BEOGRADSKI UNIVERZITET
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Aleksandar Bakša

STABILNOST KRETANJA NEHOLONOMNIH SISTEMA

d i s e r t a c i j a
za sticanje naučnog stepena
doktora mehaničkih nauka

B E O G R A D
1976.

Izražavam zahvalnost Prof. dr Tatomiru P. Anđeliću, Prof. dr Veljku A. Vujičiću i Prof. dr Marku D. Leku što su mi svojim savetima i primedbama pomogli u izradi ovog rada.

S A D R Ž A J

P R E D G O V O R

Stabilnost kretanja mehaničkih sistema, kao deo opšte teorije stabilnosti rešenja diferencijalnih jednačina, je u literaturi široko obrađivana tema. No uprkos tome, ona je još uvek interasantna za mnoge istraživače o čemu svedoče radovi iz ove oblasti koji se svakodnevno pojavljuju u velikom broju. Pri rešavanju zadataka iz stabilnosti kretanja najširu primenu je, bez sumnje, dobila Ляпунов-ljeva teorija [12] koja je od svog nastanka 1892. godine pa sve do danas razvijana od velikog broja istaknutih naučnika. U poslednjih nekoliko godina ova teorija je dobila neslućeno veliku primenu u teoriji automatske regulacije i optimalnog upravljanja što daje nove impulse njenom daljem razvoju. Ovako veliki uspeh pokušaćemo da objasnimo, makar i delimično, slikovitim rečima Четаев -a [7] :"Oštroumnost Ljapunovske definicije stabilnosti sastoji se u tome što nije bespredmetno široka, inače ne bi bila interesantna, a sužena je tačno toliko da obuhvati sve ono što je korenito u najraznovrsnijim zadacima o stabilnosti."

Što se tiče stabilnosti kretanja neholonomnih mehaničkih sistema /misli se i na stabilnost ravnotežnog stanja kao specijalni slučaj/ možemo reći da još uvek nije dovoljno ispitana iako je počev od radova Whittakera i njoj posvećena dovoljno opširna literatura. Posebno je ilustrativan u tom pogledu put razvoja problema stabilnosti ravnotežnog stanja neholonomnih sistema koji niti je išao direktno rešenju niti je do danas stigao do kraja. Prva rešenja ovog zadatka se mogu naći u [20]. Whittaker je stabilnost ravnotežnog stanja neholonomnih sistema ispitivao tako što je ne holonomne veze linearizovao, posle čega one postaju integrabilne, pa se na taj način gubi razlika između neholonomnih i holonomnih sistema. Da problem ipak nije teko jednostavan, prvi je pokazao Bottema u radu "On the small vibrations of non holonomic systems", Ind. Mathematical, Amsterdam, 1949. vol. 11, f. 4. Bottema skreće pažnju da u slučaju malih oscilacija neholonomnog sistema oko ravnotežnog položaja karakteristična jednačina ima višestruke nule a matrica njenih koeficijenata nije simetrična kao kod holonomnih sistema. Na osnovu toga, predlaže sa se ovaj zadatak tretira kao "kritičan slučaj" u smislu Ляпунов-ljeve definicije što praktično znači da je za sada nerešiv. O nastalom problemu napisano je dosta radova od kojih izdvajamo rad [21] Aiserman-a i Gantmacher-a u kome je pokazano da je problem rešiv ako je broj korena jednakih nuli jednak broju neholonomnih veza.

Od autora koji su se bavili ispitivanjem stabilnosti kretanja neholonomnih sistema navešćemo samo neke: A.H. Обморшев je u [25] sastavio linearizovane jednačine malih oscilacija oko stacionarnog kretanja i ravnotežnog položaja. Неймарк i Фуфаев posvećuju niz svojih radova /većina od tih radova sadržana je u [15]/ problemima stabilnosti ne holonomnih sistema među kojima vidno mesto zauzimaju oni koji se odnose na stabilnost ravnotežnog stanja. Stabilnost stacionarnog kretanja rešavaju primenom Lagrange-evih jednačina sa množiteljima veza što, čini se, nepotrebno usložnjava problem. Problemima stabilnosti kretanja neholonomnih sistema bavio se i Четаев [7] koji je, pored ostalog, prvi naglasio da se ovde radi o uslovnoj stabilnosti u smislu kako je definisana u [12]. Ističemo, na kraju, rad B.B. Румянцев-a [31] u kome je najpodrobnije obrađena stabilnost ravnotežnog stanja neholonomnog sistema u polju konzervativnih sila. Ovde su dati i uslovi pod kojima neholonomne veze nemaju značaja za stabilnost ravnotežnog stanja sa interesantnom napomenom da te uslove Whittaker ne navodi u svojoj knjizi ali je očito da o njima prećutno vodi računa što se može zaključiti iz njegovih rasuđivanja.

U ovom radu ispituje se stabilnost kretanja neholonomnih sistema; nađeni su uslovi dovoljni da uočeno kretanje bude stabilno odnosno nestabilno u Ляпунов-ljevom smislu. Predloženi stavovi u suštini pripadaju direktnom Ляпунов-ljevom metodu jer pretpostavljaju postojanje jedne funkcije, određenih osobina, koja se od poznatih Ляпунов-ljevih funkcija razlikuje po tome što zavisi samo od koordinata položaja sistema a ne i od brzina. Način na koji se ova funkcija može konstruisati ostaje, kao i kod Ляпунов-ljevih teorema, nerešen. No pošto u ovom slučaju funkcija koja podleže izboru zavisi od dva puta manje promenljivih u poređenju sa odgovarajućom Ляпунов-ljevom funkcijom, može se reći da je, bar u principu, zadatak u ovom slučaju nešto lakši. Kao posledice stavova koji važe za stacionarno kretanje neholonomnih sistema dobijeni su rezultati, analogni poznatim rezultatima kod holonomnih sistema, koje u literaturi nisam našao. U slučaju ravnotežnog stanja iz predloženih stavova slede, kao posledice, teoreme izvedene u [31].

Sama ideja da se na ovaj način priđe ispitivanju stabilnosti kretanja mehaničkih sistema ovde nije originalna. Ona se pojavljuje u radovima Veljka Vujičića [34] - [36]. Ovde je ona primenjena na neholonomne sisteme i obogaćena stavovima o nestabilnosti kretanja i ravnotežnog stanja.

§ 1. Jednačine kretanja neholonomnih sistema

Posmatraćemo mehanički sistem $\mathcal{M}$ koji definišu:

d_1) Skup materijalnih tačaka M_i $(i=1,\dots,n)$, masa m_i, čiji su vektori položaja $\vec{r}_i$;

d_2) Kretanje ovih tačaka je ograničeno sa K holonomnih veza

$$f_a(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N)=0 \quad (a=1,\dots,K) \tag{1}$$

i L neholonomnih, skleronomnih, veza oblika

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{l}_{bi}\vec{v}_i + l_b = 0 \quad (b=1,\dots,L) \tag{2}$$

gde su

$$\vec{l}_{bi}=\vec{l}_{bi}(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N); \quad l_b=l_b(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N).$$

d_3) Sistem se kreće pod dejstvom aktivnih sila

$$\vec{F}_i=\vec{F}_i(t;\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N,\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_N)$$

i sila reakcija veza

$$\vec{R}_i=\sum_{a=1}^{K}\lambda_a \operatorname{grad}_i f_a+\sum_{b=1}^{L}\mu_b\vec{l}_{bi}.$$

d_4) Kretanje je moguće opisati diferencijalnim jednačinama /Lagrange-evim I vrste/

$$m_i\vec{w}_i=\vec{F}_i+\sum_{a=1}^{K}\lambda_a \operatorname{grad}_i f_a+\sum_{b=1}^{L}\mu_b\vec{l}_{bi}, \quad \left(\vec{w}_i=\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\right) \tag{3}$$

u kojima su λ_a i μ_b množioci veza koji podležu određivanju.

U našim razmatranjima biće pogodnije da se koriste jednačine kretanja bez množilaca veza, pa ćemo iz (3), najpre, eliminisati λ_a i μ_b. U literaturi se mogu naći više načina da se dobiju jednačine kretanja iz kojih su eliminisane reakcije veza no mi ćemo ovde, ipak, jedan takav postupak izvesti iz ovih razloga: prvo, analogan postupak ćemo koristiti i pri izvođenju jednačina za poremećaje pa će ovo doprineti da neki dočniji postupci budu jasniji i drugo, što ćemo nekim jednačinama dati novi oblik koji je pogodniji za naša razmatranja.

Neka je položaj posmatranog mehaničkog sistema $\mathcal{M}$ određen nezavisnim /Lagrange-evim/ generalisanim koordinatama q^μ ($\mu = 1,\dots,n = 3N - K$), tj. neka je

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q^1,\dots,q^n) \cdot \tag{4}$$

Jednačine holonomnih veza (1) su, pošto se u njima vektori položaja izraze pomoću (4), identički zadovoljene /u tom smislu smo koordinate q^μ i nazvali nezavisnim, iako je njihov broj veći od broja stepena slobode kretanja sistema/ a jednačine neholonomnih veza (2) dobijaju, na taj način, oblik

$$\Phi_{b\mu}\dot{q}^\mu + \Phi_b = 0, \tag{5}$$

gde su

$$\Phi_{b\mu} = \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_{bi} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}; \quad \Phi_b = l_b(\vec{r}(q^1,\dots,q^n)).$$

Smatraćemo da su funkcije

$$\Phi_{b\mu} = \Phi_{b\mu}(q^1,\dots,q^n); \quad \Phi_b = \Phi_b(q^1,\dots,q^n)$$

neprekidne i diferencijabilne do reda koji nam bude bio potreban, ne naglašavajući to posebno u daljem tekstu. Pomnožimo sada jednačine (3), redom, skalarno vektorima

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}$$

i saberimo tako dobijene jednakosti, pa ćemo dobiti

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{w}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{a=1}^{K} \lambda_a \operatorname{grad}_i f_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{b=1}^{L} \mu_b \vec{l}_{bi} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} \cdot \tag{6}$$

Izraz na levoj strani jednakosti (6) transformisaćemo na naredni način:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{w}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} &= \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}\Big) - \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} = \\ &= \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}\Big) - \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\nu} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q^\sigma \partial q^\mu} \dot{q}^\sigma \dot{q}^\nu \cdot \end{aligned} \tag{7}$$

Uvedimo, sada, pored generalisanih koordinata i odgovarajuće generalisane impulse p_μ kao nezavisne promenljive koje će određivati kretanje sistema. Njih definišemo jednakostima

$$p_\mu = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} \tag{8}$$

Pošto je kinetička energija sistema $\mathcal{M}$, s obzirom da je po pretpostavci skleronoman, data homogenom kvadratnom formom u odnosu na generalisane brzine

(9) $$T = \frac{1}{2} a_{\mu\nu} \dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\nu} \quad (\mu, \nu = 1, \dots, n)$$

gde je iskorišćena Einstein-ova konvencija o sabiranju po ponovljenim indeksima i

$$a_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\mu}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\nu}},$$

to se generalisani impulsi mogu izraziti i jednakošću

(10) $$p_{\mu} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\mu}} = a_{\mu\nu} \dot{q}^{\nu}.$$

Kako za koeficijente $a_{\mu\nu}$ važi /videti npr. [10] str. 38/

$$\det(a_{\mu\nu})^{n}_{\mu,\nu=1} \neq 0$$

iz (10) se uvek mogu izračunati generalisane brzine u obliku

(10') $$\dot{q}^{\mu} = a^{\mu\nu} p_{\nu}$$

gde su $a^{\mu\nu}$ elementi matrice koja je recipročna matrici $(a_{\mu\nu})$, tj.

$$a_{\mu\nu} a^{\nu\sigma} = \delta^{\sigma}_{\mu} = \begin{cases} 1, & \text{za } \mu = \sigma \\ 0, & \text{za } \mu \neq \sigma . \end{cases}$$

Skup generalisanih koordinata q^{μ} definiše n-dimenzionu mnogostrukost Σ_n koja je određena do na proizvoljnu transformaciju

(11) $$\bar{q}^{\mu} = \bar{q}^{\mu}(q^1, \dots, q^n), \quad \frac{\partial(\bar{q}^1, \dots, \bar{q}^n)}{\partial(q^1, \dots, q^n)} \neq 0$$

i koju ćemo nazvati konfiguraciona mnogostrukost. Mnogostrukost Σ_n se može metrizovati uvođenjem kinematičkog linijskog elementa

(12) $$ds^2 = a_{\mu\nu} dq^{\mu} dq^{\nu}.$$

Tako dobijeni metrički prostor je, u opštem slučaju, rimanski. Obeležavaćemo ga sa V_n. Sada se može iskoristiti relacija /[17], § 94./

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\nu}\cdot\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q^\sigma \partial q^\mu} = [\sigma\mu,\nu]$$

gde je $[\sigma\mu,\nu]$ Christoffel-ov simbol I vrste u V_n i izraz (7) napisati u obliku

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{W}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} = \frac{dp_\mu}{dt} - [\sigma\mu,\nu]\dot{q}^\sigma \dot{q}^\nu,$$

odnosno, ako se iskoristi (10'),

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{W}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} = \frac{dp_\mu}{dt} - \left\{{}^{\tau}_{\sigma\mu}\right\}\dot{q}^\sigma p_\tau = \frac{Dp_\mu}{dt}. \tag{13}$$

Na desnoj strani jednačine (6) imamo, najpre, generalisanu silu

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} = Q_\mu \tag{14}$$

zatim,

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{K} \lambda_\alpha \,\mathrm{grad}_i f_\alpha\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} = 0, \tag{15}$$

a poslednji izraz na desnoj strani jednačine (6) je

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{b=1}^{L} \mu_b \vec{l}_{bi}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} = \sum_{b=1}^{L}\mu_b \Phi_{b\mu} \tag{16}$$

i predstavlja reakciju neholonomnih veza.

Konačno, jednačina (6), s obzirom na relacije (13) - (16) dobija oblik

$$\frac{Dp_\mu}{dt} = Q_\mu + \sum_{b=1}^{L}\mu_b \Phi_{b\mu} \tag{17}$$

i zajedno sa (5) i (10') određuje kretanje sistema $\mathcal{M}$. No ove jednačine još uvek sadrže množioce neholonomnih veza koje želimo da eliminišemo. Radi toga, pomnožimo (17) sa $a^{\mu\nu}\Phi_{c\nu}$ i izvršimo sabiranje po indeksu μ; dobijamo

$$a^{\mu\nu}\Phi_{c\nu}\frac{Dp_\mu}{dt} = a^{\mu\nu}\Phi_{c\nu}Q_\mu + \sum_{b=1}^{L}\mu_b a^{\mu\nu}\Phi_{b\mu}\Phi_{c\nu}. \tag{18}$$

Sistem veličina $\Phi_{b\mu}$ $(\mu = 1,\dots,n)$, za svako fiksirano b ima, u odnosu na transformacije promenljivih (11), karakter kovarijantnog vektora. Da bismo to istakli, indeks b, koji ne određuje tenzorsku prirodu sistema, stavljaćemo od sada u zagradu. Prema tome, za izraz

$$\mathcal{F}_{bc} = a^{\mu\nu}\Phi_{(b)\mu}\Phi_{(c)\nu}$$

možemo reći da predstavlja skalarni proizvod vektora $(\Phi_{(b)\mu})$ i $(\Phi_{(c)\nu})$. Sa ovim oznakama, jednačina (18) postaje

$$a^{\mu\nu}\Phi_{(c)\nu}\frac{Dp_\mu}{dt} = a^{\mu\nu}\Phi_{(c)\nu}Q_\mu + \sum_{b=1}^{L}\mu_b\mathcal{F}_{bc}. \tag{18'}$$

Kako su jednačine neholonomnih veza, po pretpostavci međusobno nezavisne, to je

$$\det(\mathcal{F}_{bc})_{b,c=1}^{L} \neq 0$$

pa se matrici $(\mathcal{F}_{bc})$ može naći recipročna matrica $(\mathcal{F}^{bc})$. Prema tome, iz (18') se mogu izračunati množioci neholonomnih veza

$$\mu_b = \sum_{c=1}^{L}\Phi^{\mu}_{(c)}\mathcal{F}^{bc}\frac{Dp_\mu}{dt} - \sum_{c=1}^{L}\Phi^{\mu}_{(c)}\mathcal{F}^{bc}Q_\mu .$$

Zamenom ovih vrednosti za μ_b u (17), dobija se

$$\frac{Dp_\mu}{dt} = Q_\mu + \sum_{b=1}^{L}\sum_{c=1}^{L}\Phi^{\sigma}_{(c)}\mathcal{F}^{bc}\left(\frac{Dp_\sigma}{dt} - Q_\sigma\right)\Phi_{(b)\mu}. \tag{19}$$

Iz jednačina neholonomnih veza (5), koje se, s obzirom na (10'), mogu napisati u obliku

$$\Phi^{\sigma}_{(c)}p_\sigma + \Phi_{(c)} = 0,$$

apsolutnim diferenciranjem dobijamo

$$\left(\frac{\partial\Phi_{(c)}}{\partial q^\mu}a^{\mu\sigma} + \frac{D\Phi^{\sigma}_{(c)}}{dt}\right)p_\sigma + \Phi^{\sigma}_{(c)}\frac{Dp_\sigma}{dt} = 0 \tag{20}$$

jer je

$$\frac{D\Phi_{(c)}}{dt} = \frac{d\Phi_{(c)}}{dt} = \frac{\partial\Phi_{(c)}}{\partial q^\mu}a^{\mu\sigma}p_\sigma$$

pošto je sistem po pretpostavci skleronoman. Koristeći (20), jednačine (19) se mogu transformisati na oblik

$$\frac{Dp_\mu}{dt} = P_\mu - \sum_{b,c=1}^{L}\mathcal{F}^{bc}\Phi_{(b)\mu}\left(\frac{D\Phi^{\sigma}_{(c)}}{dt}p_\sigma + \frac{\partial\Phi_{(c)}}{\partial q^\mu}a^{\mu\sigma}p_\sigma\right) \tag{21}$$

gde smo sa P_μ obeležili

$$P_\mu = Q_\mu - \sum_{b,c=1}^{L}Q_\sigma\Phi^{\sigma}_{(c)}\Phi_{(b)\mu}\mathcal{F}^{bc}. \tag{22}$$

Na taj način, kretanje sistema $\mathcal{M}$ se može opisati sledećim sistemom diferencijalnih jednačina

$$\frac{dq^{\mu}}{dt} = a^{\mu\nu} p_{\nu}$$
(23)
$$\frac{Dp_{\mu}}{dt} = P_{\mu} - \sum_{b,c=1}^{L} F^{bc}\Phi_{(b)\mu}\left(\frac{D\Phi^{\sigma}_{(c)}}{dt} + \frac{\partial\Phi_{(c)}}{\partial q^{\mu}} a^{\mu\sigma}\right) p_{\sigma}.$$

Ovaj sistem sadrži 2n jednačina sa isto toliko nepoznatih q^{μ} i p_{μ} pri čemu su jednačine prvog reda i rešene po izvodima nepoznatih. Zapazimo da među njima nema jednačina neholonomnih veza ali zato sadrže članove u kojima se pojavljuju apsolutni izvodi koeficijenata iz jednačina neholonomnih veza. U tom smislu se može potražiti sistem jednačina u kome bi jedan deo jednačina (23) bio zamenjen jednostavnijim jednačinama veza. U tom cilju rešimo sistem (5) po L generalisanih brzina, recimo

(24) $$\dot{q}^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}_{\alpha}\dot{q}^{\alpha} + \varphi^{\alpha'} \qquad (\alpha = 1,\dots,m = n-k;\ \alpha' = m+1,\dots,n)$$

i sastavimo jednačine kretanja (17) u odnosu na ovako napisane neholonomne veze. Imaćemo

$$\frac{Dp_{\alpha}}{dt} = Q_{\alpha} - \sum_{\alpha'=m+1}^{n} \mu_{\alpha'}\varphi^{\alpha'}_{\alpha}$$

$$\frac{Dp_{\alpha'}}{dt} = Q_{\alpha'} + \mu_{\alpha'}$$

odakle je jednostavno eliminisati množioce neholonomnih veza $\mu_{\alpha'}$, posle čega se dobija

$$\frac{Dp_{\alpha}}{dt} + \frac{Dp_{\alpha'}}{dt}\varphi^{\alpha'}_{\alpha} = Q_{\alpha} + Q_{\alpha'}\varphi^{\alpha'}_{\alpha}$$

Za kretanje sistema $\mathcal{M}$, sada se mogu koristiti jednačine

$$\frac{dq^{\mu}}{dt} = a^{\mu\nu} p_{\nu}$$
(25)
$$\frac{Dp_{\alpha}}{dt} + \frac{Dp_{\alpha'}}{dt}\varphi^{\alpha'}_{\alpha} = Q_{\alpha} + Q_{\alpha'}\varphi^{\alpha'}_{\alpha}$$
$$(a^{\alpha\mu}\varphi^{\alpha'}_{\alpha} - a^{\mu\alpha'})p_{\mu} + \varphi^{\alpha'} = 0.$$

Sistemi jednačina (23) i (25) su ekvivalentni.

U suštinski istom obliku kao i (25), ali za opštiji tip neholonomnih veza, jednačine kretanja su izvedene u [32] pomoću Gauss-ovog principa.

§ 1.1 Sistemi sa kvazicikličnim koordinatama

Razmotrimo, kao poseban slučaj, jednačine kretanja neholonomnog sistema sa kvazicikličnim koordinatama. No, najpre, precizno objasnomo koje koordinate nazivamo kvazicikličnim.

DEFINICIJA. Za koordinatu $q^{\varkappa}$ kazaćemo da je kvaziciklična ako od nje eksplicitno ne zavisi kinetička energija T, generalisane sile i koeficijenti neholonomnih veza.

Ako je i generalisana sila $Q_{\varkappa}$ koja odgovara kvazicikličnoj koordinati $q^{\varkappa}$ jednaka nuli, koordinata $q^{\varkappa}$ je ciklična.

Pretpostavimo da su u posmatranom mehaničkom sistemu koordinate $q^{\alpha'}$ $(\alpha'=m+1,\ldots,n)$ kvaziciklične i da su neholonomne veze homogene po generalisanim brzinama. Za takve sisteme se u literaturi sreće naziv "Čapliginovi sistemi" koji će i ovde biti korišćen. Jednačine kretanja ovih sistema se mogu sastaviti u jednostavnijem, u odnosu na prethodne, obliku što ćemo ovde pokazati.

Eliminacijom generalisanih brzina $\dot{q}^{\alpha'}$ iz kinetičke energija (9) pomoću jednačina neholonomnih veza (24) /u kojima je po pretpostavci $\varphi^{\alpha'}=0$/, dobijamo

$$(26)\qquad \tilde{T}=\frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\qquad(\alpha,\beta=1,\ldots,m)$$

gde je

$$b_{\alpha\beta}=\left(a_{\alpha\beta}+a_{\alpha\beta'}\varphi^{\beta'}_{\beta}+a_{\alpha'\beta}\varphi^{\alpha'}_{\alpha}+a_{\alpha'\beta'}\varphi^{\alpha'}_{\alpha}\varphi^{\beta'}_{\beta}\right)_{(\alpha,\beta)}=b_{\beta\alpha}$$

/ovde oznaka (α,β) znači simetrizaciju izraza u zagradi iza koje stoji po indeksima α i β/. Umesto generalisanih impulsa p_{μ}, ovde ćemo posmatrati veličine $\tilde{p}_{\alpha}$, koje definišemo jednakostima

$$(27)\qquad \tilde{p}_{\alpha}=p_{\alpha}+p_{\alpha'}\varphi^{\alpha'}_{\alpha}.$$

Lako je proveriti da važi

$$\tilde{p}_\alpha = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}^\alpha} = b_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta. \tag{28}$$

Pošto je

$$\det\,(b_{\alpha\beta})^{m}_{\alpha\beta=1} \neq 0,$$

iz (28) se može izračunati

$$\dot{q}^\beta = b^{\beta\gamma}\tilde{p}_\gamma \qquad (b_{\alpha\beta}\, b^{\beta\gamma} \stackrel{def}{=} \delta^\gamma_\alpha). \tag{28'}$$

Napišimo, sada, jednačine (25) u "razvijenom obliku" uzimajući u obzir da su koordinate $q^{\alpha'}$ kvaziciklične; imamo

$$\frac{dq^\mu}{dt} = a^{\mu\nu} p_\nu$$

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{p}_\alpha}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial b_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} - \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma}\right)\dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma - \\ - (a_{\alpha'\beta} + a_{\alpha'\beta'}\varphi^{\beta'}_\beta)\gamma^{\alpha'}_{\alpha\gamma}\,\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma = Q_\alpha + \varphi^{\alpha'}_\alpha Q_{\alpha'},\end{aligned} \tag{29}$$

gde su sa $\gamma^{\alpha'}_{\alpha\gamma}$ obeleženi koeficijenti

$$\gamma^{\alpha'}_{\alpha\gamma} = \frac{\partial \varphi^{\alpha'}_\alpha}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial \varphi^{\alpha'}_\gamma}{\partial q^\alpha}.$$

U prostoru V_n /koordinata q^μ/ može se uočiti m-dimenziona mnogostrukost Σ_m koordinata q^α koja je određena do na proizvoljnu transformaciju oblika

$$\begin{aligned}\bar{q}^\alpha &= \bar{q}^\alpha(q^1, \ldots, q^m)\\ \bar{q}^{\alpha'} &= q^{\alpha'}.\end{aligned} \tag{30}$$

Primetimo da transformacija (30) ostavlja očuvan oblik jednačina neholonomnih veza. Naime, iz

$$\dot{q}^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}_\alpha \dot{q}^\alpha$$

transformacijom (30) dobijamo

$$\dot{\bar{q}}^{\alpha'} = \bar{\varphi}^{\alpha'}_\alpha \dot{\bar{q}}^\alpha.$$

Mnogostrukost Σ_m može da se metrizuje ako se uvede linijski element

$$d\sigma^2 = 2\tilde{T}\,dt^2 = b_{\alpha\beta}\,dq^\alpha dq^\beta. \tag{31}$$

Ovako dobijeni metrički prostor V_m je, u opštem slučaju, opet rimanski. Jednačine kretanja Čapliginovih sistema se u prostoru V_m, prema (28') i (29), mogu napisati na sledeći način

$$\text{(32)}\qquad \begin{aligned} &\frac{dq^{\alpha}}{dt} = b^{\alpha\beta}\tilde{p}_{\beta} \\ &\frac{D^{b}\tilde{p}_{\alpha}}{dt} + \Theta^{\delta}_{\beta\alpha} b^{\beta\gamma}\tilde{p}_{\delta}\tilde{p}_{\gamma} = \tilde{Q}_{\alpha} \end{aligned}$$

gde su, kraćeg pisanja radi, uvedene oznake

$$\Theta^{\delta}_{\beta\alpha} = b^{\delta\gamma}(a_{\alpha'\beta} + a_{\alpha'\beta'}\varphi^{\beta'}_{\beta})\gamma^{\alpha'}_{\gamma\alpha}$$

$$\tilde{Q}_{\alpha} = Q_{\alpha} + \varphi^{\alpha'}_{\alpha} Q_{\alpha'} .$$

Sistem (32) sadrži 2m jednačina sa isto toliko nepoznatih funkcija $q^{\alpha} = q^{\alpha}(t)$ i $\tilde{p}_{\alpha} = \tilde{p}_{\alpha}(t)$. Pošto se on reši i dobijena rešenja zamene u jednačine neholonomnih veza, ostale koordinate $q^{\alpha'}$ se iz ovih mogu dobiti kvadraturama. Znači, ceo problem se u suštini sveo na rešavanje jednačina (32), odnosno, na njihovu analizu.

§ 2. Jednačine poremećenog kretanja

Pretpostavimo da jednačine kretanja posmatranog mehaničkog sistema $\mathcal{M}$ dopuštaju jednoznačno rešenje Cauchy-evog zadatka i da je

$$
\begin{aligned}
q^{\mu} &= q^{\mu}(t; q_0^1, \dots, q_0^n, p_{10}, \dots, p_{n0}) \\
p_{\mu} &= p_{\mu}(t; q_0^1, \dots, q_0^n, p_{10}, \dots, p_{n0})
\end{aligned} \tag{1}
$$

rešenje dobijeno za početne uslove

$$
\begin{aligned}
q_0^{\mu} &= q^{\mu}(t_0; q_0^1, \dots, q_0^n, p_{10}, \dots, p_{n0}) \\
p_{\mu 0} &= p_{\mu}(t_0; q_0^1, \dots, q_0^n, p_{10}, \dots, p_{n0}).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Funkcije (1) određuju kretanje sistema $\mathcal{M}$ pri zadanim početnim uslovima (2). Mi ćemo ovo kretanje predstaviti u vektorskom obliku

$$
\vec{r}_i = \vec{r}_i(t) = \vec{r}_i(q^1(t), \dots, q^n(t)). \tag{3}
$$

Kretanje, opisano skalarno funkcijama (1) ili vektorski funkcijama (3), smatraćemo neporemećenim. Poremećeno, u odnosu na njega, je kretanje

$$
\vec{r}_i^{\,*} = \vec{r}_i^{\,*}(t) = \vec{r}_i(\overset{*}{q}{}^1(t), \dots, \overset{*}{q}{}^n(t)) \tag{4}
$$

istog mehaničkog sistema pri početnim uslovima $\vec{r}_{i0}^{\,*} = \vec{r}_i^{\,*}(t_0)$, $\vec{v}_{i0}^{\,*} = \vec{v}_i^{\,*}(t_0)$, koji se razlikuju od (2). Razlike

$$
\vec{\rho}_{i0} = \vec{r}_{i0}^{\,*} - \vec{r}_{i0}, \qquad \vec{\nu}_{i0} = \vec{v}_{i0}^{\,*} - \vec{v}_{i0}
$$

su početni poremećaji za koje ćemo pretpostaviti da su mali. Vektore $\vec{\rho}_i$, definisane jednakostima

$$
\vec{\rho}_i = \vec{r}_i^{\,*}(t) - \vec{r}_i(t), \tag{5}
$$

nazivamo vektorima poremećaja. Pošto su rešenja (3) i (4) neprekidne funkcije vremena čija je zavisnost od početnih vrednosti takođe neprekidna, to iz pretpostavke da su početni poremećaji mali, sledi da postoji vremenski razmak $[t_0, t_1]$ u kome su $\vec{\rho}_i$ takođe mali, te se mogu predstaviti u obliku [11]

$$
\vec{\rho}_i = \xi^{\mu} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\mu}}. \tag{6}
$$

Smisao ovakog prikazivanja vektora poremećaja leži u tome što se koordinate ξ^{μ} mogu smatrati malim po apsolutnim vrednostima /bar u nekom konačnom razmaku $[t_0, t_1]$/ pa se može razložiti u odnosu na bazu tangentnog prostora u tački $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$.

Vektori položaja tačaka u poremećenom kretanju su

(7)
$$\vec{r}_i^{\,*} = \vec{r}_i + \xi^{\mu} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\mu}} .$$

Pošto vektor poremećaja (6) leži u tangentnom prostoru, to će vektori (7) zadovoljavati jednačine holonomnih veza samo u linearnoj aproksimaciji, što ćemo odmah i pokazati. Naime, pošto se i poremećeno kretanje vrši saglasno jednačinama holonomnih veza, to mora da važe jednakosti

(8)
$$f_a(\vec{r}_1^{\,*}, \dots, \vec{r}_N^{\,*}) = 0 .$$

Razvijanjem levih strana ovih jednakosti u red u okolini tačke $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$, dobijamo

$$f_a(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i} \cdot \vec{\rho}_i + \cdots = 0 .$$

No, ako položaj sistema određuju nezavisne /u odnosu na holonomne veze/ Lagrange-eve koordinate, onda su jednakosti

$$f_a(q^1, \dots, q^n) = 0$$

identički zadovoljene a takođe i

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\mu}} = 0 .$$

Vidimo da su jednačine (8) identički zadovoljene ako se zadržimo na prvoj aproksimaciji.

Za brzinu u poremećenom kretanju, diferenciranjem jednakosti (7), dobijamo

(9)
$$\vec{v}_i^{\,*} = \vec{v}_i + \frac{D\xi^{\mu}}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\mu}}$$

Brzine dopuštene holonomnim vezama u poremećenom kretanju moraju zadovoljavati uslove

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i} \right)^{*} \cdot \vec{v}_i^{\,*} = 0 .$$

Ako se brzine uzmu u obliku (9), ovi uslovi su

$$\sum_{i=1}^{\tilde N}\frac{\partial f_a}{\partial \vec r_i}\cdot\vec V_i+\frac{D\xi^{\mu}}{dt}\frac{\partial \vec r_i}{\partial q^{\mu}}\cdot\frac{\partial f_a}{\partial \vec r_i}+\cdots=0$$

odakle je jasno da su identički zadovoljeni u prvoj aproksimaciji, ako su $\vec V_i$ brzine dopuštene vezama u neporemećenom kretanju. Na taj način vidimo da uzimanjem vektora poremećaja u obliku (6) jednačine poremećenog kretanja će imati smisla samo ako se zadržimo na linearnoj aproksimaciji.

Nađimo, sada, uslove koje na vektor poremećaja nameću neholonomne veze. Preciznije rečeno, neholonomne veze ne ograničavaju same vektore poremećaja, ali ograničavaju njihove izvode po vremenu i to na sledeći način

$$\sum_{i=1}^{\tilde N}\vec l^{\,*}_{i\beta}\cdot\vec V^{*}_i+l^{*}_{\beta}=0 \tag{10}$$

gde su

$$\vec l^{\,*}_{i\beta}=\vec l_{i\beta}(\vec r^{\,*}_1,\ldots,\vec r^{\,*}_N)\,;\quad l^{*}_{\beta}=l_{\beta}(\vec r^{\,*}_1,\ldots,\vec r^{\,*}_N). \tag{11}$$

Razvijanjem funkcija (11) u red u okolini neporemećenog kretanja, dobijamo

$$\begin{aligned}\vec l^{\,*}_{i\beta}&=\vec l_{i\beta}(\vec r_1,\ldots,\vec r_N)+\sum_{j=1}^{\tilde N}(\vec\rho_j\cdot\nabla_j)\vec l_{i\beta}+\cdots=\vec l_{i\beta}+\frac{\partial \vec l_{i\beta}}{\partial q^{\nu}}\xi^{\nu}+\cdots\\ l^{*}_{\beta}&=l_{\beta}(\vec r_1,\ldots,\vec r_N)+\frac{\partial l_{\beta}}{\partial q^{\nu}}\xi^{\nu}+\cdots\end{aligned} \tag{12}$$

Zamenom (9) i (12) u (10), imamo

$$\sum_{i=1}^{\tilde N}\Big(\vec l_{i\beta}+\frac{\partial \vec l_{i\beta}}{\partial q^{\nu}}\xi^{\nu}+\cdots\Big)\cdot\Big(\vec V_i+\frac{D\xi^{\mu}}{dt}\frac{\partial \vec r_i}{\partial q^{\mu}}\Big)+l_{\beta}+\frac{\partial l_{\beta}}{\partial q^{\nu}}\xi^{\nu}+\cdots=0 \tag{13}$$

Uslove koje neholonomne veze nameću na vektor poremećaja dobićemo ako potražimo razliku jednačina (13) i (2 § 1.),

$$\sum_{i=1}^{\tilde N}\Big(\xi^{\nu}\dot q^{\mu}\frac{\partial \vec l_{i\beta}}{\partial q^{\nu}}\cdot\frac{\partial \vec r_i}{\partial q^{\mu}}+\frac{D\xi^{\mu}}{dt}\vec l_{i\beta}\cdot\frac{\partial \vec r_i}{\partial q^{\mu}}+\xi^{\nu}\frac{D\xi^{\mu}}{dt}\frac{\partial \vec l_{i\beta}}{\partial q^{\nu}}\cdot\frac{\partial \vec r_i}{\partial q^{\mu}}+\cdots\Big)+\frac{\partial l_{\beta}}{\partial q^{\nu}}\xi^{\nu}+\cdots=0 \tag{14}$$

Uvedimo, radi kraćeg pisanja, sledeće oznake:

$$\begin{aligned}\Phi_{(\beta)\mu\nu}&=\sum_{i=1}^{\tilde N}\frac{\partial \vec l_{i\beta}}{\partial q^{\nu}}\cdot\frac{\partial \vec r_i}{\partial q^{\mu}}\,,\qquad \Phi_{(\beta)\mu}=\sum_{i=1}^{\tilde N}\vec l_{i\beta}\cdot\frac{\partial \vec r_i}{\partial q^{\mu}}\\ R_{(\beta)\nu}&=\Phi_{(\beta)\mu\nu}\dot q^{\mu}+\frac{\partial l_{\beta}}{\partial q^{\nu}}.\end{aligned} \tag{15}$$

Jednačine (14), na ovaj način postaju /u linearnoj aproksimaciji/

(16) $$\overset{\circ}{\Phi}_{(b)\mu}\frac{D\xi^{\mu}}{dt}+\overset{\circ}{R}_{(b)\mu}\xi^{\mu}=0.$$

Sistem od L jednačina (16) pretstavlja tražene uslove koje neholonomne veze nameću na promenljive $\dot{\xi}^{\mu}$. Koeficijenti u ovim jednačinama su

$$\overset{\circ}{\Phi}_{(b)\mu}=\Phi_{(b)\mu}(q^1(t),\dots,q^n(t))$$

$$\overset{\circ}{R}_{(b)\mu}=R_{(b)\mu}(q^1(t),\dots,q^n(t);\dot{q}^1(t),\dots,\dot{q}^n(t)),$$

poznate funkcije. Primetimo da su jednačine (16) nehomogene u odnosu na $\dot{\xi}^{\mu}$ bez obzira da li su neholonomne veze homogene u odnosu na generalisane brzine $\dot{q}^{\mu}$ ili ne. Ako je $\ell_b=0$ koeficijenti $\overset{\circ}{R}_{(b)\mu}$ dobijaju nešto jednostavniji oblik

$$\overset{\circ}{R}_{(b)\mu}=\overset{\circ}{\Phi}_{(b)\mu\nu}\dot{q}^{\nu}.$$

Specijalno, ako neporemećeno kretanje predstavlja ravnotežno stanje, ovi koeficijenti će biti jednaki nuli i jednačine (16) će u tom slučaju biti homogene u odnosu na $D\xi^{\mu}$.

Jednačine (16) važe, razume se, i u početnom trenutku pa odatle sledi da početni poremećaji kod neholonomnih sistema nisu nezavisni /kao, na primer, kod holonomnih/ već su ograničeni relacijama

(17) $$_{\circ}\overset{\circ}{\Phi}_{(b)\mu}\frac{D\xi^{\mu}(t_0)}{dt}+{}_{\circ}\overset{\circ}{R}_{(b)\mu}\xi^{\mu}(t_0)=0$$

gde su

$$_{\circ}\overset{\circ}{\Phi}_{(b)\mu}=\Phi_{(b)\mu}(q_0^1,\dots,q_0^n)\ ;\ {}_{\circ}\overset{\circ}{R}_{(b)\mu}=R_{(b)\mu}(q_0^1,\dots,q_0^n;\dot{q}_0^1,\dots,\dot{q}_0^n)$$

Uslove (17) možemo geometrijski interpretirati na sledeći način: U 2n-dimenzionom faznom prostoru jednačine (17) određuju 2n - L -dimenzionu mnogostrukost S. Otuda sledi da početni poremećaji moraju da budu tako izabrani da tačka N faznog prostora, koja određuje početno fazno stanje sistema pripada mnogostrukosti S.

Vektor ubrzanja u poremećenom kretanju je

$$\vec{w}_i^{\,*} = \frac{d\vec{v}_i^{\,*}}{dt} = \vec{w}_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{D\xi^\mu}{dt}\right)\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} + \frac{D\xi^\mu}{dt}\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q^\nu \partial q^\mu}\dot{q}^\nu \tag{18}$$

odakle dobijamo

$$\vec{w}_i^{\,*} - \vec{w}_i = \frac{d^2\vec{\rho}_i}{dt^2}.$$

Pošto se poremećeno kretanje vrši saglasno jednačinama

$$m_i \vec{w}_i^{\,*} = \vec{F}_i^{\,*} + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha^* \operatorname{grad}_i f_\alpha^* + \sum_{b=1}^{l} \mu_b^* \vec{l}_{bi}^{\,*} \tag{19}$$

što za vektor poremećaja $\vec{\rho}_i$ dobijamo, prema (19) i (3 § 1.), diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned} m_i(\vec{w}_i^{\,*} - \vec{w}_i) = \vec{F}_i^{\,*} - \vec{F}_i &+ \sum_{\alpha=1}^{k}(\lambda_\alpha^* \operatorname{grad}_i f_\alpha^* - \lambda_\alpha \operatorname{grad}_i f_\alpha) + \\ &+ \sum_{b=1}^{l}(\mu_b^* \vec{l}_{bi}^{\,*} - \mu_b \vec{l}_{bi}) \end{aligned} \tag{20}$$

gde je

$$\vec{F}_i^{\,*} = \vec{F}_i(t; \vec{r}_1^{\,*}, \dots, \vec{r}_N^{\,*}, \vec{v}_1^{\,*}, \dots, \vec{v}_N^{\,*}). \tag{21}$$

Očigledno je da sistem jednačina (20) ima trivijalno rešešenje $\vec{\rho}_i = 0$. Jednačine (20) ćemo zvati jednačine poremećenog kretanja /prema Ляпунову [12]/ a u literaturi se sreću i pod nazivom redukovani sistem jednačina [8].

Pomnožimo jednačinu (20) skalarno sa

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}$$

i izvršimo sabiranje po i; dobićemo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{w}_i^{\,*} - \vec{w}_i)\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} = \sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i^{\,*} - \vec{F}_i)\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} &+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{k}(\lambda_\alpha^* \operatorname{grad}_i f_\alpha^* - \\ - \lambda_\alpha \operatorname{grad}_i f_\alpha)\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} &+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{b=1}^{l}(\mu_b^* \vec{l}_{bi}^{\,*} - \mu_b \vec{l}_{bi})\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}. \end{aligned} \tag{22}$$

Dobijene skalarne jednačine možemo transformisati na sledeći način. Najpre, izraz na levoj strani ovih jednačina, s obzirom na (9), možemo dovesti na oblik

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{w}_i^{\,*} - \vec{w}_i)\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} &= \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{v}_i^{\,*} - \vec{v}_i)\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}\right] - \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{v}_i^{\,*} - \vec{v}_i)\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} = \\ &= \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{v}_i^{\,*} - \vec{v}_i)\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}\right] - \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{D\xi^\sigma}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\sigma}\cdot\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q^\nu \partial q^\mu}\dot{q}^\nu. \end{aligned}$$

Ako generalisane impulse p_μ^* u poremećenom kretanju definišemo jednakostima

$$(23)\qquad p_\mu^* = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i^{\,*} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu},$$

tada je razlika odgovarajućih impulsa u poremećenom i neporemećenom kretanju, koju ćemo obeležiti sa η_μ,

$$(24)\qquad \eta_\mu = p_\mu^* - p_\mu$$

Veličine η_μ nazivaćemo poremećaji impulsa. Poremećaji impulsa se mogu izraziti i na drugi način. Naime, uvrstimo li u jednačinu koja ih definiše (24), generalisane impulse p_μ^* i p_μ date relacijama (23) i (8 § 1.), s obzirom na (9), dobijamo

$$(25)\qquad \eta_\mu = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i^{\,*} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} - \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} = a_{\mu\nu} \frac{D\xi^\nu}{dt}$$

odakle sledi

$$(26)\qquad \frac{D\xi^\nu}{dt} = a^{\nu\mu} \eta_\mu .$$

Sada možemo pisati

$$(27)\qquad \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{w}_i^{\,*} - \vec{w}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} = \frac{d\eta_\mu}{dt} - \frac{D\xi^\sigma}{dt} [\nu\mu, \sigma] \dot{q}^\nu = \frac{D\eta_\mu}{dt}.$$

Tako smo pokazali da se izraz na levoj strani jednačine (22) može prikazati kao apsolutni izvod poremećaja impulsa. Na desnoj strani ove jednačine imamo, prvo, razliku generalisanih impulsa u poremećenom i neporemećenom kretanju, koju ćemo obeležiti sa Ψ_μ:

$$(28)\qquad \Psi_\mu = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i^{\,*} - \vec{F}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} = Q_\mu^* - Q_\mu .$$

Veličine Ψ_μ nazivamo poremećaji generalisanih sila i one su poznate funkcije promenljivih t, ξ^μ i η_μ;

$$(29)\qquad \Psi_\mu = \Psi_\mu(t, \xi^1, \dots, \xi^n; \eta_1, \dots, \eta_n).$$

Razvijanjem funkcija (28) u red u okolini neporemećenog kretanja, dobićemo

$$\Psi_\mu = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial q^\nu}\xi^\nu + \frac{\partial \vec{F}_i}{\partial p_\nu}\eta_\nu + \cdots\right)\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}.$$

Zadržavajući samo linearne članove, ovaj izraz možemo dalje transformisati na naredni način

$$\Psi_\mu = \xi^\nu \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial q^\nu}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}\right) + \eta_\nu \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial p_\nu}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu}\right) =$$

$$= \xi^\nu\left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial q^\nu} - \left\{{\sigma \atop \nu\mu}\right\}Q_\sigma\right) + \eta_\nu\frac{\partial Q_\mu}{\partial p_\nu}.$$

Konačno, uvodeći oznaku ∇_ν za kovarijantno diferenciranje, za poremećaje generalisanih sila u prvoj aproksimaciji, dobijamo

$$\Psi_\mu = \xi^\nu \nabla_\nu Q_\mu + \eta_\nu \frac{\partial Q_\mu}{\partial p_\nu}. \tag{30}$$

Drugi član na desnoj strani jednačine (22) predstavlja razliku sila reakcija holonomnih veza u poremećenom i neporemećenom kretanju. Razvijajući ga u red, imamo

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{K}(\lambda_\alpha^* \operatorname{grad}_i f_\alpha^* - \lambda_\alpha \operatorname{grad}_i f_\alpha)\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{K}\left(\lambda_\alpha^* \operatorname{grad}_i f_\alpha + \lambda_\alpha^* \operatorname{grad}_i\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_j}\cdot\vec{\rho}_j\right) + \cdots - \lambda_\alpha \operatorname{grad}_i f_\alpha\right)\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu},$$

odakle se vidi da je, ako se zadržimo na prvoj aproksimaciji,

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{K}(\lambda_\alpha^* \operatorname{grad}_i f_\alpha^* - \lambda_\alpha \operatorname{grad}_i f_\alpha)\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} = 0. \tag{31}$$

Ovaj rezultat je očigledan jer, kako smo već videli, poremećeno kretanje, isto kao i neporemećeno, zadovoljava jednačine holonomnih veza. Ostaje nam još da transformišemo i poslednji izraz u (22) koji predstavlja razliku reakcija neholonomnih veza u poremećenom i neporemećenom kretanju. Razvijajući $\vec{l}_{bi}^*$ u red u okolini neporemećenog kretanja, dobijamo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\sum_{b=1}^{L}(\mu_b^*\vec{l}_{bi}^* - \mu_b\vec{l}_{bi})\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{b=1}^{L}\Big[\mu_b^*\Big(\vec{l}_{bi} + \frac{\partial \vec{l}_{bi}}{\partial q^\nu}\xi^\nu + \cdots\Big) - \\ &- \mu_b\vec{l}_{bi}\Big]\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} = \sum_{b=1}^{L}\left(\mu_b^*\Phi_{(b)\mu} + \mu_b^*\Phi_{(b)\mu\nu}\xi^\nu - \mu_b\Phi_{(b)\mu} + \cdots\right).\end{aligned} \tag{32}$$

Stavljajući da je $\xi^\mu=0$ i $\eta_\mu=0$ u jednačine (22) one mora da budu identički zadovoljene, odakle zaključujemo da je

$$\sum_{b=1}^{k}(\mu_b^* \Phi_{(b)\mu} - \mu_b \Phi_{(b)\mu}) = 0$$

pa je u tom slučaju $\mu_b^*=\mu_b$. Na osnovu toga koeficijente μ_b^* možemo predstaviti u obliku

$$\mu_b^* = \mu_b + \mu_b' . \tag{33}$$

Ovde su $\mu_b=\mu_b(t)$ množioci veza u neporemećenom kretanju koje, kao i sve ostale elemente neporemećenog kretanja, smatramo poznatim, a

$$\mu_b' = \mu_b'(\xi^1,\dots,\xi^n;\eta_1,\dots,\eta_n)$$

su nepoznate funkcije koje za $\xi^\mu=0$, $\eta_\mu=0$ se anuliraju;

$$\mu_b'(0,\dots,0)=0.$$

Zamenjujući izraze date jednakostima (33) u (32) i zanemarujući nelinearne članove, dobijamo

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{b=1}^{L}(\mu_b^* \vec{l}_{bi}^{\,*} - \mu_b \vec{l}_{bi})\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\mu} = \sum_{b=1}^{L}(\mu_b \Phi_{(b)\mu\nu}\xi^\nu + \mu_b' \Phi_{(b)\mu}). \tag{34}$$

Tako se jednačina (22) može, koristeći relacije (27), (28), (31) i (34), transformisati na oblik

$$\frac{D\eta_\mu}{dt} = \Psi_\mu + \sum_{b=1}^{L}(\mu_b \Phi_{(b)\mu\nu}\xi^\nu + \mu_b' \Phi_{(b)\mu}). \tag{35}$$

Ako se u jednačini (35) izdvoje poznati izrazi i obeleže sa Ξ_μ:

$$\Xi_\mu = \Psi_\mu + \sum_{b=1}^{L}\mu_b \Phi_{(b)\mu\nu}\xi^\nu = (\nabla_\nu Q_\mu + \sum_{b=1}^{L}\mu_b \Phi_{(b)\mu\nu})\xi^\nu + \frac{\partial Q_\mu}{\partial p_\nu}\eta_\nu \tag{36}$$

možemo ih napisati na sledeći način

$$\frac{D\eta_\mu}{dt} = \Xi_\mu + \sum_{b=1}^{L}\mu_b' \Phi_{(b)\mu}. \tag{37}$$

Jednačine poremećenog kretanja su, prema (16), (26) i (37),

$$\frac{D\xi^\mu}{dt} = a^{\mu\nu}\eta_\nu$$

(38)

$$(38)\qquad \frac{D\eta_\mu}{dt} = \Xi_\mu + \sum_{b=1}^{L}\mu'_b\,\Phi_{(b)\mu}$$
$$a^{\mu\nu}\Phi_{(b)\mu}\eta_\nu + R_{(b)\mu}\xi^\mu = 0.$$

Podvucimo da su ovako dobijene jednačine poremećenog kretanja linearne u odnosu na promenljive ξ^μ i η_μ i njihove izvode, pa za njih možemo koristiti naziv jednačine u varijacijama.

Sistem (38) sadrži 2n + L jednačina sa isto toliko nepoznatih funkcuja $\xi^\mu = \xi^\mu(t)$, $\eta_\mu = \eta_\mu(t)$, $\mu'_b = \mu'_b(t)$ $(\mu = 1,\dots,n,$ $b = 1,\dots,L)$. Međutim, pri ispitivanju stabilnosti kretanja, koeficijenti μ'_b nas neće interesovati pa će biti dobro da ih odmah eliminišemo iz (38). Da bismo to postigli, pomnožimo jednačinu u grugom redu u (38) sa $a^{\nu\mu}\Phi_{(c)\nu}$ i izvršimo sabiranje po μ; imaćemo

$$a^{\nu\mu}\Phi_{(c)\nu}\frac{D\eta_\mu}{dt} = a^{\nu\mu}\Phi_{(c)\nu}\Xi_\mu + \sum_{b=1}^{L}\mu'_b\,a^{\nu\mu}\Phi_{(c)\nu}\Phi_{(b)\mu}.$$

Odavde izračunavamo množioce μ'_b:

$$(39)\qquad \mu'_b = \mathcal{F}^{bc}a^{\nu\mu}\Phi_{(c)\nu}\frac{D\eta_\mu}{dt} - \mathcal{F}^{bc}a^{\nu\mu}\Phi_{(c)\nu}\Xi_\mu.$$

Da bismo eliminisali apsolutne izvode poremećaja impulsa iz (39), nađimo apsolutni izvod jednačine u trećem redu u (38); dobijamo

$$(40)\qquad \frac{D\Phi^\nu_{(b)}}{dt}\eta_\nu + \Phi^\nu_{(b)}\frac{D\eta_\nu}{dt} + \frac{DR_{(b)\mu}}{dt}\xi^\mu + R^\mu_{(b)}\eta_\mu = 0.$$

Prema (39) i (40), za množioce μ'_b imamo

$$\mu'_b = -\mathcal{F}^{bc}\left\{\left(\frac{D\Phi^\nu_{(b)}}{dt} + R^\nu_{(b)}\right)\eta_\nu + \frac{DR_{(b)\mu}}{dt}\xi^\mu + \Phi^\mu_{(c)}\Xi_\mu\right\}$$

i posle zamene u (37), dobijamo sledeći sistem jednačina poremećenog kretanja

$$\frac{D\xi^\mu}{dt} = a^{\mu\nu}\eta_\nu$$
$$(41)\qquad \frac{D\eta_\mu}{dt} = \Xi_\mu - \mathcal{F}^{bc}\Phi_{(b)\mu}\Phi^\nu_{(c)}\Xi_\nu - \mathcal{F}^{bc}\Phi_{(b)\mu}\left(\frac{D\Phi^\nu_{(c)}}{dt} + R^\nu_{(c)}\right)\eta_\nu -$$
$$- \mathcal{F}^{bc}\Phi_{(b)\mu}\frac{DR_{(c)\nu}}{dt}\xi^\nu.$$

Da bismo bili koncizniji u pisanju, obeležimo sa H_μ izraz

(42) $$H_\mu = \Xi_\mu - \mathcal{F}^{bc}\left[\Phi_{(c)\nu}\Xi^\nu + \frac{D\Phi^\nu_{(c)}}{dt}\eta_\nu + R^\nu_{(c)}\eta_\nu + \frac{DR_{(c)\nu}}{dt}\xi^\nu\right]\Phi_{(b)\mu}.$$

Sada jednačine poremećenog kretanja dobijaju jednostavan oblik

(43) $$\frac{D\xi^\mu}{dt} = a^{\mu\nu}\eta_\nu$$
$$\frac{D\eta_\mu}{dt} = H_\mu .$$

Funkcija H_μ se, prema (36), može prikazati u obliku

(44) $$\begin{aligned} H_\mu = {} & \Big[\nabla_\nu Q_\mu + \sum_{b=1}^{L}\mu_b \Phi_{(b)\mu\nu} - \mathcal{F}^{bc} a^{\varkappa\sigma}\Phi_{(b)\mu}\Phi_{(c)\sigma}(\nabla_\nu Q_\varkappa + \\ & + \sum_{d=1}^{L}\mu_d \Phi_{(d)\varkappa\nu}) - \mathcal{F}^{bc}\Phi_{(b)\mu}\nabla_\tau R_{(b)\nu}\dot q^\tau\Big]\xi^\nu + \\ & + \Big[\frac{\partial Q_\mu}{\partial p_\nu} - \mathcal{F}^{bc}a^{\varkappa\sigma}\Phi_{(b)\mu}\Phi_{(c)\sigma}\frac{\partial Q_\varkappa}{\partial p_\nu} - \mathcal{F}^{bc}\Phi_{(b)\mu}(\nabla_\tau\Phi^\nu_{(c)}\dot q^\tau + R^\nu_{(c)})\Big]\eta_\nu \end{aligned}$$

odnosno

$$H_\mu = H_{\mu\nu}\xi^\nu + H^\nu_\mu \eta_\nu = H_\mu(t;\xi^\nu,\eta_\nu)$$

gde su $H_{\mu\nu}$ i H^ν_μ poznate funkcije vremena, koje se lako mogu odrediti upoređivanjem poslednjih dveju jednakosti.

§ 3. Stabilnost kretanja neholonomnih sistema

Ovde će biti rešavan zadatak o stabilnosti kretanja neholonomnih mehaničkih sistema u smislu Ляпунов-ljeve teorije stabilnosti.*) Osnovne pojmove i stavove prihvatamo u smislu definicija i teorema iz [8] i [12].

Pitanje stabilnosti neporemećenog kretanja posmatranog mehaničkog sistema $\mathcal{M}$ se svodi na ispitivanje stabilnosti trivijalnog rešenja $\xi^{\mu}=0$, $\eta_{\mu}=0$ jednačina poremećenog kretanja (43 § 2.). Videli smo, takođe, da početni poremećaji ξ_0^{μ} i $\eta_{\mu 0}$ ne mogu da budu proizvoljni već moraju zadovoljavati jednačine (17 § 2.) ili drugačije rečeno, početno stanje sistema u poremećenom kretanju mora pripadati 2n - L -dimenzionoj mnogostrukosti S. Prema tome, stabilnost neholonomnog sistema će imati karakter uslovne stabilnosti /videti npr. [8] § 22./. Mi ćemo u daljem pretpostaviti da je ovaj uslov ispunjen za sve slučajeve koje budemo razmatrali ne naglašavajući to posebno. Stabilnost ćemo ispitivati primenom direktnog Ляпунов-ljevog metoda.

Dovoljne uslove da neporemećeno kretanje bude stabilno daje

STAV 1. Ako u konfiguracionom prostoru V_n postoji pozitivno definitna skalarna funkcija

$$W=W(t,\xi^1,\dots,\xi^n)\in C^{(1,1)}_{t,\xi^{\nu}}(\mathcal{H}) \tag{1}$$

$$\mathcal{H}=\{t_0\le t<+\infty,\ |\xi^{\nu}|<h=const.\}$$

za koju je izraz

$$\mathcal{J}=\frac{\partial W}{\partial t}+\left(H_{\mu}+\frac{\partial W}{\partial \xi^{\mu}}\right)a^{\mu\nu}\eta_{\nu} \tag{2}$$

sastavljen u smislu jednačina poremećenog kretanja (43 § 2.) negativan ili identički jednak nuli, trivijalno rešenje $\xi^{\mu}=0$, $\eta_{\mu}=0$ je stabilno.

D o k a z. Uočimo, najpre, 2n-dimenzioni vektorski prostor V_{2n} čiji su elementi

*) Osnove svoje teorije o stabilnosti Ляпунов je postavio u svojoj doktorskoj disertaciji [12] 1892. godine.

$$\vec{x} = (\xi^1, \dots, \xi^n, \eta_1, \dots, \eta_n)$$

Neka je $\|\vec{x}\|$ norma vektora $\vec{x}$ u V_{2n}. Konstruisaćemo u ovom prostoru skalarnu funkciju V na sledeći način

(3) $$V = \frac{1}{2} a^{\mu\nu} \eta_\mu \eta_\nu + W,$$

gde su $a^{\mu\nu}$ koeficijenti pozitivno definitne kvadratne forme, koji su definisani na strani 6. Pošto je funkcija pozitivno definitna /po pretpostavci/, to postoji skalarna funkcija $\tilde{V} = \tilde{V}(\vec{x})$ takva da je

1° $V(t,\vec{x}) \geqslant \tilde{V}(\vec{x}) > 0$ za $\vec{x} \neq 0$

2° $V(t,\vec{x}) = \tilde{V}(\vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = 0.$

Drugim rečima, funkcija $V = V(t,\vec{x})$ je pozitivno definitna. Neka je S sfera u V_{2n} sa centrom u koordinatnom početku, poluprečnika $\varepsilon > 0$, pri čemu se ε može birati proizvoljno do na uslov da presek S_ε sa V_n leži u oblasti $\mathcal{H}$:

$$S_\varepsilon \cap V_n \subset \mathcal{H},$$

i neka je

(4) $$\alpha = \inf_{\|\vec{x}\| = \varepsilon} \tilde{V}(\vec{x}).$$

Pošto je $\tilde{V} = \tilde{V}(\vec{x})$ neprekidna, pozitivno definitna funkcija u V_{2n}, to na kompaktnom skupu S_ε postoji tačka $\vec{x}^*$ u kojoj je

(5) $$\inf \tilde{V}(\vec{x}) = \tilde{V}(\vec{x}^*) = \alpha > 0 \qquad (\|\vec{x}^*\| = \varepsilon).$$

Izaberimo, sada, konstantu δ, tako da je

(6) $$V(t_0,\vec{x}) < \alpha \quad \text{za} \quad \|\vec{x}\| < \delta.$$

Pošto je funkcija (3) neprekidna i $V(t,0) = 0$, to konstanta δ za koju važi (5), uvek postoji. Jasno je da se δ mora birati zavisno od ε i da je $\delta(\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.

Uočimo proizvoljno rešenje

(7) $$\vec{x} = \vec{x}(t; t_0, \vec{x}_0)$$

jednačina poremećenog kretanja koje u početnom trenutku t_0

zadovoljava uslov

(8) $$\|\vec{x}(t_0)\| = \|\vec{x}_0\| < \delta .$$

Pokazaćemo da rešenje (6), ako su zadovoljeni uslovi stava, ne izlazi iz sfere S_ε.

– U početnom trenutku je, prema (8),

$$\|\vec{x}(t_0)\| < \delta \leq \varepsilon$$

odakle se vidi da se rešenje nalazi u S_ε.

– Treba još pokazati da ni za jedno $t > t_0$ ovo rešenje ne izlazi iz S_ε. Pretpostavimo suprotno: da u toku vremena rešenje (7) izlazi iz S_ε. U tom slučaju postoji trenutak t_1 za koji je

$$\|\vec{x}(t;t_0,\vec{x}_0)\| < \varepsilon \qquad \text{za} \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad \text{i} \quad \|\vec{x}(t_1;t_0,\vec{x}_0\| = \varepsilon.$$

Posmatrajmo promenu funkcije (3) duž krive date jednačinama (7). Diferenciranjem ove funkcije po vremenu, dobijamo

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(a^{\mu\nu}\eta_\mu\eta_\nu) + \frac{dW}{dt},$$

odnosno, pošto izvod skalarne funkcije možemo zameniti njenim apsolutnim izvodom, imamo

(9) $$\frac{dV}{dt} = a^{\mu\nu}\frac{D\eta_\mu}{dt}\eta_\nu + \frac{\partial W}{\partial \xi^\mu}\frac{D\xi^\mu}{dt} + \frac{\partial W}{\partial t}.$$

Zbog neprekidnosti funkcije (3), njen izvod duž krive (7) jednak je njenom izvodu po vremenu sastavljenom u smislu diferencijalnih jednačina te krive (43 § 2.). Smenom (43) § 2 u (9), dobijamo

(10) $$\frac{dV}{dt} = a^{\mu\nu}\left(H_\mu + \frac{\partial W}{\partial \xi^\mu}\right)\eta_\nu + \frac{\partial W}{\partial t}.$$

Uzimajući u obzir uslove stava, iz (10) se vidi da je $V = V(t,\vec{x})$ nerastuća funkcija,

$$\frac{dV}{dt} \leq 0$$

na osnovu čega možemo pisati

(11) $$V(t_1,\vec{x}(t_1)) \leq V(t_0,\vec{x}(t_0)) < \alpha .$$

Ako je $\|\vec{x}(t_1)\| = \varepsilon$, sledi da je

$$\inf_{\|\vec{x}\|=\varepsilon} \tilde{V}(\vec{x}) \leq V(t_1, \vec{x}(t_1))$$

pa bismo, prema (5) i (11), imali

$$\alpha \leq V(t_0, \vec{x}(t_0)) < \alpha .$$

Kontradikcija. Znači da ne postoji trenutak t_1 u kome tačka, krećući se po krivoj (7), dospeva na sferu S_ε. Otuda zaključujemo da je rešenje (7) beskonačno produživo u desno /odnosno da je definisano za svako $t \geq t_0$/ i da je pri tome

$$\|\vec{x}(t)\|_{t \geq t_0} < \varepsilon \qquad \text{ako je} \quad \|\vec{x}(t_0)\| < \delta$$

a to, prema definiciji, znači da je trivijalno rešenje $\vec{x} = 0$, sistema (43 § 2.) stabilno. Dokaz je završen.

Prema stavu 1, da bismo dokazali da je kretanje nekog neholonomnog sistema stabilno, dovoljno je da pokažemo da je izraz $\mathcal{J}$ definisan relacijom (2) negativan ili identički jednak nuli. Glavni problem se sastoji, kao i u Ляпунов-ljevim teoremama, u izboru funkcije W. No u poređenju sa Ляпунов-ljevom funkcijom, naša funkcija je nešto jednostavnija jer ne zavisi od poremećaja impulsa te je, bar u principu, zadatak u ovom slučaju lakši. Bilo bi od velike praktične koristi ukazati na način kako birati funkciju W, međutim neko uputstvo koje bi važilo u opštem slučaju nismo u stanju da damo. Možemo primetiti samo to da je funkcija linearna u odnosu na ξ^μ i η_μ sa koeficijentima koji su funkcije vremena pa W treba tražiti u obliku pozitivno definitne kvadratne forme.

Zamenimo u (2) funkciju H_μ pomoću jednakosti (44 § 2.) pa ćemo dobiti izraz $\mathcal{J}$ u razvijenom obliku

$$\begin{aligned}\mathcal{J} = \frac{\partial W}{\partial t} + \Big\{ \Big[\nabla_\nu Q_\mu + \sum_{b=1}^{L} \mu_b \Phi_{(b)\mu\nu} - \mathcal{F}^{bc} a^{\varkappa\sigma} \Phi_{(b)\mu} \Phi_{(c)\sigma} \big(\nabla_\nu Q_\varkappa + \\ + \sum_{d=1}^{L} \mu_d \Phi_{(d)\varkappa\nu} \big) - \mathcal{F}^{bc} \Phi_{(b)\mu} \nabla_\tau R_{(b)\nu} \dot{q}^\tau \Big] \xi^\nu + \\ + \Big[\frac{\partial Q_\mu}{\partial p_\nu} - \mathcal{F}^{bc} a^{\varkappa\sigma} \Phi_{(b)\mu} \Phi_{(c)\sigma} \frac{\partial Q_\varkappa}{\partial p_\nu} - \mathcal{F}^{bc} \Phi_{(b)\mu} \big(\nabla_\tau \Phi^\nu_{(c)} \dot{q}^\tau + R^\nu_{(c)} \big) \Big] \eta_\nu \Big\} a^{\mu\lambda} \eta_\lambda\end{aligned} \tag{12}$$

Ovaj izraz se, u nekim specijalnim slučajevima, može znatno uprostiti. Iznećemo ukratko neke od njih.

A. - Pretpostavimo da se ispituje stabilnost kretanja pri kome su jednačine (16 § 2.) homogene u odnosu na apsolutne izvode koordinata vektora poremećaja, tj. u kojima je $R_{(b)\mu}=0$. Tada je

$$\mathcal{J}_A=\frac{\partial W}{\partial t}+\left[\left(\nabla_\nu Q_\mu+\sum_{b=1}^{L}\mu_b\,\Phi_{(b)\mu\nu}\right)\xi^\nu+\frac{\partial Q_\mu}{\partial \dot{\xi}^\nu}\eta^\nu\right]a^{\mu\lambda}\eta_\lambda .$$

B. - Ako su neholonomne veze date u obliku

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{l}_{(b)i}\cdot\vec{v}_i=0$$

gde su $\vec{l}_{(b)i}$ konstantni vektori, imamo da je

$$\Phi_{(b)\mu\nu}=0\;;\quad R_{(b)\mu}=0$$

pa se izraz (2) svodi na

$$\mathcal{J}_B=\frac{\partial W}{\partial t}+\left(\Psi_\mu+\frac{\partial W}{\partial \xi^\mu}\right)a^{\mu\nu}\eta_\nu .$$

Vidimo da u ovom slučaju neholonomne veze nemaju nikakvog uticaja na stabilnost kretanja sistema. To se, međutim, moglo i očekivati jer ovako izabrane veze su integrabilne pa sistem u suštini i nije neholonoman. Naime, imamo

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{l}_{bi}\vec{v}_i=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{l}_{bi}\vec{r}_i=0\;\Rightarrow\;\sum_{i=1}^{N}\vec{l}_{bi}\vec{r}_i=const.$$

pa dobijene jednačine možemo iskoristiti za eliminaciju novih L promenljivih, posle čega dobijamo

$$\mathcal{J}_B=\left(\Psi_\alpha+\frac{\partial W}{\partial \xi^\alpha}\right)a^{\alpha\beta}\eta_\beta+\frac{\partial W}{\partial t}\qquad(\alpha,\beta=1,\dots,m=n-L).$$

Na taj način zaključujemo da stav 1. važi i ako je sistem holonoman i u tom slučaju se ne razlikuje od poznati rezultata [36].

STAV 2. Ako u V_n postoji pozitivno definitna skalarna funkcija

$$W = W(t; \xi^1, \ldots, \xi^n) \in C^{(1,1)}_{t,\xi^\nu}(\mathcal{H}); \quad W \underset{t}{\Rightarrow} 0 \quad \text{za } \xi^\mu \to 0,$$

za koju je izraz

$$\mathcal{J} = \frac{\partial W}{\partial t} + \left(H_\mu + \frac{\partial W}{\partial \xi^\mu}\right) a^{\mu\nu} \eta_\nu,$$

sastavljen u smislu jednačina poremećenog kretanja negativno definitan, trivijalno rešenje $\xi^\mu = 0$, $\eta_\mu = 0$ je asimptotski stabilno.

D o k a z. Ako su zadovoljeni uslovi ovog stava, tim pre su zadovoljeni i uslovi stava 1, iz koga sledi da je trivijalno rešenje jednačina poremećenog kretanja stabilno. Ostaje nam još da dokažemo da postoji konstanta δ_1 takva da je

$$\lim_{t \to \infty} \vec{x}(t) = 0 \quad \text{ako je} \quad \|\vec{x}(t_0)\| < \delta_1.$$

Da bismo to dokazali, posmatrajmo promenu funkcije $V = V(t, \vec{x})$ definisanu izrazom (3), duž krive (7). Na osnovu jednakosti (10) i uslova ovog stava, imamo

$$\frac{dV}{dt} < 0 \tag{13}$$

odakle zaključujemo da je $V = V(t, \vec{x})$ monotono opadajuća funkcija. Pošto je i pozitivno definitna /odnosno ograničena s leva/ to, prema stavu o monotonim funkcijama [1], postoji

$$\lim_{\vec{x} \to 0} V(t, \vec{x}) = \alpha$$

Jasno je da mora biti $\alpha \geq 0$. Pokazaćemo da α ne može da bude pozitivan broj. Da bismo to pokazali, pretpostavimo suprotno: da je $\alpha > 0$. Tada bismo za $t > t_0$ imali

$$\|\vec{x}(t)\| \geq \beta > 0 \tag{14}$$

što sledi iz

$$V(t, \vec{x}) \underset{t}{\Rightarrow} 0 \qquad \text{kad } \vec{x} \to 0.$$

Zaista, prema pretpostavci, za svako $\alpha > 0$ postoji $\beta > 0$ tako da je

$$|V(t,\vec{x})| < \alpha \quad \text{ako je } \|\vec{x}\| < \beta \quad \text{i } t \in [t_0, \infty)$$

/ $V(t,\vec{x})$ ravnomerno teži nuli kad $\vec{x} \to 0$/. No, kako smo već konstatovali, trivijalno rešenje je stabilno, pa pretpostavka da je $\alpha > 0$, prema (14), povlači

(15) $$\beta \leq \|\vec{x}(t)\| < \varepsilon \quad \text{ako je } \|\vec{x}(t_0)\| < \delta_1 .$$

Na osnovu jednakosti 13 možemo zaključiti da postoji funkcija $\tilde{V}_1 = \tilde{V}_1(\vec{x})$ takva da je

(16) $$\tilde{V}_1(\vec{x}) \geq 0 \ ; \quad \tilde{V}_1(0) = 0$$

i za koju važi nejednakost

(17) $$\frac{dV(t,\vec{x})}{dt} \leq -V_1(\vec{x}).$$

Neka je

$$\inf_{\beta \leq \|\vec{x}\| < \varepsilon} V_1(\vec{x}) = \gamma .$$

Jasno je iz (16) da mora biti $\gamma = 0$. S obzirom na ovo, nejednakost (17) postaje

$$\frac{dV(t,\vec{x})}{dt} \leq -\gamma$$

odakle, integracijom dobijamo

(18) $$V(t,\vec{x}) \leq -\gamma(t-t_0) + V(t_0, \vec{x}(t_0)).$$

Pošto je posmatrano rešenje ograničeno /prema (15)/, to je definisano za svako $t \in [t_0, +\infty)$ pa se može naći takva vrednost t za koju je

$$V(t_0, \vec{x}(t_0)) - \gamma(t-t_0) < 0$$

a to, prema (18), znači da je moguće naći trenutak u kome je

$$V(t,\vec{x}) < 0$$

Kontradikcija, jer je $V = V(t,\vec{x})$ po pretpostavci pozitivno definitna funkcija. Dakle, pretpostavka da je $\alpha > 0$ je neodrživa. To znači da je $\alpha = 0$, odnosno da je

(19) $$\lim_{t\to+\infty} V(t,\vec{x}) = 0.$$

Pošto je $V = V(t,\vec{x})$ neprekidna funkcija, pozitivno definitna, to iz (19) sledi

$$\lim_{t\to+\infty} \vec{x} = 0,$$

što je i trebalo dokazati.

STAV 3. Ako u V_n postoji skalarna funkcija

$$W = W(t,\xi^1,\dots,\xi^n) \in C^{(1,1)}_{t,\xi^\nu}(\mathcal{H})$$

$$\mathcal{H} = \{t_0 \le t < +\infty ,\ |\xi^\mu| < l = const.\}$$

koja u proizvoljnoj okolini koordinatnog početka ima negativne vrednosti i ako je

1° $W = W(t,\xi^1,\dots,\xi^n)$ ograničena u $\mathcal{H}$

2° ima u oblasti $\mathcal{H}$ neprekidne izvode po t i ξ^μ koji zadovoljavaju nejednakosti

a. $$a^{\mu\nu}\left(H_\mu + \frac{\partial W}{\partial \xi^\mu}\right)\eta_\nu + \frac{\partial W}{\partial t} \le 0$$

b. $$\xi^\tau H_\tau > 0$$

onda je trivijalno rešenje $\xi^\mu = 0$, $\eta_\mu = 0$ jednačina poremećenog kretanja nestabilno.

D o k a z. Uočimo funkciju

(20) $$V = -\left(\tfrac{1}{2} a^{\mu\nu}\eta_\mu\eta_\nu + W\right)\xi^\tau\eta_\tau$$

gde je $a^{\mu\nu}\eta_\mu\eta_\nu$, kao i u prethodnim stavovima, pozitivno definitna kvadratna forma. S obzirom na pretpostavke stava, postoji u V_{2n} oblast D u kojoj je

$$a^{\mu\nu}\eta_\mu\eta_\nu + W < 0 \quad \text{i} \quad \xi^\tau\eta_\tau > 0.$$

U proizvoljnoj kugli K_Δ sa centrom u koordinatnom početku funkcija (20) ima kako pozitivne tako i negativne vrednosti pa, s obzirom da je neprekidna, možemo zaključiti da je na delu granice oblast D

$$V(t, \vec{x}) = 0.$$

Koordinatni početak, dakle, pripada granici oblasti D. Otuda proizilazi da za proizvoljno δ može da se nađe početno stanje $\vec{x}(t_o)$ sistema tako da je

(21) $$V(t, \vec{x}_o) = \alpha > 0 \quad ; \quad \|\vec{x}(t_o)\| < \delta .$$

Pokazaćemo da rešenje jednačina poremećenog kretanja sa početnim uslovima t_o, $\vec{x}(t_o)$ koji zadovoljavaju (21),

(22) $$\vec{x} = \vec{x}(t; t_o, \vec{x}_o),$$

za dovoljno veliko t ima normu veću od ε ma kako malo bilo δ. Potražimo u tom cilju, izvod po vremenu funkcije (20) duž krive (22); dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{D}{dt}\left[\left(\frac{1}{2}a^{\mu\nu}\eta_\mu\eta_\nu + W\right)\xi^\tau\eta_\tau\right] = \\ &= -\left(a^{\mu\nu}\frac{D\eta_\mu}{dt}\eta_\nu + \frac{\partial W}{\partial \xi^\mu}\frac{D\xi^\mu}{dt} + \frac{\partial W}{\partial t}\right)\xi^\tau\eta_\tau - \\ &\quad -\left(\frac{1}{2}a^{\mu\nu}\eta_\mu\eta_\nu + W\right)\left(\frac{D\xi^\tau}{dt}\eta_\tau + \xi^\tau\frac{D\eta_\tau}{dt}\right), \end{aligned}$$

odnosno, ako iskoristimo i diferencijalne jednačine ove krive,

(23) $$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = &-\left[a^{\mu\nu}\left(H_\mu + \frac{\partial W}{\partial \xi^\mu}\right)\eta_\nu + \frac{\partial W}{\partial t}\right]\xi^\tau\eta_\tau - \\ &-\left(\frac{1}{2}a^{\mu\nu}\eta_\mu\eta_\nu + W\right)\left(a^{\tau\sigma}\eta_\tau\eta_\sigma + \xi^\tau H_\tau\right). \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir pretpostavke stava, iz (23) vidimo da je za $t = t_o$

(24) $$\frac{dV}{dt} > 0.$$

Ova nejednakost će zbog neprekidnosti izvoda funkcije $W = W(t, \xi^\nu)$ /koja ovu osobinu ima po pretpostavci/, važiti i za vrednosti $t > t_o$ sve dotle dok $\vec{x} \in D$. Prema tome,

(25) $$V(t,\vec{x}(t)) \geq V(t_0,\vec{x}_0)=\alpha>0$$

za svako t za koje je $\vec{x}(t)\in D$. Pretpostavimo li pak da rešenje napušta oblast D a pri tome ostaje u kugli K_Δ, morao bi postojati trenutak t_1 u kome se rešenje nalazi na granici oblasti D, tj. u kome je

(26) $$V(t_1,\vec{x}(t_1))=0.$$

Prema (24), međutim, imamo

$$V(t_1,\vec{x}(t_1)) \geq V(t_0,\vec{x}_0)=\alpha>0.$$

Kontradikcija. Ne postoji, dakle, trenutak $t_1 > t_0$ za koji može važiti (26), odnosno rešenje (22) ne napušta oblast D. Na taj način vidimo da za $t_0 \leq t < +\infty$ važi nejednakost (24), koju, s obzirom na pretpostavke stava, možemo napisati u obliku

$$\frac{dV}{dt} \geq \beta > 0.$$

Odavde, integracijom, dobijamo

$$V(t,\vec{x}(t)) \geq \beta(t-t_0)+V(t_0,\vec{x}_0).$$

Pustimo, sada, da $t\to+\infty$, pa ćemo imati

(27) $$V(t,\vec{x}(t)) \to \infty.$$

No funkcija (20) je ograničena u oblasti $\{\vec{x} : \|\vec{x}(t)\| \leq \varepsilon\}$ pa iz (27) sledi da rešenje (22) mora izaći iz ε okoline koordinatnog početka a to, prema definiciji, znači da je uočeno rešenje $\xi^{\mu}=0$, $\eta_\mu=0$ nestabilno. Dokaz stava 3 je završen.

§ 4. Stabilnost stacionarnog kretanja

Poznato je [10] da sistemi sa cikličnim koordinatama mogu, pod određenim uslovima, da vrše stacionarno kretanje, tj. kretanje pri kome ciklični impulsi i pozicione koordinate imaju konstantne vrednosti. Stabilnost ovog, specijalnog oblika kretanja može se, naravno, ispitati primenom opštih stavova ali se mogu koristiti i posebne teoreme koje važe samo za stacionarno kretanje a koje su znatno jednostavnije od opštih. Tako npr. ako se radi o stabilnosti stacionarnog kretanja holonomnih sistema, mogu se primeniti poznati stavovi Routh-a, Ляпунов-а, Четаев-а Cayley-a i dr. Ovde ćemo pokušati da opšte stavove iz prethodnog paragrafa zamenimo u slučaju stacionarnog kretanja jednostavnijim. Ideja vodilja biće nam Routh-ov metod ispitivanja stabilnosti.

Pri proučavanju kretanja sistema sa cikličnim koordinatama najpogodnije je, čini se, za osnovne promenljive koje karakterišu stanje sistema izabrati Routh-ove promenljive. Neka sistem, čije kretanje posmatramo, ima s pozicionih koordinata q^i i $n-s$ cikličnih koordinata $q^{i'}$ i neka je $s \leq n-L$ gde je L, kao i do sada, broj neholonomnih veza.

Da bismo došli do diferencijalnih jednačina kretanja mehaničkog sistema izraženih u Routh-ovim promenljivim, poćićemo od dobro poznatih Чаплыгин-ovih jednačina ([15] str. 103)

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^\alpha} = P_\alpha + \widetilde{\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\right)} \gamma^{\alpha'}_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta \qquad (\alpha = 1, \ldots, m;\ \alpha' = m+1, \ldots, n)$$

gde su

$\tilde{L}$ – Lagrange-eva funkcija : $\tilde{L} = \tilde{T} - \Pi$

P_α – nepotencijalne sile : $P_\alpha = Q_\alpha + Q_{\alpha'} \varphi^{\alpha'}_\alpha$

$\gamma^{\alpha'}_{\alpha\beta}$ – Hamel-ovi koeficijenti /v. str. 8/

a simbol $\sim$ označava da u izrazu iznad koga stoji treba generalisane brzine $\dot{q}^{\alpha'}$ eliminisati pomoću jednačina neholonomnih veza koje se u ovom slučaju uzimaju u obliku

(2) $$\dot{q}^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}_{\alpha}(q^1, \dots, q^m)\dot{q}^{\alpha}.$$

Routh-ove promenljive obeležimo na sledeći način:

(3) $$q^i, q^{i'}, \dot{q}^i, \tilde{p}_{i'} \quad (i = 1, \dots, s;\ i' = s+1, \dots, m;\ s = n - l)$$

Ovaj način obeležavanja, pri kome neapostrofirani indeksi označavaju pozicione koordinate i njima odgovarajuće generalisane brzine a apostrofirani - ciklične koordinate i njima odgovarajuće generalisane impulse, zadržaćemo do kraja ovog paragrafa. Transformišimo sad jednačine (1) uvodeći promenljive (3). Definišimo, najpre, Routh-ovu funkciju R jednakošću

(4) $$R(q^i, q^{i'}, \dot{q}^i, \tilde{p}_{i'}) = \left[\tilde{L} - \tilde{p}_{i'}\dot{q}^{i'}\right]$$

pri čemu je stavljanjem desne strane jednakosti u zagradu simbolički naznačeno da u tom izrazu Lagrange-eve promenljive treba zameniti Routh-ovim koristeći relaciju /v. str. 7/

$$\tilde{p}_{i'} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^{i'}}.$$

Variranjem Routh-ove funkcije dobijamo

(5) $$\delta R = \frac{\partial R}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial R}{\partial q^{i'}}\delta q^{i'} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i + \frac{\partial R}{\partial \tilde{p}_{i'}}\delta \tilde{p}_{i'}.$$

S druge strane, variranjem Lagrange-eve funkcije, imamo

(6) $$\delta \tilde{L} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^{i'}}\delta q^{i'} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^{i'}}\delta \dot{q}^{i'}$$

odakle je

(6') $$\delta(\tilde{L} - \tilde{p}_{i'}\dot{q}^{i'}) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^{i'}}\delta q^{i'} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i - \dot{q}^{i'}\delta \tilde{p}_{i'}$$

Ako sad u (6') smenimo Lagrange-eve promenljive Routh-ovim, dobićemo, prema definicionom obrascu (4), opet varijaciju Routh-ove funkcije, pa upoređivanjem (5) i (6') možemo pisati

(7) $$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^{i}}=\frac{\partial R}{\partial q^{i}}, \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^{i'}}=\frac{\partial R}{\partial q^{i'}}, \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^{i}}=\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^{i}}, \quad \dot{q}^{i'}=-\frac{\partial R}{\partial \tilde{p}_{i'}}.$$

Koristeći jednakosti (7), jednačine (1) se mogu izraziti na sledeći način

(8)
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^{i}}-\frac{\partial R}{\partial q^{i}}=P_{i}+\widetilde{\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha'}}\right)}\left(\gamma^{\alpha'}_{ij}\dot{q}^{j}-\gamma^{\alpha'}_{ij'}\frac{\partial R}{\partial \tilde{p}_{j'}}\right)$$
$$\frac{dq^{i'}}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial \tilde{p}_{i'}}$$
$$\frac{d\tilde{p}_{i'}}{dt}=\frac{\partial R}{\partial q^{i'}}+P_{i'}+\widetilde{\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha'}}\right)}\left(\gamma^{\alpha'}_{i'j}\dot{q}^{j}-\gamma^{\alpha'}_{i'j'}\frac{\partial R}{\partial \tilde{p}_{j'}}\right).$$

Routh-ova funkcija u razvijenom obliku je

$$R=\frac{1}{2}c_{ij}\dot{q}^{i}\dot{q}^{j}+c^{i'}_{i}\dot{q}^{i}\tilde{p}_{i'}-\frac{1}{2}b^{i'j'}\tilde{p}_{i'}\tilde{p}_{j'}-\Pi$$

gde su

$$c_{ij}=b_{ij}-b_{ij'}b_{i'j}b^{j'i'}; \qquad c^{i'}_{i}=b^{i'j'}b_{j'i}.$$

Očigledno je da su koeficijenti c_{ij} simetrični. Uvodeći oznake

(9) $$R_{(2)}=\frac{1}{2}c_{ij}\dot{q}^{i}\dot{q}^{j}; \quad R_{(1)}=c^{i'}_{i}\dot{q}^{i}\tilde{p}_{i'}, \quad \Pi^{*}=\frac{1}{2}b^{i'j'}\tilde{p}_{i'}\tilde{p}_{j'}+\Pi,$$

Routh-ova funkcija dobija oblik

$$R=R_{(2)}+R_{(1)}-\Pi^{*}$$

Primetimo da je $R_{(2)}$ pozitivno definitna kvadratna forma generalisanih brzina $\dot{q}^{i}$ čiji su koeficijenti funkcije koordinata. Funkcija Π^{*} se obično [10] naziva Routh-ov potencijal. Da bismo skratili pisanje, uvešćemo još i funkciju V^{*} koju definišemo jednakošću

(10) $$V^{*}=\Pi^{*}-R_{(1)}.$$

Sad se, prema (9) i (10), Routh-ova funkcija može napisati u obliku

(11) $$R=R_{(2)}-V^{*}$$

Jednačine (8), koristeći (11), možemo dovesti na oblik

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_{(2)}}{\partial \dot q^i}-\frac{\partial R_{(2)}}{\partial q^i}=P_i-g_{ij}\dot q^j-c^{i'}_i\dot{\tilde p}_{i'}-\frac{\partial \Pi^*}{\partial q^i}+\left(\widetilde{\frac{\partial T}{\partial \dot q^{\alpha'}}}\right)\left(\gamma^{\alpha'}_{ij}\dot q^j-\gamma^{\alpha'}_{ij'}\frac{\partial V^*}{\partial \tilde p_{j'}}\right)$$

$$\text{(12)}\qquad \frac{dq^{i'}}{dt}=\frac{\partial V^*}{\partial \tilde p_{i'}}$$

$$\frac{d\tilde p_{i'}}{dt}=\frac{\partial R}{\partial q^{i'}}+\left(\widetilde{\frac{\partial T}{\partial \dot q^{\alpha'}}}\right)\left(\gamma^{\alpha'}_{i'j}\dot q^j-\gamma^{\alpha'}_{i'j'}\frac{\partial V^*}{\partial \tilde p_{j'}}\right)+P_{i'}$$

gde su

$$\text{(13)}\qquad g_{ij}=\left(\frac{\partial c^{i'}_i}{\partial q^j}-\frac{\partial c^{i'}_j}{\partial q^i}\right)\tilde p_{i'}=-g_{ji}\,.$$

Sistem jednačina (12) smo izveli polazeći od Чаплыгин-ovih jednačina ne uvodeći nove pretpostavke pa one važe pod istim pretpostavkama pod kojima važe i jednačine (1).

Napomenimo da za konzervativne sisteme, čije se kretanje može opisati jednačinama(12) /u kojima je tada $P_\alpha = 0$/, integral energije ima oblik

$$\text{(14)}\qquad \frac{\partial R}{\partial \dot q^i}\dot q^i-R=const.$$

što nije teško proveriti. Zaista, diferenciranjem jednakosti (14) po vremenu dobijamo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot q^i}\dot q^i-R\right)=\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot q^i}-\frac{\partial R}{\partial q^i}\right)\dot q^i-\frac{\partial R}{\partial \tilde p_{i'}}\dot{\tilde p}_{i'}-\frac{\partial R}{\partial q^{i'}}\dot q^{i'}$$

i ako ovaj izraz izračunamo u smislu jednačina (8), uzimajući u obzir antisimetriju koeficijenata g_{ij} i $\gamma^{\alpha'}_{\alpha\beta}$, dobijamo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot q^i}\dot q^i-R\right)=0.$$

Vratimo se sada našem mehaničkom sistemu $\mathcal{M}$ u kome su, kako smo pretpostavili, $n-s$ koordinata cikličnih. Obeležimo koordinate tako da budu q^i pozicione a $q^{i'}$ ciklične koordinate. Tada je, prema (7),

$$\frac{\partial R}{\partial q^{i'}} = 0. \tag{15}$$

Primetićemo da uslov (15) može biti ispunjen i ako koeficijenti $a_{\mu\nu}$ i $\varphi_{(b)\mu}$ zavise od $q^{i'}$. Mi ćemo, kraćeg izražavanja radi, i dalje upotrebljavati izraz "ciklične koordinate" podrazumevajući pod tim terminom koordinate koje zadovoljavaju uslov (15).

Jednačine kretanja (12) su u ovom slučaju

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_{(2)}}{\partial \dot{q}^{i}} - \frac{\partial R_{(3)}}{\partial q^{i}} = P_i - g_{ij}\dot{q}^{j} - c_i^{i'}\dot{\tilde{p}}_{i'} - \frac{\partial \Pi^*}{\partial q^{i}} + \left(\widetilde{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha'}}}\right)\left(\gamma^{\alpha'}_{ij}\dot{q}^{j} - \gamma^{\alpha'}_{ij'}\frac{\partial V^*}{\partial \tilde{p}_{j'}}\right) \tag{16}$$

$$\frac{dq^{i'}}{dt} = \frac{\partial V^*}{\partial \tilde{p}_{i'}}, \qquad \frac{d\tilde{p}_{i'}}{dt} = \left(\widetilde{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha'}}}\right)\left(\gamma^{\alpha'}_{i'j}\dot{q}^{j} - \gamma^{\alpha'}_{i'j'}\frac{\partial V^*}{\partial \tilde{p}_{j'}}\right)$$

Odmah se može uočiti bitna razlika između neholonomnih sistema sa cikličnim koordinatama i odgovarajućih holonomnih sistema. Naime, kod neholonomnih sistema egzistencija cikličnih koordinata ne povlači važenje odgovarajućih integrala kretanja /cikličnih integrala/, kako je to slučaj kod holonomnih sistema. Da bi neholonomni sistem sa cikličnim koordinatama $q^{i'}$ imao ciklični integral $\tilde{p}_{i'}$ = const. potrebno je i dovoljno da bude

$$\left(\widetilde{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha'}}}\right)\left(\gamma^{\alpha'}_{i'j}\dot{q}^{j} - \gamma^{\alpha'}_{i'j'}\frac{\partial V^*}{\partial \tilde{p}_{j'}}\right) = 0. \tag{17}$$

Ovaj zaključak sledi neposredno iz (16).

Pretpostavimo da je u posmatranom sistemu uslov (17) zadovoljen za $i' = s+1,\dots,m$. Tada, pored integrala energije (14), važe i integrali

$$\tilde{p}_{i'} = \varkappa_{i'} = const. \tag{18}$$

Zamenjujući vrednosti (18) u (16), dobijamo jednačine kretanja

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_{(2)}}{\partial \dot{q}^{i}} - \frac{\partial R_{(2)}}{\partial q^{i}} = P_i - g_{ij}\dot{q}^{j} - \frac{\partial \Pi^*}{\partial q^{i}} + \left(\widetilde{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha'}}}\right)\left(\gamma^{\alpha'}_{ij}\dot{q}^{j} - \gamma^{\alpha'}_{ij'}\frac{\partial V^*}{\partial \tilde{p}_{j'}}\right) \tag{19}$$

$$\frac{dp_{i'}}{dt} = 0, \tag{19}$$

pri čemu koordinate $q^{i'}$ možemo ignorisati /kao i kod holonomnih sistema/. Podsetimo se da pod stacionarnim kretanjem podrazumevamo ono u kome su, pored cikličnih impulsa, i pozicione koordinate konstantne,

$$q^{i} = q_0^{i} = const.$$

Ovako kretanje je moguće ako početne vrednosti zadovoljavaju uslove

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial q^i} + \left(\frac{\widetilde{\partial T}}{\partial \dot{q}^{\alpha'}}\right) \gamma^{\alpha'}_{ij'} b^{j'k'} \varkappa_{k'} = 0 \qquad (P_i(q_0^i, 0) = 0). \tag{20}$$

Smatrajući konstante $\varkappa_{i'}$ zadanim, iz (20) se mogu izračunati vrednosti q_0^i za koje će sistem vršiti stacionarno kretanje. Jednačine (20), međutim, ne moraju da budu nezavisne među sobom, tako da ni vrednosti q_0^i nisu uvek jednoznačno određene. Mnogostrukost, koju definišu jednačine (20), je stoga dimenzije $s \geq n - \Delta$; nazivano je mnogostrukost stacionarnog kretanja i obeležavamo sa O_s.

Iz same definicije stacionarnog kretanja sledi da je pri tom kretanju $\dot{q}^i = 0$ a otuda i

$$\dot{q}^{i'} = \frac{\partial V^*}{\partial \tilde{p}_{i'}} = - b^{i'j'} \tilde{p}_{j'} + c^{i'}_{i} \dot{q}^{i} = \dot{q}_0^{i'} = const.$$

jer su koeficijenti $b^{i'j'}$ i $c^{i'}_{i}$ konstantni u ovom slučaju pošto zavise samo od koordinata q^i. Iz ovih jednakosti se dobija

$$q^{i'} = q_0^{i'} + \dot{q}_0^{i'}(t - t_0) \tag{21}$$

pa vidimo da su koordinate $q^{i'}$ linearne funkcije vremena. Što se tiče koordinata $q^{\alpha'}$, koje ne učestvuju u jednačinama (16), one se mogu dobiti iz jednačina neholonomnih veza. Prema (2), imamo

$$\dot{q}^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}_{\alpha}(q_0^1, \ldots, q_0^m)\dot{q}_0^{\alpha} = const. = \dot{q}_0^{\alpha'}$$

a odatle

$$q^{\alpha'} = q_0^{\alpha'} + \dot{q}_0^{\alpha'}(t - t_0). \tag{22}$$

Stabilnost kretanja u odnosu na promenljive $q^{i'}$ i $q^{\alpha'}$ možemo na ovaj način ispitati direktno. Ostaje nam, dakle, da ispitamo stabilnost u odnosu na ostale promenljive. Uočimo, stoga, jednu tačku mnogostrukosti O_s stacionarnog kretanja za koju ćemo pretpostaviti da nije bifurkaciona. Takvoj tački jednoznačno odgovara stacionarno kretanje sistema. Možemo smatrati, ne umanjujući opštost ispitivanja, da je sistem koordinata izabran tako da je

$$q_0^i = 0 \quad i \quad \Pi^*(0, \varkappa_{i'}) = 0.$$

Neka je stacionarno kretanje određeno sa

$$q^i = 0, \quad \dot{q}^i = 0, \quad \tilde{p}_{i'} = \varkappa_{i'}, \quad q^{i'} = q_0^{i'}, \quad q^{\alpha'} = q_0^{\alpha'}, \tag{23}$$

neporemećeno. Poremećeno, u odnosu na (23), je kretanje

$$q^i(t) = q^i, \quad \tilde{p}_{i'}(t) = \varkappa_{i'} + \eta_{i'}, \quad q^{i'}(t) = q_0^{i'} + \xi^{i'}, \quad q^{\alpha'} = q_0^{\alpha'} + \xi^{\alpha'}, \tag{24}$$

gde su za poremećaje pozicionih koordinata zadržane oznake q^i jer nema opasnosti od zabune /pošto je u neporemećenom kretanju $q_0^i = 0$/, dok su oznake za poremećaje ostalih promenljivih jasne. Diferencijalne jednačine poremećenog kretanja dobijamo iz (16)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_{(2)}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial R_{(2)}}{\partial q^i} = \Psi_i - g_{ij}\dot{q}^j - e_i^{i'}\eta_{i'} - \frac{\partial \Pi^*}{\partial q^i} + \left(\widetilde{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha'}}}\right)\left(\gamma_{ij}^{\alpha'}\dot{q}^j - \gamma_{ij'}^{\alpha'}\frac{\partial V^*}{\partial \tilde{p}_{j'}}\right)$$

$$\frac{d\xi^{i'}}{dt} = -\dot{q}_0^{i'} + \frac{\partial V^*}{\partial \tilde{p}_{i'}} \tag{25}$$

$$\frac{d\eta_{i'}}{dt} = \left(\widetilde{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha'}}}\right)\left(\gamma_{i'j}^{\alpha'}\dot{q}^j - \gamma_{i'j'}^{\alpha'}\frac{\partial V^*}{\partial \tilde{p}_{j'}}\right).$$

U ovim jednačinama sve izraze smatramo funkcijama promenljivih (24). Da bismo to jasnije istakli, napisaćemo jednačine (25)u razvijenom obliku

$$c_{ij}\ddot{q}^j + \left(\frac{\partial c_{ij}}{\partial q^k} - \frac{1}{2}\frac{\partial c_{jk}}{\partial q^i}\right)\dot{q}^j\dot{q}^k = -g_{ij}\dot{q}^j - e_i^{i'}\eta_{i'} -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial b^{i'j'}}{\partial q^i}(\varkappa_{i'} + \eta_{i'})(\varkappa_{j'} + \eta_{j'}) - \frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + \Psi_i + \tag{25'}$$

$$+\left[\mathscr{C}_{\alpha' r}\dot{q}^r - \mathscr{C}_{\alpha'}^{r'}(\varkappa_{r'} + \eta_{r'})\right]\left[\gamma_{ij}^{\alpha'}\dot{q}^j + \gamma_{ij'}^{\alpha'}e_j^{j'}\dot{q}^j - \gamma_{ij'}^{\alpha'}b^{i'j'}(\varkappa_{i'} + \eta_{i'})\right]$$

$$\frac{d\xi^{i}}{dt} = -\dot{q}_0^{i} + \frac{\partial V^*}{\partial \beta_{i'}}$$

(25')

$$\frac{d\eta_{i'}}{dt} = \left[\mathcal{C}_{\alpha' r}\dot{q}^{r} - \mathcal{C}_{\alpha'}^{r'}(\varkappa_{r'}+\eta_{r'})\right]\left[\gamma_{i'j}^{\alpha'}\dot{q}^{j} + \gamma_{i'j'}^{\alpha'}c_{j}^{j'}\dot{q}^{j} - \gamma_{i'j'}^{\alpha'}b^{j'k'}(\varkappa_{k'}+\eta_{k'})\right]$$

gde smo koristili oznake

$$\mathcal{C}_{\alpha' r} = a_{\alpha' r} + a_{\alpha'\beta'}\varphi_{r}^{\beta'} + (a_{r'\alpha'} + a_{\alpha'\beta'}\varphi_{r'}^{\beta'})c_{r}^{r'};$$

$$\mathcal{C}_{\alpha'}^{r'} = (a_{i'r'} + a_{\alpha'\beta'}\varphi_{i'}^{\beta'})b^{i'r'}; \quad \Psi_i = P_i(q^{j}, \dot{q}^{j}, q_0^{j'}+\xi^{j'}, \varkappa_{j'}+\eta_{j'}).$$

U linearnoj aproksimaciji ove jednačine imaju oblik

$$\begin{aligned} c_{ij}\ddot{q}^{j} = & -g_{ij}\dot{q}^{j} - c_{i}^{i'}\dot{\eta}_{i'} - \frac{\partial b^{i'j'}}{\partial q^{i}}\varkappa_{j'}\eta_{i'} - \\ & -\left[\mathcal{C}_{\alpha'}^{r'}(\gamma_{ij}^{\alpha'}\varkappa_{r'} + \gamma_{ij'}^{\alpha'}c_{j}^{j'}\varkappa_{r'}) + \mathcal{C}_{\alpha j}\gamma_{ij'}^{\alpha'}b^{i'j'}\varkappa_{i'}\right]\dot{q}^{j} + \\ & + \left(\mathcal{C}_{\alpha'}^{i'}\gamma_{ij'}^{\alpha'}b^{r'j'} + \mathcal{C}_{\alpha'}^{r'}\gamma_{ij'}^{\alpha'}b^{i'j'}\right)\varkappa_{r'}\eta_{i'} - \Pi_{ij}q^{j} + \Psi_i \end{aligned}$$

(25'')

$$\frac{d\xi^{i'}}{dt} = -\dot{q}_0^{i'} - c_{j}^{i'}\dot{q}^{j} + b^{i'j'}\eta_{j'}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{i'}}{dt} = & -\left[\mathcal{C}_{\alpha'}^{r'}(\gamma_{i'j}^{\alpha'}\varkappa_{r'} + \gamma_{i'j'}^{\alpha'}c_{j}^{j'}\varkappa_{r'}) + \mathcal{C}_{\alpha' j}\gamma_{i'j'}^{\alpha'}b^{j'k'}\varkappa_{k'}\right]\dot{q}^{j} + \\ & + \left(\mathcal{C}_{\alpha'}^{k'}\gamma_{i'j'}^{\alpha'}b^{r'j'} + \mathcal{C}_{\alpha'}^{r'}\gamma_{i'j'}^{\alpha'}b^{k'j'}\right)\varkappa_{r'}\eta_{k'}, \end{aligned}$$

pri čemu koeficijente u ovim jednačinama treba smatrati vrednostima odgovarajućih funkcija izračunatih za $q^{i} = 0$, $q^{i'} = q_0^{i'}$.

Lako je proveriti da i jednačine poremećenog kretanja (25) imaju integral energije

(26)
$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}^{i}}R(q^{i}, \dot{q}^{i}, \varkappa_{i'}+\eta_{i'}, q_0^{i'}+\xi^{i'})\dot{q}^{i} - R(q^{i}, \dot{q}^{i}, \varkappa_{i'}+\eta_{i'}, q_0^{i'}+\xi^{i'}) = const.$$

i mi se na tome nećemo zadržavati.

Ciklični integrali, pak, u poremećenom kretanju ne važe u opštem slučaju. Preciznije: da bi i u poremećenom kretanju važio integral $\eta_{i'} = \text{const.}$, potrebno je i dovoljno da je

$$\left[\mathcal{C}_{i'r}\dot{q}^{r}-\mathcal{C}^{r'}_{i'}(\varkappa_{r'}+\eta_{r'})\right]\left[\gamma^{\alpha'}_{i'j}\dot{q}^{j}+\gamma^{\alpha'}_{i'j'}c^{j'}_{j}\dot{q}^{j}-\gamma^{\alpha'}_{i'j'}b^{j'k'}(\varkappa_{k'}+\eta_{k'})\right]=0$$

što očigledno nije ekvivalentno uslovu (17). Ni uslovi (20) u poremećenom kretanju nisu zadovoljeni. Naime, za $q^{i}=0$ i $\dot{q}^{i}=0$, iz (25) se dobija

$$\left[\frac{\partial\Pi^{*}(q,\varkappa+\eta)}{\partial q^{i}}-\mathcal{C}^{r'}_{i'}(\varkappa_{r'}+\eta_{r'})\gamma^{\alpha'}_{ij'}b^{i'j'}(\varkappa_{i'}+\eta_{i'})\right]_{q^{i}=0}\neq 0$$

Ako bismo položaj sistema određen sa $q^{i}=0$ smatrali ravnotežnim položajem "redukovanog sistema" koji se dobija ignorisanjem cikličnih koordinata /kako se to obično i čini [30]/, onda bismo imali da na kretanje sistema u okolini ravnotežnog položaja utiču dopunske potencijalne sile koje izazivaju delovanje stalnih poremaćaja. Da bismo to izbegli i uprostili dalja razmatranja, posmatraćemo samo ona poremećena kretanja u kojima su $\eta_{i'}=0$. Drugim rečima, smatraćemo da generalisani impulsi nemaju poremećaje /takvu stabilnost ispitivao je Routh/. Na taj način dobijamo da za poremećeno kretanje važe uslovi (17) pa odatle sledi da postoje prvi integrali

(27) $$\eta_{i'}=\text{const.}$$

Jednačine poremećenog kretanja su u ovom slučaju

(28)
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_{(2)}}{\partial\dot{q}^{i}}-\frac{\partial R_{(2)}}{\partial q^{i}}=-g_{ij}\dot{q}^{j}-\frac{\partial\Pi^{*}(q,\varkappa)}{\partial q^{i}}+\left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{q}^{\alpha'}}\right)\left(\gamma^{\alpha'}_{ij}\dot{q}^{j}-\gamma^{\alpha'}_{ij'}\frac{\partial V^{*}}{\partial p_{j'}}\right)+\psi_{i}$$

$$\frac{d\xi^{i'}}{dt}=-\dot{q}^{i'}_{0}+\frac{\partial V^{*}}{\partial p_{i'}}.$$

Ispitajmo stabilnost stacionarnog kretanja određenog jednakostima (23) za koje smo pretpostavili da odgovara tački stacionarne mnogostrukosti O_s koja nije bifurkaciona. Za koordinate $q^{i'}$ i $q^{\alpha'}$ našli smo već konačne jednačine (21),(22) pa je stabilnost kretanja sistema u odnosu na njih lako ispitati direktno. Pošto su ove koordinate linearne funkcije vremena to je jasno da je kretanje u odnosu na njih nestabilno. Takođe je moguće neposredno ispitati i stabilnost kretanja u odnosu na promenljive $p_{i'}$. Naime, egzistencija integrala (27) jasno govori da je kretanje stabilno u odnosu na $\tilde{p}_{i'}$. O stabilnosti kretanja u odnosu na generalisane brzine $\dot{q}^{\alpha'}$ možemo suditi na osnovu jednačina neholonomnih veza (2), koje u poremećenom kretanju imaju oblik

$$(29) \qquad \dot{\xi}^{\alpha'} = \varphi_i^{\alpha'}(q^1,\dots,q^m)\dot{q}^i + \varphi_{i'}^{\alpha'}(q^1,\dots,q^m)\dot{\xi}^{i'}$$

Ove jednačine ne možemo ispitati pre nego što se ispita stabilnost kretanja u odnosu na ostale promenljive. Ukoliko je kretanje stabilno u odnosu na ostale promenljive koje se pojavljuju u (29), imalo bi smisla ispitati i stabilnost u odnosu na $\dot{q}^{\alpha'}$ i to se može učiniti neposredno posmatranjem (29) pa se na tome nećemo zadržavati.

Prema napred rečenom, ceo problem se praktično svodi na analizu stabilnosti stacionarnog kretanja u odnosu na deo promenljivih q^i, $\dot{q}^i$. Jednačine poremećenog kretanja za ove promenljive su

$$(30) \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{R}_{(2)}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mathcal{R}_{(2)}}{\partial q^i} = -g_{ij}\dot{q}^j + \Psi_i - \frac{\partial \Pi^*}{\partial q^i} + \widetilde{\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha'}}\right)}\left(\gamma_{ij}^{\alpha'}\dot{q}^j - \gamma_{ij'}^{\alpha'}\frac{\partial V^*}{\partial p_{j'}}\right)$$

a njihovo trivijalno rešenje $q^i = 0$, $\dot{q}^i = 0$ određuje neporemećeno stacionarno kretanje.

Dovoljne uslove da neporemećeno stacionarno kretanje bude stabilno, odnosno asimptotski stabilno, u odnosu na q^i, $\dot{q}^i$, daje

STAV 4. Ako u konfiguracionom prostoru V_n postoji pozitivno definitna u odnosu na promenljive $q^1,\dots,q^s$, skalarna funkcija

$$W = W(q^1,\dots,q^s,t) \in C^{(1,1)}_{t,q}(\mathcal{H})$$

$$\mathcal{H} = \{t_0 \le t < +\infty;\ |q^i| < h = \text{const.},\ |q^{i'}| < +\infty\}$$

za koju je izraz

$$J = \frac{\partial W}{\partial t} + \left(\Psi_i - \frac{\partial \Pi^*}{\partial q^i} + \frac{\partial W}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i$$

sastavljen u smislu jednačina poremećenog kretanja (30), a/ negativan ili identički jednak nuli, trivijalno rešenje $q^i = 0$, $\dot{q}^i = 0$ je stabilno.

b/ negativno definitan, trivijalno rešenje je asimptotski stabilno.

D o k a z. Konstruišimo funkciju $V = V(t, q, \dot{q})$ na sledeći način

$$V = R_{(2)} + W \tag{31}$$

Funkcija (31) je pozitivno definitna u odnosu na promenljive $q^1, \dots, q^s, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^s$ pošto pretstavlja zbir pozitivno definitne kvadratne forme generalisanih brzina (9) i pozitivno definitne /po pretpostavci/ funkcije koordinata W. Potražimo promenu funkcije (31) duž proizvoljnog rešenja jednačina poremećenog kretanja (30). Imaćemo

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial R_{(2)}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial R_{(2)}}{\partial q^i} + \frac{\partial W}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i + \frac{\partial W}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial W}{\partial t} + \left[-g_{ij}\dot{q}^j + \Psi_i - \frac{\partial \Pi^*}{\partial q^i} + \widetilde{\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha'}}\right)}\left(\gamma^{\alpha'}_{ij}\dot{q}^j - \gamma^{\alpha'}_{ij'}\frac{\partial V^*}{\partial p_{j'}}\right) + \frac{\partial W}{\partial q^i}\right]\dot{q}^i.$$

Ako iskoristimo jednakosti (17), za koje smo konstatovali da važe i u poremećenom kretanju /pri usvojenim pretpostavkama/, uzmemo u obzir antisimetriju koeficijenata g_{ij} i antisimetriju koeficijenata $\gamma^{\alpha'}_{\alpha\beta}$ u odnosu na donje indekse, dobićemo

$$\frac{dV}{dt} = \left(\Psi_i - \frac{\partial \Pi^*}{\partial q^i} + \frac{\partial W}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i + \frac{\partial W}{\partial t}. \tag{32}$$

Primećujemo da funkcija $V = V(t, q, \dot{q})$ ima u slučaju a/ iste one osobine koje je imala funkcija (3 § 3.) u stavu 1, a u slučaju b/ njene osobine su iste kao i osobine odgovarajuće funkcije u stavu 2. Stoga, koristeći shemu dokaza stavova 1 i 2, možemo izvesti zaključak: Ako je izraz J negativan ili identički jednak nuli, trivijalno rešenje sistema (30) je stabilno; ako je J negativno definitan izraz, trivijalno rešenje je asimptotski stabilno. Međutim, pošto funkcija (31) zavisi samo od jednog dela promenljivih od kojih zavisi funkcija (3 § 3.), to se izvedeni zaključci odnose samo na taj deo promenljivih. Stav je dokazan.

Podvucimo još jedanput, da stabilnost, odnosno asimptotska stabilnost, trivijalnog rešenja jednačine (30) znači odgovarajuću stabilnost stacionarnog kretanja u odnosu na deo promenljivih q^i, $\dot{q}^i$ pri neporemećenim generalisanim impulsima $p_{i'}$.

Za sisteme koji se kreću u polju konzervativnih sila, važi

POSLEDICA STAVA 4. Ako se pri zadanim $\varkappa_{i'} =$ const. realizuje stacionarno kretanje $q^i = 0$, $\dot{q}^i = 0$, tada će ono biti stabilno u odnosu na q^i, $\dot{q}^i$ pod uslovom da $\varkappa_{i'}$ ne trpe poremećaje, ako Routh-ov potencijal

$$\Pi^* = \Pi^*(q^i, \dot{q}^i, \varkappa_{i'})$$

za ovo kretanje dobija apsolutni minimum.

Zaista, za konzervativne sisteme imamo da je $\Psi_i = 0$, pa uzimajući da je

$$W = \Pi^*(q^i, \dot{q}^i, \varkappa_{i'})$$

vidimo da su uslovi stava 4 zadovoljeni.

Može se zapaziti da posledica stava 4 koju smo naveli pretstavlja analogon Routh-ove teoreme [10] koja važi za holonomne sisteme. Ipak, za razliku od holonomnih sistema, ovde uslov da Routh-ov potencijal ima minimum nije dovoljan da postoji stacionarno kretanje /v. str. 33/.

Ispitaćemo uticaj disipativnih i giroskopskih sila na stabilnost stacionarnog kretanja. Zadržaćemo se na slučaju kad disipativne sile imaju oblik

$$D_i = -d_{ij}\dot{q}^j \qquad (d_{ij} = d_{ji})$$

i Rayleigh-eva funkcija

$$R = \frac{1}{2} d_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j \qquad (i,j = 1,\dots,s),$$

je pozitivno definitna kvadratna forma promenljivih $\dot{q}^i$ a giroskopske sile su

$$G_i = -f_{ij}\dot{q}^j \qquad (f_{ij} = -f_{ji})$$

U jednačinama poremećenog kretanja je tada

$$\Psi_i = D_i + G_i = -d_{ij}\dot{q}^j - f_{ij}\dot{q}^j$$

pa, uzimajući da je

$$W = \Pi^*(q^i, \dot{q}^i, x_{i'})$$

dobijamo

$$J = \left(-d_{ij}\dot{q}^j - f_{ij}\dot{q}^j - \frac{\partial\Pi^*}{\partial q^i} + \frac{\partial\Pi^*}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i = -d_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j.$$

Na osnovu stava 4, sad možemo izvesti zaključak:

Disipativne i giroskopske sile, pod čijim dejstvom je moguće stacionarno kretanje, ne remete stabilnost stabilnog stacionarnog kretanja. Disipativne sile mogu stabilno kretanje učvrstiti do asimptotske stabilnosti ako je Rayleigh-eva funkcija pozitivno definitna.

§ 5. Stabilnost ravnotežnog stanja

1. O ravnotežnom položaju neholonomnog sistema

Ravnotežni položaj neholonomnog mehaničkog sistema $\mathcal{M}$ možemo odrediti koristeči neki od sistema jednačina kretanja koje smo izveli u § 1. Tako, na primer, stavljajući da je $p_{\alpha'}=0$ u jednačine (25 § 1), dobijamo da je ravnotežni položaj određen jednačinama

(1) $$Q_\alpha + Q_{\alpha'}\varphi^{\alpha'}_{\alpha} = 0 \quad , \quad \varphi^{\alpha'}=0$$

Odmah se može primetiti da, uslov da su generalisane sile u nekom položaju sistema jednake nuli, jeste dovoljan ali nije i potreban da taj položaj bude ravnotežni. Drugim rečima: ako je neki položaj holonomnog mehaničkog sistema ravnotežni, on će biti ravnotežni i pri delovanju neholonomnih veza ako su te veze linearne i homogene po generalisanim impulsima. Obratno ne važi. Jednačine (1) određuju u konfiguracionom prostoru V_n r-dimenzionu mnogostrukost O_r. Dimenzija ove mnogostrukosti r jednaka je broju linearno nezavisnih vektora

$$grad(Q_\alpha + Q_{\alpha'}\varphi^{\alpha'}_{\alpha})$$

i, očigledno je, r $\geqslant$ L. Dakle, za razliku od holonomnih sistema koji po pravilu imaju izolovane ravnotežne položaje, neholonomni sistemi poseduju ravnotežne mnogostrukosti. Svaka tačka koja pripada O_r može da bude ravnotežni položaj sistema, te ravnotežna konfiguracija Σ_0 nije jednoznačno određena. Otuda možemo n - r parametara izabrati proizvoljno a ostale odrediti iz uslova da tačka pripada ravnotežnoj mnogostrukosti. Uzmimo, npr. da je

$$q^{r+1}=c^{r+1}, \dots, q^n=c^n,$$

i zamenimo te vrednosti u (1); dobijamo

(2) $$g_\alpha(q^1,\dots,q^r, c^{r+1},\dots,c^n,0,\dots,0) \equiv Q_\alpha + Q_{\alpha'}\varphi^{\alpha'}_{\alpha}=0$$

U tačkama gde je

(3) $$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial q^i}\right)=r$$

mogu se jednoznačno odrediti vrednosti ostalih koordinata $q_0^1,\dots,q_0^r$. Tačke u kojima je

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial q^i}\right)<r$$

su bifurkacione jer u njihovoj okolini vrednosti $q_0^{r+1},\dots,q_0^n$ ne određuju jednoznačno položaj sistema. Mi se ovde nećemo baviti ispitivanjem stabilnosti u tačkama bifurkacije pa ćemo smatrati da je u ravnotežnom položaju, koji ćemo dalje posmatrati, isunjen uslov (3).

Razmotrimo posebno slučaj kretanja mehaničkog sistema u polju konzervativnih sila kad su neholonomne veze homogene. Neka je potencijalna energija sistema data funkcijom

(4) $$\Pi=\Pi(q^1,\dots,q^n)$$

U tom slučaju jednačine (1) dobijaju oblik

(5) $$\frac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha}+\frac{\partial \Pi}{\partial q^{\alpha'}}\varphi_\alpha^{\alpha'}=0.$$

Pretpostavimo da je

(6) $$q_0^1=\dots=q_0^n=0$$

rešenje sistema (5). Ako sistem (5) ima rešenje /bar jedno/, onda ova pretpostavka ne umanjuje opštost ispitivanja. Pretpostavimo, još, da se funkcija (4) može predstaviti Mac Laurin-ovim redom u okolimi ravnotežnog položaja (6)

(7) $$\Pi=\Pi_0+\Pi_\mu q^\mu+\frac{1}{2}\Pi_{\mu\nu}q^\mu q^\nu+\cdots$$

gde su

$$\Pi_0=\Pi(0,\dots,0);\quad \Pi_\mu=\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q^\mu}\right)_{q=0};\quad \Pi_{\mu\nu}=\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^\nu\partial q^\mu}\right)_{q=0}.$$

Kako je uvek moguće izabrati $\Pi_0 = 0$, to će u ravnotežnom položaju biti

$$\Pi_\alpha + \Pi_{\alpha'} \varphi^{\alpha'}_{\alpha 0} = 0 \tag{8}$$

gde su

$$\varphi^{\alpha'}_{\alpha 0} = \varphi^{\alpha'}_{\alpha}(0, \ldots, 0) .$$

Iz (8) vidimo da potencijalna energija u prisustvu neholonomnih veza može u okolini ravnotežnog položaja da ima i linearne članove, za razliku od holonomnih sistema gde je to isključeno. Njih neće biti ako je

$$\varphi^{\alpha'}_{\alpha 0} = 0 \qquad \text{ili} \qquad \Pi_{\alpha'} = 0 . \tag{9}$$

Ako uslovi (9) nisu ispunjeni, red (7) se može ipak malo pojednostaviti. Smenom promenljivih

$$\bar{q}^{\alpha'} = q^{\alpha'} - \varphi^{\alpha'}_{\alpha 0} q^{\alpha}$$

postiže se da bude $\Pi_\alpha = 0$ a istovremeno i $\varphi^{\alpha'}_{\alpha 0} = 0$ [21] tako da potencijalna energija, razvijena u red, ima oblik

$$\Pi = \Pi_{\alpha'} q^{\alpha'} + \frac{1}{2} \Pi_{\mu\nu} q^{\mu} q^{\nu} + \cdots \tag{10}$$

pri čemu smo nove koordinate i nove koeficijente obeležili opet sa q^{μ} odnosno $\Pi_{\mu\nu}$.

2. Poremećeno kretanje u okolini ravnotežnog položaja

Vratimo se razmatranju ravnotežnog položaja proizvoljnog neholonomnog sistema. Pod neporemećenim ravnotežnim stanjem sistema podrazumevaćemo stanje koje određuju

$$q^1_0 = \cdots = q^n_0 = 0 \; ; \quad p_1 = \cdots = p_n = 0 . \tag{11}$$

Ispitaćemo njegovu stabilnost. Pod poremećenim ravnotežnim stanjem u odnosu na (11) podrazumevaćemo kretanje sistema pod dejstvom istih sila Q_μ pri početnim uslovima

$$q^{\mu}(t_0) = \delta^{\mu} ; \quad p_{\mu}(t_0) = \delta_{\mu} , \tag{12}$$

koji zadovoljavaju jednakosti

$$\left(a^{\alpha\mu}_{(\delta)}\varphi^{\alpha'}_{\alpha(\delta)}-a^{\mu\alpha'}_{(\delta)}\right)\delta_{\mu}+\varphi^{\alpha'}_{(\delta)}=0.$$

Stabilnost ravnotežnog stanja, dakle, ima karakter uslovne stabilnosti. U poremećenom kretanju u okolini ravnotežnog stanja položaj sistema možemo odrediti promenljivim

$$q^{\mu}=q^{\mu}(t;t_0,\delta^{\nu},\delta_{\nu})$$
$$p_{\mu}=p_{\mu}(t;t_0,\delta^{\nu},\delta_{\nu})$$

jer nema opasnosti od zabune budući da je neporemećeno kretanje /ravnotežno stanje/ određeno vrednostima (11). Time postižemo da za jednačine poremećenog kretanja možemo uzeti ma koje od jednačina kretanja navedene u § 1. Specijalno za sisteme sa kvazicikličnim koordinatama mogu se koristiti jednačine (32 § 1.1). No, kako ove jednačine ne sadrže sve koordinate i mogu se rešavati nezavisno od jednačina neholonomnih veza, to ćemo pomoću njih moći da ispitujemo samo stabilnost u odnosu na deo promenljivih q^{α}, p_{α} ali početni poremećaji ovih promenljivih mogu da budu proizvoljni.

Jednačine poremećenog kretanja u okolini ravnotežnog položaja mogli bismo dobiti i iz jednačina (43. § 2) stavljajući u njih da je neporemećeno kretanje određeno jednakostima

$$q^{\mu}(t)\equiv 0\,,\quad \dot{q}^{\mu}(t)\equiv 0$$

i u tom slučaju one glase

$$\frac{d\xi^{\mu}}{dt}=a^{\mu\nu}\eta_{\nu}$$

13
$$\frac{d\eta_{\mu}}{dt}=\Big[\frac{\partial Q_{\mu}}{\partial q^{\nu}}+\sum_{b=1}^{L}\mu_b\Phi_{(b)\mu\nu}-\mathcal{F}^{bc}a^{\varkappa\sigma}\Phi_{(b)\mu}\Phi_{(c)\sigma}\Big(\frac{\partial Q_{\varkappa}}{\partial q^{\nu}}+$$
$$+\sum_{d=1}^{L}\mu_d\Phi_{(d)\varkappa\nu}\Big)\Big]\xi^{\nu}+\Big[\frac{\partial Q_{\mu}}{\partial p_{\nu}}-\mathcal{F}^{bc}a^{\varkappa\sigma}\Phi_{(b)\mu}\Phi_{(c)\sigma}\frac{\partial Q_{\varkappa}}{\partial p_{\nu}}-\mathcal{F}^{bc}\Phi_{(b)\mu}R^{\nu}_{(c)}\Big]\eta_{\nu}$$

a množioci neholonomnih veza imaju vrednosti

$$\mu_b=-\sum_{c=1}^{L}\Phi^{\mu}_{(c)}\mathcal{F}^{bc}Q_{\mu}\,.$$

Jednačine neholonomnih veza su u ovom slučaju

$$\Phi_{(b)\mu}\dot{\xi}^{\mu}+R_{(b)\mu}\xi^{\mu}=0.$$

Jednačine poremećenog kretanja (13) predstavljaju sistem linearnih jednačina sa konstantnim koeficijentima čije trivijalno rešenje $\xi^{\mu}=0$, $\eta_{\mu}=0$ određuje ravnotežno stanje sistema. Stabilnost ovakvih sistema se može ispitati dobro poznatim metodama koje mi ovde nećemo navoditi. Zadržaćemo se na posmatranju jednačina poremećenog kretanja u okolini ravnotežnog položaja u obliku (23 § 1) i (32 § 1.1).

Nije teško proveriti da u slučaju kada su sile konzervativne a neholonomne veze homogene, jednačine poremećenog kretanja (23 § 1) i (32 § 1.1) imaju prve integrale

(14) $$T+\Pi=\text{const.}$$

odnosno

(15) $$\tilde{T}+\Pi=\text{const.}$$

3. Stavovi o stabilnosti i nestabilnosti ravnotežnog stanja

Uočimo ravnotežno stanje, određeno jednakostima (11) čl. 2 § 5. Za neholonomne veze ćemo pretpostaviti da su homogene i te pretpostavke ćemo se držati do kraja ovog paragrafa ne naglašavajući to posebno.

Dovoljne uslove da ravnotežno stanje bude stabilno daje

STAV 5. Ako postoji pozitivno definitna u V_n funkcija

$$W=W(q^1,\dots,q^n)\in C_2^{(1)}(\mathcal{H})$$
$$\mathcal{H}=\{|q^{\mu}|<h=\text{const.}\}$$

za koju je izraz

$$a^{\mu\nu}\left(Q_{\mu}+\frac{\partial W}{\partial q^{\mu}}\right)p_{\nu}$$

formiran u smislu jednačina poremećenog kretanja (23 § 1)

a/ negativan ili identički jednak nuli - ravnotežno stanje je stabilno.

b/ negativno definitan - ravnotežno stanje je asimptotski stabilno.

D o k a z. Izaberimo u faznom prostoru V_{2n} funkciju V na sledeći način

$$V = T + W \tag{16}$$

gde je T kinetička energija sistema

$$T = \frac{1}{2} a^{\mu\nu} p_\mu p_\nu .$$

Funkcija V očigledno zadovoljava uslove

$1^\circ \quad T + W \geq 0$

$2^\circ \quad T + W = 0 \Leftrightarrow q^1 = \cdots = q^n = 0 ; \; p_1 = \cdots = p_n = 0 ,$

pa je pozitivno definitna. Pošto ne zavisi eksplicitno od vremena, to je uslov

$$V \underset{t}{\Rightarrow} 0 \quad (q^\mu \to 0 ; \; \mu = 1, \ldots, n),$$

trivijalno zadovoljen. Potražićemo promenu ove funkcije duž proizvoljnog rešenja jednačina poremećenog kretanja. Diferencirajući je po vremenu, dobijamo

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} a^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + W\right) = \frac{D}{dt}\left(\frac{1}{2} a^{\mu\nu} p_\mu p_\nu\right) + \frac{dW}{dt} =$$

$$= a^{\mu\nu} \frac{Dp_\mu}{dt} p_\nu + \frac{\partial W}{\partial q^\nu} \dot{q}^\nu ,$$

i pošto se ovaj izraz sastavi u smislu jednačina poremećenog kretanja (23 § 1), dobija se

$$\frac{dV}{dt} = a^{\mu\nu}\left[P_\mu - \sum_{b,c=1}^{k} F^{bc} \Phi_{(b)\mu}\left(\frac{D\Phi^\sigma_{(c)}}{dt} + \frac{\partial \Phi_{(c)}}{\partial q^\nu} a^{\nu\sigma}\right) p_\sigma + \frac{\partial W}{\partial q^\mu}\right] p_\nu .$$

Uzmimo sada u obzir i jednačine neholonomnih veza (5 § 1) /vodeći računa o tome da smo pretpostavili da su homogene/, kao i relacije (21) pa ćemo imati

(17) $$\frac{dV}{dt} = a^{\mu\nu}\left(Q_\mu + \frac{\partial W}{\partial q^\mu}\right)p_\nu .$$

a/ Neka su zadovoljeni uslovi stava u slučaju a/. tada funkcija V, prema (17), ima osobinu

$$\frac{dV}{dt} \leq 0$$

i zadovoljava sve uslove kao i odgovarajuća funkcija V u stavu 1, odakle sledi da je trivijalno rešenje jednačina poremećenog kretanja stabilno.

b/ Ako su zadovoljeni uslovi stava pod b/, iz (17) vidimo da je

$$\frac{dV}{dt}$$

negativno definitna funkcija pa je, na osnovu stava 2, trivijalno rešenje jednačina poremećenog kretanja stabilno asimptotski.

Dokaz je završen.

NAPOMENA. Stav 5 se može primeniti i u slučaju kad neholonomne veze nisu homogene u odnosu na generalisane impuse ako je zadovoljen dopunski uslov

(18) $$\sum_{b,c=1}^{L}\left(Q_\sigma \Phi^\sigma_{(c)} + \frac{D\Phi^\sigma_{(c)}}{dt}p_\sigma + \frac{\partial \Phi_{(c)}}{\partial q^\nu}a^{\nu\sigma}p_\sigma\right)\Phi_{(b)}\mathcal{F}^{bc} = 0.$$

Tada je, naime, izvod funkcije V po vremenu, sastavljen u smislu jednačina poremećenog kretanja,

$$\frac{dV}{dt} = a^{\mu\nu}\left(Q_\mu + \frac{\partial W}{\partial q^\mu}\right)p_\nu + \sum_{b,c=1}^{L} Q_\sigma \Phi^\sigma_{(c)}\Phi_{(b)}\mathcal{F}^{bc} + \sum_{b,c=1}^{L} p_\sigma\left(\frac{D\Phi^\sigma_{(c)}}{dt} + \frac{\partial \Phi_{(c)}}{\partial q^\nu}a^{\nu\sigma}\right)\Phi_{(b)}\mathcal{F}^{bc}$$

odakle je jasno da ova napomena važi.

Primetimo da pod uslovima stava 5 neholonomne veze nemaju nikakvog uticaja na stabilnost ravnotežnog položaja ako je on stabilan. To znači da stabilan ravnotežni položaj holonomnog sistema neće biti poremećen ako se kretanje ograniči neholonomnim vezama. Podsetimo se da smo u čl. 1

videli da ravnotežni položaj holonomnog sistema ostaje položaj ravnoteže sistema i pri delovanju neholonomnih veza. Sada vidimo da ove veze nemaju uticaja na stabilan ravnotežni položaj.*) Stav 5 se bezuslovno može primeniti i na holonomne sisteme i u tom slučaju je identičan sa poznatim stavom izvedenim za holonomne sisteme u [34].

Neholonomni sistemi mogu imati, međutim, stabilne ravnotežne položaje i kad uslovi stava 5 nisu zadovoljeni. Pokazaćemo to na sistemu sa kvazicikličnim koordinatama. Iz jednačina kretanja (32 § 1.1) dobijamo da je ravnotežna mnogostrukost O_r u ovom slučaju određena jednakostima

$$\tilde{Q}_\alpha = 0.$$

Iz ovih m jednačina, pod uslovom da su nezavisne, možemo izračunati nepoznate

$$q_o^1, \dots, q_o^m.$$

Time ravnotežni položaj sistema, naravno, nije u potpunosti određen jer se vrednosti ostalih koordinata mogu izabrati proizvoljno. Neka je neporemećeno ravnotežno stanje dato sledećim jednakostima

$$q_o^1 = \dots = q_o^m = 0; \quad \tilde{p} = \dots = \tilde{p}_1 = 0.$$

Stabilnost ovog ravnotežnog stanja ispitaćemo u odnosu na promenljive $q^\alpha, \tilde{p}_{\bar{\alpha}}$. Dovoljne uslove da ravnotežno stanje sistema sa kvazicikličnim koordinatama bude stabilno u odnosu na deo promenljivih daje

STAV 6. Ako u prostoru V_m postoji pozitivno definitna skalarna funkcija

$$W = W(q^1, \dots, q^m) \in C_q^{(1)}(\mathcal{H})$$
$$\mathcal{H} = \{ |q^\alpha| < h = const. \; |q^{\alpha'}| < +\infty \}$$

za koju je izraz

---

* Ali stabilnost u njihovom prisustvu postaje uslovna

$$\tilde{\mathcal{J}} = b^{\alpha\beta}(Q_\alpha + Q_{\alpha'}\varphi_\alpha^{\alpha'} + \frac{\partial W}{\partial q^\alpha})\tilde{p}_\beta$$

formiran u smislu jednačina poremećenog kretanja u okolini ravnotežnog položaja (32 § 1.1),

a/ negativan ili identički jednak nuli, ravnotežno stanje je stabilno u odnosu na promenljive $q^\alpha, \tilde{p}_\alpha$.

b/ negativno definitan, ravnotežno stanje je asimptotski stabilno u odnosu na promenljive $q^\alpha, \tilde{p}_\alpha$.

D o k a z. Analogno dokazu prethodnog stava, konstruisaćemo funkciju

$$V = \tilde{T} + W$$

gde je, sada, kinetička energija $\tilde{T}$ izražena pomoću generalisanih impulsa $\tilde{p}_\alpha$. Jasno je da je funkcija V pozitivno definitna i da je

$$V \underset{t}{\rightrightarrows} 0\,,\; q^\alpha \to 0\,,\; \alpha = 1,\dots,m.$$

Izvod V po vremenu, sastavljen u smislu jednačina poremećenog kretanja, je

$$
\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2}b^{\alpha\beta}\tilde{p}_\alpha\tilde{p}_\beta + W) = \frac{D^b}{dt}(\tfrac{1}{2}b^{\alpha\beta}\tilde{p}_\alpha\tilde{p}_\beta) + \frac{dW}{dt} = \\
&= b^{\alpha\beta}(\tilde{Q}_\alpha + \frac{\partial W}{\partial q^\alpha})\tilde{p}_\beta = b^{\alpha\beta}(Q_\alpha + Q_{\alpha'}\varphi_\alpha^{\alpha'} + \frac{\partial W}{\partial q^\alpha})\tilde{p}_\beta
\end{aligned}
\tag{19}
$$

a/ Ako je izraz $\tilde{\mathcal{J}}$ negativan ili identički jednak nuli, iz (19) sledi da je funkcija V ne rastuća. Otuda proizilazi, kako smo to u stavu 1 videli, da je proizvoljno rešenje jednačina poremećenog kretanja u kugli $K[0,\varepsilon] \subset V_m$ za svako t $\geqslant$ t_0 ako je u početnom trenutku t_0 bilo u kugli pa je trivijalno rešenje stabilno u odnosu na promenljive $q^\alpha, \tilde{p}_\alpha$.

b/ Ako je izraz $\tilde{\mathcal{J}}$ negativno definitan, na isti način bismo, na osnovu stava 2, mogli da izvedemo zaključak da je trivijalno rešenje jednačina poremećenog kretanja asimptotski stabilno.

Stav je dokazan.

Dovoljne uslove da ravnotežno stanje bude nestabilno daju sledeća dva stava.

STAV 7. Ako postoji skalarna funkcija

$$W = W(q^1, \dots, q^n) \in C_q^{(1)}(\mathcal{H})$$
$$\mathcal{H} = \{ q^\nu : |q^\nu| < h = const. \}$$

koja je ograničena u $\mathcal{H}$ i u proizvoljnoj okolini koordinatnog početka ima negativne vrednosti, takva da izrazi J_1 i J_2 sastavljeni u smislu jednačina poremećenog kretanja imaju osobine:

1° $$J_1 = a^{\mu\nu}\left(Q_\mu + \frac{\partial W}{\partial q^\mu}\right)p_\nu$$

negativan ili identički jednak nuli,

2° $$J_2 = q^\mu\left(Q_\mu - Q_\nu \sum_{b,c=1}^{k} \Phi_{(b)\mu} \Phi^\nu_{(c)} F^{cb}\right)$$

pozitivan,

- tada je trivijalno rešenje jednačina poremećenog kretanja nestabilno.

D o k a z. Uočimo funkciju

$$V = V(q^1, \dots, q^n; p_1, \dots, p_n)$$

konstruisanu na sledeći način

(20) $$V = -(T + W) q^\mu p_\mu$$

gde je T kinetička energija sistema izražene pomoću generalisanih impulsa

$$T = \frac{1}{2} a^{\mu\nu} p_\mu p_\nu .$$

Pošto je T pozitivno definitna kvadratna forma generalisanih impulsa a funkcija W ima u proizvoljnoj okolini koordinatnog početka negativne vrednosti i neprekidna je, to postoji oblast $D \subset V_{2n}$ u kojoj je

(21) $$T + W < 0 \quad \& \quad q^\mu p_\mu > 0.$$

Na delu granice oblasti D je $V = 0$ a koordinatni početak pripada tom delu granice. Potražimo promenu funkcije (20) duž proizvoljnog rešenja sistema (23 § 1). Imaćemo

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[(T+W)q^{\sigma}p_{\sigma}\right] =$$
$$= -\frac{d}{dt}(a^{\mu\nu}p_{\mu}p_{\nu}+W)q^{\sigma}p_{\sigma} - (T+W)\frac{d}{dt}(q^{\sigma}p_{\sigma}).$$

Ako u ovom izrazu izvod po vremenu zamenimo apsolutnim izvodom, što je moguće jer se radi o skalarnim invarijantama, dobićemo

$$\frac{dV}{dt} = -\left(a^{\mu\nu}p_{\nu}\frac{Dp_{\mu}}{dt} + \nabla_{\mu}W\frac{dq^{\mu}}{dt}\right) -$$
$$- (T+W)\left(p_{\sigma}\frac{dq^{\sigma}}{dt} + \left\{ {\sigma \atop \mu\nu} \right\} q^{\nu}p_{\sigma}\frac{dq^{\mu}}{dt} + q^{\sigma}\frac{Dp_{\sigma}}{dt}\right),$$

i pošto se ovaj izraz sastavi u smislu jednačina (23 § 1), biće

$$\frac{dV}{dt} = -\left[a^{\mu\nu}\left(P_{\mu} + \frac{\partial W}{\partial q^{\mu}}\right)p_{\nu}\right]q^{\sigma}p_{\sigma} -$$
$$(22) \qquad - (T+W)\Big[\Big(a^{\sigma\nu} + \left\{ {\sigma \atop \mu\tau} \right\} a^{\mu\nu}q^{\tau} - \sum_{b,c=1}^{L} F^{bc}\Phi_{(b)\lambda}a^{\mu\nu}q^{\lambda}\cdot$$
$$\cdot \nabla_{\mu}\Phi^{\sigma}_{(c)}\Big)p_{\nu}p_{\sigma} + q^{\sigma}p_{\sigma}\Big]$$

Funkcije

$$a^{\mu\nu} = a^{\mu\nu}(q^1, \dots, q^n)$$

su koeficijenti pozitivno definitne kvadratne forme T. Otuda, prema Sylvester-ovom kriterijumu, sledi da su svi dijagonalni glavni minori determinante

$$\det(a^{\mu\nu})^{n}_{\mu,\nu=1}$$

pozitivan za sve vrednosti q^{μ}; prema tome ovu osobinu oni imaju i u koordinatnom početku. Posmatrajmo, sada, izraz

$$(23) \qquad A^{\sigma\nu} = a^{\sigma\nu} + \left\{ {\sigma \atop \mu\tau} \right\} a^{\mu\nu}q^{\tau} - \sum_{b,c=1}^{L} F^{bc}\Phi_{(b)\lambda}(\nabla_{\mu}\Phi^{\sigma}_{(c)})a^{\mu\nu}q^{\lambda}.$$

Za $q^{\mu} = 0$ on se svodi na $a^{\sigma\nu}$ i pretstavlja koeficijente pozitivno definitne kvadratne forme. Birajući q^{μ} dovoljno malim po apsolutnim vrednostima, možemo postići da glavni dijagonalni minori determinante det $(A^{\sigma\nu})$ budu takođe pozitivni u nekoj okolini koordinatnog početka. Znači, postoji okolina koordinatnog početka u kojoj je kvadratna forma

$$A^{\sigma\nu} p_\sigma p_\nu$$

pozitivno definitna.

Izraz (22) možemo, s obzirom na (23) i (22 § 1) napisati u obliku

$$\frac{dV}{dt} = -\left[a^{\mu\nu}\left(Q_\mu + \frac{\partial W}{\partial q^\mu}\right)p_\nu\right] q^\sigma p_\sigma -$$
$$-(T+W)\left[A^{\sigma\nu} p_\sigma p_\nu + q^\sigma\left(Q_\sigma - \sum_{b,c=1}^{L} Q_\mu \Phi^\mu_{(b)} \Phi_{(c)\sigma} F^{bc}\right)\right]$$

odakle, na osnovu pretpostavki 1° i 2° stava, zaključujemo da u oblasti D postoje vrednosti promenljivih za koje je

$$\frac{dV}{dt} > 0. \tag{24}$$

Iz ove nejednakosti sledi, da se za prizvoljno $\delta > 0$ može naći vektor

$$\vec{z}_0 = (q_0^1, \ldots, q_0^n; p_{10}, \ldots, p_{n0})$$

takav da je $\|\vec{z}_0\| < \delta$, i da je u tački koju određuje zadovoljena nejednakost (24). Analogno dokazu stava 3, mogli bismo i ovde pokazati da rešenje jednačina (23 § 1) sa početnim vrednostima $q^\mu(t_0) = q_0^\mu$; $p_\mu(t_0) = p_{\mu 0}$ izlazi iz kugle $K = K[0, \varepsilon]$ ma kako malo δ izabrali. Otuda sledi da je trivijalno rešenje jednačina poremećenog kretanja nestabilno, što je i trebalo dokazati.

Za sisteme sa kvazicikličnim koordinatama važi

STAV 8. Ako postoji skalarna funkcija

$$W = W(q^1, \ldots, q^m) \in C_q^{(1)}(\mathcal{H})$$
$$\mathcal{H} = \{q^i : |q^i| < l = const.\}$$

koja je ograničena u $\mathcal{H}$ i u proizvoljnoj okolini koordinatnog početka ima negativne vrednosti, takva da je

1° izraz

$$J_1 = b^{\alpha\beta}(Q_\alpha + Q_{\alpha'}\varphi^{\alpha'}_\alpha + \frac{\partial W}{\partial q^\alpha})\tilde{p}_\beta$$

sastavljen u smislu jednačina (32 § 1) negativan ili identički jednak nuli i

2° izraz

$$J_2 = q^\alpha(Q_\alpha + \varphi^{\alpha'}_\alpha Q_{\alpha'})$$

sastavljen u smislu istih jednačina, pozitivan

– tada je trivijalno rešenje jednačina poremećenog kretanja nestabilno.

D o k a z. Da bismo dokazali ovaj stav dovoljno je pokazati da postoji skalarna funkcija

$$V = V(q^1,\dots,q^m, \tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_m)$$

čiji je izvod po vremenu sastavljen u smislu jednačina poremećenog kretanja pozitivan u oblasti

$$D = \{\tilde{T} + W < 0 \ , q^\alpha \tilde{p}_\alpha\}$$

pošto bi u tom slučaju situacija bila potpuno analogna sa prethodnim stavom. Izaberimo funkciju V u obliku

$$V = -(\tilde{T} + W)q^\alpha \tilde{p}_\alpha .$$

Njen izvod po vremenu, sastavljen u smislu jednačina (32 § 1), je

$$\frac{dV}{dt} = -\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}b^{\alpha\beta}\tilde{p}_\alpha\tilde{p}_\beta + W\right)\right]q^\gamma\tilde{p}_\gamma - (\tilde{T}+W)\frac{d}{dt}(q^\alpha\tilde{p}_\alpha) =$$

$$= -\left(b^{\alpha\beta}\tilde{p}_\alpha\frac{D^b\tilde{p}_\beta}{dt} + \frac{\partial W}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha\right)q^\gamma\tilde{p}_\gamma - (\tilde{T}+W)\Big[(\dot{q}^\alpha +$$

$$\left\{{\alpha \atop \beta\gamma}\right\}q^\beta\dot{q}^\gamma)\tilde{p}_\alpha + q^\alpha\frac{D^b\tilde{p}_\alpha}{dt}\Big] =$$

$$= -\left[b^{\alpha\beta}(Q_\alpha + Q_{\alpha'}\varphi^{\alpha'}_\alpha + \frac{\partial W}{\partial q^\alpha})\tilde{p}_\beta\right]q^\gamma\tilde{p}_\gamma - (\tilde{T}+W)\cdot$$

$$\cdot\Big[(b^{\alpha\beta} + b^{\gamma\alpha}\left\{{\beta \atop \delta\gamma}\right\}q^\delta + \Theta^\beta_{\gamma\delta}a^{\delta\alpha}q^\gamma)\tilde{p}_\alpha\tilde{p}_\beta +$$

$$+ q^\alpha(Q_\alpha + Q_{\alpha'}\varphi^{\alpha'}_\alpha)\Big].$$

Na isti način kao i u prethodnom stavu, može se pokazati da postoje vrednosti promenljivih q^α, p_α u proizvoljnoj okolini koordinatnog početka za koje je

$$\frac{dV}{dt} > 0$$

na osnovu čega zaključujemo da trivijalno rešenje jednačina poremećenog kretanja u okolini ravnotežnog ploža ja je nestabilno, što je i trebalo dokazati.

4. Stabilnost ravnotežnog stanja konzervativnih sistema

Razmotrimo stabilnost ravnotežnog stanja neholonomnog konzervativnog sistema, kao primer na kome ćemo ilustrovati stavove iz prethodnog člana. Neka je potencijalna energija ovog sistema data funkcijom (4) i neka ravnotežna mnogostrukost O_r, koju određuju jednačine (5), sadrži tačku $q_0^1 = \cdots = q^n = 0$. Ispitaćemo stabilnost ravnotežnog stanja određenog jednakostima (11).

Primetimo, najpre, da zbog toga što u ovom slučaju važe prvi integrali (14) ili (15), ravnotežno stanje ne može da bude asimptotski stabilno.

Sada ćemo pokazati da poznata Lagrange-eva teorema o stabilnosti ravnotežnog stanja holonomnih sistema važi, pod određenim uslovima, i za neholonomne sisteme i da se može formulisati kao

POSLEDICA STAVA 5. Ako potencijalna energija (4) ima u nekom položaju neholonomnog konzervativnog sistema strogi minimum, onda je to položaj stabilne ravnoteže.

Zaista, iz uslova da potencijalna energija ima strogi minimum u nekom položaju sistema, iz (5) sledi da je to ravnotežni položaj. Zapažamo da je to izolovani ravnotežni položaj koji nije uslovljen delovanjem neholonomnih veza. Ako funkciju W izaberemo u obliku

(25) $$W = \Pi(q^1,\dots,q^n)$$

i izračunamo izraz $\mathcal{J}$;

$$\mathcal{J} = a^{\mu\nu}\Big(Q_\mu + \frac{\partial W}{\partial q^\mu}\Big)p_\nu = a^{\mu\nu}\Big(-\frac{\partial \Pi}{\partial q^\mu} + \frac{\partial \Pi}{\partial q^\mu}\Big)p_\nu$$

vidimo da funkcija (25) zadovoljava uslove stava 5 a/, odakle sledi ova posledica. Prema tome, neholonomne veze ne remete stabilnost stabilnog ravnotežnog položaja konzervativnog mehaničkog sistema.

Iz (5) je, međutim, očigledno da posmatrani sistem može imati ravnotežni položaj i u tačkama u kojima potencijalna energija nema strogi minimum odnosno nema uopšte stacionarne vrednosti. Ako je prethodni zaključak i mogao izgledati trivijalnim, interesantno je videti mogu li i ovi ravnotežni položaji da budu stabilni; specijalno, šta se može reći o stabilnosti ravnotežnog položaja kada potencijalna energija ima linearne članove. Jedan odgovor na ova pitanja možemo dobiti primenom stava 6. Mi ćemo ovde ispitati jedan takav slučaj a na isti način mogu se ispitati i njemu slični.

Neka potencijalna energija sistema zavisi od promenljivih $q^1,\dots,q^n$ a generalisane sile zavise samo od dela tih promenljivih $q^1,\dots,q^m$, $(m < n)$. Videli smo u čl. 1 ovog paragrafa da se potencijalna energija može razviti u red (10), koji u ovom slučaju ima oblik

(26) $$\Pi = \Pi_{\alpha'} q^{\alpha'} + \frac{1}{2}\Pi_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta + \Pi^*$$

ili se transformacijom promenljivih može na njega dovesti. Pošto iz uslova ravnoteže sistema dobijamo da je

$$\varphi^{\alpha'}_{\alpha 0} \equiv \varphi^{\alpha'}_{\alpha}(0,\dots,0) = 0$$

to za koeficijente neholonomnih veza, razvijene u red u okolini koordinatnog početka, dobijamo

(27) $$\varphi^{\alpha'}_{\alpha} = \varphi^{\alpha'}_{\alpha\beta} q^\beta + \overset{*}{\varphi}{}^{\alpha'}_{\alpha}$$

gde su

$$\varphi^{\alpha'}_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial \varphi^{\alpha'}_{\alpha}}{\partial q^{\beta}}\right)_{q=0}$$

a Π^* i $\overset{*}{\varphi}{}^{\alpha'}_{\alpha}$ su ostaci u redovima (26) odnosno (27).
Uočimo funkciju

$$W = \frac{1}{2}\Pi_{\alpha\beta} q^{\alpha} q^{\beta}$$

i zamenimo je u izraz

$$\tilde{J} = b^{\alpha\beta}(Q_{\alpha} + Q_{\alpha'}\varphi^{\alpha'}_{\alpha} + \frac{\partial W}{\partial q^{\alpha}})\tilde{p}_{\beta}.$$

Dobićemo

$$\tilde{J} = b^{\alpha\beta}(-\frac{\partial \Pi^*}{\partial q^{\alpha}} - \Pi_{\alpha'}\varphi^{\alpha'}_{\alpha\gamma} q^{\gamma} - \Pi_{\alpha'}\overset{*}{\varphi}{}^{\alpha'}_{\alpha})\tilde{p}_{\beta}. \tag{28}$$

Na osnovu (28) i stava 6 možemo izvesti sledeći

ZAKLJUČAK: Ako neholonomni sistem sa kvazicikličnim koordinatama ima ravnotežni položaj u kome je $\varphi^{\alpha'}_{\alpha\gamma} = 0$ a

$$\Pi_{\alpha\beta} \equiv \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^{\alpha} \partial q^{\beta}}\right)_{q=0}$$

su koeficijenti pozitivno definitne kvadratne forme, onda je ravnotežno stanje stabilno u odnosu na promenljive q^{α}, $\tilde{p}_{\alpha}$.

Ovde vidimo još jedan slučaj kad neholonomne veze nemaju uticaja na stabilnost stabilnog ravnotežmog stanja.

Napomena. U opštem slučaju,kada navedeni uslovi nisu ispunjeni, neholonomne veze imaju suštinski uticaj na stabilnost ravnotežnog stanja, što je prvi zapazio Bottema /"On the small vibrations of nou - holonomic systems" Kon. Nederl. Akad. v. Wet. te Amsterdam, Proceediugs, v 52, N 8 1949./

Pređimo sada na ispitivanje nekih uslova pod kojima je ravnotežno stanje neholonomnog konzervativnog sistema nestabilno. Pođimo od slučaja kad potencijalna energija zavisi od svih koordinata q^{μ}. Izaberimo funkciju W u obliku

$$W = \Pi(q^1, \cdots, q^n)$$

i izračunajmo izraze $\mathcal{J}_1$ i $\mathcal{J}_2$ iz stava 7; dobićemo

$$
(29) \qquad \begin{aligned}
\mathcal{J}_1 &= a^{\mu\nu}\left(-\frac{\partial\Pi}{\partial q^{\mu}} + \frac{\partial\Pi}{\partial q^{\mu}}\right)p_\nu = 0, \\
\mathcal{J}_2 &= q^{\mu}\left(-\frac{\partial\Pi}{\partial q^{\mu}} + \frac{\partial\Pi}{\partial q^{\nu}}\sum_{b,c=1}^{L}\Phi_{(b)\mu}\Phi^{\nu}_{(c)}F^{cb}\right).
\end{aligned}
$$

Na osnovu stava 7, s obzirom na (29), možemo izvesti sledeći

ZAKLJUČAK. Ako u proizvolnoj okolini ravnotežnog položaja konzervativnog neholonomnog sistema potencijalna energija ima negativne vrednosti a izraz

$$
q^{\mu}\left(-\frac{\partial\Pi}{\partial q^{\mu}} + \frac{\partial\Pi}{\partial q^{\nu}}\sum_{b,c=1}^{L}\Phi_{(b)\mu}\Phi^{\nu}_{(c)}F^{bc}\right)
$$

je pozitivan, onda je taj ravnotežni položaj nestabilan.

Zapažamo da nestabilan ravnotežni položaj konzervativnog holonomnog sistema ne mora ostati nestabilnim ako se kretanje ograniči neholonomnim vezama.

Pogledajmo, šta se još može reći o nestabilnosti ravnotežnog stanja kad potencijalna energija ne zavisi od svih promenljivih. Neka je

$$
\Pi = \Pi(q^1,\dots,q^m)
$$

Izaberimo funkciju W u obliku $W = \Pi$ i izračunajmo izraze $\mathcal{J}_1$ i $\mathcal{J}_2$ koje smo definisali u stavu 8:

$$
(30) \qquad \begin{aligned}
\mathcal{J}_1 &= b^{\alpha\beta}\left(-\frac{\partial\Pi}{\partial q^{\alpha}} - \frac{\partial\Pi}{\partial q^{\alpha'}}\varphi^{\alpha'}_{\alpha} + \frac{\partial W}{\partial q^{\alpha}}\right)\dot{p}_\beta = 0 \\
\mathcal{J}_2 &= q^{\alpha}\left(-\frac{\partial\Pi}{\partial q^{\alpha}} - \frac{\partial\Pi}{\partial q^{\alpha'}}\varphi^{\alpha'}_{\alpha}\right) = -\frac{\partial\Pi}{\partial q^{\alpha}}q^{\alpha}
\end{aligned}
$$

Na osnovu stava 8, iz (30) možemo izvesti

ZAKLJUČAK: Neka potencijalna energija konzervativnog neholonomnog sistema zavisi samo od koordinata $q^1,\dots,$ q^m i može se izraziti u obliku

$$
\Pi = \Pi_{\pi} + \Pi_{\pi+1} + \cdots
$$

gde su Π_{π} homogene forme stepena π. Ravnotežno stanje (11) je nestabilno ako je znak izrazâ Π i $\pi\Pi_{\pi} + (\pi+1)\Pi_{\pi+1} + \cdots$ u proizvoljnoj okolini koordinatnog početka određen znakom izraza Π_{π}.

5. Uticaj disipativnih i giroskopskih sila na stabilnost ravnotežnog stanja

Posmatrajmo neholonomni mehanički sistem koji se kreće pod uticajem potencijalnih sila

$$Q_{\mu}^{(1)} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^{\mu}} \tag{31}$$

i nepotencijalnih, koje linearno zavise od generalisanih brzina i za koje ćemo smatrati da su otporne

$$Q_{\mu}^{(2)} = -h_{\mu\nu}\dot{q}^{\nu}, \quad h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(q^1, \dots, q^n). \tag{32}$$

Rastavljajući matricu koeficijenata $h_{\mu\nu}$ na simetričnan i nesimetričan deo

$$b_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\mu\nu} + h_{\nu\mu}) \; ; \; g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\mu\nu} - h_{\nu\mu})$$

sile $Q_{\mu}^{(2)}$ možemo predstaviti u obliku zbira disipativnih i giroskopskih sila

$$Q_{\mu}^{(2)} = -b_{\mu\nu}\dot{q}^{\nu} - g_{\mu\nu}\dot{q}^{\nu}. \tag{32'}$$

U ravnotežnom stanju sistema (11) je,

$$Q_{\mu}^{(2)} = 0 \quad \text{za } \mu = 1, \dots, n$$

pa u poremećenom kretanju za generalisane sile možemo zadržati oznake

$$Q_{\mu} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^{\mu}} - b_{\mu\nu}\dot{q}^{\nu} - g_{\mu\nu}\dot{q}^{\nu}. \tag{33}$$

Uticaj disipativnih i giroskopskih sila na stabilan ravnotežni položaj neholonomnog sistema može se videti iz sledećih razmatranja. Sastavimo izraz

$$\gamma = a^{\mu\nu}\left(Q_{\mu} + \frac{\partial W}{\partial q^{\mu}}\right)p_{\nu}$$

u kome su generalisane sile date jednakošću (33) i u kome je $W = \Pi$,

$$\gamma = -2\Phi = -f_{\mu\nu}\dot{q}^{\mu}\dot{q}^{\nu},$$

gde smo sa Φ obeležili disipativnu Rayleigh-evu funkciju. Odavde možemo zaključiti:

Disipativne i giroskopske sile ne remete stabilnost stabilnog ravnotežnog položaja neholonomnog konzervativnog sistema. Ako su disipativne sile sa potpunom disipacijom, stabilan ravnotežni položaj učvršćuju do asimptotske stabilnosti.

Prvi deo ovog tvrđenja sledi iz stava 5 a/, i to je sasvim jasno. Drugi deo sledi iz stava 5 b/,što ćemo objasniti. Ako su disipativne sile sa potpunom disipacijom, onda je funkcija Φ pozitivno definitna forma generalisanih brzina pa može biti jednaka nuli samo ako su sve generalisane brzine $\dot{q}^{\mu}$ jednake nuli. Međutim, sistem može ostati u tom položaju samo ako su istovremeno i sve generalisane koordinate jednake nuli, tj. ako je u ravnotežnom stanju. Prema tome, sve dok sisten ne dođe u ravnotežno stanje, na nje će delovati disipativne sile koje ga asimptotski stabilizuju.

Lako je pokazati da se ovaj zaključak može preneti i na sisteme stabilne u odnosu na deo promenljivih. Kao primer,uočimo sistem čija potencijalna energija zavisi samo od koordinata $q^1,\dots,q^m$ a otporne sile su linearne funkcije generalisanih brzina $\dot{q}^1,\dots,\dot{q}^m$. Primenjujući stav 6, dobijamo

$$b^{\alpha\beta}\left(-\frac{\partial\Pi}{\partial q^{\alpha}} - f_{\alpha\gamma}\dot{q}^{\gamma} - g_{\alpha\gamma}\dot{q}^{\gamma} + \frac{\partial\Pi}{\partial q^{\alpha}}\right)\hat{f}_{\beta} = -2\Phi.$$

Prema tome, ako je ravnotežno stanje sistema stabilno u odnosu na deo promenljivih $q^1,\dots,q^m,\dot{q}^1,\dots,\dot{q}^m$ pri dejstvu samo konzervativnih sila, stabilnost se neće poremetiti dodavanjem disipativnih i giroskopskih sila. Ako je disipacija potpuna po promenljivim $\dot{q}^{\alpha}$, ravnotežno stanje će biti asimptotski stabilno u odnosu na promanljive q^{α}, $\dot{q}^{\alpha}$. Što se tiče ostalih promenljivih, o njima možemo nešto reći na osnovu posmatranja neholonomnih veza. Pošto je

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{q}^{\alpha'} = \lim_{t\to+\infty} \varphi_{\alpha}^{\alpha'} \dot{q}^{\alpha} = 0$$

možemo reći da je sistem stabilan i u odnosu na promenljive $\dot{q}^{\alpha'}$ dok koordinate $q^{\alpha'}$ mogu odstupati neograničeno od svojih početnih vrednosti. Sistem se, dakle, zaustavlja u nekom novom položaju na ravnotežnoj mnogostrukosti.

Svi zaključci do kojih smo došli u ovom članu su poznati u literaturi ali smo ih ovde navodili da bismo ilustrovali primenu prethodno izvedenih stavova.

L I T E R A T U R A

[1] S. Aljančić: Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Beograd 1968.

[2] T. P. Anđelić; Tenzorski račun, Beograd 1967.

[3] T. Anđelić i R. Stojanović: Racionalna mehanika, Beograd 1966.

[4] Е. А. Барабашин: Функции Ляпунова, Москва 1970.

[5] A. Bilimović: Racionalna mehanika II, Beograd 1951.

[6] G. Hamel: Theoretische Mechanik, Berlin 1949.

[7] Н. Г. Четаев: Устойчивость движения, Москва 1962.

[8] Б. П. Демидович: Лекции по математической теории устойчивости, Москва 1967.

[9] В. В. Добронравов: Основи механики неголономных систем, Москва, 1970.

[10] F. R. Gantmaher, Analitička mehanika /prevod sa ruskog/, Beograd 1965.

[11] А. И. Лурье; Аналитическая механика, Москва 1961.

[12] А. М. Ляпунов: Собрание сочинений, том 2, Москва 1956.

[13] И. Г. Малкин: Теория устойчивости движения, Москва 1966.

[14] Д. Р. Меркин; Гироскопические системы, Москва 1974.

[15] Ю. И. Неймарк и Н. А. Фуфаев: Динамика неголономных систем, Москва 1967.

[16] Л. С. Понтрягин: Обыкновение дифференциальные уравнения, Москва 1970.

[17] П. К. Рашевский; Риманова геометрия и тензорний анализ, Москва 1967.

[18] Г. Е. Шилов: Математический анализ, функции нескольких вещественых переменых, Москва 1972.

[19] E. T. Whittaker: A treatise on the analitical dinamics, Cambrige 1937.

[20] J. L. Synge: Tensoral methods in Dynamics, Toronto 1936.

*
* *

[21] Aiserman, Gntmacher: Stabilität der Gilechgewichtslage in einem nicht-holonomen System. ZAMM 1957.

[22] В. В. Добронравов: Принципи Даламбера - Лагранжа и Гёльдера и уравнения движ. мех. сист. са неголономными связамы, Сборник МЕХАНИКА № 50. Оборонгиз 1955.

[23] Ван Чжао - Лин: Об обращении теоремы Рауса ПММ т. 27. вып. 5. 1963.

[24] Ю. И. Неймарк и Н. А. Фуфаев: Об устойчивости состояний равновесия неголономных систем, Доклады АН СССР, 1965. т. 160. н. 4.

[25] А. Н. Обморшев; Колебания линейных неголономных систем около установившегося движения, Известия АН СССР, Отдел. техн. наук, механ. и машиностр. н. 5. 1961.

[26] А. С. Озиранер, В. В. Румянцев: Методи функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных, ПММ т. 36. вып. 2. 1972.

[27] Г. К. Пожарицкий: О неустойчивости движения консервативных голономных систем, ПММ т. 20. вып.3. 1956.

[28] Г. К. Пожарицкий: Об устойчивости диссипативных систем, ПММ т. 21. вып 4. 1957.

[29] В. В. Румянцев: Об устойчивости движения по отношению к части переменных, вестник МУ н. 4. 1957.

[30] В. В. Румянцев, Об устойчивости стационарных движений, ПММ т. 30, вып. 5. 1966.

[31] В. В. Румянцев: Об устойчивости движения неголономных систем, ПММ т. 31. вып 2. 1967.

[32] V. A. Vujičić: Une maniére d`obtenir les équations du mouvement a partir du principe de Gauss en coordonnés généralisées, Matematički vesnik, 1 /16/ sv. 3. , Beograd 1964.

[33] V. A. Vujičić; Uber die Stabilität der stationären Bewegungen, ZAMM, 1968. V /12/ 6.

[34] В. А. Вуйчич; Критерий об устойчивости состояния равновесия системы динамических точек,

[35] В. А. Вуйчич; Общее следствие прямого метода Ляпунова об устойчивости,

[36] В. А. Вуйчич: Общее следствие об устойчивости движения и состояния равновесия механических систем

[37] V. A. Vujičić: Covariant equations of disturbed motion of mechanical sistems, Tensor vol. 22./1971./

[38] A. Bakša: On the stability of various equilibrium and stationary motion of non-holonomic systems, Publ. Inst. math. t. 14 /28/ 1972. pp 9 - 14.

[39] A. Bakša: O optimalnoj stabilizaciji stacionarnih kretanja neholonomnih sistema, Matematički vesnik 10 /25/, Beograd 1973.

[40] A. Bakša: O optimalnoj stabilizaciji neholonomnih sistema /magistarski rad/, Beograd 1973.