Miroslav Pavlović

GLATKOST I POLUSKALARNI PROIZVOD U NORMIRANIM PROSTORIMA

- magistarski rad -

Beograd 1978.

S a d r ž a j

P R E D G O V O R

Pojam glatkosti, jedan od osnovnih u geometrijskoj teoriji Banahovih prostora, star je skoro koliko i sama funkcionalna analiza. O tome rečito govori sadržaj Mazurove teoreme dokazane još 1934. godine (teorema 2.5 u ovom radu). Sada se u matematičkoj literaturi može sresti niz raznih tipova glatkosti i stroge konveksnosti, kao što su uniformna glatkost i konveksnost itd.

Poluskalarni proizvod je pojam analitičkog karaktera. Definisao ga je Lamer (G.Lumer) 1961. godine. Postoji suštinska veza između pojmova vezanih za jediničnu sferu normiranog prostora i odgovarajućeg poluskalarnog proizvoda. U ovom radu se posebna pažnja poklanja vezi između glatkih tačaka i neprekidnosti poluskalarnog proizvoda po "desnom" argumentu. Postoje odgovarajuće karakterizacije stroge, lokalno uniformne i uniformne konveksnosti, lokalano uniformne i uniformne glatkosti itd. Međutim, njihovo izlaganje u jednom ovakvom radu odvelo bi u preveliku opširnost.

Prisustvo glatkosti obezbeđuje poluskalarnom proizvodu dobra svojstva njegovog posebnog i najprostijeg oblika - skalarnog proizvoda. U takvoj situaciji može se proširiti tehnika Hilbertovih prostora na Banahove. U ovom radu je ta mogućnost proširivanja prikazana na primerima teorije aproksimacija i reprezentovanja ograničenih linearnih funkcionala.

Izloženi materijal se može posmatrati sa mnogo opštijeg stanovišta. Mali ustupak opštosti učinjen je u prvom delu rada, u kojem se teoremom o metrizaciji ukazuje na mogućnost prenošenja problematike na metričke linearne prostore. Struktura, pak, normiranog, a naročito separabilnog Banahovog, prostora omogućava sadržajnije odgovore o glatkim tačkama na jediničnoj sferi. Nešto od toga se raspravlja u drugom delu.

U vezi sa poluskalarnim proizvodom niče još mnogo pitanja. Pod kakvim će uslovima poluskalarni imati neku osobinu skalarnog proizvoda i, posebno, sve? Zadržava li formalno preneti pojam u novoj situaciji stare osobine, odnosno, ima li smisla to prenošenje? U trećem delu se daje delimičan odgovor primerima svojstva S5 i Gramove determinante.

U nedostatku neke monografije, autor je materijal organizovao po sopstvenom nahođenju. Samostalno su urađeni primeri sa Orličevim prostorima, teoreme 1.8, 3.3, 3.6, 3.7, 4.1, 4.2 i odeljak o Gramovoj determinanti.

Beograd, 27. jula 1978. M.P.

P r v i   d e o

GLATKOST U LOKALNO KONVEKSNIM PROSTORIMA

U ovom delu se ispituje glatkost konveksnih okolina u lokalno konveksnom prostoru L nad poljem Φ ($\Phi=\mathbb{R}$ ili $\Phi=\mathbb{C}$) Pretpostavlja se da je topologija u L Hauzdorfova, što nije naročito bitno. Pri tome je L^* prostor neprekidnih linearnih funkcionala na L snabdeven $*$-slabom topologijom koja se označava sa w^* . Slovo w obeležava slabu topologiju u L. Koriste se i sledeće oznake:

$\overline{E}$ za zatvorenje skupa $E\subset L$ u izvornoj topologiji;

$w^*(E)$, w^*-zatvorenje skupa $E\subset L^*$;

intE [frE], unutrašnjost [granica, rub] skupa $E\subset L$ u izvornoj topologiji;

ω, skup prirodnih brojeva;

$A+B=\{x+y: x\in A, y\in B\}$, $\lambda A=\{\lambda x: x\in A\}$, $\lambda\in\Phi$;

A i B su skupovi u vektorskom prostoru .

Dobro poznate činjenice se ne ističu posebno. Navedene su samo one koje se bitno tiču pojmova ovog rada.

1. Apsolutno konveksni skupovi. Prednorme

Pretpostavljajući da je X vektorski prostor nad poljem Φ, navodimo bez dokaza osnovne činjenice o apsolutno konveksnim skupovima. Skup $E \subset X$ zove se apsolutno konveksnim ako je $\lambda E + \mu E \subset E$ za sve one skalare λ, μ za koje je $|\lambda|+|\mu| \leq 1$. Naravno, E je u tom slučaju i konveksan. Za apsolutno konveksan skup $E \subset X$ važe sledeće osobine:

a) $0 \in E$,

b) $|\lambda| \leq |\mu| \Rightarrow \lambda E \subset \mu E$,

c) $\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k E) = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|\right) E, \quad \lambda, \mu, \lambda_k \in \Phi$.

U uskoj vezi sa prethodnim pojmom stoji pojam prednorme. Kaže se da je realna funkcionela p prednorma na X ako je $p(x) \geq 0$, $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ i $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ za sve $x, y \in X$, $\lambda \in \Phi$. Iz tih osobina neposredno proizilazi nejednakost $|p(x)-p(y)| \leq p(x-y)$. Pomenutu vezu ostvaruje funkcional Minkovskog, koji se drugačije zove razdaljinskom funkcijom. Naime, ako je $E \subset X$ apsolutno konveksan, onda se njegovom razdaljinskom funkcijom zove funkcional p_E definisan na linearnom omotaču $\mathcal{L}(E)$ skupa E jednakošću $p_E(x) = \inf\{t > 0 : x \in tE\}$.

Teorema 1.1. a) Razdaljinska funkcija p_E apsolutno konveksnog skupa $E \subset X$ je prednorma na $\mathcal{L}(E)$. Ako je $F = \{x : p_E(x) \leq 1\}$, $G = \{x \in \mathcal{L}(E) : p_E(x) < 1\}$, onda je $G \subset E \subset F$ i $p_E = p_G = p_F$.

b) Ako je p prednorma na X, onda su skupovi $B = \{x : p(x) < 1\}$ i $C = \{x : p(x) \leq 1\}$ apsolutno konveksni i važi jednakost $p_B = p_C = p$.

U ovom dêlu se koriste pojmovi algebarske unutrašnjosti i algebarske granice skupa, koji ne zavise od topologije, a u slučaju otvorenih skupova podudaraju se sa odgovarajućim topološkim pojmovima. Njihov detaljni opis može se naći u Keteovoj knjizi ([1],179). U njoj se pokazuje da je za apsolutno konveksan skup E algebarska unutrašnjost u $\mathcal{L}(E)$ jednaka skupu $\alpha(E)=\{x\in\mathcal{L}(E): \mu_E(x)<1\}$, a algebarska granica u $\mathcal{L}(E)$ jednaka skupu $r(E)=\{x\in\mathcal{L}(E): \mu_E(x)=1\}$.

Ako je U apsolutno konveksna okolina u lokalno konveksnom prostoru, onda je $\alpha(U)=\operatorname{int}U$ i $r(U)=\operatorname{fr}(U)$.

Primer 1.1. Orličevi prostori.

Neka je P kompaktan skup u $\mathbb{R}^n$ sa običnom Lebegovom merom m i $\mathcal{M}(P)$ vektorski prostor skoro svuda konačnih funkcija (skalarnih) na P. Od posebnog interesa su pojedini delovi prostora $\mathcal{M}(P)$, koji se izdvajaju pomoću Orličevih funkcija.

Konveksnu funkciju $M:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ zovemo N-funkcijom ako je $M(t)>0$ za $t>0$, $M(0)=0$, $\lim\limits_{t\to+0}\frac{M(t)}{t}=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{M(t)}{t}=+\infty$.

Uz N-funkciju razmatramo apsolutno konveksan skup $C_M(P)=\{x\in\mathcal{M}(P): \int_P M(|x|)\,dm\leq 1\}$. Skup $L_M(P)=\mathcal{L}(C_M(P))$ zovemo Orličevim prostorom. Lako se vidi da je

$$L_M(P)=\{x\in\mathcal{M}(P): \exists\varrho>0\ \int_P M(\tfrac{|x|}{\varrho})\,dm<+\infty\}.$$

Označimo li sa μ_M razdaljinsku funkciju skupa $C_M(P)$, biće za $x\in L_M(P)$ $\mu_M(x)=\inf\{\varrho>0: \int_P M(\frac{|x|}{\varrho})\,dm\leq 1\}$. Na osnovu teoreme 1.1. μ_M je prednorma na L_M. U ovom slučaju μ_M predstavlja i normu na L_M. Pisaćemo $\mu_M(x)=\|x\|_M$. Pokazuje se ([8], [19]) da je L_M sa tako uvedenom normom Banahov prostor.

Uzimajući specijalno $M(t)=t^p$ $(p>1)$, dobijamo nejednakost Minkovskog za L^p prostore. ∎

2. Osnovne činjenice o polarnosti

Osobine polarnosti imaju odlučujući značaj u ispitivanju dualnosti glavnih pojmova ovog dêla, a to su glatkost i stroga konveksnost. Polarom skupa E u lokalno konveksnom prostoru L zove se skup $E^{\pi}=\{f\in L^*: \forall x\in E\ |f(x)|\leq 1\}$, a polarom skupa $F\subset L^*$ skup $F_{\pi}=\{x\in L: \forall f\in F\ |f(x)|\leq 1\}$.

a) Skupovi E^{π} i F_{π} su apsolutno konveksni, pri čemu je E^{π} w^*-zatvoren, a F_{π} w-zatvoren, pa, prema tome, i zatvoren.

b) Ako je $E_1\subset E_2$, onda je $E_1^{\pi}\supset E_2^{\pi}$.

c) Ako je $\lambda\neq 0$, onda je $(\lambda E)^{\pi}=\lambda^{-1}E^{\pi}$.

d) $(\bigcup_{\alpha} E_{\alpha})^{\pi}=\bigcap_{\alpha} E_{\alpha}^{\pi}$.

Za skup F_{π} važe tvrdjenja slična tvrdjenjima b), c), d).

Sledeća teorema se koristi nekoliko puta u ovom radu i specijalan je slučaj jedne opštije ([2], 57).

Teorema 1.2. Neka je A apsolutno konveksan skup u $L\ [L^*]$. Da bi važila jednakost $(A^{\pi})_{\pi}=A\ [(A_{\pi})^{\pi}=A]$, potrebno je i dovoljno da je skup A zatvoren [w^*-zatvoren].

U daljem radu koriste se sledeće dve proste leme.

Lema 1.1. a) Neka je $p\ [p']$ razdaljinska funkcija skupa $E_{\pi}\ [E^{\pi}]$, $E\subset L^*\ [L^*]$. Tada je $p(x)=\sup\{|f(x)|: f\in E\}$, $x\in \mathcal{L}(E_{\pi})$, $[p'(f)=\sup\{|f(x)|: x\in E\},\ f\in\mathcal{L}(E^{\pi})]$.

Dokaz. Neka je $H(x)=\{t>0: x\in tE_{\pi}\}$, $x\in\mathcal{L}(E_{\pi})$. Tada je $H(x)=\{t>0: \forall f\in E\ |f(x)|\leq t\}$. Ako je $s(x)=\sup\{|f(x)|: f\in E\}$, onda je $|f(x)|\leq s(x)$ za $f\in E$, pa je zato $s(x)\in H(x)$. Pošto je $p(x)=\inf H(x)$, to je $p(x)\leq s(x)$. S druge strane, ako $t\in H(x)$, onda je $|f(x)|\leq t$ za sve $f\in E$, pa je $s(x)\leq t$ i zato $s(x)\leq \inf H(x)=p(x)$. Na sličan način dokazuje se jednakost za p'. ∎

Lema 1.2. Neka je $E \subset L$ i p' razdaljinska funkcija skupa E^{π}. Ako je $(f_n, n \in \Delta)$ generalisani niz elemenata iz $\mathcal{L}(E^{\pi})$ takav da je $w^*\text{-}\lim_{n\in\Delta} f_n = f \in \mathcal{L}(E^{\pi})$, onda je $\underline{\lim}_{n\in\Delta}\, p'(f_n) \geq p'(f)$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je $p'(f) = \sup\{|f(x)| : x \in E\}$, to postoji $x_0 \in E$ tako da je $|f(x_0)| \geq p'(f) - \varepsilon/2$. Tada je $p'(f_n) \geq |f_n(x_0)| \xrightarrow{n\in\Delta} |f(x_0)| \geq p'(f) - \varepsilon/2$. . Pošto je $\lim_{n\in\Delta} |f_n(x_0)| = |f(x_0)|$, to postoji $n_0 \in \Delta$ tako da je za $n \geq n_0$ $|f_n(x_0)| \geq |f(x_0)| - \varepsilon/2$. Zato je za $n \geq n_0$ $p'(f_n) \geq p'(f) - \varepsilon$. ∎

3. Stroga konveksnost

Ovaj pojam je karakterističan za realne prostore. Njegova primena u kompleksnom slučaju zasniva se na tome što je svaki kompleksni vektorski prostor X ujedno i prostor nad poljem realnih brojeva. Tako shvaćen X označavaćemo sa X_r. U sledećoj teoremi $X^{\#}$ označava skup (kompleksno) linearnih funkcionela na X, a $X_r^{\#}$ skup (realno) linearnih funkcionela na X_r.

Teorema 1.3. a) Ako $f \in X^{\#}$, onda $u = \mathrm{Re}\, f \in X_r^{\#}$ i važi $f(x) = u(x) - i\,u(ix)$. Obrnuto, ako $u \in X_r^{\#}$ i ako je $f(x) = u(x) - i\,u(ix)$, onda $f \in X^{\#}$.

b) Neka je A apsolutno konveksan skup u X, $f \in X^{\#}$, $s(f) = \sup\{|f(x)| : x \in A\}$, $s(u) = \sup\{|u(x)| : x \in A\}$, $u = \mathrm{Re}\, f$. Tada je $s(f) = s(u)$ (dopušta se i da je $s(f) = s(u) = +\infty$).

c) Neka je L lokalno konveksan prostor. Tada je f neprekidna na L ako i samo ako je $u = \mathrm{Re}\, f$ neprekidna na L_r. Ako je L normiran, onda je uz to i $\|f\| = \|u\|$.

Dokaz. Tvrdjenje a) zahteva samo proveru linearnosti, a c) proizilazi iz b) ako se za skup A uzme pogodna okolina nule u L, odnosno jedinična kugla u slučaju da je L normiran. Dokazaćemo zato samo b).

Pošto je $|u(x)| \leq [u(x)^2 + u(ix)^2]^{1/2} = |f(x)|$, to je $s(u) \leq s(f)$. Postoji niz (x_n) u skupu A takav da je $s(f) = \lim_n |f(x_n)|$. Izuzimajući trivijalan slučaj $s(f) = 0$, tada je $|f(x_n)| \neq 0$ počev od nekog n_0. Neka je $y_n = \lambda_n x_n$ za $n \geq n_0$, gde je $\lambda_n = |f(x_n)| (f(x_n))^{-1}$. Kako je $|\lambda_n| = 1$, a A je apsolutno konveksan, to je $y_n \in A$. Tada je $f(y_n) = |f(x_n)| \in \mathbb{R}$, pa znači $u(y_n) = |f(x_n)| \xrightarrow{n} s(f)$. Tako je $s(u) \geq s(f)$. ■

U izvesnim slučajevima služićemo se pojmom duži. Rečju duž sa krajevima x,y $(x \neq y)$ zvaćemo skup $\overline{xy} = \{tx + (1-t)y : 0 \leq t \leq 1\}$. Skup $\dot{\overline{xy}} = \overline{xy} \setminus \{x, y\}$ zovemo otvorena duž.

Definicija 1.1. Neka je A apsolutno konveksan skup u vektorskom prostoru X.

a) Ako je X realan, A zovemo strogo konveksnim pod uslovom da njegova algebarska granica r(A) ne sadrži nijednu duž.

b) Ako je X kompleksan, A zovemo strogo konveksnim ako je on takav u X_r.

Ako je reč o strogoj konveksnosti nekog skupa, onda ovde uvek pretpostavljamo da je on apsolutno konveksan.

Teorema 1.4. Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna.

a) A $(\subset X)$ je strogo konveksan.

b) Ako je $p_A(x) = p_A(y) = p_A(\frac{x+y}{2}) = 1$, onda je x=y.

c) Ako su x i y linearno nezavisni, $p_A(x) > 0$, $p_A(y) > 0$, onda je $p_A(x+y) < p_A(x) + p_A(y)$.

Dokaz. a) $\Rightarrow$ b). Pretpostavimo da nije b). Tada postoje $x, y \in r(A)$, takvi da je $x \neq y$ i $p_A(x+y) = 2$. Iz toga proističe $\overline{xy} \subset r(A)$. Naime, $2 = p_A(x+y) \leq p_A(tx + (1-t)y) + p_A(ty + (1-t)x)$.

Pošto nijedan od sabiraka na desnoj strani nije veći od jedinice, to je $p_A(tx+(1-t)y)=1$ za svako $t\in[0,1]$.

Implikacija b) $\Rightarrow$c) proizilazi iz sledećeg niza nejednakosti $(p_A=p)$. $p\left(\frac{x}{p(x)}+\frac{y}{p(y)}\right)=p\left(\frac{x}{p(x)}+\frac{y}{p(x)}-\frac{y}{p(x)}+\frac{y}{p(y)}\right)\geq$
$\geq\left|p\left(\frac{x}{p(x)}+\frac{y}{p(x)}\right)-p\left(\frac{y}{p(x)}-\frac{y}{p(y)}\right)\right|=\left|\frac{p(x+y)}{p(x)}-p(y)\left|\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{p(y)}\right|\right|.$
Ako je $p(x+y)=p(x)+p(y)$ i, recimo, $p(y)\geq p(x)$ onda je $p\left(\frac{x}{p(x)}+\frac{y}{p(y)}\right)=2$, pa je na osnovu b) $\frac{x}{p(x)}=\frac{y}{p(y)}$, tj. x i y su linearno zavisni.

c)$\Rightarrow$a) Ako $x,y\in r(A), x\neq y$, onda je ili $x=-y$ ili su x i y linearno nezavisni. Slučaj $x=-y$ je trivijalan. Ako su x i y linearno nezavisni, onda je $p_A\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{1}{2}[p(x)+p(y)]=1$ te $\frac{x+y}{2}\notin r(A)$, tj. $\overline{xy}\not\subset r(A)$. ∎

4. Glatkost

Glatkost ovde definišemo geometrijskim jezikom. Kako taj način pretpostavlja pojam hiperravni oslonca, koji je karakterističan za realne prostore, to ćemo se najpre ograničiti na realni slučaj. U ovom i sledećem odeljku slovima $U,V,U_1,V_1,\ldots$ beležimo apsolutno konveksne okoline nule lokalno konveksnog prostora L (nad $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$). Ako je L realan i $x\in fr(U)$, onda postoji zatvorena hiperravan H takva da je U "smeštena s jedne strane H" i da $x\in H$. Ove, opšte poznate činjenice, nećemo precizirati.

Neka je L realan, U okolina u L, $x_0\in fr(U)$.

a) H je hiperravan oslonca okoline U u tački x_0 ako i samo ako postoji $f\in U^{\pi}$ tako da je $H=\{x\in L: f(x)=1\}$, $f(x_0)=1$.

b) Postoji najmanje jedna hiperravan oslonca u tački x_0.

Tvrdjenje b) neposredna je posledica teoreme o razdvajanju konveksnih skupova ([4]). Ono služi kao polazna tačka za definisanje glatkosti.

Definicija 1.2. Neka je L realan. Reći ćemo da je okolina $U\subset L$ glatka u tački $x\in fr\,U$ ako u toj tački ima tačno jednu hiperravan oslonca. Govorićemo takodje da je rub $fr\,U$ gladak u x. Ako je rub $fr\,U$ gladak u svakoj svojoj tački, reći ćemo da je U (odnosno $fr\,U$) glatka.

Definicija 1.3. Neka je U u kompleksnom L. Kazaćemo da je U (fr(U)) glatka u $x\in fr\,U$ ako je kao okolina u L_r glatka u x u smislu definicije 1.2.

Teorema 1.5. Neka je L realan ili kompleksan i $U\subset L$. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna.

a) Rub okoline U gladak je u svojoj tački x.

b) Postoji tačno jedan funkcional $f\in U^{\pi}$ za koji je $f(x)=1$.

Dokaz. Tvrdjenje a) se neposredno dobija iz definicije 1.2, a b) se dokazuje pomoću a) i teoreme 1.3. ■

Sledeća teorema predstavlja osnovnu vezu između glatkosti i stroge konveksnosti.

Teorema 1.6. Ako je skup U^{π} strogo konveksan, onda je okolina U glatka.

Dokaz. Pretpostavimo da U nije glatka, tj. da postoji tačka $x\in fr\,U$ i funkcionali $f,g\in U^{\pi}$, pri čemu je $f(x)=g(x)=1$, $f\neq g$. Tada je $\overline{fg}\subset r(U^{\pi})$. Naime, za razdaljinsku funkciju p′ skupa U^{π} važi (na osnovu leme 1.1) $p'(f)=\sup\{|f(x)|:x\in U\}$. Otuda se lako dobija $p'(tf+(1-t)g)=1$ za $t\in[0,1]$, tj. $\overline{fg}\subset r(U^{\pi})$, što znači da U^{π} nije strogo konveksan. ■

5. Postojanje glatkih okolina

Dosadašnja razmatranja bila su uslovnog karaktera, tj. nisu dodirivala pitanje p o s t o j a nj a glatke okoline u L. Svakako je od interesa naći neku širu klasu lokalno konveksnih prostora koji bi posedovali dovoljan "broj" glatkih okolina. Uz malo prilagođavanje, može se u te svrhe iskoristiti poznata Dejova teorema ([12], 86).

Teorema 1.7. Neka je U zatvorena okolina u separabilnom lokalno konveksnom prostoru L. Tada za svaki pozitivan broj ε postoji okolina V takva da je

a) V^{π} strogo konveksan skup i

b) $U \subset V \subset (1+\varepsilon)U$.

Dokaz. Neka je $(x_n, n\in\omega)$ niz svuda gust u U i $(\lambda_n, n\in\omega)$ niz pozitivnih brojeva pri čemu je $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n < \varepsilon^2$. Razmotrimo na vektorskom prostoru $\mathcal{L}(U^{\pi})$ euklidsku normu $\mathfrak{I}(f) = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n |f(x_n)|^2\right]^{1/2}$. Ako je p' razdaljinska funkcija skupa U^{π}, onda je

(1) $\mathfrak{I}(f) \leq \varepsilon p'(f)$. Neka je

(2) $g(f) = p'(f) + \mathfrak{I}(f)$ za $f\in\mathcal{L}(U^{\pi})$ i $K = \{f\in\mathcal{L}(U^{\pi}) : g(f)\leq 1\}$

Iz (1) i (2) se dobija

(3) $K \subset U^{\pi} \subset (1+\varepsilon)K$.

Dokažimo da je K w^*-zatvoren skup. Neka je $(f_k, k\in\Delta)$ generalisani niz u K i $w^*\text{-}\lim_{k\in\Delta} f_k = f$. Pošto je U^{π} w^*-zatvoren a $K\subset U^{\pi}$, to $f\in U^{\pi}$. Prema lemi 1.2. tada je

(4) $\liminf_{k\in\Delta} p'(f_k) \geq p'(f)$. Dokazaćemo

(5) $\liminf_{k\in\Delta} \mathfrak{I}(f_k) \geq \mathfrak{I}(f)$. Neka je $\varepsilon_1 > 0$. Pošto je $f_k, f\in U^{\pi}$, to je $|f_k(x_n) - f(x_n)|\leq 2$. Otuda je počev od nekog $k_0\in\Delta$ $\mathfrak{I}(f_k - f) < \varepsilon_1$ i tvrđenje (5) sledi iz nejednakosti $\mathfrak{I}(f) - \mathfrak{I}(f_k) < \varepsilon_1$ za $k\geq k_0$. Pomoću (4) i (5) sada dobijamo

$$\liminf_{k\in\Delta} g(f_k) \geq \liminf_{k\in\Delta} p'(f_k) + \liminf_{k\in\Delta}\mathfrak{I}(f_k) \geq p'(f) + \mathfrak{I}(f) = g(f).$$

Na osnovu toga dobijamo $q(f)\leq 1$, što znači da $f\in K$. Tako je dokazana w^*-zatvorenost skupa K.

Tražena okolina je $V=K_\pi$. Naime, prema teoremi 1.2, važi $(U^\pi)_\pi$ pa je zbog (3) $V\supset U=(U^\pi)_\pi$, što znači da je V okolina (i to apsolutno konveksna). Drugi deo relacije b) dobija se iz (3) primenom teoreme 1.2. i osobina polarnosti.

Da bismo dokazali tvrđenje a), primetimo da je prema teoremi 1.2. $V^\pi=(K_\pi)^\pi=K$, jer je $w^*(K)=K$. Zato je dovoljno dokazati strogu konveksnost skupa K. Prema teoremi 1.1. razdaljinska funkcija skupa K je q. Neka su f i g linearno nezavisni i $q(f)>0$, $q(g)>0$. Tada je $f\neq 0$ i $g\neq 0$. Pošto je $\mathcal{J}$ euklidska norma, biće $\mathcal{J}(f+g)<\mathcal{J}(f)+\mathcal{J}(g)$ i, utoliko pre, $q(f+g)<q(f)+q(g)$, što na osnovu teoreme 1.6. znači da je K strogo konveksan. ∎

Posledica 1.7.1. Separabilan lokalno konveksni prostor poseduje lokalnu bazu koja se sastoji od glatkih okolina.

Napomena. Važi i nešto više, tj. polare tih okolina su strogo konveksne.

6. Jedna metrizaciona teorema

Teoremu 1.7. iz prethodnog odeljka autor je napravio radi konstrukcije metrike sa glatkim kuglama u separabilnom l.k.p. sa prebrojivom lokalnom bazom. Kao polazna tačka koristi se metrizacija data u [4]. Treba reći da se problem metrizacije, posmatran sa topološkog stanovišta vrlo prost, znatno komplikuje ako se zahteva konveksnost kugli. Primer metrike koja zadovoljava i taj zahtev dat je u [4]. U ovom radu se, uz pretpostavku separabilnosti, pokazuje da se kugle mogu učiniti i glatkim, što bi moglo biti novo.

Teorema 1.8. (rezultat autora) Neka je L separabilan l.k.p. sa prebrojivom lokalnom bazom. Tada se L može metrizirati tako da su kugle glatki apsolutno konveksni skupovi.

Dokaz. Prema teoremi 1.7. postoji lokalna baza $\mathcal{B}=\{U_n : n\in\omega\}$ takva da je

(1) $2U_{n+1}\subset U_n$, a

(2) $(U_n)^\pi$ su strogo konveksni skupovi.

Neka je r pozitivan racionalan broj. Stavimo

(2') $A(r)=L$ za $r\geq 1$, $A(r)=\sum_n C_n(r)U_n$ za $r<1$,

gde je $r=\sum_n C_n(r)2^{-n}$ dijadska reprezentacija broja r. Dalje stavimo $f(x)=\inf\{r : x\in A(r)\}$ i $d(x,y)=f(x-y)$. U [4] se pokazuje da je d invarijantna metrika na L i da su kugle $K[0,\delta]=\{x\in L : d(x,0)\leq\delta\}$ konveksne. Sa ovako uvedenom bazom one će biti i glatke. Treba primetiti da je to netrivijalno samo za $0<\delta<1$. Važe sledeće relacije ([4], 25).

(3) $K[0,\delta]=\bigcup_{r<\delta}A(r)$,

(4) $A(r)\subset A(t)$ za $r<t$,

(5) $(K[0,\delta])^\pi=\bigcap_{r<\delta}[A(r)]^\pi$.

Neka su g, p_r, g_n razdaljinske funkcije skupova $(K[0,\delta])^\pi$, $[A(r)]^\pi$, $(U_n)^\pi$, $(0<r\leq\delta<1)$. Iz leme 1.1, (1) i (4) sledi

(6) $2g_{n+1}(f)\leq g_n(f)$, $f\in\mathcal{L}(U_n^\pi)$,

(7) $p_r(f)\leq p_t(f)$ za $r\leq t$, $f\in\mathcal{L}(A(r)^\pi)$.

Uz pomoć leme 1.1, (2') i (5) može se izvesti

(8) $p_r(f)=\sum_n C_n(r)g_n(f)$,

(9) $g(f)=\sup\{p_r(f) : r<\delta\}$.

Na osnovu (7) i (9) zaključujemo

(10) $g(f)=\lim_{r\to\delta-0}p_r(f)$,

a iz (10) i (8)

$$(11) \quad g(f) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\delta) g_n(f),$$

gde je $\delta = \sum_n c_n(\delta) 2^{-n}$ dijadski zapis broja δ. Red u jednakosti (11) konvergira zbog relacija (6). Na osnovu (11) primenom teoreme 1.4. prosto se utvrdjuje stroga konveksnost skupa $(K[0,\delta])^{\pi}$, što znači da je kugla $K[0,\delta]$ glatka. Time je teorema dokazana. ■

D r u g i d e o

GLATKOST NORMIRANIH PROSTORA

Sve što se izlaže u prva dva odeljka drugog dela važi i u opštijoj situaciji. Konkretnosti radi, za model apsolutno konveksne okoline izabrana je jedinična kugla normiranog prostora. Na više mesta se koriste osobine konveksnih funkcija , koje se posebno ne citiraju. Autor ih je koristio iz knjige [8]. Izlažu se samo poznate činjenice, koje se mogu naći u [1] i [12]. Slova N, N_1, N_2, ... uvek označavaju normirane, a B, B_1, ... Banahove prostore. Osim oznaka iz prvog dela, upotrebljavaju se i sledeće skraćenice: $U(N)=\{x\in N: \|x\|\leq 1\}$, $S(N)=\{x\in N: \|x\|=1\}$.
N^* označava spregnuti prostor sa uobičajenom normom $\|f\| = \sup\{|f(x)|: \|x\|\leq 1\}$.

1. Osnovne definicije i činjenice

Govorićemo da je normiran prostor N gladak [strogo konveksan] i pisati $N\in(G)$ [$N\in(SC)$] ako je takva njegova jedinična kugla $U(N)$.

Teorema 2.1.

a) Ako $N^*\in(SC)$, onda $N\in(G)$.

b) Ako $N^*\in(G)$, onda $N\in(SC)$.

c) Ako je N refleksivan, onda važi ekvivalencija

$$N\in(G)\Leftrightarrow N^*\in(SC).$$

Dokaz. Tvrdjenje a) direktna je posledica teoreme 1.6, a c) neposredno sledi iz a) i b). Dokažimo b). Pretpostavimo da nije $N\in(SC)$. Tada postoje različiti $x,y\in S(N)$ takvi da je $\overline{xy}\subset S(N)$. Uz pomoć Han-Banahovog stava može se pokazati da postoji funkcional $f\in S(N^*)$ koji zadovoljava uslov $f(x)=f(y)=1$. Tada sfera $S(N^*)$ nije glatka u f. Naime, ako je $x'(g)=g(x)$, $y'(g)=g(y)$ za $g\in N^*$, onda $x',y'\in S(N^{**})$, $x'\neq y'$, $x'(f)=y'(f)=1$, što prema teoremi 1.5. znači da nije $N^*\in(G)$. ∎

Stroga konveksnost i glatkost vezani su potpunom dualnošću u refleksivnim prostorima. Obrati tvrdjenja a) i b), kao što su pokazali Kli i Dej, ne važe.

Teorema 1.7, iskazana u terminima izomorfnosti normiranih prostora, dobija formu već pomenute Dejove teoreme.

Teorema 2.2. Svaki separabilan normiran prostor izomorfan je nekom glatkom prostoru.

Može se još postaviti pitanje o vezi izmedju glatkosti prostora i njegovog potprostora. Pomoću Han-Banahovog stava pokazuje se jednostavno da je glatkost nasledna osobina. Medjutim, interesantno je da je za glatkost prostora dovoljna glatkost svakog dvodimenzionalnog potprostora. To se pokazuje u sledećem odeljku.

2. Glatkost prostora i Gatoova diferencijabilnost norme

U analitičkom opisu glatkih tačaka značajnu ulogu igra familija funkcija $t\mapsto \|y\|\,\|y+tx\|,\ t\in\mathbb{R},\ x,y\in N$. Najvažnije osobine takvih funkcija proističu iz njihove konveksnosti. Navodimo, bez dokaza, neke od osobina koje se koriste u daljem radu.

(1) Za sve $x,y\in N$ postoje granične vrednosti
$$p_\pm(x,y)=\|y\|\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|y+tx\|-\|y\|}{t}=\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|y+tx\|^2-\|y\|^2}{2t}.$$

(2) $|p_\pm(x,y)|\leq \|x\|\cdot\|y\|$;

(3) $p_\pm(\lambda x,y)=\lambda p_\pm(x,y)$ za $\lambda\geq 0$, $p_\pm(\lambda x,y)=\lambda p_\mp(x,y)$ za $\lambda\leq 0$;

(4) $\|y\|\dfrac{\|y+t_1x\|-\|y\|}{t_1}\leq p_-(x,y)\leq p_+(x,y)\leq \|y\|\dfrac{\|y+t_2x\|-\|y\|}{t_2}$, $t_1<0<t_2$.

Ova osobina posledica je toga što je $p_+(x,y)$ $[p_-(x,y)]$ desni [levi] izvod u nuli funkcije $t\mapsto \|y\|\,\|y+tx\|$.

(5) $p_\pm(x+y,y)=p_\pm(x,y)+\|y\|^2$.

Za nas su najvažnije sledeće dve proste leme.

Lema 2.1. Za sve realne skalare λ,μ važi nejednakost
$$|\lambda p_\pm(x,y)+\mu\|y\|^2|\leq \|\lambda x+\mu y\|\cdot\|y\|,\quad x,y\in N.$$

Dokaz. Za $\mu=0$ nejednakost sledi neposredno iz (2). Dovoljno je pokazati je za $\mu>0$. Deljenjem sa μ vidimo da se možemo ograničiti na slučaj $\mu=1$.

Ako je $\lambda\geq 0$, onda je
$$|\lambda p_+(x,y)+\|y\|^2|\overset{(3)}{=}|p_+(\lambda x,y)+\|y\|^2|\overset{(5)}{=}|p_+(\lambda x+y,y)|\overset{(2)}{\leq}\|\lambda x+y\|\cdot\|y\|.$$

Ako je $\lambda<0$, onda je
$$|\lambda p_+(x,y)+\|y\|^2|\overset{(3)}{=}|p_-(\lambda x,y)+\|y\|^2|\overset{(5)}{=}|p_-(\lambda x+y,y)|\overset{(2)}{\leq}\|\lambda x+y\|\cdot\|y\|. \blacksquare$$

Lema 2.2. Neka $y\in S(N)$, $f\in S(N^*)$, $f(y)=1$. Tada je za sve $x\in N$
$$p_-(x,y)\leq \operatorname{Re} f(x)\leq p_+(x,y).$$

Dokaz. Neka je $t>0$. Tada je

$$\mathrm{Re}\, f(y+tx) = 1 + t\, \mathrm{Re}\, f(x) \leq \|\mathrm{Re}\, f\| \cdot \|y+tx\|.$$

Prema teoremi 1.3. c) važi $\|\mathrm{Re}\, f\| = \|f\| = 1$, pa je za $t>0$
$1 + t\, \mathrm{Re}\, f(x) \leq \|f\| \cdot \|y+tx\|$. Otuda je $\mathrm{Re}\, f(x) \leq \dfrac{\|y+tx\|-1}{t}$,
odakle se graničnim prelazom $(t\to 0)$ dobija nejednakost $\mathrm{Re}\, f(x) \leq p_+(x,y)$.
Na sličan način izvodi se druga strana tražene nejednakosti. ∎

Definicija 2.1. Govorićemo da je norma prostora N diferencijabilna u tački x u smislu Gatoa ako je za sve $z\in N$ $p_+(z,x) = p_-(z,x)$. Ako je to ispunjeno u svakoj tački $x\in N$, govorićemo da je norma diferencijabilna u smislu Gatoa i pisati $N \in (GD)$.

Jednu od mogućnosti analitičkog utvrdjivanja glatkosti daje sledeća teorema.

Teorema 2.3. Da bi sfera $S(N)$ bila glatka u svojoj tački x potrebna je i dovoljna Gatoova diferencijabilnost norme u tački x.

Dokaz. Izvešćemo ga za slučaj realnog prostora. Uz pomoć teoreme 1.3. c) lako se prenosi na slučaj kompleksnog.

Dovoljnost. Pokazaćemo da je zadovoljen uslov b) teoreme 1.5. Neka $f\in S(N^*)$, $f(x)=1$. Kako je $p_+(z,x) = p_-(z,x) \overset{\mathrm{def}}{=} p(z,x)$ za sve $z\in N$, to je prema lemi 2.2. $f(z) = p(z,x)$.

Neophodnost. Neka $z\in N$, $L = \{\lambda x + \mu z : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Na osnovu glatkosti prostora N i Han-Banahovog stava lako se pokazuje da je i L gladak. Definišimo funkcionale $h_+, h_- \in L^*$ na sledeći način: $h_\pm(z) = p_\pm(z,x)$, $h_\pm(x) = 1$. Korektnost te definicije lako se proverava. Primenom leme 2.1. dobijamo

$$|h_\pm(\lambda z + \mu x)| = |\lambda p_\pm(z,x) + \mu| \leq \|\lambda z + \mu x\|, \text{ te je } \|h_\pm\| = 1.$$

To znači da je $h_+ = h_-$ i specijalno $p_+(z,x) = p_-(z,x)$. ∎

Posledica 2.3.1. Ako $N\in(G)$, onda $N\in(GD)$ i obrnuto.

Posledica 2.3.2. Da bi normiran prostor bio gladak potrebno je i dovoljno da je svaki njegov dvodimenzionalni potprostor gladak.

Poslednja činjenica ima u slučaju realnog prostora očiglednu geometrijsku interpretaciju. Ona istovremeno pokazuje da se pojam glatkosti može izgraditi bez ikakve topologije.

3. Postojanje glatkih tačaka na jediničnoj sferi separabilnog Banahovog prostora

Ideja za ono što se izlaže u ovom odeljku uzeta je iz [12]. Pri tome slovo B označava Banahov (realan ili kompleksan) prostor. Koristi se pojam ograničeno $*$-slabe (bw^*-)topologije u B^*. Njen podroban opis može se naći u poznatoj Dejovoj knjizi ([3], 74).

(1) Skup $E \subset B^*$ je bw^*-zatvoren ako i samo ako granična vrednost svakog ograničenog w^*- konvergentnog generalisanog niza $(f_n, n\in\Delta)$ iz E pripada E.

(2) (Teorema Krejna-Šmuljana) Konveksan skup $E \subset B^*$ je w^*-zatvoren ako i samo ako je bw^*-zatvoren.

To znači da pri ispitivanju w^*-zatvorenosti konveksnih skupova i w^*-neprekidnosti linearnih funkcionala možemo posmatrati samo o g r a n i č e n e generalisane nizove.

U slučaju separabilnog B značajnu ulogu igra funkcional koji je već korišćen pri dokazu teoreme 1.7. Naime ako je $\{x_n : n\in\omega\}$ svuda gust skup u $U(B)$ i $\sum_n \lambda_n$ konvergentan red sa pozitivnim članovima, onda funkcional $\mathcal{J}(f)=\left[\sum_n \lambda_n |f(x_n)|^2\right]^{1/2}$ predstavlja euklidsku normu na vektorskom prostoru B^*.

(3) ([3],[4]) Neka je B separabilan i E ograničen deo

prostora B^*. Tada se relativna w^*-topologija na E podudara sa topologijom koju inducira norma $\mathfrak{J}$.

Lema 2.3. Neka su U_1, U_2 apsolutno konveksne okoline u l.k.p. L, $x_0 \in L$, pri čemu je $U_1 \subset U_2$, $x_0 \in fr(U_1)$, $x_0 \in fr(U_2)$ i U_1 je glatka u x_0. Tada je U_2 glatka u x_0.

Dokaz. Neka $f_1, f_2 \in U_2^{\pi}$, pri čemu je $f_1(x_0) = f_2(x_0) = 1$. No tada $f_1, f_2 \in U_1^{\pi}$. Kako je U_1 glatka u x_0, to je prema teoremi 1.5. $f_1 = f_2$, što prema istoj teoremi znači da je U_2 glatka u x_0. ∎

U daljem tekstu simbol $\pi_0(B)$ označava skup svih onih funkcionala iz $S(B^*)$ koji dostižu vrednost 1 u nekoj glatkoj tački sfere $S(B)$. U nekim slučajevima može taj skup biti i prazan. Medjutim, ako je B separabilan, onda se elementima skupa $\pi_0(B)$ mogu razdvajati tačke van $U(B)$ od $U(B)$.

Teorema 2.4. Neka je B separabilan i $x \in B$, $x \notin U(B)$. Tada postoji funkcional $f_0 \in \pi_0(B)$ takav da je $\operatorname{Re} f(x) > 1$.

Dokaz. Neka je $\|x\| = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Izaberimo ε_1 tako da je

(4) $(1 + \frac{\varepsilon}{2})^2 + \varepsilon_1 < (1 + \varepsilon)^2$ i stavimo

(5) $\mathfrak{J}_1(f) = [|f(x)|^2 + \varepsilon_1 \mathfrak{J}_0^2(f)]^{1/2}$,

gde je $\mathfrak{J}_0(f) = [\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f(x_n)|^2]^{1/2}$, a $\{x_n : n \in \omega\}$ je skup svuda gust u $U(B)$.

Važi

(6) $\mathfrak{J}_1(f) \leq \{|f(x)|^2 + \varepsilon_1 \|f\|^2\}^{1/2}$.

Kako je skup $U(B^*)$ w^*-kompaktan (teorema Banaha-Alaoglu), a prema (3) $\mathfrak{J}_1$ je neprekidna funkcija na U^*, postoji $f_0 \in U^*$ pri čemu je

(7) $\mathfrak{J}_1(f) \leq \mathfrak{J}_1(f_0)$ za $f \in U^*$.

Iz (4), (5), (6) i (7) sledi da je $|f_0(x)| \geq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, pa možemo uzeti $f_0(x) \geq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$. Tražena funkcionela biće baš f_0.

Definišimo još

(8) $\mathfrak{I}(f)=\mathfrak{I}_1(f)/\mathfrak{I}_0(f)=\left\{\lambda_0|f(x)|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|f(x_k)|^2\right\}^{1/2}, \quad \lambda_0,\lambda_k>0,$

(9) $X(f)=\lambda_0 f(x)f_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k f(x_k)f_0(x_k)$

Iz (8) i (9), primenom Švarcove nejednakosti, zaključujemo

(10) $|X(f)|\leq \mathfrak{I}(f)\cdot\mathfrak{I}(f_0)=\mathfrak{I}(f),$

a iz (7) i (10) $|X(f)|\leq\|f\|$ i zbog $X(f_0)=1$

(11) $\|X\|=1.$

Na osnovu teoreme Krejna-Šmuljana, tj. posmatrajući ograničene generalisane nizove, zaključujemo da je

(12) X w^*- neprekidan funkcional.

Zbog (11) i (12) postoji tačka x_0 takva da je

(13) $X(f)=f(x_0), \quad \|x_0\|=1.$

Pomoću (7), (9) i (13) dobijamo

(14) $f_0(x_0)=1, \quad \|f_0\|=\|x_0\|=1.$

Stavimo $\|f\|_1=\frac{1}{2}(\|f\|+\mathfrak{I}(f)),\ K=\{f:\|f\|_1\leq 1\}$. Važi nejednakost

(15) $\mathfrak{I}(f)\leq\|f\|_1\leq\|f\|.$ Zbog toga je $U^*\subset K.$

Iz (10), (13), (14) i (15) sledi da $x_0\in r(K_\pi)$.

Kao u dokazu teoreme 1.7. pokazuje se da je K_π glatko telo. Time x_0, K_π, U zadovoljavaju uslove leme 2.3. što znači da je sfera $S(B)$ glatka u x_0. Iz (14) se vidi da $f_0\in\Pi_0(B)$. Teorema je dokazana. ■

Napomena. Prethodna teorema je dokazana za slučaj realnog prostora. Ako je prostor B kompleksan, onda je dovoljno posmatrati B_r i primeniti teoremu 1.3. c).

Posledica 2.4.1. Ako je B separabilan, onda je

$$U(B)=\bigcap_{f\in\Pi_0(B)}\{x:\operatorname{Re}f(x)\leq 1\}.$$

Dokaz. Ako napisani presek označimo sa P, onda je $U\subset P$. Ako $x\notin U$, onda prema teoremi 2.4. postoji $f_0\in\Pi_0(B)$ tako da je $\operatorname{Re}f(x)>1$, te $x\notin P$. ■

Teorema 2.4. predstavlja, u posmatranom slučaju, pooštrenje klasične teoreme o razdvajanju tačke i konveksnog skupa. Ona bi se mogla uopštiti tako da umesto kugle $U(B)$ u njenom iskazu stoji bilo kakvo konveksno telo, a umesto tačke x kompaktan konveksan skup.

Broj glatkih tačaka može se izraziti i u terminima kategorija. Sledeća teorema je posledica daleko opštije teoreme o tačkama jednoznačnosti mnogoznačnih monotonih operatora (v. [19], gl.5).

Teorema 2.5. a) Skup tačaka u kojima norma separabilnog N nije Gato-diferencijabilna prve je kategorije u N.

b) (teorema Mazura) Skup glatkih tačaka jedinične sfere separabilnog Banahovog prostora druge je kategorije na toj sferi.

Dokaz. Tvrđenje b) prosto se izvodi iz a) ako se zna da je Banahov prostor druge kategorije u sebi.

Neka je $\{u_n, n\in\omega\}$ skup svuda gust u N. Tada se skup Z tačaka u kojima norma nije Gato-diferencijabilna može predstaviti u obliku $Z=\bigcup_{n\in\omega} Z_n$, gde je $Z_n=\{x\in N : \rho_+(u_n,x)>\rho_-(u_n,x)\}$. Pošto funkcija $t\mapsto\rho_+(y,x+ty)$ $[t\mapsto\rho_-]$ predstavlja desni [levi] izvod konveksne funkcije $t\mapsto\|x\|\cdot\|x+ty\|$, važi jednakost $\rho_+(y,x+ty)=\rho_-(y,x+ty)$ skoro svuda na $]-\infty,+\infty[$. Odatle se može zaključiti da nijedan Z_n nema unutrašnjih tačaka. Utoliko pre važi $\operatorname{int}Z_{n,m}=\emptyset$, gde je

$$Z_{n,m}=\left\{x\in N : \rho_+(u_n,x)-\rho_-(u_n,x)\geq\frac{1}{m}\right\},\ m\in\omega.$$

Dovoljno je još dokazati da su skupovi $Z_{n,m}$ zatvoreni i tvrđenje a) proističe iz $Z=\bigcup_{n,m\in\omega} Z_{n,m}$.

(i) Ako je $\lim_{k\in\omega}\|x_k-x\|=0$, onda je $\limsup_{k\in\omega}\rho_+(y,x_k)\leq\rho_+(y,x)$.

Neka je α tačka nagomilavanja (ograničenog) niza $\alpha_k=\rho_+(y,x_k)$.

Pokazaćemo da je $\alpha \leq p_+(y,x)$. Razmotrimo poseban slučaj $\|x_k\|=1$, iz kojeg se izvodi opšti primenom homogenosti funkcionala p_+ po desnom argumentu.

Uzmimo (radi jednostavnijeg pisanja) $\lim\limits_{k\in\omega} \alpha_k = \alpha$. Tada je (v. od.2(5)) $p_+(y-\alpha_k x_k, x_k) = p_+(y, x_k) - \alpha = 0$, a zbog toga (v. od.2(4)) $\|x_k + \lambda(y-\alpha_k x_k)\| \geq 1$ za $\lambda \geq 0$. Otuda se,(opet primenom relacija (4) i (5) odeljka 2) dobija $\|x+\lambda(y-\alpha x)\| \geq 1$, $p_+(y-\alpha x, x) = p_+(y,x)-\alpha \geq 0$, $p_+(y,x) \geq \alpha$.

Sada se na osnovu (i) i osobina operatora limsup izvodi zatvorenost skupa $Z_{n,m}$. ∎

T r e ć i   d e o

PROSTORI SA POLUSKALARNIM PROIZVODOM

Kao polazna tačka ovog dela poslužili su radovi [13], [16], [17] i [18]. Drugi, peti i šesti odeljak i teorema 3.6 uradjeni su samostalno. Isto kao u prethodnom delu, koriste se osobine konveksnih funkcija. Sva tvrdjenja navedena u primerima poznata su; autor ih je samo upotrebio za ilustraciju primene poluskalarnog proizvoda. Treba napomenuti i to, što se, možda, ne vidi dovoljno iz samog izlaganja, da mnoga svojstva poluskalarnog proizvoda mogu biti izvedena iz opštih činjenica o subgradijentima.

1. Poluskalarni proizvod

Definicija 3.1. Neka je X vektorski prostor nad poljem Φ. Poluskalarnim proizvodom u X zove se funkcional $[\,,\,]$, koji ima sledeće osobine:

S1 $[x,x]\geqslant 0$; $([x,x]=0 \Rightarrow x=0)$;

S2 $[\alpha x+\beta y, z]=\alpha[x,z]+\beta[y,z]$;

S3 $|[x,y]|^2\leqslant [x,x]\cdot[y,y]$; $x,y,z\in X,\ \alpha,\beta\in\Phi$.

Osim navedenih razmatra se i osobina

S4 $[x,\alpha y]=\bar{\alpha}[x,y]$, koja ne ulazi u definiciju.

Teorema 3.1. Jednakošću $\|x\|=\sqrt{[x,x]}$ definisana je norma na vektorskom prostoru X.

Dokaz. Jasno je da je $\|x\|\geqslant 0$ i da je $\|x\|=0$ samo za x=0. Primanjujući S1,S2,S3, dobijamo

$\|\lambda x\|^2=[\lambda x,\lambda x]=|\lambda|\,|[x,\lambda x]|\leqslant|\lambda|\,[x,x]\,[\lambda x,\lambda x]$, tj. $\|\lambda x\|\leqslant|\lambda|\,\|x\|$.

Otuda se jednostavno zaključuje $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$.

Relacija trougla se izvodi iz sledećeg niza nejednakosti.

$$\|x+y\|^2=[x+y,x+y]=[x,x+y]+[y,x+y]\leqslant|[x,x+y]|+|[y,x+y]|\leqslant$$
$$\leqslant\|x\|\cdot\|x+y\|+\|x\|\cdot\|x+y\|.\ \blacksquare$$

Na taj način se prostor sa poluskalarnim proizvodom može prirodno normirati. Da važi i obrnuto, pokazuje

Teorema 3.2. Ako je N normiran prostor, onda postoji poluskalarni proizvod $[\,,\,]$ sa osobinama $[x,x]=\|x\|^2$ i S4. Pri tome je on jedinstven ako i samo ako $N\in(G)$.

Dokaz. Izvesne teškoće predstavlja zahtev da poluskalarni proizvod ima svojstvo S4, pa se dokaz iznet u [13] mora dopuniti.

Uvedimo u $S(N)=S$ relaciju ekvivalencije $\sim$ na sledeći način : $x\sim y \Leftrightarrow (\exists\lambda\in\Phi)(|\lambda|=1,\ x=\lambda y)$.

Po aksiomi izbora postoji funkcija $\psi: S/_{\sim}\to S$ takva da je $\psi(p)\in p$, $p\in S/_{\sim}$. Tada je $S=\{\lambda\psi(p): p\in S/_{\sim},\ |\lambda|=1\}$.

Prema Han-Banahovom stavu za svaki $p \in S/\sim$ postoji $f \in S(N^*) = S^*$ tako da je $f(\Psi(p)) = 1$. Na osnovu toga i aksiome izbora možemo tvrditi da postoji funkcija $F: \Psi(S/\sim) \to S^*$ za koju važi

$$(1) \quad F_{\Psi(p)}(\Psi(p)) = 1 \quad (F_{\Psi(p)} \in S^*).$$

Definišimo funkciju $G: S \to S^*$ jednakošću

$$(2) \quad G_{\lambda\Psi(p)} = \bar{\lambda} F_{\Psi(p)}, \quad |\lambda| = 1.$$

Treba primetiti da je G korektno definisana na S i da je njena restrikcija na $\Psi(S/\sim)$ baš F. Iz (2) sledi

$$(3) \quad G_{\lambda x} = \bar{\lambda} G_x, \quad |\lambda| = 1, x \in S.$$

Poluskalarni proizvod definišemo jednakošću

$$(4) \quad [x,y] = G_y(x) \text{ za } y \in S, \quad [x,\lambda y] = \bar{\lambda} G_y(x) \text{ za } y \in S, |\lambda| \neq 1.$$

Uz pomoć (1),(2),(3),(4) lako se proverava da $[\,,\,]$ zadovoljava sve tražene uslove.

Pokažimo da je u slučaju $N \in (G)$ poluskalarni proizvod jedinstven. Neka su $[\,,\,]_1$ i $[\,,\,]_2$ funkcionali koji imaju osobine S1,S2,S3 i $[x,x]_k = \|x\|^2$. Primenjujući teoremu 1.5. na funkcionale $z \mapsto \frac{1}{\|x\|}[z,x]_1$ i $z \mapsto \frac{1}{\|x\|}[z,x]_2$, zaključujemo da je $[z,x]_1 = [z,x]_2$.

Pretpostavimo da nije $N \in (G)$. Tada pomoću teoreme 1.5. i već postojećeg poluskalarnog proizvoda možemo konstruisati dva različita poluskalarna proizvoda. ■

Teoreme 3.1. i 3.2. dopuštaju nam da razmatramo normiran prostor N snabdeven prirodno uvedenim poluskalarnim proizvodom. Takav objekt zvaćemo kratko prostorom i označavati ga sa $(N,[\;])$. Tako osobine S1 i S3 možemo napisati u obliku: S1 $[x,x] = \|x\|^2$ S3 $|[x,y]| \le \|x\| \cdot \|y\|$.

Razni tipovi glatkosti prostora N mogu se povezati sa osobinama operatora $\mathcal{R}: N \to N^*$ određenog formulom $(\mathcal{R}x)y = [y,x]$. On je u opštem slučaju nelinearan. Zbog S3 važi $\|\mathcal{R}x\| = \|x\|$.

Primer 3.1. Poluskalarni proizvod u prostoru E_M

Prostor E_M predstavlja zatvorenje u L_M skupa ograničenih funkcija. Pokazuje se da je

(a) $E_M = \{x \in L_M : \forall \varepsilon > 0 \ \int_P M(\frac{|x|}{\varepsilon}) dm < +\infty\}$,

(b) $\forall x \in E_M \quad \int_P M(\frac{|x|}{\|x\|_M}) dm = 1$. Neka je

(c) $F(x,y) = \int_P \varphi(\frac{|y|}{\|y\|_M}) x \operatorname{sgn} y \, dm, \quad M'_-(t) \le \varphi(t) \le M'_+(t)$.

Istaknimo neke osobine funkcionala F.

(c_1) $F(\alpha x + \beta y, \gamma z) = [\alpha F(x,z) + \beta F(y,z)] \operatorname{sgn} \gamma$,

(c_2) $\|y\|_M \le F(y,y)$,

(c_3) $\|y\| \cdot |F(x,y)| \le \|x\| \cdot F(y,y)$, $x,y,z \in E_M$, $\alpha,\beta,\gamma \in \Phi$.

Neka je $\|x\| = \|y\| = 1$. Tada je $|F(x,y)| \le \int_P \varphi(|y|)|x| dm$. Zbog konveksnosti funkcije M važi nejednakost: $(t_1 - t_2)\varphi(t_1) \ge M(t_1) - M(t_2)$.

Zato je $F(y,y) - |F(x,y)| \ge \int_P \varphi(|y|)|y| dm - \int_P \varphi(|y|)|x| dm =$
$= \int_P \varphi(|y|)(|y| - |x|) dm \ge \int_P [M(|y|) - M(|x|)] dm = 1 - 1 = 0$.

Na osnovu toga i (c_1) dobija se (c_3) u opštem slučaju.

Pomoću operatora F definišemo poluskalarni proizvod

$$(*) \quad [x,y] = \|y\|^2 F(x,y) \cdot \frac{1}{F(y,y)} \quad \text{za } y \ne 0, \ [x,0] = 0. \ \blacksquare$$

Primer 3.2. Poluskalarni proizvod u $L^p(T,\mu)$

Neka je T prostor s merom μ . Razmatrajući opšti slučaj Orličevih prostora, možemo izvesti formule slične onima iz prethodnog primera. Uzimajući $M(t) = t^p$ dobijamo poluskalarni proizvod u $L^p(T,\mu)$ $(p \ge 1)$.

$$(**) \quad [x,y] = \|y\|^{2-p} \int_T |y|^{p-1} x \operatorname{sgn} y \, d\mu . \ \blacksquare$$

Primer 3.3. Prostor $(\sum \oplus B_n)_p$

Neka su $B_1, B_2, \dots$ Banahovi prostori i $p \ge 1$. Prostor $B = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus B_n)_p$ određuje se formulom

$$X = (x_k | k \in \omega) \in B \Leftrightarrow (x_n \in B_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < +\infty).$$

B je Banahov prostor sa normom $\|X\| = [\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p]^{1/p}$.

Prema teoremi 3.2. u svakom B postoji poluskalarni

$$[X,Y]=\|Y\|^{2-p}\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|^{p-2}[x_n,y_n]_n\ ,\quad X=(x_n,\ n\in\omega),\ Y=(y_n,\ n\in\omega).\ ■$$

Ako je y=0,onda stavljamo $\|y_n\|^{p-2}[x_n,y_n]_n=0$.

2.Veza između realnog i kompleksnog poluskalarnog proizvoda

Ako je N kompleksan prostor, onda je poluskalarni proizvod kompleksni funkcional. S druge strane,poluskalarni proizvod u N_r je realni funkcional. U sledećoj teoremi daje se njihova veza i ujedno poboljšava jedna procena iz [17].

Teorema 3.3. a) Ako je $[\ ,\ ]$ poluskalarni proizvod u kompleksnom N , onda je $\mathrm{Re}[\ ,\ ]$ poluskalarni proizvod u N_r.

b) Ako je $\langle\ ,\ \rangle$ poluskalarni proizvod u N_r, onda je jednakošću $[x,y]=\langle x,y\rangle-i\langle ix,y\rangle$ definisan poluskalarni proizvod u N.

Dokaz. Tvrdjenje a) je trivijalno. Osobina S2 u tvrdjenju b) lako se proverava. Da bismo pokazali S3, stavimo $f_y(x)=[x,y]$, $u_y(x)=\langle x,y\rangle$. Pošto je $|u_y(x)|\leq\|x\|\cdot\|y\|$, $u_y(y)=\|y\|^2$, to $u_y\in(N_r)^*$, $\|u_y\|=\|y\|$. Pomoću teoreme 1.3. zaključujemo da $f_y\in N^*$ i $\|f_y\|=\|y\|\ (=\|u_y\|)$. Zato je $|[x,y]|\leq\|x\|\cdot\|y\|$, što predstavlja S3, a iz toga se prosto izvodi S1. ■

Napomena. U radu [17] stoji $|[x,y]|\leq\sqrt{2}\,\|x\|\cdot\|y\|$.

U istom radu pokazano je da je u glatkom prostoru (nad $\mathbb{R}$) poluskalarni proizvod (na jedinstven način) dat sa

$$[x,y]=\|y\|\lim_{t\to 0}(\|y+tx\|-\|y\|)/t=p(x,y).$$

Pomoću teoreme 3.3. možemo ustanoviti reprezentaciju poluskalarnog proizvoda u glatkom kompleksnom prostoru.

Posledica 3.3.1. Neka je N gladak kompleksan prostor. Tada jedinstveni poluskalarni proizvod u N ima oblik

$$[x,y]=p(x,y)-i\,p(ix,y).$$

Treba primetiti da poluskalarni proizvod u glatkom prostoru mora imati svojstvo S4.

3.Neprekidni prostori

Ovaj pojam je uveden u članku [13],u kojem se utvrđuje i veza između glatkosti i takve neprekidnosti,što je u stvari prosta posledica opštih osobina konveksnih funkcija.Radi malog pojednostavljenja ovde se posmatra funkcija

(1) $f(x,y,\lambda)=\frac{1}{2}[\|y+\lambda x\|^2-\|y\|^2]$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $x,y\in N$.

Iz njene konveksnosti po realnoj promenljivoj proizlazi niz svojstava poluskalarnog prizvoda.Primetimo da za funkcionale μ_+,μ_- definisane u drugom delu,važi

(2) $\mu_\pm(x,y+\lambda x)=f'_\pm(x,y,\lambda)$,gde f'_+, f'_- označavaju levi i desni izvod po promenljivoj λ .Zbog konveksnosti funkcija f se može predstaviti u integralnom obliku

(3) $f(x,y,\lambda)=\int_0^\lambda \mu_\pm(x,y+tx)\,dt.$

Služeći se lemom 2.2. izvodimo nejednakost

(4) $\mu_-(x,y)\leq \mathrm{Re}[x,y]\leq \mu_+(x,y)$,

a iz nje i (3) jednakost

(5) $f(x,y,\lambda)=\int_0^\lambda \mathrm{Re}[x,y+tx]\,dt.$

Definicija 3.2. Prostor$(N,[\,])$ zovemo neprekidnim u tački y ako je $\lim_{t\to 0}\mathrm{Re}[x,y+tx]=\mathrm{Re}[x,y]$ za sve $x\in N$ .Kažemo da je $(N,[\,])$ neprekidan ako je takav u svakoj svojoj tački.

Teorema 3.4. Da bi $(N,[\,])$ bio neprekidan u tački y, potrebno je i dovoljno da je sfera $S(N)$ glatka u y.

Dokaz.Ako je N neprekidan,funkcija $t\mapsto \mathrm{Re}[x,y+tx]$ je neprekidna u nuli.Zbog toga je $\lambda\mapsto f(x,y,\lambda)$ diferencijabilna u nuli,što prema (2) znači da je $\mu_-(x,y)=\mu_+(x,y)$ za sve $x\in N$. Glatkost sada proističe iz teoreme 2.3.

Da bismo dokazali obrat,iskoristimo činjenicu da je desni izvod konveksne funkcije neprekidan zdesna, a levi sleva (v. [8]). Ako je konveksna funkcija diferencijabilna u nekoj tački, može se na osnovu toga zaključiti da su joj oba izvoda neprekidna u toj tački. Pretpostavka da je $S(N)$ glatka u y znači da je za sve x $f(x,y,\lambda)$ diferencijabilna u nuli. Na osnovu prethodne primedbe možemo tvrditi da je $\lim_{t\to 0} p_{\pm}(x,y+tx)=p_{\pm}(x,y)$, odakle se primenom nejednakosti (4) dobija $\lim_{t\to 0} Re[x,y+tx]= Re[x,y]$. ∎

U pomenutom članku ne razmatra se neprekidnost u tački i, na način koji se ne može primeniti u prethodnoj teoremi, dokazuje se sledeća činjenica.

Posledica 3.4.1. Da bi prostor $(N,[\ ])$ bio neprekidan, potrebno je i dovoljno da je N gladak.

Ilustrovaćemo teoremu 3.4. na nekoliko primera, koji se obično prikazuju uz teoremu 2.3.

Primer 3.4. Prostor $C(K)$

Ako je K kompaktan topološki prostor, onda sa $C(K)$ označavamo prostor neprekidnih skalarnih funkcija na K snabdeven sup-normom, tj. $\|x\|=\sup\{|x(t)|:\ t\in K\}$, $x\in C(K)$.

Jedinična sfera prostora $C(K)$ glatka je u tački x ako i samo ako postoji tačno jedan $t_0\in K$ tako da je $|x(t_0)|=\|x\|=1$.

Pretpostavimo da je $|x(t_1)|=|x(t_2)|=1$, $t_1\neq t_2$. Neka je $f_1(z)=\overline{x(t_1)}\,z(t_1)$, $f_2(z)=\overline{x(t_2)}\,z(t_2)$, $z\in C(K)$.

Tada je $f_1, f_2\in C(K)^*$, $\|f_1\|=\|f_2\|=f_1(x)=f_2(x)=1$.

Pošto je K kompaktan, on je i normalan (v. [6]). Zato postoji neprekidna funkcija $z_0: K\to[0,1]$ za koju važi $z_0(t_1)=1$, $z_0(t_2)=0$.

Sada je $f_1(z_0)\neq f_2(z_0)$, što prema teoremi 1.5. znači da jedinična sfera nije glatka u x.

Uz pomoć aksiome izbora pokazujemo egzistenciju funkcije $\xi : C(K) \to K$ koja ima osobinu $|x(\xi(x))| = \|x\|$. Tada formula $[z,x] = \overline{x(\xi(x))} \cdot z(\xi(x))$ zadaje poluskalarni proizvod na $C(K)$. Pretpostavimo da x dostiže normu tačno u jednoj tački. Neka je $(\lambda_n, n \in \omega)$ realan nula-niz. Služeći se kompaktnošću prostora K možemo pokazati da je za dato x $\lim_{n\to\infty} \xi(x+\lambda_n z) = \xi(x)$, a odatle, zbog neprekidnosti funkcija x i z, $\lim_{n\to\infty} [z, x+\lambda_n z] = [z,x]$. ■

Primer 3.5. Prostor $L^1(T,\mu)$

Da bi jedinična sfera prostora $L^1(T,\mu)$ bila glatka u svojoj tački x, neophodno je i dovoljno da je $\mu\{t \in T : x(t) = 0\} = 0$ ■

Primer 3.6.

Ako je N-funkcija M diferencijabilna, onda je prostor E_M gladak.

Neka je $\|x\|_M = \|y\|_M = 1$. Zbog pretpostavljenih osobina funkcije M biće u formuli (c)primera 3.1. $\varphi(t) = M'(t)$, $\varphi(0) = 0$. Na osnovu neprekidnosti izvoda M' i uslova $\lim_{t\to 0} \frac{M(t)}{t} = \varphi(0) = 0$ možemo zaključiti da je $\lim_{\lambda\to 0} \varphi\left(\frac{|y+\lambda x|}{\|y+\lambda x\|}\right)|y+\lambda x| = \varphi(|y|)|y|$ i $\lim_{\lambda\to 0} \varphi\left(\frac{|y+\lambda x|}{\|y+\lambda x\|}\right) \operatorname{sgn}(y+\lambda x) = \varphi(|y|) \operatorname{sgn} y$, $x, y \in E_M$. Služeći se nejednakostima $tM'(t) \leq M(2t)$, $|y+\lambda x| / \|y+\lambda x\| \leq 2(|y|+|x|)$, (za $|\lambda| \leq \frac{1}{2}$) izvodimo $\varphi\left(\frac{|y+\lambda x|}{\|y+\lambda x\|}\right)\frac{|y+\lambda x|}{\|y+\lambda x\|} \leq M(4|y|+4|x|)$ $(|\lambda| \leq \frac{1}{2})$. Tada(v.pr.3.1.a) važi $\int_P M(4|x|+4|y|)\,dm < +\infty$. Primena teoreme o dominantnoj konvergenciji daje $\lim_{\lambda\to 0} F(y+\lambda x, y+\lambda x) = F(y,y)$ za $x, y \in E_M$. Sličnim razmatranjima pokazuje se $\lim_{\lambda\to 0} F(x, y+\lambda x) = F(x,y)$. Iz primera 3.1.(*) vidi se da je $\lim_{\lambda\to 0} [x, y+\lambda x] = [x,y]$, pa, naravno, i $\lim_{\lambda\to 0} \operatorname{Re}[x, y+\lambda x] = \operatorname{Re}[x,y]$, što prema posledici 3.4.1 znači da je E_M gladak. ■

4. Ortogonalnost. Još dve karakterizacije glatkosti

Pojam ortogonalnosti u normiranom prostoru potiče od Džejmsa.

Definicija 3.3. Neka je N prostor sa poluskalarnim proizvodom $[\,,\,]$. Kažemo da je y ortogonalan na x ako je $\|y+\lambda x\| \geq \|y\|$ za sve skalare λ. Ako je $[x,y]=0$, kažemo da je y normalan na x.

Teorema 3.5. Ako $N \in (G)$, relacije ortogonalnosti i normalnosti se podudaraju. Važi obrnuto, tj. ako se ortogonalnost i normalnost podudaraju, onda $N \in (G)$.

Dokaz. Valja primetiti da, i bez pretpostavljanja glatkosti, normalnost prozrukuje ortogonalnost. Naime, ako je $[x,y]=0$, onda je $\|y\|^2=[y+\lambda x, y] \leq \|y+\lambda x\| \cdot \|y\|$.

Pretpostavimo da ortogonalnost implicira normalnost. Ako je $[\,\,]_1$ neki poluskalarni proizvod na N, definišimo funkcionale $f_y, h_y \in N^*$ na sledeći način: $f_y(x)=[x,y]$, $h_y(x)=[x,y]_1$. Ako je $h_y(x)=0$, onda je y ortogonalan na x. Po pretpostavci tada je y normalan na x, tj. $f_y(x)=0$. To znači da je $\operatorname{Ker} h_y \subset \operatorname{Ker} f_y$. Kako je još $h_y(y)=f_y(y)$, to je $h_y=f_y$, i to za svaki y. Time smo pokazali da je poluskalarni proizvod u N jedinstven, pa je (v.t.3.2.) N gladak.

Neka je N gladak i y normalan na x. Polazeći od toga da je $\operatorname{Re}[x,y]=\|y\| \lim_{\lambda \to 0} \frac{\|y+\lambda x\|-\|y\|}{\lambda}$, dobijamo $\operatorname{Re}[x,y]=0$ i $\operatorname{Re}[ix,y]=0$. Otuda je $[x,y]=0$ (v.posl. 3.3.1.). ■

Napomena. U članku [13] dokazan je samo prvi deo teoreme 3.5.

Podudaranje ortogonalnosti i normalnosti u glatkim prostorima omogućava nam da dobijemo potpuniju informaciju o neprekidnosti poluskalarnog proizvoda.

Teorema 3.6. Ako je N gladak, onda je pripadni poluskalarni proizvod neprekidna funkcija na N×N. Tačnije, ako je $\lim_{n\in\omega}\|x_n - x\| = 0$ i $\lim_{n\in\omega}\|y_n - y\| = 0$, onda je $\lim_{n\in\omega}[x_n, y_n] = [x, y]$.

Dokaz. Dovoljno je pokazati da je $\lim_{n\in\omega}[z, y_n] = [z, y]$. Slučaj y=0 je prost. Ako je $y \neq 0$, odbacivanjem konačnog broja članova niza možemo doći u situaciju u kojoj je $y_n \neq 0$. Niz $\alpha_n = [z, y_n]$ je ograničen u polju skalara. Pokazaćemo da su mu sve tačke nagomilavanja jednake $[z, y]$. Neka je α jedna od njih. Izdvojimo iz (α_n) podniz koji konvergira α. Označimo taj podniz opet sa (α_n). Tada je $[z - \frac{\alpha_n y_n}{\|y_n\|^2}, y_n] = 0, n\in\omega$, odakle se dobija (t.3.5) $\|y_n + \lambda(z - \frac{\alpha_n y_n}{\|y_n\|^2})\| \geq \|y_n\|, \lambda \in \mathbb{C}, n \in \omega$. Na osnovu toga se graničnim prelazom utvrđuje da je y ortogonalan na $z - \frac{\alpha y}{\|y\|^2}$, što zbog glatkosti (t.3.5) znači $[z - \frac{\alpha y}{\|y\|^2}, y] = 0$, tj. $\alpha = [z, y]$. ∎

Posledica 3.6.1. Operator $\mathcal{R}[(\mathcal{R}x)y = [y, x]]$ neprekidan je kao preslikavanje iz N (sa normiranom topologijom) u N^* sa w^*-topologijom ako i samo ako je $N \in (G)$.

Napomena. 1. Teorema 3.6 je rezultat autora.
2. Zbog 3.6.1 možda bi umesto "neprekidan" adekvatniji bio termin "slabo neprekidan prostor".

5. Prostori sa skalarnim proizvodom

U vezi sa pojmom normalnosti razmotrimo još jednu od mogućih osobina poluskalarnog proizvoda.

S5 $(\forall x, y, z \in N)([x, y] = [x, z] = 0 \Rightarrow [x, y + z] = 0$

Može se postaviti pitanje (P.M. Miličić) o karakterizaciji prostora koji imaju svojstvo S5. Ovde se daje odgovor uz pretpostavku da važi i S4. Pri tome se koristi sledeća

Teorema (Kakutani-Boneblast). Neka je N normiran prostor dimenzije najmanje tri. Ako za proizvoljan potprostor E u N postoji projekcija $P:N\xrightarrow{na}E$ s normom $\|P\|=1$, onda je N izometričan euklidskom prostoru.

Teorema 3.7. (rezultat autora). Neka je N prostor sa poluskalarnim proizvodom $[\,,\,]$ koji ima osobine S4 i S5. Ako je $\dim N\geqslant 3$, onda je N euklidski prostor, odnosno $[\,,\,]$ je skalarni proizvod.

Dokaz. Znajući da je prostor euklidski ako mu je takav svaki trodimenzionalni potprostor, možemo se ograničiti na slučaj $\dim N=3$.

Projekcija (s normom jednakom jedinici) na svaki jednodimenzionalni potprostor u N postoji nezavisno od pretpostavki teoreme. Neka je E potprostor u N i $\dim E=2$. Neka $z\in S(E)$. Kako je $u\mapsto[u,z]$ linearna funkcija, postoji $y\in S(E)$ tako da je

(1) $[y,z]=0$.

Na isti način se pokazuje da postoji $x\in S(N)$ tako da je

(2) $[x,y]=[x,z]=0$. Tada je zbog S4

(3) $[x,\beta y]=[x,\gamma z]=0$ za sve skalare β,γ, a zbog (3) i S5

(4) $[x,\beta y+\gamma z]=0$ za sve $\beta,\gamma\in\Phi$.

Primenom teoreme 3.5 na (4) dobijamo nejednakost

(5) $\|\alpha x+\beta y+\gamma z\|\geqslant\|\beta y+\gamma z\|$, $\alpha,\beta,\gamma\in\Phi$.

Jednostavno se pokazuje da su x, y, z linearno nezavisni. Tada projekciju $P:N\xrightarrow{na}E$ definišemo jednakošću

(6) $P(\alpha x+\beta y+\gamma z)=\beta y+\gamma z$.

Iz (5) sledi da je $\|P\|=1$. Tako prostor N zadovoljava uslove teoreme Kakutani-Boneblasta, što znači da je euklidski. ∎

Teorema 3.7 ima interesantnu geometrijsku interpretaciju. Neka je K ograničeno konveksno telo u $\mathbb{R}^3$ centralno simetrično u odnosu na tačku O. Pretpostavimo da za svaku ravan $\pi \ni 0$ postoji prava p koja ispunjava sledeći zahtev: U svakoj tački granične linije preseka $\pi \cap K$ može se izabrati ravan oslonca tela K koja je paralelna pravoj p . Tada je K elipsoid.

6. O Gramovoj determinanti

U radu [16] P.M.Miličića Gramovom determinantom skupa $\{x_1,x_2,\dots,x_k\}\subset N$ naziva se determinanta $\Gamma(x_1,\dots,x_k)=\det([x_i,x_j])$ i pokazuje

(1) Ako je $\Gamma(x_1,x_2,\dots,x_k)\neq 0$, onda je skup $\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$ linearno nezavisan.

Obrat ovog tvrđenja u opštem slučaju ne važi. Teorema 3.7 omogućava nam da to pitanje rešimo za glatke prostore.

(2) Neka je N k-dimenzionalni glatki prostor i $k\geq 3$. Ako N nije euklidski,onda postoji baza $\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$ u N za koju je $\Gamma(x_1,x_2,\dots,x_k)=0$.

Dokaz. Neka je $B=N^*$.Tada B nije euklidski, jer bi,u protivnom, i N bio euklidski.Takođe je $B\in(SC)$ (t.2.1). Prostor N možemo identifikovati sa B^*.Neka je $[\,,\,]$ poluskalarni proizvod u B sa osobinom S4, $\mathcal{R}: B\to N$, $(\mathcal{R}u)v=[v,u]$. Pošto je N gladak, biće $[\mathcal{R}u,\mathcal{R}v]=\|\mathcal{R}v\|\lim\limits_{t\to 0}\frac{\|\mathcal{R}v+t\mathcal{R}u\|-\|\mathcal{R}v\|}{t}$. Iz toga se može izvesti $[\mathcal{R}u,\mathcal{R}v]=[v,u]$, a odatle

(i) $\Gamma(u_1,u_2,\dots,u_n)=\Gamma(\mathcal{R}u_1,\mathcal{R}u_2,\dots,\mathcal{R}u_n)$.

Neka je najpre k=3. Na osnovu teoreme 3.7 postoje $u_1,u_2,u_3\in B$ takvi da je

(ii) $[u_1,u_2]=[u_1,u_3]=0$, $[u_1,u_2+u_3]\neq 0$.

Traženi vektori su $x_1 = \mathcal{R}u_1,\ x_2 = \mathcal{R}u_2, x_3 = \mathcal{R}u_3$.
Njihova linearna nezavisnost može se izvesti iz (ii) uz pomoć stroge konveksnosti prostora B. Na osnovu (1) i (i) dobija se $\Gamma(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Ako je $k > 3$, na prethodni način mogu se naći linearno nezavisni $x_1, x_2, x_3 \in N$ takvi da je $\Gamma(x_1, x_2, x_3) = 0$. Izaberimo netrivijalni funkcional $f \in N^*$ za koji je $f(x_n) = 0,\ n = 1,2,3$. Zbog glatkosti i refleksivnosti prostora N (v. sledeći deo) postoji $x_4 \in N$ tako da je $f(z) = [z, x_4]$, tj. $[x_k, x_4] = 0,\ k = 1,2,3$. Ponavljajući taj postupak nalazimo niz $x_4, x_5, \ldots, x_k,\ (\neq 0)$, za koji važi $[x_n, x_j] = 0,\ n = 1,2,3,\ j = 4,5,\ldots,k,\ \ [x_i, x_j] = 0,\ 4 \leq i < j \leq k$. Neposredno izračunavanje pokazuje da je $\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0$. Ako je $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0$, onda množeći redom dobijamo $\lambda_k = \cdots \lambda_4 = 0$, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$. Zato su $x_1, x_2, \ldots, x_k$ linearno nezavisni. ■

Č e t v r t i   d e o

NEKE PRIMENE POLUSKALARNOG PROIZVODA

Od mogućnosti primene poluskalarnog proizvoda autor je izabrao da prikaže one koje mu se čine najinteresantnijim i najdelotvornijim. To su teorija aproksimacija u glatkim prostorima i reprezentacija ograničenih linearnih funkcionala . Tako kriteriji za element najbolje aproksimacije dobijaju posebno prost oblik, a,uz pomoć teoreme Bišopa-Felpsa, izuzetno lako se dobija opšti oblik ograničenog linearnog funkcionala za prostore E_M.

1. Reprezentacija ograničenih linearnih funkcionala u glatkim Banahovim prostorima

Poluskalarni proizvod je pogodan za ispitivanje ograničenih linearnih funkcionala, uglavnom, u glatkim Banahovim prostorima. Da li se neki funkcional u ovom slučaju može predstaviti pomoću poluskalarnog proizvoda zavisi isključivo od toga dostiže li on svoju normu na jediničnoj sferi.

Lema 4.1. Neka je B gladak Banahov prostor. Ako $f \in B^*$ dostiže normu u tački $x_0 \in S(B)$, onda je, za sve $x \in B$, $f(x)=[x,y]$, gde je $y=\|f\| x_0$.

Dokaz. Neka je $h(x)=[x,x_0]$, $g=\|f\|^{-1} f$. Tada je $h, g \in S(B^*)$ i $h(x_0)=g(x_0)=1$. Zbog glatkosti sfere S(B) biće (teor.1.6) g=h, tj. $f(x)=\|f\| [x,x_0]=[x, \|f\| x_0]$. ∎

Pomoću navedene leme pokazuje se da su u slučaju refleksivnog glatkog B poluskalarnim proizvodom obuhvaćeni svi funkcionali iz B^*. Medjutim, ova činjenica nije mnogo praktična, jer je provera refleksivnosti obično netrivijalna.

Ako se poslužimo teoremom Bišopa-Felpsa, možemo primenu poluskalarnog proizvoda znatno proširiti i pojednostaviti.

(BF) Teorema Bišopa-Felpsa. Neka je B Banahov prostor. Tada je skup onih funkcionala iz B^* koji dostižu svoju normu na S(B) svuda gust u normiranoj topologiji prostora B^*.

U dokazu se koristi sledeća lema ([14]).

Lema 4.2. Neka $f, g \in S(B^*)$ i $\frac{\varepsilon}{2} = \sup\{|g(x)| : \|x\| \le 1, f(x)=0\}$. Tada je $\|f-g\| \le \varepsilon$ ili $\|f+g\| \le \varepsilon$.

Dokaz leme. Slučaj $\varepsilon = 0$ je trivijalan. Neka je $\varepsilon > 0$ i $L=\{x \in B : f(x)=0\}$.

Na osnovu Han-Banahovog stava postoji $h \in B^*$ tako da je $h|_L = \frac{2}{\varepsilon} g|_L$ i $\|h\| = 1$. Važi $h = \lambda_1 f + \lambda_2 g$ za neke skalare λ_1, λ_2, jer je $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} h$. Odavde se nalazi $\lambda_2 = 2\varepsilon^{-1}$. Zbog $\|f\| = \|g\| = \|h\| = 1$ vredi bar jedna od nejednakosti: $|\lambda_1 + 2\varepsilon^{-1}| \leq 1$ ili $|\lambda_1 - 2\varepsilon^{-1}| \leq 1$. Ako je $K = \{x \in B : |f(x)| \leq 1, |g(x)| \leq 1\}$, onda je $\|f \pm g\| \leq \sup\{|f(x) \pm g(x)| : x \in K\}$, tj. $\|f - g\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |\lambda_1 \frac{\varepsilon}{2} + 1|$ i $\|f + g\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |\lambda_1 \frac{\varepsilon}{2} - 1|$. Otuda se dobija tvrdjenje leme. ∎

Dokaz teoreme (BF). Razmotrimo slučaj realnog B. Neka je $\|f\| = 1$, $\varepsilon > 0$, $T = \{x \in B : f(x) = 0, \|x\| \leq 2\varepsilon^{-1}\}$ i C konveksni omotač unije $U(B) \cup T$. Fiksirajmo neko z iz U za koje je $f(z) > 0$. U skup $Z = \{x \in U : f(x) > f(z)\}$ uvodi se relacija poretka. Kažemo da je $x > y$ ako je

(i) $f(x) > f(y)$,

(ii) $\|x - y\| \leq k[f(x) - f(y)]$, $k = [f(z)]^{-1}(1 + 2\varepsilon^{-1})$.

Korišćenjem kompletnosti prostora B pokazuje se da svaki lanac u Z ima majorantu, što, prema Cornovoj lemi, znači da postoji maksimalan element x_0 skupa Z. Zahvaljujući izboru konstante k, tačka x_0 je na rubu skupa C. Pošto C ima nepraznu unutrašnjost, postoji $g \in B^*$ tako da je $g(x_0) = 1$ i $\sup\{g(x) : x \in C\} = 1$. Neposredno se proverava da f i g zadovoljavaju uslove leme 4.2. Zato je $\|f - g\| \leq \varepsilon$ ili $\|f + g\| \leq \varepsilon$. Traženi funkcional je g ili −g. ∎

Dovodeći u vezu (BF) i lemu 4.1, dobijamo sledeću činjenicu.

Teorema 4.1. Neka je B gladak Banahov prostor. Tada je skup funkcionala iz B predstavljivih pomoću poluskalarnog proizvoda svuda gust u normiranoj topologiji prostora B^*.

Iskazano pomoću operatora $\mathcal{R}$ to znači da je u glatkim Banahovim prostorima $\overline{\mathcal{R}(B)} = B^*$.

U praksi se obično srećemo sa dva Banahova prostora B i B_1 i bilinearnom funkcionelom $\Omega : B \times B_1 \to \Phi$. Nastojimo da pokažemo da su B_1 i B^* izomorfni i da Ω opisuje sve funkcionale iz B^*.

Ako je B gladak, dovoljno je proveriti sledeće uslove.

(R1) Postoje pozitivne konstante c_1, c_2 takve da je $c_1\|y\| \leq \sup\{|\Omega(x,y)| : \|x\| \leq 1\} \leq c_2\|y\|$ za sve $y \in B_1$.

(R2) $\forall z \in B\ \exists y \in B_1\ \forall x \in B\ [x,z] = \Omega(x,y)$.

Teorema 4.2. Neka B, B_1, Ω ispunjavaju zahteve (R1) i (R2), pri čemu $B \in (G)$. Tada Ω opisuje sve funkcionale iz B^* i B_1 i B^* su izomorfni, a u slučaju $c_1 = c_2 = 1$ izometrični.

Dokaz. Neka je $B' = \{f \in B^* : \exists y \in B_1\ \forall x \in B\ f(x) = \Omega(x,y)\}$. Uslov (R1) znači da su B' i B_1 izomorfni, a (R2) da je $\mathcal{R}(B)$ sadržan u B'. Pošto je B_1 kompletan, takav je i B', pa je B' zatvoren potprostor u B^*. Zato je $\overline{\mathcal{R}(B)} \subset \overline{B'} = B' \subset B^*$. Sada primenom teoreme 4.1 zaključujemo da je $B' = B^*$. ∎

Primer 4.1. Opšti oblik ograničenog linearnog funkcionala na prostoru $L^p(T,\mu)$, $p > 1$

Stavimo $B = L^p(T,\mu)$, $B_1 = L^q(T,\mu)$, $p + q = pq$,
$\Omega(x,y) = \int_T xy\, d\mu$, $x \in B$, $y \in B_1$.

Na standardan način se pokazuje da je uslov (R1) zadovoljen sa konstantama $c_1 = c_2 = 1$. Važi i $[x,z] = \Omega(x,y)$, gde je $y = \|z\|_p^{2-p} |z|^{p-1} \operatorname{sgn} z$, $x, z \in L^p$, $y \in L^q$.

Prema teoremi 4.2 to znači da je $L^q(T,\mu) \cong [L^p(T,\mu)]^*$. ∎

2. Reprezentacija ograničenih linearnih funkcionala na Orličevim prostorima

Teorema 4.2 se ne može direktno primeniti na prostor E_M bez pretpostavke o diferencijabilnosti funkcije M, koja obezbeđuje glatkost. Međutim, jednostavnom konstrukcijom možemo naći gladak prostor E_N izomorfan prostoru E_M i teoremu 4.2 primeniti na E_N. Za to su nam potrebne osnovne činjenice o komplementarnosti i ekvivalentnosti N-funkcija. One se mogu naći u knjizi [8].

Svakoj N-funkciji M dodeljuje se funkcija $M^*(t)=\int_0^t q(u)\,du$, gde je $q(u)=\sup\{t : M_+'(t)\leq u\}$. Pokazuje se da je M^* N-funkcija i da je $(M^*)^*=M$. M i M^* se zovu komplementarnim.

Kaže se da su M i N ekvivalentne ako postoje pozitivne konstante k_1, k_2, t_0 tako da je $M(k_1 t)\leq N(t)\leq M(k_2 t)$, $t\geq t_0$. Piše se $M\sim N$.

Pokazuje se da iz $M\sim N$ sledi $M^*\sim N^*$.

(1) Ako je $M\sim N$, onda je $L_M=L_N$, $E_M=E_N$ (u smislu skupovne jednakosti) i jedinični operator je izomorfizam prostorâ L_M i L_N, a, takođe, i prostorâ E_M i E_N.

(2) Ako je M strogo konveksna(nije linearna ni na jednom intervalu) onda je M^* diferencijabilna.

Lema 4.3. Neka je M N-funkcija. Tada postoji njoj ekvivalentna diferencijabilna N-funkcija N.

Dokaz. Funkcija $t\mapsto \frac{M^*(t)}{t}$ je strogo rastuća, jer je $\lim_{t\to t_0}\frac{M^*(t)}{t}=0$ (v. 8 ,1.18). Neka je $M_1(t)=M^*(t)+\int_0^t\frac{M^*(u)}{u}du$. Običnim nejednakostima za konveksne funkcije može se pokazati da je M_1 strogo konveksna N-funkcija ekvivalentna sa M^*. Tražena funkcija je $N=M_1^*$. ∎

Stav o prostoru $(E_M)^*$. Neka je M N-funkcija. Tada je $\Omega(x,y)=\int xy\,dm$, $x\in E_M$, $y\in L_{N^*}$ opšti oblik funkcionala iz $(E_M)^*$. Prostor $(E_M)^*$ izomorfan je prostoru L_{M^*}.

Dokaz. Zbog (1) i leme 4.3 dovoljno je stav dokazati za slučaj diferencijabilnosti funkcije M.

Važi nejednakost (v. [8], [10])

(4) $\|y\|_{M^*}\leq \sup\{|\Omega(x,y)| : x\in S(E_M)\}\leq 2\|y\|_{M^*}$

i jednakost

(5) $[x,z]=\int xy\,dm$, $y=\|z\|_M^2\cdot\frac{1}{F(z,z)}M'(|z|)\,\mathrm{sgn}\,z$.

Uzimajući $\rho=\|z\|^2(F(z,z))^{-1}$, možemo pokazati $\int M^*(\frac{|y|}{\rho})dm<+\infty$, što znači $y\in L_{M^*}$. Time su zadovoljeni uslovi (R1) i (R2).■

Prethodni stav se obično dokazuje primenom Radon-Nikodimovog stava, a izloženi način svodi ulogu mere na minimum.

3. Aproksimacija u glatkim prostorima

U ovom odeljku slovo B označava Banahov prostor koji je realan i gladak, a F—zatvoren konveksan skup u B.

Kaže se da je $u_0\in F$ element najbolje aproksimacije (e.n.a.) u F za $x\in B$ ako je $\|x-u_0\|=\inf\{\|x-u\| : u\in F\}$.

Mogućnost primene poluskalarnog proizvoda na probleme aproksimacije zasniva se na sledećoj ekvivalenciji, koja je neposredna posledica tvrdjenja 2(4) iz drugog dela.

(E) $[x,y]\geq 0 \iff (\forall\lambda\in[0,1]\ \|y+\lambda x\|\geq\|y\|)$

Stav (A1). Da bi u_0 bio e.n.a. u F za x, potrebna je i dovoljna nejednakost $[u_0-u,x-u_0]\geq 0$ za sve $u\in F$.

Stav (A2). Ako je F potprostor, nejednakost iz (A1) može se zameniti jednakošću $[u,x-u_0]=0$ za sve $u\in F$.

Dokaz. Stav (A1) se dobije iz (A2) kad se nejednakost, koja u njemu figuriše, primeni na u_0+u i u_0-u.

Ako je $[u_0-u, x-u_0]\geq 0$, onda je (v.(E)) $\|x-u_0+\lambda(u_0-u)\|\geq\|x-u_0\|$, $\lambda\in[0,1]$. Stavljajući $\lambda=1$, zaključujemo da je u_0 e.n.a. za x. Obrnuto, neka je u_0 e.n.a. za x i neka $u\in F$. Zbog konveksnosti skupa F $\lambda u+(1-\lambda)u_0\in F$. Tada je $\|x-u_0\|\leq\|x-\lambda u-(1-\lambda)u_0\|=\|x-u_0+\lambda(u_0-u)\|$, $\lambda\in[0,1]$. Na osnovu (E) sad možemo zaključiti $[u_0-u, x-u_0]\geq 0$. $\blacksquare$

Primer 4.2. Neka je F konveksan skup u $L^p(T,\mu)$ $(p>1)$. Da bi $u_0\in F$ bio e.n.a. u F za $x\in L^p$, neophodno je i dovoljno da važi nejednakost $\int_T |x-u_0|^{p-1}(u_0-u)\operatorname{sgn}(x-u_0)\,d\mu\geq 0$ za sve $u\in F$.

U slučaju da je F potprostor ta nejednakost se može zameniti jednakošću $\int_T |x-u_0|^{p-1}u\operatorname{sgn}(x-u_0)\,d\mu=0$ za sve $u\in F$.

Napomena. Drugi deo ovog primera predstavlja teoremu 3.3.1 u knjizi [10].

L i t e r a t u r a

[1] G. Kothe, Topologische lineare Raume, Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1960.

[2] А.П. и В.Дж. Робертсон, Топологические векторные пространства, »Мир«, Москва 1967.

[3] М.М. Дэй, Нормированные линейные пространства 1967.

[4] У. Рудин, Функциональный анализ, Москва 1975.

[5] Н. Бурбаки, Общая топология (Основные структуры) »Наука«, Москва 1968.

[6] Н. Бурбаки, Общая топология (Использование вещественных чисел, функциональные пространства), Москва 1975.

[7] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach spaces I, Sequence spaces, Berlin-Heidelberg-New York 1977.

[8] М.А. Красносельский, Я.Б. Рутицкий, Выпуклые функции и пространства Орлича, Москва 1958.

[9] Н.П. Корнейчук, Экстремальные задачи теории приближения, »Наука«, Москва 1976.

[10] Л.В. Канторович, Г.П. Акилов, Функциональный анализ, »Наука«, Москва 1977.

[11] М.И. Кадец, Геометрия нормированных пространств, Мат. анализ, т. 13, 99-127, Москва 1975.

[12] В.Д. Мильман, Геометрическая теория пространств Банаха II, УМН, т. XXVI, вып. 6(162), 1971.

[13] J.R. Giles, Classes of semi-inner-product spaces, Trans. Amer. Math. Soc, v. 129, 1967.

[14] E. Bishop and R. Phelps, A proof that every Banach space is subreflexive, Bull. Amer. Math. Soc. 67:1(1961), 97-98.

[15] А. Пелчинский, О некоторых проблемах Банаха, УМН, т. XXVIII, вып. 6(174), (1973), 67–75.

[16] P. M. Miličić, Sur la transversalite dans des espace normés, Mathematica Balcanica 1 (1971), 171-176.

[17] P. M. Miličić, Sur le semi-produit scalaire dans quelqes espaces vectoriels normés, Mat. vesnik 8 (23), 2 (1971), 181-185.

[18] P. M. Miličić, Sur l'existance du produit scalaire, Mat. vesnik 10 (25), 1 (1973), 3-7.

[19] Л. Ниренберг, Лекции по нелинейному функциональному анализу, »Мир«, Москва 1977.