ELEMENTI VIŠE MATEMATIKE II

ANTON BILIMOVIĆ

DIFERENCIJALNI RAČUN I NJEGOVE PRIMENE

NOVINSKO-IZDAVAČKO PREDUZEĆE
TEHNIČKA KNJIGA
BEOGRAD 1961

Nacrt za korice:
JOVAN VIDIĆ

Štampa: Beogradski grafički zavod, Beograd, Bulevar vojvode Mišića 17

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Prvi deo moje knjige „Elementi više matematike" bio je posvećen Uvodu, u kojem sam izložio prethodni, neophodan materijal iz Elementarne matematike, zatim proučavanju pojma funkcije, jedne nezavisno promenljive, i uvođenju pojma izvoda, osnovnog pojma Matematičke analize. U vezi sa proučavanjem pojma funkcije uveo sam elemente Teorije vektora i izložio osnove Analitičke geometrije u ravni. Pri proučavanju pojmova izvoda i diferencijala u prvoj knjizi imao sam za cilj da objasnim te pojmove u najprostijem obliku, i da dam pravila za diferenciranje. Bitno usvajanje tih pravila, tj. ne samo njihovo poznavanje, već i mogućnost operisati njima od samog početka izučavanja Diferencijalnog računa, znatno olakšava kako rešavanje zadataka iz te oblasti Infinitezimalnog računa, tako i razumevanje daljeg produbljavanja teorije funkcija i diferencijalnih izraza vezanih za njih. U Predgovoru prve knjige okarakterisao sam i način izlaganja Više matematike za nestručnjake matematičare. Tog načina i istog metoda izlaganja pridržavao sam se i u ovoj, drugoj knjizi.

U prvoj njenoj glavi proširen je pojam funkcije, i to kako za veći broj promenljivih, tako i prema formama funkcionalnih veza između tih promenljivih. Proširenje pojma funkcije odnosi se ne samo na realne veličine skalarne prirode, već i na veličine komplikovanije prirode — na imaginarne i vektorske veličine. To su prvi koraci u postupnom uopštavanju tog pojma. U vezi sa proširenjem pojma funkcije prošireni su i pojmovi izvoda i diferencijala. Pri tome sam pokušao da prikažem funkcije i operacije sa njima kao odraz konkretnih prirodnih procesa.

U drugoj glavi su navedene analitičke primene izvoda i diferencijala kod proučavanja osnovnih osobina funkcija. Na izloženom materijalu jasno se vidi u kolikoj meri već Elementi diferencijalnog računa omogućuju dublja proučavanja osobina funkcionalnih veza.

Treća glava je posvećena osnovnoj predstavi funkcije redom, sličnim polinomu, konačnim ili beskonačnim. To je glavni matematički aparat za izračunavanje vrednosti funkcije za određenu vrednost argumenta. Taj aparat obilato se primenjuje i pri programiranju rada savremenih računskih mašina.

Četvrta i peta glava posvećene su osnovnim primenama Diferencijalnog računa, u Geometriji i Mehanici, i to samo u Kinematici, tačke i čvrstog tela; primena u Dinamici zahteva i drugu oblast Infinitezimalnog računa — Integralni račun. I ovde sam se pridržavao načina izlaganja jednostavnih prirodnih predstava, koliko je to okvir knjige dozvoljavao. U izlaganju i ovih glava obilato je primenjivana vektorska metoda i to u što jednostavnijoj formi, ali sa jasnim geometrijskim tumačenjem.

Pri redakciji rukopisa i ove knjige pomogao mi je prof. V. V. Mišković, kome dugujem duboku srdačnu zahvalnost.

Glava prva

FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH

1.1. Funkcija dveju promenljivih

Već u prethodnoj knjizi*), pri proučavanju funkcije jedne nezavisno promenljive, bili smo, ponekad, prinuđeni da govorimo o matematičkim izrazima koji zavise od dve promenljive. Tako smo, napr., radili sa jednačinom krive linije drugoga reda u obliku $F(x, y)=0$, gde je izraz na levoj strani zavisio od promenljivih x i y. Ali ove promenljive, kao koordinate tačke te krive, nisu bile nezavisne, a sâm matematički izraz imao je konstantnu vrednost.

Sad ćemo, međutim, navesti primere matematičkih izraza sa dve promenljive, u kojima se te promenljive menjaju nezavisno; a menja se i sâm izraz.

Uzmimo pravougaonik sa dimenzijama x i y. Njegova površina, Q, jednaka je proizvodu xy, tj. $Q=xy$. Svaka se od ovih dimenzija može menjati na proizvoljan način; prema tome, x i y se mogu smatrati kao nezavisno promenljive. Veličina Q je *zavisna promenljiva*, ili *funkcija dveju nezavisno promenljivih, dvaju argumenata*, x i y.

Uzmimo drugi primer. Neka određena količina tzv. idealnog gasa ima zapreminu v litara; neka se nalazi pod pritiskom p atmosfera i ima temperaturu $\vartheta°$ (teta) stepena

*) Elementi više matematike I. Funkcija. Izvod. Diferencijal. „Tehnička knjiga“. Beograd. 1961.

Celzijusovih. Ako sa $T=\theta°+273°,16$ označimo apsolutnu temperaturu tog gasa, prema Bojl—Mariot—Gejlisakovu zakonu možemo postaviti ovu vezu između navedenih veličina: $pv/T=\text{const.}=R$, gde je R imenovana konstanta sa vrednošću $R=0{,}082054$ lit. × atm./grad. Ako stavimo $p=z$, $T=x$, $v=y$, iz prethodne jednačine imamo $z=Rx/y$. Ako temperaturu, x, i zapreminu, y, smatramo kao nezavisno promenljive, pritisak gasa, z, je funkcija tih promenljivih. Desna strana prethodne jednačine pokazuje operacije koje treba izvršiti sa x i y da bi se dobila vrednost funkcije, z.

U elektrotehnici nailazimo na sličnu funkciju. Ako sa $z=i$ označimo jačinu struje, sa $x=V_2-V_1$ napon struje (razliku električnog potencijala) i sa $y=R$ otpor provodnika, kroz koji prolazi struja, onda, pod izvesnim uslovima, možemo primeniti Omov zakon, koji daje $i=(V_2-V_1):R$ ili $z=x/y$.

Iz Geometrije, Mehanike, Fizike i drugih nauka se može navesti više konkretnih primera funkcije koja zavisi od dva argumenta (navesti takve primere!).

Ako hoćemo da napišemo u opštem obliku da promenljiva veličina z zavisi od nezavisno promenljivih x, y, tj. da je z funkcija od x i y, možemo staviti

(1) $$z=f(x,y).$$

U svakom konkretnom slučaju, na desnoj strani treba da bude pokazan postupak za određivanje vrednosti funkcije z, kad su date vrednosti x i y iz njihovog područja.

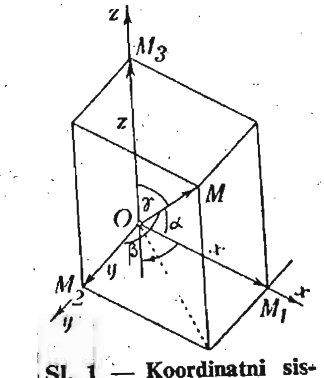
Za geometrijsko tumačenje jednačine (1) iskoristićemo neke pojmove iz Geometrije u prostoru.

1.2. Iz Analitičke geometrije u prostoru

Naš je cilj da objasnimo vezu između triju promenljivih veličina, x, y, z. Zato ćemo uvesti Dekartov koordinatni sistem sa tri ose, tj. Dekartov pravougli koordinatni trijedar, o kojem je već bilo reči u prvoj knjizi (I, 1.7). Kao i ranije, na ravni određenoj osama Ox i Oy (sl. 1) podignimo iz tačke O normalu i označimo na njoj pozitivni smer; dobiće-

mo osu Oz. Taj smer biramo i ovde tako da smerovi osa Ox, Oy, Oz odgovaraju redom palcu, kažiprstu i srednjem prstu *leve* ruke u njihovu položaju (*levi* ili *terestrički trijedar*). Uzimajući od ovoga suprotni smer ose Oz, dobićemo *desni trijedar*, koji je pogodniji za proučavanje stvarnog (ne prividnog sa nepokretne Zemlje) kretanja nebeskih tela. Znamo kako se mogu za svaku proizvoljnu tačku, M, prostora konstruisati tri vektora $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$, sa mernim brojevima x, y, z, koji se zovu *Dekartove koordinate* tačke M u prostoru, i koji određuju položaj ove tačke u tom prostoru.

Za istu tačku M se može konstruisati i pravougli paralelepiped sa ivicama x, y, z. Rastojanje d tačke M od početka koordinatnog sistema, kao dijagonala pravouglog paralelepipeda, iznosi: $d=+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.



Sl. 1 — Koordinatni sistem u prostoru

Ose Ox, Oy, Oz su *koordinatne ose*. Ravni Oyz, Ozx, Oxy su *koordinatne ravni*. Ove ravni dele prostor na osam delova, osam *oktanata*: na slici četiri nad Oxy ravni i četiri pod tom ravni. Odredite znak svake koordinate u svakom oktantu.

Rešimo nekoliko zadataka. 1. Odrediti rastojanje između dve tačke u prostoru. — Koordinate datih tačaka M_1 i M_2 označićemo sa $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Uzimajući u obzir paralelepiped sa ivicama x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 i dijagonalom $M_1M_2=d$, neposredno sa slike (sl. 2) imamo

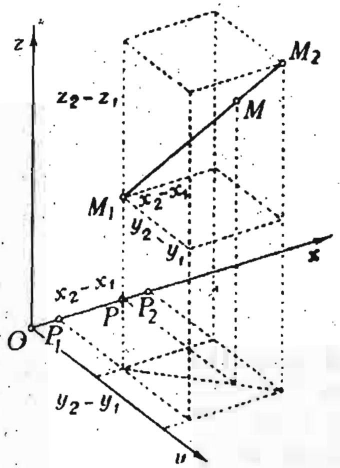
$$d=+\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

2. Odrediti koordinate tačke M na pravoj što prolazi kroz tačke M_1 i M_2 i deli datu duž u datoj razmeri, i to tako da je $M_1M:MM_2=\lambda$. Ponavljajući ranije izvođenje slučaja podele duži u ravni, lako dolazimo (sl. 2) do ovog rezultata

$$x=(x_1+\lambda x_2):(1+\lambda),\quad y=(y_1+\lambda y_2):(1+\lambda),\quad z=(z_1+\lambda z_2):(1+\lambda).$$

3. Vektor $\overrightarrow{OM}$ (sl. 1) obrazuje uglove α, β, γ sa koordinatnim osama. Naći vezu između tih uglova.

Pošto su koordinate tog vektora označene sa x, y, z, a OM sa d, neposredno sa slike imamo $x = d\cos\alpha$, $y = d\cos\beta$, $z = d\cos\gamma$ a odavde, posle dizanja na kvadrat, sabiranja i deljenja sa $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$, imamo $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Iz ove jednačine neposredno sleduje da za određivanje pravca bilo vektora bilo prave u prostoru treba da znamo samo dve veličine, napr. dva kosinusa, odnosno dva ugla; treći kosinus, odnosno ugao, se određuje iz navedene jednačine. U opštem slučaju ovakvo određivanje nije jednoznačno; treba da bude poznat još i dopunski uslov o znaku kvadratnog korena, odnosno o oblasti odgovarajućeg ugla. Niže ćemo pokazati drugu metodu za jednoznačno određivanje položaja pravca pomoću samo dve veličine.



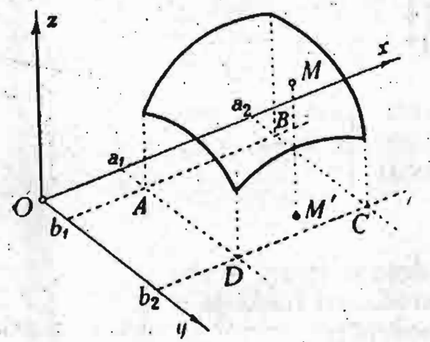
Sl. 2 — Rastojanje između dve tačke. Podela duži

Pređimo sad na iskorišćavanje Dekartovih koordinata tačke u prostoru za geometrijsko tumačenje funkcije dveju nezavisno promenljivih.

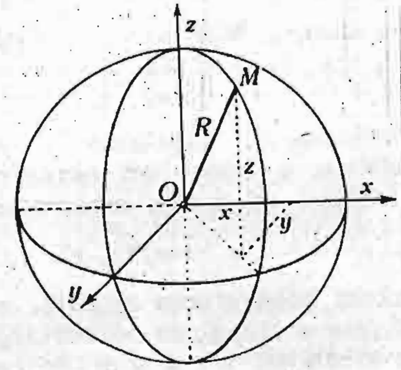
Potražimo tačke u prostoru čije koordinate x, y, z zadovoljavaju jednačinu (1) $z = f(x, y)$. Za svaki par koordinata x, y ova jednačina daje jednu, više ili nijednu vrednost z. Zaustavimo se na slučaju kad daje jednu vrednost (sl. 3). Tada za svaki položaj tačke $M'(x, y, 0)$ u određenoj oblasti, koja odgovara prirodi funkcije $f(x, y)$, u ravni Oxy, recimo, sa granicama $a_1 \leqslant x \leqslant a_2$, $b_1 \leqslant y \leqslant b_2$, dobijamo određenu tačku $M(x, y, z)$ u prostoru. Ako tačka M' menja neprekidno svoj položaj u toj oblasti, tačka M opisuje u prostoru, u opštem slučaju, *površinu*. Primetimo da oblast promene x i y, područje tih promenljivih, može biti ne samo pravougaonik, recimo $ABCD$, već i površina omeđena krivolinijskom konturom, pa

čak i cela ravan Oxy. Prema tome, jednačina (1) ima geometrijsko tumačenje u obliku površine.

Kao prvi primer uzećemo jednačinu, gde je $f(x, y)$ funkcija prvog stepena po x i y, (2) $z = ax + by + c$, gde su a, b, c — konstante, i pokazaćemo da toj jednačini odgovara u prostoru ravan. Na površini sa jednačinom (2) uzmimo dve proizvoljne tačke: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Koordinate ovih tačaka moraju zadovoljavati jednačinu (2); prema tome moramo imati dva identiteta: $z_1 = ax_1 + by_1 + c$, $z_2 = ax_2 + by_2 + c$. Na pravoj što spaja tačke M_1 i M_2 uzmimo proizvoljnu tačku M. Koordinate ove tačke možemo predstaviti izrazima $x = (x_1 + \lambda x_2) : (1 + \lambda), \ldots, \ldots$; videli smo da pri promeni λ od $+\infty$ do $-\infty$ tačka M prolazi kroz sve moguće položaje na pravoj



Sl. 3 — Površina



Sl. 4 — Sferna površina

što prolazi kroz tačke M_1 i M_2. Pokazaćemo da sve ove tačke M leže na površini (2). Zaista, uvrstimo koordinate ove tačke u jednačinu (2) i pomnožimo sa $1 + \lambda \neq 0$, tada imamo $z_1 + \lambda z_2 = a(x_1 + \lambda x_2) + b(y_1 + \lambda y_2) + c(1 + \lambda)$, ili $z_1 - (ax_1 + by_1 + c) + \lambda[z_2 - (ax_2 + by_2 + c)] = 0$, a ova jednačina, na osnovu ranijih identiteta, sama se pretvara u identitet. Time je dokazano da sve tačke prave, koja prolazi kroz dve proizvoljne tačke date površine, pripadaju toj površini. Takvu geometrijsku osobinu ima samo ravan. Funkciji z prvog stepena po x i y odgovara prema tome ravan.

Slično slučaju funkcije jedne nezavisno promenljive, gde smo imali dva oblika za izražavanje funkcionalne zavisnosti između dve promenljive x i y, naime: eksplicitni oblik $y=f(x)$ i implicitni $F(x, y)=0$, — i u slučaju funkcije dveju nezavisno promenljivih, funkcionalna veza između tri promenljive x, y, z može se izraziti u eksplicitnom obliku, naime $z=f(x, y)$, i u implicitnom $\Phi(x, y, z)=0$, pri čemu ostaje mogućnost izbora koja će se od promenljivih smatrati kao funkcija ostalih dveju.

Kao primer uzećemo jednačinu (3) $x^2+y^2+z^2=R^2$, gde je R konstantna dužina. Iz ove jednačine, smatrajući z kao funkciju x i y, imamo (4) $z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Pošto leva strana jednačine (3) ima vrednost kvadrata rastojanja tačke sa koordinatama x, y, z od početka koordinata, vidimo da prema toj jednačini ovo rastojanje ima stalnu vrednost R. Takvu osobinu ima površina lopte (sferna površina) poluprečnika R sa središtem u početku koordinata (sl. 4). Na taj način možemo tvrditi da funkciji (4) odgovara površina sfere poluprečnika R. Jasno je da je područje nezavisno promenljivih x i y krug poluprečnika R u ravni Oxy. Samo za ovo područje funkcija z ima realne vrednosti. Dvostruki znak kod korena pokazuje da tački sa koordinatama x i y u ravni Oxy odgovaraju dve vrednosti z i prema tome dve tačke sferne površine: jedna iznad ravni Oxy, druga ispod nje.

Na osnovu obrasca za rastojanje između dve proizvoljne tačke prostora možemo kazati da jednačini $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=R^2$ odgovara sferna površina poluprečnika R sa središtem u tački $C(x_c, y_c, z_c)$. Za ovu površinu funkcija z ima vrednost

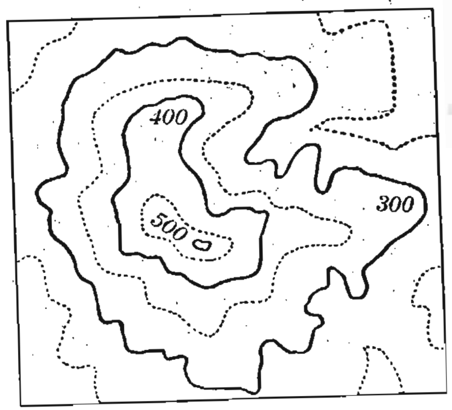
$$z=z_c\pm\sqrt{R^2-(x-x_c)^2-(y-y_c)^2}.$$

Treba da učinimo jednu primedbu o postavljanju funkcionalne veze između veličina, koje se odnose na isti predmet, odnosno na istu pojavu. Uzmimo, primera radi, za predmet pravu kupu i posmatrajmo, u vezi sa njom, ovih pet veličina: poluprečnik osnove r, visinu h, proizvodilju l, bočnu površinu S i zapreminu V. Jasno je da se te veličine nalaze u međusobnoj funkcionalnoj vezi, jedne zavise od drugih. Za matematičko formulisanje tih veza treba, pre svega, proučiti prirodu tog predmeta (to je glavni istraživački posao!) i ustanoviti

koliki je najmanji broj veličina i koji je najprostiji mogući način, da se odredi dati objekt. U našem slučaju, pošto se kupa dobiva obrtanjem pravouglog trougla oko jedne njegove katete, za potrebne najprostije veličine možemo uzeti katete tog trougla. Za kupu će to biti poluprečnik osnove r i visina h. Sve ostale veličine se određuju u funkciji tih dveju. Određivanje tih funkcija, njihove prirode, odnosno matematičkog izraza, ponekad nije tako jednostavan posao. U našem slučaju imamo ove funkcije: $l=\sqrt{r^2+h^2}$, $S=\pi rl=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$, $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Sličan je postupak i pri postavljanju funkcionalnih veza između veličina koje stoje u vezi sa nekim, npr., fizičkim pojavama. Rad velikih umova išao je, u toku vekova, za tim da se pronađu takve veličine i da se postave funkcionalne veze između njih.

Pošto površina vrlo zgodno prikazuje ponašanje funkcije dveju promenljivih, pokazaćemo kako se konkretno dolazi do predstave neke površine.



Sl. 5 — Horizontale površine Avale

1. Prvo, za to služi *modeliranje površine*. Globus — to je svima poznati model celokupne Zemljine površine.

2. Drugi način za predstavu površine upotrebljuje se u kartografiji, pri predstavljanju dela Zemljine površine.

Ako površinu sa jednačinom $z=f(x, y)$ presečemo nizom ravni, paralelnih sa Oxy ravni, na jednakom rastojanju h jedne od druge, onda ćemo za $z=0$, $z=h$, $z=2h$, itd., dobiti niz jednačina $f(x, y)=0$, $f(x, y)=h$, $f(x, y)=2h$ itd.. Svaku od ovih jednačina oblika $f(x, y)=\text{const.}=nh\ (n=0, 1, 2, \ldots)$ možemo zamisliti rešenom po y i tada ćemo dobiti niz jednačina $y=\varphi(x, nh)$, $(n=0, 1, \ldots)$. Za svaku vrednost n dobijamo, u opštem slučaju, krivu liniju; oblik te krive zavisi od vrednosti parametra nh i prirode površine. Ove se krive zovu *horizontale*. Ako h nije suviše veliko, u odnosu prema veličini površine, ove horizontale daju u dovoljnoj meri jasnu predstavu površine. Na slici (sl. 5) su nacrtane horizontale površine Avale.

1.21. Ravan i prava

Videli smo da jednačini $z=ax+by+c$ odgovara ravan. Napišimo sad jednačinu prvog stepena po x, y, z u opštem obliku ovako: $a_1x+a_2y+a_3z+a_4=0$ i pokažimo da ovoj jednačini odgovara ravan. Zaista, ako je $a_3\neq0$, prethodnu jednačinu možemo rešiti po z i dobićemo jednačinu $z=ax+by+c$ sa oznakama $a=-a_1/a_3$, $b=-a_2/a_3$, $c=-a_4/a_3$. Pošto dobivenoj jednačini odgovara ravan, jednačini u opštem obliku takođe odgovara ravan. Ako je $a_3=0$, opšta jednačina uzima oblik $a_1x+a_2y+a_4=0$. Pošto ova jednačina, tumačena sama po sebi u ravni Oxy, predstavlja pravu u toj ravni, a ne sadrži promenljivu z, koja, prema tome, može uzimati proizvoljne vrednosti, — to jednačini $a_1x+a_2y+a_4=0$, shvaćenoj u prostoru, odgovara ravan upravna na ravni Oxy, koja tu ravan seče duž prave (u toj ravni) sa jednačinom $a_1x+a_2y+a_4=0$. Prema tome, možemo tvrditi da jednačini u opštem obliku $a_1x+a_2y+a_3z+a_4=0$ uvek odgovara ravan.

Rešimo nekoliko zadataka.

1. Odrediti odsečke koje ravan čini na koordinatnim osama. Označimo te odsečke sa p, q, r. Onda tačke preseka A, B, C ravni sa koordinatnim osama imaju za koordinatne vrednosti: $A(p, 0, 0)$, $B(0, q, 0)$, $C(0, 0, r)$. Kako ove koordinate moraju zadovoljavati jednačinu ravni, za određivanje p, q, r imamo ove jednačine $a_1p+a_4=0$, $a_2q+a_4=0$, $a_3r+a_4=0$. Odavde, za $a_4\neq0$, imamo

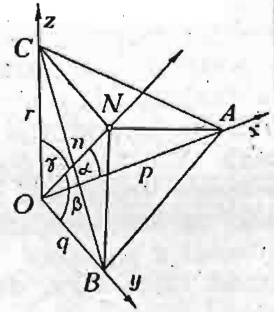
$$p=-a_4/a_1,\quad q=-a_4/a_2,\quad r=-a_4/a_3,$$

pri čemu pretpostavljamo da su zadovoljeni i uslovi $a_1\neq0$, $a_2\neq0$, $a_3\neq0$. Jednačina sa odsečcima p, q, r tada izgleda ovako

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1.$$

Ako je $a_4=0$, opšta jednačina ima oblik $a_1x+a_2y+a_3z=0$. Ravan što odgovara ovoj jednačini prolazi kroz početak koordinatnog sistema; svi njeni odsečci na osama jednaki su nuli. Oblik sa odsečcima gubi smisao. Ako je $a_4\neq0$, a, recimo, $a_1=0$, jednačini $a_2y+a_3z+a_4=0$ odgovara ravan paralelna sa x osom $(p\to\infty)$ koja seče ravan Oyz duž prave sa jednačinom $a_2y+a_3z+a_4=0$ u toj ravni. Najzad, ako su $a_1=0$ i $a_2=0$, jednačini $a_3z+a_4=0$ odgovara ravan paralelna sa Ox i Oy, tj. sa ravni Oxy, na rastojanju $z=-a_4/a_3$ od početka koordinata. Jednačini $z=0$ odgovara sama ravan Oxy. Na sličan način se proučavaju i ostali slučajevi.

2. Izvešćemo još tzv. *normalni oblik jednačine ravni*. Povucimo iz početka koordinata normalu na datu ravan (sl. 6). Označimo sa N tačku preseka te normale sa datom ravni ABC. Dužinu ON označimo sa n. Tačka N se poklapa sa tačkom O u posebnom slučaju kad ravan prolazi kroz početak. Ako ravan ABC ne prolazi kroz početak, iz jednačine te ravni sa odsečcima $x/p+y/q+z/r-1=0$ posle množenja sa n i uzimanja u obzir da je $n/p=\cos\alpha$, $n/q=\cos\beta$, $n/r=\cos\gamma$, gde su α, β, γ uglovi što obrazuje normala sa koordinatnim osama, dobićemo jednačinu ravni $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-n=0$ u normalnom obliku. Kao parametri ravni u ovoj jednačini služe: rastojanje n početka koordinata od te ravni i tri ugla, α, β, γ, između kojih postoji veza $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$; prema tome, imamo tri nezavisna parametra položaja ravni. Ako ravan prolazi kroz početak koordinata $(p=q=r=n=0)$, jednačina ravni uzima oblik $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$ i izražava normalnost vektora položaja $\overrightarrow{OM}(x, y, z)$ proizvoljne tačke M ravni i jediničnog vektora normale sa koordinatama $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Skalarni proizvod tih dvaju vektora jednak je nuli.



Sl. 6 — Ravan

Transformacija na normalni oblik opšte jednačine ravni $a_1x+a_2y+a_3z+a_4=0$ vrši se na isti način kao i transformacija jednačine prave u ravni (I, 2.31). Normirajući množilac ovde ima vrednost $\lambda = 1 : \pm\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Znak pred korenom treba da bude suprotan znaku veličine a_4.

3. Rastojanje tačke od ravni. Sličnim rasuđivanjem, kao i u slučaju određivanja rastojanja d tačke od prave u (I, 2.31), dolazi se do obrasca za rastojanje tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$ od ravni sa jednačinom u normalnom obliku $d = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - n$.

4. Ugao između dveju ravni. Ako su date jednačine dve ravni, svaku od njih možemo svesti na normalni oblik sa koordinatama jediničnih vektora normala $\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1$; $\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2$. Pošto je ugao θ između dveju ravni jednak uglu između normala na tim ravnima, a taj se ugao može odrediti iz skalarnog proizvoda, možemo napisati $\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$. Ako treba, možemo tu vrednost dopuniti i vrednošću $\sin\theta$ iz vrednosti vektorskog proizvoda tih dvaju vektora. Iz vrednosti kosinusa možemo napisati uslov za normalnost dveju ravni $\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0$, koji se može zameniti uslovom izraženim neposredno pomoću koeficijenata opštih jednačina ravni, naime u obliku $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$, gde su oznake očigledne. Nije teško proveriti da se uslov paralelnosti dveju ravni izražava proporcionalnošću koeficijenata pored x, y, z, tj. $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3$.

5. Napisati jednačinu ravni što prolazi kroz tri date tačke: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Za rešavanje ovog zadatka poslužićemo se determinantama. Pri rešavanju sličnog zadatka u ravni (I, 2.31), naime pri određivanju jednačine prave kroz dve date tačke u ravni, dobili smo jednačinu: $(y - y_1)/(y_2 - y_1) = (x - x_1)/(x_2 - x_1)$, koja se može napisati u obliku determinante

$$\begin{vmatrix} x - x_1, & y - y_1 \\ x_2 - x_1, & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ovu determinantu drugog reda možemo zameniti, jednostavnijom po formi, determinantom trećega reda (proveri ovo!):

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Da dobijena jednačina zaista odgovara pravoj kroz dve date tačke, vidi se neposredno po tome što: 1. pri razvijanju determinante po elementima prve vrste, ona daje jednačinu prvog stepena po x i y; i 2. ako uvrstimo u tu determinantu, mesto promenljivih x i y, bilo koordinate prve tačke, bilo druge — dobićemo u rezultatu determinantu sa dve jednake vrste, a takva determinanta je identički jednaka nuli (proveri to!). Navedena dva razloga pokazuju da, analogno, jednačinu ravni što prolazi kroz tri date tačke u prostoru možemo napisati u ovom jednostavnom obliku

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sad pređimo na proučavanje prave u prostoru. Kako svaku pravu u prostoru možemo smatrati kao presek dveju ravni, tačka M sa koordinatama x, y, z koje zadovoljavaju sistem od dve jednačine (1) $a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0$, $b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0$ od kojih svaka predstavlja ravan, pripadaju pravoj preseka tih ravni, tj. jednoj pravoj u prostoru. Znamo, s druge strane, da se sistem jednačina prvog stepena po x, y, z može zameniti ekvivalentnim sistemom od dve jednačine prvog stepena i u drugim oblicima različitim od navedenog. Prema tome, dve jednačine prave u prostoru mogu biti predstavljene takođe u raznim formama. Navešćemo nekoliko takvih oblika, služeći se neposrednim geometrijskim posmatranjima.

Pre svega rešimo ovaj zadatak. Napisati jednačine prave u prostoru pomoću jednačina ravni koje projiciraju datu pravu na koordinatne ravni.

Neka je prava u prostoru data sa dve tačke: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Uzmimo ravan Oyz. Projekcije M_1' i M_2' datih tačaka na tu ravan imaju koordinate $M_1'(0, y_1, z_1)$, $M_2'(0, y_2, z_2)$. Jednačinu prave, u ravni Oyz, što spaja tačke M_1' i M_2' možemo izraziti determinantom

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y & z & 1 \\ y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Smatrana u prostoru ova jednačina predstavlja ravan koja projicira datu pravu na ravan Oyz. Projekcije date prave na druge dve koordinatne ravni Ozx i Oxy daju jednačine drugih dveju ravni

$$\begin{vmatrix} z & x & 1 \\ z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Svaki par jednačina napisanih u obliku determinanata odgovara datoj pravoj. Radi vežbanja može se potvrditi da eliminisanje zajedničke promenljive ma iz kog para jednačina dovodi do treće jednačine.

Pošto jednačini proizvoljne ravni što prolazi kroz presek dve date ravni uvek možemo dati oblik

$$(2) \qquad a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 + \lambda (b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4) = 0,$$

gde je λ (lambda) proizvoljan broj (dokaži to!), uvek možemo, određivanjem broja λ, odrediti takvu ravan koja prolazi kroz datu pravu i zadovoljava neki dopunski uslov. Tako, napr., za ravan koja prolazi kroz datu pravu i datu tačku, van te prave, sa koordinatama x_1, y_1, z_1 broj λ se određuje iz uslova

$$a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 z_1 + a_4 + \lambda (b_1 x_2 + b_2 y_2 + b_3 z_2 + b_4) = 0,$$

te, prema tome, tražena ravan ima jednačinu

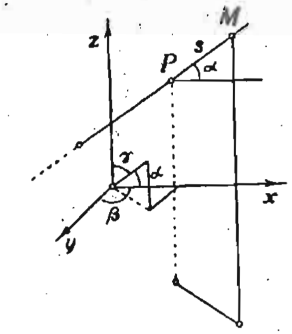
$$\frac{a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4}{a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 z_1 + a_4} = \frac{b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4}{b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_3 z_1 + b_4}.$$

Za pravu datu jednačinama (1) može se odrediti pomoću λ i ravan koja projicira datu pravu na neku koordinatnu ravan. Napr., za ravan Oxy tražena jednačina ne sme sadržati koordinatu z i, prema tome, iz uslova (2), imamo $a_3 + \lambda b_3 = 0$, a odatle $\lambda = -a_3/b_3$. Ako stavimo tu vrednost λ u (2), odaberemo koeficijente kod x i y, i slobodni član, onda ćemo dobiti jednačinu tražene ravni.

Najzad, izvešćemo jednačine prave još u jednom vrlo važnom obliku. Uzmimo na pravoj (sl. 7) jednu stalnu tačku P, sa koordinatama p, q, r i drugu promenljivu, M (x, y, z). Projekcija duži $PM = s$ na osu x ima, s jedne strane, vrednost $x - p$, a, s druge, $s \cos\alpha$ gde je α ugao naše prave sa osom x. Prema tome možemo napisati $x - p = s \cos\alpha$, ili $(x-p) : s \cos\alpha = 1$. Slične jednačine imamo i za dve druge projekcije. Na taj način jednačinu prave u prostoru možemo napisati u obliku

$$\frac{x-p}{l} = \frac{y-q}{m} = \frac{z-r}{n},$$

gde su p, q, r koordinate određene tačke te prave, a l, m, n su veličine proporcionalne kosinusima uglova α, β, γ između ove prave i koordinatnih osa. O tom obliku jednačina prave u prostoru govorićemo i na drugom mestu.



Sl. 7 — Prava u prostoru

Vežbanja:

1. Dat je levi Dekartov koordinatni sistem sa vertikalnom Oz osom i sa osom Oy prema posmatraču. Koji su oktanti gornji i donji, prednji i zadnji, levi i desni? U svaki oktant staviti kocku sa ivicom jedinične dužine, tako da na svakoj koordinatnoj osi budu po dva kocka temena i odrediti koordinate svih temena svih osam kocaka. Izračunati rastojanje između dva temena tih kocaka, od kojih jedno teme ima položaj: O (0, 0, 0), A (1, 0, 0), B (1, 1, 0), C (1, 1, 1), a druga temena za svako od navedenih treba birati tako da njihova rastojanja od izabranog budu sva različita.

2. Za tačku A (a, b, c) odrediti koordinate tačaka: M_1 – simetričnu sa tačkom A, u odnosu na Oxy ravan; M_2 — simetričnu u odnosu na Oy osu; M_3 — simetričnu u odnosu na početak koordinata i M_4 — simetričnu u odnosu na tačku N (l, m, n).

3. Naći ugao između dijagonale kocke i njene ivice.

4. Prava što spaja početak koordinata sa tačkom (1, 1, z) čini ugao 60^0 sa Oz osom. Odrediti koordinatu z i uglove prave sa osama Ox i Oy.

5. Odrediti rastojanje između dve tačke: a). A_1 $(3, 1, -3)$ B_1 $(1, -2, 1)$; b). A_2 $(-3, 2, -2)$, B_2 $(3, 4, 1)$; c). A_3 $(0, 2, 5)$, B_3 $(3, 2, 1)$

6. U ravni Oyz naći tačku podjednako udaljenu od tačaka A $(3, 0, -1)$, B $(-4, 1, 0)$, C $(5, -2, -1)$.

7. Napisati jednačinu prave, kao preseka dveju ravni, sa jednačinama $x + y + z = 1$, $y = z$, u obliku $(x-p) : l = (y-q) : m = (z-r) : n$.

8. Napisati jednačinu ravni koje projiciraju pravu sa jednačinama $(x-p):l=(y-q):m=(z-r):n$ na koordinatne ravni Oxy i Oxz.

9. Odrediti koordinate preseka prave sa koordinatnim ravnima Oxy, Oyz, Ozx, ako je prava data jednačinama $(x-p):l=(y-q):m=$ $=(z-r):n$.

10. Odrediti A i B tako da tačke A_1 $(2, 3, -5)$ i B_1 $(7, -2, 0)$ pripadaju ravni sa jednačinom $Ax+By+z-3=0$ i odrediti rastojanje početka koordinata od te ravni.

11. Naći površinu trougla sa temenima u tačkama: A $(1, 1, 0)$, B $(2, 0, 3)$, C $(0, 2, 5)$, izračunavanjem polovine intenziteta vektorskog proizvoda $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ i neposredno prema pravilima Elementarne geometrije, posle konstrukcije prostorne slike.

12. Izvesti obrazac za određivanje ugla između ravni sa jednačinom $Ax+By+Cz+D=0$ i prave sa jednačinom $(x-p):l=(y-q):m=(z-r):n$.

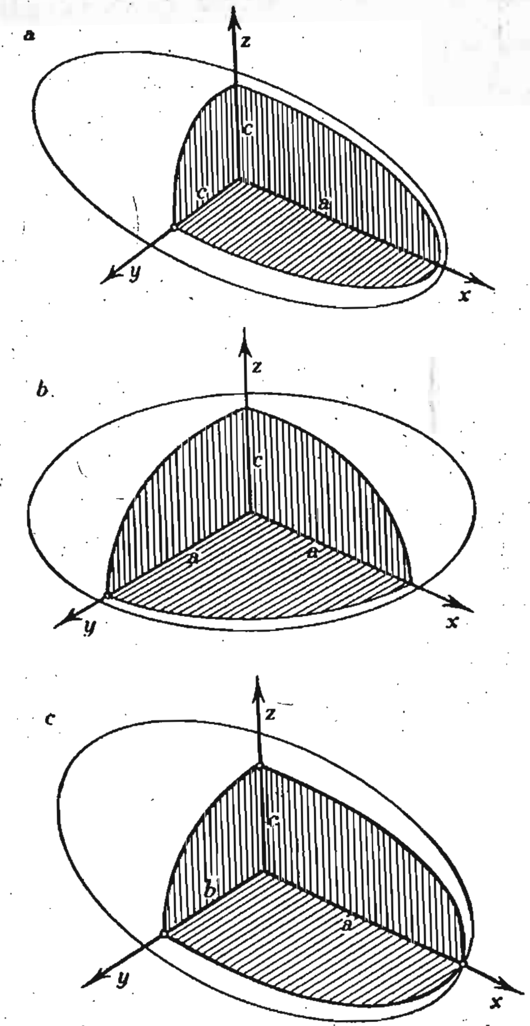
1.22. Površine drugoga reda

Pređimo sad na proučavanje površina koje odgovaraju jednačinama drugoga reda po x, y, z. Zaustavićemo se samo na važnijim slučajevima i u vezi s tim pokazaćemo kako se ti slučajevi mogu uopštiti.

1. *Sferna površina. Elipsoidi.* Jednačinu sferne površine navodili smo već kao primer za funkcionalnu vezu između tri promenljive x, y, z. Napišimo je sad u obliku $x^2+y^2+z^2=c^2$, gde je c poluprečnik sfere.

Istegnimo sad ovu sfernu površinu u pravcu Ox ose tako da svaka tačka $M(x, y, z)$ sfere pređe u tačku M' sa koordinatama $M'(x', y, z)$, gde je $x'=x\cdot\dfrac{a}{c}$ i $a>c$. Svaki kružni presek sfere sa ravni upravnom na Ox osi ostaje i dalje kružni presek, samo pomeren u pravcu x ose za rastojanje proporcionalno koordinati x, naime $x'-x=x\cdot\dfrac{a-c}{c}$. Dobijena površina se zove *izduženi obrtni elipsoid* (sl. 8, a). Pošto je $x=cx'/a$, koordinate nove tačke M' zadovoljavaju jednačinu $\left(\dfrac{cx'}{a}\right)^2+y^2+z^2=c^2$, ili $x^2/a^2+y^2/c^2+z^2/c^2=1$, gde je apscisa proizvoljne tačke nove površine označena ponovo sa x.

Ako sad uzmemo presek takvog izduženog obrtnog elipsoida sa ravni Oxz $(y=0)$, elipsu $x^2/a^2+z^2/c^2=1$, i počnemo

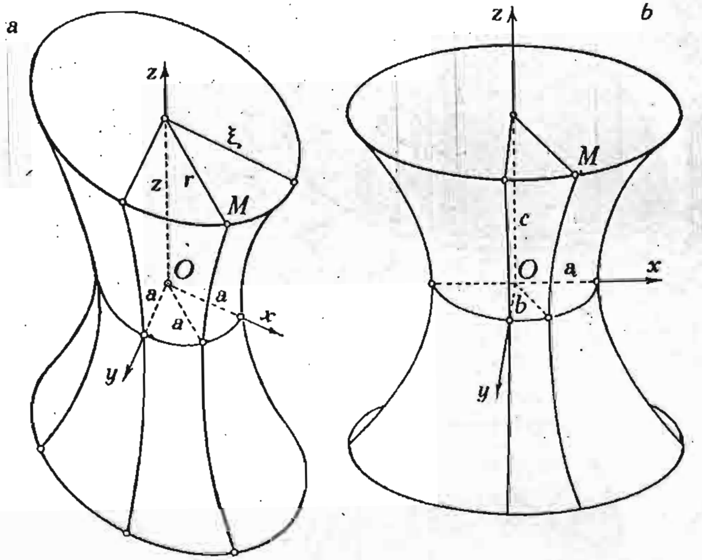


Sl. 8 — Elipsoidi: a. obrtni izdužen; b. obrtni spljošten; c. troosni je obrtati oko Oz ose, dobićemo površinu sa jednačinom $x^2/a^2+y^2/a^2+z^2/c^2=1$. Ova površina se zove *spljošten obrtni elipsoid* (sl. 8, b).

Najzad, ako svaka tačka $M(x, y, z)$ spljoštenog obrtnog elipsoida pređe u tačku M'' sa koordinatama (x, y'', z), gde je $y''=y\cdot\dfrac{b}{a}$, pri čemu je $c<b<a$, iz jednačine spljoštenog obrtnog elipsoida dobićemo jednačinu $x^2/a^2+y''^2/b^2+z^2/c^2=1$, koja pri promeni oznake za y ponovo daje jednačinu sa x, y, z u obliku $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$.

Ova površina se zove *troosni elipsoid* (sl. 8, c). Proučavanje elipsoida u pojedinostima ne ulazi u okvir ove knjige.

Uporedo sa prethodnom jednačinom napišimo još i jednačinu $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=-1$, koja odgovara tzv. *imaginarnom elipsoidu*. Njemu ne pripada nijedna realna tačka.

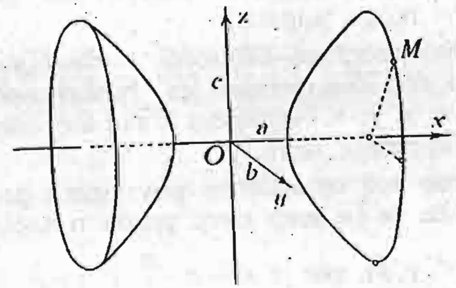


Sl. 9 — Jednograni hiperboloid: a. obrtni; b. troosni

2. *Hiperboloidi.* Uzmimo sad u obzir površine koje stoje u vezi sa hiperbolom. Neka je data u ravni Oxz hiperbola sa jednačinom $\xi^2/a^2-z^2/c^2=1$, gde je ξ (ksi) apscisa tačke

na toj hiperboli. Pretpostavimo, prvo, da se ta hiperbola obrće oko imaginarne ose (sl. 9, a). Svaka tačka $M(x, y, z)$ te površine nalazi se na rastojanju $r=\sqrt{x^2+y^2}$ od ose Oz jednakom $|\xi|$, jer su obe veličine jednake poluprečniku istog kruga. Prema tome ξ^2 u jednačini hiperbole možemo zameniti sa $r^2=x^2+y^2$, posle čega ćemo dobiti jednačinu $x^2/a^2+y^2/a^2-z^2/c^2=1$. Dobijena površina se zove *jednograni obrtni hiperboloid* (sl. 9, a). Ako sve dimenzije tog hiperboloida u pravcu Oy ose skratimo tako da nova koordinata y' ima sad vrednost $y'=y\,b/a$, stavimo u gornju jednačinu $y=y'a/b$ i ponovo se vratimo na oznaku y, dobićemo jednačinu $x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=1$, koja odgovara *jednogranom (troosnom) hiperboloidu* (sl. 9, b) sa proizvoljnim osama. Površine elipsoida i jednogranog hiperboloida imaju zajedničku tu topološku osobinu, da se dve proizvoljne tačke na svakoj od njih mogu spojiti neprekidnom linijom na toj površini.

Sad uzmimo drugi slučaj, slučaj obrtanja hiperbole oko stvarne ose. Uzmimo istu hiperbolu u ravni Oxz, samo njenu jednačinu napišimo ovako $x^2/a^2-\zeta^2/c^2=1$, gde je ζ (dzeta) koordinata tačke te hiperbole u pravcu Oz ose. Pri obrtanju te hiperbole sad oko Ox ose imamo $r^2=\zeta^2=y^2+z^2$ kao kvadrat rastojanja tačke od Ox ose. Pošto izvršimo slične operacije, kao i u prethodnom slučaju, imaćemo jednačinu *dvogranog obrtnog hiperboloida* u obliku



Sl. 10 — Dvograni troosni hiperboloid

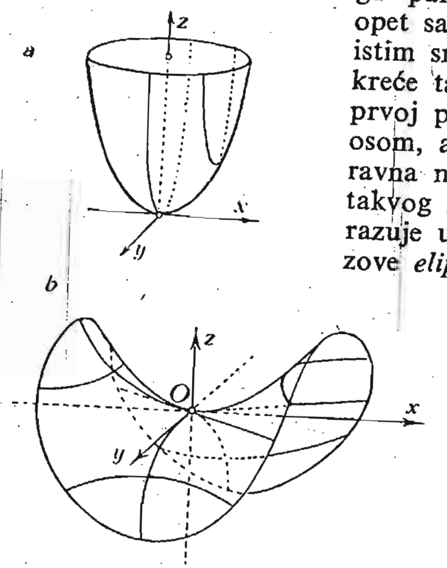
$$x^2/a^2-y^2/c^2-z^2/c^2=1,$$

a posle promene dimenzija u pravcu Oy ose jednačinu $x^2/a^2-y^2/b^2-z^2/c^2=1$, koja odgovara *dvogranom hiperboloidu* (sl. 10) sa proizvoljnim osama. Tačka na jednoj grani tog hiperboloida ne može biti spojena neprekidnom linijom sa tačkom na drugoj grani.

Jednačine elipsoida i oba hiperboloida imaju sličan formalan karakter i razlikuju se samo brojem minusa: kod elipsoida nema nijednog minusa (tri ose su realne), jednograni hiperboloid ima jedan minus (jedna imaginarna osa) i dvograni — dva minusa (dve imaginarne ose). Te površine, naročito elipsoid, imaju važne primene u Mehanici, Fizici, a i u drugim naukama.

Dodaćemo još nekoliko reči i o drugim površinama drugog reda.

Paraboloidi. Uzmimo dve proizvoljne parabole. Jednu stavimo u ravan Oxz, kako je to pokazano na slici (sl. 11,a) i neka ona ostane nepokretna. Drugu parabolu uzmimo u ravni Oyz, opet sa osom u pravcu Oz ose, sa istim smerom te ose. Neka se druga kreće tako, da njeno teme ostaje na prvoj paraboli, osa paralelna sa Oz osom, a njena ravan da ostaje upravna na ravni Oxy. Kao rezultat takvog kretanja, druga parabola obrazuje u prostoru površinu koja se zove *eliptički paraboloid*, jer su njeni preseci sa ravnima paralelnim Oxy ravni elipse. U drugom slučaju, neka opet druga parabola klizi po prvoj, ali neka je smer njene ose suprotan smeru Oz ose. Pri ovom kretanju ta druga parabola obrazuje površinu (sl. 11,b) koja se zove *hiperbolički paraboloid*. Ne bi bilo teško pokazati da je jednačina eliptičkog paraboloida $x^2/p+y^2/q=2z$, gde su p i q pozitivne veličine pri izabranom položaju na slici te površine. Za hiperbolički paraboloid imamo jednačinu $x^2/p-y^2/q=2z$, i ovde su $p>0$, $q>0$. Ako je $p=q$, prva površina je *obrtni paraboloid*, a druga — *jednakostrani hiperbolički paraboloid*.



Sl. 11 — Paraboloidi: a. eliptički; b. hiperbolički

Treba još navesti i slučajeve površina drugoga reda degenerativnih tipova. To su: *konusi, cilindri* i *skupovi dveju ravni.*

Navedimo i najprostije jednačine tih površina. Realni konus možemo da predstavimo jednačinom

$$x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=0.$$

Ovaj konus ima vrh u početku koordinata; njegova osa je Oz osa, a preseci sa ravnima paralelnim Oxy ravni su elipse.

Imaginarnom konusu sa jednačinom $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=0$ pripada samo jedna realna tačka — početak koordinata.

Za cilindre imamo: *realni eliptički cilindar* sa jednačinom $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ i *imaginarni eliptički cilindar* sa jednačinom $x^2/a^2+y^2/b^2=-1$. Zatim *hiperbolički cilindar* sa jednačinom $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ i *parabolički* sa jednačinom $y^2=2px$.

Najprostiju jednačinu skupa dveju ravni koje se seku možemo napisati ovako: $xy=0$ — to je jednačina skupa koordinatnih ravni Oyz i Oxz. Jednačina drugog reda može predstavljati i skup dveju imaginarnih ravni, npr. jednačina $x^2+y^2=0$ rastavlja se na jednačine dve imaginarne ravni $y+xi=0$, $y-xi=0$, za koje realna osa Oz $(x=0, y=0)$ služi kao realna prava njihova preseka. Za skup dveju paralelnih ravni možemo napisati ovu jednačinu: $z^2=a^2$. Ona daje $z=a$ i $z=-a$. Najzad, jednačina $z^2=0$ može biti smatrana kao jednačina dvostruke Oxy ravni.

1.23. Opšta jednačina drugog reda od tri promenljive

Koeficijenti opšte jednačine drugog stepena po x, y, z se mogu izraziti ovom kvadratnom matricom četvrtog reda

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{Vmatrix}$$

Ako je ova matrica simetrična, tj. ako je $a_{ij}\equiv a_{ji}$, ona sadrži u sebi deset nezavisnih koeficijenata. Kvadratna jednačina sastavljena od simetrične matrice ima oblik

$$F(x, y, z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+$$
$$+2a_{12}xy+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0.$$

Potpuna analiza uslova koje treba da zadovoljavaju koeficijenti ove jednačine, za svaku posebnu vrstu površine drugoga reda, ne spada u zadatak ove knjige, ali ćemo se ipak zaustaviti na jednom uslovu, ne navodeći dokaz za taj uslov, sličan dokazu u slučaju analize krive linije drugoga reda u ravni. Taj uslov se odnosi na centar površine, pri čemu je i ovde centar površine tačka koja polovi sve tetive površine, koje prolaze kroz tu tačku. Površine drugoga reda se dele na površine koje imaju centar, i to samo jedan (centralne površine), i koje ili uopšte nemaju centar ili ih imaju više na jednoj pravoj (prava centara), ili čak u celoj ravni (ravan centara). Osa eliptičkog cilindra je, npr., u isto vreme i prava njegovih centara, a srednja ravan dve paralelne ravni je u isto vreme i ravan centara tih ravni. Ako od napisane matrice sastavimo determinantu te matrice i od te determinante sastavimo minor elementa a_{44}, tj. determinantu

$$A_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

može se tvrditi da je data površina centralna površina, ako je $A_{44}\neq 0$. Čitalac lako može proveriti da, npr., za troosni elipsoid zaista imamo $A_{44}=1:a^2b^2c^2\neq 0$. Isto to važi i za oba hiperboloida — jednograni i dvograni (proveriti!). A za paraboloid, recimo eliptički, sa matricom

$$\begin{Vmatrix} \frac{1}{p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{imamo} \quad A_{44}=\begin{vmatrix} \frac{1}{p} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\equiv 0;$$

on nema centra. Vidimo da se taj uslov toliko prosto izražava da ga je vredelo spomenuti.

Vežbanja:

Odrediti vrstu površine što odgovara datoj jednačini i nacrtati je slobodnom rukom sa osama Dekartovog sistema.

1. $x^2+y^2+z^2=0$,
2. $x^2+2y^2+3z^2=0$,
3. $(x-1)^2+(y-2)^2+(x-3)^2=16$,
4. $(x-1)^2+3y^2+z^2=0$,
5. $x^2/4+y^2+z^2=1$,
6. $x^2/4+y^2/9+z^2/25=1$.
7. $-x^2/4+y^2/9+z^2/25=1$,
8. $-x^2/4-y^2/9+z^2/25=1$,
9. $-x^2/4-y^2/9-z^2/25=1$,
10. $x/4+y/9+z/25=1$,
11. $-x/4-y/9-z/25=1$,
12. $x^2+y^2+z^2-2x=3$,
13. $x^2+y^2+z^2-4x-2y+8z=4$,
14. $xy=4$,
15. $x^2+y^2=9$,
16. $x^2/4+y^2/9=1$,
17. $x^2/4-y^2/9=1$,
18. $y^2/4+z^2/9=1$,
19. $yz=4$,
20. $y^2=2px$,
21. $x+y=3$,
22. $x^2-y^2=0$,
23. $x^2-y^2-x+y=0$,
24. $x^2/a^2+z^2/c^2=2y$,
25. $z^2/c^2-y^2/b^2=2x$,
26. $x^2+y^2=2z$,
27. $-z^2/4+y^2/9=2x$,
28. $xyz=0$,
29. $(x-1)(y-2)(z-3)=0$,
30. $(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2=0$.

1.3. Funkcija više promenljivih. Funkcija tačke

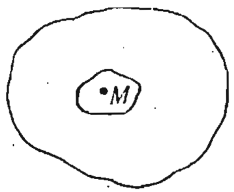
Pretpostavimo da funkcija u zavisi od tri nezavisno promenljive x, y, z, tj.

$$u=f(x,\ y,\ z). \tag{1}$$

Primera i takvih funkcija ima vrlo mnogo. Zapremina V pravouglog paralelepipeda sa dimenzijama x, y, z je $V=xyz$ i, prema tome, funkcija je tih triju dimenzija, koje su nezavisno promenljive. Isto tako je površina S tog tela, sa vrednošću $S=2(yz+zx+xy)$ funkcija istih argumenata.

Kao što smo videli, tri veličine x, y, z mogu biti smatrane kao koordinate tačke M u prostoru, ili koordinate vektora položaja ove tačke u odnosu na početak koordinata. Ako taj vektor, $\overrightarrow{OM}$, označimo sa $\vec{r}$, možemo mesto (1) napisati $u=f(\vec{r})$ ili $u=f(M)$. Poslednji izraz zamenjuje pojam funkcije triju promenljivih sa pojmom *funkcije tačke*: svakoj tački određene oblasti prostora odgovara vrednost skalara u. U prirodi nailazimo na mnogo primera takvih funkcija.

Ako imamo neku materijalnu sredinu, koja ispunjuje određenu oblast, možemo u toj oblasti uzeti tačku M (sl. 12) i određenom zatvorenom površinom iseći iz tog tela element zapremine Δv, i to tako da se tačka M ne nalazi na toj površini, već u unutrašnjosti. Neka se u toj zapremini nalazi masa (količina materije) Δm, tada se odnos $\Delta m : \Delta v$ zove *srednja gustina* tela u zapremini Δv. Smanjujemo sad zapreminu Δv, zadržavajući u njoj stalno tačku M. Može se desiti da prethodni odnos teži određenoj graničnoj vrednosti $\lim\limits_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta v}$, kada zapremina Δv teži nuli. Ova granična vrednost zove se *gustina tela ili sredine u datoj tački M*. Označimo ovu gustinu sa σ (čitaj: sigma). Ako gustina tela ima istu vrednost u svima tačkama tela, telo je *homogeno*. Ali u opštem slučaju gustina je u raznim tačkama različita, ona zavisi od položaja tačke M u telu, ona je funkcija tačke M u telu, tj. $\sigma = f(M) = f(\vec{r}) = f(x, y, z)$. Takvo je telo *heterogeno* ili *nehomogeno*.



Sl. 12 — Element materijalnog tela

Uzećemo i drugi primer. U svakoj tački naše atmosfere pritisak vazduha (barometarski pritisak) ima određenu vrednost; označićemo je sa p. Taj pritisak, u opštem slučaju, ima različite vrednosti u različitim tačkama prostora, tj. $p = f(x, y, z)$. On se može menjati takođe i sa vremenom t, stoga je $p = f(x, y, z, t)$ i, u tom slučaju, imamo primer funkcije koja zavisi od četiri nezavisno promenljive.

1.4. Delimični izvodi i diferencijali. Totalni diferencijal

Neka je data funkcija $z = 5x^3y^2$ od dveju nezavisno promenljivih x i y. Pretpostavimo, prvo, da je y konstantna veličina, tada se z javlja kao funkcija samo jedne nezavisno

promenljive x. Pod tim uslovom može biti govora o izvodu funkcije po x; taj izvod ima vrednost $z_x' = 5y^2\cdot(x^3)_x' = 5y^2\cdot 3x^2 = 15x^2y^2$, gde smo sa z_x' označili izvod funkcije z po promenljivoj x, smatrajući y kao konstantu. Obrnuto, ako x smatramo kao konstantu, a y kao promenljivu veličinu, imaćemo izvod $z_y' = 5x^3(y^2)_y' = 5x^3\cdot 2y = 10x^3y$.

Izvod funkcije više promenljivih po jednoj promenljivoj, kad pretpostavljamo da su sve ostale promenljive konstantne, zove se *delimični ili parcijalni izvod po toj promenljivoj*. Prema tome su z_x' i z_y' delimični izvodi, jedan po x, drugi po y, funkcije z.

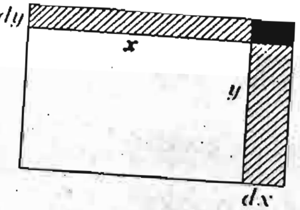
Za delimične izvode funkcije $z = f(x, y)$ upotrebljuju se oznake $z_x' = f_x' = \frac{\partial f}{\partial x}$, $z_y' = f_y' = \frac{\partial f}{\partial y}$. Važno je obratiti pažnju da u oznakama $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ nemamo oznake količnika sa posebnim brojiocem ∂f i imeniocem ∂x, odnosno ∂y, već samo simbol, u kome, suprotno slučaju $\frac{dy}{dx}$, ne možemo gornji deo odvojiti od donjeg. Za konkretne funkcije ova se oznaka upotrebljuje i ovako:

$$\frac{\partial}{\partial x}(5x^3y^2) = 15x^2y^2, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(5x^3y^2) = 10x^3y.$$

Označićemo priraštaje nezavisno promenljivih x i y sa $\Delta x = dx$ i $\Delta y = dy$ i definisaćemo dx i dy kao *diferencijale nezavisno promenljivih* x i y. Proizvod $\frac{\partial z}{\partial x}dx$, odnosno $\frac{\partial z}{\partial y}dy$, delimičnog izvoda i diferencijala odgovarajuće nezavisno promenljive zove se *delimični ili parcijalni diferencijal*. Jasno je da funkcija ima onoliko delimičnih diferencijala, od koliko nezavisno promenljivih zavisi. Tako funkcija $u = f(x, y, z)$ ima tri delimična diferencijala $\frac{\partial u}{\partial x}dx$, $\frac{\partial u}{\partial y}dy$, $\frac{\partial u}{\partial z}dz$. Zbir *svih* delimičnih diferencijala zove se *totalni diferencijal*. Totalni diferencijal označuje se dz, du itd., kao i u slučaju funkcije jedne nezavisno promenljive. Prema tome za naše funkcije z i u imamo:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,\qquad du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

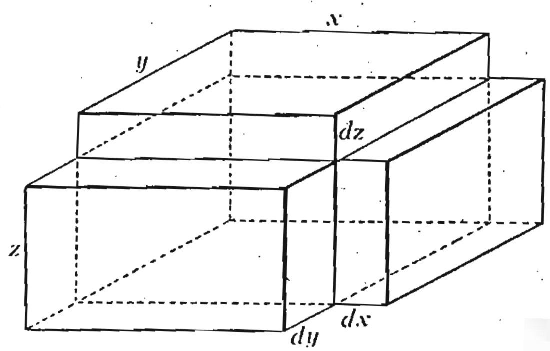
Uzmimo neki primer. Površina pravougaonika sa dimenzijama x i y ima vrednost $Q=xy$; ova je površina funkcija dveju nezavisno promenljivih, x i y. Delimični izvodi imaju vrednosti $\frac{\partial Q}{\partial x}=y$, $\frac{\partial Q}{\partial y}=x$, a delimični diferencijali $\frac{\partial Q}{\partial x}dx=$ $=ydx$, $\frac{\partial Q}{\partial y}dy=x\,dy$. Totalni diferencijal je $dQ=y\,dx+x\,dy$.



Sl. 13 — Delimični i totalni diferencijali površine pravougaonika

Na slici (sl. 13) vidimo i konkretno tumačenje delimičnih i totalnog diferencijala. Svaki delimični diferencijal daje priraštaj površine pod pretpostavkom da je porasla samo jedna strana pravougaonika. Totalni diferencijal je zbir tih delimičnih priraštaja. On nije jednak totalnom priraštaju površine pravougaonika kad jedna strana poraste za dx, a druga za dy, jer ukupni priraštaj, tj. razlika između površine pravougaonika sa stranama $x+dx$ i $y+dy$, dakle $(x+dx)(y+dy)$, i površine xy, sadrži još, sem totalnog diferencijala $xdy+ydx$, i površinu pravougaonika $dx\,dy$. Ako veličine dx i dy smatramo kao beskrajno male prvoga reda, razlika između totalnog priraštaja naše funkcije, Q, i njenog totalnog diferencijala predstavlja proizvod dve beskrajno male veličine prvoga reda.

Slično je i sa zapreminom $v=xyz$ pravouglog paralelepipeda. Svaki delimični diferencijal $yzdx$, $zxdy$, $xydz$ predstavlja zapreminu pravouglog paralelepipeda konstruisana na pravougaoniku strane sa priraštajem treće ivice, normalne na toj strani, kao trećom dimenzijom (sl. 14). Totalni diferencijal, kao zbir $dv=yzdx+zxdy+xydz$ razlikuje se i ovde od totalnog priraštaja zapremine tog tela, jer priraštaj iznosi $\Delta v=$ $=(x+dx)(y+dy)(z+dz)-xyz=yzdx+zxdy+xydz+xdydz+$ $ydzdx+zdxdy+dxdydz=dv+xdydz+ydzdx+zdxdy+dxdydz$. Vidimo da razlika $\Delta v-dv$, prvo, sadrži tri zapremine drugoga reda u obliku šipčica, čija je samo jedna dimenzija ko-



Sl. 14 — Delimični i totalni diferencijali zapremine pravouglog papalelepipeda

načna, npr. $xdydz$, a zatim zapreminu trećega reda $dxdydz$. Dakle i u ovom slučaju *glavni deo* priraštaja funkcije je totalni diferencijal. U tome se sastoji važna uloga totalnog diferencijala u proučavanju funkcija više promenljivih.

Svaki od delimičnih izvoda funkcije $z=f(x,y)$, tj. $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$, može i sam u opštem slučaju biti smatran kao funkcija promenljivih x i y; ove funkcije se mogu ponovo delimično diferencirati. Na taj način dobijamo izvode sa lako razumljivim oznakama

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

To su *delimični izvodi drugoga reda*. Izvodi $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ i $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$

razlikuju se po redu diferenciranja. U ovim razmatranjima ćemo se zadržati samo na proučavanju funkcija kod kojih red diferenciranja ne utiče na rezultat diferenciranja, tj. kad je $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ za sve vrednosti x i y iz njihovog područja. Prema tome za funkciju z imamo samo *tri delimična izvoda drugoga reda* i to: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. U našem primeru $z=5x^3y^2$ imamo: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=30xy^2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=30x^2y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=10x^3$. Svaki od delimičnih diferencijala $\dfrac{\partial z}{\partial x}dx$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ može poslužiti za formiranje novih delimičnih diferencijala; tada imamo

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}dy\,dx,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Zbir svih ovih delimičnih diferencijala daje ponovo *totalni diferencijal* i to *drugoga reda,* koji se piše sa

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Proširenje pojmova delimičnih i totalnog diferencijala je toliko u suštini jednostavno, da se ovde nećemo upuštati u formalnu analizu tih pojmova za slučaj diferencijala reda višeg od drugog.

Vežbanja:

1. Data je funkcija $z=\pi x^2 y$ (zapremina valjka); naći: delimične izvode, delimične diferencijale i totalni diferencijal. Svim ovim veličinama dati geometrijsko tumačenje. Sastaviti priraštaj funkcije i uporediti ga sa totalnim diferencijalom.

2. Data je funkcija $S=2(yz+zx+xy)$. Odgovoriti na pitanja postavljena u prethodnom zadatku.

3. Naći delimične izvode i totalni diferencijal funkcije: a). $z=\dfrac{1}{3}x^2y$; b). $z=\sqrt{xy}$; c). $z=x^y$; d). $z=ax^2+2bxy+cy^2$;

e). $z=(ax+b):(my+n)$; f). $z=\sin\dfrac{x}{y}$; g). $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; h). $z=Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$; i). $z=e^x\sin y$; j). $z=e^{x+y}$; k). $z=(x+y)^{x+y}$.

4. Naći delimične izvode i totalni diferencijal funkcije: a). $u=2x^3y^2z$; b). $u=Ax^p+By^q+Cz^r$; c). $u=1:(x+y+z)$; d). $u=(y-z)(z-x)(x-y)$; e). $u=x^{y^z}$.

5. Naći delimične izvode i totalni diferencijal drugog reda funkcije: a). $z=x^m y^n$; b). $z=\sin xy+\cos\dfrac{x}{y}$; c). $z=(x+y)^m$; d). $z=a^x b^y$; e). $z=e^r\sin\theta$ (r i θ su nezavisno promenljive).

6. Potvrditi jednačinu $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=4z$, ako je $z=2x^2y^2-3xy^3+x^4+y^4$.

7. Potvrditi jednačinu $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$, ako je $z=\log(e^x+e^y)$.

8. Potvrditi jednačinu $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, ako je $z=A\sin(ky)\sin(ckx)$.

9. Potvrditi jednačinu $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{1}{m^2}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+n\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$, ako su $z=Ae^{-\frac{1}{2}nx}\sin ax\cos by$, gde je $a^2=m^2b^2-\dfrac{1}{4}n^2$.

10. Potvrditi jednačinu $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, ako je $u=f(x-ct)$, pri čemu f može biti proizvoljna funkcija.

11. Potvrditi jednačinu $\sin 2x\dfrac{\partial w}{\partial x}+\sin 2y\dfrac{\partial w}{\partial y}+\sin 2z\dfrac{\partial w}{\partial z}+2u\dfrac{\partial w}{\partial z}=2$, ako je $w=\log(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z+\operatorname{tg}u)$.

1.41. Implicitna funkcija i njeno diferenciranje

U prvoj knjizi (I, 2.21) govorili smo o raznim načinima postavljanja funkcionalne veze između dveju promenljivih, x i y. U slučaju *eksplicitnog oblika* ova veza se postavlja jednačinom $y=f(x)$, ako y smatramo kao funkciju x. Ali smo videli da se, u opštem obliku, funkcionalna veza može postaviti i jednačinom (1) $F(x,y)=0$. Promenljiva y, određena ovom jednačinom kao funkcija x, zove se *implicitna funkcija* te promenljive. Jasno je da na osnovu jednačine (1) možemo i x smatrati kao funkciju y-a.

Često je teško, a ponekad i nemoguće, rešiti jednačinu (1) po y i na taj način dati implicitnu funkciju, y, kao rešenu, u eksplicitnom obliku (2) $y=f(x)$. Zato treba pokazati kako se mogu proučiti osobine implicitne funkcije bez rešavanja jednačine (1). Kao primer postavićemo sebi za zadatak da nađemo izvod $y'=\dfrac{dy}{dx}$ bez rešavanja jednačine (1).

U tom cilju uzećemo funkciju $z=f(x,y)$, smatrajući x i y kao nezavisno promenljive. Tada se može napisati totalni diferencijal te funkcije $dz=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$. Vratimo se sad uslovu da je $f(x,y)=0$, tada je $z=0$ i $dz=0$. Iz prethodne jednačine onda imamo $\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy=0$. Podelimo li ovu jednačinu sa dx i uzmemo pri tome u obzir oznaku $\dfrac{dy}{dx}=y'$, dobićemo jednačinu (3) $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}y'=0$, iz koje možemo, ako treba, odrediti y' u obliku $y'=-\dfrac{\partial f}{\partial x}:\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Pomoću ove jednačine možemo za svaku tačku $M(x;y)$ krive, date jednačinom (1), odrediti ugaoni koeficijent pravca tangente, bez rešavanja te jednačine po y. Treba samo znati koordinate tačke te krive, za koju se traži tangenta.

Tako, napr., iz jednačine $x^2+y^2-R^2=0$ kružne linije imamo $2x+2yy'=0$, odakle je $y'=-x/y$. Ako sa ξ i η označimo koordinate proizvoljne tačke tangente na krugu, u tački kruga sa koordinatama x, y, jednačinu tangente možemo napisati $\eta-y=y'(\xi-x)$ ili $\eta-y=-\dfrac{x}{y}(\xi-x)$; primetimo da su u ovoj

jednačini ξ i η promenljive, a x i y konstantne veličine za
datu tangentu. Iz prethodne jednačine te tangente sleduje
$x\xi+y\eta=x^2+y^2$, a kako je $x^2+y^2=R^2$, jednačina tangente do-
bija konačno oblik $x\xi+y\eta=R^2$. Na sličan način možemo ra-
čunati za elipsu i hiperbolu: jednačine $x^2/a^2\pm y^2/b^2-1=0$,
rezultat diferenciranja $2x/a^2\pm 2y\,y'/b^2=0$, izvod $y'=\mp b^2x/a^2y$,
pa jednačina tangente $\eta-y=\mp(b^2x/a^2y)$ $(\xi-x)$ ili $x\xi/a^2\pm$
$\pm y\eta/b^2=1$. Za parabolu $y^2-2px=0$ imamo $-2p+2yy'=0$,
$y'=p/y$ i prema tome je $\eta-y=(p/y)(\xi-x)$, ili, konačno,
$\eta y=p(\xi+x)$.

U vezi sa izloženim načinom određivanja izvoda impli-
citne funkcije učinićemo jednu primedbu. Ako je data funkcija
dveju promenljivih, $f(x,y)$, i y zavisi od x, funkciju $f(x,y)$
možemo smatrati kao složenu funkciju od x, ali u širem smislu
nego što je to bilo protumačeno ranije (I, 2.2), kad je funk-
cija zavisila samo od jednog argumenta, a taj argument je
bio svojim redom funkcija od x. Sad složena funkcija $f(x,y)$,
sa $y=y(x)$, zavisi od x i *neposredno* i sem toga *posredno*,
ukoliko x ulazi u drugi argument y funkcije $f(x,y)$. Dobijeni
izraz $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}y'$, daje pravilo za *totalno diferenciranje* takve
složene funkcije. Ako za takvo diferenciranje i složene funk-
cije upotrebimo simbol $\dfrac{d}{dx}$, pravilo diferenciranja po x se iz-
ražava $\dfrac{d}{dx}=\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial y}y'$. Prvi član desne strane pokazuje diferen-
ciranje po x ukoliko funkcija zavisi neposredno od x, a dru-
gi član odgovara pravilu nadovezivanja pri diferenciranju slo-
žene funkcije $f(x,y)$ ukoliko y zavisi od x. Isti postupak se
proširuje i na slučaj složene funkcije, koja zavisi od nezavis-
no promenljive i od više složenih argumenata. Ako imamo
složenu funkciju od x oblika $w=f(x,y,z,u,v)$, gde su y,z,u,v
funkcije x-a, onda kao rezultat diferenciranja po x imamo:

$$\frac{dw}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial z}z'+\frac{\partial f}{\partial u}u'+\frac{\partial f}{\partial v}v'.$$

Navedena pravila pokazuju da, ako je $f=f_1+f_2$, imamo $\frac{df}{dx}=\frac{df_1}{dx}+\frac{df_2}{dx}$, što znači da pravila i totalnog diferenciranja možemo primenjivati uzastopno na članove zbira. Ta mogućnost ponekad znatno olakšava izračunavanja.

Pređimo sad na određivanje drugog izvoda y'' implicitne funkcije. Uzmimo jednačinu za određivanje prvog izvoda

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0$$

i još jedanput totalno diferencirajmo članove ove jednačine. Uzastopno računamo

$$\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y}y'\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y'+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'\right)y'+\frac{\partial f}{\partial y}y''=0.$$

Posle uređivanja članova dobivamo jednačinu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial f}{\partial y}y''=0,$$

koja daje traženi drugi izvod

$$y''=-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2\right):\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Nećemo ulaziti u određivanje izvoda višega reda, jer se ono vrši po istom postupku.

Funkcija više promenljivih isto tako može biti određena u implicitnom obliku. Tako jednačina $F(x,y,z)=0$ određuje, recimo, z u funkciji x i y, drugim rečima možemo smatrati da je $z=\varphi(x,y)$, a da stvarno izražavanje funkcije φ može biti još komplikovanije od slučaja jedne promenljive. Za određivanje delimičnih izvoda $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ možemo primeniti postupak sličan prethodnom, ali mesto totalnog diferenciranja po x treba diferencirati delimično po x odnosno po y, ali uzimajući u obzir neposrednu i posrednu zavisnost od tih argumenata. Takvo diferenciranje daje jednačine

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

iz kojih se određuju traženi delimični izvodi.

Primena istog postupka omogućuje da se odrede delimični izvodi i višeg reda.

Vežbanja:

1. Naći izvod y' funkcije y određene jednačinom: a). $5x^2+3xy+4y^2-12x+16y-20=0$; b). $xy=a^2$; c). $(ax+b)(my+n)=k^2$; d). $\sin(xy)+xy-3=0$; e). $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$; f). $x^3+y^3-3axy=0$; g). $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$; h). $(a+x)x^2-(a-x)y^2=0$; i). $f(x+y)=0$ (iskoristiti zaključak: $x+y=\text{const.}$); j). $e^{xy}-x+y=0$.

2. Napisati jednačinu tangente na kružnoj liniji $(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0$ za datu tačku $M(x, y)$ na toj kružnoj liniji.

3. Napisati jednačinu tangente na elipsi sa jednačinom $x^2+4y^2-25=0$ u tački $M(3, 2)$.

4. Isto za hiperbolu sa jednačinom $xy-6=0$ u tački $M(2, 3)$.

5. Naći prvi i drugi izvod funkcije y određene jednačinom: a). $x^2+y^2-R^2=0$; b). $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$; c). $xy=a^2$; d). $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{a}=0$; e). $Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$; f). $y^2-2px=0$; g). $a\sin(x+y)+b\cos(x-y)+ce^{x^2+y^2}=0$; h). $\log(\sin x+\cos y^2)+e^{xy}=\text{const.}$

6. Iz jednačine $pv:(1+\alpha t)=\text{const.}$ odrediti: $\frac{\partial p}{\partial v}$, $\frac{\partial p}{\partial t}$, ako je $p=p(v,t)$; $\frac{\partial v}{\partial p}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, ako je $v=v(p,t)$, i, najzad, $\frac{\partial t}{\partial p}$, $\frac{\partial t}{\partial v}$, ako je $t=t(p,v)$.

7. Odrediti $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ iz jednačine $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2-1=0$.

8. Odrediti $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ iz jednačine $a\,e^{y+z+u}+b\,e^{z+u+x}+ce^{u+x+y}+de^{x+y+z}=A$.

1.42. Diferenciranje funkcija izraženih u parametarskom obliku

Videli smo da se funkcionalna veza između promenljivih x i y može izraziti na više analitičkih načina, i to: (1) u eksplicitnom obliku u odnosu na x, tj. $y=f(x)$; (2) u eksplicitnom obliku u odnosu na y, to je prema prethodnom inverzni oblik $x=\theta(y)$; (3) u implicitnom obliku $F(x,y)=0$; i, najzad, u parametarskom obliku (4) $x=f_1(u)$, $y=f_2(u)$, gde je u promenljivi parametar. Pošto glavnu ulogu, naročito u primenama, igra eksplicitni oblik $y=f(x)$ sa izvodima (5) $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$, itd. prirodno se postavlja pitanje ne samo prelaza od jednog oblika na drugi, koje smo već tretirali, već i određivanje izvoda (5) kad je funkcionalna veza data u oblicima (2), (3) i (4). Pošto smo pitanje diferenciranja kako inverznih tako i implicitnih funkcija već proučili, pređimo na određivanje izvoda (5) za slučaj kad je funkcionalna veza data u parametarskom obliku (4).

Pošto su x i y funkcije nezavisno promenljive u, može se napisati $dx=x'du$, $dy=y'du$, gde crta označava izvod po u. Posle deljenja neposredno dolazimo do rezultata: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'}{x'}=\psi(u)$.

Za drugi izvod imamo $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{du}(\psi)\cdot\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{x'^3}(y''x'-x''y')$. Pokazani postupak ne zadaje teškoće pri izračunavanju i narednih izvoda.

Primer: Data je *polukubična parabola* jednačinama: $x=at^3, y=at^2$. U implicitnom obliku ovoj krivoj odgovara jednačina $y^3=ax^2$. Proučite tu krivu. Za određivanje prvog izvoda imamo $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2at}{3at^2}=\dfrac{2}{3}t^{-1}=\dfrac{2}{3}\dfrac{y}{x}$. Ovaj rezultat omogućuje da se vrlo jednostavno konstruiše tangenta polukubične parabole u proizvoljnoj tački krive.

Vežbanja:

Odrediti prvi $\dfrac{dy}{dx}$ i drugi izvod $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ funkcije y određene u parametarskom obliku: a). $x=2t$, $y=6/t$; b). $x=t-1$, $y=t^3/2$; c). $x=t^2+1$, $y=t^4-1$; d). $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ($r=\text{const.}$); e). $x=a\cos^3\theta$, $y=a\sin^3\theta$; f). $x=e^t+e^{-t}$, $y=e^t-e^{-t}$.

1.5. Homogena funkcija. Ajlerova jednačina

Matematičke formule i jednakosti dobijene iz proučavanja stvarnih odnosa među konkretnim veličinama (u Geometriji, Mehanici, Fizici, Hemiji i drugim disciplinama), izražene pomoću imenovanih veličina, moraju imati naročitu osobinu, koja se zove *homogenost*. Prvo ćemo ovu osobinu objasniti na primerima.

Ako sa x, y, z označimo dužine ivica pravouglog paralelepipeda, zbir l (linea) dužina svih ivica iznosi $l=4(x+y+z)$; površina s (superficies) tog paralelepipeda ima vrednost $s=2(yz+zx+xy)$, a zapremina v (volumen) $v=xyz$.

Svaki član prvog zbira je dužina, veličina sa jednom dimenzijom; drugog zbira — površina, veličina sa dve dimenzije; treći izraz — zapremina, ima tri dimenzije. Vidimo da su svi članovi u jednom izrazu iste dimenzije, oni su, dakle, *homogeni*. Kako bismo mogli ispitati neku funkciju, npr. funkciju od dve promenljive $f(x,y)$, da li je ona homogena ili ne, i, u slučaju homogenosti, kako ćemo odrediti broj dimenzija?

Ako ivice paralelepipeda sa mernim brojevima xm, ym, zm u metrima izmerimo drugom jedinicom, npr. centimetrom, svaki će se broj povećati (ili smanjiti) za isti faktor; označimo ga sa k (u našem primeru $k=100$). Novi broj l' ranije dužine l treba da bude takođe k puta veći, odnosno manji, tj. da iznosi kl. Ako je naš izraz homogen, onda i sa desne strane, koja sad postaje $4(kx+ky+kz)$ treba da dobijemo k – puta veću, odnosno manju veličinu. Zaista, $4(kx+ky+kz)=$ $=k\cdot 4(x+y+z)$. Imamo prema tome izraz $l'=k\cdot 4(x+y+z)=$ $=kl$. Sa desne strane se faktor k javlja na prvom stepenu. Veličina l je veličina prve dimenzije. Za izraz površine imali bismo $s'=k^2s$, pri čemu je faktor k na drugom stepenu.

Vidimo da funkciju $f(x,y)$ treba zvati homogenom u odnosu na veličine x i y, ako zadovoljava uslov

$$(1) \qquad f(kx, ky)=k^nf(x,y),$$

gde je n broj dimenzija, kratko, dimenzija homogene funkcije. Naglasićemo da prethodna jednačina mora važiti za svaku vrednost broja k.

Slična jednačina treba da važi i za slučaj homogene funkcije više promenljivih, naime $f(kx, ky, kz, ku, \ldots) = k^n f(x, y, z, u, \ldots)$.

Pošto jednačina (1) važi za svaku vrednost k, kao rezultat diferenciranja te jednačine po k treba da se dobije jednačina koja takođe važi za svaku vrednost k. Stavimo u jednačini (1) $kx = z$, $ky = u$ i diferencirajmo po k obe strane tako dobijene jednačine $f(z, u) = k^n f(x, y)$. Prema pravilu izvedenom u prethodnom članu imamo jednačinu

$$\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dk} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dk} = nk^{n-1} f(x, y),$$

ili $\frac{\partial f}{\partial z} x + \frac{\partial f}{\partial u} y = nk^{n-1} f(x, y.)$. Stavimo sad u ovu jednačinu $k = 1$. Pošto su $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{k=1} = \frac{\partial f}{\partial x}$, $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{k=1} = \frac{\partial f}{\partial y}$ konačno imamo tzv. *Ajlerovu jednačinu*

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y = nf(x, y)$$

za homogene funkcije. Za više promenljivih je možemo napisati ovako

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z + \ldots = nf(x, y, z, \ldots).$$

Ona glasi: za homogenu funkciju zbir svih proizvoda delimičnog izvoda i odgovarajuće promenljive jednak je proizvodu broja dimenzija i same funkcije.

Napr., za funkciju $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ imamo $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(ax + by)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(bx + cy)$ i prema tome je $\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y = 2[x(ax + by) + y(bx + cy)] = 2(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 2f(x, y)$.

Izvršimo još jednu dopunu u vezi sa homogenošću matematičkih imenovanih izraza, koji se iskorišćavaju u prirodnim naukama. Tu se pojam homogenosti, u odnosu na veličine sa složanim imenovanjem, treba razumeti u smislu da: 1. leva i desna strana jednačine sa tim veličinama, odnosno članovi tih strana, ako su one izražene zbirovima, treba da imaju isto složeno imenovanje; i 2. svi članovi tih jednačina treba da budu u odnosu na svaku imenovanu veličinu homogeni. Drugim rečima, ako neka, napr., mehanička jednačina sadrži masu, dužinu i vreme, ona treba: 1. da bude homogena u odnosu na svoje složeno imenovanje; i 2. ona treba da bude homogena posebno i u odnosu na veličine koje zavise od mase i posebno zavise od dužine, i, najzad, koje sadrže vreme.

Vežbanja:

1. Koje uslove treba da zadovoljavaju brojevi m, n, p, q da binom $z = 3x^m y^n + 2x^p y^q$ bude homogena funkcija k-te dimenzije po x i y?

2. Za homogene funkcije: a). $z = (x^2 + y^2):(x - y)$; b). $u = \frac{\sqrt{x}}{yz} + \frac{\sqrt{y}}{zx} + \frac{\sqrt{z}}{xy}$; c). $w = (x + y + z + u):xyzu$ potvrditi Ajlerovu teoremu.

3. Jednačinu $\frac{\partial f}{\partial u} x + \frac{\partial f}{\partial u} y = nk^{n-1} f(x, y)$ još jedanput diferencirati po k, zatim staviti $k = 1$. Napisati rezultat, koji predstavlja Ajlerovu jednačinu drugoga reda za homogenu funkciju.

4. Ako je u pravouglom paralelepipedu jedna od dimenzija, npr. z, uzela jediničnu vrednost, njegova površina ima vrednost $S = 2(y + x + xy)$. Zašto je taj izraz izgubio svoju homogenost i kako je možemo ponovo uspostaviti?

5. Navesti primere homogenih funkcija jedne i nulte dimenzije i potvrditi na njima Ajlerovu teoremu za homogenu funkciju.

1,6. Uopštavanje pojma funkcije

Videli smo da se, pored skalarnih veličina, u matematici proučavaju i drugi objekti, za čije određivanje treba znati više skalarnih veličina. Tako, npr., za određivanje vektora u ravni treba znati dve njegove koordinate, a vektora u prostoru — tri koordinate. Ima matematičkih objekata, konkretnih i apstraktnih, koji su komplikovaniji od vektora, za njihovo određivanje potrebno je u opštem slučaju i više skalara, u konačnom, pa čak i u beskonačnom broju. U ovoj knjizi se zaustavljamo samo na vektorima u ravni i u prostoru, pri čemu ovde pod terminom vektora u ravni razumemo samo one vektore, koji stoje u vezi sa kompleksnim brojevima i koji se razlikuju po njihovoj matematičkoj prirodi, tj. po zakonima kojim se pokoravaju, od vektora u prostoru čak i u specijalnom slučaju kada se vektori u prostoru nalaze u ravni. Vektorima u ravni odgovaraju kompleksni brojevi $z=x+yi$, a vektorima u prostoru — vektorski brojevi $V=xe_1+ye_2+ze_3$ (I, 1.4, 1.7)*). Ako su koordinate x, y kompleksnog broja z ili koordinate x, y, z vektorskog broja V funkcije nekih nezavisno promenljivih t, t_1, t_2, ..., kompleks z ili vektor V su funkcije tih promenljivih: z — *kompleksna funkcija*, a V — *vektorska funkcija*. I ovde se zaustavljamo na najprostijim slučajevima, kad su to funkcije samo jedne nezavisno promenljive, koju označavamo sa t. Prema tome imamo: $z=x+yi=z\,(t)=x\,(t)+iy\,(t)$ i $V=xe_1+ye_2+ze_3=$ $=V(t)=x(t)\,e_1+y\,(t)\,e_2+z\,(t)\,e_3$.

a. *Kompleksna funkcija*. Pre svega treba primetiti da naziv kompleksna funkcija ima dvostruko značenje. Može biti govora o kompleksnoj funkciji od realne promenljive $z=z\,(t)$ i o kompleksnoj funkciji kompleksne promenljive $z=z\,(\zeta)$, gde je $\zeta=\xi+\eta i$. Ovde ćemo govoriti samo o kompleksnoj funkciji realne promenljive.

Ako se u kompleksnoj funkciji $z=z\,(t)$ argument t menja u svom području, recimo, od t_0 do t_1, funkciji z, gotovo uvek**), odgovara vektor, čiji kraj, afiks kompleksa, opisuje u ravni *Oxy krivu kompleksne funkcije*. Pošto jednačini $z=z\,(t)$ odgovara sistem dveju realnih jednačina: $x=x\,(t)$, $y=y\,(t)$, vidimo da kompleksnoj jednačini odgovaraju jednačine krive linije u ravni u parametarskom obliku, gde ulogu parametra igra realna nezavisno promenljiva t (uporedi I, 2.61). Kako kompleks z možemo odrediti i pomoću njegovih drugih koordinata, napr. pomoću polarnih koordinata, vektor tog kompleksa može biti, uopšte, određen pomoću dve skalarne veličine i bez Dekartovih koordinata. Najzad, vektor kompleksa može

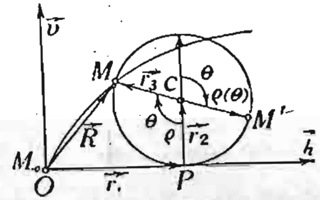
*) Pošto ćemo u daljem izlaganju o kompleksnim i vektorskim brojevima govoriti odvojeno, neće smetati ako ovde upotrebimo iste oznake z za dva različita pojma — za kompleks i za treću koordinatu vektora u prostoru.

**) Izrazi „gotovo uvek", odnosno „gotovo svuda" u matematici uslovno označavaju: „uvek" odnosno „svuda sa mogućim izuzecima".

biti određen sasvim bez koordinata, nekim prirodnim načinom. Da ovo pokažemo na primeru, rešićemo ovaj zadatak.

Po datoj horizontalnoj pravoj kotrlja se bez klizanja u vertikalnoj ravni kružni točak. Treba napisati vektorsku jednačinu krive koju opisuje određena tačka na periferiji tog točka.

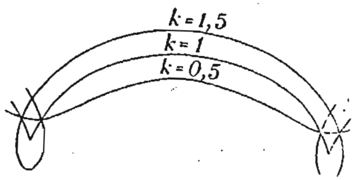
Uzmimo za početak vektora položaja $\vec{R}$ pokretne tačke M na periferiji kruga, onu tačku O na horizontalnoj pravoj gde se nalazila tačka M točka; neka to bude početni položaj točka i tačke M_0. Za bilo koji položaj točka rastavimo vektor $\overrightarrow{OM}=\vec{R}$ u ove komponente (sl. 15): $\vec{r}_1=\overrightarrow{OP}$ u horizontalnom pravcu sa jediničnim vektorom $\vec{h}$ u vertikalnom pravcu na gore jediničnog vektora $\vec{v}$, i $\vec{r}_3=\overrightarrow{CM}$ u pravcu poluprečnika točka ka pokretnoj tački M. Tada imamo: $\vec{R}=\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3$. Za nezavisno promenljivu je zgodno uzeti ugao θ između vektora $\vec{v}$, vertikalnog pravca na gore, i pravca poluprečnika $\overrightarrow{CM'}$, suprotnog poluprečniku $\overrightarrow{CM}$. Ako sa ρ označimo dužinu poluprečnika točka, za vektore $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ ćemo imati izraze: $\vec{r}_1=\rho\theta\cdot\vec{h}$, jer je u slučaju kotrljanja bez klizanja dužina OP po pravoj jednaka dužini luka $\widehat{PM}$ sa centralnim uglom θ, tj. $OP=\rho\theta$; $\vec{r}_2=\rho\,\vec{v}$, kao vektor stalnog poluprečnika i, najzad, $\vec{r}_3=-\vec{\rho}\,(\theta)$, gde smo sa $\vec{\rho}\,(\theta)$ označili vektor $\rho\,\vec{v}$, obrnut za ugao θ u smeru kretanja kazaljke na časovniku. Na taj način možemo napisati: $\vec{R}=\rho\theta\cdot\vec{h}+\rho\,\vec{v}-\vec{\rho}\,(\theta)$.



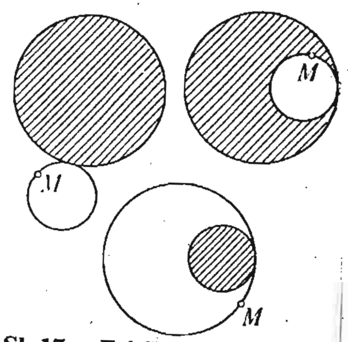
Sl. 15 — Cikloida

Pošto ova jednačina određuje vrednost vektora $\vec{R}$ za svaku vrednost ugla θ u području, recimo, od 0 do 2π, to je vektorska jednačina tražene krive. Ako zamislimo na jednom zupcu zupčastog točka, koji se kotrlja po zupčastoj pravoj, pričvršćenu olovku, ova će, pri kotrljanju točka, opisati traženu krivu, koja se zove *cikloida*. Ako je olovka utvrđena gde bilo u unutrašnjosti točka, sem centra, ona će opisivati *razvučenu cikloidu*, odnosno pravu za olovku u centru, a ako je pričvršćena van točka, opisivaće *zbijenu cikloidu*. Te tri krive imaju i zajednički naziv *trohoide* (sl. 16). One imaju i praktične primene, pri proučavanju kretanja čestica tečnosti kod njenog talasnog kretanja.

Iz vektorske jednačine trohoide u obliku $\vec{R}=\rho\theta\vec{h}+\rho\vec{v}-\vec{k\rho}(\theta)$, gde je $k=1$ za pravu cikloidu, $k<1$ za razvučenu i $k>1$ za zbijenu, uzimajući Ox osu u pravcu jediničnog vektora $\vec{h}$ i Oy u pravcu $\vec{v}$ vektora, lako možemo napisati parametarske jednačine te krive u Dekartovim koordinatama; naime: $x=\rho(\theta-k\sin\theta)$, $y=\rho(1-k\cos\theta)$. Primetimo da su jednačine tih krivih u implicitnom obliku sa Dekartovim koordinatama dosta komplikovane i izražavaju se pomoću transcendentnih jednačina. Tako najprostija jednačina cikloide ($k=1$) izgleda ovako $\rho-y=\rho\cos[(x+\sqrt{y(2\rho-y)}):\rho]$, što odgovara jednačini $\rho=y+\rho\cos\theta$, kad iz ove jednačine eliminišemo θ pomoću datih jednačina.



Sl. 16 — Trohoide



Sl. 17 — Epicikloida, hipocikloida i pericikloida

Na sličan način mogu se dobiti vektorske jednačine krivih pri kotrljanju bez klizanja jednog kruga po drugom, i to u slučajevima kotrljanja krugova: 1. pri spoljašnjem dodiru (*epicikloida*), 2. pri unutrašnjem dodiru sa nepokretnim većim krugom (*hipocikloida*), 3. pri unutrašnjem dodiru sa nepokretnim manjim krugom (*pericikloida*). Na slikama (sl. 17) nepokretni točak je šrafiran; sa M je označena tačka točka, koja

opisuje odgovarajuću krivu. Svaka od tih krivih može se raščlaniti u trohoidne forme kad se tačka nalazi u unutrašnjosti ili van pokretnog točka. Izvođenje vektorskih jednačina svih tih linija ne predstavlja teškoće i može poslužiti kao korisna vežba za primenu vektorske metode.

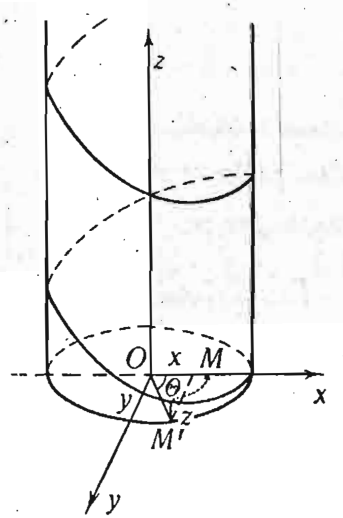
b. *Vektorska funkcija*. Vektor čija se vektorska vrednost menja sa promenom nezavisno promenljive t zove se *vektor-funkcija* te promenljive. Označavaćemo je sa $\vec{V}=\vec{V}(t)$. Ako taj vektor ima stalan početak, njegov kraj pri promeni t u njenom području opisuje, gotovo uvek, krivu — *hodograf vektor-funkcije*. To je u opštem slučaju prostorna kriva. Ako se poslužimo Dekartovim koordinatama, parametarske jednačine te krive izgledaju ovako: $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$, gde su x, y, z Dekartove koordinate vektor-funkcije, a u isto vreme i koordinate tačke M krive hodografa. A kako, posle eliminisanja parametra t iz prethodne tri jednačine možemo dobiti dve jednačine oblika $F_1(x, y, z)=0$, $F_2(x, y, z)=0$, od kojih svakoj odgovara, kako smo videli, neka površina, možemo zaključiti da svakoj liniji u prostoru odgovara sistem od dve jednačine površina. Daćemo nekoliko primera.

1. Pravoj liniji u prostoru odgovara vektorska jednačina: $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}t$, gde su: $\vec{r}$ — vektor položaja proizvoljne tačke M na datoj pravoj, $\vec{r}_0$ — vektor položaja određene tačke, M_0, te prave, $\vec{a}$ — dati vektor koji određuje pravac date prave; ovaj može imati i vrednost jediničnog vektora te prave; i t — nezavisno promenljiva. Vidimo da je $\vec{r}$ linearna vektorska funkcija parametra t. Dokažimo da takva funkcija zaista predstavlja pravu u prostoru. Uzmimo dve tačke M_1 i M_2 sa vektorima položaja $\vec{r}_1=\vec{r}_0+\vec{a}t_1$ i $\vec{r}_2=\vec{r}_0+\vec{a}t_2$. Dokažimo da svaka tačka M sa $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}t$, gde je t proizvoljan broj, zaista pripada pravoj što prolazi kroz tačke M_1 i M_2. Zato je dovoljno pokazati da su vektori $\overrightarrow{M_1M_2}$ i $\overrightarrow{M_1M}$ kolinearni. Pošto se uslov kolinearnosti dvaju vektora sa istim početkom izražava vektorskim proizvodom tih vektora, treba dokazati da je $[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M}]=0$. Ako stavimo $\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$, $\overrightarrow{M_1M}=\vec{r}-\vec{r}_1$ sa vrednostima

$\vec{r}_2-\vec{r}_1=\vec{a}\,(t_2-t_1)$, $\vec{r}-\vec{r}_1=\vec{a}\,(t-t_1)$, zaključujemo da je vrednost našeg vektorskog proizvoda identično, za svaku vrednost t, nula. Time je naš stav dokazan.

U cilju primene vektor-funkcija izvedimo vektorsku jednačinu još jedne prostorne krive, koja se zove *zavojnica.* Vektor položaja tačke te krive možemo predstaviti ovim jednostavnim vektorskim zbirom $\overrightarrow{OM}=k\theta\vec{v}+\vec{\rho}\,(\theta)$, gde je $\vec{v}$ jedinični vektor vertikale na gore, *ose zavojnice,* θ — ugao koji računamo u horizontalnoj ravni od nekog stalnog pravca u smeru kretanja kazaljke na časovniku; k je stalna dužina i $\vec{\rho}\,(\theta)$ je vektor dužine $\vec{\rho}$ sa pravcem normalnim na pravcu jediničnog vektora $\vec{v}$ pod uglom θ (sl. 18). Ako pravac jediničnog vektora $\vec{v}$ uzmemo za Oz osu, a u horizontalnoj ravni smestimo ose Ox i Oy, pri čemu od ose Ox računamo ugao θ, iz vektorske jednačine neposredno sleduju ove parametarske jednačine zavojnice u Dekartovim koordinatama

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=k\,\theta.$$



Sl. 18 — Zavojnica

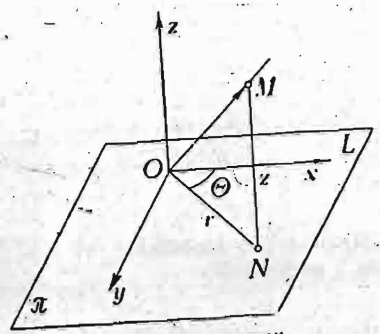
Za svaku vrednost parametra k zavojnica se nalazi na površini valjka poluprečnika ρ. Za priraštaj ugla θ u vrednosti 2π tačka zavojnice vrši pomeranje u pravcu proizvodilje valjka, jednako rastojanju h između dva uzastopna zavoja sa veličinom $h=2k\pi$, koja se zove *hod zavojnice.*

U vezi sa vektor-funkcijom proširićemo pojam koordinata tačke u prostoru.

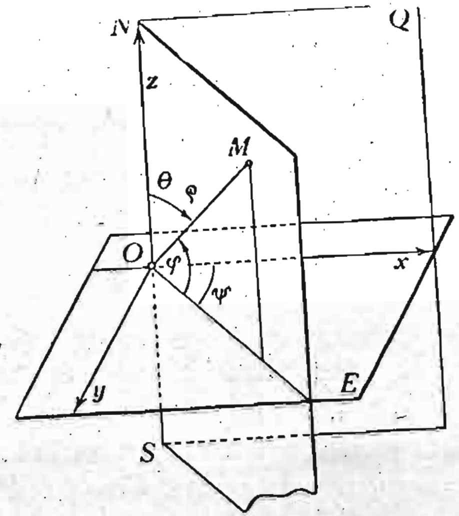
Neka je data u prostoru (sl. 19) *orijentisana ravan,* tj. sa označenim licem i naličjem; označimo je sa π. U toj ravni označimo *polarnu osu* (tačnije poluosu) OL i tačku O biramo kao pol sistema. Položaj ma koje tačke M u prostoru može

se odrediti: 1. rastojanjem z tačke M od ravni π, sa odgovarajućim znakom, prema orijentaciji ravni; 2. rastojanjem r projekcije N tačke M u ravni π od tačke O, i 3. uglom θ između potega r i ose OL. Gledajući na lice ravni π, ugao θ računamo pozitivnim u smeru kretanja kazaljke na časovniku. Tri veličine r, θ, z su *polarno-cilindrične koordinate tačke u prostoru.* Veličine r i θ su polarne koordinate tačke N u ravni. Ako konstruišemo ortogonalni trijedar osa $Oxyz$, kako je to pokazano na slici, lako možemo postaviti ove veze između polarno-cilindričnih i Dekartovih koordinata iste tačke u prostoru: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=z$. Obratno, polarno-cilindrične koordinate izražavaju se ovako pomoću Dekartovih:

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\quad z=z.$$



Sl. 19 — Polarno-cilindrične koordinate



Sl. 20 — Sferne koordinate

Naznačimo u prostoru tačku O, *centar* sistema, osu SON i poluravan Q čija granica je ta osa (sl. 20). Shodno geografskim elementima, osa SON se zove *polarna osa,* poluravan Q *prvi meridijan,* ravan E, upravna na polarnoj osi kroz tačku O — *ravan ekvatora.* Poluravan što prolazi kroz proizvoljnu tačku M prostora predstavlja *meridijan* te tačke. Položaj tačke u tom sistemu se određuje: 1. dužinom potega $OM=\rho$; 2. uglom φ što gradi ovaj poteg sa ravni ekvatora; on se računa pozitivno prema N, a negativno prema S. Taj ugao odgovara *geografskoj širini*. Mesto njega možemo uzeti ugao θ između potega i ose ON, koji se zove *polarno rastojanje*. Jasno je da je $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$; 3. uglom ψ između prvog meridijana Q i meridijana tačke M. On se računa u ravni ekvatora u smeru kretanja kazaljke na časovniku, kad gledamo tu ravan iz N. Tri veličine ρ, φ (ili θ) i ψ zovu se *sferne koordinate tačke u prostoru*. Pri odgovarajućoj konstrukciji Dekartovog trijedra $Oxyz$ (sl. 20) lako možemo postaviti veze između Dekartovih i sfernih koordinata. Za određivanje Dekartovih koordinata pomoću sfernih imamo jednačine $x=\rho\cos\varphi\cos\psi$, $y=\rho\cos\varphi\sin\psi$, $z=\rho\sin\varphi$; a, obratno, sferne koordinate se izražavaju pomoću Dekartovih ovako:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \psi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Ima još i drugih načina, drugih sistema koordinata za određivanje položaja tačke u prostoru. Postoji takođe i opšta teorija tzv. *krivolinijskih koordinata tačke u prostoru*, ali na ovom mestu nećemo ulaziti u tu teoriju. Navedimo samo ono što neposredno sleduje iz prethodnih primera polarno-cilindričnih i sfernih koordinata. Za te koordinate imali smo tri jednačine koje izražavaju veze između Dekartovih koordinata i novih koordinata. Ako u opštem slučaju nove koordinate označimo sa q_1, q_2, q_3, treba da imamo tri jednačine $x=f_1(q_1, q_2, q_3)$, $y=f_2(q_1, q_2, q_3)$, $z=f_3(q_1, q_2, q_3)$. Tri veličine q_1, q_2, q_3, u opštem slučaju zovu se *opšte* ili *generalisane koordinate* tačke u prostoru. U vektorskom obliku se te jednačine izražavaju jednom vektorskom jednačinom: $\vec{r}=\vec{f}(q_1, q_2, q_3)$, gde je $\vec{f}$ simbol vektor-funkcije triju promenljivih q_1, q_2, q_3. Ako u toj vektorskoj jednačini stavimo $q_2=\text{const.}$, $q_3=\text{const.}$, vektor $\vec{r}$ biće vektor-funkcija samo jedne promenljive q_1, tj. $\vec{r}=\vec{f}(q_1)$. U opštem slučaju ta vektor-funkcija, kako smo videli, određuje krivu liniju u prostoru. Pošto se duž te linije menja samo koordinata q_1, ona se zove *koordinatna linija koordinate* q_1. Svakoj koordinati odgovara njena koordinatna linija, kao geometrijsko mesto tačaka za koje dve ostale koordinate imaju stalne vrednosti. Pošto u opštem slučaju koordinatne linije mogu biti krive linije, koordinate q_1, q_2, q_3 zovu se *krivolinijske koordinate tačke u prostoru*. Potvrditi da u Dekartovom sistemu kroz svaku tačku prostora prolaze tri pravolinijske linije, u polarno-cilindričnom sistemu jedna krivolinijska i dve pravolinijske i u sfernom dve krivolinijske i jedna pravolinijska. Reći ćemo još nekoliko reči o tzv. *koordinatnim površinama*.

Stavimo u vektorskoj jednačini $\vec{r}=\vec{f}(q_1, q_2, q_3)$ mesto samo jedne promenljive veličine q_1, konstantnu vrednost, tj. $q_1=\text{const.}$, tada ćemo dobiti jednačinu $\vec{r}=\vec{f}(q_2, q_3)$, koja određuje vektor-funkciju dveju promenljivih. Ako uzmemo tzv. *klasične Gausove oznake* $q_2=u$, $q_3=v$, vektor-funkcija će izgledati ovako $\vec{r}=\vec{f}(u, v)$. Toj jednačini odgovaraju tri skalarne jednačine: $x=f_1(u, v)$, $y=f_2(u, v)$, $z=f_3(u, v)$. Iz te tri jednačine možemo eliminisati *Gausove parametre* u i v; u rezultatu ćemo dobiti samo jednu jednačinu sa x, y, z, koju možemo napisati ovako $F(x, y, z)=0$. Znamo da toj jednačini odgovara površina. Ta površina se zove *koordinatna površina za koordinatu* q_1. Kako ta jednačina sadrži x, y, z i konstantu q_1, možemo tu jednačinu rešiti po q_1 i tako za tu koordinatu, a tako isto i za koordinate q_2 i q_3, dobiti jednačine

$$q_1=\varphi_1(x, y, z),\quad q_2=\varphi_2(x, y, z),\quad q_3=\varphi_3(x, y, z),$$

koje ne predstavljaju ništa drugo već jednačine transformacije od krivolinijskih koordinata q_1, q_2, q_3 na Dekartove koordinate x, y, z. Stalnim vrednostima koordinata q_1, q_2, q_3 odgovaraju tri krivolinijske površine koje prolaze kroz tačku prostora sa odgovarajućim konstantnim vrednostima krivolinijskih koordinata q_1, q_2, q_3. U Dekartovim koordinatama to su tri ravni paralelne koordinatnim ravnima koje prolaze kroz datu tačku M prostora. U polarno-cilindričnim koordinatama to su: dve ravni ($z=\text{const.}$ i $\theta=\text{const.}$) i površina kružnog cilindra ($r=\text{const.}$); u sfernom sistemu: ravan ($\psi=\text{const.}$), sfera ($\rho=\text{const.}$) i kružni konus ($\varphi=\text{const.}$).

1.61. Uopštavanje pojma izvoda i diferencijala

Slično postupku po kojem smo za promenljivu skalarnu veličinu y, kao funkciju $f(x)$ od x, obrazovali priraštaj te funkcije $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$, gde je Δx priraštaj nezavisno promenljive, možemo za svaki matematički objekt, S, koji zavisi od neke skalarne nezavisno promenljive t, kratko, za *S-funkciju*, koja dopušta operaciju sabiranja odnosno oduzimanja, načiniti razliku

$$S(t+\Delta t)-S(t)=\Delta S,$$

gde je Δt priraštaj promenljive t. Pretpostavimo, dalje, da se sa objektom S može izvršiti i operacija množenja, odnosno deljenja nekom vrednošću skalara t. Obrazujmo onda količnik

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}.$$

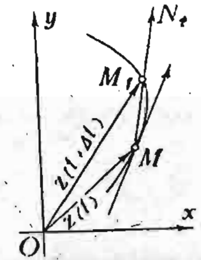
Najzad, pod pretpostavkom da taj količnik teži određenoj graničnoj vrednosti, označimo je sa S' i stavimo

$$S'=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}.$$

Ta granična vrednost zove se *izvod objekta S po promenljivoj t*, kratko, *izvod S-funkcije*.

Kao primere proučićemo izvode kompleksa $z(t)$ i vektor-funkcije $\vec{V}(t)$. Pretpostavimo, radi konkretnosti, da je t vreme i prema tome kompleksna funkcija $z(t)$ određuje kretanje tačke u ravni, a vektor-funkcija $\vec{V}(t)$ kretanje tačke u prostoru. Ako je kompleksna funkcija data izrazom $z(t)=x(t)+iy(t)$, njen je izvod po vremenu $z'=x'+iy'$ ili $\frac{dz}{dt}=\frac{dx}{dt}+i\frac{dy}{dt}$ i to za ono područje promenljive t, za koje skalarne funkcije $x(t)$ i $y(t)$ imaju izvode. Izvod z' ima i svoje geometrijsko tumačenje. Neka afiks kompleksa $z(t)$, tačka M, opisuje krivu u ravni

Oxy i neka vrednostima t i $t+\Delta t=t_1$ odgovaraju dve tačke M i M_1 na toj krivoj (sl. 21). Razlici $z(t+\Delta t)-z(t)$ odgovara razlika vektora $\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{MM_1}$. Obrazujmo količnik $\overrightarrow{MM_1}:\Delta t$. To je vektor sa ovim elementima: 1. sa pravcem tetive MM_1, 2. sa smerom u smeru kretanja tačke M i 3. sa intenzitetom duži MM_1 podeljene sa Δt. Ako je $\Delta t=\frac{1}{3}$ sekunde, dužinu MM_1 treba pomnožiti sa 3. Dobićemo vektor $\overrightarrow{MN_1}=3\overrightarrow{MM_1}$. Imenovanje tog vektora je dužina podeljena vremenom, dakle imenovanje brzine. Zamislimo sad da Δt teži nuli. Treba odrediti elemente granične vrednosti prethodnog vektora. Pošto tačka M_1 ostaje na krivoj i teži tački M, tetiva ima granični pravac — pravac tangente na krivoj, u tački M. Smer tog količnika uvek je naperen u smeru kretanja tačke. Najzad, intenzitet graničnog vektora jednak je graničnoj vrednosti odnosa $|MM_1|:\Delta t$, a taj odnos, kako smo videli u slučaju izvoda skalarne funkcije, jednak je odnosu diferencijala $ds:dt$, gde smo sa ds označili diferencijal dužine luka krive linije, a sa dt diferencijal vremena. Drugim rečima, odnos ds/dt (izvod puta po vremenu) jednak je skalarnoj brzini kretanja tačke po krivoj u položaju M. Prema svemu što je rečeno o graničnoj vrednosti tretiranog količnika, možemo tvrditi da je $z'=\frac{dz}{dt}$ brzina u vektorskom obliku kretanja tačke M određena kompleksnom funkcijom $z(t)$.



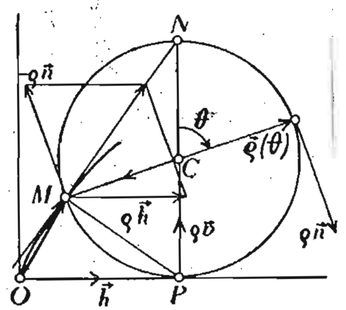
Sl. 21 — Geometrijsko tumačenje izvoda kompleksa

Doslovno isto ovo možemo ponoviti za slučaj vektor-funkcije $\vec{V}(t)$. Razlika je samo u tome što se kriva u ravni zamenjuje krivom u prostoru.

Treba da primetimo, da u slučajevima kad su kompleks z ili vektor $\vec{V}$ predstavljeni kao funkcije dužina svojih lukova, tj. $z=z(s)$ i $\vec{V}=\vec{f}(s)$, gde s označava dužinu luka, izvodi po tim dužinama su vektori jedinične dužine tangenata sa smerom u smeru kretanja tačke M kad se s uvećava.

Rešićemo dva zadatka.

1. Odrediti položaj tangente na cikloidi. Uzmimo jednačinu cikloide u prirodnom vektorskom obliku: $\vec{R}=\rho\theta\cdot\vec{h}+\rho\vec{v}-\vec{\rho}(\theta)$, smatrajući ugao θ kao nezavisno promenljivu. Ako diferenciramo taj izraz po θ, dobićemo $\frac{d\vec{R}}{d\theta}=\rho\vec{h}-\frac{d\vec{\rho}(\theta)}{d\theta}$. Pošto je $\vec{\rho}(\theta)$ vektor poluprečnika kruga, njegov izvod po centralnom uglu jednak je proizvodu dužine poluprečnika tog kruga i jediničnog vektora $\vec{n}$ normale na onom poluprečniku koji diferenciramo. (Dokaži to neposredno slikom!). Prema tome je



Sl. 22 — Tangenta na cikloidi

$\frac{d\vec{\rho}(\theta)}{d\theta}=\rho\cdot\vec{n}$. Na taj način imamo $\frac{d\vec{R}}{d\theta}=\rho(\vec{h}-\vec{n})$. Ovaj rezultat pokazuje da tangenta u tački M cikloide ima pravac vektora razlike $\rho(\vec{h}-\vec{n})$. Nije teško pokazati (sl. 22) da se taj pravac poklapa sa pravcem duži koja spaja tačku M sa drugim krajem prečnika kruga tačke dodira. Time se određuje poožaj tangente na cikloidi u tački M.

Kao drugi primer uzećemo određivanje pravca tangente na zavojnici. Uzmimo jednačinu zavojnice u vektorskom obliku: $\overrightarrow{OM}=\vec{R}=k\theta\vec{v}+\vec{\rho}(\theta)$, koju smo već tretirali. Diferencirajmo je po θ: $\frac{d\vec{R}}{d\theta}=k\vec{v}+\frac{d\vec{\rho}(\theta)}{d\theta}=k\vec{v}+\rho\vec{n}$, gde je opet $\rho\vec{n}$ vektor dužine ρ u pravcu tangente na krug osnove cilindra posmatrane zavojnice. Dobijeni rezultat pokazuje da tangenta na zavojnici

leži u tangencijalnoj ravni cilindra zavojnice duž proizvodilje date tačke i obrazuje sa njom ugao $\operatorname{arctg}\frac{\rho}{k}$.

Nastavićemo sa uopštavanjem pojma izvoda. Kao što smo u slučaju skalarne funkcije više promenljivih postavili pojam delimičnih izvoda po odgovarajućim promenljivim, tako možemo i u slučaju generalisane funkcije S, koja zavisi od više promenljivih $q_1, q_2, \dots q_i, \dots, q_n$, govoriti o delimičnom izvodu po svakoj od tih promenljivih. Označimo delimični izvod po promenljivoj q_i sa $\frac{\partial S}{\partial q_i}$.

Tako, napr., ako je vektor $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$ funkcija dveju nezavisno promenljivih u i v, tj. $\vec{r}=\vec{f}(u,v)$, taj vektor, kako znamo, predstavlja površinu, koja igra ulogu *generalisanog hodografa vektor-funkcije dveju promenljivih*. Skalarne jednačine tog hodografa u parametarskom obliku su: $x=f_1(u,v)$, $y=f_2(u,v)$, $z=f_3(u,v)$. Ako jedna od promenljivih, recimo v, ima stalnu vrednost $v=\text{const.}$, vektorskoj jednačini $\vec{r}=\vec{f}(u,\text{const.})$ odgovara delimični hodograf sa promenljivom u. Taj delimični hodograf je u isto vreme i koordinatna linija naše hodografske površine. Vektorski izvod vektora $\vec{f}(u,\text{const.})$ po promenljivoj veličini u je *delimični vektorski izvod vektor-funkcije* $\vec{r}(u,v)$ *po* u. Njegova oznaka je $\frac{\partial\vec{f}}{\partial u}$. Za drugi delimični izvod imamo $\frac{\partial\vec{f}}{\partial v}$. Lako je, pošto formiramo izvode, obrazovati i odgovarajuće vektorske diferencijale. Za vektor-funkciju $\vec{r}(t)$ jedne promenljive imamo diferencijal $d\vec{r}=\dot{\vec{r}}(t)\,dt=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\cdot dt$. Za vektor-funkciju dveju promenljivih totalni vektorski diferencijal $d\vec{r}(u,v)=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}du+\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}dv$ jednak je zbiru dvaju delimičnih diferencijala. Taj totalni vektorski diferencijal igra fundamentalnu ulogu u Teoriji površina.

1.62. Izvod u datom pravcu. Gradijent

Da završimo proučavanje raznih tipova izvoda, objasnićemo još i pojam *izvoda* skalarne funkcije više promenljivih *u datom pravcu*. Zaustavimo se, prvo, na primeru funkcije dveju promenljivih $f(x, y)$, koja je, prema tome, vezana za tačku $M(x, y)$ u ravni Oxy. Neka to bude, napr., temperatura T u tački M neke metalne ravne ploče (sami crtajte sliku), tj. $T = f(x, y)$. Povucimo na toj ploči, kroz tačku M, pravac pod uglom θ sa pravcem paralelnim Ox osi. Na toj pravoj izaberimo tačku M' na rastojanju l od tačke M. Koordinate tačke M' tada imaju vrednosti $x' = x + l\cos\theta$, $y' = y + l\sin\theta$. Temperaturu u tački M' možemo izraziti ovako $T = T(x', y') = T(x + l\cos\theta,\ y + l\sin\theta)$ i smatrati, pri kretanju tačke M' od tačke M po datoj pravoj, kao funkciju samo promenljive l. Možemo sad definisati nov pojam, naime: *izvod date funkcije tačke u datom pravcu*; to je granična vrednost odnosa priraštaja te funkcije pri pomeranju po datoj pravoj prema veličini tog pomeranja, kad to pomeranje teži nuli. Pošto je funkcija $T(x, y)$, u takvom posmatranju, funkcija samo jedne promenljive l, možemo upotrebiti za taj izvod običnu oznaku $\frac{dT}{dl}$. Pošto je, s druge strane, T složena funkcija od l, naime ona zavisi od x i y, a ove veličine zavise od l, to, prema pravilu za diferenciranje složene funkcije, imamo $\frac{dT}{dl} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dl} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dl}$. Pošto je $\frac{dx}{dl} = \cos\theta$, $\frac{dy}{dl} = \sin\theta$, konačno dobivamo $\frac{dT}{dl} = \frac{\partial T}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial T}{\partial y}\sin\theta$.

Sličnim rasuđivanjem dolazimo do odgovarajućeg rezultata i u slučaju funkcije triju nezavisno promenljivih, funkcije tačke u prostoru. Neka to opet bude temperatura, $T(x, y, z)$, u nekoj tački određene sredine. Ako sa α, β, γ označimo uglove između datog pravca i osa trijedra $Oxyz$, za izvod u datom pravcu imamo obrazac

$$\frac{dT}{dl} = \frac{\partial T}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial T}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial T}{\partial z}\cos\gamma,$$

koji se jednostavno tumači vektorski. Ako za tačku $M(x, y, z)$ funkcije te tačke $T(x, y, z)$ konstruišemo vektor sa koordinatama $\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$, dobija se vektor, koji se zove *gradijent date funkcije u datoj tački*; njegova oznaka je grad T. Ako, s druge strane, sa $\vec{\lambda}$ označimo jedinični vektor datog pravca sa koordinatama $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, prethodni obrazac za izvod dT/dl u datom pravcu možemo napisati u obliku skalarnog proizvoda ovako $\frac{dT}{dl} = (\text{grad}\ T, \vec{\lambda})$; taj rezultat izražava teoremu: Izvod date funkcije u datom pravcu jednak je projekciji gradijenta funkcije tačke na dati pravac. Jasno je da se ta ista teorema odnosi na slučaj funkcije tačke u ravni. Iz prethodnog obrasca sa skalarnim proizvodom neposredno sleduje da najveću apsolutnu vrednost izvod funkcije tačke ima u pravcu gradijenta, a najmanju, jednaku nuli, u svakom pravcu normalnom na gradijentu.

1.7. Funkcija kompleksne promenljive. Preslikavanje

U prvoj knjizi (I, 1.4) izložili smo elementarnu teoriju kompleksnih brojeva u vezi sa teorijom vektora u ravni. Kako smo, pri uvođenju i proširenju u ovoj glavi pojma funkcije, uglavnom, mislili na slučaj kad su nezavisno promenljiva i funkcija realne veličine, pri čemu smo i kompleksnu funkciju tretirali samo kao funkciju realne promenljive, sad ćemo to izlaganje dopuniti i proučavanjem slučaja kad su i nezavisno promenljive i funkcija kompleksni brojevi. Činimo to iz razloga što je sad Teorija funkcija kompleksne promenljive postala važna oblast savremene matematike sa širokim primenama, kako u proučavanju mnogih prirodnih pojava, tako i u ostvarenju tehničkih zamisli ljudskog uma.

Uvedimo zato kompleks $z = x + yi$ i smatrajmo ga kao nezavisno promenljivu veličinu. U ravni Oxy, afiksu tog kompleksa z, odgovara tačka M sa koordinatama x, y. Zamislimo sad u drugoj, ili u istoj, ravni tačku N sa koordinatama u i v, kao afiks kompleksa $w = u + vi$. I pretpostavimo da su veličine u i v funkcije promenljivih x i y, tj. da je $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Tada možemo napisati $w = w(z)$ i smatrati kompleks w kao kompleksnu funkciju kompleksnog argumenta z. To znači da za svaki par realnih vrednosti x i y, u realnom području, možemo odrediti par realnih vrednosti funkcija u i v. Drugim rečima, za svaku tačku M možemo pokazati tačku N. Kaže se da se tačka M preslikava u tačku N na osnovu date funkcije $w(z)$ kompleksne promenljive. Ako promenljiva tačka M opisuje u ravni Oxy neku sliku, tačka N u svojoj ravni daje, u opštem slučaju, novu, transformisanu sliku. Pokazaćemo ovo na nekim primerima.

1. Uzmimo linearnu kompleksnu funkciju $w = az + b$, gde su a i b konstantni kompleksi i $a \neq 0$. Ako stavimo $a = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, funkciji w odgovara ovaj niz transformacija: $z' = \rho z$ — to je istezanje vektora z u njegovom pravcu, što odgovara množenju konstantnim brojem ρ, $z'' = (\cos\theta + i\sin\theta)z'$ — to je obrtanje vektora z' za ugao θ u odgovarajućem smeru, i $z''' = w = z'' + b$ — sabiranje vektora z'' sa konstantnim vektorom b. Prema tome sve tačke ravni se podvrgavaju: 1. povećanju (odnosno smanjenju) svih rastojanja od tačke O proporcionalnom tim rastojanjima sa istim koeficijentom proporcionalnosti, 2. obrtanju oko te tačke za isti ugao i 3. translatornom pomeranju stalne vektorske veličine.

2. Neka je $w = \dfrac{1}{z}$. Označimo $z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, a $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, tada imamo: $r \cdot \rho = 1$ i $\psi = -\theta$. Na osnovu tih geometrijskih rezultata možemo izvršiti ovu konstrukciju. Nacrtajmo krug (neka čitalac sam nacrta!) jediničnog poluprečnika, sa središtem u O. Neka se, prvo, tačka M nalazi van tog kruga. Iz tačke M povucimo dve tangente MT_1 i MT_2 na krug. Tačku preseka prave T_1T_2 sa potegom OM tačke M označimo sa L. Tačka N, simetrična sa tačkom L u odnosu na Ox osu, daje afiks kompleksa $1/z$. Čitalac može bez teškoće proveriti tačnost navedene konstrukcije. Ako se data tačka nalazi u krugu, napr. u položaju N, konstrukcija se vrši obrnutim redom. Najzad, ako se tačka M, afiks kompleksa z, nalazi na periferiji kruga, recimo u tački P, afiks kompleksa $1/z$ je tačka Q, na periferiji istog kruga, simetrična sa P u odnosu na Ox osu; u ovom slučaju imamo $w = x - yi$, jer je $x^2 + y^2 = 1$. Pokazali smo kako se u ovom specijalnom slučaju vrši preslikavanje tačke M u tačku N, i obrnuto.

Preslikavanje može biti ograničeno samo na neku određenu oblast ravni, čije tačke pripadaju nekoj figuri; tada se posle preslikavanja dobiva, u opštem slučaju, druga geometrijska figura. Za takvo preslikavanje se kaže da se pomoću datog obrasca vrši transformacija jedne figure, odnosno slike, u drugu. Teorija transformacija pomoću kompleksnih izraza igra značajnu ulogu u primenama kompleksnih brojeva na Mehaniku promenljivih sredina.

U plan ove knjige ne ulazi upoznavanje čitalaca čak ni sa polaznim elementima Teorije kompleksnih funkcija, ali ipak o tim funkcijama treba da kažemo ovo. Ako potražimo za kompleksnu funkciju

$$w = w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

izvod, sastavljen prema opštem pravilu

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{w(z + \Delta z) - w(z)}{\Delta z},$$

sa $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, lako ćemo videti da vrednost prethodnog količnika zavisi od količnika $\Delta y : \Delta x$, tj. od pravca u kome se određuje izvod za datu vrednost z. Ali pod izvesnim uslovima, koje treba da zadovoljavaju funkcije u i v, taj količnik ne zavisi od pravca diferenciranja. Kompleksne funkcije sa izvodom u datoj tački koji *ne* zavisi od pravca diferenciranja zovu se *analitičke funkcije*. Obrnuto, ako izvod zavisi ne samo od vrednosti z, već i od vrednosti $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, funkcije se zovu *neanalitičke funkcije kompleksne promenljive*. Do poslednjeg vremena, uglavnom, se proučavala *Teorija analitičkih funkcija*. Tek je u današnje vreme predmetom matematičkih proučavanja postala i *Teorija neanalitičkih funkcija*.

Glava druga

ANALITIČKE PRIMENE IZVODA I DIFERENCIJALA

2.1. Neprekidnost funkcije više promenljivih

U prvom delu ovih Elemenata, u vezi sa proučavanjem funkcije jedne promenljive, tumačili smo pojmove granične vrednosti, beskrajno malih i beskrajno velikih veličina, neprekidnost funkcije i prekida (skokova), konačnih i beskrajno velikih. Navodili smo te pojmove onako kako nam je dozvoljavao osnovni cilj ove knjige, koja treba da bude što pristupačnija za čitaoca — početnika. Ti isti pojmovi, naravno, sa prirodnim dopunama, mogu se proširiti i na slučaj funkcije dveju odnosno više promenljivih. Prema tome ne moramo ponavljati odgovarajući materijal. Ali ćemo učiniti nekoliko primedaba.

Za funkciju $z=z(x,y)$ se kaže da teži određenoj graničnoj vrednosti $z(M_0)$ za tačku $M_0(x_0,y_0)$, ako zadovoljava već poznati ε-uslov $|z(x,y)-z(x_0,y_0)|<\varepsilon$ pri $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta$, gde je ε pozitivna konstanta, koju možemo proizvoljno birati, a δ, drugi pozitivni broj, određuje se kao funkcija ε-a. Simbolički se ovo izražava i sa $\lim\limits_{x\to x_0,\ y\to y_0} z(x,y)=z(x_0,y_0)$ pri čemu tačka $M_0(x_0,y_0)$ može da i ne pripada području tačke M.

Uslov neprekidnosti funkcije jedne promenljive formulisali smo jednakošću graničnih vrednosti sdesna i sleva od tačke, recimo, za $x=c$. U slučaju funkcije dveju promenljivih, taj uslov treba uopštiti u tom smislu što se prelaz ka graničnoj vrednosti može vršiti duž proizvoljne krive u oblasti pravougaonika, odnosno druge neke površine područja x i y. Ako funkcija $z=z(x,y)$ ima istu graničnu vrednost za tačku $M_0(x_0,y_0)$ duž pravih: 1. $y=y_0$, za $z=z(x,y_0)$ i 2. $x=x_0$ za $z=z(x_0,y)$, iz tog još ne sleduje da funkcija z ima istu graničnu vrednost za x_0, y_0 pri prelazu duž neke krive kroz tačku M_0 sa jednačinom $\varphi(x,y)=0$.

Ako granična vrednost funkcije $z=z(x,y)$ ne zavisi od puta $\varphi(x,y)=0$ i na svakome putu za svaku tačku neke oblasti promenljivih x i y imamo za dato ε, u ε-uslovu, istu vrednost δ, kaže se za funkciju z u toj oblasti da je *ravnomerno* ili *uniformno neprekidna*.

Što je rečeno za funkciju dveju promenljivih proširuje se i na slučaj funkcije više promenljivih.

Vežbanja:

1. Navesti primere neprekidnih funkcija na osnovu oblika njihovih grafika.

2. Za koju vrednost argumenta funkcija $y=\dfrac{2}{x-1}$ ima skok?

3. Za koje su vrednosti argumenta funkcija $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{cotg} x$ prekidne?

4. Za koje je vrednosti argumenta funkcija $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{1-x}$ prekidna?

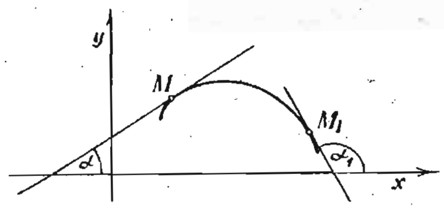
2.2. Rašćenje i opadanje funkcije

Ako za određenu vrednost argumenta x neprekidna funkcija $y=f(x)$ raste, tangenta na grafik obrazuje oštar ugao sa osom Ox (ugao α na slici 23). Pošto je tangens oštrog ugla pozitivan, a jednak je izvodu y', možemo tvrditi, kad funkcija raste, da je $y'>0$. I obrnuto, kad je $y'>0$, funkcija y raste.

Ako tangenta obrazuje sa osom Ox tup ugao (ugao α_1 na slici 23), $y'<0$; ova nejednakost je uslov za opadanje funkcije. Prema tome, znak prvog izvoda dovoljan je da se odredi da li funkcija raste ili opada.

Za funkciju koja u datom intervalu, od $x=a$ do $x=b$, pri $b>a$, ili ne opada, već bilo raste bilo ostaje nepromenjena, kaže se da je, u tom intervalu, *monotona u širem smislu.* Ako samo bilo raste bilo samo opada — ona je *monotona u užem smislu;* to su *uzlazne* ili *silazne* funkcije.

Evo nekoliko primera.



Sl. 23 — Rašćenje i opadanje funkcije

Linearna funkcija $y=ax+b$ ima za izvod $y'=a$; prema tome, ona raste ili je uzlazna, ako je $a>0$, a opada ili je silazna, ako je $a<0$.

Kod kvadratne funkcije, $y=ax^2+$ $+bx+c$, za koju je $y'=2ax+b$ rašćenju ili uzlazu odgovara uslov $2ax+b>0$, a odatle je $2ax>-b$. Ako je $a>0$, za vrednost argumenta $x>-b/2a$ funkcija y raste. Ako je $a<0$, funkcija y raste za argumente $x<-b/2a$.

Funkcija $y=e^x$ ima izvod $y'=e^x$, koji je pozitivan za sve vrednosti x. Prema tome ova funkcija stalno raste. Inverzna funkcija $y=\log x$ ima izvod $y'=1/x$, a pošto $\log x$ može imati realne vrednosti samo za $x\geqslant 0$, i prirodni logaritam prema tome uvek raste. Kako za proizvoljnu osnovu a imamo $(\log_a x)'=1/x\log a=\dfrac{1}{x}\log_a e$, zaključujemo da funkcija logaritma i sa proizvoljnom osnovom uvek raste.

Funkcija $y=\sin x$ ima izvod $y'=\cos x$, koji je u oblasti od 0 do 2π u granicama $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ pozitivan i, prema tome, u ovim granicama $\sin x$ raste, i to, kao što znamo, od -1 do $+1$. Na ostalom delu trigonometrijskog kruga $\sin x$ opada od $+1$ do -1, jer je $y'=\cos x$ negativan.

Izvod funkcije $y=\operatorname{tg} x$ ima vrednost $y'=1:\cos^2 x$; on je, prema tome, stalno pozitivan, znači $\operatorname{tg} x$ stalno raste, i to, kao što znamo: u prvom kvadrantu od 0 do $+\infty$, za $x=\dfrac{\pi}{2}$ funkcija gubi neprekidnost, pravi skok od $+\infty$ na $-\infty$; u drugom kvadrantu raste od $-\infty$ do 0; u trećem i četvrtom kvadrantu se menja na isti način kao i u prvom i drugom

kvadrantu — ona je periodična sa periodom π. Prelazi od pozitivne beskonačnosti do negativne su skokovi te funkcije, za vrednosti argumenta $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, gde je k ceo broj.

Vežbanja:

Proučiti rašćenje i opadanje funkcija:

1. $y=2x+1$; 2. $y=2x^2-4x+1$; 3. $y=2-3x-4x^2$; 4. $y=\dfrac{4}{x}$;

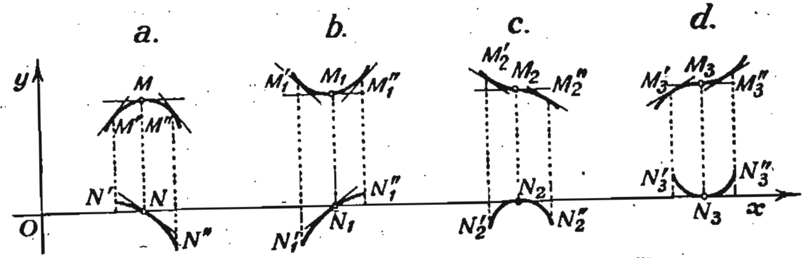
5. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$; 6. $y=e^{-x}$; 7. $y=\dfrac{1}{e^{x^2}}$; 8. $y=\cos x$; 9. $y=\operatorname{cotg} x$;

10. $y=\log x$; 11. $y=\operatorname{arctg} x$; 12. $y=1:(ax^2+bx+c)$.

2.3. Ekstremum funkcije

U prethodnom članu proučili smo ponašanje krive neprekidne funkcije, kad je $y'\neq 0$. Da vidimo kako se ponaša kriva — a, prema tome, i funkcija, kad je $y'=0$. Jasno je da je u tom slučaju tangenta na krivoj paralelna sa osom Ox.

Pod pretpostavkom da je izvod y' funkcije y takođe neprekidan u tački dodira, na osnovu neposrednog posmatranja možemo do ovih zaključaka doći. Kriva se može nalaziti i sa jedne i druge strane tačke dodira, ispod tangente (sl. 24, a).



Sl. 24 — Maksimum, minimum i prevojna tačka

Kako je tada vrednost funkcije y za tačku dodira, M, koju ćemo označiti sa $y(M)$, veća od vrednosti te funkcije $y(M')$ i $y(M'')$ za tačke sleva i desno od tačke M, tj. $y(M)>y(M')$

i $y(M) > y(M'')$, kaže se da za tačku M funkcija ima *maksimum (maximum*, kratko, *max.)*. Obratno, ako se kriva nalazi iznad tangente (sl. 24, b), funkcija ima *minimum (minimum*, kratko, *min.)*. Kao zajednički naziv za pojmove maksimuma i minimuma uvedena je reč *ekstremum (extremum)* funkcije.

Ako se kriva pre tačke dodira nalazi iznad (sl. 24, c), odnosno ispod (sl. 24, d) tangente, a posle ove tačke, obratno, ispod odnosno iznad tangente, za funkciju se kaže da prolazi kroz (ili da ima) *prevojnu tačku (tačku infleksije)*.

Sve tačke, za koje $f'(x)=0$, zovu se *stacionarne tačke*, a vrednosti funkcije za te tačke su *stacionarne vrednosti*.

Prema tome, uslovu $y'=0$ odgovara ili ekstremum ili prevojna tačka.

Izvedimo sad uslove za svaki od ekstremuma i za prevojnu tačku. Zato ćemo ispod grafika funkcije $y(x)$ nacrtati i grafik izvoda $y'(x)$ (sl. 24, a). U slučaju maksimuma funkcije, ugaoni koeficijent tangente je za tačku M', ispred tačke M, *pozitivan*; odgovarajuća tačka N' grafika izvoda mora se nalaziti iznad ose Ox. Za samu tačku M je $y'=0$; tačka N grafika izvoda leži na osovini Ox. Za tačku M'', iza tačke M, imamo $y'<0$; odgovarajuća tačka N'' grafika izvoda leži ispod ose Ox. Grafik funkcije y' prelazi iz oblasti *iznad* u oblast *ispod* ose Ox, što znači da funkcija y' opada. Izvod ove funkcije, a to je u našem slučaju drugi izvod y'', negativan je. Prema tome možemo tvrditi da maksimumu funkcije odgovaraju uslovi:

$$\boxed{y'=0, \quad y''<0, \quad \text{Max.}}$$

Slična analiza (sl. 24, b) pokazuje da minimumu odgovaraju uslovi:

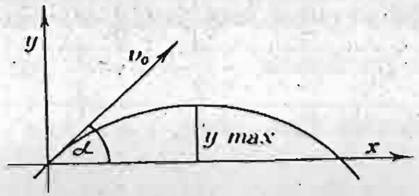
$$\boxed{y'=0, \quad y''>0, \quad \text{Min.}}$$

Ako su $y'=0$ i $y''=0$, ne možemo na osnovu samo ovih izvoda ništa kazati o karakteru funkcije. Dublja analiza pokazuje da taj karakter zavisi od vrednosti narednih (višeg reda) izvoda. Naime, ako je $y'''\neq 0$, kriva linija ima prevojnu tačku; za $y'''<0$ imamo tačku pokazanu na slici 24, c, a za $y'''>0$ onu predstavljenu na slici 24, d. Ako je i $y'''=0$, treba izračunati i naredni izvod.

Možemo navesti bez dokaza ovu teoremu: *Da bi funkcija jedne nezavisno promenljive imala ekstremum za određenu vrednost argumenta, potrebno je i dovoljno da za tu vrednost uzastopni izvodi budu jednaki nuli i da izvod najnižeg reda koji nije jednak nuli bude parnog reda; ako je ovaj pozitivan, biće to minimum, ako je negativan — maksimum.* Dokaz ove teoreme ćemo izvesti kad budemo govorili o izračunavanju priraštaja funkcije Δy u zavisnosti od priraštaja Δx argumenta.

No već i na osnovi ovoga što je rečeno, možemo izložiti postupak za određivanje ekstremuma date funkcije. Za datu funkciju $f(x)$ postupak je ovaj: 1. uzme se prvi izvod $f'(x)$. 2. taj izvod se izjednači sa nulom i dobijena jednačina $f'(x)=0$ reši. Neka joj koreni budu $a_1, a_2, \ldots, a_k$, gde je k konačan ili (u slučaju transcendentne jednačine) beskonačan broj. Ove vrednosti argumenta, u slučaju ekstremuma, ponekad se zovu i *kritičke vrednosti*. 3. izračuna se drugi izvod $y''(x)$ i odredi njegova vrednost, odnosno samo znak, za kritičke vrednosti. Tako se dobivaju vrednosti: $f''(a_1), f''(a_2), \ldots, f''(a_k)$. 4. od tih vrednosti uzimaju se one koje nisu jednake nuli. Za pozitivne vrednosti imamo minimum, za negativne — maksimum. 5. izračunaju se za odgovarajuće vrednosti korena izvoda vrednosti samih funkcija $f(x)$ — to su vrednosti maksimuma i minimuma.

Za vrednosti korena za koje je $y''=0$, postupak treba nastaviti određivanjem izvoda narednih viših redova. Ako je neparnog reda prvi od ovih narednih izvoda koji, nije jednak nuli za odgovarajući koren, funkcija za taj koren nema ekstremuma, a ako je on parnog reda, funkcija ima ekstremum i to onaj koji odgovara znaku tog izvoda.



Sl. 25 — Putanja kosog hitca

Iz prakse je poznato da su pri rešavanju ovih zadataka najteža dva momenta: 1. određivanje funkcije $f(x)$, ako nije data, da odgovara suštini problema, i 2. rešavanje jednačine $f'(x)=0$.

Rešićemo nekoliko zadataka.

I. Kretanje (sl. 25) kosog hitca (teška materijalna tačka bačena pod izvesnim uglom prema horizontu) obavlja se po putanji čija je jednačina

$$y=bx-\frac{1}{2}ax^2,\ \text{gde su}\quad a=g/v_0^2\cos^2\alpha,\ b=\operatorname{tg}\alpha,$$

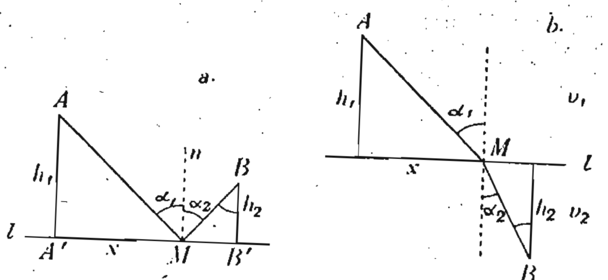
sa oznakama: g — ubrzanje Zemljine teže, v_0 — početna brzina tačke, α — nagib ove brzine prema horizontu. Treba odrediti ekstremum visine koju će hitac dostići.

1. Za izvod nalazimo $y'=b-ax$. 2. Rešavamo jednačinu $y'=b-ax=0$ i nalazimo koren $x=b/a=\frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$. 3. Izračunavamo drugi izvod, $y''=-a=-\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}$. Pošto je on negativan, funkcija ima maksimum, kao što to sleduje i iz same prirode problema. 4. Određujemo samu vrednost tog maksimuma $y_{max}=\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin^2\alpha$.

II. Dat je položaj tačaka A i B van prave l, sa iste strane te prave. Naći na pravoj l tačku M za koju je zbir rastojanja

$$AM+MB \tag{1}$$

najmanji (sl. 26).



Sl. 26 — Zakoni odbijanja i prelamanja svetlosti

Označimo sa h_1 i h_2 rastojanja tačaka A i B od prave l sa a rastojanje između podnožja A' i B' normala spuštenih iz tačaka A i B na pravu l. Neka rastojanje od tačke M do

tačke A' bude x, a zbir (1) neka bude y. Neposredno sa slike imamo $y=\sqrt{h_1^2+x^2}+\sqrt{h_2^2+(a-x)^2}$.

Za izvođenje uslova ekstremuma izjednačimo sa nulom prvi izvod

$$y'=\frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}}-\frac{a-x}{\sqrt{h_2^2+(a-x)^2}}=0.$$

Ako sa α_1 označimo ugao između normale na pravoj l i prave AM, a sa α_2 ugao između te normale i prave BM, prethodnu jednačinu možemo zameniti ovom $\sin\alpha_1=\sin\alpha_2$; a iz ove konačno dolazimo do uslova $\alpha_1=\alpha_2$, koji izražava dobro poznati zakon odbijanja svetlosti. Svetlost izlazi iz tačke A, odbija se od ravni i prolazi kroz tačku B, pri čemu je upadni ugao jednak odbojnom uglu. Jasno je iz prirode samog zadatka da naš uslov odgovara minimumu (zašto?).

Učinićemo i jednu elementarnu primenu. Ako za tačku B konstruišemo tačku B^* (sl. 26, a) simetričnu sa B u odnosu na pravu l, traženi zbir AMB ima vrednost zbira AMB^*; a ovaj zbir je najkraći kad se tačka M nalazi na pravoj AB^*. Iz tog uslova sleduje jednakost uglova α_1 i α_2.

III. Neka su date dve tačke A i B sa raznih strana prave l.

Svetlost se u sredini tačke A prostire brzinom v_1, a u sredini tačke B brzinom v_2. Naći na pravoj l tačku M pod uslovom da vreme T za koje svetlost pređe iz tačke A u tačku B bude najkraće *(Fermatov princip)*.

Sa oznakama sličnim prethodnima (sl. 26, b) za vreme T imamo

$$T=\frac{\sqrt{h_1^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{h_2^2+(a-x)^2}}{v_2},$$

odakle za ekstremum nalazimo

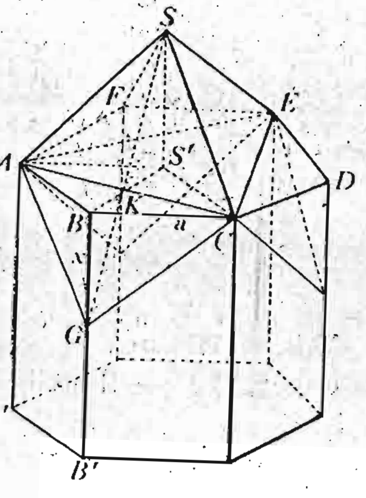
$$\frac{dT}{dx}=\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}}-\frac{1}{v^2}\frac{a-x}{\sqrt{h_2^2+(a-x)^2}}=0,$$

ili $\sin\alpha_1/v_1=\sin\alpha_2/v_2$. Ovaj uslov odgovara zakonu prelamanja svetlosti, jer kazuje da odnos sinusa upadnog i prelomnog ugla ima za dve date sredine stalnu vrednost, koja se zove *relativni indeks prelamanja druge sredine prema prvoj.*

IV. Rešićemo još i tzv. „zadatak pčela".

Naći na osovini šestostrane pravilne prizme (sl. 27) tačku tako da ravni kroz tu tačku i tri manje dijagonale šestougle osnove prizme obrazuju sa ostatkom bočne prizmine površine najmanju površinu tela date zapremine. Data je strana a osnovice šestougla.

Površinu koja treba da ima minimalnu vrednost sačinjavaju šest trapeza oblika $AA'B'G$ i tri romba, jednaka rombu $ASCG$. Ako označimo AA' sa h i BG sa x, površina svih trapeza biće



Sl. 27 — Pčelina ćelija

(2) $6\left(ah-\frac{1}{2}ax\right)=6ah-3ax.$

Površinu romba izračunaćemo pomoću dijagonala AC i SG. Pošto je $AC=a\sqrt{3}$, $SG=2GK=2\sqrt{BG^2+BK^2}=2\sqrt{x^2+\frac{1}{4}a^2}$, za površinu tri romba dobija se (3) $3\cdot\frac{1}{2}\cdot AC\cdot SG=3a\sqrt{3}\sqrt{x^2+\frac{1}{4}a^2}$.

Zbir površina (2) i (3) daće za traženu površinu $Q=6ah-3ax+3a\sqrt{3}\sqrt{x^2+\frac{1}{4}a^2}$.

Uslov za ekstremum ove funkcije daje

$$\frac{dQ}{dx}=-3a+3a\sqrt{3}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}a^2}}=0,$$

odakle je $x=\frac{1}{4}a\sqrt{2}$. Za ugao $ASC=\alpha$ kod vrha S, imamo

$\sin\frac{\alpha}{2}=AK:AG=\frac{a\sqrt{3}}{2}:\frac{2a\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{3}\sqrt{6}$, tako da se za vrednost ugla dobiva $\alpha=109^{0}28'16''$. Taj ugao na pčelinjoj ćeliji izmerio je, još 1712. godine, Maraldi i našao je vrednost $109^{0}28'$. Reomir i Kenig našli su za ugao istu vrednost računskim putem, uz uslov da površina ćelije bude najmanja, tj. da pčela potroši najmanje voska za izgradnju te površine. Rezultati merenja i računa poklopili su se; pčela se pokazala kao dobar matematičar, koji je bez diferencijalnog računa i logaritamskih tablica, samo na osnovu svog instinkta, rešio komplikovan matematički zadatak. Pošto su ovi podaci bili već izašli u mojoj knjizi „Viša matematika" 1948. g., pročitao sam u knjizi prof. V. Varićaka „Matematički rad Boškovićev. Dio I" da je R. Bošković objavio članak „De apium cellulis", u kojem je dao i geometrijsko i analitičko rešenje tog problema. U knjizi V. Varićaka stoji i ovo: „Jedno je, veli Bošković, bilo već starima poznato i toga radi su pčele geometrima zvali".

U vezi sa ekstremumom funkcije jedne nezavisno promenljive navešćemo nekoliko primedaba.

1. Ako u jednom intervalu funkcija ima više maksimuma, odnosno minimuma, najveći od maksimuma zove se *maksimum maksimorum* (maximum maximorum, kratko, *max.—max.*), a najmanji od minimuma *minimum minimorum* (kratko, *min.—min.*). Određivanje max.—max. između svih maksimuma vrši se pomoću neposrednog upoređivanja vrednosti tih maksimuma. Na sličan način se radi i za min.—min.

2. Ne treba mešati dva u suštini različita pojma; s jedne strane, pojam najveće (najmanje) vrednosti funkcije, koja se ponekad zove *apsolutni maksimum (minimum)* i, s druge strane, pojam *maksimuma (minimuma)*, koji se zove i *relativni maksimum (minimum)*.

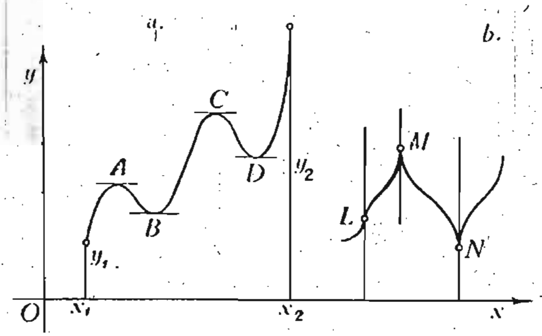
Strožu definiciju pojma ekstremuma (relativnog), recimo maksimuma, možemo formulisati ovako: funkcija $f(x)$ ima u tački $x=x_0$ maksimum (relativni), ako se može naći takav pozitivan broj ε, da za svako x u oblasti $x_0-\varepsilon$ i $x_0+\varepsilon$, tj. sa vrednošću apscise $x_0\pm\theta\varepsilon$, gde je θ proizvoljan broj i to $0<\theta<1$, postoji nejednakost $f(x_0\pm\theta\varepsilon)<f(x_0)$. U slučaju minimuma (relativnog) znak ove nejednakosti je suprotan.

Učinimo još ovu primedbu. Ekstremum sa uslovima u obliku nejednakosti $f(x_0 \pm \theta\varepsilon) < f(x_0)$ za maksimum odnosno $f(x_0 \pm \theta\varepsilon) > f(x_0)$ za minimum, ponekad se zove *sopstveni ekstremum*. Ako ekstremum zadovoljava slabije uslove, u obliku $f(x \pm \theta\varepsilon) \leqslant f(x_0)$, odnosno $f(x \pm \theta\varepsilon) \geqslant f(x_0)$, on se zove *nesopstveni*.

Objasnićemo na primerima razliku između ekstremuma i najveće, odn. najmanje veličine.

Funkcija $y = e^x$ u intervalu, recimo, od $x = 0$ do $x = 1$ uzima vrednosti od 1 do e i pri tome stalno raste. Ova funkcija, u tom intervalu, nema ekstremuma, nema relativnih ni maksimuma ni minimuma. Ali ova funkcija ima za najmanju vrednost, tj. apsolutni minimum 1, a za najveću vrednost, a to je apsolutni maksimum e.

Kao drugi primer uzmimo funkciju sa grafikom pokazanim na slici 28,a. Funkcija u intervalu od x_1 do x_2 ima



Sl. 28 — a. Primeri apsolutnih i relativnih ekstremuma. b. Kopljaste tačke i prevojne tačke sa tangentom paralelnom y osi

dva relativna maksimuma, u tačkama A i C, i dva relativna minimuma (B i D), apsolutni minimum sa vrednošću y_1 i apsolutni maksimum sa vrednošću y_2. Obraćamo pažnju čitaocu da minimum D može biti veći od maksimuma A. Funkcija ima max.—max. u tački C i min.—min. u tački B.

Kao što smo videli, proučavanje relativnog ekstremuma svodi se na proučavanje izvoda višeg reda za vrednosti

korena prvog izvoda, odnosno znaka onog parnog izvoda, koji nije identički jednak nuli. Za određivanje i proučavanje apsolutnog ekstremuma ne postoji sličan postupak, već treba proučiti neposredno promenu vrednosti funkcije u datom intervalu.

3. Pri proučavanju ponašanja neprekidne funkcije u datom intervalu može nastupiti i taj slučaj da tangenta na krivoj u datoj tački zauzme vertikalan položaj, tj. položaj prave paralelne y osi. Tada je (4) $f'(x) \to \infty$. Ovaj slučaj treba isto tako raščlaniti na tri slučaja (sl. 28, b). Slučaj tačke M, kada grafik funkcije predstavlja *kopljastu tačku* sa vrhom na više. Taj slučaj odgovara najvećoj vrednosti funkcije. Zatim slučaj kopljaste tačke N sa vrhom na niže — to je najmanja vrednost. Najzad, slučaj kad se tačka L javlja kao prevojna tačka krive. Pošto za sve ove tačke postoji uslov (4), apscise kopljastih tačaka sa vertikalnom tangentom treba da zadovoljavaju jednačinu $1 : f'(x) = 0$. Određivanje korena ove jednačine i neposredno proučavanje ponašanja krive oko odgovarajućih tačaka rešava pitanje o karakteru vrednosti funkcije u tim tačkama.

Pređimo sad na proučavanje ekstremuma funkcije dveju nezavisno promenljivih $z = f(x, y)$, kojoj, kako smo videli, odgovara površina. Ako za $x = a$, $y = b$ funkcija ima maksimalnu vrednost c, potrebno je da se oko tačke na površini sa koordinatama a, b, c može pokazati oblast gde su sve vrednosti funkcije z manje od vrednosti $c = f(a, b)$.

Ako ovu površinu presečemo sa ravni $y = b$ dobićemo u toj ravni krivu sa jednačinom $z = f(x, b)$. Za tačku $x = a$ funkcija $f(x, b)$ mora imati ekstremum, a to znači da prvi izvod te funkcije po x treba da bude jednak nuli. Pošto je taj izvod delimičan, uslov treba napisati $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Slično rasuđivanje dovodi i do drugog uslova $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Prema tome, za ekstremum funkcije dveju nezavisno promenljivih imamo uslove

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Ovi su uslovi neophodni za ekstremum, no nisu dovoljni, jer oni ne obuhvataju sve tačke površine u blizini tačke (a, b, c). Za proučavanje dovoljnih uslova treba uzeti u obzir drugi diferencijal funkcije z, koji predstavlja glavni deo priraštaja funkcije. Taj drugi diferencijal izgleda ovako

$$d^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, dx^2+2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\, dx\, dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\, dy^2=A \xi^2+2 B \xi \eta+C \eta^2,$$

gde smo, radi kratkoće, uveli oznake $\partial^2 z/\partial x^2=A$, $\partial^2 z/\partial x\, \partial y=B$, $\partial^2 z/\partial y^2=C$; $dx=\xi$, $dy=\eta$. Za datu tačku sa koordinatama (a, b, c) veličine A, B, C su konstantne. Ako taj drugi diferencijal ima, za sve vrednosti ξ i η, u oblasti oko date tačke, negativnu vrednost, tj. ako je $d^2z<0$, funkcija u toj tački ima maksimum. Za $d^2z>0$ ona ima minimum. Za $d^2z=0$ pitanje ostaje nerešeno: u tome slučaju treba uzeti diferencijale višega reda, na čemu se nećemo ovde zadržavati.

Za proučavanje znaka kvadratne funkcije $A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2$ možemo ovako postupiti. Transformišimo ovu funkciju pri $A \neq 0$ na ovaj način

$$A \xi^2+2 B \xi \eta+C \eta^2=\frac{1}{A}(A^2 \xi^2+2 A B \xi \eta+B^2 \eta^2)-\frac{B^2}{A} \eta^2+C \eta^2=$$
$$=\frac{1}{A}[(A \xi+B \eta)^2-(B^2-A C) \eta^2].$$

Iz ovog oblika funkcije zaključujemo da, u slučaju $B^2-AC<0$, funkcija ima stalan znak, i to znak veličine A. Kad je $B^2-AC>0$, znak funkcije može biti pozitivan i negativan. Najzad, ako je $B^2-AC=0$, postoji pravac određen jednačinom $A\xi+B\eta=0$, duž kojeg je $d^2z=0$; u ovom slučaju, kako je rečeno, pitanje ostaje otvoreno.

Ako je $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$, diferencijal d^2z uzima oblik

$$d^2z=2B\xi\eta+C\eta^2=\eta(2B\xi+C\eta).$$

U ovom slučaju u tangentnoj ravni $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\right)$ u tački (a,b,c) možemo povući dve prave koje odgovaraju uslovima $\eta=0$, $2B\xi+C\eta=0$; ove prave dele oblast ravni na

četiri dela. Nije teško videti da d^2z ima u dva od ovih delova pozitivnu vrednost, a u ostala dva — negativnu. Funkcija $z(x,y)$, prema tome, nema u toj tački ekstremum. Isti slučaj imamo i kad samo $C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ za tačku dodira ima vrednost nule.

Na taj način, prema onome što je rečeno za određivanje ekstremuma funkcije dveju nezavisno promenljivih treba ovako postupiti:

1. Izračunati prve delimične izvode, pa za sistem jednačina $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ sa dve nepoznate, x i y, odrediti korene.

2. Izračunati druge izvode, pa za svaki par korena odrediti vrednost izraza

$$\Delta=B^2-A C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

I onda, ako je

$$\Delta<0 \quad \text{postoji ekstremum i to} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}>0 & \text{minimum;} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}<0 & \text{maksimum;} \end{cases}$$

$\Delta>0$, nema ekstremuma;

$\Delta=0$, pitanje ostaje nerešeno.

Primećujemo da u ovoj tablici nema slučaja $\Delta<0$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$, jer je takav slučaj nemoguć (zašto?).

Slična je teorija ekstremuma funkcije više promenljivih. Ako je data funkcija n nezavisno promenljivih, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, neophodni uslovi ekstremuma su $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}=0$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}=0, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}=0$. U analizu karaktera ekstremuma ovog slučaja nećemo ovde ulaziti. Često sama priroda problema određuje vrstu stacionarne tačke.

Rešimo ovaj zadatak.

Naći ekstremum funkcije $z=x^3+y^3-3axy$. Odredićemo, prvo, delimične izvode $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3ay$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3ax$; ove ćemo izjednačiti sa nulom, i dobićemo rešenja: $x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=a$, $y_2=a$. Zatim određujemo druge izvode i izračunavamo njihove vrednosti za prvu i drugu tačku. Sa već usvojenim oznakama dobijamo $A_1=0$, $B_1=-3a$, $C_1=0$; $A_2=6a$, $B_2=-3a$, $C_2=6a$. Za te vrednosti nalazimo: $\Delta_1=B_1^2-A_1C_1=9a^2$, $\Delta_2=B_2^2-A_2C_2=-27a^2$. Za prvu tačku $(0, 0, 0)$ je $\Delta_1>0$ i, prema tome, za ovu funkcija z nema ekstremuma; za drugu tačku $(a, a, -a^3)$ je $\Delta_2<0$ i $A_2>0$, znači funkcija z ima minimum $z_{\min}=-a^3$.

2.31. Uslovni ekstremum

Rešimo ovaj jednostavni zadatak. Naći kutiju oblika pravouglog paralelepipeda najveće zapremine, čija dužina zajedno sa perimetrom poprečnog preseka iznosi 120 cm. Ako dužinu kutije označimo sa x, a ostale dimenzije sa y i z, gornji uslov se izražava jednačinom $x+2(y+z)=120$, odnosno $x=120-2(y+z)$. U zadatku se traži da se odredi ekstremum zapremine $V=xyz$, funkcije triju promenljivih, x, y, z, povezanih uslovom. U ovom zadatku možemo lako, pomoću jednačine uslova, jednu od promenljivih, recimo x, izraziti kao funkciju dveju ostalih. Ako eliminišemo ovu promenljivu iz izraza za zapreminu, dobićemo za V, kao funkciju samo dve promenljive,

$$V=2yz(60-y-z).$$

Da bismo odredili ekstremum ove funkcije, kao funkcije nezavisno promenljivih y i z, postupićemo kako je gore rečeno i dolazimo do ovog rezultata. Iz jednačina $\frac{\partial V}{\partial y}=2(60z-2yz-z^2)=0$, $\frac{\partial V}{\partial z}=2(60y-y^2-2yz)=0$ dobićemo dva algebarska rešenja: 1. $y=z=0$ i 2. $y=z=20$. Prvo od rešenja, $x=120$, ne odgovara stvarnom problemu, jer je zapremina kutije jednaka

nuli. Drugo rešenje, $x=40$, daje $V=16000\text{ cm}^3$. Maksimum ove zapremine možemo proveriti i analitički, ali to neposredno sleduje i iz suštine samog problema.

Pri rešavanju ovog zadatka funkciju V smo oslobodili na osnovu date veze između promenljivih x, y, z od zavisne promenljive x i tako sveli zadatak na određivanje ekstremuma funkcije samo od nezavisno promenljivih. Pošto pri eliminisanju zavisne promenljive može da se naiđe i na teškoće, pokazaćemo i drugu metodu za određivanje ekstremuma, kad su dati uslovi između promenljivih.

Pretpostavimo da treba naći ekstremum funkcije (1) $z=f(x, y)$, kad se još zna da između x i y postoji veza (2) $\varphi(x, y)=0$. Ako zamislimo da smo iz (2) odredili y kao funkciju od x i stavili u (1), z će onda biti funkcija samo jedne nezavisno promenljive x i uslov ekstremuma će biti (3) $\frac{dz}{dx}=0$. Pošto je $dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$, a iz (2) je $\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy=0$, možemo iz poslednje jednačine odrediti $dy=-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big/\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)dx$, posle čega se za dz dobija

$$dz=\left[\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big/\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right]dx.$$

Ako ovu vrednost stavimo u (3), dobijamo uslov

$$(4) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0,$$

ili, u obliku determinante $\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}=0$, koji sa jednačinom (2), daje dve jednačine za određivanje onih vrednosti x i y, za koje funkcija z može imati ekstremum.

Pokazaćemo kako se ovo rešenje formalno može i drukčije dobiti.

Pomnožimo levu stranu jednačine (2) proizvoljnom konstantom λ (lambda) i dodajmo proizvod funkciji z; dobićemo novu funkciju $Z=f(x, y)+\lambda\varphi(x, y)$. U ovoj funkciji smatramo x i y kao nezavisno promenljive, te ćemo imati dva uslova za ekstremum: (5) $\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$. Jednačine (5) sa jednačinom (2) dovoljne su za određivanje tri nepoznate veličine: x, y, λ. Pokazaćemo da je jednačina za određivanje x i y, koja sleduje iz (5), identična sa uslovom (4). Zaista, ako iz jednačina (5) eliminišemo množilac λ, dobićemo jednačinu (4).

Određivanje ekstremuma funkcije sa dopunskim uslovom zove se problem *uslovnog ekstremuma*. Za rešavanje ovakvih problema imamo Ajlerovo pravilo:

Ako su funkcije, čiji ekstremum tražimo, vezane jednom ili većim brojem jednačina, treba levu stranu svake veze pomnožiti neodređenim množiocem i dodati datoj funkciji. A zatim se određivanje ekstremuma funkcije vrši po pravilu ekstremuma za funkciju više nezavisno promenljivih.

Ova metoda rešavanja problema uslovnog ekstremuma zove se *metoda neodređenih množilaca*.

Rešićemo ovom metodom problem najveće kutije. Zato obrazujmo funkciju $u=xyz+\lambda[x+2(y+z)-120]$ i primenimo pravilo običnog ekstremuma. Imaćemo tri uslova:

$$(6)\ \frac{\partial u}{\partial x}=yz+\lambda=0,\quad (7)\ \frac{\partial u}{\partial y}=zx+2\lambda=0,\quad (8)\ \frac{\partial u}{\partial z}=xy+2\lambda=0,$$

koji, zajedno sa uslovom (9) $x+2(y+z)-120=0$, rešavaju problem, i to u prostijoj formi nego ranije. Zaista, iz (7) i (8) neposredno imamo $y=z$, a zatim, iz (6) i (7), dobivamo $x=2y$. Dalje, iz (9) neposredno određujemo $2y+2y+2y=120$; dakle $y=20$, tako da konačno nalazimo $x=4$, $y=z=20$.

Vežbanja:

1. U trougao sa osnovom a i visinom h upisati pravougaonik najveće površine tako da mu jedna strana leži na osnovi a, a ostala dva temena na bočnim stranama trougla.

2. Prozor ima oblik pravougaonika sa gornjim dodatkom u obliku ravnokrakog pravouglog trougla. Koje veličine treba da budu strane tog prozora sa zajedničkom dužinom p da prozor propušta najviše svetlosti?

3. U loptu upisati cilindar najveće zapremine.

4. U kupu upisati cilindar najveće zapremine.

5. Oko lopte opisati kupu najmanje zapremine.

6. Osnova pravougaonika leži na osi x; dva ostala njegova temena nalaze se na krivoj sa jednačinom $y=e^{-x^2}$. Dokazati da se a dva temena nalaze baš u prevojnim tačkama krive, ako pravougaonik ima najveću površinu.

7. Jedna strana pravougaonika se nalazi na osi x, druga na pravoj $x=\frac{1}{2}$. Odrediti položaj četvrtog temena na krivoj sa jednačinom $y=e^{-x^2}$, ako pravougaonik ima najveću površinu.

8. Dokazati da od svih pravougaonika upisanih u krug najveću površinu ima kvadrat.

9. Dokazati da strane pravougaonika najveće površine, upisane u elipsu, stoje u odnosu $b:a$, gde su a i b poluose elipse.

10. Dokazati da prava ekstremnog rastojanja tačke (a, b) ravni od tačke krive sa jednačinom $y=f(x)$ mora stojati upravno na tangenti u tački na krivoj.

11. Električnu centralu na obali neke reke, širine a_m, treba spojiti sa fabrikom na drugoj obali, koja se nalazi na rastojanju b_m, merenom u pravcu reke od centrale. Projektovati najjeftiniji kabl, ako je cena vazdušnog kabla p dinara po metru, a podvodnog q dinara $(q>p)$.

12. Žica dužine l presečena je na dva dela l_1 i l_2. Od l_1 je izrađen krug, a od l_2 kvadrat. Naći odnos $l_1:l_2$ pod uslovom da zbir površina kruga i kvadrata bude najmanji.

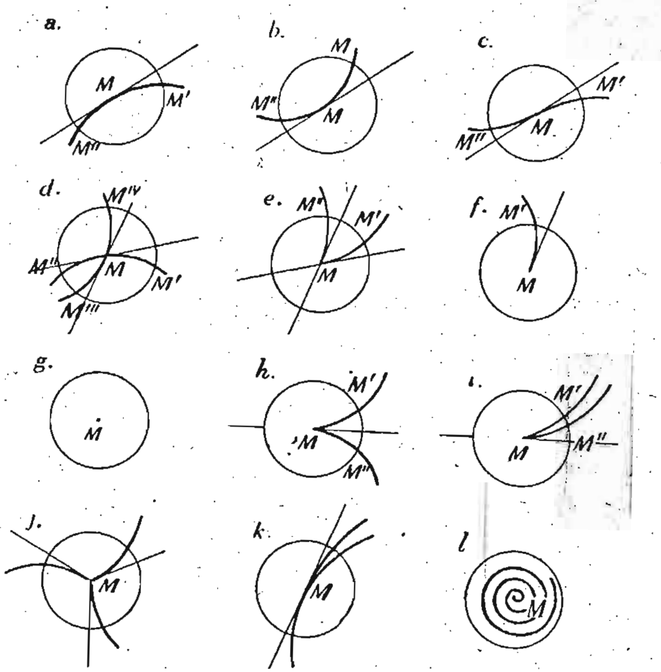
13. Iz kruga treba iseći kružni sektor tako da od ostatka napravljeni konus ima najveću zapreminu.

Naći ekstremume funkcija:

14. $z=5x^2+2xy+9y^2-12x-20y+17$. 15. $z=x^2+y^2-6xy-39x+18y+40$. 16. $z=x^3y^2(1-x-y)$. 17. Koji od pravouglih paralelepipeda ima najveću zapreminu, ako mu je površina stalna. 18. Koji od pravouglih paralelepipeda ima najveću površinu, ako mu je zbir svih ivica stalan. 19. Naći ekstremum funkcije $z=x^2+y^2$ pod uslovom $x/a+y/b=1$. 20. Naći ekstremum funkcije $u=x^2+y^2+z^2$ pod uslovom $Ax+By+Cz+D=0$. 21. Naći ekstremum funkcije $w=x^2+y^2+z^2+u^2$ pod uslovom $x/a+y/b+z/c+u/d=1$.

2.4. Obične i singularne tačke

Ako imamo jednačinu $f(x, y)=0$ kojoj odgovara kriva linija, i uzmemo na toj krivoj tačku $M(x, y)$, tada za proučavanje karaktera krive oko te tačke možemo postupiti ovako. Uzmimo tačku M za centar i sa dosta malim poluprečnikom ρ (čitaj ro) opišimo krug. Na slici 29,a imamo tačku M i tangentu na krivoj u ovoj tački. Naša kružna linija seče krivu u tačkama M' i M''; one su dosta bliske



Sl. 29 — Obične i singularne tačke

tangenti i nalaze se sa suprotnih strana tačke M. Isto to imamo i na slikama 29, b i c. Ovakve se tačke zovu *obične tačke krive*. U slučajevima a i b kriva leži sa jedne strane tangente, a u slučaju c jedan deo leži sa jedne, a drugi sa druge strane. Ova obična tačka zove se, kao što znamo, *prevojna tačka*.

Svaka tačka krive koja nema osobinu obične tačke zove se *singularna tačka*. Da vidimo iz nekoliko primera kakve mogu biti singularne tačke.

Na slici 29, d imamo presek dve grane krive linije; svaka od njih ima svoju tangentu. Takvih grana može biti i više. Ovakva singularna tačka zove se *višestruka tačka*. Na slici je *dvostruka tačka*.

Na slici 29, e imamo takozvanu *ugaonu tačku*: kriva ima dve tangente, ali za svaku tangentu postoji samo jedna tačka kružne linije koja je bliska tangenti.

Slika *j*. prikazuje *krajnju tačku* krive: kriva ima tangentu u tački M ali ne postoji produženje krive posle ove tačke.

Ako se može naći takva vrednost poluprečnika ρ da svaka kružna linija manjeg poluprečnika nema zajedničkih tačaka sa krivom, tačka se zove *izolovana tačka* (sl. 29, g).

Ako kriva linija ima u tački M tangentu i kružna linija seče krivu u dvema tačkama M' i M'', koje su bliske tangenti, i nalaze se sa iste strane tačke M, tačka se zove *povratna* ili *šiljasta tačka*. Ako se kriva nalazi sa raznih strana tangente, imamo *kopljastu tačku* (sl. 29, h), *povratnu tačku prve vrste*. Ako je kriva sa iste strane tangente, imamo *kljunastu tačku*, *povratnu tačku druge vrste* (sl. 29, i).

Ako se u tački M (sl. 29, j) kriva grana u dve ili više grana, ona se zove tačka *bifurkacije* ili *grananja*.

U proučavanju prirodnih pojava često imamo naročiti slučaj bifurkacije, kada sve grane imaju istu tangentu (sl. 29, k), ali se posle tačke M kriva grana u dve grane.

Singularitet tačke može imati i sasvim drugi karakter. Tako se, napr., kriva može približavati tački M spiralnim zavojima, koji samo u graničnom posmatranju, kada broj zavoja teži beskonačnosti, dolaze u tačku M. Tačka ove prirode zove se *asimptotska tačka krive*.

Analitičko proučavanje prirode običnih i singularnih tačaka uglavnom se osniva na proučavanju izvoda funkcije u datoj tački. U detaljnu analizu tog proučavanja ovde ne možemo ulaziti. Pokazaćemo samo dva primera.

I. Proučiti krivu čija je jednačina

$$y^2 = a^2x^2 - x^4$$

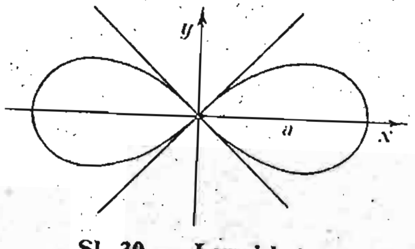
i odrediti prirodu tačke $x=0$, $y=0$, koja očigledno pripada našoj krivoj.

Ako diferenciramo jedanput, imaćemo

$$yy' = a^2x - 2x^3.$$

Iz ove jednačine ne možemo odrediti y' za našu tačku, jer je koeficijent kod y' za ovu tačku jednak nuli. Diferencirajmo još jedanput $y'^2 + yy'' = a^2 - 6x^2$.

Za našu tačku imamo $y'^2 = a^2$, odakle imamo dve vrednosti ugaonog koeficijenta koje određuju dve tangente. Početak koordinata je dvostruka tačka naše krive. Kriva se zove *lemniskata* (λημνισκος — pantljika) i ima oblik pokazan na slici 30.



Sl. 30 — Lemniskata

II. Proučiti krivu čija je jednačina

$$y^2 = x^2(x-2).$$

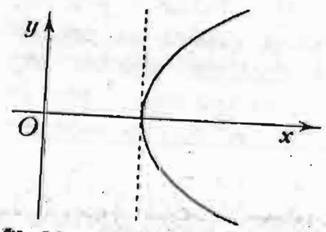
Početak koordinata leži na krivoj, jer $x=0$, $y=0$ zadovoljavaju jednačinu krive. Za određivanje tangente diferencirajmo jedanput, $2yy' = x(3x-4)$.

Vidimo da za tačku (0, 0) iz ove jednačine ne možemo odrediti y'. Diferencirajmo još jedanput,

$$2y'^2 + 2yy'' = 6x - 4,$$

odakle za našu tačku imamo $y'^2 = -2$.

Ova jednačina pokazuje da kriva u toj tački nema stvarnih tangenata. Iz ovog rezultata možemo zaključiti da je ovo izolovana tačka (sl. 31). Ostali deo krive leži desno od prave $x=2$, pri čemu tačka (2,0) pripada našoj krivoj. Kriva je simetrična u odnosu na osu x.



Sl. 31 — Kriva sa izolovanom tačkom

Vežbanja:

1. Pokazati da *polukubna parabola* sa jednačinom $y^2 = ax^3$ ima kopljastu tačku u početku koordinata.

2. Pokazati da krive sa jednačinama: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ i $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$ imaju po četiri kopljaste tačke.

3. Pokazati da je početak koordinata za krivu (*Dekartov list*) sa jednačinom $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ dvostruka tačka.

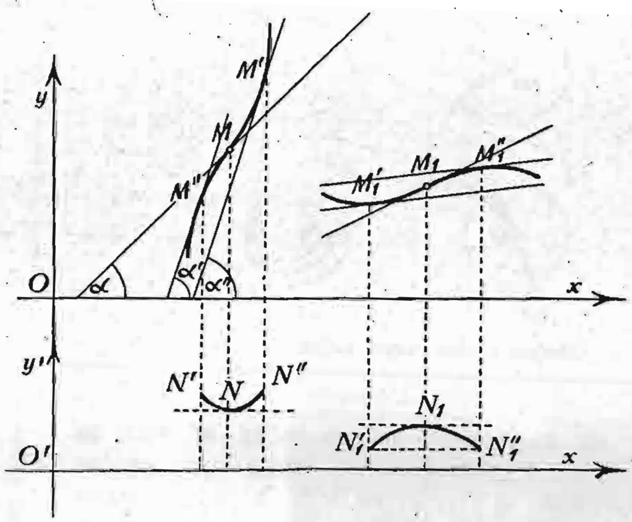
4. Pokazati da *strofoida* sa jednačinom $y^2 = x^2 \dfrac{a+x}{a-x}$ ima u početku koordinata dvostruku tačku.

5. Pokazati da je početak koordinata krajnja tačka krive sa jednačinom $y = x \log x$.

6. Pokazati da je početak koordinata kljunasta tačka krive sa jednačinom $(y - x^2)^2 = x^5$.

2.5. Prevojne tačke. Konkavnost i konveksnost

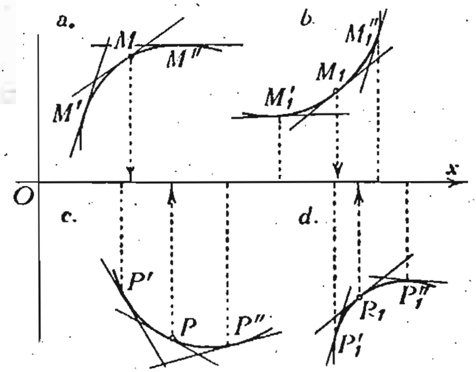
Pri proučavanju ekstremuma funkcije i ponašanja funkcije oko tačke ekstremuma (2.3) uveli smo pojam prevojne tačke krive, ali u slučaju kad je tangenta krive u odgovara-



Sl. 32 — Prevojna tačka

jućoj tački paralelna sa x osom. Pređimo sad na proučavanje opšteg slučaja, dakle proizvoljnog položaja tangente.

Neka je kriva data jednačinom $y=f(x)$; treba proučiti uslove za prevojnu tačku krive. Neka tangenta u tački M (sl. 32) obrazuje sa osom x ugao α ($\alpha \neq \pi/2$). Uzmimo na krivoj tačke M' i M'' sa jedne i druge strane tačke M. Označimo sa α' i α'' uglove između ose x i tangenata u tim tačkama. Neposredno sa slike se vidi da je za prevojnu tačku M $\alpha' > \alpha$, $\alpha'' > \alpha$. Ako sad ispod krive funkcije y nacrtamo krivu izvoda, vidimo da kriva $y' = \varphi(x)$, u tački N, koja odgovara prevojnoj tački M, ima ekstremum, u ovom slučaju minimum. Prema tome, za ovu tačku imamo uslov $y'' = 0$. Isti rezultat možemo dobiti i za prevojnu tačku M_1, za koju, u tački N_1, imamo maksimum. Prvi izvod može pri tome imati proizvoljnu vrednost. Iz toga zaključujemo da je za prevojnu tačku neophodan uslov $y''=0$, tj. drugi izvod mora biti jednak nuli. Taj uslov, međutim, nije dovoljan, kao što se to može videti posle dubljeg proučavanja. Može



Sl. 33 — Konkavnost i konveknost krive

se pokazati da će, ako drugi izvod prolazeći za datu tačku kroz vrednost nule, menja znak, tačka zaista biti prevojna tačka.

Ako je tangenta na krivoj upravna na x osi ($\alpha = \pi/2$), vrsta tačke se određuje pošto se ispitaju položaji tačaka krive sleva i sdesna od tangente.

Da vidimo sad slučajeve *udubljenosti (konkavnost)* i *ispupčenosti (konveksnost)* krivih.

Zamislimo posmatrača, koji iz podnožja (na x osi) ordinate tačke M posmatra okolinu krive oko tačke M (sl. 33), tj. oblast između tačaka na krivoj sa apscisama $a-\varepsilon$ i $a+\varepsilon$, gde je a apscisa tačke M. Ako se sve tačke okoline tačke M nalaze sa posmatračeve strane u odnosu prema tangenti, za krivu se kaže da je *konkavna* ili *udubljena* za tog posmatrača. Pri tome se pretpostavlja da razlika ordinata tačke tangente i tačke krive za istu apscisu x monotono opada kad opada $|x-a|$. Obrnuto, ako se tačke okoline i posmatrač nalaze sa raznih strana tangente — kriva je *konveksna* ili *ispupčena* za posmatrača na x osi.

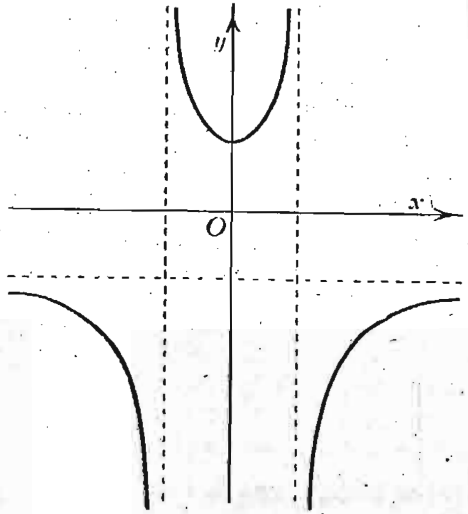
Ako propratimo položaj tangente u slučaju *a.* slike 33, vidimo da se ugao između tangente i x ose smanjuje; prema tome se smanjuje i vrednost izvoda y'. Kako je za funkciju koja se smanjuje izvod negativan, možemo tvrditi da je $y''<0$. A pošto je u ovom slučaju $y>0$, uslov za konkavnost možemo napisati i u obliku (1) $yy''<0$. Za slučaj konkavnosti, prikazan na slici 33, c, ugao α između tangente i ose x raste, prema tome je $y''>0$. Ali u ovom slučaju je $y<0$, tako da, i u ovom slučaju, ostaje na snazi uslov konkavnosti u obliku (1).

Analogna analiza konveksnosti krive u slučajevima *b.* i *d.* iste slike dovodi do uslova (2) $yy''>0$.

Treba, međutim, da učinimo jednu primedbu. Jasno je da utvrđivanje konkavnosti, odn. konveksnosti nekog dela neke krive u ravni mora zavisiti od posmatračeva položaja prema tom delu. Ako se posmatrač nalazi u krugu, periferija kruga konkavna je u svim svojim delovima za posmatrača. Međutim beskrajno udaljeni posmatrač jednu polovinu te periferije ocenjuje kao konveksnu, a drugu kao konkavnu. Mnogi pisci stavljaju beskrajno udaljenog posmatrača na pozitivnom pravcu x ose. Za takvog posmatrača, što se uostalom može lako i izvesti iz prethodnog, vredi ovo jednostavno pravilo: pri $y''>0$ kriva je konkavna, pri $y''<0$ ona je konveksna. Uzmimo, kao primer, kružnu liniju sa jednačinom $y^2=r^2-x^2$; posle prvog diferenciranja imamo: $yy'=-x$; posle drugog imamo $yy''+y'^2=-1$. Iz dobivenih jednačina nalazimo $yy''=-r^2/y^2$ i $y''=-r^2/y^3$. Iz ovih rezultata zaključujemo da je, za posmatrača na x osi, pri uslovu $yy''<0$ kriva uvek konkavna, dok je za drugog, beskrajno udaljena, kriva konveksna nad x osom i konkavna ispod te ose.

Primeri:

1. Kriva $y = \sin x$, za koju je $y'' = -\sin x$ i $yy'' = -\sin^2 x$ za posmatrača na x osi uvek je konkavna.



Sl. 34 — Jedna kriva trećeg reda

2. Kriva $y = e^x$, za koju je $yy'' = e^{2x} > 0$, uvek je konveksna.

3. Kriva $y = ax^2 + bx + c$, za koju je $y'' = 2a$, $yy'' = -2ay$, za $a > 0$ je konkavna ispod ose x i konveksna nad tom osom; za $a < 0$ je obrnuto.

4. Elipsa sa jednačinom $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ posle prvog diferenciranja daje $x/a^2 + (y/b^2)\,y' = 0$, a posle drugog $1/a^2 + y'^2/b^2 + (1/b^2)\,yy'' = 0$, odakle je $yy'' = -b^2(1/a^2 + y'^2/b^2) < 0$, i prema tome potvrđujemo da je ona, za podnožje ordinate, uvek konkavna.

5. Kriva sa jednačinom $y = (1+x^2):(1-x^2)$ daje $yy'' = 4(1+x^2)(1+3x^2):(1-x^2)^4 > 0$; prema tome je ona, kao što pokazuje i slika 34, uvek konveksna za posmatrača na osi x.

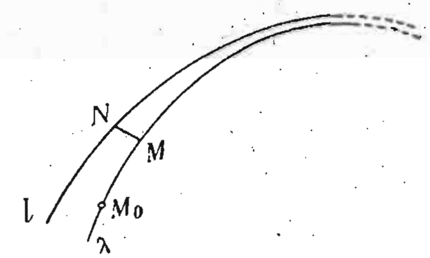
2.6. Asimptotski proces

Posmatrajući hiperbolu videli smo da ona ima beskonačne grane i dve asimptote. To su dve prave kojima se tačke hiperbolinih grana sve više približuju, pri čemu svaka od grana ostaje samo sa jedne strane ovih pravih.

Precizirajmo opšti pojam asimptotskih procesa.

Neka je data kriva l (sl. 35), koja ima konačnu granu. Primetimo da takva grana ne mora obavezno ići u beskonačnu oblast ravni već se može nalaziti, kako ćemo to i videti na primerima, i u konačnoj oblasti ravni. Uporedo sa krivom l zamislimo drugu krivu, λ; ova može imati beskonačnu granu, u beskonačnoj ili u konačnoj oblasti ravni, biti konačna, pa čak se može pretvoriti i u tačku. Na krivoj l uzmimo tačku M i iz ove povucimo najkraće rastojanje,

MN, do krive λ, ili neku drugu duž čija se dužina δ razlikuje od tog rastojanja konačnim množiocem. Ako se, počev od određene tačke M_0, sve tačke krive l nalaze sa jedne strane krive λ i dužina δ stalno opada težeći nuli, kad se tačka M udaljuje od tačke M_0, tada se za krivu λ kaže da je *asimptota* krive l. Ako zamislimo da našim krivim odgovaraju određeni procesi, proces koji odgovara asimptoti je *asimptotski proces datog procesa*. Glavni značaj proučavanja asimptota u tome je što ono omogućuje da se, pri dovoljnoj udaljenosti, dati, obično komplikovani, proces zameni asimptotskim, koji je mahom jednostavniji. Ako je asimptota prava linija, ona se zove *pravolinijska asimptota*. Za asimptote se u većini slučajeva misli da su pravolinijske. One, međutim, mogu biti i drugog oblika. Tako, napr., ako uporedimo grane dveju hiperbola, date i konjugovane, svaka od njih može biti smatrana kao asimptota konjugovane i obrnuto.



Sl. 35 — Kriva i njena asimptota

Navešćemo neke primere nepravolinijskih asimptota. Kriva čija je jednačina $r = a(1 - e^{-\theta})$, gde su r i θ polarne koordinate, a a stalna dužina, nema za pozitivne vrednosti θ granu koja ide u beskonačnost. Kad $\theta \to \infty$, kriva vrši beskrajno mnogo zavoja oko pola. Ona se stalno nalazi u krugu poluprečnika a, no stalno se smanjuje rastojanje tačke od kružne linije, koje iznosi $ae^{-\theta}$ i, kako $\theta \to \infty$, ono teži nuli. Ovaj proces je *asimptotski kružni proces*.

Najzad, može asimptota degenerisati i u tačku. Tako, kriva sa jednačinom $r = ae^{-\theta}$ ima za asimptotu tačku — pol sistema, jer rastojanje tačke krive od pola stalno opada i teži nuli kad $\theta \to \infty$. Znači, za dovoljno veliku vrednost ugla θ možemo uočenu krivu zameniti asimptotom, jednostavno stavljajući $r = 0$.

Pokazaćemo kako se određuju pravolinijske asimptote krive određene algebarskom jednačinom. Pri ovom određivanju treba razlikovati dva slučaja.

I. *Asimptote paralelne koordinatnim osama.* Pretpostavimo da jednačinu krive $F(x,y)=0$ možemo rešiti po y i napisati u obliku $y=f(x)$. Ako y ima određenu graničnu vrednost b kad $x\to\infty$, jednačina $y=b$ određuje pravolinijsku asimptotu paralelnu osi x. Tako kod krive (sl. 34) sa jednačinom $y(x^2-1)+x^2+1=0$, pošto ovu rešimo po y, imamo $y=(1+x^2):(1-x^2)$. Kad $x\to\infty$, ovaj količnik ima stalnu vrednost $y=b=-1$. Prema tome kriva ima asimptotu paralelnu osi x na rastojanju 1 ispod te ose. Drugim rečima, izvođenje ovog rezultata mogli bismo ovako objasniti. Za funkciju $f(x)=(1+x^2):(1-x^2)$ treba da postoji takva konstantna vrednost b da bude zadovoljena jednačina

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1+x^2}{1-x^2}-b\right]=0.$$

Pri tome sa funkcijom $f(x)=(1+x^2):(1-x^2)$ možemo vršiti za konačne vrednosti x, sem $x=1$, sve dozvoljene algebarske operacije. Prema tome transformišimo gornji količnik ovako: $(1+x^2):(1-x^2)=\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\left(\frac{1}{x^2}-1\right)$. Zatim izvršimo prelaz na graničnu vrednost:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}-1},$$

po pravilima za određivanje graničnih vrednosti. Pošto je $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$, imamo definitivno jednačinu $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-1=b$, koja potvrđuje ranije dobiveni rezultat.

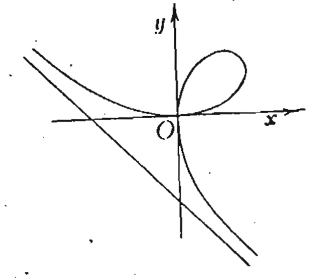
Za određivanje asimptota paralelnih osi y možemo postupiti na način sličan prethodnom, rešavajući jednačinu $F(x,y)=0$ po x i određujući vrednost x kad $y\to\infty$, ili određujući x neposredno iz izraza za y. Pošto je u našem primeru y izraženo razlomkom, y teži beskonačnosti za one vrednosti x za koje imenilac uzima vrednost nulu, a brojilac pri tome ostaje različit od nule. Pošto za $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ imenilac teži nuli kad x^2 teži jedinici, dok brojilac pri tome teži 2, možemo napisati

$$\lim_{x^2\to1}y=\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)_{x^2\to1}\to\infty,$$

i zaključiti da data kriva ima dve asimptote paralelne y osi i to: $x=+1$ i $x=-1$. Prema tome kriva na sl. 34 ima tri asimptote, pri čemu svaka asimptota, kao i kod hiperbole sa jedne i sa druge strane služi kao asimptota odgovarajuće beskonačne grane date krive.

II. *Asimptote koje nisu paralelne koordinatnim osama.* Pretpostavimo da kriva $y=f(x)$ ima beskonačnu granu za koju i x i y teže beskonačnosti. Potražimo asimptotu u obliku prave sa jednačinom $Y=ax+b$. Iz uslova da rastojanje između odgovarajućih tačaka krive i njene asimptote teži nuli sleduje da i razlika $y(x)-Y(x)$ treba da teži nuli, kad x teži beskonačnosti. Prema tome imamo osnovni uslov za asimptotu date krive $[y(x)-Y(x)]\underset{x\to\infty}{\to}0$. Do prelaza na graničnu vrednost možemo napisanu razliku podeliti konačnom vrednošću x i to bilo na kom pozitivnom stepenu. Posle tog deljenja i prelaza na graničnu vrednost, ako uzmemo u obzir da je $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0$, dolazimo prema osnovnom uslovu do jednačine $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}$. Pošto odredimo a, vraćamo se osnovnom uslovu, pa iz njega, po prelazu na granične vrednosti, određujemo i b, naime $b=\lim\limits_{x\to\infty}[y(x)-ax]$.

Ako je kriva data jednačinom $F(x,y)=0$, treba u datu jednačinu staviti vrednost $y=ax+b$. Dobijenu jednačinu $F(x,ax+b)=0$ možemo transformisati, smatrajući x kao konačnu veličinu. Zatim prelazimo na uslove za x i b u graničnoj formi. Objasnićemo ovo na primeru kako se određuju asimptote Dekartova lista (sl. 36), čija je jednačina $x^3+y^3-3qxy=0$. Stavimo li u ovu jednačinu $y=ax+b$ dobijamo,



Sl. 36 — Dekartov list

$$(1)\quad (1+a^3)x^3+3a(ab-q)x^2+3b(ab-q)x+b^3=0.$$

Ako ovu jednačinu podelimo sa x^2 i pređemo na granične vrednosti, zbog uslova $x \to \infty$, svi članovi, sem prvog, moraju biti jednaki nuli; prema tome ćemo za prvi uslov imati $1+a^3=0$. Odavde nalazimo vrednost ugaonog koeficijenta prave: $a=-1$. No pod ovim uslovom jednačinu (1) možemo napisati

$$3(b+q)x^2-3(b+q)x+b^3=0.$$

Ako ovu jednačinu podelimo sa x^2 i pređemo na granične vrednosti pod uslovom $x \to \infty$, dobićemo jednačinu $b+q=0$, iz koje se određuje $b=-q$. Tako vidimo da Dekartov list ima asimptotu sa jednačinom $y=-x-q$.

Obratimo pažnju da postupak koji dovodi do jednačina za određivanje a i b, putem izjednačenja sa nulom koeficijenata uz dva najviša stepena po x, može biti primenjen uopšte na algebarske krive. Ako je, recimo, drugi koeficijent identično jednak nuli, treba izjednačiti sa nulom treći koeficijent. Ako dobivene jednačine imaju rešenja, kriva ima jednu ili više asimptota.

Vežbanja:

Odrediti asimptote krive sa jednačinom:

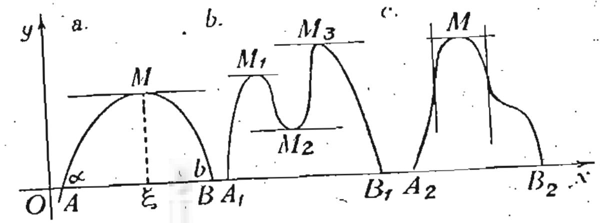
1. $y=e^{-x^2}$; 2. $y=\log x$; 3. $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$ (cisoida); 4. $x^2y^2=a^2(x^2+y^2)$; 5. $(x-2)^2(y-1)=1$; 6. $x^2y=4a^2(2a-y)$; 7. $x^3+2x^2y-xy^2-2y^3+4y^2+2xy+y=1$.

2.7. Rolova, Lagranževa, Košijeva i teorema o srednjoj vrednosti

Data je kriva (sl. 37, a i b), koja u dvema tačkama A i B, odnosno A_1 i B_1, seče x osu. Neka za svaku tačku ove krive postoji određena tangenta, i pri tom je tačka sa tangentom paralelnom osi y prevojna tačka (sl. 37, c). Tada se neposredno sa slike može videti da za krivu koja ne odlazi u beskonačnost važi *Rolova teorema* koja glasi:

Ako jednoznačna konačna neprekidna funkcija jedne promenljive ima na granicama određenog intervala vrednosti jednake nuli (ili bilo kakve druge, ali jednake vrednosti) i u unutrašnjosti tog intervala ima određeni izvod bilo konačan, bilo beskonačan u prevojnim tačkama, tada izvod te funkcije bar jedanput u tom intervalu ima vrednost nula.

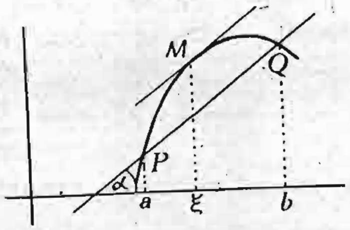
Zaista, između tačaka A i B krive postoji bar jedna tačka M, za koju je tangenta paralelna osi x, što znači da je izvod funkcije jednak nuli. Tih tačaka, kako se vidi na slici 37, b, može biti i više. Slučajevi a. i b. se odnose na krive



Sl. 37 — **Rolova teorema**

kad za izvod $y'(x)$, kao ugaoni koeficijent tangente, možemo kazati da je u svima tačkama konačan. Međutim slučaj c. pokazuje da Rolova teorema važi i za funkcije čiji izvod postaje beskonačan, pa čak i više puta u odgovarajućem intervalu. No to može da bude pri specijalnom položaju krive u odnosu na takvu tangentu paralelnu osi, npr. za slučaj prevojne tačke.

Iz Rolove teoreme sleduje da, ako je kriva data jednačinom $y=f(x)$ i $f(a)=0, f(b)=0$, onda postoji tačka sa apscisom ξ (ksi) između a i b, tako da je $f'(\xi)=0$.



Sl. 38 — Lagranževa teorema

Uzmemo li tačke preseka P i Q krive ne sa osom x, već sa sečicom PQ (sl. 38), koja koso stoji prema osi x, možemo formulisati teoremu sličnu Rolovoj, koja se zove *Lagranževa teorema*.

Geometrijski ona izražava da, pod uslovima za funkciju $f(x)$, analognim onima u Rolovoj teoremi, u intervalu od P do Q postoji tangenta paralelna sečici. Analitički se to izražava

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)=\operatorname{tg}\alpha. \tag{1}$$

Jasno je da iz Lagranževe teoreme neposredno sleduje Rolova teorema: stavimo li u (1) $f(b)=f(a)=0$, imamo $f'(\xi)=0$.

Radi ilustracije uzmimo ovaj primer iz meteorologije. 1958. godine 27-og marta temperatura vazduha T je iznosila u Beogradu u podne 6°C, a 29-og u isto vreme iznosila je na istom mestu 16°C. Koliko je bilo srednje dnevno povećanje temperature? Zadatak se rešava pomoću jednostavnog obrasca:

$$\frac{T(29)-T(27)}{29-27}=\frac{16^\circ-6^\circ}{2}=5^0.$$

Toliko je bilo povećanje temperature u toku jednog dana Na osnovu ovog rezultata sad možemo odgovoriti i na pitanje: a kolika je temperatura bila 28. marta u isto vreme. Od 27-og marta ona se povećavala, polazeći od temperature 6°, za 5°, znači iznosila je $6^\circ+5^\circ=11^\circ$. A odgovara li to stvarnosti? Iz posmatračke beležnice vidimo da je mesto 11°, temperatura bila samo 10°. Ovo znači da ponašanje prirode nije bilo isto prvog i drugog dana. Pokušajmo ipak da, radi proveravanja našeg rezultata, izračunamo po našem obrascu temperaturu narednog dana — 29-og marta. Nalazimo $11^\circ+$ $+5^\circ=16^\circ$. Vidimo prema tome da Lagranžev obrazac izražava srednji priraštaj funkcije $f(x)$, računat na jedinicu argumenta funkcije. Stoga se Lagranževa teorema ujedno zove i *teorema o srednjoj vrednosti funkcije*.

Iz obrasca (1) neposredno sleduje obrazac

$$\boxed{f(b)=f(a)+(b-a)f'(\xi),}$$

koji se takođe zove *Lagranžev obrazac*.

Ako sa x označimo vrednost promenljive u intervalu $[a, b]$ i sa $x+h\ (h>0)$ drugu vrednost iste promenljive, iz prethodnog obrasca možemo napisati

$$(2)\qquad \boxed{f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h),}$$

gde je θ (čitaj teta) broj koji zadovoljava uslove $0<\theta<1$, dakle ima vrednost pravog razlomka. Napisani obrazac daje tačan izraz za konačan priraštaj funkcije. U tom obrascu vrednost θ ne može biti izabrana unapred, jer ona zavisi kako od priraštaja argumenta h, tako i od prirode funkcije. Na

osnovu tog tačnog izraza možemo napisati i niz približnih izraza za konačni priraštaj funkcije, kad uzmemo unapred izabranu vrednost θ i označimo je sa θ_1. Tada možemo napisati

$$f(x+h)-f(x)\approx hf'(x+\theta_1 h),$$

specijalno, možemo napisati ova dva važna približna obrasca za

$$f(x+h)-f(x)\approx hf'(x),$$
$$f(x+h)-f(x)\approx hf'(x+h),$$

za koje se pretpostavlja da na granicama intervala funkcija $f(x)$ ima unutrašnje izvode.

Izvedimo još tzv. *Košijev obrazac*

$$(3)\qquad \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

koji važi pod ovim uslovima: 1. funkcije $f(x)$ i $\varphi(x)$ treba da budu konačne, neprekidne funkcije u intervalu $[a, b]$; 2. te funkcije u intervalu $[a, b]$ treba da imaju konačne izvode $f'(x)$ i $\varphi'(x)$ i 3. $\varphi'(\xi)\neq 0$, ξ je vrednost argumenta u istom intervalu. Važno je primetiti da ξ ima istu vrednost u brojiocu i imeniocu. Za dokaz obrazujmo funkciju

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}[\varphi(x)-\varphi(a)].$$

Proverimo da li funkcija $F(x)$ zadovoljava uslove Rolove teoreme. Vidimo da je $F(a)=0$, $F(b)=0$; zatim izvod

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(x)$$

ima određenu konačnu vrednost. Prema tome možemo tvrditi da postoji takva vrednost ξ za koju je $F'(\xi)=0$, a to daje

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(\xi)=0,$$

odakle, uz dopunski uslov $\varphi'(\xi)\neq 0$, koji smo postavili, sleduje gore navedeni Košijev obrazac (3).

Košijevoj teoremi takođe se može dati geometrijsko tumačenje. Veličina ξ se može dobiti grafički, kao apscisa tačke preseka dve krive: jedne sa ordinatom $f'(x)$ i druge sa ordinatom $k\varphi'(x)$, gde je k konstanta sa vrednošću $k=[f(b)-f(a)]:[\varphi(b)-\varphi(a)]$. Ovo jednostavno geometrijsko tumačenje ukazuje na put za približno grafičko određivanje veličine ξ.

Ako iz intervala $[a, b]$ izdvojimo interval $[x, x+h]$, Košijev obrazac za funkcije $f(x)$ i $\varphi(x)$ je

$$(4)\qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)}=\frac{f'(x+\theta h)}{\varphi'(x+\theta h)}\quad \text{sa } 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

Ako za neku vrednost x imamo $f(x)=\varphi(x)=0$, ovaj obrazac daje $f(x+h):\varphi(x+h)=f'(x+\theta h):\varphi'(x+\theta h)$. Ako je i $f'(x)=\varphi'(x)=0$, dobićemo obrazac sa izvodima drugog reda na desnoj strani. Naposletku, ako tek n-ti izvodi nisu jednaki nuli imamo obrazac

$$(5)\qquad \frac{f(x+h)}{\varphi(x+h)}=\frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{\varphi^{(n)}(x+\theta h)},$$

pri čemu treba još da bude ispunjen i uslov $\varphi^{(n)}(x+\theta h)\neq 0$. Dobiveni obrazac je *generalisani Košijev obrazac.*

Napominjemo da u obrascu (5) x treba smatrati kao konstantu, a h kao promenljivu; tako, npr., može se za $x=0$ napisati jednačina $f(h):\varphi(h)=f^{(n)}(\theta h):\varphi^{(n)}(\theta h)$ pod uslovima da su vrednosti funkcija $f(h)$ i $\varphi(h)$ i odgovarajućih izvoda, sem izvoda n-og reda, jednake nuli.

Vežbanja:

1. Potvrditi tačnost Rolove teoreme na funkcijama: a). $y=(x-1)(x-2)$; b). $y=x^3-x$; c). $y=\sin x$.

2. Ispitati vrednost izvoda funkcije određene jednačinom $y=+\sqrt{x(2-x)}$ u intervalu $[0, 2]$ i jednačinom $y=-\sqrt{(x-2)(4-x)}$ u intervalu $[2, 4]$ i potvrditi istinitost Rolove teoreme za funkciju y u intervalu $[0, 4]$.

3. Potvrditi tačnost Lagranževe teoreme za funkciju $y=\sin x$ u intervalu od $x=\dfrac{\pi}{6}$ do $x=\dfrac{\pi}{4}$.

4. Ispitati vrednost izvoda funkcije određene jednačinom $y=+\sqrt{x(2-x)}$ u intervalu $[0, 2]$ i jednačinom $y=-\sqrt{(x-2)(4-x)}$ u intervalu $[2, 4]$ i primeniti Rolovu teoremu na tu funkciju datu u intervalu od $x=0$ do $x=4$.

2.71. Tejlorov i Maklorenov obrazac

U prethodnoj tački dali smo obrazac za konačni priraštaj funkcije u obliku

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h).$$

U tom obrascu se upoređuju vrednosti funkcije, za dve različite vrednosti argumenta, i njihova razlika izražava linearnom funkcijom priraštaja argumenta. Prirodno se postavlja pitanje kako da se ta razlika izrazi tačnijom funkcijom, naime polinomom nekog višeg stepena. Smatra se da je prvi taj zadatak rešio, 1715. godine, matematičar *Bruk Tejlor* (1685 — 1731). On je predložio obrazac, koji sad nosi naziv *Tejlorov obrazac*, i izgleda ovako:

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{1}{3!}h^3f'''(x)+\cdots+$$
$$+\frac{1}{(h-1)!}h^{n-1}f^{(n-1)}(x)+R_n,$$

gde su: h — priraštaj argumenta; za proizvoljan ceo broj i, izraz $i!=1.2.3\ldots i$, tj. faktorijela; $f^{(i)}(x)$, i-ti izvod funkcije $f(x)$ i R_n tzv. *ostatak*, čija je vrednost $R_n=\dfrac{1}{n!}h^nf^{(n)}(x+\theta h)$,

gde je θ pravi razlomak.

Proučimo, prvo, na konkretnom primeru, tzv. *Tejlorov polinom*. U tu svrhu uzmimo neki jednostavni polinom, recimo, $p_2=a_0+a_1x+a_2x^2$ i izračunajmo

$$p_2(x+h)=a_0+a_1(x+h)+a_2(x+h)^2=$$
$$=a_0+a_1x+a_2x^2+h(a_1+2a_2x)+h^2a_2.$$

Pogledajmo sad na član bez h i na koeficijente uz h i h^2. Član bez h ima vrednost $p_2(x)$. Koeficijent uz h ne predstavlja drugo već izvod $p_2'=a_1+2a_2x$, a uz h^2 — polovinu drugog izvoda $p_2''=2a_2$. Prema tome je

$$p_2(x+h)=p_2(x)+hp_2'(x)+\frac{h^2}{2}p_2''(x).$$

Tako smo za polinom $p_2(x+h)$ dobili nov polinom iste vrednosti, ali u drugom obliku. Označimo ga sa $T_2(x+h)$. Dobivamo ga po ovom pravilu

$$T_2(x+h)=p_2(x+h)=p_2(x)+hp_2'(x)+\frac{1}{2}h^2p_2''(x).$$

Za $p_3(x)=p_2(x)+a_3x^3$ imali bismo posle jednostavnih računa

$$T_3(x+h)=p_3(x+h)=p_3(x)+hp_3'(x)+\frac{h^2}{2!}p_3''(x)+\frac{h^3}{3!}p_3'''(x).$$

Ne bi bilo teško dokazati metodom matematičke indukcije, prelazom od polinoma $(n-1)$-og stepena na polinom n-og stepena, da uopšte imamo ovaj obrazac za polinom $p_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ proizvoljnog n-og stepena

$$p_n(x+h)=T_n(x+h),$$

gde je

$$T_n(x+h)=p_n(x)+\frac{h}{1!}p_n'(x)+\frac{h^2}{2!}p_n''(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}p_n^{(n)}(x).$$

Polinom oblika $T_n(x+h)$ zove se *Tejlorov polinom za polinom* $p_n(x)$ *n-og stepena po promenljivoj* h. Za svaki polinom $p_n(x)$ n-og stepena po x, Tejlorov polinom n-og stepena po h *tačno*, ali u drugom obliku, predstavlja polinom $p_n(x+h)$.

Uzmimo sad proizvoljnu funkciju $f(x)$, konačnu, neprekidnu, koja ima u intervalu $[a, b]$ sve izvode, do n-og uključno, konačne i neprekidne. Za takvu funkciju možemo obrazovati Tejlorov polinom $(n-1)$-og stepena

$$T_{n-1}(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x).$$

Nasuprot polinomu $p_{n-1}(x)$, kad je razlika $p_{n-1}(x+h)-T_{n-1}(x+h)$ identički jednaka nuli, u slučaju proizvoljne

funkcije $f(x)$ razlika $f(x+h)-T_{n-1}(x+h)$ neće biti jednaka nuli. Označimo je sa $R_n(x,h)$. Drugim rečima stavimo $f(x+h)-T_{n-1}(x+h)=R_n(x,h)$. Za određivanje te razlike iskoristimo Košijev obrazac [(5), 2.7].

Za funkciju $f(x+h)$ tog obrasca obrazujmo funkciju $F(x+h)=f(x+h)-T_{n-1}(x+h)$, a za funkciju $\varphi(x+h)$ uzmimo funkciju $\Phi(x+h)=(x+h)^n-T_{n-1}^*(x+h)$, gde je $T_{n-1}^*(x+h)$ Tejlorov polinom za funkciju $\varphi(x)=x^n$. Pošto je taj polinom jednak $x^n+nhx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}h^2x^{n-2}+\ldots+nh^{n-1}x$, funkcija $\Phi(x+h)=h^n$. Pošto funkcije $F(x+h)$ i $\Phi(x+h)$ zadovoljavaju uslove generalisanog Košijeva obrasca (5), možemo napisati

$$\frac{F(x+h)}{\Phi(x+h)}=\frac{f(x+h)-T_{n-1}(x+h)}{h^n}=\frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{n!}.$$

Odavde sleduje *Tejlorov obrazac*

$$\boxed{f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)} \tag{6}$$

sa ostatkom u obliku $R_n=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)$.

Ako u Tejlorovu obrascu uzmemo sve članove Tejlorova polinoma i ostatak R_n sa potrebnom vrednošću θ, obrazac je tačan. Ako uzmemo samo Tejlorov polinom bez ostatka, taj polinom, bez dopunskog proučavanja ostatka ne može poslužiti ni za približno izračunavanje vrednosti funkcije za novu vrednost argumenta. Za pravilno približno izračunavanje treba odrediti granice između kojih se nalazi ostatak Tejlorova obrasca.

U teoriji redova kratko ćemo izneti ulogu Tejlorova obrasca u njoj.

Ako u obrascu (6) stavimo nove oznake: x zamenimo nulom, a to je moguće, jer je x igralo ulogu konstante, a h označimo sa x, jer tako obično označavamo promenljive, dobićemo tzv. *Maklorenov obrazac*

(7) $$\boxed{f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{1}{2!}x^2f''(0)+ +\frac{1}{3!}x^3f'''(0)+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}f^{(n-1)}(0)+R_n,}$$

gde je $R_n=\frac{1}{n!}x^nf^{(n)}(\theta x)$.

Navešćemo još neke obrasce koji se često upotrebljuju, a neposredno sleduju iz Tejlorova i Maklorenova obrasca.

Kako je $f(x+h)-f(x)=\Delta y$, ako je $f(x)=y$, sa oznakom $\Delta x=dx=h$ možemo napisati $\Delta y=\Delta x\cdot f'(x)+\frac{1}{2!}(\Delta x)^2f''(x)+ +\ldots+R_n$.

Uzimajući sad u obzir da je: $dy=dx\cdot f'(x)$, $d^2y=dx^2\cdot f''(x)$ itd. imaćemo konačno $\Delta y=dy+\frac{1}{2!}d^2y+\frac{1}{3!}d^3y+\ldots+ +R_n$, gde je R_n odgovarajući diferencijalni oblik ostatka. Računamo li promenljivu x od nule, dobićemo i odgovarajući obrazac iz Maklorenova obrasca.

Navešćemo bez izvođenja nekoliko članova Tejlorova obrasca za slučaj funkcije $f(x, y)$ dveju nezavisno promenljivih x i y. Sa članovima drugog stepena i ostatkom imamo

(8) $$f(x+h, y+k)=f(x, y)+h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+ +\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)+R_3.$$

2.8. Neodređeni izrazi

Pretpostavimo da treba izračunati vrednost izraza (1) $y=(x^2-4):(x-2)$ za $x=2$. Stavimo li neposredno u taj izraz $x=2$, imaćemo i u brojiocu i u imeniocu nulu, tako da izraz

dobiva oblik $\frac{0}{0}$. Taj izraz nema određene vrednosti, jer ako svaku proizvoljnu, prema tome neodređenu vrednost y. Uzmemo li, međutim, vrednosti gornjeg količnika $(x^2-4):(x-2)$ za $x_1=2,1$; $x_2=2,01$; $x_3=2,001$ itd., odmah ćemo primetiti da se za $x\neq 0$ skraćuje sa $x-2$, tako da imamo $y=x+2$, a to daje $y_1=4,1$; $y_2=4,01$; $y_3=4,001$ itd.. Prema tome je prirodno da se zaključi da, kad x teži vrednosti 2, y teži vrednosti $x+2=4$. Iz ovog konkretnog primera zaključujemo da sa količnikom dve funkcije $f(x):\varphi(x)$, koji za određenu vrednost $x=a$ ima oblik $\frac{0}{0}$, možemo, pre stavljanja u njega $x=a$, vršiti sve dozvoljene operacije. Dodajmo da neodređeni izraz oblika $\frac{0}{0}$ igra kapitalnu ulogu u Višoj matematici. Tako se, npr., određivanje svakog izvoda osniva na određivanju prave vrednosti količnika $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, oblika $\frac{0}{0}$, za $\Delta x=0$. Pokazaćemo jednu opštu metodu za određivanje prave vrednosti takvih količnika, ako takva vrednost zaista postoji.

Uzmimo da treba naći pravu vrednost količnika (2) $y=f(x):\varphi(x)$, za $x=a$, pod uslovima da je (3) $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$. Rasuđivanja koja smo primenili pri rešavanju prethodnog primera navode na misao da treba obrazovati količnik (4) $f(x+h):\varphi(x+h)$ i preći na graničnu vrednost kad $h\to 0$, dakle izračunati

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)}{\varphi(x+h)},$$

s tim da do prelaza na graničnu vrednost možemo sa količnikom vršiti sve dozvoljene operacije. Prema Košijevoj teoremi možemo staviti

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)}.$$

A kako je u ovom slučaju $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$, naš količnik se transformiše u

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}=\frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)}.$$

Pošto izvršimo operacije preći ćemo na graničnu vrednost

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)}=\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Tako smo došli do ovog formalnog pravila sa uobičajenim formalnim oznakama

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\frac{0}{0}=\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}.$$

Ovim se izražava tzv. *Lopitalovo* (L'Hospital) pravilo[1]), koje glasi:

Za određivanje prave vrednosti količnika $f(x):\varphi(x)$, *za* $x=a$ *kada je* $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$, *treba diferencirati posebno brojilac i posebno imenilac, pa u dobiveni količnik staviti* $x=a$. *Ako ovaj količnik ima određenu vrednost, ona predstavlja i pravu vrednost polaznog količnika; ako ponovo dobijemo neodređeni oblik* $0:0$, *treba Lopitalov postupak ponoviti.*

Primetimo da je ovo posebno diferenciranje brojioca i imenioca dozvoljeno samo u slučaju neodređenosti količnika. Zato je pre tog posebnog diferenciranja zgodno staviti izraz $\frac{0}{0}$ kao simboličku oznaku pravdanja posebnog diferenciranja.

Rešimo nekoliko zadataka.

Primeri:

1. $\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)_{x=2}=\frac{0}{0}=\left(\frac{2x}{1}\right)_{x=2}=4.$

2. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)_{x=0}=\frac{0}{0}=\left(\frac{\cos x}{1}\right)_{x=0}=1.$

---

[1] Ovo bi trebalo zvati ***Bernulijevim pravilom***, jer ga je Johan Bernuli (Joh. Bernoulli) 1694. godine saopštio Lopitalu u jednom pismu.

3. $\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)_{x=0}=\frac{0}{0}=\left(\frac{\sin x}{2x}\right)_{x=0}=\frac{0}{0}=\left(\frac{\cos x}{2}\right)_{x=0}=\frac{1}{2}.$

4. $\left(\frac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{x^3}\right)_{x=0}=\frac{0}{0}=\left(\frac{e^x-1-x}{3x^2}\right)_{x=0}=\frac{0}{0}=\left(\frac{e^x-1}{2\cdot 3x}\right)_{x=0}=$

$=\frac{0}{0}=\left(\frac{e^x}{3!}\right)_{x=0}=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}.$

Ima i drugih neodređenosti koje mogu biti svedene na oblik $\frac{0}{0}$.

Ako imamo količnik (5) $y=f(x):\varphi(x)$, koji treba izračunati za $x=a$, pri čemu je (6) $f(a)=\infty$, $\varphi(a)=\infty$, lako je pokazati da i za taj količnik važi Lopitalovo pravilo, naime

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\frac{\infty}{\infty}=\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}$$

Zaista, količnik (5) možemo napisati u obliku $y=\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right):\left(\frac{1}{f(x)}\right)$; za $x=a$ on, prema (6), dobija oblik $\frac{0}{0}$, te tako na njega možemo primeniti Lopitalovo pravilo:

$$y_{x=a}=\left[\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right):\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right]_{x=a}=\frac{0}{0}=\left[\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)':\left(\frac{1}{f(x)}\right)'\right]_{x=a}=$$

$$=\left[-\frac{\varphi'}{\varphi^2}:-\frac{f'}{f^2}\right]_{x=a}=\left[\frac{f^2}{\varphi^2}\cdot\frac{\varphi'}{f'}\right]_{x=a}=\left\{y^2\left[\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\right]\right\}_{x=a}$$

Odavde konačno dobivamo

$$y_{x=a}=\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\frac{\infty}{\infty}=\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}$$

Primeri:

1. $y=\left(\frac{1-2x-x^2}{5x^2+1}\right)_{x=\infty}=\frac{\infty}{\infty}=\left(\frac{-2-2x}{10x}\right)_{x=\infty}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{-2}{10}=-0{,}2.$

7*

$$2.\ y=\left(\frac{x+\log x}{x\log x}\right)_{x=\infty}=\frac{\infty}{\infty}=\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{\log x+1}\right)_{x=\infty}=\frac{1}{\infty}=0.$$

$$3.\ y=\left(\frac{\log \operatorname{tg} x}{\log \operatorname{tg} 2x}\right)_{x=0}=\frac{\infty}{\infty}=\left\{\frac{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x\cos^2 x}}{\dfrac{2}{\operatorname{tg} 2x\cos^2 2x}}\right\}_{x=0}=\left(\frac{\sin 4x}{2\sin 2x}\right)_{x=0}=$$

$$=\frac{0}{0}=\left(\frac{4\cos 4x}{4\cos 2x}\right)_{x=0}=1.$$

Na isti način se izračunavaju i prave vrednosti izraza koje simbolično možemo predstaviti ovako:

$$0\cdot\infty;\ 0^0;\ \infty^0;\ 1^\infty;\ \infty-\infty.$$

Svaki od njih može se transformisati u izraz $\frac{0}{0}$. Pokazaćemo to simbolički.

$$0\cdot\infty=0:\frac{1}{\infty}=0:0;\quad \infty_1-\infty_2=\infty_1\left(1-\frac{\infty_2}{\infty_1}\right)=\infty_1\cdot 0=0:0$$

i tako se svode na prethodni slučaj, pod uslovom $\left(\frac{\infty_2}{\infty_1}\right)\to 1$.

Za sve slučajeve koji stoje u vezi sa funkcijom oblika $y=u^v$ treba prvo ovu jednačinu logaritmovati, i to za prirodnu osnovu, $\log y=v\log u$. Desna strana je sad prešla u neodređenost $0\cdot\infty$. Ako izračunamo njenu pravu vrednost A, iz $\log y=A$ dobićemo vrednost $y=e^A$.

Primeri:

$$1.\ y=(x\log x)_{x=0}=0\cdot\infty=\left(\frac{\log x}{\left(\frac{1}{x}\right)}\right)_{x=0}=\frac{-\infty}{\infty}=\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right)_{x=0}=$$

$$=(-x)_{x=0}=0.$$

$$2.\ y=\left[(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x\right]_{x=1}=0\cdot\infty=\left(\frac{1-x}{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}x}\right)_{x=1}=\frac{0}{0}=$$

$$=\left(\frac{-1}{-\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}x}}\right)_{x=1}=\frac{2}{\pi}.$$

$3.\ y=(x^x)_{x=0}=0^0;\ \log y=(x\log x)_{x=0}=0$ (vidi primer 1); $y=e^0=1.$

$$4.\ y=\left[(1+x)^{\frac{1}{\log x}}\right]_{x=\infty}=\infty^0;\quad \log y=\left[\frac{1}{\log x}\cdot\log(1+x)\right]_{x=\infty}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\left[\frac{(1+x)^{-1}}{x^{-1}}\right]_{x=\infty}=\left(\frac{x}{1+x}\right)_{x=\infty}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{1}{1}=1;\ y=e^1=e.$$

$$5.\ y=\left(x^{\frac{1}{1-x}}\right)_{x=1}=1^\infty;\quad \log y=\left(\frac{1}{1-x}\cdot\log x\right)_{x=1}=\frac{0}{0}=$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{x}}{-1}\right)_{x=1}=-1;\ y=e^{-1}=1:e.$$

$$6.\ y=\left(\frac{1}{\log x}-\frac{x}{x-1}\right)_{x=1}=\infty-\infty=\left[\frac{x-1-x\log x}{(x-1)\log x}\right]_{x=1}=\frac{0}{0}=$$

$$=\left[\frac{1-1-\log x}{\log x+\dfrac{x-1}{x}}\right]_{x=1}=-\left[\frac{x\log x}{x\log x+x-1}\right]_{x=1}=-\left[\frac{\log x+1}{\log x+1+1}\right]_{x=1}=-\frac{1}{2}.$$

7. Pokazati da razlika ordinata tačke hiperbole $y_h=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ i tačke njene asimptote $y_a=\frac{b}{a}x$ teži nuli kad $x\to\infty$. Dakle, da:

$$[y_a-y_h]_{x\to\infty}=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)_{x\to\infty}=\infty-\infty=$$

$$=\frac{b}{a}\left[\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right]_{x\to\infty}=\left[\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right]_{x\to\infty}=0.$$

Ovaj primer još na jedan način pokazuje da neodređenost može nastupiti usled toga što je izraz napisan u nezgodnom obliku.

Vežbanja:

1. $\left(\frac{x^2-4x+3}{x-3}\right)_{x=3}$. 2. $\left(\frac{x-1}{x^n-1}\right)_{x=1}$. 3. $\left(\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}\right)_{x=a}$.

4. $\left(\frac{a^x-b^x}{x}\right)_{x=0}$. 5. $\left(\frac{x-\sin x}{x^3}\right)_{x=0}$. 6. $\left(\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}\right)_{x=0}$.

7. $\left(\frac{5x^{15}+2}{10x^{15}+1}\right)_{x=\infty}$. 8. $\left(\frac{x^{10}}{e^x}\right)_{x=\infty}$. 9. $\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}\right)_{x=\frac{\pi}{2}}$.

10. $(x\log\sin x)_{x=0}$. 11. $\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)_{x=1}$. 12. $\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]_{x=0}$.

13. $\left[(1+nx)^{\frac{1}{x}}\right]_{x=0}$. 14. $\left[(\operatorname{cotg} x)^x\right]_{x=0}$.

Glava treća

REDOVI

3.1. Pojam reda

Ako treba pretvoriti običan razlomak, $\frac{1}{3}$, u decimalan broj, treba brojilac deliti imeniocem; u rezultatu tog deljenja dobićemo decimalan periodični razlomak $\frac{1}{3}=0{,}333\ldots=0{,}(3)$. Taj periodični razlomak možemo napisati u obliku zbira

$$\frac{1}{3}=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1\,000}+\ldots=$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\ldots+\frac{3}{10^n}+\ldots,$$

koji sadrži beskrajno mnogo sabiraka, a zbir mu je jednak konačnom broju, jednoj trećini. Sabirak $\frac{3}{10^n}$ predstavlja opštu formulu prema kojoj su obrazovani članovi tog beskonačnog zbira; to je po redu n-ti član reda.

Kao što znamo, članovi gornjeg zbira idu po određenom pravilu. To su članovi geometrijske progresije: svaki naredni član dobiva se iz prethodnog množenjem istim brojem, u našem slučaju brojem $\frac{1}{10}$.

Brojevi, izrazi ili funkcije $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, sastavljeni po određenom pravilu i poređani u određenom redu obrazuju *matematički niz*. Ma koji njegov član u_n zove se *opšti član niza*. Zbir uzastopnih članova niza sačinjava *red*. Ako je broj članova reda konačan, *red* je *konačan*. Ako je taj broj beskonačan i *red* je *beskonačan*.

Od konačnih redova poznati su nam iz Elementarne matematike zbirovi konačnog broja članova *aritmetičke* i *geometrijske progresije*. Članovi aritmetičke progresije dobivaju se po ovom pravilu: $u_i = u_{i-1} + d = u_1 + (i-1)\,d,\ (i = 1,2,3,\dots,n)$, gde je d stalna razlika dva uzastopna člana. Sa n smo označili broj članova progresije. Zbir, s_n, n članova ima, kao što znamo, vrednost $s_n = \dfrac{u_1+u_n}{2}\cdot n = \dfrac{1}{2}\, n\,[2u_1 + (n-1)\,d]$. Pravilo po kome se pišu članovi geometrijske progresije izgleda ovako: $u_i = u_{i-1}\, q = u_1 q^{i-1}$, gde je q stalan odnos između dva uzastopna člana. Zbir, s_n, članova ovoga reda ima vrednost

$$s_n = (u_n\, q - u_1):(q-1) = u_1\,(q^n - 1):(q-1).$$

Od konačnih redova proučićemo još jednu samo kategoriju naročitih konačnih redova. Naime, uzmimo konačan red od n članova, prirodnih brojeva podignutih na isti stepen, označimo njihov zbir sa

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + (n-1)^k + n^k,$$

i pokažimo kako se može izračunati taj zbir, kad je k ceo pozitivan broj i nula. U tu svrhu uzmimo pomoćni izraz, stepen binoma $(a+b)^k$. Razvijen po Njutnovu pravilu, on postaje

$$(a+b)^k = a^k + \binom{k}{1} a^{k-1}b + \binom{k}{2} a^{k-2}b^2 + \dots + \binom{k}{i} a^{k-i}b^i + \dots + \binom{k}{k-2} a^2b^{k-2} + \binom{k}{k-1} ab^{k-1} + \binom{k}{k} b^k,$$

gde su $\binom{k}{i}$ binomni koeficijenti

$$\binom{k}{i} = \frac{k\,(k-1)\dots[k-(i-1)]}{i!}\,,$$

za koje važe ove osobine

$$\binom{k}{i} = \binom{k}{k-i} = \frac{k!}{i!\,(k-i)!}\,.$$

Stavićemo sad $a=1$, $b=n$; tada ćemo dobiti jednačinu

$$(1+n)^k = 1 + \binom{k}{1} n + \binom{k}{2} n^2 + \binom{k}{3} n^3 + \dots + \binom{k}{i} n^i + \dots + \binom{k}{1} n^{k-1} + n^k.$$

Ako u njoj stavimo $n=1$, dobićemo jednačinu koja izražava poznatu osobinu zbira binomnih koeficijenata

$$(1+1)^k = 2^k = 1 + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \dots + \binom{k}{2} + \binom{k}{1} + 1.$$

Kako za $n=1$ za sve vrednosti k imamo $S_k(1) = 1^k = 1$, prethodnu jednačinu možemo i ovako napisati

$$(1)\qquad (1+1)^k = 1 + \binom{k}{1} S_{k-1}(1) + \binom{k}{2} S_{k-2}(1) + \dots + \binom{k}{2} S_2(1) + \binom{k}{1} S_1(1) + S_0(1).$$

Uzmimo sad jednačinu, sličnu (1), za dokaz opšteg obrasca za proizvoljno n

$$(2)\qquad (1+n)^k = 1 + \binom{k}{1} S_{k-1}(n) + \binom{k}{2} S_{k-2}(n) + \dots + \binom{k}{2} S_2(n) + \binom{k}{1} S_1(n) + S_0(n).$$

Primenimo *metodu matematičke indukcije* ili *metodu prelaza od n na $n+1$*. Dokaz nekog stava pomoću te metode sastoji se iz dva dela: 1. Proveravanje tačnosti stava za neku posebnu vrednost celog broja n i 2. Dokaz stava za vrednost $n+1$, ako on važi za n. Pošto smo proverili istinitost jednačine (2) za $n=1$, prvi deo dokaza istinitosti jednačine (2) izvršen je. Dokažimo sad i drugi deo. Dokažimo da je istinita jednačina i za $n+1$

$$(3)\qquad [1+(n+1)]^k = 1 + \binom{k}{1} S_{k-1}(n+1) + \binom{k}{2} S_{k-2}(n+1) + \dots + \binom{k}{2} S_2(n+1) + \binom{k}{1} S_1(n+1) + S_0(n+1).$$

Levu stranu ove jednačine možemo razviti po Njutnovu binomu

$$[(n+1)+1]^k=(n+1)^k+\binom{k}{1}(n+1)^{k-1}+\binom{k}{2}(n+1)^{k-2}+\ldots+\ldots=$$

$$=1+\binom{k}{1}S_{k-1}(n)+\binom{k}{2}S_{k-2}(n)+\ldots,$$

$$+\binom{k}{1}(n+1)^{k-1}+\binom{k}{2}(n+1)^{k-2}+\ldots,$$

onda, uzimajući u obzir da je $S_{k-1}(n)+(n+1)^{k-1}=S_{k-1}(n+1)$ i, uopšte, $S_i(n)+(n+1)^i=S_i(n+1)$, pošto saberemo dolazimo do jednačine (3). A time je izvršen i drugi deo dokaza istinitosti jednačine (2) za svaku vrednost broja n. Iz jednačine (2) sleduje ovaj sistem jednačina za sukcesivno izračunavanje zbirova $S_k(n)$.

$$(1+n)^1=1+S_0, \qquad \text{odakle} \quad S_0=n,$$

$$(1+n)^2=1+2S_1+S_0, \qquad \text{odakle} \quad S_1=\frac{1}{2}n(n+1),$$

$$(1+n)^3=1+3S_2+3S_1+S_0,$$

$$\text{odakle} \quad S_2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

$$(1+n)^4=1+4S_3+6S_2+4S_1+S_0,$$

$$\text{odakle} \quad S_3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2,$$

$$(1+n)^5=1+5S_4+10S_3+10S_2+5S_1+S_0,$$

$$\text{odakle} \quad S_4=\frac{n}{30}(6n^4+15n^3+10n^2-1),$$

$$(1+n)^6=1+6S_5+15S_4+20S_3+15S_2+6S_1+S_0,$$

$$\text{odakle} \quad S_5=\frac{n^2}{12}(2n^4+6n^3+5n^2-1).$$

U daljim izlaganjima govorićemo samo o beskonačnim redovima; zato i nećemo ponavljati reč „beskonačan".

Vežbanja:

1. Izračunati zbirove $S_k(n)=1^k+2^k+3^k+4^k+5^k$ za $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$.
2. Izvesti obrasce za $S_k(2n)=2^k+4^k+\ldots+(2n)^k$ i $S_k(2n-1)=1^k+3^k+\ldots+(2n-1)^k$ za $k=2$ i $k=3$.

3.11. Konvergentnost redova

Ako zbir n članova reda, tzv. delimični zbir, $s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$, teži određenoj konačnoj vrednosti, kada n teži beskonačnosti, red se zove *konvergentan*. U slučaju konvergentnosti, dakle, imamo $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$. Granična vrednost s zove se *zbir* beskonačnog reda. Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\pm\infty$, ili zbir, uopšte, nema granične vrednosti, red je *divergentan*. Navešćemo primer divergentnog reda čiji zbir ne teži beskonačnosti. Red $s_n=1-1+1-\ldots+(-1)^{n+1}$ je divergentan, jer njegov zbir ne teži određenoj graničnoj vrednosti već osciluje, uzimajući naizmenično vrednosti $+1$ i -1. Jasno je da je red beskonačne aritmetičke progresije uvek divergentan, jer je

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\left[nu_1+\frac{1}{2}n(n-1)d\right]\to\infty.$$

Što se tiče beskonačne geometrijske progresije, čiji zbir zavisi od vrednosti reda $1+q+q^2+\ldots$, ona je konvergentna, kada je $|q|<1$, i divergentna, kada je $|q|\geqslant 1$, gde $|q|$ označava apsolutnu vrednost količnika progresije. Za $|q|<1$ zbir beskonačne geometrijske progresije, sa prvim članom a, ima vrednost $s=a:(1-q)$. Red kojim smo predstavili $\frac{1}{3}$ je beskonačna geometrijska progresija, sa prvim članom $\frac{3}{10}$ i količnikom $q=\frac{1}{10}<1$. Prema navedenom obrascu zbir tog reda zaista ima vrednost $\frac{1}{3}$.

Samo u slučaju konvergentnosti reda jednačina $s=u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ ima smisla. Ako u konvergentnom redu izdvojimo delimični zbir prvih n članova i označimo ga sa s_n, zbir svih ostalih članova predstavlja *ostatak reda*, koji označavamo sa R_n. Dakle možemo napisati $s=s_n+R_n$, gde su $s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$, $R_n=u_{n+1}+u_{n+2}\ldots$ Kao što za približnu vrednost beskonačnog decimalnog razlomka uzimamo konačan decimalni razlomak sa određenim brojem decimala, tako isto, mesto ukupne vrednosti zbira svih članova konvergentnog reda, možemo uzeti neki konačni broj članova, neki delimični zbir, koji će približno izražavati vrednost reda. Ako mesto tačne vrednosti, s, uzimamo približnu vrednost, s_n, činimo grešku, jednaku R_n. No ovo važi samo za konvergentne redove. Zato je u teoriji redova osnovno pitanje, da li je red konvergentan ili divergentan.

3.12. Uslovi konvergentnosti

Postavićemo pre svega neophodan uslov za konvergentnost reda.

Ako je red konvergentan, njegov opšti član teži nuli.

Drugim rečima, ako je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$, treba da bude $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$. Zaista, opšti član u_n možemo predstaviti kao razliku $u_n=s_n-s_{n-1}$. Potražimo sad graničnu vrednost leve i desne strane ove jednačine, kad $n\to\infty$. Tada imamo

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=\lim_{n\to\infty} s_n-\lim_{n\to\infty} s_{n-1}=s-s=0,$$

a to je i trebalo dokazati.

Prethodni uslov konvergentnosti reda je neophodan, ali nije dovoljan. Dokažimo ovo. Zato ćemo uzeti red $H=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, koji se zove *harmonijski red**).

*) Svaki član tog reda je, počev od drugog, harmonijska sredina dvaju susednih članova, pri čemu se za broj h kaže da je harmonijska

Opšti član ovoga reda ima vrednost $u_n=\frac{1}{n}$ i prema tome je $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$. Međutim, lako je dokazati teoremu: *Harmonijski red je divergentan.* Zaista, ako smanjimo neke njegove članove i napišemo red

$$H_1=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

koji možemo zameniti redom $H_1=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$ vidimo da je ovaj, manji, zbir jednak beskonačnosti, $H_1=\infty$; prema tome je zbir harmonijskog reda, $H>H_1$, takođe beskonačan; harmonijski red je, dakle, divergentan.

Pošto je uslov $\lim\limits_{n\to\infty} u_n\to 0$ neophodan uslov konvergentnosti, možemo zaključiti da je red divergentan, ako navedeni uslov nije ispunjen.

Pošto je navedeni uslov konvergentnosti redova samo neophodan, no nije i dovoljan, pitanje konvergentnosti ostaje otvoreno. Navedimo sad drugi uslov konvergentnosti, koji je i neophodan i dovoljan. Taj uslov ne predstavlja ništa drugo već ε-uslov u primeni na graničnu vrednost s_n, kao pro-

sredina brojeva a i b, ako je $\frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$. I zaista, za tri naredna člana našeg reda $\frac{1}{n-1}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+1}$ važi identitet $1:\frac{1}{n}\equiv\frac{1}{2}\left[1:\frac{1}{n-1}+1:\frac{1}{n+1}\right]$. Naziv „harmonijski" stoji u vezi sa muzičkim harmonijskim intervalima. Odnosi dva uzastopna člana tog reda jednaki su odnosima brojeva oscilacija tonova tih intervala, naime: $1:\frac{1}{2}=2$ odgovara oktavi, $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$ kvinti, $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}=\frac{4}{3}$ kvarti, $\frac{5}{4}$ velikoj terci, $\frac{6}{5}$ maloj terci, $\frac{7}{8}$ i $\frac{8}{7}$ u muzici se ne upotrebljuju (7 je nemuzikalan broj!), $\frac{9}{8}$ velika sekunda, $\frac{10}{9}$ mala sekunda: odnosi $\frac{16}{15}$ i $\frac{25}{24}$ su veliki i mali poluton.

menljivu veličinu koja zavisi od n i teži graničnoj vrednosti kad n teži beskonačnosti. Taj uslov glasi:

Za konvergentnost beskonačnog reda $u_1+u_2+\ldots$ *neophodno je i dovoljno, ako, za svaki pozitivan proizvoljan unapred dati broj* ε, *uvek možemo naći takav broj* N *da, za svako* $n>N$ *i proizvoljan pozitivan broj* p, *važi nejednačina za apsolutnu vrednost zbira od* p *članova* $|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}|<\varepsilon$.

Na žalost konkretna primena tog uslova, bez obzira na njegov veliki teorijski značaj, vrlo retko može biti iskorišćena.

Red se zove *pozitivan*, ako su svi njegovi članovi pozitivni. Istaći ćemo nekoliko osobina pozitivnih redova.

Pozitivni red je konvergentan, ako za svaku vrednost n delimični red s_n zadovoljava uslov $s_n<A$, gde je A konačan broj. Zaista, delimični zbir s_n pozitivnog reda, kao funkcija od n, uvek raste kad raste broj članova n. Znamo da promenljiva veličina koja raste, a ostaje manja od neke pozitivne veličine, ima graničnu vrednost, a to i potvrđuje navedeni stav.

Npr., red $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$ konvergentan je, jer je $s_n=1+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot n}<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+$

$$+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+$$

$$+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}<2.$$

Važna metoda za određivanje konvergentnosti pozitivnih redova je metoda upoređivanja datog reda sa unapred poznatim konvergentnim redom. Neka su $u_1+u_2+\ldots$ i $v_1+v_2+\ldots$ dva pozitivna reda. Neposredno su očigledna ova dva stava. 1. Ako je za svako n $u_n<v_n$, a red $v_1+v_2+\ldots$ konvergentan, onda je i red $u_1+u_2+\ldots$ konvergentan. 2. Ako je $u_n>v_n$ i red $v_1+v_2+\ldots$ divergentan, onda je i red $u_1+u_2+\ldots$ divergentan.

Sad možemo navesti dovoljan uslov (*Dalamberov kriterijum*) za konvergentnost reda sa pozitivnim članovima. Uzmimo niz pozitivnih članova $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots,$

i uporedimo ga sa beskrajnom geometrijskom progresijom $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots,$ čiji količnik $\frac{v_{n+1}}{v_n}=k$ ima stalnu vrednost nezavisnu od n. Načinimo i za prvi niz isti količnik $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Pretpostavimo da taj količnik ima graničnu vrednost, kad n teži beskonačnosti, tj. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$. Pod takvim uslovima red $u_1+u_2+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots$ liči na beskrajnu geometrijsku progresiju. Upoređivanje sa geometrijskom progresijom dovodi do ove teoreme*).

Ako kod reda sa pozitivnim članovima odnos narednog člana prema prethodnom ima određenu graničnu vrednost i ova je manja od jedinice, red je konvergentan. Ako je veća od jedinice, red je divergentan. Ako je taj količnik jednak jedinici, red može biti ili konvergentan ili divergentan.

---

*) Dokaz ove teoreme može se izvesti na ovaj način. Ako $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$ ima vrednost manju od 1, možemo uvek između q i 1 naći takav broj k da, počev od nekog člana u_p, bude

$$\frac{u_{p+1}}{u_p}<k,\quad \frac{u_{p+2}}{u_{p+1}}<k\ldots$$

i prema tome je

$$u_{p+1}<ku_p,\quad u_{p+2}<k^2u_p,\quad u_{p+3}<k^3u_p,\ldots$$

Tada članove reda

$$(3)\qquad u_1+u_2+\ldots+u_{p-1}+u_p+u_{p+1}+\ldots,$$

počev od p-tog člana, možemo zameniti uvedenim većim veličinama i dobiti zbir

$$u_1+u_2+\ldots+u_{p-1}+u_p(1+k+k^2+\ldots),$$

a ovaj zbir ima za $k<1$ konačnu vrednost

$$u_1+u_2+\ldots+u_{p-1}+u_p\cdot\frac{1}{1-k}.$$

Pošto je zbir našeg reda (3) manji od ove konačne veličine, konvergentnost tog reda je dokazana.

Na sličan način se dokazuje divergentnost reda za slučaj $q>1$. Slučaj $q=1$ zahteva dublju analizu za svaki specijalan red.

Kao primer za primenu Dalamberova kriterijuma uzmimo red $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}+\ldots$, gde je, kao i uvek, $n!$ faktorijela, čija je vrednost $n!=1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)n$. Za taj red, prema Dalamberovu kriterijumu, dobivamo $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1$ i zaključujemo da je red konvergentan.

Ali za red $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots$, čiju smo konvergentnost već dokazali na drugi način, Dalamberov kriterijum ne daje odgovor, jer je za taj red

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2=1.$$

Za red sa pozitivnim članovima možemo navesti i drugi važan uslov konvergentnosti, *Košijev uslov*, koji glasi:

Ako opšti član u_n reda sa pozitivnim članovima, počev od nekog n, zadovoljava uslov $\sqrt[n]{u_n}\leqslant q<1$, gde q ne zavisi od n, red je konvergentan. Obratno, ako $\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1$, red je divergentan.

Zaista, red možemo predstaviti kao zbir konačnog reda prvih $n-1$ članova, koji je konačan, i beskonačnog reda za koji važi, prvo, nejednakost $u_n\leqslant q^n$. Ali taj drugi red možemo uporediti sa geometrijskom progresijom sa količnikom q i, prema tome, ako su članovi našeg reda manji od članova progresije za $q<1$, konvergentni su i geometrijska progresija i naš red, a ako je $\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1$, red je divergentan.

Red se zove *naizmeničan* ako mu uzastopni članovi menjaju znake. Za takav red važi *Lajbnicova teorema: Ako opšti član naizmeničnog reda teži nuli, red je konvergentan.* Pri tome se pretpostavlja da apsolutne vrednosti članova reda monotono opadaju, tj. apsolutna vrednost svakog narednog člana manja je od apsolutne vrednosti prethodnog. Dokaz

Lajbnicove teoreme neposredno sleduje iz proučavanja razlike $S_{2n+1}-S_{2n}$ ($S_1>0$), koja teži nuli kad $n\to\infty$. Prema tome je za naizmenični red uslov $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ ne samo neophodan već i dovoljan. Napr., red

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$$

je konvergentan, jer mu opšti član teži nuli.

Red se zove *apsolutno konvergentan*, ako je konvergentan i red apsolutnih vrednosti njegovih članova.

Tako je red $1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots$ apsolutno konvergentan, jer je red $1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$ modula članova prethodnog reda konvergentan.

Teorema. Apsolutno konvergentan red uvek je konvergentan, tj. ako je red modula $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots$ konvergentan onda je konvergentan i red $u_1+u_2+u_3+\ldots$ bez obzira na to što znaci članova poslednjeg reda mogu biti potpuno proizvoljni. Tako, npr., pošto je red $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$ konvergentan, konvergentan je i red

$$1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\ldots$$

Ako je red konvergentan, ali odgovarajući mu apsolutni red modula divergentan, red se zove *uslovno* ili *ne-apsolutno konvergentan*. Tako je red $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots$ apsolutno konvergentan, jer je red $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots$ konvergentan, a red $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ je uslovno konvergentan, jer je red $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$, kao harmonijski, divergentan.

Karakter konvergentnosti, naročito apsolutna konvergentnost reda igraju vrlo važnu ulogu u rešavanju pitanja o mogućnosti vršenja operacija sa redovima po pravilima sličnim pravilima za polinome. Ne ulazeći u proučavanje ovog pitanja možemo navesti ovo.

1. Zbir apsolutno konvergentnog reda ne zavisi od reda sabiranja članova. Iz te osobine neposredno sleduje da članove takvog reda možemo grupisati, posebno sabirati članove svake grupe i, najzad, sabrati dobijene zbirove pojedinih grupa.

2. Dva apsolutno konvergentna reda mogu se množiti i u rezultatu se dobiva opet apsolutno konvergentni red.

Ako su članovi reda funkcije, npr., argumenta x, red se zove *funkcionalni red*. Ako su članovi funkcionalnog reda stepeni x, red se razvija po stepenima x i zove se *stepeni red*. Sve vrednosti argumenta, za koje je red konvergentan, sačinjavaju *oblast konvergentnosti tog reda*. Za funkcionalne redove vrlo važnu ulogu igra pojam *ravnomerne konvergentnosti reda*, kad su uslovi konvergentnosti reda isti za sve vrednosti argumenta u oblasti konvergentnosti. Ravnomerno konvergentni redovi su naročito važni, zbog toga što sa takvim redovima možemo vršiti, pod izvesnim uslovima, osnovne operacije infinitezimalnog računa — diferenciranje i njoj obrnutu operaciju — integrisanje, i to član po član.

Vežbanja:

1. Upoređivanjem sa geometrijskom progresijom pokazati da je red $1+1/2^2+1/3^2+1/4^2+\ldots+1/n^n+\ldots$ konvergentan.

2. Upoređivanjem sa harmonijskim redom pokazati da je red $1+1/\sqrt{2}+1/\sqrt{3}+\ldots+1/\sqrt{n}+\ldots$ divergentan.

3. Da li je red $1-1/2-1/3-1/4+1/5-\ldots$ apsolutno konvergentan ili nije? Napisati mu opšti član.

4. Zašto su funkcionalni redovi $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$ i $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$ konvergentni? Napisati im opšte članove i utvrditi oblast konvergencije.

5. Dokazati pomoću Dalamberova kriterijuma konvergentnost ovih redova: 1) $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}+\ldots$ 2) $\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}+\ldots$

6. Ispitati konvergentnost redova: 1) $\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots$ 2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{2^2}+\frac{1}{5^2}\cdot\frac{3^2}{3^2}+\frac{1}{5^3}\cdot\frac{3^3}{4^2}+\ldots$ 3) $4-\frac{4}{3^2}-\frac{4}{5^2}-\ldots$ 4) $1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}}+\ldots$ 5) $\frac{3}{2}-\frac{4}{3\cdot 2}+\frac{5}{4\cdot 3}-\frac{6}{5\cdot 4}+\ldots$

3.2. Tejlorov i Maklorenov red. Njihova primena

U članu 2.71 izveli smo tzv. Tejlorov obrazac u obliku

$$f(x+h)=T_{n-1}(x+h)+R_n,$$

ili, ako razvijemo,

$$(1)\qquad f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots+$$

$$+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h),\ \text{gde je } 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

Kako smo već videli, ako je $f(x)$ polinom, prethodni obrazac daje vrednost polinoma $f(x+h)$, razvijena po stepenima h; i, ako je n stepen polinoma, $R_n=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)$, te sa desne strane (1) imamo konačan red sa koeficijentima sastavljenim po određenom pravilu.

Ako funkcija $f(x)$ nije polinom, ali ima redom sve izvode, Tejlorov obrazac dovodi do beskonačnog reda, koji isto tako možemo napisati sa ostatkom i, ako je red konvergentan u određenoj oblasti, on predstavlja funkciju $f(x+h)$ beskonačnim redom koji se zove *Tejlorov red* za funkciju $f(x+h)$.

Na sličan način možemo napisati i *Maklorenov red*

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{1}{3!}x^3f'''(0)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}f^{(n-1)}(0)+R_n,$$

gde je $R_n=\frac{1}{n!}x^nf^{(n)}(\theta x)$.

8*

Jasno je da se Tejlorovim i Maklorenovim redovima možemo samo tada služiti kad su ti redovi konvergentni.

Primenimo Maklorenov obrazac na nekoliko važnijih funkcija.

1. e^x.

Pošto za funkciju $f(x)=e^x$ imamo $f^{(k)}(x)=e^x$, $f^{(k)}(0)=1$, za $k=1,2,3,\ldots\infty$, Maklorenov red daje $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+$ $+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}+\ldots$ Za ispitivanje konvergentnosti ovoga reda po Dalamberovu kriterijumu dobiva se $q=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n(n-1)!}{n!\,x^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{n}=0$. Odatle zaključujemo da je red konvergentan, i to apsolutno konvergentan za svaku konačnu vrednost x; oblast konvergentnosti tog reda se izražava ovako $-\infty<x<+\infty$, pri čemu funkcija e^x teži nuli kad x teži $-\infty$; a kad $x\to+\infty$ i funkcija teži $+\infty$. Za $x=1$ imamo red za izračunavanje osnove prirodnih logaritama

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}+\ldots\approx 2{,}718281828459.$$

Nećemo se zaustavljati na teoriji izračunavanja greške, jer se taj posao, u današnje vreme računskih mašina, vrši drugim postupkom sa velikom uštedom u radu i vremenu.

2. $\sin x$.

Pošto je $f(x)=\sin x$, $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, imamo $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$, a dalje vrednosti izvoda ponavljaju se sa periodom od četiri člana. Maklorenov red daje

$$(2)\qquad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+$$
$$+(-1)^{n+2}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

Za ispitivanje njegove konvergentnosti možemo primeniti Dalamberov kriterijum $q=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2}{2n(2n+1)}=0$, odakle zaključujemo apsolutnu konvergentnost reda za svaku vrednost argumenta x. Do zaključka o konvergentnosti reda (2) možemo doći i upoređujući neposredno ovaj red sa redom za e^x. Zaista, apsolutne vrednosti članova reda za $\sin x$ sačinjavaju samo jedan deo članova reda za e^x, sastavljenih po istom zakonu.

Red za $\sin x$ daje ove približne vrednosti te funkcije:

$$\sin x\approx x,\quad \sin x\approx x-\frac{1}{6}x^3,\quad \sin x\approx x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}.$$

3. $\cos x$.

Postupkom sličnim prethodnom možemo napisati za kosinus red:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+$$
$$+(-1)^{n+2}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

Taj red je isto tako konvergentan za svaku vrednost x i daje ove približne vrednosti: $\cos x\approx 1$, $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}$, $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$.

4. *Binomni red.*

Uzmimo funkciju $f(x)=(1+x)^m$, gde je m realan broj, i načinimo ovu tablicu

$f(x)=(1+x)^m$	$f(0)=1$
$f'(x)=m(1+x)^{m-1}$	$f'(0)=m$
$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2}$	$f''(0)=m(m-1)$
. . .	. . .
$f^{(n)}(x)=m(m-1)\ldots[m-(n-1)](1+x)^{m-n}$	$f^{(n)}(0)=m(m-1)\ldots[m-(n-1)]$.

Primena Maklorenova reda daje

$$(1+x)^m=1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\binom{m}{3}x^3+\ldots+\binom{m}{n}x^n+$$
$$+\binom{m}{n+1}x^{n+1}+\ldots,$$

gde smo za tzv. binomne koeficijente i ovde upotrebili oznake

$$\binom{m}{n}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n},$$

Ako je m ceo i pozitivan broj, prethodni red je konačan; u ostalim slučajevima on je beskonačan. Za proučavanje konvergentnosti beskonačnog binomnog reda imamo $q=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x(m-n)}{n+1}\right|=|x|$. Na osnovu Dalamberovog kriterijuma tvrdimo: ako je $|x|<1$, red je konvergentan za svaku vrednost m. Ako je $|x|>1$, red je divergentan. Za $|x|=1$, tj. za $x=1$ i $x=-1$, Dalamberov kriterijum ne daje odgovor o konvergentnosti reda. Dublja analiza dovodi do ovog rezultata. Za $x=1$, kad $(1+x)^m=2^m$, konvergentnost reda zavisi od m i to: 1. $m>0$, red je apsolutno konvergentan, 2. $0>m>-1$, red je neapsolutno konvergentan, 3. $m\leqslant -1$, red je divergentan. Za $x=-1$, kad $(1+x)^m=0^m$, za $m>0$ red apsolutno konvergira nuli, a za $m<0$ red je divergentan. Upotreba binomnog reda za $x=1$ i $x=-1$ u suštini pokazuje samo osobine binomnih koeficijenata, kad m nije naturalan broj. Za naturalan broj i iz navedenog reda sleduju, kako smo već naveli, poznate iz Elementarne matematike osobine binomnih koeficijenata za slučaj kad je m ceo pozitivni broj, naime: 1. zbir binomnih koeficijenata pri razvijanju $(a+b)^m$ jednak je 2^m, npr., $1+2+1=4=2^2$, $1+3+3+1=8=2^3$, $2(1+10+45+120+210)+252=1024=2^{10}$. 2. zbir binomnih koeficijenata pri razvijanju $(a-b)^m$ jednak je nuli, napr., $1-2+1=0$, $1-3+3-1=0$, $2(1-10+45-120+210)-252=0$.

Navedimo i za binomni red nekoliko važnih slučajeva.

$$1/(1\pm x)=1\mp x+x^2\mp x^3+\ldots$$

$$1/(1+x)^2=1-2x+3x^2-4x^3+\ldots$$

$$\sqrt{1\pm x}=1\pm\frac{1}{2}x-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2\pm\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\ldots$$

$$1/\sqrt{1\mp x}=1\pm\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2\mp\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4\mp\ldots$$

$$1/\sqrt{1-x^2}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\ldots$$

5. $\log(1+x)$:

Načinimo tablicu

$$\begin{aligned}
&f\ (x)=\log(1+x), && f\ (0)=0,\\
&f^{I}\ (x)=(1+x)^{-1} && f^{I}\ (0)=1,\\
&f^{II}\ (x)=-(1+x)^{-2}, && f^{II}\ (0)=-1,\\
&f^{III}\ (x)=1\cdot 2(1+x)^{-3}, && f^{III}\ (0)=2!\\
&f^{IV}\ (x)=-1\cdot 2\cdot 3(1+x)^{-4} && f^{IV}\ (0)=-3!\\
&\ldots\ldots\\
&f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}, && f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!
\end{aligned}$$

Na osnovu tih rezultata možemo napisati ovaj Maklorenov red

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

Uporedo sa ovim logaritamskim redom možemo formirati i drugi logaritamski red

$$\log(1-x)=-\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots\right).$$

Oba su reda za $|x|<1$ konvergentni. Sem toga, prvi je red konvergentan i za $x=+1$, a drugi za $x=-1$. Ako od prvog reda oduzmemo drugi, dobićemo red

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right),$$

koji je konvergentan za $|x|<1$. Ovaj red omogućuje izračunavanje prirodnih logaritama ma kojeg pozitivnog broja N. Zaista, stavimo $N=(1+x):(1-x)$, tada ćemo, za x, dobiti vrednost $x=(N-1):(N+1)$; ta je vrednost manja od 1; za nju je, prema tome, naš red konvergentan. Dvostruka vrednost reda $x+\frac{x^3}{3}+\ldots$ daje vrednost prirodnog logaritma za N.

Vežbanja:

1. Koji je to red sa opštim članom $u_n = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$?

2. Izračunati pomoću Tejlorova obrasca $\sin 31^0$.

3. Izračunati pomoću redova ove vrednosti $e^{0,1}$, $e^{1,1}$, $\sin 15^0$, $\cos 47^0$ i uporediti dve poslednje vrednosti sa tabličnim vrednostima.

4. Zašto obrazac $\sin 1^0 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \ldots$ nije tačan? Zameniti ga tačnim i izvršiti približno izračunavanje: rezultat uporediti sa tabličnim rezultatom.

5. Potvrditi približni obrazac $\sin(a+x) \approx \sin a - x \cos a$.

6. Izračunati $\cos 76^0$ sa 4 decimala.

7. Izračunati $\log 10^0$ sa 4 decimala (logaritam je prirodni).

8. Pomoću binomnog reda izračunati: $\sqrt{26}$, $\sqrt[3]{30}$, $\sqrt[4]{630}$.

9. Izračunati tri člana Maklorenova reda za funkcije: $e^{\sin x}$, $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

10. Napisati red za $\sqrt{2e}$ i izračunati rezultat sa tri decimale.

11. Razviti u red funkciju $e^x : (1+x)$.

3.3. Priraštaj funkcije i njeni diferencijali

Tejlorov red u slučaju konvergentnosti

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2} h^2 f''(x) + \ldots + \frac{1}{k!} h^k f^{(k)}(x) + \ldots$$

daje red za izračunavanje funkcije za novu vrednost argumenta kad su poznati: priraštaj h argumenta x i vrednosti kako same funkcije, tako i svih njenih izvoda za polaznu vrednost argumenta.

Ako sad uzmemo u obzir da su: $f(x+h) - f(x) = \Delta y$ priraštaj funkcije, a $f'(x)dx = df(x)$, $f''(x)\,dx^2 = d^2 f(x), \ldots$, $f^{(k)}(x)dx^k = d^{(k)} f(x)$, onda možemo napisati red

$$(1) \qquad \Delta f(x) = df(x) + \frac{1}{2!} d^2 f(x) + \frac{1}{3!} d^3 f(x) + \ldots + \frac{1}{k!} d^{(k)} f(x) + \ldots,$$

koji postavlja vezu između priraštaja funkcije i diferencijala, pri čemu pretpostavljamo da je priraštaj nezavisno promenljive $h = \Delta x = dx$.

Važno je obratiti pažnju na to da prethodni red za Δf zadržava svoju vrednost i za slučaj kad funkcija $f(x,y)$ zavisi od više nezavisno promenljivih, npr., x, y. Zaista, s jedne strane, možemo priraštaj funkcije $f(x+h, y+k) - f(x, y)$ izraziti redom

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} hk + \frac{\partial^2 f^2}{\partial y^2} k^2\right) + \ldots,$$

a, sa druge strane, iskoristiti izraze za totalne diferencijale

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2, \ldots,$$

pri čemu smatramo da je $dx = h$, $dy = k$. Uzimajući u obzir dobivene rezultate dolazimo ponovo do reda (1), koji se, prema tome, za slučaj konvergentnosti reda, proširuje i na funkcije više promenljivih.

Učinimo jednu primenu dobivenog reda. Ako dx, odnosno dx i dy; dx, dy, dz itd. smatramo kao beskrajno male veličine prvoga reda, red (1) predstavlja razvijanje priraštaja funkcije u red po beskrajno malim veličinama prvog, drugog itd. reda, jer su takvih redova uzastopni diferencijali.

U članu 2.3 ove knjige naveli smo bez dokaza teoremu o ekstremumu funkcije jedne nezavisno promenljive $y = f(x)$. Dokaz tamo navedene teoreme lako se izvodi pomoću primene reda

$$\Delta y = dy + \frac{1}{2!} d^2 y + \frac{1}{3!} d^3 y + \frac{1}{4!} d^4 y + \ldots$$

Pošto neposredno iz pojma ekstremuma sleduje da oko tačke ekstremuma priraštaj funkcije mora zadržavati svoj znak pri promeni znaka priraštaja nezavisno promenljive, naime treba da bude pozitivan za minimum i negativan za maksimum, iz reda za priraštaj Δy sleduje da prvi član tog reda, koji nije jednak nuli i od kojeg zavisi glavni deo priraštaja ne sme da bude diferencijal neparnog reda, jer takav diferencijal, npr. $d^3 y = y'''(dx)^3$, menja znak pri promeni znaka veličine dx. Znači prvi izvod, koji nije jednak nuli, treba da bude parnoga reda i pošto znak tog izvoda određuje i znak priraštaja, ako je taj izvod pozitivan i priraštaj je pozitivan, pa funkcija ima minimum, a ako je negativan, funkcija ima maksimum. Time smo potvrdili teoremu o ekstremumu. Formulisana pomoću diferencijala teorema se lako proširuje i na funkcije više promenljivih.

3.4 Uopštavanje eksponencijalnih i trigonometrijskih funkcija kada je argument kompleksni

Upoznali smo eksponencijalnu funkciju e^x za realni argument x; ona može biti predstavljena apsolutno konvergentnim redom

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Izraz sa desne strane, beskonačni red, može biti smatran kao definicija određene funkcije, koju ćemo označiti sa $f(x)$. Jasno je da dati red potpuno određuje sve osobine te funkcije i omogućuje da izračunamo vrednost funkcije za svaku realnu vrednost argumenta x. Tako, napr., lako je pokazati da ta funkcija ima osobinu: $f(x)\cdot f(y) = f(x+y)$. Pošto su naši redovi apsolutno konvergentni, možemo ih izmnožiti i u rezultatu ponovo ćemo dobiti apsolutno konvergentni red u obliku

$$\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)\left(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots\right) =$$

$$= 1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{1}{2!}(x+y)^2 + \frac{1}{3!}(x+y)^3 + \ldots,$$

a to i potvrđuje pomenutu osobinu. Važno je obratiti pažnju na to da nova forma definicije funkcije e^x u obliku reda ne zahteva nikakve nove operacije sem sabiranja, množenja, odnosno stepenovanja, i deljenja i to sa realnim brojevima.

Pošto znamo kako se te operacije vrše, ne samo sa realnim već i sa kompleksnim brojevima, oblika $x+yi=z$, možemo za funkciju $f(x)$, definisanu redom $f(x)$, proširiti područje i na oblast kompleksnog argumenta. Tada ćemo dobiti

$$f(z) = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

Ako sad stavimo $z = x + yi$ i znamo da je $f(z) = f(x+yi) = f(x)\cdot f(yi)$, dolazimo do jednačine $e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi}$, pri čemu e^{yi} možemo napisati u obliku

$$e^{yi} = 1 + \frac{yi}{1!} + \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^3}{3!} + \frac{(yi)^4}{4!} + \ldots$$

Posle odvajanja realnog od imaginarnog dela dobivamo

$$e^{yi} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} - \frac{y^4}{4!} + \ldots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right),$$

a ovo, uzimajući u obzir redove za $\cos y$ i $\sin y$, konačno dovodi do rezultata $e^{yi} = \cos y + i \sin y$.

Prema tome došli smo do novog obrasca $e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Ako kompleks $z = x + yi$ degeneriše u realan broj $(y=0)$, imamo $(e^z)_{y=0} = e^x$, a u slučaju čisto imaginarnog broja treba napisati $(e^z)_{x=0} = \cos y + i \sin y$, a to ne predstavlja ništa drugo već jedinični kompleks. e^z je, dakle, isto tako kompleks sa modulom jednakim e^x i argumentom jednakim y. Pomoću obrasca $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ lako je proširiti sve operacije sa e^x, sa realnim x, na slične operacije sa e^z kad je z kompleks. U vezi sa tim navedimo nekoliko obrazaca u njihovoj uobičajenoj formi,

$$z = re^{\varphi i} = r(\cos\varphi + i \sin\varphi), \quad \bar{z} = re^{-\varphi i} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}\right), \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}\right).$$

Dalje uvodimo trigonometrijske funkcije kompleksnog argumenta $\cos z = \frac{1}{2}(e^{zi} + e^{-zi})$, $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{zi} - e^{-zi})$.

i pomoću tih obrazaca izražavamo i ostale trigonometrijske funkcije

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}} = \frac{1}{i}\frac{e^{2zi} - 1}{e^{2zi} + 1},$$

$$\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{zi} + e^{-zi}}{e^{zi} - e^{-zi}} = i\frac{e^{2zi} + 1}{e^{2zi} - 1}.$$

Hiperbolički sinus i kosinus, tangens i kotangens definišemo ovako

$$\operatorname{sh} z = \frac{\sin iz}{i} = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{tgh} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1}.$$

Zaustavimo se još na logaritmu kompleksnog broja.

Prirodni kompleksni logaritam datog kompleksnog broja je izložilac stepena na koji treba da podignemo broj e da bismo dobili dati broj za logaritmovanje. Neka je dat kompleksni broj $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ i $x+yi$, njegov traženi kompleksni logaritam, tada je, po definiciji,

$$e^{x+yi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Pošto je $e^{x+yi} = e^x(\cos y + i\sin y)$, iz prethodne jednačine imamo ove dve jednačine, za realni i imaginarni deo, $e^x = r$, $y = \varphi + 2k\pi$, gde k može uzimati vrednosti $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Iz ovih jednačina sleduje da traženi kompleksni logaritam $x+yi$ ima vrednost $x + yi = \log r + (\varphi + 2k\pi)i$, tj. *prirodni kompleksni logaritam datog kompleksnog broja jednak je kompleksu sa realnim delom jednakim prirodnom logaritmu modula datog kompleksa i kompleksnim delom koji je jednak proizvodu imaginarne jedinice »i« i jedne od vrednosti argumenta datog kompleksa.* Pošto taj argument ima beskrajno mnogo vrednosti, prirodni kompleksni logaritam kompleksnog broja je mnogoznačna funkcija. Ako taj argument ograničimo uslovom $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, dobićemo jednoznačnu funkciju koja se zove *glavna vrednost prirodnog kompleksnog logaritma kompleksnog broja.* Tu glavnu vrednost označavamo sa log. Prema tome možemo napisati:

$$\log z = \log(x + yi) = \log[r(\cos\bar\varphi + i\sin\bar\varphi)] = \log r + i\bar\varphi,$$

gde smo sa $\bar\varphi$ označili ugao koji zadovoljava navedene nejednakosti.

Svi brojevi, sem nule, smatrani kao kompleksni brojevi, imaju svoj prirodni kompleksni logaritam. Tako, napr., $\log(-5) = \log 5 + i\pi$, pošto je $-5 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$, a $\log i = \frac{\pi}{2}i$, jer je $i = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$. Sve vrednosti prirodnog kompleksnog logaritma kompleksne jedinice i iznose $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)\,i$, gde je $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Glava četvrta

IZ DIFERENCIJALNE GEOMETRIJE

4.1. Kriva linija u ravni. Primeri

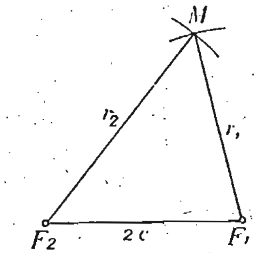
Za proučavanje geometrijskih objekata — krivih linija u ravni i prostoru, površina, linija na površini itd. mogu se, kao što znamo, sem neposrednih geometrijskih metoda, iskoristiti i analitičke metode, metode Analitičke geometrije. Prema istorijskom razvitku, primene te metode prvo su se svodile na iskorišćavanje samo Algebre, ali je upotreba čak i Elementarne algebre znatno uprostila proučavanje geometrijskih osobina objekata. A posle pronalaska Infinitezimalnog računa primene analitičke metode na Geometriju dobile su nove oblike i postepeno su se izgradile u naročitu oblast Više matematike — u Diferencijalnu geometriju.

Sa unošenjem novih geometrijskih pojmova u matematiku — vektora, vektorskog izvoda, tenzora, matrice i dr., Diferencijalna geometrija znatno je proširila svoj obim i postala neophodan element višeg matematičkog obrazovanja, čak i za nespecijaliste matematičare. Zato ćemo, u daljem izlaganju, dati elemente Diferencijalne geometrije, ali ćemo pokazivati ipak ne samo skalarne, već i vektorske načine izvođenja rezultata. Pre svega ćemo dopuniti o krivoj liniji u ravni ono što je ranije bilo izloženo u vezi sa proširenjem pojmova funkcije i izvoda.

Znamo da krivu liniju u Dekartovim koordinatama možemo analitički predstaviti na više načina: 1. u rešenom obliku, bilo u odnosu na y, u obliku $y=f(x)$, bilo u odnosu na x, u obliku $x=\varphi(y)$; 2. u opštem, implicitnom, obliku $F(x, y)=0$ i 3. u parametarskom obliku $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, gde je t promenljivi parametar. Ako mesto Dekartovih koordinata uvedemo ma koje druge koordinate, npr. q_1 i q_2, i to pomoću obrazaca $x=x(q_1, q_2)$, $y=y(q_1, q_2)$, koji odgovaraju transformaciji koordinata pri prelazu od Dekartovih koordi-

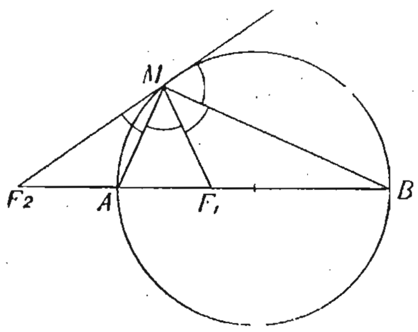
nata na koordinate q_1 i q_2, a ove se, u opštem slučaju, zovu *generalisane koordinate tačke*, u našem slučaju u ravni, jednačina krive se izražava ovako: $F(q_1, q_2)=0$, no može, pri tome, biti izražena i u jednom od rešenih oblika — $q_1=\varphi(q_2)$ ili $q_2=\psi(q_1)$; a i u parametarskom obliku $q_1=\varphi_1(\tau)$, $q_2=\varphi_2(\tau)$, gde je τ promenljivi parametar. Primetimo da u analitičkoj metodi izbor pogodnih koordinata igra važnu ulogu pri rešavanju geometrijskih zadataka. Koordinate koje odgovaraju prirodi krive linije znatno uprošćavaju izračunavanje.

Uzmimo primera radi kategoriju krivih koje izražavaju veze između udaljenja tačke M krive od dve stalne tačke F_1 i F_2 u istoj ravni. Označimo: sa $2c$ udaljenje F_1F_2, sa $r_1=F_1M$, $r_2=F_2M$. Veličine r_1 i r_2 smatramo kao dve *bipolarne koordinate* tačke M u odnosu na *polove* F_1 i F_2 (sl. 39). Osu što prolazi kroz tačke F_1 i F_2, sa smerom od F_2 prema F_1, nazvaćemo *polarna osa*. Pod izvesnim uslovima o stranama trougla, u opštem slučaju, bipolarne koordinate r_1 i r_2 određuju dve tačke, simetrične u odnosu na polarnu osu, preseka kružnih linija sa centrima u F_1 i F_2 i poluprečnicima r_1 i r_2. Ta dvoznačnost bipolarnih koordinata, u slučaju potrebe, rešava se dopunskim uslovom.



Sl. 39 — Bipolarne koordinate

Proučićemo pet linija, sa jednačinama u bipolarnim koordinatama: 1. $r_1=r_2$; 2. $r_1+r_2=\text{const.}=2a$; 3. $r_1-r_2=\text{const.}=2a$; 4. $r_1r_2=\text{const.}=a^2$; 5. $r_1:r_2=\text{const.}=k$, gde su: a konstantna dužina, k apstraktan broj. Kao što znamo, 1. jednačini $r_1=r_2$ odgovara prava i to — simetrala duži F_1F_2. Jednačinama 2. i 3. $r_1\pm r_2=2a$ odgovaraju elipsa i hiperbola sa jednačinama $x^2/a^2\pm y^2/b^2=1$, gde je $b^2=a^2\mp c^2$, pri čemu gornji znak odgovara elipsi, a donji hiperboli (proveriti to!). Isto tako, u polarnim koordinatama imamo jednačinu $r=p:(1+e\cos\theta)$, gde su r i θ polarne koordinate tačke; p parametar elipse, odnosno hiperbole, i e ekscentricitet, sa $e<1$ za elipsu i $e>1$ za hiperbolu. Vidimo da se jednačine elipse i hiperbole najjednostavnije izražavaju u bipolarnim koordinatama. Iz tih jednačina mogu se izvesti i sve prirodne osobine tih krivih bez transformacije tih jednačina, bilo na Dekartove bilo na polarne koordinate. Tako, npr., iz njih neposredno sleduju metodi za način crtanja tih krivih neprekidnim kretanjem.

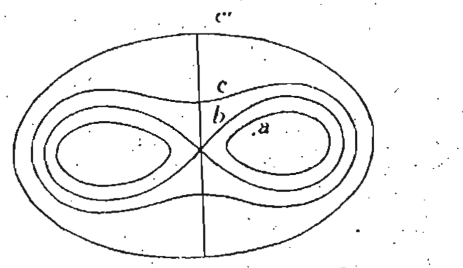


Sl. 40 — Apolonijev krug

Pređimo sad, prvo, na krivu sa jednačinom $r_1 : r_2 = k$ (sl. 40). Iz Elementarne geometrije poznato je[1]) da, ako je strana $F_1 F_2$ trougla MF_1F_2 podeljena tačkama A i B harmonično, u razmeri ostalih dveju strana, teme M trougla spram strane F_1F_2 leži na kružnoj liniji prečnika AB. Ovaj krug zove se *Apolonijev*.

Sad se vratimo najkomplikovanijem slučaju, krivoj sa jednačinom $r_1 r_2 = \text{const.} = a^2$. Proučimo ovu krivu u bipolarnim koordinatama.

Pošto je geometrijska sredina dveju duži uvek manja ili jednaka aritmetičkoj sredini tih duži (pokažite to!), dakle $\sqrt{r_1 r_2} \leqslant \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, odavde imamo uslov $r_1 + r_2 \geqslant 2a$. S druge strane, ako uzmemo u obzir tri uslova za obrazovanje trougla od tri duži r_1, r_2 i $2c$, naime: 1. $r_1 + r_2 < 2c$, kad je trougao nemoguć; 2. $r_1 + r_2 = 2c$, kad se trougao pretvara u duž $2c$; 3. $r_1 + r_2 > 2c$, kad je trougao moguć, možemo ta tri uslova zameniti ovim 1. $a < c$, 2. $a = c$, 3. $a > c$ i konačno zaključiti da, pod uslovima: 1. kriva ima dva odvojena dela ($a < c$); 2. dva dela se spajaju u jednoj tački ($a = c$); 3. kriva ima zatvoreni oblik ($a > c$). Ova kriva, promenljiva oblika (sl. 41), zove se *Kasinijeva ovala*[2]) (Cassini Domenico, astronom, 1625—1712). Izvedimo još i jednačinu te krive u Dekartovim koordinatama. Ako za ose uzmemo položaj analogan glavnim osama, recimo, elipse, možemo napisati $r_1^2 = y^2 + (x-c)^2$, $r_2^2 = y^2 + (x+c)^2$, pa, prema tome, imamo jednačinu $[y^2 + (x-c)^2]\,[y^2 + (x+c)^2] = a^4$. Odavde, posle redukovanja, dobivamo traženu jednačinu $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2\,(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$. U specijalnom slučaju, kad je $a = c$, Kasinijeva ovala degeneriše u Bernulijevu lemniskatu (Jacob Bernoulli, 1694) sa jednačinom $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2\,(x^2 - y^2) = 0$. U polarnim koordinatama ova jednačina izgleda $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$.



Sl. 41 — Kasinijeve ovale

4.11. Kriva kao hodograf vektor-funkcije

Ponovimo neke pojmove u vezi sa promenljivim vektorima.

Kad vektor V ne ostaje stalan, već se menja tako da njegova geometrijska vrednost zavisi od jedne ili više promenljivih, onda se kaže da je vektor V *vektor-funkcija* tih promenljivih. Zaustavimo se prvo na jednoj nezavisno promenljivoj; označimo je sa t i tada je $V = V(t)$ ili, ako treba naglasiti naročitom oznakom vektorsku prirodu veličine V, $\vec{V} = \vec{V}(t)$. Ako početak vektora V držimo stalno u istoj tački prostora, recimo, u početku Dekartovih koordinata, kraj vektora V, pri promeni argumenta t, opisuje, u opštem slučaju, krivu, hodograf vektor-funkcije. Ako Dekartove koordinate vektora V u ravni označimo sa V_x i V_y, a u prostoru sa V_x, V_y, V_z, hodografu tog vektora odgovaraju parametarske jednačine $V_x = f_1(t)$, $V_y = f_2(t)$, odnosno sa dopunom $V_z = f_3(t)$. Prema tome, svaku krivu možemo na dva načina proučavati: 1. vektorskom metodom, kad se neposredno proučavaju geometrijske osobine vektor-funkcije kao vektora, i 2. analitičkom metodom, kad se proučavaju skalarne

---

[1]) Bilimović — Anđelić, Geometrija za V razred srednjih škola. V. Planimetrija. Bgd. 1940. Teorema 106, str. 101.

[2]) U literaturi je poznato više *lemniskata*: *Bernulijeva*, *Butova*, *Geranova* i dr. (Gl. Gino Loria. Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven. Leipzig. 1902). Navedena jednačina odgovara tzv. *lemniskati Montferrier*-eovoj, koja se u francuskoj jednostavno zove „*osmica*“ (huit). U jednačini $a^2 y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ te lemniskate uvek se može koeficijent uz y^2 svesti na jedinicu. Na drugom mestu biće govora i o klasičnoj Bernulijevoj lemniskati.

jednačine hodografa u parametarskom obliku ili jednačine krive u eksplicitnom ili u implicitnom obliku.

Kao primer za prvu, vektorsku metodu, možemo navesti proučavanje cikloide koje smo izvršili u (I. 1.6 i 1.61). Iz tamo navedene vektorske jednačine cikloide

$$\vec{R} = \overrightarrow{OM} = \rho\theta\vec{h} + \rho\vec{v} - \vec{\rho}\,(\theta),$$

gde su: $\vec{R}$ — vektor položaja tačke cikloide, ρ — poluprečnik kruga koji se kotrlja po pravoj, θ — ugao za koji se krug obrnuo pri prelazu tačke M iz položaja M_0 na pravoj u položaj M, $\vec{h} = \vec{i}$ i $\vec{v} = \vec{j}$ jedinični vektori ose M_{ox} i normale na toj osi, dobivaju se neposredno ove dve skalarne jednačine cikloide u parametarskom obliku

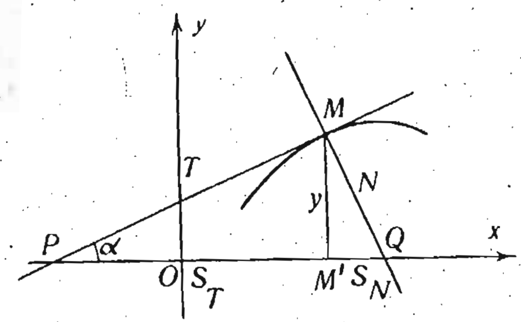
$$x = \rho(\theta - \sin\theta),$$
$$y = \rho(1 - \cos\theta),$$

sa parametrom θ. Ove jednačine mogu da služe za analitičko proučavanje cikloide sa jednačinama u parametarskom obliku.

4.2. Tangenta i normala

Ako je jednačina krive u ravni, u Dekartovim koordinatama, napisana u obliku $y = f(x)$, ugaoni koeficijent tangente na ovoj krivoj, u tački sa apscisom x, jednak je izvodu, tj. $y'(z)$; prema tome jednačina tangente izgleda ovako $\eta - y = y'(x) \cdot (\xi - x)$, gde su: x i y stalne koordinate tačke dodira, a ξ i η promenljive koordinate tačke tangente (sl. 42).

Normala na tangentu u tački dodira je normala krive u toj tački. Prema tome jednačina normale je $\eta - y = -\frac{1}{y'(x)}(\xi - x)$ ili $\xi - x + y'(x)(\eta - y) = 0$. U Dekartovu sistemu koordinata, za tangentu i normalu vezane su duži: $T = MP$, *dužina tangente*; $N = MQ$, *dužina normale*; $S_T = M'P$, *subtangenta*; $S_N = M'Q$, *subnormala*. Iz nacrtanih trouglova, uzimajući u obzir da je $MM' = y$, da se ugao α određuje iz jednačine $\operatorname{tg}\alpha = y'$ i da je $\sin\alpha = y'(1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\cos\alpha = (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}$ lako možemo izvesti da su: $T = y/\sin\alpha = (y/y')\sqrt{1 + y'^2}$, $N = T\operatorname{tg}\alpha = y\sqrt{1 + y'^2}$, $S_T = y\operatorname{ctg}\alpha = y/y'$, $S_N = y\operatorname{tg}\alpha = yy'$. Pošto je za određivanje ovih veličina potreban samo prvi izvod, one spadaju u diferencijalne elemente prvoga reda.



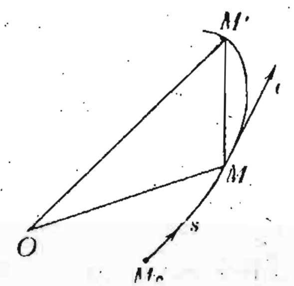
Sl. 42 — Diferencijalni elementi prvoga reda krive linije u ravni. Slučaj Dekartovih koordinata

4.21. Izvod vektor-funkcije. Metrička forma

Kako smo navodili, analogno izvodu obične, skalarne funkcije, recimo, jedne nezavisno promenljive, može se i za vektor-funkciju $\vec{V}(t)$ uvesti pojam izvoda na osnovu ove definicije: *izvod vektor-funkcije $\vec{V}(t)$ nezavisno promenljive t je granična vrednost (ako postoji) količnika*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t}.$$

Taj vektor označavaćemo sa $\dot{\vec{V}}$, ili $\frac{d}{dt}\vec{V}$. Lako se mogu pokazati ove osobine tog vektora. 1. Vektor $\dot{\vec{V}}$ ima pravac tangente na hodograf; za smer — smer kretanja tačke po hodografu, i za intenzitet — apsolutnu vrednost izvoda luka hodografa po nezavisno promenljivoj. Objasnićemo na slici ove osobine izvoda $\dot{V}$ (sl. 43). 1. Ako je $\vec{V}(t)=\overrightarrow{OM}$ i $\vec{V}(t+\Delta t)=\overrightarrow{OM'}$, razlika $\overrightarrow{OM'}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{\Delta V}$ je vektorski priraštaj vektor-funkcije. Podelimo li sa Δt, dakle priraštajem nezavisno promenljive, dobićemo, recimo za slučaj $\Delta t>0$, vektor istog pravca i smera kao i vektor $\overrightarrow{\Delta V}$, ali intenziteta jednaka $|\overrightarrow{\Delta V}|:\Delta t$. Prelazom na graničnu vrednost, izvod $\dot{V}$ dobiva pravac graničnog položaja tetive MM', a to je tangenta na hodograf u tački M; smer tog izvoda odgovara smeru pomeranja tačke M na hodografu; najzad, intenzitet tog vektora ima vrednost $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{MM'}{\Delta t}=\dfrac{ds}{dt}$, gde je ds diferencijal dužine luka s hodografa i dt diferencijal nezavisno promenljive. Ako je za nezavisno promenljivu uzet sam luk s, izvod $ds:dt=ds:ds=1$, tada izvod $\dot{V}$ vektor-funkcije $\vec{V}(s)$ ima vrednost jediničnog vektora u pravcu tangente na krivu, u smeru povećavanja luka s. 2. Kao drugu osobinu možemo navesti proširenje na vektor-funkcije — pravila za diferenciranje običnih, skalarnih funkcija. Tako imamo



Sl. 43 — Izvod vektor-funkcije

$$\frac{d}{dt}[V_1(t)\pm V_2(t)]=\frac{d}{dt}V_1(t)\pm\frac{d}{dt}V_2(t);\quad \frac{d}{dt}a\,V(t)=a\,\frac{d}{dt}V(t);$$

$$\frac{d}{dt}[f(t)\cdot\vec{A}]=\vec{A}\,\frac{df(t)}{dt},$$ gde je a stalan skalar, $\vec{A}$ stalan vektor, a $f(t)$ skalarna funkcija. Možemo navesti i pravila diferenciranja skalarnog i vektorskog proizvoda:

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}_1(t),\ \vec{V}_2(t))=(\dot{V}_1,\ \vec{V}_2)+(\vec{V}_1,\ \dot{V}_2);$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{V}_1,\ \vec{V}_2]=[\dot{V}_1,\ \vec{V}_2]+[\vec{V}_1,\ \dot{V}_2],$$

pri čemu treba, u slučaju vektorskog proizvoda, paziti na

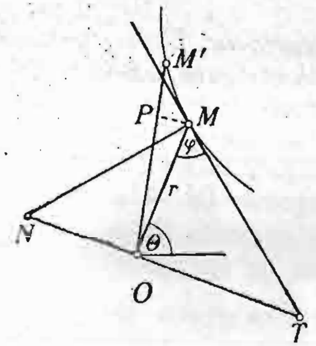
red množioca. Pošto svaki vektor u Dekartovim koordinatama možemo rastaviti na tri komponente, $\vec{V}=V_x\vec{i}+V_y\vec{j}+V_z\vec{k}$ gde su $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ stalni jedinični vektori osa, posle primene navedenih pravila za diferenciranje dolazimo do obrasca

$$\dot{V}=V_x'\vec{i}+V_y'\vec{j}+V_z'\vec{k},$$

koji izražava da su Dekartove koordinate izvoda vektora jednake običnim izvodima Dekartovih koordinata tog vektora.

Naročitu ulogu u Diferencijalnoj geometriji igra kvadrat diferencijala dužine luka, tj. ds^2, koji se zove *metrička forma* krive u ravni, odnosno u prostoru. Pošto je, npr., za Dekartove koordinate, $MM'^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$, znači, i $(MM'/\Delta t)^2=(\Delta x/\Delta t)^2+(\Delta y/\Delta t)^2$ prelazom na granične vrednosti imamo $(ds/dt)^2=(dx/dt)^2+(dy/dt)^2$, a odavde dobivamo osnovni obrazac za metričku formu: $ds^2=dx^2+dy^2$ odnosno $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$. U polarnim koordinatama, kad je $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, posle transformacije koordinata imamo metričku formu za polarne koordinate $ds^2=dr^2+r^2d\theta^2$. Isti rezultat može se dobiti i iz Pitagorine teoreme, primenjene na beskrajno mali pravougli trougao sa hipotenuzom ds i katetama dr i $rd\theta$, sa pravcima produženja potega r i normale na taj poteg u tački M krive (sl. 44).

Iz istog trougla $MM'P$ zaključujemo da se ugao $PM'M$, jednak u graničnoj vrednosti uglu φ između tangente MT na krivu i potega OM, određuje iz jednačine $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{rd\theta}{dr}=\dfrac{r}{r'}$. Ako kroz pol polarnog sistema, tj. tačku O, povučemo normalu NT na poteg r, i u tački M krive konstruišemo tangentu i normalu do preseka u tačkama T i N sa povučenom normalom na poteg, dobićemo pravougli trougao MTN sa normalom r na hipotenuzi. Ako uvedemo nazive slične onima kod Dekartovih koordinata, naime: MT



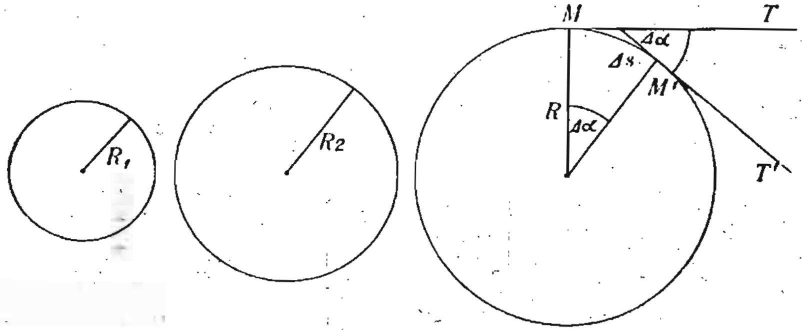
Sl. 44 — Diferencijalni elementi prvog reda krive linije u ravni. Slučaj polarnih koordinata

— *dužina tangente*, MN — *dužina normale*, OT — *subtangenta* i ON — *subnormala*, iz trougla MTN lako se dobiva:

$$MT=\frac{r}{r'}\sqrt{r^2+r'^2},\quad MN=\sqrt{r^2+r'^2},\quad OT=r^2/r',\quad ON=r'.$$

4.3. Krivina krive u ravni. Poluprečnik i centar krivine

Pređimo sad na proučavanje krivine krive u datoj tački, koja stoji u vezi sa elementima drugoga reda.



Sl. 45 — Krivina kruga

Ako imamo više krugova (sl. 45) različitih poluprečnika, jasno je da su im krivine različite: što je poluprečnik kruga veći, to je njegova krivina manja. Prirodno je, prema tome, da se za meru (označimo je sa K) krivine kruga uzme recipročna vrednost poluprečnika, tj. da se stavi $K=1:R$, gde je R poluprečnik kruga.

Do pojma krivine kruga možemo, međutim, doći i na drugi, prirodniji način. Zamislimo putnika M (sl. 45) koji se kreće po krugu poluprečnika R. U položaju M on gleda u pravcu MT, dakle tangente na krug u tački M. U novom položaju M', na rastojanju Δs po kružnom luku od prvog položaja, putnik gleda u pravcu $M'T'$. On je, dakle, skrenuo sa prvog pravca za ugao koji smo označili sa $\Delta\alpha$.

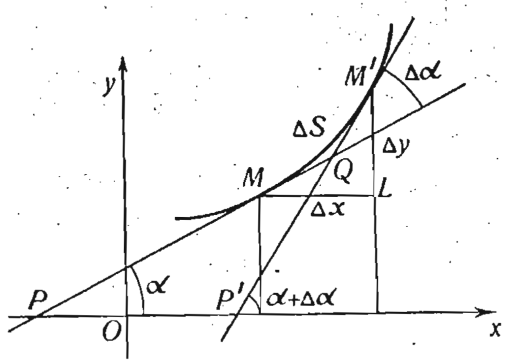
Što je taj ugao veći, veće je odstupanje putnika od pravolinijskog kretanja: veća je krivina njegova puta, kružne linije. No sam ugao $\Delta\alpha$ nije mera krivine, jer krivina zavisi još i od toga na kojoj je dužini putnik promenio svoj pravac za $\Delta\alpha$. Ako je put Δs duži, krivina je manja. Prema tome, za krivinu kruga treba uzeti količnik $\Delta\alpha:\Delta s$. Pokazaćemo da je vrednost tog količnika $1:R$.

Zaista, iz Elementarne geometrije je poznato da se ugao meri odnosom luka kružne linije prema poluprečniku. Pošto je *ugao skretanja tangente* $\Delta\alpha$ jednak centralnom uglu MOM' (uglovi sa normalnim kracima), za taj ugao imamo $\Delta\alpha=\Delta s:R$.

Prema tome, dolazimo neposredno do izraza $\Delta\alpha:\Delta s=\dfrac{1}{R}=K.$

Određivanje krivine kruga pomoću količnika $\Delta\alpha:\Delta s$ pogodnije je utoliko, što se može proširiti na svaku krivu liniju.

Neka je kriva data jednačinom $y=f(x)$ i na njoj tačka $M(x, y)$. Ugao koji tangenta u ovoj tački obrazuje sa osom x označimo sa α (sl. 46), tada je $\operatorname{tg}\alpha=y'$. Uzmimo na krivoj



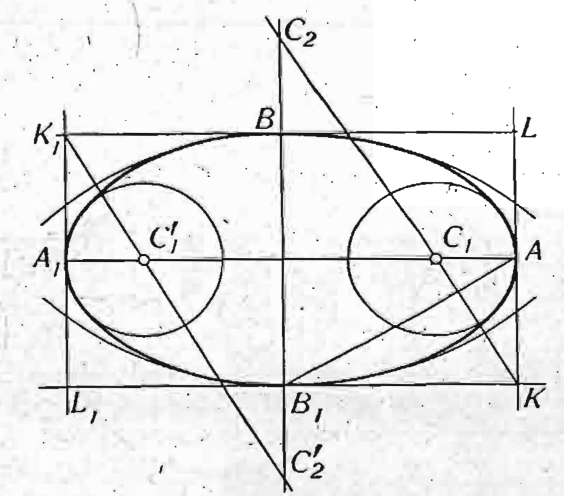
Sl. 46 — Krivina krive linije

drugu tačku M', blisku tački M. Koordinate ove tačke biće $x+\Delta x$, $y+\Delta y$. Ugao između tangente u ovoj tački i ose x je $\alpha+\Delta\alpha$. Pošto je $QP'x=\alpha+\Delta\alpha$ spoljašnji ugao za trougao QPP', ugao skretanja PQP' je $\sphericalangle PQP'=\sphericalangle QP'x-\sphericalangle QPx=$

$=\alpha+\Delta\alpha-\alpha=\Delta\alpha$. Ako obrazujemo količnik $\Delta\alpha:\Delta s$, gde je Δs luk MM' krive, možemo tom količniku dati naziv *srednja krivina krive na datom luku MM'*. Pustimo li da se tačka M' približava tački M, srednja krivina će se menjati (ostaje stalna samo za kružnu liniju); ona može težiti graničnoj vrednosti, kada tačka M' teži ka M. Ova granična vrednost, ako postoji, zove se *krivina* date *krive* u toj tački. Ako ovako definisanu krivinu označimo sa K, imamo $K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\dfrac{d\alpha}{ds}$, gde su $d\alpha$ i ds diferencijali označenih promenljivih. Pošto je $\operatorname{tg}\alpha=y'$, dakle $\alpha=\operatorname{arctg} y'$, za diferencijal $d\alpha$ imamo $d\alpha=\dfrac{1}{1+y'^2}\,dy'=$ $=\dfrac{1}{1+y'^2}\,y''\,dx$. Kako je $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+y'^2}\,dx$ za krivinu konačno imamo $K=\dfrac{d\alpha}{ds}=\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$.

Kao što krivini kruga odgovara izraz $1:R$, tako možemo i krivinu svake krive izjednačiti sa $1:R$. R je poluprečnik kruga iste krivine sa krivom u datoj tački. Zove se *poluprečnik krivine*. Krug tog poluprečnika, sa centrom na normali, zove se *krug krivine*, a njegov centar — *centar krivine*. Za poluprečnik krivine imamo izraz $(1+y'^2)^{3/2}:y''$. Za određivanje koordinata centra krivine, tačke C, možemo da se poslužimo vektorskom jednačinom: $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC}$, gde je $\overrightarrow{MC}$ vektor s pravcem normale prema centru i intenzitetom R. Ova vektorska jednačina, posle projiciranja na koordinatne ose, daje: $x_C=x_M+R\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y_C=y_M+R\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$, gde je α, kao i ranije, ugao između tangente i Ox ose sa vrednošću $\alpha=\operatorname{arctg} y'$. Sa odgovarajućom vrednošću poluprečnika krivine konačno imamo $x_C=x-\dfrac{y'}{y''}(1+y'^2)$, $y_C=y+\dfrac{1}{y''}(1+y'^2)$.

Uzmimo kao primer elipsu sa jednačinom $x^2/a^2+y^2/b^2-1=0$. Diferencirajmo dvaput: $x/a^2+yy'/b^2=0$; $1/a^2+y'^2/b^2+yy''/b^2=0$; tako smo dobili izvode: $y'=-b^2x/a^2y$ i $y''=-b^4/a^2y^3$. Na osnovu ovih vrednosti izračunaćemo poluprečnik krivine elipse $R=(1+y'^2)^{3/2}:y''=-(a^4y^2+b^4x^2)^{3/2}:a^4b^4$. Za dužinu ovog poluprečnika treba uzeti apsolutnu vrednost napisanog izraza. Znak minus pokazuje i nešto više od onog što smo tražili; on pokazuje da je smer poluprečnika krivine suprotan smeru spoljašnje normale na elipsi. U temenima, A i B, elipse (sl. 47) imamo ove vrednosti poluprečnika krivine: $R_A=-b^2/a$, $R_B=-a^2/b$. Na osnovu ovih izraza pokazaćemo jednu vrlo interesantnu osobinu položaja centara krivine elipse za temena; ova osobina omogućuje da se jednostavno konstruišu centri krivine. Konstruišimo za elipsu ABA_1B_1 pravo-



Sl. 47 — Konstrukcija centara krivine elipse

ugaonik KLK_1L_1 sa dimenzijama $2a$ i $2b$. Spojimo temena A i B_1 tetivom AB_1; iz tačke K spustimo normalu na ovu tetivu i produžimo je do preseka sa osama elipse u tačkama C_1 i C_2. Može se dokazati da su C_1 i C_2 centri krivine elipse za tačke A i B_1; isto tako, prava paralelna toj normali iz tačke K_1, daje u preseku sa istim osama centre krivine za tačke A_1 i B. Za dokaz ovog dovoljno je da pokažemo da je, npr., $AC_1=b^2/a$. Pošto su trouglovi AC_1K i KAB_1 slični, iz proporcionalnosti kateta imamo $AC_1:AK=AK:B_1K$ ili $AC_1:b=b:a$; odavde je $AC_1=b^2/a$. Na sličan način se proverava da je C_2 centar krivine za teme elipse B_1. Centralna simetričnost elipse potvrđuje tačnost teoreme za tačke C_1' i C_2'. Konstrukcija pokazanih krugova krivine omogućuje da se lako nacrtaju, krivolinijskim lenjirom, ostali delovi elipse (sl. 47).

Izvedimo još obrasce za određivanje krivine krive linije u ravni: 1. kad su jednačine krive date u parametarskom obliku i 2. kad je kriva određena jednačinom $r=r(\theta)$ u polarnim koordinatama r i θ.

Pošto za parametarske jednačine $x=x(t)$, $y=y(t)$ prema (1.42) imamo $\frac{dy}{dx}=y'/x'$ i $\frac{d^2y}{dx^2}=(y''x'-x''y')/x'^3$, gde su $x'=\frac{dx}{dt}$ itd., iz izraza za krivinu u Dekartovim koordinatama $K=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$ imamo ovaj izraz za krivinu $K=$ $=\frac{y''x'-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$, kad je kriva linija data u parametarskom obliku.

Ako je kriva linija data u rešenom obliku $r=r(\theta)$ za polarne koordinate, možemo iskoristiti prethodni obrazac smatrajući da su x i y funkcije parametra θ. Pošto iz jednačina $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ imamo $x'=\frac{dx}{d\theta}=r'\cos\theta-r\sin\theta$, $y'=$ $=\frac{dy}{d\theta}=r'\sin\theta+r\cos\theta$, lako izvodimo: $x'^2+y'^2=r'^2+r^2$, a zatim, posle jednostavnog računa (izvršiti ga) i ovaj rezultat $y''x'-x''y'=r^2+2r'^2-rr''$. Na taj način za krivinu, izraženu u polarnim koordinatama, imamo ovaj obrazac

$$K=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{(r'^2+r^2)^{3/2}}.$$

Taj rezultat se može dobiti i neposrednim geometrijskim putem bez iskorišćavanja rezultata dobivenog za Dekartove koordinate.

4.4. Prava i kriva u prostoru. Zavojnica. Loksodroma

Delimično ponovimo i dopunimo ono što smo ranije naveli o pravoj i krivoj liniji u prostoru.

Videli smo da jednačinu ravni možemo napisati $z=a_1x+b_1y+c_1$. Ako uzmemo i drugu ravan, sa jednačinom $z=a_2x+b_2y+c_2$, možemo tvrditi da ove jednačine zajedno određuju pravu preseka. Prema tome, prava u prostoru određuje se dvema jednačinama prvog stepena po x, y, z. Te dve jednačine možemo napisati u raznim oblicima. Jedan od oblika se izražava jednačinama

$$\frac{x-p}{l}=\frac{y-q}{m}=\frac{z-r}{n}.$$

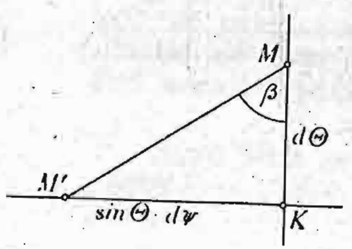
Ako od prethodnih jednačina prave uzmemo jedan par količnika, recimo jednačinu (1) $\frac{x-p}{l}=\frac{y-q}{m}$, ova, shvaćena kao veza između x i y samo u Oxy ravni, predstavlja pravu u toj ravni; a shvaćena kao jednačina ravni, pri čemu z može uzimati proizvoljne vrednosti, odgovara ravni normalnoj na Oxy ravni. To je ravan koja projicira datu pravu na Oxy ravan i u projekciji se dobiva prava u toj ravni sa jednačinom (1). Dva druga para količnika odgovaraju ravnima koje projiciraju datu pravu na ravni Oyz i Ozx.

Pređimo sad na proučavanje prostorne krive linije.

Ako dve od tri uzastopno povezane duži, recimo šibice, stavimo na ravan stola, ali ne u produžetku jedne drugoj, a trećoj damo položaj van ravni stola, dobivena izlomljena linija nije ravna, već prostorna linija. Ne postoji takva ravan u koju bi mogli smestiti sve tri naše duži. Isto tako, ako jedan deo savijene žice položimo na ravan stola, a drugi dignemo iznad te ravni, žica neće predstavljati krivu liniju u ravni, već krivu u prostoru, prostornu krivu. Prostornu krivu ne možemo, dakle, celu smestiti u jednu ravan.

Kao primer prostorne krive proučili smo (1.6), u teoriji i praksi važnu liniju — zavojnicu. Nećemo ovde ponavljati to proučavanje, već ćemo proučiti jedan drugi primer prostorne krive. Naime, uzmimo tzv. *loksodromu*. To je linija na sferi (npr. na površini Zemljine lopte), koja u svakoj tački obrazuje isti ugao sa meridijanom te tačke. Pošto izvođenje jednačine te krive izlazi iz okvira ove knjige, moramo da se ograničimo na proveravanje poznatog oblika te jednačine. Neka je poluprečnik sfere jednak jedinici. Ako sa θ označimo polarno rastojanje tačke, tj. dopunu do 90° geografske širine datog mesta, a sa ψ geografsku dužinu, jednačina loksodrome ima oblik $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=Ce^{\psi\operatorname{cotg}\alpha}$, gde su C i α konstante. Za tumačenje te jednačine i određivanje smisla konstanata prvo potvrdimo onu diferencijalnu osobinu loksodrome koja je navedena u definiciji te krive. U tu svrhu uzimamo logaritam leve i desne strane jednačine loksodrome po prirodnoj osnovi; dobivamo $\log\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\log C+\psi\operatorname{cotg}\alpha$ i zatim diferenciramo $d\theta:2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}=\operatorname{cotg}\alpha\cdot d\psi$; odakle je $\operatorname{cotg}\alpha=d\theta:(\sin\theta\cdot d\psi)$.

Ako, sa druge strane, uzmemo na loksodromi dve beskrajno bliske tačke M i M' (sl. 48) i kroz tačku M povučemo element MK meridijana sa dužinom $d\theta$, a kroz tačku M' element paralele do preseka u tački K na meridijanu sa dužinom $1.\ \sin\theta\cdot d\psi$, iz dobivenog pravouglog diferencijalnog trougla MKM' sa uglom $\sphericalangle M'MK=\beta$ između loksodrome i meridijana imamo jednačinu $\operatorname{cotg}\beta=d\theta:(\sin\theta\cdot d\psi)$. Pošto je taj izraz identičan sa izrazom za $\operatorname{cotg}\alpha$, dobivenom iz jednačine loksodrome, zaključujemo da je $\alpha=\beta$, a to i potvrđuje navedenu diferencijalnu osobinu loksodrome.



Sl. 48 — Element loksodrome

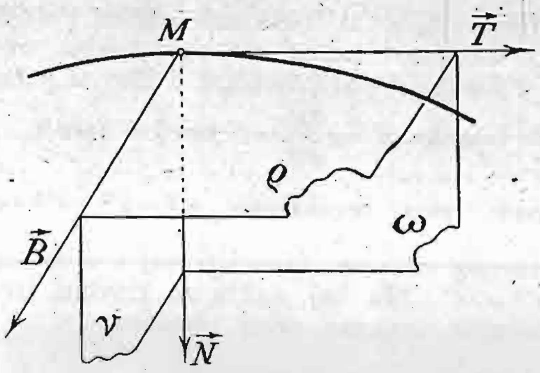
Što se tiče konstante C, ona se određuje iz uslova da kriva, sa datim uglom α, prolazi kroz datu tačku na sferi sa koordinatama θ_0, ψ_0. Tada imamo $C=e^{-\psi_0\operatorname{cotg}\alpha}\cdot\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}$.

Kako se to vidi iz jednačine, loksodroma je transcendentna kriva. Ona ima primenu u nautici, jer predstavlja putanju lađe pod uslovom da se lađa kreće sa istim rumbom, tj. pod istim uglom sa meridijanom. Loksodromu je prvi put proučio matematičar i astronom Petar Nonijus (Petrus Nonius — Pedro Nuñez, 1492—1577) 1546. godine. Na geografskim kartama nacrtanim u tzv. Merkatorovoj projekciji svakoj loksodromi odgovara prava linija. Treba obratiti pažnju da loksodroma ne predstavlja najkraću liniju između dve tačke na toj liniji na sferi, jer je najkraća linija na sferi veliki krug.

4.41. Prirodni trijedar krive. Diferencijalni elementi drugog reda

Znamo da svaku krivu u prostoru možemo smatrati kao hodograf vektor-funkcije $\vec{V}$ jedne nezavisno promenljive. Radi jednostavnijeg rasuđivanja uzmimo za nezavisno promenljivu dužinu s, luka krive, računatu od određene tačke na toj krivoj. Prema tome, vektor-funkciju u našem slučaju možemo predstaviti sa $\vec{V}(s)$, ili ovim vektorskim zbirom

$$\vec{V}(s)=f_1(s)\vec{i}+f_2(s)\vec{j}+f_3(s)\vec{k}=x(s)\vec{i}+y(s)\vec{j}+z(s)\vec{k}.$$



Sl. 49 — Prirodni trijedar prostorne krive

Izvod $\dot{V}$ vektor-funkcije $\vec{V}(s)$ po luku s ima vrednost jediničnog vektora u pravcu tangente. Ako u toj jednačini vektor označimo sa $\vec{T}$, imamo ovu vektorsku jednačinu $\dot{V}=\vec{T}$. Ravan ν normalna na tangenti je *normalna ravan na krivoj* u datoj tački (sl. 49).

U Dekartovu koordinatnom sistemu jednačine tangente se izražavaju ovako: $\frac{\xi-x}{x'}=\frac{\eta-y}{y'}=\frac{\zeta-z}{z'}$, gde su: x, y, z — koordinate tačke M na krivoj, ξ, η, ζ — koordinate proizvoljne tačke na tangenti i x' y', z' izvodi koordinata tačke M po luku s.

Za normalnu ravan uzmimo: tačku $M(x, y, z)$ na krivoj, proizvoljnu tačku $P(\xi, \eta, \zeta)$ u normalnoj ravni i jedinični vektor $\vec{T}(x', y', z')$ tangente. Uvedimo još vektor $\vec{r}=\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}=$ $=\vec{r}(\xi-x,\ \eta-y,\ \zeta-z)$ (Nacrtaj sliku!). Pošto je vektor $\vec{r}$ u normalnoj ravni, on je upravan na vektoru $\vec{T}$, pa, prema tome, imamo uslov ortogonalnosti u obliku skalarnog proizvoda $(\vec{r},\ \vec{T})=0$. Ako razvijemo taj proizvod pomoću koordinata, dobićemo jednačinu normalne ravni $(\xi-x)\,dx+(\eta-y)\,dy+$ $+(\zeta-z)\,dz=0$, pri čemu je, npr., $dx=x'ds$.

Ako sad uvedemo drugi izvod $\ddot{V}=\frac{d}{ds}\dot{V}=\frac{d^2\vec{V}}{ds^2}=\frac{d}{ds}\vec{T}$ vektora $\vec{V}(s)$ po luku s, što znači prvi izvod $\dot{T}$, vektora $\vec{T}$, neposredno zaključujemo da vektor $\dot{T}$, kao izvod vektora stalne dužine (jedinične), ima pravac normale na tom vektoru, tj. leži u normalnoj ravni i zauzima u njoj određeni položaj. Ta normala se zove *glavna normala* na krivoj liniji u datoj tački. Za obrazovanje trijedra osa slična Dekartovu trijedru dodajmo tangenti i glavnoj normali još i treći pravac, normalan na prethodnim dvama; on isto tako pripada, kao i pravac glavne normale, normalnoj ravni i zove se *binormala*. Trijedar osa sastavljen iz tangente, glavne normale i binormale zove se *prirodni trijedar prostorne krive*. Taj trijedar ne zavisi od izbora koordinata i potpuno se određuje samo položajem krive u prostoru i njenim oblikom u okolini date tačke na krivoj. On se u opštem slučaju menja pri promeni položaja tačke na krivoj. Za Dekartove koordinate položaj

osa prirodnog trijedra, tangente $\vec{T}$, glavne normale $\vec{N}$ i binormale $\vec{B}$, određuje se iz ove tablice veličina, proporcionalnih kosinusima uglova tih osa sa osama Dekartovog trijedra

$$\vec{T}\ (\quad dx,\quad dy\quad dz,\quad),$$
$$\vec{N}\ (\quad d^2x,\quad d^2y,\quad d^2z,\quad),$$
$$\vec{B}\ (dy\,d^2z-dz\,d^2y,\quad dz\,d^2x-dx\,d^2z,\quad dx\,d^2y-dy\,d^2x),$$

pri čemu $\cos(\vec{T}, x)=dx/ds$, $\cos(\vec{N}, x)=d^2x/Kds^2$, $\cos(\vec{B}, x)=$ $=(dy\,d^2z-dz\,d^2y)/Kds^3$, gde je $K^2=x''^2+y''^2+z''^2$. Slični obrasci vrede i za ostale kosinuse.

Prirodni trijedar sačinjavaju tri ravni: *normalna ravan* ν, koja sadrži glavnu normalu i binormalu; *oskulatorna ravan* ω, koja sadrži tangentu i glavnu normalu; *rektifikaciona ravan* ρ, koja sadrži tangentu i binormalu.

Dve na krivoj beskrajno bliske tačke, M i M', u graničnom položaju određuju tangentu. Tri beskrajno bliske tačke, M, M', M'', u opštem slučaju određuju ravan. Granični položaj te ravni je oskulatorna ravan krive u datoj tački, M. Glavna normala u toj ravni pokazuje i *prvu krivinu krive* ili *fleksiju*, koja ima vrednost $\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=K$, gde je $\Delta\alpha$ ugao skretanja tangenata pri prelazu tangente MM' u tangentu $M'M''$, a $K=|\ddot{V}|$, tj., kao i ranije, $|\ddot{V}|^2=x''^2+y''^2+z''^2$.

Oskulatorna ravan, kao što smo rekli, pre graničnog položaja prolazi kroz tri beskrajno bliske tačke krive. U opštem slučaju ona ne prolazi kroz četvrtu tačku M''' krive. Kroz tri tačke M', M'', M''' prolazi druga ravan. Označimo ugao između ravni $MM'M''$ i ravni $M'M''M'''$ sa $\Delta\beta$ i obrazujmo količnik $\Delta\beta:\Delta s$. Pri prelazu na graničnu vrednost taj količnik daje $K_1=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\beta}{\Delta s}$, gde je K_1 takozvana *druga krivina* ili *torzija prostorne krive*. Prva krivina je mera odstupanja krive u datoj tački od prave, a druga krivina je mera odstupanja krive u datoj tački od ravne krive u vezi sa promenom položaja oskulatorne ravni.

Moglo bi se dokazati da zavojnica ima stalnu prvu i drugu krivinu, no u ta izračunavanja ovde nećemo ulaziti.

4.5. Površina. Tangentna ravan i normala. Krivina površine

Videli smo da jednačinu površine možemo predstaviti na više načina: 1. u rešenom obliku $z=f(x,y)$; 2. u opštem obliku $F(x,y,z)=0$ i 3. u parametarskom obliku $x=f_1(u,v)$, $y=f_2(u,v)$, $z=f_3(u,v)$, gde su u i v promenljivi parametri ili *krivolinijske koordinate tačke na datoj površini*. Proučimo sad neke diferencijalne elemente u vezi sa površinom.

Neka je površina data jednačinom $z=f(x,y)$. Uzmimo na toj površini tačku M sa koordinatama x,y,z i susednu tačku M' sa koordinatama $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$. Pošto ove koordinate moraju zadovoljavati jednačinu površine, imamo $z+\Delta z=$ $=f(x+\Delta x, y+\Delta y)$.

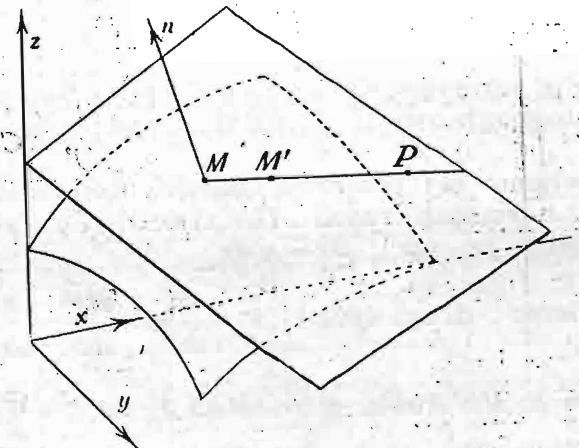
Slično postupku u slučaju funkcije jedne nezavisno promenljive (2.71), možemo i ovde napisati obrazac za konačan priraštaj funkcije dveju nezavisno promenljivih

$$(1)\qquad \Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)=\Delta x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\Delta y\cdot\frac{\partial f}{\partial y},$$

pri čemu pretpostavljamo da je ostatak u tom izrazu beskrajno mala višega reda, ako su Δx i Δy beskrajno male prvoga reda.

Uzmimo sad na pravoj MM' proizvoljnu tačku P (sl. 50) i koordinate ove tačke označimo ξ, η, ζ. Pošto projekcije duži MM' na ose koordinate imaju vrednosti Δx, Δy, Δz, a projekcije dužine MP na iste ose su $\xi-x$, $\eta-y$, $\zeta-x$ na osnovu poznate teoreme iz Stereometrije, da su odsečci između paralelnih ravni proporcionalni, sleduje $\Delta x:(\xi-z)=\Delta y:(\eta-y)=$ $=\Delta z:(\zeta-z)=MM':MP=k$. Iz ovih proporcija se može izvesti $\Delta x=k(\xi-x)$, $\Delta y=k(\eta-y)$, $\Delta z=k(\zeta-z)$. Ako sad sta-

vimo ove vrednosti u (1) i skratimo sa k, dobićemo $\frac{\partial f}{\partial x}(\xi-x)+$ $+\frac{\partial f}{\partial y}(\eta-y)=\zeta-x$. Pošto je ovo jednačina prvog stepena po ξ, η, ζ ona predstavlja ravan. U ovoj su jednačini ξ, η, ζ promenljive, a x, y, z stalne veličine. Veličine $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ takođe su stalne, jer su funkcije x, y, koordinata date tačke M na površini. Ova ravan je *tangentna ravan* površine u datoj



Sl. 50 — Tangentna ravan površine

tački M. Ona predstavlja geometrijsko mesto pravih, tangenata, na površinu u tački M, a ove su granični položaj sekanata koje prolaze kroz tačku M i susednu tačku M' na površini, kad M' teži M. Normala na tangentnoj ravni u tački dodira je *normala na površini* u toj tački. Tačka površine sa određenom tangentnom ravni i normalom je *obična tačka površine*. U suprotnom slučaju, kad sve tangente na površini ne pripadaju istoj ravni, *tačka površine* je *singularna*. Tako, napr., vrh konusne površine je singularna tačka te površine.

Za proučavanje položaja tačaka u blizini neke obične tačke M površine zgodno je izabrati specijalan trijedar osa. Neka početak osa tog trijedra bude u tački M, a tangentna ravan bude koordinatna ravan $M\xi\eta$; tada je osa $M\zeta$ — normala na površinu. Neka jednačina površine $z=f(x, y)$, u odnosu na neki polazni trijedar $Oxyz$, uzima, u odnosu na novi trijedar $M\xi\eta\zeta$, oblik $\zeta=\varphi(\xi, \eta)$, pri čemu je $\varphi(0,0)=0$, i, sem toga, $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_0=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)_0=0$, gde indeks nula označava vrednosti izvoda za $\xi=0$ i $\eta=0$. Na osnovu ovih uslova možemo zaključiti da je za takvu tačku i $d\zeta=\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}d\eta=0$. Sastavimo sad i drugi diferencijal $d^2\zeta=\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}d\xi^2+2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\partial\eta}d\xi\, d\eta+\frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2}d\eta^2$ i uzmimo njegovu vrednost za tačku $M(0,0)$; tada ćemo dobiti $d^2\zeta=Ad\xi^2+2Bd\xi\, d\eta+Cd\eta^2$, gde su A, B, C vrednosti odgovarajućih delimičnih izvoda za $\xi=0$ i $\eta=0$. Ako sad sa $d\sigma$ označimo element dužine luka linije preseka naše površine sa normalnom ravni, koja prolazi kroz $M\zeta$ osu i obrazuje ugao α sa ravni $M\xi\zeta$, dobićemo $\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}=K(\alpha)=A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+$ $+C\sin^2\alpha$, gde su: $d\sigma^2=d\xi^2+d\eta^2$, $\sin\alpha=d\eta/d\sigma$, $\cos\alpha=d\xi/d\sigma$ i K krivina linije normalnog preseka površine što odgovara uglu α. Napisani obrazac za krivinu normalnog preseka, kao funkcija ugla α, određuje karakter površine u blizini date tačke na površini. Ne ulazeći u izračunavanja navešćemo osobine krivine normalnog preseka površine oko date tačke.

1. Ako je jedan od izvoda $\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}\right)_0=A$, $\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2}\right)_0=C$ jednak nuli, postoji presek za koji je $d^2\zeta=0$, i, prema tome, normalni presek ima pravolinijski element. Takva obična tačka ima naziv *cilindrične tačke*, jer je na površini cilindra krivina u pravcu proizvodilje jednaka nuli.

2. Ako su oba navedena izvoda A i C jednaki nuli, površina ima ravan element.

3. Ako nijedan od izvoda A i C nije jednak nuli, proučavanje kvadratne forme $K(\alpha)=A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha$ dovodi do zaključka da postoje dva upravna pravca u tangentnoj ravni — zovu se *glavni pravci* u datoj tački — za koje krivina ima ekstremne vrednosti. Ako su ta dva ekstremuma istog znaka, površina ima ispupčeni oblik elipsoidnog karaktera (*elipsoidna tačka*), ako su ekstremumi različitih znakova, element površine je sedlastog karaktera (*hiperbolička tačka*).

4. Ako krivine elipsoidne tačke imaju iste vrednosti, površina ima sferni oblik i tačka se zove *ombilička tačka*.

5. Ako sa K_1 i K_2 označimo krivine glavnih normalnih preseka, proizvod $K_1K_2=K$ zove se *krivina površine u datoj tački*; ona se još zove i *Gausova krivina*. Prema znaku Gausove krivine, površine se dele na površine pozitivne, negativne i nulte krivine. Proučavanje geometrijskih slika na površinama predstavlja naročitu granu Geometrije. Od naročitog interesa su Geometrije na površinama stalnog znaka Gausove krivine.

Geometrija na površini pozitivne krivine zove se *Rimanova geometrija*, negativne — *Geometrija Lobačevskog* i nulte krivine — *Euklidova geometrija*.

6. Poluzbir glavnih krivina $\frac{1}{2}(K_1+K_2)$ nosi naziv *srednje krivine* površine u datoj tački. Srednja krivina igra osnovnu ulogu u teoriji tzv. *minimalnih površina*, tj. površina, koje, ograničene datom konturom, imaju najmanju površinu.

7. U svakoj običnoj tački, M, površine postoji, kako smo videli, normala, koju možemo odrediti jediničnim vektorom $\vec{N}$. Pri pomeranju tačke po liniji na površini, sa jediničnim vektorom $\vec{T}$ u pravcu tangente, jedinični vektor $\vec{N}$ dobiva vektorski priraštaj, recimo u diferencijalnom obliku $d\vec{N}$. Taj priraštaj možemo rastaviti u dve komponente: $(d\vec{N})_T$ i $(d\vec{N})_n$. Prva komponenta je u pravcu tangente na krivoj, druga u pravcu normale n na tangenti T u tangentnoj ravni. Ako je duž krive na površini u svim njenim tačkama normalna komponenta jednaka nuli, tj. $(d\vec{N})_n=0$, kriva se zove *linija krivine* na datoj površini. Tangenta na takvoj krivoj se poklapa

sa glavnim pravcem za datu tačku. Odavde sleduje da kroz svaku običnu tačku površine sa $K_1 \neq K_2$ prolaze samo dve linije krivine. Ako površina ima ombilične tačke, kroz njih prolazi beskrajno mnogo linija krivina. Tako, na sfernoj površini kroz svaku tačku prolazi beskrajno mnogo linija krivina — to su veliki krugovi koji prolaze kroz tu tačku, i spajaju je sa drugim krajem prečnika date tačke. — S druge strane, ako je prva komponenta $(d\vec{N})_T = 0$, a druga različita od nule, tj. $(d\vec{N})_n \neq 0$, kriva sa takvom osobinom njenih tačaka zove se *asimptotska linija.*

Glava peta

IZ KINEMATIKE

5.1. Podela Mehanike. Kinematika

Dve, od najdavnijih vremena, osnovne grane ljudskog znanja — *Astronomija*, koja se bavi opisom i proučavanjem kretanja nebeskih tela, — i *Tehnika* u širokom smislu te reči (grčka reč ἡ τέχνη — umetnost, veština, nauka), čiji je zadatak bio u neprestanom poboljšavanju uslova ljudskog života putem pokoravanja svojim ciljevima teško pobedljive materije, — te dve grane znanja sadrže u sebi važan zajednički element — element kretanja, odnosno mirovanja materijalnih tela pod izvesnim uslovima. Proučavanja tog elementa, kako u Astronomiji tako i u Tehnici, sačinjavaju opštu posebnu naučnu disciplinu, koja se zove *Mehanika*[1]).

Fizičko telo, kao materijalni objekt, ima više osobina; mehanika uprošćava predstavu takvog tela i uzima u obzir samo njegovu materijalnost i raspored te materijalnosti po tačkama geometrijske oblasti koju zauzima materija tela, no ne ulazi u dublje proučavanje same materije. Pri tom uprošćavanju, zgodno je raščlaniti proučavanje kretanja materijalnog tela na: proučavanje promene u vremenu mesta u prostoru geometrijske oblasti, koju zauzima materija tela; a, zatim, na proučavanje kretanja stvarnog materijalnog tela. Onaj deo mehanike u kojem se proučava kretanje samo geometrijskih obje-

---

[1]) Grčka reč ἡ μηχανή (ἡ μηχανική) znači: oruđe, velika zgrada, mašina, naročito ratna mašina, pozorišna mašina, koja je podizala na scenu glumca u važnoj ulozi; otuda i latinski izraz „deus ex machina" sa značenjem neočekivano.

kata zove se *kinematika* (τὸ κίνημα — kretanje). A drugi deo, kad se uzima u obzir i materijalnost tela, zove se *dinamika* (ἡ δύναμις — sila), jer u tom delu važnu ulogu igra sila. Dinamika se deli na: *kinetiku*, koja se bavi proučavanjem kretanja materijalnog tela; i na *statiku*, čiji je predmet analiza uslova pod kojim se materijalni sistem nalazi u trajnom mirovanju.

Pošto za proučavanje problema dinamike nije dovoljan aparat samo diferencijalnog računa, zaustavimo se na polaznim elementima kinematike, na kinematici tačke; i na kinematici tzv. nepromenljivog sistema ili čvrstog tela.

5.2. Kinematika tačke

Kao što smo naveli, kinematika se bavi kretanjem geometrijskih objekata. Pošto je geometrijska tačka najprostiji geometrijski objekt, treba pre svega proučiti *kinematiku tačke*.

a. *Trajektorija i zakon puta.* Za vreme kretanja tačka menja svoj položaj u prostoru i opisuje *trajektoriju* ili *putanju*. Prema obliku trajektorije kretanje može biti *pravolinijsko* i *krivolinijsko*. Označimo sa s dužinu puta koju tačka pređe po trajektoriji; sa t — vreme za koje ona taj put pređe. Ako je kretanje tačke po trajektoriji poznato, u svakom trenutku t možemo odrediti s; prema tome je s funkcija t, tj. $s = \varphi(t)$.

Ta jednačina zove se u Mehanici *zakon puta*. Zakon puta može biti određen ili analitički, obrascem, ili tablicom, ili grafički, kad je dat *grafik puta*.

Za potpuno određivanje kretanja tačke treba da znamo oblik trajektorije i zakon puta.

Ako Dekartove koordinate tačke označimo sa x, y, z kretanje tačke se određuje jednačinama

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

koje se zovu *konačne jednačine kretanja tačke*. Ove jednačine mogu biti smatrane kao parametarske jednačine trajektorije; ulogu parametra igra vreme t.

Najprostiji slučaj kretanja po nekoj trajektoriji imamo kad je s linearna funkcija vremena, tj.

$$s = at + b,$$

gde su a i b stalne veličine. Takvo kretanje zovemo *ravnomerno*. Ravnomerno kretanje je ravnomerni proces u Mehanici.

Ako je s kvadratna funkcija vremena, tj.

$$s = at^2 + bt + c,$$

kretanje se zove *jednako promenljivo*.

b. *Brzina tačke*. Zaustavimo se prvo na pravolinijskom kretanju čiji je zakon puta

$$s = s(t).$$

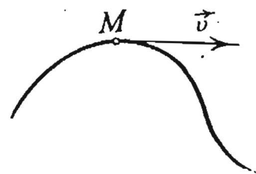
Ako tačka za vreme Δt pređe put Δs, količnik

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

se zove *srednja brzina tačke* na tom putu. Ako Δt teži nuli, granična vrednost

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = s'$$

daje *brzinu tačke u datom trenutku*. Iz ovog rezultata vidimo da se brzina u slučaju pravolinijskog kretanja meri izvodom puta po vremenu. Obratno, izvod svake funkcije vremena po vremenu može se protumačiti kao brzina promene te funkcije.



Sl. 51 — Brzina tačke

U slučaju krivolinijskog kretanja brzinu više ne karakteriše skalar, nego vektor $\vec{v}$ (sl. 51), koji ima: 1) pravac tangente na trajektoriju, 2) smer u onom smislu, kuda se tačka kreće i 3) veličinu (intenzitet) jednaku s'. Ako nas ne interesuje pravac i smer brzine, nego samo njen intenzitet, kao u slučaju, na primer, putovanja po unapred utvrđenoj trajektoriji, recimo železnicom, tada je za proučavanje brzine dovoljno zaustaviti se na izvodu s', tačnije na apsolutnoj vrednosti $|s'|$ tog izvoda.

U ravnomernom kretanju sa $s = at + b$, brzina ima stalan intenzitet $s' = a$; za jednako promenljivo kretanje sa zakonom puta

$$s = at^2 + bt + c$$

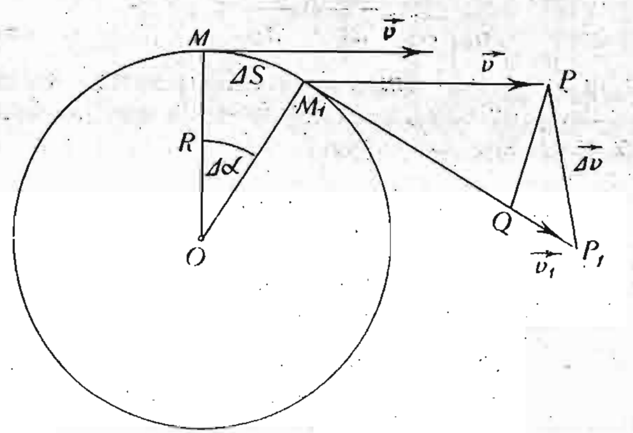
intenzitet brzine (tačnije tzv. *algebarska vrednost brzine*) je linearna funkcija vremena, tj.

$$\frac{ds}{dt} = 2at + b.$$

Ako je taj izraz negativan, intenzitet brzine je jednak njegovoj apsolutnoj vrednosti.

c. *Ubrzanje tačke.* Ako se, opet, zaustavimo prvo na pravolinijskom kretanju, „brzina promene brzine" daje *ubrzanje tačke.* Ubrzanje za pravolinijsko kretanje meri se, dakle, drugim izvodom puta po vremenu, tj. veličinom

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = s''.$$



Sl. 52 — Ubrzanje kružnog kretanja

Od krivolinijskih kretanja izaberimo kružno kretanje (sl. 52) i, uporedo sa položajem M, uočimo susedni položaj

pokretne tačke M_1, u koji je tačka prešla posle vremena Δt. Označimo brzine u položajima M i M_1 sa $\vec{v}$ i $\vec{v}_1$. Promena brzine iz položaja M u položaj M_1 izražava se vektorom

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}.$$

Opišimo sa poluprečnikom $M_1 P$ kružni luk do preseka sa brzinom $\vec{v}_1$ u tački Q. Iz trougla PQP_1 imamo

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}.$$

Podelimo svaki član ove jednačine sa Δt i pređimo na granične vrednosti

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{PQ}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{QP_1}}{\Delta t}.$$

Levu stranu ove jednačine smatramo kao ubrzanje pokretne tačke. To je vektor. Označimo ga sa $\vec{w}$.

Prvi član desne strane je vektor, čiji je pravac graničn pravac tetive kružne linije poluprečnika v, tj. pravac normale na $\vec{v}$ ili, najzad, pravac poluprečnika R tačke M sa smerom prema centru. Za izračunavanje veličine tog vektora obratimo pažnju na to da su kružni sektori OMM_1 i M_1PQ slični, jer imaju jednake centralne uglove; iz ove sličnosti, a za beskrajno male trouglove imamo

$$\frac{PQ}{v} = \frac{\Delta s}{R},$$

odakle se dobija

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{PQ}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{R} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}.$$

Tu komponentu, sa pravcem normale na krug, sa smerom prema centru i sa intenzitetom $\frac{v^2}{R}$, zovemo *normalno* ili *centripetalno ubrzanje tačke.*

Druga komponenta

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{QP_1}}{\Delta t}$$

je vektor: 1) sa pravcem tangente na krugu, jer u graničnom položaju vektor $\vec{v}_1$ ima pravac tangente, 2) sa smerom u smislu promene intenziteta brzine i 3) sa veličinom $\frac{dv}{dt}$ izvoda intenziteta brzine po vremenu, jer je QP_1 priraštaj tog intenziteta.

Ova komponenta zove se *tangencijalno ubrzanje*. Prema tome, kod kružnog kretanja tačke, ubrzanje možemo rastaviti u dve komponente: tangencijalnu i normalnu.

Ovo što smo rekli za kružno kretanje može se proširiti na svako kretanje, jer se svaka trajektorija, približno posmatrana, na beskrajno malom delu puta može shvatiti kao kružna trajektorija. Ulogu poluprečnika R kruga igra tada poluprečnik krivine trajektorije u datoj tački.

Na taj način i za svako drugo krivolinijsko kretanje važi vektorska jednačina

$$\vec{w} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_T + \left(\frac{\vec{v}^2}{R}\right)_N .$$

T označava tangentu, a N normalu, a za prostornu krivu glavnu normalu.

Iz dobijenog rezultata očigledno je da svako krivolinijsko kretanje ima ubrzanje. Krivolinijsko kretanje može biti ravnomerno, tj. sa konstantnim intenzitetom brzine i, prema tome, bez tangencijalnog ubrzanja, ali ono mora imati normalno ubrzanje $\frac{v^2}{R}$. Bez ubrzanja može biti samo pravolinijsko ravnomerno kretanje, kad je $\frac{1}{R} = 0$ i kad je $v = \text{const}$.

5.3. Kinematika čvrstog tela

Ako materijalno telo ima osobinu da rastojanje između ma koje dve njegove tačke ostaje isto za sve vreme dok se sa tim telom radi, ono se zove *nepromenljiv materijalni sistem*, ili *čvrsto telo*. Pri određivanju položaja takvog tela i pri proučavanju njegova kretanja, bez obzira na uzroke koji izazivaju

ta kretanja, možemo ne obraćati pažnju na materijalnost tela, već samo određivati položaj i pratiti kretanje sistema geometrijskih tačaka koje pripadaju čvrstom telu. Proučavanje kretanja takvog nepromenljivog geometrijskog sistema tačaka sačinjava *kinematiku čvrstog tela*.

Za određivanje položaja čvrstog tela u prostoru dovoljno je da odredimo položaje triju njegovih tačaka koje nisu kolinearne, tj. ne pripadaju istoj pravoj. Označimo ove tačke sa A, B, C. Da bi se izbegla neodređenost u određivanju položaja trougla i tela, zgodno je izabrati trougao ABC raznostran i smatrati da mu je lice, prema levoj orijentaciji osa trijedra, $Oxyz$, ona strana na kojoj red temena A, B, C odgovara smeru kretanja kazaljke na časovniku. Pošto za određivanje položaja tačke, A, u prostoru treba da znamo tri koordinate; za određivanje tačke B, koja se mora nalaziti na sfernoj površini sa središtem u tački A i poluprečnikom AB, — dve koordinate; i, najzad, za određivanje tačke C samo jednu koordinatu, jer unapred znamo da se ona nalazi na kružnoj liniji koju opisuje teme C pri obrtanju trougla ABC oko AB ose. Pošto položaj trougla ABC potpuno određuje položaj čvrstog tela, u opštem slučaju za određivanje položaja čvrstog tela treba znati šest veličina. Kako svaka od ovih može imati proizvoljnu vrednost, u mehanici se kaže da čvrsto telo ima *šest stepena slobode*.

5.31. Translatorno kretanje čvrstog tela

Za vreme kretanja trougao ABC, čvrsto vezan sa telom, menja svoj položaj u prostoru i svojim položajem i vrstom kretanja potpuno određuje kako položaj čvrstog tela, tako i karakter njegova kretanja.

Najprostiji slučaj kretanja imamo kad se trougao ABC tako kreće, da njegove strane AB i AC ostaju u svim položajima tela paralelne svom položaju u početnom trenutku kretanja. Drugim rečima, ako, recimo, uzmemo tačku A za određivanje položaja čvrstog tela, vektor položaja te tačke $\vec{r}_A$, u odnosu na nepokretnu tačku O, može biti funkcija vremena, tj. $\vec{r}_A = \vec{f}(t)$, no vektori položaja ostalih dveju tačaka u odnosu na tačku A, za sve vreme kretanja tela, imaju iste vrednosti $\vec{AB}=\text{const.}$, $\vec{AC}=\text{const.}$ Tada se vektori položaja tačaka B i C u odnosu na tačku O izražavaju ovako $\vec{r}_B=\vec{f}(t)+\vec{AB}$, $\vec{r}_C=\vec{f}(t)+\vec{AC}$. Vektorska funkcija $\vec{f}(t)$ potpuno određuje kretanje svih tačaka čvrstog tela. Kako se pri takvom kretanju svaka duž što spaja dve proizvoljne tačke čvrstog tela prenosi paralelno sama sebi, kretanje se zove *translatorno*. Translatorno kretanje tela se određuje kretanjem samo jedne tačke tela. Prema tome, telo koje vrši translatorno kretanje ima samo tri stepena slobode. No kretanje izabrane tačke može biti proizvoljno. Ako se izabrana tačka, recimo tačka A, kreće pravolinijski, svaka druga proizvoljna tačka tela isto tako se kreće po pravoj. Tada imamo slučaj *pravolinijskog translatornog kretanja čvrstog tela.* Ako tačka A za vreme kretanja opisuje neku krivu liniju — imamo *krivolinijsko translatorno kretanje čvrstog tela.* Ako je ta kriva kružna linija, imamo specijalan slučaj — *kružno translatorno kretanje čvrstog tela.* U ovom slučaju sve tačke tela opisuju kružne linije, koje nastaju posle paralelnog prenosa kružne linije što opisuje, recimo, tačka A.

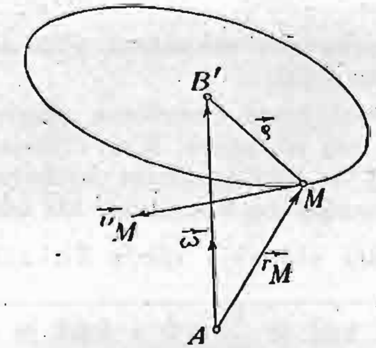
Pošto se translatorno kretanje čvrstog tela određuje kretanjem samo jedne tačke tog tela, proučavanje takvog kretanja tela se svodi na proučavanje kretanja tačke, tj. spada u kinematiku tačke. Prema tome nema potrebe govoriti ni o brzini, ni o ubrzanju kretanja tačaka tela koje se kreće translatorno.

5.32. Rotacija čvrstog tela oko nepomične ose

Pretpostavimo sad da dve tačke tela, A i B, ostaju za vreme kretanja tela nepomične, a da se kreće samo treća tačka, C, i opisuje kružnu liniju. Takvo se kretanje zove, kao što znamo, *obrtanje ili rotacija čvrstog tela oko nepomične ose*. Pošto se položaj tela određuje samo jednom veličinom — uglom između ravni trougla ABC u početnom položaju i položaju koji odgovara trenutku t, čvrsto telo pri obrtanju oko nepomične ose ima samo jedan stepen slobode. Ako sa α označimo taj ugao, jednačina $\alpha=\text{fonct}(t)$ određuje karakter obr-

tanja tela. Za $\alpha=\beta t+\gamma$, gde su β i γ konstante, imamo *ravnomerno obrtanje tela oko nepomične ose*. Za $\alpha=\beta t^2+\gamma t+\delta$ ($\alpha=\text{const.}$, $\beta=\text{const.}$, $\gamma=\text{const.}$), imamo *jednako promenljivo obrtanje*.

Proučimo sad brzinu $\vec{v}_M$ proizvoljne tačke čvrstog tela koje se obrće oko nepomične ose. Neka su A i B nepomične tačke ose obrtanja tela. Uzmimo na toj osi nepomičnu tačku A (sl. 53) za početak vektora položaja. Proizvoljna tačka M tela sa vektorom položaja $\vec{r}_M$ opisuje za vreme obrtanja kružnu liniju, čije ćemo središte označiti sa B' i poluprečnik, kao vektor $\vec{B'M}$ sa $\vec{\rho}$. Brzina $\vec{v}_M$ tačke M na krugu, kao vektor, treba da ima: 1. pravac tangente sa jediničnim vektorom $\vec{T}$, 2. smer prema smeru obrtanja oko ose AB' i 3. intenzitet jednak $\frac{ds}{dt}$, gde je ds diferencijal luka kružne linije poluprečnika $|\vec{\rho}|$. Prema ovim vektorskim elementima možemo napisati $\vec{v}_M=\vec{T}\cdot\frac{ds}{dt}$. Pošto vektor $\vec{T}$ stoji upravno na ravni vektora $\vec{\rho}$ i ose AB', njega možemo izraziti vektorskim proizvodom $\vec{T}=[\vec{k},\ \vec{n}]$, gde su $\vec{k}$ i $\vec{n}$ dva ortogonalna jedinična vektora za vektore ose AB' i vektora $\vec{\rho}$. Prema tome imamo $\vec{v}_M=[\vec{k},\ \vec{n}]\,\frac{ds}{dt}$. Skalar ds jednak je proizvodu poluprečnika $|\vec{\rho}|$ kruga i ugla $d\alpha$ za koji se telo, zajedno sa tačkom M, obrnulo za vreme dt. Na taj način možemo napisati $\vec{v}_M=[\vec{k},\ \vec{n}]\cdot|\vec{\rho}|\cdot\frac{d\alpha}{dt}=\left[\vec{k}\cdot\frac{d\alpha}{dt},\ \vec{n}\cdot|\vec{\rho}|\right]$.



Sl. 53 — Brzina tačke čvrstog tela pri rotaciji

Uvedimo sad vektor $\vec{\omega} = \vec{k} \cdot \frac{d\alpha}{dt}$, koji se zove *ugaona brzina* (kao vektor) pri obrtanju čvrstog tela. Ugaona brzina $\vec{\omega}$ ima: 1. pravac ose obrtanja, 2. pozitivni smer na onu stranu prostora odakle vidimo obrtanje tela u smeru kretanja kazaljke na časovniku, i 3. intenzitet, tačnije algebarsku vrednost jednaku izvodu ugla, koji određuje položaj tela po vremenu. Ako sad uzmemo u obzir da je $\vec{n} \cdot |\vec{\rho}| = \vec{\rho}$, kao proizvod intenziteta vektora i jediničnog vektora tog vektora, možemo napisati $\vec{v}_M = [\vec{\omega}, \vec{\rho}]$. Najzad, ako uzmemo u obzir da u tom obrascu vektor $\vec{\rho}$ možemo zameniti vektorom $\vec{r}_M$, jer, usled kolinearnosti vektora $\vec{\omega}$ i $\overrightarrow{AB'}$, možemo staviti

$$[\vec{\omega}, \vec{\rho}] = [\vec{\omega}, \vec{r}_M - \overrightarrow{AB'}] = [\vec{\omega}, \vec{r}_M] - [\vec{\omega}, \overrightarrow{AB'}] = [\vec{\omega}, \vec{r}_M].$$

Obrazac

$$\boxed{\vec{v}_M = [\vec{\omega}, \vec{r}_M]}$$

igra osnovnu ulogu u kinematici čvrstog tela.

5.33. Ravno kretanje čvrstog tela

Sem translatornog kretanja i obrtanja tela oko nepomične ose, vrlo važan je, naročito u mašinskoj tehnici, specijalan slučaj kretanja čvrstog tela, slučaj tzv. *ravnog kretanja tela*, kad trougao ABC uvek ostaje u istoj ravni i telo ima samo tri stepena slobode: dve koordinate tačke A u ravni i ugao obrtanja pri prelazu tela iz jednog, početnog položaja tela u drugi, promenljivi položaj. Pošto u proučavanju ovog kretanja nema potrebe da se prevrne trougao ABC, možemo, jednostavnosti radi, uzeti ravnokraki trougao sa $AB = AC$. Izaberimo tačku A, kao predstavnika tela za upoređivanje kretanja tačaka B i C tela sa kretanjem tačke A. Sliku kretanja predstavljamo ovako: tačka A, sa $\vec{r}_A = \vec{f}(t)$, kreće se u datoj ravni na proizvoljan način, a tačke B i C ili se kreću po zakonima $\vec{r}_B = \vec{f}(t) + \overrightarrow{AB}$, $\vec{r}_C = \vec{f}(t) + \overrightarrow{AC}$, i tada imamo translatorno kretanje tela u ravni; ili se telo obrće oko tačke A, za ugao α, koji je funkcija vremena. Brzina svake tačke M tela sastoji se tada iz dve komponente: iz brzine tačke $A - \vec{v}_A$, i brzine obrtanja tela oko tačke A, koja, slično prethodnom članu, može biti izražena pomoću obrasca

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \left[\vec{\omega}, \overrightarrow{AM}\right].$$

Brzina $\vec{v}_A$ se zove *translatorna brzina tela, u odnosu na tačku A* (bez obzira na to što kretanje nije translatorno), a druga — *brzina obrtanja oko tačke A.*

Ako ravno kretanje tela nije translatorno, tj. $\vec{\omega} \neq 0$, uvek možemo naći takvu tačku S koja u datom trenutku miruje, tj. $\vec{v}_S = 0$. Zaista, za tačku S treba da važi jednačina

$$\vec{v}_S = \vec{v}_A + \left[\vec{\omega}, \overrightarrow{AS}\right] = 0,$$

koja ima rešenje*) $\quad \overrightarrow{AS} = \frac{1}{\omega^2}\left[\vec{\omega}, \vec{v}_A\right].$

Tačka S se zove *trenutni centar obrtanja ravnog kretanja čvrstog tela.* Ako tačku S uzmemo za trenutnog predstavnika čvrstog tela, brzina proizvoljne tačke čvrstog tela ima jednostavni izraz

$$\vec{v}_M = \left[\vec{\omega}, \overrightarrow{SM}\right].$$

5.34. Opšti slučaj kretanja čvrstog tela

Sada je lako predstaviti sebi kretanje čvrstog tela u opštem slučaju. Ako ponovo za tačku upoređivanja, za predstavnika čvrstog tela, uzmemo tačku A, a tačke B i C uzmemo

*) Ono se dobiva vektorskim množenjem sleva prethodne jednačine sa $\vec{\omega}$ i iskorišćavanjem obrasca $[V_1[V_2V_3]] = V_2(V_3V_1) - V_3(V_1V_2)$.

na istom rastojanju od tačke A, prelaz iz jednog položaja čvrstog u drugi možemo zamisliti tako, da tačka A pređe u nov položaj A'; a tačke B i C, na sferi sa središtem u A, pređu u nove položaje B' i C' na sferi sa središtem u tački A'.

Prema tome na sferi, koja se kreće translatorno i čije središte prenosi tačka A, tačke B i C prvo prelaze translatorno, zajedno sa sferom, u nove položaje B' i C', a zatim se kreću po sferi i zauzimaju nove položaje B'' i C'' na istoj sferi, no ugao između vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ ostaje pri tome nepromenljiv. Ne bi bilo teško pokazati*) da se prelaz tačaka B i C tela, iz položaja B' i C' na sferi, u položaje B'' i C'', na istoj sferi, može postići putem obrtanja sfere oko određenog prečnika sfere za određeni ugao. Prema tome translatorno pomeranje i obrtanje tela za određeni ugao oko određene ose daju osnovnu, opštu sliku kretanja čvrstog tela. Za beskrajno mali diferencijalni interval vremena Δt imamo beskrajno malo translatorno pomeranje, koje se karakteriše pomeranjem $\Delta \vec{r}$ tačke A i obrtanjem oko određene ose za određeni ugao $\Delta\alpha$. Iz ove slike neposredno sleduje obrazac za određivanje brzine proizvoljne tačke M tela u slučaju proizvoljnog kretanja tog tela. Brzina $\vec{v}_M$ ima dve komponente: translatornu brzinu, koja je jednaka brzini $\vec{v}_A$ tačke A, i obrtnu brzinu od obrtanja tela oko određene ose koja prolazi kroz tačku A. Kako smo već izveli obrazac za obrtnu brzinu u slučaju obrtanja oko nepomične ose, možemo taj isti obrazac primeniti i u opštem slučaju, s tim da vektor $\vec{\omega}$ ne smatramo više kao vektor stalnog pravca, već kao vektor koji može da menja i svoj pravac, a u datom trenutku predstavlja određenu trenutnu ugaonu brzinu i trenutnu osu obrtanja tela. Iskorišćavajući te pojmove možemo napisati vrednost brzine tačke M

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \left[\vec{\omega}, \overrightarrow{AM}\right].$$

*) Gl., napr. A. Bilimović — Racionalna mehanika. III. Mehanika čvrstog tela. Prvi deo. Kinematika čvrstog tela. Naučna knjiga. Beograd, 1954. Str. 83.

5.341. Helikoidalna osa

U opštem slučaju kretanja čvrstog tela i pri proizvoljnom položaju tačke A u telu, vektori $\vec{v}_A$ — translatorna brzina tela u odnosu na tačku A, i trenutna ugaona brzina, vektor $\vec{\omega}$ imaju različite pravce. Kako za dati trenutak vektor $\vec{\omega}$, ima određenu vrednost, koja ne zavisi od izbora tačke A, a translatorna brzina $\vec{v}_A$ zavisi od položaja te tačke, postavimo kao zadatak: da se za dati trenutak izabere položaj takve tačke S tela da njena brzina $\vec{v}_S$ ima pravac trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$ tela. Ako brzinu $\vec{v}_A$ rastavimo u dve komponente: 1. u pravcu vektora $\vec{\omega}$ i 2. u pravcu normale $\vec{n}$ na taj pravac; i prvu komponentu označimo sa $\vec{v}_{A\omega}$, a drugu sa $\vec{v}_{An}$, imamo $\vec{v}_A = \vec{v}_{A\omega} + \vec{v}_{An}$. Postavljeni uslov za tačku S biće zadovoljen, ako stavimo $\vec{v}_S = \vec{v}_{A\omega}$. Ako sad iskoristimo opšti obrazac za brzinu tačke M tela, u primeni na tačku S dobićemo $\vec{v}_S = \vec{v}_{A\omega} + \vec{v}_{An} + \left[\vec{\omega}, \overrightarrow{AS}\right] = \vec{v}_{A\omega}$, odakle imamo vektorsku jednačinu $0 = \vec{v}_{An} + \left[\vec{\omega}, \overrightarrow{AS}\right]$ za određivanje vektora $\overrightarrow{AS}$. Pošto smo rešavali identičnu jednačinu za slučaj ravnog kretanja, imaćemo i ovde vrednost vektora $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{\omega^2}\left[\vec{\omega}, \vec{v}_{An}\right]$. Ali pošto u slučaju prostornog kretanja tačka S može uzimati proizvoljan položaj na pravoj sa pravcem vektora $\vec{\omega}$, zaista, važi identičnost $\left[\vec{\omega}, \overrightarrow{AS}\right] \equiv \left[\vec{\omega}, \overrightarrow{AS} + k\,\vec{\omega}\right]$, gde je k proizvoljan realan broj, možemo tvrditi da je geometrijsko mesto tačaka u telu za koje translatorna brzina iste vrednosti ima pravac trenutne ose obrtanja — prava linija. Ova prava zove se *helikoidalna osa*, ili *osa zavrtanja čvrstog tela*. Ako su elementi helikoidalne ose stalni, tj. $\vec{\omega} = \text{const.}$, $\vec{v}_S = \text{const.}$, svaka tačka tela opisuje za vreme kretanja tela zavojnicu (proučiti te zavojnice za tačke tela).

INDEKS RERUM

(Brojevi označavaju strane)

INDEKS RERUM

(Brojevi označavaju strane)