комбинације неизбежна основа рачуна вероватноће.

1.

Усвајајући као принцип: да сваком појаву у физичком свету мора да претходи ма какав унутарњи или спољни узрок (Causal-nexus), који га производи, ми схватамо садање стање у целокупној васиони и то до оних састојака њезиних, који ишчезавају и који су за наше око и неприметни, као производ његовога минулога стања, а ово садање стање опет као узрок ономе стању, које ће тек у потоњем добу настати; — и кад би било на свету онаквог највишег ума (une intelligence supérieure), о коме је Лаплас оно у уводу поменуто рекао, онда би за такав ум било заиста све на свету потпуно познато; за њ би било према конкретном стању ствари у извесном моменту времена или све *извесно* или све *немогућно*.

Но за обичнога човека, чије су чуоне особине мање или више ограничене и које могу у току времена да се усавршавају — за човека дакле, који није у стању да проникне и сазна свеколике свагдање узроке; који не може да разчлани све услове што су од почетка па до свршетка предходили каквоме догађају, и који најзад уме тек *донекле* да комбинише све узроке у оном истом реду, у коме су они заиста један за другим следовали, — за човека остаје млого што шта па баш и оно *што види*, *што чује* и *осећа* по кадкад *донекле* нејасно и необјашњиво и он тада *сумња* о овоме или ономе догађају.

Али и ако човек сумња о овоме или ономе догађају, опет кад дубље размисли, бар о оним приликама, које су му донекле познате и које стоје у евидентној вези са могућним узроцима, а осем тога, кад узме потанко и све оно, што би било у стању да га обавести бар и о приближном начину дејства појединих узрока, онда може ум човечиј да стекне поред свега напред поменутога, опет неко *убеђење*; — судиља његова може, сазнав известан број најнужнијих основа за какав појав и доведав их бар у приближну узрочну везу да нагиње већ каквоме закључку и да према ступњу убеђености ишчекује некакав догађај *млого пре*, него ли све остале друге, који су исто тако лако могућни као и онај ишчекивани; — човек се тада нада томе догађају и он је за њ *вероватан*.

Ово напред речено може да нам послужи као основа при изналажењу вероватноће и ми из тога можемо лако да изведемо правило, како имамо да поступамо те да определимо вероватноћу каквога догађаја у опште.

На име, да би могли да одредимо вероватноћу каквога догађаја, ми треба (као што радимо и у другим наукама) из догађаја једне и исте врсте, водећи рачуна о ономе што је горе казано, да издвојимо извесни бродогађаја, који су сви подједнако могућни, т. ј. број таквих догађаја, које би могли подједнако да ишчекујемо (којима би могли са подједнаким ступњем убеђености да се надамо), па да из броја тих догађаја, изнађемо број оних, који баш одговарају дотичном догађају или боље, који се са ишчекиваним догађајем што је могуће боље идентификују: *«однос овога броја догађаја, према броју свију подједнако могућних догађаја, зове се мера вероватноће или просто вероватноћа ишчекиванога догађаја.“* — и ово је у опште усвојена дефиниција о вероватноћи.

Но ми можемо вероватноћу још опредељеније, прецизније да дефинишемо.

За то ћемо да се дотакнемо хазардних игара, при којима је, као што ће бити познато, веома много стало до тога, колика је вероватноћа са којом играч ишчекује да добије или да изгуби какву игру.

У опште при хазардним играма, где имамо дакле догађаје алеаторне природе и самом формом или суштином игре, условљен је неки број *препоставака* (хипотеза) *догађаја* који сви могу да се десе или могу да наступе *подједнако лако*. Ове претпоставке зову се: *могућни догађаји* па и *могућни случајеви* или у опште *могућни изгледи* (Chance) дотичнога догађаја.

Ови изгледи деле се сами од себе у две различне врсте и то на изгледе, који су дотичном догађају *повољни* или при којима играч може добити и на изгледе, који су истоме догађају *неповољни* или при којима играч може изгубити (види у уводу повољне и неповољне основе и Ферматово решење стр. 10).

Горњи став о вероватноћи према овоме што је сад речено, могао би дакле и овако да се искаже: *«Вероватноћа каквога догађаја, то је разломак, чији је именилац раван броју свију подједнако могућних* (случајева или) *изгледа, а бројилац раван броју оних изгледа, који су дотичноме догађају повољни.“* Оваква вероватноћа зове се *математична* или *апсолутна вероватноћа догађаја* (види: I Principe, Laplace, Essai philosophique p. 12.).

Очевидна је ствар, да кад су сви могућни изгледи каквоме догађају повољни, да је онда бројилац горњега разломка раван имениоцу и у томе случају прелази вероватноћа у *извесност*. Бројна вредност вероватноће за какав догађај, кад је он извесан, представљена је дакле *јединицом* или боље: *положна је јединица знак известности.*“

Што год је бројна вредност разломка са којим вероватноћу представљамо ближа јединици, то је и дотични догађај *вероватнији.*

На против, што год је пак вредност тога разломка даља или мања од јединице, то је и дотични догађај *невероватнији.* Према овоме досад поменутоме ако означимо са:

p број догађају повољних изгледа, а са

m број подједнако могућних изгледа, онда је вероватноћа у опште:

$$b = \frac{p}{m}, \qquad (1)$$

где је $p < m$.

Вероватноћа је дакле свагда чист разломак, јер по самој природи како свију подједнако могућних тако и догађају повољних изгледа, мора да је бројилац свагда мањи од имениоца, јер је по све увиђавно, да ће свакад број свију могућних изгледа морати бити већи од броја оних, који су каквоме конкретноме догађају повољни. Према томе је дакле свакад:

$$1 > b > 0,$$

и као што граница 1 значи *извесност* тако граница 0 значи *немогућност.* Математичка или апсолутна вероватноћа каквога догађаја може дакле да име све могућне вредности од 0 па до $+ 1$.

2.

Да објаснимо ово напред речено и једним примером.

Тога ради ми ћемо да узмемо да имамо у руци једну коцку, којој су стране означене по реду са бројевима од 1 до 6, или на којој су ти бројеви представљени истим бројем црних колутића или поана.

Вероватноћа, да ћемо при једном бацању те коцке, добити једну и то ма коју напред означену страну горе окренуту, равна је разломку $\frac{1}{6}$, јер су овде подједнако могућни свега 6 случајева, дакле онолико, колико има свега и страна, а повољан је само један случај с тога, што се коцка само један пут баца. Но ако узмемо две коцке и бацимо у исти мах обадве, онда је лако појмљиво, да свака страна једне коцке, може да испадне са по неком страном друге коцке горе окренута; т. ј, свака страна једне коцке може да се комбинује са по неком страном друге коцке и у овоме случају дакле све би по две и две стране испадале у исто доба горе окренуте и ми добијемо на тај начин свега:

$$6 \times 6 = 36,$$

као број подједнако могућних изгледа.

Да би ово објашњење у основи како ваља разумели, ми ћемо да означимо са a прву а са b другу коцку.

Према горњој напомени о броју могућних изгледа или случајева, сматрајући под ab резултат свагдањег бацања, ми излажемо у доњој таблици све могућне комбинације за овај конкретан случај.

Таблица свију могућних комбинација за две коцке.

ab	ab	ab	ab	ab	ab
1.1	2.1	3.1	4.1	5.1	6.1
1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2
1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3
1.4	2.4	3.4	4.4	5.4	6.4
1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5
1.6	2.6	3.6	4.6	5.6	6.6

Све ове комбинације означених страна у овој таблици, подједнако су могуђне, јер је исто тако лако могуђно добити, да испадну горе окренуте стране означене са бројем 5 на коцки *a* и бројем 2 на коцки *b*, као што је лако добити, да испадну горе окренуте стране означене бројем 6 на једној и другој коцки, дакле да испадне комбинација 6.6 или оно, што Французи зову «le sonnez.»

Али ако сматрамо добивене поане (бројеве горе окренуте) неводећи рачуна о коцки са којом су добивени, онда видимо, да се н. пр. комбинација 5 са 2 може да добије комбиновањем броја 5 на коцки *a* са бројем 2 на коцки *b*; но у исто време видимо, да је она могућна и комбиновањем броја 5 на коцки *b* са бројем 2 на коцки *a* т. ј. за комбинацију 5.2 или што је то исто, за комбинацију 2.5 имамо у овоме случају две претпоставке или два изгледа (повољна случаја), који су у таблици представљени у колумнама другој и петој са одговарајућим бројевима:

2.5 и 5.2.

Исто је тако и са комбинацијама:

1.2	и	2.1
1.3	«	3.1
1.4	«	4.1
1.5	«	5.1
1.6	«	6.1;

као и са комбинацијама:

2.3	и	3.2	и	3.4	и	4.3
2.4	«	4.2		3.5	«	5.3
2.6	«	6.2;		3.6	«	6.3

и најзад са комбинацијама:

4.5	и	5.4				
4.6	«	6.4	па и са	5.6	и	6.5

Свака од ових тридесет комбинација, има по два изгледа или по два повољна случаја, док међу тим оних шест комбинација квадратног облика а у правцу табличне дијагонале исписане, дакле:

1.1; 2.2; 3.3; 4.4; 5.5; 6.6;

имају свака само по један повољан случај.

Према горњој дефиницији за вероватноћу, била би дакле вероватноћа за догађај 5 . 2 или 2 . 5 равна разломку:

$$b = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Вероватноћа за догађај 6 . 6 или ма који други од ових:

1.1; 2.2; 3.3; 4.4; 5.5; била би

равна разломку, чија је вредност тек само $b = \frac{1}{36}$.

Но, ако би се тражила вероватноћа за догађај каквога збира дотичних бројева т. ј. за добијање опредељенога збира поана на странама обеју коцака н. пр. да кажемо, ако би се тражила вероватноћа, да ћемо бацајући обадве коцке, добити збир поана $= 7$, то из горње таблице сазнајемо, да за тај догађај имамо свега 6 повољних случајева и то случајеве у којима се јављају комбинације:

1.6; 2.5; 3.4; 4.3; 5.2; 6.1;

јер све ове дају и могу у опште и дати збир поана $= 7$; вероватноћа за тај догађај била би представљена дакле разломком, чија је вредност:

$$b = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Исто тако ако би тражили вероватноћу за збир поена = 5, имали би, гледајући на таблицу и што овде имамо свега 4 повољна случаја, а на име све случајеве у којима се јављају комбинације:

1.4; 2.3; 3.2; 4.1;

као вероватноћу за тај догађај, разломак:

$$\mathfrak{b} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

И т. д.

3.

Свакоме догађају може да се стави на супрот његов *недогађај* или боље *противни догађај*. Обадва ова, како догађај тако и противни догађај такве су природе, да један другога искључује т. ј, да догађање једнога, искључује догађање другога и то тако, да једноме догађају повољни случајеви представљају у исто време неповољне случајеве ономе другоме догађају — и оно што смо ми назвали број свију подједнако могућних случајева за какав догађај, то је управо збир свију како догађају повољних тако и догађају неповољних случајева.

Као год што смо нашли вероватноћу каквога догађаја делењем броја повољних случајева бројем свију подједнако могућних, исто тако налазимо вероватноћу за противни догађај или тако звану *противну вероватноћу* дотичног догађаја, делењем броја свију неповољних случајева, бројем свију подјенако могућних случајева а за исти догађај. Французи зову ову противну вероватноћу: «le Complement de la probabilité» а Немци: «Die Ergänzung der Wahrscheinlichkeit» ма да би боље било, да се та противна вероватноћа зове *допуна извесности* или још боље *невероватноћа догађаја.*

Према овоме, ако означимо са p број повољних случајева за какав догађај, а са n број не повољних случајева за тај исти догађај, онда је вероватноћа, да ће се тај догађај десети представљена разломком:

$$\mathfrak{b} = \frac{p}{p+n} = \frac{p}{m}$$

а вероватноћа, да се он неће десити, дакле противна вероватноћа или невероватноћа тога догађаја:

$$\mathfrak{b}_n = \frac{n}{p+n} = \frac{n}{m} \qquad (2)$$

јер је очевидно број свију подједнако могућних (дакле повољних и неповољних) случајева овде: $p + n = m$.

Збир вероватноће и невероватноће, као што је по себи разумљиво мора, опет да је раван јединици, дакле:

$$\frac{p}{p+n} + \frac{n}{p+n} = \frac{p+n}{p+n} = 1.$$

Из досадањега следује (пошто се обадва ова израза за вероватноћу и невероватноћу каквога догађаја допуњују до јединице), да ако са:

$$\mathit{б};\quad 2\mathit{б};\quad 3\mathit{б};\quad \ldots\ldots\quad i\mathit{б};$$

означимо вероватноће каквога догађаја, то ће његове невероватноће бити очевидно представљене изразима:

$$1 - \mathit{б};\quad 1 - 2\mathit{б};\quad 1 - 3\mathit{б};\quad \ldots\ldots\quad 1 - i\mathit{б}.$$

4.

Вероватноћу каквога догађаја можемо лако да нађемо као што смо видели, ако смо само у стању да определимо број свију подједнако могућних случајева или изгледа. Сва тешкоћа код рачуна вероватноће и састоји се у томе, што баш то није тако лака ствар. Међу тим, ма како да је постављено питање, опет може оно у неку руку да се сравни са извлачењем каквога броја лоптица из једног или и из више судова (кутија), или са бацањем једне коцке или са бацањем више коцака у исти мах, чије су стране обележене бројевима или поанима.

Примера ради, да узмемо, да се пред нама налази какав суд у коме се налази неки број лоптица, које су обликом и величином све подједнаке а само бојом својом међу собом различне, да кажемо од њих су неке беле, неке црне а неке опет црвене — па хоћемо да определимо вероватноћу за извлачење једне беле лоптице, дакле да определимо вероватноћу за догађај, да ће се при једном вучењу појавити једна бела лоптица.

Да би могли на ово питање да одговоримо, ми морамо претходно да знамо колико и каквих лоптица има у поменутом суду. Ако нам се каже н. пр. да има у суду две беле, три црне и четири црвене лоптице, онда их је у суду свега:

$$2 + 3 + 4 = 9$$

лоптица и овај број представља број свију подједнако могућних случајева, од којих су очевидно:

извлачењу беле лоптице, повољни само: 2,
« црне « « « : 3,
« црвене « « « : 4

случаја и према дефиницији вероватноће је:

вероватноћа за извлачење беле лоптице: $\frac{2}{9}$.

Ако би се тражила вероватноћа за извлачење једне црне лоптице, онда је она $= \frac{3}{9}$, најзад вероватноћа за извлачење једне црвене лоптице била би $= \frac{4}{9}$.

Збир свију ових вероватноћа раван је јединици, дакле:

$$\frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{4}{9} = \frac{9}{9} = 1;$$

јер је *извесно*, да ће се при ма коме извлачењу извући или једна бела или црна или најзад једна црвена лоптица.

5.

Ми смо се у горњем примеру упознали са апсолутним бројевима лоптица и са бојом њихном, међу тим то није неизоставно нужно. Довољно је, ако само знамо однос броја повољних, према броју неповољних случајева за дотични догађај или што је једно и исто, ако знамо однос броја повољних према броју свију подједнако могућних случајева, јер је овде са свим све једно, у коме односу бројеви повољних случајева расту или опадају[1].)

И ако је ово горе речено посве увиђавно, ми ћемо опет потпуности ради још да докажемо коректност горњега схватања и са једним примером.

Да узмемо да имамо два суда и у њима разан број разно бојених цедуљица или нумера и то нека су:

у једном суду: 20 белих и 15 црних, а
у другоме суду: 40 « « 30 « цедуљица или нумера; осем

тога да узмемо, да играч добија кад год извуче једну белу цедуљицу а на против да губи, кад год извуче једну црну цедуљицу.

Према горњем је са свим све једно, из кога ће суда играч цедуљице извлачити, јер је и при извлачењу из првог као и при извлачењу из другога суда, вероватноћа за добитак (у оба случаја):

$$\frac{20}{35} = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}.$$

Оно напред изречено тврђење очевидно је основано на једнакости горњих разломака, који се само тиме разликују, што је у другоме разломку и бројилац и именилац помножен једним заједничким чи-

[1]) P. Henry Fleury у своме делу: «le Calcul infinitésimal fondé sur des principes rationnels и т. д. — 1879. на странама 64—70. устаје против горњега схватања, непостављајући ништа, што би усвојену теорију о вероватноћи подигло на други неки ступањ усавршености, који би он хтео да рачуни вероватноће има, но који није ни сам у стању да му да.

ниоцем, што вредност тога разломка па и вероватноће, која је њиме представљена, као што је познато, ни уколико не мења.

Међу тим основаност горњега тврђења још се боље увиђа, ако следујући Лапласу, замислимо, да су у другоме суду све по две и две беле цедуљице концем везане, а тако исто и оне црне у истом суду. тако дакле, да се у другоме суду находе 20 белих и 15 црних парова цедуљица. Ако се играч дакле маши руком у овај други суд у намери да извуче једну белу или једну црну цедуљицу, то ће он у исто доба свакад извући још једну белу или црну цедуљицу, чиме као што видимо, *нити је олакшано, нити отежано* извлачење баш једне беле или баш једне црне цедуљице; извлачење једног белог или црног пара цедуљица из овога другога суда, потпуно се подудара са извлачењем само једне беле или црне цедуљице из онога првог суда.

Cournot вели: «порицати коректност овога горњега закључка, било би подједнако са тврђењем, да се услови за згодитак једне беле или црне цедуљица мењају, ако их све на један исти начин савијемо».

6.

У досадањим примерима и питањима у којима се број повољних изгледа могао да изведе à priori, и вероватноћа је могла да се определи чисто рачунским путем и таква врста вероватноће зове се с тога *вероватноћа à priori* (што немачки аутори називају: Wahrscheinlichkeit aus Gründen). Ова врста вероватноће је као што видесмо, изведена на чисто математичкој основи и представља с тога, чисто математички део, с којим ћемо се у овом првом делу предавања бавити.

Но из горњих примера, који су се могли да сравне са извлачењем некаквога броја лоптица из каквога суда, видели смо да је за изналажење вероватноће à priori нужно било, да израчунамо број свију могућних комбинација извесног реда, које можемо да образујемо из n различних или једнаких елемената и ми ћемо, за даљу потребу да рекапитулирамо најнужније основне обрасце из теорије о комбинацијама.

II

О комбинацијама[1]) без понављања.

7.

Да узмемо да имамо m разних предмета или елемената, које треба да комбинујемо и нека су они сви

---

[1]) Ако су:

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e \dots\dots$$

дати елементи, онда су:

$$a, \quad ab, \quad cba, \quad dacb, \quad abcde \dots\dots \qquad (\alpha)$$
$$aa, \quad aaa, \quad abab, \quad aabbbc, \dots\dots \qquad (\beta)$$

у опште комбинације. При комбинацијама у горњем реду (α) сви су елементи један од другога различни; те се комбинације зову ***комбинације без понављања.*** При комбинацијама у доњем реду придолазе поједини елементи више пута, и те се комбинације зову ***комбинације са понављањем,*** у којима се једнаки елементи могу да пишу и као количине подигнуте на ступње, као:

$$aa = a^2; \quad aaa = a^3; \quad abab = a^2b^2, \quad \text{и т. д.}$$

Број једнаких елемената у каквој комбинацији зове се *изложилац понављања.*

Комбинације се по броју комбинованих елемената деле на класе. Број комбинованих елемената зове се *изложилац комбинације.* Један једини елеменат у праћо није никаква комбинација, али се опет зове комбинација прве класе или *Унион.* Такве су комбинације: a, b, c, d..... Изложилац комбинације прве класе је $= 1$.

Комбинација од два елемента као:

$$ab, \quad bb, \quad cd, \dots\dots$$

зове се комбинација друге класе или *Бинион.* Изложилац њен је $= 2$.

Комбинација од три елемента као:

$$aaa, \quad abc, \quad abd, \dots\dots$$

зове се комбинација треће класе или *Тернион*; комбинација од четири елемента зове се *Кватернион*; од пет елемената *Квинион*; од шест елемената *Сенион* ит.д. Комбинација је *уређена* ако елементи (или писмена) иду азбучним редом један за другим; дакле $abcd$, $aabb$, $abcc$, ... зову се *уређене*, а:

bac, $dacb$, $cdba$, ... *не уређене* комбинације. Уређене комбинације од извесног броја датих елемената ма које класе образују се дакле ако се сви елементи тако напишу, да они *лексикографски* један за другим следују.

Комбинације које почињу са првим елементом (a) зову се комбинације *првог реда.* Тако су: aa, ab, ac, ad ..... *комбинације друге класе а првога реда.* Исто су тако комбинације: bbb, bbc, bcc, bcd, . . . *комбинације треће класе а другога реда* и т. д.

Колико је год елемената дато, толико је и класа комбинација без понављања могућно образовати.

означени по реду писменима:

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots\ldots\ k,\ l.$$

Да би образовали све комбинације узимљући у сваку све по два и два елемента (писмена), дакле све Бинионе очевидно је, да ми можемо да комбинујемо елеменат a са свима осталим елементима:

$$b,\ c,\ d,\ \ldots\ k,\ l,$$

којих је на броју свега још $(m-1)$; за тим да можемо да комбинујемо исто тако и елеменат b опет са свима осталим елементима:

$$a,\ c,\ d,\ \ldots\ k,\ l,$$

којих је такође опет на броју $(m-1)$ и т. д. — на кратко ми комбинујући сваки од оних m елемената са осталима елементима $(m-1)$, добијамо свега:

Тако н. пр. ако је дат:	1 елеменат	a, онда имамо:
комбинације	1 класе	a.
ако су дата:	2 елемента	a, и b, онда имамо:
комбинације	1 класе:	a; b,
	2 класе:	ab.
ако су дата:	3 елемента	a, b, c, онда имамо:
комбинације	1 класе:	a; b; c;
„	2 „ :	ab; ac; bc,
„	3 „ :	abc.
ако су дата:	4 елемената	a, b, c, d, онда имамо:
комбинације	1 класе:	a; b; c; d.
„	2 „ :	ab, ac, ad; bc, bd; cd,
„	3 „ :	abc, abd; bcd.
„	4 „ :	$abcd$.
ако су дати:	5 елемената	a, b, c, d, e, онда имамо
комбинације	1 класе:	a; b; c; d; e.
„	2 „ :	ab, ac, ad, ae; bc, bd, be; cd, ce; de,
„	3 „ :	abc, abd, abe, acd, ace, ade; bcd, bce, bde; cde.
„	4 „ :	$abcd$, $abce$, $abde$, $acde$; $bcde$.
„	5 „ :	$abcde$.

$$m(m-1)$$

комбинација.

Међу овима комбинацијама налази се свака комбинација по два пут, јер се комбинација из a и b (дакле комбинација: ab) добија и кад се a са b но и b са a комбинује; исто је тако и са другим комбинацијама као што су: ac, ad, ak, и т. д. — све се оне налазе у горњем броју комбинација: $m(m-1)$ по два пут, јер се оне добијају кад се a са c, но и c са a, односно a са d но и d са a и т. д. комбинује.

Ако тражимо да знамо, колики је број комбинација које се дају из m елемената образовати, но од којих се свака само по један пут појављује, и то број *разних* комбинација узимљући све по два и два елемента, онда је очевидно, да је тај број тек само половина од онога напред добивенога производа или симболички:

$$mK_2 = \frac{m(m-1)}{2},$$

што можемо да напишемо и овако:

$$mK_2 = \frac{m(m-2+1)}{2}, \qquad (3)$$

Комбинације од m елемената узимљући све по три и три елемента у једну комбинацију (дакле све Тринионе), добили би очевидно ако сваку комбинацију из два и два елемента н. пр. комбинацију ab, поступно комбинујемо са свима заосталим елементима, којих је сад разуме се на броју још само $(m-2)$, дакле са елементима:

$$c,\ d,\ e,\ \ldots\ k,\ l.$$

На тај начин добили би свега комбинација:

$$\frac{m(m-1)}{2}(m-2).$$

У овоме случају опет појавила би се комбинација ***abc*** три пут, јер она се добија, као што се лако схваћа комбиновањем комбинације ***ab*** са елементом ***c***, но и комбиновањем комбинације ***ac*** са елементом ***b*** па најзад и комбиновањем комбинације ***bc*** са елементом ***a***.

Исто је ово случај и са свима осталим комбинацијама, свака се појављује по три пута.

Из овога следује, да би број *разних* комбинација из m елемената добили, узимљући све по три и три елемента, ми треба горњи производ да поделимо са бројем 3, дакле је он:

$$mK_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}$$

што можемо да напишемо и овако:

$$mK_3 = \frac{m(m-1)(m-3+1)}{2 \cdot 3} \tag{4}$$

Комбинације из m елемената узимљући све по четири и четири елемента (дакле све Кватернионе) добили би, ако сваку комбинацију из три и три елемента, комбинујемо са свима осталим елементима, којих је сад на броју још само $(m-3)$. За број разних комбинација добили би сад аналого са изразима: mK_2, mK_3:

$$mK_4 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4},$$

што можемо да напишемо и овако:

$$mK_4 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-4+1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot} \tag{5}$$

И т. д.

Продужавајући овако комбиновање и даље, увиђавно је, да простом индукцијом добијамо за број свију разних комбинација из m елемената, узимљући све по

n и n елемената у једну комбинацију, (дакле све Енионе) следећи производ:

$$mK_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{2 \cdot 3 \ldots\ldots (n-1)\,n},$$

који можемо симетрије ради да напишемо и овако:

$$mK_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (n-1)\,n} \tag{6}$$

У овој форми видимо да и бројилац и именилац имају по n чиниоца и да се у бројиоцу налазе као чиниоци сви бројеви од m па до $(m-n+1)$ закључно, а у имениоцу опет сви растући бројеви од 1 па до n закључно, што је у математици познато под именом *«факултета»* или *«факторијела»* и што се краће означава са: $n!$

8.

Ако са појмом комбиновања у исто доба спојимо и појам извеснога последовања или реда, у коме елементи један за другим треба да следују, па узмемо да је н. пр. комбинација ***ba*** различна од ***ab***, комбинација ***bc*** различна опет од ***cb*** и т. д., то је увиђавно, да су оне мало пре као идентичне сматране комбинације, сад једна од друге са свим различне; за бројеве, који представљају бројеве, оваквих комбинација из m елемената, узимљући најпре све по два и два, за тим по три и три елемента и т. д. а најзад по n и n елемената, добијамо ми ове производе:

$$mP_2 = m(m-1)$$
$$mP_3 = m(m-1)(m-2)$$
$$mP_4 = m(m-1)(m-2)(m-3)$$
$$\vdots$$
$$mP_n = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1). \tag{7}$$

Ми ћемо ове комбинације да зовемо *уређенима*, а оне пређашње, код којих се није водио рачун о реду, којим елементи један за другим следују, зваћемо *апсолутне* комбинације или просто *комбинације*.

9.

Сравњујући бројеве добивене под (7) и (6) који су симболички представљени са mP_n и mK_n за уређене, односно за апсолутне комбинације ми видимо, да док је број уређених комбинација раван производу (7) да је број апсолутних комбинација раван само разломку (6), коме је бројилац број mP_n, а именилац број:

$$1.\ 2.\ 3.\ 4. \ldots (n-1).\ n = n! = P_n \ ; \qquad (8)$$

који представља све могућне *пермутације* (премештања) од n елемената.

Ово сад речено може лако и да се докаже.

Да узмемо да имамо m места, која су означена бројевима 1, 2, 3, ... m, а осем тога да имамо два елемента a и b, које треба на та места намештати (премештати или пермутовати).

У овом случају добићемо све могућне уређене комбинације, ако најпре елеменат a метемо на место означено са 1, а елеменат b поступно на сва остала места означена са: 2, 3,... m; затим ако елеменат a метемо на место означено са 2, а елеменат b опет редом на сва места означена са: 1, 3, ... m и т. д. Број пермутација или уређених комбинација, које могу да се оличе (представе) са два елемента, може дакле да се представи производом:

$$m(m-1).$$

Ако осем она два елемента узмемо још и трећи елеменат c, то би онда могли у свима оним пређашњим комбинацијама, да кажемо у онима, где је a заузимало место означено са бројем 1, а b опет заузимало место

означено са бројем 2, да намештамо елеменат c на сва остала места редом, која су означена бројевима: 3, 4,.. m и којих је на броју још свега $(m-2)$.

Број уређених комбинација, које можемо са три елемента да оличимо, може да се представи дакле и производом:

$$m(m-1)(m-2).$$

И т. д.

Према овоме дакле, напред добивени производ под (7), а наиме:

$$mP_n = m(m-1)(m-2) \ldots (m-n+1)$$

представља у опште број свију могућних комбинација, које могу да се оличе са n елемената, у коме опет m представља број места као и пре.

Ако узмемо да је $m = n$, дакле да је број места раван броју елемената, онда заменом прелази горњи производ у:

$$n(n-1)(n-2) \ . \ . \ . \ . \ 4.\ 3.\ 2.\ 1$$

или у:

$$P_n = 1.\ 2.\ 3.\ 4. \ . \ . \ . \ (n-1)\,n = n!$$

Из овога доказа следује, да општа теорија о пермутацијама и није ништа друго, до теорија комбинација, схваћена само са другога гледишта.

Ако имамо n елемената од којих би требало да уредимо какав прогресиван или регресиван ред, при коме се не гледа на апсолутна места, која поједини елементи заузимљу, већ само на ред, по коме они један за другим следују, онда би се редуковао горњи производ на:

$$1.\ 2.\ 3.\ 4. \ . \ . \ . \ . \ (n-1) = (n-1)!$$

10.

Кад од m елемената изузмемо n елемената за оличавање комбинација од n елемената, онда делимо целу групу елемената у две парцијалне групе, од којих једна има n а друга $(m-n)$ елемената и количник mK_n показује у томе случају, на колико разних начина може та подела да се изведе. Тај количник мора да нам показује у исто доба и колико је разних комбинација из $(m-n)$ елемената могући и према томе, он не сме своју вредност да мења, ако у њему заменимо n са $(m-n)$.

Да би се ово још боље увидело, ми ћемо целокупан број елемената да означимо са $(m+n)$, а бројеве елемената оних парцијалних група са m и n; у овоме случају морамо у количнику:

$$mK_n = \frac{m(m-1)\ (m-2)\ .\ .\ .\ .\ (m-n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ .\ .\ .\ (n-1)\ n}.$$

да ставимо место m број $(m+n)$, услед чега добијамо:

$$\frac{(m+n)\ (m+n-1)\ (m+n-2)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (m+1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (n-1)\ n}$$

Ако сад помножимо и бројиоца и имениоца овога разломка са производом:

$$1.\ 2.\ 3.\ 4.\ .\ .\ .\ .\ .\ (m-1).\ m,$$

онда добијамо:

$$\frac{(m+n)\ (m-n-1)...\ (m+1)\ .\ m.(m-1)....\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}{1.\ 2.\ 3.\ 4..\ (n-1)\ n\ .\ 1.\ 2.\ 3.\ 4....\ (m-1)\ m.}$$

или:

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ .\ .\ .\ .\ .\ (m+n).}{1.\ 2.\ 3.\ .\ .\ .\ m.\ 1.\ 2.\ 3.\ .\ .\ n}$$

Пошто у овоме изразу писмена m и n придолазе симетријски, то је увиђавно, да он своју вредност не мења, ако у њему заменимо m са n и обрнуто.

Но тај горњи израз могли смо да добијемо и непосредно овако.

Ако имамо систем од $(m+n)$ места и замислимо да је он подељен на две парцијалне групе, да кажемо на a и b, од којих једна има m а друга n места, онда би број разних премештања, која дају $(m+n)$ елемената, био очевидно представљен производом:

$$1.\ 2.\ 3.\ .\ .\ .\ (m+n) = (m+n)\ P_{(m+n)}.$$

Ако је сад само за тим стало, да се елементи у две парцијалне групе a и b поделе, онда не смемо више она премештања да сматрамо као различна и морамо горњи производ да поделимо најпре са производом: $1.\ 2.\ 3.\ .\ .\ .\ m$, а за тим и са производом: $1.\ 2.\ 3.\ .\ .\ .\ n$, те да добијемо тражени количник:

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ .\ .\ .\ .\ .\ (m+n)}{1.\ 2.\ 1.\ .\ .\ m\ .\ 1.\ 2.\ 3.\ .\ .\ n},$$

који је, као што видимо, раван ономе, који смо и на други начин нашли.

По аналогији, можемо ми сад да закључимо, да количник:

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ .\ .\ .\ .\ .\ (m+n+p)}{1.\ 2.\ 3....\ m\ .\ 1.\ 2.\ 3....\ n\ .\ 1.\ 2.\ 3....\ p},$$

показује на, колико разних начина можемо $(m+n+p)$ елемената, да поделимо на три парцијалне групе, које садрже m, односно n, и p елемената. Но горњи количник показује и то, колико би различних редова или разних серија из m писмена a, n писмена b и p писмена c могли да добијемо.

III.

О комбинацијама са понављањем.

11.

Ми смо до сад сматрали комбинације без понављања. Но, ако исти елементи могу да се понављају, као оно писмена у речима или цифре у бројним комбинацијама, онда имамо комбинације са понављањем и у томе случају добијамо, место факторијела *ступње* од m.

Да узмемо опет, да имамо у опште m елемената, које означавамо писменима:

$$a, \; b, \; c, \; d, \; \ldots . \; k, \; l.$$

Од ових елемената можемо да добијемо ове комбинације, узимљући све по два и два елемента:

$$\begin{array}{l} aa, \; ab, \; ac, \; \ldots . \; ak, \; al; \\ ba, \; bb, \; bc, \; \ldots . \; bk, \; bl; \end{array}$$

и т. д., — које се све разликују једна од друге или писменима, којима су представљене или (последовањем) редом, којим су та писмена написана.

Број горњих комбинација представљен је очевидно са m^2.

Са истим писменима могли би да добијемо m^3 комбинација, узимљући све по три и три елемента; m^4 комбинаци а, узимљући све по четири и четири елемента и т. д., — и најзад могли би добити m_n комбинација узимљући све по n и n елемената, тако дакле да је у опште:

$$mPP_n = m^n. \tag{9}$$

На против, ако само оне комбинације сматрамо као различне, које имају баш и различне елементе, а не и оне, које се разликују само редом, којим су ти елементи написани, онда добијамо са свим друге бројеве као бројеве комбинација.

Тако број свију *Униона* или комбинација прве класе од m елемената је:

$$= m.$$

Број свију комбинација без понављања друге класе од m елемената је, према пређашњем:

$$\frac{m(m-1)}{1.\;2},$$

ка овоме броју долазе још m комбинација са понављањем и ми добијамо, као број *Биниона* или комбинација друге класе са понављањем:

$$\frac{m(m-1)}{1.\;2} + m = \frac{m^2 - m + 2m}{1.\;2} = \frac{m(m+1)}{1.\;2} \quad \text{дакле:}$$

$$mKK_2 = \frac{m(m+1)}{1.\;2} \tag{10}$$

Да би добили број *Терниона*, ми имамо да је број терниона без понављења:

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\;2.\;3},$$

и овај се број односи на Тернионе облика abc. Ка овоме броју треба додати још Тернионе облика a^3 којих је на броју m, затим и оне облика a^2b, којих је на броју $m(m-1)$; према томе је број Терниона са понављањем:

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\;2\;.\;3} + m + m(m-1) = \frac{m}{6}(m^2 + 3m + 2)$$

или:

$$mKK_3 = \frac{m(m+1)(m+2)}{1.\;2.\;3}. \tag{11}$$

На исти начин добили би за број *Кватерниона* са понављањем:

$$mKK_4 = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.\;2.\;3.\;4},$$

па и за бројеве *Квиниона*, *Сениона* и т. д.

У опште дакле, добили би за број разних комбинација и то из n елемената од оних m, аналого са пређашњим број:

$$mKK_n = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n}, \quad (13)$$

који, ако помножимо и бројиоца и имениоца бројем $1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (m-1)$, можемо да напишемо и овако:

$$mKK_n = \frac{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (m-1)\ .\ 1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n}. \quad (14)$$

IV.

Биномни образац.

12.

Пажљивијим посматрањем свега онога што смо у пређашњим одељцима за комбинације и за бројеве свију могућних комбинација а из извесног броја елемената добили, уверавамо се убрзо, да се теорија о комбинацијама и изналажење бројева комбинација идентификује са једном од основних алгебарских операција а на име, са алгебарским множењем.[1]) Алгебарско множење, као што је познато, има ту карактерну особину, да оно, кад су чиниоци, који имају да се помноже сложени, (т. ј. кад се састоје из више чланова или делова, који су

([1] Cournot вели: «Теорија комбинација или наука о комбинацијама (синтактика) је апкстрактна и чисто рационална наука, као што је и наука о бројевима па и геометрија. Она стоји са свима осталим гранама математичких знања а нарочито са алгебром у тесној вези и усавршаност или елеганција алгебарских образаца и састоји се баш у томе, што се закони комбинација, удесно избраним означењем у тим обрасцима са великом јасноћом понаједак и без икаквих заплета испредају. Свака научна синтеза и произишла је на основу ма каквога низа комбинацаја извесних основних или првобитних факата, и са овога гледишта посматране, како *логика*, тако и *општа граматика*, *хемија* и т. д. исто тако као и *алгебра* у почетку своме, у својој основи, биле су зависне од синтактике или науке о комбинацијама«.

знацима $+$ или $-$ спојени), даје тоталан производ раван збиру свију парцијалних производа, које би добили множењем свакога члана или свакога дела једнога чиниоца, са сваким делом другога чиниоца.

Осем тога, познато је и то: да је са свим све једно при множењу два броја, који ћемо узети као множитељ а који као множимак, и најзад и то: да бројна вредност производа од произвољнога броја чинилаца, ни уколико не зависи од тога, којим ћемо редом ми те чиниоце множити.

Из свега овога следује, да ми алгебарским множењем полинома:

$$a + b + c + d + \ldots \qquad \text{и т. д.}$$

са другим полиномом:

$$a' + b' + c' + d' + \ldots \qquad \text{и т. д.}$$

можемо да добијемо све комбинације, које би могли да оличимо, кад би комбиновали сва поједина слова из реда слова:

$$a,\ b,\ c,\ d, \ldots \text{ и т. д.}$$

са појединим словима из реда слова:

$$a',\ b',\ c',\ d', \ldots \text{ и т. д.}$$

Да би напред поменуту идентичност, која постоји између теорије о комбинацијама и алгебарског множења боље уочили, ми ћемо да помножимо неколико чланова сложенога облика и то најпре:

$$(x+a),\ (x+b),\ (x+c),\ (x+d) \ldots \text{ и т. д.}$$

Ако помножимо $(x+a)$ са $(x+b)$, онда добијамо производ:

$$(x^2 + (a+b)x + ab.$$

Множењем $(x+a)$ са $(x+b)$ и $(x+c)$ добијамо производ:

$$x^3 + (a+b+c)\,x^2 + (ab+ac+bc)\,x + abc.$$

Множењем: $(x+a)$ са $(x+b)$ и $(x+c)$ па и са $(x+d)$ добијамо производ:

$$\begin{aligned} x^4 + (a+b+c+d)x^3 &+ (ab+ac+bc+ad+bd+cd)x^2 \\ &+ (abc+abd+acd+bcd)\,x \\ &+ abcd; \end{aligned}$$

И т. д.

Ако најзад помножимо m сложених чинилаца овога облика:

$$(x+a),\ (x+b),\ (x+c), \ldots (x+k),\ (x+l)$$

и производ уредимо по падајућим ступњима од x, то је по аналогији, изведеној из горњих производа, производ из m чинилаца очевидно представљен овим општим изразом:

$$\begin{aligned} x^m &+ (a+b+c+\ldots k+l)\ x^{m-1} \\ &+ (ab+ca+\ldots\ldots+kl)\ x^{m-2} \\ &+ \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ + \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &+ \ abcd\ \ldots\ kl. \end{aligned}$$

Сматрајући овај производ ми видимо, да је сачинилац од x^{m-1} збир свију оних m количина:

$$a,\ b,\ c\ d, \ldots\ldots k,\ l,$$

што се по истоме реду находе у појединим члановима; сачинилац од x^{m-2} опет је збир разних производа из све по две и две од оних количина: $a, b, c, \ldots\ к, l$; сачинилац од x^{m-3} то је збир разних *производа* из

све по три и три од оних m количина и т. д; све до онога члана, који је од m слободан и који је производ од свију оних m количина, дакле:

$$abcde\ \ldots\ kl.$$

Но, ако узмемо да су све ове количине међу собом једнаке, дакле да је:

$$a = b = c = \ldots\ldots = k = l,$$

онда имамо место означеног множења

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\ \ldots\ldots\ (x+k)\,(x+l)$$

сада: $(x+a)(x+a)(x+a)\ \ldots\ldots\ (x+a)(x+a)$ и то m-пута, или краће:

$$(x+a)^m.$$

Као збир свију горњих количина имамо сада број:

$$m\,a.$$

Збир производа из све по две и две од тих једнаких количина је (види mK_2):

$$\frac{m(m-1)}{1.\ \ 2}\ a^2;$$

збир производа из све по три и три од оних количина је (види mK_3):

$$\frac{m(m-1)\,(m-2)}{1.\ \ 2.\ \ 3}\ a^3;$$

збир производа из све по четири и четири од оних количина је (види mK_4):

$$\frac{m(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.}\ a^4;$$

И т. д.

Најзад је збир производа из све n и n од оних количина, већ познати број mK_n или:

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots n};$$

који представља сачиниоца онога члана развијенога бинома $(x+a)^m$, у коме се налази a подигнуто на n-ти а x на $(m-n)$-ти ступањ, дакле: $a^n.\ x^{m-n}$

Израз који нам даје све горе поменуте сачиниоце, јесте један од најважнијих, основних израза алгебриних, који је познат под именом: *Њутнов биномни израз или као што је уобичајено, биномни образац.*

Са важности његове, а поради даље употребе, ми га исписујемо овде са свим:

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1}a.x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}a^2.x^{m-2} + \ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots n}a^n.x^{m-n}$$

$$+ \quad \ldots\ldots\ldots \quad + a^m;$$

или ако ставимо *биномне сачиниоце*:

$$\left.\begin{aligned}
\binom{m}{1} &= \frac{m}{1},\\
\binom{m}{2} &= \frac{m(m-1)}{1.\ 2},\\
\binom{m}{3} &= \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3},\\
\binom{m}{4} &= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\binom{m}{n} &= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots m-n+1}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ldots n},
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

онда добијамо биномни образац и у другој форми написан:

$$(x+a)^m = x^m + \binom{m}{1}a.x^{m-1} + \binom{m}{2}a^2x^{m-2} + \ldots$$

$$+ \binom{m}{n}a^n x^{m-n} + \ldots + a^m. \qquad (16)$$

За целе и положне вредности од m имамо следеће вредности биномних сачинилаца.

Биномни сачиниоци $\binom{m}{n}$.

за m	за $n =$ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

13.

Ако у горњи биномни израз уведемо претпоставку, да је:

$$x = 1, \quad a = 1,$$

онда са овим вредностима можемо лако да дођемо до основе, на којој добијамо вероватноће за онај случај, кад у каквоме суду имамо m лоптица, па хоћемо да знамо колике су вероватноће, да ћемо негледајући а машући се руком, извући из суда или какав *непаран* или *паран* број лоптица. У томе случају добијамо:

$$2^m = 1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \cdots\cdots + 1.$$

или:

$$2^m - 1 = \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \cdots\cdot + 1 \cdots\cdots \quad (17)$$

што значи: да је збир свију могућних комбинација из m елемената, узимљући најпре све по један и један, за тим по два и два, три и три елемента и т. д. (пошто симболички чланови у изразу $2^m - 1$, дакле:

$$\binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \binom{m}{3}, \text{ и т. д.}$$

представљају комбинације без понављања и то по реду mK_2, mK_3 и т д.)

$$= 2^m - 1;$$

овај број представља дакле за поменути случај *све могућне изгледе.* Ако уведемо у биномни израз и претпоставку, да је:

$$x = 1, \quad a = -1,$$

онда добијамо:

$$(1 - 1)^m = 1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \binom{m}{4} - \cdots\cdot$$

или:

$$0 = 1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \binom{m}{4} - \cdots;$$

од куда је, ако пребацимо 1 на леву страну:

$$-1 = -\binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \binom{m}{4} - \cdots\cdot$$

или:

$$1 = \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \binom{m}{4} + \cdots\cdot \quad (18)$$

Из ове последње једначине видимо, да збир положних чланова, а на име:

$$\Sigma_+ = \binom{m}{1} + \binom{m}{3} + \binom{m}{5} + \cdots\cdot$$

представља збир бројева свију комбинација добивених из непарних бројева елемената, дакле са: 1, 3, 5, 7.... елемената, а да збир свију одречних чланова и то:

$$\Sigma_- = -\binom{m}{2} - \binom{m}{4} - \binom{m}{6} - \cdots\cdot$$

представља опет збир бројева свију комбинација добивених из парних бројева елемената, дакле из сваких:

2, 4, 6, 8 .... елемената.

Сабирањем једначина означених са (17) и (18) добијамо: $2^m - 1 + 1$ или:

$$2^m = 2\binom{m}{1} + 2\binom{m}{3} + 2\binom{m}{5} + \cdots\cdot$$

дакле израз, у коме више не придолазе бројеви комбинација добивених из парних бројева елемената, и из кога следује као збир бројева свију комбинација добивених из *непарних бројева* елемената:

$$\frac{1}{2}\, 2^m = 2^{m-1} = \binom{m}{1} + \binom{m}{3} + \binom{m}{5} + \cdots\cdot \quad (19)$$

Број 2^{m-1} представља повољне изгледе за комбинације непарних бројева и вероватноћа, да ће се какав *непаран* број лоптица извући, представљена је разломком:

$$\underset{1,3,5,7\dots}{b} = \frac{2^{m-1}}{2^m - 1}.$$

Помоћу израза под (19) можемо сад лако да определимо и збир бројева свију комбинација добивених из *парних бројева* елемената; он је с погледом на једначине (17) и (19), и то ако од једначине (17) одузмемо једначину (19):

$$(2^m - 1) - 2^{m-1} = 2^{m-1} - 1. \qquad (20)$$

Број $2^{m-1} - 1$ представља дакле повољне изгледе за комбинације парних бројева и вероватноћа, да ће се какав паран број лоптица извући, представљена је разломком:

$$\underset{2,4,6,8\dots,}{b} = \frac{2^{m-1} - 1}{2^m - 1}.$$

Сравњујући горњи израз под (19) добивен, дакле 2^{m-1} са оним под (20) добивеним $2^{m-1} - 1$ видимо, да је број комбинација, које се добијају из непарних бројева елемената, свагда за јединицу већи од броја комбинација, које се добијају из парних бројева елемената, па било *m* по себи паран или непаран број, дакле је, свагда:

$$\underset{1,3,5,7\dots}{b} > \underset{2,4,6,8\dots}{b}$$

Из овога последњега резултата следује, да у игри «*Лио или Тако*» има истина више изгледа за «*Лио*», него ли за «*Тако*», али та је разлика између дотичних вероватноћа тако незнатна, да озбиљно не може ни да се узме у рачун.

14.

На крају ових наших кратких и општих основа из теорије о комбинацијама, хоћемо напред поменуто да објаснимо и са још неколико примера.

Први пример. Као што ће бити познато *Лутрија француска* (La Loterie royale de France) која је установљена под старом владом, укинута 1793., обновљена 1797. и најзад са свим укинута у години 1839. имала је свега 90 нумера, од којих је при сваком вучењу излазило по пет нумера. При тој лутрији из свију 90 нумера. могло је свега да се извуче (све подједнако могућне комбинације):

$\binom{m}{1} = \binom{90}{1} = 90$ *простих згодитака* или комбинација 1 по 1, јер их је толико у опште и могуће;

$\binom{m}{2} = \binom{90}{2} = \frac{90.89}{1.\ 2} = 4005$ *Амба* (ambes) или комбинација све по две и две нумере;

$\binom{m}{3} = \binom{90}{3} = \frac{90.89.\ 88}{1,\ 2.\ 3} = 117\,480$ *Терна* (ternes) или комбинација све по три и три нумере;

$\binom{m}{4} = \binom{90}{4} = \frac{90.89.88.87}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 2\,555\,190$ *Кватерна* (quaternes) или комбинација све по четири и четири нумере; и најзад

$\binom{m}{5} = \binom{90}{5} = \frac{90.89.88.87.86.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} = 43{,}949.268$ *Квина* (quines) или *Квинтерна* т. ј. комбинација све по пет и пет нумера.

Из вучених 5 нумера, које при сваком вучењу изилазе, могућни су свега:

$\binom{m}{1} = \binom{5}{1} = 5$ *простих згодитака*;

$\binom{m}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5.4}{1.2} = 10$ *амба*;

$\binom{m}{3} = \binom{5}{3} = \frac{5.4.3.}{1.2.3.} = 10$ *Терна*;

$\binom{m}{4} = \binom{5}{4} = \frac{5.4.3.2.}{1.2.3.4.} = 5$ *Кватерна*; и најзад

$\binom{m}{5} = \binom{5}{5} = \frac{5.4.3.2.1.}{1.2.3.4.5.} = 1$ *Квинтерно*. Ова последна игра била је забрањена.

Из горњих бројева можемо сад лако да определимо вероватноће за добитак, кад се на овој лутрији игра. а тако исто и противне вероватноће, дакле вероватноће за добитак банкин (односно губитак играчев).

За прост згодитак има играч само 5 повољних, а $90 - 5 = 85$ неповољних случајева и вероватноћа, да ће играч добити, равна је:

$$\mathfrak{b}_1 = \frac{5}{90},$$ а банкина вероватноћа или

невероватноћа играчева је: $\mathfrak{b}_{n_1} = \frac{85}{90}$.

Онај који положи на две нумере или *амбо* (т. ј. да добије, кад његове две нумере изађу), он има, пошто су 10 амба могућни из пет нумера а свега је 4005 подједнако могућних комбинација или случајева, за амбе само 10, који су му повољни, а $4005 - 10 = 3995$ неповољних, то је вероватноћа, да ће играч добити овде равна:

$$\mathfrak{b}_2 = \frac{10}{4005},$$

а вероватноћа, да ће банка добити или невероватноћа играчева она је равна:

$$\mathfrak{b}_{n_2} = \frac{3995}{4005}.$$

Онај пак, који положи на три нумере или *терно*, има опет између 117480 подједнако могућних случајева само 10 повољних, а $117480 - 10 = 117470$ неповољних, и вероватноћа, да ће играч добити овде је:

$$\mathfrak{b}_3 = \frac{10}{117480} = \frac{1}{11748},$$

а вероватноћа, да ће банка добити или играчева невероватноћа је:

$$\mathfrak{b}_{n_3} = \frac{117470}{117480}.$$

Најзад, да играч добије *Кватерно*, вероватноћа је његова само:

$$\mathfrak{b}_4 = \frac{5}{2\,555\,190} = \frac{1}{511038},$$

а вероватноћа да ће банка добити или играчева невероватноћа за овај случај:

$$\mathfrak{b}_{n_4} = \frac{2555185}{2555190}.$$

Из овога примера види се, да се све вероватноће за банкин добитак или играчев губитак (невероватноће играчеве) веома мало разликују од јединице, дакле, да је готово извесно, да ће при таквој игри играч изгубити, и према томе може лако да се закључи, да су овакве лутријске установе у основи својој веома неморалне и да државе, које би желеле да се у границама њихним и морал у народу високо цени и шири, не би требале овакве установе никако ни да дозволе.

Други пример. При игрању карата, која се зове *пикет*, састоји се тако звано *давање* (делење) у томе, да се 32 карте деле у четири групе или гомиле, од којих *две* и то оне, које играчи добију, имају свака по 12 карата, а оне *две* остале групе једна 5 а друга оне заостале 3 карте, које представљају тако звани талон (talon). Број комбинација или боље, број начина, на које се 32 карте на 4 групе поделити могу, износи према пређашњем изразу (види стр. 49):

$$\frac{1.2.3.4.\ldots\ldots\ldots(m+n+p)}{1.2.3.\ldots m.\;1.2.3.\ldots n.\;1.2.3.p}$$ и пошто

је овде:

$$m = 12,\; n = 12,\; p = 5,\; r = 3$$

па дакле $m + n + p + r = 12 + 12 + 5 + 3 = 32$,

па дакле: $$\frac{1.\,2.\,3.\,4.\ldots\ldots 32}{1.\,2.\,3.\ldots 12.\;1.\,2.\,3.\ldots 12.\;1.2.3.4.5.\;1.2.3.}$$

или:

$$1\;592\;814\;947\;068\;800;$$

од куда следује, да је веома сумњиво, да ли су 32 карте од времена од како су их Кинези пронашли (у Европи су се почеле играти у XIV веку) па до данас, на све могућне начине у четири групе у опште већ подељене.

Ако би од свију напред израчунатих комбинација, водили рачуна само о онима, у којима би се сва 4 кеца налазила у једној гомили од 12 карата и то да кажемо у гомили онога играча, који први изиграва, то би нашли број комбинација у томе случају, кад би замислили да су она 4 кеца издвојена и ми би само оних заосталих 28 карата делили на све могућне начине у 4 гомиле, узимљући у гомилу онога играча, који први изиграва, сад само 8 карата, у гомилу другога играча опет 12 карата и најзад у оне остале две гомиле, које талон представљају, опет 5 односно 3 карте. Тражени број комбинација у овом случају је због: $m = 8,\; n = 12,\; p = 5,\; r = 3$ и $m + n + p + r = 28$:

$$\frac{1.\,2.\,3.\,4.\ldots\ldots 28.}{1.\,2.\ldots 8.\;1.\,2.\,3.\ldots 12.\;1.2.3.4.5.\;1.\,2.\,3}$$

или

21 925 567 263 600;

однос између овога броја и онога напред нађенога је:

$$\frac{9.\ 10.\ 11.\ 12.}{29.\ 30.\ 31.\ 32.}=\frac{99}{7192}=0{,}0137653,$$

што представља и вероватноћу у поменутом случају, т. ј. вероватноћу, да ће онај играч, који први изиграва сва 4 кеца добити. И т. д.

Најпотребнији ставови из рачуна вероватноће[1]).

V.

Проста вероватноћа (апсолутна и релативна).

15.

Вероватноћа каквога догађаја то је, као што смо видели: *однос између изгледа, који су томе догађају повољни и свију подједнако могућих изгледа.* Ову смо вероватноћу назвали *апсолутном* или *математичком вероватноћом*, и представили у опште разломком:

[1]) Laplace je у своме већ поменутом делу: Essai philosophique sur les probabilités, Sixième Edition, поставио ових десет ставова:

I Principe.

Le premier de ces principes est la définition même de la probabilité qui, comme on l'a vu, est le rapport du nombre des cas favorables à celui de tous les cas possibles.

II Principe.

Mais cela suppose les divers cas également possibles. S'ils ne le sont pas, on déterminera d'abord leurs possibilités respectives dont la juste appréciation est un des points les plus délicats de la théorie des hasards. Alors la probabilité sera la somme des possibilités de chaque cas favorable.

III Principe.

Si les évènemens sont independans les uns des autres, la probabilité de l'existence de leur ensemble est le produit, de leurs probabilités particulières. Généralement, la probabilité qu'un événement simple dans les mémes circonstances, arrivera de suite un nombre donné de fois, est égale é la probabilité de cet evénement simple, élevée à une puissance indiquée par ce nombre.

IV Principe.

Quand deux évènemens dépendent l'un de l'autre, la probabilité de l'évènement composé est le produit de la probabilité du premier évènement étant arrivé, l'autre arrivera.

$$b=\frac{p}{m}=\frac{p}{p+n},$$

где опет под p разумемо све догађају повољне, под n догађају неповољне изгледе, а под $m=p+n$ број свију подједнако могућих изгледа.

Невероватноћа истога догађаја биће представљена разломком:

V Principe.

Si l'on calcule à priori, la probabilité de l'évènement arrivé, et la probabilité d'un évènement composé de celui-ci et d'un autre qu'on attend; la seconde probabilité, divisée par la première, sera la probabilité de l'évènement observé.

VI Principe.

Chacune des causes auxquelles un événement observé peut être attribué, est indiquée avec d'autant plus de vraisemblance, qu'il est plus probable que cette cause étant supposée exister, l'évènement aura lieu; la probabilité des l'existence d'une quelconque dé ces causes est donc une fraction dont le numérateur est la probabilité de l'évènement, résultante de cette cause, et dont le dénominateur est la somme des probabilités semblables relatives à toutes les causes: si ces diverses causes considérées á priori, sont inégalement probables, il faut, au lieu de la probabilité de l'évènement, résultante de chaque cause, employer le produit de cette probabilité, par la possibilité de la cause elle-même. C'est le principe fondamental de cette branche de l'analyse des hasards, qui consiste á remonter des évènemens aux causes.

VII Principe.

La probabilité d'un évènement futur est la somme des produits de la probabilité de chaque cause, tirée de l'évènement observé, par la probabilité que cette cause existant, l'évènement futur aura lieu.

VIII Principe.

Lorsque l'avantage dépend de plusieurs événemens, on l'obtient en prenant la somme des produits de la probabilite de chaque événement, par le bien attaché á son arrivée.

IX Principe.

Dans une série d' évènemens probables, dont les uns produisent un bien, et les autres une perte, an aura l'avantage qui en résulte en faisant une somme deproduits de la probabilité de chaque événement favorable par le bien qu' il procure eten retranchant de cette somme celle des produits de la probabilité de chaque événement défavorable par la perte qui y est attaché. Si la seconde somme l' emporte sur le premiére, la bénéfice devient perte, et l' espérance se change en crainte.

X Principe.

Le valeur relative d' une somme infiniment petite est égale à sa valeur absolue divisée par le bién total de la personne intéressée.

$$b_n = \frac{n}{p+n} = 1 - \frac{p}{p+n} = (1 - b) \qquad (21)$$

Ако доведемо у свезу изразе:

$$b = \frac{p}{p+n} = \frac{p}{m} \text{ и } b_n = \frac{n}{p+n} = \frac{n}{m},$$

онда видимо, да се вероватноћа и невероватноћа за један и исти догађај допуњују до јединице и да је дакле свакад:

$$b + b_n = 1, \qquad (22)$$

што је и по себи увиђавно, јер у случају, кад је реч о каквоме догађају, ту може у опште и да буде само ово двоје: да се тај догађај догоди или да се никако и не догоди. Горњи резултат под (22) и казује нам да је извесно, да ће једно од тога двога морати бити.

Но помоћу горњега резултата долазимо ми и до овога закључка. Ако је вероватноћа каквога догађаја

$$b = \frac{1}{2},$$

то следује за невероватноћу тога истога догађаја:

$$b_n = 1 - b = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

дакле је у томе случају:

$$b = b_n = \frac{1}{2},$$

и за такав догађај кажемо да је *сумња*, јер се такав догађај може исто тако лако догодити, као и недогодити. У томе је случају како догађење тако и недогађање истога догађаја *подједнако вероватно*.

Са појмовима о вероватноћи и невероватноћи у тесној је вези и појмање *опкладе*, и с тога ћемо укратко да се дотакнемо и ње.

Кад је у опште вероватноћа каквога догађаја b, онда је његова невероватноћа $(1 - b)$ и ми можемо да ставимо:

$$b : b_n = b : (1 - b),$$

или

$$b : b_n = \frac{b}{1-b} : 1. \qquad (23)$$

Једначина (23) представља основу за опкладу и показује нам, до које би границе смели са улогом да идемо, те да са онаквом истом вероватноћом ишчекујемо да опкладу добијемо, као што то и наш противник ишчекује и она речима исказана гласи: *на сваку јединицу улога нашега противника, ми можемо да положимо* $\frac{b}{1-b}$ *па да са еквивалентним изгледом ишчекујемо догађај о коме ми тврдимо да ће наступити.* За случај, да се кладимо с киме, да ћемо у једноме бацању са две коцке добити збир поена раван 5, имамо као апсолутну вероватноћу (види таблицу свију могућних комбинација за две коцке) тога догађаја (пошто тај збир следује из комбинација: 1.4, 2.3, 3.2 и 4.1 дакле којих је на броју 4):

$$b = \frac{4}{36} = \frac{1}{9};$$

а за невероватноћу истога збира (пошто су томе збиру 32 комбинације неповољне):

$$b_n = \frac{32}{36} = \frac{8}{9},$$

што је, као што видимо равно и:

$$b_n = 1 - b = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Пошто при опклади треба и једна и друга страна са *подједнаким изгледом* да ишчекује испуњење свога тврђења, то да се не би ни једна ни друга страна преварила, морају се улози односити један према другоме, као:

$$b : b_n = \frac{b}{1-b} : 1 = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{8}{9}} : 1 = \frac{1}{8} : 1$$

или у целим бројевима:

$$b : b_n = 1 : 8;$$

дакле, колико би год пута ми бацајући две коцке добили збир поана раван броју 5, толико би пута имао противник наш да нам положи по 8 динара; а ми би њему били дужни за сваки пут, кад год не би број поана испао раван 5, да положимо само по 1 динар.

Исто тако, ако је н. пр. $b = \frac{1}{3}$, онда је:

$$\frac{b}{1-b} = \frac{1}{2} = 1 : 2$$

дакле: $$b : b_n = 1 : 2,$$

што значи, да у томе случају, можемо да примимо опкладу но само тако, да на свака 2 противникова динара, положимо 1, или на његова 4 наша 2 и т. д.

Из једначине:

$$b = \frac{p}{m},$$

добијамо: $$p = m.\, b, \tag{24}$$

или речима: *број повољних изгледа за какав догађај добијамо, ако вероватноћу тога догађаја помножимо са бројем свију подједнако могућних изгледа.*

16.

Досад посматрана апсолутна вероватноћа, односила се на све могућне изгледе само једне и исте врсте догађаја. Од ове апсолутне вероватноће треба разликовати токо звану *релативну вероватноћу*, која се тада добија, кад је од свију могућних изгледа једне врсте догађаја самом природом задатка, неки број изгледа искључен и ми желимо да дођемо до вероватноће догађаја у односу према некоме другоме догађају, но из изгледа какве друге врсте догађаја.

Ако имамо у каквоме суду:

m	белих	лоптица
n	црних	«
v	црвених	«

то је апсолутна вероватноћа, да ћемо при једном вучењу једну белу лоптицу извући:

$$b_1 = \frac{m}{m+n+v};$$

апсолутна вероватноћа, да ћемо при једном вучењу извући једну црну лоптицу:

$$b_2 = \frac{n}{m+n+v};$$

и најзад, апсол. вероватноћа, да ћемо при једном вучењу извући једну црвену лоптицу:

$$b_3 = \frac{v}{m+n+v}.$$

Но ако хоћемо да сравнимо ишчекивање за појав једне беле лоптице са ишчекивањем за појав једне црне лоптице и то при једном вучењу, онда је увиђавно, да ми можемо вучења црвених лоптица при овоме никако и да неузимамо у рачун, и тада ћемо имати свега:

$(m+n)$ подједнако могучних случајева, од којих су m повољни појаву једне беле, а n повољни појаву једне црне лоптице. Релативне вероватноће биће дакле:

$$\text{за белу лоптицу:} \quad {}_rb_1 = \frac{m}{m+n},$$

$$\text{за црну лоптицу:} \quad {}_rb_2 = \frac{n}{m+n}.$$

Али је:

$$\frac{m}{m+n} = \frac{\frac{m}{m+n+v}}{\frac{m+n}{m+n+v}} = \frac{\frac{m}{m+n+v}}{\frac{m}{m+n+v}+\frac{n}{m+n+v}},$$

$$\frac{n}{m+n} = \frac{\frac{n}{m+n+v}}{\frac{m+n}{m+n+v}} = \frac{\frac{n}{m+n+v}}{\frac{m}{m+n+v}+\frac{n}{m+n+v}},$$

па дакле и:

$$\left.\begin{aligned} {}_rb_1 &= \frac{b_1}{b_1+b_2} \\ {}_rb_2 &= \frac{b_2}{b_1+b_2} \end{aligned}\right\} (25)$$

и с погледом на ово можемо да кажемо: *релативна вероватноћа каквога догађаја (једне или друге врсте) равна је апсолутној вероватноћи његовој подељеној са збиром апсолутних вероватноћа тога ишчекиванога догађаја и догађаја, са којим онај први поређујемо.*

Сабирањем и ових релативних вероватноћа добијамо опет:

$${}_rb_1 + {}_rb_2 = \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} = \frac{b_1}{b_1+b_2} + \frac{b_2}{b_1+b_2} = 1.$$

Пример. Да узмемо да два играча играју под условом, да први играч добија, кад год у једном бацању са две коцке испадне збир поана $= 7$ (неводећи рачуна о осталима комбинацијама), а други, кад год збир поана у једном бацању испадне 4. Овде се као што видимо тражи релативна вероватноћа једнога догађаја према овоме другоме или обрнуто.

Апсолутна је вероватноћа за збир поана $= 7$ (пошто из већ помињате тиблице свију могућних комбинација за две коцке имамо комбинације: 6.1, 2.5, 3.4, 4.3, 5.2, 6.1 дакле свега 6 повољних изгледа) или да ће први играч добити:

$$b_1 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$

а апсолутна вероватноћа за збир поана $= 4$ (пошто за њ имамо само: 1.3, 2.2 и 3.1, дакле свега три повољна изгледа) или да ће други играч добити:

$$b_2 = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Релативна вероватноћа, да ће први играч добити биће дакле:

$$\frac{b_1}{b_1+b_2} = \frac{^1/_6}{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}} = \frac{12}{18} = \frac{6}{9};$$

а релативна вероватноћа, да ће други играч добити биће:

$$\frac{b_2}{b_1+b_2} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}} = \frac{1}{3} = \frac{3}{9},$$

дакле релативне вероватноће имају-се, као 6:3 или 2:1, што је и из самих бројева повољних комбинација и по себи разумљиво.

Сложена вероватноћа за догађаје, који се узајамно искључују и догађаје који се не искључују.

17.

И апсолутна и релативна вероватноћа односиле су се као што смо видели само на по један догађај и с тога су и могле да се назову вероватноћама простога догађаја. Међу тим, ако вероватноћа обухвата више догађаја, онда се она у томе случају зове *сложена веро-*

ватноћа. Да би ово како ваља разумели, да узмемо да имамо у опште M подједнако могућних изгледа, од којих нека су:

p_1 повољни догађају прве врсте,
p_2 « « друге врсте,
p_3 « « треће врсте,
и т. д.,

то су апсолутне вероватноће или просте вероватноће свакога од тих догађаја, по реду:

$$B_1 = \frac{p_1}{M}; \quad B_2 = \frac{p_2}{M}; \quad B_3 = \frac{p_3}{M}, \qquad \text{и т. д,}$$

при чему се и по себи разуме да је: $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = M$.

Ако се тражи сад вероватноћа, да ће се *од прве или друге врсте* догађаја какав догађај десити, онда је очевидно, да та вероватноћа мора да буде равна збиру апсолутних вероватноћа одговарајућих догађаја, јер у томе случају, кад ишчекујемо, да се деси *или* догађај прве *или* догађај друге врсте, ми имамо за догађање *или једног или другог догађаја* укупно $(p_1 + p_2)$ повољних изгледа, и вероватноћа сложеног догађаја, који је *сложен из два*, добија се:

$$B_1^2 = \frac{p_1 + p_2}{M} = \frac{p_1}{M} + \frac{p_2}{M} = B_1 + B_2.$$

Овде нам ваља напоменути, да је, кад се један догађај догодио, већ самим тим догађање онога другога по себи искључено.

Аналого са горњим, добијамо да је вероватноћа сложенога догађаја, који је *сложен из три* догађаја,

$$B_1^3 = B_1 + B_2 + B_3.$$

и т. д.

Најзад вероватноћа сложенога догађаја, који је сложен *из n догађаја, који се узајамно искључују*, равна је:

$$B_1^n = B_1 + B_2 + B_3 + \ldots\ldots + B_n = [B_i]^{1)} \quad (26)$$

и ми добијамо као правило:

вероватноћа, да ће се који од ишчекиваних догађаја буди које врсте и десиги, равна је збиру апсолутних вероватноћа свију појединих догађаја а из свију врста.

Ако мора буди који од искључујућих се догађаја да наступи, ако је ово дакле извесно, онда по пређашњем мора да буде свакад:

$$B_1^n = [Bi] = +\ 1 \quad (27$$

Да објаснимо и ово једним примером.

Апсолутна вероватноћа, да ће се са две коцке а у *једном бацању* добити збир поана $= 7$, била је:

$$B_1 = \frac{6}{36}.$$

Апсолутна вероватноћа, да ће се при једном бацању са две коцке добити збир поана $= 8$, добија се (пошто из помињате таблице добијамо као број повољних комбинација за тај збир: 2.6, 3.5, 4.4, 5.3, 6.2, дакле свега 5 повољних изгледа) опет:

$$B_2 = \frac{5}{36},$$

и према томе је вероватноћа, да ће се *или* 7 *или* 8 при једном бацању са две коцке добити:

$$B_1^2 = B_1 + B_2 = \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36},$$

што је и à priori увиђавно; а да се ова два догађаја узајамно искључују и то је очевидна ствар, јер, ако је при *једном бацању* са две коцка, збир поана раван броју 7 већ добивен, онда се при том истом бацању, онај други догађај, по коме би требао да испадне збир поана раван броју 8, више никако не може ни догодити. Исто тако вероватноћа, да ће се при једном бацању са две коцке добити *или* 7 *или* 8 или 9 (пошто су за овај последњи збир повољне комбинацијв: 3.6, 4.5, 5.4 и 6.3 дакле укупно 4) равна је:

---

1) Ћошкаста заграда представља збир аргумента у загради, чија казаљка i има све вредности почев од 1 па до n,

$$B_1^3 = B_1 + B_2 + B_3 = \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} = \frac{15}{36}$$

и т. д.

18.

Једначину (26) добили смо с претпоставком, да се догађаји искључују и да су нам апсолутне вероватноће свију појединих догађаја све по реду, са њиховим апсолутним вредностима познате. Но ако за извесни низ догађаја нису нам познате апсолутне вредности вероватноћа, већ само количине:

$$\omega_1, \ \omega_2, \ \omega_3, \ . \ . \ . \ . \ \omega_n,$$

које су сразмерне (и то све на једнак начин) тим вероватноћама, онда могу опет вероватноће

$$\boldsymbol{B}_1, \ \boldsymbol{B}_2, \ \boldsymbol{B}_3, \ . \ . \ . \ \boldsymbol{B}_n$$

да се определе, но с претпоставком, да се бар један од тих догађаја мора и догодити, дакле да је:

$$[\boldsymbol{B}_i] = 1.$$

Нека је $\boldsymbol{k}$ чинилац са којим треба сваку вероватноћу помножити, те да добијемо сразмерне бројеве: ω_1, ω_2, ω_3, . . . ω_n, онда је:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= k.\ \boldsymbol{B}_1 \\ \omega_2 &= k.\ \boldsymbol{B}_2 \\ \omega_3 &= k.\ \boldsymbol{B}_3 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \quad \vdots \\ \omega_n &= k.\ \boldsymbol{B}_n. \end{aligned}$$

Сабирањем добијамо:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots + \omega_n = k(\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{B}_3 + \ldots \boldsymbol{B}_n)$$

или:

$$[\omega_i] = k.\ [\boldsymbol{B}_i],$$

а како је: $[\boldsymbol{B}_i] = 1$, то је:

$$\boldsymbol{k} = [\omega_i]$$

чиме је чинилац $\boldsymbol{k}$ определен. Уводећи ову вредност за $\boldsymbol{k}$ у све једначине ω_1, ω_2, . . . ω_n, ми добијамо тражене вероватноће:

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{\omega_1}{[\omega_i]}; \ \boldsymbol{B}_2 = \frac{\omega_2}{[\omega_i]}; \ldots \ \boldsymbol{B}_n = \frac{\omega_n}{[\omega_i]}.$$

или речима: *кад знамо количине које су сразмерне са вероватноћама више догађаја што се искључују и од којих један мора безусловно да се деси, онда добијамо вероватноћу макаквога догађаја те врсте, ако тој вероватноћи сразмерну количину поделимо са збиром свију оних количина.*

19.

Ми можемо врло лако да нађемо вероватноћу и у оним приликама, кад један догађај други неискључује дакле и кад се више догађаја једновремено ишчекују, кад дакле неколико догађаја састављају у потпуном смислу *сложен догађај.*

Да узмемо најпре две врсте догађаја, и то нека је за прву врсту број свију подједнако могућних изгледа раван $\boldsymbol{M}_1$; а број повољних $\boldsymbol{p}_1$. Број свију подједнако могућних изгледа за догађај друге врсте нека је $\boldsymbol{M}_2$, а број повољних $\boldsymbol{p}_2$.

Апсол. вероватноћа, да ће наступити догађај прве врсте и то без обзира на догађај друге врсте, јесте:

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{\boldsymbol{p}_1}{\boldsymbol{M}_1};$$

апсол. вероватноћа да ће наступити догађај друге врсте без обзира на догађај прве врсте равна је:

$$\boldsymbol{b}_2 = \frac{\boldsymbol{p}_2}{\boldsymbol{M}_2};$$

а вероватноћу, да ће се обадва догађаја једновремено догодити или *сложену вероватноћу* у правом смислу добијамо овако.

Очевидна је ствар, да кад се догађаји неискључују, да *тада могу и један и други у исто време да се догоде.* У овоме горњем случају имамо ми M_1 подједнако могућних изгледа за догађај прве, а M_2 подједнако могућних изгледа за догађај друге врсте и сви ти подједнако могућни изгледи, могу један са другим да се комбинују да се споје, и спојени дају у друштву, као број свију подједнако могућних изгледа за *сложен догађај* производ: $M_1 \cdot M_2$.

Исто тако и они повољни изгледи (p_1) за догађај прве а и они (p_2) за догађај друге врсте, могу да се споје и спојени дају опет као број повољних изгледа за сложен догађај производ: $p_1 \cdot p_2$. Према томе је, *сложена вероватноћа*, да ће се *обадва* догађаја једновремено догодити:

$$\underset{1-2}{B} = \frac{p \cdot p_2}{M_1 \cdot M_2} = \frac{p_1}{M_1} \cdot \frac{p_2}{M_2} = b_1 \cdot b_2.$$

За сложену вероватноћу, да ће се *три догађаја* у исто време десити имамо аналого са горњим:

$$\underset{1-3}{B} = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3;$$

и т. д., или у опште, сложена вероватноћа, да ће се n *догађаја* у исто време десити:

$$\underset{1-n}{B} = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \cdots b_n \tag{28}$$

или речима: *сложена вероватноћа, да ће се неки број догађаја у исто време десити, равна је производу апсолутних вероватноћа свију појединих догађаја.* Или краће: *сложена вероватноћа равна је производу простих вероватноћа.*

Потпуна основаност овога става о вероватноћи сложенога догађаја увиђа се понајлак и à priori, јер је очевидна ствар, да је млого невероватније, да ће се више догађаја у исто доба догодити, него ли да ће се само један од њих догодити. Ова већа невероватноћа или боље, мања вероватноћа, потпуно је изражена производом апсолутних вероватноћа свију појединих догађаја, јер производ разломака, који су сваки за се мањи од јединице, све је мањи и мањи, што је год број тих разломака већи и већи. Овај став о вероватноћи сложенога догађаја, а за случај, кад се догађаји узајамно неискључују, веома је важан за наша даља излагања и с тога ћемо да га објаснимо и са једним примером.

20.

Да узмемо да у два суда имамо по неколико црвених и белих обликом својим потпуно једнаких лоптица (те да неможемо самим пипањем и негледајући да извучемо лоптицу коју би можда желели онда је *подједнако вероватно*. да ћемо при машању са руком или у један или у други суд извући једну ма како бојену лоптицу. Нека су сад у првом суду:

24 црвених лоптица
6 белих «

а у другом суду опет нека су:

15 црвених лоптица
5 белих «

Апсолутна вероватноћа, да ћемо из првога суда извући једну белу лоптицу равна је:

$$\frac{6}{24+6} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5};$$

апсолутна вероватноћа, да ћемо из другога суда извући такође једну белу лоптицу равна је:

$$\frac{5}{15+5} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$

Вероватноћа, да ћемо и из првог и из другог суда извући по једну белу лоптицу, дакле сложена вероватноћа (или вероватноћа да ће се у исто време појавити и тамо и тамо по једна бела лоптица) према добивеном стању, равна је:

$$\underset{1-2}{B} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}.$$

До истога овога резултата можемо и простим резоновањем да дођемо овако. За извлачење беле лоптице из првога суда, имамо између 30 подједнако могућних изгледа, само 6 повољних, и вероватноћа, да ћемо једну белу лоптицу извући, равна је као што смо и нашли: $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.

Кад је вучење из првога суда већ свршено, онда је извлачење беле лоптице из другога суда још неизвесно, и сваки од изгледа, који су при вучењу из другога суда подједнако могућни, смањује очевидно горњу вероватноћу; а пошто је у овоме другоме суду свега подједнако могућних изгледа 20, то ће се и горња вероватноћа модификовати и постати сад само:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{20}.$$

Но међу овима подједнако могућним изгледима у другоме суду имамо опет 5 изгледа повољних за извлачење беле лоптице из другога суда. и ова околност повећава вероватноћу за 5 пута, и према томе је, сложена вероватноћа:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{20} \cdot 5 = \frac{1}{20},$$

дакле, као што смо и напред већ нашли.

21.

Став о сложеној вероватноћи догађаја, који се не искључују, изведен је истина за догађаје разних врста, но он очевидно вреди и за тај случај, кад имамо више догађаја једне и исте врсте дакле и тада, кад се догађаји *понављају*; јер, ако је апсолутна вероватноћа каквога догађаја једне врсте:

$$b = \frac{p}{M},$$

онда је вероватноћа, да ће се тај исти догађај n пута у застопце догодити:

$$\underset{(1-n)}{B} = \frac{p}{M} \cdot \frac{p}{M} \cdot \frac{p}{M} \cdot \ldots \qquad n \text{ пута},$$

или

$$\underset{(1-n)}{B} = \left(\frac{p}{M}\right)^n = b^n \qquad (29)$$

или и речима: *сложена вероватноћа поновљенога догађаја равна је апсолутној вероватноћи његовој подигнутој на ступањ, (који је раван броју) који показује, колико се пута дотични догађај ишчекује* (види III Principe, Laplace, Essai philosophique p. 14).

22.

Виши ступњи каквога чистога разломка, као што је познато, све су мањи и мањи и према томе је јасно, да је истоветно понављање једнога истога догађаја, који се иначе један пут веома лако могао да деси, невероватније и то све то више, што се год више и више пута исти догађај ишчекује. Лаплас помиње говорећи о овој ствари и ово (види: Laplace, Essai philos. p. 15). Претпоставимо, да је каква истинита ствар, какав историјски факат, *приповедан* 20 пута, т. је, нека се он одржао предањем с колена на колено у памтењу. Ако је поузданост или вероватноћа свакога саопштења, (la probabilité de chaque témoignage) била равна 0.9 (дакле веома мало различна од јединице) онда би била вероватноћа при последњем саопштењу (или вероватноћа, да је тај исти факат истоветно онако испричан како је и први пут приповедан) тек само:

$$0.9^{20} = 0.1216,$$

дакле мања и од $\frac{1}{8}$.

Ово нагло опадање вероватноће, може веома очигледно, да се представи и сравни са опадањем јасности што се опажа, кад се какав предмет гледа кроз неколико стаклених окана. Док поједина стаклена окна показују предмет или дају лик његов готово ни уколико неизменут (идентично са првим причањем каквога факта) дотле лик тога истога предмета, кад га гледамо кроз два, или кроз три, четири и т. д. окна (идентично са другим, трећим четвртим и т. д. причањем), постаје све нејаснији и нејаснији, докле се са свим и не изгуби[1].)

У чисто математичким наукама ту су најудаљеније неминовне последице исто тако поуздане, као и основни принципи, из којих су те последице изведене. Применом анализе на физичке предмете и појаве, преноси се вероватноћа претпоставака од којих се је пошло и на све остале последице.

У историјским пак наукама ово није случај и ма какву пажњу обратили историчари, те да се у закључцима својим не преваре, опет расти величина могућних грешака са сваким кораком даље и за удаљеније закључке овакве врсте, може да се каже, да је много вероватније, да ће они бити нетачни, него ли тачни.

Потпуности ради да поменемо нешто овде и о тако званој *модификованој вероватноћи* догађаја. Кад имамо два или више догађаја, онда могу ови догађаји да *зависе* један од другога или да *не зависе*. Вероватноће у ова два разна случаја, морају бити такође различне, а до њих долазимо овим простим резоновањем. Ако у каквоме суду имамо:

m белих лоптица
и n црних лоптица,

онда и до самога начина за вучење стоји, да ли ће догађаји бити један од другога независни или зависни.

[1]) Laplace p. 15. «Les historiens ne paraissent pas avoir fait assez d,attention à cette dégradation de la probabilité des faits, lorsqu'ils sont vus à travers un grand nombre de générations successives: plusieurs événements historiques, réputés certains, seraient au moins douteux, si on les soumettait à cette épreuve».

Што се начина тиче, ту можемо у главноме да разликујемо два разна начина:

1, извучена се лоптица, пошто је њена боја прибележена *враћа* опет у суд, и

2, извучена се лоптица више *не враћа* у суд.

У првоме случају, остаје однос између белих и црних лоптица непрестано једнак, дакле $m : n$, и појав ма какве лоптице, при другом вучењу, представља у односу на прво вучење са свим *независан* догађај.

У другоме пак случају, мења се горе поменути однос лоптица и појав ма какве лоптице при другом вучењу, представља у односу на прво вучење по све *зависан* догађај.

Вероватноћа, да ће се при првом вучењу (по првом начину) извући једна бела лоптица очевидно је:

$$\frac{m}{m+n};$$

а вероватноћа, да ће се и при другом вучењу (по првом начину) извући опет једна бела лоптица, с погледом на став под Бр. (29) ако га применимо на два догађаја, који се понављају и који су један од другога независни, била би:

$$\frac{m}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n} = \left(\frac{m}{m+n}\right)^2.$$

При вучењу по другоме начину, дакле кад је друго вучење од првога зависно, имамо као вероватноћу, да ће се при првом вучењу појавити једна бела лоптица опет:

$$\frac{m}{m+n} = B_1$$

али, пошто се извучена лоптица више *не враћа* у суд, то ће очевидно после првога вучења остати у суду још само:

$(m-1)$ белих, а свега $(m-1+n)$ белих и црних лоптица и вероватноћа, да ће се при следећем вучењу извући (по другоме начину) једна бела лоптица очевидно је сад само:

$$\frac{m-1}{m-1+n} = {}_{m}B_2.$$

Ова вероватноћа у односу на ону *првобитну* $\frac{m}{m+n}$, зове се *модификована* вероватноћа.

Но ако ишчекујемо, да се и по овоме другоме начину и у другоме вучењу појави опет бела лоптица, онда је с погледом на став под Бр. (28) вероватноћа у томе случају:

$$\underset{((1-2))}{B} = \frac{m}{m-n} \cdot \frac{m-1}{m-1+n} = B_1 \cdot {}_{m}B_2$$

или речима: *вероватноћа, да ће се два зависна догађаја заједно десити, равна је производу првобитне вероватноће првога и модификоване вероватноће другога догађаја* (при чему је модификација услед извесности првога догађаја и наступила).

Исто је тако и:

$$\underset{((1-2))}{B} = {}_{m}B_1 \cdot B_2 \text{ или у опште:}$$

$$\underset{((1-2))}{B} = {}_{m}B_1 \cdot B_2 = B_1 \cdot {}_{m}B_2 \qquad (30)$$

Горњи став изведен је на основу посматрања два различна зависна догађаја и за два вучења, али он вреди очевидно и за произвољан број вучења; јер истоветним резоновањем а у случају, кад тражимо вероватноћу, да ћемо (по другом начину вучења) у r вучења извући r пута узастопце белу лоптицу, долазимо до израза:

$$\underset{((1-r))}{B} = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m-1}{m+n-1} \cdot \frac{m-2}{m+n-2} \cdot \cdot \frac{m-r+1}{m+n-r+1}$$

Сложена вероватноћа поновљених догађаја, при понављању опажања.

23.

Често пута понављамо ми опажања у области егзактних наука и то тада, кад хоћемо да сматрамо разноврсне догађаје. Онда могу понајлак да се десе млога спајања једнога и истога догађаја, као и спајања разних догађаја. И ово, према досадањим питањима веома сложено питање, може да се упореди и објасни опет са извлачењем лоптица из каквога суда. С тога ћемо опет да наведемо случај кад из каквога суда вучемо лоптице обликом једнаке, али бојом различне. При овоме да узмемо, да после сваког вучења враћамо извучену лоптицу опет у суд, *како би однос између белих и црних лоптица непрестано исти остао.*

Ако имамо у суду:

m белих лоптица

n црних лоптица

и ако под догађајем A разумемо појав беле, а под догађајем B појав црне лоптице, онда у жељи, да посматрамо ова два разноврсна догађаја, можемо да ставимо себи овакву задаћу: да нађемо најпре, колика је вероватноћа, да се при првим вучењима (да кажемо при првом и другом вучењу) извуче два пут једна бела лоптица или што је то исто, да се догађај A два пут догоди.

Пошто имамо m белих и n црних лоптица, то је очевидно, да у овоме случају како за прво тако и за друго вучење имамо свега $(m+n)$ подједнако могућних изгледа (јер се лоптица после првог вучења опет у суд враћа); сваки одових $(m+n)$ изгледа при првом вучењу, може да се комбинује са оних $(m+n)$ изгледа при другом вучењу, ми имамо дакле за прва два вучења свега:

$(m+n)\cdot(m+n)$ подједнако могућних изгледа.

За догађај A имамо при првоме вучењу m повољних изгледа, а тако исто и при другоме вучењу и према томе имамо укупно $m\cdot m$ повољних изгледа за појав беле лоптице и при првом и при другом вучењу или за спајање догађаја A, дакле за сложен догађај: $A.A$.

Ако спојимо m повољних изгледа за догађај A при првом вучењу, са n повољних изгледа за догађај B, при другом вучењу онда за спајање догађаја A са B или за сложен догађај $A.B$ имамо свега $m.n$ повољних изгледа; исто толико $m.n$ повољних изгледа имамо за спајање догађаја B са A или за сложен догађај: $B.A$.

Најзад за спајање догађаја B са B у оба вучења или за сложен догађај $B\cdot B$ имамо као укупан број повољних изгледа: $n\cdot n$.

С погледом на све ово, ми добијамо дакле по обрасцу под Бр. (28):

вероватноћа за сложен догађај: $A.A = \dfrac{m.m}{(m+n)\;(m+n)}$

« « « « $A.B = \dfrac{m.n}{(m+n)\;(m+n)}$

« « « « $B.A = \dfrac{m.n}{(m+n)\;(m+n)}$

« « « « $B.B = \dfrac{n.n}{(m-n)\;(m+n)}$

или ако $A.B$ неразликујемо од $B.A$ (што у ствари и не треба да разликујемо) онда је

вероватноћа за сложен догађај $A.A = \dfrac{m^2}{(m+n)^2}$

« « « « $A.B$ и $B.A = \dfrac{2\,m\,n}{(m+n)^2}$

« « « « $B.B = \dfrac{n^2}{(m+n)^2}$

Како је сад: $(m^2+2mn+n^2)=(m+n)^2$, то се види, да су бројиоци ових напред изложених вероватноћа, чланови бинома $(m+n)$ *на други ступањ.*

Збир свију ових вероватноћа:

$$\frac{m^2}{(m+n)^2}+\frac{2mn}{(m+n)^2}+\frac{n^2}{(m+n)^2}=\frac{m^2+2\,mn+n^2}{m^2+2\,mn+n^2}=1$$

као што видимо, опет је раван јединици, јер је *извесно*, да ће се *у два вучења* ма који од сложених догађаја: $A.A$, $A.B$ или $B.A$ или најзад $B.B$ догодити.

Исто тако, за *три покушаја* или ако три пута вучемо, онда сличним пређашњим разоновањем за спајање три догађаја или за сложене догађаје:

$A.A.A$; $A.A.B$; $A.B.A$; $B.A.A$;
$B.B.A$; $B.A.B$; $A.B.B$; и $B.B.B$;

добијамо, као одговарајуће вероватноће, и то за

сложен догађај: $A.A.A$, вероватноћу $= \dfrac{m^3}{(m+n)^3}$

« « : $A.A.B$; $A.B.A$; $B.A.A$; $= \dfrac{3\,m^2n}{(m+n)^3}$

« » : $B.B.A$; $B.A.B$; $A.B.B. = \dfrac{3\,n^2m^3}{(m+n)^3}$

« « : $B.B.B = \dfrac{n^3}{(m+n)^3}$

Како је: $(m^3+3\,m^2n+3\,n^2m+n^3)=(m+n)^3$

то се види, да су и овде бројиоци изложених вероватноћа за спајање три догађаја, чланови бинома $(m+n)$ *на трећи ступањ.*

На исти начин добијамо, да су вероватноће, да ће се у *четири вучења* догодити ма који сложен догађај:

$A.A.A.A$; $A.A.A.B$; $A.A.B.B$; $A.B.B.B$; $B.B.B.$;
$A.A.B.A$; $A.B.A.B$; $B.A.B.B$;
$A.B.A.A$; $A.B.B.A$; $B.B.A.B$;

$$B.A.A.A;\quad B.A.A.B;\quad B.B.B.A;$$
$$B.A.B.A;$$
$$B.B.A.A;$$

представљене разломцима:

$$\frac{m^4}{(m+n)^4};\quad \frac{4m^3n}{(m+n)^4};\quad \frac{6m^2n^2}{(m+n)^4};\quad \frac{4m.n^3}{(m+n)^4};\quad \frac{n^4}{(m+n)^4};$$

којих су бројици опет чланови бинома $(m+n)$ на *четврти ступањ*. И т. д.

На основу овога можемо да поставимо ово опште правило:

кад посматрамо два независна догађаја и понављамо покушаје више пута (и то на поменути начин), онда, да ди добили вероватноће за сва могућна спајања тих догађаја, треба збир првобитно повољних изгледа за један и за други догађај, подићи на ступањ, који показује колико је пута покушај понављан; сви тако добивени чланови развијенога бинома, подељени сваки са тим биномом на онај исти ступањ, представљају поједине вероватноће за одговарајућа спајања она два догађаја.

24.

С погледом на горњи став и ако у опште подигнемо $(m+n)$ на r-ти ступањ, а при томе краткоће ради ставимо:

$$\frac{m}{m+n}=a;\quad \frac{n}{m+n}=b;$$

то онда добијамо по биномном обрасцу:

$$(a+b)^r=a^r+\binom{r}{1}a^{r-1}.b^1+\binom{r}{2}a^{r-2}.b^2+\binom{r}{3}a^{r-3}b^3+\cdots$$
$$\cdots+\binom{r}{s}a^{r-s}b^s+\cdots+r.a^1.b^{r-1}+b^r;$$

и у овоме реду бројева имамо очевидно вероватноће за свако могућно спајање догађаја A и B, ако r вучења или покушаја извршимо. При томе:

први члан: $a^r=\frac{m^r}{(m+n)^r}$, представља вероватноћу, да ће се догађај A догодити r пута;

други члан: $\binom{r}{1}a^{r-1}.b^1=r.\frac{m^{r-1}.n^1}{(m+n)^r}$ представља вероватноћу, да ће се догађај A, догодити $(r-1)$ пут, а догађај B само један пут;

трећи члан: $\binom{r}{2}.a^{r-2}b^2=\frac{r(r-1)}{1.\ 2}.\frac{m^{r-2}n^2}{(m+n)^r}$ представља вероватноћу, да ће се догађај A, догодити $(r-2)$ пут, а догађај B два пут и т. д.

Општи члан развијенога бинома:

$$\binom{r}{s}a^{r-s}.b^s=\frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-s+1)}{1.\ 2.\ 3.\dots.\ s}.a^{r-s}.b^s \quad (31)$$

представља вероватноћу, да ће се у r вучења догађај A догодити $(r-s)$ пута, а догађај B само s пута.

25.

И из досадашњега види се многострана применљивост биномнога обрасца у рачуну вероватноће, но да би ово још потпуније увидели, ми ћемо да расправимо и онај случај, кад хоћемо да поредимо неколико догађаја (неколико сложених догађаја) а у низу некога броја понављаних покушаја (опажања).

Тако пре свега ако узмемо збир од неколико чланова развијенога бинома $(a+b)^r$ и то збир чланова, који узастопце један за другим следују, да кажемо од члана, у коме се находи a подигнуто на $(r-q)$ ти ступањ, па до члана, у коме се находи a подигнуто на $(r-(q+t))$ ти ступањ, дакле од:

$$\binom{r}{q}.a^{r-q}b^q$$

па до $\binom{r}{q+t} \cdot a^{r-(q+t)}\ b^{q+t}$,

онда тај збир представља вероватноћу, да се догађај A неће од $(r-q)$ пута чешће, али ни од $(r-(q+t))$ пута ређе, у r покушаја догодити.

Осем тога, ако означимо у развијеноме биному општи члан са S, дакле ставимо:

$$S = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-s+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ s} \cdot a^{r-s}\ b^s$$

и при томе узмемо, да су чланови, који опкољавају члан S означени са R и T, и то нека је R члан који претходи члану S а T опет члан који за њим следује, то је јасно, да ћемо вредности тих чланова понајлак добити, ако замењујући најпре S са R заменимо још и s са $(s-1)$, а за тим замењујући S са T заменимо још и s са $(s+1)$, учинив ово, ми добијамо:

$$R = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-s+2)}{1\ 2.\ 3.\ldots(s-1)} \cdot a^{r-s+1}\ b^{s-1};$$

$$T = \frac{r.(r-1)(r-2)\ldots(r-s)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots s.(s+1)} \cdot a^{r-s-1}\ b^{s+1};$$

Делењем члана S са R а за тим и са T добијамо:

$$\frac{S}{R} = \frac{\dfrac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-s+2)(r-s+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots(s-1).\ s}\, a^{r-s}\ b^s}{\dfrac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-s+2)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots(s-1)} \cdot a^{r-s+1} \cdot b^{s-1}};$$

или $$\frac{S}{R} = \frac{r-s+1}{s} \cdot \frac{b}{a} = \left(\frac{r-s+1}{s}\right) \cdot \frac{b}{a};$$

$$\frac{S}{T} = \frac{\dfrac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-s+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ s}\, a^{r-s}\ b^s}{\dfrac{r.(r-1)(r-1)\ldots(r-s+1)(r+s)}{1.\ 2.\ 3.\ldots s.\ (s+1)}\, a^{r-s-1} \cdot b^{s+1}};$$

$$\frac{S}{T} = \frac{s+1}{r-s} \cdot \frac{a}{b} = \frac{(s+1)a}{(r-s)b}.$$

Ако треба сад да буде члан S већи од околних чланова, дакле: $S > R$ но и $S > T$, онда мора да буде најпре:

$$(r-s+1)\ b > s\ a,$$

а затим и: $$(s+1)\ a > (r-s)\ b.$$

Међу тим израз:

$$\frac{r-s+1}{s} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)$$

биће очевидно то већи, што је број s мањи и мањи, дакле, што се год више у развијеноме биному $(a+b)^r$ приближавамо члану a^r; израз пак

$$\frac{s+1}{r-s} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)$$

све је то већи, што је број s већи и већи, дакле, што се год више у развијеноме биному приближавамо члану b^r.

На основу овога ми добијамо, ако са Q означимо онај члан развијен. бинома, који члану R понајпре предходи, а са U опет онај члан, који одмах за чланом T следује (дакле ако поредимо низ вероватноћа представљених узастопним члановима: Q, R, S, T, U), очевидно ове неједначине:

$$\frac{R}{Q} > \frac{S}{R} \quad \text{и} \quad \frac{T}{U} > \frac{S}{T}$$

но пошто је према горњем:

$$\frac{S}{R} > 1 \quad \text{и} \quad \frac{S}{T} > 1$$

то следује да је:

$$R > Q \quad \text{и} \quad T > U.$$

Како су вероватноће различитих спајања догађаја A и B представљене члановима развијенога бинома $(a+b)^r$, то ако је H буди који члан у реду чланова развијенога бинома, а S највећи члан, то ће највероватније спајање догађаја A и B бити очевидно оно, што одговара томе највећем члану S, јер релативна вероватноћа, буди кога спајања, која се на буди који члан H односи, према пређашњем је (види релативну вероватноћу),

$$\frac{S}{S+H},$$

т. је, у толико већа, у колико је H мање и мање.

Из неједначина:

$$(r-s+1)\ b > as \quad \text{или}$$
$$(br-bs+b) > as \quad \text{следује:}$$
$$(b+br) > (a+b)s;$$

а из: $(s+1)\ a > (r-s)\ b$ или

$$(as+a) > (br-bs),$$ следује, ако је најпре преокренуто напишемо, дакле

$$(br-bs) < (as+a),$$ а за тим пребацимо bs на десну, а a на леву страну:

$$(br-a) < (a+b)\,s.$$

Уводећи најзад за a и b њихове вредности дакле:

$$a = \frac{m}{m+n}, \quad b = \frac{n}{m+n},$$

па и то, да је: $a+b = 1$, то ми из неједначина:

$$(b+br) > (a+b)s$$

и $(br-a) < (a+b)\ s$ добијамо:

сада: $(b+br) > s$

$$(br-a < s.$$

Ако краткоће ради ставимо:

$\dfrac{r}{p} = (m+n)$, дакле $r = p(m+n) = pm+pn$,

то ће бити:

$$a = \frac{m}{m+n} = \frac{m.p}{r}; \quad b = \frac{n}{m+n} = \frac{n.p}{r}$$

па и:

$(b+br) = \dfrac{n.p}{r} + \dfrac{n.p.r}{r} = (b+np)$, и отуда заменом и неједначина:

$$(b+np) > s;$$

исто тако је:

$(br-a) = \dfrac{n.p.}{r}\,r - \dfrac{m.p}{r} = (np-a)$, па отуда неједначина:

$$(np-a) < s, \quad \text{или}$$

$$\left(np + \frac{n}{m+n}\right) > s$$

$$\left(np - \frac{m}{m+n}\right) < s$$

а пошто s мора да буде цео број и пошто су: $\dfrac{n}{m+n}$ $\dfrac{m}{m+n}$ чисти разломци, то мора да буде у исто доба:

$$s = np;$$

а због: $r = pm + pn$, и $r - np = pm$, или

$$r - s = mp.$$

На основу овога резултата можемо да закључимо; да је у $p(m+n)$ *покушаја највероватнија она веза догађаја* A и B, *која се сразмерно својим сопственим вероватноћама понавља, т. ј, у којој се догађај* A *свега* $p.m$

пута, а *догађај* **B** свега $p.n$ *пута понавља*, дакле оно спајање догађаја, које у развијеном биному $(a+b)^{p(m+n)}$ одговара члану, у коме је a на pm-ти, а b на pn-ти ступањ подигнуто дакле:

$$\binom{pn+m}{pn} a^{pm} \cdot b^{pn} .$$

Ми смо при крају под Бр. 23 добили оно опште правило истина само за случај, кад имамо две врсте догађаја или краће, само два различна догађаја; али оно правило вреди и за више од два догађаја. Тако, ако би осем A и B имали да кажемо још и догађаје C, D, E, F и т. д.... J, и узели да су њихове првобитне вероватноће по реду означена са a, b, c, d, e, f и т. д..... i, онда би студпју свију спајања за овај случај, с претпоставком да опет покушај r пута понављамо, имали да подигнемо полином:

$$(a+b+c+d+e+f+\ldots+i)$$

на r-ти ступањ, и чланови овога развијенога полинома представљали би бројиоце за сваку вероватноћу дотичнога спајања догађаја A, B, C, D, E, F и т. д.

Но како расправљање и овога сложенијега питање са нашим даљим излагањима не стоји ни у каквој вези, то се ми задовољавамо са овим што смо о томе и поменули.

26.

При крају посматрања сложених вероватноћа поновљених догађаја треба да поменемо још и ово.

Истина је, да при мањем броју покушаја, могу често пута, чешће да се догоде и они догађаји, којих је вероватноћа мања испала, дакле да се појаве и таква спајања, која као невероватнија ни смо готово ни ишчекивали; али опет се при свем том понајлак увиђа, да ће, (пошто у већем броју покушаја има несумњиво и више изгледа, који догађање вероватнијих догађаја потпомажу) — у случају, кад се какав покушај више пута понавља, баш и то понављање догађаја имати све то више прилике, да испадне сразмерно броју оних из-

гледа, који су томе понављању и повољни — иденткчно са закључком: да ће се број понављања разних појава све то више и више приближавати потпуној сразмерности њихових првобитних вероватноћа, што се год више и више покушаја извршило буде.

По Јакову Бернуљу *довољним повећавањем броја покушаја*[1]), можемо да дођемо до *несумњивога* критеријума за оцену, да се однос, између броја понављања каквога догађаја и броја самих покушаја, неће међу одређеним границама разликовати од саме вероватноће тога догађаја. Колики ћемо пак ступањ извесности за дотични критеријум моћи да стечемо, то баш стоји до наше воље; *у којој год мери будемо број покушаја повећавали, у тој ћемо се истој мери и све то већој и већој извесности и приближавати.*

27.

Да објаснимо напред изложено и са неколико примера.

Први пример. Тражи се вероватноћа, да ћемо у 8 бацања са новцем или игри avers («глава») или revers («круна»), 5 пута узастопце добити avers, а консеквентно и 3 пута revers горе окренут.

У овоме случају имали би $(a+b)$ да подигнемо на 8-ми ступањ и члан овога развијенога бинома, који би нам дао тражену вероватноћу био би онај, у коме се, налази a подигнуто на 5-ти, а b подигнуто на 3-ћи ступањ, разуме се ако са a означимо просту вероватноћу за «главу» а са b опет просту вероватноћу за *«круну»*, дакле члан:

$$\binom{8}{5} a^5 \cdot b^3.$$

Пошто ми овде имамо да је: $m=1$, а тако исто и $n=1$, па дакле:

[1]) «On peut toujours assigner un nombre d'épreuves tel, qu'il donne une probabilité aussi approchante de la certitude qu'on le voudra, que le raport du nombre de répétitions du même évènement au nombre total des épreuves ne s'écartera pas de la probabilité simple de cet évènement, au delà de certaines limites données quelque resserrées qu'on suppose ces limites.»

$$a = \frac{m}{m+n} = \frac{1}{2}; \quad b = \frac{n}{m+n} = \frac{1}{2};$$

то добијамо као тражену вероватноћу:

$$\left(\frac{8}{5}\right) a^5 \cdot b^3 = \frac{8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{56}{2^8} = \frac{56}{256}.$$

Други пример. Ако би тражили вероватноћу, да ћемо у 8 бацања узастопце добити «*главу*» горе окренуту, то би имали пошто је и овде:

$$a = \frac{m}{m+n} = \frac{1}{2};$$

$$b = \frac{n}{m+n} = \frac{1}{2};$$

$$\left(\frac{8}{8}\right) \cdot a^8 \cdot b^0 = \frac{8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.} \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}.$$

Трећи пример. Тражи се вероватноћа, да ћемо у четири бацања са коцком само *један пут* добити страну са 6 поана, онда имамо за тај случај понајпре, пошто је: $m = 1$, (јер је само једна страна са 6 поана обележена) $n = 5$ па дакле:

$$\frac{m}{m+n} = a = \frac{1}{6}; \frac{n}{m+n} = b = \frac{5}{6}; \text{ и } r = 4;$$

и према томе је тражена вероватноћа:

$$\left(\frac{4}{1}\right) a^1 \cdot b^3 = 4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{125}{216} = \frac{500}{1296}$$

или ако скратимо готово $\frac{5}{13}$.

Четврти пример. Тражи се вероватноћа, да ће се са коцком у четири бацања добити *бар два пута* страна са 6 поана горе окренута. Ово је питање идентично са оним напред поменутим, у коме смо нашли вероватноћу за случај, кад се догађај A неће од $(r-q)$ пута чешће али ни од $r-(q+t)$ пута ређе догодити.

Овде имамо свега четири бацања, и по томе из развијенога бинома:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 + 4\,a\,b^3 + b^4$$

имамо да узмемо збир чланова:

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2$$

па да добијемо вероватноћу, да ћемо бар *два пута* добити страну са 6 означену; како је опет $(m = 1;\ n = 5)$ па и:

$$\frac{m}{m+n} = a = \frac{1}{6}; \frac{n}{m+n} = b = \frac{5}{6};$$

то је збир:

$$\left(\frac{1}{6}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 \quad \text{или}$$

$$\frac{1}{1296} + 4 \cdot \frac{1}{216} \cdot \frac{5}{6} + 6 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{25}{36} = \frac{171}{1296} = 0{\cdot}132$$

или тражена втроватноћа између

$$0{\cdot}14 \quad \text{и} \quad 0{\cdot}13.$$

Да је се тражила вероватноћа, да ће се страна са 6 означена *бар један пут* у четири бацања појавити горе окренута, онда би имали да узмемо збир прва четири члана у развијеноме биному $(a+b)^4$ дакле:

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 = Z$$

те да добијемо тражену вероватноћу. Но у овоме случају лакше је, да израчунамо невероватноћу тога догађаја, дакле само члан b^4, па пошто мора, као што је познато, да буде:

$$Z + b^4 = 1,$$

то можемо да определимо горњи збир из једначине:

$$Z = 1 - b^4.$$

Према овоме ми имамо

$$b^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296},$$

а помоћу тога, одузимањем од јединице и:

$$Z = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 = \frac{671}{1296} = 0\cdot5177,$$

као тражену вероватноћу.

Пети пример. Из последњега примера види се, да повећавањем броја бацања и вероватноћа, да ће се страна са 6 означена појавити, знатно расти, јер док је она при једноме бацању само $\frac{1}{6}$, дотле је она за случај, кад четири пута једну и исту коцку бацамо порасла до вредности $\frac{671}{1296}$, дакле постала већа и од $\frac{1}{2}$, у коме случају кажемо, да је посве вероватно, да ће се у четири бацања *бар један пут* добити страна са 6 означена. Ова приметба наводи нас на питање, које је такође од велике важности, а на име: *да ли можемо да нађемо потребан број понављања, па да вероватноћа за какав ишчекивани догађај добије онакву вредност, какву би ми желели?* Да узмемо н. пр. да тражимо, колико пута треба да бацимо какву коцку, те да вероватноћа, да ћемо добити *бар један пут* страну са 6 означену, добије вредност $\frac{1}{2}$. Пошто је и овде:

$$a = \frac{1}{6}; \quad b = \frac{5}{6}$$

то би ми имали очевидно, да определимо број r из услова, по коме је

$$a^r + \binom{m}{1} a^{r-1} \cdot b^1 + \cdots + \binom{m}{1} a^1 b^{r-1} = \frac{1}{2}$$

или што је са овим идентично, из услова:

$b^r = \frac{1}{2}$, јер у томе случају, кад је горе поменути збир раван $\frac{1}{2}$, мора и невероватноћа истога догађаја, дакле b^r да буде такође $= \frac{1}{2}$.

Помоћу логаритама добијамо ми:

$$r = \frac{\log 1 - \log 2}{\log b} = \frac{\log 1 - \log 2}{\log 5 - \log 6} = 3\cdot8017$$

дакле као што видимо, нешто мање од 4, јер за потпуна 4 бацања, добили смо напред у четвртом примеру вероватноћу: $0\cdot5177$ дакле $> 0\cdot5$.

29.

Ма какве биле вредности апсолутних првобитних вороватноћа појединих догађаја и ма колики био број покушаја (вучења), свакад у развијеноме биному имамо ми по један највећи члан па било r паран или непаран број. Од тога највећега члана на једну и на другу страну опадају вредности осталих чланова и то несиметријски, ако су вероватноће a и b неједнаке (а иначе ма каквих вредности), а симетријски, ако a и b имају једнаке вредности.

Да би како ваља схватили поступно кретање појединих вероватноћа у овим сложенијим приликама рачуна вероватноће, ми ћемо потпуности ради а и поради бољега оснивања наших даљих излагања да представимо вероватноће *графијски*, јер је овај начин веома подесан да нам потпуно оличи природу вероватноћа па и њене карактерне особине.

Тога ради ми ћемо да узмемо опет да из каквога суда вучемо лоптице по облику једнаке а по боји различне и то нека има у суду:

$m = 3$ белих лоптица

$n = 2$ црних лоптица, при чему опет под A разумемо појав беле а под B појав црне лоптице.

За два вучења или кад је $r = 2$ ми имамо:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2,$$

а пошто је овде:

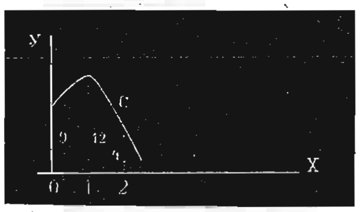
$$a = \frac{m}{m+n} = \frac{3}{5}; \quad b = \frac{n}{m+n} = \frac{2}{5};$$

то добијамо као вероватноће за догађаје:

(2 беле, 0 црни)	(1,1)	(0,2)
$\frac{9}{25}$;	$\frac{12}{25}$;	$\frac{4}{25}$;

Ако узмемо да су *апсцисе* у координатном систему сразмерне бројевима понављања догађаја A, који се у сваком сложеном догађају појављују (идентично са сразмерношћу бројева понављања догађаја B у сваком спајању догађаја), а *ординате* опет сразмерне добивеним вероватноћама свакога спајања у развијеноме биному, при чему се и по себи разуме, да правци сразмерности поменутих бројева, за обадва догађаја A и B морају да буду супротни, јер онде, где је за први догађај вероватноћа највећа, тамо је она за други догађај најмања и обрнуто, то онда добијамо као *графијску представу вероватноћа за два вучења* Сл. 1.

Сл. 1.



На овој су слици вероватноће представљене дакле ординатама: 9, 12 и 4.

Ако је $r = 3$ онда је:

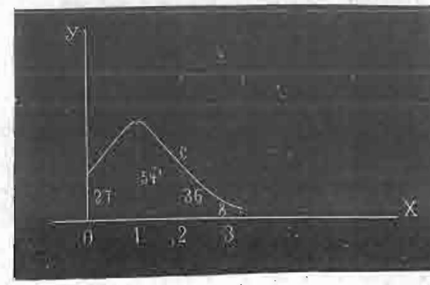
$$(a+b)^3 = a^3 + 3\ a^2\ b + 3\ a\ b^2 + b^3$$

или вероватноће:

(3 беле, 0 црн.)	(2,1)	(1,2)	(0,3)
$\frac{27}{125}$;	$\frac{54}{125}$;	$\frac{36}{125}$;	$\frac{8}{125}$;

или графијски Сл. 2:

Сл. 2.



На овој слици представљене су вероватноће ординатама: 27, 54, 36 и 8.

Ако је $r = 7$, онда је:

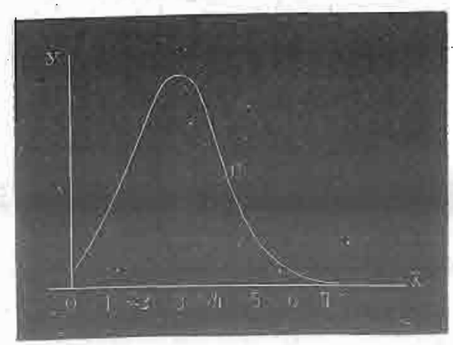
$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6\ b^1 + 21\ a^5\ b^2 + 35\ a^4\ b^3 + 35\ a^3\ b^4 + 21\ a^2 b^5 + 7a^1 b^6 + b^7$$

или вероватноће:

(7 бел. 0 црн.)	(6,1)	(5,2)	(4,3)	(3,4)	(2,5)	(1,6)	(0,7)
$\frac{2187}{5^7}$;	$\frac{10186}{5^7}$;	$\frac{20412}{5^7}$;	$\frac{22680}{5^7}$;	$\frac{15120}{5^7}$;	$\frac{6048}{5^7}$;	$\frac{1344}{5^7}$;	$\frac{128}{5^7}$;

које графијски представљене дају доњу слику, на којој су вероватноће представљене ординатама у тачкама 0, 1, 2, ... 7. С тога што су бројиоци разломака велики бројеви изостављени су они на слици 3.

Сл. 3.



Ординате су и на овој слици сразмерне одговарајућим вероватноћама.

Ако је $r = 10$ и ми узмемо да је $a = b$, па дакле и

$$a = b = \frac{1}{2};$$

при чему је и $m = n$, онда имамо:

$$(a+b)^{10} = a^{10} + 10a^9\, b^1 + 45a^8\, b^2 + 120a^7\, b^3 + 210a^6\, b^4 + \\ + 252\, a^5\, b^5 \\ + 210\, a^4\, b^6 + 120\, a^3\, b^7 + 45a^2\, b^8 + 10a^1\, b^9 + b^{10};$$

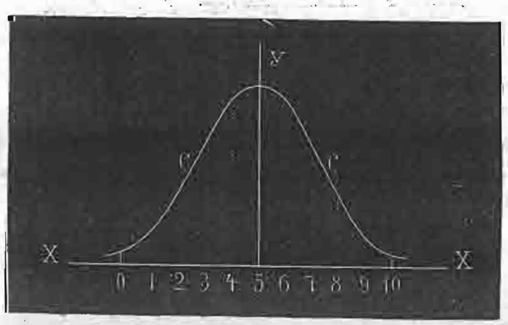
а заменом вредности за a и b добијамо као вероватноће:

(10,0)	(9,1)	(8,2)	(7,3)	(6,4)	(5,5)	(4,6)	(3,7)	(2,8)	(1,9)	(0,10)
$\frac{1}{2^{10}}$;	$\frac{10}{2^{10}}$;	$\frac{45}{2^{10}}$;	$\frac{120}{2^{10}}$;	$\frac{210}{2^{10}}$;	$\frac{252}{2^{10}}$;	$\frac{210}{2^{10}}$;	$\frac{120}{2^{10}}$;	$\frac{45}{2^{10}}$;	$\frac{10}{2^{10}}$;	$\frac{1}{2^{10}}$;

које графијски (у изменутој размери) представљене, дају Сл. 4, која, имајући један највећи члан у средини, испада од тога места као што видимо и на једну и на другу страну потпуно симетријски завршена.

И на доњој су слици ординате, сразмерне одговарајућим вероватноћама. Ордината (5,5) је средња и највећа.

Сл. 4.



На исти овакав начин даље би се вероватноће развијенога бинома $(a + b)^r$ представити, па било r ма колико велико. Крива линија C, која се добија као што смо видели везивањем крајњих тачака појединих ордината оличава нам закон по коме вероватноће расту односно опадају и с тога, што је она представник тога закона у опште за све разне могућне сложене догађаје и назива се она *«линија вероватноћа»* (Courbe de possibilité).

Збир свију ордината, који је очевидно еквивалентан изразу:

$$(a + b)^r = 1,$$

представља збир свију вероватноћа свију могућних сложених догађаја или *известност*. Линија вероватноћа има као што видимо у свима приликама једну највећу ординату, која за тај случај, кад је $a = b$, представља у исто време и њену *линију симетрије*.

30.

Резултат до кога смо дошли последњим примером, при коме смо као графијску представу вероватноћа добили симетријску криву линију, од велике је важности за примену рачуна вероватноће. У пракси се често дешава, да какав *сложен догађај*, зависи од веома великога броја простих догађаја, и да вероватноћа његова испада равна $\frac{1}{2}$ или је ми бар морамо да узмемо као равну $\frac{1}{2}$, с тога, што нисмо на чисто, што још *сумњамо* о томе сложеноме догађају и то баш с тога сумњамо, што незнамо све могућне услове и узроке, који су при догађању онога сложенога догађаја активни били

И ако смо особину линије вероватноћа у неколико већ уочили, опет са важности тих особина за даља наша излагања и да не би општост њихне примењивости ограничавали, ми треба да нађемо и општег аналитичког представника линије вероватноћа, а за поменути случај, кад је дакле:

$$a = b = \frac{1}{2}.$$

Ако означимо са y у опште вредност ма које ординате те криве линије, онда је очевидно једначина линије вероватноћа, општи члан у развијеноме биному: $(a+b)^r$ представљена једначином:

$$y = \binom{r}{s} a^{r-s} b^{s} = \binom{r}{s}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{r-s}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{s} = \binom{r}{s}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{r} \text{ или}$$

$$y = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots\ldots(r-s+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots s}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{r};$$

при чему s показује место члана у развијеноме биному.

Чинилац $\left(\frac{1}{2}\right)^{r}$ налази се у свакоме члану развијенога бинома па ма колико s по вредности било и ми очевидно можемо при графичкој представи линије вероватноћа тога чиниоца да изоставимо, чинећи то само у тој цељи, да себи олакшамо ово опште посматрање, ми не смемо да заборавимо, да свакад, кад год хоћемо да добијемо вероватноћу за извесну неку вредност од s, да тада морамо чиниоцем $\left(\frac{1}{2}\right)^{r}$ да помножимо одговарајућу ординату.

Сматрајући како r тако и s као веома велике бројеве и изостављајући за време чиниоца $\left(\frac{1}{2}\right)^{r}$ ми добијамо место пређашње једначине, сада само:

$$rK_s = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-s+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots s.}$$

која, као што видимо представља број комбинација из r елемената и то узимљући по 1 и 1, по 2 и 2, и т. д. најзад по r и r елемената у сваку комбинацију.

Да би определили rK_s, ми ћемо да се послужимо *Stirling*-овим обрасцем, који нам за ову цељ даје довољно тачно приближне вредности потребних факторијела.

По *Stirling*-у је, кад су r па и s веома велики бројеви:

$$r! = 1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots(r-1)\,r = \sqrt{2\pi}.\ r^{r+\frac{1}{2}}\, e^{-r}$$

$$s! = 1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots(s-1).\,s = \sqrt{2\pi}\ s^{s+\frac{1}{2}}\, e^{-s}$$

а исто тако је и

$$(r-s)! = 1.\ 2.\ 3.\ldots(r-s) = \sqrt{2\pi}\ (r-s)^{(r-s)+\frac{1}{2}}\, e^{-(r-s)}$$

Ако помножимо у rK_s и бројиоца и имениоца са $(r-s)!$, онда добијамо:

$$rK_s = \frac{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots(r-s).(r-s+1)\ldots(r-2).(r-1).\,r}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots s.\ 1.\ 2.\ 3.\ldots(r-s)},$$

а увођењем горњих вредности за $r!$, $s!$, и $(r-s)!$ и:

$$rK_s = \frac{r^{r+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\ s^{s+\frac{1}{2}}\,(r-s)^{(r-s)+\frac{1}{2}}};$$

За највећу ординату имамо по Бернуљу да је $s = \frac{r}{2}$ и заменом добијамо:

$$rK_{\frac{r}{2}} = \frac{r^{r+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}.\left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}\left(r-\frac{r}{2}\right)^{(r-\frac{r}{2})+\frac{1}{2}}} \quad \text{па и}$$

$rK_{\frac{r}{2}} = \frac{2^{r+1}}{\sqrt{2\pi \cdot r}}$; а ако определимо $\sqrt{2\pi}$ или $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

из ове једначине, онда добијамо:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{rK_{\frac{r}{2}} \cdot r^{\frac{1}{2}}}{2^{r+1}}$$

и према томе једначина rK_s прелази у:

$$rK_s = \frac{rK_{\frac{r}{2}} \cdot r^{\frac{1}{2}}}{2^{r+1}} \cdot \frac{r^{r+1}}{s^{s+\frac{1}{2}} \cdot (r-s)^{(r-s)+\frac{1}{2}}}$$

што може да се напише и овако:

$$rK_s = rK_{\frac{r}{2}} \cdot \left\{\frac{r}{2(r-s)}\right\}^{(r-s)+\frac{1}{2}} \cdot \left\{\frac{r}{2s}\right\}^{s+\frac{1}{2}}.$$

Како је у опште за наше посматрање довољно, да ми од линије симетрије на једну и на другу страну по неколико ордината уочимо, које највећу ординату симетријски опкољавају, то је добро, да узмемо почетак апсциса баш у подножној тачци те највеће ординате и ако то учинимо, онда општи члан rK_s добија облик:

$$rK_{(\frac{r}{2} - \varkappa)}$$

ако $\varkappa$ показује место члана, полазећи од оне највеће ординате и на једну и на другу страну.

Ако уведемо у горњу једначину rK_s, место s вредност $\left(\frac{r}{2} - \varkappa\right)$, онда се добија:

$$rK_{(\frac{r}{2}-\varkappa)} = rK_{\frac{r}{2}} \cdot \left\{\frac{r}{2(\frac{r}{2}+\varkappa)}\right\}^{\frac{r}{2}+\varkappa+\frac{1}{2}} \cdot \left\{\frac{r}{2(\frac{r}{2}-\varkappa)}\right\}^{\frac{r}{2}-\varkappa+\frac{1}{2}},$$

а ако још поделимо и сведемо што се свести даје, онда добијамо најпре:

$$rK_{(\frac{r}{2}-\varkappa)} = rK_{\frac{r}{2}} \cdot \left\{\frac{r}{1+\frac{2\varkappa}{r}}\right\}^{\frac{r}{2}+\varkappa+\frac{1}{2}} \cdot \left\{\frac{1}{1-\frac{2\varkappa}{r}}\right\}^{\frac{r}{2}-\varkappa+\frac{1}{2}}.$$

а пренашањем у бројиоца најзад и:

$$rK_{(\frac{r}{2}-\varkappa)} = rK_{\frac{r}{2}} \cdot \left(1+\frac{2\varkappa}{r}\right)^{-\frac{r}{2}-\varkappa-\frac{1}{2}} \left(1-\frac{2\varkappa}{r}\right)^{-\frac{r}{2}+\varkappa-\frac{1}{2}}.$$

Да би добили вредности чланова у заградама, ми ћемо да ставимо понајпре:

$$\left(1+\frac{2\varkappa}{r}\right)^{-\frac{r}{2}-\varkappa-\frac{1}{2}} = \omega$$

па овај израз да логаритмирамо. Тако добијамо:

$$\log \omega = -\left(\frac{r}{2}+\varkappa+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{2\varkappa}{r}\right).$$

Разломак $\frac{2\varkappa}{r}$ с погледом на пређашњу напомену о величини броја r, има веома малу вредност и све то мању, што је r веће и веће; примењујући на израз $\log\left(1+\frac{2\varkappa}{r}\right)$, познати логаритамски ред по коме је:

$$l\,(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots$$

и ако уведемо место:

$$x,\ \frac{2\varkappa}{r}; \qquad \frac{x^2}{2},\ \frac{4\varkappa^2}{2r^2}; \qquad \frac{x^3}{3},\ \frac{8\varkappa^3}{3r^3};$$ и т. д.

онда добијамо:

$$rK_{\frac{r}{2}} = \frac{2^{r+1}}{\sqrt{2\pi \cdot r}};$$ а ако определимо $\sqrt{2\pi}$ или $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

из ове једначине, онда добијамо:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{rK_{\frac{r}{2}} \cdot r^{\frac{1}{2}}}{2^{r+1}}$$

и према томе једначина rK_s прелази у:

$$rK_s = \frac{rK_{\frac{r}{2}} \cdot r^{\frac{1}{2}}}{2^{r+1}} \cdot \frac{r^{r+1}}{s^{s+\frac{1}{2}} \cdot (r-s)^{(r-s)+\frac{1}{2}}}$$

што може да се напише и овако:

$$rK_s = rK_{\frac{r}{2}} \cdot \left\{\frac{r}{2(r-s)}\right\}^{(r-s)+\frac{1}{2}} \cdot \left\{\frac{r}{2s}\right\}^{s+\frac{1}{2}}.$$

Како је у опште за наше посматрање довољно, да ми од линије симетрије на једну и на другу страну по неколико ордината уочимо, које највећу ординату симетријски опкољавају, то је добро, да узмемо почетак апсциса баш у подножној тачци те највеће ординате и ако то учинимо, онда општи члан rK_s добија облик:

$$rK_{(\frac{r}{2} - \varkappa)}$$

ако $\varkappa$ показује место члана, полазећи од оне највеће ординате и на једну и на другу страну.

Ако уведемо у горњу једначину rK_s, место s вредност $\left(\frac{r}{2} - \varkappa\right)$, онда се добија:

$$rK_{(\frac{r}{2}-\varkappa)} = rK_{\frac{r}{2}} \cdot \left\{\frac{r}{2(\frac{r}{2}+\varkappa)}\right\}^{\frac{r}{2}+\varkappa+\frac{1}{2}} \left\{\frac{r}{2(\frac{r}{2}-\varkappa)}\right\}^{\frac{r}{2}-\varkappa+\frac{1}{2}},$$

а ако још поделимо и сведемо што се свести даје, онда добијамо најпре:

$$rK_{(\frac{r}{2}-\varkappa)} = rK_{\frac{r}{2}} \cdot \left\{\frac{r}{1+\frac{2\varkappa}{r}}\right\}^{\frac{r}{2}+\varkappa+\frac{1}{2}} \cdot \left\{\frac{1}{1-\frac{2\varkappa}{r}}\right\}^{\frac{r}{2}-\varkappa+\frac{1}{2}},$$

а пренашањем у бројиоца најзад и:

$$rK_{(\frac{r}{2}-\varkappa)} = rK_{\frac{r}{2}} \cdot \left(1+\frac{2\varkappa}{r}\right)^{-\frac{r}{2}-\varkappa-\frac{1}{2}} \left(1-\frac{2\varkappa}{r}\right)^{-\frac{r}{2}+\varkappa-\frac{1}{2}}$$

Да би добили вредности чланова у заградама, ми ћемо да ставимо понајпре:

$$\left(1+\frac{2\varkappa}{r}\right)^{-\frac{r}{2}-\varkappa-\frac{1}{2}} = \omega$$

па овај израз да логаритмирамо. Тако добијамо:

$$\log \omega = -\left(\frac{r}{2}+\varkappa+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{2\varkappa}{r}\right).$$

Разломак $\frac{2\varkappa}{r}$ с погледом на прећашњу напомену о величини броја r, има веома малу вредност и све то мању, што је r веће и веће; примењујући на израз $\log\left(1+\frac{2\varkappa}{r}\right)$, познати логаритамски ред по коме је:

$$l\,(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots$$

и ако уведемо место:

$$x,\ \frac{2\varkappa}{r};\qquad \frac{x^2}{2},\ \frac{4\varkappa^2}{2r^2};\qquad \frac{x^3}{3},\ \frac{8\varkappa^3}{3r^3};\qquad \text{и т. д.}$$

онда добијамо:

$$\log \omega = -\left(\frac{r}{2} + \varkappa + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2\varkappa}{r} - \frac{2\varkappa^2}{r^2} + \frac{8\varkappa^3}{3r^3}\cdots\right);$$

или, пошто свршимо множење и занемаримо све оне чланове, у којима се налази r^2 па и оне са вишим ступњима, (јер је и по себи разумљиво, да је вредност тих чланова због величине броја r веома незнатна):

$$\log \omega = -\varkappa + \frac{\varkappa^2}{r} - \frac{2\varkappa^2}{r} - \frac{\varkappa}{r} = -\frac{\varkappa^2}{r} - \varkappa\left(1 + \frac{1}{r}\right).$$

С погледом на вредност од ω следује сад и:

$$\left(1 + \frac{2\varkappa}{r}\right)^{-\frac{r}{2} - \varkappa + \frac{1}{2}} = e^{-\frac{\varkappa^2}{r} - \varkappa\left(1 + \frac{1}{r}\right)}$$

На исти начин добијамо и за онај други члан:

$$\left(1 - \frac{2\varkappa}{r}\right)^{-\frac{r}{2} - \varkappa + \frac{1}{2}} = e^{-\frac{\varkappa^2}{r} + \varkappa\left(1 + \frac{1}{r}\right)}$$

Увођењем ових вредности у израз $rK_{\left(\frac{r}{2} - \varkappa\right)}$ следује:

$$rK_{\left(\frac{r}{2} - \varkappa\right)} = rK_{\frac{r}{2}} \cdot e^{-\frac{2\varkappa^2}{r}}$$

што значи: ордината, која одговара апсциси $\varkappa$ у новоме координатноме систему, при коме се полази од подножне тачке највеће ординате (дакле од линије симетрије и на једну и на другу страну) представљења је изразом:

$$rK_{\frac{r}{2}} \cdot e^{-\frac{2\varkappa^2}{r}} = rK_{\frac{r}{2}} \cdot e^{-\frac{2}{r}\varkappa^2}$$

На основу свега овога, општи аналитички представник појединих вероватноћа, однесен на напред поменути нови координатни систем, ако опет уведемо у рачун чиниоца $\left(\frac{1}{2}\right)^r$ добија овај облик:

$$y = rK_s \left(\frac{1}{2}\right)^r = rK_{\left(\frac{r}{2} - \varkappa\right)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^r$$

или:

$$y = rK_{\frac{r}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^r e^{-\frac{2}{r}\varkappa^2} = \frac{2^{r+1}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \frac{1}{2^r}\, e^{-\frac{2}{r}\varkappa^2}$$

откуда најзад:

$$y = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cdot e^{-\frac{2}{r}\varkappa^2}, \qquad (32)$$

а ако разломак $\frac{2}{r}$, који представља овде *параметра*, заменимо са h^2, онда добијамо једначину:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2\varkappa^2}, \qquad (33)$$

која је, за студију вероватноћа неизбежних грешака веома важна и о којој ћемо доцније још говорити.

При крају ових наших посматрања, можемо да поменемо само још то, да све функције облика, као што је ова под бр. (33) представљају *алгебарски тип функција, које симетријски веома нагло* опадају, што се и из таблице I, која је овоме делу придата јасно види.

ДРУГИ ДЕО.

Физичка вероватноћа или вероватноћа á posteriori.

О вероватноћи à *posteriori* у опште.

У првоме делу наших предавања бавили смо се искључиво са вероватноћама такве врсте, код којих се могао број повољних и неповољних изгледа, узрока да определи у напред (à priori) из особине самога задатка или питања. Међу тим у многим приликама, и то баш у онима, у којима је примена рачуна вероватноћа од много веће важности, па и много веће потребе, не можемо ми број повољних па и неповољних изгледа, (од којих и зависи вероватноћа појединих догађаја) па шта више не можемо ми ни однос тих изгледа à priori да определимо. У тима приликама не можемо ми дакле да налазимо вероватноће, а да се не послужимо *искуством*, које смо већ пре тога каквим низом посматрања једне исте врсте догађаја стекли и морамо да се обазремо на везу, која постоји између догађаја и дотичних узрока. У оваквим приликама у којима појави, као што је по себи јасно, зависе не само од услова већ и од психичких особина посматрачевих, морамо ми да тражимо *поред вероватноће догађаја и вероватноће дотичних узрока*, са којима су они догађаји у тесној вези, — са којим се дотични догађаји идентификују јер незнајући праве узроке ми треба да нађемо бар оне, који су највероватнији. Оваквим начином добивена вероватноћа, зове се *вероватноћа* à *posteriori* или вероватноћа на искуству основана (Wahrscheinlichkeit aus Beobachtung).

Поље за изналажење и примену овакве врсте вероватноћа веома је велико. Тако рећи на свакоме кораку у овој нашој големој природи и у нашем животу имамо ми прилике да се бавимо са вероватноћама ове врсте. Тако да поменемо само ово. У *Астрономији*, у *Физици* при посматрањима физичких појава, и у опште у *свима гранама природних наука* свуда имамо ми повећи број појава, догађаја, које ако хоћемо да студирамо, ми морамо да их доводимо у везу са узроцима, који су им претходили, јер само сводењем на узроке, можемо да дођемо до критеријума за закључак, да ће се у сличним приликаама моћи исти такви догађаји или да ишчекују или не и што је још важније, само сводењем на узроке можемо да дођемо ми и до закона, који неком врстом појава владају. Но осем поменутих прилика, особито је широко поље за примену овакве врсте вероватноћа у *Геодезији* и то како у *Нижој* тако и у *Вишој Геодезији*, које се из дана у дан напредујући у усавршавању својих метода за мерење, у усавршавању прецизионих инструмената и т. д. — готово су постале понајудеснији објект за примену теорије вероватноћа и спојиле се са овом граном примењене математике у тој мери, да се готово не би могло без приговора казати, које кога унапредио, ко ли кога усавршио, — да ли рачун вероватноће Геодезију или је Геодезија рачун вероватноће створивши му својим питањима, искључиво геометријске природе тако блиску а обилату употребљивост, чиме га је баш и рехабилитирала и направила средством за испитивања егзактнога стања ствари.

При крају ових општих напомена о овој врсти вероватноћа ради бољега схватања, а и да би што боље разликовали ову врсту вероватноћа од оне à *priori*, да наведемо и неколико примера. Ако је искуством потврђена ствар, да је од 100 подједнако добро направљених и спремљених лађа при путовању а у пролеће, њих 5 страдало, то је вероватноћа, да ће при поновом путовању а у истоме добу године, каква лађа страдати очевидно $= \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$, и ова вероватноћа *à posteriori* важи све дотле, докле год се на основу нових искустава не добије друга вредност за исти догађај. Или да узмемо, да смо при повећавању температуре каквога тела, посматрали повећање његове запремине и добили разним посматрањима, да је се запремина повећала:

једанпут за $\frac{5}{100}$ делова

други пут « $\frac{8}{100}$ делова

и најзад трећи пут за $\frac{6}{100}$ делова њених, то се пита сад, који је од тих бројева *највероватнији* па и колики ступањ извесности или сигурности има тај највероватнији број према онима осталима. Или најзад да кажемо, дужина једне пруге, која има да послужи као основица, мерена је *неколико пута* и са једним и истим мерилом и при тима мерењима добивени су резултати, који се за по нешто један од другога разликују, па се пита, која је *највероватнија* вредност те основице и колики ступањ извесности има за се та њена највероватнија вредност и т. д. Оваква питања, као што видимо разликују се од пређашњих и по суштини својој па и по начину њиховога решавања и ми треба сада да се упознамо са теоријским основама за решавање и таквих питања.

I

Вероватноћа простога догађаја à posteriori а на основу опредељенога броја претпоставака.

Вероватноћа узрока или претпоставака.

31.

Да би могли да дођемо до основе за изналажење вероватноће a posteriori једнога догађаја, ми ћемо опет да узмемо да у каквоме суду имамо 5 лоптица обликом једнаких а бојама различних, и то нека су *неке* од тих

5 лоптица беле, а неке црвене; међу тим, ми незнамо колико их је на броју белих а колико црвених.

Ако сад негледајући вучемо из суда по једну лоптицу, па је опет, пошто јој боју прибележимо враћамо у суд, онда можемо да испитујемо *у колико су разне претпоставке, хипотезе, изгледи о броју црвених лоптица основане.*

Нека су четири вучења извршена, и нека су се у тим вучењима поступно појавиле свега:

3 беле лоптице и само

1 црвена лоптица.

У овоме случају очевидно су могућне па и посве сноване само ове четири претпоставке о броју белих или црвених лоптица, а на име у суду има:

1-ва претпоставка 4 беле и 1 црвена или

2-га « « 3 беле и 2 црвена, или

3-ће « « 2 беле и 2 црвене, или

4-та « « 1 бела и 4 црвене лоптице, и

свака од ових предпоставака; ако са A опет означимо појав беле, а са B опет појав црвене лоптице, даје одговарајућу вероватноћу á priori a, односно b за појав беле или црвене лоптице.

Тако добијамо да је на основу:

1-ве претпоставке: $a_1 = \frac{4}{5}$; $b_1 = \frac{1}{5}$;

2-ге « $a_2 = \frac{3}{5}$; $b_2 = \frac{2}{5}$;

3-ће « $a_3 = \frac{2}{5}$; $b_3 = \frac{3}{5}$;

4-те « $a_4 = \frac{1}{5}$; $b_4 = \frac{4}{5}$.

као првобитне вероватноће посматранога догађаја.

Пошто ми и у овој прилици понављамо вучење 4 пута, то вероватноћа о спајању белих и црвених лоптица или вероватноћа сложенога догађаја, мора очевидно бити представљена једним ма којим чланом развијенога бинома:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a\,b^3 + b^4,$$

јер на основу сваке од оних четири претпоставака, може да се добије спајање: *три беле и једне црвене лоптице.* Према томе с погледом на већ стечено искуство, по коме су већ 3 беле и 1 црвена лоптица извучене, ми имамо као представника за вероватноће појединих претпоставака у овоме случају:

$$4a^3b$$

и она претпоставка, за коју добијемо највећу вероватноћу биће очевидно и најоснованија, јер ће по тој претпоставци већ посматрани сложен догађај бити вероватнији, него по ма којој другој.

Ако означимо те претпоставке са $\pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4$ то су вероватноће тих претпоставака, по реду:

$$4.\ a_1^3 . b_1 = 4.\left(\frac{4}{5}\right)^3 . \frac{1}{5} = \frac{256}{625} = \beta_1;$$

$$4.\ a_2^3 . b_2 = 4.\left(\frac{3}{5}\right)^3 . \frac{2}{5} = \frac{216}{625} = \beta_2;$$

$$4.\ a_3^3 . b_3 = 4.\left(\frac{2}{5}\right)^3 . \frac{3}{5} = \frac{96}{625} = \beta_3;$$

$$4.\ a_4^3 . b_4 = 4.\left(\frac{1}{5}\right)^3 . \frac{4}{5} = \frac{16}{625} = \beta_4;$$

из којих видимо, да вероватноћа прве претпоставка има понајвећу вредност, за тим следује за њом вероватноћа друге, за овом опет вероватноћа треће и најзад као најмања вероватноћа четврте претпоставке.

Ако упоредимо како израчунате вероватноће a priori дакле: α_1, α_2, α_3, α_4, тако и вероватноће појединих

претпоставака, онда уочавамо и на први поглед, да између вероватноћа β_1, β_2, β_3 и β_4 и α_1, α_2, α_3 и α_4 постоји веома карактеран однос, по коме су у исто доба

понајвећих вредности: α_1 и β_1,
за тим од ових мањих вредности: α_2 и β_2,
од ових још мањих вредности: α_3 и β_3,
и најзад најмањих вредности: α_4 и β_4,

и да осем тога постоји:

$$\begin{aligned} \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4 &= 0{\cdot}8 : 0{\cdot}6 : 0{\cdot}4 : 0{\cdot}2 \\ &= 0{\cdot}4 : 0{\cdot}3 : 0{\cdot}2 : 0{\cdot}03 \qquad (34) \\ \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 : \beta_4 &= 0{\cdot}8 : 0{\cdot}6 : 0{\cdot}4 : 0{\cdot}1 \end{aligned}$$

Овај карактеран однос речима исказан, гласи: *вероватноће појединих претпоставака сразмерне су вероватноћама посматранога догађаја, које су на основу појединих претпоставака и добивене.*

Bayes-ово извођење вероватноће узрока или претпоставака.

32.

Ми смо у прећашњем броју узели један конкретан случај и дошли до горњега правила. Но до истога правила може да се дође по Bayes-у (Philosophical Transactions од год 1763.) и помоћу познатога става о модификованој вероватноћи овако.

На основу принципа о узроку и дејству можемо ми очевидно да замислимо, да су у опште пре догађања каквога догађаја морали постојати ма какви узроци, претпоставке, услед којих је дотични догађај као неминовна последица и наступио.

Пошто незнамо у опште, који је од могућних узрока и највероватнији и најоснованији и пошто незнамо ни колико их је било активних, то да не би општост овога излагања ограничили, ми ћемо да узмемо, да је њихов број неопредељен и на сваки начин велики, што је и посве основано, јер догађаји у природи у опште и могу да се сматрају као последица млогих узрока.

Сви ови узроци, претпоставке такве су природе, да су сви подједнако вероватни и да се узајамно искључују и сваки од њих даје дотичноме догађају по некакву вероватноћу, која у опште може да има све могућне вредности од 0 па до 1.

Пошто имамо више узрока или претпоставака, то онда настаје питање: *која је од свију могућних претпоставака најоснованија т. ј., која од њих има ту особину, да нам на основу баш те и никоје друге претпоставке, већ посматрани догађај постане и понајвероватнији.*

Да би могли да одговоримо на ово питање да узмемо нека су за догађај *Д сви могућни узроци, претпоставке* означене са:

$$П_1,\ П_2,\ П_3,\ \ldots\ П_n\ ,$$

а њихове *првобитне* (на основу ових претпоставака израчунате) вероватноће, нека су:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_n\ ;$$

осем тога нека су:

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots\ \beta_n\ ,$$

вероватноће догађаја $Д$ и то с претпоставком, да је ма кој од узрока $П_1$, $П_2$, $П_3$ . . . $П_n$ заиста морао и постојати при догађању догађаја $Д$. Услед тога, што је ма који од поменутих узрока извесно морао постојати то је јасно, да су догађај $Д$ и ма који од узрока, све по два *зависна* догађаја и према томе вероватноће: β_1, β_2, . . β_n нису ништа друго него *модификоване* вероватноће догађаја $Д$, и с погледом на став о догађању два зависна догађаја и то:

$$\begin{array}{lllll}
\text{или узрока} & & П_1 & \text{и} & Д \\
« & « & П_2 & \text{и} & Д \\
« & « & П_3 & \text{и} & Д \\
 & & \cdot & & \cdot \\
 & & \cdot & & \cdot \\
« & « & П_n & \text{и} & Д
\end{array}$$

имамо ми по једначини (30) као одговарајуће посебне вероватноће:

$$\underset{((1-Д))}{B} = \alpha_1\,\beta_1$$
$$\underset{((2-Д))}{B} = \alpha_2\,\beta_2$$
$$\underset{((3-Д))}{B} = \alpha_3\,\beta_3$$
$$\cdot \qquad \cdot$$
$$\cdot \qquad \cdot$$
$$\underset{((n-Д))}{B} = \alpha_n\,\beta_n$$

а првобитну вероватноћу, да ће се буди који узрок спојити са догађајем $Д$ идентично са једновременим догађањем догађаја $Д$ и ма кога узрока, добијамо по (26) сабирањем, дакле.

$$\underset{((П_i-Д))}{B} = \alpha_1\,\beta_1 + \alpha_2\,\beta_2 + \alpha_3\,\beta_3 + \cdots + \alpha_n\,\beta_n = [\alpha_i\,\beta_i]$$

Догађањем догађаја $Д$ модификује се вероватноћа појединих узрока, и ако ми означимо сад са:

$$_m\alpha_1,\quad _m\alpha_2,\quad _m\alpha_3,\ \ldots\ _m\alpha_n$$

мидификоване вероватноће узрока: $П_1$, $П_2$, . . $П_n$ то је јасно, да буди који узрок $П_i$ и догађај $Д$ стоје у таквоме односу да је:

α_i, првобитна вероватноћа за наступање узрока $П_i$;
$_m\alpha_i$, модификована вероватноћа « « $П_i$;

$\left(\left(\Pi_i \overset{|B}{-} Д\right)\right)$ прво6. вероват. за наступање догађаја $Д$;

β_i, модификована вероват. « « « $Д$

и према ставу под Бр. (30) о вероватноћи за два зависна догађаја добијамо:

$$\begin{aligned}
[\alpha_i\,\beta_i] \quad {}_m\alpha_1 &= \alpha_1\,\beta_1 \\
[\alpha_i\,\beta_i] \quad {}_m\alpha_2 &= \alpha_2\,\beta_2 \\
&\cdots \\
[\alpha_i\,\beta_i] \quad {}_m\alpha_n &= \alpha_n\,\beta_n
\end{aligned}$$

Из ових једначина добијамо модификоване вероватноће појединих претпоставака:

$$\begin{aligned}
{}_m\alpha_1 &= \frac{\alpha_1\,\beta_1}{[\alpha_i\;\beta_i]} \\
{}_m\alpha_2 &= \frac{\alpha_2\,\beta_2}{[\alpha_i\;\beta_i]} \\
&\cdots \\
{}_m\alpha_n &= \frac{\alpha_n\,\beta_n}{[\alpha_i\;\beta_i]};
\end{aligned} \tag{35}$$

а ако их поредимо онда је:

$${}_m\alpha_1 : {}_m\alpha_2 : {}_m\alpha_3 : \ldots : {}_m\alpha_n = \frac{\alpha_1\,\beta_1}{[\alpha_i\;\beta_i]} : \frac{\alpha_2\,\beta_2}{[\alpha_i\;\beta_i]} :\ldots: \frac{\alpha_n\;\beta_n}{[\alpha_i\;\beta_i]}$$

или:

$${}_m\alpha_1 : {}_m\alpha_2 : {}_m\alpha_3 : \ldots : {}_m\alpha_n = \alpha_1\beta_1 : \alpha_2\beta_2 : \alpha_3\beta_3 : \ldots : \alpha_n\beta_n \quad (36$$

Ако немамо никаквих разлога да држимо, да су све вероватноће $\alpha_1\;\alpha_2\;\ldots\;\alpha_n$ различне, већ да су међу собом једнаке, што је обично случај, дакле:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = \alpha$$

онда добијамо, пошто је у томе случају

$$[\alpha^i\;\beta_i] = {}^n\alpha\,[\beta_i]$$

$$\text{и } (n.\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_n = 1$$

(јер се догађај $Д$ догодио):

$$\begin{aligned}
{}_m\alpha_1\,[\beta_i] &= \beta_1 \\
{}_m\alpha_2\,[\beta_i] &= \beta_2 \\
&\cdots \\
{}_m\alpha_n\,[\beta_i] &= \beta_n
\end{aligned}$$

из ових једначина добијамо понајпре:

$$\begin{aligned}
{}_m\alpha_1 &= \frac{\beta_1}{[\beta_i]} \\
{}_m\alpha_2 &= \frac{\beta_2}{[\beta_i]} \\
&\cdots \\
{}_m\alpha_n &= \frac{\beta_n}{[\beta\,]}
\end{aligned} \tag{37}$$

или речима: *ако су по претпоставкама $\Pi_1\;\Pi_2\;\ldots\;\Pi_n$, које се узајамно искључују, за догађање каквога догађаја $Д$ израчунате модификоване вероватноће означене са β_1, $\beta_2, \ldots\;\beta_n$,* то *добијамо вероватноћу, да је буди која претпоставка Π_i при догађању догађаја $Д$ заиста и активна била, ако вероватноћу β_i, (израчунату по тој претпоставци) поделимо са збиром модификованих вероватноћа добивених по свакој од оних претпоставака,* дакле:

$${}_m\alpha_i = \frac{\beta_i}{\beta_1 + \beta_2 + \ldots \beta_n} \tag{38}$$

а поређењем најзад и:

$${}_m\alpha_1 : {}_m\alpha_2 : {}_m\alpha_3 : \ldots : {}_m\alpha_n = \frac{\beta_1}{[\beta_i]} : \frac{\beta_2}{[\beta_i]} : \frac{\beta_3}{[\beta_i]} : \ldots : \frac{\beta_n}{[\beta_i]}$$

или

$$_{m}\alpha_1 : {}_{m}\alpha_2 : {}_{m}\alpha_3 : \ldots : {}_{m}\alpha_n = \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 : \ldots : \beta_n \qquad (39)$$

или речима: *вероватноће претпоставака, које се узајамно искључују сразмерне су вероватноћама догађаја, које су на основу тих претпоставака и добивене*; дакле исто правило, које смо и под бр. (34) нашли.

По себи је разумљиво, да ће онај узрок (или претпоставка) бити највероватнији, за који се за $_{m}\alpha_i$ добије *највећа вредност*; а пошто $_{m}\alpha_i$ може у извесним приликама да зависи и од више променљивих количина, онда свакад, кад год је то случај а с погледом на нашу доцнију примену, можемо ми да сведемо резултат овога досадањега излагања на овај веома важан став: *у опште вредност од $_{m}\alpha_i$ различна је и зависи од система или боље, од природе независно променљивих количина; сваки од бесконачно млогих система, који може за променљиву количину да се узме, представља по један узрок или по једну претпоставку, па како ми по познатим правилима о максимуму и минимуму можемо свакад да нађемо онај систем вредности независно променљивих количина, који вероватноћу $_{m}\alpha_i$ прави максимумом, то је по све увиђавно, да је баш тај систем вредности и највероватнији и према томе да он и представља и највероватнију претпоставку о догађају који је већ наступио.*

33.

У примеру који смо под бр. 31 имали, ако га доведемо у свезу са претходним општијим посматрањем било је, ако a заменимо са α:

$$\alpha_1 = \frac{4}{5}; \qquad \alpha_2 = \frac{3}{5}; \qquad \alpha_3 = \frac{2}{5}; \qquad \alpha_4 = \frac{1}{5};$$

$$\beta_1 = \frac{256}{625}; \quad \beta_2 = \frac{216}{625}; \quad \beta_3 = \frac{95}{625}; \quad \beta_4 = \frac{16}{256};$$

и отуда:

$$\alpha_1 \cdot \beta_1 = \frac{4}{5} \cdot \frac{256}{625} = \frac{1024}{5 \times 625};$$

$$\alpha_2 \cdot \beta_2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{216}{625} = \frac{648}{5 \times 625};$$

$$\alpha_3 \cdot \beta_3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{96}{625} = \frac{192}{5 \times 625};$$

$$\alpha_4 \cdot \beta_4 = \frac{1}{5} \cdot \frac{16}{625} = \frac{16}{5 \times 626};$$

а помоћу ових:

$$[\alpha_i \beta_i] = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4 = \frac{1880}{5 \times 625}.$$

У овоме случају дакле добијамо по једначинама (35) за вероватноће појединих претпоставака:

$$_{m}\alpha_1 = \frac{128}{235}; \quad _{m}\alpha_2 = \frac{81}{235}; \quad _{m}\alpha_3 = \frac{24}{235}; \quad _{m}\alpha_4 = \frac{2}{235};$$

при чему је опет;

$$[_{m}\alpha_i] = {}_{m}\alpha_1 + {}_{m}\alpha_2 + {}_{m}\alpha_3 + {}_{m}\alpha_4 = 1.$$

За случај пак при коме немамо разлога да сматрамо $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ као различне ми имамо по једначинама (37)

$$_{m}\alpha_1 = \frac{256}{256 + 216 + 96 + 16} = \frac{256}{584};$$

$$_{m}\alpha_2 = \frac{216}{256 + 216 + 96 + 16} = \frac{216}{584};$$

$$_{m}\alpha_3 = \frac{96}{256 + 216 + 96 + 16} = \frac{96}{534};$$

$$_{m}\alpha_4 = \frac{16}{256 + 216 + 9_9 + 16} = \frac{16}{584};$$

из којих се вредности види опет да је:

$$[_{m}\alpha_i] = {}_{m}\alpha_1 + {}_{m}\alpha_2 + {}_{m}\alpha_3 + {}_{m}\alpha_4 = 1;$$

ер је *извесно*, да је ма која од претпоставака била и активна при догађању догађаја; осем тога види се и то, да су вероватноће претпоставака сразмерне вероватноћама β_1, β_2, β_3, β_4, јер је код свију: $\kappa = \frac{1}{584}$.

Ова стална количина κ могла је да се добије и оваквим резоновањем. Пошто смо добили напред правило, да су вероватноће претпоставака сразмерне вероватноћама догађаја то је јасно, да оне морају да су сразмерне разломцима:

$$\frac{256}{625};\quad \frac{216}{625};\quad \frac{96}{625};\quad \frac{16}{625};$$

и ми можемо да ставимо:

$$\begin{aligned} {}_m\alpha_1 &= 256.\ \kappa \\ {}_m\alpha_2 &= 216.\ \kappa \\ {}_m\alpha_3 &= 96.\ \kappa \\ {}_m\alpha_4 &= 16.\ \kappa. \end{aligned}$$

где κ представља сачинилоца за оне 4 претпоставке. Но како је извесно, да је ма која од тих претпоставака при догађању догађаја морала бити активна, то мора да буде:

$$[{}_m\alpha i] = 256.\kappa + 216.\kappa + 96.\kappa + 16.\kappa = 1$$

па дакле:

$$\kappa = \frac{1}{584},$$

одкуда, заменом добијамо исте оне пређашње вредности за ${}_m\alpha_1$, ${}_m\alpha_2$, ${}_m\alpha_3$, ${}_m\alpha_4$.

Вероватноћа простога догађаја à *posteriori*.

34.

Кад су нађене вероватноће сваке могућне претпоставке или свакога могућнога узрока, онда је лако да нађемо и вероватноћу простога догађаја à posteriori.

Јер ако какав догађај *Д* стоји у таквој вези са претпоставкама Π_1, Π_2, .. Π_n (које се узајамно искључују), да га вероватно ставља *ма која* од тих претпоста-

вака у изглед и ми узмемо, да су опет вероватноће појединих претпоставака означене са:

$${}_m\alpha_1,\ {}_m\alpha_2,\ {}_m\alpha_3 \dots {}_m\alpha$$

а вероватноће добивене на основу оних претпоставака са:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3; \dots\ \alpha$$

то је очевидно, да се ма која од оних претпоставака мора спојити са догађањем догађаја *Д*; осем тога према једначини (30) представљају производи:

$${}_m\alpha_1.\ \alpha_1,\quad {}_m\alpha_2.\ \alpha_2,\quad {}_m\alpha_3.\ \alpha_3, \dots\ {}_m\alpha_n\ .\ \alpha_n$$

посебне вероватноће, да ће се са претпоставком

Π_1 и догађај *Д*, спојити
са Π_2 « *Д*, « и најзад
.
.
са Π_n « *Д*, спојити, и ми по ставу за сложен догађај а по обрасцу под бр. (26) добијамо:

$$(B) = {}_m\alpha_1\,\alpha_1 + {}_m\alpha_2\,\alpha_2 + \dots + {}_m\alpha_n\,\alpha_n = [{}_m\alpha_i\,\alpha_i]$$

Тако у пређашњем примеру имамо (види стр. 119):

$$\begin{aligned} {}_m\alpha_1 &= \frac{128}{235}; & \alpha_1 &= \frac{4}{5}; & {}_m\alpha_1.\alpha_1 &= \frac{512}{1175}; \\ {}_m\alpha_2 &= \frac{81}{235}; & \alpha_2 &= \frac{3}{5}; & {}_m\alpha_2.\alpha_2 &= \frac{243}{1175}; \\ {}_m\alpha_3 &= \frac{24}{235}; & \alpha_3 &= \frac{2}{5}; & {}_m\alpha_3.\alpha_3 &= \frac{48}{1175}; \\ {}_m\alpha_4 &= \frac{2}{235}; & \alpha_4 &= \frac{1}{5}; & {}_m\alpha_4.\alpha_4 &= \frac{2}{1175}; \end{aligned}$$

па дакле вероватноћа на искуству основана, по којој ће се и у *истом вучењу* извући једна *бела* лоптица биће:

$$(B)_{б} = \frac{512 + 243 + 48 + 2}{1175} = \frac{805}{1175};$$

За вероватноћу, да ће се у *петом вучењу* извући једна *црвена* лоптица добијамо, пошто сад имају посебне вероватноће, ове вредности:

$$m\alpha_1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{128}{235} \cdot \frac{1}{5} = \frac{128}{1175}; \quad m\alpha_3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{235} \cdot \frac{3}{5} = \frac{72}{1175};$$

$$m\alpha_2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{81}{235} \cdot \frac{2}{5} = \frac{162}{1183}; \quad m\alpha_4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{235} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{1175};$$

као тражену вероватноћу:

$$(B)_{ц} = \frac{128 + 162 + 72 + 8}{1175} = \frac{370}{1175},$$

Збир вероватноћа:

$$(B)_{б} + (B)_{ц} = \frac{805}{1175} + \frac{370}{1175} = \frac{1175}{1175} = 1;$$

јер је извесно, да ће се при петом вучењу извући или једна бела или једна црвена лоптица.

II.

Вероватноћа á posteriori сложенога догађаја а на основу ∞ великога броја претпоставака.

Вероватноћа узрока или претпоставака.

35.

У области егзактних испитивања, у астрономији, геодезији и у опште у свима природним наукама усљовљене су појаве од толиких главних и споредних прилика, да можемо да узмемо, да је број узрока или претпоставака *веома* или ∞ велики. У овоме случају може вероватноћа некога догађаја да има све могућне вредности између 0 и 1, пошто свака претпоставка даје дотичноме догађају по некакву вероватноћу, која свакој од оних ∞ многих претпоставака и одговара и ми ћемо сад да се упознамо са изналажењем вероватноће и за тај специјалан случај.

Да узмемо опет нека су A и B два догађаја и то нека се A односи на појаву беле а B на појаву црвене лоптице, и нека је у опште чињено $(r + s)$ *покушаја, вучења* или *опажања*, у којима се

догађај A десио свега r пута, а
догађај B « « s пута.

Осем тога, ако је $б$ мала количина, (чист разломак) то онда могу чланови реда:

$$б; \quad 2б; \quad 3б; \ldots \; iб$$

да представљају разне вероватноће, да ће се према разним претпоставкама догађај A десити један пут, а

$$1-б; \quad 1-2б; \quad 1-3б; \ldots \quad 1-iб;$$

опет вероватноће, да ће се према тим истима претпоставкама десити догађај B такође један пут. И по себи је разумљиво, да горњи чланови претстављају *просте вероватноће* поменутих догађаја и да вероватноћа догађаја A, може да се мења у границама од 0 до 1, а вероватноћа догађаја B од 1 па до 0.

Ако хоћемо да нађемо вероватноћу да ће се да кажемо догађај A догодити у $(r + s)$ покушаја r пута, а догађај B опет s пута, то по пређашњем треба у развијеном биному: $(a + b)^{r+s}$ да нађемо онај члан, у коме се налази a подигнуто на r-ти, а b на s-ти ступањ, дакле члан у коме је:

$$a^r \cdot b^s.$$

Означавајући са k сачиниоца тога члана у развијеноме биному, ми понајлак увиђамо, да доњи изрази, ако a и b замењујемо по реду са одговарајућим вредностима: $б$ и $(1-б)$; $2б$ и $(1-2б)$; и т. д. дакле изрази:

$$kб^r\,(1-б)^s; \quad k(2б)^r\,(1-2б)^s; \;\ldots\; k(iб)^r\,(1-iб)^n$$

представљају вероватноће за сваку поједину претпоставку, и то вероватноће, да ће се по дотичној претпоставци догађај A догодити r пута а догађај B, s пута.

Ма који у реду ових израза, ако у опште означимо са x просту вероватноћу догађаја A, дакле буди коју од вероватноћа: $б$, $2б$, .. $iб$, а са $(1-x)$ опет одговарајућу просту вероватноћу догађаја B, има ову општу форму (види биномни образац):

$$k\;x^r\;(1-x)^s\,.$$

Уводећи место x вредности:

$x \pm dx$; $x \pm 2dx$; $x \pm 3dx$; .... и т. д.

ми можемо да добијемо произвољан број чланова, који сви представљају вероватноће за тај случај. Ако у исто доба узмемо, да је dx ∞ мала количина, онда ћемо очевидно добити вероватноће таквих претпоставака, којих се природа за ∞ мало мења и које се, мењајући се континуивно једна од друге за ∞ мало и за ∞ мало једна од друге разликују, и тако представљају у потпуном смислу све могућне изгледе како за догађај A тако и за догађај B у извесној врсти догађаја. Буди која веровватноћа с погледом на то, што је dx ∞ мала количина, биће представљена дакле у опште изразом:

$$k\;x^r\;(1-x)^s\;dx.$$

Према обрасцу, који је под бр. (38) изведен дакле по:

$$_m\alpha_i = \frac{\beta_i}{\beta_1+\beta_2+\ldots\beta_n}$$

ако пређемо на границе и узмемо интенграл међу границама $x=o$ и $x=1$ то онда израз:

$$k\int_0^1 x^r\,(1-x)^s\,.\;dx$$

преставља збир вероватноћа свију претпоставака. Израз:

$$k\,x_r\;(1-x)^s\,d\,x$$

представља вероватноћу, да ће се у $(r+s)$ вучења догађај A, r пута и догађај B r пута догодити и то на основу буди које од свију могућних претпоставака и према томе разломак:

$$\frac{x^r\,(1-x)^s\;dx}{\int_0^1 x^r\,(1-x)^s\,dx} \tag{40}$$

представља вероватноћу претпоставке, која вероватноћу догађаја A своди у веома уске или ∞ мале границе x и $x+d\,x$. Очевидно је, да су границе вероватноће, да ће се догађај A један пут догодити представљене вредностима:

$$\left(x-\frac{1}{2}\,dx\right) \quad \text{и} \quad \left(x+\frac{1}{2}\,dx\right).$$

36.

Општи интеграл:

$$\int x^r\,(1-x)^s\;dx \quad \text{или} \quad \int x^r\;dx\;(1-x)$$

добија се поступно интегралима:

$$\int x^r\,dx\,(1-x)^s = \frac{x^{r+1}\,.\,(1-x)^s}{r+1} + \frac{s}{r+1}\int x^{r+1}dx\,.\,(1-x)^{s-1}$$

$$\int x^{r+1}\,dx(1-x)^{s-1} = \frac{x^{r+2}(1-x)^{s-1}}{r+2} + \frac{s-1}{r+2}\int x^{r+2}dx(1-x)^{s-2}$$

$$\int x^{r+2}dx(1-x)^{s-2} = \frac{x^{r+3}(1-x)^{s-2}}{r+3} + \frac{s-2}{r+3}\int x^{r+3}dx(1-x)^{s-3}$$

и т. д, који, ако поновимо s пута овакво свођење, губе чиниоца $(1-x)$ са свим.

Узимљући збир свију горњих чланова ми добијамо:

$$\int x^r(1-x)^s dx = \frac{x^{r+1}(1-x)^s}{(r+1)} + \frac{s}{(r+1)}\frac{x^{r+2}(1-x)^{s-1}}{(r+2)} + \\ + \frac{s(s-1)}{(r+1)(r+2)} \cdot \frac{x^{r+3}(1-x)^{s-2}}{(r+3)} + \ldots \quad (41) \\ + \frac{s(s-1)(s-2)\ldots 3.\ 2.\ 1.}{(r+1)(r+2)(r+3)(r+s+1)} x^{r+s+1}$$

Ако узмемо интеграл међу границама $x = 0$ и $x = 1$, онда ишчезавају сви редом чланови до последњега, који има вредност:

$$\int_0^1 x^r(1-x)^s dx = \frac{s(s-1)(s-2)\ldots 3.\ 2.\ 1.}{(r+1)(r+2)(r+3)\ldots(r+s+1)} \quad (42)$$

За случај кад су бројеви r и s веома велики, ми добијамо по Stirling-у место горњега израза. израз:

$$\frac{r^r \cdot s^s}{(r+s)^{r+s+1}}\sqrt{\frac{2\pi r s}{r+s}}. \quad (43)$$

Ако је $s = 0$, дакле ако претпоставимо само једну једиту врсту догађаја, онда израз под бр. (41) своди се на свој први члан:

$$\frac{x^{r+s}}{r+1},$$

одкуда за опредељен интеграл следује:

$$\frac{1}{r+1}$$

па дакле вероватноћа за тај случај

$$(r+1)\ x^r \cdot dx. \quad (44)$$

која ће при једној и истој вредности од r бити *то већа, што је год x веће и веће.*

Из пређашњега следује и ово. Ако узмемо интеграл вероватноћа између граница α и β дакле образујемо израз:

$$\frac{\int_\alpha^\beta x^r(1-x)^s\ dx}{\int_0^1 x^r(1-x)^s\ dx}, \quad (45)$$

онда он представља вероватноћу разних претпоставака, при којима не може x да буде мање од α ни веће од β.

Вероватноћа будућега догађаја.

37.

Помоћу напред добивених резултата ми можемо сада лако да нађемо и вероватноћу будућега догађаја т. ј. вероватноћу, да ће се догађај A пошто је посматран r пута узастопце, још један пут догодити. Претпостављајући да је x као и до сада проста вероватноћа догађаја A, то на основу ма које претпоставке, добијамо као просту вероватноћу за догађај A:

$$\frac{x^{r+1}\ (1-x)^s dx}{\int_0^1 x^r(1-x)^s\ dx},$$

а интегришући бројиоца међу границама 0 и 1 добијамо вероватноћу основану на свима претпоставкама, дакле је:

$$\underset{б,\ r+1}{(B)} = \frac{\int_0^1 x^{r+1}(1-x)^s\ dx}{\int_0^1 x^r\ (1-x)^s\ dx} \quad (46)$$

тражена вероватноћа. За интеграле ове имамо следеће вредности:

$$\int_0^1 x^{r+1}(1-x)^s\ dx = \frac{s(s-1)(s-2)\ldots\ 3.\ 2.\ 1.}{(r+2)(r+3)(r+4)\ldots(r+s+1)(r+s+2)}$$

$$\int_0^1 x^r(1-x)^s\,dx = \frac{s(s-1)(s-2)\ \ldots\ 3.\ 2.\ 1.}{(r+1)(r+2)(r+3)\ \ldots\ (r+s+1)}$$

и делењем добијамо:

$$\underset{\text{б},\,r+1}{(B)} = \frac{r+1}{r+s+2}. \qquad (47)$$

Исто тако, ако би желели вероватноћу, да ће се догађај B, пошто је у низу догађаја $(r+s)$, s пута посматран, догодити још један пут, онда имамо:

$$\underset{\text{ц},\,s+1}{(B)} = \frac{\int_0^1 x^r(1-x)^{s+1}\,dx}{\int_0^1 x^r\cdot(1-x)^s\cdot dx} = \frac{\dfrac{(s+1)s(s-1)\ldots\ 3.\ 2.\ 1.}{(r+1)(r+2)\ldots(r+s+1)(r+s+2)}}{\dfrac{s(s-1)(s-2)\ldots\ 3.\ 2.\ 1.}{(r+1)(r+2)\ldots(r+s+1)}}$$

или

$$\underset{\text{ц},\,s+1}{(B)} = \frac{s+1}{r+s+2} \qquad (48)$$

Збир:

$$\underset{\text{б},\,r+1}{(B)} + \underset{\text{ц},\,+1}{(B)} = \frac{r+1}{r+s+2} + \frac{s+1}{r+s+2} = 1,$$

што је и по све увиђавно.

Ако је у низу догађаја посматран догађај A заиста r пута, а догађај B ни један пут, дакле, ако је $s = o$, то онда имамо као вероватноћу, да ће се какав догађај из врсте догађаја A, пошто је он r пута узастопце посматран, још један пут догодити:

$$\underset{\text{б},\,r+1}{(B)} = \frac{r+1}{r+2} \qquad (49)$$

Што год је r веће, то ће се више и више приближавати вредност горњега разломка јединици, и с тога се горња вероватноћа назива још и *ступањ сигурности* дотичнога догађаја.

38.

Упоређењем добивених вредности за

$$\underset{\text{б},\,r+1}{(B)} \quad \text{и} \quad \underset{\text{ц},\,s+1}{(B)},$$

дакле:

$$\frac{r+1}{r+s+2} \quad \text{и} \quad \frac{s+1}{r+s+2}$$

ми понајлак увиђамо, да се са растењем бројева r и s и горњи изрази све више и више приближавају извесним вредностима и то:

израз $\frac{r+1}{r+s+2}$ тежи вредности $\frac{r}{r+s}$, а

израз $\frac{s+1}{r+s+2}$ « « $\frac{s}{r+s}$, јер

ако поделимо са $(r+s)$ и први и други израз, онда добијамо:

$$\frac{\dfrac{r}{r+s}+\dfrac{1}{r+s}}{1+\dfrac{2}{r+s}} \quad \text{и} \quad \frac{\dfrac{s}{r+s}+\dfrac{1}{r+s}}{1+\dfrac{2}{r+s}}$$

из којих се, ако претпоставимо да r и s непрестано расту увиђа коректност горњега тврђења. Овај резултат слаже се са напоменом под бр. 26, која је с погледом на Берњуљево докучење и гласила: број понављања разних појава све се то више и више приближава потпуној сразмерности њихових првобитних вероватноћа, што се год више и више покушаја извршило буде.

Вредности од

$$\frac{r}{r+s} \quad \text{и} \quad \frac{s}{r+s}$$

теже дакле правим вредностима од x и $(1-x)$, о чему ћемо ниже још говорити. За сада имамо да поменемо још ово.

Ако образујемо разлике;

$$\frac{r}{r+s} - \frac{r+1}{r+s+2} = \frac{r-s}{(r+s)(r+s+2)}$$

$$\frac{s}{r+s} - \frac{s+1}{r+s+2} = \frac{s-r}{(r+s)(r+s+2)}$$

онда видимо да ће прва разлика бити положна све дотле, докле је $r > s$ што, као што је јасно и мора да буде, јер вероватноћа дотичнога догађаја, која одговара вероватноћи x и која (ако хоћемо да догађај A сигурно ишчекујемо) мора да се узме понајпре равна $\frac{1}{2}$, не може да тежи ка $\frac{r}{r+s}$, ако у изразу $\frac{r+1}{r+s+2}$; $(r+s)$ није ∞ велики број; она је дакле тада сведена међу границе $\frac{1}{2}$ и $\frac{r}{r+s}$. Исто тако је и вероватноћа догађаја, која одговара вероватноћи $(1-x)$ опет сведена међу границе $\frac{1}{2}$ и $\frac{s}{s+r}$, што следује из:

$$\frac{s}{r+s} < \frac{s+1}{r+s+2}$$

и што опет вуче за собом да је $r>s$.

Релативна вероватноћа разних протпоставака у низу ∞ млогих претпоставака.

39.

Проста вероватноћа сваке посебне претпоставке, која одговара вредности x, као што је и из пређашњега познато, јесте ∞ мала количина. Међу тим у пракси је од велике важности да се дође до *релативне* вероватноће разних претпоставака. Ове релативне веро-

ватноће можемо очевидно да добијемо ако у општем изразу:

$$\frac{x^r(1-x)^s\,dx}{\int_0^1 x^r(1-x)^s\,dx}$$

замењујемо x са вредностима

$$x', \quad x'', \quad x''' \ldots x^{(n)},$$

и поредимо тако добивене вероватноће исто онако, као што смо чинили при изналажењу *релативне* вероватноће и напред. Овако радећи ми добијамо као општег представника таквих релативних вероватноћа очевидно:

$$\frac{x^m(1-x)^n}{x^m(1-x)^n + x'^m(1-x')^n} = \frac{1}{1+\frac{x'^m(1-x')^n}{x^m(1-x)^n}},$$

из кога се види, да ће се овај разломак све брже и брже приближивати јединици, што је год x' или *веће* и *веће* или *мање и мање*, дакле оно, што је већ и из напомена под пређашњим бројем и по себи јасно.

Највећа вредност од x добија се из првог диференцијалног количника израза $x^r(1-x)^s$, дакле из једначине

$$r \cdot x^{r-1}(1-x)^s - s\,x^r(1-x)^{s-1} = 0$$

одкуда следује дељењем са x^{r-1} и $(1-x)^{s-1}$:

$$r(1-x) - s.x = 0, \quad \text{па и:}$$

$$x = \frac{r}{r+s}, \quad (1-x) = \frac{s}{r+s}; \qquad (50)$$

или речима: *највероватнија је од свију претпоставака она по којој просте вероватноће догађаја* A *и* B *испадају равне* *разломцима. којих је бројилац број, који показује колико је пута дотични догађај заиста посматран, а именилац број свију* у опште могућних а *посматраних догађаја*, што се потпуно слаже са напоменама при тумачењу бином. обрасца.

ТРЕЋИ ДЕО

Оснивање теорије најмањих квадрата.

I

О грешкама опажања.

40.

Сваки, који је ма какво мерење линије или угла или у опште ма какво опажање појава у природи вршио, па то и по неколико пута понављао, могао се уверити, да се и при једним и истим приликама, при најбољој вољи посматрачевој, са најбољим инструментом па и са једним и истим инструментом, свакад после свакога опажања добијају резултати, који се један од другога разликују за по нешто, било у *положном* било у *одречном* мислу. Ова међусобна *одсгупања* добивених резултата, ове веома мале разлике положне или одречне, називамо ми *грешке опажања*, или *грешке мерења*.

Ове грешке, не долазе од наше воље; оне су неминовна последица разних узрока, јер оне зависе од природе наших чула, дакле од психичких особина самога посматрача; за тим и од инструмената са којима опажања вршимо; од прилика у којима та опажања вршимо и томе слично. Зависећи од разних узрока, грешке се очевидно мењају са мењањем тих узрока и свака па и најмања измена појединога узрока, повлачи за собом свакад другаче и другаче мењање грешака; комбиновање тих измена на самим узроцима, вуче за собом као неминовну последицу и комбиновање грешака и услед овога је јасно. да ми можемо са свим разложно да замислимо, да грешке опажања зависе од *веома многих* услова; но оне су осем тога с погледом на напред поменуто и производ таких услова, које ми нисмо у стању á priori да определимо ни по броју, ни по величини, па ни смислу самога дејства.

С погледом на све ово ми можемо да кажемо, да су и *грешке опажања* и то у смислу у коме ми *случај* разумемо *случајни појави*.

Осем тога, због неусавршаности наших чуоних опажања, због неусавршаности инструмената са којима опажања вршимо, због неусавршаности метода за мерење, због неједнаке осветљености, неједнаке вибрације атмосферскога ваздуха, не једнаке влаге у ваздуху и т. д. — грешке опажања испадају *веће* или *мање*, како кад радимо са горим или бољим инструментом по лошијем или бољем методу за мерење.

Апсолутна вредност количина не може се никад опажањем определити.

41.

Кад су сва наша опажања подложна грешкама, које могу бити *положне* и *одречне*, *веће* и *мање*, и кад ми и поред наше најбоље воље и најбољих инструмената, па и највеће пажње наше не можемо ни *сувишним* или *прекобројним* опажањима да дођемо до резултата, који су од грешака слободни, онда је разложно да се запитамо: *да ли ми у опште можемо да определимо опажањем или мерењем праву, апсолутну или истиниту вредност ма какве количине?*

Свака количина има само по једну *апсолутну* вредност и то је она вредност коју ми опажањем, мерењем и хоћемо да определимо. Према томе ми би могли на горње питање потпуно да одговоримо само тако, кад

би могли да определимо свакад она напред поменута одступања, оне *апсолутне грешке* опажања и то како по њиховој величини тако и по њиховом смислу. Знајући све те апсолутне грешке, ми би понајлак могли да определимо и ону апсолутну вредност тражене количине и то просто сабирајући апсолутне грешке са дотичним резултатима првог, другог мерења и т. д. ако су грешке положне, или одузимљући их од дотичних резултата, ако су грешке одречне.

Али ове апсолутне грешке, могу да се определе тек упоређењем оних резултата, које смо првим, другим и т. д. опажањем добили, са апсолутном вредности дотичне количине, а пошто ми незнамо ту апсолутну вредност, која би као што видимо имала да нам послужи као основа за изналажење оних апсолутних грешака, то је јасно, *да ми не можемо да определимо никад ни те апсолутне грешке*. Определење апсолутних вредности појединих грешака исто је тако немогућно, као што је немогућно и конструисање таквих инструмената, који би неусавршаност наших чуоних опажања парализисали и давали нам поред свега напред поменутога опет апсолутно тачне вредности оних количина, које смо ма на какав начин опажали.

Појам о закону грешака.

42

Пошто нисмо у стању да определимо апсолутне вредности грешака, онда нам пада на памет, да потражимо другога сретсва, те да се помогнемо у овој неприлици а на име, да потражимо основу за закључак: да ли напред поменута одступања или грешке у опште подлеже ма каквом закону, који ће нас зар. ако га пронађемо, посредно одвести најзад и сазнању самих грешака, којима су наша опажања подложна.

Ми смо већ напред казали, да су у смислу, у коме ми *случај* схватамо, и грешке случајни појави, догађаји, и као што сви појави у свету подлеже принципу о узроку и дејству (па ма како се они привидно неправилно догађали) тако морају томе принципу да подлеже и грешке наших опажања; — дакле као у опште при свима појавима тако и при грешкама опажања морају да постоје ма какви закони, којима су те грешке подложне и на нашем је трагању и испитивању, да спекулацијом или апстраховањем из посматраних појава, из опажаних количина, пронађемо те законе, и да најзад ослањајући се на њих дођемо и до критеријума на основу кога можемо на сигурно да ценимо кретање тих грешака, њихову густину па и њихово понављање, како по величини тако и по смислу њиховога дејства.

Изналажење или боље сазнавање закона, који владају неком врстом догађаја, све је теже и теже, што се догађаји привидно неправилније и неправилније додогађају, и што је број посматраних догађаја мањи и мањи; међу тим, што је год број посматраних догађаја већи и већи, то је и изналажење закона лакше. Довољним повећањем броја догађаја или што је са свим идентично, довољним повећањем броја опажања, ми можемо да стекнемо потребну основу те да обелоданимо дотични закон, па да га најзад и несумњиво определимо. Овако нађен закон вреди услед напред казанога, очевидно у опште само *за ону врсту догађаја*, који су при изналажењу закона и опажани, к из тога закона изведене неминовне последице према самој логици ствари, *имају несумњиву вредност само за велики број потоњих догађаја*, т. ј., само за такав број догађаја имају те последице карактер *извесности* или *несумњивости*, и то, као што је и по себи разумљиво и по све основано, ако ми све те посматране догађаје *укупно узмемо*. — Ако је број потоњих догађаја мањи, онда је и по себи јасно

да ће из закона грешака изведене неминовне последице све то више губити од свога напред поменутога карактера; — оне ће бити тада, а за ограниченији број догађаја, тек само *донекле извесне* т. ј. оне ће бити тада за тај број догађаја само тек *вероватне*.

Све што год је до сада у теорији најмањих квадрата и створено, управо цела зграда њена и оснива се на законима, који су о ∞ великом броју тако званих *случајних*, *неправилних* или боље *неизбежних* грешака á priori постављени; јер се све, што је у овој врсти појава особито било и што се, с погледом на наше схватање при грешкама, могло у опште да назове случајем, и дало представити, оличити једни и истим аналитичким изразом. Овај израз познат је у науци под именом: *закон грешака*.

Ослањајући се на овај аналитички представљен закон грешака, ми смо у стању да у свима приликама, нађемо *највероватније вредности опажаних* количина, па тиме да дођемо посредно а са *истом вероватноћом* и до *највероватнијих* грешака, којима су наша појединa опажања подложна. Но осем тога што можемо да добијемо највероватније вредности опажаних количина. на основу закона о неизбежним грешкама, можемо ми теоријским путем да дођемо и до критеријума, те да можемо да оценимо и до које су мере како појединa опажања, тако и из њих изведени резултати поуздани или тачни, о чему ћемо у доцнијим предавањима још накнадно говорити.

Важност контролних опажања.

43.

И наше *практично осећање*, наша свагдања жеља да се што више приближимо правој, апсолутној истини, налажу нам да непоклањамо потпуну веру исказу само једнога јединoга лица, једнога јединoга сведока, и ми (α) *незнатна неизбежна одступања* иглиничинога врха од контуре површинине, коју иглицом обилазимо;

(β) *неправилно котрљање* планиметровога ваљка, које долази од рапавости подлоге на којој планиметар стоји, и најзад:

(γ) *непотпуна ректификација* планиметрових делова, дакле његово неисправно стање.

Овај трећи узрок долази отуда, ако оса планиметровога ваљка није тачно упоредна са оном линијом, коју можемо да замислимо повучену кроз игличин врх и заједничку обртну осу планиметрових кракова. Грешка која долази од овога узрока као и све друге *инструменталне грешке* могу повећаном пажњом при ректификацији да се сведу на веома малу меру; међу тим они узроци под (α) и (β) наведени, не могу да се отклоне ни на који начин, па ма како пажљиви при обилажењу површинине контуре били и ма како биле подлога па и периферија планиметровога ваљка углачене. Према овоме су (α) и (β) узроци *неизбежних*, (γ) узрок у опште *избежних* грешака. Но осем овога узроци (α) и (β) разликују се од узрока (γ) још и тиме, што они при понављаним обилажењима поменуте површинине контуре проузрокују све другаче и другаче грешке у крајњем резултату, јер се и неправилности при обилажењу контуре па и при котрљању планиметровога ваљка непрестано мењају и при сваком новом обилажењу другаче испадају и по величини и по смислу дејства. Ми знамо да утицаји од поменутих узрока (α) и (β), дакле грешке, које ови производе постоје при свакоме обилажењу, али опет *незнамо где, на коме месту баш постоје и колике су по својој величини а и по смислу, т. ј. дали положне или одречне.*

Узрок (γ) проузрокује све донде, докле год узајаман положај између површине и планиметровога пола остане непромењив, *сталну грешку* у резултату, чији утицај

може и у напред да се израчуна из димензија планиметрових и из облика и положаја контуриних за сваку инструменталну грешку. Са мењањем узајамног положаја између пола и површине мења се и та стална грешка а у колико, и то може такође да се израчуна. Карактерна особина дакле ових сталних грешака је, да се оне у једнаким приликама показују *свагда једнаке величине*; њихов је утицај на неисправност резултата *сталне природе* и зато се и зову сталне грешке. Ове сталне грешке немогу се поништити повећаним бројем опажања, али могу нарочитим методама за опажање да се компанзују. Тако се мерењем угла у два положаја дурбинова или читањем са два нонијуса поништавају ексцентрицитетни утицаји на резултате и т. д.

Ми можемо све грешке, које би долазиле од инструменталних неисправности, дакле све *сталне* грешке да сматрамо такође као избежне, али као што је и по самој природи ствари увиђавно, ми то можемо да чинимо само *до неке мере*; јер и ако је истина да су оне производ у опште отклоњивих узрока, опет су оне избежне само до оних заостајућих остатака, који се с погледом на величину случајних или не избежних грешака могу у опште још да занемаре. Тако н. пр. дужина какве летве за мерење мора да се слаже са номиналном дужином у толико, да заостало незнатно одступање не проузрокује при мерењу дужина, већу несигурност, но што је она, коју неизбежне грешке производе.

Што се тиче оних првих узрока, са којима су по утицају на грешке идентични и ови као: *несигурност при поантирању*, при визирању какве објектове тачке: *несигурност при читању подела* и при оцењивању, које се подеоне црте нонијусове поклапају са којима на лимбусу; *немирноћа ликова* од удаљених објеката због ваздушне ундулације; најзад *мала заостала одступања* због инструменталних неисправности и т. д. — сви они производе свакад *неизбежне грешке* опажања. Карактерна особина ових неизбежних грешака је, да се оне са свим неправилно, без реда и час на једној а час на другој страни од апсолутно исправнога положаја појављују; њихов је утицај на неисправност резултата веома променљиве и неправилне природе и зато се оне зову и неправилне грешке опажања. Вештачким наоружањем наших чула могу истина грешке, које долазе од неусавршаности наших чула, да се сведу у веома мале границе, али опет оне постоје свакад у извесној мери; исто тако и оне које долазе од тако званих елементарних узрока, и те не можемо ни на који начин ни да модификујемо, а то ли да их са свим уклонимо пошто оне и независе од нас, и у колико ти елементарни узроци постоје, у толико је и наша жеља, да тачност наших опажања повећамо, до извесне мере ограничена. Из свега досада казанога следује, да ни сталне грешке од којих могу наша опажања *донекле* да се ослободе немогу бити предмет рачуна вероватноће и наше даље студије, већ су то само *случајне* или *неизбежне грешке*, чија је као што смо видели карактерна особина у томе, да се од њих опажене количине немогу *никако* да ослободе (јер оне зависе од онога што смо ми случајем назвали или боље од непознатих и веома млогих узрока.)

Но и ако неизбежне грешке у ствари свакад постоје, опет поред свега досад поменутога а с погледом на факта из иску тва можемо у опште да кажемо, да *величина неизбежних грешака није непроменљива*, већ на против, да се интензивност њихова мења, да се границе међу којима се оне појављују сужавају све то више и више, и то у тој мери више, у којој се методи опажања јаче унапређују, усавршавање прецизионих инструмената боље напредује, на кратко, што год наше

сазнавање и побеђивање природе у опште сигурније у напред корача.[1])

Дефиниција резултујуће грешке и основа за примењивост рачуна изравњавања у опште.

45.

Ми смо већ и напред поменули, да тако зване случајне или неизбежне грешке зависе од ∞ многих или бар веома многих узрока и према томе свака грешка, којој је појединo наше опажање у опште подложно, не може да се сматра као проста, већ као грешка која је *сложена*, која резултује из више тако званих елементарних, основних грешака, које можемо за разлику од оне резултујуће грешке да назовемо и *саставним* грешкама опажања.

Саставне грешке потичу из узајамнога дејства свију појединих узрока и као што могу и узроци, иначе променљиви по својој интензивности да дејствује у два разна смисла, и то неки у смислу повећавања опажаних количина а други у смислу смањивања њиховог, исто тако могу и саставне грешке да буду положне или одречне. Ако превладају узроци са положним или одречним дејством, биће и резултујућа грешка опажања положна или одречна и с погледом на ово ми можемо да поставимо ово опште правило: *свака резултујућа грешка, може да се сматра као алгебарски збир свију саставних грешака и може да буде положна или одречна*.

Пошто ми не можемо никад à priori да нађемо апсолутну вредност опажане количине, па ни апсолутне

1) Laplace, Essai Philosophique etc p. 2:

«Dans l'ignorance des liens qui les unissent au système entier de l'univers, on les a fait dépendre des causes finales, ou du hasard, suivant qu'ils arrivaient et se succédaient avec régularité ou sans ordre apparent; mais ces causes imaginaires ont été successivement reculées avec les bornes de nos connaissances et disparaissent entièrement devant la saine philosophie, qui ne voit en elles que l'expression de l'ignorance où nous sommes des véritables causes».

грешке опажања, већ можемо само највероватније грешке, опажања да нађемо, то је по себи јасно, да поједине највероватније грешке опажања и јесу резултујуће грешке којима су поједина наша опажања подложна.

Немогући да дођемо до апсолутне истине, до апсолутне вредности тражене количине, ми, пошто опажањем добивени резултати свакад обелодањују мања или већа одступања, мање или веће резултујуће грешке, морамо да се решимо на *поправљање*, дакле на изравњавање оних опажањем добивених резултата и то тако, да све резултате, које смо добили опажањем једне и исте количине *изменимо за по нешто мало*, било то у положном или одречном смислу, док не постигнемо потпуно слагање њихово, т. ј. док их потпуно не *изравнамо.* Апсолутна потреба овога изравњавања, не потиче само из чисто математичких мотива, но на против, она нам се намеће и самом логиком ствари, која нам и налаже да не сматрамо као истините, апсолутно тачне оне исказе, који један од другога одступају или нас на одступања или неслагања наводе.

Поправке ове, као што је и по себи разумљиво смеју по величини својој да додстигну тек само неку опредељенију границу и морају у сравнењу са опажаним количинама, а с погледом на инструменат, којим су оне количине опажане, да буду *веома мале*, дакле *посве немерљиве.* Овај је услов неизоставан свакад, кад год хоћемо у опште и да предузмемо изравнавање грешака, *јер само на овој основи и постаје рачун изравњавања по све основан и применљив.*

Осем овога имамо да поменемо и ово.

Горња напомена односно саме природе поменутих поправака, веома је потребна била, и то једно с тога, да се не би можда помишљало, да ми са рачуном изравњавања можемо хрђава опажања или мерења да направимо добрима, па да можда у томе мишљењу поста-

немо безбрижнији и мање пажљиви, но што би и по својој властитој наклоности према послу били, а друго и с тога, што ћемо при даљем раду често пута имати прилике да у математичким излагањима сматрамо *диференцијале* дотичних количина, *као поправке* за извршење самога изравнавања, што разуме се не би могло да буде, да ни смо претпоставили, да су те поправке у опште веома мале количине.

Особине неизбежних грешака.

46.

Закон грешака као што смо већ поменули, то је аналитички представник особина неизбежних грешака и с тога је потребно, да се упознамо са тима особинама пре но што приступимо изналажењу тога закона.

Да би могли што темељније да схватимо и што потпуније да обухватимо све особине неизбежних грешака, ми ћемо да посматрамо веома обичан појав а на име гађање у нишан са каквом добром пушком. Тога ради да узмемо да је на каквој површини око једне тачке, око центра описано неколики кругова, који одвајају поједине нишанске партије једну од друге, осем тога нека је какав добар стрељач избацио веома велики број метака и то разуме се све редом са једном и истом пушком, са једнаком пажњом и т. д. При томе ће стрељач или погодити у центар, или непогодити или најзад промашити нишанску површину са свим.

Пажљивијим посматрањем нишанскога поља видели би и на први поглед, да се број одступања од центра на једну страну, приближно слаже са бројем исто тако великих одступања на противну страну; да су мања одступања млогобројнија од већих и да је ∞ *велико одступање од центра*, дакле *потпуно промашање нишана веома редак појав.*

Да би још сигурније могли да сазнамо особине неизбежних грешака, да узмемо и један пример из геодетске праксе и то из Беселовог дела: „Gradmessung In Ostpreussen“. Бесел је мерио на станици *Тренк* 18 пута угао између *Медникена* и *Фухсберга* и добио:

Опажање	угао	грешка	Опажање	угао	грешка
1	83° 30' 36".25	— 1.38	10	83°30'6".96	— 2.09
2	7.50	— 2.63	11	3.16	+ 1.71
3	6.00	— 1.13	12	4.57	+ 0.30
4	4.77	+ 0.10	13	4.75	+ 0.12
5	3.75	+ 1.12	14	6.50	— 1.63
6	0.25	+ 4.62	15	5.00	— 0.13
7	3.70	+ 1.17	16	4.75	+ 0.12
8	6.14	— 1.27	17	4.25	+ 0.62
9	4.04	+ 0.83	18	5.25	— 0.38

Већ и из ових 18 опажања и одговарајућих грешака види се, да грешке подлеже извесноме закону. Њих има 10 положних и 8 одречних и према томе и из тако малога броја опажања следује, да су бројеви положних и одречних грешака готово једнаки. Осем тога ако уредимо све грешке (без обзира на знаке) по величини њиховој и то у јединицама последње децимале, онда следују грешке у овоме реду:

10 12 12 13 30 38 62 83 112
113 116 127 138 163 171 209 263 462.

Ако узмемо, да је 500 гранична величина грешке и да су све између 0 и 500 лежеће грешке *подједнако* могућне, дакле да су могућне све грешке: 0, 1, 2, 3, . . . 300, 496, 497, 498, 500 (не обзирући се на грешке, чија је разлика мања од јединице) то се и из горњега реда види, да при свем том, опет нису у исто доба и све грешке подједнако вероватне, већ на против, да су вероватније грешке испод, 250, од грешака већих од ове вредности; јер између горњих 18 грешака имамо 16 грешака, којих је величина мања од 250, а само 2 грешке, којих је величина већа од 250. Осем тога вероватније је, да ће се при новом мерењу истога угла учинити грешка од 20 но од 200, јер у горњем реду између 10 и 30 имамо 5 повољних случајева, који грешку 20 у изглед стављају, а само 1 повољан случај и то онај, између 190 и 209, који би нам дао грешку по величини = 200. Највећа је грешка 462 и најневероватнија, и т. д.

Примењујући ова докучења на велики број неизбежних грешака и доведав их у везу са неминовним последицама, ми долазимо до ових карактерних особина, а на име:

1., При веома млогим добрим, подједнако пажљивим опажањима једне и исте количине, дакле у низу ∞ млогих грешака, појављују се *подједнако велике положне или одречне грешке подједнако често*, т. је, *подједнако вероватно*, јер кад то не би претпоставили, онда би морали да претпоставимо, да има ма каквога утицаја од ма каквих сталних узрока.

Ако су отклоњени сви узроци сталних грешака, онда је увиђавно, да немамо основанога разлога да држимо, да ће одступање извесне величине на једној страни бити многобројнија но на другој — што је, као што видимо идентично са напред казаним.

2., Мање грешке опажања многобројније су од великих, то ће рећи, *мање су грешке вероватније од великих* грешака, што је и по себи посве увиђавно, јер стрељач се труди при свакоме пуцању да погоди тачно у центар нишана, и ако су извори сталних грешака отклоњени, онда у опште опет не мамо никаквога основаног разлога да претпостављамо да ће се он чешће удаљавати од центра него ли да ће га погодити. И ако су теоријски, по величини све могућне вредности грешака у ствари могућне, опет је напред речено и самим искуством посве основано.

3., Из става под 2., следује, као неминовна последица и ово: густина придолажења или појављивања какве грешке у тесној је вези са величином грешкином или другим речима: *вероватноћа грешкина је функција грешкине величине*, па и

4., Вероватноћа грешке, која би по вредности била равна нули, дакле *вероватноћа, да ће се при каквом опажању учинити ∞ мала грешка има веома велику вред-*

ност т. ј. она је у сравнењу са вероватноћама других већих грешака највећа или *максимум*. Исто тако из става под 2., следује најзад и

5., *Вероватноћа, да ће се при каквом опажању учинити* ∞ *велика или бар веома велика грешка, равна је нули*, т. ј. она је у сравнењу са вероватноћама других мањих грешака најмања или *минимум*; јер и ако је теоријски свака могућна вредност грешака положна или одречна у ствари могућна, опет из искуства знамо, да грешке не прелазе неку опредељену величину, коју треба још накнадно да прецизирамо. Према томе, све су вероватноће грешака, које би и ту опредељену величину као крајњу границу грешака превазилазиле очевидно међу собом једнаке и равне нули. Да би се ово још боље увидело ево и примера за то. Ако меримо какав угао са добро ректификованим теодолитом, који нам са нонијусом даје непосредно и 10", онда је немогућно да при једноме мерењу ишчекујемо већу грешку од поменутога податка; при мерењу углова каквога троугла неможемо ишчекивати већу грешку од $3 \times 10 = 30$ секунада и т. д.

Но осем поменутога лако је увиђавно, да све у опште могућне грешке леже по својој величини међу границама највећих положних и највећих одречних грешака. Исто је тако увиђавно, да и ако неможемо са потпуном извесношћу да тврдимо, да грешке потпуно континуивно, дакле без икаквих скокова од својих најмањих па до својих највећих вредности расту, то опет, за велики број опажања, можемо да претпоставимо и то простијега рачуна ради, да је у великој мери вероватно, да горе поменути *континуитет све то више постоји, што је год број опажања, дакле и број грешака већи и већи.*

47.

С погледом на ставове од 1 до 5, које смо у пређашњем броју поставили, ако узмемо да је Δ права или апсолутна грешка каквога нашег опажања, то је очевидно, да можемо да представимо вероватноћу, да ћемо при опажању и учинити грешку Δ, овим аналитичким изразом:

$$B = \varphi(\Delta), \tag{51}$$

јер по ставу под 3., и јесте *вероватноћа грешкина функција њене величине.*

По ставу под 1., као што смо видели, подједнако велике положне или одречне грешке подједнако су вероватне, т. ј. вероватноћа грешке $(+\Delta)$, равна је вероватноћи грешке $(-\Delta)$ и према томе је и:

$$\varphi(+\Delta) = \varphi(-\Delta). \tag{52}$$

Из ове једначине следује, пошто је вероватноћа свакад положна количина, да у функцији вероватноће, могу да се налазе *само парни ступњи* од Δ и да она крива линија, којом би горњу функцију представили, мора да је према ординатној оси како на једну тако и на другу страну потпуно подједнака, т. ј. да има два потпуно *симетријска крака* (види сл. 4 и једначину (33)).

По ставу под 4., имамо:

$$B_{\max} = \varphi(\Delta_{\min}) = \varphi(0) \tag{53}$$

а по ставу под 5., и:

$$B_{\min} = \varphi(\Delta_{\max}) = \varphi(\infty) \tag{54}$$

што значи, да апсцисна оса координатнога система представља асимтоту оне поменуте криве линије (функције вероватноћа) дакле такву праву линију, којој се она крива линија непрестано приближава, и то тако, да је никад не додирне.

Најзад по ставу под 2., и пошто вероватноћа или боље функција вероватноће са растењем грешака по својој вредности опада, а са опадањем грешака расте, то је јасно, да први диференцијални количник функције вероватноће, дакле:

$$\frac{d\ \varphi(\triangle)}{d\triangle} = \varphi'(\triangle)$$

мора да је *за положне грешке* или $(+\triangle)$ *свакад одречан*, а за *одречне грешке* или $(-\triangle)$ *свакад положан* и ма да је $\varphi(+\triangle) = \varphi(-\triangle)$ *свакад само положна количина*. Горњи израз може да се напише дакле и овако:

$$\frac{d\varphi(\pm\triangle)}{d(\pm\triangle)} = \mp\,\varphi'(\pm\triangle) \tag{55}$$

И по себи је разумљиво, да свака функција $\varphi(\pm\triangle)$, која би потпуно задовољавала све услове представљене једначинама: 51; 52; 53; 54; и 55; могла би да се сматра са пуно разлога, као *аналитички представник закона грешака*.

Особине саставних грешака и претпоставка о тима грешкама.

48.

Резултујућа грешка, као што смо видели, стоји у тесној вези са тако званим саставним грешкама и с тога је на реду, да се упознамо и са особинама саставних грешака; но ово је потребно и с тога, што помоћу саставних грешака можемо да дођемо и до самога закона грешака и то у његовом аналитичком облику. Што се тиче саставних грешака, које свагдању резултујућу грешку опажања и састављају, о њима можемо да кажемо, да су оне вазда *случајни појави*, дакле да су *случајне грешке*, и да према томе могу да буду исто тако *положне* као и *одречне*. Ово је неминовна последица пређашњих напомена о узроцима грешака, па и пређашњега закључка, на основу кога су сви утицаји ма каквих сталних узрока, већ по себи искључени.

Но и ако могу саставне грешке да буду положне и одречне, опет треба да приметимо, да тиме *није речено*, да се у исто време морају и подједнако велике положне и одречне грешке појављивати. Осем тога, број положних и број одговарајућих одречних саставних грешака не морају да буду једнако велики, јер би то очевидно повлачило за собом, да резултујућа грешка испадне равна нули.

Пошто су саставне грешке случајни појави, то се односно њихове величине не да ништа à priori казати, већ мора да се прибегне претпоставци, која би с погледом на здрав разум у опште најоснованија била. Најоснованија и најприроднија претпоставка, која крајњи резултат, дакле резултујућу грешку опажања не би алтерирала била би очевидно претпоставка: *да све саставне грешке имају једну апсолутну вредност* т. ј., *да ми можемо место целокупнога система различно великих саставних грешака, да узмемо други систем од исто толико, али само сад међу собом апсолутно једнаких саставних грешака*, што се и са дефиницијом резултујуће грешке, која може да буде положна или одречна потпуно слаже.

Према томе дакле с погледом на напред поменуто односно особина саставних грешака, ми долазимо до овога правила:

Све саставне грешке, које у опште резултујућу грешку састављају, апсолутно узете, међу собом су једнаке и могу исто тако лако да буду положне као и одречне; број положних није раван броју одречних саставних грешака и ови бројеви и неморају бити једнаки.

Густина грешака или релативна могућност грешака.

49.

Ослањајући се на напред изложену претпоставку и то како односно знака тако и односно величине саставних грешака, ми можемо сад лако да определимо како величине свију могућних грешака, које у опште и могу при каквој врсти опажања и да се појаве, тако и густине њиховога појављивања т. ј. њихову релативну могућност.

Но пре, но што пређемо на изналажење релативних могућности, имамо да поменемо још и ово.

Саставне грешке могу на разне начине да се саставе или боље да се комбинују, те да произведу дотичну резултујућу грешку; свака у опште могућна комбинација, *подједнако је основана* и према томе може и свака од њих и да постоји, и ако хоћемо да нађемо све могућне величине резулт. грешака, онда треба да образујемо и све могућне комбинације саставних грешака. С погледом на ово сад речено, ако узмемо да је Δx вредност оних *саставних међу собом једнаких грешака*, које могу као што смо видели да буду исто тако положне као и одречне, и ако је број њихов m, онда очевидно, да би добили сваку могућну резултујућу грешку а према дефиницији резултујуће грешке, ми морамо да образујемо све могућне збирове и то узимљући у тима збировима један пут саставну грешку као положну, дакле:

$$+\Delta x,$$

а други пут опет као одречну, дакле:

$$-\Delta x.$$

По познатим обрасцима за комбинације без понављања, пошто горе поменути збирови и нису ништа друго (као што је из пређашњега јасно) до комбинације без

понављања и то по реду узимљући по 1 и 1, за тим по 2 и 2, по 3 и 3, и т. д. елемента, то ми добијамо да ће се:

$m\cdot\Delta x$ т. ј. m пута $(+\Delta x)$ појавити 1;
$(m-2)\Delta x$ « $(m-1)$ « $(+\Delta x)$ и
1 « $(-\Delta x)$ « « m,
$(m-4)\Delta x$ « $(m-2)$ « $(+\Delta x)$ и
2 « $(-\Delta x)$ « « $\frac{m(m-1)}{1.\ 2}$,
$(m-6)\Delta x$ « $(m-3)$ « $(+\Delta x)$ и
3 « $(-\Delta x)$ « « $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3.}$
$(m-8)\Delta x$ « $(m-4)$ « $(+\Delta x)$ и
4 « $(-\Delta x)$ « « $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$
. . . .
. . . .
. . . .

и т. д. најзад и

$-m.\Delta x$ т. ј. m пута $(-\Delta x)$ појавити: 1.

Ми видимо дакле, да су они бројеви, који представљају густину појављивања појединих резултујућих грешака, ао што су грешке.

$$m.\ \Delta x,$$
$$(m-2).\ \Delta x,$$
$$(m-4).\ \Delta x,$$
$$(m-6).\ \Delta x, \text{ и т. д.}$$

дакле бројеви:

$$1 = 1$$
$$m = \binom{m}{1}$$
$$\frac{m(m-1)}{1.\ 2.} = \binom{m}{2}$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3.} = \binom{m}{3} \text{ и т. д.}$$

потпуно идентични са сачиниоцима произвољнога бинома, који је подигнут на m-ти ступањ.

Из већ уочене симетрије међу члановима, који од средине развијенога бинома подједнако далеко одстоје следује, да обе резултујуће грешке:

$$+ m\Delta x \text{ и } - m\Delta x,$$

које су образоване од свију саставних грешака и то узетих све *у једноме смислу* (дакле или све *као положне* или све као *одречне*), и које су према томе у исто време и *највеће могуће резултујуће грешке*. могу најмање да се се ишчекују; грешке су: $+ m\Delta x$ и $- m\Delta x$ дакле најневероватније, јер је њихова релативна могућност или лакоћа, да се оне заиста и појаве, представљена најмањим бројем. Ово се слаже са ставом: $B_{\min} = \varphi(\Delta_{\max}) = \varphi(\infty)$.

Осем тога из горњих резултата следује, да је релативна могућност резултујућих грешака све то већа, што се год више и више приближавамо средини развијенога бинома, сачиниоцу средњега члана; т. ј. што је год апсолутна вредност резултујуће грешке мања и мања, то је њена релативна могућност све већа и већа, што се очевидно слаже са ставом: $B_{\max} = \varphi(\Delta_{\min}) = \varphi(0)$ Исто тако лако се увиђа, да сваке две резултујуће грешке, које од средине развијенога бинома подједнако одстоје, т. ј. које имају *једнаке апсолутне вредности*, имају у исто доба и једнаке релативне могућности; или оне су подједнако вероватне, што се најзад опет слаже са ставом: $\varphi(+\Delta) = \varphi(-\Delta)$.

50.

Ми смо напред поменули, да је у опште број саставних грешака ∞ велики и општи карактер ових излагања неће се ни уколико изменити, ако ради још уде-

снијега излагања претпоставимо, да је број саставних грешака *паран* број и раван $2m$. У овоме случају имаћемо у развијеноме биному један *средњи члан*, и ако узмемо да је $\pm \frac{\Delta x}{2}$ апсолутна вредност сваке од оних $2m$ саставних грешака, што образују свагдању резултујућу грешку опажања, коју у опште означавамо са Δ, то ће онда, очевидно свагдању релативну могућност те резултујуће грешке представљати сачиниоци бинома на $2m$-ти ступањ, и они ће се за овај случај добити, ако пређашње m заменимо са $2m$, што је у доњој таблици и учињено.

Величина резултујуће грешке Δ.	За образовање резултуј. грешке Δ комбинују се:		Релативна могућност резултујуће грешке
	$+\frac{\Delta x}{2}$	$-\frac{\Delta x}{2}$	
$+m\Delta x$	$2m$	0	1
$+(m-1)\Delta x$	$2m-1$	1	$2m$
$+(m-2)\Delta x$	$2m-2$	2	$\frac{2m(2m-1)}{1.\ 2}$
$+(m-3)\Delta x$	$2m-3$	3	$\frac{2m(2m-1)(2m-2)}{1.\ 2.\ 3.}$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$\pm(m-m)\Delta x$	$2m-m=m$	m	$2\frac{2m(2m-1)\ldots(m+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots m.}$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$-(m-3)\Delta x$	3	$2m-3$	$\frac{2m(2m-1)(2m-2)}{1.\ 2.\ 3.}$
$-(m-2)\Delta x$	2	$2m-2$	$\frac{2m(2m-1)}{1.\ 2.}$
$-(m-1)\Delta x$	1	$2m-1$	$2m$
$-m.\Delta x$	0	$2m$	1

Из ове таблице види се јасно, како расти или опада релативна могућност грешке Δ, кад се она, апсолутно узета мења за $\pm\Delta x$ или за прираштај, који је два пута онолики. колика је претпостављена апсолутна вредност појединe саставне грешке.

Сачинилац оптштега члана бинома, који је подигнут на $2m$-ти ступањ и то сачинилац члана, у коме би се находили ступњи $2m$-i, и i, представљен је изразом:

$$\frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots(2m-i+1)}{1.\;2.\;3\ldots\ldots i};$$

и ми, ако га применимо на овај случај и од средине пошав, дакле од 0 па до највеће резузтујуће грешке $\pm m\Delta x$, уредимо све могуће резултујуће грешке, онда добијамо следећу таблицу:

Резултујућа грешка Δ	Релативна могућност резултујуће грешке
0	$2\frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots(m+1)}{1.\;2.\;3.\ldots\ldots m}$
$\pm\Delta x$	$2\frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots(m+2)}{.\;2.\;3.\ldots\ldots(m-1)}$
$\pm 2\Delta x$	$2\frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots(m+3)}{1.\;2.\;3.\ldots\ldots(m-2)}$
$\pm 3\Delta x$	$2\frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots(m+4)}{1.\;2.\;3.\ldots\ldots(m-3)}$
.	.
.	.
.	.
$\pm(m-1)\Delta x$	$2.\,2m$
$\pm m\Delta x$	$2.$

И по себи је разумљиво, да ове релативне могућности представљају повољне изгледе за догађање ма

које резултујуће грешке Δ и ми помоћу њих можемо лако да определимо вероватноћу дотичне резултујуће грешке, дакле $\varphi(\Delta)$.

II.

Закон грешака.

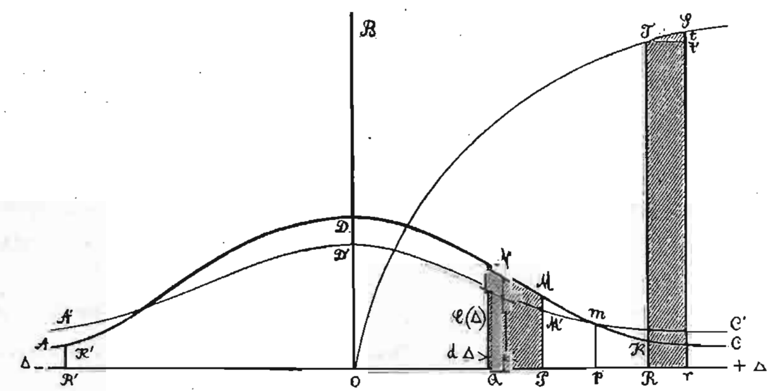
51.

Поменуто је, да под законом грешака разумемо ма какву финкцију $\varphi(\Delta)$, која представља математичку вероватноћу, да ће се баш неизбежна грешка Δ при каквом опажању учинити. Из овога веома прецизног захтева, да се баш грешка Δ а никаква друга не учини. следује непосредно, да вредности, које уопште вероватноће могу да имају, морају да су веома мале количине.

Ако ми сад функцију $B = \varphi(\Delta)$ представимо са оном кривом линијом, која је њоме представљена, (види графијску представу вероватноћа онда можемо из те представе да изведемо и последице односно особина неизбежних грешака.

Да узмемо нека је апсцисна оса $\pm 0\Delta$ оса неизбежних грешака опажања, а ординатна оса $+0B$ оса вероватноћа, онда очевидно (види слику 5) одговара

Сл. 5



н. пр. грешци опажања $OP = \varphi(\Delta)$, вероватноћа.

$$MP = B = \varphi(\triangle).$$

Нема сумње, да ће за све врсте опажања природа функције, т. ј у опште протезање криве линије морати бити подједнако, и да ће се према томе, закони грешака, који разним врстама опажања одговарају, разликовати само величинама сталних количина, које су у њима, дакле само њихним параметрима и то тако, да кад је за једну врсту опажања:

$$B_1 = \varphi(h_1, \triangle)$$

закон грешака, да би за другу врсту опажања морао бити закон грешака:

$$B_2 = \varphi(h_2, \triangle).$$

Из овога следује непосредно, да сталне количине h_1 и h_2 и т. д. могу да нас обавесте о тачности или прецизности извесне врсте опажања, да кажемо каквог мерења, *јер само величине тих сталних количина имају уплива на величину ординате, која дотичној апсциси криве линије*, да кажемо апсциси: $OP = \triangle$ одговара. Тако на слици 5. представља крива линија ADC *геометријског* представника једне врсте опажања; друга нетачнија врста опажања имала би за геометријског представника криву линију $A'D'C'$ и т. д.

Једначине кривих линија ADC и $A^1D^1C^1$ јесу дакле:

$$B_1 = \varphi(h_1, \triangle)$$
$$B_2 = \varphi(h_2, \triangle)$$

и лако је појамно, да су MP и M^1P само зато различне дужине, што су параметри оних кривих линија, дакле h_1 и h_2 *различни*[1]).

Да узмемо нека је n број свију грешака величине $\triangle$, а M број свију могућних грешака, то је с погледом на образац (24):

[1]) Ордината mp показује, да су вероватноће, да ће се грешка Op учинити, једнаке за обе врсте опажања.

$$B = \varphi(\triangle) = \frac{n_\Delta}{M},$$

из које једначине следује:

$$n_\Delta = M.B = M.\varphi(\triangle) \qquad (24')$$

као број грешака, чија је величина тачно $\triangle$.

Ако су сад $\triangle_1, \triangle_2, \ldots \triangle_m$ више грешака једне врсте, и које од $\triangle_1$ почев ка $\triangle_m$ по величини својој расту, то је вероватноћа, да ће се све грешке непосредно једна за другом, са свим све једно у коме реду појавити, по обрасцу (28):

$$B_{\Delta_1 - \Delta_m} = B_{\Delta_1} . B_{\Delta_2} \ldots B_{\Delta_m} = \varphi(\triangle_1) . \varphi(\triangle_2) \ldots \varphi(\triangle_m)$$
$$= \frac{n_{\Delta_1} \; n_{\Delta_2} \ldots n_{\Delta_m}}{M. \; M. \ldots m \text{ пута}}$$

или

$$B_{\Delta_1 - \Delta_m} = \frac{n_{\Delta_1} . n_{\Delta_2} \ldots n_{\Delta_m}}{M^m} \qquad (28^1)$$

јер догађање грешке једне извесне величине очевидно, мора да се узме као *независан догађај.*

Ако се тражи вероватноћа, да ће мо при опажањима о којима је реч, учинити буди коју грешку од грешака:

$$\triangle_1, \triangle_2, \ldots \triangle_m,$$

онда добијамо с погледом на образац (26):

$$B_{\Delta_1}^{\Delta_m} = B_{\Delta_1} + B_{\Delta_2} + \ldots + B_{\Delta_m} = \varphi(\triangle_1) + \varphi(\triangle_2) + \ldots \varphi(\triangle_m)$$
$$= [\varphi(\triangle)]_{\Delta_1}^{\Delta_m}$$
$$= \frac{n_{\Delta_1} + n_{\Delta_2} + \ldots n_{\Delta_m}}{M}$$

или најзад и симболички:

$$B_{\Delta_1}^{\Delta m} = [n_\Delta]_{\Delta_1}^{\Delta m} \qquad (26^1)$$

јер је очевидно, *да грешке* могу да се *сматрају као догађаји, који један другога искључују, пошто се при једном опажању а у исто време, не могу две резултујуће грешке да учине.*

Ако сад између Δ_1 и Δ_m замислимо *бесконачно* много грешака, које по величини својој леже све између Δ_1 и Δ_m и *континуивно*, једна у другу прелазе — т. ј. ако замислимо, да је између Δ_1 и Δ_m бесконачно много грешака уметуто, које све *континуивно по величини својој једна у другу прелазе, онда у овоме случају, а услед* оваквог схватања, представља $B_{\Delta_1}^{\Delta m}$ вероватноћу, да *ће се буди која грешка учинити но која по величини својој лежи између* Δ_1 и Δ_m, и ако ми ове границе, међу којима се грешке крећу, ради лакшег писања означимо са a и b, дакле ако ставимо:

$$\Delta_1 = a; \quad \Delta_m = b;$$

и то са a означимо мању, доњу, а са b већу горњу границу, дакле узмемо да је:

$$b > a$$

онда добијамо, да је:

$$B_b^a = [\varphi \Delta]_a^b = \frac{[n_\Delta]_a^b}{M}; \qquad (56)$$

што може да се напише и овако:

$$B_a^b = [\varphi \Delta]_0^b - [\varphi \Delta]_0^a \qquad (56)$$

и што представља вероватноћу, да ће се при *једном опажању* учињена грешка, налазити међу границама a и b; или и другаче, ако са X означимо вредност опажане количиие, онда нам горњи израз представља вероватноћу, да ће права вредност опажане количине лежати између:

$$X+a \quad \text{и} \quad X+b.$$

Ако уведемо у једначину (56) као доњу границу $-a$, а као горњу границу $+b$, онда следује по горњем:

$$B_{-a}^{+b} = [\varphi(\Delta)]_{-a}^{+b} = [\varphi(\Delta)]_{-0}^{+b} + [\varphi(\Delta)]_0^{-a}$$

или с погледом на то, што је:

$$\varphi(+\Delta) = \varphi(-\Delta),$$

и

$$B_{-a}^{+b} = [\varphi(\Delta)]_0^b + [\varphi(\Delta)]_0^a; \qquad (57)$$

но ако $+b$ пређе у $+a$, онда следује најзад:

$$B_{-a}^{+a} = [\varphi(\Delta)]_0^a + [\varphi(\Delta)]_0^a = 2[\varphi(\Delta)]_0^a \qquad (58)$$

Исто тако долазимо лако и до закључка, да је:

$$B_{-a}^{-b} = B_a^b \qquad (59)$$

па и у опште:

$$B_{\pm a}^{\pm b} = 2 B_a^b. \qquad (60)$$

Из једначина (56) до (60) види се, да при нашим *испитивањима* збир узет међу произвољним *границама* може свакад да се представи, *збировима*, којих је доња граница нула, а *горња граница* каква положна количина.

Ако је у једначини (58) граница a, у опште при опажању *највећа могућа грешка*, ако је дакле:

$$a = \triangle_{\max}$$

онда следује, да је:

$$B_{-\Delta\max}^{+\Delta\max} = B_{-\infty}^{+\infty} = 2[\varphi(\triangle)]_{o}^{\Delta\max} = 1, \qquad (61)$$

јер је тада *извесно, да учињена резултујућа грешка мора да је мања но највећа могућа грешка.*

Ако доведемо једначину:

$$B_{-a}^{+a} = \frac{[n_\Delta]_{-a}^{+a}}{M}$$

на форму:

$$[n_\Delta]_{-a}^{+a} = M.B_{-a}^{+a}. \qquad (62)$$

онда нам она у овој форми даје *број свију положних и одречних грешака опажања, које су апсолутно узете, мање од границе* a.

Из једначине.

$$B_{+a}^{+b} = [\varphi(\triangle)]_{0}^{b} - [\varphi(\triangle)]_{0}^{a} = \frac{[n_\Delta]_{0}^{b}}{M} - \frac{[n_\Delta]_{0}^{a}}{M}$$

следује да је:

$$[n_\Delta]_{0}^{b} - [n_\Delta]_{0}^{a} = M\left\{[\varphi(\triangle)]_{0}^{b} - [\varphi(\triangle)]_{0}^{a}\right\}, \qquad (63)$$

помоћу које једначине, као што се види, добијамо *број опет оних грешака опажања, које по величини својој леже међу границама* b и a.

Ми смо видели, да је напред било потребно, да образујемо збирове елемената за све вредности грешака, које између дотичних граница леже, ако је сад

$$d\triangle = б$$

сталан прираштај аргумента, то је по диференцијалном рачуну, ако узмемо $b = a + nб$,

$$[\varphi(\triangle)]_{a}^{b} = \varphi(a) + \varphi(a+б) + \varphi(a+2б) + \ldots + \varphi[a + (n-1)б]).$$

С погледом на: $b = a + nб$ добијамо:

$$б = \frac{b-a}{n},$$

а како је по правилима за опредељење интеграле свакад:

$$\varphi(a) + \varphi(a+б) + \varphi(a+2б) + \ldots + \varphi[a+(n-1)б] = \frac{1}{б}\int_{a}^{b}\varphi(\triangle)\,d\triangle,$$

то је према томе:

$$B_{a}^{b} = [\varphi(\triangle)]_{a}^{b} = \frac{1}{б}\int_{a}^{b}\varphi(\triangle)\,d\triangle. \qquad (64)$$

Геометријско значење једначине (64)

52.

Ако посматрамо горњу једначину онда видимо, да нам она представља веома просто *тумачење* па и значење вероватноћа и то за случај, кад при каквоме опажању учињена грешка лежи међу границама b и a.

Да узмемо, нека је у пређашњој слици 5. ADC геометријски представник вероватноће:

$$B = \varphi(\triangle),$$

а осем тога нека је: $OQ = a$

$$OP = b.$$

онда по интегралном рачуну добијамо за површину $NMPQ$, пошто је: $\varphi(\Delta)\ d\Delta$ елеменат те површине:

$$NMPQ = \int_a^b \varphi(\Delta)\, d\Delta$$

и отуда с погледом на напред изведени интеграл, ако поделимо са $б$ и леву и десну страну добијамо да је:

$$B_a^b = \frac{\text{површина } NMPQ}{б} = \frac{1}{б}\int_a^b \varphi(\Delta) \cdot d\Delta$$

где као што је познато, $б$ представља *сталну количину*.

Овај резултат гласи речима исказан овако: *вероватноћа, да при каквом опажању учињена грешка, лежи међу границама* b и a, *сразмерна је површини, што лежи на комаду* $QP = (b-a)$ *на апсцисној оси а између ове и одговарајућега комада оне криве линије, којом је закон грешака оличен.*

Исто тако, као што је закон грешака графијски оличен, може да се оличи и она функција, која *вероватноћу представља, да је при каквом опажању учињена грешка мања од извесне какве дате количине;* јер очевидно представља:

$$B_{-\Delta}^{+\Delta} = \frac{1}{б}\int_{-\Delta}^{+\Delta} \varphi(\Delta)\, d\Delta \text{ или } = \frac{2}{б}\int_0^{\Delta} \varphi(\Delta)\, d\Delta$$

вероватноћу, да ће при каквом опажању учињена грешка, *апсолутно узета*, бити мања од променљиве количине Δ.

Пошто је и интеграл за се опет функција од Δ, онда можемо да ставимо:

$$B_{-\Delta}^{+\Delta} = \psi(\Delta)$$

па да и то, као што је на слици. 5. OS графијски, оличимо.

Ако је сад $OR = OR' = \Delta$, то је површина

$$K_1 D K R R_1 = 2\int_0^{\Delta} \varphi(\Delta) \cdot d\Delta\,;$$ а с погледом на

$$B_a^b = \frac{1}{б}\int_a^b \varphi(\Delta)\, d\Delta = \frac{\text{површини } NMPQ}{б}$$

или боље с погледом на:

$$б \cdot B_a^b = \int_a^b \varphi(\Delta)\, d\Delta$$

ми добијамо најзад:

$$K_1 D K R R_1 = б \cdot B_{-\Delta}^{+\Delta} = б \cdot \psi(\Delta)$$

или ако место $\psi(\Delta)$ ставимо њену вредност RT, то следује и:

$$2\int_0^{\Delta} \varphi(\Delta) \cdot d\Delta = б\, RT.$$

Производ $б\ \psi(\Delta) = б\ RT$ није ништа друго, него елеменат површине криве линије $\psi(\Delta)$, и који се добија, ако ми на апсцисној оси од R пренесемо $Rr = б$ и подигнемо у r ординату rt, која тај елеменат површине ограничава. Одавде следује:

да је елеменат површине $RTtr$ *криве линије* $\psi(\Delta)$ *раван двогубој површини, која лежи на комаду* $OR = \Delta$ *и између апсисне осе и дотичнога дела криве линије, која закон грешака представља.*

Из једначине:

$$B_{-\Delta}^{+\Delta} = \frac{2}{б} \int_0^{\Delta} \varphi(\Delta)\,.d\Delta = \psi(\Delta)$$

добијамо диференцијалењем други један важан однос, који је за графијско оличење закона грешака употребљив. Диференцијалењем добијамо:

$$d\,\psi(\Delta) = \frac{2}{б}\ \ \varphi(\Delta)\,d\Delta, \quad \text{а пошто је } б = d\Delta$$

то је:

$$d\psi(\Delta) = \frac{2}{d\Delta}\,\varphi(\Delta) . d\Delta = 2\,\varphi(\Delta) \tag{65}$$

што значи, ако узмемо у обзир слику 5. на којој је tt^1,= *диференцијалу од* $\varphi(\Delta)$): *то је прираштај ординате криве линије* $B_{-\Delta}^{+\Delta} = \psi(\Delta)$, дакле tt', *раван двогубој ординати* ***KR*** *оне криве линије, која закон грешака представља.*

Вероватноћа међу ∞ блиским границама.

53.

Од интереса је да видимо, какво значење има вероватноћа, да при каквом опажању учињена грешка лежи међу бесконачно блиским границама:

$$\Delta \quad \text{и} \quad \Delta + d\Delta.$$

где је, као што је познато $d\Delta$ бесконачно мали прираштај од Δ.

По једначини (64) имамо да је:

$$B_{\Delta}^{\Delta+d\Delta} = \frac{1}{б}\int_{\Delta}^{\Delta+d\Delta} \varphi(\Delta)\,d\Delta \quad \text{и ако ставимо:}$$

$$\int \varphi(\Delta)\ \ d\Delta = f(\Delta) + L$$

то је:

$$B_{\Delta}^{\Delta+d\Delta} = \frac{1}{б}\,[f(\Delta + d\Delta) \ - f(\Delta)] = \frac{d\,f\,\Delta}{d\Delta} = \varphi(\Delta) \tag{66}$$

што значи: *вероватноћа, да је при каквом опажању учињена грешка* Δ, *идентична је са вероватноћом, да та грешка лежи међу ∞ блиским границама* Δ *и* $\Delta + d\Delta$.

Ако се једначина (64) у обзир узме, онда прелазе све једначине почев од (56) па до (61) по реду у следеће, које се с погледом на напред изложено геометријско значење понајлак и увиђају:

$$B_a^b = \frac{1}{б}\int_a^b \varphi(\Delta)\,d\Delta = \frac{1}{б}\Big[\int_0^b \varphi(\Delta)\,d\Delta - \int_0^a \varphi(\Delta)\,d\Delta\Big]$$

$$= \frac{1}{2б}\Big[\int_{-b}^{b} \varphi(\Delta)\,d\Delta - \int_{-a}^{a} \varphi(\Delta)\,d\Delta\Big]; \tag{56'}$$

$$B_{-a}^{b} = \frac{1}{б}\int_{-a}^{b} \varphi(\Delta)\,d\Delta = \frac{1}{б}\Big[\int_0^a \varphi(\Delta)\,d\Delta + \int_0^b \varphi(\Delta)\,d\Delta\Big]$$

$$= \frac{1}{2б}\Big[\int_{-b}^{b} \varphi(\Delta)\,d\Delta + \int_{-a}^{a} \varphi(\Delta)\,d\Delta\Big]; \tag{57'}$$

$$B_{-a}^{a} = \frac{2}{б}\int_0^a \varphi(\Delta)\,d\Delta; \tag{58'}$$

$$B_{-b}^{-a} = \int_{-a}^{-b} \varphi(\Delta)\,d\Delta + \int_a^b \varphi(\Delta)\,d\Delta; \tag{59'}$$

$$B_{\pm a}^{\pm b} = \frac{2}{б}\int_a^b \varphi(\Delta)\,d\Delta = \frac{1}{б}\Big[\int_{-b}^{b} \varphi(\Delta)\,d\Delta - \int_{-a}^{a} \varphi(\Delta)\,d\Delta\Big]; \tag{60'}$$

$$B_{-\Delta\max}^{+\Delta\max} = \frac{1}{б}\int_{-\Delta\max}^{+\Delta\max} \varphi(\Delta)\,d\Delta = \frac{1}{б}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta)\,d\Delta = 1; \tag{61'}$$

Ова последња једначина казује нам, да је сва површина, која је ограничена кривом линијом закона грешака и апсцисном осом, сразмерна јединици.

Извођење закона грешака на основу аритметијске средине.

54.

Пошто природа закона грешака независи од врсте опажања, то можемо ми при извођењу тога закона, да узмемо у обзир буди какву врсту опажања н. пр. да узмемо мерење какве дужине у обзир; осем тога природа закона грешака неће се изменити, ако се извођење оснива на једној или на више серија подједнако тачних или разно тачних грешака опажања, које једној опажаној количини, односно већем броју опажаних количина, одговарају.

Простоту и јасност при овоме извођењу постићићемо увелико, ако узмемо, као полазну основу ову најпростију поставку, а на име: *да тражимо највероватнију вредност какве непознате опажене количине из низа подједнако тачних а независних опажања.* Нашав један пут закон грешака за овај најпростији случај, ми ћемо понајлак моћи аналитичким путем, да га проширимо, те да он вреди и за све друге компликованије прилике.

Хипотеза, поставка, на којој ћемо основати извођење закона грешака гласи дакле овако:

аритметијска средина је највероватнија вредност какве опажане количине, кад се она одреди из каквога низа подједнако тачних, а међу собом независних опажања.

Аритметијска је средина од *вајкада*, у самој природи ствари као основана употребљавана, за то, да се противности или боље неслагања резултата, који су понављаним опажањима једне и исте количине добијани отклоне. Потребу овога отклањања противности не налаже нам сама математика, већ општа логика, која нам као што

је већ напред поменуто недозвољава, да сматрамо као истину оно, што у себи има противности или неслагања или што нас најзад у својим даљим неминовним последицама на противности наводи.

Но осем свега овога, аритметијска је средина већ и *првом особином неправилних грешака опажања посве основана*, јер, као што је познато, ове могу подједнако велике а положне и одречне, подједнако често да се појављују, разуме се, ако је број њихов врло велики. Па да видимо, како ћемо да дођемо до закона грешака.

Да узмемо нека су: $\triangle_1\ \triangle_2 \ldots \triangle_n$ *праве (фактичке) грешке* опажања, то мора очевидно, ако је $n = \infty$ велико, алгебарска сума:

$$[\triangle i] = 0 \qquad (67$$

Ако су сад:

$$O_1,\ O_2,\ O_3, \ldots\ O_i \ldots\ O_n,$$

опажене вредности, а X *непозната права вредност тражене количине*, то је очевидно свака поједина грешка равна разлици између количине X и сваке вредности O_i која је опажањем добивена, дакле:

$$\begin{aligned}
\triangle_1 &= X - O_1 = -O_1 + X \\
\triangle_2 &= X - O_2 = -O_2 + X \\
&\ \ \vdots \\
\triangle i &= X - O_i = -O_i + X \\
&\ \ \vdots \\
\triangle_n &= X - O_n = -O_n + X
\end{aligned}$$

и ако уведемо ове вредности правих грешака у једначину (67) онда добијамо:

$$-O_1 + X) + (-O_2 + X) + \ldots (-O_i + X) + \ldots + (-O_n + X) = 0$$

а одавде, пошто имамо n вредности:

$$n \cdot X - (O_1 + O_2 + \ldots + O_i + \ldots O_n) = 0$$

или

$$n \cdot X - [O_i] = 0;$$ и најзад

$$X = \frac{[O_i]}{\infty}$$

као *аритметијска средина* за $n = \infty$ велико.

У ствари пак, није број опажања никад бесконачно велики, и с тога је аритметијска вредност тражене количине, коју ћемо да означимо са C:

$$C = \frac{[O_i]}{n} \tag{68}$$

само тек *највероватнија вредност* опажане количине, која заосталим грешкама опажања:

$$\begin{array}{lcl} (C - O_1) & \text{или} & (-O_1 + C) \\ (C - O_2) & & (-O_2 + C) \\ \cdot \quad \cdot & & \cdot \\ \cdot \quad \cdot & & \cdot \\ (C - O_n) & & (-O_n + C) \end{array}$$

горе поменуту особину неправилних грешака и даје ; јер једначина (68) може лако да се доведе на форму:

$$(-O_1 + C) + (-O_2 + C) + \ldots - O_n + C = [-O_i + C] = 0.$$

За извесни, дакле *ограничени* број опажања, вреди једначина:

$$X = \frac{[O_i]}{n} + \frac{[\Delta i]}{n} = C + \frac{[\Delta i]}{n}$$

из које следује: *да разлика између праве, фактичке, вредности X и највероватније вредности опажане количине C_i ишчезава само тада, кад је* $\frac{[\Delta i]}{n} = 0$, *за што је опет*

очевидно неизоставно потребно, да је број опажања n веома велики број. Што год је број n већи и већи, то ће се и C од X све за мање и мање разликовати.

Закон грешака: $B = \varphi(\Delta)$
мора очевидно једначину (67), а то је:

$$[\Delta i] = (X - O_1) + (X - O_2) + \ldots (X - O_n) = 0$$

потпуно да задовољи.

Ако сматрамо као *узрок* или *хипотезу* какву произвољну вредност ξ као вредност тражене опажане количине, онда очевидно одговара тој хипотези овај систем грешака и то:

$$\begin{aligned} d_1 &= \xi - O_1 \\ d_2 &= \xi - O_2 \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \\ d_i &= \xi - O_i \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \\ d_n &= \xi - O_n; \end{aligned}$$

вероватноће, да ће ове поједине грешке заиста и постојати, јесу према пређашњем:

$$\begin{aligned} B_{d_1} &= \varphi(\xi - O_1) \\ B_{d_2} &= \varphi(\xi - O_2) \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \\ B_{d_i} &= \varphi(\xi - O_i) \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \\ B_{d_n} &= \varphi(\xi - O_n); \end{aligned}$$

а вероватноћу, да баш овај систем грешака постоји, *и никоји други*, добијамо по једначини (28) о вероватноћи сложенога догађаја:

$$B_{d_1}^{d_n} = \varphi(\xi - O_1) \cdot \varphi(\xi - O_2) \ldots \varphi(\xi - O_i) \ldots \varphi(\xi - O_n) \tag{69}$$

Свакој другој хипотези одговараће и други систем грешака и по ставу *Bayes*-овом, биће *она хипотеза највероватнија, за коју, добијемо највећу вредност* од $B_{d_1}^{dn}$ или за коју највећу вредност

$$\text{од} \quad log_n\, B_{d_1}^{dn} = l\ \ B_{d_1}^{dn}$$

добијемо; ми треба дакле према томе ξ тако да определимо, да је:

$$B_{d_1}^{dn} \text{ или } l\ B_{d_1}^{dn}\ \ maximum,$$

или тако, да је: $\left(\frac{dB_{d_1}^{dn}}{d\zeta}\right) = 0$ или $\frac{d\ l.B_{d_1}^{dn}}{d\zeta} = 0$

Из једначине (69) следује, ако узмемо логаритме лево и десно:

$$l.\ B_{d_1}^{dn} = l\,\varphi(\xi - O_1) + l\ \varphi(\xi - O_2) + \ldots + l\ \varphi(\xi - O_n)$$

а ако диференцијалимо ову једначину по ξ и сетимо се да је:

$$d.\,l.\,u = \frac{du}{u}$$

онда добијамо стављајући одмах први диференцијални количник раван нули:

$$\frac{d.\,l.\ B_{d_1}^{dn}}{d\xi} = \frac{\frac{d\varphi(\xi - O_1)}{d\xi}}{\varphi(\xi - O_1)} + \frac{\frac{d\varphi(\xi - O_2)}{d\xi}}{\varphi(\xi - O_2)} + \frac{\frac{d\varphi(\xi - O_n)}{d\xi}}{\varphi(\xi - O_n)}$$

или симболички, ако ставимо $\frac{d\varphi(\xi - Oi)}{d\xi} = \varphi'(\xi - Oi)$

$$0 = \left[\frac{\varphi'\ \xi - O}{\varphi(\xi - Oi)}\right]; \qquad (70)$$

ова једначина (70) мора да буде идентична са оном напред нађеном (67), која је из аритметијске средине следовала, дакле са:

$$0 = [\triangle i] = [(X - Oi)].$$

Да би ово увидели, ми ћемо да напишемо једначину (70) и овако:

$$0 = \left[(X - O_i)\ \frac{\varphi'(X - Oi)}{(X - Oi)\varphi(X - Oi)}\right] = \left[\triangle\ \frac{\varphi'(\triangle i)}{\triangle\varphi(\triangle i)}\right]$$

одакле следује, да ће једначина (67) са једначином (70) само тада бити идентична свакад, ако је у опште:

$$\frac{\varphi'(\triangle)}{\triangle\cdot\varphi(\triangle)} = \text{сталној количини.}$$

Овој диференцијалној једначини можемо лако да дамо другу удеснију форму и то овако.

С погледом на то, што је $\varphi(\triangle)$ права функција од $\triangle$, дакле с тога, што је:

$$\varphi(+\triangle) = \varphi(-\triangle)$$

ми можемо очевидно да ставимо и

$$\varphi(\triangle) = \psi(\triangle^2) = \varphi(\xi - Oi);$$

где $\psi(\triangle^2)$ представља буди какву функцију квадратне количине $\triangle$.

Према томе, ако са $\psi'(\triangle^2)$ означимо први диференцијални количник од $\psi(\triangle^2)$ по $\triangle$, то ће бити:

$$\frac{d\varphi(\triangle)}{d\triangle} = \psi'(\triangle^2)\,\triangle = \frac{d\varphi(\zeta - Oi)}{d\zeta}$$

а

$$\frac{\frac{d\varphi(\zeta - Oi)}{d\zeta}}{\varphi(\zeta - Oi)} = \frac{\psi'(\triangle^2)}{\psi(\triangle^2)}\triangle,$$

и ми имамо сад да тражимо услов за идентичност између једначина:

a) $$[\Delta i] = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n = 0, \text{ и}$$

b) $$\frac{\psi'(\Delta^2)}{\psi(\Delta_1)}\Delta_1 + \frac{\psi'(\Delta^2)}{\psi(\Delta_2)}\Delta_2 + \dots + \frac{\psi'(\Delta i^2)}{\psi(\Delta i)}\Delta i + \dots + \frac{\psi'(\Delta^2)}{\psi(\Delta n)} = 0$$

Ове једначине постоје за сваки број опажања па и за сваку случајну грешку, оне вреде дакле и ако је:

$$\Delta_2 = \Delta_3 = \dots = \Delta_n.$$

тако дакле, да добијемо место једначине *a*)

$$\Delta_1 + (n-1)\Delta_2 = 0$$

или

$$\Delta_1 = -(n-1)\Delta_2;$$

а место једначине *b*) опет:

$$\frac{\psi'(\Delta_1)}{\psi(\Delta_1)}\Delta_1 + (n-1)\frac{\psi'(\Delta_2)}{\psi(\Delta_2)}\Delta_2 = 0$$

или

$$\frac{\psi'(\Delta_1)}{\psi(\Delta_1)}\Delta_1 = -(n-1)\frac{\psi'(\Delta^2)}{\psi(\Delta^2)}\Delta_2,$$

одкуда услед горњих једначина добијамо најзад:

$$\frac{\psi'(\Delta^2)}{\psi(\Delta^2)} = \frac{\psi'(\Delta^2)}{\psi(\Delta^2)} = \dots = \frac{\psi'(\Delta^2)}{\psi(\Delta^2)} = \dots \frac{\psi'(\Delta^2)}{\psi(\Delta^2)}$$

што значи, *да се овај количник не мења се мењањем* Δ, *т. ј. он је у односу на грешку* Δ *сталан.* Ако означимо ми овај количник са k, онда добијамо за буди коју грешку опажања Δ, да је:

$$k = \frac{\psi'(\Delta^2)}{\psi(\Delta^2)},$$

а с тога, што је: $\varphi(\Delta) = \psi(\Delta^2)$

и $$\frac{d\,\varphi(\Delta)}{d\Delta} = \psi'(\Delta^2)\,\Delta,$$ па дакле

и $$\psi'(\Delta^2) = \frac{d\,\varphi(\Delta)}{d\Delta}\cdot\frac{1}{\Delta};$$

најзад заменом добијамо:

$$k = \frac{\psi'(\Delta^2)}{\psi(\Delta^2)} = \frac{1}{\Delta}\cdot\frac{\frac{d\,\varphi(\Delta)}{d\Delta}}{\varphi(\Delta)}$$

или:

$$k\,\Delta\,d\Delta = \frac{d\,\varphi(\Delta)}{\varphi(\Delta)},$$

и ако интегришемо, онда је:

$$k\int \Delta\,d\Delta = \int \frac{d\varphi(\Delta)}{\varphi(\Delta)};$$

но како је, ако за моменат не водимо рачуна о интеграционој сталној количини:

$$k\int \Delta\,d\Delta = k\,\frac{\Delta^2}{2}$$

па и

$$\int \frac{d\varphi(\Delta)}{\varphi(\Delta)} = l\,\varphi(\Delta)$$

то ми добијамо да је:

$k\,\frac{\Delta^2}{2} = l\,\varphi(\Delta)$ а узев и интеграциону сталну количину у рачун, чија је вредност непозната и коју означавамо са N, добијамо:

$$l\,\varphi(\Delta) = \frac{k\,\Delta^2}{2} + l\,N$$

или ако уведемо основицу природних или тако званих хиперболских логаритама, онда можемо да ставимо:

$$k\,\frac{\Delta^2}{2} = l\,\varphi(\Delta) - l\,N = l\,\frac{\varphi(\Delta)}{N}$$

па дакле и:

$$e^{\frac{1}{2}k\Delta^2} = \frac{\varphi(\Delta)}{N}.$$

одкуда најзад :

$$\varphi(\Delta) = N \cdot e^{\frac{1}{2}k\Delta^2}$$

као тражени *закон грешака.*

Пошто према особинама неизбежних грешака, $\varphi(\Delta)$ са растењем од Δ (апсолутно узето) мора да опада, што је очевидно идентично с тиме, да први деференцијални количник:

$$\frac{d\varphi(\Delta)}{d\Delta} = k\ N.\Delta e.^{\frac{1}{2}k\Delta^2}$$

мора да буде, за $\pm\Delta^{\text{одречан}}_{\text{положан}}$ то следује да k, мора да је *одречна количина*, што ми изражавамо, на тај начин, да мећемо:

$$k = -2h^2 \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}\ k = -h^2,$$

услед чега закон грешака добија форму:

$$\varphi(\Delta) = N.e^{-k^2\Delta^2} \qquad (71)$$

Извођење закона грешака на основу саставних грешака.

55.

Ми смо напред показали, како се могу $2m$ саставних грешака величине $\frac{\Delta}{2}$x да комбинују, те да образују резултујућу грешку опажања ; осем тога ми смо за сваку врсту комбиновања изнашли и број једнаких веза и они бројеви дају очевидно број повољних изгледа за дотичну вредност резултујуће грешке опажања. Ако сад сваки број повољних изгледа, поделимо са бројем свију грешака Δ, који комбиновањем саставних грешака могу

да се образују, то онда добијамо вероватноће разних грешака. Општи однос између ових вероватноћа и величине резултујуће грешке опажања то је закон грешака.

У следећој таблици су резултујуће грешке Δ по њиховој апсолутној величини уређене, и у истом реду и одговарајуће вероватноће написане.

Резултујућа грешка Δ	Вероватноћа $\varphi(\Delta)$, да ће се резулт. грешке Δ и учинити
0	$\frac{2}{M}\ \frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots(m+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ m}$
$\pm\Delta x$	$\frac{2}{M}\ \frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots(m+2)}{.\ 2.\ 3.\ldots(m-1)}$
$\pm 2\Delta x$	$\frac{2}{M}\ \frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots(m+3)}{1.\ 2.\ 3.\ldots(m-2)}$
.	.
.	.
.	.
$\pm(m-1)\Delta x$	$\frac{2}{M}\ 2m$
$\pm m\Delta x$	$\frac{2}{M}$

Да би први диференцијални количник могли да нађемо, потребно је да нађемо прираштај функције; овај пак добијамо, ако ми од вероватноће

$$\varphi((i+1)\Delta x)$$

одузмемо вероватноћу $\varphi(i\Delta x)$. По закону који се увиђа из таблице имамо за вероватноћу грешке $(i\Delta x)$:

$$\varphi(i\Delta x) = \frac{2}{M}\ \frac{2m(2m-1)\ldots(m+i+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots m-i} = \varphi(\Delta)$$

$$\varphi(i+1)\Delta_x = \frac{2}{M}\,\frac{2m(2m-1)\ldots(m+i+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ m-i-2} = \varphi(\Delta + d\Delta)$$

одкуда следује:

$$d\varphi(\Delta) = \varphi(\Delta + d\Delta) - \varphi(\Delta) = \varphi(\Delta)\left[\frac{m-i}{m+i+1} - 1\right]$$

$$= -\varphi(\Delta)\,\frac{2i+1}{m+i+1},$$

или ако и бројиоца и имениоца помножимо са Δ_x онда је:

$$d\varphi(\Delta) = -\varphi(\Delta)\,\frac{2\,i\Delta_x + \Delta_x}{m\Delta_x + i\Delta_x + \Delta_x},$$

а с погледом на то, што је у опште:

$$i\Delta_x = \Delta$$
$$\Delta_x = d\Delta$$

ми добијамо:

$$d\,\varphi(\Delta) = -\varphi(\Delta)\cdot\frac{2\Delta + d\Delta}{m.d\Delta + \Delta + d\Delta},$$

па најзад делењем са $d\Delta$ и:

$$\frac{d\varphi(\Delta)}{d\Delta} = -\varphi(\Delta)\,\frac{2\,\Delta + d\,\Delta}{m\,d\Delta^2 + \Delta.d\Delta + d\Delta^2}.$$

Ово је права вредност првог диференцијалног количника, али у овој форми и нешто компликована; ми можемо горњи израз у велико да упростимо, ако $d\Delta$ према 2Δ и према $\Delta.d\Delta$ занемаримо као веома малу количину, чинећи то ми добијамо:

$$\frac{d\,\varphi(\Delta)}{d\,\Delta} = -\varphi(\Delta)\,\frac{2\Delta}{m.d\Delta^2 + \Delta\,d\Delta},$$

јер $d\Delta$ из бројиоца као и $d\Delta^2$ из имениоца отпадају. Но и производ $\Delta\,d\Delta$ може да се занемари, без осет-

не грешке, особито ако размислимо боље о томе, шта представља производ

$$m.d\Delta^2.$$

Према пређашњем представља производ $m.d\Delta = 2m\,\frac{\Delta_x}{2}$ апсолутно узет, највећу могућу резултујућу грешку, при извесној врсти опажања, јер у њему се, као што је по себи јасно, појављују све саставне грешке са једним и истим знаком, од којих је истина, свака за се узета бесконачно мала, али којих је број бесконачно велики.

Нема сумње, да ми у сваком конкретном случају можемо са извесном поузданошћу да означимо крајњу границу, преко које неће највећа могућа резултујућа грешка опажања да пређе. Тако н. пр. при пажљивом мерењу са каквим добрим теодолитом, можемо потпуно сигурни да будемо, да нећемо учинити грешку од једнога ступња, један ступањ према томе, био би у овоме конкретном случају крајња граница онога производа $m.\,d\Delta$.

Међу тим, ова крајња граница за величину грешке опажања, са теоријскога гледишта узета, треба на сваки начин у опште и без обзирања на особити случај, опет свакад да се замишља толика, да према њој поједине саставне грешке $d\Delta$ ишчезавају, дакле треба производ $m\,d\Delta$ при општем овом посматрању да замишљамо, као бесконачно велики, одкуд следује, да је и производ:

$$m.d\Delta\,d\Delta = m.d\Delta^2 = \infty.0.$$

дакле производ из бесконачно велике и бесконачне мале количине, раван извесној положној сталној количини, чију вредност, која је још непозната, означимо са $\varkappa$. Према овој сталној количини ишчезава и производ $\triangle . d\triangle$, који се у имениоцу првог диференцијалног количника налази, и ми добијамо сад:

$$\frac{d\,\varphi(\triangle)}{d\triangle} = -\varphi(\triangle)\ \frac{2\triangle}{\varkappa}.$$

Ако сталну количину $\varkappa$ означимо са:

$$\varkappa = \frac{1}{h^2},$$

онда следује:

$$\frac{d\,\varphi(\triangle)}{d\triangle} = -\varphi(\triangle)\ 2h^2\ \triangle,$$

или оделом непознатих:

$$\frac{d\varphi(\triangle)}{\varphi(\triangle)} = -h^2\ 2\triangle\ \ d\triangle,$$

а ако интегришемо овај израз, дакле:

$$\int \frac{d\ \varphi(\triangle)}{\varphi(\triangle)} = -\ h^2 . \int 2\ \triangle . d\triangle.$$

то добијамо закон грешака, ако опет означимо интеграц. сталну количину са N:

$$l\,\varphi(\triangle) = l\ N - h^2\triangle^2$$

или

$$-h^2\triangle^2 = l\,\varphi(\triangle) - l\ N$$

$$-h^2\triangle^2 = l\ \frac{\varphi(\triangle)}{N}$$

откуд увођењем основице хиперболских логаритама добијамо:

$$e^{-h^2\Delta^2} = \frac{\varphi(\triangle)}{N} \qquad \text{или најзад}$$

$$\varphi(\triangle) = N .\ e^{-h^2\Delta^2}$$

дакле иста једначина (71) која је напред и на други начин нађена.

Определење интеграционе сталне количине N.

56.

За определење интергационе сталне количине послужићемо се једначином (61') а на име са:

$$B_{-\Delta\,\max}^{+\Delta\,\max} = \frac{1}{б}\int_{-\Delta\,\max}^{+\Delta\,\max} \varphi(\triangle)\ d\triangle = \frac{1}{б}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\triangle)\ d\triangle = 1$$

у коју треба да уведемо горњу вредност од $\varphi(\triangle)$, тако дакле, да добијемо:

$$\frac{1}{б}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\triangle)\ d\triangle = \frac{N}{б}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2} . d\triangle = 1$$

Из ове једначине добијамо:

$$N = \frac{б}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2}\ d\triangle} \tag{72}$$

и сад је само за тим стало, да изнађемо вредност интеграла:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2}\ d\triangle.$$

Овај се интеграл често употребљава и у Астрономији и то или овако написан, или још и у форми:

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt$$

и с тога ћемо ми о њему коју више да поменемо.

57.

Горњи је интеграл један од Euler-ових интеграла прве класе, и то у преображеној форми, он је дакле једна преображена тако звана *Гама Функција*. За ове је интеграле усвојено овакво означавање, а на име:

$$\int_0^\infty e^{-x}\, x^{a-1}\, dx = \Gamma(a) \qquad (\alpha)$$

где је a свакад каква положна количина; одавде добијамо:

$$\int_0^\infty e^{-x}\, x^{a-1}\, dx = \int e^{-x}\, d\left(\frac{x^a}{a}\right) = \left(e^{-x}\,\frac{x^a}{a}\right) + \frac{1}{a}\int x^a.e^{-x} dx,$$

ако сад уведемо границе, онда отпада члан без интегралног знака и ми добијамо:

$$\int_0^\infty e^{-x}\ x^{a-1} \times dx = \frac{1}{a}\int x^a\ e^{-x}\ dx;$$

или ако са a помножимо и леву и десну страну, онда је:

$$a\int_0^\infty e^{-x}\ x^{a-1}\ dx = \int e^{-x}\ x^a\ dx$$

или с погледом на једначину (α):

$$a\ \Gamma(a) = \Gamma(a+1). \qquad (\beta)$$

Но пошто је, као што се лако увиђа:

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx = \Gamma(1) = 1$$

онда, докле је год n цео број, јесте у опште:

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1.$$

Ако ми у једначину (α) уведемо вредност $x = t^2$ онда постаје:

$$2\int_0^\infty e^{-t^2}.\ t^{2(a-1)+1}\ dt = \Gamma(a)$$

дакле, за $a = \frac{1}{2}$:

$$J = \int_0^\infty e^{-t^2}\ dt = \frac{1}{2}\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Да би добили вредност овога интеграла, ми ћемо да помножимо овај интеграл са сличним интегралом:

$$\int e^{-y^2}\ dy$$

те да добијемо:

$$\left(\int_0^\infty e^{-t^2}\ dt\right)^2 = \int_0^\infty e^{-t^2}\ dt \int_0^\infty e^{-y^2}\ dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t^2+y^2)} dt\ dy.$$

Ако сад овде уведемо: $y = xt$

дакле: $dy = t\,dx$

онда добијамо:

$$J^2 = \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-(t^2+x^2t^2)}\,t\,dt = \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-(1+x^2)t^2}\,t\,dt,$$

но како је:

$$\int_0^\infty e^{-(1+x^2)t^2}\,t\,dx = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

то добијамо:

$$J^2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}(arc.\ tang.\ \infty - arc.\ tg\ 0) = \frac{\pi}{4},$$

или

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

па најзад и:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}. \qquad (73)$$

До овога истога резултата могли смо да дођемо и посматрањем двогубог интеграла:

$$V = \int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

где x и y представљају две једно од друго независне промењљиве количине и где се границе $-\infty$ и $+\infty$ односе како на интегрисање $x-a$ тако и на интегрисање $y-a$.

58.

Сад можемо лако да определимо и вредност од N. Ми имамо да је:

$$N = \frac{б}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta}$$

ако ставимо $h^2\Delta^2 = t^2$ то је

па дакле $h\,\Delta = t$

$h\,d\Delta = dt$

па и:

$$d\Delta = \frac{dt}{h}$$

и отуда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{h}\sqrt{\pi} \quad (74)$$

па најзад и интеграциона стална количина:

$$N = \frac{б}{\frac{1}{h}\sqrt{\pi}} = \frac{h.б}{\sqrt{\pi}} \qquad (75)$$

Уводењем овога израза у једначину (71) ми добијамо дефинитивну форму аналитичкога израза за закон грешака:

$$\varphi(\Delta) = \frac{h.б}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}\ d\Delta. \qquad (76)^{1)}$$

[1]) Gauss Theoria motus corporum coelestium, страна 212.

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{hh \cdot \Delta\Delta}$$

који је идентичан са једначином под (33).

Метода најмањих квадрата.

59.

Под Бр. 76 добивени закон грешака или боље аналитички представник тога закона, представља нам као што смо видели у опште вероватноћу поједине грешке Δ.

Свака могућна грешка има своју вероватноћу и према томе, ако имамо већи број грешака, које би у исто доба могућне биле, ми можемо служећи се поменутим аналитичким изразом, свакој грешци да определимо и одговарајућу вероватноћу.

Ако узмемо да смо извршили у опште читав низ опажања, да кажемо n опажања и претпоставимо, да су опажања подложна грешкама:

$$\Delta_1, \ \Delta_2, \ \Delta_3, \ldots \Delta_n,$$

то је вероватноћа, да је ма која од горњих грешака заиста и учињена, представљена према обрасцу под бр. (28) изразом:

$$\underset{\Delta_1 - \Delta_n}{B} = \varphi(\Delta_1) . \varphi(\Delta_2) \ldots \varphi(\Delta_n);$$

а како је по обрасцу (76):

$$\varphi(\Delta_1) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta_1^2} \, d\Delta_1$$

$$\varphi(\Delta_2) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta_2^2} \, \Delta_2$$

$$\varphi(\Delta_n) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} \, d\Delta_n$$

то ми добијамо као вероватноћу за тај случај:

$$\underset{\Delta_1 - \Delta_n}{B} = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[\Delta^2 + \Delta^2 + \ldots + \Delta^2 n]} \, d\Delta_1 \, d\Delta_2 \ldots d\Delta_n$$

$$= \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[\Delta_1\Delta_1 + \Delta_2\Delta_2 + \ldots + \Delta_n\Delta_n]} \, d\Delta_1 d\Delta_2 \ldots d\Delta_n$$

или с погледом на то, што су $d\Delta_1 \ d\Delta_2 \ldots d\Delta_n$ веома мале количине и простије написано:

$$\underset{\Delta_1 - \Delta_n}{B} = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2]}.$$

Да би баш систем грешака: $\Delta_1 \ \Delta_2 \ldots \Delta_n$ био највероватнији или боље, да би све грешке $\Delta_1 \ \Delta_2 \ldots \Delta_n$ заиста у исто доба и постојале, мора очевидно израз за $\underset{\Delta_1 - \Delta_n}{B}$ да буде *maximum*, а пошто се на десној страни налази одречан изложилац, то је опет за то неизоставно потребно, да буде:

$$[\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots \Delta_n^2] = [\Delta\Delta] = \textit{minimum}. \quad (77)$$

Што значи: *Онај систем грешака је највероватнији, који нам даје збир квадрата свију грешака раван минимуму.*

Обрнуто пак: *свакад, кад год имамо низ опажања ма какве количине, па хоћемо да нађемо њену највероватнију вредност, ми треба тако да је определимо, да је збир квадрата заосталих грешака раван минимуму.*

С тога, што се највероватнија вредност опажане количине налази из горе поменутога услова, и зове се овај метод рачунања *метод најмањих квадрата.*

Ако доведемо сад у свезу оно под бр. 45 о поправкама речено са овим горе добивеним ставом, онда као принцип рачуна изравнавања добијамо ово двоје:

1., *Место опажаних количина, уводе се такве поправљене количине, које сва одступања, што су ма у каквим односима услед неизбежних грешака произашла потпуно потиру, изравнавају, и које осем тога дају*

2., *Збир квадрата тих поправака (грешака) раван минимуму.*

Значење параметра h и вероватна грешка опажања.

60.

При општим напоменама о закону грешака већ смо поменули нешто о важности параметра h но и то, да параметри могу да нас обавесте о прецизности дотичнога реда опажања, јер из једначине:

$$\varphi(\Delta) = \frac{h.\delta}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} \quad \text{следује за} \quad \Delta = 0,$$

$$\varphi(0) = \left(\frac{\delta}{\sqrt{\pi}}\right) h,$$

дакле вероватноћа, да ћемо при каквом опажању учинити грешку нула, сразмерна је количини h.

Већ и из овога следује, да што је год à posteriori определена вредност од h већа и већа, да је и прецизност опажања већа.

Да би значење параметра h још боље сазнали, ми ћемо да претпоставимо, да у опште грешке опажања Δ леже међу границама: $-a$ и $+a$ и тада ће бити вероватноћа по пређашњем:

$$B_{-a}^{+a} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+a} e^{-h^2\Delta^2} \quad d\Delta,$$

или

$$B_{-a}^{+a} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+ah} e^{-t^2} dt.$$

Ако ставимо $ah = \varrho$, то онда као што је познато, можемо интеграл:

$$\int_0^{\varrho} e^{-t^2} . dt$$

да претворимо у ред по растућим ступњима од ϱ, а на име:

$$\int_0^{\varrho} e^{-t^2} \, dt = \varrho - \frac{1}{3}\varrho^3 + \frac{1}{10}\varrho^5 - \frac{1}{42}\varrho^7 + \dots$$

те да тако и горњу вероватноћу B_{-a}^{+a} за разне вредности од ϱ израчунамо.

У Берлинској астрономској годишњици од 1834. год. израчунао је Бесел вредности поменутога интеграла и ми их придајемо овоме делу у таблици под II.

Употреба ове таблице веома је лака и увиђа се из овога примера. За

$$\varrho = ah = 1 \cdot 06$$

добијамо ми из таблице:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1 \cdot 06} e^{-t^2} . dt = 0 \cdot 86614,$$

и ово значи: вероватноћа, да учињена грешка по својој апсолутној вредности није већа од:

$$a = \frac{1 \cdot 06}{h}$$

равна је 0·86614, или другим речима у низу од 100000 подједнако тачних опажања а за једну и исту количину, смећемо да иишчекујемо, да у 86614 од тих опажања учињена грешка неће бити већа од: $a = \frac{1\cdot06}{h}$.

Помоћу тих таблица добија се интерполовањем, да је за:

$$\varrho = ah = 0\cdot476956,$$

$$B_{-a}^{+a} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\varrho} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}.$$

Ако ми сад означимо са r вредност грешке на граници a и за коју је:

$$\varrho = rh = 0\cdot476936 \qquad (78)$$

то је:

$$r = \frac{\varrho}{h} = \frac{0.476936}{h}$$

па дакле у след тога и:

$$B_{-r}^{+r} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-rh}^{+rh} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+rh} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}.$$

Овај резултат речима исказан гласи: вероватноћа, да учињена грешака лежи између: $-r$ и $+r$ или боље, између: $-\frac{\varrho}{h}$ и $+\frac{\varrho}{h}$, дакле вероватноћа, да грешка не прелази апсолутну вредност $\frac{\varrho}{h}$ равна је $\frac{1}{2}$. С погледом на напомену на стр. 66 ми видимо, да је догађање грешке $\mp r$ као и недогађање њено, *подјед-*

нако веросатно, т. ј. опажања су подложна у томе случају грешкама, које су веће од $\mp r$, но и исто толиком броју грешака, које су и мање од поменутога броја и с тога се грешка r зове по Гаусу: *вероватна грешка* («error probabilis» или «erreur moyenne á craindre» «*der wahrscheinliche Fehler*») опажања. По себи је разумљиво, да у низу грешака једне и исте врсте, ако их само уредимо по њиховој апсолутној вредности, вероватна ће грешка бити у средини тога низа, но осем тога и то је појамно да ће вредност вероватне грешке бити све то мања, што су год опажања тачније и брижљивије вршена.

Из једначине:

$$\varrho = rh = 0\cdot476936$$

следује најзад и:

$$h = \frac{\varrho}{r} = \frac{0\cdot476936}{r} \qquad (79)$$

што значи: што год су опажања тачнија и тачнија, то ће се за r добијати мања и мања вредност, но у томе ће случају и h бити све веће и веће. Параметар h може дакле потпуно да нас обавести о прецизности, са којом су дотична опажања вршена и с тога му је још Гаус дао назив: «mensura praecisionis» или «*мера прецизности*».

Опажања разне врсте и разне каквоће.

61.

Количине r и h као што је и по себи увиђавно, остају сталне за опажања једне и исте каквоће; са мењањем врсте и каквоће опажања, мењају се и h па и r. Ако сад означимо са h_1 и h_2 мере прецизности за две разне врсте опажања, то онда представљају интеграли:

$$\int h_1 \frac{e^{-h^2{}_1\Delta_1{}^2}\, d\Delta_1}{\sqrt{\pi}} \text{ и } \int h_2 \frac{e^{-h^2{}_2\Delta_2{}^2}\, d\Delta^2}{\sqrt{\pi}}$$

у опште вероватноће претпоставака, а они исти узети међу границама: $\pm б_1$ и $\pm б_2$ дакле:

$$\int_{-б_1}^{б_2} h_1 \frac{e^{-h^2\Delta_1{}^2} . d\Delta_1}{\sqrt{\pi}} \text{ и } \int_{-б_2}^{+б_2} h_2 \frac{e^{-h^2\Delta_2{}^2} . d\Delta_2}{\sqrt{\pi}}$$

представљају они вероватноће претпоставака да грешке опажања леже при првој врсти међу границама $-б_1$ и $+б_1$, а при другој врсти међу границама $-б_2$ и $+б_2$.

Уводећи место:

$$h_1 \triangle_1 = t_1 \text{ а исто тако } h_2 \triangle_2 = t_2$$

$$\text{и } h^1 б_1 = T_1 \qquad \text{па и } h_2 б_2 = T_2$$

ми добијамо:

$$B_{-б_1}^{+б_1} = \int_{-б_1}^{+б_1} h_1 \frac{e^{-h_1{}^2\Delta_1{}^2}\, d\Delta_1}{\sqrt{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{T_1} e^{-t^2{}_1} dt,$$

$$B_{-б_1}^{+б_2} = \int_{-б_2}^{+б_2} h_2 \frac{e^{-h_2{}^2\Delta_2{}^2}\, d\Delta_2}{\sqrt{\pi}} = \int_0^{T_2} e^{-t_2{}^2} . dt_2$$

а ако узмемо да је:

$$B_{-б_2}^{+б_1} = B_{-б_2}^{+б_2}, \text{ дакле да су}$$

вероватноће једнаке, па дакле да су и границе грешака за те две врсте опажања подједнако вероватне, онда следује, пошто у томе случају мора да буде и:

$$\int_0^{T_1} e^{-t_1{}^2}\, dt_1 = \int_0^{T_2} e^{-t_2{}^2}\, dt_2$$

најзад и $T_1 = T_2$ па разуме се и

$$h_1 б_1 = h_2 б_2$$

или и у виду сразмере:

$$б_1 : б_2 = h_2 : h_1 \qquad (80)$$

што значи: *подједнако вероватне границе грешака обрнуто су сразмерене са одговарајућим мерама прецизности.*

Из овога става следује, да ми са параметрима h можемо да сравњујемо и разне врсте опажања; но ми можемо очевидно у томе случају да сравњујемо и хетерогене количине, као н. пр. углове и дужине, само ако можемо да изнађемо у исто време и релативне вредности од h, разуме се с обзиром на јединице мере, које су при мерењу хетерогених количина усвојене биле.

Ако се осврнемо и на вероватне грешке разних врста опажања и узмемо да су r_1 и r_2 одговарајуће вероватне грешке, то добијамо понајпре:

$$B_{-r_1}^{+r_1} = B_{-r_2}^{+r_2} = \frac{1}{2},$$

услед овога и:

$$\int_0^{\pm r_1 h_1} e^{-t_1{}^2}\, dt_1 = \int_0^{\pm r_2 h^2} e^{-t^2{}_2}\, dt_2;$$

па најзад и:

$$r_1 h_1 = r_2 h_2$$

или и у виду сразмере:

$$r_1 : r_2 = h_2 : h_1$$

дакле и *вероватне грешке двеју врста опажања обрнуто су сразмерене са одговарајућим мерама прецизности.*

Осем свега досад поменутога о опажањима разне врсте ми имамо да поменемо и ово.

Ако имамо две врсте опажања од којих је једна подложна грешци Δ а друга грешци Δ_1, онда између њихових вероватноћа постоји овај однос:

$$B_\Delta : B_{\Delta_1} = e^{-h^2\Delta^2} : e^{-h_1^2\Delta_1^2}$$

Са претпоставком да је $\Delta_1 = 0$ ми добијамо

$$B_\Delta : B_0 = e^{-h^2\Delta^2} e^{-0} = e^{-h^2\Delta^2} : 1 .$$

Стављајући пак:

$$h^2 = m,$$

добијамо:

$$B_\Delta : B_0 = e^{-m\Delta^2} : 1 \text{ , или } B_0 : B\Delta = 1 : e^{-m\Delta^2}$$

Обрнути пак, ако међу вероватноћама у каквоме низу опажања постоји горњи однос, онда је у томе случају свакад:

$$h = \sqrt{m}. \tag{82}$$

Определење вероватне границе за параметар h.

62.

Да би определили вероватну границу за параметар h, ми ћемо да претпоставимо, да имамо веома велики низ непосредних опажања, којима су добивене за једну и исту количину X ових n вредности:

$$O_1\ O_2 \ldots\ldots O_n$$

Кад би ми знали апсолутну вредност те непознате количине X, онда би очевидно разлике:

$$\begin{aligned} -O_1 + X &= \Delta_1 \\ -O_2 + X &= \Delta_2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ -O_n + X &= \Delta_n \end{aligned}$$

биле *праве грешке* тога низа опажања. Али како је X по апсолутној вредности немогуће определити, то није могуће определити ни праве грешке опажања.

Но *ми можемо да замислимо такву грешку* m, *да кад праве грешке опажања, дакле:* $\Delta_1\ \Delta_2 \ldots\ldots \Delta_n$ *са њоме заменимо, да тада добијемо исту онолику вероватноћу, колика је и вероватноћа, да оних* n *правих грешака у исто доба постоје.* Ова вероватноћа као што је увиђавно није у томе случају ништа друго, но вероватноћа да у исто доба постоје n грешака једнаке величине и равне m.

Ова грешка m зове се *«средња грешка»* («erreur moyenne, der mittlere Fehler) и ми ћемо за време да узмемо, да нам је вредност те грешке позната.

С том претпоставком, добијамо као вероватноћу да та грешка постоји, узимљући да је прецизност карактерисана бројем h, овај израз:

$$\varphi(m) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2m^2} \times dm.$$

Вероватноћа, да n таквих грешака у исто доба постоје, равна је:

$$(\varphi(m))^n = \frac{h^n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-nh^2m^2} \ (dm) = B.$$

Величина грешке m није више произвољна, чим су опажања извршена и вредност од $(\varphi(m))^n$ зависи тада још само од вредности h. Међу тим, са свим је природно, да ми прецизионој мери h треба да дамо онакву вредност, која вероватноћу $(\varphi(m))^n$ прави максимумом.

Да би до ове вредности дошли, ми ћемо да узмемо да се h променило за dh и тада имамо као вероватноћу:

$$\frac{(h + dh)^n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-n(h+dh)^2m^2} (dm)^n = B^1$$

Ако овај израз развиjемо и поделимо га са изразом за $(\varphi(m))^n$ онда добијамо:

$$B^1 : B = \left(1 + \frac{dh}{h}\right)^n . \; e^{-2\,nhm^2\,dh \,-\, nm^2\,dh^2}$$

или логаритмирањем:

$$l\frac{B'}{B} = n\; l\left(1 + \frac{dh}{h}\right) - 2\,nh.m^2.dh - nm^2.dh^2;$$

ако сад још: $l\left(1 + \frac{dh}{h}\right.$ развиjемо и задржимо само прва два члана, дакле:

$$l\left(1 + \frac{dh}{h}\right) = \frac{dh}{h} - \frac{1}{2}\frac{dh^2}{h^2},$$

онда је:

$$n\; l\left(1 + \frac{dh}{h}\right) = n\frac{dh}{h} - n\frac{1}{2}\frac{dh^2}{h^2},$$

па дакле:

$$l\frac{B'}{B} = \left(\frac{n}{h} - 2\,n\,h\,m^2\right)dh - ndh^2\left(\frac{1}{2h_2} + m^2\right),$$

Пошто B треба да буде апсолутан максимум, то мора $l\frac{B'}{B}$ да буде постојано одречна количина, а ово повлачи за собом да сачинилац од dh мора да буде раван нули, дакле:

$$\left(\frac{n}{h} - 2nhm^2\right)dh = 0; \quad \text{или} \quad \frac{n}{h} - 2nhm^2 = 0;$$

ако из овога услова нађену вредност за h означимо са h_0 онда следује за највероватнију вредност од h дакле h_0:

$$h_0 = \frac{1}{m\sqrt{2}}$$

Одавде добијамо и:

$$m = \frac{1}{h_0\sqrt{2}}$$

Но пошто је, кад је: $\frac{n}{h} - 2nhm^2 - 0$

и

$$l\frac{B'}{B} = -n\,dh^2\left(\frac{1}{2h^2} + m^2\right)$$

то ми употребом горњих вредности од m и h добијамо:

$$l\frac{B'}{B} = -ndh^2\left(\frac{1}{2h_0^2} + \frac{1}{2h_0^2}\right) = -n\frac{dh^2}{h_0^2}$$

па дакле:

$$\frac{B'}{B} = e^{-\frac{n\,dh^2}{h^2}}$$

или:

$$B : B^1 = 1 : e^{\frac{-ndh^2}{h_0^2}} = 1 : e^{-\left(\frac{n}{h^2_0}\right)dh^2}$$

у којој једначини, као што је и по себи разумљиво, dh није ништа друго, до грешка, којој је опредељење вредности h_0 подложно. B је вероватноћа вредности h_0 или вредности грешке $dh = 0$; B^1 је вероватноћа вредности $h_0 + dh$, дакле за $dh = dh$ и према томе је, овој последњој вероватноћи одговарајућа мера прецизности, с погледом на напомену под Бр. 61:

$$h' = \sqrt{\frac{n}{h_0^2}} = \frac{\sqrt{n}}{h_0}$$

Вероватна грешка R за овај случај, биће према пређашњем:

$$R = \pm \frac{\varrho}{h'}$$

дакле вредност од h налази се међу границама:

$$h_0 - R < h < h_0 + R.$$

Ове границе прелазе ако h_0 и R заменимо са њиховим вредностима, дакле ако ставимо:

$$h_0 = \frac{1}{m\sqrt{2}}, \quad R = \frac{\varrho}{h'} = \frac{\varrho . h_0}{\sqrt{n}}$$

у ове:

$$\left(\frac{1}{m\sqrt{2}} - \frac{\varrho}{\sqrt{n}} . \frac{1}{m\sqrt{2}}\right) < h < \left(\frac{1}{m\sqrt{2}} + \frac{\varrho}{\sqrt{n}} . \frac{1}{m\sqrt{2}}\right).$$

или ако извучемо $\frac{1}{m\sqrt{2}}$ као заједничкога чиниоца, онда је:

$$\frac{1}{m\sqrt{2}}\left\{1 - \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right\} < h < \frac{1}{m\sqrt{2}}\left\{1 + \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right\}.$$

Из ових неједначина следује, да се са растењем од n све више и више сужавају границе међу којима h лежи и да заједно са h теже вредности, коју смо напред већ нашли а на име вредности: $\frac{1}{m\sqrt{2}}$, која нам дакле представља *највероватнију границу* за параметар h.

Определење вероватне границе за вероватну грешку r.

63.

Да би добили вероватну границу за вероватну грешку r, ми ћемо у једначину:

$r = -\frac{\varrho}{h}$ да уведемо за h напред нађену вредност и тада је:

$$\frac{\varrho}{m\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1 + \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right\}} < r < \frac{\varrho}{m\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1 - \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right\}}.$$

Ако поделимо и бројиоца и имениоца са $\frac{1}{m\sqrt{2}}$ а за тим и помножимо најпре са $\left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right)$ а после и са $\left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right)$, онда добијамо много удеснији израз:

$$\varrho\sqrt{2}\, m\left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right) < r < \varrho\sqrt{2}\, m\left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right).$$

Из ове се неједначине види, да што год је n веће, да ће се границе међу којима r лежи сужавати; за $n = \infty$ велико, биће:

$$r = \varrho\sqrt{2}\, m$$

$$r = 0{\cdot}476936\ \sqrt{2}\, m$$

$$r = 0{\cdot}674489\ m = \infty\ \frac{2}{3}m. \qquad (85)$$

Определење средње грешке m; највероватније грешке опажања.

64.

За определење *средње грешке* m послужићемо се дефиницијом, коју смо за ту грешку већ напред поменули.

Ако опет означимо са: $\Delta_1\ \Delta_2 \ldots\ldots \Delta_n$ *праве* грешке опажања, то је вероватноћа да оне све у исто доба постоје:

$$\frac{h^n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2 [\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots \Delta^2]} (d\Delta)^n;$$

а вероватноћа, да у исто доба постоје n грешака величине m имамо да је:

$$\frac{h^n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2 [m^2 + m^2 + \ldots m^2]} (dm)^n$$

или

$$\frac{h^n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2 . n . m^2} (dm)^n$$

Занемарујући $(d\Delta)^n$ и $(dm)^n$ ми видимо, да ако треба да вероватноће ова два система грешака буду једнаке, да је неизоставно потребно, да постоји једначина:

$$[\Delta\Delta] = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots\ldots + \Delta_n^2 = n . m^2$$

откуда се добија:

$$m = \pm \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots \Delta_n^2}{n}} = \pm \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \qquad (86)$$

Ова нам једначина истина даје вредност средње грешке m, али изражену *правим* грешкама опажања, које су нам као и апсолутна вредност X непознате.

Ако ми место X узмемо његову највероватнију вредност, дакле аритметијску средину $C = \frac{[Oi]}{n}$, онда ће опажања бити подложна грешкама:

$$\begin{aligned} (-O_1 + C) &= \lambda_1 \\ (-O_2 + C) &= \lambda_2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ (-O_n + C) &= \lambda_n \end{aligned} \qquad (87)$$

Ове грешке $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_n$ разликују се од оних $\Delta_1\ \Delta_2 \ldots \Delta_n$ и што се оне добијају сравњењем опажања са највероватнијом вредности опажаних количина, ми их с тога, називамо «*највероватнијим грешкама опажања*.»

Узимљући место Δ_1 грешку λ_1
« Δ_2 « λ_2 и т. д.
ми очевидно грешимо за онолико, за колико се права вредност X од њене највероватније вредности C разликује и ако ми ту разлику:

$$(-C + X)$$

за време означимо са Δ_c, онда, пошто је:

$$(-O + X) = \Delta \quad \text{и} \quad (-O + C) = \lambda$$

ми добијамо, најпре из последње једначине:

$$-O = \lambda - C,$$

а заменом у прву:

$$\lambda - C + X = \Delta; \text{ или у опште } \lambda + \Delta_c = \Delta.$$

Према томе је:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \Delta_c &= \Delta_1 \\ \lambda_2 + \Delta_c &= \Delta_2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \lambda_n + \Delta_c &= \Delta_n \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

Квадрирањем и сабирањем добијамо:

$$[\lambda\lambda] + 2\Delta_c\,[\lambda] + n\,\Delta_c^2 = [\Delta\Delta].$$

Према пређашњем, мора да буде алгебарска сума заосталих грешака равна нули, дакле:

$$[\lambda] = 0$$

и отуда следује:

$$[\lambda\lambda] + n\,\Delta_c^2 = [\Delta\Delta]$$

или

$$[\lambda\lambda] + n\,\Delta_c^2 = n\,m^2. \qquad (\beta)$$

Кад би знали дакле Δ_c по вредности његовој, онда би могли m да нађемо простим решењем ове последње једначине.

Δ_c или грешку, *одступање аритметијске средине* C од апсолутне вредности непознате количине, или боље средња вредност од Δ_c може да се нађе овако.

Сабирањем једначина (α) добијамо:

$$[\lambda] + n\,\Delta_c = [\Delta].$$

а како је: $[\lambda] = 0$, то следује:

$$n\,\Delta_c = [\Delta] = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots \Delta^n.$$

Квадрирањем добијамо:

$$n^2\,\Delta_c^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2 + 2\,[\Delta^i\Delta_k]$$

или:

$$\Delta_c^2 = \frac{[\Delta\Delta]}{n^2} + \frac{2[\Delta_i\,\Delta_k]}{n^2}.$$

По самој природи грешака, мора $[\Delta_i\,\Delta_k]$ да буде равно нули, јер пошто се у овоме изразу налазе све ком-

бинације без понављања казаљке, то је јасно, да свакоме положноме производу, може да се нађе одговарајући одречан производ, и занемарајући други члан у горњој једначини, ми добијамо:

$$\Delta_c^2 = \frac{[\Delta\Delta]}{n^2}.$$

Ако на овај начин добивену средњу вредност од Δ_c означимо са m_c, онда је:

$$m_c^2 = \frac{[\Delta\Delta]}{n^2} = \frac{n\,m^2}{n^2} = \frac{m^2}{n}$$

или:

$$\Delta_c = m_c = \frac{m}{\pm\sqrt{n}} \qquad (86)$$

као *средњу грешку аритметијске средине.*

Ако ову вредност уведемо у једначину (β), онда је:

$$[\lambda\lambda] + n\,\frac{m^2}{n} = n\,m^2 \quad \text{или} \quad [\lambda\lambda] = (n-1)\,m^2$$

одкуда и:

$$m = \sqrt{\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots \lambda_n^2}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}} \qquad (90)$$

као *средња грешка, којој је поједино опажање подложно.* Ова средња грешка може да се дефинише и као она $\pm$ граница грешке, за коју још можемо да јамчимо, да се при једном опажању неће прекорачити.

Из једначина добивених за m_c и m види се јасно, у коме односу стоји средња грешка појединога опажања према средњој грешци аритметијске средине. Из тих једначина види се и то, да је средња грешка аритметијске средине обрнуто сразмерена квадратном корену из броја опажања, што значи, ако би хтели да средња грешка аритметијске средине буде десет пута мања од грешке, којој је једно опажање подложно, онда би морали 100 таквих опажања да извршимо и да из њих узмемо аритметијску средину.

Изналажење средњих грешака m_c и m за поједине врсте опажања и за поједине инструменте од велике је важности за праксу. Сваки који опажања врши, треба за се у разним приликама за разне инструменте да определи своју средњу грешку опажања. Знајући своју средњу грешку опажања (а са дотичним инструментом) моћиће сматрач очевидно, како би други пут приметио, да из извесного низа опажања добија већу грешку m, но што ју је пре добио, одмах да закључи, да су се при опажању увукле и друге неисправности осем оних, које су потекле од неизбежних узрока. Добијање већих вредности за m па разуме се и за r и за h које са m у свези стоје, од оних које су пређе добивене а за истоветне прилике, треба дакле да нам је свакад довољан разлог да опажања понављамо, те да најзад извор оних неисправности пронађемо.

Међу тим, имамо да поменемо овде још и ово. Ми несмемо губити из вида и то, да m и r могу баш и при једном и истом инструменту па и за једнога истога сматрача да се разликују за по нешто, но то може да дође од лошије осветљености, немирнијега ваздуха и т. д. што, разуме се, да би се могло употребити за што рационалније сазнавање количина, које се односе на каквоћу опажања, треба свакад све унети у записник опажања.

Општи значај израза за вероватноћу једне грешке. Појам о тежини

65.

При извођењу једначине:

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta$$

ми смо претпоставили, да имамо низ опажања једнаке тачности, и из вредности:

$$O_1,\ O_2,\ O_3 \ldots O_n,$$

чија је подједнака вероватноћа $= \frac{1}{n}$, определили смо горњи закон грешака.

Но ако су $O_1\ O_2\ O_3 \ldots O_n$ неједнаких тачности т. ј. ако је:

вредност O_1 следовала из p_1 опажања,
« O_2 « « p_2 «
. . .
. . .
вредност O_n « « p_n опажања,

то је одговарајућа вероватноћа за сваку вредност: O_1 $O_2 \ldots O_n$ према појму о вероватноћи, представљена изразима:

$$\frac{p_1}{[p]};\quad \frac{p_2}{[p]};\quad \ldots\quad \frac{p_n}{[p]}.$$

Највероватнија вредност тражене количине у овоме је случају, аналого са оном $C = \frac{[O_i]}{n}$:

$$C_p = \frac{p_1 O_1 + p_2 O_2 + \ldots p_n O_n}{p_1 + p_2 + \ldots p_n} = \frac{[pO]}{[p]}. \qquad (91)$$

Место пређашње једначине $[\lambda] = 0$, ми добијамо сада $[p\lambda] = 0$ и најзад за вероватноћу грешке при опажањима разне тачности:

$$\varphi(\Delta)_p = N.\ e^{-ph^2\Delta^2}\ d\Delta.$$

Ако из ове једначине определимо сталну количину N, онда добијамо:

$$N = \frac{h\sqrt{p}}{\sqrt{\pi}}.$$

и помоћу ове је, ако ставимо:

$$H = h\sqrt{p}, \quad \text{па дакле} \quad H^2 = ph^2,$$

најзад:

$$\varphi(\Delta)_p = \frac{h\sqrt{p}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-ph^2\Delta^2} d\Delta = \frac{H}{\sqrt{\pi}}\, e^{-H^2\Delta^2} d\Delta$$

што значи, да се у опште опажање какво O, које се p пута понавља, може да сматра и као једно једино опажање, али само тада из низа опажања, чија је прецизност представљена мером:

$$H = h\sqrt{p}. \tag{92}$$

У овој једначини представља h прецизност једнога опажања, а број p зове се „тежина" грешке Δ или тежина опажања O. Из пређашњега следује: *да је тежина једнога опажања у опште онај број подједнако тачних опажања (извесне неке определењене тачности), који је потребан, те да аритметијска средина из тога броја опажања подлегне истој оноликој грешци, којој је и оно једно опажање подложно.*

С погледом на појам о тежини, ми можемо сада да кажемо, да пређашње: h представља прецизност опажања од тежине 1, или h је *прецизност јединице тежине;* r је *вероватна грешка* а m је *средња грешка јединице тежине*, јер, као год што је:

$$H = h\sqrt{p}$$

тако је вероватна грешка низа опажања, који је карактерисан прецизионом мером H:

$$R = \frac{\varrho}{H} = \frac{\varrho}{h\sqrt{p}} = \frac{r}{\sqrt{p}}. \tag{93}$$

Помоћу појма о тежини ми долазимо и до ових веома важних ставова. Тако, ако имамо опажања O и O', која су из два разна низа опажања потекла, чије су мере прецизности H и H' и ми означимо њихове (иначе на произвољну јединицу тежине однешене) тежине са p и p^1 то је понајпре због:

$$H = h\sqrt{p}, \quad H' = h\sqrt{p^1}$$
$$p : p' = H^2 : H'^2 \tag{94}$$

дакле: *тежине су са квадратима прецизионих мера управо сразмерене.*

Ако су тима истима опажањима одговарајуће вероватне грешке R и R' то следује због:

$$R = \frac{\varrho}{h\sqrt{p}}, \quad R' = \frac{\varrho}{h\sqrt{p'}},$$
$$p : p' = R'^2 : R^2 = \frac{1}{R^2} : \frac{1}{R'^2} \tag{95}$$

дакле: *тежине су са квадратима вероватних грешака обрнуто сразмерене.*

Исто тако је, ако са M и M^1 означимо средње грешке, то онда због:

$$R = \varrho\sqrt{2}\, M, \quad R' = \varrho\sqrt{2}\, M'$$

добијамо:

$$p : p^1 = M'^2 : M^2 = \frac{1}{M^2} : \frac{1}{M'^2} \tag{96}$$

што значи: *да су тежине са квадратима средњих грешака обрнуто сразмерене.* Исто тако, ако су Δ и Δ^1 грешке, којима су два различна низа, опажања подједнако вероватно подложна, а $\pm a$ и $\pm a^1$ одговарајуће границе, онда имамо и ове две сразмере:

$$p : p^1 = \Delta^{12} : \Delta^2 = {}^2 \frac{1}{\Delta^2} : \frac{1}{\Delta^{12}} \qquad (97)$$

$$p : p^1 = a^{12} : a^2 = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a^{12}} \qquad (98)$$

дакле: *тежине су са квадратима грешака једнаких релативних вероватноћа, но и са квадратима подједнако вероватних граница грешака обрнуто сразмерене.*

ЧЕТВРТИ ДЕО

Примена теорије најмањих квадрата.

О врстама опажања у опште.

У главноме разликујемо ми три врсте опажања и то: *Непосредна, посредна и условна опажања.* Опажања могу бити вршена са једнаком и неједнаком тачности и према томе имамо: непосредна опажања неједнаке и непосредна опажања једнаке тачности; посредна опажања једнаке и посредна опажања неједнаке тачности и најзад условна опажања једнаке и условна опажања неједнаке тачности.

И ако се све врсте опажања у опште изравнавају на једној и истој основи, опет се начини третирања за по нешто разликују и ми ћемо по реду да поменемо за сваку врсту оно, што је најпотребније.

Но пре но што приступимо самоме изравњавању разних врста опажања, треба да видимо по чему се те врсте у главноме разликују.

Ако какву количину, да кажемо дужину какве линије, величину каквога угла непосредно саму за се више пута опажамо и то под једнаким приликама, са једним и истим инструментом и т. д, онда резултате таквих опажања зовемо: *Непосредна опажања једнаке тачности.* Резултатима пак овакве природе опажања, али само под неједнаким приликама, са разним инструментом и т. сл. неможемо очевидно да припишемо једнаку тачност и с тога називамо оваква опажања, *непосредна опажања* *неједнаке тачности.* При изравњавању ових морамо да узмемо све оно у обзир, што им поменуту карактерну особину и даје.

Посредна опажања то су она, код којих су опажане количине истина опет независно једна од друге али у свези са другим количинама у исто време опажане. Н. пр. при мерењу даљина са даљинарима, које су као што је познато аналитички везане са другим количинама. Ако су сад опажања вршена под једнаким приликама, онда их зовемо у томе случају *посредна опажања једнаке*, а у противном случају, *посредна опажања неједнаке тачности.*

Најзад условна опажања то су она, код којих су поједине количине истина свака за се независно опажане, *али оне нису једна од друге независне*, већ морају да задовоље извесне теоријске услове. Тако н. пр. сва три и ако независно мерена угла у троуглу, морају да задовоље познати услов: збир углова у равном троугу раван 180°, а у сферноме троуглу раван $180^{\circ} + \varepsilon$, где је ε ексцес сферног троугла. Према томе, како су кад поједина опажања вршене под једнаким или неједнаким приликама, називљу се и ова опажања, условна опажања једнаке или неједнаке тачности.

I

Изравњавања непосредних опажања

Изравнавање непосредних опажања неједнаке тачности.

66.

Да би определили праву вредност непознате количине X извршена су опажања:

$$O_1 \quad O_2 \dots O_n$$

са тежинама:

$$p_1 \quad p_2 \dots p_n.$$

Ако место X узмемо највероватнију, вредност C, онда подлежу опажања највероватнијим грешкама:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= - O_1 + C \\ \lambda_2 &= - O_2 + C \\ &\;\;\vdots \\ \lambda_n &= - O_n + C \end{aligned} \tag{99}$$

чије су вероватноће:

$$\frac{h\sqrt{p_1}}{\sqrt{\pi}} e^{-p_1 h^2 \lambda_1^2} d\lambda_1;\ \frac{h\sqrt{p_2}}{\sqrt{\pi}} e^{-p_2 h^2 \lambda_2^2} d\lambda_2; \dots \frac{h\sqrt{p_n}}{\sqrt{\pi}} e^{-p_n h^2 \lambda_n^2} d\lambda_n$$

Производ свију ових вероватноћа даје очевидно вероватноћу, да све грешке у исто доба постоје и ова је вероватноћа представљена изразом:

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n \sqrt{p_1} \cdot \sqrt{p_2} \dots \sqrt{p_n} \; e^{-h^2[p\lambda\lambda]} d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n$$

или

$$K \cdot e^{-h^2[p\lambda\lambda]} (d\lambda)^n.$$

Ова вероватноћа постаће ***maximum***, кад $[p\lambda\lambda]$ добије своју најмању вредност, дакле:

$$[p\lambda\lambda] = [p(-O_i + C)^2] = \mathit{min}, \tag{100}$$

што ће разуме се бити, ако ми први диференцијални количник ставимо раван нули, дакле:

$$\frac{d[p\lambda\lambda]}{d\lambda} = \frac{d[p(-O_i - C)^2]}{dC} = 0$$

:

$$-O_1+C)dC+2p_2(-O_2+C)dC+\ldots+2p_n(-O+C)dC=0$$

$$-O_1+C)+p_2(-O_2+C)+\ldots+p_n(-O_n+C)=0$$

ле, као што смо и напред поменули:

$$[p\lambda] = [p(-O_i+C)] = 0. \qquad (101)$$

Из предпоследње једначине добијамо:

$$-p_1O_1 - p_2O_2 \ldots - p_nO_n + (p_1+p_2+\ldots p_n)C = 0$$

з ове:

$$C = \frac{p_1O_1+p_2O_2+\ldots+p_nO_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n} = \frac{[pO]}{[p]} = C_p. \qquad (102)$$

Горњи израз, као што видимо, даје нам опет арит-
ијску средину, али у њој је сваки елеменат помно-
 са својом одговарајућом тежином и ова средина
е се *општа аритметијска средина*.

Да би се уверили, да је ова општа аритметијска
дина заиста и најбоља вредност за X, ми ћемо да
емо да је C подложно грешци u.

У овоме случају представља израз:

$$K\cdot e^{-h^2[p(-Oi+C+u)^2]}\,du.$$

оватноћу те грешке u, а ако означено квадрирање
ста и извршимо, онда доби амо:

$$K\cdot e^{-h^2\{[p(-Oi+C)^2]+2u[p(-Oi+C)]+u^2[p]\}}\,du.$$

Како је по пређашњем: $[p(-O_i+C)]=0$,
је вероватноћа грешке u представљена изразом:

$$B=K e^{-h^2\{[p(-Oi+C)^2]+u^2[p]\}}\,du.$$

Подизањем бинома на квадрат добијамо:

$$[p(-O_i+C)^2] = [pOO]-2C[pO]+C^2[p],$$

а уводећи десно место C његову вредност, добијамо најзад:

$$[p(-O_i+C)^2] = [pOO] - \frac{[pO]^2}{[p]}.$$

Горњу вероватноћу можемо сад дакле и овако да напишемо:

$$B = K e^{-h^2\left\{[pOO]-\frac{[pO]^2}{[p]}+u^2[p]\right\}}\,du,$$

или и овако:

$$B = K\cdot e^{-h^2\left([pOO]-\frac{[pO]^2}{[p]}\right)} e^{-h^2u^2[p]}\,du.$$

Као што је познато, ми имамо у опште:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B\,du = 1$$

и према пређашњем је:

$$1 = K\cdot e^{-h^2\left([pOO]-\frac{[pO]}{[p]}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2[p]u^2}\,du,$$

одкуда је најзад вероватноћа, да је при определењу вредности за C_p учињена грешка $= u$, представљена изразом:

$$\frac{h\sqrt{[p]}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2[p]u^2}\,du.$$

Из овога се израза увиђа, да највећу вероватноћу има грешка $u = 0$, и према томе је и по себи разумљиво, да је C_p најбоља вредност, која се за X узети може.

Стављајући аналого пређашњем излагању:

$$h\sqrt{[p]} = H,$$

ми добијамо место горње вероватноће сада:

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}}\, e^{-H^2u^2} du,$$

па дакле, као прецизност опредељене опште аритметијске средине:

$$C_p = \frac{[pO]}{[p]}$$

добијамо слично са пређашњим, број:

$$H = h\sqrt{[p]}. \tag{103}$$

Користиће се са оним што је напред већ изведено, ми добијамо као тежину опредељења за $X = C_p$:

$$[p]. \tag{104}$$

Вероватна је грешка опште аритметијске средине дакле:

$$r_p = \frac{\varrho}{H} = \frac{\varrho}{h\sqrt{[p]}} = \frac{r}{\sqrt{[p]}}, \tag{105}$$

а средња грешка појединога опажања или боље опажања од тежине 1 је:

$$m_p = \pm\sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{n-1}} \tag{106}$$

Начин изналажења средње грешке опажања веома је прост. Именилац је број сувишних опажања, бројилац $[p\lambda\lambda]$.

Средња је грешка аритметијске средине:

$$m_{cp} = \pm\frac{m_p}{\sqrt{[p]}} = \pm\sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{(n-1)[p]}} \tag{107}$$

Исто је тако и у опште спогледом на пређашње, средња грешка опажања O_i од тежине p_i, ако га сматрамо као аритметијску средину од p_i опажања O (од тежине 1):

$$m_{ci} = \pm\frac{m_p}{\sqrt{p_i}}. \tag{108}$$

С погледом на појам од средњој грешци m_{cp}, као и о средњој грешци m_p следује, да је општа аритметијска средина C_p до на $\pm\, m_{cp}$ поуздано опредељена, т. ј. права апсолутна вредност тражене количине X може да буде исто тако:

$$(C_p + m_{cp}) \quad \text{као и} \quad (C_p - m_{cp}),$$

док међу тим резултат појединога опажања исте те тражене количине, може да буде исто тако:

$$(C_p + m_p) \quad \text{као и} \quad (C_p - m_p).$$

Изравнавање непосредних опажања једнаке тачности.

67.

Једначине за ова изравнавања добићемо из пређашњих, ако само у њих уведемо претпоставку, која карактерише једнаку тачност, дакле ако ставимо:

$$p_1 = p_2 = \ldots p_n = 1$$

У овоме случају прелази:

$$[p] \quad \text{у} \quad n; \qquad [pO] \quad \text{у} \quad [O];$$

и према томе је највероватнија вредност тражене количине:

$$C = \frac{[O]}{n}, \tag{109}$$

дакле позната аритметијска средина, на основу које смо и закон грешака извели. Ова се средина зове за разлику од оне опште: *проста аритметијска средина.*

Овај израз може и непосредно да се добије на основу услова о минималном збиру квадрата највероватнијих грешака.

Прецизност је овога определења с погледом на пређашње:

$$h\sqrt{n}. \tag{110}$$

Средња грешка једнога опажања је:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}} \tag{111}$$

при чему именилац $n-1$ опет представља број сувишних опажања, а бројилац је $[\lambda\lambda]$.

Средња грешка аритметијске је средине:

$$m_c = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n(n-1)}}. \tag{112}$$

Тежина од C у односу на поједина опажања је број n.

Вероватна грешка просте аритметијске средине је:

$$r_c = \frac{\varrho}{h\sqrt{n}} = \frac{r}{\sqrt{n}}. \tag{113}$$

И у овоме простијем случају с погледом на појмове о средњим грешкама m и m_c следује, да је проста аритметијска средина C до на $\pm\, m_c$ поуздано опредељена, т. ј. права апсолутна вредност тражене количине X може да буде исто тако:

$$(C + m_c) \quad \text{као и} \quad (C - m_c),$$

док међу тим резултат појединога опажања исте те тражене количине, може да буде исто тако:

$$(C + m) \quad \text{као и} \quad (C - m).$$

Поузданост појединога опажања добивенога резултата изражава се често и разломком:

$$\frac{m}{C} \tag{114}$$

Функција непосредно опажаних количина.

68.

Нека је V функција, међу собом независних и непосредно опажаних количина X_1 X_2 . . дакле:

$$V = F(X_1, \ X_2, \ldots)$$

и нека су за те количине X_1, X_2 . . . из понављаних опажања O_i добивене најбоље вредности C_1, C_2, . . . подложне грешкама:

$$\pm\, m_1, \ \pm\, m_2, \ldots$$

и ми хоћемо да нађемо највероватнију вредност те функције V са њеном вероватном или средњом грешком. И овај задатак може слично са пређашњим да се реши на тај начин, да се уведу у рачун највероватније грешке опажања, нађу вероватноће за сваку поједину грешку и најзад задатак даље третира, као што је на неколицини напред већ показано.

Но он може простије да се реши и овако, с погледом на напомену на стр. 145 а под бројем 45.

Очевидна је ствар, да ми неможемо добити праву апсолутну вредност функције V, ако ми место X_1, X_2, уведемо у ту функцију вредности C_1, C_2 .. које су подложне по реду поменутим грешкама. Ако означимо ми са $m\,V$ промену те функције, која долази отуда, кад ми место опажањем добивених C уведемо у рачун исправне вредности:

$$C_1 \pm m_1; \quad C_2 \pm m_2; \ldots$$

онда добијамо, ако по Таљору развијемо функцију у ред и при томе занемаримо више ступње од m_1, m_2..

$$\pm\, m_V = \pm \left(\frac{dV}{dC_1}\right) m_1 \pm \left(\frac{dV}{dC_2}\right) m_2 \pm \ldots$$

или с претпоставком, да су подједнако велике положне и одречне грешке подједнако могућне:

$$m^2{}_V = \left(\frac{dV}{dC_1}\right)^2 m^2{}_1 + \left(\frac{dV}{dC_2}\right)^2 m_2{}^2 + \ldots$$

одкуда најзад:

$$m_V = \sqrt{\left(\frac{dV}{dC_1}\right)^2 m_1{}^2 + \left(\frac{dV}{dC_2}\right)^2 m_2{}^2 + \ldots} \tag{115}$$

Исти овај однос постоји и за вероватну грешку и ако са r_1, r_2 . . . означимо дотичне вероватне грешке, онда је:

$$r_V = \sqrt{\left(\frac{dV}{dC_1}\right)^2 r_1{}^2 + \left(\frac{dV}{dC_2}\right)^2 r_2{}^2 + \ldots} \tag{116}$$

Ове једначине добивене у опште, вреде и за поједине случајеве, тако ако је:

$$V = a_1\, C_1 + a_2\, C_2 + \ldots a_n\, C_n$$

дакле линеарна функција количина C_i, где су a_1, a_2, . a_n извесни бројни сачиниоци, то је с тога, што су у овоме случају:

$$\left(\frac{dV}{dC_1}\right) = a_1; \quad \left(\frac{dV}{dC_2}\right) = a_2 \ldots \left(\frac{dV}{dC_n}\right) = a_n;$$

$$m = \sqrt{[aa\; mm]} = \sqrt{a_1{}^2 m_1{}^2 + a_2{}^2 m_2{}^2 + \ldots + a^2{}_n\, m_n{}^2} \tag{117}$$

Но ако је поред тога још и:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1,$$

дакле функција облика:

$$V = C_1 + C_2 + \ldots C_n$$

то је очевидно:

$$m = \sqrt{m_1{}^2 + m_2{}^2 + \ldots + m^2{}_n}. \tag{118}$$

Ова последња једначина даје средњу грешку функцијину за случај, кад количине подлеже разним средњим грешкама. Но ако сва C_i имају једнаку тачност, дакле и једнаке средње грешке:

$$m_1 = m_2 = \ldots m_n,$$

то горњи израз прелази, ако грешку означимо са m_1 у:

$$m = \sqrt{n\, m_1{}^2} = m_1 \sqrt{n} \tag{119}$$

што значи: *кад је каква количина V равна збиру више њих опажаних количина, и кад су сва опажања вршена* *једнаком тачности, онда расти грешка од* V *као год што расти и квадратни корен из броја опажаних количина.* Из овога следује, да треба свакад, кад је потребно какву количину сложити из неколико делова, водити рачуна о томе, да буде што мањи број тих делова. Примењујући ово на геодетску праксу следује, да је боље какву количину мерити, него ли је из суме других измерених количина одређивати, а кад то мора да буде, као што је при мерењу основица и дужина у опште случај, онда је под иначе једнаким приликама свакад боља дужа но краћа летва за мерење.

II.

Изравњавање посредних опажања.

Изравнавање посредних опажања једнаке тачности.

69.

Да узмемо нека је функција:

$$\varphi = F\,(X,\ Y,\ Z,\ T)$$

од четири непознатих количина X, Y, Z и T опажана μ пута са једнаком тачности, која је са мером прецизности h карактерисана. Вредности добивене опажањем нека су:

$$\varphi_1\ \varphi_2 \cdots \varphi_\mu.$$

Ако су X_0, Y_0, Z_0, T_0, што је могуће боље приближне вредности непознатих количина; (x), (y), (z) и (t) праве поправке тих непознатих, то за *праве грешке* опажања имамо ове једначине:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 + \Delta_1 &= F_1(X_0 + (x),\ Y_0 + (y),\ Z_0 + (z),\ T_0 + (t)) \\
\varphi_2 + \Delta_2 &= F_2(X_0 + (x),\ Y_0 + (y),\ Z_0 + (z),\ T_0 + (t)) \\
&\ \vdots \\
\varphi_\mu + \Delta_\mu &= F_\mu(X_0 + (x)\ \ Y_0 + (y),\ Z_0 + (z),\ T_0 + (t))
\end{aligned}$$

или решене по Δ:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= -\varphi_1 + F_1(X_0 + (x),\ V_0 + (y),\ Z_0 + (z),\ T_0 + (t)) \\
\Delta_2 &= -\varphi_2 + F_2(X_0 + (x),\ V_0 + (y),\ Z_0 + (z),\ T_0 + (t)) \\
&\ \vdots \\
\Delta_\mu &= -\varphi_\mu + F_\mu(X_0 + (x),\ V_0 + (y),\ Z_0 + (z)\ \ T_0 + (t))
\end{aligned}$$

С претпоставком да су количине (x) (y) .. врло незнатних вредности, можемо, ако развијемо десну страну по Тајлоровом обрасцу, да се ограничимо само на прве ступње тих количина и стављајући:

$$\begin{aligned}
F_1\,(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ T_0) &= F_1 \\
F_2\,(X_0,\ B_0,\ Z_0,\ T_0) &= F_2 \\
&\ \vdots \\
F_\mu(X_0,\ B_0,\ Z_0,\ T_0) &= F_\mu;
\end{aligned}$$

затим и:

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{dF_1}{dX_0} = a_1; & \dfrac{dF_2}{dX_0} = a_2, \ldots & \dfrac{dF_\mu}{dX_0} = a_\mu; \\
\dfrac{dF_1}{dY_0} = b_1; & \dfrac{dF_2}{dY_0} = b_2; \ldots & \dfrac{dF_\mu}{dY_0} = b_\mu; \\
\dfrac{dF_1}{dZ_0} = c_1; & \dfrac{dF_2}{dZ_0} = c_2; \ldots & \dfrac{dF_\mu}{dZ_0} \quad c_\mu; \\
\dfrac{dF_1}{dT_0} = d_1, & \dfrac{dF_2}{dT_0} = d_2, \ldots & \dfrac{dF_\mu}{dT_0} = d_n;
\end{array}$$

па најзад:

$$\begin{aligned}
-\varphi_1 + F_1 &= n_1 \\
-\varphi_2 + F_2 &= n_2 \\
&\ \vdots \\
-\varphi_\mu + F_\mu &= n_\mu,
\end{aligned}$$

онда добијамо место оних једначина за $\Delta_1\ \Delta_2 \cdots \Delta_\mu$ следеће:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle_1 = n_1 + a_1(x) + b_1(y) + c_1(z) + d_1(t) \\ \triangle_2 = n_2 + a_2(x) + b_2(y) + c_2(z) + d_2(t) \\ \vdots \\ \triangle_\mu = n_\mu + a_\mu(x) + b_\mu(y) + c_\mu(z) + d_\mu(t) \end{array}\right\} 1$$

Место пређашњих непознатих X, Y, Z и T сад имамо дакле једначине са поправкама(x) (y).... и њиховим најбољим приближним вредностима: $X_\circ\, Y_\circ\, Z_\circ\, T_\circ$.

Како место (x) (y) .... буди какве вредности $x\ y\ z\ t$ узмемо, подлегнуће опажања грешкама: $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots\ \lambda_\mu$, које ће бити дате са једначинама:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = n_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t \\ \lambda_2 = n_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t \\ \vdots \\ \lambda_\mu = n_\mu + a_\mu x + b_\mu y + c_\mu z + d_\mu t \end{array}\right\} 2$$

Вероватноће ових грешака су:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\lambda_1^2} \times d\lambda_1; \quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\lambda_2^2} \times d\lambda_2; \ldots$$

а вероватноћа, да оне све у исто доба постоје:

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^\mu e^{-h^2[\lambda\lambda]} \times (d\lambda)^\mu.$$

Ова ће вероватноћа бити *maxim.* кад је:

$$\left.\begin{array}{rl} \Phi = [\lambda\lambda] = & (n_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t)^2 \\ & + (n_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t)^2 \\ & \vdots \\ & + (n_\mu + a_\mu x + b_\mu y + c_\mu z + d_\mu t)^2 = min \end{array}\right\} 3$$

т. ј. кад се задовоље једначине:

$$\frac{d\Phi}{dx} = 0, \quad \frac{d\Phi}{dy} = 0, \quad \frac{d\Phi}{dz} = 0, \quad \frac{d\Phi}{dt} = 0.$$

дакле први диференцијани количиници од Φ по количинама: $x\ y\ z\ t$ или кад се $x\ y\ z$ и t из горњих једначина определе.

Ми имамо с обзиром на једначину под 3):

$$\frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dx} = \lambda_1 \frac{d\lambda_1}{dx} + \lambda_2 \frac{d\lambda_2}{dx} + \ldots\ldots \lambda_\mu \frac{d\lambda_\mu}{dx};$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dy} = \lambda_1 \frac{d\lambda_1}{dy} + \lambda_2 \frac{d\lambda_2}{dy} + \ldots\ldots \lambda_\mu \frac{d\lambda_\mu}{dy};$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dz} = \lambda_1 \frac{d\lambda_1}{dz} + \lambda_2 \frac{d\lambda_2}{dz} + \ldots\ldots \lambda_\mu \frac{d\lambda_\mu}{dz};$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dt} = \lambda_1 \frac{d\lambda_1}{dt}\ \lambda_2 \frac{d\lambda_2}{dt} + \ldots\ldots \lambda_\mu \frac{d\lambda_\mu}{dt};$$

или:

$$\frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dx} = \left[\lambda \frac{d\lambda}{dx}\right] = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dy} = \left[\lambda \frac{d\lambda}{dy}\right] = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dz} = \left[\lambda \frac{d\lambda}{dz}\right] = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dt} = \left[\gamma \frac{d\lambda}{dt}\right] = 0.$$

Но ако свако λ заменимо са његовом вредности и израчунамо свако $\frac{d\lambda}{dx}$; $\frac{d\lambda}{dy}$; $\frac{d\lambda}{dz}$; $\frac{d\lambda}{dt}$; онда с тога, што је:

$$\frac{d\lambda_1}{dx} = a_1; \quad \frac{d\lambda_2}{dx} = a_2; \ \ldots\ldots \ \frac{d\lambda_\mu}{dx} = a_\mu:$$

$$\frac{d\lambda_1}{dy} = b_1; \quad \frac{d\lambda_2}{dy} = b_2; \ \ldots\ldots \frac{d\lambda_\mu}{dy} = b_\mu;$$

$$\frac{d\lambda_1}{dz} = c_1; \quad \frac{d\lambda_2}{dz} = c_2; \ \ldots\ldots \frac{d\lambda_\mu}{dz} = c_\mu;$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = d_1; \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = d_2; \ \ldots\ldots \frac{d\lambda_\mu}{dt} = d_\mu;$$

добијемо место горњих једначина:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dx} = {} & a_1(n_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t) + \\ & a_2(n_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t) \\ & \vdots \\ a_\mu(n_\mu + a_\mu x + b_\mu y + c_\mu z + d_\mu t) & = [a\lambda] = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dy} = {} & b_1(n_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t) + \\ & b_2(n_2 + a_2 x + b_5 y + c_2 z + d_2 t) \\ & \vdots \\ b_\mu(n_\mu + a_\mu x + b_\mu y + c_\mu z + d_\mu t) & = [b\lambda] = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dz} = {} & c_1(n_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t) + \\ & c_2(n_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t) \\ & \vdots \\ c_\mu(n_\mu + a_\mu x + b_\mu y + c_\mu z + d_\mu t) & = [c\lambda] = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dt} = {} & d_1(n_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t) + \\ & d_2(n_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t) \\ & \vdots \\ d_\mu(n_\mu + a_\mu x + b_\mu y + c_\mu z + d_\mu t) & = [d\lambda] = 0. \end{aligned}$$

Ми имамо на тај начин дакле да рачунамо вредности од: x, y, z, t из једначина:

$$\left.\begin{aligned} [a\lambda] &= 0 \\ [b\lambda] &= 0 \\ [c\lambda] &= 0 \\ [d\lambda] &= 0 \end{aligned}\right\} 4$$

које можемо да напишемо и овако:

$$\begin{aligned} & a_1 n_1 + a_1 a_1 x + a_1 b_1 y + a_1 c_1 z + a_1 d_1 t + \\ & a_2 n_2 + a_2 a_2 x + a_2 b_2 y + a_2 c_2 z + a_2 d_2 t + \\ & a_3 n_3 + a_3 a_3 x + a_3 b_3 y + a_3 c_3 z + a_3 d_3 t + \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & a_\mu n + a_\mu a_\mu x + a_\mu b_\mu y_\mu + a_\mu c_\mu z + a_\mu d_\mu t = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & b_1 n_1 + b_1 a_1 x + b_1 b_1 y + b_1 c_1 z + b_1 d_1 t + \\ & b_2 n_2 + b_2 a_2 x + b_2 b_2 y + b_2 c_2 z + b_2 d_2 t + \\ & b_3 n_3 + b_3 a_3 x + b_3 b_3 y + b_3 c_3 z + b_3 b_3 t + \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & b_\mu n_\mu + b_\mu a_\mu x + b_\mu b_\mu y + b_\mu c_\mu z + b_\mu d_\mu t = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c_1 n_1 + c_1 a_1 x + c_1 b_1 y + e_1 c_1 z + c_1 d_1 t + \\ & c_2 n_2 + c_2 a_2 x + c_2 b_2 y + c_2 c_2 z + c_2 d_2 t + \\ & c_3 n_3 + c_3 a_3 x + c_3 b_3 y + c_3 c_3 z + c_3 d_3 t + \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & c_\mu n_\mu + c_\mu a_\mu x + c_\mu b_\mu y + c_\mu c_\mu z + c_\mu d_\mu t = 0: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & d_1 n_1 + d_1 a_1 x + d_1 b_1 y + d_1 c_1 z + d_1 d_1 t + \\ & d_2 n_2 + d_2 a_2 x + d_2 b_2 y + d_2 c_2 z + d_2 d_2 t + \\ & d_3 n_3 + d_3 a_3 x + d_3 b_3 y + d_3 c_3 z + d_3 d_3 t + \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & d_\mu n_\mu + d_\mu a_\mu x + d_\mu b_\mu y + d_\mu c_\mu z + d_\mu d_\mu t = 0. \end{aligned}$$

Ако ове једначине напишемо тако, да чланови у којима се n налази дођу на послетку и ако извукав x, y, z, t као заједничке чиниоце, представимо прилично дугачке, али са свим правилне сачиниоце од x y z и t по Гаусу симболички, а на име:

$$\begin{aligned} a_1 a_1 + a_2 a_2 + \ldots a_\mu a_\mu &= [aa] \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots a_\mu b_\mu &= [ab] \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots a_\mu c_\mu &= [ac] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_1d_1 + a_2d_2 + \ldots a_\mu d_\mu &= [ad] \\
a_1n_1 + a_2n_2 + \ldots a_\mu n_\mu &= [an]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_1b_1 + b_2b_2 + \ldots b_\mu b_\mu &= [bb] \\
b_1c_1 + b_2c_2 + \ldots b_\mu c_\mu &= [bc] \\
b_1d_1 + b_2d_2 + \ldots b_\mu d_\mu &= [bd] \\
b_1n_1 + b_2n_2 + \ldots b_\mu n_\mu &= [bn]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_1c_1 + c_2c_2 + \ldots c_\mu c_\mu &= [cc] \\
c_1d_1 + c_2d_2 + \ldots c_\mu d_\mu &= [cd] \\
c_1n_1 + c_2n_2 + \ldots c_\mu d_\mu &= [cn]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_1d_1 + d_2d_2 + \ldots d_\mu d_\mu &= [dd] \\
d_1n_1 + d_2n_2 + \ldots d_\mu n_\mu &= [dn]
\end{aligned}
$$

онда из једначина пређашњих, добијамо ове једначине:

$$
\left.
\begin{aligned}
[aa]x + [ab]y + [ac]s + [ad]i + [an] &= 0 \\
[ab]x + [bb]y + [bc]з + [bd]i + [bn] &= 0 \\
[ac]x + [cb]y + [cc]s + [cd]i + [cn] &= 0 \\
[ad]x + [db]y + [dc]s + [dd]i + [dn]; &= 0
\end{aligned}
\right\} 5
$$

које зовемо *нормалним* или основним једначинама и којих има онолико на броју, колико има и непознатих, и које нам дају најбоље вредности непознатих количина.

Као што се види из једначина под 3), ми и овде наилазимо на исти онај принцип, с којим смо се и код непосредних опажања упознали, а на име, да су опет и овде оне вредности непознатих најбоље, које заостављају такве грешке, чија је сума квадрата *minimum*.

Решење нормалних једначина бива понајбоље по *методи замене*. Ми рачунамо најпре x из прве једначине као функцију и замењујемо његову вредност у остале три једначине и добијамо три једначине у којима се: налазе још само y z и t као непознате; за тим из једне од тих изналазимо y и замењујемо у оне друге две и добијамо тако две једначине само са z и t из којих двеју можемо опет заменом, да добијемо z па и t.

Решење нормалних једначина може да буде и са тако званим *детерминантама*, али овај начин и ако елегантан, опет се само при предавањима у математици потпуности ради показује. У пракси се начин са детерминантама ређе употребљује.

Да смо имали пет непознатих или

$$\varphi = F(X,\ U,\ Z,\ T,\ U)$$

онда би имали и пет нормалних једначине.

За шест непознатих или кад је:

$$\varphi = F(X,\ Y,\ Z,\ T,\ U,\ V)$$

имали би шест једначина.

Ми ћемо да видимо како се решавају нормалне једначине и као општији случај узећемо, да имамо шест непознатих. Одговарајуће једначине, које се разликују од оних под 5 тиме, што у њима придолазе и чланови са u v и са e и f означимо по реду са: 1), 2), 3), 4), 5), 6).

Решење нормалних једначина са Гаусовим алгоритмом.

70.

Ако ставимо једначину 1) равну A, тако, дакле да је:

$$[aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]t + [ae]u + [af]v + [an] = A,$$

то следује с претпоставком да је:

$$A = 0,$$

$$x = -\frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z - \frac{[ad]}{[aa]}t - \frac{[ae]}{[aa]}u - \frac{[af]}{[aa]}v - \frac{[an]}{[aa]}.$$

Ако уведемо ову вредност од x у оне остале једначине 2) 3) 4) 5) и 6) онда добијамо ових пет једначина:

$$[ab]\left\{-\frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z - \frac{[ad]}{[aa]}t - \frac{[ae]}{[aa]}u - \frac{[af]}{[aa]}v - \frac{[an]}{[aa]}\right\} +$$

$$[bb]y + [bc]z + [bd]t + [be]u + [bf]v + [bn] = 0;$$

$$[ca]\left\{-\frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z - \frac{[ad]}{[aa]}t - \frac{[ae]}{[aa]}u - \frac{[af]}{[aa]}v - \frac{[au]}{[aa]}\right\} +$$

$$[cb]y + [cc]z + [cd]t + [ce]u + [cf]v + [cn] = 0\,;$$

$$[da]\left\{-\frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z - \frac{[ad]}{[aa]}t - \frac{[ae]}{[aa]}u - \frac{[af]}{[aa]}v - \frac{[an]}{[aa]}\right\} +$$

$$[bd]y + [dc]z + [dd]t + [de]u + [df]v + [dn] = 0\,;$$

$$[ea]\left\{-\frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z - \frac{[ad]}{[aa]}t - \frac{[ae]}{[aa]}u - \frac{[af]}{[aa]}v - \frac{[an]}{[aa]}\right\} +$$

$$[eb]y + [ec]z + [ed]t + [ee]u + [ef]v + [en] = 0;$$

$$[fa]\left\{-\frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z - \frac{[ad]}{[aa]}t - \frac{[ae]}{[aa]}y - \frac{[af]}{[aa]}v - \frac{[an]}{[aa]}\right\} +$$

$$[fb]y + [fc]z + [fd]t + [fe]u + [ff]v + [fn] = 0.$$

Ако у овим једначинама сведемо све што можемо и сјединимо сачинноце од једне и исте непознате у један члан, то увиђамо лако, да таквим радом добијамо ове особите форме тих чланова, а на име:

$$[bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab]; \quad [bc] - \frac{[ab]}{[aa]}ac; \quad [bd] - \frac{[ab]}{[aa]}[ad];$$ и т. д.

које ћемо по Гаусу означити овако:

1') $[bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] = [bb.1];$

2') $[bc] - \frac{[ab]}{[aa]}[ac] = [bc.1];$

3') $[bd] - \frac{[ab]}{[aa]}[ad] = [bd.1];$

4') $[be] - \frac{[ab]}{[aa]}[ae] = [be.1];$

5') $[bf] - \frac{[ab]}{[aa]}[af] = [bf.1];$

6') $[cc] - \frac{[ac]}{[aa]}[ac] = [cc.1];$

7') $[cd] - \frac{[ac]}{[aa]}[dd] - [cd.1];$

8') $[ce] - \frac{[ac]}{[aa]}[ae] = [ce.1];$

9') $[cf] - \frac{[ac]}{[aa]}[af] = [cf.1];$

10') $[dd] - \frac{[ad]}{[aa]}[ad] = [dd.1];$

11') $[de] - \frac{[ad]}{[aa]}[ae] = [de.1];$

12') $[df] - \frac{[ad]}{[aa]}[af] = [df.1];$

13') $[ee] - \frac{[ae]}{[aa]}[ae] = [ce.1];$

14') $[ef] - \frac{[ae]}{[aa]}[af] = [ef.1];$

15') $[ff] - \frac{[af]}{[aa]}[af] = [f.1];$

16') $[bn] - \frac{[ab]}{[aa]}[an] = [bn.1];$

17') $[cn] - \frac{[ac]}{[aa]}[an] = [cn.1];$

18') $[dn] - \frac{[ad]}{[aa]}[an] = [dn.1];$

19,) $[en] - \frac{[ae]}{[aa]}[an] = [en.1];$

20,) $[fn] - \frac{[af]}{[aa]}[an] = [fn.1];$

место оних пређашњих једначина, ми добијамо сад:

7) $[bb.1]y + [bc,1]z + [bd.1]t + [be.1]u + [bf.1]v + [bn.1] = 0$

8) $[cb.1]y + [cc.1]z + [cd,1]t + [ce.1]u + [cf.1]v + [cn.1] = 0$

9) $[db.1]y + [dc.1]z + [dd.1]t + [de.1]u + [df.1]v + [dn.1] = 0$

20) $[eb.1]y + [ec.1]z + [ed.1]t + [ee.1]u + [ef.1]v + [en.1] = 0$

11) $[fb.1]y + [fc.1]z + [fd.1]t + [fe.1]u + [ff,1]v + [fn.1] = 0;$

Ако опет и овде ставимо једначину 7) — B', то с претпоставком

да је $B' = 0$,

добијамо:

$$y = -\frac{[bc.1]}{[bb.1]}z - \frac{[bd.1]}{[bb.1]}t - \frac{[be.1]}{[bb.1]}u - \frac{[bf.1]}{[bb.1]}v - \frac{[bn.1]}{[bb.1]},$$

Ако ову вредност од y уведемо у једначине 8) 9) 10) и 11) онда добијамо:

$$[bc.1]\left\{-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}z - \frac{[bd.1]}{[bb.1]}t - \frac{[be.1]}{[bb.1]}u - \frac{[bf.1]}{[bb.1]}v - \frac{[bn.1]}{[bb.1]}\right\}+$$

$$[cc.1]z + [cd.1]t + [ce.1]u + [cf.1]v + [cn.1] = 0;$$

$$[bd.1]\left\{-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}z - \frac{[bd.1]}{[bb.1]}t - \frac{[be.1]}{[bb.1]}u - \frac{[bf.1]}{[bb.1]}v - \frac{[bn.1]}{[bb.1]}\right\}+$$

$$[cd.1]z + [dd.1]t + [de.1]u + [df.1]v + [dn.1] = 0;$$

$$[be.1]\left\{-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}z - \frac{[bd.1]}{[bb.1]}t - \frac{[be.1]}{[bb.1]}u - \frac{[bf.1]}{[bb.1]}v - \frac{[bn.1]}{[bb.1]}\right\}+$$

$$[ce.1]z + [ed.1]t + [ee.1]u + [ef.1]v + [en.1] = 0;$$

$$[bf.1]\left\{-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}z - \frac{[bd.1]}{[bb.1]}t - \frac{[be.1]}{[bb.1]}u - \frac{[bf.1]}{[bb.1]}v - \frac{[bn.1]}{[bb.1]}\right\}+$$

$$[cf.1]z + [fd.1]t + [fe.1]u + [ff.1]v + [fn.1] = 0.$$

Ако и у овим једначинама сведемо све што можемо и сједннимо сачиниоце од једне и исте непознате у један члан, то лако увиђамо да таквим радом добијамо опет ове особите и са свим правилне форме тих чланова, а на име:

$$[cc.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1]; \quad [cd.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bd.1]; \quad [ce.1 - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[be.1] \text{ итд.}$$

које ћемо опет по Гаусу да означимо овако:

$$1'' \qquad [cc.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1] = [cc.2];$$

$$2'' \qquad [cd.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bd.1] = [cd.2]$$

$$3'' \qquad [ce.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[be.1] = [ce.2]$$

$$4'' \qquad [cf.1] - \frac{[bc.1]}{[bb,1]}[bf.1] = cf.2]$$

$$5'' \qquad [cn.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bn.1] = [cn.2]$$

$$6'' \qquad [dd.1] - \frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bd.1] = [dd.2]$$

$$7'' \qquad [de.1] - \frac{[bd.1]}{[bb.1]}[be.1] = [db.2]$$

$$8'' \qquad [df.1] - \frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bf.1] = [df.2]$$

$$0'' \qquad [dn.1] - \frac{[bd.1]}{[b.1]}[bn.1] = [dn.2]$$

$$10'' \qquad [ee.1] - \frac{[be.1]}{[bb.1]}[be.1] = [ee.2]$$

$$11'' \qquad [ef.1] - \frac{[be.1]}{[bb.1]}[bf.1] = [ef.2]$$

$$13'' \qquad [en.1] - \frac{[be.1]}{[bb.1]}[bn.1] = [en.2]$$

$$13'' \qquad [ff.1] - \frac{[bf.1]}{[bb.1]}[bf.1] = [ff.2]$$

$$14'' \qquad [fn.1] - \frac{[bf.1]}{[bb.1]}[bn.1] = [fn.2]$$

Помоћу ових симболичких израза ми добијамо сад ове четири једначине, у којима се x и y више не находе:

12) $[cc.2]z + [cd.2]t + [ce.2]u + [cf.2]v + [cn.2] = 0$

13) $[cd.2]z + [dd.2]t + [de.2]u + [df.2]v + [dn.2] = 0$

14) $[ce.2]z + [ed.2]t + [ee.2]u + [ef.2]v + [en.2] = 0$

15) $[cf.2]z + [fd.2]t + [fe.2]u + [ff.2]v + [fn.2] = 0.$

Ако ставимо једначиоу 12) $= C''$, то с претпоставком $C'' = 0$ добијамо :

$$z = -\frac{[cd.2]}{[cc.2]}\,t - \frac{[ce.2]}{[cc.2]}\,u - \frac{[cf.2]}{[cc.2]}\,v - \frac{[cn.2]}{[cc.2]},$$

и ако уведемо ову вредност у једначине 13, 14, 15. онда добијамо :

$$[cd.2]\left\{-\frac{[cd.2]}{[cc.2]}\,t - \frac{[ce.2]}{[cc.2]}\,u - \frac{[cf.2]}{[cc.2]}\,v - \frac{[cn.2]}{[cc.2]}\right\} +$$

$$[dd.2]t + [de.2]u + [df.2]v + [dn.2] = 0.,$$

$$[cc.2]\left\{-\frac{[ce.2]}{[cc.2]}\,t - \frac{[ce.2]}{[cc.2]}\,u - \frac{[cf.2]}{[cc.2]}\,v - \frac{[cn.2]}{[cc.2]}\right\} +$$

$$[ed.2]t + [ee.2]u + [ef.2]v + [en.2] = 0.,$$

$$[cf.2]\left\{-\frac{[cd.2]}{[cc.2]}\,t - \frac{[ce,2]}{[cc.2]}\,u - \frac{[cf.2]}{[cc.2]}\,v - \frac{[cn.2]}{[cc.2]}\right\} +$$

$$[fd.2]t + [fe.2]u + [ff.2]v + [fn.2] = 0.$$

Стављајући по Гаусу:

$1'''$ $\quad [dd.2] - \frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cd.2] = [dd.3]$

$2'''$ $\quad [de.2] - \frac{[cd,2]}{[cc,2]}[ce.2] = [de.2]$

$3'''$ $\quad [df.2] - \frac{[cd.2]}{[cc.2]}[ce.]2 = [df.3]$

$4'''$ $\quad [dn.2] - \frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cn.2] = [dn.3]$

$5'''$ $\quad [ee.2] - \frac{[ce.2]}{[cc.2]}[ce.2] = [ee.3]$

$6'''$ $\quad [ce.2] - \frac{[ce.2]}{[cc.2]}[cf.2] = [ef.3]$

$7'''$ $\quad [en.2] - \frac{[ce.2]}{[cc.2]}[cn.2] = [en.3]$

$8'''$ $\quad [ff.2] - \frac{[cf.2]}{[cc.2]}[cf.2] = [ff.3]$

$9'''$ $\quad [fn.2] - \frac{[fc.2]}{[cc.2]}[cn.2] - [fc.3]$

ми добијамо једначине:

16) $\quad [dd.3]t + [de.3]y + [df.3]v + [dn.3] = 0$

17) $\quad [de.3]t + [ee.3]y + [fe.3]v + [en.3] = 0$

18) $\quad [df.3]t + [ef.8]y + [fl.3]v + [fn.3] \parallel 0$

Ако ставимо једначину 16) $= D'''$ то је

за $\quad D''' = 0;$

$$t - -\frac{[de.3]}{[dd,3]}\,\text{и} - \frac{[dJ.3]}{[dd.3]}\,v - \frac{[dn.3]}{[dd.3]}$$

и ако ову вредност уведемо у једначине 17) и 18) онда је:

$$[de.3]\left\{-\frac{[de.3]}{[dd.3]}\,u - \frac{[df.3]}{[dd.3]}\,v - \frac{[dn,3]}{[dd.2]}\right\} +$$

$$[ee.3]u + [ef.3]v + [en.3] = 0.,$$

$$[df.3]\left\{-\frac{[de.3]}{[dd.3]}\,u - \frac{[df.3]}{[dd.3]}\,v - \frac{[dn.3]}{[dd.3]}\right\} +$$

$$[ef.3]u + [ff.3]v + [jn.3] = 0..$$

Ако ставимо опет по Гаусу:

$1''''$ $\quad [ee.3] - \frac{[de.3]}{[dd.3]}[de.3] = [ee.4]$

$2''''$ $\quad [ef.3] - \frac{[de.3]}{[dd.3]}[df.3] = [ef.4]$

$3''''$ $\quad [en.3] - \frac{[de.3]}{[dd.3]}[dn.3] = [en\ 4]$

$4''''$ $\quad [ff.3] - \frac{[df.3]}{[dd.3]}[df.3] = [ff.4]$

$5''''$ $\quad [fn.3] - \frac{[df.3]}{[dd.3]}[n.3\ ] = [fn.4]$

онда добијамо још само ове две једначине:

19) $[ee.4]u + [e.4]v + [en.4] = 0$

10) $[ef{:}4]u + [ff.4]v + [fn.4] = 0$

Стављајући једначину 19) $= E^{''''}$ и за

$$E^{''''} = 0$$

$$u = -\frac{[ef.4]}{[ee.4]}v - \frac{[en.4]}{[ee.4]};$$

коју, ако уведемо у једначину 20) ми добијамо најзад:

$$[ef\cdot 4]\left\{-\frac{[ef\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}v - \frac{[en\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}\right\} + [ff\cdot 4]\, v + [fn\cdot 4] = 0;$$

и стављајући:

$$1^{''''}\qquad [ff\cdot 4] - \frac{[ef\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}[ef.4] = [ff\cdot 5]$$

$$2^{'''''}\qquad [fn\cdot 4] - \frac{[ef\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}[en.4] = [fn\cdot 5]$$

долазимо најпосле до једначине:

21) $\qquad [ff\cdot 5]\, v + [fn.5] = 0 \qquad$ из које сљедује,

ако је ставимо равну $F^{'''''}$, за

$$F^{'''''} = 0,$$

$$v = -\frac{[fn.5]}{[ff\cdot 5]}$$

чиме је непознате v опредељена.

Замењујући вредност од v у једначину $E^{''''}=0$, ми можемо да добијемо и непознату u, а замењујући u и v у једначину $D^{'''}=0$ добићемо и непознату t, са којом из $C^{''}=0$, $B^{'}=0$ и $A=0$ добијамо најзад и остале непознате по реду z, y, па и x.

Горе показана представа једначина веома је удесна и олакшава преглед свију помоћних количина. Ако и остале једначине 2) 3) 4) 5) 6) слично као што смо и једначину 1) у опште са A означили, означимо са B, C, D, E, и F, и то исто чинимо са изведеним једначинама:

7) 8) 9) 10) 11) затим и са
12) 13) 14) 15)
16) 17) 18)
19) 20)
21) онда имамо за шест нормалних једначина ову шему,

A
$B\ B^{'}$
$C\ C^{'}\ C^{''}$
$D\ D^{'}\ D^{''}\ D^{'''}$
$E\ E^{'}\ E^{''}\ E^{'''}\ E^{''''}$
$F\ F^{'}\ F^{''}\ F^{'''}\ F^{''''}\ F^{'''''}$.

Што се тиче Гаусових алгоритама, они сви могу лако да се образују, јер имају сви карактерну особину, *да кад све бројеве без заграда за се сматрамо, да они дају резултат нулу.* О томе се лако уверавамо, ако пажљивије посмотримо сваки поједини алгоритам.

Општи облик тих алгоритама је:

$$22)\qquad [\beta j\cdot\mu] - \frac{[\alpha\beta\ \mu]}{[\alpha\alpha\cdot\mu]}[\alpha j\cdot\mu] = [\beta j\ (\mu+1)]$$

ако су α β j буди каква писмена а μ ма какав произвољан број.

Ако је $\mu = o$, онда добијамо алгоритме облика: $[bb\cdot 1]$, $[bc\cdot 1]$ и т. д., ако ли је пак $\mu=1$, $\mu=2$, $\mu=3$, $\mu=4$, онда добијамо по реду алгоритме облика:

$$[cc\cdot 2],\ [cd\cdot 3],\ [en\cdot 4],\ [ff\cdot 5]\ \text{и т. д.}$$

Са обзиром на ову горњу напомену и један и исти закон по коме су алгоритми образовани, ми можемо лако да образујемо све алгоритме, који придолазе у једначинама од 7) почев, па до закључно једначине 21).

Алгоритми облика: $[bb.1]$; $[cd\cdot 1]$; — образују се са писменима:

$[bb]$					$[bn]$
$[bc]$	$[cc]$				$[cn]$
$[bd]$	$[dc]$	$[dd]$			$[dn]$
$[be]$	$[ec]$	$[ed]$	$[ee]$		$[en]$
$[bf]$	$[fc]$	$[fd]$	$[ef]$	$[ff]$	$[fn]$

т. ј. у свима њима налази се b помножено са самим собом и свима осталим писменима осем a; исто тако c, па и d, e, f, и n. Она горе исписана писмена налазе се у дотичном алгоритму као први члан. Други члан је свакад разломак и то одречан, у коме је именилац свакад $[aa]$, што показује број 1, који се уз оне комбинације писмена придаје (у знак, да је именилац сачинилац прве непознате) из прве једначине, а бројилац се од растављених писмена првога члана и писмена имениоца тако образује, да кад заграде занемаримо и символичке знаке сматрамо алгебарски, да добијемо као резултат нулу.

По истом су закону образовани и виши алгоритми а на име они облика:

$$[cc \cdot 2],\ [cd \cdot 2],\ \text{и т. д.}$$

Ови су алгоритми образовани писменима

$$\begin{array}{lllll} cc & & & & cn \\ cd & dd & & & dn \\ ce & de & ee & & en \\ cf & df & ef & ff & fn \end{array}$$

уз које се придаје сваки пут број 1, који показује постанак опет тих чланова из првобитних сачинилаца непознатих количина, који су у нормалним једначинама означени. Ова горе исписана писмена са бројем 1 налазе се као први члан ових виших алгоритама, Други члан је свакад разломак и то одречан, у коме је именилац сада $[bb \cdot 1]$, што показује број 2, који се код ових виших алгоритама уз оне горње комбинације писмена придаје (у знак, да је именилац сложен сачинилац друге непознате из друге нормалне једначине), а бројилац се од растављених писмена првога члана и писмена имениоца тако образује да кад заграде занемаримо и символичке знаке сматрамо алгебарски, да тада добијамо као резултат опет нулу.

По истом закону образују се још виши алгоритми, а на име они облика:

$[dd \cdot 3]$, $[de \cdot 3]$ и т. д., па и они облика: $[ee \cdot 4]$, $[ef \cdot 4]$ и т. д, као и они најзад облика:

$$[ff \cdot 5],\ [fn \cdot 5],$$

само што код оних, у којима се налази број 3, узима се за имениоца онога разломка алгоритам $[cc \cdot 2]$, дакле сагласно са бројем 3, сачинилац треће непознате, у трећој нормалној једначини, (види алгор, означене са $1''' - 9'''$ закључно). Исто тако, код алгоритама, у којима се налази број 4, узима се за имениоца онога разломка опет алгоритам $[dd \cdot 3]$, дакле сагласно са бројем 4, сачинилац четврте непознате у четвртој нормалној једначини (види алгоритме означене са $1'''' - 5''''$) и најзад, код алгоритама, у којима се налази број 5, узима се за имениоца онога разломка опет алгоритам $[ee.4]$, дакле сагласно са бројем 5 сачинилац пете непознате у петој нормалној једначини.

Ако погледамо нормалне једначине било за случај, кад имамо 4 или 5 па и 6 непознатих, онда видимо, да општа форма тих једначина, доноси са собом да се извесни сачиниоци разних непознатих налазе по два пута, један пут у хоризонатном а за тим и у вертикалном реду и да се ти сачиниоци налазе на супротним странама једне линије, коју би могли да назовемо линијом симетрије нормалних једначина и која иде с лева на десно одозго наниже а у правцу дијагонале у правоугаонику нормалних једначина (ако их свакад пишемо као што смо напред показали) и то преко свију непознатих, које су помножене сачиниоцима квадратнога облика:

$$[aa];\ [bb];\ [cc];\ [dd];\ [ee];\ [ff].$$

У сваком систему нормалних једначина имамо ми да рачунамо само оне сачиниоце, који представљају линију симетрије и оне, који леже над или испод те линије, дакле:

за случај, кад имамо 4 непознатих (дакле свега 20 сачинилаца) онда имамо да рачунамо само:

$$\begin{array}{lllll} [aa] & & & & \text{и}\ [an] \\ [ab] & [bb] & & & [bn] \\ [ac] & [bc] & [cc] & & [cn] \\ [ad] & [bd] & [cd] & [dd] & [dn] \end{array}$$

или свега 14 сачинилаца.

За случај, кад имамо 5 непознатих (дакле свега 30 сачинилаца) онда имамо да рачунамо само:

$$\begin{array}{llllll} [aa] & & & & & \text{и}\ [an] \\ [ab] & [bb] & & & & [bn] \\ [ac] & [bc] & [cc] & & & [cn] \\ [ad] & [bd] & [cd] & [dd] & & [dn] \\ [ae] & [be] & [ce] & [de] & [ee] & [en] \end{array}$$

или свега 20 сачинилаца.

Најзад за случај, кад имамо 6 непознатих количина (дакле свега 42 сачиниоца) онда имамо да рачунамо само:

$$\begin{array}{llllllll}
[aa] & & & & & & & и\ [an] \\
[ab] & [bb] & & & & & & [bn] \\
[ac] & [bc] & [cc] & & & & & [cn] \\
[ad] & [bd] & [cd] & [dd] & & & & [dn] \\
[ae] & [be] & [ce] & [ed] & [ee] & & & [en] \\
[af] & [bf] & [cf] & [fd] & [ef] & [ff] & & [fn]
\end{array}$$

или свега 27 сачинилаца.

Из ових примера увиђа се лако, да ако означимо са i број непознатих, то је број сачинилаца узев у обзир и оне, који су образовани и са писменом n:

у првој нормалној једначини $(i+1)$, у другој нормалној (i), у трећој $(i-1)$, у четвртој $(i-2)$ и т. д. — у последњој имамо најзад:

$i - (i-2) = +2$ или само два различна сачиниоца да рачунала. Ми имамо дакле свега:

$$(i+1) + i + (i-1) + (i-2) \ldots\ldots + i - (i-2) =$$

$$\text{Број сачинилаца} = \frac{(i+1)(i+2)}{2} - 1 \quad \text{или}$$

23) $$\text{Број сачинилаца} = \frac{i(i+3)}{2},$$

јер је заиста, за $i = 4$;

$$Бс = \frac{4(4+3)}{2} = 14;$$

за $i = 5$:

$$Бс = \frac{5(5+3)}{2} = 20;$$

и најзад за $i = 6$:

$$Бс = \frac{6(6+3)}{2} = 27;$$

дакле онолико, колико је и самим бројањем добивено.

Према овоме напред поменутоме, ми можемо нормалне једначине и краће да пишемо овако, ако у опште узмемо да имамо 6 непознатих:

$$\begin{array}{lllllll}
 & x & y & z & t & u & v \\
[an] & +[aa] & +[ab] & +[ac] & +[ad] & +[ae] & +[af] = 0 \\
[bn] & & \cdots +[bb] & +[bc] & +[bd] & +[be] & +[bf] = 0 \\
[cn] & & & \cdots +[cc] & +[cd] & +[ce] & +[cf] = 0 \\
[dn] & & & & \cdots +[dd] & +[de] & +[df] = 0 \\
[en] & & & & & \cdots +[ee] & +[ef] = 0 \\
[fn] & & & & & & \cdots +[ff] = 0.
\end{array}$$

или и на други начин:

$$\begin{array}{llllll}
[an]+[aa]\,x+[ab]\,y+[ac]\,z+[ad]\,t+[ae]\,u+[af]\,v & & & & & = 0 \\
[bn]+[bb]\,y+[bc]\,z+[bd]\,t+[be]\,u+[bf]\,v & \cdots & & & & = 0 \\
[cn]+[cc]\,z+[cd]\,t+[ce]\,u+[cf]\,v & \cdots & \cdots & & & = 0 \\
[dn]+[dd]\,t+[de]\,n+[df]\,v & \cdots & \cdots & \cdots & & = 0 \\
[en]+[ee]\,n+[ef]\,v & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & = 0 \\
[fn]+[ff]\,v & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots & = 0.
\end{array}$$

Она горња једначина за број сачинилаца, вреди само за сачиниоце нормалних једначина; за оне друге изведене системе једначина, имамо ми као број сачинилаца и то:

у систему $B' C' D'$ и т. д.: $\dfrac{(i-1)(i+2)}{2}$

у систему $C'' D''$ и т. д.: $\dfrac{(i-2)(i+1)}{2}$ и т. д.

и тако редом све до броја 2 у последњој једначини.

Према томе биће број свију разних сачинилаца представљен овим изразом, ако под Σ разумемо суму од $i=i$ па до $i=1$:

$$24)\quad \Sigma^{i}\,\frac{i\,(i+3)}{2}=\frac{1}{2}\,\Sigma^{i} i^{2}+\frac{3}{2}\,\Sigma_{1}^{i}\, i$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{i\,(i+1)\,(2\,i+1)}{2\cdot 3}+\frac{3}{2}\,\frac{i\,(i+1)}{2}=\frac{i(i+1)(i+5)}{2\,.\,3}.$$

С обзиром на израчунавање непознатих ми видимо да једначине, које смо добили из услова:

$$A=0;\; B'=0;\; C''=0;\; D'''=0;\; E''''=0; \quad \text{и најзад}$$

$$F'''''=0.$$

представљају једначине, из којих се могу непосредно поједине непознате $x, y, z, t, u, v,$ да израчунају. Ове једначине могу дакле потпуно да замену односно израчунавања непознатих оне пређашње нормалне и ми можемо да их назовемо с обзиром на првобитне нормалне једначине *редуковане нормалне једначине* и бољег прегледа ради, да их и испишемо и то нормалне и одговарајуће редуковане (или крајње) једначине у исто доба.

Нормалне су једначине:

$$[aa]\,x+[ab]\,y+[ac]\,z+[ad]\,t+[ae]\,u+[af]\,v+[an]=0$$

$$[ab]\,x+[bb]\,y+[bc]\,z+[bd]\,t+[be]\,u+[bf]\,v+[bn]=0$$

$$[ac]\,x+[cb]\,y+[cc]\,z+[cd]\,t+[ce]\,u+[cf]\,v+[cn]=0$$

$$[ad]\,x+[db]\,y+[dc]\,z+[dd]\,t+[de]\,u+[df]\,v+[dn]=0$$

$$[ae]\,x+[eb]\,y+[ec]\,z+[ed]\,t+[ee]\,u+[ef]\,v+[en]=0$$

$$[af]\,x+[fb]\,y+[fc]\,z+[fd]\,t+[fe]\,u+[ff]\,v+[fn]=0$$

а редуковане:

$$25)\quad x+\frac{[ab]}{[aa]}y+\frac{[ac]}{[aa]}z+\frac{[ad]}{[aa]}t+\frac{[ae]}{[aa]}u+\frac{[af]}{[aa]}v+\frac{[an]}{[aa]}=0$$

$$26)\quad y+\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}z+\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}t+\frac{[be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}u+\frac{[bf\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}v+\frac{[bn\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=0$$

$$27)\quad z+\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}t+\frac{[ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}u+\frac{[cf\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}v+\frac{[cn\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}=0$$

$$28)\quad t+\frac{[de\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}u+\frac{[df\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}v+\frac{[dn\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}=0$$

$$29)\quad u+\frac{[ef\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}v+\frac{[en\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}=0$$

$$30)\quad v+\frac{[fn\cdot 5]}{[ff\cdot 5]}=0$$

Редуковане једначине за већи и мањи број непознатих.

71.

Помоћу горњих једначина врло је лако да напишемо редуковане једначине, како са још већим бројем непознатих, тако и са мањим бројем непознатих количина.

За већи број непознатих треба иза чланова у којима је f, колико хоћемо доцнијих писмена азбуке додати, дакле увести и чланове:

$[ag]$	или $[ah]$
$[bg\cdot 1]$	$[bh\cdot 1]$
$[cg\cdot 2]$	$[ch\cdot 2]$
и т. д.	и т. д.

па опет све једначине системски писати као и ове горње што су, водећи рачуна о томе, да је бројна вредност казаљке алгоритамске и то највећа, која још придолази у последњој једначини свагда $i-1$, дакле за јединицу мања од броја непознатих.

Ако хоћемо редуковане нормалне једначине за мањи број непознатих, онда треба само дотичну непознату која треба да отпадне, ставити равну нули, па ћемо добити, жељене једначине.

Да би ове једначине један пут за свагда биле поменуте, то ћемо да их напишемо за случајеве кад имамо 5, 4, 3, 2 па и само 1 непознату.

Тако, за 5 непознатих $x, y, z, t, u,$ имамо да ставимо:

$$v = 0 \quad \text{па и} \quad \frac{[fn \cdot 5]}{[ff \cdot 5]} = 0 \quad \text{па да}$$

добијемо као нормалне једначине:

$$[aa]\,x + [ba]\,y + [ca\ z + [da]\,t + [ea] + [an] = 0$$
$$[ab]\,x + [bb]\,y + [cb]\,z + [db]\,t + [eb] + [bn] = 0$$
$$[ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + [dc]\,t + [ec] + [cn] = 0$$
$$[ad]\,x + [bd]\,y + [cd]\,z + [dd]\,t + [ed] + [dn] = 0$$
$$[ae]\,x + [be]\,y + [ce]\,z + [de]\,t + [ee] + [en] = 0;$$

из којих опет добијамо ове једначине, као редуковане:

$$x + \frac{[ab]}{[aa]}y + \frac{[ac]}{[aa]}z + \frac{[ad]}{[aa]}t + \frac{[ae]}{[aa]}u + \frac{[an]}{[aa]} = 0$$
$$y + \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}z + \frac{[bd \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}t + \frac{[be \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}u + \frac{[bn \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} = 0$$
$$z + \frac{[cd \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}t + \frac{[ce \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}u + \frac{[cn \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} = 0$$
$$t + \frac{[de \cdot 3]}{[dd \cdot 3]}u + \frac{[dn \cdot 3]}{[dd \cdot 3]} = 0$$
$$u + \frac{[en \cdot 4]}{[ee \cdot 4]} = 0.$$

Ако у овој опет ставимо:

$$u = 0 \quad \text{па и} \quad \frac{[en \cdot 4]}{[ee \cdot 4]} = 0,$$

или и у оним пређашњим редукованим једначинама у исто доба:

$$u = v = 0, \text{ онда добијамо}$$

за *четири* непознате $x, y, z, t,$ ове нормалне једначине

$$[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,t + [an] = 0$$
$$[ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + [bd]\,t + [bn] = 0$$
$$[ac]\,x + [cb]\,y + [cc]\,z + [cd]\,t + [cn] = 0$$
$$[ad]\,x + [db]\,y + [dc]\,z + [dd]\,t + [dn] = 0;$$

а као редуковане:

$$x + \frac{[ab]}{[aa]}y + \frac{[ac]}{[aa]}z + \frac{[ad]}{[aa]}t + \frac{[an]}{[aa]} = 0$$
$$y + \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}z + \frac{[bd \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}t + \frac{[bn . 1]}{[bb \cdot 1]} = 0$$
$$z + \frac{[cd . 2]}{[cc \cdot 2]}t + \frac{[cn . 2]}{[cc \cdot 2]} = 0$$
$$t + \frac{[dn \cdot 3]}{[dd \cdot 3]} = 0.$$

За *три* непознате количине $x, y, z,$ имамо као нормалне једначине:

$$[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [an] = 0$$
$$[ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + [bn] = 0$$
$$[ac]\,x + [cb]\,y + [cc]\,z + [cn] = 0$$

а као редуковане једначине:

$$x + \frac{[ab]}{[aa]} y + \frac{[ac]}{[aa]} z + \frac{[an]}{[aa]} = 0$$

$$y + \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} z + \frac{[bn \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} = 0$$

$$z + \frac{[cn \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} = 0.$$

За *две* непознате количине x, y имамо као нормалне једначине:

$$[aa]\, x + [ab]\, y + [an] = 0$$

$$[ab]\, x + [bb]\, y + [bn] = 0;$$

а као редуковане:

$$x + \frac{[ab]}{[aa]} y + \frac{[an]}{[aa]} = 0$$

$$y + \frac{[bn \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} = 0.$$

Најзад за *једну* једину непознату x, имамо као нормалну једначину:

$$[aa]\, x + [an] = 0,$$

одкуда као редуковану једначину добијамо у виду саме непознате x, а на име:

$$x = -\frac{[an]}{[aa]}.$$

Тежине непознатих.

72.

Ако узмемо у обзир случај са четири непознатих, онда из израза за:

$$t = -\frac{[dn \cdot 3]}{[dd \cdot 3]}$$

сљедује непосредно, да је тежина какве грешке τ у определењу t, дакле тежина p_t од t, представљена изразом:

$$p_t = [dd \cdot 3],$$

што значи: *да је при поступном елиминисању као што је напред показано, сачинилац непознате, која напослетку остаје, у исто време и њена тежина.*

Да би дакле тежине непознатих нашли, ми треба да понављамо елиминацију непознатих у изменутом реду и то толико пута, докле свака од непознатих не испадне као последња. Оваквим радом можемо у исто доба и да контролишемо целокупно израчунавање.

У овоме случају, где имамо 4 непознатих имали би елиминацију да изведемо у овоме реду:
1) x, y, z, t, чиме добијамо, као што је показано, тежину p_t, а исто тако и у реду
2) t, z, y, x, чиме добијамо и тежину p_x.

За овај случај имали би нормалне једначине овако да напишемо:

$$[dd]\, t + [cd]\, z + [db]\, y + [ad]\, x + [dn] = 0$$

$$[cd]\, t + [cc]\, z + [bc]\, y + [ac]\, x + [cn] = 0$$

$$[bd]\, t + [bc]\, z + [bb]\, y + [ab]\, x + [bn] = 0$$

$$[ad]\, t + [ac]\, z + [ab]\, y + [aa]\, x + [an] = 0.$$

У једначинама 1), пошто избацимо x и y, остају две једначине са z и t и то ове:

$$[cc \cdot 2]\, z + [cd \cdot 2]\, t + [cn \cdot 2] = 0$$

$$[cd \cdot 2]\, z + [dd \cdot 2]\, t + [dn \cdot 2] = 0,$$

које ако преокренемо, дакле ставимо:

$$[dd\cdot 2]\ t + [cd\cdot 2]\ z + [dn\cdot 2] = 0$$
$$[cd\cdot 2]\ t + [cc\cdot 2]\ z + [cn\cdot 2] = 0,$$

онда добијамо, као што видимо једначине 3) са t и z из којих се добија и тежина pz.

У једначинама 2) пошто избацимо t z остају две једначине са y и x; ове две једначине ако преокренемо, онда добијамо из:

4) x, и y тежину p_y.

Средња грешка непознатих.

73.

Аки означимо са m средњу грешку јединице тежине, а са m_x, m_y, m_t, m_t средње грешке најбољих вредности непознатих, то имамо да је:

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{p_x}},\ m_y = \frac{m}{\sqrt{p_y}}.\ m_z = \frac{m}{\sqrt{p_z}},\ m_t = \frac{m}{\sqrt{p_t}},$$

из којих једначина следује: да нам је за опредељење средњих грешака појединих непознатих нужно да знамо колико је m.

Средња грешка јединице тежине.

74.

Из правих грешака опажања, а на име:

$$\Delta_1\ \Delta_2 \cdots \Delta_\mu$$

имамо непосредно да је:

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{\mu}}.$$

Но нама је познато, да са овом једначином неможемо да одредимо m, јер *праве грешке* опажања нису по-

знате, и да према томе као и пре што смо радили, морамо m да изразимо са грешкама, којима су најбоље вредности непознатих подложне, дакле са грешкама λ.

С погледом на једначине 1) ми имамо у опште за праве грешке једначину:

$$\Delta = n + a(x) + b(y) + c(z) + d(t),$$

а с погледом на једначине 2) опет:

$$\lambda = n + ax + by + cz + dt,$$

из овога следује, ако као и пре што смо чинили, ставимо)

$$(x) - x = \xi,\quad (y) - y = \eta,\quad (z) - z = \varsigma,\quad (t) - t = \tau$$

онда за праву грешку Δ добијамо:

$$\Delta = \lambda + a\xi + b\eta + c\varsigma + d\tau.$$

Свако од μ опажања, даје по једну овакву једначину и ако квадрирамо све једначине, образујемо њихове суме и узмемо у обзир једначине 4) по којима је:

$$[a\lambda] = 0$$
$$[b\lambda] = 0$$
$$[c\lambda] = 0$$
$$[d\lambda] = 0,$$

онда добијамо:

$$[\Delta\Delta] - [\lambda\lambda] = [(a\xi + b\eta + c\varsigma + d\tau)^2].$$

Десна страна ове једначине има као што видимо исту ону форму, коју има и познати израз:

$$\Phi = [\lambda\lambda] = [(ax + by + cz + dt + n)^2]$$

и разликује се од овога израза само тиме, што је у њој место пређашњега x, y, ... дошла дотична грешка ξ, η ... и што n у горњој једначини не придолази. Ако би десну страну развили, онда би добили сличне изразе са онима, које смо редукованим једначинама назвали, и ако уведемо A_0, B', C'', D''', краткоће ради, онда је:

$$\begin{aligned}
A_0 &= [aa]\xi + [ab]\eta + [ac]\varsigma + [ad]\tau,\\
B' &= \quad + [bb.1]\eta + [bc.1]\varsigma + [bd.1]\tau,\\
C'' &= \qquad\qquad + [cc.2]\varsigma + [cd.2]\tau\\
D''' &= \qquad\qquad\qquad + [dd.3]\tau;
\end{aligned}$$

а ако сад још образујемо и $[\Delta\Delta] - [\lambda\lambda]$, онда следује:

$$[\Delta\Delta] - [\lambda\lambda] = \frac{A_0^{\,2}}{[aa]} + \frac{B'^2}{[bb.1]} + \frac{C''^2}{[cc.2]} + \frac{D'''^2}{[dd.3]}.$$

Из једначине за Δ, ако опет узмемо у обзир, да је:

$$[a\lambda] = 0, \quad [b\lambda] = 0, \quad [c\lambda] = 0, \quad [d\lambda] = 0;$$

добијамо са нормалним једначинама аналоги систем:

$$\begin{aligned}
[aa]\xi + [ab]\eta + [ac]\varsigma + [ad]\tau &= [a\Delta]\\
[ab]\xi + [bb]\eta + [bc]\varsigma + [bd]\tau &= [b\Delta]\\
[ac]\xi + [bc]\eta + [cc]\eta + [cd]\tau &= [c\Delta]\\
[ad]\xi + [bd]\eta + [cd]\varsigma + [dd]\tau &= [d\Delta],
\end{aligned}$$

из којих као и пре, поступним избацивањем непознатих $\xi\ \eta\ \varsigma$, добијамо ове редуковане једначине

$$\begin{aligned}
[aa]\xi + [ab]\eta + [ac]\varsigma + [ad]\tau &= [a\Delta]\\
[bb.1]\eta + [bc]\varsigma + [bd.1]\tau &= [b\Delta.1]\\
[cc.2]\varsigma + [cd\,2]\tau &= [c\Delta.2]\\
[dd.3]\tau &= [d\Delta.3].
\end{aligned}$$

Услед овога пак добијамо једначину:

$$[\Delta\Delta] - [\lambda\lambda] = \frac{[a\Delta]^2}{[aa]} + \frac{[b\Delta.1]^2}{[bb.1]} + \frac{[c\Delta.2]^2}{[cc.2]} + \frac{[d\Delta.3]}{[dd.3]^2},$$

и разлика $[\Delta\Delta] - [\lambda\lambda]$ испада као функција од правих грешака Δ, које могу да се сматрају, као независне,

непосредно опажане количине од највероватније вредности 0 (нула) и средње грешке m.

Услед ове напомене, може грешка, коју би учинили узимљући $[\lambda\lambda]$ место $[\Delta\Delta]$, да се приближно определи и то по већ познатим обрасцима, које смо при функцији непосредно опажаних количина извели.

Према ономе што смо напред имали, ми имамо дакле, да је за највероватнију вредност функције:

$$[a\Delta] = a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2 + \ldots a_n\Delta_n = \text{нула}$$

средња грешка тога определења:

$$m_{[a\Delta]} = m\sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + \ldots a_n^2} = m\sqrt{[aa]}.$$

За највероватнију вредност функције:

$$[b\Delta.1] = [b\Delta] - \frac{[ab]}{[aa]}[a\Delta] = 0,$$

имамо да је средња грешка:

$$m_{[b\Delta].1} = m\sqrt{\left[\left(b - \frac{[ab]}{[aa]}a\right)^2\right]} = m\sqrt{[bb.1]}.$$

За највероватнију вредност функције:

$$[c\Delta.2] = [c\Delta.1] - \frac{[bc]}{[bb.1]}[b\Delta.1] =$$

$$= [c\Delta] - \frac{[ac]}{[aa]}[a\Delta] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}\left([b\Delta] - \frac{[ab]}{[aa]}[a\Delta]\right)$$

$$= \left\{c_1 - \frac{[ac]}{[aa]}a_1 - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}\left(b_1 - \frac{[ab]}{[aa]}a_1\right)\right\}\Delta_1 + \ldots = \text{нула}.$$

Средња грешка овога определења је:

$$m_{[c\Delta.2]} = m\sqrt{\left[\left(c - \frac{[ac]}{[aa]}a - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}\left(b - \frac{[ab]}{[aa]}a\right)\right)^2\right]}$$

$$= m\sqrt{[cc.1] - 2\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1] + \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1]}$$

$$m_{[c\Delta.2]} = \sqrt{[cc.2]}.$$

Истоветним начином добијамо за средњу грешку вредности нула за $[d\triangle.3]$:

$$m_{[d\Delta.3]} = m\sqrt{[dd.3]}.$$

Место дакле да бројиоце на десној страни у једначини $[\triangle\triangle] - [\lambda\lambda]$ ставимо равне нули, ми ћемо да их заменимо са средњим грешкама, које смо напред добили или боље са квадратима тих средњих грешака, одкуда следује:

$$= m^2 + m^2 + m^2 + m^2.$$

Као што видимо, на десној страни појављује се m на квадрат толико пута, колико је било и непознатих, и ако сад означимо број непознатих са k, онда је због:

$$m = \sqrt{\frac{[\triangle\triangle]}{\mu}}, \quad \text{па и} \quad m^2\mu = [\triangle\triangle].$$

$$[\triangle\triangle] - [\lambda\lambda] = \mu\ m^2 - [\lambda\lambda] = k.m^2 \qquad \text{или}$$

$$\mu\ m^2 - [\lambda\lambda] = k.m^2$$

одкуда најзад:

$$m = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{\mu - k}}.$$

Контроле рачунске.

75.

Пошто су израчунате највероватније вредности непознатих, онда увођењем њихових вредности у једначине 2) или у једначине за:

$$\lambda_1\ \lambda_2\ \ldots\ \lambda_\mu$$

добијамо највероватније грешке λ. О исправности рачуна уверавамо се двема контролама.

Прва контрола састоји се у томе, да једначине 4) или

$$[a\lambda] = 0,\ [b\lambda] = 0,\ [c\lambda] = 0,\ [d\lambda] = 0,$$

морају да се задовоље.

Друга контрола састоји се у томе, да се $[\lambda\lambda]$, које је и онако потребно при израчунавању m, два пут рачуна. Тога ради, ми један пут подижемо на квадрат поједина λ и образујемо суму, а *други пут* узимамо у обзир једначину, која се лако добија из пређашњих, а на име:

$$[\lambda\lambda] = [nn.4].$$

Поступним развијањем добијамо:

$$[nn.4] = [nn.3] - \frac{[dn.3]^2}{[dd.3]}$$

$$= [nn.2] - \frac{[cn.2]^2}{[cc.2]^2} - \frac{[dn.3]^2}{[dd.3]}$$

$$= [nn.1] - \frac{[bn.1]^2}{[bb.1]} - \frac{[cn.2]^2}{[cc.2]} - \frac{[dn.3]^2}{[dd.3]}$$

$$= [nn] - \frac{[an]^2}{[aa]} - \frac{[bn.1]^2}{[bb.1]} - \frac{[cn.2]^2}{[cc.2]} - \frac{[dn.3]_2}{[dd.3]}$$

и према томе је и:

$$[\lambda\lambda] = [nn] - \frac{[an]}{[aa]} - \frac{[bn.1]}{[bb.1]} - \frac{[cn.2]}{[cc.2]} - \frac{[dn.3]2}{[dd.4]}$$

који је израз као што видимо изражен изузимљући члан $[nn]$, све са таквим количинама, које су већ израчунате и за само решење нормалних једначина као потребне већ нађене.

Изравњавање посредник опажања неједнаке тачности.

76.

Ако су опажања $\varphi_1\ \varphi_2 \ldots$ неједнаке тачности, и ако су $p_1\ p_2 \ldots$ њихове на ма какву јединицу тежине, која је карактерисана мером прецизности h, однешене тежине, онда имају грешке:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= n_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t \\
\lambda_2 &= n_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t \\
&\vdots \\
\lambda_\mu &= n_\mu + a_\mu x + b_\mu y + c_\mu z + d_\mu t
\end{aligned}$$

вероватноће:

$$\frac{h\sqrt{p_1}}{\sqrt{\pi}} e^{-p_1 h^2 \lambda_1^2} d_1\lambda,$$

$$\frac{h\sqrt{p_2}}{\sqrt{\pi}} e^{-p^2 h^2 \lambda_2^2} d\lambda_2$$

$$\vdots$$

и вероватноћа, да све грешке λ у исто доба постоје:

$$B = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^\mu \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}\ e^{-h^2[p\lambda\lambda]}\ (d\lambda)^\mu$$

Ако треба ова вероватноћа да буде *max.* то морамо количине $x, y, t, z, \ldots$ тако да определимо, да је:

$$\Phi = [p\lambda\lambda] = minimum,$$

што опет само тако може да буде, ако је:

$$\frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dx}[p\lambda\frac{d\lambda}{dx}] = [pa\lambda] = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dy} = [p\lambda\frac{d\lambda}{dy}] = [pb\lambda] = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\Phi}{ds} = [p\lambda\frac{d\lambda}{ds} = [dc\lambda] = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dt} = [p\lambda\frac{dy}{dt}] = [pd\lambda] = 0.$$

Ако заменимо овде λ са њиховим вредностима, онда добијамо ове нормалне једначине:

$$\begin{aligned}
[paa]x + [pab]y + [pac]z + [pad]t + [pan] &= 0 \\
[pab]x + [pbb]y + [pbc]z + [pbd]t + [pbn] &= 0 \\
[pac]x + [pcb]y + [pcc]z + [pcd]t + [pcn] &= 0 \\
[pad]x + [pab]y + [pdc]z + [pdd]t + [pdn]; &= 0
\end{aligned}$$

За решење ових нормалних једначина, као и за опредељење тежина p_x, p_y, p_z, p_t, вреди све оно, што смо напред навели за решење нормалних једначина и опредељење тежина, код опажања са једнаком тачности.

Разуме се, да овде добијамо за средњу грешку јединице тежине сличан израз:

$$m = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{\mu - k}}$$

III.

Изравњавање условних опажања.

Опажања једнаке тачности.

77.

За μ количина: $X_1\ X_2\ X_3 \ldots X_\mu$, које су једначинама:

$$\left.\begin{aligned}
f_1\ (X_1\ X_2 \ldots\ X_\mu) &= 0 \\
f_2\ (X_1\ X_2 \ldots\ X_\mu) &= 0 \\
&\vdots \\
f_2\ (X_1\ X_2 \ldots\ X_\mu) &= 0
\end{aligned}\right\}\ 1$$

којих је r на броју, у свези, да узмемо, да смо непосредним опажањем добили вредности:

$$x_1 \; x_2 \ldots . \; x_\mu .$$

Ако са $\Delta_1 \; \Delta_2 \ldots . \; \Delta_\mu$ означимо веома мале грешке ових опажања, тако да је:

$$\begin{aligned} x_1 + \Delta_1 &= X_1 \\ x_2 + \Delta_3 &= X_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad & \quad \vdots \\ x_\mu + \Delta_\mu &= X_\mu, \end{aligned}$$

то ако развијемо изразе:

$$\begin{aligned} f_1 \; (x_1 + \Delta_1, \; x_2 + \Delta_2, \ldots . \; x_\mu + \Delta_\mu) &= 0 \\ f_2 \; (x_1 + \Delta_1, \; x_2 + \Delta_2, \ldots . \; x_\mu + \Delta_\mu) &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & \\ fr \; (x_1 + \Delta_1, \; x_2 + \Delta_2, \ldots . \; x_\mu + \Delta_\mu) &= 0 \end{aligned}$$

по Таљоровом обрасцу и уведемо краткоће ради ове изразе, а на име:

$$\begin{array}{lll} \dfrac{df_1}{dx_1} = a_1, & \dfrac{df_1}{dx_2} = a_4, & \ldots . \dfrac{df_1}{dx_\mu} = a_\mu \\[2ex] \dfrac{df_2}{dx_1} = b_1, & \dfrac{df_2}{dx_2} = b_2, & \ldots . \dfrac{df_2}{dx^\mu} = b_\mu \\[2ex] \dfrac{df_3}{dx_1} = c_2, & \dfrac{df_3}{dx_2} = c_2, & \ldots . \dfrac{df_3}{dx^\mu} = c_\mu, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{dfr}{dx_1} = s_1, & \dfrac{dfr}{dx_2} = s_2. & \ldots . \dfrac{dfr}{dx_\mu} = s^\mu, \end{array}$$

а осем тога ставимо:

$$\begin{aligned} f_1 \; (x_1, \; x_2, \ldots . \; x\mu) &= w_1 = f_1 \\ f_2 \; (x_1, \; x_2, \ldots . \; x\mu) &= w_2 = f_2 \\ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad & \qquad \vdots \\ f^r \; (x_1, \; x_2, \ldots . \; x\mu) &= w = fr \end{aligned}$$

и занемаримо више ступње од Δ, онда добијамо:

$$\left.\begin{aligned} a_1 \; \Delta_1 + a_2 \; \Delta_2 + \ldots . a^\mu \; \Delta\mu + w_1 &= 0 \\ b_1 \; \Delta_1 + b_2 \; \Delta_2 + \ldots . b\mu \; \Delta\mu + w_2 &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots & \\ s_1 \; \Delta_1 + s_2 \; \Delta_2 + \ldots . s_\mu \; \Delta\mu + wr &= 0 \end{aligned}\right\} 1$$

Количине $w_1 \; w_2 \ldots . \; wr$ су дакле вредности које добијамо, ако у условне једначине 1) уведемо место правих вредности $X_1 \; X_2 \ldots X_\mu$ опажањем добивене.

По себи се разуме да се претпоставља, да је $r < \mu$

Најбоље вредности за $\Delta_1 \ldots \Delta_\mu$.

78.

Ако означимо најбоље вредности од $\Delta_1 \; \Delta_2 \ldots \Delta_\mu$ са $\lambda_1 \; \lambda_2 \ldots . \; \lambda_\mu$, то ове вредности имају да испуне ова два услова. Треба: 1) да задовоље условне једначине 1'); и 2) мора вероватноћа, да све оне у исто доба постоје, дакле:

$$B = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{e^{\mu - h^2[\lambda\lambda]}} . (d\lambda)^\mu$$

да буде *maximum*.

За изналажење вредности за $\lambda_1 \; \lambda_2 \ldots . \; \lambda_\mu$, имамо ми дакле ове две једначине:

$$\Phi = [\lambda\lambda] = minimum \qquad \text{и}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 \; \lambda_1 + a_2 \; \lambda_2 + \ldots . \; a_\mu \; \lambda\mu + w_1 &= 0 \\ b_1 \; \lambda_1 + b_2 \; \lambda_2 + \ldots . \; b\mu \; \lambda\mu + w_2 &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots & \\ s_1 \; \lambda_1 + s_2 \; \lambda_2 + \ldots . \; s\mu \; \lambda\mu + wr &= 0 \end{aligned}\right\} 2)$$

Свођење задатка на изравнавање посредних опажања.

Ако изберемо од оних μ поправака $\mu - r$ по вољи, онда се дају оних r заосталих изразити помоћу условних једначина 2) а са тима по вољи изабраним поправкама.

Ако су: $\lambda_1\ \lambda_2\ \ldots\ \lambda_{\mu-r}$ оне, као независне (узете поправке) узете непознате, и ми ставимо:

$$\lambda_1 = x, \quad \lambda_2 = y, \ldots \lambda_{\mu-r} = t,$$

онда ће, за оних r заосталих поправака, а на име:

$$\lambda_{\mu-r} + 1, \quad \lambda_{\mu-r} + 2, \ldots \lambda_\mu$$

због линеарне форме једначина 2), да следују изрази ове форме:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\mu-r} + 1 &= v_1 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \ldots \sigma_1 t \\
\lambda_{\mu-r} + 2 &= v_2 + \alpha_2 x + \beta_2 y + \ldots \sigma_2 t \\
&\vdots \\
\lambda_\mu &= v_r + \alpha_r x + \beta_r y + \ldots \sigma_r t.
\end{aligned}$$

Исто је дакле тако, као кад би имали μ посредних опажања са следећим једначинама грешака:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \quad . \quad x \quad . \quad \ldots \quad . \\
\lambda_2 &= \quad . \quad . \quad y \quad \ldots \quad . \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_{\mu-r} &= \qquad\qquad\qquad t \\
\lambda_{\mu-r} + 1 &= v_1 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \ldots \sigma_1 t \\
\lambda_{\mu-r} + 2 &= v_2 + \alpha_2 x + \beta_2 y + \ldots \sigma_2 t \\
&\vdots \\
\lambda_\mu &= v_r + \alpha_r x + \beta_r y + \ldots \sigma_r t
\end{aligned}$$

које имамо за определење оних

$$v = \mu - r$$

непознатих.

Осем овога начипа решења овога задатка, имамо ми и тако звано самостално решење, дакле без свођења на посредна опажања и ово самостално решење, које је и лако а и краће, оснива се на овоме правилу.

Ако треба функција:

$$\Theta = F(x, y, \ldots t)$$

од $\mu - r$ променљивих да постане *maximum* и то при истовременом задовољењу услова, који су оличени једначинама:

$$\begin{aligned}
f_1, (x, y, \ \ t) &= 0 \\
f_2, (x, y, \ldots t) &= 0 \\
&\vdots \\
f_3 (x, y, \ldots t) &= 0,
\end{aligned}$$

онда ћемо све те захтеве задовољити, ако фукнцију:

$$\Theta' = F(x, y, \ldots t) + k_1 f_1(x, y, \ldots t) + k_2 f_2 (x, y, \ldots t) + \ldots + \ldots + k_r f^r (x, y, \ldots)$$

направимо *minimum*-ом, у којој су $x, y, \ldots t$ независно променљиве количине, а $k_1\ k_2 \ldots k$ за време неопредељени сачиниоци,

Доказ.

Minimum од Θ' при истовременом задовољењу и оних других услова захтева да је:

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \ldots + \frac{dF}{dt}dt = 0,$$

$$\frac{df_1}{dx}dx + \frac{df_1}{dy}dy + \ldots + \frac{df_1}{dt}dt = 0$$

$$\frac{pf_2}{dx}dx + \frac{df_2}{dy}dy + \ldots + \frac{df_2}{dt}dt = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{d_r}{dx}dx + \frac{df_r}{dy}dy + \ldots + \frac{d_r}{dt}dt = 0$$

или ако једначине од друге почев, помножимо сачиниоцима $h_1\ h_2 \ldots h_r$, који су за време неодређени, па саберемо све што се сабрати даје, да је

$$\left(\frac{dF}{dx}+k_1\frac{df_1}{dx}+k_2\frac{df_2}{dx}+\ldots+k_r\frac{df_r}{dx}\right)dx$$
$$+\left(\frac{dF}{dy}+k_1\frac{df_1}{dy}+k_2\frac{df_2}{dx}+\ldots+k_r\frac{df_r}{dy}\right)dy+$$
$$\ldots+\left(\frac{dF}{dt}+k_1\frac{df_1}{dt}+k_2\frac{df_2}{dt}+\ldots+k_r\frac{df_r}{dt}\right)dt=0.$$

У овој једначини треба $dx,\ dy \ldots dt$ да се сматрају као независне количине, и она може да постоји само тако, ако је:

$$\frac{dF}{dx}+k_1\frac{df_1}{dx}+k_2\frac{df_2}{dx}+\ldots+k_r\frac{df_r}{dx}=0$$
$$\frac{dF}{dy}+k_1\frac{df_1}{dy}+k_2\frac{df_2}{dy}+\ldots+k_r\frac{df_r}{dy}=0$$
$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$
$$\frac{dF}{dt}+k_1\frac{df_1}{dt}+k_2\frac{df_2}{dt}+\ldots+k_r\frac{df_r}{dt}=0$$

На исте ове једначине нашли би ако би тражили минимум од Θ'.

Број ових горњих једначина је $\mu - r$; број условних једначина је $= r$, и према томе и једне и друге једначине, таман су довољне, да се с њима одреде оних $\mu - r$ промењивих $x,\ y, \ldots t$ и оних r уведених сачинилаца $k_1\ k_2 \ldots k_r$.

У овоме случају добили би најбољи систем од $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_\mu$ из једначине:

$$\begin{aligned}\Theta' = [\lambda\lambda] = 2k_1(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \ldots + a_\mu\lambda_\mu + \omega_1)\\ - 2k_2(b_1\lambda_2 + b_2\lambda_2 + \ldots + b_\mu\lambda_\mu + \omega_2) - \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ - 2k(\delta_1\lambda_1 + \delta_2\lambda_2 + \ldots + \delta_\mu\lambda_\mu + \omega)\\ = \mathit{minimum}.\end{aligned}$$

При независности промењивих морају диференцијални количници по тим промењивим количинама, да буду равни нули; према томе мора дакле да буде, ако се ограничимо на $r = 4$ условних једначина:

$$\begin{aligned}\lambda_1 - a_1k_1 - b_{12}k - c_1k_3 - d_1k_4 &= 0\\ \lambda_2 - a_2k_1 - b_2k_2 - c_2k_3 - d_2h_4 &= 0\\ \lambda_3 - a_3k_1 - b_3k_2 - c_3k_3 - d_2k_4 &= 0\\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot\\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot\\ \lambda_\mu - a_\mu k_1 - b_\mu k_2 - c_\mu k_3 - d_\mu k_4 &= 0\end{aligned}$$

или:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= a_1k_1 + b_1k_2 + c_1k_3 + d_1k_4\\ \lambda_2 &= a_2k_1 + b_2k_2 + c_2k_3 + d_2k_4\\ \lambda_3 &= a_3k_4 + b_3k_2 + c_3k_3 + d_3k_4\\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\ \lambda_\mu &= a_\mu k_1 + b_\mu k_2 + c_\mu k_3 + d_\mu k_4\end{aligned}$$

По Гаусу зову се сачиниоци, $k_1\ k_2,\ k_6$ и k_4 Корелате, а једначине горе добивене (3) Корелатне једначине.

Ако уведемо вредности од $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_\mu$ из једначина 3) у условне једначине и које смо са 2) означили, онда добијамо ове *нормалне једначине*:

$$\begin{aligned}[aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 + [ad]k_4 + \omega_1 &= 0\\ [ab]k_1 + [bb]k_2 + [bc]k_3 + [bd]k_4 + \omega_2 &= 0\\ [ac]k_1 + [cb]k_2 + [cc]k_3 + [cd]k_4 + \omega_3 &= 0\\ [ad]k_1 + [db]k_2 + [dc]k_4 - [dd]k_4 - \omega_4 &- 0\end{aligned}$$

из којих можемо да израчунамо корелате $k_1\ k_2\ k_3$ и k_4.

Кад су корелате израчунате, и ми их уведемо у једначине означене са 3) онда добијамо најбоље поправке $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots x_\mu$, које имамо да предузмемо на опажањима

x_1 $x_2 \dots x_\mu$, чиме се задатак свршава све до изналажења ступња тачности.

Решење нормалних једначина.

79.

Решење нормалних јадначина бива тачно онако као што смо то чинили и при посредним опажањима), само што овде место алгоритама:

$$[bn.1],\ [cn.1],\ [dn.1];\quad [cn\,2],\ [dn.2];\quad [dn.3]$$

долазе количина:

$$[\omega_2 1],\ [\omega_3 1],\ [\omega_4 1];\quad [\omega_3 2],\ [\omega_4 2];\ [\omega_4 3]$$

које аналого као и пре имају ове вредности:

$$[\omega_2 1[=\omega_2 i - \frac{[ab]}{[aa]}\omega_1$$

$$[\omega_3 1] = \omega_3 - \frac{[ac]}{[aa]}\omega_1$$

$$[\omega_4 1] = \omega_4 - \frac{[ad]}{[aa]}\omega_1$$

$$[\omega_3.2] = [\omega_3 1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[\omega_2.1]$$

$$[w_4.2] = [\omega_4 .1] - \frac{[bd.1]}{[bb.1]}[\omega_2.1]$$

$$[\omega_4.3] = [\omega_4\,2] - \frac{[cd.2]}{[cc.2]}(\omega_3.2)$$ и помоћу којих

добијамо ове редуковане једначине:

$$k_1 + \frac{[ab]}{[aa]}k_2 + \frac{[ac]}{[aa]}k_3 + \frac{[ad]}{[aa]}k_4 + \frac{[\omega_1]}{[aa]} = 0$$

$$k_2 + \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}k_3 + \frac{[bd.1]}{[bb\cdot 1]}k_4 + \frac{[\omega_2\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} = 0$$

$$k_3 + \frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}k_4 + \frac{[\omega_3\cdot 2]}{[cc\cdot 2]} = 0$$

$$k_4 + \frac{[\omega_4\cdot 3]}{[dd\cdot 3]} = 0$$

Средња грешка једнога опажања или јединице тежине.

80.

Пошто по пређашњем овај задатак може да се сведе на посредна опажања, то може и она једначина која је напред нађена за средњу грешку јединице тежине, дакле:

$$m = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{\mu - v}}$$

да се примени и овде непосредно; ако за број независних непознатих v уведемо број $\mu - r$; онда услед тога добијамо:

$$m = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{r}}$$

Рачунске контроле. И овде се добија сигурна контрола на тај начин, да се $[\lambda\lambda]$ два пут рачуна; један пут се добија та сума непосредним подизањем појединих λ на други ступањ, а други пут, ако једначине:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= a_1k_1 + b_2k_1 + c_1k_3 + d_1k_4\\ &\vdots\\ \lambda_\mu &= a_\mu k_1 + b_\mu k_2 + c_\mu k_3 + d_\mu k_4\end{aligned}$$

сваку дотичним израчунатим $\lambda_1\ \lambda_2 \dots \lambda_\mu$ помножимо, саберемо и десну страну те нове једначине сравнимо са једначинама:

$$\begin{aligned}a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \dots a_\mu\lambda_\mu + \omega_1 &= 0\\ b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \dots b_\mu\lambda_\mu + \omega_2 &= 0\\ &\vdots\\ s_1\lambda_1 + s_2\lambda_2 + \dots s_\mu\lambda_\mu + \omega_s &= 0\end{aligned}$$

при чему треба да добијемо:

$$[\lambda\lambda] = -k_1\omega_1 - k_2\omega_2 - k_3\omega_3 - \dots = -[k\,\omega].$$

Изравњавање условних опажања неједнаке тачности.

81.

Ако су опажања количина $X_1\ X_2 \dots X_\mu$ вршена са неједнаком тачношћу и ако су $p_1\ p_2 \dots p_\mu$ тежине тих сматрања, однешене на јединицу тежине са прецизношћу h. то онда место услова: $[\lambda\lambda] = min$ имамо

$$[p\lambda\lambda] = min.$$

при чему све остало остаје онако, као и код условних опажања једнаке тачности.

На исти начин као и пре, долазимо и овде до *корелатних* једначина:

$$\lambda_1 = \frac{a_1}{p_1}k_1 + \frac{b_1}{p_1}k_2 + \frac{c_1}{p_1}k \ + \frac{d_1}{p_1}k_4$$

$$\lambda_2 = \frac{a_2}{p_2}k_1 + \frac{b_2}{p_2}k_2 + \frac{c_2}{p_2}k_3 + \frac{d_2}{p_2}k_4$$

$$\lambda \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\lambda_\mu = \frac{a_\mu}{p_\mu}k_1 + \frac{b_\mu}{p_\mu}k \ + \frac{c_\mu}{p_\mu}k_3 + \frac{d_\mu}{p_\mu}k_4$$

а помоћу ових и до нормалних једначина:

$$\left[\frac{aa}{p}\right]k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]k_2 + \left[\frac{ac}{p}\right]k_3 + \left[\frac{ad}{p}\right]k_4 + \omega_1 = 0$$

$$\left[\frac{ab}{p}\right]k_1 + \left[\frac{bb}{p}\right]k_2 + \left[\frac{bc}{p}\right]k_3 + \left[\frac{bd}{p}\right]k_4 + \omega_2 = 0$$

$$\left[\frac{ac}{p}\right]k_1 + \left[\frac{bc}{p}\right]k_2 + \left[\frac{cc}{p}\right]k_3 + \left[\frac{cd}{p}\right]k_4 + \omega_3 = 0$$

$$\left[\frac{ad}{p}\right]k_1 + \left[\frac{bd}{p}\right]k_2 + \left[\frac{cd}{p}\right]k_3 + \left[\frac{dd}{p}\right]k_4 + \omega_4 = 0$$

Средња грешка јединице тежине, добија се по једначини:

$$m = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{r}}$$

а контрола рачунска састоји се у изналажењу $[p\lambda\lambda]$ на она два начина при чему треба да изађе:

$$[p\lambda\lambda] = -[k\ \omega].$$

ТАБЛИЦА I.

Вредности функције $y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$

За x = 0·0	y = 0·56419	За x = 1·7	y = 0·03135
= 0·1	0·55858	= 1·8	0·02210
= 0·2	0.54206	= 1·9	0·01526
= 0·3	0·51562	= 2·0	0·01033
= 0·4	0·48077	= 2·1	0·00686
= 0·5	0·43939	= 2·2	0·00446
= 0·6	0·39362	= 2·3	0·00284
= 0·7	0·34564	= 2·4	0·00178
= 0·8	0·29749	= 2·5	0·00109
= 0·9	0·25098	= 2·6	0·00065
= 1·0	0·20755	= 2·7	0·00039
= 1·1	0·16824	= 2·8	0·00022
= 1·2	0·13368	= 2·9	0·00012
= 1·3	0.10411	= 3·0	0·00007
= 1·4	0 07947	= 3·1	0·00004
= 1·5	0·05947	= 3·2	0·00001
= 1·6	0·04361	= 3·3	0·00000

Приметба. У горњем обрасцу узета је апсциса = јединици као мера прецизности, дакле место h или $\frac{1}{\sqrt{p}}$, а ако се хоће да уведе у рачун друга која јединица, онда треба (види Liagre стр. 579) заменити x по реду са вредностима:

$$\frac{0{\cdot}1}{h}, \quad \frac{0{\cdot}2}{h}, \quad \frac{0{\cdot}3}{h}, \text{ и т. д.}$$

ТАБЛИЦА II.

Вредности од $B_{-a}^{+a} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+ah} e^{-t^2} dt.$

За $ah=$	$B_{-a}^{+a}=$	За $ah=$	$B_{-a}^{+a}=$	За $ah=$	$B_{-a}^{+a}=$
0·00	0·00000	1·01	0·84681	2·05	0·99626
0·10	0·11246	1·02	0·85083	2·10	0·99702
0·20	0·22270	1·03	0·85478	2·15	0·99764
0·30	0·32863	1·04	0·85864	2·20	0·99814
0·40	0·42839	1·05	0 86243	2·25	0·99854
0·41	0·43796	1.06	0·86614	2·30	0·99886
0·42	0·44746	1·07	0·86977	2·35	0·99911
0·43	0·45688	1·08	0·87332	2·40	0·99931
0·44	0·46622	1·09	0·87680	2·45	0·99947
0·45	0·47548	1·10	0·88020	2·50	0·99959
0·46	0·48465	1·20	0·91031	2·55	0·99969
0·47	0·49374	1·30	0·93400	2·60	0·99976
0·48	0·50274	1·40	0·95228	2·65	0·99982
0·49	0·51166	1·50	0·96610	2 70	0·99987
0·50	0·52049	1·60	0·97634	2·75	0·99990
0·60	0·60385	1·70	0·98379	2·80	0·99992
0·70	0·67780	1·80	0·98909	2·85	0·99994
0·80	0·74210	1·90	0·99279	2·90	0·99996
0·90	0.79690	1·95	0·99417	2·95	0·99997
1 00	0·84270	2·00	0·99532	2·99	0·999976

и најзад за $ah = 3·00$; $B_{-a}^{+a} = 0·999\,977\,909\,3\ldots$

$= 4·00$; $= 0·999\,999\,984\,582\,8\ldots$

$= 5·00$; $= 0·999\,999\,999\,998\,4\ldots$

$\vdots \qquad \vdots$

$= \infty$; $= 1·000\,000\,000\ldots$

Важније штампарске грешке.

СТРАНА:	ВРСТА:	СТОЈИ:	ТРЕБА:
1	7	éioigné	éloigné
1	15	гога	тога
1	25	човечји	човечији
2	5	усавршаности	усавршености
3	32	комбинију	комбинују
4	34	прираштај снаге	прираштај или умаљење снаге,
10	5	варација	варијација
11	29	догађа	догађај
13	5	алеатоерне	алеатоарне
26	2	крадратном	квадратном
27	9	keinste	kleinste
29	23	предходно	претходно
30	12	човечиј	човечији
30	28	бро	број
32	25	име	има
33	16	подеднако	подједнако
36	26	подјенако	подједнако
37	4	десети	десити
40	16	цедуљица	цедуљице
48	23	$(m - n - 1)$	$(m + n - 1)$
49	18	$1.\ 2.\ 1. \cdot \cdot \cdot m.$	$1.\ 2.\ 3 \cdot \cdot m.$
50	23	комбинацна	комбинација
51	23	—	последња једначина(12)
52	22	апкстрактна	апстрактна
52	24	усавршаност	усавршеност
61	6	цодједнако	подједнако.
65	3	свиу	свију

СТРАНА :	ВРСТА :	СТОЈИ :	ТРЕБА :
70	1	могучпих	могућних
71	5	тиблице	таблице
72	25	добијајмо	добијамо
73	24	коцка	коцке
73	28	комбинацијв	комбинације
76	6	подеднако	подједнако
77	32	п	по
81	11	лоцтице	лоптице
81	20	кои	који
84	11	нрвом	првом
85	10	разоновањем	резоновањем
88	20	$(r + s)$	$(r - s)$
92	18	питање	питања
93	30	raport	rapport
96	3	—	28
96	23	$r - \frac{log\ 1 - log\ 2}{log\ b.}$	$r = \frac{log\ 1 - log\ 2}{log\ b}$
97	2	ворорaтнoћa	вероватноћа
106	17	представљења	представљена
106	19	предствник,	представник
109	12	прилликаама.	приликама
109	18	се	су
109	20	су	—
111	13	сноване	основане
111	24	предпоставке	претпоставке
112	10	в	в[I]
112	21	претпоставка,	претпоставке
115	15	$\alpha_n\ \beta_u$	$\alpha_n\ \beta_n$
117	10	$[\beta]$	$[\beta_t]$
118	25	ва	са
119	20	ер,	јер
121	4и7	${}_m\alpha н\alpha$	${}_m\alpha_n и \alpha_n$
122	14	á	à
128	19	то се,	то ће се
133	14	мислу	смислу
134	11	неусавршаности,	неусавршености
134	12	неусавршаности,	неусавршености
135	20	неусавршаности,	неусавршености
137	10	á	à

СТРАНА :	ВРСТА :	СТОЈИ :	ТРЕБА
139	32	наслагање	неслагање
141	30	поантирању,	поентирању
156	1	расти	расте
165	20	аписне	апсцисне
170	18	$- On + C$	$(- On + C)$
171	3	разликоваи	разликовати
173	4	$0 = (\triangle^i)$	$0 = (\triangle i)$
175	21	$e^1/_2$ к $\triangle^2$	$e^{1\|_2}$ к $\triangle^2$
176	14	k^2	h^2
176	24	свију грешака $\triangle$;	свију подједнако могућних изгледа $(1+1)^{2m} = 2^{2m} = M$ свију
193	23	$r_1 : r_2 = h_2 : h_1$;	$r_1 : r_2 = h_2 : h_1$.(81)
194	11	обрнути	обрнуто
195	21	(dm)	$(dm)^n$
197	1	$h_0 = \frac{1}{m\sqrt{2}};$	$h_0 = \frac{1}{m.\sqrt{2}}$ (83)
197	3	$m = \frac{1}{h_0\sqrt{2}};$	$m = \frac{1}{h_0\sqrt{2}}$. (84)
202	4	$[\lambda] = o$;	$[\lambda] = o$ . . . (88)
203	3	заномарајући	занемарујући
203	10	(86)	(89)
210	21	вршене	вршена
211	2	највероватпиу	највероватнију
212	19	вероватноћју	вероватноћу
215	10	од	о
221	3	$T_0 + (1)$	$T_0 + (t)$
223	1	диференцијани	диференцијални
226	13—16	s и i	z и t
230	17	оцет	опет.
234	15	непознате	непозната
238	11	озаачимо	означимо.
246	13	mt	m_z
252	21	$^1\|_2 \frac{d\varphi}{dx}$	$^1\|_2 \frac{d\varphi}{dx} =$
253	23	f_2	f_r
257	11	fr	fr
257	13	k	k_r

СТРАНА	ВРСТА	СТОЈИ	ТРЕБА
257	20	pf_2	df_2
259	10-13	—	поред система једначина λ . . (3)
259	23	знак (—)	(+)
259	23	k_4	k_3
259	27	$X\mu$	$\lambda\mu$
260	5	јадначина	једначина
260	12	$\omega_2 l$	ω_2
260	20	k_3	k_2
260	9	количина	количине.
261	16	b_2	b_1
262	12	k	k_2
262	14	λ	—
262	15	k	k_2