ELEMENTI VIŠE MATEMATIKE IV

ANTON BILIMOVIĆ

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE SA DOPUNAMA

NOVINSKO-IZDAVAČKO PREDUZEĆE
TEHNIČKA KNJIGA
BEOGRAD 1962

Nacrt za korice:
JOVAN VIDIĆ

Štampa: Beogradski grafički zavod, Beograd, Bulevar vojvode Mišića 17

SADRŽAJ

Glava treća

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOGA I VIŠEGA REDA

Glava četvrta

PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Glava peta

IZ VARIJACIONOG RAČUNA

Glava šesta

INTEGRALNE JEDNAČINE

PREDGOVOR

Ova, četvrta knjiga „Elemenata Više matematike" posvećena je onom delu Infinitezimalnog računa, koji se često izdvaja iz tog računa u zasebnu oblast pod nazivom „Diferencijalne jednačine", pri čemu se i ta oblast deli na Teoriju običnih diferencijalnih jednačina i Teoriju parcijalnih diferencijalnih jednačina. Teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina sa svoje strane redom se deli na dve grane, sa raznim sadržajem i različitim metodama rešavanja. Može se reći da je prva grana analogna Teoriji neodređenog integrala, jer se rešenje traži u obliku koji zavisi ili od proizvoljnih konstanata ili od proizvoljnih funkcija. Druga grana odgovara određenom integralu, ali sa tom razlikom što su uslovi, koje treba da zadovoljava rešenje, mnogo komplikovaniji. Pošto baš ta, druga, grana igra prvenstvenu ulogu u matematičkom proučavanju prirodnih pojava, naročito fizičkih, ima i svoj naročiti naziv — „Diferencijalne jednačine Matematičke fizike".

Izlaganja kompleksa problema i ideja Teorije diferencijalnih jednačina, čak i u sasvim elementarnoj, početnoj formi, vrlo su teška, jer sam predmet zahteva ne samo dublje razumevanje funkcionalnih veza, već i izvesnu vičnost u praćenju i vršenju osnovnih operacija Infinitezimalnog računa.

No i najskromnija savremena predstava o značaju celokupnog Infinitezimalnog računa imperativno nalaže uključivanje i elemenata Teorije diferencijalnih jednačina, i običnih i parcijalnih, već u prvi ciklus Više matematike. Iz tog razloga je pokušano, u ovoj četvrtoj knjizi, da se, preko jednostavnih izlaganja bez uštrba po značaj ideja, već, naprotiv, sa uvođenjem novih ideja (npr., vektorsko integrisanje), čitalac dovede do jezgra Više matematike — do Diferencijalnih jednačina, stvarnog matematičkog aparata svakog matematičara, mehaničara, fizičara i tehničara.

Knjiga je podeljena u dva dela: Prvi deo je posvećen tzv. običnim diferencijalnim jednačinama, gde se proučavaju veze između jedne ili više funkcija i njihova izvoda samo jednog argumenta. Ogromna oblast Mehanike, gde se proučava kretanje objekata, čiji se položaj određuje konačnim brojem koordinata sa jedinim argumentom — vremenom; u suštini se bazira na primenama običnih diferencijalnih jednačina. Drugi deo je posvećen teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina, gde se proučavaju veze između funkcija, koje zavise od dva ili više argumenata. Proučavanje Mehanike promenljivih tela — gasova, tečnosti, elastičnih i plastičnih tela, iziskuje primenu parcijalnih diferencijalnih jednačina, i to onog, specijalnog, dela — Teorije diferencijalnih jednačina Matematičke fizike.

Pošto objašnjenje mnogih prirodnih pojava stoji u vrlo bliskoj vezi sa tzv. Ekstremalnim principima, smatrao sam da će biti od koristi da u ovu knjigu stavim neke pojmove i primere iz tzv. Varijacionog računa, čiji matematički aparat spada u Teoriju diferencijalnih jednačina. Uneo sam i jednu dopunu, u kojoj izlažem početne pojmove iz Teorije integralnih jednačina, koje sad igraju ogromnu ulogu u primenama Infinitezimalnog računa na proučavanje prirodnih pojava.

Pri izradi rukopisa i ove knjige veliku pomoć mi je ukazao prof. V. V. Mišković, kome i ovim putem izražavam srdačnu zahvalnost.

Glava prva

UVOD

1.1. Postanak diferencijalne jednačine

Kao primer, uzmimo jednačinu kružne linije poluprečnika R, sa centrom u početku koordinata,

$$x^2+y^2=R^2. \tag{1}$$

Šta izražava ova jednačina? Ona izražava poznatu osobinu tačaka kružne linije, kao geometrijskog mesta tačaka u ravni čije rastojanje od početka koordinata ima konstantnu vrednost, recimo, R; za drugu R_1, za treću R_2, itd. Ako sad postavimo pitanje: koju zajedničku osobinu imaju krugovi, bez obzira na vrednost njihovih poluprečnika, onda u izražavanju te osobine ne sme učestvovati veličina R, koja karakteriše svaki posebni krug. Prema tome za izražavanje tražene osobine, veličinu R treba isključiti iz rasuđivanja. Zato diferencirajmo jednačinu (1) po x, i dobićemo

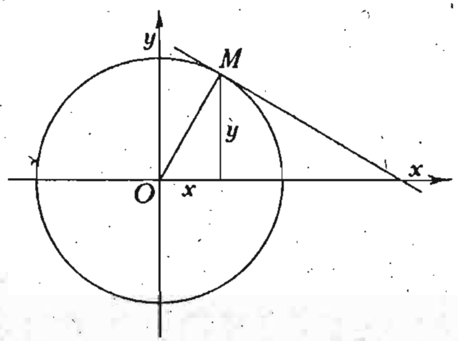
$$2x+2yy'=0,$$

odavde izvodimo

$$x+yy'=0, \quad \text{ili} \quad x\,dx+y\,dy=0. \tag{2}$$

Napisana jednačina sadrži, sem x i y, još i izvod $y'=dy/dx$, odnosno diferencijale dx i dy. Sa tog razloga se ona zove *diferencijalna jednačina*. Kako ova jednačina sadrži izvod samo prvoga reda, ona je *diferencijalna jednačina prvoga reda.* Nasuprot ovoj, jednačina (1) bez diferencijala, jeste *konačna jednačina.*

Šta izražava jednačina (2)? Pošto je $y/x=m$ koeficijent potega OM tačke M kružne linije (sl. 1), a $y'=m_1$ ugaoni koeficijent tangente na krug u istoj tački, jednačina (2) u obliku $1+m\,m_1=0$ izražava ortogonalnost tangente na krugu i potega tačke dodira. Kako je jednačina (2) diferencijalna, i izvedena osobina je *diferencijalna geometrijska osobina* svih krugova sa centrom u početku koordinata. Primetimo da ta osobina može biti izvedena proučavanjem krive samo u maloj, diferencijalnoj, oblasti oko tačke M.



Sl. 1 — Tumačenje diferencijalne jednačine kruga

Postavimo sad obrnuti problem. Za krivu liniju je data navedena geometrijska osobina ortogonalnosti, koja se izražava diferencijalnom jednačinom (2). Treba naći sve krive linije koje imaju istu osobinu, izraženu u Dekartovim koordinatama.

Za rešenje ovog problema daćemo našoj jednačini (2), redom, ove oblike: $x\,dx+y\,dx=0$, $2x\,dx+2y\,dy=0$, $d(x^2+y^2)=0$,

$$(3) \qquad \frac{d}{dx}(x^2+y^2)=0.$$

Važno je konstatovati da su jednačina (3) i data jednačina (2), u stvari, ista jednačina samo napisana u drugom obliku. Međutim, iz jednačine (3) neposredno sleduje

$$(4) \qquad x^2+y^2=C,$$

gde je C proizvoljna konstanta. U jednačini (4) nema više izvoda, ali se javlja proizvoljna konstanta C. *Jednačina (4) je rešenje date diferencijalne jednačine* (2). Svako rešenje diferencijalne jednačine je njen *integral.* Ako integral sadrži proizvoljnu konstantu, on se zove *opšti integral date diferencijalne jednačine,* u našem slučaju diferencijalne jednačine prvoga reda.

Ako mesto C stavimo, recimo, 4 dobijamo jednačinu

$$x^2+y^2=4,$$

koja je isto tako rešenje naše diferencijalne jednačine (2), ali u njemu više nema proizvoljne konstante. Takvo se rešenje zove *partikularni integral* te diferencijalne jednačine. Jasno je da iz opšteg integrala možemo dobiti beskrajno mnogo partikularnih integrala.

1.2. Proučavanje prirodne pojave „u malom" i izvođenje zaključaka o pojavi „u celini"

U prethodnom tumačenju pojma diferencijalne jednačine pošli smo od konačne jednačine, koja je izražavala geometrijsku činjenicu „u celini", tj. za sve kružne linije, linije sa određenom konačnom osobinom. Polazeći od nje, prešli smo na proučavanje osobine „u malom", tj. u oblasti oko date tačke. Došli smo do osobine tangente.

Pri proučavanju prirodnih pojava često je mnogo jednostavnije postaviti vezu između promenljivih veličina u maloj oblasti, u diferencijalnoj formi, između diferencijala, pa potom, tačnim ili približnim računom, doći do zaključaka o karakteru pojave „u celini". Kao klasičan primer takvog početnog proučavanja „u malom" uzmimo proces takozvanog prirodnog rašćenja, koji smo posmatrali u prvoj knjizi (I, str. 112).

Tako, ako masu nekog stabla označimo sa M, pa ova, i u toku kratkog vremena dt, poraste za dM, za taj priraštaj „u malom" možemo postaviti ovaj diferencijalni zakon rašćenja

$$(1) \qquad dM=k\,M\,dt,$$

koji, naravno, pretpostavlja da je taj priraštaj proporcionalan vremenu dt; da u njemu učestvuje celokupna masa M drveta, kojoj je priraštaj takođe proporcionalan; da taj priraštaj zavisi i od prirode drveta, što se u zakonu izražava koeficijentom proporcionalnosti k, koji, pod određenim uslovima, možemo smatrati kao konstantu.

Iz postavljene diferencijalne jednačine (1), kad je napišemo u obliku $dM/M = k\,dt$, odnosno $d(\log M - kt) = 0$, sleduje da je

$$\log M = kt + C,$$

gde je C *proizvoljna integraciona konstanta.*

Napisana jednačina izražava opšti integral diferencijalne jednačine (1). Iz te jednačine zaključujemo da je $M = e^{kt+C}$. Ako vreme računamo od trenutka kad je masa drveta imala vrednost M_0, između konstanata imamo relaciju: $M_0 = e^C$, i, prema tome, za integral, koji karakteriše pojavu „u celini", imaćemo

$$M = M_0 e^{kt}. \tag{2}$$

Jasno je da je u ovom slučaju prirodnije i jednostavnije početi proučavanje pojave „u malom" sa postavljanjem diferencijalne jednačine (1). Pa zatim, putem rasuđivanja, u datom slučaju čak uvođenja i transcendentnog broja e, i primenom postupka integracije doći do rezultata (2) „u celini", koji se odnosi na priraštaj mase drveta za konačan interval vremena.

Istorija ljudskog znanja pokazuje da se progres tačnog znanja zasniva na dvama osnovnim procesima: na Analizi i na Sintezi.

1. U Analizu specijalno spada i sastavljanje polaznih diferencijalnih jednačina, odnosno formiranje tačnih veza između osnovnih elemenata pojava. No ni taj proces nije tako jednostavan. Oceniti suštinu pojave, pronaći osnovne elemente i povezati ih bitnim vezama — to je zasluga velikih naučnika.

2. Sinteza ima za zadatak da pređe od veza postavljenih u Analizi, specijalno od diferencijalnih jednačina, na veze „u velikom", specijalno da pronađe rešenja diferencijalnih jednačina. Sinteza je, dakle, teža od Analize. Glavna teškoća je što za rešavanje problema Sinteze treba pronalaziti nove pojmove, nove oblike, nove predstave, koje vrlo teško dopiru u ljudsko saznanje, ograničeno u sposobnosti za stvaranje novih ideja.

1.3. Geometrijsko tumačenje diferencijalnih jednačina i njihovih rešenja

U opštem slučaju diferencijalnu jednačinu prvoga reda možemo napisati

$$\varphi\left(\frac{dy}{dx},\, y,\, x\right) = 0.$$

Važan je slučaj kad ovu jednačinu možemo rešiti po izvodu i predstaviti u obliku

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\, y). \tag{1}$$

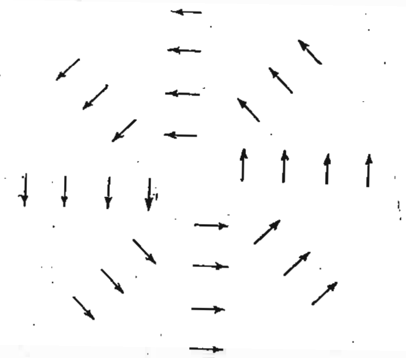
Pretpostavljamo da takvo rešenje postoji, a kad ih ima više, biramo jedno. Opšti integral te jednačine je funkcija y nezavisno promenljive x i proizvoljne konstante integracije C, tj. (2) $y = F(x,\, C)$. Ta funkcija treba da zadovoljava identitet $\frac{dF(x,\, C)}{dx} \equiv f(x,\, F(x,\, C))$ ne samo za svaku vrednost x, već i za svaku vrednost C.

Za svaku određenu vrednost C jednačini (2) odgovara kriva linija u ravni, koja se zove *integralna kriva date diferencijalne jednačine* (1). Prema tome jednačina integralne krive je *partikularni integral.*

Ako uzmemo u ravni Oxy neku tačku $M_0(x_0,\, y_0)$ i koordinate te tačke uvrstimo u jednačinu (2), dobićemo uslov $y_0 = F(x_0,\, C)$, da integralna kriva prolazi kroz tačku M_0. Ako se iz tog uslova može odrediti konstanta C kao funkcija x_0, y_0, tj. $C = \psi(x_0,\, y_0)$, tada jednačina $y = F(x,\, \psi(x_0,\, y_0))$ predstavlja integralnu krivu koja prolazi kroz tačku M_0. Implicitni oblik te jednačine lakše se dobiva, kad se iz dve jednačine $y = F(x,\, C)$, $y_0 = F(x_0,\, C)$ eliminiše konstanta C.

Ako u jednačini (2) konstanti C ne dajemo određenu vrednost, već tu veličinu ostavljamo proizvoljnu, toj jednačini više ne odgovara određena integralna kriva, već niz krivih. Taj se niz zove *porodica integralnih krivih.* Takva porodica geometrijski predstavlja *opšti integral.*

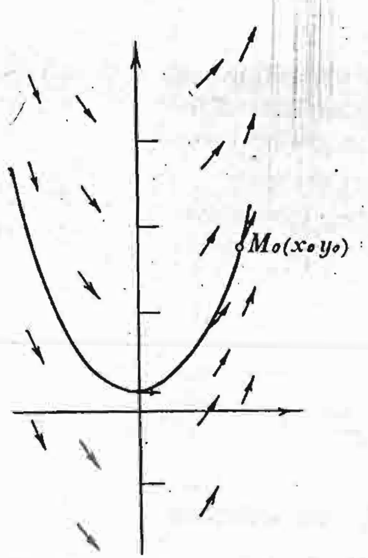
Sa geometrijskog gledišta diferencijalna jednačina $y' = f(x, y)$ određuje, pomoću ugaonog koeficijenta y', pravac tangente na integralnu krivu za svaku tačku ravni u datoj oblasti funkcije $f(x, y)$. Skup svih tih pravaca, koje možemo pokazati na slici vektorima jedinične dužine, određuje polje takvih vektora — vektorsko polje. Na slici 2 pokazano je *polje tangenata* za diferencijalnu jednačinu [(2), 1.1]. U svakom polju tangenata integralna kriva, koja prolazi kroz datu tačku, recimo $M_0(x_0, y_0)$, crta se na taj način što se prelazi od jedne tačke ka drugoj, bliskoj tački, duž vektora polja tangenata (sl. 3).



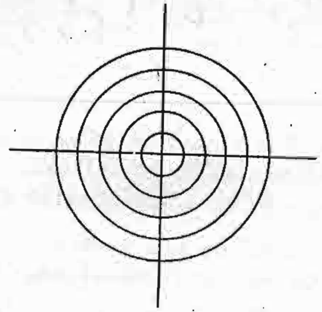
Sl. 2 — Polje pravaca tangenata

Opšti integral diferencijalne jednačine prvoga reda odgovara porodici krivih linija. U našem primeru integrala [(4), 1.1] imamo porodicu koncentričnih krugova sa centrom u početku koordinata (sl. 4).

U vezi sa pojmom rešenja diferencijalne jednačine prvoga reda uveli smo dve kate-



Sl. 3 — Primer partikularnog integrala u polju tangenata



Sl. 4 — Porodica koncentričnih krugova kao opšti integral

gorije tih rešenja — opšti integral i partikularni integral, koji se dobijaju iz opštih, ako proizvoljnu konstantu zamenimo određenom brojnom vrednošću. Pokažimo sad, na konkretnom primeru, da može postojati rešenje diferencijalne jednačine i treće kategorije.

Uzmimo, kao primer, diferencijalnu jednačinu prvoga reda specijalnog oblika

$$y = x\frac{dy}{dx} + a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{3}$$

Lako je proveriti da jednačina

$$y = Cx + a\sqrt{1 + C^2}, \tag{4}$$

gde je C proizvoljna konstanta određuje opšti integral jednačine (3). Zaista, ovo rešenje: 1. sadrži proizvoljnu konstantu C, i 2. zadovoljava diferencijalnu jednačinu (3), jer, posle diferenciranja (4) po x, imamo (5) $y' = C$ i na taj način iz (3) dolazimo do identiteta

$$Cx + a\sqrt{1 + C^2} \equiv Cx + a\sqrt{1 + C^2}$$

tačna kako u odnosu na proizvoljnu konstantu C, tako i u odnosu na nezavisno promenljivu x.

Ali diferencijalna jednačina (3) ima rešenje i u obliku (6) $x^2 + y^2 = a^2$. Zaista, iz (6), posle diferenciranja, sleduje $x + y y' = 0$, ili $y' = -x/y$. Ako ovu vrednost izvoda stavimo u (3), imamo $y = -x^2/y + a\sqrt{1 + x^2/y^2}$, ili $y^2 + x^2 = a\sqrt{y^2 + x^2}$. A to je identitet za sve tačke rešenja (6).

Jednačini (6) odgovara kružna linija. Kako je jednačina opšteg integrala linearna u odnosu na x i y, svaki partikularni integral može takođe odgovarati samo pravoj. Kružna linija je to novo rešenje, koje ne spada u partikularne integrale. Rešenje koje ne sadrži proizvoljnu konstantu i ne može se dobiti iz opšteg integrala kao partikularno rešenje zove se *singularno rešenje*, ili *singularni integral date diferencijalne jednačine*.

Rešenje (6) je singularni integral diferencijalne jednačine (3). Nije teško pokazati da, u ovom slučaju, porodicu partikularnih rešenja sačinjavaju prave koje sve dodiruju krug (6), jer rastojanje svake prave linije (4) od početka koordinata ima stalnu vrednost a. Zaista, ako jednačinu (4) napišemo u obliku $Cx-y+a\sqrt{1+C^2}=0$, i odredimo normirajući množilac λ, u obliku [I, str. 65] $\lambda=1:\sqrt{1+C^2}$, vidimo da traženo rastojanje d iznosi $d=a\sqrt{1+C^2}:\sqrt{1+C^2}=a$.

Prema tome smo pokazali da diferencijalne jednačine prvoga reda *mogu* imati rešenja triju kategorija: 1. opšti integral, 2. partikularni integral i 3. singularni integral. U našem kratkom izlaganju Teorije diferencijalnih jednačina nećemo ulaziti u proučavanje uslova pod kojima navedene kategorije integrala zaista postoje. To proučavanje spada u tzv. *Teoreme egzistencije*.

1.4. Klasifikacija diferencijalnih jednačina

Kako smo videli jednačina $\varphi(x, y, y')=0$ je diferencijalna jednačina prvoga reda i to u *opštem, implicitnom obliku*. Smatra se da je ona u *eksplicitnom obliku*, kad je rešena po y', tj. $y'=f(x, y)$.

Jednačina $\varphi(x, y, y', y'')=0$, odnosno $y''=f(x, y, y')$ je *diferencijalna jednačina drugoga reda.*

Uopšte, jednačina $\varphi(x, y, y', y'',\ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)})=0$ je *diferencijalna jednačina n-toga reda.* Red diferencijalne jednačine određuje se redom izvoda najvišeg reda koji učestvuje u jednačini. Prisustvo u jednačini ostalih napisanih argumenata pri određivanju reda diferencijalne jednačine nije obavezno. U rešenom obliku, jednačina n-tog reda izgleda, u opštem slučaju, ovako $y^{(n)}=f(x, y, y',\ldots, y^{(n-1)})$.

Rešenje diferencijalne jednačine n-tog reda može biti određeno ili u eksplicitnom obliku pomoću funkcije y, koja identično zadovoljava datu diferencijalnu jednačinu, ili eksplicitno pomoću relacije $\Phi(x, y)=0$, koja posle n diferenciranja postavlja vezu između argumenata $x, y, y',\ldots, y^{(n)}$ identičnu sa vezom koju određuje data diferencijalna jednačina n-tog reda.

Ako funkcija y, kao rešenje diferencijalne jednačine, sadrži n proizvoljnih konstanata, tj. $y=F(x, C_1, C_2,\ldots, C_n)$ gde su $C_i (i=1,2,\ldots, n)$ proizvoljne konstante, ona se zove *opšti integral date dif. jednačine n-tog reda.* Ako rešenje ne sadrži nijedne proizvoljne konstante, ali se dobiva iz opšteg integrala

za određene vrednosti tih konstanata, integral je *partikularni*. Najzad, diferencijalne jednačine i višega reda mogu imati u specijalnim slučajevima, i *singularne integrale*. To su rešenja koja ne sadrže proizvoljnih konstanata, ali ne mogu se izvesti iz opšteg integrala za posebne vrednosti konstanata. Detaljnije o integralima diferencijalnih jednačina višega reda govorićemo u vezi sa integracijom tih jednačina.

Pretpostavimo sad da neka funkcija z zavisi od dva argumenta, x i y, tj. $z=F(x, y)$. Dobro smo upoznati sa geometrijskom predstavom te funkcije — njoj odgovara u Dekartovu trijedru osa $Oxyz$ površina. Ta funkcija, u opštem slučaju, ima dva delimična, odnosno parcijalna, izvoda prvoga reda, koje, prema Monžu, ovako označavamo:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}=p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y}=q.$$

Jednačina koja postavlja vezu između argumenata x, y, z, i delimičnih izvoda p, q, tj.

$$\varphi(x, y, z; p, q)=0,$$

takođe je diferencijalna jednačina, jer sadrži dva izvoda $p=\frac{\partial F}{\partial x}$, $q=\frac{\partial F}{\partial y}$, ali, pošto su ti izvodi delimični, odnosno parcijalni, navedena jednačina zove se *delimična diferencijalna jednačina* ili, sa takođe rasprostranjenim stranim nazivom, *parcijalna diferencijalna jednačina prvoga reda.* I delimične diferencijalne jednačine mogu biti višega reda. Tako jednačina $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ je delimična diferencijalna jednačina drugoga reda.

Ako je potrebno naglasiti da diferencijalna jednačina sadrži samo obične izvode, za nju se kaže da je *obična diferencijalna jednačina.*

Rešenje parcijalne diferencijalne jednačine takođe se zove *integral parcijalne diferencijalne jednačine*. O vrsti tih integrala govorićemo na drugom mestu.

Diferencijalne jednačine, kako obične tako i parcijalne, mogu se javljati ne samo pojedinačno, već i u skupovima. Takvi skupovi zovu se *sistemi običnih*, odnosno *parcijalnih, diferencijalnih jednačina*.

1.5. Primeri za postavljanje diferencijalnih jednačina

A. *Slučaj običnih jednačina.* U 1.1. smo pokazali da do obične diferencijalne jednačine možemo doći na dva načina: 1. putem eliminisanja proizvoljnih konstanata, odnosno parametara, iz konačnih jednačina, i 2. putem neposrednog sastavljanja relacija između diferencijalnih elemenata, relacija koje izražavaju bitnu osobinu, odnosno diferencijalni zakon date pojave.

1. Napisati u Dekartovim koordinatama diferencijalnu jednačinu svih pravih koje prolaze kroz početak koordinata.

Pošto konačna jednačina navedenih pravih, $y=mx$, sadrži samo jedan proizvoljan parametar, ugaoni koeficijent m, posle diferenciranja po x imaćemo $y'=m$. Ako tu vrednost m stavimo u polaznu konačnu jednačinu, dobivamo traženu diferencijalnu jednačinu $y-xy'=0$, ili $y\,dx-x\,dy=0$, ili, najzad, $dx/x=dy/y$.

2. Napisati, u Dekartovim koordinatama, diferencijalnu jednačinu prave proizvoljnog položaja u ravni.

Kako jednačina ove prave, $y=mx+b$, sadrži dva proizvoljna parametra, ugaoni koeficijent m i početnu ordinatu b, za eliminisanje tih parametara diferenciraćemo konačnu jednačinu dva puta: $y'=m$, $y''=0$. Diferencijalna jednačina drugog reda $y''=0$ je diferencijalna jednačina postavljenog zadatka.

3. Napisati diferencijalnu jednačinu kružne linije proizvoljnog poluprečnika i proizvoljnog položaja centra u ravni.

Pošto jednačina kružne linije sa centrom u tački (a, b) i poluprečnikom r ima oblik $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$, za postavljanje tražene diferencijalne jednačine treba diferenciranjem ukloniti iz prethodne jednačine tri parametra: a, b i r. Prvo diferenciranje dovodi do jednačine $x-a+(y-b)y'=0$. Posle drugog diferenciranja imamo $1+y'^2+(y-b)y''=0$, ili $y-b=$ $=-(1+y'^2):y''$. Najzad, konačno diferenciranje dovodi do rezultata $y'=-[2y'y''^2-(1+y'^2)y''']:y''^2$. Iz ovog rezultata sleduje tražena diferencijalna jednačina: $3y'y''^2-(1+y'^2)y'''=0$. Koju diferencijalnu osobinu kružne linije izražava ova jednačina? Ako iz (II, 4.3) uzmemo u obzir izraz za poluprečnik krivine proizvoljne krive, naime $R=(1+y'^2)^{3/2}:y''$, i diferenciramo ga po x, dobićemo $dR/dx=(1+y'^2)^{1/2}[3y'y''^2-(1+y'^2)y''']:y''^2$. Pošto, prema izvedenoj diferencijalnoj jednačini, izraz u srednjoj zagradi ima vrednost nule, zaključujemo da je $dR/dx=0$, tj. poluprečnik krivine kružne linije ima stalnu vrednost, a to je osnovna, ali ipak diferencijalna osobina svake kružne linije.

4. Izvesti diferencijalnu jednačinu proizvoljne krive drugog reda, konusnog preseka. U opštem obliku, konačnu jednačinu takve krive imali smo u (I, 2.35),

$$\Phi(x, y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

Ova jednačina sadrži pet proizvoljnih parametara, jer umesto šest koeficijenata, posle deljenja jednim uz neki od članova drugog stepena, koji nije jednak nuli, ostaje samo pet nezavisnih. Uzimamo da je $a_{22}\neq 0$ i posle toga sa novim oznakama imamo jednačinu

$$(y+Ax+B)^2=Cx^2+Dx+E,$$

gde su A, B, C, D, E nove konstante, koje se takođe mogu smatrati kao proizvoljne; njihove vrednosti se lako određuju pomoću konstanata a_{11}, a_{12}, itd.

Stavimo $y+Ax+B=P$, $dP/dx=y'+A=Q$ i tada jednačinu konusnog preseka izražavamo ovako $P^2=Cx^2+Dx+E$. Diferenciranjem triput isključujemo proizvoljne konstante C, D, E i dobivamo jednačinu $Py'''+3Qy''=0$. Ako ovu jednačinu diferenciramo još dvaput dobivamo sistem od tri jednačine

$$\begin{aligned} Py^{III}+3Qy^{II} &= 0,\\ Py^{IV}+4Qy^{III}+3y^{II2} &= 0,\\ Py^{V}+5Qy^{IV}+10y^{II}y^{III} &= 0.\end{aligned}$$

Ako iz bilo koje dve od ovih jednačina odredimo P i Q i stavimo u treću jednačinu, rezultat se može napisati u obliku determinante sastavljene od koeficijenata napisanog sistema jednačina, linearnog u odnosu na P, Q:

$$\begin{vmatrix} y^{III}, & 3y^{II}, & \\ y^{IV}, & 4y^{III}, & 3y^{II} \\ y^{V}, & 5y^{IV}, & 10y^{III} \end{vmatrix}=0.$$

U izračunatom obliku ova determinanta daje, izuzev slučaja $a_{22}=0$, traženu diferencijalnu jednačinu: $9y''^2y^V-45y''y'''y^{IV}+40y'''^3=0$ konusnog preseka proizvoljne forme, proizvoljne veličine i proizvoljnog položaja u ravni.

U specijalnom slučaju, kad je $a_{22}=0$, $a_{12}\neq 0$, jednačinu drugog reda možemo napisati ovako: $y(x-a)=Lx^2+Mx+N$, gde su a, L, M, N konstante. Shodno prethodnom, posle diferenciranja, dobivamo sistem

$$y^{III}(x-a)+3y^{II}=0,$$
$$y^{IV}(x-a)+4y^{III}=0,$$

koji, posle eliminisanja a, dovodi do diferencijalne jednačine

$$4y^{III2}-3y^{II}y^{IV}=0.$$

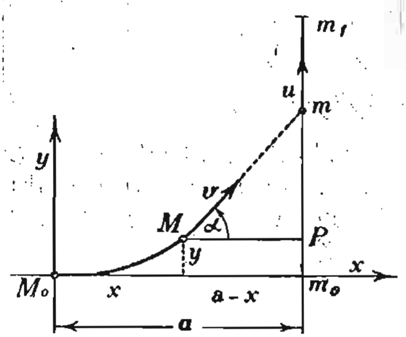
Najzad, ako su $a_{22}=0$, $a_{12}=0$, $a_{11}\neq 0$, jednačina drugog reda

$$a_{11}x^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

kojoj odgovara parabola, ima za diferencijalnu jednačinu $y^{III}=0$.

5. Izvedimo sad diferencijalnu jednačinu iz neposrednog posmatranja pojave. Kao primer ćemo uzeti pojavu tzv. *problema potere.*

Zec u položaju m_0 (sl. 5) primetio je psa u položaju M_0 na rastojanju a i počeo je da trči po pravoj m_0m prema svojoj jami m_1 sa stalnom brzinom u. Pas iz svog položaja M_0 počeo je da goni zeca sa brzinom v, stalnog intenziteta, uvek u pravcu zeca. Treba postaviti diferencijalnu jednačinu linije potere po kojoj trči pas. Radi jednostavnosti uzećemo da je u početku kretanja $M_0m_0\perp m_0m_1$. Koordinatne ose su pokazane na slici.



Sl. 5 — Linija potere

Neka je $M(x,y)$ položaj psa u trenutku t, pri čemu vreme računamo od početka kretanja. Uglovni koeficijenat brzine psa ima vrednost $\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}=y'$. S druge strane, iz trougla MPm taj isti uglovni koeficijenat ima vrednost $Pm:MP$. Pošto je $Pm=m_0m-m_0P=$

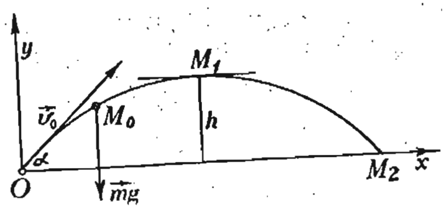
$=ut-y$, $MP=a-x$ možemo napisati $\operatorname{tg}\alpha=y'=\frac{ut-y}{a-x}$, odakle izvodimo (1) $ut-y=(a-x)y'$. Pošto se konačna veličina vremena t ne može neposredno izraziti u funkciji koordinata x, y, a znamo vezu između elemenata vremena dt i puta psa $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$ u obliku $ds=v\,dt$, diferencirajmo (1), što daje $u\,dt-dy=-y'\,dx+(a-x)\,dy'$ i izvršimo zamenu. Posle toga dobivamo jednačinu

$$(a-x)\frac{dy'}{dx}=k\sqrt{1+y'^2},$$

gde je $k=u/v$. To je tražena diferencijalna jednačina. Ona spada u diferencijalne jednačine drugog reda, ali naročitog oblika, kad u jednačinu ne ulazi sama nepoznata funkcija y.

6. Kao drugi primer izvođenja diferencijalne jednačine iz postavljanja veza između elemenata, uzmimo slučaj diferencijalne jednačine putanje (trajektorije) tzv. *kosog hitca.*

Problem kosog hitca je problem kretanja teške tačke u bezvazdušnom prostoru kad početna brzina ima proizvoljan pravac prema horizontu. Nećemo ulaziti u dokaz da u tom problemu teška tačka za vreme svog kretanja uvek ostaje u istoj vertikalnoj ravni, koja se određuje pravcem početne brzine tačke. Za određivanje položaja tačke izabraćemo koordinatne ose Oxy sa početkom O u početnom položaju hitca, sa osom Ox u horizontalnoj ravni i osom Oy u smeru vertikale nagore.



Sl. 6 — Kos hitac

Pošto na tačku M mase m dejstvuje samo sila teže, sa projekcijom $(-mg)$ na osu Oy, gde je g stalno ubrzanje teže, prema Njutnovim zakonima, diferencijalne jednačine kretanja hitca su: $mx''=0$, $my''=-mg$. Iz prve jednačine sleduje $x'=\text{const.}=v_0\cos\alpha$, gde je v_0 intenzitet početne brzine tačke i α ugao koji pravac brzine čini sa horizontalnom ravni. Za postavljanje diferencijalne jednačine putanje hitca treba iz dve jednačine

$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha$, $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$ ukloniti (eliminisati) vreme koje ulazi samo preko diferencijala dt. Pošto je iz prve jednačine $\frac{1}{dt} = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{1}{dx}$, a $\frac{d^2y}{dt^2} = v_0^2 \cos^2\alpha \frac{d^2y}{dx^2}$, iz druge jednačine imamo $v_0^2 \cos^2\alpha \frac{d^2y}{dx^2} = -g$, ili $\frac{d^2y}{dx^2} = -k$, gde je $k = g/v_0^2 \cos^2\alpha = \text{const.}$ Izvedena jednačina je diferencijalna jednačina drugog reda putanje kosog hitca. Pošto je ona vrlo jednostavna, možemo već na ovom mestu izvesti i integraciju ove jednačine. Zaista, imamo posle prve integracije, u smislu određivanja neodređenog integrala, $\frac{dy}{dx} = -kx + C_1$, a posle druge $y = -\frac{1}{2}kx^2 + C_1 x + C_2$, gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante. Pošto je u početku kretanja $x = y = 0$ i $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \operatorname{tg}\alpha$, iz prve jednačine imamo $\operatorname{tg}\alpha = C_1$, a iz druge $0 = C_2$, pa prema tome imamo ovaj oblik za konačnu jednačinu putanje:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} x^2.$$

Ovoj jednačini odgovara parabola (sl. 6). Odrediti najveću visinu h i najveću dužinu OM_2.

B. *Slučaj parcijalnih jednačina*. Pokažimo i za ove jednačine nekoliko primera za dobivanje parcijalne jednačine prvo iz konačne jednačine, a zatim putem neposrednog izražavanja neke diferencijalne osobine funkcije od dve promenljive.

7. Napisati parcijalnu jednačinu za funkciju $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$, gde je f simbol za proizvoljnu funkciju, koja se može diferencirati. Ako datu funkciju sa složenim argumentom $u = y/x$ diferenciramo prvo po x, a zatim po y, dobićemo dve jednačine $\frac{\partial z}{\partial x} = f_u' \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = f_u' \cdot \left(-\frac{1}{x^2}y\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f_u' \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = f_u' \cdot \frac{1}{x}$. Posle eliminisanja f_u' iz dobivenih jednačina dobićemo jednačinu $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, koja izražava diferencijalnu osobinu homogene funkcije, čiji je argument količnik dveju nezavisnih promenljivih (Ajlerova teorema, II, str. 42).

8. Ako isto pitanje rešimo za funkciju $z = f(xy)$, sa složenim argumentom xy, dobićemo parcijalnu diferencijalnu jednačinu $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, koja se od jednačine prethodnog primera razlikuje samo znakom.

9. Neka je funkcija z zbir dveju proizvoljnih funkcija samo od po jednog argumenta, tj. $z = \varphi(x) + \psi(y)$. Posle prvih delimičnih diferenciranja imamo: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d\psi}{dy}$, a posle drugog diferenciranja prve jednačine po y, a druge po x, dobićemo zajednički rezultat $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$. To je delimična diferencijalna jednačina drugog reda. Ona izražava diferencijalnu osobinu zbira dveju proizvoljnih funkcija samo od po jedne promenljive, x i y.

10. Uzmimo još funkciju $z = \varphi(x + \lambda y) + \psi(x - \lambda y)$, gde su φ i ψ opet proizvoljne funkcije od napisanih argumenata, pri čemu je λ konstanta. Uzastopna diferenciranja daju:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi' \cdot 1 + \psi' \cdot 1, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi' \cdot \lambda - \psi' \cdot \lambda,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \varphi'' \cdot 1 + \psi'' \cdot 1, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \lambda^2 (\varphi'' + \psi'').$$

Vidimo da drugi delimični izvodi zadovoljavaju jednačinu $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \lambda^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$. To je delimična diferencijalna jednačina drugog reda za funkciju z našeg primera.

11. Uzmimo još funkciju $z = \log\frac{1}{r}$, gde je $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$ i isključimo parametre a i b kao proizvoljne konstante.

Pošto je $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}(x-a)$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{r^2}(y-b)$, a zatim $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{r^4}(x-a)^2 - \frac{1}{r^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{r^4}(y-b)^2 - \frac{1}{r^2}$, izvodimo traženu jednačinu $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ ili, konkretno,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\log \frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\log \frac{1}{r}\right) = 0.$$

12. U vezi sa ovim i narednim primerom uzmimo u obzir da normala u tački $M(x, y, z)$ površine sa jednačinom $z = z(x, y)$ čini sa koordinatnim osama uglove, čiji su kosinusi proporcionalni veličinama $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, -1 (II, str. 145).

Pokušajmo sad da napišemo diferencijalnu jednačinu cilindrične površine sa proizvodiljom paralelnom z osi.

Pošto normala na cilindričnoj površini stoji upravno na proizvodilji i, prema tome, u našem slučaju je paralelna sa Oxy ravni, kosinusi njenih uglova sa osama trijedra $Oxyz$ proporcionalni su veličinama $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, 0. S druge strane, ova normala je upravna prema elementu dx, dy, 0 vodilje u ravni Oxy. Prema tome imamo uslov normalnosti $\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0$, koji i izražava traženu diferencijalnu jednačinu. Pošto je $\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = dz$, jednačinu možemo napisati i ovako $dz = 0$. Ova jednačina ima očigledno rešenje $z(x, y) = C$. Ova konačna jednačina izražava da svakoj proizvoljnoj jednačini $z(x, y) - C = 0$ u ravni Oxy odgovara kriva linija, a u prostoru cilindrična površina sa vodiljom — tom krivom i proizvodiljom upravnom na ravni te krive.

13. Izvesti diferencijalnu jednačinu obrtne površine, uzimajući za osu obrtanja Oz osu.

Pošto normala u proizvoljnoj tački M na obrtnoj površini leži u ravni meridijana, njena projekcija na Oxy ravan

ima pravac prave OM', gde je M' projekcija tačke M na ravan Oxy. Izrazimo analitički uslov poklapanja ta dva pravca u ravni Oxy. Pošto su kosinusi uglova projekcije normale proporcionalni veličinama $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, a kosinusi uglova prave OM' veličinama x, y, uslov poklapanja tih pravaca izražava se jednačinom $\frac{\partial z}{\partial x} : x = \frac{\partial z}{\partial y} : y$. Odavde sleduje tražena parcijalna diferencijalna jednačina $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ obrtne površine.

Na drugom mestu ćemo izvesti da se integral te jednačine izražava ovako $z = f(x^2 + y^2)$, gde je f proizvoljna funkcija argumenta $x^2 + y^2$, odnosno rastojanja r tačke površine od ose obrtanja. Ovde ćemo to samo proveriti. Ako diferenciramo prethodnu jednačinu delimično prvo po x, a zatim po y, smatrajući $x^2 + y^2 = u$ kao složeni argument, dobivamo

$$\frac{\partial z}{\partial x} f_u' \cdot 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_u' \cdot 2y,$$

odakle, posle eliminacije izvoda f_u', neposredno sleduje gore izvedena parcijalna diferencijalna jednačina obrtnih površina.

Glava druga

JEDNAČINE PRVOGA REDA

2.1. Diferencijalne jednačine prvoga reda

U prethodnoj glavi su bili izloženi, na konkretnim primerima, osnovni pojmovi iz Teorije diferencijalnih jednačina, običnih i parcijalnih, i navedeni razni tipovi rešenja običnih diferencijalnih jednačina u obliku opštih, partikularnih i singularnih integrala.

Sad ćemo preći na sistematski pregled običnih diferencijalnih jednačina i na proučavanje metoda za njihovu integraciju. Napomenućemo da okvir ove knjige dopušta proučavanje samo tzv. *elementarnih metoda integracije*, pomoću kojih se rešenje diferencijalnih jednačina, uglavnom, svodi na izračunavanje neodređenih integrala ili, kratko, na kvadrature.

Najprostije su, po svojoj diferencijalnoj prirodi, *diferencijalne jednačine prvoga reda*, u kojima je postavljena veza između izvoda $y' = \dfrac{dy}{dx}$, odnosno diferencijala dx i dy, nezavisno promenljive x i nepoznate funkcije $y = y(x)$. U opštem slučaju, kako smo videli, ta se veza izražava ili implicitnom jednačinom $\varphi(y', x, y) = 0$ ili u eksplicitnom obliku, rešenom po izvodu, tj. $y' = f(x, y)$. Eksplicitna jednačina prvog reda se može izraziti i u drugim ekvivalentnim oblicima:

$$dy = f(x, y)\, dx, \quad P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0,$$
$$y' = -P(x, y) : Q(x, y).$$

Ako funkcija $f(x, y)$ zavisi samo od jedne nezavisno promenljive, x ili y, diferencijalna jednačina se svodi na jednačinu $dy = f(x)\, dx$, odnosno $dy = f(y) dx$. Prva se rešava kvadraturom $y = \int f(x) + C$, a druga kvadraturom $x = \int \dfrac{1}{f(y)} dy = \Phi(y) + C$, gde je C proizvoljna konstanta neodređenog integrala. Sa dve kvadrature se rešava jednačina $P(x)\, dx + Q(y)\, dy = 0$, naime $\int P(x) dx + \int Q(y)\, dy + C = 0$.

Geometrijski, diferencijalnoj jednačini prvoga reda odgovara vektorsko polje jediničnog vektora, čiji je pravac za svaku tačku polja određen ugaonim koeficijentom y' prema datoj diferencijalnoj jednačini.

2.2. Linearna diferencijalna jednačina

Proučavanje diferencijalnih jednačina prvoga reda počinjemo *jednačinom*

$$(1) \qquad p_0(x) \cdot y' + p_1(x)\, y + q(x) = 0,$$

linearnom kako u odnosu na izvod y', tako i u odnosu na nepoznatu funkciju y. Funkcije $p_0(x), p_1(x), q(x)$ su date funkcije nezavisno promenljive x. Ako funkcija $p_0(x)$ u oblasti proučavanja rešenja nema nula, tj. jednačina $p_0(x) = 0$ nema korena, jednačinu (1), podelom sa $p_0(x)$, možemo zameniti ovom

$$(2) \qquad y' + Py = Q,$$

gde su P i Q date funkcije x-a. Funkcija Q uslovno se zove *desnom stranom linearne jednačine*. Ako je desna strana jednačine, tj. $Q(x)$, jednaka nuli, linearna jednačina se zove *linearna jednačina bez desne strane*. Uzmimo takvu jednačinu sa drugim oznakama

$$(3) \qquad z' + R(x)\, z = 0.$$

Takva jednačina se rešava kvadraturom. Zaista, napišimo prethodnu jednačinu u obliku $\frac{dz}{z} = -R(x) \cdot dx$ i izvršimo integraciju $\log z = -\int R(x)\, dx + \log C$, gde je konstanta integracije izražena pomoću logaritma. Ako od prirodnih logaritama pređemo na brojeve, dobićemo rešenje jednačine (3) u obliku

$$(3^*) \qquad z = Ce^{-\int R(x)\, dx},$$

sa kvadraturom $\int R(x)\, dx$.

Primeri.

1. $y' + y/x = 0$. Kvadratura ovog primera daje $\int R(x)\, dx = \int \frac{1}{x} dx = \log x$. Rešenje uzima oblik $y = Ce^{-\log x} = C \cdot \frac{1}{x}$ ili $yx = C$, a to odgovara hiperboli. Integralna kriva koja prolazi kroz tačku $x = 1$, $y = 1$ ima jednačinu $xy = 1$.

2. $y' + y \operatorname{cotg} x = 0$. Kvadratura $\int \operatorname{cotg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \log \sin x$ dovodi do rešenja $y = C/\sin x$.

Uzmimo sad jednačinu (2) sa desnom stranom $Q(x)$ i stavimo u nju $y = uz$ gde su $u(x)$ i $z(x)$ dve nepoznate funkcije. Posle zamene imamo

$$z \frac{du}{dx} + u\left(\frac{dz}{dx} + Pz\right) = Q(x).$$

Stavimo sad (4) $\frac{dz}{dx} + P(x) \cdot z = 0$. Posle toga ostaje jednačina (5) $\frac{du}{dx} = \frac{1}{z} Q(x)$. Dobili smo dve jednačine (4) i (5)

za određivanje nepoznatih funkcija z i u. Jednačina (4), kao linearna jednačina bez desne strane, prema (3*), ima rešenje

$$(4^*) \qquad z = C_1 e^{-\int P(x)\, dx}.$$

Sa tom vrednošću z jednačina (5) ima rešenje

$$(5^*) \qquad u = \int \frac{1}{z} Q(x)\, dx + C_2.$$

Prvo primetimo da zadržavanje konstanata na dva mesta je suvišno, jer te konstante u konačnom rezultatu ulaze samo u obliku proizvoda $C_1 C_2 = C$.

Konačno rešenje se izražava

$$(6) \qquad \boxed{y = e^{-\int P(x)\, dx}\left[\int e^{\int P(x)\, dx} Q(x)\, dx + C\right].}$$

Primer. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} + x^3$. Pošto sa našim oznakama $P(x) = +\frac{1}{x}$, $Q(x) = x^3$ prva kvadratura daje $\int P(x)\, dx = \int \frac{1}{x} dx = \log x$ i prema tome je $z = e^{-\log x} = \frac{1}{x}$. Za drugu kvadraturu imamo $\int e^{\int P(x)\, dx} Q(x)\, dx = \int x \cdot x^3 \cdot dx = \frac{1}{5} x^5 + C$.

Konačno imamo integral $y = \frac{1}{5} x^4 + C/x$. Lako se može potvrditi da je napisani integral zaista rešenje date diferencijalne jednačine. Doista, imamo identitet

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{5} x^3 - \frac{C}{x^2} \equiv -\frac{1}{x}\left(\frac{1}{5} x^4 + \frac{C}{x}\right) + x^3$$

u odnosu na x i na C.

Navedimo sad nekoliko opštih osobina linearnih diferencijalnih jednačina (2) prvoga reda sa desnom stranom.

α. U opštem slučaju za rešavanje takvih jednačina treba izvršiti, prema (6), dve kvadrature.

β. Ako je poznato jedno partikularno rešenje, treba izvršiti još samo jednu kvadraturu. Zaista, ako je y_1 rešenje jednačine (2), tj. $\frac{dy_1}{dx} + P(x)\cdot y_1 \equiv Q(x)$, za određivanje razlike $z = y - y_1$, gde y mora da zadovoljava jednačinu $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, posle oduzimanja identiteta od jednačine, imamo za z jednačinu $\frac{dz}{dx} + Pz = 0$; a to je jednačina bez desne strane za čije rešenje treba izvršiti samo jednu kvadraturu, kako smo to gore pokazali.

γ. Ako su poznata dva partikularna integrala, opšti integral se dobiva bez ijedne kvadrature. Zaista, iz obrasca (6) vidimo da opšti integral y sa proizvoljnom konstantom C i dva partikularna integrala y_1 i y_2 sa konstantama C_1 i C_2 zadovoljavaju tri uslova:

$$y = A[B + C],\quad y_1 = A[B + C_1],\quad y_2 = A[B + C_2],$$

gde su oznake A i B očigledne. Iz dva poslednja uslova možemo odrediti vrednosti A i B. Ako te vrednosti stavimo u prvu jednačinu, dobićemo opšti integral y bez integracije. Konstanta C igra ulogu proizvoljne konstante.

Iz napisanih uslova neposredno sleduje proporcija

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{C - C_1}{C_2 - C_1} = C,$$

iz koje se dobiva ovaj obrazac za opšti integral linearne jednačine

$$y = y_1 + C(y_2 - y_1),$$

ako su poznata dva partikularna integrala y_1 i y_2 te jednačine; C je proizvoljna konstanta.

δ. Čitalac sam može da pokaže interesantnu geometrijsku osobinu partikularnih integrala linearne diferencijalne jednačine, naime: da se tangente na sve integralne krive iste linearne jednačine u tačkama sa istom apscisom seku u istoj tački.

ε. Možemo potvrditi da svaka linearna funkcija proizvoljne konstante C u obliku $y = C\varphi(x) + \psi(x)$ zadovoljava linearnu diferencijalnu jednačinu. Zaista, posle diferenciranja po x imamo $y' = C\varphi'(x) + \psi'$. Posle eliminisanja konstante C iz dve napisane jednačine dolazimo do ove linearne jednačine $\varphi \cdot y' = \varphi' y - \varphi' \psi + \varphi \psi'$.

2.21. Bernulijeva jednačina

Diferencijalna jednačina prvoga reda

$$(1) \qquad y' + p(x)\,y + q(x)\,y^n = 0$$

zove se *Bernulijeva jednačina*, po imenu matematičara Jakova Bernulija (J. Bernulli, 1654—1705), koji je postavio tu jednačinu 1695. godine. $p(x)$ i $q(x)$ su date neprekidne funkcije, a n je realan broj. Ako je $n = 0$, jednačina se pretvara u linearnu jednačinu sa desnom stranom $-q(x)$, a ako je $n = 1$ u linearnu jednačinu $y' + [p(x) + q(x)]\,y = 0$ bez desne strane.

Izvršimo sad u jednačini (1) zamenu

$$(2) \qquad y = z^{1/(1-n)},$$

gde je z nova nepoznata funkcija iste nezavisno promenljive x.

Pošto je $y' = \frac{1}{1-n} z^{n/(1-n)} z'$ nova jednačina uzima oblik

$$\frac{1}{1-n} z^{n/(1-n)} \frac{dz}{dx} + p(x)\, z^{1/(1-n)} + q(x)\, z^{n/(1-n)} = 0.$$

Posle množenja sa $(1-n)\,z^{-n/(1-n)}$ dobivamo jednačinu

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)\,[p(x)\cdot z + q(x)] = 0,$$

a to je linearna diferencijalna jednačina opšteg tipa sa desnom stranom $(n-1)\,q(x)$ u odnosu na nepoznatu funkciju $z(x)$. Posle određivanja te funkcije, obrazac (2) daje rešenje jednačine (1).

Vežbanja:

1. Eliminisati konstantu a iz jednačine $y=x^2+a$; obrnuto, izvršiti integraciju dobivene diferencijalne jednačine; protumačiti na tom primeru opšti i partikularni integral; nacrtati polje pravaca tangenata.

2. Slično prethodnom zadatku postupiti sa jednačinom $y=ax^2$.

3. Isto sa jednačinom $xy=a$.

4. Eliminisati konstante a i b iz jednačine $ax^2+by^2=0$ i dobiti diferencijalnu jednačinu prvoga reda.

5. Pokazati da su za diferencijalnu jednačinu $y'^2-xy'+y=0$ jednačine $y=C(x-C)$, $y=x-1$, $y=\frac{1}{4}x^2$ opšti, partikularni i singularni integral.

6. Izvesti diferencijalnu jednačinu krugova sa jednačinom $(x-2C)^2+y^2-C^2=0$, postaviti jednačinu uslova da napisana jednačina ima jednakih korena u odnosu na C i protumačiti rezultat geometrijski.

Integrisati jednačine: **7.** $y'=y$. **8.** $y'=x^2+y^2$. **9.** $(1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1-y^2$ (dva rešenja). **10.** Za diferencijalnu jednačinu $\frac{dy}{dx}-x=0$ naći integralnu krivu pod uslovom da ona prolazi kroz tačku $M_0(2, 3)$.

Eliminisati konstante iz jednačina: **11.** $\log x-\log(y-1)=c$. **12.** $\log x+e^{-y/x}=c$. **13.** $y=e^{-x}(ax^2+bx+c)$. **14.** $y=ae^x+be^{2x}$.

15. Pokazati da eliminisanje konstante c iz jednačine $y=f(x)+c\,\varphi(x)$ dovodi do linearne diferencijalne jednačine prvoga reda.

Integrisati jednačine: **16.** $\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$ **17.** $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^{10}$. **18.** $\frac{dy}{dx}+y\operatorname{cotg}x=\sin x$. **19.** $(x-1)(x-2)\frac{dy}{dx}+y=x^2$. **20.** $\frac{dy}{dx}+(y-x^2)\,x=0$. **21.** $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=y^2$. **22.** $\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=\frac{x}{\sqrt{y}}$. **23.** Da li se jednačina $\frac{dx}{dy}=M(y)\cdot x+N(y)$ može smatrati kao linearna jednačina? **24.** Za diferencijalnu jednačinu $x\frac{dy}{dx}+y=3$ odrediti integralnu krivu kroz tačku (1, 0).

2.3. Metode integracije diferencijalnih jednačina prvoga reda

Pregledajmo sada elementarne metode integracije diferencijalnih jednačina prvoga reda, koje smo već delimično

primenjivali u prethodnom izlaganju, a koje ćemo primenjivati i dalje u sve komplikovanijim slučajevima.

Videli smo da svaku jednačinu prvoga reda, rešenu po izvodu, možemo napisati u obliku

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0. \tag{1}$$

Sa leve strane u ovoj jednačini stoji izraz koji se zove *linearna diferencijalna forma od dve promenljive sa promenljivim koeficijentima.*

I. *Metoda razdvajanja promenljivih.* Videli smo da u specijalnom slučaju, kad su $P(x,y)=P(x)$, $Q(x,y)=Q(y)$, diferencijalna jednačina sa formom $P(x)\,dx+Q(y)(dy)$ odmah se integriše u obliku

$$\int P(x)\,dx+\int Q(y)\,dy+C=0. \tag{2}$$

Ako je diferencijalna jednačina data u obliku $y'=f(x,y)$ i funkcija $f(x,y)$ ima oblik količnika $f(x,y)=f_1(x):f_2(y)$, jednačinu $y'=\frac{f_1(x)}{f_2(y)}$ možemo zameniti ovom

$$f_2(y)\,dy=f_1(x)\,dx. \tag{3}$$

Za takvu jednačinu se kaže da su u njoj *promenljive razdvojene*: sa svake strane stoji diferencijal i funkcija samo jedne promenljive. Jasno je da se taj isti izraz može primeniti i na diferencijalnu jednačinu izraženu formom $f_1(x)\,dy+f_2(y)\,dx=0$, odnosno u obliku $\frac{dx}{f_1(x)}+\frac{dy}{f_2(y)}=0$.

Integral jednačine (3) se izražava $\int f_2(y)\,dy=\int f_1(x)\,dx+C$.

Ako se u jednačini (1) svaka od funkcija $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ izražava proizvodom dve funkcije, od kojih svaka zavisi samo od jedne promenljive, tj. ako imamo jednačinu

$$p_1(x)\cdot p_2(y)\,dx+q_1(x)\cdot q_2(y)\,dy=0,$$

onda podelom te jednačine proizvodom $p_2(y)\cdot q_1(x)$, pri čemu pretpostavljamo da u oblasti integracije nijedan od tih množilaca ne uzima vrednost nule, dolazimo do jednačine

3*

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)}\,dx + \frac{q_2(y)}{p_2(y)}\,dy = 0,$$

u kojoj su promenljive razdvojene. Jednačina se integriše sa dve kvadrature. Pokazani postupak se zove *metoda razdvajanja promenljivih.*

Vežbanja:

1. Za diferencijalnu jednačinu $\frac{dy}{dx} - x = 0$ naći integralnu krivu pod uslovom da ona prolazi kroz tačku $M_0(2, 3)$. **2.** Isto uraditi za jednačinu $\frac{dy}{dx} = y$ i tačku $M_0(0, 1)$. **3.** Integrisati jednačinu $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ i odrediti proizvoljnu konstantu iz uslova da je $y = 2$ za $x = 1$. **4.** Integrisati jednačinu $(1-y)\,dx - (1+x)\,dy = 0$. Integrisati jednačine: **5.** $\sqrt{1+y^2}\;dx = \sqrt{1+x^2}\,dy$. **6.** $(1+y^2)\,dy + (1+2y)\,x\,dx = 0$. **7.** Pokazati da diferencijalna jednačina $\sqrt{1-y^2}\;dx + \sqrt{1-x^2}\;dy = 0$, sem transcendentnog integrala $\arcsin x + \arcsin y = \text{const.}$, ima i algebarski integral $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \text{const.}$ Izvesti poslednji iz prvog. **8.** Izvesti transcendentni i algebarski integra jednačine $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$. **9.** Razdvojiti promenljive u jednačini $f_1(x)\,f_2(y)\,dx + \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)\,dy = 0$. **10.** Integrisati jednačinu $\frac{dy}{dx} = e^{mx}\;e^{ny}$ i odrediti partikularno rešenje pod uslovom da je $y = 0$ za $x = 0$ (m i n su konstante različite od nule). **11.** Naći opšti integral jednačine $y' \cdot \operatorname{tg} y = 2x$ i odrediti konstantu integracije iz uslova da je $y = 0$ za $x = 0$. **12.** Integrisati diferencijalnu jednačinu loksodrome (II, str. 140): $\operatorname{cotg}\alpha = d\theta : (\sin\theta \cdot d\psi)$.

II. *Metoda zamene promenljivih.* I ovu metodu smo već primenjivali pri izvođenju obrasca za rešenje linearne diferencijalne jednačine prvoga reda, kad smo nepoznatu funkciju y zamenili proizvodom od dve nepoznate funkcije.

U Teoriji diferencijalnih jednačina izbor promenljivih, pomoću kojih se izražava sadržaj datih diferencijalnih jednačina, od vrlo velike je važnosti. S jedne strane, diferencijalne jednačine koje izražavaju „u malom“, u diferencijalnim elementima, neku prirodnu vezu između tih elemenata i njihovih konačnih veličina, treba da budu izražene pomoću promenljivih koje najbliže odgovaraju suštini pojave. S druge strane, matematička obrada tako dobivenih diferencijalnih

jednačina može biti vrlo nezgodna sa matematičkog gledišta. Usled toga se prirodno pojavljuje pitanje o transformaciji diferencijalnih jednačina na novu, matematičku, formu, i novim promenljivim da nove jednačine možemo što jednostavnije matematički rešiti, a zatim dobiveno rešenje primeniti na tumačenje same pojave.

III. Pokažimo na tzv. *homogenim diferencijalnim jednačinama prvoga reda* kako zamena promenljivih može dovesti integraciju tih jednačina do kvadrature.

Jednačina $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ se zove *homogena*[1]) *diferencijalna jednačina prvoga reda.*

Ako stavimo $y = tx$, gde je t nova promenljiva, i uzmemo u obzir da je $dy = x\,dt + t\,dx$, naša jednačina prelazi u jednačinu $x\frac{dt}{dx} + t = f(t)$, u kojoj promenljive možemo razdvojiti:

$$\frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x}$$ i izvesti ovaj integral $$\log Cx = \int \frac{dt}{f(t) - t} = \Phi(t).$$

Ako $f(t) - t = 0$, tj. imamo jednačinu $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, integral uzima oblik $y = Cx$. Integralne krive homogenih diferencijalnih jednačina imaju naročitu geometrijsku osobinu, koja neposredno sleduje iz oblika tih jednačina.

Ako uzmemo tačku sa koordinatama x, y na nekoj integralnoj krivoj homogene diferencijalne jednačine $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$,

[1]) Funkcija $f\left(\frac{y}{x}\right)$ stoji u vezi sa homogenom funkcijom $\varphi(x,y)$ nultoga reda, kad je $\varphi(tx, ty) = \varphi(x, y)$.

koordinate $x_1 = Cx, y_1 = Cy$, gde je C proizvoljna konstanta, takođe zadovoljavaju istu diferencijalnu jednačinu, jer je $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx}$ i $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y}{x}$. Prema tome tačke sa koordinatama $x_1, y_1 = y_1(x)$ takođe pripadaju integralnoj krivoj, a pri C proizvoljnom — opštem integralu iste diferencijalne jednačine. Pošto transformacija $x_1 = Cx, y_1 = Cy$ odgovara homotetiji, tj. sličnosti i sličnom položaju tačaka sa centrom homotetije u početku koordinata, možemo tvrditi da su sve integralne krive određene homogene diferencijalne jednačine homotetične u odnosu na početak koordinata i da se razlikuju samo koeficijentom homotetije. Prema tome pomoću jednog partikularnog integrala mogu biti konstruisani svi ostali, njihova porodica. Iz homotetije integralnih krivih sleduje da, u svim tačkama preseka tih krivih pravom iz početka koordinata, tangente na krive čine iste uglove sa tom pravom, tj. te krive su *izokline (istog nagiba)* u odnosu na tu pravu.

Na homogenu jednačinu može biti svedena i jednačina

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right),$$

gde su a, b, c; a_1, b_1, c_1 konstante, koje zadovoljavaju uslov $ab_1 - ba_1 \neq 0$.

Uvedimo nove promenljive x_1, y_1 pomoću jednačina $x = x_1 + \xi, y = y_1 + \eta$, gde su ξ i η koreni sistema jednačina $a\xi + b\eta + c = 0$, $a_1\xi + b_1\eta + c_1 = 0$. Pošto sa takvim vrednostima ξ i η imamo: $dy = dy_1, dx = dx_1$; $ax + by + c = ax_1 + by_1 + a\xi + b\eta + c = ax_1 + b\eta_1$, $a_1x + b_1y + c_1 = a_1x_1 + b_1y_1$, gornja diferencijalna jednačina se transformiše u

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{y_1}{x_1}}{a_1 + b_1\frac{y_1}{x_1}}\right) = \varphi\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$$

i, prema tome, dobiva se homogena jednačina, za koju je poznat postupak rešavanja.

Ako koeficijenti a, b, a_1, b_1 zadovoljavaju uslov $ab_1 - a_1b = 0$, znači i $a_1x + b_1y + c_1 = \rho(ax + by) + c_1$, gde je $\rho = a_1/a = b_1/b$, onda, posle zamene $ax + by = y_1$, odakle je $y = (y_1 - ax)/b$, jednačina (4) uzima oblik $\frac{dy_1}{dx} = bf\left(\frac{y_1 + c}{\rho y_1 + c_1}\right) + a = \varphi(y_1)$. Sa novom označenom funkcijom $\varphi(y_1)$ jednačina se rešava kvadraturom

$$x + C = \int \frac{1}{\varphi(y_1)}\, dy_1.$$

Vežbanja:

Integrisati jednačine: **1.** $(x + y)\,dx + (y - x)\,dy = 0$. **2.** $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$. **3.** $(x^2 + y^2)\,dx = 2xy\,dy$. **4.** $(3y - 7x + 7)\,dx = (3x - 7y - 3)\,dy$. **5.** $(x + 2y + 1)\,dy = (2x + 4y + 3)\,dx$. **6.** $\frac{dy}{dx} = \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}$. **7.** $y' - \frac{xy}{2(x^2 - 1)} - \frac{x}{2y} = 0$. **8.** $(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$.

2.4. Totalan diferencijal. Metoda integracionog množioca

Videli smo da svaku diferencijalnu jednačinu prvoga reda u obliku rešenom u odnosu na izvod možemo napisati pomoću linearne forme

$$(1) \qquad P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0,$$

gde su $P(x, y), Q(x, y)$ neprekidne i u datoj oblasti diferencijabilne funkcije po x i y.

Uporedimo levu stranu te jednačine sa izrazom totalnog diferencijala neke funkcije $U(x, y)$ dve promenljive

$$(2) \qquad \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy = dU(x, y).$$

Ako su (3) $P(x, y) \equiv \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q(x, y) \equiv \frac{\partial U}{\partial y}$, jednačinu (1) možemo zameniti jednačinom

$$(4) \qquad dU(x, y) = 0,$$

a ova dovodi do integrala (5) $U(x, y)=C$ jednačine (2) pod uslovima (3).

Postavimo sad pitanje: kako ispitati funkcije P i Q da li one zadovoljavaju uslove (3)? Ako funkciju P diferenciramo po y, a funkciju Q po x, iz (3) imamo $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial x}$ odakle, pretpostavljajući da u svakoj tački drugi izvod funkcije $U(x, y)$ ne zavisi od reda diferenciranja, imamo *neophodan uslov*

$$(5) \qquad \frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x},$$

da linearna forma (6) $P\,dx+Q\,dy$ bude totalan diferencijal. Pokažimo da je taj uslov i dovoljan, tj. da pod uslovom (5) forma (6) zaista predstavlja totalni diferencijal neke funkcije. Za dokaz pokažimo kako se stvarno može odrediti funkcija $U(x, y)$. Iz uslova $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x, y)$, smatrajući y kao konstantu, imamo $U=\int P(x, y)\,dx+C(y)$, gde je $C(y)$ proizvoljna funkcija promenljive y, konstante pri integraciji po x. Za određivanje te proizvoljne funkcije diferencirajmo prethodnu jednačinu po y. Uzimajući u obzir da je izvod $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$, dolazimo do jednačine $Q(x, y) = \displaystyle\int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx + \frac{dC(y)}{dy}$. Iz ove jednačine imamo kvadraturu za određivanje funkcije $C(y)$, naime $C(y) = \displaystyle\int\left[Q - \int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\right]dy + C$, gde je C prava konstanta.

Ali izvršenje prethodne kvadrature moguće je jedino pod uslovom da podintegralna funkcija zavisi samo od y, a ne više od x. A to je zaista tako, jer je njen izvod po x, naime

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, prema uslovu (5), identički jednak nuli. Prema tome pod uslovom (5) zaista možemo odrediti funkciju (7) $U(x, y) = \displaystyle\int P(x, y)\,dx + \int\left[Q(x, y) - \int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\right]dy + C.$

Posle određivanja te funkcije integral jednačine (1) uzima oblik $U(x, y)=C$. Tada se kaže da je jednačina (1) izražena *totalnim diferencijalom* i njen integral je (5).

Primer. $(y^2+4xy+3x^2+7y)\,dx+(2xy+2x^2+3y^2+7x)\,dy$ je tačan diferencijal, jer je $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(y^2+4xy+3x^2+7y\right) = 2y+4x+7 \equiv \dfrac{\partial}{\partial x}\left(2xy+2x^2+3y^2+7x\right) = 2y+4x+7$. Za određivanje integrala prvo izračunavamo: $\int P(x, y)\,dx = \int (y^2+4xy+3x^2+7y)\,dx = xy^2+2x^2y+x^3+7xy$, a zatim određujemo podintegralnu funkciju drugog integrala $Q - \displaystyle\int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx = 3y^2$, pa prema tome drugi integral daje $\int 3y^2\,dy = y^3+C$, i na taj način imamo integral tačnog diferencijala $U(x, y) = xy^2+2yx^2+x^3+y^3+7xy+C$.

Primetimo, da određivanje funkcije $U(x, y)$, pod uslovom (5), možemo početi integracijom prvo funkcije $Q(x, y)$ po y; tada ćemo dobiti rešenje

$$(7^*) \quad U(x, y) = \int Q(x, y)\,dy + \int\left[P(x, y) - \int \frac{\partial Q}{\partial x}\,dy\right]dx + C.$$

Uzmimo sad diferencijalnu jednačinu, takođe izraženu formom

$$(2x^2-y^2)\,dx+2xy\,dy=0.$$

Pošto je $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2y,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=2y$, vidimo da je $\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ i prema tome leva strana napisane jednačine nije totalni diferencijal. Međutim, ako pomnožimo tu jednačinu sa $1/x^2$ dobijamo jednačinu

$$\frac{2x^2-y^2}{x^2}\,dx+\frac{2y}{x}\,dy=0,$$

koja je identična ($x\neq 0$) sa datom jednačinom. Pri tome je $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{2x^2-y^2}{x^2}\right)=-\dfrac{2y}{x^2}$ i $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{2y}{x}=-\dfrac{2y}{x^2}$; znači da je uslov $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ zadovoljen: u novoj formi leva strana jednačine je totalni diferencijal funkcije $U(x,y)$ koja se određuje ovako

$$U(x,y)=\int\left(2-\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\int\left[\frac{2y}{x}-\int\left(-\frac{2y}{x^2}\right)dx\right]dy=2x+\frac{y^2}{x}+C.$$

Iz ovog primera možemo izvesti ovaj zaključak. Može se dogoditi da leva strana diferencijalne jednačine $P\,dx+Q\,dy=0$ ne predstavlja totalni diferencijal, ali posle množenja nekom funkcijom $\mu(x,y)$ ona postaje totalni diferencijal, posle čega se rešava po pokazanom postupku za totalni diferencijal, i to pomoću kvadratura. Takav množilac $\mu(x,y)$ zove se *integracioni množilac*, odnosno *faktor date diferencijalne jednačine prvoga reda*. Prirodno se postavlja pitanje: kako se može odrediti taj množilac?

Neka novi koeficijenti μP i μQ zadovoljavaju uslov totalnog diferencijala, tj. $\dfrac{\partial}{\partial y}(\mu P)=\dfrac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$. Odavde imamo jednačinu

$$Q\frac{\partial\mu}{\partial x}-P\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

za određivanje integracionog množioca. Ova jednačina spada u parcijalne jednačine prvoga reda sa jednom nepoznatom funkcijom od dve promenljive i to linearne, kako u odnosu na izvode tako i u odnosu na samu funkciju. Na ovom mestu nećemo ulaziti u problem rešavanja takvih jednačina. Pokažimo samo nekoliko rešenja za diferencijalne jednačine određenog tipa.

Ako jednačina dopušta množilac koji zavisi samo od jedne promenljive, recimo od x, on treba da zadovoljava običnu diferencijalnu jednačinu $Q\dfrac{d\mu}{dx}=\mu\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)$. Tako, npr., za $P=2x^2-y^2$, $Q=2xy$ imamo jednačinu $x\dfrac{d\mu}{dx}=-2\mu$, koja, posle transformacije $\dfrac{d\mu}{\mu}=-2\dfrac{dx}{x}$, daje rešenje $\mu=1/x^2$, koje je i poslužilo za rešavanje zadatka.

Čitalac može potvrditi da se za linearnu jednačinu $(Py-Q)\,dx+dy=0$ množilac određuje iz jednačine $\dfrac{d\mu}{dx}=\mu P$ i, prema tome, ima vrednost $\mu=e^{\int P(x)\,dx}$. Za homogenu jednačinu, koju možemo napisati u obliku $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$, gde su P i Q homogene funkcije iste dimenzije, množilac ima oblik $1:(xP+yQ)$.

Odgovorimo još na neka opšta pitanja o integracionom množiocu diferencijalne jednačine prvoga reda, čiji opšti integral možemo izraziti jednačinom $U(x,y)=C$. Da li svaka diferencijalna jednačina ima množilac? I ako ima, koliko ih je?

Ako imamo jednačinu $P\,dx+Q\,dy=0$ i znamo da njen integral ima oblik $U(x,y)=C$, onda posle diferenciranja tog integrala $\dfrac{\partial U}{\partial x}dx+\dfrac{\partial U}{\partial y}dy=0$ i upoređivanja ovog rezultata sa prethodnom jednačinom imamo relacije $\dfrac{\partial U}{\partial x}:P=\dfrac{\partial U}{\partial y}:Q=\mu$.

Odavde zaključujemo da su $\mu P = \frac{\partial U}{\partial x}$ i $\mu Q = \frac{\partial U}{\partial y}$, tj. za svaku diferencijalnu jednačinu prvoga reda sa integralom rešenim po konstanti integracije uvek postoji integracioni množilac.

Lako je videti da takvih integracionih množilaca može biti čak beskrajno mnogo. Zaista, ako je μ jedan od takvih množilaca, onda je i $\mu^* = \mu \varphi(U)$, gde je φ proizvoljna funkcija leve strane integrala $U(x, y) = C$, takođe integracioni množilac. Zaista, ako je $\mu(P\,dx + Q\,dy) = dU$, onda je $\mu^*(P\,dx + Q\,dy) = \mu \varphi(U)(P\,dx + Q\,dy) = \varphi(U)\,du$. A to je takođe totalni diferencijal funkcije $\Phi(U) = \int \varphi(U)\,dU$.

Iz postavljene veze, $\mu^* = \mu \varphi(U)$, između dva različita integraciona množioca neposredno sleduje da količnik takva dva množioca, izjednačen sa proizvoljnom konstantom, dovodi do opšteg integrala polazne diferencijalne jednačine. Pri tome iz $\varphi(U) = C$ možemo zaključiti da je i $U =$ const.

U vezi sa proučavanjem diferencijalnih jednačina prvoga reda navedimo da linearne diferencijalne forme igraju važnu ulogu u primenama matematike na razne oblasti tehnike. Tako u termodinamici osnovnu ulogu igra jednačina $T\,ds = dU + P\,dV$, koja izražava prvi i drugi zakon termodinamike. U toj jednačini T je apsolutna temperatura, S — entropija, koja je vezana sa količinom toplote, Q, jednačinom $dQ = T\,dS$. U je unutrašnja energija tela, P — pritisak i V — zapremina materije na koju se odnosi napisana jednačina.

Vežbanja:

1. Potvrditi da je leva strana jednačine $(6x - 2y + 1)\,dx + (2y - 2x + 3)\,dy = 0$ totalni diferencijal i integrisati jednačinu.

2. Pokazati da je integracioni množilac jednačine $y\,dx - x\,dy = 0$ jednak $1/xy$ i integrisati jednačinu.

3. Naći integracioni množilac jednačine $(x^3 + y)\,dx + x\,dy = 0$ i integrisati jednačinu. 4. Isto sa jednačinom $x\frac{dy}{dx} + y = y^2 \log x$.

2.5. Rikatijeva jednačina

Pri sistematskom proučavanju diferencijalnih jednačina posle linearne jednačine (2.2), u kojoj je izvod y' linearna funkcija nepoznate funkcije y, treba posmatrati jednačinu u kojoj je izvod kvadratna funkcija promenljive y, naime jednačinu, koja je u opštem obliku $p_0(x)y' + p_2(x)y^2 + p_1(x)y + q(x) = 0$, i koja može biti svedena ($p_0(x) \neq 0$) na jednačinu

(1) $$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x).$$

Diferencijalna jednačina ovog oblika zove se *Rikatijeva jednačina* (Jacobo Francesco Riccati, 1676—1754). Ako je $P(x) \equiv 0$ jednačina postaje linearna, a pri $R(x) \equiv 0$ Bernulijeva.

Rikatijeva jednačina opšteg oblika (1) spada u onu kategoriju diferencijalnih jednačina koje, u opštem slučaju, ne mogu biti rešene kvadraturama kako je to pokazao Lijuvil (J. Liouville, 1809—1882). Ali i Rikatijeva jednačina može biti rešena i proučena, sem kvadrature, i to pomoću drugih načina izražavanja funkcionalnih veza, npr. pomoću beskonačnih redova i proizvoda.

U specijalnim slučajevima može i Rikatijeva jednačina biti rešena kvadraturom.

Primeri.

1. $y' + y^2 - 1 = 0$. U ovoj Rikatijevoj jednačini promenljive se razdvajaju, naime imamo $dx = dy : (1 - y^2)$, odakle $dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\right)dy$, što dovodi do integrala $y = \frac{Ce^{2x} - 1}{Ce^{2x} + 1}$, gde je C proizvoljna konstanta.

2. $y' + y^2 - \frac{1}{x^2} = 0$. Ako upotrebimo zamenu $y = \frac{1}{z}$, dobićemo jednačinu $\frac{dz}{dx} = 1 - \left(\frac{z}{x}\right)^2$, koja spada u homogene jednačine. Zamena $z/x = t$ dovodi je do kvadrature.

Rikatijeva jednačina, kao nerešljiva u opštem slučaju pomoću kvadrature, bila je predmet mnogobrojnih transformacija sa svrhom da se dovede na što prostiji oblik ili da se pronađu specijalni rešljivi slučajevi te jednačine.

Navedimo, bez dokaza, neke poznate osobine te jednačine.

1. Zamenom promenljivih Rikatijeva jednačina se može dovesti do oblika $\frac{dy}{dx} \pm y^2 = f(x)$.

2. Ako su poznata partikularna rešenja Rikatijeve jednačine, opšti integral te jednačine se može dobiti pomoću kvadratura i to: ako je poznato jedno partikularno rešenje — sa dve kvadrature; ako su poznata dva takva, nezavisna, rešenja — sa jednom kvadraturom; ako su tri — bez kvadrature. U poslednjem slučaju, sa partikularnim rešenjima y_1, y_2, y_3 opšti integral y se određuje iz jednačine

$$\frac{y-y_2}{y-y_1} : \frac{y_3-y_2}{y_3-y_1} = C,$$

gde je C proizvoljna konstanta integracije.

3. Ako je opšti integral diferencijalne jednačine bilinearna razlomljena funkcija proizvoljne konstante, tj. $y = \frac{\varphi_1 + C\varphi_2}{\varphi_3 + C\varphi_4}$, pri čemu determinanta $\varphi_1\varphi_4 - \varphi_2\varphi_3 \neq 0$, diferencijalna jednačina je Rikatijeva.

4. Rikatijeva jednačina i njen integral postavljaju vrlo važnu prirodnu vezu između dve promenljive. To pokazuje, npr., i stav da se određivanje obrtanja čvrstog tela oko nepomične tačke prema datoj ugaonoj brzini, kao vektoru, svodi, u opštem slučaju, na integraciju Rikatijeve jednačine.

Vežbanja:

1. Eliminisati konstantu C iz jednačine $(f_1 + Cf_2)y = f_3 + Cf_4$, gde su f_1, f_2, f_3, f_4 funkcije x-a, koje zadovoljavaju uslov $f_1f_4 - f_2f_3 \neq 0$.

2. Pokazati da se Rikatijeva jednačina (1), posle zamene $y = Y + \frac{1}{z}$, gde je Y partikularni integral jednačine (1), a z nova promenljiva, svodi na linearnu jednačinu u odnosu na z.

3. Potvrditi da jednačina $y' = y^2 + xy + x - 1$ ima partikularni integral $y = -1$ i integrisati jednačinu zamenom prethodnog zadatka.

2.6. Diferencijalne jednačine prvoga reda u implicitnom obliku

U opštem obliku diferencijalna jednačina prvoga reda u implicitnom, odnosno nerešenom obliku izgleda (1) $\varphi(x, y, y') = 0$. Ako se funkcija φ rastavlja na množioce prvog stepena po y'

$$\varphi(x, y, y') = \varphi_0(x, y)\,[y' - \varphi_1(x, y)]\,[y' - \varphi_2(x, y)] \ldots = 0,$$

problem integracije jednačine (1) se svodi na integraciju niza jednačina $y' = \varphi_i(x, y)$, gde je $i = 1, 2 \ldots$ prema broju množilaca. Ako se može rešiti svaka od navedenih jednačina, skup svih takvih rešenja čini rešenje jednačine (1). Taj skup predstavlja skup odgovarajućih integralnih krivih. Kroz tačke ravni Oxy može se povući više krivih koje zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu (1) i postavljene početne uslove.

Primer. $y'^2 - 2yy' - 2y' + 2y + 1 = 0$. Rastavljamo ovako $(y' - 1)(y' - 1 - 2y) = 0$. Prva jednačina, $y' - 1 = 0$, ima očevidan integral $y = x + C$. U drugoj jednačini, $y' - 1 - 2y = 0$, promenljive se razdvajaju i dovode do integrala $y = \frac{1}{2}(Ce^{2x} - 1)$.

Ako postavimo zadatak da se nađu integralne krive koje prolaze kroz tačku $x_0 = 2, y_0 = 1$, posle određivanja proizvoljnih konstanata imamo ova dva partikularna integrala $y = x - 1$ i $y = \frac{1}{2}(3e^{2x-4} - 1)$. Čitalac može proučiti te krive u oblasti $0 < x < 2$.

Proučavanje diferencijalnih jednačina prvog reda višeg stepena, u opštem obliku, koje se ne raspadaju na jednačine linearne u odnosu na y', predstavlja složeno pitanje; o njemu se ne može govoriti u ovoj elementarnoj knjizi. Uzmimo u obzir samo neke specijalne slučajeve.

1. Neka funkcija φ, u jednačini (1), ne zavisi od y, tj. neka ima oblik (2) $\varphi(x, y') = 0$. Ako je ta jednačina rešljiva po y', dolazimo do jednačina tipa $y' = f(x)$, koje se rešavaju pomoću kvadratura. Ali se može desiti i da jednačina nije

rešljiva po y', već je rešljiva po x i, prema tome, može biti napisana u obliku $x=\psi(y')$. Označimo izvod y' sa p i smatrajmo ga kao promenljivi parametar. Tada imamo $x=\psi(p)$ i, s druge strane, $dy=p\,dx$. Pošto posle diferenciranja prve jednačine imamo $dx=\psi'(p)\,dp$, diferencijal dy se može izraziti ovako $dy=p\,\psi'(p)\,dp$, i tada imamo kvadraturu $y=\int p\,\psi'(p)\,dp+C$. Ova kvadratura zajedno sa jednačinom $x=\psi(p)$, određuje integralnu krivu u parametarskom obliku. Ulogu parametra igra izvod $y'=p$.

Primer. $x=\sin y'-y'$. Stavimo $y'=p$ i $x=\sin p-p$. Posle toga imamo $dy=p\,dx=p\dfrac{dx}{dp}\,dp=p(\cos p-1)\,dp$ što dovodi do kvadrature $y=p\sin p+\cos p-\dfrac{1}{2}p^2+C$, jer je $\int p\cos p\,dp=$ $=\int p\,d\sin p=p\sin p-\int\sin p\,dp=p\sin p+\cos p$. Jednačine $x=$ $=\sin p-p$, $y=p\sin p+\cos p-\dfrac{1}{2}p^2+C$ izražavaju integralnu krivu opšteg integrala u parametarskom obliku.

Slično se rešavaju diferencijalne jednačine kad funkcija $\varphi(x,y,y')$ ne sadrži promenljive y, tj. kad imamo jednačinu (3) $\varphi(y,y')=0$. Ako je ona rešljiva po y', imamo $y'=f(y)$, a to dovodi do kvadrature $dx=\dfrac{dy}{f(y)}$. Ako se (3) rešava po y, imamo jednačinu $y=\theta(p)$, gde smo ponovo stavili $y'=p$. Za određivanje x u funkciji p imamo jednačinu $dx=dy/p=$ $=\theta'(p)\cdot dp/p$ i kvadraturu $x=\displaystyle\int\frac{\theta'(p)}{p}\,dp+C$, koja, zajedno sa jednačinom $y=\theta(p)$, određuje opšti integral u parametarskom obliku.

Primer. $y=e^{y'}y'^3=e^p p^3$. Određujemo $dx=\dfrac{dy}{p}=e^p(p^3+$

$+3p^2)\dfrac{dp}{p}=e^p(p^2+3p)\,dp$. Posle integracije imamo vrednost $x=e^p(p^2+p-1)+C$, koja, sa gornjom vrednošću y, određuje parametarsko rešenje date jednačine.

Vežbanja:

Integrisati jednačine: **1.** $y'^2+yy'+2y'+y+1=0$. **2.** $y\,y'^2+(x-y)\,y'-$ $-x=0$. **3.** $x=(1+y')^2$. **4.** $y=(1+y'^2)^2$. **5.** $x=y'^2\sin y'$.

2.7. Metoda ponovnog diferenciranja. Kleroova jednačina

U prethodnom članu u specijalnim slučajevima jednačine $\varphi(x,y,y')=0$ primenjivali smo za integraciju naročitu metodu, koja se zove *metoda ponovnog diferenciranja*. Pokažimo sad i na opštoj jednačini $\varphi=0$ primenu te metode.

Neka je diferencijalna jednačina data u obliku $y=f(x,y')$. Stavimo $y'=p$ i diferencirajmo prethodnu jednačinu po x: $\dfrac{dy}{dx}=$ $=p=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{dp}{dx}$. Dobivena diferencijalna jednačina, za određivanje p kao funkcije x, može biti jednostavnija od polazne jednačine. Posle rešenja te jednačine imamo $p=F(x,C)$. Ako tu vrednost stavimo u polaznu jednačinu, dobićemo opšti integral u obliku $y=f(x,F(x,C))$.

Primer. $y=1-px+\dfrac{1}{2}p^2$. Diferencirajmo po x: $\dfrac{dy}{dx}=p=$ $=-p+(-x+p)\dfrac{dp}{dx}$. Određujemo $\dfrac{dx}{dp}+\dfrac{1}{2p}x=\dfrac{1}{2}$ i rešavamo linearnu jednačinu; imamo: $x=\dfrac{1}{3}p+\dfrac{C}{\sqrt{p}}$. Sa tom vrednošću imamo $y=1+\dfrac{1}{6}p^2-C\sqrt{p}$. Dobili smo dve jednačine za izražavanje integralne krive u parametarskom obliku.

Sad uzmimo slučaj jednačine rešene po $x: x=f(y,y')=$ $=f(y,p)$. Diferencirajmo po y i zamenimo $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+$ $+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}$. Rešenje ove jednačine ima oblik $p=\theta(y,C)$. Ako stavimo u polaznu jednačinu, dobićemo traženi integral: $x=$ $=f(y,\theta(y,C))$.

Primer. $y'^2-xy'+y=0$. Jednačinu rešavamo po x: $x=$ $=y'+\frac{y}{y'}$. Stavljamo $y'=p$, $x=p+\frac{y}{p}$ i diferenciramo po y smatrajući x kao funkciju y: $\frac{1}{p}=\frac{1}{p}+\left(1-\frac{y}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}$. Pošto smo dobili jednačinu $\left(1-\frac{y}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}=0$, dolazimo, prvo, do jednačine $\frac{dp}{dy}=0$, odakle sleduje da je $p=C$ i da je opšti integral $x=p+\frac{y}{p}$, ili $y=C(x-C)$. Drugi množilac, $1-\frac{y}{p^2}$, daje zajedno sa polaznom jednačinom rešenje $1-\frac{y}{p^2}=0$, $x=p+\frac{y}{p}$, ili $x=2p$, $y=p^2$, a to je singularno rešenje u parametarskom obliku.

Istim postupkom, ponovnim diferenciranjem, rešava se i *Kleroova* (*A. C. Clairaut*, 1713—1765) jednačina

$$y=xy'+f(y'). \tag{1}$$

Stavimo $y'=p$ i jednačinu $y=xp+f(p)$ diferencirajmo po x. Dobivamo jednačinu $p=p+\left(x+\frac{df}{dp}\right)\frac{dp}{dx}$, ili $\left(x+\frac{df}{dp}\right)\frac{dp}{dx}=0$.

Prvo rešenje te jednačine $\frac{dp}{dx}=0$ daje $p=C$, gde je C proizvoljna konstanta i, prema tome, imamo opšti integral $y=Cx+f(C)$. Tom integralu odgovara porodica pravih linija sa proizvoljnim ugaonim koeficijentom i početnom ordinatom, datom funkcijom tog koeficijenta. Drugo rešenje, u obliku (2) $x+\frac{df}{dp}=0$, zajedno sa polaznom jednačinom u obliku (3) $y=xp+f(p)$, singularno je rešenje Kleroove jednačine u parametarskom obliku. Dokažimo da je to zaista rešenje jednačine (1). Prema jednačinama $x=-f'(p)$ i $y=-pf'(p)+f(p)$ određujemo $y'=$ $=\frac{dy}{dx}=(-pf''(p)):-f''(p)=p$, posle čega od diferencijalne jednačine (1) dobivamo identitet $-pf'(p)+f(p)\equiv-f'(p)\cdot$ $\cdot p+f(p)$. Kako dobiveno rešenje ne predstavlja pravu liniju, tj. ne javlja se kao partikularni integral, ono je singularni integral.

Vežbanja:

Rešiti ove Kleroove jednačine: **1.** $y=x\frac{dy}{dx}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$. **2.** $y=x\frac{dy}{dx}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$. **3.** $y=xy'+e^{(y')^2}$. **4.** $y=x\frac{dy}{dx}+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

2.8. Približno rešavanje diferencijalne jednačine prvoga reda

U prethodnom izlaganju smo videli da se samo u posebnim slučajevima može dobiti rešenje diferencijalne jednačine u konačnom obliku, izraženu pomoću dobro poznatih, tzv. elementarnih funkcija. Čak i ono rešenje koje se svodi na kvadrature i koje se smatra, sa gledišta Teorije diferencijalnih jednačina, kao izvedeno, često zahteva izračunavanje toliko komplikovanih kvadratura da dobiveno rešenje ipak ne može služiti praktičnim ciljevima.

4*

Kako za objašnjenje prirodnih pojava, tako i za rešavanje tehničkih problema, i u praktičnom životu, gde se primenjuje aparat Više matematike, glavnu ulogu igraju baš diferencijalne jednačine, pri čemu se traže njihova rešenja dovedena do konkretnih numeričkih rezultata. U Teoriji diferencijalnih jednačina oduvek su vrlo važnu ulogu igrale *Metode približnog rešavanja diferencijalnih jednačina* sa unapred postavljenom, tzv. astronomskom tačnošću.

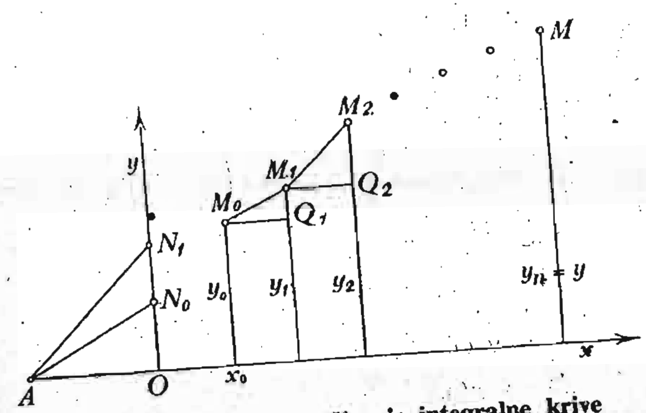
Naše vreme deli istoriju tih metoda u dva dela: period do elektronskih mašina i nov period sa mašinama, koje za nekoliko časova daju rezultat koji je ranije zahtevao godine rada. Izlaganju metoda približne integracije diferencijalnih jednačina, kako bez mašina tako i sa mašinama (programiranje), posvećena je velika specijalna literatura, a i specijalni računski instituti imaju svoje razrađene postupke za rešavanje raznih diferencijalnih jednačina i za utabličavanje njihovih rešenja. Pregled efikasnih savremenih metoda, bez obzira na njihov veliki praktični značaj, ne može biti tretiran u ovoj elementarnoj knjizi. Navešćemo samo kratka objašnjenja elementarnih metoda koje više služe za dublje razumevanje prirode onih funkcionalnih veza, koje postavljaju diferencijalne jednačine.

a. *Grafička metoda.* Uzmimo diferencijalnu jednačinu prvoga reda u rešenom obliku (1) $y'=f(x,y)$. Tri veličine: x, y, y', koje određuju položaj tačke i tangentu na integralnoj krivoj, u toj tački, sačinjavaju *diferencijalni element date diferencijalne jednačine za datu tačku.* Ako funkcija zadovoljava određene uslove i diferencijalni element je određen, kroz odgovarajuću tačku oblasti prolazi integralna kriva date diferencijalne jednačine i pri tome samo jedna. To je *obična tačka diferencijalne jednačine.* Ako funkcija $f(x,y)$ ne zadovoljava potrebne uslove za određene vrednosti (x,y), tačka je *singularna.* Niže ćemo navesti nekoliko primera singularnih tačaka diferencijalnih jednačina prvoga reda.

Za crtanje integralne krive u oblasti obične polazne tačke može se primeniti postupak analogan onom koji smo primenili za grafičko određivanje vrednosti integrala

$$J=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \text{ (III, str. 164).}$$

U koordinatnom sistemu Oxy (sl. 7) uzimamo tačku $A(-1,0)$. Za crtanje integralne krive postupamo ovako. 1. Uzimamo polaznu tačku $M_0(x_0,y_0)$. 2. Računom iz (1) određujemo $f(x_0,y_0)=(y')_{M_0}$. 3. Određujemo tačku $N_0(0,y_0')$ i povlačimo pravu AN_0. 4. Iz M_0 povlačimo pravu do preseka



Sl. 7 — **Grafičko određivanje integralne krive**

sa pravom $x=x_1$, paralelnu pravoj AN_0, u tački M_1. Isti postupak treba izvršiti i sa početnom tačkom M_1 i produžiti ga dok ne dođemo do ordinate koja odgovara apscisi x.

Jasno je da takva grafička metoda može poslužiti samo za vrlo grubo ocenjivanje ponašanja integralne krive, naročito kad je interval $|x-x_0|$ veliki i funkcija $f(x,y)$ se u tom intervalu primetno menja.

b. *Numerička metoda.* Ako grafički postupak, kako je objašnjen u članu a., izrazimo algebarskim jezikom dobićemo računski postupak za određivanje integralne krive u granicama od x_0 do x.

Kako iz sličnosti trouglova $Q_1M_0M_1$ i OAN_0 imamo $(y_1-y_0):(x_1-x_0)=ON_0:1=f(x_0,y_0)$, odakle je

$$y_1-y_0=f(x_0,y_0)(x_1-x_0).$$

i slično dalje $y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$,

. . . .

$$y - y_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})(x - x_{n-1}),$$

gde je $y_n = y$. Posle sabiranja izvodimo obrazac

$$y = y_0 + \sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i, y_i)\ (x_{i+1} - x_i).$$

Ako je interval $x - x_0$ podeljen na n jednakih delova, dolazimo do jednostavnijeg rezultata $y = y_0 + h \sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i, y_i)$, gde je $h = (x - x_0) : n$.

Jasno je da je poslednji obrazac utoliko tačniji ukoliko je interval $x - x_0$ manji i broj podela n veći i ukoliko su tačnije izračunate vrednosti $f(x, y)$.

c. *Metoda uzastopnih aproksimacija.* Da dođemo do rešenja diferencijalne jednačine (1) $y' = f(x, y)$, sa početnim uslovom $y_0 = [y(x)]_{x=x_0}$, izrazimo prethodnu jednačinu u obliku $\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$ i izvršimo integraciju leve i desne strane u granicama od x_0 do x. Zadatak integracije tada možemo izraziti obrascem

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt, \tag{2}$$

gde je t pomoćna promenljiva pri određivanju određenog integrala u granicama od x_0 do x i koji se, prema tome, javlja kao funkcija promenljive x i konstante x_0. Da je (2) zaista rešenje jednačine (1) sa datim početnim uslovima, sleduje iz toga što: 1. za $x = x_0$ integral (2) ima vrednost nule i prema tome je $y = y_0$; 2. y iz (2) zadovoljava diferencijalnu jednačinu (1), što sleduje iz neposrednog diferenciranja, jer, po pravilu diferenciranja određenog integrala po gornjoj granici, imamo $y' = f(x, y(x))$, a to je jednačina (1).

Poslužimo se jednačinom (2) za obrazovanje uzastopnih približnih rešenja jednačine (1). Za polaznu približnu vrednost funkcije $y(x)$ uzmimo stalnu početnu vrednost y_0. Tada ćemo dobiti prvu približnu vrednost

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt. \tag{3}$$

Podintegralna funkcija $f(t, y_0)$ je postala poznata funkcija t i, prema tome, možemo izvršiti, tačno ili približno, poznatu operaciju izračunavanja običnog određenog integrala. Pošto izvršimo tu integraciju dobivamo funkciju y_1, koju ćemo smatrati kao novu, približniju vrednost nepoznate funkcije y. Pomoću te funkcije iz (2) dobivamo naredno rešenje, $y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\, dt$. Taj postupak se produžuje prema opštem obrascu

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt.$$

Može se dokazati da, pod izvesnim uslovima koje treba da zadovoljava funkcija $f(x, y)$ u određenoj oblasti, rešenje y_n ima graničnu vrednost kad $n \to \infty$. To znači da postoji takav broj N uzastopnih operacija da, od tog broja, moduo razlike $|y_n(x) - y(x)|$ postaje i ostaje manji od unapred datog broja ε. Pri tome taj proces može biti i ravnomerno konvergentan kad broj N ne zavisi od vrednosti x u datoj oblasti.

d. *Integracija pomoću redova.* Poznato je da za izražavanje funkcionalne veze između nezavisno promenljive x i zavisne y može da posluži izraz funkcije u obliku reda, bilo funkcionalnog, kad su članovi reda određene funkcije $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots$, bilo, specijalno, stepenog, kad su članovi stepeni promenljive x, tj. $x^0, x, x^2, \ldots$, sa određenim koeficijentima.

Proučimo rešavanje diferencijalne jednačine prvoga reda pomoću stepenih redova. Ono se sastoji iz dva dela: 1. iz tzv. *formalnog rešenja* i 2. *iz ispitivanja konvergentnosti dobivenog reda* u određenoj oblasti. Formalno, divergentno rešenje nema praktičnog smisla.

Formalno rešenje u obliku reda $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$, prvo, treba da zadovoljava diferencijalnu jednačinu (1) $y' = f(x, y)$, tj. da daje identitet $(y(x))' \equiv f(x, y(x))$ za svaku vrednost x; i, drugo, da za dato $x = x_0$ daje dato $y(x_0) = y_0$. Promenom položaja početka koordinata uvek se može drugi uslov izraziti jednostavnije, naime zahtevati da za $x = 0$ bude $y(0) = 0$, tj. da integralna kriva prolazi kroz početak koordinata. Potražimo, dakle, formalno rešenje u obliku $y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$, koji zadovoljava uslov: za $x = 0$, $y = 0$.

Za određivanje koeficijenata $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, uporedimo vrednosti izvoda $y', y'', \dots, y^{(n)}$, i to za $x = 0$, $y = 0$, određenih, s jedne strane, iz reda, a, s druge strane, iz diferencijalne jednačine posle uzastopnog diferenciranja. Red neposredno daje $(y^{(n)}(x))_{x=0} = n! \cdot a_n$; za određivanje izvoda iz diferencijalne jednačine primenjujemo shemu diferenciranja sa kratkom oznakom $(\varphi(x, y))_{x=0,\, y=0} = [\varphi]$.

$$y' = f(x, y), \qquad ---- \qquad [f],$$

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f = f_1(x, y), \qquad ---- \qquad [f_1],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)} = \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x} + \frac{\partial f_{n-2}}{\partial y} f = f_{n-1}(x, y). \qquad -- \qquad [f_{n-1}].$$

Dva oblika izvoda daju ovaj obrazac za koeficijente reda

$$a_n = \frac{1}{n!}\left[f_{n-1}\right].$$

Time je formalno rešenje diferencijalne jednačine u obliku reda završeno.

Što se tiče ispitivanja konvergentnosti formalnog rešenja, ono zavisi od konkretnog oblika dobivenog reda i od oblasti za koju se traži rešenje, a vrši se prema pravilima o konvergentnosti reda. No predstavljanje rešenja diferencijalne jednačine redom ima, sem važnosti za konkretne probleme, i dublji matematički značaj. Pomoću redova se mogu izvesti

teoreme, u dosta opštoj formi, koje određuju uslove za funkciju $f(x, y)$ diferencijalne jednačine, da rešenje bude konvergentno. Sa tim teoremama stoji u vezi i pitanje o egzistenciji rešenja ne samo diferencijalnih jednačina prvoga reda, već i jednačina višega reda. Ta proučavanja se odnose ne samo na funkcije realnih promenljivih, već i na funkcije imaginarnih promenljivih, pri čemu se pokazuje da upotreba kompleksnih veličina mnogo jasnije objašnjava i one funkcionalne veze koje su postavljene u realnoj oblasti. Komplikovanost tih sa matematičkog gledišta vilo važnih rasuđivanja, međutim, isključuje mogućnost da se o tome govori u ovoj knjizi.

Objasnićemo na jednostavnom primeru kako postupak uzastopnih aproksimacija, tako i metodu rešavanja pomoću redova.

Primeri.

1. Treba odrediti rešenje diferencijalne jednačine $\frac{dy}{dx} = xy$, koje za $x = 0$ daje $y = 1$.

Prema postupku uzastopnih aproksimacija iz jednačine (2), za datu jednačinu imamo:

$$y = 1 + \int_0^x t\, y(t)\, dt,$$

a odavde dolazimo do ovih uzastopnih aproksimacija: $y_1 = 1 + \int_0^x t \cdot 1 \cdot dt = 1 + \frac{x^2}{2}$, $y_2 = 1 + \int_0^x t\left(1 + \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2$,

$$y_3 = 1 + \int_0^x t\left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}\right)^2\right) dt = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2}\right)^3,$$

$$y_4 = 1 + \int_0^x t\left[1 + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{t^2}{2}\right)^3\right] dt = 1 +$$

$$+ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^4.$$

Pri izračunavanju y_4 već se pokazao zakon formiranja članova, jer je $2=2!$, $6=3!$, $24=4!$ Lako je potvrditi da je opšti član jednak $\frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n$, jer se poslednji član u narednoj aproksimaciji dobiva množenjem ovog člana sa t i integracijom $\int_0^x t\cdot\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{t^2}{2}\right)^n dt$, što daje

$$\frac{1}{n!}\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{t^2}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n+1}.$$

Na taj način, kao rešenje, imamo red

$$(*)\ y=1+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n+\cdots$$

U tom redu vidimo dobro poznatu funkciju sa argumentom $x^2/2$, a to je funkcija $e^{x^2/2}$. Znamo da je taj red, koji znači i naše rešenje, konvergentan za svaku vrednost x.

Pokažimo sad da i metoda integracije pomoću redova dovodi do istog rezultata. U toj metodi treba, za određivanje koeficijenata reda $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$, iskoristiti obrazac

$$a_n=\frac{1}{n!}\left[f_{n-1}\right].$$

Polazeći od diferencijalne jednačine $y'=xy$, izračunavamo $[xy]$ za $x=0$, $y=1$ i imamo $a_0=1$, $a_1=\frac{1}{1!}\left[y'\right]=\frac{1}{1!}\left[xy\right]=0$,

$$a_2=\frac{1}{2!}\left[y''\right]=\frac{1}{2!}\left[y+xy'\right]=\frac{1}{2!},\quad a_3=\frac{1}{3!}\left[y'''\right]=\frac{1}{3!}\left[2y'+xy''\right]=0,$$

$$a_4=\frac{1}{4!}\left[y^{\mathrm{IV}}\right]=\frac{1}{4!}\left[3y''+xy'''\right]=\frac{1}{4!}\cdot 3=\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2},$$ dalje imamo

$$a_5=0,\quad a_6=\frac{15}{6!}=\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^3},\quad a_7=0,\quad a_8=\frac{3\cdot5\cdot7}{8!}=\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2^4},\quad a_9=0,$$

$$a_{10}=\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{10!}=\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{2^5}.$$

Prema dobivenom zakonu za formiranje koeficijenata opet dolazimo do navedenog reda (*).

Jasno je da se rešenje ovog jednostavnog primera može dobiti i neposrednom integracijom date jednačine $y'=xy$, jer, posle razdvajanja promenljivih, imamo $\frac{dy}{y}=x\,dx$, i prema tome $\log y=\frac{1}{2}x^2+C$, ili $y=e^{x^2/2+C}$, odakle za $x=0$, $y=1$ dobivamo $C=0$, tj. konačni oblik našeg integrala $y=e^{x^2/2}$, koji odgovara dobivenom redu.

2. Kao drugi primer uzmimo Rikatijevu jednačinu $y'=y^2+x$ i nađimo približnu jednačinu integralne krive sa početnom tačkom u početku koordinata. Obrazac za uzastopne aproksimacije uzima oblik

$$y=\int_0^x\left[t+y^2(t)\right]dt,$$

i daje ova uzastopna rešenja:

$$y_0=\int_0^x[0+0]\,dt=0;\quad y_1=\int_0^x[t+y_0^2]\,dt=\int_0^x t\,dt=\frac{1}{2}x^2;$$

$$y_2=\int_0^x\left[t+\left(\frac{t^2}{2}\right)^2\right]dt=\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20};$$

$$y_3=\int_0^x\left[t+\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^5}{20}\right)^2\right]dt=\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20}+\frac{x^9}{160}+\frac{x^{11}}{4400}.$$

Čitalac može uporediti rezultate ovih približnih vrednosti.

Vežbanja:

Proučiti grafički i pomoću reda rešenje diferencijalne jednačine $dy=ky\,dx$, gde je k konstanta, npr. $k=\frac{1}{10}$, 1, 10.

Proučimo neke probleme čije rešenje zahteva integraciju diferencijalnih jednačina prvoga reda.

a. *Problemi Geometrije*. 1. Određivanje krivih sa konstantom: α. Dužinom tangente, β. Dužinom normale, γ. Dužinom subtangente i δ. Dužinom subnormale.

α. Kako se dužina tangente T izražava obrascem $T = (y/y')\sqrt{1+y'^2}$ (II, str. 131), imamo diferencijalnu jednačinu: $(y/y')\sqrt{1+y'^2} = a$, gde je a konstanta. Rešena po y' ova jednačina postaje $y' = y : \sqrt{a^2-y^2}$, i traži kvadraturu $dx = \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy$. Neodređeni integral, sa novom promenljivom $t = 1:y$, ovako izračunavamo

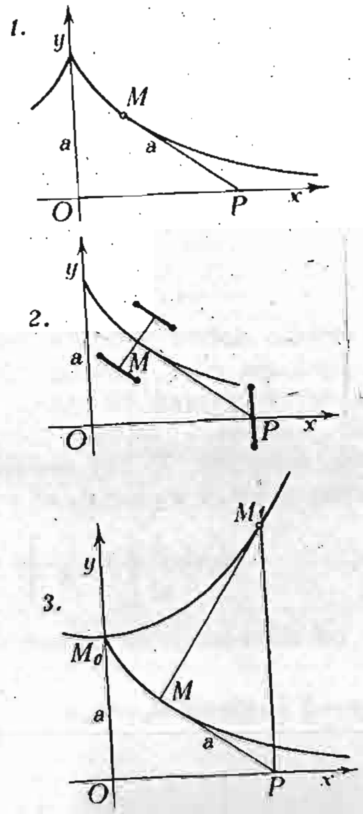
$$J = \int\frac{a^2-y^2}{y\sqrt{a^2-y^2}}dy = -a^2\int\frac{dt}{\sqrt{a^2t^2-1}} - \int\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}} =$$

$$= -a\log\left(ta+\sqrt{a^2t^2-1}\right) + \sqrt{a^2-y^2} = a\log\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y} +$$

$+\sqrt{a^2-y^2}$. Prema ovoj vrednosti imamo opšti integral $x + C = a\log\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y} + \sqrt{a^2-y^2}$. Ako postavimo uslov da, za $x = 0$, bude $y = a$, zaključujemo da je $C = 0$ i, prema tome, konačno imamo jednačinu $x = a\log\frac{a\pm\sqrt{a^2-y^2}}{y} \mp \sqrt{a^2-y^2}$ pri čemu gornji znaci odgovaraju slučaju $x > 0$. Ova kriva (sl. 8, 1) zove se *traktrisa* (*Huygens*, 1629—1695). Ona ima interesantne osobine. Njena diferencijalna jednačina $y' = y : \sqrt{a^2-y^2}$, daje

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(1+\frac{dx^2}{dy^2}\right)dy^2 = \left(1+\frac{a^2-y^2}{y^2}\right)dy^2 = \frac{a^2}{y^2}dy^2,$$

odakle je $ds = a\frac{dy}{y}$, te se, prema tome, dužina luka (rektifikacija) te krive određuje jednostavnim obrascem $s = a\log\frac{y}{a}$, pri čemu se luk uzima od tačke $(0, a)$. Za ordinatu, y, u funkciji tog luka imamo: $y = ae^{s/a}$. Traktrisa se dobiva i mehanički (sl. 8, 2). Ako se sredina P prednje ose kola kreće po pravoj, sredina M zadnje ose opisuje traktrisu (naziv od latinske reči trahere — vući). Traktrisa služi i kao *evolventa lančanice*. To znači ovo: ako na lančanicu (sl. 8, 3), čija je jednačina $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$, od tačke M_0 do neke tačke M_1 namotamo konac, pa ga, zatim, počnemo odmotavati, njegov kraj koji se nalazio u tački M opisuje traktrisu. Dokaz ove osobine lančanice i traktrise može poslužiti kao dobra vežba. Najzad, traktrisa može, dužinom svog luka, da posluži za merenje površine ograničene jednakostranom hiperbolom, dvema ordinatama i Ox osom, jer određivanje i jedne i druge veličine zavisi od integrala tipa $\int\frac{dx}{x}$. Iz tog razloga je Huygens nazvao traktrisu *kvadratrisom hiperbole*. I ovu osobinu traktrise čitalac može potvrditi upoređivanjem dužine luka, s, traktrise i površine, Q, spomenute hiperbole.



Sl. 8 — Traktrisa

β. Pošto se dužina normale, N, izražava obrascem $N = y\sqrt{1+y'^2}$ (II, str. 131), diferencijalna jednačina krive sa konstantnom dužinom normale ima oblik $a = y\sqrt{1+y'^2}$. Rešenje ove jednačine po y' daje $y' = \pm\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}$, odakle dolazimo do jednostavne kvadrature $\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}} = \pm\,dx$. Posle integracije imamo $\pm\sqrt{a^2-y^2} = x + C$, ili $(x+C)^2 + y^2 = a^2$, a to odgovara familiji krugova poluprečnika a sa centrom na x osi. Naša jednačina ima i singularno rešenje — to su dve prave paralelne x osi na rastojanju a od te ose.

γ. Proučimo krivu sa konstantnom subtangentom, kojoj odgovara jednačina: $a = y/y'$. Iz te jednačine neposredno sleduje kvadratura $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{a}$, sa integralom $\log y = \frac{x}{a} + C$, ili $y = Ae^{x/a}$, gde je A zgodnije napisana integraciona konstanta. Imamo familiju eksponencijalnih krivih.

δ. Najzad, za subnormalu imamo jednačinu $a = y\,y'$, sa kvadraturom $y\,dy = a\,dx$ i integralom $y^2 = 2ax + C$, — njemu odgovara familija parabola.

Izvedeni rezultati u tačkama γ i δ mogu se zgodno u obrnutom smislu protumačiti, tj. u smislu geometrijskog sadržaja odgovarajućih diferencijalnih jednačina za eksponencijalne linije i za parabole.

b. *Hlađenje tela*. Brzina v hlađenja tela definiše se pomoću izvoda $v = -dT/dt$, gde smo sa T označili temperaturu, a sa t vreme.

Toplota Q, koju telo gubi, izražava se obrascem $Q = -\eta St$, gde su: S — površina tela, t — vreme i η — koeficijent koji po *Njutnovu zakonu hlađenja* zavisi od temperature tela i temperature θ sredine u kojoj se telo nalazi; taj se koeficijent, η, izražava obrascem $\eta = h(T-\theta)$, pri čemu je h konstantni *koeficijent spoljašnje provodljivosti*. Pomoću te veličine za Q imamo vrednost

$$Q = -h\,(T-\theta)\,St.$$

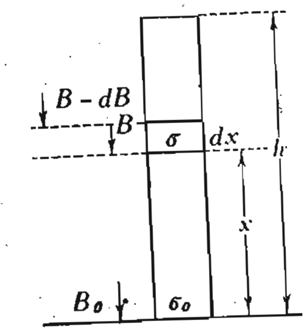
Ako diferenciramo ovu jednačinu po vremenu $\frac{dQ}{dt} = -h\,(T-\theta)\,S$ i uzmemo u obzir da je $\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dT}\frac{dT}{dt} = c\frac{dT}{dt}$, gde je c sa vrednošću $c = \frac{dQ}{dT}$, tzv. *specifična toplota tela*, dolazimo do rezultata

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{hS}{c}(T-\theta),$$

koji predstavlja *diferencijalnu jednačinu hlađenja tela*. Napisanu jednačinu dovodimo do kvadrature $-\lambda\,dt = \frac{dT}{T-\theta}$, gde konstanta λ ima vrednost $\lambda = hS/c$. Posle integracije imamo $-\lambda t + C = \log(T-\theta)$. Za početne uslove uzimamo: za $t=0$, $T=T_0$ i tada za C dobivamo uslov $C = \log(T_0-\theta)$; posle toga imamo jednačinu $-\lambda t = \log\frac{T-\theta}{T_0-\theta}$, koja dovodi do *konačne jednačine hlađenja tela*

$$T = \theta + (T_0-\theta)\,e^{-hSt/c}.$$

c. *Hipsometrički obrazac*. Izvedimo, kao primer integracije, tzv. *hipsometrički obrazac* (ὕψος — visina, μετρέω — merim). Pri izvođenju ovog obrasca nećemo uzimati u obzir sve popravke (zbog temperature i vlažnosti vazduha, geografske širine, odnosa visine prema Zemljinu poluprečniku), već ćemo uzeti u obzir samo dva osnovna faktora — smanjivanje stuba vazduha sa penjanjem i smanjivanje gustine vazduha u tom stubu.



Sl. 9 — Vazdušni stub

Prema Bojlovu zakonu za istu količinu vazduha važi jednačina $pv = p_0 v_0$, gde su p_0 i p pritisci vazduha, a v_0 i v zapremine na donjem i gornjem nivou vazdušnog stuba visine x (sl. 9). Kako su pritisci proporcionalni visinama, B_0 i B, barometarskog stuba, a zapremine su obrnuto proporcionalne gustinama, σ_0 i σ, iz Bojlova zakona sleduje $B:\sigma=B_0:\sigma_0$, odakle se dobiva: $\sigma=\sigma_0 B/B_0$.

Zamislimo sad da se penjemo sa visine x na visinu $x+ + dx$. Smanjivanje barometarske visine označimo sa dB. Ako gustinu žive označimo sa δ, pritisak stuba visine dB biće proporcionalan $\delta \cdot dB$; isti će pritisak, izračunat pomoću težine vazduha, gustine σ i visine dx, biti proporcionalan $\sigma\, dx$ sa istim koeficijentom proporcionalnosti. Pošto je dB negativno, kad je dx pozitivno, imamo jednačinu $\delta \cdot dB = -\sigma\, dx$. Uvrstimo li vrednost gustine i rešimo jednačinu po dx, dobićemo $dx = -k dB : B$, gde je k konstanta. U prethodnoj diferencijalnoj jednačini promenljive x i B razdvojene su, te se može integrisati, i imamo $x + C = -k \log B$, gde je C proizvoljna konstanta integracije. Za određivanje ove konstante uzmimo u obzir da je, za $x=0$, $B=B_0$; prema tome imamo $C = -k \log B_0$. Sad možemo napisati $x = k \log \dfrac{B_0}{B}$. Ako barometarsku visinu za $x=h$ označimo sa B_h, možemo hipsometrički obrazac konačno napisati u obliku

$$h = \frac{B_0 \cdot \delta}{\sigma_0} \log \frac{B_0}{B_h}.$$

d. *Problemi Hemije.* Hemija je u početku svoga razvoja iskorišćavala samo jednostavne računske radnje iz Aritmetike i Algebre. U prošlom veku, naročito posle uspostavljanja veze između Hemije i Termodinamike, u Hemiji je našao široku primenu Infinitezimalni račun sa procesima diferenciranja i integrisanja.

U ovom veku proučavanje *atomskog modela* unelo je u Hemiju, tačnije u Fizičku hemiju, gotovo isti matematički materijal, koji iskorišćava savremena *Nebeska mehanika*. U današnje vreme tzv. Nuklearna fizika je ušla u takve nove faze, da je za njihovo proučavanje potreban matematički aparat kud i kamo viši čak i od aparata svih grana Mehanike i Teorijske fizike.

Sad je izučavanje Hemije u celokupnosti nemoguće bez specijalnog znanja matematike.

Ovde ćemo navesti nekoliko jednostavnih primera primene diferencijalnog i integralnog računa na proučavanje hemijskih pojava.

α. *Brzina reakcije.* Ako je količina dx neke supstance stupila u reakciju za vreme dt, tada se količnik dx/dt zove *brzina reakcije.*

β. *Guldberg — Vageov zakon.* U smislu Guldberg — Vageova zakona *koncentracija* date aktivne supstance je broj *mola* u jednom litru. *Gram-molekul* ili *mol* date supstance sadrži onoliko grama koliko jedinica iznosi *atomska*, odnosno *molekularna težina* te materije.

Zamislimo da imamo dve supstance, A_1 i A_1', koje uzajamno stupaju u hemijsku reakciju. Neka budu a_1 i a_1' koncentracije ovih supstanca u početku reakcije. Sa x označimo količinu supstance A_1 posle vremena t trajanja hemijske reakcije. Posle vremena Δt stupa u reakciju, u smeru od A_1 ka A_1', veličina $\Delta_1 x = k_1 (a_1 - x) \Delta t$, gde je k_1 koeficijent proporcionalnosti, koeficijent brzine reakcije u navedenom smeru. Za isto vreme u reakciji suprotnog smera, od A_1' ka A_1, učestvuje količina $\Delta_2 x = k_1' (a_1' + x) \Delta t$, gde je k_1' koeficijent brzine reakcije u tom drugom smeru. Prema tome definitivnu količinu, koja se transformiše za vreme reakcije, treba izraziti razlikom $\Delta x = \Delta_1 x - \Delta_2 x$, tj. staviti $\Delta x = k_1 (a_1 - x) \Delta t - k_1' (a_1' - x) \Delta t$. Ako sad pređemo na granične vrednosti, dobićemo jednačinu

$$\frac{dx}{dt} = k_1 (a_1 - x) - k_1' (a_1' + x).$$

Ako se reakcija vrši samo u jednom pravcu, prethodna jednačina daje $dx/dt = k_1 (a_1 - x)$. Za reakciju sa n molekula treba jednačinu napisati u obliku $dx/dt = k_1 (a_1 - x)^n$. U slučaju dve supstance jednačinu treba izraziti ovako:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 (a_1 - x)(a_2 - x) - k_1' (a_1' + x)(a_2' + x),$$

gde su oznake očigledne.

Napisane diferencijalne jednačine izražavaju *Guldberg—Vageov zakon.* Kad je $\dfrac{dx}{dt} = 0$, imamo *Guldberg—Vageovu jednačinu ravnoteže.* Za jednu supstancu ona izgleda $k_1 (a_1 - x) - k_1' (a_1' + x) = 0$.

γ. *Unimolekularna reakcija*. Unimolekularnoj reakciji odgovara jednačina $\frac{dx}{dt} = k(a-x)$. Za integraciju ove jednačine razdvojimo promenljive $\frac{dx}{a-x} = k\,dt$ i integrišimo $\int \frac{dx}{a-x} = kt + C$. Pošto je $\int \frac{dx}{a-x} = -\int \frac{d(a-x)}{a-x} = -\log(a-x)$ integral naše jednačine izgleda ovako $-\log(a-x) = kt + C$. Kako je u početnom trenutku, dakle za $t=0$, $x=0$, imamo $-\log a = C$, te posle eliminisanja proizvoljne konstante dolazimo do integrala u obliku $\log \frac{a}{a-x} = kt$. Obično se ova jednačina iskorišćava za određivanje konstante k iz jednačine $k = \frac{1}{t} \log \frac{a}{a-x}$, jer sve veličine s desne strane mogu biti određene iz eksperimenta.

δ. *Bimolekularne reakcije*. Bimolekularnoj reakciji odgovara jednačina $dx/dt = k\,(a-x)(b-x)$. Za integraciju ove jednačine prvo razdvojimo promenljive $dx : [(a-x)(b-x)] = k\,dt$, a zatim transformišimo levu stranu

$$\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{b-x} - \frac{1}{a-x}\right) dx = k\,dt.$$

Posle ove transformacije integracija daje

$$-\frac{1}{a-b}\,[\log(b-x) - \log(a-x)] = kt + C.$$

Za eliminisanje konstante C iskoristimo početne uslove, za koje imamo $-\frac{1}{a-b}(\log b - \log a) = C$. Posle toga jednačinu za k možemo napisati

$$k = \frac{1}{(a-b)\,t} \log \frac{b\,(a-x)}{a\,(b-x)}.$$

I ovde imamo sa desne strane veličine koje možemo odrediti iz eksperimenata.

ε. *Zakon radioaktivnog raspada*. Ako sa λ označimo verovatnoću da se atom neke supstance raspadne u toku jedne sekunde i da je taj broj isti za sve atome istog elementa i ne zavisi od vremena, onda će se od N atoma raspasti λN atoma. S druge strane, taj se gubitak atoma izražava brojem $-dN/dt$ i, prema tome, možemo postaviti kao *diferencijalnu jednačinu radioaktivnog raspada*: $-\frac{dN}{dt} = \lambda N$. Posle razdvajanja promenljivih imamo $\frac{dN}{N} = -\lambda\,dt$ i integral $\log N = -\lambda t + C$, a posle određivanja proizvoljne konstante, iz uslova $\log N_0 = C$, *jednačinu raspada radioaktivnih elemenata*: $N = N_0 e^{-\lambda t}$. Konstanta λ se zove *konstanta raspada*; ona karakteriše brzinu raspada. Često se za karakteristiku te brzine uzima vreme T za koje će od elementa ostati samo polovina atoma. To vreme se određuje iz uslova $\frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-\lambda T}$, te, prema tome, ima vrednost $T = \frac{\log 2}{\lambda} = \frac{0{,}69315}{\lambda}$. Vreme T kratko se zove *periodom poluraspada*. Za radijum ono iznosi 1590 godina. Od 1 gr radijuma posle toliko godina ostaje samo 0,5 gr.

ζ. *Problemi Biologije*. Nauka o životu, Biologija, tretira pitanja života biljaka, životinja i čoveka. Prema tome ona obuhvata Botaniku, Zoologiju i Antropologiju u najširem smislu tih reči.

U svim tim naukama Matematika se odavno primenjivala. Primena matematičkih metoda pokazala se naročito korisna u proučavanju Dinamike bioloških procesa. Dovoljno je samo spomenuti *H. Helmholca*, anatoma, lekara, fiziologa, fizičara i sjajnog matematičara, koji je iskoristio metode Matematike i postigao izvanredne uspehe u čisto fiziološkim domenima.

Kad već govorimo o primeni Matematike u Biologiji navešćemo i ovu, spomena vrednu, „sitnicu". Metod Analitične geometrije, crtanje grafika, možda je najviše popularizovala praktična grana Biologije, Medicina: zaista, kome nije poznat grafik temperature na bolesničkoj listi bolesnika?

Pitanja primene Matematike na Biologiju sad su izdvojena u naročitu disciplinu—*Biomatematiku*, kojoj su posvećeni čak i specijalni časopisi.

Ovde ćemo se zaustaviti samo na dva primera primene Matematike u Biologiji: na *jednačini Mičerliha* i na *jednačini Ferhilsta*.

a. *Jednačina Mičerliha za prinos žetve*. Označimo sa A maksimalni mogući prinos žetve sa date površine pri najpovoljnijim (optimalnim) uslovima kulture. Sa y označimo prinos, ako uslovi nisu u svemu optimalni. Prema tome dobiveni prinos sa iste površine faktički bismo mogli povećati za $A-y$, ako bi uslovi kulture postali optimalni.

Pretpostavimo sada da povećanje prinosa zavisi od nekog faktora (npr., od količine gnojiva), čije je dejstvo vezano za veličinu x. Jasno je da priraštaj dx faktora x izaziva određenu promenu u faktičkom prinosu y; označimo ovu promenu sa dy.

Jednačina Mičerliha (E. Mitscherlich) postavlja vezu između dx i dy u obliku $dy=k(A-y)\,dx$, gde je k koeficijent proporcionalnosti, koji odgovara karakteru faktora x. Ta jednačina pokazuje da je priraštaj faktičkog prinosa proporcionalan priraštaju dx faktora, od kojeg zavisi prinos žetve, i celokupnom mogućnom povećanju tog prinosa.

Za integraciju prethodne jednačine razdvojimo promenljive $dy:(A-y)=k\,dx$ i integrišimo $\int \frac{dy}{A-y} = -\int \frac{d(A-y)}{A-y} = -\log(A-y) = kx + C$. Ako pretpostavimo da bez faktora $x\,(x=0)$ faktičkog prinosa od žetve uopšte nema $(y=0)$, onda konstantu integracije možemo odrediti iz uslova $-\log A = C$. Posle toga napisani integral u obliku $-\log(A-y)=kx-\log A$ daje rešenje $\log\frac{A-y}{A}=-kx$.

Ako hoćemo da izrazimo rezultat pomoću dekadnih logaritama, treba napisati $\mathrm{Log}_{10}\frac{A-y}{A}=-cx$, gde je $c=k\,\mathrm{Log}_{10}\,e=0{,}43429\,k$. Prema tome imamo ovaj konačni rezultat

$$y=A\,(1-10^{-cx}).$$

Ako želimo proučiti uticaj ne samo jednog već više faktora: $x_1, x_2, \ldots x_n$, možemo napisati odgovarajuću jednačinu u slučaju zajedničkog dejstva svih ovih faktora. Ako delove maksimalnog prinosa izrazimo veličinama $A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n$, a koeficijente proporcionalnosti označimo sa $c_1, c_2, \ldots, c_n$, jednačina prinosa žetve dobija oblik

$$y=A\alpha_1\,(1-10^{-c_1x_1})\,\alpha_2(1-10^{-c_2x_2})\ldots\alpha_n\,(1-10^{-c_nx_n}).$$

To je teorijska jednačina Mičerliha za izračunavanje prinosa žetve pod uticajem različitih faktora u prvom približnom posmatranju ove pojave.

Za drugu aproksimaciju u slučaju samo jednog faktora uvodi se dopunski množilac, u obliku $e^{-\lambda x^2}$, gde je λ tzv. *koeficijent depresije*. Rešenje sa dekadnim logaritmima dovodi do ovog rezultata

$$Y=ye^{-\lambda x^2}=A\,(1-10^{-cx})\cdot 10^{-\lambda_1 x^2}$$

gde je $\lambda_1=\lambda\log 10$.

Pomoću izvedenih jednačina moguće je, tvrdi agronomska literatura, vrlo dobro oceniti promenu prinosa žetve u vezi sa promenom različitih faktora koji utiču na tu žetvu.

b. *Jednačina Ferhilsta za priraštaj populacije*. Kao što smo već pomenuli, u poslednje vreme razvila se jedna naročita naučna disciplina, *Matematička biologija* ili *Biomatematika*. Ona se bavi, uglavnom, *biološkom Kinetikom*, tj. pitanjima kretanja broja stanovništva, promenama tzv. *populacije*. Sem toga, ona proučava i pitanje „Borbe za opstanak" uopšte, tj. ponašanje u jednoj biološkoj grupi ili uzajamne odnose više grupa. Takav je, npr., slučaj borbe između životinja — domaćina i parazita, koji je tretirao matematičar *Voltera (V. Volterra)*.

Označimo sa p broj stanovnika neke teritorije. U toku vremenog intervala dt ovaj će se broj promeniti za dp. Od čega zavisi ta promena? Ona je u prvom, približnom, posmatranju proporcionalna vremenu dt i broju stanovnika, p, tj. (1) $dp=np\,dt$, gde je n koeficijent proporcionalnosti, koji se zove *koeficijent priraštaja stanovništva*. Taj koeficijent možemo smatrati kao razliku dva koeficijenta: n_1 — *koeficijenta nataliteta — rađanja* i n_2 — *koeficijenta mortaliteta — smrtnosti*, tj. $n=n_1-n_2$. Prema tome bi jednačina priraštaja stanovništva u zatvorenom društvu, bez doseljenika i iseljenika, izgledala $dp=(n_1-n_2)p\,dt$. Ako je $n_1>n_2$, broj stanovništva raste; ako je $n_1<n_2$, taj broj opada; pri $n_1=n_2$ taj broj ostaje isti.

Integral jednačine (1), predstavljene u obliku $\frac{dp}{p}=n\,dt$, uzima oblik $\log p=nt+C$, posle određivanja integracione konstante, iz uslova: za $t=0$, $p=p_0$, dovodi do rezultata (2) $p=p_0 e^{nt}$. Prema tom obrascu, za $n>0$, broj stanovnika neprekidno raste i može postati beskrajno veliki.

Međutim, posmatranje stvarnog broja stanovnika pokazuje da se taj broj ne pokorava eksponencijalnom zakonu, izraženom jednačinom (2). Otuda zaključujemo da diferencijalna jednačina (1) nije dovoljna za bližu ocenu promene stanovništva. Zaista, koeficijente nataliteta i mortaliteta ne možemo smatrati stalnim. Ako pretpostavimo ograničenost teritorije i izolovanost stanovništva, koje se snabdeva hranom i drugim neophodnim ekonomskim blagom samo sa te ograničene teritorije, broj stanovnika ne može rasti beskrajno, već se rašćenje tog broja usporava u vezi sa njegovim povećavanjem. *Ferhilst (Ferhülst)* u drugom, približnom, posmatranju pretpostavlja da usporavanje povećanja broja p zavisi od povećanja koeficijenta smrtnosti n_2. On daje tom koeficijentu linearnu formu, n_2+mp, gde je m konstantan pozitivan broj. Ukupni koeficijent priraštaja stanovništva je tada izgleda $n^*=n_1-(n_2+mp)=n_1-n_2-mp=n-mp$. Sa takvom pretpostavkom imaćemo, umesto (1), jednačinu $dp=n^*p\,dt=$ $=(n-mp)p\,dt$, ili (3) $\frac{dp}{dt}=p(n-mp)$. Koeficijent m zove se *granični koeficijent populacije*, jer njegovo prisustvo u prethodnoj jednačini pokazuje da, pod uslovom $n-mp=0$, tj. za $p=n/m$, broj stanovništva dostiže maksimalnu vrednost i prestaje da se menja $\left(\frac{dp}{dt}=0\right)$.

Jednačina (3) zove se *Ferhilstova logistička jednačina*. Izvršimo integraciju te jednačine. Posle razdvajanja promenljivih dobivamo $k\,dp:p(k-p)=n\,dt$, gde smo iskoristili oznaku $k=n/m$. Kako levu stranu prethodne jednačine možemo napisati $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{k-p}\right)dp$, jednačina, posle integracije, daje $\log\frac{p}{k-p}=nt+C$. Konstantu integracije određujemo iz uslova da, za $t=0$, broj stanovnika iznosi p_0. Prema tome imamo

$$\log\frac{p}{k-p}-\log\frac{p_0}{k-p_0}=nt=\log e^{nt}.$$

Rešenje ove jednačine po p daje

$$p=kp_0:[p_0+(k-p_0)e^{-nt}]=k:\left[1+\left(\frac{k}{p_0}-1\right)e^{-nt}\right].$$

U ovoj jednačini imamo tri konstante: p_0, k, n. Za određivanje ovih konstanata treba imati rezultate tri popisa stanovništva, tj. vrednosti p_1, p_2, p_3 za vremena t_1, t_2, t_3. Pošto se odrede konstante, može se izračunati broj stanovnika u budućnosti.

Problem proučavanja populacije može biti proširen i na slučaj neizolovanog kolektiva, ako se uzme u obzir kako dolazak novih naseljenika sa strane (imigracija), tako i odlazak iseljenika (emigracija). Može se proučavati i zajednički život više kolektiva sa uzajamnim uticajem. Proučavanje tog slučaja se svodi na proučavanje sistema odgovarajućih diferencijalnih jednačina.

Glava treća

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOGA I VIŠEGA REDA

3.1. Diferencijalne jednačine drugoga reda

Videli smo (1.4) da jednačine

$$F(x, y, y', y'')=0, \text{ odnosno } y''=f(x, y, y'),$$

izražavaju diferencijalne jednačine drugoga reda u implicitnom, odnosno u eksplicitnom, obliku, nerešenom ili rešenom po izvodu drugoga reda $y''=\frac{d^2y}{dx^2}$.

Diferencijalne jednačine drugoga reda, pojedinačne ili u sistemima, igraju dominantnu ulogu u primeni Teorije diferencijalnih jednačina na proučavanje prirodnih pojava. Razlog je tome u fenomenološkom faktu što „promena stanja pojave", koje se određuje ne samo položajem već i kretanjem ($y'\neq 0$), zavisi od drugog izvoda y''. Utvrđivanje činilaca koji tu promenu izazivaju i sačinjava suštinu diferencijalne jednačine drugoga reda.

U ovome što dolazi navodićemo, imajući u vidu, u prvom redu, što veću konkretnost izlaganja, stavove koji se odnose na jednačine drugog reda, koji se lako proširuju i na jednačine višega reda sličnih tipova.

Za određenost rešenja diferencijalne jednačine drugog reda u rešenom obliku (1) $y''=f(x, y, y')$, treba da budu poznati i *početni uslovi*, koji se izražavaju vrednostima y_0, y_0', za datu početnu vrednost x_0.

Za egzistenciju i jednoznačnost rešenja, funkcija $f(x, y, y')$ treba da zadovoljava određene uslove, no na proučavanju tih uslova ne možemo se ovde zaustavljati. U mnogim zadacima ispunjavanje tih uslova neposredno sleduje iz same prirode zadatka.

Rešenje jednačine (1) sa datim uslovima (za $x=x_0, y=y_0, y'=y_0'$) izražava se jednačinom *partikularnog integrala* (2) $y=F(x-x_0, y_0, y_0')$, koji određuje *integralnu krivu* kroz tačku (x_0, y_0), sa ugaonim koeficijentom, y_0', tangente u toj tački. *Opšti integral* zavisi od dve proizvoljne konstante, C_1, C_2; izrazićemo ga jednačinom (3) $y=F(x, C_1, C_2)$. Funkcija $F(x, C_1, C_2)$ treba da zadovoljava identitet $\frac{d^2}{dx^2}F(x, C_1, C_2)\equiv$

$$\equiv f\left(x, F(x, C_1, C_2), \frac{d}{dx}F(x, C_1, C_2)\right)$$

kako u odnosu na x, tako i u odnosu na svaku od proizvoljnih konstanata. Ako u toku određivanja funkcije $F(x, C_1, C_2)$ dobijemo jednačinu (4) $y'=F_1(x, y, C')$ sa funkcijom F_1, koja zavisi samo od jedne proizvoljne konstante C' i zadovoljava identitet $\frac{d}{dx}F_1(x, y, C')\equiv$

$$\equiv f(x, y, F_1(x, y, C')),$$

kako u odnosu na x, y, tako i u odnosu na C', jednačina (4) izražava *posredni*, u datom slučaju, *prvi integral* jednačine (1).

Primer. Diferencijalna jednačina: $yy''+y'^2=0$ ili $y\,dy'+y'dy=0$ daje prvi (posredni) integral $yy'=\text{const.}=C_1$. Pošto yy' ima vrednost subnormalne krive, uslov da subnormalna bude stalna dovodi (str. 62) do integrala $y^2=2C_1y+C_2$, koji izražava parabolu. Kako dobiveni integral sadrži dve konstante, to je i opšti integral naše diferencijalne jednačine.

Sem opšteg integrala i iz njega dobivenih partikularnih integrala, diferencijalna jednačina drugoga reda može, kao i diferencijalna jednačina prvoga reda, imati i singularni integral.

tj. rešenje koje ne sadrži proizvoljne konstante i ne može biti dobiveno iz opšteg integrala ni za kakve vrednosti proizvoljnih konstanata.

3.11. Grafičko rešavanje diferencijalne jednačine drugoga reda

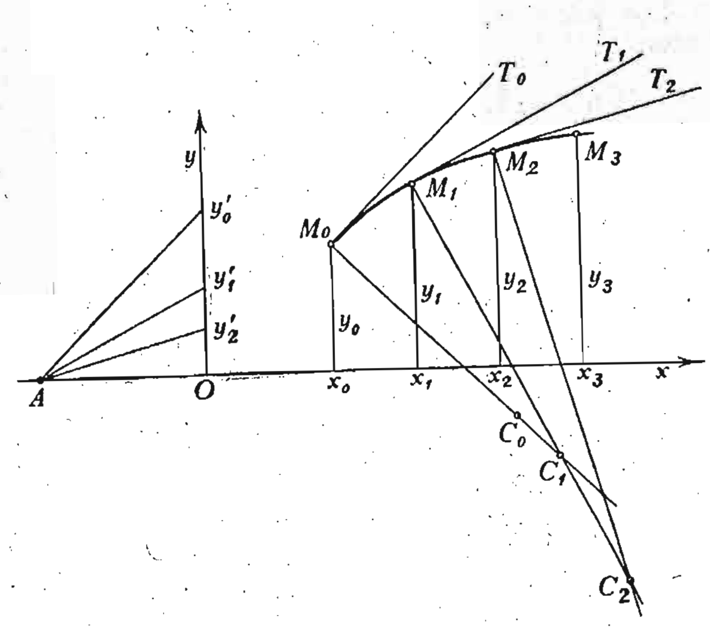
Od približnih metoda rešavanja diferencijalnih jednačina drugoga reda, numeričkih i grafičkih, navešćemo ovde samo jednu grafičku metodu, koja jasno pokazuje prirodan način obrazovanja integralne krive koja odgovara partikularnom integralu diferencijalne jednačine drugog reda.

Prethodno primetimo da, na osnovu date diferencijalne jednačine, $y''=f(x, y, y')$, sa ranije poznatim vrednostima x, y, y', uvek možemo odrediti u običnoj tački prema obrascu $\frac{1}{R}=y'':(1+y'^2)^{3/2}$ (II, str. 136) poluprečnik kruga krivine, R, samo treba pri crtanju uzeti u obzir i znak krivine. Jednačina prvog reda, kako smo to videli, omogućuje da se, prema vrednosti y', odredi beskrajno mali pravolinijski element integralne krive, na čemu je i osnovano približno crtanje krive prema izlomljenoj liniji. Slično tome, jednačina drugoga reda omogućuje, pošto se izračuna poluprečnik krivine, R, približno crtanje integralne krive sastavljene od kružnih elemenata te krive, a to odgovara tačnijoj grafičkoj predstavi tražene krive.

Prema tome, grafičko rešavanje diferencijalne jednačine drugog reda, u granicama od x_0 do $x_n=x_0+n\Delta x$, možemo prema ovoj šemi vršiti.

1. x_0, y_0, y_0' — su date, početne veličine; $R_0(x_0)$ se izračunava. Grafičkim postupkom se određuju (sl. 10): tačka $M_0(x_0, y_0)$, tangenta M_0T_0 (prema vrednosti y_0'), normala M_0C_0 i tačka C_0 (sa $M_0C_0=R_0$). Crta se luk M_0M_1 poluprečnika M_0C_0, do preseka sa ordinatom apscise $x_0+\Delta x$, i tačka $M_1(x+\Delta x, y_1)$, a tangenta u tački M_1 na nacrtani luk određuje i nov položaj tangente M_1T_1. 2. Za konstrukciju novog kružnog elementa imamo sve grafičke elemente sem poluprečnika krivine $R(x_1)$, koji treba izračunati iz diferencijalne jednačine, odnosno iz obrasca $\frac{1}{R}$. Sa tim podacima se određuje tačka M_2

na novoj ordinati i, ponavljajući navedeni postupak, dolazimo do konačne tačke tražene krive sa apscisom $x_n=x_0+n\Delta x$.



Sl. 10 — Grafičko rešavanje diferencijalne jednačine drugoga reda

Jasno je da navedeni grafički postupak može da posluži za ocenjivanje integralne krive u relativno maloj oblasti, naročito kad krivina ima jaku vrednost.

Vežbanja:

1. Pokazati da su: **a.** $y=-2t+1-\sin 2t$; **b.** $y=-\sin 2t$; **c.** $y=-\sin 2t+at+b$; **d.** $y=-\sin 2t+at-1$ rešenja diferencijalne jednačine $y''=4\sin 2t$, gde je t nezavisno promenljiva, i odrediti karakter svakog od tih rešenja. **2.** Eliminisati konstante C_1 i C_2 iz jednačine $C_1y+\log(1-C_1x^3)=C_1C_2$. **3.** Eliminisati konstante C_1 i C_2 iz jednačine $\log\frac{\sqrt{y+c_1}-\sqrt{c_1}}{\sqrt{y+c_1}+\sqrt{c_1}}=\sqrt{2c_1}(x+c_2)$ i na osnovu dobivene diferencijalne jednačine pokazati da za tačke sa $y=1$ na krivoj sa tom diferencijalnom jednačinom poluprečnik krivine ima vrednost $R=\sqrt{1+y'^2}$. **4.** Konstruisati grafički jednu od krivih određenih diferencijalnom jednačinom $(1-y)y''=y'^2$.

3.2. Specijalni slučajevi diferencijalnih jednačina drugoga reda

a. $y''=f(x)$.

U ovom slučaju jednačina se rešava jednostavno sa dve uzastopne kvadrature:

$$y'=\int f(x)\,dx+C_1,\quad y=\int\left[\int f(x)\,dx+C_1\right]dx+C_2=$$
$$=\iint f(x)\,dx\,dx+C_1x+C_2.$$

Interesantno je primetiti da se rešenje diferencijalne jednačine može dobiti i pomoću samo jedne kvadrature.

Dokažimo da integral

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,(x-t)\,dt+C_1x+C_2$$

služi kao rešenje jednačine $y''=f(x)$. Za donju konstantnu vrednost možemo staviti i $x_0=0$.

Za dokaz stavimo $y(x)=u(x)+v(x)$, i za funkciju $u(x)$ postavimo uslove: $u(0)=0$, $u'(0)=0$, $u''(x)=f(x)$; a za drugi sabirak uzimamo: $v(x)=C_1x+C_2$. Jasno je da, pod ovim uslovima, zbir $u+v$ predstavlja opšti integral date jednačine, jer zadovoljava datu diferencijalnu jednačinu i sadrži dovoljan broj proizvoljnih konstanata.

Za određivanje $u(x)$ iskoristimo predstavu ove nepoznate funkcije u obliku Taylor-ova obrasca, sa ostatkom u obliku integrala (III, str. 72) i to, što je za ovaj slučaj dovoljno, samo sa tri člana

$$u(x)=u(0)+u'(0)\,x+\int_0^x u''(t)(x-t)\,dt.$$

Prema postavljenom uslovu prva dva člana su jednaka nuli i na taj način ćemo iskoristiti obrazac

$$u(x)=\int_0^x u''(t)\,(x-t)\,dt, \tag{1}$$

gde je x parametar.

Pokažimo sad da tako definisana funkcija $u(x)$ pomoću funkcije $u''(t)$ zaista daje drugi izvod jednak $u''(x)$. Diferencirajmo napisani integral dvaput po parametru x, prema opštem pravilu za diferenciranje određenog integrala po parametru, kad od tog parametra zavise i granice. To pravilo ćemo napisati ovako

$$\frac{d}{dz}\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x,z)\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial z}\varphi(x,z)\,dx+\varphi(x_2,z)\frac{dx_2}{dz}-\varphi(x_1,z)\frac{dx_1}{dz},$$

gde su: x—promenljiva integracije, z—parametar, x_1 i x_2—granice integrala kao funkcije parametra z.

Prema tom pravilu, za prvi izvod imamo:

$$u'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x u''(t)(x-t)\,dt=$$
$$=\int_0^x u''(t)\,dt+u''(x)(x-x)\cdot 1-u''(0)(x-0)\cdot 0=\int_0^x u''(t)\,dt.$$

Za drugi izvod, kao izvod po gornjoj granici, imamo jednostavno $u''(x)=u''(x)$. Prema tome, u obrascu (1) izvod $u''(t)$ možemo jednostavno, prema postavljenom uslovu, zameniti sa $f(x)$ iz date diferencijalne jednačine. Na taj način iz zbira $u+v$ imamo rešenje date diferencijalne jednačine u obliku $y(x)=\int_0^x f(t)(x-t)\,dt+C_1x+C_2$, samo sa jednom kvadraturom.

Na osnovu spomenutog obrasca iz (III, str. 72) ovaj oblik rešenja može se lako proširiti i na diferencijalnu jednačinu n-oga reda $y^{(n)}(x)=f(x)$, u obliku

$$y=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f(t)\,(x-t)^{n-1}\,dt+P_{n-1}(x),$$

gde je $P_{n-1}(x)$ polinom $(n-1)$-oga stepena sa n proizvoljnih konstanata.

b. $y''=f(y)$.

Predstavimo jednačinu u obliku $\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{dy'}{dy}\,y'=f(y)$; razdvajanjem promenljivih, $y'\,dy'=f(y)\,dy$, dolazimo do prvog integrala, $y'^2 = 2\int f(y)\,dy + C$; a zatim, drugom kvadraturom, $x = \int \frac{dy}{\sqrt{C + 2\int f(y)\,dy}} + C_1$, dobivamo konačno rešenje

c. $y'' = f(y')$.

Ova jednačina u obliku $dy' : f(y') = dx$ daje prvi integral, $x = \int \frac{dy'}{f(y')} + C$, a u obliku $\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dy}\, y' = f(y')$ daje drugi integral, $y = \int \frac{y'\,dy'}{f(y')} + C_1$, pri čemu izvod y' igra ulogu pomoćnog parametra. Prema tome rešenje se izražava pomoću dve kvadrature u parametarskom obliku.

d. $y'' = f(y', y)$.

Potražimo rešenje ove jednačine u obliku $y' = u(y)$, gde je u nepoznata funkcija koja zadovoljava datu jednačinu. Za $u(y)$ imamo $\frac{du}{dx} = f(u, y)$, ili $\frac{du}{dy} \cdot u = f(u, y)$. Dobili smo za u diferencijalnu jednačinu prvog reda. Posle integracije te jednačine u obliku $u = y' = \Phi(y, C)$ dovršavamo integraciju kvadraturom $x = \int \frac{dy}{\Phi(y, C)} + C_1$.

e. $y'' = f(y', x)$.

Slično prethodnom slučaju, ako stavimo $v(x) = y'$ imamo diferencijalnu jednačinu $\frac{dv}{dx} = f(v, x)$ prvog reda. Rešenje te jednačine u obliku $v = \frac{dy}{dx} = \psi(x, C)$ omogućuje kvadraturu, $y = \int \psi(x, C)\,dx + C_1$, koja dovršava rešenje.

Kao primer ovog slučaja uzmimo diferencijalnu jednačinu drugog reda čija integracija dovršava problem potere, postavljen na str. 22 ove knjige.

Jednačina koju smo izveli glasi $(a-x)\frac{dy'}{dx} = k\sqrt{1+y'^2}$, ili $y'' = k\sqrt{1+y'^2} : (a-x) = f(x, y')$ i, prema tome, spada u tretirani slučaj. Kad stavimo $y' = v$, iz te jednačine, posle razdvajanja promenljivih, imamo $\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{k\,dx}{a-x}$, što, posle integracije, daje $\log(v + \sqrt{1+v^2}) = -k\log(a-x) + \log C = \log C(a-x)^{-k}$, gde je C proizvoljna konstanta. Integral pišemo ovako $y' + \sqrt{1+y'^2} = C(a-x)^{-k}$. Za početni položaj imamo $x = 0$, $y' = 0$ i prema tome je $1 = Ca^{-k}$. Ako iz ove jednačine određenu proizvoljnu konstantu, C, uvrstimo u prethodnu jednačinu, dobićemo: $y' + \sqrt{1+y'^2} = a^k(a-x)^{-k}$. Uporedo sa ovom jednačinom, kao zaključak iz nje, možemo napisati jednačinu $y' - \sqrt{1+y'^2} = -a^{-k}(a-x)^k$. Iz tih jednačina imamo $2y' = a^k(a-x)^{-k} - a^{-k}(a-x)^k$. Posle toga vršimo kvadraturu, pri čemu treba razlikovati dva slučaja: 1. $k \neq 1$. U ovom slučaju imamo:

$$2(y + C_1) = -a^k(1-k)^{-1}(a-x)^{1-k} + a^{-k}(1+k)^{-1}(a-x)^{1+k};$$

konstanta se određuje iz uslova $x = 0$, $y = 0$, posle čega konačno imamo jednačinu trajektorije $2(1-k^2)y = 2ak + a^{-k}(1-k)(a-x)^{1+k} - a^k(1+k)(a-x)^{1-k}$. 2. $k = 1$. Imamo $2(y + C_1) = \frac{1}{2}a^{-1}(a-x)^2 - a\log(a-x)$, a, posle određivanja konstante, jednačina trajektorije uzima oblik $2y + \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a^{-1}(a-x)^2 - a\log\frac{a-x}{a}$.

Što se tiče rezultata potere, ovde nećemo analizirati sudbinu zeca. To je bilo izvršeno na drugom mestu[1]).

---

[1]) A. Bilimović. Racionalna mehanika. I. Mehanika tačke. Drugo izd. 1950. Str. 63.

Vežbanja:

Integrisati jednačine

1. $\frac{d^2y}{dx^2}=x\sin x+\cos x$. 2. $y''=x^3e^x$. 3. $y''=e^x\sin x$. 4. $y''=y$. 5. $y''=x^5$. 6. $y''=e^{kx}$ (k=const.). 7. $y''=a\sin mx$ (a i m konstante). 8. $y''+k^2y=0$. 9. $y''=m/y^3$ (m—konst). 10. $y''=n/y$ (n—konst). 11. $y''=9y'$. 12. $y''=1+y'^2$. 13. $\sin y''+y''=x$. 14. $y''=\frac{1}{\sqrt{y}}$. 15. $y''=yy'$. 16. $y''=\sqrt{xy'}$.

3.3. Linearne diferencijalne jednačine

Diferencijalna jednačina

$$(1)\quad y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}y'+p_ny=q,$$

gde su p_i $(i=1,2,\ldots,n)$, q neprekidne funkcije samo promenljive x ili konstante, zove se *linearna diferencijalna jednačina n-tog reda*. Ako je $q=0$, ona je *bez desne strane* ili *homogena*. Ako su svi koeficijenti p_i konstantni, ona je *sa konstantnim koeficijentima*.

Može se pokazati (teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja) da, pod izvesnim uslovima, koje treba da zadovoljavaju funkcije p_i, q za proizvoljne početne vrednosti $x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$, jednačina (1) ima određeno rešenje $y=\Phi(x, x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$, koje, zbog proizvoljnosti početnih vrednosti u određenoj oblasti, može se napisati i na ovaj način $y=F(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

Zaustavimo se prvo na jednačinama bez desne strane $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_ny=0$, specijalno na jednačini drugog reda $y''+p_1y'+p_2y=0$.

U rešavanju linearnih jednačina važnu ulogu igraju njihovi partikularni integrali.

Za jednačine bez desne strane se može navesti niz osobina partikularnih integrala, koje čitalac sam može lako potvrditi.

1. Ako je y_1 partikularno rešenje, onda je i C_1y_1 partikularno rešenje, gde je C_1 proizvoljna konstanta.

2. Ako su y_1 i y_2 dva partikularna rešenja, onda je i zbir y_1+y_2 partikularno rešenje.

Uvedimo sad pojam *linearno nezavisnih partikularnih rešenja*. Dva rešenja, y_1 i y_2, smatraju se *linearno nezavisnim*, ako jednačina $C_1y_1+C_2y_2=0$ ne može biti zadovoljena, za svako x, nikakvim drugim vrednostima sem $C_1=0$ i $C_2=0$. Tako su, npr., funkcije x i x^2 linearno nezavisne, jer uslov $C_1x+C_2x^2=0$ može biti zadovoljen samo onda, kad su $C_1=C_2=0$. Isto su tako funkcije $\sin^2x$ i $\cos^2x$ linearno nezavisne, jer za svako x ne možemo odrediti C_1 i C_2 tako da jednakost $C_1\sin^2x+C_2\cos^2x=0$ postane identitet. Međutim, tri funkcije $\sin^2x, \cos^2x, 1$ su linearno zavisne, jer jednakost $C_1\sin^2x+C_2\cos^2x+C_3\cdot 1=0$ za $C_1=C_2=1, C_3=-$ postaje identitet za svaku vrednost x.

Navedimo sad kriterijum za ispitivanje linearne zavisnosti rešenja. Radi kraćeg pisanja uzmimo slučaj tri funkcije, y_1, y_2, y_3, i postavimo uslov da između njih postoji linearna veza (1) $C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3=0$ sa koeficijentima C_1, C_2, C_3 koji nisu svi jednaki nuli. Pošto jednakost (1) treba da bude identitet u odnosu na svaku vrednost x, biće identiteti i rezultati diferenciranja te jednakosti po x. Prema tome za određivanje koeficijenata C_1, C_2, C_3 možemo se poslužiti sistemom od tri jednačine

$$\begin{aligned}C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3&=0,\\ C_1y_1'+C_2y_2'+C_3y_3'&=0,\\ C_1y_1''+C_2y_2''+C_3y_3''&=0,\end{aligned}$$

sa determinantom

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2 & y_3, \\ y_1', & y_2', & y_3' \\ y_1'', & y_2'', & y_3'' \end{vmatrix} = W,$$

koja se zove *determinanta Vronskog* (H. Wronski, 1775—1853), u datom slučaju, *trećeg reda*. Svaka vrsta, sem prve, sastavljena je od izvoda članova prethodne vrste. Prva vrsta sadrži funkcije koje se ispituju. Pošto sistem homogenih jednačina prvog stepena može imati određeno rešenje, sem trivijalnog ($C_1=C_2=C_3=0$), samo pod uslovom kad je determinanta tog sistema jednaka nuli. Prema tome smo dobili stav: 1. Ako su funkcije y_1, y_2, y_3 linearno zavisne, determinanta Vronskog jednaka je nuli. Važi i obrnuta teorema: 2. Ako su funkcije f_1, f_2, f_3 linearno nezavisne, determinanta Vronskog ne može biti jednaka nuli ni u jednoj tački date oblasti.

Tako, za prvi primer, sa funkcijama x, x^2, determinanta Vronskog ima vrednost $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0$ i prema tome su, kako smo videli, ove funkcije nezavisne. Za drugi primer: $y_1 = \sin^2 x$, $y_2 = \cos^2 x$ determinanta daje:

$$\begin{vmatrix} \sin^2 x, & \cos^2 x \\ 2\sin x \cos x, & -2\cos x \sin x \end{vmatrix} = -\sin 2x \neq 0$$

i prema tome imamo ponovo funkcije linearno nezavisne. Najzad, u poslednjem primeru imamo $y_1 = \sin^2 x$, $y_2 = \cos^2 x$, $y_3 = 1$. Determinanta daje:

$$\begin{vmatrix} \sin^2 x, & \cos^2 x, & 1 \\ 2\sin x \cos x, & -2\sin x \cos x, & 0 \\ 2(\cos^2 x - \sin^2 x), & -2(\cos^2 x - \sin^2 x), & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} \sin 2x, & -\sin 2x \\ \cos 2x, & -\cos 2x \end{vmatrix} = 0$$

i prema tome se potvrđuje zavisnost navedenih funkcija.

Sad možemo navesti treću, najvažniju osobinu linearne jednačine.

3. *Ako su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n linearno nezavisnih partikularnih rešenja linearne homogene diferencijalne jednačine n-tog reda, opšti integral takve jednačine ima oblik: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$, gde su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ proizvoljne konstante.*

Skup svih linearno nezavisnih partikularnih rešenja date linearne homogene diferencijalne jednačine sačinjava *fundamentalni sistem* te jednačine. Jasno je da poznavanje fundamentalnog sistema omogućuje da se napiše opšti integral homogene jednačine.

Primeri:

1. Jednačina $y'' + y = 0$. Partikularna rešenja: $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$. Ona su nezavisna, jer je $W = \begin{vmatrix} \sin x, & \cos x \\ \cos x, & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Prema tome je opšti integral $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Za određivanje partikularnog integrala, sa početnim uslovima za $x_0 = 0$ imamo $y_0 = C_2$, $y_0' = C_1$; prema tome opšti se transformiše u integral: $y = y_0 \cos x + y_0' \sin x$. Za partikularna rešenja $\cos x$ i $\sin x$, kod kojih redom stoje konstante y_0, y_0' i dalje y_0'' itd. za jednačinu višega reda se kaže da ona sačinjavaju *normalan fundamentalan sistem* date diferencijalne jednačine.

2. Jednačina $y'' - y = 0$ ima dva očevidna partikularna rešenja $y_1 = e^{+x}$, $y_2 = e^{-x}$. Ona su nezavisna, jer je $W = \begin{vmatrix} e^x, & e^{-x} \\ e^x, & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Opšti integral je $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Integral sa početnim uslovima $y = \frac{1}{2}(y_0 + y_0')e^x + \frac{1}{2}(y_0 - y_0')e^{-x}$ pokazuje da e^{+x}, e^{-x} sačinjavaju fundamentalni sistem, no on nije normalan. Ako izvedeni integral napišemo u obliku $y = y_0 \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + y_0' \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ i stavimo $y = y_0 Y_1 + y_0' Y_2$, gde su $Y_1 = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$, $Y_2 = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$, onda, prvo, možemo potvrditi da su $\cosh x$ i $\sinh x$ zaista partikularni integrali date jednačine, tj., npr., $(\cosh x)'' - \cosh x = 0$, jer je $(\cosh x)'' = (\sinh x)' = \cosh x$; drugo, da su oni nezavisna rešenja naše jednačine, jer za determinantu Vronskog imamo

$$W = \begin{vmatrix} \cosh x, & \sinh x \\ (\cosh x)', & (\sinh x)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh x, & \sinh x \\ \sinh x, & \cosh x \end{vmatrix} = \cosh^2 x - \sinh^2 x =$$

$= 1 \neq 0$; i, treće, da $\cosh x$ i $\sinh x$ sačinjavaju normalni fundamentalni sistem rešenja, jer opšti integral zaista ima oblik $y = y_0 \cosh x + y_0' \sinh x$.

Ova dva jednostavna primera navedena su da se na njima protumače pojmovi fundamentalnog i normalnog fundamentalnog sistema rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine. Okvir ove knjige ne dozvoljava da se dublje upuštamo u teoriju tih jednačina.

Sad ćemo preći na proučavanje nehomogenih linearnih diferencijalnih jednačina, sa desnom stranom. Uporedimo nehomogenu jednačinu $y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+p_2 y^{(n-2)}+\ldots+p_n y=f(x)$ sa homogenom iste leve strane, $y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+p_2 y^{(n-2)}+\ldots+$ $+p_n y=0$. Označimo opšti integral homogene jednačine sa y, tj. stavimo $y=C_1 y_1+C_2 y_2+\ldots+C_n y$, gde su $y_1, y_2 \ldots, y_n$ nezavisni partikularni integrali homogene jednačine. Sa Y_1 označimo bilo koji partikularni integral nehomogene jednačine. Lako je potvrditi da zbir $y+Y_1$ služi kao opšti integral date nehomogene jednačine. Zaista, ako ovaj zbir stavimo u tu jednačinu i odvojimo članove sa y od članova sa Y_1, dobićemo dva očevidna identiteta. Prema tome imamo kao osnovni stav za rešavanje nehomogenih jednačina: *Opšti integral nehomogene linearne diferencijalne jednačine je zbir partikularnog rešenja te jednačine i opšteg integrala odgovarajuće jednačine, koja se dobiva zamenom funkcije desne strane nulom.*

Primeri.

1. $y''+y=a$, gde je a konstanta. Partikularni integral Y_1 jednak je a; prema tome imamo rešenje naše jednačine u obliku $y=a+C_1\cos x+C_2\sin x$.

2. $y''-y=x^2+4$. Za određivanje Y_1 stavljamo $Y_1=ax^2+$ $+bx+c$ i metodom neodređenih koeficijenata a, b, c određujemo $Y_1=-x^2-6$, jer je $(-x^2-6)''-(-x^2-6)\equiv x^2+4$. Prema tome opšti integral naše jednačine ima oblik $y=$ $=C_1\cosh x+C_2\sinh x-x^2-6$.

Vežbanja:

1. Rešiti pitanje o linearnoj zavisnosti ili nezavisnosti funkcija: a. $y_1=\operatorname{tg} x, y_2=\operatorname{cotg} x$. b. $y_1=e^x, y_2=e^{2x}, y_3=e^{3x}$. c. $y_1=e^x, y_2=\frac{1}{2}e^{2x}, y_3=$ $=\frac{1}{3}e^{3x}$. d. $pe^x+qe^{2x}+re^{3x}$, gde su p, q, r konstante. e. $y_1=\sin^2\frac{x}{2}, y_2=$ $=\cos x, y_3=10$.

2. Za jednačine $y''+16y=0$ i $y''-16y=0$ napisati normalne fundamentalne sisteme rešenja.

3.31. Lagranževa metoda varijacije proizvoljnih konstanata

U gore navedenim jednostavnim primerima određivanje partikularnog rešenja nehomogene jednačine nije bilo osnovano na jednom postupku, koji bi davao potrebni rezultat. Dokažimo sad stav koji određuje put za pronalazak potrebnog partikularnog integrala nehomogene jednačine. Stav glasi: *Ako je poznat opšti integral homogene linearne diferencijalne jednačine, opšti integral odgovarajuće nehomogene jednačine dobiva se pomoću dopunskih kvadratura.*

Radi kraćeg pisanja zaustavimo se na slučaju jednačine drugog reda. Identičan postupak lako se proširuje i na jednačine višeg reda.

Imamo homogenu jednačinu (1) i nehomogenu (2) sa desnom stranom

$$(1)\quad y''+p_1 y'+p_2 y=0, \qquad (2)\quad y''+p_1 y'+p_2 y=f(x).$$

Neka rešenje homogene jednačine ima oblik $y=C_1 y_1+$ $+C_2 y_2$, gde su y_1 i y_2 nezavisni partikularni integrali, a C_1 i C_2 konstante. Potražimo sad rešenje nehomogene jednačine (2) u obliku (3) $y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2$, gde su $C_1(x)$ i $C_2(x)$ nepoznate funkcije, a y_1 i y_2 poznata partikularna rešenja jednačine (1). Diferencirajmo sad (3) po x: $y'=C_1(x)y_1'+$ $+C_2(x)y_2'+C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2$. Postavimo sad za nepoznate funkcije C_1 i C_2 uslov da zbir dva poslednja člana bude jednak nuli. Tada imamo (3') $y'=C_1(x)y_1'+C_2(x)y_2'$ i (4) $C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0$. Posle toga vršimo naredno diferenciranje (3'') $y''=C_1(x)\,y_1''+C_2(x)y_2''+C_1'(x)\,y_1'+C_2'(x)\,y_2'$ i rezultate iz (3), (3') i (3'') stavimo u jednačinu (2). Posle uređivanja članova dobivamo $C_1(y_1''+p_1 y_1'+p_2 y_1)+C_2(y_2''+$ $+p_1 y_2'+p_2 y_2)+C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x)$. Koeficijenti kod C_1 i C_2 jednaki su nuli, jer su y_1 i y_2 partikularna rešenja jednačine (1), prema tome ostaje samo jednačina (4') $C_1'(x)y_1'+$ $+C_2'(x)y_2'=f(x)$. Prema tome za određivanje izvoda nepoznatih funkcija $C_1'(x)$ i $C_2'(x)$ imamo dve linearne jednačine (4) i (4'), sa glavnom determinantom $\begin{vmatrix} y_1, & y_2, \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ koja nije jednaka nuli, jer je to determinanta Vronskog za linearno nezavisne partikularne integrale jednačine (1). Prema tome iz sistema jednačina (4) i (4') možemo odrediti $C_1'(x)$ i $C_2'(x)$ kao poznate funkcije x; stavimo $C_1'(x)=f_1(x)$, $C_2'(x)=f_2(x)$.

Određivanje funkcija $C_1(x)$ i $C_2(x)$ svodi se na dve kvadrature, $C_1(x)=\int f_1(x)\,dx+\alpha_1$, $C_2(x)=\int f_2(x)+\alpha_2$. Kao zaključak dobivamo rešenje nehomogene jednačine

$$y=\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+y_1\int f_1(x)\,dx+y_2\int f_2(x)\,dx.$$

Navedeni stav je dokazan.

Metoda pomoću koje smo našli rešenje nehomogene linearne diferencijalne jednačine, izražena pomoću kvadrature, zove se *Lagranževa metoda varijacije konstanata.*

Primeri.

1. Za jednačinu $y''+y=a$ biće $y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$, odakle imamo $y'=-C_1(x)\sin x+C_2(x)\cos x$ i dopunsku jednačinu $C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0$, i $y''=-C_1(x)\cos x-C_2(x)\sin x-C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x$. Posle zamene imamo jednačine $C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0$, $-C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=a$. Proveravamo determinantu Vronskog: $\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1\neq 0$ i rešavamo sistem: $C_1'(x)=-a\sin x$, $C_2'(x)=a\cos x$. Pomoću kvadratura $C_1=-\int a\sin x\,dx=a\cos x+\alpha_1$, $C_2=\int a\cos x\,dx=a\sin x+\alpha_2$ određujemo opšti integral date jednačine u obliku $y=(a\cos x+\alpha_1)\cos x+(a\sin x+\alpha_2)$; konačno u obliku $y=\alpha_1\cos x+\alpha_2\sin x+a$, a to je isti onaj rezultat koji smo napisali neposredno iz posmatranja date vrlo jednostavne jednačine.

2. U drugom primeru imamo $y''-y=x^2+4$ i opšti integral homogene jednačine $y=C_1\cosh x+C_2\sinh x$. Slično prethodnom primeru imamo ove jednačine za određivanje izvoda $C_1'(x)$ i $C_2'(x)$: $C_1'\cosh x+C_2'\sinh x=0$, $C_1'\sinh x+C_2'\cosh x=x^2+4$. Rešavamo: $C_1'=-(x^2+4)\sinh x$, $C_2'(x)=(x^2+4)\cosh x$ i izračunavamo dve kvadrature: $C_1(x)=-\int(x^2+4)\sinh x\,dx+\alpha_1$, $C_2(x)=\int(x^2+4)\cosh x\,dx+\alpha_2$, sa rezultatima $C_1=-(x^2+2)\cosh x+x\sinh x-4\cosh x+\alpha_1$, $C_2=(x^2+2)\sinh x-x\cosh x+4\sinh x+\alpha_2$. Sa ovim vrednostima C_1 i C_2 konačno imamo $y=\alpha_1\cosh x+\alpha_2\sinh x-x^2-6$. Dobili smo rezultat, koji smo ranije utvrdili, pomoću metode neodređenih koeficijenata sa probom partikularnog integrala u obliku odgovarajućeg polinoma.

Vežbanja:

Integrisati jednačine pomoću Lagranževe metode:
1. $y''+y=x$. 2. $y''-16y=\sin x$. 3. $y''+16y=\sin x$.

3.4. Linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima

Ako su koeficijenti leve strane linearne diferencijalne jednačine konstantni, jednačina se zove *linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima.* Desna strana može biti pri tome funkcija promenljive x. Prema tome i takve jednačine mogu biti *homogene* i *nehomogene.* Opšti oblik takve jednačine n-tog reda napisaćemo ovako $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$, pri čemu su $a_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ konstantne.

Diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima igraju vrlo važnu ulogu kako u teoriji diferencijalnih jednačina uopšte, tako i u primenama, jer mnogi problemi mehanike i fizike zahtevaju rešavanje takvih jednačina, naročito pri ocenjivanju oscilatornih procesa.

Sa teorijskog gledišta one su po tome važne što su, pri njihovu rešavanju, potrebna samo dva postupka — rešavanje algebarskih jednačina i kvadrature.

Uzmimo prvo homogenu jednačinu

$$(1)\quad y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0,$$

i potražimo njen partikularni integral u obliku $y=e^{rx}$, gde je r neki stvarni ili neki imaginarni broj. Pošto je $(e^{rx})^{(k)}=r^ke^{rx}$, posle smene izvoda tim veličinama i skraćivanja zajedničkim množiteljem e^{rx} dobićemo iz (1) algebarsku jednačinu (2) $r^n+a_1r^{n-1}+a_2r^{n-2}+\ldots+a_{n-1}r+a_n=0$ n-tog stepena u odnosu na r. Ova algebarska jednačina zove se *karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima.* Svakom prostom realnom korenu r_p karakteristične jednačine odgovara partikularni integral $y_p=e^{r_px}$ date diferencijalne jednačine. To se može potvrditi neposrednom zamenom. Ako je takvih korena k_1, diferencijalna jednačina ima k_1 nezavisnih partikularnih integrala i deo opšteg integrala $\sum_{p=1}^{k_1}C_pe^{r_px}$, gde su C_p proizvoljne konstante. Svakom paru kompleksnih konjugovanih korena $\alpha_i+\beta_i i$ i $\alpha_i-\beta_i i$ odgovara par partikularnih integrala $e^{(\alpha_i+\beta_i i)x}$ i $e^{(\alpha_i-\beta_i i)x}$. Njima odgovarajući deo opšteg integrala transformiše se u trigonometrijski oblik ovako

$$A_i e^{(\alpha_i+\beta_i i)x}+B_i e^{(\alpha_i-\beta_i i)x}=K_i e^{\alpha_i x}\cos\beta_i x+K_i^* e^{\alpha_i x}\sin\beta_i x=$$

$$=e^{\alpha_i x}(K_i\cos\beta_i x+K_i^*\sin\beta_i x);$$

pri tome smo iskoristili dva obrasca (II, str. 123):

$$e^{(\alpha_i+\beta_i i)x}=e^{\alpha_i x}(\cos\beta_i x+i\sin\beta_i x),$$

$$e^{(\alpha_i-\beta_i i)x}=e^{\alpha_i x}(\cos\beta_i x-i\sin\beta_i x),$$

i uveli, mesto A_i i B_i, nove proizvoljne konstante: $K_i=A_i+B_i$, $K_i^*=A_i-B_i$. Ako karakteristična jednačina ima $2k_2$ takvih konjugovanih korena, opšti integral ima $2k_2$ članova sa nezavisnim partikularnim integralima.

Proučimo sad slučaj kad karakteristična jednačina ima dva jednaka korena r_s i $r_s^*=r_s$. Ako jednom korenu odgovara partikularni integral $e^{r_s x}$, koja još druga funkcija može biti uzeta za nezavisni drugi integral? Pokažimo da drugi partikularni integral može biti uzet u obliku $x e^{r_s x}$. Pretpostavimo prvo da $r_s^*\neq r_s$ i da je $r_s^*=r_s+\delta$. Tada imamo dva partikularna integrala: $e^{r_s x}$ i $e^{(r_s+\delta)x}$. Načinimo ovu njihovu kombinaciju $(e^{(r_s+\delta)x}-e^{r_s x}):\delta$, koja je takođe partikularni integral. Pređimo sad na graničnu vrednost kad $\delta\to 0$. Tada, prema Lopitalovu pravilu, imamo

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{e^{(r_s+\delta)x}-e^{r_s x}}{\delta}=\frac{0}{0}=\lim_{\delta\to 0}\frac{(e^{(r_s+\delta)x}-e^{r_s x})'}{(\delta)'}=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{e^{(r_s+\delta)x}\cdot x}{1}=x e^{r_s x}.$$

Prema tome smo dobili dva partikularna integrala za dva jednaka korena $e^{r_s x}$ i $x e^{r_s x}$; njima, u opštem integralu, odgovaraju članovi $(L_s+L_s^* x)e^{r_s x}$, gde su L_s i L_s^* proizvoljne konstante. Ako je koren k-te strukosti, imamo ispred $e^{r_s x}$ polinom $(k-1)$-og stepena po x sa koeficijentima — proizvoljnim konstantama. Prema tome, u opštem slučaju, opšti integral homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima može sadržati ove partikularne integrale: od prostih realnih i imaginarnih korena, zatim od višestrukih realnih i kompleksnih korena sa odgovarajućim polinomima kao množiocima.

Primeri.

1. Jednačini $y^{(5)}-4y^{(4)}+6y'''-6y''+5y'-2y=0$ odgovara karakteristična jednačina $r^5-4r^4+6r^3-6r^2+5r-2=0$. Rešimo ovu jednačinu petog stepena. Pošto se slobodni član rastavlja na množioce 1, -1, 2, -2, i, $-i$, pokušavamo prvo $r=1$. Pošto je zbir koeficijenata jednak nuli, jedinica je koren jednačine $r_1=1$; pošto je to jednostavan broj, proveravamo da li je on koren i izvoda; računamo, uzimajući izvod i vrednost za $r=1$, $5-4.\ 4+3.\ 6-2.\ 6+5\equiv 0$; prema tome je jedinica dvostruki koren: $r_1=r_2=1$. Zatim uzimamo $r=i=\sqrt{-1}$ sa vrednostima $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$; imamo $i-4-6i+6+5i-2\equiv 0$ i koren $r_3=+i$; a pošto naša jednačina ima realne koeficijente, mora imati i konjugovani koren $r_4=-i$. Kako znamo da je proizvod svih korena jednačine petog stepena jednak negativnom slobodnom članu, u našem slučaju $-(-2)=2$, a proizvod četiri korena iznosi $1.1.\ i.-i=1$, zaključujemo da je peti koren jednak $r_5=2$.

Sad se može, uzimajući u obzir i jedan dvostruki koren, napisati opšti integral: $y=(C_1+C_2 x)e^x+C_3 e^{xi}+C_4 e^{-xi}+C_5 e^{2x}$. Posle transformacije članova sa imaginarnim izložiocima, na osnovu obrazaca $e^{xi}=\cos x+i\sin x$ i $e^{-xi}=\cos x-i\sin x$, imamo konačan rezultat sa drugim vrednostima konstanata: $y=(C_1+C_2 x)e^x+C_3\cos x+C_4\sin x+C_5 e^{2x}$. Trigonometrijske članove možemo zameniti ovim članom $A\sin(x+B)$ ili sa $M\cos(x+N)$, ako stavimo: $C_3=A\sin B$, $C_4=A\cos B$, odnosno $C_3=M\cos N$, $C_4=-M\sin N$.

2. Jednačini $y^{(6)}+8y^{(4)}+20y''+16y=0$ odgovara karakteristična jednačina $r^6+8r^4+20r^2+16=0$. Ako stavimo $r^2=u$, imamo kubnu jednačinu $u^3+8u^2+20u+16=0$. Posle ispitivanja množioca slobodnog člana, određujemo prvi koren $u_1=-4$. Ako sad levu stranu naše jednačine podelimo sa $u+4$, dobićemo kvadratnu jednačinu $u^2+4u+4=(u+2)^2=0$, koja ima dvostruki koren $u_2=-2$. Sad možemo napisati šest korena karakteristične jednačine: $r_1=2i$, $r_2=-2i$, $r_3=r_4=i\sqrt{2}$, $r_5=r_6=-i\sqrt{2}$.

Pošto su svi koreni konjugovani imaginarni, imamo opšti integral u trigonometrijskom obliku: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + (C_3 + C_4 x) \cos (x\sqrt{2}) + (C_5 + C_6 x) \sin (x\sqrt{2})$.

Vidimo da rešavanje homogenih linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima traži samo rešavanje algebarske jednačine, naime karakteristične, date diferencijalne jednačine.

Što se tiče rešavanja nehomogenih linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima, i na njih se proširuju isti postupci koji se primenjuju na linearne jednačine sa promenljivim koeficijentima. I ovde opšti integral možemo odrediti kao zbir opšteg integrala odgovarajuće homogene jednačine bez desne strane i partikularnog integrala jednačine sa desnom stranom. Pri tome i ovde naročito dobru uslugu može da učini metoda varijacije proizvoljnih konstanata, koja omogućuje da se odredi konačno rešenje pomoću kvadratura. Pokazaćemo to na primeru.

Primer. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 3x + 2$. Karakteristična jednačina homogene jednačine, $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$, ima korene $r_1 = r_2 = 1$, $r_3 = 2$; a partikularni integral potražimo u obliku polinoma $Y_1 = Ax + B$. Iz uslova da je Y_1 partikularni integral, imamo $5A - 2(Ax + B) = 3x + 2$, odakle su: $A = -1{,}5$; $B = -4{,}75$; a konačni opšti integral:

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^x + C_3\, e^{2x} - 1{,}5\,x - 4{,}75.$$

3.41. Jednačina lančanice

Pod *lančanicom* se u Statici podrazumeva nerastegljiva, apsolutno gipka, linija na čije tačke mogu dejstvovati spoljašnje sile, koncentrisane u pojedinim njenim tačkama, ili neprekidno raspoređene sa napadnim tačkama duž same linije. Sistem takvih sila sačinjava *opterećenje lančanice*.

U Statici se proučava prvo ravnoteža poligona sastavljena od pojedinih konačnih štapova, pa se zatim uzima slučaj kad štapovi postaju beskrajno mali i putem prelaza na granične vrednosti, postavlja se diferencijalna jednačina kao uslov ravnoteže svakog elementa lančanice. Uzećemo, kao gotov rezultat, *vektorsku diferencijalnu jednačinu lančanice* sa datim ravnim neprekidnim opterećenjem.

Ako sa $\Delta\vec{F}$ označimo rezultantu svih spoljašnjih sila opterećenja, koje dejstvuju na element dužine ΔS lančanice, a sa $\Delta\vec{R}$ priraštaj sile napona, koja ima pravac tangente na lančanicu, onda za ravnotežu elementa ΔS imamo vektorsku jednačinu $\Delta\vec{F} + \Delta\vec{R} = 0$. Ako sad tu jednačinu podelimo sa ΔS i uvedemo vektor $\vec{f}$ kao vektorsko specifično opterećenje lančanice u datoj tački, izračunato na jedinicu dužine, tj. stavimo $\vec{f} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta\vec{F}}{\Delta S}$, dobiva se tražena vektorska diferencijalna jednačina lančanice: $\vec{f} + \dfrac{d}{ds}\vec{R} = 0$. Za slučaj ravnog opterećenja, a to znači i ravnog oblika ravnoteže cele lančanice, iz vektorske jednačine imamo ove dve skalarne jednačine:

$$(1) \qquad f_x + \frac{d}{ds}\left(R\frac{dx}{ds}\right) = 0, \qquad f_y + \frac{d}{ds}\left(R\frac{dy}{ds}\right) = 0.$$

Ovaj sistem jednačina za opterećenje $\vec{f}$, dato svojim projekcijama f_x, f_y na koordinatne ose, određuje oblik lančanice i silu napona $\vec{R}$, pri čemu, kao što je poznato, treba da budu dati i početni uslovi.

Zaustavimo se na slučaju specifičnog opterećenja paralelnim silama, čiji pravac uzimamo za pravac Oy ose. Tada je $f_x = 0$ i prva od napisanih jednačina daje integral $R\dfrac{dx}{ds} = \text{const.} = H$. To znači napon R za sve tačke lančanice, u slučaju paralelnih spoljašnjih sila, ima stalnu projekciju na Ox osu.

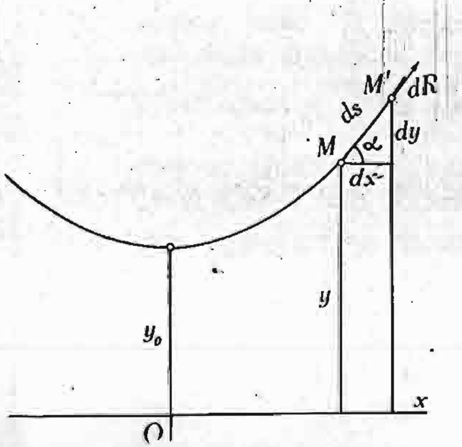
Sad ćemo proučiti dva elementarna slučaja.

1. Opterećenje f_y, kao funkcije x, ima stalnu vrednost; tada je $f_y = \dfrac{dF}{ds} = \dfrac{dF}{dx}\dfrac{dx}{ds} = q\dfrac{dx}{ds}$, gde je $q = \text{const.}$ Druga jednačina daje tada $q\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{d}{ds}\left(R\dfrac{dy}{ds}\right) = 0$; a kako je $R\dfrac{dy}{ds} = R\dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{ds} = H\dfrac{dy}{dx}$, dolazimo konačno do jednačine $d^2y/dx^2 = a$, gde je

$a = -q/H$. Izvedena diferencijalna jednačina ima opšti integral oblika $y = \frac{1}{2} a x^2 + C_1 x + C_2$, sa proizvoljnim konstantama C_1 i C_2. Pošto dobiveni integral određuje parabolu, lančanica ovog slučaja se zove *parabolična lančanica*. Nećemo ulaziti u određivanje konstanata C_1 i C_2, u vezi sa specijalnim uslovima položaja lančanice.

Dodajmo da parabolična lančanica, naročito sa malim ugibom, ima ogroman značaj u praksi, jer služi za približna posmatranja pri svim malim ugibima. Iz tog razloga ona se u Tehničkoj mehanici proučava vrlo podrobno.

2. U drugom specijalnom slučaju, opterećenje, smatrano kao funkcija s, ima isto tako stalnu vrednost, koju ćemo označiti sa f. Taj slučaj odgovara lancu koji ima istu težinu po metru. Druga od jednačina (1) u ovom slučaju daje (2) $-f + \frac{d}{ds}\left(R \frac{dy}{ds}\right) = 0$, gde je $-f$ algebarska vrednost stalnog specifičnog opterećenja, usmerena suprotno Oy osi. Neposredno iz posmatranja ravnoteže proizvoljnog elementa MM' lančanice (sl. 11) sleduje da je priraštaj napona dR uravnotežen komponentom $f\,ds \cdot \sin\alpha$ opterećenja $f\,ds$ elementa ds. A kako je $ds \sin\alpha = dy$, imamo diferencijalnu jednačinu $dR = f\,dy$, sa integralom $R = fy + C$. Ako proizvoljnu konstantu C odredimo iz uslova $H = f y_0$, gde je y_0 ordinata tačke za koju napon ima pravac paralelan osi Ox, onda je $C = 0$ i $R = fy$. Sa tom vrednošću jednačina (2) uzima oblik $\frac{d}{ds}\left(y \frac{dy}{ds}\right) = 1$. Ako sad na osnovu jednačine $R \frac{dx}{ds} = fy \frac{dx}{ds} = H$ izvršimo smenu $y \frac{1}{ds} = k \frac{1}{dx}$, gde je $k = H/f = y_0$, dobićemo konačno jednačinu $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{k^2} y = 0$. Ova pripada homogenim linearnim diferencijalnim jednačinama drugog reda, sa konstantnim koeficijentima, i zato, posle određivanja korena karakteristične jednačine, $r_1 = +\frac{1}{k}$, $r_2 = -\frac{1}{k}$, imamo ovaj opšti integral $y = C_1 e^{x/k} + C_2 e^{-x/k}$. Pošto za $x = 0$ imamo $y = y_0 = k$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0$, posle određivanja proizvoljnih konstanata dolazimo konačno do jednačine $y = \frac{1}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}$. To je jednačina *obične lančanice*. Kad se govori samo o običnoj lančanici, reč obična se izostavlja. Lančanica ima mnogo vrlo interesantnih osobina, koje su navedene, npr., u mojoj knjizi Racionalna mehanika. II. Mehanika sistema. B. 1951.



Sl. 11 — Element lančanice

Vežbanja:

Integrisati jednačine:

1. $y'' - 5y' + 4y = 0$. 2. $y'' - y' - 30y = 0$. 3. $y'' - 16y = 0$. 4. $y'' + 5y' = 0$. 5. $y'' + 16y = 0$. 6. $y'' - 4y' + 13y = 0$. 7. $y'' - 2y' + y = 0$ 8. $y'' + 4y' + 4y = 0$. 9. $y'' - 5y' + 4y = x$. 10. $y'' - y' - 30y = 60$. 11. $y'' - y' - 12y = e^x$. 12. $y'' + 2\alpha y' + \beta^2 y = 0$. Proučiti rešenje u vezi sa raznim vrednostima konstanata α i β.

Integrisati jednačine:

13. $y''' + 2y'' - 3y' + x = 0$. 14. $y''' + y'' - 6y' = \sin 2x$. 15. $y^{(4)} + 5y''' + 7y'' + 5y' + 6 = \sin 2x$. 16. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$.

Uporediti položaj dve lančanice: obične sa jednačinom $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ i paraboličke sa jednačinom $y = a + x^2/2a$.

3.5. Sistem linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima

Radi kraćeg i jednostavnijeg izlaganja zaustavimo se na slučaju sistema od dve linearne jednačine prvoga reda, sa konstantnim koeficijentima. Neka su date jednačine

$$(1)\quad \frac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y+f_1(t), \quad (2)\quad \frac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y+f_2(t),$$

gde su $x(t)$, $y(t)$ nepoznate funkcije nezavisno promenljive t, a_{ij} $(i, j=1, 2)$ konstantni koeficijenti, f_1 i f_2 date funkcije.

Prikazaćemo dve metode za rešavanje ovakvih sistema jednačina.

Prva metoda se osniva na stavu da se takav sistem, sa dve nepoznate funkcije x i y, može svesti samo na jednu diferencijalnu jednačinu sa jednom nepoznatom funkcijom, sa konstantnim koeficijentima, ali drugoga reda.

U tu svrhu uzmimo, recimo, jednačinu (2) i diferencirajmo je po t: $y''=a_{21}x'+a_{22}y'+f_2'$, gde crtica, kao i uvek, označava izvod; dve crtice — drugi izvod. Iz dobivene jednačine treba eliminisati x'. Za dobivanje vrednosti x' iskoristimo jednačine (1) i (2). Kad prethodno eliminišemo x, dobićemo izvod x' u obliku $x'=[a_{11}y'+(a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})y+a_{21}f_1-a_{11}f_2]:a_{21}$. Posle toga dolazimo do jednačine $y''-(a_{11}+a_{22})y'+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})y=f_2'+a_{21}f_1-a_{11}f_2$, koja i potvrđuje navedeni stav. A pošto nađemo rešenja ove jednačine u obliku opšteg integrala, $y=C_1y_1+C_2y_2+Y_1$, gde su y_1 i y_2 partikularna rešenja odgovarajuće homogene jednačine, Y_1 partikularno rešenje celokupne, nehomogene jednačine i C_1 i C_2 — proizvoljne konstante, određivanje nepoznate x se vrši iz jednačine (2), gde su svi članovi, sem člana sa x, postali poznate funkcije promenljive t.

Primer. Date su jednačine (1′) $x'=-8x+3y+13t+16$; (2′) $y'=-18x+7y+29t+33$. Diferencirajmo drugu jednačinu: $y''=-18x'+7y'+29$. Iz (1′) i (2′) eliminišemo x i određujemo x' iz jednačine $-9x'=-4y'+y-t-12$. Posle toga dolazimo do jednačine $y''+y'-2y=-2t+5$ drugoga reda sa konstantnim koeficijentima, sa desnom stranom. Određujemo partikularno rešenje pomoću neodređenih koeficijenata funkcije $Y_1=at+b$. Kad uvrstimo i odaberemo koeficijente $a-2(at+b)=-2t+b$, dobićemo $Y_1=t-2$. S druge strane, karakteristična jednačina $r^2+r-2=0$ daje korene $r_1=1$, $r_2=-2$. Prema tome za y imamo opšti integral $y=C_1e^t+C_2e^{-2t}+t-2$. Iz (2′) se dobiva $x=\frac{1}{3}C_1e^t+\frac{1}{2}C_2e^{-2t}+2t+1$. Ako želimo da izbegnemo razlomljene koeficijente kod proizvoljnih konstanata, možemo

staviti $C_1=3A_1$, $C_2=2A_2$, i tada konačno imamo $x=A_1e^t+A_2e^{-2t}+2t+1$, $y=3A_1e^t+2A_2e^{-2t}+t-2$, gde su A_1 i A_2 proizvoljne konstante.

Pokazaćemo i drugu metodu. Uzmimo od sistema jednačina (1) i (2) homogeni sistem u obliku $x'=a_{11}x+a_{12}y$, $y'=a_{21}x+a_{22}y$, i potražimo rešenje tog sistema, analogno slučaju jedne linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima, u obliku $x=C_1e^{rt}$, $y=C_2e^{rt}$. Ako stavimo ta rešenja u jednačine i skratimo sa e^{rt}, dobićemo za određivanje konstanata C_1 i C_2 ove dve linearne homogene jednačine: (3) $C_1(a_{11}-r)+C_2a_{12}=0$, (4) $C_1a_{21}+C_2(a_{22}-r)=0$. Kako je poznato da taj sistem ima rešenja, različita od trivijalnih $C_1=0, C_2=0$, determinanta tog sistema mora biti jednaka nuli, tj. (5) $\begin{vmatrix} a_{11}-r, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22}-r \end{vmatrix}=r^2-(a_{11}+a_{22})r+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$. Dobili smo tako kvadratnu jednačinu za određivanje r. Ovo je karakteristična jednačina datog sistema, jer od prirode korena te jednačine zavisi priroda pojave kojoj odgovara dati sistem diferencijalnih jednačina.

Koreni karakteristične jednačine mogu biti različiti, realni i konjugovani kompleksni, ili jednaki. Pretpostavimo da su oni realni i različiti. Označimo ih sa r_1 i r_2. Pod uslovom (3), koji se može zameniti proporcijom $C_2:C_1=(r_1-a_{11}):a_{12}$, jedna od jednačina (3) i (4) sleduje iz druge, pa prema tome za svaki par konstanata C_1, C_2 i C_1^*, C_2^* imamo po jedan odnos $C_2:C_1=\frac{r_1-a_{11}}{a_{12}}=k_1$, $C_2^*:C_1^*=\frac{r_2-a_{11}}{a_{12}}=k_2$, za korene r_1 i r_2. Prema tim rezultatima imamo za opšte integrale $x=C_1e^{r_1t}+C_1^*e^{r_2t}$, $y=C_2e^{r_1t}+C_2^*e^{r_2t}$, ili, sa drugim oznakama, dve proizvoljne konstante A_1 i A_2: (6) $x=A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t}$, (7) $y=A_1k_1e^{r_1t}+A_2k_2e^{r_2t}$.

Vratimo se na jednačine (1), (2) sa desnim stranama i pokažimo metodu varijacije proizvoljnih konstanata za određivanje partikularnih integrala tih jednačina. Uzimamo rešenje (6) i (7) za homogene jednačine. Diferencirajmo po t, smatrajući A_1 i A_2 kao funkcije; zadržavajući suvišne članove dobićemo dve jednačine $A_1'e^{r_1t}+A_2'e^{r_2t}=f_1$, $A_1'k_1e^{r_1t}+A_2'k_2e^{r_2t}=f_2$. Rešavamo ih po A_1' i A_2': $A_1'=(f_1k_2-f_2)(k_2-k_1)^{-1}$, $A_2'=e^{-r_2t}(f_2-k_1f_1)(k_2-k_1)^{-1}$. Račun se završava dvema kvadraturama za određivanje $A_1(t)$ i $A_2(t)$.

Primer. Preradimo prethodni primer prema drugim izloženim metodama. Date su jednačine: $x' = -8x + 3y + 13t + 16$; $y' = -18x + 7y + 29t + 33$. Sastavimo karakterističnu determinantu: $\begin{vmatrix} -8-r, & 3 \\ -18, & 7-r \end{vmatrix} = r^2 + r - 2 = 0$. Imamo $r_1 = 1$, $r_2 = -2$. Izračunavamo: $k_1 = (r_1 - a_{11}) : a_{12} = (1+8) : 3 = 3$, $k_2 = (-2+8) : 3 = 2$. Opšti integrali homogenog sistema su: $x = A_1 e^t + A_2 e^{-2t}$, $y = 3A_1 e^t + 2A_2 e^{-2t}$. Izvodi funkcija: $A_1' = e^{-t}(-1)(2f_1 - f_2) = e^{-t}(3t+1)$, $A_2' = e^{2t}(-1) \cdot 5(2t+3)$. Odavde imamo posle kvadrature: $A_1 = -e^{-t}(3t+4) + \alpha_1$, $A_2 = e^{2t}(5t+2) + \alpha_2$ a zatim i opšte integrale u obliku:

$$x = \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{-2t} + 2t + 1, \quad y = 3\alpha_1 e^t + 2\alpha_2 e^{-2t} + t - 2.$$

Analizirali smo slučaj različitih realnih korena. Iste metode se primenjuju i u slučaju kad su koreni različiti, ali konjugovani kompleksni. Samo, na kraju računa, možemo izraze $e^{\alpha+\beta i}$ i $e^{\alpha-\beta i}$ zameniti poznatim trigonometrijskim izrazima. Najzad, za slučaj jednakih korena karakteristične jednačine, partikularni integrali se određuju pomoću izraza e^{rt} i te^{rt}.

Vežbanja:

Naći rešenja ovih sistema diferencijalnih jednačina:

1. $\dfrac{dy}{dx} = y + z$, $\dfrac{dz}{dx} = y + z + x$. 2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{z}$, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{2}y$. 3. $\dfrac{dx}{dt} - 3\dfrac{dy}{dt} = 0$, $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dx}{dt} - 12x = e^t$. 4. $\dfrac{dy}{dt} + x = 2e^{2t}$, $\dfrac{dx}{dt} - y = e^{-2t}$. 5. $\dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{1}{z}$, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{y-x}$.

3.6. Mehaničke oscilacije

Kao vrlo važna oblast prirodnih nauka, u kojoj se mnogo primenjuju diferencijalne jednačine drugoga reda, pojedinačne ili u sistemima, to je oblast oscilatornih promena. Najjednostavnije se ta oblast prikazuje u tzv. *mehaničkim oscilacijama*, tj. u oscilatornim kretanjima materijalnog sistema, odnosno materijalne tačke, sa jednim ili više stepena slobode.

Stoga uzimamo, pre svega, slučaj oscilatornog kretanja materijalne tačke sa jednim stepenom slobode i na tom ćemo primeru izvesti kinematičke i dinamičke osobine oscilatornih kretanja.

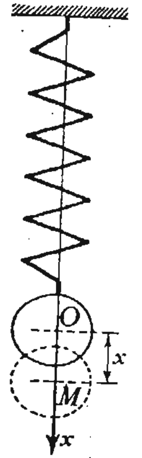
Iz Dinamike materijalne tačke. Na kraju druge knjige[1]) govorili smo o translatornom kretanju čvrstog tela i utvrdili smo da je, za opis kretanja takvog tela, potrebno da znamo kretanje samo jedne tačke takvog tela. Zgodno je za ovu tačku izabrati težište tela. Geometrijska tačka opterećena celokupnom masom translatorno pokretnog tela naziva se *materijalna tačka*. Ako na takvo telo deluju sile, njihovo dejstvo svodi se na dejstvo samo jedne sile — vektorske rezultante koja dejstvuje na materijalnu tačku kao predstavnika translatorno pokretnog čvrstog tela. Ako položaj materijalne tačke, M, sa masom m, odredimo vektorom položaja u odnosu na nepokretnu tačku O, sa $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, vektor $m\vec{r}$ zove se *vektor položaja materijalne tačke opterećene masom m*. Njegov izvod po vremenu $m\dot{\vec{r}} = m\vec{v}$, gde je $\vec{v}$ brzina tačke, zove se *količina kretanja materijalne tačke*. Ako sa $\vec{F}$ označimo rezultantu svih sila koje dejstvuju na materijalnu tačku, kretanje materijalne tačke se vrši na osnovu *Njutnovih zakona* prema vektorskoj jednačini $m\dot{v} = \vec{F}$, gde je $\dot{v}$ izvod brzine po vremenu, odnosno ubrzanje tačke. Ta jednačina glasi: *Izvod po vremenu količine kretanja materijalne tačke jednak je rezultanti svih sila što dejstvuju na tu tačku*. To je osnovna jednačina dela Mehanike koji se bavi mirovanjem i kretanjem materijalnih tela pod uticajem sila, koji se zove *Dinamika*.

Ako se tačka kreće po pravoj i tu pravu uzmemo za osu Ox, iz prethodne vektorske jednačine možemo dobiti, za tu osu, skalarnu jednačinu $mx'' = X$, gde je x'' drugi izvod koordinate po vremenu, tj. pravolinijsko ubrzanje tačke, a X algebarska vrednost rezultante sila koje dejstvuju u pravcu ose Ox pozitivnih, ako te sile imaju smer ose Ox, i negativnih u suprotnom smeru.

Harmonijski oscilator. Uzmimo ovaj jednostavni primer. Teška homogena lopta, sa centrom M i masom m, visi

[1]) Elementi Više matematike. II. Tehnička knjiga. 1961. g.

nepomično o elastičnoj žici, odnosno o opruzi (sl. 12), sa nepomično učvršćenim gornjim krajem. Dok je lopta nepomična, sila teže mg (g — ubrzanje sile teže) lopte, naperena nadole, uravnotežena je silom F elastičnosti žice, naperenom nagore, a istog intenziteta. Od tog položaja, tačke O, centra lopte u položaju ravnoteže, računamo koordinatu x centra lopte u nekom drugom položaju. Smer ose Ox je naperen nadole. Ako uravnoteženoj lopti saopštimo početnu brzinu i ona se premesti u neki položaj sa koordinatom x, diferencijalnu jednačinu kretanja lopte, kao materijalne tačke M sa masom m, treba, prema Njutnovu pravilu, napisati ovako



Sl. 12 — Primer harmonijskog oscilatora

$$mx'' = X = mg - (F + \varepsilon x),$$

gde je ε *konstanta elastičnosti*; ona se meri silom koja isteže žicu, odnosno oprugu, za jedinicu dužine. Prema tome je εx sila elastičnosti kad je žica istegnuta iz položaja ravnoteže za dužinu x. Takva linearna veza odgovara tzv. *Hukovu zakonu* (R. Hooke, 1638—1703). Postavljanje linearne zavisnosti treba smatrati kao približno posmatranje u *Teoriji elastičnosti.* Dublje posmatranje elastičnih osobina tela stoji u vezi sa *Nelinearnom teorijom elastičnosti.*

Pošto je u položaju ravnoteže $mg = F$, diferencijalna jednačina kretanja teške materijalne tačke u vertikalnoj pravoj pod dejstvom sile teže i elastične sile konačno izgleda

$$\text{(1)} \qquad x'' + k^2 x = 0,$$

gde smo stavili $k^2 = \varepsilon/m$. Ova diferencijalna jednačina je linearna drugoga reda, homogena sa konstantnim koeficijentom. Karakteristična jednačina, $r^2 + k^2 = 0$, jednačine (1) ima dva konjugovana imaginarna korena: $r_1 = ki$, $r_2 = -ki$ i, prema tome, posle prelaza na trigonometrijske funkcije, imamo opšti integral u obliku

$$\text{(2)} \qquad x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Pošto je Vronskijeva determinanta partikularnih rešenja $\begin{vmatrix} \cos kt, & \sin kt \\ -k\sin kt, & k\cos kt \end{vmatrix} = k \neq 0$ različita od nule, integral je sastavljen od fundamentalnih funkcija tog problema. One sačinjavaju ne samo fundamentalni sistem rešenja već i normalni, jer za $t = 0$ gornjoj determinanti odgovara normalna matrica $\begin{Vmatrix} C_1, & 0 \\ 0, & C_2 k \end{Vmatrix}$. Za početne vrednosti, $x = x_0$, $x' = x_0'$ za $t = 0$, imamo integral: (3) $x = x_0 \cos kt + \frac{x_0'}{k} \sin kt$. Rešenje u tom obliku se može izraziti i drukčije. Stavimo $x_0'/k = a\cos\alpha$, $x_0 = a\sin\alpha$, gde su $a > 0$ i α nove konstante. Njihove vrednosti su: $a = +\sqrt{x_0^2 + (x_0'/k)^2}$, $\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{kx_0}{x_0'}$. Sa novim konstantama integral (3) se izražava jednim članom: (4) $x = a\sin(kt + \alpha)$. Ako uvedemo drugi ugao, naime $\beta = \alpha - \pi/2$, isti integral možemo napisati u obliku (4'): $x = a\cos(kt + \beta)$, pri čemu je $\beta = \operatorname{arc\,cotg}\left(-\frac{kx_0}{x_0'}\right)$. Ako su početni uslovi $t = 0$: 1) $x_0 = 0$, $x_0' \neq 0$, imamo jednačinu $x = a\sin kt$, gde je $a = x_0'/k$, i 2 $x_0 = a$, $x_0' = 0$, imamo $x = a\cos kt$. Prvoj jednačini odgovara sinusoida, drugoj kosinusoida.

Kako znamo (I, str. 104, 105) jednačinama (4) i (4') odgovaraju *harmonijske oscilacije*. Precizirajmo neke pojmove i navedimo i druge oznake koje se često upotrebljuju u tehnici i fizici. Veličina a je *amplituda oscilacije*. Vreme T je *period* oscilacije. On se određuje iz uslova $kT = 2\pi$ i, zajedno sa amplitudom a, služi kao osnovna veličina za karakteristiku oscilacije. Pošto je $k = 2\pi/T$, jednačina harmonijske oscilacije često se izražava ovako: $x = a\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$. Broj oscilacija u sekundi $n = 1/T$ zove se *frekvencija oscilacije*; označava se i sa f. Koeficijent k, koji se označava i sa ω, nosi naziv *kružne frekvencije*. Pošto je $k = \omega = 2\pi/T = 2\pi f$ za obe frekvencije važi jednačina: kružna frekvencija $(2\pi f) = 2\pi \times$ frekvencija (f), obe one imaju dimenziju T^{-1}. Ugao α u jednačini (4) zove se *početna faza harmonijske oscilacije*. Uglovi $kt + \alpha$, odnosno $kt + \beta$ uopšte se smatraju kao *faze harmonijske oscilacije*. Dve oscilacije iste amplitude i istog perioda mogu se razlikovati razlikom svojih faza. Primetimo i ovde (I, str. 104) da svakoj harmonijskoj oscilaciji odgovara ravnomerno kretanje tačke po krugu poluprečnika amplitude, čija projekcija na stalan prečnik vrši harmonijsku oscilaciju.

Ako se materijalna tačka mase m kreće brzinom intenziteta v, veličina $\frac{1}{2}mv^2$ zove se *kinetička energija*, ili živa sila, te tačke. Označimo je sa E_k. Za slučaj harmonijskog kretanja materijalne tačke mase m prema jednačini (4) njena kinetička energija, kao funkcija vremena, ima vrednost $E_k = \frac{1}{2}mx'^2 = \frac{1}{2}ma^2\cos^2 kt$.

Ako se vratimo na diferencijalnu jednačinu (1) i pomnožimo je sa $x'dt = dx$, dobićemo jednačinu $x'dx' + k^2x\,dx = 0$, iz koje sleduje integral $\frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}k^2x^2 = \text{const}$. Posle množenja integrala sa m imamo: $E_k + \frac{1}{2}mk^2x^2 = h$, gde smo sa h označili konstantu integracije. Prvi član leve strane je kinetička energija materijalne tačke. Drugi član označićemo sa E_p; on se zove *potencijalna energija* ili, kratko, *potencijal*. Kakvo je mehaničko tumačenje ovog člana? Pošto je taj član došao od integracije izraza $mk^2x = \varepsilon x$, a to je vrednost sile elastičnosti $(-\varepsilon x)$ sa znakom minus, možemo formulisati stav: Sila elastičnosti što dejstvuje na tačku jednaka je izvodu potencijalne energije po koordinati sa znakom minus, tj. $\frac{dE_p}{dx} = -(-\varepsilon x)$. Ako umesto potencijalne energije ili potencijala uvedemo *funkciju sile* $U(x) = -E_p$, imamo jednostavno u našem slučaju: sila je jednaka izvodu funkcije sile po koordinati.

Kinetička energija je *energija kretanja*; kad materijalna tačka miruje, njena kinetička energija jednaka je nuli. Potencijalna energija je *energija položaja*; njena vrednost može biti jednaka nuli, u opštem slučaju, samo u specijalnim tačkama polja sile. Ne ulazeći u konkretna tumačenja mehaničkog značaja poencijalne energije, odnosno funkcije sile, navedimo

samo vrlo važnu osobinu funkcije sile $U(x)$, koja u našem slučaju ima vrednost $U(x) = -\frac{1}{2}mk^2x^2$.

Zamislimo da materijalna tačka prelazi iz početka koordinata $(x=0)$ u položaj sa koordinatom x. Izračunajmo tada rad R koji izvrši privlačna sila elastičnosti na tom prelazu. Na svakom elementu puta dx rad te sile, sa algebarskom vrednoćću $-\varepsilon x$, izvrši elementaran rad $-\varepsilon x\,dx$. Na celom putu, sa granicama od 0 do x, taj rad je jednak zbiru tih diferencijalnih elemenata, tj. integralu

$$-\varepsilon\int_0^x x\,dx = -\frac{1}{2}\varepsilon x^2\Big|_0^x = -\frac{1}{2}mk^2x^2 = U(x) - U(0),$$

jer je $U(0) = 0$. Prema tome možemo formulisati stav: Rad elastične sile na datom putu jednak je razlici vrednosti funkcije sile za konačan i polazni položaj tačke.

Zbir kinetičke i potencijalne energije predstavlja *totalnu energiju tačke*; označimo je sa E_T. Tada je $E_k + E_p = E_T$. Ako za vreme kretanja totalna energija ima stalnu vrednost, *kretanje* tačke je *konzervativno*. Pošto je u našem slučaju $E_k = \frac{1}{2}mx'^2 = \frac{1}{2}ma^2k^2\cos^2 kt$, $E_p = \frac{1}{2}m^2k^2x^2 = \frac{1}{2}ma^2k^2\sin^2 kt$, totalna energija $E_T = \frac{1}{2}ma^2k^2$ ima stalnu vrednost i, prema tome, harmonijska oscilacija naše materijalne tačke je primer konzervativnog kretanja. I sila koja proizvodi to kretanje, u datom slučaju linearna elastična sila, zove se *konzervativna sila*.

U opštem slučaju svaki materijalni sistem čiji se položaj određuje jednom nezavisnom koordinatom (sistem sa jednim stepenom slobode), koja se menja po zakonu harmonijske oscilacije, predstavlja model *harmonijskog oscilatora*. Ako se položaj složenog materijalnog sistema određuje sa više koordinata (više stepena slobode), a svaka od njih se menja po zakonu harmonijskog oscilatora, sistem predstavlja model složenog harmonijskog oscilatora. Pojam harmonijskog oscilatora igra ogromnu ulogu u proučavanju prirodnih pojava, koje stoje u vezi sa oscilatornim procesima.

Primetimo da se sa matematičkog gledišta integracija jednačine $x''+k^2x=0$ završava određivanjem neodređenog integrala $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$ sa dve proizvoljne konstante. Međutim, ta diferencijalna jednačina ima prvi integral sa jednom konstantom u obliku $x'^2+k^2x^2=\text{const}$. Taj integral, koji se može napisati i ovako $\frac{1}{2}mx'^2+\frac{1}{2}mk^2x^2=h$, gde je h konstanta integracije, mnogo je važniji u primenama od opšteg integrala u linearnoj formi. Isti integral u obliku $E_k+E_p=E_T=h$ zove se *integral održavanja energije* i igra vrlo važnu ulogu u proučavanju prirodnih pojava, bez obzira na to što sam po sebi ne određuje ni položaj tačke, odnosno sistema, ni njenu brzinu, već samo povezuje dve osnovne osobine jednog procesa — energiju kretanja i energiju položaja za vreme oscilacije.

Harmonijski oscilator sa trenjem. Proučili smo diferencijalnu jednačinu drugog reda na jednom mehaničkom primeru, kad jednačina kretanja ima specijalan oblik $x''+k^2x=0$. Pretpostavimo sad da na našu materijalnu tačku, sem privlačne sile, koja je proporcionalna prvom stepenu rastojanja tačke od centra oscilacije, dejstvuje još i sila proporcionalna prvom stepenu brzine tačke i to dejstvuje uvek u smeru suprotnom smeru brzine. Algebarsku vrednost projekcije te otporne sile na pravac x ose zgodno je napisati u obliku $-2mlx'$. Pošto smo diferencijalnu jednačinu kretanja skratili sa m, diferencijalnu jednačinu izražavamo konačno ovako $x''+2lx'+k^2x=0$, gde je l *koeficijent otporne sile*. Za ovu jednačinu sa konstantnim koeficijentima karakteristična jednačina $r^2+2lr+k^2=0$ ima korene $r_{1,2}=-l\pm\sqrt{l^2-k^2}$. Proučimo tri slučaja.

I. $l^2-k^2<0$. Koreni imaju vrednost $r_{1,2}=-l\pm ik_1$, gde je $k_1^2=k^2-l^2$. Opšti integral sastavljamo ovako

$$x=e^{-lt}(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t)=a\,e^{-lt}\sin(k_1t+\alpha),$$

gde su C_1, C_2, odnosno a i α, konstante integracije. Kretanje je *kvazi-periodično* sa sve manjim amplitudama.

II. $l^2-k^2>0$. Oba korena su realna i negativna. Opšti integral je $x=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}$. Kretanje je *aperiodično*.

III. $l^2-k^2=0$. Koreni su jednaki. Opšti integral je $x=(C_1+C_2t)e^{-lt}$. Kretanje je *apreiodično* i nosi *asimptotski karakter*, jer pod uslovom $t\to\infty$ imamo $x\to 0$.

Nećemo ulaziti u detaljna proučavanja tih kretanja, jer ta proučavanja ulaze u oblast mehanike[1]. Ali ćemo se zaustaviti još na tzv. *prinudnim oscilacijama*, kojima odgovaraju nehomogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima.

Prosta prinudna oscilacija. U slučaju kretanja materijalne tačke pod uticajem, recimo, linearne elastične sile bez otporne sile, ali pod dejstvom prinudne sile $mf(t)$, imamo diferencijalnu jednačinu $x''+k^2x=f(t)$. Pretpostavimo da je prinudna sila oscilatornog karaktera i da se određuje samo jednim periodičnim članom. To je slučaj *proste prinudne oscilacije*. Diferencijalnu jednačinu tog slučaja napisaćemo ovako: (5) $x''+k_s^2x=q\cos k_pt$, gde smo, da bismo razlikovali dve oscilacije, sa k_s označili tzv. *sopstvenu kružnu frekvenciju* oscilacije materijalne tačke, a sa k_p *kružnu frekvenciju periodične sile*. Prema tome je $T_s:T_p=k_p:k_s$, gde su T_s i T_p odgovarajući periodi.

Za rešavanje jednačine (5) potražimo prvo partikularno rešenje nehomogene jednačine u trigonometrijskom obliku, $x=A\cos k_pt$, gde veličina A podleže određivanju. Posle zamene nalazimo da je $A=q:(k_s^2-k_p^2)$.

Opšti integral $x=C_1\cos k_st+C_2\sin k_st+A\cos k_pt$, posle zamene $C_1\cos k_st+C_2\sin k_st=a\cos(k_st+\alpha)$, gde su a i α nove konstante, možemo napisati u obliku

$$(6)\qquad x=a\cos(k_st+\alpha)+A\cos k_pt.$$

Napisani obrazac predstavlja rezultat povećavanja *(amplifikaciju)* osnovne oscilacije dopunskom, prinudnom oscilacijom. Za što jasniju predstavu tog rezultata uvedimo razliku $k_p-k_s=\delta$ i pokušajmo da transformišemo jednačinu (6) u jednačinu

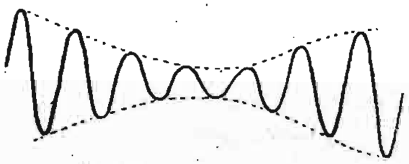
$$(7)\qquad x=R\sin(k_st+\varphi),$$

gde su R amplituda i φ početna faza amplificirane oscilacije. Posle izračunavanja: $x=a(\cos k_st\cos\alpha-\sin k_st\sin\alpha)+A(\cos k_st\cos\delta t-\sin k_st\sin\delta t)=(a\cos\alpha+A\cos\delta t)\cos k_st-(a\sin\alpha+A\sin\delta t)\sin k_st$ sa oznakama $a\cos\alpha+A\cos\delta t=R\sin\varphi$,

1) Gl. npr., A. Bilimović — Racionalna mehanika. I. Mehanika tačke. Drugo izdanje, B. 1950. str. 287—309.

$a\sin\alpha + A\sin\delta t = -R\cos\varphi$, dolazimo, sa $R^2 = a^2 + A^2 + 2aA\cos(\delta t - \alpha)$ i $\operatorname{tg}\varphi = -(a\cos\alpha + A\cos\delta t):(a\sin\alpha + A\sin\delta t)$, do rezultata (7). Iz vrednosti R^2 vidimo da se po apsolutnoj vrednosti R koleba između $|a+A|$ i $|a-A|$. Prema tome amplituda ima svoju najveću i najmanju vrednost i period te promene je period funkcije $\cos(\delta t - \alpha)$. Označimo taj period sa T_d. On iznosi: $T_d = \dfrac{2\pi}{\delta} = \dfrac{2\pi}{|k_p - k_s|} = \dfrac{T_s T_p}{|T_s - T_p|}$. Pojava jačanja i slabljenja neke oscilacije zove se *podrhtavanje* ili *bijenje*. Period T_d je *period podrhtavanja*. Slika 13 pokazuje grafik takvog kretanja.

Prethodna razmatranja gube smisao kad je $k_s = k_p$, tj. kad frekvencija sopstvena i prinudne sile imaju istu vrednost.

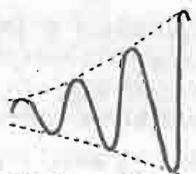


Sl. 13 — Podrhtavanje

Diferencijalna jednačina ovog slučaja, $x'' + k^2 x = q\cos kt$, ima partikularno rešenje u obliku $x = At\sin kt$, pri čemu $A = q/2k$. Rešenje se može izvesti u obliku $x = Q\sin(kt + \psi)$, gde je $Q^2 = a^2\cos^2\alpha + (a\sin\alpha - At)^2$, a $\operatorname{cotg}\psi = \dfrac{A}{a}t\sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha$. Izraz za amplitudu, Q, pokazuje da ona sa vremenom raste i da može postati veća od bilo koje unapred date veličine. Pojava kad dva periodična faktora imaju periode iste vrednosti i, zbog toga, jedan pojačava drugi zove se *rezonancija*. U našem slučaju prinudna sila i sopstvena oscilacija materijalne tačke iste frekvencije stvaraju pojavu ta dva periodična fakta. Slika 14 pokazuje grafik kretanja tačke u slučaju rezonancije.

Slučaj rezonancije može se smatrati kao podrhtavanja kad period podrhtavanja T_d teži beskonačnosti.

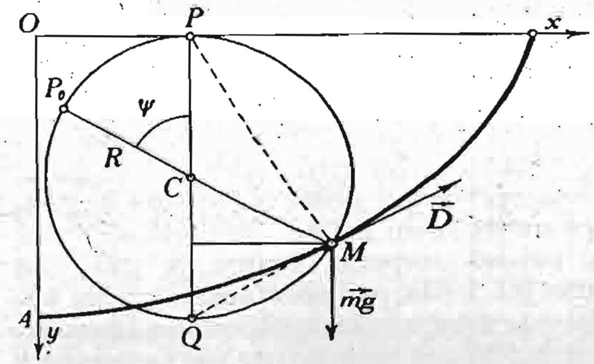
Cikloidno klatno. Kao primer krivolinijskog harmonijskog kretanja, koje je naročito interesantno po svojim specifičnim osobinama, navešćemo kretanje tzv. *cikloidnog klatna*.



Sl. 14 — Rezonanca

U (II, str. 45, 54) definisali smo cikloidu i dali njenu jednačinu u vektorskom

obliku, i to pri položaju cikloide nad horizontalnom osnovom. Za proučavanje kretanja cikloidnog klatna uzmimo cikloidu ispod horizontalne osnove (sl. 15) sa vektorskom jednačinom $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = R(\psi + \sin\psi)\vec{i} + R(1 + \cos\psi)\vec{j}$, gde su $\vec{i}$ i $\vec{j}$ jedinični vektori Ox i Oy ose i ugao $\psi = \sphericalangle PCP_0 = \sphericalangle QCM$. Posle diferenciranja dolazimo bez teškoće do rezultata $(\overrightarrow{dr})^2 = ds^2 = 4R^2\cos^2\dfrac{\psi}{2}\cdot d\psi^2$, gde je ds element luka cikloide. Posle



Sl. 15 — Cikloidno klatno

izvlačenja kvadratnog korena, integracije i određivanja proizvoljne konstante iz uslova $\psi = 0$, $s = 0$, imamo jednačinu $s = 4R\sin\dfrac{\psi}{2}$. Geometrijski ova jednačina pokazuje da je luk AM cikloide jednak dvostrukoj vrednosti tetive QM kruga generatora.

Teška tačka koja se kreće po vertikalnoj cikloidi okrenutoj nadole sa horizontalnom osnovom zove se *cikloidno klatno*. Zamislimo da se teška tačka mase m nalazi u položaju M, a da je dužina luka s njena koordinata. Postavimo diferencijalnu jednačinu kretanja takve teške tačke na koju dejstvuje sila teže $\overrightarrow{mg}$. Ubrzanje te tačke u pravcu tangente $\vec{D}$

ima vrednost $\frac{d^2s}{dt^2}$, a komponenta sile teže u istom pravcu ima vrednost skalarnog proizvoda $(\overrightarrow{mg}, \overrightarrow{D}) = mg \cos(y, \overrightarrow{QM}) = -mg \sin\frac{\psi}{2}$. Prema tome dolazimo do jednačine $m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\frac{\psi}{2}$, koja dovodi do jednačine $s'' + k^2s = 0$, ako uvedemo oznaku $k^2 = g/4R$. Ova diferencijalna jednačina pokazuje da je kretanje cikloidnog klatna — harmonijsko kretanje sa periodom $T = \frac{2\pi}{k} = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$. Nećemo ponavljati i na ovom primeru osobine integrala harmonijske oscilacije. Navešćemo samo specifične osobine tog kretanja, naročito u vezi sa tim da je trajektorija kriva linija. Objasnimo od osobina cikloidnog kretanja: 1. *izohronost*. Period T ne zavisi od početnih uslova. On zavisi samo od intenziteta ubrzanja sile teže, g, i od prečnika kruga generatora R. Amplituda može biti veća, ili manja, period ostaje isti. 2. *tautohronost*. Vreme koje je tački potrebno za prelaz iz bilo kog položaja M_1, M_2, $M_3 \ldots$ na cikloidi u najniži položaj A biće uvek isto, ako je počela da se kreće bez početne brzine. Prva osobina neposredno sleduje iz izraza za period T; dokaz druge osobine se izvodi u 6.4 ove knjige. No cikloidno klatno ima još i treću, vrlo važnu, osobinu, čiji se dokaz može naći u 5.4 ove knjige. To je osobina koja se zove *brahistohronost*. Objasnimo tu osobinu. Neka su date u vertikalnoj ravni, na različitim visinama, dve tačke A i B. Spojimo ih nekom krivom linijom AB. Neka tačka A ima veću visinu. Ako stavimo tešku tačku u položaj A i ona počne da se kreće u položaj B, bez početne brzine, vreme, τ, koje upotrebi za taj prelaz zavisi od oblika krive koja spaja tačke A i B. Koji oblik ima ta kriva, da bi vreme τ bila najkraće? Na prvi pogled izgleda da će to biti prava, kao najkraće rastojanje između tih tačaka. Međutim, nije tako. To će biti cikloida: za nju je potrebno najkraće vreme. Ta osobina cikloidnog klatna zove se *brahistohronost*. U vezi sa dokazom te osobine ponikla je čitava nova matematička disciplina, koja se zove Varijacioni račun, i čije elemente izlažemo u istoj, dopunskoj, glavi ove knjige.

3.7. Specijalni slučajevi diferencijalnih jednačina višega reda

1. U tački 3.2 proučili smo integraciju specijalnog slučaja diferencijalne jednačine drugoga reda u obliku $y'' = f(x)$ i pokazali smo da se izvedene metode mogu primeniti i na slučaj jednačine $y^{(n)} = f(x)$. Zbog toga se ovde nećemo vraćati na taj slučaj.

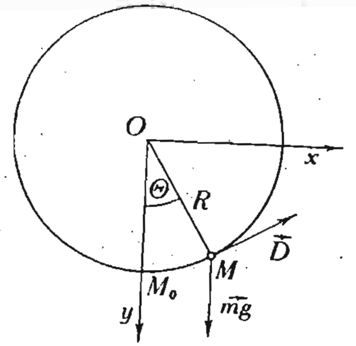
2. Uzmimo u obzir jednačinu n-og reda u specijalnom obliku $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0$. Ako se ova jednačina može rešiti po izvodu višeg reda, tj. staviti $y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$, uzimanje za novu promenljivu $z = y^{(n-1)}$ dovodi do jednačine $z' = f(z)$. Kvadratura $x + C_1 = \int \frac{dz}{f(z)}$ postavlja vezu između $z = y^{(n-1)}$ i x. Iz te veze, u obliku $y^{(n-1)} = \varphi(x, C_1)$, određujemo, na osnovu 1. slučaja, y kao funkciju x i još $n-1$ proizvoljne konstante.

3. Za diferencijalnu jednačinu $F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0$ ponovo uzimamo izvod najnižeg reda za nepoznatu funkciju, $z = y^{(n-2)}$. Tada imamo $F(z'', z) = 0$, a ako se može rešiti po z'', dobijenu jednačinu $z'' = f(z)$ integrišemo na isti način kao što smo iz diferencijalne jednačine harmonijskog oscilatora dobili integral održavanja energije. Naime, množimo jednačinu sa $2z'dx = 2dz$, pa iz $2z'dz' = 2f(z)dz$ dobivamo prvi integral, $z'^2 = 2\int f(z)dz + C_1$. Posle razdvajanja promenljivih vršimo novu integraciju,

$$x + C_2 = \int \frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}}.$$

Posle zamene $z = y^{(n-2)}$ postavljamo vezu između $y^{(n-2)}$ i x. Određivanje y u funkciji x uvodi još $n-2$ proizvoljne konstante.

Kao primer uzmimo slučaj kretanja *matematičkog klatna*. Teška tačka koja je primorana da se kreće po vertikalnoj kružnoj liniji predstavlja matematičko klatno, a problem određivanja kretanja te tačke je problem matematičkog klatna. Položaj pokretne tačke na kružnoj liniji određuje se uglom θ, između pokretnog poluprečnika $OM=R$ i vertikalnog pravca naperena naniže (sl. 16). U pravcu tangente $\vec{D}$ tačka ima ubrzanje $s''=\frac{d^2 s}{dt^2}$, gde je $s=R\theta$ luk $M_0 M$ kružne linije. U tom pravcu sila teže $m\vec{g}$, gde je $\vec{g}$ ubrzanje sile teže, daje komponentu jednaku $-mg\sin\theta$. Druga sila, sila zadržavanja tačke na kružnoj liniji, koja ima pravac poluprečnika R i smer prema centru, nema projekcije na pravac $\vec{D}$. Prema tome diferencijalna jednačina kretanja matematičkog klatna izgleda, posle skraćivanja sa m: (1) $R\theta''=-g\sin\theta$.



Sl. 16 — Matematičko klatno

Množenje sa $2\theta'\,dt=2\,d\theta$ i kvadratura dovode do prvog integrala (2) $R(\theta'^2-\theta_0'^2)=2g(\cos\theta-1)$, pri čemu smo iskoristili početni uslov da, za $t=0$, imamo $\theta_0=0$ i $\theta'=\theta_0'\neq 0$. Ako napišemo taj integral u obliku $\frac{1}{2}mR^2\theta'^2-mgR\cos\theta=\frac{1}{2}mR^2-$ $-mgR$ (pomnožili smo prethodno sa $\frac{1}{2}mR$), vidimo da on ne predstavlja drugo već integral održavanja energije $E_k+E_p=$ $=E_{ko}+E_{po}$, gde sa desne strane imamo veličine kinetičke i potencijalne energije za $t=0$ ($\cos\theta_0=1$, $\theta'=\theta_0'$). Zaista, $E_k=$ $=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}R^2\theta'^2$, jer brzina v ima intenzitet

$$\frac{ds}{dt}=R\frac{d\theta}{dt}=R\theta'.$$

Za izračunavanje potencijalne energije E_p uzimamo u obzir da je $E_p=-U(\theta)$, gde je $U(\theta)$ funkcija sile, čiji diferencijal daje elementaran rad, tj. $dU=(m\vec{g},\ R\,d\theta.\vec{D})$. S desne strane imamo

skalarni proizvod sile $m\vec{g}$ i elementarnog pomeranja u pravcu jediničnog vektora tangente D sa vrednošću elementa luka $R\,d\theta$. Pošto taj skalarni proizvod ima vrednost $mgR\,d\theta.\cos(\theta+$ $+\pi/2)=-mgR\sin\theta\,d\theta=dU$, posle integracije imamo:

$$U(\theta)-U(0)=-mgR\int_0^\theta \sin\theta\,d\theta=mgR(\cos\theta-1).$$

Prema tome, za potencijalnu energiju imamo $E_p=-mgR\cos\theta$ i $E_{po}=-mgR$. Izvedene vrednosti kinetičke i potencijalne energije potvrđuju tumačenje jednačine (2) kao integrala održavanja energije pri kretanju matematičkog klatna. Taj integral omogućuje da se klasificira kretanje matematičkog klatna u zavisnosti od početne vrednosti ugaone brzine θ_0'. Tačka može da dođe do svog najvišeg položaja ($\cos\theta=-1$), kada je θ'^2- $\theta_0'^2=-4g/R$ i tada je $\theta'^2=\theta_0'^2-4gR$. Prema tome imamo tri vrste kretanja matematičkog klatna: 1. $\theta_0'^2>4g/R$, znači $\theta'^2>0$. Tačka prolazi kroz najviši položaj sa nekom ugaonom brzinom, koja se posle prolaza povećava. Kretanje se zove *progresivno*. 2. $\theta_0'^2=4g/R$, znači $\theta'^2=0$. Kretanje se zove *asimptotsko*. 3. $\theta_0'^2<4g/R$, $\theta'^2<0$, tačka ne dostiže najviši položaj, zaustavlja se ranije, u položaju sa θ^*, koji zadovoljava jednačinu $\cos\theta^*=1-\varepsilon$, gde je $\varepsilon=\theta_0'^2:(4g/R)$. Kretanje tačke nosi *oscilatorni karakter*.

Dovršenje integracije jednačine (1) određivanjem ugla θ u funkciji vremena t vrši se pomoću kvadrature i to u obliku integrala kad se vreme t određuje u funkciji koordinata θ. Integral je eliptičkog tipa. No ovde ne možemo ulaziti u vrlo interesantna i važna proučavanja tog pitanja.

Primetimo da za malu početnu ugaonu brzinu θ_0' ugao θ ima isto tako male vrednosti, i ako u jednačini (1) zamenimo $\sin\theta$ prvom približnom vrednošću θ, jednačina (1) uzima oblik $\theta''+k^2\theta=0$, gde je $k^2=g/R$. Prema tome male oscilacije matematičkog klatna imaju karakter harmonijskih oscilacija. Frekvencija tih oscilacija, $k=\sqrt{g/R}$, daje za vrednost perioda T oscilacije: $T=2\pi\sqrt{R/g}$. To je približna vrednost perioda malih oscilacija matematičkog klatna.

Kretanje matematičkog klatna nije izohrono, jer period u opštem slučaju zavisi od početnih uslova. Za male oscilacije tog klatna može se kazati da su one *približno* izohrone.

Vežbanja:

1. Navesti primere harmonijskog oscilatora. **2.** Izvršiti integraciju jednačine $\frac{d^2x}{dt^2}+a^2x=0$ (a — konstanta), eliminisati vreme iz rešenja $x=f(t)$, $x'=f'(t)$ i proučiti krivu sa jednačinom $\Phi(x, x')=0$, smatrajući x i x' za koordinate tačke. **3.** Izvršiti integraciju jednačine $x''+2lx'+k^2x=0$ i nacrtati krive za slučajeve: **a.** $l^2<k^2$, **b.** $l^2>k^2$, **c.** $l^2=k^2$, uzimajući određene brojne vrednosti. **4.** Napisati diferencijalnu jednačinu neke proste prinudne oscilacije sa brojnim koeficijentima i proučiti rešenje grafički.

3.8. Sistem običnih diferencijalnih jednačina. Problem dvaju tela

Ne ulazeći u opštu teoriju sistema običnih diferencijalnih jednačina navedimo samo tzv. *normalan oblik sistema* od diferencijalnih jednačina prvoga reda

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\quad i=1,\ 2,\ldots,n,$$

gde je t nezavisno promenljiva, $x_i\,(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ su nepoznate funkcije. Funkcije f_i su date. Kao rezultat integracije dobiva se n funkcija: $x_i=F_i(t,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n)$ nezavisno promenljive t i n proizvoljnih konstanata $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$.

Primetimo, da *jednu jednačinu n-tog reda sa jednom nepoznatom funkcijom možemo zameniti sistemom od n jednačina prvoga reda sa n nepoznatih funkcija.* I obratno, sistem od n jednačina prvoga reda možemo zameniti jednom jednačinom n-tog reda. Objasnimo ovo na primerima.

Jednačinu, npr. četvrtog reda, $x^{(4)}=f(t,\ x,\ x',\ x'',\ x''')$, možemo sa oznakama $x=x_1$, $x'=x_2$, $x''=x_3$, $x'''=x_4$, gde su $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$, nove funkcije, zameniti ovim sistemom

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=x_3,\quad \frac{dx_3}{dt}=x_4,\quad \frac{dx_4}{dt}=f(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4),$$

jednačinâ prvog reda.

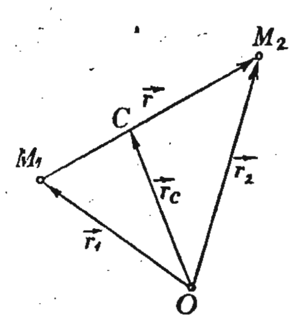
Za obrnutu zamenu treba postupiti ovako. Neka je dat sistem $x_1'=f_1(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$, $x_2'=f_2(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$, $x_3'=f_3(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$.

Diferencirajmo prvu jednačinu po t:

$$x_1''=\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial x_1}x_1'+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}x_2'+\frac{\partial f_1}{\partial x_3}x_3',$$

i iz prethodnih jednačina zamenimo izvode x_1', x_2', x_3' funkcijama $f_1,\ f_2,\ f_3$; tada ćemo dobiti $x_1''=\varphi(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$. Ako izvršimo novo diferenciranje i ponovnu zamenu, dobićemo treći izvod $x_1'''=\psi(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$. Sad imamo na raspoloženju tri jednačine $x_1'=f_1$, $x_1''=\varphi$, $x_1'''=\psi$. Ako, recimo, iz prve dve jednačine odredimo x_2 i x_3 i stavimo u poslednju dobićemo jednačinu $\frac{d^3x_1}{dt^3}=\Phi(t,\ x_1,\ x_1',\ x_1'')$, koja sadrži samo t, funkciju x_1 i njene izvode x_1' i x_1''. Posle određivanja integrala $x_1=F_1(t,\ C_1,\ C_2,\ C_3)$ te jedine jednačine, ranije određene vrednosti x_2 i x_3 dopunjuju rešenje.

Problem dvaju tela. Problem o kretanju dve materijalne tačke pod uticajem uzajamnih Njutnovih sila univerzalne gravitacije kratko se zove *Problem dvaju tela.* Kretanje, npr., Sunca i Zemlje ili Zemlje i Meseca, to su primeri tog problema. Ovde ćemo proučiti sistem običnih diferencijalnih jednačina koji odgovara tom problemu. Da izlaganje bude što jednostavnije primenimo vektorsku metodu.[1])



Sl. 17a — Sistem dvaju tela

Označimo sa $\vec{r_1}$ i $\vec{r_2}$ vektore položaja tačaka M_1 i M_2, masa m_1 i m_2, u odnosu na nepokretnu tačku O (sl. 17a). Razliku $\vec{r_2}-\vec{r_1}$ označimo sa $\vec{r}$, tj. stavimo (1) $\vec{r}=\vec{r_2}-\vec{r_1}$. Intenzitet r te razlike je rastojanje M_1M_2 između tačaka M_1 i M_2. Prema Njutnu kretanje svake slobodne materijalne tačke vrši se prema pravilu: proizvod mase materijalne

---

[1]) Kao dopunu ranije proučenih vektorskih pojmova navedimo još samo dva obrasca za proizvode triju vektora, naime

$$(A\,[BC])=(B\,[CA])=(C\,[AB]),$$
$$[A\,[BC]]=B\,(CA)-C\,(AB),$$

gde velika slova označavaju vektore.

tačke i ubrzanja, kao drugog vektorskog izvoda po vremenu vektora položaja tačke u odnosu na nepomičnu tačku, jednak je sili, kao vektoru, koja dejstvuje na tu tačku. U primeni na naše dve materijalne tačke, M_1 i M_2, imaćemo ove dve vektorske diferencijalne jednačine drugog reda:

$$(2)\quad m_1\ddot{\vec r}_1 = \varepsilon^2\frac{m_1m_2}{r^2}\cdot\frac{\vec r}{r}\qquad (3)\quad m_2\ddot{\vec r}_2 = -\varepsilon^2\frac{m_1m_2}{r^2}\cdot\frac{\vec r}{r},$$

gde su: $\ddot r_1$ i $\ddot r_2$ ubrzanja tačaka, tj. drugi izvodi po vremenu vektora položaja, $\vec r_1$ i $\vec r_2$, $\vec r/r$ i $(-\vec r/r)$ jedinični vektori, prvi sa pravcem od tačke M_1 ka tački M_2, i drugi suprotnog smera; najzad, $\varepsilon^2\frac{m_1m_2}{r^2}$ je intenzitet Njutnove sile gravitacije, gde je ε^2 koeficijent proporcionalnosti sa dimenzijom $[\varepsilon^2]=M^{-1}L^3T^{-2}$ i brojnom vrednošću $6{,}6\cdot10^{-8}\,gr^{-1}\,cm^3\,sec^{-2}$.

Jednačine (2) i (3) sačinjavaju sistem od dve vektorske diferencijalne jednačine drugog reda. Taj sistem je ekvivalentan sistemu od šest skalarnih diferencijalnih jednačina drugog reda. Njegovo opšte rešenje treba da zavisi od dvanaest proizvoljnih konstanata. Izvršimo integraciju tog sistema.

Pre svega, pada u oči da je zbir desnih strana jednačina jednak nuli. Otuda sleduje, za leve strane, da je $m_1\ddot{\vec r}_1 + m_2\ddot{\vec r}_2 = \frac{d^2}{dt^2}(m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2)=0$, te tako imamo integral: (4) $m_1\vec r_1+m_2\vec r_2 = \vec a t+\vec b$, gde su $\vec a$ i $\vec b$ konstantni vektori. Kako je (5) $m_1\vec r_1+m_2\vec r_2 = m\vec r_c$, gde je $m=m_1+m_2$ i $\vec r_c$ je vektor položaja centra datih masa u odnosu na tačku O, možemo zaključiti prema prethodnom integralu, koji se može izraziti i vektorskom jednačinom (4') $\vec r_c=\vec c_1 t+\vec c_2$, da centar masa sistema ili se kreće pravolinijski i jednoliko ili ostaje nepomičan za $\vec c_1=0$.

Pošto iz jednačina (1) i (5) imamo

$$(6)\quad \vec r_1=\vec r_c-\vec r\,m_2/m,\qquad \vec r_2=\vec r_c+\vec r\,m_1/m,$$

gde je uvek $m=m_1+m_2$, za dovršenje integracije dovoljno je odrediti vektor $\vec r$ u funkciji vremena. Pošto iz prve jednačine sa $\ddot r_c=0$ za drugi izvod $\ddot r_1$ imamo $\ddot r_1 = -\ddot r\,m_2/m_1$, možemo jednačinu (2) zameniti jednačinom (7) $\ddot{\vec r} = -\varepsilon^2 m\vec r/r^3$. Najzad, ako mesto vektora $\vec r$ uvedemo nov vektor, $\vec\rho$, koji se od $\vec r$ razlikuje samo konstantnim množiocem, prema obrascu $\vec r=\sqrt[3]{\varepsilon^2 m}\,\vec\rho$ jednačina (7) uzima vrlo jednostavan oblik, (8) $\ddot{\vec\rho}=-\vec\rho/\rho^3$, koji se može zameniti i ovim (9) $\rho^3\ddot{\vec\rho}+\vec\rho=0$. Jednačina (8) odnosno (9) zove se *standardna jednačina problema dvaju tela.* U ovoj jednačini nema nikakvih konstanata; ona zavisi samo od vektora $\vec\rho$, njegova intenziteta, ρ, i drugog izvoda $\ddot\rho$. Vektor $\vec\rho$, koji možemo na slici prikazati dužinom, nema dimenzije dužine; dimenzije vektora $\vec\rho$, $\dot\rho$, $\ddot\rho$ zavise od vremena: $[\rho]=T^{2/3}$, $[\dot\rho]=T^{-1/3}$, $[\ddot\rho]=T^{4/3}$.

Izvršimo sad integraciju standardne jednačine (9) $\rho^3\ddot\rho+\vec\rho=0$.

Pomnožimo tu jednačinu vektorski s leva sa $\vec\rho$. Tada je, pošto je $[\vec\rho\,\vec\rho]=0$, $[\vec\rho\,\ddot\rho]=0$, odakle dolazimo do prvog vektorskog integrala,

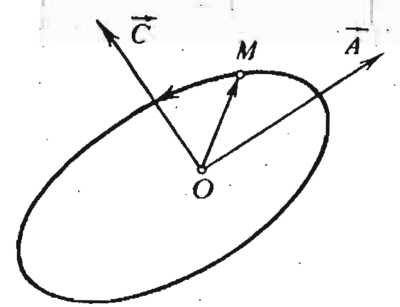
$$(10)\qquad [\vec\rho\,\dot\rho]=\overrightarrow{\text{const.}}=p_1\vec k=\vec C,$$

gde je $\vec C=p_1\vec k$ konstantni vektor, pri čemu je $\vec k$ njegov jedinični vektor i p_1 njegova algebarska vrednost u odnosu na vektor $\vec k$. Integral (10) pokazuje 1. da se vektori $\vec\rho$ i $\dot\rho$ uvek nalaze u istoj ravni, upravnoj na vektoru $\vec k$. Prema tome imamo *ravno kretanje*. 2. Stalnost intenziteta vektora $[\vec\rho,\dot\rho]$, jednaka je dvostrukoj sektorskoj brzini vektora $\vec\rho$, potvrđuje poznati Keplerov stav, da se kretanje vrši sa stalnom sektorskom brzinom, tj. da je površina koju opisuje u toku vremena vektor $\vec{\rho}$ proporcionalna vremenu. Zato se integral (10) kratko zove *integral površine* problema dvaju tela.

Za izvođenje drugog vektorskog integrala pomnožimo jednačinu (9) vektorski s desna sa $\vec{k}$ i podelimo sa ρ^3, dobićemo jednačinu $[\ddot{\vec{\rho}}\,\vec{k}] + \frac{1}{\rho^3}[\vec{\rho}\,\vec{k}] = 0$, ili, posle zamene k u drugom članu: $\frac{d}{dt}[\dot{\rho}\,\vec{k}] + \frac{1}{p_1}\,\frac{1}{\rho^3}[\vec{\rho}\,[\vec{\rho}\,\dot{\rho}]] = 0$. Ako drugi član razvijemo i primetimo da je $(\vec{\rho}\,\dot{\rho}) = \rho\frac{d\rho}{dt}$, što sleduje posle diferenciranja identiteta $(\vec{\rho}\,\vec{\rho}) \equiv \rho^2$, dolazimo do jednačine $\frac{d}{dt}[\dot{\rho}\,\vec{k}] - \frac{1}{p_1}\frac{d}{dt}\frac{\vec{\rho}}{\rho} = 0$, iz koje dobivamo drugi vektorski integral,

$$[\dot{\rho}\,\vec{k}] - \frac{1}{p_1}\,\frac{\vec{\rho}}{\rho} = \overrightarrow{\text{const.}} = \frac{e}{p_1}\,\vec{i} = \vec{A}, \tag{11}$$

gde je $\vec{A} = \frac{e}{p_1}\,\vec{i}$ novi konstantni vektor, upravni na vektoru $\vec{C}$, jer je skalarni proizvod leve strane jednačine (11) sa $\vec{k}$ jednak nuli. Prema tome između vektora $\vec{A}$ i $\vec{C}$ postoji skalarna veza ortogonalnosti (12) $(\vec{A}\,\vec{C}) = 0$. Integral (11) zove se *Laplasov integral problema dvaju tela.*



Sl. 17 b — Vektorski elementi

Ako uvedemo ν između ose $\vec{i}$ i vektora $\vec{\rho}$, tj. stavimo $(\vec{\rho}, \vec{i}) = \rho\cos\nu$, dobićemo, posle množenja Laplasova integrala skalarno sa $\vec{\rho}$, jednačinu

$$(\vec{\rho}\,[\dot{\rho}\,\vec{k}]) - \frac{1}{p_1}\cdot\frac{1}{\rho}(\vec{\rho}\,\vec{\rho}) = \frac{e}{p_1}(\vec{\rho}, \vec{i}),$$

koju možemo zameniti jednačinom $p_1 k^2 - \frac{1}{p_1}\rho = \frac{e}{p_1}\rho\cos\nu$, koja konačno daje

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\nu} \quad \text{sa } p = {}^{2} \tag{13}$$

Dobivena jednačina pokazuje da je trajektorija tačke konusni presek (I, str. 82) sa parametrom p i ekscentričnošću e; za $e < 1$ imamo elipsu, za $e > 1$ hiperbolu i za $e = 1$ parabolu. Time je pokazana i uloga ose vektora $\vec{A}$ — to je fokalna osa konusnog preseka.

Za dovršenje integracije treba odrediti položaj tačke na konusnom preseku u funkciji vremena. Kako, s jedne strane, imamo integral sektorske površine, koji u polarnim koordinatama ρ, ν, u našem slučaju, dovodi do jednačine (14) $\rho^2\frac{d\nu}{dt} = p_1$, a, s druge strane, znamo iz (13) vrednost ρ u funkciji ugla ν — jednačine (13) i (14) omogućuju postavljanje kvadrature

$$\frac{p^2}{(1 + e\cos\nu)^2}\,d\nu = p_1\,dt. \tag{15}$$

Pošto je ova kvadratura komplikovana, mesto promenljive ν uvodi se nova promenljiva u, koja je za slučaj elipse vezana sa ν jednačinom

$$\sqrt{1-e}\cdot \mathrm{tg}\frac{\nu}{2} = \sqrt{+e}\cdot \mathrm{tg}\frac{u}{2}.$$

Iz ove jednačine mogu se izvesti dva rezultata

$$(1 + e\cos\nu)\cdot(1 - e\cos u) = 1 - e^2 = e'^2,$$

$$(1 - e\cos u)\,d\nu = e'\,du.$$

Ova dosta duga izvođenja ne zadaju, međutim, teškoće; čitalac može i sam proveriti te rezultate. Dalje, jednačina (15) se transformiše u jednačinu $(1 - e\cos u)\,du = n\,dt$, gde je $n = e'^3/p_1^3$.

8*

Ova jednačina dovodi posle jednostavne kvadrature do čuvene *Keplerove jednačine*

$$(16) \qquad u - e \sin u = n(t-\tau),$$

gde je τ poslednja integraciona konstanta. Keplerova jednačina je transcendentna jednačina; ona postavlja vezu između vremena i ugla u. U Astronomiji uglovi v, u i $w = n(t-\tau)$ nose nazive *anomalija* i to: v — *prave*, u — *ekscentrične* i w — *srednje*.

Nabrojimo proizvoljne konstante pri rešavanju problema dvaju tela. Pri određivanju centra masa imali smo dva vektora, $\vec{c_1}$ i $\vec{c_2}$ (šest proizvoljnih skalara). Pri integraciji osnovne jednačine: vektor $\vec{C}$ (tri skalara), vektor $\vec{A}$ (dva nezavisna skalara, jer postoji veza $(\vec{A}\vec{C}) = 0$) i, najzad, skalar τ, koji određuje početnu epohu kretanja tačke. Svega imamo dvanaest proizvoljnih konstanata, kako je to i potrebno za potpunu integraciju dve vektorske diferencijalne jednačine drugog reda.

Vektori $\vec{A}$ i $\vec{C}$ su vektorski zavisni planetski elementi; sa dopunom skalarom τ oni sačinjavaju potpuni sistem tih elemenata. Primetimo da se mogu uvesti dva nezavisna vektorska elementa i to tako da njihove vrednosti određuju kako navedene zavisne vektore $\vec{A}$ i $\vec{C}$, tako i skalar τ.

Vežbanja:

Izvesti ove integrale standardne jednačine problema dvaju tela:

1. Hamiltonov integral: $\dot{\rho} + \frac{1}{p_1 \rho}\left[\vec{\rho}, \vec{k}\right] = \frac{e}{p_1}\vec{j}$, gde je $\vec{j} = \left[\vec{k}, \vec{i}\right]$.
2. Integral održavanja energije (žive sile): $\dot{\rho}^2 = \frac{2}{\rho} - \frac{1-e^2}{p_1^2}$
3. Odrediti M i N, ako je $\vec{\rho} = M\vec{i} + N\vec{j}$.
4. Odrediti K i L, ako je $\dot{\vec{\rho}} = K\vec{i} + L\vec{j}$.

Glava četvrta

PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

4.1. Parcijalne diferencijalne jednačine i njihova rešenja

U Uvodu smo dali definiciju parcijalne diferencijalne jednačine i na konkretnim primerima protumačili taj pojam. Ovaj deo knjige je posvećen tim jednačinama i njihovim rešenjima.

U izlaganju ćemo se ograničiti na slučajeve sa jednom nepoznatom funkcijom, z, dveju nezavisno promenljivih, x i y. U tom slučaju izlaganje uvek ima konkretno tumačenje, jer stoji u vezi sa poznatim geometrijskim predstavama iz Teorije površina. Zaustavićemo se, dakle, na tzv. elementarnom delu Teorije parcijalnih jednačina, u kojem se ne tretiraju strogi i širi uslovi mogućnosti primene operacija koje se u toj teoriji navode.

Jednačina se, kao što znamo, zove *parcijalna diferencijalna jednačina*, ako sadrži bar jedan parcijalni izvod nepoznate funkcije. U opštem slučaju jednačina $\varphi(x, y, z, p, q) = 0$, gde su $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, izražava *parcijalnu diferencijalnu jednačinu prvog reda*, a jednačina $\psi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, gde su $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ — *parcijalnu diferencijalnu jednačinu drugog reda*.

Zaustavimo se prvo na diferencijalnoj jednačini prvog reda

$$(1) \qquad \varphi(x, y, z, p, q) = 0.$$

Rešenje te jednačine je funkcija (2) $z=F(x,y)$, koja identički, posebno u odnosu i na x i na y, zadovoljava prethodnu diferencijalnu jednačinu, kad u nju stavimo vrednost z iz (2) i vrednosti odgovarajućih izvoda $p=\partial F/\partial x$, $q=\partial F/\partial y$. Svako rešenje i parcijalne diferencijalne jednačine zove se njen *integral*.

Integrali parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda mogu biti ovih tipova:

1. *Potpuni integral. Rešenje* parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda, koje *zavisi od dve nezavisne proizvoljne konstante* zove se *potpuni integral* te jednačine. On se izražava ili u implicitnoj formi, (3) $\Phi(x,y,z,a,b)=0$, gde su a i b proizvoljne konstante, ili u eksplicitnoj, $z=F(x,y,a,b)$. To znači da, ako izdiferenciramo jednačine (3) prvo po x, a zatim po y, iz tri jednačine: $\Phi=0$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}p=0$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)=\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}q=0$, gde zagrade označavaju potpune izvode složene funkcije po odgovarajućoj promenljivoj, — treba da se, posle eliminisanja konstanata a i b, dobije jednačina (1), i samo ona. U slučaju eksplicitnog oblika integrala, tri prethodne jednačine se zamenjuju ovima: $z=F$, $p=\partial F/\partial x$, $q=\partial F/\partial y$.

Iz potpunog integrala za posebne vrednosti proizvoljnih konstanata dobivaju se *partikularni integrali.*

2. *Opšti integral.* Rešenje koje ne zavisi od proizvoljnih konstanata, već od *proizvoljne funkcije* zove se opšti integral parcijalne diferencijalne jednačine.

I iz opšteg integrala se mogu dobiti *partikularni integrali* za posebne oblike proizvoljne funkcije.

3. *Singularni integral.* Rešenje koje ne zavisi ni od proizvoljnih konstanata ni od proizvoljne funkcije, a nije ni partikularno u odnosu bilo na proizvoljne konstante bilo na proizvoljnu funkciju, zove se *singularni integral.*

Da bismo objasnili navedene vrste integrala, uzmimo Ajlerov i Lagranžev klasični primer, koji stoji u vezi sa tzv. *kanalskom* ili *cevastom površinom.* Jednačina sferne površine poluprečnika R, sa centrom u ravni Oxy i koordinatama (a,b), ima oblik $(\alpha)\ \Phi=(x-a)^2+(y-b)^2+z^2-R^2=0$.

Pri stalnoj vrednosti R i proizvoljnim konstantama a i b, ova jednačina može biti smatrana kao potpuni integral parcijalne diferencijalne jednačine (β) $z^2=R^2/(1+p^2+q^2)$, koja se dobiva posle diferenciranja (α) po x i y: $x-a+zp=0$, $y-b+zq=0$ i eliminisanja a i b iz (α). Prema tome (α) je potpuni integral jednačine (β). Ako u (α) stavimo $b=\omega(\alpha)$, iz svih mogućih sfera sa centrima u ravni Oxy biramo samo one čiji su centri na krivoj sa jednačinom $y=\omega(x)$, gde je $\omega(x)$ proizvoljna funkcija. Sve te sfere imaju jednačinu $(x-a)^2+[y-b(a)]^2+z^2-R^2=0$; njihova obvojnica se dobiva kad se iz te jednačine i rezultata diferenciranja te jednačine po a, tj. $x-a+[y-\omega(a)]\,\omega'(a)=0$, ukloni parametar a. Rezultat tog eliminisanja je opšti integral jednačine (β). On zavisi od proizvoljne funkcije $\omega(a)$. Geometrijski njemu odgovara cevasta površina, kroz koju može da prođe lopta poluprečnika R. Najzad, iz potpunog integrala (α) možemo izvesti i singularni integral, pod pretpostavkom da on ne zavisi ni od a ni od b. Zato treba napisati tri uslova: $\Phi=0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial a}=0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial b}=0$. U našem slučaju: $\frac{\partial\Phi}{\partial a}=-2(x-a)=0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial b}=-2(y-b)=0$, i tada imamo $\Phi=z^2-R^2=0$. Prema tome, singularni integral sastoji se iz dve ravni, $z=\pm R$, paralelne ravni Oxy na rastojanju R od nje.

4.2. Linearne parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda

Iz parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda oblika $\varphi(x,y,z,p,q)=0$, gde su $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$, izdvojimo, prvo, linearne jednačine

$$(1)\qquad Xp+Yq-Z=0,$$

gde su X, Y, Z date funkcije promenljivih x,y,z. Potražimo rešenje te jednačine u obliku (2) $F(x,y,z)=C$ sa proizvoljnom konstantom C. Izvodi p i q se određuju iz jednačina $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q=0$. Ako prvu od ovih jednačina pomnožimo sa X, drugu sa Y i rezultate saberemo, dobićemo, na osnovu (1), jednačinu (3) $X\frac{\partial F}{\partial x}+Y\frac{\partial F}{\partial y}+Z\frac{\partial F}{\partial z}=0$, koja izražava uslov da funkcija (2) zadovoljava jednačinu (1). S druge strane, uporedo sa jednačinom (3) uzmimo sistem od dve obične diferencijalne jednačine

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}. \tag{4}$$

Te jednačine se zovu *karakteristične jednačine* date parcijalne jednačine.

Pretpostavimo da smo našli jedan integral ovih jednačina (5) $\Phi_1(x,y,z)=C_1$. Kao integral sistema (4) imamo, iz uslova $d\Phi_1=\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}dy+\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}dz\equiv 0$, identitet $X\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+Y\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}+Z\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\equiv 0$; a, na osnovu uslova (3), to znači da funkcija Φ_1 predstavlja rešenje jednačine (1). Pošto sistem (4) ima dva nezavisna integrala, pretpostavimo da smo našli i drugi integral, $\Phi_2(x,y,z)=C_2$. Tada imamo dva identiteta

$$\left\{\begin{aligned} &X\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+Y\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}+Z\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}=0,\\ &X\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}+Y\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}+Z\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}=0.\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Pokažimo sad da će i svaka proizvoljna funkcija $\Phi=\Phi(\Phi_1,\Phi_2)$ od pronađena dva integrala sistema (4) biti rešenje jednačine (1). Zaista, iz jednačina

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial\Phi_1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial\Phi_2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial\Phi}{\partial\Phi_1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial\Phi_2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\partial\Phi}{\partial\Phi_1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}+\frac{\partial\Phi}{\partial\Phi_2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z},$$

posle množenja redom sa X, Y, Z, pošto saberemo, dobićemo, na osnovu (6), jednačinu $X\frac{\partial\Phi}{\partial x}+Y\frac{\partial\Phi}{\partial y}+Z\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0$, koja pokazuje da funkcija Φ zaista zadovoljava potreban uslov (3). Prema tome funkcija Φ može biti birana proizvoljno, i jednačina $\Phi=0$ se javlja kao opšti integral jednačine (1).

Gornja rasuđivanja su pokazala da se integracija linearne parcijalne diferencijalne jednačine svodi na integraciju sistema običnih karakterističnih diferencijalnih jednačina.

Primeri.

1. $ap+bq=c$. Sastavimo karakterističnu jednačinu $dx/a=dy/b=dz/c$; bez teškoće izvodimo dva integrala tog sistema: (*) $az-cx=C_1, bz-cy=C_2$, i, na osnovu tih integrala, izvodimo opšti integral $\Phi(az-cx, bz-cy)=0$, gde je Φ proizvoljna funkcija.

Geometrijsko tumačenje. Normala $\vec{n}$ na površinu sa $\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma=p:q:-1$ stoji upravno na pravoj $\vec{l}$ sa kosinusima proporcionalnim $a:b:c$, jer je $(\vec{n}\,\vec{l})=0$. Već iz te diferencijalne osobine neposredno sleduje da datoj diferencijalnoj jednačini odgovara cilindrična površina. Jednačine (*) određuju proizvodilju te površine, a jednačina $\Phi=0$, sa datom funkcijom $\Phi(C_1, C_2)=0$ — vodilju.

2. $yp-xq=0$. Karakteristične jednačine $dx/y=-dy/x=dz/0$, imaju integrale: $z=C_1$, $x^2+y^2=C_2$. Opšti integral, $z=f(x^2+y^2)$, odgovara, kako smo videli, obrtnoj površini.

3. $xp+yq=0$. Karakteristične jednačine $dx/x=dy/y=dz/0$ imaju integrale $z=C_1$, $y-C_2x=0$. Opšti integral je $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$. I ovu jednačinu smo tretirali.

4. $xp+yq-z=0$. Karakt. jedn. su $dx/x=dy/y=dz/z$. Integrali: $y=C_1x$, $z=C_2x$. Integral $\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)=0$ odgovara konusnoj površini sa vrhom u početku koordinata. Veza $\Phi(C_1, C_2)=0$ određuje vodilju.

5. $p\frac{\partial f}{\partial y}-q\frac{\partial f}{\partial x}=0$, gde je $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$. Karakteristične jednačine: $dx\bigg/\frac{\partial f}{\partial y}=-dy\frac{\partial f}{\partial x}=dz/0$ daju integrale $z=C_1$, $f(x,y)=C_2$ i, prema tome, data diferencijalna jednačina, koju možemo napisati u obliku Jakobijeve determinante,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix},$$

izražava da su funkcije z i f zavisne.

4.3. Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda

Pređimo sad na proučavanje nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda u obliku

$$(1) \qquad \varphi(x,y,z,p,q)=0, \qquad p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}$$

i potražimo rešenje te jednačine u obliku potpunog integrala, rešenog po z, tj. u obliku

$$(2) \qquad z=F(x,y,a,b),$$

gde su a i b proizvoljne konstante. Ako je funkcija F rešenje jednačine (1), treba da bude ispunjen uslov (3) $\varphi(x,y,\partial F/\partial x, \partial F/\partial y)\equiv 0$, kao *identitet* u odnosu na četiri promenljive: x, y, a, b. Ako neka jednačina predstavlja identitet u odnosu na neku promenljivu, jednačina obrazovana posle diferenciranja po toj promenljivoj isto tako je identitet. Prema tome, iz identiteta (3) možemo napisati ova četiri potrebna identiteta:

$$(3)_a \qquad \varphi_z\frac{\partial F}{\partial a}+\varphi_p\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial a}+\varphi_q\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial a}\equiv 0,$$

$$(3)_b \qquad \varphi_z\frac{\partial F}{\partial b}+\varphi_p\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial b}+\varphi_q\frac{d^2 F}{\partial y\,\partial b}\equiv 0,$$

$$(3)_x \qquad \varphi_x+\varphi_z\frac{\partial F}{\partial x}+\varphi_p\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\varphi_q\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\equiv 0,$$

$$(3)_y \qquad \varphi_y+\varphi_z\frac{\partial F}{\partial y}+\varphi_p\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}+\varphi_q\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\equiv 0,$$

gde indeks kod φ_z označava delimični izvod, recimo, po z.

S druge strane, ako od potpunog integrala (2) koji zavisi od dva proizvoljna parame.ra, a i b, pređemo na rešenje koje zavisi samo od jednog parametra, recimo a, a drugi, b, smatramo kao funkciju prvog, tj. $b=b\ (a)$, jednačinu $z=F(x,y,a,b\ (a))$ treba tada smatrati kao identitet u odnosu na a. I tako, posle diferenciranja po a, imamo identitet: (4) $\frac{\partial F}{\partial a}+\frac{\partial F}{\partial b}b'\equiv 0$, gde je $b'=\frac{db}{da}$ konstanta zavisna od konstante a. Posle diferenciranja identiteta (4) po x i y dobivamo, najzad, još i ova dva po.rebna identiteta:

$$(4)_x \quad \frac{\partial^2 F}{\partial a\,\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial b\,\partial x}b'=0, \qquad (4)_y \quad \frac{\partial^2 F}{\partial a\,\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial b\,\partial y}b'=0.$$

Iz navedenih identiteta izvodimo sad, kao zaključak, sistem običnih diferencijalnih jednačina pomoću kojih se određuje traženi potpuni integral. Operacije sa jednačinama nose potpuno elementaran karakter i zato ćemo ih, kraćeg pisanja radi, označiti simbolički na sasvim jasan način.

Operaciji $(3)_a+(3)_b\,b'=0$ odgovara jednačina

a iz $(4)_x$ i $(4)_y$ sleduje
$$\left.\begin{aligned} \varphi_p\cdot(4)_x+\varphi_q\cdot(4)_y&=0 \\ dx\cdot(4)_x+dy\cdot(4)_y&=0 \end{aligned}\right\}\ (\mathrm{I})$$

Iz (I) dolazimo do proporcije $\frac{dx}{\varphi_p}=\frac{dy}{\varphi_q}=\frac{dz}{p\varphi_p+q\varphi_q}$, čiji je poslednji član dopunjen prema jednačini $dz=p\,dx+q\,dy$.

Kako je $(3)_x\, dx = (\varphi_x + p\,\varphi_z)\, dx + \varphi_p \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dy\right] = 0,$

$$(3)_y\, dy = (\varphi_y + q\,\varphi_z)\, dy + \varphi_q \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} dx + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy\right] = 0,$$

a srednje zagrade iz $p = \dfrac{\partial F}{\partial x}$ i $q = \dfrac{\partial F}{\partial y}$ imaju vrednosti dp i dq, dolazimo do jednačina

(II) $(\varphi_x + p\varphi_z)\, dx + \varphi_p\, dp = 0, \quad (\varphi_y + q\varphi_z)\, dy + \varphi_q\, dq = 0.$

Iz (I) i (II) dobivamo konačno

$$\text{(LŠ)} \quad \boxed{\frac{dx}{\varphi_p} = \frac{dy}{\varphi_q} = \frac{dz}{p\varphi_p + q\varphi_q} = -\frac{dp}{\varphi_x + p\varphi_z} = -\frac{dq}{\varphi_y + q\varphi_z}.}$$

To su čuvene Lagranž-Šarpi-ove jednačine, pomoću kojih se rešavanje parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda svodi na rešavanje sistema običnih diferencijalnih jednačina.

Samo rešenje izvodi se ovako. Neka su $\Phi_1(x, y, z, p, q) = C_1$, $\Phi_2(x, y, z, p, q) = C_2$ dva integrala (LŠ) jednačina. Ako tim jednačinama dodamo samu diferencijalnu jednačinu (1) $\varphi(x, y, z, p, q) = 0$, rezultat eliminisanja iz tih jednačina veličina p i q dovodi nas do jednačine $\Phi\,(x, y, z, C_1, C_2) = 0$, koja i predstavlja u implicitnom obliku potpuni integral date parcijalne jednačine (1).

Učinićemo jednu važnu napomenu, na čijem se dokazu nećemo zaustavljati. Naveli smo da su za određivanje totalnog integrala potrebna dva integrala sistema (LŠ). Međutim, ako je pronađen samo jedan integral $\Phi_1(x, y, z, p, q) = 0$, onda se pomoću ove i diferencijalne jednačine (1) $\varphi(x, y, z, p, q) = 0$ određuju takve funkcije p i q da se iz jednačine $dz = p\,dx + q\,dy$, koja postaje totalni diferencijal, tražena funkcija dobiva pomoću kvadratura.

Primer. $1 + p^2 + q^2 - R^2 z^{-2} = 0.$

$$\text{(LŠ)} \quad \frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{p^2 + q^2} = -\frac{dp}{p\,R^2 z^{-3}} = -\frac{dq}{q\,R^2 z^{-3}}$$

Integral sa konstantom a je: $pz = a - x$, jer je $z\,dp + p\,dz = -dx$, zbog identiteta $-z\,(R^2 z^{-3})\, dx + (p^2 + q^2)\, dx + dx = 0$, prema datoj diferencijalnoj jednačini. Zatim, prema napomeni, uzimamo jednačinu $dz = p\,dx + q\,dy$. Određujemo iz integrala $p = (a - x) : z$, a zatim i $q^2 = \dfrac{1}{z^2}\,[R^2 - z^2 - (a - x)^2]$, i dolazimo do jednačine $z\,dz = (a - x)\, dx + \sqrt{R^2 - z^2 - (a - x)^2}\, dy$, koju možemo napisati: $d\sqrt{R^2 - z^2 - (a - x)^2} = d(-y)$; a odavde dolazimo do potpunog integrala $(a - x)^2 + (b - y)^2 + z^2 = R^2$ sa proizvoljnim konstantama a i b.

4.31. Košijev problem

Kao što se u problemu integracije obične diferencijalne jednačine, odnosno sistema ovakvih jednačina, može određivati rešenje koje zadovoljava određene početne uslove, tako se i u slučaju parcijalne diferencijalne jednačine mogu: 1. postaviti početni uslovi u određenom obliku, koji odgovara tim jednačinama, i 2. tražiti rešenje koje zadovoljava tako postavljene uslove. Tako tretiran problem rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina nosi naziv *Košijeva problema*, jer ga je prvi postavio francuski matematičar A. Koši (Augustin Cauchy 1789 — 1857).

Za diferencijalnu jednačinu (1) $\varphi\,(x, y, z, p, q) = 0$ Košijevi početni uslovi se mogu ovako postaviti: treba naći integral (2) $z = F\,(x, y)$ — to znači površinu — koji se pretvara u identitet u odnosu na t, ako u (2) stavimo date funkcije, (3) $x = f_1(t)$, $y = f_2\,(t)$, $z = f_3(t)$. Drugim rečima, kriva, data bilo u parametarskom obliku, bilo u obliku da, pri $x = x_0$, $y = f\,(x)$, mora pripadati integralnoj površini (2).

Za rešavanje Košijeva problema poći ćemo od potpunog integrala (4) $z = F\,(x, y, a, b)$, jednačine (1), koji se može dobiti pomoću integracije (LŠ) sistema diferencijalnih jednačina.

Vrednosti (3) treba da daju identitet u odnosu na t, kako iz jednačine (4), tj. (4') $f_3(t) = F(f_1(t), f_2(t), a, b)$, tako i iz jednačine što se dobiva posle diferenciranja (4) po t, tj. (4'') $f_3'(t) = \frac{\partial F}{\partial x} f_1'(t) + \frac{\partial F}{\partial x} f_2'(t)$. Iz (4') i (4'') možemo odrediti parametre a i b kao funkcije t, tj. $a = a(t)$, $b = b(t)$. I tada za svako t dobivamo dve jednačine

$$z = F(x, y, a(t), b(t)), \qquad 0 = \frac{\partial F}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{dt},$$

koje za svake dve tačke na krivoj, kojima odgovaraju vrednosti t i $t+\Delta t$, predstavljaju integral jednačine (1). Kako su t i Δt proizvoljne veličine, veličinu Δt smo isključili prelazom na graničnu vrednost $\Delta t \to 0$, pa možemo isključiti i vrednost t. Dobićemo, u opštem slučaju, jednačinu (5) $\Phi(x, y, z) = 0$, koja i predstavlja traženu integralnu površinu što prolazi kroz sve tačke sa proizvoljnom vrednošću parametra t, a to znači kroz krivu datu u parametarskom obliku (3).

Rešenje slično prethodnom (5) može se dobiti i u slučaju kad je kriva data u obliku $x = x_0$, $y = f(x)$ (izvesti odgovarajuće obrasce).

Primeri.

1. Date su diferencijalne jednačine $z = px + qy + pq$ i kriva $x = 0$ $y = t$, $z = t^2$. Iz (LŠ) određujemo potpuni integral $z = ax + by + ab$, gde su a i b proizvoljne konstante (proveriti!). Stavimo date vrednosti, $t^2 = bt$; diferenciramo po t: $2t = b$. Određujemo a i b: $a = -t/2$, $b = 2t$. Stavljamo u potpuni integral: $z = -\frac{1}{2}tx + 2ty - t^2$ i diferenciramo po t: $0 = -x/2 + 2y - 2t$. Određujemo $t = \frac{1}{4}(4y - x)$ i stavljamo u z. Konačno imamo $z = (y - x/4)^2$. Proveriti da li je zadovoljena diferencijalna jednačina i da li data kriva leži na dobivenoj površini.

2. Date su diferencijalna jednačina $pq - 1 = 0$ i početna kriva $x = s$, $y = s^3$, $z = 2s^2$. Uzimamo (LŠ) jednačine $\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = -\frac{dp}{0} = -\frac{dq}{0} = dt$. Iz poslednjih jednačina sleduje

$p = \text{const.} = s$, $q = \text{const.} = \frac{1}{s}$, jer je $pq = 1$. Uzimamo prvi količnik $\frac{dx}{q} = s\,dx = dt$, odakle, posle integracije, izvodimo (*) $x = \frac{1}{s}(t + s^2)$, pri čemu proizvoljnu konstantu integracije određujemo iz uslova da je, za $t = 0$, $x = s$, kako to traži početna kriva. Jednačina $\frac{dy}{p} = dt$ daje (**) $y = s(t + s^2)$, za $t = 0$ imamo $y = s^3$, najzad, iz jednačine $\frac{dz}{2} = dt$, imamo integral (***) $z = 2(t + s^2)$, jer za $t = 0$ imamo $z = 2s^2$. Jednačine (*), (**), (***) su jednačine tražene površine u parametarskom obliku. Posle eliminacije parametara dolazimo bez teškoće do jednačine $z^2 = 4xy$ ili $z = 2\sqrt{xy}$. To je jednačina traženog Košijeva problema, jer su zadovoljeni: 1. diferencijalna jednačina $pq - 1 = 0$, i 2. početni uslovi (proveriti ovo!).

Učinimo još i važnu napomenu o značaju potpunog integrala parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda. Lagranž je u svojoj teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina pokazao da se iz potpunog integrala mogu izvesti kako opšti tako i singularni integrali.

U prethodnom izlaganju smo pokazali, na primeru diferencijalne jednačine $1 + p^2 + q^2 - R^2 z^{-2} = 0$, kako se može pomoću (LŠ) jednačina dobiti potpuni integral $(a - x)^2 + (b - y)^2 + z^2 - R^2 = 0$, gde su a i b dve proizvoljne konstante. Na drugom mestu smo naveli kako se iz istog potpunog integrala mogu izvesti opšti integrali u obliku kanalskih površina, i singularni integrali u obliku dve paralelne ravni. U okviru ove knjige ne možemo ulaziti u opštu teoriju nalaženja opštih i singularnih integrala iz potpunog integrala.

Vežbanja:

1. Eliminisati konstante C_1 i C_2 iz jednačine $z = C_1x + C_2y$ posle delimičnog diferenciranja. **2.** Eliminisati proizvoljnu funkciju f iz jednačine $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ i uporediti rezultat sa rezultatom prethodnog zadatka.

Naći opšti integral jednačine $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$. 4. Naći opšti integral jednačine $\frac{\partial z}{\partial x}-a\frac{\partial z}{\partial y}=0$. 5. Naći opšti integral jednačine $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$ i jednačine $(ax+a_1)\frac{\partial z}{\partial x}+(by+b_1)\frac{\partial z}{\partial y}=cz+c_1$.

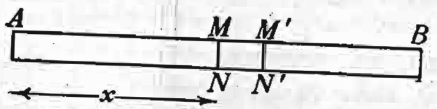
Odrediti potpuni integral jednačina:

6. $z-pq=0$, 7. $z(xp+yq-z)+1=0$.

4.4. Parcijalne diferencijalne jednačine u Matematičkoj fizici. Primeri

Parcijalne diferencijalne jednačine, naročito drugog reda, često se javljaju u Matematičkoj fizici. Pokazaćemo na primerima kako se proučavaju fizički problemi pomoću takvih jednačina.

a. *Provođenje toplote u tankom štapu.* Neka je AB (sl. 18) neki tanki štap. Označimo sa x rastojanje proizvoljne tačke štapa od tačke A. Temperaturu u preseku te tačke označimo sa T; ova temperatura je u opštem slučaju funkcija položaja preseka i vremena t, tj. $T=T(x,t)$. Izrazimo matematički da je toplota koju za vreme dt primi element štapa, MM', kao telo specifične toplote γ, jednaka toploti koja preostaje u tom elementu, posle primanja toplote kroz presek MN i davanja kroz presek $M'N'$. Prva toplota, kao toplota tela čija se temperatura popela za dT, ima vrednost $dQ=m\gamma(dT)_{x=\text{const.}}=m\gamma\frac{\partial T}{\partial t}dT$, gde je m masa elementa. Za izračunavanje drugog oblika iste toplote možemo, pre svega, napisati da je $dQ=(dQ)_x-(dQ)_{x+dx}$, gde je $(dQ)_x$ količina toplote, koja prolazi kroz presek MN, a $(dQ)_{x+dx}$ kroz presek $M'N'$.



Sl. 18 — Provođenje toplote u tankom štapu

Količina toplote $(dQ)_x$ izražava se: $(dQ)_x=-\varkappa\cdot s\cdot dt\cdot\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x$, gde su: $\varkappa$ — *koeficijent provodljivosti* datog materijala, s — površina preseka, dt vreme trajanja provođenja i $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x$ temperaturna promena štapa izračunata za jedinicu dužine na preseku MN. Prethodna jednačina izražava, tako reći, zakon toka toplote kroz neki presek u diferencijalnom obliku. Na sličan način dobivamo za drugi presek $(dQ)_{x+dx}=-\varkappa\cdot s\cdot dt\cdot\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx}$. Na osnovu dobivenih izraza izračunavamo za $dQ=\varkappa s\,dt\left[\left(\frac{dT}{\partial x}\right)_{x+dx}-\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x\right]$; a pošto je izraz u srednjim zagradama jednak $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dx$, imamo za $dQ=\varkappa s\,dt\,dx\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$. Ako ovaj izraz izjednačimo sa izvedenim izrazom za dQ, konačno ćemo imati

$$\text{(1)}\qquad \frac{\partial T}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\qquad a^2=\varkappa/\sigma\gamma,$$

pošto je $m=\sigma s\,dx$, pri čemu je σ gustina štapa i $s\,dx$ zapremina elementa.

Vidimo da jednačina (1) spada u parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda sa jednom nepoznatom funkcijom, T, dve nezavisno promenljive, t i x. Napisana diferencijalna jednačina određuje promenu temperature u elementarnom procesu. Međutim, za rešavanje problema u potpunosti to nije dovoljno. Treba da imamo još dva podatka:

1. *Početni raspored* temperature u štapu, tj. funkciju (2) $T=T(x,t_0)$, za početni trenutak, t_0, i 2. *Granične uslove* temperature za sve vreme procesa, tj. (3) $T=T(0,t)$, $T=T(l,t)$, gde je $l=AB$ dužina štapa. Jasno je da navedeni podaci treba da budu u saglasnosti, tj. da, za $x=0$ i za $x=l$, funkcija (2) dâ vrednosti (3) za $t=t_0$. Granični uslovi mogu biti dati i u drugom obliku. Npr., na granicama štap može biti izolovan, tako reći, odvojen od termičkog uticaja. Takvi se uslovi izražavaju jednačinama (4) $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}=0$, $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=l}=0$.

Pokažimo sad put kojim se rešava postavljeni zadatak. Pre svega potražimo rešenje jednačne (1) u obliku

$$(5) \qquad T = e^{nt}(A \cos kx + B \sin kx),$$

gde su n, k, A i B konstante.

Pošto je $\frac{\partial T}{\partial t} = n\,T$, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -k^2 T$, funkcija (5) biće rešenje jednačine (1) za sve vrednosti k, A, B, ako je $n = -a^2 k^2$.

Kako je jednačina (1) linearna, i zbir funkcija (5) je rešenje ove jednačine. Prema tome možemo rešenje jednačine (1) u opštem obliku napisati

$$(6) \qquad T = \sum_{i=1}^{\nu} e^{-a^2 k_i^2 t}\,(A_i \cos k_i x + B_i \sin k_i x),$$

gde je A_i, B_i, k_i niz konstanata, a ν proizvoljan ceo pozitivan broj.

Pokušajmo sad da zadovoljimo granične uslove, npr., u obliku (4). Pošto je

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \sum_{i=1}^{\nu} k_i e^{-a^2 k_i^2 t}\,(-A_i \sin k_i x + B_i \cos k_i x),$$

prvi granični uslov daje

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = \sum_{i=1}^{\nu} B_i k_i e^{-a^2 k_i^2 t} \equiv 0.$$

Kako ovaj identitet mora postojati za svaku vrednost t, svi koeficijenti B_i moraju biti jednaki nuli; drugim rečima, članovi sa $\sin k_i x$ ne ulaze u izraz (6). Stoga rešenje može imati samo oblik $T = \sum_{i=1}^{\nu} A_i e^{-a^2 k_i^2 t} \cos k_i x$. Drugi granični uslov za $x = l$ za svaki član zbira daje $(-A_i k_i e^{-a^2 k_i^2 t} \sin k_i x)_{x=l} = 0$. Iz ove jednačine sleduje da brojevi k_i moraju zadovoljavati jednačine $\sin k_i l = 0$ i mogu, dakle, imati vrednosti

$k_i = i\pi/l$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Rešenje, koje zadovoljava oba granična uslova, izgleda

$$(7) \qquad T = \sum_{i=1}^{\nu} A_i e^{-\frac{a^2 i^2 \pi^2}{l^2} t} \cos \frac{i\pi}{l} x.$$

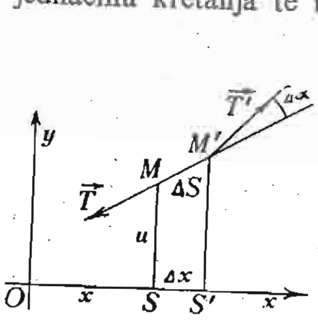
U ovom rešenju koeficijenti A_i mogu imati još proizvoljne vrednosti. Proizvoljnost ovih koeficijenata možemo iskoristiti da zadovoljimo dati početni raspored temperature u štapu, koji je dat jednačinom (2). Ako u (7) stavimo $t = t_0 = 0$, naše rešenje će izgledati: $T = \sum_{i=1}^{\nu} A_i \cos \frac{i\pi}{l} x$. S druge strane, funkciju početnog rasporeda $T(x, 0)$ možemo razviti u Furijeov red, $T = T(x, 0) = \sum_{i=1}^{\nu} M_i \cos \frac{i\pi}{l} x$, gde koeficijente treba smatrati kao date veličine. Upoređivanje našeg rešenja i datog početnog rasporeda dovodi do jednačina $A_i = M_i$, $i = 1, 2, \ldots \nu$. Prema tome definitivno rešenje našeg problema u svim njegovim delovima izgleda

$$T = \sum_{i=1}^{\nu} M_i e^{-a^2 i^2 t/l^2} \cos \frac{i\pi}{l} x.$$

Prema traženoj tačnosti rešenja u tom razvijanju možemo uzeti dva, tri, četiri ili više članova. U mnogim praktičnim pitanjima sličnih zadataka već su i dva člana dovoljna da dobijemo potrebnu predstavu o pojavi.

b. *Poprečne oscilacije žice.* Kao drugi primer uzmimo kretanje zategnute žice, tankog elastičnog konca, koji se može savijati. Neka je iz položaja ravnoteže duž ose Ox žica izvedena u neki početni položaj i, iz tog položaja, sve tačke žice počele vršiti poprečne, transverzalne oscilacije u ravni Oxy oko ose Ox. Proučimo takvo kretanje žice.

Neka je neki beskrajno mali element žice iz položaja SS', na osi Ox, sa dužinom Δx, zauzeo u nekom trenutku t položaj MM', sa dužinom ΔS, koja se razlikuje od Δx samo za beskrajno malu veličinu drugog reda (sl. 19). Smatrajući taj element kao materijalnu tačku obrazujmo diferencijalnu jednačinu kretanja te tačke prema osnovnoj Njutnovoj jednačini, $m\vec{v}=\vec{F}$, gde su: m — masa tačke, $\dot{v}$ — ubrzanje tačke i $\vec{F}$ rezultanta svih sila koje dejstvuju na tačku. Pretpostavljamo da, sem sila elastičnosti, na element ne dejstvuju nikakve druge sile. Položaj tačke se određuje apscisom x i ordinatom u, funkcijom $u(x, t)$. Prema tome ubrzanje $\dot{v}$ ima pravac Oy ose i algebarsku vrednost $\partial^2u/\partial t^2$.



19 — Element žice

Masa elementa $MM'=\Delta S\approx\Delta x$ određuje se obrascem $m=\sigma_2\Delta S=$ $=\sigma_2\Delta x$, gde je σ_2 (III, str. 87) linearna gustina žice, koju pretpostavljamo stalnom, $\sigma_2=\text{const}$. Dalje pretpostavljamo da u tački M na element dejstvuje napon zatezanja $\vec{T}$, a u tački M' napon $\vec{T}'$. Ako pravac napona $\vec{T}$, kao tangente, čini sa Ox osom ugao α, pravac $\vec{T}'$ se određuje uglom $\alpha+\Delta\alpha$. Skretanje pravca tangente na krivu žice iznosi $\Delta\alpha$. Pošto u našem slučaju, pri beskrajno maloj vrednosti i ugla α,

imamo $\alpha=\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, za $\Delta\alpha$ uzimamo vrednost $\Delta\alpha=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}\Delta x$.

Sila savijanja u pravcu Oy ose, prema *Hukovu zakonu*, proporcionalna je skretanju pravca tangente, tj. $F\cos(\vec{F}, y)=$ $=k\,\Delta\alpha=k\,\Delta x\,\partial^2u/\partial x^2$, gde je k koeficijent proporcionalnosti. Na taj način iz Njutnove vektorske jednačine za pravac Oy imamo skalarnu jednačinu $\sigma_2\,\Delta x\,\partial^2u/\partial t^2=k\,\Delta x\,\partial^2u/\partial x^2$, koja se konačno izražava ovako (8) $\partial^2u/\partial t^2=a^2\partial^2u/\partial x^2$, gde je $a^2=k/\sigma_2$. To je *diferencijalna jednačina poprečnih oscilacija žice* kad na nju ne dejstvuju nikakve spoljašnje sile.

Kako smo već u prethodnom primeru objasnili, treba za rešavanje i ovog problema, sem diferencijalne jednačine,

utvrditi i početne uslove (9) $u(x, 0)=\varphi(x)$, $\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}=\varphi_1(x)$ i granične uslove, koje uzimamo u obliku (10) $u_{x=0}=0$, $u_{x=l}=0$, gde je l dužina žice.

Rešenje ćemo potražiti u obliku proizvoda dve funkcije (11) $u=U(t)\,V(x)$, od kojih prva zavisi samo od t, a druga samo od x. Iz diferencijalne jednačine (8) imamo $U''(t)/a^2U(t)=$ $=V''(x)/V(x)$. Pošto prvi količnik ne zavisi od nezavisno promenljive x, a drugi od nezavisno promenljive t, a treba da imaju zajedničku vrednost, to može biti samo ako je ta vrednost konstantna. Označimo je sa $-\lambda^2$; i tako dobivamo dve obične diferencijalne jednačine: $V''+\lambda^2V=0$, $U''+\lambda^2a^2U=0$ sa integralima $V(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x$, $U(t)=A\cos\lambda at+$ $B\sin\lambda at$. Na taj način, prema (11), možemo napisati

$$(12)\quad u(x,t)=(A\cos\lambda at+B\sin\lambda at)(C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x).$$

Primena uslova (10) dovodi do jednačina: $C_1=0$, $C_1\cos\lambda t+$ $+C_2\sin\lambda t=0$, iz kojih sleduje $C_1=0$, $\sin\lambda l=0$. Pretpostavka da je $C_1=C_2=0$ ne daje rešenje različito od nule. Uslov $\sin\lambda l=0$ pokazuje da je rešenje našeg zadatka moguće samo za vrednosti $\lambda_i=\pm i\pi/l$, gde i može uzimati vrednosti niza prirodnih brojeva 1, 2, . . . , n, . . . Prema tome imamo ovaj niz rešenja

$$u_i(x, t)=[A_i\cos(i\pi\,at/l)+B_i\sin(i\pi\,at/l)]\sin(i\pi\,x/l).$$

Primetimo da je zadržavanje članova sa negativnim znakom kod λ suvišno, jer ono, posle svođenja članova, može da utiče samo na vrednosti proizvoljnih konstanata.

Pošto je diferencijalna jednačina žice linearna u odnosu na druge izvode, zbir dva ili više rešenja te jednačine predstavlja isto tako rešenje te jednačine. Prema tome opšte rešenje naše diferencijalne jednačine, koje zadovoljava granične uslove, možemo napisati u obliku

$$(13)\quad u(x, t)=\sum_{i=1}^{n}[A_i\cos(i\pi\,at/l)+B_i\sin(i\pi\,at/l]\sin(i\pi x/l),$$

pri čemu rešenje formalno ostaje na snazi i kad $n\to\infty$.

Pošto su A_i, B_i proizvoljne konstante, njihovim vrednostima možemo raspolagati da bismo zadovoljili i početne uslove

(9). Prethodno rešenje za $t=0$ daje $u(x,0)=\sum_{i=1}^{n} A_i \sin(i\pi x/l)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \sum_{i=1}^{n}\frac{i\pi a}{l} B_i \sin(i\pi x/l)$. Prema uslovima (9) prvi trigonometrijski red treba da bude jednak datoj funkciji φ, a drugi datoj funkciji $\varphi_1(x)$. Na taj način određivanje A_i, B_i se svodi na određivanje koeficijenata trigonometrijskih redova pri razvijanju datih funkcija u te redove. Pošto smo izveli (III, str. 114) obrasce za izražavanje traženih koeficijenata, možemo ih ovde primeniti i, na taj način, napisati

$$A_i = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{i\pi x}{l}dx, \qquad B_i = \frac{2}{i\pi a}\int_0^l \varphi_1(x)\sin\frac{i\pi x}{l}dx.$$

Sa tim vrednostima proizvoljnih konstanata obrazac (13) predstavlja formalno rešenje našeg problema. Ne možemo ulaziti u proučavanje ni teorijskih uslova pod kojima dato formalno rešenje zaista predstavlja pravo rešenje problema, a ni u nabrajanje svih fizičkih osobina koje se mogu protumačiti pomoću izvedenog rešenja.

Učinićemo samo ovu primedbu. U mnogim problemima slične prirode, kao što je i problem o kretanju žice, pojavljuju se, u vezi sa uslovima problema, naročite veličine od čijih vrednosti (λ_i) zavisi mogućnost rešavanja datog problema. Takve specijalne vrednosti imaju naročiti naziv, zovu se *sopstvene vrednosti problema*. Funkcije koje rešavaju problem za te vrednosti zovu se *sopstvene funkcije problema*. Određivanje sopstvenih vrednosti i sopstvenih funkcija igra vrlo važnu ulogu u Teoriji diferencijalnih jednačina Matematičke fizike. Kao primer pomenimo da se samo na jednoj od jednačina ovog tipa, na tzv. *talasnoj jednačini*, u obliku

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t),$$

gde su x, y, z koordinate tačke u prostoru, t — vreme, a^2 — data konstanta, f — data funkcija i $u(x,y,z,t)$ nepoznata funkcija, osnivaju grane Fizike, koje su vezane za širenje oscilacija u prostoru. Istoj kategoriji pripada i tzv. *Šredingerova jednačina*, na kojoj se zasniva savremena *Kvantna mehanika atoma*.

Glava peta

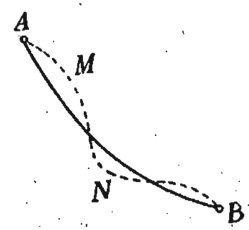
IZ VARIJACIONOG RAČUNA

5.1. Ekstremalni principi

Rešavajući zadatke (II, str. 66) o odbijanju i prelamanju svetlosti, videli smo da put svetlosti stoji u vezi sa minimumom vremena za koje svetlost prelazi iz jedne tačke u drugu. *Ferma* (1609 — 1665) je ovu ekstremalnu osobinu svetlosti uzeo za osnovu teorije svetlosti. Tako je ponikao naročiti ekstremalni princip — *Fermatov princip*.

Teoriju kretanja materijalne tačke ili čitavog sistema materijalnih tačaka možemo takođe obuhvatiti opštim principom formulisanim pomoću ekstremuma jedne funkcije. To je takozvani *princip najmanjeg dejstva*. Sadržaj tog principa objasnićemo na jednostavnom primeru.

Zamislimo materijalnu tačku koja je iz položaja A (sl. 20), pod uticajem datih sila, prešla u položaj B. Nazovimo taj njen stvarni put *direktnim putem tačke* između A i B. Sa t_0 i t_1 označimo trenutke vremena kada se tačka nalazila u A i B.



Sl. 20 — Direktni i zaobilazni put tačke

Uporedo sa ovim direktnim putem zamislimo drugi put tačke, koji zadovoljava uslove:

1. Vreme kretanja je isto: od t_0 do t_1

2. Krajevi trajektorije su isti: tačke A i B.

3. Ako tačka nije bila slobodna, npr., ako je bila prinuđena da se kreće

po nekoj površini, njeno je kretanje i na tom novom putu ograničeno na isti način.

Put tačke, koji zadovoljava prethodne uslove, no nije direktni put, zove se *zaobilazni put*.

Uvedimo sad jednu funkciju u obliku integrala

$$W = \int_{t_0}^{t_1} (\mathrm{T} - \Pi)\, dt,$$

gde je T tzv. *živa sila tačke*, ili njena *kinetička energija*, a Π *potencijalna energija* tačke. Živa sila T jednaka je polovini proizvoda mase tačke i kvadrata brzine, tj. $\mathrm{T} = \frac{mv^2}{2}$, gde je m masa tačke i v njena brzina. Potencijalna energija, ili energija položaja tačke, ima osobinu da njen diferencijalni element $d\Pi$ sa suprotnim znakom, izražava rad sila koje dejstvuju na tačku na elementarnom pomeranju.

Funkcija W, izražena napisanim integralom, zove se *dejstvo*.

Uporedimo vrednost dejstva po zaobilaznim putevima sa vrednošću po direktnom putu. Prema *principu najmanjeg dejstva* vrednost dejstva po direktnom putu ima, u poređenju sa vrednostima po zaobilaznim putevima, ekstremalnu vrednost, naime pod izvesnim uslovima, najmanju. Prema tome princip najmanjeg dejstva spada u ekstremalne principe.

Princip najmanjeg dejstva igra ne samo u Mehanici već i u drugim naukama ogromnu ulogu. Filozofi su skloni da ovom principu pridaju univerzalni značaj i smatraju da su sva zbivanja u vasioni saglasna sa ovim principom.

Princip najmanjeg dejstva formulisan je, kako u Mehanici tako i u drugim naukama, na više različitih načina. U širokom praktičnom smislu taj se princip izražava kao princip najmanjih utrošaka sa najvećim rezultatima. U ovoj formi on se javlja kao osnova svekolike naše materijalne kulture.

Kao što smo i videli, princip najmanjeg dejstva izražen je pomoću ekstremuma određenog integrala. Ako ovaj princip postavimo kao osnovu Mehanike materijalne tačke, treba iz

uslova ekstremalnosti integrala izvesti diferencijalne jednačine kretanja tačke.

Problemi određivanja nepoznatih funkcija, koje daju određenim integralima ekstremalne vrednosti, spadaju u naročitu granu Matematike, koja se zove *Varijacioni račun*.

Proučimo najprostije elemente tog računa.

5.2. Varijacija funkcije i integrala

Pre svega formulišimo najjednostavniji zadatak Varijacionog računa.

Poći ćemo od određenog integrala

$$(1) \qquad J = \int_a^b f(x, y, y')\, dx,$$

gde su a i b konstantne granice integrala, f data funkcija nezavisno promenljive x, funkcije y i izvoda y' funkcije y po x. Treba odrediti nepoznatu funkciju, y, tako da integral J dobije ekstremalnu vrednost.

Kriva linija sa jednačinom

$$(2) \qquad y = y(x),$$

kojoj odgovara ekstremalna vrednost integrala J, zove se njegova *ekstremala*.

Pri rešavanju ovog zadatka zaustavićemo se samo na potrebnim uslovima za ekstremum integrala. Proučavanje dovoljnih uslova izlazi daleko van okvira ove knjige.

Ako uporedo sa funkcijom (2), koja vrednost našeg integrala dovodi do ekstremalne vrednosti, uzmemo drugu funkciju $\bar{y}(x)$, razlika

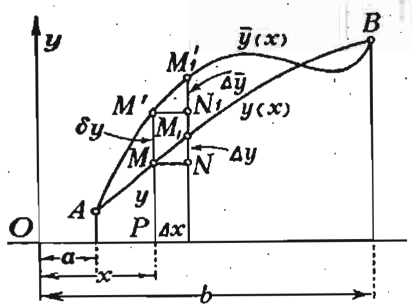
$$(3) \qquad \bar{y}(x) - y(x) = \delta y,$$

sa oznakom δy (čitaj delta ipsilon), zove se *varijacija funkcije* za datu vrednost x. Varijacija funkcije se razlikuje od običnog priraštaja funkcije time što zavisi ne od priraštaja argumenta x te funkcije, već od promene funkcionalne prirode same funkcije. Tu promenu možemo izraziti, npr., jednačinom $\delta y=\eta k(x)$, gde su: $k(x)$ konačna funkcija od x sa potrebnim osobinama u odnosu na izvode i η beskrajno mala veličina. Tada se uslov da se zaobilazni put poklopi sa direktnim na celom putu izražava jednačinom $\eta=0$, a uslovi da ti putevi imaju, recimo, samo dve stalne zajedničke tačke, npr., za $x=x_0$ i $x=x_1$, izražavaju jednačinama $k(x_0)=0$, $k(x_1)=0$. Učinimo ovu primedbu. Ako za proizvoljne tačke, sem, recimo, stalnih krajnjih tačaka, funkcije $y(x)$ i $k(x)$ mogu uzimati nezavisne proizvoljne vrednosti, kako konačne tako i beskrajno male, procesi diferenciranja funkcije i određivanja varijacije su nezavisni među sobom i, prema tome, je $d\delta y=\delta dy$.

Pokažimo na slici razliku između priraštaja funkcije i njene varijacije. Zamislimo između dve tačke, A i B (sl. 21), dve krive: $y=y(x)$ i $y=\bar{y}(x)$. Sa M označimo tačku na prvoj krivoj, sa M' na drugoj. Obe tačke imaju istu apscisu x. Dužina MM' daje vrednost varijacije funkcije, jer je

$$MM'=PM'-PM=\bar{y}(x)-y(x)=\delta y.$$

Ako sad x dobije priraštaj Δx, y će dobiti priraštaj Δy kome odgovara duž NM_1, a $\bar{y}$ ima priraštaj $\Delta\bar{y}=N_1M_1$.



Sl. 21 — Varijacija i priraštaj funkcije

Obratimo pažnju da kriva $y=\bar{y}(x)$ obično zadovoljava uslov da beskrajno malo odstupa od krive $y=y(x)$, tj. da je δy beskrajno mala veličina.

Proučimo sad priraštaj integrala (1) iz 5.2 pri prelazu sa direktnog puta na zaobilazni, tj. $\Delta J=J_Z-J_D$. Ako iskoristimo varijacione promene y i y', od kojih zavisi samo J_Z, prema obrascima $\delta y=\eta k(x)$, $\delta y'=\dfrac{d}{dx}\delta y$, možemo priraštaj ΔJ rastaviti u red

$$\Delta J=\eta\,\delta J+\frac{1}{2}\eta^2\delta^2 J+\ldots, \tag{4}$$

gde su δJ, $\delta^2 J$, ... odgovarajući koeficijenti. Ti koeficijenti se zovu *prva*, *druga*, ... *varijacija integrala J*.

Slično teoriji običnog ekstremuma funkcije i ovde možemo tvrditi da je neophodan uslov za stacionarnu vrednost integrala da bude $\delta J=0$, tj. da prva varijacija integrala bude nula.

5.3. Ajlerova jednačina

Izračunajmo sad prvu varijaciju integrala (1) iz 5.2. Iz (4) tog člana imamo $\delta J=\left(\dfrac{\partial\Delta J}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}$; a pošto je $\Delta J=J_Z-J_D$, i J_D ne zavisi od η, imamo dalje $\delta J=\delta\int\limits_a^b f(x,y,y')dt=$

$$=\int_a^b\delta f(x,y,y')\,dt=\int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\,\delta y'\right)dx=\int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\,\frac{d}{dx}\delta y\right)dx.$$

Posle delimičnog integrisanja drugog člana biće

$$\delta J=\left|\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\right|_a^b+\int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\,dx.$$

Pošto je, za $x=a$ i $x=b$, varijacija $\delta y=0$, konačno imamo za prvu varijaciju obrazac

$$\delta J=\int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)k(x)\,dx.$$

Iz uslova stacionarnosti $\delta J=0$, koji važi za proizvoljne vrednosti funkcije $k(x)$, sleduje da je

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=0.}$$

Leva strana ove jednačine zove se *varijacioni izvod* podintegralne funkcije po nepoznatoj funkciji y. Sama jednačina je *Ajlerova jednačina Varijacionog računa*. Integracija te jednačine daje traženu ekstremalu. Pošto funkcija f sadrži y', a varijacioni izvod traži još jedno diferenciranje po x, Ajlerova jednačina je drugog reda u odnosu na nepoznatu funkciju y.

5.4. Primeri

Rešimo nekoliko primera.

a. *Najkraće rastojanje između dve tačke u ravni.* Neka su date u ravni dve tačke, A i B, sa koordinatama x_0, y_0 i x_1, y_1. Treba dokazati da je prava najkraće rastojanje između ovih tačaka.

Uzmimo obrazac za dužinu luka krive u Dekartovim koordinatama

$$J=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Kako je ovde $f=\sqrt{1+y'^2}$, Ajlerova jednačina izgleda

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0.$$

Iz ove jednačine sleduje odmah $y'/\sqrt{1+y'^2}=\text{const.}$

ili $$y'=\text{const.}=\alpha.$$

Ako integrišemo još jedanput, dobivamo

$$(1) \qquad y=\alpha x+\beta,$$

gde su α i β dve proizvoljne konstante integracije. Ove konstante lako se određuju iz uslova da prava (1) prolazi kroz tačke A i B.

Na taj način smo pokazali da je doista prava najkraće rastojanje između dve tačke u ravni.

b. *Najmanja obrtna površina.* U ravni su date dve tačke, A i B, i osa Ox (sl. 22). Treba spojiti ove dve tačke krivom u toj ravni tako da se obrtanjem krive oko ose Ox dobije najmanja površina.

Kako se obrtna površina izražava (III, str. 84) obrascem

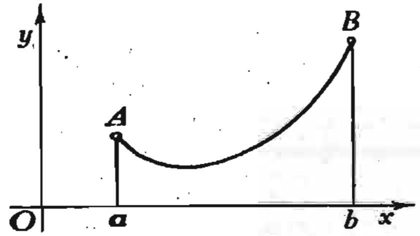
$$J=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

funkcija f ima vrednost

$$f=y\sqrt{1+y'^2}.$$

Prema tome Ajlerova jednačina izgleda

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}(y\sqrt{1+y'^2})-\sqrt{1+y'^2}=0.$$



Sl. 22 — Minimalna obrtna površina

Pošto funkcija f u ovom slučaju ne zavisi od promenljive x, naša jednačina ima integral

$$y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f=\text{const.}=\alpha',$$

što se neposrednim diferenciranjem može i proveriti.

U našem primeru taj integral izgleda

$$y'\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}-y\sqrt{1+y'^2}=\alpha'.$$

Posle transformacije tog integrala dolazimo do jednačine

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}=\alpha,$$

gde je $\alpha=-\alpha'$. Rešenje ove jednačine po y' daje

$$y'=\frac{1}{\alpha}\sqrt{y^2-\alpha^2},$$

odakle, posle razdvajanja promenljivih, dolazimo do kvadrature

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-\alpha^2}}=\frac{dx}{\alpha};$$

integracija ove jednačine dovodi do $\log(y+\sqrt{y^2-\alpha^2})=(x+\beta'):\alpha$ gde je β' nova proizvoljna konstanta. Prethodnu jednačinu transformisaćemo ovako. Prvo, od jednakosti logaritama prelazimo na jednakost brojeva $y+\sqrt{y^2-\alpha^2}=\alpha e^{(x+\beta)/\alpha}$, gde je $\beta=\beta'-\alpha\log\alpha$, a zatim izračunavamo razliku

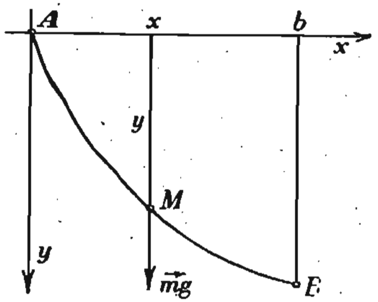
$$y-\sqrt{y^2-\alpha^2}=\alpha e^{-(x+\beta)/\alpha}.$$

Iz ove dve jednačine određujemo y:

$$y=\frac{\alpha}{2}\left(e^{(x+\beta)/\alpha}+e^{-(x+\beta)/\alpha}\right).$$

Izvedena jednačina određuje *lančanicu*.

c. *Brahistohrona*. Neka su date dve tačke, A i B (sl. 23), u raznim horizontalnim ravnima. Postavimo kroz njih vertikalnu ravan i spojimo ih linijom u vertikalnoj ravni. Stavimo sad tešku tačku u gornji položaj A, i neka se ova, M, bez početne brzine, kreće po toj liniji ka donjem položaju B. Za taj prelaz, pod uticajem sile teže, njoj će biti potrebno izvesno vreme. Kriva linija za koju je to vreme najmanje zove se *brahistohrona*. Jasno je da oblik brahistohrone zavisi od polja sile za traženu brahistohronu. Pokazaćemo da je brahistohrona za silu teže cikloida.



Sl. 23 — Brahistohrona

U Mehanici se pokazuje[1]) da se vreme, T, za prelaz teške tačke iz položaja A u položaj B, sa apscisom b, ako se početak koordinatnih osa poklapa sa tačkom A i osa Ax horizontalna, izražava integralom

[1]) Gl., npr., A. Bilimović. Rac. Meh., I. Drugo izdanje. 1950, str. 226.

$$T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^b\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^b f\,dx.$$

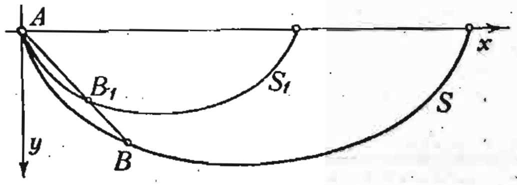
Nepoznata funkcija y treba da zadovoljava Ajlerovu jednačinu

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Pošto u našem slučaju funkcija f ne zavisi neposredno od nezavisno promenljive x, gornja diferencijalna jednačina ima za prvi integral $f-y'\dfrac{\partial f}{\partial y'}=C$, gde je C integraciona konstanta. Potvrditi to diferenciranjem! U našem slučaju taj integral se izražava $\sqrt{\dfrac{1+y'^2}{y}}-\dfrac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=C$, i može se zameniti ovim: $y(1+y'^2)=2R$, sa novom konstantom R, iz uslova $2R\cdot C^2=1$. Taj integral dovodi do kvadrature $dx=$ $=\displaystyle\int\frac{y}{2R-y}\,dy$. Za lakše izračunavanje te kvadrature uvodimo novu promenljivu, φ, pomoću $y=R(1-\cos\varphi)$, što daje $dx=$ $=2R\sin^2\dfrac{\varphi}{2}\,d\varphi=R(1-\cos\varphi)\,d\varphi$ i, posle integracije, $x=$ $R(\varphi-\sin\varphi)+C_1$, nova konstanta C_1 pri $x_0=0$, $\varphi=0$ ima vrednost $C_1=0$, tako da imamo dve parametarske jednačine brahistohrone teške tačke $x=R(\varphi-\sin\varphi)$, $y=R(1-\cos\varphi)$.

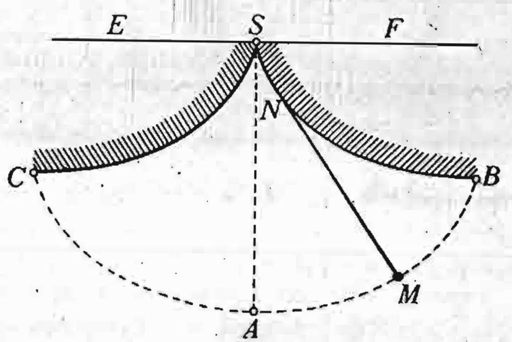
Ove jednačine, kako smo videli, određuju cikloidu (II, str. 46).

Poluprečnik R kruga generatora cikloide određuje se iz uslova da cikloida prolazi i kroz tačku B. Jednačine cikloide pokazuju da su sve cikloide, sa raznim vrednostima R, ne samo slične, već i u sličnom položaju sa centrom sličnosti u tački A. Prema tome nacrtajmo prizvoljnu cikloidu S_1 (sl. 24), sa poluprečnikom R_1 kruga generatora i spojimo tačku B sa A. Prava AB seče cikloidu S_1 u tački B_1. Za određivanje poluprečnika, R, kruga generatora cikloide, koja prolazi kroz tačku B, služi proporcija $R:R_1=AB:AB_1$.



Sl. 24 — Cikloida

U vezi sa dokazom osobine brahistohronosti kretanja cikloidnog klatna učinićemo još jednu primedbu o mogućnosti za praktično izvođenje cikloidnog klatna. Kao što je poznato, cikloida ima osobinu da kraj M konca, određene dužine $SNM=SA=4R$ (sl. 25), koji se namotava i odmotava po



Sl. 25 — Cikloidno klatno

cikloidi crta svojim redom cikloidu. Ako se na tom kraju nalazi teška tačka M, ona će vršiti kretanje cikloidnog klatna.

5.5. Direktna metoda

Kao što smo već videli, rešenje problema Varijacionog računa stoji u vezi sa integracijom diferencijalne, a u opštem slučaju, diferencijalnih jednačina. Postoje, međutim, metode koje omogućuju da se taj problem reši i direktnim putem, bez primene diferencijalnih jednačina. Te se metode zovu *direktne metode Varijacionog računa*. Prvu takvu metodu predložio je matematičar Valter Ric (Walther Ritz). Pokazaćemo u čemu se sastoji Ricova metoda. Suština metode je vrlo jednostavna.

Uzmimo da treba odrediti funkciju y, za koju integral

$$J=\int_a^b f(x, y, y')\,dx \tag{1}$$

ima ekstremalnu vrednost. Funkcija f je data, a i b su konstantne veličine.

Potražimo približnu vrednost y_m funkcije y u obliku

$$y_m=c_1\psi_1+c_2\psi_2+\ \dots\ +c_m\psi_m, \tag{2}$$

gde su ψ_1, ψ_2, ..., ψ_m date funkcije x, a c_1, c_2, ..., c_m konstante, koje treba odrediti. Te funkcije mogu biti ili stepeni x-a ili neki polinomi po x, ili ma kakve druge funkcije, npr. trigonometrijske, i tada rešenje y_m stoji u vezi sa Furijeovim redom.

Uvrstimo funkciju y_m u naš integral (1) i izvršimo integraciju. Dobićemo integral kao funkciju konstanata c_1, c_2, ..., c_m, tj.

$$J=F(c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_m).$$

Izaberimo sad konstante c_1, c_2, ..., c_m tako da integral J dobije ekstremalnu vrednost. Kao što znamo te konstante moraju zadovoljavati uslove

$$\frac{\partial F}{\partial c_1}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial c_2}=0,\quad \dots,\quad \frac{\partial F}{\partial c_m}=0. \tag{3}$$

Funkcija y_m iz (2) sa konstantama određenim iz jednačina (3) daje približno rešenje našeg problema. Kad m teži beskonačnosti, funkcija y_m teži tačnom rešenju tog problema.

Konvergentnost Ricova postupka, pod izvesnim uslovima, prvi je dokazao akademik N. M. Krilov (Н. М. Крылов).

Uzmimo što jednostavniji primer.

Između tačaka $A(0, 0)$ i $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ treba povući krivu koja je ekstremala integrala

$$(4) \qquad J = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} y'^2 - \frac{1}{2} y^2 + xy'\right) dx.$$

Nepoznatu funkciju y predstavimo trigonometrijskim redom od samo tri člana (5) $y = c + c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

Iz uslova da kriva mora da prolazi kroz tačke A i B imamo $y(0) = 0 = c + c_1$, $y(\pi/2) = 0 = c + c_2$, odakle su (6) $c_1 = -c$, $c_2 = -c$.

Prema tome funkcija y mora imati vrednost $y = c(1 - \cos x - \sin x)$ i zavisi samo od jednog neodređenog koeficijenta, c.

Stavimo sad tu vrednost u naš integral (4); posle svođenja članova dobićemo

$$J = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2} c^2(-1 + 2\cos x + 2\sin x - 4\sin x \cos x) + \right.$$
$$\left. + cx(\sin x - \cos x)\right] dx.$$

Posle izračunavanja svih određenih integrala, a među njima su i ova dva integrala

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx = (\sin x - x\cos x)\Big/_0^{\pi/2} = 1,$$

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = (\cos x + x \sin x)\Big/_0^{\pi/2} = -1 + \frac{\pi}{2},$$

možemo vrednost integrala napisati u obliku

$$J = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{2} c^2 + c\right).$$

Za određivanje konstante c treba izjednačiti sa nulom izvod integrala i po toj konstanti,

$$\frac{dJ}{dc} = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\left(c + 1\right) = 0,$$

odakle dobiamo $c = -1$. Na osnovu ovog rezultata i jednačina ekstremale (5) dobia definitivni oblik

$$(7) \qquad y = -1 + \cos x + \sin x.$$

Prema tome dobili smo rešenje našeg problema Varijacionog računa bez integracije diferencijalne jednačine. U ovom slučaju dobieno rešenje nije više samo približno, već je tačno. Zaista, Ajlerova jednačina,

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

u našem slučaju, pošto je

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = y' + x, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = y'' + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -y,$$

izgleda ovako $y'' + y + 1 = 0$.

Opšti integral ove linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima, bez teškoće određujemo

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 1,$$

jer je $y = -1$ njeno partikularno rešenje. Iz uslova da, za $x = 0$, $y = 0$ i za $x = \pi/2$, $y = 0$, određujemo proizvoljne konstante: $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, posle čega se vraćamo na integral u obliku (7), a to i potvrđuje stav da je naše rešenje (7) ne samo približno već i tačno.

Glava šesta

INTEGRALNE JEDNAČINE

6.1. Pojam integralne jednačine. Abelov zadatak

Završavajući elementarna posmatranja o postavljanju i proučavanju funkcionalnih veza između promenljivih veličina pomoću Infinitezimalnog računa nismo mogli propustiti a da ne navedemo, ma i u najkraćoj formi, nekoliko osnovnih pojmova iz teorije tzv. *integralnih jednačina*.

Jednačina u kojoj nepoznata funkcija učestvuje pod znakom integrala zove se *integralna jednačina*. Pri tome, nepoznata funkcija može da se nalazi u jednačini i van integrala.

Kao primer integralne jednačine iz početnog perioda razvitka teorije tih jednačina može se navesti tzv. *Abelov*[1] *zadatak*, koji glasi: Odrediti krivu u vertikalnoj ravni pod uslovom da teška tačka pri kretanju po njoj bez trenja prođe, bez početne brzine, iz jednog horizonta u niži, sa razlikom visine h, za vreme T, koje treba da bude data funkcija visine h.

Ne ulazeći u izvođenje jednačine Abelova zadatka navodimo tu jednačinu u gotovom obliku

$$T(h) = \varphi(h) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{u(y)\,dy}{\sqrt{h-y}}, \tag{1}$$

[1] Čuveni norveški matematičar *Abel* (*Henrich Abel*, 1802—1829), naročito poznat po svojoj Teoriji tzv. *Abelovih integrala* i *Abelovih funkcija*, koje uopštavaju eliptičke funkcije.

gde su: φ — data funkcija, g — ubrzanje sile teže, y — ordinata tačke tražene krive sa jednačinom $x=f(y)$, pri čemu je osa Ox u nižem horizontu; $u(y) = \sqrt{1+[f'(y)]^2}$.

Jednačina (1) je integralna jednačina u odnosu na traženu funkciju $u(y)$, jer se ta funkcija nalazi pod znakom integrala. U specijalnom slučaju, kad vreme T ne zavisi od visine h, tj. kad je $T=\text{const.}=c$, integralna jednačina

$$c = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{u(y)\,dy}{\sqrt{h-y}}$$

izražava uslov *tautohronosti* kretanja tačke po traženoj krivoj. Rešenje ove jednačine ima oblik: $u(y) = c\sqrt{2g}/\pi\sqrt{y}$. Tačnost ovog rešenja se može potvrditi neposrednom zamenom i izračunavanjem odgovarajućeg integrala (izvršiti to!). Na izlaganju metode rešavanja te jednačine zaustavićemo se na drugom mestu. Ovde ćemo samo dovršiti određivanje tražene krive. Iz jednačine $u(y)=\sqrt{1+[f'(y)]^2}$, gde je $f(y)=x$, određujemo izvod $\dfrac{dx}{dy}=\sqrt{\dfrac{2a}{y}-1}$, gde je iskorišćena oznaka $a=c^2g/\pi^2$. Kvadraturu $dx=dy\sqrt{\dfrac{2a}{y}-1}$ uzimamo posle uvođenja nove promenljive t pomoću jednačine $y=a(1+\cos t)$; kvadratura dovodi do rešenja $x=x_0-a(t-\sin t)$. Dobili smo dve parametarske jednačine, po kojima prepoznajemo traženu krivu — to je *cikloida*. Položaj te cikloide bez teškoće može, radi vežbe, odrediti sam čitalac, a u vezi sa tim i uporediti dobiveni rezultat sa onim, navedenim pri proučavanju cikloidnog klatna.

6.2. Klasifikacija integralnih jednačina

Navedimo glavne vrste integralnih jednačina. Iz opšteg slučaja, kad tražena funkcija ulazi u jednačinu, kako pod znakom integrala, tako i van njega, na proizvoljan način, izdvaja se glavni, najvažniji slučaj, kad se tražena funkcija nalazi pod znakom integrala, a i van njega, samo na prvom stepenu, tj. linearno. To je slučaj *linearnih integralnih jednačina*. Jednačine opšteg slučaja tada se zovu *nelinearne integralne jednačine*.

U literaturi linearne integralne jednačine se uvode u raznim oblicima. Nabrojmo neke od njih

$$(1) \qquad \int_a^b K(s, t)\, y(t)\, dt = f(s).$$

To je *Fredholmova* (*Fredholm, E.I.*, 1866–1927) *integralna jednačina prve vrste*. U toj jednačini $y(t)$ je nepoznata funkcija, $f(s)$ — data funkcija promenljive s, od koje zavise leva i desna strana jednačine, t — pomoćna promenljiva integracija i, prema tome, posle izvršene integracije leva strana ne zavisi od te promenljive; najzad $K(s, t)$ — funkcija dve promenljive, *promenljive integracije* t i *promenljive jednačine* s; a i b su konstantne granice. Funkcija $K(s, t)$ koja igra osnovnu ulogu u jednačini, zove se *jezgro integralne jednačine*.

Jednačina

$$(2) \qquad y(s) + \int_a^b K(s, t)\, y(t)\, dt = f(s),$$

sa dodatkom nepoznate funkcije $y(s)$ van integrala, jeste *Fredholmova integralna jednačina druge vrste*.

Najzad, posmatra se i *generalisana integralna jednačina*, jednačina *treće vrste* $g(s)\, y(s) + \int_a^b K(s, t)\, y(t)\, dt = f(s)$, gde je $g(s)$ data funkcija. Za $g(s) = 0$ imamo jednačinu prve vrste, a za $g(s) = 1$ druge vrste.

Ako jednačina ne sadrži slobodan član $f(s)$, ona je *linearna homogena integralna jednačina*.

U Teoriji integralnih jednačina važnu ulogu igra procena učešća u jednačini, s jedne strane, integrala i, s druge strane, funkcija van integrala. Za proučavanje tog učešća, pred integral se stavlja koeficijent, koji se označava sa λ. Iz tog razloga, npr., Fredholmova jednačina druge vrste može se i ovako napisati:

$$y(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\, y(t)\, dt = f(s).$$

Integralne jednačine u kojima je jedna granica integrala promenljiva zovu se *Volterine* (*V. Volterra*, 1860—1940) *integralne jednačine*. Tako su jednačine

$$\int_0^s K(s, t)\, y(t)\, dt = f(s), \qquad y(s) + \lambda \int_0^s K(s, t)\, y(t)\, dt = f(s)$$

Volterine jednačine prve i druge vrste. Integralna jednačina Abelova zadatka je Volterina jednačina prve vrste.

Učinimo nekoliko primedaba o navedenim vrstama integralnih jednačina.

1. Volterine jednačine mogu biti smatrane kao Fredholmove, jer u Volterinim jednačinama gornju granicu možemo proširiti, od s do b, pod dopunskim uslovom da u oblasti od s do b jezgro $K(s, t)$ ima vrednost nule.

2. Pošto se u tehnici najviše upotrebljavaju Fredholmove jednačine druge vrste, zaustavimo se, uglavnom, na proučavanju samo tih jednačina. Pri tome ćemo pokazati kako, npr., Abelova jednačina, jednačina prve vrste, može biti svedena na jednačinu druge vrste.

3. Svaka nehomogena linearna integralna jednačina može biti smatrana kao *jednačina integralne transformacije* date funkcije $f(s)$ u novu funkciju $y(s)$, prema onom pravilu koje utvrđuje jezgro jednačine i, eventualno, date funkcije van integrala.

4. Fredholmova nehomogena jednačina druge vrste lakše se proučava iz dva razloga.

a. Ta jednačina može biti smatrana kao uopštavanje sistema običnih linearnih nehomogenih jednačina i, prema tome, poznate metode rešavanja takvih sistema mogu se preneti, sa dopunama pri prelazu na granične vrednosti, i na rešavanje integralnih jednačina.

b. Na tu jednačinu može biti primenjena metoda uzastopnih aproksimacija, sa polaskom od poznate funkcije u jednačini van integrala.

6.3. Metode rešavanja integralnih jednačina

a. *Fredholmova metoda*. Za što jasnije izlaganje Fredholmove metode rešavanja Fredholmove integralne jednačine druge vrste,

$$(J) \qquad y(s)+\int_a^b K(s,t)\,y(t)\,dt=f(s),$$

navešćemo najprostiji sistem od dve linearne algebarske jednačine

$$(1) \qquad \begin{aligned} a_{11}y_1+a_{12}y_2&=f_1,\\ a_{21}y_1+a_{22}y_2&=f_2. \end{aligned}$$

Dobro poznata metoda za rešavanje tog sistema može poslužiti kao model za rešavanje jednačine (J).

Podelimo interval $[a, b]$ na n jednakih delova $(b-a):$ $:n=\delta$, označimo vrednosti argumenata sa $s_1, s_2, \ldots s_n$, odnosno $t_1, t_2, \ldots t_n$, a vrednosti funkcija za te argumente sa $y_i=y(s_i)$, $f_i=f(s_i)$, $K_{ij}=\delta\cdot K(s_i, t_j)$, pri čemu $i, j=1, 2, \ldots, n$. Ako sad integral zamenimo u približnom posmatranju sa zbirom za svaku vrednost s_i, iz (J) sleduje ova jednačina

$$y_i+\sum_{t=1}^{n} K_{ij}y_j=f_i, \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

U potpunosti imamo ovaj sistem linearnih jednačina

$$(2) \qquad \begin{aligned} (1+K_{11})y_1+ \quad K_{12}y_2+\cdots\cdots+K_{1n}y_n&=f_1,\\ K_{21}y_2+(1+K_{22})y_2+\cdots\cdots+K_{2n}y_n&=f_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ K_{n1}y_1+ \quad K_{n2}y_2+\cdots+(1+K_{nn})y_n&=f_n. \end{aligned}$$

Taj sistem jednačina je analogan sistemu jednačina (1) i, prema tome, na njega se može primeniti Kramerov, ili koji drugi, postupak za rešavanje sistema linearnih jednačina. Prema Kramerovu postupku (III, str. 124) rešenje zavisi od determinante Δ sistema i od determinanata rešenja Δ_j, naime

$$\Delta\, y_i=\Delta_j\,(j=1, 2, \ldots, n).$$

Taj postupak dovodi do rešenja pod uslovom ako je determinanta sistema Δ različita od nule. Zaustavimo se na slučaju kad je taj uslov ispunjen i imamo potpuno određeno rešenje sistema jednačina (2).

Od rešenja sistema jednačina (2) se prelazi na granični slučaj kad $n\to\infty$. Nećemo ulaziti u dokaz da taj prelaz za-

ista dovodi do rešenja jednačine (J). Navešćemo samo, kao rešenje, *Fredholmov obrazac*, koji je u svoje vreme smatran kao veliki matematički pronalazak. Taj obrazac za jednačinu (J) izgleda ovako:

$$y(s)=f(s)-\frac{1}{D_k}\left\{\int_a^b K(s,t)f(t)\,dt+\int_a^b\!\!\int_a^b \begin{vmatrix} K(s,t) & K(s,t_1)\\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1)\end{vmatrix} f(t)\,dt\,dt_1+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2!}\int_a^b\!\int_a^b\!\int_a^b \begin{vmatrix} K(s,t) & K(s,t_1) & K(s,t_2)\\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2)\\ K(t_2,t) & K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2)\end{vmatrix} f(t)\,dt\,dt_1\,dt_2+\cdots\right\},$$

gde je $D_k=1+\int_a^b K(t_1,t_1)\,dt_1+$

$$+\frac{1}{2!}\int_a^b\!\!\int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2)\\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2)\end{vmatrix} dt_1\,dt_2+\cdots.$$

Oznake su očigledne. Red D_k se zove *Fredholmova determinanta*. Indeks pokazuje da ta determinanta odgovara jezgru K i zavisi samo od njega i granica integracije.

Fredholmova metoda, bez obzira na njen veliki teorijski značaj, ustupila je svoju vodeću ulogu novim metodama, naročito *Hilbertovoj* (*D. Hilbert*, 1862—1943) *metodi sopstvenih vrednosti i sopstvenih funkcija*, koje su omogućile dublje proučavanje funkcionalnih veza, koje postavljaju integralne jednačine. Sem toga te nove metode imaju i veći praktični značaj, jer je postupak izračunavanja rezultata po Fredholmovu postupku vrlo komplikovan.

b. *Metoda uzastopnih aproksimacija*. Uzmimo Fredholmovu jednačinu druge vrste u obliku

$$(1) \qquad y(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)\,y(t)\,dt,$$

i potražimo rešenje te jednačine u obliku reda

$$(2) \qquad y(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n y_n(s).$$

Uvrstimo vrednosti (2) u (1) u izjednačimo koeficijente leve i desne strane kod istih stepena parametra λ. Dobićemo niz jednačina napisanih, radi kratkoće, sa izostavljenim granicama integrala:

$$y_0(s)=f(s),$$
$$y_1(s)=\int K(s,t)\,y_0(t)\,dt,$$
$$y_2(s)=\int K(s,t)\,y_1(t)\,dt,$$
$$y_n(s)=\int K(s,t)\,y_{n-1}(t)\,dt,$$

ili, posle uvođenja uzastopnih jezgara pomoću obrazaca,

$$K_1(s,t)=K(s,t),$$
$$K_2(s,t)=\int K(s,t_1)\,K_1(t_1,t)\,dt_1,$$

(3) $$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K_n(s,t)=\int K(s,t_1)\,K_{n-1}(t_1,t)\,dt_1=$$
$$=\iint\cdots\int K(s,t_1)\,K(t_1,t_2)\cdots K(t_{n-1},t)\,dt_1\,dt_2\cdots dt_{n-1},$$

dobićemo ovaj niz jednačina

$$y_1(s)=\int K(s,t)\,f(t)\,dt,$$
$$y_2(s)=\int K_2(s,t)\,f(t)\,dt,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n(s)=\int_n K_n(s,t)\,f(t)\,dt.$$

Ako sad iz uzastopnih jezgara (3) konstruišemo red

(4) $$K(s,t;\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n K_{n+1}(s,t),$$

a dokazuje se da je taj red konvergentan, možemo konačno izvesti obrazac za rešenje integralne jednačine (1):

$$y(s)=f(s)+\lambda\int K(s,t;\lambda)\,f(t)\,dt.$$

Red (4) koji dovodi rešenje integralne jednačine do kvadrature poznate funkcije zove se *rezolventa integralne jednačine.*

Pokažimo na konkretnom primeru kako ova metoda može vrlo brzo dovesti do rešenja Fredholmove integralne jednačine druge vrste.

Uzmimo jednačinu $y(s)=1+\int_0^s (t-s)\,y(t)\,dt$ sa jezgrom

$$K(s,t)=t-s,\ \lambda=1.$$

Prema pokazanom postupku stavimo $y_0(s)=1$. Dalje imamo ovaj niz: $y_1(s)=+\int_0^s (t-s)\cdot 1\cdot dt=-\frac{1}{2}s^2$, $y_2=$ $=+\int_0^s (t-s)\cdot\left(-\frac{1}{2}t^2\right)dt=\frac{1}{4!}s^4$, $y_3=\int_0^s (t-s)\left(\frac{1}{4!}t^4\right)dt=$ $=-\frac{1}{6!}s^6$. Pošto se vidi zakon formiranja članova tog reda, imamo rešenje: $y(s)=1-\frac{1}{2!}s^2+\frac{1}{4!}s^4-\frac{1}{6!}s^6+\cdots$, tj. $y(s)=$ $=\cos s$. Čitalac može proveriti to rešenje kad stavi pod integralom $y(t)=\cos t$ i izvrši kvadraturu.

6.4. Rešavanje Volterine jednačine prve vrste

Pokažimo kako izvedena metoda uzastopnih aproksimacija može poslužiti za rešavanje Volterine jednačine prve vrste, tj. jednačine bez nepoznate funkcije van integrala.

Uzmimo Volterinu jednačinu u obliku (1) $f(s)=$ $=\lambda\int_0^s K(s,t)\,y(t)\,dt$, gde je, kao i ranije, $y(t)$ nepoznata funkcija. Diferencirajmo levu i desnu stranu te jednačine po s: (2) $f'(s)=\lambda\int_0^s \frac{\partial K}{\partial s}\,y(t)\,dt+\lambda K(s,s)\,y(s)$. Vidimo da smo dobili za određivanje iste funkcije $y(t)$ integralnu jednačinu druge vrste, jer se pojavila nepoznata funkcija i van integrala. Ako podelimo tu jednačinu sa $\lambda K(s,s)$ i uvedemo oznake $f^*(s)=$ $=f'(s):(\lambda K(s,s))$, $K^*(s,t)=-\frac{\partial K}{\partial s}:(\lambda K(s,s))$, možemo je ovako napisati (3) $y(s)=f^*(s)+\int_0^s K^*(s,t)\,y(t)\,dt$. Pošto je ova jednačina druge vrste, možemo na nju primeniti metodu uzastopnih aproksimacija sa prvim približnim rešenjem $y_0(s)=f^*(s)$.

Ali prethodna transformacija se ne može izvesti kad je $K(s,s)\equiv 0$ ili kad $K(s,t)$ teži beskonačnosti pod uslovom $t\to\infty$. U tom slučaju treba se vratiti na polaznu jednačinu (1) i upotrebiti drugu metodu. Pokažimo tu metodu na slučaju Abelove jednačine iz 6.1, pri čemu ćemo, da bi izlaganje bilo što jednostavnije, proučiti samo uslov tautohronosti, izražen jednačinom (4) $C=\int_0^h \frac{u(t)\,dt}{\sqrt{h-t}}$, $C=c\sqrt{2g}$ sa konstantnim vremenom c. Kako u ovoj jednačini jezgro $(h-t)^{-1/2}$ pri $t\to\infty$ teži beskonačnosti, prethodna *metoda diferenciranja* ne može se upotrebiti u ovom slučaju. Primenimo *metodu pomoćne integracije.*

Pomnožimo jednačinu (4) sa $(y-h)^{-1/2}dh$ i integrišimo po h u granicama od 0 do y; imamo jednačinu

$$(5)\quad C\int_0^y \frac{dh}{\sqrt{y-h}}=\int_0^y \frac{dh}{\sqrt{y-h}}\int_0^h \frac{u(t)\,dt}{\sqrt{h-t}}=\int_0^y dh\int_0^h \frac{u(t)\,dt}{\sqrt{(y-h)(h-t)}}.$$

Iskoristimo sad tzv. *Dirihleov obrazac* za promenu reda integracije sa oznakama nezavisnim od našeg zadatka, naime

$$\int_\alpha^\beta d\eta\int_\alpha^\eta \varphi(\xi,\eta)\,d\xi=\int_\alpha^\beta d\xi\int_\xi^\beta \varphi(\xi,\eta)\,d\eta.$$

Ova jednačina izražava matematičku činjenicu da zapremina tela sa trouglom ABC kao osnovom, gde su: $A(\alpha,\alpha)$, $B(\beta,\beta)$, $C(\alpha,\beta)$, sa bočnom pravolinijskom proizvodiljom, paralelnom $O\zeta$ osi, i gornjom površinom $\zeta=\varphi(\xi,\eta)$, ima istu vrednost pri izračunavanju jedanput pomoću ploča debljine

$d\xi$ sa ravnima paralelnim ravni $\eta=$ const., a drugi put pomoću ploča debljine $d\eta$ sa ravnima paralelnim ravni $\xi=$ const. (izvesti to pomoću slike!).

Posle primene Dirihleova obrasca na desni integral jednačine (5) dolazimo do jednačine

$$C\int_0^y \frac{dh}{\sqrt{y-h}}=\int_0^y dt\int_t^y \frac{u(t)}{\sqrt{(y-h)(h-t)}}\,dh=$$
$$=\int_0^y u(t)\,dt\int_t^y \frac{dh}{\sqrt{(y-h)\,(h-t)}}.$$

Ako iskoristimo vrednosti ova dva integrala (izračunati!)

$$\int_0^y \frac{dh}{\sqrt{y-h}}=2\sqrt{y},\qquad \int_t^y \frac{dh}{\sqrt{(y-h)\,(h-t)}}=\pi,$$

prethodna jednačina daje $2C\sqrt{y}=\pi\int_0^y u(t)\,dt$. Diferenciranje te jednačine po y dovodi, sa $C=c\sqrt{2g}$, do jednačine $u(y)=$ $=c\sqrt{2g}/\pi\sqrt{y}$, koja i predstavlja ono rešenje uslova tautohronosti, koji je u 6.1 doveo do cikloide kao krive sa osobinom tautohronosti u polju sile teže.

Ovim završavamo ono što smo hteli da kažemo o integralnim jednačinama u okviru ove knjige. U opravdanje toga što smo već u „Elemente" uneli prve ideje Teorije integralnih jednačina služi današnji značaj ove oblasti Infinitezimalnog računa. Matematički aparat te teorije, vrlo važan kao samostalna matematička disciplina, u isto vreme je široko ušao u Matematičku fiziku, a postupno ulazi i u sve savremene forme obrade najkomplikovanijih prirodnih pojava, zaključno sa pojavama Fiziko-hemije atoma.

INDEX RERUM

(Brojevi označavaju strane)

ANTON BILIMOVIĆ
ELEMENTI VIŠE MATEMATIKE IV
DIFERENCIJALNE JEDNAČINE SA DOPUNAMA

Tehnički urednik
JUGOSLAV BOGDANOVIĆ

Izdanje: Novinsko-izdavačko preduzeće
„Tehnička knjiga", Beograd, 7. juli 26/I

Štampa: Beogradski grafički zavod,
Beograd, Bulevar vojvode Mišića 17

Štampanje završeno juna 1962.