ELEMENTI VIŠE MATEMATIKE III

ANTON BILIMOVIĆ

INTEGRALNI RAČUN SA PRIMENAMA

KALKULATIVNI PROCESI

NOVINSKO-IZDAVAČKO PREDUZEĆE
TEHNIČKA KNJIGA
BEOGRAD 1962

Nacrt za korice:
JOVAN VIDIĆ

Štampa: Beogradski grafički zavod, Beograd, Bulevar vojvode Mišića 17

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Prvi deo ove treće knjige „Elemenata Više matematike“ posvećen je elementarnim osnovama Integralnog računa. Ove su izložene i objašnjene na konkretnim primerima iz raznih oblasti koje primenjuju taj račun. Dugogodišnja praksa kao predavača Elemenata Više matematike na Šumarskom fakultetu, u Zemunu, pokazala mi je da predavanje Integralnog računa, kad se počne sa teorijom neodređenog integrala, kao pojma koji stoji u bliskoj, prirodnoj vezi sa već usvojenim pojmovima izvoda i diferencijala, ne zadaje nikakve teškoće. Lako se savlađuje i formalni proces integracije u jednostavnim, elementarnim slučajevima. A pošto se ovo savlada, uvođenje pojma određenog integrala, i kao zbira beskrajno velikog broja beskrajno malih elemenata, stvara u slušaonici ogromno psihološko zadovoljstvo, jer slušaoci osećaju da sad raspolažu moćnim matematičkim aparatom za rešavanje vrlo važnih konkretnih problema. Čak im to rešavanje izgleda jednostavnije od onog kojim su morali da se muče u srednjoj školi, pri izračunavanju površina i zapremina, i u mnogo jednostavnijim slučajevima.

U drugom delu knjige, pod naslovom „Kalkulativni procesi“ pokazani su, polazeći od Numeričkih računa, postupci za rešavanje problema, koji se, prema savremenim programima, mogu smatrati kao prvi koraci praktičnog matematičkog elementarnog enciklopedijskog znanja.

U ovoj knjizi je razrađen i proširen materijal izložen u glavama — „Integrali“ i „Kalkulativni procesi“ — moje knjige „Više matematike“, iz 1948. godine, ali su ovde unesene i izvesne naročite dopune. Malo više je razrađena teorija integracije racionalnih, iracionalnih i transcendentnih funkcija. Date su primene Integralnog računa u Analizi.

Pokazane su primene tog računa u Geometriji masa, u vezi sa problemima Mehanike. Najzad, u četvrtoj glavi navedeni su i klasični metodi za algebarsko rešavanje jednačina trećeg i četvrtog stepena, što sad ne ulazi u program srednje škole.

Pri izradi rukopisa i ove knjige veliku pomoć mi je ukazao prof. V. V. Mišković, kome i ovim putem izražavam srdačnu zahvalnost.

Glava prva

NEODREĐENI INTEGRALI

1.0. Uvod

Savremena stroga teorija pokazuje da uvođenje pojma integrala može biti izvedeno na dva načina, i to: u oblicima određenog i neodređenog integrala. Ovi načini se razlikuju samo redom izlaganja, ali vode do istih rezultata. Uvođenje prvo određenog integrala, kao granične vrednosti zbira beskrajno velikog broja beskrajno malih elemenata ima tu prednost što olakšava uopštavanja tog pojma u slučajevima kad su različitog karaktera bilo sami elementi, bilo oblasti zbirova tih elemenata. Ali taj način uvođenja pojma integrala, naročito na prvim koracima pri izučavanju Više matematike, mnogo je teži od onog drugog, kada se, prvo, uvodi pojam tzv. neodređenog integrala. Kako nam je stalo da izlaganja naših Elemenata budu što jednostavnija, poslužićemo se metodom uvođenja pojma integrala pomoću pojma neodređenog integrala.

1.1. Pojam neodređenog integrala

Kao što je iz Diferencijalnog računa poznato, operacija diferenciranja date funkcije, koja se može diferencirati, sastoji se u određivanju izvoda, odnosno diferencijala te funkcije. Ako sa $F(x)$ označimo datu funkciju, a sa $f(x)$ njen izvod imamo

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x) \quad \text{odnosno} \quad dF(x)=f(x)\,dx.$$

Prema tome se zadatak diferenciranja može i ovako izraziti

$$\text{Funkcije:}\quad \underset{\text{data}}{\underset{\downarrow}{dF(x)}} = \underset{\text{tražena}}{\underset{\downarrow}{f(x)\,dx}}$$

U Matematici svakoj direktnoj operaciji odgovara i obrnuta, inverzna operacija. Za operaciju inverznu diferenciranju treba u jednačini

$$\text{da budu funkcije:}\quad \underset{\text{tražena}}{\underset{\downarrow}{dF(x)}} = \underset{\text{data}}{\underset{\downarrow}{f(x)\,dx}}$$

Određivanje *prvobitne funkcije* $F(x)$, čiji je izvod data funkcija $f(x)$, predstavlja za nas novu matematičku operaciju, koja se zove *integracija*, a izvođenje te operacije — *integrisanje*.

Napr., neka je data funkcija $f(x)=x^2$. Treba odrediti funkciju $F(x)$ sa izvodom x^2. Jasno je da u traženu funkciju treba da uđe x^3, jer ćemo od diferenciranja trećeg stepena dobiti drugi stepen. Ali diferenciranjem x^3 dobićemo još i koeficijent 3. Tog koeficijenta, međutim, nema u datoj funkciji, x^2; prema tome, funkciju x^3 treba podeliti sa 3. Znači za $f(x)=x^2$, imamo $F(x)=\frac{1}{3}x^3$. Ovaj odgovor je tačan, jer je

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\right)=x^2.$$

No isti rezultat daje i funkcija $\frac{1}{3}x^3+1$, jer je $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3+1\right)=x^2$, a isto tako i $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3+7\right)=x^2$; ili, uopšte, $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3+C\right)=x^2$, gde je sa C označen potpuno proizvoljan, ali stalan broj.

Tako vidimo da integracijom funkcije x^2 ne dobivamo potpuno određen rezultat, već funkciju sa dodatkom u obliku proizvoljne konstante. Stoga se rezultat integracije zove *neodređeni integral*. Ovaj integral se može ovako definisati:

Zbir funkcije i proizvoljne konstante, čiji je izvod data funkcija, zove se neodređeni integral te funkcije.

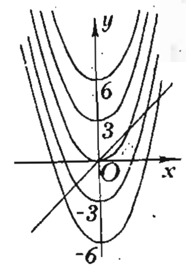
Svaka operacija u Matematici, koja se često ponavlja — a integracija spada u takvu vrstu operacija — ima i svoju naročitu oznaku. Iz razloga koji ćemo docnije dati, za neodređeni integral uvedena je oznaka

$$\int f(x)\,dx.$$

Ona se sastoji iz *znaka integrala*, koji je postao iz razvučenog slova S (prvo slovo reči Summa), *podintegralne funkcije* ili *integranda*, to je dati izvod $f(x)$ tražene funkcije i diferencijala dx koji pokazuje promenljivu po kojoj se vrši integracija. Funkcija $F(x)$ za koju je $f(x)$ izvod takođe se zove *prvobitna* ili *primitivna funkcija* za funkciju $f(x)$.

Sa ovim oznakama rezultat prethodnog primera može se napisati $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3+C.$

Vrednost neodređenog integrala za određenu vrednost proizvoljne konstante zove se *partikularna vrednost neodređenog integrala*. U Dekartovu koordinatnom sistemu svakoj partikularnoj vrednosti integrala odgovara određena kriva, koja se zove *integralna kriva* datog neodređenog integrala. Sve integralne krive, za dati integral, sačinjavaju familiju krivih linija, od kojih se svaka može dobiti iz bilo koje paralelnim pomeranjem. Tako, napr., u slučaju integrala $\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+C$, za partikularnu vrednost $C=0$ kao integralna kriva služi parabola $y=\frac{1}{2}x^2$; i svaki član familije krivih $y=\frac{1}{2}x^2+C$ može se dobiti paralelnim pomeranjem parabole $y=\frac{1}{2}x^2$ u pravcu ose Oy (sl. 1). Na slici je prikazana podintegralna funkcija pravom $y=x$ i familija integralnih krivih parabolama $y=\frac{1}{2}x^2+C$.



Sl. 1 — Familija paraboličkih integralnih krivih

Iz definicije neodređenog integrala neposredno sleduju ove njegove osobine:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x),$$

tj. izvod neodređenog integrala po promenljivoj integracije jednak je podintegralnoj funkciji; i $\int dF(x)=F(x)+C$, što znači da je integral diferencijala neke funkcije jednak zbiru te funkcije i proizvoljne konstante. Drugim rečima, integracija funkcije $f(x)$ završena je, ako posle transformacije integrala $\int f(x)\,dx$ njegova podintegralna funkcija ima vrednost jedinicu, tj. $\int f(x)\,dx=\int 1\cdot dF(x)=\int dF(x)=F(x)+C$. Tako, napr., pošto je $e^x dx=de^x$, integral $\int e^x dx$ ima vrednost $\int e^x dx=\int de^x=e^x+C$.

Pošto je svaka obrnuta operacija teža od direktne, i operacija integracije je isto tako — i to mnogo — teža od direktne operacije, od operacije diferenciranja. Teoriju integracije ćemo razviti sistematski, polazeći od pregleda elementarnih integrala.

1.2. Tablica elementarnih integrala

Svaki obrazac za diferenciranje može se obrnuti i tada se dobiva obrazac za integraciju. Tako iz obrasca $(x^5)'=5x^4$, odn. $\frac{1}{5}(x^5)'=x^4$, sleduje obrazac $\int x^4 dx=\frac{1}{5}x^5+C$; a iz obrasca $(\sin x)'=\cos x$ imamo obrazac $\int\cos x\,dx=\sin x+C$, gde je C, i u jednom i u drugom slučaju, kao i uvek, proizvoljna konstanta integracije.

Neposrednim iskorišćavanjem obrazaca Diferencijalnog računa, sa neznatnim dopunama, možemo napisati ovu *tablicu za elementarne integrale:*

(I) $\quad \frac{d}{dx}F(x)=f(x);\quad \int f(x)\,dx=F(x)+C.$

(II) $\quad \int Af(x)\,dx=A\int f(x)\,dx,\ A=\text{const.}$

(III) $\quad \int(u\pm v)\,dx=\int u\,dx\pm\int v\,dx.$

(IV) $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\neq-1,\quad$ (IV$^{\text{bis}}$) $\int\frac{dx}{x}=\log x+C.$

(V) $\int e^x dx=e^x+C,\quad$ (V$^{\text{bis}}$) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C.$

(VI) $\int\sin x\,dx=-\cos x+C,\quad$ (VI$^{\text{bis}}$) $\int\cos x\,dx=\sin x+C.$

(VII) $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C,\quad$ (VII$^{\text{bis}}$) $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{cotg}x+C.$

(VIII) $\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg}x+C=-\operatorname{arc\,cotg}x+C_1.$

(IX) $\int\frac{dx}{1-x^2}=\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$

(X) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C=-\arccos x+C_1.$

(XI) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C.$

Primetimo da za obrasce (IX) i (XI) nema odgovarajućih obrazaca u tablici za diferenciranje. Oni su uneti u tablicu integracije, jer su vezani za obrazac (VIII), odnosno (X). Svaki od njih možemo proveriti neposrednim diferenciranjem.

Za (IX) obrazac imamo

$$\left(\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C\right)'=\left(\frac{1}{2}[\log(1+x)-\log(1-x)]+C\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right]=\frac{1}{1-x^2}.$$

Obrazac (XI) proveravamo ovako:

$$[\log(x+\sqrt{1+x^2})]'=[x+\sqrt{1+x^2}]^{-1}\cdot[1+x/\sqrt{1+x^2}]=$$

$$=[x+\sqrt{1+x^2}]^{-1}\cdot[x+\sqrt{1+x^2}]\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Obrazac (XI) ostaje na snazi i onda kada pod korenom stoji mesto jedinice ma koji pozitivan ili negativan broj, čak i nula. Zaista je

$$[\log(x+\sqrt{a+x^2})]' = [x+\sqrt{a+x^2}]^{-1}\cdot[x+\sqrt{a+x^2}]\cdot\frac{1}{\sqrt{a+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a+x^2}}.$$

Specijalno za $a=0$ imamo

$$\left[\int\frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}\right]_{a=0} = \int\frac{dx}{x} = \log x + C,$$

pri čemu taj odgovor sleduje i iz rezultata za opšti slučaj, jer je

$$[\log(x+\sqrt{a+x^2})+C]_{a=0} = \log 2x + C = \log x + \log 2 + C = \log x + C_1.$$

Prema tome tablicu za elementarne integrale možemo dopuniti obrascem

$$(\mathrm{XI}^{\mathrm{bis}})\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \log(x+\sqrt{a+x^2}) + C.$$

1.3. Elementarne metode integracije. Metoda zamene i metoda delimične integracije. Metoda redukcije

Ima nekoliko elementarnih metoda integracije, koje se svode na dovođenje datog integrala na jedan od tabličnih integrala. Objasnićemo te metode na jednostavnim primerima.

A. Metoda zamene

1. Uzmimo integral $\int\frac{dx}{x-2}$. Njega u tablici nema, ali je naveden sličan integral ($\mathrm{IV}^{\mathrm{bis}}$) $\int\frac{dx}{x}=\log x + C$. Za dovođenje datog integrala na ovaj oblik, stavimo $x-2=z$, gde je z

nova promenljiva. Ako diferenciramo, dobivamo i vezu između diferencijala stare i nove promenljive, naime $dx=dz$. Naš integral dobiva, prema tome, oblik $\int\frac{dx}{x-2}=\int\frac{dz}{z}$, koji imamo u tablici elementarnih integrala sa vrednošću $\int\frac{dz}{z}=\log z + C$. Ako se vratimo na polaznu promenljivu, dobivamo konačno $\int\frac{dx}{x-2}=\log(x-2)+C$.

Za izračunavanje ovog integrala upotrebili smo metodu koja se zove *metoda zamene.*

Uzmimo još nekoliko primera.

2. $\int(5x-3)^4\,dx$. Stavimo $5x-3=z$ i tada je $5\,dx=dz$, odakle je $dx=\frac{1}{5}dz$. Naš integral, posle transformacije, daje

$$\int(5x-3)^4\,dx=\int z^4\cdot\frac{1}{5}dz=\frac{1}{5}\int z^4\,dz=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}z^5+C=\frac{1}{25}z^5+C=\frac{1}{25}(5x-3)^5+C.$$

3. $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$. Stavimo $\sin x = z$, tada je $\cos x\cdot dx = dz$, te, prema tome, izvodimo $\int e^{\sin x}\cos x\,dx=\int e^z dz = e^z + C = e^{\sin x}+C$.

4. $\int\frac{dx}{5+x^2}$. Pošto ovaj integral podseća na integral $\int\frac{dx}{1+x^2}$, zamenu treba takvu izvršiti da se u imeniocu pojavi 1 mesto 5. Zato stavimo $x^2=5z^2$, ili $x=z\sqrt{5}$, odakle se, posle diferenciranja, dobiva $dx=\sqrt{5}\cdot dz$. Ako zamenimo nalazimo

$$\int\frac{dx}{5+x^2}=\int\frac{\sqrt{5}\cdot dz}{5(1+z^2)}=\frac{\sqrt{5}}{5}\int\frac{dz}{1+z^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}\,\mathrm{arc\,tg}\,z+C=\frac{\sqrt{5}}{5}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

Sad možemo postaviti opšti obrazac za zamenu promenljive kod neodređenog integrala. Ako imamo integral $\int f(x)\,dx$ i stavimo $x=\varphi(z)$, odakle je $dx=\varphi'(z)\,dz$ i $z=\psi(x)$, onda se integral transformiše

$$\text{(XII)}\quad \int f(x)\,dx=\int f[\varphi(z)]\varphi'(z)dz=F(z)+C=F[\psi(x)]+C.$$

Teškoća metode zamene promenljive je u tome što se ne može dati opšte pravilo za nalaženje celishodne veze između stare i nove promenljive. Ponekad, u konkretnim slučajevima, oblik podintegralne funkcije sam neposredno odaje kako se može uprostiti data funkcija, pa čak i dati integral svesti na oblik iz tablice elementarnih integrala, ili na ranije rešen integral.

Navešćemo još nekoliko primera.

5. Izračunati integral $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$. Da bismo ovaj integral sveli na oblik iz tablice elementarnih integrala, moramo, pre svega, ukloniti član sa prvim stepenom x-a u imeniocu, izdvojiti potpuni kvadrat, tj. transformisati ga ovako $x^2+2x+5=x^2+2x+1+4=(x+1)^2+4$. Zatim stavimo $x+1=2z$, odakle je $dx=2\,dz$ i $z=\frac{1}{2}(x+1)$. Tako će naš integral dati

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}=\int \frac{2\,dz}{4(z^2+1)}=\frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+z^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} z+C=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{2}+C.$$

6. Izračunati integral $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-1}}$. Prvo ćemo ga transformisati tako da izdvojimo kvadrat pod korenom

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-1}}=\int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+\frac{9}{4}-1}}=$$

$$=\int \frac{2\,dx}{\sqrt{5-(2x-3)^2}}.$$

Zatim možemo staviti $2x-3=\sqrt{5}\,z$, odakle imamo $2\,dx=\sqrt{5}\,dz$ i $z=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x-3)$. Integral tada izgleda ovako:

$$\int \frac{2\,dx}{\sqrt{5-(2x-3)^2}}=\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\arcsin z+C=\arcsin\frac{2x-3}{\sqrt{5}}+C.$$

B. Metoda delimične integracije

Metoda delimične integracije počiva na obrascu Diferencijalnog računa za diferencijal proizvoda dve funkcije $u(x)$ i $v(x)$, tj.

$$d(uv)=u\,dv+v\,du.$$

Iz ovog obrasca izvodimo obrazac za delimičnu integraciju

$$\text{(XIII)}\qquad \boxed{\int u\,dv=uv-\int v\,du.}$$

Pokazaćemo njegovu primenu na jednom primeru.

7. Izračunati integral $\int xe^x dx$. Uzmimo prvo deo podintegralne funkcije i stavimo $e^x dx=dv$, odakle je $v=\int e^x dx=e^x$.

Ovde nismo uneli proizvoljnu konstantu, jer je dovoljno da je stavimo u krajnjem rezultatu.

Posle ove prethodne, delimične integracije, dati integral postaje $\int xe^x dx=\int x\,de^x$. Ako na ovaj primenimo obrazac (XIII), imaćemo $\int x\,de^x=xe^x-\int e^x dx$, odakle konačno izvodimo $\int xe^x dx=$ $=xe^x-e^x+C=e^x(x-1)+C$.

Pošto smo za izračunavanje ovog integrala prethodno izvršili integraciju za određivanje v, gde u podintegralnoj funkciji učestvuje samo jedan deo podintegralne funkcije datog integrala, ova metoda se zove *metoda delimične* ili *parcijalne integracije*. Obrazac (XIII) zove se *obrazac za delimičnu integraciju*.

Rešimo još nekoliko primera metodom delimične integracije.

8. Izračunati integral $J=\int x^2 \sin x\,dx$. Uzećemo, prvo, integral dela podintegralne funkcije $v=\int \sin x\,dx=-\cos x$; zatim ćemo ovako računati $J=\int x^2 \sin x\,dx=\int x^2\cdot \sin x\,dx=$ $=\int u\,dv=\int x^2 d(-\cos x)=uv-\int v\,du=-x^2\cos x+\int \cos x\,dx^2=$ $=-x^2\cos x+2\int x\cos x\,dx$; na poslednji integral ponovo ćemo primeniti metodu delimične integracije; i tako dobiti:

$$J=-x^2\cos x+2\int x\,d\sin x=-x^2\cos x+2\,[x\sin x-\int \sin x\,dx]=$$

$$=-x^2\cos x+2\,x\sin x+2\cos x+C.$$

U vezi sa izračunavanjem tog integrala treba ovo da primetimo. Prvo, podintegralna funkcija polaznog integrala $x^2\sin x$ sadrži dva dela: x^2 i $\sin x$. Na pitanje: koji deo treba uzeti za prvu delimičnu integraciju?, odgovor je, u ovom slučaju, jasan: za u treba uzeti x^2, a za dv — $\sin x\,dx$, jer se 1. v lako određuje i 2. kad x^2 ide pod znak diferencijala, stepen tog člana se snižava. Zamislimo da smo stavili $\sin x=u$, $dv=x^2dx$. Delimična integracija bi nas, u tom slučaju, dovela do integrala $\int u\,dv=uv-\int v\,du=uv-\frac{1}{3}\int x^3\cos x\,dx$ koji je postao komplikovaniji, jer se u podintegralnoj funkciji kod trigonometrijske funkcije stepen x-a povećao. Druga primedba se odnosi na izračunavanje integrala tipa sa koeficijentom kod trigonometrijske funkcije $\sin x$ ili $\cos x$ u obliku stepena x^n, gde je n prirodni broj. Primena navedene metode omogućuje uvek da se izračuna takav integral.

9. Izračunati integral $J=\int \sin^2 x\,dx$. Računaćemo ovako: $J=\int \sin^2 x\,dx=-\int \sin x\,d\cos x=-\sin x\cos x+\int \cos x\,d\sin x=$ $=-\sin x\cos x+\int \cos^2 x\,dx=-\sin x\cos x+\int(1-\sin^2 x)\,dx=$ $=-\sin x\cos x+x-J,$

gde je J polazni integral. Prema tome smo za određivanje J dobili ovu jednačinu $2J=x-\sin x\cos x$; odakle konačno dobivamo $J=\int \sin^2 dx=\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)+C.$

10. Ako zajedno sa integralom $J=\int \sin^2 x\,dx$ potražimo integral $J^*=\int \cos^2 x\,dx$, iz jednačine $J+J^*=\int dx=x$ imaćemo $J^*=x-J$ te će, prema tome, biti $J^*=\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)+C.$

C. Metoda redukcije

Sa metodom delimične integracije stoji u vezi metoda redukcije. Objasnićemo je na primeru.

11. Izračunati integral $J_n=\int \sin^n x\,dx$. Primenimo delimičnu integraciju; množilac $\sin x$ povežimo sa dx.

$$J_n=-\int \sin^{n-1}x\,d\cos x=-\sin^{n-1}x\cos x+\int \cos x\,d\sin^{n-1}x=$$
$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int \sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx=$$
$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\,[\int \sin^{n-2}x\,dx-\int \sin^n x\,dx]=$$
$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\,J_{n-2}-(n-1)\,J_n.$$

Ako član sa J_n prebacimo sa desne na levu stranu, dobićemo obrazac

$$n\,J_n=(n-1)\,J_{n-2}-\sin^{n-1}x\cos x,$$

koji se zove *redukcioni obrazac*. On omogućuje da se izračuna integral sa podintegralnom funkcijom sinusom na n-tom stepenu pomoću integrala sa sinusom na stepenu $n-2$. Uzastopnom primenom ovog obrasca može se lako izračunati svaki takav integral, ako je n prirodni broj. Zaista, ako je n paran broj, posle niza redukcija dolazi se do integrala $J_0=\int dx=x+C$. Ako je n neparan broj, integral J_n redukuje se na integral $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$, koji je dat u tablici elementarnih integrala.

Slično redukcionom obrascu za integral J_n sa sinusom može se izvesti redukcioni obrazac i za integral sa kosinusom $J_n^*=\int \cos^n x\,dx$. Taj obrazac izgleda ovako:

$$n\,J_n^*=(n-1)\,J_{n-2}^*+\cos^{n-1}x\sin x.$$

Vežbanja:

Izračunati integrale funkcija:

1. $5x-3$. 2. x^2-4x-1. 3. $x^{-1}+2x^{-2}+x^{-5}$. 4. $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$. 5. $\sqrt{x-1}$. 6. e^{x+1}. 7. $\sin(x+1)$. 8. a^{3x}. 9. $a\sin t+b\cos t$. 10. $pz^{1/2}+qz^{3/2}$. 11. ax^2+bx+c. 12. $(a+bx)^{1/2}$. 13. $\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x^2}$. 14. $x\sqrt{x^2-1}$. 15. $\sin^2 x$. 16. $\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$. 17. $\sin 2x$. 18. $\cos 4x$. 19. $\sinh x$. 20. $\cosh x$.

21. $\frac{\sin x}{a+b\cos x}$. 22. 11^{3x}. 23. $xe^{-\frac{1}{2}x^2}$. 24. $\sin^3(2x-1)$. 25. $e^x(1+\sin e^x)$. 26. xe^{3x}. 27. $x^2 e^{x/3}$. 28. $e^x \sin x$. 29. $e^{-x}\cos x$. 30. $e^{2x}\sin x$.
31. Odrediti partikularne integrale J_1 i J_2 funkcije $10x+1$, prvi pod uslovom da za $x=1$ ima vrednost 10 i drugi da za $x=2$ ima vrednost 25.

1.4. Integracija racionalnih funkcija

U racionalne funkcije spadaju, kao što znamo, pre svega polinomi. Integracija polinoma se vrši bez teškoće. Zaista, možemo neposredno napisati

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n a^n)\, dx =$$

$$= a_{-1} + a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \cdots + \frac{1}{n} a_{n-1} x^n + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1},$$

gde smo sa a_{-1} označili proizvoljnu konstantu integracije.

Po definiciji, svaka racionalna funkcija može biti predstavljena kao količnik dva polinoma: $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gde su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi. Ako je stepen polinoma $P(x)$ veći ili jednak stepenu polinoma $Q(x)$, možemo izvršiti deljenje, izdvojiti zasebni polinom $R(x)$ i napisati datu racionalnu funkciju u obliku zbira $R(x) + \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, gde je $P_m(x)$ polinom m-og stepena i $Q_n(x)$ — n-og, pri čemu je $m<n$. Pošto se integracija polinoma $R(x)$ vrši na već pokazani način, ostaje da se prouči integracija samo količnika $P_m(x) : Q_n(x)$ sa $m<n$.

Integracija ovog količnika zasniva se na ovim stavovima Algebre:

a. Svaki polinom n-og stepena ima n nula; drugim rečima, svaka jednačina $Q_n(x)=0$ ima n korena. Koreni mogu biti: 1. realni, i to bilo prosti $a, b, \ldots$, bilo i višestruki $a_1 = a_2 = \ldots = a_k$. 2. imaginarni, i opet bilo prosti $\alpha + \beta i$, bilo i višestruki $\alpha_1 + \beta_1 i = \alpha_2 + \beta_2 i = \ldots$; pri čemu, ako su koeficijenti jednačine $Q_n(x)=0$ stvarni brojevi, svakom imaginarnom korenu $\alpha + \beta i$ jednačine $Q_n(x)=0$ odgovara konjugovan imaginaran koren $\alpha - \beta i$.

b. Svaki polinom $Q_n(x)$, n-og stepena može biti predstavljen kao proizvod svih razlika $x - x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, gde su x_i koreni jednačine $Q_n(x) = 0$ i koeficijenta kod x^n, tj. $Q_n(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$. Prema prirodi korena taj proizvod se izražava, u opštem slučaju, ovako

$$Q_n(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_p)(x-x_k)^k(x-x_l)^l \ldots$$
$$\ldots[(x-\alpha)^2+\beta^2][(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2]^s[(x-\alpha_t)^2+\beta_t^2]^t,$$

pri čemu su $x_1, x_2, \ldots, x_p$ realni prosti koreni; x_k, x_l — realni koreni višestrukosti k i l; $\alpha + \beta i$ i $\alpha - \beta i$ — imaginarni konjugovani prosti koreni i $\alpha_s + \beta_s i$, $\alpha_s - \beta_s i$ i $\alpha_t + \beta_t i$, $\alpha_t - \beta_t i$ — imaginarni konjugovani koreni višestrukosti s i t. Ako se samo na napisanim množiocima zadržimo, n treba da ima vrednost

$$n = p + k + l + 2(1 + s + t).$$

c. Količnik $P_m : Q_n$ u našem slučaju se rastavlja na ove elementarne, proste i višestruke, razlomke:

$$\frac{P_m}{Q_n} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_p}{x-x_p} + \frac{B_k}{(x-x_k)^k} + \frac{B_{k-1}}{(x-x_k)^{k-1}} +$$
$$+ \cdots + \frac{B_1}{x-x_k} + \frac{B_l^*}{(x-x_l)^l} + \frac{B_{l-1}^*}{(x-x_l)^{l-1}} + \cdots + \frac{B_1^*}{x-x_l} +$$
$$+ \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{M_s x + N_s}{[(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2]^s} + \frac{M_{s-1}x + N_{s-1}}{[(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2]^{s-1}} + \cdots +$$
$$+ \frac{M_1 x + N_1}{(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2} + \frac{G_t x + H_t}{[(x-\alpha_t)^2+\beta_t^2]^t} + \frac{G_{t-1}x + H_{t-1}}{[(x-\alpha_t)^2+\beta_t^2]^{t-1}} +$$
$$+ \cdots + \frac{G_1 x + H_1}{(x-\alpha_t)+\beta_t^2}.$$

Za ovako napisan izraz količnika $P_m : Q_n$ treba: 1. odrediti korene imenilaca, realne i imaginarne, i 2. odrediti koeficijente svakog pojedinog elementarnog razlomka. Određivanje koeficijenata se vrši tzv. *metodom neodređenih koeficijenata* u raznim formama. Sam postupak objasnićemo na konkretnim primerima.

Posle rastavljanja količnika na elementarne razlomke vidimo da integracija racionalnog razlomka, u opštem slučaju, zahteva izračunavanja integrala ovih tipova:

$$1.\ \int \frac{dx}{x-a},\quad 2.\ \int \frac{dx}{(x-a)^k},\quad 3.\ \int \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx,$$

$$4.\ \int \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}\,dx,$$

gde su oznake očigledne. Izračunavanja napisanih tipičnih integrala ne predstavljaju teškoće. Zaista, za prva dva integrala imamo neposredno

$$1.\quad \int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \log(x-a)+C.$$

$$2.\quad \int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k}\,d(x-a) = (x-a)^{1-k}:(1-k)+C.$$

3. Integral $\int \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx$, posle zamene $x-\alpha=\beta z$, prelazi u integrale $\frac{1}{2}A\int \frac{d(1+z^2)}{1+z^2}+\frac{(A\alpha+B)}{\beta}\int \frac{dz}{1+z^2}$ i, prema tome, izražava se pomoću $\log(1+z^2)$ i $\operatorname{arc\,tg} z$.

4. Najzad, integral $\int \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}\,dx$, opet posle zamene $x-\alpha=\beta z$, izražava se pomoću integrala $\int \frac{d(1+z^2)}{(1+z^2)^k}$ i $\int \frac{dz}{(1+z^2)^k}$. Prvi od ovih integrala ima vrednost $(1+z^2)^{1-k}:(1-k)$, a drugi se izračunava ovako:

$$J_k = \int \frac{dz}{(1+z^2)^k} = \int \frac{1+z^2-z^2}{(1+z^2)^k}\,dz = J_{k-1} - \int \frac{z^2dz}{(1+z^2)^k} =$$

$$= J_{k-1} - \frac{1}{2}\int z\,\frac{d(1+z^2)}{(1+z^2)^k} = J_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)}\int z\,d\left(\frac{1}{(1+z^2)^{k-1}}\right) =$$

$$= J_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{z}{(1+z^2)^{k-1}} - \int \frac{1}{(1+z^2)^{k-1}}\,dz\right] =$$

$$= J_{k-1} - \frac{1}{2(k-1)}J_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)}\,\frac{z}{(1+z^2)^{k-1}} = \frac{2k-3}{2(k-1)}J_{k-1} +$$

$$+ \frac{1}{2(k-1)}\,\frac{z}{(1+z^2)^{k-1}} + C,$$

i tako posle, prvo, identične zamene jedinice izrazom $1+z^2-z^2$, i, drugo, posle primene metode delimične integracije na jedan od integrala, dobivamo redukcioni obrazac

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^k} = \frac{2k-3}{2k-2}\int \frac{dz}{(1+z^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)}\,\frac{z}{(1+z^2)^{k-1}},$$

koji stepen imenioca snižava za jedinicu. Primene ovog obrasca dovoljan broj puta dovode do integrala $\int \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arc\,tg} z + C$, koji i završava izračunavanje integrala četvrtog tipa.

I tako zaključujemo da, posle određivanja korena imenioca racionalne funkcije, integracija takve funkcije uvek može biti završena pomoću konačnog broja poznatih operacija. Pri tome se u rezultatu mogu pojaviti samo: racionalne funkcije, logaritmi i arktangensi. Karakter konačnog odgovora zavisi od prirode korena imenioca podintegralne funkcije.

Prikazanu teoriju objasnićemo na primerima.

1. Izračunati integral $J=\int \frac{x^3+x^2-16x+16}{x^2-4x+3}\,dx.$

Pošto je stepen brojioca veći od stepena imenioca izvršićemo deljenje

$$\begin{array}{l|l} x^3+x^2-16x+16 & x^2-4x+3 \\ \underline{x^3-4x^2+3x} & x+5 \\ \quad 5x^2-19x+16 & \\ \quad \underline{5x^2-20x+15} & \\ \qquad\qquad x+1 & \end{array}$$

dakle je $\frac{x^3+x^2-16x+16}{x^2-4x+3}=x+5+\frac{x+1}{x^2-4x+3}$; i tako imamo dva integrala $J=\int(x+5)\,dx+\int\frac{x+1}{x^2-4x+3}dx=J_1+J_2$. Prvi integral, polinoma $x+5$, ima vrednost $J_1=\frac{1}{2}x^2+5x$. Za izračunavanje drugog, odredićemo prethodno korene jednačine $x^2-4x+3=0$. Kako su $x_1=1$, $x_2=3$, imamo $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$. Prema tome, podintegralna funkcija drugog integrala, $\frac{x+1}{(x-1)(x-3)}$, može se rastaviti na dva elementarna razlomka $\frac{x+1}{(x-1)(x-3)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}$, gde su A i B neodređeni koeficijenti, koje treba odrediti iz napisanog identiteta za svaku vrednost x, sem $x=1$ i $x=3$, kad identitet gubi svoj smisao. Kako je za proizvoljnu vrednost x-a, sem 1 i 3, imenilac $(x-1)(x-3)\neq 0$, dobićemo ovaj oblik našeg identiteta $x+1\equiv A(x-3)+B(x-1)$.

Birajući koeficijente kod x i slobodne članove dobivamo dve jednačine $A+B=1$, $-3A-B=1$, a iz ovih $A=-1$, $B=2$. Primetimo da se određivanje neodređenih koeficijenata može i na drugi način izvršiti. Naime, ako u identitet stavimo prvo, napr., $x=-1$, a zatim $x=2$, dobićemo sistem jednačina $2A+B=0$, $-A+B=3$ sa istim rešenjem, kao i prethodni sistem. Posle određivanja koeficijenata A i B, naš integral postaje $J_2=-\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x-3}$ i dovodi do rešenja $J_2=-\log(x-1)+2\log(x-3)$.

Prema tome, konačno imamo

$$J=\frac{1}{2}x^2+5x+\log C\frac{(x-3)^2}{x-1},$$

gde je proizvoljna konstanta izražena u obliku $\log C$.

2. Izračunati integral $J=\int\frac{2x-5}{(x-3)^2}dx$. Da integral bude što jednostavniji, stavimo $x-3=z$; tada je $x=3+z$ i $dx=dz$. Ako smenimo imaćemo $J=\int\frac{2z+1}{z^2}dz=2\int\frac{dz}{z}+\int\frac{dz}{z^2}=$ $=2\log z-\frac{1}{z}+C=2\log(x-3)-\frac{1}{x-3}+C$.

3. Izračunati integral $J=\int\frac{3x-1}{4x^2+8x+7}dx$.

Pošto su koreni imenioca imaginarni, možemo imenilac ovako transformisati $4x^2+8x+7=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 2+2^2+3=$ $=(2x+2)^2+3$. Ta metoda dopunjavanja do totalnog kvadrata naročito je zgodna u slučaju imaginarnih korena. Stavimo sad $2(x+1)=\sqrt{3}\,z$ i nalazimo: $2dx=\sqrt{3}\,dz$, $x=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\,z-2)$.

Posle transformacije na novu promenljivu naš integral dobiva vrednost koja se dâ neposredno integrisati

$$J=\frac{3}{4}\int\frac{z\,dz}{z^2+1}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\int\frac{dz}{1+z^2}=\frac{3}{8}\log(z^2+1)-\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg} z+$$

$$+C=\frac{3}{8}\log(4x^2+8x+7)-\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1)+C_1.$$

4. $J=\int\frac{6x^2+2x-3}{(x^2+1)(x-2)}dx$. Stavimo $\frac{6x^2+2x-3}{(x^2+1)(x-2)}=$ $=\frac{Px+Q}{x^2+1}+\frac{A}{x-2}$, odakle za neodređene koeficijente imamo identitet $6x^2+2x-3=(Px+Q)(x-2)+A(x^2+1)$. Izjednačimo koeficijente i slobodne članove: $6=P+A$, $2=Q-2P$, $-3=$ $=-2Q+A$. Rešavanje ovih jednačina daje $P=1$, $Q=4$, $A=5$.

Za integral dobivamo $J=\int\frac{x\,dx}{x^2+1}+4\int\frac{dx}{x^2+1}+$ $+5\int\frac{dx}{x-2}=\frac{1}{2}\log(x^2+1)+4\operatorname{arc\,tg} x+5\log(x-2)+C=$ $=\log C(x-2)^5\sqrt{x^2+1}+4\operatorname{arc\,tg} x$.

5. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$. Stavimo $\frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$, odakle imamo $1 = A(x+1) + B(x^2-1) + C(x-1)^2$. Ovaj identitet daje: za $x = 0, 2$ i -2: $1 = A - B + C$, $1 = 3A + 3B + C$, $1 = -A + 3B + 9C$, tako da je: $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{4}$.

Integral ima vrednost $J = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\log\frac{x+1}{x-1} + \log C = \log C\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} - \frac{1}{2(x-1)}$.

6. $J = \int \frac{dx}{x^6 + 2x^4 + x^2}$. Pošto je $x^6 + 2x^4 + x^2 = x^2(x^2+1)^2$, podintegralna funkcija se rastavlja na ove elementarne razlomke $\frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3x + A_4}{(x^2+1)^2} + \frac{A_5x + A_6}{x^2+1}$. Pošto se odrede neodređeni koeficijenti, i integral se jednostavno dobiva. Ponovićemo samo određivanje integrala sa koeficijentom A_4. Taj integral $J^* = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$, može biti, kako smo već videli, izračunat pomoću zamene jedinice u brojiocu sa $1 + x^2 - x^2$ i, zatim, delimične integracije. Pokazaćemo i drugu poznatu metodu za izračunavanje integrala J^*. Iskoristićemo smenu $x = \operatorname{tg} z$; tada je $dx = \frac{1}{\cos^2 z}\,dz$, $z = \operatorname{arc\,tg} x$. Kako je $1 + x^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 z = \frac{1}{\cos^2 z}$, imaćemo $J^* = \int \cos^2 z\,dz$. Videli smo da metodom delimične integracije za ovaj integral nalazimo: $J^* = \frac{1}{2}(z + \sin z \cos z) + C$. Prema tome, uzimajući u obzir poznate obrasce Trigonometrije $\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$, dobivamo konačno $J^* =$

$= \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg} x + \frac{x}{1+x^2}\right)$ što se lako da proveriti i neposrednim diferenciranjem.

U vezi sa poslednjim dvama integralima, koji sadrže elementarne razlomke, recimo, tipova $\frac{1}{(x-1)^2}$ i $\frac{1}{x^2+1}$, vidimo da u oba slučaja u imeniocima imamo kvadratne funkcije x-a; samo, u prvom slučaju, tom elementarnom razlomku odgovaraju dva razlomka sa konstantnim brojiocima, a u drugom samo jedan razlomak, ali sa brojiocem linearnom funkcijom od x.

Vežbanja:

Izračunati integrale funkcija:

1. $x^{2m} + ax^{m+n} + bx^n + x^{2n}$. 2. $x^2 + x + 1 + 1/x + 1/x^2$. 3. $1:(2-x)$. 4. $1:(x^2 + 4x - 2)$. 5. $(x+4):(x^2 + 6x + 8)$. 6. $(7x+3):(2x^2 - x - 3)$. 7. $1:(15 + 16x - 9x^2)$. 8. $(12x - 5):[x(1 + x - 2x^2)]$. 9. $2:[(x-3)^2(x-2)]$. 10. $(2x-3):(x^3 - 4x^2 + 4x)$. 11. $(x^3+1):[x(x-1)^3]$. 12. $x^2:(x^3 + 5x^2 + 8x + 4)$, koreni imenioca su: -1 i -2. 13. Izračunati integral $\int \frac{dx}{a + 2bx + cx^2}$ pod uslovima: $ac - b^2 \begin{matrix} >0 \\ =0 \\ <0 \end{matrix}$. 14. Za koju je vrednost broja n integral $\int \frac{x\,dx}{(ax^2+b)^n}$ trancendentan? 15. Za koju je vrednost broja n integral $\int \frac{dx}{(ax^2+b)^n}$ transcendentan?

1.5. Integracija funkcija koje zavise od kvadratnog korena iz linearnog ili kvadratnog polinoma

Ako podintegralna funkcija zavisi racionalno od kvadratnog korena iz polinoma prvog stepena, kao, napr., u integralu $\int \frac{dx}{5 + \sqrt{x-2}}$, možemo taj koren uzeti za novu promenljivu. Tada podintegralna funkcija, posle transformacije, postaje racionalna. Tako ćemo, u ovom primeru, staviti $\sqrt{x-2}=z$, odakle je $x-2=z^2$, $dx=2z\,dz$. Posle ove zamene integral dobija oblik

$$\int \frac{dx}{5+\sqrt{x-2}}=\int \frac{2z\,dz}{5+z}=2\int\left(1-\frac{5}{z+5}\right)dz=2\left[\int dz-\right.$$

$$\left.-5\int\frac{dz}{z+5}\right]=2[z-5\log(z+5)]+C=2[\sqrt{x-2}-$$

$$-5\log(5+\sqrt{x-2})]+C.$$

Ako podintegralna funkcija zavisi od kvadratnog korena iz polinoma drugog stepena, prvi zadatak će biti, imajući u vidu da se u tablici elementarnih integrala nalaze ova dva integrala $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ i $\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}$, da se traženi integral transformiše, po mogućstvu, na tablični integral. Kako se to radi objasnićemo na primerima.

1. Izračunati integral $J=\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x+x^2}}$. Transformišimo potkoreni trinom izdvajanjem totalnog kvadrata $5+4x+x^2=x^2+2\cdot x\cdot 2+4+1=1+(x+2)^2$. Za novu promenljivu uzećemo $x+2=z$, odakle je $dx=dz$ i $x=z-2$. Posle toga za integral nalazimo

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{5+4x+x^2}}=\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\log(z+\sqrt{1+z^2})+\log C=$$

$$=\log C[x+2+\sqrt{5+4x+x^2}].$$

Proizvoljnu konstantu napisali smo u obliku $\log C$, jer tako dobiveni rezultat možemo napisati i u obliku $C[x+2+\sqrt{5+4x+x^2}]=e^J$ ili $x+2+\sqrt{5+4x+x^2}=C_1e^J$.

2. Izračunati integral $J=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x(4-x)}}$. Transformisaćemo prvo binom $x(4-x)=-(x^2-2\cdot x\cdot 2+4)+4=4-(x-2)^2$.

Zatim ćemo izvršiti zamenu: $x-2=2z$, $dx=2\,dz$, $x=2(1+z)$, i tako imamo:

$$J=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x(4-x)}}=2\int\frac{z+1}{\sqrt{1-z^2}}dz=2\left[-\frac{1}{2}\int\frac{d(1-z^2)}{\sqrt{1-z^2}}+\right.$$

$$\left.+\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\right]=2[-\sqrt{1-z^2}+\arcsin z]+C=-\sqrt{x(4-x)}+$$

$$+2\arcsin\frac{x-2}{2}+C.$$

3. Izračunati integral $J=\int\sqrt{1-x^2}\,dx$. Pošto u tabličnim integralima koren stoji u imeniocu, dati integral treba transformisati tako da koren bude u imeniocu; u tu svrhu podintegralnu funkciju množimo i delimo korenom. Tako dobivamo

$$J=\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Prvi integral imamo u tablici, a drugi izračunavamo delimičnom integracijom $J_1=\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int x\cdot\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int x\,dv$, pri čemu je $v=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)=-\sqrt{1-x^2}$. Prema tome imamo $J_1=-x\sqrt{1-x^2}+\int\sqrt{1-x^2}\,dx=-x\sqrt{1-x^2}+J_1$, odakle je $J_1=-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$ i za konačni rezultat dobivamo $\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)+C$.

Na sličan način izračunava se i integral

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2}+\log[x+\sqrt{1+x^2}])+C.$$

4. Izračunati integral $J=\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Kako u tablici integrala ne stoji ispred korena u imeniocu nikakav promenljiv činilac, a ovde stoji, treba činilac ukloniti. To se postiže zamenom $x=z^{-1}$, $dx=-z^{-2}dz$, $z=x^{-1}$, pomoću koje dati integral postaje $J=\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=-\int z^{-2}\cdot z\cdot\frac{dz}{\sqrt{1+z^{-2}}}=$

$$=-\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=-\log\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)+\log C=\log\frac{Cx}{1+\sqrt{1+x^2}}.$$

Dobiveni rezultat se može ovako izraziti $x:\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)=e^{\Phi}$, gde je $\Phi=J+$proizvoljna konstanta.

Iz ove jednačine možemo izvesti vrednost x u funkciji integrala $x=2:(e^{-\Phi}-e^{\Phi})$; ovu jednačinu možemo smatrati kao inverziju datog integrala kad je promenljiva po kojoj se integriše izražena kao funkcija samog integrala.

Vežbanja:

Izračunati integrale funkcija:

1. $\sqrt{x+1}$. 2. $\sqrt{2-x}$. 3. $\frac{\sqrt{x-1}}{x}$. 4. $\frac{x}{\sqrt{x-1}}$. 5. $\frac{x^2}{\sqrt{x}-1}$.

6. $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})\,x$. 7. $\sqrt{ax+b}$. 8. $x\sqrt{ax+b}$. 9. $1:\sqrt{3x^2-2}$.

10. $1:\sqrt{x^2-2x}$. 11. $1:\sqrt{9x^2+1}$. 12. $1:\sqrt{9x^2+6x-15}$. 13. $1:[x\sqrt{1-x^2}]$.

14. $\sqrt{1-x^2}:x^2$. 15. $1:[x^2\sqrt{x^2-1}]$.

Proučiti integrale sa $R=\sqrt{a+2bx+cx^2}$ i to:

16. $\int\frac{dx}{R}$. 17. $\int R\,dx$. 18. $\int(\alpha x+\beta)\frac{dx}{R}$. 19. $\frac{1}{(\alpha x+\beta)R}dx$.

20. $\int\frac{1}{(x^2-1)R}dx$.

1.51. Integracija nekih funkcija sa korenima

Proučimo još integraciju racionalnih funkcija koje zavise od nezavisno promenljive x i više korena oblika $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^p$, gde je p neki racionalan razlomak, dakle (1) $\int R(x, D^p, D^q, \ldots)\,dx$ sa

$D=\frac{ax+b}{cx+d}$. Ako sa N označimo zajednički imenilac razlomaka $p, q, \ldots$ i iskoristimo zamenu $D=t^N$, promenljive x, dx/dt i svi stepeni D sa izložiocima $p, q, \ldots$, izražavaju se kao racionalne funkcije promenljive t, i dati integral se svodi na integral racionalne funkcije nove promenljive.

Kao drugi primer integrala koji se svodi na integral racionalne funkcije, uzećemo tzv. *integral binomnog diferencijala*, u obliku $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, gde su a i b proizvoljni realni brojevi, a m, n, p racionalni brojevi.

Tada se pre svega može tvrditi da se brojevi m i n u ovom integralu mogu smatrati kao celi brojevi. I zaista, ako nisu, zamena $x=z^N$, gde je N zajednički imenilac razlomaka m i n, dovodi do integrala sa celim izložiocima promenljive z (čitalac neka to proveri!). I sad možemo dva slučaja proučiti: I slučaj kad je p ceo broj. Tada je podintegralna funkcija polinom $(p\geqslant 1)$ ili racionalan razlomak, $(p\leqslant -1)$. II slučaj kad je razlomak, $p=\frac{r}{s}$. Ovaj slučaj se može raščlaniti na dva podslučaja: II_1 — kad je $\frac{m+1}{n}$ ceo broj. Tada zamena $a+bx^n=u^s$ racionalizuje podintegralnu funkciju. II_2 — kad je $\frac{m+1}{n}+p$ ceo broj. Tada zamena $a+bx^n=x^n u^s$ daje isti rezultat. Proveravanje ovih rezultata ne zadaje teškoće (neka čitalac pokuša!). Još je Njutn umeo da izvrši integraciju u ovim slučajevima, ali tek je P. L. Čebišev dokazao da se samo u ovim slučajevima rezultati integracije izražavaju elementarnim funkcijama.

Vežbanja:

Izračunati integrale funkcija:

1. $\frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}$. 2. $\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}$. 3. $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}$. 4. $1:\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)$.

5. $\sqrt{x}\,(1+x)^2$. 6. $x\sqrt{1+x}$. 7. $x^{3/2}(1+x)^{1/2}$.

1.6. Integracija nekih transcendentnih funkcija

U tablici elementarnih integrala ima nekoliko integrala sa podintegralnom transcendentnom funkcijom. To su integrali (V), (V$^{\text{bis}}$), (VI), (VI$^{\text{bis}}$), (VII), (VII$^{\text{bis}}$).

Proučićemo još nekoliko važnih integrala transcendentnih funkcija.

1. Za integral $J_n = \int x^n e^x dx$, gde je n ceo pozitivan broj, možemo lako, pomoću delimične integracije, izvesti redukcioni obrazac $J_n = x^n e^x - n J_{n-1}$; a za n ceo negativan broj na sličan način izvodi se redukcioni obrazac $J_n = \frac{1}{n+1}[x^{n+1}e^x - J_{n+1}]$, koji neposredno sleduje iz prethodnog.

2. Integral $\int f(e^x)\,dx$, posle smene $e^x = z$, $e^x dx = dz$, prelazi u integral $\int \frac{f(z)}{z} dz$. Ako funkcija $f(z)$ ne sadrži više transcendentnih operacija, možemo na integral primeniti operacije integracije, napr. operacije za integraciju racionalnih funkcija, koje smo izložili u prethodnim paragrafima.

3. Od integrala sa trigonometrijskom podintegralnom funkcijom neki se izračunavaju vrlo jednostavno. Pokazaćemo nekoliko primera.

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\log\cos x + C,$$

$$\int \operatorname{cotg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \log\sin x + C.$$

4. Za integral $\int \frac{dx}{\sin x}$, kao i za mnoge druge integrale trigonometrijskih funkcija, zgodno je upotrebiti zamenu $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$, odakle je $\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = dz$.

Ova je zamena vrlo korisna, jer se pomoću nje, kako sve trigonometrijske funkcije tako i njihovi izvodi, izražavaju racionalno u funkciji $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$. Pomoću te zamene za naš integral dobivamo

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \int \frac{dz}{z} = \log z + C = \log\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

Integral $\int \frac{dz}{\cos x}$ možemo transformisati na prethodni integral, ako stavimo $x = \frac{\pi}{2} - z$. Tada je $\cos x = \sin z$ i $dx = -dz$. I dobiva se

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\int \frac{dz}{\sin x} = -\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C =$$

$$= \log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

5. Za neke integrale transcendentnih funkcija primena delimične integracije dovodi odmah do rezultata. Napr.

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

6. Najzad, pokazaćemo još jednu metodu za transformisanje podintegralne funkcije, koja često dovodi do jednostavne integracije i važnih rezultata.

Izračunati integral $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}$, gde su a i b stalne veličine. Ako stavimo $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, gde su r

i φ nove pomoćne konstantne veličine, sa vrednostima $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = b/a$, onda se imenilac može transformisati ovako $a \sin\varphi + b\cos\varphi = r(\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi) = r\sin(x+\varphi)$, a posle zamene $x+\varphi = z$ dobija se, prema primeru 4,

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \int \frac{dz}{r\sin z} = \frac{1}{r}\log\operatorname{tg}\frac{z}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(x + \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right) + C.$$

Vežbanja:

Izračunati integrale funkcija:

1. x^3e^x. 2. x^2e^{2x}. 3. $xe^{-k^2x^2}$. 4. $\operatorname{tgh} x$. 5. $\operatorname{cotgh} x$. 6. $\operatorname{tg} kx$. 7. $\operatorname{cotg} k^2x$. 8. $\dfrac{1}{\sin mx}$. 9. $\dfrac{1}{\cos nx}$. 10. $1:(3\sin x + 4\cos x)$. 11. $\arccos x$. 12. $\operatorname{arc\,cotg} x$. 13. $\log x$. 14. $e^{kx}\sin mx$. 15. $e^{kx}\cos nx$. 16. $x^n\log x$. 17. $x^2\sin x$. 18. $x^2\cos x$. 19. $1:(a+b\sin x)$. 20. $1:(a+b\cos x)$.

1.61. Primedbe na izračunavanje neodređenih integrala

Obim i namena ove knjige ne dozvoljavaju da se dublje upuštamo u izračunavanje neodređenih integrala raznih tipova i razvrstavamo sistematski postignute rezultate u toj oblasti matematike. Ali ćemo ipak učiniti još nekoliko primedaba i dopuniti ono što je napred rečeno.

Kao što smo videli, svaka obrnuta operacija sa brojevima predstavljala je, da tako kažemo, izvor brojeva nove prirode: oduzimanje je bilo — izvor negativnih brojeva; deljenje — izvor razlomaka; stepenovanje — iracionalnih, algebarskih i transcendentnih brojeva. Operacija određivanja neodređenog integrala je, kako već rekosmo, operacija obrnuta diferenciranju. Može se, prema tome, očekivati da će i operacija integrisanja dovesti do rezultata koji se mogu izraziti postavljanjem novih funkcionalnih veza između promenljivih. Objasnićemo ovo na primerima.

Dva integrala iz naše tablice $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, kojima, u opštem slučaju, odgovaraju integral $J_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{P_2^+(x)}}$ i $J_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{P_2^-(x)}}$, gde su $P_2^+(x) = ax^2 + bx + c$ sa $a > 0$ i $P_2^-(x) = ax^2 + bx + c\,(a<0)$, daju rezultate izražene poznatim elementarnim funkcijama, naime

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}\log\left(2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bz+c}\right) + C,$$

$$J_2 = \frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{-2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C.$$

Vidimo da relativno jednostavna algebarska podintegralna funkcija $1:\sqrt{1\pm x^2}$ dovodi do mnogo komplikovanijih funkcija, logaritma i inverzne trigonometrijske funkcije arksinusa.

Još je komplikovaniji problem kad se izračunavaju integrali, slično po formi prethodnim integralima, u kojima pod korenom stoji ne kvadratni trinom, već polinom trećeg ili četvrtog stepena. Na takve integrale se nailazi pri izračunavanju dužine luka elipse. Zato se integrali opšteg oblika (1) $\int R(x, \sqrt{P})\,dx$, gde je R simbol racionalne funkcije, a P polinom trećeg ili četvrtog stepena, zovu *eliptički integrali*. Teorija eliptičkih integrala i eliptičkih funkcija, koje stoje u vezi sa tim integralima, sačinjava naročitu granu u savremenoj matematici. U toj teoriji se pokazuje da se i kako se svi eliptički integrali oblika (1) mogu svesti na tri osnovna eliptička integrala, koje je A. M. Legendre označio kao *eliptičke integrale prve, druge i treće vrste* i to:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \int \frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$\int \frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

gde su k i h konstante, pri čemu h može biti imaginarna veličina. Konstanta k ima vrednost pravog razlomka, tj. $0<k<1$, i zove se *moduo eliptičkog integrala*. Napisani integrali, posle smene $z=\sin\varphi$, mogu se izraziti u funkciji još jednostavnijih *Ležandrovih eliptičkih integrala* u obliku:

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\ \int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi\int\frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Za prva dva integrala Legendre je sastavio i tablice sa dva argumenta: nezavisnom promenljivom φ i parametrom k, umesto kojeg je takođe uzeo ugao prema uslovu $k=\sin\theta$. U tablicama su oba ugla φ i θ izraženi u stepenima.

Pomoću eliptičkih funkcija se rešavaju mnogi problemi praktičnog karaktera. Sem rektifikacije, tj. određivanja dužine luka elipse, i drugih geometrijskih zadataka, eliptičke funkcije igraju važnu ulogu u problemima Mehanike. Tako, napr., pomoću eliptičkih funkcija se izražava u funkciji vremena položaj matematičkog klatna, tj. teške tačke pri kretanju po vertikalnom krugu.

Iz prethodnih elemenata teorije, kao i rešavanja relativno prostih zadataka vidi se da izračunavanje neodređenih integrala nije tako jednostavan posao kao diferenciranje, za koje postoje opšta pravila. Zato se odavno težilo da se taj posao što više olakša, naročito pri praktičnom radu. Danas imamo na raspolaganju, u raznim izdanjima, kao prilog bilo drugim tablicama, bilo zbirkama matematičkih obrazaca i dr., i tablice neodređenih i određenih integrala[1]. Za neke specijalne integrale, napr. za eliptičke integrale i funkcije, ima i naročitih izdanja sa više desetina hiljada obrazaca[2]).

U zaključku ove glave navešćemo još nekoliko zadataka za primenu raznih metoda integracije.

---

[1]) Handbook of Mathematical Tables and Formules, ed. by Richard S. Burington. Preštampano je u Mathematics Dictionary, ed. by Glenn James and Robert C. James. 1946. Tablica sadrži 423 integrala.

Laska, V. Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik. Braunschweig, 1888—94.

[2]) Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists. Ed. by F. Byrd and Morris D. Friedman. 1954. Pri Peanovom sistemu numeracije poslednji obrazac ima broj 1060.05.

Vežbanja:

Izračunati integrale funkcija:

1. $(ax+b)^n$. 2. $x(ax+b)^n$. 3. $x^2:(ax+b)^2$. 4. $x\sqrt{ax+b}$. 5. $1:(ax+b)\cdot(cx+d)$. 6. $x:(ax^2+c)$. 7. $x^2:(ax^2+c)$. 8. $1:x\sqrt{ax^2+c}$. 9. $x^2\sqrt{ax^2+c}$. 10. $1:x^2\sqrt{ax^2+c}$. 11. $1:\sqrt{ax+b}\cdot\sqrt{cx+d}$. 12. $\sqrt{ax+b}\cdot\sqrt{cx+d}$. 13. $\sin ax\cdot\cos bx$. 14. $x\sin ax$. 15. $x^3\sin^2 ax$. 16. $1:(b+ce^{ax})$. 17. x^2e^{ax}. 18. $e^{ax}:(b+ce^{ax})$. 19. $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. 20. $\sin^2 ax$.

Glava druga

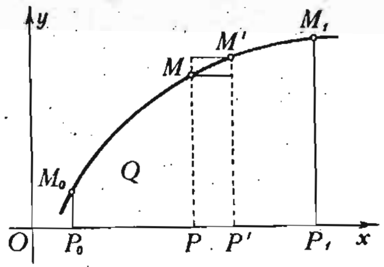
ODREĐENI INTEGRALI

2.1. Pojam određenog integrala

Površinu, nad Ox osom, omeđenu krivom linijom

(1) $$y=f(x)$$

dvema ordinatama, P_0M_0, i PM, delom P_0P ose x označimo sa Q (sl. 2). Tako konstruisana površina zove se *površina u Dekartovu koordinatnom sistemu.* Upotrebljuje se i kratak naziv *krivolinijski trapez.*



Sl. 2 — Površina u Dekartovom sistemu koordinata

Pretpostavljamo da je funkcija $f(x)$ na području duži P_0P_1 određena, jednoznačna, neprekidna, monotona, recimo, uzlazna i pozitivna. Apscise tačaka P_0, P i P_1 označimo sa a, x i b. Jasno je da je ova površina funkcija promenljive veličine x, tj. $Q=F(x)$.

Postavimo sebi kao zadatak da izračunamo izvod površine Q po apscisi x. U tu svrhu promenimo apscisu za beskrajno mali priraštaj $\Delta x = PP'$ i povucimo ordinatu $P'M'$. Dobivena površina, ΔQ, omeđena je beskrajno malim lukom MM' date krive, dvema ordinatama, MP i $M'P'$, i odsečkom PP' ose x; to je, dakle, beskrajno uzani krivolinijski trapez.

Ako kroz tačku M, odnosno M', povučemo prave paralelne sa x osom do preseka sa drugom graničnom ordinatom, dobićemo, pošto je funkcija monotona, dva pravougaonika sa površinama $y\Delta x$ i $(y+\Delta y)\Delta x$. Kao što se vidi na slici, površina ΔQ, za funkciju $f(x)$ koja raste, zadovoljava uslove $y\Delta x < \Delta Q < (y+\Delta y)\Delta x$. Ako podelimo naše nejednakosti pozitivnom veličinom Δx, imaćemo

(2) $$y < \frac{\Delta Q}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

Počnimo sad smanjivati dužinu Δx i pustimo da teži nuli. Ako je neprekidna funkcija y, kad $\Delta x \to 0$ i Δy teži nuli. U graničnoj vrednosti odnos $\frac{\Delta Q}{\Delta x}$ teži izvodu, tj. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x} = \frac{dQ}{dx}$. Desna strana $y+\Delta y$ nejednakosti (2) uzima vrednost y, tj. poklapa se sa levom stranom nejednakosti. Pošto se $\frac{\Delta Q}{\Delta x}$ uvek nalazi između ovih granica, a granice su se poklopile, granična vrednost količnika jednaka je svakoj od ovih jednakih granica, tj. $\frac{dQ}{dx}=y$ ili (3) $\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$. Prema tome imamo *Njutn-Lajbnicovu* teoremu: *Izvod površine u Dekartovu koordinatnom sistemu po apscisi jednak je ordinati.*

Kad je površina Q data kao funkcija apscise, jednačina krive (1) određuje se pomoću operacije diferenciranja. Obrnuto, kad je data kriva (1), za određivanje Q, kao što to sleduje iz jednačine (3), treba izvršiti integraciju. Kao rezultat te integracije dobićemo neodređeni integral $Q(x) = F(x) + C$. Međutim u veličini površine ne može biti nikakve neodređenosti. Neodređenost se pojavljuje usled toga što nismo uzeli u obzir uslov da je površina s leva omeđena ordinatom P_0M_0 i da, prema tome, treba da bude $Q(a)=0$ ili $F(a)+C=0$, gde je a apscisa tačke M_0. Ova jednačina određuje proizvoljnu konstantu integracije $C=-F(a)$, tako da za površinu Q imamo izraz $Q(x)=F(x)-F(a)$.

Sa desne strane stoji razlika vrednosti neodređenog integrala za dve vrednosti argumenta.

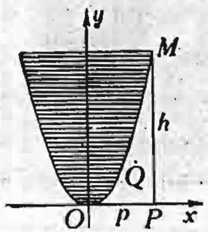
Razlika vrednosti neodređenih integrala za dve vrednosti argumenta zove se određeni integral.

Ako operaciju određenog integrala hoćemo da označimo pre izračunavanja neodređenog integrala, upotrebićemo oznaku

$Q(x)=\int\limits_a^x f(x)\,dx=F(x)-F(a)$; broj ispod znaka integrala označava *donju*, a onaj iznad znaka *gornju granicu* određenog integrala. Za izračunavanje određenog integrala treba od vrednosti neodređenog integrala za gornju granicu oduzeti vrednost neodređenog integrala za donju granicu. Gornja granica takođe može biti stalna. Označimo je sa b. Tada imamo

$$\text{(XIV)}\qquad \boxed{Q=\int\limits_a^b y\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx=\Big|_a^b F(x)=F(b)-F(a).}$$

Vertikalna crta sa označenim granicama integrala zove se *znak dvostruke zamene*; on se stavlja ispred ili iza izračunate vrednosti neodređenog integrala i pokazuje da treba uzeti razliku vrednosti funkcije za gornju i donju granicu.



Sl. 3 — Površina paraboličkog odsečka

Pokazaćemo na primeru kako se izračunava određeni integral.

Neka je data parabola (sl. 3) sa jednačinom $y=ax^2$ i neka treba odrediti površinu S, koja je na slici osenčena. Da bismo uprostili to izračunavanje, odredićemo površinu Q omeđenu lukom parabole OM, osnovom površine $OP=p$ i ordinatom PM. Koristeći poznati obrazac, biće

$$Q=\int\limits_0^p y\,dx=\int\limits_0^p ax^2dx=a\int\limits_0^p x^2dx=a\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^p=\frac{1}{3}\,ap^3=\frac{1}{3}\,ph,$$

gde je $h=ap^2$. Kako je $S=2ph-2\,Q=2ph-\frac{2}{3}\,ph=\frac{2}{3}\cdot 2p\cdot h$,

iz dobivenog rezultata neposredno sleduje poznata Arhimedova teorema: Površina paraboličkog odsečka jednaka je dvema trećinama površine pravougaonika sa dimenzijama tetiva ($2p$) i visine (h) odsečka.

Treba li navoditi naročita pravila za izračunavanje određenih integrala? Očevidno je da ne treba, jer vrednost tih integrala dobijamo neposredno pomoću neodređenih integrala. Posebni deo teorije određenih integrala odnosi se samo na integrale za koje se ne mogu izračunati odgovarajući neodređeni integrali.

Pomenućemo nekoliko osobina određenog integrala, koje sleduju neposredno iz definicije.

Sa promenom reda granica, određeni integral menja svoj znak, tj.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx.$$

Ako se granice poklope, određeni integral ima vrednost nulu, $\int\limits_a^a f(x)\,dx=0$.

Izvod određenog integrala po promenljivoj gornjoj granici jednak je podintegralnoj funkciji za vrednost te granice, a po promenljivoj donjoj granici podintegralnoj funkciji sa minusom za vrednost te donje granice, tj.

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(x)\,dx=f(x),\qquad \frac{d}{dx}\int_x^b f(x)\,dx=-f(x).$$

Ako se integral između granica izdeli na dva ili više delova, određeni integral je jednak zbiru odgovarajućih integrala za pojedine delove, npr.,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

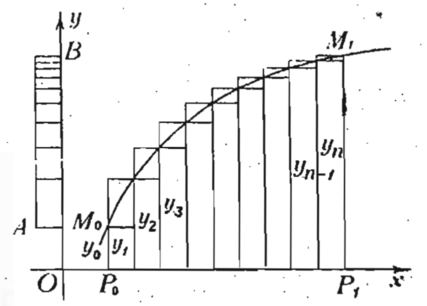
Daćemo sad i drugo tumačenje određenog integrala, koje se može postaviti i kao definicija ovog integrala.

Površinu Q možemo na ovaj način predstaviti. Podelimo rastojanje P_0P_1 (sl. 4) na n jednakih delova i označimo svaki deo sa Δx. Povucimo ordinate kroz tačke podele i označimo ih redom sa $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$. Zatim konstruišimo dve stepenaste linije, kao što je to pokazano na slici: jednu unutrašnju i drugu spoljašnju. Površina omeđena unutrašnjom linijom iznosi

$$q_n = (y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})\,\Delta x,$$

a ona omeđena spoljašnjom stepenastom linijom ima vrednost

$$Q_n = (y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_n)\,\Delta x.$$



Sl. 4 — Određeni integral kao zbir

Naša površina Q zadovoljava nejednakosti $q_n < Q < Q_n$, a razlika između granica ovih nejednakosti iznosi $Q_n - q_n = (y_n - y_0)\,\Delta x$ i može se predstaviti pravougaonikom visine $y_n - y_0$ i osnovice Δx (AB na slici 4).

Pretpostavimo sad da broj n beskrajno raste; tada će Δx težiti nuli. Ako je $y_n - y_0$, tj. razlika krajnjih ordinata, konačna, prethodna razlika $Q_n - q_n$ teži nuli, tj. q_n i Q_n teže zajedničkoj veličini. Zajednička granična vrednost, koja daje površinu Q, predstavlja određeni integral. Možemo, dakle, napisati

$$Q = \int_a^b y\,dx = \lim_{n \to \infty} (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)\,\Delta x$$

što se, kratko, izražava rečima:

Određeni integral predstavlja graničnu vrednost zbira beskrajno malih proizvoda vrednosti funkcije i priraštaja nezavisno promenljive kada broj sabiraka beskrajno raste.

Pošto se zbir n proizvoda može označiti kratko

$$(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)\,\Delta x = S\,y\,\Delta x,$$

gde S označava početno slovo reči Summa, vidimo da je odayde došla (Lajbnic) i oznaka integrala, $\int y\,dx$, gde proizvod $y\,dx$ ima jasno geometrijsko značenje i zove se *element određenog integrala.*

Za integral koji predstavlja površinu Q taj element je bio beskrajno znani pravougaonik visine y i osnovice dx.

Predstava određenog integrala kao zbira beskrajno velikog broja beskrajno malih elemenata je vrlo važna i služi kao osnova mnogih teorijskih rasuđivanja i praktičnih primena koje se tiču određ nih integrala.

U vezi sa uvedenim pojmom određenog integrala kao zbira beskrajno velikog broja beskrajno malih elemenata učinićemo nekoliko primedaba.

Pri određivanju površine Q (sl. 4) delili smo osnovu te površine, duž P_0P_1, na n jednakih delova. Jasno je da je takva podela duži P_0P_1 ograničenje, koje može biti nezgodno pri izračunavanju date površine, omeđene krivom čija je priroda komplikovanija od krive na našoj slici. Da bismo se oslobodili tog ograničenja, uvešćemo definiciju određenog integrala u drugom, malo opštijem, obliku.

Podelimo duž P_0P_1, sa apscisama krajeva a i b, opet na n delova, tačkama sa apscisama $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ i označimo razliku $x_{i+1} - x_i$ sa Δx_i. Izaberimo, zatim, na svakoj duži Δx_i, neku tačku sa apscisom ξ_i i obrazujmo zbir $\sum\limits_{i=0}^{n-0} f(\xi_i)\,\Delta x_i$. Zatim, između svih duži Δx_i izaberimo najveću i označimo je sa Δl. Jasno je da ako $\Delta l \to 0$, teže nuli i sve dužine Δx_i. Postavimo sad ovu definiciju.

Ako pod uslovom $\Delta l \to 0$ postoji granična vrednost

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

ona se zove određeni integral funkcije $f(x)$ u intervalu $[a, b]$ i označava se sa

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Integral koji zadovoljava postavljenu definiciju zove se *Rimanov integral.* Za njegovu podintegralnu funkciju $f(x)$ tada se kaže da je *integrabilna* u intervalu $[a, b]$ *u Rimanovom smislu.* Bernhard Riman (B. Riemann, 1826—1862) čuveni je nemački matematičar, koji je najviše poznat kao osnivač tzv. *Rimanove geometrije*. Ne možemo ulaziti u dokaze osobina Rimanovih integrala. Navešćemo samo neke uslove integrabilnosti i osobine integrabilnih funkcija u Rimanovom smislu.

1. Neprekidna funkcija $f(x)$ u datom intervalu $[a, b]$ integrabilna je u tom intervalu.

2. Ograničena funkcija sa konačnim ili beskonačnim prebrojivim brojem prekida u datom intervalu $[a, b]$ integrabilna je u tom intervalu. Napomenimo da se uslov ograničenosti izražava nejednakošću $m \leqslant f(x) \leqslant M$, gde su m i M dva konstantna konačna broja.

3. Monotona ograničena funkcija $f(x)$ u datom intervalu uvek je integrabilna.

Sad ćemo navesti osobine integrabilnih funkcija.

1. Ako je $f(x)$ integrabilna u $[a, b]$, onda su integrabilni kako moduo $|f(x)|$ te funkcije, tako i proizvod $kf(x)$, gde je k konstanta.

2. Ako su dve funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$ integrabilne u $[a, b]$, integrabilni su i njihovi: zbir, razlika i proizvod.

3. Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna u celom intervalu $[a, b]$, ona je integrabilna i u svakom delu tog intervala. Obratno, ako je $f(x)$ integrabilna u svim delovima intervala $[a, b]$, ona je integrabilna u tom celom intervalu.

U ovom paragrafu smo pokazali da dve definicije određenog integrala, tj. bilo kao razlike dveju vrednosti neodređenog integrala (primitivne funkcije) za dve vrednosti argumenta, bilo kao granične vrednosti određenog zbira beskrajno velikog broja beskrajno malih sabiraka, dovode do istog rezultata. Potvrdićemo to i na jednom klasičnom primeru, naime na izračunavanju površine paraboličkog odsečka. Na str. 40 izračunali smo tu površinu na osnovu definicije određenog integrala kao razlike dve vrednosti neodređenog integrala. Sad ćemo tu istu površinu izračunati kao graničnu vrednost zbira elemenata. Podelimo u tu svrhu apscisu OP (sl. 3) na n jednakih delova, tačkama sa apscisama $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = p$. Površina Q je tada definisana

$$Q = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i)\,\Delta x_i ,$$

gde je $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = p:n$. Kako je $f(x_i) = ax_i^2 = a\left(i\,\frac{p}{n}\right)^2 = a\,\frac{p^2}{n^2}\,i^2$, to je

$$Q = ap^3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = ap^3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6},$$

jer smo ranije izveli (gl. Viša mat. II, str. 106) napisani obrazac za zbir kvadrata prirodnih brojeva. I pošto izračunamo graničnu vrednost

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3},$$

dobivamo konačno $Q = \frac{1}{3}ap^3 = \frac{1}{3}hp$, tj. dolazimo do Arhimedove teoreme, koju smo već naveli, za površinu $S = 2p\cdot h - 2Q = \frac{2}{3}\cdot 2p\cdot h$ paraboličkog odsečka na str. 40. Arhimed (287–212) je dokazao svoju teoremu integralne prirode više od devetnaest vekova pre uvođenja infinitezimalnog računa. Zato bi tog genijalnog matematičara trebalo smatrati kao pravog osnivača integralnog računa, u njegovu prirodnom obliku, sabiranju beskrajno malih elemenata.

2.11. Teorema o srednjoj vrednosti određenog integrala

Ako je u intervalu $[a, b]$, $a < b$, funkcija $f(x)$ ograničena, tj.

$$m < f(x) < M,$$

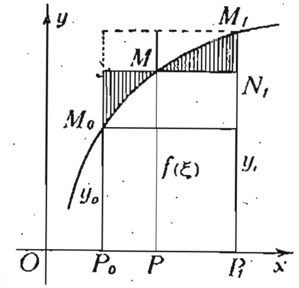
a svako Δx_i je pozitivno, onda iz prethodne nejednakosti sleduju neposredno nejednakosti

$$m \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i < \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i < M \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x.$$

Ako pređemo na granične vrednosti, imaćemo

$$(1) \qquad m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a).$$

Ovaj rezultat može se geometrijski ovako protumačiti (sl. 5). Određeni integral ima vrednost površine Q, omeđene linijom $P_0P_1M_1M_0P_0$. Površina Q je veća od površine pravougaonika sa osnovom $P_0P_1 = b - a$ i visinom y_0, a manja od površine pravougaonika sa istom osnovom i visinom y_1. Jasno je da za svaku datu površinu, koja je veća od manjeg pravougaonika, a manja od većeg, postoji takav pravougaonik određene visine i osnove $b-a$, čija je površina jednaka datoj površini. Uzmimo tu visinu kao ordinatu neke tačke M na datoj krivoj. Ako apscisu te tačke označimo sa ξ, dolazimo do ovog rezultata



Sl. 5 — Teorema o srednjoj vrednosti određenog integrala

$$\text{(XXI)} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a).$$

Ovaj rezultat se zove *teorema o srednjoj vrednosti u primeni na određeni integral.* Objasnili smo ovu teoremu za slučaj neprekidne, monotone podintegralne funkcije. Teorema ostaje na snazi uopšte za Rimanov integral pod navedenim uslovima.

Da vidimo praktičnu vrednost teoreme o srednjoj vrednosti.

Srednja aritmetička vrednost ili, kratko, — *aritmetička sredina* dveju veličina je, kao što znamo, poluzbir tih brojeva. Aritmetička sredina više veličina, $y_0, y_1 \dots, y_{n-1}$ je zbir tih veličina, podeljen njihovim brojem, tj. $(y_0+y_1+\dots+y_{n-1}):n$. Ako su y_i posebne vrednosti promenljive veličine, što odgovara vrednostima x_i, onda za aritmetičku sredinu zbira tih veličina $y_i = f(x_i)$ treba uzeti

$$y_{cp} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right) : n.$$

Ako tačke $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ pripadaju intervalu $b-a$, broj n možemo identički predstaviti ovako $n \equiv (b-a) : \dfrac{b-a}{n}$,

a prethodnu sredinu predstaviti ovako

$$y_{cp} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x_i}{b-a},$$

gde je $\Delta x_i = \Delta x = (b-a):n$. Pri neprekidnoj promeni veličine $y(x)$ prethodni obrazac daje *aritmetičku sredinu funkcije* $y(x)$ *u intervalu* $[a, b]$ u obliku

$$y_{cp} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ako temperaturu vazduha, T, termograf beleži u funkciji vremena t, dobivamo grafički prikazanu $T = T(t)$; za srednju temperaturu, T_{cp}, recimo u toku dana, imamo obrazac

$$T_{cp} = \left(\int_0^{t^*} T(t)\,dt\right) : t^*,$$

gde smo sa t^* označili doba dana, dakle vreme, mereno delovima skale termografa. Pošto na termografu integralu $\int_0^{t^*} T(t)\,dt$ odgovara određena površina, tražena srednja temperatura dana je proporcionalna toj površini, koju nije teško izmeriti na milimetarskoj hartiji termografa, ili odrediti merenjem težine odgovarajućeg odsečka termografske hartije.

U vezi sa teoremom o srednjoj vrednosti mogu se pokazati nejednakosti za ocenjivanje vrednosti određenog integrala u određenom intervalu.

Ako sa m označimo najmanju vrednost konačne funkcije $f(x)$ u intervalu $[a, b]$, a sa M najveću vrednost, onda imamo nejednakosti

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a),$$

koje se mogu smatrati kao rezultat integrisanja članova nejednakosti

$$m < f(x) < M.$$

Pokazaćemo na primerima kako se pomoću integralnih nejednakosti može proceniti vrednost integrala.

1. Uzmimo prvo slučaj određenog integrala čiju vrednost možemo izračunati pomoću vrednosti neodređenog integrala koji se dâ odrediti.

Neka je dat integral $\int_{200}^{250} \frac{dx}{x}$. Kako je najveća vrednost podintegralne funkcije $M=1/200$, a najmanja $m=1/250$, za $b-a=50$ imamo

$$\frac{1}{250}\cdot 50 < \int_{200}^{250} \frac{dx}{x} < \frac{1}{200}\cdot 50.$$

Odatle zaključujemo da za naš integral imamo nejednačine $0{,}2 < J < 0{,}25$. Uzimajući aritmetičku sredinu, dobivamo približnu vrednost $J \approx 0{,}225$. Pošto se tačna vrednost tog određenog integrala izražava razlikom $\log 250 - \log 200 = \log 1{,}25$, čija je približna tablična vrednost $0{,}22314 \approx 0{,}223$. Vidimo da se približna vrednost 0,225, izračunata na osnovu metode procenjivanja datog integrala, razlikuje od tablične vrednosti tog integrala za manje od 1%.

2. Primenimo tu istu metodu na izračunavanje vrednosti funkcije $\int_0^z \frac{\sin t}{t}\,dt$, koja se zove *integralni sinus* i označava sa $Si(z)$. Neodređeni integral njegov ne izražava se u konačnom obliku pomoću poznatih elementarnih funkcija. Zato izračunajmo samo deo tog integrala $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin t}{t}\,dt$. Prema gornjim nejednakostima imamo $\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\pi/2}\cdot\frac{\pi}{4} < \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin t}{t}\,dt < \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\pi/4}\cdot\frac{\pi}{4}$; a odavde, posle izvršenih računa, imamo $0{,}5 < \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin t}{t}\,dt < 0{,}70711$. Uzimajući i ovde aritmetičku sredinu za približnu vrednost, nalazimo približnu vrednost našeg integrala $0{,}6035 \approx 0{,}60$. Pošto je tablična približna vrednost tog integrala (v. tablice*) $0{,}614 \approx 0{,}60$, vidimo da je greška van tačnosti našeg računa.

* Tables of functions. E. Jahnke and F. Emde. N. Y. 1945.

Obrazac (1) koji služi za ocenjivanje vrednosti određenog integrala može biti ovako uopšten.

Pretpostavimo da se kriva $y=f(x)$, kojom je određena površina što odgovara određenom integralu, nalazi između dve krive sa jednačinama $y_1=f_1(x)$ i $f_1^*(x)=y_1^*$, pri čemu je svaka integrabilna i $y_1 \leqslant y \leqslant y_1^*$. Onda je i $\int_a^b f_1(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b f_1^*(x)\,dx$. Ako su $f_1(x)=\text{const.}=m, f_1^*(x)=\text{const.}=M$, imamo slučaj obrasca (1).

Ako postoji niz takvih funkcija $f_i(x) < f(x) < f_i^*(x)$ i $\lim_{i\to\infty}[f_i^*(x)-f_i(x)]$ teži ravnomerno nuli, svaka od funkcija $f_i(x)$, odnosno $f_i^*(x)$, može poslužiti za određivanje približne vrednosti datog određenog integrala. To je još iz srednje škole poznata metoda za određivanje, recimo, površine kruga pomoću upisanih i opisanih poligonâ.

Najzad, dodajmo i primedbu o integralu $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$, kad je $m < f(x) < M$, a $\varphi(x) > 0$ u celom intervalu $[a, b]$. Tada je i $m\int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx < M\int_a^b \varphi(x)\,dx$.

Ovim nejednakostima odgovara uopštena teorema o srednjoj vrednosti određenog integrala u obliku

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

gde je ξ, kao i ranije, neka srednja vrednost argumenta u intervalu $[a, b]$. Ako je $\varphi(x)=1$, imamo polazni oblik (2) teoreme o srednjoj vrednosti određenog integrala.

2.12. Određeni integral prekidne funkcije

Elementarna teorija određenog integrala obično pretpostavlja da je podintegralna funkcija neprekidna u čitavom konačnom intervalu integracije. Proučimo zato neke jednostavne slučajeve kad podintegralna funkcija u datom intervalu ima prekida.

Ako funkcija $f(x)$ ima u konačnom intervalu jedan ili više prekida, ali u konačnom broju, sa konačnim vrednostima prekida, možemo neposredno iz posmatranja odgovarajuće površine zaključiti da je vrednost takvog određenog integrala jednaka zbiru površina što odgovaraju neprekidnim delovima funkcije $f(x)$. Pri tome se pretpostavlja da, recimo, za tačku c prekida funkcije $f(x)$, dva integrala $\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx$ i $\int_{c+\varepsilon_1}^{b} f(x)\,dx$ imaju granične vrednosti kad $\varepsilon \to 0$ i $\varepsilon_1 \to 0$.

Pretpostavimo sad da podintegralna funkcija $f(x)$ postaje u tački c intervala $[a, b]$ beskonačna, tj. da $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(c-\varepsilon) \to \infty$, a isto tako i $\lim f(c+\varepsilon_1) \to \infty$. Tada se kaže da, za $x=c$, funkcija $f(x)$ ima beskonačni prekid. Proučimo vrednost određenog integrala u intervalu $[a, b]$. U tu svrhu potražićemo neodređeni integral, i to u obliku $\int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$, gde su $f_1(x)$ i $f_2(x)$ dve funkcije, koje mogu biti različitog tipa, jedna za interval, $[a, c]$, a druga za interval $[c, b]$. Ako sad stavimo $\int f_1(x)\,dx = F_1(x) + C_1$, $\int f_2(x)\,dx = F_2(x) + C$, pošto odredimo konstante dobićemo dva konačna određena integrala $\int_a^c f_1(x)\,dx$ i $\int_c^b f_2(x)\,dx$; njihov zbir je vrednost našeg integrala sa beskonačnim prekidom u tački c.

Primer. $y = x^{-2/3}$. U tački $x=0$ funkcija $x^{-2/3}$ ima beskonačnu vrednost, tj. $\lim\limits_{x\to 0} x^{-2/3} \to \infty$. Za izračunavanje integrala $\int_{-1}^{+1} x^{-2/3}\,dx$ uzimamo neodređeni integral $\int x^{-2/3}\,dx = 3\,x^{1/3} + C$. Pošto taj integral, za $x=0$, ima konačnu vrednost C, imamo zbir dva integrala

$$\int_{-1}^{+1} x^{-2/3}\,dx = 3\,x^{1/3}\Big/_{-1}^{0} + 3\,x^{1/3}\Big/_{0}^{+1} = 3 + 3 = 6.$$

Uzmimo drugi slučaj. Neka su date dve beskonačne grane, oko y ose, koje pripadaju hiperbolama $y = \dfrac{1}{|x|}$: jedna za $x \geqslant 0$, druga za $x \leqslant 0$. Za $x=0$ imamo beskonačnu vrednost y-a. Uzmimo da treba odrediti određeni integral $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{1}{|x|}\,dx = 2\int_0^{+1} \frac{1}{x}\,dx$. Neodređeni integral je $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log x + C$.

Pošto funkcija neodređenog integrala $\log x$, za $x \to 0$, teži $-\infty$, možemo zaključiti da, kako dati određeni integral tako i površina između grane hiperbole i njene asimptote, teži beskonačnosti, bez obzira na to što rastojanje tačaka hiperbole od asimptote teži nuli.

2.13. Određeni integral sa beskonačnim granicama

Određeni integrali sa beskonačnim granicama mogu se proučavati prema definicijama

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx; \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Prema ovim definicijama treba prvo izračunati neodređeni integral, kao primitivnu funkciju $F(x)$, pod uslovom $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$, pa zatim proučiti granične vrednosti:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a); \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a).$$

Ako granični izrazi imaju određene, konačne ili beskonačne, vrednosti oni određuju odgovarajuće određene integrale.

Prema tome, za izračunavanje kako integrala sa beskonačnim prekidima podintegralne funkcije, tako i integrala sa beskonačnim granicama, prvo izračunavamo vrednosti određenih integrala bez beskonačnih prekida i bez beskonačnih granica, tj. određujemo primitivne funkcije kao za obične integrale, pa zatim primenjujemo proces prelaza na graničnu vrednost. Tako izračunati integral obično se zove *nesopstveni određeni integral*. Dublje proučavanje takvih integrala ne ulazi u okvir ove knjige.

2.2. Metoda zamene promenljive u određenom integralu

U 1.3 smo pokazali da ponekad zamena promenljive može znatno olakšati izračunavanje neodređenog integrala. Sad ćemo pokazati kako ta ista metoda može olakšati izračunavanje i određenog integrala.

4*

Pretpostavimo da treba izračunati integral $\int_a^b f(x)\,dx$, gde je funkcija $f(x)$ neprekidna u $[a, b]$. Stavimo $x=\varphi(t)$, gde je $\varphi(t)$ jednoznačna, neprekidna, konačna funkcija u intervalu $[\alpha, \beta]$, čije granice odgovaraju granicama a i b, tj. $\varphi(\alpha)=a$ i $\varphi(\beta)=b$. Sem toga, pošto je $dx=\varphi'(t)\,dt$, funkcija $\varphi'(t)$ treba da bude neprekidna u intervalu $[\alpha, \beta]$.

Pod tim uslovima važi ovaj obrazac pri prelazu od promenljive x na promenljivu t

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Mada desna strana izgleda komplikovanija od leve, izračunavanje transformisanog integrala, posle izvršene naznačene operacije, može biti jednostavnije od izračunavanja prvobitnog integrala. Ako primitivnu funkciju novog integrala označimo sa $\Phi(t)$, za određeni integral imamo $\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$. I pošto određeni integral predstavlja određeni broj, nema potrebe vraćati se na polaznu promenljivu, kako se to radi u slučaju neodređenog integrala, kad treba odrediti funkcionalni oblik primitivne funkcije.

Kao primer uzmimo integral $4\int_0^a y\,dx$ sa $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, koji odgovara površini elipse sa poluosama a i b. Za novu promenljivu uzimamo ugao θ, određen jednačinom $x=a\cos\theta$. Tako imamo: za $x=0$, $\theta=\pi/2$, a za $x=a$, $\theta=0$; zatim $y=b\sin\theta$, $dx=-a\sin\theta\,d\theta$. Prema tome za traženu površinu Q elipse dobivamo

$$Q=4\int_0^a y\,dx=-4a\int_{\pi/2}^0 b\sin\theta\sin\theta\,d\theta=4ab\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta=$$

$$=2ab\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta=2ab\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}=\pi ab.$$

2.3. Metoda delimične integracije određenog integrala

Metoda delimične integracije, koju smo prikazali u 1.3, u primeni na neodređeni integral, još sa većim uspehom može biti primenjena na izračunavanje određenih integrala, naročito u vezi sa metodom redukcije.

Iz diferencijalnog identiteta

$$u\,dv\equiv d(uv)-v\,du$$

neposredno sleduje i obrazac za delimičnu integraciju određenog integrala

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du.$$

Primeri:

1. $\int_0^{\pi/2} x^2\cos x\,dx=\int_0^{\pi/2} x^2\,d\sin x=x^2\sin x\Big|_0^{\pi/2}-2\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx=$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+2\int_0^{\pi/2} x\,d\cos x=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+2\,[x\cos x]_0^{\pi/2}-2\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-2\sin x\Big|_0^{\pi/2}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-2.$$

2. Izračunati površinu prvog talasa cikloide sa jednačinama:

$$x=a(\theta-\sin\theta),\quad y=a(1-\cos\theta).$$

U obrascu za površinu

$$Q=\int_0^{2\pi a} y\,dx=\int_0^{2\pi a} a^2(1-\cos\theta)\cdot d(\theta-\sin\theta)$$

uzimamo za novu promenljivu ugao θ, vezan sa x jednačinom $x=a(\theta-\sin\theta)$.

$$Q=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta=a^2\left[\int_0^{2\pi} d\theta-2\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta+\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\right]=$$

$$=a^2\left(2\pi+\frac{1}{2}\cdot 2\pi\right)=3\pi a^2.$$

5. Izračunati integrale: $J_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$, $\quad J_n^*=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx$.

Integrišimo delimično

$$J_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx=-\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}x\,d\cos x=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\pi/2}+$$

$$+\int_0^{\pi/2}\cos x\,d\sin^{n-1}x=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx=(n-1)(J_{n-2}-J_n),$$

a odavde izvodimo redukcioni obrazac $J_n=\frac{n-1}{n}J_{n-2}$.

(1) Za $n=2k$ imamo $J_{2k}=\dfrac{(2k-1)(2k-3)\ldots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\ldots 4\cdot 2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$,

jer je $J_0=\int\limits_0^{\pi/2} dx=\pi/2$.

(2) Za $n=2k+1$ imamo $J_{2k+1}=\dfrac{2k(2k-2)\ldots 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots 5\cdot 3}$,

jer je $J_1=\int\limits_0^{\pi/2}\sin x\,dx=-\cos x\Big/_0^{\pi/2}=1$.

Lako je pokazati, metodom zamene promenljive, da je $J^*_{2k}=J_{2k}$ i $J^*_{2k+1}=J_{2k+1}$.

2.4. Integracija metodom diferenciranja po parametru

Sem navedenih postoje i drugi metodi za izračunavanje određenih integrala, naročito u slučajevima kad se ne mogu izračunati neodređeni integrali.

Izračunajmo integral $J=\int\limits_0^1 \dfrac{x^{b-1}-x^{a-1}}{\log x}\,dx$ za $a>0$, $b>0$.

Ovaj integral zavisi od veličina a i b, koje igraju ulogu parametara. Izračunajmo izvod integrala po parametru a. Po pravilu, u čije se dokazivanje ovde ne upuštamo, u slučaju stalnih granica i neprekidnosti podintegralne funkcije, za diferenciranje integrala po parametru dovoljno je diferencirati podintegralnu funkciju po tom parametru, tj.

$$\text{(XXII)}\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x,\alpha)\,dx=\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx.$$

Prema tome imamo

$$\frac{dJ}{da}=\int\limits_0^1\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{x^{b-1}-x^{a-1}}{\log x}\right)dx=-\int\limits_0^1\frac{x^{a-1}\log x}{\log x}\,dx=$$

$$=-\int\limits_0^1 x^{a-1}\,dx=-\frac{x^a}{a}\Big|_0^1=-\frac{1}{a}.$$

Navedenim diferenciranjem bitno smo promenili funkcionalnu vezu između integrala i njegovih granica.

Da bismo našli vrednost samog integrala, integrisaćemo dobijeni rezultat po a: $J=-\displaystyle\int\frac{da}{a}=-\log a+C$. Pošto je za $a=b$ podintegralna funkcija integrala jednaka nuli, i sâm integral je jednak nuli. Prema tome, iz prethodne jednačine imamo $0=-\log b+C$, odakle je $C=\log b$. I konačno dobivamo

$$=J\int\limits_0^1\frac{x^{b-1}-x^{a-1}}{\log x}\,dx=-\log a+\log b=\log\frac{b}{a}.$$

Dati integral smo izračunali *metodom diferenciranja po parametru*, i to bez obzira na to što nismo mogli izračunati odgovarajući neodređeni integral.

2.5. Integracija metodom integracije po parametru

Uzmimo integral $J=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx$. Izvršimo zamenu $x=\alpha t$ $(\alpha>0)$, gde je t nova promenljiva, a α parametar; imaćemo

$$J=\int\limits_0^\infty e^{-\alpha^2 t^2}\alpha\,dt.$$

Integral u ovom obliku je funkcija parametra α. Pomnožimo tu funkciju sa $e^{-\alpha^2}$ i integrišimo po α u granicama od 0 do ∞, pa ćemo dobiti

$$\text{(1)}\qquad H=\int\limits_0^\infty J e^{-\alpha^2}d\alpha=\int\limits_0^\infty\left[\int\limits_0^\infty e^{-\alpha^2t^2}\alpha\,dt\right]e^{-\alpha^2}d\alpha.$$

Kako je pri integraciji po t činilac $e^{-\alpha^2}$ stalan, možemo ga uneti pod znak integrala i napisati

$$H=\int\limits_0^\infty\left[\int\limits_0^\infty e^{-\alpha^2(1+t^2)}\alpha\,dt\right]d\alpha.$$

Izmenimo sad red integracije, ne upuštajući se pri tome u dokazivanje da je ova izmena dozvoljena, bez obzira na beskonačne granice integrala. I integrišimo prvo po α,

$$H=\int_0^\infty\left[\int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+t^2)}\alpha\,d\alpha\right]dt.$$

Kako neodređeni integral ima vrednost $\int e^{-\alpha^2(1+t^2)}\alpha\,dt = -\frac{1}{2}\frac{e^{-\alpha^2(1+t^2)}}{1+t^2}$, to se, posle zamene, dobiva $H=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}=$

$$=\frac{1}{2}\Big|\operatorname{arctg} t\Big|_0^\infty=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi/4.$$

S druge strane, kako je J konstanta, iz (1) sleduje $H=J\cdot\int_0^\infty e^{-\alpha^2}dt=J^2$, te dobivamo jednačinu $J^2=\pi/4$; i tako konačno dolazimo do rezultata $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Iz ovog integrala možemo lako izvesti vrednost integrala $\int_0^\infty e^{-\alpha^2x^2}dx=$ $=\frac{1}{2a}\sqrt{\pi}$, a taj rezultat možemo napisati $\int_0^\infty e^{-kx^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}k^{-1/2}$. Diferenciranjem ovog integrala n puta po k izvodimo obrazac

$$\int_0^\infty e^{kx^2}x^{2n}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n}\,k^{-(n+0,5)},$$

iz kojeg, za $k=1$, imamo

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n}.$$

Metoda koju smo upotrebili za izračunavanje integrala J zove se *metoda integracije po parametru*. Ona se osniva na obrascu

$$\text{(XXIII)}\qquad \int_\lambda^\mu\left(\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right)d\alpha=\int_a^b\left(\int_\lambda^\mu f(x,\alpha)\,d\alpha\right)dx.$$

Vidimo da i ova metoda može biti od koristi za izračunavanje onih integrala čije odgovarajuće neodređene integrale ne možemo izračunati.

Kasnije ćemo pokazati i druge metode za izračunavanje određenih integrala.

Vežbanja:

1. Da li je tačna jednačina $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(y)\,dy$?

2. Potvrditi ovaj obrazac za delimičnu integraciju određenog integrala $\int_a^b u(x)\,dv(x)=[u(x)\,v(x)]_a^b-\int_a^b v(x)\,du(x)$.

3. Potvrditi tačnost jednačine $\int_a^x f(z)\,dz+\int_x^a f(y)\,dy=0$.

4. Pokazati da, ako mesto promenljive x u integralu $\int_a^b f(x)\,dx$ uvedemo novu promenljivu t, vezanu sa prethodnom promenljivom x jednačinom $x=\varphi(t)$, nova vrednost određenog integrala ima oblik $\int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$, pri čemu t_1 i t_2 zadovoljavaju jednačine $a=\varphi(t_1)$, $b=\varphi(t_2)$.

5. Potvrditi tačnost obrasca $\int_a^b Af(x)\,dx=A\int_a^b f(x)\,dx$.

Izračunati određene integrale:

6. $\int_0^1\left(1+x^2+\frac{1}{2}x^3\right)dx$. 7. $\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx$ 8. $\int_0^{\pi/2}\cos x\sin^2x\,dx$. 9. $\int_0^1\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

10. $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$. 11. $\int_a^b\sqrt{x-1}\,dx$. 12. $\int_0^3 x^2\sqrt{1+x^2}\,dx$. 13. $\int_0^{3/5}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

14. $\int_0^1\frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+c}}$. 15. $\int_1^2\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. 16. $\int_1^{10}x\sqrt{1+x^2}\,dx$. 17. $\int_0^{\pi/6}\sin 3x\,dx$.

18. $\int_0^{\pi/8}\frac{dx}{1+\cos 4x}$. 19. $\int_0^1 x^2e^{\alpha x}dx$. 20. $\int_1^e\log x\,dx$. 21. Potvrditi jedna-

čine $\int\limits_{0}^{\sqrt{b/a}} \frac{dx}{ax^2+b} = \int\limits_{\sqrt{b/a}}^{\infty} \frac{dx}{ax^2+b} = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{ax^2+b} = \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{ax^2+b} = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}}$ za $a>0$, $b>0$. 22. Dokazati jednačinu $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}} = \int\limits_{0}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1-\frac{1}{4}z^2}}$. 23. Dokazati jednačinu $\int\limits_{0}^{\pi/2} x \sin^2 x\, dx = \frac{\pi^2+4}{16}$. Izračunati: 24. $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-3x}\, dx$. 25. $\int\limits_{0}^{\pi/4} e^{2x}\sin^2 x\, dx$. Sad smo se toliko izvežbali da možemo rešiti i ispitni zadatak na Londonskom univerzitetu, koji sadrži tri integrala:

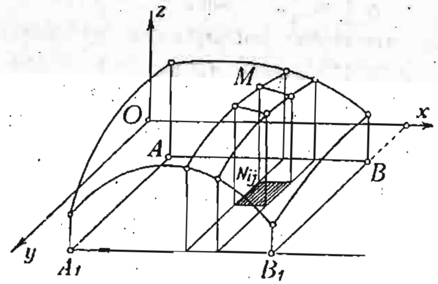
26. $\int \frac{x\, dx}{x^2+4x+5}$. 27. $\int \frac{x^2 dx}{(x+3)^2(x+2)}$. 28. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x\, dx$.

29. $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x}}$. 30. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x\, dx}{(x-1)(x+2)}$.

2.6. Proširenje pojma određenog integrala. Višestruki integrali

Pojam određenog integrala kao zbira beskrajno velikog broja beskrajno malih elemenata, koji smo proučavali u obliku $\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx$, sa određenim osobinama podintegralne funkcije $f(x)$ i područja, duži $b-a$, može biti proširen i na druge osobine kako elemenata $f(x)\, dx$, tako i područja zbira. Zbog njihove važnosti u primenama navešćemo proširene pojmove određenog integrala u oblicima dvostrukog, trostrukog i višestrukog integrala. Pri tome ćemo se zadržati samo na konkretnim primerima, čak i bez onih teorijskih dopuna koje smo navodili u vezi sa polaznim oblikom određenog integrala.

a. *Dvostruki integral.* Pretpostavimo da se traži da odredimo zapreminu tela (sl. 6) omeđenu delom bočne površine pravouglog paralelepipeda, sa osnovom pravougaonika ABB_1A_1, u ravni Oxy, i površinom $z=z(x, y)$, kao gornjom granicom datog tela.



Sl. 6 — Element dvostrukog integrala

Koordinate temena pravougaonika neka budu $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_0)$, $A_1(x_0, y_1)$, $B_1(x_1, y_1)$. Izdelimo taj pravougaonik, pomoću pravih paralelnih sa osama Ox i Oy, na male pravougaonike. Neka je pri tome duž AB izdeljena na n delova, a duž AA_1 na m delova, i neka je tačka N_{ij} presek neke dve paralele. Za tačku N_{ij}, sa koordinatama x_i, y_j, konstruišimo tačku $M(x_i, y_j, z_{ij})$ površine $z=f(x, y)$, pa ćemo imati $z_{ij}=f(x_i, y_j)$. Označimo dimenzije malog pravougaonika oko tačke N_{ij} sa Δx_i, Δy_j; proizvod $z_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j$ predstavlja zapreminu malog pravouglog paralelepipeda. Zapremina ovog poslednjeg u diferencijalnom obliku, $f(x, y)\, dx\, dy$, može biti smatrana kao *element zapremine* našeg *tela*. A samu zapreminu tela treba smatrati kao graničnu vrednost, ako ona postoji, zbira svih tih elemenata, tj.

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j,$$

pri čemu ne samo n i m teže beskonačnosti, već je i podela duži AB i AA_1 takva da i najveće od veličina Δx_i i Δy_j teže nuli. Napisana granična vrednost označava se sa

$$V = \int\limits_{y_0}^{y_1}\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x, y)\, dx\, dy,$$

i zove se *dvostruki integral funkcije $f(x, y)$ proširen na oblast datog pravougaonika.* Da vidimo kako se izračunava taj integral.

Uzmimo telo slično prethodnom (sl. 6) sa koordinatama temena pravougaonika osnove: $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $B_1(a, b)$, $A_1(0, b)$. Jednačinu gornje površine tela uzimamo u obliku $z=h+\frac{b-y}{b}\left[2d+p\sin\frac{\pi x}{a}\right]$. Ovoj transcendentnoj jednačini odgovara konkretna površina jednostavne geometrijske prirode. Pokazaćemo to objašnjavajući svaki član izraza kote z. Kota z za proizvoljnu tačku $N(x, y)$ osnove ima tri dela. Prvi deo odgovara tačkama ravni paralelne ravni Oxy na rastojanju h. Drugi deo, $2d(b-y):b$, pripada kosoj ravni paralelnoj Ox osi, koja prolazi kroz tačke $(0, 0, h+2d)$, $(0, b, h)$ — nacrtaj tu ravan! Treći deo, u obliku $\frac{p}{b}(b-y)\sin\frac{\pi x}{a}$, odgovara rastegnutoj sinusoidi sa promenljivom amplitudom, koja opada od p, u Oxz ravni, do nule u ravni $y=b$. Prema napisanoj vrednosti z, dvostruki integral za zapreminu tela treba ovako izraziti

$$V=\int_0^a\int_0^b\left[h+\frac{b-y}{b}\left(2d+p\sin\frac{\pi x}{a}\right)\right]dy\,dx.$$

Smatrajući, prvo, x kao konstantu, posle integracije po y imaćemo

$$V=\int_0^a\left[hy+\left(2d+p\sin\frac{\pi x}{a}\right)\frac{1}{b}\left(by-\frac{1}{2}y^2\right)\right]_0^b dx=$$

$$=\int_0^a\left[bh+\frac{1}{2}b\left(2d+p\sin\frac{\pi x}{a}\right)\right]dx.$$

Izvršimo li zatim integraciju po x, imaćemo

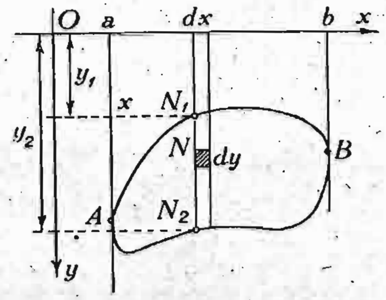
$$V=\Big|_0^a\left[b(h+d)x-\frac{1}{2}bp\frac{a}{\pi}\cos\frac{\pi x}{a}\right]=ab(h+d)+abp/\pi=$$

$$=ab(h+d+p/\pi).$$

Prema rezultatu integracije vidimo da se zapremina sastoji iz tri dela: 1. iz zapremine abh pravouglog paralelepipeda; 2. zapremine abd trostrane prizme sa osnovom pravouglim trouglom, sa katetama b i $2d$ i visinom a; i,

najzad, 3. zapremine između kose ravni i granične transcendentne površine, koja iznosi abp/π, kako je to pokazala dvostruka integracija.

Pri uvođenju pojma dvostrukog integrala uzimali smo jednostavan slučaj, kad je područje pravougaonik i, u vezi s tim, postavljali smo i granice integracije. Oslobodimo se sad tog ograničenja i pretpostavimo da je kontura područja neka zatvorena kriva u ravni Oxy. Prethodno izlaganje ostaje na snazi, samo ga treba dopuniti postupkom za određivanje granica integracije. Objasnićemo postupak na slici (sl. 7). Neka je $f(x, y,)\,dy\,dx$ element integrala. Sabiranje svih takvih elemenata možemo ovako izvršiti. Označimo sa N tačku prave paralelne sa Oy osom, koja služi kao granica elemenata duž te prave. Ako sa x označimo apscisu tačke N za sabiranje svih elemenata duž te prave, treba odrediti ordinate y_1 i y_2 tačaka preseka sa datom konturom kao funkcije x-a: $y_1=y_1(x)$ i $y_2=y_2(x)$ i tada se sabiranje svih elemenata na toj pravoj izražava integralom $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy$, pri konstantnoj vrednosti x. Kao rezultat integracije dobiva se određena funkcija x-a, koja se odnosi na datu duž N_1N_2. Sabiranje elemenata sa svih takvih duži daje vrednost integrala proširenu na celokupno područje. Kako se krajnje duži N_1N_2 završavaju u tačkama, A i B, dodira paralelnih sa Oy osom i date konture, traženi integral, pošto odredimo apscise a i b tih tačaka, dobiva granice $V=\int_a^b\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy\,dx$. Sličan postupak primenjuje se i u slučajevima kad je kriva konture komplikovanija, kao i u slučajevima kad jedna ili više drugih kontura izdvajaju deo površine od integracije.



Sl. 7 — Krivolinijska kontura područja

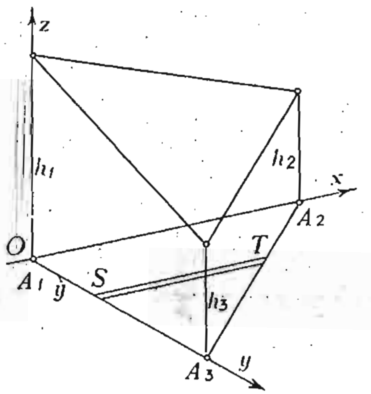
Uzmimo nekoliko primera.

1. Funkcija z je definisana jednačinom ravni $x+6y+4z=16$. Odrediti vrednost integrala $\iint_Q z\,dx\,dy$ proširenu na

površinu Q trougla (sl. 8) sa temenima $A_1(0,0)$, $A_2(2,0)$, $A_3(0,1)$.

Pošto je $z=4-\frac{x}{4}-\frac{3}{2}y$, a iz jednačine prave kroz tačke A_2 i A_3 u ravni Oxy sleduje da je $x=2(1-y,)$ integral proširen na trougao $A_1A_2A_3$, treba uzeti u obliku

$$J=\int_0^1\int_0^{2(1-y)}\left(4-\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}y\right)dx\,dy.$$



Sl. 8 — Zapremina trostrane koso zarubljene prizme

Prva integracija, po x, daje

$$\int_0^{2(1-y)}\left(4-\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}y\right)dx=$$

$$=\left[4x-\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}yx\right]_0^{2(1-y)}=$$

$$=\frac{15}{2}-10y+\frac{5}{2}y^2.$$ Integracija je vršena po nekoj pravoj ST sa kon.tantnom vrednošću y-a. Zatim vršimo integraciju po y: $\int_0^1\left(\frac{15}{2}-10y+\frac{5}{2}y^2\right)dy=\left[\frac{15}{2}y-\frac{10}{2}y^2+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3}y^2\right]_0^1=\frac{10}{3}$. Dobiveni rezultat primenom integralnog računa odgovara poznatoj teoremi iz Elementarne geometrije koja glasi: Zapremina trostrane koso zarubljene prizme jednaka je zbiru zapremina triju piramida, zajedničke osnove sa prizmom, čiji su vrhovi u temenima trougla kosog preseka, tj.

$$V=\frac{1}{3}Q\,(h_1+h_2+h_3).$$

Zaista, osnova naše prizme je pravougli trougao sa katetama 2 i 1, pa, prema tome, ima površinu jednaku jedinici, a kote temena su 4, $\frac{7}{2}$, $\frac{5}{2}$. I tako zapremina naše prizme iznosi $V=\frac{1}{3}\cdot1\cdot\left(4+\frac{7}{2}+\frac{5}{2}\right)=\frac{10}{3}$, što odgovara prethodnom rezultatu.

2. Funkcija z je definisana jednačinom ravni $x+6y+4z=16$. Odrediti vrednost integrala $\iint\limits_Q z\,dx\,dy$ proširenu na površinu Q pravougaonika sa temenima $A_1(2, 1, 0)$, $A_2(-2, 1, 0)$, $A_3(-2, -1, 0)$, $A_4(2, -1, 0)$. Dobiveni rezultat uporediti sa rezultatom na osnovu teoreme Elementarne geometrije. Ovaj zadatak je jednostavniji od prethodnog, jer su granice oba integrala stalne.

3. Funkcija z je definisana jednačinom $2z=x^2+y^2$. Odrediti vrednost integrala $\iint\limits_Q z\,dx\,dy$ proširenu na osnovu cilindra sa jednačinom $x^2+y^2=4$.

Pošto se takvo telo deli na četiri jednaka dela, imamo ovaj dvostruki integral $J=4\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\,dx\,dy$, koji, posle integracije po x, daje $\frac{4}{3}\int_0^2\left(2\sqrt{4-y^2}+y^2\sqrt{4-y^2}\right)dy$. Na osnovu dva ranije data obrasca za integrale imamo

$$J_1=\int\sqrt{4-y^2}\,dy=\frac{1}{2}y\sqrt{4-y^2}+2\arcsin\frac{y}{2}+C,$$

$$J_2=\int y^2\sqrt{4-y^2}\,dy=-\frac{1}{4}y\,(4-y^2)^{3/2}+J_1.$$

Primetimo li da članovi sa proizvodom $y(4-y^2)^{1/2}$ za obe granice imaju vrednosti nulu, tako da mogu biti izostavljeni, dolazimo do rezultata da je

$$J=\frac{4}{3}\cdot\Big|_0^2\left(4\arcsin\frac{y}{2}+2\arcsin\frac{y}{2}\right)=\frac{4}{3}\cdot6\cdot\frac{\pi}{2}=4\pi.$$

b. *Trostruki integral*. Posle uvođenja pojma određenog integrala sa područjem u obliku duži i pojma dvostrukog integrala sa područjem u obliku površine, dolaze na red pojmovi trostrukog i, uopšte, višestrukog integrala.

U trostrukom integralu područje je trodimenzionalna oblast, konkretno — zapremina. Element takvog integrala, u Dekartovim koordinatama, izgleda $f(x, y, z)$, $dx\,dy\,dz$, gde je $f(x, y, z)$ funkcija tačke područja, a proizvod $dx\,dy\,dz$ zapremina elementarnog paralelepipeda. Granična vrednost zbira ovakvih elemenata, proširena na celokupnu zapreminu V tela, izražava se trostrukim integralom

$$J = \underset{V}{\iiint} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

gde uvedena nova oznaka pokazuje da integral treba da bude proširen na zapreminu V.

c. *Višestruki integral*. Sad je lako napisati i obrazac za višestruki određeni integral proširen na neku oblast sa n dimenzija. Ako zamislimo n Dekartovih koordinata, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ u tom prostoru, formalni izraz za određeni integral u njemu izgledaće ovako

$$\underset{V_n}{\iint \ldots \int} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n,$$

pri čemu smo sa V_n označili n-dimenzionalnu zapreminu, područje na koje je proširen taj integral. Da li su takvi integrali samo matematičke fikcije?! Ne. Uzmimo jednostavniji primer iz prirode. Sunce privlači Zemlju. Kako? Svaki delić Sunčeve mase privlači svaki delić Zemljine mase. Da odredimo celokupnu silu privlačenja između Zemlje i Sunca treba da saberemo sve sile privlačenja između pojedinih delića. Ne ulazeći u detalje računa, možemo zaključiti da se intenzitet F celokupne sile privlačenja Zemlje od strane Sunca izražava integralom oblika $F = \underset{V_T}{\iiint}\underset{V_S}{\iiint} f(m_T, M_S)\,dm_T\,dM_S$, gde podintegralna funkcija zavisi od položaja tačaka m_T i M_S, Zemlje i Sunca, sa elementima masa dm_T i dM_S, a šestostruki integral je proširen na celokupnu masu i jednog i drugog nebeskog tela. Ako od ova dva stvarna tela pređemo na apstrakciju, možemo zamisliti celokupnu masu Zemlje, m, vezanu za jednu tačku — centar mase Zemlje, a masu M sa centrom Sunca. Tada, uzimajući

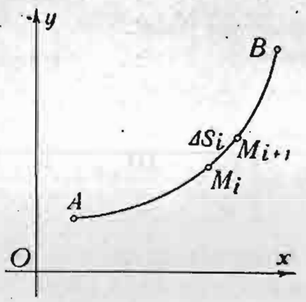
u obzir izraz funkcije $f(m_T, M_S)$ za slučaj Njutnove gravitacione sile, dobivamo za celokupnu silu izraz $F = k^2 \dfrac{mM}{R^2}$, gde je k^2 koeficijent proporcionalnosti, čija je vrednost $k^2 = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ $M^{-1}L^3T^{-2}$, a R — rastojanje centra Zemlje od centra Sunca. Podintegralna funkcija se pretvorila u k^2/R^2, a šestostruki integral je degenerisao u dve tačke, sa masama m i M na rastojanju R.

2.7. Krivolinijski integral

Područje određenog integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ je deo prave linije i u tom smislu on se može shvatiti kao pravolinijski integral, u širem smislu kao određeni integral proširen na jednodimenzionalnu oblast u jednodimenzionalnom polju skalara $f(x)$. Taj integral, kao što smo videli, stoji u vezi sa izrazom $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$, čiji je sadržaj dobro poznat.

Bilo bi prirodno sad postaviti pitanje o proširenju pojma određenog integrala sa pravolinijskim područjem na određeni integral sa krivolinijskim područjem i to u polju skalara, bilo u ravni sa vrednošću $f(x, y)$ bilo u prostoru sa vrednošću $f(x, y, z)$.

Ako je kriva (sl. 9) data jednačinom $y = f(x)$, element novog integrala je $f(x_i, y_i)\,\Delta S_i$, gde su x_i, y_i koordinate tačke M_i krive, a, u isto vreme, i tačke koja pripada polju skalara $f(x, y)$, i ΔS_i rastojanje između te tačke i susedne tačke M_{i+1} iste krive. Integral koji odgovara prethodnom elementu, $\int_A^B f(x, y)\,ds$, proširen na sve tačke krive od tačke A do tačke B je *krivolinijski integral u datom polju skalara* $f(x, y)$. Da bi se mogao izračunati za Dekartove koordinate, treba sta-



Sl. 9 — Krivolinijski integral

viti za datu krivu $y=y(x)$ i $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$, gde je y' izvod funkcije y po x. Prema tome treba izračunati

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x)) \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx.$$

Za parametarski oblik krive sa $x=x(u)$, $y=y(u)$ imamo integral $\int_{u_0}^{u_1} f(x(u), y(u)) \sqrt{x'^2+y'^2}\,du$, gde je, napr, $x'=dx/du$. Najzad, ako se za parametar uzme luk s krive, dakle stavi $x=\varphi_1(s)$, $y=\varphi_2(s)$, a znamo i skalar polja $f(x, y)$ izraziti kao funkciju s, imaćemo ponovo oblik integrala $\int_A^B f(s)\,ds$, koji se može tumačiti kao pravolinijski integral.

Za krivu liniju u prostoru sa skalarom $f(x, y, z)$ trodimenzionalnog polja imamo osnovni obrazac krivolinijskog integrala u obliku $\int_A^B f(x, y, z)\,ds$. Slično prethodnom, za njegovo stvarno izračunavanje treba uzeti jedan od navedenih oblika. Za Dekartovu koordinatu se možemo poslužiti obrascem $\int_A^B f(x, y(x), z(x)) \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$.

Primetimo da pri izračunavanju krivolinijskog integrala treba uzimati u obzir ne samo znak podintegralne funkcije, već i znak diferencijala, koji zavisi od smera u kome se vrši integracija duž krive, koja se smatra kao *orijentisana kriva.*

Kako u teoriji tako i u primenama krivolinijski integrali igraju značajnu ulogu u naročitim skupovima, koji stoje u vezi sa skalarnim proizvodom vektora nekog polja i vektora diferencijalnog pomeranja tačke u tom polju. Zamislimo u prostoru vektor $\vec{V}$ sa koordinatama P, Q, R kao funkcijama koordinata x, y, z neke tačke M prostora; s druge strane, označimo sa $d\vec{r}$ vektor pomeranja vektora $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$, a njegove koordinate sa dx, dy, dz. Skalarni proizvod ovakva dva vektora daje diferencijalni izraz $(\vec{V}, d\vec{r})=P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz$.

Ako je vektor $\vec{V}$ sila, i označimo je sa $\vec{F}(P, Q, R)$, prethodni izraz u Mehanici predstavlja *rad sile F duž datog puta* $d\vec{r}$. Ako u polju sile $\vec{F}$ treba odrediti njen rad duž konačnog puta napadne tačke sile, iz položaja A u položaj B, duž date krive, zato treba izračunati određeni krivolinijski integral $\int_A^B [P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz]$. Da bi izlaganje bilo što jednostavnije zaustavićemo se na slučaju ravnog polja sile i kretanju tačke u toj ravni. Za izračunavanje integrala $\int_A^B [P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy]$, za krivu sa jednačinom $y=\varphi(x)$ ili $x=\psi(y)$, ili, u parametarskoj formi, $x=x(u)$, $y=y(u)$, možemo na više načina postupiti. Odgovarajuće obrasce čitalac može sam izvesti. Pri prelazu na dužinu s luka krive, integral uzima oblik $\int_A^B [P(x, y)\cos\alpha+Q(x, y)\cos\beta]\,ds$, gde su α i β uglovi koje pomeranje $d\vec{r}$, sa modulom $|d\vec{r}|=ds$, obrazuje sa koordinatnim osama. Važan je slučaj kad se koordinate sile $P(x, y)$, $Q(x, y)$ javljaju kao delimični izvodi neke funkcije $U(x, y)$, tj. $P=\frac{\partial U}{\partial x}$, $Q=\frac{\partial U}{\partial y}$. Tada je $P\,dx+Q\,dy=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=dU$, tj. predstavlja totalni diferencijal i prema tome, $\int_A^B (P\,dx+Q\,dy)=\int_A^B dU=U(x_B, y_B)-U(x_A, y_A)$. Ako za datu silu $\vec{F}(P, Q)$ postoji funkcija $U(x, y)$, ona se zove *funkcija sile.* Dobiveni rezultat integracije pokazuje tačnost stava prema kojem: rad sile koja ima funkciju sile zavisi samo od početnog i krajnjeg položaja pokretne tačke, a ne zavisi od oblika puta kojim su spojena ta dva krajnja položaja.

Izvešćemo uslov koji treba da zadovoljavaju funkcije $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ da bi one imale funkciju sile. Kako treba da bude $P(x, y)=\frac{\partial U}{\partial x}$, $Q(x, y)=\frac{\partial U}{\partial y}$, a napisana dva delimična izvoda, u običnim tačkama, zadovoljavaju uslov $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)$, to i za P i Q imamo uslov $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

Dobili smo neophodan uslov. Pokažimo da je isti i dovoljan. Neka su dati P i Q, koji zadovoljavaju prethodni uslov. Odredimo U. Pošto je $\frac{\partial U}{\partial x}=P(x, y)$, smatrajući y kao konstantu vršimo integraciju $U=\int P(x, y)\,dx=F(x, y)+C(y)$, pri čemu smo dodali konstantu C kao funkciju konstante y. Da bismo odredili $C(y)$, diferencirajmo prethodnu jednačinu po y: $\frac{\partial U}{\partial y}=Q=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{dC}{dy}$. Pokazaćemo sad prvo da razlika $Q-\frac{\partial F}{\partial y}$ ne zavisi od x. Zato pokažimo da je njen izvod po x sjednak nuli. Diferencirajmo $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$. Za određivanje $C(y)$ imamo $C(y)=\int\left[Q-\frac{\partial F}{\partial y}\right]dy+{}$ $+C$, gde je C prava konstanta integracije. Prema tome, konačno dobivamo $U=\int P(x, y)\,dx+\int\left[Q-\frac{\partial F}{\partial y}\right]dy+C$. Time imo dokazali da je navedeni diferencijalni uslov za P i Q dovoljan.

Slični uslovi se mogu napisati i za tri funkcije P, Q, R to, da bude zanimljivije, u matričnoj formi $\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{matrix}\right\|=0.$

Prva vrsta pokazuje numeru uslova; druga operator koji treba primeniti na treću vrstu da bi se dobio svaki uslov. Tako imamo: $\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0$, $\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0$, $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$. Ako funkcije P, Q, R zadovoljavaju ta tri uslova, sila $\vec{F}(P, Q, R)$ ima funkciju sile i ona se može odrediti iz obrasca $U=\int P\,dx+{}$ $+\int\left(Q-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)dy+\int\left(R-\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right)dz+C$. Vežbe radi čitalac može sam izvesti taj rezultat i lako tada razumeti uvedene oznake.

Glava treća

PRIMENE INTEGRALNOG RAČUNA

3.0. Diferencijalna analiza i integralna sinteza

Diferencijalni račun se može smatrati kao prethodni stadij u proučavanju prirodnih pojava. Njegov glavni zadatak je proučavanje pojava „u malom", u maloj, diferencijalnoj oblasti. Proučavati u celini pojavu, na osnovu rezultata diferencijalne analize, to je zadatak integralnog računa. Jasno je da matematički metod diferencijalne analize i integralne sinteze nosi univerzalni karakter. Zadatak ove glave je da prikaže i pokaže na primerima značaj tog metoda u raznim matematičkim disciplinama.

3.1. Primene u matematičkoj analizi

Pojam integrala, određenog i neodređenog, kao osnovni pojam Infinitezimalnog računa bio je, već od svog postanka, obilato primenjivan pri rešavanju raznih problema kako teorijskog tako i praktičnog karaktera. I mada ova knjiga treba da ima više praktičan karakter, ipak ćemo i u njoj posvetiti malo mesta primerima o ulozi integrala u problemima teorijskog karaktera. Tako će potpunije biti osvetljen duboki sadržaj pojma integrala i onih operacija koje vršimo sa njim.

1. *Valisova formula* (J. Wallis, 1616—1703) *za određivanje broja* π. Očevidno je da za ugao x važe u granicama $0<x<\pi/2$ nejednakosti

$$\sin^{2k+1} x<\sin^{2k} x<\sin^{2k-1} x,$$

jer množilac $\sin x$ smanjuje prethodni proizvod sinusâ. Ako sad ove nejednakosti integrišemo u granicama od 0 do $\pi/2$, dobićemo integralne nejednakosti

$$J_{2k+1}<J_{2k}<J_{2k-1},$$

gde su iskorišćeni obrasci (1) i (2) člana 2.3. Iz tih nejednakosti imamo

$$\left[\frac{2k(2k-2)\ldots 4\cdot 2}{(2k-1)(2k-3)\ldots 3}\right]^2\frac{1}{2k+1}<\frac{\pi}{2}<$$

$$<\left[\frac{2k(2k-2)\ldots 4\cdot 2}{(2k-1)(2k-3)\ldots 3}\right]^2\frac{1}{2k-1}.$$

Kako odnos veće prema manjoj veličini $\mu=(2k+1):(2k-1)$ teži jedinici, kad k teži beskonačnosti, možemo zaključiti da svaki od navedenih proizvoda ima istu granicu, jednaku $\pi/2$, tj.

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{2k(2k-2)\ldots 4\cdot 2}{(2k-1)(2k-3)\ldots 3}\right]^2\frac{1}{2k+1}.$$

To je tzv. *Valisova formula* za određivanje i proučavanje strukture broja π. Primetimo da je Valisova formula dosta nezgodna za stvarno izračunavanje broja π, jer količnik μ vrlo sporo teži jedinici kad $k\to\infty$ i to na osnovu računa sa velikim brojevima.

2. *Tejlorov red sa ostatkom u obliku određenog integrala.* Pokazaćemo kako se na osnovu integralnog računa može izvesti Tejlorov obrazac za razvijanje funkcije u red.

Pođimo od obrasca za diferenciranje $(uv)'=uv'+vu'$, kojim smo se koristili za delimičnu integraciju. Proširimo ga na zbir

$$\frac{d}{dx}[u\,v^{(n)}-u'\,v^{(n-1)}+u''\,v^{(n-2)}-\cdots+(-1)^n u^{(n)}\,v]=$$

$$=u\,v^{(n+1)}+(-1)^{n+1}u^{(n+1)}v,$$

što se lako proverava, jer se, pri diferenciranju dva susedna proizvoda, dva člana skraćuju. Iz tog obrasca sleduje tzv. *uopšteni obrazac integralnog računa za delimičnu integraciju*

$$\int_a^b u\, v^{(n+1)}\, dx = [u\, v^{(n)} - u'\, v^{(n-1)} + u''\, v^{(n-2)} - \ldots +$$

$$+ (-1)^n u^{(n)} v\Big]_a^b + (-1)^{n+1} \int_a^b u^{(n+1)}\, v\, dx.$$

Ako u taj obrazac stavimo $u = f(x)$, $v = (b-x)^n$, i uzmemo u obzir da je $v' = -n(b-x)^{n-1}, \ldots,\ v^{(k)} = (-1)^k n(n-1)\ldots(n-k+1)(b-x)^{n-k}, \ldots,\ v^{(n-1)} = (-1)^{n-1} n(n-1)\ldots 2(b-x)$, $v^{(n)} = (-1)^n n!$, $v^{(n+1)} = 0$, dobićemo

$$0 = [(-1)^n n!\, f(x) - (-1)^{n-1} n!\, f'(x)(b-x) + \ldots +$$

$$+ (-1)^n f^{(n)}(b-x)^n\Big]_a^b + (-1)^{n+1} \int_a^b f^{(n+1)}(b-x)^n\, dx.$$

Ako podelimo ovu jednačinu sa $(-1)^n n!$ dolazimo do rezultata

$$f(b) - f(a) = f'(a)(b-a) + \frac{1}{2} f''(a)(b-a)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(b-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n\, dx,$$

koji, sa ranije uvedenim oznakama, daje Tejlorov obrazac u obliku

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_n,$$

gde je

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt,$$

pri čemu je t promenljva integracije.

Važno je da se obrati pažnja na to, da napisana desna strana prethodnog oblika Tejlorovog reda, s ostatkom R_n u obliku napisanog integrala, daje tačnu vrednost funkcije $f(x)$, ako su sve radnje ispunjene tačno, uključujući pri tome i tačno izračunavanje integrala. Ali je baš u integralu najveća teškoća za tačno izračunavanje. Zbog toga se pri približnom izračunavanju iskorišćuje teorema o srednjoj vrednosti integrala, u jednom ili drugom obliku, a to i dovodi do raznih oblika R_n. Tako ostatak u *Lagranževom obliku* daje

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

Zaista, ako stavimo u integral $f^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(\xi)$, gde je ξ srednja vrednost argumenta, imamo

$$R_n = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_a^x (x-t)^n\, dt = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_a^x =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

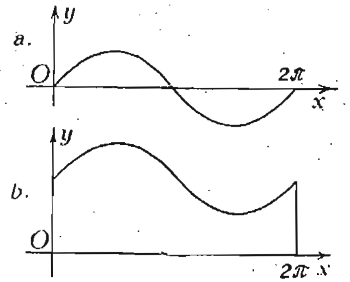
3.2. Primene u Geometriji

1. *Izračunavanje površina*

A. *Izračunavanje površina u Dekartovim koordinatama.* Kako smo videli (obrazac XIV) izračunavanje površine u Dekartovim koordinatama se vrši pomoću obrasca $Q = \int_a^b y\, dx$. Element tog integrala $y\, dx$ predstavlja površinu pravougaonika sa osnovom dx i visinom $y = f(x)$. Prema tome izračunavanje površine, tzv. *kvadratura*, svodi se na izračunavanje određenog integrala. Otuda se, i obratno, izračunavanje integrala često zove *kvadratura*.

Prema tome u rešavanju zadataka o određivanju površina imamo tri faze: 1. Određivanje elementa. Za Dekartove koordinate treba odrediti ordinatu y kao funkciju $f(x)$ od x. 2. Izračunati neodređeni integral te funkcije i 3. Postaviti granice prema oblasti koju zauzima tražena površina i dovršiti izračunavanje. Pri izračunavanju određenog integrala kao zbira beskrajno velikog broja beskrajno malih elemenata, druga i treća faza se spajaju u jednu operaciju.

Pri tumačenju osobina određenog integrala već smo odredili neke površine. Ali ćemo rešiti još nekoliko zadataka obraćajući pritom pažnju na moguće greške.



Sl. 10 — Površina sinusoide

1. Odrediti površinu između sinusoide $y=\sin x$ i Ox ose u granicama od 0 do 2π (sl. 10, a).

Prva faza $y\,dx=\sin x\cdot dx$; druga $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$; najzad, treća

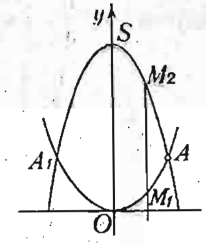
$$Q=\Big|_0^{2\pi} -\cos x = -1-(-1)=0.$$

Jasno je da ovaj rezultat ne odgovara zadatku, naročito s obzirom na sliku. Izračunamo li samo četvrtinu tražene površine, imaćemo $\frac{1}{4}Q=\int_0^{\pi/2}\sin x dx = \Big|_0^{\pi/2}(-\cos x)=0-(-1)=1$ i, prema tome, $Q=4$. Gde je greška? Pri prvom računu nismo uzeli u obzir da se obično, jednostavnosti radi, u teoriji pretpostavlja da je podintegralna funkcija pozitivna. Uzmimo istu sinusoidu i pretpostavimo da treba odrediti površinu između krive $y=2+\sin x$ i Ox ose u granicama od 0 do 2π (sl. 10, b). U ovom zadatku imamo $Q=\int_0^{2\pi}(2+\sin x)\,dx=\Big|_0^{2\pi}(2x-\cos x)=4\pi-(1-1)=4\pi$, a to odgovara stvarnosti. Englezi u svojim knjigama naročito naglašuju: A figure is an essential part of the solution of any area problem.

2. Odrediti površinu između dve parabole: $y=\frac{1}{3}x^2$ i

$$y=\frac{15}{2}-\frac{1}{2}x^2.$$

Ako rešimo zajedno date dve jednačine, dobićemo koordinate tačaka preseka $A(3, 3)$, $A_1(-3, 3)$. Pošto je slika simetrična u odnosu na Oy osu, njena površina je jednaka dvostrukoj površini OSA omeđenoj lukom OA prve parabole, lukom AS druge parabole i delom OS ose y. Element površine ima vrednost



Sl. 11 — Površina između dve parabole

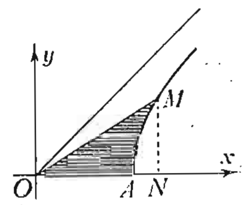
$$M_1M_2\cdot dx=(y_2-y_1)\,dx=\left[\frac{15}{2}-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^2\right]dx=\left(\frac{15}{2}-\frac{5}{6}x^2\right)dx.$$

Neodređeni integral iznosi

$$\int\left(\frac{15}{2}-\frac{5}{6}x^2\right)dx=\frac{15}{2}x-\frac{5}{18}x^3+C.$$

Granice za polovinu površine su 0 i 3; prema tome cela površina ima vrednost $Q=2\Big|_0^3\left(\frac{15}{2}x-\frac{5}{18}x^3\right)=30.$

3. Površina hiperboličkog sektora.



Sl. 12 — Površina hiperboličkog sektora

Izračunajmo površinu hiperboličkog sektora omeđenu delom OA ose x (sl. 12), lukom hiperbole AM i potegom OM tačke hiperbole $M(x, y)$ u odnosu na centar O hiperbole. Označimo tu površinu sa Q. Imaćemo

$Q=\frac{1}{2}xy-\int_a^x y\,dx$, gde je $y=+\sqrt{x^2-a^2}$,

što sleduje iz jednačine jednakostrane hiperbole $x^2-y^2=a^2$. Pošto za integral $J=\int_a^x\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ imamo

$$J=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]_a^x$$

možemo konačno napisati $Q=\frac{1}{2}a^2\log\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)$. Ako sa Q_0 označimo površinu kruga poluprečnika a, $Q_0=\pi a^2$, i uvedemo promenljivu

$$t=2\pi\frac{Q}{Q_0}=\log\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right),$$

možemo zaključiti, s jedne strane, da je $Q=\frac{1}{2}a^2t$, a, sa druge, da je

$$\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}=e^t,$$

te tako i

$$\frac{x}{a}-\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}=e^{-t}.$$

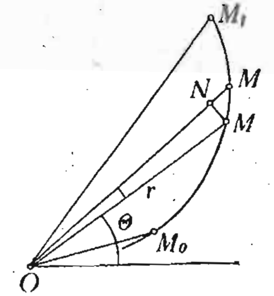
Iz ovih jednačina dobivamo vrednosti koordinata tačke hiperbole

$$x=a\,\frac{e^t+e^{-t}}{2}=a\cosh t,\qquad y=a\,\frac{e^t-e^{-t}}{2}=a\sinh t,$$

pri čemu između njih postoji veza $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$. Prethodne jednačine izražavaju parametarske jednačine hiperbole sa parametrom, t, koji u jednačini $Q=\frac{1}{2}a^2 t$ igra kod hiperbole istu ulogu kao što centralni ugao θ igra ulogu u obrascu za kružni sektor $Q_0=\frac{1}{2}a^2\theta$. Drugim rečima, parametar t kod hiperboličkih funkcija proporcionalan je površini hiperboličkog sektora i to sa istim koeficijentom proporcionalnosti kao i centralni ugao kruga što je proporcionalan površini kružnog sektora.

B. *Izračunavanje površina u polarnim koordinatama.* Neka je kriva određena vezom između polarnih koordinata r i θ tačke M (sl. 13). Površina omeđena potegom OM_0 tačke M_0 sa koordinatama r_0 i θ_0, lukom M_0M_1 i potegom OM_1 tačke M_1 sa koordinatama r_1 i θ_1 zove se *površina u polarnim koordinatama.*

U prvoj fazi izračunavanja treba odrediti element te površine. To je elementarni sektor OMM' sa beskrajno malim uglom $d\theta$. Ako sa poluprečnikom $OM=r$ nacrtamo beskrajno mali kružni luk, sa centrom u O, dobićemo beskrajno mali kružni sektor sa površinom $\frac{1}{2}r^2\,d\theta$. Ova površina se od površine sektora OMM' razlikuje za površinu MNM', koju možemo smatrati kao beskrajno malu drugoga reda, sa vrednošću $\frac{1}{2}r\,d\theta\cdot dr$. Rasuđivanjem sličnim onom koje smo primenili na slučaj površine u Dekartovim koordinatama,

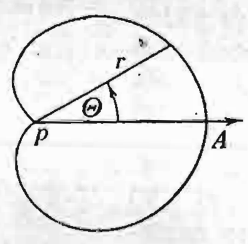


Sl. 13 — Površina u polarnim koordinatama

možemo izraz $\frac{1}{2}r^2\,d\theta$ zaista smatrati kao element integrala $\int\frac{1}{2}r^2\,d\theta$. I ako sa θ_0 i θ_1 označimo uglove krajnjih tačaka, M_0 i M_1, površinu u polarnim koordinatama možemo konačno odrediti određenim integralom

$$\text{(XV)}\qquad Q=\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1}r^2\,d\theta.$$

Za površinu kruga imamo neposredno $Q_0=\frac{1}{2}r^2\int_0^{2\pi}d\theta=\pi r^2$, a to je klasični obrazac iz Elementarne geometrije.



Sl. 14 — Površina kardioide

Rešimo i nekoliko zadataka.

1. Izračunati površinu *kardioide* (sl. 14), sa jednačinom $r=a(1+\cos\theta)$.

U prvoj fazi obrazovaćemo element $\frac{1}{2}r^2\,d\theta=\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta$; u drugoj izračunavamo neodređeni integral

$$\int\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta=\frac{1}{2}a^2\int(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta=$$

$$= \frac{1}{2} a^2(\theta + 2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta) + C.$$ Kako zbog simetričnosti slike treba površinu podeliti na dva dela, to ćemo imati da izračunamo

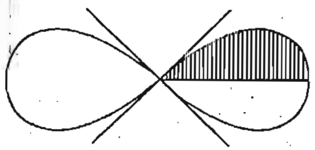
$$Q = 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (\theta + 2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \sin\theta\cos\theta),$$

i konačno nalazimo $Q = \frac{3}{2} \pi a^2$.

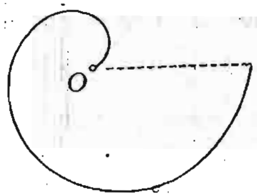
2. Izračunati površinu *lemniskate*, sa jednačinom $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ (sl. 15).

Površina lemniskate može se podeliti na četiri jednaka dela; u prvom od ovih ugao θ se menja od 0 do $\pi/4$, te tako za određivanje površine imamo integral

$$Q = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} r^2 \, d\theta = 2a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta \, d\theta = a^2 \Big/_0^{\pi/4} \sin 2\theta = a^2.$$



Sl. 15 — Površina lemniskate



Sl. 16 — Površina Arhimedove spirale

3. Izračunati površinu jednog zavoja *Arhimedove spirale* (sl. 16), sa jednačinom $r = a\theta$, i to u granicama od $\theta = 0$ do $\theta = 2\pi$.

Iz osnovnog obrasca $Q = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta$ imamo

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \theta^2 \, d\theta = a^2 \Big|_0^{2\pi} \frac{\theta^3}{3} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2.$$

2. *Izračunavanje dužine luka krive linije*

A. *Dužina luka krive linije u Dekartovim koordinatama.* U mojoj knjizi — Diferencijalni račun (Elementi II) odredili smo iz metričke forme za Dekartove koordinate, $ds^2 = dx^2 + dy^2$, diferencijal ds dužine luka krive linije. Kako je $ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$, za određivanje konačne dužine, L, luka krive linije imamo obrazac

$$\text{(XVI)} \qquad L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \, dx.$$

Ako je kriva data u parametarskom obliku, $x = x(u)$, $y = y(u)$, gde je u parametar i, prema tome, $dx = x' du$, $dy = y' du$, imaćemo integral u obliku

$$L = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{x'^2 + y'^2} \, du.$$

Kao primer odredimo dužinu jednog talasa cikloide, sa jednačinom $x = a(u - \sin u)$, $y = a(1 - \cos u)$. Kako su $dx = a(1 - \cos u)\, du$, $dy = a \sin u \, du$, imaćemo za $ds^2 = a^2 (2 - 2\cos u)\, du^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{u}{2} du^2$, odakle je $ds = 2a \sin \frac{u}{2} du$.

Pošto svaki cikloidni talas možemo podeliti na dva jednaka dela, pri čemu se u prvom od njih parametar u menja od 0 do π, za dužinu jednog talasa imamo izraz $L = 2 \int_0^{\pi} ds =$

$$= 4a \int_0^{\pi} \sin \frac{u}{2} \, du = 8a \Big|_0^{\pi} \left(-\cos \frac{u}{2}\right) = 8a.$$

Tako smo došli do zanimljivog rezultata da je dužina cikloide jednaka četvorostrukoj vrednosti prečnika kruga generatora.

B. *Dužina luka krive u polarnim koordinatama.* Iz slike (sl. 13) neposredno sleduje da rastojanje MM', koje predstavlja element ds luka krive u polarnim koordinatama, kao hipotenuza beskrajno malog pravouglog trougla MNM', sa već određenim katetama $r\,d\theta$ i dr, ima vrednost $ds=\sqrt{dr^2+r^2\,d\theta^2}$. Prema tome za traženu dužinu imamo integral

$$(\mathrm{XVII}) \qquad L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta.$$

Kao primer izračunaćemo dužinu luka kardioide. Pošto je $r=a(1+\cos\theta)$ i $r'=-a\sin\theta$, biće

$$L=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta=$$

$$=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta=2a\cdot 2\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=8a\Big|_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}=8a.$$

C. *Dužina luka krive u prostoru.* Za element ds dužine krive linije u prostoru, koja je data, recimo, u parametarskom obliku $x=x(u)$, $y=y(u)$, $z=z(u)$, sa parametrom u, treba uzeti dijagonalu beskrajno malog paralelepipeda sa dimenzijama dx, dy, dz. Prema metričkoj formi $ds^2=dx^2+$ $+dy^2+dz^2$, za određivanje dužine luka tada služi integral

$$L=\int_{u_0}^{u_1}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,du,$$

gde je, naprimer, $x'=\dfrac{dx}{du}$.

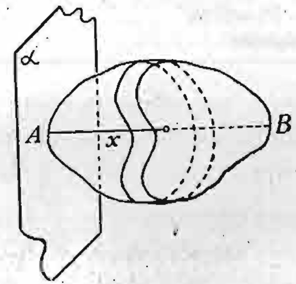
Primera radi odredimo dužinu zavoja zavojnice (II, sl. 49), sa jednačinom: $x=r\cos u$, $y=r\sin u$, $z=ku$. Kako je $ds^2=(r^2+k^2)\,du^2$, imaćemo integral

$$L=\sqrt{r^2+k^2}\int_0^{2\pi}du=2\pi\sqrt{r^2+k^2}.$$

Iz ovog rezultata sleduje: $L^2=(2\pi r)^2+H^2$, gde je $H=2\pi k$; drugim rečima, dužina luka zavojnice je hipotenuza pravouglog trougla sa katetama — lukom kruga osnove i odgovarajuće visine, do koje se popne tačka zavojnice. Namotavanje niza takvih pravouglih trouglova na valjak poluprečnika r stvara zavojnicu.

Iz Elementarne geometrije poznato je da se sa geometrijskim telom može povezati pozitivni broj koji služi kao mera zapremine tog tela. Pravila za određivanje tih brojeva za tela u obliku polijedara izložio je Euklid, u svojim „Elementima". Ali ta pravila nisu dovoljna, kao što se to vidi već na slučajevima površina omeđenih krivim linijama, a nisu dovoljna ni za određivanje zapremina tela omeđenih krivim površinama. Prema ranije već rečenom, treba i ovde primeniti metodu prelaza na graničnu vrednost. Prema toj metodi treba opet sa datim telom T, čiju ćemo nepoznatu zapreminu označiti sa V (volumen), povezati takva dva tela, T_1 i T_1^*, sastavljena od polijedara, da prvo telo, T_1, stane u telo T, a drugim T_1^*, da bude, obrnuto, obuhvaćeno telo T. Ako broj za meru zapremine prvog tela označimo sa V_1, a drugog sa V_1^*, traženi broj V treba da zadovoljava nejednakosti $V_1<V<V_1^*$. Ako smo u stanju da konstruišemo niz V_i, V_i^* takvih polijedara, koji će stalno zadovoljavati nejednakosti $V_i<V<V_i^*$ i da, pri tome, bude $\lim_{i\to\infty}(V_i^*-V_i)\to 0$, onda je $V=\lim_{i\to\infty}V_i=\lim_{i\to\infty}V_i^*$. Ako su ti uslovi zadovoljeni, za određivanje broja V možemo primeniti postupke Infinitezimalnog računa.

A. *Zapremina tela sastavljena od ploča.* Zaustavićemo se na jednostavnom slučaju kad su površine preseka tela ravnima, paralelnim datoj ravni, funkcije rastojanja preseka od te date ravni (sl. 17). Element takvog tela je ploča ograničena dvama paralelnim presecima na rastojanju dx i uzanim delom površine tela. Ako površinu preseka na rastojanju x od ravni α označimo sa $Q(x)$, element zapremine je jednak $Q(x)\,dx$, a sama zapremina se izražava integralom $\int_a^b Q(x)\,dx$.



Sl. 17 — Paralelni preseci tela

Nećemo ulaziti u razmatranje analitičkih uslova za primenu tog obrasca. Sama neposredna posmatranja tela i njegovih preseka potvrđuju zakonitost navedenog postupka.

Uzmimo prvo zadatak rešen već u Elementarnoj matematici.

1. Odrediti zapreminu pravilne piramide sa kvadratnom osnovom, a^2, i visinom, h. Ako za početak koordinate x uzmemo vrh piramide, na rastojanju x površina preseka paralelna osnovi iznosiće $Q(x) = a^2 \cdot x^2/h^2$. Prema tome za zapreminu piramide imamo integral

$$V = \int_0^h \frac{a^2}{h^2} x^2\, dx = \Big|_0^h \frac{a^2}{h^2} \frac{x^2}{3} = \frac{1}{3} a^2 h,$$

a to je već poznati rezultat, da je zapremina piramide jednaka jednoj trećini proizvoda površine osnove i visine.

2. Odrediti zapreminu troosnog elipsoida. Uzmimo troosni elipsoid sa jednačinom $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Presek tog tela sa ravni paralelnom sa Oyz ravni, na rastojanju x od početka koordinata, je elipsa sa poluosama $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$; znači ima za površinu $Q(x) = \pi yz = \pi \frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2)$.

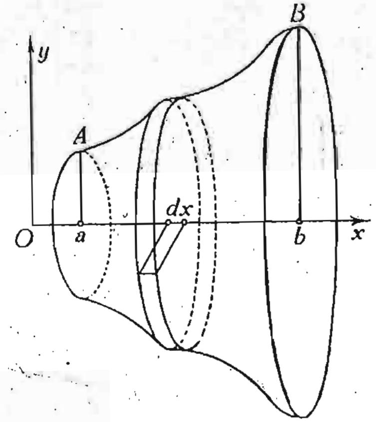
Prema tome, za zapreminu elipsoida imamo $V = 2\int_0^a Q(x)dx =$

$$= 2 \cdot \pi \frac{bc}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2)\, dx = 2\pi \frac{bc}{a^2} \Big|_0^a \left(a^2 x - \frac{1}{3} x^3\right) = \frac{4}{3} \pi abc.$$

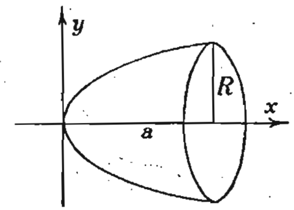
Za obrtni elipsoid, sa $b = c$, imamo $V = \frac{4}{3} \pi ab^2$ i, najzad, za loptu sa $a = b = c = r$ dobivamo dobro poznati obrazac za zapreminu lopte $V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{6} \pi D^3$, gde je D prečnik lopte.

B. *Zapremina obrtnih tela.* Kada se površina u ravni Oxy omeđena: krivom (sl. 18) $y = f(x)$ između tačaka A i B, sa apscisama a i b, ordinatama istih tačaka i odsečkom ose x od a do b, obrće oko ose x, ona u prostoru opisuje zapreminu, čiji je element ploča debljine dx između dve ravni normalne na osi x. Ovu ploču možemo smatrati kao valjak visine dx sa osnovom poluprečnika y. Prema tome element zapremine tela izgledaće $dV = Q(x)\, dx = \pi y^2 dx$, a sama zapremina, kako smo videli, izračunava se integralom

$$\text{(XVIII)} \qquad V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$



Sl. 18 — Zapremina obrtnih tela



Sl. 19 — Zapremina obrtnog paraboloida

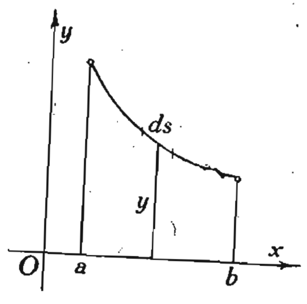
Kao primer, odredimo zapreminu obrtnog paraboloida (sl. 19), tj. tela čija se površina dobiva obrtanjem parabole oko ose simetrije. Pošto je jednačina parabole $y^2 = 2px$, za zapreminu paraboloida imaćemo integral

$$V = \int_0^a Q(x)\, dx = \int_0^a \pi y^2 dx = 2\pi p \int_0^a x\, dx = 2\pi p \Big|_0^a \frac{1}{2} x^2 = \pi p a^2.$$

Označimo li sa R poluprečnik kruga preseka paraboloida na rastojanju a od temena, njegovu vrednost ćemo odrediti iz jednačine $R^2 = 2pa$. Pomoću ovog izraza izračunatu zapreminu paraboloida možemo predstaviti $V = \frac{1}{2} \pi R^2 a$, i možemo zaključiti da je ona jednaka polovini zapremine valjka poluprečnika R i visine a.

4. *Površina obrtnih tela*

Za izračunavanje površine obrtnih tela uzmimo u obzir da je element te površine površina koju oko ose x (sl. 20) opisuje dužina ds, element luka. Elementarna geometrija uči da je površina koju opisuje duž, pri obrtanju oko ose, jednaka proizvodu te duži i obima kruga koji opisuje sredina duži. Pri tome se duž i osa obrtanja nalaze u istoj ravni. U našem slučaju će element površine, dS, obrtnog tela imati vrednost $dS = 2\pi y \cdot ds = 2\pi y \sqrt{1+y'^2}\, dx$; a sama površina određena je integralom



Sl. 20 — Površina obrtnih tela

$$\text{(XIX)} \quad S = 2\pi y \sqrt{1+y'^2}\, dx.$$

Kao primer izračunajmo površinu obrtnog elipsoida koju proizvodi elipsa $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, za koju je $y' = -bx : a\sqrt{a^2 - x^2}$. Pošto je $y\sqrt{1+y'^2} = b\sqrt{1-k^2x^2}$, gde je $k = e/a$ i e ekscentričnost elipse, sa vrednošću $e = \sqrt{a^2 - b^2} : a$, za traženu površinu dobivamo $S = 4\pi b \int\limits_0^a \sqrt{1-k^2x^2}\, dx$. Neodređeni integral ima vrednost

$$\int \sqrt{1-k^2x^2}\, dx = \frac{1}{2k}\left(\arcsin kx + kx\sqrt{1-k^2x^2}\right) + C;$$

na osnovu te vrednosti nalazimo za površinu

$$S = 4\pi b \Big[\frac{1}{2k}(\arcsin kx + kx\sqrt{1-k^2x^2})\Big]_0^a = 4\pi b \frac{1}{2k}(\arcsin ka +$$

$$+ ka\sqrt{1-k^2a^2}) = 2\pi ab\left(\sqrt{1-e^2} + \frac{\arcsin e}{e}\right).$$

To je izraz za površinu obrtnog elipsoida. Ako stavimo $a = b$, tako da je $e = 0$, elipsa se pretvara u krug i naš obrazac treba da dâ površinu lopte. Vidimo, međutim, da izraz $\arcsin e : e$

za $e = 0$ dobija neodređeni oblik $0 : 0$. Treba primeniti Lopitalovo pravilo, dakle diferencirati posebno brojilac i imenilac. I nalazimo $\left(\frac{\arcsin e}{e}\right)_{e\to 0} = \frac{0}{0} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} : 1\right)_{e\to 0} = 1$. Ako iskoristimo ovaj rezultat za površinu lopte konačno dobivamo $S = 4\pi a^2$, kao što to i znamo iz Elementarne geometrije.

Vežbanja:

1. Izračunati površinu omeđenu parabolom $y^2 = 6x$ i pravama $x = 1$, $x = 10$. 2. Izračunati površinu omeđenu parabolom $y^2 = 6x$, osom y i pravama $y = 4$, $y = 10$. 3. Izračunati površinu između parabole $y^2 = 6x$ i prave $y = 6x$. 4. Izračunati površinu omeđenu parabolom $y^2 = 6x$, osom x i pravom $y = 6x - 1$. 5. Izračunati površinu između parabole $y^2 = 6x$ i prave $y = 6x - 12$. 6. Izračunati površinu elipse sa jednačinom $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$. 7. Izračunati površinu omeđenu lančanicom sa jednačinom $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$, osama x i y i pravom $x = a$. 8. Izračunati površinu omeđenu krivom $y = \ln x$, osom x i ordinatama pravih $x = 1$ i $x = a$. 9. Izračunati površinu između cisoide sa jednačinom $y^2 = x^3 : (2a - x)$ i njene asimptote $x = 2a$. 10. Izračunati površinu omeđenu Arhimedovom spiralom sa jednačinom $r = a\theta$ u granicama od $\theta = 0$ do $\theta = 2\pi$. 11. Pokazati da je površina između dva potega hiperboličke spirale sa jednačinom $r\theta = a$ proporcionalna razlici tih potega. 12. Izračunati dužinu luka lančanice sa jednačinom $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ od tačke $(0, a)$ do tačke (x, y). 13. Izračunati dužinu krive sa jednačinom $9x^2 = 4(1 + y^2)^3$ od tačke $(2/3, 0)$ do tačke $(10\sqrt{5}/3, 2)$. (Napomena: za nezavisno promenljivu uzeti y). 14. Naći dužinu krive čija je jednačina $r = a(1 - \sin\theta)$. 15. Izračunati dužinu krive sa jednačinom $r = e^{a\theta}$ od $\theta = 0$ do $\theta = \frac{1}{2}\pi$. 16. Pomoću integracije naći zapremine: kupe, zarubljene kupe i lopte. 17. Data je kubna parabola sa jednačinom $2y = x^3$ i dve tačke na njoj $A(0, 0)$ i $B(2, 4)$. Uzmimo u obzir površinu omeđenu lukom AB, osom x i ordinatom tačke B. Odrediti zapremine dobijene obrtanjem te površine: 1) oko ose x i 2) oko ose y. 18. Naći zapreminu dobijenu obrtanjem površine omeđene sinusoidom $y = \sin x$ od tačke $(0, 0)$ do tačke $(\pi, 0)$ i osom x oko ose x. 19. Izračunati zapreminu dobijenu obrtanjem površine omeđene lančanicom sa jednačinom $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$, osom x i ordinatama pravih $x = 0$ i $x = b$ oko ose x. 20. Pomoću integralnog računa izračunati površinu lopte. 21. Izračunati površinu dobijenu obrtanjem dela lančanice sa jednačinom $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ od tačke $(0, a)$ do tačke sa apscisom a oko ose x. 22. Naći površinu prstena (torusa) dobijenog obrtanjem kruga $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ oko ose x $(b > a)$.

3.3. Primene u Geometriji masa

Ima takvih prirodnih objekata koje je zgodno opisivati rasporedom njihovih tačaka povezanih sa brojevima, ili, kako se to drukčije kaže, opterećenih brojevima pozitivnim ili negativnim, odnosno skalarnim veličinama. Tako, napr., raspored naselja na nekoj teritoriji može se opisati tačkama prebivališta svakog domaćinstva, opterećenim brojevima članova domaćinstva. Za grublje proučavanje rasporeda stanovništva tačke odgovaraju položaju naselja na karti, a broj — broju naseljenika dotičnog mesta.

U raznim naučnim granama, teorijskog i praktičnog karaktera, proučavanje rasporeda geometrijskih tačaka, opterećenih nekim skalarima, igra čak i bitnu ulogu u tim disciplinama. Pošto je takvo proučavanje istorijski prvo bilo primenjeno i proučeno kad je ulogu skalara igrala masa, tačka opterećena masom dobila je naziv *materijalne tačke*, a disciplina koja se bavi rasporedom materijalnih tačaka u prostoru naziv — *Geometrije masa*. U opštem slučaju, u toj disciplini pod masom treba razumeti skalar proizvoljne prirode, koji može biti i negativan. Tako u tu disciplinu spada proučavanje rasporeda, recimo, magnetskih ili električnih masa, koje mogu biti pozitivne i negativne. Ovde ćemo se zaustaviti na nekim pojmovima iz Geometrije pravih masa, koje igraju važnu ulogu naročito u Mehanici i Fizici.

Materijalni sistem. Skup materijalnih tačaka, u konačnom ili beskrajno velikom broju, naziva se *materijalni sistem*. Materijalne tačke sistema mogu biti raspoređene diskretno ili neprekidno, kontinuirano. Šta treba razumeti pod diskretnom materijalnom tačkom? Da li u geometrijsku tačku možemo smestiti neku masu? Ne možemo. Svaka masa, i najmanja, treba da zauzima neku, možda i vrlo malu zapreminu. Ali i za veliku masu možemo uzeti geometrijsku tačku i smatrati da ova sa celokupnom masom *zastupa* tu masu. Ako se u daljem posmatranju pokaže da se sve tačke celokupne mase kreću kao izabrana tačka — zastupnik, ta izabrana geometrijska tačka zaista predstavlja celokupnu masu i javlja se kao diskretna materijalna tačka.

Za sistem kontinuirano raspoređenih masa, kao što je poznato, uvodi se pojam *gustine:* prvo, pojam *srednje zapreminske gustine* date zapremine, kao odnos $\frac{\Delta m}{\Delta V}$, a zatim pojam *gustine datog tela u datoj tački M kao* $\lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$. Ako takvu gustinu označimo sa σ, imamo $\sigma = \frac{dm}{dV}$, gde je dm diferencijal mase, a dV — diferencijal odgovarajuće zapremine. U opštem slučaju, gustina σ može zavisiti od položaja tačke M tela. To se izražava jednačinom $\sigma = f(\vec{r}) = f(M)$, gde je $\vec{r}$ vektor položaja tačke M u odnosu na neku tačku O stalnog položaja prema telu, tj. $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Ako je vektor $\vec{r}$ određen pomoću Dekartovih koordinata, x, y, z, tačke M, imamo $\sigma = f(x, y, z)$. Ako je ova funkcija poznata za sve tačke tela, celokupna masa m tela određuje se trostrukim određenim integralom $m = \iiint\limits_{V} \sigma\, dV = \iiint \sigma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$, proširenim na celokupnu zapreminu V tela. No, bez obzira na to što svaka masa mora zauzimati neku zapreminu, može se govoriti i o površinskom i o linijskom rasporedu masa. Kao konkretni primeri takvih rasporeda masa mogu poslužiti materijalne ploče, korice, ljuske, lim i dr. — za površinski raspored, i štapovi, žice, vrpce i dr. — za linijski raspored. U vezi sa takvim rasporedima može biti govora o srednjoj površinskoj gustini sa vrednošću $\frac{\Delta m}{\Delta A}$, gde je Δm masa i ΔA deo, recimo, površine lima sa tom masom. Granična vrednost $\sigma_1 = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta A} = \frac{dm}{dA}$ je *površinska gustina* datog lima, u datoj tački M. Na sličan način je $\sigma_2 = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} = \frac{dm}{dl}$, gde je Δm masa, recimo, žice dužine Δl, *linijska gustina* žice u datoj tački M. Jasno je da navedene tri gustine imaju različite dimenzije, naime $[\sigma] = ML^{-3}$, $[\sigma_1] = ML^{-2}$, $[\sigma_2] = ML^{-1}$, gde M označava masu, merenu, recimo, gramovima, a L — dužinu u centimetrima. Za određivanje celokupne mase tela gustine σ_1 treba izračunati dvostruki integral $m = \iint\limits_{A} \sigma_1 A$, proširen na celokupnu površinu A tela. Ako je ta površina ravna, integral uzima oblik $m=\iint_A \sigma_1(x, y)\,dx\,dy$. Najzad, za slučaj linijskog rasporeda masa imamo integral $m=\int_L \sigma_2\,dl$, gde je dl element dužine, proširen na celokupnu dužinu krive. Za pravu žicu imamo integral $m=\int_L \sigma_2(x)\,dx$.

Ako su u sva tri slučaja gustine stalne, materija tela je *homogena*, i za izračunavanje mase tela dovoljno je znati zapreminu, odnosno površinu ili dužinu tela, jer u ovim slučajevima imamo: 1. $m=\sigma V$, 2. $m=\sigma_1 A$ i 3. $m=\sigma_2 L$. U slučajevima *nehomogene (heterogene)* materije, masa tela nije proporcionalna gustini.

Primeri. 1. Odrediti masu lopte poluprečnika R, čija je zapreminska gustina linearna funkcija rastojanja tačke od centra, sa vrednošću a u centru i b na površini lopte.

Ako sa r označimo rastojanje tačke lopte od centra, zapreminska gustina imaće vrednost $\sigma=a+kr$, gde je $k=(b-a):R$. Ako za homogeni element naše lopte uzmemo beskrajno tanku sfernu ljusku, poluprečnika r i debljine dr sa zapreminom $4\pi r^2\,dr$, za određivanje mase lopte uzmimo obrazac

$$m=\int_0^R \sigma\cdot 4\pi r^2\,dr=4\pi\int_0^R (a+kr)\,r^2\,dr=4\pi\Big/_0^R (ar^3/3+kr^4/4)=$$

$$=\pi R^3(a+3b)/3.$$

Iskoristimo li izraz $4\pi R^3/3$ za zapreminu lopte, prethodni rezultat možemo ovako napisati $m=\sigma_s V$, gde je V zapremina lopte, a σ_s neka srednja gustina, sa vrednošću $\sigma_s=(a+3b)/4$; tu gustinu ima homogena lopta iste veličine i iste mase kao i data nehomogena lopta.

2. Odrediti masu ravne pravougaone ploče, dužine a i širine $b\,(b<a)$, pod uslovom da joj se površinska gustina σ_1 menja po dužini talasasto po zakonu $\sigma_1=p+q\left|\sin\left(\frac{8\pi}{a}x\right)\right|$, gde su p i q konstante, x rastojanje preseka po širini od jednog kraja ploče. Crtama je obeležena apsolutna vrednost.

Prema zakonu gustine celu ploču možemo podeliti na 16 ploča sa dimenzijama b i $a/16$. Sve takve ploče imaju

istu masu, sa vrednošću $m/16=\int_0^{a/16} b\left(p+q\sin\frac{8\pi}{a}x\right)dx$; odavde posle integracije imamo $m=ab(p+2q/\pi)=ab\,\sigma_{1s}$, gde je σ_{1s} neka srednja površinska gustina homogene ploče koja sa datom pločom ima istu površinu i istu masu.

3. Odrediti masu jednog zavoja zavojnice, poluprečnika R i hoda h, pri čemu je masa na zavoju raspoređena prema zakonu za linijsku gustinu $\sigma_2=p+q\sin^2\theta$, gde su p i q konstante, a θ ugao u jednačinama zavojnice: $x=R\cos\theta$, $y=R\sin\theta$, $z=\frac{h}{2\pi}\theta$.

Za određivanje mase imamo integral

$$m=\int_0^{2\pi}(p+q\sin^2\theta)\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,d\theta.$$

Kako koren ima vrednost konstante k, datu jednačinom $k^2=R^2+h^2/4\pi^2$, po izvršenoj integraciji biće

$$m=2\pi k\left(p+\frac{1}{2}q\right)=l\left(p+\frac{1}{2}q\right)=l\,\sigma_{2s},$$

gde su l — dužina jednog zavoja i $\sigma_{2s}=p+\frac{1}{2}q$ srednja linijska gustina.

Centar masa ili centar inercije. Ako je za tačku M vezana masa m i $\overrightarrow{AM}$ vektor položaja tačke M u odnosu na tačku A, proizvod $m\overrightarrow{AM}$ zove se *vektor položaja, opterećen masom m, tačke M u odnosu na tačku A.*

Ako imamo skup ili, kako smo kazali, sistem od n tačaka $M_1, M_2, \ldots, M_n$ (nacrtaj četiri tačke) sa masama $m_1, m_2, \ldots, m_n$ i jednu određenu tačku A prostora, može se za svaku tačku tog sistema konstruisati vektor položaja opterećen masom u odnosu na tačku A i načiniti zbir svih konstruisanih vektora: $m_1\overrightarrow{AM_1}+m_2\overrightarrow{AM_2}+\ldots+m_n\overrightarrow{AM_n}$. Rezultat je vektor sa početkom u tački A. Ako taj vektor podelimo celokupnom masom m sistema $(m=m_1+m_2+\ldots+m_n=\sum_{i=1}^{n} m_i)$ ili, kako se to kaže, rasteretimo taj vektor od mase m, dobićemo nov vektor. Označimo sa C kraj tog vektora. Prema tome imamo vektorsku jednačinu $m\overrightarrow{AC}=\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{AM_i}$, koja određuje tačku C. Tako definisana tačka zove se *centar*, ili *središte mase*, ili *centar inercije masa*. Pošto se, istorijski, ova tačka pojavila u vezi sa posmatranjem sile teže, kao napadna tačka ove, ona se u običnom govoru, za mase na Zemljinoj površini zove i *težište tela*.

Da li položaj tačke C datog materijalnog sistema zavisi od izbora tačke A, početka vektora položaja svih konstruisanih tačaka? Da vidimo!

Uzmimo za početak drugu tačku, tačku A_1. Ako za ovu tačku dobijemo i drugi centar, označimo ga sa C_1. Prema tome, imamo dve vektorske jednačine:

$$m\overrightarrow{AC}=\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{AM_i} \text{ i } m\overrightarrow{A_1C_1}=\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{A_1M_i}, \text{ ali}$$

$$\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1} \text{ i } \overrightarrow{A_1M_i}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AM_i}$$

(proveri to na slici). Ako te vrednosti stavimo u drugu jednačinu i uzmemo u obzir prvu jednačinu, dobićemo $\overrightarrow{CC_1}=0$; a to znači da se novi centar poklapa sa prvobitnim. Prema tome je centar masa bitna prirodna tačka svakog materijalnog sistema. Položaj centra zavisi samo od veličina masa (tačnije, od odnosa masa prema masi jedne tačke sistema) i od rasporeda tih masa u prostoru. Dokažimo sad teoremu koja opravdava smisao naziva ove tačke *centra*. Teorema glasi: *zbir vektora položaja opterećenih masama u odnosu na centar jednak je nuli*, tj. $\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{CM_i}=0$. Ako u vektorsku jednačinu, $m\overrightarrow{AC}=\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{AM_i}$, za određivanje tačke C, stavimo $\overrightarrow{AM_i}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM_i}$, dobićemo $m\overrightarrow{AC}=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM_i}\right)$, odakle, prema jednačini $m\overrightarrow{AC}=\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\sum_{i=1}^{n} m_i$, neposredno sleduje $\sum m_i\overrightarrow{CM_i}=0$. A to i potvrđuje gornju teoremu.

Pošto je zbir $\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{AM_i}$ linearna funkcija vektora položaja, ona se pokorava komutativnom i asocijativnom zakonu, odakle sleduje da, prvo, centar masa ne zavisi od reda u kome sabiramo vektore opterećene masama; i, drugo, sabiranje tih vektora možemo vršiti po grupama, tj. grupu tačaka zamenjivati jednom materijalnom tačkom sa položajem u centru masa grupe i sa masom jednakom masi grupe.

Iz osnovne vektorske jednačine za centar sleduje da je $\overrightarrow{AC}=(\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{AM_i}):\sum_{i=1}^{n} m_i$, ili sa kraćim oznakama za početak koordinata, $\vec{r}_c=(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i):\sum_{i=1}^{n} m_i$. Ovoj vektorskoj jednačini odgovaraju tri skalarne jednačine: $x_c=(\sum m_i x_i):\sum m_i$, $y_c=(\sum m_i y_i):\sum m_i$, $z_c=(\sum m_i z_i):\sum m_i$. To su osnovne skalarne jednačine za određivanje položaja centra masa. Ako su mase materijalnog sistema raspoređene u nekoj oblasti neprekidno, zbirovi prošireni na sve materijalne tačke sistema prelaze u određene integrale proširene na oblasti neprekidne materije. Tako imamo vektorske obrasce $\overrightarrow{AC}\iiint_V dm=\iiint_V \vec{r}\,dm$ ili $\overrightarrow{AC}\iiint_V \sigma dV=\iiint_V \sigma\vec{r}\,dV$. Skalarni obrazac za Ox je $x_c=\iiint_V \sigma x\,dV:\iiint_V \sigma dV$.

Analogni integrali se primenjuju na slučaj kontinuirano raspoređenih masa po površini i duž linija.

Učinimo jednu primedbu. Ako je materija tela homogena, množilac gustine, recimo σ, koji ulazi u brojilac i imenilac, može biti skraćen i, na taj način, za homogena tela imamo obrasce u koje masa nikako i ne ulazi. Te obrasce možemo smatrati kao obrasce za određivanje centra inercije neke zapremine, odnosno površine ili linije. Tako imamo:

$$x_c=\iiint_V x\,dV:\iiint_V dV; \quad x_c^*=\iint_A x\,dA:\iint_A dA, \quad x_c^{**}=\int_L x\,dl:\int_L dl.$$

Primeri. Učinićemo prethodno jednu primedbu, koja može znatno olakšati određivanje položaja centra masa. Ako je raspored masa simetričan u odnosu na neku ravan, neku pravu ili tačku, centar masa mora se nalaziti u toj ravni, na toj pravoj ili u toj tački.

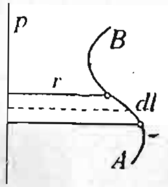
1. Centar masa dveju materijalnih tačaka, m_1 i m_2, na rastojanju r.

Ako sa r_1 i r_2 označimo rastojanje centra masa od tačaka m_1 i m_2, imamo, s jedne strane, $r_1 + r_2 = r$, a, s druge strane, $m_1 r_1 = m_2 r_2$ (dokaži to!), pa, prema tome, imamo $r_1 = m_2 r : (m_1 + m_2)$, $r_2 = m_1 r : (m_1 + m_2)$. Grafički se ova tačka može ovako odrediti: sa krajeva duži r povucimo dve proizvoljne, paralelne prave i, od tačaka m_1 i m_2, odmerimo na tim pravama u suprotnim smerovima duži proporcionalne: iz tačke m_1 — masi m_2 i iz m_2 — masi m_1. Prava što spaja krajeve odmerenih duži seče rastojanje r u tački C. Dokaži to.

2. Centar inercije površine omeđene lukom parabole, osom simetrije i polovinom tetive. (Nacrtajte sliku za parabolu sa jednačinom $y^2 = b^2 x/a$ i tetivom $x = a$).

Pošto element površine u našem slučaju ima vrednost $y\,dx$ i koordinate centra masa tog elementa imaju vrednosti: $x, \frac{1}{2} y$, za koordinate centra imamo jednačine $x_c \int_0^a y\,dx = \int_0^a x y\,dx$, $y_c \int_0^a y\,dx = \frac{1}{2} \int_0^a y^2\,dx$. Pošto izvršimo kvadrature imaćemo $x_c = 3\,a/5$, $y_c = 3\,b/8$.

Pappos—Guldin'ove teoreme. Kao primenu određenih integrala dokažimo vrlo korisne teoreme za određivanje površine i zapremine obrtnih tela.



Sl. 21 — Površina obrtnih tela. Teorema

Neka se deo ravne krive, od tačke A do tačke B (sl. 21), obrće oko ose p koja leži u ravni krive i ne seče tu krivu, no tačke A i B mogu pripadati osi. Označimo sa Δl rastojanje između dve beskrajno bliske tačke krive. Iz Elementarne geometrije je poznato da je površina koju obrazuje Δl pri obrtanju (dakle bočne površine valjka, kupe ili zarubljene kupe, pa i kružnog prstena) jednaka $2\pi r_s \Delta l$, gde je r_s rastojanje sredine duži Δl od ose obrtanja. Pošto se u graničnom slučaju ova površina izražava sa $2\pi r\,dl$, gde je dl diferencijal luka krive linije i r rastojanje proizvoljne tačke luka od ose obrtanja, za površinu S, koju opisuje luk AB, imamo integral

$$S = 2\pi \int_L r\,dl,$$

uzet duž luka $AB = L$.

S druge strane, ako sa r_c označimo rastojanje centra C inercije luka L od prave p, imamo, za r_c, jednačinu

$$L r_c = \int_L r\,dl.$$

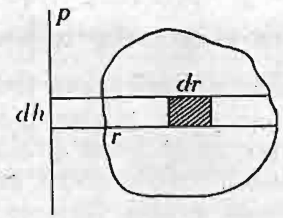
Ako ovu vrednost integrala stavimo u prethodnu jednačinu dobićemo

$$S = 2\pi r_c \cdot L.$$

Ovaj rezultat izražava prvu *Pappos — Guldin'ovu*[1] *teoremu.* Ona glasi:

Površina koja se dobiva obrtanjem luka krive linije u ravni oko ose u toj ravni, koja ne seče tu krivu, jednaka je proizvodu dužine luka i obima kruga što ga opiše centar inercije tog luka.

Uzmimo sad da se ravna površina P (sl. 22) obrće oko ose p, koja ne seče konturu te površine. Zapreminu, V, koja se dobiva obrtanjem te površine, možemo izraziti dvostrukim integralom $V = 2\pi \iint_P r\,dr\,dh$, gde je r rastojanje od ose obrtanja tačke elementarnog pravougaonika, dimenzija dr i dh. S druge strane, ako napišemo jednačinu za određivanje centra inercije, C, površine P u odnosu na pravu p, dobija se $P r_c = \iint_P r\,dr\,dh$, gde je r_c rastojanje



Sl. 22 — Zapremina obrtnih tela. Teorema

centra inercije površine P od prave p. Ako i ovde vrednost integrala stavimo u prethodnu jednačinu, dobićemo

$$V = 2\pi r_c \cdot P,$$

[1] Pappos, matematičar, koji je živeo krajem trećeg veka naše ere u Aleksandriji, ostavio je „Matematičku zbirku" sa mnogim geometrijskim stavovima. Guldin Paul (1577 — 1643), matematičar, štampao je delo „Centrobaryca", u kojem je u novoj formi izneo Pappos-ove rezultate.

obrazac koji izražava drugu Pappos — Guldin'ovu teoremu: *Zapremina koja se dobija obrtanjem ravne površine oko ose u toj ravni, koja ne seče datu površinu, jednaka je proizvodu veličine te površine i obima kruga što ga opiše centar inercije te površine.*

Primer. Ako se krug poluprečnika r obrće oko prave na rastojanju $R (R > r)$ prave od centra kruga dobija se *torus*. Prema gornjim teoremama, površina tog torusa jednaka je $S = 4\pi^2 r R$, a zapremina $V = 2\pi^2 r^2 R$.

Aksijalni kvadratni moment inercije. Ako je data prava p i materijalna tačka mase m, na rastojanju d od te prave, proizvod md^2 je *aksijalni kvadratni moment inercije date materijalne tačke u odnosu na datu pravu*. Ako ima više materijalnih tačaka, sa masama $m_1, m_2, \ldots, m_n$, na rastojanjima $d_1, d_2, \ldots, d_n$ od date prave p, za moment inercije tog sistema imamo izraz i oznaku $J_p = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i d_i^2$. Ako sa x_i, y_i, z_i označimo koordinate mase m_i u odnosu na ose Dekartova trijedra, mogu se uvesti tri momenta inercije:

$$J_x = \Sigma m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad J_y = \Sigma m_i (z_i^2 + x_i^2), \quad J_z = \Sigma m_i (x_i^2 + y_i^2).$$

Ako su mase neprekidno raspoređene, sume se zamenjuju integralima; tako, za moment inercije oko x ose imamo $J_x = \iiint\limits_V \sigma(x, y, z)(y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$; slično i za druge ose.

Jasno je da pojam aksijalnog momenta inercije može biti primenjen i na mase raspoređene po površini i po krivoj, i to kako u slučaju kad kriva i osa leže u istoj ravni, tako i u slučaju kad kriva, koja može biti i prostorna, zauzima proizvoljan položaj u odnosu na osu momenta inercije.

Za objašnjenje pomenutih mehaničkih pojava uvešćemo još pojam *kinetičke energije*, tj. energije kretanja, recimo, vrstog tela. Time ćemo istaći značaj višestrukih integrala i u Mehanici.

Za materijalnu tačku mase m, koja se kreće sa brzinom intenziteta v, *kinetička energija* se izražava obrascem $\frac{1}{2} mv^2$.

Ako se čvrsto telo kreće translatorno, dakle prenosno, sve njegove tačke imaju istu brzinu. Tada se za predstavnika

tela bira centar masa, tačka C, i kao brzina svih tačaka određuje brzina $\vec{v}_c$ sa intenzitetom v_c. Ako sa T označimo kinetičku energiju čvrstog tela, u slučaju translatornog kretanja imamo $T = \frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i v_c^2 = \frac{1}{2} m v_c^2$, gde je m celokupna masa tela. Prema tome, pri translatornom kretanju kinetička energija tela izražava se na isti način kao i kinetička energija jedne materijalne tačke.

Posmatrajmo sad obrtno kretanje čvrstog tela, naime obrtanje oko nepokretne ose. Intenzitet v_i brzine neke tačke, M_i, tela, na rastojanju d_i od ose, može se izračunati ovako: $v_i = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s_i}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{d_i \cdot \Delta\alpha}{\Delta t} = d_i \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = d_i \omega$, gde su: Δs_i element kružnog puta tačke M_i, $\Delta\alpha$ beskrajno mali ugao obrtanja i $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$, intenzitet *uglovne brzine tela*. Prema tome, možemo staviti za kinetičku energiju svake tačke čvrstog tela izraz $\frac{1}{2} m_i d_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 (m_i d_i^2)$; a za celo telo dobićemo $T = \frac{1}{2} J \omega^2$, gde je $J = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i d_i^2$, tj. moment inercije tela oko ose obrtanja.

Uporedimo li dobivena dva izraza, $T = \frac{1}{2} m v_c^2$ i $T = \frac{1}{2} J\omega^2$, vidimo da, u prvom slučaju, kinetička energija zavisi od kvadrata linijske brzine, a, u drugom, od kvadrata ugaone brzine. U prvom slučaju imamo koeficijent m, u drugom J; oba se zovu *inercioni koeficijenti* — prvi za translatorno kretanje, drugi za rotaciju. Svaki od njih je pojam iz oblasti Geometrije masa; zavisi samo od masa i njihova rasporeda u prostoru.

Glava četvrta

KALKULATIVNI PROCESI

4.1. Numerički računi

Da bi podatak dobiven kao rezultat merenja, opažanja ili procene, postao predmet matematičkog proučavanja, treba da se on izrazi *brojem*. Označimo takav broj sa a. On može biti ili: 1. *tačan broj*, ili 2. *približan broj*. Tačan broj se javlja bilo kao rezultat prebrojavanja, bilo kao rezultat tačnih operacija sa tačnim brojevima. Broj putnika u vozu, ili procent putnika izašlih na stanici iz autobusa, ako je, recimo, od 20 putnika izašlo 5, — to su primeri tačnih brojeva.

U praksi se, međutim, veličine sa kojima operišemo izražavaju *približnim brojevima*. Ima, doduše, slučajeva, kad se rezultat može izračunati potpuno tačno, ili sa vrlo velikom tačnošću, no ta tačnost nema praktične vrednosti. I, da bi se pojednostavili računi sa njima, tačnije vrednosti se zamenjuju manje tačnim, njihovim približnim vrednostima. Za matematičko ocenjivanje približnog broja, a, treba da budu poznate granične vrednosti (A_1 i A_2) između kojih se nalazi njegova približna vrednost. Taj uslov se izražava nejednakostima: $A_1 < a < A_2$.

a. *Apsolutna, relativna i greška u procentima.* Proučimo pre svega nekoliko pojmova u vezi sa ocenjivanjem tačnosti broja koji izražava neku veličinu.

Ako je A tačna, a a približna vrednost neke veličine, razlika $a-A$, približne i tačne vrednosti, zove se *apsolutna greška* (ε) približne vrednosti a, tj. $a-A=\varepsilon$. Apsolutna greška

je *odstupanje približne od tačne vrednosti*. Ova greška se može oceniti i razlikom $A-a=p=-\varepsilon$, koja se zove *popravka* veličine a. Za dobijanje tačne vrednosti, približnoj vrednosti treba dodati popravku. Ako je $a>A$, onda je $\varepsilon>0$, popravka $p<0$, apsolutna vrednost popravke se oduzima; za slučaj $a<A$, $\varepsilon<0$, $p>0$, popravka se dodaje.

U dekadnom, odnosno decimalnom sistemu broj se izražava sa deset cifara — devet *vrednosnih cifara*, od 1 do 9, i *nula* 0. U opštem slučaju, broj ima dva dela: ceo broj, levo od zapete, i razlomak, desno od zapete. Cifre celog broja su *cifre dekadnih jedinica*, cifre razlomljenog dela kratko se zovu *decimale*.

Kad se od tačnog ili približnog broja sa više vrednosnih cifara prelazi na njegovu približnu vrednost sa manje vrednosnih cifara, kaže se da se dati broj *zaokrugljuje*. Zaokrugljivanje broja se vrši na taj način, što se stavi crta posle cifre, čije dekadne jedinice odnosno decimale zadržavamo. Pa zatim, cifre broja nadesno od crte, kratko, desnog broja, kod decimalnog razlomka se odbacuju, a kod celog broja se zamenjuju nulama. Za zadržanu cifru, ispred crte, važe ova pravila: a. ona ostaje nepromenjena, kad je desni broj manji od polovine jedinice zadržane cifre; b. ona se povećava za jedinicu, kad je desni broj veći od polovine jedinice zadržane cifre; i c. kad je desni broj tačno jednak polovini jedinice zadržane cifre, zadržana cifra ostaje nepromenjena, kad je ona parna, a povećava se za jedinicu, kad je neparna. Primeri zaokrugljivanja brojeva: na 0,01—$29{,}5327=29{,}53|27\approx 29{,}53$; na stotine —$3874{,}25=38|74{,}25\approx 3900$; na jedinice — $54{,}35=54|{,}35\approx$ ≈ 54; $54{,}62=54|{,}62\approx 55$; na 0,001—$0{,}0035=0{,}003|5\approx 0{,}004$; $0{,}0045=0{,}004|5\approx 0{,}004$.

Pri zaokrugljivanju datog broja A mogu se pojaviti dve približne vrednosti: *manja, snižena* ili *podbačena*, označimo je sa a_1; i *veća, povišena* ili *prebačena* vrednost, označimo je sa a_2. Tada je $a_1<A<a_2$. Tako, uzimajući za broj π, kao datu vrednost, 3,14159, možemo napisati za podbačenu vrednost 3,1415 i za prebačenu vrednost 3,1416 ove nejednakosti $3{,}1415<3{,}14159<3{,}1416$. Razlika graničnih vrednosti sačinjava *razmak* (zamisli tačke na brojnoj skali), u kome se nalazi data vrednost.

Za što lakšu ocenu tačnosti približnih brojeva upotrebljuje se, u približnim računima, naročiti način pisanja brojeva.

Naime, broj se piše tako da ispred zapete stoji samo jednocifreni broj, a promena u vrednosti tog broja, zbog pomeranja zapete, ispravlja se množenjem novog broja stepenom deset sa potrebnim izložiocem. To je naročito zgodno za zaokrugljenje približne vrednosti. Tako će se, napr., približna vrednost broja 593420000, zaokrugljena na četiri cifre, pisati: $5{,}934.10^8$; a broja 0,00037921 na tri cifre pisaće se $3{,}79.10^{-4}$. Apsolutne greške napisanih približnih vrednosti zadovoljavaju nejednakosti: $|\varepsilon_1| \leqslant 0{,}0005.10^8$ (ili 5.10^4); $|\varepsilon_2| \leqslant 0{,}005.10^{-4}$ (ili 5.10^{-7}).

Obratimo pažnju još na jednu osobinu pisanja približnih brojeva. Ako 21 m predstavlja dužinu sa tačnošću od jednog centimetra, ovu približnu vrednost treba pisati: 2,100.10 m, tj. staviti nule sa desne strane, da bi se istakla tačnost date veličine.

Učinićemo još jednu važnu primedbu o pojmu greške.

Uvodeći pojam greške $\varepsilon = a - A$, kao razlike između približne i tačne vrednosti nekog broja, ne uzimajući u obzir postupak merenja ili posmatranja, pomoću kojeg smo došli do tog broja, ostajemo samo u oblasti računskih operacija, u oblasti Aritmetike. Takve greške zovu se *računske* ili *numeričke greške*. Međutim se upotrebljuje ista reč „greška" i u drugom smislu, u smislu *greške posmatranja*. Ove greške zavise od tačnosti instrumenata pomoću kojih se vrši posmatranje, od ličnih osobina posmatrača, a i od drugih prilika pri određivanju traženih veličina. Kao rezultat takvih posmatranja dobiva se niz približnih vrednosti sa greškama, greškama posmatranja. Takve greške se tretiraju u Teoriji verovatnoće, u Statistici, u Teoriji instrumenata i u drugim stručnim predmetima.

Prema tome, treba razlikovati dva pojma greške: pojam računske, numeričke greške i pojam greške posmatranja, merenja, eksperimentisanja itd. Ovde će biti govora samo o Teoriji računskih grešaka, koja ima i kratak naziv Teorije grešaka. O Teoriji drugih grešaka, grešaka posmatranja, bilo je reči, u vezi sa Teorijom verovatnoće, u našoj knjizi „Viša matematika" iz 1948. godine. Ovde se na toj teoriji nećemo zadržavati.

Pokazaćemo sad na primeru da apsolutna greška, kao odstupanje brojnih vrednosti, ne može služiti kao merilo za tačnost rezultata. Pretpostavimo da apsolutna greška iznosi 1 mm. Na osnovu samo tog podatka, ništa još ne možemo reći o tačnosti rezultata. Ako se ova greška odnosi na merenu dužinu od 10 km, odnosno na veliki broj prema veličini greške, kazali bismo da je merenje izvršeno sa neobičnom tačnošću, čak sa još nedostignutom tačnošću. Ako je, međutim, ista greška učinjena pri merenju debljine žice prečnika od 2 mm, jasno je da takvo merenje ništa ne vredi.

Za procenjivanje tačnosti približnog rezultata uvodi se pojam *relativne greške*, odnosa apsolutne greške prema tačnoj vrednosti same veličine. Ako relativnu grešku označimo sa ρ, imamo (1) $\rho = \varepsilon / A$. Relativna greška je apstraktan broj.

Ako tačna vrednost nije poznata, za izračunavanje relativne greške možemo upotrebiti izraz (2) $\rho' = \delta / \alpha$, gde u brojiocu stoji razlika granica δ, između kojih se nalazi naša veličina, a u imeniocu približna vrednost same veličine. Nije teško pokazati da se, u slučaju male relativne greške, ova dva izraza samo neznatno razlikuju jedan od drugog; pri tome će, ako upotrebimo manju približnu vrednost, izračunata relativna greška (2) biti veća od pravog izraza (1).

Ako relativnu grešku pomnožimo sa 100, dobićemo izraz za *grešku u procentima*.

Dakle, ako smo posle merenja neke dužine od 5 cm dobili dve približne vrednosti 5,03 cm i 4,98 cm, apsolutne greške ovih veličina iznose: $\varepsilon_1 = 0{,}03$ cm i $\varepsilon_2 = -0{,}02$ cm, a popravke $p_1 = -0{,}03$ cm i $p_2 = +0{,}02$ cm. Relativne greške su; $\rho_1 = 0{,}03 : 5 = 0{,}006$ i $\rho_2 = -0{,}02 : 5 = -0{,}004$ i u procentima: 0,6% i 0,4%, pri čemu se obično uzimaju, za greške u procentima, apsolutne vrednosti tih grešaka. Ako grešku računamo pomoću dobivenih približnih vrednosti, u (2) treba staviti $\delta = 5{,}03 - 4{,}98 = 0{,}05$ i $a = 4{,}98$, pri čemu uzimamo manju približnu vrednost da se pokaže što veća relativna greška; približna vrednost relativne greške iznosi $\rho' = 0{,}05/4{,}98 \approx 0{,}01$, ili u procentima 1%.

Ako je približan broj napisan u obliku proizvoda decimalnog broja i stepena broja 10, lako je odmah kazati približnu vrednost relativne greške. Objasnimo ovo na primeru.

Za broj $5{,}934 \times 10^8$ imali smo vrednost apsolutne greške $|\varepsilon_1| < 0{,}0005 \times 10^8$, te prema tome $|\varepsilon_1| \leqslant 0{,}001 \times 10^8$, ako polaznu grešku ne računamo za pola cifre. Za relativnu grešku tada imamo $\rho = \dfrac{|\varepsilon_1|}{A} < \dfrac{0{,}0005 \times 10^8}{5{,}934 \times 10^8} < \dfrac{0{,}0005}{1} < 0{,}0005 <$ $\leqslant 0{,}001$. Ovaj rezultat pokazuje da je relativna greška pra-

7*

vilno napisanog približnog broja manja od decimalnog broja sa jedinicom na mestu netačne cifre ili, čak, sa peticom na mestu prvom posle netačne cifre.

Ova osobina neposrednog određivanja relativne greške približnog broja, samo po obliku, ujedno i objašnjava zašto je uveden taj način pisanja približnih brojeva.

b. *Greške pri osnovnim operacijama.* Proučimo kako greška u rezultatu dobivenom posle osnovnih računskih operacija zavisi od poznatih grešaka brojeva sa kojima operišemo.

α. *Sabiranje.* Ako mesto tačnih brojeva $A_1, A_2, \ldots, A_n$ treba da saberemo njihove približne vrednosti $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sa apsolutnim greškama $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, apsolutna greška ε zbira biće $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n = \Sigma\, \varepsilon_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, tj. jednaka zbiru apsolutnih grešaka svih sabiraka. Relativna greška, ρ, zbira ima vrednost $\rho = \Sigma\, \varepsilon_i : \Sigma\, A_i$. Lako je pokazati da je ova greška manja od najveće, a veća od najmanje od relativnih grešaka sabiraka. Zaista, neka je ε_1/A_1 najveća relativna greška; tada iz $\dfrac{\varepsilon_j}{A_j} < \dfrac{\varepsilon_1}{A_1}$ $(j = 2, 3, \ldots, n)$ sleduje $\varepsilon_j < \dfrac{\varepsilon_1}{A_1} A_j$. Ako sad u jednačini za ρ, koju ćemo napisati u obliku $\rho\, \Sigma\, A_i = \varepsilon_1 + \Sigma \varepsilon_j$, zamenimo ε_j sa ne manjom veličinom, dobićemo $\rho\, \Sigma\, A_i < \varepsilon_1 + \Sigma \dfrac{\varepsilon_1}{A_1} A_j = \dfrac{\varepsilon_1}{A_1} \Sigma\, A_i$, odakle izvodimo traženu nejednakost $\rho < \varepsilon_1/A_1$. Isto tako možemo pokazati da je $\rho > \dfrac{\varepsilon_n}{A_n}$, gde smo sa ε_n/A_n označili najmanju relativnu grešku.

Pri sabiranju približnih decimalnih brojeva treba dve činjenice uzimati u obzir.

Prvo, ako su brojevi izraženi sa različitom tačnošću, treba sabirati samo one delove brojeva, koji odgovaraju ciframa najmanje tačnosti, tj. sa najmanje brojeva posle zapete. Napr. pri sabiranju

$$\begin{array}{r|l} 73{,}25 & \\ 9{,}72 & 1 \\ 0{,}05 & 32 \\ 0{,}00 & 0131 \\ \hline 83{,}02 & \end{array} \qquad \text{koje je bolje vršiti ovako} \qquad \begin{array}{r|l} 7{,}325 & \cdot 10 \\ 0{,}972 & \cdot 10 \\ 0{,}005 & \cdot 10 \\ 0{,}000 & \cdot 10 \\ \hline 8{,}302 \times 10, & \end{array}$$

treba sabirati samo brojeve sa leve strane crte; pri tome je potrebno popraviti znak koji ostavljamo, u vezi sa delom koji izostavljamo. Da smo mesto 0,0532 imali sabirak 0,0582, trebalo bi staviti 0,06; drugim rečima, netačnu cifru 5 zameniti takođe netačnom cifrom 6 u vezi sa zaokrugljivanjem.

Drugo, ako sabiramo više brojeva, napr. četrdeset, a u svakom imamo apsolutnu grešku jednaku polovini jedinice netačne cifre, u zbiru može biti greška jednaka $0{,}5 \times \times 40 = 20$ tih jedinica, tj. dve tačne jedinice. Prema tome, u zbiru treba izostaviti ne samo netačnu već i jednu tačnu cifru.

Ova primedba se odnosi na slučaj, kad je svaka od četrdeset grešaka najveća i sve greške istog smera, tj. sve su ili pozitivne, ili negativne. Ako za takvu osobinu grešaka nema naročitih indikacija, to jest ako greške mogu biti i pozitivne i negativne, i to različite apsolutne vrednosti, na osnovu teorije verovatnoće može se zaključiti da je u slučaju velikog broja sabiraka dovoljno uzimati u obzir otprilike samo 10% od gore izračunate maksimalne greške. U našem primeru to iznosi dve jedinice netačne cifre.

β. *Oduzimanje.* Oduzimanje možemo smatrati kao algebarsko sabiranje dva broja. Prema tome, sve što smo naveli o sabiranju vredi i za oduzimanje. Treba, međutim, napomenuti da pri oduzimanju dva broja iste tačnosti možemo dobiti rezultat sa manjom tačnošću, a ponekad i sasvim neodređen. Napr., pri oduzimanju dva broja od po pet cifara, recimo $2{,}7593 - 2{,}7541 = 0{,}0052$ dobili smo rezultat sa dve cifre, jednom tačnom i drugom netačnom, a pri oduzimanju $5{,}3294 - 5{,}3293 = 0{,}0001$ rezultat sadrži samo netačnu cifru.

U vezi sa izračunavanjem razlike dva broja učinićemo i ovu primedbu. Često, naročito pri ponovnim merenjima iste veličine, treba izračunati razliku dva broja bliska trećem broju. Napr., treba naći razliku brojeva $A + \Delta_1$ i $A + \Delta_2$. Jasno je da je za izračunavanje razlike takvih brojeva dovoljno izračunati samo razliku $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$, ne uzimajući u obzir glavni deo, A, datih brojeva. Napr., mesto da izračunavamo razliku $53\,792\,531 - 53\,792\,517$, izračunaćemo samo razliku $31 - 17 = 14$.

Ovo je od naročite važnosti kada imamo niz takvih razlika, napr. pri korišćenju tablica.

γ. *Množenje*. Dokazaćemo teoremu koja glasi: Relativna greška proizvoda dva približna broja jednaka je algebarskom zbiru relativnih grešaka činilaca.

Neka su $a_1=A_1+\varepsilon_1$ i $a_2=A_2+\varepsilon_2$. Tada je relativna greška proizvoda približnih brojeva a_1 i a_2, $\rho=(a_1 a_2-A_1 A_2):$ $:A_1 A_2$. Pošto je $a_1 a_2=(A_1+\varepsilon_1)(A_2+\varepsilon_2)=A_1 A_2+\varepsilon_1 A_2+\varepsilon_2 A_1+$ $+\varepsilon_1\varepsilon_2\approx A_1 A_2+\varepsilon_1 A_2+\varepsilon_2 A_1$, jer član $\varepsilon_1\varepsilon_2$ možemo zanemariti zbog njegove relativno male veličine prema drugim članovima; za ρ imamo

$$\rho=\frac{\varepsilon_1 A_2+\varepsilon_2 A_1}{A_1 A_2}=\frac{\varepsilon_1}{A_1}+\frac{\varepsilon_2}{A_2}=\rho_1+\rho_2,$$

a ovo i dokazuje tačnost naše teoreme. Teorema je tačna i za više činilaca.

Navedena teorema pretpostavlja da su poznate apsolutne vrednosti i znaci relativnih grešaka činilaca. Ako znaci nisu poznati, to jest greške mogu biti pozitivne i negativne, mesto gornje teoreme treba se rukovoditi teoremom:

Apsolutna vrednost relativne greške proizvoda nije veća od zbira apsolutnih vrednosti relativnih grešaka činilaca; napr., za dva činioca imamo uslov $|\rho|<|\rho_1|+|\rho_2|$.

Od postojećih postupaka množenja približnih brojeva pokazaćemo, na primerima, jednostavno *Utrehtovo pravilo skraćenog množenja*.

1. Izračunati proizvod $102{,}32\times 45{,}2$ sa tačnošću do jedinice.

$$\begin{array}{r}
102{,}32\\
2\;54\\
\hline
409\;28\\
51\;16\\
2\;04\\
\hline
46\;\;2\;4{,}8\approx 4625
\end{array}$$

Ispod većeg činioca 102,32 potpisujemo drugi činilac u obrnutom redu cifara, stavljajući cifru njegovih jedinica za jedno mesto udesno od cifre tražene tačnosti množenika; u našem slučaju stavićemo 5, cifru jedinica množioca, ispod cifre 3, prve cifre udesno od jedinica (2) množenika.

Samo množenje se vrši na taj način, što svakom cifrom množioca množimo samo po deo množenika, i to deo, koji počinje prvom cifrom s desna od one nad cifrom množioca

kojom se množi. Još nešto: pri svakom množenju uzima se u obzir, na način koji je poznat, i rezultat množenja istom cifrom, prve odbačene cifre množenika.

2. Izračunati proizvod $3{,}141592\times 75{,}47292$ sa tačnošću do 0,001.

Kao množenik uzima se veći broj, 75,47292, i pod njega se stavlja u obrnutom redu cifara množilac, i to cifra njegovih jedinica (3) ispod cifre desethiljaditih množenika (9).

$$\begin{array}{r}
75{,}472\;92\\
295\;141{,}3\\
\hline
226\;418\;8\\
7\;547\;3\\
3\;018\;9\\
75\;5\\
37\;7\\
6\;8\\
\hline
237{,}1050\approx\\
\approx 237{,}105.
\end{array}$$

Množenje se vrši kao i u prethodnom primeru. Za rezultat dobivamo približni broj 237,105. Tačan proizvod datih približnih vrednosti $(75{,}4729\times 3{,}14159)$ iznosi 237,104907911, što zaokrugljeno daje 237,105. Pri skraćenom množenju uštedeli smo, u poslednjem primeru, $36-20=16$ množenja jednocifrenih brojeva i $27-18=9$ sabiranja.

δ. *Deljenje*. Ako hoćemo da izračunamo relativnu grešku ρ količnika dva približna broja, a_1 i a_2, sa relativnim greškama $\rho_1=\varepsilon_1/A_1$ i $\rho_2=\varepsilon_2/A_2$, gde su, kao i ranije, A_1 i A_2 tačke, odnosno približne vrednosti samih brojeva, a ε_1 i ε_2 njihove apsolutne greške, treba izračunati $\rho=\left(\frac{a_1}{a_2}-\frac{A_1}{A_2}\right):\frac{A_1}{A_2}$. Pošto su $a_1=A_1+\varepsilon_1$, $a_2=A_2+\varepsilon_2$, imamo

$$\rho=\left(\frac{A_1+\varepsilon_1}{A_2+\varepsilon_2}-\frac{A_1}{A_2}\right):\frac{A_1}{A_2}=(\varepsilon_1 A_2-\varepsilon_2 A_1):A_1(A_2+\varepsilon_2).$$

Ako veličinu ε_2 možemo zanemariti u odnosu prema A_2, konačno se može napisati: $\rho=(\varepsilon_1 A_2-\varepsilon_2 A_1):A_1 A_2=\varepsilon_1/A_1-$ $-\varepsilon_2/A_2=\rho_1-\rho_2$. Ovaj rezultat izražava teoremu: Relativna greška razlomka jednaka je razlici relativnih grešaka brojioca i imenioca. U ovom obliku teorema pretpostavlja algebarske vrednosti grešaka. Ako znaci grešaka nisu poznati, prethodnu teoremu treba zameniti teoremom: Apsolutna vrednost relativne greške razlomka nije veća od zbira apsolutnih vrednosti relativnih grešaka brojioca i imenioca.

Pokazaćemo na primeru i skraćeno deljenje približnih brojeva.

Treba izvršiti deljenje 7,35136 : 2,353. Pošto u odgovoru ceo broj sadrži samo jednu cifru, zadržavamo za tačnost od 0,01 samo hiljadite, pa skraćeno delimo ovako:

$$\begin{array}{r|l} 7{,}351 & 2{,}353 \\ \underline{7\,059} & 3{,}124 \approx 3{,}12 \\ 292 & \\ \underline{235} & \\ 57 & \\ \underline{47} & \\ 10 & \\ \underline{9} & \\ 1 & \end{array}$$

c. *Greška funkcije.* Kada za određivanje veličine y treba prvo izmeriti veličinu x, a zatim izvršiti operacije označene određenom funkcijom $f(x)$, greška učinjena u vrednosti argumenta, x, povlači za sobom grešku i u vrednosti funkcije.

Označimo li grešku u argumentu x sa Δx, a grešku u funkciji y sa Δy, imamo između grešaka ovu vezu $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, kako to sleduje iz definicije apsolutne greške: $f(x)$ je tačna vrednost funkcije, a $f(x+\Delta x)$ približna.

Ako grešku Δx smatramo malom i označimo je sa dx, desna strana prethodne jednačine može se zameniti približnim izrazom $f'(x)\,dx$, gde je, kao i obično, $f'(x)$ izvod funkcije $f(x)$ po x. Napisani izraz predstavlja glavni član u izrazu priraštaja funkcije, Δy, njen diferencijal dy. Kako je $dy = f'(x)\,dx$, možemo tvrditi da je greška funkcije jednaka diferencijalu te funkcije, pri čemu je diferencijal nezavisno promenljive jednak grešci argumenta.

Jasno je da relativna greška funkcije ima vrednost $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{y'}{y}\,dx$, tj. jednaka je proizvodu logaritamskog izvoda i greške nezavisno promenljive.

Primer. Odrediti grešku koju ćemo učiniti u zapremini lopte poluprečnika $r = 10$ cm, ako za poluprečnik uzmemo 10,1 cm.

Pošto je zapremina lopte jednaka $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, za apsolutnu grešku zapremine imaćemo $\varepsilon = dV = \dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{4}{3}\pi r^3\right) dr = 4\pi r^2 dr$; a za relativnu $\rho = \dfrac{dV}{V} = 4\pi r^2 dr : \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 3\,dr/r$. U našem slučaju nalazimo za apsolutnu grešku $dV = 4\pi\, 10^2 \cdot 0{,}1\ \text{cm}^3 \approx 1{,}257 \cdot 10^2\ \text{cm}^3$, a za relativnu $\rho = 3 \cdot \dfrac{0{,}1}{10} = 0{,}03$.

Ako funkcija zavisi od više promenljivih, recimo od x i y, na osnovu obrasca za totalni diferencijal, koji predstavlja apsolutnu grešku, imaćemo $\varepsilon = dz = \dfrac{\partial z}{\partial x} dx + \dfrac{\partial z}{\partial y} dy$. Relativna greška ima vrednost

$$\rho = \frac{dz}{z} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{z} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{z}.$$

Primer. Odrediti relativnu grešku zapremine V konusa visine $h = 12$ cm i poluprečnika osnove $r = 5$ cm, ako greška u visini iznosi 0,02 cm, a u poluprečniku osnove 0,01 cm.

Pošto je $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$, ako logaritmujemo imaćemo $\log V = \log\dfrac{1}{3}\pi + 2\log r + \log h$, odakle, posle diferenciranja, izvodimo

$$\rho = \frac{dV}{V} = 2\frac{dr}{r} + \frac{dh}{h}.$$

Za naše numeričke vrednosti dobijamo $\rho = 2 \cdot 0{,}01/5 + 0{,}02/12 \approx 0{,}004 + 0{,}0017 \approx 0{,}006$ ili u procentima $0{,}6\%$.

d. *Greška logaritma.* Neka je y dekadni logaritam broja x, tj. $y = \log_{10} x$. Toj logaritamskoj jednačini odgovara eksponencijalna jednačina $10^y = x$. Logaritmujemo li ovu jednačinu za prirodnu osnovu, imaćemo $y \log 10 = \log x$, odakle je $y = = \frac{1}{\log 10} \cdot \log x = M \log x$, gde je M dekadni moduo prirodnih logaritama, čija je vrednost (I, str. 119) $M = \frac{1}{\log 10} = \log_{10} e \approx \approx 0{,}4342345$. Iz prethodne jednačine sleduje neposredno $dy = M \frac{dx}{x}$ ili, približno, $dy \approx 0{,}434 \frac{dx}{x}$. Prema tome možemo ovu teoremu formulisati: Apsolutna greška dekadnog logaritma jednaka je proizvodu modula M ($\approx 0{,}434$) i relativne greške broja. Ova teorema omogućuje da se reši problem o broju cifara koje treba zadržati u logaritmu nekog broja, čija je relativna greška poznata. Napr., ako relativna greška nekog broja iznosi pola procenta, tj. 0,005, u njegov dekadni logaritam time se već unosi greška $dy \approx 0{,}434 \cdot 0{,}005 \approx \approx 0{,}002$, te prema tome, u logaritmu nema smisla zadržati posle zapete više od tri cifre.

e. *Pomoćna sredstva za numeričke račune.* Savremeni ljudski život često zahteva izvršenje raznovrsnih numeričkih izračunavanja. S jedne strane, svakodnevni život primorava nas na mnogobrojne kratke račune, napr. u trgovini, a i na druge i zamorne račune pri projektovanju i izvođenju velikih tehničkih objekata. A, s druge strane, ima i zamašnih teorijskih izračunavanja koja se vrše u naučno-istraživačke ciljeve. Sva ta izračunavanja zahtevaju što efikasnija pomoćna sredstva za njihovo lakše izvođenje i za što veću uštedu u vremenu pri vršenju numeričkih operacija. Postoji više tipova tih pomoćnih sredstava.

1. Računaljke; ima ih različitih. Ruska računaljka (счеты) i sad se upotrebljuje u praksi; izvežbani korisnici računaju pomoću nje brže nego ručnim mašinama.
2. Logaritmar, koji se mnogo upotrebljuje u tehničkoj praksi. Kako se radi sa njim objasnićemo dalje.
3. Tablice, od najprostijih: za sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje, do najkomplikovanijih i specijalnih, pa i sa dva argumenta.
4. Računske mašine, mehaničke i elektronske, naročito elektronski automati.

5. Različite grafičke metode i, pre svega, tzv. *nomogrami.*

Zaustavićemo se za trenutak na opisu nekih od tih metoda.

No prethodno ćemo navesti neka opšta praktična pravila za izvršenje naročito složenih, numeričkih računa.

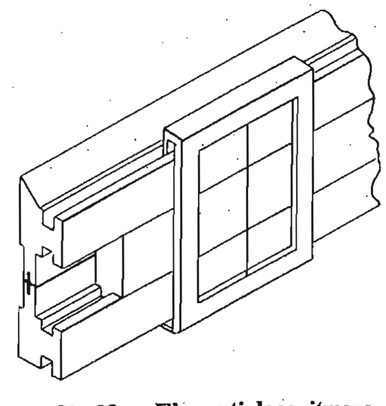
Za svaki komplikovaniji numerički rad treba prethodno spremiti plan, po mogućstvu u obliku jednog formulara. Izračunavanja se vrše na kariranoj hartiji i to samo sa jedne strane; strane treba numerisati da se ne izgubi red operacija. Važniji delimični i konačni rezultati mogu se pisati ili podvlačiti bilo mastilom, bilo olovkom u boji. Sporedne račune bolje je vršiti na istim stranama, a ne na posebnim listićima, jer se tako zgodnije vrše proveravanja.

Kao glavno pravilo pri numeričkom računu ostaje uvek: pažnja, pažnja i pažnja.

f. *Logaritmar.* Za izračunavanje pomoću logaritama upotrebljuju se bilo logaritamske tablice, sa određenim brojem cifara, prema stepenu tačnosti koji se traži, bilo naročita sprava koja se zove *logaritamski lenjir* ili *logaritmar.*

Upotreba logaritamskih tablica je dobro poznata iz Elementarne matematike. U samim tablicama se daje i uputstvo za njihovu upotrebu.

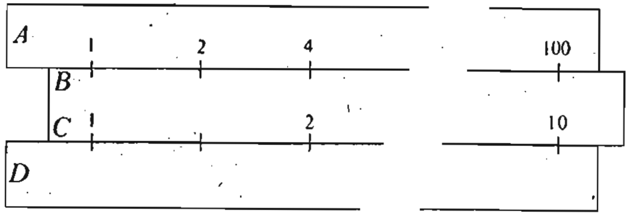
Logaritmar se mnogo primenjuje, naročito u približnim praktičnim računima. Ova sprava omogućuje da se brojevi množe i dele samo pomeranjem jednog dela lenjira prema drugom i čitanjem rezultata. Objasnićemo samo princip sprave, a sa detaljima o upotrebi može se čitalac upoznati ako raspolaže logaritmarom, iz uputstava koja se obično prilažu lenjiru.



Sl. 23 — Elementi logaritmara

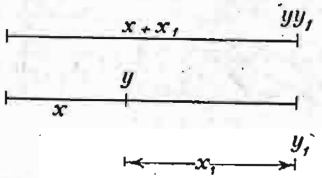
Običan logaritmar, dužine 27 cm, ima tri dela: 1. Nepokretni lenjir sa žljebom, 2. Pokretni lenjir koji klizi po žljebu nepokretnog i 3. Stakleni klizač, sa crtom (sl. 23).

Na nepokretnom i pokretnom lenjiru postoje četiri osnovne podele; označićemo ih sa A, B, C, D; A i D na nepokretnom, B i C na pokretnom (sl. 24). Svaka od skala je dužine 25 cm. Na skalama A i B podele su obeležene brojevima od 1 do 100, ali su potezi podele raspoređeni ne po vrednostima ovih brojeva, već po vrednostima njihovih logaritama.



Sl. 24 — Skale logaritmara

Znači: ispisani su na skali brojevi y, a odmerene su dužine x, jednake logaritmima tih brojeva, tj. $x = \log y$. Ako uzmemo drugi neki broj, y_1, sa njegovim logaritmom, x_1, imamo $x_1 = \log y_1$. Prema tome, ako na lenjiru saberemo dve dužine, x i x_1 dobićemo $x + x_1 = \log y + \log y_1 = \log (y y_1)$, a na podeli ćemo imati potez nad kojim ćemo pročitati broj $y y_1$, što odgovara proizvodu $y y_1$ brojeva y i y_1 (sl. 25).



Sl. 25 — Množenje i deljenje brojeva

I tako za množenje imamo ovaj jednostavan postupak. 1. Na skali A tražimo potez što odgovara broju y; 2. spram tog poteza stavljamo potez 1 skale B pokretnog lenjira; 3. na skali B nalazimo potez što odgovara broju y_1; 4. tom potezu odgovara na skali A potez koji pokazuje proizvod $y y_1$ datih brojeva. Ukupno smo izvršili: jedno kretanje, dva postavljanja poteza i jedno čitanje broja. Za tačnije postavljanje poteza služi klizač.

Iz prethodnog je jasno kako se vrši deljenje brojeva pomoću oduzimanja odgovarajućih dužina.

Skale C i D logaritmara konstruisane su po istom zakonu kao i skale A i B, ali ista dužina od 25 cm nosi podelu logaritama brojeva od 1 do 10. To omogućuje da se pri operacijama sa malim brojevima postigne veća tačnost.

Dopunićemo što je rečeno jednom primedbom o slučaju kad se u radu sa logaritmarom može naići na malu teškoću i o postupku kojim se ta teškoća može izbeći. Objasnićemo ovo na jednom primeru. Uzmimo da treba izračunati izraz $\dfrac{7{,}50 \times 5{,}75}{3{,}50}$. Na skali A uzimamo 75, skalom B oduzimamo 35 i ovome dodajemo, od 1 na skali B, broj 57,5. Došli smo do poteza skale B koji se nalazi van skale A, tako da se na skali A ne može pročitati rezultat. Da se izbegne ta nezgoda, postupa se ovako: pošto nađemo na skali A broj 75 i oduzmemo broj 35, na skali A fiksiramo rezultat crtom na klizaču. Pod ovu crtu dovedemo kraj pokretnog lenjira (time delimo rezultat sa 10), a od njegova početka uzimamo broj 57,5. Tom broju na skali A odgovara broj 12,3, a to odgovara i približnoj vrednosti datog izraza (tačnije 12,32). Izvršili smo dopunsku operaciju sa pokretnim lenjirom, koja se zove »prebacivanje«. Ona odgovara deljenju sa 10.

Dobri logaritmari, sem osnovnih, imaju još i nekoliko dopunskih skala, pomoću kojih se mogu vršiti i druge računske operacije sem množenja i deljenja.

Vežbanja:

1. Merenja dužine od 10 cm dala su dve približne vrednosti: 10,05 cm i 9,97 cm. Odrediti: apsolutne greške, popravke, relativne greške i procentne greške.

2. Izračunati relativnu grešku broja 27 153 m, ako je njegova apsolutna greška 1,5 m.

3. Postaviti i rešiti nekoliko zadataka za približno sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje. Izračunati pri tome relativnu grešku rezultata.

4. Odrediti relativnu grešku zapremine $V = xyz$, ako tu zapreminu računamo po obrascu $V_1 = x_1 y_1 z_1$, gde su V_1, x_1, y_1, z_1 pogrešne vrednosti odgovarajućih veličina.

5. Relativna greška broja iznosi 0,0075. Odrediti apsolutnu grešku prirodnog logaritma tog broja.

6. Majstoru je naručena kocka sa ivicom od 12 cm. Izračunati relativnu grešku zapremine te kocke, ako izrađeno telo predstavlja pravougli paralelepiped sa dimenzijama 12,1 cm, 12,3 cm i 11,98 cm.

7. Kakva tačnost treba da bude u logaritmu broja 7,4321, ako relativna greška tog broja iznosi oko 0,25%?

8. Izračunati pomoću 1. logaritmara, a zatim 2. logaritamskih tablica sa pet decimala izraz

$$\frac{4{,}73 \times 9{,}15 \times 2{,}425 \times 5{,}56}{3{,}21 \times 2{,}325 \times 1{,}915 \times 5{,}51}.$$

4.2. Integracija pomoću redova

Videli smo napred da se za izračunavanje određenog integrala, čiji se neodređeni integral ne može naći, ponekad upotrebljuju metode diferenciranja odnosno integrisanja po parametru. Pokazaćemo još jednu metodu koja omogućava izračunavanje određenog integrala bez poznavanja neodređenog integrala.

Neka je dat konvergentan red, čiji članovi zavise od x, bilo u obliku beskonačnog reda $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$, bilo u obliku konačnog obrasca $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}+R_n$, gde je R_n ostatak reda, tj. $R_n=u_n+u_{n+1}+\ldots$. Ako je red konvergentan za vrednost x, koja se nalazi u datom intervalu (a, b), uvek možemo, za svaku proizvoljnu veličinu ε, naći takvo N, da za $n>N$ ostatak R_n, po apsolutnoj vrednosti, bude manji od ε, tj. da bude $|R_n|<\varepsilon$. Broj N, koji ulazi u taj uslov, u opštem slučaju, može zavisiti ne samo od ε, već i od x. Ako je N isto za sve vrednosti x u intervalu (a, b), dakle zavisi samo od ε, za red se kaže da *konvergira ravnomerno*. Primetimo da red može biti konvergentan, a da ipak ne bude ravnomerno konvergentan. Okvir ove knjige ne dozvoljava nam da se dublje upuštamo u teoriju ravnomernosti konvergentnih funkcionalnih redova. Ali ćemo navesti osnovnu teoremu za ravnomerno konvergentne redove.

Ako je $f(x)=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ ravnomerno konvergentan red u datom intervalu (a, b), integral date funkcije može biti izračunat integracijom toga reda; tako dobiveni red, dakle integracijom, biće takođe konvergentan. Prema tome, za ravnomerno konvergentan red vredi obrazac

$$\text{(XXIV)}\quad \begin{aligned} \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x} u_0\,dx+\int_{x_0}^{x} u_1\,dx+\int_{x_0}^{x} u_2 dx+\ldots+\\ &+\int_{x_0}^{x} u_n dx+\ldots = U_0+U_1+U_2+\ldots+U_n+\ldots = F(x). \end{aligned}$$

Na dokazu ove teoreme ne možemo se zaustavljati, već ćemo rešiti jedan važan zadatak. Izračunati integral

$$K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad k^2<1.$$

U tu svrhu stavićemo $k^2\sin^2\varphi=x^2$ i razvićemo $1:\sqrt{1-x^2}$ u red prema Maklorenovu obrascu. Taj red izgleda ovako

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8+\ldots$$

Primenimo sad na izračunavanje integrala obrazac (XXIV). To možemo uraditi pošto je napisani red ravnomerno konvergentan[1]).

Vidimo da naš integral zavisi od integrala[2]):

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\frac{\pi}{2}.$$

---

[1]) Ravnomerna konvergentnost našeg reda sleduje iz ove *Vajerštrasove teoreme:* Ako su za sve vrednosti x u datom intervalu apsolutne vrednosti članova jednog reda manje od vrednosti članova konvergentnog reda sa pozitivnim konstantnim članovima, prvi je red ravnomerno konvergentan.

U našem slučaju je $x^2=k^2\sin^2\varphi\leqslant k^2$; prema tome su članovi našeg reda manji od članova reda $1+\frac{1}{2}k^2+\frac{1.3}{2.4}k^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}k^6+\ldots$ Ovaj red je konvergentan, jer je $q=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}k^2\right)=k^2<1$. Iz te konvergentnosti sleduje ravnomerna konvergentnost našega reda.

[2]) Napisani integral izračunava se po ovom postupku:

$$J_n=\int\sin^{2n}\varphi\,d\varphi=-\int\sin^{2n-1}\varphi\,d\cos\varphi=-\sin^{2n-1}\varphi\cos\varphi+$$
$$+(2n-1)\int\cos^2\varphi\sin^{2n-2}\varphi\,d\varphi=-\sin^{2n-1}\varphi\cos\varphi+(2n-1)J_{n-1}+(2n-1)J_n,$$

a odavde, za određivanje integrala $J_n^*=\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi$, imamo redukcioni obrazac $2nJ_n^*=(2n-1)J_{n-1}^*$.

Ako iskoristimo dobiveni rezultat, lako ćemo dobiti ovaj obrazac

$$K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^4+\ldots+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2k^{2n}+\ldots\right].$$

Taj integral stoji u vezi sa izračunavanjem perioda oscilacije matematičkog klatna; teorija ovakvih integrala spada u teoriju eliptičkih funkcija.

Vežbanja:

Izračunati pomoću redova integrale:

1. $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$. 2. $\int_0^1 e^{-x^4}dx$. 3. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$. 4. $\int_0^1 \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{4-x}}$.

5. $\int_{0,1}^1 \frac{\cos x}{x}dx$. 6. $\int_{0,1}^1 \frac{\log(1+x)}{x}dx$. 7. $\int_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. 8. $\int_{-0,5}^0\frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$.

4.3. Trigonometrijski redovi. Harmonijska analiza

U Matematici, a tako isto i u Mehanici, Fizici i drugim naukama, vrlo važnu ulogu igraju *periodične funkcije*. To su funkcije koje, kako smo videli (I, str. 103), zadovoljavaju uslov $f(x+K)=f(x)$, za svaku vrednost x datog područja. Broj K je stalan; on se zove *period* periodične funkcije.

Imali smo već primera periodičnih funkcija. Trigonometrijske funkcije su periodične. Funkcije $\sin x$ i $\cos x$ imaju period 2π; funkcije $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{cotg} x$ periodične su sa periodom π. Prema tome, napr., jednačine $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x$ važe za svaku vrednost x.

Lako je pokazati da za svaku periodičnu funkciju, koja zavisi od nezavisno promenljive x i ima period K, uvek možemo naći takvu novu nezavisno promenljivu z da ona ima period 2π osnovnih trigonometrijskih funkcija $\sin x$ i $\cos x$. Zaista,

stavimo $z=px$ i odredimo p iz uslova da se z uveća za 2π, kad se x uveća za K. Ovaj uslov dovodi do jednačine $2\pi=pK$, odakle je $p=2\pi/K$. Nova promenljiva, z, je, dakle, vezana sa starom, x, jednačinom $z=2\pi x/K$. Prema tome u daljem možemo, radi jednostavnijeg izlaganja, uzimati da je period funkcije $f(x)$ — 2π. Pošto je periodičnu funkciju $f(x)$ dovoljno proučavati samo u intervalu jednog perioda, izabraćemo za taj interval razmak od $-\pi$ do $+\pi$.

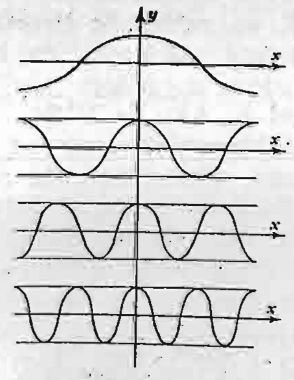
Najglavnija primena periodičnih funkcija je u proučavanju oscilatornog kretanja. Najprostije je među njima harmonijsko kretanje, koje smo već ranije proučili (I, str. 104).

Harmonijskoj oscilaciji sa periodom 2π odgovara jedna od jednačina

$$(1)\qquad y=a_1\cos x,\qquad y=b_1\sin x,$$

ili jednačina $y=a\sin(x+\alpha)$, $y=a\cos(x+\alpha)$, gde su a_1, b_1, a i α konstante; a_1, b_1, a — amplitude oscilacije, a α početna faza za $x=0$. Ako upotrebimo terminologiju Akustike, jednačinama (1) odgovara *glavni* ili *osnovni ton* zvuka. Period glavnog tona zove se *primitivni period*. Ako uzmemo jednačine $y=a_k\cos kx$, $y=b_k\sin kx$, gde su a_k i b_k bilo koje konstante i k prirodni broj, svakoj od tih jednačina odgovara takođe harmonijska oscilacija.

Period tih oscilacija, sa osnovnom, za $k=1, 2, 3, 4\ldots$ redom ima vrednost: 2π, $\frac{2\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\ldots$, $\frac{2\pi}{k}$, $\ldots$ Svaka od tih oscilacija ($k>1$) odgovara *višem tonu*. Na slici 26 predstavljeni su grafici osnovnog i viših tonova sa istom amplitudom za funkciju kosinusa.



Sl. 26. — Grafici osnovnog i tri uzastopna viša tona sa istom amplitudom

Obrazujmo sad zbir $\Phi_n(x)=$

$$=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+$$
$$+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots+$$
$$+a_n\cos nx+b_n\sin nx,$$

ili, kratko

$$(2) \qquad \Phi_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

gde Σ, kao i ranije, označava zbir. U tim obrascima su a_0, a_k, b_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) konstante. Funkcija $\Phi_n(x)$ zove se *trigonometrijski polinom n-tog reda,* pri čemu se pretpostavlja da bar jedan od koeficijenata a_n, b_n nije jednak nuli, tj. $a_n^2 + b_n^2 \neq 0$.

Pretpostavimo sad da je dat neki trigonometrijski polinom n-tog reda. Označimo ga sa $f(x)$. Ako se taj polinom pretvori u oblik $\Phi_n(x)$, koeficijenti a_0, a_k, b_k treba da dobiju određene vrednosti, koje zavise od funkcije $f(x)$. Izvedimo obrasce za određivanje tih koeficijenata:

$$(3) \qquad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx, \qquad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx\, dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx\, dx.$$

Pošto u ovom slučaju imamo jednačinu

$$(4) \qquad f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

za određivanje prvog koeficijenta množimo jednačinu (4) sa dx i integrišemo u granicama od $-\pi$ do $+\pi$. Kako su

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx\, dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx\, dx = 0, \quad \text{a} \quad \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} dx = a_0 \pi,$$ jednačina $a_0 \pi = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx$ potvrđuje prvi obrazac. Za određivanje koeficijenata a_k, treba jednačinu (4) pomnožiti sa $\cos kx\, dx$

i integrisati u istom intervalu. Ako pri tome iskoristimo obrasce Integralnog računa (čitalac neka ih proveri)

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cos k_1 x\, dx = \begin{cases} 0 & \text{za } k_1 \neq k \\ \pi & \text{za } k_1 = k \end{cases}, \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \sin k_1 x\, dx = 0,$$

lako ćemo dobiti vrednosti a_k. Sličan je postupak i za određivanje koeficijenata b_k.

Prema tome, sa svakim trigonometrijskim polinomom n-tog reda možemo povezati polinom

$$F_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

sa koeficijentima u obliku (3). Polinom n-tog reda sa tim koeficijentima zove se *Furijeov polinom n-tog reda za funkciju* $f(x)$. Njegovi koeficijenti su *Furijeovi koeficijenti.*

Ako imamo slučaj da funkcija $F_n(x)$, kad n teži beskonačnosti, predstavlja beskonačan konvergentan red, koji konvergira u intervalu od $-\pi$ do $+\pi$ određenoj datoj funkciji $f(x)$, sa kojom se izračunavaju Furijeovi koeficijenti, imamo tzv. *Furijeov red* za funkciju

$$(\text{XXV}) \qquad f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Furijeov red ima značaj samo pod uslovom ako je on konvergentan. Uporedo sa tim redom možemo napisati takozvani *Furijeov obrazac,* u obliku $f(x) = F_n(x) + R_n(x)$, gde je $R_n(x)$ ostatak tog reda. Furijeov obrazac uvek je tačan, a Furijeov red je tačan samo tad, kad $R_n(x)$ teži nuli kad $n \to \infty$. Za određenu vrednost broja n, kao i u slučaju, recimo, Taylor-ova reda, ostatak R_n može da pokaže kako stepen tačnosti približne vrednosti funkcije $F_n(x)$, tako i prirodu konvergentnosti reda, pa čak i ravnomernu konvergentnost.

Jasno je da u slučaju parne funkcije, tj. pod uslovom kad je $f(-x) = f(x)$, Furijeov red sadrži članove sa konstantama $a_0, a_1, a_2, \ldots$; u slučaju neparne funkcije red sadrži samo članove sa $b_1, b_2, \ldots$

Polazeći od trigonometrijskog reda došli smo do Furijeova reda sa Furijeovim koeficijentima, pomoću kojih se određuje funkcija $f(x)$.

Važan je obrnuti zadatak: razviti datu funkciju $f(x)$ u Furijeov red, tj. odrediti Furijeove koeficijente i utvrditi konvergentnost tog reda, a po mogućstvu i prirodu konvergentnosti. Za određivanje Furijeovih koeficijenata služe obrasci (3), a problem konvergentnosti se zasniva na klasičnoj Dirihleovoj teoremi. Radi kraćeg formulisanja te teoreme prethodno ćemo navesti Dirihleove uslove, koje treba da zadovoljava funkcija $f(x)$ za primenu teoreme. 1. Funkcija može biti ili neprekidna ili imati konačan broj prekida sa konačnim skokovima; 2. Funkcija treba da ima konačan broj ekstremuma, drugim rečima, da se deli na konačan broj monotonih delova i 3. Na granicama intervala, $-\pi$ i $+\pi$, funkcija treba da ima kako desnu, tako i levu graničnu vrednost, koje ćemo označiti sa $f(-\pi+0)$ i $f(+\pi-0)$. Sama teorema glasi: Ako funkcija $f(x)$ zadovoljava u intervalu $(-\pi, +\pi)$ Dirihleove uslove, Furijeov red je konvergentan i njegov zbir je jednak: 1. funkciji $f(x)$ u svima tačkama neprekidnosti, 2. izrazu $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ u svim tačkama prekida, i 3. izrazu $\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(+\pi-0]$ na granicama intervala.

U dokaz teoreme ne možemo ulaziti.

Za ispitivanje ravnomernosti konvergencije Furijeova reda može prvo da posluži Vajerštrasova teorema, koju smo naveli u primedbi na str. 99. A možemo navesti, bez dokaza, i ovu teoremu: Ako je funkcija $f(x)$ u intervalu od $-\pi$ do $+\pi$ neprekidna; ima na svim svojim konačnim delovima neprekidni izvod; i, najzad, ima jednake granične vrednosti, tj. $f(-\pi)=f(+\pi)$, onda Furijeov red konvergira ravnomerno prema $f(x)$ za sve vrednosti, x, u intervalu $(-\pi, +\pi)$.

Furijeov red ima ogroman značaj za proučavanje periodičnih funkcija. On omogućuje da se kod periodičnih pojava izdvoje, prvo, glavne oscilacije, a zatim, postupno, i oscilacije manjih perioda. Ovakvo razlaganje periodičnih pojava pomoću Furijeova reda zove se *harmonijska analiza.*

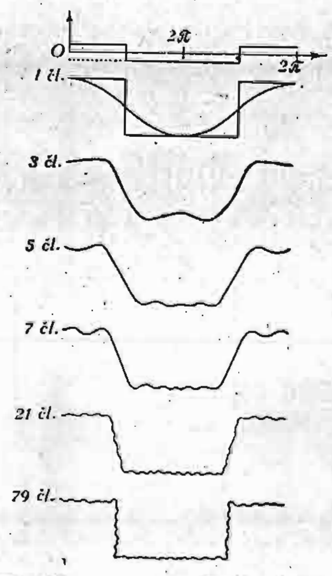
Pomoću Furijeova reda mogu se predstaviti ne samo neprekidne funkcije sa neprekidnim izvodom već i neprekidne sa prekidnim izvodom, pa čak i prekidne funkcije. Na slikama 27, a i b, prikazani su primeri takvih funkcija i njihova predstava pomoću zbirova članova Furijeova reda. Na sl. 27 prikazane su krive koje je nacrtao američki fizičar Majkelson, pomoću naročitog aparata — *harmonijskog analizatora.* Furijeov red u tom slučaju ima oblik

$$y=\frac{1}{2}\left[\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x-\frac{1}{7}\cos 7x+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos(2n+1)x+\ldots\right].$$

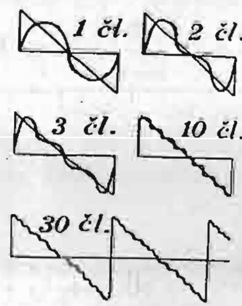
Funkcija y, predstavljena u koordinatnom sistemu, ima vrednosti: $-\pi/8$ u intervalu od $-\pi/2$ do $+\pi/2$ i $-\pi/8$ u intervalu od $\pi/2$ do $3\pi/2$. U drugom primeru (sl. 27 b) imamo red

$$y=2\left[\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\ldots+\frac{1}{n}\sin nx+\ldots\right].$$

Ovaj red određuje krivu koja liči na zupce testere.



Sl. 27 a — Aproksimativne krive Furijeovog reda. Prvi primer



Sl. 27 b — Aproksimativne krive Furijeovog reda. Drugi primer

Dosad smo izlagali teoriju harmonijske analize pod pretpostavkom da je funkcija $f(x)$ data u analitičkom obliku i da izračunavanje odgovarajućih integrala za određivanje Furijeovih koeficijenata ne predstavlja teškoće. Međutim, u proučavanju procesa koji se određuju iz opažanja i eksperimenata, u većini slučajeva su poznate samo vrednosti funkcija za određene vrednosti argumenata. Pokazaćemo sada kako se harmonijska analiza vrši u slučaju kad je funkcija data pomoću niza svojih vrednosti u intervalu jednog perioda.

Pretpostavimo da je period od 360^0 podeljen na 12 jednakih delova, kako se to najčešće uzima, i da su vrednosti funkcije određene shemom

x	0^0	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0	210^0	240^0	270^0	300^0	330^0
y	$y_0\,(y_{12})$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}

Pomoću tih 12 vrednosti možemo odrediti 12 Furijeovih konstanata u približnom obrascu, koji uzimamo u ovom obliku:

$$
\begin{aligned}
(4)\quad f(x)\approx\Phi(x)=a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+\\
+a_4\cos 4x+a_5\cos 5x+a_6\cos 6x+b_1\sin x+\\
+b_2\sin 2x+b_3\sin 3x+b_4\sin 4x+b_5\sin 5x.
\end{aligned}
$$

Za ovo određivanje treba uvrstiti vrednosti x u jednačinu (4) i napisati 12 jednačina. Koeficijenti tih 12 jednačina predstavljeni su shemom na strani 120.

Tako dobivenih 12 jednačina treba rešiti u odnosu na koeficijente $a_0, a_1, \ldots, a_6, b_1, b_2, \ldots, b_5$. U suštini, rešavanje tog sistema linearnih jednačina ne predstavlja teškoće, ali, pošto ono može da bude glomazno, pokazaćemo shemu jednog postupka, koji je predložio *Runge* i koji dovodi do rešenja pomoću jednostavnih operacija, uglavnom pomoću sabiranja i oduzimanja.

Ispišimo vrednosti ordinata u dva reda, kako je to pokazano, i obrazujmo zbirove i razlike ovih poslednjih.

$$
\begin{array}{lcccccc}
 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\
 & y_{12} & y_{11} & y_{10} & y_9 & y_8 & y_7 \\
\hline
\text{Zbirovi} & s_0 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4\; s_5 & s_6 \\
\text{Razlike} & & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccc}
 & s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\
 & s_6 & s_5 & s_4 & \\
\hline
\text{Zbirovi} & S_0 & S_1 & S_2 & S_3 \\
\text{Razlike} & D_0 & D_1 & D_2 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
d_1 & d_2 & d_3 \\
d_5 & d_4 & \\
\hline
\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\
\delta_1 & \delta_2 &
\end{array}
$$

Za samo određivanje koeficijenata $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_6$ služi shema prema kojoj treba ovako postupiti. Svaki član te sheme treba prethodno pomnožiti onim brojem koji stoji sa leve strane sheme, tj. ili sa $\sin 30^0=\frac{1}{2}$, ili sa $\sin 60^0=\frac{\sqrt{2}}{2}=1-$ $-0{,}1340$ (množiti tom razlikom je zgodnije) ili sa $\sin 90^0=1$, tj. ostaviti bez promene. Sličan postupak treba primeniti i za određivanje koeficijenata kod sinusa. Te sheme izgledaju ovako.

Članovi sa kosinusima

$\sin 30°=\frac{1}{2}$			D_2		$-S_2$	S_1		
$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}=1-0{,}1340$				D_1				
$\sin 90°=1$	S_0 S_2	S_1 S_3	D_0		S_0	$-S_3$	D_6	D_2
Zbirovi	I	II	I	II	I	II	I	II
Zbirovi	$12a_0$		$6a_1$		$6a_2$			
Razlike	$12a_6$		$6a_5$		$6a_4$		$6a_3$	

Članovi sa sinusima

$\sin 30°=\frac{1}{2}$	σ_1					
$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}=1-0{,}1340$		σ_2	δ_1	δ_2		
$\sin 90°=$	σ_3				σ_1	σ_3
Zbirovi	I	II	I	II	I	II
Zbirovi I+II	$6b_1$		$6b_2$			
Razlike I−II	$6b_3$		$6b_4$		$6b_3$	

x	$y =$	a_0	$+a_1 \cos x$	$+a_2 \cos 2x$	$+a_3 \cos 3x$	$+a_4 \cos 4x$	$+a_5 \cos 5x$	$+a_6 \cos 6x$	$+b_1 \sin x$	$+b_2 \sin 2x$	$+b_3 \sin 3x$	$+b_4 \sin 4x$	$+b_5 \sin 5x$
0°	y_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$+a_6$					
30°	y_1	a_0	$\frac{\sqrt{3}}{2}a_1$	$\frac{1}{2}a_2$		$-\frac{1}{2}a_4$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}a_5$	$-a_6$	$\frac{1}{2}b_1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}b_2$	b_3	$\frac{\sqrt{3}}{2}b_4$	$\frac{1}{2}b_5$
60°	y_2	a_0	$\frac{1}{2}a_1$	$-\frac{1}{2}a_2$	$-a_3$	$-\frac{1}{2}a_4$	$\frac{1}{2}a_5$	$+a_6$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}b_1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}b_2$		$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_4$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_5$
90°	y_3	a_0		$-a_2$		$+a_4$		$-a_6$	$+b_1$		$-b_3$		$+b_5$
120°	y_4	a_0	$-\frac{1}{2}a_1$	$-\frac{1}{2}a_2$	$+a_3$	$-\frac{1}{2}a_4$	$-\frac{1}{2}a_5$	$+a_6$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}b_1$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_2$		$+\frac{\sqrt{3}}{2}b_4$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_5$
150°	y_5	a_0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}a_1$	$+\frac{1}{2}a_2$		$-\frac{1}{2}a_4$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}a_5$	$-a_6$	$+\frac{1}{2}b_1$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_2$	$+b_3$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_4$	$\frac{1}{2}b_5$
180°	y_6	a_0	$-a_1$	$+a_2$	$-a_3$	$+a_4$	$-a_5$	$+a_6$					
210°	y_7	a_0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}a_1$	$+\frac{1}{2}a_2$		$-\frac{1}{2}a_4$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}a_5$	$-a_6$	$-\frac{1}{2}b_1$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}b_2$	$-b_3$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}b_4$	$-\frac{1}{2}b_5$
240°	y_8	a_0	$-\frac{1}{2}a_1$	$-\frac{1}{2}a_2$	$+a_3$	$-\frac{1}{2}a_4$	$-\frac{1}{2}a_5$	$+a_6$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_1$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}b_2$		$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_4$	$\frac{\sqrt{3}}{2}b_5$
270°	y_9	a_0		$-a_2$		$+a_4$		$-a_6$	$-b_1$		$+b_3$		$-b_5$
300°	y_{10}	a_0	$+\frac{1}{2}a_1$	$-\frac{1}{2}a_2$	$-a_3$	$-\frac{1}{2}a_4$	$+\frac{1}{2}a_5$	$+a_6$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_1$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_2$		$+\frac{\sqrt{3}}{2}b_4$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}b_5$
330°	y_{11}	a_0	$+\frac{\sqrt{3}}{2}a_1$	$+\frac{1}{2}a_2$		$-\frac{1}{2}a_4$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}a_5$	$-a_6$	$-\frac{1}{2}b_1$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_2$	$-b_3$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_4$	$-\frac{1}{2}b_5$

Shema jednačina harmonijske analize pomoću dvanaest intervala

Kao primer odredimo koeficijente na osnovu ovih vrednosti periodične funkcije:

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
y	9,3	15,0	17,4	23,0	37,0	31,0	15,3	4,0	−8,0	−13,2	−14,2	−6,0

Prema navedenom formularu izračunavanje se vrši ovako:

	15,0	17,4	23,0	37,0	31,0	15,3
9,3	−6,0	−14,2	−13,2	−8,0	4,0	
9,3	9,0	3,2	9,8	29,0	35,0	15,3
	21,0	31,6	36,2	45,0	27,0	

9,3	9,0	3,2	9,8		21,0	31,6	36,2
15,3	35,0	29,0			27,0	45,0	
24,6	44,0	32,2	9,8		48,0	76,6	36,2
−6,0	−26,0	−25,8			−6,0	−13,4	

$\sin 30° = \frac{1}{2}$			−12,9		−16,1		22,0	
$\sin 60° = 1 - 0{,}1340$					−22,52			
	24,6	44,0						
$\sin 90° = 1$			−6,0		24,6	−9,8	−6,0	25,8
	32,2	9,8						
Zbirovi	56,8	53,8	−18,9	−22,5	8,5	12,2	−6,0	−25,8
I + II	110,6		−41,4		20,7			
	$a_0 = 9{,}22$		$a_1 = -6{,}90$		$a_2 = 3{,}45$			
I − II	3,0		3,6		−3,7		19,8	
	$a_6 = 0{,}25$		$a_5 = 0{,}060$		$a_4 = -0{,}62$		$a_3 = 3{,}30$	

$\sin 30° = \frac{1}{2}$	24,0				
$\sin 60° = 1 - 0{,}1340$	66,34	−5,20	−11,62		
$\sin 90° = 1$	36,2			48,0	36,2

Zbirovi	60,2	66,34	−5,20	−11,62	48,0	36,2
I+II	126,54 $b_1=21,09$		−16,82 $b_2=-2,80$			
I−II	−6,14 $b_5=-1,02$		6,42 $b_4=1,07$			11,8 $b_3=1,97$

Rezultat harmonijske analize funkcije određene datim vrednostima ordinata doveo je do ovog izraza

$$y=9,22-6,90\cos x+3,45\cos 2x+3,30\cos 3x-0,62\cos 4x+$$
$$+0,60\cos 5x+0,25\cos 6x+21,09\sin x+-2,8\sin 2x+$$
$$+1,97\sin 3x+1,07\sin 4x-1,02\sin 5x$$

Vežbanja:

1. Nacrtati grafike funkcija: $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$; $y=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x$; $y=\sin x+\frac{1}{2}\cos 2x$; $y=\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x$.

2. Izvesti obrasce za Furijeove konstante iz uslova da integral $I=\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)-\Phi_n(x)]^2\,dx$ ima ekstremnu vrednost, ako je $\Phi_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$.

3. Odrediti Furijeove koeficijente, ako je poznato 12 vrednosti funkcije za argumente 0°, 30°, 60° itd., naime: 38,2; 12,2; 4,4; 14,4; 14,1; −18,6; −23,3; −27,1; −24,2; 8,1; 32,3; 33,4. Po ovim vrednostima nacrtati grafik funkcije.

4.4. Rešavanje jednačina

a. *Rešavanje sistema linearnih jednačina. Primena determinanata.* Jednačinu prvog stepena sa nepoznatom x možemo, kao što je poznato, napisati u opštem obliku $ax=b$. Odatle izvodimo za rešenje $x=b/a$. Da bi ta jednačina i njeno rešenje, već u svom najprostijem obliku, poslužili kao osnovni obrazac za rešavanje sistema linearnih jednačina i sa više nepoznatih upotrebićemo, već od početka, oznake koje će zadržati svoj sadržaj i u opštem slučaju. Napisaćemo, naime, jednačinu i njeno rešenje ovako:

$$(1)\qquad Dx_1=D_1,\qquad x_1=D_1:D,$$

gde smo stavili $x_1=x$, $D=a$, $D_1=b$.

Sistem od dve jednačine prvog stepena, sa nepoznatim x_1 i x_2, uzimamo u obliku

$$(2)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2&=b_2.\end{aligned}$$

Pravila po kojima su napisani koeficijenti tih jednačina poznata su, jer smo već u prvoj knjizi (I, str. 84) objasnili pojam matrice; napisani koeficijenti čine matricu drugog reda $\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{Vmatrix}$. *Jednačine* se zovu *linearne*, jer svaka od njih, kako smo videli (I, str. 56) odgovara pravoj liniji.

Poznato rešenje sistema (2) napisaćemo u obliku (čitalac neka ponovi izvođenje tog rešenja)

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\,x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12},$$
$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\,x_1=a_{11}b_2-a_{21}b_1.$$

Ako uzmemo sad u obzir pomenutu matricu, vidimo da koeficijent pored x_1 i x_2 na levim stranama nije drugo već determinanta $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ naše matrice. A na desnoj strani, u prvoj jednačini, imamo determinantu $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}$, koju ćemo označiti sa D_1, a u drugoj — determinantu $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}$, koju ćemo označiti sa D_2. Determinanta D se zove *glavna* ili, jednostavno, *determinanta sistema;* a determinante D_1 i D_2 možemo zvati *determinantama rešenja* za tražene nepoznate. Zaista, pomoću ovih determinanata prethodno rešenje se ovako izražava

$$Dx_1=D_1,\quad Dx_2=D_2.$$

Na pitanje da li prva od ovih jednačina, bez druge, odgovara jednačini (1) sa samo jednom nepoznatom, odgovor je da se matrica jednačine (1) svodi samo na jedan član $\| D \| = \| a \|$, sa determinantom $D=a$, a isto tako i determinanta $\| D_1 \| = b$.

Ako determinanta sistema D nije jednaka nuli, determinante D_1 i D_2 se dobijaju jednostavnom zamenom u determinanti D prvog, odnosno drugog stupca brojevima b_1 i b_2, na desnim stranama datog sistema. U slučaju kad je sistem jednačina napisan, recimo, u obliku $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} = 0$, $a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} = 0$, dakle i slobodni članovi se nalaze na levoj strani kao i članovi sa nepoznatim, za determinante rešenja D_1 i D_2 treba, u determinanti D (mesto b_1 i b_2) staviti $-a_{13}$ i $-a_{23}$.

Prikazani postupak za rešavanje sistema jednačina pomoću determinanata (2) zove se *Kramerov postupak.* Kako je objašnjen na sistemu od dve jednačine, postupak se primenjuje i na sistem od proizvoljnog broja, n, linearnih jednačina, sa n nepoznatih.

Kratko, sistem od n jednačina možemo izraziti

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Ako determinantu D ovog sistema označimo (I, str. 89) za trenutak sa $|a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}|$, a determinantu rešenja za j-tu promenljivu sa

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} \; a_{12} \ldots a_{1,j-1}, b_1, a_{1,j+1}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \ldots a_{2,j-1}, b_2, a_{2,j+1}, \ldots, a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \; \cdots \quad \vdots \qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdots \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \; \cdots \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdots \quad \cdot \\ a_{n1} \; a_{n2} \ldots a_{n,j-1}, b_n, a_{n,j+1}, \ldots a_{nn} \end{vmatrix},$$

gde su elementi j-tog stupca zamenjeni slobodnim članovima na desnoj strani sistema (4), onda, prema Kramerovu postupku, za $D \neq 0$, imamo rešenje, koje ćemo napisati u obliku

$$Dx_j = D_j \quad (j=1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

U dokaz tačnosti Kramerova postupka, u opštem slučaju, nećemo ovde ulaziti. Dokaz se sastoji u transformaciji sistema (4) u sistem (5) pod uslovom da je $D \neq 0$.

U vezi sa Kramerovim postupkom ponovimo i Laplasovo pravilo (I, str. 85) za izračunavanje determinante ma kojeg reda, koje možemo smatrati kao definiciju determinante. Prikazali smo to pravilo na slučaju determinante trećega reda; sad ćemo ga prikazati na slučaju determinante n-tog reda. Uzmimo u toj determinanti neku, recimo i-tu, vrstu sa elementima $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ i pomnožimo svaki od elemenata njegovom algebarskom dopunom, tj. veličinama $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in}$. Zbir svih dobivenih proizvoda jednak je vrednosti determinante; kratko $D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$. Napominjemo da se pod algebarskom dopunom, A_{ij}, nekog elementa, a_{ij}, podrazumeva determinanta (minor) koja se dobiva iz determinante D kad iz nje ispustimo onu vrstu i onaj stubac kojima pripada element a_{ij}, a preostaloj determinanti (minoru) dâ znak izraza $(-1)^{i+j}$. U teoriji determinanata se pokazuje da vrednost determinante D ostaje ista kad se ona izračunava pomoću bilo koje vrste ili bilo kog stupca po Laplasovu pravilu. U dokaz te osobine nećemo ulaziti, ali ćemo navesti neke druge osobine determinanata koje olakšavaju njihovo izračunavanje.

1. Ako su svi elementi jedne vrste ili jednog stupca jednaki nuli, determinanta je jednaka nuli.

2. Determinanta ne menja svoju vrednost, ako elementima jedne vrste, ili jednog stupca, dodamo ili oduzmemo redom brojeve proporcionalne elementima neke druge vrste, odnosno stupca. Iz ove osobine neposredno sleduje da uvek možemo, uzimajući dve vrste, ili dva stupca, u jednoj od njih jedan element reducirati na nulu, ako u drugoj vrsti odgovarajući element nije jednak nuli (neka čitalac to pokaže!).

3. Iz prethodne osobine sleduje ova osobina determinante. Ako su elementi jedne vrste, ili jednog stupca, jednaki ili proporcionalni elementima druge vrste, odnosno drugog stupca, determinanta je jednaka nuli.

Kramerov postupak sa primenom Laplasova postupka za izračunavanje determinanata sačinjava Kramer — Laplasovu metodu za rešavanje sistema linearnih jednačina.

Kramerov postupak, ako je ispunjen uslov $D \neq 0$, dovodi do rešenja, i ne bi bilo teško pokazati da je to rešenje jedinstveno. A šta će biti sa rešenjem sistema kad je $D=0$? Odgovor na to pitanje daje se u kursevima Više algebre, i to u vezi sa Teorijom matrica. U ovoj knjizi se ne možemo upuštati u takvo izlaganje. Ali ćemo se zaustaviti na nekim jednostavnim primerima rešenja sistema linearnih jednačina. Uzećemo tri sistema jednačina i na njima pokazati prirodu mogućih rešenja.

1. $5x_1-2x_2=1,\quad 2x_1+x_2=4.$ 2. $5x_1-2x_2=1,\quad 10x_1-4x_2=2.$ 3. $5x_1-2x_2=1,\quad 5x_1-2x_2=5.$

Za prvi sistem imamo: $D=\begin{vmatrix}5&-2\\2&1\end{vmatrix}=5+4=9$, $D_1=\begin{vmatrix}1&-2\\4&1\end{vmatrix}=1+8=9$, $D_2=\begin{vmatrix}5&1\\2&4\end{vmatrix}=20-2=18$; prema tome naš sistem ima jedinstveno rešenje: $x_1=1$, $x_2=2$. *Sistem* se zove *određen*.

U drugom sistemu: $D=\begin{vmatrix}5&-2\\10&-4\end{vmatrix}=-20+20=0$, $D_1=\begin{vmatrix}1&-2\\2&-4\end{vmatrix}=-4+4=0$, $D_2=\begin{vmatrix}5&1\\10&2\end{vmatrix}=10-10=0$. Kramerovo pravilo daje $x_1=0:0$, $x_2=0:0$. Sistem ima beskrajno mnogo rešenja. Zaista, ako uzmemo ma koje rešenje prve jednačine, napr. $x_1=1$, $x_2=2$, ono će biti i rešenje druge jednačine. A kako opšte rešenje prve jednačine možemo izraziti i ovako: $x_1=1+2k$, $x_2=2+5k$, gde je k proizvoljan broj, isto rešenje ima i druga jednačina sistema. *Sistem* se zove *neodređen*.

Najzad, u trećem slučaju imamo: $D=\begin{vmatrix}5&-2\\5&-2\end{vmatrix}=0$, $D_1=\begin{vmatrix}1&-2\\5&-2\end{vmatrix}=-2+10=8$, $D_2=\begin{vmatrix}5&1\\5&5\end{vmatrix}=25-5=20$. Sistem nema rešenja, a to se vidi i neposredno, jer isti algebarski izraz $5x_1-2x_2$ ne može imati u isto vreme vrednost i 1 i 5. *Sistem* se zove *protivurečan*.

Zadržaćemo se još i na slučaju *sistema homogenih linearnih jednačina*, tj. jednačina koje ne sadrže članove slobodne od nepoznatih.

Primeri:

1. $a_{11}x_1+a_{12}x_2=0,\quad a_{21}x_1+a_{22}x_2=0.$

2. $a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0,\quad a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0,\quad a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0.$ (5)

Takvi sistemi uvek imaju rešenje $x_i=0$ $(i=1,2;\ i=1,2,3)$, koje se zove *trivijalno rešenje*. Pošto je u ovim slučajevima $b_i=0$, determinante Kramerova rešenja u brojiocima D_i su takođe jednake nuli. Da bi sistemi imali i drugih rešenja, sem trivijalnih, neophodno je da i determinanta sistema D, kao imenilac, bude jednaka nuli.

Uslov $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=0$ za sistem prvog primera dovodi do proporcionalnosti koeficijenata jednačina. A to znači da se prave što odgovaraju tim jednačinama u ravni koordinata, x_1 i x_2, poklapaju. Rešenje sistema možemo tada napisati ovako: $x_1=a_{12}k$, $x_2=-a_{11}k$, gde je k proizvoljan broj.

U drugom primeru, sa geometrijskog gledišta, imamo tri ravni koje prolaze kroz početak koordinata, tačku $O(0,0,0)$ — a to i odgovara trivijalnom rešenju: $x_1=x_2=x_3=0$. Elementarna stereometrija uči da tri ravni koje prolaze kroz istu tačku prostora mogu imati još zajedničkih tačaka samo: 1. kad te ravni imaju zajedničku pravu, i 2. kad se poklapaju.

U oba slučaja uslov $D=0$ mora biti zadovoljen. Ali, u prvom slučaju, postoji bar jedan minor te determinante različit od nule. Tada dve jednačine sistema (5), sa onim koeficijentima koji ulaze u navedeni minor, imaju rešenje koje zadovoljava i treću jednačinu. Tako, napr., ako je minor $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$, dve jednačine $a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0$, $a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0$ imaju rešenje (6) $x_1=Ax_3$, $x_2=Bx_3$, gde su: $A=-(a_{13}a_{22}-a_{12}a_{23}):(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$, $B=-(a_{11}a_{22}-a_{13}a_{21}):(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$, Jednačinama (6) odgovara prava linija. Pošto rešenje (6), prema uslovu $D=0$, zadovoljava i treću jednačinu (neka čitalac pokaže to!), dolazimo do zaključka da pod uslovima: $D=0$, $M\neq 0$, gde smo sa M označili neki minor drugog reda determinante D, sistem jednačina (5) ima rešenje (6) sa proizvoljnim brojem x_3.

U drugom slučaju uslov $D=0$ je zadovoljen, ali su pri tome i svi minori drugog reda jednaki nuli. Tada su koeficijenti svih jednačina proporcionalni i ravni se poklapaju. Ako sa α_1, α_2, α_3 i β_1, β_2, β_3 označimo dva proizvoljna, različita rešenja, bilo koje od naših jednačina, opšte rešenje našeg sistema, u tom slučaju, izgleda ovako: $x_i=p\,\alpha_i+q\,\beta_i$ $(i=1, 2, 3)$, gde su p i q proizvoljni brojevi.

b. *Rešavanje sistema linearnih jednačina Gausovim postupkom.* Pokazaćemo još kako se rešava sistem linearnih jednačina tzv. *Gausovim postupkom,* koji je naročito u poslednje vreme postao važan zbog toga što program za rešavanje sistema linearnih jednačina na elektronskoj računskoj automat-mašini, sastavljen za Gausov postupak, zahteva najmanji broj operacija i najbrže dovodi do rezultata (I, str. 16). Radi kraćeg izlaganja zaustavićemo se ponovo na sistemu od tri jednačine, u obliku

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) \quad a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_1=0. \quad |\,a_{21}:a_{11}\,|\; a_{31}:a_{11}\\
&\qquad a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_2=0,\\
&\qquad a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_3=0.
\end{aligned}
$$

Da bismo eliminisali nepoznatu x_1 iz druge i treće jednačine pomnožimo prvu sa $a_{21}:a_{11}$ i rezultat oduzmimo od druge jednačine; zatim pomnožimo prvu jednačinu sa $a_{31}:a_{11}$ i rezultat oduzmimo od treće i dobićemo jednačine, bez nepoznate x_1:

$$\left(a_{22}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2+\left(a_{23}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13}\right)x_3+\left(a_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_1\right)=0,$$

$$\left(a_{32}-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2+\left(a_{33}-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13}\right)x_3+\left(a_3-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_1\right)=0.$$

Kratko ćemo novi sistem ovako napisati:

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{II}) \quad a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+a_2^{(1)}=0, \quad |\; a_{32}^{(1)}:a_{22}^{(1)}\\
&\qquad a_{32}^{(1)}x_2+a_{33}^{(1)}x_3+a_3^{(1)}=0.
\end{aligned}
$$

Gornji indeks pokazuje da smo označenu transformaciju koeficijenata prvi put izvršili. Sada ćemo tu istu transformaciju izvršiti sa jednačinama novog sistema; dobićemo jednačinu

$$\left(a_{33}^{(1)}-\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}a_{23}^{(1)}\right)x_3+\left(a_3^{(1)}-\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}a_2^{(1)}\right)=0,$$

koju ćemo kratko ovako napisati

$$(\mathrm{III}) \qquad a_{33}^{(2)}x_3+a_3^{(2)}=0.$$

Tako smo, posle izvršenih transformacija, došli do novog sistema jednačina

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) && a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_1=0,\\
&(\mathrm{II}) && a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+a_2^{(1)}=0,\\
&(\mathrm{III}) && a_{33}^{(2)}x_3+a_3^{(2)}=0,
\end{aligned}
$$

sa stepenastom determinantom

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)}\\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Vidimo da posle te transformacije imamo odmah rešenje: iz jednačine (III) deljenjem određujemo x_3 i, kad tu vrednost stavimo u jednačinu (II), posle sabiranja novo deljenje daje x_2, zatim, posle sličnih operacija, jednačina (I) daje nepoznatu x_1.

Rešimo sad ovaj primer po tom Gausovom postupku:

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned} 2x_1+x_2+3x_3+5&=0, \qquad |4:2=2|6:2=3\\ 4x_1+4x_2+7x_3+14&=0,\\ 6x_1+19x_2+22x_3+32&=0.\end{aligned}$$

Počinjemo sa drugom jednačinom: od svakog koeficijenta te jednačine oduzimamo koeficijent prve jednačine, pomnožen prethodno sa 2. To isto radimo i sa trećom jednačinom, samo prvu jednačinu množimo sa $6:2=3$. Posle ovih operacija dobićemo jednačine

$$(4-1.2)\,x_2+(7-3.2)\,x_3+14-5.2=0,$$

$$(19-1.3)\,x_2+(22-3.3)\,x_3+32-5.3=0,$$

ili
$$\text{(II)}\qquad \begin{aligned} 2x_2+x_3+4&=0, \qquad |16:2=8.\\ 16x_2+13x_3+17&=0.\end{aligned}$$

Sad prvu jednačinu množimo sa $16:2=8$ i oduzimamo od druge; dolazimo do jednačine (III) $5x_3-15=0$, koja daje $x_3=3$. Zatim iz jednačine (II) imamo $x_2=-7/2=-3{,}5$ i, najzad, jednačina (I) daje $x_1=-5{,}25$.

c. *O korenima algebarske jednačine.* U ovim izlaganjima biće govora samo o algebarskim jednačinama sa brojnim koeficijentima.

Ako su koeficijenti jednačine racionalni, možemo ih uvek svesti na cele brojeve; zaista, ako su u jednačini

$$(6)\qquad f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$$

koeficijenti razlomci, množeći jednačinu njihovim zajedničkim imeniocem, možemo ih se osloboditi.

Primetimo da jednačinu (6) sa $a_n\neq 1$ uvek možemo svesti na tzv. *normalni oblik*, tj. da koeficijent pored najvišeg stepena x-a bude jedinica. Zaista, ako to nije slučaj i a_n ima, recimo, vrednost $a_n=p^\lambda q^\mu r^\nu\ldots$, gde su $p, q, r, \ldots$ prosti brojevi, množeći jednačinu (6) brojem $p^{n-\lambda}q^{n-\mu}r^{n-\nu}\ldots$

i uzimajući za novu nepoznatu $z=(pqr\ldots)x$ dobićemo jednačinu normalnog oblika

$$z^n+b_{n-1}z^{n-1}+\ldots+b_1z+b_0=0.$$

Podsetićemo se nekih poznatih pojmova i stavova u vezi sa jednačinama.

Broj a koji, kada ga stavimo u jednačinu mesto x, pretvara jednačinu u identitet, zove se *koren jednačine*. Koren jednačine $f(x)=0$ zove se i *nula funkcije* $f(x)$, u našem slučaju nula polinoma.

Navešćemo bez dokaza nekoliko vrlo važnih stavova o korenima algebarskih jednačina.

Ako je a koren jednačine (6), polinom $f(x)$ je deljiv sa $(x-a)$.

Ako je polinom $f(x)$ deljiv sa $(x-a)$ samo na prvom stepenu, koren a zove se *prost koren*. Ako je taj polinom deljiv sa $(x-a)^k$, a nije deljiv sa $(x-a)^{k+1}$, broj a je *višestruki koren k-tog stepena* ili *k-tog reda* date jednačine.

Ako jednačina sa realnim koeficijentima ima kompleksni koren $\alpha+\beta i$, ona mora imati i koren u obliku konjugovanog kompleksnog broja $\alpha-\beta i$. Pošto je polinom $f(x)$ deljiv sa $x-(\alpha+\beta i)$ i sa $x-(\alpha-\beta i)$, on mora biti deljiv i proizvodom ovih veličina, tj. sa $[(x-\alpha)-\beta i][(x-\alpha)+\beta i]=(x-\alpha)^2+\beta^2=$ $=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$. Ako funkcija $f(x)$ ima čist imaginarni koren $\beta i\,(\alpha=0)$, ona ima takođe i koren $-\beta i$ i deljiva je sa $x^2+\beta^2$.

Svaka algebarska jednačina n-tog stepena ima n korena *(Gausova teorema)*. Pri tome se svaki k-struki koren računa za k korena. Dakle, ako jednačina (6) ima samo proste korene, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, funkciju $f(x)$ možemo predstaviti u obliku $f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$. Ako su x_1 i x_2 višestruki koreni reda k_1 i k_2, funkcija se određuje izrazom $f(x)=$ $=(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}f_1(x)$, pri čemu polinom $f_1(x)$, stepena $n-k_1-k_2$, nije više deljiv ni sa $x-x_1$, ni sa $x-x_2$.

Ako polinom u normalnom obliku ima n prostih korena, tj.

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0=$$
$$=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

pošto izjednačimo koeficijente pored istih stepena x sa obe strane, dobićemo niz tzv. *Kardanovih* (G. Cardano, 1501—1576) *obrazaca:*

$$a_{n-1} = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n),$$
$$a_{n-2} = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n,$$
$$a_{n-3} = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_0 = (-1)^n x_1x_2 \ldots x_n.$$

Ovi obrasci omogućuju da se napiše jednačina, ako su joj poznati koreni. Tako jednačina četvrtog stepena sa korenima $1, -1, 1+i, 1-i$ ima koeficijente:

$$a_3 = -(1 - 1 + 1 + i + 1 - i) = -2,$$
$$a_2 = 1(-1 + 1 + i + 1 - i) - 1(1 + i + 1 - i) + (1 + i)(1 - i) = 1,$$
$$a_1 = -[1(-1(1 + i + 1 - i) + (1 + i)(1 - i)) + \\ + (-1(1 + i)(1 - i))] = 2,$$
$$a_0 = 1. - 1.(1 + i)(1 - i) = -2,$$

dakle izgleda ovako $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0$ i rastavlja se na množioce $(x-1)(x+1)(x-1-i)(x-1+i) = 0$.

d. *Izdvajanje jednakih korena.* Ako jednačina $f(x) = 0$ ima višestruki koren α stepena k, funkciju možemo predstaviti u obliku $f(x) = (x-\alpha)^k \varphi(x)$, pri čemu jednačina $\varphi(x) = 0$ nema koren α.

Izračunajmo izvod funkcije $f(x)$: $f'(x) = k(x-\alpha)^{k-1}\varphi(x) + (x-\alpha)^k\varphi'(x) = (x-\alpha)^{k-1}\psi(x)$, gde je $\psi(x) = k\varphi(x) + (x-\alpha)\varphi'(x)$. Iz napisanog oblika izvoda sleduje da funkcija $f'(x)$ ima broj α kao višestruku nulu, i to stepena $(k-1)$, jer je deljiva sa $(x-\alpha)^{k-1}$, a $\psi(x)$ nije deljivo sa $(x-\alpha)$. Prema tome, funkcije $f(x)$ i $f'(x)$ moraju imati zajednički delilac $(x-\alpha)^{k-1}$. Što je ovde rečeno za jedan važi i za sve ostale višestruke korene.

Na osnovu ovog zaključujemo: ako nađemo najveći zajednički delilac $P(x)$ funkcija $f(x)$ i $f'(x)$ i podelimo njime funkciju $f(x)$, količnik $\Phi(x) = f(x) : P(x)$ neće imati nijedan višestruki koren. Obrnuto, jednačina $P(x) = 0$ sadržaće samo one korene koji su za jednačinu $f(x) = 0$ bili višestruki.

Primeri:

1. Neka je data jednačina $f(x) = x^3 - 3x + 2 = 0$.

Izračunajmo izvod $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. Uzastopnim deljenjem (Euklidov algoritam) određujemo najveći zajednički delilac

$$\begin{array}{l|l|l} x^3 - 3x + 2 & \overset{x}{} x^2 - 1 & \overset{-2}{} x - 1 \\ x^3 - x & & \\ \hline -2x + 2 & & \end{array}$$

Vidimo da je taj delilac $P(x) = x - 1$. Prema tome, koren jednačine $x - 1 = 0$, tj. $x = 1$, mora biti dvostruki koren prvobitne jednačine $f(x) = 0$. Ako ovu polaznu jednačinu podelimo sa $(x-1)$, dobićemo jednačinu $x^2 + x - 2 = 0$, koja ima samo proste korene. Kako je jedan koren $x = 1$, deljenjem sa $(x-1)$ dobijamo $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, odakle nalazimo drugi koren $x = -2$. Prema tome je $f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$.

2. Data je jednačina $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$. Izračunajmo izvod: $f'(x) = 4x^3 - 12x + 8 = 4(x^3 - 3x + 2)$. Euklidovim algoritmom određujemo najveći zajednički delilac

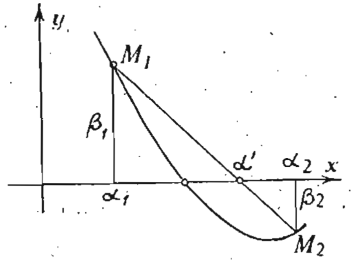
$$\begin{array}{l|l|l|l} x^4 - 6x^2 + 8x - 3 & \overset{x}{} x^3 - 3x + 2 & \overset{x}{} x^2 - 2x + 1 & \overset{1}{} x^2 - 2x + 1, \\ x^4 - 3x^2 + 2x & x^3 - 2x^2 + x & & \\ \hline -3x^2 + 6x - 3 & 2x^2 - 4x + 2 & & \end{array}$$

koji ima oblik $P(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Prema tome se $x = 1$ javlja kao trostruki koren date jednačine. Ako podelimo $f(x)$ sa $P(x)$, količnik daje jednačinu $x^2 + 2x - 3 = 0$, koja ima samo proste korene. Pošto je jedan od njih $x = 1$, vrednost drugoga je $x = -3$. Polazna jednačina ima, dakle, trostruki koren $x = 1$ i prost koren $x = -3$. Funkciju $f(x)$ možemo rastaviti na činioce: $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = (x-1)^3(x+3)$.

e. *Približno određivanje realnih korena.* Pokazaćemo, pre svega, kako se grafički određuju realni koreni jednačine $f(x) = 0$. Ako nacrtamo krivu čija je jednačina $y = f(x)$, tačke preseka ove krive (sl. 28) sa osom x, pošto je za njih $y = f(x) = 0$, imaju apscise jednake korenima date jednačine.

Ako kriva dodiruje osu x, tački dodira $(f'(x) = 0)$ odgovara bar dvostruki koren, a može biti i višestruki koren višeg stepena.

Pretpostavimo da funkciju $f(x)$ ne možemo dovoljno detaljno nacrtati oko traženog korena, ali da se mogu odrediti koordinate, α_1 i $\beta_1 = f(\alpha_1)$, tačke M_1 i koordinate, α_2 i $\beta_2 = f(\alpha_2)$, tačke M_2 sa obeju strana ose x u blizini traženog korena α. Veličine α_1 i α_2 možemo smatrati kao pogrešne (pogrešni — latinski — falsus) vrednosti korena. Pravilo na osnovu kojeg se iz dve pogrešne vrednosti može naći bolja približna vrednost korena, zove se *regula falsi*.



Sl. 28 — Grafičko određivanje realnih korena. Regula falsi

Obrazujmo jednačinu prave što prolazi kroz tačke M_1 i M_2. Prema poznatom pravilu (I, str. 62) imamo, u ovom slučaju, jednačinu

$$\frac{y-\beta_1}{\beta_2-\beta_1} = \frac{x-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}.$$

Za određivanje približnije vrednosti korena, koju ćemo označiti sa α', stavimo u prethodnu jednačinu $y=0$, $x=\alpha'$; tada ćemo dobiti

$$\alpha' = \frac{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}{\beta_2-\beta_1} = \frac{\alpha_1 f(\alpha_2)-\alpha_2 f(\alpha_1)}{f(\alpha_2)-f(\alpha_1)},$$

ili
$$\alpha' = \alpha_1 - \beta_1\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\beta_2-\beta_1} = \alpha_2 - \beta_2\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\beta_2-\beta_1}.$$

Ovi obrasci izražavaju regula falsi.

Ako je linija između tačaka M_1 i M_2 prava, prethodno pravilo daje tačnu vrednost korena. U protivnom slučaju ono, uopšte, ne daje tačnu već samo približnu vrednost korena. Ako dobivena vrednost α' ne predstavlja vrednost korena sa dovoljnom tačnošću, možemo izvedeno pravilo ponovo primeniti. Zato ćemo $f(\alpha')$ označiti sa β'. Uzmimo zatim tačku (α', β') i onu od tačaka (α_1, β_1) i (α_2, β_2), koja se nalazi sa

suprotne strane ose x od tačke (α', β'). Ako i novi rezultat ne bude dovoljan, treba postupak ponoviti. Pri tome se pretpostavlja da je funkcija u intervalu između tačaka M_1 i M_2 neprekidna i monotona.

Metoda pri kojoj se izračunavanje ponavlja, kako bi se dobivali sve približniji rezultati, metoda pri kojoj se za svako novo izračunavanje iskorišćuje prethodni rezultat, zove se u *Matematici Metoda uzastopnih aproksimacija*, ili *Metoda iteracije*, kad se isti postupak ponavlja. Za obrazloženje svakog iteracionog procesa treba pokazati: 1. Da uzastopne približne vrednosti zaista imaju za svoju graničnu vrednost traženu veličinu, u našem slučaju koren jednačine; i 2. Ako ova granična vrednost postoji, oceniti grešku, ma i približnu, koju činimo kad se zaustavljamo na nekoj približnoj vrednosti.

U primenama često, već neposredno, iz grafičkog posmatranja sleduje da se između tačaka, od kojih jedna leži sa jedne, a druga sa druge strane ose x, nalaze traženi koreni jednačine. Ako ne možemo crtež iskoristiti, treba pristupiti ispitivanju funkcije $f(x)$, uzimanjem za argumente x razne vrednosti, počev od negativne do pozitivne beskonačnosti. Zatim, sužavajući sve više interval u kojem se menja x, odvajati jedan koren od drugog.

Za određivanje broja realnih korena date jednačine sa brojnim koeficijentima, za izdvajanje tih korena, tj. određivanje intervala u kome je sadržan samo jedan koren, kao i za konačno približno izračunavanje korena, sa potrebnom tačnošću, postoji u Algebri više vrlo dobrih metoda. Čitalac ih može, ako mu zatreba, naći u kursevima Algebre. Ovde ćemo pokazati na konkretnom primeru, pored regula falsi, još jednu metodu, koju dugujemo Njutnu.

Uzmimo da treba rešiti jednačinu $y = f(x) = x^3 - 5x + 3 = 0$. Dajmo argumentu x niz vrednosti i izračunajmo vrednosti y:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-41	-9	$+5$	$+7$	3	-1	$+1$	15

Pošto y menja znak u intervalima za x: $(-3, -2)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, možemo tvrditi da data jednačina ima tri realna korena. Koreni su izdvojeni, pošto se u svakom od gornjih intervala nalazi samo po jedan koren.

Izračunajmo tačniju vrednost korena koji se nalazi između 1 i 2. Taj interval možemo podeliti na manje delove i izračunati vrednosti $f(x)$. U našem slučaju imamo $f(1{,}8) = -0{,}168$; $f(1{,}9) = +0{,}359$. Odavde zaključujemo da je koren jednak 1,8 sa dodatkom nekoliko stotih. Za izračunavanje tih stotih iskoristićemo Njutnovu metodu.

Stavimo u našu jednačinu $x = 1{,}8 + h$; znači, treba da bude $f(1{,}8+h) = 0$. Razvijmo levu stranu ove jednačine u Tajlorov red i zadovoljimo se pritom sa dva člana; tada ćemo imati $f(1{,}8+h) = f(1{,}8) + hf'(1{,}8) = 0$. Odavde je $h = -f(1{,}8) : f'(1{,}8)$. Kako je izvod od $f(x)$ jednak $f'(x) = 3x^2 - 5$ i $f'(1{,}8) = 4{,}72$, imamo za $h = -(-0{,}168) : 4{,}72 \approx 0{,}0356$. Prema tome, za koren treba uzeti ili 1,83 ili 1,84. Da se zaista između ta dva broja nalazi naš koren vidimo iz ovih rezultata: $f(1{,}83) \approx -0{,}0215$, $f(1{,}84) \approx +0{,}0295$. Ponavljajući tu Njutnovu metodu dolazimo do zaključka da se koren nalazi između brojeva 1,8342 i 1,8343, jer je $f(1{,}8342) \approx -0{,}00022$; $f(1{,}8343) \approx +0{,}00029$.

Na isti način bismo mogli postupiti i za izračunavanje druga dva korena naše jednačine.

f. *Određivanje imaginarnih korena.* Pretpostavimo da jednačina $f(x) = 0$ nema više realnih korena, i da su svi njeni koreni imaginarni. Stavimo $x = \xi + \eta i$, gde su ξ i η dva realna broja. Ako ovu vrednost x uvrstimo u našu jednačinu i odvojimo realni deo od imaginarnog, dobićemo $f(x) = f(\xi + \eta i) = f_1(\xi, \eta) + i f_2(\xi, \eta)$, gde se funkcije f_1 i f_2 izračunavaju na osnovu date funkcije $f(x)$. Iz prethodne jednačine neposredno sleduju dve jednačine

$$(7) \qquad f_1(\xi, \eta) = 0, \quad f_2(\xi, \eta) = 0,$$

koje treba da zadovoljavaju ξ i η. Ako ξ i η smatramo kao Dekartove koordinate tačke u ravni, svakoj od prethodnih jednačina odgovara neka linija u ravni $\xi\eta$. Koordinate preseka tih linija daju realni i imaginarni deo korena naše polazne jednačine. Ovaj postupak rešavanja objasnićemo na jednom primeru.

Primer. Naći koren jednačine $x^4 + 1 = 0$, koja očevidno nema realnih korena, jer četvrti stepen nijednog realnog broja ne može biti jednak negativnoj jedinici.

Lako je izračunati da je, u ovom slučaju,

$$f_1(\xi, \eta) = (\xi^2 - \eta^2)^2 - 4\xi^2\eta^2 + 1 = 0, \quad f_2(\xi, \eta) = 4\xi\eta(\xi^2 - \eta^2) = 0.$$

Druga jednačina daje rešenja: $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\xi^2 = \eta^2$. Iz prve jednačine imamo, za $\xi = 0$, $\eta^4 + 1 = 0$; a ovo je nemoguće, jer ξ i η moraju biti realne veličine. Otpada takođe i rešenje $\eta = 0$. Treće rešenje druge jednačine $\xi^2 = \eta^2$ iz prve jednačine daje: $-4\xi^4 + 1 = 0$, odakle je $\xi^4 = \frac{1}{4}$, $\xi^2 = \pm\frac{1}{2}$ i $\xi = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, jer treba da se zaustavimo samo na realnim korenima. Pošto za η imamo iste vrednosti $\eta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, konačno možemo napisati ove vrednosti korena naše polazne jednačine:

$$x_1 = k(1+i), \quad x_2 = k(1-i), \quad x_3 = k(-1+i), \quad x_4 = k(-1-i),$$

gde smo stavili $\frac{\sqrt{2}}{2} = k$. U datom, konkretnom slučaju isti rezultat se dobiva i razlaganjem $x^4 + 1$ na dva kvadratna činioca:

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}\,x)^2 = (x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)$$

i zatim rešavanjem odgovarajućih kvadratnih jednačina.

Ako nismo u stanju da rešimo sistem jednačina (7), kao što smo to uradili u našem primeru, možemo upotrebiti grafičku metodu. Treba nacrtati u ravni $\xi\eta$ svaku od krivih, sa jednačinama $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, i odrediti koordinate tačaka preseka tih krivih.

g. *Grafičko rešavanje jednačine pomoću dve krive.* Uzmimo da treba rešiti kubnu jednačinu u normalnom obliku $z^3 + az^2 + bz + c = 0$. Uvođenjem nove nepoznate x uvek se može data jednačina transformisati u oblik bez kvadratnog člana, tj.

$$(8) \qquad x^3 + px + q = 0.$$

Zaista, ako stavimo $z = x - \frac{1}{3}a$, imaćemo

$$z^3 + az^2 + bz + c = \left(x - \frac{1}{3}a\right)^3 + a\left(x - \frac{1}{3}a\right)^2 + b\left(x - \frac{1}{3}a\right) + c =$$

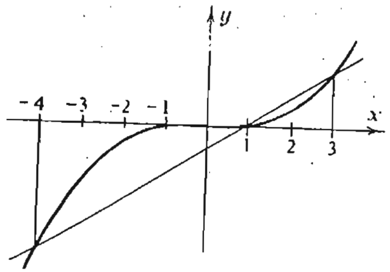
$$= x^3 + \left(a - \frac{1}{3}\cdot 3a\right)x^2 + \left(\frac{1}{3}a^2 - \frac{2}{3}a^2 + b\right)x + \left(-\frac{1}{27}a^3 + \frac{1}{9}a^3 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}ab + c\right) = x^3 + px + q,$$

gde su

$$p = b - \frac{1}{3}a^2, \quad q = c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3.$$

Stavimo sad u jednačini (8) $y_1 = x^3$; $y_2 = -(px + q)$; ona će se pretvoriti u jednačinu $y_1 = y_2$. Prema tome, rešavanje jednačine (8) svodi se na određivanje preseka dve krive: prve sa jednačinom $y_1 = x^3$, koja je stalna i može se nacrtati jednom za sve kubne jednačine, — to je tzv. *osnovna kubna parabola*; i druge sa jednačinom $y_2 = -px - q$, koja predstavlja pravu liniju. Tačke preseka te parabole i prave, svojim apscisama, daju realne korene kubne jednačine. Na sl. 29 prikazano je rešenje jednačine $x^3 - 13x + 12 = 0$, čiji su koreni: $x_1 = -4$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. Koreni su određeni presekom osnovne kubne parabole i prave sa jednačinom $y_2 = 19x - 30$. Razmera na osovini y je deset puta manja od razmere na osovini x.

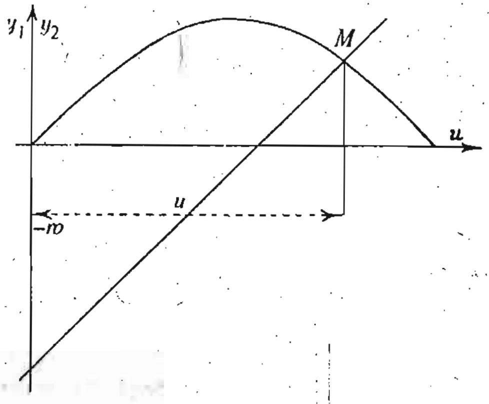


Sl. 29 — Grafičko rešavanje kubne jednačine

Ova metoda može poslužiti i za približno rešavanje transcendentnih jednačina.

Uzmimo, kao primer, tzv. *Keplerovu jednačinu* $u - e\sin u = w$, gde su: w — poznata *srednja anomalija planete*, veličina proporcionalna vremenu; e — poznata *ekscentričnost putanje planete* i u nepoznata *ekscentrična anomalija*, pomoću koje se određuje položaj planete na njenoj eliptičnoj putanji.

Keplerovu jednačinu možemo raščlaniti u $e\sin u = u - w$ i staviti $y_1 = e\sin u$, $y_2 = u - w$. Prva jednačina predstavlja sinusoidu (sl. 30) sa amplitudom e: ova je kriva stalna za svaki položaj dotične planete. Druga jednačina određuje pravu sa stalnim ugaonim koeficijentom jednakim jedinici; njena je početna ordinata $(-w)$ proporcionalna vremenu. Tačka preseka, M, sinusoide i prave daje traženu vrednost ekscentrične anomalije.



Sl. 30 — Grafičko rešavanje Keplerove jednačine

Vežbanja:

1. Izračunati determinante:

$$\begin{vmatrix} 3, & 2 \\ 6, & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4{,}3; & -2 \\ 9, & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sin\alpha, & -\cos\alpha \\ \cos\alpha, & \sin\alpha \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ 1/\beta, & 1/\alpha \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1+x, & x \\ -x & 1-x \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 4, & 2, & 3 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0{,}1; & 0{,}5; & 1 \\ 20; & 10; & 15 \\ 0; & 2; & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1, & k, & k^2 \\ 1, & l, & l^2 \\ 1, & m, & m^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0, & r, & -q \\ -r, & 0, & p \\ q, & -p, & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Rešiti sisteme jednačina: a. pomoću determinanata i b. Gausovom metodom:

$$5x-2y=30, \quad 7x+3y=100.$$

$$x+y-z=3, \quad 2x+3y-7z=7, \quad x-y+5z=1.$$

$$-x+y+z+u=8, \quad x-y+z+u=6, \quad x+y-z+u=4, \quad x+y+z-u=2.$$

3. Dokazati da je determinanta $\begin{vmatrix} ma, & mb, & mc \\ na, & nb, & nc \\ p, & q, & r \end{vmatrix}$ uvek jednaka nuli.

4. Napisati jednačinu sa dvostrukim korenom $+1$ i trostrukim korenom -1.

5. Izdvojiti višestruke korene jednačina:

$$x^3-3x^2+6x-4=0, \quad x^6-x^5-4x^4+2x^3+5x^2-x-2=0.$$

6. Izračunati tačne ili približne vrednosti korena jednačina:

$$2x^3-4x^2-x+1=0, \quad x^3+3x^2-11x-5=0.$$

7. Odrediti imaginarne korene jednačina:

$$x^3+x^2+4x+4=0, \quad x^4-6x^3+19x^2-30x+25=0.$$

8. Rešiti grafički kubne jednačine:

$$x^3-6x^2-13x+12=0, \quad x^3+2x^2-13x^2+10=0.$$

4.41. Rešavanje jednačina trećeg i četvrtog stepena

Znamo da rešenja jednačina prvog i drugog stepena

$$ax+b=0, \quad ax^2+bx+c=0, \quad (a\neq 0),$$

mogu biti izražena opštim obrascima:

$$x_1=-b/a, \qquad x_{1,2}=\frac{1}{2a}(-b\pm\sqrt{b^2-4ac}),$$

koji vrede za proizvoljne vrednosti koeficijenata tih jednačina.

Pokazaćemo da se takva rešenja mogu dobiti i za jednačine trećeg i četvrtog stepena, i to izražena pomoću korena viših stepena. Što se tiče jednačina petog i viših stepena, za njih je dokazano (E. Galois) da rešenja takvih jednačina, u opštem slučaju, ne mogu biti izražena pomoću korena.

Zaustavimo se ovde na izvođenju obrazaca za rešenje pomoću korena jednačine trećeg i četvrtog stepena.

Počnimo od kubne binomne jednačine

$$(1) \qquad w^3-1=0.$$

Pošto je $w^3-1=(w-1)(w^2+w+1)$ jednačina (1) ima ova tri korena

$$w_1=1, \quad w_2=\alpha=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}) \quad w_3=\beta=\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}).$$

Između ovih vrednosti kubnog korena iz jedinice postoje ove veze:

$$\alpha=\beta^2, \quad \beta=\alpha^2, \quad 1+\alpha+\beta=0, \quad \alpha\beta=1.$$

Jednačinu trećeg stepena u opštem obliku, $Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$, možemo prvo transformisati na normalni oblik $z^3+az^2+bz+c=0$, a zatim preći, pomoću nove promenljive, $x=z+\frac{1}{3}a$, na jednačinu klasičnog oblika

$$(2) \qquad x^3+px+q=0,$$

bez člana sa x^2. Za rešavanje ove jednačine stavimo $x=u+v$ i, u dobivenoj jednačini, posle zamene, $u^3+v^3+q+(3uv+p)(u+v)=0$ možemo jednu od nepoznatih u i v izabrati tako da bude $3uv+p=0$. Uzimajući za nove nepoznate u^3 i v^3 imamo dve jednačine $u^3+v^3=-q$, $u^3v^3=-p^3/27$. Te nepoznate, prema zbiru i proizvodu, određuju se kao koreni kvadratne jednačine

$$(3) \qquad \xi^2+q\xi-p^3/27=0.$$

Na taj način smo rešavanje kubne jednačine (2) sveli na rešavanje kvadratne jednačine (3). Zbog toga se napisana kvadratna jednačina zove *rezolventa kubne jednačine*. Rezolventa daje

$$u^3=-q/2+\sqrt{\Delta}, \quad v^3=-q/2-\sqrt{\Delta}, \quad \text{gde je} \quad \Delta=q^2/4+p^3/27.$$

Zatim za u i v, imamo

$$u=w\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{\Delta}}, \quad v=w\sqrt[3]{-q/2-\sqrt{\Delta}},$$

pri čemu w može imati vrednosti $w_1=1$, $w_2=\alpha$, $w_3=\beta$, jer je $w^3=1$.

Pošto u našem slučaju u i v treba da zadovoljavaju uslov $3uv+p=0$, a iz izvedenih jednačina sledi $3w_i w_j(-p/3)+$ $+p=0$, zaključujemo da je moguće uzeti samo one vrednosti korena jednačine $w^3-1=0$, za koje $w_i w_j=1$, a to su slučajevi: 1. $w_i=w_j=1$, 2. $w_i=\alpha$, $w_j=\beta$, 3. $w_i=\beta$, $w_j=\alpha$.

Prema tome, konačno imamo samo ova tri rešenja kubne jednačine (2):

$$x_1=u+v,\ x_2=\alpha u+\beta v,\ x_3=\beta u+\alpha v,$$

gde smo sa u i v označili kubne korene

$$u=\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{\Delta}},\quad v=\sqrt[3]{-q/2-\sqrt{\Delta}},$$

a $\Delta=q^2/4+p^3/27$ i $\alpha,\beta=\dfrac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$.

Izvedeni obrasci zovu se *Kardanovi obrasci*.

Karakter korena zavisi od vrednosti veličine Δ, koja se zove *diskriminanta kubne jednačine*. 1. Ako je $\Delta>0$, u i v su realni brojevi i rešenja možemo napisati ovako: $x_1=u+v$,

$$x_2=-\frac{1}{2}[u+v+i\sqrt{3}(u-v)],\quad x_3=-\frac{1}{2}[u+v-i\sqrt{3}(u-v)];$$

prema tome imamo jedan realan i dva konjugovana kompleksna korena. 2. $\Delta=0$. Koreni su $x_1=2u$, $x_2=x_3=u$, gde je $u=\sqrt[3]{-q/2}$. 3. $\Delta<0$. To je tzv. *nesvodljivi slučaj* (*casus irreductibilis*). U ovom slučaju, bez obzira na to što su u i v konjugovani kompleksni, svi su koreni realni. Ako u i v imaju kompleksne vrednosti $u=\lambda+i\mu$ i $v=\lambda-i\mu$, koreni jednačine će biti

$$x_1=u+v=2\lambda,\quad x_2=\alpha u+\beta v=-\lambda-\mu\sqrt{3},$$

$$x_3=\beta u+\alpha v=-\lambda+\mu\sqrt{3}.$$

Za određivanje λ i μ upotrebimo trigonometrijsku metodu. Stavimo: $-q/2=r\cos\theta$, $\Delta=-r^2\sin^2\theta$ i odredimo r i θ iz jednačina $r=+\sqrt{-p^3/27}$, $\cos\theta=-q/2r$, što je moguće jer je, pri

$\Delta<0$, vrednost p^3 negativna i $\left|\dfrac{p^3}{27}\right|>\dfrac{q^2}{4}$. Pošto odredimo r i θ, veličine u i v uzimaju trigonometrijski oblik

$$u=\sqrt[3]{r(\cos\theta+i\sin\theta)},\quad v=\sqrt[3]{r(\cos\theta-i\sin\theta)}.$$

Ako sad iskoristimo Moavrov obrazac (I, str. 29 i 30) za stepenovanje kompleksnih veličina, za korene dobićemo ove konačne vrednosti

$$u=\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}\right),\quad v=\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\theta}{3}-i\sin\frac{\theta}{3}\right);$$

znači

$$\lambda=\frac{1}{2}\sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta}{3},\quad \mu=\frac{1}{2}\sqrt[3]{r}\sin\frac{\theta}{3}.$$

Pošto je za određivanje korena x_1, x_2, x_3 dovoljno znati samo jedno rešenje za λ i μ, nije potrebno određivati druge vrednosti λ i μ, uzimajući, mesto vrednosti ugla θ, i vrednosti uglova $\theta+2\pi$ i $\theta+4\pi$.

Tako se rešava i casus irreductibilis kubne jednačine sa negativnom diskriminantom.

A sad ćemo preći na rešavanje jednačine četvrtog stepena $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$. Pošto je svedemo na normalni oblik, dakle $z^4+Kz^3+Lz^2+Mz+N=0$, i uvedemo novu promenljivu $x=z+\dfrac{1}{4}K$, jednačina dobiva klasični oblik jednačine četvrtog stepena

$$x^4+ax^2+bx+c=0. \tag{4}$$

bez člana sa x^3. Predstavimo sad levu stranu kao proizvod dva kvadratna polinoma sa suprotnim znacima koeficijenata pored x

$$x^4+ax^2+bx+c=(x^2+\alpha x+\beta)(x^2-\alpha x+\gamma)=0. \tag{5}$$

Za određivanje α, β, γ dobićemo tada, posle izjednačavanja koeficijenata leve i desne strane, ove jednačine

$$-\alpha^2+\beta+\gamma=a,\quad \alpha(\gamma-\beta)=b,\quad \beta\gamma=c. \tag{6}$$

Da bismo došli do α, β, γ prvo određujemo

$$\beta+\gamma=a+\alpha^2, \quad \beta-\gamma=-b/\alpha,$$

odatle je

$$\text{(7)} \qquad \beta=\frac{1}{2}(a+\alpha^2-b/\alpha), \quad \gamma=\frac{1}{2}(a+\alpha^2+b/\alpha).$$

Jednačina (5) tada uzima oblik

$$\text{(8)} \qquad \left[x^2+\alpha x+\frac{1}{2}(a+\alpha^2-b/\alpha)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[x^2-\alpha x+\frac{1}{2}(a+\alpha^2-b/\alpha)\right]=0,$$

što znači da smo rešavanje jednačine (4) sveli na rešavanje dve kvadratne jednačine; ali za njih treba još odrediti broj α. Ako iz (6) uzmemo jednačinu $\beta\gamma=c$ i stavimo u nju vrednosti β i γ iz (7), dobićemo jednačinu

$$\left(a+\alpha^2-\frac{b}{\alpha}\right)\left(a+\alpha^2+\frac{b}{\alpha}\right)=4c \quad \text{ili} \quad (a+\alpha^2)^2-\frac{b^2}{\alpha^2}=4c.$$

Pošto ova jednačina zavisi samo od α^2, a ne od α, stavimo $\alpha^2=\zeta$, i tako, posle oslobođenja od imenioca dolazimo do jednačine trećeg stepena po ζ

$$\zeta^3+2a\zeta^2+(a^2-4c)\zeta-b^2=0.$$

Ova kubna jednačina zove se *rezolventa jednačine četvrtog stepena*. Ako sad odredimo bar jedan koren rezolvente, recimo realni koren, koji ćemo označiti sa ζ_1, možemo staviti $\alpha=\sqrt{\zeta_1}$ i tada ćemo, iz (8), imati dve kvadratne jednačine, čije rešenje daje četiri korena prvobitne jednačine (4) četvrtog stepena.

Vežbanja:

Rešiti ove kubne jednačine:

1. $x^3-3x+52=0$. 2. $x^3+3x^2+9x+27=0$. 3. $x^3-39x+70=0$. 4. $x^3-10204x+20400=0$.

Rešiti ove jednačine četvrtog stepena:

5. $x^4-13x^2+36=0$. 6. $x^4-5x^2-36=0$. 7. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$. 8. $x^4-6x^3+18x^2-30x+25=0$.

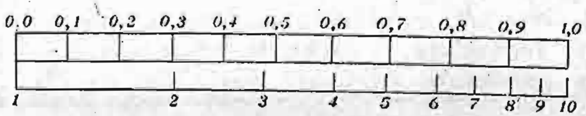
4.5. Nomografija

U poslednje vreme neobično su se razvile grafičke metode za rešavanje raznih problema Matematike, naročito onih u kojima igraju ulogu funkcionalne veze. Te metode sačinjavaju danas specijalnu disciplinu, koja se zove *Nomografija* (νόμος — zakon, γραφία — pisanje). Slika sa koje možemo pročitati odgovor na postavljeno pitanje zove se *nomogram*.

Ako je funkcija $f(x)$ predstavljena grafikom u Dekartovu sistemu, taj grafik je, u suštini, takođe nomogram. Zaista, sa te slike možemo pročitati vrednosti funkcije $f(x)$, ako su date vrednosti argumenta x, i obrnuto.

Navešćemo nekoliko primera nomograma.

Iznad jedne duži (sl. 31) stavimo brojeve: 0,0; 0,1; 0,2; . . . , 0,9; 1,0 i smatrajmo ih kao vrednosti dekadnih logaritama brojeva, označenih ispod te duži. Ta duž, sa tako označenim



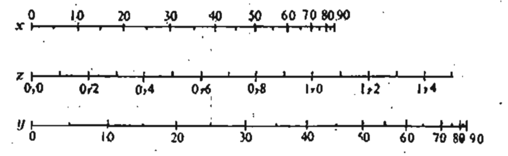
Sl. 31 — Nomogram dekadnih logaritama

brojevima, predstavlja nomogram dekadnih logaritama, jer sa tog crteža možemo pročitati vrednosti logaritama brojeva, i obrnuto. Taj nomogram ima dve skale: jednu ravnomerno podeljenu (gornja) i drugu — neravnomerno podeljenu (donja).

Navešćemo sad primer za nomogram sa jednom pomoćnom, ravnomerno podeljenom, skalom i sa dve neravnomerno podeljene skale.

Zakonu o prelamanjima svetlosti za staklo, sa indeksom prelamanja $n=1{,}5$ odgovara jednačina $\sin x=1{,}5\sin y=z$, gde su x i y uglovi između zraka i normale, prvi u vazduhu, drugi u staklu. Sa z smo označili pomoćnu promenljivu. Na slici 32 promenljivoj z odgovara ravnomerno podeljena skala, a promenljivima x i y neravnomerno podeljene skale. Za svaku vrednost z gornja skala daje vrednost x, a donja vrednost y.

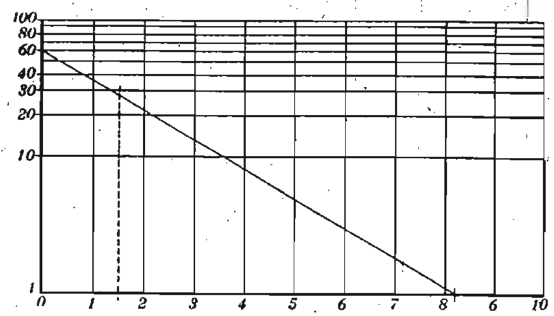
Normala na skale spaja odgovarajuće vrednosti x i y. Skala za x je kraća od skale za y, jer y ne može imati vrednost veću od $41^0, 8$; taj ugao odgovara pojavi tzv. *totalnog odbijanja.*



Sl. 32 — Nomogram prelamanja svetlosti u staklu

Metode Nomografije daju naročito dobre rezultate, ako se primenjuju logaritamske ili druge funkcionalne mreže.

Tako, napr., grafik eksponencijalne funkcije $y=\alpha e^{\beta x}$ možemo zameniti pravom linijom, ako uvedemo novu promenljivu $y_1=\log y$, jer je $y_1=\log\alpha+\beta x$.



Sl. 33 — Grafik eksponencijalne funkcije na polulogaritamskoj mreži

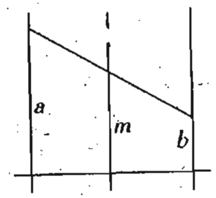
Na slici 33 navedena je logaritamska mreža sa promenljivom y; naime, dužine su proporcionalne promenljivoj y_1, a brojevi označavaju vrednost y. Nacrtana prava je grafik funkcije $y=60\ e^{-x/2}$.

Za $x=1,5$ grafik neposredno daje 28, a računata vrednost iznosi 28,34.

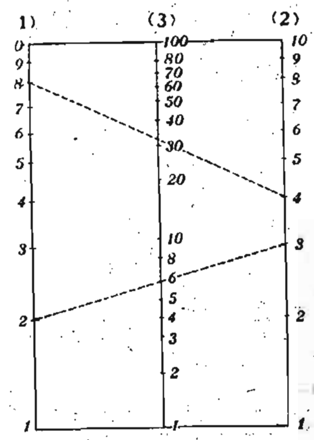
Pošto je ova skala logaritamska samo za promenljivu y, a za promenljivu x ravnomerno podeljena, *skala* se zove *polulogaritamska.*

Za što jasnije prikazivanje uloge logaritamske skale u nomografiji navešćemo još jedan primer.

Iskoristićemo za to geometrijsku vezu između osnovica a i b i srednje linije m trapeza (sl. 34) $a+b=2m$. Pretpostavimo sad da je $a=\log A$, $b=\log B$, $2m=\log P$, gde su A, B, P odgovarajući brojevi. Tada iz jednačine $\log A+\log B=$ $=\log P$ imamo $AB=P$.



Sl. 34 — Osnovice i srednja linija trapeza



Sl. 35 — Nomogram za proizvod i količnik

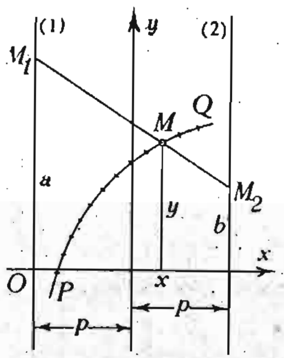
Nacrtajmo na pravima (1), (2); (3) logaritamske skale (sl. 35). Skale pravih (1) i (2) pokazuju logaritme, a skala prave (3) polovinu logaritma. Deone tačke nećemo označiti vrednostima tih logaritama, odnosno polovine logaritma već vrednostima odgovarajućih brojeva A, B, P.

Ako sad na pravoj (1) uzmemo tačku označenu brojem A, na pravoj (2) tačku označenu brojem B i spojimo ih pravom, ova će seći pravu (3) u tački sa oznakom P. Na tako dobivenom nomogramu možemo jednostavno, pomoću lenjira, pročitati proizvod dva data broja. Isti nomogram omogućuje, i obrnuto, da se pročita količnik dva data broja.

Pokazaćemo još i nomografsku metodu za rešavanje kvadratne i kubne jednačine.

Uzmimo da treba rešiti jednačinu $z^n+az+b=0$, gde su a, b, n stalni brojevi. Za kvadratnu jednačinu je $n=2$, za kubnu $n=3$.

Da bismo konstruisali nomogram uzimamo dve prave (1) i (2), paralelne osovini y, na rastojanjima p od te ose (sl. 36). Na pravoj (1) uzmimo tačku M_1, sa ordinatom a, a na pravoj (2) tačku M_2, sa ordinatom b. Potražimo sada takvu krivu, PQ, sa na njoj označenom skalom parametra z — *krivolinijskom skalom* — da tačka preseka, M, krive i prave M_1M_2 određuje vrednost parametra z, jednaku korenu naše kvadratne, odnosno kubne jednačine.



Sl. 36 — Nomogram sa krivolinijskom skalom

U tu svrhu obrazujmo, pre svega, jednačinu prave što prolazi kroz tačke M_1 i M_2.

Poznato pravilo daje

$$\frac{y-a}{b-a}=\frac{x+p}{p+p},$$

odakle je $2py \quad (p-x)a-(p+x)b=0$, ili

(1) $$\left(-\frac{2py}{p+x}\right)+\left(\frac{p-x}{p+x}\right)a+b=0.$$

Smatrajući sad x i y kao funkcije z, odredimo te funkcije tako, da se prethodna jednačina transformiše u našu jednačinu

(2) $$z^n+az+b=0,$$

za sve vrednosti a i b. Zato treba izjednačiti koeficijente jednačine (1) i (2). Posle toga dobivamo: $z^n=-2py/(p+x)$, $z=(p-x)/(p+x)$.

Ako rešimo ove jednačine po x i y nalazimo

(3) $$x=\frac{p(1-z)}{1+z}, \quad y=-\frac{z^n}{1+z}.$$

Dobili smo parametarske jednačine krive, koja u preseku sa pravom M_1M_2 daje tačku M; vrednost parametra z za tu tačku određuje koren naše jednačine.

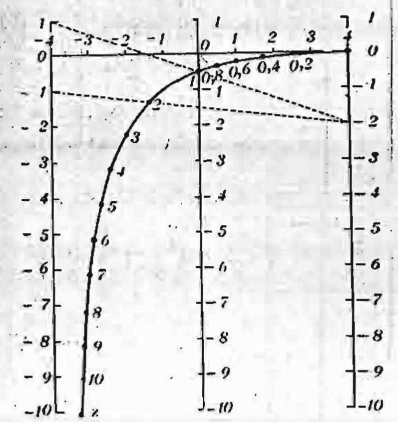
Uzmimo $p=4$. Za kvadratnu jednačinu rešenja (3) postaju

(4) $$x=\frac{4(1-z)}{1+z}, \quad y=-\frac{z^2}{1+z}.$$

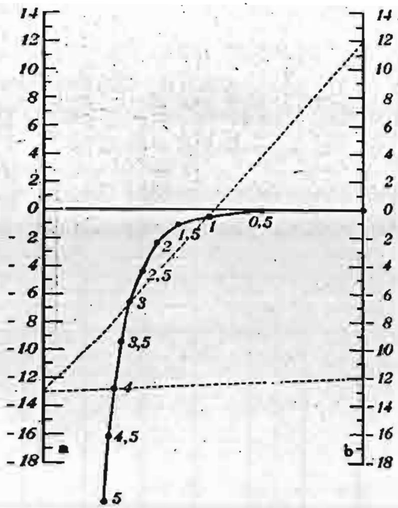
To su parametarske jednačine hiperbole, jer posle eliminisanja parametra z dobijamo jednačinu

$$x^2+8xy-8x+32y+16=0.$$

Na slici 37 nacrtana je ta hiperbola i na njoj su označene vrednosti parametra z.



Sl. 37 — Nomogram za rešavanje kvadratne jednačine



Sl. 38 — Nomogram za rešavanje kubne jednačine

Primer: Tačke prave daju rešenja kvadratne jednačine

(5) $$z^2-z-2=0.$$

Jedan koren, $z=2$, dobili smo, kada smo povukli pravu sa $a=-1$ i $b=-2$.

Za drugo rešenje, prvo smo u jednačini (5) izvršili zamenu z sa $-z$ i dobili $z^2+z-2=0$. Uzmemo li zatim $a=+1$, $b=-2$, prava daje u preseku sa hiperbolom tačku sa vrednošću parametra $+1$, odakle zaključujemo da je drugi koren jednačine (5) -1.

Za kubnu jednačinu $z^3+az+b=0$ imamo, mesto hiperbole, krivu trećeg stepena, čije su parametarske jednačine (za $p=4$): $x=4(1-z):(1+z)$, $y=-z^3:(1+z)$. Ovu krivolinijsku skalu možemo nacrtati po tačkama sa označenim vrednostima parametra z oko njih.

Na slici 38 pokazan je nomogram za rešavanje kubne jednačine.

Primer: Potezaste linije daju rešenje jednačine

$$z^3-13z-12=0,$$

pri čemu smo prvo stavili $a=-13$, $b=-12$ i dobili pozitivno rešenje $z_1=4$. Zatim smo izvršili zamenu za z sa $-z$ i dobili jednačinu $z^3-13z+12=0$; iskoristili smo pravu sa $a=-13$, $b=+12$. Preseci ove prave sa krivom daju dva rešenja: 3 i 1; ovim rešenjima konačno odgovaraju dva rešenja: $z_2=-3$, $z_3=-1$ naše polazne kubne jednačine.

Vežbanja:

1. Da li logaritmar ima nomograme?
2. Precrtati na dobru hartiju nomograme za rešavanje kvadratne i kubne jednačine i vežbati se u rešavanju takvih jednačina.

4.6. Interpolacija

Ako je dat niz vrednosti funkcije, $f(x)$, u intervalu $\alpha < x < \beta$, no nije poznat matematički izraz same funkcije u tom intervalu, postupak kojim se određuju, tj. izračunavaju, vrednosti ove funkcije za proizvoljne vrednosti argumenta x, u tom intervalu zove se *interpolacija*.

Ako se vrednost funkcije traži za vrednost argumenta, x, koja izlazi iz naznačenog intervala, postupak se zove *ekstrapolacija*.

Poznati obrasci, Tajlorov i Maklorenov,

$$f(a+x)=f(a)+xf'(a)+\frac{x^2}{2!}f''(a)+\cdots$$

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots$$

u slučaju konvergentnosti gornjih redova, služe kao primeri za interpolacioni postupak. Oni omogućuju da se odrede vrednosti funkcije za proizvoljnu vrednost argumenta, x, iz oblasti konvergentnosti, ako su poznate vrednosti funkcije i njenih izvoda za jednu određenu vrednost argumenta.

Često, međutim, nisu poznate vrednosti funkcije i njenih izvoda za jednu određenu vrednost argumenta; date su samo vrednosti funkcije, $f(x)$, ali za više vrednosti argumenta, na pr., pomoću ovakve tablice

x	x_0	x_1	x_2	...	...	...	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	...	...	...	y_n

Pomoću ove tablice treba odrediti vrednost funkcije, $f(x)$, za vrednost argumenta, x, koja se nalazi u datom intervalu, no ne poklapa se ni sa jednom od vrednosti tablice.

U praksi je naročito važan slučaj kad vrednosti x_0, x_1, x_2, $\ldots$, x_n čine aritmetičku progresiju, tj. kad je razlika, h, između dve susedne vrednosti argumenta ista. To je slučaj *tablice jednakih intervala*. Mi ćemo se samo na takvom slučaju zaustaviti.

Kad je dat niz tačaka $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $\ldots, M_n(x_n, y_n)$, koje predstavljaju podatke tablice, osnovna metoda interpolacije sastoji se u određivanju krive sa jednačinom $y=\varphi(x)$, koja treba da prolazi kroz sve date tačke. Pošto je u takvom obliku zadatak neodređen, jer takvih krivih može biti više, potrebni su i dopunski uslovi.

Najprostiji je slučaj kad je funkcija $\varphi(x)$ polinom

$$(1) \qquad \varphi(x)=P(x)=u_0+u_1x+u_2x^2+\ldots+u_{n-1}x^{n-1}+u_nx^n,$$

sa $n+1$ neodređenih koeficijenata: u_0, u_1, $u_2, \ldots u_{n-1}$, u_n. Ove koeficijente treba odrediti iz uslova da kriva sa jednačinom $y=\varphi(x)$ mora prolaziti kroz sve date tačke, a pri tome biti najnižeg stepena. Ova kriva zove se *generalisana parabola*; za $n=2$ ona se pretvara u običnu parabolu. *Interpolacija* pomoću takve krive zove se *parabolička*. Za polinom prvog stepena *interpolacija* je *linearna*.

Za određivanje koeficijenata $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n$, kod polinoma (1) možemo se poslužiti sistemom $n+1$ linearnih jednačina

$$y_j = u_0 + u_1 x_j + u_2 x_j^2 + \ldots + u_{n-1} x_j^{n-1} + u_n x_j^n$$

$$(j=0,\ 1,\ 2, \ldots, n).$$

Takav put za izračunavanje koeficijenata ima dva nedostatka. On je, prvo, dug. I, drugo, on ne omogućuje da se oceni greška i da se zaustavi rad samo na potrebnom broju tačaka, pri približnom izračunavanju.

Postoji drugi način interpolacije, zasnovan na obrascima izraženim ne pomoću samih funkcija već pomoću takozvanih *razlika*.

Označimo sa $\Delta f(a)$ razliku $f(a+h)-f(a)=\Delta f(a)$, gde je h priraštaj, uvek isti, argumenta funkcije $f(x)$, i nazovimo je *prva razlika*, ili razlika *prvog reda*. Ako unapred znamo na koju se funkciju ona odnosi, možemo kratko pisati Δ. Ako je $f(a)=y_0$, $f(a+h)=y_1$, za razliku imamo $y_1-y_0=\Delta y_0$. Iz ove jednačine sleduje $y_1=y_0+\Delta y_0$. Ako sad obrazujemo razliku, y_2-y_1, između narednih vrednosti funkcije, možemo staviti $y_2-y_1=\Delta y_1$. Razlika, $\Delta y_1-\Delta y_0$, između dve uzastopne prve razlike čini *drugu razliku*, ili *razliku drugog reda*, i označava se sa $\Delta^2 y_0$, dakle,

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 .$$

Ako stavimo u ovu jednačinu vrednosti prvih razlika dobićemo jednačinu $\Delta^2 y_0=(y_2-y_1)-(y_1-y_0)=y_2-2y_1+y_0$.

Ako zatim uvedemo *treću razliku* ili *razliku trećeg reda*, $\Delta^3 y=\Delta^2 y_1-\Delta^2 y_0$, ona se pomoću ordinata ovako izražava

$$\Delta^3 y_0=(y_3-2y_2+y_1)-(y_2-2y_1+y_0)=y_3-3y_2+3y_1-y_0 .$$

Za *četvrtu razliku* bismo bez teškoće dobili obrazac

$$\Delta^4 y_0 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 .$$

Vidimo da svaka razlika može biti izražena pomoću osnovnih ordinata i da su koeficijenti jednaki koeficijentima Njutnova binomnog obrasca.

U praksi se uzastopne razlike izračunavaju po shemi

$$\begin{array}{lllllll}
x_0\ y_0 & & & & & & \\
 & \Delta y_0 & & & & & \\
x_1\ y_1 & & \Delta^2 y_0 & & & & \\
 & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_0 & & & \\
x_2\ y_2 & & \Delta^2 y_1 & & \Delta^4 y_0 & & \\
 & \Delta y_2 & & \Delta^3 y_1 & & \Delta^5 y_0 & \\
x_3\ y_3 & & \Delta^2 y_2 & & \Delta^4 y_1 & & \Delta^6 y_0 \\
 & \Delta y_3 & & \Delta^3 y_2 & & \Delta^5 y_1 & \\
x_4\ y_4 & & \Delta^2 y_3 & & \Delta^4 y_2 & & \\
 & \Delta y_4 & & \Delta^3 y_3 & & & \\
x_5\ y_5 & & \Delta^2 y_4 & & & & \\
 & \Delta y^5 & & & & & \\
x_6\ y_6 & & & & & &
\end{array}$$

Njutn je predložio interpolisanje funkcije pomoću polinoma oblika

$$(2)\quad y(x)\approx\varphi(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+ \\ +c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\ldots+c_{n-1}(x-x_0)(x-x_1)\ldots \\ \ldots(x-x_{n-2})+c_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}),$$

gde su $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n$ stalni koeficijenti, koje treba odrediti iz uslova da kriva $y=\varphi(x)$ prolazi kroz $n+1$ datu tačku.

Ako u jednačinu (2) stavimo jedno za drugim: $x=x_0$, $x=x_1$, $x=x_2$ itd., dobićemo sistem jednačina

$$\begin{aligned}
y_0 &= c_0, \\
y_1 &= c_0 + c_1(x_1-x_0), \\
y_2 &= c_0 + c_1(x_2-x_0) + c_2(x_2-x_0)(x_2-x_1), \\
y_3 &= c_0 + c_1(x_3-x_0) + c_2(x_3-x_0)(x_3-x_1) + \\
&\quad + c_3(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Iz datih jednačina izvodimo:

$$c_0=y_0,\quad c_1=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{\Delta y}{h},\quad c_2=\frac{y_2-2y_1+y_0}{2h^2}=\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2},$$

$$c_3=\frac{y_3-3y_2^2+3y_1-y_0}{3!h^3}=\frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3},\ \ldots$$

Sa izračunatim koeficijentima polinom $\varphi(x)$ možemo napisati

$$y(x) \approx \varphi(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Tako izgleda Njutnov polinom, čija kriva prolazi kroz $n+1$ datu tačku.

Napisani *Njutnov interpolacioni obrazac* ponekad se izražava i u drugom obliku.

Ako, mesto vrednosti x, uvedemo broj m pomoću obrasca $\frac{x - x_0}{h} = m$, odakle je $x - x_0 = mh$, sve ostale razlike moći ćemo izraziti ovako

$$x - x_1 = x - x_0 - (x_1 - x_0) = mh - h = (m-1)h,$$

$$x - x_2 = (m-2)h, \ldots, x - x_{n-2} = [m - (n-2)]h.$$

Sa ovim vrednostima za razlike, Njutnov interpolacioni obrazac postaje

$$(3) \qquad y \approx \varphi(x) = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{n!}\Delta^n y_0.$$

Primer: Uzmimo da treba izračunati $\log 24{,}5$ pomoću logaritama brojeva 24, 25, 26 i 27, koje uzimamo iz logaritamskih tablica.

Obrazujmo tablicu

x	$\log x$	Δ	Δ^2	Δ^3
24	1,38021			
		0,01773		
25	1,39794		$-0{,}00070$	
		0,01703		0,00006
26	1,41497		$-0{,}00064$	
		0,01639		
27	1,43136			

U našem slučaju je $h=1$ te, prema tome, za 24,5 imamo $m = \frac{1}{2}$.

Prema obrascu (3) biće

$$f(a) = y_0 = \log 24 \quad = 1{,}38021$$

$$m\,\Delta y_0 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}01773 = 0{,}008865$$

$$\frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 = -\frac{1}{8}\cdot -0{,}00070 = 0{,}000087$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 = \frac{1}{16}\cdot 0{,}00006 = 0{,}000004$$

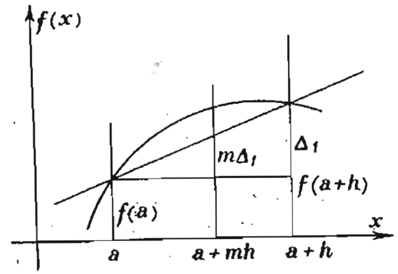
$$\log 24{,}5 = \qquad = 1{,}389166 \approx 1{,}38917$$

Taj broj ćemo naći u logaritamskim petocifrenim tablicama.

U Njutnovu obrascu iskorišćene razlike sastavljene su od uzastopnih narednih vrednosti funkcije. Može se međutim izračunati vrednost funkcije i pomoću uzastopnih prethodnih vrednosti funkcije, a i pomoću simetričnih vrednosti, tj. jedne naredne i odgovarajuće prethodne. Prema tome koje se razlike uzimaju, dobijaju se i odgovarajući specijalni interpolacioni obrasci (Gauss'ov, Stirling'ov Bessel'ov, i dr.). Nećemo ulaziti u razmatranje tih obrazaca.

Zaustavimo li se samo na prvoj razlici, Njutnov obrazac daje $(x_0 = a)$: $f(a + mh) = f(a) + m\,\Delta f(a)$ ili $y = y_0 + m\,\Delta y_0$.

To je obrazac za linearnu interpolaciju; on se obično primenjuje u logaritamskim i drugim tablicama, gde su date, obično sa strane, i pomoćne tablice sa oznakom P. P. (partes proportionales) sa izračunatim vrednostima proizvoda $m\,\Delta y_0$. Grafičko tumačenje ove formule prikazano je na slici 39.



Sl. 39 — Linearna interpolacija

Ako uzmemo u obzir i drugu razliku imamo obrazac paraboličke ili kvadratne interpolacije

$$f(a+mh)=f(a)+m\,\Delta f(a)+\frac{m(m-1)}{2!}\,\Delta^2 f(a)$$

ili

$$y=y_0+m\,\Delta y_0+\frac{m(m-1)}{2!}\,\Delta^2 y_0\,.$$

Kriva interpolacije prolazi kroz tri tačke

$$a,\ y_0=f(a),$$
$$a+h,\ y_1=f(a+h),$$
$$a+2h,\ y_2=f(a+2h).$$

Razlike imaju vrednosti

$$\Delta y_0=f(a+h)-f(a)=y_1-y_0,$$
$$\Delta^2 y_0=\Delta y_1-\Delta y_0=y_2-2y_1+y_0\,.$$

Prema tome, jednačina parabole interpolacije izgleda

$$y=y_0+\frac{x-a}{h}(y_1-y_0)+\frac{(x-a)(x-a-h)}{2!\,h^2}(y_2-2y_1+y_0).$$

Lako je proveriti da ona zaista prolazi kroz označene tri tačke.

Ako početak koordinatnog sistema postavimo u tačku (a, y_0) i koordinate tačke u odnosu na novi sistem koordinata označimo sa (ξ, η), pri čemu za jedinicu dužine uzimamo h, parabola interpolacije dobiva oblik

$$\eta=\xi\,\Delta y_0+\frac{1}{2}\,\xi(\xi-1)\,\Delta^2 y_0\,. \tag{4}$$

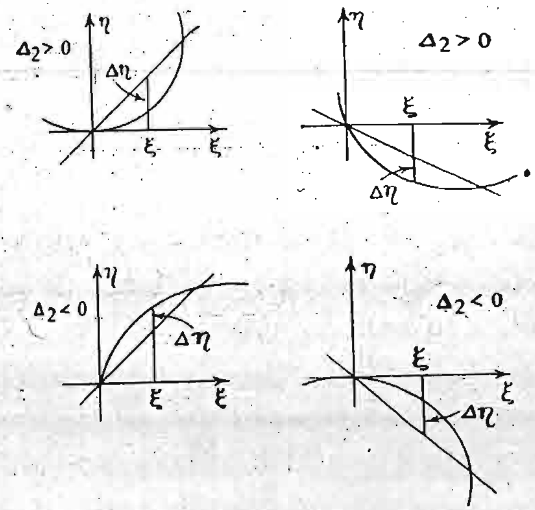
Korisno je da se zna položaj ove parabole za različite vrednosti $\Delta^2 y$ po znaku, jer se tada može približno oceniti pravilnost izvedenih računa.

Ako sa $\Delta\eta$ označimo razliku između rezultata paraboličke i linearne interpolacije, tj. stavimo $\Delta\eta=\eta-\xi\Delta y_0$, iz jednačine (4) imamo

$$\Delta\eta=-k^2\Delta^2 y_0\,, \tag{5}$$

gde smo sa k^2 označili veličinu $k^2=\frac{1}{2}\,\xi(1-\xi)$, koja je pozitivna u intervalu $0<\xi<1$.

Jednačina (5) pokazuje da $\Delta\eta$ i $\Delta^2 y$ imaju suprotne znake. Slika 40 $(\Delta_2=\Delta^2 y_0)$ pokazuje karakter parabole interpolacije za $\Delta^2 y_0>0$ i $\Delta^2 y_0<0$.



Sl. 40 — Uticaj paraboličke interpolacije na rezultat linearne interpolacije

Za interpolaciju sa nejednakim intervalima primenjuje se *Lagranžev interpolacioni obrazac*, koji izgleda ovako

$$f(x)=y=y_0\,\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}+$$
$$+y_1\,\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}+$$
$$+\ldots+y_n\,\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}\,.$$

Ako uvrstimo $x=x_0$, dobićemo $y=y_0$ i slično za druge vrednosti argumenta; prema tome vidimo da Lagranževa funkcija zaista odgovara krivoj koja prolazi kroz $(n+1)$ date tačke i predstavlja polinom n-tog stepena.

Vežbanja:

1. Pomoću linearne interpolacije naći vrednost $\log_{10} 6{,}9443$, ako su: $\log_{10} 6{,}944 = 0{,}84161$ i $\log_{10} 6{,}945 = 0{,}84167$ i objasniti postupak grafički.

2. Neko telo se rastvara u vodi. Donja tablica pokazuje koliko procenata tog tela ostaje posle izvesnog vremena izraženog u minutima. Odrediti koliko je procenata tog tela ostalo posle 20 minuta.

t	7	12	17	22	27	32	38
%	83,7	72,9	63,2	54,7	47,5	41,4	36,3

3. Date su vrednosti funkcije e^{-x^2} za ove argumente:

x	0,25	0,26	0,27	0,28
e^{-x^2}	0,9394	0,9346	0,9297	0,9246

odrediti vrednost funkcije za $x=0{,}256$ i proučiti na tom primeru linearnu, kvadratnu i kubnu interpolaciju.

4. Transformisana Plankova jednačina, koja postavlja vezu između energije zračenja i talasne dužine, ima oblik $(e^{\frac{1}{x}}-1)\,x^5 y=1$. Pomoću tablice

x	0,080	0,081	0,082
y	1,1373	1,2471	1,3635

Odrediti vrednost y za $x=0{,}0805$ pomoću kvadratne interpolacije.

5. Eliptički integral $y=\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2 x}}$ ima vrednosti prema tablici

α	75°	76°	77°	78°	79°	80°
y	2,76806	2,83267	2,90256	2,97857	3,06173	3,15339

Odrediti y za 76° 30′ sa istom tačnošću.

4.7. Približno diferenciranje i integrisanje

Iz osnovne definicije izvoda y', funkcije $y=f(x)$,

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{x_1\to x}\frac{y_1-y}{x_1-x},$$

neposredno sleduje da, približno, za izvod možemo uzeti odnos $(y_1-y):(x_1-x)$, koji odgovara tangensu ugla između sekante i ose x.

Ako je funkcija data grafički, stavljanjem lenjira pravcem tangente može se dobiti dosta tačna vrednost izvoda.

Najzad, ako je funkcija data pomoću njenih vrednosti za niz argumenata, možemo upotrebiti interpolacionu formulu.

Ako u Njutnovoj formuli (3), (4.6), stavimo $m=\dfrac{x}{h}$, možemo napisati

$$y(x)\approx\varphi(x)=y_0+\frac{x}{h}\Delta y_0+\frac{x(x-h)}{2!\,h^2}\Delta^2 y_0+$$

$$+\frac{x(x-h)(x-2h)}{3!\,h^3}\Delta^3 y_0+\frac{x(x-h)(x-2h)(x-3h)}{4!\,h^4}\Delta^4 y_0+\dots$$

Diferenciranjem leve i desne strane po x dobijamo za vrednost izvoda

$$y'(x)\approx\varphi'(x)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0+\left(x-\frac{1}{2}h\right)\frac{\Delta^2 y_0}{h}+\left(\frac{1}{2}x^2-xh+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{3}h^2\right)\frac{\Delta^3 y_0}{h^2}+\left(\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{4}x^2h+\frac{11}{12}xh^2-\frac{1}{4}h^3\right)\frac{\Delta^4 y_0}{h^3}+\dots\right].$$

Za $x=0$ imamo

$$y'(0)\approx\varphi'(0)=\frac{1}{h}\left(\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{1}{3}\Delta^3 y_0-\frac{1}{4}\Delta^4 y_0+\dots\right).$$

Rešimo jedan primer.

Naći za $a=5{,}0$ izvod funkcije date tablicom

a	x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
5,0	0,0	148,413					
			15,609				
5,1	0,1	164,022		1,641			
			17,250		0,174		
5,2	0,2	181,272		1,815		0,015	
			19,065		0,189		0,009
5,3	0,3	200,337		2,004		0,024	
			21,069		0,213		
5,4	0,4	221,406		2,217			
			23,286				
5,5	0,5	244,692					

Prema gornjem obrascu treba izračunati

$$f'(a) \approx \varphi'(0) = \frac{1}{0{,}1}\left(15{,}609 - \frac{1}{2}\cdot 1{,}641 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}174 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\cdot 0{,}015 + \frac{1}{5}\cdot 0{,}009\right) = 10\,(15{,}609 - 0{,}8205 + 0{,}058 -$$

$$- 0{,}00375 + 0{,}0018) \approx 10\cdot 14{,}84 \approx 148{,}4.$$

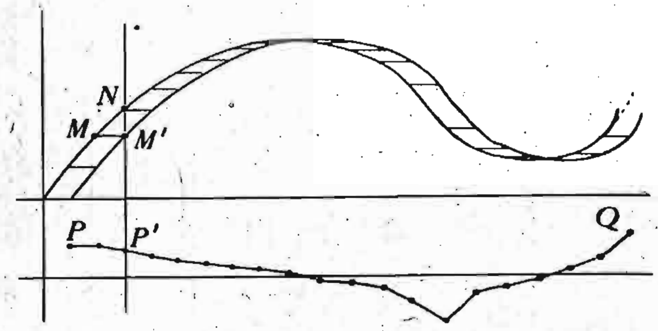
Sad možemo dati odgovor na zagonetku: zašto je dobivena vrednost izvoda približno jednaka vrednosti funkcije, tj. $f(a) = 148{,}413 \approx 148{,}4 \approx f'(a)$?

Naša tablica daje vrednosti funkcije e^x, počev od $e^{5{,}0}$, i prema tome vrednosti izvoda treba da budu jednake vrednostima same funkcije.

Navešćemo još jednu vrlo oštroumnu grafičku metodu za određivanje izvoda date funkcije. Tu je metodu dao Slabi (Slaby).

Na milimetarskoj hartiji nacrtajmo grafik date funkcije (sl. 41). Sliku pokrivamo prozirnom hartijom. Na toj hartiji kopiramo datu krivu. Zatim pomaknemo prozirnu hartiju u pravcu ose x za određenu dužinu h. Sa prozirne hartije prenosimo krivu ponovo na milimetarsku hartiju. Dobićemo dve

krive: levu i desnu. Ako povučemo ordinatu koja seče ove krive u tačkama M' i N, odnos $M'N : h$ predstavlja vrednost izvoda y' u tački M, od koje smo dobili tačku M'. Ako je



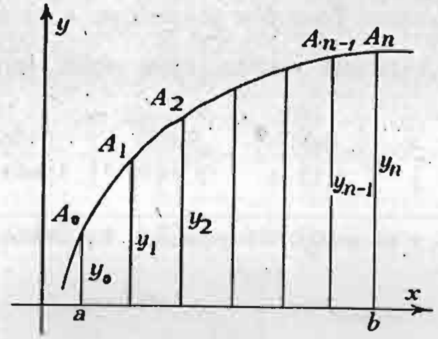
Sl. 41 — Slabijeva grafička metoda za određivanje izvoda

$h=1$, dužina $M'N$ predstavlja brojno izvod. Ako dužine $M'N$ uzimamo za ordinate, dobićemo krivu liniju PQ koja daje izvod. Nacrtanu krivu PQ možemo pomaći ulevo za h, tako da se ispod svake tačke koja određuje y nalazi vrednost y' na grafiku $P'Q'$.

Pređimo sad na približno izračunavanje određenog integrala,

$$J = \int_a^b f(x)\,dx,$$

za koji znamo da mu odgovara površina omeđena krivom linijom, čija je jednačina $y=f(x)$, dvema ordinatama i odsečkom ose x (sl. 42).



Sl. 42 — Pravilo trapeza

Ako razliku $b-a$ podelimo na n jednakih delova, za svaku deonu tačku povučemo ordinatu i tačke na krivoj spojimo tetivama, dobićemo niz trapeza. Zbir površina tih trapeza približno odgovara traženoj površini.

Površine trapeza imaju redom vrednosti

$$\frac{1}{2}(y_0+y_1)h, \quad \frac{1}{2}(y_1+y_2)h, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2}(y_{n-2}+y_{n-1})h,$$

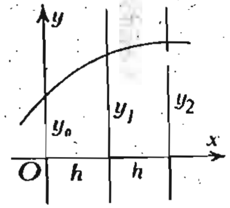
$$\frac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)h,$$

gde je $h=(b-a):n$.

Sabiranjem ovih površina izvodimo obrazac

$$\text{(XXVI)} \quad \int_a^b y\,dx \approx \frac{1}{2n}(b-a)\,[y_0+y_n+2(y_1+y_2+ + \ldots + y_{n-1})].$$

On izražava pravilo trapeza za izračunavanje određenog integrala. Zamena krive linije pravom, ma i na malom intervalu, samo je prvo, najgrublje, predstavljanje krive linije. Pri dubljoj analizi krive treba kroz tri uzastopne tačke povući parabolu (sl. 43) sa jednačinom $y=a_0+a_1x+a_2x^2$.



Sl. 43 — Površina omeđena parabolom

Za određivanje koeficijenata parabole kroz prve tri tačke imamo ove jednačine

$$(1) \quad \begin{aligned} y_0 &= a_0, \\ y_1 &= a_0+a_1h+a_2h^2, \\ y_2 &= a_0+2a_1h+4a_2h^2. \end{aligned}$$

Površina omeđena tom parabolom izračunava se tačno

$$q_1=\int_0^{2h} y\,dx=\int_0^{2h}(a_0+a_1x+a_2x^2)\,dx=\Big/_0^{2h}\left(a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2+\frac{1}{3}a_2x^3\right)=$$

$$=2h\left(a_0+a_1h+\frac{4}{3}a_2h^2\right).$$

Dobiveni izraz možemo predstaviti ovako

$$q_1=\frac{1}{3}h(6a_0+6a_1h+8a_2h^2).$$

Lako je videti iz (1) da izraz u zagradi ima vrednost zbira $y_0+4y_1+y_2$; prema tome možemo napisati

$$q_1=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2).$$

Ako interval $b-a$ podelimo na paran broj, $2n$, delova, kroz tri uzastopne tačke možemo konstruisati parabolu i izračunati površinu omeđenu tom parabolom. Prethodni obrazac možemo upotrebiti za svaku od tih parabola. Ako saberemo sve te površine, dobićemo približnu vrednost našeg integrala

$$\text{(XXVII)} \quad \int_a^b y\,dx \approx \frac{b-a}{6n}[y_0+y_{2n}+2(y_2+y_4+\ldots+ +y_{2n-2})+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})].$$

Napisani obrazac izražava *Simpsonovo pravilo* za približno izračunavanje određenog integrala.

Pokazaćemo i grafičku metodu kojom možemo konstruisati integralnu krivu $Y=Y(x)=\int_a^x f(x)\,dx$, ako je data podintegralna kriva (2) $y=f(x)$.

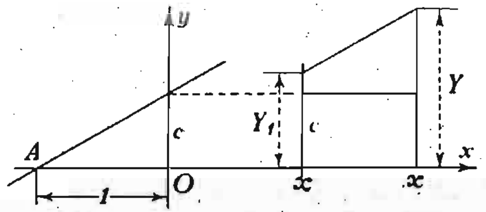
Za objašnjenje postupka primetićemo, prvo, da u slučaju $y=\text{const.}=c$, u intervalu od x_1 do x, naš integral možemo izračunati

$$Y=\int_a^x y\,dx=\int_a^{x_1} y\,dx+\int_{x_1}^x c\,dx=Y_1+c(x-x_1),$$

gde smo sa Y_1 označili vrednost integrala u intervalu od a do x_1. Prema tome deo integralne krive u intervalu od x_1 do x predstavlja pravu $Y=cx+(Y_1-cx_1)$ sa ugaonim koeficijentom c; ova prava prolazi kroz tačku sa koordinatama x_1, Y_1.

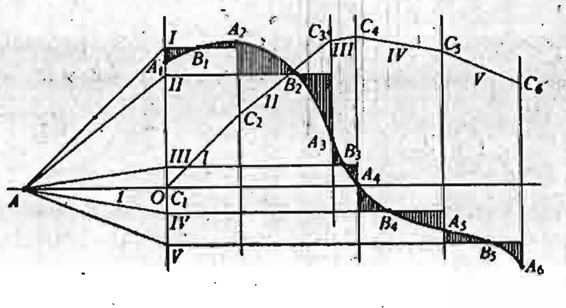
Na slici 44 data je odgovarajuća konstrukcija, pri čemu je ugaoni koeficijent prave konstruisan s leve strane ose y pomoću kateta: $c=OA=1$.

Pređimo sad na proizvoljnu podintegralnu funkciju (2) sa grafikom u Dekartovu sistemu koordinata (sl. 45).



Sl. 44 — **Integralna prava za** $y = c$

Podelimo našu krivu na delove sa monotonim ponašanjem podintegralne funkcije. Sem toga stavimo deone tačke u prevojne tačke, u ekstremne tačke i u tačke preseka sa osom, jer ovim tačkama odgovaraju ekstremumi integralne krive.



Sl. 45 — Grafička integracija

Neka to budu tačke $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Izaberimo na svakom delu tačke $B_1, B_2, \ldots, B_5$ tako da, po mogućstvu, ordinate svake tačke daju visinu pravougaonika jednaka odgovarajućem delu naše površine. Prava što prolazi kroz svaku od tačaka B i paralelna je sa osom x izjednačuje našu površinu sa površinom pravougaonika; na slici su šrafirane one površine koje dodajemo i oduzimamo za ovo izjednačenje. Ordinate tačaka B daju vrednosti ugaonih koeficijenata onih pravih koje na

svakom delu daju odgovarajuću površinu. Konstrukcija pravaca vrši se s leva pomoću dužine $OA = 1$. Dobivenu izlomljenu liniju možemo izravnati i zameniti krivom, imajući u vidu da: tačka C_1 leži na osovini x, jer je za tačku A_1 površina jednaka nuli; tačka C_2 je prevojna tačka naše krive $Y = Y(x)$, jer je u ovoj tački $Y'' = y' = 0$. U tački C_4 funkcija Y ima ekstremum, jer je za ovu tačku $Y' = y = 0$.

Vežbanja:

1. Iz tablarnih vrednosti funkcije

x	31	32	33	34	35
$f(x)$	3,43399	3,46574	3,49651	3,52636	3,55535

naći vrednost izvoda $f'(x)$ za $x = 31$ i potvrditi jednačinu $[f'(x) \cdot x]_{x=31} = 1$.

2. Metodom crtanja grafika i njegovim pomeranjem (Slaby) potvrditi jednačinu $(\sin x)' = \cos x$.

3. Izračunati približno, pomoću pravila trapeza i Simpsonova pravila, površinu četvrtine kruga poluprečnika 10 cm. Ordinate izračunati pomoću vrednosti sinusa. Tu istu površinu izračunati grafički.

4. Izračunati integral $\int_0^{0,5} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}\, dx$, na osnovu tablice sinusa:

x	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
$\sin x$	0	0,25882	0,5	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	0,96593	1

sa četiri decimale.

5. Pomoću izračunavanja integrala $\int_1^5 \frac{dx}{x}$, primenom Simpsonova pravila, potvrditi jednačinu $\ln 5 = 1,609$.

4.8. Metoda najmanjih kvadrata

U Matematici *problem* smatramo za *određen*, ako je broj jednačina za određivanje njegovih nepoznatih jednak broju nepoznatih, i ako dokažemo da zaista ove jednačine daju određeno rešenje tog problema *(teorema egzistencije)*.

Ako je broj jednačina manji od broja nepoznatih, problem je, u opštem slučaju, *neodređen*; on može imati više rešenja.

Da li ova rešenja odgovaraju problemu ili ne i, ako odgovaraju, koja rešenja treba iskoristiti — to su pitanja na koja možemo odgovoriti samo ako imamo dopunske uslove. Ponekad se traži određivanje svih mogućih rešenja u potpunosti.

Najzad, broj jednačina može biti i veći od broja nepoznatih. Ako neke jednačine nisu zaključci iz drugih i ako dati sistem jednačine uopšte ne možemo zameniti ekvivalentnim sistemom istog broja jednačina i nepoznatih, *problem* je *preodređen.*

Primena Matematike na razna praktična pitanja često dovodi baš do slučaja preodređenih problema.

Uzmimo najprostiji primer.

Pretpostavimo da su merenja nepoznate dužine x dala tri rezultata l_1, l_2, l_3. Tada nepoznata x treba da zadovolji tri jednačine

$$l_1-x=0,\ l_2-x=0,\ l_3-x=0.$$

Za jednu nepoznatu imamo tri jednačine. Problem je preodređen. Sa matematičkog gledišta ovo je nemoguće. Jednačine su nesaglasne. Otkud dolazi ova nesaglasnost? Jasno je da ona potiče od nesavršenosti naših merenja; pri svakom merenju možemo učiniti grešku. Za meru greške, kao što smo videli, uzimamo razliku između rezultata merenja i nepoznate prave dužine. Ako sa $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ označimo greške naših merenja, imamo

$$(1) \qquad l_1-x=\varepsilon_1,\ l_2-x=\varepsilon_2,\ l_3-x=\varepsilon_3.$$

To su tri jednačine sa četiri nepoznate; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ i x. Preodređeni problem je postao neodređen. Formulisan kao neodređen on više odgovara stvarnosti, jer zaista u svakom merenju možemo učiniti grešku, a ova greška ostaje nepoznata dok ne znamo pravu vrednost dužine x.

Za pretvaranje našeg problema u određeni, potrebna je još jedna jednačina; ona bi izražavala dopunski uslov, naime na koji način u izračunavanju x treba uzeti u obzir dopuštene greške $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. To se može učiniti na više načina. Mi ćemo se zaustaviti na metodi, ili, kako se to kaže, *principu najmanjih kvadrata*; taj princip je formulisao Gaus (Gauss). Princip postavlja kao uslov da zbir kvadrata grešaka bude najmanji. U našem slučaju treba da bude

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2=\text{Min.}$$

Ako stavimo vrednosti grešaka iz (1), dobićemo

$$(l_1-x)^2+(l_2-x)^2+(l_3-x)^2=\text{Min.}$$

Za određivanje ekstremuma (Min.) naše funkcije treba uzeti izvod po x i izjednačiti ga sa nulom. Kako izvod ima vrednost

$$-2(l_1-x)-2(l_2-x)-2(l_3-x),$$

za određivanje x imamo jednačinu

$$l_1-x+l_2-x+l_3-x=0,$$

odakle je

$$x=\frac{l_1+l_2+l_3}{3},$$

tj. prema principu najmanjih kvadrata za pravu vrednost dužine treba uzeti aritmetičku sredinu svih merenjima dobivenih vrednosti za tu dužinu.

Ovaj rezultat je toliko važan da se metoda najmanjih kvadrata, često, zove *metoda aritmetičkih sredina.*

Osnovni problem matematike koji se rešava pomoću metode najmanjih kvadrata sastoji se u ovom.

Dato je n jednačina

$$f_i(x, y, z, \ldots)=0, \qquad i=1,2,\ldots,n$$

sa m nepoznatih, pri tome je $n>m$.

Naći vrednosti nepoznatih $x, y, z\ldots$ tako da vrednosti funkcija

$$f_i(x, y, z, \ldots)=\varepsilon_i \qquad i=1,2,\ldots,n$$

najmanje odstupaju od nule, tj. prema principu najmanjih kvadrata da je

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_n^2=\text{Min.}$$

Raščlanimo naš problem na dva slučaja.

I. *Slučaj linearnih jednačina.* Radi jednostavnijeg izlaganja zaustavićemo se na slučaju linearnih jednačina sa dve nepoznate.

Neka je dat niz jednačina

$$\begin{aligned}&a_1x+b_1y+c_1=0,\\&a_2x+b_2y+c_2=0,\\&\dots\dots\dots\dots\\&\dots\dots\dots\dots\\&\dots\dots\dots\dots\\&a_nx+b_ny+c_n=0\end{aligned}$$

Znamo da ne možemo naći rešenje koje zadovoljava sve ove jednačine, nego potražimo sve one vrednosti x i y koje za jednačine

$$\begin{aligned}&a_1x+b_1y+c_1=\varepsilon_1,\\&a_2x+b_2y+c_2=\varepsilon_2,\\&\dots\dots\dots\dots\\&\dots\dots\dots\dots\\&a_nx+b_ny+c_n=\varepsilon_2\end{aligned}\tag{2}$$

daju

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\dots+\varepsilon_n^2=\text{Min}.\tag{3}$$

Ako uvrstimo vrednosti (2) u zbir (3) dobićemo funkciju $F(x, y)=(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2+\dots+(a_nx+b_ny+c_n)^2$, koja treba da ima minimum. Kao što nam je poznato (II, 2.31), uslovi za ekstremum funkcije $F(x, y)$ izgledaju

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0.$$

U našem slučaju oni daju (skratili smo sa 2):

$$\begin{aligned}&a_1(a_1x+b_1y+c_1)+a_2(a_2x+b_2y+c_2)+\dots+\\&\qquad+a_n(a_nx+b_ny+c_n)=0,\\&b_1(a_1x+b_1y+c_1)+b_2(a_2x+b_2y+c_2)+\dots+\\&\qquad+b_n(a_nx+b_ny+c_n)=0.\end{aligned}\tag{4}$$

Upoznaćemo se sad sa naročitim oznakama, koje se upotrebljuju u metodi najmanjih kvadrata:

$$\begin{aligned}&[aa]=a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2,\\&[ab]=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n,\\&[ac]=a_1c_1+a_2c_2+\dots+a_nc_n,\\&\text{itd.}\end{aligned}$$

Sa tim oznakama jednačine (4) dobijaju oblik

$$\begin{aligned}&[aa]\,x+[ab]\,y+[ac]=0,\\&[ba]\,x+[bb]\,y+[bc]=0.\end{aligned}$$

Dobivene jednačine zovu se *normalne jednačine* problema. Rešenja ovih jednačina daju tražene vrednosti x i y.

II. *Opšti slučaj.* Ako date jednačine nisu linearne već proizvoljne funkcije

$$f_i(x, y)=0,\qquad i=1,\ 2,\ \dots,\ n\tag{5}$$

problem se svodi na prethodni slučaj. I to ovako.

1. Nađemo, prvo, približno rešenje koje ćemo označiti sa x_0, y_0. To rešenje ponekad može biti očigledno. Ako to nije slučaj, možemo ga dobiti rešavajući, po izboru, samo dve jednačine.

Tačnije rešenje predstavljamo zatim u obliku

$$x=x_0+h,\quad y=y_0+k.$$

Uvrstimo li ovakvo rešenje u naše jednačine (5), dobićemo

$$f_i(x_0+h,\ y_0+k)=0.$$

Primenimo sad Tajlorovu teoremu i zaustavimo se samo na članovima prvog stepena. Tada ćemo dobiti jednačine linearne u odnosu na h i k

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_0 h+\left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)_0 k+f_i(x_0, y_0)=0,\qquad i=1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

gde su $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_0$ i $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)_0$ vrednosti delimičnih izvoda funkcije $f_i(x, y)$ za $x=x_0$, $y=y_0$.

2. Iz napisanih jednačina možemo, prema prethodnom slučaju, obrazovati normalne jednačine u obliku

$$\begin{aligned}&[aa]\,h+[ab]\,k+[ac]=0,\\&[ba]\,h+[bb]\,k+[bc]=0,\end{aligned}$$

gde su

$$[aa]=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_0^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_0^2+\ldots+\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}\right)^2,$$

$$[ab]=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)_0+\ldots+\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial f_n}{\partial y}\right)_0 \quad \text{itd.}$$

Rešenja normalnih jednačina predstavljaju približne vrednosti nepoznatih h i k. Ako je tačnost dobivenog rešenja nedovoljna, treba istim postupkom potražiti novo rešenje, polazeći od rešenja

$$x_1=x_0+h, \qquad y_1=y_0+k.$$

Ako novo rešenje uzmemo u obliku

$$x_1+h_1, \qquad y_1+k_1,$$

za veličine h_1 i k_1 obrazujemo ponovo normalne jednačine, sa novim koeficijentima, gde je, napr.,

$$[aa]=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_1^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_1^2+\ldots+\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}\right)_1^2,$$

pri čemu su

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_1 \quad \text{i} \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_1$$

vrednosti delimičnih izvoda funkcije $f_1=(x, y)$ za $x=x_1$, $y=y_1$.

Vežbanja:

Naći pomoću metode najmanjih kvadrata rešenja ovih jednačina:

1. $500\,x-721=0$, $501\,x-720=0$, $502\,x-722=0$. 2. $15{,}0\,x+12{,}2\,y=30$; $18{,}2\,x-6{,}4\,y=13$; $5{,}0\,x+9{,}0\,y=15{,}4$. 3. $12\sin x-10\sin y=1{,}02$; $\sin x\cdot\cos y=0{,}45$; $\mathrm{tg}^2 x+\cos^2 y=1{,}09$.

4. $x-y+2z-3=0,$
$3x+2y-5z-5=0,$
$4x+y+4z-21=0,$
$-x+3y+3z-14=0.$

Gausov primer iz Theoria Motus, § 184 (V. V. Mišković).

Tablica integrala

(I) $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$; $\int f(x)\,dx=F(x)+C.$

(II) $\int A f(x)\,dx=A\int f(x)\,dx$, $A=\text{const.}$

(III) $\int (u\pm v)\,dx=\int u\,dx\pm\int v\,dx.$

(IV) $\int x^n\,dx=x^{n+1}/(n+1)+C$, $n\neq-1$;

(IV^bis) $\int\frac{dx}{x}=\log x+C.$

(V) $\int e^x\,dx=e^x+C$; (V^bis) $\int a^x\,dx=a^x/\log a+C.$

(VI) $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$; (VI^bis) $\int\cos x\,dx=\sin x+C.$

(VII) $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}\,x+C$; (VII^bis) $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\mathrm{cotg}\,x+C.$

(VIII) $\int\frac{dx}{1+x^2}=\mathrm{arc\,tg}\,x+C=\mathrm{arc\,cotg}\,x+C_1.$

(IX) $\int\frac{dx}{1-x^2}=\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$

(X) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C=-\arccos x+C_1.$

(XI) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\log(x+\sqrt{1+x^2})+C.$

(XI^bis) $\int\frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}=\log(x+\sqrt{a+x^2})+C.$

(XII) $\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz=F(z)+C=F[\psi(x)]+C,$
$x=\varphi(z)$, $z=\psi(x)$.

(XIII) $\int u\,dv=uv-\int v\,du.$

(XIV) $Q=\int_a^b y\,dx=\int_a^b f(x)\,dx=\Big|_a^b F(x)=F(b)-F(a).$

(XV) $Q=\frac{1}{2}\int\limits_{\theta_0}^{\theta_1} r^2\,d\theta.$

(XVI) $L=\int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx,$

(XVII) $L=\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta.$

(XVIII) $V=\pi\int\limits_a^b y^2\,dx.$

(XIX) $S=2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$

(XX) $L=\int\limits_{u_0}^{u_1}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,du.$

(XXI) $\int\limits_a^b f(x)\,dx=f(\xi)\cdot(b-a).$

(XXII) $\frac{\partial}{\partial\alpha}\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx=\int\limits_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx.$

(XXIII) $\int\limits_\lambda^\mu\left(\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx\right)d\alpha=\int\limits_a^b\left(\int\limits_\lambda^\mu f(x,\alpha)\,d\alpha\right)dx.$

(XXIV) $\int\limits_{x_0}^x f(x)\,dx=\int\limits_{x_0}^x u_0\,dx+\int\limits_{x_0}^x u_1\,dx+\ldots+\int\limits_{x_0}^x u_n\,dx+$

$+\ldots=U_0+U_1+\ldots+U_n+\ldots=F(x).$

(XXV) $f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx,$

$b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx.$

(XXVI) $\int\limits_a^b y\,dx\approx\frac{1}{2n}(b-a)\,[y_0+y_n+2\,(y_1+$

$+y_2+\ldots+y_{n-1})].$

(XXVII) $\int\limits_a^b y\,dx\approx\frac{1}{6n}(b-a)\,[y_0+y_{2n}+2\,(y_2+y_4+\ldots+$

$+y_{2n-2})+4\,(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})].$

INDEX RERUM

(Brojevi označavaju strane)

ANTON BILIMOVIĆ

ELEMENTI VIŠE MATEMATIKE III

INTEGRALNI RAČUN SA PRIMENAMA

Tehnički urednik
JUGOSLAV BOGDANOVIĆ

Izdanje: Novinsko-izdavačko preduzeće „Tehnička knjiga“, Beograd, 7. juli 26/I

Štampa: Beogradski grafički zavod, Beograd, Bulevar vojvode Mišića 17

Štampanje završeno februara 1962.