ELEMENTI VIŠE MATEMATIKE I

ANTON BILIMOVIĆ

FUNKCIJA
IZVOD
DIFERENCIJAL

NOVINSKO-IZDAVAČKO PREDUZEĆE
TEHNIČKA KNJIGA
BEOGRAD 1961

Nacrt za korice:
JOVAN VIDIĆ

Štampa: Beogradski grafički zavod, Beograd, Bulevar Vojvode Mišića 17

SADRŽAJ

Glava treća

IZVOD I DIFERENCIJAL

PREDGOVOR

U XX veku opšte je priznat ogroman značaj tehničke kulture. On je naročito porastao u vezi sa borbama, koje narodi vode za svoj opstanak i bolju budućnost.

Tehnička kultura se manifestuje u raznim stepenima: od one primitivne, tek pronađenih afričkih plemena, do kulture najvišeg postignutog stepena današnjice, sa složenim organizacijama za njeno stalno unapređenje. Ali ne samo za unapređenje visokog stepena, već i za održavanje srednjeg stepena, sopstvenim sredstvima, potrebna su znanja iz svih nauka, na kojima ta kultura počiva. Može se tvrditi, i bez navođenja dobro poznatih argumenata, da je matematika, još od preistoriskog vremena pa do danas, vazda bila najbliži pratilac razvitka tehnike. Napredak matematičkog znanja pratio je redovno porast tehnike. Veliki pokretači tehnike bili su gotovo uvek i dobri matematičari.

Matematika je, kao samostalna naučna disciplina, u toku svog razvitka, unosila ponekad u svoj sadržaj i takve nove metode, koji nemaju neposredne veze sa tehnikom. Važni sami po sebi, oni su, često odvodili matematiku u apstraktne oblasti čovečjeg saznanja; katkad i u obliku strahovitog formalizma. Kao posledica takvog razvitka matematike pojavila se odavno kod matematičara težnja da se iz matematike u celini izdvoji, prema potrebi, samo ono što je stvarno potrebno radniku u određenoj oblasti tehnike. Pri tome treba strogo logički deduktivni metod izlaganja matematičkih istina, metod koji ni sam još nije dobio definitivnu formu u svima granama matematike, da bude zamenjen drugim formama izlaganja, delimično induktivnim metodom, naročito kad se zna da psihološki element, prema novim teorijama izlaganja, igra ne manje važnu ulogu od logičkog. Izlaganje i tzv. Više matematike treba da bude toliko olakšano, da se i na nju ne proširi poznati „mit“ o Elementarnoj matematici kao „bauku“ školske nastave.

Pri pisanju ove knjige rukovodili smo se ovim gledanjem na matematiku kao na glavni oslonac tehničke kulture, a težili smo da samo izlaganje bude što pristupačnije. Knjiga je namenjena i početniku, a i čitaocu koji bi želeo bilo da osveži svoje ranije znanje, bilo da se upozna sa ovim načinom izlaganja elemenata Infinitezimalnog računa, tog moćnog matematičkog aparata savremene naučne misli. Da bismo olakšali čitanje knjige, uneli smo u nju i ono iz Elementarne matematike što je neophodno potrebno u vezi sa pojmom funkcije, i tako smo oslobodili čitaoca truda da traži, što mu je potrebno, po drugim knjigama.

Glavni materijal za ovu knjigu uzet je iz tri prve glave mog udžbenika „Viša matematika za fizičare, hemičare, biologe i statističare“, štampana u izdanju „Naučne knjige“ 1948 godine i rasprodata u toku godine. Ali je taj materijal prerađen i dopunjen.

Pri izradi rukopisa ove knjige veliku pomoć mi je ukazao prof. V. V. Mišković, kome ovim putem izražavam srdačnu zahvalnost.

Glava prva

BROJ I OBLIK

1.1. Uvod

Već na pronađenim vavilonskim pločama i egipatskim papirusima ispoljava se sposobnost ljudskog uma da razlikuje predmete po veličini, obliku, položaju i drugim primetnim osobinama; stvara u svom saznanju, pri ocenjivanju tih osobina, izvestan red i izražava ga na razne načine. Grci su nazvali taj red *matema* (τό μάθημα), čije je polazno značenje bilo „znanje“, uopšte. Pa je tek docnije ta reč dobila značenje „teorije“, „nauke“. Danas reč *„matematika“* ima potpuno određeno značenje: ona označava nauku posebne vrste. Savremena matematika, uzeta u celini, obuhvata čitav niz naučnih disciplina specijalnog sadržaja.

Pregled svih grana matematike ne ulazi u zadatak ove knjige. Ali ipak treba naglasiti da se matematika može podeliti na tzv. Elementarnu i Višu matematiku. Ta podela je potekla iz istoriskog razvitka matematike i dugo se zadržala u školskim programima. Stalnost i nepromenljivost veličina, brojeva, slika i drugih objekata, to je glavna osobina Elementarne matematike u klasičnom smislu. Metodi proučavanja promenljivih veličina i veza između njih, naročito elementi tzv. „Infinitezimalnog računa“, spadali su u Višu matematiku i bili su pristupačni jedino izabranim stručnjacima. Čak i u stručnoj literaturi retko se moglo naići na grafičko predstavljanje nekog promenljivog stanja. A danas se i mališanima, kad posećuju izložbe, pokazuju razni grafikoni i pomoću njih prikazuje razvoj materijalnog i kulturnog života i razvitka njihove zemlje. U današnje vreme ne samo što se u programe matematike za srednje škole uvode i elementi Više matematike, već se, što više, traži da se od samog početka nastave matematike uzimaju u obzir kako ideja promenljivosti veličina, tako i pojam funkcionalne veze između njih.

U vezi sa razvitkom pojmova broja i oblika objasnićemo postanak Aritmetike, Geometrije, Algebre i Trigonometrije, kao osnovnih predmeta Elementarne matematike, u užem smislu.

Aritmetika, naziv izveden od grčke reči aritmos (ὁ ἀριθμός — broj) ponikla je iz urođene sposobnosti ljudi da razlikuju jednu množinu predmeta od druge. U toku razvitka materijalnog života, pred Aritmetiku su se vremenom postavljali sve komplikovaniji zadaci, i tako se ona razvila u naročitu naučnu disciplinu, znatno širu od obične školske Aritmetike. Na sličan način je i *Geometrija*, nazvana po grčkoj složenici: ge (ἡ γῆ — zemlja) i metreo (μετρέω — meriti), ponikla iz ljudske sposobnosti da razlikuje predmete ne samo po njihovoj veličini, već i po obliku, i po položaju u prostoru. Uopštavanje aritmetičkih i geometriskih zadataka, i odgovora na njih, dovelo je do nove matematičke discipline, koja je dobila naziv *Algebre*, naziv izveden od arapske reči algabr (alǵabr), što znači uprošćavanje. Deo Geometrije posvećen proučavanju veza između dužina i uglova, u prvo vreme samo kod trougla, dobio je naziv *Trigonometrije*.

Gotovo istovremeno su R. Dekart (R. Descartes, 1596—1650), u svom radu „O metodu" (1637), i P. Ferma (P. Fermat, 1601—1665), u radu „Uvod" (u rukopisu 1635), izložili nov metod za primenu Algebre na Geometriju i tako postavili osnovu novoj matematičkoj disciplini — *Analitičkoj geometriji*, koja je, ranije, pripadala Višoj matematici, a sad se, delimično, uključuje u Elementarnu matematiku.

Analitičku geometriju treba smatrati kao uvod u glavni deo Više matematike, u „Teoriju beskrajno malih veličina" ili „Infinitezimalni račun", čiju su osnovu postavili genijalni matematičari Njutn (Newton, 1643—1727) i Lajbnic (Leibnitz, 1646—1716).

Pre no što pređemo na izlaganje elemenata Više matematike osvrnućemo se na neke pojmove iz Elementarne matematike i drugih matematičkih disciplina, korisne bilo sa teoriskog bilo sa praktičkog gledišta za razumevanje osnova Više matematike.

1.2. Niz prirodnih brojeva

Da li znate poreklo reči „broj"? Evo odgovora jednog filologa. Reč „broj" je staroslovenska reč; sačuvana je u srpskom jeziku; ona je u etimološkoj vezi sa glagolom — „bri-ja-ti" — seći. Reč „broj" značila bi, prema tome, zasek ili zarez.

Pa kakva je veza između pojma „broj" i pojma „zasek"? Biće nam jasno, ako pretstavimo sebi ovu sliku iz života starih Slovena. Pastir želi da prebroji svoje stado; uzima drveni štapić — „raboš" — i, prelazeći pogledom sa jedne na drugu ovcu, pravi na štapiću zaseke: koliko zaseka, toliko i ovaca. Zasek na štapiću je broj. Takav primitivan način brojanja, neposredno upoređivanje jedne množine sa drugom, leži u osnovi svakog brojanja.

Is potrebe za prebrojavanjem nastao *je niz prirodnih brojeva*: 1, 2, 3, ... kao osnovna množina za upoređivanje.

Pretpostavljamo kao poznato ono o prirodnim brojevima što spada u školsku Aritmetiku. Ali ćemo ipak učiniti neke napomene: 1. Za oznaku tzv. opštih prirodnih brojeva upotrebljuju se slova $a, b, c, \ldots, x, y, z$, slova sa indeksima $a_1, a_2, a_3, \ldots, x_1, x_2, x_3, \ldots$, ili sa crticama $a', b', \ldots, a'', b''$; slovo n (početno slovo latinske reči numerus — broj) često se upotrebljuje baš za oznaku prirodnog broja. 2. Dobro poznate osobine prirodnih brojeva, stavljene u određeni sistem, smatraju se *osnovnim stavovima* Aritmetike; a dopunjene — stavovima i cele matematike. Navešćemo te osnovne stavove, da bi se čitalac upoznao sa „strogim" izlaganjem matematike, koje, prvo, još nije sprovedeno do kraja u svim oblastima matematike; i, drugo, naročito zbog svoje opširnosti, ne može biti iskorišćeno pri izlaganju matematike sa praktičnim ciljevima. Da bi formulisanje tih stavova bilo što kraće, ustanovićemo da a, b, c, a', b' itd. označavaju prirodne brojeve.

A. *Stavovi postojanja.* 1. Postoje brojevi. 2. Dva broja, a i b, mogu biti samo u jednom od tri odnosa: $a>b$, $a=b$, $a<b$. 3. Za a i b postoji broj $a+b$.

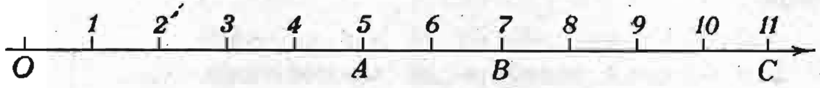
B. *Stavovi ekvivalentnosti.* 4. Iz $a=b$ sleduje $b=a$ (osobina simetrije). 5. Iz $a=b$, $b=c$ sleduje $a=c$ (osobina tranzitivnosti). Ako je a broj, onda je $a=a$ (osobina reflektivnosti).

C. *Stavovi neekvivalentnosti*. 7. Iz $a>b$ sleduje $b<a$, i obrnuto. 7*. Iz $a>b$ i $b>c$ sleduje $a>c$, i tada se kaže da je b između a i c. 8. Iz $a=b+c$ sleduje da je $a>b$, i obrnuto. 9. Iz $a>b$, postoji broj c za koji $a=b+c$.

D. *Osnovne osobine zbira*. 10. Iz $a=a'$ i $b=b'$ sleduje $a+b=a'+b'$. 10*. Iz $a>a'$, $b>b'$ sleduje $a+b>a'+b'$. 11. $(a+b)+c=(a+c)+b$. 11*. $(a+b)+c=a+(b+c)$. 12. $a+b=b+a$.

E. *Stavovi o jedinici*. 13. Između brojeva postoji jedinica. 14. Ako su u i v jedinice, onda je $u=v$. 15. Ako je u jedinica, i a neki broj, koji nije jednak u, onda je $a>u$.

Ove osobine prirodnih brojeva vrlo zgodno mogu biti prikazane grafički. Nacrtajmo pravu (slika 1) i na njoj strelicom



Sl. 1 — Brojna skala

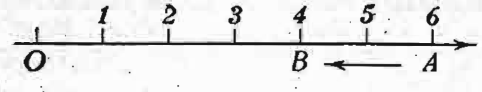
označimo smer. Prava sa obeleženim smerom zove se *osa* ili *osovina*. Na toj osi označimo određenu tačku sa O (početno slovo latinske reči origo — početak). U izabranom smeru od ove tačke prenesimo više puta istu dužinu. Ovu ćemo dužinu uzeti za jedinicu. Krajeve odmerenih dužina označimo sa 1, 2, 3 itd. Tako ćemo na slici dobiti ono što se zove *brojna skala*. Osu možemo produžiti koliko želimo, do u beskraj. Otud proizlazi da i niz prirodnih brojeva možemo produživati do neizmerno mnogo članova, tj. uvek se može načiniti broj koji će biti veći od bilo kojeg proizvoljno izabranog broja skale. Slavni grčki matematičar Arhimed (iz Sirakuze, 287 do 212 pre naše ere) napisao je raspravu „Psamitis“, u kojoj dokazuje da se u decimalnom sistemu može naći broj veći od broja zrna peska u lopti u koju bi stale sve zvezde što ih vidimo.

1.3. Osnovne računske radnje. Uopštavanje pojma „broj“

Znamo kako se *sabiraju* dva prirodna broja, kao i da njihov *zbir* daje opet prirodni broj. Sabiranje se može predstaviti na brojnoj skali. Na pr., brojevima 5 i 2 odgovaraju dve

nejednake duži, $OA=5$ i $AB=2$ (sl. 1). A ako se od početka skale prenese u njenom smeru duž OA, pa na ovu nadoveže duž AB, duž $OB=OA+AB=5+2=7$ je grafička predstava zbira 7. Kad bi postojao treći sabirak, pa ga naneli kao duž, na pr., $BC=4$, duž ose, duž $OC=11$ bi predstavljala zbir brojeva $5+2+4$. Zbirna prava spaja, dakle, početak prve duži-sabirka i kraj poslednje.

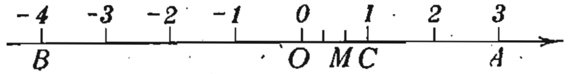
Oduzimanje obrnuta radnja od sabiranja. Za oduzimanje dva broja na skali, na pr., 2 od 6 (sl. 2), treba odmeriti počev od O u smeru ose šest jedinica (OA), a zatim, od tačke A, u suprotnom smeru (ulevo) dve jedinice (AB); duž $OB=4$ što spaja početak prve duži i kraj druge, oduzete, predstavlja *razliku*.



Sl. 2 — Oduzimanje

Oduzimanje može dovesti do rezultata koji se ne da izraziti prirodnim brojem. Na pr., oduzimanjem 4 od 4 udaljićemo se od početka brojne skale i ponovo vratiti u početak, dakle u tačku O, kojoj ne odgovara nikakav prirodni broj. Ako i pored toga razliku dva jednaka broja želimo da smatramo kao broj, treba uvesti nov broj: zove se *nula*, a oznaka mu je 0. Prema tome, početku brojne skale, tački O, odgovara broj 0 — nula.

Slično tome, razlika manjeg i većeg prirodnog broja oglašuje se za *negativan broj*; na pr. $3-7$ (sl. 3) daje, prema



Sl. 3 — Oduzimanje većeg broja od manjeg. Negativan broj. Razlomljen broj

malopre opisanom postupku, tačku B levo od početka O. Kaže se da je *smer* od O ka B *negativan*. Ako je $a<b$, razlika $a-b$ je negativna. Njoj odgovara za iste brojeve razlika $b-a>0$. Razlika $b-a$ je *apsolutna vrednost* negativne vrednosti $a-b$. Označimo li apsolutnu vrednost sa dve uspravne crte, biće za $b>a$

$$|a-b|=b-a.$$

Pošto svaki negativan broj možemo smatrati kao razliku $O-a$ gde je $a>0$, to je $|0-a|=|-a|=a-0=a$. Prema tome, svaki negativan broj ima svoju apsolutnu vrednost i znak minus. Jednakost $n=-|n|$ može biti smatrana kao definicija negativnog broja. Niz prirodnih brojeva dopunili smo nulom i negativnim brojevima. Niz

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

se produžuje nadesno i nalevo. U vezi sa ovim nizom, prirodni brojevi su dobili i svoj dopunski naziv *pozitivnih* brojeva. Apsolutna vrednost pozitivnog broja je sam taj broj, a nule je nula. Dakle, imamo: $|-7|=7$, $|5|=5$, $|0|=0$.

Brojevi čija je apsolutna vrednost prirodni broj ili nula *celi* su brojevi. Tačke na brojnoj skali, produženoj na obe strane, koje odgovaraju brojevima n i $-n$ simetrične su u odnosu na tačku O.

Množenjem celih brojeva uvek se dobiva ceo broj.

Radnja obrnuta od množenja je *deljenje*. Količnik dva cela broja ne može se uvek izraziti celim brojem. Tako se, na pr., količnik $2:3$ ne izražava celim brojem: ni pozitivnim, ni negativnim. Na brojnoj skali treba dužinu jedinice OC (sl. 3) podeliti na tri jednaka dela i uzeti dva takva dela. Tački M odgovara broj nove prirode, koji se određuje sa dva cela broja. To je *razlomak* ili *razlomljeni* broj. Pošto deljenje nulom nema smisla, razlomak ne može imati nulu u imeniocu.

Celi i razlomljeni brojevi — pozitivni, negativni ili nula — sačinjavaju klasu *racionalnih* brojeva.

U vezi sa pojmom prirodnih brojeva naveli smo osnovne stavove Aritmetike. Ti stavovi se proširuju i na druge brojeve. Ponovimo glavne od njih i dopunimo za slučaj množenja.

I.	$(a+b)+c=a+(b+c)$	izražava	*asocijativni* zakon sabiranja,
II.	$a+b=b+a$	„	*komutativni* zakon sabiranja,
III.	$(ab)c=a(bc)$	„	*asocijativni* zakon množenja,
IV.	$ab=ba$	„	*komutativni* zakon množenja,
V.	$(a+b)c=ac+bc$	„	*distributivni* zakon množenja i sabiranja,

VI. Iz	$a_1 \gtreqless a_2$	i izražava zakon *monotonosti* sabiranja i množenja.
sleduje za sabiranje	$a_1+n \gtreqless a_2+n$	
sleduje za množenje	$a_1 n \gtreqless a_2 n \; (n>0)$	

Ne ulazeći u objašnjenje poznatih zakona navedimo da zakon monotonosti za sabiranje, odnosno za množenje, utvrđuje da se karakter relativnog odnosa dva broja prenosi i na zbirove, odnosno proizvode, sa trećim brojem.

Proučavanje ovih zakona i strogo logičko izvođenje aritmetičkih pravila za izvođenje računskih radnji spada u posebnu oblast matematike, koja se naziva *Teoriska aritmetika*. Ova je tesno vezana sa logikom i dublje se razrađuje u tzv. *Matematičkoj logici*, jednoj od najtežih matematičkih disciplina.

Pored Teoriske postoji i tzv. *Praktična aritmetika*. Zadatak ove Aritmetike je da razradi praktične postupke, koji bi olakšavali primenu Aritmetike u praktičnom životu. Ne ulazeći u pojedinosti, pregledajmo sredstva kojima se služi Praktična aritmetika za obavljanje osnovnih aritmetičkih radnji. Raniji metodi, koji su bili zasnivani na uvežbavanju u usmenom računu, na naročitim, takozvanim skraćenim, postupcima pri pismenom računu, na različitim računaljkama i grafičkim postupcima — ti metodi sad nemaju praktičnog značaja. Oni se primenjuju samo u izvesnim relativno jednostavnim izračunavanjima za ciljeve pojedinih lica. Za važnije, složene račune, od opšteg značaja, postoje samo dva metoda, to su *tablice i računske mašine, mehaničke i elektronske*, pri čemu se i tablice ili dobivaju kao rezultat prethodnog velikog truda, ili su i one rađene na mašinama. Smatramo da je u današnje vreme poznavanje rukovanja ručnom računskom mašinom isto tako neophodno kao i vičnost radu na pisaćoj mašini. Ovde ne možemo ulaziti u mehanizme različitih tipova savremenih računskih mašina. Dovoljno će biti ako kažemo da je savremena elektronska mašina doživela epohalni uspeh otkako su konstruisane računske automat-mašine. U tu se mašinu elektronskim putem unosi program operacija, koje ona treba da izvrši. Na osnovu tog programa i ubačenih podataka, automat-mašina neverovatno brzo obavlja, ponekad, i vrlo velik broj operacija, i izbacuje rezultat. Uloga matematičara pritom se svodi samo na programiranje, koje, doduše, ponekad, zahteva veliku matematičku i tehničku spremu.

Kao primer brzine rada računske automat-mašine navodimo ovaj podatak[1]). Za rešavanje sistema od n linearnih jednačina po postupcima: A (Kramera), B (Kramer-Laplasa), C (Gausa) potrebno je.

	$n=5$	$n=10$	$n=20$
A	5 min	85 dana	10^{11} godina
B	4 sec	4 min	5 dana
C	1,3 sec	9 sec	1 min

Primetimo da u Praktičnu aritmetiku ulaze i metodi za proveravanje dobivenih rezultata, bilo u celini bilo delimično, tzv. probama.

Pređimo sad na naredne radnje sa brojevima. Prva naredna radnja je *stepenovanje* i to sa celim izložiocem. Stepenovanje racionalnog broja a celim izložiocem n daje uvek racionalni broj, koji ćemo označiti sa b. Dakle je $a^n=b$. Predpostavljamo da su i izračunavanje stepena i osobine stepenovanja poznati.

Pri stepenovanju su poznata dva broja: a i n. Treba odrediti broj b. Ako tako shvatimo stepen, sleduje da stepenovanju, kao direktnoj radnji, odgovaraju dve obrnute radnje. U prvoj je dat stepen, dakle broj b, i ceo broj n, izložilac stepena, a traži se osnova stepena, tj. broj a. Ova radnja se zove *korenovanje* i, kao što je poznato, izražava se sa $a=\sqrt[n]{b}$. Za $n=2$, koren se zove *kvadratni*; za $n=3$ — *kubni*; za proizvoljan ceo broj n — koren n-tog stepena. Korenovanje, kao obrnuta radnja, isto tako može dovesti do nove vrste broja. Doista, uzmimo, na pr. kvadratni koren iz dva, tj. $\sqrt{2}$; pri čemu je koreni izložilac 2 izostavljen. Taj koren ne možemo izraziti ni celim, ni razlomljenim brojem, koji, podignut na kvadrat, daje tačno 2. Ako želimo da rezultate i ovih operacija uvedemo u Matematiku, treba uvesti nove brojeve; oni su nazvani *iracionalnim* od latinske reči irrationalis, koja znači nerazložan, koji je „iznad razuma“. U Matematici ona znači neizračunljiv, podrazumevajući da se ne može tačno izračunati pomoću ranije poznatih brojeva.

Kako se može razumeti pojam iracionalnog broja? O tome ima više matematičkih teorija. Najprostije je iracionalni broj

[1]) Iz članka R. Sauer-a (Die Wissenschaften, 1960, Heft 7. S. 145).

smatrati kao beskrajan decimalan razlomljeni broj, koji nije periodičan. Decimalan periodičan broj isto tako ima beskrajno mnogo cifara, ali svaki takav broj se pretvara u običan razlomak i, prema tome, racionalan je broj, napr. $0,333\ldots=1/3$. Za određivanje iracionalnog broja u decimalnom obliku treba da bude poznato pravilo, zakon po kome se dopisuju uzastopne cifre tog decimalnog broja.

U praksi se sa iracionalnim brojevima računa pomoću njihovih *približnih vrednosti*. I za racionalne decimalne brojeve sa relativno velikim konačnim brojem cifara mogu se uzimati približne vrednosti. Uzmimo, dva kvadratna korena: $\sqrt{3,5721}$ i $\sqrt{2}$ i napišimo njihove približne vrednosti, pomoću poznatog postupka za izračunavanje kvadratnog korena.

$2>\sqrt{3,5721}>1,$	$2>\sqrt{2}>1$	razlika 1
$1,9>\sqrt{3,5721}>1,8,$	$1,5>\sqrt{2}>1,4$	„ 0,1
$1,89=\sqrt{3,5721}=1,89,$	$1,42>\sqrt{2}>1,41$	„ 0,01
	. . . .	
	$1,414213563>\sqrt{2}>1,414213562$	0,000000001

Napisane uzastopne nejednakosti postavljaju sve bliže granice između kojih se nalazi vrednost iracionalnog odnosno racionalnog broja sa većim brojem cifara. Tako se vrši *uzastopna procena* iracionalnih brojeva pomoću racionalnih brojeva, racionalnih pomoću prostijih brojeva. Veće približne vrednosti opadaju, a manje rastu; razlike se sve više smanjuju. U prvom slučaju već posle trećeg koraka vidimo da su se veća i manja vrednost izjednačile i naš koren je dobio tačnu racionalnu vrednost 1,89. Zaista, $1,89^2=3,5721$, tj. podkorena veličina je potpuni kvadrat broja 1,89. U drugom slučaju, uzastopne razlike većih i manjih približnih vrednosti isto tako se smanjuju, no ta razlika nikad ne može postati jednaka nuli. U beskonačnosti tog procesa za određivanje sve bližih približnih vrednosti iracionalnih brojeva leži suština prirode tih brojeva. Sam po sebi je iracionalan broj, napr. $\sqrt{2}$, isto tako tačan, kao i svaki drugi broj, ali njegov izraz pomoću racionalnih brojeva ne može biti tačan. Da je to sad postalo potpuno razumljivo, vidi se i po tome, što na brojnoj skali tom broju odgovara potpuno određena tačka. Zaista, ako na prvoj jedinici te skale konstruišemo kvadrat i iz tačke O, tj. temena tog kvadrata, kao centra, opišemo kružni luk sa poluprečnikom jednakim dijagonali tog kvadrata, do preseka P sa brojnom skalom, tački P, prema Pitagorinoj teoremi, odgovara iracionalan broj $\sqrt{2}$. Duž OP je potpuno razumljiva, samo je, kako je to još Euklid tumačio, njena dužina *nesamerljiva* sa jediničnom dužinom strane kvadrata. Iracionalnim brojevima odgovaraju veličine isto tako jasne konkretnosti, kao i veličine što odgovaraju racionalnim brojevima, samo su prve nesamerljive sa drugima. Što se tiče apstraktne tačnosti tih veličina, dužina dijagonale je isto tako tačna kao i dužina strane tog kvadrata.

Za jasnije razumevanje pojma iracionalnog broja postavimo vezu između pojma iracionalnog broja i drugog, vrlo važnog u Višoj matematici pojma, — pojma *granične vrednosti* ili *granice*.

Za iracionalan broj, recimo za $\sqrt{2}$, možemo navesti niz približnih vrednosti — manjih, što se povećavaju, i većih, što se smanjuju. Označimo duži što odgovaraju manjim brojnim vrednostima sa $OS_1 < OS_2 < \ldots < OS_i < \ldots$ (čitaj o-esito), a što odgovaraju većim sa $OT_1 > OT_2 > \ldots > OT_i > \ldots$ Tada je za svako i imamo $OS_i < OP < OT_i$, gde je, u našem slučaju, $OP = \sqrt{2}$. Jasno je da se razlika $OT_i - OS_i = S_iT_i$ smanjuje kad i raste.

U matematici se kaže da je dužina OP *granična vrednost* ili *granica* niza duži OS_i odnosno niza duži OT_i (i može da raste u beskrajnost), kad se duž $S_i\,T_i$ sve više smanjuje i to tako da za svaki proizvoljan broj, koji označimo sa ε (čitaj: epsilon) uvek možemo odrediti toliko veliki prirodni broj n da za svako $i \geqq n$ razlika

$$OT_i - OS_i = S_i T_i$$

postane i ostane manja od broja ε. Navedeni uslov za razliku $S_i T_i$ kratko ćemo zvati *epsilon — uslov*. Prema tome možemo kratko kazati da, kad i teži beskonačnosti, vrednosti OS_i odnosno OT_i teže graničnoj vrednosti OP, ako je ispunjen epsilon — uslov, tj.

$$OT_i - OS_i \leqq \varepsilon .$$

Rečenica: OP je granična vrednost OS_i odnosno OT_i, kad i teži beskonačnosti kratko se izražava matematičkim simbolima sa

$$OP = \lim_{i \to \infty} OS_i = \lim_{i \to \infty} OT_i ,$$

gde je *lim* skraćenica latinske reči limes koja znači granica.

Pretpostavljamo poznavanje elemenata teorije iracionalnih brojeva, u kojoj se daju pravila kako za utvrđivanje jednakosti iracionalnih brojeva, tako i za vršenje operacija sa tim brojevima.

Po prirodi svog postanka, iracionalni brojevi se dele na *algebarske i transcendentne.* Iracionalan broj je *algebarski* ako se može napisati polinom sa celim koeficijentima po stepenima tog broja, da mu je vrednost nula. $\sqrt{2}$ je algebarski iracionalan broj, jer je $(\sqrt{2})^2 - 2 = 0$. Kao primer transcendentnog broja možemo navesti broj π (čitaj: pi), koji izražava odnos obima kruga prema prečniku. Prvu približnu ocenu tog broja sa vrednostima

$$\frac{22}{7} > \pi > \frac{223}{71}$$

izračunao je *Arhimed.* Za taj je broj dokazano da ne postoji nikakva algebarska jednačina sa celim koeficijentima čije bi rešenje moglo biti taj broj — to je, dakle, transcendentni broj.

Racionalni (celi i razlomljeni), iracionalni (algebarski i transcendentni), pozitivni i negativni brojevi zovu se jednim imenom — *realni brojevi.* Kako svakom realnom broju odgovara određena tačka na brojnoj skali, realni brojevi se zovu i *skalarni* brojevi. Veličina, kao rezultat merenja, koja se može izraziti jednim realnim brojem, zove se *skalarna veličina.* Prema tome, dužina, površina, zapremina, vreme, temperatura su — skalarne veličine. Kao svakom realnom broju odgovara tačka na skali realnih brojeva i obrnuto, izrazi „određena tačka" i „određen broj" smatraju se kao ekvivalentni, dok smo u oblasti realnih brojeva.

Brojevi sa bilo kojim vrednostima zovu se *opšti brojevi.* Za oznaku opštih brojeva upotrebljavaju se slova: $a, b, c, \ldots,$

$x, y, z, \ldots, \alpha, \beta, \ldots, \pi, \rho, \ldots, \omega$.[1]). Pravila za vršenje operacija sa takvim brojevima daje *algebra.*

Iz opštih brojeva savremena Matematika izdvaja neke množine brojeva sa naročitim osobinama. To su, napr., množine, koje se zovu *brojni prsten i brojno polje.*

Množina brojeva, sa kojima se mogu vršiti samo radnje sabiranja, oduzimanja i množenja, zove se *brojni prsten.* Rezultat koji se ovim radnjama dobiva takođe pripada toj množini. Kao primere brojnog prstena imamo: 1) množinu celih brojeva, 2) množinu parnih brojeva. Množina neparnih brojeva, međutim, ne sačinjavaju prsten.

Množina brojeva, sa kojima se mogu vršiti radnje sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja (sem deljenja nulom) zove se *brojno polje.* I u ovom slučaju rezultat koji se dobiva radnjama sa brojevima polja opet pripada polju. Kao primere brojnog polja imamo: 1) množinu svih racionalnih brojeva, 2) množinu brojeva oblika $a+b\sqrt{2}$, jer operacije polja sa ovim brojevima daju opet broj sve oblika $m+n\sqrt{2}$. Pojmovi brojnog prstena i brojnog polja, koji su ranije imali samo teorijski značaj, sad su sa razvitkom teorije računskih mašina dobili i praktičan značaj,

U vezi sa pojmom broja navešćemo još jednu primedbu o radnjama sa takozvanim *imenovanim* brojevima. Svaki imenovani broj sadrži u sebi dva elementa: *brojnu vrednost i imenovanje.* Imenovanje može biti prosto (5 metara, 3 dana). ili složeno (5 metara, i 3 decimetra, 3 godine 2 meseca i 5 dana). Školska aritmetika daje pravila po kojima se vrše radnje sa takvim brojevima; pri tome ona stavlja izvesna ograničenja za te radnje. Tako se, napr., deliti mogu samo ili dva istoimena broja ili bilo kakav imenovani broj apstraktnim, dakle neimenovanim brojem. Međutim, danas prikazivanje i ocenjivanje raznih prirodnih pojava nameće radnje i razne kombinacije sa veličinama različitih imenovanja, Tako se, napr., kaže da voz prevaljuje 36 kilometara na čas. Kojim se imenovanim brojem može izraziti brzina tog voza? Ako brzinu

[1]) Često se upotreba slova za oznaku brojnih vrednosti raznih veličina vrši u određenim kombinacijama. Napr.: $a, b, c; a_1, a_2, \ldots, a_n; i, j, k; x, y, z; u, v, w; \xi, \eta, \zeta; \lambda, \mu, \nu; p. q, r; \varphi, \psi$, itd.. Upotreba ovih oznaka znatno olakšava pregled i studiranje matematičke literature.

voza označimo sa v (početno slovo latinske reči velocitas-brzina) možemo napisati

$$v = 36\ \mathrm{km/h} = \frac{36 \cdot 1000}{60 \cdot 60}\ \mathrm{m/sec} = \frac{36 \cdot 1000 \cdot 100}{60 \cdot 60}\ \mathrm{cm/sec} =$$

$$= 10\ \mathrm{m/sec} = 1000\ \mathrm{cm/sec}.$$

Oznake u tim izrazima su poznate; kosa crta označava deljenje.

Uzmimo kao drugi primer obrazac

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

za određivanje trajanja T sec male oscilacije prostog klatna, dužine l cm, pod uticajem sile teže, sa ubrzanjem g cm/(sec)^2 $= 980{,}665$ cm/(sec)^2; ubrzanje znači da se u toku svake sekunde brzina povećava za 980,665 cm/sec.

Proverimo da li gornja jednakost sa imenovanim brojevima zadovoljava osnovni uslov za jednakost imenovanih brojeva, tj. da li leva i desna strana imaju isto imenovanje. U tom cilju izvršimo u obrascu

$$T\ \mathrm{sec} = 2\pi\sqrt{\frac{l\ \mathrm{cm}}{g\ \frac{\mathrm{cm}}{(\mathrm{sec})^2}}}$$

ali sa unesenim imenovanjima uz veličine, naznačene operacije sa njima. Podelimo cm sa $\frac{\mathrm{cm}}{(\mathrm{sec})^2}$, dobićemo (sec)^2; izvucimo kvadratni koren — dobivamo sec, što odgovara imenovanju leve strane.

Vidimo, prvo, da se sa imenovanim brojevima mogu vršiti i one operacije, o kojima se ne govori u školskoj aritmetici, i, drugo, da pri tumačenju obrazaca sa imenovanim brojevima, koje se odnose na razne prirodne pojave, treba u obzir uzimati ne samo brojne vrednosti, već i imenovanja veličina koje se u tim obrascima javljaju, ili, kako se to kaže, i *dimenzije* tih veličina. Podrobnije objašnjenje pojma dimenzije ne ulazi u okvir ove knjige.

1.4. Kompleksni brojevi. Dekartove koordinate. Polarne koordinate. Vektori u ravni

U prethodnim izlaganjima upoznali smo se sa realnim brojevima. Sada ćemo preći na proučavanje nove vrste brojeva.

Pretpostavimo da se traži broj z, koji treba da zadovoljava uslov

$$z^2 = -4.$$

Međutim, poznato je da ne postoji takav realan broj koji bi, podignut na kvadrat, dao negativni broj. Znači, za rešavanje takvih jednačina moramo uvesti nove brojeve, takozvane *imaginarne brojeve.*

Za jedinicu imaginarnih brojeva uzima se broj, i označava sa i, a ima vrednost

$$i = +\sqrt{-1}.$$

Pomoću tako definisane jedinice dva moguća imaginarna rešenja navedene jednačine možemo izraziti sa

$$z_1 = +2i, \quad z_2 = -2i.$$

Ako jednačina za određivanje z ima oblik, recimo,

$$z^2 - 4z + 13 = 0,$$

njena rešenja su

$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = 2 - 3i.$$

Dobili smo, dakle, zbir realnog i imaginarnog broja. Takav zbir zove se *kompleksni* broj (kratko — *kompleks*), ili kompleksni broj u širem smislu ove reči.

U opštem slučaju kompleksni broj izgleda ovako

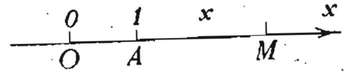
$$z = x + iy,$$

gde su x i y dva realna broja, a i imaginarna jedinica.

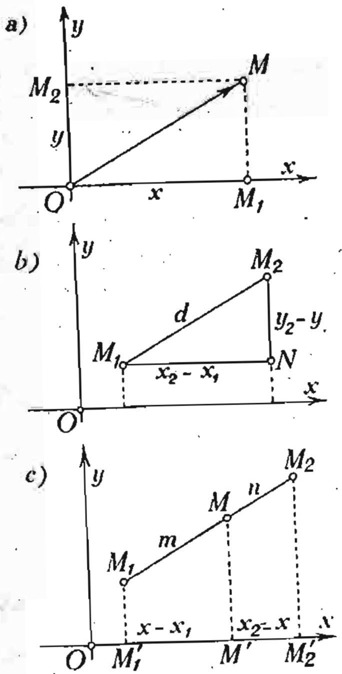
Videli smo, ranije, da svakoj tački M (sl. 4) na brojnoj skali odgovara jedan realan broj, merni broj dužine OM ($OA = 1$), sa njenim znakom: pozitivnim, ako se tačka M nalazi u pozitivnom smeru od O, negativnim u suprotnom slu-

čaju. Taj broj je *koordinata* tačke M na datoj osi. Tu koordinatu ćemo označavati sa x. Prema tome, svakoj tački na osi odgovara određeni broj i, obrnuto, svakom broju odgovara određena tačka.

Povucimo sad u ravni dve upravne prave (sl. 5, a) i svaku od njih pretvorimo u osu, Presek O uzmimo za početak i na jednoj i na drugoj osi. Odmerimo na jednoj od njih dužinu OM_1, koja odgovara i po znaku i po veličini realnom broju x; a na drugoj dužinu OM_2 sa vrednošću broj y. Kroz tačku M_1 povucimo pravu paralelnu sa OM_2, a kroz tačku M_2 — pravu paralelnu sa OM_1. Tačka preseka ovih paralelnih odgovara kompleksnom broju $x + yi$. Ovakvu geometrisku predstavu imaginarnog broja prvi put je dao Argan (1806 g).



Sl. 4 — Koordinata tačke



Sl. 5 — a. Dekartov sistem koordinata u ravni; b. rastojanje između dve tačke; c. podela duži u datoj razmeri

Dve ose, Ox i Oy, sa zajedničkim početkom, čine *Dekartov koordinatni sistem u ravni.* Veličine x i y su Dekartove koordinate tačke M u ravni: x je *apscisa*, y — *ordinata*. Same ose zovu se: jedna — *apscisna osa*, ili x — osa, ili, još, Ox osa; druga — *ordinatna osa*, y — osa ili Oy osa. Koordinate tačke pišu se iza oznake tačke u zagradi: $M\ (x, y)$. Napr., $P\ (2, 3)$, $Q\ (-0{,}4;\ 5{,}2)$.

Svakom paru realnih brojeva x, y odgovara određena tačka ravni i, obrnuto, svakoj tački M ravni odgovara par određenih realnih brojeva. Početak koordinata, tačka O, ima za koordinate 0 i 0, tj. $O\ (0, 0)$. Tačke na Ox osi imaju za koordinate: $M_1\ (x, 0)$, na Oy osi $M_2\ (0, y)$.

Spojimo početak koordinata O sa tačkom M. Na dobijenoj duži utvrdimo smer od O prema M i označimo ga strelicom (sl. 5, a). Tako ćemo dobiti naročiti geometriski oblik — duž određenog smera. Taj oblik — duž određenog smera — zove se *vektor* (latinska reč *vector* znači: ono što nosi ili vuče). Tačka O je *početak*, a M *kraj* vektora.

Vidimo da svakom kompleksnom broju odgovara vektor.

Rešimo sad pomoću Dekartovih koordinata dva zadatka.

1. Date su dve tačke, M_1 (x_1, y_1) i M_2 (x_2, y_2). Odrediti njihovo rastojanje $M_1 M_2 = d$.

Ako iz tačke M_1 spustimo normalu na ordinatu tačke M_2 (sl. 5, b) iz pravouglog trougla $M_1 M_2 N$ sa katetama $M_1 N = x_2 - x_1$ i $NM_2 = y_2 - y_1$, imamo neposredno, na osnovu Pitagorine teoreme,

$$d = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

U specijalnom slučaju, kada se određuje rastojanje d makoje tačke $M(x, y)$ od početka koordinata, imamo obrazac

$$d = +\sqrt{x^2 + y^2}.$$

2. Date su dve tačke, $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$. Odrediti koordinate tačke koja deli datu duž $M_1 M_2$ u datoj razmeri $m : n = \lambda$.

Ako označimo sa M_1', M', M_2' (sl. 5, c) podnožja ordinata odgovarajućih tačaka, na osnovu teoreme o proporcionalnosti otsečaka pravih možemo napisati

$$\frac{M_1 M}{M M_2} = \frac{m}{n} = \lambda = \frac{M_1' M'}{M' M_2'} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}.$$

Iz ove i slične jednačine za y-osu nalazimo za koordinate tačke podele

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Kad λ uzima sve moguće pozitivne[1]) vrednosti od 0 do $+\infty$, tačka M zauzima sve položaje na duži $M_1 M_2$ od tačke

[1]) Znak λ se određuje prema jednačini $\overrightarrow{M_1 M} = \lambda \, \overrightarrow{M M_2}$.

M_1 do tačke M_2, pri čemu, za $\lambda = 1$ $(m = n)$, tačka M postaje sredina duži $M_1 M_2$ i ima za koordinate

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \qquad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

Kad je λ negativno i uzima vrednosti od 0 do -1, tačka M se nalazi van duži $M_1 M_2$ i to sa strane tačke M_1, i, za $\lambda = -1$, ona odlazi u beskonačnost; kad se λ menja od -1 do $-\infty$, tačka M se pojavljuje van duži $M_1 M_2$ sa strane tačke M_2 i približuje se iz beskonačnosti tački M_2, za koju, prema tome, imamo $\lambda = \pm\infty$.

Uveli smo pojam kompleksnog broja i protumačili ga geometriski. Postavimo sad uslove za jednakost tih brojeva i definicije zbira, razlike, proizvoda i količnika dva kompleksna broja.

Dva kompleksna broja, $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$, jednaka su, $z_1 = z_2$, ako su jednaki i realni i imaginarni delovi kompleksa, tj. ako je $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$. Kompleks $x + yi$ jednak je nuli, ako je $x = 0$, $y = 0$.

Osnovne operacije sa kompleksnim brojevima vrše se po ovim pravilima —

sabiranje::

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i;$$

oduzimanje

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) i;$$

množenje:

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i;$$

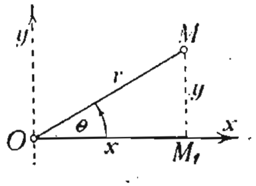
deljenje:

$$z_1 : z_2 = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)\ (x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)\ (x_2 - y_2 i)} =$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

Dva kompleksa, $x + yi$ i $x - yi$, zovu se *konjugovana*, ako se razlikuju samo po znaku imaginarnih delova. Zbir konjugovanih kompleksa jednak je dvostrukoj vrednosti realnih delova, tj. $(x+yi)+(x-yi)=2x$; njihov proizvod je jednak zbiru kvadrata realnog dela i koeficijenta imaginarnog dela, tj. $(x+yi)\,(x-yi)=x^2-(yi)^2=x^2+y^2$. Kompleks konjugovani kompleksu z se označava nadvučenom crtom $\bar{z}$. Jasno je da je $\bar{\bar{z}}=z$.

Sada ćemo uvesti tzv. *polarne koordinate* tačke u ravni. Neka je O (sl. 6) stalna tačka, a Ox poluprava sa smerom od tačke O u beskonačnost. Položaj proizvoljne tačke M u ravni može se odrediti rastojanjem r tačke M od tačke O i uglom θ (teta) koji ovo rastojanje obrazuje sa osom Ox. Veličine r i θ zovu se *polarne koordinate* tačke u ravni; r je *poteg*, θ — *polarni ugao*. Tačka O zove se *pol* tog koordinatnog sistema, a Ox — njegova *polarna osa*.



Sl. 6 — Polarne koordinate

Ako pored polarnih koordinata povučemo i Dekartove koordinate tačke M (sl. 6), iz pravouglog trougla OMM_1 imamo

$$(1) \qquad x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta.$$

Jednačine (1) određuju vrednosti Dekartovih koordinata tačke, ako su poznate polarne koordinate te tačke. Obrnuto, jednačine

$$(2) \qquad r=+\sqrt{x^2+y^2}, \quad tg\,\theta=y/x,$$

omogućuju da se odrede polarne koordinate, ako su poznate Dekartove koordinate. Jednačine (1) i (2) zovu se *jednačine transformacije koordinata*, Dekartovih u polarne i obrnuto.

Videli smo da svakom kompleksnom broju $z=x+yi$ odgovara tačka u ravni sa Dekartovim koordinatama x i y. Ako x i y transformišemo u polarne koordinate, kompleksni broj dobija novi, *polarni oblik*

$$z=r\,(\cos\theta+i\sin\theta).$$

Veličina potega r zove se *modul* ili *apsolutna vrednost kompleksnog broja*. Ugao θ je *argument* tog broja. Apsolutna vrednost kompleksnog broja z označava se sa $|z|$; prema tome je

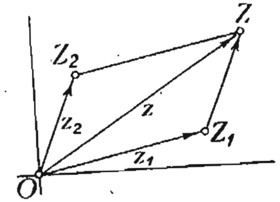
$$r=|z|=|x+yi|=+\sqrt{x^2+y^2}$$

i na taj način možemo, npr., ovako računati

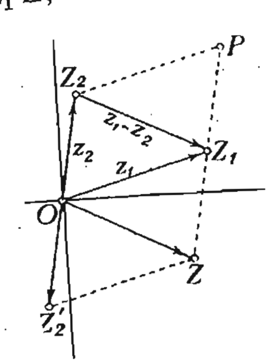
$$|5|=5, \quad |-3|=3, \quad |-4i|=4;$$
$$|3+4i|=+\sqrt{3^2+4^2}=5, \quad |3-4i|=+\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$$

Naveli smo obrasce, u svojstvu definicija, za izvođenje osnovnih računskih operacija, sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja sa kompleksnim brojevima. Pokažimo sad geometriske konstrukcije koje tim operacijama odgovaraju, kad su kompleksi pretstavljeni vektorima u ravni.

Za sabiranje dva kompleksa z_1 i z_2, koji su na Arganovu grafiku pretstavljeni vektorima OZ_1 i OZ_2 (sl. 7), vrši se *vektorsko sabiranje* odgovarajućih vektora OZ_1 i OZ_2 po tzv. *pravilu paralelograma*. Po tom pravilu iz iste tačke, recimo, tačke O, konstruiše se paralelogram sa stranama od dva vektora, OZ_1 i OZ_2. Dijagonala OZ tog paralelograma sa smerom od tačke O pretstavlja vektor-zbir dva data vektora. Nacrtani paralelogram se može i na drugi način nacrtati. Iz tačke O se konstruiše prvi vektor OZ_1, pa na kraj ovog vektora, dakle tačku Z_1, nadovezuje se duž Z_1Z, dužine jednake vektoru OZ_2, paralelna njemu i istog smera sa njim. Takva duž Z_1Z se smatra kao vektor jednak vektoru OZ_2. Vektor sa početkom u tački O i krajem u kraju nadovezanog vektora Z_1Z određuje vektor OZ — zbir dva data vektora. Druga konstrukcija je zgodnija od prve, jer se neposredno proširuje na slučaj sabiranja više vektora.



Sl. 7 — Vektorsko sabiranje dva kompleksa



Sl. 8 — Vektorsko oduzimanje dva kompleksa

Oduzimanju kompleksa odgovara *vektorsko oduzimanje*, koje se svodi na vektorsko sabiranje. Zaista, pošto je $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$, za konstruisanje vektora razlike možemo sabrati vektor OZ_1 (sl. 8) prvog kompleksa sa vektorom OZ_2', koji ima isti pravac i dužinu sa vektorom OZ_2 drugog kompleksa, ali je suprotnog smera. Vektor OZ može biti konstruisan i kao dijagonala paralelograma OZ_1PZ_2, sa stranama OZ_1 i OZ_2, ali ne ona kojoj pripada tačka O, već koja spaja kraj drugog vektora sa krajem prvog. Vektor $Z_2Z_1 = OZ$ je treća strana trougla OZ_1Z_2 sa smerom od Z_2 prema Z_1.

Za izvođenje geometriske konstrukcije proizvoda dva kompleksa, uzećemo ih u polarnom obliku

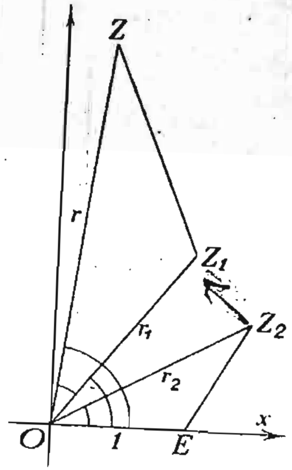
$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$$

Ako izmnožimo imaćemo

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)].$$

Kako je, međutim, prema obrascima trigonometrije,

$$\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 = \cos(\theta_1+\theta_2),$$
$$\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 = \sin(\theta_1+\theta_2),$$



Sl. 9 — Množenje dva kompleksa

to ćemo imati konačno

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

Ovaj obrazac pokazuje da je modul r proizvoda dva vektora jednak proizvodu modula r_1 i r_2 datih kompleksa, a argument θ jednak zbiru njihovih argumenata θ_1 i θ_2, tj. $r = r_1r_2$ i $\theta = \theta_1 + \theta_2$.

Slična osobina važi i za količnik dva kompleksa,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right],$$

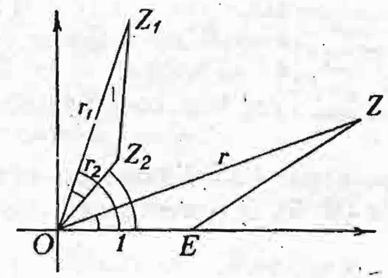
naime, modul količnika jednak je količniku modula, a argument — razlici argumenata.

Ove geometriske osobine proizvoda i količnika dva kompleksa omogućuju da se konstruiše kompleks jednak proizvodu, odnosno količniku dva data kompleksa.

Doista, ako je OZ_1 vektor kompleksa z_1, a OZ_2 kompleksa z_2 i OE jedinična dužina (sl. 9), pa konstruišemo trougao OZ_1Z sličan trouglu OEZ_2 — vektor OZ tada pretstavlja proizvod dva data kompleksa. Jer, prvo, iz sličnosti trouglova imamo $r:r_1 = r_2:1$, tj. $r = r_1r_2$ i drugo, argument, ugao $xOZ = \theta$ ima vrednost zbira $\theta_1 + \theta_2$.

Sa slike vidimo da je množenje vektora OZ_1 vektorom OZ_2 ekvivalentno, prvo, promeni dužine prvog vektora u odnosu $r_2:1$ i, drugo, njegovom obrtanju za ugao jednak argumentu drugog vektora. Ako je množilac kompleks jediničnog modula, tj. ako ima oblik, recimo, $\cos\alpha + i\sin\alpha$, množenje tim jediničnim kompleksom se svodi samo na obrtanje za ugao α.

Na sličan način se konstruiše vektor koji izražava količnik dva data kompleksa (sl. 10). Na strani OE jedinične dužine treba konstruisati trougao OEZ, sličan trouglu OZ_2Z_1. Tada vektor OZ, što se lako dokazuje, pretstavlja vektor količnika $z_1:z_2$.



Sl. 10 — Deljenje dva kompleksa

Kako je deljenje jediničnim kompleksom $\cos\alpha + i\sin\alpha$ ekvivalentno množenju konjugovanim jediničnim kompleksom $\cos\alpha - i\sin\alpha$ (pokaži to!), obrtanje pri deljenju jediničnim kompleksom ima smer suprotan smeru obrtanja pri množenju istim kompleksom.

Pošto operacija množenja, odnosno deljenja, kompleksnih brojeva stoji, kako smo videli, u vezi sa obrtanjem, a obrtanje pretstavlja formu kretanja vrlo važnu u tehnici, a tako isto i u praktičnom životu, uopšte, teorija kompleksnih brojeva sad dobiva sve važniju ulogu u praktičnim primenama matematike. U ovome imamo istorisku potvrdu, kako jedna apstrakcija (imaginarni brojevi!) može postati stvarnost.

Izvedimo još pravilo za stepenovanje kompleksa. Ako je n ceo pozitivni broj, iz pravila za množenje neposredno sleduje ovo pravilo za stepenovanje

$$z^n = (x+yi)^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Za $r=1$ imamo tzv. *Moavrov obrazac*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Pri iskorišćavanju tog obrasca treba imati u vidu da pri dizanju imaginarne jedinice na stepen imamo

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1;\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i,\ i^{4k} = 1,$$

gde je k nula ili proizvoljan prirodni broj.

1.5. Neka pravila i obrasci iz aritmetike i algebre

Sem navedenih, ima još i drugih važnih pitanja vezanih za pojam „broja". Ostavljajući zasad po strani proučavanje tih pitanja, navešćemo kratko neka pravila i obrasce od praktične važnosti u aritmetici i algebri.

Nećemo navoditi tablicu opšteusvojenih matematičkih znakova, koji se upotrebljavaju u aritmetici i algebri[1]). Učinimo samo jednu primedbu. Pri štampanju razlomaka, aritmetičkih i algebarskih, često se, radi uštede prostora, upotrebljuje kosa crta. Tako se štampa:

$$3/4 = \frac{3}{4},\quad a/b = \frac{a}{b},\quad (a+b)/(a-b) = \frac{a+b}{a-b},$$

$$a + b/a - b = a + \frac{b}{a} - b$$

Iz aritmetike

Pri pretvaranju običnog razlomka u decimalni treba brojilac podeliti imeniocem. $\frac{3}{4} = 3:4 = 0{,}75;\ \frac{2}{3} =$

$$= 2:3 = 0{,}666\ldots = 0{,}(6).$$

Pri pretvaranju konačnog decimalnog razlomka u običan, u broilac se stavlja broj iza zapete, a u imenilac jedinica sa onoliko nula koliko ima cifara posle zapete.

$$0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4};\quad 0{,}21 = \frac{21}{100};\quad 0{,}35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$$

[1]) Gl. napr., V. V. Mišković, Logaritamske i numeričke tablice. Tehnička knjiga. Str. 242.

Pri pretvaranju čistog periodičnog razlomka u običan razlomak, u broilac se stavlja period, a u imenilac onoliko devetica koliko ime cifara u periodu. U slučaju mešovitog periodičnog razlomka, u broilac se stavlja razlika između broja do drugog perioda i broja do prvog perioda, a u imenilac onoliko devetica koliko je cifara u periodu sa toliko nula koliko je cifara između zapete i prvog perioda.

$$0{,}777\ldots = 0,(7) = \frac{7}{9};\quad 0,(27) = \frac{27}{99} = \frac{3}{11};\quad 0{,}1\,(5) =$$

$$= \frac{15-1}{90} = \frac{7}{45};\quad 0{,}2\,(30) = \frac{230-2}{990} = \frac{38}{165}.$$

Procenat je „jedan stoti". 5% znači pet stotih delova celog.

$p\%$ broja a iznosi $\frac{p}{100} \times a = s$.

Ako $p\%$ broja a iznosi s, tada je $a = \frac{s}{p} \times 100$.

$\frac{m}{n}$ deo broja a sačinjava $\frac{m}{n} \times 100\%$ tog broja

a sačinjava $\frac{a}{b} \times 100\%$ broja b.

Broj a sačinjava $\frac{100\,a}{a+b}\%$ zbira $a+b$.

Promile je „jedan hiljaditi", $3^0/_{00}$ znači tri hiljadita dela celog.

Iz proporcije $a:b = c:d$ sleduje jednakost $ad = bc$ i ove proporcije: $a:c = b:d$; $d:b = c:a$; $d:c = b:a$; $\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$ i druge slične; a takođe i proporcija: $(a+b)/(a-b) = (c+d)/(c-d)$ i dr. slične; $(ma \pm nb):a = (mc \pm nd):c$ i dr.

Iz jednakosti odnosa $a_1:b_1 = a_2:b_2 = \ldots = a_n:b_n = k$ sleduje $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n):(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = a_1:b_1 = k$, Delovi broja a podeljena u odnosu $m:n$ su:

$$\frac{m}{m+n}\cdot a \quad \text{i} \quad \frac{n}{m+n}\cdot a.$$

Delovi broja a podeljena na k delova proporcionalnih brojevima $n_1, n_2, \ldots, n_k$ su: $n_1\, a/s$, $n_2\, a/s, \ldots, n_k\, a/s$, gde je

$$s = n_1 + n_2 + \ldots + n_k.$$

Iz algebre

Potsetićemo čitaoca i na neke obrasce iz algebre. Ti obrasci ne obuhvataju sistematski sadržaj udžbenika elementarne algebre, ali ipak potsećaju na neka neophodna znanja iz te discipline. Deo tog materijala, na pr., teoriju logaritama, prenosimo u onaj deo ove knjige, gde se on tumači u vezi sa pojmom funkcije.

Pravilo znakova pri množenju i stepenovanju prirodnim brojem pokazujemo shematski: $(+)\times(+) = +$ (čitaj: plus puta plus daje plus), $(+)\times(-) = -$; $(+)^n = +$, $(-)^{2n} = +$, $(-)^{2n+1} = (-)$, gde je n prirodni broj ili nula.

Oznake u narednim izrazima pretpostavljamo kao poznate.

$$\text{Iz } a>b\geqslant 0,\ c>d\geqslant 0 \text{ sleduje } ac>bd.$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{a\times c}{b\times d};\ \frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\times\frac{d}{c} = \frac{a\times d}{b\times c}.$$

$$a^m\cdot a^n = a^{m+n};\ a^m : a^n = a^{m-n};\ (ab)^n = a^n b^n;\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};\ (a^m)^n = a^{mn}.$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b};\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};\ \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}};\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{\alpha}.$$

$$a^0 = 1,\ a^{-n} = \frac{1}{a^n};$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a};\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m};\ a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

Za $a>0$ i n prirodni broj: $(+a)^n = +a^n$, $(-a)^{2n} = +a^{2n}$, $(-a)^{2n+1} = (-a^{2n+1})$; $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; $(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$; $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$; $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Aritmetička progresija: $a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)\,d$,

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{1}{2}\,[2a_1 + (n-1)d]n.$$

Geometriska progresija: $a_n = a_{n-1}\,q = a_1\,q^{n-1}$;

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = a_1\frac{q^n - 1}{q-1};\ (S_n)_{n\to\infty} = \frac{a_1}{1-q} \text{ za } q<1.$$

Kvadratna jednačina

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad x_{1,2} = \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right) : 2a,$$

$$a_2 x^2 + 2a_1 x + a_0 = 0, \qquad x_{1,2} = \left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2}\right) : a_2,$$

$$x^2 + px + q = 0, \qquad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Ostale obrasce iz Elementarne algebre ćemo navoditi, po potrebi, na odgovarajućim mestima ove knjige.

1.6. Iz Elementarne geometrije

Materijal školske geometrije može se podeliti u dva dela. Prvi deo je geometrija posmatranja, „očigledna geometrija“ ili induktivna geometrija, prema metodu izlaganja — od fakata posmatranja ka opisu i zaključcima. U savremenoj nastavi, prema toj metodi, psihološki element dobiva sve veći značaj. Drugi deo je sistematska, deduktivna geometrija, uglavnom po Euklidu, sa potrebnim dopunama za rešavanje praktičkih zadataka; do nedavna još smatran je kao glavni deo u nastavi geometrije. Njemu je priznavan veliki značaj u logičkom razvitku omladine. Razni programi školske geometrije sastavljani su iz ta dva dela, u više raznih kombinacija:

1. Dosledno pridržavanje prvog dela, a drugog u formi pristupačnoj za decu.

2. Samo prvi deo, sa neophodnim dodatkom od praktičke važnosti iz drugog.

3. Samo drugi deo, sa prethodnim kratkim objašnjenjem iz prvog dela.

4. Naizmenično iskorišćavanje prvog pa drugog sistema, induktivnog pa deduktivnog, u obradi raznih pitanja geometriskog karaktera s obzirom na praktične ciljeve.

U svakom slučaju, misao o školskoj geometriji kao „naučnoj" geometriji u strogo deduktivnoj formi treba da bude napuštena. Ta podvojenost u izlaganju školske geometrije proteže se i na Višu geometriju, kao naučnu disciplinu. Veliki nemački naučnik D. Hilbert (1862—1943), pisac dela „Grundlagen der Geometrie"[1], čiji je cilj da što strože logički izloži geometriju, sa težnjom ka što većoj apstrakciji, napisao je, uz saradnju S. Kon — Fosena, i knjigu „Anschauliche Geometrie", sa težnjom ka konkretnosti i očiglednosti, da što jasnije prikaže geometriske objekte i unutrašnje odnose između njih.

Za radnike u raznim oblastima materijalne kulture najvažnije je da savladaju prostorne predstave, da „vide prostor". Nove tendencije u nastavi geometrije zahtevaju, već na prvim koracima pri proučavanju geometriskih objekata, da se ti objekti razlikuju — po *formi, veličini i položaju*, dakle po tim osnovnim prostornim elementima. Pri tome se ova proučavanja vrše ne više na stalnim, gotovo uvek istim petrificiranim formama Euklidove geometrije, već na promenljivim objektima koji menjaju formu, veličinu i položaj. Moći zamisliti, shvatiti i videti u svom saznanju geometriske objekte raznih oblika, svih veličina i u različitim položajima, i bez konkretnih modela – to obogaćuje prostorne predstave i štiti od grubih prostornih grešaka, da se ne nacrtaju planovi zgrada sa nepristupačnim sobama, ili mašina sa pokretnim organima koji se ne mogu kretati.

Dublja razrada tog metoda dovodi do uvođenja pojmova *geometriskih parametara*: parametara forme, parametara veličine i parametara položaja. Označimo broj tih parametara za određeni geometriski objekt sa f, g, p (forme, grandeur, position). Objasnićemo ove pojmove na primerima.

Navešćemo pre svega primere geometriskih objekata bez parametara forme ($f=0$). Za te objekte sam naziv potpuno određuje njegovu formu.

[1]) Postoji srpski prevod Ž. Garašanina „Osnove geometrije" u izdanju Matematičkog instituta Srpske akademije nauka. Beograd. 1957.

Prava, poluprava, dve paralelne prave, prav ugao, krug, kvadrat, uopšte pravilan mnogougao sa određenim brojem strana, kocka, uopšte pravilan polijedar sa određenim brojem strana, lopta.

Primeri za slučaj $f=1$. — Pravougaonik. Parametar forme je apstraktan broj — odnos jedne dimenzije prema drugoj $(a:b)$. — Romb. Za parametar forme možemo uzeti, recimo, odnos dijagonala romba, apstraktni broj. — Ugao. Parametar forme ovog geometriskog oblika je apstraktan broj, odnos luka prema poluprečniku.

Kao primeri prostranih objekata sa jednim parametrom forme mogu poslužiti: Pravougli paralelepiped sa kvadratnom osnovom (kvadar), valjak, kupa.

Primeri geometriskih oblika sa $f=2$. — Trougao. Parametri forme — dva ugla ili odnosi dve strane prema trećoj. — Paralelogram. Parametri forme: — dva ugla: jedne strane sa dijagonalom i sa drugom stranom, ili odnosi jedne strane i dijagonale prema drugoj strani. — Pravougli paralelepiped. Parametri forme: odnosi dveju dimenzija prema trećoj.

Primeri geometriskih objekata za $f=1$ i $f=2$ u dovoljnoj meri razjašnjavaju suštinu pojma parametra forme i broja tih parametara.

Sami parametri forme ne određuju u potpunosti geometriski oblik. Slični geometriski oblici imaju parametar veličine i to samo jedan ($g=1$).

Podrobnije o geometriskim parametrima izložio sam u svom članku. „O geometriskim parametrima" objavljenom u Zborniku radova Matematičkog instituta Srpske akademije nauka. Knj. 6, 1957 g.

Iz tzv. *metričke elementarne geometrije* navešćemo samo nekoliko važnijih obrazaca. Oznake u tim obrascima su dobro poznate.

Pitagorina teorema: $c^2=a^2+b^2$.

Strana pravilnog upisanog mnogougla: $a_3=r\sqrt{3}$,

$a_4=r\sqrt{2}$, $a_6=r$, $a_{10}=\dfrac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)$.

Površina trougla: $Q=\dfrac{1}{2}ah_a=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ sa $2p=a+b+c$.

Obim kruga $2\pi r$; površina kruga $\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$ sa $d = 2r$.

Dužina s kružnog luka nad uglom α : $s = r\alpha$; površina kružnog sektora $\frac{1}{2} sr = \frac{1}{2} r^2\alpha$.

Zapremine: prizme Sh (S – površina osnove, h – visina); piramide $\frac{1}{3}$ Sh; cilindra $\pi r^2 h$; konusa $\frac{1}{3}$ $\pi r^2 h$; lopte $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$. Površine: cilindra $2\pi rh$ (bočna); konusa πrl (bočna; l – proizvodilja); sferne zone $2\pi rh$ (h – njena visina); sfere $4\pi r^2$.

Navešćemo i jednu primedbu o tzv. Pitagorinoj teoremi, koja ima dve formulacije: *konstruktivnu* kako je izražena kod Euklida[1] i koja glasi: Kod pravouglih trouglova je kvadrat na strani spram pravog ugla jednak kvadratima na stranama koje obrazuju prav ugao; i *metričku*, koja glasi — kvadrat mernog broja hipotenuze jednak je zbiru kvadrata mernih brojeva kateta, merenih istom merom.

Primećujemo da izraz $a^2 + b^2$ u Pitagorinoj teoremi ima nazive: *Euklidove metričke forme za ravan.* Sa ovim izrazom smo se već sreli pri određivanju kvadrata udaljenja između dve tačke u ravni.

1.7. Iz Teorije vektora

Pri geometriskom tumačenju kompleksnih brojeva uveli smo pojam vektora u ravni. Pošto je za geometrisko tumačenje osobina prostornih oblika zgodno uopštiti, tj. proširiti taj pojam i na slučaj prostora, iznećemo ovde osnovne elemente teorije vektora u prostoru, i to u vezi sa Dekartovim koordinatama tačke u prostoru.

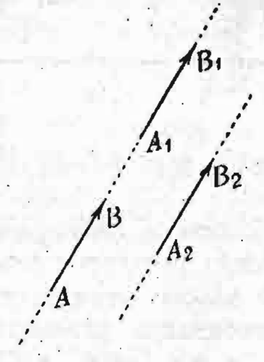
Pošto smo izabrali početak, tačku O, i kraj, tačku M, duži OM u ravni, odredili smer te duži, dobili smo duž određena smera, koja se zove *vektor*. Mogli bismo, međutim, izabrati kao početak i kraj te duži, tačke O i M, ne samo u ravni

[1]) Postoji srpski prevod A. Bilimovića „Euklidovi elementi" u izdanju Matematičkog instituta Srpske akademije nauka. Beograd, 1949. (Knj. I. Stav 47).

Oxy, koordinatnog sistema u ravni, već i ma gde u prostoru. Ako te tačke spojimo i na dobijenoj duži označimo smer, dobićemo ponovo duž određena smera, opet vektor.

Zaustavimo se malo na pojmu vektora u prostoru. Uzmimo, ma gde u prostoru, dve tačke, A i B (sl. 11), za početak i kraj vektora AB i kroz ove tačke povucimo pravu; ona se zove *osnova vektora* a sa smerom vektora — *osa vektora.*

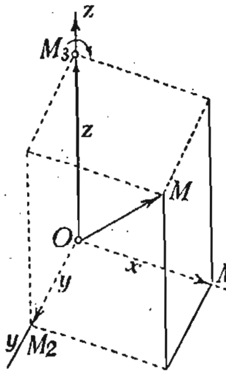
Vektor vezan za pravu zove se vektor koji može menjati položaj svog početka na osnovi, ne menjajući pri tome ni svoju dužinu, ni smer, ni osnovu. Vektor čiji početak ne može svoj položaj menjati u prostoru zove se vektor *vezan za tačku.* AB i A_1B_1 (sl. 11) jednaki su, kao vektori vezani za pravu, ali su različiti kao vektori vezani za tačku. Ako smatramo kao jednake ne samo vektore na istoj pravoj, već i na paralelnim pravama sa proizvoljnim položajem početka u prostoru, ali pod uslovom da vektori imaju isti smer i istu dužinu, takvi vektori se zovu *slobodni vektori*, ili jednostavno *vektori*. Najglavniji je pojam slobodnog vektora i zato je i sam naziv vektora vezan, uglavnom, za taj pojam. Tri vektora AB, A_1B_1, A_2B_2 (sl. 11), kao slobodni vektori, jednaki su. Tri elementa karakterišu svaki slobodni vektor: 1. pravac osnove, određen do paralelizma; 2. smer na toj osnovi i 3. dužina, koja se zove i *intenzitet vektora*. Intenzitet se izražava mernim brojem, pozitivnim skalarom.



Sl. 11 — Vektori

Videli smo da vektor u ravni možemo dovesti u vezu sa kompleksnim brojem. Prirodno je da se postavi pitanje: na koji se način mogu dovesti u vezu broj i vektor u prostoru. Za vektor u ravni uzeli smo koordinatni sistem u ravni, sastavljen od dve upravne ose Ox i Oy. Za vektor u prostoru uzećemo tri upravne ose i to ovako. Zamislimo da stojimo u sobi i gledamo u jedan ugao na podu. Iz ovoga polaze dve upravne duži u ravni poda. Uzmimo ih za ose (sl. 12) i označimo jednu sa Ox, drugu sa Oy. Treća duž u uglu stoji upravno na ravan poda; pretvorimo i nju u osu i označimo sa Oz. Tako smo dobili tri uzajamno upravne (ortogonalne) ose; one čine tzv. *ortogonalni koordinatni trijedar*.

Stavimo sad početak slobodnog vektora u tačku O, presek ovih osa. Neka kraj, tj. tačka M, zauzima proizvoljan položaj u prostoru. Vektor OM određuje položaj tačke M i zato se zove *vektor položaja tačke M* u odnosu na tačku O. Kroz tačku M povucimo ravan paralelnu ravni Oyz. Neka osu Ox seče u tački M_1. Koordinata tačke M_1 na osi Ox je jedna od *koordinata tačke M* u prostoru. Ovu koordinatu označimo sa x; ona se i ovde zove *apscisa* tačke M. Drugu koordinatu ćemo dobiti ako kroz tačku M povučemo ravan paralelnu ravni Ozx. Presek M_2 ove ravni sa osom Oy određuje drugu koordinatu tačke M, koordinatu y, koja se zove *ordinata*. Najzad, treću koordinatu ćemo dobiti pomoću preseka M_3 ose Oz i ravni paralelne ravni Oxy, što prolazi kroz tačku M. Ovu ćemo koordinatu označiti sa z; ona se, ponekad, zove *aplikata* ili *kota* tačke M. Ta tri realna broja, x, y, z, su koordinate tačke M u prostoru. Označavaju se na taj način što se stavljaju u zagradu iza oznake tačke: $M(x, y, z)$.



Sl. 12 — Ortogonalni koordinatni trijedar

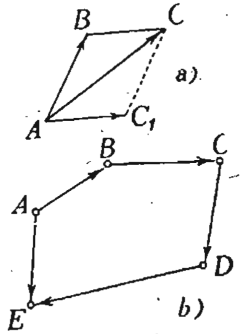
Ako želimo da uporedimo sa vektorom OM samo jedan broj, vidimo da taj broj mora biti složen i da se njegova vrednost određuje sa tri realna ili skalarna broja x, y, z. Svaki od ovih brojeva ima svoju naročitu geometrisku prirodu. Povezaćemo sa svakom koordinatnom osom vektor jedinične dužine, sa smerom dotične ose. Nove brojeve, koji pretstavljaju ove jedinične vektore označićemo sa e_1, e_2, e_3. Ti su brojevi po svojoj prirodi različiti i nijedan od njih ne može se izraziti pomoću ostala dva. Prema tome vektoru OM će odgovarati broj koji možemo izraziti zbirom

$$u = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

Taj novi broj, složene prirode, krstićemo imenom: *vektorski broj*. On se određuje sa tri skalarna broja x, y, z, koji se zovu *Dekartove koordinate vektora*. Jasno je da su dva vektorska broja jednaka, ako su njihovi skalari jednaki.

Veličina koju možemo pretstaviti vektorom zove se *vektorska veličina*. Kao primere za vektorske veličine imamo: pomeranje, brzina, ubrzanje, sila, pritisak i dr. Svaka vektorska veličina treba da ima sva svoja tri elementa, tj. pravac, smer i intenzitet. Tako, za brzinu treba da znamo — pravac kretanja, smer kretanja i intenzitet, recimo, 60 km na čas. Međutim, u običnom životu za neke u suštini vektorske veličine, ne navode se pravac i smer, već samo intenzitet, recimo za brzinu voza. To dolazi zbog toga što se pojam brzine oceňuje samo po glavnoj svojoj ulozi u rezultatu kretanja, po vremenu prelaza iz jednog mesta u drugo.

Ako treba sabrati dva ili više vektora u prostoru, možemo primeniti postupak uzastopnog nadovezivanja, koji smo objasnili pri sabiranju dva vektora u ravni. Sabiranju dva vektora i ovde odgovara pravilo paralelograma. Na slici 13 je pretstavljeno sabiranje dva i četiri vektora. U ovom drugom slučaju vektor-zbir AE spaja početak prvog sabirka — vektora AB, tačku A, sa krajem poslednjeg sabirka DE, tačkom E. Taj zbir ima smer od početka prvog vektora ka kraju poslednjeg. Ako kraj poslednjeg sabirka padne u početak prvog, zbir vektora će biti jednak nuli. Vektorski zbir ne zavisi od toga koji ćemo vektor uzeti za prvi sabirak i kojim ćemo redom na nj nadovezivati ostale vektore — sabirke.



Sl. 13 — Sabiranje vektora

Oduzimanje vektora u prostoru vrši se po istom geometriskom postupku kao i oduzimanje vektora u ravni, koje predstavljaju kompleksni brojevi (sl. 8).

Ako vektorima A_1B_1 i A_2B_2 odgovaraju dva vektorska broja

$$u_1 = x_1 e_1 + y_1 e_2 + z_1 e_3, \qquad u_2 = x_2 e_1 + y_2 e_2 + z_2 e_3,$$

zbiru ovih vektora odgovaraće broj

$$u = u_1 + u_2 = (x_1 + x_2) e_1 + (y_1 + y_2) e_2 + (z_1 + z_2) e_3,$$

a njihovoj razlici broj

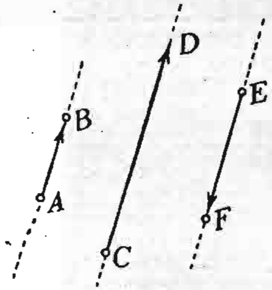
$$v = u_1 - u_2 = (x_1 - x_2) e_1 + (y_1 - y_2) e_2 + (z_1 - z_2) e_3.$$

Lako je pokazati da se vektorsko šabiranje i u slučaju vektora u prostoru pokorava asocijativnom i komutativnom zakonu; pomoću vektorskih brojeva ovo se izražava jednakostima

$$(u_1+u_2)+u_3=u_1+(u_2+u_3), \qquad u_1+u_2=u_2+u_1.$$

Da vidimo sad operaciju množenja vektora.

Pod proizvodom vektora AB (sl. 14) i skalara k razume se vektor koji ima: 1. osnovu istu ili paralelnu sa osnovom vektora AB; 2. smer isti sa smerom vektora AB ako je k pozitivno, a suprotan ako je k negativno; 3. dužinu jednaku proizvodu dužine vektora AB i apsolutne vrednosti broja k. Na slici imamo dva proizvoda: $CD=2{,}5\,AB$, $EF=-1{,}5\,AB$. Ako vektoru AB odgovara vektorski broj $u=xe_1+ye_2+ze_3$, proizvodu $k\,AB$ odgovara broj $ku=kxe_1+kye_2+kze_3$.



Sl. 14 — Množenje vektora skalarom

Vidimo da proizvod vektora i skalara ima uvek potpuno određenu jednu vrednost: množenje vektora skalarom sleva je isto kao i množenje skalarom sdesna. A da vidimo šta je proizvod dva vektora?

Dok smo dosad govorili o proizvodu dva broja, uvek smo imali potpuno određenu samo jednu operaciju, koja dovodi do određenog jednoznačnog rezultata. Međutim takvo ograničenje pojma proizvoda nije obavezno. Za dva vektora može, napr., biti definisano i više vrsta množenja, pri čemu proizvod svake od ovih vrsta ima takođe određenu jednoznačnu vrednost ali različitu od proizvoda druge vrste. Zapitajmo se koju to zajedničku osobinu imaju sve vrste množenja? To je osobina da se svako množenje mora pokoravati distributivnom zakonu za množenje i sabiranje. Ako sa $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ označimo[1]) tri proizvoljna vektora, sa $\vec{V}_1\vec{V}_2$ ma koji proizvod vektora $\vec{V}_1$ i $\vec{V}_2$, distributivni zakon se izražava ovako

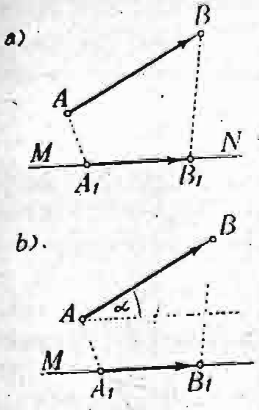
---

[1]) Upotrebljena je druga oznaka vektora — jednim slovom nadvučenim strelicom.

$$\vec{V}_1(\vec{V}_2+\vec{V}_3)=\vec{V}_1\vec{V}_2+\vec{V}_1\vec{V}_3.$$

Najčešće se upotrebljuju dva množenja: *skalarno* i *vektorsko*; no ima ih i drugih.

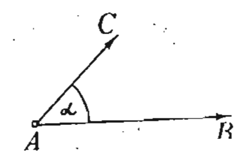
U vezi sa skalarnim proizvodom definisaćemo, pre svega, *projekciju vektora na pravu i na osu*. Neka su dati: vektor AB i prava MN (sl. 15, a). Iz tačaka A i B spustimo normale na pravu MN. Podnožja tih normala označićemo sa A_1 i B_1. Vektor A_1B_1 je projekcija vektora AB na pravu MN. Ako od prave MN načinimo osu (sl. 15, b), vektor A_1B_1 može imati smer bilo isti sa smerom ose, bilo njemu suprotan. Pod projekcijom vektora AB na osu MN razumećemo skalar i to intenzitet vektora A_1B_1 sa pozitivnim znakom, ako ovaj vektor ima smer ose, a sa negativnim znakom u suprotnom slučaju. Ako se α (alfa) označimo ugao između vektora AB i ose MN, projekcija vektora na osu ima vrednost proizvoda dužine vektora AB i kosinusa ugla α, tj. $\overline{AB}\cos\alpha$, gde smo crtom označili intenzitet vektora AB.



Sl. 15 — Projekcija vektora na pravu i na osu

Neka su data dva vektora, AB i AC (sl. 16); njihove početke uvek možemo dovesti u istu tačku prostora. *Skalarni proizvod* ovih vektora, sa oznakom (AB, AC), biće skalar jednak proizvodu intenziteta ovih vektora i kosinusa ugla između njih, tj.

$$(AB, AC)=\overline{AB}\,\overline{AC}\cos\alpha,$$



Sl. 16 — Skalarno množenje vektora

gde je α ugao između vektora. Skalarni proizvod može biti i ovako protumačen: on je jednak proizvodu intenziteta jednog vektora i projekcije drugog na osu prvog. Iz definicije skalarnog proizvoda neposredno sleduje da on ne zavisi od reda činilaca, tj. $(AB, AC)=(AC, AB)$. Ako je ugao između vektora oštar, skalarni proizvod je pozitivan; on je negativan, ako je ugao tup. Kad su vektori upravni, njihov je skalarni proizvod jednak nuli. Jednakost nuli skalarnog proizvoda dva vektora može se smatrati kao uslov ortogonalnosti dvaju vektora. Nije teško pokazati da za skalarno množenje vektora važi distributivni zakon, tj.

$$(AB, AC+AD)=(AB, AC)+(AB, AD).$$

Na osnovu definicije skalarnog proizvoda za proizvode jediničnih vektora e_1, e_2, e_3 dobijamo ovu tablicu

	e_1	e_2	e_3
e_1	1	0	0
e_2	0	1	0
e_3	0	0	1

prema kojoj, napr., imamo $(e_1, e_1)=1$, $(e_2, e_3)=0$; istu tablicu možemo izraziti i ovom jednačinom

$$(e_i, e_j)=\begin{cases}1 \text{ za } i=j \\ 0 \text{ za } i\neq j\end{cases} \qquad i, j=1, 2, 3.$$

Navedena tablica ilustruje zakon prema kojem se vrši skalarno množenje dva vektora određenih svojim koordinatama, odnosno svojim vektorskim brojevima. Za dva vektora

$$(1) \qquad u_1=x_1 e_1+y_1 e_2+z_1 e_3, \quad u_2=x_2 e_1+y_2 e_2+z_2 e_3$$

posle primene distributivnog zakona i gornje tablice imamo

$$(u_1, u_2)=x_1 x_2+y_1 y_2+z_1 z_2.$$

O imenovanju skalarnog proizvoda, kad su činioci imenovani vektori, treba znati da se složeno imenovanje skalarnog proizvoda vrši na isti način kao i, u aritmetici, proizvod imenovanja dva imenovana broja.

Važan je slučaj skalarnog množenja vektora jediničnim vektorom. Taj proizvod ima vrednost projekcije vektora na osu jediničnog vektora.

Ako imamo izlomljenu liniju, sastavljenu od nadovezanih vektora $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n$, i sa $\vec{V}$ označimo vektorski zbir tih vektora, imamo vektorsku jednačinu

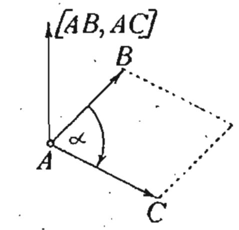
$$\vec{V}=\vec{V}_1+\vec{V}_2+\ldots+\vec{V}_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{V}_i.$$

Neka je dat pravac jediničnog vektora $\vec{l}$, sada možemo prema distributivnom zakonu napisati skalarnu jednačinu

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{V}_i, \vec{l})=(\vec{V}, \vec{l}),$$

koja izražava poznatu teoremu, naime da je: zbir projekcija na koji pravac svih strana izlomljene linije jednak je projekciji na isti pravac završne strane te linije.

Drugi od pomenutih proizvoda je *vektorski proizvod*. Označavaćemo ga pomoću ćoškastih zagrada, dakle ovako $[AB, AC]$. Pod vektorskim proizvodom razumećemo *vektor* koji ima ove elemente: 1. Osnova mu (sl. 17) stoji upravno na ravni datih vektora; 2. Smer mu je upèren u deo prostora odakle bi posmatrač video da drugi vektor, nadovezan na kraj prvog, obrće prvi vektor u smeru kretanja kazaljke na časovniku; 3. Intenzitet mu je jednak veličini površine paralelograma konstruisanog na datim vektorima kao na stranama. Ako ugao između vektora ponovo označimo sa α, taj intenzitet, kao površina paralelograma, ima vrednost



Sl. 17 — Vektorsko množenje vektora

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin\alpha.$$

Iz gornje definicije vektorskog proizvoda neposredno sleduje da za njega ne važi komutativni zakon, jer je

$$[AC, AB]=-[AB, AC].$$

Ako su vektori paralelni ili kolinearni (imaju istu osnovu), njihov vektorski proizvod ima vrednost nulu. Obrnuto, jednakost nuli vektorskog proizvoda je uslov paralelnosti, odnosno kolinearnosti dvaju vektora.

Iz neposrednog geometriskog posmatranja za vektorske proizvode jediničnih vektora e_1, e_2, e_3 možemo obrazovati ovu tablicu tih proizvoda, pri čemu prvi činilac treba uzimati iz vertikalnog stupca

	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	0	e_1
e_3	e_2	$-e_1$	0

Na osnovu te tablice i distributivnog zakona za vektorski proizvod dva vektora (1) dobija se vektor sa vektorskim brojem

$$[u_1, u_2] = u = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\, e_1 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\, e_2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\, e_3.$$

Prema tome za dva vektora, $\vec{V}_1$ i $\vec{V}_2$, sa koordinatama

$$\vec{V}_1 (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{V}_2 (x_2, y_2, z_2)$$

vektorski proizvod $[\vec{V}_1, \vec{V}_2]$, recimo vektor $\vec{V}$, ima koordinate:

$$\vec{V} (y_1 z_2 - z_1 y_2, \; z_1 x_2 - x_1 z_2, \; x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

Vrednost vektorskog proizvoda, a, prema tome, i vrednosti njegovih koordinata lakše mogu pročitati iz ove tablice

$$\begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix}$$

i to prema ovom jednostavnom pravilu: za svaku jedinicu e_i $(i = 1, 2, 3)$ brišemo vrstu tih jedinica i stubac sa e_i; tako nam, napr., za e_1 ostaje tablica

$$\begin{matrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{matrix}$$

Iz ovakvih tablica obrazujemo razliku proizvoda unakrsnih članova, pri čemu se razlike uzimaju sa plusom za jedinice na neparnim mestima (1 i 3), a sa minusom za jedinicu na parnom mestu. Prema tome, za e_1 imamo $y_1 z_2 - z_1 y_2$, a za e_2 imamo vrednost $-(x_1 z_2 - z_1 x_2) = z_1 x_2 - x_1 z_2$.

Naveli smo nekoliko pojmova i operacija iz onog dela Teorije vektora koja se zove *Vektorska algebra*.

Reći ćemo još nešto o značaju Teorije vektora u savremenoj Matematici i drugim naukama koje se njome koristi.

Pojmovi pomeranja, brzine, ubrzanja, sile i drugih vektorskih veličina odavno su poznati; oni su svestrano proučeni i analizirani. Međutim njihova analiza vršena je, uglavnom, pomoću skalarnih računa; a to znači da se proučavanje tih vektorskih veličina svodilo na proučavanju veza između skalara koji određuju te veličine. Sam vektorski oblik nije se posmatrao u svojoj celini, sa svim svojim geometriskim i drugim osobinama. Sva rasuđivanja sa vektorima pomoću te *skalarne metode* zahtevala su da sve pretvorimo u skalare i operišemo samo sa skalarima. Ta, uglavnom analitička, metoda predstavlja moćno oruđe Matematike; ona je dala sjajne rezultate, kako u teoriji tako i u praksi. Ali ona ima i jedan krupan, principski nedostatak: mesto da operiše sa samim geometriskim oblikom, ona uvodi skalare i to dosta proizvoljno. Tako možemo birati na proizvoljan način ona tri glavna, koordinatna pravca, prema kojim određujemo tri skalara za istu vektorsku veličinu. Ta metoda, operišući sa skalarima, dovodi u opštem slučaju do novih skalara i, na osnovu njih, konstruiše ponovo vektore, koji daju odgovor na postavljena pitanja. Vidimo da uvedeni skalari igraju pomoćnu ulogu, a pri tome prikrivaju samu konkretnu prirodu analiziranih veličina i prirodne veze među njima.

Nasuprot tome, *vektorska metoda* ima za cilj neposredno operisanje samim geometriskim oblicima, i daje pravila koja omogućuju da se dođe do rezultata čisto geometriskom metodom: „geometrica geometrice“, tj. ono što je geometrisko treba geometriski i tumačiti.

Dok su naučne konstrukcije bile relativno jednostavne, pomenuti nedostatak skalarne metode nije bio toliko upadljiv. Međutim i ranije je, naročito kod velikih umova, postojala tendencija da se do rezultata dođe neposredno geometriskim putem. Tako, Njutn, u svojim Principia-ma, izvodi geometriski svu teoriju planetskog kretanja, mada dobro poznaje Dekartovu metodu Analitičke geometrije. Zamašni razvitak Analize u XVIII u XIX veku, kada je ona u rukama čitave plejade čuvenih matematičara, od Eulera do Anri Poenkarea, dala sjajne rezultate, ukočio je napredak neposredne, geometriske metode; ona je zauzela drugo mesto, služeći se mešovitom, skalarno-vektorskom formom, pretvarajući se ponekad u suviše formalnu disciplinu. Čekalo se na vreme kada će skalarna metoda postati isuviše komplikovana i kada će biti primorana da ustupi mesto neposrednoj, geometriskoj metodi. Teorija vektora počela je osvajati sve važnije mesto onde, gde dominira vektorska priroda veličina, onde gde istovremeno učestvuju više vektora i to u složenim kombinacijama. Takve su discipline Teoriska i Matematička fizika; tako, napr., Teorija elektriciteta izgleda neizmerno jednostavnija, ako zakone i jednačine te teorije napišemo u vektorskom okliku.

Teorija vektora, i to ne samo Vektorska algebra već i Vektorska analiza, najranije se odomaćila u Fizici, tu je ona dobila pogodniju formu izlaganja, pristupačniju za široki krug istraživača. Danas je to instrument bez čijeg je poznavanja nemoguće pratiti i najelementarniju literataru ne samo Teoriske fizike, već i Fizike uopšte, kao i Mehanike sa svim njenim teoriskim i praktičnim granama. I mnoge druge discipline, u bližoj ili daljoj vezi sa ovim naukama, operišu vektorskim veličinama.

Tendencija Matematike ka sve širem uopštavanju pojma broja odavno je prekoračila granice Teorije vektora i vektorskog broja u užem smislu. Da bi se omogućila operacija deljenja dva vektora bio je uveden pojam *kvaterniona*, kao formalnog zbira skalara i vektora, koja se određuje sa četiri skalara. Teorija kvaterniona, važna sa teoriskog gledišta, nije dobila široko rasprostranjenje. Njen formalizam zahteva naročitu pažnju pri izvođenju operacija i nezgodan je u primenama na geometriju i mehaniku.

Dalji razvitak pojma broja i oblika, broja koji odgovara tom obliku, prikazuje se u pojmovima *tenzora* i *matrica*. To su naročiti sistemi skalarnih brojeva, za koje njihove teorije postavljaju pravila algebre i analize. Na osnovu tih teorija izlaganje nekih osnovnih nauka — geometrije, mehanike, fizike i dr. dobija nove, šire oblike.

Paralelno sa proučavanjem brojeva različitih konkretnih struktura, matematičke teorije su izlazile iz oblasti brojeva i prelazile na opšti pojam *množine* bilo kojih predmeta, ideja, operacija, postupaka, oznaka itd. Tako je stvorena *Teorija množina* ili *skupova*, koja sa teoriskog gledišta dominira nad celokupnom Matematikom. Pojedini njeni delovi — *Teorija prostora*, *Topologija*, *Teorija grupa* i dr. postali su važne samostalne matematičke discipline.

Glava druga

FUNKCIJA

2.1. Konstantne i promenljive veličine

Matematika operiše samo sa onim veličinama koje se mogu meriti, a izmeriti veličinu znači uporediti je sa brojem[1]). U tačnom merenju taj je broj potpuno određen, u približnom merenju, koje se najčešće primenjuje u praktičnom životu, za taj se broj postavljaju određene granice između kojih se on nalazi. Tačno merenje u suštini može biti izvršeno samo „prebrojavanjem" odvojenih predmeta ili onih grupa koje odgovaraju prirodnom broju tih predmeta. Tako, napr., tačno se određuje broj putnika u vozu, na parobrodu, svota novca makar i prijavljena u znacima raznih brojnih vrednosti od iste novčane jedinice, recimo, u dinarima, pa broj ovaca u stadu, broj kola u garaži itd.

Merenje može biti neposredno ili posredno. Ono je neposredno, kada se data veličina jednostavno meri izabranom jedinicom pomoću brojanja, napr., dužina pomoću metra i njegovih delova. Merenje je posredno kada se meri neka druga veličina, napr. dužina ili ugao, odbrojavanjem na uglomeru, pa se zatim, pomoću računa, na osnovu matematičkog obrasca,

---

[1]) Danas se u Psihologiji, Političkoj ekonomiji i socijalnim naukama operiše i sa veličinama koje ne možemo povezati sa brojem za koji važi i pojam jednakosti i zakoni operacija za realne brojeve, već ih razlikujemo samo prema odnosu „veća" ili „manja". Prisustvo u sistemu aksioma za realne brojeve i aksiome o „monotoniji" već ocrtava i put logičkog obrazloženja teorije takvih veličina. Slično putu na koji je ukazao Lobačevski, koji je izostavio peti Euklidov postulat, treba uvesti veličine za koje ne važi pojam jednakosti, koji bi bio zamenjen pojmovima „veća" ili „manja".

dobija vrednost tražene veličine. Napr., posle merenja ugla na galvanometru možemo računom odrediti jačinu struje.

Ako se kao rezultat bilo merenja, bilo računa, bilo čak naše namere da neka veličina, u datom rasuđivanju sa njom, ima ili treba da ima neku određenu brojnu vrednost, ona se zove *stalna, nepromenljiva, konstantna veličina* ili, jednostavno, *konstanta*.

Konstantne veličine se dele na *relativne* i *apsolutne*.

Relativna konstantna veličina zadržava svoju brojnu vrednost samo pod izvesnim uslovima. Tako, napr., dimenzije prozora određene forme na nekoj zgradi obično imaju iste veličine, za tu zgradu one su konstantne; ali pošto na drugim zgradama prozori iste forme mogu biti sasvim drugih dimenzija, te su konstante relativne. Rastojanje između astronomskih tačaka Beograda i Beča je konstantno, ali i ovde ta konstantnost ima relativni karakter, jer se sve dimenzije na Zemljinoj površini menjaju u toku geoloških perioda.

U vezi sa ulogom relativnih konstanata u savremenom praktičnom životu, naročito u životu velikih kolektiva, pa čak i celokupnog ljudstva, treba navesti proces tzv. *standardizacije* relativnih konstanata. U svakoj oblasti materijalne kulture izrađuju se, po mogućstvu, predmeti samo takve forme (standardne forme) i dimenzija (standardnih dimenzija) kako bi jedan predmet, ili njegovi delovi, mogli biti zamenjeni drugim, njima identičnim. Jasno je da masovna proizvodnja identičnih predmeta znatno olakšava savremenoj industriji njen glavni zadatak, da može zadovoljiti zahteve široke potrošnje i najkomplikovanijih predmeta.

Apsolutne konstante su veličine koje imaju stalnu vrednost u svim prilikama, u svakom procesu rasuđivanja. Odnos obima kruga prema prečniku, koji se označava brojem π, ima istu vrednost u svim prilikama. Taj odnos je primer za apsolutnu konstantnu veličinu.

Veličina koja se menja zove se *promenljiva* ili *varijabilna*. Pojam promenljivosti veličina toliko je danas blizak kulturnom čoveku, da bi navođenje primera za promenljive veličine imalo smisla samo sa istoriskog gledišta. Još krajem prošlog veka, čak i u poslednjem razredu srednjih škola nije bilo govora o promenljivosti veličina. Rešavana je, napr., kvadratna jednačina i govorilo se o korenu te jednačine, kao konstantnoj veličini,

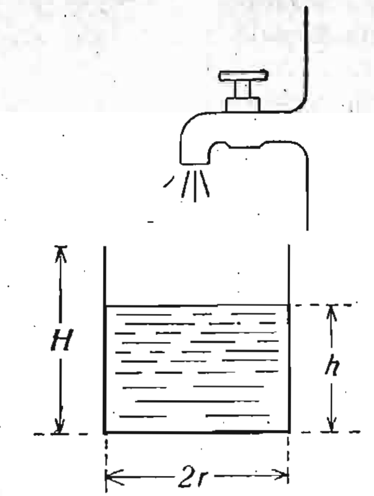
no nije bilo reči o promenljivosti trinoma te jednačine u vezi sa promenom $x-a$. Međutim, još su stari Grci, kako sam naveo, tvrdili da Πάντα ῥεῖ [panta rei — sve teče — reči grčkog filozofa Heraklita 548—480 g. pre naše ere]. U svakoj promeni možemo naći jednu ili više veličina, koje karakterišu ovu promenu. Pre svega se menja — i to neminovno — vreme, ova večno promenljiva veličina. Svaki dan Sunce izlazi, menja svoju visinu nad horizontom i zalazi. Njegova je visina nad horizontom promenljiva veličina. To isto vidimo i kod zvezda, Meseca, planeta. Vazduh menja svoju temperaturu, vlažnost, pritisak. Sve su to promenljive veličine. Sve fiziološke pojave našeg života vezane su sa promenljivim veličinama; temperatura tela, krvni pritisak, težina i druge veličine menjaju se ne samo od detinjstva do starosti već i u toku jednog dana. Još više promenljivih veličina možemo nabrojati posmatrajući naš socijalan život. Postoje specijalni instituti i posebne nauke koje proučavaju promenljive veličine vezane za društvo. Što veću oblast pojava uzimamo u obzir, to više imamo promenljivih veličina i to šarenija njihova priroda.

2.2. Pojam funkcije

Počnimo jednim primerom.

Iz slavine teče voda u sud koji ima oblik valjka (sl. 18). Poluprečnik osnove valjka označimo sa r, a njegovu visinu sa H. Ovaj sud napunićemo vodom do visine h. Izračunajmo zapreminu V vode u sudu do te visine. Jasno je da treba iskoristiti obrazac za zapreminu valjka. Geometrija uči da je taj obrazac

$$V=\pi r^2 h.$$



Sl. 18 — Punjenje suda vodom

Koje veličine ulaze u ovu jednakost? Stalne i promenljive. Broj π je stalan; kao što smo naveli, to je apsolutna konstanta. Za naš sud je veličina poluprečnika r stalna, ali je ona relativnog karaktera, jer u drugom sudu ona može imati drugu vrednost.

Veličina h je promenljiva — toj veličini možemo dati, po našoj želji, proizvoljnu vrednost. Razume se ta vrednost ne može biti manja od nule, ni veća od H, visine suda, ali u navedenim granicama ona je posve proizvoljna. Razmak u kome se može promenljiva veličina menjati zove se *oblast* njene *promenljivosti* ili *područje* i obično se izražava nejednakostima. Tako, u našem slučaju, oblast promenljive veličine h određuju nejednakosti

$$0 \leqslant h \leqslant H,$$

pri čemu je $h=0$ uslov praznog suda, a $h=H$ — punog suda. Nula i H određuju granice oblasti.

Promenljivu veličinu koja može imati proizvoljne vrednosti zovemo *nezavisno promenljiva*. Prema tome veličinu h, u našem slučaju, možemo smatrati kao nezavisno promenljivu.

Ostaje još veličina V. I ona je promenljiva. Ali čim napunimo sud do određene visine h, količina vode, zapremina V, dobija potpuno određenu vrednost. Vrednost promenljive V zavisi, dakle od promenljive h.

Za oznaku promenljivih veličina u Matematici se obično upotrebljavaju poslednja slova latinske azbuke: x, y, z, u, v, itd.

Postavimo sad pojam funkcije pomoću ove definicije.

Veličina y se zove *funkcija* nezavisno promenljive x, ako svakoj određenoj vrednosti x iz područja promenljivosti te veličine odgovara određena vrednost y – a.

Ako promenljivu visinu h označimo sa x, a zapreminu vode V sa y, u našem slučaju imamo obrazac

$$y=\pi r^2 x.$$

Ovaj obrazac dovodi u vezu nezavisno promenljivu x, sa vrednostima iz njene oblasti, i zavisno promenljivu y: za svaku vrednost x – a, možemo, na osnovu našeg obrasca, izračunati odgovarajuću vrednost y – a. To je primer, kako se pomoću matematičkog obrasca može postaviti funkcionalna veza između dve veličine.

Prema tome, sa usvajanjem pojma funkcije i funkcionalne veze između veličina, na čitav niz obrazaca iz aritmetike, algebre, geometrije i drugih nauka — mehanike, fizike, hemije, možemo smatrati sa gledišta postavljanja pomoću tih obrazaca funkcionalne veze između odgovarajućih veličina.

Ako nećemo ili ne možemo napisati obrazac koji bi izražavao sve operacije koje treba izvršiti da, prema vrednosti x – a, dobijemo vrednost y – a, već želimo samo da izrazimo

da između tih veličina postoji funkcionalna veza, upotrebljuje se ovaj skraćeni način pisanja matematičke rečenice

$$y=funct.\,(x)$$

To se čita: y je funkcija x – a. Često se od skraćene reči *funct.* (functio) zadržava samo početno slovo f, ili se zamenjuje nekim drugim slovom, napr.

$$y=f(x),\ y=F(x),\ y=\varphi(x),\ y=\Phi(x),\ y=y(x).$$

To su kratko napisane matematičke rečenice koje tvrde da između promenljivih x i y postoji funkcionalna veza. U poslednjem izrazu slovo y sdesna zamenjuje reč funkcija.

U ovim jednačinama su: x — nezavisno promenljiva ili *argument* funkcije; y s leve strane — zavisno promenljiva ili *funkcija* a f, φ i y s desne strane — *simboli* ili *oznake* funkcija. Simbol funkcije označava operacije koje treba izvršiti sa x da bismo dobili vrednost y koja odgovara vrednosti x – a. Funkcija je određena matematički, ako su navedene operacije matematičke. Funkcija je data kad su ove operacije poznate.

Pomoću jednostavnog primera, punjenje suda vodom, došli smo do pojma funkcije, koji je osnova Više matematike. U daljem izlaganju ćemo proučavati kako pojam funkcije, tako i njegove primene.

Ovde ćemo navesti nekoliko opštih primedaba o pojmu područja nezavisno promenljive.

1. Područje nezavisno promenljive x u opštem slučaju zadovoljava, pri $a<b$, jedan od ovih uslova, koje izražavamo pomoću nejednakosti, zatim pomoću zagrada i najzad shematskom slikom

$a \leqslant x \leqslant b$, $[a, b]$, ○———○ zatvoreno područje,

$a \leqslant x < b$, $[a, b)$, ○——— otvoreno sdesna i zatvoreno sleva,

$a < x \leqslant b$, $(a, b]$, ———○ otvoreno sleva i zatvoreno sdesna,

$a < x < b$, (a, b) ——— otvoreno područje.

U slučaju otvorenog jednog ili oba kraja, tačke krajeva ne pripadaju području.

Uslov, napr., $x<b$, kaže da se tačka M, na brojnoj pravoj koja odgovara vrednosti x, mora nalaziti levo od tačke B, što odgovara broju b, no sama tačka B ne pripada pod-

ručju. U specijalnom slučaju kad a i b označavaju brojeve koji mogu imati apsolutne vrednosti veće od bilo kojeg velikog pozitivnog broja, i a je pri tome negativno, drugim rečima, kad a i b uzimaju vrednosti negativne i pozitivne beskonačnosti, područje za promenljivu x, koja možemo uzimati sve realne vrednosti, izražava se ovako

$$-\infty < x < +\infty .$$

2. Područje promenljive x može se sastojati iz više pojedinih područja, svako odgovarajućeg karaktera. Svako od tih područja može se sastojati i samo iz jedne diskretne tačke. Područje iz diskretnih tačaka je *diskretno područje*. Takvom području odgovara niz izolovanih tačaka. Taj niz može pretstavljati i niz prirodnih brojeva, konačan ili beskonačan. Tako, niz $x = 1, 2, \ldots n$ pretstavlja diskretno područje prirodnih brojeva od 1 do n; a funkcija, napr., $f(x) = 2x - 1$ na tom području daje niz neparnih prirodnih brojeva od 1 do $2n-1$. Područje tačaka na jediničnoj duži sa krajevima $O(0)$ i $A(1)$ može obuhvatiti samo tačke sa racionalnim koordinatama — to je racionalno područje, a može sadržati sve tačke te duži, to je tzv. *neprekidno* područje ili *kontinuum*.

Neka određena vrednost nezavisno promenljive x, iz njenog područja, zove se *posebna* ili *specijalna* vrednost te promenljive. Posebnim vrednostima nezavisno promenljive odgovaraju posebne vrednosti funkcije, koje se označavaju ovako:

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(a),\ f(1),\ f(n)$$

gde su x_1, x_2, a, 1, n posebne vrednosti argumenata.

2.21. Razni načini izražavanja funkcionalne zavisnosti

Funkcionalna zavisnost između nezavisne promenljive x i zavisne promenljive y može se izraziti na više načina. Objasnićemo tri od tih načina: analitički, grafički i tablični.

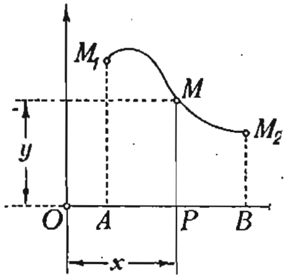
I. Osnovni je *analitički način*. On se izražava onim računskim postupkom koji omogućuje da se izračuna vrednost funkcije y, kada je data vrednost x iz njenog područja. Taj računski postupak može za svaku vrednost x-a da dâ ili tačnu vrednost y-a ili približnu vrednost, sa određenom procenom približnosti. I u jednom i u drugom slučaju smatramo da je

funkcija određena analitički. Obično se analitičko određivanje funkcije izražava obrascem ili formulom. Formule se dobijaju ili kao rezultat teoriskih zaključivanja o vezi između promenljivih veličina, napr., pri izvođenju obrazaca aritmetike, algebre, geometrije, ili kao rezultat posmatranja pojave u čijem opisu učestvuju promenljive veličine, odnosno kao rezultat eksperimentisanja; to su tzv. *eksperimentalni obrasci*. Radi vežbanja čitalac može sam na osnovu svojih matematičkih i fizičkih znanja, naći primere kako za teorisko tako i za eksperimentalne obrasce i protumačiti ih u funkcionalnoj formi. Učinićemo još dve primedbe u vezi sa analitičkim izražavanjima funkcionalne veze.

1. Funkcionalna veza u analitičkoj formi može biti izražena ne samo pomoću obrasca $y = f(x)$, već i pomoću jednačina $F(x,y) = 0$, gde je F pokazuje simbol operacija izvršenih i sa x i sa y, napr., pomoću jednačina $ax + by + c = 0$, $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Jednačine bilo posle rešenja, bilo na drugi način, bez rešavanja, isto tako omogućuju da se odrede vrednosti funkcije za određene vrednosti argumenata. Tako jednačine naših primera daju obrasce: $y = -ax/b - c/b\ (b \neq 0)$, $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Ali za proučavanje opštih osobina funkcionalne veze, postavljene pomoću jednačine, često nije potrebno rešavati jednačinu. U vezi sa onim što je gore rečeno, za funkciju pretstavljenu u obliku $y = f(x)$ se kaže da je data u *rešenom* ili *eksplicitnom* obliku, a za funkciju određenu jednačinom da je data u *nerešenom* ili *implicitnom* obliku.

2. Funkcija koja se određuje na izvesnom području, recimo, od a do b, na jednom delu tog područja može biti određena po jednom postupku, a na drugim delovima, jednom ili više delova, po drugom postupku (odnosno postupcima); ili kako se to isto kaže, po drugom zakonu, odn. zakonima. Tako, napr., područje $(0,2)$ može se podeliti na dva područja: $[0,1]$ i $[1,2]$. Na prvom delu neka važi zakon $y = x$, a na drugom $y = \frac{1}{2}(x+1)$ ili u implicitnoj formi: $x - y = 0$ i $x - 2y + 1 = 0$. Za $x = 1$, opštu granicu područja, oba zakona daju $y = 1$.

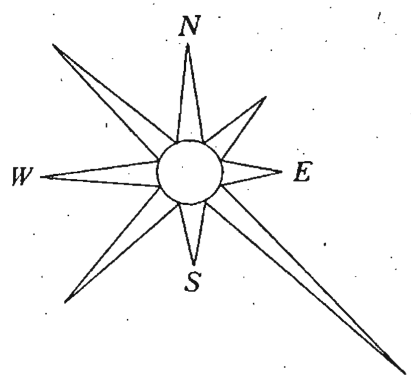
II. Pređimo sad na grafički način izražavanja funkcije. Videli smo da svakom paru realnih brojeva x i y odgovara određena tačka u ravni Dekartovih koordinata. Označimo tu tačku sa M (sl. 19). Podnožje ordinate, tačka P, može biti smatrana kao tačka područja AB nezavisno promenljive x. Ako je funkcija $f(x)$ data, vrednost te funkcije za x možemo uzeti za ordinatu y tačke M i, prema tome, možemo tvrditi da, obruto, tačka M predstavlja funkciju za datu vrednost argumenta x. Ako se x menja u svom području, ordinata y tačke M, u opštem slučaju, prema formuli $y=f(x)$, takođe menja svoju vrednost. Tačka M menja svoj položaj u ravni i opisuje neku krivu koja se zove *grafik*, *grafikon* ili *dijagram* dotične funkcije. Nacrtati grafik funkcije znači pretstaviti je slikom.



Sl. 19 — Grafik funkcije

Crtanje grafika vrši se na više načina. Ako je utvrđeno da je grafik prava linija ili krug, on se crta neposredno lenjirom ili šestarom. Ima sad naročitih krivih lenjira — lekala — koji služe za crtanje specijalnih krivih linija. Ima i naročitih aparata, koji automatski crtaju grafike odgovarajućih veličina — termografi za temperaturu, barografi za pritisak vazduha i dr. i to u funkciii vremena. Slični aparati se često primenjuju i u tehnici za proučavanje i kontrolu rada mašina i ispravnosti instalacija. Najzad, upotrebljuje se i način crtanja grafika pomoću tačaka. U tom slučaju se uzima za područje nezavisno promenljive diskretno područje iz niza tačaka, najzgodnije je ako su ove na istim rastojanjima. To je tzv. koordinatna mreža, napr., milimetarska hartija. Na svakoj ordinati se odmeravaju vrednosti izabrane veličine i dobivene tačke se spajaju pravoliniskim otsečcima. Nacrtana izlomljena linija služi kao grafik funkcije. Neću sad navoditi primere grafika za razne funkcije, kako sam to uradio u svojoj knjizi 1948 godine, jer za proteklo vreme ideja grafika je toliko popularizovana u knjigama, časopisima, novinama, na izložbama i sajmovima, a takođe i u svakodnevnom praktičnom životu, da sad grafici mogu biti od interesa samo utoliko, ukoliko oni pokazuju nešto novo, a ne da se njima tumači sam pojam grafika. U vezi sa pojmom grafika pomenimo samo toliko, da se ideja grafika upotrebljuje ne samo u vezi sa Dekartovim koordinatama, već, napr., i u vezi sa polarnim koordinatama. Tako se, grafik učestanosti, frekvencije, vetra u zavisnosti od pravca iz kojeg on duva, može zgodno predstaviti u polarnim koordinatama diskretnim grafikom, i to podelom kruga na osam delova (sl. 20).

III. Najzad, funkcija može biti u izabranom području određena numeričkim vrednostima, koje su unapred izračunate i stavljene određenim redom u tablice. Prema prirodi funkcije, svaka tablica sadrži tačne ili približne vrednosti funkcije prema području (napr., za brojeve od 1 do 1000) i tačnosti približnih vrednosti (napr., sa pet decimala). Ranije je sastavljanje tablica bilo skopčano sa velikim trudom. Sad računska mašina-automat traži od naučnika-kalkulatora samo izradu programa za automatski rad, koji se svršava u vrlo kratkom vremenu. Iskorišćavanje gotovih tablica mnogo olakšava posao običnih kalkulatora, u prvom redu svih radnika materijalne kulture.



Sl. 20 — Grafik učestanosti vetra

2.3. Iz Analitičke geometrije

Proučavanje geometriskih objekata analitičkom metodom, tojest pomoću funkcija izraženih analitički i, obrnuto, proučavanje i tumačenje analitičkih izraza i jednačina pomoću geometriskih slika, — sačinjavaju zajedno naučnu disciplinu, koja se zove *analitička geometrija*. Proučićemo elemente te discipline u cilju, da, s jedne strane, proširimo, produbimo i sistematizujemo, a, s druge strane, pomoću geometriskih pretstava, razjasnimo bogati sadržaj raznolikih funkcionalnih veza između veličina.

2.31. Ravnomerni proces

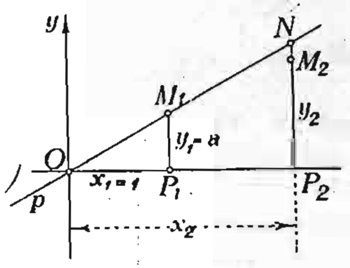
Označimo sa a cenu jednog kilograma brašna, sa x broj kilograma brašna na stovarištu i sa y ukupnu vrednost tog brašna. Jasno je da za izračunavanje ove vrednosti treba cenu jednog kilograma pomnožiti brojem kilograma: to daje

$$(1) \qquad y = ax;$$

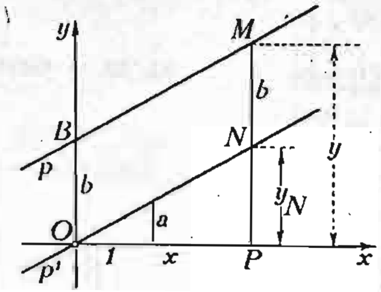
drugim rečima, vrednost brašna iste cene utoliko je veća ukoliko je veći broj kilograma na stovarištu.

Dve promenljive veličine koje su vezane takvim odnosom zovu se, kao što znamo, *direktno proporcionalne* ili jednostavno, *proporcionalne*. Pri tome je y funkcija veličine x. U slučaju proporcionalnosti ova funkcija je izražena jednačinom (1).

Nacrtajmo grafik ove funkcije. Stavimo, prvo, $x=0$; iz (1) vidimo da je tada i $y=0$. Naš grafik prolazi kroz početak koordinata, kroz tačku O (0, 0). Dalje stavimo $x=1=x_1$; tada je, iz (1), $y=a=y_1$ (na sl. 21 uzeto je $a=0{,}5$). Konstruišimo



Sl. 21 — Grafik proporcionalnosti



Sl. 22 — Grafik linearne funkcije

tačku M_1 (x_1, y_1). Sada dokažimo da naš grafik predstavlja pravu p koja prolazi kroz tačke O i M_1. Uzmimo za x proizvoljnu vrednost x_2; tada, prema (1), y ima vrednost $y_2=ax_2$. Pokažimo da tačka M_2 (x_2, y_2) pripada našoj pravoj p. Pretpostavimo da ne pripada pravoj p, tada postoji druga tačka, N, na pravoj p sa apscisom x_2. Njenu ordinatu označimo sa y. Iz sličnosti trouglova OP_1M_1 i OP_2N imamo $y : x_2 = a : 1$. Odakle je $y=ax_2$, to znači $y=y_2$. Tačke N i M_2 se poklapaju. Proizvoljna tačka sa koordinatama koje zadovoljavaju jednačinu (1) leži na pravoj p; prema tome ova je prava grafik naše funkcije.

Pretpostavimo sad da prava p ne prolazi kroz koordinatni početak i rešimo pitanje: koja funkcija odgovara tom grafiku? Kroz početak koordinata (sl. 22) povucimo pravu p' paralelnu pravoj p. Tada ćemo za svaku apscisu x imati dve

tačke: tačku M na pravoj p i tačku N na pravoj p'. Ordinatu tačke M označimo sa y, a ordinatu tačke N sa y_N. Jasno je da je $y=y_N+b$, gde je $b=NM=OB$ ordinata tačke B preseka prave p sa osom y. S druge strane, za tačku N, kao za tačku na prvoj koja prolazi kroz početak koordinata, imamo $y_N=ax$; prema tome za tačku M imamo

$$(2) \qquad y = ax + b.$$

Dobijena *funkcija* je *prvog stepena* po x, ali sa članom b, koji ne zavisi od x. Pošto ova funkcija ima za grafik pravu liniju, ona se zove i *linearna funkcija*.

Jednačina (2) se zove *jednačina prave u rešenom obliku*.

Zamislimo sad voz koji je pošao sa stanice A (sl. 23) na rastojanju s_0 od početne stanice O. Neka se taj voz kreće *ravnomerno*, tj. tako da je put koji on prolazi proporcionalan vremenu. Broj kilometara koji on pređe za čas pokazuje veličinu njegove *brzine*; označićemo je sa v (početno slovo latinske reči — velocitas — brzina). Ako sa s (početno slovo latinske reči — spatium — prostor, rastojanje) označimo rastojanje voza od stanice O, a sa t (tempus — vreme) vreme od početka kretanja, imamo

Sl. 23 — Kretanje voza

$$s - s_0 = vt,$$

odakle je

$$s = s_0 + vt.$$

Vidimo da ravnomernom kretanju takođe odgovara linearna funkcija; u ovom slučaju funkcija vremena.

Iz navedenog razloga svaki se proces, koji je karakterisan linearnom funkcijom, zove se *ravnomerni proces*. Grafik ravnomernog procesa je prava linija.

Proučimo detaljnije taj proces.

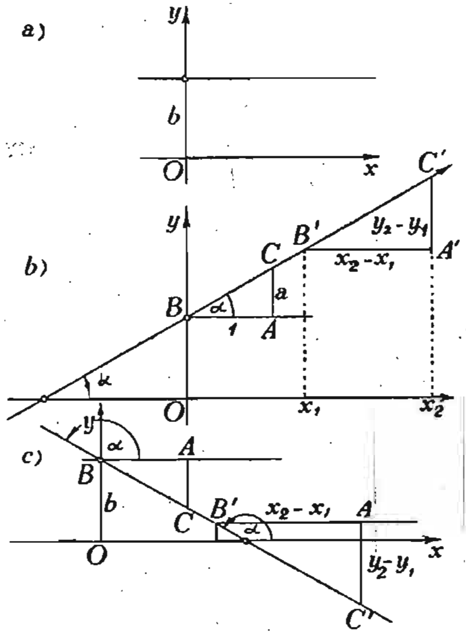
Položaj prave sa jednačinom

$$y = ax + b$$

određuju dve, za datu pravu, stalne veličine a i b. Prava, kao geometriski oblik, nema parametra forme. Veličine a i b su parametri položaja prave u ravni; oni se kratko zovu *para-*

metri prave. Ako se parametri menjaju, prava menja svoj položaj u ravni, s tim u vezi menja se i karakter ravnomernog procesa.

Neka, prvo, parametar b ima stalnu vrednost, a parametar a neka se menja. Ako je $a=0$, jednačina prave postaje $y=b=const$. Ova prava je paralelna osi Ox (sl. 24, a). Vidimo



Sl. 24 — Grafici različitih ravnomernih procesa: a. stalnost funkcije; b. progresivan ravnomeran proces; c. regresivan ravnomeran proces

da, kao specijalan slučaj, u ravnomerni proces spada i degenerativni slučaj procesa, kad funkcija ima konstantnu vrednost. Pri $s=s_0$, voz stoji.

Pretpostavimo sad da a ima pozitivnu vrednost (sl. 24, b). Ako u pravouglom trouglu ABC sa $BA=1$ i $AC=a$ ugao ABC označimo sa α (čitaj alfa), možemo iz tog trougla napisati: $tg\,\alpha=AC:BA=a:1=a$. Ugao α je *nagib* prave prema osi x. On se računa od ose x do prvog susreta sa pravom. Smer mu je određen prelazom kroz pravi ugao od pozitivnog pravca ose x do pozitivnog pravca ose y. Tangens tog ugla, broj a zove se *ugaoni koeficijent* ili *koeficijent pravca* date prave.

Uzmimo dve vrednosti apscisa, x_1 i x_2 $(x_2>x_1)$. Razlika x_2-x_1 je *priraštaj apscise* pri prelazu od jedne tačke područja nezavisno promenljive na drugu tačku u tom području. Vrednostima x_1 i x_2 odgovaraju vrednosti y_1 i y_2 ordinata tačaka na pravoj. Razlika y_2 i y_1 je *priraštaj ordinate* tačke na pravoj koja predstavija funkciju. Prema tome je y_2-y_1, u isto vreme, i *priraštaj funkcije* koji odgovara priraštaju x_2-x_1 nezavisno promenljive.

Uporedimo sad vrednost priraštaja funkcije, y_2-y_1, sa priraštajem x_2-x_1 nezavisno promenljive. Neposredno iz trougla $A'B'C'$ i definicije tangensa ugla pravouglog trougla imamo

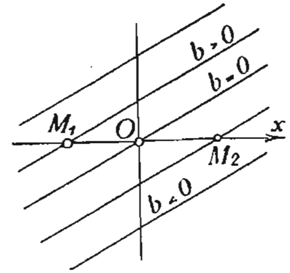
(3) $$(y_2-y_1)/(x_2-x_1)=tg\,\alpha=a,$$

a odavde je

(4) $$y_2-y_1=a\,(x_2-x_1).$$

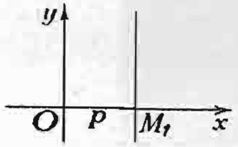
Kako je $x_2-x_1>0$ i $\alpha>0$, zaključujemo da je $y_2>y_1$; drugim rečima, ako argument x funkcije raste, u ovom slučaju i sama funkcija y raste. Takav ravnomeran proces zove se *progresivni.* Odnos (3) je *mera promene*, u datom slučaju *mera porasta* funkcije. Jasno je da je mera porasta funkcije jednaka koeficijentu pravca grafika linearne funkcije.

Ako je a negativno, grafik funkcije ima položaj prave na slici 24, c. Prema pravilu koje smo postavili za računanje ugla α, u ovom slučaju je ugao α tup. Njegov tangens je negativan (potvrdićemo to i u 2 · 5), on ponovo ima vrednost (3), jer je razlika y_2-y_1 negativna. Prema tome pri $a<0$, kad argument raste $(x_2>x_1)$, funkcija opada $(y_2<y_1)$. Ovakav ravnomerni proces zove se *regresivan.* Odnos (3), koji ponovo služi kao mera promene funkcije, ovde je *mera opadanja* funkcije. I u ovom slučaju je to ugaoni koeficijent naše prave, grafika funkcije.



Sl. 25 — Promena položaja prave sa promenom početne ordinate

Pretpostavimo sad da parametar a ima stalnu vrednost, a da se menja parametar b, koji se zove *početna ordinata* prave, jer je to ordinata za $x=0$. Ako je $b=0$, prava sa jednačinom $y=ax$ prolazi kroz početak koordinatnog sistema (sl. 25) i pretstavlja zakon direktne proporcionalnosti kao specijalan slučaj ravnomernog procesa. Ako je $b > 0$, prava seče osu y iznad početka koordinata; apscisa tačke preseka M_1 prave sa osom x je negativna. Ako je $b < 0$ prava seče y osu ispod početka koordinata, a x osu sa pozitivne strane od tog početka.



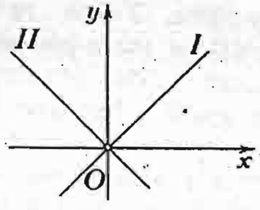
Sl. 26 — Prava paralelna osi y

Prethodna analiza raznih položaja prave u ravni u odnosu na Dekartov koordinatni sistem ne obuhvata samo jedan položaj, kada je prava paralelna sa y osom (sl. 26). U ovom slučaju jednačinu prave treba napisati ovako

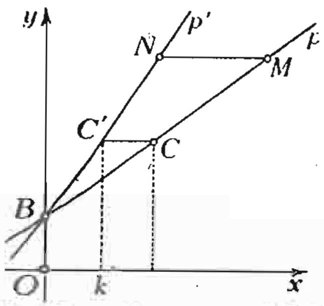
$$x = p = const.,$$

gde smo sa p označili apscisu tačke preseka M_1 prave sa osom x. Prethodna jednačina ne može se dobiti iz jednačine prave u rešenom obliku (2), jer ugaoni koeficijent a za takvu pravu ima beskonačnu vrednost.

Navešćemo još nekoliko jednačina pravih u naročitim položajima. Osa x ima za svoju jednačinu $y = 0$; osa y za jednačinu $x = 0$. Simetrala I (sl. 27) koordinatnih uglova u prvom i trećem kvadrantu ima za jednačinu $y = x$ ili $x - y = 0$. Simetrali II na našoj slici za drugi i četvrti kvandrant odgovara jednačina $y = -x$ ili $x + y = 0$. Prva simetrala obrazuje ugao od 45^0 sa osom x i ima ugaoni koeficijent $+1$, druga obrazuje sa x osom ugao 135^0 i njen je ugaoni koeficijent -1.



Sl. 27 — Simetrale koordinatnih uglova



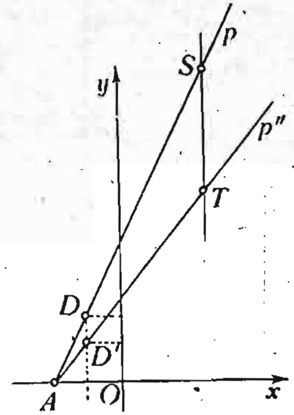
Sl. 28 — Promena položaja prave sa promenom srazmere apscisa

U vezi sa crtanjem prave kao grafika ravnomernog procesa navešćemo nekoliko primedaba.

Ako se dužina koju smo izabrali za jedinicu promenljive x pokaže kao nezgodna, napr., suviše velika, možemo uzeti manju, kaže se, promeniti *srazmeru* grafika. Kako će se tada promeniti grafik?

Na pravoj p grafika uzećemo dve tačke (sl. 28): tačku B sa $x = 0$ i tačku C sa $x = 1$. Pošto vrednosti

novih apscisa ξ (čitaj: ksi) određujemo iz unapred postavljenog uslova $\xi = kx$, gde je k dati određeni broj (*koeficijent smanjenja* za $k < 1$ odnosno *povećanja* za $k > 1$ apscisa), nove apscise tačaka B i C imaju vrednosti: $\xi_B = 0$, $\xi_{C'} = k$. Prema tome tačka B zadržava svoj položaj, a tačka C dobija položaj C' sa apscisom k i ordinatom tačke C. Pravu što spaja tačke B i C' označićemo sa p'. Nije teško pokazati da će svaka tačka M prave p, posle ove promene srazmere apscisa, zauzeti položaj tačke N preseka prave p' sa pravom MN paralelnom osi x. Prava p' je grafik prave u novom položaju. Pomoću postavljene jednačine $\xi = kx$ izvršili smo *geometrisku transformaciju* položaja prave u ravni. Sličnu transformaciju možemo izvesti, ako promenimo srazmeru ordinata po uslovu $\eta = ly$, gde je η (čitaj: eta) nova ordinata i l dati broj, koeficijent smanjenja odnosno povećanja ordinata. Na datoj pravoj p (sl. 29) uzmimo opet dve tačke: tačku A sa $y = 0$ i tačku D sa $y = 1$. Ovim tačkama će posle tpansformacije odgovarati: ista tačka A i tačka D' sa ordinatom l i apscisom jednakom apscisi tačke D. Na pravoj p'' koja spaja tačke A i D' leži svaka nova tačka T dobijena od tačke S prave p. Prava p'' je grafik prave u novom položaju posle izvršene geometriske transformacije.



Sl. 29 — Promena položaja prave sa promenom srazmere ordinata

Rešimo nekoliko važnih zadataka u vezi sa proučavanjem jednačine prave.

1. Dati jednačinu prave koja prolazi kroz dve tačke $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$.

Videli smo da jednačinu prave možemo napisati

$$(5) \qquad y = ax + b,$$

gde su a i b parametri položaja prave; kao dopuna služi jednačina $x = p$ prave paralelne sa y osom. Parametre a i b odredićemo iz uslova da prava prolazi kroz dve date tačke. Pošto koordinate datih tačaka moraju zadovoljavati jednačinu prave, to za prvu tačku imamo uslov

$$(6) \qquad y_1 = ax_1 + b.$$

Ako ovu jednačinu oduzmemo od (5) dobićemo jednačinu

$$(7) \qquad y - y_1 = a(x - x_1),$$

koja sadrži samo jedan parametar a. Jednačina (7) predstavlja pravu, koja prolazi samo kroz jednu datu tačku. Parametar a, koji određuje pravac prave, ostaje neodređen; prava kroz datu tačku može imati proizvoljan pravac.

Pošto druga tačka takođe mora pripadati pravoj (7(dobijamo jednačinu

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1),$$

odakle, pod uslovom $x_2 - x_1 \neq 0$, imamo

$$(8) \qquad a = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1).$$

Posle zamene ove vrednosti a u (7) konačno dobijamo

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Ovako izgleda jednačina prave koja prolazi kroz dve date tačke, za koje je $x_2 \neq x_1$. A ovaj uslov znači da tačke M_1 i M_2 ne pripadaju pravoj paralelnoj sa y osom. Ako je $x_2 = x_1$, tražena jednačina ima dopunsku formu $x = p = x_1$.

Za dalja rasuđivanja je važno da se obrati pažnja na obrazac (8) koji određuje koeficijent pravca date prave

$$(9) \qquad tg\,\alpha = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1),$$

ako sa α ponovo označimo ugao koji prava obrazuje sa osom x.

2. Dokazati da jednačina

$$(10) \qquad Ax + By + C = 0,$$

gde su A, B, C stalni brojevi, određuje pravu (*opšti oblik jednačine prave.*)

Ako je $B \neq 0$, prethodnu jednačinu možemo rešiti po y i napisati

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

a ova jednačina sa oznakama $-A/B = a$, $-C/B = b$ ima oblik jednačine $y = ax + b$ i, prema tome, određuje pravu.

Ako je $B = 0$, jednačinu oblika $Ax + C = 0$ za $A \neq 0$ možemo rešiti po x i, u obliku $x = -C/A$, ona određuje pravu paralelnu sa osom Oy.

Ako su i $B = 0$ i $A = 0$, iz jednačine (10) sleduje da je i $C = 0$; pod ovim uslovima jednačina više ne postoji. Ako koeficijenti A, B, C teže nuli, prava koja odgovara jednačini udaljuje se u beskonačnost.

3. Odrediti otsečke koje prava (10) čini na koordinatnim osama.

Ako sa p i q označimo tražene otsečke, koordinate tačaka preseka prave sa x, odnosno sa y osom moraju biti $(p, 0)$, $(0, q)$. Pošto ove koordinate moraju zadovoljavati jednačinu prave (10), za određivanje otsečaka p i q imamo uslove: $Ap + C = 0$, $Bq + C = 0$. Njihova rešenja su: $p = -C/A$, $q = -C/B$. Obrnuto, ako iz napisanih jednačina odredimo A i B: $A = -C/p$, $B = -C/q$ i ove vrednosti stavimo u jednačinu prave (10), dobićemo jednačinu

$$-\frac{C}{p}x - \frac{C}{q}y + C = 0.$$

Posle deljenja sa $-C$ (ako je $C \neq 0$) dobijamo jednačinu

$$(11) \qquad x/p + y/q = 1,$$

koja se zove *jednačina prave sa otsečcima* ili *segmentna jednačina prave.* Veličine p i q su parametri položaja prave u segmetnom obliku.

U taj oblik ne možemo transformisati jednačinu $Ax + By = 0$ ($C = 0$), jer takva prava prolazi kroz početak koordinata i svaki je od njenih otsečaka jednak nuli ($p = q = 0$).

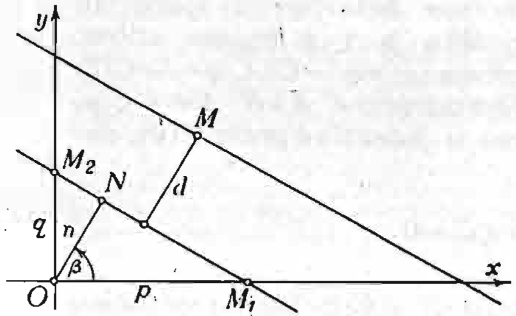
Ranije smo proučavali transformaciju prave u vezi sa promenom srazmere posebno apscise i posebno ordinate. Uzmimo sad opšti slučaj kad je, u isto vreme, $\xi = kx$ i $\eta = ly$. Ako izvršimo ove zamene u segmentnoj jednačini prave, dobićemo jednačinu $\xi/p' + \eta/q' = 1$, gde su $p' = kp$ i $q' = lq$. Drugim rečima, transformisana prava samo menja u određenim srazmerima svoje otsečke na koordinatnim osama.

4. Odrediti rastojanje tačke od prave.

Prvo ćemo pokazati kako se može napisati jednačina prave pomoću dužine normale n, spuštene iz početka koordinatnog sistema na pravu, i ugla β (čitaj: beta) ove normale sa osom x. Pošto iz trouglova ONM_1 i ONM_2 (sl. 30) neposredno imamo: $n/p = \cos\beta$, $n/q = \sin\beta$, posle množenja jednačine (11) sa n ($n \neq 0$) dolazimo do tražene jednačine

$$x\cos\beta + y\sin\beta - n = 0. \tag{12}$$

Ta se jednačina zove *normalni oblik jednačine prave*. U normalnom obliku parametri položaja su: normala n i ugao β. Pošto n i β određuju vektor ON sa smerom od početka koordinata prema pravoj, možemo zaključiti da ne samo tačka,



Sl. 30 — Parametri normalnog oblika jednačine prave

već i prava može biti određena vektorom koji igra ulogu vektora položaja prave u ravni. Koordinate tog vektora, $n\cos\beta$ i $n\sin\beta$, se zovu *normalne koordinate prave.*

Ako je prava data u normalnom obliku (12) i tačka M, čije rastojanje d od date prave određujemo, ima koordinate x_1, y_1, možemo zamisliti pravu koja prolazi kroz tačku M i ide paralelno sa datom pravom. Ona ima normalnu jednačinu

$$x\cos\beta + y\sin\beta - (n+d) = 0.$$

Kako ova prava mora prolaziti kroz tačku M (x_1, y_1), koordinate ove tačke moraju zadovoljavati prethodnu jednačinu. Iz tog uslova određujemo d pomoću obrasca

$$d = x_1\cos\beta + y_1\sin\beta - n.$$

Drugim rečima, za određivanje rastojanja tačke od prave treba napisati jednačinu prave u normalnom obliku, uzeti levu

stranu te jednačine i u njoj koordinate promenljive tačke prave zameniti koordinatama tačke čije rastojanje određujemo. Ako dobijemo pozitivan rezultat, tačka M i početak koordinatnog sistema leže na različitim stranama od date prave. Ako je rezultat negativan, ove tačke se nalaze na istoj strani od date prave.

5. Transformisati jednačinu prave u opštem obliku,

$$Ax + By + C = 0, \tag{13}$$

na normalan oblik (12).

Ako dve jednačine (13) i (12) odgovaraju istoj pravoj, one mogu da se razlikuju samo stalnim množiocem. Pomnožimo jednačinu (13) stalnim množiocem λ (čitaj: lambda) i izjednačimo koeficijente dobijene jednačine sa koeficijentima jednačine (12)

$$\cos\beta = \lambda A, \quad \sin\beta = \lambda B, \quad -n = \lambda C.$$

Iz prva dva uslova, na osnovu jednačine $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$, dobijamo za λ vrednost

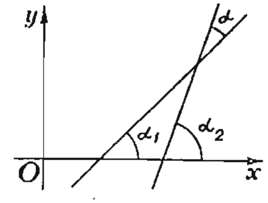
$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Treći od napisanih uslova odlučuje o izboru znaka korena. Pošto je $n > 0$, znak kod λ treba da bude suprotan znaku člana C opšte jednačine. Množilac λ se zove *normirajući množilac opšte jednačine prave*. Posle normiranja jednačina (13) dobija oblik

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$$

Pošto svaku jednačinu prave linije možemo napisati u opštem obliku, normiranje tog oblika rešava pitanje o normiranju svih ostalih oblika jednačine prave.

6. Odrediti ugao između dve prave.



Sl. 31 — Ugao između dve prave

Neka su prave date jednačinama

$$y = a_1x + b_1, \quad y = a_2x + b_2.$$

Znamo da su $a_1 = tg\,\alpha_1$, $a_2 = tg\,\alpha_2$, gde su α_1 i α_2 uglovi pravih sa x osom. Pošto neposredno iz slike (sl. 31) vidimo da je ugao α između pravih jednak razlici $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, za tangens traženog ugla imamo izraz

$$tg\,\alpha = tg\,(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\,\alpha_2 - tg\,\alpha_1}{1 + tg\,\alpha_1 \cdot tg\,\alpha_2},$$

a odavde izvodimo konačan obrazac

$$(14) \qquad tg\,\alpha = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_1\,a_2}.$$

Iz ovog obrasca neposredno sleduju *uslovi paralelnosti i normalnosti pravih.* Pošto je za paralelne prave $\alpha = 0$, uslov paralelnosti izgleda ovako: $a_2 = a_1$, tj. ugaoni koeficijenti moraju biti jednaki. U slučaju normalnosti ugao između pravih iznosi 90^0; prema tome je $tg\alpha = \pm\infty$, a to je moguće, kao što se vidi iz (14), samo pod uslovom $1 + a_1 a_2 = 0$, što možemo napisat i ovako $a_2 = -1/a_1$, tj. ugaoni koeficijenti normalnih pravih treba da budu recipročni i suprotnih znakova.

2.32. Proces obrnute proporcionalnosti

Videli smo da je grafik procesa direktne proporcionalnosti sa jednačinom $y = ax$ prava koja prolazi kroz početak koordinata.

Sad ćemo proučiti slučaj obrnute proporcionalnosti. Ako su veličine x i y obrnuto proporcionalne, tada možemo, smatrajući y kao funkciju x, napisati

$$(1) \qquad y = \frac{c^2}{x},$$

gde je c^2 pozitivna konstanta. Zaista, ovaj obrazac pokazuje da se y za onoliko puta smanjuje za koliko se puta x poveća, i obrnuto.

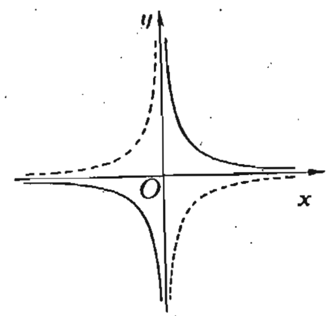
Iz fizike znamo da su zapremina v i pritisak p iste količine gasa, pod istom temperaturom, po Bojl-Mariotovom zakonu vezani jednačinom $pv = const. = c^2$, gde smo sa c^2 označili konstantu. Prema tome su pritisak gasa i njegova zapremina veličine obrnuto proporcionalne; dakle je $p = \dfrac{c^2}{v}$.

Kako se može nacrtati grafik funkcije (1)? Pomoću tačaka. Za apscisu x uzimamo niz vrednosti i za svaku od njih izračunavamo, prema jednačini (1), vrednost funkcije y; na taj način dobijamo niz tačaka koje im odgovaraju. Napr., za $c = 2$ imamo

x	y
$\to -\infty$	$\to -0$
-10.000	$-0{,}0004$
-1.000	$-0{,}004$
-100	$-0{,}04$
-10	$-0{,}4$
-1	-4
$\to -0$	$\to -\infty$
$\to +0$	$\to +\infty$
1	4
10	0,4
100	0,04
1.000	0,004
10.000	0,0004
$\to +\infty$	$\to +0$

x	y
-5	$-0{,}8$
-4	-1
-3	$-4/3$
-2	-2
-1	-4
$-0{,}5$	-8
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
0,5	8
1	4
2	2
3	4/3
4	1
5	0,8

Ako prema ovoj tablici nacrtamo niz tačaka i spojimo ih linijom, dobićemo krivu (sl. 32), koja se sastoji od dve grane; za jednu granu područje promenljive x su pozitivni brojevi, za drugu — negativni. Ova kriva se zove *jednakostrana hiperbola.* Vidimo na slici, a to nam potvrđuje i tablica vrednosti x i y, da ova hiperbola ima četiri beskonačne grane — u oba pravca ocâ x i y. Kako se ponaša hiperbola, napr., u odnosu na x osu? Jedna grana se nalazi sa jedne strane te ose, a druga sa druge. Kada se udaljujemo od početka koordinata duž x odnosno y ose, rastojanje se između tačaka hiperbole i ose postepeno smanjuje. Zbog ovih osobina prema x, odnosno y osi, ose x i y se zovu *asimptote hiperbole.* Asimptota je grčka reč i označava ono što se ne



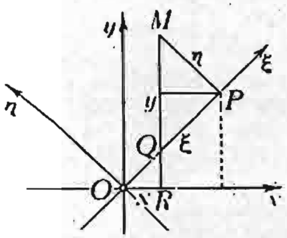
Sl. 32 — Grafik obrnute proporcionalnosti. Dve jednakostrane konjugovane hiperbole

poklapa. Prema tome sam naziv već ukazuje na to, da iako se asimptote stalno sve više približuju krivoj, one se sa ovom nikad ne poklapaju.

Ako, uporedo sa jednačinom (1), uzmemo jednačinu

$$(2) \qquad y=-\frac{c^2}{x},$$

koja se od prethodne razlikuje samo znakom desne strane, drugim rečima, samo znakom stalnog proizvoda xy, vidimo da i ovoj jednačini odgovara jednakostrana hiperbola ali sa položajem u drugim kvadrantima koordinatnog sistema (na slici 32) ona je nacrtana isprekidanom linijom). Dve nacrtane hiperbole, jedna izvučenom linijom, druga — isprekidanom, zovu se *konjugovane*.



Sl. 33 — Nove koordinate u odnosu na ose simetrije

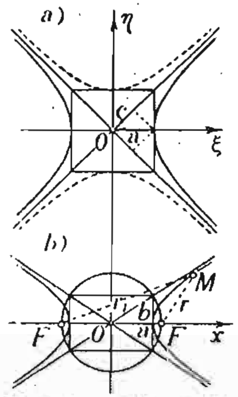
Sada ćemo uvesti nov sistem koordinata $O\xi\eta$ (čitaj: o ksi eta); osa $O\xi$ obrazuje ugao od 45^0 sa osom x, a osa $O\eta$ stoji upravno na osi $O\xi$ sa istim redom smerova osa kao i u sistemu koordinata Oxy. Nove koordinate tačke M hiperbole (sl. 33) označimo sa ξ i η. Neposredno sa slike imamo

$$\xi=OP=OQ+QP=x\sqrt{2}+\eta,$$
$$y=RM=RQ+QM=x+\eta\sqrt{2}.$$

Iz prve jednačine nalazimo $x=(\xi-\eta)/\sqrt{2}$, a iz druge izvodimo $y=(\xi+\eta)/\sqrt{2}$. Ako sad dobijene vrednosti za stare koordinate x i y stavimo u jednačinu (1), napisanu u obliku $xy=c^2$, dobićemo jednačinu

$$(3) \qquad \xi^2-\eta^2=2c^2=a^2,$$

gde je a konstantna dužina. Ova jednačina takođe odgovara jednakostranoj hiperboli, samo u drugom položaju prema koordinatnim osama (sl. 34, a). Zamislimo sad da su sve ordinate η u ravni $O\xi\eta$ smanjene u istom odnosu tako, da nove



Sl. 34 — Hiperbole: a. jednakostrana, b. raznostrana (levo F zameniti sa F_1)

ordinate u novom koordinatnom sistemu Oxy (sl. 34, b) imaju vrednosti $y=b\eta/a$, gde je b $(b<a)$ nova dužina. Ako u jednačini (3) stavimo $\xi=x$, $\eta=ay/b$, dobićemo $x^2-a^2y^2/b^2=a^2$ ili, u definitivnoj formi

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Kriva koja odgovara ovoj jednačini pokazana je na slici 34, b. Ona se zove *hiperbola;* ako se želi da naglasi da ona nije jednakostrana, upotrebljuje se naziv *raznostrana hiperbola.* Dužine a i b su *poluose hiperbole.* Pravougaonik nad osama $2a$ i $2b$, kao što se vidi na slici, svojim dijagonalama određuje asimptote hiberbole, jer one odgovaraju dijagonalama kvadrata na slici 34, a, koje služe kao asimptote jednakostrane hiperbole.

Izvešćemo jednu vrlo važnu osobinu hiperbole.

Sa poluprečnikom $OR=c=\sqrt{a^2+b^2}$ (sl. 34, b), jednakim polovini dijagonale konstruisanog pravougaonika, nacrtajmo krug sa središtem u početku koordinatnog sistema. Tačke preseka tog kruga sa x osom označimo sa F i F_1. Ove tačke zovu se *žiže* ili *fokusi hiperbole.* Pokazaćemo da razlike rastojanja bilo koje tačke hiperbole od žiža ima stalnu vrednost, tj. da je

$$MF_1-MF=r_1-r=const.$$

Neposredno sa slike imamo

$$r_1{}^2=y^2+(x+c)^2, \quad r^2=y^2+(x-c)^2.$$

Ako sad iz jednačine hiperbole (4) izračunamo $y^2=b^2x^2/a^2-b^2$ i stavimo to u izraz, recimo, $r_1{}^2$, uzmemo u obzir da je $a^2+b^2=c^2$, dobićemo

$$r_1{}^2=\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2+x^2+2cx+c^2=\frac{c^2}{a^2}x^2+2cx+a^2=$$
$$=\left(\frac{c}{a}x+a\right)^2.$$

Isto tako imamo za

$$r^2=\left(\frac{c}{a}x-a\right)^2.$$

Kako je za desnu granu hiperbole $x \geqslant a$, a i $c > a$, iz dobijenih jednačina možemo odrediti ove vrednosti žižnih potega

$$r_1 = cx/a + a, \quad r = cx/a - a,$$

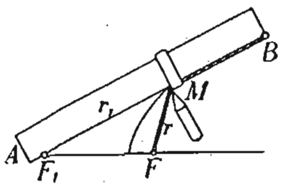
odakle posle oduzimanja imamo

$$r_1 - r = 2a = const.$$

što možemo ovako formulisati:

Hiperbola je geometrisko mesto tačaka u ravni čija razlika rastojanja od dve stalne tačke (žiže) ima stalnu vrednost.

Ova osobina hiperbole omogućava njeno izvlačenje kao neprekidne linije. Lenjir AB (sl. 35) pričvrstimo čiodom za hartiju, u tački F_1, tako da se može oko ove tačke slobodno okretati. Za kraj B lenjira zakačen je nerastegliv konac, koji je drugim svojim krajem. vezan za tačku F na hartiji. Duž lenjira može slobodno klizati kuka M, kroz koju prolazi konac. Olovku, kojom izvlačimo hiperbolu, držimo tako da joj vrh ostaje stalno priljubljen uz kuku. Prema tome konac treba da ima položaj FMB i njegov deo MB treba stalno da leži na lenjiru. Ako lenjir okrećemo oko tačke F_1, držeći konac pri tome zategnut, vrh olovke M opisuje hiperbolu. I zaista, razlika $F_1M - FM = r_1 - r$ ostaje stalna, jer pri promeni položaja kuke M svakoj dužini r_1 i r ili se dodaje, ili se od nje oduzima ista veličina; u prvom slučaju deo konca se skraćuje, u drugom povećava.



Sl. 35 — Crtanje hiperbole u obliku neprekidne linije

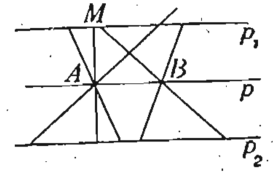
Hiperbola ima *centar*. To je, na slici 34, tačka O.

Šta je centar krive linije? Je li to isti pojam kao i pojam centra kružne linije, tačke, od koje su sve tačke krive podjednako udaljene? Jasno je da nije!

Centar krive linije je sredina svih tetiva te krive što prolaze kroz tu tačku.

Da bismo konkretno pokazali da je pojam centra krive ili, uopšte, geometriske slike, širi od pojma centra kružne

linije ili pravilnog mnogougla, navešćemo kao primer geometrisku sliku, koja ima beskrajno mnogo centara. To su dve paralelne prave (sl. 36). Svaka tačka prave p, paralelne pravama p_1 i p_2, koja prolazi kroz sredinu A rastojanja između tih pravih, centar je naše slike, jer su sve tetive, koje prolaze kroz bilo koju tačku A, B itd. prave p, prepolovljene tom tačkom.

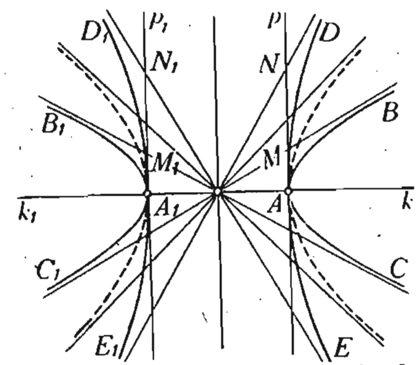


Sl. 36 — Slika sa beskonačno velikim brojem centara

Hiperbola ima dve *ose simetrije*. Svaka od koordinatnih osa na slici 34 je osa simetrije hiperbole. Jedna od njih, koja preseca hiperbolu, zove se *stvarna* ili *realna osa*, druga — *imaginarna*. Tačke preseka hiperbole sa stvarnom osom su njena *temena*.

Šta je to osa simetrije slike u ravni?

Za dve tačke A i A_1, kaže se da su *simetrične* u odnosu na pravu p, ako leže: 1. na istoj normali na pravoj p; 2. sa različitih strana prave p i 3. na istim rastojanjima od te prave. Ako svakoj tački slike odgovara druga tačka iste slike simetrična prvoj u odnosu na neku pravu *slika je simetrična u odnosu na tu pravu*. Prava u odnosu na koju je neka slika simetrična zove se *osa simetrije* ili *simetrala* te slike. Ovakva simetrija slika zove se *osna* ili *aksijalna simetrija*. Hiperbola je slika sa dvostrukom aksijalnom simetrijom. Dužine a i b su poluose hiperbole, a je stvarna poluosa, b — imaginarna, bez obzira što se izražava stvarnim brojem. Veličina $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ je rastojanje žiže od centra. Odnos $c/a = e$ zove se *ekscentričnost hiperbole*. Pošto je $c > a$, ekscentričnost hiperbole je veća od jedinice. Za jednakostranu hiperbolu $(a = b)$ ekscentričnost hiperbole je jednaka $\sqrt{2}$. Ako je $e < \sqrt{2}$, hiperbola je *sužena*



Sl. 37 — Promena oblika hiperbole u vezi sa promenom njene ekscentričnosti

(sl. 37, BAC i $B_1A_1C_1$) u odnosu na jednakostranu; ako je $e > \sqrt{2}$, ona je *razvučena* (sl. 37, DAE i $D_1A_1E_1$). Ako e teži jedinici, hiperbola teži da pređe u dve poluprave Ak i A_1k_1. Ako e teži beskonačnosti, hiperbola teži da pređe u dve paralelne prave p i p_1 (sl. 37).

Ako je jednostrana hiperbola data jednačinom $x^2-y^2=a^2$, njene asimptote, kao simetrale koordinatnih uglova, imaju za jednačine $x-y=0$, $x+y=0$. Ako je hiperbola data jednačinom $x^2/a^2-y^2/b^2=1$, iz prethodne slike neposredno sleduje da su asimptote date jednačinama $x/a-y/b=0$, $x/a+y/b=0$, jer svaka prolazi kroz početak koordinata, prva još i kroz tačku $M(a, b)$, a druga i kroz tačku $M_1(-a, b)$.

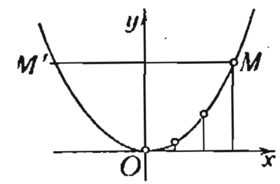
Hiperbola ima: jedan parametar forme, za koji se obično uzima njena ekscentričnost, jedan parametar veličine, recimo, poluosu a, i tri parametra položaja za koje možemo uzeti — dve koordinate njenog centra u odnosu na neki dati sistem koordinata Oxy i ugao između realne ose hiperbole i Ox ose sistema.

2.33. Kvadratna funkcija. Parabolički proces

Najjednostavnija *kvadratna funkcija* izgleda ovako

(1) $$y=ax^2,$$

gde je a konstanta. Ta jednačina izražava da je vrednost y proporcionalna kvadratu vrednosti x.



Sl. 38 — Parabola koja prolazi kroz početak koordinata sa osom y kao simetralom i sa otvorom u pozitivnom smeru te ose

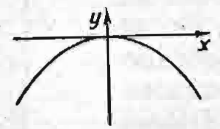
Proučićemo grafik koji odgovara jednačini (1). Pretpostavimo prvo, da je a pozitivno (na sl. 38. je $a=0{,}5$) i započnimo crtanje tačaka ove krive. Vidimo da kriva prolazi kroz početak koordinatnih osa, jer $x=0$, $y=0$ zadovoljavaju jednačinu (1). Dalje, iz te jednačine neposredno sleduje da, kako za pozitivne tako i za negativne vrednosti $x-a$, y ima uvek pozitivnu vrednost; prema tome sve tačke krive nalaze se samo sa jedne strane ose x, u prvom i drugom kvadrantu. Iz iste jednačine vidimo da svakoj tački $M(x, y)$ odgovara druga tačka $M'(-x, y)$ sa istom ordinatom, a sa apscisom suprotnog znaka i iste apsolutne vrednosti. Ovo pokazuje da naša kriva ima osu y za simetralu. Prema tome za proučavanje krive dovoljno je proučiti njene tačke samo u jegnom kvadrantu. Sastavimo tablicu

x	0	1	2	3	4	5	6	...	...	∞
y	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18	...	...	∞

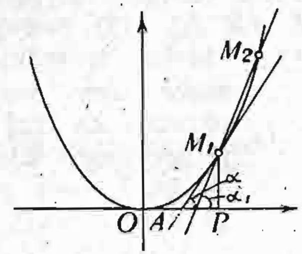
Pomoću ove tablice možemo konstruisati niz tačaka naše krive.

Dobijena kriva se zove *parabola*. Tačka O je teme parabole, prava Oy je *osa parabole*. Pošto i y, kad x beskrajno raste, raste takođe beskrajno, parabola ima dve beskonačne grane.

Kada je a negativno, jednačina (1) izražava parabolu simetričnu prethodnoj u odnosu na osu x (sl. 39).



Sl. 39 — Parabola koja prolazi kroz početak koordinata sa osom y kao simetralom i sa otvorom u negativnom smeru te ose



Sl. 40 — Sečica i tangenta parabole

Uzmimo sad na paraboli (sl. 40) dve tačke, $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$ i uočimo sečecu što prolazi kroz ove tačke. Videli smo u (8) 2.31 da ugaoni koeficijent prave kroz dve date tačke ima vrednost

(2) $$(y_2-y_1)/(x_2-x_1)=tg\,\alpha_1.$$

gde je α_1 ugao između ove prave i ose x. Pošto obe tačke, M_1 i M_2, pripadaju paraboli sa jednačinom (1), koordinate tih tačaka moraju zadovoljavati tu jednačinu; prema tome je $y_1=ax_1^2$, $y_2=ax_2^2$. Izračunamo li sad odnos (2), dobićemo

(3) $$tg\,\alpha_1=a\frac{x_2^2-x_1^2}{x_2-x_1}=a\frac{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=a(x_2+x_1).$$

Ako tačka M_2 menja svoj položaj i približava se sve više tački M_1, sečica parabole isto tako menja svoj položaj:

menja svoju vrednost i ugeo α_1. Neka se najzad tačka M_2 poklopi sa tačkom M_1. Da li će tada ugao α_1 izgubiti svoju vrednost? Neće, jer za $x_2 = x_1$ imamo iz $tg\,\alpha_1 = a\,(x_2 + x_1)$

$$(4) \qquad tg\,\alpha = 2ax_1,$$

gde smo sa α označili novu vrednost ugla [1]).

Prava što prolazi kroz tačku M_1, a ima α kao ugao nagiba prema osi x ne pretstavlja ništa drugo do tangentu parabole u tački M_1.

Došli smo tako do novog pojma — pojma tangente parabole. Taj pojam možemo proširiti na svaku krivu ovom definicijom.

Tangenta krive linije u datoj tački je granični položaj. ako ovaj postoji, sečice, što prolazi kroz datu u njoj blisku tačku kad ova teži datoj tački.

Za svaku krivu prelaz od sečice ka tangenti treba vršiti prema specijalnoj prirodi krive. Kod parabole je izračunavanje ugaonog koeficijenta tangente jednostavno, kod drugih krivih izračunavanje tog koeficijenta nije tako jednostavno. Konkretan slučaj parabole pokazuje, prvo, kako se može vršiti prelaz od sečice na tangentu i, drugo, da rezultat tog prelaza ne daje nešto samo približno, već potpuno određen, tačan rezultat.

Rezultat (4) omogućuje da se tangenta parabole konstruiše za svaku njenu tačku.

Za teme, kad je $x_1 = 0$, imamo $tg\,\alpha = 0$, a to znači da tangenta ima pravac ose x, koja, prema tome, dodiruje parabolu u temenu. Za svaku drugu tačku parabole, sa koordinatama x_1, y_1, imamo za jednačinu tangente

$$y - y_1 = 2a\,x_1\,(x - x_1)$$

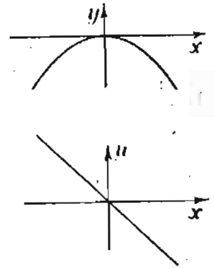
ili, pošto je $y_1 = ax_1^2$, dolazimo do jednačine

$$y = a\,x_1\,(2x - x_1).$$

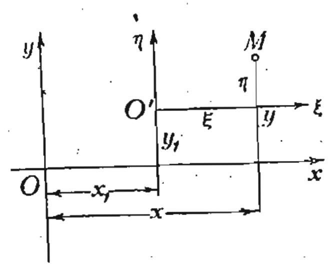
Iz ove jednačine sleduje da tangenta seče osu x ($y = 0$) u tački A (sl. 40) sa apscisom x_A, koja zadovoljava jednačinu

[1]) Valja primetiti da smo pri izračunavanju $tg\,\alpha_1$ iz količnika $a(x_2^2 - x_1^2)/(x_2 - x_1)$ pod uslovom $x_2 - x_1 \neq 0$, skratili taj količnik sa $x_2 - x_1$ pre nego što smo stavili $x_2 = x_1$. Tek potom smo izračunali vrednost dobijenog rezultata za $x_2 = x_1$ i uveli ugao α pomoću jednačine (4). Tako se i postupa prema Teoriji graničnih vrednosti funkcija, čije ćemo elemente izneti u kasnijim poglavljima. Ovde smo taj postupak pokazali na jednostavnom, konkretnom slučaju, primeru određivanja tangente na parabolu.

$2x_A - x_1 = 0$ prema tome, ima vrednost $x_A = 0{,}5\,x_1$. Dakle za konstruisanje tangente na našu parabolu, u datoj tački M_1, dovoljno je sredinu apscise tačke M_1, tačku A, spojiti sa tačkom M_1 na paraboli. Ako želimo ugaoni koeficijent $tg\,\alpha$ tangente parabole da smatramo kao funkciju u apscise x tačke na paraboli, onda se iz (4) može napisati: $u = u\,(x) = 2ax$. Grafik funkcije u u koordinatnom sistemu sa koordinatama x, u prava koja prolazi kroz početak koordinata. Na slici (sl. 41)



Sl. 41 — Parabola i grafik ugaonog koeficijenta njene tangente



Sl. 42 — Transformacija koordinata u slučaju promene položaja samo početka

je ponovljena parabola sa otvorom nadole i dat grafik ugaonog koeficijenta tangente na tu parabolu.

Sada ćemo uzeti kvadratnu funkciju opšteg tipa

$$(5) \qquad y = ax^2 + bx + c,$$

gde su a, b, c tri konstante.

Odredimo i ovde, pre svega, ugaoni koeficijent tagente krive linije u tački $M_1\,(x_1, y_1)$, pomoću sečice koja prolazi i kroz drugu tačku $M_2\,(x_2, y_2)$. Za taj koeficijent imamo

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2^2 + bx_2 + c - (ax_1^2 + bx_1 + c)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{[a\,(x_2 + x_1) + b]\,(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a\,(x_2 + x_1) + b.$$

Ako pređemo na granični položaj i stavimo $x_2 = x_1$, dolazimo do rezultata

$$(6) \qquad tg\,\alpha = 2a\,x_1 + b.$$

Sad ćemo potražiti tačku na krivoj za koju je tangenta paralelna osi x, tj. $tg\,\alpha = 0$. Tada je

$$(7) \qquad 2ax_1 + b = 0,$$

te je, prema tome,

$$(8) \qquad x_1 = -b/2a.$$

Ako ovu vrednost stavimo u izraz za funkciju y, dobićemo

$$(9) \qquad y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c = \frac{1}{4a}(4ac - b^2) = -\frac{1}{4a}(b^2 - 4ac).$$

Za proučavanje položaja grafika, koji odgovara jednačini (5), postupićemo na ovaj način. Zamislimo uporedo sa koordinatnim sistemom Oxy sistem koordinata $O\xi\eta$, čiji se početak nalazi u tački $O'(x_1, y_1)$, a čije su ose paralelne starim osama (sl. 42). Svaka tačka M ravni ima tada dve vrste koordinata: x,y u odnosu na sistem Oxy i ξ, η u odnosu na sistem $O'\xi\eta$. Između tih koordinata postoje veze $x = \xi + x_1$, $y = \eta + y_1$ što je lako videti i neposredno sa slike.

Uvrstimo sad ove vrednosti u jednačinu (5) i stavimo

$$\eta + y_1 = a(\xi + x_1)^2 + b(\xi + x_1) + c =$$
$$= a\,\xi^2 + (2ax_1 + b)\,\xi + ax_1^2 + bx_1 + c.$$

Pošto je $2ax_1 + b = 0$ prema (7) i $y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$ prema (9), prethodna jednačina dobija oblik $\eta = a\,\xi^2$. Ova jednačina, u novim koordinatama, ne predstavlja ništa drugo do parabolu sa osom η kao simetralom i temenom u tački $O'(x_1, y_1)$, čije su koordinate određene jednačinama (8) i (9). Ako je $a > 0$, otvor parabole je nagore, ako je $a < 0$, nadole.

Konstante a, b, c su parametri kvadratne funkcije. Nije teško proučiti položaj parabole u vezi sa vrednostima ovih parametara. Obratimo pažnju na preseke parabole sa osom x. Pošto je za ove tačke $y = 0$, apscise preseka moraju zadovoljavati uslov $y = ax^2 + bx + c = 0$. One su, prema tome, koreni ove jednačine, tj.

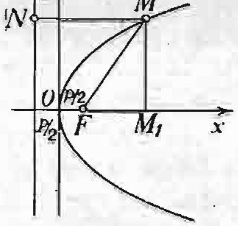
$$x_{1,2} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right).$$

Prema veličini izraza $b^2 - 4ac$, koji se zove *diskriminanta* kvadratne funkcije (5), osa x: 1. seče parabolu u dvema tačkama za $b^2 - 4ac > 0$; 2. dodiruje parabolu za $b^2 - 4ac = 0$ i 3. za $b^2 - 4ac < 0$ nema zajedničkih tačaka sa parabolom.

Analizirali smo jednačinu parabole u najprostijem obliku, $y = ax^2$, i videli smo da je osa simetrije te parabole y osa. Ako uzmemo jednačinu $x = ky^2$, gde je k stalan broj, i uporedimo je sa prethodnom jednačinom, možemo zaključiti da poslednja jednačina takođe odgovara jednačini parabole, samo je njena osa simetrije x osa (sl. 43). Prethodnu jednačinu možemo rešiti po y^2 i napisati u obliku

$$y^2 = 2px,$$

pri čemu je $2pk = 1$. Stalna dužina p se zove *parametar parabole*.

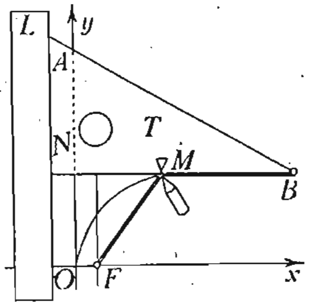


Sl. 43 — Parabola sa žižom i direktrisom

Pokazaćemo sad jednu važnu osobinu parabole. Uočimo na osi x tačku F sa apscisom $0{,}5\,p$ (sl. 43). Ova tačka se zove *žiža* ili *fokus* parabole. Na rastojanju $0{,}5\,p$ sa druge strane ose y konstruisaćemo pravu paralelnu osi y. Ova prava zove se *direktrisa* parabole.

Nije teško sad proveriti stav koji kaže: Geometrisko mesto tačaka u ravni podjednako udaljenih od stalne tačke (žiže) i stalne prave (direktrise) je parabola.

Zaista, uzmimo bilo koju tačku M parabole (sl. 43). Iz trougla MFM_1 neposredno sleduje $\overline{MM_1^2} = \overline{MF^2} - \overline{FM_1^2}$. Kako je $\overline{MM_1} = y$, $\overline{MF} = \overline{MN} = x + p/2$, $\overline{FM_1} = x - p/2$, imamo $y^2 = (x + p/2)^2 - (x - p/2)^2$ ili $y^2 = 2px$, a to je jednačina parabole.



Sl. 44 — Crtanje parabole u obliku neprekidne linije

Izvedena osobina parabole omogućuje izvlačenje parabole neprekidnim kretanjem vrha olovke. Neka lenjir L, čvrsto utvrđen na stolu, određuje položaj direktrise parabole; i pretpostavimo da pravougli trougao T, svojom katetom NA, može klizati duž tog lenjira. Stavimo, prvo, drugu katetu NB tog trougla tako da se na njoj nalazi žiža F. Zatim uzmimo konac i jedan njegov kraj učvrstimo u tački F na stolu. Kuku, koja se može kretati po kateti NB, stavimo u sredinu rastojanja žiže od direktrise. Konac provucimo kroz kuku do kraja B katete i tu ga pričvrstimo drugim krajem. Ako kateta NA trougla počne da se kreće nagore, kraj olovke, pričvršćen za pokretnu kuku, pri stalno zategnutom koncu, opisaće parabolu, jer će stalno biti $FM=NM$. Kuka se pri tome ne sme odvajati od katete NB.

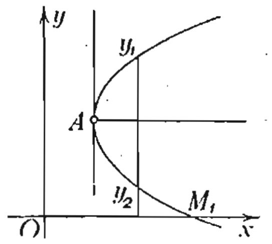
Uzmimo u obzir još jednu formu paraboličke veze između promenljivih. Jednačini $y=ax^2+bx+c$ odgovara određena parabola sa osom simetrije u pravcu paralelnom sa y osom. Ako promenimo nazive promenljivih, mesto gornje dobićemo jednačinu

$$x=ay^2+by+c. \tag{10}$$

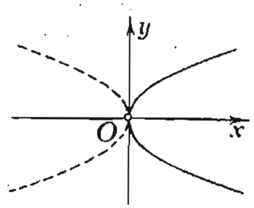
Rešavanjem ove jednačine po y dolazimo do funkcije

$$y=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{x}{a}+\frac{b^2-4ac}{4a^2}},$$

kojoj takođe odgovara parabola, napr., u položaju na slici (sl. 45). Ovde imamo primer za tzv. *dvoznačnu funkciju*: izraz



Sl. 45 — Parabola sa osom simetrije paralelnom osi x



Sl. 46 — Parabola sa osom x kao simetralom

sa znakom plus određuje vrednost funkcije y_1 sa znakom minus — vrednost y_2. Jasno je da parametar c u jednačini (10) ima vrednost apscise tačke M_1, preseka parabole sa osom x. Apscisa x_A temena parabole određuje se iz uslova jednakih korena. Iz potkorene veličine tada imamo $x_A=-(b^2-4ac)/4a$, a sem toga je $y_A=-b/2a$.

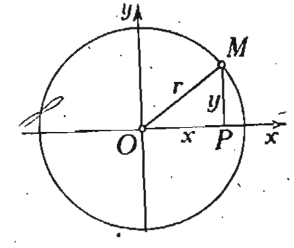
Ako je $x_A=y_A=0$, teme parabole se nalazi u početku koordinata. Jednačina (10) tada ima oblik $x=ay^2$. Za $a>0$ možemo ponovo uvesti $2p=1/a$ i jednačina $y^2=2px$ određuje tada parabolu, koju smo već ranije proučili. Za $a<0$ možemo staviti $2p=-1/a$ i dobićemo jednačinu $y^2=-2px$, koja odgovara paraboli sa negativne strane ose x. Ona je nacrtana na slici (sl. 46) isprekidanom linijom.

Paraboli, kao grafiku, odgovara *parabolički proces*. On pretstavlja prvi korak u prelazu od ravnomernog odnosno linearnog, tj. procesa prvog stepena, ka procesu komplikovanije prirode, ka kvadratnom procesu.

2.34. Kružna linija i elipsa

Uzmimo kružnu liniju sa središtem u početku koordinata i sa poluprečnikom r (sl. 47). Za svaku tačku M ove kružne linije, sa koordinatama x, y iz pravouglog trougla OPM dobija se

$$x^2+y^2=r^2. \tag{1}$$



Sl. 47 — Kružna linija sa centrom u početku koordinata

To je jednačina kružne linije. Ona određuje funkciju

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}. \tag{2}$$

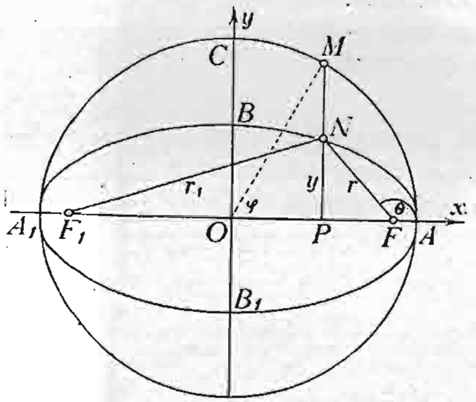
Ova funkcija odgovara *kružnom procesu*. Napisana jednačina izražava kružni proces u Dekartovim koordinatama. Za te koordinate područje promenljivih x i y je od $-r$ do $+r$.

Ako sa θ (čitaj: teta) označimo ugao između poluprečnika tačke M i ose x, iz pravouglog trougla OPM dobijamo

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta. \tag{3}$$

Ako se ugao θ menja i to, recimo, stalno raste, tačka sa koordinatama x, y opisuje kružnu liniju, vrši *cikl* (od grčke reči — κύκλος, u latinskoj transkripciji — cyclus) u istom smeru. Prema tome takvo posmatranje kruga odgovara *cikličkom pro-*

cesu. Ugao θ se zove *promenljivi parametar*, a jednačine (3) zovu se *parametarske jednačine kružne linije*.



Sl. 48 — Elipsa

Zamislimo sad da ordinate svih tačaka kružne linije smanjimo u istoj razmeri (sl. 48). Za svaku tačku kružne linije dobićemo tačku nove krive linije, koja se zove e l i p s a. Označimo poluprečnik kruga ovde sa a, a rastojanje OB tačke B, koju smo dobili iz tačke C kružne linije, sa b. Stalna razmera, u kojoj promenjene (smanjene) sve ordinate, ima, u ovom slučaju, vrednost $b:a$. Ako ordinate odgovarajućih tačaka kružne linije i elipse privremeno označimo sa y_k i y_e imaćemo $y_e:y_k=b:a$ i, prema tome, $y_k=\frac{a}{b}y_e$ Ako stavimo ovu vrednost u (1) i r zamenimo sa a, dobićemo $x^2+\frac{a^2}{b^2}y_e{}^2=a^2$. Deobom sa a^2 i uprošćavanjem oznake zamenom y_e sa y dolazimo do jednačine

$$(4)\qquad x^2/a^2+y^2/b^2=1.$$

Ova jednačina odgovara elipsi. Ako rešimo tu jednačinu po y, imamo funkciju

$$(5)\qquad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

koja određuje *eliptički proces*. Kružni i eliptički procesi igraju vrlo važnu ulogu u proučavanju raznih pojava. Eliptički proces predstavlja u izvesnom smislu uopštavanje kružnog procesa.

Jednačina (5) još jednom potvrđuje stalnost odnosa ordinate tačke elipse prema ordinati tačke kružne linije, određene jednačinom (2).

Veličine a i b zovu se *velika* i *mala poluosa elipse*. Tačka O je *središte* ili *centar elipse*. Elipsa ima dve ose simetrije. Kružna linija ih ima beskrajno mnogo.

Uzmimo sad tačku B (sl. 48) za središte i sa velikom poluosom a kao poluprečnikom nacrtajmo kružnu liniju. Označimo sa F i F_1 preseke ove kružne linije sa velikom osom elipse. To su *žiže* ili *fokusi* elipse. Rastojanje $OF=OF_1$ označimo sa c.

Dokazaćemo ovu važnu osobinu elipse. Elipsa je geometrisko mesto tačaka u ravni za koje zbir rastojanja od dve stalne tačke, žiže, ima stalnu vrednost.

Ako je N tačka na elipsi i $NF=r$, $NF_1=r_1$, treba dokazati da je

$$(6)\qquad r_1+r=const.=2a.$$

Neposredno sa slike imamo

$$r_1^2=y^2+(c+x)^2,\quad r^2=y^2+(c-x)^2.$$

Ako sad, kao i u slučaju hiperbole, iz jednačine elipse (5) uzmemo vrednost $y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$, stavimo u izraz r_1^2 i uzmemo u obzir da je $a^2=b^2+c^2$, dobićemo

$$r_1^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2+c^2+2cx+x^2=a^2+2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2=(a+\frac{c}{a}x)^2$$

i tako isto

$$r^2=(a-\frac{c}{a}x)^2.$$

Iz ovih jednačina imamo

$$r_1=a+\frac{c}{a}x,\qquad r=a-\frac{c}{a}x,$$

odakle, posle sabiranja, dolazimo do tražene jednačine (6).

Odnos c/a zove se *ekscentričnost elipse* i označava se sa e. Prethodne jednačine za r_1 i r možemo i ovako izraziti: $r=a-ex$, $r_1=a+ex$. Ove jednačine izražavaju svaki od fokusnih potega tačke elipse kao linearnu funkciju apscise tačke. Videli smo da slične linearne funkcije imamo i u slučaju hiperbole.

Ako sa φ (čitaj: fi) označimo ugao između poluprečnika OM pomoćne tačke M na kružnoj liniji i ose x, za tačku N elipse imaćemo $x = a \cos\varphi$, $y = b \sin\varphi$,

pošto je $$y_e = \frac{b}{a} y_k = \frac{b}{a} \cdot a \sin\varphi = b \sin\varphi.$$

Ovo su *parametarske jednačine elipse.*

Uvešćemo i polarne koordinate tačke N elipse, sa potegom r iz žiže F i uglom θ između tog potega i ose x.

Pošto je $x = c + r \cos\theta$, imamo iz jednačine $r = a - \frac{c}{a} x$ jednačinu $r = a - \frac{c}{a}(c + r \cos\theta)$, koja, rešena po r, daje

$$r = \frac{a^2 - c^2}{a} : (1 + e \cos\theta).$$

Ako sa p označimo veličinu $(a^2 - c^2) : a = b^2 : a = a - ce$, koja se zove *parametar elipse*, dolazimo konačno do jednačine elipse u polarnim koordinatama

$$r = \frac{p}{1 + e \cos\theta}.$$

Kako je, za $\theta = 90^0$, $r = p$ parametar elipse p ima dužinu jednaku polovini fokusne tetive, povučene upravno na velikoj osi elipse.

Izračunajmo vrednost ugaonog koeficijenta tangente u datoj tački $M_1(x_1, y_1)$ na elipsi. Ako uzmemo drugu tačku, sa koordinatama $M_2(x_2, y_2)$ ugaoni koeficijent sečice $M_1 M_2$ ima vrednost $tg\,\alpha_1 = (y_2 - y_1) : (x_2 - x_1)$, gde je α_1 ugao sečice sa osom x. Pošto je $x_1^2/a^2 + y_1^2/b^2 = 1$, $x_2^2/a^2 + y_2^2/b^2 = 1$, posle oduzimanja imamo

$$\frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{a^2} + \frac{(y_2 - y_1)(y_2 + y_1)}{b^2} = 0,$$

odakle je

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}.$$

Ako sad od sečice pređemo na tangentu, za koju je $x_2 = x_1$ i $y_2 = y_1$, imamo konačno

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_1}{y_1},$$

gde je α ugao tangente sa osom x.

Sa ovim ugaonim koeficijentom jednačinu same tangente kroz tačku $M_1(x_1, y_1)$ treba ovako napisati

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_1}{y_1}.$$

Ako izvršimo množenje i uzmemo u obzir da je $x_1^2/a^2 + y_1^2/b^2 = 1$, možemo tangentu na elipsu u datoj tački konačno napisati u obliku

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Ako uporedimo ovu jednačinu sa jednačinom elipse (4), vidimo da se formalno jednačina tangente dobija zamenom, u proizvodima $x^2 = xx$ i $y^2 = yy$, iz jednačine (4) pojednog promenljivog množitelja stalnim koordinatama date tačke.

2.35. Kriva linija drugog stepena

Proučili smo tri važna tipa krivih linija — elipsu, hiperbolu i parabolu. Poznato je da svaku od tih krivih linija možemo dobiti presekom jednom ravni površine dvogranog kružnog konusa. Zbog ove osobine te krive se zovu *konusni preseci*; kao takve one su bile proučene još u davnoj prošlosti, naročito od strane grčkog matematičara Apolonija iz Perge (oko 250—190 g. pre naše ere).

S druge strane, videli smo, da analitičko proučavanje svakog od navedenih konusnih preseka dovodi do jednačine drugog stepena po x i y. U vezi s tim, prirodno je da se postave ova tri pitanja: 1. Koji bi bio najzgodniji oblik opšte jednačine drugog stepena po x i y? 2. Koje sve linije odgovaraju toj opštoj jednačini, kad njeni koeficijenti uzimaju razne brojne vrednosti? 3. Kako dovesti, u svakom specijalnom slučaju, jednačinu tog slučaja do najprostijeg oblika?

1. Pošto opšta jednačina drugog stepena po x i y mora sadržati sve članove drugog stepena, tj. članove i sa x^2, i xy i y^2, oba člana prvog stepena sa x i y i, najzad, član slobodan od promenljivih, opšta jednačina je ranije pisana sa ovako označenim stalnim koeficijentima

$$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0.$$

Uvođenje dvojaka kod nekih koeficijenata ne oduzima ništa od opštosti tog oblika, jer se svaki broj može zameniti dvostrukom vrednošću polovine tog broja. Unošenje dvojaka u gornju jednačinu smatralo se u svoje vreme kao izvestan napredak, jer je ono omogućavalo da se jednostavnije izraze rezultati ispitivanja jednačine. Taj Euklidov azbučni red oznaka, u slučaju kao što je ovaj, danas je napušten; on nije pogrešan, ali nije racionalan, jer nijedan koeficijent, samo svojom oznakom, ne kaže na koji se član odnosi. Sem toga za jednačinu, napr., 6-og stepena, ne bi bila dovoljna ni cela latinska azbuka, sa 24 velika slova! A kako bismo mogli napisati, držeći se tog azbučnog reda, opštu jednačinu nekog 10-og stepena?

Za oznaku koeficijenata sad se uvodi drugi način, vezan za ovu kvadratnu tablicu, stavljenu između dveju dvostrukih vertikalnih crta:

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccc} x & y & 1 \end{array} \\
\begin{array}{c} x \\ y \\ 1 \end{array} & \left\Vert \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right\Vert
\end{array}$$

Ovakva tablica zove se *kvadratna matrica,* i to, u našem slučaju, trećeg reda. Teorija matrica, i to sa proizvoljnim brojevima vrsta i stubaca odnosno kolona, sačinjava sad naročitu naučnu disciplinu. Ovde u tu teoriju nećemo ulaziti, a gornju matricu ćemo smatrati samo kao sistem brojeva postavljenih u izvesnom redu. Svaki broj tablice zove se *element matrice;* označava se dvostrukim indeksom: a_{ij}, od kojeg prvi broj indeksa označava redni broj vrste, drugi — redni broj stupca, kojim taj element pripada. U našem specijalnom slučaju pretpostavimo da je matrica *simetrična* u odnosu na glavnu dijagonalu, koja sadrži brojeve a_{11}, a_{22}, a_{33}. To znači da su

ispunjeni uslovi: $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$ ili, uopšte, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i \neq j)$. Prema tome proizvoljnih brojeva simetrična matrica trećeg reda ima samo šest.

Sad stavimo ili zamislimo stavljene, van matrice, iznad prve vrste i sleva od prvog stupca veličine: x, y, 1. Zatim obrazujemo zbir svih proizvoda svakog broja matrice onim veličinama van matrice koje pripadaju istoj vrsti i istom stupcu kao i dotični broj matrice. Tako dobijeni zbir, izjednačen sa nulom, daje u slučaju simetrične matrice opštu jednačinu drugog stepena po x i y u obliku

$$\Phi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{1}$$

Svaki koeficijent te jednačine pokazuje odmah svojim indeksima kojem članu on pripada. Tako napr., a_{12} stoji pored xy, a a_{23} pored y, jer trojka u indeksu, u datom slučaju, pokazuje da odgovarajući proizvod ne sadrži druge promenljive. Napisani zbir, koji sadrži dve promenljive x i y, označićemo, radi kratkoće pisanja, sa $\Phi(x, y)$ i možemo ga čitati — *funkcija promenljivih* x i y.

Način kako je obrazovana funkcija $\Phi(x, y)$ pokazuje da istu jednačinu (1) možemo dobiti i pošto izvršimo množenja i sabiranja drugim redom u obliku

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = {} & (a_{11}x + a_{12}y + a_{13})\,x + \\ & + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})\,y + a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0. \end{aligned} \tag{1'}$$

Uvešćemo još neke pojmove i veličine, važne za dalja izlaganja, u vezi sa tablicom naše matrice.

Svakoj kvadratnoj matrici odgovara jedan broj koji ćemo zvati *determinanta* te *matrice.* U našem slučaju je ona trećega reda. Označimo taj broj sa Δ. Determinantu ćemo označavati istom tablicom elemenata, kao i tablicu matrice, ali između jednostrukih vertikalnih crta. Za izračunavanje determinanata postoji više postupaka koji dovode do istog rezultata. Objasnićemo Laplasov postupak, u njegovoj najprostijoj formi, koji možemo smatrati kao definiciju determinante.

Uzmimo iz determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bilo koji element, napr., a_{11} i izbrišimo iz determinante vrstu i stubac, kojima pripada element a_{11}; od preostala četiri elementa načinimo determinantu $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ drugog reda. Ovakva determinanta se zove *poddeterminanta* ili *minor* determinante trećeg reda koji odgovara elementu a_{11}. Svakom elementu odgovara njegov minor. Svaki minor pomnožimo sa $(-1)^{i+j}$, gde je i broj vrste i j broj stupca elementa a_{ij} kome odgovara minor. Dobijeni proizvod zove se *algebarska dopuna* ili *kofaktor* elementa a_{ij} date determinante trećeg reda. Kofaktor elementa a_{ij} označavaćemo sa A_{ij}. Dakle, kao primer, možemo napisati

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Pošto smo tako uveli pojam algebarske dopune, sad možemo Laplasov postupak ovako formulisati: Svaka determinanta jednaka je zbiru proizvoda elementa i njegove algebarske dopune, proširenom na sve elemente bilo koje vrste ili kolone.

Prethodno primetimo da primena Laplasovog postupka na determinantu drugoga reda dovodi do tzv. pravila unakrsnog množenja elemenata. Doista, za determinantu $\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}$, prema Laplasovu pravilu, imamo za elemente prve vrste: $m_{11}m_{22}+$ $+m_{12}\cdot(-m_{21})$, a to isto daje i unakrsno množenje $m_{11}m_{22}-$ $-m_{12}m_{21}$ sa minusom pri množenju u pravcu druge dijagonale. Pri tome smo uzeli u obzir da je determinanta od jednog elementa sam taj elemenat.

Izračunajmo sad našu determinantu, prema Laplasovom postupku primenjujući ga na elemente prve vrste.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+$$
$$+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Ako je naša determinanta simetrična, tj. odgovara simetričnoj matrici, vrednost prethodne determinante iznosi

$$\Delta=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}^2-a_{22}a_{13}^2-a_{33}a_{12}^2+2a_{23}a_{31}a_{12}.$$

U teoriji determinanata se pokazuje: 1. Da Laplasov postupak važi za postupno izračunavanje determinante bilo kojeg reda i 2. da vrednost te determinante ne zavisi od toga koju smo vrstu ili kolonu uzeli za početnu. Čitalac lako to može proveriti na gornjoj determinanti trećega reda.

2. Uzmimo sad opštu jednačinu drugog stepena po x i y u obliku

$$(1) \qquad \Phi(x, y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

i proučimo pitanje: koje sve linije odgovaraju toj jednačini?

Videli smo da u svom najprostijem obliku, jednačine konusnih preseka izgledaju ovako

$$x^2/a^2 \pm y^2/b^2-1=0, \qquad y^2=2px.$$

Te tri jednačine u isto vreme se zovu *kanonične jednačine krivih drugog stepena*. One odgovaraju eliptičkom, hiperboličkom i paraboličkom tipu funkcionalnog procesa. U te tipove spadaju i degenerativni procesi. Tako napr., elipsa može da se pretvori u kružnu liniju, u tačku ili u duž određene dužine.

Pri proučavanju konusnih preseka treba da uzmemo u obzir da krive eliptičkog i hiperboličkog tipa imaju jednu zajedničku osobinu, — naime one imaju centar, a parabola nema centra. Prema tome je prirodno da se prvo postavi pitanje o određivanju centra i nađu uslovi da kriva drugog stepena ima centar.

S druge strane, pri posmatranju kanoničnih jednačina elipse i hiperbole vidimo da u tim jednačinama nema članova linearnih po x i y, a u jednačini parabole ih ima.

Pretpostavimo, prvo, da kriva sa jednačinom (1) ima centar u nekoj tački sa koordinatama (a, b). Izvršimo transformaciju koordinata tako da početak novih koordinata ξ i η padne u tačku (a, b), a pravac pritom osa ostane isti. Obrasci za transformaciju izgledaju ovako

$$x=\xi+a, \qquad y=\eta+b.$$

Ako stavimo te vrednosti x-a i y-a u jednačinu (1) dobićemo kao jednačinu u novim koordinatama, ξ i η:

$$(2) \qquad a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 + 2(a_{11}a + a_{12}b + a_{13})\xi + 2(a_{21}a + a_{22}b + a_{23})\eta + a_{11}a^2 + 2a_{12}ab + a_{22}b^2 + 2a_{13}a + 2a_{23}b + a_{33} = 0.$$

Šta možemo reći o koeficijentima ove jednačine? 1. Prva tri člana nisu promenila svoje koeficijente. 2. Koeficijent pored ξ je dobiven iz prve vrste matrice množenjem elemenata te vrste sa $2a$, $2b$, 2. To isto vredi i za koeficijent pored η, ako uzmemo elemente druge vrste. 3. Slobodan član je dobiven zamenom x i y u funkciji $\Phi(x, y)$ sa a i b; dakle ima vrednost $\Phi(a, b)$.

Kratko jednačinu (2) možemo napisati ovako

$$(3) \qquad a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 + 2\Phi_1\xi + 2\Phi_2\eta + F = 0,$$

gde su oznake očigledne.

Ako pretpostavimo da se pre transformacije koordinata centar krive nalazio u tački $x=a$, $y=b$, sad se on nalazi u istoj tački sa koordinatama $\xi=0$, $\eta=0$, u novom sistemu koordinata. Ako kriva ima centar u početku koordinata i ako tačka sa koordinatama ξ, η pripada toj krivoj, onda, prema definiciji centra, i tačka sa kordinatama $-\xi$, $-\eta$ pripada toj krivoj. Prema tome, za krivu sa centrom u početku koordinata treba, zajedno sa jednačinom (3), da važi i jednačina

$$(4) \qquad a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 - 2\Phi_1\xi - 2\Phi_2\eta + F = 0.$$

Ako od (3) oduzmemo (4) dobićemo jednačinu

$$(5) \qquad \Phi_1\xi + \Phi_2\eta = 0,$$

koja treba da bude zadovoljena, ako se centar nalazi u početku koordinatnog sistema.

U opštem slučaju, jednačina (5) može biti zadovoljena pod ovim uslovima:

1. Oba, ili jedan od koeficijenata, Φ_1 i Φ_2 nisu jednaki nuli. Tada prava (5) mora pripadati krivoj (3), a to može biti kada je $\Phi=0$ i jednačina (3) uzima oblik

$$(6) \qquad (m\xi + n\eta)(\Phi_1\xi + \Phi_1\eta) = 0,$$

tj. kriva (3) se rastavlja u dve prave, koje se seku u početku koordinata, centru krive (6). Kad su koeficijenti m i n prve

prave proporcionalni koeficijentima Φ_1 i Φ_2 druge prave, kriva, u obliku dve prave koje se seku, prelazi u dvostruku pravu sa jednačinom $(m\xi + n\eta)^2 = 0$ i ima centar ne samo u početku koordinata, već i u proizvoljnoj tački te prave.

2. Ostavljajući te specijalne slučajeve po strani, pređimo na glavni slučaj, kad su oba koeficijenta Φ_1 i Φ_2, jednaki nuli. Tada za određivanje centra sa koordinatama (a, b) imamo ove dve jednačine

$$\begin{array}{l|r|r} \Phi_1 = a_{11}a + a_{12}b + a_{13} = 0, & a_{22} & -a_{21} \\ \Phi_2 = a_{21}a + a_{22}b + a_{23} = 0. & -a_{12} & a_{11} \end{array}$$

Ako izvršimo množenje tih jednačina prvo brojevima iz prve kolone sdesna, pa proizvode saberemo, zatim to isto uradimo pomoću elemenata druge vrste, dobićemo ove dve jednačine

$$(7) \qquad A_{33}a = A_{13}, \qquad A_{33}b = A_{23},$$

gde su upotrebljene oznake za odgovarajuće algebarske dopune iz determinante trećega reda, koju možemo kraće uslovno označiti i sa $|a_{11}a_{22}a_{33}|$, stavljajući između crta samo dijagonalne elemente. Nacrtajte na komadu kartona tu determinantu i proverite taj rezultat.

Jednačine (7) imaju određeno rešenje pod uslovom

$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0.$$

Izraz A_{33} zove se *prva diskriminanta* opšte jednačine drugog stepena po x i y. Prema tome možemo kazati: Ako je prva diskriminanta različita od nule, kriva ima centar (kratko — kriva sa centrom).

Pošto vrednost slobodnog člana F, prema (1′), možemo napisati ovako

$$F = \Phi(a, b) = (a_{11}a + a_{12}b + a_{13})a + (a_{21}a + a_{22}b + a_{23})b + a_{31}a + a_{32}b + a_{33} = \Phi_1 a + \Phi_2 b + a_{31}a + a_{32}b + a_{33},$$

vidimo da stvarno treba izračunati samo zbir $a_{31}a + a_{32}b + a_{33}$, jer su $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$. Dalje, prema (7) računamo ovako

$$A_{33}F = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = \Delta,$$

gde smo s desne strane dobili vrednost determinante Δ razvijene po elementima poslednje vrste. Na taj način imamo $F=\Delta/A_{33}$. Jednačina (4) definitivno uzima oblik

$$(8) \qquad a_{11}\xi^2+2a_{12}\xi\eta+a_{22}\eta^2+\Delta/A_{33}=0.$$

To je opšta jednačina krive drugog stepena sa centrom u početku koordinata. Ako je $\Delta=0$, jednačina (8) uzima oblik

$$(9) \qquad a_{11}\xi^2+2a_{12}\xi\eta+a_{22}\eta^2=0.$$

Vidimo da determinanta Δ igra isto tako ulogu diskriminante, utoliko što izdvaja krive koje se raspadaju u dve prave i stoga se ta determinanta, u našem slučaju, zove *druga diskriminanta* jednačine drugog stepena.

Ako u jednačinu (9) stavimo $\eta=m\xi$, imamo za određivanje ugaonog koeficijenta m svake prave, koja odgovara jednačini (9), kvadratnu jednačinu

$$a_{22}m^2+2a_{12}m+a_{11}=0,$$

iz koje dobivamo

$$m_{1,2}=[-a_{12}\pm\sqrt{-A_{33}}]:a_{22}.$$

Na taj način za $A_{33}<0$ imamo dve realne prave, koje se seku (degeneracija hiperbole); za $A_{33}>0$ dve imaginarne konjugovane prave sa stvarnom tačkom preseka, početkom koordinata, koji jedini i pretstavlja našu krivu (degeneracija elipse).

Ako stavimo $\Delta/A_{33}=k$, opštu jednačinu sa centrom možemo kraće napisati ovako

$$(10) \qquad a_{11}\xi^2+2a_{12}\xi\eta+a_{22}\eta^2+k=0.$$

Sad ćemo, polazeći od jednačine (10) preći na svođenje te jednačine na kanonički oblik.

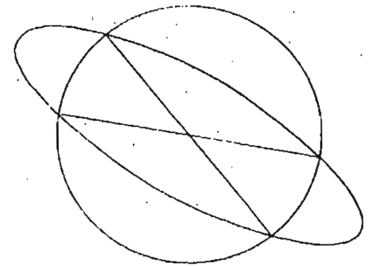
3. Uzmimo, pored jednačine (10), koja odgovara, recimo, elipsi (sl. 49), jednačinu kruga $\xi^2+\eta^2=r^2$, proizvoljnog poluprečnika r, sa centrom u početku koordinata i obrazujemo jednačinu

$$a_{11}\xi^2+2a_{12}\xi\eta+a_{22}\eta^2+\frac{k}{r^2}(\xi^2+\eta^2)=0.$$

Ona predstavlja par pravih linija (zašto?), koje prolaze kroz početak koordinatnog sistema i kroz tačke preseka elipse i kruga (zašto ?).

Uredimo prethodnu jednačinu ovako

$$(11) \qquad \left(a_{11}+\frac{k}{r^2}\right)\xi^2+2a_{12}\xi\eta+\left(a_{22}+\frac{k}{r^2}\right)\eta^2=0.$$



Sl. 49 — Presek elipse sa krugom

Dve prave što odgovaraju ovoj jednačini poklapaju se za pravac ose simetrije elipse. Prema tome poluprečnik r se određuje iz uslova da prethodna jednačina ima jednake korene, ako za nepoznatu uzmemo, recimo, odnos η/ξ. Uslov za jednakost korena izražava se ovako

$$(12) \qquad \left(a_{11}+\frac{k}{r^2}\right)\left(a_{22}+\frac{k}{r^2}\right)-a_{12}^2=0,$$

ili u obliku kvadratne jednačine u odnosu na $\frac{k}{r^2}=z$:

$$z^2+(a_{11}+a_{22})z+A_{33}=0.$$

Ova jednačina ima dva stvarna korena, jer je

$$(a_{11}+a_{22})^2-4A_{33}=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2>0.$$

Ako je $A_{33}<0$, koreni su raznih znakova i, prema tome, jednoj osi odgovara imaginarna vrednost poluprečnika r: kriva je hiperbola, kako smo to i ranije videli.

Ako je $A_{33}>0$ koreni su ili oba pozitivna — što odgovara elipsi, ili oba negativna — imaginarna elipsa sa stvarnim centrom.

Pod uslovom (12) jednačina (11) se transformiše u

$$[(a_{11}+z)\xi+a_{12}\eta]^2=0,$$

i predstavlja, za svaki koren z, osu simetrije sa uglovnim koeficijentom

$$m_{1,2} = -\frac{1}{a_{12}}(a_{11} + z_{1,2}).$$

Određivanje korena z_1 i z_2, a time i r_1 i r_2, a zatim i pravaca odgovarajućih osa rešava problem svođenja krive sa centrom na kanonični oblik.

Primer. Kriva je data matricom:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \\ -5 & -4 & 10 \end{Vmatrix}$$

Računamo $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$, $\Delta = -5A_{13} + (-4)A_{23} + 10A_{33} = -5$. $-3 + (-4)\cdot(-6) + 10\ (-3) = 9$.

Jednačine za centar: $-3a = -3$, $-3b = -6$; $a = 1$, $b = 2$

Jednačina za $z = \frac{k}{r^2}$, gde je $k = \frac{\Delta}{A_{33}} = \frac{9}{-3} = -3$. $z^2 + (a_{11} + a_{22})z + A_{33} = 0$ daje $z^2 + 2z - 3 = 0$. Koreni: $z_1 = 1$, $z_2 = -3$.

Vrednost kvadrata: $r_1^2 = k/z_1 = -3/1 = -3$; $r_2^2 = k/z_2 = -3/-3 = 1$.

Realna poluosa hiperbole: $a = 1$.

Jednačina realne ose $(a_{11} + z_2)\xi + a_{12}\eta = 0$ ili $(1-3)\xi + 2\eta = 0$, tj. $\eta = \xi$.

Prema tome pravac realne ose obrazuje ugao od 45^0 sa pravcem ξ ose. Druga osa hiperbole obrazuje ugao od 135^0 sa istom osom ξ i, prema tome, ima za jednačinu $\eta = -\xi$. Za imaginarnu osu imamo $r_1^2 = -3$; prema tome kvadrat imaginarne poluose iznosi $b^2 = 3$. Ako sad uvedemo koordinate X i Y u odnosu na određene ose hiperbole, imaćemo za konačnu kanoničnu jednačinu naše hiperbole $X^2 - \frac{1}{3}Y^2 = 1$. Otstojanje c žiža od centra, pošto je $c^2 = a^2 + b^2$, iznosi $c = 2$. Najzad, ekscentričnost e ima vrednost $e = c/a = 2/1 = 2$. U odnosu na polazne koordinatne ose, naša hiperbola ima ove parametre: 1. parametre položaja — koordinate centra (1, 2) i ugao α između Ox ose i realne ose simetrije, koji iznosi $\alpha = \frac{1}{4}\pi$; 2. — parametar oblika — ekscentričnost $e = 2$ i 3. parametar veličine, recimo, $a = 1$. Svega pet parametara. Taj broj parametara odgovara broju koeficijenata opšte jednačine drugog stepena (6) bez jedinice, jer jednačinu uvek možemo podeliti nekim koeficijentom, različitim od nule, i tim za koeficijent tog člana dobiti jedinicu.

Pređimo sad na proučavanje opšte jednačine drugog stepena, kad je prva diskriminanta A_{33} jednaka nuli, tj. $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, odakle sleduje proporcionalnost $a_{11} : a_{12} = a_{21} : a_{22}$, tj. dva prva elementa prve vrste naše matrice proporcionalna su prvim elementima druge vrste. U ovom slučaju možemo opštu jednačinu, posle množenja, recimo, sa a_{11}, napisati ovako

$$a_{11}^2x^2 + 2a_{11}a_{12}xy + a_{11}a_{22}y^2 + a_{11}(2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}) = 0. \tag{13}$$

Primetimo da jedan od koeficijenata mora biti različit od nule, jer ako je $a_{11} = 0$ i $a_{22} = 0$, iz $A_{33} = 0$ sleduje da je i $a_{12} = 0$, što znači da naša jednačina prestaje biti jednačina drugog stepena po x i y.

Kako je $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$, jednačina (13) uzima oblik

$$(a_{11}x + a_{12}y)^2 + a_{11}(2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}) = 0. \tag{14}$$

Izvršimo sad klasičnu transformaciju te jednačine, čiji ćemo smisao odmah videti. Dodajmo binomu u zagradi proizvoljan broj, koji možemo označiti sa R, a druge članove jednačine popravimo tako da ona zadrži svoj prvobitni sadržaj. Tada ćemo dobiti jednačinu

$$(a_{11}x + a_{12}y + R)^2 = 2(a_{11}R - a_{11}a_{13})x + 2(a_{12}R - a_{11}a_{23})y + R^2 - a_{11}a_{33}. \tag{15}$$

Pošto, posebno izjednačene sa nulom, leva i desna strana određuju dve prave, možemo napisati uslov za ortogonalnost tih pravih

$$a_{11}(a_{11}R - a_{11}a_{13}) + a_{12}(a_{12}R - a_{11}a_{23}) = 0.$$

Odavde je $R = a_{11}(a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23}) : (a_{11}^2 + a_{12}^2)$. Kako je, po pretpostavci, $a_{11} \neq 0$, takva vrednost R uvek postoji i ima potpuno određenu vrednost. Pri takvoj vrednosti broja R dve prave

$$a_{11}x + a_{12}y + R = 0, \qquad b_1x + b_2y + b_0 = 0,$$

gde su

$$b_1 = 2(a_{11}R - a_{11}a_{13}), \qquad b_2 = 2(a_{12}R - a_{11}a_{23}),$$
$$b_0 = R^2 - a_{11}a_{33},$$

stoje upravno jedna na drugoj. Uzmimo prvu pravu za novu ξ osu, a drugu za η osu. Tada koordinata η treba da bude rastojanje tačke (x, y) od prve prave, a ξ od druge prave. Prema tome imamo ove obrasce za transformaciju koordinata

$$\pm\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}\cdot\eta=a_{11}\,x+a_{12}\,y+R, \tag{16}$$

$$\pm\sqrt{b_1^2+b_2^2}\cdot\xi=b_1\,x+b_2\,y+b_0. \tag{17}$$

Ako sad vrednosti desnih strana stavimo u jednačinu (15) dobićemo jednačinu $\eta^2=2p\,\xi$, gde je $2p=\sqrt{b_1^2+b_2^2}/(a_{11}^2+a_{12}^2)$. Na taj način smo doveli opštu kvadratnu jednačinu drugog stepena po x i y u slučaju $A_{33}=0$, na kanonični oblik jednačine parabole.

Zaustavimo se na proučavanju prelaznih slučajeva koji se javljaju pri izvođenju te jednačine.

Kako je po uslovu $a_{11}\neq 0$, jednačina (16) uvek određuje η. Što se tiče jednačine (17), ona zahteva da bar jedan od koeficijenata b_1 i b_2 bude različit od nule. Prema tome se pojavljuje izuzetan slučaj pri uslovima $b_1=0$, $b_2=0$. Ta dva uslova dovode do

$$a_{11}\,R-a_{11}\,a_{13}=0, \qquad a_{12}\,R-a_{11}\,a_{23}=0.$$

Iz ovih jednačina imamo

$$R=a_{13}, \qquad a_{12}\,a_{31}-a_{11}\,a_{32}=A_{23}=0.$$

Ne vršeći pod uslovima $A_{33}=0$, $A_{23}=0$ smene (16) i (17), vraćamo se na osnovnu jednačinu (14), koju sad možemo ovako napisati

$$(a_{11}\,x+a_{12}\,y+a_{13})^2+A_{22}=0.$$

Kako se ova jednačina rastavlja na jednačine dve prave, treba da bude ispunjen opšti uslov za rastavljanje $\Delta=0$. A pošto je

$$\Delta=a_{13}\,A_{13}+a_{23}\,A_{23}+a_{33}\,A_{33}=0$$

sleduje da je, pri $A_{23}=A_{33}=0$, i $A_{13}=0$. A to dovodi do proporcionalnosti elemenata prve vrste sa elementima druge vrste (pokaži to!)

Karakter rastavljanja zavisi od vrednosti $A_{22}=a_{11}\,a_{33}-a_{13}^2$. Ako je $A_{22}>0$, paralelne prave su imaginarne; za $A_{22}<0$ one su realne; najzad za $A_{22}=0$ imamo dvostruku pravu.

Važno je obratiti pažnju na to da, bez obzira na to što je $A_{33}=a_{11}\,a_{22}-a_{12}^2=0$, imamo, kako pri $A_{22}<0$, tako i pri $A_{23}=0$, realnu *pravu centara*; to je prava koja je paralelna datim pravima i na istom otstojanju od njih sa jednačinom $a_{11}\,x+a_{12}\,y+a_{23}=0$; u slučaju dvostruke prave prava centara se sa njom poklapa.

Prema tome, ako delimo krive prema postojanju centara, treba ih deliti na dve grupe: $A_{33}\neq 0$, krive sa centrom (jedinim) i $A_{33}=0$, krive bez centra ili sa beskrajno mnogo centara.

Primer. Kriva je data matricom:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 3 & 9 & +12 \\ -6 & 12 & 15 \end{Vmatrix}$$

Pošto je $A_{33}=a_{11}\,a_{22}-a_{12}^2=9-9=0$, transformišimo datu jednačinu uvođenjem parametra R: $(x+3y+R)^2=2\,(R+6)\,x+2\,(3R-12)\,y+R^2-$ $-15=0$. Iz uslova ortogonalnosti: $1\times(R+6)+3\times(3R-12)=0$ određujemo $R=3$. Jednačina krive uzima oblik $(x+3y+3)^2=6\,(3x-y-1)$ identičan sa datom jednačinom. Stavimo nove promenljive: $\xi=(3x-y-1):\sqrt{10}$, $\eta=$ $(x+3y+3):\sqrt{10}$. Posle smene koordinata imamo $\eta^2=2p\,\xi$, gde je $p=$ $=0{,}3\sqrt{10}\approx 0{,}9487$. Parametri parabole: parametri položaja — koordinate temena $(0, -1)$, ugaoni koeficijent ose ξ sa x osom $m=-1/3$; parametar forme ne postoji, jer kod svih parabola ima vrednost 1, drugim rečima, sve su parabole slične; parametar veličine — parametar parabole u užem smislu, veličina p. Parabola ima, prema tome, u opštem slučaju samo četiri parametra. Od šest koeficijenata opšte jednačine jedan otpada deljenjem jednim koeficijentom koji nije jednak nuli, a, sem toga, jedan može biti određen u zavisnosti od drugih, na osnovu jednačine $a_{11}\,a_{22}-a_{12}^2=0$.

Navedimo opšti pregled svih mogućih slučajeva za opštu krivu liniju drugog stepena po x i y sa primerima u kanoničkom obliku.

1. $A_{33}>0. \quad \Delta\neq 0. \quad \Delta\,(a_{11}+a_{22})<0.$

   $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0, \left(-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+1=0\right)$. Elipsa

2. $\Delta\,(a_{11}+a_{22})>0.$

   $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+1=0, \left(-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0\right)$. Imaginarna elipsa

3. $\Delta = 0.$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$ Dve imaginarne prave. Realna tačka

4. $A_{33} < 0. \quad \Delta \neq 0.$

$\pm \frac{x^2}{a^2} \mp \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \left(\pm \frac{x^2}{a^2} \mp \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \right).$ Hiperbola

5. $\Delta = 0.$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$ Dve prave koje se seku

6. $A_{33} = 0. \quad \Delta \neq 0$

$y^2 - 2px = 0.$ Parabola

7. $\Delta = 0 \quad A_{22} > 0$

$x^2 + 1 = 0.$ Dve paralelne imaginarne prave

8. $A_{22} < 0$

$x^2 - 1 = 0.$ Dve paralelne prave

9. $A_{22} = 0$

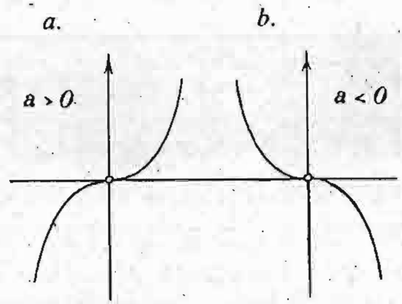
$x^2 = 0.$ Dve prave koje se poklapaju.

2.4. Polinomi, racionalne, algebarske i transcendentne funkcije

Savremena matematika je toliko proširila oblast raznih funkcija da je nemoguće dati u elementarnom obliku klasifikaciju funkcija i navesti njihove osobine. U našem izlaganju oblast funkcija će se proširivati postepeno na nove tipove funkcionalnih veza.

U ovom članu ćemo govoriti o nekim osobinama funkcija izraženim polinomima, zatim o racionalnim, algebarskim i elementarnim transcendentnim funkcijama.

Imali smo funkciju prvog stepena ili linearnu $y = ax + b$; zatim smo imali kvadratnu ili paraboličku funkciju $y = ax^2 + bx + c$. Jasno je da funkcija može biti i višeg stepena. Tako, funkcija trećeg stepena, u opštem obliku, izgleda $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, gde su a_3, a_2, a_1, a_0 stalni koeficijenti. Ovoj jednačini odgovara *parabola trećeg reda*. Ako se zaustavimo samo na prvom članu, jednačina *kubne parabole* ima oblik $y = ax^3$; njoj odgovaraju krive linije, predstavljene, prema znaku koeficijenta a, na slici (sl. 50) krivim linijama a i b. Obe krive prolaze kroz početak koordinata, koji je centar krivih, jer ova tačka polovi sve tetive koje prolaze kroz tu tačku. Osa x je je tangenta na krivu u početku koordinata.



Sl. 50 — Kubna parabola

Napišimo sad polinom proizvoljnog stepena, n,

$$(1) \quad y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gde je n prirodni broj i $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ stalni koeficijenti. Ovoj jednačini odgovara grafik, koji se zove *parabola n-og reda.*

Funkcija određena jednačinom (1) zove se *cela racionalna funkcija* ili *polinom*. Pri izražavanju ove funkcije javljaju se samo operacije sabiranja, oduzimanja, množenja i stepenovanja celim pozitivnim izložiocem. Označimo kratko polinom n-tog stepena po x sa $P_n(x)$; prema tome, za označavanje cele racionalne funkcije možemo se služiti, kao opštim obrascem $y = P_n(x)$; a ako nećemo da naznačujemo stepen polinoma, stavljamo jednostavno $y = P(x)$.

Ako polinom n-og stepena po x izjednačimo sa nulom, dobićemo *jednačinu n-og stepena* $P_n(x) = 0$. Vrednosti x-a koje zadovoljavaju ovu jednačinu, tj. daju za neku njegovu vrednost x_1 identitet $P_n(x_1) \equiv 0$, zovu se *koreni* te jednačine ili *nule polinoma*. Kao što već znamo, jednačina prvog stepena ima jedan koren, drugog — dva, pri čemu ta dva korena mogu biti različiti ili jednaki. U ovom poslednjem slučaju se on zove *dvostrukim korenom*. Njegova dvostrukost se ogleda u tome što se kvadratni polinom sa dvostrukom nulom, recimo x_1, može predstaviti u obliku $a_2(x - x_1)^2$.

Primimo kao dokazano da svaki polinom ima onoliko nula koliko je njegov stepen i da, prema tome, može biti predstavljen u obliku proizvoda

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})(x - x_n).$$

Ako desna strana ima više istih množioca, tj. sadrži, recimo, stepen $(x-x_1)^k$, koren x_1 je k-struki koren ili k-struka nula.

Jasno je da funkcija y određena polinomom (1) sa nulama $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ima grafik koji seče x osu u tačkama, kojim odgovaraju apscise sa vrednostima samo realnih korena. Određivanje nekih korena, što znači tačaka preseka grafika sa x osom — obično je prvi korak u proučavanju geometriskih osobina datog grafika.

Ako slično aritmetičkom razlomku, kao količniku dva cela broja, načinimo količnik dva polinoma proizvoljnih stepena m i n,

$$y = \frac{P_n(x)}{P_m(x)},$$

dobićemo funkciju koja se zove *razlomljena racionalna funkcija.* Kao najprostiji primer razlomljene funkcije imali smo funkciju $y = c^2/x$, koja odgovara obrnutoj proporcionalnosti i ima za grafik jednakostranu hiperbolu. Hiperbola odgovara takođe razlomljenoj funkciji određenoj jednačinom $y = (ax+b):(cx+d)$, gde su a, b, c, d konstante, za koje pretpostavljamo da zadovoljavaju uslov $ad-bc \neq 0$, što znači da ti koeficijenti nisu proporcionalni. Ova funkcija ima tu važnu osobinu da, rešena po x, dovodi do jednačine $x = (-dy+b):(cy-a)$, oblika istog kao i polazna jednačina.

Cele i razlomljene funkcije čine klasu *racionalnih funkcija.* Svaki od polinoma $P_n(x)$ i $P_m(x)$, u opštem slučaju, ima svoje korene. Ako koren polinoma u broiocu nije koren onoga u imeniocu, on je koren razlomljene funkcije. Ako je koren broioca, recimo x_1, ujedno koren imenioca, brojilac i imenilac imaju zajednički množitelj $(x-x_1)$. I, kako za proizvoljnu vrednost x-a taj množitelj nije jednak nuli, možemo broilac i imenilac skratiti sa $x-x_1$, a, u opštem slučaju, kad ima više takvih zajedničkih korena, skratiti sa zajedničkim činiocem jednog i drugog polinoma. Pretpostavimo sad da naši polinomi nemaju više takvih zajedničkih množioca.

Koreni imenioca zovu se *polovi razlomljene* funkcije; i polovi mogu biti *višestruki* — oni odgovaraju višestrukim nulama imenioca. Funkcija $y = c^2/x$ nema nula, ali ima prost pol u početku koordinatnih osa. Kako smo videli, taj pol je odredio beskonačnu granu naše jepnakostrane hiperbole, grafika obrnute proporcionalnosti.

Ako sad uzmemo jednačinu kružne linije, recimo u obliku

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = r^2,$$

i ova jednačina određuje y kao funkciju x, ali ta funkcija ne pretstavlja više količnik dva polinoma odnosno neku racionalnu funkciju, već ima oblik

$$(3) \qquad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

u koji ulazi operacija korenovanja. Ovo je primer *iracionalne* funkcije.

Jednačina (2) je algebarska jednačina drugog stepena po y sa koeficijentima polinomima po x. U opštem slučaju algebarsku jednačinu n-tog stepena po y možemo ovako napisati

$$(4) \qquad Py^n + Qy^{n-1} + \ldots + Ry^2 + Sy + T = 0,$$

gde su $P, Q, \ldots, R, S, T$ polinomi proizvoljnih stepena po x. Ako se funkcija $y = y(x)$ može smatrati kao rešenje jednačine (4), ona se zove *algebarska.* Jasno je da su cele i razlomljene racionalne funkcije u isto vreme i algebarske. Ne treba misliti da su algebarske funkcije samo one, koje možemo izraziti pomoću korena (korenovanjem). Tako napr., funkciju određenu jednačinom $y^5 + y - x = 0$ ne možemo izraziti konačnim brojem ni korenovanja, ni drugih poznatih nama operacija.

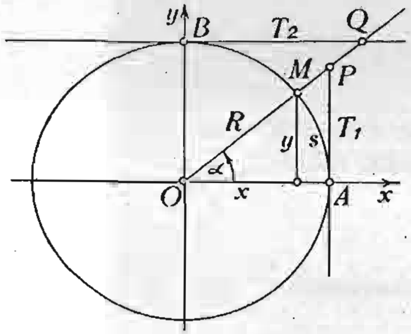
Najzad, ako za funkciju ne možemo postaviti jednačinu oblika (4), funkcija se zove *transcendentna.* Transcendentnu funkciju u isto vreme možemo smatrati i iracionalnom.

U narednim paragrafima proučićemo i nekoliko elementarnih transcendentnih funkcija.

2.5. Iz Trigonometrije. Trigonometriske funkcije. Oscilatorni proces

Trigonometriske funkcije su poznate iz Elementarne matematike, naročito pri proučavanju metričkih osobina pravouglog trougla. Iz tog razloga mi smo ih u nekoj meri već iskorišćavali. Ipak ćemo ih ovde ponoviti, sad sa funkcionalnog gledišta.

Nacrtajmo krug poluprečnika R. Sa njim ćemo vezati koordinatni sistem sa početkom u centru (sl. 51). Pomoću tog kruga merićemo uglove pre svega od ose x u smeru suprotnom kretanju kazaljke na časovniku. Kao što znamo, ugao se može meriti na dva, principski različita načina. Jedan je način merenje *stepenima*, *minutama*, *sekundama*, i decimalnim razlomcima sekunde. Prav ugao u tom sistemu iznosi 90^0, svaki stepen $60'$, svaka minuta $60''$. U tom načinu merenja postoji i druga varijanta. Naime, prav ugao se deli na sto *gradi*, svaki grad na sto *minuta* (centizimalnih), svaka minuta na sto *sekundi* (centizimalnih). To je *centizimalni* sistem merenja uglova.



Sl. 51 — Trigonometriski krug

U drugom načinu za meru ugla uzima se apstraktni broj, odnos luka s prema poluprečniku R; za dati ugao taj odnos je stalan; označimo ga sa α, tj. stavimo $s/R=\alpha$. Jedinični ugao u ovom sistemu je ugao za koji je $\alpha=1$, a to znači za koji je $s=R$, tj. čiji je luk jednak poluprečniku, radijusu; otuda i naziv tog jediničnog ugla — *radijan*. Prema tome se kaže da je merenje ugla apstraktnim brojem — merenje ugla u radijanima. Merenje ugla u radijanima igra važnu ulogu u Višoj matematici.

Ako sa n^0 označimo merni broj ugla u stepenima, a sa α apstraktnu meru istog ugla, nije teško postaviti vezu između ta dva broja: $n^0 : 180^0 = \alpha : \pi$. Iz te proporcije neposredno izvodimo $n^0 = 180^0 \cdot \alpha/\pi$ i, obrnuto, $\alpha = \pi \cdot n^0/180^0$. Za $\alpha = 1$ imamo meru radijana u stepenima

$$n^0 = 180^0/\pi \approx 57^0\,17'\,45''.$$

Uzmimo sad proizvoljan ugao α, kojem odgovara tačka M (sl. 51) na krugu sa koordinatama x, y i, slično onome što se radi za pravougli trougao kad je $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$, definišimo sinus i kosinus ugla α pomoću obrazaca

(1) $$\sin\alpha = y/R, \quad \cos\alpha = x/R.$$

Zatim konstruišemo tangentu na krug u tački A (prvu tangentu) i tangentu u tački B (drugu tangentu). Dužine ovih tangenata, od tačke dodira do preseka sa produženim poluprečnikom OM, sa odgovarajućim znacima, prema smerovima utvrđenim za koordinatne ose, označimo sa $T_1 = AP$ i $T_2 = BQ$. Tangens i kotangens ugla definišimo pomoću izraza

(2) $$\operatorname{tg}\alpha = T_1/R, \quad \operatorname{cotg}\alpha = T_2/R.$$

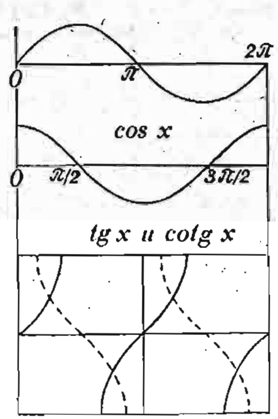
Pored toga se mogu još uvesti i sekans i kosekans

(3) $$\sec\alpha = R/x = 1/\cos\alpha, \quad \operatorname{cosec}\alpha = R/y = 1/\sin\alpha.$$

Pretpostavimo sad da se ugao α menja; $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$ su funkcije tog ugla; one se zovu *trigonometriske funkcije*. Svaka od trigonometriskih funkcija izražava se, kao i ugao α, apstraktnim brojem. Za svaku od njih možemo nacrtati grafik koji u potpunosti pokazuje promenu te funkcije u vezi sa promenom argumenta — ugla (sl. 52).

Pošto je Trigonometrija vrlo važna u Višoj matematici, naročito u njenim primenama, ponovimo nekoliko podataka iz te discipline.

Definicije trigonometriskih funkcija kao odnosa linija, sa odgovarajućim znakom, na trigonometriskom krugu prema stalnom poluprečniku R (može se uzeti i $R=1$) omogućuju da se neposredno vidi sa slike, kako se menjaju trigonometriske veličine, i po svojoj apsolutnoj vrednosti i po znaku, pri promeni argumenta α u granicama $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, gde 2π odgovara uglu od 360^0.



Sl. 52 — Grafici trigonometriskih funkcija (cotg x - isprekidana linija)

Dalje, zbog simetrije kruga u odnosu na pravac bilo kojeg od prečnika, što znači i u odnosu kako na koordinatne ose, tako i na simetralu pravog ugla prvog kvadranta, možemo sa bilo kojom tačkom kruga uporediti tačku luka kruga u granicama od 0 do 45^0, koja se dobija konstrukcijom uzastopnih simetričnih tačaka bilo u odnosu na jednu, bilo na dve, bilo čak i u odnosu na tri navedene ose. Tako, napr., za tačku $M_1(240^0)$ konstruišemo (uradite to!) ove tačke: $M_2(120^0)$ — osa simetrije — x osa; $M_3(60^0)$ — osa simetrije y osa; i najzad $M_4(30^0)$ — osa simetrije simetrala pravog ugla. Posle toga, za određivanje trigonometriske funkcije datog ugla menjajući bilo samo znak, bilo samo naziv, bilo i znak i naziv, dolazimo do vrednosti funkcije ugla samo u granicama od 0 do 45^0. Tako u našem primeru, recimo, za sin 240^0 imamo $\sin 240^0 = -\sin 120^0 = -\sin 60^0 = -\cos 30^0$, a za cos 240^0 ovaj rezultat $\cos 240^0 = \cos 120^0 = -\cos 60^0 = -\sin 30^0$.

Vrednosti trigonometriskih funkcija u granicama od 0 do 45^0 daju se u naročitim trigonometriskim tablicama[1]). Neposredno iz Elementarne geometrije mogu se odrediti trigonometriske funkcije za određene vrednosti argumenta iz ove tablice

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$
$0^0\ (0)$	0	$+1$	0	$\pm\infty$
$15^0\left(\frac{\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$18^0\left(\frac{\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$30^0\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$36^\circ\left(\frac{\pi}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$
$45^\circ\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+1$	$+1$

[1]) Gl., napr., V. V. Mišković. Logaritamske i numeričke tablice. Drugo dopunjeno izdanje. Izd. „Tehničke knjige". Beograd. 1959.

Uzimajući u obzir samo četiri osnovne trigonometriske funkcije $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$ navešćemo tri nezavisne, osnovne veze između tih trigonometriskih funkcija:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad \operatorname{tg}\alpha=\sin\alpha/\cos\alpha,\quad \operatorname{cotg}\alpha=\cos\alpha/\sin\alpha.$$

Na osnovu tih veza možemo tvrditi: ako je data vrednost jedne trigonometriske funkcije, možemo odrediti sve ostale, samo ovo određivanje nije jednoznačno, kao što sleduje i neposredno sa slike, jer svaka trigonometriska linija na trigonometriskom krugu ne određuje na jedinstven način položaj tačke na krugu. Najvažniji su u Višoj matematici obrasci

$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},\quad \cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},\quad \operatorname{cotg}\alpha=1/\operatorname{tg}\alpha.$$

Ako je područje argumenta-ugla ograničeno samo na jedan kvadrant, u prethodnim obrascima treba ostaviti samo jedan znak, prema znaku trigonometriske funkcije u tom kvadrantu.

Objasnićemo sad šta je to *periodičnost funkcije* i pokazaćemo da su trigonometriske funkcije periodične. Funkcija $f(x)$ je periodična ako postoji takav najmanji pozitivan broj K za koji važi indentitet $f(x+K)\equiv f(x)$ za svaku proizvoljnu vrednost x u datom području.

Nije teško proveriti da funkcije $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ imaju period 2π, a $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{cotg}\alpha$ — period π, tj.

$$\sin(\alpha+2\pi)\equiv\sin\alpha,\quad \cos(\alpha+2\pi)\equiv\cos\alpha,\quad \operatorname{tg}(\alpha+\pi)\equiv\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{cotg}(\alpha+\pi)\equiv\operatorname{cotg}\alpha.$$

U vezi sa proučavanjem trigonometriskih funkcija pomenimo još jednu osobinu funkcija, koju imaju neke specijalne fuhkcije.

Funkcija $f(x)$ je *parna* funkcija, ako ona zadovoljava jednačinu $f(-x)=f(x)$ za svaku vrednost argumenta x, tj. sa promenom znaka argumenta funkcija ne menja svoju vrednost. Primeri ax^4+bx^2+c, c/x^2, $1/(1+x^2)$. Pošto je $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, kosinus je parna funkcija.

Funkcija $f(x)$ je *neparna* funkcija, ako za nju važi jednačina $f(-x)=-f(x)$ i to za svaku vrednost argumenta x;

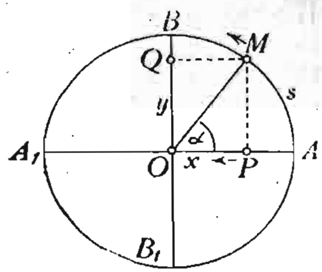
tj. vrednosti funkcije ostaju iste po apsolutnoj vrednosti, no suprotnih su znakova, ako im argumenti imaju iste apsolutne vrednosti, a suprotnih su znakova. Primeri: x^3, $1/x$, $3x^5+x^3$. Pošto je $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, sinus je neparna funkcija.

Trigonometriske funkcije, napr., $y=\sin x$ spadaju u transcendentne funkcije, jer ne postoji algebarska jednačina, sa koeficijentima u obliku polinoma po x, čije rešenje daje vrednost $\sin x$ za proizvoljnu vrednost x. Transcendentnost funkcije $\sin x$ se ispoljava i na drugi način. Grafik algebarske funkcije može imati u preseku sa pravom najviše neki konačan broj tačaka, međutim grafik funkcije $y=\sin x$ ima, recimo, sa x osom beskrajno veliki broj tačaka, jer jednačina $\sin x=0$ ima beskrajno mnogo rešenja oblika

$$x=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$$

Trigonometriske funkcije su vrlo važne kako u Teorijskoj tako i u Primenjenoj matematici, i to ne samo zbog toga što služe, naročito pri merenjima (rešavanje zadataka o trouglovima i poligonima!), kao osnova za postavljanje funkcionalnih veza između dužina i uglova, već i zato što se na njima osniva proučavanje svakog *oscilatornog procesa*.

Najprostiji pretstavnik oscilatornog procesa tzv. harmoniska oscilacija. Zamislimo tačku M (sl. 53) koja se kreće ravnomerno po kružnoj liniji; tada se ugao α menja proporcionalno vremenu t. Označimo koeficijenat proporcionalnosti sa ω (čitaj: omega); tada je $\alpha=\omega t$. Uočimo u isto vreme, pored tačke M, i njenu projekciju, tačku P, na stalni prečnik AA_1 kruga. Za vreme ravnomernog kretanja tačke M po krugu projekcija P vrši pravolinisko kretanje između krajeva prečnika, A i A_1; ovo kretanje zove se *harmoniska oscilacija*. U tom kretanju se položaj tačke P određuje jednačinom



Sl. 53 — Harmoniska oscilacija

(4) $$x=a\cos\omega t,$$

gde je a poluprečnik kruga. Ova jeodačina zove se *jednačina harmoniske oscilacije*. Projekcija Q tačke M na drugi prečnik,

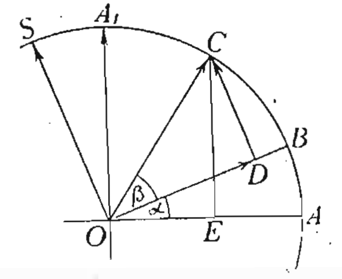
normalni na prvom, vrši takođe harmonisku oscilaciju, prema jednačini

(5) $$y=a\sin\omega t.$$

Jasno je da kretanje tačaka P i Q imaju isti karakter; razlika je samo u tome što, kad tačka P prolazi kroz sredinu O svoje putanje, tačka Q se nalazi u jednom od krajnih svojih položaja, i obrnuto. Dužina a zove se *amplituda oscilacije*. Vreme T za koje tačka M izvrši ceo obilazak kruga je *period oscilacije*. Pošto je $\omega T=2\pi$, koeficijent $\omega=2\pi/T$. Ako sa n označimo broj oscilacija u sekundi, imamo $nT=1$ i prema tome je $\omega=2\pi n$. Broj ω, proporcionalan broju oscilacija u sekundi, zove se se *učestanost* ili *frekvencija oscilacije*. Ugao $\alpha=\omega t$ zove se *faza oscilacije*. Ako imamo dve oscilacije: jednu sa fazom α_1 i drugu sa fazom α_1, razlika $\alpha_1-\alpha$ je *fazna razlika*. Harmoniske oscilacije, određene jednačinama (4) i (5), razlikuju se fazom. Zaista, ako se od faze oscilacije (4) oduzme $\pi/2$, dobićemo oscilaciju (5), jer je $\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})=\sin\omega t$.

Može se pokazati da se gotovo svaki, proizvoljni oscilatorni proces može rastaviti u zbir harmonskih oscilacija (kratko — u zbir *harmonika*) različitih amplituda i frekvencija. Važnost oscilatornog procesa se naročito ispoljava pri proučavanju zvuka, svetlosti, elektro-magnetskih i drugih pojava, čija su osnova oscilacije.

Navedimo, bez detaljnog izvođenja, još nekoliko obrazaca iz Trigonometrije važnih u mnogim računima. Pre svega objasnimo šta je to *teorema sabiranja* za trigonometriske funkcije. Za neku funkciju $f(\alpha)$ se kaže da za nju važi teorema sabiranja, ako se može funkcija zbira argumenata, tj. $f(\alpha+\beta)$, izraziti kao algebarska funkcija izraza $f(\alpha)$ i $f(\beta)$ za pojedine proizvoljne argumente zbira.



Sl. 54 — Teorema sabiranja

Izvedimo teoreme sabiranja za $\sin(\alpha+\beta)$ i $\cos(\alpha+\beta)$. U tu svrhu, na krugu jediničnog poluprečnika (sl. 54) odmerimo od poluprečnika OA ugao $\alpha = \sphericalangle AOB$, zatim ugao $BOC=\beta$. Ugao AOC jednak je zbiru

$\alpha+\beta$. Neka je D podnožje normale spuštene iz C na OB. Obrazujemo sad prema slici vektorsku jednačinu $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}$ i pomnožimo tu jednačinu skalarno vektorom $\overrightarrow{OA}$. Tada imamo

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right).$$

Pošto je $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha$, konačno dobivamo

$$(6)\qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta.$$

Donji znak odgovara razlici. Stavili smo mesto $\beta\ldots.-\beta$.

Na sličan način se izvodi, posle projeciranja na pravac OA_1 iste vektorske jednačine, ovaj obrazac za funkciju sinus zbira odnosno razlike

$$(7)\qquad \sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta.$$

Ako u prvi obrazac stavimo $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}$, a u drugi $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}$, dobićemo dve teoreme sabiranja

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\beta}\pm\sin\beta\sqrt{1-\sin^2\alpha},$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sqrt{(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)}.$$

Pošto su poslednji obrasci komplikovaniji od obrazaca (6) i (7), koji su pri tome i zgodniji pri upotrebi, obično se zadržavaju za teoremu sabiranja obrasci (6) i (7), bez obzira na to što oni ne zadovoljavaju formalne uslove teoreme sabiranja.

Iz (6) lako je napisati teoremu sabiranja za tangens i kotangens

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},\qquad \operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\mp1}{\operatorname{cotg}\beta\pm\operatorname{cotg}\alpha}.$$

Iz izvedenih obrazaca neposredno sleduju obrasci za dvostruki ugao

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\quad \cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=$$
$$=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1,\quad \operatorname{tg}2\alpha=2\operatorname{tg}\alpha/(1-\operatorname{tg}^2\alpha).$$

Još treba uzeti u obzir obrasce za polovinu ugla

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\pm\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\pm\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Iz obrasca $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=(1-\cos\alpha)/(1+\cos\alpha)$ možemo odrediti

$\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, pa posle izračunati $\sin\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$. Ako označimo $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=t$ imamo

$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2t}{1-t^2}.$$

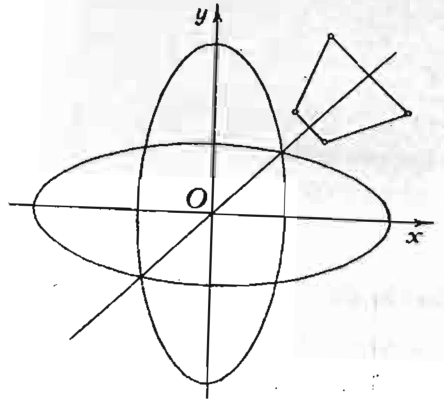
Ovi vrlo važni obrasci daju vrednost svih trigonometriskih veličina kao racionalne funkcije samo jednog argumenta, tangensa polovine datog ugla.

2.6. Inverzne funkcije. Inverzne trigonometriske funkcije

Videli smo da se jedna ista funkcionalna veza može izraziti analitički na više načina. Tako, napr., eliptičku vezu između promenljivih x i y možemo izraziti ili jednačinom, recimo, (1) $4x^2+y^2-4=0$, ili u rešenom obliku $y=\pm2\sqrt{1-x^2}$. U opštem obliku to se označava: $F(x,y)=0$, $y=f(x)$. Prvi je *implicitni oblik* funkcionalne veze između x i y. Drugi — *eksplicitni, razvijen* ili *rešen* u odnosu na y. Jednačinu (1) možemo rešiti i po x: $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}$. Ali u svim tim oblicima priroda funkcije je određena tako što y smatramo kao funkciju, a x kao nezavisno promenljivu. Pri crtanju grafika možemo uzeti ma koji od navedenih analitičkih oblika, uvek ćemo dobiti istu krivu, u istom položaju prema koordinatnim osama Oxy.

U opštem slučaju, svaku funkciju $y=f(x)$ možemo zamisliti izraženu i u rešenom obliku u odnosu na x, tj.

$x=\varphi(y)$. Sad, polazeći od ovog oblika funkcionalne veze, promenimo uloge promenljivih x i y; a da to i istaknemo, stavićemo $y=\varphi(x)$. Tako se dobiva od funkcije $f(x)$ funkcija $\varphi(x)$; ako prvu funkciju smatramo kao *osnovnu*, druga se zove *obrnuta* ili *inverzna* osnovnoj, i obrnuto. Ako je data funkcija određena u implicitnom obliku $F(x, y)=0$, za određivanje inverzne funkcije treba, zadržavajući značaj simbola F, koji izražava određene operacije, promeniti samo uloge promenljivih x i y, tj. napisati $F(y, x)$. Tako, u našem slučaju glavnu funkciju određuje implicitno jednačina $4x^2+y^2-4=0$, a inverznu, isto implicitno, jednačina $4y^2+x^2-4=0$. Određivanje inverzne funkcije za datu funkciju zove se *inverzija date funkcije*, koja se javlja kao osnovna.



Sl. 55 — Grafici inverznih funkcija

Nije teško proveriti da su grafici osnovne i inverzne funkcije simetrične krive, u odnosu na simetralu prvog i trećeg kvadranta Dekartovih koordinatnih osa. Tako na slici (sl. 55) imamo primer za dva grafika osnovne i inverzne funkcije.

U jednačini $x=\sin y$ možemo smatrati x kao funkciju y-a, i tada je x sinus ugla y. Ako sad smatramo y kao funkciju x-a, ova je inverzna funkcija sinusa. Kako se označuje ova funkcija? Gornja jednačina, čitana sdesna nalevo glasi: y je ugao čiji je sinus jednak x.

Sad ćemo istu rečenicu napisati matematičkim znacima, pri čemu ćemo mesto reči ugao, upotrebiti reč luk [latinski — arcus (čitaj: arkus)], kojim se ugao meri. Gornja rečenica izgleda ovako:

$$y=\text{arcus sinus}=x.$$

Ranije se tako i pisalo, još i sa malim znakom jednakosti ispred x. Sada se to skraćuje i dobija oblik

(2) $$y=\arcsin x.$$

Tako se piše funkcija inverzna funkciji sinusa (čitaj: arksinus x). Za ostale inverzne trigonometriske funkcije postoje oznake: $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$. Svakoj trigonometriskoj funkciji, napr., sinusu, čiju vrednost označavamo sa x odgovara više uglova koji imaju isti sinus. Stoga uz svaku oznaku inverzne trigonometriske funkcije treba navesti primedbu o vrednosti ugla. Bez te primedbe smatra se da je ugao, što odgovara datoj trigonometriskoj funkciji najmanji, to je tzv. *glavna vrednost inverzne trigonometriske funkcije*.

Nije teško postaviti veze između inverznih trigonometriskih funkcija istog argumenta, ali različitih naziva i, obrnuto, istog naziva, ali različitih vrednosti argumenta. Tako, napr., $\arcsin x+\arccos x=\pi/2$ i $\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}$. Izvođenje obrazaca poslednje vrste se vrši na ovaj način. Stavimo: $\arccos x=\arcsin z=y$, gde je z traženi argument. Paralelno imamo jednačine: $\cos y=x$, $\sin y=z$. Kako je $\sin^2 y+\cos^2 y=$ $=x^2+z^2=1$, imamo traženi argument $z=\sqrt{1-x^2}$, tj. $\arccos x$ $=\arcsin\sqrt{1-x^2}$. Na sličan način imaćemo: $\operatorname{arc\,tg} x=$ $=\arcsin(x/\sqrt{1+x^2})$.

2.61. Parametarsko izražavanje funkcionalne veze. Uniformizacija

Imali smo za parametarske jednačine kruga

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

gde je θ parametar kružnog, cikličnog procesa. Slične su i parametarske jednačine elipse: $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$, gde je φ ugao sa vrhom u centru elipse.

I za svaku drugu funkcionalnu vezu izraženu, recimo, jednačinom (1) $F(x, y)=0$, možemo zamisliti parametarske jednačine te krive u obliku (2) $x=f_1(u)$, $y=f_2(u)$, gde je u promenljivi parametar. U jednačinama (2) imamo parametarsku predstavu funkcionalne veze izražene jednačinom (1), ili, kratko, to su parametarske jednačine date krive.

U slučaju kretanja tačke u ravni, kretanje se određuje *jednačinama kretanja*, koje se u slučaju Dekartovih koordinata izražavaju ovako

$$x=f_1(t),\quad y=f_2(t)$$

gde je t vreme. Napisane jednačine mogu, u isto vreme, biti smatrane kao parametarske jednačine *trajektorije* ili *putanje* tačke u ravni.

Jasno je da parametarske jednačina iste krive možemo izraziti na više načina. Tako, napr., ako u parametarske jednačine elipse sastavimo izraze $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$ u funkciji $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, koji možemo označiti sa τ (čitaj: tau), dobićemo parametarske jednačine elipse u obliku

$$x = a\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}, \quad y = 2b\frac{\tau}{1+\tau^2}.$$

Doista, ako eliminišemo parametar τ, dolazimo ponovo do jednačine elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. U ovom obliku parametarskih jednačina elipse, koordinate x i y izražene su kao racionalne funkcije parametra τ. Kriva linija, čije se koordinate mogu izraziti kao racionalne funkcije pomoćnog parametra, zovu se *unikursalne* krive. A postupak koji funkcionalnu vezu dovodi do parametarskih jednačina sa racionalnim funkcijama parametra zove se *uniformiziranje* te veze, odnosno date krive.

Lako je proveriti da se jednačina hiperbole $y^2 - a^2x^2 = c^2$ uniformizuje parametarskim jednačinama $x = 2ct/(a^2-t^2)$, $y = c(a^2+t^2)/(a^2-t^2)$.

Za parabolu, recimo, u obliku $y^2 = 2px$ $(p>0)$ imamo vrlo jednostavne jednačine: $x = t^2$, $y = \sqrt{2p}\,t$. Tako smo došli do zaključka da su konusni preseci unikursalne krive.

2.7. Prirodno rašćenje. Broj *e*

Ako uložimo novac u banku, a banka uložiocu plaća p od sto godišnje, svaki dinar donosi godišnje $p/100$ dinara interesa. Uzimajmo svake godine taj interes iz banke i ostavljajmo ga kod sebe. Posle T godina imaćemo u našem ormanu od svakog dinara $pT/100$ dinara. Ako želimo da znamo, kroz koliko će se godina u ormanu nakupiti od svakog dinara u banci još jedan dinar, tako da se ukupan naš imetak udvostruči treba staviti $pT/100 = 1$, odakle imamo $T = 100/p$. Tako, napr., ako banka plaća 5%, naš će se kapital udvostručiti kroz 20 godina, pod uslovom da svake godine interes ne ostavljamo u banci, nego ga vadimo i skupljamo.

Pretpostavljamo sad da taj prihod ne podižemo iz banke. Podelimo broj godina, dakle vreme T, na dva jednaka dela. U toku svake godine prvog dela vadimo interes i ponovo nosimo kući. Na kraju prvog dela svaki dinar će doneti $1/2$ dinara prihoda, i naš imetak, u banci i kod kuće, će iznositi $(1+1/2)$ dinara. Sad taj ukupni imetak, uložimo u banku. Na kraju druge polovine vremena T, svaki dinar imetka $(1+1/2)$ dinara pretvoriće se u $(1+1/2)$ dinara, tako da će naš kapital sad iznositi $(1+1/2)(1+1/2) = (1+1/2)^2 = 2{,}25$ dinara. Znači, ako ovako budemo raspolagali novcem, naš kapital će se ne samo udvostručiti, već i uvećati – za jednu četvrtinu. Ako vreme T podelimo, recimo, na pet jednakih delova, i kamatni novac ostavljamo redovno u banci, naš će se dinar na kraju vremena T pretvoriti u $(1+1/5)^5 = 2{,}48832 \approx 2{,}488$ dinara, gde znakom $\approx$ ponovo označiti približnu jednakost.

Ako vreme T podelimo još na veći broj delova, možemo dati ovu tablicu brojeva, iz koje se vidi u šta će se pretvoriti svaki dinar kapitala, ako pretpostavimo da naša „matematizirana" banka dodaje interes posle svakog odgovarajućeg dela vremena

$$1+1=2;\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25;\ \left(1+\frac{1}{5}\right)^5 \approx 2{,}488;$$

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} \approx 2{,}594;\ \left(1+\frac{1}{20}\right)^{20} \approx 2{,}653;$$

$$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2{,}704;\ \left(1+\frac{1}{10^3}\right)^{10^3} \approx 2{,}717;$$

$$\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4} \approx 2{,}718.$$

Dakle vidimo da se traženi iznos izračunava pomoću obrasca $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Ako sad pretpostavimo da broj n sve više raste, intervali posle kojih dodajemo priraštaj kapitala sve se više smanjuju. Tu rečenicu matematički možemo izraziti ovako: ako $n \to \infty$ (čitaj: n teži beskonačnosti), $\frac{1}{n} \to 0$ (čitaj: jedan kroz n teži nuli). Uvećavanje veličine, slične našem kapitalu, pod pretpostavkom da $n \to \infty$ zove se *prirodno rašćenje*. Vidimo da sa tim rašćenjem stoji u vezi broj, čiji se zakon izračunavanja uslovno matematički izražava ovako

$$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]_{n\to\infty}=e,$$

pri tome se rezultat obeležava slovom e. Ova oznaka, koju je uveo Euler, isto koliko je opšta koliko i oznaka za broj π, odnos dužine kružne linije prema prečniku. Mesto donje oznake $n\to\infty$, koja znači: ,,pod uslovom da n teži beskonačnosti", upotrebljuje se, kao što smo videli, i drugi način pisanja, naime pomoću pojma granične vrednosti ili limesa. Tada pišemo ovako

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Pokazaćemo, prvo, kako se drukčije može izračunati broj e, a zatim ćemo objasniti zašto se proces, koji proučavamo, zove *prirodno rašćenje*.

Iz Elementarne matematike poznati su nam ovi rezultati:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.\,2}a^{n-2}b^2+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}a^{n-3}b^3+\ldots+nab^{n-1}+b^n.$$

Primenimo sad ovaj *binomni obrazac* na izračunavanje e. Prvo za svako konačno n imamo

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1.\,2}\,\frac{n(n-1)}{n^2}+$$

$$+\frac{1}{1.\,2.\,3}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n^{n-2}}+\frac{1}{n^n}$$

ili

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}\,1\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\,1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+$$

$$+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

gde smo sa $2!$, $3!$, uopšte $k!$ (čitaj: ka faktorijela) označili proizvod niza prirodnih brojeva od 1 do k, tj. $k!=1.\,2.\,3.\,4\ldots(k-1)k$.

Pri tome je $1!=1$ i $0!=1$.

Označimo prethodni zbir sa S_n. I proverimo, prvo, da zbir S_n raste kad n raste, tj. $S_{n+1}>S_n$. Zaista, broj članova kod S_{n+1} je za jedinicu veći od broja članova zbira S_n. Sem toga, počev od trećeg člana, svaki član zbira S_{n+1} je veći od odgovarajućeg člana zbira S_n. Tako za treće članove imamo

$$\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right),$$

a za $k-$te

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<$$

$$<\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right).$$

S druge strane, pokazaćemo da zbir S_n, ma koliko veliko bilo n, ne može biti veće od 3, tj. da je $S_n<3$. Zaista, uporedimo naš zbir sa geometriskom progresijom

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}},$$

koju smo dobili zamenom svake razlike kod S_n većim brojem, naime jedinicom, a svakog množioca faktorijele u imeniocu, počev od 3, manjim brojem, naime sa 2. Jasno je da zbir tako dobijene geometriske progresije veći od S_n. Pošto zbir geometriske progresije iznosi $1+(1-\frac{1}{2^n})/(1-\frac{1}{2})=3-\frac{1}{2^{n-1}}$ i prema tome je manji od 3, možemo tvrditi da i $S_n<3$.

Prema tome, zbir S_n raste, no stalno ostaje manji od 3. Takva veličina mora imati graničnu vrednost, koja nije veća od 3, i ta granična vrednost je broj e. Ima različitih načina za izračunavanje tog broja. Njegova približna vrednost iznosi $e\approx 2{,}718281828459$.

Broj e je transcendentan broj, jer je dokazano da ne postoji algebarska jednačina sa celim koeficijentima, čiji bi koren imao vrednost broja e (Hermite, 1873 g.).

Proces raščenja je u prirodi neprekidan proces. Priroda ne deli vreme, kao što to banka radi, na konačne intervale; ona ne dodaje priraštaje u skokovima, samo na kraju intervala, već čim jedna veličina dobije i najmanji priraštaj, u proces odmah ulazi cela povećana veličina. Vidimo često u prirodi isti postupak koji smo primenili u vezi sa pojmom broja e.

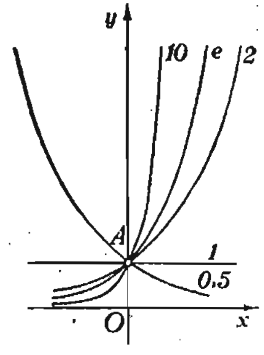
2.71. Eksponencijalni proces. Hiperboličke funkcije

U izrazu a^n može biti promenljiva osnova; tada imamo funkciju $y=x^n$, koju smo analizirali ranije. Ali u tom izrazu može osnova biti stalna, a izložilac promenljiv; tada dobićemo funkciju

$$(1) \qquad y=a^x,$$

koja se zove, zbog promenljivosti izložioca ili eksponenta, *eksponencijalna funkcija.*

Uzmimo konkretno funkciju za $a=2$, $y=2^x$ i nacrtajmo grafik ove funkcije (sl. 56). U tu svrhu načinićemo tablicu vrednosti te funkcije.



Sl. 56 — Grafici eksponencijalne funkcije

Ako se menja osnova funkcije (1), i grafik, prolazeći stalno kroz tačku A, sa koordinatama (0,1) menja

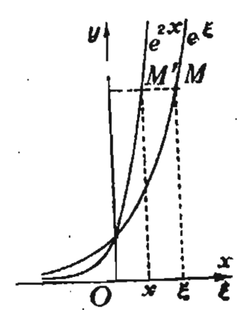
svoj položaj, kako je to pokazano na slici, gde imamo grafike za vrednosti osnove a: 10, e, 2, 1, 1/2.

x	$-\infty$	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...	$+\infty$
y	0	...	1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	...	$+\infty$

Eksponencijalna funkcija (2) $y=e^x$, sa osnovom e igra vrlo važnu ulogu u Višoj matematici. Može se za tu funkciju dokazati teorema: ugaoni koeficijent tangente na grafik funkcije e^x jednak je vrednosti te funkcije. Ovu osobinu ima eksponencijalna funkcija samo sa osnovom e i, prema tome, ona se izdvaja od ostalih funkcija. Druga osobina, koja ovu funkciju karakteriše po njenoj funkcionalnoj prirodi, sastoji se u tome da ona raste brže od svake funkcije oblika x^n, gde je n ma koji pozitivni broj. Kasnije ćemo proveriti i ovu osobinu.

Svaku eksponencijalnu funkciju oblika (1) sa pozitivnom osnovom a lako možemo transformisati u eksponencijalnu funkciju oblika (2) sa osnovom e. Zaista stavimo (3) $a^x=e^{\alpha x}$, gde je α broj koji se ovako određuje. Logaritmujemo obe strane ove jednačine; tada imamo $x \log a=\alpha x \log e$, pri tome možemo upotrebiti i obične dekadne logaritme, sa kojima smo se upoznali u školi i za koje je $\log e\approx 0{,}4342945$. Prethodna jednačina biće zadovoljena za svaku vrednost x, ako stavimo $\alpha=\log a/\log e=2{,}3025851 \log a$. Ako zatim stavimo $\alpha x=\xi$ imamo iz (3) jednačinu $a^x=e^{\alpha x}=e^{\xi}$ i time smo izvršili traženu transformaciju.

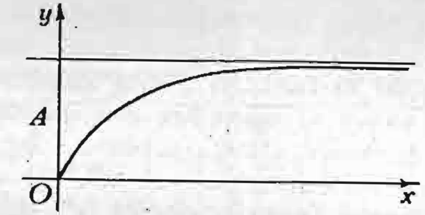
Mesto funkcije e^x, često je potrebno neposredno proučiti funkcije $y=e^{k^2x}$ i $y=e^{-k^2x}$, gde je k stalna pozitivna konstatna. Kad x raste (opada) i prva funkcija raste (opada), dok druga funkcija, naprotiv, opada (raste). Jasno je da ćemo grafike ovih funkcija dobiti iz grafika funkcije e^x, odnosno e^{-x}, ako promenimo razmeru crtanja apscise i stavimo, kao i ranije, $k^2x=\xi$. Na slici (sl. 57) konstruisan je grafik funkcije $y=e^{2x}$ iz grafika funkcije e^{ξ}. Svaka od navedenih funkcija može zadržati još i stalan koeficijent, tako da funkcije budu $y=Ae^{k^2x}$, $y=Be^{-k^2x}$, gde su A, B, k^2 konstantne veličine.



Sl. 57 — Grafik funkcije e^{2x}

Obratimo pažnju još na jedan specialan izraz koji zavisi od eksponencijalne funkcije i objasnimo taj izraz na jednom konkretnom primeru.

Stavimo u sud sa vodom količinu šećera A potrebnu da rastvor bude zasićen. Proces rastvaranja šećera postepeno se usporava. Sa y označimo količinu šećera, koja je već rastvorena u trenutku vremena $t=x$. Iz fizičke hemije je poznato da se y u zavisnosti od x izražava jednačinom $y=A(1-e^{-k'x})$. Slika 58 predstavlja grafik te funkcije. Kao što vidimo, kriva se asimptotski približuje pravoj paralelno sa x osom na rastojanju A. Ovoj asimptoti odgovara *stanje zasićenosti* (*saturacije*) našeg rastvora. U prirodi i u praktičnom životu ima mnogo pojava, koje stoje u vezi sa pojavom zasićenosti; krive linije, koje grafički prikazuju takve pojave, zovu se *krive saturacije*.



Sl. 58 — Grafik rastvaranja šećera u vodi

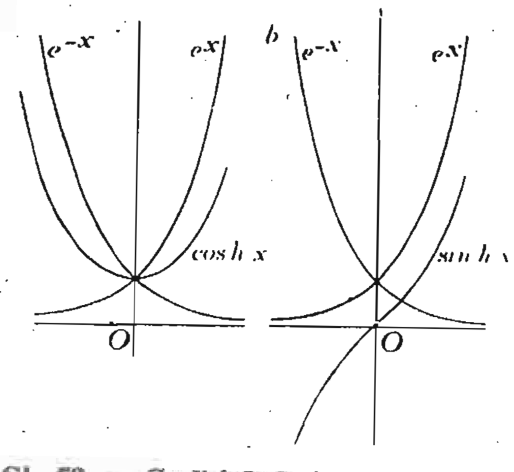
U raznim pitanjima Teoriske i Primenjene matematike često se pojavljuju poluzbir i polurazlika funkcija e^x i e^{-x}. Poluzbir je *hiperbolički kosinus*, sa oznakom cosh (čitaj: kosinus hiperbolikus), skraćeno *ch*. Polurazlika je *hiperbolički sinus*, sa oznakom sinh ili *sh* (čitaj: sinus hiperbolikus). Na taj način imamo dva obrasca

$$\cosh x=(e^x+e^{-x})/2,$$
$$\sinh x=(e^x-e^{-x})/2.$$

Iz ovih obrazaca neposredno sleduje

$$e^x=\cosh x+\sinh x,$$
$$e^{-x}=\cosh x-\sinh x.$$

Grafici *a* i *b* slike (sl. 59) prikazuju funkcije $y=\cosh x$ i $\sinh x$.



Sl. 59 — Grafici funkcija cosh x i sinh x

Hiperboličke funkcije imaju neke osobine slične osobinama trigonometriskih funkcija. Tako, napr., osobinama

$$\cos(-x)=\cos x, \quad \sin(-x)=-\sin x$$

odgovaraju iste osobine hiperboličkih funkcija

$$\cosh(-x)=\cosh x, \quad \sinh(-x)=-\sinh x$$

Osobini trigonometriskih funkcija $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ odgovara ovde osobina

$$(4) \qquad \cosh^2 x-\sinh^2 x=1,$$

jer je $\cosh^2 x=(e^{2x}+2+e^{-2x})/4$, $\sinh^2 x=(e^{2x}-2+e^{-2x})/4$.

Hiperbolički tangens i *hiperbolički kotangens* se definišu jednačinama

$$\text{tgh}\, x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \qquad \text{cotgh}\, x=\frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}},$$

prema tome i ovde imamo vezu $\text{tgh}\, x \cdot \text{cotgh}\, x=1$.

Ako stavimo (5) $x=a\cosh\varphi$, $y=b\sinh\varphi$, gde su a i b stalne veličine, a φ promenljivi parametar, posle eliminisanja parametra dobićemo, na osnovu (4), jednačinu (4) $x^2/a^2-y^2/b^2=1$, koja odgovara hiperboli. Jednačine (5) su, prema tome, *parametarske jednačine hiperbole*.

Za izračunavanje eksponencijalnih funkcija e^x, e^{-x} i hiperboliskih funkcija postoji niz specijalnih tablica (gl. Tablice prof. V. V. Miškovića).

2.72. Logaritamski proces

Niz brojeva

$$\ldots-5,-4,-3,-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots$$

čini aritmetičku progresiju sa razlikom jednakom jedinici, jer se svaki naredni član niza dobija iz prethodnog dodavanjem stalne veličine – jedinice.

Uporedimo sa ovim nizom drugi niz

$$\ldots 10^{-5},\ 10^{-4},\ 10^{-3},\ 10^{-2},\ 10^{-1},\ 1,\ 10,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ 10^5,\ldots$$

koji čini geometrisku progresiju sa količnikom jednakim desetici, jer se svaki naredni član ovog niza dobija iz prethodnog množenjem sa deset. Ako ma koji broj prvog niza označimo sa x, a odgovarajući broj drugog označimo sa y, između njih imamo vezu

(1) $$y = 10^x,$$

koja, proširena ne samo na cele, već na sve vrednosti x, pretstavlja eksponencijalnu funkciju.

Sa istim pravom možemo broj y iz drugog niza uzeti za nezavisno promenljivu, a broj x prvog niza za funkciju; drugim rečima, izložilac x u jednačini (1) smatrati kao funkciju stepena y. Znamo da je to logaritam broja y, za osnovu 10, tj. $x = \log_{10} y$.

Ako ponovo za funkciju upotrebimo oznaku y, a za nezavisno promenljivu x, mesto prethodne jednačine možemo napisati

(2) $$y = \log_{10} x = \log x.$$

To je tzv. *dekadni* ili *Brigov logaritam*. Osnova mu je deset. U nauci, a naročito u Višoj matematici, upotrebljavaju se, sem dekadnih logaritama, i logaritmi sa osnovom e. Taj se logaritam zove *Neperov* ili *prirodan logaritam* (logarithmus naturalis). Broj e je prema tome, *osnova prirodnih logaritama*. Za oznaku prirodnog logaritma ćemo upotrebljavati *lg* ili *ln*, tako da je

(3) $$y = \log_e x = \lg x = \ln x,$$

a gde nema sumnje možemo stavljati i $\log x$.

Svakoj logaritamskoj jednačini odgovara jedna eksponencijalna jegnačina; prema tome uporedo sa jednačinom (2) imamo jednačinu $x = 10^y$, a uporedo sa jednačinom (3) jednačinu $x = e^y$.

Potražimo vezu između dekadnog i prirodnog logaritma istog broja, recimo broja N. Označimo (4): $p = \log_e N$, $d = \log_{10} N$, tada imamo $N = e^p$, $N = 10^d$, te prema tome možemo napisati jednačinu $e^p = 10^d$. Ako ovu jednačinu logaritmujemo sa osnovom 10, dobijamo jednačinu $p \log_{10} e = d$. Uvedimo sad broj M — dekadni logaritam broja e, tj. stavimo

(5) $$M = \log_{10} e,$$

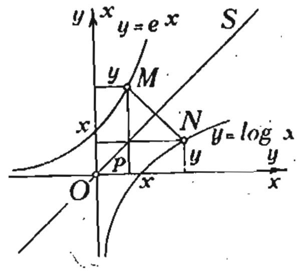
tada iz prethodne jednačine, na osnovu (4), izvodimo jednačinu $\log_{10} N = M \log_e N$, a takođe i jednačinu $\log_e N = \frac{1}{M} \log_{10} N$.

Broj M zove se *dekadni modul prirodnih logaritama*. Obnuto, broj $1/M$ je *prirodni modul dekadnih logaritama*. On ima vrednost $\log_e 10$, kako to sleduje posle prirodnog logaritmovanja jednačine $e = 10^M$, zaključka iz jednačine (5).

Ta dva modula imaju za približne vrednosti:

$$M = \log_{10} e \approx 0{,}43429448, \quad 1 : M = \log_e 10 \approx 2{,}30258509.$$

Proučimo sad grafik funkcije prirodnog logaritma $y = \log_e x$. U tu svrhu ćemo prvo uzeti već poznati grafik eksponencijalne funkcije $y = e^x$ i drukčije označiti koordinate: apscisu označimo sa y, a ordinatu sa x (sl. 60). Nacrtana kriva sa novim oznakama ima jednačinu



Sl. 60 — Grafik logaritamske funkcije sa prirodnom osnovom

(6) $$x = e^y.$$

Za svaku tačku $M(y, x)$ konstruišimo tačku N sa koordinatama (x, y). Jasno je da će ova tačka N biti simetrična tački M u odnosu na simetralu S koordinatnog ugla prvog kvadranta. Celoj ovoj eksponencijalnoj krivoj će odgovarati simetrična kriva sa jednačinom $y = \log_e x$, koja sleduje iz jednačine (6). Ova simetrična kriva je *grafik logaritamske funkcije*.

Iz Elementarne matematike su dobro poznati osnovni obrasci za logaritme, tzv. pravila za logaritmovanje, koja važe za logaritme sa svakom osnovom. Navešćemo kratko te obrasce:

$$\log ab = \log a + \log b, \quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b,$$

$$\log a^n = n \log a, \quad \log \sqrt[n]{a^m} = \frac{m}{n} \log a.$$

Isto tako je u Elementarnoj matematici pokazana i primena logaritamskih tablica na izračunavanje raznih izraza.

Postoji i jedna vrlo jednostavna sprava — *logaritamski lenjir* ili *logaritmar*, koji znatno olakšava približne račune. Na osnovu osobina logaritmara ta sprava zamenjuje množenje i deljenje sabiranjem i oduzimanjem i pomeranjem jednog dela lenjira prema drugom vrši to sabiranje, odnosno oduzimanje. Praktično rukovanje tom spravom ne zadaje teškoće.

Glava treća

IZVOD I DIFERENCIJAL

3.1. Teorija graničnih vrednosti

U vezi sa pojmom iracionalnog broja proučavali smo pojam granične vrednosti niza racionalnih brojeva. Pošto je pojam granične vrednosti osnovni u proučavanju funkcija, pre prelaza na primene tog pojma na funkcije, zaustavićemo se malo duže na tom pojmu.

Zamislimo neku promenljivu veličinu u, koja može uzimati različite brojne vrednosti ili čak se izražavati različitim obrascima odnosno funkcijama. Ako se za dve proizvoljne vrednosti u' i u'' promenljive veličine u možemo kazati, na osnovu nekog postavljenog pravila, da u' *prethodi* u'' (ili u'' *sledi* u'), onda se kaže da su vrednosti ove promenljive veličine *uređene*. Ako uzmemo neku treću vrednost u^*, uređenu po istom pravilu, različitu od u' i u'', ona uvek ima svoje mesto — pre u', između u' i u'' ili posle u''.

Uzmimo u obzir poseban važan slučaj, kad uređene vrednosti veličine sačinjavaju prebrojivu množinu, čiji se elementi mogu numerisati i predstaviti nizom vrednosti $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$, označenih indeksima.

Takvu prebrojivu množinu možemo sastaviti i iz neprebrojive uređene množine, kontinuuma, birajući iz te množine niz uređenih, posebnih, diskretnih vrednosti, po određenom pravilu. Uzmimo, napr., promenljivu x koja zadovoljava uslove: $0 \leqslant x \leqslant 1$. Toj promenljivoj odgovara kontinuum iz svih tačaka duži (sa krajevima) jedinične dužine. Sa tim kontinuumom se mogu povezati uređene vrednosti beskrajnog niza a_1, a_2,

$\ldots$, a_n, $\ldots$, prema različitim pravilima. Ako, napr., stavimo $a_n = 1/n$, imamo beskrajan niz

$$1. \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots$$

i to uređen, jer za dva elementa, recimo, a_p i q_q možemo kazati da p-ti član prethodi q-tom, ako je $p<q$. Kao drugi primer uzimamo pravilo $a_n = (-1)^n/2n$. Ono određuje koordinatu tačke na duži, takođe jedinične dužine, sa početkom koodinate u sredini te duži. Tada imamo niz

$$2. \qquad -\frac{1}{2}, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{10} \ldots, \frac{(-1)^n}{2n}, \ldots$$

Neka je, u opštem slučaju,

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$$

beskrajan niz brojeva, tj. uređena beskrajna prebrojiva množina brojeva, koji pripadaju nekom otvorenom području (a', a'') to znači da je za svako i imamo $a' < a_i < a''$. Ako u tom području uzmemo neki broj a, koji može da i ne pripada datom nizu, i oko njega obrazujemo otvorenu oblast $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, gde je ε proizvoljno mali pozitivni broj, onda se kaže da je ta oblast *okolina* datog broja, odnosno tačke a.

Ako u svakoj okolini tačke a nalazi, bez obzira na vrednost ε, beskrajno mnogo tačaka niza (se kaže „gotovo" sve, ne računajući konačan broj tačaka van okoline) tačka a je *tačka nagomilavanja* datog niza. Primetimo da sama tačka nagomilavanja može da ne pripada nizu.

Izneseni geometriski postupak, za određivanje pojma tačke nagomilavanja, može poslužiti za jasnije razumevanje pojma granične vrednosti.

I. *Broj a se zove granična vrednost niza (1), ako za svaku pozitivnu vrednost ε možemo naći takav član niza sa indeksom N da ako je $n \geqslant N$, onda postaje i ostaje na snazi nejednakost*

$$|a_n - a| < \varepsilon .$$

II. *Za niz (1) se kaže da ima beskonačnu granicu* (∞), *ako za svaku pozitivnu vrednost* P *možemo naći takav član niza sa indeksom* N, *da pri* $n \geqslant N$, *postaje i ostaje*

$$|a_n| > P.$$

Broj a iz prvog dela definicije granične vrednosti zove se *konačna* (ili sopstvena) *granična vrednost*, a iz drugog *beskonačna* (ili nesopstvena) *granična vrednost*.

Prema tome niz može: 1. imati konačnu graničnu vrednost i tada se zove *konvergentni niz*; 2. imati beskonačnu granicu i 3. nemati granice. U 2. i 3. slučaju niz se zove *divergentan*.

Sadržaj definicije granične vrednosti može se i drukčije matematički izraziti. Tako se kaže da a_n teži graničnoj vrednosti, kad n teži beskonačnosti, i to se označuje na više načina:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a, \quad (a_n)_{n \to \infty} \to a, \quad \lim_{n = \infty} a_n = a.$$

Promenljiva vrednost a_n pri približavanju svojoj graničnoj vrednosti, a, može se ponašati na jedan od ovih načina. 1. $a_n < a$, tj. a_n ostaje stalno manje od svoje granice. 2. $a_n > a$, veće od granice. 3. za neke vrednosti n imamo $a_n < a$, za druge $a_n > a$, drugim rečima, vrednost a_n se koleba oko svoje granične vrednosti. 4. vrednost a_n se koleba oko vrednosti a, ali tako da za neki konačan broj k vrednost a_k jednaka je a, ali za $n > k$ ta jednakost više ne važi i uslov granične vrednosti ponovo treba pravdati kad postane $n > N$. (Nacrtati slike, koje odgovaraju navedenim slučajevima).

Promenljiva veličina se zove *beskrajno mala*, ako je njena granica jednaka nuli. Važno je pritom uočiti da se neka vrlo, vrlo mala konstantna veličina, ili vrlo mali broj, ne mogu smatrati kao beskrajno male veličine, jer te veličine nemaju tu osnovnu osobinu beskrajno malih veličina, da su — promenljive. Ta osobina je bitna za beskonačno male veličine, jer one služe ne za proučavanje brojnih vrednosti, već za proučavanje zakona promenljivosti promenljivih veličina.

Ako sa α označimo beskonačno malu veličinu, svaku promenljivu veličinu x koja ima granicu a možemo predstaviti zbirom $x = a + \alpha$. Nije teško razumeti, pa čak i proveriti niz

osobina beskonačno malih. 1. Zbir konačnog broja beskonačno malih je beskonačno mala. 2. To isto važi i za razliku beskonačno malih sa dopunom u definiciji beskonačno malih veličina, da je nula, kao rezultat razlike dve beskonačno male, bez obzira na to što je to simbol konstantne veličine, beskonačno mala veličina. 3. Proizvod $x.\alpha$, gde je x konačna veličina, i količnik $\frac{\alpha}{x}$, gde je $x \neq 0$, isto tako su beskonačno male veličine.

Pomoću beskonačno malih lako se izvode teoreme o graničnim vrednostima zbira, razlike, proizvoda, količnika, pod uslovom da granična vrednost imenioca nije jednaka nuli itd..

Što se tiče drugog dela definicije granice, koji dovodi do beskonačnosti, pozitivne ili negativne, treba uzeti u obzir da ni jedna ni druga nisu neke veličine ili brojevi; beskonačne granice tiču se samo karaktera ponašanja promenljive veličine sa povećanjem indeksa n u članovima niza (1). Beskonačnost je samo simbol određenog procesa. Ne treba misliti da je uvođenje beskonačnosti u matematička rasuđivanja štetno. Obrnuto, prevođenjem, matematičkim aparatom u konačnu oblast, onog što se dešava u beskonačnosti, mnogo se može proširiti naše znanje o tretiranoj pojavi.

Formulisanje opštih uslova za određivanje graničnih vrednosti niza je vrlo težak zadatak, jer takvi uslovi treba da uzmu u obzir vrlo raznolika pravila za formiranje članova nizova.

Jedan od takvih uslova je Košijev uslov koji glasi:

Da niz $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ima konačnu granicu potrebno je i dovoljno da se za svako pozitivno, različito od nule, ε može naći takvo N da je za svako $n \geqslant N$ i svako celo i pozitivno r ispunjen uslov

$$|a_{n+r} - a_n| < \varepsilon.$$

U dokaz ovog Košijevog stava nećemo ulaziti.

U mnogim slučajevima se određivanje granice niza vrši na osnovu nekih jednostavnih osobina članova niza. Navedimo primere za takve slučajeve.

1. Ako imamo tri niza:

$$m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$$

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

$$M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$$

i njihovi članovi zadovoljavaju uslove

$$m_n \leqslant a_n \leqslant M_n,$$

a pri tome nizovi m_n i M_n imaju istu granicu, konačnu ili beskonačnu, onda i niz a_n ima istu granicu.

2. Ako članovi niza a_n rastu (opadaju), tj. ako je $a_{n+1} > a_n$ $(a_{n+1} < a_n)$ i, pri tom su ograničeni $(a_n < M$ odnosno $a_n > m)$, onda niz ima granicu.

Primenimo sad pojam granice na proučavanje funkcija. Neka je funkcija data u rešenom obliku $y = f(x)$ i neka ima određene vrednosti za određeno područje nezavisno promenljive x. Za takve funkcije postupak prelaza na graničnu vrednost nije potreban. Tako, napr., ako je $f(x)$ polinom, proučavanje vrednosti tog polinoma zahteva samo izvršenje poznatih operacija sabiranja, množenja i stepenovanja, koje uvek dovodi do određenog rezultata.

Ali već u slučaju racionalne funkcije u obliku količnika dva polinoma izvršenje pokazanih operacija ne dovodi uvek do određenog rezultata. Tako, napr., funkcija (razmislite i nacrtajte grafik!)

$$y = \frac{2x^3 - 6x^2 + 4x}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$$

ne daje određeni rezultat za $x = 1$ i $x = 2$ iz područja, recimo, $[0,3]$ nezavisno promenljive, jer za te vrednosti broilac i imenilac naše razlomljene funkcije imaju vrednosti nule i prema tome imamo neodređeni rezultat $0:0$. I funkciju $y = \frac{\sin x}{x}$ ne možemo izračunati za $x = 0$. U takvim slučajevima se može primeniti postupak određivanja granične vrednosti funkcije $f(x)$ prema ponašanju te funcije u okolini tačke za koju ne

možemo neposredno izračunati vrednost funkcije. Označimo koordinatu takve tačke sa c.

Pretpostavimo da funkcija $f(x)$ ima potpuno određene vrednosti za niz tačaka, recimo, levo od tačke c. Načinimo u području x-a niz $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ vrednosti levo od c i neka taj niz ima graničnu vrednost c; tj. neka za svako proizvoljno pozitivno δ bude zadovoljena nejednakost $0 < c - x_n < \delta$, počev od $n \geqslant N$.

Neka tom nizu vrednosti x-a odgovara niz vrednosti funkcije $f(x)$ sa oznakama

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

U vezi sa tim nizom postavimo ovu definiciju granične vrednosti funkcije.

Ako postoji konačan broj A za koji se može naći takav broj N da za svako $n \geqslant N$ bude ispunjena nejednakost

$$|A - f(x_n)| < \varepsilon, \tag{2}$$

sa proizvoljno datim pozitivnim brojem ε, a pri tome x_n zadovoljava nejednakost

$$0 < c - x_n < \delta, \tag{3}$$

gde je δ broj što odgovara broju ε, onda se kaže da je A *granična vrednost funkcije* $f(x)$ *sleva od* c.

Kratko se to beleži i ovako

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = A.$$

Ako u prethodnoj definiciji nejednakost (3) zamenimo nejednakošću

$$0 < x_n - c < \delta, \tag{4}$$

onda se, u opštem slučaju, definiše druga granična vrednost funkcije $f(x)$ *sdesna* od c, B, koja se zove *granična vrednost* funkcije i kratko označava

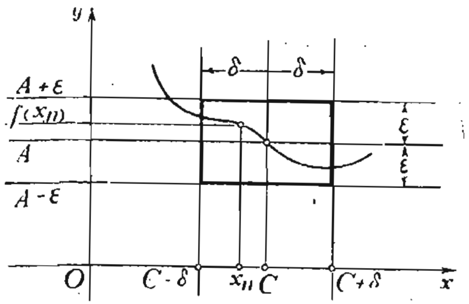
$$\lim_{x \to c+0} f(x) = B.$$

Ako je $A=B$, obe nejednakosti možemo izraziti

(5) $$|x_n - c| < \delta,$$

a zajedničku graničnu vrednost obeležiti

$$\lim_{x_n \to c} f(x_n) = A.$$



Sl. 61 — Granična vrednost funkcije

Na slici (sl. 61) grafički je prikazana uloga veličina koje učestvuju u definiciji granične vrednosti funkcije. Tački c, smatranoj kao tački nagomilavanja u području nezavisno promenljive x, odgovara tačka A nagomilavanja u oblasti funkcije $f(x)$.

Na sličan način se definišu beskonačne granične vrednosti. Samo treba uslov sa ε zameniti uslovom $|f(x_n)| > P$, gde je P proizvoljan broj koji može uzimati koliko god želimo veliku brojnu vrednost.

3.11. Neprekidnost funkcije

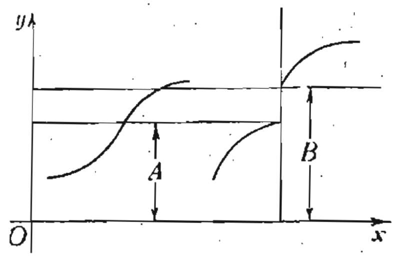
Ako su za neku tačku c leva i desna granične vrednosti funkcije $f(x)$ jednake $(A=B)$ i jednake vrednosti te funkcije za $x=c$, tj.

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c),$$

onda se za funkciju $f(x)$ kaže da je *neprekidna u tački c*.

Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna u svim tačkama neke duži, ona je neprekidna na području te duži. Čim se utvrdi da je funkcija neprekidna, nema potrebe za primenjivanjem pri izračunavanju te funkcije pojma granične vrednosti funkcije, već se mogu, prema potrebi, odmah izračunavati odgovarajuće, bilo tačne bilo približne vrednosti te funkcije.

Ako za $x=c$ leva granica A funkcije $f(x)$ nije jednaka desnoj granici B, tj. ako je $A \neq B$, za funkciju $y=f(x)$ se kaže da za vrednost $x=c$ ona pravi *skok* ili ima *prekid* sa vrednošću $B-A$: funkcija je za tu vrednost argumenta *prekidna*. Na slici (sl. 62) prikazani su grafici neprekidne i prekidne funkcije.



Sl. 62 — Funkcije: a. neprekidna, b. prekidna

Neprekidne funkcije imaju više onih osobina, koje omogućuju široku primenu tih funkcija, kako u tumačenju prirodnih pojava, tako i pri ostvarivanju raznih tehničkih planova i zamisli ljudskog uma. Evo, uostalom, nekoliko od onih osobina neprekidnih funkcija, koje se mogu protumačiti osnivajući se na ono što je dosad rečeno o funkcijama.

1. Polinom po x i količnik dva polinoma su neprekidne funkcije, sem za one vrednosti x-a (polovi količnika), za koje polinom u imeniocu ima vrednost nule.

2. Konstanta, smatrana kao funkcija, neprekidna je funkcija.

3. Sve tzv. elementarne funkcije (stepen, eksponencijalne, logaritam, trigonometriske i inverzne trigonometriske hiperboličke) su neprekidne funkcije za sve vrednosti x-a, sem za one konačne vrednosti x-a za koje funkcija teži beskonačnosti.

4. Zbir i proizvod konačnog broja neprekidnih funkcija takođe je neprekidna funkcija. Isto to se odnosi i na količnik dve funkcije, sem za one vrednosti x-a za koje imenilac ima vrednost nule.

5. Ako je funkcija za $x=c$ neprekidna i priraštaj argumenta od x beskrajno mala veličina, onda je i priraštaj odgovarajuće vrednosti funkcije isto tako beskrajno mali.

Za funkcije koje su neprekidne u određenom intervalu $[a, b]$ možemo navesti ove osobine.

6. U intervalu uvek postoji bar jedna tačka za koju funkcija uzima svoju najveću vrednost; i bar jedna tačka sa najmanjom vrednošću funkcije.

7. Ako sa A i B označimo vrednost funkcije $f(x)$ za granice intervala, tj.

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A, \quad \lim_{x \to b-0} f(x) = B,$$

i ako je S neki proizvoljan broj između A i B, onda postoji bar jedan broj s, između a i b, za koji $f(s) = S$.

Kao zaključak iz ove osobine imamo ovaj važni slučaj. Ako su A i B raznih znakova, postoji vrednost s za koju $f(s) = 0$. Drugim rečima, postoji koren jednačine $f(x) = 0$.

U vezi sa pojmom neprekidnosti funkcije za tačke zatvorenog intervala $[a, b]$ objasnićemo još jednu osobinu neprekidnosti.

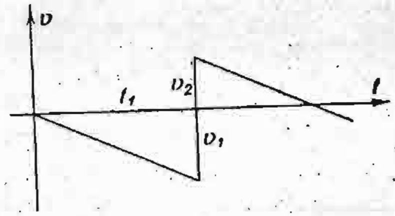
U definiciji neprekidnosti funkcije $f(x)$ za datu tačku c imali smo posla sa dve veličine ε i δ, vezanih za nejednakosti (2) i (5). Veličinu ε biramo proizvoljno, pa veličinu δ određujemo prema vrednosti ε, i prirodi funkcije $f(x)$. Ako za razne tačke $c_1, c_2, \ldots$ područja funkcije uzimamo istu vrednost ε, u opštem slučaju, odgovarajuće vrednosti δ mogu imati različite vrednosti $\delta_1, \delta_2, \ldots$ Ako za sve tačke područja x-a za dato ε možemo uzeti istu vrednost veličine δ, za funkciju $f(x)$ se kaže da je ona na tom području *ravnomerno* ili *uniformno neprekidna*. Postoji teorema prema kojoj je neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu (na duži) uvek ravnomerno neprekidna. U dokaze ni ove teoreme, ni drugih osobina neprekidnih funkcija nećemo se upuštati.

Ali ćemo se kratko zaustaviti na prekidnim funkcijama. Ima li takvih funkcija u prirodi? Natura non facit saltus! — Priroda ne pravi skokove! tvrdi Lajbnic. U Lajbnicovo vreme matematika je svoj aparat uglavnom izrađivala za proučavanje neprekidnih funkcija.

Kad se telo kreće ono svoj položaj menja neprekidno; ono se ne može u istom trenutku nalaziti u dvama raznim položajima. Ako se telo deformiše, recimo, menja svoju zapreminu, ono ne može istovremeno imati dve zapremine; zapremina se menja neprekidno čak ako se ta promena i vrlo brzo vrši, napr., eksplozijom.

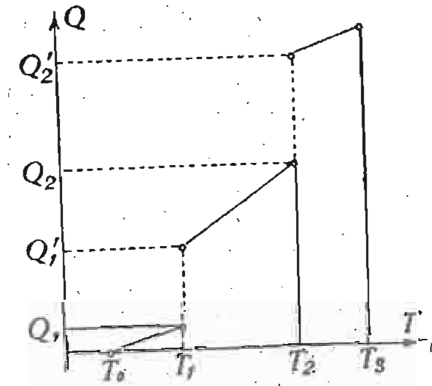
Ponekad se neprekidna promena vrši naglo, u toku kratkog vremena, i u vrlo složenom obliku. U takvom slučaju je zgodnije za proučavanje takve pojave pretpostaviti da je izvršen skok i tako se osloboditi analize pojave u njenim pojedinostima. Navešćemo primer koji bi ovo ilustrovao.

Ako elastičnu tešku loptu pustimo da slobodno pada, kad udari o elastičnu horizontalnu podlogu, ona otskače naviše. Jasno je da se položaj lopte menja neprekidno. Kako se pri tome menja brzina? Do sudara, brzina v, po apsolutnoj veličini, raste (sl. 63); ako kao pozitivni izaberemo smer naviše, znak brzine je negativan. Neka ova brzina u trenutku t_1 ima apsolutnu vrednoot v_1. Od početka sudara, i ovde se brzina menja neprekidno, ali, posle vrlo kratkog intervala τ, brzina menja znak, postaje pozitivna; ovu ćemo pozitivnu vrednost označiti v_2. Ako *zanemarimo* ono što se desilo u toku vrlo kratkog intervala, τ, možemo zaključiti da je brzina pretrpela skok, ona se promenila s prekidom. Posle elastičnog sudara, brzina v_2 ima vrednost μv_1, gde je $\mu \leqslant 1$ (čitaj: mi) *koeficijent uspostavljanja brzine*. Vidimo da je brzina napravila skok jednak $v_1 + v_2$; ovu veličinu treba dodati polaznoj brzini $(-v_1)$ da bi smo dobili konačnu brzinu v_2. Veličina brzine je prekidna funkcija vremena sa prekidom u trenutku t_1.



Sl. 63 — Grafik brzine pri sudaru

Navešćemo još jedan primer prekidne funkcije iz Fizike. Pokušajmo da predstavimo zagrevanje nekog čvrstog tela, nanoseći na grafik količine toplote Q, koje trošimo na zagrevanje jednog kilogama tog tela u funkciji temperature T tela. Neka je T_0 (sl. 64) početna temperatura tela u čvrstom stanju, T_1 — temperatura topljenja, T_2 — temperatura ključanja, T_3 — završna temperatura eksperimenta $(T_3 > T_2)$. Od T_0 do T_1 grafik je prava linija, jer smatramo da je specifička toplota čvrstog



Sl. 64 — Grafik zagrevanja tela

tela stalna i količina toplote je proprcionalna broju $T-T_0$, gde je T temperatura tela u intervalu od T_0 do T. Uzmimo da smo za zagrevanje do temperature T_1 potrošili Q_1 toplote. Zatim telo održava svoju temperaturu topljenja i troši toplotu daljeg zagrevanja na topljenje celokupne mase tela; neka je na to potrošeno $Q_1'-Q_1$ toplote. Celo telo u tečnom stanju od temperature T_1 počelo povišavati svoju temperaturu sa konstantnom specifičnom toplotom tela u tečnom stanju do temperature T_2 — temperature ključanja tela. Neka je za to povišenje temperature utrošeno Q_2-Q_1' toplote. Pri temperaturi T_2 telo je počelo da se pretvara u paru i potrošiće $Q_2'-Q_2$ toplote, da se sva tečnost pretvori u paru, a zatim od temperature T_2 do temperature T_3 para povećava svoju temperaturu do konačne temperature T_3, na kojoj je završen eksperiment. Za vrednosti T_1 i T_2 količina toplote Q kao funkcija T, tj. funkcija $Q(T)$, pretrpela je skokove.

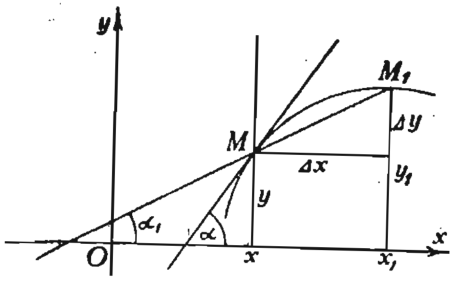
3.2 Pojam izvodne funkcije

Kao što smo videli, pri proučavanju različitih funkcija važnu ulogu igra ugaoni koeficijent tangente na grafiku te funkcije.

Uzmimo funkciju

(I) $\boxed{y=f(x)}$

sa grafikom na slici (sl. 65). Neka apscisi x odgovara tačka M na grafiku. Na istom grafiku uzećemo tačku M_1 sa apscisom x_1. Razliku x_1-x označimo sa Δx (čitaj: delta x). Δx pretstavlja priraštaj nezavisno promenljive. Ordinatu tačke M_1 označimo sa y_1. Razliku $y_1-y=\Delta y$ treba smatrati kao priraštaj funkcije. Neposredno sa slike je očigledno da ugaoni koeficijent sekante, MM_1, koja sa osom x obrazuje ugao α_1, ima vrednost $\operatorname{tg}\alpha_1=(y_1-y):(x_1-x)=\Delta y:\Delta x$. Videli smo na više primera da taj



Sl. 65 — Sekanta i tangenta krive

količnik može imati graničnu vrednost kada tačka M_1 teži tački M. Ako sa α osnačimo ugao između tangente i ose x, imaćemo $\operatorname{tg}\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Ako se x menja, tačka M menja svoj pložaj na krivoj; menja svoju vrednost i ugaoni koeficijent tangente, tako da ga možemo smatrati kao funkciju x. Ova funkcija, sa oznakom y' (čitaj: ipsilon prvi ili prim), koju smo izveli iz funkcije y pomoću određenog postupka, zove se *izvodna funkcija*, ili jednostavno *izvod date funkcije*. Prema tome može se postaviti ova osnovna definicija:

Izvod ili izvodna funkcija date funkcije je granična vrednost, ako ona postoji, odnosa priraštaja funkcije prema priraštaju nezavisno promenljive kad priraštaj nezavisno promenljive teži nuli.

Osnovnom obrascu za izračunavanje izvoda možemo dati jedan od ovih oblika:

$$\text{(II)}\quad \boxed{\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x_1\to x}\frac{y_1-y}{x_1-x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)=\operatorname{tg}\alpha, \end{aligned}}$$

gde smo sa h kratko označili priraštaj nezavisno promenljive.

Ovaj obrazac pokazuje, s jedne strane, način kako se izračunava izvod, s druge strane njegovo geometrisko tumačenje kao ugaonog koeficijenta tangente na grafiku.

Pokažimo, sad, na jednom konkretnom primeru kako se izračunava izvod. Neka je $y=f(x)=x^2$; tada računamo

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

i na taj način imamo obrazac $(x^2)'=2x$, koji se čita: izvod od x^2 je $2x$. Za funkciju $y=x^3$ postupimo na sličan način i dolazimo do rezultata $(x^3)'=3x^2$.

Vežbanja:

1. Potvrditi na osnovu obrasca (II) rezultate:

$$(x)'=1,\ (x^2)'=2x,\ (x^3)'=3x^2,\ (x^4)'=4x^3,\ (x^5)'=5x^4.$$

(ove rezultate zapamti!)

2. Izračunati na osnovu obrasca (II) izvod funkcije $y=x^{-1}$.
3. Potvrditi na osnovu obrasca (II) jednačinu $(x^{-2})'x^3+2=0$.

3.21. Izvod konstante, zbira i razlike

Ako funkcija prelazi u konstantu, $y=C$, grafik postaje prava paralelna sa osom x, tangenta se poklapa sa tom pravom, njen ugaoni koeficijent jednak je nuli prema tome je

$$\text{(III)} \qquad \boxed{C'=0,}$$

drugim rečima: *izvod konstante je nula*. Ovo sleduje i iz obrasca (II), jer je

$$(C)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} 0=0.$$

Ako se funkcija sastoji iz zbira ili razlike, tj.

$$y=u(x)\pm v(x)=u\pm v,$$

gde su u i v funkcije x-a, za izvod imamo

$$y'=(u\pm v)'=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)\pm v(x+h)-[u(x)\pm v(x)]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\pm\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\pm\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}=u'\pm v'$$

ili

$$\text{(IV)} \qquad \boxed{(u\pm v)'=u'\pm v'}$$

Rečima: *Izvod zbira ili razlike jednak je zbiru ili razlici izvoda.*

Vežbanja:

1. Naći izvod funkcije $y=x^2+x^4+x^8$.
2. Potvrditi jednačinu $(x-x^{-1})'-x^{-2}=1$.
3. Potvrditi jednačinu $(x^2+\sqrt{x})'+(x^2-\sqrt{x})'=4x$ bez izračunavanja izvoda korena.

3.3. Složena funkcija i njen izvod

Uzmimo funkciju e^{x^3}. Za izračunavanje ove funkcije treba da se izvrše dve uzastopne operacije: prvo izračunati $u=x^3$, a zatim $y=e^u$.

Funkcija za čije je izračunavanje potrebno izvršiti niz uzastopnih operacija, tj. takvih da rezultat naredne operacije zavisi od rezultata prethodne, zove se *složena funkcija*. U opštem obliku možemo za složenu funkciju napisati ove uslove

$$(\text{V}_1) \qquad \boxed{y=f(u),\quad u=\varphi(x).}$$

Funkcija u pretstavlja *složeni argument* date funkcije. Jasno je da argument složenog argumenta može opet biti složena funkcija itd., napr.,

$$(1) \qquad y=f(u),\quad u=\varphi(v),\quad v=\psi(x).$$

Izvedimo sad pravilo za određivanje izvoda složene funkcije.

Ako x poraste za Δx, funkcija u u (V_1) porašće za Δu, gde je

$$(2) \qquad \Delta u=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x),$$

a funkcija y će porasti za Δy, tj. za

$$(3) \qquad \Delta y=f(u+\Delta u)-f(u).$$

Kad Δx teži nuli, težiće na osnovu (2) i Δu nuli, a prema (3) težiće i Δy nuli.

Prema definiciji, izvod y' izračunaćemo ovako:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=y'_u\cdot u'.$$

gde smo sa y_u' označili izvod funkcije y po složenom argumentu u, koji smatramo kao nezavisno promenljivu. Konačno, dakle, imamo

$$\text{(V}_2\text{)} \qquad \boxed{y' = y_u' \cdot u'}$$

ili rečima: *Izvod složene funkcije jednak je izvodu složene funkcije po složenom argumentu puta izvod tog složenog argumenta po nezavisno promenljivoj.*

Ovo ćemo pravilo kratko zvati *pravilo nadovezivanja.*

Ako imamo slučaj (1), tj. kad je složeni argument i sâm složena funkcija, pravilo nadovezivanja daje ovaj rezultat $y' = y_u' \cdot u_v' \cdot v'$.

Kao što smo ranije naveli bez dokaza, ugaoni koeficijent tangente na grafiku eksponencijalne funkcije $y = e^x$ jednak je samoj funkciji. Sada to možemo napisati ovako $(e^x)' = e^x$. Prema tome za izvod funkcije gore navedenog primera, $y = e^u$, $u = x^3$, dobija se

$$y' = (e^u)_u' \cdot u' = e^u \cdot (x^3)' = e^{x^3} \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}.$$

Vežbanja:

1. Naći izvod funkcije $y = x^x$. 2. Potvrditi jednačinu $(u' e^u + v' e^v)$ $(e^u + e^v)' = 1$. 3. Naći izvode funkcija: $e^{(e^{x^2})}$, $e^{e^x} + x^x$, $y = e^{e^{e^{x^2}}}$.

3.4. Izvod inverzne funkcije

U 2.6 definisali smo inverznu funkciju. Ako je $y = f(x)$ data funkcija, ista funkcionalna veza izražena u obliku $x = \varphi(y)$ daje inverznu funkciju. Jasno je da, ako su Δx i Δy priraštaji nezavisno promenljive funkcije polazne funkcije, odgovarajuće uloge kod inverzne funkcije igraju Δy i Δx.

Ako izvod prve funkcije označimo sa y_x', tada je $y_x' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$; za inverznu funkciju izvod treba označiti sa x_y', i onda imamo $x_y' = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$.

Pošto je $(\Delta y : \Delta x) \cdot (\Delta x : \Delta y) = 1$, posle prelaza na granične vrednosti dobijamo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) = \left(\lim_{\Delta x \to x} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \cdot \left(\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) = y_x' \cdot x_y' = 1.$$

Prema tome može se konačno reći: Ako je $y = f(x)$ i $x = \varphi(y)$, onda je $y_x' \cdot x_y' = 1$, ili

$$\text{(VI)} \qquad \boxed{x_y' = \frac{1}{y_x'}}$$

Rečima ovaj rezultat glasi: *Izvod inverzne funkcije jednak je recipročnoj vrednosti izvoda date funkcije.*

U primeru $y = e^x$ i $x = \lg y$ za izračunavanje izvoda prirodnog logaritma možemo iskoristiti rezultat $(e^x)' = e^x$. Zaista, pošto je $y_x' = e^x = y$ iz (VI) sleduje $x_y' = y^{-1}$ ili $(\lg y)' = y^{-1}$. Ako sad napišemo funkciju prirodnog logaritma u običnom obliku $y = \lg x$, prethodni obrazac daje

$$(\lg x)' = \frac{1}{x}.$$

Vežbanja:

1. Izvesti rezultat $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$ na osnovu (VI) obrasca. 2. Naći izvod funkcije $y = \sqrt[3]{x}$ na osnovu teoreme o izvodima inverznih funkcija i rezultata $(x^3)' = 3x^2$. 3. Potvrditi teoremu o izvodima inverznih funkcija na primeru: $y = x^{-1}$ i $x = y^{-1}$.

3.5. Izvod logaritamske i eksponencijalne funkcije

Uzmimo logaritamsku funkciju sa osnovom a: $y = \log_a x$. Za dobijanje izvoda te funkcije primenimo neposredno postupak (II)

$$y' = (\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log \frac{x + \Delta x}{x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right).$$

Sad stavimo

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{1}{n}$$

i pomoću ove jednačine eliminišemo iz našeg izraza Δx i uzimamo u obzir da, pod uslovom $\Delta x \to 0$, veličina n teži beskonačnosti, ako $x \neq 0$. Transformaciju izraza vršimo ovako:

$$y' = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{x} \log_a\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} \log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} \log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{x} \log_a\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right].$$

Kako je (2.7)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

konačno će imati

$$\text{(VII}_1\text{)} \qquad \boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\lg a}}$$

Ako je logaritam prirodni, dakle ako je $a=e$, iz prethodnog obrasca neposredno sleduje obrazac

$$\text{(VII)} \qquad \boxed{(\lg x)' = \frac{1}{x}.}$$

Za dekadni logaritam obrazac (VII$_1$) daje

$$\text{(VII}_2\text{)} \qquad \boxed{(\log_{10} x)' = \frac{1}{x}\log_{10} e = \frac{M}{x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\lg 10},}$$

gde je M dekadni modul prirodnih logaritama.

Uzmimo sad prirodni logaritam

$$y = \lg x$$

sa izvodom $y_x' = \dfrac{1}{x}$, i njegovu inverznu funkciju

$$x = e^y.$$

Prema teoremi o izvodima inverznih funkcija imamo

$$(e^y)_y' = x_y' = \frac{1}{y_x'} = \frac{1}{x^{-1}} = x = e^y.$$

Na taj način smo izveli dokaz obrasca za izvod eksponencijalne funkcije, koji, posle promene oznake, konačno postaje

$$\text{(VIII)} \qquad \boxed{(e^x)' = e^x,}$$

koji smo i dosada upotrebljavali bez dokaza.

Na sličan način može se, iz obrasca (VII$_1$), izvesti obrazac za izvod eksponencijalne funkcije sa proizvoljnom osnovom:

$$\text{(VIII}_1\text{)} \qquad \boxed{(a^x)' = a^x \frac{1}{\log_a e} = a^x \lg a.}$$

Za dekadnu osnovu taj obrazac postaje

$$\text{(VIII}_2\text{)} \qquad \boxed{(10^x)' = 10^x \frac{1}{M} = 10^x \lg 10.}$$

Vežbanja:

1. Izvesti obrazac (VIII$_1$). 2. Naći izvode funkcija: 2^x, 10^{x^2+1}, a^{e^x}, $\log(x^2+1)$, $\log_{10}(x^3-3)$. 3. Potvrditi jednačinu $\log_{10} e \cdot \lg 10 = 1$. 4. Naći izvod funkcije $x = e^{t^2-t+1}$, gde je t nezavisno promenljiva, a x — funkcija. 5. Dokazati simetričnost tangenata za grafike inverznih funkcija u odgovarajućim tačkama na primeru funkcija $y=e^x$ i $y=\lg x$.

3.6. Izvod proizvoda i količnika

Za izračunavanje izvoda proizvoda $y=uv$, gde su u i v funkcije od x, uzmimo prirodni logaritam leve i desne strane

$$\lg y = \lg u + \lg v$$

i izračunajmo izvod svakog člana kao složene funkcije. Tada ćemo, na osnovu (IV), (V) i (VII), imati

$$\frac{y'}{y}=\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}.$$

Ako pomnožimo levu i desnu stranu sa $y=uv$ dobijamo $y'=u'v+v'u$ ili konačno

(IX) $$\boxed{(uv)'=u'v+uv'.}$$

Rečima ovo pravilo glasi: *Izvod proizvoda dvaju činioca jednak je zbiru proizvoda izvoda svakog činioca pomnoženog drugim činiocem.*

Za proizvod više činilaca $y=u_1u_2u_3\ldots u_n$ posle logaritmovanja i diferenciranja dobićemo

(IX_2) $$\boxed{\frac{y'}{y}=\frac{u_1'}{u_1}+\frac{u_2'}{u_2}+\frac{u_3'}{u_3}+\ldots+\frac{u_n'}{u_n}.}$$

Ako uvedemo pojam *logaritamskog izvoda* kao količnika izvoda i same funkcije, prethodnu jednačinu možemo formulisati teoremom: *Logaritamski izvod proizvoda jednak je zbiru logaritamskih izvoda svih članova.*

Sam izvod onda se određuje pomoću jednakosti

(IX_1) $$\boxed{(u_1u_2\ldots u_n)'=u_1'u_2\ldots u_n+u_1u_2'\ldots u_n+\ldots+u_1u_2\ldots u_n',}$$

koja se izražava rečenicom: *Izvod proizvoda više činilaca jednak je zbiru proizvoda izvoda svakog činioca pomnoženog proizvodom svih ostalih činilaca.*

Uzmimo sad količnik $y=u/v$ i logaritmujmo ga za prirodnu osnovu: $\lg y=\lg u-\lg v$. Posle izračunvanja izvoda dobijamo

$$\frac{y'}{y}=\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v},$$

odakle dolazimo do konačnog rezultata

(X) $$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2},}$$

ili rečima: *Izvod količnika jednak je izvodu brojioca puta imenilac manje izvod imenioca puta brojilac, sve to podeljeno kvadratom imenioca.*

U specijalnom slučaju, ako imamo proizvod konstante i funkcije $y=Cu$, gde je $C=\text{const.}$, $u=u(x)$, posle primene obrasca za izvod proizvoda, a uzimajući u obzir da je $C'=0$, imamo obrazac

(XI) $$\boxed{(Cu)'=Cu',}$$

koji pokazuje da, pri izračunavanju izvoda proizvoda konstante i funkcije, konstanta ostaje nepromenljivi činilac

Vežbanja:

Naći izvod funkcija: 1. $y=3x^2$; 2. $y=ax+b$; 3. $y=\frac{1}{x}$; 4. $y=5xe^x$; 5. $y=\frac{e^x}{5x}$; 6. $y=\frac{x}{5e^x}$; 7. $y=\frac{2x+1}{x-1}$ 8. $y=\frac{x+1}{x-1}$; 9. $y=\frac{x-1}{x+1}$; 10. $y=ax^2+bx+c$; 11. $y=\frac{1}{ax^2+bx+c}$; 12. $y=\frac{m-x^2}{m+x^2}$; 13. $y=(1+2e^x)(2-e^x)$; 14. $y=x^2(1+me^{ax})$; 15. $y=\log_{10}(x+\lg x)-e^{-x^2}$; 16. $y=e^{1-x^2}\,2^{1-x^2}$; 17. $x=\frac{kt^2}{pt+q}$; 18. $z=10^{ye^y}$; 19. $w=v^2(1-v)$; 20. $s=a+bt+ct^2+dt^3$.

3.61. Izvod stepena

Neka je data funkcija $y=x^m$, gde je m proizvoljan broj. Nađimo izvod ove funkcije.

I ovde ćemo prvo logaritmovati $\lg y=m\lg x$, posle čega se dobija $y'/y=m/x$, odakle je $y'=m\cdot\frac{y}{x}$ ili konačno

(XII) $$\boxed{(x^m)'=mx^{m-1}.}$$

Rečima ovaj rezultat glasi: *Izvod stepena jednak je proizvodu izložioca i stepena sa izložiocem umanjenim za jedinicu.*

Ranije smo imali nekoliko primera izvoda stepena izračunatih neposredno na osnovu definicije izvoda, naime

$$(x)'=1,\ (x^2)'=2x,\ (x^3)'=3x^2,\ (x^4)'=4x^3,\ (x^5)'=5x^4.$$

Sad vidimo da svi ovi rezultati sleduju iz obrasca (XII). Taj obrazac važi ne samo za cele i pozitivne vrednosti m, već i za sve moguće vrednosti tog broja; tako, napr., za $m = -1$ imamo

$$(x^{-1})' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -1/x^2.$$

U slučaju korena imamo

$$y = \sqrt[p]{x^q} = x^{\frac{q}{p}} = x^m,$$

gde je $m = q/p$. Na osnovu (XII) za izvod dobijamo $y' = mx^{m-1} = \frac{q}{p} x^{q/p-1}$ ili definitivno

$$(\sqrt[p]{x^q})' = \frac{q}{p} \sqrt[p]{x^{q-p}}.$$

Specijalno za kvadratni koren imamo

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Vežbanja:

Naći izvod funkcija: 1. $y = x^{10}$; 2. $y = 10^x$; 3. $y = x^e$; 4. $y = e^x$; 5. $y = x^{-4}$; 6. $y = 1/x^8$; 7. $y = 1/\sqrt{x}$; 8. $y = \sqrt[3]{x}$; 9. $y = x^{1+\sqrt{2}}$; 10 $y = x^{\log a}$; 11. $y = x^p/(1+x^q)$; 12. $y = \sqrt{1+x^2}$; 13. $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x + \frac{1}{x}}$; 14. $y = x(1-\sqrt{x})$. 15. $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$; 16. $y = \sqrt{x(x-1)}$; 17. $y = \lg \frac{1-x^2}{1+x^2}$; 18. $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x^2}}$; 19. $y = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$.

3.62. Izvod trigonometriskih funkcija

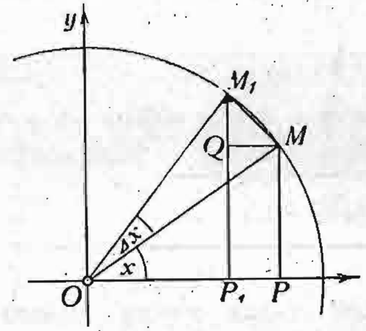
Uzmimo trigonometrisku funkciju $y = \sin x$ i za određivanje izvoda te funkcije upotrebimo *geometrisku metodu.*

Na trigonometriskom krugu (sl. 66) poluprečnika $R = 1$ uzmimo tačku M koja odgovara uglu x. Ako x poraste za Δx, dobićemo novu tačku M_1 pri čemu je luk $\smile MM_1 = \Delta x$.

Konstruišimo $y = \sin x = MP$, $y_1 = \sin(x + \Delta x) = M_1 P_1$. Prema definiciji izvoda stavimo

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{M_1 P_1 - MP}{\Delta x}.$$

Ako uzmemo u obzir da Δx teži nuli, luk $\Delta x = \smile MM_1$ možemo zameniti tetivom MM_1; ova zamena može se obrazložiti potpuno strogo, ali to bi znatno otežalo izlaganje. Stavimo dalje $M_1P_1 - MP = M_1Q$, gde je Q presek prave kroz M, paralelne osi x i ordinate M_1P_1 tačke M_1. Pošto u graničnom položaju pravac tetive MM_1 prelazi u pravac tangente, ova poslednja stoji upravno na poluprečniku OM, trougao M_1QM sličan je trouglu OPM, jer je $\sphericalangle MM_1Q = \sphericalangle MOP$. Iz sličnosti tih trouglova imamo $M_1Q : MM_1 = OP : OM$ i prema tome, za izvod dobijamo



Sl. 66 — Određivanje izvoda funkcije sin x geometriskom metodom

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{M_1 \to M} \frac{M_1Q}{MM_1} = \frac{OP}{OM} = \cos x,$$

ili konačno

(XIII) $$\boxed{(\sin x)' = \cos x.}$$

Rečima ovaj rezultat glasi: *Izvod sinusa jednak je kosinusu.*

Na osnovu sličnih geometriskih rasuđivanja možemo dobiti izvod funkcije $\cos x$, no korisno će biti da se upoznamo i sa drugom metodom.

Neka je $y = \cos x$. Pošto je $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, možemo, smatrajući $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ kao složenu funkciju, računati ovako

$$y' = (\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

Kratko, jednakost

(XIII₁) $$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

se rečima izražava: *Izvod kosinusa jednak je minus sinus.*

Obrazac za izvod količnika omogućuje da se izračunaju izvodi $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{cotg} x$:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Dakle

$$\text{(XIV)} \qquad \boxed{(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x, \quad (\operatorname{cotg} x)' = -1/\sin^2 x.}$$

Kao vežbu možemo izvesti izvode $\sec x$ i $\operatorname{cosec} x$:

$$(\sec x)' = \sec x \,.\, \operatorname{tg} x, \quad (\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \,.\, \operatorname{cotg} x.$$

Vežbanja:

Naći izvod funkcija: 1. $y = \sin 2x$; 2. $y = \cos mx$; 3. $y = a \cos px + b \sin qx$; 4. $y = 2 \sin (5x - 1)$; 5. $y = ae^{-k^2 x} \sin \omega x$; 6. $s = 2e^{-2t} \cos 2t$; 7. $y = e^{\sin x} \cos x$; 8. $y = \left[\lg \frac{1}{x}\right] \sin \pi x$; 9. $y = \log \sin x$; 10. $y = \sqrt{m \sin^2 x + n \cos^2 x}$. 11. Pokazati da funkcije $\sin x$ i $\cos x$ zadovoljavaju jednačinu $y'^2 + y^2 = 1$. 12. Potvrditi tačnost jednačine $1/(\operatorname{tg} x)' - 1/(\operatorname{cotg} x)' = 1$. 13. Pokazati da se logaritamski izvodi tangensa i kotangensa razlikuju samo znakom. 14. Pokazati da je proizvod logaritamskih izvoda sinusa i kosinusa jednak negativnoj jedinici.

3.63. Izvodi inverznih trigonometriskih funkcija

Uzmimo inverznu trigonometrisku funkciju

$$y = \arcsin x$$

Za izračunavanje izvoda te funkcije iskoristimo teoremu za izvode inverznih funkcija:

$$y_x' = (\arcsin x)' = \frac{1}{x_y'} = \frac{1}{(\sin y)_y'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

konačno dobijamo

$$\text{(XV)} \qquad \boxed{(\arcsin x)' = 1 : \sqrt{1 - x^2}\,.}$$

Posle sličnih rasuđivanja možemo izvesti ove rezultate:

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{XV}_1) & (\arccos x)' = -1 : \sqrt{1 - x^2}, \\ (\mathrm{XVI}) & (\operatorname{arctg} x)' = 1 : (1 + x^2), \\ (\mathrm{XVI}_1) & (\operatorname{arccotg} x)' = -1 : (1 + x^2). \end{array}$$

Obratimo pažnju da se izvodi, napr., $\arcsin x$ i $\arccos x$ razlikuju samo znakom i to iz tog razloga što između tih funkcija, recimo, glavnih vrednosti, postoji veza

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{1}{2} \pi,$$

odakle se posle izračunavanja izvoda dobija

$$(\arcsin x)' + (\arccos x)' = 0,$$

a to i potvrđuje suprotnost znakova tih izvoda.

Vežbanja:

1. Izvesti obrasce (XV_1), (XVI), (XVI_1). — Naći izvod funkcija: 2. $y = \operatorname{arc tg} 3x$; 3. $y = \arcsin \sqrt{x}$; 4. $y = \arccos \frac{1}{x}$; 5. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - x}$; 6. $y = \sec e^x + \log \cos^2 x - \arcsin e^{-x}$.

3.64. Izvod stepena promenljive osnove i izložioca

Prethodna pravila za određivanje izvoda ne omogućuju da se odredi izvod funkcije

$$\text{(XVII)} \qquad \boxed{y = u^v,}$$

gde su u i v funkcije nezavisno promenljive x. Za izračunavanje traženog izvoda najjednostavnije da se iskoristi logaritamski izvod. Zato ćemo logaritmovati za prirodnu osnovu obe strane jednačine (XVII): $\lg y = v \lg u$. Za izvod leve i desne strane dobijene jednačine nalazimo

$$\frac{y'}{y} = v' \lg u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u',$$

odakle konačno sleduje

$$(u^v)' = u^v \left(v' \lg u + v \frac{u'}{u} \right).$$

Ovaj rezultat nije potrebno pamtiti, već treba se setiti da u slučaju kada su osnova i izložilac promenljivi, funkciju treba logaritmovati.

Za $y = x^x$, napr., imamo $\lg y = x \lg x$ i prema tome je

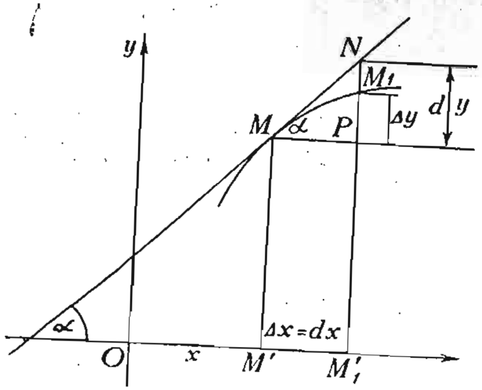
$$(x^x)' = x^x (\lg x + 1).$$

Vežbanja:

Naći izvod funkcija: 1. $y = (\sin x)^{\cos x}$; 2. $y = (x-1)^x$; 3. $y = (ax^2 + bx + c)^x$; 4. $y = (e^x)^{\sin x}$; 5. $y = (\operatorname{arctg} x)^{x^2}$.

3.7. Pojam diferencijala

Na grafiku funkcije $y = f(x)$ uzećemo tačku M sa apscisom x (sl. 67). Ako nezavisno promenljiva x dobije priraštaj Δx, novoj vrednosti argumenta $x + \Delta x$ odgovaraće nova vrednost funkcije $y_1 = f(x + \Delta x)$. Funkcija je dobila priraštaj $\Delta y = y_1 - y = f(x + \Delta x) - f(x)$.



Sl. 67 — Diferencijali argumenta i funkcije

Znamo da je odnos $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ugaoni koeficijent sekante, koja prolazi kroz tačke M i M_1, a granična vrednost tog odnosa je izvod

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha .$$

Definišimo sad nove pojmove: *diferencijal nezavisno promenljive* x sa oznakom dx i *diferencijal funkcije* y sa oznakom dy.

Diferencijal nezavisno promenljive je priraštaj ove promenljive. Dakle imamo $dx = \Delta x$. Na slici je $dx = M'M_1' = MP$.

Ako uzmemo tangentu na grafiku u tački M i konstruišemo tačku N ove tangente, za apscisu $OM_1' = x + dx$, razlika

$$M_1'N - M_1'P = PN$$

je priraštaj ordinate y, pod uslovom da smo prešli od tačke M krive na tačku N tangente; kratko možemo kazati da je to priraštaj ordinate duž tangente. Veličina PN je diferencijal funkcije. Dakle možemo postaviti ovu definiciju: *Diferencijal funkcije je priraštaj ordinate duž tangente.*

Iz trougla PMN neposredno sleduje da je $PN = MP$. tg α ili

$$\text{(XVIII)} \qquad \boxed{dy = y'\, dx.}$$

Izvedena osobina diferencijala funkcije može poslužiti kao analitička definicija tog diferencijala; može se, naime, kazati:

Diferencijal funkcije je proizvod izvoda i diferencijala nezavisno promenljive.

Iz (XVIII) obrasca neposredno sleduje da je

$$\text{(XVIII}_1\text{)} \qquad \boxed{y' = \frac{dy}{dx}}$$

Drugim rečima, izvod je količnik diferencijala funkcije diferencijala nezavisno promenljive.

Pošto je za određivanje diferencijala funkcije potrebno samo pomnožiti izvod diferencijalom nezavisno promeljive, operacije za određivanje izvoda i određivanje diferencijala funkcije, a ova se poslednja zove *diferenciranje*, ekvivalentne su. Često se reč *„diferencirati"* upotrebljuje u smislu određivanja izvoda. Račun, čiju osnovu sačinjavaju operacije sa izvodima i diferencijalima, zove *diferencijalni račun*.

Definicija diferencijala nezavisno promenljive ne stavlja nikakvo principsko ograničenje za vrednost tog diferencijala. Kao i priraštaj nezavisno promenljive, on može biti potpuno proizvoljan, razume se u oblasti promene nezavisno promenljive za datu funkciju.

U većini slučajeva zgodno je dx uzimati kao vrlo malu veličinu. Ona može biti i beskrajno mala. Kao što znamo, u Matematici se pod tom veličinom podrazumeva promenljiva veličina, čiju vrednost možemo načiniti manjom od bilo koje unapred date veličine.

Diferencijal dx možemo smatrati promenljivom veličinom, no ona ne zavisi od x.

Za dve beskrajno male veličine, ε, i η, kaže se da su istog reda, ako njihov odnos $\eta : \varepsilon$ ima konačnu vrednost.

Ako je dx beskrajno mala veličina, dy je beskrajno mala istog reda, pod uslovom da je y' konačno, jer je $dy : dx = y'$.

Bez obzira na to što dx može biti i konačna veličina, o diferencijalima dx i dy matematičari obično misle kao o beskrajno malim veličinama. U ovom se smislu te veličine zovu *diferencijalni elementi.*

Znamo još iz Elementarne matematike da kružna linija može biti smatrana kao granični oblik zatvorene izlomljene linije koja se sastoji iz niza beskrajno malih tetiva (upisanog mnogougla) ili beskrajno malih tangenata (opisanog mnogougla). Isto tako i sa svakom drugom krivom možemo dovesti u vezu upisanu, odnosno opisanu, izlomljenu liniju. U tom smislu svaka beskrajno mala tetiva, odnosno tangenta zamenjuje jedan deo, *jedan diferencijalni element krive.* Za tačke diferencijalnog elementa tetiva, kriva i tangenta imaju isti pravac; na putu tog elementa dy pretstavlja ne samo diferencijal već i priraštaj funkcije. Prema tome dy pokazuje zakon ponašanja funkcije na beskrajno malom elementu. U tome je glavna uloga diferencijala.

Vežbanja:

Odrediti diferencijal funkcija: 1. $y=x^{10}$; 2. $y=\operatorname{tg} x$; 3. $y=e^{\sin x}$; 4. $u=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}$; 5. $y=(\operatorname{tg} x)\, e^x$; 6. $s=at^2+bt+$; 7. $z=\varphi(u)$; 8. $w=2^z+z^2$; 9. $\omega(k)=e^{-k^2}$; 10. $x=a\cos\omega t+b\sin\omega t$.

3.8. Tablica za diferenciranje

Sad ćemo navesti u obliku tablice ranije navedene obrasce za diferenciranje.

(I) $$y=f(x)$$

(II) $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x_1\to x}\frac{y_1-y}{x_1-x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)=\operatorname{tg}\alpha$$

(III) $$(C)'=0$$

(IV) $$(u\pm v)'=u'\pm v'$$

(V) $$y=f(u),\ u=\varphi(x);\ y'=y_u'\cdot u'$$

(VI) $$x_y'=1:y_x'$$

(VII) $(\lg x)'=1:x$; (VII$_1$) $(\log_a x)'=1:x\lg a=\frac{1}{x}\log_a e$;

(VII$_2$) $(\log_{10} x)'=1:x\lg 10=\frac{1}{x}\log_{10} e$;

(VIII) $(e^x)'=e^x$; (VIII$_1$) $(a^x)'=a^x\lg a=a^x/\log_a e$;

(VIII$_2$) $(10^x)'=10^x\lg 10=10^x/\log_{10} e$;

(IX) $(uv)'=u'v+uv'$; (IX$_1$) $(u_1 u_2\ldots u_n)'=u_1' u_2\ldots u_n+$
$+u_1 u_2'\ldots u_n+\ldots+u_1 u_2\ldots u_n'$;

(IX$_2$) $$\frac{(u_1 u_2\ldots u_n)'}{u_1 u_2\ldots u_n}=\frac{u_1'}{u_1}+\frac{u_2'}{u_2}+\ldots+\frac{u_u'}{u_n};$$

(X) $$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

(XI) $$(Cu)'=Cu'$$

(XII) $$(x^m)'=mx^{m-1}$$

(XIII) $(\sin x)'=\cos x$; (XIII$_1$) $(\cos x)'=-\sin x$;

(XIV) $(\mathrm{tg}\, x)' = 1 : \cos^2 x$; (XIV$_1$) $(\mathrm{cotg}\, x)' = -1 : \sin^2 x$;

(XV) $(\arcsin x)' = 1 : \sqrt{1-x^2}$; (XV$_1$) $(\arccos x)' = -1 : \sqrt{1-x^2}$;

(XVI) $(\mathrm{arc\,tg}\, x)' = 1 : (1+x^2)$; (XVI) $(\mathrm{arc\,cotg}\, x') = -1 : (1+x^2)$

(XVII) $y = u^v$ logaritmovati

(XVIII) $$dy = y'dx, \quad y' = \frac{dy}{dx}.$$

Pomoću ovih obrazaca možemo izračunati izvod ili diferencijal svih dosad nama proučenih funkcija.

Vežbanja:

1. Pomoću slike potvrditi tačnost nejednakosti $1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha$.

2. Na osnovu prethodnog zadatka dokazati jednačinu (1) $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$.

3. Izvesti analitički, na osnovu (1), obrazac $(\sin x)' = \cos x$. 4. Primeniti geometrisku metodu za izvođenje rezultata $(\mathrm{tg}\, x)' = 1 : \cos^2 x$. 5. Posle pregleda tablice za diferenciranje pokazati da se ona dobija na osnovu opštih teorema o graničnim vrednostima i dva specijalna obrasca za granične vrednosti, naime (1) i $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. 6. Pokazati tačnost jednačine $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1$. 7. Na osnovu prethodnog obrasca izvesti $(e^x)' = e^x$. 8. Izvesti obrazac (VI) tablice za diferenciranje pomoću grafika date i inverzne funkcije. — Naći izvod funkcija: 9. $y = 3(x-1)(x-2)$; 10. $y = (x-4):(x+1)$; 11. $y = 2/\sqrt{x}$; 12. $y = \sqrt{x^2-3x+1}$; 13. $y = \lg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; 14. $y = (\log x):x$; 15. $y = \lg(x-\sqrt{1+x^2})$; 16. $y = \cos x:(1+x)$; 17. $y = \mathrm{tg}\, x^3$; 18. $y = \sin^3 x \cos^5 x$; 19. $y = (1-\cos x):(1+\cos x)$; 20. $y = \lg\mathrm{tg}\frac{x}{3}$; 21. $y = \cos\lg x$; 22. $y = \lg(\lg x)$; 23. $y = \lg\cos^2 2x$; 24. $y = (ax+b)^{mx+n}$; 25. $y = m\cos^n x + n\sin^m x$; 26. Proveriti ove obrasce za izvode hiperboličkih funkcija: $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\mathrm{tgh}\, x)' = 1 : \cosh^2 x$, $(\mathrm{cotgh}\, x)' = -1 : \sinh^2 x$. 27. Ako je $x = \sinh y$, $y = \mathrm{arsinh}\, x$ je inverzna funkcija hiperboličkog sinusa (čitaj: ar — od latinske reči area, površina — sinus hiperbolikus). Treba dokazati: 1. da je $\mathrm{arsinh}\, x = \lg(x+\sqrt{x^2+1})$ i 2. izvesti obrazac $(\mathrm{arsin}h\, x)' = 1 : \sqrt{x^2+1}$. 28. Izvesti obrasce: $\mathrm{arcos}h\, x = \lg(x+\sqrt{x^2-1})$, $\mathrm{artg}h\, x = \frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$, $\mathrm{arcotg}h\, x = \frac{1}{2}\lg\frac{x+1}{x-1}$ i odrediti izvode tih funkcija. 29. Dokazati da je $\mathrm{artg}h\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \lg x$. 30. Naći izvod funkcija: $\sin h\frac{x}{m}$, $\lg\cos h\, x$, $\cos h^3 x$. 31. Naći vrednosti izvoda funkcije $y = 2\cos\frac{x}{2}$ za $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi, \pi$ i 2π. — Odrediti vrednosti izvoda funkcije za navedenu vrednost argumenta: 32. $y = 3\cos x$ za $x = \frac{\pi}{2}$, 33. $y = xe^{\Upsilon}$ za $x = 2$; 34. $y = 2\cos 5t + 4\sin 3t$ za $t = \frac{1}{15}$; 35. $x = at^2 + bt + c$ sa $t = 2$, $a = 0{,}25$; $b = 0{,}75$; 36. $z = \sqrt{x^2+1}$ za $x = 0{,}75$. 37. Dokazati da je $y' + y = 1$, ako je $y = 1 + Ce^{-x}$, gde je C konstanta. 38. Dokazati da je $y' + my = n$, ako je $y = \frac{n}{m} + Ce^{-mx}$. 39. Dokazati da je $\sin x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$, ako je $y = f(x)$ i $x = 2\,\mathrm{arctg}\, e^t$. 40. Dokazati da je $\frac{1+x^2}{x}\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$, ako je $y = f(x)$ i $x = \sqrt{e^{2t}-1}$. 41. Potvrditi da $y = \sin x - 1$ zadovoljava jednačinu $\frac{dy}{dx} + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$.

3.9. Izvodi i diferencijali višeg reda

Od izvoda

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \varphi(x) = \varphi,$$

date funkcije $y = f(x)$ možemo ponovo obrazovati izvod

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx} = \psi(x) = \psi.$$

Za funkciju y to je izvod *drugog reda*. Možemo ga obeležiti sa y'' (čitaj: ipsilon drugi ili sekundum).

Ako za diferencijal dy funkcije y opet obrazujemo diferencijal, dobićemo *drugi diferencijal funkcije* y. Označimo ga sa d^2y. Prema definiciji diferencijala imamo

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = (y'dx)'dx = y''dx\,dx = y''dx^2.$$

Iz ovog rezultata sleduje i druga forma oznake drugog izvoda

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Ako je dx beskrajno mala veličina prvog reda, a y'' je konačno, onda je diferencijal d^2y beskrajno mala veličina drugoga reda.

Drugi izvod ponovo možemo diferencirati: dobićemo *treći izvod*. Za ovaj imamo

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3},$$

gde je d^3x *diferencijal trećeg reda*.

Uopšte uzev, može biti govora o *n'-tom izvodu* kao izrodu prethodnog, $(n-1)$'og izvoda. n-ti izvod funkcije y obeležava se sa

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n},$$

gde je d^ny n-ti *diferencijal*.

Treba li navoditi naročita pravila za određivanje izvoda višeg reda? Ne. Potrebno je uglavnom uzastopno diferencirati datu funkciju dovoljan broj puta.

Ima, međutim, slučajeva kada se vidi pravilo po kome se obrazuju izvodi; na osnovu tog pravila moguće je napisati izvod traženog reda a da se ne moraju računati svi prethodni izvodi. Navešćemo primere takvih funkcija.

Znamo da funkcija e^x daje, posle diferenciranja, tu istu funkciju. Prema tome možemo napisati

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

Za funkciju a^x slični obrazac izgleda $(a^x)^{(n)} = a^x (\lg a)^n$.

Uzmimo sad funkciju $y = x^m$. Prvi izvod ima oblik $y' = mx^{m-1}$. Drugi izvod je $y'' = m(m-1)x^{m-2}$. Treći je $y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$. Prema očevidnom pravilu možemo napisati n-ti izvod,

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\dots[m-(n-1)]\,x^{m-n}$$

Ako je m ceo i pozitivan broj, m-ti izvod ima stalnu vrednost

$$(x^m)^{(m)} = m(m-1)(m-2)\dots 3.2.1 = m!$$

$(m+1)$'*i* i svi ostali izvodi jednaki su nuli.

Ako broj m nije ceo i pozitivan, nijedan izvod nema konstantnu vrednost; prema tome nijedan izvod nije jednak nuli. Tada je niz izvoda beskonačan.

Uzećemo još i funkcije $\sin x$ i $\cos x$. Za prvi izvod imamo $(\sin x)' = \cos x$; kada $\cos x$ zamenimo sa $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, dobijamo $(\sin x)' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Na osnovu ovog obrasca pišemo n-ti izvod sinusa

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Isto tako za kosinus, kada je $(\cos x)' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, imamo $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

Vežbanja:

Naći drugi izvod funkcija: 1. $y = 5x^2 + 3x + 4$; 2. $y = ax^2 + bx + c$; 3. $y = 1/x$; 4. $y = \sqrt{x}$; 5. $y = xe^x$; 6. $y = x\cos x$; 7. $y = \frac{1}{x-a}$; 8. $y = e^x \sin x$; 9. $y = \sin 2x + e^x \cos 2x$. 10. Naći treći isvod funkcije $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, napisane u obliku $y = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cx+d}$ i prema njemu napisati n-ti izvod. 11. Pokazati da funkcija $x = a\cos kt$ zadovoljava jednačinu $x'' + k^2x = 0$. 12. Pokazati da funkcija $z = Ae^{-k^2t}\sin\omega^2 t$, gde su A, k, ω konstante, zadovoljava jednačinu $z'' + 2k^2z' + (\omega^4 + k^4)z = 0$. 13. Proveriti jednačinu $(1+\cos x)y'' = y$ za $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. 14. Proveriti da li $y = e^{-x}(ax^2 + bx + c)$ zadovoljava jednačinu $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.

INDEX RERUM

(Brojevi označavaju strane)