MILAN GLIGORIĆ

PRILOG TEORIJI ELEKTRO-MAGNETO-MEHANIČKOG UZAJAMNOG DEJSTVA

BEOGRAD 1973

S A D R Ž A J

I U V O D 1

II MODEL DIELEKTRIČNOG KONTINUUMA SA MIKROSTRUKTUROM 5

III ELEKTROMAGNETSKO POLJE 15

III.1 OSNOVNI POJMOVI 15

III.2 MAKSVELOVE JEDNAČINE 16

III.3 ZAPREMINSKA ELEKTROMAGNETSKA SILA 19

IV PRINCIP VIRTUALNOG RADA, JEDNAČINE KRETANJA I KONSTITUTIVNE JEDNAČINE 22

V ZAKLJUČAK 53

LITERATURA 55

I UVOD

Stanje elastičnog dielektrika ne može se opisati samo pomoću njegovih mehaničkih deformacija, već i pomoću njegove električne polarizacije. Polarizacijom se definiše uzajamno dejstvo elektromagnetskog polja i elastičnog dielektrika.

Dielektrici ili izolatori su takve materije u kojima nema slobodnih električnih opterećenja ili ih ima zanemarljivo malo. Dielektrici kristalne strukture, na primer NaCl,sastoje se iz skupa raznoimenih jona koji su simetrično rasporedjeni u prostornoj rešetki. Ovde su elektroni, kako pozitivnih tako i negativnih jona kristala, čvrsto vezani s jezgrima tako da pri normalnom stanju kristala ne mogu napustiti granicu tih jona.Ako na kristalni dielektrik deluju sile električnog polja tada u njemu ne može egzistirati električna struja. Medjutim, pod dejstvom sila električnog polja pozitivni joni kristala pomere se veoma neznatno u smeru polja, a negativni - nasuprot polju. Na ovaj se način na krajevima kristalnog dielektričnog tela javljaju tzv. vezani električni naboji. Ovi naboji formiraju svoje električno polje, koje menja silu i konfiguraciju spoljašnjeg polja koje je ostvarilo ovu polarizaciju.

Za razliku od dielektrika sa kristalnom strukturom,svi drugi dielektrici (kako čvrsti, tako i tečni i gasoviti) sastoje se iz skupa odvojenih molekula. Nepostojanje slobodnih elektrona ili bilo kojih drugih naelektrisanih čestica u medjumolekularnom prostoru dielektrika obezbedjuju mu izolaciona svojstva.

Postoje dielektrici koji pod normalnim uslovima imaju električno neutralne molekule tako da se pozitivni naboji potpuno kompenzuju negativnim nabojima. Ako na takve dielektrike delu ju sile električnog polja, tada se težišta pozitivnih i negativnih električnih naboja molekula pomere. Takav molekul postaje tzv. električni dipol. U prirodi postoje i takvi dielektrici koji u prirodnom stanju sadrže dipole. Polarizacija ovih dielektrika ostvaruje se obrtanjem električnih dipola, tj. promenom njihove orijentacije u pravcu dejstva polja.

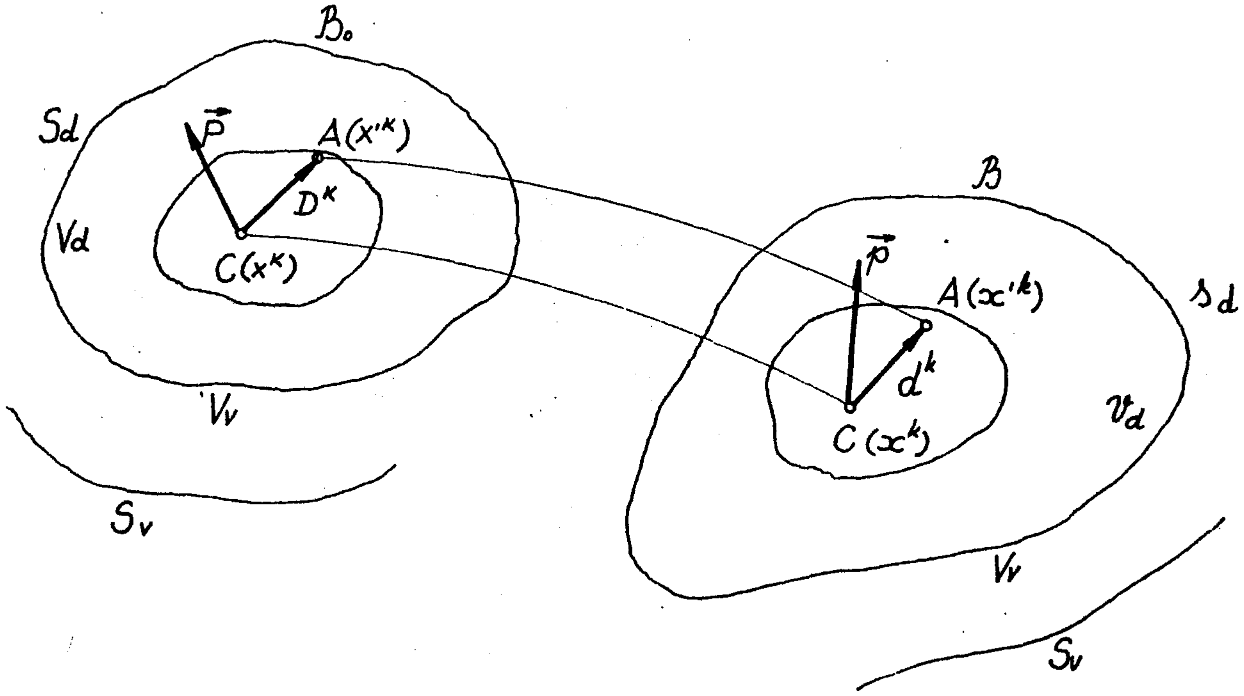
Već dugo je poznato da elastična i dielektrična svojstva čvrstih tela nisu nezavisna. Ako se odredjeni kristal, na primer kvarc, postavi u električno polje, tada će se on deformisati; u obrnutom slučaju ovakvi kristali pod uticajem deformacije proizvode električno polje. Ova pojava se naziva piezoelektrični efekt. Prva pojava naziva se direktni piezoelektrični efekt, a druga - inverzni piezoelektrični efekt ili elektrostrikcija. Kada se elastični optički izotropni dielektrični materijali, kakvi su na primer neka stakla, gume i plastične materije, deformišu, oni postaju anizotropni ili birefraktivni. Ovaj efekat je poznat pod imenom fotoelastični efekt. Optičke osobine anizotropnih materija takodje se menjaju pri deformaciji ali fenomen fotoelastičnosti kod ovakvih materijala je mnogo složeniji. Kod vrlo elastičnih materijala proces je reverzibilan u tom smislu što se materijalu vraćaju prvobitne optičke osobine kada se isti vrati u svoje nedeformisano i neopterećeno stanje. Pomenuti fenomeni kod elastičnih dielektrika blisko su medjusobno povezani. Zbog svog značaja u tehničkim primenama izučavanje ovih pojava postala su visoko specijalizovane naučne discipline.

Raniji radovi koji obradjuju elastične materijale u elektromagnetskom polju, kao što su VOIGT [1] , COKER i FILON [2] , STRATON [3] , CADY [4] , MASON [5] , ograničavaju se na infinitezimalne deformacije i simetrični tenzor napona i uglav - nom se odnose na specijalne materijale. TOUPIN [6] je prvi izložio nelinearnu teoriju elastičnih dielektrika. On obradjuje slučaj elektrostatike, pri čemu su promenljive stanja prvi gradijenti deformacije i električna polarizacija. TOUPIN [7] je kasnije nastavio ovu teoriju za pokretni elastični dielektrik, koristeći se opštim principima konzervacije mase, energije, količine kretanja i momenta količine kretanja klasične mehanike neprekidnih sredina kao i Maksvel-Lorencovim jednačinama elektromagnetskog polja u pokretnim deformabilnim polarizovanim sredinama. Pokazao je da klasične teorije piezoelektriciteta i fotoelastičnosti slede iz nelinearnih jednačina opšte teorije uz pretpostavku da su deformacije linearne i da je električno polje slabo. ERINGEN [8] je, korišćenjem principa virtualnog rada za elastični dielektrik, dobio isto što i Toupin. DIXON i ERINGEN [9] su izveli dinamičku teoriju polarnog elastičnog dielektrika u elektromagnetskom polju. Oni su pored momenta električnog dipola uzimali i kvadratni električni moment. Polja i sile u materijalu definisali su pomoću srednjih vrednosti mikroskopskih veličina. MINDLIN [10] je nastavio teoriju klasičnog linearnog piezoefekta, uzimajući u obzir gradijente polarizacije. Pri ovome on koristi Toupinov varijacioni princip i ograničava se na infinitezimalne deformacije i slabu polarizaciju. STOJANOVIĆ i GLIGORIĆ [11] su formulisali osnovne postavke za formiranje teorije elastičnih dielektrika sa stanovišta teorije inkompatibilnih deformacija. Polazeći od opšte teorije dielektričnih materijala izložili su egzaktne konstitutivne jednačine i odgovarajuće jednačine kretanja za polarni elastični dielektrik, odnosno za elastični dielektrik u kome se javljaju i naponski spregovi. GLIGORIĆ [12] je na bazi postoje-će teorije inkompatibilnih deformacija posmatrao termičke deformacije elastičnog dielektrika. Za ovaj slučaj izvedene su konsti tutivne jednačine u najopštijem obliku. U cilju linearizacije od redjene su polinomne baze za funkciju energije do drugog stepena po merama deformacije za jednu kristalnu klasu koja dopušta piezoelektrični efekat. U daljem radu [13] dejstvo elektromagnet - skog polja na električno polje dipola u dielektriku dato je pomo ću zapreminske sile, kao što je predloženo u radu [14] . Pretpostavljeno je da je unutrašnja energija funkcija prvih i drugih gradijenata deformacije i gradijenata polarizacije. Izvedene su jednačine kretanja i granični uslovi korišćenjem Hamiltonovog principa. Izložena teorija je matematički potpuno odredjena i ne javljaju se sile čiji se uticaji ne mogu razdvojiti. Isti autor je u sledećem radu [15] pokazao da su drugi gradijenti deformaci je bez uticaja na magnetsko polje i obrnuto,pa se bez ikakve gre ške pretpostavlja da unutrašnja energija ne zavisi od drugih gra dijenata deformacije. Osnovne jednačine izvedene u ovom radu nalaze se istovremeno u saglasnosti sa najnovijim rezultatima COSSERAT kontinuuma kao i teorije magnetskih tela za slučaj magnetski zasićenih materijala u kojima je intenzitet magnetskog mo menta konstantan.

U ovom radu se elastični dielektrični materijali posma traju kao kontinuum sa mikrostrukturom i to kao elastični genera lisani Kosera kontinuum. U prvom delu postavljen je model dielek tričnog kontinuuma sa mikrostrukturom. Zatim je formulisan princip virtualnog rada i iz njega dobijene jednačine kretanja i nelinearne konstitutivne jednačine, koje su za izotropne materijale i linearizovane. Korišćeni su termini uobičajeni u teoriji Kosera kontinuuma i uobičajene oznake teorije dvostrukih tenzo - rskih polja.

II MODEL DIELEKTRIČNOG KONTINUUMA SA MIKROSTRUKTUROM

Neka se dielektrično telo zapremine V_d ograničeno zatvorenom površinom S_d u trenutku vremena t_0 nalazi u početnoj-nedeformisanoj konfiguraciji $\mathcal{B}_0$, okružene praznim prostorom (vakuumom) zapremine V_v i spoljašnje površine S_v. U deformisanoj konfiguraciji $\mathcal{B}$, koja odgovara trenutku vremena $t > t_0$, telo će imati zapreminu v_d ograničenu zatvorenom površinom s_d. Makroelement dV tela u nedeformisanoj konfiguraciji $\mathcal{B}_0$ biće dv u deformisanoj konfiguraciji $\mathcal{B}$.



Pretpostavljamo da u tačkama tela nema izvora mase, tako da masa makroelementa ostaje stalna u toku deformacije. U ovom slučaju možemo napisati

$$dm = \rho_0\, dV = \rho\, dv = \mathrm{const} \tag{2.1}$$

gde je

$$\rho_0 = \frac{dm}{dV} \tag{2.2}$$

srednja gustina mase makroelementa dV, a

$$\rho = \frac{dm}{dv} \tag{2.3}$$

srednja gustina mase makroelementa dv.

Jednačina (2.1) predstavlja jednačinu konzervacije mase, koja se može napisati u obliku

$$\dot{\overline{dm}} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^k)_{,k} = 0 \tag{2.4}$$

Uočimo u elementu dV centar mase $C(X^K)$ elementa dV u odnosu na sistem krivolinijskih koordinata X^K. Položaj proizvoljne tačke $A(X'^K)$ elementa dV u odnosu na centar mase može biti odredjen vektorom D^K, tako da je

$$X'^K = X^K + D^K \tag{2.5}$$

u odnosu na isti sistem krivolinijskih koordinata, jer pretpostavljamo da je rastojanje izmedju tačaka $C(X^K)$ i $A(X'^K)$ infinitezimalno.

Ako je u tački $A(X'^K)$ gustina mase ρ_0', tada je

$$\int_{dV} \rho_0' dV' = \rho_0 dV = dm, \tag{2.6}$$

$$\int\limits_{dV} \rho_0' D^K dV' = 0 ,$$

jer je $C(X^K)$ centar mase makroelementa dV .

Pri deformaciji makroelement dV predje u dv , tačka $C(X^K)$ predje u tačku $C(x^k)$, vektor D^K predje u d^k a vektor polarizacije P^K u vektor p^k , tako da je

$$x'^k = x^k + d^k \tag{2.7}$$

u odnosu na sistem prostornih krivolinijskih koordinata x^k , pri čemu je

$$d^k = d^k(X^K, D^K, t). \tag{2.8}$$

Za funkciju preslikavanja (2.8) pretpostavljamo da je neprekidna i diferencijabilna tako da je, s obzirom da je D^K infinitezimalni vektor, možemo razviti u stepeni red

$$d^k = \chi^k_{\cdot K} D^K + \chi^k_{\cdot KL} D^K D^L + \cdots \tag{2.9}$$

Ako se u ovom redu zadržimo na prvoj aproksimaciji

$$d^k = \chi^k_{\cdot K} D^K \tag{2.10}$$

tada imamo takozvane proste materijale, za koje jednačina (2.7) može da se napiše u obliku

$$x'^k = x^k + \chi^k_{\cdot K} D^K \tag{2.11}$$

Gradijenti mikrodeformacije

$$\chi^{k}_{\cdot K}(X^{L},t)=\left(\frac{\partial d^{k}}{\partial D^{K}}\right)_{D^{L}=0}=\left(\frac{\partial x'^{k}}{\partial X'^{K}}\right)_{X'^{L}=0} \qquad (2.12)$$

su nezavisni od kretanja tačke X^{K}, odakle proizilazi da je deformacija odredjena jednačinama

$$\begin{aligned} x^{k}&=x^{k}(X^{K},t), \\ \chi^{k}_{\cdot K}&=\chi^{k}_{\cdot K}(X^{L},t). \end{aligned} \qquad (2.13)$$

Vektor polarizacije P^{K} pretpostavljamo da ne zavisi od kretanja tačke X^{K} niti pak od mehaničke deformacije, već da je funkcija električnog polja $\underset{\sim}{E}$ i dielektričnog pomeranja $\underset{\sim}{D}$ (v.Maksvelove jednačine III.1).

Ako je u tački $A(x'^{k})$ gustina mase ρ', tada je

$$\int_{dv}\rho' dv' = \rho dv = dm, \qquad (2.14)$$

a prema $(2.6)_2$ imamo

$$\begin{aligned} \int_{dv}\rho' d^{k} dv' &= \int_{dv}\rho' \chi^{k}_{\cdot K} D^{K} dv' = \chi^{k}_{\cdot K}\int_{dv}\rho' D^{K} dv' \\ &= \chi^{k}_{\cdot K}\int_{dv}\rho'_{0} D^{K} dV' = 0, \end{aligned} \qquad (2.15)$$

gde smo pretpostavili da se pri deformaciji masa mikroelementa ne menja, odnosno da je $dm'=\rho'_{0}dV'=\rho' dv'=const$. Iz jednačine (2.15) zaključujemo da je tačka $C(x^{k})$ centar mase makro elementa dv. Centar mase makroelementa ostaje, dakle, to i posle deformacije.

U centru mase $C(X^{K})$ uočimo tri nekomplanarna vektora

$D^{K}_{\cdot(\alpha)}, \alpha = 1,2,3, \; |D^{K}_{\cdot(\alpha)}| \neq 0$, koji su "čvrsto vezani" za makroelement dV . Tada je, prema jednačini (2.10),

$$d^{k}_{\cdot(\alpha)} = \chi^{k}_{\cdot K} D^{K}_{\cdot(\alpha)} \; . \tag{2.16}$$

Iz prethodne jednačine dobijamo

$$\chi^{k}_{\cdot K} = d^{k}_{\cdot(\alpha)} D^{(\alpha)}_{\cdot K} \; . \tag{2.17}$$

gde su $D^{K}_{\cdot(\alpha)}$ i $D^{(\alpha)}_{\cdot K}$ medjusobno recipročni trijedri

$$\begin{aligned} D^{K}_{\cdot(\alpha)} D^{(\alpha)}_{\cdot L} &= \delta^{K}_{L} \\ D^{K}_{\cdot(\alpha)} D^{(\beta)}_{\cdot K} &= \delta^{\beta}_{\alpha} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Gradijenti mikrodeformacije $\chi^{k}_{\cdot K}$ su, dakle, u potpunosti odredjeni deformacijom tri nekomplanarna vektora $D^{K}_{\cdot(\alpha)}$. Korišćenjem (2.17) jednačinu (2.10) možemo napisati u obliku

$$d^{k} = d^{k}_{\cdot(\alpha)} D^{(\alpha)}_{\cdot K} D^{K} \tag{2.19}$$

Vektore $D^{K}_{\cdot(\alpha)}$ odnosno $d^{k}_{\cdot(\alpha)}$ možemo uzeti kao vektore orijentacije (direktore), tako da je deformacija odredjena jednačinama

$$\begin{aligned} x^{k} &= x^{k}(X^{K}, t), \\ d^{k}_{\cdot(\alpha)} &= d^{k}_{\cdot(\alpha)}\left(D^{K}_{\cdot(\alpha)}(X^{L}), t\right) . \end{aligned} \tag{2.20}$$

Prema tome kako su uvedeni očigledno je da su direktori, u odnosu na makroelement, materijalni vektori.

Neka su $d^{k}_{\cdot(\alpha)}$ i $d^{(\alpha)}_{\cdot k}$ medjusobno recipročni trijedri:

$$d^{k}_{\cdot(\alpha)} d^{(\alpha)}_{\cdot j} = \delta^{k}_{j},$$
$$d^{k}_{\cdot(\alpha)} d^{(\beta)}_{\cdot k} = \delta^{\beta}_{\alpha}, \tag{2.21}$$

tada iz jednačine (2.19) dobijamo

$$D^{K} = D^{K}_{\cdot(\alpha)} d^{(\alpha)}_{\cdot k} d^{k}. \tag{2.22}$$

Korišćenjem jednačine (2.19), možemo jednačinu (2.7) napisati u obliku

$$x'^{k} = x^{k} + d^{k}_{\cdot(\alpha)} D^{(\alpha)}_{\cdot K} D^{K}. \tag{2.23}$$

Jednačinu (2.22) možemo napisati u obliku

$$D^{K} = \Lambda^{K}_{\cdot k} d^{k}, \tag{2.24}$$

pri čemu su

$$\Lambda^{k}_{\cdot K} \Lambda^{K}_{\cdot j} = \delta^{k}_{j},$$
$$\Lambda^{k}_{\cdot K} \Lambda^{L}_{\cdot k} = \delta^{L}_{K}. \tag{2.25}$$

Ako jednačinu (2.23) diferenciramo po vremenu, dobićemo relaciju

$$v'^{k} = v^{k} + \dot{d}^{k}_{\cdot(\alpha)} D^{(\alpha)}_{\cdot K} D^{K} \tag{2.26}$$

koju, s obzirom na (2.22) možemo napisati u obliku

$$v'^k = v^k + \dot{d}^k_{\cdot(\alpha)} d^{(\alpha)}_{\cdot j} d^j \tag{2.27}$$

i ako pri tome obeležimo

$$\dot{d}^k_{\cdot(\alpha)} d^{(\alpha)}_{\cdot j} = \dot{\chi}^k_{\cdot K} \chi^K_{\cdot j} = b^k_{\cdot j} \tag{2.28}$$

tada jednačina (2.27), konačno, dobija oblik

$$v'^k = v^k + b^k_{\cdot j} d^j, \tag{2.29}$$

što predstavlja izraz za brzinu proizvoljne tačke makroelementa dv tela, pri čemu su veličine b_{kj} definisane u centru mase makroelementa dv .

Kinetičku energiju dielektričnog tela možemo dobiti po moću jednačina (2.29) i (2.15)

$$\begin{aligned} 2T &= \int_v \int_{dv} \rho' v'^k v'_k dv = \int_v \int_{dv} \rho' (v^k + \dot{d}^k_{\cdot(\alpha)} D^{(\alpha)}_{\cdot K} D^K)(v_k \dot{d}_{k(\beta)} D^{(\beta)}_{\cdot L} D^L) dv' = \\ &= \int_v \rho v^k v_k dv + \int_v \dot{d}^k_{\cdot(\alpha)} \dot{d}_{k(\beta)} D^{(\alpha)}_{\cdot K} D^{(\beta)}_{\cdot L} \int_{dv} \rho' D^K D^L dv' \end{aligned} \tag{2.30}$$

odnosno

$$2T = \int_v \rho (v^k v_k + I^{KL} \dot{d}^k_{\cdot(\alpha)} \dot{d}_{k(\beta)} D^{(\alpha)}_{\cdot K} D^{(\beta)}_{\cdot L}) dv \tag{2.31}$$

gde je

$$\rho\, dv\, I^{KL} = \rho\, dv\, I^{LK} = \int_{dv} \rho' D^K D^L dv' = \int_{dV} \rho_0' D^K D^L dV'. \qquad (2.32)$$

Veličine I^{KL} su koeficijenti inercije makroelementa dV u odnosu na centar mase.

Ako radi jednostavnosti obeležimo

$$I^{\alpha\beta} = I^{\beta\alpha} = I^{KL} D^{(\alpha)}_{\cdot K} D^{(\beta)}_{\cdot L} \qquad (2.33)$$

i uzmemo u obzir kinetičku energiju polarizacije [13]

$$2T_D = \int_v \rho \nu g^{kj} \dot{p}_k \dot{p}_j \, dv, \qquad (2.34)$$

tada se, konačno, za kinetičku energiju dobija izraz

$$2T = \int_v \rho (v^k v_k + I^{\alpha\beta} \dot{d}^{\cdot k}_{\cdot(\alpha)} \dot{d}_{k(\beta)} + \nu g^{kj} \dot{p}_k \dot{p}_j) dv \qquad (2.35)$$

U jednačini (2.34) veličina ν predstavlja koeficijent inercije polarizacije, a sam deo kinetičke energije (2.34) ne može se zanemariti u slučaju promenljivog elektromagnetskog polja.

Uzimajući u obzir zakon konzervacije mase (2.4), iz jednačine (2.35), diferenciranjem po vremenu, dobijamo

$$\dot{T} = \int_v \rho (\dot{v}^k v_k + I^{\alpha\beta} \ddot{d}^{\cdot k}_{\cdot(\alpha)} \dot{d}_{k(\beta)} + \nu g^{kj} \ddot{p}_k \dot{p}_j) dv \qquad (2.36)$$

Korišćenjem jednačine (2.29), prethodnu jednačinu možemo napisati u obliku

$$\dot{T} = \int_{v} \rho (\dot{v}^{k} v_{k} + \Gamma^{ij} b_{ij} + \Gamma^{i} \dot{p}_{j}) dv \tag{2.37}$$

gde su inercijski spin Γ^{ij} odnosno Γ^{i} odredjeni izrazima

$$\Gamma^{ij} = I^{\alpha\beta} \ddot{d}^{i}_{\cdot(\alpha)} d^{j}_{\cdot(\beta)} = I^{KL} \ddot{\chi}^{i}_{\cdot K} \chi^{j}_{\cdot L} \tag{2.38}$$
$$\Gamma^{j} = \nu g^{ij} \ddot{p}_{i}$$

Da bismo formirali fenomenološku teoriju kontinuuma pretpostavićemo da se dielektrično telo sastoji od neprekidno rasporedjenih materijalnih tačaka, kojima pripisujemo svojstva makroelementa dV odnosno dv. Ovo znači da svaki makroelement sada identifikujemo sa jednom materijalnom tačkom, centrom mase makroelementa, i toj materijalnoj tački pripisujemo svojstva makroelementa. Na taj način, fizički je svaka materijalna tačka dielektričnog tela fenomenološki ekvivalentna deformabilnom dielektričnom telu. Materijalnu tačku, dakle, posmatramo kao deformabilno dielektrično telo malih dimenzija.

Prema tome, u svakoj tački dielektričnog tela definisani su gradijenti mikrodeformacije $\chi^{k}_{\cdot K}$, koji predstavljaju neprekidno polje. Sama deformacija odredjena je jednačinama (2.13), koje su medjusobno nezavisne.

Umesto gradijenata mikrodeformacije $\chi^{k}_{\cdot K}$ možemo u svakoj tački dielektričnog tela definisati tri direktora $D^{K}_{\cdot(\alpha)}$ koji pri deformaciji prelaze u $d^{k}_{\cdot(\alpha)}$, tako da je deformacija odredjena jednačinama (2.20) pri čemu je deformacija direktora nezavisna od kretanja tačaka tela.

Direktore $D^{k}_{\cdot}(\alpha)$ u nedeformisanoj konfiguraciji biramo proizvoljno, a njihova deformacija karakteriše deformaciju ranije posmatranog makroelementa. Svodeći dakle makroelement na materijalnu tačku, deformaciju makroelementa svodimo na deformaciju direktora. Kako je deformacija direktora nezavisna od pomeranja tačaka dielektričnog tela, to je jasno da posle deformacije direktori $d^{k}_{\cdot}(\alpha)$ neće biti materijalni vektori.

Uvodjenjem deformabilnih direktora u tačkama dielektričnog tela i opisivanjem deformacije jednačinama (2.20), kontinuum sa mikrostrukturom interpretiramo kao orijentisani kontinuum sa tri deformabilna direktora odnosno kao generalisani Kosera kontinuum.

Očigledno je da sada elementi tela dV odnosno dv menjaju svoj smisao u odnosu na ranije posmatrani makroelement. Sada element tela sadrži materijalne tačke dielektrika. Medjutim, kako su sve veličine koje su ranije definisane u centru mase makroelementa sada neprekidne funkcije položaja, to izrazi (2.35), (2.37) i (2.38) ostaju nepromenjeni stim što sada dv uzimamo kao element tela.

III ELEKTROMAGNETSKO POLJE

III.1 OSNOVNI POJMOVI

Osnovni postulat fizike, zasnovan na eksperimentalnim dokazima, jeste postojanje električnog naboja. Postojanje ele - krične struje pripisuje se kretanju električnih naboja. Prema mo dernoj fizici materijalna tela se sastoje od agregata elementar-nih čestica, od kojih su neki vezani medjusobno silama koje delu ju medju česticama, dok se drugi mogu slobodno kretati. Neke od ovih elementarnih čestica osim mase imaju još jednu meru nazvanu naboj. Elektronski naboj $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C jeste najmanja moguća količina naboja. Materija sadrži dve vrste naboja: pozitivne i negativne. Eksperimenti podržavaju postulat da je totalni na-boj u nekom izolovanom sistemu konzervisan: ako se odredjena ko-ličina pozitivnog naboja pojavi u sistemu ili iz njega nestane, tada će se isto dogoditi i sa istom količinom negativnog naboja tako da algebarski zbir naboja ostaje konstantan. Naboj može da bude slobodan ili vezan. Negativni naboji, koje nose slobodni elektroni, predstavljaju primer slobodnih naboja; negativni nabo ji, koje nose elektroni od kojih se sastoje unutrašnje elektron-ske ljuske atoma, su primer vezanih naboja. Dielektrični materi-jali, ili jednostavnije nazvani izolatori, nemaju slobodnih ele-ktričnih naboja ili ih imaju zanemarljivo malo.

Pod dejstvom električnog polja, na čestice materije ko je imaju naboj, dejstvovaće izvesne sile srazmerne naboju česti-ca. Slobodni elektroni izloženi dejstvu ovih sila počinju da se kreću. S druge strane, vezane čestice sa pozitivnim i negativnim nabojima pomeraće se jedna u odnosu na drugu. Za materiju tako deformisanu kaže se da je polarizovana. Jednostavan model kojim se objašnjava polarizacija jeste sledeći: može se smatrati da se u neutralnom stanju materija sastoji od atoma čiją jezgra imaju pozitivni naboj i elektrona, koji se kreću oko jezgra, noseći is tu toliku količinu negativnog naboja tako da se efektivna središta naboja podudaraju. Permanentno polarizovana tela ne odgovaraju ovom modelu. Kada se materijalna sredina izloži dejstvu ele - ktričnog polja tada se pozitivni naboji pomeraju u odnosu na negativne naboje.

Polarizacija se definiše vektorom polarizacije

$$\vec{P} = N q_0 \vec{d} , \tag{3.1}$$

gde je N - broj atoma koji se mogu polarizovati u jedinici zapremine, q_0 - pozitivni električni naboj jezgra atoma, a $\vec{d}$ - vektor pomeranja pozitivnih naboja u odnosu na negativne naboje.

Pored vektora polarizacije $\vec{P}$ često se koristi vektor električnog pomeranja

$$\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E} , \tag{3.2}$$

gde drugi član na desnoj strani jednačine predstavlja polje pomeranja u vakuumu, pri čemu je ε_0 - dielektrična konstanta za vakuum, a $\vec{E}$ - vektor jačine električnog polja.

III.2 MAKSVELOVE JEDNAČINE

Ovde ćemo samo navesti jednačine polja, granične uslove i elektromagnetske materijalne jednačine (jednačine veza izme dju veličina elektromagnetskog polja), koje su dovoljne za opisivanje dielektrične sredine u elektromagnetskom polju, kao i za spoljašnji prostor (vakuum).

Maksvelove jednačine, koje važe unutar dielektrične sredine i u spoljašnjem prostoru (vakuumu), imaju oblik

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{D} = 0 , \qquad \operatorname{div} \underset{\sim}{B} = 0 ,$$
$$\operatorname{rot} \underset{\sim}{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \underset{\sim}{B}}{\partial t} , \qquad \operatorname{rot} \underset{\sim}{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \underset{\sim}{D}}{\partial t} , \tag{3.3}$$

gde su: $\underset{\sim}{E}$ - vektor jačine električnog polja, $\underset{\sim}{D}$ - vektor dielektričnog pomeranja, $\underset{\sim}{H}$ - vektor jačine magnetskog polja i $\underset{\sim}{B}$ - vektor magnetske indukcije.

Za pokretnu dielektričnu sredinu važe jednačine

$$\underset{\sim}{D} + \frac{\underset{\sim}{v}}{c} \times \underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{E} + \frac{\underset{\sim}{v}}{c} \times \underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{P}$$
$$\underset{\sim}{B} - \frac{\underset{\sim}{v}}{c} \times \underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{H} - \frac{\underset{\sim}{v}}{c} \times \underset{\sim}{D} \tag{3.4}$$

gde je $\underset{\sim}{P}$ - vektor električne polarizacije. Ako je brzina materijalnih delića mala u odnosu na brzinu svetlosti c $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$, tada su materijalne jednačine pokretnog dielektrika

$$\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{E} + \underset{\sim}{P} ,$$
$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{H} - \frac{\underset{\sim}{v}}{c} \times \underset{\sim}{P} . \tag{3.5}$$

Za pokretnu dielektričnu sredinu granični uslovi imaju oblik:

$$\underset{\sim}{n} \cdot [\![\underset{\sim}{D}]\!] = 0 ,$$

$$\underset{\sim}{n} \cdot [\![\underset{\sim}{B}]\!] = 0 ,$$

$$\underset{\sim}{n} \times [\![E]\!] - \underset{\sim}{n} \frac{\underset{\sim}{v}}{c} \times [\![B]\!] = 0, \qquad (3.6)$$

$$\underset{\sim}{n} \times [\![H]\!] + \underset{\sim}{n} \frac{\underset{\sim}{v}}{c} \times [\![D]\!] = 0 .$$

Ako se ograničimo na posmatranje pokretne magnetske sredine, pri čemu ne uzimamo u obzir električno polje, zapreminski električni naboj i struju, tada Maksvelove jednačine imaju oblik

$$rot\ \underset{\sim}{H} = 0 ,$$

$$div\ \underset{\sim}{B} = 0. \qquad (3.7)$$

Jednačine veze izmedju veličina koje definišu magnetsko polje u magnetskoj sredini i u spoljašnjem prostoru, imaju oblik

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{H} + 4\pi \underset{\sim}{M} \quad \text{u materijalnoj zapremini}$$

$$\qquad (3.8)$$

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{H} \quad \text{u vakuumu}$$

gde je $\underset{\sim}{M}$ - vektor magnetskog momenta.

Kod magnetski zasićene sredine povećanjem spoljašnjeg magnetskog polja ne menja se vrednost magnetskog momenta po jedinici mase $\boldsymbol{\mu}$ $\left(\boldsymbol{\mu} = \frac{\boldsymbol{M}}{\rho}\right)$, te je uslov zasićenja

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \mu = \mu_s^2 = const., \tag{3.9}$$

gde je ρ - gustina mase, a μ_s - magnetski moment po jedinici mase zasićene sredine.

III.3 ZAPREMINSKA ELEKTROMAGNETSKA SILA

Ukupna zapreminska sila koja nastaje dejstvom elektromagnetskog polja na pokretnu dielektričnu sredinu, prema 14 , ima oblik

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{P} \cdot grad)\,\boldsymbol{E} - \frac{1}{2}\, grad(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{P}) + \frac{1}{2}\, \overset{*}{\boldsymbol{P}} \times \boldsymbol{B}. \tag{3.10}$$

Prvi član na desnoj strani prethodne jednačine predstavlja zapreminsku silu translacije koja deluje na električni dipol u elektrostatičkom polju.

Drugi član potiče od energije stvaranja električne polarizacije u električnom polju.

Treći član predstavlja zapreminsku silu koja deluje u magnetskom polju na zapreminsku polarizacionu struju $\boldsymbol{j}$. Kretanje polarizovane sredine i promena polarizacije stvara električnu struju

$$\boldsymbol{j} = \overset{*}{\boldsymbol{P}} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + rot(\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{v}) + (div\, \boldsymbol{P}) \cdot \boldsymbol{v}. \tag{3.11}$$

Izraz za ukupnu zapreminsku silu (3.10) za slučaj nepokretne sredine menja se utoliko što se umesto dinamičke jačine polja $\underset{\sim}{\mathcal{E}}$ stavlja jačina električnog polja $\underset{\sim}{E}$. Dinamičku jačinu električnog polja

$$\underset{\sim}{\mathcal{E}} = \underset{\sim}{E} + \frac{1}{c}\,(\underset{\sim}{v} \times B) \qquad (3.12)$$

meri posmatrač koji se kreće zajedno sa sredinom.

Korišćenjem Maksvelovih jednačina (3.5) može se ukupna zapreminska sila transformisati tako da se dobije jednostavniji oblik

$$F^{i} = \mathfrak{s}^{ik}{}_{,k} - \frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\,g^{i}, \qquad (3.13)$$

pri čemu je

$$\mathfrak{s}^{ik} = P^{i}\mathcal{E}^{k} + E^{i}E^{k} + B^{i}B^{k} - \frac{1}{2}\left(E^{m}D^{m} + H^{m}B^{m}\right)\delta^{ik} \qquad (3.14)$$

elektromagnetski tenzor napona, i

$$\underset{\sim}{g} = \underset{\sim}{E} \times \underset{\sim}{B} \qquad (3.15)$$

elektromagnetski impuls.

Elektromagnetski tenzor napona $\mathfrak{s}^{ik}$ i elektromagnetski impuls g^{i} nisu neprekidni. Oni na površini S_d dielektričnog kontinuuma imaju skok i otuda sila na spoljašnjoj površini

$$S^{i} = \left[\!\left[\, \mathfrak{s}^{ik} + \frac{1}{c}\, v^{k} g^{i} \,\right]\!\right] n_k. \qquad (3.16)$$

Izvan dielektrične sredine (u spoljašnjem prostoru-vakuumu) zapreminska sila jednaka je nuli jer u vakuumu nestaje polarizacija.

IV PRINCIP VIRTUALNOG RADA, JEDNAČINE KRETANJA I KONSTITUTIVNE JEDNAČINE

Neka na dielektrično telo deluju mehaničke površinske sile T^i i H^{ij} i mehaničke zapreminske sile f^i i l^{ij} . Tada je efekat rada ovih svila dat izrazom

$$\dot{A}_{meh} = \oint_{S_d} (T^i v_i + H^{ij} b_{ij})\, ds + \int_{V_d} \rho (f^i v_i + l^{ij} b_{ij})\, dv \quad (4.1)$$

Korišćenjem jednačine (2.28) možemo prethodnu jednačinu napisati u obliku

$$\dot{A}_{meh} = \oint_{S_d} (T^i v_i + H^{i(\alpha)} \dot{d}_{i(\alpha)})\, ds + \int_{V_d} \rho (f^i v_i + l^{i(\alpha)} \dot{d}_{i(\alpha)})\, dv, \quad (4.2)$$

gde su

$$H^{i(\alpha)} = H^{ij} d^{(\alpha)}_{\cdot j}, \qquad l^{i(\alpha)} = l^{ij} d^{(\alpha)}_{\cdot j}. \quad (4.3)$$

Virtualni rad mehaničkih površinskih i zapreminskih si la dobija se vrlo jednostavno korišćenjem jednačine (4.2), tako da je

$$\delta A_{meh} = \oint_{Sd} \left(T^i \delta x_i + H^{i(\alpha)} \delta d_{i(\alpha)}\right) ds + \int_{Vd} \rho \left(f^i \delta x_i + \ell^{i(\alpha)} \delta d_{i(\alpha)}\right) dv \tag{4.4}$$

Na dielektrično telo deluju takodje i elektromagnetske površinske sile S^i i R^i i elektromagnetske zapreminske sile F^i i $\mathcal{E}^i$. Efekat rada elektromagnetskih površinskih i zapreminskih sila dat je izrazom

$$\dot{A}_{el} = \oint_{Sd} \left(S^i v_i + R^i \dot{p}_i\right) ds + \int_{V} \rho \left(F^i v_i + \mathcal{E}^i \dot{p}_i\right) dv, \tag{4.5}$$

pri čemu su ove sile odredjene izrazima (3.12) - (3.16). Mnogi au tori (napr. [7]) pretpostavljaju da je elektromagnetska površinska sila $R^i = 0$. Kao posledica ove pretpostavke dobijaju se manje opšte jednačine, jer u svim slučajevima uticaj sile R^i ni- je zanemarljiv.

Virtualni rad elektromagnetskih površinskih i zapremin skih sila dobija se vrlo jednostavno korišćenjem jednačine (4.5), tako da je

$$\delta A_{el} = \oint_{Sd} \left(S^i \delta x_i + R^i \delta p_i\right) ds + \int_{V} \rho \left(F^i \delta x_i + \mathcal{E}^i \delta p_i\right) dv. \tag{4.6}$$

Korišćenjem jednačina (4.4) i (4.6) možemo napisati izraz za ukupan virtualni rad mehaničkih i elektromagnetskih površinskih i zapreminskih sila

$$\delta A = \delta A_{meh} + \delta A_{el} = \int_{S_d} \left(T^i \delta x_i + H^{i(\alpha)} \delta d_{i(\alpha)} \right) ds + \int_{V_d} \rho \left(f^i \delta x_i + l^{i(\alpha)} \delta d_{i(\alpha)} \right) dv + \oint_{S_d} \left(S^i \delta x_i + R^i \delta p_i \right) ds + \int_V \rho \left(F^i \delta x_i + \mathcal{E}^i \delta p_i \right) dv \tag{4.7}$$

Prethodni izraz možemo, identičkom transformacijom, napisati u obliku

$$\begin{aligned} \delta A = & \oint_{S_d} \left\{ \left(T^i ds - t^{ik} ds_k \right) \delta x_i + \left(H^{i(\alpha)} ds - h^{i(\alpha)k} ds_k \right) \delta d_{i(\alpha)} \right\} + \\ & + \int_V \rho \left(f^i \delta x_i + l^{i(\alpha)} \delta d_{i(\alpha)} \right) dv + \oint_{S_d} \left[s^{ik} + \frac{1}{c} v^k g^i \right] ds_k \, \delta x_i + \\ & + \oint_{S_d} \left(R^i ds - r^{ik} ds_k \right) \delta p_i + \int_V \rho \left(F^i \delta x_i + \mathcal{E}^i \delta p_i \right) dv + \\ & + \oint_{S_d} \left(t^{ik} ds_k \, \delta x_i + h^{i(\alpha)k} ds_k \, \delta d_{i(\alpha)} + r^{ik} ds_k \, \delta p_i \right), \end{aligned} \tag{4.8}$$

a ako poslednji površinski integral transformišemo u zapreminski dobijamo

$$\delta A=\oint_{S_d}\{(T^i ds-t^{ik}ds_k)\delta x_i+(H^{i(\alpha)}ds-h^{i(\alpha)k}ds_k)\delta d_{i(\alpha)}+$$
$$+(R^i ds-r^{ik}ds_k)\delta p_i+[s^{ik}+\frac{1}{c}v^k g^i]ds_k\,\delta x_i\}+$$
$$+\int_V\rho[f^i\delta x_i+l^{i(\alpha)}\delta d_{i(\alpha)}+$$
$$+(s^{ik}{}_{,k}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}g^i)\delta x_i+$$
$$+\mathcal{E}^i\delta p_i]dv+\int_V[t^{ik}{}_{,k}\delta x_i+t^{ik}\delta x_{i,k}+ \tag{4.9}$$
$$+h^{i(\alpha)k}{}_{,k}\delta d_{i(\alpha)}+h^{i(\alpha)k}\delta d_{i(\alpha),k}+$$
$$+r^{ik}{}_{,k}\delta p_i+r^{ik}\delta p_{i,k}]dv,$$

gde smo za sile S^i i F^i koristili izraze (3.13) i (3.16)

Izvod kinetičke energije po vremenu odredjen je ranije relacijom (2.37). Ovu relaciju možemo napisati u obliku

$$\dot{T}=\int_V\rho(\dot{v}^i v_i+\Gamma^{i(\alpha)}\dot{d}_{i(\alpha)}+\Gamma^i p_i), \tag{4.10}$$

gde članovi

$$\Gamma^{i(\alpha)}=\Gamma^{ij}d^{(\alpha)}_{\cdot j},$$

$$\Gamma^i=\nu g^{ji}\ddot{p}_j$$

predstavljaju inercijske spinove.

Virtualni rad inercijskih sila sada možemo lako napisati koristeći jednačinu (4.10). Na taj način imamo

$$\delta T=\int_V \rho\left(\dot{v}^i\delta x_i+r^{i(\alpha)}\delta d_{i(\alpha)}+r^i\delta p_i\right)dv \tag{4.11}$$

Formulišimo sada princip virtualnog rada u obliku

$$\delta T+\delta U=\delta A\,, \tag{4.12}$$

gde je

$$\delta U=\int_V \rho\,\delta u\,dv$$

varijacija energije deformacije, pri čemu je veličina u - specifična energija deformacije.

Koristeći relacije (4.9) i (4.11), možemo princip virtualnog rada (4.12) napisati u obliku

$$\begin{aligned}&\int_V \rho\left[\dot{v}^i\delta x_i+r^{i(\alpha)}\delta d_{i(\alpha)}+r^i\delta p_i\right]dv+\\&+\int_V \rho\,\delta u\,dv=\oint_{S_d}\left\{\left(T^i ds-t^{ik}ds_k\right)\delta x_i+\right.\\&+\left[H^{i(\alpha)}ds-h^{i(\alpha)k}ds_k\right]\delta d_{i(\alpha)}+\\&\left.+\left(R^i ds-r^{ik}ds_k\right)\delta p_i+\left[\left(s^{ik}+\frac{1}{c}v^k g^i\right)\right]ds_k\,\delta x_i\right\}+\\&+\int_V \rho\left[f^i\delta x_i+l^{i(\alpha)}\delta d_{i(\alpha)}+\right.\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$+\left(s^{ik}{}_{,k}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}g^{i}\right)\delta x_i+\mathcal{E}^{i}\delta p_i\Big]dv+$$

$$+\int_V\Big[t^{ik}{}_{,k}\,\delta x_i+t^{ik}\delta x_{i,k}+h^{i(\alpha)k}{}_{,k}\,\delta d_{i(\alpha)}+$$

$$+h^{i(\alpha)k}\delta d_{i(\alpha),k}+r^{ik}{}_{,k}\,\delta p_i+ \qquad (4.13)$$

$$+\,r^{ik}\delta p_{i,k}\Big]dv.$$

Uzmimo sada da je v u jednačini (4.13) zapremina elementarnog tetraedra ograničenog ravni sa proizvoljnom spolja šnjom normalom n_k i trima ravnima paralelnim koordinatnim rav nima u nekoj tački tela (pod koordinatnim ravnima podrazumevamo ravni tangentne na koordinatne površi u uočenoj tački tela). Ako je ds površina stranice tetraedra normalne na n_k , a ds_k ori jentisani elementi površine ostalih stranica tetraedra, tada je

$$ds_k=ds\,n_k. \qquad (4.14)$$

Ako sada jednačinu (4.13) primenimo na uočeni tetraedar i pustimo da se tetraedar neprekidno smanjuje zadržavajući orijentacije svojih stranica, tada, s obzirom da zapremina tetraedra brže teži nuli od njegove površine, dobijamo

$$\left(T^{i}ds-t^{ik}ds_k\right)dx_i+\left[H^{i(\alpha)}ds-h^{i(\alpha)k}ds_k\right]\delta d_{i(\alpha)}+ \qquad (4.15)$$

$$+\left(R^{i}ds-r^{ik}ds_k\right)\delta p_i+\left[\left[s^{ik}+\frac{1}{c}v^{k}g^{i}\right]\right]ds_k\,\delta x_i=0$$

Kako jednačina (4.15) mora da važi za proizvoljne varijacije δx_i, $\delta d_{i(\alpha)}$ i δp_i, to se iz iste dobijaju tri sledeće relacije

$$T^i = \left\{ t^{ik} - \left[s^{ik} + \frac{1}{c} v^k g^i \right] \right\} n_k \qquad (4.16)$$

$$H^{i(\alpha)} = h^{i(\alpha)k} n_k \,, \quad H^{ij} = h^{ijk} n_k \qquad (4.17)$$

$$R^i = r^{ik} n_k \qquad (4.18)$$

gde je

$$h^{ijk} = h^{i(\alpha)k} d^j_{\cdot(\alpha)} \,. \qquad (4.19)$$

Koristeći uobičajenu terminologiju, veličine koje se javljaju u prethodnim relacijama, nazivamo :

T^i - površinska sila ili napon

t^{ij} - nesimetrični tenzor napona

f^i - zapreminska sila

$H^{i(\alpha)}$ - direktorski naponi

$\ell^{i(\alpha)}$ - zapreminske direktorske sile

$h^{i(\alpha)k}$ - direktorski tenzori napona

H^{ij} - prvi površinski moment

ℓ^{ij} - prvi zapreminski moment

h^{ijk} - prvi naponski moment

R^{i} - elektromagnetska površinska sila

r^{ij} - lokalni električni tenzor polja

s^{ij} - elektromagnetski tenzor napona

Koristeći jednačinu (4.15), princip virtualnog rada (4.13) postaje

$$\int_V \rho[\dot{v}^i \delta x_i + r^{i(\alpha)} \delta d_{i(\alpha)} + r^i \delta p_i] dv + \int_V \rho \delta u \, dv =$$

$$= \int_V \Big\{ [t^{ik}{}_{,k} + s^{ik}{}_{,k} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} g^i + \rho f^i] \delta x_i +$$

$$+ [h^{i(\alpha)k}{}_{,k} + l^{i(\alpha)}] \delta d_{i(\alpha)} + t^{ik} \delta x_{i,k} + \tag{4.20}$$

$$+ h^{i(\alpha)k} \delta d_{i(\alpha),k} + (r^{ik}{}_{,k} + \mathcal{E}^i) \delta p_i +$$

$$+ r^{ik} \delta p_{i,k} \Big\} dv,$$

Prethodna jednačina važi za sve proizvoljne varijacije δx_i, $\delta x_{i,k}$, $\delta d_{i(\alpha)}$, $\delta d_{i(\alpha),k}$, δp_i i $\delta p_{i,k}$. Medjutim, pretpostavljamo da je za virtualna kruta pomeranja $\delta u = 0$, odnosno da je za virtualna kruta pomeranja virtualni rad površinskih i zapreminskih sila jednak virtualnom radu inercijskih sila

$$\int_V \rho[\dot{v}^i \delta x_i + r^{i(\alpha)} \delta d_{i(\alpha)} + r^i \delta p_i] dv$$

(4.21)

$$= \int_V \Big\{ [t^{ik}{}_{,k} + s^{ik}{}_{,k} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} g^i + \rho f^i] \delta x_i +$$

$$+\left[h^{i(\alpha)k}{}_{,k}+l^{i(\alpha)}\right]\delta d_{i(\alpha)}+t^{ik}\delta x_{i,k}+$$

$$+h^{i(\alpha)k}\delta d_{i(\alpha),k}+\left(r^{ik}{}_{,k}+\mathcal{E}^{i}\right)\delta p_i+r^{ik}\delta p_{i,k}\Big\}dv. \tag{4.21}$$

Diferencijalne jednačine kretanja dobijamo primenom Pioline teoreme. Ova teorema glasi: jednačina (4.21) ekvivalentna je prvom Košijevom zakonu kretanja za virtualne translacije i ekvivalentna je drugom Košijevom zakonu kretanja za virtualna kruta kretanja.

Kako su za virtualne translacije

$$\delta x_i = const., \quad \delta x_{i,k}=0 \quad \delta d_{i(\alpha)}=0,$$
$$\delta d_{i(\alpha),k}=0 \quad \delta p_i=0, \tag{4.22}$$
$$\delta p_{i,k}=0,$$

to iz jednačine (4.21) dobijamo

$$\int_V \rho \dot{v}^i \delta x_i \, dv=\int_V \left[t^{ik}{}_{,k}+s^{ik}{}_{,k}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}g^i+\rho f^i\right]\delta x_i \, dv \tag{4.23}$$

Pošto prethodna jednačina važi za proizvoljne varijacije δx_i i proizvoljni element dv, tada imamo

$$\rho \dot{v}^i=t^{ik}{}_{,k}+s^{ik}{}_{,k}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}g^i+\rho f^i. \tag{4.24}$$

Ova jednačina predstavlja prvi Košijev zakon kretanja, odnosno potreban i dovoljan uslov za balans količine kretanja (koji upravo predstavlja tri diferencijalne jednačine kretanja).

Uzimajući u obzir prvi Košijev zakon (4.24), princip virtualnog rada (4.20) se svodi na

$$\int_V \rho[r^{i(\alpha)}\delta d_{i(\alpha)} + r^i \delta p_i] dv + \int_V \rho \, \delta u \, dv =$$
$$= \int_V \{ t^{ik} \delta x_{i,k} + [h^{i(\alpha)k}{}_{,k} + l^{i(\alpha)}] \delta d_{i(\alpha)} + \tag{4.25}$$
$$+ h^{i(\alpha)k} \delta d_{i(\alpha),k} + (r^{ik}{}_{,k} + \mathcal{E}^i) \delta p_i + r^{ik} \delta p_{i,k} \} dv$$

a jednačina (4.21) se svodi na

$$\int_V \rho[r^{i(\alpha)}\delta d_{i(\alpha)} + r^i \delta p_i] dv = \int \{ t^{ik} \delta x_{i,k} +$$
$$+ [h^{i(\alpha)k}{}_{,k} + l^{i(\alpha)}] \delta d_{i(\alpha)} + h^{i(\alpha)k} \delta d_{i(\alpha),k} + \tag{4.26}$$
$$+ (r^{ik}{}_{,k} + \mathcal{E}^i) \delta p_i + r^{ik} \delta p_{i,k} \} dv.$$

Kako su za virtualna kruta pomeranja

$$\delta x_{(i,k)} = 0, \quad \delta x_{[i,k]} = const., \quad \delta d_{i(\alpha)} = \delta x_{[i,k]} d^k{}_{\cdot(\alpha)}$$
$$\delta d_{i(\alpha),k} = \delta x_{[i,l]} d^l{}_{\cdot(\alpha),k}, \quad \delta p_i = \delta x_{[i,k]} p^k, \tag{4.27}$$
$$\delta p_{i,k} = \delta x_{[i,l]} p^l{}_{,k}$$

to iz jednačine (4.26) dobijamo

$$\int_V \{ t^{ij} + h^{ijk}{}_{,k} + \rho(l^{ij} - r^{ij}) + (r^{ik}{}_{,k} + \mathcal{E}^i) p^j - \tag{4.28}$$
$$- r^i p^j + r^{ik} p^j{}_{,k} \} \delta x_{[i,j]} \, dv = 0$$

Ako sa τ^{ij} obeležimo integrand u prethodnoj jednačini

$$\tau^{ij} = t^{ij} + h^{ijk}{}_{,k} + \rho \ell^{ij} - \rho r^{ij} + \tag{4.29}$$
$$+ (r^{ik}{}_{,k} + \varepsilon^{i} - r^{i}) p^{j} + r^{ik} p^{j}{}_{,k}$$

tada ista postaje

$$\int_V \tau^{ij} \delta x_{[i,j]} \, dv = 0 \tag{4.30}$$

Kako jednačina (4.30) važi za proizvoljne varijacije $\delta x_{[i,j]}$ to iz nje sleduje da je

$$\tau^{[ij]} = 0,$$

odnosno

$$t^{[ij]} + h^{[ij]k}{}_{,k} + \rho \ell^{[ij]} - \rho r^{[ij]} +$$
$$+ (r^{[ik]}{}_{,k} + \varepsilon^{[i} - r^{[i}) p^{j]} + r^{[ik} p^{j]}{}_{,k} = 0 \tag{4.31}$$

Ova jednačina predstavlja drugi Košijev zakon kretanja, odnosno potreban i dovoljan uslov za balans momenta količine kretanja.

Drugi Košijev zakon (4.31) predstavlja sistem od tri diferencijalne jednačine kretanja. Uzimajući, medjutim, da drugi Košijev zakon kretanja važi (odnosno da je tenzor τ^{ij} simetričan) jednačina (4.29) daje sistem od devet diferencijalnih jednačina kretanja u kojima su uključene tri diferencijalne jednačine

(4.31) kao antisimetrični deo od (4.29). U sistemu od devet diferencijalnih jednačina kretanja (4.29) poznati su prvi zapreminski momenti l^{ij}, dok se τ^{ij}, t^{ij}, h^{ijk} i r^{ij} odredjuju iz konstitutivnih jednačina. Pri ovome drugi Košijev zakon kretanja (4.31) mora biti iskorišćen odnosno zadovoljen u konstitutivnoj jednačini po τ^{ij}.

Uzimajući u obzir jednačinu (4.19), jednačinu (4.29) možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned}\tau^{ij} = {} & t^{ij} + h^{i(\alpha)k}{}_{,k}\, d^{j}_{\cdot(\alpha)} + h^{i(\alpha)k} d^{j}_{\cdot(\alpha),k} + \\ & + r^{ik} p_{j,k} + \rho\left[l^{i(\alpha)} - r^{i(\alpha)}\right] d^{j}_{\cdot(\alpha)} + \\ & + \left(r^{ik}{}_{,k} + \mathcal{E}^{i} - r^{i}\right) p^{j}\end{aligned} \tag{4.32}$$

odakle, množenjem sa $d^{(\alpha)}_{\cdot j}$, sledi

$$\begin{aligned}h^{i(\alpha)k}{}_{,k} + \rho\, l^{i(\alpha)} = {} & \left[\tau^{ij} - t^{ij}\right] d^{(\alpha)}_{\cdot j} - h^{i(\alpha)k} d^{j}_{\cdot(\alpha),k}\, d^{(\alpha)}_{\cdot j} + \\ & + \rho\, r^{i(\alpha)} - \left[r^{ik}{}_{,k} + \mathcal{E}^{i} - r^{i}\right] p^{j} d^{(\alpha)}_{\cdot j} - r^{ik} p^{j}{}_{,k}\, d^{(\alpha)}_{\cdot j}\end{aligned} \tag{4.33}$$

Jednačina (4.25), korišćenjem (4.33), sada postaje

$$\begin{aligned}\int_V \rho\, \delta u\, dv = \int_V \Big\{ & t^{ik} \delta x_{i,k} + \\ & + \left[\tau^{ij} - t^{ij} - L^{i} p^{j} - r^{ik} p^{j}{}_{,k} - h^{i(\alpha)k} d^{j}_{\cdot(\alpha),k}\right] d^{(\alpha)}_{\cdot j}\, \delta d_{i(\alpha)} \\ & + h^{i(\alpha)k} \delta d_{i(\alpha),k} + L^{i} \delta p_{i} + r^{ik} \delta p_{i,k} \Big\}\, dv\end{aligned} \tag{4.34}$$

pri čemu smo sa L^{i} obeležili izraz

$$L^{i} = r^{ik}{}_{,k} + \mathcal{E}^{i} - r^{i}. \tag{4.35}$$

koji se naziva lokalni električni vektor polja.

Iz jednačine (4.34), s obzirom na proizvoljnost elemen ta dv, sledi lokalna jednačina

$$\rho\,\delta u = t^{ik}\delta x_{i,k} + \left[\tau^{ij} - t^{ij} - r^{ik}p^{j}{}_{,k} - L^{i}p^{j} - h^{i(\alpha)k}d^{j}_{\cdot(\alpha),k}\right]d^{(\alpha)}_{\cdot j}\,\delta d_{i(\alpha)} + h^{i(\alpha)k}\delta d_{i(\alpha),k} + L^{i}\delta p_{i} + r^{ik}\delta p_{i,k} \tag{4.36}$$

Jednačina (4.36) predstavlja izraz za varijaciju speci fične energije deformacije, koji je invarijantnog oblika u odnosu na superponirana kruta kretanja.

U jednačini (4.36) varijacije $\delta x_{i,k}$, $\delta d_{i(\alpha)}$, $\delta d_{i(\alpha),k}$, δp_{i} i $\delta p_{i,k}$ su medjusobno nezavisne. Pretpostavljanjem oblika funkcije specifične energije deformacije, izračunavanjem δu i izjednačavanjem koeficijenata uz nezavisne varijacije, iz jednačine (4.36) dobijamo konstitutivne relacije za t^{ij}, τ^{ij}, h^{ijk}, r^{ij} i L^{i}. Pri ovome moramo konstitutivnu jednačinu po τ^{ij} povrći uslovu (4.31).

Jednačinu (4.36) možemo napisati u obliku

$$\rho\,\delta u = t^{ik}x^{K}{}_{;k}\,\delta x_{i;K} + \left[\tau^{ij} - t^{ij} - r^{ik}p^{j}{}_{;k} \right. \tag{4.37}$$

$$- L^{i} p^{j} - h^{i(\alpha)k} d^{j}_{\cdot(\alpha);k} \Big] d^{(k)}_{\cdot j} \, \delta d_{i(\alpha)} +$$

$$+ h^{i(\alpha)k} x^{k}_{;k} \, \delta d_{i(\alpha);K} + L^{i} \delta p_{i} + r^{ik} x^{k}_{;k} \, \delta p_{i;K}$$

Pretpostavimo sada da je specifična energija deformaci je funkcija oblika

$$u = u\left(x^{k}_{;K},\ d^{k}_{\cdot(\alpha)},\ d^{k}_{\cdot(\alpha)},\ d^{k}_{\cdot(\alpha);K},\ p^{k},\ p^{k}_{;K}\right) \tag{4.38}$$

odakle za δu dobijamo izraz

$$\delta u = g^{ik} \frac{\partial u}{\partial x^{k}_{;K}} \delta x_{i;K} + g^{ik} \frac{\partial u}{\partial d^{k}_{\cdot(\alpha)}} \delta d_{i(\alpha)} + g^{ik} \frac{\partial u}{\partial d^{k}_{\cdot(\alpha);K}} \delta d_{i(\alpha);K} + g^{ik} \frac{\partial u}{\partial p^{k}} \delta p_{i} + g^{ik} \frac{\partial u}{\partial p^{k}_{;K}} \delta p_{i;K} \tag{4.39}$$

Uvrstimo vrednost δu iz (4.39) u jednačinu (4.37) i izjednačimo koeficijente uz nezavisne varijacije. Na taj način dobijamo sistem jednačina

$$t^{ij} = \rho g^{ik} \frac{\partial u}{\partial x^{k}_{;K}} x^{j}_{;K}$$

$$\tau^{ij} = \rho g^{ik} \frac{\partial u}{\partial x^{k}_{;K}} x^{j}_{;K} + \rho g^{ik} \frac{\partial u}{\partial d^{k}_{\cdot(\alpha)}} d^{j}_{\cdot(\alpha)} +$$

$$+ \rho g^{ik} \frac{\partial u}{\partial d^{k}_{\cdot(\alpha);K}} d^{j}_{\cdot(\alpha);K} + \rho g^{ik} \frac{\partial u}{\partial p^{k}} p^{j} + \tag{4.40}$$

$$+\rho g^{ik}\frac{\partial u}{\partial p^k{}_{;K}}p^j{}_{;K}$$

$$h^{i(\alpha)k}=\rho g^{in}\frac{\partial u}{\partial d^n{}_{\cdot(\alpha);K}}x^k{}_{;K} \quad \text{odn.} \quad h^{ijk}=\rho g^{in}\frac{\partial u}{\partial d^n{}_{\cdot(\alpha);K}}d^j{}_{\cdot(\alpha)}x^k{}_{;K} \tag{4.40}$$

$$r^{ij}=\rho g^{ik}\frac{\partial u}{\partial p^k{}_{;K}}x^j{}_{;K}$$

$$L^i=\rho g^{ik}\frac{\partial u}{\partial p^k}$$

Jednačine (4.40) su nelinearne konstitutivne jednačine za kikroelastične dielektrične materijale.

Kako drugi Košijev zakon kretanja (4.31) mora biti za dovoljen, to desna strana jednačine $(4.40)_2$ mora zadovoljavati uslov

$$\Big(g^{ik}\frac{\partial u}{\partial x^k{}_{;K}}x^j{}_{;K}+g^{ik}\frac{\partial u}{\partial d^k{}_{\cdot(\alpha)}}d^j{}_{\cdot(\alpha)}+g^{ik}\frac{\partial u}{\partial d^k{}_{\cdot(\alpha);K}}d^j{}_{\cdot(\alpha);K}+ \tag{4.41}$$

$$+g^{ik}\frac{\partial u}{\partial p^k}p^j+g^{ik}\frac{\partial u}{\partial p^k}p^j{}_{;K}\Big)_{[ij]}=0$$

Ova jednačina predstavlja uslov invarijantnosti u odnosu na superponirana kruta kretanja kako za energiju deformacije (4.38), tako i za konstitutivne jednačine (4.40).

Kako važe relacije

$$d^k{}_{\cdot(\alpha)}{}_{;K}=x^k{}_{\cdot K}D^K{}_{\cdot(\alpha)}$$

$$d^k{}_{\cdot(\alpha)}{}_{;K}=x^k{}_{\cdot L;K}D^L{}_{\cdot(\alpha)}$$

to možemo uzeti da je specifična energija deformacije funkcija oblika

$$u = u\left(x^k{}_{;K};\ \lambda^k{}_{\cdot K},\ \lambda^k{}_{\cdot L;K},\ p^k,\ p^k{}_{;K}\right) \tag{4.42}$$

Na osnovu prethodnog, konstitutivne jednačine (4.40) sada možemo izraziti u obliku

$$\begin{aligned}
t^{ij} &= \rho g^{ik} \frac{\partial u}{\partial x^k{}_{;K}} x^j{}_{;K} \\
\tau^{ij} &= \rho g^{ik} \frac{\partial u}{\partial x^k{}_{;K}} x^j{}_{;K} + \rho g^{ik} \frac{\partial u}{\partial \lambda^k{}_{\cdot K}} \lambda^j{}_{\cdot K} + \\
&+ \rho g^{ik} \frac{\partial u}{\partial \lambda^k{}_{\cdot L;K}} \lambda^j{}_{\cdot L;K} + \rho g^{ik} \frac{\partial u}{\partial p^k} p^j + \\
&+ \rho g^{ik} \frac{\partial u}{\partial p^k{}_{;K}} p^j{}_{;K} \\
h^{ijk} &= \rho g^{in} \frac{\partial u}{\partial \lambda^n{}_{\cdot L;K}} \lambda^j{}_{\cdot L} x^k{}_{;K} \\
r^{ij} &= \rho g^{ik} \frac{\partial u}{\partial p^k{}_{;K}} x^j{}_{;K} \\
L^i &= \rho g^{ik} \frac{\partial u}{\partial p^k}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

dok se uslov objektivnosti (4.41) može izraziti u obliku

$$\begin{aligned}
&\left(g^{ik} \frac{\partial u}{\partial x^k{}_{;K}} x^j{}_{;K} + g^{ik} \frac{\partial u}{\partial \lambda^k{}_{\cdot K}} \lambda^j{}_{\cdot K} + g^{ik} \frac{\partial u}{\partial \lambda^k{}_{\cdot L;K}} \lambda^j{}_{\cdot L;K} + \right. \\
&\left. + g^{ik} \frac{\partial u}{\partial p^k} p^j + g^{ik} \frac{\partial u}{\partial p^k{}_{;K}} p^j{}_{;K}\right)_{[ij]} = 0
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Kako je specifična energija deformacije (4.42) funkcija 57 nezavisno promenljivih veličina $x^k{}_{;K}$, $\chi^k{}_{.K}$, $\chi^k{}_{.L;K}$, p^k i $p^k{}_{;K}$, to sistem od tri diferencijalne jednačine date jednačinom (4.44) ima 57 - 3 = 54 osnovna, medjusobno nezavisna, integrala. Postoji više mogućnosti za izbor ovih integrala sistema diferencijalnih jednačina (4.44). Pokažimo samo na jednom integralu način njegovog izbora.

Jednačina (4.36) može da se napiše u obliku

$$\rho \dot{u} = t^{ij} v_{i,j} + \left(\tau^{ij} - t^{ij} - r^{ik} p^j{}_{,k} - L^i p^j\right) b_{ij} + \\ + h^{ijk} b_{ij,k} + L^{i} \dot{p}^i + r^{ij} \dot{p}_{i,j} \tag{4.45}$$

koja je invarijantnog oblika u odnosu na superponirana kruta kretanja i, prema tome, objektivna jednačina. Ova se jednačina može napisati i u obliku

$$\rho \dot{u} - t^{ij}(v_{i,j} - b_{ij}) + \tau^{ij} b_{ij} + h^{ijk} b_{ij,k} + \\ + r^{ij}(\dot{p}_{i,j} - p^{l}{}_{,j} b_{il}) + L^i(\dot{p}_i - p^l b_{il}). \tag{4.46}$$

Kako su naponi apriori objektivne veličine, to i činioci uz ove napone u jednačini (4.46) moraju biti objektivne veličine.

Primera radi, pokažimo način izbora integrala $\Pi_K = \chi_{Ki} p^i$ sistema diferencijalnih jednačina (4.44).

Diferenciranjem po vremenu integrala $\Pi_K = \chi_{Ki} p^i$ množe njem dobijenog izraza sa $\pi_j^{\cdot k}$, imamo

$$\dot{\Pi}_k \pi_j^{\cdot k} = \dot{\pi}_{ki} \pi_j^{\cdot k} p^i + \delta_{ij} \dot{p}^i =$$
$$= -\pi_{ki} \dot{\pi}_j^{\cdot k} p^i + \dot{p}_j = \dot{p}_j - p^i b_{ji}. \tag{4.47}$$

Množenjem prethodnog izraza sa L^i i uporedjenjem sa jednačinom (4.46), dobijamo

$$\rho \dot{u} = L^i (\dot{p}_i - p^k b_{ik}) = L^i \pi_i^{\cdot k} \dot{\Pi}_k \tag{4.48}$$

pod pretpostavkom da je energija deformacije funkcija oblika

$$u = u(\Pi_k). \tag{4.49}$$

Iz (4.49) dobijamo

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial \Pi_k} \dot{\Pi}_k \tag{4.50}$$

pa, na osnovu (4.48), imamo

$$L^i \pi_i^{\cdot k} = \rho \frac{\partial u}{\partial \Pi_k} \tag{4.51}$$

odnosno

$$L^i = \rho \frac{\partial u}{\partial \Pi_k} \pi^i_{\cdot k} \tag{4.52}$$

Na potpuno isti način može se prikazati izbor i osta - lih integrala.

Za sistem diferencijalnih jednačina (4.44) mi usimamo sledeće integrale:

$$B_{KL} = g_{ij} \lambda^{i}_{\cdot K} \lambda^{j}_{\cdot L}$$

$$C_{KL} = \lambda_{Ki}\, x^{i}_{;L}$$

$$D_{KLM} = \lambda_{Ki}\, \lambda^{i}_{\cdot L;M}$$

$$\Pi_{K} = \lambda_{Ki}\, p^{i}$$

$$\Pi_{KL} = \lambda^{\cdot i}_{K}\, p_{i;L} \tag{4.53}$$

tako da sistem (4.44) ima opšte rešenje

$$u = u(B_{KL},\, C_{KL},\, D_{KLM},\, \Pi_{K},\, \Pi_{KL}). \tag{4.54}$$

Korišćenjem (4.53) i (4.54), jednačine (4.43) postaju

$$t^{ij} = \rho \frac{\partial u}{\partial C_{KL}} \lambda^{\cdot i}_{K}\, x^{j}_{;L}$$

$$\tau^{ij} = \rho \frac{\partial u}{\partial B_{KL}} \lambda^{i}_{\cdot K} \lambda^{j}_{\cdot L} + \rho \frac{\partial u}{\partial \Pi_{K}} \lambda^{\cdot i}_{K}\, p^{j} +$$

$$+ \rho \frac{\partial u}{\partial \Pi_{KL}} \lambda^{\cdot i}_{K}\, p^{j}_{;L} \tag{4.55}$$

$$h^{ijk} = \rho \frac{\partial u}{\partial D_{KLM}} \lambda^{\cdot i}_{K} \lambda^{j}_{\cdot L}\, x^{k}_{;M}$$

$$r^{ij} = \rho \frac{\partial u}{\partial \Pi_{KL}} \lambda^{\cdot i}_{K}\, x^{j}_{;L}$$

$$L^{i} = \rho \frac{\partial u}{\partial \Pi_{K}} \lambda^{\cdot i}_{K}$$

Jednačine (4.55) predstavljaju nelinearne konstitutivne jednačine za neizotropne mikroelastične dielektrične materijale. Ove jednačine su invarijanrnog oblika u odnosu na superponirana kruta kretanja.

Ako umesto tenzora B_{KL} i C_{KL} uvedemo sledeće materijalne mere deformacije

$$
\begin{aligned}
2F_{KL} &= B_{KL} - G_{KL} \\
\epsilon_{KL} &= C_{KL} - G_{KL}
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

gde su G_{KL} osnovni metrički tenzori, tada konstitutivne jednačine (4.55) imaju oblik

$$
\begin{aligned}
t^{ij} &= \rho \frac{\partial u}{\partial \epsilon_{KL}} \chi^{\cdot i}_{K} x^{j}_{;L} \\
\tau^{ij} &= \rho \frac{\partial u}{\partial F_{KL}} \chi^{i}_{\cdot K} \chi^{j}_{\cdot L} + \rho \frac{\partial u}{\partial \Pi_{K}} \chi^{\cdot i}_{K} p^{j} + \\
&+ \rho \frac{\partial u}{\partial \Pi_{KL}} \chi^{\cdot i}_{K} p^{j}_{;L} \\
h^{ijk} &= \rho \frac{\partial u}{\partial D_{KLM}} \chi^{\cdot i}_{K} \chi^{j}_{\cdot L} x^{k}_{;M} \\
r^{ij} &= \rho \frac{\partial u}{\partial \Pi_{KL}} \chi^{\cdot i}_{K} x^{j}_{;L} \\
L^{i} &= \rho \frac{\partial u}{\partial \Pi_{K}} \chi^{\cdot i}_{K}
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

Obeležimo sa $\varphi^{k}_{\cdot(\alpha)}$ vektore direktorskog pomeranja. Ta da imamo

$$d^{k}_{\cdot(\alpha)} = D^{k}_{\cdot(\alpha)} + \varphi^{k}_{\cdot(\alpha)} = g^{k}_{K}\, D^{K}_{\cdot(\alpha)} + \varphi^{k}_{\cdot(\alpha)} \tag{4.58}$$

odakle, množenjem sa $D^{(\alpha)}_{\cdot K}$, dobijamo

$$\chi^{k}_{\cdot K} = g^{k}_{K} + \varphi^{k}_{\cdot K} . \tag{4.59}$$

Iz jednačine (4.58) imamo

$$D^{K}_{\cdot(\alpha)} = d^{K}_{\cdot(\alpha)} - \varphi^{K}_{\cdot(\alpha)} = g^{K}_{k}\, d^{k}_{\cdot(\alpha)} - \varphi^{K}_{\cdot(\alpha)}, \tag{4.60}$$

odakle, množenjem sa $d^{(\alpha)}_{\cdot k}$, dobijamo

$$\chi^{K}_{\cdot k} = g^{K}_{k} - \varphi^{K}_{\cdot k} \tag{4.61}$$

Iz jednačina (4.59) i (4.61) vidimo da su gradijenti mikrodeformacije $\chi^{k}_{\cdot K}$ i $\chi^{K}_{\cdot k}$ povezani sa gradijentima mikro pomeranja $\varphi^{k}_{\cdot K}$ i $\varphi^{K}_{\cdot k}$ na isti način kao i gradijenti de - formacije $x^{k}_{;K}$ i $X^{K}_{;k}$ sa gradijentima vektora pomeranja $u^{k}_{;K}$ i $u^{K}_{;k}$

$$\begin{aligned} x^{k}_{;K} &= g^{k}_{K} + u^{k}_{;K} \\ X^{K}_{;k} &= g^{K}_{k} - u^{K}_{;k} \end{aligned} \tag{4.62}$$

Uzimajući u obzir relacije

$$d^{k}_{\cdot(\alpha)}\, d^{(\alpha)}_{\cdot j} = \mathcal{R}^{k}_{\cdot K}\, \mathcal{R}^{K}_{\cdot j} = \delta^{k}_{j}$$

$$D^{K}_{\cdot(\alpha)}\, D^{(\alpha)}_{\cdot j} = \mathcal{R}^{K}_{\cdot k}\, \mathcal{R}^{k}_{\cdot N} = \delta^{K}_{N} \tag{4.63}$$

dobijamo veze izmedju mikropomeranja $\varphi^{k}_{\cdot N}$ i $\varphi^{K}_{\cdot j}$, odnosno izmedju $\varphi^{k}_{\cdot j}$ i $\varphi^{K}_{\cdot N}$ u obliku

$$\varphi^{K}_{\cdot N} = \varphi_{\cdot j}\, g^{j}_{N} + \varphi^{K}_{\cdot j}\, \varphi^{j}_{\cdot N} = \varphi^{K}_{\cdot j}\, g^{j}_{N} + \varphi^{K}_{\cdot M}\, \varphi^{M}_{\cdot j}\, g^{j}_{N} =$$

$$= \varphi^{k}_{\cdot N}\, g^{K}_{k} = \varphi^{K}_{\cdot j}\, \mathcal{R}^{j}_{\cdot N} \tag{4.64}$$

$$\varphi^{k}_{\cdot j} = \varphi^{k}_{\cdot N}\, g^{N}_{j} - \varphi^{k}_{\cdot N}\, \varphi^{N}_{\cdot j} = \varphi^{k}_{\cdot N}\, g^{N}_{j} - \varphi^{k}_{\cdot m}\, \varphi^{m}_{\cdot N}\, g^{N}_{j} =$$

$$= \varphi^{K}_{\cdot j}\, g^{k}_{K} = \varphi^{k}_{\cdot N}\, \mathcal{R}^{N}_{\cdot j}$$

Korišćenjem jednačina (4.53), (4.56), (4.59), (4.61), (4.63) i (4.64) možemo tenzore deformacije F_{KL}, ϵ_{KL}, D_{KLM}, Π_{K} i Π_{KL}, koji figurišu u konstitutivnim relacijama (4.57) izraziti u obliku

$$2F_{KL} = \varphi_{KL} + \varphi_{LK} + \varphi_{MK}\, \varphi^{M}_{\cdot L}$$

$$\epsilon_{KL} = u_{K,L} - \varphi_{KL} - (u_{M,L} - \varphi_{ML})\, \varphi_{Mk}\, g^{Mk}$$

$$D_{KLM} = \varphi_{KL,M} - \varphi_{NL,M}\, \varphi_{Kk}\, g^{Nk} \tag{4.65}$$

$$\Pi_{K} = p_{K} - \varphi_{Kk}\, p^{k}$$

$$\Pi_{KL} = p_{K,L} + \varphi_{K}^{\cdot k}\, p_{k;L}$$

U slučaju infinitezimalnih deformacija, kada su gradijenti pomeranja $u^k{}_{;K}$ i $u^K{}_{;k}$ kao i gradijenti mikropomeranja $\underset{\sim}{\varphi}$ po apsolutnoj vrednosti male veličine (što je slučaj u linearnoj teoriji), tenzore deformacije (4.65) možemo napisati u obliku

$$F_{KL} = \frac{1}{2}\left(\varphi_{KL} + \varphi_{LK}\right)$$

$$\epsilon_{KL} = u_{K,L} - \varphi_{KL} \tag{4.66}$$

$$D_{KLM} = \varphi_{KL,M}$$

$$\Pi_K = p_K$$

$$\Pi_{KL} = p_{K,L}$$

Konstitutivne jednačine (4.55) i (4.57) zadovoljavaju princip objektivnosti. Njihova primena kao i dalja redukcija zavisi od konkretnog problema, a posebno od materijalnih simetrija.

U slučaju izotropnih materijala možemo uzeti prostorne tenzore deformacije u obliku

$$\psi_{km} = G_{KM}\, \chi^K{}_{.k}\, \chi^M{}_{.m}$$

$$\mathcal{G}_{km} = \chi_{kK}\, x^K{}_{;m} \tag{4.67}$$

$$d_{kmn} = \chi_{kK;n}\, \chi^K{}_{.m} = -\chi_{kK}\, \chi^K{}_{.m;n}$$

$$\pi_k = \chi_{kK}\, p^K$$

$$\mathcal{T}_{km} = \rho^{\cdot K}_{k}\, p_{K;m}$$

tako da je specifična energija deformacije funkcija oblika

$$u = u\left(\Psi_{km},\ \sigma_{km},\ d_{kmn},\ \pi_k,\ \pi_{km}\right) \qquad (4.68)$$

Korišćenjem prethodna dva izraza u konstitutivnim jednačinama (4.43), dobijamo

$$t^{ij} = -\rho \frac{\partial u}{\partial \sigma_{kj}} \sigma_{k}^{\cdot\cdot i} - \rho \frac{\partial u}{\partial d_{kmj}} d_{km}^{\cdot\cdot i} - \rho \frac{\partial u}{\partial \pi_{kj}} \pi_{k}^{\cdot i}$$

$$\tau^{ij} = -2\rho \frac{\partial u}{\partial \Psi_{jk}} \Psi^{i}_{\cdot k} + \rho \frac{\partial u}{\partial \sigma_{ik}} \sigma^{j}_{\cdot k} - \rho \frac{\partial u}{\partial \sigma_{kj}} \sigma_{k}^{\cdot i} +$$

$$+ \rho \frac{\partial u}{\partial d_{imn}} d^{j}_{\cdot mn} - \rho \frac{\partial u}{\partial d_{kjm}} d_{k\cdot m}^{\cdot i} - \rho \frac{\partial u}{\partial d_{kmj}} d_{km}^{\cdot\cdot i} +$$

$$+ \rho \frac{\partial u}{\partial \pi_i} \pi^{j} - \rho \frac{\partial u}{\partial \pi_{kj}} \pi_{k}^{\cdot i} - \rho \frac{\partial u}{\partial \pi_{jk}} \pi^{i}_{\cdot k} \qquad (4.69)$$

$$h^{ijk} = \rho \frac{\partial u}{\partial d_{ijk}}$$

$$r^{ij} = \rho \frac{\partial u}{\partial \pi_{ij}}$$

$$L^{i} = \rho \frac{\partial u}{\partial \pi_{i}}$$

Jednačine (4.69) predstavljaju nelinearne konstitutivne jednačine za izotropne dielektrične materijale. Ove jednačine ne zadovoljavaju princip objektivnosti. Da bi bio zadovoljen princip objektivnosti, odnosno da bi bio zadovoljen drugi Košijev zakon kretanja (4.31), mora biti ispunjen uslov

$$\Big(2\frac{\partial u}{\partial \psi_{jk}}\psi^{i}_{\cdot k} - \frac{\partial u}{\partial \sigma_{ik}}\sigma^{j}_{\cdot k} + \frac{\partial u}{\partial \sigma_{kj}}\sigma_{k}^{\cdot i} - \frac{\partial u}{\partial d_{imn}}d^{j}_{\cdot mn} + \frac{\partial u}{\partial d_{kjm}}d_{k}^{\cdot i}{}_{\cdot m} + \frac{\partial u}{\partial d_{kmj}}d_{km}^{\cdot\cdot i} - \frac{\partial u}{\partial \pi_{i}}\pi^{j} + \frac{\partial u}{\partial \pi_{kj}}\pi_{k}^{\cdot i}\Big)_{[ij]} = 0 \qquad (4.70)$$

Ovaj uslov nameće ograničenje funkciji specifične energije deformacije (4.68), odnosno ograničenje konstitutivnim jednačinama (4.69). Ograničenje se sastoji u tome da funkcija energije deformacije (4.68) može zavisiti od navedenih prostornih tenzora deformacije samo preko medjusobno nezavisnih invarijanata, koje se od tih tenzora mogu formirati.

Ako umesto prostornih tenzora deformacije ψ_{ij} i σ_{ij} uvedemo sledeće prostorne mere deformacije

$$\begin{aligned} 2f_{ij} &= g_{ij} - \psi_{ij} = g_{ij} - G_{KL}\,\chi^{K}_{\cdot i}\,\chi^{L}_{\cdot j} \\ \varepsilon_{ij} &= g_{ij} - \sigma_{ij} = g_{ij} - \chi_{iK}\,X^{K}_{;j} \end{aligned} \qquad (4.71)$$

tada konstitutivne jednačine (4.69) možemo napisati u obliku

$$t^{ij} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial \mathcal{E}_{ij}} - \frac{\partial u}{\partial \mathcal{E}_{kj}}\mathcal{E}_{k}^{\cdot i} - \frac{\partial u}{\partial d_{kmj}} d_{km}^{\cdot\cdot i} - \frac{\partial u}{\partial \mathcal{T}_{kj}}\mathcal{T}_{k}^{\cdot i}\right)$$

$$\tau^{ij} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial f_{ij}} - 2\frac{\partial u}{\partial f_{jk}} f_{\cdot k}^{i} + \frac{\partial u}{\partial \mathcal{E}_{ik}}\mathcal{E}_{\cdot k}^{j} - \frac{\partial u}{\partial \mathcal{E}_{kj}}\mathcal{E}_{k}^{\cdot i} + \right.$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial d_{imn}} d_{\cdot mn}^{j} - \frac{\partial u}{\partial d_{kjm}} d_{k\cdot m}^{\cdot i} - \frac{\partial u}{\partial d_{kmj}} d_{km}^{\cdot\cdot i} +$$

$$\left. + \frac{\partial u}{\partial \mathcal{T}_{i}}\mathcal{T}^{j} - \frac{\partial u}{\partial \mathcal{T}_{kj}}\mathcal{T}_{k}^{\cdot i}\right)$$

$$h^{ijk} = \rho\frac{\partial u}{\partial d_{ijk}}$$

$$r^{ij} = \rho\frac{\partial u}{\partial \mathcal{T}_{ij}} \tag{4.72}$$

$$L^{i} = \rho\frac{\partial u}{\partial \mathcal{T}_{i}}$$

a uslov objektivnosti, odredjen jednačinom (4.70), s obzirom na novo uvedene prostorne mere deformacije (4.71), možemo napisati u obliku

$$\left(-2\frac{\partial u}{\partial f_{jk}} f_{\cdot k}^{i} - \frac{\partial u}{\partial \mathcal{E}_{ik}}\mathcal{E}_{\cdot k}^{j} - \frac{\partial u}{\partial \mathcal{E}_{kj}}\mathcal{E}_{k}^{\cdot i} + \frac{\partial u}{\partial d_{imn}} d_{mn}^{j} - \right. \tag{4.73}$$

$$\left. - \frac{\partial u}{\partial d_{kjm}} d_{k\cdot m}^{\cdot i} - \frac{\partial u}{\partial d_{kmj}} d_{km}^{\cdot\cdot i} + \frac{\partial u}{\partial \mathcal{T}_{i}}\mathcal{T}^{j} + \frac{\partial u}{\partial \mathcal{T}_{kj}}\mathcal{T}_{k}^{\cdot i}\right)_{[ij]} = 0$$

Korišćenjem jednačina (4.59), (4.61), (4.62), (4.64), (4.67) i (4.71) možemo tenzore deformacije f_{ij}, $\mathcal{E}_{ij}$, d_{ijk}, $\mathcal{T}_i$ i $\mathcal{T}_{ij}$ koji figurišu u konstitutivnim jednačinama(4.72), izraziti u obliku

$$
\begin{aligned}
2f_{ij} &= \gamma_{ij} + \gamma_{ji} - \gamma_{ki}\,\gamma^{k}_{\cdot j} \\
\mathcal{E}_{ij} &= u_{i,j} - \gamma_{ij} + (u_{k,j} - \gamma_{kj})\,\gamma_{iK}\,g^{kK} \\
d_{ijk} &= \gamma_{ij,k} + \gamma_{mj,k}\,\gamma_{iK}\,g^{mK} \\
\mathcal{T}_i &= g_{iK}\,p^K + \gamma_{iK}\,p^K \\
\mathcal{T}_{ij} &= g_i^{K}\,p_{K;j} - \gamma_i^{\cdot K}\,p_{K;j}
\end{aligned}
\qquad (4.74)
$$

Za infinitezimalne deformacije, u linearnoj teoriji, ovi se tenzori svode na:

$$
\begin{aligned}
f_{ij} &= \tfrac{1}{2}(\gamma_{ij} + \gamma_{ji}) \\
\mathcal{E}_{ij} &= u_{i,j} - \gamma_{ij} \\
d_{ijk} &= \gamma_{ij,k} \\
\mathcal{T}_i &= p_i \\
\mathcal{T}_{ij} &= p_{i,j}
\end{aligned}
\qquad (4.75)
$$

Izmedju materijalnih (4.65) i prostornih tenzora deformacije (4.74) postoje veze

$$
\begin{aligned}
F_{KL} &= f_{ij}\,\chi_K^{\cdot i}\,\chi_L^{\cdot j} & f_{ij} &= F_{KL}\,\chi^{K}_{\cdot i}\,\chi^{L}_{\cdot j} \\
\epsilon_{KL} &= \mathcal{E}_{ij}\,\chi_K^{\cdot i}\,x^{j}_{;L} & \mathcal{E}_{ij} &= \epsilon_{KL}\,\chi_i^{\cdot K}\,X^{L}_{;j} \qquad (4.76) \\
D_{KLM} &= d_{ijk}\,\chi_K^{\cdot i}\,\chi_L^{\cdot j}\,x^{k}_{;M} & d_{ijk} &= D_{KLM}\,\chi_i^{\cdot K}\,\chi^{L}_{\cdot j}\,X^{M}_{;k}
\end{aligned}
$$

$$\Pi_K = \mathcal{T}_i \chi^{\cdot i}_{K} \qquad \mathcal{T}_i = \Pi_K \chi_i^{\cdot K}$$

$$\Pi_{KL} = \mathcal{T}_{ij} \chi^{\cdot i}_{K} x^{j}_{;L} \qquad \mathcal{T}_{ij} = \Pi_{KL} \chi_i^{\cdot K} X^{L}_{;j} \tag{4.76}$$

Zanemarivanjem nelinearnih članova u jednačinama (4.72), dobijamo linearne konstitutivne jednačine u obliku

$$\begin{aligned} t^{ij} &= \rho \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ \tau^{ij} &= \rho \frac{\partial u}{\partial f_{ij}} \\ h^{ijk} &= \rho \frac{\partial u}{\partial d_{ijk}} \\ r^{ij} &= \rho \frac{\partial u}{\partial \mathcal{T}_{ij}} \\ L^{i} &= \rho \frac{\partial u}{\partial \mathcal{T}_{i}} \end{aligned} \tag{4.77}$$

U nelinearnim (4.72) i linearnim (4.77) konstitutivnim jednačinama specifična energija deformacije je funkcija oblika

$$u = u\left(f_{ij}, \varepsilon_{ij}, d_{ijk}, \mathcal{T}_i, \mathcal{T}_{ij}\right) \tag{4.78}$$

Kako funkcija energije (4.78) mora biti izotropna funkcija svo - jih argumenata, to se ona može aproksimirati polinomom. Pod pretpostavkom da nema inicijalnih napona, u linearnoj teoriji imamo kvadratni polinom oblika

$$\begin{aligned} \rho u = {} & \frac{1}{2} A^{ijkm} f_{ij} f_{km} + B^{ijkm} f_{ij} \varepsilon_{km} + \frac{1}{2} C^{ijkm} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{km} + \\ & + D^{ijkm} f_{ij} \mathcal{T}_{km} + \frac{1}{2} E^{ijkm} \mathcal{T}_{ij} \mathcal{T}_{km} + F^{ijkm} \varepsilon_{ij} \mathcal{T}_{km} + \end{aligned} \tag{4.79}$$

$$+\frac{1}{2} G^{ijkmnp} d_{ijk} d_{mnp} + \frac{1}{2} K^{ij} \pi_i \pi_j + L^{ijkm} d_{ijk} \pi_m$$

gde su izotropni materijalni tenzori $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{D}$, $\underset{\sim}{E}$, $\underset{\sim}{F}$, $\underset{\sim}{G}$, $\underset{\sim}{K}$ i $\underset{\sim}{L}$ parnog reda i predstavljaju linearne ko mbinacije spoljašnjih proizvoda metričkih tenzora

$$A^{ijkm} = \lambda g^{ij} g^{km} + \mu \left(g^{ik} g^{jm} + g^{im} g^{jk} \right)$$
$$B^{ijkm} = \lambda_1 g^{ij} g^{km} + \mu_1 \left(g^{ik} g^{jm} + g^{im} g^{jk} \right)$$
$$C^{ijkm} = \nu_1 g^{ij} g^{km} + \nu_2 g^{ik} g^{jm} + \nu_3 g^{im} g^{jk}$$
$$D^{ijkm} = \alpha_1 g^{ij} g^{km} + \alpha_2 \left(g^{ik} g^{jm} + g^{im} g^{jk} \right)$$
$$E^{ijkm} = \beta_1 g^{ij} g^{km} + \beta_2 g^{ik} g^{jm} + \beta_3 g^{im} g^{jk}$$
$$F^{ijkm} = \alpha_3 g^{ij} g^{km} + \alpha_4 g^{ik} g^{jm} + \alpha_5 g^{im} g^{jk} \tag{4.80}$$

$$G^{ijkmnp} = \gamma_1 \left(g^{ij} g^{km} g^{np} + g^{jk} g^{ip} g^{mn} \right) +$$

$$+ \gamma_2 \left(g^{ij} g^{kn} g^{pm} + g^{ki} g^{pp} g^{mn} \right) +$$

$$+ \gamma_3 g^{ij} g^{kp} \cdot g^{mn} + \gamma_4 g^{jk} g^{im} g^{np} +$$

$$+ \gamma_5 \left(g^{jk} g^{in} g^{pm} + g^{ki} g^{jm} g^{np} \right) +$$

$$
\begin{aligned}
&+\gamma_6\, g^{ki} g^{jn} g^{pm} + \gamma_7\, g^{im} g^{jn} g^{kp} + \\
&+ \gamma_8 \left(g^{jm} g^{km} g^{ip} + g^{km} g^{in} g^{jp}\right) + \\
&+ \gamma_9\, g^{im} g^{jp} g^{kn} + \gamma_{10}\, g^{jm} g^{kp} g^{in} + \\
&+ \gamma_{11}\, g^{km} g^{ip} g^{jn}
\end{aligned} \qquad (4.80)
$$

$$K^{ij} = \beta_4\, g^{ij}$$

$$L^{ijkm} = \alpha_6\, g^{im} g^{jk} + \alpha_7 \left(g^{ij} g^{km} + g^{ik} g^{jm}\right)$$

pri čemu materijalne tenzore delimo u tri grupe:

$\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}, \underset{\sim}{G}$ -opisuju čisto elastične materijale

$\underset{\sim}{E}, \underset{\sim}{K}$ -opisuju dielektrične materijale

$\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{F}, \underset{\sim}{L}$ -opisuju efekte uzajamnog dejstva

dok su materijalne konstante:

λ, μ -Lameove materijalne konstante

ν, γ -elastične materijalne konstante

β -dielektrične materijalne konstante

α -materijalne konstante uzajamnog dejstva

Korišćenjem (4.79) i (4.80), linearne konstitutivne jednačine (4.77) dobijaju oblik:

$$
\begin{aligned}
t^{ij} &= \lambda_1 f_I\, g^{ij} + 2\mu f^{ij} + \nu_1 \mathcal{E}_I\, g^{ij} + \nu_2 \mathcal{E}^{ij} + \\
&+ \nu_3 \mathcal{E}^{ji} + \alpha_3 \mathcal{T}_I\, g^{ij} + \alpha_4 \mathcal{T}^{ij} + \alpha_5 \mathcal{T}^{ji}
\end{aligned} \qquad (4.81)
$$

$$
\begin{aligned}
\tau^{ij} &= \lambda f_I\, g^{ij} + 2\mu f^{ij} + \lambda_1 \mathcal{E}_I\, g^{ij} + \\
&+ 2\mu_1 \mathcal{E}^{(ij)} + \alpha_1 \mathcal{T}_I\, g^{ij} + \alpha_2 \mathcal{T}^{(ij)}
\end{aligned} \qquad (4.82)
$$

$$h^{ijk} = \gamma_1 \left(d^{km}{}_{\cdot\cdot m}\, g^{ij} + d^{m\cdot i}{}_{\cdot m}\; g^{jk} \right) +$$

$$+ \gamma_2 \left(d^{mk}{}_{\cdot\cdot m}\, g^{ij} + d^{m\cdot j}{}_{\cdot m}\; g^{ki} \right) + \gamma_3\, d^{m\cdot k}{}_{\cdot m}\; g^{ij} +$$

$$+ \gamma_4\, d^{im}{}_{\cdot\cdot m}\; g^{jk} + \gamma_5 \left(d^{mi}{}_{\cdot\cdot m}\; g^{jk} + d^{jm}{}_{\cdot\cdot m}\, g^{ki} + \right. \tag{4.83}$$

$$+ \gamma_6\; d^{mj}{}_{\cdot\cdot m}\; g^{ki} + \gamma_7\; d^{ijk} + \gamma_8 \left(d^{jki} + d^{kij} \right) +$$

$$+ \gamma_9\, d^{ikj} + \gamma_{10}\; d^{jik} + \gamma_{11}\; d^{kji} +$$

$$+ \alpha_6\, \mathcal{T}^{i} g^{jk} + \alpha_7 \left(\mathcal{T}^{k} g^{ij} + \mathcal{T}^{j} g^{ik} \right)$$

$$r^{ij} = \alpha_1 f^{m}_{\cdot m}\; g^{ij} + \alpha_2 \left(f^{ij} + f^{ji} \right) + \beta_2\, \mathcal{T}^{m}_{\cdot m}\; g^{ij} +$$

$$+ \beta_2\, \mathcal{T}^{ij} + \alpha_3\, \mathcal{E}^{m}_{\cdot m}\; g^{ij} + \alpha_4\; \mathcal{E}^{ij} + \alpha_5\; \mathcal{E}^{ji} \tag{4.84}$$

$$L^{i} = \beta_4\, \mathcal{T}^{i} + \alpha_6\, d^{m\cdot i}{}_{\cdot m} + \alpha_7 \left(d^{im}{}_{\cdot\cdot m} + d^{mi}{}_{\cdot\cdot m} \right) \tag{4.85}$$

V ZAKLJUČAK

U ovom radu se, kao što je naglašeno u uvodu, elastični dielektrični materijali posmatraju kao kontinuum sa mikrostrukturom i to kao generalisani Kosera kontinuum. U prvom delu izložen je model ovakvog kontinuuma. U sledećem delu postavljen je princip virtualnog rada, odakle sleduju jednačine kretanja i nelinearne konstitutivne jednačine. Zatim su ove jednačine za izotropne materijale i linearizovane. U radu smo se zaustavili na izvodjenju linearnih konstitutivnih jednačina. Linearne diferencijalne jednačine nismo pisali iz razloga što se one dobijaju neposredno zamenom linearnih konstitutivnih jednačina u izvedene diferencijalne jednačine kretanja (4.24) i (4.29).

Modeli, koji su od drugih autora do sada razmatrani, su uglavnom klasičan kontinuum ili pak kontinuum kod koga su uzeti u obzir i drugi gradijenti deformacije.

U teorijama čisto elastičnih materijala posmatra se Kosera kontinuum ili kontinuum sa mikrostrukturom. Model dielektričnog kontinuuma, koji je izložen u našem radu, do sada nije proučavan. Mi smo, dakle, posmatrali model Kosera dielektričnog kontinuuma koji je opštiji od svih do sada proučavanih modela dielektričnog kontinuuma.

Iz teorije elastičnih Kosera materijala može se pokazati da se jednačine polja svode na jednačine polja ostalih teorija elastičnih materijala pod odredjenim pretpostavkama. Tako, na primer, ako se uzme da su direktori materijalni vektori [16], pokazuje se da se iz ovakve dobija teorija tzv. dipolarnih materijala koju su formulisali GREEN i RIVLIN [17]. Ako se, pak, uzme da direktori predstavljaju kruti trijedar, tada se dobija teorija tzv. mikropolarnih materijala koju je formulisao ERINGEN [18]. Takodje se, pod odredjenim pretpostavkama, može dobiti i tzv. teorija materijala reda dva, koju su razmatrali TOUPIN [19] i MINDLIN [20].

Na analogan način, jednačine koje se odnose na ovde posmatrani model dielektričnog kontinuuma, mogu se pod odredjenim pretpostavkama svesti na jednačine polja u literaturi već proučavanih modela. Tako, na primer, može se pokazati da ako se uzme da su direktori materijalni vektori (gradijenti mikrodeformacije $\chi^{k}_{.K}$ tada se svode na gradijente deformacije $x^{k}_{;K}$, odnosno $d^{k}_{.(\alpha)} = x^{k}_{;K} D^{K}_{.(\alpha)}$ i ako se zanemare inercijski članovi direktora, jednačine polja izvedene u ovom radu se svode na jednačine koje je u svom radu dobio BAUCHERT [14], pri čemu je on zanemario još i inercijske članove polarizacije.

U većini radova se inercijski članovi polarizacije zanemaruju ([10], [14] i dr.). To se može učiniti samo pod pretpostavkom da je promena vektora polarizacije zanemarljivo mala. U ovom radu mi smo, medjutim, ostavili mogućnost veće promene vektora polarizacije, te smo vodili računa i o inercijskim članovima polarizacije. Ovo svakako predstavlja opštiji slučaj, pošto promena polarizacije nastaje pri promeni intenziteta i orijentacije elektromagnetskog polja u kome se nalazi dielektrični kontinuum.

L I T E R A T U R A

[1] W.VOIGT : Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig 1910 (repr. 1928)

[2] E.G.COKER and L.N.G.FILON : Photoelasticity. London 1931

[3] J.A.STRATTON : Electromagnetic Theory. New York 1941

[4] W.G.CADY : Piezoelectricity. London 1946

[5] W.P.MASON : Piezoelectric Crystals and their Application to Ultrasonics. Toronto, New York and London 1950

[6] R.A.TOUPIN : The elastic dielectric. J.Rat.Mech.Anal. 5, 849-915, 1956

[7] R.A.TOUPIN : Mathematical Theory of elastic dielectric. Int.J.Engng,Sci. 1, 101-126, 1963

[8] A.C.ERINGEN : On the Foundations of Electroelastostatics. Int.J.Engng.Sci. 1, 127-154, 1963

[9] R.C.DIXON and A.C.ERINGEN : A dynamical theory of polar elastic dielectrics. Int.J.Engng.Sci. 3, 358-377,1965

[10] R.D.MINDLIN : Polarization gradient in elastic dielectrics. Int.J.Solids Structures 4, 637-642, 1968

[11] R.STOJANOVIĆ, M.GLIGORIĆ : Inkompatibilne deformacije elastičnog dielektrika. Zbornik radova IX Jugoslovenskog Kongresa za racionalnu i primenjenu mehaniku, Split, 1968

[12] M.GLIGORIĆ : Termička naprezanja elastičnog dielektrika. Zbornik radova X Jugoslovenskog Kongresa za racionalnu i primenjenu mehaniku, Baško Polje, 1970

[13] M.GLIGORIĆ : Prilog teoriji elastičnog dielektrika. Elektrotehnika, Beograd, 3, 1972

[14] J.BAUCHERT : Zur theorie der elastischen dielektrik. Doktorska disertacija, Karlsruhe 1970

[15] M.GLIGORIĆ : Prilog teoriji magnetoelastičnih interakcija. Elektrotehnika, Beograd, 6, 1972

[16] M.PLAVŠIĆ, J.JARIĆ : Princip virtualnog rada za kontinuum sa mikrostrukturom, saopšteno na XI Jugoslovenskom Kongresu za racionalnu i primenjenu mehaniku, Baško Polje, 1972.

[17] A.E.GREEN and R.S.RIVLIN : Arch.Rat.Mech.Anal., 16, 325-353, 1964.

[18] A.C.ERINGEN : Proc.9th Midv.Mech.Con., Medison, Wisconsion, 1965.

[19] R.A.TOUPIN : Arch.Rat.Mech.Anal., 11, 385-414, 1962.

[20] R.D.MINDLIN and H.F.TIERSTEN : Arch.Rat.Mech.Anal., 11, 415-448, 1962.