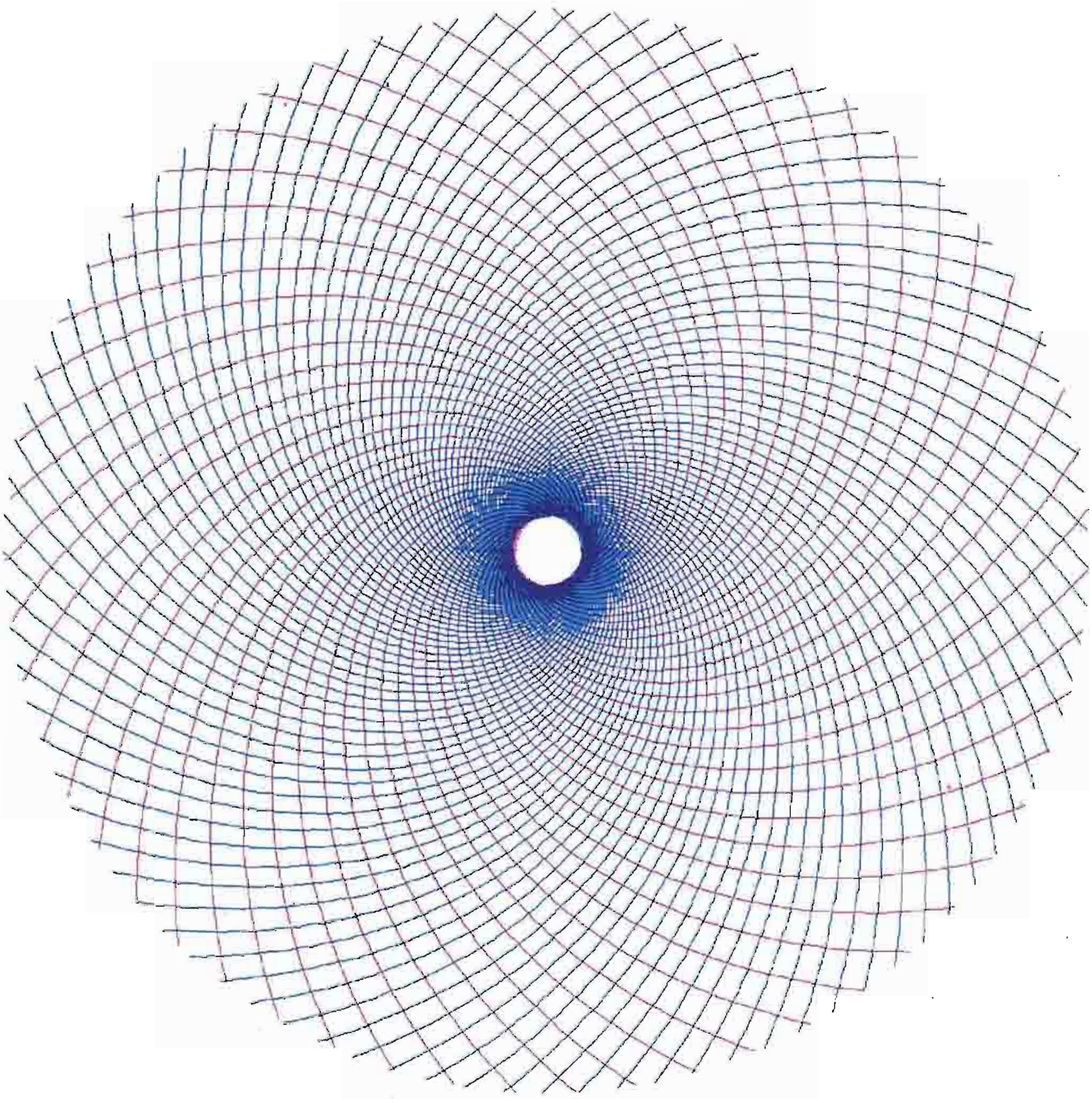
YU ISSN 0354-656X

2
1995/96

ТАНГЕНТА

ЧАСОПИС ЗА МАТЕМАТИКУ И РАЧУНАРСТВО
ЗА УЧЕНИКЕ СРЕДЊИХ ШКОЛА



НОВИ САД
1995

YU ISSN 0354-656X

САВЕЗ ДРУШТАВА МАТЕМАТИЧАРА ЈУГОСЛАВИЈЕ
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ТАНГЕНТА – часопис за математику и рачунарство
за ученике средњих школа

Излази у четири броја током школске године. Тираж: 7500 примерака.

Адреса часописа је:
"Тангента", Институт за математику,
Трг Доситеја Обрадовића 4, 21000 Нови Сад
тел./факс: (021) 54-597

Претплата за 1995/96. годину износи 20 динара. Цена једног броја је 6 динара.

Уплате на жиро рачун:
Друштво математичара Србије – Подружница Нови Сад
број 45700-678-0-36703.
На уплатници као сврху уплате назначити "За Тангенту"

Овај број технички су припремили Ратко Тошић, Раде Дорословачки, Зоран Путник, Војислав Петровић, Ђура Пауновић и Милош Стојаковић.

Штампање овог броја "Тангенте" помогли су Министарство за науку и технологију Републике Србије и Министарство просвете Републике Србије.

Штампа: Политоп, Београд

МЕТОДА ПОВРШИНА

Милан Шарић, Бели Манастир

За површину троугла постоји више формула. Ако се површина троугла изрази на два различита начина, тада се везе међу постојећим параметрима могу згодно искористити. Управо у томе је и идеја примене методе површина у неким тригонометријским задацима.

Пример 1 Решити једначину

$$\sqrt{15-12\cos x}+\sqrt{7-4\sqrt{3}\sin x}=4\ ,$$

где је $0^\circ < x < 90^\circ$.

Решење. Дата једначина се може трансформисати у облик

$$\begin{aligned}\sqrt{(\sqrt{12})^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}\cdot\cos x} &\ + \\ \sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot\cos(90^\circ-x)} &\ = \ 4.\end{aligned} \tag{1}$$

Уочимо да је на основу косинусне теореме први сабирак једнак страници троугла чије су друге две странице $\sqrt{12}$ и $\sqrt{3}$, а угао међу њима x. Аналогно, други сабирак једнак је страници троугла чије су друге две странице једнаке $\sqrt{3}$ и 2 и угао међу њима $90^\circ - x$ (јер је $\sin x = \cos(90^\circ - x)$).

Нека је ABC правоугли троугао са катетама $|AC| = \sqrt{12}$ и $|BC| = 2$. Уочимо на хипотенузи AB тачку D, такву да је $|CD| = \sqrt{3}$ (сл.1). Тада је, према наведеним ознакама, $\angle ACD = x$ и $\angle BCD = 90^\circ - x$. Даље, дуж AD једнака је првом, а дуж BD другом сабирку на левој страни (1). Отуда је $|AB| = 4$ (што следи и из Питагорине теореме). Дакле,

$$|AD| + |BD| = 4.$$

Помножимо ли ову једнакост са $\frac{h_c}{2}$, где је h_c висина из темена C, добијамо

$$\frac{|AD|\cdot h_c}{2}+\frac{|BD|\cdot h_c}{2}=\frac{4\,h_c}{2},$$

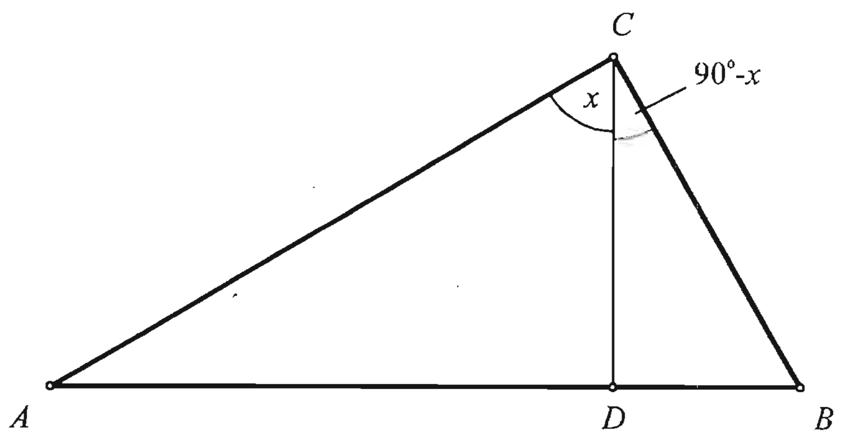
односно, имајући у виду површине троуглова,

$$P(ADC) + P(BDC) = P(ABC). \tag{2}$$

($P(XYZ)$ означава површину троугла XYZ.)

С обзиром да је $P(ADC) = \frac{\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}\cdot\sin x}{2}$, $P(BDC) = \frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sin(90^\circ-x)}{2}$ и $P(ABC) = \frac{2\cdot\sqrt{12}}{2}$ из (2) добијамо

$$6\sin x + 2\sqrt{3}\,\cos x = 4\sqrt{3},$$



Слика 1.

односно

$$\begin{aligned} \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \tfrac{1}{2}\cos x &= 1 \\ \cos 30^\circ \sin x + \sin 30^\circ \, cos x &= 1 \\ \sin(x+30^\circ) &= 1. \end{aligned}$$

Како је x оштар угао решење ове једначине је $x = 60^\circ$, што је уједно и решење једначине (1).

Пример 2 *Ако су* α, β *и* γ *углови троугла, тада је*

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1.$$

Доказати.

Решење. Нека $k(O;r)$ кружница уписана у троугао ABC; O – центар, r – полупречник. Обележимо са A_1, B_1, C_1 тачке додира кружнице k са страницама BC, CA, AB, редом (сл. 2).

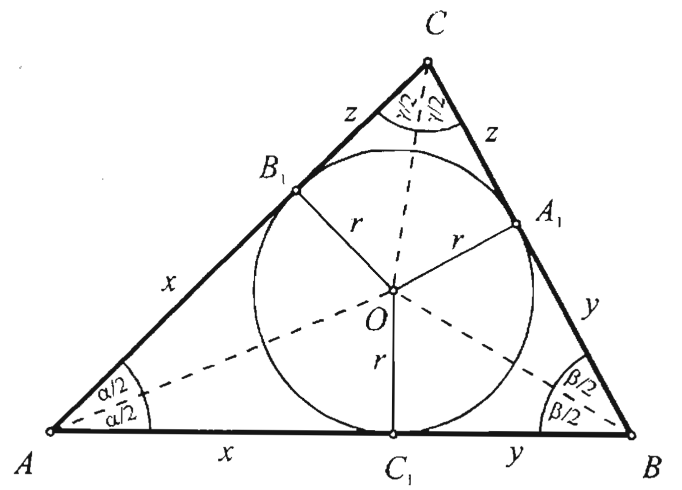
Уведимо још следеће ознаке:

$$|AC_1| = |AB_1| = x, \quad |BC_1| = |BA_1| = y, \quad |CA_1| = |CB_1| = z,$$

$$|AB| = c, \quad |BC| = a, \quad |CA| = b, \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Тада је $x = s - a$, $y = s - b$ и $z = s - c$. Из правоуглих троуглова AOC_1, BOA_1 и COB_1 следи

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}, \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b}, \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c}. \tag{1}$$



Слика 2.

Ако површину троугла ABC изразимо преко полупречника уписане кружнице и полуобима, односно Херонове формуле добијамо

$$P(ABC) = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

одакле је

$$r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}. \tag{2}$$

Сада из (1) и (2) следи

$$\operatorname{tg}\tfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\tfrac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\tfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\tfrac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\tfrac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\tfrac{\alpha}{2} =$$

$$\tfrac{r^2}{(s-a)(s-b)} + \tfrac{r^2}{(s-b)(s-c)} + \tfrac{r^2}{(s-c)(s-a)} =$$

$$\tfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s(s-a)(s-b)} + \tfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s(s-b)(s-c)} + \tfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s(s-c)(s-a)} =$$

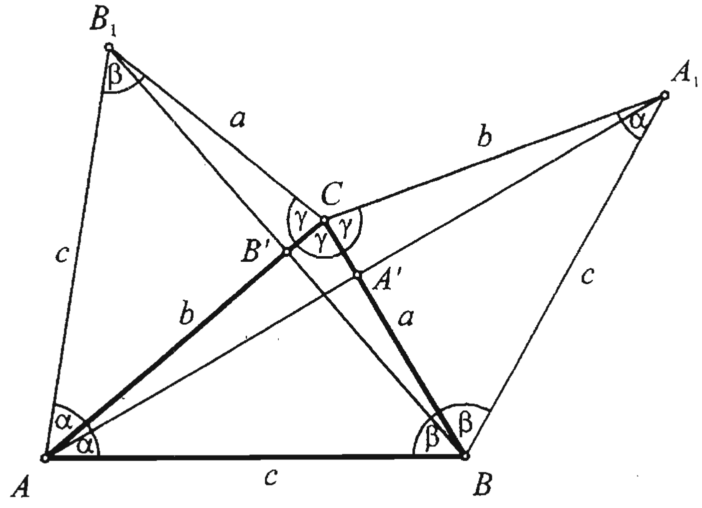
$$\tfrac{s-c}{s} + \tfrac{s-a}{s} + \tfrac{s-b}{s} = \tfrac{3s-2s}{s} = 1.$$

Пример 3 *Ако су* α, β, γ *углови оштроуглог троугла, тада из* $\alpha < \beta < \gamma$ *следи*

$$\sin 2\alpha > \sin 2\beta > \sin 2\gamma.$$

Доказати.

Решење. *Нека је* ABC *оштроугли троугао и нека је* A_1 *– тачка симетрична темену* A *у односу на праву* BC *и* B_1 *– тачка симетрична темену* B *у односу на праву* AC. *Обележимо са* A' *и* B' *пресеке дужи* AA_1 *и* BC, *односно* BB_1 *и* CA *(сл. 3).*



Слика 3.

Из услова $\alpha < \beta < \gamma$ следи

$$a < b < c, \tag{1}$$

где је $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$. Даље из подударности троуглова ACA' и A_1CA', односно BCB' и B_1CB' следи

$$\angle ACA_1 = \angle BCB_1 = 2\gamma. \tag{2}$$

Како је, услед симетрије, $|CB_1| = a$ и $|CA_1| = b$, из (1) и (2) добијамо

$$\begin{aligned} P(BCB_1) &= \tfrac{1}{2}a^2 \sin 2\gamma \\ &< \tfrac{1}{2}b^2 \sin 2\gamma \\ &= P(ACA_1). \end{aligned} \tag{3}$$

Како је $\triangle AB'B_1 \cong \triangle AB'B$ и $\triangle BA'A_1 \cong \triangle BA'A$ то је због (3)

$$\begin{aligned} \tfrac{c^2 \sin 2\alpha}{2} &= P(BAB_1) \\ &= 2\,P(ABC) - P(BCB_1) \\ &> 2\,P(ABC) - P(ACA_1) \\ &= P(ABA_1) \\ &= \tfrac{c^2 \sin 2\beta}{2}. \end{aligned}$$

Отуда је $\sin 2\alpha > \sin 2\beta$. Слично доказујемо неједнакост $\sin 2\beta > \sin 2\gamma$.

"ГРУБА СИЛА" У ПРОГРАМИРАЊУ

Зоран Будимац, Ђура Паунић,
Природно-математички факултет, Нови Сад

"Грубом силом" (енгл. brute force) се зове техника програмирања (или конструкције алгоритама) по којој се до решења задатог проблема долази тако што се генеришу сви могући кандидати за решење, па се испитује да ли сваки кандидат задовољава услове решења.

"Груба сила" је обично прва "техника" коју науче млади програмери за решавање комбинаторних проблема, а често је користе и искусни програмери, као први корак ка коначном решењу задатог проблема. Јасно је да "грубу силу" треба избегавати кад год је то могуће, пре свега зато што је најчешће скуп кандидата за решење огроман, а решења су малобројна. Ако користимо "грубу силу" једини начин да повећамо ефикасност нашег решења је да купимо бржи рачунар.

"Груба сила" се често може избећи неком од стандардних техника конструкције алгоритама: алгоритмима "похлепе", методом "подели па владај", бектреком, динамичким програмирањем и слично. Са бектреком смо се упознали у првом броју часописа, док ћемо се са осталим техникама упознавати у наредним бројевима. У овом чланку ћемо међутим, на једном познатом проблему показати како се почетно, очигледно решење које се добија применом "грубе силе" може значајно побољшати. При томе нећемо користити никакву стандардну технику конструкције алгоритама, већ само "здрав разум" и мало математике.

Питагорине тројке

Из геометрије је позната Питагорина теорема, чињеница да је у правоуглом троуглу збир квадрата катета једнак квадрату хипотенузе. Постоје случајеви када су и хипотенуза и катете природни бројеви (на пр. 3, 4, 5 или 5, 12, 13). Проблем који треба да се реши је да се нађу све тројке природних бројева, означимо их са (a, b, c), за које важи да је $a^2 + b^2 = c^2$. Овакве тројке природних бројева се називају Питагорине тројке и претпоставићемо да су a, b, c природни бројеви мањи од унапред задате границе n.

Најједноставније решење је да се генеришу све могуће тројке природних бројева a, b и c мањих од n и да се за сваку тројку посебно испита да ли она задовољава услов, $a^2 + b^2 = c^2$, тј. да ли је Питагорина тројка. Када се овај поступак налажења Питагориних тројки испрограмира на Паскалу, добија се следећи програм:

```
program PitagorineTrojke;
var  n, a, b, c: integer;
begin
  repeat
    writeln('Unesite granicu za Pitagorine trojke (<= 100)');
    readln(n)
  until (1 <= n) and (n <= 100);
  writeln;
  writeln('Pitagorine trojke do ',n,' su');
  writeln;
  for a := 1 to n do
    for b := 1 to n do
      for c := 1 to n do
        if sqr(a) + sqr(b) = sqr(c) then
          writeln('(',a,',',b,',',c,')')
end.
```

Ограничење на величину броја n мора да се стави, јер је скуп целих бројева, који се у Паскалу назива `integer`, коначан скуп. Дакле, у Паскалу мора да буде задовољено $a^2 + b^2 <$ `maxint` да би програм коректно радио. Када је `maxint` $= 32767$, тада a и b морају бити мањи од 128.

Овакво решење је очигледно решење "грубом силом". Да бисмо оценили сложеност неког алгоритма треба је измерити на неки начин. Једна могућност је мерити време извођења, али то време зависи од брзине рада рачунара на коме се програм изводи па није објективно мерило. Други начин за мерење сложености алгоритма је број корака који је потребан да се програм изведе. Међутим и ту треба бити пажљив. Очигледно број корака зависи од величине полазних података, па број корака треба да се изрази као функција од величине полазних података. За то се користи тзв. "велико O" нотација. Ако је $f(n)$ позитивна реална функција дефинисана за сваки природан број n, (n је величина улазних података), тада се са $O(f(n))$ означава да је за довољно велико n ($n > n_0$) број корака алгоритма ограничен функцијом $cf(n)$, за неки позитиван реалан број c.

Рачунска сложеност овог алгоритма је $O(n^3)$, што значи да је број корака потребан за израчунавање пропорционалан са n^3 корака. При том константа пропорционалности није јако важна, јер ако се број полазних података удесетостручи, тј. уместо n имамо $10n$ података тада ће израчунавање трајати $(10n)^3 = 1000n^3$ - хиљаду пута дуже од израчунавања за n. Интуитивно, $O(n^3)$, у нашем случају, значи да се израчунавање врши унутар троструке петље, од којих се свака извршава n пута.

Иако коректно, претходно решење је неефикасно. За $n = 1000$, испитивање би се изводило чак 1000000000 пута, што би и на најбржим рачунарима трајало "довољно" дуго. Уместо куповине бржег рачунара, јефтиније је поправити алгоритам.

Прва идеја је искористити чињеницу да је могуће уредити бројеве a, b и c по величини $a < b < c$, па да друга петља иде од $a+1$ до n (уместо од 1 до n), а трећа петља од $b+1$ до n (уместо од 1 до n), а када се нађе Питагорина тројка $a < b < c$ да се тада штампа и она и тројка b, a, c. На овај начин се алгоритам убрзава, али му сложеност и даље остаје $O(n^3)$. Израчунајте број корака у овом случају.

Међутим могуће је значајно побољшати алгоритам коришћењем једноставне чињенице да ако су познати a и b тада се c израчунава са $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ и нема потребе за унутрашњом петљом (петљом по c). Да би у оваквом решењу добијена тројка била Питагорина, потребно је једино проверити да ли је тако израчунато c природан број. Ако јесте, нашли смо Питагорину тројку – штампати је, ако није – наставити тражење. При том треба пазити на речунање са реалним бројевима на рачунару при провери да је c цео број. Наиме, при израчунавању квадратног корена је могуће да дође до мале грешке, најчешће на последњој децимали броја. Да се та грешка избегне, уместо упоређивања једнакости два реална броја, треба проверити да ли су они "довољно" блиски са `abs(a-b)<0.01`. Шта значи "довољно блиско" зависи од прецизности рачунања са реалним бројевима на датом рачунару и у датом програмском језику на њему.

Рачунска сложеност овог решења је за ред величине мања. Како имамо само две петље једну у другој то је сложеност овог алгоритма $O(n^2)$, па се испитивање услова за Питагорину тројку за $n = 1000$ врши "само" 1000000 пута (или ако се улазни подаци повећају 10 пута програм ће рачунати само 100 пута дуже).

```
program PitagorineTrojke1;
  var n, a, b: integer;
      c: real;
begin
  repeat
    writeln('Unesite granicu za Pitagorine trojke (<= 100)');
    readln(n)
  until (1 <= n) and (n <= 100);
  writeln;
  writeln('Pitagorine trojke do ',n,' su');
  writeln;
  for a := 1 to n do
    for b := 1 to n do
      begin
        c := sqrt(sqr(a) + sqr(b))
        (* provera da li je z ceo broj *)
        if abs(c - round(c)) < 0.01 then
          writeln('(',a,',',b,',',round(c),')')
      end
end.
```

И овај алгоритам је могуће мало убрзати на исти начин као и претходни тиме што унутрашња петља може да иде од $a+1$ до n, а када се нађе Питагорина тројка a, b, c, тада се штампа и тројка b, a, c.

Опишимо Питагорине тројке на други начин. Очигледно је да је

$$a^2+b^2=c^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1,$$

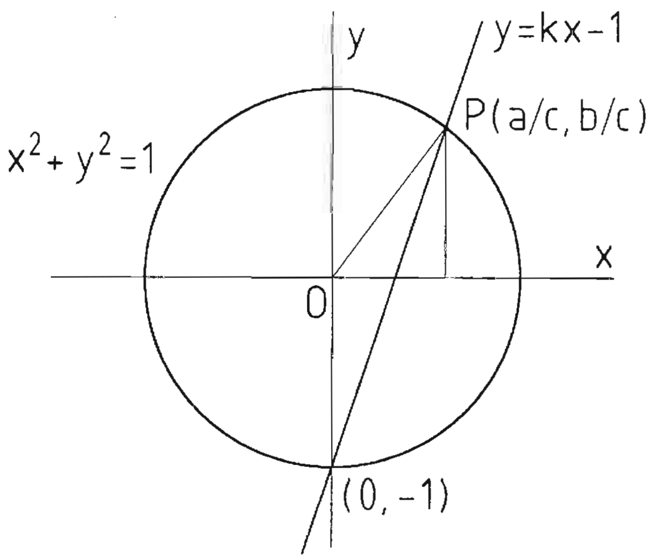
па свакој Питагориној тројки $P(a,b,c)$, одговара тачка P на луку јединичног круга у првом квадранту $P(a/c,b/c)$ или $P(b/c,a/c)$, чије су обе координате рационални бројеви. Поставимо праву p кроз тачке $(0,-1)$ и $P(a/c,b/c)$. Користећи да једначина праве кроз две тачке

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

добија се да је једначина праве кроз тачке $(0,-1)$ и $P(a/c,b/c)$

$$y=kx-1 \quad \text{у којој је} \quad k=\frac{\frac{b}{c}+1}{\frac{a}{c}}=\frac{b+c}{a},$$

а када је $P(b/c,a/c)$ добија се да је $k=(a+c)/b$. У оба случаја је тачка P на луку круга у првом квадранту па је увек $k>1$ (види слику).



Међутим, важи и обрнуто. Свакој правој $p: \ y=kx-1$ чији је коефицијент правца рационалан број већи од 1, $k>1$, одговара једна Питагорина тројка, која се добија из координата тачке пресека праве p и јединичног круга различите од $(0,-1)$. Наиме права p сече јединични круг $x^2+y^2=1$ у две тачке чије се координате добијају решавањем система једначина

$$y=kx-1, \qquad x^2+y^2=1.$$

Ако се елиминише y добија се да је $x^2 + k^2x^2 - 2kx + 1 = 1$ или $x((k^2+1)x - 2k) = 0$. Једно решење је тачка чије су координате $x_1 = 0$, $y_1 = -1$, а друго решење је тачка која има координате

$$x_2 = \frac{2k}{k^2+1}, \quad y_2 = kx_2 - 1 = \frac{2k^2}{k^2+1} - 1 = \frac{k^2-1}{k^2+1}.$$

Како је $k > 1$ ова тачка је у првом квадранту. Ако заменимо координате тачке (x_2, y_2) у једначину круга $x^2 + y^2 = 1$ добија се да је

$$\left(\frac{2k}{k^2+1}\right)^2 + \left(\frac{k^2-1}{k^2+1}\right)^2 = 1 \iff (2k)^2 + (k^2-1)^2 = (k^2+1)^2,$$

а када ставимо да је $k = m/n$ и средимо

$$\left(2\frac{m}{n}\right)^2 + \left(\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 1\right)^2 = \left(\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 1\right)^2 \iff (2mn)^2 + (m^2-n^2)^2 = (m^2+n^2)^2,$$

па је $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$ или $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$ Питагорина тројка.

Тиме смо доказали теорему:

Теорема 1 *За сваки пар природних бројева m и n, $m > n$, бројеви*

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2,$$

чине Питагорину тројку.

Свака тројка генерисана на основу теореме 1 јесте Питагорина и нема потребе за генерисањем свих могућих кандидата и додатним испитивањем о задовољености услова. Морамо уочити да се ефикасност решења на основу теореме 1 не може једноставно упоредити са ефикасношћу претходна два решења (погледати задатке на крају чланка).

Посебне Питагорине тројке

Могуће је међу Питагориним тројкама тражити тројке одређеног облика.

1. Досада наведени алгоритми посматрају Питагорине тројке $(3,4,5)$, $(6,8,10)$, $(9,12,15)$ итд. дакле тројке облика $(3k, 4k, 5k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, као различите Питагорине тројке. Математички гледано ове тројке нису суштински различите, јер су правогли троуглови који им одговарају слични. Због тога се уводи појам примитивне Питагорине тројке. Примитивна Питагорина тројка (a, b, c) је она у којој a, b и c немају заједнички фактор.

Дакле примитивним Питагориним тројкама одговарају правоугли троуглови који нису међусобно слични.

2. Следећа могућност ограничења је решење проблема: генерисати све Питагорине тројке (до одређене границе n) код којих се једна катета за 1 разликује од хипотенузе. Решење "грубом силом" (генерисање свих могућих тројки, па испитивање да ли су Питагорине и да ли задовољавају овај додатни услов) је могуће, али врло неефикасно. Покажите да се коришћењем "грубе силе" добија алгоритам сложености $O(n^3)$. Уместо таквог решења (сложености $O(n^3)$), објаснимо одмах много ефикаснији алгоритам, чија је сложеност $O(n)$.

Због услова задатка мора да је $c = b + 1$ и да је $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. Питагорину тројку смо нашли ако је a природан број. Програм за овај поступак има само једну петљу (по b), а све остало се израчунава у њој па је сложеност овог поступка $O(n)$.

```
program PitagorineTrojke2;
var b, c, n : integer;
    a: real;
begin
  repeat
    writeln('Unesite granicu za Pitagorine trojke (<= 100)');
    readln(n)
  until (1 <= n) and (n <= 100);
  writeln;
  writeln('Pitagorine trojke do ',n,' za koje je  c - b = 1');
  writeln;
  for b := 1 to n do
    begin
      c := b + 1;
      a := sqrt(sqr(c) - sqr(b))
      if abs(a - round(a)) < 0.01 then
        (* da li je a ceo broj ? *)
        writeln('(',round(a),',',b,',',c,')')
    end
end.
```

3. Природно се поставља и слично ограничење на катете, тј. могуће је решавати проблем: наћи све Питагорине тројке код којих је разлика између две катете (тј. a и b) 1. Ако се и овај проблем покуша решавати "грубом силом" убрзо ћемо се уверити да је број таквих Питагориних тројки релативно врло мали, а алгоритам је опет реда $O(n^3)$ (Докажите). За a из интервала од 1 до 25000, на начин аналоган претходном решењу, добијају се следеће Питагорине тројке:

3	4	5
20	21	29
119	120	169
696	697	985
4059	4060	5741
23660	23661	33461

Очигледно је да у овом случају ни решење рачунске сложености од $O(n)$ није довољно добро. На велики број испитаних кандидата долази врло мали број оних који задовољавају услове и потребно нам је неко боље решење овог проблема.

У задацима на крају овог чланка је дато упутство за проналажење законитости на основу које је могуће директно израчунати следећу Питагорину тројку код којих је разлика између две катете 1.

4. Разматрање Питагориних тројки закључујемо следећим проблемом: Пронаћи Питагорину тројку у којој је задати природни број b једна од катета. Решење применом "грубе силе" овде готово да и нема смисла, иако је наравно могуће. Уместо тога покушајмо да пронађемо неку законитост, на основу које ћемо директно доћи до решења овог проблема.

Ако је b паран број, тада нам решење нуди теорема 1. Ако за n из теореме одаберемо 1, тада за b можемо узети да је $2m$, па је (на основу теореме) друга катета $a = m^2 - 1$, а хипотенуза је $c = m^2 + 1$.

Покушајмо да нађемо законитост када је задати број b непаран. На основу дефиниције је $a^2 + b^2 = c^2$, следи $b^2 = c^2 - a^2$.

Ако је b непарно, тада се може записати као $2m + 1$ (за неко m), а b^2 је тада: $(2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$, што можемо записати и као $(2m^2 + 2m + 1) + (2m^2 + 2m)$. Због једноставности уводимо да је $k = 2m^2 + 2m$, па на крају имамо да је $b^2 = (k + 1) + k$. Уколико овом изразу и додамо и одузмемо $k^2 + k$, добијамо:

$$b^2 = (k+1)+k = (k^2+k+k+1)-k^2-k+k = (k^2+2k+1)-k^2 = (k+1)^2-k^2$$

што нам на крају даје тражену законитост:

$$b^2 = (2m + 1)^2 = (2m^2 + 2m + 1)^2 - (2m^2 + 2m)^2 = c^2 - a^2$$

Сада је једноставно написати (врло ефикасан) програм за решење датог проблема:

```
program PitagorineTrojke3;
var a, b, c, m, mNa2: integer;
begin
  repeat
    writeln('Unesite prirodan broj za Pitagorinu trojku ');
```

```
    readln(b)
  until (2 < b) and (b <= 100);
  m := b div 2;
  mNa2 := sqr(m);
  if odd(b) then begin (* ucitani broj je neparan *)
      a := 2*mNa2 + 2*m;
      c := b + 1
  end
  else begin (* ucitani broj je paran *)
      a := mNa2 - 1;
      c := mNa2 + 1;
  end;
  writeln('Pitagorina trojka za broj ',b,' je ',a,',',b,',',c)
end.
```

Више о Питагориним тројкама је могуће наћи у књигама: Р. Тошић, В. Вукославчевић : Елементи теорије бројева, Алеф, Нови Сад 1995. и В. Мићић, З. Каделбург : Увод у теорију бројева, Друштво математичара СР Србије, Београд 1989.

ЗАДАЦИ

1. Написати програм за испис Питагориних тројки према теореми 1.

2. Упоредити ефикасност решења на основу теореме 1 и претходна два решења. Односно, изразити ефикасност решења на основу теореме преко n – задате границе до које испитујемо тројке.

3. Написати програм који ефикасно израчунава и исписује примитивне Питагорине тројке.

4. Написати програм који исписује Питагорине тројке код којих се хипотенуза и једна катета разликују за 2.

5. Написати програм који израчунава и исписује Питагорине тројке код којих је разлика између хипотенузе и катете унапред задати број k који је потпун квадрат $k = t^2$ или двоструки потпун квадрат $k = 2t^2$.

6. Пронаћи неколико следећих Питагориних тројки код којих је разлика између катета 1. За решење овог задатка је потребно пронаћи законитост између таквих Питагориних тројки и бројева m и n из теореме 1. У утврђивању законитости, занемарити разлику између катете a и катете b – треба их третирати равноправно.

КАКО ЗАПАМТИТИ БРОЈ 4268

Ненад Теофанов, Природно-математички факултет, Нови Сад

Математичари се обично труде да запамте најмањи могући број чињеница о предмету који их занима. Истине које су последице тих чињеница математичари не памте ако могу да их предоче следећи законе логичног размишљања. Памћење чињеница које нас занимају не подразумева само њихово репродуковање "из главе", него и знање о, рецимо књигама у којима се те чињенице излажу. Тако, на пример, нема смисла памтити десетак децимала броја π, јер их можемо прочитати користећи и веома скромне калкулаторе.

Памћење којекаквих чињеница је незаобилазни учесник наше свакодневице. Може човек живети са жељом да што мање зна и запамти, али такав живот обиловаће непријатним, недостојним али и непредвидивим догађајима. Такође постоје и људи којима је у природи да памте све и свега се сећају. Припадник те друге крајности је и добри војник Швејк.

У следећем одломку из романа Ј.Хашека "Доживљаји доброг војника Швејка", Швејк се сећа згоде са једним машиновођом, који није био обдарен лаким памћењем, образлажући нам том приликом разне мнемотехнике (превод С.Винавера):

"Наредник стаде завијати цигарету. Међутим, Швејк се загледа у пушку, да види број, па ће рећи:

-Четири хиљаде двеста шездесет и осам! Исти, ама исти тај истацки број је имала и једна локомотива у Печкама, на прузи што води шеснаестом колосеку. Требали су да је одвуку у депо у Лиси на Лаби, на поправку, али ствар није ишла тако лако, јербо, пане наредниче, онај машиновођа који је требао да је одвуче онамо био је слабо памтљив што се бројева тиче. Те ти га тако надзорник железничке пруге позва у своју канцеларију па му рече:" На шеснаестом колосеку има локомотива број четири хиљаде двеста шездесет и осам. Ја знам да је ваше памћење што се тиче бројева врло рђаво, а ако вам се који број испише на парчету хартије, ви ту хартију увек губите, без грешке. Па сад напрегните само мало мозак, кад сте већ тако слаби са бројевима – ја ћу вам показати како је то лака ствар, просто играчка једна, да запамтите неки број, па који је да је. Ево погледајте: локомотива коју треба да одвучете у депо у Лиси на Лаби носи број четири хиљаде двеста шездесет и осам. Пазите сад. Прва је цифра тога броја – четворка, друга је цифра – двојка. Све што има да запамтите кад се каже: четрдесет и два, то вам је ово: најпре два пута два, даке, то вам је она четворка напред, па онда, кад се та цифра подели са два, добијете два, и то вам је друга цифра. Елем, на тај начин имате четири и два. Само се ви не бојте. Колико је двапут четири? Осам, зар не? Елем, забијте себи у главу, утувите да је осмица у оном броју четири хиљаде двеста шездесет и осам, последња по реду. Сад шта недостаје још? Запамтили сте да је прва цифра четири, друга два и четврта осам; дакле, остаје да некако промуђурно уврдате још и ону шестицу која се налази пред осмицом. А то је просто, да не може бити простије. Прва цифра четворка, друга двојка - и сад: четири и два јесте шест. Дакле и с тим сте начисто да је друга од краја шестица, - и тај вам низ цифара више никад не може да изађе из памети. У главу вам се угњездио, засекао број: четири хиљаде двеста шездесет и осам. А до истог тог закључка можете доћи и на још једностав...

Наредник престаде с пушењем, па извали очи на њега и одједаред врисну:

-Kappe ab! (Капу скини!)

Међутим Швејк свечано настави:

- И он му стаде излагати тај још једноставнији начин да се запамти број локомотиве четири хиљаде двеста шездесет и осам: Кад се одузме осам мање два – чини шест. Дакле, сад се зна већ шездесет осам. Шест мање четири... дакле шездесет осам и та двојка; значи сад има: четири, два, шест, осам... Али, није ни најмање тешко кад се то изведе још другачије, помоћу множења и дељења. Резултат савршено исти. Запамтите само, - рекао му је тај надзорник пруге, - да је два пут четрдесет и два осамдесет четири. Година пак има дванаест месеци. Ви сад одузимате тих дванаест месеци од оно осамдесет и четири, па ће вам остати седамдесет и два, од тога одузмите још једаред дванаест месеци, остаје шездесет; те сад, ето, добисмо ону шестицу, а нулу ћемо да шкартирамо. Сад знамо: четрдесет и два, шездесет осам, четири. Кад смо нулу избрисали, хајде да избришемо и ону четворку на крају, па без икакве муке и главобоље, шта смо добили: добили смо четири хиљаде двеста шездесет и осам, а то је број локомотиве која има да се вози у депо у Лиси на Лаби. А исто тако, ако покушамо и са дељењем, и то је ништа лакше. Израчунаћемо количник просто по царинској тарифи." Да вам није зло, госпон' наредниче? Ако ви желите само ја одмах изводим: " General de- charge! Fertig! Noch an! Feuer!" Ах мучицу му његову! Који га је ђаво надарио тог нашег пана капетана да нас шаље на егзерцир по таквом сунцу! Морам да тркнем по носила.

Када је дошао лекар, утврдио је да је по среди или сунчаница или акутно запаљење мождане опне. А када се наредник освестио, Швејк стаде крај њега, па му рече:

-Нисам довршио, сад могу да вам допричам до краја. Мислите ли ви, пане наредниче, да је онај машиновођа запамтио ствар? Јок, боже сачувај! Све је помрсио и збркао, а помножио је све са *три*, јер се однекуд сетио пресвете божје тројице, па локомотиву, наравно, нашао није – где да је нађе – а она, ено је још и сад стоји на шеснаестом колосеку."

Задаци из математике

Рубрика "Задаци из математике" ће у сваком броју, почев од првог, доносити 8 задатака из разних области математике. Не претендује се да сви задаци буду оригинални али по правилу сви треба да буду у довољној мери нестандардни и занимљиви, тако да својим садржајем привуку пажњу читалаца. Уз оригиналне задатке биће наведено и име аутора.

Сви читаоци могу учествовати у решавачком такмичењу које ће се организовати у току сваке школске године. На адресу редакције слати откуцана или читко исписана решења; сваки задатак на засебном листу. Исто важи за предлоге задатака. У наредним бројевима часописа публиковаће се комплетна решења раније постављених задатака. На крају циклуса најуспешнији решавачи ће бити награђивани.

Предлоге и решења задатака слати на адресу: **"Тангента" – за рубрику "Задаци из математике", Институт за математику, Трг Д.Обрадовића 4, 21000 Нови Сад.**

М 9. Из места A у место B крену истовремено два путника. Први путник је прву половину времена проведеног на путу ишао брзином a, а другу брзином b $(a \neq b)$. Други путник је прву половину пута ишао брзином a, а другу брзином b. Који путник је први стигао у место B?

М 10. Да ли постоји природан број који је потпун квадрат и чији је збир цифара 1994?

М 11. (*Драгољуб Милошевић, Горњи Милановац*) Нека је функција f дата са $f(x) = \frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$, где је $x \in \mathrm{R}$ и $a > 0$. Одредити вредност збира

$$f\left(\frac{1}{1995}\right) + f\left(\frac{2}{1995}\right) + \cdots + f\left(\frac{1994}{1995}\right).$$

М 12. Ако су $x_1, x_2, \cdots, x_n$ $(n \geq 2)$ реални бројеви при чему је $0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ доказати неједнакост

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geq \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \cdots + \frac{x_1}{x_n}.$$

М 13. У квадратној табели формата $2n \times 2n$ $(n \geq 1)$ је уочено $3n$ поља и у свако од њих уписана по једна звездица. Доказати да се увек може наћи n врста и n колона чијим се брисањем уклањају све звездице из табеле.

М 14. Тежишна линија AD троугла ABC сече кружницу уписану у троугао у тачкама M и N. Одредити угао MON (O – центар уписане кружнице) ако је $|AB| + |AD| = |AC|$.

М 15. Квадрат је подељен на 5 дисјунктних правоугаоника, тако да темена квадрата припадају различитим правоугаоницима, а један правоугаоник нема заједничких тачака са страницама квадрата. Доказати да је тај правоугаоник – квадрат.

М 16. (*Ратко Тошић, Нови Сад*) Доказати да се у равни може изабрати 1995 тачака и неке од њих спојити дужима, тако да су све дужи једнаке, из сваке тачке излазе тачно 4 дужи и добијена фигура је повезана, тј. сваке две изабране тачке спојене су изломљеном линијом састављеном од напртаних дужи.

Решења задатака

М 1. *Часопис "Тангента" ће, почев од 1995. године, излазити бар 4 пута годишње. Ако бројеви буду нумерисани са 1,2,3,..., доказати да ће наступити тренутак када ће се број часописа поклопити са годином у којој је изашао.*

Решење. Након n година број часописа ће бити бар $4n$. То значи да ће после извесног броја година број "Тангенте" бити већи од године у којој је изашао. На пример после 666 година, тј. 2661. године, тај број ће бити бар $4 \cdot 666 = 2664$.

Нека је у k-тој години први пут наступио тренутак када је број "Тангенте" био већи од k. Тај број је очигледно $k+1$. Заиста, ако је $(k+1)$-ви број изашао у $(k-l)$-тој години, где је $l \geq 1$, тада је $k+1 > k-l$, а то је у супротности са претпоставком о броју k. Сада k-ти број, због минималности k, није могао да изађе $(k-m)$-тој години $(m \geq 1)$, па остаје да је изашао баш у k-тој години.

Задатак је решио **Вукмировић Ненад**, I$_a$, *Мат. гимн., Београд.*

М 2. *Ако је разлика кубова два узастопна природна броја једнака n^2, тада је број n једнак збиру квадрата нека два природна броја. Доказати.*

Решење. Нека је $(m+1)^3 - m^3 = n^2$, где је m неки природан број. Тада је n^2, а отуда и n, непаран број. Дакле $(m+1)^3 - m^3 = (2p+1)^2$.

То се даље може представити у облику

$$\begin{aligned} 3m^2+3m+1 &= (2p+1)^2 \\ 4(3m^2+3m+1) &= 4(2p+1)^2-1 \\ 3(4m^2+4m+1) &= (2(2p+1)-1)(2(2p+1)+1) \\ 3(2m+1)^2 &= (4p+1)(4p+3). \end{aligned}$$

Како су бројеви $4p+1$ и $4p+3$ узајамно прости, а њихов производ једнак $3(2m+1)^2$, један од њих је потпун квадрат. То не може да буде $4p+3$, јер квадрат сваког непарног броја даје остатак 1 при деоби са 4. Отуда је $4p+1=(2t+1)^2$, односно

$$\begin{aligned} 4p+1 &= 4t^2+4t+1 \\ 2p+\tfrac{1}{2} &= 2t^2+2t+\tfrac{1}{2} \\ 2p+1 &= t^2+(t+1)^2. \end{aligned}$$

Задатак је решио **Ристовић Милан**, III_e, *Мат. гимн. Београд.*

М 3. *Производ полинома $P(x)$ и $Q(x)$ са целобројним коефицијентима је полином чији су сви коефицијенти дељиви са 5. Доказати да су сви коефицијенти бар једног од полинома $P(x)$ и $Q(x)$ дељиви са 5.*

Решење. Претпоставимо да тврђење није тачно. Тада се $P(x)$ и $Q(x)$ могу представити у облику

$$P(x)=P'(x)+P''(x), \quad Q(x)=Q'(x)+Q''(x),$$

где су сви коефицијенти од $P'(x)$ и $Q'(x)$ дељиви са 5, а ниједан коефицијент од $P''(x)$ и $Q''(x)$ није дељив са 5. На пример: $18x^3-7x^2+3x+11=(15x^3-5x^2+10)+(-2x^2+3x+1)$. Тада је

$$\begin{aligned} P''(x)\,Q''(x) &= (P(x)-P'(x))\,(Q(x)-Q'(x)) \\ &= P(x)\,Q(x)-P(x)\,Q'(x)-P'(x)\,Q(x)+P'(x)\,Q'(x). \end{aligned}$$

Према конструкцији $P''(x)$ и $Q''(x)$, коефицијенти уз водећи и слободан члан на левој страни нису дељиви са 5, док су на десној страни сви коефицијенти дељиви са 5. Контрадикција.

Задатак је решио **Ристовић Милан**, III_e, *Мат. гимн. Београд.*

М 4. *Доказати да за сваки реалан број x важи неједнакост*

$$\sin(\cos x) < \cos(\sin x).$$

Решење. Доказаћемо прво неједнакост за $x\in[0,\frac{\pi}{2})$. Нека је $\cos x = y$. Како је $\sin z < z$ за $0<z<1$, то је

$$\sin(\cos x) < \cos x. \tag{1}$$

На интервалу $[0, \frac{\pi}{2})$ функција $\cos x$ је опадајућа, па из $\sin x \leq x$ следи

$$\cos x \leq \cos(\sin x). \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следи $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$ за свако $x \in [0, \frac{\pi}{2})$

За $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ је $\sin(\cos x) \leq 0 < \cos(\sin x)$, тј. неједнакост важи. С обзиром да су $\sin(\cos x)$ и $\cos(\sin x)$ парне функције неједнакост важи на интервалу $[-\pi, \pi]$. А како су оне и периодичне, с периодом 2π, неједнакост важи за свако $x \in \mathbb{R}$.

Задатак је решио **Ристовић Милан**, III$_e$, *Мат. гимн. Београд.*

Задаци из програмирања

Рубрика "Задаци из програмирања" ће у сваком броју доносити три задатка из програмирања. Задаци неће увек бити оригинални, али ће бити бирани тако да илуструју или неку досетку на којој се заснива решење или употребу неке стандардне технике (или структуре података) у програмирању. Уз оригиналне задатке биће наведено и име аутора.

Сви читаоци могу учествовати у решавачком такмичењу које се организује у току сваке школске године. На адресу редакције треба слати одштампане програме који су добро искоментарисани, као и одштампане резултате извршавања програма. Решења се могу слати и електронском поштом или на дискети за PC рачунаре, уз обавезну напомену о називу, произвођачу и верзији преводиоца помоћу којег програм треба превести. Редакција ће настојати да дискете врати пошиљаоцу. Предлози задатака треба да садрже формулацију задатка и једно његово решење.

У сваком наредном броју часописа публиковаће се комплетна решења, најбитније процедуре решења или ће бити дата детаљна упутства за самостално решавање. На крају циклуса најуспешнији решавачи ће бити награђивани.

Предлоге и решења задатака слати на адресу: "Тангента" - за рубрику "Задаци из програмирања", Институт за математику, Трг Д. Обрадовића 4, 21000 Нови Сад или електронском поштом на адресу: tangenta@unsim.ns.ac.yu.

П 4. Нека је Z-израз дефинисан на следећи начин:

– X је Z-израз, ако је X низ слова произвољне дужине,

– (), [], {} су Z-изрази,

– ако су A и B Z-изрази, тада је и AB Z-израз,

– ако је A Z-израз, тада су Z-изрази и: (A), $[A]$, $\{A\}$.

На пример, abc, $[(abc)b]$, $[\{a\}(a)]$ су Z-изрази, а $[\}$, $([abc)]$ нису.

Написати програм који утврђује да ли је задати низ знакова Z-израз.

П 5. Дат је фајл са 999999 различитих бројева од 1 до 1000000. Написати програм који утврђује који број недостаје.

П 6. Наћи најмањи природан број n чији се производ са бројем 711 може добити на тај начин што се испред броја n припише 11 а иза броја n допише 7.

Решења задатака

П 1. *Дато је $2 \times N$ кутија које су поређане у правој линији ($N \leq 5$). Две суседне кутије су празне, а остале кутије садрже $N-1$ слово* A *и $N-1$ слово* B.

Један пример за $N = 5$:

A	B	B	A			A	B	A	B

Садржај кутија се може размењивати, али само тако да се садржај две суседне непразне кутије може преместити у две празне кутије, очувавајући њихов редослед.

Написати програм који ће исписати редослед измена садржаја кутија, тако да се на крају сва слова A *нађу лево од свих слова* B, *при чему положај празних кутија није битан. Уколико се до жељеног положаја не може доћи, исписати одговарајућу поруку. Број кутија и њихов почетни садржај су улазни подаци програма.*

Решење. Задатак решавамо разматрањем неколико случајева, при чему ћемо садржај празних кутија обележавати са 0. Претпоставићемо да се у првих узастопних k ($k \geq 0$) кутија налазе знаци A. Ако желимо да у $(k+1)$-ву кутију поставимо такође знак A, тада се могу разликовати следећи случајеви:

- случај 0: на $(k+1)$-вој позицији се већ налази знак A. Тада треба повећати k за један и кренути испочетка са разматрањем.
- случај 1: на $(k+1)$-вој позицији се налази знак 0, тј. $(k+1)$-ва и $(k+2)$-га кутија су празне. Тада треба у кутијама десно од $(k+2)$-ге потражити пар кутија чија прва кутија садржи A. Ако се такав пар пронађе, њихов садржај треба пребацити у $(k+1)$-ву и $(k+2)$-гу (празне) кутије, а потом кренути испочетка

са разматрањем. Ако се таква кутија не пронађе, тада је или $k = n - 1$, те се кутије налазе у циљном распореду, или се знак `A` налази у последњој кутији. Тада треба извршити следећа премештања:

```
AAA...AOOBBB.....BA
AAA...ABABBB....BOO
AAA...ABOOBBB...BAB
AAA...ABBBOOB...BAB
AAA...AOOBBBB...BAB
AAA...AABBBBB...BOO
```

– случај 2: на $(k+1)$-вој позицији се налази знак `B`, а на $(k+2)$-ој се налази знак `O`. Тада треба учинити следеће:

```
AAA...ABOOXXX...XX
AAA...ABXXOOXX...X
AAA...AOOXBXX....X
```

чиме се положај свео на случај 1.

– случај 3: на $(k+1)$-вој позицији се налази знак `B`, а на $(k+2)$-ој се не налази знак `O`. Тада та два знака треба пребацити у празне кутије, чиме се садржај кутија такође свео на већ разматрани случај 1.

Овде наводимо само карактеристичне процедуре и функције у Pascal-у из комплетног решења овог задатка: функцију `kraj` која испитује да ли су садржаји кутија добро поређани, процедуру `prebaci` која пребацује садржаје суседнних кутија и процедуру `resi` која реализује горе описано разматрање. Решење је преузето из књиге "Програмерске мозгалице", Техничка књига, 1992, уз дозволу аутора Ивановић, М., Будимац, З., Тошић, Д. и Путник, З. У књизи је публиковано и комплетно решење овог задатка, који је у својој оригиналној варијанти (са олимпијаде) био нешто компликованији него што је задат у првом броју часописа "Тангента".

Решења идентична или слична овде представљеном су нам послали: **Војкан Стефановић, Милош Милосављевић, Владимир Јовић** *и* **Бобан Стојановић** *(сви из Крагујевца). Напоменимо на крају да је могуће и другачије решење овог задатка - без разматрања наведених случајева. Генеришу се сва могућа решења по задатим условима задатка (најбоље бектрек методом) и одабере се једно од њих. Таква решења нам је послало више читалаца.*

```
PROGRAM kut(input, output);
VAR
  kutije: ARRAY [1..1000] OF CHAR;  { kutije - tekuce stanje }
  n: INTEGER                        { broj parova kutija }
  prazna: INTEGER;  { prva prazna kutija - tekuce stanje }

{ ispituje da li su sadrzaji dobro poredjani, tj. da li je kraj }
FUNCTION kraj: BOOLEAN;
VAR i: INTEGER;
    ispred: CHAR;
    ok: BOOLEAN;
BEGIN
   ok := TRUE;
   ispred := kutije[1];
   FOR i := 2 TO 2*n DO
     BEGIN
        IF (kutije[i]='a') AND (ispred='b') THEN
           ok := FALSE;
        IF kutije[i]<>'0' THEN ispred := kutije[i];
     END;
   kraj := ok;
END;

{ prebacivanje sadrzaja kutija poz i poz+1 u prazne kutije }
PROCEDURE prebaci(poz: INTEGER);
BEGIN
  kutije[prazna] := kutije[poz];
  kutije[prazna+1] := kutije[poz+1];
  kutije[poz] := '0';
  kutije[poz+1] := '0';
  prazna := poz;
  stampaj;        { stampa tekuci raspored }
END;

{ Resava problem pronalazenja trazenog
  rasporeda sadrzaja kutija }
PROCEDURE resi;
VAR k,t: INTEGER;
    ok: BOOLEAN;
BEGIN
  k := 0;
  WHILE (NOT kraj) AND (k<n-1) DO
     BEGIN
        IF kutije[k+1]='a' THEN                { slucaj 0 }
           k := k+1
        ELSE
          BEGIN
```

```
              IF kutije[k+1]='b' THEN
                IF kutije[k+2]<>'0' THEN      { slucaj 3 }
                   prebaci(k+1)
                ELSE
                  BEGIN                       { slucaj 2 }
                    prebaci(prazna+2);
                    prebaci(k+1)
                  END;
              t := k+1;                       { slucaj 1 }
              REPEAT
                t := t+1
              UNTIL kutije[t] = 'a';
              IF t < 2*n THEN
                prebaci(t)
              ELSE
                BEGIN
                  prebaci(t-1);
                  prebaci(k+2);
                  prebaci(k+4);
                  prebaci(k+1);
                  IF (NOT kraj) THEN
                     prebaci(2*n-1);
                END;
              k := k+1;
         END;
     END;
   IF (NOT kraj) THEN
      writeln('... resenje nije moguce');
END;
```

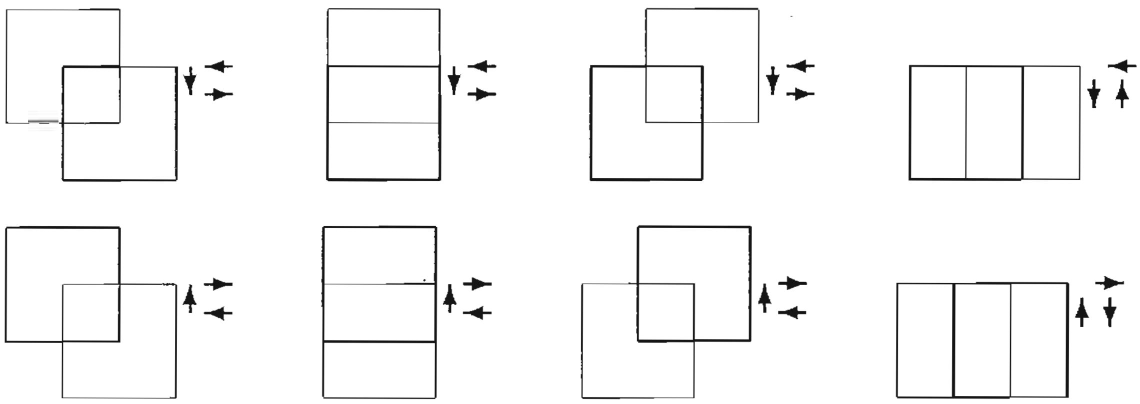
П 2. *Дата је матрица формата* $N \times N$ $(1 \leq N \leq 400)$, *која се састоји од бројева. Слика је задата бројевима 1.*

Написати програм који учитава матрицу у једнодимензионални низ по врстама, па затим део матрице - слику, копира на нову позицију. Слика коју треба копирати се задаје координатама горњег левог угла, дужином и ширином, а нова позиција слике се задаје новим координатама горњег левог угла. Резултујућу матрицу приказати на екрану у облику матрице.

При копирању слике користити једнодимензионални низ у коме је матрица и никакве помоћне низове или матрице.

Улазни подаци су: елементи матрице, горњи леви угао, ширина и дужина оригиналне слике и горњи леви угао копије слике. Излазни податак је резултујућа матрица.

Решење. Постоји десет случајева које треба размотрити. Први случај је када оригинал и копија немају пресек и тада не морамо водити рачуна о редоследу копирања елемената. Други случај је када се оригинал и копија поклапају и тада не треба вршити копирање. Остало је још да размотримо осам случајева када се оригинал и копија делимично прекривају. Сви ови случајеви су приказани на следећој слици



при чему је оригинал цртан дебљим а копија тањим линијама. За сваки од ових случајева разматрамо исправне редоследе копирања (исправан је онај редослед који неће довести до ситуације да пребришемо део оригинала пре него што га ископирамо). Тако нпр. за први случај закључујемо да морамо копирати прво прву врсту оригинала, затим другу ...У оквиру сваке врсте елементе можемо копирати слева на десно или сдесна у лево. Ове чињенице смо означили стрелицама које илуструју исправне редоследе копирања. Сличним резоновањем долазимо до исправних редоследа копирања за осталих седам случајева. Ових осам случајева је могуће груписати у две групе. Тако, ако посматрамо прва четири случаја (горњи ред) видимо да копирање можемо вршити одозго на доле и (у оквиру тога) сдесна на лево а да при томе овај начин копирања буде исправан за све ове случајеве. Слично закључујемо да за друга четири случаја (доњи ред) копирање можемо вршити одоздо на горе и (у оквиру тога) слева на десно.

Означимо са $(io, jo), s, v, (ik, jk)$ горњи леви угао оригинала, ширину оригинала, висину оригинала и горњи леви угао копије. Ако важи $i_k < i_o \vee (i_k = i_o \wedge j_k > j_o)$ онда се ради о првој групи, иначе је у питању друга група. Случај када оригинал и копија немају пресек не разматрамо, јер се своди на било који од ова два.

Следи фрагмент програма у Pascal-у који илуструје горе наведена разматрања. У програму се ради веће прегледности матрица посматра као дводимензионална. Да бисмо добили програм који ради са сликом смештеном у једнодимензионални низ треба свуда ставити b[(i-1)*n+j] уместо a[i,j], јер се елемент a[i,j] у одговарајућем низу b (слици представљеној помоћу низа) налази на позицији b[(i-1)*n+j] (n је димензија квадратне матрице a).

```
IF (ik <> io) OR (jk <> jo) THEN  (* treba kopirati *)
    IF (ik < io) OR (ik = io) AND (jk > jo) THEN
        FOR i := 0 TO v - 1 DO
            FOR j := s - 1 DOWNTO 0 DO
                a[ik + i, jk + j] := a[io + i, jo + j]
    ELSE
        FOR i := v - 1 TO 0 BY -1 DO
            FOR j := 0 TO s - 1 DO
                a[ik + i, jk + j] := a[io + i, jo + j]
```

Приказали смо решење нашег сарадника Саше Живкова. Решење слично овоме су нам послали читаоци: **Душан Цветковић** *(Београд),* **Лазар Оташевић, Јелена Д. Милосављевић, Војкан Стефановић, Нина Стојановић, Јованка Лукић,** *(сви из Крагујевца), али су они све могуће случајеве груписали у четири (а не у две) групе.*

П 3. *Написати програм који ће исписати што је више могуће природних бројева чији је бинарни запис периодичан. Бинарни запис броја је периодичан са периодом $n(\geq 2)$, ако се састоји од k истоветних сегмената дужине n, при чему је дужина читавог бинарног записа $k \times n$. На пример, бинарни запис броја 10 (1010) јесте периодичан (периода дужине 2), док бинарни запис броја 9 (1001) није периодичан.*

Решење. Најједноставније (и вероватно једино могуће) решење овог задатака је генерисање редом бројева, њихово претварање у бинарни бројни систем и потом испитивање периодичности бинарног броја. При испитивању периодичности се међутим може доста "уштедети", тако што ће се, на пример, при испитивању периодичности чија је периода дужине k, број одмах одбацити ако му дужина није дељива са k и слично. Да би се испитала периодичност бинарних записа веома великих бројева, потребно је бројеве представити низом цифара и реализовати потребне процедуре за рад са њима, што није урадио ниједан решавач овог задатка.

Читаоци **Душан Цветковић** *из Београда и* **Милан Косановић** *из Новог Сада су у решењу овог задатка применили мали "трик". Генерисали су редом све могуће периодичне бинарне бројеве не користећи њихову декадну репрезентацију, што се такође може прихватити.*

Зврчке

ЗВ 4. Иванка је први уторак у месецу провела у Суботици а први уторак после првог понедељка истог месеца провела је у Подгорици. Следећег месеца, Иванка је прву среду провела у Врању, а прву среду после првог уторка у Ваљеву. Где је Иванка те године провела 8. март?

ЗВ 5. Конвексан четвороугао повлачењем дијагонала разбијен је на четири троугла чије су површине различити цели бројеви већи од 2 а мањи од 10. Одредити површину четвороугла.

ЗВ 6. Равна геометријска фигура F пресликава се у саму себе ротацијом у равни фигуре за угао од $11°$ око тачке O. Доказати да се она пресликава у саму себе и ротацијом око тачке O за угао од $81°$.

Решења зврчки

ЗВ 1. Следи на основу идентитета

$$(ac - bd) + (ad + bc)i = a(c + d) - (a + b)d + (a(c + d) + (b - a)c)i$$

или

$$(ac - bd) + (ad + bc)i = ac - bd + ((a + b)(c + d) - ac - bd)i.$$

ЗВ 2. Међу пет узастопних природних бројева од којих се најмањи завршава цифром 0 или цифром 5, тачно један има збир цифара дељив са 5. Следи да се међу десет узастопних природних бројева од којих се најмањи завршава цифром 5 налазе два чији је збир цифара дељив са 5. Дакле, у посматраном низу разлика два узастопна члана не може бити већа од 9. Да сваки природан број мањи од 10 може да се појави као разлика два узастопна члана низа, показују следећи примери: 50000 - 49999 = 1, 5000 - 4998 = 2, 500 - 497 = 3, 50 - 46 =4, 19 - 14 = 5, 60004 - 59998 = 6, 6004 - 5997 = 7, 604 - 596 =8, 14 - 5 =9.

ЗВ **3.** Разлика у старости између најстарије девојчице (Андреје) и најмлађе (Снежане) износи 60 дана. То је могуће само ако је Андреја рођена 31. јануара а Снежана 1. априла исте године, и то у простој години (у којој фебруар има 28 дана). Лако се види да је онда Соњин рођендан 15. фебруара а Маријин 9. марта. Дакле, те године је 9. март био у понедељак. После 6 година, 9. март је поново био у понедељак, што значи да је број дана у тих 6 година дељив са 7. Од тих 6 година су једна или две преступне. Како је број $365 \cdot 5 + 366 = 2191$ дељив са 7 а број $365 \cdot 4 + 366 \cdot 2 = 2192$ није, закључујемо да је била тачно једна преступна година и 5 простих. Заједно са годином рођења, која је проста, имамо 7 узастопних година, међу којима је тачно једна преступна. То онда мора бити средња од тих година, у којој су девојчице прославиле трећи рођендан. Како је $365 = 7 \cdot 52 + 1$ и $366 = 7 \cdot 52 + 2$, следи да је Марија први рођендан имала у уторак, други у среду а трећи у петак (између другог и трећег рођендана прошло је 366 дана, јер је Маријин рођендан после 29. фебруара).

У сусрет 1996. години

$1 = 1 \times 6^{9-9}$
$2 = 9 + 9 - 16 = 9 : (9 - 6) - 1$
$3 = 6 : (1 + 9 : 9)$
$4 = 9 : (9 - 6) + 1 = 19 - 9 - 6$
$5 = 96 - 91$
$6 = 1 - 9 : 9 + 6$
$7 = 1 + 9 - 9 + 6$
$8 = 1 + 9 - 9 + 6$
$9 = 9 \times 1^{69}$
$10 = 9 + 1^{69}$
$11 = 9 + 9 - 6 - 1$
$12 = 9 \times (9 - 1) : 6 = 96 : (9 - 1)$
$13 = 9 + (9 : 6) + 1$

Природни бројеви од 1 до 13 представљени су помоћу цифара броја 1996 (једне јединице, две деветке и једне шестице), уз коришћење рачунских операција сабирања, одузимања, множења, дељења и степеновања. Задатак је да се на овај начин представи што више природних бројева. Награде у књигама добиће пет ученика за најбоља решења која у редакцију стигну до закључења следећег броја "Тангенте".

Наградни задатак број 2

Доказати да се коцка са ивицом дужине 13 може исећи на 1995 мањих коцки са ивицама дужине 1, 2 и 3. Колико се при томе добија коцки са ивицом дужине 3?

Првих 10 читалаца који на адресу редакције пошаљу тачна решења биће награђени књигама.

Решење наградног задатка број 1

Решење Нађ–Перге Стевана:

На основу особина Паскаловог троугла види се да се на датој шеми (због симетрије, довољно је да посматрамо њен горњи десни део)

A								1							
N	A							1	7						
A	N	A						1	6	21					
V	A	N	A					1	5	15	35				
O	V	A	N	A				1	4	10	20	35			
L	O	V	A	N	A			1	3	6	10	15	21		
I	L	O	V	A	N	A		1	2	3	4	5	6	7	
M	I	L	O	V	A	N	A	1	1	1	1	1	1	1	1

од слова M до слова N може стићи на $4 \cdot (1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6) = 252$ начина који задовољавају услове задатка. Да би се завршила реч "МИЛОВАНА", мора се од слова N доћи до слова A. Како се из сваког слова N може стићи у четири слова A, то се реч "МИЛОВАНА" може прочитати на $4 \cdot 252 = 1008$ начина. Да би се прочитала реченица "АНА ВОЛИ МИЛОВАНА", мора се поћи од слова A и стићи у слово M а затим из M у A. Како је број начина да се прочита "АНАВОЛИМ" једнак броју начина да се прочита "МИЛОВАНА", тј. 1008, следи да је тражени број једнак $1008^2 = 1016064$.

За тачно решење наградног задатка број 1, књигама су награђени:

1. **Нађ–Перге Стеван** (8), о. ш. "Вук Караџић", Кикинда;
2. **Ђанковић Горан** (2), Зрењанинска гимназија, Зрењанин.

Изабрани школски задаци

У овој рубрици, почев од овог броја, доносићемо по неколико задатака који илуструју стандардно школско градиво. Трудићемо се да задаци буду што интересантнији. Решења задатака објављиваћемо у неком од наредних бројева; при томе ћемо настојати да то буду најбоља решења пристигла од наших читалаца.

Ш **1.** Конструисати праву паралелну основици датог троугла тако да збир дужина одсечака бочних страница између те праве и основице буде једнак дужини основице.

Ш **2.** Дат је угао са теменом A и у његовој унутрашњости тачка P. Конструисати прав угао са теменом у P тако да троуглови APE и APF имају једнаке површине, где су E и F тачке у којима се краци правог угла секу са крацима датог.

Ш **3.** Доказати да ако је за неки природан број n већи од 3, број $n!+1$ дељив са $n+1$, онда је n сложен број.

Ш **4.** У бесконачној геометријској прогресији са позитивним члановима и количником q, сваки члан почев од другог већи је од збира свих претходних чланова. Које вредности може имати количник q?

Ш **5.** Из сваког темена петоугла повучени су вектори до средишта три странице несуседне томе темену. Доказати да је збир 15 тако добијених вектора једнак нули.

Ш **6.** Морска вода садржи 5% соли (по маси). Колико дестиловане воде треба помешати са 30 kg морске воде да би концентрација соли у води износила $p\%$?

Ш **7.** Решити једначину

$$\operatorname{tg} x - 2\lfloor \operatorname{tg} x \rfloor - 3 = 0.$$

($\lfloor x \rfloor$ означава највећи цео број који није већи од x.)

Ш **8.** Решити једначину

$$\cos 5x \cdot \operatorname{tg} 6|x| + \sin 5x = 0.$$

Задаци за најмлађе читаоце

Н 5. *(Драгољуб Милошевић, Горњи Милановац)*

Троугао ABC је једнакокрак и правоугли ($\angle BCA = 90°$). Тачке M, N и P припадају редом страницама AB, BC и CA тако да је $AM = 2MB$, $BN = 2NC$ и $CP = 2PA$. Доказати да су дужи CM и NP једнаке и узајамно нормалне.

Н 6. Одредити све природне бројеве n за које је број $10^n + 8$ дељив са 72.

Н 7. Одредити највећи природан број чије су све цифре међусобно различите, а који је дељив са 11.

Н 8. Доказати да у сваком конвексном четвороуглу постоји страница која је краћа од дуже дијагонале.

Решења задатака

Н 1. *Одредити најмањи природан број код кога је производ цифара једнак 5040.*

Решење. Сви прости чиниоци броја $5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ су једноцифрени бројеви. Значи, постоји број чији је производ цифара једнак 5040. Сваки такав број садржи цифре 5 и 7, јер множењем било ког простог броја са 5 или 7, добија се број са бар две цифре. Производ $2^4 \cdot 3^2$ може се представити на више начина, али само у једном случају добија се и најмања могућа цифра – двојка: $2^4 \cdot 3^2 = 2 \cdot 8 \cdot 9$. Дакле, тражени најмањи број је петоцифрен и његове цифре су: 2, 8, 9, 5 и 7. Најмањи петоцифрен број са тим цифрама добија се кад се цифре испишу у растућем поретку; то је број 25789.

Н 2. *Написати три троцифрена броја, користећи сваку цифру различиту од нуле тачно једанпут, тако да разлика највећег и најмањег од тих бројева буде најмања могућа.*

Решење. Нека су тражени бројеви $A = \overline{a_1a_2a_3}$, $B = \overline{b_1b_2b_3}$, $C = \overline{c_1c_2c_3}$, при чему је $A > B > C$. Јасно је да ће разлика $A - C$ бити најмања ако је $a_1 = b_1 + 1 = c_1 + 2$ и ако је $\overline{a_2a_3}$ најмањи могући а $\overline{c_2c_3}$ највећи могући двоцифрен број у коме се не појављује цифра 0 и при томе су a_2, a_3, c_2, c_3 међусобно различите цифре. Дакле, тражени бројеви су $\overline{a_112}$, $\overline{b_1b_2b_3}$ и $\overline{c_198}$, где су c_1, b_1 и a_1 три узастопне цифре. Сва могућа решења дата су у следећој табели:

A	512	512	612	612	712	712
B	467	476	537	573	634	643
C	398	398	498	498	598	598

Н 3. *Кроз једно теме датог паралелограма повући две праве које тај паралелограм деле на три дела једнаких површина.*

Решење. Нека су M и N тачке на страницама AB и AD паралелограма $ABCD$, такве да је $|AM| = \frac{1}{2}|MB|$ и $|AN| = \frac{1}{2}|ND|$. Тада праве CM и CN деле паралелограм $ABCD$ на три дела једнаких површина.

Н 4. *Ученик је залутао у шуми чија је површина 100 km^2. Ученик зна да шума покрива конвексну област , али не зна ништа више о облику те области. Доказати да он може изаћи из шуме, а да при томе пређе пут краћи од 30 km.*

Решење. Обележимо са А тачку у шуми у којој се налази ученик. Он треба да иде 15 km по правој до неке тачке B, затим да скрене под правим углом и да иде још 15 km до неке тачке C. Бар једна од тачака B и C је изван шуме. Заиста, ако су све три тачке A, B и C у унутрашњости шуме, тада је и свака тачка правоуглог троугла ABC у унутрашњости шуме, због услова конвексности. Међутим, површина тог троугла је $\frac{15 \cdot 15}{2} = \frac{225}{2} = 112,5\ km^2$, па би површина шуме била већа од 100 km^2, што је супротно претпоставци.

Календар такмичења из математике и информатике средњих школа Југославије

1. **Такмичења из математике:**

– Школско такмичење	до краја јануара 1996. године;
– Општинско такмичење	субота 03. фебруар 1996. године;
– Окружно такмичење	субота 17. фебруар 1996. године;
– Републичко такмичење	субота 16. март 1996. године;
– Савезно такмичење	субота 13. април 1996. године;
– Балканијада	почетак маја 1996. године;
– Олимпијада	средина јула 1996. године.

2. **Такмичења из информатике:**

– Школско такмичење	до средине фебруара 1996. године;
– Окружно такмичење	субота 24. фебруар 1996. године;
– Републичко такмичење	субота 23. март 1996. године;
– Савезно такмичење	субота 20. април 1996. године;
– Међународна такмичења	крајем маја и касније.

Занимљива математика

ФИБОНАЧИЈЕВИ БРОЈЕВИ

Миодраг Петковић, Електронски факултет Ниш

Једно од најинтересантнијих поглавља у историји математике везано је за име Леонарда из Пизе (1175-1225), познатијег по надимку Фибоначи (тј. Боначијев син). Фибоначи је био најпознатији математичар средњег века. У својој књизи Liber Abaci, написаној 1202. године, он је објаснио предност децималног бројног система над гломазним римским системом, што је било од пресудног утицаја на усвајање децималног система у Европи. Ипак, Фибоначи се данас не помиње толико због својих значајних радова из математике колико због следећег тривијалног задатка наведеног у књизи Liber abaci.

Претпоставимо да се зечеви множе на следећи начин. Пар зечева на крају првог месеца живота се не размножава, међутим на крају другог и сваког следећег месеца они репродукују нови пар зечева. Полазећи са новорођеним паром, поставља се питање колико ће парова бити на почетку првог, другог, трећег, итд. месеца? Лако је видети да захтевани бројеви формирају низ, чијих је првих 19 чланова дато доле:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181.$$

Више од шест векова ни овај проблем нити његово решење уопште нису привлачили пажњу. Почетком деветнаестог века француски математичар Е. Лика (Lucas) почео је са изучавањем особина горњег низа бројева који је назвао "Фибоначијеви бројеви". После ових првих истраживања број радова о Фибоначијевим бројевима почео је да расте таквом брзином која је била упоредива са бројем фамозних зечева из тринаестог века. Чак је покренут и часопис Fibonacci Quarterly (1963. године) који објављује најновија достигнућа о Фибоначијевим бројевима и њима сродним темама.

У савременој математици Фибоначијеви бројеви се дефинишу рекурзивно узимајући у обзир врло једноставну чињеницу да је сваки наредни број једнак суми претходна два. Дакле, ако f_n означава $n-$ти Фибоначијев број, тада је $f_1 = f_2 = 1$ и

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (n \geq 1). \tag{1}$$

Иако једноставна, релација (1) не даје практично применљив алгоритам за израчунавање партикуларних Фибоначијевих бројева. Како релација

(1) дефинише диференцну једначину другог реда са константним коефицијентима, да би се одредио $n-$ти Фибоначијев број користи се добро познат метод за решавање диференцних једначина. Наиме, стављајући $f_n = r^n$ $(r \neq 0)$ у (1), имамо

$$f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = r^n(r^2 - r - 1) = 0,$$

одакле добијамо квадратну једначину $r^2 - r - 1 = 0$ са решењима $r = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Може се проверити да $f_n = ((1+\sqrt{5})/2)^n$ и $f_n = ((1-\sqrt{5})/2)^n$ задовољавају (1) и одавде, за неке константе A и B,

$$f_n = A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{2}$$

такође задовољава (1). Стављајући $n = 1$ и $n = 2$ у (2) и узимајући у обзир да је $f_1 = f_2 = 1$, из (2) се добија систем од две линеарне једначине по A и B чијим решавањем налазимо $A = 1/\sqrt{5}$ и $B = -1/\sqrt{5}$. На тај начин долази се до значајне формуле за $n-$ти Фибоначијев број:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \tag{3}$$

Како је члан $[(1-\sqrt{5})/2]^n/\sqrt{5}$ по апсолутној вредности мањи од $1/2$ произилази да је f_n једнак природном броју који је најближи броју $[(1+\sqrt{5})/2]^n/\sqrt{5}$. Ово даје ефикасан метод за израчунавање Фибоначијевих бројева. На овом месту помињемо и два алгоритма велике ефикасности за израчунавање Фибоначијевих бројева за велико n која се могу наћи у књизи Доналда Кнута The Art of Computer Programming, Vol II: Seminumerical Algorithms (Reading, Massachusetts 1969).

Као што је писао Р. Вебстер, професор универзитета у Шефилду, (R. J. Webster, The Legend of Leonardo of Pisa. Mathematical Spectrum, Vol. 3, No 2 (1970-71), 51-56.) једна од најпривлачнијих карактеристика Фибоначијевих бројева је могућност откривања многих лепих особина везаних за овај низ. На пример, ако погледамо неколико првих чланова наведених горе приметићемо да је сваки трећи број у низу паран, да је сваки четврти дељив са 3, сваки пети са 5, итд. У општем случају важи тврђење да су за фиксно $k \geq 3$ Фибоначијеви бројеви f_{mk} $(m = 1, 2, \ldots)$ дељиви Фибоначијевим бројем f_k.

Често питање које се поставља у вези Фибоначијевих бројева је њихова сума. Одговор је и у овом случају прилично једноставан. Наиме, користећи дефинициону формулу (1), налазимо

$$\begin{aligned} S_n &= f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1} + f_n \\ &= (-f_2 + f_3) + (-f_3 + f_4) + \cdots + (-f_n + f_{n+1}) + (-f_{n+1} + f_{n+2}) \\ &= f_{n+2} - f_2 = f_{n+2} - 1. \end{aligned}$$

Ево још неколико особина Фибоначијевих бројева:

$$f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n \quad (n \geq 2),$$

$$f_{n+1}^2 + f_n^2 = f_{2n+1},$$

$$f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2 = f_{2n},$$

$$f_n^4 = 1 + f_{n-2}f_{n-1}f_{n+1}f_{n+2} \quad (n \geq 3),$$

$$f_{n+2}^2 - f_{n+1}^2 = f_n f_{n+3},$$

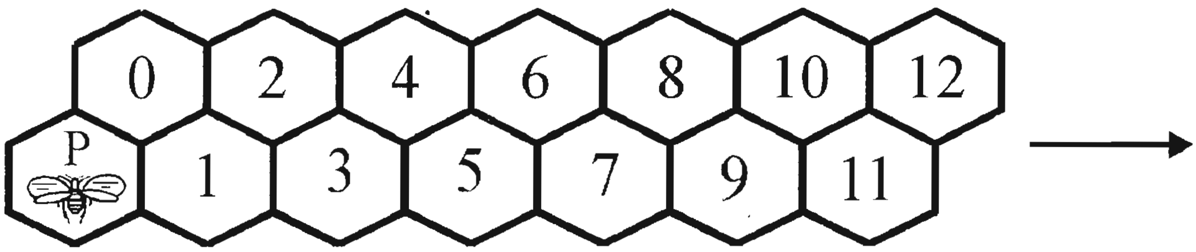
$$f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1},$$

$$f_1 f_2 + f_2 f_3 + \cdots + f_{2n-1}f_{2n} = f_{2n}^2.$$

Остављамо читаоцима да докажу горње идентитете.

Да не би баш испало све лако, наводимо и три отворена проблема. Први је везан за просте бројеве. Још је Еуклид доказао да постоји бесконачно много простих бројева, међутим не зна се да ли постоји коначан или бесконачан број простих бројева у Фибоначијевом низу. Следећа два отворена проблема односе се на квадрате и кубове међу Фибоначијевим бројевима. Постоји хипотеза да су 1 и 144 једини квадрати, а 1 и 8 једини кубови у Фибоначијевом низу. Ове хипотезе нису ни доказане ни оспорене до данашњих дана.

Фибоначијеви бројеви могу се срести у најнеочекиванијим ситуацијама које немају везе са математиком. Као илустрацују, навешћемо два примера.



Слика 1 Пут пчеле по хексагоналним ћелијама

На слици 1 приказане су хексагоналне ћелије по којима се креће пчела. Претпоставља се да се ове ћелије пружају на десно довољно дуго. Пчела се налази у почетном положају P и прелази на суседну ћелију крећући се увек надесно (горе-право-доле).

Није тешко утврдити да постоји **1** путања до ћелије 0 ($P-0$), **2** до ћелије 1 ($P-1$, $P-0-1$), **3** до ћелије 2 ($P-1-2$, $P-0-2$, $P-0-1-2$), **5** до ћелије 3 ($P-1-3$, $P-1-2-3$, $P-0-1-3$, $P-0-2-3$, $P-0-1-2-3$), итд. Према томе, број путања до ћелије са ознаком n једнак је $(n+2)$–ом члану Фибоначијевог низа f_{n+2}.

У другом примеру посматраћемо везу Фибоначијевих бројева и сунцокрета! Пажљивим посматрањем лица цвета сунцокрета може се запазити да се он састоји од густо "пакованих" семенки које формирају две фамилије спирала. Ове спирале полазе из центра цвета и међусобно се секу. Смер једне фамилије је у смеру казаљке на сату, док друга фамилија има супротан смер (видети слику на насловној страни). Код сунцокрета просечне величине број спирала једнак је **34** и **55** (Фибоначијеви бројеви f_9 и f_{10}), док за *циновски* сунцокрет бројеви спирала постају **55** ($=f_{10}$) и **89** ($=f_{11}$) (као на слици). Раних педесетих година овог века Руси су објавили вест да су успели да одгаје *циновски циновски* сунцокрет са **89** и **144** спирала. Да не би заостали за Русима, Американци су у духу тадашње актуелне трке у нуклеарном наоружању и свемирским летовима прихватили и овај изазов и 1968. године саопштили су да су одгајили *циновски циновски циновски* сунцокрет са **144** и **233** спирала! Као што се може запазити, у свим случајевима бројеви спирала дати су суседним Фибоначијевим бројевима.

МАГИЧНИ ШЕСТОУГАО

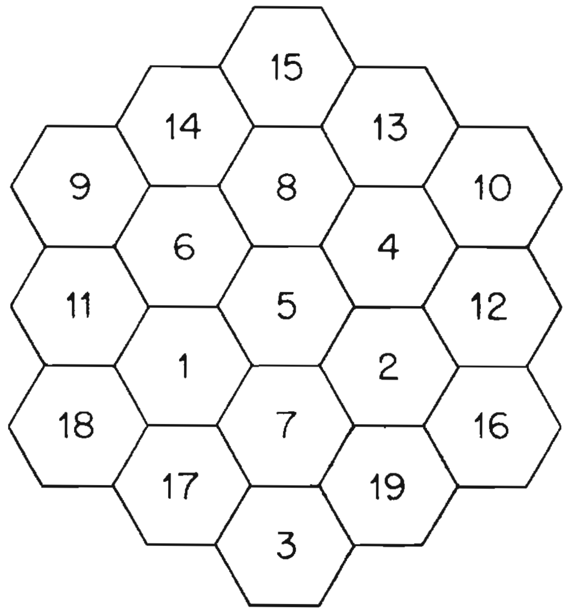
Ратко Тошић, Природно-математички факултет, Нови Сад

Шестоугаона шема бројева од 1 до k, смештених у k ћелија, таква да су сви збирови по врстама једнаки истом броју, назива се *магични шестоугао*. Број ћелија у најкраћој врсти назива се *ред* шестоугла.

Клифорд Адамс, службеник америчких железница је 1910. године почео да тражи магични шестоугао реда 3. После 47 година успео је да пронађе један, представљен на слици.

Нажалост, изгубио је папир на коме је било записано решење. После пет година узалудних покушаја да реконструише решење, пронашао је загубљени папир и послао га Мартину Гарднеру, уреднику рубрике "Математичке игре" у часопису *Scientific American*.

Касније је амерички математичар Триг доказао да је магични шестоугао који је пронашао Адамс – једини магични шестоугао било ког реда (ако се не рачунају они који се из Адамсовог магичног шестоугла могу добити ротацијама и симетријама. Триг је свео проблем на решавање Диофантове једначине у којој фигурише ред шестоугла и доказао да су једина решења 1 и 3. У случају реда 3, исцрпним претраживањем утврдио је да не постоје други магични шестоуглови.



ЗАДАЦИ

1. Доказати да у шестоуглу реда n најдуже врсте садрже по $2n-1$ ћелија свака, док је укупан број ћелија једнак $3n^2-3n+1$.

2. Доказати да је у магичном шестоуглу реда n збир бројева у свим ћелијама једнак

$$\frac{9n^4-18n^3+18n^2-9n+2}{2}.$$

3. Доказати да је збир бројева у свакој врсти магичног шестоугла реда n једнак

$$r=\frac{9n^4-18n^3+18n^2-9n+2}{2(2n-1)}.$$

Доказати да су једина решења горње Диофантове једначине $n=1$, $r=1$ и $n=3$, $r=38$.

Информације

36. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Павле Младеновић, Београд

Савезно такмичење из математике за ученике средњих школа одржано је 15. априла 1995. године у Врбасу. Одличан домаћин такмичења била је Гимназија у Врбасу, а организатор самог такмичења била је Савезна комисија. Учествовало је 69 такмичара из Србије, Црне Горе, Републике Српске и Републике Српске Крајине, а постигнути су следећи резултати:

I РАЗРЕД: **1. Горан Ђанковић**, Зрењанинска гимназија, 60 поена, II награда; **2. Славиша Гајић**, Гимназија Лозница, 55 поена, II награда; **3. Стефан Томаш**, Гимназија "Михајло Пупин", 50 поена, III награда; **4. Милан Башић**, Гимназија "Светозар Марковић", 50 поена, III награда; **5. Синиша Мршић**, Гимназија "Јован Јовановић Змај", 45 поена, похвала; **6. Јелена Спасојевић**, Математичка гимназија, Београд 40 поена, похвала; **7. Јелена Драшковић**, Гимназија "М. Добрашиновић", 40 поена, похвала; **8. Милан Илић**, Гимназија "Светозар Марковић", Ниш, 40 поена, похвала; **9. Драган Миленковић**, Математичка гимназија, Београд, 35 поена, похвала; **10. Горан Радојев**, Гимназија "Јован Јовановић Змај", Нови Сад, 30 поена, похвала; **11. Мирослав Пајић**, Математичка гимназија, Београд, 30 поена, похвала.

II РАЗРЕД: **1. Пејић Бојана**, Математичка гимназија, Београд, 70 поена, I награда; **2. Владимир Андрић**, Гимназија Ваљево, 50 поена, III награда; **3. Милан Брадоњић**, Математичка гимназија, Београд, 50 поена, III награда; **4. Мирко Симић**, Гимназија "Вук Караџић", Лозница, 50 поена, III награда; **5. Михајло Ваневић**, Математичка гимназија, Београд, 50 поена, III награда; **6. Милче Смиљанић**, Математичка гимназија, Београд, 40 поена, похвала; **7. Небојша Мудрински**, Гимназија "Јован Јовановић Змај", Нови Сад, 40 поена, похвала; **8. Стефан Трудић**, Математичка гимназија, Београд, 35 поена, похвала.

III РАЗРЕД: **1. Ђорђе Милићевић**, Математичка гимназија, Београд, 60 поена, II награда; **2. Виктор Розгић**, Гимназија Ваљево, 55 поена, II награда; **3. Михаило Стојић**, Гимназија "Вера Благојевић", Шабац, 50 поена, III награда; **4. Мирјана Вулетић**, Гимназија "Јован Јовановић Змај", 50 поена, III награда; **5. Борис Шобот**, Гимназија "Јован Јовановић Змај", Нови Сад, 50 поена, III награда; **6. Иван Милојевић**, Математичка гимназија, Београд, 30 поена, похвала; **7. Марко Вуколић**, Математичка гимназија, Београд, 30 поена, похвала.

IV РАЗРЕД: **1. Ђорђе Кртинић**, Математичка гимназија, Београд, 75 поена, I награда; **2. Игор Салом**, Математичка гимназија, Београд, 50 поена, III награда; **3. Снежана Пејић**, Математичка гимназија, Београд, 50 поена, III награда; **4. Мирослав Тремл**, Гимназија Илијаш, 35 поена, похвала; **5. Дарко Митровић**, Гимназија Котор, 35 поена, похвала; **6. Владимир Ратковић**, Гимназија "Јован Јовановић Змај", Нови Сад, 30 поена, похвала;

У недељу 16. априла одржано је додатно такмичење, "Мала олимпијада", за избор чланова југословенске екипе за учешће на међународним такмичењима 1995. године. На основу резултата Савезног такмичења и резултата Мале олимпијаде одређена је екипа у следећем саставу: **Ђорђе Кртинић, Ђорђе Милићевић, Виктор Розгић, Игор Салом, Мирослав Тремл, Борис Шобот.**

На Савезном такмичењу били су постављени следећи задаци:

ПРВИ РАЗРЕД

1. Дат је скуп $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Колико има петочланих подскупова S скупа A за које важи:

$$\{r(x+y) \mid x, y \in S, x \neq y\} = A,$$

при чему је $r(n)$ остатак при дељењу броја n са 10.

2. Дат је оштроугли троугао ABC. Нека је D подножје нормале из темена C, E подножје нормале из тачке D на страницу AC и F тачка дужи DE, таква да је $DF : FE = DA : DB$. Доказати да су праве BE и CF међусобно нормалне.

3. Правилан 1995-угао уписан је у кружницу. Из неке тачке P те кружнице повучене су тетиве до свих његових темена. Доказати да је збир дужина неких 1000 тетива једнак збиру дужина преосталих 995 тетива.

4. Доказати да постоји скуп S од 1995 различитих природних бројева за које важе следећа два услова:

(а) сваки збир два или више различитих бројева из S је сложен број;

(б) свака два различита броја из S су узајамно прости.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Доказати да број $2^{2^{1995}} - 1$ има бар 1995 различитих простих фактора.

2. Нека је $ABCDE$ конвексан шестоугао уписан у кружницу. Ако је $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$, доказати да се дијагонале AD, BE и CF секу у једној тачки.

3. Нека је M конвексан многоугао обима p. Доказати да се скуп страница многоугла M може разбити на два дисјунктна подскупа A и B, тако да је

$$|s_A - s_B| \le \frac{p}{3},$$

где је s_A збир дужина страница из A и s_B збир дужина страница из B.

4. Квадрат 5×5 подељен је на 25 јединичних квадрата. У њих играчи A и B наизменично уписују бројеве. Играч A почиње игру и увек уписује јединицу, а играч B увек уписује нулу. После уписаних 25 бројева рачунају се збирови у свим квадратима 3×3 и са M означава највећи од тих збирова. Доказати:

(а) Играч A може увек играти тако да важи $M \ge 6$.

(б) Играч B може увек играти тако да важи $M \le 6$.

ТРЕЋИ И ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Ако је p прост број, доказати да је број

$$\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p} - 123456789$$

дељив са p.

2. За полином $P(x)$ са целим коефицијентима кажемо да је дељив са природним бројем m, ако је број $P(a)$ дељив са m за сваки цео број a. Доказати тврђење: ако је полином

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

дељив са m, тада је број $n!a_0$ дељив са m.

3. Тетива AB и пречник CD кружнице k узајамно су нормални и секу се у тачки M. Нека је P тачка лука ACB, различита од A, B и C. Права PM сече кружницу k још у тачки Q, а права PD тетиву AB у тачки R. Доказати да је $RD > MQ$.

4. Дат је тетраедар $ABCD$. Нека су P и Q редом средишта ивица AB и CD, а O и S редом центри описане и уписане сфере. Ако тачке P, Q и S припадају једној правој, доказати да и тачка O припада тој правој.

МАЛА ОЛИМПИЈАДА 1995.

1. Одредити све тројке (x, y, z), $x \leq y \leq z$, позитивних рационалних бројева за које су $x + y + z$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ и xyz природни бројеви.

2. Нека је n природан број који у свом бинарном запису има тачно 1995 јединица. Доказати да је број $n!$ дељив са 2^{n-1995}.

3. Нека је $SABCD$ једнакоивична четворострана пирамида са врхом S и нека су M и N редом тачке на правама SA и BC такве да је права MN нормална на SA и BC. Наћи односе $SM : MA$ и $BN : NC$.

Решења одабраних задатака са такмичења, објавићемо у неком од наредних бројева.

12. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Павле Младеновић, Београд

Балканска математичка олимпијада одржана је у бугарском граду Пловдиву у времену од 7. до 13. маја 1995. године. На такмичењу су учествовале шесточлане екипе из Албаније, Македоније, Бугарске, Кипра, Грчке и Југославије.

Чланови југословенске екипе били су: **1. Ђорђе Кртинић**, IV разред Математичке гимназије Београд; **2. Ђорђе Милићевић**, IV разред Математичке гимназије Београд; **3. Виктор Розгић**, IV разред Ваљевске гимназије; **4. Игор Салом**, IV разред Математичке гимназије Београд; **5. Мирослав Тремл**, IV разред Ваљевске гимназије; **6. Борис Шобот**, III разред Гимназије "J. J. Змај" у Новом Саду. Руководиоци екипе били су др Павле Младеновић и др Војислав Петровић.

Такмичари су решавали 4 задатка које је одабрао Жири БМО, дозвољено време за израду задатака било је 4.5 часова, а сваки задатак вредео је 10 поена, тј. максималан број поена био је 40. Границе за доделу златних, сребрних и бронзаних медаља биле су 30, 20 и 14 поена. Додељено је

19 медаља и то: 5 златне, 6 сребрних и 8 бронзаних. Само један ученик Николај Николов из Бугарске освојио је максималан број од 40 поена. Расподела медаља приказана је у следећој табели: 2мм

ЗЕМЉА	ЗЛАТО	СРЕБРО	БРОНЗА	ПОЕНИ
АЛБАНИЈА	–	–	–	31
БУГАРСКА	3	3	–	170
МАКЕДОНИЈА	–	1	–	76
ЈУГОСЛАВИЈА	2	1	2	125
ГРЧКА	–	1	4	95
КИПАР	–	–	2	56

ЗАДАЦИ

1. (Македонија) Наћи вредност израза $(\ldots(((2*3)*4)*5)*\ldots)*1995$, где је $x*y=\frac{x+y}{1+xy}$ за све позитивне бројеве x и y.

2. (Грчка) Дати су кругови $c_1(O_1,r_1)$ и $c_2(O_2,r_2)$ који се секу у тачкама A и B, при чему је $r_2>r_1$ и $\angle O_1AO_2=90°$. Права O_1O_2 сече c_1 у тачкама C и D, а c_2 у тачкама E и F. (Тачка E је између C и D, а тачка D је између E и F.) Права BE сече круг c_1 у тачки K, а праву AC у тачки M, док права BD сече круг c_2 у тачки L, а праву AF у тачки N. Доказати да је
$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{KE}{KM}\cdot\frac{LN}{LD}.$$

3. (Албанија) Нека су a и b позитивни цели бројеви, такви да је $a>b$ и $a+b$ паран број. Доказати да су решења једначине
$$x^2-(a^2-a+1)(x-b^2-1)-(b^2+1)^2=0$$
позитивни цели бројеви, такви да ниједан од њих није потпун квадрат.

4. (Југославија) Нека је n позитиван цео број и S скуп свих тачака (x,y), где су x и y позитивни цели бројеви и $x\le n$ и $y\le n$. Нека је T скуп свих квадрата чија темена припадају скупу S. Означимо са a_k $(k\ge 0)$ број парова тачака из S које су темена тачно k квадрата из T. Доказати да је $a_0=a_2+2a_3$.

Решења задатака објавићемо у неком од наредних бројева.

Напомене

Жири је задатке предложене на такмичењу класификовао по тежини на следећи начин: први – лак, други – средње тежине, трећи – средње тежине, четврти – тежак. Резултати наших ученика били су следећи:

Име ученика	1	2	3	4	Σ	медаља
Ђорђе Кртинић	10	0	3	0	13	–
Ђорђе Милићевић	10	10	10	0	30	злато
Виктор Розгић	1	10	6	0	17	бронза
Игор Салом	10	2	3	0	15	бронза
Мирослав Тремл	10	10	10	0	30	злато
Борис Шобот	10	1	0	9	20	сребро
Σ	51	33	32	9	125	

36. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Владимир Јанковић, Београд

Овогодишња, 36. по реду, Међународна математичка олимпијада одржана је у Торонту, Канада, од 13. до 25. јула. На њој је учествовало 412 средњошколаца из 73 земље (од 79 позваних). За нас је ова Олимпијада имала посебан значај, јер смо се после две године отсуства вратили у математички олимпијски покрет. Пре две године смо отказали учешће на Међународној математичкој олимпијади коју је организовала Турска због проблема изазваних међународним положајем наше земље. Прошле године од организатора Међународне математичке Олимпијаде која је одржана у Хонг Конгу нисмо добили позив уз образложење да нам се он ускраћује због санкција УН.

Наша екипа је по традицији одређена на основу резултата постигнутих на Савезном такмичењу и додатном такмичењу за одређивање репрезентације које се популарно назива Мала олимпијада. У њен састав су ушли:

1. **Ђорђе Кртинић**, Математичка гимназија, Београд
2. **Ђорђе Милићевић**, Математичка гимназија, Београд
3. **Виктор Розгић**, Ваљевска гимназија
4. **Игор Салом**, Математичка гимназија, Београд
5. **Мирослав Тремл**, Гимназија из Илијаша
6. **Борис Шобот**, Гимназија "J. J. Змај", Нови Сад

Руководилац екипе који је истовремено члан Међународног жирија Олимпијаде, био је др Владимир Јанковић, а његов заменик био је др Милош Арсеновић, оба доценти Математичког факултета у Београду. Припреме и одлазак екипе на Олимпијаду организовао је Фонд за математичке и информатичке таленте Србије.

Током јуна и јула организоване су двонедељне припреме екипе. На њих су били позвани сви награђени такмичари на овогодишњем Савезном такмичењу у категорији ученика првог, другог и трећег разреда средњих школа. Први део припрема је обављен у Обедској бари а други у Новом Саду. Оба дела припрема су имала по пет радних дана у којима је одржано по пет часова наставе. Обрађивале су се оне области из којих се дају задаци на Међународној математичкој олимпијади.

Као и обично, на Олимпијади је рађено шест задатака. Задаци су се радили по три у два дана. Време за израду задатака је било по четири и по часа сваког дана. Сваки задатак је оцењиван оценом од 0 до 7 поена, што значи да је сваки такмичар могао да освоји највише 42 поена. Када су сви задаци прегледани и оцењени, жири олимпијаде је делио признања најуспешнијим такмичарима у складу са правилником Олимпијаде. Златну медаљу су добили такмичари који су освојили 37–42 поена, Сребрну медаљу су добили они који су освојили 29–36 поена а бронзана медаља је додељена такмичарима који су добили 19–28 поена. Похваљени су сви такмичари који су решили барем један цео задатак. Николај Николов, члан бугарске екипе, добио је златну медаљу за максималан број поена и специјалну награду за решење шестог задатка и тако је постао најуспешнији такмичар овогодишње Олимпијаде.

Резултати наших такмичара постигнути на Олимпијади приказани су следећом табелом:

	поени	признање
Ђорђе Кртинић	21	бронзана медаља
Ђорђе Милићевић	33	сребрна медаља
Виктор Розгић	15	похвала
Игор Салом	26	бронзана медаља
Мирослав Тремл	34	сребрна медаља
Борис Шобот	25	бронзана медаља

У екипном пласману (који се иначе не рачуна званично, јер је Међународна математичка олимпијада појединачно такмичење) поделили смо 17 и 18 место са Чесима. Ево како изгледа почетак табеле:

1.	Кина	236	11.	САД	178
2.	Румунија	230	12.	Тајван	176
3.	Русија	227	13.	Израел	171
4.	Вијетнам	220	14.	Индија	165
5.	Мађарска	210	15.	Немачка	162
6.	Бугарска	207	16.	Пољска	161
7.	J. Кореја	203	17.-18.	Југославија	154
8.	Иран	202	17.-18.	Чешка	154
9.	Јапан	183	19.	Канада	153
10	В.Британија	180	20.	ХонгКонг	151

Ово је списак првих двадесет екипа, или списак оних екипа које су освојиле преко 150 поена. Неке наше читаоце ће вероватно интересо вати како су прошле екипе бивших југословенских република, па зато ево и њихових резултата:

Македонија 117 (1 сребрна, 3 бронзане)
Хрватска 111 (3 бронзане)
Словенија 42
Б и Х 18

Словеначка екипа је имала 5 такмичара.

На крају, ево задатака који су рашавани на 36. Међународној математичкој олимпијади:

1. дан

1. Нека су A, B, C и D четири различите тачке једне праве, распоређене у том поретку. Кругови над дијаметрима AC и BD секу се у тачкама X и Y. Права XY сече BC у тачки Z. Нека је P тачка праве XY различита од Z. Права CP сече круг над дијаметром AC у тачкама C и M, а права BP сече круг над дијаметром BD у тачкама B и N. Доказати да се праве AM, DN и XY секу у једној тачки.

2. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да је $abc = 1$. Доказати да је
$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

3. Одредити све целе бројеве $n > 3$ за које постоје n тачака $A_1, A_2, ..., A_n$ у равни и реални бројеви $r_1, r_2, ..., r_n$ који задовољавају следећа два услова:

   (i) никоје три од тачака $A_1, A_2, ..., A_n$ не леже на једној правој;

   (ii) за сваку тројку $i, j, k (1 \leq i < j < k \leq n)$ троугао $A_iA_jA_k$ има површину једнаку $r_i + r_j + r_k$.

2. дан

4. Наћи највећу вредност x_0 за коју постоји низ позитивних реалних бројева $x_0, x_1, ..., x_{1995}$ који задовољавају следећа два услова:

   (i) $x_0 = x_{1995}$;

   (ii) $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$, за свако $i = 1, 2, ..., 1995$.

5. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао код кога је
   $AB = BC = CD, \;\; DE = EF = FA$ и $\angle BCD = \angle EFA = 60°$.

   Нека су G и H две тачке у унутрашњости шестоугла такве да је $\angle AGB = \angle DHE = 120°$. Доказати да је

$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF.$$

6. Нека је p непаран прост број. Наћи број подскупова A скупа

$$\{1, 2, ..., 2p\}$$

   таквих да

   (i) A има тачно p елемената,

   (ii) збир свих елемената из A дељив је са p.

Време за израду задатака је 4 сата и 30 минута сваког дана за три задатка. Сваки задатак се оцењује оценом од 0 до 7 поена.

Календар такмичења из математике и информатике ученика основних школа Југославије

1. **Такмичење ученика из математике:**

– Школско такмичење	до краја фебруара 1996. године;
– Општинско такмичење	субота 09. март 1996. године;
– Окружно такмичење	субота 06. април 1996. године;
– Републичко такмичење	субота 11. мај 1996. године;
– Савезно такмичење	субота 01. јун 1996. године;
– Балканијада	средина јуна 1996. године.

2. **Такмичење ученика из информатике:**

– Школско такмичење	до краја фебруара 1996. године;
– Окружно такмичење	субота 30. март 1996. године;
– Републичко такмичење	субота 18. мај 1996. године.

Нове књиге

У овој рубрици дају се прикази нових књига које би могле интересовати наше читаоце. Потребан услов за приказ књиге у нашем часопису је да издавач на адресу часописа пошаље три примерка књиге.

М. Петковић: ЗАНИМЉИВИ СВЕТ МАТЕМАТИКЕ, Техничка књига, Београд, 1994, 214 страна.

Литература из области рекреативне математике на нашем језику, нарочито када је реч о тежим проблемима, је прилично скромног обима и ова књига на најбољи начин ублажава недостатак овакве врсте популарне литературе. Књига представља колекцију занимљивих математичких проблема, загонетки и прича. У данашње време педагошка оцена литературе из области занимљиве математике је веома повољна и као таква је опште прихваћена у свету. Тешко је наћи бољи начин да се пробуди интерес читаоца за савлађивање одређеног наставног градива тако да је ова књига веома корисна у настави математике у средњим школама.

Задаци у овој књизи, којих има око 170, сврстани су у 11 поглавља по неким својим заједничким особинама или по сродности. Разноврсност задатака испуњава важан циљ да читаоца упозна са што више основних појмова из разних области математике, као што су логика, геометрија, топологија, теорија графова, вероватноћа, комбинаторни и екстремални проблеми.

Скоро сви задаци (изузетак је можда 4 до 5 задатака) су такве природе да је за њихово решавање довољно средњешколско математичко образовање тако да је књига намењена широком кругу читалаца и може се користити за самосталан рад.

Р. Тошић, В. Петровић: ПРОБЛЕМИ ИЗ ГЕОМЕТРИЈЕ, методичка збирка задатака, "Стилос", Нови Сад 1995, 470 страна.

Збирка представља један свеобухватни приказ еуклидске и хиперболичне геометрије кроз 1777 проблема. Проблеми су разврстани по садржају, а затим према сложености поређани у 4 главе. То су: апсолутна геометрија, еуклидска раван, еуклидски простор, додатни задаци и хипербилична геометрија. Осим додатних задатака, свака глава је подељена у низ поглавља. Тако на пример, другу главу, еуклидску раван, чине поглавља: особине фигура еуклидске равни, геометријска места тачака, геометријске трансформације и конструктивни задаци. Глава "Додатни задаци" резервисана је за истинске љубитеље геометрије. На крају су решења која покривају отприлике две трећине задатака. Једну трећину чине детаљна и исцрпна решења, друга трећина су краћа или дужа упутства, а остатак је без решења. Тежи задаци означени су звездицом.

Иако је превасходно намењена студентима математике, збирку у великој мери могу користити и ученици средњих школа. То се посебно односи на ученике математичких гимназија и математичких усмерења. Она је важан део литературе из геометрије неопходне за припреме за математичка такмичења.

Практикум

ЗАДАЦИ СА КВАЛИФИКАЦИОНОГ ИСПИТА ИЗ МАТЕМАТИКЕ НА ИНСТИТУТУ ЗА МАТЕМАТИКУ У НОВОМ САДУ

Задаци су са квалификационог испита из математике у јунском року 1995. године. Прва четири задатка су обавезна, а ради се још пети или шести задатак по избору.

ЗАДАЦИ:

1. Одредити вредност параметра k тако да корени x_1 и x_2 квадратне једначине

$$x^2 + 3kx + k^2 = 0 \quad \text{задовољавају једнакост} \quad x_1^2 + x_2^2 = 112.$$

2. Решити једначину

$$4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}.$$

3. Доказати идентитет

$$\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \frac{1 + 2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\,(\mathrm{tg}^2\alpha - 1)} = \frac{2}{1 + \mathrm{tg}\alpha}.$$

4. Колико има пермутација цифара $1, 2, 3, \ldots, 9$ у којима није 1 испред 2?

5. Дијагонале конвексног четвороугла $ABCD$ се секу у тачки O и деле четвороугао на троуглове $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCD$ и $\triangle ODA$. Доказати да је производ површина троуглова $\triangle OAB$ и $\triangle OCD$ једнак производу површина троуглова $\triangle OBC$ и $\triangle ODA$.

6. Дато је n $(3 \le n \le 1000)$ тачака у равни својим координатама x_i, y_i. Написати програм који одређује бар једну тројку тачака $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ такву да је површина троугла $\triangle ABC$ максимална у односу на све троуглове чија су темена у задатим тачкама. (Програм написати у Бејзику или Паскалу)

РЕШЕЊА:

1. На основу Виетових образаца је $x_1 + x_2 = -3k$ и $x_1x_2 = k^2$, а дато је да је $x_1^2 + x_2^2 = 112$ па је

$$(x_1 + x_2)^2 = 9k^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 112 + 2k^2$$

из чега следи да је

$$9k^2 = 112 + 2k^2 \quad \Longleftrightarrow \quad k^2 = 16 \quad \text{па је} \quad k_{1,2} = \pm 4.$$

2. Како је $4^{\sqrt{x-2}} = (2^2)^{\sqrt{x-2}} = \left(2^{\sqrt{x-2}}\right)^2$ то се сменом $y = 2^{\sqrt{x-2}}$ добија једначина

$$y^2 - 10y + 16 = 0 \quad \text{чија су решења} \quad y_1 = 2 \ \text{ и } \ y_2 = 8.$$

Из $y_1 = 2^1 = 2^{\sqrt{x-2}}$ са добија једначина $\sqrt{x-2} = 1$ чије је решење $x_1 = 3$, а из $y_2 = 8 = 2^3 = 2^{\sqrt{x-2}}$ се добија једначина $\sqrt{x-2} = 3$ чије је решење $x_2 = 11$.

3.

$$\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \frac{1 + 2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\,(\operatorname{tg}^2\alpha - 1)} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \frac{1 + 2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1 - 2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{2\cos\alpha(\sin\alpha - \cos\alpha)}{(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha)} =$$

$$= \frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{2}{1 + \operatorname{tg}\alpha}.$$

4. Свакој пермутацији од 9 цифара у којој је 2 иза 1 одговара пермутација у којој је 1 иза 2, која се добија када 1 и 2 замене места. Дакле има исти број пермутација у коме је 1 испред 2 као и пермутација у коме је 2 испред 1. Укупно има 9! пермутација, па пермутација у којим је 2 иза 1 има $9!/2 = 181440$.

5. Нека је дат конвексан четвороугао $ABCD$ и нека се дијагонале AC и BD секу у тачки O. Означимо са h_1 висину спуштену из B на дијагоналу AC. Тада је h_1 висина која оговара страници OA у троуглу $\triangle OAB$ и такође висина која одговара страници OC у троуглу $\triangle OBC$. Аналогно је h_2 висина спуштена из D на AC, висина која одговара страници OA у троуглу $\triangle ODA$ и висина која одговара страници OC у троуглу $\triangle OCD$. Производ површина је

$$P_{\triangle OAB} P_{\triangle OCD} = \frac{h_1 OA}{2} \cdot \frac{h_2 OC}{2} = \frac{h_1 OC}{2} \cdot \frac{h_2 OA}{2} = P_{\triangle OBC} P_{\triangle OAD}.$$

6. Искористимо образац за површину троугла када су дате координате темена

$$P_\triangle = \frac{1}{2}|x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|,$$

и нека се површина троугла израчунава у функцији. Тада се добија програм:

```
program trouglovi;
const
  maxbroj = 1000;
var
  x, y : array[1 .. maxbroj] of real;
  n, i, j, k, t1, t2, t3 : integer;
  pomp, maxp : real;
  function p(x1, x2, x3, y1, y2, y3 : real) : real;
    begin
      p := abs(x1*(y2 - y3) + x2*(y3 - y1) + x3*(y1 - y2))/2.0
    end;  (*  p  *)
begin
  (* najpre unos po zahtevima zadatka *)
  repeat
    writeln('Unesite broj tacaka n  (3 <= n <=',maxbroj,')');
    readln(n)
  until (3 <= n) and (n <= maxbroj);
  for i := 1 to n do
    begin
      writeln('Unesite x koordinatu tacke br. ',i);
      readln(x[i]);
      writeln('Unesite y koordinatu tacke br. ',i);
      readln(y[i])
    end;
  (* staviti maksimalnu povrsinu na malu vrednost *)
  maxp := -1.0;
  (* probati povrsine svih trouglova *)
  for i := 1 to n-2 do
    for j := 2 to n-1 do
      for k := 3 to n do
        begin
          pomp := p(x[i], x[j], x[k], y[i], y[j], y[k]);
          if pomp > maxp then
            begin
              (* ako se nadje veca, zapamtiti vecu *)
              maxp := pomp;
              t1 := i;
              t2 := j;
              t3 := k
            end;
        end;
  writeln('Jedan trougao maksimalne povrsine je :');
  write('T',t1,'(',x[t1],',',y[t1],'), ');
  write('T',t2,'(',x[t2],',',y[t2],'), ');
  writeln('T',t3,'(',x[t3],',',y[t3],'),   P = ',maxp)
end.
```

Приредио: Ђура Пауновић, Институт за математику, Нови Сад

Одговори, упутства, решења

Изопериметријски проблем, ТАНГЕНТА 1(1995/96 – 1)

5. Круг.

6. Кружни лук.

7. Полукруг са крајевима на рубу полуравни.

8. Кружни лук са центром у једном од темена троугла и крајевима на страницама које полазе из тог темена

9. Кружни лук са центром у темену угла и крајевима на крацима угла

Прости бројеви, ТАНГЕНТА 1(1995/96 – 1)

1. Следи на основу чињенице да су бројеви облика $6n$, $6n+2$ и $6n+4$ дељиви са 2, док су бројеви облика $6n+3$ дељиви са 3.

2. Претпоставимо да има само коначно много простих бројева облика $4k-1$. Нека су p_1, $p_2, \ldots$, p_m сви такви бројеви. Посматрајмо број

$$q = 4p_1p_2\cdots p_m - 1.$$

Приметимо да је производ бројева облика $4k+1$, увек број истог таквог облика. Зато број q има бар један прост фактор p облика $4k-1$. Број p је различит од свих бројева p_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, зато што ниједан од тих бројева није делитељ од q. Дошли смо до контрадикције са претпоставком да су $p_1, p_2, \ldots, p_m$ једини прости бројеви облика $4k-1$. Следи да таквих бројева има бесконачно много.

3. Приметимо да је производ бројева облика $3k+1$ увек број истог таквог облика. Претпоставимо да постоји највећи прост број облика $3k+2$, тј. да има коначно много таквих бројева. Нека су p_1, $p_2, \ldots$, p_m сви такви бројеви. Посматрајмо број

$$q = 3p_1p_2\cdots p_m + 2.$$

Број q има бар један прост фактор p облика $3k+2$, који, међутим, мора бити различит од свих простих бројева p_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, што је контрадикција.

4. У низу од $n-1$ узастопних бројева

$$n!+2,\ n!+3, \ldots,\ n!+n,$$

сви бројеви су сложени (први је дељив са 2, други са 3, ..., последњи са n).

5. Претпоставимо да је $6n+1 = p-q$, где су p и q прости бројеви. Ако је $q=2$, онда је $p = 6n+3$, што је немогуће. Ако је $q = 2k+1$, онда је $p = 6n+2k+2$, што је, такође, немогуће.

6. (а) Нека је p прост број, такав да је $p+1 = x^2$, за неки природан број x. Тада је $p = x^2-1 = (x-1)(x+1)$. Следи да је $x-1 = 1$, тј. $p=3$.

(б) Ако је за неки прост број p, $p = x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$, онда је $x-1=1$, тј. $p=7$.

7. Сваки непаран број може се на јединствен начин представити као разлика квадрата два узастопна природна броја :

$$2k+1 = (k+1)^2 - k^2.$$

Нека је p непаран прост број такав да је $p = x^2-y^2$, где су x и y природни бројеви. Тада је $p = (x-y)(x+y)$, па је $x-y=1$, тј. $x = y+1$, одакле следи тврђење.

8. Очигледно, 2 није такав број. Природан број $n > 2$ може се написати у облику $n = 3q+r$, где је $0 \le r \le 2$. За $r=2$, број $n+10$ је сложен; за $r=1$, сложен је број $n+14$. За $r=0$, једини прост број облика $3q$ је 3 а у том случају су прости и бројеви $3+10=13$ и $3+14=17$.

9. Посматрајмо бројеве p, $p+2$ и $p+4$, где је p прост број. Ако је p облика $3q+1$, онда је $3|(p+2)$. Ако је p облика $3q+2$ онда је $p|(p+4)$. Преостаје само могућност да је $p=3$, у ком случају се добија решење: 3, 5, 7.

10. Нека је p највећи прост број који није већи од n. Број $N-1 = 2\cdot3\cdot5\cdots p-1$ садржи само просте факторе веће од n. Следи да је $N-1>n$; тим пре је $N = 2\cdot3\cdot5\cdots p > n$.

11. Тврђење важи за $n=5$: $p_5 = 11 > 10$. Ако је $p_n > 2n$, онда је $p_{n+1} \ge p_n+2 > 2n+2 = 2(n+1)$.

12. Нека је p прост фактор броја $n!-1$. Очигледно је $n < p \le n!-1 < n!$.

13. Следи на основу тога што, према претходном задатку, између свака два узастопна члана бесконачног низа

$$3, \quad 3!, \quad (3!)!, \quad ((3!)!)!, \ldots$$

постоји бар један прост број.

14. Број $2^p - 1$ у бинарном систему записује као низ од p јединица. Сада тврђење следи на основу Теореме 6.

15. Користити математичку индукцију, узимајући у обзир да је $f_n = 2^{2^n} + 1$ и $f_{n+1} - 2 = 2^{2^{n+1}} - 1 = (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1)$.

16. Нека је $d|f_n$ и $d|f_{n+k}$, за неке природне бројеве n и k. Како је $f_{n+k} = f_0 f_1 \cdots f_n \cdots f_{n+k-1} + 2$, то је $d|2$. Због непарности Фермаових бројева, следи да је $d = 1$.

17. Према задатку 15, $2^{2^n} - 1 = f_n - 2 = f_0 f_1 \cdots f_{n-1}$, па је број $2^{2^n} - 1$ дељив са сваким Фермаовим бројем f_i, за $0 \le i \le n-1$. Међутим, Фермаов број f_5 садржи прост фактор 6700417, одакле следи тврђење.

18. Број $2^{2^n} - 1$ је производ n различитих Фермаових бројева, који су по паровима узајамно прости, одакле следи тврђење.

19. (а) 29; (б) 50.

20. Да. Такав је скуп $S = \{k \cdot 1995! + 1 \mid k = 1, 2, \ldots, 1995\}$. Збир r бројева из тога скупа дељив је са r.

21. Како је $f(1) = f(0) = 1$, то је слободни члан $P_n(0)$ полинома $P_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots(f}_{n}(x))\cdots))$ једнак 1. Следи да је, за сваки природан број m, остатак при дељењу $P_n(m)$ са m једнак 1. Узимајући $m' = P_k(m)$ уместо m, добијамо да су $P_{n+k}(m)$ и $m' = P_k(m)$ узајамно прости бројеви.

22. Следи на основу чињенице да у бесконачном низу

$$m, \quad f(m), \quad f(f(m)), \ldots$$

сваки члан садржи прост фактор који није фактор ниједног другог члана низа.

23. (а) $n \in \{2, 4, 6, 8\}$; (б) $n = 28$.

24. (а) n прост број; (б) n сложен број.

25. Канонски облик сваког члана a_i садржи бар један прост фактор p_i са експонентом (≥ 0) већим него што је експонент од p_i у канонском разлагању производа осталих чланова низа. То значи да се p_i појављује у броју a_i са експонентом већим него у било ком другом члану низа. Назовимо p_i "представником" броја a_i. Како сваки прост број може бити представник највише једног члана низа, следи да је $k \leq \pi(n)$.

26. Ако је $k = 3t$ за неки природан број t, онда тврђење важи јер су у том случају сви чланови низа дељиви са 3. Нека је $k \neq 3t$. Ако тврђење не важи, онда су за неки $n > 1$, бројеви

$$a_n = a > 3,\ a_{n+1} = a + 2k,\ a_{n+2} = a + 4k$$

три проста броја. Како је a прост број, то је $3|(a+1)$ или $3|(a+2)$. У првом случају, за $k = 3t+1$, следи $3|((a+1)+(6t+3))$, тј. $3|(a+2k)$. У другом случају, за $k = 3t+1$, следи $3|((a+2)+6t)$, тј. $3|(a+2k)$, а за $k = 3t+2$, добијамо $3|((a+2)+(12t+6))$, тј. $3|(a+4k)$. Како је a_n прост број и $n > 1$, следи да бар један од бројева a_{n+1}, a_{n+2} није прост. За $n = 1$ могу сва три броја a_1, a_2, a_3 бити прости. На пример, за $k = 2$ је $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 11$.)

РЕШЕЊЕ ШАХОВСКОГ ПРОБЛЕМА ИЗ ПРЕТХОДНОГ БРОЈА

1. **Sf3, Le1.** На остале одговоре бели матира пре 6. потеза. **2. Se1, Kh4 3. h3, Kh5 4. Kf6, Kh4 5. Kg6, h5 6. Sf3 мат.**

Занимљиво је да осим наведеног постоји и друго решење. На то је указало више читалаца. Прва три потеза су иста као горе, а онда следи: **4. Sd3, Kh4 5. Sf4, h5 6. Sg6 мат.**

НАГРАЂЕНИ СУ:

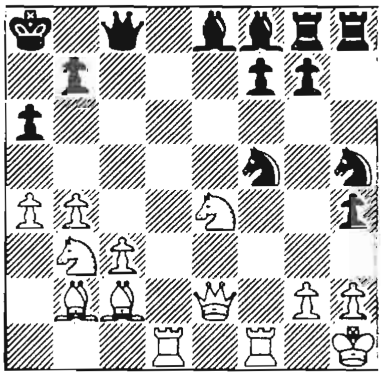
Марјан Милошевић, II_5, Техничка школа, 32000 Горњи Милановац, **Ивана Јошанов**, II, гимназија "И.Секулић", 21000 Нови Сад, **Зоран Шепутић** (код Старц Здравка), Жарка Зрењанина 93, 26300 Вршац, **Владимир Јаковљевић**, Поп Владе Зечевића 16, 21208 Сремска Каменица, **Владан Вукићевић**, Сретена Младенивића 122/9, 18000 Ниш, **Ђорђе Костић**, Лоле Рибара 24, 18000 Ниш, **Владимир Вуковић**, III_6, Гимназија, 37000 Крушевац, **Милун Митровић**, 4. јула 50/2, 31210 Пожега, **Чаба Фараго**, Арањ Јаноша 3, 24420 Кањижа, **Томислав Карастојковић**, Филипа Вишњића 41/6, 11080 Земун.

Шаховска страна

ЊЕНО ВЕЛИЧАНСТВО ДАМА

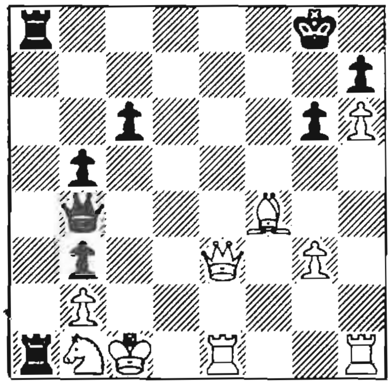
Дама или краљица на српском, ферз на руском, квин на енглеском, даме на немачком, дона на талијанском итд. све су то називи за најјачу фигуру у шаху. Захваљујући изузетној покретљивости брзо и лако се премешта с једног краја табле на други, што омогућава реализације најразличитијих идеја.

У следећој позицији црни жртвује готово све фигуре да би се дама приближила месту догађаја.

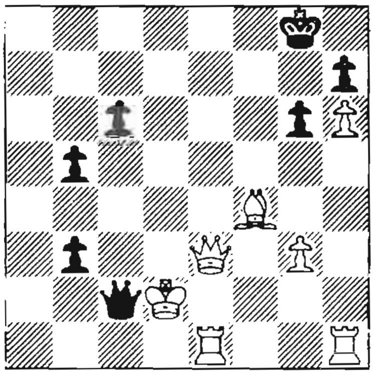


1. ... , ♗b5! 2. ab5, ♘hg3! 3. ♘g3, ♘g3 4. hg3, hg3 5. ♔g1, ♗c5! 6. ♘c5, ♖h1! 7. ♔h1, ♖h8 9. ♔g1, ♖h1! 10. ♔h1, ♕h8 11. ♔g1, ♕h2 мат.

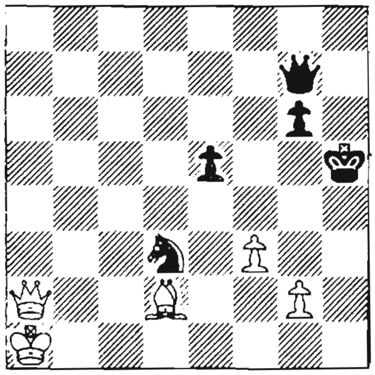
Слично је у наредном примеру. Због материјалне премоћи белог као и несигурног положаја сопственог краља, црни (Крејчик) је принуђен да завршну операцију обави у "једном даху". То је права прилика за даму. Но претхоно јој треба прокрчити пут до белог монарха.



1. ... , ♖b1! 2. ♔b1, ♖a1!! 3. ♔a1, ♕a4 4. ♔b1, ♕a2. Почетак потере за белим краљем. **5. ♔c1, ♕a1 6. ♔d2, ♕b2 7. ♔d3, ♕c2 8. ♔d4, ♕c4 9. ♔e5, ♕d5 10. ♔f6, ♕f7.** А сада назад. **11. ♔e5** (Не иде 11. ♔g5 због 11. ..., ♕f5 12. ♔h4, ♕h5 мат), **♕f5 12. ♔d4, ♕d5 13. ♔c3, ♕c4 14. ♔d2, ♕c2 мат.** Завршна слика, тзв. еполетни мат заслужује дијаграм.

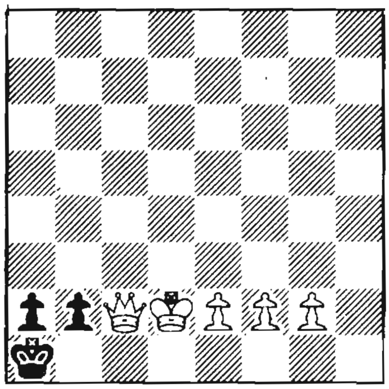


У позицији



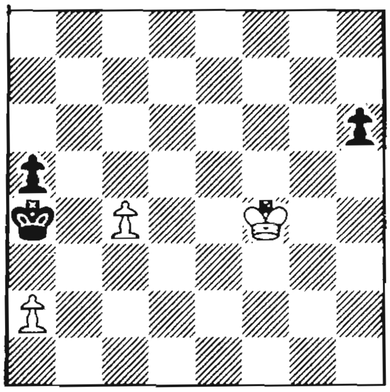
након **1. g4, ♔h4 2. ♗h6!, ♕h6** (Иначе 3. ♕h2 мат.) следи "плес" беле даме преко целе табле. **3. ♕h2, ♔g5 4. ♕d2, ♘f4.** Међутим несрећа долази с друге стране. **5. ♕d8 мат!**

Леп утисак оставља цик-цак маневар у следећој завршници.



1. ♕c3, ♔b1 2. ♕d3, ♔a1 3. ♕d4, ♔b1 ... 11. ♕h8, ♔b1 12. ♕h1 мат.

НАГРАДНИ ЗАДАТАК за читаоце је



Бели на потезу добија

Решења слати на адресу редакције са назнаком за "Шаховску страну". 10 најуспешнијих решавача биће награђено шаховском литературом издавачке куће **"ШАХОВСКИ ИНФОРМАТОР", Београд, Француска 31.**

Војислав Петровић

САДРЖАЈ